

50376

N° d'ordre 275

1971

157

50376

1971

157

UNIVERSITÉ DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE

CENTRE DE 3^e CYCLE D'ÉLECTRONIQUE

THÈSE DE 3^e CYCLE

Étude théorique et expérimentale de l'influence
d'une inclusion sphérique sur la distribution du
courant dans un milieu conducteur homogène
Applications à des méthodes de prospection géophysique

Membres du Jury :	M. GABILLARD	Président
	M. FONTAINE	Examineur
	M. LOUAGE	Examineur
	M. PAQUET	Examineur
	M DESBRANDES	Invité

Présentée à Lille, le 24 Septembre 1971

par

Michel CAUTERMAN

Maitre es-Sciences



UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE.

DOYENS HONORAIRES

MM. H. LEFEBVRE, PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DEHORS, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, MM. LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKY.

PROFESSEURS TITULAIRES

M. ANGRAND Jean Pierre	Géographie et Aménagement Spatial
M. BACCHUS Pierre	Astronomie et Calcul Numérique
M. BEAUFILS Jean Pierre	Chimie Générale
M. BECART Maurice	I.U.T. Lille
M. BLOCH Vincent	Psychophysiologie
M. BIAYS Pierre	Géographie et aménagement Spatial
M. BONNEMAN Pierre	Chimie Industrielle
M. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CAPET Marcel-Francis	Institut de Préparation aux Affaires
M. CELET Paul	Géologie Générale
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. CORSIN Pierre	Paléobotanique
M. DECUYPER Marcel	Mathématiques
M. DEDECKER Paul	Mathématiques
M. DEFRETIN René	Biologie Animale - Directeur de l'Institut de Biologie Maritime de Wimereux
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale

M. DURCHON Maurice	Biologie Animale
M. FLATRES Pierre	Géographie et Aménagement Spatial
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. GEHU Jean Marie	Institut Agricole
M. GLACET Charles	Chimie Organique
M. GONTIER Gérard	Mécanique des Fluides
M. GUILLAUME Jean	Biologie Végétale
M. HEUREL Joseph	Chimie Minérale
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. MONTREUIL Jean	Chimie Biologique
M. POUZET Pierre	I.U.T. Lille
Mme SCHWARTZ Marie Hélène	Mathématiques
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie Minérale Appliquée
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. VIVIER Emile	Biologie Animale
M. WATERLOT Gérard	Géologie et Minéralogie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique

PROFESSEURS A TITRE PERSONNEL

M. BOUISSET Simon	Physiologie Animale
M. DELHAYE Michel	Chimie Physique et Minérale 1er Cycle
M. LEBFON André	Electronique
M. LINDER Robert	Biologie Végétale
M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. PRUDHOMME Rémy	Sciences Economiques et Sociales
M. SAVARD Jean	Chimie Générale
M. SCHALLER François	Biologie Animale
M. SCHILTZ René	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique
M. BODARD Marcel	Biologie Végétale
M. BOILLET Pierre	Physique
M. DERCOURT Jean Michel	Géologie et Minéralogie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M. LOMBARD Jacques	Sciences Economiques et Sociales
M ^{lle} MARQUET Simone	Mathématiques
M. MONTARIOL Frédéric	Chimie Minérale Appliquée
M. PROUVOST Jean	Géologie et Minéralogie
M. VAILLANT Jean	Mathématiques

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés des fonctions)

M. ADAM Michel	Sciences Economiques et Sociales
M. ANDRE Charles	Sciences Economiques et Sociales
M. AUBIN Thierry	Mathématiques Pures
M. BEGUIN Paul	Mécanique des Fluides
M. BILLARD Jean	Physique
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M. BONNEMAIN Jean Louis	Biologie Végétale
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. BRIDOUX Michel	I.U.T. Bethune
M. BRUYELLE Pierre	Géographie et Aménagement Spatial
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CARREZ Christian	Calcul Numérique
M. CHOQUET Marcel	I.U.T. Lille
M. CORDONNIER Vincent	Calcul Numérique
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COULON Jean Paul	Electrotechnique
M. DEBRABANT Pierre	Sciences Appliquées
M. ESCAIG Bertrand	Physique
M ^{me} EVRARD Micheline	I.U.T. Lille
M. FAIDHERBE Jacques	Biologie Animale
M. FONTAINE Jacques	I.U.T. Lille

M. FROELICH Daniel	Sciences Appliquées
M. GAMBLIN André	Géographie et Aménagement Spatial
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel	Sciences Economiques et Sociales
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GRANELLE	Sciences Economiques et Sociales
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M. HERMAN Maurice	Physique
M. HUARD DE LA MARRE Pierre	Calcul Numérique
M. JOLY Robert	Biologie (Amiens)
M. JOURNEL Gérard	Sciences Appliquées
Mlle KOSMANN Yvette	Mathématiques
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Générale
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANDAIS Jean	Chimie Organique
M. LAURENT François	Automatique
M. LAVAGNE Pierre	Sciences Economiques et Sociales
Mlle LEGRAND Solange	Mathématiques
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LENTACKER Firmin	Géographie et Aménagement Spatial
M. LEROY Jean Marie	E.N.S.C.L.
M. LEROY Yves	I.U.T. Lille
M. LHENAFF René	Géographie et Aménagement Spatial
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOUAGE Francis	Sciences Appliquées
M. LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M. MAES Serge	Physique
Mme MAILLET Monique	Sciences Economiques et Sociales
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MALAUSSENA Jean Louis	Sciences Economiques et Sociales
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MIGEON Michel	Sciences Appliquées
M. MONTEL Marc	Physique
M. MONTUELLE Bernard	I.U.T. Lille
M. MUSSCHE Guy	Sciences Economiques et Sociales

M. NICOLE Jacques	E.N.S.C.L.
M. OUZIAUX Roger	Sciences Appliquées
M. PANET Marius	Electrotechnique
M. PAQUET Jacques	Sciences Appliquées
M. PARSY Fernand	Mécanique des Fluides
M. PONSOLLE Louis	Chimie (Valenciennes)
M. POVY Jean Claude	Sciences Appliquées
M. RACZY Ladislas	Radioélectricité
Mme RENVERSEZ Françoise	Sciences Economiques et Sociales
M. ROUSSEAU Jean Paul	Physiologie Animale
M. ROYNETTE Bernard	Mathématiques
M. SALMER Georges	Electronique
M. SEGUIER Guy	I.U.T. Bethune
M. SIMON Michel	Sciences Economiques et Sociales
M. SMET Pierre	Physique
M. SOMME Jean	Géographie et Aménagement Spatial
M. THOMAS Daniel	Chimie Minérale Appliquée
M. TOULOTTE Jean Marc	Sciences Appliquées
M. TREANTON Jean René	Sciences Economiques et Sociales
M. VANDORPE Bernard	Sciences Appliquées
M. VILETTE Michel	I.U.T. Bethune
M. WATERLOT Michel	Géologie Générale
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques.

A mes parents,

A Martine,

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Radioélectricité et Electronique de l'Université des Sciences et Techniques de LILLE.

Monsieur le Professeur GABILLARD m'a constamment prodigué son aide personnelle et ses conseils tout au long de ce travail, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je remercie Messieurs J.M. FONTAINE et F. LOUAGE qui m'ont conseillé lors de la préparation de cette thèse et qui m'ont fait l'honneur de participer à mon Jury. Je tiens à leur exprimer ma reconnaissance.

Messieurs R. DESBRANDES, Maître de Recherches à l'INSTITUT FRANCAIS du PETROLE et J. PAQUET, Maître de Conférences à l'Université des Sciences et Techniques de LILLE, ont bien voulu examiner mon travail et faire partie de mon Jury. Je leur en suis vivement reconnaissant et les en remercie.

Une partie importante des essais expérimentaux a été effectuée avec l'aide de l'INSTITUT FRANCAIS du PETROLE et je tiens à remercier ici cet organisme.

J'ai eu également de longues et intéressantes discussions avec MM. Z. BASSIOUNI et J.P. DUBUS. Cette collaboration amicale m'a été très profitable. J'ai bénéficié aussi de l'aide sympathique des autres membres de l'équipe : MM. DEGAUQUE, GAQUIERE, MANGEZ, SOIRON, VACHON, VANLOOT. Que tous soient ici remerciés.

Enfin, je remercie tout le personnel technique et administratif du laboratoire pour leur collaboration amicale et efficace.

S O M M A I R E

INTRODUCTION

CHAPITRE . I .

I. POSITION DU PROBLEME

I.1. Convention d'indices

I.2. Rappels sur le calcul des composantes du champ électromagnétique

I.2.1. Contraintes imposées au système de coordonnées

I.2.2. Approximation - Cas du courant continu -

I.2.3. Choix du système de coordonnées

I.3. Le système de coordonnées toriques II (ou coordonnées bipolaires)

CHAPITRE . II .

ETUDE DE L'INFLUENCE D'UNE INCLUSION SPHERIQUE SUR LA DISTRIBUTION DU POTENTIEL DANS UN DEMI-MILIEU CONDUCTEUR HOMOGENE

II.1. Solution de l'équation de Laplace dans le système de coordonnées toriques II et expressions des potentiels secondaires dans les différents milieux

II.1.1. Solution générale de l'équation de Laplace

II.1.2. Expression générale du potentiel secondaire dans les différents milieux

II.1.2.1. Condition de convergence des solutions de l'équation de Laplace et expressions générales du potentiel secondaire

II.2. Expression générale du potentiel total dans les différents milieux du modèle théorique

II.2.1. Calcul du potentiel primaire

II.2.1.1. Expression analytique du potentiel primaire

II.2.1.2. Calcul de l'inverse d'une distance dans le système torique II

II.2.2. Expressions générales du potentiel total dans les différents milieux

II.3. Conditions aux limites

II.3.1. Conditions aux limites sur l'interface $\xi = 0$

II.3.2. Conditions aux limites sur l'interface $\xi = \xi_1$

- II.4. Méthode de calcul des coefficients C_{ni}^m - Valeurs approchées -
 - II.4.1. Méthode de calcul des coefficients C_{ni}^m
 - II.4.2. Valeurs approchées des coefficients C_{ni}^m
- II.5. Potentiel total créé dans le milieu (1) par deux points sources de courant d'intensité +I et -I
- II.6. Notion d'indice d'anomalie et de résistivité équivalente
 - II.6.1. Définition de l'indice d'anomalie ϕ
 - II.6.2. Définition de la résistivité équivalente $\rho_{\text{éq}}$ - relation entre ϕ et $\rho_{\text{éq}}$ -
- II.7. Passage du système de coordonnées toriques II au système de coordonnées cartésiennes

CHAPITRE. III.

VERIFICATION EXPERIMENTALE SUR UN MODELE ANALOGIQUE A TROIS DIMENSIONS

- III.1. Etude du modèle analogique
- III.2. Le dispositif expérimental
- III.3. Méthode expérimentale
 - III.3.1. Etalonnage du modèle
 - III.3.2. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux
 - III.3.2.1. Choix du rapport de similitude K
 - III.3.2.2. Présentation des résultats

CHAPITRE. IV.

METHODOLOGIE DE PROSPECTION D'UN GISEMENT SPHERIQUE

- IV.1. Aspect théorique de la localisation d'une inclusion sphérique
- IV.2. Hypothèses simplificatrices
- IV.3. Influence d'une anomalie sphérique sur un champ électrique uniforme
- IV.4. Calcul de l'indice d'anomalie ϕ dans les conditions de l'approximation du champ électrique uniforme
 - IV.4.1. Calcul du champ \vec{e}_z selon l'axe FF', dû au dipôle \vec{P}_x et \vec{P}_z
 - IV.4.1.1 Contribution du dipôle vertical \vec{P}_z
 - IV.4.1.2 Contribution du dipôle horizontal \vec{P}_x

IV.4.2. Expression de l'indice d'anomalie ϕ

IV.4.3. Calcul du rapport E_x/E_z

IV.5. Position du problème

IV.6. Détermination de l'azimuth

IV.7. Détermination de la position du centre de l'anomalie

IV.7.1. Détermination du paramètre H

IV.7.2. Détermination de la distance du centre de la sphère au forage

IV.8. Détermination du rayon de l'anomalie

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXES

I N T R O D U C T I O N

L'objet de notre travail a été l'étude d'une méthode de détection d'un gisement de forme approximativement sphérique situé à une certaine distance d'un forage.

La méthode que nous envisageons est basée sur la mesure de la conductivité apparente du terrain compris entre 2 électrodes d'émission du courant, situées par exemple à la surface du sol et 2 électrodes de réception descendues dans le forage à une certaine profondeur. Cette méthode a reçu le nom de "Télédiagraphie".

Il existe dans la nature beaucoup de gisements de forme grossièrement sphérique qui présentent par rapport au terrain encaissant des contrastes de conductivité importants. Ce sont par exemple des gisements d'oxyde ou des cavités. Leur détection présente donc un intérêt économique certain pour les techniques minières et de Génie Civil.

L'approximation mathématique que nous avons utilisée pour décrire de tels gisements ou de telles cavités consiste à les assimiler à des sphères parfaites, incluses dans un terrain homogène de conductivité σ_1 , ce terrain étant lui-même séparé de l'atmosphère par un plan infini. Cette approximation est suffisante dans beaucoup de cas pratiques.

La détection de tels gisements, par des procédés géophysiques opérant depuis la surface du sol, devient généralement impossible si ces gisements sont enterrés à une profondeur excédant 2 à 3 fois leur diamètre. Ce résultat est bien connu et a fait l'objet de nombreuses publications.

L'originalité du travail que nous présentons est de permettre la détection d'un gisement sphérique situé à une profondeur bien supérieure à celle permise par les procédés classiques, à condition toutefois que la distance séparant ce gisement de l'axe du forage ne soit pas trop importante (pas plus de 4 fois le diamètre du gisement). L'objet de notre thèse est donc l'exposé d'une méthode permettant d'étendre l'étendue latérale d'investigation d'un sondage.

Dans une première partie de notre travail, nous calculons à partir du modèle théorique le potentiel électrique créé dans le demi-milieu inférieur de conductivité σ_1 par deux points sources de courant situées à l'interface air-sol. Cette étude nous permet de mettre en évidence l'influence des paramètres géométriques et électriques de l'inclusion sphérique sur la répartition des lignes de courant dans le sol.

Dans la deuxième partie, nous comparons dans un cas particulier les résultats de l'analyse théorique aux "télélogs" obtenus à l'aide d'une cuve rhéographique à trois dimensions simulant la propagation électrique dans le sol.

La troisième partie est associée à une étude approchée qui nous permet de déduire de l'analyse directe du problème une méthode de prospection d'un gisement sphérique utilisable sur le terrain.

C H A P I T R E . I .

Nous nous proposons de définir le système de coordonnées le mieux adapté au problème des conditions aux limites des grandeurs électromagnétiques sur les surfaces séparant les milieux de caractéristiques électriques différentes existant dans notre modèle théorique.

Nous rappelons tout d'abord la méthode générale de calcul des composantes du champ électromagnétique et nous introduisons une approximation dépendant de la fréquence utilisée.

I. - POSITION DU PROBLEME -

I.1. Convention d'indices

Le sol est assimilé à un demi-milieu conducteur renfermant une inclusion sphérique et surmonté d'un diélectrique : l'atmosphère. Ces milieux sont caractérisés par leurs constantes électromagnétiques ayant les indices (0), (1) et (2).

L'indice (0) est affecté à l'air, l'indice (1) au sol et l'indice (2) à l'hétérogénéité sphérique (fig.1.).

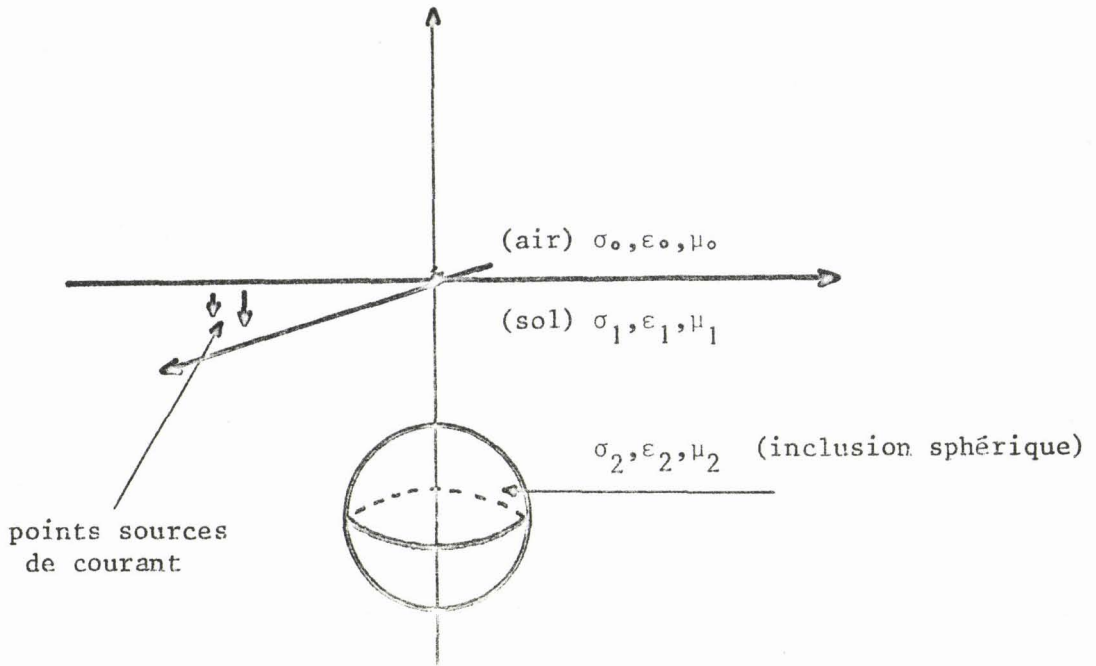


fig.1.

I.2. Rappels sur le calcul des composantes du champ électromagnétique ⁽¹⁾

I.2.1. Contraintes imposées au système de coordonnées

Les champs électromagnétiques dérivent d'un potentiel qui est dans le cas général une solution de l'équation ⁽²⁾ :

$$(\Delta - \gamma^2)\vec{\Pi} = 0$$

où : γ est la constante de propagation

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

σ , μ , ϵ sont les caractéristiques électromagnétiques du milieu
 ω est la pulsation du courant injecté dans le sol.

Cette solution satisfait aux conditions aux limites des champs électromagnétiques sur les surfaces séparant les milieux de caractéristiques électriques et magnétiques différentes.

Ces conditions expriment en particulier sur chaque surface de séparation :

- . la continuité des composantes tangentielles du champ électrique
- . la continuité des composantes tangentielles du champ magnétique
- . la continuité des composantes normales du vecteur densité de courant.

Il en résulte que chaque surface de séparation doit être une surface de coordonnées pour le système choisi.

I.2.2. Approximation - cas du courant continu -

La résolution analytique directe de l'équation d'onde vectorielle⁽³⁾ n'est aisément réalisable que dans le système de coordonnées cartésiennes car dans un autre système il n'est en général pas possible de trouver une solution vectorielle dont les composantes sont orthogonales.

L'emploi d'artifices de calculs⁽⁴⁾ devient inextricable lorsque le système physique considéré ne présente pas de symétrie.

La fréquence⁽⁵⁾ du courant sinusoïdal injecté dans le sol est au plus de l'ordre de quelques dizaines de hertz pour permettre une pénétration suffisante des ondes électromagnétiques dans le sol. Nous supposons donc dans la suite de cet exposé que le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire U .

Dans le milieu (1) le potentiel scalaire U_1 est la somme d'un potentiel primaire U_{p1} et d'un potentiel secondaire U_{s1} qui satisfont respectivement les équations suivantes :

$$\Delta U_{p1} = g(x, y, z) \quad (1)$$

$$\Delta U_{s1} = 0 \quad (2)$$

où $g(x, y, z)$ représente la distribution des sources du champ électrique.

Dans les milieux (0) et (2) les potentiels U_1 et U_2 satisfont à l'équation de Laplace :

$$\Delta U_i = 0 \quad i = 0, 2$$

Le champ électrique se calcule à partir des potentiels d'après la relation suivante :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad } U} \quad (3)$$

Les conditions aux limites rappelées ci-dessus sont générales et restent valables dans le cas où le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire.

I.2.3. Choix du système de coordonnées

Nous avons retenu deux systèmes qui permettent de représenter à la fois une sphère et un plan non sécants par deux surfaces de coordonnées (7), (8), (9).

D'une part, le système de coordonnées toriques II⁽⁷⁾

D'autre part, la combinaison de deux systèmes de coordonnées sphériques d'origines différentes⁽⁹⁾ (fig.2.).

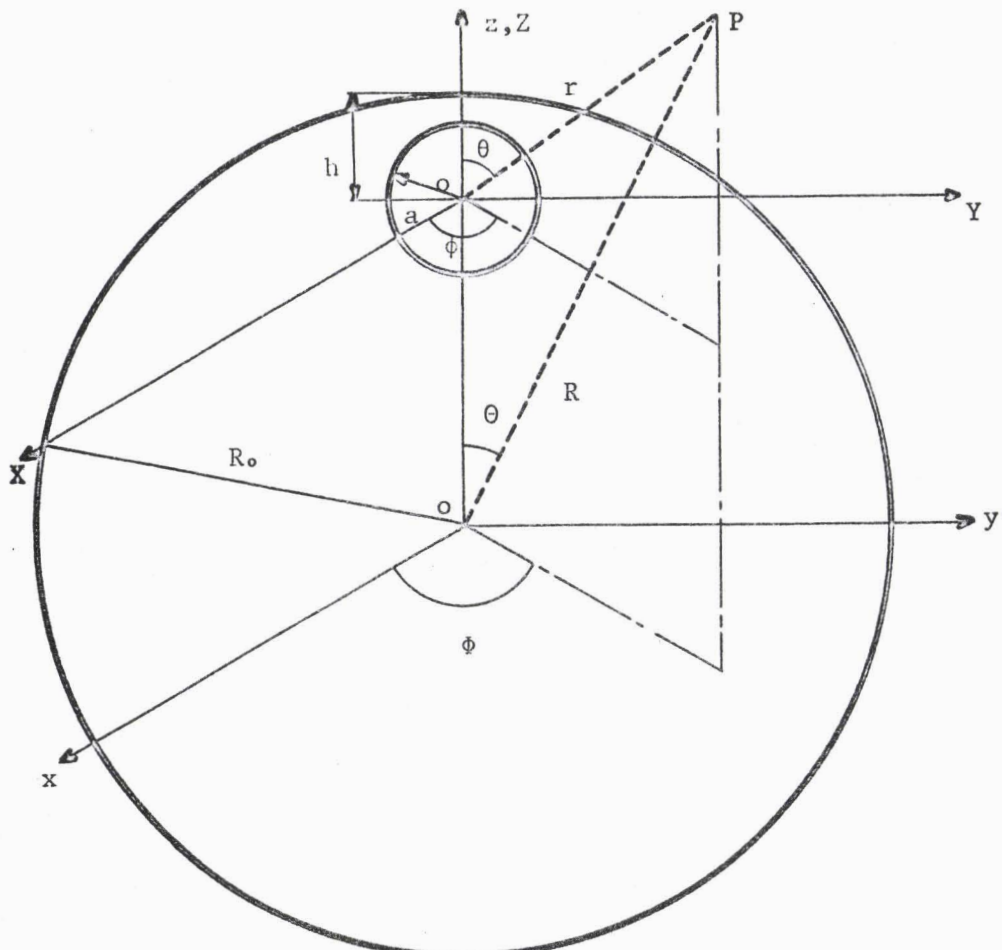


figure.2.

Le point courant de l'espace P a pour coordonnées (r, θ, ϕ) dans le repère $(O'XYZ)$ et (R, Θ, Φ) dans le repère (o, x, y, z) .

Nous obtenons une sphère et un plan à coordonnée constante en faisant tendre R_0 vers l'infini tout en maintenant la distance h constante.

Pour expliciter les conditions aux limites que doit satisfaire le champ électrique, il est nécessaire d'exprimer la solution de l'équation de Laplace dans l'un des milieux en fonction des deux familles de coordonnées en conservant les mêmes constantes inconnues. Le passage d'un système de coordonnées à l'autre est long et délicat, cela nous a amené à choisir le système de coordonnées toriques II d'apparence plus facile à manier.

I.3. Le système de coordonnées toriques II (ou coordonnées bipolaires)

Considérons les faisceaux de cercles orthogonaux (C) et (C') de la figure.3.

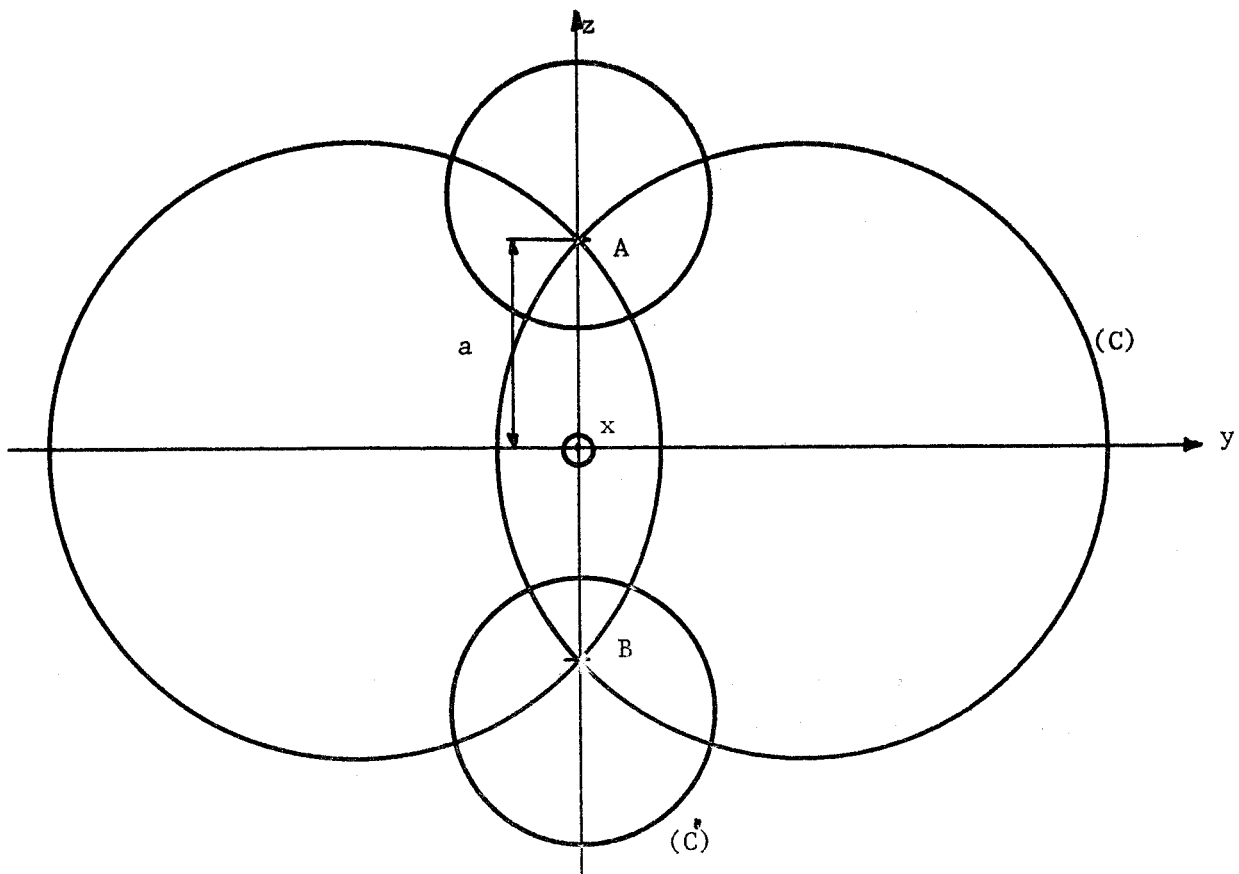


figure.3.

