N° d'ordre : 250

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
de LILLE I

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ

(Mathématiques appliquées)

par

Paul-Marie WALLEZ

C - LANGAGES PERMUTABLES
ET
ANALYSE SYNTAXIQUE

THÈSE soutenue le 30 Juin 1971

devant la Commission d'examen

Monsieur P. BACCHUS, Président
Monsieur C. CARREZ, examinateur
Monsieur G. PAIR, Examinateur
Monsieur B. DRIEUX, rapporteur

UNIVERSITE DE LILLE

FACULTE DES SCIENCES

DOYENS HONORAIRES

MM. H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, KAMPE DE FERIET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, MM. MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKY.

PROFESSEURS TITULAIRES

M.	BACCHUS Pierre	Astronomie et Calcul
M.	BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Générale
M.	BLOCH Vincent	Psychophysiologie
M.	BONNEMAN Pierre	Chimie Industrielle
M.	BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M.	CELET Paul	Géologie Générale
M.	CONSTANT Eugène	Electronique
M.	CORSIN Pierre	Paléobotanique
M.	DECUYPER Marcel	Mathématiques
M.	DEDECKER Paul	Mathématiques
M.	le Doyen DEFRETIN René	Directeur du Laboratoire de Biologie Maritime de Wimereux
M.	DELATTRE Charles	Géologie Générale
M.	DURCHON Maurice	Biologie Animale
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	Electronique
M.	GLACET Charles	Chimie Organique
M.	GONTIER Gérard	Mécanique des Fluides
M.	GUILLAUME Jean	Biologie Végétale
M.	HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	MONTREUIL Jean	Chimie Biologique
Mme	SCHWARTZ Marie Hélène	Mathématiques
M.	TILLIEU Jacques	Physique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie Minérale Appliquée E.N.S.C.L.
M.	VIDAL Pierre	Automatique
M.	VIVIER Emile	Biologie Animale
M.	WATERLOT Gérard	Géologie et Minéralogie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique

PROFESSEURS A TITRE PERSONNEL

M.	BOUISSET Simon	Physiologie Animale
M.	DELHAYE Michel	Chimie Physique et Minérale 1er Cycle
M.	LINDER Robert	Biologie Végétale
M.	LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	SAVARD Jean	Chimie Générale
M.	SCHALLER François	Biologie Animale
M.	SCHILTZ René	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	BELLET Jean	Physique
M.	BODART Marcel	Biologie Végétale
M.	BOILLET Pierre	Physique
M.	DERCOURT Jean-Michel	Géologie et Minéralogie
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
Mle	MARQUET Simone	Mathématiques
M.	MONTARIOL Frédéric	Chimie Minérale Appliquée
M.	PROUVOST Jean	Géologie et Minéralogie
M.	VAILLANT Jean	Mathématiques

MAITRES DE CONFERENCE (et chargés des fonctions)

M.	AUBIN Thierry	Mathématiques Pures
M.	BEGUIN Paul	Mécanique des Fluides
M.	BILLARD Jean	Physique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M.	BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M.	CAPURON Alfred	Biologie Animale
M.	CARREZ Christian	Calcul
M.	CORDONNIER Vincent	Calcul
M.	CORTOIS Jean	Physique
M.	COULON Jean-Paul	Electrotechnique
M.	DEBRABAN Pierre	Sciences Appliquées
M.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FROLICH Daniel	Sciences Appliquées
M.	GOBLOT Rémi	Mathématiques
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M.	HERMAN Maurice	Physique
M.	HUARD de la MARRE Pierre	Calcul
M.	JOURNEL Gérard	Sciences Appliquées
Mle	KOSMANN Yvette	Mathématiques
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie Générale
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M.	LANDAIS Jean	Chimie Organique
M.	LAURENT François	Automatique
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LEHMANN Josiane	Mathématiques
M.	LOCQUENEUX Robert	Physique
M.	LOUAGE Francis	Sciences Appliquées

M. LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M. MAES Serge	Physique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MIGEON Michel	Sciences Appliquées
M. MONTEL Marc	Physique
M. OUZIAUX Roger	Sciences Appliquées
M. PANET Marius	Electrotechnique
M. PAQUET Jacques	Sciences Appliquées
M. PARSY Fernand	Mécanique des Fluides
M. POVY Jean-Claude	Sciences Appliquées
M. RACZY	Radioélectrique
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie Animale
M. ROYNETTE Bernard	Mathématiques
M. SALMER Georges	Electronique
M. SMET Pierre	Physique
M. VANDORPE Bernard	Sciences Appliquées
M. WATERLOT Michel	Géologie Générale
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur BACCHUS, *directeur de l'U.E.R. Informatique - Electronique - Electrotechnique et Automatique de l'Université de LILLE pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury.*

Je remercie vivement Monsieur le Professeur CARREZ *et Monsieur le Professeur* PAIR *qui se sont intéressés à ce travail et qui ont accepté si volontiers de le juger.*

Je sais gré à Monsieur le Professeur DRIEUX *de m'avoir donné l'idée de ce travail et d'en avoir suivi de très près la réalisation. Je suis heureux de pouvoir lui exprimer toute ma reconnaissance pour ses nombreux conseils et pour les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer.*

Je n'aurais garde d'oublier Mademoiselle DRIESSENS *qui, selon son habitude, a fait preuve d'habileté et de gentillesse dans la réalisation matérielle de cette thèse.*

à ma femme,

pour sa compréhension
et ses encouragements,

à mes enfants,

qui ne s'en sont jamais souciés.

TABLE des MATIERES

*
* *
*

I N T R O D U C T I O N

Les notions de langages et de grammaires "Context-Free" (C-langages et C-grammaires) ont été introduites par CHOMSKY [2] à partir de considérations linguistiques. La principale utilisation pratique de cette théorie est l'analyse syntaxique des langages de programmation.

Un des algorithmes d'analyse syntaxique souvent employé est l'analyse prédictive formalisée par GREIBACH [9] ; elle consiste à développer simultanément toutes les dérivations les plus à gauche jusqu'à ce que les mots ainsi trouvés aient même sous-mot initial que la partie déjà lue de la chaîne à analyser. Cet algorithme présente l'avantage de pouvoir donner des renseignements sur l'arbre de génération. Mais il présente l'inconvénient de conduire parfois à un nombre considérable de dérivations possibles. Il était donc naturel d'essayer de réduire ce nombre de dérivations. Différents algorithmes de réduction ont été imaginés [1], [5], mais ils ne conduisent pas à un résultat général.

Pour essayer d'y remédier, KORENJACK et HOPCROFT [12] ont défini les s-grammaires, KNUTH [11] et LEWIS et STEARNS [15] ont défini les grammaires LL(1), et WOOD [17] les grammaires "Left-Factored". Elles présentent toutes la particularité de n'engendrer qu'une seule dérivation possible à chaque étape de l'analyse. En fait, la classe des C-langages engendrés par les grammaires LL(1) est la même que celle des "Left-Factored", et contient celle des s-grammaires.

Un premier but de notre travail a été de définir une classe de langages qui possèdent la même particularité : les langages permutables. Cependant, la définition que nous en donnons au chapitre I est d'une part plus proche de l'algorithme d'analyse, et d'autre part elle étend les définitions de KNUTH et de WOOD. En particulier, une C-grammaire permutable peut être ambiguë. Nous montrerons cependant que les C-langages permutables coïncident avec les C-langages LL(1) ; nous donnerons en outre une forme particulière des C-grammaires permutables.

La définition des C-langages permutables en termes de grammaires étant apparue peu maniable, il était naturel d'en chercher une caractérisation au moyen d'automates à pile de mémoire : c'est ce que nous faisons au chapitre II. Cette caractérisation qui existait pour les s-langages mais qui n'avait aucun équivalent pour les langages LL(1), nous permet de développer les propriétés des langages permutables dans les chapitres suivants.

Au chapitre III, nous définissons une classe particulière de C-langages permutables : les C-langages sans permutations. Ceux-ci nous permettent de montrer sous certaines conditions une conjecture de KNUTH [11] qui se révèle fausse dans le cas général [13]. Nous verrons aussi que les K-langages, les langages de Dyck et de semi-Dyck, et les C-langages bornés permutables sont des C-langages sans permutations.

L'étude formelle d'une classe de C-langages s'accompagne naturellement de l'étude de sa stabilité pour différentes opérations. KORENJACK et HOPCROFT [12], ROSENKRANTZ et STEARNS [16] et WOOD [17] ont ainsi montré que la plupart des opérations habituelles ne conservent pas les C-langages permutables. Au chapitre IV, nous exhibons d'abord d'autres opérations qui ne préservent pas les C-langages permutables. Nous étudions ensuite la stabilité de ces langages. Cette étude nous a donné deux résultats très généraux quant à l'union et à la différence de langages. Le troisième, plus restrictif, nous conduit à une autre formulation du théorème de CHOMSKY - SCHUTZENBERGER [3].

Par ailleurs, l'étude des C-langages bornés permet de répondre à un certain nombre de questions théoriques. Il était intéressant de caractériser les C-langages bornés permutables. Cette caractérisation est faite au chapitre V dans le cas particulier des bornés sur deux lettres. Elle est exprimée en termes de semi-linéaires, comme l'ont déjà fait PARIKH, GINSBURG, et DRIEUX [4] pour les C-langages bornés quelconques, non ambigus, ou déterministes.

Enfin, au chapitre VI, nous revenons à l'analyse syntaxique. Les algorithmes de type ascendant ou descendant exploitent une grammaire du C-langage. Si la grammaire possède certaines particularités, des modifications de l'algorithme peuvent en accélérer la mise en oeuvre ; ainsi, quand la grammaire est permutable, l'analyse prédictive peut être plus efficace [1], [10]. Nous envisageons l'analyse sous un autre point de vue en exploitant l'automate à pile de mémoire. Nous pouvons alors tirer parti de certaines particularités de l'automate et analyser efficacement les C-langages déterministes.

C H A P I T R E   0

NOTATIONS et TERMINOLOGIE

I) NOTATIONS

Un ensemble fini non vide Σ sera appelé alphabet, et le monoïde libre qu'il engendre sera noté Σ^*.

L'opération dans Σ^* sera notée multiplicativement ; son élément neutre sera noté Λ et appelé mot vide.

Nous appellerons généralement mots les éléments de Σ^*, et lettres les éléments de Σ.

Nous noterons $\Sigma^\circ = \Sigma \cup \{\Lambda\}$, et pour deux parties quelconques A et B de Σ^*

- $AB = \{xy \mid x \in A \ ; \ y \in B\}$,
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \ ; \ y \notin B\}$,
- $\mathrm{Init}\ (A) = \{x \mid x \in \Sigma\Sigma^* \ ; \ \exists\ y \in \Sigma^* \text{ tel que } xy \in A\}$,
- Card (A) = le cardinal de l'ensemble A ;

pour un mot w de Σ^*, et un élément x de A, nous noterons

- $\mathrm{Card}_x(w)$ le nombre d'occurences de x dans w,
- $\mathrm{Card}_A(w) = \sum_{x \in A} \mathrm{Card}_x(w)$.

La longueur d'un mot w de Σ^* sera alors $\mathrm{Card}_\Sigma(w)$, et sera notée $|w|$.

Enfin, nous appellerons langage sur Σ (ou sur Σ^*) toute partie de Σ^*.

II) AUTOMATES D'ETATS FINIS ET K-LANGAGES

Une famille importante de langages est celle des K-langages. Ils peuvent être caractérisés en termes d'automates :

Un automate d'états fini est un 5-uple $A = (K,\Sigma,\delta,p_0,F)$, où

- K est un ensemble fini non vide (ensemble d'états),
- Σ est un alphabet,
- δ est une application de $K\times\Sigma$ dans K,
- p_0 est un élément particulier de K (état de départ),
- F est une partie de K (état de sortie).

L'application δ est étendue en une application de $K \times \Sigma^*$ dans K en posant :

- $\forall\ q \in K,\ \delta(q,\Lambda) = q,$
- $\forall\ q \in K,\ \forall\ w \in \Sigma^*,\ \forall\ x \in \Sigma,\ \delta(q,wx) = \delta(\delta(q,w),x).$

Le langage reconnu par A est : $E(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(p_0,w) \in F\}$.

Un langage est un K-langage s'il est reconnu par un automate d'états fini.

Nous parlerons aussi de K-langages locaux :

Un K-langage R est local s'il existe deux sous-ensembles A et B de Σ, un sous-ensemble Δ de Σ° tels que :

$$R = (A\Sigma^* \cap \Sigma^*B) \setminus \Sigma^* \Delta \Sigma^*.$$

III) C-GRAMMAIRES ET C-LANGAGES

Les langages "context-free" ont été définis par CHOMSKY [2] à l'aide de grammaires "context-free" (C-langages et C-grammaires dans notre terminologie) :

Une C-grammaire est un quadruplet $G(\sigma) = (V,\Sigma,P,\sigma)$, où

- Σ est un alphabet (terminal),
- $V\setminus\Sigma$ est un alphabet (non terminal),

- P est une partie finie de $(V \setminus \Sigma) \times V^*$,
- σ est un élément particulier de $V \setminus \Sigma$ (axiome).

Un élément (ξ, z) de P sera noté $\xi \to z$ et sera appelé production.

On écrira plus simplement G si l'axiome est sous-entendu.

Nous noterons d'une manière classique :

- $\underset{G}{\Longrightarrow}$ et $\cdot\underset{G}{\Longrightarrow}$ (ou plus simplement $\Longrightarrow$ et $\cdot\Longrightarrow$ si G est sous-entendu).

  Ces relations binaires sur $V^* \times V^*$ définies $\forall (x,y) \in V^* \times V^*$ par :

  . $x \Longrightarrow y$ si $\exists\ u, v, z \in V^*$, $\exists\ \xi \in V \setminus \Sigma$, et $\exists\ (\xi \to z) \in P$ tels que l'on ait $x = u\xi v$ et $y = uzv$,

  . $x \cdot\Longrightarrow y$ si $\exists\ u \in \Sigma^*$, $\exists\ v, z \in V^*$, $\exists\ \xi \in V \setminus \Sigma$, et $\exists\ (\xi \to z) \in P$ tels que l'on ait $x = u\xi v$ et $y = uzv$.

- $\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}$ et $\cdot\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}$ (ou plus simplement $\overset{*}{\Longrightarrow}$ et $\cdot\overset{*}{\Longrightarrow}$) les clôtures transitives respectives de $\underset{G}{\Longrightarrow}$ et $\cdot\underset{G}{\Longrightarrow}$.

La relation $\overset{*}{\Longrightarrow}$ (resp. $\cdot\overset{*}{\Longrightarrow}$) sera appelée une dérivation (resp. une dérivation la plus à gauche).

Nous noterons aussi

- $W(G) = \{\xi \in V \setminus \Sigma \mid \xi \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \Lambda\}$, (ou plus simplement W),
- $L_G(y) = \{w \in \Sigma^* \mid y \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w\}$, (ou plus simplement $L(y)$),
- $L(G(\sigma)) = L_G(\sigma)$ (ou plus simplement $L(G)$ si l'axiome est sous-entendu).

L(G) sera appelé langage engendré par la grammaire.

Un langage est un C-langage s'il est engendré par une C-grammaire.

Nous dirons encore que deux grammaires sont équivalentes si elles engendrent le même langage.

Enfin, une C-grammaire $G(\sigma)$ sera dite réduite si

- $\forall\ \xi \in V \setminus (\Sigma \cup \{\sigma\}), \exists\ u, v \in V^*$ tels que $\sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} u\xi v$, et si
- $\forall\ \xi \in V \setminus (\Sigma \cup \{\sigma\}), \exists\ w \in \Sigma^*$ tel que $\xi \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w$.

IV) AUTOMATES A PILE DE MEMOIRE

Les C-langages peuvent aussi être caractérisés en termes d'automates :

Un automate à pile de mémoire est un 7-uple $M = (K,\Sigma,\Gamma,\delta,Z_0,p_0,F)$:

- K,Σ,q_0,F ont la même signification que pour les automates d'états finis,
- Γ est un alphabet
- δ est une application de $K \times \Sigma^\circ \times \Gamma$ dans l'ensemble des parties finies de $K \times \Gamma^*$ (fonction de transition),
- Z_0 est un élément particulier de Γ.

Nous noterons $\underset{M}{\vdash}$ (ou plus simplement $\vdash$) la relation binaire sur $K\times\Sigma^*\times\Gamma^*$ (appelée mouvement dans M) définie par :

$$\forall\ p,q \in K,\ \forall\ w \in \Sigma^*,\ \forall\ x \in \Sigma^\circ,\ \forall\ \alpha,\ \beta \in \Gamma^*,\ \forall\ Z \in \Gamma^* :$$

$$(p,xw,\alpha Z) \underset{M}{\vdash} (q,w,\alpha\beta) \Longleftrightarrow (q,\beta) \in \delta(p,x,Z).$$

$\overset{*}{\underset{M}{\vdash}}$ (ou $\overset{*}{\vdash}$) désignera la clôture transitive de $\underset{M}{\vdash}$.

Le langage reconnu par l'automate M est

$$T(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists\ q \in \Gamma,\ \exists\ \gamma \in \Gamma^* : (p_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma)\}.$$

Un langage est un C-langage si et seulement s'il est reconnu par un automate à pile de mémoire.

Nous poserons aussi :

$$\text{Zéro}\ (M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists\ q \in K : (p_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q,\Lambda,\Lambda)\}.$$

Nous dirons que deux automates sont équivalents s'ils reconnaissent le même langage.

Il est possible de restreindre la puissance de l'automate, et de ne considérer qu'une classe particulière de C-langages, en introduisant les automates déterministes [7] :

Un automate à pile de mémoire M est <u>déterministe</u> s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- $\forall\ (p,x,Z) \in K \times \Sigma^{\circ} \times \Gamma$: Card $(\delta(p,x,Z)) \leq 1$,

- $\forall\ (p,Z) \in K \times \Gamma : \delta(p,\Lambda,Z) \neq \emptyset \Longrightarrow \forall\ x \in \Sigma,\ \delta(p,x,Z) = \emptyset$.

Un C-langage est déterministe si et seulement s'il est reconnu par un automate à pile de mémoire déterministe.

V) APPLICATIONS SEQUENTIELLES

Une famille importante d'applications dans le monoïde libre est celle des applications séquentielles (directes ou inverses) :

Une machine séquentielle généralisée [6] est un 6-uple $S = (K,\Sigma,\Delta,\delta,\lambda,p_0)$, où :

- K est un ensemble fini non vide,
- Σ et Δ sont des alphabets,
- δ et λ sont des applications de $K\times\Sigma$ respectivement dans K et Δ^*,
- p_0 est un élément particulier de K.

Les applications δ et λ peuvent être étendues en des applications de $K\times\Sigma^*$ dans K et Δ^* respectivement, en posant

- $\forall\ q \in K : \delta(q,\Lambda) = q$, et $\lambda(q,\Lambda) = \Lambda$

- $\forall\ u,v \in \Sigma^* : \delta(q,uv) = \delta(\delta(q,u),v)$,

$$\lambda(q,uv) = \lambda(q,u)\ \lambda(\delta(q,u),v).$$

L'application de Σ^* dans Δ^* définie par $S(w) = \lambda(p_0,w)$ pour tout $w \in \Sigma^*$ est appelée <u>application séquentielle</u>.

VI) ENSEMBLES SEMI-LINEAIRES DE $\mathbb{N}^2$ ET LANGAGES BORNES

Un langage L sur Σ est dit borné s'il existe des mots $w_1,\ldots,w_n$ de Σ^* tels que l'on ait $L \subseteq w_1^* w_2^* \ldots w_n^*$.

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux langages bornés sur deux lettres, c'est-à-dire aux cas où n=2 et $w_i = a_i \in \Sigma$ pour i=1,2, et $a_1 \neq a_2$.

Il y a alors une bijection entre le sous-monoïde $a_1^* a_2^*$ et $\mathbb{N}^2$. Nous noterons f_a et appellerons application canonique l'application de $\mathbb{N}^2$ dans $a_1^* a_2^*$ définie par

$$f_a\ (\{(n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2\}) = \{a_1^{n_1}\ a_2^{n_2}\}$$

Il sera intéressant de classifier les sous-ensembles de $\mathbb{N}^2$, et nous reprendrons pour cela la terminologie de [4].

En particulier, nous appellerons linéaire tout sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ de la forme $L = c + P^*$, où $c \in \mathbb{N}^2$ et P^* est le sous-monoïde de $\mathbb{N}^2$ engendré par l'ensemble fini P.

Nous appellerons semi-linéaire toute union finie de linéaires, et ponctuel toute union finie de linéaires de la forme $c + (0,q)^*$, avec $q \in \mathbb{N}$.

INTRODUCTION AU CHAPITRE I

***

{ L'algorithme d'analyse prédictive est de type descendant. L'analyse d'un mot u se fait lettre par lettre, en développant les dérivations les plus à gauche jusqu'à apparition d'une lettre comme sous mot initial. Si ce terminal est différent de la lettre analysée dans u, cette dérivation ne pourra pas engendrer u. En cas contraire, le reste du mot obtenu dans la dérivation est susceptible d'engendrer la partie du mot u qui suit la lettre qui vient d'être analysée. Tous ces mots issus de dérivations les plus à gauche, appelés parfois piles cibles [10] ou suites possibles doivent être conservés. En effet, leurs dérivations les plus à gauche permettent de poursuivre l'analyse.

Il est clair que cet algorithme sera plus efficace s'il n'existe qu'une seule suite possible à chaque étape de l'analyse.

En général, une grammaire ne vérifie pas cette propriété.

Dans ce chapitre, nous définissons les C-grammaires permutables comme des grammaires qui à chaque étape de l'analyse, ne peuvent donner deux suites possibles différentes ; mais elles peuvent être ambiguës et par conséquent donner plusieurs suites possibles identiques.

Cette définition généralise celle des grammaires LL(1) de KNUTH [11] et des "Left-Factored" de WOOD [17] qui sont des grammaires non ambiguës, appartenant à la classe des permutables.

Cependant, le fait d'avoir permis aux C-grammaires permutables d'être ambiguës n'étend pas la classe des C-langages qu'elles engendrent (les C-langages permutables). En effet, nous montrons par l'intermédiaire des lemmes I.3, I.4 et I.6 qu'un C-langage permutable peut être engendré par un type particulier de C-grammaires : les C-grammaires prédictives (Théorème I.1). Ceci est également une propriété caractéristique des langages LL(1) et "Left-Factored", et assure l'équivalence des classes de langages.

La forme prédictive avait été introduite par KNUTH [11] en raison de sa simplicité. De plus, l'analyse prédictive sur de telles grammaires est plus efficace [10]. Le codage des productions est en outre simplifié si la longueur de leurs seconds membres est bornée. Le théorème I.2 montre que cette longueur peut toujours être rendue inférieure ou égale à 3.

De plus, les variables qui peuvent engendrer le mot vide restreignent particulièrement l'efficacité de l'algorithme. La condition (I.5) du théorème I.2 assigne à ces variables une place fixe dans les parties droites des règles de productions, ce qui simplifiera les démonstrations des chapitres II et III.

Enfin, nous montrons qu'un langage reste permutable lorsqu'on lui ajoute ou retranche un marqueur de fin, propriété qui n'est pas vraie pour toutes les classes de langages et que nous utiliserons en particulier au chapitre VI. }

CHAPITRE I

C-GRAMMAIRES PERMUTABLES

Nous définissons ici les C-grammaires permutables. La définition qui en est donnée est très proche de l'algorithme d'analyse prédictive. Le but du chapitre est de montrer l'équivalence avec les grammaires LL(1), "left-factored", et déterministes, et d'obtenir une forme particulière des C-grammaires.

Définition I.1 : *Une C-grammaire* $G = (V,\Sigma,P,\sigma)$ *sera dite* ***permutable*** *si et seulement si pour tout mot* w *de* $\Sigma\Sigma^*$*, la relation suivante est vérifiée :*

(I.1) $\forall\, x_1, x_1', x_2, x_2' \in V^*$ *tels que* $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} x_i' \Longrightarrow wx_i$ *et* $w \notin \mathrm{Init}\,(x_i')$ *pour* $i=1,2$, *on a :* $x_1 = x_2$.

Remarquons que les x_i sont les piles cibles de [10], et qu'une C-grammaire permutable n'est pas nécessairement déterministe [10], ni une LF-grammaire [17], ni une grammaire LL(1) [11] : celles-ci ne sont pas ambiguës alors que les grammaires permutables peuvent l'être, comme le montre l'exemple suivant :

$$G = (\{X,A,B,a,b,c\}, \{a,b,c\}, \{X \to bAB,\ A \to a,\ A \to \Lambda,\ B \to aB,\ B \to c\}, X).$$

Définition I.2 : *Un C-langage sera dit* ***permutable*** *si on peut trouver une C-grammaire permutable qui l'engendre.*

Grâce au lemme suivant, dans tout ce qui suit, nous pourrons supposer que les C-grammaires utilisées sont réduites :

Lemme I.1 : Toute C-grammaire permutable est équivalente à une C-grammaire réduite et permutable.

La démonstration est une simple transposition de celle de [6] pour les C-grammaires quelconques.

Etablissons une première propriété des C-grammaires permutables :

Lemme I.2 : Une C-grammaire G est permutable si et seulement si pour tout $\xi \in V \setminus \Sigma$, la C-grammaire $G(\xi)$ est permutable.

- Si $G(\xi)$ est permutable pour tout $\xi \in V \setminus \Sigma$, $G(\sigma) = G$ l'est également.

- Inversement, supposons qu'il existe $\xi \in V \setminus \Sigma$, et x_i, $x_i^! \in V^*$ pour i=1,2, et $w \in \Sigma\Sigma^*$ tels que

. $x_1 \neq x_2$,

. $w \notin \mathrm{Init}\ (x_i^!)$ pour i=1,2,

. $\xi \overset{*}{\cdot\Longrightarrow} x_i^! \cdot\Longrightarrow wx_i$ pour i=1,2.

G étant réduite, $\exists\ u \in \Sigma^*$, $\exists\ v \in V^*$ tels que $\sigma \overset{*}{\cdot\Longrightarrow} u\ \xi\ v$.

Alors $\sigma \overset{*}{\cdot\Longrightarrow} u\xi v \overset{*}{\cdot\Longrightarrow} ux_i^!v \cdot\Longrightarrow uwx_iv$ pour i=1,2.

Or $x_1 \neq x_2$ implique $x_1v \neq x_2v$, et $w \notin \mathrm{Init}\ (x_i^!)$ implique $uw \notin \mathrm{Init}\ (ux_i^!)$ pour i=1,2.

Cela contredit l'hypothèse que G est permutable.

Nous allons maintenant caractériser les C-langages permutables en termes de C-grammaires mises sous la forme particulière suivante :

Définition I.3 : Une C-grammaire $G = (V,\Sigma,P,\sigma)$ *est dite* *Λ-normale* *si* $\forall(\xi\to z) \in P : z \in \{\Lambda\} \cup \Sigma(V \setminus \Sigma)^*$.

Posons $S_G(\xi) = \{a \in \Sigma \mid \exists\ u, v \in V^*$ *tels que* $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} u\ \xi\ a\ v\}$

Définition I.4 : Une C-grammaire $G = (V,\Sigma,P,\sigma)$ *est dite* *prédictive* *si elle est Λ-normale, et si, pour tout* $\xi \in V \setminus \Sigma$, *les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(I.2) : ($\exists\ a_1,a_2 \in \Sigma$, $\exists\ z_1,z_2 \in V^*$ *tels que* $z_1 \neq z_2$ *et* $(\xi \to a_i z_i) \in P$ *pour* $i=1,2$) *implique* $a_1 \neq a_2$,

(I.3) : ($\xi \in W(G)$, $\exists\ a \in \Sigma$, $\exists\ z \in V^*$, $\exists (\xi \to az) \in P$) *implique* $a \notin S_G(\xi)$.

Etablissons d'abord la condition suffisante de la caractérisation :

<u>Lemme I.3</u> : Toute C-grammaire prédictive est permutable.

Supposons qu'une C-grammaire prédictive $G = (V,\Sigma,P,\sigma)$ ne soit pas permutable.

Alors, $\forall\ i \in \{1,2\}$, $\exists\ x_i,x_i' \in V^*$ avec $x_1 \neq x_2$; $\exists\ w \in \Sigma\Sigma^*$ tels que

. $w \notin \text{Init}\ (x_i')$,

(*) . $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} x_i' \Longrightarrow wx_i$.

Comme $\forall\ z \in V^*$, $wx_i \overset{*}{\Longrightarrow} z$ implique $z \in wV^*$,

si $\exists\ i,j \in \{1,2\}$ tels que la dérivation (*) soit de la forme $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} x_j' \Longrightarrow wx_j \overset{*}{\Longrightarrow} wx_i$, $w \notin \text{Init}\ (x_i')$ implique $i=j$.

Les deux dérivations (*) sont donc différentes, et

$\forall\ i \in \{1,2\}$, $\exists\ \xi \in V \setminus \Sigma$, $\exists\ z_i \in V^*$, $\exists\ u \in \Sigma^*$, $\exists\ v \in V^*$, $\exists\ (\xi \to z_i) \in P$,

tels que (*) soit de la forme $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} u\xi v \Longrightarrow u\ z_i\ v \overset{*}{\Longrightarrow} wx_i$, avec $z_1 \neq z_2$.

Deux cas sont possibles :

1) $\forall\ i \in \{1,2\}$, $z_i \neq \Lambda$.

Comme G est Λ-normale, nous pouvons poser $z_i = a_i\bar{z}_i$, avec $a_i \in \Sigma$ et $\bar{z}_i \in V^*$, et comme G vérifie la condition (I.2), $z_1 \neq z_2$ implique $a_1 \neq a_2$. D'autre part, puisque $w \notin \text{Init}\ (x_i')$, w est de la forme u a u' avec $a \in \Sigma$ et $u' \in \Sigma^*$. Donc $ua_i\ \bar{z}_i\ v \overset{*}{\Longrightarrow} u\ a\ u'\ x_i$ pour $i = 1,2$, ce qui contredit $a_1 \neq a_2$.

2) $\exists\ i \in \{1,2\}$, $z_i = \Lambda$. Posons par exemple $z_1 = \Lambda$.

Alors, $z_1 \neq z_2$ implique $z_2 \neq \Lambda$.

Posons comme ci-dessus $z_2 = a_2 \bar{z}_2$, avec $a_2 \in \Sigma$ et $\bar{z}_2 \in V^*$; de la même façon, w est de la forme u a u', avec $a \in \Sigma$ et $u' \in \Sigma^*$, et $u\, a_2\, \bar{z}_2\, v \overset{*}{\Longrightarrow} u\, a\, u'\, x_2$. Donc $a = a_2$.

D'autre part, $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} u\, \xi\, v \Longrightarrow u\, z_1\, v = uv \overset{*}{\Longrightarrow} wx_1 = u\, a\, u'\, x_1$. Donc $v \overset{*}{\Longrightarrow} a\, u'\, x_1$, et par conséquent, $a = a_2 \in S_G(\xi)$, ce qui contredit la condition (I.3) et achève la démonstration.

La condition nécessaire de la caractérisation sera faite à l'aide de deux lemmes préalables :

<u>Lemme I.4</u> : **Toute C-grammaire permutable est équivalente à une C-grammaire Λ-normale, permutable et vérifiant la condition (I.2).**

En effet, soit $G = (V,\Sigma,P,\sigma)$ une C-grammaire permutable. Posons $G_2 = (V,\Sigma,P_2,\sigma)$ où, pour chaque $\xi \in V \setminus \Sigma$, P_2 contient les productions :

- $\xi \rightarrow \Lambda$ si $\xi \in W(G)$

- $\xi \rightarrow ax$, pour tout $a \in \Sigma$ et tout $x \in V^*$ tels que $\exists\, x' \in V^*$ avec $a \notin \text{Init}\,(x')$ et $\xi \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} x' \underset{G}{\Longrightarrow} ax$.

Montrons d'abord que G_2 est permutable, équivalente à G, et vérifie la condition (I.2).

Puisque G est permutable, il en est de même pour $G(\xi)$, $\forall\, \xi \in V \setminus \Sigma$ (lemme I.2). Donc G_2 vérifie la condition (I.2), et P_2 est fini.

D'autre part, comme chaque production de P_2 est une dérivation dans G, $L(G_2) \subseteq L(G)$.

Montrons maintenant que $L(G) \subseteq L(G_2)$, en établissant au préalable la propriété suivante :

(P) $\exists\, w \in \Sigma\Sigma^*$, $\exists\, y_1, y_2, y' \in V^*$ tels que $w \notin \text{Init}\,(y')$, et

(*) $y_1 \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} y' \underset{G}{\Longrightarrow} wy_2$ implique $y_1 \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} y_2$.

Supposons la propriété fausse et considérons la plus courte des dérivations (*) telles que $y_1 \overset{*}{\underset{G_2}{\not\Longrightarrow}} y_2$.

Notons p la longueur de cette dérivation (*) et posons

$y_1 = w_1\ \xi_1 \ldots \xi_\ell$, avec $w_1 \in \Sigma^*$, $\xi_1 \in V \setminus \Sigma$, $\xi_i \in V$ pour $2 \leqslant i \leqslant \ell$.

D'après [6], $\exists\ z_i \in V^*$ $(1 \leqslant i \leqslant \ell)$, tels que $\xi_i \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} z_i$, et $w\ y_2 = w_1\ z_1 \ldots z_\ell$.

Puisque $w \notin \mathrm{Init}(y')$, $\exists\ w_2 \in \Sigma\Sigma^*$ tel que $w = w_1\ w_2$, et $\exists\ y'' \in V^*$ tel que $y' = w_1 y''$, avec $w_2 \notin \mathrm{Init}\ (y'')$.

Soit $k \in \{1,\ldots,\ell\}$ tel que $z_1,\ldots,z_{k-1} = \Lambda$, et $z_k \neq \Lambda$.

Distinguons deux cas :

a) $z_k \in w_2\ V^*$.

Posons $z_k = w_2 y_3$ avec $y_3 \in V^*$.

Comme les dérivations sont les plus à gauche et que $w_2 \notin \mathrm{Init}\ (y'')$, $y_2 = y_3\ y_4 = y_3\ \xi_{k+1} \ldots \xi_\ell$, et $y'' = y'''\ \xi_{k+1} \ldots \xi_\ell$ avec $y''' \in V^*$, et $\xi_k \overset{*}{\underset{G}{\cdot\!\!\Longrightarrow}} y''' \underset{G}{\cdot\!\!\Longrightarrow} w_2\ y_3$, avec $w_2 \notin \mathrm{Init}\ (y''')$.

Si $y''' \in (V \setminus \Sigma)\ V^*$, $(\xi_k \to w_2\ y_3) \in P_2$.

Sinon, posons $y''' = w_3\ t_1$, avec $w_3 \in \Sigma\Sigma^*$ et $t_1 \in (V \setminus \Sigma)\ V^*$ et $w_2 = w_3\ w_4$, avec $w_4 \in \Sigma^*$.

Comme $w_2 \notin \mathrm{Init}\ (y''')$, $w_4 \neq \Lambda$ et $w_4 \notin \mathrm{Init}\ (t_1)$.

