UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur de 3ème Cycle

par

Bernard CHOTTEAU

SUR LA GEOMETRIE DES CORPS SIMPLES

EN MECANIQUE DES MILIEUX DEFORMABLES

Membres du Jury : MM. G. GONTIER, Président
F. PARSY, Rapporteur
Mle KOSMANN, Examinateur

Soutenue le 20 Décembre 1971

Je remercie Monsieur GONTIER qui a bien voulu présider le jury, Monsieur PARSY qui m'a fait découvrir les travaux de MM. NOLL & WANG et m'a constamment aidé, et Mademoiselle KOSMANN qui s'est intéressée à mon travail et a accepté de faire partie du jury.

Je remercie tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail, particulièrement Madame Ruiz qui en a assuré la présentation dactylographiée.

à *René*.

INTRODUCTION

Le présent travail traite du comportement mécanique d'un corps simple en milieu continu déformable dans le cadre général d'une structure de variété fibrée principale définie directement sur l'espace des configurations locales du corps.

Un premier chapitre d'introduction à la théorie des corps simples donne le point de vue pris ici, le situant par rapport aux orientations des principaux travaux à ce sujet, en particulier ceux de W. NOLL et C.C. WANG.

Au deuxième chapitre est introduite une définition des configurations locales d'un corps continu qui permet une présentation englobant les aspects distincts sous lesquels est définie cette notion par les deux auteurs cités. Suit alors une construction effective de la variété fibrée principale $\mathbf{C}(\mathcal{B})$ précisant l'action du groupe linéaire comme groupe de déformations locales.

C'est directement dans ce fibré qu'est donnée dans un troisième chapitre une formulation nouvelle, en mécanique des milieux continus, des notions relatives aux corps simples matériellement uniformes. On étudie les relations entre les divers groupes d'isotropie et on précise certains résultats dans le cas des corps solides et isotropes.

Après mise en évidence des $\mathcal{G}$-structures matérielles, le dernier chapitre traite de la même manière de l'homogénéité locale en utilisant les connexions sur $C(\mathcal{B})$. On termine sur quelques précisions apportées à cette notion par l'existence de structures riemanniennes dans le cas des corps simples solides.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

RAPPELS SUR LA NOTION DE CORPS SIMPLE MATERIELLEMENT UNIFORME

Le comportement d'un corps simple, caractérisé par le fait que la réponse en l'un quelconque de ses points dans une configuration donnée est fournie par une certaine fonction liée à la configuration locale associée en ce point, est essentiellement de nature locale. L'étude de ces corps simples constitue de ce fait un champ d'application naturel à la géométrie des variétés différentiables. Dès 1958, W. NOLL utilise dans [6] , où se trouvent rassemblées les bases de la théorie géométrique des corps simples, le langage des variétés différentiables en mécanique des milieux continus. La géométrie différentielle est encore pratiquement absente de cette publication, son introduction effective a lieu principalement en 1967 dans [7] (W. NOLL) pour les corps simples de façon générale et dans [13] (C.C. WANG) pour l'étude des distributions continues de dislocation en mécanique des milieux continus en particulier.

I - 1. CONFIGURATIONS ET DEFORMATIONS.

Définition.- (W. NOLL [6])

Un corps $\mathcal{B}$ est une variété différentiable dont les éléments $X, Y, \ldots$ sont appelés particules. Les configurations $\phi, \Theta, \ldots$ de $\mathcal{B}$ sont les éléments d'un ensemble d'applications biunivoques de $\mathcal{B}$ dans un espace ponctuel euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 .

Dans l'étude [6] qui donne d'un corps la définition ci-dessus, la notion de localisation d'une configuration ϕ en un point X de $\mathcal{B}$ permet en fait de se ramener à des cartes centrées en 0 et une déformation est définie comme classe d'homéomorphismes différentiables locaux conservant l'origine 0 prise dans E .

L'ensemble de ces déformations, utilisées pour le corps $\mathcal{B}$ après définition des configurations locales, est muni d'une structure de groupe noté $\mathcal{D}$ dont L , le groupe linéaire de $\mathbb{R}^3$ apparaît comme sous-groupe isomorphe au groupe quotient $\mathcal{D}/N$ où N est le sous-groupe des déformations dont la différentielle en 0 d'un représentant, donc de tous les autres, est l'identité. Un élément de N y est appelé "null-déformation".

Une configuration locale de $\mathcal{B}$ en l'un de ses points X est définie par une classe d'homéomorphismes différentiables sur les voisinages de X à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et centrés en 0 . Etant donnés un représentant δ d'une déformation Δ et un représentant ϕ d'une configuration locale Φ , l'homéomorphisme $\delta \circ \phi$ définit alors de façon intrinsèque une nouvelle configuration locale $\hat{\Phi}$ de $\mathcal{B}$ et Δ prend l'appellation de "déformation de la configuration locale Φ en la configuration locale $\hat{\Phi}$ ". Remarquons qu'à ce stade, le mot "déformation" n'a pas le caractère linéarisé qui lui est donné par la suite avec l'adjonction du terme "locale".

Gradient de déformation. Gradient de configuration.-

Etant données deux configurations locales Φ et $\hat{\Phi}$ de $\mathcal{B}$ en X , la différentielle en $\Phi(X)$ de la déformation $\delta = \hat{\phi} \cdot \phi^{-1}$ qui fait passer de Φ à $\hat{\Phi}$ est appelée alors "gradient de déformation de Φ en $\hat{\Phi}$ " c'est donc un élément de L . Sont ensuite définis les "gradients de configurations" classes d'équivalence sur l'ensemble des configurations locales dans la relation définie par $\Phi \, R \, \hat{\Phi}$ si et seulement si le gradient de déformation de Φ en $\hat{\Phi}$ est l'identité.

Ainsi présentée, l'appellation "gradient de configuration" n'est pas formellement justifiable, elle convient cependant parfaitement puisque les définitions prises ici (c.f. remarque II - 2.4.) feront de la notion correspondante une différentielle de configuration.

L'introduction progressive de la géométrie différentielle a conduit à une évolution de la terminologie et des définitions précédentes. C'est ainsi que ces gradients de déformations et gradients de configurations de [6] donnent par la suite dans [7] les notions de déformations locales et de configurations locales définies par W. NOLL.

Toutes ces notions issues naturellement de considérations mécaniques ou physiques sont en fait, tant que n'interviennent pas les réponses des corps, purement géométriques. Dans notre étude, les chapitres II et III en particulier feront à ce sujet une distinction très nette facilitée par le choix qui est fait de se placer dans le fibré $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ pour traduire toutes les données mécaniques introduites. On peut remarquer au passage que ce point de vue dispense de l'utilisation du fibré tangent qui sera cependant considéré pour certaines remarques.

I - 2. *CORPS SIMPLES.*

Rappelons la définition que donne W. NOLL des corps continus dans [7] .

Définition.-

On dit que $\mathcal{B}$ est un corps continu de classe C^p $(p \geqslant 1)$ si l'ensemble C des configurations satisfait aux axiomes suivants :

(C1) Tout $\kappa \in C$ est bijective, $\kappa(\mathcal{B})$ étant un ouvert de $\mathcal{E}$ appelé région occupée par $\mathcal{B}$ dans la configuration κ .

(C2) Si γ et κ sont dans C alors $\lambda = \gamma \circ \kappa^{-1} : \kappa(\mathcal{B}) \to \gamma(\mathcal{B})$ est une déformation de classe C^p appelée déformation de $\mathcal{B}$ depuis la configuration κ jusqu'à la configuration γ .

(C3) Si κ est dans C et λ une déformation : $\kappa(\mathcal{B}) \to \varepsilon$ de classe C^p alors $\lambda \circ \kappa$ est encore dans C . L'application $\lambda \circ \kappa$ est dite configuration obtenue à partir de la configuration κ par la déformation λ .

Les déformations sont là des difféomorphismes reliant les régions occupées par le corps dans ses différentes configurations. Un tel corps est donc muni d'une structure de variété différentiable par ses configurations, cartes globales par construction.

C'est dans [7] que l'on trouve, pour la première fois, une utilisation des espaces tangents à la variété $\mathcal{B}$ en théorie des corps simples. Bien que celle-ci soit faite à partir des cartes globales seulement elle permet d'introduire l'aspect isomorphisme de l'espace tangent sur R^3 attribué à une configuration locale. Cette étape est fondamentale puisqu'elle conduit à une formulation mathématique très claire de la comparaison du comportement mécanique local d'un corps simple en ses divers points. Les matériaux simples définis dans [6] sont alors repris dans [7] en corps simples dont nous reproduisons ici la définition.

Définition.- (W. NOLL [7]).

Soit R un ensemble dont les éléments sont appelés "réponses". Un corps continu $\mathcal{B}$ est appelé corps simple vis à vis de R s'il est muni d'une structure par une fonction $\mathcal{G}$ qui associe à chaque point X de $\mathcal{B}$ une application

$$\mathcal{G}_X : \mathcal{C}_X \to R \quad .$$

La valeur $\mathcal{G}_X(G_X)$ est l'élément "réponse" du matériau en X dans toute configuration γ de $\mathcal{B}$ telle que $\nabla_\gamma(X) = G_X$.

Dans cet énoncé $\nabla_\gamma(X)$ désigne la configuration locale associée en X à la configuration γ de $\mathcal{B}$, et $\mathcal{C}_X$ l'ensemble des configurations locales de $\mathcal{B}$ en X .

Cette définition est très générale puisqu'elle ne concerne pas seulement des propriétés mécaniques telles l'élasticité ou la viscosité mais aussi toute une classe de notions physiques comme par exemple la polarisation ou encore l'entropie. Dans les phénomènes rattachés à la mécanique des milieux continus, on caractérise l'état des forces de contact par le champ des tenseurs des contraintes. Les axiomes mécaniques habituels tels le principe du déterminisme des contraintes ou le principe d'action locale par exemple permettent de classer les corps continus déformables parmi les corps simples.

La définition précédente est donc reprise dans notre chapitre III pour ces corps (c.f. III - 1.). Sont ensuite redéfinis et étudiés les isomorphismes matériels et les groupes d'isotropie, ces isomorphismes matériels correspondent par un foncteur contravariant à certaines bijections entre les fibres de $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ respectant l'action du groupe des déformations locales de $\mathcal{B}$. Cette action est souvent mise en évidence en vue du chapitre IV . Suivant le langage habituel, un corps simple est dit matériellement uniforme si pour tout couple de ses points il existe au moins une "bijection matérielle" entre les fibres, ou encore un isomorphisme matériel liant les espaces tangents en ces points.

Définition.- (W. NOLL [7])

Une fonction K sur un corps simple matériellement uniforme $\mathcal{B}$, dont les valeurs $K(X)$ sont des configurations locales $K(X) \in \mathcal{C}_X$ est appelée référence pour $\mathcal{B}$. Si de plus $\Phi(X,Y) = (X)^{-1} K(Y)$ est un isomorphisme matériel de $\mathcal{F}_Y$ sur $\mathcal{F}_X$ espaces tangents en X et Y de $\mathcal{B}$, alors K est appelée référence uniforme pour $\mathcal{B}$.

Définition.- (C.C. WANG [13])

Une carte référence pour $\mathcal{B}$ est un couple (U_α, r_α) formé d'un ouvert U_α de $\mathcal{B}$ et d'un champ différentiable de configurations locales r_α sur U_α tels que la fonctionnelle de réponse $\mathcal{G}$ soit indépendante de p dans U_α .

Dans cette dernière définition $\mathcal{G}$ est la fonction réponse relative à la configuration locale $r_\alpha(p)$ elle correspond à ce qui est défini ici en II - 1.3. par G_Φ .

La comparaison de ces deux définitions dont l'une est globale et l'autre locale avec une hypothèse de différentiabilité supplémentaire nous conduit à définir en III - 3.2., puisque nous disposons de la structure fibrée $\mathcal{C}(\mathcal{B})$, ce qui est appelé une référence matérielle locale. Une référence matérielle de $\mathcal{B}$ étant une famille de références matérielles locales maximale recouvrant $\mathcal{B}$, on peut alors définir les groupes d'isotropie relatifs à une telle référence matérielle du corps.

I - 3. STRUCTURES GEOMETRIQUES DES CORPS SIMPLES.

Les conventions prises en III - 3.4. et III - 4.7. font que tous les corps considérés dans le chapitre IV appelés simples sont donc des corps simples au sens de III - 1., matériellement uniformes, pour lesquels il existe des références matérielles, les groupes d'isotropie relatifs à celles-ci étant des sous-groupes de Lie fermés du groupe spécial linéaire. Nous reprenons là des conditions analogues à celles de [13] . Rappelons par exemple que le fait de supposer les sous-groupes de Lie fermés n'est pas une restriction effective d'adaptation de la théorie mécanique au cadre mathématique puisque la continuité des fonctionnelles de réponse imposée en mécanique implique que les sous-groupes en question sont fermés donc qu'ils fournissent bien d'après le théorème de Cartan des sous-groupes de Lie.

Les éléments de $C(\mathcal{B})$ sont alors classés en termes de configurations locales matérielles relatives aux références matérielles du corps $\mathcal{B}$. On montre ainsi au chapitre IV que la donnée d'un corps simple est en fait un certain choix de g-structures sur $C(\mathcal{B})$, et on y étudie les liaisons entre les groupes de réduction et aussi entre les algèbres correspondantes de champs fondamentaux sur $C(\mathcal{B})$.

Comme dans [13] , les structures matérielles définies ici ne sont pas en général triviales contrairement à ce qui se produit dans [7] où par exemple une connexion matérielle quelconque serait alors nécessairement de type complètement intégrable. L'homogénéité locale est ainsi liée à l'existence de certaines connexions sur le fibré principal $C(\mathcal{B})$ réductibles aux sous-structures matérielles (c.f. IV - 4.4.). Le cas des solides simples, sur lesquels on peut mettre des métriques riemanniennes compatibles avec la structure matérielle, apporte des caractérisations simples de l'homogénéité locale dans $C(\mathcal{B})$.

La bibliographie générale $[\ ]_*$ donnée ici contient toutes les données mathématiques utilisées dans cette rédaction.

CHAPITRE II

SUR UNE PRESENTATION EN VARIETE FIBREE PRINCIPALE DES CONFIGURATIONS LOCALES D'UN CORPS CONTINU

II - 1. CONFIGURATIONS LOCALES D'UN CORPS CONTINU.

Nous avons rappelé dans le premier chapitre que les configurations locales d'un corps continu $\mathcal{B}$ sont définies dans [7] à partir des configurations de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire des cartes globales. Nous utiliserons ici toutes les cartes de l'atlas maximal $\mathcal{U}$ définissant la structure de variété de $\mathcal{B}$. D'autre part, dans le but d'intégrer les points de vue développés respectivement par W. NOLL dans [7] et C.C. WANG dans [13], nous prendrons des corps continus la définition suivante.

II - 1.1. *Définition*.-

Un corps continu $\mathcal{B}$ de classe C^k $(k \geq 1)$ est une variété différentiable connexe orientable, de type $\mathbb{R}^3$, de classe C^k pour laquelle il existe des cartes particulières $(\mathcal{B},\phi)$ où ϕ est un difféomorphisme de $\mathcal{B}$ sur une partie de $\mathbb{R}^3$ appelé configuration de $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{U}$ l'atlas maximal de $\mathcal{B}$, notons $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathcal{B} \times \mathcal{U}$ de la façon suivante :

$$\forall\ p \in \mathcal{B} \qquad \forall\ p' \in \mathcal{B} \qquad \forall (U,h) \in \mathcal{U} \qquad \forall (U',h') \in \mathcal{U}$$

$$(p,(U,h))\, \mathcal{R}(p',(U',h')) \iff p = p' \quad \text{et} \quad d_{h(p)}(h' \circ h^{-1}|_{h(U\cap U')}) = I$$

où d symbolise la différentiation et I l'identité de $\mathbb{R}^3$.