Si nous faisons tourner les faisceaux autour de l'axe Oz, les cercles (C) et (C') engendrent respectivement des tores orthogonaux qui coupent leur axe et des sphères.

Nous choisissons comme troisième famille de surfaces de coordonnées les plans verticaux passant par l'axe de révolution Oz.

Les équations de ces surfaces de coordonnées sont données dans les systèmes torique et cartésien par les relations suivantes :

. pour les sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az \operatorname{coth} \xi + a^2 = 0 \quad \xi = \text{cte}$$

. pour les tores

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) \cotg^2 \phi = 0 \quad \phi = \text{cte}$$

. pour les plans méridiens

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \psi \quad \psi = \text{cte}$$

Les variables x, y, z sont données en fonction de ξ , ϕ et ψ par les formules suivantes :

$$x = a \frac{\sin \phi \sin \psi}{\operatorname{ch} \xi + \cos \phi} \quad (4) \quad y = a \frac{\sin \phi \cos \psi}{\operatorname{ch} \xi + \cos \phi} \quad (5) \quad z = a \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi + \cos \phi} \quad (6)$$

Tous les points de l'espace sont décrits une fois et une seule si on limite les variations des coordonnées aux intervalles suivants :

$$-\infty < \xi < +\infty ; \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad ; \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi$$

Dans ce système de coordonnées les relations $\overrightarrow{\operatorname{grad} U}$ et ΔU sont données par les expressions suivantes :

en posant :

$$\lambda = \operatorname{ch} \xi + \cos \phi$$

$$\text{grad}_{\xi} U = \frac{\lambda}{a} \frac{\partial U}{\partial \xi} \quad (7) \quad \text{grad}_{\phi} U = \frac{\lambda}{a} \frac{\partial U}{\partial \phi} \quad (8) \quad \text{grad}_{\psi} U = \frac{\lambda}{a \sin \phi} \frac{\partial U}{\partial \psi} \quad (9)$$

$$\Delta U = \frac{\lambda}{a^3} \left(\frac{\cos \phi \text{ch } \xi + 1}{\sin \phi} \frac{\partial U}{\partial \phi} - \text{sh } \xi \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \frac{\lambda^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} \right) \quad (10)$$

La figure.4. donne les surfaces de coordonnées à valeurs limites.

Le demi-espace des ξ positifs représente l'atmosphère. Dans le demi espace des ξ négatifs, si ξ est inférieur à ξ_1 , cette zone représente l'inclusion sphérique, dans l'autre cas le sol.

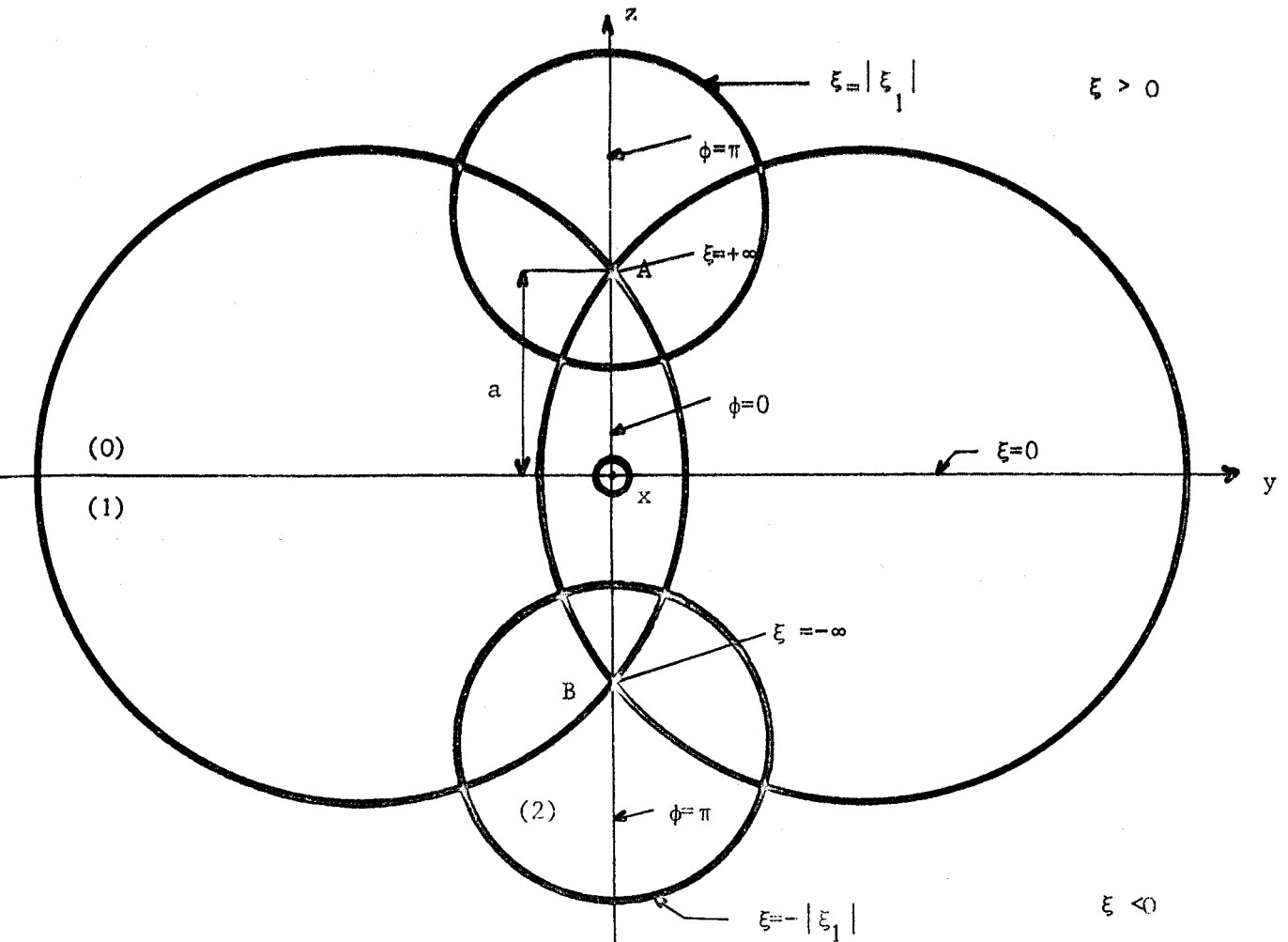


figure.4.

C H A P I T R E . I I .

II. ETUDE DE L'INFLUENCE D'UNE INCLUSION SPHERIQUE SUR LA DISTRIBUTION DU POTENTIEL DANS UN DEMI-MILIEU CONDUCTEUR HOMOGENE

Dans ce chapitre, nous calculons le potentiel créé dans le sol par deux points sources de courant situés à sa surface. Nous résolvons d'abord ce problème pour un seul point source. Le théorème de superposition des états d'équilibre nous permet alors de déduire directement le potentiel électrique créé par deux points sources.

Enfin, nous définissons les notions d'indice d'anomalie ϕ et de résistivité équivalente ρ_{eq} qui permettent d'interpréter les logs de télédiagraphie.

II.1. Solution de l'équation de Laplace dans le système de coordonnées toriques II et expressions des potentiels secondaires dans les différents milieux

II.1.1. Solution générale de l'équation de Laplace

La fonction potentiel vérifie l'équation de Laplace en tout point de l'espace $P(\xi, \phi, \psi)$ sauf au point S de coordonnées ξ' , ϕ' et ψ' sur la source du potentiel.

Son expression analytique dans le système de coordonnées considéré est donnée par la relation (10) :

$$\frac{\lambda}{a^3} \left(\frac{\cos\phi \operatorname{ch}\xi + 1}{\sin\phi} \frac{\partial U}{\partial \phi} - \operatorname{sh}\xi \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \frac{\lambda^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} \right) = 0 \quad (11)$$

avec : $\lambda = \operatorname{ch}\xi + \cos\phi$

Cette équation peut être résolue par séparation de variables à condition de poser ;

$$U = (\operatorname{ch}\xi + \cos\phi)^{1/2} V(\xi, \phi, \psi) \quad (12)$$

et $V = T(\xi) \cdot \Phi(\phi) \cdot \Psi(\psi)$

(11) devient :

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d\xi^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{\Phi} \frac{1}{\operatorname{tg}\phi} \frac{d\Phi}{d\phi} + \frac{1}{\Psi} \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} = 0 \quad (13)$$

(13) se décompose en deux membres indépendants.

Le premier membre conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} + m^2 \Psi = 0 \quad (14)$$

Il en résulte que :

$$\Psi_m = \begin{matrix} \cos m\psi \\ \sin m\psi \end{matrix} \quad (15)$$

La formulation adoptée représente une combinaison linéaire des fonctions. Pour que la solution de (14) soit unique nous choisissons m dans le groupe des entiers positifs ou nuls.

Le deuxième membre associé à (14) est la somme de deux termes indépendants, il en résulte que $T(\xi)$ et $\Phi(\phi)$ vérifient respectivement les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^2 T}{d\xi^2} - (n + 1/2)T = 0 \quad (16)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{\operatorname{tg}\phi} \frac{d\Phi}{d\phi} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \phi} \right] \Phi = 0 \quad (17)$$

il en résulte que :

$$T = \frac{e^{(n+1/2)\xi}}{e^{-(n+1/2)\xi}} \quad (18)$$

$$\text{et } \Phi = \frac{P_n^m(\cos\phi)}{Q_n^m(\cos\phi)} \quad (19)$$

$P_n^m(\cos\phi)$ et $Q_n^m(\cos\phi)$ sont respectivement les fonctions de Legendre associées de première et de deuxième espèce. L'indice n est entier, positif ou nul.

Tout point appartenant à l'axe \vec{Oz} fait partie du domaine de définition de la fonction potentiel qui doit demeurer finie dans tous les cas. Dans ces conditions, les coefficients de la fonction de Legendre de deuxième espèce, $Q_n^m(\cos\phi)$, doivent être nuls.

Il en résulte que la solution générale de l'équation de Laplace s'écrit :

$$U = (\operatorname{ch}\xi + \cos\phi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[A_n^m \cos m\psi + B_n^m \sin m\psi \right] \left[C_n^m e^{(n+1/2)\xi} + D_n^m e^{-(n+1/2)\xi} \right] P_n^m(\cos\phi) \quad (20)$$

II.1.2. Expression générale du potentiel secondaire dans les différents milieux

Le potentiel secondaire rend compte de l'influence des contrastes de conductivité entre les divers milieux. Ce potentiel est solution de l'équation de Laplace et doit demeurer fini dans tout l'espace.

II.1.2.1. Condition de convergence des solutions de l'équation de Laplace et expressions générales du potentiel secondaire

Le facteur multipliant les séries devient infini quand le module de ξ tend vers l'infini, soit au voisinage des points A et B dont les coordonnées cartésiennes sont respectivement (0,0,a) et (0,0,-a) (figure.4.).

Dans ce cas, la coordonnée torique ϕ tend vers les valeurs zéro ou π .

Il en résulte que les fonctions de Legendre associées $P_n^m(\cos\phi)$ tendent vers zéro. Les fonctions de Legendre de première espèce $P_n(\cos\phi)$ tendent vers 1 lorsque ϕ tend vers zéro et vers $(-1)^n$ lorsque ϕ tend vers π .

D'où, d'après (20) :

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} U = \sqrt{\text{ch}\xi + 1} \sum_{n=0}^{\infty} (A'_n e^{(n+1/2)\xi} + B'_n e^{-(n+1/2)\xi}) \quad (21)$$

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi} U = \sqrt{\text{ch}\xi - 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A'_n e^{(n+1/2)\xi} + B'_n e^{-(n+1/2)\xi}) \quad (22)$$

si ξ tend vers l'infini, nous avons :

$$\sqrt{\text{ch}\xi + 1} \neq \frac{e^{\xi/2}}{\sqrt{2}}$$

(21) devient alors :

$$U \neq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\xi/2} (A'_0 e^{\xi/2} + A'_1 e^{\xi/2} + \dots + B'_0 e^{-\xi/2} + \dots)$$

Il faut donc que les A'_n soient nuls pour que le potentiel secondaire reste fini au voisinage du point A.

De même au voisinage du point B, il faut que les B'_n soient nuls pour que le potentiel secondaire reste fini.

Il en résulte que, dans l'air, le potentiel secondaire est donné par la relation suivante :

$$U_{so} = (\text{ch}\xi + \cos\phi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_n^m \cos m\psi + B_n^m \sin m\psi) e^{-(n+1/2)\xi} P_n^m(\cos\phi) \quad (23)$$

dans le sol, son expression est la suivante :

$$U_{s1} = (\text{ch}\xi + \cos\phi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (C_n^m e^{(n+1/2)\xi} + D_n^m e^{-(n+1/2)\xi}) (E_n^m \cos m\psi + F_n^m \sin m\psi) P_n^m(\cos\phi) \quad (24)$$

à l'intérieur de l'hétérogénéité le potentiel secondaire est :

$$U_{s2} = (\text{ch}\xi + \cos\phi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (G_n^m \cos m\psi + H_n^m \sin m\psi) e^{+(n+1/2)\xi} P_n^m(\cos\phi) \quad (25)$$

II.2. Expression générale du potentiel total dans les différents milieux du modèle théorique

Le potentiel total est la somme du potentiel primaire et du potentiel secondaire.

Le potentiel primaire tient compte de la distribution des sources de courant. Il n'y aura donc de potentiel primaire que dans les milieux qui contiennent des points sources de courant.

II.2.1. Calcul du potentiel primaire

II.2.1.1. *Expression analytique du potentiel primaire*

Le potentiel primaire rend compte de l'influence des sources de courant. Dans le calcul de ce potentiel, tout se passe donc comme si le milieu était homogène et infini.

Le potentiel électrique créé dans un milieu infini de conductivité σ_1 par un point source de courant I a pour expression :

$$U_p = \frac{I}{4\pi\sigma_1} \cdot \frac{1}{r} \quad (26)$$

r est la distance du point source de courant au point de l'espace où l'on relève le potentiel U_p (figure.5.).

II.2.1.2. *Calcul de l'inverse d'une distance dans le système torique II*

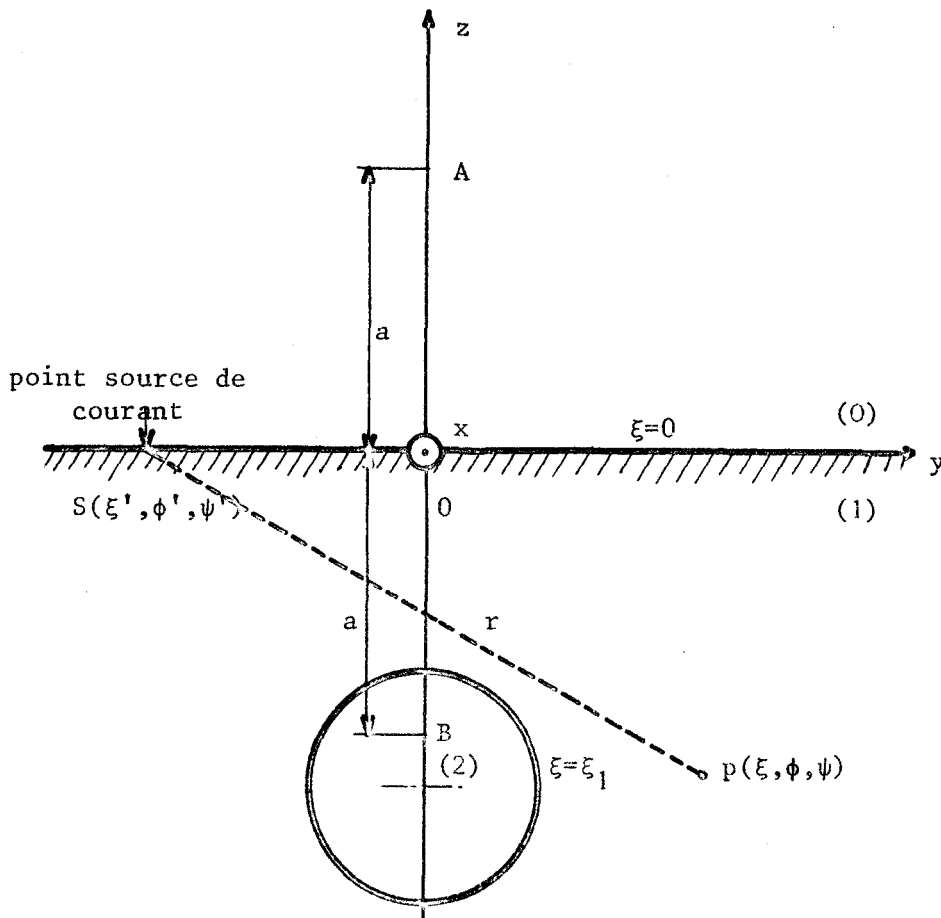


figure.5.

Nous ne donnons, dans ce paragraphe, que le résultat du calcul, son développement est exposé dans l'annexe I.

Soient deux points P et S dont les coordonnées toriques II sont respectivement (ξ, ϕ, ψ) et (ξ', ϕ', ψ') . Nous appelons r la longueur du segment P.S. Alors l'expression de $1/r$ dans le système de coordonnées toriques II est la suivante :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} (\text{ch}\xi + \cos\phi)^{1/2} (\text{ch}\xi' + \cos\phi')^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2 - \delta_0^m) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} e^{\pm(n+1/2)(\xi-\xi')} \times$$

$$P_n^m(\cos\phi) P_n^m(\cos\phi') \cos m(\psi-\psi') \quad (27)$$

δ_0^m est le symbole de Kronecker

δ_0^m vaut 1 si m est égal à zéro

δ_0^m vaut zéro si m est différent de zéro.

Le signe + est utilisé devant l'argument de l'exponentielle si ξ est inférieur à ξ' . Le signe - est utilisé si ξ est supérieur à ξ' .

Dans ces conditions, le potentiel primaire s'exprime de la façon suivante :

$$U_P = \frac{I}{4\pi\sigma a} (\text{ch}\xi + \cos\phi)^{1/2} (\text{ch}\xi' + \cos\phi')^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2 - \delta_0^m) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} e^{\pm(n+1/2)(\xi-\xi')} \times$$

$$P_n^m(\cos\phi) P_n^m(\cos\phi') \cos m(\psi-\psi') \quad (28)$$

II.2.2. Expressions générales du potentiel total dans les différents milieux

Nous déduisons les expressions générales du potentiel total des relations (23) à (28).

Nous poserons :

$$\lambda = \text{ch}\xi + \cos\phi$$

$$M_{n1}^m = \frac{I}{4\pi\sigma_1 a} (\text{ch}\xi' + \cos\phi')^{1/2} (2-\delta_0^n) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\phi') \cos m\psi' \quad (29)$$

$$M_{n2}^m = \frac{I}{4\pi\sigma_1 a} (\text{ch}\xi' + \cos\phi')^{1/2} (2-\delta_0^n) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\phi') \sin m\psi' \quad (30)$$

Dans ces conditions, le potentiel total s'écrit :

- pour l'atmosphère :

$$U_0 = \lambda^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n e^{-(n+1/2)\xi} (A_{n1}^m \cos m\psi + A_{n2}^m \sin m\psi) P_n^m(\cos\phi) \quad (31)$$

- pour le sol :

$$U_1 = \lambda^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n e^{(n+1/2)\xi} (M_{n1}^m e^{+(n+1/2)\xi'} \cos m\psi + M_{n2}^m e^{+(n+1/2)\xi'} \sin m\psi) P_n^m(\cos\phi) \\ + \lambda^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(B_{n1}^m e^{(n+1/2)\xi} + C_{n1}^m e^{-(n+1/2)\xi}) \cos m\psi + (B_{n2}^m e^{(n+1/2)\xi} + \dots \\ \dots C_{n2}^m e^{-(n+1/2)\xi}) \sin m\psi] P_n^m(\cos\phi) \quad (32)$$

- pour l'inclusion sphérique :

$$U_2 = \lambda^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n e^{(n+1/2)\xi} (D_{n1}^m \cos m\psi + D_{n2}^m \sin m\psi) P_n^m(\cos\phi) \quad (33)$$

Les constantes A_{ni}^m , B_{ni}^m , C_{ni}^m , D_{ni}^m sont des inconnues que nous allons déterminer grâce aux conditions aux limites.

II.3. Conditions aux limites

Les conditions aux limites, écrites sur les surfaces de séparation des différents milieux, nous permettent de déterminer les

constantes inconnues définies plus haut. Les résultats ainsi obtenus sont uniques et donnent la solution du problème physique.

Ces conditions s'énoncent de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} E_{t_0} &= E_{t_1} \\ J_{n_0} &= J_{n_1} \end{aligned} \right\} \text{ sur l'interface } \xi = 0 \quad (34)$$

$$(35)$$

Nous appelons respectivement E_{ti} et J_{ni} les composantes des vecteurs champ électrique \vec{E} et densité de courant \vec{J} qui sont tangentiellles et normales aux surfaces de séparation.

On démontre facilement que la relation (34) est équivalente à la relation suivante :

$$U_0 = U_1$$

Dans des milieux conducteurs homogènes isotropes et linéaires, la relation (35) devient :

$$\sigma_0 \frac{\partial U_0}{\partial \xi} = \sigma_1 \frac{\partial U_1}{\partial \xi_1}$$

Il en résulte que les conditions aux limites se traduisent de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} U_0 &= U_1 & (36) & \text{ sur l'interface} \\ \sigma_0 \frac{\partial U_0}{\partial \xi} &= \sigma_1 \frac{\partial U_1}{\partial \xi} & (37) & \xi = 0 \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} U_1 &= U_2 & (38) & \text{ sur l'interface} \\ \sigma_1 \frac{\partial U_1}{\partial \xi} &= \sigma_2 \frac{\partial U_2}{\partial \xi} & (39) & \xi = \xi_1 \end{aligned} \right.$$

II.3.1. Conditions aux limites sur l'interface $\xi = 0$

En remplaçant U_0 et U_1 par leurs valeurs issues de (31) et (32) et en les reportant dans (36), nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{n1}^m \cos m\psi + A_{n2}^m \sin m\psi) P_n^m(\cos\phi) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[(M_{n1}^m e^{+(n+1/2)\xi'} + B_{n1}^m + C_{n1}^m) \cos m\psi + (M_{n2}^m e^{+(n+1/2)\xi'} + B_{n2}^m + C_{n2}^m) \sin m\psi \right]$$

$$P_n^m(\cos \phi) \quad (40)$$

Cette relation doit être vérifiée quelle que soit la valeur de ψ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Dans ces conditions, nous utilisons les propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos m\psi \cos p\psi d\psi = \begin{cases} \pi & \text{si } m = p \\ 0 & \text{si } m \neq p \end{cases} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin m\psi \sin p\psi d\psi = \begin{cases} \pi & \text{si } m = p \\ 0 & \text{si } m \neq p \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin m\psi \cos p\psi d\psi = 0$$

de (40) nous déduisons les relations suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n1}^m P_n^m(\cos\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (M_{n1}^m e^{(n+1/2)\xi'} + B_{n1}^m + C_{n1}^m) P_n^m(\cos\phi) \quad (41)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n2}^m P_n^m(\cos\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (M_{n2}^m e^{(n+1/2)\xi'} + B_{n2}^m + C_{n2}^m) P_n^m(\cos\phi) \quad (42)$$

Ces deux dernières relations doivent être vérifiées quelle que soit la valeur de ϕ appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$, nous utilisons maintenant les propriétés d'orthogonalité des fonctions de Legendre, et fonction de Legendre associées.

$$\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\phi) P_s^m(\cos\phi) \sin\phi d\phi = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq s \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{si } n = s \end{cases}$$

Les équations (41) et (42) deviennent donc les suivantes si l'on suppose que le point source se trouve sur l'interface air-sol ($\xi' \rightarrow 0$) :

$$A_{ni}^m - B_{ni}^m - C_{ni}^m = M_{ni}^m \quad \text{avec } i = 1, 2 \quad (44)$$

En procédant de façon analogue à partir de l'équation (37), nous obtenons :

$$\sigma_0 A_{ni}^m + \sigma_1 B_{ni}^m - \sigma_1 C_{ni}^m = \sigma_1 M_{ni}^m \quad i = 1, 2 \quad (45)$$

Nous avons mené ce calcul en supposant que le milieu zéro qui simule l'atmosphère possède une conductivité σ_0 négligeable, il en résulte que nous déduisons des relations (44) et (45) l'égalité suivante :

$$B_{ni}^m - C_{ni}^m = M_{ni}^m \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (46)$$

Compte tenu des expressions (28), (32) et (46); le potentiel dans le sol s'écrit :

$$U_1 = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r} + \lambda^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{n1}^m \cos m\psi + C_{n2}^m \sin m\psi) (e^{(n+1/2)\xi_+} e^{-(n+1/2)\xi_-}) P_n^m(\cos\phi) \right] \quad (47)$$

II.3.2. Conditions aux limites sur l'interface $\xi = \xi_1$

Par un raisonnement analogue à celui que nous venons d'exposer, nous obtenons à partir de (38) l'égalité suivante :

$$D_{ni}^m e^{(2n+1)\xi_1} - B_{ni}^m e^{(2n+1)\xi_1} - C_{ni}^m = M_{ni}^m e^{(2n+1)\xi_1} \quad \text{avec } i = 1, 2 \quad (48)$$

Remarque. I.

Nous constatons à partir de (48) que si l'hétérogénéité sphérique tend vers la sphère point B, la coordonnée ξ_1 tend vers moins l'infini ; alors les coefficients C_{ni}^m sont tous nuls.

Dans ces conditions, (47) devient :

$$U_1 = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \frac{1}{r}$$

Dans un demi-milieu conducteur parfaitement homogène, l'interface air-sol joue le rôle d'une surface réfléchissante parfaite pour les lignes de courant.

Considérons maintenant la relation (39).