De plus, $\exists\ t', t_2 \in V^*$ tels que $w_3 \notin \mathrm{Init}\ (t')$, et que

$$\xi_k \overset{*}{\underset{G}{\cdot\!\!\Longrightarrow}} t' \underset{G}{\cdot\!\!\Longrightarrow} w_3\ t_2 \overset{*}{\underset{G}{\cdot\!\!\Longrightarrow}} w_3\ t_1 \underset{G}{\cdot\!\!\Longrightarrow} w_3\ w_4\ y_3 = w_2\ y_3.$$

Alors, d'après la minimalité de p, $\xi_k \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w_3\ t_2$, et $t_2 \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w_4\ y_3$.

Par conséquent, $\xi_k \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w_2\ y_3$.

Comme d'autre part $z_1 \ldots z_{k-1} = \Lambda$ implique $(\xi_i \to \Lambda) \in P_2$ pour $1 \leq i \leq k-1$, la dérivation suivante est vraie dans G_2 :

$$y_1 = w_1 \xi_1 \ldots \xi_{k-1}\ \xi_k\ \xi_{k+1} \ldots \xi_\ell \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w_1\ \xi_k\ \xi_{k+1} \ldots \xi_\ell \underset{G_2}{\Longrightarrow}$$

$$w_1\ w_2\ y_3\ \xi_{k+1} \ldots \xi_\ell = wy_2.$$

Contradiction.

b) $z_k \notin w_2\ V^*$.

Alors, $z_k = w_3 \in \Sigma\Sigma^*$, et $\exists\ w_4 \in \Sigma\Sigma^*$ tel que $w_2 = w_3\ w_4$.

Puisque $\xi_k \cdot\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w_3 \in \Sigma\Sigma^*$, $\exists$ t', t $\in V^*$ tels que $w_3 \notin$ Init (t'), et que

$$\xi_k \cdot\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} t' \cdot\underset{G}{\Longrightarrow} w_3 t \cdot\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w_3.$$

Alors, d'après la minimalité de p, $\xi_k \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w_3 t$.

De plus, la dérivation (*) est alors de la forme

$$y_1 = w_1\ \xi_1 \ldots \xi_{k-1}\ \xi_k\ \xi_{k+1} \ldots \xi_\ell \cdot\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w_1\ \xi_k\ \xi_{k+1} \ldots \xi_\ell \cdot\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}$$

$$w_1\ t'\ \xi_{k+1} \ldots \xi_\ell \cdot\underset{G}{\Longrightarrow} w_1\ w_3\ t\ \xi_{k+1} \ldots \xi_\ell \cdot\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w_1\ y'' \cdot\underset{G}{\Longrightarrow} w_1\ w_2\ y_2.$$

La minimalité de p entraîne aussi $w_1\ w_3\ t\ \xi_{k+1} \ldots \xi_\ell \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w_1\ w_2\ y_2$.

Comme enfin $(\xi_i \to \Lambda) \in P_2$ pour $1 \leq i \leq k-1$,

$$y_1 = w_1\ \xi_1 \ldots \xi_{k-1}\ \xi_k\ \xi_{k+1} \ldots \xi_\ell \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w_1\ \xi_k\ \xi_{k+1} \ldots \xi_\ell \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}}$$

$$w_1\ w_3\ t\ \xi_{k+1} \ldots \xi_\ell \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w_1\ w_2\ y_2 = wy_2.$$

Contradiction.

La propriété (P) est donc établie.

Considérons maintenant $w \in L(G)$.

- Si $w = \Lambda$, alors $(\sigma \to \Lambda) \in P_2$, donc $w \in L(G_2)$.

- Si $w \neq \Lambda$,

  alors, $\exists\ t', t \in V^*$ tels que $w \notin \mathrm{Init}(t')$

$$\sigma \;\cdot\!\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}\; t' \;\cdot\!\underset{G}{\Longrightarrow}\; wt \;\cdot\!\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}\; w.$$

D'après la propriété (P), $\sigma \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} wt$.

Comme d'autre part $t \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \Lambda$, $t \in W(G)^*$, et $t \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} \Lambda$.

Donc $\sigma \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} wt \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w$, c'est-à-dire $w \in L(G_2)$.

Les grammaires sont donc bien équivalentes.

Montrons enfin que G_2 est permutable.

En effet, à chaque production de G_2 correspond une dérivation la plus à gauche dans G.

Alors, si $\exists\ y, y' \in V^*$, $w \in \Sigma\Sigma^*$ tels que $w \notin \mathrm{Init}\ (y')$, et

$$\sigma \;\cdot\!\overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}}\; y' \;\cdot\!\underset{G_2}{\Longrightarrow}\; wy,$$

alors $\sigma \;\cdot\!\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}\; y'$, et $y' = w_1\ \xi\ v$, $wy = w_1\ z\ v$,

avec $w_1 \in \Sigma^*$, $\xi \in V \setminus \Sigma$, $v, z \in V^*$ et $(\xi \to z) \in P_2$.

Distinguons deux cas :

c) $z = \Lambda$: alors $\exists\ z' \in (V \setminus \Sigma)^*$ tel que $\xi \;\cdot\!\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}\; z' \;\cdot\!\underset{G}{\Longrightarrow}\; \Lambda = z$.

Dans ce cas, $y' = w_1\ \xi\ v \;\cdot\!\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}\; w_1\ z'\ v \;\cdot\!\underset{G}{\Longrightarrow}\; w_1\ z\ v = wy$.

En posant $y'' = w_1\ z'\ v$: $w \notin \mathrm{Init}\ (y'')$.

d) $z \neq \Lambda$: alors $\exists\ x, x' \in V^*$, $\exists\ a \in \Sigma$ tels que $\xi \;\cdot\!\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}\; x' \;\cdot\!\underset{G}{\Longrightarrow}\; ax = z$, et $a \notin \mathrm{Init}\ (x')$.

Donc $x' \in (V \setminus \Sigma)\ V^*$, et de la même façon qu'au cas c),

$$y' = w_1 \ \xi \ v \ \cdot\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w_1 x'v \ \cdot\underset{G}{\Longrightarrow} w_1 \ axv = w_1 zv = wy.$$

En posant $y'' = w_1 x'v$: $w \notin \mathrm{Init}\ (y'')$.

Dans les deux cas :

$$\exists \ y'' \in V^* \text{ tel que } \sigma \cdot\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} y'' \cdot\underset{G}{\Longrightarrow} wy, \text{ avec } w \notin \mathrm{Init}\ (y'').$$

Ceci montre que si G_2 n'est pas permutable, G ne l'est pas non plus.

Pour compléter la démonstration du lemme, il suffit de trouver une C-grammaire Λ-normale G_1 équivalente à G_2 et possédant les mêmes propriétés.

Puisque $P_2 \subset (V \setminus \Sigma) \times (\{\Lambda\} \cup \Sigma V^*)$, ce dernier point ne présente pas de difficultés [6], [17].

Lemme I.5 : Toute C-grammaire permutable G est équivalente à une C-grammaire permutable $G_1 = (V_1,\Sigma,P_1,\sigma)$, vérifiant la condition suivante :

(I.4) $\quad \not\exists z_1,z_2,z_3 \in V_1^*, \not\exists \xi \in V_1 \setminus \Sigma$ tels que $\sigma \cdot\overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} z_1 \ \xi \ z_2 \ \xi \ z_3$, et $\xi \ z_2 \ \xi \cdot\overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} \Lambda$.

Si de plus G est Λ-normale et vérifie la condition (I.2), il en est de même pour G_1.

En effet, si $L(G) = \{\Lambda\}$, $G_1 = (\{\sigma\} \cup \Sigma,\Sigma,\{\sigma\to\Lambda\},\sigma)$ possède les propriétés du lemme.

Sinon, posons $H = \{\xi \in V \setminus \Sigma \mid L(G(\xi)) = \{\Lambda\}\}$, et $V_1 = V \setminus H$.
Soit $h : V^* \to V_1^*$ l'homomorphisme défini par

$$h(\alpha) = \alpha, \ \forall \ \alpha \in V_1,$$

$$h(\alpha) = \Lambda, \ \forall \ \alpha \in H .$$

Posons enfin $P_1 = \{(\xi\to h(z)) \mid \xi \in V_1, \text{ et } (\xi\to z) \in P\}$.

Il est clair que $L(G_1) = L(G)$, que G_1 est Λ-normale si G l'est, et que la propriété (I.2) est conservée dans G_1.

D'autre part, la correspondance entre G et G_1 implique la propriété suivante :

$\forall\ u_1, u_2 \in \Sigma^*$, $\forall\ v_1, v_2 \in V_1^*$ tels que $u_1 v_1 \overset{}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} u_2 v_2$,

$\forall\ v_1' \in V^*$ tel que $h(v_1') = v_1$,

$\exists\ v_1'', v_2' \in V^*$ vérifiant $h(v_1'') = v_1$, $h(v_2') = v_2$, et $u_1 v_1' \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} u_1 v_1'' \underset{G}{\Longrightarrow} u_2 v_2'$.

En outre $u_2 \notin \text{Init}\ (u_1 v_1)$ implique $u_2 \notin \text{Init}\ (u_1 v_1'')$.

Alors, si $\exists\ x_i, x_i' \in V_1^*$, $\exists\ w \in \Sigma\Sigma^*$, avec $w \notin \text{Init}\ (x_i')$,

tels que $\sigma \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} x_i' \underset{G_1}{\Longrightarrow} w x_i$, pour $i = 1,2$,

$\exists\ y_i, y_i' \in V^*$, tels que $w \notin \text{Init}\ (y_i')$, $h(y_i') = x_i'$, $h(y_i) = x_i$,
et $\sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} y_i' \underset{G}{\Longrightarrow} w y_i$, pour $i=1,2$.

Donc, si G_1 n'est pas permutable, $x_1 \neq x_2$, ce qui implique $y_1 \neq y_2$, c'est-à-dire que G ne l'est pas non plus.

Il reste à montrer que G_1 vérifie la condition (I.4).

Supposons le contraire :

$\exists\ z_1, z_2, z_3 \in V_1^*$, $\exists\ \xi \in V_1 \setminus \Sigma$, tels que

$$\sigma \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} z_1\ \xi\ z_2\ \xi\ z_3, \text{ et } \xi\ z_2\ \xi \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} \Lambda.$$

Comme G est réduite, G_1 l'est aussi ; donc $\exists\ w_1 \in \Sigma^*$ tel que $z_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w_1$, et $\exists\ x, x' \in V_1^*$, $\exists\ w_2 \in \Sigma\Sigma^*$ tels que $w_2 \notin \text{Init}\ (x')$, et

$$\xi \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} x' \underset{G_1}{\Longrightarrow} w_2 x \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w_2.$$

Donc, $\sigma \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} z_1\ \xi\ z_2\ \xi\ z_3 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w_1\ \xi\ z_2\ \xi\ z_3 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w_1 x'\ z_2\ \xi\ z_3 \Longrightarrow$

$$w_1\ w_2 x z_2\ \xi\ z_3,$$

et $\quad \sigma \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} z_1\ \xi\ z_2\ \xi\ z_3 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w_1\ \xi\ z_3 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w_1 x' z_3 \underset{G_1}{\Longrightarrow} w_1\ w_2 x\ z_3$,

avec $w_1\ w_2 \notin \text{Init}\ (w_1 x' z_2\ \xi\ z_3)$, $w_1\ w_2 \notin \text{Init}\ (w_1 x' z_3)$, et

$x\ z_2\ \xi\ z_3 \neq x z_3$, ce qui contredit le fait que G_1 est permutable.

<u>Lemme I.6</u> : Toute C-grammaire G permutable, Λ-normale et vérifiant la condition (I.2) est équivalente à une C-grammaire $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, \sigma_1)$ prédictive, et vérifiant la condition suivante :

(I.5) $$\forall\ (\xi \to \phi) \in P_1 : \phi \in V_1^* \setminus V_1 V_1 V_1^* W(G_1)\ V_1^*.$$

D'après le lemme I.5, nous pouvons supposer que G vérifie la condition (I.4).

Posons $W = W(G)$, $\bar{W} = V \setminus (\Sigma \cup W)$, et $H = \{\phi \in (V \setminus \Sigma)\ W^* \mid \forall\ \xi \in W,$

$$\mathrm{Card}_\xi\ (w) \leqslant 1\}.$$

H est un ensemble fini.

Soient $c \notin V$, $V_1 \setminus \Sigma = HH \times (\bar{W} \cup \{c\})$, $V_2 \setminus \Sigma = H \times (\bar{W} \cup \{c\})$, et $\sigma_1 = [\sigma, c]$.

Pour tout $a \in \Sigma$ et tout $[\xi_1 \ldots \xi_n, \xi_{n+1}] \in V_2 \setminus \Sigma$, notons ℓ le plus grand des indices i compris entre 1 et n+1 (s'il existe, sinon posons ℓ=0), tel que :

$\xi_j \in W$ pour $1 \leqslant j \leqslant i-1$, et $(\xi_i \to a\phi) \in P$, avec $\phi \in (V \setminus \Sigma)^*$.

Alors :

- si $\xi_1 \in W$ et si $\ell \in \{0, n+1\}$: $(\xi \to \Lambda) \in P_1$
- si $\ell = n$ et si $\phi = \Lambda$: $(\xi \to a) \in P_1$
- si $\ell \notin \{0, n+1\}$, $\phi \neq \Lambda$ et
  - .si $\phi \in VW^*$: $(\xi \to a\ [\phi\ \xi_{\ell+1} \ldots \xi_n, \xi_{n+1}]) \in P_1$.
  - .si $\phi \notin VW^*$, posons $\phi = \psi_1 \mu_1 \psi_2 \ldots \psi_p \mu_p \psi_{p+1}$, où $\psi_i \in W^*$ pour $1 \leqslant i \leqslant p+1$, et $\mu_i \in \bar{W}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$; alors :
    - si $\psi_1 = \Lambda$: $(\xi \to a\ [\mu_1 \psi_2, \mu_2] \ldots [\mu_p \psi_{p+1}\ \xi_{\ell+1} \ldots \xi_n, \xi_{n+1}]) \in P_1$
    - si $\psi_1 \neq \Lambda$: $(\xi \to a\ [\psi_1, \mu_1][\mu_1\ \psi_2, \mu_2] \ldots [\mu_p\ \psi_{p+1}\ \xi_{\ell+1} \ldots \xi_n, \xi_{n+1}]) \in P_1$

Pour P_1 ainsi défini, G_1 vérifie la condition (I.5).

Soit $h : V_1^* \to V^*$ l'homomorphisme défini par

$$h(a) = a, \quad \forall\ a \in \Sigma, \text{ et}$$

$$h([\phi, \xi]) = \phi, \ \forall [\phi, \xi] \in V_1 \setminus \Sigma.$$

Alors $(A \to u) \in P_1$ implique $h(A) \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} h(y)$; donc $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} z \in V_1^*$ implique $h(\sigma_1) = \sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} h(z)$.

Comme $h(w) = w$ pour tout $w \in \Sigma^*$, $L(G_1) \subseteq L(G)$.

Montrons l'inclusion inverse en établissant au préalable deux propriétés :

(1) : $\forall\, z \in V_1^*$ tel que $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} z$, $\exists\, u \in \Sigma^*$, $\exists\, \tau_1,\dots,\tau_{q-1} \in \bar{W}$, $\exists\, \phi_1,\dots,\phi_q \in W^*$, $\exists\, \tau_0 \in V_1 \setminus \Sigma$, tels que :

$$z = u\,[\tau_0\ \phi_1,\tau_1]\ \dots\ [\tau_{q-1}\ \phi_q,c], \text{ et } z \in V_2^*.$$

Montrons ceci par récurrence sur la longueur de la dérivation $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} z$.

- Pour une dérivation de longueur nulle, $z = \sigma_1 = [\sigma,c]$, et la propriété est vérifiée.

- En supposant la propriété (1) vérifiée pour une dérivation de longueur donnée $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} z$, considérons la dérivation $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} z \underset{G_1}{\Longrightarrow} z'$. D'après l'hypothèse de récurrence, $z = u\,[\tau_0\ \phi_1,\tau_1]\ \dots\ [\tau_{q-1}\ \phi_q,c]$; alors $z' = uy\,[\tau_1\ \phi_2,\tau_2]\ \dots\ [\tau_{q-1}\ \phi_q,c]$, avec $([\tau_0\ \phi_1,\tau_1] \to y) \in P_1$. Par construction de P_1, seuls les deux cas suivants sont possibles :

. $y \in \Sigma^\circ$; la propriété est alors triviale.

. $y \in \Sigma(V_1 \setminus \Sigma)^*$; alors, y est de la forme $a[\nu_0\ \phi'_1,\nu_1]\ \dots\ [\nu_r\ \phi'_{r+1},\tau_1]$, où $a \in \Sigma$, $\nu_0 \in V_1 \setminus \Sigma$, $\phi'_i \in W^*$ pour $1 \leq i \leq r+1$, et $\nu_i \in \bar{W}$ pour $1 \leq i \leq r$.
Donc $z' = ua\,[\nu_0\ \phi'_1,\nu_1]\ \dots\ [\nu_r\ \phi'_{r+1},\tau_1]\ [\tau_1\ \phi_2,\tau_2]\ \dots\ [\tau_{q-1}\ \phi_q,c]$.
En outre $\sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} h(z') = u\ a\ \nu_0\ \phi'_1\ \dots\ \nu_r\ \phi'_{r+1}\ \tau_1\ \phi_2\ \dots\ \tau_{q-1}\ \phi_q$; comme G vérifie la condition (I.4), $\forall\, \xi \in W$, $\mathrm{Card}_\xi\,(\nu_i\ \phi'_{i+1}) \leq 1$ pour $0 \leq i \leq r$, et $\mathrm{Card}_\xi(\tau_i\ \phi_{i+1}) \leq 1$ pour $1 \leq i \leq q$; par conséquent $z' \in V_2^*$ et la propriété (1) est encore vérifiée.

2) : $\forall\, \phi, \phi' \in V^*$, $\forall\, u \in \Sigma\Sigma^*$ tels que $\sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \phi' \underset{G}{\Longrightarrow} u\phi$, avec $u \notin \mathrm{Init}\ (\phi')$, $\exists\, y, y' \in V_1^*$ tels que $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} y' \underset{G_1}{\Longrightarrow} uy$, avec $u \notin \mathrm{Init}\ (y')$ et $h(y) = \phi$.

Montrons (2) par récurrence sur $|u| = \ell \geq 1$.

- Si $\ell=1$: comme G est Λ-normale, $\phi' = \sigma$, et par construction de P_1, $\exists\ z \in V_1^*$ tel que $(\sigma_1 \to uz) \in P_1$, avec $h(z) = \phi$, et la propriété est vérifiée.

- Supposons la propriété (2) vérifiée pour tous les u tels que $|u| \leqslant \ell$, et considérons la dérivation $\sigma \overset{*}{\underset{G}{\cdot\!\!\Longrightarrow}} \phi' \underset{G}{\cdot\!\!\Longrightarrow} u\phi \overset{*}{\underset{G}{\cdot\!\!\Longrightarrow}} u\phi'' \underset{G}{\cdot\!\!\Longrightarrow} ua\phi'''$, avec $ua \notin \mathrm{Init}\ (u\phi'')$, c'est-à-dire $a \notin \mathrm{Init}\ (\phi'')$.

Alors, par hypothèse de récurrence, $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\cdot\!\!\Longrightarrow}} y' \underset{G_1}{\cdot\!\!\Longrightarrow} uy$, avec $h(y) = \phi$.

Or, en utilisant les notations de la propriété (1),

$$y = [\tau_0\ \phi_1,\tau_1]\ \cdots\ [\tau_{q-1}\ \phi_q,c] \in V_2^* ;$$

donc $h(y) = \phi = \tau_0\ \phi_1\ \tau_1\ \cdots\ \tau_{q-1}\ \phi_q$, avec $\tau_1 \notin W$.

Soit Θ_1 le plus long des mots $\Theta' \in W^*$ tels que ϕ soit de la forme $\Theta'\Theta''$, avec $\Theta'' \underset{G}{\cdot\!\!\Longrightarrow} a\Theta'''$, $\Theta''' \in V^*$.

Puisque $\phi \overset{*}{\underset{G}{\cdot\!\!\Longrightarrow}} a\phi'''$, de tels mots θ' existent et de plus, puisque $\tau_1 \notin W$, $\Theta' \in \mathrm{Init}\ (\tau_0\ \phi_1) \cup \{\Lambda\}$.

Posons alors $\tau_0\ \phi_1\ \tau_1 = \Theta_1\ \mu\ \Theta_2$, où $\Theta_2 \in V^*$, $\mu \in V \setminus \Sigma$, et $(\mu \to a\ \Theta_3) \in P$, avec $\Theta_3 \in V^*$.

Nous avons donc dans G

$$\sigma \overset{*}{\cdot\!\!\Longrightarrow} u\phi = u\Theta_1\mu\Theta_2\phi_2\ \cdots\ \tau_{q-1}\ \phi_q \overset{*}{\cdot\!\!\Longrightarrow} u\mu\Theta_2\phi_2\ \cdots\ \tau_{q-1}\ \phi_q \cdot\!\!\Longrightarrow ua\Theta_3\Theta_2\phi_2\ \cdots$$
$$\cdots\ \tau_{q-1}\ \phi_q,$$

et comme G est permutable, $\phi''' = \Theta_3\Theta_2\phi_2\ \cdots\ \tau_{q-1}\ \phi_q$.

Distinguons maintenant deux cas :

a) $\Theta_2 = \Lambda$. Alors $\mu = \tau_1$, et par construction de G_1,

$([\tau_0\ \phi_1,\tau_1] \to \Lambda) \in P_1$, et $\exists\ z_1 \in (V_1 \setminus \Sigma)^*$ tel que $([\tau_1\ \phi_2,\tau_2] \to az_1) \in P_1$, avec $h(z_1) = \Theta_3\ \phi_2$.

Donc $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\cdot\!\!\Longrightarrow}} uz = u\ [\tau_0\phi_1,\tau_1]\ \ldots\ [\tau_{q-1}\ \phi_q,c]\ \underset{G_1}{\cdot\!\!\Longrightarrow}\ u\ [\tau_1\ \phi_2,\tau_2]\ \ldots$

$\ldots\ [\tau_{q-1}\ \phi_q,c]$

$\underset{G_1}{\cdot\!\!\Longrightarrow}\ u\ a\ z_1\ [\tau_2\ \phi_3,\tau_3]\ \ldots\ [\tau_{q-1}\ \phi_q,c],$

avec $h(z_1[\tau_2\ \phi_3,\tau_3]\ \ldots\ [\tau_{q-1}\ \phi_q,c]) = \Theta_3\ \phi_2\ \tau_2\ \phi_3\ \ldots\ \tau_{q-1}\ \phi_q = \phi'''$;
La propriété (2) est alors vérifiée.

b) $\Theta_2 \neq \Lambda$. Alors, $\Theta_2 = \Theta'_2\ \tau_1$, et par construction de G_1, $\exists\ z_2 \in V^*$ tel que $([\Theta_1\mu\Theta'_2,\tau_1] \to a\ z_2) \in P_1$,

avec $\quad h(z_2) = \Theta_3\ \Theta'_2$.

Donc $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\cdot\!\!\Longrightarrow}} u\ [\tau_0\ \phi_1,\tau_1]\ \ldots\ [\tau_{q-1}\ \phi_q,c] = u\ [\Theta_1\mu\Theta'_2,\tau_1]\ \ldots\ [\tau_{q-1}\ \phi_q,c]$

$\underset{G_1}{\cdot\!\!\Longrightarrow}\ u\ a\ z_2[\tau_1\ \phi_2,\tau_2]\ \ldots\ [\tau_{q-1}\ \phi_q,c],$

avec $h(z_2\ [\tau_1\ \phi_2,\tau_2]\ \ldots\ [\tau_{q-1}\ \phi_q,c]) = \Theta_3\ \Theta'_2\ \tau_1\ \phi_2\ \ldots\ \tau_{q-1}\ \phi_q = \phi'''$;
La propriété (2) est ainsi établie.

Soit alors $w \in L(G)$.

- Si $w = \Lambda$: $\sigma \in W$, et par construction $([\sigma,c] \to \Lambda) \in P_1$; donc $w \in L(G_1)$.

- Si $w \neq \Lambda$: $\exists\ \phi,\ \phi' \in V^*$ tels que $w \notin \mathrm{Init}\ (\phi')$, et

$$\sigma_1 \overset{*}{\underset{G}{\cdot\!\!\Longrightarrow}} \phi' \underset{G}{\cdot\!\!\Longrightarrow} w\phi \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w.$$

D'après la propriété (2), $\exists\ y,\ y' \in V_1^*$ tels que $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\cdot\!\!\Longrightarrow}} y' \underset{G_1}{\cdot\!\!\Longrightarrow} wy$, avec $w \notin \mathrm{Init}\ (y')$ et $h(y) = \phi$.

Distinguons deux cas :

c) $y = \Lambda$: alors $w \in L(G_1)$.

d) $y \neq \Lambda$: alors, d'après la propriété (1)

$y = [\tau_0\ \phi_1,\tau_1]\ \ldots\ [\tau_{q-1}\ \phi_q,c]$, avec $\tau_i \in \bar{W}$ pour $1 \leq i \leq q-1$;

donc $\phi = \tau_0 \phi_1 \tau_1 \ldots \tau_{q-1} \phi_q$.

Or $\phi \in W^*$, donc $q=1$, et $([\tau_0 \phi_1, c] \to \Lambda) \in P_1$ par construction.

Par conséquent, $w \in L(G_1)$ et les grammaires sont équivalentes.

La grammaire réduite de G_1, que nous noterons encore G_1, est aussi équivalente à G, et vérifie également la condition (I.5). Il reste à montrer qu'elle est prédictive.

Par construction, G_1 est Λ-normale. Puisque G vérifie la condition (I.2), il en est de même pour G_1. Montrons qu'elle vérifie aussi la condition (I.3).

En effet, en supposant le contraire,

$\exists\ z_1, z_2, z_3 \in V_1^*$, $\exists\ A_1 \in W(G_1)$, $\exists\ a \in \Sigma$ tels que
$\sigma_1 \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} z_1\ A_1\ a\ z_2$, et $(A_1 \to a\ z_3) \in P_1$.

G_1 étant Λ-normale, ceci signifie que

$\exists\ w \in \Sigma^*$, $\exists\ z_4 \in W^*(G_1)$, $\exists\ z_5, z_6 \in V_1^*$, $\exists\ A_2 \in V_1 \setminus \Sigma$ tels que
$\sigma_1 \cdot\overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w\ A_1\ z_4\ A_2\ z_5$, avec $z_1 \cdot\overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w$, $(A_2 \to a\ z_6) \in P_1$, et $z_6\ z_5 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} z_2$.

D'après la propriété (1), $A_1\ z_4\ A_2\ z_5 = [\tau_0\ \phi_1, \tau_1] \ldots [\tau_{q-1}\ \phi_q, c]$, avec $\tau_i \in \bar{W}$ pour $1 \leq i \leq q-1$.

Alors $[\tau_1\ \phi_2, \tau_2] \notin W(G_1)$; donc $A_1 = [\tau_0\ \phi_1, \tau_1]$, $z_4 = \Lambda$, et $A_2 = [\tau_1\ \phi_2, \tau_2]$.

Comme $([\tau_0\ \phi_1, \tau_1] \to a\ z_3) \in P_1$, d'après la construction de P_1, seuls les deux cas suivants sont possibles :

- soit $\tau_0 \in \bar{W}$;

  alors $[\tau_0\ \phi_1, \tau_1] \notin W(G_1)$, et il y a contradiction

- soit $\tau_0 \in W$, et $\nexists\ \Theta \in V^*$ tel que $(\tau_1 \to a\Theta) \in P$;

  alors, $\nexists\ y \in V_1^*$ tel que $([\tau_1\ \phi_2, \tau_2] \to ay) \in P_1$, puisque $\tau_1 \notin W$.

Ceci contredit également l'hypothèse et complète la démonstration.

Des lemmes I.3, I.4 et I.6, nous déduisons la propriété caractéristique suivante :

<u>*Théorème I.1*</u> *: Un C-langage est permutable si et seulement s'il existe une C-grammaire prédictive qui l'engendre.*

Cette propriété montre que les C-langages permutables coïncident avec les "Left-Factored Languages" de Wood [17], les langages LL(1) de Knuth [11], et qu'ils peuvent être engendrés par une grammaire déterministe [10], puisque ces derniers possèdent la même propriété caractéristique.

Nous pouvons énoncer un résultat plus fort en posant la définition suivante :

<u>*Définition I.5*</u> *: Nous appellerons C-grammaire* <u>*k-prédictive*</u> *toute C-grammaire* G *prédictive telle que*

$$(\xi \to z) \in P \qquad \textit{implique} \qquad |z| \leqslant k + 1.$$

<u>*Théorème I.2*</u> *: Pour tout C-langage permutable* L*, il existe une C-grammaire 2-prédictive qui engendre* L.

En outre, G *vérifie la condition (I.5).*

En effet, d'après les lemmes I.4 et I.6, il existe une C-grammaire k-prédictive $G_1 = (V_1,\Sigma,P_1,\sigma_1)$, vérifiant (I.5), qui engendre L. Il suffit de montrer que, si $k \geqslant 3$, G_1 est équivalente à une C-grammaire G_2 (k-1)-prédictive.

Pour cela, posons $V_2 = ((V_1 \setminus \Sigma) \times (V_1 \setminus \Sigma)) \cup V_1$, et

$P_2 = (P_1 \setminus \{(\xi \to az) \in P_1 \mid |z| = k\}) \cup P'$, où P' est défini de la façon suivante :

pour toute production $(\xi \to a\, \mu_1 \ldots \mu_k) \in P$,

(i) $(\xi \to a\, \mu_1 \ldots \mu_{k-2}\, [\mu_{k-1},\mu_k]) \in P'$;

pour toute production $(\xi \to a\, \mu_1 \ldots \mu_\ell) \in P$ et tout $\nu \in V_1 \setminus \Sigma$

- si $\ell = k$, (ii) $([\xi,\nu] \to a\, \mu_1 \ldots \mu_{k-3}\, [\mu_{k-2}, \mu_{k-1}]\, [\mu_k,\nu]) \in P'$;
- si $\ell = k-1$, (iii) $([\xi,\nu] \to a\, \mu_1 \ldots \mu_{k-2}\, [\mu_{k-1},\nu]) \in P'$;
- si $\ell < k-1$, (iv) $([\xi,\nu] \to a\, \mu_1 \ldots \mu_\ell\, \nu) \in P'$;

pour toute production $(\nu \to a\ \mu_1 \ldots \mu_\ell) \in P$, et tout $\xi \in W(G_1)$,

- si $\ell = k$, (v) $([\xi,\nu] \to a\ \mu_1 \ldots \mu_{k-2}\ [\mu_{k-1},\mu_k]) \in P'$;
- si $\ell \leq k-1$, (vi) $([\xi,\nu] \to a\ \mu_1 \ldots \mu_\ell$.

Soit $G_2 = (V_2,\Sigma,P_2,\sigma_1)$, que nous supposerons réduite.

Soit enfin $h : V_2^* \to V_1^*$ l'homomorphisme défini par

$$h(\alpha) = \alpha \text{ si } \alpha \in V_1, \text{ et}$$

$$h(\alpha) = \xi\nu \text{ si } \alpha = [\xi,\nu] \in V_2 \setminus V_1.$$

$L(G_2) \subseteq L(G_1)$, car

$$\forall\ (\alpha \to \phi) \in P_2,\ h(\alpha) \underset{G_1}{\overset{*}{\Longrightarrow}} h(\phi)\ ;$$

donc, $\forall\ w \in \Sigma^*$, $\sigma_1 \underset{G_2}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$ implique $h(\sigma_1) = \sigma_1 \underset{G_1}{\overset{*}{\Longrightarrow}} h(w) = w$.

Inversement, montrons d'abord la propriété suivante, par récurrence :

(*) $\forall\ u \in \Sigma\Sigma^*$, $\forall\ y, y' \in V_1^*$ tels que $\sigma_1 \cdot\underset{G_1}{\overset{*}{\Longrightarrow}} y' \cdot\underset{G_1}{\Longrightarrow} uy$, avec $u \notin \text{Init}\ (y')$,

$\exists\ \phi \in V_2^*$ tel que $h(\phi) = y$ et $\sigma \cdot\underset{G_2}{\overset{*}{\Longrightarrow}} u\phi$.

- Si $|u| = 1$: alors, $y' = \sigma$, $(\sigma_1 \to uy) \in P_1$, et

$$(\sigma_1 \to u\phi) \in P_2 \text{ avec } h(\phi) = y\ ;$$

la propriété (*) est donc vraie

- Supposons la propriété vérifiée pour un mot u de longueur donnée, et montrons qu'elle l'est aussi pour ua, si $a \in \Sigma$.

Considérons donc des mots $y', y, y_1', y_1 \in V_1^*$ tels que

$$\sigma_1 \cdot\underset{G_1}{\overset{*}{\Longrightarrow}} y' \cdot\underset{G_1}{\Longrightarrow} uy \cdot\underset{G_1}{\overset{*}{\Longrightarrow}} uy_1' \cdot\underset{G_1}{\Longrightarrow} uay_1, \text{ avec } a \notin \text{Init}\ (y_1') \text{ et } u \notin \text{Init}\ (y').$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $\exists\ \phi \in V_1^*$ tel que

$$h(\phi) = y \quad \text{et} \quad \sigma_1 \cdot\underset{G_2}{\overset{*}{\Longrightarrow}} u\phi.$$

Posons $y = \xi_1 \ldots \xi_r$ avec $\xi_1, \ldots, \xi_r \in V_1$.

Comme G_1 vérifie la condition (I.5), $\xi_2, \ldots, \xi_r \notin W(G_1)$.

Deux cas sont alors possibles :

1) $y = y_1'$: alors $(\xi_1 \to az_1) \in P_1$ et $y_1 = z_1 \xi_2 \ldots \xi_r$.

Comme $h(\phi) = \xi_1 \ldots \xi_r$, alors $\exists\ \phi_1 \in V_1^*$ tel que :

- soit $\phi = \xi_1 \phi_1$, et $(\xi_1 \to a\, \Theta_1) \in P_2$ avec $h(\Theta_1) = z_1$.

  Alors $u\phi = u\, \xi_1\, \phi_1 \underset{G_2}{\Longrightarrow} u\, a\, \Theta_1\, \phi_1$, avec $h(\Theta_1\, \phi_1) = z_1\, \xi_r \ldots \xi_r = y_1$.

- soit $\phi = [\xi_1,\xi_2]\, \phi_1$, et $([\xi_1,\xi_2] \to a\, \Theta_1) \in P_2$ avec $h(\Theta_1) = z_1\, \xi_2$.

  Alors $u\phi = u\, [\xi_1,\xi_2]\, \phi_1 \underset{G_2}{\Longrightarrow} u\, a\, \Theta_1\, \phi_1$, avec $h(\Theta_1\phi_1) = z_1\, \xi_2\, \xi_3 \ldots \xi_r = y_1$.

2) $y \neq y_1'$: alors $(\xi_1 \to \Lambda) \in P_1$, $(\xi_2 \to az_1) \in P_1$, et $y_1 = z_1\, \xi_3 \ldots \xi_r$.

Comme $h(\phi) = \xi_1 \ldots \xi_r$, alors $\exists\ \phi_1 \in V_1^*$ tel que :

- soit $\phi = \xi_1\, \xi_2\, \phi_1$, et $(\xi_1 \to \Lambda) \in P_2$, $(\xi_2 \to a\, \Theta_1) \in P_2$ avec $h(\Theta_1) = z_1$.