Les fonctions $h \circ h'^{-1}$ et $h' \circ h^{-1}$, réciproques l'une de l'autre sont telles que leurs différentielles en $h'(p)$ et $h(p)$ respectivement vérifient l'égalité

$$d_{h'(p)}\,(h \circ h'^{-1}|_{h'(U\cap U')}) = \left[d_{h(p)}\,(h' \circ h^{-1}|_{h(U\cap U')})\right]^{-1} ,$$

on en déduit la symétrie de la relation $\mathcal{R}$. La transitivité de $\mathcal{R}$ est conséquence directe de la composition des différentielles, de plus $\mathcal{R}$ est réflexive, il en résulte la proposition suivante.

II - 1.2. Proposition.-

La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{B} \times \mathcal{U}$.

II - 1.3. Définition.-

Une configuration locale de $\mathcal{B}$ est un élément de l'ensemble quotient $\mathcal{B} \times \mathcal{U}/\mathcal{R}$ de $\mathcal{B} \times \mathcal{U}$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

Une configuration locale associée à une carte de $\mathcal{B}$ par passage au quotient en l'un de ses points p est alors dite configuration locale de $\mathcal{B}$ en p. L'ensemble des configurations locales de $\mathcal{B}$ en p fixé sera noté $C_p(\mathcal{B})$ et $\mathcal{B} \times \mathcal{U}/\mathcal{R}$ ensemble de toutes les configurations locales de $\mathcal{B}$ réunion disjointe de tous les $C_p(\mathcal{B})$ pour p parcourant $\mathcal{B}$ sera noté $C(\mathcal{B})$.

$$C(\mathcal{B}) = \bigcup_{p \in \mathcal{B}} C_p(\mathcal{B}) \quad .$$

Remarque.-

Ainsi définie, une configuration locale de $\mathcal{B}$ en l'un de ses points p est telle que si (U,h) et (U',h') donnent deux représentant de cette configuration locale, et si (x^i) et (x'^i) sont, avec $i = 1,2,3,$ les systèmes de coordonnées locales associés, les bases (dx^i) et (dx'^i) ainsi que $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ et $(\frac{\partial}{\partial x'^i})$ respectivement dans les espaces cotangent et tangent en p sont confondues puisque la jacobienne de changement de coordonnées est par hypothèse l'identité. Inversement, tous les systèmes de coordonnées locales en p donnant les mêmes bases des espaces tangent et cotangent induisent par passage au quotient la même configuration locale de $\mathcal{B}$ en p. En ce sens on peut donc considérer une configuration locale de $\mathcal{B}$ comme un repère ou un corepère de la variété $\mathcal{B}$, et ainsi envisager sur $C(\mathcal{B})$ la construction d'une structure de variété différentiable isomorphe à la variété des repères, le point de vue de la construction qui suit ici étant basé sur l'aspect mécanique des configurations locales présent en particulier dans [11].

Convention.-

Dans toute cette étude, les groupes $GL(3,\mathbb{R})$ et $GL(\mathbb{R}^3)$ sont identifiés et confondus dans un groupe unique noté L, ceci compte tenu de l'isomorphisme canonique liant ces deux groupes. Sauf mention spéciale un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et la matrice le représentant dans la base canonique ne seront pas distingués.

Soit $\{(U_i,h_i) \in \mathcal{U} \; ; \; i \in I\}$ une famille de cartes de $\mathcal{B}$ formant une base de sa topologie par les U_i correspondants. On note Π l'application de $C(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{B}$ qui à toute configuration locale de $\mathcal{B}$ en p associe le point p. Pour toute configuration locale Φ dans $\Pi^{-1}(U_i)$ il existe une carte $(U',h') \in \mathcal{U}$ telle que $(\Pi(\Phi),(U',h'))$ soit un représentant de Φ. Posons

$$\phi_i(\Phi) = (\Pi(\Phi),\psi_i(\Phi)) \quad \text{avec} \quad \psi_i(\Phi) = d_{h_i(\Pi(\Phi))}(h' \circ h_i^{-1}) \in L \ .$$

La définition de ψ_i est cohérente puisque tout changement de représentant par h'' n'influe pas sur la différentielle, on a en effet

$$d_{h'(\Pi(\Phi))}(h'' \circ h'^{-1}) = I \quad , \quad d_{h_i(\Pi(\Phi))}(h' \circ h_i^{-1}) \quad \text{peut donc s'écrire}$$

$$d_{h_i(\Pi(\Phi))}(h'' \circ h'^{-1} \circ h' \circ h_i^{-1}) = d_{h_i(\Pi(\Phi))}(h'' \circ h_i^{-1}) \ .$$ On définit ainsi une application ϕ_i sur chaque $\Pi^{-1}(U_i)$ à valeur dans $U_i \times L$. Soient (U',h') et (U'',h'') des représentants respectifs de Φ et Ψ deux configurations locales de $\mathcal{B}$ quelconques, et p et q deux points de U_i, on a si $\Phi \in \mathcal{C}_p(\mathcal{B})$ et $\Psi \in \mathcal{C}_q(\mathcal{B})$;

$$\phi_i(\Phi) = \phi_i(\Psi) \Rightarrow (p,\psi_i(\Phi)) = (q,\psi_i(\Psi)) \Rightarrow p = q \quad \text{et} \quad \psi_i(\Phi) = \psi_i(\Psi)$$

si la première assertion est vraie on a alors pour les différentielles,

$$d_{h_i(p)}(h' \circ h_i^{-1}) = d_{h_i(p)}(h'' \circ h_i^{-1}) \quad \text{donc} \quad d_{h'(p)}(h'' \circ h'^{-1}) = I$$

puisque l'on peut écrire $h'' \circ h_i^{-1}$ sous la forme $(h'' \circ h'^{-1}) \circ (h' \circ h_i^{-1})$, en définitive $\phi_i(\Phi) = \phi_i(\Psi) \Rightarrow (p,(U',h'))\ (q,(U'',h'') \Rightarrow \Phi = \Psi$.
L'application ϕ_i est donc injective, d'autre part (x^i) étant un système de coordonnées locales de $\mathcal{B}$ en p défini par la carte (U_i,h_i), tout élément A de L fournit un autre système de coordonnées locales (x'^k) en p par les relations :

$$x'^k = \sum_{j=1}^{3} \beta_j^k x^j \qquad k = 1,2,3 \quad ,$$

où les β_j^k sont les coefficients de la matrice A^{-1}. La nouvelle carte correspondante est telle que l'endomorphisme A a pour inverse la différentielle

$d_{h_i(p)}(h' \circ h_i^{-1})$. Si on note Φ la configuration locale associée à celle-ci, on a $\psi_i(\Phi) = A$, il en résulte la surjectivité de ϕ_i , donc sa bijectivité.

II - 1.4. Remarque.-

Le groupe L opère à droite sur l'ensemble $\mathcal{B} \times \mathcal{U}$ par

$$(p,(U,h)) \cdot A = (p,(U,h')) \quad \text{avec} \quad d_{h(p)}(h' \circ h^{-1}) = A^{-1}$$

avec $\forall A \in L \quad \forall B \in L \quad ((p,(U,h)) \cdot A) \cdot B = (p,(U,h)) \cdot AB$.

Cette opération est telle que l'implication suivante est vraie :

$$\left.\begin{array}{l} (p,(U,h))A = (p,(U,h')) \\ (q,(V,k))A = (q,(V,k')) \\ (p,(U,h))\ \mathcal{R}(q,(V,k)) \end{array}\right\} \Rightarrow (p,(U,h'))\ \mathcal{R}(q,(V,k')) \ .$$

En effet, p est alors égal à q et les différentielles vérifient :

$$d_{k(p)}(h' \circ h^{-1}) = A^{-1} \qquad d_{k(p)}(k' \circ k^{-1}) = A^{-1}$$

$$d_{h(p)}(k \circ h^{-1}) = I \qquad d_{h'(p)}(h \circ h'^{-1}) = A \ , \text{ il vient alors}$$

$$d_{h(p)}(k' \circ h'^{-1}) = d_{h(p)}(k' \circ k^{-1} \circ k \circ h^{-1} \circ h \circ h'^{-1}) \qquad \text{d'où}$$

$$d_{h(p)}(k' \circ h'^{-1}) = I \ .$$

Il y a alors passage aux classes modulo $\mathcal{R}$ de cette opération sur $\mathcal{B} \times \mathcal{U}$. L'action à droite de L sur $\mathcal{B} \times \mathcal{U}$ passe aux classes sur l'ensemble des configurations locales et L opère à droite sur $C(\mathcal{B})$.

Structure différentiable $C(\mathcal{B})$.-

Supposons L muni de sa structure habituelle de variété différentiable $\phi_i(U_i \cap U_j)$ est un ouvert de la variété produit $U_i \times L$, pour tout U_i et tout U_j . D'autre part $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ est un difféomorphisme de $\phi_j(\Pi^{-1}(U_i) \cap \Pi^{-1}(U_j))$ sur $\phi_i(\Pi^{-1}(U_i) \cap \Pi^{-1}(U_j))$ (de classe C^{k-1} si $\mathcal{B}$ est de classe C^k) puisque pour tout A dans L :

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}(p,A) = (p, A \cdot d_{h_i(p)}(h_j \circ h_i^{-1})) \quad .$$

De plus, $\mathcal{B}$ étant séparé on a :

$$\forall\ \Phi \in C(\mathcal{B}) \qquad \forall\ \Psi \in C(\mathcal{B})$$

$$\exists (i,j) \in I^2 \qquad \Phi \in \Pi^{-1}(U_i) \qquad \Psi \in \Pi^{-1}(U_j)$$

$$\text{et} \qquad \Pi^{-1}(U_i) \cap \Pi^{-1}(U_j) = \emptyset \quad .$$

Il en résulte l'existence d'une structure différentiable unique sur $C(\mathcal{B})$ telle que les $\Pi^{-1}(U_i)$ en soient les ouverts et les ϕ_i des difféomorphismes de $\Pi^{-1}(U_i)$ sur $\phi_i(\Pi^{-1}(U_i))$.

Supposons donnée une deuxième famille $\{(U'_j, h'_j) \in \mathcal{U} : j \in J\}$, les applications $\phi_i : \Pi^{-1}(U_i) \to U_i \times L$

$\phi'_j : \Pi'^{-1}(U'_j) \to U'_j \times L$ sont telles que sur $U_i \cap U'_j$ supposé non vide on a si $\Phi \in C_p(\mathcal{B})$:

$$d_{h'_j(p)}(h \circ h'^{-1}_j) = d_{h'_j(p)}(h \circ h_i^{-1} \circ h_i \circ h'^{-1}_j)$$

$$= d_{h_i(p)}(h \circ h_i^{-1}) \cdot d_{h'_j(p)}(h_i \circ h'^{-1}_j) \quad .$$

L'application $(p, \phi_i(\Phi)) \rightsquigarrow (p, \phi'_j(\Phi))$ fournit un difféomorphisme de $U_i \cap U_j \times L$ sur lui-même. La structure différentiable définie sur $C(\mathcal{B})$ est indépendante de la base extraite de $\mathcal{U}$ pour la construction.

II - 1.5. Théorème.-

La structure différentiable donnée sur $\mathcal{B}$ définit ainsi une structure différentiable unique sur $C(\mathcal{B})$.

Nous conserverons le même symbole $C(\mathcal{B})$ pour désigner cette variété des configurations locales de $\mathcal{B}$.

II - 2. GROUPE DE LIE DES DEFORMATIONS LOCALES.

L'action de L sur l'ensemble $C(\mathcal{B})$, rencontrée en II - 1.4., s'écrit :

$$\forall \Phi \in C(\mathcal{B}) \qquad \forall (A,B) \in L^2 \qquad (\Phi \cdot A) \cdot B = \Phi \cdot AB \ .$$

Cette action laisse invariant le sous-ensemble $C_p(\mathcal{B})$ pour tout $p \in \mathcal{B}$ puisque :

$$\forall\, p \in \mathcal{B} \qquad \forall\, \Phi \in C_p(\mathcal{B}) \qquad \forall\, A \in L \qquad \phi \cdot A \in C_p(\mathcal{B}) \ .$$

Enfin elle a lieu transitivement dans chaque $C_p(\mathcal{B})$:

$$\forall\, p \in \mathcal{B} \qquad \forall\, \Phi \in C_p(\mathcal{B}) \qquad \forall\, \Psi \in C_p(\mathcal{B}) \qquad \exists\, A \in L \qquad \Psi = \Phi \cdot A \ .$$

II - 2.1. Définition.-

Considéré comme groupe d'opérateurs sur l'ensemble $C(\mathcal{B})$ des configurations locales du corps continu $\mathcal{B}$, le groupe L est appelé groupe des déformations locales de $\mathcal{B}$.

II - 2.2. Remarque.-

Dans [6] une déformation locale était une classe d'homéomorphismes locaux de $\mathbb{R}^3$ sur lui-même, conservant l'origine, de là se dégageait ensuite la notion de "gradient de déformation" d'un corps localement en l'un de ses points. C'est ce "gradient de déformation" qui a conduit à la notion de déformation locale définie en [7] dans $GL(\mathbb{R}^3)$ et en [13] dans $GL(3,\mathbb{R})$. Ces deux aspects sont inclus ici dans la formulation de l'action de L sur $C(\mathcal{B})$; si (U,ϕ) et (V,ψ) sont deux cartes locales en p de $\mathcal{B}$ induisant les configurations locales respectives Φ et Ψ on a pour $A \in L$

$$\Psi = \Phi \cdot A \iff d_{h(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) = A^{-1} \quad .$$

En restreignant la définition II - 2.1. aux seules cartes globales de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire aux configurations de $\mathcal{B}$, on retrouve la définition donnée dans [7] d'une déformation locale à condition d'ordonner convenablement les configurations liées par A . Ainsi nous dirons que A est la déformation locale de la configuration locale Ψ en la configuration locale Φ . Formulée de cette manière cette notion prend le sens exact qui lui est donné en [7] . La déformation locale A en p du corps $\mathcal{B}$, de Ψ en Φ , est bien la différentielle (ou sa matrice) en $\kappa(p)$ de toute déformation (globale) $\gamma \circ \kappa^{-1}$ de toute configuration (globale) κ représentant Ψ en p en toute configuration (globale) γ représentant Φ en p .

Munissons L de sa structure habituelle de groupe de Lie. De la définition de son action sur l'ensemble $C(\mathcal{B})$ et des structures différentiables de $C(\mathcal{B})$ et du groupe de Lie G , il résulte que l'application de $C(\mathcal{B}) \times L$ dans $C(\mathcal{B})$ définie par : $(\phi,A) \rightsquigarrow \phi\cdot A$ est différentiable, et que chaque application $\phi \rightsquigarrow \phi\cdot A$ pour A fixe dans L est une transformation de la variété $C(\mathcal{B})$, d'où :

II - 2.3. Proposition.-

Le groupe de Lie des déformations locales de $\mathcal{B}$ opère différentiablement à droite sur la variété $C(B)$ des configurations locales de B .

II - 2.4. Remarque et notation.-

Dans le cas particulier où B serait un ouvert de $\mathbb{R}^3$ muni de la structure induite de sous-variété de $\mathbb{R}^3$, si deux cartes globales (B,ϕ) et (B,ψ) de B sont telles que $(p,(B,\phi))$ et $(p,(B,\psi))$ soient en relation par R (II - 1.2.), les configurations ϕ et ψ ont alors même différentielle en $p \in B \subset \mathbb{R}^3$. Cette remarque fournit un sens à l'appellation déjà rencontrée de "gradient de la configuration ϕ en p" pour désigner la configuration locale Φ associée en p à ϕ , même si B n'est plus une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ auquel cas le mot gradient ne peut à priori s'appliquer.

Etant donnée une carte quelconque (U,ϕ) d'un corps continu B quelconque en l'un de ses points, on pourra par extension appeler encore gradient de cette carte en p la configuration locale associée. Si l'on munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure de variété une telle configuration locale est effectivement la différentielle de ϕ au point p .