En remplaçant les dérivées des potentiels U_1 et U_2 par leurs expressions analytiques et en appliquant la propriété d'orthogonalité des fonctions trigonométriques nous obtenons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_2 \sum_{n=0}^{\infty} D_{ni}^m e^{(n+1/2)\xi_1} \{ [\text{sh}\xi_1 + (2n+1)\text{ch}\xi_1] P_n^m(\cos\phi) + (2n+1)\cos\phi P_n^m(\cos\phi) \} = \\ \sigma_1 \sum_{n=0}^{\infty} (M_{ni}^m e^{- (n+1/2)\xi_1} + B_{ni}^m) \{ [\text{sh}\xi_1 + (2n+1)\text{ch}\xi_1] P_n^m(\cos\phi) + (2n+1)\cos\phi P_n^m(\cos\phi) \} \times \\ e^{(n+1/2)\xi_1} + \sigma_1 \sum_{n=0}^{\infty} C_{ni}^m e^{- (n+1/2)\xi_1} \{ [\text{sh}\xi_1 - (2n+1)\text{ch}\xi_1] P_n^m(\cos\phi) - (2n+1)\cos\phi P_n^m(\cos\phi) \} \end{aligned} \quad (49)$$

Avant d'appliquer la propriété d'orthogonalité des fonctions de Legendre et fonctions de Legendre associées, il faut distribuer les $\cos\phi P_n^m(\cos\phi)$ à l'aide de la relation de récurrence suivante ⁽⁸⁾ :

$$(2n+1)\cos\phi P_n^m(\cos\phi) = (n-m+1)P_{n+1}^m(\cos\phi) + (n+m)P_{n-1}^m(\cos\phi) \quad (50)$$

Nous obtenons donc une relation entre les coefficients B_{ni}^m , C_{ni}^m et D_{ni}^m qui fait intervenir trois valeurs consécutives de chaque coefficient :

$$\begin{aligned} & \sigma_2 \{ (n-m) D_{n-1,i}^m e^{(2n+1)\xi_1} + D_{ni}^m [\text{sh}\xi_1 + (2n+1)\text{ch}\xi_1] e^{2(n+1)\xi_1} + (n+m+1) D_{n+1,i}^m e^{(2n+3)\xi_1} \} \\ & = \sigma_1 \{ (n-m) \left([M_{n-1,i}^m e^{-(n-1/2)\xi_1'} + B_{n-1,i}^m] e^{(2n+1)\xi_1} - C_{n-1,i}^m e^{2\xi_1} \right) + \left([M_{ni}^m e^{-(n+1/2)\xi_1'} + B_{ni}^m] e^{(2n+1)\xi_1} \right. \\ & \quad \left. \times [\text{sh}\xi_1 + (2n+1)\text{ch}\xi_1] + C_{ni}^m [\text{sh}\xi_1 - (2n+1)\text{ch}\xi_1] e^{\xi_1} \right) + (n+m+1) \\ & \quad \left. \left([M_{n+1,i}^m e^{-(n+3/2)\xi_1'} + B_{n+1,i}^m] e^{(2n+3)\xi_1} - C_{n+1,i}^m \right) \right\} \end{aligned} \quad (51)$$

Des équations (46), (48) et (51) nous déduisons une relation de récurrence que doivent vérifier les coefficients C_{ni}^m .

$$\begin{aligned} & (n-m) C_{n-1,i}^m \left[(\sigma_1 + \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_1) e^{(2n-1)\xi_1} \right] e^{2\xi_1} + C_{ni}^m e^{\xi_1} \{ \text{sh}\xi_1 (\sigma_2 - \sigma_1) (1 + e^{(2n+1)\xi_1}) \\ & \quad + (2n+1)\text{ch}\xi_1 [(\sigma_2 + \sigma_1) + (\sigma_2 - \sigma_1) e^{(2n+1)\xi_1}] \} + (n+m+1) C_{n+1,i}^m [(\sigma_2 + \sigma_1) + (\sigma_2 - \sigma_1) e^{(2n+3)\xi_1}] \\ & = 2(\sigma_1 - \sigma_2) \{ (n-m) e^{(2n+1)\xi_1} M_{n-1,i}^m + M_{ni}^m [(2n+1)\text{ch}\xi_1 + \text{sh}\xi_1] e^{2(n+1)\xi_1} + (n+m+1) \\ & \quad M_{n+1,i}^m e^{(2n+3)\xi_1} \} \end{aligned} \quad (52)$$

Remarque. 2.

En considérant (52), nous constatons que tout se passe, dans notre modèle théorique, comme dans un milieu homogène et infini de conductivité σ_1

contenant deux inclusions sphériques identiques de conductivité σ_2 . Ces deux inclusions sont symétriques par rapport au plan de coordonnées $\xi = 0$.

L'intensité de courant, injecté dans ce dernier cas, est deux fois plus grande que celle injectée dans notre modèle théorique (figure.6.).

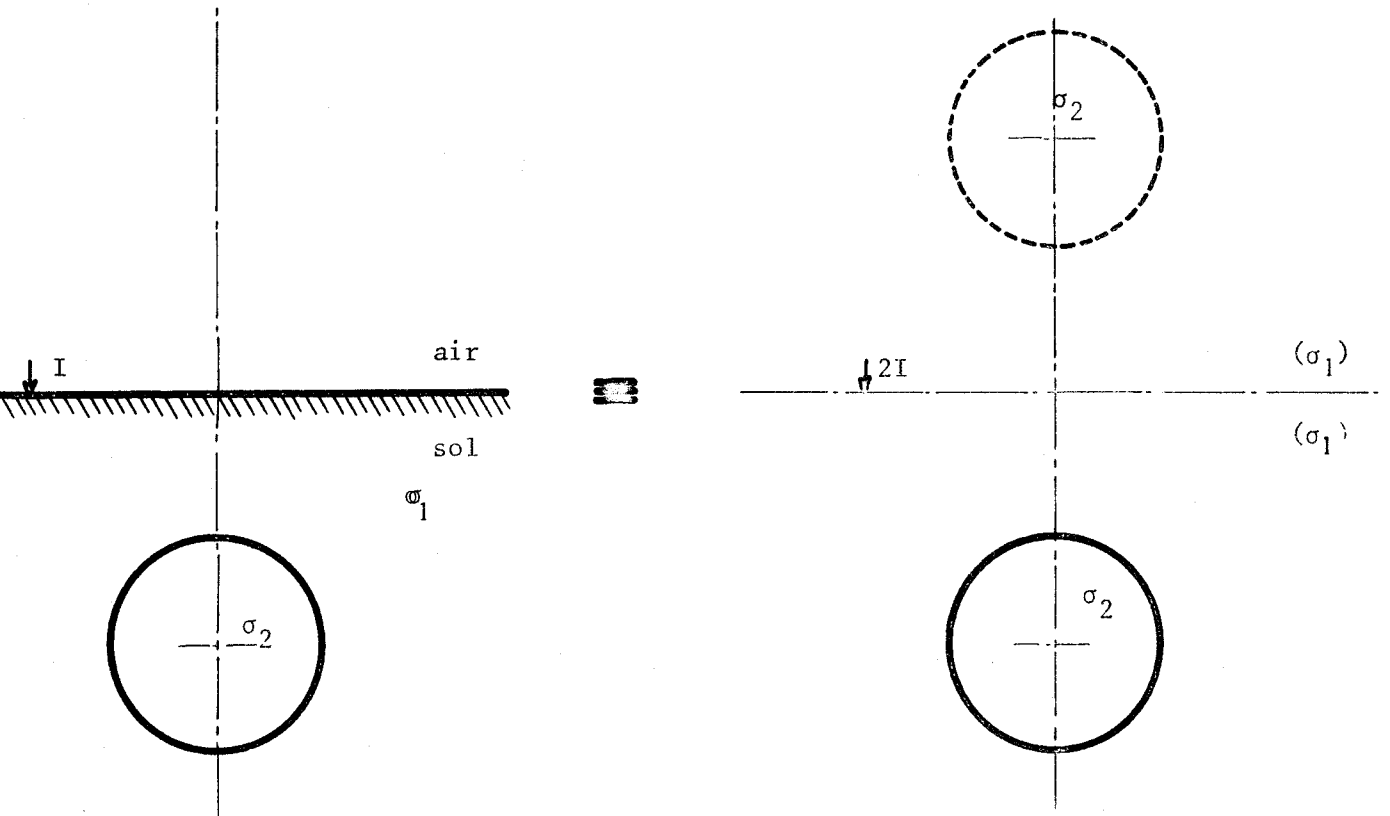


figure.6.

II.4. Méthode de calcul des coefficients C_{ni}^m - Valeurs approchées -

II.4.1. Méthode de calcul des coefficients C_{ni}^m --

La relation (52) ne nous permet pas d'obtenir une valeur unique pour chaque coefficient C_{ni}^m . Pour que leur détermination soit unique, il faut obtenir une relation supplémentaire liant les C_{ni}^m aux M_{ni}^m .

Considérons l'égalité (39), en mettant en facteur la quantité $(\text{ch}\xi_1 + \cos\phi)$ et en utilisant les relations (46) et (48) liant les différents coefficients nous obtenons la formule suivante :

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_2 - \sigma_1) \sum_{n=0}^{\infty} C_{ni}^m (e^{(n+1/2)\xi_1} + e^{-(n+1/2)\xi_1}) \cdot \frac{\text{sh}\xi_1}{\text{ch}\xi_1 + \cos\phi} P_n^m(\cos\phi) + \sum_{n=0}^{\infty} [(\sigma_2 - \sigma_1) \\
 & C_{ni}^m e^{(n+1/2)\xi_1} + (\sigma_1 + \sigma_2) C_{ni}^m e^{-(n+1/2)\xi_1}] (2n+1) P_n^m(\cos\phi) \\
 & = 2(\sigma_1 - \sigma_2) \sum_{n=0}^{\infty} M_{ni}^m e^{(n+1/2)\xi_1} \left[\frac{\text{sh}\xi_1}{\text{ch}\xi_1 + \cos\phi} + (2n+1) \right] P_n^m(\cos\phi) \quad (53) \\
 & \text{avec } i = 1, 2
 \end{aligned}$$

En développant la quantité $\frac{\text{sh}\xi_1}{\text{ch}\xi_1 + \cos\phi}$ en série entière, nous obtenons :

$$\frac{\text{sh}\xi_1}{\text{ch}\xi_1 + \cos\phi} = \text{th}\xi_1 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{\cos\phi}{\text{ch}\xi_1} \right)^j \quad (54)$$

Cette série est absolument convergente si ξ_1 est différent de zéro. Nous éliminons ce cas qui correspond à un demi-milieu homogène de conductivité σ_2 .

En appliquant j fois la relation de récurrence (50) aux $\cos^j \phi P_n^m(\cos\phi)$, puis en utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions de Legendre et fonctions de Legendre associées, nous obtenons une égalité du type suivant :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j C_j^m = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j M_j^m \quad (55)$$

Il en résulte que les C_{ni}^m sont la solution de l'équation de récurrence (11)(12) (52) à coefficients non constants dont la condition initiale est de la forme (55). La résolution d'une telle équation est analogue à celle d'un système d'équations différentielles linéaires, et devient analytiquement très compliquée à résoudre lorsque les coefficients de celle-ci ne sont pas constants. Sur le plan de la résolution numérique, cela nécessite la mise en oeuvre de programmes de calcul délicats, nous avons préféré nous contenter d'une solution approchée.

II.4.2. Valeurs approchées des coefficients C_{ni}^m --

On démontre facilement, dans l'annexe A.II., la relation suivante :

$$\operatorname{ch} \xi_1 = \frac{H}{R}$$

H : est la profondeur du centre de la sphère par rapport à l'interface air-sol

R : est le rayon de la sphère.

En nous limitant au premier ordre, la relation (54) devient :

$$\frac{\operatorname{sh} \xi_1}{\operatorname{ch} \xi_1 + \cos \phi} \neq \operatorname{th} \xi_1 \left(1 - \frac{\cos \phi}{\operatorname{ch} \xi_1} \right)$$

Cette approximation est valable à quelques pourcents si H est supérieur ou égal à 5R.

Celle-ci convient amplement aux cas généraux de prospection.

Dans ces conditions, la relation (55) devient :

$$\text{en posant } K = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

$$\frac{(n-m)}{2n-1} K \operatorname{th} \xi_1 C_{n-1, i}^m \left(1 + e^{(2n-1)\xi_1} \right) + C_{ni}^m e^{-\xi_1} \left\{ (2n+1) \operatorname{ch} \xi_1 \left(1 - K e^{(2n+1)\xi_1} \right) \right.$$

$$\left. - K \operatorname{sh} \xi_1 \left(1 + e^{(2n+1)\xi_1} \right) \right\} + \frac{n+m+1}{2n+3} K \operatorname{th} \xi_1 C_{n+1, i}^m \left(1 + e^{(2n+3)\xi_1} \right)$$

$$= 2K \left\{ - \frac{(n-m)}{2n-1} \operatorname{th} \xi_1 M_{n-1, i}^m e^{(2n+1)\xi_1} + \left[(2n+1) \operatorname{ch} \xi_1 + \operatorname{sh} \xi_1 \right] M_{ni}^m e^{2(n+1)\xi_1} \right.$$

$$\left. - \frac{(n+m+1)}{2n+3} \operatorname{th} \xi_1 M_{n+1, i}^m e^{(2n+3)\xi_1} \right\}$$

avec $i = 1, 2$ (56)

En résolvant le système d'équations (53) et (56) nous obtenons les expressions des coefficients C_{ni}^m .

Nous posons :

$$Y_{ni}^n = \frac{2K[(2n+1)\text{ch}\xi_1 + \text{sh}\xi_1]}{(2n+1)\text{ch}\xi_1(1-Ke^{(2n+1)\xi_1}) - K\text{sh}\xi_1(1+e^{(2n+1)\xi_1})} \times M_{ni}^m e^{(2n+1)\xi_1} \quad (57)$$

$$H_{ni}^m = \frac{(n-m)e^{2n\xi_1}}{(2n-1)\text{ch}\xi_1(1-Ke^{(2n-1)\xi_1}) - K\text{sh}\xi_1(1+e^{(2n-1)\xi_1})} \times M_{n-1}^m e^{2n\xi_1} \\ + \frac{(n+m+1)e^{2(n+1)\xi_1}}{(2n+3)\text{ch}\xi_1(1-Ke^{(2n+3)\xi_1}) - K\text{sh}\xi_1(1+e^{(2n+3)\xi_1})} \times M_{n+1}^m \quad (58)$$

Il en résulte que :

- si $n - m$ est impair :

$$C_{ni}^m = Y_{ni}^m \quad (59)$$

- si $n-m$ est pair :

$$C_{ni}^m = Y_{ni}^m - \frac{2K\text{sh}\xi_1(1+K) \cdot H_{ni}^m}{(2n+1)\text{ch}\xi_1(1-Ke^{(2n+1)\xi_1}) - K\text{sh}\xi_1(1+e^{(2n+1)\xi_1})} \quad (60)$$

Nous pourons donc à l'aide des relations (47), (59) et (60) calculer le potentiel créé par un point source de courant placé à l'interface air-sol, lorsque le terrain renferme une anomalie de conductivité sphérique.

II.5. Potentiel total créé dans le milieu (1) par deux points sources de courant d'intensité +I et -I

En appliquant le théorème de superposition des états d'équilibre, les formules établies ci-dessus restent valables lorsque le

potentiel est créé par deux points sources de courant, à condition de poser :

$$M_{n_1}^m = (2 - \delta_0^m) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[(1+\cos\phi_1') P_n^m(\cos\phi_1') \cos m\psi_1' - (1+\cos\phi_2') P_n^m(\cos\phi_2') \cos m\psi_2' \right] \quad (61)$$

$$M_{n_2}^m = (2 - \delta_0^m) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[(1+\cos\phi_1') P_n^m(\cos\phi_1') \sin m\psi_1' + (1+\cos\phi_2') P_n^m(\cos\phi_2') \sin m\psi_2' \right] \quad (62)$$

Dans ces conditions, les points sources de courant d'intensité +I et -I ont respectivement pour coordonnées torique II les valeurs $(0, \phi_1', \psi_1')$ et $(0, \phi_2', \psi_2')$.

Il en résulte que l'expression générale du potentiel est la suivante :

$$U_1 = \frac{I}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} + \frac{(\text{ch}\xi + \cos\phi)^{1/2}}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (e^{(n+1/2)\xi} + e^{-(n+1/2)\xi}) (C_{n_1}^m \cos m\psi + C_{n_2}^m \sin m\psi) P_n^m(\cos\phi) \right] \quad (63)$$

R_1 est la distance du point source d'intensité +I au point P où l'on calcule le potentiel

R_2 est la distance du point source -I au point P (figure.7.).

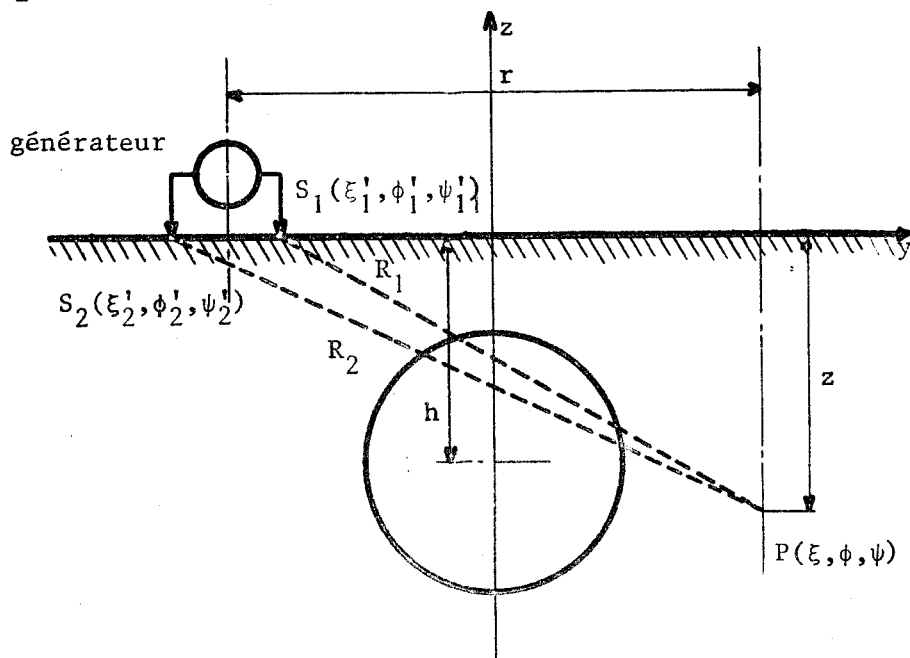


figure.7.

II.6. Notion d'indice d'anomalie et de résistivité équivalente

II.6.1. Définition de l'indice d'anomalie ϕ

Soient un dispositif émetteur placé au point E et V_1 la différence de potentiel créée par cet émetteur en un point P d'un demi-milieu conducteur contenant une anomalie de conductivité sphérique .

Soit V_0 la différence de potentiel qui serait créée en ce point P par l'émetteur toujours placé au point E si le demi-milieu considéré ne contenait pas l'hétérogénéité (figure.8.a.b.).

Nous appelons indice d'anomalie le rapport :

$$\phi = \frac{V_1 - V_0}{V_0} \quad (64)$$

Compte tenu de la remarque.I. et de la relation (63), l'expression analytique de ϕ est la suivante :

en posant :

$$F(\xi_1, \phi_1, \psi_1, \xi_2, \phi_2, \psi_2) = \frac{1}{a} \left\{ (\text{ch}\xi_1 + \cos\phi_1)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{(n+1/2)\xi_1} + e^{-(n+1/2)\xi_1}) \sum_{m=0}^{\infty} (C_{n1}^m \cos m\psi_1 + C_{n2}^m \sin m\psi_1) P_n^m(\cos\phi_1) - (\text{ch}\xi_2 + \cos\phi_2)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{(n+1/2)\xi_2} + e^{-(n+1/2)\xi_2}) \sum_{m=0}^n (C_{n1}^m \cos m\psi_2 + C_{n2}^m \sin m\psi_2) P_n^m(\cos\phi_2) \right\} \quad (65)$$

$$\text{et } G(R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}) = 2 \left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} \right) \quad (66)$$

nous obtenons :

$$\phi = \frac{F(\xi_1, \phi_1, \psi_1, \xi_2, \phi_2, \psi_2)}{G(R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22})} \quad (67)$$

Les différentes valeurs géométriques intervenant dans F et G sont définies sur la figure.8.a.

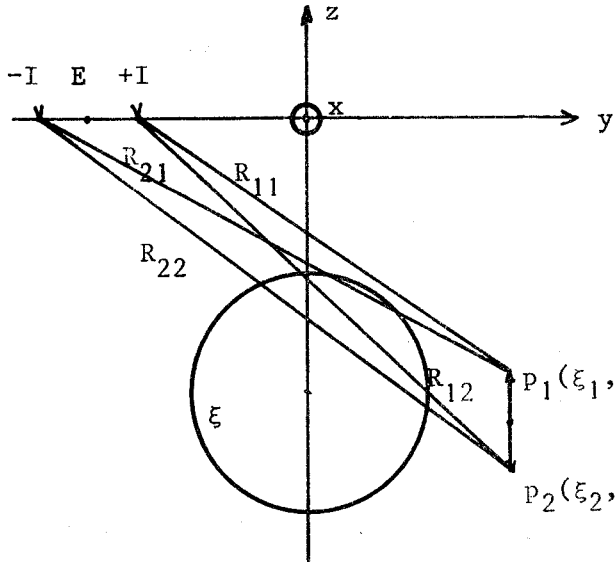


figure.8.a.

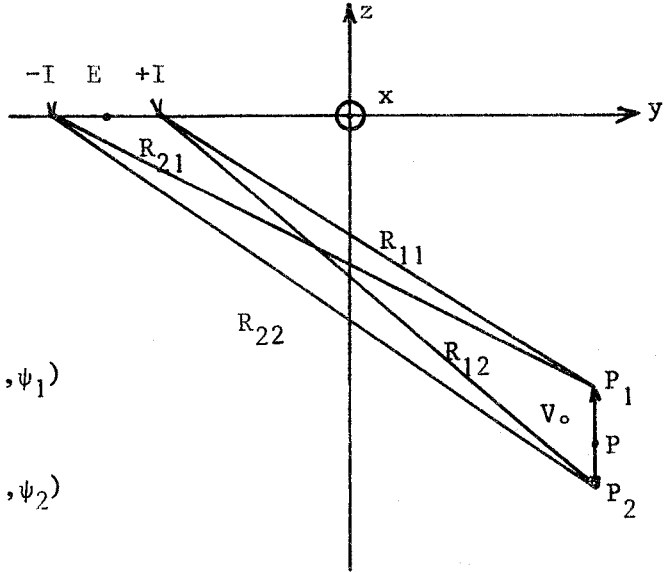


figure.8.b.

II.6.2. Définition de la résistivité équivalente $\rho_{\acute{e}q}$ - relation entre ϕ et $\rho_{\acute{e}q}$

Les différences de potentiel V_1 et V_0 s'expriment respectivement en fonction des grandeurs F et G de la manière suivante :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi} \rho_1 [F(\xi_1, \phi_1, \psi_1, \xi_2, \phi_2, \psi_2) + G(R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22})] \quad (68)$$

$$V_0 = \frac{1}{4\pi} \rho_1 G(R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}) \quad (68)$$

ρ_1 est la résistivité et vaut $1/\sigma_1$.

Nous appelons résistivité équivalente $\rho_{\acute{e}q}$ la valeur numérique de la résistivité qu'il faut introduire dans la relation (68) pour obtenir l'égalité :

$$V_1 = V_0$$

Il en résulte donc que :

$$\frac{\rho_{\text{éq}}}{\rho_1} = 1 + \frac{F(\xi_1, \phi_1, \psi_1, \xi_2, \phi_2, \psi_2)}{G(R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22})} \quad (69)$$

de (67) et (69) déduisons une relation importante liant la résistivité équivalente à l'indice d'anomalie :

$$\frac{\rho_{\text{éq}}}{\rho_1} = 1 + \phi \quad (70)$$

II.7. Passage du système de coordonnées toriques II au système de coordonnées cartésiennes

Les grandeurs géométriques telles que la profondeur de la sphère par rapport à la surface du sol, le rayon de la sphère ... etc n'apparaissent pas directement dans les expressions analytiques du potentiel secondaire et de la fonction F données par les relations (63) et (65).

Nous avons défini les relations permettant de relier les coordonnées toriques II aux grandeurs géométriques intéressantes, nous ne donnons ici que les résultats, les calculs détaillés figurent dans l'annexe A.II.

Ces relations sont établies en vue de simuler sur ordinateur un log de télédiagraphie ou télélog.⁽¹³⁾

Nous présentons sur les figures.9.a. et 9.b. les différentes grandeurs qui interviennent dans le calcul de ces relations.

h : est la profondeur du centre de la sphère par rapport à l'interface air-sol

R : est le rayon de l'inclusion sphérique

d_l : est la distance entre les deux points sources de courant +I et -I représentant le dispositif émetteur

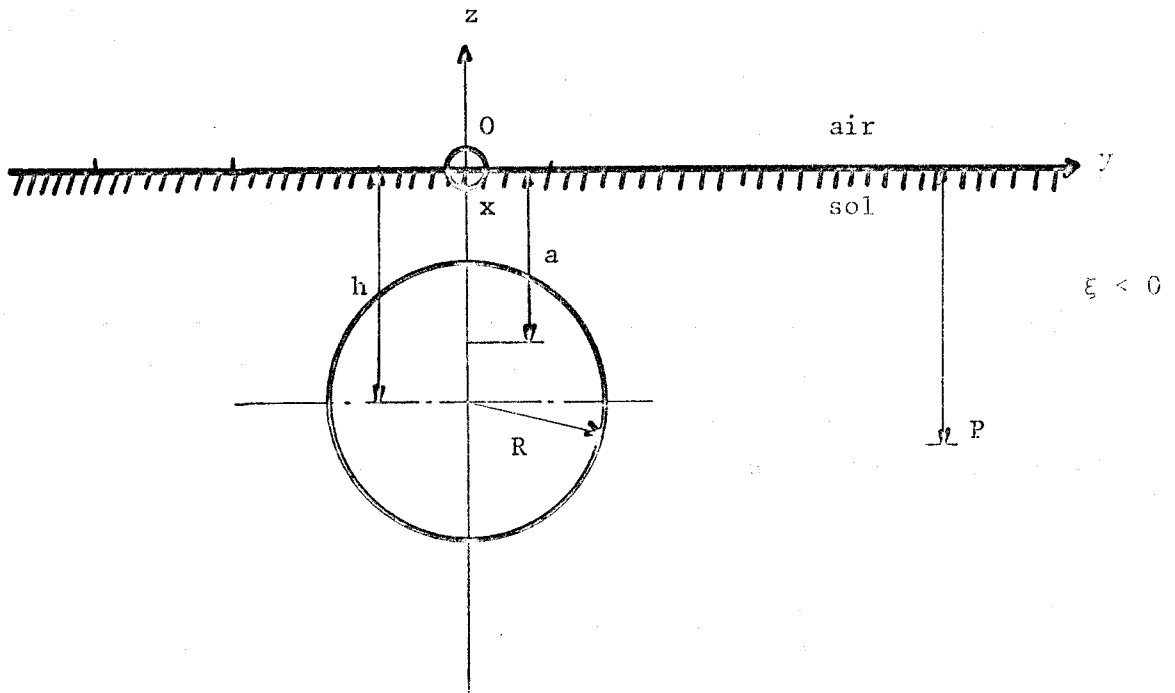


fig.9.a.