  Alors $u\phi = u\, \xi_1\, \xi_2\, \phi_1 \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} u\, a\, \Theta_1\, \phi_1$, avec $h(\Theta_1\phi_1) = z_1\, \xi_3 \ldots \xi_r = y_1$.

- soit $\phi = \xi_1[\xi_2,\xi_3]\, \phi_1$, et $(\xi_1 \to \Lambda) \in P_2$, $([\xi_2,\xi_3] \to a\, \Theta_1) \in P_2$, avec $h(\Theta_1) = z_1\, \xi_3$.

  Alors $u\phi = u\xi_1[\xi_2,\xi_3]\, \phi_1 \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} u\, a\, \Theta_1\, \phi_1$, avec $h(\Theta_1\phi_1) = z_1\, \xi_3\, \xi_4 \ldots \xi_r$.

- soit $\phi = [\xi_1,\xi_2]\, \phi_1$, et $([\xi_1,\xi_2] \to a\, \Theta_1) \in P_2$, avec $h(\Theta_1) = z_1$.

  Alors $u\phi = u\, [\xi_1,\xi_2]\, \phi_1 \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} u\, a\, \Theta_1\, \phi_1$, avec $h(\Theta_1\phi_1) = z_1\, \xi_3 \ldots \xi_r = y_1$.

Dans tous les cas, la propriété (*) est vérifiée.

Soit maintenant $w \in L(G_1)$.

Si $w = \Lambda$, $(\sigma_1 \to \Lambda) \in P_1$ et $(\sigma_1 \to \Lambda) \in P_2$. Donc $w \in L(G_2)$.

Si $w \neq \Lambda$, $\exists\ y, y' \in V_1^*$ tels que $\sigma \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} y' \underset{G_1}{\Longrightarrow} wy \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w$, avec $w \notin \mathrm{Init}\ (y')$.

Donc, d'après la propriété (*), $\exists\ \phi \in V_2^*$ tel que $h(\phi) = y$ et $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w\phi$.

Si $y=\Lambda$, alors $\phi=\Lambda$ et $w \in L(G_2)$.

Si $y\neq\Lambda$, comme G_1 vérifie la condition (I.5), $|y| = 1$.

Donc $|\phi| = 1$, et $\xi = y = \phi \in W(G_1)$.

Par construction de G_2, $(\xi \to \Lambda) \in P_2$, et $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w\phi = w\xi \underset{G_2}{\Longrightarrow} w$.

Donc $w \in L(G_2)$.

Les grammaires sont donc bien équivalentes.

Il reste à montrer que G_2 vérifie également les conditions (I.2) et (I.3).

Supposons que $\exists\ \alpha \in V_2 \setminus \Sigma$, $\exists\ \phi_1, \phi_2 \in V_2^*$, $\exists\ a \in \Sigma$ tels que $(\alpha \to a\ \phi_1) \in P_2$, $(\alpha \to a\ \phi_2) \in P_2$, et $\phi_1 \neq \phi_2$.

- Si $\alpha \in V_1$: alors $(\alpha \to a\ h\ (\phi_i)) \in P_1$ pour $i = 1,2$.

  Contradiction car $h(\phi_1) \neq h(\phi_2)$.

- Si $\alpha \in V_2 \setminus V_1$: posons $\alpha = [\xi,\nu]$ et distinguons trois cas :

  a) $\exists\ z_1, z_2 \in V_1^*$ tels que $(\xi \to a\ z_i) \in P_1$ pour $i=1,2$.
  Comme $h(\phi_i) = z_i\ \nu$ pour $i=1,2$, et que $\phi_1 \neq \phi_2$, on obtient $z_1 \neq z_2$, et G_1 ne vérifie pas (I.2). Contradiction.

  b) $\exists\ z_1,z_2 \in V_1^*$ tels que $(\xi \to a\ z_1)$, $(\xi \to \Lambda)$, $(\nu \to a\ z_2) \in P_1$.
  Comme G_2 est réduite, $\exists\ \Theta_1,\Theta_2 \in V_2^*$ tels que $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} \Theta_1\ [\xi,\nu]\ \Theta_2$.
  Donc $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} h(\Theta_1)\ \xi\nu\ h(\Theta_2)$, et G_1 ne vérifie pas (I.3).
  Contradiction.

  c) $\exists\ z_1,z_2 \in V_1^*$ tels que $(\xi \to \Lambda)$, $(\nu \to az_i) \in P_1$ pour $i=1,2$.
  Comme dans le cas a), il y a encore contradiction.

Donc G_2 vérifie la condition (I.2).

Enfin, supposons que $\exists\ \alpha_1 \in W(G_2)$, $\exists\ \theta_1,\theta_2,\theta_3 \in V_2^*$, $\exists\ a \in \Sigma$ tels que $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} \theta_1\ \alpha_1\ a\ \theta_2$, et $(\alpha_1 \to a\ \theta_3) \in P_2$.

Alors, comme G_2 vérifie la condition (I.5) et est Λ-normale, $\exists\ \theta_4,\theta_5 \in V_2^*$, $\exists\ w \in \Sigma^*$, $\exists\ \alpha_2 \in V_2 \setminus \Sigma$ tels que

$$\sigma_1 \ \cdot\!\overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w\ \alpha_1\ \alpha_2\ \theta_4, \text{ et } (\alpha_2 \to a\ \theta_5) \in P_2.$$

Mais $\alpha_1 \in W(G_2)$ implique $\alpha_1 \in V_1$; donc $(\alpha_1 \to a\ h(\theta_3)) \in P_1$, et d'autre part, $\sigma_1 \ \cdot\!\overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w\ \alpha_1\ h(\alpha_2\ \theta_4)$.

Comme G_1 vérifie la condition (I.5), $h(\alpha_2\ \theta_4) \notin W(G_1)\ V_1^*$.

Alors, si $\alpha_2 \in V_1$, $(\alpha_2 \to a\ h(\theta_5)) \in P_1$;
donc $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w\ \alpha_1\ a\ h(\theta_5\ \theta_4)$ et G_1 ne vérifie pas la condition (I.3). Contradiction.

Si $\alpha_2 \in V_2 \setminus V_1$, en posant $\alpha_2 = [\xi,\nu]$, nous avons :

$$(\xi \to az) \in P_1, \text{ avec } h(\theta_5) = z\nu,$$

et $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w\ \alpha_1\ a\ z\ \nu\ h(\theta_4)$;

Ceci contredit encore le fait que G_1 vérifie (I.3), et montre que G_2 vérifie bien cette condition (I.3).

Terminons ce chapitre par un résultat général, vrai aussi dans le cas des C-langages quelconques [6] et déterministes [7].

<u>éorème I.3</u> : *Soient* L *un C-langage sur* Σ *et* $c \notin \Sigma$.

L *est permutable si et seulement si* Lc *est permutable.*

Soit L un C-langage permutable. D'après le théorème I.1, L est engendré par une C-grammaire prédictive $G = (V,\Sigma,P,\sigma)$. Il est clair que la grammaire

$$G_1 = (V \cup \{c,\gamma,\sigma_1\},\ \Sigma \cup \{c\}, P_1, \sigma_1) \text{ , avec } \gamma,\ \sigma_1 \notin V, \text{ et}$$

$$P_1 = P \cup \{\sigma_1 \to z\gamma \mid (\sigma \to z) \in P\} \cup \{\gamma \to c\}$$

est prédictive et engendre Lc.

Réciproquement, soit Lc un C-langage permutable. Avec les mêmes notations que ci-dessus, définissons un homomorphisme $h : V^* \to (V \setminus \{c\})^*$ par $\forall z \in V^*$:

$$h(z) = z \qquad \text{si } \mathrm{Card}_c(z) = 0 \text{ , et}$$

$$h(z) = \Lambda \qquad \text{si } \mathrm{Card}_c(z) \neq 0.$$

Associons à la C-grammaire G la C-grammaire

$$G_1 = (V_1 \setminus \{c\}, \Sigma \setminus \{c\}, P_1, \sigma),$$

avec $P_1 = \{\xi \to h(z) \mid (\xi \to z) \in P\}$.

Comme G est Λ-normale, G_1 l'est aussi.

D'autre part, si $(\xi \to z) \in P$ avec $\mathrm{Card}_c(z) \neq 0$, $\exists\ z_1 \in V^*$ tel que $z = cz_1$.

Comme $L(G) = Lc$, $L_G(z_1) = \{\Lambda\}$.

Donc $L(G_1) = L$.

En outre, G_1 vérifie la condition (I.2), car

$(\xi \to a\ z_i) \in P_1$ pour $i=1,2$, avec $z_1 \neq z_2$ implique

$(\xi \to a\ z_i) \in P$ pour $i=1,2$, avec $z_1 \neq z_2$, ce qui contredirait l'hypothèse que G est prédictive.

Enfin, G_1 vérifie la condition (I.3), car

$(\xi \to \Lambda)$, $(\xi \to a\ z_1) \in P_1$, et $a \in S_{G_1}(\xi)$ implique

$(\xi \to a\ z_1) \in P$, $a \in S_G(\xi)$, et

- soit $(\xi \to \Lambda) \in P$, auquel cas il y a contradiction puisque G est prédictive,

- soit $(\xi \to c\ z_1) \in P$, auquel cas $S_G(\xi) = \emptyset$, et il y a encore contradiction.

INTRODUCTION AU CHAPITRE II

***

{ Pour les développements formels des chapitres III, IV et V ainsi que pour la justification de l'algorithme d'analyse syntaxique du chapitre VI, il nous est apparu plus simple de caractériser les langages permutables en termes d'automates à pile de mémoire.

C'est le but de ce chapitre (Théorème II.2) qui nous a conduit à introduire la notion d'automate permutable.

Pour être permutable, un automate doit vérifier plusieurs conditions. Il doit d'abord être déterministe. Il doit également être complet, c'est-à-dire qu'il vide sa pile chaque fois qu'il reconnaît un mot. Enfin, si deux couples lettre - état, intervenant dans deux transitions de l'automate, modifient un certain sommet de pile, la permutation des deux états conserve chacune des modifications de pile, et conserve aussi les états résultant des deux transitions. Ceci a pour conséquence que l'état dans lequel se trouve l'automate après une modification de sa pile ne dépend pas de celui dans lequel il se trouvait précédemment.

Le lemme II.1 nous permet de supposer que le sommet de pile d'un automate ne peut être modifié qu'au cours d'un dépilage.

D'autre part, les théorèmes II.1 et II.2 montrent qu'un automate permutable est équivalent à un automate permutable sans mot vide, c'est-à-dire pour lequel tout mouvement s'accompagne d'une lecture sur le ruban d'entrée ; ce résultat n'est pas vrai par exemple pour les automates déterministes.

La caractérisation du théorème II.2 permet en outre d'établir que la classe des C-langages permutables est contenue dans celle des C-langages reconnus par des automates à pile de mémoire déterministes sans mot vide, et contient strictement la classe des K-langages. }

CHAPITRE II

AUTOMATES PERMUTABLES

Nous allons caractériser les C-langages permutables en termes d'automates à pile de mémoire déterministes.

Dans tout ce qui suit, les automates à pile de mémoire seront notés le plus souvent $M = (K,\Sigma,\Gamma,\delta,Z_0,p_0,F)$, et nous supposerons que les déterministes vérifient la condition suivante :

(II.1) $\forall\, q \in K,\ \forall\, j \in \Gamma^*,\ \forall\, w \in \Sigma^*,\ (p_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma)$ implique $\gamma \in Z_0(\Gamma \setminus Z_0)^*$.

D'après [7], cette restriction ne diminue pas la classe des langages reconnus par M.

Pour un automate à pile de mémoire M, nous poserons

$$\Delta_M = \{(p,x,Z) \in K \times \Sigma^\circ \times \Gamma \mid \exists\, q \in K,\ \exists\, \gamma \in \Gamma^* \setminus Z\Gamma^* \text{ tels que } (q,\gamma) \in \delta(p,x,Z)\}.$$

C'est un ensemble fini.

Intuitivement, Δ_M est l'ensemble des configurations où le sommet de pile est soit dépilé, soit modifié.

Posons aussi la définition suivante :

Définition II.1 : *Un automate à pile de mémoire* M *sera dit complet si, pour tout* $(q,w,\gamma) \in K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ *tel que* $(p_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma)$, $q \in F$ *implique* $|\gamma| \leq 1$.

Si M est déterministe, cette dernière condition devient: $q \in F$ implique $\gamma = Z_0$.

Définition II.2 : Nous appellerons *automate permutable* *tout automate à pile de mémoire déterministe* M *qui est complet et qui vérifie en outre la condition suivante :*

(II.2) $(p_1,x_1,Z) \in \Delta_M$ *et* $(p_2,x_2,Z) \in \Delta_M$ *implique* $\delta(p_j,x_i,Z) = \delta(p_i,x_i,Z)$, *pour tous* $i,j \in \{1,2\}$.

M étant déterministe, nous remarquons que si de tels x_i sont différents, ils sont non vides.

La signification intuitive de Δ_M est précisée par le lemme suivant :

Lemme II.1 : Tout automate permutable M est équivalent à un automate permutable $M_1 = (K_1,\Sigma,\Gamma,\delta_1,Z_0,p_0,F)$ tel que

$$\Delta_{M_1} = \{(p,x,Z) \in K_1 \times \Sigma^\circ \times \Gamma \mid \exists\, q \in K_1 \text{ tel que } \delta_1(p,x,Z) = (q,\Lambda)\}.$$

En effet, associons biunivoquement à tout élément $(x,Z) \in \Sigma^\circ \times (\Gamma \setminus \{Z_0\})$ un élément $r(x,Z)$, et notons K' l'ensemble de tous ces éléments.

Posons $K_1 = K \cup K'$, et définissons δ_1 de la façon suivante :

. si $(p,x,Z) \notin \Delta_M$: alors (i) $\delta_1(p,x,Z) = \delta(p,x,Z)$,

. si $(p,x,Z) \in \Delta_M$ et $\delta(p,x,Z) = (q,\Lambda)$ avec $q \in K$:
alors (ii) $\delta_1(p,x,Z) = (q,\Lambda)$,

. si $(p,x,Z) \in \Delta_M$ et $\delta(p,x,Z) = (q,\gamma)$ avec $q \in K$ et $\gamma \in \Gamma\Gamma^*$:
alors (iii) $\delta_1(p,x,Z) = (r(x,Z),\Lambda)$,
et (iv) $\delta_1(r(x,Z),\Lambda,Z') = (q,Z'\gamma)$, $\forall\, Z' \in \Gamma$.

Montrons en quatre points que M_1 possède les propriétés énoncées :

1) M_1 est déterministe :

D'après la construction ci-dessus, il suffit de montrer que, $\forall\, (q,Z') \in K' \times \Gamma$, Card $(\delta_1(q,\Lambda,Z')) \leq 1$.

Supposons le contraire. Alors, $\exists\, q=r(x,Z) \in K'$, $\exists\, Z' \in \Gamma$, $\exists\, q_1,q_2 \in K$, $\exists\, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^*$ tels que $(q_i,\gamma_i) = \delta_1(q,\Lambda,Z')$, pour i=1,2, et $(q_1,\gamma_1) \neq (q_2,\gamma_2)$.

D'après la construction de M_1, $\gamma_i = Z'\bar{\gamma}_i$ et $\exists$ $p_1, p_2 \in K$ tels que $\delta(p_i, x, Z) = (q_i, \bar{\gamma}_i)$, avec $(p_i, x, Z) \in \Delta_M$, pour $i=1,2$.

Or, comme M est permutable, $\delta(p_1, x, Z) = \delta(p_2, x, Z)$; donc $(q_1, \bar{\gamma}_1) = (q_2, \bar{\gamma}_2)$, contradiction.

2) $T(M) = T(M_1)$, et M_1 est complet.

Puisque $\Delta_M \subseteq K \times \Sigma^\circ \times (\Gamma \setminus \{Z_0\})$, toute transition de M est un mouvement dans M_1. Donc $T(M) \subseteq T(M_1)$.

Montrons inversement que $\forall$ $p_1, p_2 \in K$, $\forall$ $w_1, w_2 \in \Sigma^*$, et $\forall$ $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^*$, $(p_1, w_1, \gamma_1) \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (p_2, w_2, \gamma_2)$ implique $(p_1, w_1, \gamma_1) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p_2, w_2, \gamma_2)$.

Supposons le contraire, et considérons le plus court de tels mouvements dans M_1 qui ne vérifient pas cette propriété.

Alors, la première transition utilisée est de type (iii), et

$$(p_1, w_1, \gamma_1) \underset{M_1}{\vdash} (r(x,Z), \bar{w}_1, \bar{\gamma}_1 Z') \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (p_2, w_2, \gamma_2),$$

avec $x\bar{w}_1 = w_1$, $\bar{\gamma}_1 Z'Z = \gamma_1$, $x \in \Sigma^\circ$, et

$$\exists\ \gamma' \in \Gamma^*, \exists\ q \in K \text{ tels que } \delta(p_1, x, Z) = (q, \gamma'), \text{ et } (p_1, x, Z) \in \Delta_M.$$

Alors, $\delta_1(r(x,Z), \Lambda, Z') = (q, Z'\gamma')$.

Comme M_1 est déterministe,

$$(r(x,Z), \bar{w}_1, \bar{\gamma}_1 Z') \underset{M_1}{\vdash} (q, \bar{w}_1, \bar{\gamma}_1 Z'\gamma') \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (p_2, w_2, \gamma_2).$$

D'après l'hypothèse de minimalité et comme $q \in K$,

$$(q, \bar{w}_1, \bar{\gamma}_1 Z'\gamma') \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p_2, w_2, \gamma_2).$$

Donc $(p_1, w_1, \gamma_1) \underset{M}{\vdash} (q, \bar{w}_1, \bar{\gamma}_1 Z'\gamma') \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p_2, w_2, \gamma_2)$, ce qui contredit l'hypothèse.

Or, si $w \in T(M_1)$, $\exists\ s \in F \subseteq K$, $\exists\ \gamma \in \Gamma^*$ tels que $(p_0,w,Z_0) \underset{M_1}{\overset{*}{\vdash}} (s,\Lambda,\gamma)$, ce qui implique d'après la propriété précédente, que $(p_0,w,Z_0) \underset{M}{\overset{*}{\vdash}} (s,\Lambda,\gamma)$. Donc $w \in T(M)$, et $T(M_1) \subseteq T(M)$.

En outre, comme M est complet, $\gamma = Z_0$ et M_1 est complet.

3) $\Delta_{M_1} = \{(p,x,Z) \in K_1 \times \Sigma^\circ \times \Gamma \mid \exists\ q \in K_1$ tel que $\delta_1(p,x,Z) = (q,\Lambda)\}$.

Soit $(p,x,Z) \in \Delta_{M_1}$.

Par construction de M_1, $\delta_1(p,x,Z)$ n'est pas de type (iv).

Si $\delta_1(p,x,Z)$ est du type (i), $\exists\ (q,\gamma) \in K \times \Gamma^*$ tel que $\delta(p,x,Z) = (q,Z\gamma)$. Alors, $\delta_1(p,x,Z) = (q,Z\gamma)$ et $(p,x,Z) \notin \Delta_{M_1}$.

Donc $\delta_1(p,x,Z)$ est de type (ii) ou (iii), et la propriété (3) est évidente.

4) M_1 vérifie la condition (II.2), c'est-à-dire que

$(p_i,x_i,Z) \in \Delta_{M_1}$ pour $i=1,2$ implique $\delta_1(p_j,x_i,Z) = \delta_1(p_i,x_i,Z)$

pour $i,\ j \in \{1,2\}$.

Remarquons d'abord d'après (3) que $p_i \in K$ et que $(p_i,x_i,Z) \in \Delta_M$ pour $i=1,2$.

Donc, $\exists\ s_i \in K$, $\exists\ \gamma_i \in \Gamma^* \setminus Z\Gamma^*$ tels que

$\delta(p_i,x_i,Z) = \delta(p_j,x_i,Z) = (s_i,\gamma_i)$, et $(p_j,x_i,Z) \in \Delta_M$ pour $i,j \in \{1,2\}$.

Posons $\delta_1(p_i,x_i,Z) = (q_i,\Lambda)$, et distinguons trois cas :

a) $q_i \in K$ pour $i=1,2$. Alors, d'après (ii),

$\gamma_1 = \gamma_2 = \Lambda$, et $\delta_1(p_j,x_i,Z) = \delta(p_j,x_i,Z)$, $\quad i,\ j \in \{1,2\}$.

b) $q_i \in K'$ pour $i=1,2$. Alors, d'après (iii),

$\gamma_i \neq \Lambda$, $q_i = r(x_i,Z)$, pour $i=1,2$, et

$\delta_1(p_j,x_i,Z) = (r(x_i,Z),\Lambda) = \delta_1(p_i,x_i,Z)$, $\forall\ i,\ j \in \{1,2\}$.

c) $\exists\ i_1, i_2 \in \{1,2\}$ tels que $q_{i_1} \in K$ et $q_{i_2} \in K'$.

Nous pouvons supposer $i_1 = 1$ et $i_2 = 2$.

Dans ce cas, $\gamma_1 = \Lambda$ et $\gamma_2 \neq \Lambda$.

Donc $\delta_1(p_j,x_1,Z) = \delta(p_j,x_1,Z) = (s_1,\Lambda)$ pour $j=1,2$.

D'autre part, $\delta(p_j,x_2,Z) = (s_2,\gamma_2)$, et par construction de M_1, $\delta_1(p_j,x_2,Z) = (r(x_2,Z),\Lambda)$ pour $j=1,2$

et ceci achève la démonstration.

Pour la condition nécessaire de caractérisation, posons la définition suivante :

Définition II.3 : Un automate à pile de mémoire M *sera dit sans mot vide si* $\delta(p,\Lambda,Z) = \emptyset$ *pour tout* $(p,Z) \in K \times \Gamma$.

Théorème II.1 : Tout C-langage permutable est reconnu par un automate permutable sans mot vide.

En effet, d'après le théorème I.2, un tel C-langage est engendré par une C-grammaire 2-prédictive G dans laquelle $P \subset (V \setminus \Sigma) \times (V^* \setminus VVW)$.

Soient K et $\bar{K}$ deux ensembles d'états différents liés biunivoquement aux éléments de $(V \setminus \Sigma) \cup \{\Lambda\}$:

$$K = \{q(\xi) \mid \xi \in (V \setminus \Sigma) \cup \{\Lambda\}\}, \text{ et } \bar{K} = \{\bar{q}(\xi) \mid \xi \in (V \setminus \Sigma) \cup \{\Lambda\}\}.$$

Posons $\Gamma = V \setminus \Sigma$, et soit $\bar{\Gamma}$ un nouvel alphabet lié biunivoquement à Γ : $\Gamma = \{\bar{\mu} \mid \mu \in \Gamma\}$.

Soient $f_1 : (V \setminus \Sigma)^* \to (V \setminus \Sigma)^*$,

$f_2 : (V \setminus \Sigma)^* \to \Gamma^*$, et

$\bar{f}_2 : (V \setminus \Sigma)^* \to \bar{\Gamma}^*$,

des applications définies pour tout $\phi \in (V \setminus \Sigma)^*$ par

$f_1(\phi) = \Lambda$ si $\phi = \Lambda$,

$f_1(\phi) = \mu_1$ si $\phi = \mu_1\phi'$, avec $\mu_1 \in V \setminus \Sigma$ et $\phi' \in (V \setminus \Sigma)^*$,

$f_2(\phi) = \bar{f}_2(\phi) = \Lambda$ si $|\phi| \leqslant 1$,

$f_2(\phi) = \mu_2$ et $\bar{f}_2(\phi) = \bar{\mu}_2$, si $\phi = \mu_1 \mu_2 \phi'$, avec $\mu_1, \mu_2 \in V \setminus \Sigma$,
et $\phi' \in (V \setminus \Sigma)^*$.

Posons encore $F = \{\bar{q}(\xi) \in \bar{K} \mid \xi \in W \cup \{\Lambda\}\}$, et

$$M = (K \cup \bar{K},\ \Sigma,\ \Gamma \cup \bar{\Gamma} \cup \{Z_0\},\ \delta,\ Z_0,\ \bar{q}(\sigma),\ F),$$

où Z_0 est un nouvel élément, et où δ est défini de la façon suivante, $\forall\ \xi,\ \tau \in V \setminus \Sigma$:

- si $(\xi \to a\phi) \in P$, et $\forall\ \phi' \in V^*$: $\xi \in W$ implique $(\tau \to a\phi') \notin P$:

alors (i) $\delta(q(\xi),a,Z) = (q(f_1(\phi)),\ Z\ f_2(\phi))$, $\forall\ Z \in \{\tau,\bar{\tau}\}$,

(ii) $\delta(\bar{q}(\xi),a,Z_0) = (q(f_1(\phi)),\ Z_0\ \bar{f}_2(\phi))$ si $|\phi| = 2$,

(iii) $\delta(\bar{q}(\xi),a,Z_0) = (\bar{q}(f_1(\phi)),Z_0)$ si $|\phi| \leqslant 1$,

- si $\xi \in W \cup \{\Lambda\}$, et $(\tau \to a\phi) \in P$,

alors (iv) $\delta(q(\xi),a,\tau) = (q(f_1(\phi)),\ f_2(\phi))$,

(v) $\delta(q(\xi),a,\bar{\tau}) = (q(f_1(\phi)),\ \bar{f}_2(\phi))$ si $|\phi| = 2$,

(vi) $\delta(q(\xi),a,\bar{\tau}) = (\bar{q}(f_1(\phi)),\ \Lambda)$ si $|\phi| \leqslant 1$.

Remarquons d'abord que $\forall\ \phi \in \Sigma^*$ tel que $|\phi| \leqslant 2$, $\phi = f_1(\phi)\ f_2(\phi)$. Montrons alors la propriété suivante :

(P1) : $\forall\ w \in \Sigma^*$, $\forall\ r(\xi) \in K \cup \bar{K}$, $\forall\ U_0,\dots,U_\ell \in \Gamma \cup \bar{\Gamma} \cup \{Z_0\}$ tels que

$$(\bar{q}(\sigma),w,Z_0) \overset{*}{\vdash} (r(\xi),\Lambda,U_0\dots U_\ell), \text{ alors}$$

1) $U_0 = Z_0$, $U_1 \in \bar{\Gamma}$, et $U_i \in \Gamma$ pour $2 \leqslant i \leqslant \ell$,

2) $r(\xi) \in \bar{K}$ si et seulement si $\ell = 0$,

3) $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} w\ \xi\ U_\ell\ \dots\ U_2\ \bar{U}_1$, en notant $\bar{U}_1$ l'élément de $V \setminus \Sigma$ associé à U_1.

(P1) est trivialement vraie pour les mouvements de longueur 0 dans M.

Supposons la vraie pour le mouvement $(\bar{q}(\sigma),w,Z_0) \overset{*}{\vdash} (r(\xi),\Lambda,U_0\ldots U_\ell)$, et considérons le mouvement suivant :

$$(\bar{q}(\sigma),wa,Z_0) \overset{*}{\vdash} (r(\xi),a,U_0\ldots U_\ell) \vdash_{\overline{M}} (r(\nu),\Lambda,\gamma),$$

avec $a \in \Sigma$ et $\gamma \in (\Gamma \cup \bar{\Gamma} \cup \{Z_0\})^*$.

Distinguons deux cas :

a) $\exists\ (\xi \to a\nu f_2(\phi)) \in P$:

Alors , $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} w\ \xi\ U_\ell\ \ldots\ \bar{U}_1 \Longrightarrow wa\nu f_2(\phi)\ U_\ell\ \ldots\ \bar{U}_1$;

or, d'après la forme des transitions (i) à (iii), on a :

$\gamma = U_0\ U_1\ \ldots\ U_\ell\ f_2(\phi)$ si $\ell > 0$ et si $r(\nu) \in K$

$\gamma = U_0$ si $\ell = 0$, si $r(\xi) \in \bar{K}$, et si $r(\nu) \in \bar{K}$,

$\gamma = U_0\ \bar{f}_2(\phi)$ si $\ell = 0$, si $r(\xi) \in \bar{K}$, et si $r(\nu) \in K$.

b) $\xi \in W \cup \{\Lambda\}$ (ce qui implique que $\ell>0$ d'après les transitions (iv) à (vi), et $\exists\ (U_\ell \to a\ \nu\ f_2(\phi)) \in P$:

Alors, $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} w\ \xi\ U_\ell\ \ldots\ \bar{U}_1 \overset{*}{\Longrightarrow} w\ U_\ell\ \ldots\ \bar{U}_1 \Longrightarrow$

$w\ a\ \nu\ f_2(\phi)\ U_{\ell-1}\ \ldots\ \bar{U}_1$, si $\ell > 1$,

et $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} w\ a\ \nu\ f_2(\phi)$ si $\ell = 1$.

Or,d'après la forme des transitions (iv) à (vi), on a :

$\gamma = Z_0\ f_2(\phi)\ U_{\ell-1}\ \ldots\ \bar{U}_1$ si $\ell > 1$ et si $r(\nu) \in K$,

$\gamma = Z_0\ \bar{f}_2(\phi)$ si $\ell = 1$ et si $r(\nu) \in K$,et

$\gamma = Z_0$ si $\ell = 1$ et si $r(\nu) \in \bar{K}$.

(P1) est donc vraie dans tous les cas.

Soit maintenant $w \in T(M)$;

Alors, $\exists\ \xi \in W \cup \{\Lambda\}$, $\exists\ \gamma \in (\Gamma \cup \bar{\Gamma} \cup \{Z_0\})^*$ tels que

$$(\bar{q}(\sigma), w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (\bar{q}(\xi), \Lambda, \gamma), \text{ avec } \bar{q}(\xi) \in F.$$

Donc, d'après (P1), $\gamma = Z_0$, et $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} w\ \xi \overset{*}{\Longrightarrow} w$.

Par conséquent, M est complet et $T(M) \subseteq L(G)$.

Montrons inversement que $L(G) \subseteq T(M)$, en montrant au préalable la propriété suivante :

(P2) : $\forall\ w \in \Sigma\Sigma^*$, $\forall\ y, y' \in V^*$ tels que $w \notin \mathrm{Init}\ (y')$, $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} y' \Longrightarrow wy$ implique

$\exists\ \ell \geq 1$, $\exists\ \xi_1 \in (V \setminus \Sigma) \cup \{\Lambda\}$, $\exists\ \xi_i \in (V \setminus \Sigma) \setminus W$ pour $2 \leq i \leq \ell$,

tels que 1) $y = \xi_1 \ldots \xi_\ell$,

2) $(\bar{q}(\sigma), w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (\bar{q}(\xi_1), \Lambda, Z_0)$ si $\ell = 1$,

3) $(\bar{q}(\sigma), w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (q(\xi_1), \Lambda, Z_0\ \bar{\xi}_\ell\ \xi_{\ell-1} \ldots \xi_2)$ si $\ell \geq 2$.

Nous ferons la démonstration par récurrence sur $|w|$.

- $|w| = 1$: alors $(\sigma \to wy) \in P$ avec $y \in (V \setminus \Sigma)^* \setminus VVW$.

Si $|y| \leq 1$, alors $y = \xi_1 \in (V \setminus \Sigma) \cup \{\Lambda\}$, $(\ell = 1)$,
et $(\bar{q}(\sigma), w, Z_0) \vdash (\bar{q}(\xi_1), \Lambda, Z_0)$ par (iii).

Si $|y| = 2$, alors $y = \xi_1\ \xi_2$ avec $\xi_1 \in V \setminus \Sigma$, $\xi_2 \in V \setminus (\Sigma \cup W)$, $(\ell = 2)$,
et $(\bar{q}(\sigma), w, Z_0) \vdash (q(\xi_1), \Lambda, Z_0\ \bar{\xi}_2)$ par (ii).

(P2) est donc vraie.

- Supposons que (P2) est vraie pour un mot w quelconque.

Considérons la dérivation $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} y' \Longrightarrow wy \overset{*}{\Longrightarrow} z' \Longrightarrow waz$,
avec $z, z' \in V^*$, $a \in \Sigma$, et $wa \notin \mathrm{Init}\ (z')$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $y = \xi_1 \ldots \xi_\ell$, avec $\ell \geq 1$,
$\xi_1 \in (V \setminus \Sigma) \cup \{\Lambda\}$, et $\xi_i \in (V \setminus \Sigma) \setminus W$ pour $2 \leq i \leq \ell$.

Comme la dérivation est la plus à gauche, $\exists$ $z'' \in V^*$ tel que $a \notin \mathrm{Init}\ (z'')$, et $y = \xi_1 \ldots \xi_\ell \overset{*}{\Longrightarrow} z'' \Longrightarrow az$.

Puisque G est prédictive, $z'' \Longrightarrow az$ utilise une production $\mu \to a\phi$, avec $z'' = \mu\phi_1$, et $z = \phi\phi_1$ ($\phi_1 \in V^*$) ; de plus, $\mu \in W$ implique $\forall\ \phi'' \in V^*$: $\phi_1 \overset{*}{\not\Longrightarrow} a\phi''$.

Distinguons deux cas :

a) $z'' = \xi_1 \ldots \xi_\ell$, et $\mu = \xi_1 \in V \setminus \Sigma$:

- Si $\ell \geq 2$, $z = \phi\phi_1 = f_1(\phi)\ f_2(\phi)\ \xi_2 \ldots \xi_\ell$, et

$$(\bar{q}(\sigma), wa, Z_0) \overset{*}{\vdash} (q(\xi_1), a, Z_0\ \bar{\xi}_\ell\ \xi_{\ell-1} \ldots \xi_2) \vdash$$
$$(q(f_1(\phi)), \Lambda, Z_0\ \bar{\xi}_\ell\ \xi_{\ell-1} \ldots \xi_2\ f_2(\phi)),$$

avec $f_1(\phi) \in (V \setminus \Sigma) \cup \{\Lambda\}$, $f_2(\phi) \in (V \setminus \Sigma) \setminus W$, par (i).

- Si $\ell = 1$ et $|\phi| = 2$, $z = \phi\phi_1 = f_1(\phi)\ f_2(\phi)$, et

$$(\bar{q}(\sigma), wa, Z_0) \overset{*}{\vdash} (\bar{q}(\xi_1), a, Z_0) \vdash (q(f_1(\phi)), \Lambda, Z_0, \bar{f}_2(\phi)),$$

avec $f_1(\phi) \in (V \setminus \Sigma) \cup \{\Lambda\}$, $f_2(\phi) \in (V \setminus \Sigma) \setminus W$, par (ii).

- Si $\ell = 1$ et $|\phi| \leq 1$, $z = \phi\phi_1 = f_1(\phi)$, et

$$(\bar{q}(\sigma), wa, Z_0) \overset{*}{\vdash} (\bar{q}(\xi_1), a, Z_0) \vdash (\bar{q}(f_1(\phi)), \Lambda, Z_0),$$

avec $f_1(\phi) \in (V \setminus \Sigma) \cup \{\Lambda\}$, par (iii).

Par conséquent, (P2) est vraie dans ce cas.

b) $z'' \neq \xi_1 \ldots \xi_\ell$, ou $z'' = \xi_1 \ldots \xi_\ell$ et $\mu \neq \xi_1$:

- Si $z'' = \xi_1 \ldots \xi_\ell$ avec $\mu \neq \xi_1$, alors $\xi_1 = \Lambda$ et $\mu = \xi_2$ ($\ell \geq 2$).