Soit alors une deuxième carte (V,ψ) en p , si Φ est la configuration locale associée à $(p,(U,\phi))$ et Ψ l'associée de $(p,(V,\psi))$ on a $\Phi = d_p\,\phi$ et $\Psi = d_p\,\psi$ or on peut écrire

$$d_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) = d_p\,\psi \circ d_{\phi(p)}\,\phi^{-1}$$

ou encore
$$d_{\phi(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) = d_p\,\psi \circ [d_p\,\phi]^{-1} \quad .$$

Pour simplifier l'écriture, la notation $*$ symbolisera, comme dans [13] , le passage au gradient ou encore à la différentielle. L'égalité précédente s'écrira donc :

$$(\psi \circ \phi^{-1})_{*\phi(p)} = \psi_{*p} \circ \phi_{*p}^{-1} \quad .$$

L'élément A de L caractérisé par cette égalité est la déformation locale qui par action à droite sur ψ_{*p} donne ϕ_{*p} , ou encore (II - 2.2.) la déformation locale de ϕ_{*p} en ψ_{*p} . C'est ici l'aspect isomorphisme de l'espace tangent B_p sur $\mathbb{R}^3$ pour une configuration locale qui est utilisée. La variété $C(B)$ étant isomorphe à celle des repères de B , l'action de L conduit à une structure fibrée principale isomorphe à celle des repères de B [1] .

II - 3. FIBRE PRINCIPAL DES CONFIGURATIONS LOCALES.

Il résulte de la construction II - 1.5., et de la proposition II - 2.3. que l'ensemble $C(B)$ muni de sa structure différentiable et le groupe L des déformations locales de B possèdent les propriétés suivantes :

1) le groupe de Lie L opère différentiablement à droite sur la variété $C(B)$

2) l'application Π projection de $C(B)$ sur B est différentiable et telle que

$$\forall \Phi \in C(B) \qquad \Pi^{-1}(\Pi(\Phi)) = \Phi \cdot G$$

3) pour tout point p de B , il existe un voisinage U_i de p et un difféomorphisme ϕ_i^{-1} de $U_i \times G$ sur $\Pi^{-1}(U_i)$ satisfaisant à :

$$\forall q \in U_i \qquad \forall A \in G \qquad \forall B \in G$$

$$\phi_i^{-1}(q,AB) = \phi_i^{-1}(q,A) \cdot B \quad .$$

Les conditions permettant de munir $C(B)$ d'une structure de variété fibrée principale de base B , de groupe structural L et de projection canonique Π sont donc vérifiées. Les fibres $C_p(B)$ au dessus des divers points p de B sont constituées des configurations locales de B en ces points, chacune d'elles est difféomorphe à L qui y opère librement et transitivement.

II - 3.1. Théorème et définition.-

Les propriétés 1) , 2) , 3) munissent l'ensemble $C(B)$ d'une structure de variété fibrée principale de base B de groupe structural L . $C(B)$ muni de cette structure sera appelé fibré principal des configurations locales du corps continu B .

Le groupe L ayant deux composantes connexes et B étant par hypothèse orientable, en tout point de B il existe dans la fibre $C_p(B)$ au dessus de p deux familles de configurations locales. La déformation locale associée à un couple de configurations locales d'une même famille est à Jacobien positif, au contraire associée à deux configurations locales respectivement dans les deux familles la déformation locale est à Jacobien négatif. Il en résulte :

II - 3.2. Proposition.-

Le fibré principal $C(B)$ possède deux composantes connexes, chacune d'elles admet une structure de variété fibrée principale de groupe structural G la composante de l'identité de L .

Remarque.-

Les définitions données dans [13] imposent dès le début une orientation à la variété B donc aux configurations ainsi qu'aux déformations de B . Cette axiomatique interprétée dans le cadre de la proposition II - 3.2. se traduit, en orientant la variété B , par une restriction de l'étude à l'une des composantes connexes de $C(B)$.

II - 3.3. *Convention.-*

Dans toute la suite, la variété définissant un corps continu sera toujours supposée orientée, les cartes de l'atlas d'orientation donnant des difféomorphismes directs dans R^3 orienté par sa base canonique. Le groupe de Lie désormais désigné par G est donc maintenant la composante connexe de l'identité du groupe linéaire.

CHAPITRE III

CORPS SIMPLE MATERIELLEMENT UNIFORME EN MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS DEFORMABLES

La notion de corps simple, définie par W. NOLL dans [7] et rappelée au paragraphe I - 2., se transcrit intégralement avec les définitions prises ici au chapitre II des configurations locales d'un corps continu.

Les remarques à propos de la diversité des domaines d'applications restent inchangées, en particulier rappelons que l'ensemble R ([7] définition 1) caractérisant les réponses du corps simple peut concerner des propriétés mécaniques, mais aussi diverses propriétés physiques.

Si un corps continu $\mathcal{B}$ donné peut-être muni d'une structure de corps simple, le fibré $C(\mathcal{B})$, au départ purement géométrique, va traduire d'une certaine manière le comportement physique ou mécanique du corps $\mathcal{B}$ et ainsi permettre une interprétation géométrique précise de ce qui est appelé en langage courant "la façon dont répond le corps en ses divers points" . Le présent chapitre traite de ceci pour les corps simples en mécanique des milieux continus déformables.

III - 1. CORPS SIMPLE EN MILIEU CONTINU DEFORMABLE.

Soit $\mathcal{B}$ un corps continu quelconque, la notion habituelle de mouvement conduit à poser les définitions suivantes.

III - 1.1. *Définitions*.-

Un mouvement d'un corps continu $\mathcal{B}$ est une application de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des configurations de $\mathcal{B}$.

Un mouvement local de $\mathcal{B}$ en l'un de ses points p est une application de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble $\mathcal{C}_p(\mathcal{B})$ des configurations locales de $\mathcal{B}$ en p .

Etant donnés un mouvement Θ de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire encore une famille à un paramètre réel τ , le temps, de configurations ϕ_τ de $\mathcal{B}$, un point p de $\mathcal{B}$ et un instant t $(t \in \mathbb{R})$, on appelle histoire cinématique locale en p de Θ à l'instant t et on note Θ^t_{*p} l'application de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathcal{C}_p(\mathcal{B})$ définie par :

$$\forall\, \tau < 0 \qquad\qquad \Theta^t_{*p}(\tau) = \phi_{(t\,+\,\tau)*p} \quad .$$

Dans les conditions ci-dessus, soit Φ est une configuration locale de $\mathcal{B}$ en p , dite alors configuration locale de référence pour le mouvement Θ , on appelle histoire de déformation locale de Θ en p à l'instant t référée à Φ , l'application de $\mathbb{R}_-$ dans G définie par :

$$\forall\, \tau < 0 \qquad\qquad \tau \mapsto \phi_{(t\,+\,\tau)*p} \circ \Phi^{-1} \quad .$$

Remarque.-

Φ étant prise pour référence, toute histoire cinématique locale détermine ainsi une histoire de déformation locale, Φ induit donc une bijection de l'ensemble des histoires cinématiques locales en p sur l'ensemble des histoires de déformations locales associées. Soit Ω_Φ cette bijection on a alors l'égalité suivante pour tout τ de $\mathbb{R}_-$

$$\Omega_\Phi(\Theta^t_{*p})\ (\tau) = \phi_{(t\,+\,\tau)*p} \circ \Phi^{-1} \in G \quad .$$

Cet élément de G est la déformation locale faisant passer par action à droite de la configuration locale $\phi_{(t+\tau)*p}$ de $\mathcal{B}$ en p à l'instant $t+\tau$ dans le mouvement Θ à la configuration locale de référence Φ de $\mathcal{B}$ en p .

Plaçons maintenant l'étude en mécanique des milieux continus déformables. Les axiomes classiques de celle-ci, exposés par le détail dans [11] sont donc vérifiés par les corps et les mouvements considérés ici, en particulier "l'équation de comportement" écrite plus loin reste invariante dans tout changement de repère matériel, de même, le principe du déterminisme pour le tenseur des contraintes et le principe d'action locale permettent de construire des fonctionnelles de réponse du type de celle utilisée dans la définition suivante, adaptation à la mécanique des milieux continus déformables de la définition générale des corps simples.

III - 1.2. Définition.-

Un corps continu déformable $\mathcal{B}$ est dit simple si on peut le munir d'une fonctionnelle de réponse $\mathcal{F}$, c'est-à-dire d'une application $\mathcal{F}$ qui à tout point p de $\mathcal{B}$ associe une application $\mathcal{F}_p$ de l'ensemble des histoires cinématiques locales de $\mathcal{B}$ en p dans l'ensemble des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^3$, appelée fonction réponse de $\mathcal{B}$ en p .

Soit $T(t,p)$ le tenseur des contraintes en p de $\mathcal{B}$ à l'instant t dans un mouvement Θ , ce tenseur est entièrement déterminé par la définition réponse $\mathcal{F}_p$

$$T(t,p) = \mathcal{F}_p(\Theta^t_{*p}) \quad .$$

Etant donnée une configuration locale Φ de $\mathcal{B}$ en p prise comme référence, on sait que Ω_Φ (II - 1.1.) associe de façon biunivoque les histoires cinématiques locales en p et les histoires de déformations locales en p . On peut donc donner une définition équivalente à la définition III - 1.2.

III - 1.3. *Caractérisation*.-

$\mathcal{B}$ est simple si on peut définir une fonction réponse G_{Φ_p} relative à toute configuration locale en p , Φ_p , application de l'ensemble des histoires de déformations locales de $\mathcal{B}$ en p dans l'ensemble des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^3$.

Les fonctions de réponse $\mathcal{F}_p$ et G_{Φ_p} sont liées par la relation

$$\mathcal{F}_p = G_{\Phi_p} \circ \Omega_{\Phi_p} \quad .$$

Physiquement, cet aspect donné aux réponses d'un corps correspond au fait que si la configuration locale Φ_p est induite par une configuration ϕ de $\mathcal{B}$ $(\Phi_p = \phi_{*p})$, le tenseur des contraintes pour $\mathcal{B}$ à l'instant t en p dans la configuration ϕ et dans le processus dynamique (cf. [11]) qu'est le mouvement Θ , est parfaitement déterminé par l'histoire de toutes les déformations locales $\phi_{*p} \circ \phi_{*p}^{-1}$ aux instants τ antérieurs à t , induites en p par les déformations globales de ϕ en ϕ_τ .

De ce point de vue le corps répond à des déformations locales, cette interprétation à l'aide de G permet en particulier de donner un sens précis au fait mécanique qu'un corps peut se comporter "de la même manière" en deux de ses points. Dans ce dernier cas, on pourra dire que localement en ces deux points, les mêmes déformations produisent les mêmes contraintes. C'est le but du paragraphe suivant qui conduit aux notions de groupe d'isotropie et de corps simple matériellement uniforme.

III - 2. ISOMORPHISMES MATERIELS D'UN CORPS SIMPLE.

Soient p et q deux points d'un corps simple $\mathcal{B}$. Etant donné un isomorphisme $r(p,q)$ de l'espace tangent B_p sur l'espace tangent B_q, définissons une application $\rho(p,q)$ de la fibre $C_q(B)$ dans la fibre $C_p(B)$ par : $\forall\ \Psi \in C_q(B) \qquad \rho(p,q)\ (\Psi) = \Psi \circ r(p,q)$. Cette application est surjective puisque pour tout Φ dans $C_p(B)$ il existe $\Psi = \Phi \circ r(p,q)^{-1}$ dans $C_q(B)$ tel que $\rho(p,q)\ (\Psi) = \Phi$. De plus l'isomorphisme $r(p,q)$ étant simplifiable à droite dans l'égalité $\Psi \circ r(p,q) = \Psi' \circ r(p,q)$ cette application est aussi injective donc bijective. Il en résulte l'existence d'une application bijective $\bar{\rho}(p,q)$ de l'ensemble H_q des histoires cinématiques locales en q sur celui des histoires cinématiques en p , H_p .

Etant données deux configurations locales en q , la déformation locale $\rho(p,q)\ (\Psi_1) \circ [\rho(p,q)\ (\Psi_2)]^{-1}$ associant les images par $\rho(p,q)$ de ces configurations locales Ψ_1 et Ψ_2 peut s'écrire

$$(\Psi_1 \circ r(p,q)) \circ (\Psi_2 \circ r(p,q))^{-1}$$

qui donne par regroupement $\Psi_1 \circ \Psi_2^{-1}$.

Soit maintenant Φ prise comme référence dans $C_p(B)$, la surjectivité de $\rho(p,q)$ et la remarque précédente conduisant au résultat suivant avec $\Psi = \Phi \circ r(p,q)^{-1}$

$$\forall\ \Theta^t_{*q} \in H_q \qquad \Omega_\Psi(\Theta^t_{*q}) = \Omega_\Phi(\bar{\rho}(p,q)(\Theta^t_{*q})) \quad .$$

III - 2.1. Proposition.-

Tout isomorphisme $r(p,q)$ de B_p sur B_q induit une application bijective $\rho(p,q)$ qui conserve l'action de G sur les fibres $C_p(B)$ et $C_q(B)$. Pour toute configuration locale Φ de référence dans $C_p(B)$, il existe une configuration locale Ψ unique telle que

$$\Omega_\Psi = \Omega_\Phi \circ \bar{\rho}(p,q) \quad .$$

Toute $\rho(p,q)$ bijection de $C_q(\mathcal{B})$ sur $C_p(\mathcal{B})$ conservant l'action de G est issue d'un isomorphisme $r(p,q)$ unique.

On peut remarquer que l'on introduit ainsi un foncteur contravariant H de la catégorie T dont les objets sont les espaces tangents à $\mathcal{B}$ et les morphismes les isomorphismes vectoriels dans la catégorie C dont les objets sont les fibres de $C(\mathcal{B})$ et les morphismes les bijections respectant l'action de G .

Soit $\mathcal{B}$ un corps simple, les fonctions de réponse F_p et F_q en deux points distincts p et q de $\mathcal{B}$ ne peuvent être confondues puisque leurs ensembles de départ sont distincts, cependant il se peut que le tenseur des contraintes soit le même pour deux histoires cinématiques locales à l'instant t respectivement en p et en q . Le foncteur H donne un moyen à l'aide des $\bar{\rho}(p,q)$ d'associer les histoires cinématiques locales

$$\forall\ p \in \mathcal{B} \qquad \forall\ q \in \mathcal{B} \qquad \forall\ \theta^t_{*q} \in H_q$$

$$\bar{\rho}(p,q)\ (\theta^t_{*q})\ (\tau) = \rho(p,q)\ (\phi_{(t\ +\ \tau)*q})$$

ceci pour tout isomorphisme $r(p,q)$ de $\mathcal{B}_p$ sur $\mathcal{B}_q$.

III - 2.2. <u>Définitions</u>.-

On appelle isomorphisme matériel entre les fibres $C_q(\mathcal{B})$ et $C_p(\mathcal{B})$ tout morphisme $\rho(p,q)$ de la catégorie C tel que l'on ait l'égalité

$$F_q = F_p \circ \bar{\rho}(p,q) \quad .$$

On appelle isomorphisme matériel entre les espaces tangents $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_q$ tout isomorphisme de la catégorie T ayant pour image par H un isomorphisme matériel de la catégorie C .

Pour résumer ces deux propriétés on dira que les particules p et q sont "matériellement isomorphes".

Soit Ψ une configuration locale de $\mathcal{B}$ en q, l'existence d'un isomorphisme matériel $r(p,q)$ entre p et q peut se traduire comme suit : pour toute histoire cinématique locale en q aboutissant en Ψ à l'instant t, le tenseur des contraintes en q à l'instant t est aussi le tenseur des contraintes en p au même instant pour l'histoire cinématique locale associée par $\bar{\rho}(p,q)$ aboutissant en $\bar{\rho}(p,q)\ (\Psi) = \Psi \circ r(p,q)$.