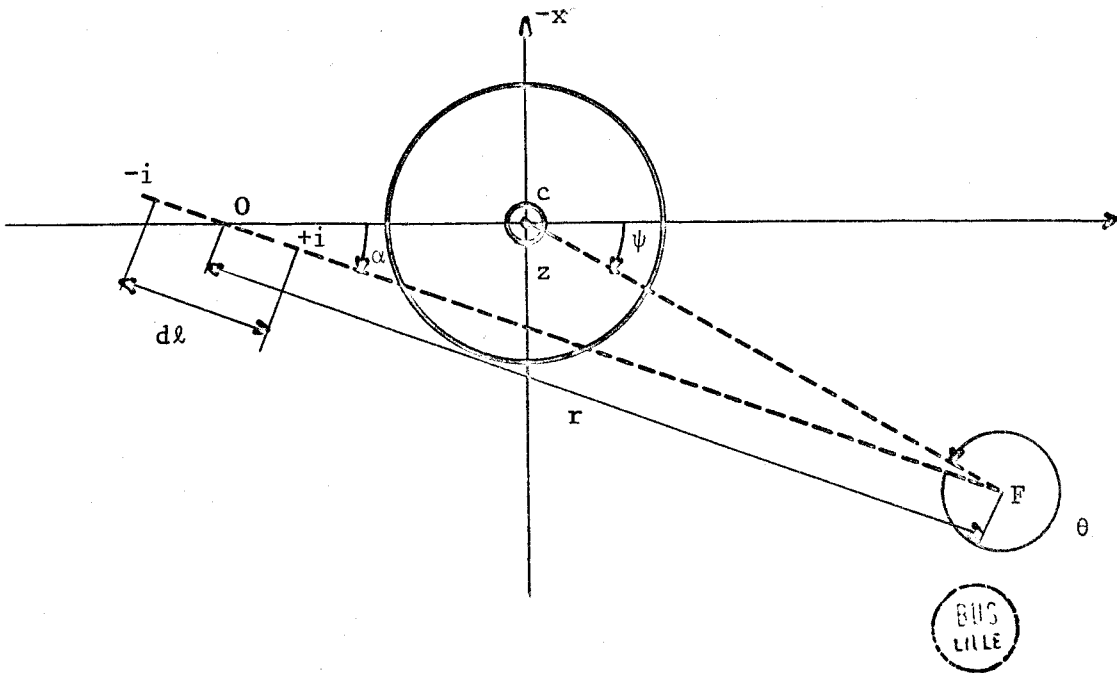


fig.9.b.

- r : est la distance du centre du dispositif émetteur à la verticale du point de réception P
- d : est la distance de la verticale du point de réception P au diamètre vertical de l'inclusion sphérique
- θ : est l'angle de direction \vec{FO}, \vec{FC}
- z : est la profondeur du point de réception P par rapport à la surface du sol.

Le tableau ci-dessous résume les relations qui existent entre les coordonnées toriques II et les grandeurs géométriques et angulaires précitées. Les expressions que nous donnons dans ce tableau, se rapportent à la formule du potentiel que nous rappelons ci-dessous :

$$U = \frac{I}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} + \frac{(\text{ch}\xi + \cos\phi)^{1/2}}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{(n+1/2)\xi} - e^{-(n+1/2)\xi}) \sum_{m=0}^n (C_{n_1}^m \cos m\psi + C_{n_2}^m \sin m\psi) P_n^m(\cos\phi) \right]$$

Système torique	Grandeurs géométriques
R_1	$[(r - \frac{d\xi}{2})^2 + z^2]^{1/2}$
R_2	$[(r + \frac{d\xi}{2})^2 + z^2]^{1/2}$
$\text{ch}\xi$	$\frac{a^2 + d^2 + z^2}{\{(a^2 + d^2)^2 + z^2 [z^2 + 2(d^2 - a^2)]\}^{1/2}}$
$\cos\phi$	$\frac{a^2 - z^2 - d^2}{\{(a^2 + d^2)^2 + z^2 [z^2 + 2(d^2 - a^2)]\}^{1/2}}$

Coordonnées toriques	Grandeurs géométriques
α	Arc tg $\frac{d \sin \theta}{d \cos \theta - r}$
ψ	Si $d \cos \theta - r > 0$ $\pi + \alpha - \theta$ Si $d \cos \theta - r < 0$ $2\pi + \alpha - \theta$
$ch \xi_1$	$\frac{h}{R}$
$sh \xi_1$	$-\frac{\sqrt{h^2 - R^2}}{R}$
ξ_1	$\text{Log}(h - \sqrt{h^2 - R^2}) - \text{Log } R$
OC	$(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}$
β_1	Arc tg $\frac{d \sin \theta d\ell}{2OC^2 - (r - d \cos \theta) d\ell}$
β_2	Arc tg $\frac{-d \sin \theta d\ell}{2OC^2 + (r - d \cos \theta) d\ell}$
ψ'_1, ψ'_2	Si $OC > d\ell$ $\psi'_1 = \pi + \beta_1$ $\psi'_2 = \pi + \beta_2$ Si $OC < d\ell$ $\psi'_1 = -\beta_1$ $\psi'_2 = \pi + \beta_2$
$\cos \phi'_1$	$\frac{a^2 \cos^2 \psi'_1 - OC^2 \left[1 - \left(\frac{r - d \cos \theta}{2OC^2} \right) d\ell \right]^2}{a^2 \cos^2 \psi'_1 + OC^2 \left[1 - \left(\frac{r - d \cos \theta}{2OC^2} \right) d\ell \right]^2}$
$\cos \phi'_2$	$\frac{a^2 \cos^2 \psi'_2 - OC^2 \left[1 + \left(\frac{r - d \cos \theta}{2OC^2} \right) d\ell \right]^2}{a^2 \cos^2 \psi'_2 + OC^2 \left[1 + \left(\frac{r - d \cos \theta}{2OC^2} \right) d\ell \right]^2}$

C H A P I T R E . I I I .

VERIFICATION EXPERIMENTALE SUR UN MODELE ANALOGIQUE A TROIS DIMENSIONS

L'étude théorique que nous venons d'exposer nous permet de simuler un log de télédiagraphie sur ordinateur.

Dans ce chapitre, nous comparons les résultats ainsi obtenus à des mesures effectuées sur un modèle analogique à 3 dimensions.

Nous rappelons d'abord le principe de l'analogie, et nous présentons le dispositif expérimental qui nous a permis de procéder à cette comparaison.

Nous décrivons enfin la méthode expérimentale employée, et nous donnons les résultats obtenus.

III.1. Etude du modèle analogique

Le modèle analogique a deux avantages⁽¹⁴⁾ :

D'une part, il permet de simuler des conditions de propagation plus simples que dans la réalité.

D'autre part, il permet de réduire dans un rapport K les dimensions de la structure géologique étudiée.

Cependant, la similitude de rapport K obtenue impose des conditions à respecter entre les constantes électromagnétiques des structures réelle et réduite. Ces conditions sont établies à partir des équations de Maxwell qui rendent compte de la propagation du champ électromagnétique.

Considérons les équations de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (71)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E} \quad (72)$$

σ est la conductivité

ϵ est la permittivité électrique

μ est la perméabilité magnétique

ω est la pulsation de la source du champ électromagnétique.

En général, cette pulsation est bien inférieure à la pulsation caractéristique du milieu :

$$\omega_c = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Enfin la perméabilité magnétique est celle du vide. Il en résulte que les équations (71) et (72) deviennent :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \sigma\vec{E} \quad \text{dans le milieu réel}$$

et

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_m = -j\omega_m\mu_0\vec{H}_m \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}_m = \sigma_m\vec{E}_m \quad \text{dans le modèle analogique}$$

D'où :

$$\frac{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}}{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_m} = \frac{\omega\vec{H}}{\omega_m\vec{H}_m} \quad \text{et} \quad \frac{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}}{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}_m} = \frac{\sigma\vec{E}}{\sigma_m\vec{E}_m}$$

$$(73)$$

$$(74)$$

L'opérateur $\overrightarrow{\text{rot}}$ fait intervenir les dérivées partielles de chaque vecteur \vec{E} ou \vec{H} par rapport à une coordonnée, celui-ci a donc la dimension de l'inverse d'une longueur.

Nous pouvons assimiler les relations (73) et (74) aux égalités suivantes :

$$\frac{L_m}{L} \frac{E}{E_m} = \frac{\omega}{\omega_m} \frac{H}{H_m} \quad \frac{L_m}{L} \frac{H}{H_m} = \frac{\omega}{\omega_m} \frac{E}{E_m}$$

Il existe une similitude parfaite entre les milieux réel et réduit lorsque les dimensions et les caractéristiques électromagnétiques vérifient la relation suivante :

$$\frac{\ell_m}{\ell} = \frac{\sigma}{\sigma_m} = \frac{\omega}{\omega_m} = K \quad (75)$$

σ est la conductivité du terrain

ℓ est l'unité de longueur du milieu réel.

ω est la pulsation du courant injecté dans le terrain

(leurs homologues sur la cuve rhéographique sont affectés de l'indice m).

III.2. Le dispositif expérimental ^(15,16)

La structure naturelle du modèle est cylindrique.

Le modèle analogique mis au point par l'équipe du Professeur GABILLARD est décrit figure.10.

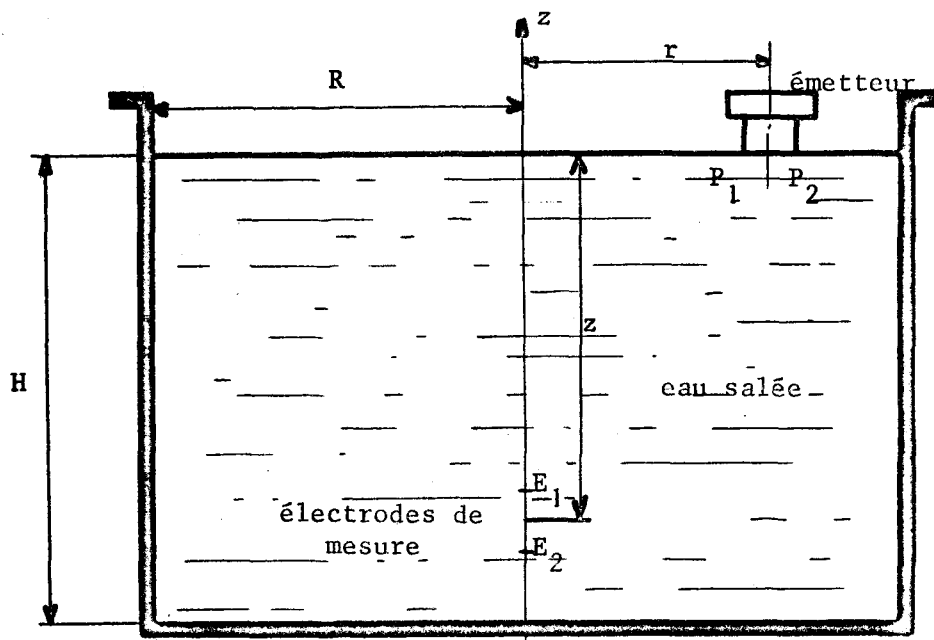


figure.10.

Le milieu conducteur est constitué d'une solution d'eau salée, dont la conductivité varie entre 0,1 et 3 Siemens par mètre, suivant la concentration en sel. Cette solution est contenue dans une cuve cylindrique réalisée en stratifié de laine de verre, de 2,40m de diamètre et de 1,70m de profondeur. Ces dimensions sont choisies de façon à pouvoir simuler des distances et des profondeurs allant jusqu'à 3000 mètres.

Le dispositif émetteur se compose d'un générateur de courant sinusoïdal de fréquence 200kHz. Ce générateur excite un dipôle électrique horizontal placé à la surface de l'électrolyte. Ce dipôle de longueur LE égale à 2cm peut se déplacer sur toute la surface du liquide.

Le dispositif de réception se compose d'un dipôle vertical de longueur Lr égale à 2cm plongeant au centre de la cuve. Cette sonde peut se déplacer suivant l'axe \vec{Oz} .

Les dipôles émetteur et récepteur se déplacent à l'aide de moteurs électriques ; des capteurs indiquent leur position à tout instant.

Le signal existant aux bornes des électrodes E_1 et E_2 est amplifié, filtré et détecté avant d'être exploité convenablement.

La figure.11. représente le diagramme général de l'ensemble de mesure.

III.3. Méthode expérimentale

III.3.1. Etalonnage du modèle

L'étalonnage du modèle analogique est effectué en relevant la tension V_z aux bornes des électrodes E_1 et E_2 pour une valeur donnée de la cote z de la sonde, ceci en fonction de la distance r et en l'absence d'hétérogénéité sphérique (figure.10.).

Pour vérifier que la structure ainsi réalisée correspond bien à celle du demi-milieu homogène et infini, nous calculons pour chaque valeur de r la conductivité correspondante.

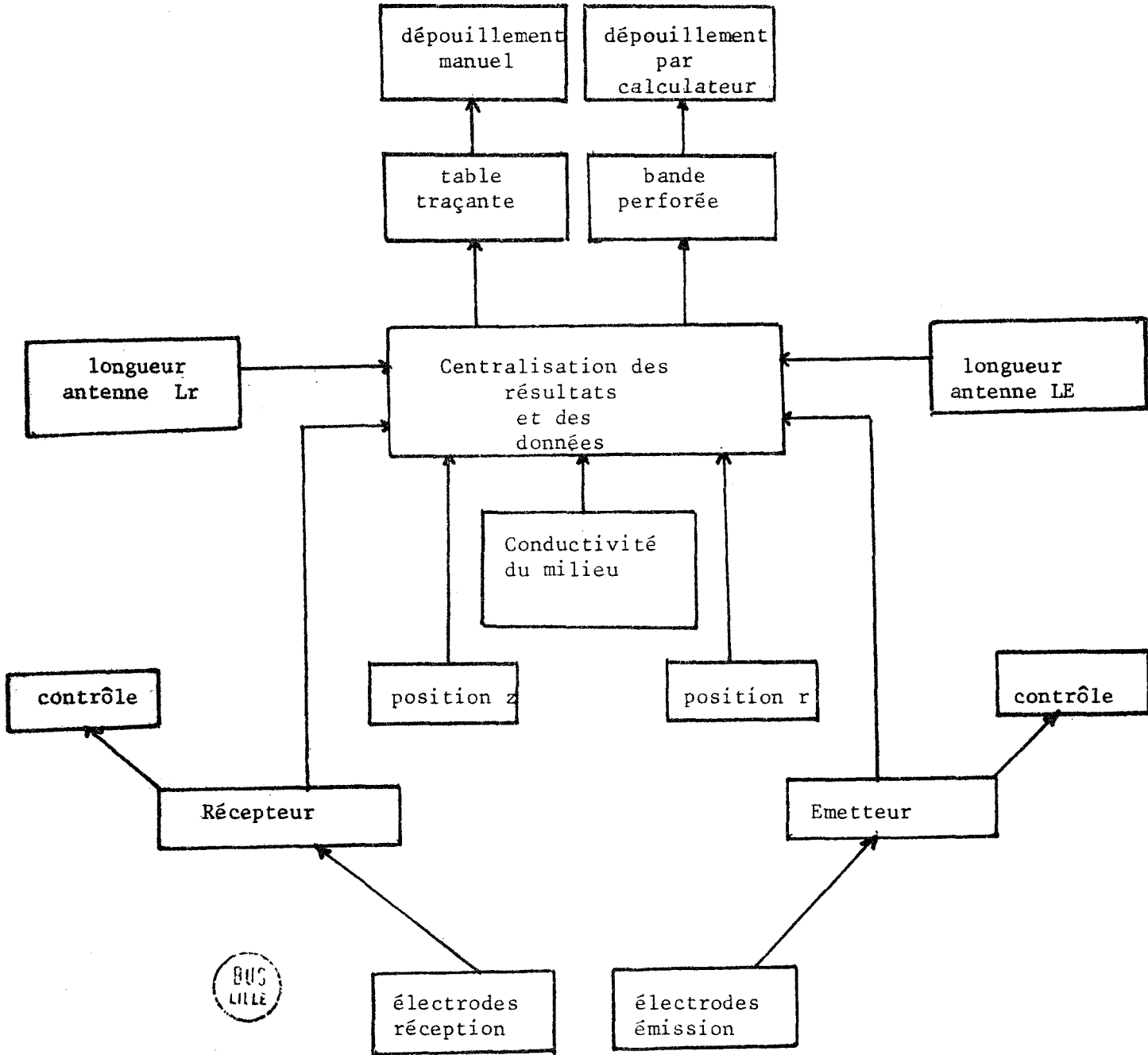


figure.11.

Calcul de la conductivité (17,18)

L'amplitude de la différence de potentiel mesurée entre les électrodes E_1 et E_2 est donnée par la relation suivante :

$$V(z) = \frac{I}{2\pi\sigma} \left[\frac{e^{-\gamma_1 R_{11}}}{R_{11}} - \frac{e^{-\gamma_1 R_{12}}}{R_{12}} + \frac{e^{-\gamma_1 R_{22}}}{R_{22}} - \frac{e^{-\gamma_1 R_{21}}}{R_{21}} \right] \quad (76)$$

I est le courant injecté dans l'électrolyte

σ est la conductivité de l'électrolyte

γ_1 est la constante de propagation dans l'eau salée :

$$\gamma_1 = \sqrt{j\omega\mu\sigma}$$

Les distances R_{ij} sont définies sur la figure suivante :

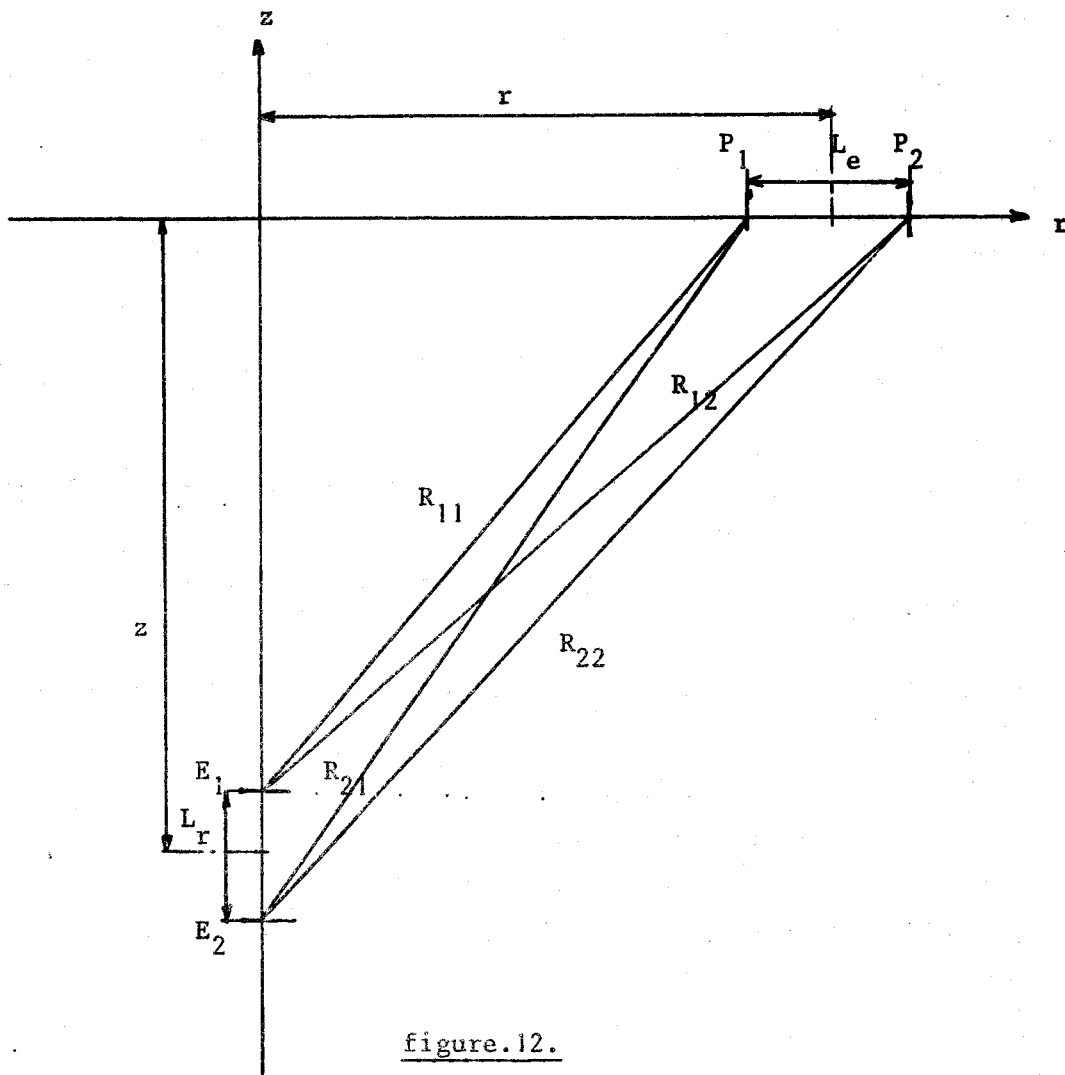


figure.12.

Compte tenu des dimensions des dipôles émetteur et récepteur ($LE = LR = 2\text{cm}$) nous pouvons faire l'approximation suivante :

$$R_{ij} \neq R_0$$

avec $R_0 = \sqrt{R_1^2 + z^2}$

Dans ces conditions, (76) devient :

$$V(z) = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{1}{\delta} e^{-\eta_0} \left[\frac{1}{\eta_{11}} - \frac{1}{\eta_{12}} - \frac{1}{\eta_{21}} + \frac{1}{\eta_{22}} \right] \quad (77)$$

δ est la profondeur de pénétration :

$$\delta = \frac{500}{\sqrt{\sigma f}}$$

σ en Siemens
 f en Hertz
 δ en mètres

f est la fréquence du signal injecté dans l'électrolyte

η_{ij} est la distance numérique

$$\eta_{ij} = \frac{R_{ij}}{\delta}$$

Il en résulte que σ est la solution de l'équation implicite :

$$\sigma = \frac{1}{2\pi |V(z)|} \frac{1}{\delta} e^{-\eta_0} \left[\frac{1}{\eta_{11}} - \frac{1}{\eta_{12}} - \frac{1}{\eta_{21}} + \frac{1}{\eta_{22}} \right] \quad (78)$$

La relation (78) nous permet d'obtenir pour chaque valeur du module de V_z une valeur correspondante de σ .

Si la structure envisagée est celle d'un demi-milieu homogène et infini, alors σ est une constante.

Les résultats sont groupés sur la planche.I. Les conditions de mesure sont les suivantes :

- . Fréquence du signal émis : 200kHz
- . Profondeur z de la sonde : 19cm (courbe.1.)
14cm (courbe.2.)
- . Longueur des antennes d'émission et de réception : 2cm.

4,5

4

3,5

20

30

40

50

60

r en c

COURBE 1

PLANCHE 1

P 9.m
4,5

4

3,5

20

30

40

50

60

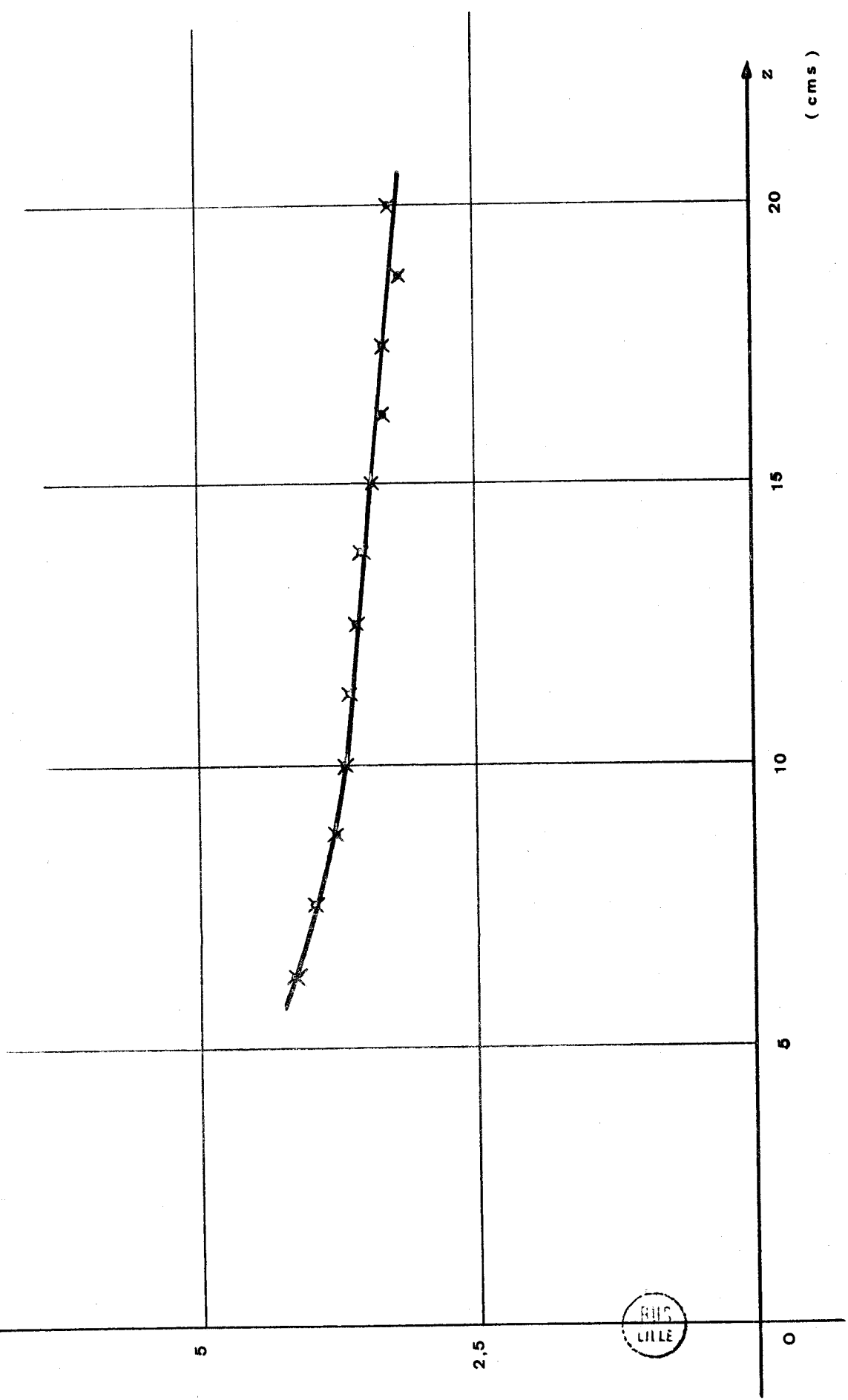
r en c m

COURBE 2

FILE

PLANCHE 2

ρ en $\Omega \cdot \text{cm}$



On remarque que le modèle correspond avec une assez bonne précision à un demi-milieu homogène infini.