- Si $z'' \neq \xi_1 \ldots \xi_\ell$, puisque $\xi_1 \ldots \xi_\ell \overset{*}{\Longrightarrow} z'' \Longrightarrow az$ avec $a \notin \mathrm{Init}\ (z'')$,

$z'' \in (V \setminus \Sigma)(V \setminus \Sigma)^*$, et comme G est prédictive, $\xi_1 \ldots \xi_\ell = \Theta z''$ avec $\Theta \in W^*$. Enfin, $z'' \neq \Lambda$ et $\xi_2 \ldots \xi_\ell \in ((V \setminus \Sigma) \setminus W)^*$ implique $\ell \geq 2$, $z'' = \xi_2 \ldots \xi_\ell$, et $\Theta = \xi_1 \in W$.

Trois cas peuvent donc se présenter :

- $\ell \geq 3$: alors $z = \phi\phi_1 = f_1(\phi)\ f_2(\phi)\ \xi_3 \dots \xi_\ell$, et

$$(\bar{q}(\sigma),wa,Z_0) \overset{*}{\vdash} (q(\xi_1),a,Z_0\ \bar{\xi}_\ell \dots \xi_3\ \xi_2) \vdash (q(f_1(\phi)),\Lambda,Z_0\ \bar{\xi}_\ell \dots \xi_3\ f_2(\phi)),$$

avec $f_1(\phi) \in (V \setminus \Sigma) \cup \{\Lambda\}$, et $f_2(\phi)\ \xi_3 \dots \xi_\ell \in ((V \setminus \Sigma) \setminus W)^*$, par (iv).

- $\ell = 2$ et $|\phi| = 2$: alors $z = \phi\phi_1 = f_1(\phi)\ f_2(\phi)$, et

$$(\bar{q}(\sigma),wa,Z_0) \overset{*}{\vdash} (q(\xi_1),a,Z_0\ \bar{\xi}_2) \vdash (q(f_1(\phi)),\Lambda,Z_0\ \bar{f}_2(\phi)),$$

avec $f_1(\phi) \in (V \setminus \Sigma) \cup \{\Lambda\}$, et $f_2(\phi) \in (V \setminus \Sigma) \setminus W$, par (v).

- $\ell = 2$ et $|\phi| \leq 1$: alors $z = \phi\phi_1 = f_1(\phi)$, et

$$(\bar{q}(\sigma),wa,Z_0) \overset{*}{\vdash} (q(\xi_1),a,Z_0\ \bar{\xi}_2) \vdash (\bar{q}(f_1(\phi)),\Lambda,Z_0),$$

avec $f_1(q) \in (V \setminus \Sigma) \cup \{\Lambda\}$, par (vi).

Par conséquent, (P2) est vraie dans tous les cas.

Soit maintenant $w \in L(G)$.

. Si $w = \Lambda$, alors $\sigma \in W$, donc $\bar{q}(\sigma) \in F$ et $w = \Lambda \in T(M)$.

. Si $w \neq \Lambda$, $\exists\ y, y' \in V^*$ tels que $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} y' \Longrightarrow wy \overset{*}{\Longrightarrow} w$, avec $w \notin \text{Init}\ (y')$.

Donc $y \in W^*$, et d'après (P2), $|y| \leq 1$, $y \in (V \setminus \Sigma) \cup \{\Lambda\}$, et $(\bar{q}\ (\sigma),w,Z_0) \overset{*}{\vdash} (\bar{q}(y),\Lambda,Z_0)$.

Comme $y \in W \cup \{\Lambda\}$, $\bar{q}(y) \in F$, donc $w \in T(M)$.

Par conséquent, $T(M) = L(G)$.

Montrons maintenant que M est déterministe.

Comme M est sans mot vide, il suffit de montrer que

$$\forall\ (r,a,Z) \in (K \cup \bar{K}) \times \Sigma \times (\Gamma \cup \bar{\Gamma} \cup \{Z_0\}),\ \text{Card}\ (r,a,Z) \leq 1.$$

Dans le cas contraire, $\exists\ r_1, r_2 \in K \cup \bar{K}$, $\exists\ \gamma_1, \gamma_2 \in (\Gamma \cup \bar{\Gamma} \cup \{Z_0\})^*$ tels que $(r_i,\gamma_i) \in \delta(r,a,Z)$ pour $i=1,2$, et $(r_1,\gamma_1) \neq (r_2,\gamma_2)$.

Par construction de M, ces deux transitions sont, soit toutes deux de type (i) à (iii), soit toutes deux de type (iv) à (vi) ; mais dans chacune de ces éventualités, $(r_1,\gamma_1) \neq (r_2,\gamma_2)$ implique $\exists\ \xi \in V \setminus \Sigma$, $\exists\ \phi_1, \phi_2 \in V^*$, $\exists\ (\xi \to a\phi_i) \in P$ pour $i=1,2$, avec $\phi_1 \neq \phi_2$, ce qui contredit le fait que G est prédictive.

Montrons enfin que M vérifie la condition (II.2).

Par construction de M,

$$\Delta_M = \{(q(\xi),a,\tau) \in K \times \Sigma \times \Gamma,\ (q(\xi),a,\bar{\tau}) \in K \times \Sigma \times \bar{\Gamma} \mid$$

$$\xi \in W \cup \{\Lambda\},\ \exists\ \phi \in V^*,\ \exists\ (\tau \to a\phi) \in P\} ;$$

et $\forall\ \mu \in W \cup \{\Lambda\}$, $\forall (q(\xi),a,Z) \in \Delta_M : \delta(q(\mu),a,Z) = \delta(q(\xi),a,Z)$.

Par conséquent, $(q(\xi_i),x_i,Z) \in \Delta_M$ pour $i=1,2$, implique

$$\delta(q(\xi_j),\ x_i,Z) = \delta(q(\xi_i),x_i,Z),\ \forall\ i,\ j \in \{1,2\}.$$

M est donc bien permutable.

Une conséquence immédiate du théorème II.1 est le

Corollaire II.1 : Tout C-langage permutable est déterministe.

Montrons maintenant la proposition réciproque, à savoir :

Lemme II.2 : Tout automate permutable reconnait un C-langage permutable.

Considérons un automate permutable $M = (K,\Sigma,\Gamma,\delta,Z_0,p_0,F)$.

Soient K' un ensemble de nouveaux états liés biunivoquement aux éléments de Γ : $K' = \{p(Z) \mid Z \in \Gamma\}$, et $c \notin \Sigma$

Posons $N = (K \cup K',\ \Sigma \cup \{c\},\Gamma,\delta_1,p_0,\emptyset)$, où δ_1 est défini de la façon suivante :

- $\forall\ (p,x,Z) \in \Delta_M,\ \forall\ Z' \in \Gamma$:

  (i) $\delta_1(p,\Lambda,Z) = (p(Z),\Lambda)$,

  (ii) $\delta_1(p(Z),x,Z') = \{(q,Z'\gamma)\ |\ (q,\gamma) \in \delta(p,x,Z)\}$;

- $\forall\ (p,x,Z) \in (K \times \Sigma^{\circ} \times \Gamma) \setminus \Delta_M$:

  (iii) $\delta_1(p,x,Z) = \delta(p,x,Z)$;

- En outre, $\forall\ p \in F$;

  (iv) $\delta_1(p,c,Z_0) = (p(Z_0),\Lambda)$.

N étant ainsi défini, nous allons montrer que Zéro (N) = T(M) c, puis que Zéro (N) peut être engendré par une C-grammaire permutable. Alors, l'application du théorème (I.3) montrera que T(M) est un C-langage permutable.

Remarquons d'abord que

(1) : $\forall\ w \in (\Sigma \cup \{c\})^*,\ \forall\ q \in K \cup K',\ \forall\ \gamma \in \Gamma^*$:

$(p_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma)$ implique $\gamma \in Z_0(\Gamma \setminus \{Z_0\})^* \cup \{\Lambda\}$;

de plus, $\gamma=\Lambda$ implique $q = p(Z_0)$, $w \in \Sigma^*c$, et $\exists\ r \in F$ tel que

$$(p_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (r,c,Z_0) \underset{N}{\vdash} (q,\Lambda,\Lambda).$$

En effet, la définition de δ_1 entraîne immédiatement que

$\gamma \in Z_0(\Gamma \setminus \{Z_0\})^* \cup \{\Lambda\}$, et que $w \in \Sigma^*$ implique $\gamma \neq \Lambda$.

Supposons que $\gamma=\Lambda$; alors w est de la forme $w_1\ c\ w_2$ avec $w_1 \in \Sigma^*$, $w_2 \in (\Sigma \cup \{c\})^*$, et $\exists\ \gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma^*$, $\exists\ r,\ s \in K \cup K'$ tels que $(p_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (r,cw_2,\gamma_1 Z) \underset{N}{\vdash} (s,w_2,\gamma_1\ \gamma_2) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (q,\Lambda,\Lambda)$.
Par conséquent, $(s,\gamma_2) \in \delta_1(r,c,Z)$ (transition de type (iv)).
Donc $r \in F \subseteq K$, $Z = Z_0$, $s = p(Z_0)$ et $\gamma_2 = \Lambda$.
Comme $\gamma_1 Z \in \Gamma^* Z_0$, $\gamma_1 = \Lambda$; donc $q = p(Z_0)$ et $w_2 = \Lambda$.

Montrons maintenant que

(2) : $\forall\ q \in K,\ \forall\ \gamma \in \Gamma^*,\ \forall\ w \in \Sigma^*$:

$(p_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma)$ si et seulement si $(p_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma)$.

Considérons d'abord $(p_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma)$.

Puisque $\Delta_M \subseteq K \times \Sigma^\circ \times (\Gamma \setminus \{Z_0\})$, toute transition de M est un mouvement dans N, et $(p_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma)$.

Réciproquement, supposons que $\exists$ p, q $\in$ K, $\exists$ w $\in \Sigma^*$, $\exists$ $\gamma \in Z_0(\Gamma \setminus \{Z_0\})^*$; $\exists$ $\gamma' \in \Gamma^*$, tels que $(p,w,\gamma) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma')$ et que $(p,w,\gamma) \cancel{\overset{*}{\underset{M}{\vdash}}} (q,\Lambda,\gamma')$.

Considérons le plus court de ces mouvements ; il est de longueur non nulle et de la forme :

(*) $$(p,x_1w_1,\bar\gamma_1\, Z_1) = (p,w,\gamma) \underset{N}{\vdash} (p_1,w_1,\bar\gamma_1\, \gamma_1) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma'),$$

avec $\delta_1(p,x_1,Z_1) \ni (p_1,\gamma_1)$ $(p_1 \in K \cup K',\ \bar\gamma_1,\ \gamma_1 \in \Gamma^*,\ x_1 \in \Sigma^\circ)$.

La minimalité de (*) implique $(p_1,\gamma_1) \notin \delta(p,x_1,Z_1)$; donc $\delta_1(p,x_1,Z_1)$ est de type (i), et par conséquent,

$$p_1 = p(Z_1),\ x_1 = \Lambda,\ \gamma_1 = \Lambda,\ Z_1 \neq Z_0 \quad \text{et}$$

$\exists$ $y_1 \in \Sigma^\circ$ tel que $(p,y_1,Z_1) \in \Delta_M$.

Puisque $Z_1 \neq Z_0$, $\bar\gamma_1 \neq \Lambda$. Posons $\bar\gamma_1\ \gamma_1 = \bar\gamma_1 = \bar\gamma_2\ Z_2$ avec $\bar\gamma_2 \in \Gamma^*$ et $Z_2 \in \Gamma$. En outre, comme $p_1 \in K'$ et $q \in K$, $\exists$ $p_2 \in K \cup K'$, $\exists$ $x_2 \in \Sigma^\circ$, $\exists$ $\gamma_2 \in \Gamma^*$, tels que $(p_1,x_2\, w_2,\ \bar\gamma_2\, Z_2) \underset{N}{\vdash} (p_2,w_2,\bar\gamma_2\ \gamma_2) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma)$, avec $x_2\ w_2 = w_1$.

Puisque $p_1 = p(Z_1)$, la transition $(p_2,\gamma_2) \in \delta_1(p_1,x_2,Z_2)$ est de type (ii) ; donc $p_2 \in K$, et $\exists$ $\gamma_2' \in \Gamma^*$, $\exists$ r $\in$ K tels que

$$\gamma_2 = Z_2\gamma_2' \ ,\ (r,x_2,Z_1) \in \Delta_M,\ \text{et}\ \ (p_2,\gamma_2') \in \delta(r,x_2,Z_1).$$

Or M est permutable ; donc $\delta(r,x_2,Z_1) = \delta(p,x_2,Z_1) = (p_2,\gamma_2')$.

D'autre part, l'hypothèse de minimalité de (*) implique que

$$(p_2,w_2,\bar\gamma_2\gamma_2) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma').$$

Par conséquent, $(p,w,\gamma) = (p,x_2w_2,\bar\gamma_2Z_2Z_1) \underset{M}{\vdash} (p_2,w_2,\bar\gamma_2\ Z_2\ \gamma_2')$

$= (p_2,w_2,\bar\gamma_2\ \gamma_2) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma')$. Contradiction.

Montrons maintenant que :

(3) $T(M)\ c = \text{Zéro}\ (N)$.

Considérons $wc \in T(M)\ c \subseteq \Sigma^* c$.

$\exists\ q \in F \subseteq K$, $\exists\ \gamma \in \Gamma^*$ tels que $(p_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma)$.

Alors, d'après (2), $(p_0,wc,Z_0) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (q,c,\gamma)$; Puisque M est complet, $\gamma = Z_0$; comme $\delta_1\ (q,c,Z_0) = (p(Z_0),\Lambda)$, $wc \in \text{Zéro}\ (N)$.

Inversement, considérons $w_1 \in \text{Zéro}\ (N)$.

D'après (1), $\exists\ r \in F \subseteq K$, $\exists\ w \in \Sigma^*$ tels que $w_1 = wc$ et $(p_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (r,\Lambda,Z_0)$.

Alors, d'après (2), $w \in T(M)$.

Construisons maintenant une C-grammaire qui engendre Zéro (N), et montrons qu'elle est permutable.

Posons pour cela $V \setminus \Sigma_1 = (K \cup K') \times \Gamma \times (K \cup K')$, $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{c\}$,

$\sigma_q = [p_0,Z_0,q] \in V \setminus \Sigma_1$, pour tout $q \in K \cup K'$,

et $G_q = (V,\Sigma_1 P,\sigma_q)$, où P est défini de la façon suivante :

- pour tous $Z, Z_1, \ldots, Z_m \in \Gamma$, $p, q \in K \cup K'$, $x \in \Sigma_1^\circ$ tels que

  $(q,Z_1\ldots Z_m) \in \delta_1(p,x,Z)$:

  $([p,Z,s_1] \to x\ [q,Z_m,s_m][s_m,Z_{m-1},s_{m-1}] \ldots [s_2,Z_1,s_1]) \in P$,

  pour tous les $s_i \in K \cup K'$, $1 \leq i \leq m$,

- pour tous $Z \in \Gamma$, $p,q \in K \cup K'$, $x \in \Sigma_1^\circ$ tels que $(q,\Lambda) \in \delta_1(p,x,Z)$:

  $([p,Z,q] \to x) \in P$.

Nous avons alors d'après [6]:

(4) $$\text{Zéro}\ (N) = \bigcup_{q \in K \cup K'} L(G_q),$$

(5) $\forall\ [p,Z,q] \in V \setminus \Sigma$, $\forall\ w \in \Sigma_1^*$, $\forall\ y \in (V \setminus \Sigma_1)^*$, $\forall\ r \in K \cup K'$:

$[p,Z,q] \overset{*}{\underset{G_r}{\Longrightarrow}} wy$ si et seulement si $\exists\ p_1,\dots,p_m \in K \cup K'$, $\exists\ U_1,\dots,U_m \in \Gamma$ tels que

- $y = [p_1,U_1,p_2] \dots [p_m,U_m,q]$, et
- $(p,w,Z) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (p_1, ,U_m \dots U_1)$,

(6) $\forall\ [p,Z,q] \in V \setminus \Sigma_1, \forall\ w \in \Sigma_1^*, \forall\ r \in K \cup K'$:

$[p,Z,q] \overset{*}{\underset{G_r}{\Longrightarrow}} w$ si et seulement si $(p,w,Z) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (q,\Lambda,\Lambda)$.

Nous déduisons de (1) et (6) que $q \neq p(Z_0)$ implique $L(G_q) = \emptyset$. Posons $\sigma = \sigma_{p(Z_0)}$ et notons $\bar{G} = (\bar{V},\Sigma,\bar{P},\sigma)$ la grammaire réduite de $G_{p(Z_0)}$. Alors, Zéro(N) = $L(\bar{G})$.

Montrons que :

(7) $\forall\ w \in \Sigma\Sigma^*, \forall\ y, y' \in V^*$ tels que $\sigma \overset{*}{\underset{\bar{G}}{\Longrightarrow}} y' \underset{\bar{G}}{\Longrightarrow} wy$ avec $w \notin \mathrm{Init}\ (y')$ $\exists\ w_1 \in \Sigma^*, \exists\ a \in \Sigma, \exists\ p, q \in K, \exists\ Z \in \Gamma, \exists\ m \geq 1, \exists\ p_i \in K \cup K', \exists\ Z_i \in \Gamma$ pour $1 \leq i \leq m$, et $\exists\ \ell : 1 \leq \ell \leq m$, tels que

- $w = w_1 a$,
- $y = [p,Z_1,p_1]\ [p_1,Z_2,p_2] \dots [p_{m-1},Z_m,p_m]$,
- $(p_0,w_1\ a,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q,a,Z_m \dots Z_{\ell+1}\ Z) \underset{M}{\vdash} (p,\Lambda,Z_m \dots Z_1)$.

Considérons une telle dérivation $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} y' \Longrightarrow wy$.

Par construction de $\bar{G}$, $\exists\ \phi_1, \phi_2 \in (\bar{V} \setminus \Sigma)^*$, $\exists\ \alpha \in \bar{V} \setminus \Sigma$, $\exists\ w_1 \in \Sigma^*$, $\exists\ a \in \Sigma$ tels que $y' = w_1\ \alpha\ \phi_1$, $y = \phi_2\ \phi_1$, et $(\alpha \to a\ \phi_2) \in \bar{P} \subseteq P$.

D'après (5), $\exists\ k \geq 0$, $\exists\ j\ (0 \leq j \leq k)$, $\exists\ U, U_i \in \Gamma$ pour $1 \leq i \leq k$, $\exists\ r, r_i \in K \cup K'$ pour $1 \leq i \leq k$, tels que

$$\alpha = [r,U,r_{j+1}],\ \phi_1 = [r_{j+1},U_{j+1},r_{j+2}] \dots [r_k,U_k,p(Z_0)],$$

$$\phi_2 = [r_1,U_1,r_2] \dots [r_j,U_j,r_{j+1}],$$

(**) $(p_0,w_1,Z_0) \vdash_N^* (r,\Lambda,U_k \dots U_{j+1}\ U)$, et

$(r_1,U_j \dots U_1) \in \delta_1(r,a,U)$.

Distinguons deux cas :

a) $r \in K$: alors $\delta_1(r,a,U)$ est de type (iii) ;

donc $r_1 \in K$, $j \geq 1$, et $\delta_1(r,a,U) = \delta(r,a,U) = (r_1,U_j \dots U_1)$.

D'autre part, d'après (2), $(p_0,w_1,Z_0) \vdash_M^* (r,U_k \dots U_{j+1}\ U)$,
et la propriété (7) est vérifiée.

b) $r \in K'$:

Comme $p_0 \in K$, le mouvement (**) est de longueur non nulle, et
$\exists\ s_1 \in K \cup K'$, $\exists\ x_1 \in \Sigma^\circ$, $\exists\ U' \in \Gamma$, $\exists\ \gamma_1 \in \Gamma^*$ tels que
$(p_0,w_1,Z_0) \vdash_N^* (s_1,x_1,\gamma_1 U') \vdash_N (r,\Lambda,U_k \dots U_{j+1}\ U)$,
avec $\delta_1(s_1,x_1,U') = (r,\Lambda,\gamma_2)$ et $\gamma_1\gamma_2 = U_k \dots U_{j+1}\ U$. Or $r \in K'$
implique que $\delta_1(s_1,x_1,U')$ est du type (i), et donc que $s_1 \in K$,
$x_1 = \gamma_2 = \Lambda$, $r = p(U')$, et $\gamma_1 = U_k \dots U_{j+1}\ U$, et que d'autre part,
$\exists\ x_2 \in \Sigma^\circ$ tel que $(s_1,x_2,U') \in \Delta_M$. Enfin, $\delta_1(p(U'),a,U)$ est du type
(ii), donc $j \geq 1$ et $U_j = U$, et de plus, $\exists\ s_2 \in K$ tel que
$\delta(s_2,a,U') = (r_1,U_{j-1} \dots U_1)$; avec $(s_2,a,U') \in \Delta_M$.

Par conséquent, d'après (2), $(p_0,w_1,Z_0) \vdash_M^* (s_1,\Lambda,U_k \dots U_{j+1}\ U_j\ U')$,
et puisque M est permutable, $\delta(s_1,a,U') = \delta(s_2,a,U') = (r_1,U_{j-1} \dots U_1)$.
La propriété (7) est donc vraie dans tous les cas.

Montrons enfin la propriété suivante :

(8) $[p,Z,q] \in \bar{V} \setminus \Sigma_1$ implique $q = p(Z) \in K'$.

La propriété est triviale si Zéro $(N) = \emptyset$.

Sinon, $\exists\ w \in \Sigma_1^*$ tel que $[p,Z,q] \overset{*}{\underset{\bar{G}}{\Longrightarrow}} w$, et d'après (6) : $(p,w,Z) \vdash_N^* (q,\Lambda,\Lambda)$

Donc, $\exists\ x_1 \in \Sigma_1^\circ$, $\exists\ Z' \in \Gamma$, $\exists\ r \in K \cup K'$ tels que

$$(p,w,Z) \vdash_N^* (r,x_1,Z') \vdash_N (q,\Lambda,\Lambda).$$

Puisque $\delta_1(r,x_1,Z') = (q,\Lambda)$ ne peut être que du type (i) ou (iv), $q = p(Z')$.

En outre $Z' = Z$, car dans le cas contraire, $\exists\ p_1, p_2 \in K \cup K'$,
$\exists\ x_2 \in \Sigma_1^\circ$, $\exists\ w_1 \in \Sigma^*$, $\exists\ \gamma \in \Gamma^*$, $\exists\ Z'' \in \Gamma$, tels que $Z'' \neq Z$ et

$$(p,w,Z) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (p_1,x_2\ w_1,Z) \underset{N}{\vdash} (p_2,w_1,Z''\gamma) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (r,x_1,Z') \ ;$$

Or une transition $\delta_1(p_1,x_2,Z) = (p_2,Z''\gamma)$ est impossible si $Z'' \neq Z$.

Il reste à montrer que $\bar{G}$ vérifie la condition (I.1).

Soient $y_1,y_2,y_1',y_2' \in V^*$, $w \in \Sigma_1\ \Sigma_1^*$ tels que $\sigma \overset{*}{\underset{\bar{G}}{\Longrightarrow}} y_i' \underset{\bar{G}}{\Longrightarrow} y_i$,
avec $w \notin \mathrm{Init}\ (y_i')$ pour $i=1,2$.

Distinguons deux cas :

c) $\mathrm{Card}_c(w) \neq 0$:

Posons alors $w = w_1cw_2$ avec $w_1 \in \Sigma^*$ et $w_2 \in \Sigma_1^*$.

D'après (5), $\exists\ \gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma^*$, $\exists\ q_1,q_2 \in K \cup K'$ tels que

$$(p_0,w_1cw_2,Z_0) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (q_i,\Lambda,\gamma_i), \text{ avec } |\gamma_i| = |y_i| \text{ pour } i=1,2.$$

Donc, $\exists\ p_i,p_i' \in K \cup K'$, $\exists\ \bar{\gamma}_i,\gamma_i' \in \Gamma^*$, $\exists\ Z_i \in \Gamma$ pour $i=1,2$, tels que

$$(p_0,w_1cw_2,Z_0) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (p_i,cw_2,\bar{\gamma}_i\ Z_i) \underset{N}{\vdash} (p_i',w_2,\bar{\gamma}_i\gamma_i') \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (q_i,\Lambda,\gamma_i),$$

pour $i=1,2$.

Comme $\delta_1(p_i,c,Z_i)$ est du type (iv) pour $i=1,2$,

$$Z_1 = Z_2 = Z_0,\ \gamma_1' = \gamma_2' = \Lambda \text{ , et d'après (1), } \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = \Lambda.$$

Par conséquent $|y_i| = 0$ pour $i=1,2$, et $y_1 = y_2$.

d) $\mathrm{Card}_c(w) = 0$:

Puisque $w \neq \Lambda$, $\exists\ a \in \Sigma$, $\exists\ w_1 \in \Sigma^*$ tels que $w = w_1a$.

D'après [7] et [8], $\forall\, i \in \{1,2\}$, $\exists\, p_i, q_i \in K$, $\exists\, U_i \in \Gamma$, $\exists\, m(i) \geq 1$, $\exists\, Z_j(i)$ pour $1 \leq j \leq m(i)$, $\exists\, \ell(i)$ $(1 \leq \ell(i) \leq m(i))$, tels que

$$\cdot\ y_i = [p_i, Z_1(i), p(Z_1(i))] \ldots [p(Z_{m(i)-1}(i)), Z_{m(i)}(i), p(Z_{m(i)}(i))$$

$$\cdot\ (p_0, w_1 a, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q_i, a, Z_{m(i)}(i) \ldots Z_{\ell(i)+1}(i)\, U_i) \underset{M}{\vdash} (p_i, \Lambda, Z_{m(i)}(i) \ldots Z_1(i)).$$

Puisque M est déterministe, $\delta(q_i, \Lambda, U_i) = \emptyset$, pour $i=1,2$, et d'après [7], $q_1 = q_2$, $U_1 = U_2$, $Z_{m(1)}(1) \ldots Z_{\ell(1)+1}(1) = Z_{m(2)}(2) \ldots Z_{\ell(2)+1}(2)$; alors , comme $\delta(q_i, a, U_i) = (p_i, Z_{\ell(i)}(i) \ldots Z_1(i))$ pour $i=1,2$, $p_1 = p_2$, $\ell(1) = \ell(2)$, $Z_j(1) = Z_j(2)$ pour $1 \leq j \leq \ell(1)$, et $m(1) = m(2)$, $Z_j(1) = Z_j(2)$ pour $\ell(1)+1 \leq j \leq m(1)$.

Par conséquent $y_1 = y_2$, et $T(M)c$ est bien permutable.

Du théorème II.1 et du lemme II.2, nous déduisons le résultat essentiel de ce chapitre :

Théorème II.2 : Un C-langage est permutable si et seulement s'il existe un automate permutable qui le reconnaisse.

Nous déduisons aussi le corollaire suivant :

Corollaire II.2 : Tout K-langage est permutable.

En effet, soient R un K-langage et $A = (K, \Sigma, f, p_0, F)$ un automate d'états fini qui le reconnaisse.

Soit $M = (K, \Sigma, \{Z_0\}, \delta, Z_0, p_0, F)$ l'automate à pile de mémoire tel que $\delta(p, a, Z_0) = (f(p,a), Z_0)$, pour tout $(p,a) \in K \times \Sigma$. Il est clair que $T(M) = R$, et que M est permutable.

Remarquons que les automates permutables constituent une extension des s-machines [12]. Une s-machine est en effet un automate à pile de mémoire déterministe, sans mot vide, à un seul état, qui "vide sa pile" toutes les fois qu'il accepte un mot. Puisqu'il n'existe qu'un seul état, la condition

(II.2) est vérifiée.

D'autre part, la condition que la pile soit vide quand un mot est accepté n'est qu'une restriction des automates à pile de mémoire complets, comme le prouve la démonstration du lemme II.2.

INTRODUCTION AU CHAPITRE III

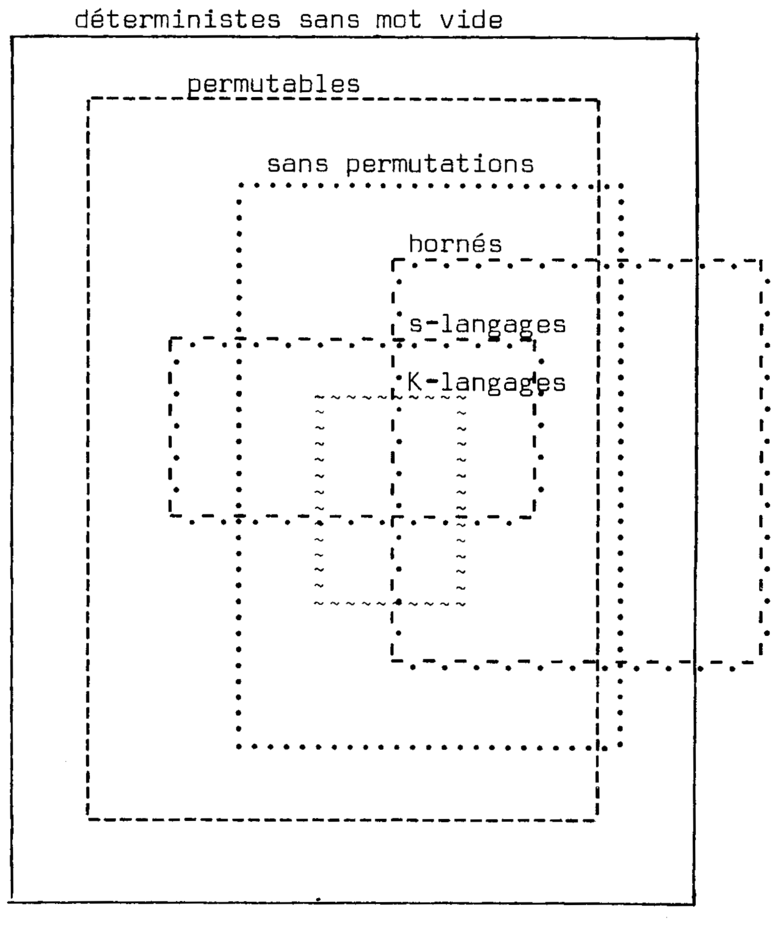
***

{ D'après le chapitre II, tout langage permutable est reconnu par un automate permutable. Lorsque, de plus, le langage est borné, nous montrons au théorème III.2 qu'il peut être reconnu par un automate permutable plus simple que nous appelons sans permutations : outre qu'il est sans mot vide, un tel automate présente la particularité que des transitions ne peuvent modifier un même sommet de pile que sur une unique lettre.

Ces automates sans permutations simplifieront l'étude des bornés permutables du chapitre V.

Nous montrons en outre au théorème III.1 que les langages qu'ils reconnaissent (les langages sans permutations) vérifient une conjecture de KNUTH fausse pour des langages LL(1) quelconques [11] : en effet, lorsqu'ils sont suivis d'un marqueur de fin, ils appartiennent à la classe des s-langages, c'est-à-dire qu'ils peuvent être engendrés par des C-grammaires prédictives sans mot vide, appelées s-grammaires dans [12].

Comme d'autre part les K-langages et les langages de Dyck et de semi-Dyck sont des C-langages sans permutations (Théorème III.2), nous retrouvons immédiatement un résultat montré par ailleurs par KORENJACK et HOPCROFT [12]. }



Ce graphique schématise les différentes inclusions existant entre les langages dont il a été question jusqu'alors.

CHAPITRE III

C-LANGAGES SANS PERMUTATIONS

Les s-langages introduits par KORENJACK et HOPCROFT [12] sont les c-langages reconnus par les s-machines citées dans le chapitre II. Ils ont pour caractéristique la propriété d'être engendrés par des s-grammaires. En posant :

Définition III.1 : Une C-grammaire G *est dite sous forme normale si*

$$P \subseteq (V \setminus \Sigma) \times \Sigma(V \setminus \Sigma)^*.$$

Les s-grammaires sont les C-grammaires sous forme normale qui vérifient la condition (I.2).

Ces s-langages constituent une famille importante de langages, et KNUTH [11] a fait la conjecture suivante : Pour tout C-langage permutable $L \subseteq (\Sigma \setminus \{c\})^*$, Lc est un s-langage. Cette propriété est fausse en général [13]. Nous définissons dans ce chapitre une classe de C-langages permutables pour laquelle cette propriété est vraie, et nous montrons que les K-langages, les langages de DYCK et de semi-DYCK, et les C-langages bornés permutables appartiennent à cette classe.

Définition III.2 : Un automate à pile de mémoire M *sera dit sans permutations s'il est permutable, sans mot vide, et s'il vérifie en outre la condition suivante :*

(III.1) : $(p_1, a_1, Z) \in \Delta_M$ et $(p_2, a_2, Z) \in \Delta_M$ *implique* $a_1 = a_2$.

Définition III.3 : Un C-langage sera dit sans permutations s'il existe un automate sans permutations qui le reconnaisse.

Montrons un premier résultat intermédiaire :

<u>Lemme III.1</u> : Pour tout automate sans permutations M, pour i=1,2, et pour tous p_i, $q_i \in K$, $w_i \in \Sigma^*$, $Z_i \in \Gamma$ tels que $(p_i,w_i,Z_i) \overset{*}{\vdash} (q_i,\Lambda,\Lambda)$,

$$Z_1 = Z_2 \text{ implique } q_1 = q_2.$$

Pour de tels mouvements, $\forall\, i \in \{1,2\}$, $\exists\, m(i) \geq 1$, $\exists\, s_j^{(i)} \in K$, $\exists\, \gamma_j^{(i)} \in \Gamma^*$ pour $1 \leq j \leq m(i)+1$, $\exists\, a_j^{(i)}$ pour $1 \leq j \leq m(i)$ tels que $s_1^{(i)} = p_i$, $\gamma_1^{(i)} = Z_i$, $a_1^{(i)} \ldots a_{m(i)}^{(i)} = w_i$, $s_{m(i)+1}^{(i)} = q_i$, $\gamma_{m(i)+1}^{(i)} = \Lambda$, et

$$(s_j^{(i)},\ a_j^{(i)} \ldots a_{m(i)}^{(i)},\ \gamma_j^{(i)}) \vdash (s_{j+1}^{(i)},\ a_{j+1}^{(i)} \ldots a_{m(i)}^{(i)},\ \gamma_{j+1}^{(i)}),$$

pour $1 \leq j \leq m(i)$.

Pour i=1,2, posons $k_j^{(i)}$ ceux des indices k tels que $\gamma_k^{(i)} \in \Gamma$ et $\gamma_{k+1}^{(i)} \notin \gamma_k^{(i)}\ \Gamma^*$ $(1 \leq j \leq \ell(i))$. Nous pouvons supposer

$$1 \leq k_1^{(i)} < \ldots < k_{\ell(i)}^{(i)} \leq m(i).$$

Posons $s_{k_j^{(i)}}^{(i)} = r_j^{(i)}$, $a_{k_j^{(i)}}^{(i)} = x_j^{(i)}$, et $\gamma_{k_j^{(i)}}^{(i)} = Z_j^{(i)}$, pour $1 \leq j \leq \ell(i)$.

Alors, $\forall\, i \in \{1,2\}$, $\forall\, j \in \{1,\ldots,\ell(i)\}$, $(r_j^{(i)},x_j^{(i)},Z_j^{(i)}) \in \Delta_M$.