Un isomorphisme matériel $r(p,q)$ fournit un certain moyen d'associer les fibres $C_p(\mathcal{B})$ et $C_q(\mathcal{B})$ de façon compatible avec les réponses mécaniques du corps aux deux points. Un difféomorphisme local de la variété $\mathcal{B}$ d'un voisinage de p sur un voisinage de q induit un isomorphisme des espaces tangents, si cet isomorphisme est matériel, l'analogie entre les voisinages est non seulement topologique et géométrique mais de plus mécanique.

Soit $g(p)$ l'ensemble de tous les automorphismes matériels en p, c'est-à-dire des isomorphismes matériels de $\mathcal{B}_p$ sur lui-même. De la définition III - 2.2. il résulte que ce sous-ensemble de $GL(\mathcal{B}_p)$ n'est pas vide car il contient l'identité de $\mathcal{B}_p$, et qu'il en fournit un sous-groupe.

Supposons qu'il existe au moins un isomorphisme matériel de $\mathcal{B}_p$ sur $\mathcal{B}_q$, on peut associer à tout élément α du groupe $g(p)$ un élément de $GL(\mathcal{B}_q)$ soit β par $\beta = r(p,q) \circ \alpha \circ r(p,q)^{-1}$ en notant $r(p,q)$ cet isomorphisme matériel. On prouve alors que β est dans $g(q)$ de la façon suivante :

$$\beta \circ r(p,q) = r(p,q) \circ \alpha \implies \rho(p,q) \circ \rho_\beta = \rho_\alpha \circ \rho(p,q)$$

en passant aux histoires cinématiques locales il vient

$\bar{\rho}(p,q) \circ \bar{\rho}_\beta = \bar{\rho}_\alpha \circ \bar{\rho}(p,q)$ or α est dans $\mathcal{g}(p)$ par hypothèse donc $F_p = F_p \circ \bar{\rho}_\alpha$ de même puisque $r(p,q)$ est isomorphisme matériel $F_q = F_p \circ \bar{\rho}(p,q)$ (III - 2.2.), on a alors $F_q = F_p \circ \bar{\rho}_\alpha \circ \bar{\rho}(p,q)$ ou encore $F_q = F_p \circ \bar{\rho}(p,q) \circ \bar{\rho}_\beta$ c'est à dire $F_q = F_q \circ \bar{\rho}_\beta$ d'où le résultat envisagé. Il est clair d'autre part que pour tout β de $\mathcal{g}(q)$ il existe α de $\mathcal{g}(p)$, $\alpha = r(p,q)^{-1} \circ \beta \circ r(p,q)$ tel que $\beta = r(p,q) \circ \alpha \circ r(p,q)^{-1}$. Les deux groupes vérifient donc l'égalité $\mathcal{g}(q) = r(p,q) \circ \mathcal{g}(p) \circ r(p,q)^{-1}$.

III - 2.3. Proposition et définition.-

En tout point p d'un corps simple $\mathcal{B}$ les automorphismes matériels forment un groupe $\mathcal{g}(p)$ dit groupe d'isotropie matériel de $\mathcal{B}$ en p.

Si deux points p et q de $\mathcal{B}$ sont liés par un isomorphisme matériel $r(p,q)$, les groupes d'isotropie matériels de $\mathcal{B}$ en p et q sont liés par la relation

$$\mathcal{g}(q) = r(p,q) \circ \mathcal{g}(p) \circ r(p,q)^{-1} \quad .$$

III - 2.4. Caractérisation.-

Etant donnés deux points p et q d'un corps simple $\mathcal{B}$, un isomorphisme de $\mathcal{B}_p$ sur $\mathcal{B}_q$ est matériel si et seulement si pour toute configuration locale de référence $r(p)$ prise dans $C_p(\mathcal{B})$ il existe une configuration locale $r(q)$ dans $C_q(\mathcal{B})$ telle que l'on ait :

$$G_{r(p)} \circ \Omega_{r(p)} \circ \bar{\rho}(p,q) = G_{r(q)} \circ \Omega_{r(q)} \quad .$$

Cette proposition est conséquence de III - 1.3. et III - 2.2. avec $r(p,q) = r(q)^{-1} \circ r(p)$ et du fait que d'après III - 2.1. on a l'égalité $\Omega_{r(q)} = \Omega_{r(p)} \circ \bar{\rho}(p,q)$.

On voit alors que la même famille à un paramètre d'éléments de G conduisant aux deux histoires de déformations locales relatives à $r(p)$ et $r(q)$ respectivement, produit une même réponse de la part de $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ se comporte mécaniquement en p comme en q si et seulement si il existe un isomorphisme matériel $r(p,q)$ de $\mathcal{B}_p$ sur $\mathcal{B}_q$.

L'existence d'un isomorphisme matériel $r(p,q)$ de $\mathcal{B}_p$ sur $\mathcal{B}_q$ permet alors, à la condition de choisir les références $r(p)$ et $r(q)$ convenablement c'est-à-dire reliées par $\rho(p,q)$, de considérer les histoires de déformations locales uniquement dans G sans faire mention des configurations locales sur lesquelles les déformations locales agissent.

Soit Ω_* la famille à un paramètre de G associée à une histoire cinématique locale Θ^t_{*q} on a

$$\Omega_* = \Omega_{r(q)} (\Theta^t_{*q}) \qquad \text{et aussi}$$

$$\Omega_*' = \Omega_{r(p)} (\bar{\rho}(p,q) (\Theta^t_{*q})) \quad .$$

L'existence de $r(p,q)$ isomorphisme matériel est caractérisée par le fait que pour toute Ω_* on a $G_{r(p)}(\Omega_*) = G_{r(q)}(\Omega_*)$ pour $r(p)$ et $r(q)$ convenablement choisies. Les fonctions $G_{r(p)}$ et $G_{r(q)}$ sont alors formellement identiques ce qui permet de dire en ce sens que le corps $\mathcal{B}$ répond de façon identique en p et q.

Remarque.-

Les analogies mécaniques entre les divers points de $\mathcal{B}$ se traduisent donc par la mise en évidence d'une certaine sous-catégorie de $\mathcal{C}$ associée par le foncteur H à une sous-catégorie de $\mathcal{T}$. Munir un corps continu d'une structure de corps simple c'est donc prendre une restriction du foncteur H

caractérisée par le comportement mécanique de ce corps.

Le paragraphe suivant traite des corps simples dont il est possible de dire, en un certain sens, qu'ils répondent de façon identique en tous leurs points.

III - 3. CORPS SIMPLE MATERIELLEMENT UNIFORME.

III - 3.1. *Définition.-*

Un corps simple $\mathcal{B}$ est dit matériellement uniforme si pour tout couple de ses points (p,q) il existe un isomorphisme matériel $\rho(p,q)$ de $C_q(\mathcal{B})$ et $C_p(\mathcal{B})$.

III - 3.2. *Définition.-*

Soit $\mathcal{B}$ un corps simple matériellement uniforme, on appelle référence matérielle locale de $\mathcal{B}$ toute section locale (U_i,r_i) du fibré $C(\mathcal{B})$ telle que pour tout couple (p,q) de points de U_i , l'isomorphisme de $C_q(\mathcal{B})$ sur $C_p(\mathcal{B})$ défini par : $\rho(p,q)\ (\Psi) = \Psi \circ r_i(q)^{-1} \circ r_i(p)$, soit matériel.

On a alors d'après III - 2.2.

III - 3.3. *Caractérisation.-*

Un corps simple $\mathcal{B}$ est matériellement uniforme si pour tout couple de ses points (p,q) il existe un isomorphisme matériel $r(p,q)$ de $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_q$.

Il en résulte qu'une section locale (U_i,r_i) du fibré $C(\mathcal{B})$ est une référence matérielle locale de $\mathcal{B}$ si et seulement si pour tout couple (p,q) des points de U_i , l'isomorphisme $r_i(q)^{-1} \circ r_i(p)$ est matériel.

Il résulte alors de III - 2.4. et de la définition précédente :

III - 3.4. Proposition.-

Une section locale $\sigma_i = (U_i, r_i)$ du fibré $C(\mathcal{B})$ est une référence matérielle locale si et seulement si pour tous les points p de U_i les fonctions de réponse $G_{r_i(p)}$ sont identiques. On notera G_{σ_i} la fonction de réponse commune.

III - 3.5. Définition.-

Deux références matérielles locales $\sigma_i = (U_i, r_i)$ et $\sigma_j = (U_j, r_j)$ sont dites compatibles si les fonctions de réponse G_{σ_i} et G_{σ_j} sont identiques. On appelle référence matérielle de $\mathcal{B}$ tout recouvrement maximal de $\mathcal{B}$ par des références matérielles locales compatibles.

Soit $\mathcal{U} = \{\sigma_i = (U_i, r_i) : i \in I\}$ une référence matérielle pour $\mathcal{B}$. Les fonctions de réponse $G_{r_i(p)}$ sont indépendantes à la fois de p dans $\mathcal{B}$ et de i dans I, on notera $G_{\mathcal{U}}$ la fonction de réponse commune

$$\forall\, i \in I \qquad \forall\, p \in U_i \qquad G_{\mathcal{U}} = G_{r_i(p)} = G_{\sigma_i}$$

$G_{\mathcal{U}}$ sera dite fonction de réponse de $\mathcal{B}$ relative à la référence matérielle $\mathcal{U}$.

Convention.-

Pour toute la suite, sauf mention spéciale, la dénomination de "corps simple" désignera un corps simple matériellement uniforme pour lequel il existe au moins une référence matérielle $\mathcal{U}$.

Remarque.-

Si un corps simple $\mathcal{B}$ possède une référence matérielle dont un U_i est égal à $\mathcal{B}$, la référence (U_i, r_i) est alors globale et correspond à ce qui est appelé dans [7] "a uniform reference for $\mathcal{B}$", dans [13] la notion correspondante à une référence matérielle de $\mathcal{B}$ est celle de "reference atlas of $\mathcal{B}$". Physiquement un corps simple est tel qu'il est possible de repérer ses déformations en prenant des références convenables de façon que ses réponses relativement à ces références soient uniformes.

III - 4. GROUPES D'ISOTROPIE RELATIFS DES CORPS SIMPLES.

III - 4.1. Définition.-

Etant donnée une configuration locale de référence $r(p)$ d'un corps simple $\mathcal{B}$ en l'un de ses points p, on appelle isomorphisme matériel relatif à $r(p)$ toute déformation locale P de $\mathcal{G}$ telle que, pour toute histoire de déformation locale Ω_*, on ait ;

$$G_{r(p)}(\Omega_*) = G_{r(p)}(\Omega_* P)$$

où $\Omega_* P$ désigne l'histoire de déformation locale définie par :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}_- \qquad \Omega_* P(\tau) = \Omega_*(\tau) \circ P \quad .$$

Proposition.-

Les isomorphismes matériels relatifs à $r(p)$ forment un sous-groupe de $\mathcal{G}$ noté $\mathcal{g}_{r(p)}$. Ce groupe est lié au groupe d'isotropie matériel de $\mathcal{B}$ en p par la relation

$$\mathcal{g}_{r(p)} = r(p) \circ \mathcal{g}(p) \circ r(p)^{-1} \quad .$$

Preuve.-

Soit $r(p,p)$ un isomorphisme matériel en p , $r(p,p) \in \mathcal{G}(p)$. D'après les résultats du paragraphe III - 2., la configuration locale $r(p) \circ r(p,p)$ associée à $r(p)$ par $r(p,p)$ est telle que pour toute histoire de déformation locale Ω_* on ait l'égalité

$$G_{r(p) \circ r(p,p)} (\Omega_*) = G_{r(p)} (\Omega_*) \quad ,$$

d'autre part si on pose $P = r(p) \circ r(p,p) \circ r(p)^{-1}$ on a

$\forall \tau \in \mathbb{R}_-$

$$\Omega_*(\tau) \circ P \circ r(p) = \Omega_*(\tau) \circ r(p) \circ r(p,p)$$

d'où l'égalité

$$G_{r(p) \circ r(p,p)} (\Omega_*) = G_{r(p)} (\Omega_* P)$$

et par conséquent

$$G_{r(p)} (\Omega_*) = G_{r(p)} (\Omega_* P)$$

ce qui prouve l'appartenance de P à $\mathcal{G}_{r(p)}$. La correspondance entre $r(p,p)$ et P pour $r(p)$ fixée est bijective et les groupes sont alors liés par la relation indiquée.

Le groupe $\mathcal{G}_{r(p)}$ est appelé groupe d'isotropie de $\mathcal{B}$ en p relatif à la configuration locale de référence $r(p)$; cette dernière étant fixée, les isomorphismes matériels de $\mathcal{B}$ relatifs à $r(p)$ sont aussi en correspondance bijective avec les automorphismes matériels de la fibre $C_p(\mathcal{B})$.

Soient $r(p)$ et $r(q)$ prises comme références respectives dans $C_p(\mathcal{B})$ et $C_q(\mathcal{B})$; les groupes d'isotropie sont liés par les deux relations suivantes :

$\mathcal{G}_{r(p)} = r(p) \circ \mathcal{G}(p) \circ r(p)^{-1}$ $\qquad$ $\mathcal{G}_{r(q)} = r(q) \circ \mathcal{G}(q) \circ r(q)^{-1}$. Soit

$r(p,q)$ l'isomorphisme $r(q)^{-1} \circ r(p)$ de $\mathcal{B}_p$ sur $\mathcal{B}_q$. On a successivement

$$
\begin{aligned}
r(p,q) \text{ matériel } &\iff g(q) = r(p,q) \circ g(p) \circ r(p,q)^{-1} \\
&\iff g_{r(q)} = r(q) \circ (r(p,q) \circ g(p) \circ r(p,q)^{-1}) \circ r(q)^{-1} \\
&\iff g_{r(q)} = (r(q) \circ r(p,q)) \circ g(p) \circ (r(p,q)^{-1} \circ r(q)^{-1}) \\
&\iff g_{r(q)} = r(p) \circ g(p) \circ r(p)^{-1}
\end{aligned}
$$

, d'où la proposition suivante.

III - 4.2. *Proposition*.-

Pour que les groupes d'isotropie $g_{r(p)}$ et $g_{r(q)}$ d'un corps simple $\mathcal{B}$ en p et q relatifs à $r(p)$ et $r(q)$ soient confondus, il faut et il suffit que ces deux configurations locales prises comme références respectives en p et q soient telle que l'isomorphisme $r(q)^{-1} \circ r(p)$ qu'elles définissent soit matériel.

III - 4.3. *Proposition et définition*.-

Etant donné une référence matérielle $\mathcal{U} = \{\sigma_i = (U_i, r_i) \ ; \ i \in I\}$ pour un corps simple $\mathcal{B}$, le groupe d'isotropie relatif à $r_i(p)$ est le même quelque soit p dans $\mathcal{B}$ et i dans I .

On appelle groupe d'isotropie $g_{\mathcal{U}}$ relatif à $\mathcal{U}$ ce groupe commun.

On appelle groupe d'isotropie g_{σ_i} relatif à σ_i le groupe d'isotropie commun relatif à tous les $r_i(p)$ pour i fixé et p variable dans U_i .

$$\forall p \in \mathcal{B} \quad \forall i \in I \qquad g_{\mathcal{U}} = g_{\sigma_i} = g_{r_i(p)} \ .$$

Cette proposition est conséquence directe des résultats de III - 3.2. et III - 3.4. ainsi que de III - 4.2. Deux références locales pour $\mathcal{B}$ sont compatibles si et seulement si elles donnent le même groupe d'isotropie relatif.

On se propose maintenant de classer les références locales d'un corps simple, compatibles ou non, ainsi que leurs groupes d'isotropie associés.