Nous pouvons cependant faire trois remarques :

. La conductivité apparente de l'électrolyte est une fonction de la profondeur. A titre d'exemple, nous donnons une courbe de résistivité apparente obtenue en maintenant le dispositif émetteur fixe et en mesurant la différence de potentiel en fonction de la cote de la sonde réceptrice z.

Les conditions de mesure sont les suivantes :

- . Fréquence du signal émis : 200kHz
- . Distance de l'émetteur à la verticale de la sonde : 10cm
- . Longueur des antennes d'émission et de réception : 2cm.

Cette variation de la conductivité est provoquée par la diminution de la longueur du câble qui relie la sonde immergée au récepteur de surface.

. Aux extrémités des courbes présentées sur la planche.I. on constate une variation légère de la conductivité :

- Lorsque l'émetteur se trouve à faible distance de l'axe de symétrie du modèle, le champ électromagnétique est perturbé par le dispositif récepteur qui ne se comporte plus comme un dipôle dont les dimensions sont négligeables.

- Lorsque l'émetteur est placé à grande distance de l'axe de symétrie du modèle, l'importance de l'onde de surface qui se propage dans l'air à 200kHz devient plus importante.

. Enfin si l'émetteur se trouve à proximité des parois de la cuve, celles-ci perturbent le champ électromagnétique, et les effets de bords modifient la résistivité apparente du modèle.⁽¹⁹⁾

Il en résulte que le modèle peut être considéré comme un demi-milieu si la distance r reste comprise entre 10cm et 55cm.

III.3.2. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

III.3.2.1. Choix du rapport de similitude K

Dans le choix du rapport de similitude, il faut tenir compte de deux contraintes :

D'une part la fréquence du courant injecté à l'émission dans le milieu en vraie grandeur doit être telle que l'approximation du courant continu reste valable. Dans le modèle analogique, la fréquence du courant émis est fixe, elle est égale à 200kHz.

D'autre part, il faut pouvoir employer toute la partie utile du modèle pour éviter la zone perturbée au niveau de la sonde de réception et des parois de la cuve tout en conservant une précision suffisante sur la mesure des paramètres géométriques. En effet, dans le modèle en vraie grandeur, les erreurs sur la mesure de ceux-ci sont multipliées par le rapport de similitude K.

Pour tenir compte de toutes ces contraintes le rapport de similitude K choisi est égal à 1000.

Il en résulte que :

$$f_{\text{modèle}} = 200\text{kHz}$$

$$f_{\text{réelle}} = 200\text{Hz}$$

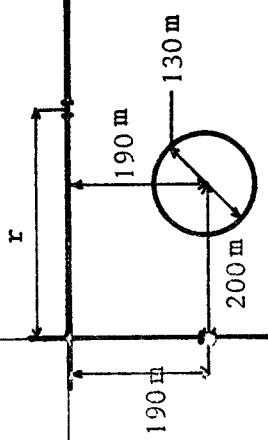
$$10\text{cm}_{\text{modèle}} = 100\text{m}$$

III.3.2.2. Présentation des résultats

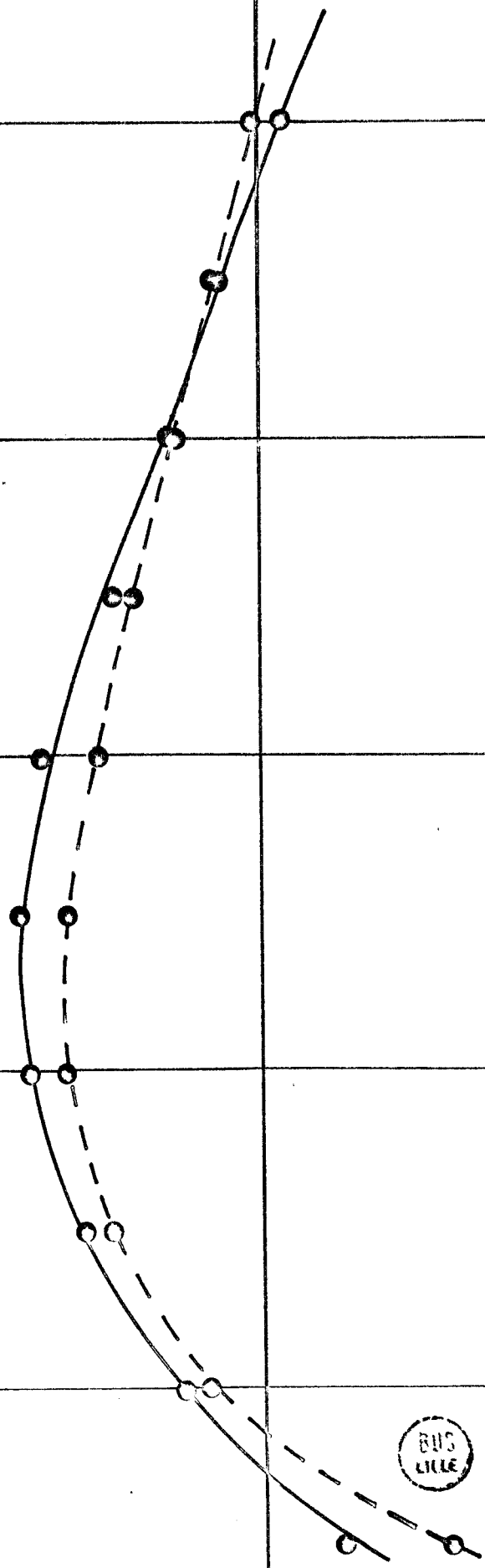
Nous présentons à titre d'exemple, les résultats obtenus pour deux groupes de paramètres géométriques sur les planches III et IV. Ceux-ci sont rappelés sur la figure.13. ; leur valeur est donnée en vraie grandeur.

	<u>Planche III</u>	<u>Planche IV</u>
d : distance du centre de la sphère à l'axe de la sonde	200m	200m
z : profondeur du dispositif récepteur	190m	140m
h : profondeur du centre de la sphère	190m	140m
R : rayon de la sphère	65m	65m

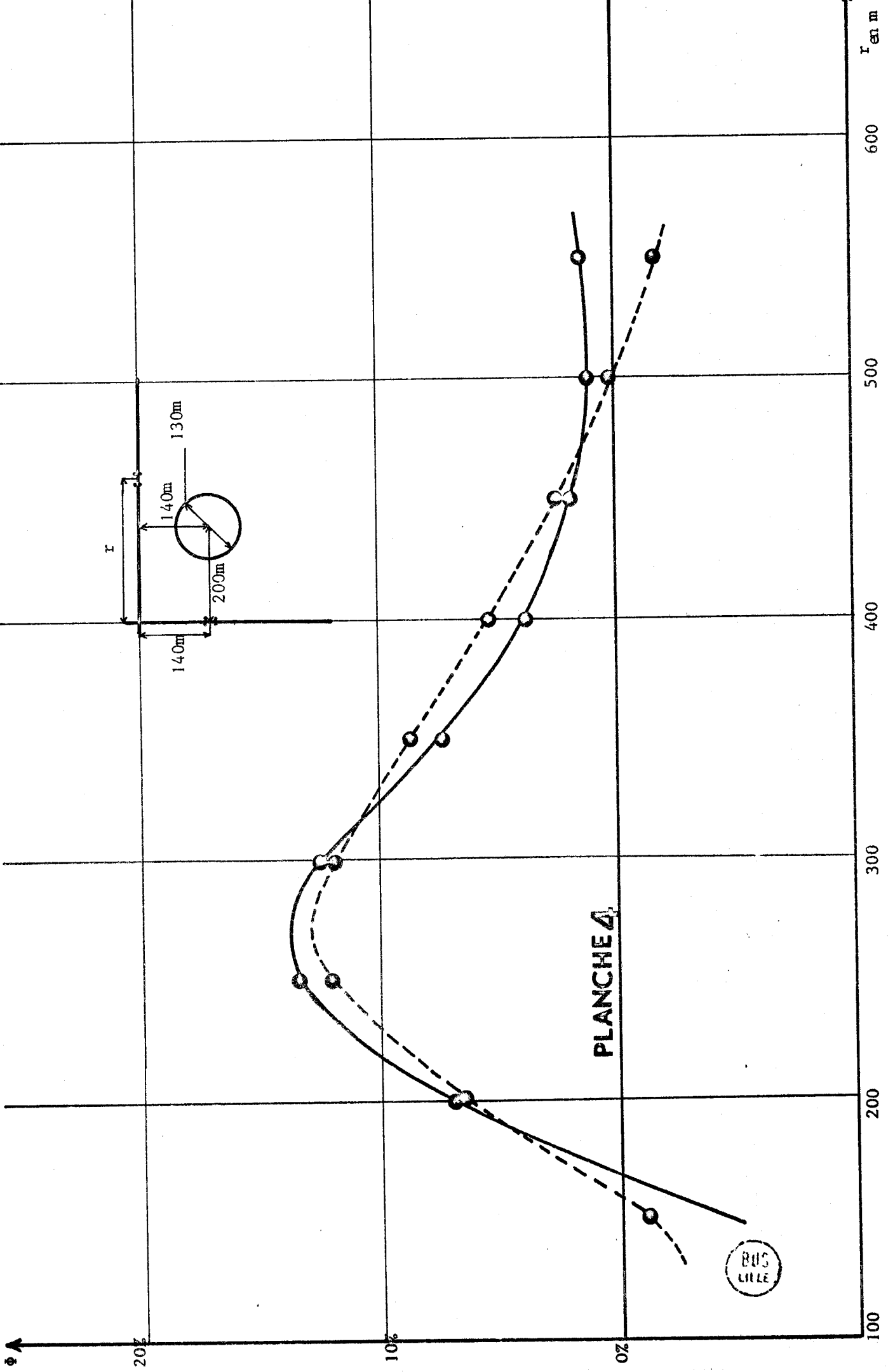
PLANCHE 3



100 200 300 400 500 600 r en



BUS
LILLE



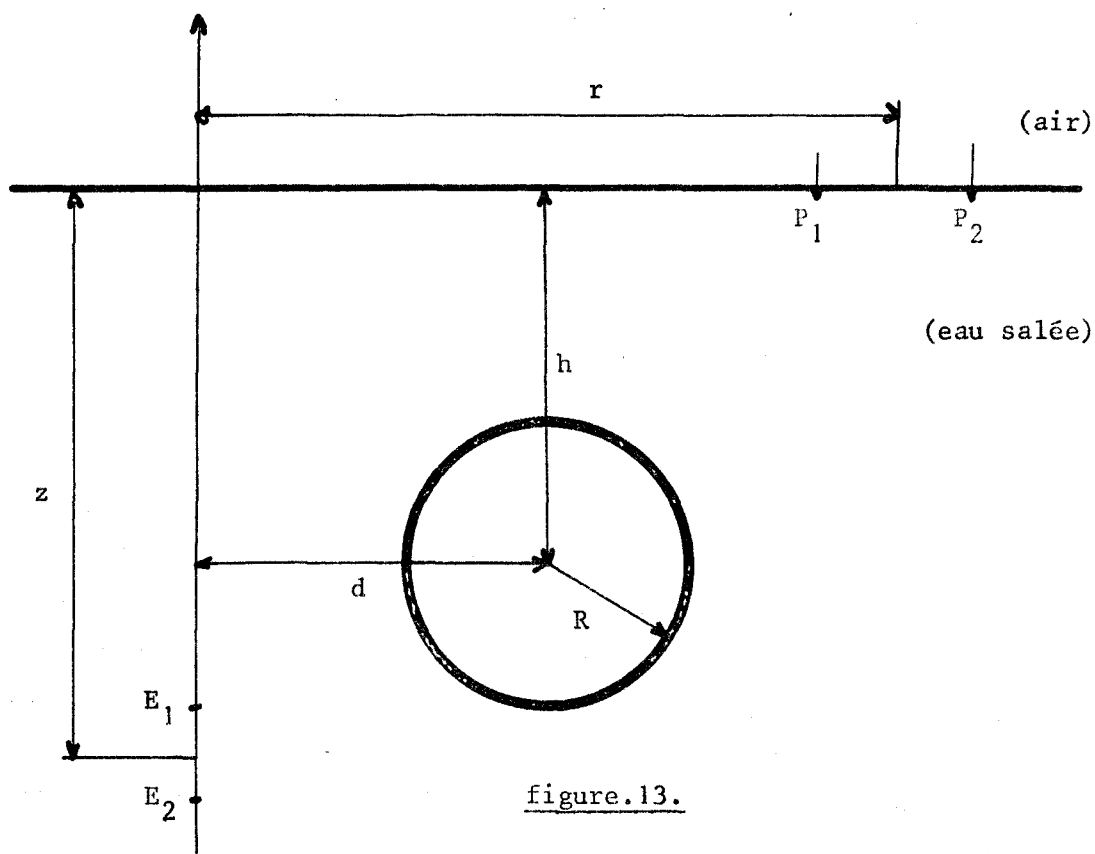


figure.13.

Les courbes en traits pleins représentent la variation de la résistivité équivalente relevée sur modèle analogique.

Les courbes en traits pointillés sont les résultats théoriques obtenus sur ordinateur en programmant les formules (65), (66), (67) et (70).

On remarque quelques divergences entre les courbes théoriques et pratiques :

. La différence des amplitudes est de l'ordre de grandeur de l'erreur absolue commise sur les mesures de la différence de potentiel existant aux bornes des électrodes E_1 et E_2 .

. Les abscisses des extrêmes obtenus par les deux méthodes sont pratiquement identiques.

. Sur ces relevés nous constatons encore l'effet de l'onde de surface lorsque la distance de l'émetteur par rapport à la verticale du dispositif récepteur devient supérieure à 50cm sur le modèle analogique.

Il en résulte que dans la suite de notre exposé, nous allons utiliser pour mettre au point notre méthode de prospection, des télélogs, obtenus à partir de formules théoriques. Ce qui nous permet de nous affranchir des problèmes technologiques qui apparaissent lors d'une simulation sur la cuve rhéographique à trois dimensions.

CHAPITRE . I V .

METHODOLOGIE DE PROSPECTION D'UN GISEMENT SPHERIQUE

Après avoir posé le problème de la localisation d'une inclusion sphérique, nous introduisons une expression approchée de l'indice d'anomalie Φ fondée sur de larges approximations. En particulier, nous montrons que l'influence d'une inclusion sphérique de conductivité σ_2 placée dans un milieu conducteur homogène de conductivité σ_1 où règne un champ électrique uniforme est équivalente à celle d'un dipôle électrique. Nous calculons la valeur approchée de l'indice d'anomalie Φ dans un demi-milieu conducteur homogène en remplaçant la sphère par son dipôle équivalent.

Cette expression simplifiée de l'indice d'anomalie va nous permettre d'une part de justifier notre méthodologie de prospection et d'autre part d'obtenir aisément les informations désirées telles que les grandeurs géométriques d , h et R et électrique σ_2 définissant le gisement.

IV.1. Aspect théorique de la localisation de l'inclusion sphérique

Le principe de la méthode de localisation de l'hétérogénéité sphérique consiste à déterminer les grandeurs géométriques d , h et R et électrique σ_2 définissant le gisement, à partir du relevé sur le terrain de l'indice d'anomalie en fonction de la profondeur z , et du "paramètre de prospection" r .

Pour résoudre ce problème, trois procédés sont également possibles :

- D'une part, nous pouvons, à partir des relations (65) et (66) issues du développement théorique, établir un système d'équations implicites, liant l'indice d'anomalie Φ , la cote du point de réception z et le "paramètre de prospection" r aux grandeurs que nous cherchons à connaître.
- D'autre part il est possible d'établir, à partir des résultats du chapitre .II., un réseau d'abaques universels liant les grandeurs géométriques et électrique inconnues à des valeurs particulières de ϕ , z et r .

- Enfin, nous pouvons nous contenter d'établir des relations très simples entre les inconnues et les résultats de mesure, moyennant quelques approximations.

A priori, nous retenons ces deux dernières méthodes parce qu'elles ont l'avantage d'être exploitables directement sur le terrain tandis que le premier procédé est le résultat d'un développement mathématique long qui nécessite l'emploi d'un ordinateur.

Cependant, compte tenu du nombre de paramètres et inconnues qui interviennent dans le calcul du potentiel, la multiplicité de leurs combinaisons rend complexe la réalisation du réseau d'abaques cité plus haut. C'est pour cette raison que nous avons choisi la troisième solution. Cette méthodologie est d'autant plus intéressante que la précision sur les grandeurs à déterminer peut être relativement faible. En effet, en prospection minière, l'important est de déterminer l'endroit d'où on peut, à coup sûr, forer en rencontrant le gisement sans pour cela connaître son centre avec précision.

IV.2. Hypothèses simplificatrices

Le dispositif est repéré dans un système de coordonnées cylindriques. Un dipôle électrique horizontal \vec{P} (D.E.H.) est situé à l'origine du repère de coordonnées. Le relevé des composantes du champ électromagnétique s'effectue au point M de coordonnées (r, Z, ϕ) .

La sphère est située au point S de coordonnées $(r-d, h, \phi')$. d est la distance de la verticale du point de réception au centre de la sphère.

Un système de coordonnées sphériques (ρ, θ, ψ) est lié à la sphère, l'origine de celui-ci se trouve au point S (figure.14.)

Nous supposons dans cette étude, que le dipôle primaire P et la verticale de coordonnée r , à laquelle appartient le point de réception M, se trouvent dans un plan diamétral pour la sphère.

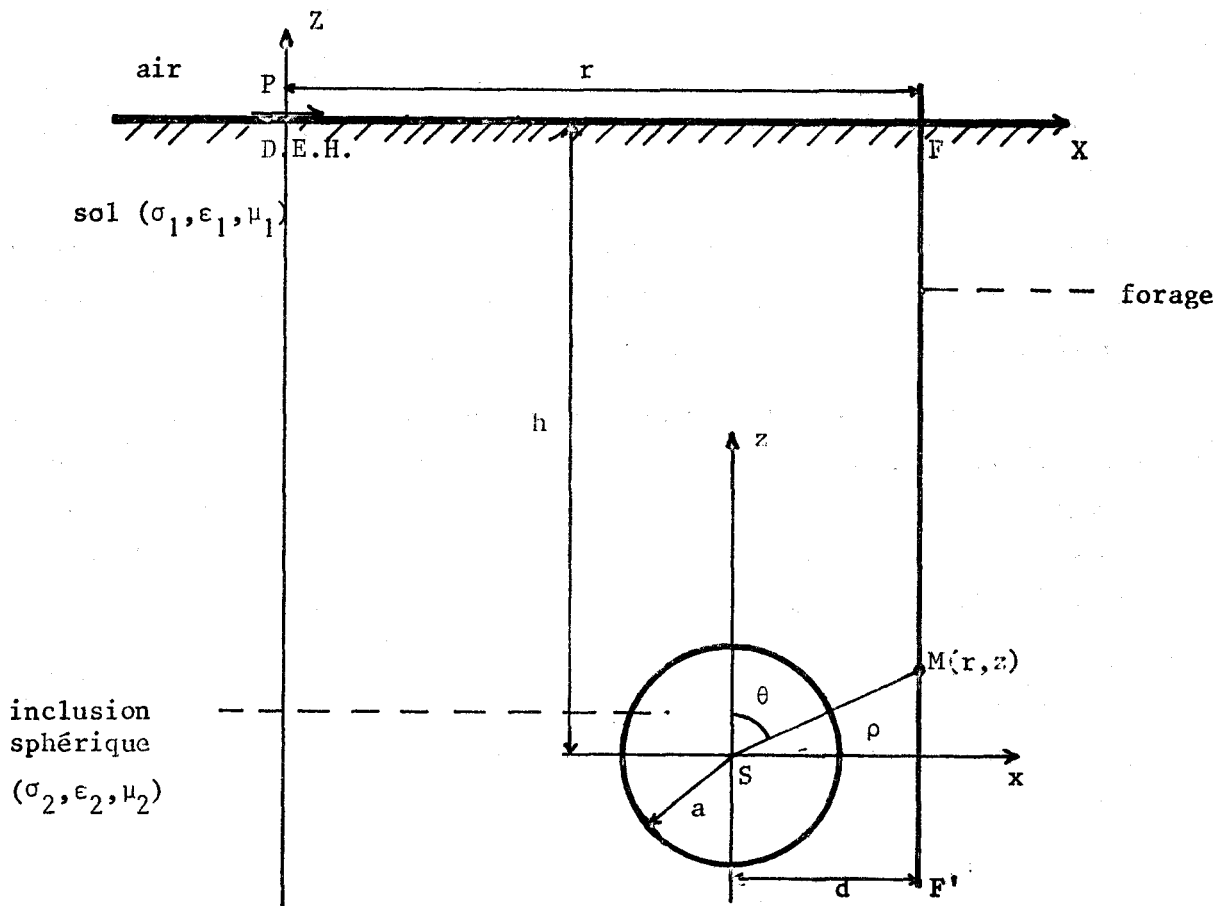


figure.14.

Si les dimensions de la sphère sont petites par rapport aux distances r et h on peut admettre que le champ électrique créé par le dipôle émetteur \vec{P} au voisinage de la sphère est uniforme. Nous allons démontrer que, dans ces conditions, la contribution de l'inclusion sphérique sur le champ électromagnétique total est équivalente à celle d'un dipôle électrique orienté selon la direction du champ électrique créé par le dipôle primaire P au point S en l'absence de la sphère.

IV.3. Influence d'une anomalie sphérique sur un champ électrique uniforme (20,21)

Soit une sphère de caractéristiques électriques σ_2 , μ_2 et ϵ_2 plongée dans un milieu infini dont les constantes électromagnétiques sont σ_1, μ_1 etc₁. figure.15.

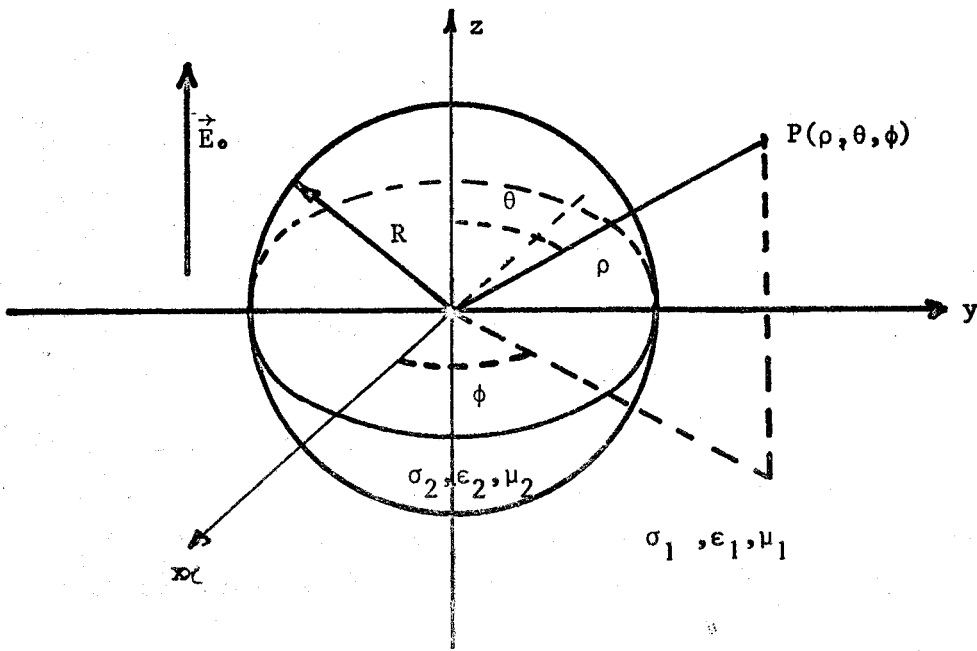


figure.15.

Un champ électrique uniforme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$$

est appliqué selon la direction \vec{Oz} .

Le calcul du champ électrique s'effectue en partant des composantes du vecteur de Hertz $\vec{\Pi}$.

Le potentiel de Hertz $\vec{\Pi}$ est la somme d'un potentiel primaire $\vec{\Pi}_0$ qui tient compte de la contribution du champ uniforme \vec{E}_0 et d'un potentiel secondaire $\vec{\Pi}_s$ qui traduit les réflexions et les réfractions des ondes électromagnétiques sur la surface de l'anomalie sphérique.

D'une manière générale, le potentiel vecteur $\vec{\Pi}$ et le champ électrique \vec{E} sont liés par la relation suivante :

$$\vec{E} = \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{\Pi} \tag{79}$$

Dans le cas particulier où le milieu ne contient pas de courbes du champ électromagnétique, le potentiel de Hertz $\vec{\Pi}$ est solution de l'équation d'onde :

$$(\Delta - \gamma^2) \vec{\Pi} = 0 \tag{80}$$

où γ est la constante de propagation :

$$\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \tag{81}$$

Il résulte de (79) et (80) que :

$$\vec{E}_0 = -\gamma_1 \vec{\Pi}_0 \quad (82)$$

Le potentiel secondaire $\vec{\Pi}_s$ est la solution de l'équation (80) qui satisfait, sur la surface de la sphère, aux conditions de continuité des composantes tangentielles du champ électrique.

Le problème physique considéré possède une symétrie axiale selon \vec{Oz} . Le vecteur champ magnétique est situé dans le plan xOy perpendiculaire à la direction du champ électrique uniforme \vec{E}_0 . Il en résulte que le potentiel $\vec{\Pi}$ n'a qu'une composante Π_{zs} selon l'axe \vec{Oz} qui est solution de l'équation d'onde scalaire :

$$(\Delta - \gamma^2) \Pi_{zs} = 0 \quad (83)$$

La solution générale de cette équation se met sous la forme suivante :

$$\Pi_{zs} = (j\gamma\rho)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n J_{n+1/2}(j\gamma\rho) + B_n Y_{n+1/2}(j\gamma\rho)) P_n(\cos\theta) \quad (84)$$

$J_{n+1/2}(j\gamma\rho)$ et $Y_{n+1/2}(j\gamma\rho)$ sont les fonctions de Bessel et de Neumann.

Compte tenu de la symétrie du problème, l'expression de Π_{zs} doit être finie dans les deux milieux de caractéristiques électromagnétiques différentes.