Comme M est sans permutations, $Z_{j_1}^{(1)} = Z_{j_2}^{(2)}$ $(1 \leq j_i \leq \ell(i))$ implique $x_{j_1}^{(1)} = x_{j_2}^{(2)}$, $s_{k_{j_1}^{(1)}+1}^{(1)} = s_{k_{j_2}^{(2)}+1}^{(2)}$, et $\gamma_{k_{j_1}^{(1)}+1}^{(1)} = \gamma_{k_{j_2}^{(2)}+1}^{(2)}$,

et par conséquent, $\gamma_{n(i)}^{(i)} \in Z_{j_i+1}^{(i)}\ \Gamma^*$ pour $k_{j_i}^{(i)}+1 \leq n(i) \leq k_{j_i+1}^{(i)}$.

Donc, si $Z_1 = Z_2$, $\gamma_{k_1^{(1)}}^{(1)} = \gamma_{k_1^{(2)}}^{(2)} = Z_1 = Z_2$, et on montrerait par récurrence sur j_1 que $\gamma_{k_{j_1}^{(1)}}^{(1)} = \gamma_{k_{j_1}^{(2)}}^{(2)}$. Comme $k_{\ell(i)}^{(i)} = m(i)$ pour i=1,2,

$\gamma_{k_{\ell(1)}^{(1)}+1}^{(1)} = \gamma_{k_{\ell(1)}^{(2)}+1}^{(2)} = \Lambda$, ce qui implique $\ell(1) = \ell(2)$. Par conséquent,

$s_{k_{\ell(1)}^{(1)}+1}^{(1)} = s_{k_{\ell(2)}^{(2)}+1}^{(2)}$, c'est-à-dire $q_1 = q_2$.

Nous obtenons alors le premier résultat annoncé :

<u>*Théorème III.1*</u> : *Pour tout C-langage sans permutations* $L \subseteq (\Sigma \setminus \{c\})^*$, Lc *est un s-langage.*

Soit M un automate sans permutations qui reconnait L.

Posons $N = (K \cup \{f\}, \Sigma, \Gamma, \delta_1, Z_0, p_0, \emptyset)$, où $f \notin K$, et

$$\delta_1(p,a,Z) = \delta(p,a,Z) \qquad \forall\ (p,a,Z) \in K \times (\Sigma \setminus \{c\}) \times \Gamma,$$

et $\qquad \delta_1(q,c,Z_0) = (f,\Lambda) \qquad \forall\ q \in F.$

Il est clair que $T(M)c = \text{Zéro}\ (N)$.

Comme dans le lemme II.2, construisons une C-grammaire $\bar{G}$ à partir de N : $\bar{G} = (\bar{V},\Sigma,\bar{P},\sigma)$, où $\bar{V} \setminus \Sigma \subseteq (K \cup \{f\}) \times \Gamma \times (K \cup \{f\})$, et $\sigma = [p_0,Z_0,f]$.

Nous ne remontrons pas les résultats suivants obtenus de manière analogue dans la démonstration du lemme II.2 :

1) $L(\bar{G}) = \text{Zéro}\ (N)$,

2) $\forall\ (\xi \to z) \in \bar{P}$, $\exists\ Z \in \Gamma$, $\exists\ m \geq 0$, $\exists\ p, q \in K \cup \{f\}$, $\exists\ Z_i \in \Gamma$, $\exists\ p_i \in K \cup \{f\}$ pour $1 \leq i \leq m$, et $\exists\ x \in \Sigma^\circ$ tels que

. $\xi = [p,Z,q]$,

. $z = x\ [p_1,Z_1,p_2] \ldots [p_{m-1},Z_{m-1},p_m][p_m,Z_m,q]$,

. $\delta_1(p,x,Z) = (p_1,Z_m \ldots Z_1)$,

3) $[p,Z,q] \in \bar{V} \setminus \Sigma$ implique $\exists\ w \in \Sigma^*$ tel que $(p,w,Z) \overset{*}{\underset{N}{\vdash}} (q,\Lambda,\Lambda)$.

Alors, puisque N est sans mot vide, $\bar{G}$ est sans forme normale. D'autre part, $\bar{G}$ vérifie la condition (I.2).

En effet, si $(\xi \to az_1)$, $(\xi \to az_2) \in \bar{P}$, d'après la propriété 2), $\forall\ i \in \{1,2\}$, $\exists\ m(i) \geq 0$, $\exists\ p_j^{(i)} \in K$, $\exists\ Z_j^{(i)} \in \Gamma$ pour $1 \leq j \leq m(i)$, $\exists\ p, q \in K$, et $\exists\ Z \in \Gamma$ tels que $[p,Z,q] = \xi$,

$z_i = [p_1^{(i)}, Z_1^{(i)}, p_2^{(i)}] \ldots [p_{m(i)}^{(i)}, Z_{m(i)}^{(i)}, q]$, et

$\delta_1(p,a,Z) = (p_1^{(i)}, Z_{m(i)}^{(i)} \ldots Z_1^{(i)})$.

Comme M est déterministe, $m(1) = m(2)$, $p_1^{(1)} = p_1^{(2)}$, et $Z_j^{(1)} = Z_j^{(2)}$ pour $1 \leq j \leq m(1)$.

Alors, d'après le lemme III.1, $p_2^{(1)} = p_2^{(2)}$, et de la même façon, $p_j^{(1)} = p_j^{(2)}$ pour tout j $(1 \leq j \leq m(1))$.

Par conséquent, $z_1 = z_2$, et Lc est un s-langage.

Si G est une C-grammaire Λ-normale, posons maintenant

$$\Omega(G) = \{\xi \in V \setminus \Sigma \mid \exists\, a_1, a_2 \in \Sigma, \exists\, y_1, y_2 \in V^* : (\xi \to a_i y_i) \in P, \text{ pour } i=1,2, \text{ et } a_1 \neq a_2\}.$$

On écrira plus simplement Ω si G est sous-entendu.

Considérons le cas des langages bornés.

<u>Lemme III.2</u> : Toute C-grammaire Λ-normale qui engendre un C-langage borné, vérifie la condition suivante :

(III.2) $\exists\, p \in N$ tel que $\forall\, z \in V^*$, $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} z$ implique $\mathrm{Card}_\Omega(z) \leq p$.

Soit G une telle C-grammaire et soit $\mu \in \Omega$.

Montrons que :

(*) $\forall\, \xi \in V \setminus \Sigma$, $\forall\, \phi_1, \phi_2 \in V^*$, $\xi \overset{*}{\Longrightarrow} \phi_1 \xi \phi_2$ implique $\mathrm{Card}_\mu(\phi_1 \phi_2) = 0$.

Soient $a_1, a_2 \in \Sigma$, $y_1, y_2 \in V^*$: $(\mu \to a_i y_i) \in P$ pour $i=1,2$, et $a_1 \neq a_2$. Alors, $\exists\, z_1, z_2 \in \Sigma^*$ tels que $y_i \overset{*}{\Longrightarrow} z_i$ pour $i=1,2$.

Supposons que la propriété (*) soit fausse et distinguons deux cas :

1) $\phi_1 = \phi_3\ \mu\ \phi_4$, avec $\phi_3, \phi_4 \in V^*$:

Soient alors z_3 et $z_4 \in \Sigma^*$ tels que $\phi_i \overset{*}{\Longrightarrow} z_i$ pour $i=3,4$.

Alors, $\xi \Longrightarrow \phi_1\ \xi\ \phi_2 = \phi_3\ \mu\ \phi_4\ \xi\ \phi_2 \overset{*}{\Longrightarrow} z_3\ \mu\ z_4\ \xi\ \phi_2$, et

. $z_3\ \mu\ z_4\ \xi\ \phi_2 \Longrightarrow z_3\ a_1\ y_1\ z_4\ \xi\ \phi_2 \overset{*}{\Longrightarrow} z_3\ a_1\ z_1\ z_4\ \xi\ \phi_2$, d'une part, et

. $z_3\ \mu\ z_4\ \xi\ \phi_2 \Longrightarrow z_3\ a_2\ y_2\ z_4\ \xi\ \phi_2 \overset{*}{\Longrightarrow} z_3\ a_2\ z_2\ z_4\ \xi\cdot\phi_2$, d'autre part.

Posons $u_i = z_3\ a_i\ z_i\ z_4$ pour $i=1,2$ $(u_i \in \Sigma^*)$.

Puisque $\xi \overset{*}{\Longrightarrow} u_i\ \xi\ \phi_2$ pour $i=1,2$, et que $L(G)$ est borné, d'après [8], $u_1\ u_2 = u_2\ u_1$, c'est-à-dire

$$z_3\ a_1\ z_1\ z_4\ z_3\ a_2\ z_2\ z_4 = z_3\ a_2\ z_2\ z_4\ z_3\ a_1\ z_1\ z_4.$$

Ceci implique $a_1 = a_2$ et contredit l'hypothèse.

2) $\phi_2 = \phi_3\ \mu\ \phi_4$:

dans ce cas symétrique, [8] est encore applicable ; ceci implique encore $a_1 = a_2$ et achève la démonstration de (*).

Il est alors clair [6] que :

$$\forall\ \mu \in \Omega,\ \exists\ p(\mu) \in N \text{ tel que } \forall\ z \in V^* : \sigma \overset{*}{\Longrightarrow} z \text{ implique } \mathrm{Card}_\mu(z) \leq p(\mu).$$

Comme Ω est fini, il suffit de poser $p = \sum_{\mu\in\Omega} p(\mu)$.

<u>Lemme III.3</u> : Tout C-langage borné permutable peut être engendré par une C-grammaire 2-prédictive G dans laquelle

$$P \subseteq (V \setminus \Sigma) \times (V^* \setminus VV(W \cup \Omega)).$$

Soit L un tel C-langage. D'après le lemme I.6, il existe une C-grammaire 2-prédictive $G_1 = (V_1,\Sigma,P_1,\sigma_1)$ qui engendre L, dans laquelle $(\xi \to a\ \xi_1\ \xi_2) \in P_1$ implique $\xi_2 \notin W(G_1)$.

D'après le lemme III.2, $\exists$ p $\in$ N tel que, pour tout z $\in V_1^*$, $\sigma \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} z$ implique $\mathrm{Card}_{\Omega(G_1)}(z) \leqslant p$.

Posons alors $Z = \{\phi \in (V \setminus \Sigma)(\Omega(G_1) \setminus W(G_1))^* \mid |\phi| \leqslant p+2\}$, et

$$Z' = \{\phi \in Z \mid |\phi| \leqslant p+1\}.$$

Z et Z' sont des ensembles finis.

Définissons $V \setminus \Sigma$ [resp. $V' \setminus \Sigma$] comme un ensemble d'états liés biunivoquement à ceux de Z [resp. Z'], notés $f(\phi)$ pour tout $\phi \in Z$ [resp. $\phi \in Z'$].

Alors $V' \subset V$; Posons $\sigma = f(\sigma_1) \in V'$.

Définissons enfin P de la façon suivante :

pour tout $f(\xi_1 \dots \xi_n) \in V' \setminus \Sigma$, et tout $a \in \Sigma$:

.. si $\exists$ $z \in (V_1 \setminus \Sigma)^*$: $(\xi_1 \to a\ z) \in P_1$:

- si $z = \mu_1\ \mu_2$ avec $\mu_1 \in V_1$, $\mu_2 \in V_1 \setminus (\Sigma \cup \Omega(G_1))$, alors :

(i) $(f(\xi_1 \dots \xi_n) \to a\ f(\mu_1)\ f(\mu_2\ \xi_2 \dots \xi_n)) \in P$,

- si $z \in V_1\Omega(G_1)$ ou $|z| \leqslant 1$, alors :

(ii) $(f(\xi_1 \dots \xi_n) \to a\ f(z\ \xi_2 \dots \xi_n)) \in P$,
$(f(z\ \xi_2 \dots \xi_n) = \Lambda$ si $n=1$ et $z=\Lambda)$,

.. si $n \geqslant 2$, $\xi_1 \in W(G_1)$, et $\exists$ $z \in (V_1 \setminus \Sigma)^*$: $(\xi_2 \to a\ z) \in P_1$:

- si $z = \mu_1\ \mu_2$ avec $\mu_1 \in V_1$, $\mu_2 \in V_1 \setminus (\Sigma \cup \Omega(G_1))$, alors :

(iii) $(f(\xi_1 \dots \xi_n) \to a\ f(\mu_1)\ f(\mu_2\ \xi_3 \dots \xi_n)) \in P$,

- si $z \in V_1\Omega(G_1)$ ou $|z| \leqslant 1$, alors :

(iv) $(f(\xi_1 \dots \xi_n) \to a\ f(z\ \xi_3 \dots \xi_n)) \in P$,

$(f(z\ \xi_3 \dots \xi_n) = \Lambda$ si $n=2$ et $z=\Lambda)$,

.. si $n=1$ et $\xi_1 \in W(G_1)$, alors :

(v) $(f(\xi_1 \ldots \xi_n) \to \Lambda) \in P$.

Notons encore G la grammaire réduite de $G = (V,\Sigma,P,\sigma)$, et $h : V^* \to V_1^*$ l'homomorphisme défini par

$$h(a) = a \quad \text{pour tout } a \in \Sigma, \text{ et}$$

$$h(f(\xi_1 \ldots \xi_n)) = \xi_1 \ldots \xi_n, \text{ pour tout } f(\xi_1 \ldots \xi_n) \in V \setminus \Sigma.$$

Comme $(A \to \phi) \in P$ implique $h(A) \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} h(\phi)$, $\forall \psi \in V^*$, $\sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \psi$ implique $h(\sigma) \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} h(\psi)$.

D'après le lemme III.2, $\text{card}_{\Omega(G_1)}(h(\psi)) \leq p$, donc $\psi \in V'^*$. D'autre part, $(A \to \Lambda) \in P$ implique $\exists\, \xi \in W(G_1)$ tel que $A = f(\xi)$; comme $\text{Card}_{W(G_1)}(z) \leq 1$ pour tout $z \in V_1^*$ vérifiant $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} z$, nous avons donc $\text{Card}_{W(G)}(\psi) \leq 1$.

Par conséquent, $\forall A_1 \in W(G)$, $\forall A_2 \in V \setminus \Sigma$, $\forall a \in \Sigma$, $\forall \phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4 \in V^*$ tels que $(A_i \to a\, \phi_i) \in P$ pour $i=1,2$, $\sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \phi_3\, A_1\, A_2\, \phi_4$ implique $\exists\, \xi_1 \in W(G_1)$, $\exists\, \xi_2 \in V_1 \setminus \Sigma$, $\exists\, z_1,z_2 \in V_1^*$, $\exists\, (\xi_i \to a\, z_i) \in P_1$ pour $i=1,2$, tels que $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} h(\phi_3)\, \xi_1\, \xi_2\, h(\phi_4)$. Puisque G_1 vérifie la condition (I.3), il en est de même pour G.

De même, $\forall A \in V \setminus \Sigma$, $\forall a \in \Sigma$, $\forall \phi_1,\phi_2 \in V^*$, si $(A \to a\, \phi_i) \in P$ pour $i=1,2$, $\exists\, \ell \geq 1$, $\exists\, \xi_j \in V_1 \setminus \Sigma$ $(1 \leq j \leq \ell)$ tels que $A = f(\xi_1 \ldots \xi_\ell)$, et $\xi_1 \ldots \xi_\ell \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} a\, h(\phi_i)$ pour $i=1,2$. Alors, comme $A \in V'$, c'est-à-dire $\xi_2 \notin W(G_1)$, $\exists\, z_1,z_2 \in V_1^*$ tels que : soit $(\xi_1 \to a\, z_i) \in P_1$, soit $\xi_1 \in W(G_1)$ et $(\xi_2 \to a\, z_i) \in P_1$, soit $\xi_1 \in W(G_1)$ et $(\xi_i \to a\, z_i) \in P_1$. Puisque G est réduite et que G_1 vérifie les conditions (I.2) et (I.3), G vérifie aussi la condition (I.2). G est donc 2-prédictive.

En outre, une production $(A \to a\, B_1\, B_2) \in P$, avec $a \in \Sigma$, $B_1,B_2 \in V \setminus \Sigma$, est de type (i) ou (iii). Dans les deux cas, $f(B_2) = \mu_2 z$ $(\mu_2 \in V_1 \setminus \Sigma,\ z \in V_1^*)$, et $\exists\, (\xi \to a\, \mu_1\, \mu_2) \in P_1$ avec $\mu_2 \notin \Omega(G_1)$ $(\mu_1 \in V_1 \setminus \Sigma)$; d'après la forme de P_1, $\mu_2 \notin W(G_1)$. Donc $B_2 \notin \Omega(G) \cup W(G)$.

Enfin, comme $h(w) = w$ pour tout $w \in \Sigma^*$, $L(G) \subseteq L(G_1)$.

Il reste à montrer l'inclusion inverse.

Pour cela, montrons au préalable la propriété suivante :

(*) $\forall\, w \in \Sigma\Sigma^*,\ \forall\, z, z' \in V_1^* : \sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} z' \underset{G_1}{\Longrightarrow} wz$ avec $w \notin \mathrm{Init}\,(z')$

implique $\exists\, \phi \in (V' \setminus \Sigma)^*$ tel que $h(\phi) = z$, et $\sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w\phi$.

Si $|w| = \ell = 1$, $z' = \sigma_1$ et $(\sigma_1 \to wz) \in P_1$. Alors, $\exists\, \phi \in (V \setminus \Sigma)^*$ tel que $(\sigma \to w\phi) \in P_1$, avec $h(\phi) = z$; de plus, $w\phi \in V'^*$, donc $\phi \in (V' \setminus \Sigma)^*$.

Supposons la propriété (*) vraie, pour $|w| = \ell$, et considérons la dérivation $\sigma_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} z' \underset{G_1}{\Longrightarrow} wz \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} wz_1' \underset{G_1}{\Longrightarrow} waz_1$, avec $z_1, z_1' \in V_1^*$, et $a \in \Sigma$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $\exists\, B_1,\ldots,B_n \in V' \setminus \Sigma$ tels que $\sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w\, B_1\ldots B_n$, avec $h(B_1\ldots B_n) = z$.

Posons $z = \xi_1\ldots\xi_m$ ($\xi_i \in V_1 \setminus \Sigma$ pour $1\leq i\leq m$), $B_1 = f(\xi_1\ldots\xi_q)$ avec $1\leq q\leq m$, et soit $\xi_1 \to y$ ($y \in V_1^*$) la première production utilisée dans $z \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} a\, z_1$.

Distinguons deux cas :

a) $y \neq \Lambda$: alors $y = a\, y_1$ ($y_1 \in V_1^*$), et $\exists\, \phi' \in (V \setminus \Sigma)^*$ tel que $h(\phi') = y_1\, \xi_2\ldots\xi$ et $(B_1 \to a\phi') \in P$, et $z_1 = y_1\, \xi_2 \,\ldots\, \xi_m$.

En posant $\phi_1 = \phi'\, B_2 \,\ldots\, B_n$, on a donc $h(\phi_1) = y\, \xi_2\ldots\xi_q\, h(B_2\ldots B_n) = z_1$, et $\sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w\, B_1 \,\ldots\, B_n \underset{G}{\Longrightarrow} wa\phi'\, B_2\ldots B_n = wa\, \phi_1$.

b) $y = \Lambda$: alors $m>1$ et $\xi_2 \notin W(G_1)$; donc $\exists\, y_1 \in (V_1 \setminus \Sigma)^*$ tel que $(\xi_2 \to a\, y_1) \in P_1$, et $z_1 = y_1\, \xi_3 \,\ldots\, \xi_m$.

- Si $q>1$, $\exists\, \phi' \in (V \setminus \Sigma)^*$ tel que $h(\phi') = y_1\, \xi_3\ldots\xi_q$ et $(B_1 \to a\phi') \in P$. En posant $\phi_1 = \phi'\, B_2 \,\ldots\, B_n$, on a donc $h(\phi_1) = y_1\, \xi_3\ldots\xi_q\, h(B_2\ldots B_n) = z_1$, et $\sigma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w\, B_1\ldots B_n \underset{G}{\Longrightarrow} w\cdot a\, \phi'\, B_2\ldots B_n = w.a\phi_1$.

- Si par contre $q=1$, $B_1 = f(\xi_1) \in W(G)$. Soit r ($2\leq r\leq m$) tel que $B_2 = f(\xi_2\ldots\xi_r)$. $\exists\, \phi' \in (V \setminus \Sigma)^*$ tel que $(B_2 \to a\phi') \in P$, avec $h(\phi') = y_1\, \xi_3\ldots\xi_r$. En posant $\phi_1 = \phi'\, B_3\ldots B_n$, on a donc

$$h(\phi_1) = y_1\ \xi_3\ \ldots\ \xi_r\ h(B_3 \ldots B_n) = z_1, \text{ et}$$

$$\sigma \underset{G}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w\ B_1 \ldots B_n \underset{G}{\Longrightarrow} w\ B_2 \ldots B_n \underset{G}{\Longrightarrow} w\ a\ \phi'\ B_3 \ldots B_n = w\ a\ \phi_1.$$

Comme enfin $\sigma \underset{G}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \psi$ implique $\psi \in V'^*$, la propriété (*) est vraie pour tout mot w.

Considérons maintenant $w \in L(G_1)$.

Si $w = \Lambda$, $(\sigma \to \Lambda) \in P$.

Si par contre $w \neq \Lambda$, $\exists\ z', z \in (V_1 \setminus \Sigma)^*$ tels que $w \notin \text{Init}\ (z')$, et $\sigma_1 \underset{G_1}{\overset{*}{\Longrightarrow}} z' \underset{G_1}{\Longrightarrow} wz \underset{G_1}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$. D'après la propriété (*), $\exists\ \phi' \in (V' \setminus \Sigma)^*$ tel que $\sigma \underset{G}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w\phi$, avec $h(\phi) = z$. Comme de plus $z \in W(G_1)^*$, $\phi \in W(G)^*$. Donc $\sigma \underset{G}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w\phi \underset{G}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$.

<u>*Théorème III.2*</u> *: Les K-langages, les langages de Dyck et de semi-Dyck, et les C-langages bornés permutables sont des C-langages sans permutations.*

a) Soit R un K-langage. D'après la démonstration du corollaire II.2, il existe un automate permutable M sans mot vide qui reconnaît R et tel que $\Delta_M = \emptyset$. R est donc sans permutations.

b) Soient $\Sigma = \{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ et $\bar{\Sigma} = \{\bar{a}_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Soit Γ' un ensemble d'éléments liés biunivoquement à ceux de $\Sigma \cup \bar{\Sigma}$: $\Gamma' = \{f(x) \mid x \in \Sigma \cup \bar{\Sigma}\}$.

Posons $\Gamma = \Sigma \cup \bar{\Sigma}$, $K = \{p_0, p_1\}$, et $M = (K, \Sigma \cup \bar{\Sigma}, \Gamma \cup \Gamma' \cup \{Z_0\}, \delta, Z_0, p_0, \{p_0\})$, où $Z_0 \notin \Gamma \cup \Gamma'$, et où δ est défini de la façon suivante :

pour tout $x_i \in \Sigma \cup \bar{\Sigma}$, si $\bar{x}_i$ désigne $\bar{a}_i$ si $x_i = a_i$, ou a_i si $x_i = \bar{a}_i$:

$$\begin{array}{ll}
\delta(p_0, x_i, Z_0) = (p_1, Z_0 f(x_i)), & \\
\delta(p_1, x_i, f(x_j)) = (p_1, f(x_j)\ x_i) & \forall\ x_j \neq \bar{x}_i, \\
\delta(p_1, x_i, f(\bar{x}_i)) = (p_0, \Lambda), & \\
\delta(p_1, x_i, x_j) = (p_1, x_j\ x_i) & \forall\ x_j \neq \bar{x}_i, \\
\delta(p_1, x_i, \bar{x}_i) = (p_1, \Lambda). &
\end{array}$$

M ainsi défini est bien un automate sans permutations qui reconnait le langage de Dyck construit sur $\Sigma \cup \bar{\Sigma}$.

c) Avec les mêmes notations que ci-dessus, définissons δ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\text{pour tout } i \in \{1,\dots,n\},\quad & \delta(p_0,a_i,Z_0) = (p_1,f(a_i)), \\
& \delta(p_1,a_i,f(a_j) = (p_1,f(a_j)a_i) \quad \forall\, j \in \{1,\dots,n\}, \\
& \delta(p_1,a_i,a_j) = (p_1,a_j\ a_i) \quad \forall\, j \in \{1,\dots,n\}, \\
& \delta(p_1,\bar{a}_i,a_i) = (p_1,\Lambda), \\
& \delta(p_1,\bar{a}_i,f(a_i)) = (p_0,\Lambda).
\end{aligned}$$

Il est clair que M est encore sans permutations et qu'il reconnait le langage de semi-Dyck construit sur $\Sigma \cup \bar{\Sigma}$.

d) Soit L un C-langage borné permutable. D'après le lemme III.3, il existe une C-grammaire 2-prédictive G telle que $(\xi \to a\ \xi_1\ \xi_2) \in P$ $(a \in \Sigma, \xi, \xi_1, \xi_2 \in V \setminus \Sigma)$ implique $\xi_2 \notin \Omega \cup W$. En reprenant les notations et la démonstration du théorème II.1, il existe un automate permutable sans mot vide M qui reconnait L.

M peut être supposé sans permutations :

puisque $f_2(\phi) \neq \Lambda$ implique $f_2(\phi) \in V \setminus (\Sigma \cup \Omega \cup W)$, pour toute production $(\xi \to a\phi) \in P$ $(a \in \Sigma,\ \xi \in V \setminus \Sigma)$, on peut restreindre Γ à $V \setminus (\Sigma \cup \Omega \cup W)$, et $\bar{\Gamma}$ à $\{\bar{\mu} \mid \mu \in \Gamma\}$.

Alors, $(p_1,a_1,Z) \in \Delta_M$ et $(p_2,a_2,Z) \in \Delta_M$ implique

$$\exists\ \tau \in V \setminus (\Sigma \cup \Omega),\ \exists\ z_1,\ z_2 \in V^* \text{ tels que } (\tau \to a_i\ z_i) \in P \text{ pour } i=1,2.$$

Donc $a_1=a_2$, et M vérifie la condition (III.1).

Des théorèmes III.1 et III.2, on déduit immédiatement le corollaire suivant :

<u>*Corollaire III.1*</u> *: Si* $L \subseteq (\Sigma \setminus \{c\})^*$ *est un K-langage, un langage de Dyck ou de semi-Dyck, ou un C-langage borné permutable,* Lc *est un s-langage.*

INTRODUCTION AU CHAPITRE IV

***

{ L'étude formelle d'une classe de C-langages s'accompagne généralement de l'étude de sa stabilité pour différentes opérations.

Les classes des C-langages permutables et sans permutations ne sont stables qu'un nombre restreint d'opérations ; KORENJACK et HOPCROFT [12], ROSENKRANTZ et STEARNS [16], WOOD [17] ont exhibé de nombreux exemples de non stabilité pour la plupart des opérations habituelles. Ils n'avaient pas étudié l'application séquentielle injective ni l'application séquentielle inverse, et nous montrons dans ce chapitre (Théorème IV.2) que ces opérations ne conservent pas non plus les C-langages permutables. Nous montrons également que l'union disjointe d'un C-langage non permutable et d'un C-langage permutable peut être permutable (Théorème IV.1). Ces résultats sont établis par des exemples contraires choisis parmi les bornés sur deux lettres, et sont donc valables pour les C-langages sans permutations, d'après les résultats du chapitre III.

Par contre, aucun résultat concernant la stabilité de ces langages n'avait été établi jusqu'alors. Nous donnons dans ce chapitre deux résultats très généraux pour l'union et la différence de C-langages et de langages quelconques. Ces résultats sont cependant établis sans la condition assez forte de F-disjonction, c'est-à-dire sans la condition que l'ensemble des sous-mots initiaux communs à deux langages soit fini (Théorèmes IV.3 et IV.4). Un troisième résultat est spécifique aux langages étudiés et montre que la classe des C-langages sans permutations est stable pour l'intersection avec un K-langage local (Théorème IV.5), propriété qui n'est vraie ni pour les C-langages permutables ni pour les K-langages quelconques. }

C H A P I T R E IV

OPERATIONS SUR DES C-LANGAGES

Le nombre d'opérations stables pour la classe des C-langages est faible. Il l'est encore plus pour la classe des C-langages permutables ou sans permutations [12], [16], [17]. Nous donnons dans ce chapitre quelques nouveaux résultats de non stabilité, et trois relations de stabilité qui n'avaient pas été exhibées jusqu'alors : les deux premières sont valables pour des C-langages quelconques, déterministes, permutables ou sans permutations. La troisième concerne l'intersection d'un C-langage sans permutations et d'un K-langage local, et nous conduit à une version modifiée du théorème de CHOMSKY - SCHUTZENBERGER [3].

1) NON-STABILITE

Exhibons d'abord deux exemples de C-langages qui ne sont pas permutables :

Lemme IV.1 : $L_1 = \{a^n\, b^p \mid 1 \leqslant n \leqslant p,\ \frac{p}{3} \notin \mathbb{N}\}$ n'est pas un C-langage permutable.

Supposons le contraire ; d'après le corollaire III.1, il existe une s-grammaire $G = (V, \Sigma \cup \{c\}, P, \sigma)$ qui engendre $L_1 c$.

Posons $V' = V \setminus (\Sigma \cup \{c\})$.

Alors, $\forall\, i \in \mathbb{N}^+$, $\exists\, \xi_i \in V'$, $\exists\, \phi_i, y_i, z_i \in V'^*$ tels que

$$\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} a^i\, \xi_i\, \phi_i,\ (\xi_i \to a\, \xi_{i+1}\, y_i),\ (\xi_i \to b\, z_i) \in P,$$

$$\text{avec } \phi_{i+1} = y_i\, \phi_i.$$

Notons $I = \{i \in \mathbb{N} \mid \exists\, q \in \mathbb{N} : i = 3q+1\}$.

Alors, il existe $p \in I$ tel que $\phi_p \neq \Lambda$; en effet, dans le cas contraire, comme V' est fini, $\exists\, p_1, p_2 \in I$, $p_1 < p_2$ tels que $\xi_{p_1} = \xi_{p_2}$; alors

$\xi_{p_i} \overset{*}{\Longrightarrow} b^{p_i}c$, $\forall$ i $\in$ {1,2}, ce qui implique $a^{p_2} b^{p_1} c \in L_1 c$; contradiction.

Par conséquent, $L(\phi_p) \subseteq \Sigma^* c$, et $\forall$ i $\in \mathbb{N}$, $i \geq p$, $L(y_i) \subseteq b^*$ et $L(z_i) \subseteq b^*$.

Or L(G) possède la propriété du préfixe décrite en [12]. Donc, d'après [17], $L(y_i)$ et $L(z_i)$ la possèdent aussi. Par conséquent, Card $(L(y_i))$ = Card $(L(z_i)) = 1$.

Considérons maintenant les dérivations

$$\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} a^p\, \xi_p\, \phi_p \Longrightarrow a^p\, b\, z_p\, \phi_p \text{ , et}$$

$$\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} a^p\, \xi_p\, \phi_p \Longrightarrow a^{p+1}\, \xi_{p+1}\, y_p\, \phi_p \Longrightarrow a^{p+1}\, b\, z_{p+1}\, y_p\, \phi_p.$$

$L(z_p\, \phi_p) = b^{p-1}(\Lambda+b)(b^3)^* c$, et

$L(z_{p+1}\, y_p\, \phi_p) = b^p c + b^{p+2}(\Lambda+b)(b^3)^* c = R_1$.

Posons $L(z_p) = b^{r_1}$, $L(z_{p+1}) = b^{r_2}$, $L(y_p) = b^{r_3}$,

avec $r_i \in \mathbb{N}$ pour $i=1,2,3$.

Alors $L(\phi_p) = b^{p-1-r_1}\ (\Lambda+b)(b^3)^* c$, et

$$L(z_{p+1}\, y_p\, \phi_p) = b^{p-1-r_1+r_2+r_3}\ (\Lambda+b)(b^3)^* c = R_2.$$

Puisque $R_1=R_2$ et que les mots de longueur minimale dans chacun d'eux sont respectivement $b^p c$ et $b^{p-1-r_1+r_2+r_3}\ c$, cela implique $r_2+r_3-r_1-1 = 0$.

Donc $b^{p+1}\ c \in R_2$; comme $b^{p+1}\ c \notin R_1$, il y a contradiction et l'hypothèse était absurde.

<u>Lemme IV.2</u> : $L_2 = \{a^{2n+1}\ b^{2n} \mid n\geq 1\} \cup \{a^{2n}\ b^n \mid n\geq 1\}$ est un C-langage qui n'est pas permutable.

De la même façon que dans le lemme IV.1, il existe une s-grammaire $G = (V,\Sigma,P,\sigma)$ qui engendre $L_2 c$, $\forall$ i $\in \mathbb{N}^+$, $\exists\ \xi_i \in V'$, $\exists\ \phi_i, y_i, z_i \in V'^*$ tels que

$$\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} a^i \xi_i \phi_i,\ (\xi_i \to a\, \xi_{i+1}\, y_i),\ (\xi_i \to b\, z_i) \in P,$$

avec $\phi_{i+1} = y_i\, \phi_i$,

et $\exists\ p \in \mathbb{N}$ tel que $\phi_p \neq \Lambda$.

Alors, $\forall\ i \geq p$, $\phi_i \neq \Lambda$.

V' étant fini, $\exists\ q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq 2q_1 < 2q_2$, et $\xi_{2q_1} = \xi_{2q_2}$. Posons $p_i = 2q_i$ pour $i = 1,2$.

Comme G est une s-grammaire, $z_{p_1} = z_{p_2}$, $y_{p_1} = y_{p_2}$, $\xi_{p_1+1} = \xi_{p_2+1}$, et $z_{p_1+1} = z_{p_2+1}$.

En utilisant encore la démonstration du lemme IV.1, $\exists\ r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{N}^+$ tels que $L(z_{p_i}) = b^{r_1}$, $L(z_{p_i+1}) = b^{r_2}$, $L(y_{p_i}) = b^{r_3}$, pour $i=1,2$.

Or $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} a^{p_i}\, b\, z_{p_i}\, \phi_{p_i}$, et $\sigma \overset{*}{\Longrightarrow} a^{p_i+1}\, b\, z_{p_i+1}\, y_{p_i}\, \phi_{p_i}$,

avec $p_i = 2q_i$ pour $i=1,2$.

Donc $b^{q_i-1}\, c = L(z_{p_i}\, \phi_{p_i})$, et $b^{2q_i-1}\, c = L(z_{p_i}\, y_{p_i}\, \phi_{p_i})$.

Par conséquent, $L(\phi_{p_i}) = b^{q_i-1-r_1}\, c$, et $L(\phi_{p_i}) = b^{2q_i-1-r_2-r_3}\, c$.

Ceci implique $q_i = r_2+r_3-r_1$ pour $i=1,2$.

Donc $q_1=q_2$, ce qui contredit l'hypothèse.

Nous pouvons alors montrer des propriétés relatives à la non-stabilité.

<u>*Théorème IV.1*</u> *: L'union disjointe d'un C-langage permutable et d'un C-langage non permutable peut être un C-langage permutable.*

Soient $L_3 = \{a^n\, b^{3q} \mid 1 \leq n \leq 3q\}$ et $L_4 = \{a^n\, b^p \mid 1 \leq n \leq p\}$.