Soit P une déformation locale de $\mathcal{B}$ pour lequel $\mathcal{U} = \{\sigma_i : i \in I\}$ est une référence matérielle. Considérons la famille $\mathcal{V}$ de sections locales de $C(\mathcal{B})$ définie par

$$\mathcal{V} = \{P\,\sigma_i \;;\; i \in I\} \qquad\qquad P\,\sigma_i = (U_i\ ,\ P\,r_i)$$

avec $P\,r_i(p) = P \circ r_i(p)$ pour tout point p de U_i .

Etant donnés deux points p et q dans U_i , on sait que l'isomorphisme $r_i(p,q) = r_i(q)^{-1} \circ r_i(p)$ est matériel. Celui ci peut s'écrire encore $r_i(q)^{-1} \circ P^{-1} \circ P \circ r_i(p)$ c'est-à-dire

$$r_i(p,q) = (P \circ r_i(q))^{-1} \circ (P \circ r_i(p))\ .$$ Les références $P\,r_i(p)$ et $P\,r_i(q)$ sont donc telles que l'isomorphisme les liant $P\,r_i(q)^{-1}$. $P\,r_i(p)$ est matériel pour $\mathcal{B}$, il en résulte que $P\,\sigma_i$ est une référence matérielle locale de $\mathcal{B}$. Par conséquent, $\mathcal{V}$ que l'on notera aussi $P\,\mathcal{U}$ est une référence matérielle pour $\mathcal{B}$.

Considérons maintenant deux références matérielles locales $\sigma_i = (U_i, r_i) \in \mathcal{U}$ et $\tau_j = (V_j, \rho_j) \in \mathcal{V}$ où $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux références matérielles quelconques données pour $\mathcal{B}$. On sait qu'il existe pour tout point p de U_i une référence matérielle locale en p située dans $\mathcal{V}$ soit $\tau_k = (V_k, \rho_k)$. Désignons par P l'élément $\rho_k(p) \circ r_i(p)^{-1}$ de G . La référence matérielle locale $P\,\sigma_i$ a pour groupe d'isotropie $\mathcal{G}_{P\,\sigma_i} = \mathcal{G}_{\rho_k(p)}$ d'après la construction de $P\,\mathcal{U}$, d'autre part τ_j et τ_k étant dans $\mathcal{V}$ on a

$g_{\tau_k} = g_{\tau_j} = g_{\rho_k}(p)$ d'où $g_{r_j} = g_{P\,\sigma_i}$, τ_j et $P\,\sigma_i$ sont donc dans la même référence matérielle locale et on a $\mathcal{V} = P\,\mathcal{U}$. Notons que P utilisé dans la démonstration n'est pas unique en général puisque l'indice k ne l'est pas non plus à priori.

III - 4.4. *Proposition.*-

Pour toute référence matérielle $\mathcal{U}$ d'un corps simple $\mathcal{B}$ et toute déformation locale P , la famille $P\,\mathcal{U}$ est une référence matérielle de $\mathcal{B}$, et si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux références matérielles de $\mathcal{B}$ quelconque il existe une déformation P au moins, telle que $\mathcal{V} = P\,\mathcal{U}$.

III - 4.5. *Définition.*-

On appelle isomorphisme référence de $\mathcal{B}$ relativement à une référence matérielle $\mathcal{U}$ toute déformation locale P de $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{U}$ soit invariant par P ; $\mathcal{U} = P\,\mathcal{U}$.

Soit P un tel isomorphisme référence, si $r_i(p)$ est une configuration locale de référence fournie par $\mathcal{U}$ en p , $P \circ r_i(p)$ est de référence pour $P\,\mathcal{U}$ en p . L'isomorphisme les liant, soit $r(p,p) = r_i(p)^{-1} \circ (P \circ r_i(p))$ écrit sous la forme équivalente $r(p,p) = r_i(p)^{-1} \circ P \circ r_i(p)$ prouve d'après III - 4.1. et puisqu'il est matériel par hypothèse, que P est bien isomorphisme matériel relatif à $r_i(p)$. Réciproquement si P est un tel isomorphisme matériel, relatif à $r_i(p)$, l'isomorphisme $r(p,p)$ écrit plus haut est matériel or il associe $r_i(p)$ et $P \circ r_i(p)$, il s'ensuit l'égalité $\mathcal{U} = P\,\mathcal{U}$.

III - 4.6. *Proposition.-*

Le groupe d'isotropie de $\mathcal{B}$ relatif à une référence matérielle $\mathcal{U}$ est aussi le groupe des isomorphismes références de $\mathcal{B}$ relativement à $\mathcal{U}$.

III - 4.7. *Convention.-*

En vue du chapitre IV , nous reprenons une hypothèse de [13] . Tous les groupes d'isotropie des corps simples rencontrés par la suite seront supposés être des sous-groupes de Lie fermés du groupe spécial linéaire.

III - 5. ETATS SOLIDES ET ETATS ISOTROPES DES CORPS SIMPLES.

Les groupes d'isotropie vont donc caractériser des propriétés permettant de classer les corps simples en divers **types mécaniques.**

III - 5.1. *Définition.-*

Un corps simple $\mathcal{B}$ est dit solide s'il existe une référence matérielle $\mathcal{U}$ de $\mathcal{B}$ pour laquelle le groupe d'isotropie $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ est contenu dans le groupe spécial orthogonal $SO(\mathbb{R}^3)$, il est dit isotrope s'il existe une référence matérielle dont le groupe d'isotropie contient le groupe $SO(\mathbb{R}^3)$.

Dans les deux cas, la référence $\mathcal{U}$ est dite naturelle.

Cette définition peut encore s'énoncer point par point, une particule p de $\mathcal{B}$ étant dite solide si le groupe $\mathcal{G}_{r(p)}$ pour une certaine configuration locale de référence r(p) , alors dite naturelle, est contenue dans $SO(\mathbb{R}^3)$.

En particulier, un solide isotrope est donc tel que pour toute référence matérielle naturelle $\mathcal{U}$ le groupe $g_{\mathcal{U}}$ est exactement $SO(\mathbb{R}^3)$. Voyons dans ce cas particulier comment sont liées les différentes références matérielles naturelles.

D'après la proposition III - 4.1., les groupes d'isotropie $g(p)$ et $g_{r(p)}$ sont liés par $g(p) = r(p)^{-1} \circ g_{r(p)} \circ r(p)$, de même si $r'(p)$ est une autre configuration locale de $\mathcal{B}$ en p :

$$g(p) = r'^{-1}(p) \circ g_{r'(p)} \circ r'(p) \quad .$$

Soit P la déformation locale définie par $r'(p) = P \circ r(p)$ on a $P = r'(p) \circ r(p)^{-1}$ et par conséquent $g_{r'(p)} = P \circ g_{r(p)} \circ P^{-1}$. Si $r(p)$ est supposée naturelle, pour que $r'(p)$ le soit il faut et il suffit que l'on ait

$$SO(\mathbb{R}^3) = P \circ SO(\mathbb{R}^3) \circ P^{-1}$$

c'est-à-dire encore que P appartienne au normalisateur de $SO(\mathbb{R}^3)$ dans G , qui est le groupe des similitudes directes.

III - 5.2. Proposition.-

Etant donnée une référence matérielle naturelle $\mathcal{U}$ d'un solide simple isotrope, pour toute déformation locale P , la référence matérielle $P\,\mathcal{U}$ est naturelle si et seulement si P est une similitude directe de $\mathbb{R}^3$.

De façon générale, pour un corps simple quelconque $\mathcal{B}$, les groupes d'isotropie $g_{r'(p)}$ et $g_{r(p)}$ relatifs à deux configurations locales respectives $r'(p)$ et $r(p)$ telles que $r'(p) = P \circ r(p)$ étant conjugués par P , une déformation locale laisse inchangé un groupe d'isotropie si et seulement si elle est élément du normalisateur de celui-ci dans G . Pour un corps simple isotrope avec $r(p)$ naturelle, $r'(p)$ est naturelle si et seulement si P conjugue $\mathcal{G}_{r(p)}$ en conservant $SO(\mathbb{R}^3)$ intérieur au contraire pour un solide simple la condition est que cette conjugaison se fasse à l'intérieur de $SO(\mathbb{R}^3)$. Dans ce dernier cas on peut préciser en utilisant la décomposition d'une déformation locale quelconque à l'aide d'une rotation et d'une déformation pure.

Soit en effet $\mathcal{U}$ une référence matérielle naturelle, on a $\mathcal{G}_{P\mathcal{U}} = P \circ \mathcal{G}_{\mathcal{U}} \circ P^{-1}$ pour toute déformation locale P . Si G est dans $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$, $G' = P \circ G \circ P^{-1}$ est donc dans $\mathcal{G}_{P\,\mathcal{U}}$. Soit $P = R \cdot S$ la décomposition unique de P où R est dans $SO(\mathbb{R}^3)$ et considérons la déformation locale $G'P$. On a d'une part

$$G'P = G'R\,S$$

d'autre part $\qquad G'P = P\,G = R\,S\,G$

ou encore $\qquad G'P = R\,G\,G^{-1}\,S\,G = R\,G\,(G^{-1}\,S\,G)$. Mais $\mathcal{U}$ étant naturelle pour le solide $\mathcal{B}$, G est dans $SO(\mathbb{R}^3)$, l'unicité de la décomposition prouve que G' est dans $SO(\mathbb{R}^3)$ si et seulement si $S = G^{-1}\,S\,G$ auquel cas on a $G'R = R\,G$. D'où la proposition suivante caractérisant P par sa déformation pure associée.

III - 5.3. Proposition.-

Etant données une référence matérielle naturelle d'un solide simple $\mathcal{B}$ et une déformation locale quelconque de $\mathcal{B}$, la référence matérielle $P\,\mathcal{U}$ est naturelle pour $\mathcal{B}$ si et seulement si la déformation pure associée à P est élément du centralisateur de $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$.

Remarque.-

Le centralisateur est un sous-groupe distingué du normalisateur, et dans le cas où $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ est exactement $SO(\mathbb{R}^3)$ qui est celui de la proposition III - 5.2., le normalisateur et le centralisateur sont confondus.

On se propose maintenant de caractériser les solides simples par l'existence de structures riemanniennes sur ces corps.

III - 5.4. Définition.-

Un tenseur en un point p d'un corps simple $\mathcal{B}$ est dit matériel s'il est invariant par les transformations tensorielles induites par les isomorphismes matériels de $\mathcal{B}$ en p.

Soit $\mathcal{U}$ une référence matérielle naturelle d'un corps simple solide $\mathcal{B}$. Pour tout point p de $\mathcal{B}$ on peut choisir une référence matérielle locale $\sigma_i = (U_i, r_i)$ de $\mathcal{U}$ telle que p soit dans U_i. Définissons sur l'espace tangent $\mathcal{B}_p$ un tenseur $t_{\mathcal{U}}(p)$ par :

$\forall (u,v) \in \mathcal{B}_p^2 \qquad t_{\mathcal{U}}(p)\,(u,v) = r_i(p)(u) \cdot r_i(p)(v)$ où le membre de droite désigne le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^3$. $t_{\mathcal{U}}(p)$ est un tenseur covariant d'ordre 2 induisant une forme bilinéaire symétrique définie et positive sur $\mathcal{B}_p$.

Soient $r(p,p)$ un isomorphisme matériel en p et $r_i(p)$ naturelle pour $\mathcal{B}$ solide simple, l'élément $r_i(p) \circ r(p,p) \circ r_i(p)^{-1}$ est dans $\mathcal{G}_{r_i(p)} = \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$. C'est donc une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Pour tout couple (u',v') de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ on a la relation :

$$u' \cdot v' = r_i(p) \circ r(p,p) \circ r_i(p)^{-1}\,(u') \cdot r_i(p) \circ r(p,p) \circ r_i(p)^{-1}\,(v') \quad (1)$$

Pour les éléments u et v de B_p associés à u' et v' par $r_i(p)^{-1}$ on a $r_i(p)\,(u) \cdot r_i(p)\,(v) = r_i(p)\,(r(p,p)\,(u)) \cdot r_i(p)\,(r(p,p)\,(v))$. Il en résulte l'égalité suivante valable pour tout couple de vecteurs tangents (u,v) de B_p :

$$t_{\mathcal{U}}(p)\ (u,v) = t_{\mathcal{U}}(p)\ (r(p,p)\ (u)\ ,\ r(p,p)\ (v))\ . \qquad (2)$$

Le tenseur $t_{\mathcal{U}}(p)$ est donc un tenseur matériel en p . Ce tenseur est en fait indépendant du choix particulier de $r_i(p)$ dans $\mathcal{U}$ au dessus de p ; si $r_j(p)$ est une autre configuration locale donnée par $\mathcal{U}$ en p , l'isomorphisme $r(p,p) = r_i^{-1}(p) \circ r_j(p)$ est matériel et la démonstration précédente prouve que l'on a bien

$$t_{\mathcal{U}}(p)\ (u,v) = r_i(p)\ (u) \cdot r_i(p)\ (v) = r_j(p)\ (u) \cdot r_j(p)\ (v)$$

pour tout couple $(u,v) \in B_p^2$.

III - 5.5. *Définition*.-

Un champ de tenseurs sur un corps simple est dit matériel s'il reste invariant par les transformations tensorielles induites par les isomorphismes matériels de ce corps.

Un tel champ est parfaitement déterminé par sa valeur en un point fixé quelconque.

III - 5.6. *Définition*.-

On dit qu'un corps simple B est muni d'une structure riémannienne matérielle s'il existe sur B une structure riemannienne dont le champ des tenseurs soit matériel.

Ce qui précède prouve que si $\mathcal{B}$ est un solide simple, alors $\mathcal{B}$ peut être muni d'une structure riemannienne matérielle par le champ de tenseurs $t_{\mathcal{U}}$ d'une référence matérielle naturelle de $\mathcal{B}$.

Supposons que sur un corps simple $\mathcal{B}$ existe une structure riemannienne matérielle. Notons $t_{\mathcal{U}}$ le champ de tenseurs de celle-ci sans supposer dans cette notation l'existence effective d'une référence matérielle naturelle, existence prouvée par la suite. En un point p de $\mathcal{B}$ il existe une configuration locale $r_i(p)$ telle que pour tout couple (u,v) de $\mathcal{B}_p^2$ on ait

$$r_i(p)\,(u) \cdot r_i(p)\,(v) = t_{\mathcal{U}}(p)(u,v) \qquad .$$

Pour tout isomorphisme matériel $r(p,p)$ de $\mathcal{B}_p$ la relation (2) est vraie, il en est alors de même de (1) , ce qui prouve que l'élément

$$r_i(p) \circ r(p,p) \circ r_i(p)^{-1}$$

isomorphisme matériel relatif à $r_i(p)$ est dans le groupe orthogonal donc que $r_i(p)$ est naturelle et la particule p solide. La référence matérielle $\mathcal{U}$ relative à $r_i(p)$ est alors telle que $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ est contenue dans $SO(R^3)$, $\mathcal{U}$ est dans ces conditions naturelle et $\mathcal{B}$ solide $t_{\mathcal{U}}$ correspondant à cette référence matérielle naturelle de $\mathcal{B}$. D'où la caractérisation suivante des solides simples.

III - 5.7. Théorème.-

Un corps simple $\mathcal{B}$ est solide si et seulement si sur $\mathcal{B}$ existe une structure riemannienne matérielle.