Il en résulte que dans le milieu (1) le potentiel total Π_{z1} est la somme du potentiel primaire Π_0 et du potentiel secondaire Π_{zs} . Ce potentiel Π_z est donné par la relation suivante :

$$\Pi_{z1} = -\frac{E_0}{\gamma_1} + A_0 \frac{e^{-\gamma_1 \rho}}{\rho} \quad (85)$$

Dans le milieu (2), à l'intérieur de la sphère, l'expression du potentiel Π_{z2} se met sous la forme :

$$\Pi_{z2} = B_0 \frac{\text{sh} \gamma_1 \rho}{\rho} \quad (86)$$

Les conditions de continuité des composantes tangentielles du champ électrique nous permettent de déterminer la constante inconnue A_0 .

Nous obtenons :

$$A_0 = \frac{E_0 R^3 [2(\operatorname{sh}\alpha - \alpha \operatorname{cha}) - (\alpha \operatorname{cha} - \operatorname{sh}\alpha - \alpha^2 \operatorname{sha})]}{2(\operatorname{sh}\alpha - \alpha \operatorname{cha}) + 2(\alpha \operatorname{cha} - \operatorname{sh}\alpha - \alpha^2 \operatorname{sha})} \quad (87)$$

R est le rayon de la sphère

et $\alpha = \gamma_1 R$.

Si la sphère est isolante, on a : $\alpha = j \frac{2\pi R}{\lambda}$, et compte tenu des dimensions de la sphère (qui est supposée petite), A_0 se met sous la forme suivante :

$$A_0 = - \frac{E_0 R^3}{2} \quad (88)$$

λ est la longueur d'onde du courant injecté dans le sol.

Il résulte des expressions (85), (87) et (88) qu'une petite sphère placée dans un champ électrique uniforme \vec{E}_0 est équivalente à un dipôle électrique dont le moment est proportionnel à \vec{E}_0 .

IV.4. Calcul de l'indice d'anomalie ϕ dans les conditions de l'approximation du champ électrique uniforme (22)

Pour calculer la valeur de l'indice d'anomalie, il faut calculer le potentiel au point d'observation M. Le champ électrique dont dérive le potentiel est la somme du champ électrique E_p créé par le dipôle émetteur \vec{P} et du champ électrique secondaire \vec{E}_s créé par le dipôle équivalent à la petite sphère \vec{A}_0 . (figure.16.).

Pour faciliter le calcul, nous décomposons le dipôle \vec{A}_0 en deux dipôles, l'un vertical \vec{P}_z , l'autre horizontal \vec{P}_x .

IV.4.1. Calcul du champ électrique \vec{e}_z selon l'axe FF' dû aux dipôles \vec{P}_x et \vec{P}_z

Le champ électrique se déduit du potentiel de Hertz au moyen de la relation :

$$\vec{e} = \vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}} \vec{\Pi}_z \quad (89)$$

Nous calculons la valeur du champ \vec{e}_z pour chacune des composantes \vec{P}_x et \vec{P}_z du dipôle A_0 .

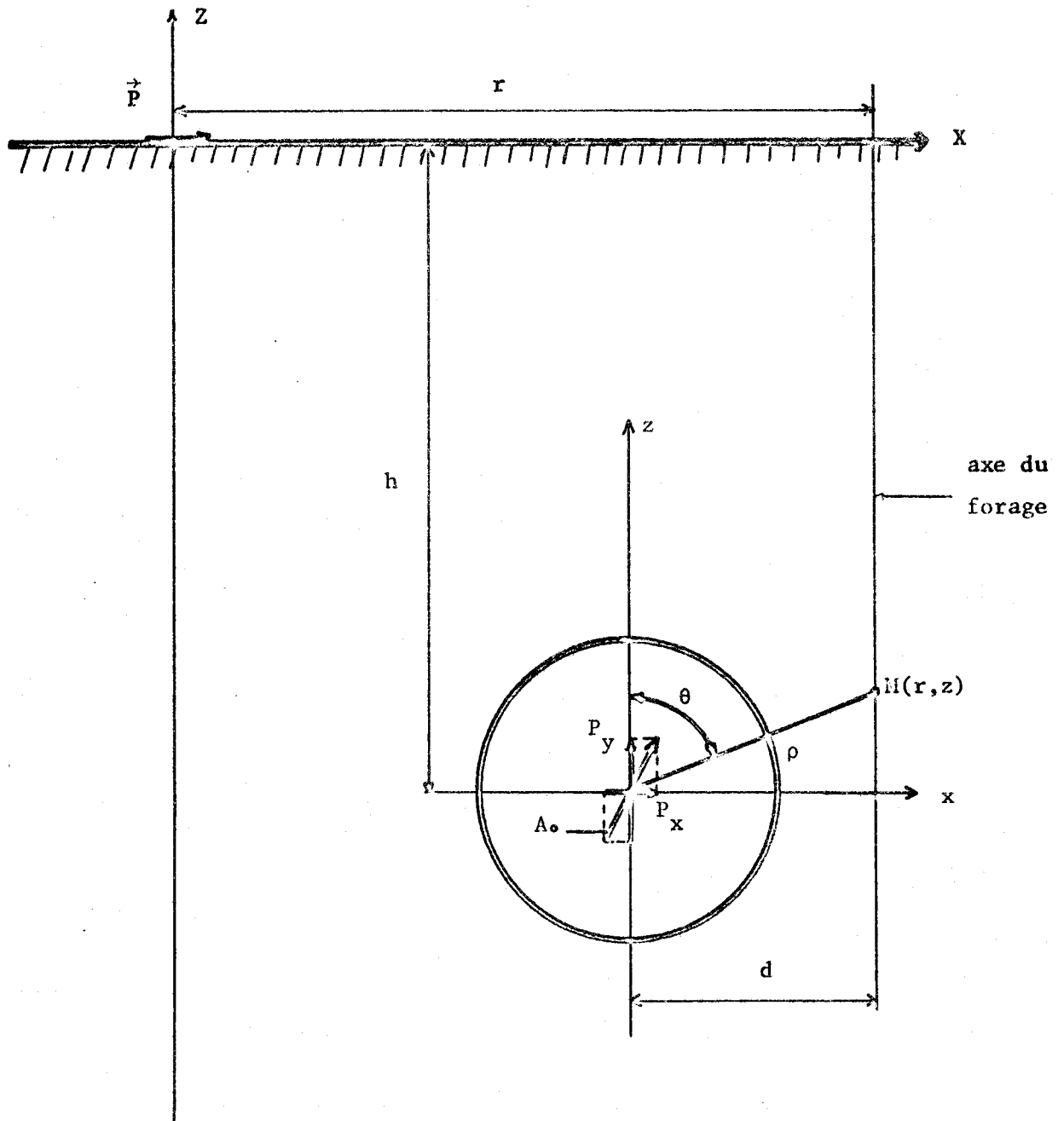


figure.16.

IV.4.1.1. Contribution du dipôle vertical \vec{p}_z

Soient e_θ et e_ρ les composantes du champ électrique \vec{e} dans le repère de coordonnées sphériques lié à la petite sphère S et dont l'origine correspond au centre de l'hétérogénéité sphérique.

Dans ces conditions :

$$e_z = e_\rho \cos\theta - e_\theta \sin\theta$$

En appliquant la relation (89) :

$$e_z = E_{z_0} K \frac{e^{-\gamma_1 \rho}}{\rho^3} \left[2\cos^2\theta(1+\gamma_1\rho) - \sin^2\theta(1+\gamma_1\rho+\gamma_1^2\rho^2) \right] \quad (90)$$

γ_1 est la constante de propagation dans le sol

K est un facteur de proportionnalité qui, dans l'expression de \vec{P}_x , ne dépend que des caractéristiques électriques et géométriques de l'anomalie. L'expression de K est la suivante :

$$K = \frac{R^3}{2} \frac{[2(\text{sh}\alpha - \alpha\text{ch}\alpha) - (\alpha\text{ch}\alpha - \text{sh}\alpha - \frac{2}{\alpha^2}\text{sh}\alpha)]}{(\text{sh}\alpha - \alpha\text{ch}\alpha) + (\alpha\text{ch}\alpha - \text{sh}\alpha - \alpha^2\text{sh}\alpha)}$$

avec $\alpha = \gamma_1 R$.

Compte tenu des dimensions de la sphère, son influence est extrêmement locale et ne se fait sentir qu'au voisinage de celle-ci ; il en résulte que :

$$|\gamma_1 \rho| \ll 1$$

d'où :

$$e_z = K E_{z_0} \frac{1}{\rho^3} [2 - 3\sin^2\theta]$$

en remplaçant $\sin\theta$ par sa valeur en fonction de d et ρ , nous obtenons le résultat suivant, à condition de prendre d en valeur algébrique selon Ox :

$$e_z = K E_{z_s} \frac{1}{\rho^3} \left(2 - \frac{3d^2}{\rho^2} \right) \quad (91)$$

IV.4.1.2. Contribution du dipôle horizontal \vec{p}_x

On démontre de la même façon que le champ électrique e'_z dû à la contribution du dipôle électrique horizontal équivalent est donné par la relation suivante :

$$e'_z = 3K E_z \frac{|d|}{\rho^5} (Z+h) \quad (92)$$

h profondeur du centre de la sphère par rapport à la surface du sol est positif

Z cote du point de réception est négatif

d est positif si l'inclusion est située entre l'émetteur et le forage

d est négatif si l'inclusion est à l'extérieur de l'ensemble forage-émetteur.

IV.4.2. Expression de l'indice d'anomalie ϕ

Nous rappelons ci-dessous la définition de l'indice d'anomalie :

$$\phi = \frac{V_z - V_{z_0}}{V_{z_0}}$$

V_z est la tension mesurée aux bornes de la sonde réceptrice dans le demi-milieu homogène contenant l'inclusion sphérique

V_{z_0} est la tension qui existerait dans les mêmes conditions, si le demi-milieu conducteur considéré ne contenait pas d'anomalie sphérique de conductivité σ_2

En considérant, d'une part que les électrodes de la sonde réceptrice sont suffisamment proches l'une de l'autre, et d'autre part que le gradient du champ électrique n'est pas trop élevé, nous pouvons admettre que la valeur de la tension recueillie par la sonde de mesure est égale au produit de la composante E_z du champ par l'espacement L des électrodes de la sonde. En faisant l'hypothèse que l'influence de l'inclusion sphérique est localisée en son voisinage, et que nous nous intéressons aux valeurs de ϕ dans cette zone, l'expression des tensions V_z et V_{z_0} sont les suivantes :

$$V_z = V_{z_0} + v_z$$

v_z est la contribution des dipôles équivalents à la sphère, et vaut :

$$v_z = K L E_{zS} \frac{1}{\rho^5} \left[(2\rho^2 - 3d^2) + \frac{E_{xS}}{E_{zS}} |d| (Z+h) \right] \quad (93)$$

V_{z_0} est la contribution du dipôle primaire :

$$V_{z_0} = L E_{zS}$$

E_{zs} et E_{xs} sont respectivement les composantes verticale et horizontale du champ qui seraient créées par le dipôle primaire P au point S en l'absence d'anomalie.

Il en résulte que ϕ est donné par la formule suivante :

$$\phi = \frac{K}{\rho^5} \left[(2\rho^2 - 3d^2) + 3 \frac{E_{xs}}{E_{zs}} |d| (Z+h) \right] \quad (94)$$

ρ est la distance du centre de la sphère au point de réception

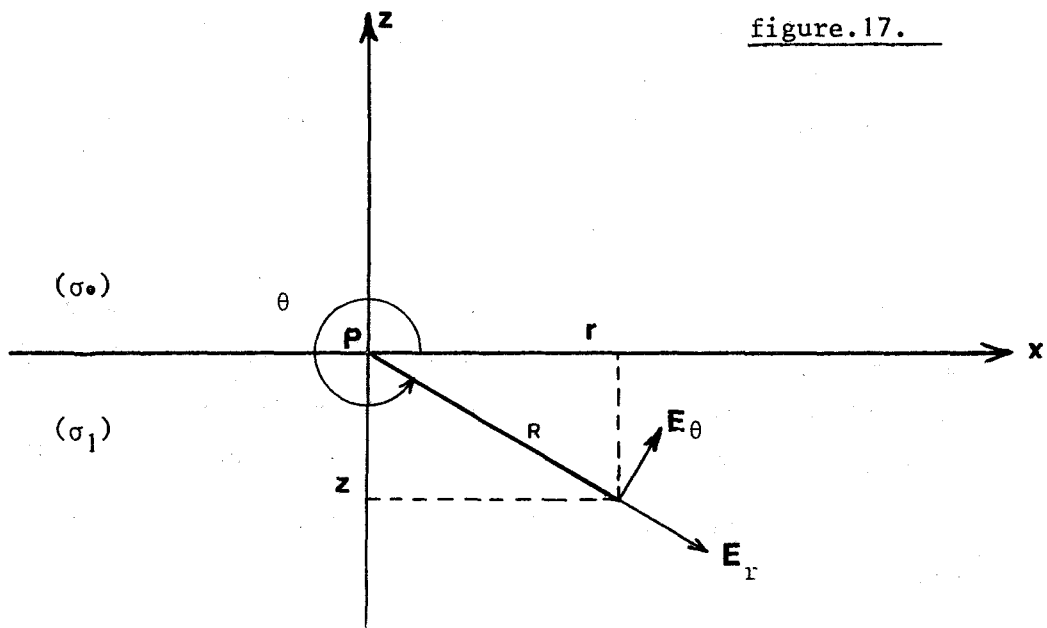
d est la distance du centre de la sphère à l'axe FF'

h est la profondeur du centre de la sphère

Z est la cote du point de réception.

IV.4.3. Calcul du rapport E_x/E_z

Considérons la figure suivante :



Le potentiel créé par le dipôle électrique P (DEII) est donné par l'expression suivante :

$$V = 2P \frac{\cos \theta}{R^2}$$

Le champ électrique \vec{E} dérive du potentiel scalaire V :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V$$

Soit encore en remplaçant $\sin\theta$ et $\cos\theta$ par leur valeur en fonction de z , r et R :

$$E_r = 4P \frac{r^2}{R^5} - 2P \frac{z^2}{R^5}$$

et

$$E_z = 4P \frac{rZ}{R^5} + 2P \frac{rZ}{R^5}$$

D'où :

$$\frac{E_r}{E_z} = \frac{1}{3} \frac{2r^2 - z^2}{Zr} \quad (95)$$

D'après (94) et (95) l'indice d'anomalie ϕ s'écrit :

$$\phi = \frac{K}{\rho^5} \left[(2\rho^2 - 3d^2) - \frac{2(r-d)^2 - h^2}{h(r-d)} \cdot |d| (Z+h) \right] \quad (96)$$

La formule (96) va nous permettre d'interpréter les logs de télédiagraphie et nous permettre à la fois de comprendre physiquement l'influence de l'hétérogénéité sphérique sur les filets de courant et de justifier notre méthodologie de prospection.

Cette méthodologie est présentée dans le chapitre suivant.

IV.5. Position du problème

Le principe de la méthode consiste à repérer une sphère par rapport à un système de coordonnées cylindriques à partir de la mesure de la tension existant aux bornes d'une sonde réceptrice mobile dans un forage. Cette différence de potentiel dépend de trois coordonnées du système.

Nous définissons sur la figure.18. le système de coordonnées considéré.

- . L'axe Oz est l'axe du forage
- . l'angle ϕ est l'azimuth
- . la distance r est la distance séparant le centre du dispositif émetteur de l'axe Oz. Cette distance est appelée "paramètre de prospection".

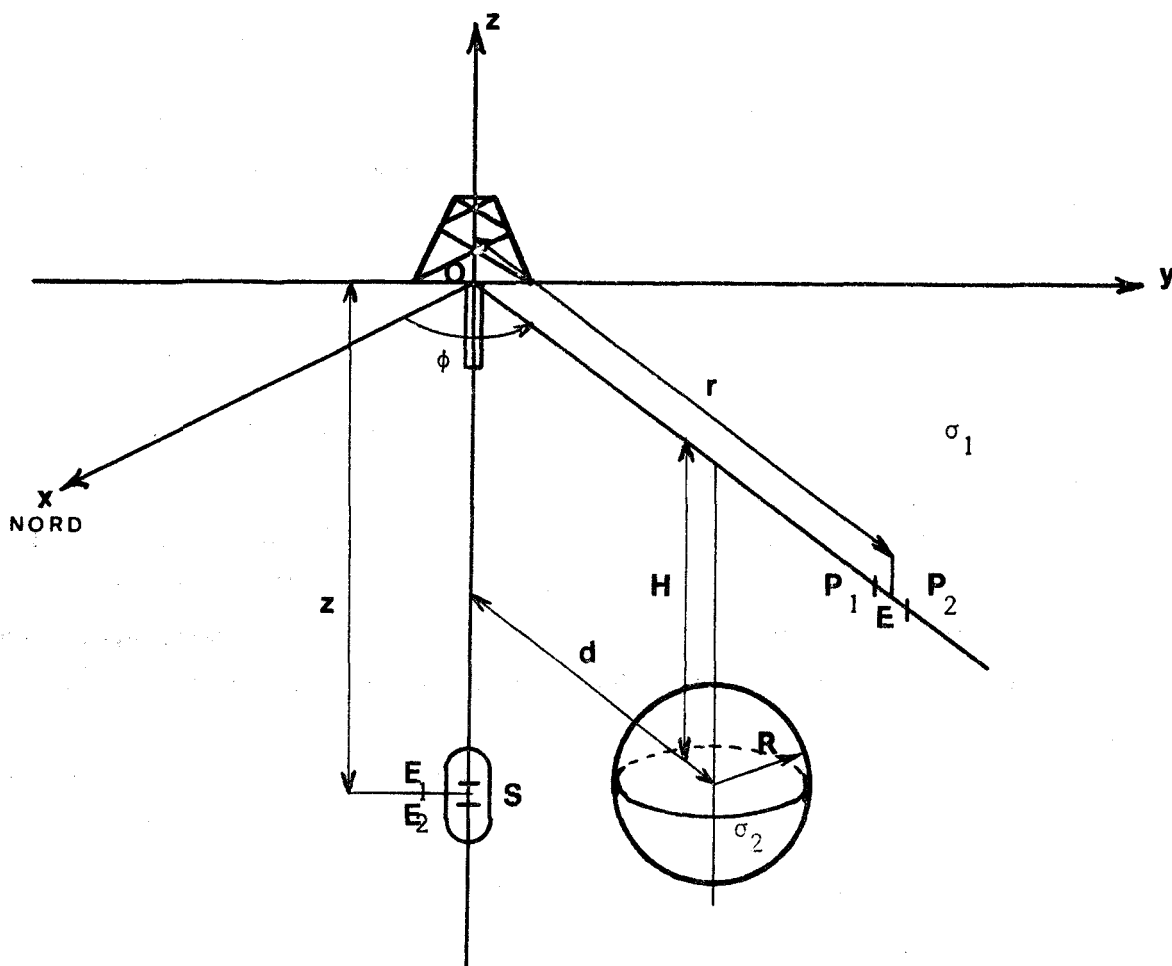


Figure.18.

Pour localiser la sphère par rapport au forage, il faut déterminer d'abord l'azimuth ϕ , puis les longueurs H et d . La sphère sera entièrement définie lorsqu'on connaîtra son rayon R .

Ces grandeurs géométriques seront déduites de l'interprétation du réseau des logs de télédiagraphie obtenus sur le terrain.

Ces logs sont obtenus en mesurant l'amplitude de la différence de potentiel aux bornes E_1 et E_2 de la sonde réceptrice mobile, en fonction de la profondeur z de celle-ci. Cette tension est créée par le courant injecté dans le sol, depuis sa surface, à l'aide des deux prises de terre P_1 et P_2 . La distance moyenne r séparant ces dernières de la verticale du forage, est un paramètre en fonction duquel on relève une famille de logs de télédiagraphie.

Nous n'exploitons pas directement ces mesures de tension, nous en déduisons la résistivité équivalente ρ_{eq} . Celle-ci est la valeur numérique de la résistivité qu'il faut introduire dans la formule (76) donnant la différence de potentiel apparaissant aux bornes de la sonde S dans un demi-milieu parfaitement homogène et infini pour que cette tension soit égale à celle que l'on a effectivement mesurée sur le terrain.

La formule (70) nous permet d'obtenir directement la valeur de l'indice d'anomalie :

$$\frac{\rho_{\text{éq}}}{\rho_1} = 1 + \Phi$$

ρ_1 est la résistivité du demi-milieu conducteur qui contient l'hétérogénéité sphérique de résistivité ρ_2 .

Au cours d'une prospection, ce réseau est obtenu à partir des logs de télédiagraphie. Dans le cas présent, comme nous ne disposons pas de tels enregistrements effectués sur un terrain contenant un gisement approximativement sphérique, nous utilisons un réseau théorique obtenu à partir de la formule (68).

En outre, nous utilisons des valeurs réduites de la tension V en posant :

$$\frac{I}{4\pi\sigma_1} = 1$$

dans les expressions du potentiel, de l'indice d'anomalie, et de la résistivité quivalente.

I est l'intensité du courant injecté dans le sol au moyen des prises de terre P_1 et P_2 .

IV.6. Détermination de l'azimuth

On montre facilement dans l'annexe.III. que la fonction potentiel est symétrique par rapport au plan passant par le centre de la sphère et l'axe du forage.

Il en résulte que, si on relève deux télélogs identiques parmi un certain nombre obtenus pour des positions d'émetteur situés à distance connue du forage (voir figure.20.), la verticale de la sphère aura de fortes chances de se trouver sur la bissectrice de l'angle formé par le forage et les deux positions d'émetteurs donnant des télélogs égaux.

En pratique il est extrêmement rare de relever deux télélogs exactement égaux et il sera préférable pour chaque profondeur z donnée de la sonde de tracer l'indice d'anomalie, à r constant, en fonction de l'azimuth de l'émetteur par rapport au forage. Le plan de coordonnées passant par le centre de la sphère sera repéré par la symétrie de cette courbe.

La direction \vec{F}_x correspond à la valeur de θ nulle (figure.20.)

Vue en plan du terrain de prospection

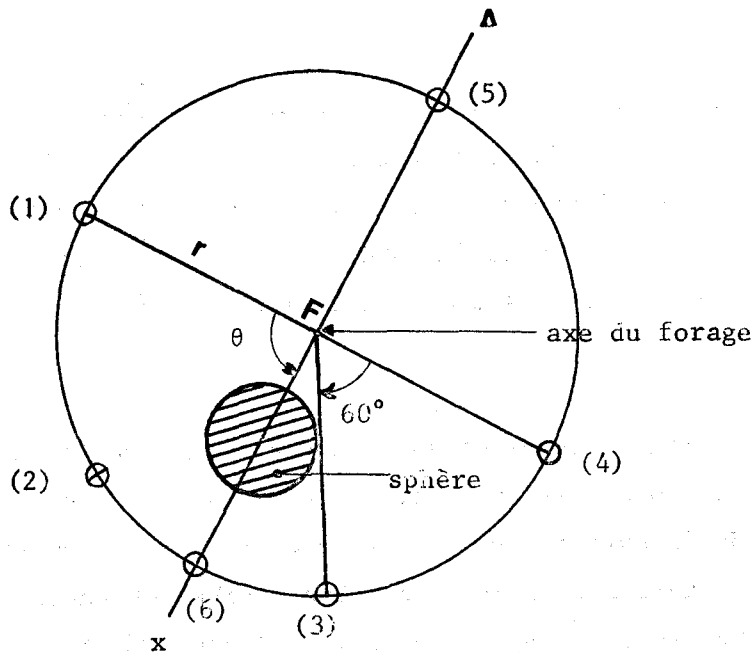


figure.20.

- (1), (2), (3), (4) permettent de déterminer Δ
- (5), (6) permettent de déterminer \vec{F}_x

Dans la suite de l'exposé, nous supposerons que la direction \vec{F}_x est connue; il en résulte que nous prendrons des valeurs de θ nulles.

IV.7. Détermination de la position du centre de l'anomalie

Pour déterminer la position du centre de la sphère, il nous faut connaître les paramètres H et d qui sont respectivement la profondeur du centre par rapport à la surface du sol et la distance du forage au diamètre vertical de l'anomalie sphérique.

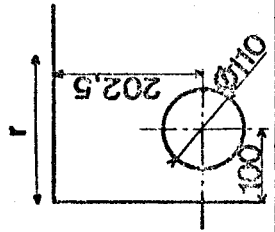
IV.7.1. Détermination du paramètre H

La méthode consiste à déterminer, à partir des télélogs, des valeurs particulières du "paramètre de prospection" r qui sont liées par des relations simples à la profondeur h et à la distance d. Nous utilisons, pour y parvenir, l'indice d'anomalie déduit du traitement des logs de télédiagraphie.

Nous donnons à titre d'exemple, sur les planches V et VI la valeur de l'indice d'anomalie en fonction de la cote z de la sonde réceptrice, pour différentes valeurs du paramètre de prospection r. Ces réseaux de courbes sont établis pour des positions et des rayons de sphère déterminés dont nous rappelons les valeurs ci-dessous :

	Planche V	Planche VI
h : profondeur du centre	202,5m	200m
d : distance du centre au forage	100m	150m
R : rayon de la sphère	55m	65m
σ_2/σ_1 : contraste de conductivité	0	0

Nous constatons sur cette planche que les maxima de l'indice d'anomalie sont localisés au voisinage de la sphère. Leur position est d'autant plus proche de la surface du sol que la distance de l'émetteur au forage est grande. On constate par ailleurs que les courbes obtenues pour des positions d'émetteur proches du forage (courbe.1., planche.VI.) présentent une partie médiane croissant avec z, tandis que les courbes relatives à des positions éloignées de l'émetteur (courbe.8., planche.VI.) présentent une partie médiane décroissant avec z.