L_3 et L_4 sont des C-langages permutables :

$L_3 = L(G_3)$ avec $G_3 = (\{a,b,\sigma,\delta,\tau,\gamma,\mu\},\{a,b\},$

$\{\sigma \to a\ \delta\ \mu,\ \delta \to a\ \tau\ b,\ \delta \to b^3,\ \tau \to a\ \gamma\ b,\ \tau \to b^2,$

$\gamma \to a\ \delta\ b,\ \gamma \to b,\ \mu \to b^3\mu,\ \mu \to \Lambda\},\ \sigma)$, et

$L_4 = L(G_4)$, avec $G_4 = (\{a,b,\sigma,\delta,\mu\},\ \{a,b\},\ \{\sigma \to a\delta,\ \delta \to a\delta b,\ \delta \to b\mu,\ \mu \to b\mu,$
$\mu \to \Lambda\},\sigma)$.

Alors, puisque $L_4 = L_1 \cup L_3$, le théorème est vérifié.

<u>*Théorème IV.2*</u> *: Ni l'application séquentielle injective, ni l'application séquentielle inverse ne conservent les C-langages permutables.*

Soit $L_5 = \{a^n\ b^n \mid n \geq 1\}$. L_5 est un C-langage permutables : $L_5 = L(G_5)$ avec $G_5 = (\{a,b,\sigma,\mu\},\{a,b\},\{\sigma \to a\mu,\ \mu \to a\mu b,\ \mu \to b\},\sigma)$.

Soit $\xi_1 = (\{p_0,p_1,p_2,p_3\},\ \{a,b\},\ \{a,b\},\delta_1,\lambda_1,p_0)$, où

δ_1 :	p_0	p_1	p_2	p_3
a	p_1	p_0	p_3	p_3
b	p_2	p_3	p_2	p_3

et

λ_1 :	p_0	p_1	p_2	p_3
a	a	a	a	a
b	b	b^2	b	b^2

Alors, l'application de S_1 de $\{a,b\}^*$ dans lui-même est injective et $S_1(L_5) = L_2$.

Soit maintenant $S_2 = (\{p_0,p_1,p_2,p_3\},\ \{a,b,c\},\ \{a,b\},\delta_2,\lambda_2,p_0)$, où

δ_2 :	p_0	p_1	p_2	p_3
a	p_0	p_3	p_3	p_3
b	p_1	p_2	p_0	p_3
c	p_3	p_3	p_3	p_3

et

λ_2 :	p_0	p_1	p_2	p_3
a	a	a	a	a
b	b	b	b	a
c	Λ	Λ	a	a

$S^{-1}(L_4) = L_1c$; comme d'après le théorème I.3 et le lemme IV.1, L_1c n'est pas permutable, le théorème est démontré.

2) STABILITE

Pour énoncer des propriétés de stabilité sur les C-langages, nous aurons besoin de la définition suivante :

Définition IV.1 : Deux langages A *et* B *seront dits* *F-disjoints* *si* Init (A) $\cap$ Init (B) *est fini.*

Théorème IV.3 : L'union F-disjointe de deux C-langages déterministes [resp. permutables, resp. sans permutations] est un C-langage déterministe [resp. permutable, resp. sans permutations].

Soient M_1 et M_2 des automates à pile de mémoire qui reconnaissent de tels C-langages L_1 et L_2.

Posons $M_i = (K_i, \Sigma, \Gamma_i, \delta_i, Z_0^{(i)}, p_0^{(i)}, F_i)$, pour i=1,2.

Nous pouvons supposer que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, que $Z_0^{(1)} = Z_0^{(2)} = Z_0$, et que $(\Gamma_1 \setminus \{Z_0\}) \cap (\Gamma_2 \setminus \{Z_0\}) = \emptyset$.

Posons E = Init $(L_1) \cap$ Init (L_2), et

$$\ell = \text{Max } \{|w| \mid w \in E\}.$$

Soit K' un ensemble de nouveaux états liés biunivoquement à $\{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq \ell\}$: $K' = \{q(w) \mid |w| \leq \ell\}$.

Posons $F' = \{q(w) \in K' \mid w \in L_1 \cup L_2\}$, $K = K' \cup K_1 \cup K_2$,

$F = F' \cup F_1 \cup F_2$, $q_0 = q(\Lambda)$, et $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Soit alors $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, Z_0, q_0, F)$, où δ est défini de la façon suivante :

. Pour tout $(p_i, x, Z_i) \in K_i \times \Sigma^\circ \times \Gamma_i$:

(i) $\delta(p_i, x, Z_i) = \delta_i(p_i, x, Z_i) \qquad \forall\ i \in \{1,2\}$;

. Pour tout $w \in \Sigma^*$, $|w| \leq \ell$, et tout $a \in \Sigma$,

- si $|w| < \ell$: (ii) $\delta(q(w),a,Z_0) = \{(q(wa),Z_0)\}$;

- si $|w| = \ell$ et $wa \in \text{Init}(L_1) \cup \text{Init}(L_2)$:

  (iii) $\delta(q(w),a,Z_0) = \{(p,\gamma)\}$,

  où p et γ sont tels que $\exists\, i \in \{1,2\}$, $\exists\, p' \in K_i$, $\exists\, \gamma' \in \Gamma_i^*$ pour lesquels $wa \in \text{Init}(L_i)$, et

$$(p_0^{(i)},wa,Z_0) \overset{*}{\underset{M_i}{\vdash}} (p',a,\gamma') \underset{M_i}{\vdash} (p,\Lambda,\gamma).$$

Remarquons que de tels p, p', γ, γ' existent et que, puisque $wa \notin E$, ce i est unique.

Comme en outre M_1 et M_2 sont déterministes, (p,γ) est unique.

M ainsi défini est donc déterministe.

Considérons $w \in T(M)$: $\exists\, r \in F$, $\exists\, \gamma \in \Gamma^*$ tels que

(*) $$(q_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (r,\Lambda,\gamma).$$

- Si $|w| \leq \ell$: les seules transitions possibles sont du type (ii), et le mouvement (*) est $(q(\Lambda),w,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q(w),\Lambda,Z_0)$, avec $q(w) \in K' \cap F = F'$.

Donc $w \in L_1 \cup L_2$.

- Si $|w| > \ell$: alors, $w = w_1 a w_2$ avec $w_1,w_2 \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$, $|w_1| = \ell$.
Comme ci-dessus, le mouvement (*) se décompose en

$$(q(\Lambda),w_1\ a\ w_2,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q(w_1),\ a\ w_2,Z_0), \text{ et}$$

(**) $$(q(w_1),\ a\ w_2,\ Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (r,\Lambda,\gamma).$$

Puisque $(w_1) = \ell$, la première transition de (**) est du type (iii).

Donc $\exists\, i \in \{1,2\}$, $\exists\, p \in K_i$, $\exists\, \gamma_1 \in K_i$ tels que

$$(p_0^{(i)},w_1a,Z_0) \overset{*}{\underset{M_i}{\vdash}} (p,\Lambda,\gamma_1), \text{ et (**) se décompose en}$$

$$(q(w_1),\ a\ w_2,\ Z_0) \vdash_M (p,w_2,\gamma_1), \text{ et}$$

(***) $$(p,w_2,\gamma_1) \overset{*}{\vdash}_M (r,\Lambda,\gamma).$$

D'après la construction de M, puisque $p \in K_i$ et que $(K_1 \cap K_2) \in \emptyset$, (***) est vrai dans M_i, et $r \in K_i$.

Donc $(p_0^{(i)},w,Z_0) \overset{*}{\vdash}_{M_i} (r,\Lambda,\gamma)$, avec $r \in F' \cap K_i = F_i$, c'est-à-dire $w \in L_1 \cup L_2$.

De plus, si M_1 et M_2 sont complets, $r \in F_i$ implique $\gamma = Z_0$, et M est alors complet lui aussi.

Montrons inversement que $L_1 \cup L_2 \subseteq T(M)$.

Soit $w \in L_1 \cup L_2$.

- Si $|w| \leqslant \ell$: par des transitions du type (ii),

$$(q(\Lambda),w,Z_0) \overset{*}{\vdash}_M (q(w),\Lambda,Z_0), \text{ et } q(w) \in F' \subseteq F,$$

c'est-à-dire $w \in T(M)$.

- Si $|w| > \ell$: alors $w = w_1\ a\ w_2$ avec $w_1, w_2 \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$, $|w_1| = \ell$. Comme ci-dessus, $(q(\Lambda),w_1,Z_0) \overset{*}{\vdash}_M (q(w_1),\Lambda,Z_0)$.

Puisque $w_1\ a\ w_2 \in L_1 \cup L_2$, $\exists\ i \in \{1,2\}$, tels que $w_1\ a\ w_2 \in L_i$; donc , $\exists\ p_1,p_2 \in K_i$, $\exists\ r \in F_i$, $\exists\ \gamma_1,\gamma_2$, $\gamma \in \Gamma_i^*$ tels que

$$(p_0^{(i)},w_1\ a\ w_2,Z_0) \overset{*}{\vdash}_{M_i} (p_1,a\ w_2,\gamma_1) \vdash_{M_i} (p_2,w_2,\gamma_2) \overset{*}{\vdash}_{M_i} (r,\Lambda,\gamma).$$

Par une transition de type (iii), $(q(w_1),a,Z_0) \vdash_M (p_2,\Lambda,\gamma_2)$.

D'après les transitions de type (i), tout mouvement dans M_i est un mouvement dans M. Donc $(p_2,w_2,\gamma_2) \overset{*}{\vdash}_M (r,\Lambda,\gamma)$ avec $r \in F_i \subseteq F$. Donc $T(M) = L_1 \cup L_2$.

De plus, $\Delta_M \subseteq \Delta_{M_1} \cup \Delta_{M_2}$.

Soient (p_1,x_1,Z), $(p_2,x_2,Z) \in \Delta_M$.

Puisque $Z \neq Z_0$ par définition de Δ_M, et que $(\Gamma_1 \setminus \{Z_0\}) \cap (\Gamma_2 \setminus \{Z_0\}) = \emptyset$, $\exists$ $i \in \{1,2\}$, tel que $(p_j,x_j,Z) \in \Delta_{M_i}$ pour $j=1,2$.

Si M_1 et M_2 sont permutables, $\delta_i(p_k,x_j,Z) = \delta_i(p_j,x_j,Z)$, $\forall$ $i,j,k \in \{1,2\}$

Comme $\delta(p_k,x_j,Z) = \delta_i(p_k,x_j,Z) = \delta_i(p_j,x_j,Z) = \delta(p_j,x_j,Z)$, M est aussi permutable.

Si de plus M_1 et M_2 sont sans permutations,

$(p_j,x_j,Z) \in \Delta_{M_i}$ implique $x_1 = x_2$, et M vérifie aussi la condition (III.1).

Enfin, si M_1 et M_2 sont sans mot vide, il en est de même pour M.

<u>*Théorème IV.4*</u> *: Soient* L *et* A *deux langages tels que* $L \setminus A$ *et* A *soient* F*-disjoints. Si* L *est un C-langage quelconque [resp. déterministe, resp. permutable, resp. sans permutations],* $L \setminus A$ *l'est aussi.*

Soit $M = (K,\Sigma,\Gamma,\delta,Z_0,p_0,F)$ un automate à pile de mémoire (éventuellement déterministe sans boucle, permutable, ou sans permutations), qui reconnaisse L.

Posons $E = \text{Init } (L \setminus A) \cap \text{Init } (A)$, et

$\ell = \text{Max } \{|w| \mid w \in E\}$.

Soit K' un ensemble de nouveaux états liés biunivoquement aux éléments de $\{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq \ell\}$: $K' = \{q(w) \mid |w| \leq \ell\}$.

Posons $F' = \{q(w) \in K' \mid w \in L \setminus A\}$, $K_1 = K \cup K'$, $F_1 = F \cup F'$, et $q_0 = q(\Lambda)$.

Soit alors $M_1 = (K_1,\Sigma,\Gamma,\delta_1,Z_0,q_0,F_1)$, où δ_1 est défini de la façon suivante

. Pour tout $(p,x,Z) \in K \times \Sigma^0 \times \Gamma$:

(i) $\delta_1(p,x,Z) = \delta(p,x,Z)$;

. Pour tout $w \in \Sigma^*$, tel que $|w| \leq \ell$, et pour tout $a \in \Sigma$:

- si $|w| \leqslant \ell-1$: (ii) $\delta_1(q(w),a,Z_0) = \{(q(wa),Z_0)\}$;

- si $|w| = \ell$ et $wa \in \mathrm{Init}\ (L \setminus A)$:

(iii) $\delta_1(q(w),a,Z_0) = \{(p,\gamma)\}$

où p et γ sont tels que $\exists\ p' \in K$, $\exists\ \gamma' \in \Gamma^*$ pour lesquels

$$(p_0,wa,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p',a,\gamma') \underset{M}{\vdash} (p,\Lambda,\gamma).$$

Remarquons que, puisque $wa \in \mathrm{Init}\ (L \setminus A) \subseteq \mathrm{Init}\ (L)$, de tels p, p',γ,γ' existent et que de plus, si M est déterministe, ils sont uniques.

Si M est déterministe, il en est donc de même pour M_1.

Considérons $w \in T(M_1)$. $\exists\ r \in F_1$, $\exists\ \gamma \in \Gamma^*$ tels que

(*) $$(q_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (r,\Lambda,\gamma).$$

- Si $|w| \leqslant \ell$, les seules transitions possibles sont du type (i), et le mouvement (*) est $(q(\Lambda),w,Z_0) \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (q(w),\Lambda,Z_0)$, avec $q(w) \in K' \cap F_1 = F'$.

Donc, $w \in L \setminus A$.

- Si $|w| > \ell$, $w = w_1\ a\ w_2$ avec $w_1,w_2 \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$, et $|w_1| = \ell$.

Comme ci-dessus, le mouvement (*) se décompose en

$$(q(\Lambda),w_1\ a\ w_2,Z_0) \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (q(w_1),\ a\ w_2,Z_0), \text{ et}$$

(**) $$(q(w_1),\ a\ w_2,Z_0) \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (r,\Lambda,\gamma).$$

Comme $|w_1| = \ell$, la première transition de (**) est du type (iii) ; donc $w_1\ a \in \mathrm{Init}\ (L \setminus A)$, et (**) se décompose en

$$(q(w_1),\ a\ w_2,Z_0) \underset{M_1}{\vdash} (p,w_2,\gamma_1) \quad , \text{ et}$$

(***) $$(p,w_2,\gamma_1) \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (r,\Lambda,\gamma) \text{ , où } p \in K, \text{ et}$$

$$(p_0,w_1\ a,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p',a,\gamma') \underset{M}{\vdash} (p,\Lambda,\gamma_1) \qquad (p' \in K,\ \gamma' \in \Gamma^*).$$

Puisque $p \in K$, (***) n'utilise que des transitions du type (i) ; ce mouvement est donc vrai dans M, et $r \in K$.

Par conséquent, $(p_0, w_1\ a\ w_2, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (r, \Lambda, \gamma)$ avec $r \in F_1 \cap K = F$, c'est-à-dire $w \in L$.

Comme de plus $w_1 a \in \text{Init}\ (L \setminus A)$ et que $|w_1 a| > \ell$, $w_1\ a \notin \text{Init}\ (A)$; par conséquent, $w_1\ a\ w_2 = w \notin A$, ce qui implique $T(M_1) \subseteq L \setminus A$.

Remarquons aussi que si M est complet, $r \in F$ implique $\gamma = Z_0$, et M_1 est complet aussi.

Montrons inversement que $L \setminus A \subseteq T(M_1)$.

Soit $w \in L \setminus A$.

- Si $|w| \leq \ell$, par des transitions de type (ii),

$$(q(\Lambda), w, Z_0) \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (q(w), \Lambda, Z_0) \text{ et } q(w) \in F' \subseteq F_1,$$

c'est-à-dire $w \in T(M_1)$.

- Si $|w| > \ell$, $w = w_1\ a\ w_2$ avec w_1, $w_2 \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$, et $|w_1| = \ell$.

Comme ci-dessus, $(q(\Lambda), w_1, Z_0) \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (q(w_1), \Lambda, Z_0)$.

Comme $w \in L \setminus A$, $w_1 a \in \text{Init}\ (L \setminus A)$; donc $\exists\ p, p' \in K$, $\exists\ r \in F$,

$\exists\ \gamma, \gamma', \gamma_1 \in \Gamma^*$ tels que $(p_0, w_1\ a\ w_2, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p', a\ w_2, \gamma') \underset{M}{\vdash} (p, w_2, \gamma)$

$$\overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (r, \Lambda, \gamma_1).$$

Alors, par une transition de type (iii), $(q(w_1), a, Z_0) \underset{M_1}{\vdash} (p, \Lambda, \gamma)$.

Comme enfin tout mouvement dans M est vrai dans M_1,

$$(p, w_2, \gamma) \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (r, \Lambda, \gamma_1), \text{ avec } r \in F \subseteq F_1.$$

Donc $T(M) = L \setminus A$.

De plus, $\Delta_{M_1} \subseteq \Delta_M$.

Soient (p_1,x_1,Z), $(p_2,x_2,Z) \in \Delta_{M_1} \subseteq \Delta_M$.

Si M est permutable, $\delta(p_j,x_i,Z) = \delta(p_i,x_i,Z)$, $\forall$ i, j $\in \{1,2\}$. Comme $\delta_1(p_j,x_i,Z) = \delta(p_j,x_i,Z) = \delta(p_i,x_i,Z) = \delta_1(p_i,x_i,Z)$, M_1 est alors permutable.

Si de plus M est sans permutations, $x_1=x_2$ et M_1 vérifie la condition (III.1) ; de plus puisque M est sans mot vide, M_1 l'est aussi.

Le théorème suivant donne une propriété de clôture spécifique aux C-langages sans permutations :

Théorème IV.5 : L'intersection d'un C-langage sans permutations est d'un K-langage local est un C-langage sans permutations.

Soit M un automate sans permutations.

Soient $A,B \subseteq \Sigma$, $\Delta \subseteq \Sigma^2$, et $R = (A\Sigma^* \cap \Sigma^*B) \setminus \Sigma^* \Delta \Sigma^*$ un K-langage local.

Posons $K_1 = (K \times \Sigma) \cup \{p_0\}$, $F_1 = F \times B$, et

$M_1 = (K_1,\Sigma,\Gamma,\delta_1,Z_0,p_0,F_1)$ où δ_1 est défini de la façon suivante : pour tout $(q,a,Z) \in K_1 \times \Sigma \times \Gamma$,

- si $(q,Z) = (p_0,Z_0)$, si $(r,\gamma) \in \delta(p_0,a,Z_0)$, et si $a \in A$, alors :

  (i) $\delta_1(q,a,Z) = ([r,a],\gamma)$;

- si q est de la forme $[p,b] \in K \times \Sigma$, si $(r,\gamma) \in \delta(p,a,Z)$, et si $ba \notin \Delta$, alors : (ii) $\delta_1(q,a,Z) = ([r,a],\gamma)$.

M_1 ainsi défini est sans mot vide, et il est de plus déterministe car M l'est aussi.

Considérons $w \in T(M_1)$.

$\exists\ a_1,\dots,a_n \in \Sigma$, $\exists\ q_0,\dots,q_n \in K_1$, $\exists\ \gamma_0,\dots,\gamma_n \in \Gamma^*$ tels que

$w = a_1 \dots a_n$, $q_0 = p_0$, $q_n \in F_1$, $\gamma_0 = Z_0$, et

(*) $$(q_i, a_{i+1} \dots a_n, \gamma_i) \vdash_{M_1} (q_{i+1}, a_{i+2} \dots a_n, \gamma_{i+1}) \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1.$$

Posons $\gamma_i = \bar{\gamma}_i Z_i$, avec $\bar{\gamma}_i \in \Gamma^*$ et $Z_i \in \Gamma$, pour $0 \leq i \leq n$.

Pour tout $q_i \in K \times \Sigma$, posons $q_i = [r_i, x_i]$.

Par construction de M_1, (*) utilise une transition du type (i) si $i=0$, et du type (ii) pour tout i strictement positif. Donc, pour tout $i \geq 1$, $x_i = a_i$, $a_i\ a_{i+1} \notin \Delta$, et

$$(r_i, a_{i+1} \dots a_n, \gamma_i) \vdash_{M} (r_{i+1}, a_{i+2} \dots a_n, \gamma_{i+1}) \ ;$$

De plus, $a_1 \in A$, et comme $q_n \in F_1$, $r_n \in F$ et $a_n \in B$.

Donc $a_1 \dots a_n \in T(M) \cap R$.

En outre, M étant complet, $\gamma_n = Z_0$ et M_1 est complet.

Montrons inversement que $T(M) \cap R \subseteq T(M_1)$.

Considérons $w \in T(M) \cap R$.

$\exists\ a_1,\dots,a_n \in \Sigma$, $\exists\ r_0,\dots,r_n \in K$, $\exists\ \gamma_0,\dots,\gamma_n \in \Gamma^*$ tels que

$w = a_1 \dots a_n$, $r_0 = p_0$, $r_n \in F$, $\gamma_0 = Z_0$, $a_1 \in A$, $a_n \in B$,

$(r_i, a_{i+1} \dots a_n, \gamma_i) \vdash_{M} (r_{i+1}, a_{i+2} \dots a_n, \gamma_{i+1})$,

et $a_{i+1}\ a_{i+2} \notin \Delta$ pour $0 \leq i \leq n-1$.

Alors, pour une transition de type (i) :

$$(p_0, a_1 \dots a_n, Z_0) \vdash_{M_1} ([r_1, a_1], a_2 \dots a_n, \gamma_1) \ ;$$

et pour tout $0 \leq i \leq n-1$:

$$([r_i,a_i],a_{i+1}\dots a_n,\gamma_i) \underset{M_1}{\vdash} ([r_{i+1},a_{i+1}],a_{i+2}\dots a_n,\gamma_{i+1}).$$

Comme enfin $[r_n,a_n] \in F \times B$, $T(M_1) = T(M) \cap R$.

Il reste à montrer que M_1 vérifie les conditions (II.1) et (III.1).

Soient (q_1,x_1,Z) et (q_2,x_2,Z) de Δ_{M_1}.

Pour tout $i \in \{1,2\}$, comme $\delta_1(q_i,x_i,Z)$ ne peut être du type (i),
$\exists\ p_1,p_2,r_1,r_2 \in K$, $\exists\ a_1,a_2 \in \Sigma$, $\exists\ \gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma^* \setminus Z\Gamma^*$
tels que $q_i = [p_i,a_i]$, $\delta_1(q_i,x_i,Z) = ([r_i,x_i],\gamma_i)$,

et $\delta(p_i,x_i,Z) = (r_i,\gamma_i)$.

Donc $(p_i,x_i,Z) \in \Delta_M$, et puisque M est sans permutations, $x_1 = x_2 = a \in \Sigma$, et $(r_1,\gamma_1) = (r_2,\gamma_2)$.

Par conséquent, $\delta_1(q_j,x_i,Z) = \delta_1([p_j,a_j],a,Z)$

$= ([r_j,a],\gamma_j) = ([r_i,a],\gamma_i) = \delta_1([p_i,a_i],a,Z)$

$= \delta_1(q_i,x_i,Z)$ pour tous $i,j \in \{1,2\}$.

M_1 est donc sans permutations.

Des théorèmes III.2, IV.5, et de [3], nous déduisons le corollaire suivant :

<u>*Corollaire IV.1*</u> *: Tout C-langage est l'image homomorphe d'un C-langage sans permutations.*

INTRODUCTION AU CHAPITRE V

***

{ L'intérêt théorique des langages bornés conduit naturellement à l'étude d'une caractérisation des bornés permutables.

Une telle caractérisation est établie dans ce chapitre (Théorème V.1) ; elle s'exprime d'une manière simple en termes de semi-linéaires particuliers.

Etabli dans le cas des bornés sur deux lettres, ce résultat ne s'étendrait que difficilement au cas général. En effet le nombre restreint d'opérations stables sur la classe des C-langages sans permutations, et en particulier la non stabilité par application séquentielle et par intersection avec un K-langage, rendrait délicate une généralisation. }

CHAPITRE V

C-LANGAGES PERMUTABLES BORNES

Nous donnons dans ce chapitre une caractérisation des C-langages permutables inclus dans $a_1^* a_2^*$, a_1 et a_2 étant des lettres différentes.

D'après le théorème III.2, les C-langages bornés permutables sont reconnus par des automates sans permutations ; nous utiliserons donc ces automates pour obtenir la caractérisation.

Etablissons au préalable une propriété de clôture :

<u>Lemme V.1</u> : L'union et la différence d'un C-langage permutable borné sur deux lettres et de l'image canonique d'un ponctuel est un C-langage permutable.

Soit L un tel C-langage et P un ponctuel.

Soit α la plus grande des 1-constantes des linéaires constituants de P.

Soit $R = \{a_1^{n_1} a_2^{n_2} \in L \mid n_1 \leqslant \alpha\}$.

n est un K-langage car $R = \bigcup_{n_1=1}^{\alpha} a_1^{n_1}(\{w \in \Sigma^* \mid a_1^{n_1} w \in L\} \cap a_2^*)$.

De plus $L \setminus R$ et R sont F-disjoints.

Donc, d'après le théorème IV.4, $L \setminus R$ est permutable.

D'autre part, P et R étant des K-langages, $P \cup R$ et $R \setminus P$ sont des K-langages, donc des C-langages permutables.

Par conséquent $(L \setminus R) \cup (P \cup R) = L \cup P$, et

$$(L \setminus R) \cup (R \setminus P) = L \setminus P$$

sont des C-langages permutables comme union F-disjointe de C-langages permutables (théorème IV.3).

Le lemme suivant met en évidence les particularités des mouvements dans un automate sans permutations :

<u>Lemme V.2</u> : Si M est un automate sans permutations, et si $T(M) \subseteq a_1^* a_2^*$ n'est pas un K-langage,

$\exists$ m, t $\in$ N, $\exists$ f, g $\in \mathbb{N}^+$, $\exists$ r $\in$ F tels que,

pour tout $(u_i,v_i) \in \mathbb{N}^2$ avec $u_i \geq m$,

$f_a(u_i,v_i) \in T(M)$ implique $\exists$ h_i, f_i, t_i, $g_i \in \mathbb{N}$,

avec $f_i < f$, et $g_i > 0$ tels que :

a) $u_i = m + h_i\, f + f_i$,

b) $v_i = g_i + h_i\, g + t + t_i$,

c) $(p_0, a_1^{u_i} a_2^{v_i - t_i}, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (r, \Lambda, Z_0)$, et $v < v_i - t_i$ implique $a_1^{u_i} a_2^{v} \notin T(M)$,

d) Si $f_i = f_j$, alors $g_i = g_j$.

M étant déterministe et sans mot vide, et puisque de plus T(M) n'est pas un K-langage, d'après [7] et [4] :

$\exists$ m, f $\in \mathbb{N}^+$, $\exists$ w, y $\in \Gamma\Gamma^*$, $\exists$ Z $\in \Gamma$, $\exists$ p $\in$ K tels que

1°) $\forall$ h $\geq$ 0 : $(p_0, a_1^{m+hf}, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \Lambda, wy^h Z)$,

2°) $\forall$ k $\geq$ 0 : $(p, a_1^k, wy^h Z) \overset{*}{\vdash} (p', \Lambda, \gamma)$ implique $\gamma = wy^h \gamma'$ avec $\gamma' \in \Gamma\Gamma^*$.

Soit $(u_i,v_i) \in f_a^{-1}(T(M))$ avec $u_i \geq m$.

Soient h_i et f_i respectivement le quotient et le reste de la division de $(u_i - m)$ par f.

Alors, $\exists$ $p_i' \in K$, $\exists$ $\gamma_i' \in \Gamma\Gamma^*$ tels que, $\forall$ h', $0 \leq h' \leq h_i$:

$$(p_0, a_1^{m+h_i f+f_i}, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, a_1^{(h_i-h')f+f_i}, wy^{h'}Z) \overset{*}{\vdash} (p_i', \Lambda, wy^{h_i}\gamma_i'),$$

et puisque M est complet, et que $a_1^{u_i} a_2^{v_i} \in T(M)$, $\exists\ r_i' \in F$ tel que $(p_i', a_2^{v_i}, wy^{h_i}\gamma_i') \overset{*}{\vdash} (r_i', \Lambda, Z_0)$.

Par conséquent, d'après le lemme III.1,

$\exists\ q \in K$ tel que, $\forall\ h' \geq 0$ avec $h' \leq h_i$, $\exists\ k \in \mathbb{N}^+$:

$$(p, a_1^{(h_i-h')f+f_i} a_2^k, Z) \overset{*}{\vdash} (p_i', a_2^k, y^{h_i-h'}\gamma_i') \overset{*}{\vdash} (q, \Lambda, \Lambda).$$

Donc, $\exists\ g_i \in \mathbb{N}^+$ tel que $(p_i', a_2^{g_i}, \gamma'_i) \overset{*}{\vdash} (q, \Lambda, \Lambda)$,

et $\exists\ g \in \mathbb{N}^+$ tel que $(q, a_2^g, y) \overset{*}{\vdash} (q, \Lambda, \Lambda)$.

Comme q et y sont indépendants de i, g l'est aussi.

Nous avons donc :

$$(p_0, a_1^{u_i} a_2^{v_i}, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p_i', a_2^{v_i}, wy^{h_i}\gamma_i') \overset{*}{\vdash} (q, a_2^{v_i-g_i}, wy^{h_i})$$
$$\overset{*}{\vdash} (q, a_2^{v_i-h_i g-g_i}, w) \overset{*}{\vdash} (r_i', \Lambda, Z_0).$$

Soit maintenant t le plus petit entier pour lequel $\exists\ r \in F$, $\exists\ \gamma \in \Gamma^*$ tels que $(q, a_2^t, w) \overset{*}{\vdash} (r, \Lambda, \gamma)$. D'après la forme du mouvement ci-dessus, et puisque M est complet, un tel t existe, $\gamma = Z_0$, et $t \leq v_i - h_i g - g_i$.

De plus, puisque q et w sont indépendants de i, t et r le sont aussi ; comme en outre M est déterministe, r est unique.

Donc, en posant $t_i = v_i - g_i - h_i g - t$, on obtient

$$(p_0, a_1^{u_i} a_2^{v_i-t_i}, Z_0) \overset{*}{\vdash} (r, \Lambda, Z_0) \text{ avec } r \in F.$$

Enfin, si $f_i = f_j$, alors $\gamma_i' = \gamma_j'$ et $p_i' = p_j'$. Comme M est déterministe, ceci implique $g_i = g_j$.

Le lemme suivant fait une première restriction sur la structure des C-langages permutables bornés :

<u>Lemme V.3</u> : Tout C-langage L, permutable et borné sur deux lettres tel qu'il existe α, $\beta \in \mathbb{N}$, et $p \in \mathbb{N}^+$ vérifiant $\{a_1^{\alpha+\Theta p}\ a_2^{\beta} \mid \Theta \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ est un K-langage.

D'après le lemme V.2, si T(M) n'est pas un K-langage, $\forall\ \Theta \geq m$, $\alpha + \Theta p$ est de la forme $m+hf+f_1$, avec $f > 0$ et $f_1 < f$, et β est de la forme $g_1+hg+t+t_1$, avec $g > 0$.

En particulier, si $\Theta = m+ \beta f$, $\alpha+\Theta p \geq m$, et

$\alpha + \Theta p = \alpha + (m+\beta f)p = m + hf + f_1 < m + (h+1)f \leq h+1.$

Mais $\alpha + (m+\beta f)p \geq \beta$, donc $\beta < h+1$.

Or $\beta = g_1 + hg + t + t_1 \geq h + g_1 > h$, donc $\beta \geq h + 1$. Il y a donc contradiction.

Nous définissons maintenant un type particulier de semi-linéaires :

<u>Définition V.1</u> : Nous appellerons <u>semi-linéaire primaire</u> toute union finie disjointe de linéaires de type 1 et 3, de même 1-constante, et de même période de contrainte.

Dans un semi-linéaire primaire, une des 2-constantes des linéaires constituants est particulièrement intéressante :

<u>Définition V.2</u> : Nous appellerons <u>base</u> d'un semi-linéaire primaire la plus petite des 2-constantes de ses linéaires constituants.

Nous noterons généralement (p,q) la période de contrainte, α la 1-constante et β la base d'un tel semi-linéaire.

Une des particularités de la base est donnée par le lemme suivant qui se déduit immédiatement de la définition V.2 :

<u>Lemme V.4</u> : Dans tout semi-linéaire primaire SL, $\forall\ \Theta$, $\mu \in \mathbb{N}$, $\beta + \Theta q > \mu$ implique $(\alpha + \Theta p,\mu) \notin SL$.

La caractérisation cherchée sera exprimée en termes de semi-linéaires homomorphes deux à deux :

Définition V.3 : Nous dirons que deux semi-linéaires primaires SL_1 *et* SL_2*, de périodes de contrainte, de 1-constantes, et de bases respectives* (p_i,q_i)*,* α_i*, et* β_i *pour* $i=1,2$*, sont homomorphes si et seulement s'ils sont 1-disjoints et s'ils vérifient de plus les deux conditions suivantes :*

(V.1) : $p_1q_2 = p_2q_1$,

(V.2) : $\forall\ \lambda \in \mathbb{N}$, $(\alpha_1,\beta_1+\lambda) \in SL_1$ *si et seulement si* $(\alpha_2,\beta_2+\lambda) \in SL_2$.

Lemme V.5 : Tout C-langage permutable borné sur deux lettres qui n'est pas un K-langage est l'image canonique de l'union finie disjointe d'un ponctuel et de semi-linéaires primaires homormorphes deux à deux.

Notons L un tel C-langage. Puisque L est déterministe, d'après [4] (Théorèmes II.6.2 et I.2.1), il est l'image canonique d'une union finie disjointe de rationnels et de semi-linéaires ordonnés, entrelacés deux à deux. D'après le lemme V.3, aucun de ces rationnels ne peut être de la forme $c+(p,0)^*$, et aucun des linéaires constituants ne peut être du type 2. $f_a^{-1}(L)$ est donc l'union finie disjointe d'un ponctuel P, et de semi-linéaires primaires 1-disjoints, de même 1-période : SL_i pour $i \in I$.

Alors, d'après le lemme V.1, $L \setminus f_a(P) = \bigcup_{i\in I} f_a(SL_i)$ est un C-langage sans permutations et il est reconnu par un automate sans permutations M.

Pour tout $i \in I$, notons α_i, β_i, (p,q_i) respectivement la 1-constante, la base, et la période de contrainte de SL_i.

Soient m, $t \in \mathbb{N}$, f, $g \in \mathbb{N}^+$, et $r \in F$ définis comme dans le lemme V.2 ; alors, d'après ce lemme, $\forall\ i \in I$, $\forall\ \Theta \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha_i + \Theta p \geq m$, et puisque $(\alpha_i,\beta_i) + \Theta(p_i,q_i) \in SL_i$, $\exists\ h_i$, f_i, t_i, $g_i \in \mathbb{N}$ avec $f_i < f$ tels que :

- $\alpha_i + \Theta p = m + h_if + f_i$,

- $\beta_i + \Theta q_i = g_i + h_ig + t + t_i$, et

- $(\alpha_i + \Theta p,\ \beta_i + \Theta q_i - t_i) \in f_a^{-1}(T(M))$.