Etant donné $\mathcal{B}$ solide simple, si $\mathcal{U}$ est une référence matérielle naturelle de $\mathcal{B}$ et $t_{\mathcal{U}}$ le champ de tenseurs matériels associé, pour toute déformation locale orthogonale R le produit scalaire étant conservé par R on a pour $r_i(p)$ relative à $\mathcal{U}$ en p et pour tout couple (u,v) de $\mathcal{B}_p^2$,

$$R(r_i(p)\ (u)) \cdot R(r_i(p)\ (v)) = r_i(p)\ (u) \cdot r_i(p)\ (v)$$

$$R \circ r_i(p)\ (u) \cdot R \circ r_i(p)\ (v) = r_i(p)\ (u) \cdot r_i(p)\ (v)$$

qui traduit la propriété

$t_{\mathcal{U}}(p)\ (u,v) = t_{R\ \mathcal{U}}\ (p)\ (u,v)$ de l'invariance des structures riemanniennes matérielles par les déformations orthogonales. Notons que $t_{R\ \mathcal{U}}$ existe puisque d'après la proposition III - 5.3. la référence matérielle $R\ \mathcal{U}$ est naturelle pour $\mathcal{B}$. Cette remarque, jointe à la décomposition classique de toute déformation locale P de $\mathcal{B}$ en produit $R\ S$ où R est orthogonale et S déformation pure, conduit aux égalités

$t_{P\ \mathcal{U}} = t_{R\ S\circ\mathcal{U}} = t_{R\cdot S\ \mathcal{U}} = t_{S\ \mathcal{U}}$. Ce sont donc en fait les déformations pures qui différencient les métriques riemanniennes matérielles d'un solide simple.

III - 5.8. Proposition.-

Etant donnée une structure riemannienne matérielle $t_{\mathcal{U}}$ associée à une référence matérielle d'un solide simple $\mathcal{B}$, l'ensemble de toutes les structures riemanniennes matérielles de $\mathcal{B}$ est donné par les champs matériels $t_{P\ \mathcal{U}}$ pour toutes les déformations locales P de $\mathcal{B}$ dont la déformation pure associée est dans le centralisateur du groupe d'isotropie $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$.

CHAPITRE IV

SUR LES CORPS SIMPLES LOCALEMENT HOMOGENES EN TERMES DE CONNEXIONS SUR LEURS FIBRES DE CONFIGURATIONS LOCALES

Le fibré $\mathbf{C}(B)$ des configurations locales d'un corps simple B, purement géométrique par construction et d'ailleurs trivial, va se trouver muni de certaines sous-structures caractérisées par la fonctionnelle de réponse F de ce corps, c'est-à-dire par son comportement mécanique, ces sous-structures matérielles étant généralement non triviales. Au début du présent chapitre, on met en évidence les réductions du groupe structural aux divers groupes d'isotropie relatifs du corps simple B, l'existence de connexions sur $C(B)$ assurée **par** la paracompacité du fait de la présence de cartes globales pour B permet d'exprimer l'homogénéité locale par l'existence de **connexions particulières** sur $\mathbf{C}(B)$, ce qui conduit plus loin à préciser cette étude dans quelques cas particuliers donnant des caractérisations simples de l'homogénéité locale.

IV - 1. <u>SOUS-STRUCTURES DE C(B) ASSOCIEES AUX REFERENCES MATERIELLES DE B</u>.

Un atlas vectoriel du fibré tangent $T(B)$ à la variété B est fourni par les couples (U_i, ϕ_i) où ϕ_i est le difféomorphisme de $U_i \times R^3$ sur $\Pi^{-1}(U_i)$ tel que les applications $\phi_{i,p}$ de $\mathbb{R}^3$ sur B_p soient induites en chaque point p de U_i par la carte (U_i, ψ_i) de l'atlas de B.

Considérons deux cartes de $\mathcal{B}$ en p , (U_i,ψ_i) et (U_j,ψ_j) , les applications $\phi_{i,p}$ et $\phi_{j,p}$ associées définissent deux configurations locales du corps simple $\mathcal{B}$ en p par $\phi_{i,p} = r_i(p)^{-1}$ et $\phi_{j,p} = r_j(p)^{-1}$. La déformation locale $G_{ij}(p)$ faisant passer par action à droite de $r_i(p)$ à $r_j(p)$ est donnée par

$$G_{ij}(p) = r_i(p) \circ r_j(p)^{-1}$$

ou encore par

$$r_j(p) = r_i(p)\ G_{ij}(p) \quad .$$

D'autre part, suivant les notations courantes, les fonctions de transition de $T(\mathcal{B})$ sont du type $\phi_{ij}(p)$ avec

$$\phi_{ij}(p) = \phi_{i,p}{}^{-1} \circ \phi_{j,p} \qquad .$$

On a donc l'égalité $\phi_{i,j}(p) = G_{i,j}(p)$ et les fonctions de transition du fibré tangent sont les déformations locales liant les configurations locales définies implicitement par les difféomorphismes ϕ_i donc par l'atlas de $\mathcal{B}$. Considérons alors la famille $S = \{(U_i,r_i) : i \in I\}$ des sections locales du fibré principal $C(\mathcal{B})$ définie par $r_i(p) = \phi_{i,p}{}^{-1}$. Les fonctions de transition $\phi_{i,j}$ de $T(\mathcal{B})$ sont aussi les fonctions de transition du triplet $(C(\mathcal{B}),\mathcal{U},S)$ (cf. [1]) , plus précisément si les difféomorphismes locaux de $C(\mathcal{B})$ sont notés ξ_i sur U_i avec

$$\forall\ A \in G \qquad\qquad \xi_{i,p}(A) = r_i(p)\ A$$

on a alors pour U_j

$$\xi_{j,p}(A) = (r_i(p)\ G_{ij}(p)) \cdot A$$

qui compte tenu de l'action à droite de G donne

$$\xi_{j,p}(A) = r_i(p) \cdot (G_{ij}(p) \cdot A) \quad ,$$

enfin

$$\xi_{j,p}(A) = \xi_{i,p}(G_{ij}(p) \cdot A)$$

conduit à :

$$\xi_{i,p}^{-1} \circ \xi_{j,p}(A) = G_{ij}(p) \cdot A \quad .$$

Le groupe de Lie G opère à gauche sur lui-même, on peut donc identifier $G_{ij}(p)$ à la multiplication à gauche par cet élément de G. Les fonctions de transition de $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ sont ainsi identiques à celles de $T(\mathcal{B})$, ceci étant conséquence de l'association de ces deux fibrés.

IV - 1.1. Définition.-

On appelle configuration locale matérielle de $\mathcal{B}$ en p, relative à une référence $\mathcal{U}$ de $\mathcal{B}$ toute configuration locale $r_i(p)$ d'une référence matérielle locale (U_i, r_i) dans $\mathcal{U}$.

Compte tenu des propriétés rencontrées en III - 3. et III - 4. d'une référence matérielle $\mathcal{U}$ de $\mathcal{B}$, la donnée de $\mathcal{U}$ conduit à une famille de sections locales de $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ liées par une famille de fonctions de transitions à valeurs dans le groupe d'isotropie de $\mathcal{B}$ relatif à $\mathcal{U}$, $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$. On sait dans ces conditions qu'elle donne un sous-fibré $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ de $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ admettant cette famille comme ensemble de fonctions de transitions, $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ permet ainsi une réduction du groupe structural G. De la définition prise en II - 1.1., il résulte :

IV - 1.2. Proposition.-

L'ensemble des configurations locales matérielles de $\mathcal{B}$ relatives à une référence matérielle $\mathcal{U}$ de $\mathcal{B}$ est muni d'une structure de sous-fibré de $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ donnée par réduction du groupe structural G au groupe d'isotropie $g_{\mathcal{U}}$ relatif à cette référence matérielle.

Remarque.-

Etant donné un sous-fibré $\mathcal{C}'(\mathcal{B})$ de $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ quelconque correspondant à une réduction de G à un certain sous-groupe g' de G, ou bien il existe un point p de $\mathcal{B}$ et une configuration locale de $\mathcal{B}$ en p, $r(p)$ tels que g' et $g_{r(p)}$ soient confondus et alors il existe une référence matérielle $\mathcal{U}$ unique telle que $\mathcal{C}'(\mathcal{B}) = \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ et $g_{\mathcal{U}} = g'$, ou bien $\mathcal{C}'(\mathcal{B})$ ne correspond à aucune référence matérielle de $\mathcal{B}$.

Sur un corps continu $\mathcal{B}$ quelconque, qu'il soit simple ou non, considérons l'ensemble de toutes ses g-structures dans $\mathcal{C}(\mathcal{B})$. Le fait d'être simple se caractérise donc pour $\mathcal{B}$ par la donnée d'une certaine famille bien déterminée de ses g-structures, les groupes de réduction sont ses groupes d'isotropie relatifs à ses références matérielles.

Soit $\mathcal{U}$ une référence matérielle d'un corps simple $\mathcal{B}$. Si Φ est une configuration locale matérielle de $\mathcal{B}$ relative à $\mathcal{U}$, et P une déformation locale de $\mathcal{B}$, d'après les résultats du chapitre III la configuration locale ΦP est matérielle relativement à la référence $P^{-1}\mathcal{U}$, les sous-fibrés $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{C}_{P^{-1}\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ sont donc liés par la relation

$$\mathcal{C}_{P^{-1}\mathcal{U}}(\mathcal{B}) = \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\mathcal{B}) \cdot P \quad .$$

D'autre part puisque l'on a, d'après le paragraphe III - 4., $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V} = P^{-1}\mathcal{U}$ confondus si et seulement si P est dans $g_{\mathcal{U}}$, on peut conclure à une partition de $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ par les $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$.

IV - 1.3. *Proposition.*-

Le fibré principal $C(\mathcal{B})$ d'un corps simple $\mathcal{B}$ est réunion disjointe des fibrés principaux $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ relatifs à ses références matérielles.

Remarque.-

L'interprétation physique peut se traduire en ces termes : mécaniquement, repérées par rapport aux configurations locales de $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ les histoires de déformation locale donnent des réponses identiques uniformément pour tout le corps $\mathcal{B}$.

Cette propriété d'uniformité dans la réponse du corps n'est cependant par une question d'homogénéité, notion que nous nous proposons de définir maintenant.

IV - 1.4. *Définition.*-

Un corps simple $\mathcal{B}$ est dit localement homogène si, en chacun de ses points p , il existe une carte (U_i,ϕ_i) de l'atlas vectoriel naturel de $T(\mathcal{B})$ telle que la section locale (U_i,r_i) associée dans $C(\mathcal{B})$ à cette carte par : $\forall\, q \in U_i \quad r_i(q) = \phi_{i,q}^{-1}$ soit une référence matérielle locale pour $\mathcal{B}$.

Avec les notations du chapitre II (II - 2.4.) on a alors

$$\phi_{i,p} = \psi_{i*p} \qquad \text{et} \qquad r_i(p) = \psi_{i*p}^{-1}$$

si (U_i,ψ_i) est la carte utilisée en p . L'homogénéité locale s'exprime donc par l'existence en tout point du corps d'une référence matérielle locale de type gradient. Il existe donc en tout point p de $\mathcal{B}$ un système de coordonnées locales (U_i, ψ_i) tel qu'en tout point de U_i la réponse soit indépendante des coordonnées de ce point.

S'il existe pour $\mathcal{B}$ une référence matérielle globale $(\mathcal{B}, r_i)$ le corps est alors dit homogène sous réserve que celle-ci soit de type gradient auquel cas il existe une configuration de $\mathcal{B}$ telle que la réponse de $\mathcal{B}$ à toute histoire de déformation locale repérée par rapport à cette configuration soit la même en tous ses points.

L'existence d'une section globale $(\mathcal{B}, r_i)$ qui soit matérielle relativement à $\mathcal{U}$ implique qu'il existe une section globale de $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$, d'autre part d'après la proposition III - 4.4., si l'un des fibrés $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ est trivial tous les autres le sont aussi, il en résulte :

IV - 1.5. *Proposition*.-

Tous les fibrés $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ d'un corps simple homogène sont triviaux.

Remarque.-

Un corps simple $\mathcal{B}$ peut avoir tous ses fibrés $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ triviaux sans pour autant être homogène les références matérielles globales n'étant pas nécessairement de type gradient.

IV - 2. ALGEBRES DE LIE DES CHAMPS FONDAMENTAUX MATERIELS.

Soit $\mathcal{B}$ un corps simple dont $\mathcal{U}$ est une référence matérielle et P une déformation locale quelconque. Les fibrés principaux $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ et $C_{P^{-1}\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ liés par

$$C_{P^{-1}}(\mathcal{B}) = C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})\,P$$

correspondant aux réductions de G à $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ et $\mathcal{G}_{P^{-1}\mathcal{U}}$ sous-groupes de Lie conjugués par P

$$\mathcal{G}_{P^{-1}\mathcal{U}} = P^{-1}\,\mathcal{G}_{\mathcal{U}}\,P \quad .$$

Considérons alors les champs de vecteurs invariants à gauche sur les divers groupes de Lie en question. Il résulte de l'égalité précédente et des propriétés de l'application exponentielle de l'algèbre infinitésimale g du groupe de Lie G la conjugaison dans g des sous-algèbres de Lie $g_{\mathcal{U}}$ et $g_{P^{-1}\mathcal{U}}$ associées aux sous-groupes $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ et $\mathcal{G}_{P^{-1}\mathcal{U}}$ de G. Les algèbres de Lie des champs fondamentaux définis sur les sous-fibrés $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ étant notées $\bar{g}_{\mathcal{U}}$, la représentation adjointe du groupe de Lie G donne ici la relation suivante entre les algèbres de Lie $\bar{g}_{\mathcal{U}}$ et $\bar{g}_{P^{-1}\mathcal{U}}$

$$\bar{g}_{P^{-1}\mathcal{U}} = R_{P*}\,\bar{g}_{\mathcal{U}}$$

où R_P désigne la multiplication à droite par P dans $C(\mathcal{B})$ et R_{P*} l'application induite par R_P sur les champs de vecteurs sur $C(\mathcal{B})$.

IV - 2.1. *Proposition.-*

L'application induite par la multiplication à droite par P , déformation d'un corps simple $\mathcal{B}$, transforme l'algèbre de Lie des champs fondamentaux sur $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ relatif à une référence matérielle $\mathcal{U}$ en l'algèbre de Lie des champs fondamentaux sur $C_{P^{-1}\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ relatif à la référence matérielle $P^{-1}\mathcal{U}$.

Par changement de référence matérielle l'algèbre de Lie des champs fondamentaux est modifiée par multiplication à droite, cependant que le groupe d'isotropie relatif est transformé en un conjugué.

Remarque.-

Si on représente l'algèbre de Lie g par l'espace tangent à l'origine de G, on obtient l'espace des matrices $(3,3)$ réelles. La conjugaison dans g se traduit ainsi par la conjugaison habituelle des matrices. Suivant la convention prise en III - 4.7., les sous-algèbres de Lie g_U seront donc représentées par des sous-algèbres de matrices de trace nulle. Plus particulièrement encore, pour les solides simples il s'agira de matrices antisymétriques, la conjugaison se faisant à l'intérieur du groupe spécial orthogonal pour les groupes d'isotropie relatifs aux références matérielles naturelles. Celles-ci conduisent à une certaine sous-famille de sous-algèbres de Lie de champs fondamentaux, étant donnée une telle référence U toute sous-algèbre de cette famille se déduit de $\bar{g}_U$ par multiplication à droite par une déformation du type $S^{-1}\ R^{-1}$ où S est dans le centralisateur de g_U. Pour un solide isotrope cette multiplication est donnée par une similitude (cf. III - 5.) .

IV - 3. CONNEXIONS MATERIELLES.

IV - 3.1. *Rappels.-*

La paracompacité d'un corps simple assure l'existence de connexion sur le fibré principal $C(B)$. Une connexion sur $C(B)$ est la donnée d'une 1-forme ω sur ce fibré, différentiable, à valeurs dans l'algèbre de Lie g de G et de type adjoint c'est-à-dire telle que

$$\omega \circ \sigma = \mathrm{Id}\ g$$
$$\omega(X \cdot A) = \mathrm{ad}\ A^{-1}\ \omega(X)$$

où X désigne un champ de vecteurs de B , A un élément de G et σ l'application de g dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur B , homomorphisme d'algèbres de Lie définissant les champs fondamentaux sur $C(B)$. Se donner une connexion sur $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ est aussi définir un champ de tenseurs Γ de type $(1,1)$ sur ce fibré, différentiable et tel que pour tout champ de vecteurs X sur $\mathcal{B}$, $\Gamma(X)$ appartienne à l'algèbre de Lie des champs fondamentaux de $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ et que pour tout tel champ X et tout élément A de G on ait

$$\Gamma(X) = X \qquad \Gamma(XA) = \Gamma(X)\, A \ .$$

Nous utiliserons aussi la caractérisation d'une telle connexion par un champ différentiable H de sous-espaces H_Φ de l'espace tangent $T_\Phi(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$ pour toute configuration locale Φ dans $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ tel que :

$H_\Phi \oplus V_\Phi = T_\Phi(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$ où V_Φ est le sous-espace vertical en Φ

et $H_{\Phi A} = H_\Phi \cdot A$ pour toute déformation locale A de $\mathcal{B}$.