- 1. r = 50m
- 2. = 100m
- 3. = 150m
- 4. = 200m
- 5. = 250m
- 6. = 300m
- 7. = 350m
- 8. = 400m
- 9. = 600m

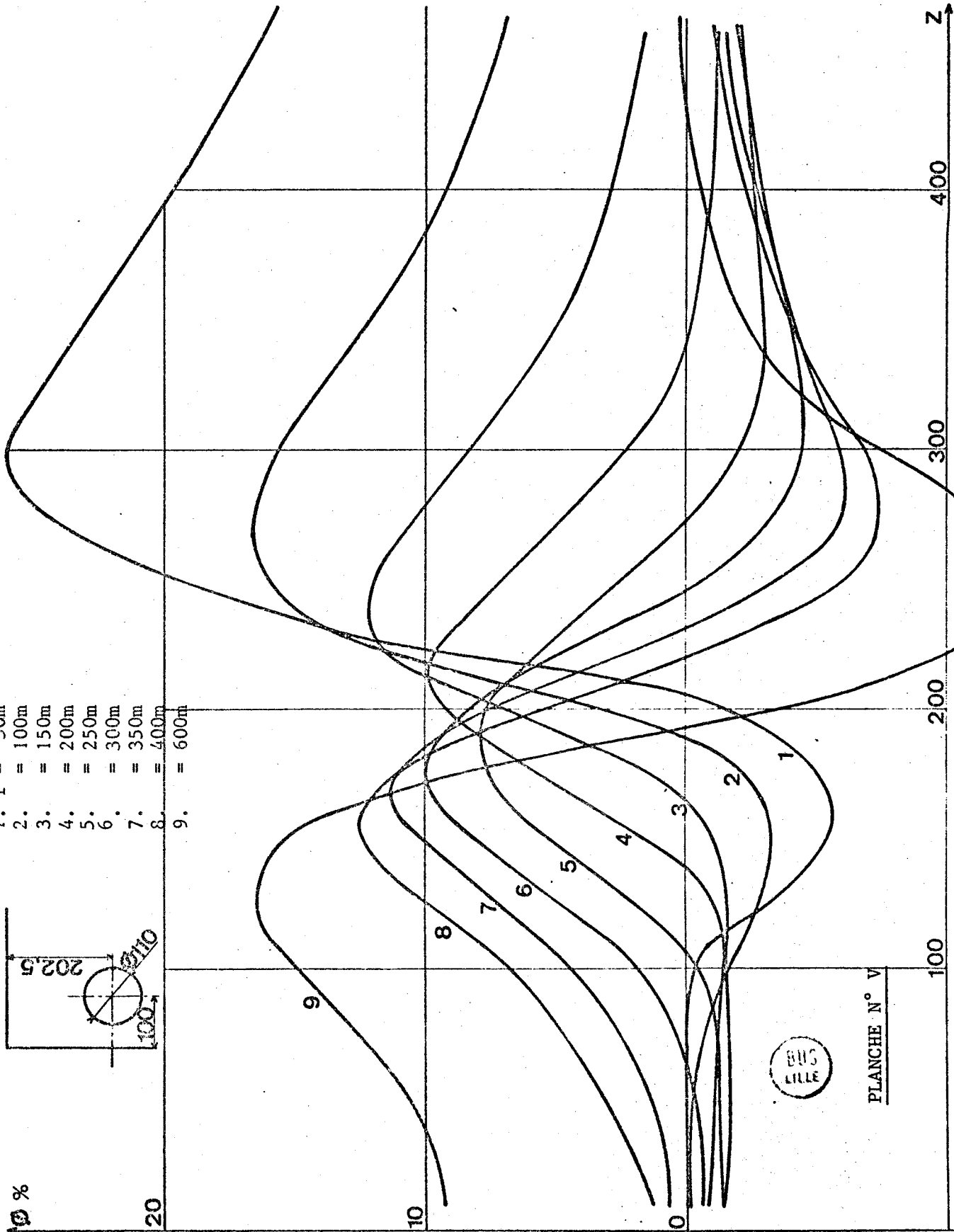


PLANCHE N° V

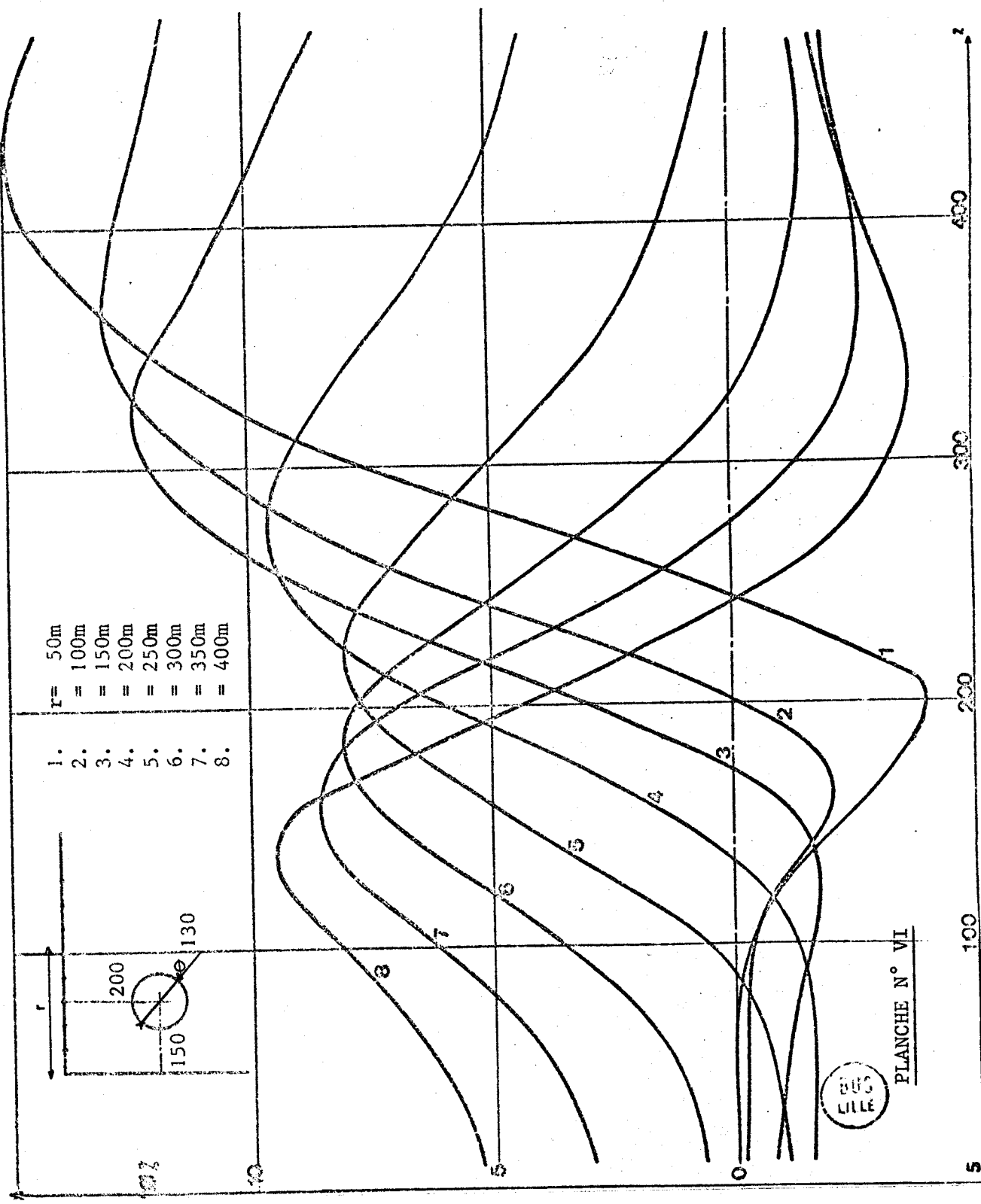
100 200 300 400 Z

10 %

20

10

0



- 1. 50m
- 2. 100m
- 3. 150m
- 4. 200m
- 5. 250m
- 6. 300m
- 7. 350m
- 8. 400m

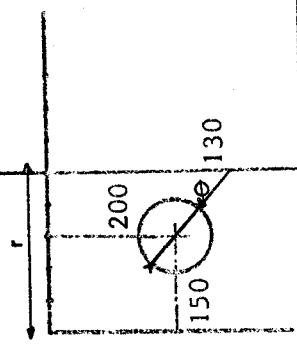


PLANCHE N° VI

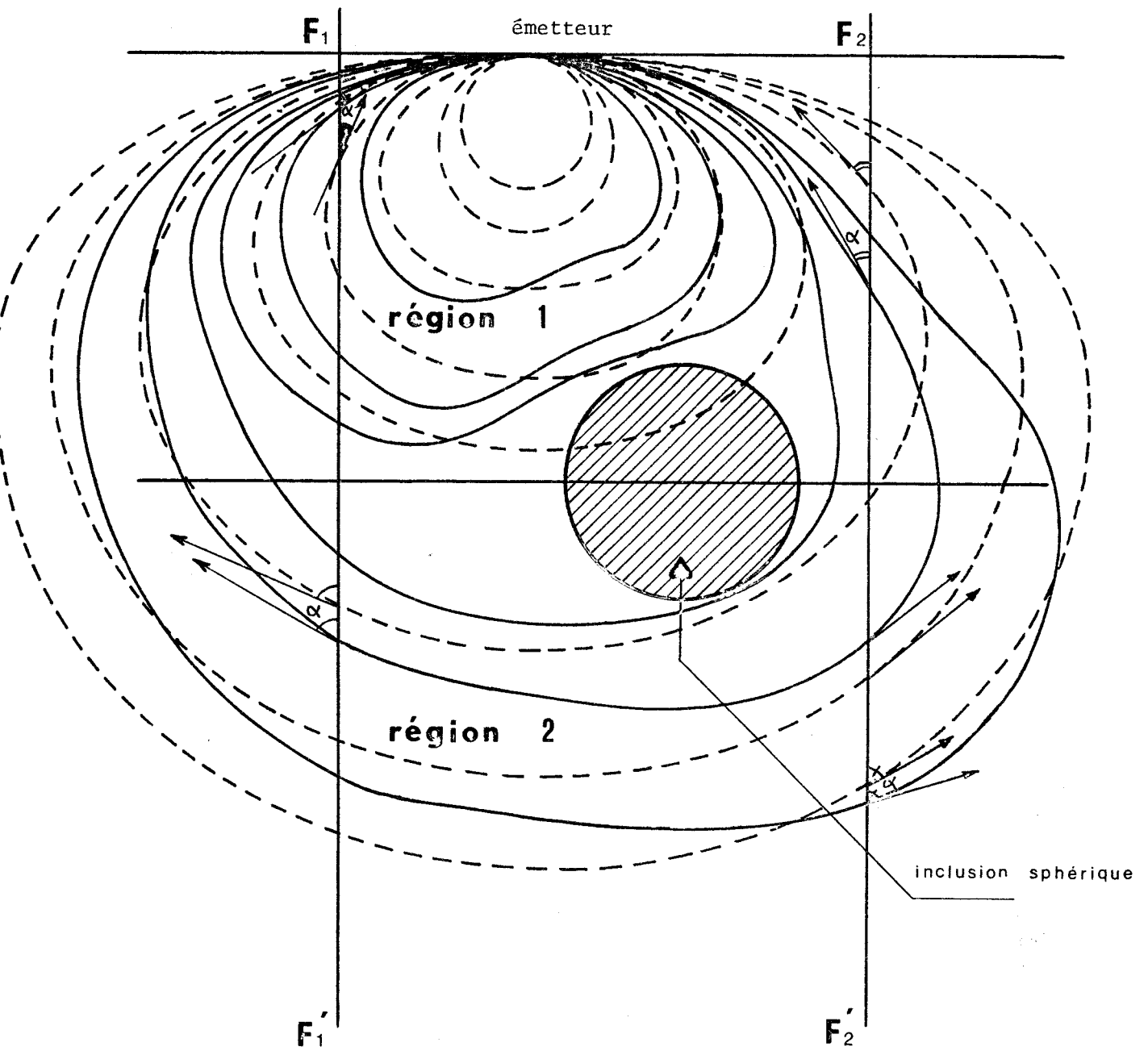


figure.21.

Ce phénomène s'explique physiquement en considérant la figure.21. Cette figure représente la coupe du terrain par un plan passant par le centre de la sphère et l'axe d'un forage. Les courbes en traits pointillés représentent les lignes de courant dans un demi-milieu parfaitement homogène, tandis que celles en traits pleins représentent la distribution du courant dans un sol contenant une anomalie sphérique isolante.

$F_2F'_2$ représente l'axe d'un forage tel que la sphère se trouve entre l'émetteur et le forage

$F_1F'_1$ représente l'axe d'un forage tel que la sphère se trouve à l'extérieur du système forage-émetteur.

Dans chaque cas, il faut considérer 2 régions :

- . la région I du terrain situé entre la surface du sol et le plan horizontal passant par le centre de la sphère
- . la région II qui est toute la zone située en-dessous de ce plan.

Envisageons le cas où le dispositif émetteur est situé entre le forage $F_1F'_1$ et la verticale passant par la sphère :

Dans la région I l'angle α que font les lignes de courant avec la verticale est plus grand dans le milieu contenant la sphère que dans un milieu homogène ; il en résulte que la composante verticale du champ électrique est plus faible, ainsi que la tension que l'on mesure avec la sonde réceptrice. Dans cette zone, l'indice d'anomalie passe par un minimum pour une valeur particulière de z inférieure à h .

Dans la région II l'angle α est plus faible dans un terrain contenant une sphère isolante que dans un demi-milieu parfaitement homogène. Dans ces conditions, dans la région II, l'indice d'anomalie ϕ passe par un maximum pour une valeur de z supérieure à h .

Si l'on considère maintenant le deuxième cas de la figure, où la sphère se trouve entre les dispositifs émetteur et récepteur, on montre par un raisonnement analogue que l'indice d'anomalie ϕ passe par un maximum dans la région I et par un minimum dans la région II.

Enfin comme nous le constatons sur les planches. III, et .VI. il existe une valeur de r pour laquelle l'amplitude maximum de l'indice d'anomalie est la plus faible.

On détermine graphiquement cette valeur en traçant la courbe de ϕ maximum en fonction de r .

Nous donnons sur les planches.VII. et VIII les courbes de ϕ maximum en fonction du paramètre de prospection pour les valeurs de h , d , R , correspondant aux planches.V. et .VI.

Pour ces valeurs particulières de r_c , la cote du maximum de l'indice d'anomalie correspond avec la profondeur du centre de la sphère. En effet, considérons la formule approchée de l'indice d'anomalie :

$$\phi = \frac{K}{\rho^5} \left[(2\rho^2 - 3d^2) - \frac{2(r-d)^2 - h^2}{h(r-d)} \cdot (Z+h) |d| \right]$$

Etudions maintenant la variation de ϕ en fonction du paramètre de prospection :

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = - \frac{K}{\rho^5} |d| (Z+h) \frac{2(r-d)^2 + h^2}{h(r-d)} \quad (99)$$

il en résulte que cette dérivée ne peut être nulle que si :

$$Z = -h$$

Cette relation montre qu'il existe une valeur privilégiée r_c du "paramètre de prospection" r pour laquelle la déformation des lignes de courant, provoquée par l'inclusion sphérique est minimum. Dans ces conditions, les lignes de courant au voisinage du forage sont sensiblement parallèles à la surface de l'inclusion sphérique. Il en résulte que, pour cette valeur r_c , l'amplitude maximum de l'indice d'anomalie est la plus faible et la cote de ce maximum correspond à la profondeur du centre de la sphère.

Il en résulte qu'après avoir déterminé graphiquement la valeur critique r_c du paramètre de prospection, il suffit de tracer la courbe représentant la cote des maximums de ϕ en fonction du "paramètre de prospection".

Nous en déduisons directement la profondeur du centre de la sphère.

Nous donnons sur les planches.IX.,.X., les courbes représentant la cote de ϕ_{MAX} en fonction du paramètre de prospection qui correspondent aux planches. V. à .VIII.

Par cette méthode, nous obtenons une précision de quelques pourcents sur la valeur de h .

$\phi_{MAX\%}$

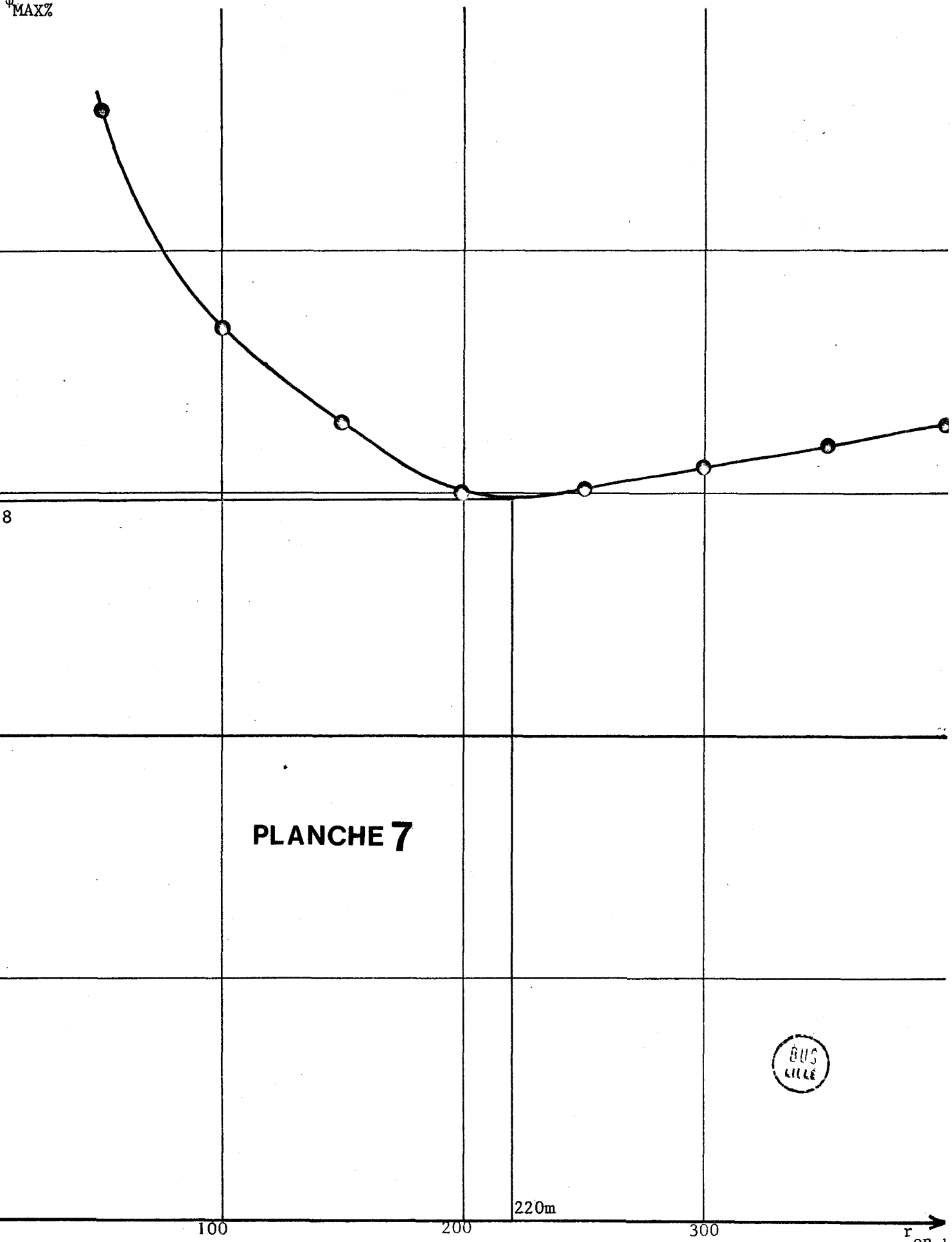


PLANCHE 7



220m

r en 1

$\phi_{MAX} \%$

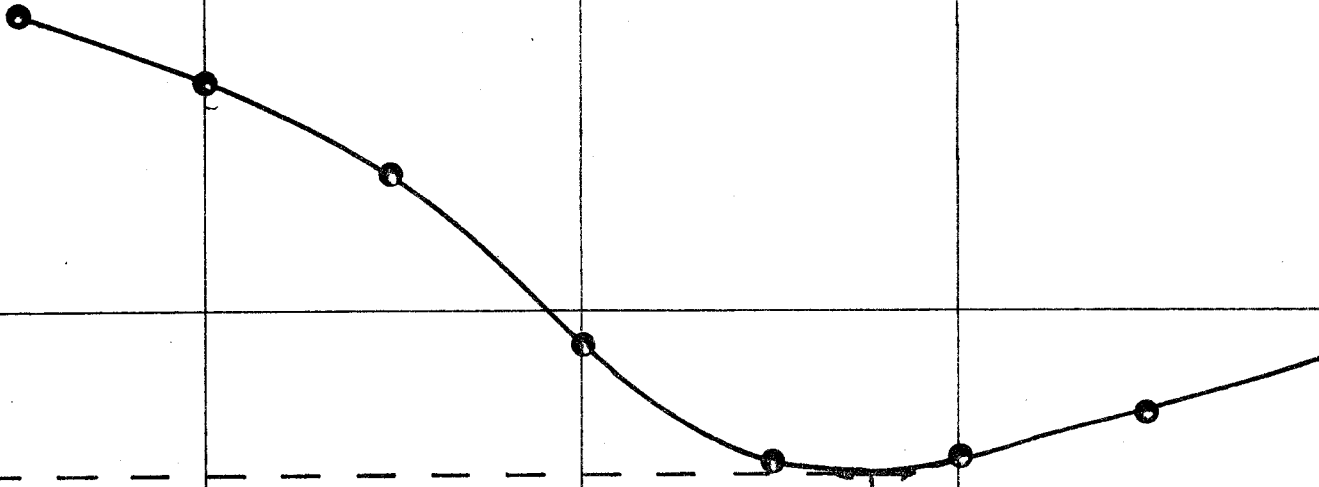


PLANCHE 8



100

200

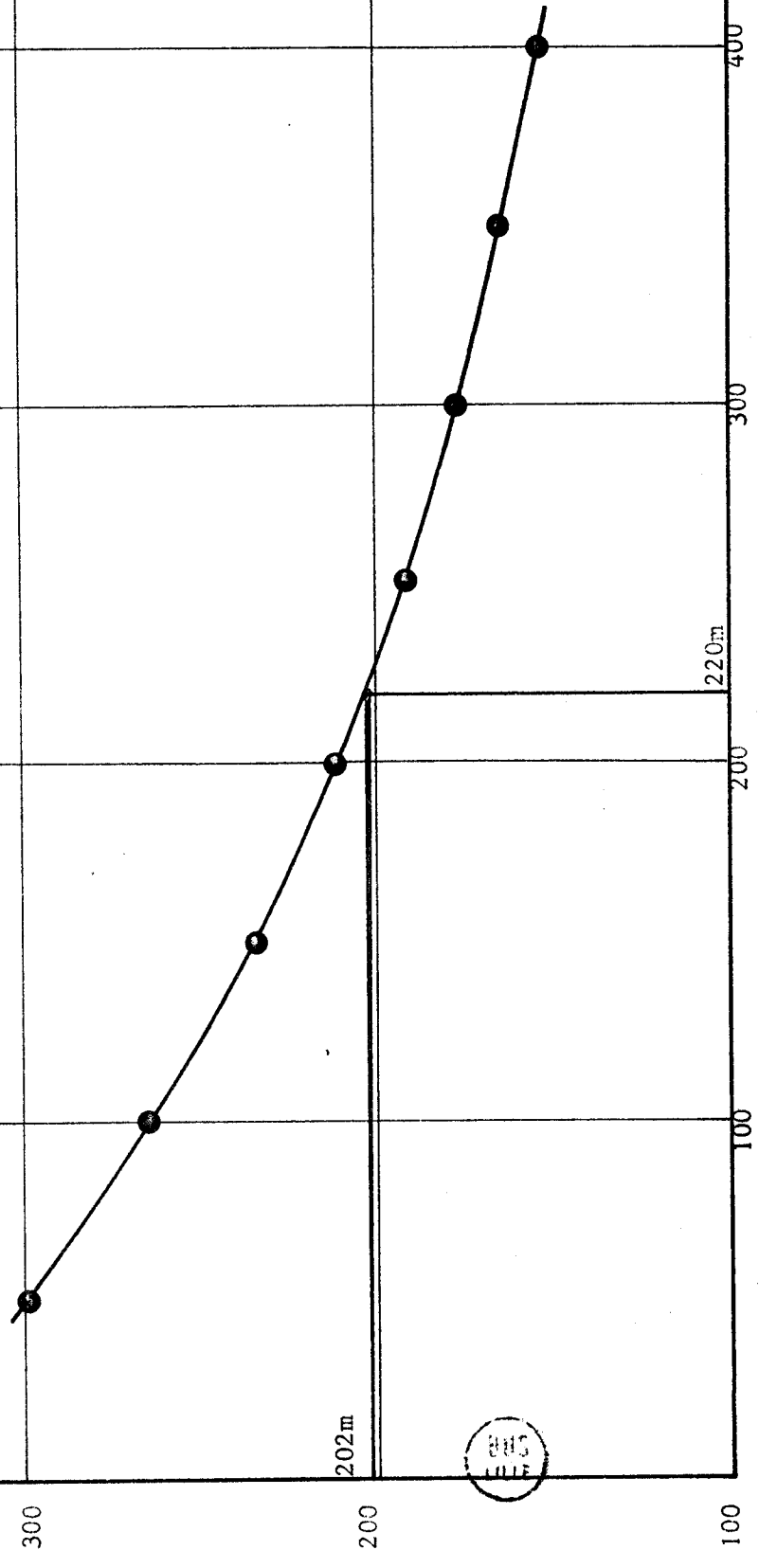
277

300

r en m

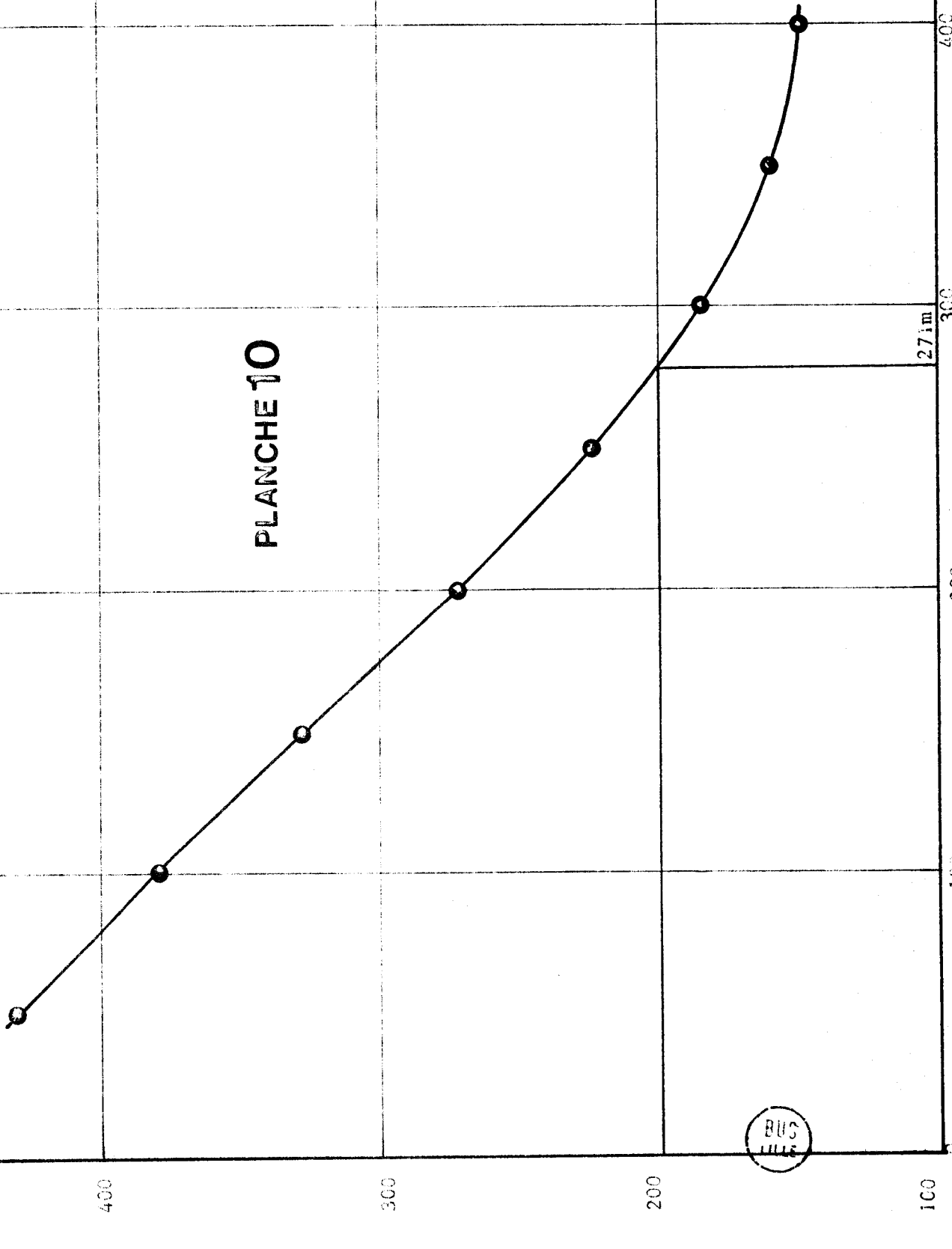
R = 55m
H = 202,5m
d = 100m

PLANCHE 9



R = 65m
H = 200m
d = 150m

PLANCHE 10



BUS
LILLE

IV.7.2. Détermination de la distance du centre de la sphère au forage

Dans un premier temps, la valeur de d est déduite analytiquement de la valeur approchée de ϕ .