Comme les SL_i sont 1-disjoints deux à deux, d'après le lemme V.4, $t_i=0$

En outre, la condition $f_i < f$ impose que la décomposition de $\alpha_i+\Theta p$ en $m+h_i f+f_i$ est unique.

Par conséquent, en prenant Θ successivement égal à m et à $m+f$:

$\exists\ h_i,\ h'_i,\ f_i,\ f'_i,\ g_i,\ g'_i \in \mathbb{N}$ avec $f_i < f$ et $f'_i < f$,

tels que $\alpha_i + mp = m + h_i f + f_i$,

$\beta_i + mq_i = g_i + h_i g + t$,

et $\alpha_i + (m+f)\ p = m + h'_i f + f'_i$,

$\beta_i + (m+f)\ q_i = g'_i + h'_i g + t$.

Mais comme $\alpha_i + (m+f)\ p = m + (h_i+p)\ f + f_i$,

$h'_i = h_i + p$, $f_i = f'_i$, et par application du lemme V.2, $g_i = g'_i$.

Donc $\forall\ i \in I$, $fq_i = pg$; ceci implique que $\forall\ i, j \in I$, $q_i = q_j$, donc que les SL_i vérifient deux à deux la condition (V.1).

Pour un i quelconque dans I, considérons maintenant $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $(\alpha_i,\beta_i+\lambda) \in SL_i$ comme ci-dessus, pour tout entier

$\Theta \geq \frac{m-\alpha}{p}$, $(p_0,a_1^{\alpha_i+\Theta p}\ a_2^{\beta_i+\Theta q_i},Z_0) \overset{*}{\vdash} (r,\Lambda,Z_0)$. Comme de plus

$(\alpha_i + \Theta p,\ \beta_i + \Theta q_i + \lambda) \in SL_i$, et comme M est déterministe, $\exists\ r_i \in F$ tel que $(r,a_2^{\lambda},Z_0) \overset{*}{\vdash} (r_i,\Lambda,Z_0)$.

Alors, $\forall\ j \in I$, $\forall\ \Theta \geq \frac{m-\alpha_j}{p}$:

$$(p_0,a_1^{\alpha_j+\Theta p}\ a_2^{\beta_j+\Theta q_j+\lambda},Z_0) \overset{*}{\vdash} (r,a_2^{\lambda},Z_0) \overset{*}{\vdash} (r_i,\Lambda,Z_0).$$

Donc $\exists\ k \in I$ tel que $(\alpha_j + \Theta p,\ \beta_j + \Theta p_j + \lambda) \in SL_k$.

Or les SL_i sont 1-disjoints deux à deux. Donc $k = j$.

Ceci implique $(\alpha_j,\beta_j+\lambda) \in SL_j$ et complète la démonstration.

Pour la démonstration de la condition suffisante, nous aurons besoin d'un résultat analogue à [4] (Théorème I.2.1) :

Lemme V.6 : **Toute union finie disjointe de semi-linéaires primaires homomorphes deux à deux est l'union finie disjointe d'un ponctuel et de semi-linéaires primaires positifs homomorphes et entrelacés deux à deux.**

C'est une simple transposition de [4] (lemmes I.1.2, I.1.4, et I.2.4) sur des semi-linéaires primaires. Si de plus ces semi-linéaires sont homomorphes deux à deux, il est facile de vérifier que les transformations de [4] respectent la 1-disjonction et les conditions (V.1) et (V.2).

Lemme V.7 : **L'image canonique d'une union finie disjointe d'un ponctuel et de semi-linéaires primaires homomorphes deux à deux est un C-langage permutable.**

D'après le lemme V.6, nous pouvons supposer que ces semi-linéaires sont en outre positifs et entrelacés deux à deux.

Notons P le ponctuel, et SL_i $(1 \leq i \leq n)$ les semi-linéaires considérés. Pour chaque i $(1 \leq i \leq n)$, notons α_i, β_i, et (p,q) respectivement la 1-constante, la base, et la période de contrainte de SL_i. Par hypothèse, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 1$, et $|\alpha_i - \alpha_j| < p$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

Nous pouvons supposer que $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, et poser $\alpha_i = \alpha_1 + \lambda_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Puisque les semi-linéaires sont entrelacés deux à deux :

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < p.$$

En outre, comme les semi-linéaires sont homomorphes deux à deux : $\forall\ i,\ j \in \{1,\ldots,n\}$,

$$\{\mu \in \mathbb{N} \mid (\alpha_i + \beta_i + \mu) \in SL_i\} = \{\mu \in \mathbb{N} \mid (\alpha_j,\ \beta_j + \mu) \in SL_j\}$$

Notons S cet ensemble, et posons $R = \{a_2^{\mu} \mid \mu \in S\}$.

Comme $R = \{w \in \Sigma^* \mid a_1^{\alpha_1}\ a_2^{\beta_1}\ w \in f_a(SL_1)\} \cap a_2^*$, R est un C-langage sur une lettre, donc un K-langage.

Soit $A = (K_A, \{a_2\}, \delta_A, p_A, F_A)$ l'automate d'états fini qui reconnait R.

Ceci étant posé, nous allons construire un automate permutable qui reconnait $f_a\ (\bigcup_{i=1}^{n} SL_i)$.

Pour cela, soit K_1 un ensemble de α_1 états : $K_1 = \{p_i \mid 0 \leqslant i < \alpha_1\}$; soit K_2 un ensemble de p états : $K_2 = \{q_i \mid 0 \leqslant i < p\}$; pour chaque k compris entre 1 et n, soit $K_3(k)$ un ensemble $\beta_k - 1$ états : $K_3(k) = \{r_i(k) \mid 1 \leqslant i < \beta_k\}$; soit enfin K_4 un ensemble q états : $K_4 = \{s_i \mid 1 \leqslant i \leqslant q\}$.

Ces ensembles seront supposés disjoints entre eux et disjoints de K_A.

Soit $\Gamma = \{Z_0, Z_1\}$, où $Z_0 \neq Z_1$.

Posons alors $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, Z_0, p_0, F_A)$, où

$$K = K_1 \cup K_2 \bigcup_{k=1}^{n} K_3(k) \cup K_4 \cup K_A,$$

et où δ est défini de la façon suivante :

(1) : $\delta(p_i, a_1, Z_0) = (p_{i+1}, Z_0)$ pour $0 \leqslant i < \alpha_1 - 1$,

(2) : $\delta(p_{\alpha-1}, a_1, Z_0) = (q_0, Z_0)$,

(3) : $\delta(q_i, a_1, Z_j) = (q_{i+1}, Z_j)$ pour $0 \leqslant i < p-1$, et $j=0,1$,

(4) : $\delta(q_{p-1}, a_1, Z_j) = (q_0, Z_j\ Z_1)$ pour $j=0,1$,

(5) : $\delta(q_{\lambda_k}, a_2, Z_j) = (r_1(k), Z_j)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, et $j=0,1$,

(6) : $\delta(r_i(k), a_2, Z_j) = (r_{i+1}(k), Z_j)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $j=0$, et $1 \leqslant i < \beta_k - 1$,

(7) : $\delta(r_{\beta_k}(k), a_2, Z_1) = (s_1, \Lambda)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

(8) : $\delta(r_{\beta_k - 1}(k), a_2, Z_0) = (p_A, Z_0)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

(9) : $\delta(s_i, a_2, Z_j) = (s_{i+1}, Z_j)$ pour $1 \leqslant i < q$, et $j=0,1$,

(10) : $\delta(s_q, a_2, Z_1) = (s_1, \Lambda)$

(11) : $\delta(s_q,a_2,Z_0) = (p_A,Z_0)$

(12) : $\delta(t,a_2,Z_0) = (\delta_A(t,a_2),Z_0)$ pour tout $t \in K_A$.

Il est clair que M ainsi défini est sans permutations.

Considérons un mot quelconque $w \in f_a(\bigcup_{i=1}^{n} SL_i)$.

Alors $\exists$ $(u,v) \in \mathbb{N}^2$, $\exists$ k $(1 \leq k \leq n)$ tels que $w = a_1^u a_2^v$, et $(u,v) \in SL_k$.

Donc $\exists$ $\Theta \in \mathbb{N}$, $\exists$ $\mu \in S$ tels que $(u,v) = (\alpha_k,\beta_k) + \Theta(p,q) + (0,\mu)$.

Alors, par (1) : $(p_0,a_1^{\alpha_1-1},Z_0) \overset{*}{\vdash} (p_{\alpha_1-1},\Lambda,Z_0)$, car $\alpha_1-1 \geq 0$;

par (2) : $(p_{\alpha_1-1},a_1,Z_0) \vdash (q_0,\Lambda,Z_0)$;

puisque par (3) : $(q_0,a_1^{p-1},Z_j) \vdash (q_{p-1},\Lambda,Z_j)$, $\forall$ $j \in \{0,1\}$,

et que par (4) : $(q_{p-1},a_1,Z_j) \vdash (q_0,\Lambda,Z_j\ Z_1)$, $\forall$ $j \in \{0,1\}$,

donc, par (3) et (4) : $(q_0,a_1^{\Theta p},Z_0) \overset{*}{\vdash} (q_0,\Lambda,Z_0\ Z_1^{\Theta})$;

puisque $\lambda_k \leq p-1$, par (3) : $(q_0,a_1^{\lambda_k},Z_0\ Z_1^{\Theta}) \overset{*}{\vdash} (q_{\lambda_k},\Lambda,Z_0\ Z_1^{\Theta})$.

Donc $(p_0,a_1^u,Z_0) \overset{*}{\vdash} (q_{\lambda_k},\Lambda,Z_0\ Z_1^{\Theta})$.

De plus, par (5) : $(q_{\lambda_k},a_2,Z_0\ Z_1^{\Theta}) \vdash (r_1(k),\Lambda,Z_0\ Z_1^{\Theta})$;

par (6) : $(r_1(k),a_2^{\beta_k-2},Z_0\ Z_1^{\Theta}) \overset{*}{\vdash} (r_{\beta_k-1}(k),\Lambda,Z_0\ Z_1^{\Theta})$, car $\beta_k-2 \geq 0$.

Distinguons alors deux cas :

- soit $\Theta = 0$:

alors, par (8) : $(r_{\beta_k-1}(k),a_2,Z_0) \vdash (p_A,Z_0)$.

Donc $(q_{\lambda_k},a_2^{\beta_k},Z_0) \overset{*}{\vdash} (p_A,\Lambda,Z_0)$,

et $(p_0,a_1^{\alpha_k+\Theta p}\ a_2^{\beta_k+\Theta q},Z_0) \overset{*}{\vdash} (p_A,\Lambda,Z_0)$.

- soit $\Theta \neq 0$:

alors, par (7) : $(r_{\beta_k-1}(k), a_2, Z_0\ Z_1^{\Theta}) \vdash (s_1, \Lambda, Z_0\ Z_1^{\Theta-1})$;

puisque par (9) : $(s_1, a_2^{q-1}, Z_0\ Z_1^{\Theta-1}) \overset{*}{\vdash} (s_q, \Lambda, Z_0\ Z_1^{\Theta-1})$;

et que par (10) , si $\Theta>1$: $(s_q, a_2, Z_0\ Z_1^{\Theta-1}) \vdash (s_1, \Lambda, Z_0\ Z_1^{\Theta-2})$,

donc, par (9) et (10) : $(s_q, a_2^{q(\Theta-1)}, Z_0\ Z_1^{\Theta-1}) \overset{*}{\vdash} (s_q, \Lambda, Z_0)$;

puis, par (11) : $(s_q, a_2, Z_0) \vdash (p_A, \Lambda, Z_0)$.

Donc $(q_{\lambda_k}, a_2\ a_2^{\beta_k-2}\ a_2\ a_2^{q-1}\ a_2^{q(\Theta-1)}\ a_2, Z_0\ Z_1^{\Theta})$

$= (q_{\lambda_k}, a_2^{\beta_k+\Theta q}, Z_0\ Z_1^{\Theta}) \overset{*}{\vdash} (p_A, \Lambda, Z_0)$,

et ici encore : $(p_0, a_1^{\alpha_k+\Theta p}\ a_2^{\beta_k+\Theta q}, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p_A, \Lambda, Z_0)$.

Comme enfin $\mu \in S$, $a_2^{\mu} \in E(A)$; donc $\exists\ t \in F_A$ tel que $(p_A, a_2^{\mu}, Z_0) \overset{*}{\vdash} (t, \Lambda, Z_0)$, ce qui montre que $w \in T(M)$.

Montrons maintenant l'inclusion inverse, et considérons pour cela un mot quelconque $w \in T(M)$.

Puisque M est sans mot vide, $\exists\ t_0, \dots, t_m \in K$, $\exists\ x_1, \dots, x_m \in \Sigma$, $\exists\ \gamma_0, \dots, \gamma_m \in \Gamma^*$ tels que $t_0 = p_0$, $t_m \in F_A$, $x_1 \dots x_m = w$, $\gamma_0 = Z_0$, et $(t_{i-1}, x_i \dots x_m, \gamma_{i-1}) \vdash (t_i, x_{i+1} \dots x_m, \gamma_i)$, pour $1 \leq i \leq m$.

Notons τ_i ce mouvement.

- Puisque $t_0 \in K_1$ et $t_m \notin K_1$, $\exists\ m_1 : 0 \leq m_1 < m$, tel que $t_{m_1} \in K_1$ et $t_{m_1+1} \notin K_1$.

Par construction de M, τ_{m_1} est du type (2) ; donc $\gamma_{m_1+1} = Z_0$, $x_{m_1+1} = a_1$, $t_{m_1} = p_{\alpha_1-1}$, $t_{m_1+1} = q_0 \in K_2$, et pour $0 \leq i < m_1$, τ_i est du type (1) ; par conséquent, $\gamma_i = Z_0$, $x_{i+1} = Z_0$, $t_i = p_i$.

Donc $m_1 = \alpha_1 - 1$ et $x_1\ \dots\ x_{m_1+1} = a_1^{\alpha_1}$.

- Puisque $t_{m_1+1} \in K_2$ et $t_m \notin K_2$, $\exists\, m_2 : m_1 + 1 \leq m_2 < m$, tel que $t_{m_2} \in K_2$ et $t_{m_2+1} \notin K_2$.

Par construction de M, τ_{m_2} est du type (5) ; donc $x_{m_2+1} = a_2$, $\gamma_{m_2+1} = \gamma_{m_2}$ et $\exists\, k$ $(1 \leq k \leq n)$ tel que $t_{m_2} = q_{\lambda_k}$, et $t_{m_2+1} = r_1(k) \in K_3(k)$; de plus, pour $1 \leq i < m_2 - m_1$, τ_{m_1+i} est du type (3) ou (4). Plus précisément, si i est de la forme Θp, τ_{m_1+i} est du type (4) ; donc dans ce cas,

$t_{m_1+i} = q_{p-1}$, $t_{m_1+i+1} = q_0$, $x_{m_1+i+1} = a_2$ et $\gamma_{m_1+i+1} = \gamma_{m_1+i}\, Z_1$.

Si i n'est pas de la forme Θp, τ_{m_1+i} est du type (3) ; donc dans ce cas, en posant $i = \Theta' p + j$ avec $j < p$,

$t_{m_1+i} = q_{j-1}$, $t_{m_1+i+1} = q_j$, $x_{m_1+i+1} = a_2$, et $\gamma_{m_1+i+1} = \gamma_{m_1+i}$. Par conséquent, puisque $\lambda_k < p$, $\exists\, \Theta \geq 0$ tel que $m_2 - m_1 - 1 = \Theta p + \lambda_k$, $\gamma_{m_2+1} = Z_0\, Z_1^{\Theta}$, et $x_{m_1+2} \cdots x_{m_2} = a_1^{\Theta p + \lambda k}$.

Donc $x_1 \ldots x_{m_2+1} = a_1^{\alpha_k + \Theta p}\, a_2$.

- Puisque $t_{m_2+1} \in K_3(k)$ et $t_m \notin K_3(k)$, $\exists\, m_3 : m_2 + 1 \leq m_3 < m$, tel que $t_{m_3} \in K_3(k)$ et $t_{m_3+1} \notin K_3(k)$.

Par construction de M, τ_{m_3} est du type (7) ou (8) ; donc $x_{m_3+1} = a_2$, $t_{m_3} = r_{\beta_k - 1}(k)$, et pour $1 \leq i < m_3 - m_2$, τ_{m_2+i} est du type (6) ; par conséquent, $\gamma_{m_2+i} = \gamma_{m_2+i+1}$, $x_{m_2+i} = a_2$, et $t_{m_2+i} = r_i(k)$.

Donc $m_3 - m_2 = \beta_k - 1$, et $x_{m_2+2} \cdots x_{m_3+1} = a_2^{\beta_k - 1}$,

Distinguons maintenant les deux cas :

. τ_{m_3} est du type (8) :

Alors $\gamma_{m_3} = \gamma_{m_3+1} = Z_0$, et $t_{m_3+1} = p_A$.

Comme $\gamma_{m_3} = \gamma_{m_2+1} = Z_0\ Z_1^{\Theta}$, nous avons dans ce cas $\Theta=0$, et en posant $m_4=m_3$, nous obtenons :

$\exists\ m_4 : 0 \leqslant m_4 < m,\ \exists\ \Theta \geqslant 0,\ \exists\ k : 1 \leqslant k \leqslant n$, tels que

$x_1 \ldots x_{m_4+1} = a_1^{\alpha_k+\Theta p}\ a_2^{\beta_k+\Theta q}$, $t_{m_4+1} = p_A$, $\gamma_{m_4+1} = Z_0$.

. τ_{m_3} est du type (7) :

alors $\gamma_{m_3} = \gamma_{m_3+1}\ Z_1$, et $t_{m_3+1} = s_1 \in K_4$.

Puisque $t_{m_3+1} \in K_4$ et $t_m \notin K_4$, $\exists\ m_4 : m_3 \leqslant m_4 < m$, tel que $t_{m_4} \in K_4$ et $t_{m_4+1} \notin K_4$.

Par construction de M, τ_{m_4} est du type (11) ; donc

$\gamma_{m_4+1} = \gamma_{m_4} = Z_0$, $x_{m_4+1} = a_2$, $t_{m_4} = s_q$, $t_{m_4+1} = p_A$,

et pour $1 \leqslant i < m_4-m_3$, τ_{m_3+i} est du type (9) ou (10).

Plus précisément, si i est de la forme νq, τ_{m_3+i} est du type (10) ; donc dans ce cas, $t_{m_4+i} = s_q$, $t_{m_4+i+1} = s_1$, $x_{m_4+i+1} = a_2$, et $\gamma_{m_4+i} = \gamma_{m_4+i+1}\ Z_1$.

Si i n'est pas de la forme νq, τ_{m_4+i} est du type (9) ; dans ce cas, en posant $i=\nu' q+j$ avec $j<q$, $t_{m_4+i} = s_j$, $t_{m_4+i+1} = s_{j+1}$, $x_{m_4+i+1} = a_2$ et $\gamma_{m_4+i+1} = \gamma_{m_4+i}$. Comme $\gamma_{m_3} = \gamma_{m_2+1} = Z_0\ Z_1^{\Theta}$, $\gamma_{m_3+1} = Z_0\ Z_1^{\Theta-1}$, et il y a $(\Theta-1)$ applications de la transition (10).

Par conséquent, $m_4-m_3-1 = (\Theta-1)\ q + q-1 = \Theta q-1$; donc $x_{m_3+2} \cdots x_{m_4+1} = a_2^{\Theta q}$, et nous obtenons encore : $\exists\ m_4 : 0 \leqslant m_4 < m$, $\exists\ \Theta \geqslant 0$, $\exists\ k : 1 \leqslant k \leqslant n$, tels que $x_1 \ldots x_{m_4+1} = a_1^{\alpha_k+\Theta p}\ a_2^{\beta_k+\Theta q}$, $t_{m_4+1} = p_A$, $\gamma_{m_4+1} = Z_0$.

Si maintenant $m_4+1 = m$:

$$w = x_1 \dots x_{m_4+1} = a_1^{\alpha_k+\Theta p} \; a_2^{\beta_k+\Theta q} \in f_a(SL_k).$$

Sinon, d'après la définition de δ, pour $1 \leq i < m-m_4$: τ_{m_4+i} est du type (12) ; donc

$$\delta_A(p_A, x_{m_4+2} \dots x_m) = t_m \in F_A \text{ ; par conséquent, } x_{m_4+2} \dots x_m = a_2^{m-m_4-1} \in E(A).$$

Donc $m-m_4-1 = \mu \in S$, et comme $(\alpha_k+\Theta p, \beta_k+\Theta q) \in SL_k$,

$$w = x_1 \dots x_m = a_1^{\alpha_k+\Theta p} \; a_2^{\beta_k+\Theta q+\mu} \in f_a(SL_k).$$

Donc $T(M) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} f_a(SL_k) = f_a(\bigcup_{k=1}^{n} SL_k)$. Comme M est sans permutations et que $f_a(\bigcup_{k=1}^{n} SL_k) \subseteq T(M)$, d'après le lemme V.1 : $f_a(P \bigcup_{k=1}^{n} SL_k) = f_a(P) \cup f_a(\bigcup_{k=1}^{n} SL_k)$ est un C-langage permutable, ce qui achève la démonstration.

Des lemmes V.5 et V.7, nous déduisons la caractérisation suivante :

Théorème V.1 : *Un C-langage borné sur deux lettres qui n'est pas un K-langage est permutable si et seulement s'il est l'image canonique de l'union finie disjointe d'un ponctuel et de semi-linéaires primaires homomorphes deux à deux.*

CHAPITRE VI

ANALYSE SYNTAXIQUE

Nous développons ici un algorithme d'analyse syntaxique à partir des automates à pile de mémoire. D'abord justifié pour les automates permutables, il sera ensuite étendu aux déterministes. Cet algorithme n'est pas original. Trouvé de façon pragmatique pour ALGOL 60 [14], il n'avait pas été justifié. C'est donc la présentation et la justification de cet algorithme qui forment l'originalité de ce chapitre.

Un des intérêts de l'analyse prédictive est de signaler l'erreur à la détection du premier caractère erroné de la chaîne source. Pour que cet intérêt soit conservé dans un automate à pile de mémoire M, il faut que, $\forall\ (p,w,\gamma) \in K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$,

(VI.1) : $$(p_0,w,Z_0) \overset{*}{\vdash} (p,\Lambda,\gamma) \text{ implique } w \in \text{Init}\ (T(M)).$$

Par un algorithme voisin de celui de réduction des C-grammaires, nous pourrions montrer que la condition (VI.1) peut être supposée vérifiée dans tout automate à pile de mémoire.

D'autre part, l'analyse syntaxique se fait le plus souvent sur des langages de la forme Lc, où $L \subseteq (\Sigma \setminus \{c\})^*$. D'après le théorème (I.3) [resp. d'après [7]], Lc est permutable [resp. déterministe] si et seulement si L l'est aussi. Nous supposerons donc que les langages à analyser, qu'ils soient déterministes ou permutables, sont de la forme Lc.

Alors, si l'automate vérifie la condition (VI.1), $w \in L$ si et seulement si $\exists\ (p,\gamma) \in K \times \Gamma^*$ tel que $(p_0,wc,Z_0) \overset{*}{\vdash} (p,\Lambda,\gamma)$. Il sera en particulier inutile de tester si $p \in F$ ni , dans le cas des permutables, si $\gamma = Z_0$.

La difficulté d'utilisation pratique d'un automate à pile de mémoire réside dans son codage. D'après le résultat ci-dessus, la représentation de l'automate peut se réduire à celle de δ qui est pour les déterministes une application de $K \times \Sigma^{\circ} \times \Gamma$ dans $K \times \Gamma^*$. Le volume d'informations correspondant est prohibitif.

Nous allons donc nous ramener à des automates à pile de mémoire équivalents, pour lesquels la représentation de δ sera plus condensée.

Une forme d'automate à pile de mémoire équivalente aux déterministes est la forme semi-déterministe.

<u>*Définition VI.1*</u> *: Nous dirons qu'un automate à pile de mémoire* M *est* <u>*semi-déterministe*</u> *si*

(i) : $\forall\ (p,x,Z) \in K \times \Sigma^{\circ} \times \Gamma$: card $(\delta(p,x,Z)) \leq 1$.

(ii) : si $\exists\ p,\ q \in K,\ \exists\ a \in \Sigma,\ \exists\ Z \in \Gamma$ *tels que*

$\delta(p,a,Z) \neq \emptyset$, *et* $\delta(p,\Lambda,Z) = (q,\gamma)$ *avec* $\gamma \in \Gamma^*$,

alors $\forall\ \gamma' \in \Gamma^*,\ \nexists\ (r,\gamma'') \in K \times \Gamma^*$ *tels que* $(q,a,\gamma') \overset{*}{\vdash} (r,\Lambda,\gamma'')$.

Pour chaque automate à pile de mémoire semi-déterministe M , posons maintenant

$$B_M = \{(p,x) \in K \times \Sigma^{\circ} \mid \forall\ (q,\gamma) \in K \times \Gamma^*,\ \exists\ Z \in \Gamma \text{ tel que}$$
$$\delta(p,x,Z) \neq \emptyset \text{ et } \delta(p,x,Z) \neq (q,Z\gamma)\}.$$

Intuitivement, B_M est l'ensemble des configurations où le sommet de pile est utilisé pour déterminer la transition.

L'analyse se fera à partir d'automates semi-déterministes particuliers :

<u>*Définition VI.2*</u> *: Nous appellerons* <u>*analyseur déterministe*</u> *tout automate à pile de mémoire semi-déterministe* M *qui vérifie les conditions suivantes :*

(VI.2) : $B_M = \{(p,\Lambda) \mid \forall Z \in \Gamma, \exists q \in K$ *tel que* $\delta(p,\Lambda,Z) = (q,\Lambda)\}$,

(VI.3) : *Pour tous* $p, q \in K$, $x \in \Sigma^\circ$, $Z \in \Gamma$, $\gamma \in \Gamma^*$,

$\delta(p,x,Z) = (q,Z\gamma)$ *implique* $|\gamma| \leqslant 1$.

Intuitivement, la condition (VI.2) signifie que le sommet de pile n'est utilisé pour déterminer la transition que lorsqu'il y a "dépilage". De plus, dans ce cas, il n'y a pas lecture sur le "ruban d'entrée".

Définition VI.3 : Nous dirons qu'un C-langage L *est accepté par un analyseur déterministe si*

$$L = \{w \in (\Sigma \setminus \{c\})^* c \mid \exists q \in K, \exists \gamma \in \Gamma^*, \text{ tels que } (p_0,w,Z_0) \overset{*}{\vdash} (q,\Lambda,\gamma)\}.$$

En posant $F = \{q \in K \mid \exists p \in K, \exists Z \in \Gamma, \exists \gamma \in \Gamma^* : \delta(p,c,Z) = (q,\gamma)\}$, nous retrouverions la définition classique des langages reconnus par un automate à pile de mémoire.

Nous nous intéressons d'abord à l'analyse des C-langages permutables.

Définition VI.4 : Nous appellerons analyseur permutable tout analyseur déterministe M *qui vérifie en outre la condition suivante :*

(VI.4) : $\forall p_1,p_2 \in K, \forall Z \in \Gamma$:

$(p_1,\Lambda), (p_2,\Lambda) \in B_M$ *implique* $\delta(p_1,\Lambda,Z) = \delta(p_2,\Lambda,Z)$.

Nous arrivons alors à un résultat comparable au théorème II.1 :

Théorème VI.1 : Tout C-langage permutable est accepté par un analyseur permutable.

La démonstration est analogue à celle du théorème II.1 et ne sera pas développée en détail.

D'après le théorème I.2, un tel C-langage L est engendré par une C-grammaire 2-prédictive $G = (V,\Sigma,P,\sigma)$.

Soient Z_0 un nouvel élément, et $\Gamma = (V \setminus \Sigma) \cup \{Z_0\}$.

Soit K un ensemble d'états liés biunivoquement aux éléments de

$\Gamma \cup \{\Lambda\}$: $K = \{p(\xi) \mid \xi \in V \setminus \Sigma\} \cup \{p(\Lambda), p(Z_0)\}$.

Posons alors $M = (K,\Sigma,\Gamma,\delta,Z_0,p,(\sigma),\emptyset)$, où δ est définie de la façon suivante :

Pour toute production $(\xi \to y) \in P$ $(y \in \{\Lambda\} \cup \Sigma(V \setminus \Sigma)^*$ et $|y| \leq 3)$,

- si $y = a\ \xi_1\ \xi_2$ avec $a \in \Sigma$, $\xi_1,\xi_2 \in V \setminus \Sigma$, alors

$$\delta(p(\xi),a,Z) = (p(\xi_1),Z\ \xi_2), \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$$

- si $y = a\ \xi_1$ avec $a \in \Sigma$, $\xi_1 \in V \setminus \Sigma$, alors

$$\delta(p(\xi),a,Z) = (p(\xi_1),Z), \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$$

- si $y = a$ avec $a \in \Sigma$, alors

$$\delta(p(\xi),a,Z) = (p(\Lambda),Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$$

- si $y = \Lambda$ alors $\delta(p(\xi),\Lambda,Z) = (p(Z),\Lambda)$, $\quad \forall\ Z \in \Gamma$;

nous ajouterons en outre la transition

$$\delta(p(\Lambda),\Lambda,Z) = (p(Z),\Lambda) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$$

Puisque G vérifie la condition (I.5), il est facile de montrer que M est semi-déterministe. Puisqu'il vérifie les conditions (VI.2), (VI.3), et (VI.4), M est un analyseur permutable.

Enfin, en réutilisant les mêmes raisonnements que pour le théorème II.1, nous montrerions que M accepte L.

Remarquons en outre que dans l'analyseur ci-dessus, $\forall\ (p,Z) \in K \times \Gamma$, $\delta(p,\Lambda,Z) \neq \emptyset$ implique $\exists\ q \in K : \delta(p,\Lambda,Z) = (q,\Lambda)$.

Les transitions d'un analyseur permutable sont donc de trois types :

T1 : $\delta(p,a,Z) = (q,Z)$, $\forall\ Z \in \Gamma$;

Le sommet de pile est inutilisé ; T1 est comparable à une transition d'un automate d'états fini. Son codage ne présente aucune difficulté : il suffit d'associer à p le doublet (a,q).

Notons aussi que dans un langage de programmation, cette transition est très souvent utilisée ;

T2 : $$\delta(p,a,Z) = (q,ZZ_1),\ \forall\ Z \in \Gamma\ ;$$

Le sommet de pile est encore inutilisé.

En dédoublant T2 en T2.1 : $\delta(p,a,Z) = (r(q,Z_1),Z) \quad \forall\ Z \in \Gamma$

et T2.2 : $\delta(r(q,Z_1),\Lambda,Z) = (q,ZZ_1)\ \forall\ Z \in \Gamma$,

où $r(q,Z_1)$ est un nouvel état lié biunivoquement à $(q,Z_1) \in K \times \Gamma$,

T2.1 est du type T1.

Pour le codage de T2.2, il suffit de faire correspondre un doublet (E,q) à $r(q,Z_1)$: dans ce doublet, E est un symbole spécial qui répond aux deux buts suivants :

- il permet de différencier (E,q) des doublets (a,q) de T1,

- il permet de spécifier qu'il y a empilage d'un élément Z_1 lié à l'état $r(q,Z_1)$, et que l'état courant devient q.

T3 : $$\delta(p,\Lambda,Z) = (q,\Lambda)\ ;$$

Puisque l'analyseur est permutable, il vérifie la condition (VI.4), et q est entièrement déterminé par Z ; comme il vérifie de plus la condition (VI.2), il y a "dépilage" quel que soit le sommet de pile. Il suffit donc d'une seule information (D) pour représenter cette transition T3.

Par homogénéité, c'est cependant un doublet (D,q) que nous ferons correspondre à p. Le symbole spécial D joue donc encore deux rôles :

- il permet de différencier (D,q) des doublets (a,q) de T1 et (E,q) de T2 ;

- il permet de spécifier qu'il y a dépilage, et que l'état associé au sommet de pile devient l'état courant.

Bien que les transitions du type

T4 : $$\delta(p,\Lambda,Z) = (q,Z) \quad \forall\ Z \in \Gamma$$

ne soient pas nécessaires dans un analyseur permutable, il est souhaitable de les introduire, essentiellement pour des raisons d'encombrement. Z n'étant pas à spécifier dans cette transition, c'est encore un doublet (B,q) que nous ferons correspondre à p : le symbole spécial B y joue encore un rôle de différenciation, et précise qu'il y a branchement : l'état courant devient q.

Enfin, dans le cas où $\exists$ $(p,Z) \in K \times \Gamma$ tel que $\delta(p,\Lambda,Z) = \emptyset$, puisque M vérifie la condition (VI.2), $\forall$ $Z' \in \Gamma$, $\delta(p,\Lambda,Z') = \emptyset$. Nous introduirons alors un nouvel état f, et une transition

T5 : $$\delta(p,\Lambda,Z) = (f,Z) \quad \forall\ Z \in \Gamma.$$

Puisque f est indépendant de p, et que Z n'est pas à spécifier, il suffit d'une seule information (A) pour représenter la transition T5. Par homogénéité, c'est encore un doublet (A,f) que nous ferons correspondre à p. Le symbole spécial A y joue encore un rôle de différenciation, et indique que le fonctionnement de l'automate doit être interrompu.

A chaque état p correspond donc un certain nombre de transitions : les transitions du type T1 représentées par des doublets (a,q), et une et une seule transition de la forme $\delta(p,\Lambda,Z)$, du type T2.2, T3, T4 ou T5, représentée par un doublet (X,q) où $X \in \{E,D,B,A\}$. Etant dans cet état, l'analyseur sélectionnera la transition à utiliser grâce à la lettre a lue sur le ruban d'entrée. Puisque l'automate est semi-déterministe, une seule transition est possible : ou bien $\delta(p,a,Z) \neq \emptyset$; dans ce cas le choix de la transition $\delta(p,\Lambda,Z)$ n'aurait pas pu permettre d'accepter la lettre a, ou bien $\delta(p,a,Z) = \emptyset$, et dans ce cas, la seule transition possible était $\delta(p,\Lambda,Z)$. Ceci montre que l'analyseur doit lire sur le ruban d'entrée avant de déterminer la transition à utiliser, même si cette transition est finalement du type $\delta(p,\Lambda,Z)$; le fonctionnement de l'analyseur s'éloigne donc de l'utilisation normale d'un automate à pile de mémoire où le choix des transitions du type $\delta(p,\Lambda,Z)$ se fait sans connaissance de la lettre présente sur le ruban d'entrée.

Puisque le choix d'une transition ne se fait pas dans un ordre arbitraire, les doublets qui les représentent ne seront pas stockés dans un ordre quelconque : nous placerons successivement les doublets (a,q) de T1, puis le doublet (X,q) de T2.2, T3, T4 ou T5. L'état courant repèrera le premier de ces doublets, et le choix de la transition se fera par un balayage séquentiel à partir du premier de ces doublets. Si la lettre à analyser coïncide avec une première coordonnée d'un doublet (a,q) de T1, c'est cette transition $\delta(p,a,Z)$ qui sera sélectionnée. Sinon, le balayage sera interrompu à la rencontre du couple (X,q) en sélectionnant la transition $\delta(p,\Lambda,Z)$ qu'il représente.