Rappelons qu'étant donnée une telle connexion de 1-forme ω, on sait définir pour toute courbe λ de la base $\mathcal{B}$ les relèvements horizontaux Φ au dessus de λ par la condition :

$$\omega_{\Phi(t)}\ (\mathring{\Phi}(t) = 0)$$

où t est le paramètre de la courbe λ et $\mathring{\Phi}(t)$ le vecteur tangent au relèvement de λ passant par $\Phi(t) \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$.

Notons alors λ_{t,t_0} pour t et t_0 réels l'application de la fibre $\mathcal{C}_{\lambda(t_0)}(\mathcal{B})$ dans la fibre $\mathcal{C}_{\lambda(t)}(\mathcal{B})$ définie par relèvement au dessus de λ :

$$\lambda_{t,t_0}\ (\Phi(t_0)) = \Phi(t) \ .$$

Cette application est le transport parallèle de la fibre $\mathcal{C}_{\lambda(t_0)}(\mathcal{B})$ sur la fibre $\mathcal{C}_{\lambda(t)}(\mathcal{B})$ et on sait que l'application de G dans lui-même, $\xi^{-1}_{i,\lambda(t)} \circ \lambda_{t,t_0} \circ \xi_{i,\lambda(t_0)}$ qui lui est associée par la donnée d'un couple (U_i,ξ_i) de l'atlas de $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ en supposant $\lambda(t)$ et $\lambda(t_0)$ dans U_i, est une certaine multiplication à gauche. Notons la $L_{A_{t,t_0}}$ avec $A_{t,t_0} \in G$.

Pour tout $P \in G$ on a :

$$\lambda_{t,t_0}\ (\Phi(t_0)\cdot P) = \xi_{i,\lambda(t_0)} \circ L_{A_{t,t_0}} \circ \xi^{-1}_{i,\lambda(t)}\ (\Phi(t_0)\cdot P)$$

or

$$\xi_{i,\lambda(t_0)} \circ L_{A_{t,t_0}} (\xi^{-1}_{i,\lambda(t)}(\Phi(t_0))\cdot P) = \xi_{i,\lambda(t_0)}\ (L_{A_{t,t_0}} \circ \xi^{-1}_{i,\lambda(t)}\ (\Phi(t_0)))\cdot P$$

donc

$$\lambda_{t,t_0}\ (\Phi(t_0)\cdot P) = (\xi_{i,\lambda(t)} \circ L_{A_{t,t_0}} \circ \xi^{-1}_{i,\lambda(t)}\ (\Phi(t_0)))\cdot P$$

le deuxième membre est donc $\lambda_{t,t_0}\ (\Phi(t_0))\cdot P$, l'égalité

$$\lambda_{t,t_0}\ (\Phi(t_0)\cdot P) = \lambda_{t,t_0}\ (\Phi(t_0))\cdot P$$

exprime que λ_{t,t_0} conserve l'action du groupe G sur les fibres associées.
Soit $\tilde{\Phi}$ un autre relèvement horizontal de λ , il existe dans G un élément P tel que $\tilde{\Phi}(t_0) = \Phi(t_0)\cdot P$. Les deux configurations locales $\Phi_{(t_0)}$ et $\Phi_{(t)}$ déterminent un isomorphisme de $\mathcal{B}_{\lambda(t)}$ sur $\mathcal{B}_{\lambda(t_0)}$ $r(\lambda(t),\lambda(t_0))$ par :

$$r(\lambda(t),\lambda(t_0)) = \Phi^{-1}(t_0) \circ \Phi(t)$$

de même l'isomorphisme $\tilde{r}(\lambda(t),\lambda(t_0)) = \tilde{\Phi}^{-1}(t_0) \circ \tilde{\Phi}(t)$ **lie les configurations** locales $\tilde{\Phi}(t_0)$ et $\tilde{\Phi}(t)$. De ce qui précède et de l'hypothèse $\hat{\Phi}(t_0) = P^{-1} \circ \Phi(t_0)$ on déduit alors

$$\tilde{r}(\lambda(t),\lambda(t_0)) = \Phi^{-1}(t_0) \circ P \circ P^{-1} \circ \Phi(t) = \Phi^{-1}(t_0) \circ \Phi(t)$$

d'où $$\tilde{r}(\lambda(t),\lambda(t_0)) = r(\lambda(t),\lambda(t_0)) \quad .$$

Cet isomorphisme donnant le déplacement parallèle sur les espaces tangents $\mathcal{B}_{\lambda(t)}$ et $\mathcal{B}_{\lambda(t_0)}$ ne dépend que de λ et des points $\lambda(t)$ et $\lambda(t_0)$ de la base $\mathcal{B}$.

IV - 3.2. Proposition.-

La bijection λ_{t,t_0} est associée à l'isomorphisme $r(\lambda(t),\lambda(t_0))$ par le foncteur H (III - 2.1.).

La remarque III - 2.4. conduit à considérer les connexions sur $C(\mathcal{B})$ induisant des transports entre fibres du type bijections matérielles toute connexion de ce type permettant des associations entre fibres "respectant les réponses" . Dans ce cas, chaque courbe relèvement horizontal au dessus d'une courbe de $\mathcal{B}$ est contenue dans l'un des fibrés $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$. Nous prendrons donc la définition suivante :

IV - 3.3. Définition.-

On appelle connexion matérielle pour $\mathcal{B}$ toute connexion sur $C(\mathcal{B})$ réductible à une connexion sur chaque $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$.

Remarque.-

Pour que Γ connexion sur $C(\mathcal{B})$ soit matérielle il suffit qu'elle soit réductible sur un seul sous-fibré $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$. En effet dans ce cas, étant donné une autre référence matérielle $\mathcal{U}'$, il existe une déformation P telle que $\mathcal{U}' = P^{-1}\mathcal{U}$ et $C_{P^{-1}\mathcal{U}}(\mathcal{B}) = C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B}) \cdot P$. Si Φ est dans $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$, ΦP est dans $C_{\mathcal{U}'}(\mathcal{B})$ et tout relèvement horizontal d'une courbe λ de $\mathcal{B}$, passant par Φ donc contenu dans $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ est alors transformé dans l'application induite par P en un relèvement horizontal dans $C_{\mathcal{U}'}(\mathcal{B})$.

Suivant les notations utilisées dans les rappels IV - 3.1., étant donnée une connexion Γ sur $C(\mathcal{B})$ réductible à $\Gamma_{\mathcal{U}}$ sur $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$, une bijection

λ_{t,t_0} est telle que si $\Phi(t_0)$ est dans $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$, $\Phi(t) = \lambda(t,t_0)\ (\Phi(t_0))$ est aussi dans $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$, Φ étant relèvement horizontal de λ à la fois pour Γ et pour $\Gamma_{\mathcal{U}}$. La bijection $\lambda(t,t_0)$ est donc matérielle et l'isomorphisme correspondant un isomorphisme matériel. Les transports parallèles entre espaces tangents pour une telle connexion sont donc des isomorphismes matériels du corps.

Supposons maintenant que tous les transports parallèles d'une connexion Γ sur $C(\mathcal{B})$ soient matériels, alors pour toute référence matérielle $\mathcal{U}$ de $\mathcal{B}$ et toute Φ dans $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ l'espace horizontal pour Γ en Φ est tangent à $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ puisque les relèvements horizontaux passant par Φ sont tous dans ce même $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$, Γ est par conséquent réductible à une $\Gamma_{\mathcal{U}}$ sur chacun des $C_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$.

IV - 3.4. Proposition.-

Une connexion sur $C(\mathcal{B})$ est matérielle si et seulement si tous ses transports parallèles sont matériels.

Considérons un élément A du groupe d'holonomie relatif à une configuration locale $r(p)$ dans la fibre $C_p(\mathcal{B})$ d'une connexion Γ sur $C(\mathcal{B})$. Cet élément caractérise une multiplication à droite de la fibre correspondant à un déplacement parallèle de $C_p(\mathcal{B})$ sur elle-même. L'effet de A par action à droite sur $r(p)$ donne $r'(p) = A^{-1} \circ r(p)$. Notons $r(p,p)$ le transport de l'espace tangent associé, on a $r(p,p) = r'(p)^{-1} \circ r(p)$ ou encore $r(p,p) = r(p)^{-1} \circ A \circ r(p)$. Si Γ est matérielle, d'après la proposition III - 4.1. la relation $A = r(p) \circ r(p,p) \circ r(p)^{-1}$ prouve que A est élément du groupe d'isotropie relatif $\mathcal{G}_{r(p)}$. Le groupe d'holonomie $\mathcal{H}_{r(p)}$ relatif à une configuration locale $r(p)$ pour une connexion matérielle sur $C(\mathcal{B})$ est par conséquent un sous-groupe du groupe d'isotropie relatif à $r(p)$.

Soit $\tilde{r}(p)$ une autre configuration locale de $\mathcal{B}$ en p , les groupes d'holonomie $\mathcal{H}_{r(p)}$ et $\mathcal{H}_{\tilde{r}(p)}$ sont conjugués,

$$\mathcal{H}_{\tilde{r}(p)} = \text{ad } A^{-1}\ \mathcal{H}_{r(p)} \qquad \text{pour} \qquad \tilde{r}(p) = r(p) \cdot A$$

or d'après le chapitre III : $\mathcal{G}_{\tilde{r}(p)} = \text{ad } A^{-1}\ \mathcal{G}_{r(p)}$. Par conséquent la conjugaison des groupes d'isotropie relatifs conjugue les groupes d'holonomie relatifs correspondants lorsque la connexion est matérielle.

Notons $P(\Phi)$ le fibré d'holonomie relatif à une configuration locale $\Phi \in \mathbf{C}_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ pour une connexion matérielle Γ sur $\mathbf{C}(\mathcal{B})$. $P(\Phi)$ est alors sous-fibré de $\mathbf{C}_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$, le groupe d'holonomie $\mathcal{H}_{\Phi}$ donnant la réduction du groupe $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$. Inversement, si pour une connexion Γ tout fibré d'holonomie relatif possède cette propriété, d'après le théorème de réduction il existe une connexion induite par Γ sur le fibré $P(\Phi)$, cette connexion peut se prolonger en une connexion sur $\mathbf{C}_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ (si $\Phi \in \mathbf{C}_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$) qui coïncide nécessairement puisqu'il y a unicité du prolongement avec la réduction de Γ à $\mathbf{C}_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$, Γ est donc matérielle.

IV - 3.5. Proposition.-

Pour tout corps simple $\mathcal{B}$, une connexion Γ sur $\mathbf{C}(\mathcal{B})$ est matérielle si et seulement si le fibré d'holonomie $P(\Phi)$ de Γ relatif à toute configuration locale Φ de toute référence matérielle $\mathcal{U}$ de $\mathcal{B}$ est un sous-fibré de $\mathbf{C}_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$.

IV - 4. EQUATIONS DES TRANSPORTS MATERIELS. HOMOGENEITE LOCALE.

Soit ω la 1-forme d'une connexion Γ donnée sur $\mathbf{C}(\mathcal{B})$. Etant donné un ouvert simple U_i de $\mathcal{B}$, si σ_i est une section locale de $\mathbf{C}(\mathcal{B})$

au-dessus de U_i on désigne par ω_i la représentation de ω dans $\Pi^{-1}(U_i)$ relativement à cette section. Par définition ω_i est la 1-forme sur U_i à valeurs dans g, image réciproque de ω par σ_i. Considérons une section arbitraire σ dont le domaine U rencontre U_i, on a pour tout Φ dans $\Pi^{-1}(U_i \cap U)$ et tout vecteur X_Φ tangent en Φ à cette section

$$\omega(X_\Phi) = \mathrm{ad}\, A^{-1}\, \omega_i(\Pi(X_\Phi)) + A^{-1}\, dA(\Pi(X_\Phi)) \qquad (1)$$

avec $X_\Phi = \sigma(\Pi(X_\Phi)) = \sigma_i(\Pi(X_\Phi))\, A(\Pi(X_\Phi))$. L'application $A^{-1}\,dA$ associe à tout vecteur tangent à B en un point de $U \cap U_i$ le champ invariant à gauche sur G défini par la fonction de transition entre les sections σ et σ_i sur $U \cap U_i$.

Prenons pour sections de $C(B)$ les sections naturelles σ_{i_0} relative à l'atlas de définition de B, $\sigma_{i_0} = (U_{i_0}, r_{i_0})$. Soit Φ une courbe de $C(B)$ au-dessus de λ courbe de B. Le paramètre étant t, si les coordonnées de $\Phi(t)$ sont $(\lambda^1(t),\lambda^2(t),\lambda^3(t),\ldots,a^i_j(t),\ldots)$ avec $i = 1,2,3$ $j = 1,2,3$, le vecteur tangent $\dot\Phi(t)$ a pour coordonnées $(\dot\lambda^1(t),\dot\lambda^2(t),\dot\lambda^3(t),\ldots,\dot a^i_j(t),\ldots)$. D'après (1), pour que Φ soit horizontale il faut et il suffit que le système différentiel suivant soit vérifié par $A(t) = [a^i_j(t)]$:

$$\Gamma^i_{\ell k}(\lambda(t)) \cdot a^k_j(t) \cdot \dot\lambda^\ell(t) + \dot a^i_j(t) = 0$$

où les coefficients $\Gamma^i_{\ell k}$ sont les symboles de Christoffel de la connexion Γ relatifs à σ_{i_0}. Pour que Φ soit horizontale il est donc nécessaire et suffisant que $\dot\Phi(t)$ soit dans le sous-espace engendré par les vecteurs ν_ℓ de composantes :

$$(\delta^\ell_1,\delta^\ell_2,\delta^\ell_3,\ -\Gamma^1_{\ell k}(\lambda(t))a^k_1(t).,\ -\Gamma^i_{\ell k}(\lambda(t))a^k_j(t).,\ -\Gamma^3_{\ell k}(\lambda(t))a^k_3(t))$$

avec $i = 1,2,3$ $j = 1,2,3$ $k = 1,2,3$ $\ell = 1,2,3$. Le sous-espace horizontal en $\Phi_p = r_{i_0}(p)\ A$ est donc engendré par les vecteurs de composantes

$(\delta_1^\ell, \delta_2^\ell, \delta_3^\ell, \ldots -\Gamma_{\ell k}^i\ a_j^k, \ldots)$. Soit alors (U_{i_0}, s_{i_0}) une référence locale pour $\mathcal{B}$. Notons $A(p) = [a_j^i(p)]$ la déformation locale en p définie par $s_{i_0}(p) = r_{i_0}(p)\ A(p)$. Le sous-espace tangent à cette section locale en $s_{i_0}(p)$ est engendré par les vecteurs de composantes

$$(\delta_1^\ell, \delta_2^\ell, \delta_3^\ell, \ldots, \frac{\partial a_j^i(p)}{\partial x_\ell}, \ldots)$$

que l'on peut écrire encore

$$(\delta_1^\ell, \delta_2^\ell, \delta_3^\ell, \ldots, -\Gamma_{\ell k}^i\ a_j^k + (\Gamma_{\ell k}^i\ a_j^k + \frac{\partial a_j^i}{\partial x^\ell})\ , \ldots) \quad .$$

Dans ces conditions on met en évidence les vecteurs composants verticaux de ces vecteurs et Γ est matérielle si et seulement si ces vecteurs composants verticaux

$$(0,0,0,\ldots,\Gamma_{\ell k}^i\ a_j^k + \frac{\partial a_j^i}{\partial x^\ell}\ , \ldots)$$

correspondent aux valeurs en $s_{i_0}(p)$ de champs fondamentaux relatifs au sous-fibré $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\mathcal{B})$ pour (U_{i_0}, s_{i_0}) dans $\mathcal{U}$.