D'autre part, le passage d'un état à un autre ne se fait jamais implicitement. Sauf pour les transitions du type T3, le nouvel état courant est la seconde coordonnée du couple représentant la transition sélectionnée. Pour les transitions du type T3, puisque l'analyseur vérifie la condition (VI.4), le nouvel état est entièrement déterminé par le sommet de pile, par exemple Z_1. Il est donc possible de connaître, dès l'empilage de Z_1 l'état dans lequel devra être l'analyseur au moment du dépilage de Z_1. C'est donc cet état $q(Z_1)$ que nous empilerons. L'ordre relatif des différents états n'a alors d'importance que pour $r(q,Z_1)$: $\delta(r(q,Z_1),\Lambda,Z) = (q,ZZ_1)$ $\forall$ Z $\in$ P, et $q(Z_1)$, puisque dans les autres cas, les états sont explicités. Nous choisirons de placer les transitions correspondant à l'état $q(Z_1)$ juste derrière le doublet (E,q), où Z_1 est déterminé par la position de ce doublet.

Par conséquent, si le couple sélectionné est (a,q), la lettre a est acceptée et le nouvel état courant devient q.

Si le couple sélectionné est (X,q) :

- Si X = E, il y a empilage d'un repère du couple qui suit immédiatement (E,q), et le nouvel état courant devient q ;

- Si X = D, il y a dépilage, et le sommet de pile devient l'état courant ;

- Si X = B, il y a branchement : le nouvel état devient q ;

- Si X = A, il y a arrêt : le caractère à analyser n'est pas accepté, et le mot analysé n'appartient pas au langage. q est inutilisé, mais il peut être mis à profit pour circonstancier les messages d'erreurs.

Considérons par exemple le C-langage permutable $L_1 = \{a^n\, b^n\, c \mid n \leqslant 1\}$.

$$L = L(G_1), \text{ avec } G_1 = (\{\sigma,\lambda,\gamma,\beta,a,b,c\}, \{a,b,c\}, \{\sigma \to a\lambda\gamma,\ \lambda \to a\lambda\beta,\ \lambda \to b,\ \gamma \to c,\ \beta \to b\}, \sigma).$$

Parallèlement, $L_1 = T(M)$ avec $M = (\{p_0,p_1,p_2,p_3\}, \{a,b,c\}, \{Z_0,Z_1\},$

$\delta, Z_0, p_0, \{p_3\})$, où $\delta(p_0,a,Z_0) = (p_1,Z_0\ Z_1)$,

$\delta(p_1,a,Z_1) = (p_1,Z_1\ Z_1)$,

$\delta(p_1,b,Z_1) = (p_2,\Lambda)$,

$\delta(p_2,b,Z_1) = (p_2,\Lambda)$,

$\delta(p_2,c,Z_0) = (p_3,Z_0)$.

La C-grammaire G_1 et l'automate M sont permutables. Nous pouvons construire un analyseur permutable qui accepte L_1 :

$N_1 = (\{p_i \mid 0 \leq i \leq 7\}, \{a,b,c\}, \{Z_0,Z_1,Z_2\}, \delta_1, Z_0, p_0, \emptyset)$, où

$\delta_1(p_0,a,Z) = (p_1,Z)$ $\forall\ Z \in \Gamma = \{Z_0,Z_1,Z_2\}$,

$\delta_1(p_1,\Lambda,Z) = (p_2,ZZ_1)$ $\forall\ Z \in \Gamma$,

$\delta_1(p_2,a,Z) = (p_3,Z)$ $\forall\ Z \in \Gamma$,

$\delta_1(p_3,\Lambda,Z) = (p_2,ZZ_2)$ $\forall\ Z \in \Gamma$,

$\delta_1(p_2,b,Z) = (p_4,Z)$ $\forall\ Z \in \Gamma$,

$\delta_1(p_4,\Lambda,Z_2) = (p_5,\Lambda)$,

$\delta_1(p_4,\Lambda,Z_1) = (p_6,\Lambda)$,

$\delta_1(p_4,\Lambda,Z_0) = (p_7,\Lambda)$,

$\delta_1(p_5,b,Z) = (p_4,Z)$ $\forall\ Z \in \Gamma$,

$\delta_1(p_6,c,Z) = (p_7,Z)$ $\forall\ Z \in \Gamma$.

Dans cet analyseur, en reprenant les notations précédentes,
$q(Z_0) = p_7$, $q(Z_1) = p_6$, $q(Z_2) = p_5$,
$r(p_2,Z_1) = p_1$, $r(p_2,Z_2) = p_3$.

Il pourra être représenté par l'ensemble de couples suivants :

$$p_0 : \left[\begin{array}{ll} a & p_1 \\ A & - \end{array}\right.$$

$$r(p_2,Z_1) = p_1 : \left[\begin{array}{ll} E & p_2 \end{array}\right.$$

$$q(Z_1) = p_6 : \left[\begin{array}{ll} c & p_7 \\ A & - \end{array}\right.$$

$$p_2 : \left[\begin{array}{ll} a & p_3 \\ b & p_4 \\ A & - \end{array}\right.$$

$$r(p_2,Z_2) = p_3 : \left[\begin{array}{ll} E & p_3 \end{array}\right.$$

$$q(Z_2) = p_5 : \left[\begin{array}{ll} b & p_4 \\ A & - \end{array}\right.$$

$$p_4 : \left[\begin{array}{ll} D & - \end{array}\right.$$

$$p_7 : \left[\begin{array}{ll} A & - \end{array}\right.$$

Il est clair que cette représentation de l'analyseur peut être encore condensée, et que l'analyseur n'est pas unique.

Considérons aussi le C-langage $L_2 = \{a^n c(ac^*,b)^n d \mid n \geq 1$. L_2 est encore un C-langage permutable, engendré par la C-grammaire permutable $G_2 = (\{\sigma,\lambda,\gamma,\tau,\nu,a,b,c,d\}$,

$$\{a,b,c,d\}, \{\sigma \to a\lambda\gamma,\ \lambda \to a\lambda\tau,\ \lambda \to a\tau,\ \tau \to a\nu,\ \tau \to b,\ v \to c\nu,\ \nu \to \Lambda,\ \gamma \to d\}, \sigma).$$

Alors que L_1 était un s-langage, L_2 n'est pas un s-langage.

L_2 est accepté par l'analyseur permutable N_2 suivant :

$N_2 = (\{p_i \mid 0 \leq i \leq 8\}, \{a,b,c,d\}, \{Z_0,Z_1,Z_2\}, \delta_2, Z_0, p_0, \emptyset)$ où

$$\delta_2(p_0,a,Z) = (p_1,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma = \{Z_0,Z_1,Z_2\},$$

$$\delta_2(p_1,\Lambda,Z) = (p_2,ZZ_1) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_2(p_2,a,Z) = (p_3,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_2(p_3,\Lambda,Z) = (p_2,ZZ_2) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_2(p_2,c,Z) = (p_4,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_2(p_4,a,Z) = (p_5,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_2(p_4,b,Z) = (p_6,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_2(p_5,c,Z) = (p_5,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_2(p_5,\Lambda,Z_0) = \delta_2(p_6,\Lambda,Z_0) = (p_8,\Lambda),$$

$$\delta_2(p_5,\Lambda,Z_1) = \delta_2(p_6,\Lambda,Z_1) = (p_7,\Lambda),$$

$$\delta_2(p_5,\Lambda,Z_2) = \delta_2(p_6,\Lambda,Z_1) = (p_4,\Lambda),$$

$$\delta_2(p_7,d,Z) = (p_8,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$$

avec $q(Z_0) = p_8$, $q(Z_1) = p_7$, $q(Z_2) = p_4$, et

$$r(p_2,Z_1) = p_1,\ r(p_2,Z_2) = p_3.$$

N_2 peut être représenté par :

$$p_0 : \left[\begin{array}{ll} a & p_1 \\ A & - \end{array}\right.$$

$$r(p_2,Z_1) = p_1 : \left[\begin{array}{ll} E & p_2 \end{array}\right.$$

$$q(Z_1) = p_7 : \left[\begin{array}{ll} d & p_8 \\ A & - \end{array}\right.$$

$$p_2 : \left[\begin{array}{ll} a & p_3 \\ c & p_4 \\ A & - \end{array}\right.$$

$$r(p_2,Z_2) = p_3 \ : \ \left[\begin{array}{ll} E & p_3 \end{array} \right.$$

$$q(Z_2) = p_4 \ : \ \left[\begin{array}{ll} a & p_5 \\ b & p_6 \\ A & - \end{array} \right.$$

$$p_5 \ : \ \left[\begin{array}{ll} c & p_5 \\ D & - \end{array} \right.$$

$$p_6 \ : \ \left[\begin{array}{ll} D & - \end{array} \right.$$

$$q(Z_0) = p_8 \ : \ \left[\begin{array}{ll} A & - \end{array} \right.$$

Ici encore, la représentation de l'analyseur peut être condensée.

Décrivons enfin l'algorithme d'analyse en ALGOL 60 :
l'analyse d'un caractère est réalisée par la procédure booléenne suivante, dont le résultat est VRAI si le caractère est accepté, FAUX si le caractère est refusé.

```
BØØLEEN PRØCEDURE ANALYSE (LETTRE) ; VALEUR LETTRE ;
ENTIER LETTRE ;
DEBUT CØMMENTAIRE L'analyseur est codé dans un ENTIER
TABLEAU DELTA [1:D,1:2]. Nous rangerons la pile dans un
ENTIER TABLEAU PILE [0:FLEX], et son sommet est repéré
par un ENTIER SØMMET. L'état courant d'analyse est repéré par un
ENTIER ETAT. Ces identificateurs sont déclarés hors de la procédure ;
ENTIER F, PØINTEUR ; AIGUILLAGE FØNCTION := E,D,B,A ;
BØØLEEN PRØCEDURE TERMINAL (P,F) ; VALEUR P; ENTIER P,F ;
CØMMENTAIRE Si DELTA [P,1] est un terminal, la procédure est VRAI, et
F contient la valeur de ce terminal. Sinon la procédure est FAUX, et F
contient respectivement 1,2,3 ou 4 suivant que DELTA [P,1] est E,D,B,
ou A ;
CØDE ;
```

```
      PØINTEUR := ETAT ;

EXAMEN : SI TERMINAL (PØINTEUR,F) ALØRS
            DEBUT SI F = LETTRE ALØRS
                     DEBUT ANALYSE := VRAI ;
                           ETAT := DELTA [PØINTEUR,2] ;
                           ALLERA SØRTIE
                     FIN
                  SINØN DEBUT PØINTEUR := PØINTEUR + 1 ;
                              ALLERA EXAMEN
                        FIN
            FIN
         SINØN  ALLERA FØNCTIØN [F] ;

      E : SØMMET := SØMMET + 1 ; PILE [SØMMET] := PØINTEUR + 1 ;

      B : PØINTEUR := ETAT := DELTA [PØINTEUR,2] ; ALLERA EXAMEN ;

      D : PØINTEUR := ETAT := PILE [SØMMET] ; SØMMET := SØMMET - 1 ;
          ALLERA EXAMEN ;

      A : ANALYSE := FAUX ;

SØRTIE : FIN de l'analyse de la lettre ;
```

L'analyse des C-langages déterministes se fera à partir des analyseurs déterministes. Etablissons pour cela un résultat analogue au théorème VI.1, en nous aidant du lemme suivant :

Lemme VI.1 : Tout automate à pile de mémoire déterministe M est équivalent à un automate à pile de mémoire déterministe $M_1 = (K_1,\Sigma,\Gamma_1,\delta_1,Z_0,q_0,F_1)$ vérifiant la condition suivante :

(VI.5) : $\forall\, q \in K_1,\ \nexists\ w_1,w_2 \in \Sigma^*$ tels que $(p_0,w_i,Z_0) \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma_i)$

pour $i=1,2$, avec $\gamma_1 = Z_0$ et $\gamma_2 \neq Z_0$.

Utilisons pour cela un procédé analogue à celui du théorème II.1 :

Soit $\bar{K}$ un ensemble de nouveaux états liés biunivoquement à ceux de K : $\bar{K} = \{\bar{p} \mid p \in K\}$, et soit $\bar{\Gamma}$ un ensemble de nouveaux éléments liés biunivoquement à ceux de Γ : $\bar{\Gamma} = \{\Sigma \mid Z \in \Gamma\}$.

Notons $\bar{F} = \{\bar{q} \in \bar{K} \mid q \in F\}$ et $q_0 = \bar{p}_0$.

Posons $K_1 = K \cup \bar{K}$, $\Gamma_1 = \Gamma \cup \bar{\Gamma}$, $F_1 = F \cup \bar{F}$, et définissons δ_1 de la façon suivante :

pour tout $(p,x,Z) \in K \times \Sigma^\circ \times \Gamma$, et tout $(q,\gamma) \in K \times \Gamma^*$ tels que $(q,\gamma) \in \delta(p,x,Z)$,

alors : $\delta_1(p,x,Z) = \delta(p,x,Z)$.

De plus, si $\gamma = \Lambda$, alors

$$: \delta_1(p,x,\bar{Z}) = (\bar{q},\Lambda),$$

si $|\gamma| = 1$, en posant $\gamma = Z_1$, alors

$$: \delta_1(p,x,\bar{Z}) = (q,\bar{Z}_1), \text{ et}$$

$$: \delta_1(\bar{p},x,Z) = (\bar{q},Z_1) \;;$$

si $|\gamma| \geq 2$, en posant $\gamma = Z_1 Z_2 \gamma_1$ $(Z_1,Z_2 \in \Gamma,\ \gamma_1 \in \Gamma^*)$, alors

$$: \delta_1(p,x,\bar{Z}) = (q,\bar{Z}_1 Z_2 \gamma_1), \text{ et}$$

$$: \delta_1(\bar{p},x,Z) = (q,Z_1 \bar{Z}_2 \gamma_1).$$

Puisque M est déterministe, M_1 l'est aussi.

De plus, pour tout $(q,w,\gamma) \in K_1 \times \Sigma^* \times \Gamma_1^*$ vérifiant $(q_0,w,Z_0) \mid\!\frac{*}{M_1} (q,\Lambda,\gamma)$,

- si $q \in \bar{K}$, alors $\gamma = Z_0$ et, en posant $q = \bar{p}$:

$$(p_0,w,Z_0) \mid\!\frac{*}{M} (p,\Lambda,Z_0) \;;$$

- si $q \in K_1 \setminus \bar{K}$, alors $\gamma \in Z_0 \bar{\Gamma}\Gamma^*$ et, en posant $\gamma = Z_0 \bar{Z}_1 \gamma_1$ $(\bar{Z}_1 \in \bar{\Gamma})$:

$$(p_0,w,Z_0) \mid\!\frac{*}{M} (p,\Lambda,Z_0 Z_1 \gamma_1).$$

Inversement, pour tout $(p,w,\gamma) \in K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ vérifiant $(p_0,w,Z_0) \mid\!\frac{*}{M} (p,\Lambda,\gamma)$, $\exists\, q \in \{p,\bar{p}\}$, $\exists\, \gamma' \in \Gamma_1^*$ tels que $(q_0,w,Z_0) \mid\!\frac{*}{M_1} (q,\Lambda,\gamma')$, où q et γ' sont définis de la façon suivante :

- si $|\gamma| = 1$: $\gamma = \gamma' = Z_0$ et $q = \bar{p}$;

- si $|\gamma| \geq 2$, en posant $\gamma = Z_0\, Z_1\, \gamma_1 (Z_1 \in \Gamma)$: $\gamma' = Z_0\, \bar{Z}_1\, \gamma_1$ et $q=p$.

Ces deux résultats se montreraient facilement par récurrence sur la longueur des mouvements, et impliquent l'équivalence des automates.

Théorème VI.2 : Tout C-langage déterministe est accepté par un analyseur déterministe.

Considérons un automate à pile de mémoire déterministe M. D'après [6], nous pouvons supposer que M vérifie la condition (VI.3), et d'après le lemme VI.1, qu'il vérifie aussi la condition (VI.5).

Posons $\bar{K} = \{q \in K \mid \forall\, w \in \Sigma^* : (p_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q,\Lambda,\gamma) \Longrightarrow \gamma = Z_0\}$.

Soit $M' = (K,\Sigma,\Gamma,\delta',Z_0,p_0,F)$ un automate à pile de mémoire où δ' est définie de la façon suivante :

- pour tout $(p,x,Z) \in (K \setminus \bar{K}) \times \Sigma^\circ \times \Gamma$:

  (i) : $\delta'(p,x,Z) = \delta(p,x,Z)$;

- pour tout $(q,x,Z) \in \bar{K} \times \Sigma^\circ \times (\Gamma \setminus \{Z_0\})$,

  si $\delta(q,x,Z_0) = \emptyset$, alors :

  (ii) : $\delta'(q,x,Z) = \emptyset$;

  si $\exists\, (r,\gamma_1) \in K \times \Gamma^*$ tel que $\delta(q,x,Z_0) = (r,Z_0\, \gamma_1)$, alors :

  (iii) : $\delta'(q,x,Z) = (r,Z\, \gamma_1)$.

M' ainsi défini est encore déterministe.

De plus, $\forall\, (p,w,\gamma) \in K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$,

$(p_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p,\Lambda,\gamma)$ si et seulement si $(p_0,w,Z_0) \underset{M'}{\vdash} (p,\Lambda,\gamma)$.

Ceci se montrerait par récurrence sur la longueur des mouvements en remarquant que, d'une part les transitions de type (ii) ou (iii) ne sont jamais utilisées dans M' si $Z \neq Z_0$, et que d'autre part, les transitions du type $\delta(p,x,Z)$ avec $(q,x,Z) \in \bar{K} \times \Sigma^{\circ} \times (\Gamma \setminus \{Z_0\})$ ne sont jamais utilisées dans M.

Ceci implique l'équivalence de M et de M', et montre que $B_{M'} \subseteq (K \setminus \bar{K}) \times \Sigma^{\circ}$.

Soit maintenant K' un ensemble de nouveaux états liés biunivoquement aux éléments de $(K \setminus \bar{K}) \times \Gamma$: $K' = \{r(p,Z) \mid p \in K \;\; \bar{K},\ Z \in \Gamma\}$.

Posons $M_1 = (K_1, \Sigma, \Gamma, \delta_1, Z_0, p_0, F)$, où $K_1 = K \cup K'$, et où δ_1^* est définie de la façon suivante :

pour tout $(p,x) \in K \times \Sigma^{\circ}$:

- si $(p,x) \notin B_{M'}$, alors

  (i) : $\delta_1(p,x,Z) = \delta'(p,x,Z) \quad \forall\, Z \in \Gamma$;

- si $(p,x) \in B_{M'}$, alors

  (ii) : $\delta_1(p,\Lambda,Z) = \{(r(p,Z),\Lambda)\} \quad \forall\, Z \in \Gamma$;

  si de plus $\delta'(p,x,Z) = \emptyset$, alors

  (iii) : $\delta_1(r(p,Z),x,Z') = \emptyset \quad \forall\, Z' \in \Gamma$;

  sinon, si $(q,\gamma) = \delta'(p,x,Z)$, alors

  (iv) : $\delta_1(r(p,Z),x,Z') = (q,Z'\gamma) \quad \forall\, Z' \in \Gamma$.

M_1 ainsi défini est bien un analyseur déterministe.

D'autre part, puisque $B_{M'} \subseteq (K \setminus \bar{K}) \times \Sigma^{\circ}$: $\forall\, r \in K'$, $\forall\, w \in \Sigma^*$, $\forall\, \gamma \in \Gamma^*$, $(p_0,w,Z_0) \mathrel{\mathop{\vdash}\limits^{*}_{M_1}} (r,\Lambda,\gamma)$ implique $\gamma \neq \Lambda$. Il serait alors facile de montrer par récurrence sur la longueur des mouvements que $r \in K$ implique $(p_0,w,Z_0) \mathrel{\mathop{\vdash}\limits^{*}_{M'}} (r,\Lambda,\gamma)$.

Comme en outre toute transition de M' est un mouvement dans M_1, les automates sont équivalents.

Donnons maintenant l'application pratique des analyseurs déterministes.

La seule différence entre les analyseurs permutables et les déterministes est que ces derniers ne vérifient pas la condition (VI.4).

Alors qu'il y avait biunivocité dans un analyseur permutable les éléments de pile et les états au moment du dépilage, un élément de pile Z_1 est maintenant associé à un ensemble d'états $K(Z_1)$. Lors du dépilage, la transition se fera en deux étapes : nous sélectionnerons d'abord le sous-ensemble $K(Z_1)$ en dépilant Z_1, puis nous déterminerons le nouvel état courant dans $K(Z_1)$ à l'aide de l'ancien état courant p au moment du dépilage. Il sera donc nécessaire de stocker p avant le dépilage de Z_1 ; ceci pourra se coder par un doublet (SD,p), où le nouveau symbole SD, outre son rôle de différenciation, précise qu'il y a simultanément stockage de p, et dépilage. Parallèlement, il sera nécessaire de pouvoir choisir le nouvel état courant dans $K(Z_1)$. Si Card $(K(Z_1)) \leq 1$, la situation est la même que dans le cas des permutables, et le problème résolu. Sinon, nous ferons correspondre à Z_1 une succession de tests, codés par des triplets (T,p,q) ; ce triplet signifie que si l'état stocké avant le dépilage est p, le nouvel état courant est q ; sinon, il y a lieu d'examiner le triplet (ou le doublet) suivant. Pratiquement il sera nécessaire de ne conserver que des doublets ; par exemple, T et p pourront être regroupés en T(p). Enfin, nous choisirons comme dans le cas permutable de placer ceci juste derrière le doublet (E,s) qui provoque l'empilage de Z_1.

L'algorithme d'analyse décrit dans la procédure ANALYSE est complété de la façon suivante :

```
BØØLEEN PRØCEDURE ANALYSE (LETTRE) ; VALEUR LETTRE ;
    ENTIER LETTRE ;
    DEBUT CØMMENTAIRE DELTA, D, PILE, FLEX, SØMMET, et ETAT
    jouent le même rôle que dans le cas permutable ;
    ENTIER F, PØINTEUR, STØCK ;
    AIGUILLAGE FØNCTION := E,D,B,A,SD,T ;
    BØØLEEN PRØCEDURE TERMINAL (P,F) ; VALEUR P ; ENTIER P,F ;
        CØMMENTAIRE Outre le rôle joué dans le cas permutable,
        F contient 5 ou 6 suivant que DELTA [P,1] est SD ou T(q) ;
        CØDE ;
    ENTIER PRØCEDURE TEST (P) ; VALEUR P ; ENTIER P ;
    CØMMENTAIRE Dans le cas où DELTA [P,1] est T(q),
        TEST vaut q; CØDE ;
```

```
        PØINTEUR := ETAT ;
    EXAMEN : SI TERMINAL (PØINTEUR,F) ALØRS
        DEBUT SI F = LETTRE ALØRS
              DEBUT ANALYSE := VRAI ;
                    ETAT := DELTA [POINTEUR,2] ;
                    ALLERA SØRTIE
              FIN
              SINØN DEBUT PØINTEUR := PØINTEUR + 1 ;
                          ALLERA EXAMEN
                    FIN
        FIN
        SINØN ALLERA FØNCTIØN [F] ;
    E : SØMMET := SØMMET +1 ; PILE [SØMMET] := PØINTEUR +1 ;
    B : PØINTEUR := ETAT := DELTA [PØINTEUR,2] ; ALLERA EXAMEN ;
    SD : STØCK  := DELTA [PØINTEUR,2] ;
    D : PØINTEUR := ETAT := PILE [SØMMET] ; SØMMET := SØMMET -1 ;
        ALLERA EXAMEN ;
    T : SI STØCK = TEST (PØINTEUR) ALØRS ALLERA B
        SINØN DEBUT PØINTEUR := PØINTEUR +1 ;
                    ALLERA EXAMEN
              FIN ;
    A : ANALYSE := FAUX ;
SØRTIE : FIN de l'analyse de la lettre ;
```

Donnons pour terminer deux exemples d'analyseurs déterministes :

1) $L_3 = \{a^n\ b\ a^n\ b\ d \mid n \geq 1\} \cup \{a^n\ c\ a^n\ c\ d \mid n \geq 1\}$.

Ce langage connu pour être déterministe mais non permutable [12] est du même type que les expressions booléennes d'ALGOL 60.

L_3 est accepté par l'analyseur déterministe

$N_3 = (\{p_i \mid 0 \leq i \leq 13\}, \{a,b,c,d\}, \{Z_0,Z_1,Z_2\}, \delta_3, Z_0, p_0, \emptyset)$, où

$\delta_3(p_0,a,Z) = (p_1,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma = \{Z_0,Z_1,Z_2\}$,

$\delta_3(p_1,\Lambda,Z) = (p_2,ZZ_1) \qquad \forall\ Z \in \Gamma$,

$\delta_3(p_2,a,Z) = (p_3,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma$,

$$\delta_3(p_3,\Lambda,Z) = (p_2,ZZ_2) \quad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_3(p_2,b,Z) = (p_4,Z) \quad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_3(p_2,c,Z) = (p_5,Z) \quad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_3(p_4,\Lambda,Z_2) = (p_6,\Lambda),$$

$$\delta_3(p_5,\Lambda,Z_2) = (p_7,\Lambda),$$

$$\delta_3(p_4,\Lambda,Z_1) = (p_8,\Lambda),$$

$$\delta_3(p_5,\Lambda,Z_1) = (p_9,\Lambda),$$

$$\delta_3(p_4,\Lambda,Z_0) = \delta_3(p_5,\Lambda,Z_0) = (p_{13},\Lambda),$$

$$\delta_3(p_6,a,Z) = (p_4,Z) \quad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_3(p_7,a,Z) = (p_5,Z) \quad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_3(p_8,a,Z) = (p_{10},Z) \quad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_3(p_9,a,Z) = (p_{11},Z) \quad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_3(p_{10},b,Z) = (p_{12},Z) \quad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_3(p_{11},c,Z) = (p_{12},Z) \quad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_3(p_{12},d,Z) = (p_{13},Z) \quad \forall\ Z \in \Gamma.$$

En reprenant les notations précédentes, $K(Z_0) = \{p_{13}\}$, $K(Z_1) = \{p_8,p_9\}$, et $K(Z_2) = \{p_6,p_7\}$.

Il peut être représenté par :

$$p_0 \left[\begin{array}{ll} a & p_1 \\ \Lambda & - \end{array}\right.$$

$$p_1 \left[\begin{array}{ll} E & p_2 \end{array}\right.$$

$$K(Z_1) \left[\begin{array}{ll} T(p_4) & p_8 \\ T(p_5) & p_9 \\ \Lambda & - \end{array}\right.$$

$$p_2 \left[\begin{array}{ll} a & p_3 \\ b & p_4 \\ c & p_5 \\ A & - \end{array}\right.$$

$$p_3 \left[\begin{array}{ll} E & p_2 \end{array}\right.$$

$$K(Z_2) \left[\begin{array}{ll} T(p_4) & p_6 \\ T(p_5) & p_7 \\ A & - \end{array}\right.$$

$$p_4 \left[\begin{array}{ll} SD & p_4 \end{array}\right.$$

$$p_5 \left[\begin{array}{ll} SD & p_5 \end{array}\right.$$

$$p_6 \left[\begin{array}{ll} a & p_4 \\ A & - \end{array}\right.$$

$$p_7 \left[\begin{array}{ll} a & p_5 \\ A & - \end{array}\right.$$

$$p_8 \left[\begin{array}{ll} a & p_{10} \\ A & - \end{array}\right.$$

$$p_9 \left[\begin{array}{ll} a & p_{11} \\ A & - \end{array}\right.$$

$$p_{10} \left[\begin{array}{ll} b & p_{12} \\ A & - \end{array}\right.$$

$$p_{11} \left[\begin{array}{ll} c & p_{12} \\ A & - \end{array}\right.$$

$$p_{12} \left[\begin{array}{ll} d & p_{13} \\ A & \end{array}\right.$$

$$p_{13} \left[\begin{array}{l} A \end{array}\right.$$

Il est clair que la représentation de N_3 pourrait être condensée, en particulier en adoptant d'autres conventions pour les couples $(T(p)q)$.

2) $L_4 = \{a^n\ b^p\ c\ b^p\ a^n\ d \mid n,\ p \geq 1\} \cup \{a^n\ b^p\ a^n\ d \mid n,\ p \geq 1\}$.

Ce langage est connu pour être déterministe et ne pas être reconnu par un automate déterministe sans mot vide [7]. Il n'est donc pas permutable.

L_4 est accepté par l'analyseur déterministe.

$N_4 = (\{p_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 13\},\ \{a,b,c,d\},\ \{Z_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 3\},\ \delta_4, Z_0, p_0, \emptyset)$, où

$\delta_4(p_0,a,Z) = (p_1,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma = \{Z_0,Z_1,Z_2,Z_3\},$

$\delta_4(p_1,\Lambda,Z) = (p_2,ZZ_1) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$

$\delta_4(p_2,a,Z) = (p_3,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$

$\delta_4(p_3,\Lambda,Z) = (p_2,ZZ_2) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$

$\delta_4(p_2,b,Z) = (p_4,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$

$\delta_4(p_4,\Lambda,Z) = (p_5,ZZ_3) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$

$\delta_4(p_5,b,Z) = (p_4,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$

$\delta_4(p_5,c,Z) = (p_6,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$

$\delta_4(p_5,\Lambda,Z) = (p_7,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$

$\delta_4(p_6,\Lambda,Z_3) = \delta_4(p_{11},\Lambda,Z_3) = (p_8,\Lambda),$

$\delta_4(p_7,\Lambda,Z_3) = (p_7,\Lambda),$

$\delta_4(p_6,\Lambda,Z_2) = \delta_4(p_7,\Lambda,Z_2) = \delta_4(p_{11},\Lambda,Z_2) = (p_9,\Lambda),$

$\delta_4(p_6,\Lambda,Z_1) = \delta_4(p_7,\Lambda,Z_1) = \delta_4(p_{11},\Lambda,Z_1) = (p_{10},\Lambda),$

$\delta_4(p_6,\Lambda,Z_0) = \delta_4(p_7,\Lambda,Z_0) = \delta_4(p_{11},\Lambda,Z_0) = (p_{13},\Lambda),$

$\delta_4(p_8,b,Z) = (p_6,Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$

$\delta_4(p_9,a,Z) = (p_{11},Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$

$$\delta_4(p_{10},a,Z) = (p_{12},Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma,$$

$$\delta_4(p_{12},d,Z) = (p_{13},Z) \qquad \forall\ Z \in \Gamma.$$

Il peut être représenté par :

$$p_0 \left[\begin{array}{ll} a & p_1 \\ A & - \end{array} \right.$$

$$p_1 \left[\begin{array}{ll} E & p_2 \end{array} \right.$$

$$K(Z_1) = p_{10} \left[\begin{array}{ll} a & p_{12} \\ A & - \end{array} \right.$$

$$p_2 \left[\begin{array}{ll} a & p_3 \\ b & p_4 \\ A & - \end{array} \right.$$

$$p_3 \left[\begin{array}{ll} E & p_2 \end{array} \right.$$

$$K(Z_2) = p_9 \left[\begin{array}{ll} a & p_{11} \\ A & - \end{array} \right.$$

$$p_4 \left[\begin{array}{ll} E & p_5 \end{array} \right.$$

$$K(Z_3) \left[\begin{array}{lll} : & T(p_7) & p_7 \\ p_8 & \left[\begin{array}{l} b \\ A \end{array} \right. & \begin{array}{l} p_6 \\ - \end{array} \end{array} \right.$$

$$p_5 \left[\begin{array}{ll} b & p_4 \\ c & p_6 \\ B & p_7 \end{array} \right.$$

$$p_6 \left[\begin{array}{ll} SD & p_6 \end{array} \right.$$

$$p_7 \left[\begin{array}{ll} SD & p_7 \end{array} \right.$$

$$p_{11} \left[\begin{array}{ll} SD & p_{11} \end{array} \right.$$

$$p_{12} \left[\begin{array}{ll} d & p_{13} \\ A & - \end{array} \right.$$

$$p_{13} \left[\begin{array}{ll} A & - \end{array} \right.$$

Ici encore, cette représentation peut être condensée.

La partie "Context-Free" des langages de programmation est généralement déterministe. Cet algorithme d'analyse sera alors très efficace. Ainsi, l'analyse syntaxique d'ALGOL 60 a été réalisée sur une machine Honeywell DDP 516, à mots de 16 bits, et à cycle de base de 0,96 µs. Le codage de l'analyseur est stocké sur moins de 320 mots, et le temps moyen pour réaliser l'édition, l'analyse syntaxique et la génération d'une chaîne source condensée est de 10 000 caractères par seconde.

Un point important n'a cependant pas été abordé dans ce travail ; c'est le problème de trouver un analyseur déterministe à partir de la définition du langage. Puisqu'il est indécidable de savoir si un C-langage arbitraire est déterministe, un tel algorithme de transformation ne peut pas être général. Cependant la transformation qui permet de construire l'analyseur à partir de l'automate déterministe peut être automatisable. Celle qui est donnée ici, suffisante sur le plan théorique, ne l'est guère sur le plan pratique.

INDEX TERMINOLOGIQUE

B I B L I O G R A P H I E

[1] BACCHUS - DRIEUX : *Extension de la forme normale de Backus pour la détection d'erreurs syntaxiques*. 5ème congrès de l'AFIRO, 1966.

[2] CHOMSKY : *On certain Formal properties of grammars*. Information and Control, Vol.2, pp. 137-167, 1959.

[3] CHOMSKY - SCHUTZENBERGER : *The Algebric Theory of Context-free Languages*. Dans Braffort et Hirschbery (eds.), "Computer Programming and Formal Systems", pp.118-161, North-Holland, 1963.

[4] DRIEUX : *Sur certaines familles de langages bornés*. Thèse, Faculté des Sciences de Lille, 1970.

[5] FOSTER : *A syntax improving program*. Computer Journal, Vol.11, pp.31-34, 1968.

[6] GINSBURG : *The Mathematical Theory of Context-free Languages*. Mc Graw-Hill, New York, 1966.

[7] GINSBURG - GREIBACH : *Deterministic Context-free Languages*. Information and Control, Vol.9, pp. 620-648, 1966.

[8] GINSBURG - SPANIER : *Bounded Algol-like Languages*. Trans. Am. Math. Soc., Vol.113, pp. 333-368, 1964.

[9] GREIBACH : *Formal Parsing Systems*. Com. A.C.M., Vol.7, pp. 499-504, 1964.

[10] GRIFFITHS : *Analyse déterministe et compilateurs*. Thèse, Faculté des Sciences de Grenoble, 1969.

[11] KNUTH : *Top-down Syntax Analysis*. International Summer School, Copenhage, 1967.

[12] KORENJACK - HOPCROFT : *Simple deterministic languages*. Proc. 7th. Symp. Switching and Automata Theory, I.E.E.E., pp. 36-46, 1966.

[13] KURKI - SUONIO : *Notes on top-down languages*. Bit, Vol.9, pp.225-238, 1969.

[14] LECOUFFE : Communication privée.

[15] LEWIS - STEARNS : *Syntax directed transduction*. Jour. A.C.M., Vol.15, pp.465-488, 1968.

[16] ROSENKRANTZ - STEARNS : *Properties of deterministic top-down analysis*. Information and Control, Vol.17, pp. 226-256, 1970.

[17] WOOD : *The theory of Left-factored Languages*. Computer Journal, Vol.12, pp. 349-356, Vol.13, pp. 55-62, 1969 - 1970.