Appliquons alors l'homomorphisme entre l'algèbre de Lie des champs fondamentaux et l'algèbre de Lie infinitésimale de $\mathcal{G}$. On fait intervenir ainsi la déformation locale de $r_{i_0}(p)$ en $s_{i_0}(p)$ au sens de [7] puisque c'est la matrice $(\alpha_j^i(p))$ inverse de $(a_j^i(p))$ qui intervient.

Ainsi Γ est caractérisée matérielle par le fait que $g_{\mathcal{U}}$ contient le sous-espace engendré par les vecteurs de composantes

$$\alpha_i^m(p)\ (\Gamma_{\ell k}^i(s_{i_0}(p))\ a_j^k(p) + \frac{\partial a_j^i(p)}{\partial x^\ell}\ ) \qquad (1) \quad .$$

Montrons que cette caractérisation est indépendante du choix de la référence locale matérielle relative à $\mathcal{U}$. Soit $(\tilde{U}_{i_0}, \tilde{s}_{i_0})$ dans $\mathcal{U}$ telle que p soit dans $U_{i_0} \cap \tilde{U}_{i_0}$, il existe une déformation locale $B(p)$ dans $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ vérifiant $\tilde{s}_{i_0}(p) = s_{i_0}(p) \cdot B(p)$, soit $B(p) = (b^i_j(p))$. Le calcul précédent appliqué à

$$\tilde{r}_{i_0}(p) = r_{i_0}(p)\,[A(p) \cdot B(p)]$$

donne pour les composantes des vecteurs engendrant le sous-espace les expressions successives suivantes :

$$\beta^m_n\, \alpha^n_i\, \left(\Gamma^i_{\ell k}\, a^k_q\, b^q_j + \frac{\partial a^i_q\, b^q_j}{\partial x^\ell}\right) \qquad (2)$$

$$\beta^m_n\, \alpha^n_i\, \left(\Gamma^i_{\ell k}\, a^k_q + \frac{\partial a^i_q}{\partial x^\ell}\right) b^q_j + \beta^m_n\, \alpha^n_i\, a^i_q\, \frac{\partial b^q_j}{\partial x^\ell}$$

et puisque $\alpha^n_i\, a^i_q = \delta^q_n$

$$\beta^m_n\, \alpha^n_i\, \left(\Gamma^i_{\ell k}\, a^k_q + \frac{\partial a^i_q}{\partial x^\ell}\right) b^q_j + \beta^m_q\, \frac{\partial b^q_j}{\partial x^\ell}$$

or, les matrices $\left[\beta^m_q \cdot \frac{\partial b^q_j}{\partial x^\ell}\right]$ sont dans $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ puisque $[b^i_j]$ est dans $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$, d'autre part, en termes matriciels on peut écrire

$$\beta^m_n\, \alpha^n_i\, \left(\Gamma^i_{\ell k}\, a^k_q + \frac{\partial a^i_q}{\partial x^\ell}\right) b^q_j = \mathrm{ad}\, B^{-1}\, \left(\alpha^m_i\, \left(\Gamma^i_{\ell k}\, a^k_j + \frac{\partial a^i_j}{\partial x^\ell}\right)\right)$$

ce qui prouve que les vecteurs générateurs (1) et (2) sont ou ne sont pas dans $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ simultanément.

On peut donc caractériser les connexions matérielles par la proposition suivante :

IV - 4.2. *Proposition*.-

Une connexion Γ sur $C(\mathcal{B})$ est matérielle si et seulement si pour $\mathcal{U}$ référence matérielle de $\mathcal{B}$, le sous-espace engendré dans g par les vecteurs de composantes

$$\alpha^m_{i} \, (\Gamma^i_{\ell k} \, a^k_{j} + \frac{\partial a^i_{j}}{\partial x^\ell})$$

est contenu dans $\mathfrak{g}_U$.

Application au cas d'un solide simple de type cristallin ; l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_U$ étant réduite à $\{0\}$, les connexions matérielles sont déterminées par les relations

$$\Gamma^i_{\ell k} \, a^k_{j} + \frac{\partial a^i_{j}}{\partial x^\ell} = 0 \quad .$$

Etant donnée une courbe λ dans un tel solide, la condition ci-dessus permet d'écrire

$$\Gamma^i_{\ell k} \, (\lambda(t)) \cdot a^k_{j}(t) \cdot \dot\lambda^\ell(t) + \frac{\partial a^i_{j}(t)}{\partial x^\ell} \cdot \dot\lambda^\ell(t) = 0$$

ou

$$\Gamma^i_{\ell k} \, (\lambda(t)) \, a^k_{j}(t) \cdot \dot\lambda^\ell(t) + \frac{da^i_{j}(t)}{dt} = 0$$

ce qui prouve que la section locale (U_{i_0}, s_{i_0}) , référence matérielle locale pour le corps en p est horizontale. Pour toute déformation locale dans G la section locale $(U_{i_0}, s_{i_0} A)$ aura la même propriété. Par toute configuration locale Φ de $C(B)$ d'un tel corps il passe donc une variété intégrale relative à toute connexion matérielle donnée.

IV - 4.3. *Proposition*.-

Toute connexion matérielle sur $C(B)$, pour B solide simple cristallin, est complètement intégrable.

D'après le début de ce paragraphe, si une connexion Γ sur un corps simple est matérielle et de plus localement plate, cette dernière condition se traduisant par le fait que les symboles de Christoffel Γ^i_{jk} qui représentent la 1-forme ω par ${}_{i_0}\omega^i_j = \Gamma^i_{kj}\, dx^k$ relativement à la section locale (U_{i_0}, r_{i_0}) induite par la carte (U_{i_0}, ψ_{i_0}) de coordonnées locales (x^k), sont nuls, le sous-espace horizontal est engendré par les vecteurs de composantes $(\delta^\ell_1, \delta^\ell_2, \delta^\ell_3, 0, \ldots, 0)$. Ces vecteurs sont donc les trois premiers d'un repère adapté à la connexion. La section (U_{i_0}, r_{i_0}) fournit une variété intégrale de $C(\mathcal{B})$ pour la connexion matérielle Γ, c'est donc une référence matérielle locale pour $\mathcal{B}$. On en déduit une condition suffisante d'homogénéité locale.

IV - 4.4. Proposition.-

Pour qu'un corps simple $\mathcal{B}$ soit localement homogène il suffit qu'il existe sur $C(\mathcal{B})$ une connexion matérielle localement plate.

Pour un corps simple quelconque, l'homogénéité locale se traduit par l'existence en tout point de ce corps d'une connexion matérielle telle que ses symboles de Christoffel s'annulent pour un certain système de coordonnées locales au point considéré mais à priori cette connexion dépend du point. Bien que l'homogénéité locale n'implique donc pas l'existence d'une connexion matérielle localement plate, elle conditionne cependant la torsion. Etant donné un corps simple localement homogène $\mathcal{B}$, on peut construire un recouvrement de $\mathcal{B}$ de type gradient induisant partout des références matérielles locales $\mathcal{B}$ étant paracompacte, il est possible d'extraire d'un tel recouvrement un recouvrement plus fin localement fini et de construire une partition différentiable de l'unité subordonnée à celui-ci, noté $\mathcal{U} = \{U_i\ , i \in I\}$, à l'aide d'une famille de fonctions $\{f_i : i \in I\}$. On sait par ailleurs que sur chaque $\Pi^{-1}(U_i)$ il existe une connexion matérielle, soit $\Gamma_i(\mathcal{U})$ telle que la section correspondant à (U_i, r_i) en fournisse une variété intégrale. Notons $\underset{i}{\omega}(\bar{\mathcal{U}})$ la 1-forme de $\Gamma_i(\mathcal{U})$ et définissons $\omega(\bar{\mathcal{U}})$ par :

$$\forall\ \Phi \in C(\mathcal{B}) \qquad \omega(\bar{\mathcal{U}})\ (\Phi) = \sum_{i \in I} f_i(\Pi(\Phi))\ \underset{i}{\omega}\ (\mathcal{U})\ (\Phi) \quad .$$

Chaque $\underset{i}{\omega}(\bar{\mathcal{U}})$ est une 1-forme différentiable de type adjoint. On peut toutes les choisir à valeurs dans $g_{\mathcal{U}}$ algèbre de Lie de $\mathcal{g}_{\mathcal{U}}$ groupe d'isotropie relatif à une même référence matérielle $\mathcal{U}$ puisque l'action à droite de G échange globalement les références matérielles et permet ainsi de ramener les références matérielles locales utilisées dans une même $\mathcal{U}$. La 1-forme différentiable de type adjoint $\omega(\bar{\mathcal{U}})$ à valeurs dans $g_{\mathcal{U}}$ définit donc une connexion matérielle, de plus chaque $\Gamma_i(\bar{\mathcal{U}})$ étant symétrique, il en est de même de celle définie par $\omega(\bar{\mathcal{U}})$. On a donc la proposition suivante.

IV - 4.5. *Proposition*.-

Pour tout corps simple localement homogène $\mathcal{B}$ il existe sur $C(\mathcal{B})$ une connexion matérielle symétrique.

Si un corps simple est tel que toutes ses connexions matérielles soient à torsion non nulle, ce corps ne peut-être localement homogène, la torsion, donc la courbure simultanément aussi, représentent la distribution des inhomogénéités locales du corps. Le paragraphe suivant contient un exemple de type de corps simple pour lequel l'existence d'une connexion matérielle symétrique caractérise l'homogénéité locale.

IV - 5. CONNEXIONS MATERIELLES RIEMANNIENNES DES SOLIDES SIMPLES.

D'après la caractérisation III - 5.2., étant donné un corps simple solide $\mathcal{B}$, il existe sur $\mathcal{B}$ une structure riemannienne matérielle. Soit Γ. une connexion matérielle sur $C(\mathcal{B})$. Ses transports parallèles sont donc des isomorphismes matériels, ceux-ci induisent des transformations tensorielles qui conservent le champ de tenseurs définissant la structure riemannienne matérielle puisque ce champ est matériel. Ce champ est donc tel que sa dérivée covariante relative à une connexion matérielle quelconque sur $C(\mathcal{B})$ est nulle.

Supposons qu'existe sur $C(\mathcal{B})$ une connexion matérielle et symétrique. La connexion riemannienne de la variété riemannienne $\mathcal{B}$ étant l'unique connexion sur cette variété qui soit à la fois symétrique et telle que la dérivée covariante du champ de tenseurs de la métrique riemannienne suivant les déplacements parallèles de cette connexion soit nulle, il en résulte que Γ est nécessairement confondue avec cette connexion riemannienne.

IV - 5.1. *Proposition*.-

Etant donné un solide simple $\mathcal{B}$ dont $\mathcal{U}$ est une référence matérielle naturelle, il ne peut exister sur $C(\mathcal{B})$ qu'une seule connexion matérielle symétrique, la connexion riemannienne associée à la structure riemannienne $t_{\mathcal{U}}$.

Supposons qu'une telle connexion existe, c'est-à-dire que la connexion riemannienne $\Gamma_{\mathcal{U}}$ associée à $t_{\mathcal{U}}$ soit matérielle, si $\bar{\mathcal{U}}$ est une autre référence matérielle pour $\mathcal{B}$ de métrique notée $t_{\bar{\mathcal{U}}}$, la connexion $\Gamma_{\mathcal{U}}$ conserve par transport parallèle le champ matériel $t_{\bar{\mathcal{U}}}$, comme d'autre part elle est aussi symétrique elle coïncide avec la connexion riemannienne $\Gamma_{\bar{\mathcal{U}}}$.

IV - 5.2. Proposition.-

$\mathcal{B}$ étant un corps simple solide, si sur $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ existe une connexion matérielle symétrique, elle est unique et c'est la connexion riemannienne matérielle issue de toutes les métriques riemanniennes possibles sur $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{B}$ un solide simple localement homogène, en chaque point de $\mathcal{B}$ existe une référence matérielle locale d'un atlas naturel $\mathcal{U}$ de $\mathcal{B}$ induite par le système de coordonnées locales du domaine de cette référence. Les composantes de la métrique riemannienne matérielle $t_{\mathcal{U}}$ relative à $\mathcal{U}$ prises par rapport au repère défini par la configuration locale de référence en chaque point sont données par δ^i_j . Les symboles de Christoffel Γ^i_{jk} sont alors nuls pour la connexion riemannienne matérielle associée à $t_{\mathcal{U}}$, on peut donc préciser dans ce cas les propositions IV - 4.4. et IV - 4.5. par :

IV - 5.3. Théorème.-

Pour qu'un corps simple solide $\mathcal{B}$ soit localement homogène il faut et il suffit que sur $C(\mathcal{B})$ existe une connexion matérielle localement plate.

Supposons qu'un corps simple solide $\mathcal{B}$ soit de type cristallin. D'après la proposition IV - 4.3., toute connexion matérielle sur $C(\mathcal{B})$ est alors complètement intégrable, si de plus une telle connexion est symétrique elle est aussi localement plate d'où :

IV - 5.4. Proposition.-

Toute connexion matérielle symétrique sur un solide simple de type cristallin est localement plate.

Il en résulte une caractérisation de l'homogénéité locale pour les solides simples cristallins.

IV - 5.5. Proposition.-

Un corps simple $\mathcal{B}$ de type solide cristallin **est localement** homogène si et seulement si sur $C(\mathcal{B})$ existe une connexion matérielle symétrique.

Preuve : Dans ce cas, si sur $C(\mathcal{B})$ existe une connexion matérielle symétrique Γ, d'après IV - 4.3. elle est en fait à la fois complètement intégrable et symétrique donc Γ est matérielle localement plate. De IV - 5.3. on déduit alors une condition suffisante d'homogénéité locale pour $\mathcal{B}$ et par suite la proposition énoncée.

BIBLIOGRAPHIE

[1]* *BOURBAKI*

Variétés différentielles et analytiques.
Fascicule de résultats (1967)

[2] *D. COLEMAN - W. NOLL*

Material Symmetry and Thermostatic Inequalities in Finite Elastic Deformations. Arch. Rat. Mech. Anal. 15, 87-111 (1964)

[3] *G. GONTIER*

Mécanique des milieux déformables.
Dunod (1969)

[4]* *S. KOBAYASHI - K. NOMIZU*

Foundations of Differential Geometry.
J. Wiley & Sons Interscience Publishers (1963)

[5]* *A. LICHNEROWICZ*

Theorie globale des connexions et des groupes d'holonomie.
Ed. Cremonese Roma Dunod (1955)

[6] *W. NOLL*

A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media.
Arch. Rat. Mech. Anal. 2, 197-226 (1958)

[7] *W. NOLL*

Materially Uniform Simple Bodies With Inhomogeneities.
Arch. Rat. Mech. Anal. 27, 1-32 (1967)

[8]* *PHAM MAU QUAN*

Introduction à la géométrie des variétés différentiables.
Dunod (1969)

[9]* N. STEENROD

The Topology of Fibre Bundles.

Princeton University Press (1951)

[10]* S. STERNBERG

Lectures on Differential Geometry.

Prentice Hall (1964)

[11] C. TRUESDELL - W. NOLL

The Non-Linear Field Theories of Mechanics.

Handbuch der Physik Springer-Verlag (1965)

[12] C.C. WANG

A General Theory of Subfluids.

Arch. Rat. Mech. Anal. 20, 1-40 (1965)

[13] C.C. WANG

On the Geometric Structures of Simple Bodies, a Mathematical Foundation for the Theory of Continuous Distributions of Dislocations.

Arch. Rat. Mech. Anal. 27, 33-94 (1967)

*   *

*