Considérons la formule (96) qui nous donne la valeur approchée de ϕ ; sa dérivée par rapport à z nous donne une relation qui lie les différents paramètres de l'indice maximum :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\rho}{K} \{ [(Z+h) - \gamma|d|]^{\rho} + 5 [(2\rho - 3d^2) - \gamma|d| (Z+h)] (Z+h) \} \quad (100)$$

avec :

$$\gamma = - \frac{2(r-d)^2 - h^2}{2(r-d)h}$$

si le maximum se trouve à la cote $Z = -h$, il en résulte que :

$$\frac{\rho}{K} \gamma |d| = 0$$

soit :

$$2(r-d)^2 - h^2 = 0 \quad (101)$$

Il y a donc deux valeurs possibles de d :

$$d_1 = r_c - \frac{\sqrt{2}}{h} \quad (102)$$

$$d_2 = r_c + \frac{\sqrt{2}}{h} \quad (103)$$

Nous représentons sur la figure.22. les deux cas possibles issus de (102) et (103).

La première de ces solutions correspond au cas où la verticale

de la sphère se trouve entre l'émetteur et le forage. La deuxième solution

correspond au cas où l'émetteur est placé entre l'anomalie et le forage.

Pour lever l'indétermination, il suffit d'étudier le comportement

de la courbe $\phi = \phi(z)$ obtenue pour r égal à r_c . Si, pour des valeurs croissantes

de z, ϕ passe par un minimum puis par un maximum, la solution est :

$$d_2 = r_c + \frac{\sqrt{2}}{h} \quad (103)$$

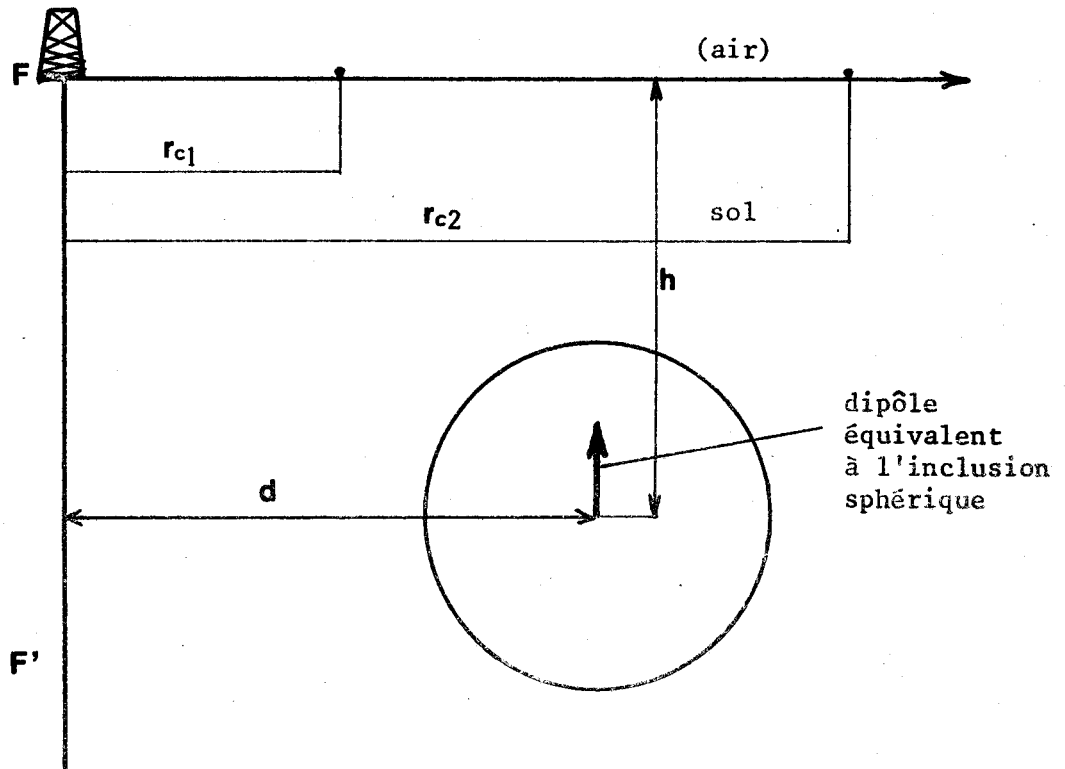


figure.22.

Par contre, si l'indice d'anomalie passe par un maximum puis par un minimum, il faut choisir la solution :

$$d_1 = r_c - \frac{h}{\sqrt{2}} \quad (102)$$

Nous donnons ci-dessous les valeurs de d obtenues à l'aide des relations (102) et (103) pour les deux exemples

numéros de planche	$d_{réel}$	$d_{déduit}$	$d_{réel}/d_{déduit}$
VI	100	77	1,28
VII	150	136	1,10

Cette différence est bien évidemment due aux approximations nombreuses que nous avons faites dans la formulation approchée de l'indice d'anomalie. Cependant, compte tenu du rayon de la sphère qui est dans le premier cas de 55m et dans le deuxième cas de 65m, nous constatons qu'un forage aux verticales de 77m et de 136m rencontrerait le gisement. L'erreur est donc de peu d'importance pratique.

Nous avons introduit un facteur correctif dans les formules (102) et (103). Ce facteur est la valeur moyenne du rapport $d_{\text{réel}}/d_{\text{déduit}}$ calculée sur plusieurs exemples. Sa valeur est la suivante :

$$C = 1,17$$

Il en résulte que, si la sphère est assez proche du forage, la valeur de d est donnée par la relation suivante :

$$d = 1,17 \left(r_c - \frac{h}{\sqrt{2}} \right) \quad (104)$$

la précision sur d est alors supérieure à 10%.

IV.8. Détermination du rayon de l'anomalie

Si l'on connaît H , d et ϕ , l'expression de l'amplitude de l'indice d'anomalie n'est plus qu'une fonction du rayon R de la sphère et du contraste de conductivité σ_2/σ_1 .

Il en résulte que l'on ne peut déterminer l'une de ces inconnues sans connaître l'autre. Or la plupart du temps on sait ce que l'on cherche et par suite on connaît l'ordre de grandeur de σ_2 . En particulier lorsque l'on recherche des cavités, le rapport σ_2/σ_1 est nul. Le rayon de la sphère, peut alors être calculé à partir de la relation (68).

C O N C L U S I O N

Le travail que nous venons d'exposer dans notre thèse constitue une contribution à la prospection des sols contenant une anomalie locale de résistivité de forme approximativement sphérique.

L'intérêt que présente notre étude théorique sur les précédentes réside d'une part dans le fait que nous ne faisons aucune hypothèse sur la position des électrodes d'injection de courant par rapport au gisement sphérique et d'autre part, dans la vérification expérimentale de nos résultats théoriques que nous avons effectuée sur une cuve électrolytique de simulation.

Par ailleurs, nous avons exposé une méthodologie de prospection qui permet d'effectuer les mesures sur le terrain d'une manière systématique conduisant à la détermination de la position et du rayon d'une inclusion sphérique.

Nous pensons que ce travail pourra être utile aux prospecteurs chargés de découvrir des gisements de forme compacte à moyenne profondeur.

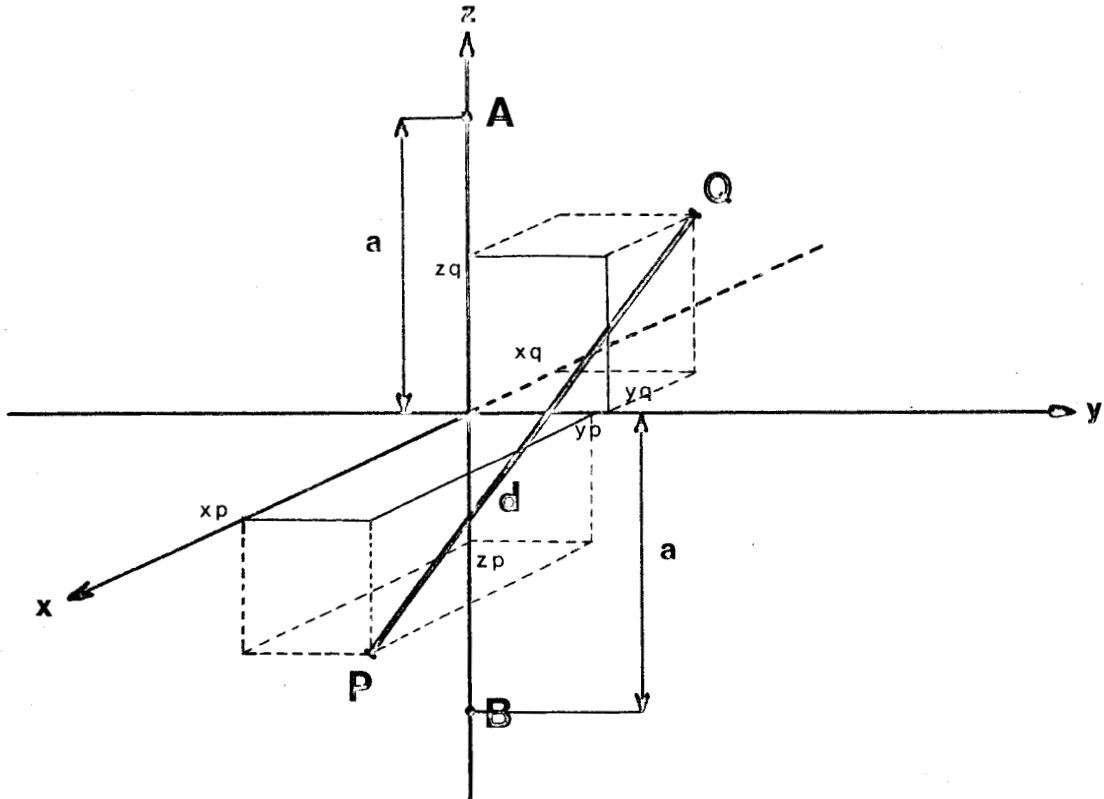
B I B L I O G R A P H I E

- (1) Théodore VOGEL, Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux limites de la physique mathématique
C. Physique Mathématique, T.II., Ed. du C.N.R.S., 1953
- (2) R. GABILLARD
Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs
Service de Radioélectricité et Electronique de l'Université des Sciences et Techniques de LILLE
- (3) J. STRATON, Théorie de l'électromagnétisme
DUNOD, 1961
- (4) SCHELKUNOFF, Electromagnetic waves
VAN NOSTRAND, NEW YORK, 1943
- (5) E. DURAND, Electrostatique
Tomes I et II, MASSON et Cie, 1964
- (6) L. ROBIN, Fonctions sphériques de Legendre et sphéroïdales
Tomes I et III, Ed. du C.N.E.T., 1958
- (7) A. ANGOT, Compléments de mathématiques
Ed. du C.N.E.T., 1961
- (8) R.C. VAN NOSTRAND, Limitation of resistivity methods as inferred from the buried sphere problem
Geophysics, V.18, p.423-433, 1953
- (9) B.P. DYAKONOV, The diffraction of electromagnetic waves by a sphere located in a half-space ...
Bull. Acad. Sci. URSS, n°10, 1959
- (10) JAHNKE-EMDE, Tables of higher functions
Teubner Verlagsgesellschaft, STUTTGART, 1960
- (11) P. POUZET, Analyse numérique
Publication du Laboratoire de Calcul de l'Université des Sciences et Techniques de LILLE
- (12) E. DURAND, Solutions numériques des équations algébriques
Tomes I et II, MASSON et Cie, 1960
- (13) R. GABILLARD, F. LOUAGE, Z. BASSIOUNI, R. DESBRANDES
Télédiagraphie, une méthode directionnelle à grande distance d'un sondage
Colloque B.R.G.M., ORLEANS, Novembre 1971

- (14) J.P. DUBUS, Recherche théorique et expérimentale des possibilités d'adaptation de certaines méthodes de prospection électromagnétique à la détection de cavités souterraines
Thèse 3ème Cycle, LILLE, 1968
- (15) J.P. LESTAMPS, Etude et réalisation de l'équipement électronique d'une cuve rhéographique simulant la propagation électromagnétique en milieu absorbant
Mém. Ing. C.N.A.M., LILLE, Septembre 1970
- (16) M. GOETGHELUCK, Etude et réalisation d'une cuve analogique haute fréquence. Application à l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
D.E.A. Electronique, LILLE, Juin 1969
- (17) R. GABILLARD, Z. BASSIOUNI, Expériences de télédiagraphie dans le puits BEYNES 102
Rapport I.F.P., n°18876, Janvier 1971
- (18) Z. BASSIOUNI, R. GABILLARD, Expériences de télédiagraphie de BEYNES - Puits Beynes 104
Rapport I.F.P., n°18745, Déc.1970
- (19) J.P. VIVES, Mise au point et perfectionnement d'une cuve analogique haute fréquence. Simulation de quelques problèmes de prospection télédiagraphique
D.E.A. Electronique, LILLE, Juin 1970
- (20) J.R. WAIT, A conducting sphere in a time varying magnetic field
Geophysics, V.16, n°4, p.4666-4672, Oct.1951
- (21) Society of exploration Geophysicist's
Mining geophysics, V.II, 1967
- (22) J.R. WAIT, Electromagnetic induction in a small conducting sphere above a resistive half-space
Radio Science, V.3, n°10, Oct.1968
- (23) B. FRIEDMAN, J. RUSSEK, Addition theorems for spherical waves
Quart. Appl. Math., V.12, n°1, 1954

A N N E X E . 1 .

DEVELOPPEMENT DU CALCUL DE L'INVERSE DE LA DISTANCE DANS LE SYSTEME DE
COORDONNEES TORIQUES II



Les coordonnées rectangulaires d'un point P, par rapport aux axes habituels issus de O, sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 x &= a \frac{\sin\phi\sin\psi}{\text{ch}\xi+\cos\phi} \\
 y &= a \frac{\sin\phi\cos\psi}{\text{ch}\xi+\cos\phi} \\
 z &= a \frac{\text{sh}\xi}{\text{ch}\xi+\cos\phi}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Soient les deux points P et Q dont les coordonnées toriques sont respectivement ξ, ϕ, ψ et ξ', ϕ', ψ' . Nous supposons $\xi \neq \xi'$ et ce qui ne diminue pas la généralité, $\xi < \xi'$.

Les formules (1) nous donnent, pour le carré de la distance d de ces deux points :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{a^2} &= \left(\frac{\sin\phi\sin\psi}{\text{ch}\xi+\cos\phi} - \frac{\sin\phi'\sin\psi'}{\text{ch}\xi'+\cos\phi'} \right)^2 + \left(\frac{\sin\phi\cos\psi}{\text{ch}\xi+\cos\phi} - \frac{\sin\phi'\cos\psi'}{\text{ch}\xi'+\cos\phi'} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\text{sh}\xi}{\text{ch}\xi+\cos\phi} - \frac{\text{sh}\xi'}{\cos\phi'+\text{sh}\xi'} \right)^2 \\ &= \left\{ \frac{\sin^2\phi(\text{ch}\xi'+\cos\phi')^2 + \sin^2\phi'(\text{ch}\xi+\cos\phi)^2 - 2\sin\phi\sin\phi'(\text{ch}\xi+\cos\phi) \times}{(\text{ch}\xi'+\cos\phi')\cos(\psi-\psi') + \text{sh}^2\xi(\cos\phi'+\text{ch}\xi')^2 + \text{sh}^2\xi(\cos\phi+\text{ch}\xi)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\text{sh}\xi\text{sh}\xi'(\cos\phi+\text{ch}\xi)(\text{ch}\xi'+\cos\phi')}{(\text{ch}\xi+\cos\phi)^2(\text{ch}\xi'+\cos\phi')^2} \right\} \end{aligned}$$

en posant : $\sin^2\phi = 1 - \cos^2\phi$
 et $\text{ch}^2\xi = 1 + \text{sh}^2\xi$

nous obtenons :

$$\frac{d^2}{a^2} = 2 \times \frac{\text{ch}(\xi-\xi') - \cos\phi\cos\phi' - \sin\phi\sin\phi'\cos(\psi-\psi')}{(\text{ch}\xi+\cos\phi)(\text{ch}\xi'+\cos\phi')}$$

$$\text{et } \frac{d}{2a} = \frac{[\text{ch}(\xi-\xi') - \cos\chi]^{1/2}}{(\text{ch}\xi+\cos\phi)^{1/2}(\text{ch}\xi'+\cos\phi')^{1/2}}$$

avec : $\cos\chi = \cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi'\cos(\psi-\psi')$

Nous n'avons plus qu'à appliquer le développement fondamental dû à Legendre :

$$(1-2h\cos\theta+h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\cos\theta) \quad \text{si } h < 1$$

nous obtenons :

$$[\text{ch}(\xi-\xi') - \cos\chi]^{-1/2} = (2e^{\xi-\xi'})^{1/2} [1 - 2e^{\xi-\xi'}\cos\chi + e^{2(\xi-\xi')}]^{-1/2}$$

Puisque $\xi < \xi'$ il en résulte que :

$$[\text{ch}(\xi - \xi') - \cos \chi]^{-1/2} = 2^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{(n+1/2)(\xi - \xi')} P_n(\cos \chi)$$

Enfin, en remplaçant $P_n(\cos \chi)$ par sa valeur donnée par la formule d'addition :

$$P_n(\cos \chi) = P_n(\cos \phi) P_n(\cos \phi') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \phi) P_n^m(\cos \phi') \cos m(\psi - \psi')$$

Dans ces conditions :

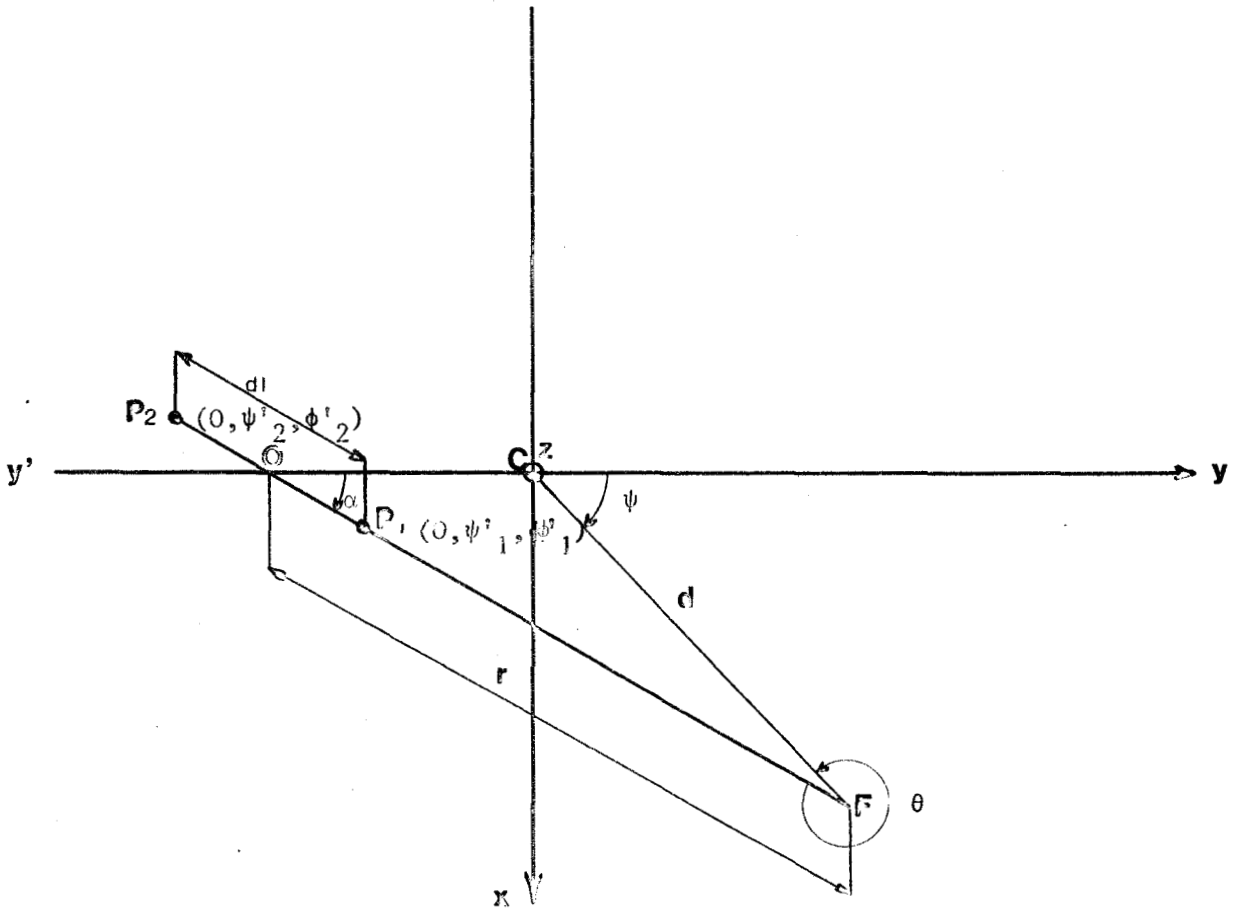
$$\frac{1}{d} = \frac{1}{a} (\text{ch} \xi + \cos \phi)^{1/2} (\text{ch} \xi' + \cos \phi')^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2 - \delta_0^m) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} e^{\pm (n+1/2)(\xi - \xi')}$$

$$P_n^m(\cos \phi) P_n^m(\cos \phi') \cos m(\psi - \psi')$$

où δ_0^m est le symbole de Kronecker :

$$\delta_0^m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

En outre on prendra le signe + devant l'argument de l'exponentielle si $\xi < \xi'$ et le signe - si $\xi > \xi'$.

ANNEXE . I I .PASSAGE DU SYSTEME DE COORDONNEES TORIQUES II AU SYSTEME DE COORDONNEES
CARTESIENNESI. Calcul des coordonnées des deux points sources de courantfigure.1.

r est la distance de la verticale du point de réception au centre du dispositif émetteur

d est la distance du forage F au diamètre vertical de la sphère

d_1 est la distance séparant les deux points sources P_1 et P_2

θ est l'angle \vec{FO} , \vec{FC}

α est l'angle \vec{OC} , \vec{OF}

Nous supposons que le centre O du dispositif émetteur est toujours situé sur le demi-axe Cy' ($\psi=\pi$).

Considérons les distances OC et CF :

$$\begin{aligned} OC^2 &= r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta \\ CF^2 &= OC^2 + r^2 - 2rOC\cos\alpha \\ &= d^2 \end{aligned}$$

nous en déduisons l'expression analytique de $\cos\alpha$, valable si θ n'est pas nul lorsque r est égal à d :

$$\cos\alpha = \frac{r-d\cos\theta}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{1/2}} \quad (1)$$

$$\text{d'où} \quad \sin\alpha = \frac{-d\sin\theta}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{1/2}} \quad (2)$$

il en résulte que :

$$\alpha = \text{Arc tg } \frac{d\sin\theta}{d\cos\theta-r} \quad (3)$$

si $r = d$

$$\theta = 2K\pi$$

alors : $\alpha = \psi$

où ψ est la coordonnée torique du point de réception.

De (1) et (2), nous déduisons les coordonnées cartésiennes des pôles P_1 et P_2 :

$$P_1 \quad \begin{cases} x_1 = - \frac{d\sin\theta d\ell}{2(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{1/2}} \\ y_1 = \frac{-2OC^2+(r-d\cos\theta)d\ell}{2OC} \\ z_1 = 0 \end{cases} \quad P_2 \quad \begin{cases} x_2 = + \frac{d\sin\theta d\ell}{2(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{1/2}} \\ y_2 = \frac{-2OC^2-(r-d\cos\theta)d\ell}{2OC} \\ z_2 = 0 \end{cases} \quad (4) \quad (5)$$

I.2. Calcul de ψ'_1 et ψ'_2 —

Nous avons :

$$\text{tg } \psi = \frac{x}{y}$$

Il en résulte que :

$$\operatorname{tg} \psi'_1 = \frac{+d \sin \theta d\ell}{20C^2 - (r-d \cos \theta) d\ell} \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \psi'_2 = \frac{-d \sin \theta d\ell}{20C^2 + (r-d \cos \theta) d\ell}$$

nous posons :

$$\beta_1 = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{d \sin \theta d\ell}{20C^2 - (r-d \cos \theta) d\ell}$$

$$\beta_2 = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{-d \sin \theta d\ell}{20C^2 + (r-d \cos \theta) d\ell}$$

Dans ces conditions,

Si $OC > d\ell$

alors :

$$\psi'_1 = \pi + \beta_1 \quad (7)$$

$$\psi'_2 = \pi + \beta_2 \quad (8)$$

Si $OC < d\ell$

$$\text{alors :} \quad \psi'_1 = -\beta_1 \quad (9)$$

$$\psi'_2 = \pi + \beta_2 \quad (10)$$

II.2. Calcul de $\cos \phi'_1$ et $\cos \phi'_2$

$$\text{Nous avons :} \quad y = a \frac{\sin \phi \cos \psi}{\operatorname{ch} \xi + \cos \phi}$$

Pour le point source P_1 nous obtenons :

$$y = \frac{a \sin \phi'_1 \cos \psi'_1}{1 + \cos \phi'_1}$$

d'où :

$$\cos^2 \phi'_1 (y_1^2 + a^2 \cos^2 \psi'_1) + 2y_1 \cos \phi'_1 + y_1^2 - a^2 \cos^2 \psi'_1 = 0$$

$$\cos \phi'_1 = \frac{a^2 \cos^2 \psi'_1 - y_1^2}{a^2 \cos^2 \psi'_1 + y_1^2}$$

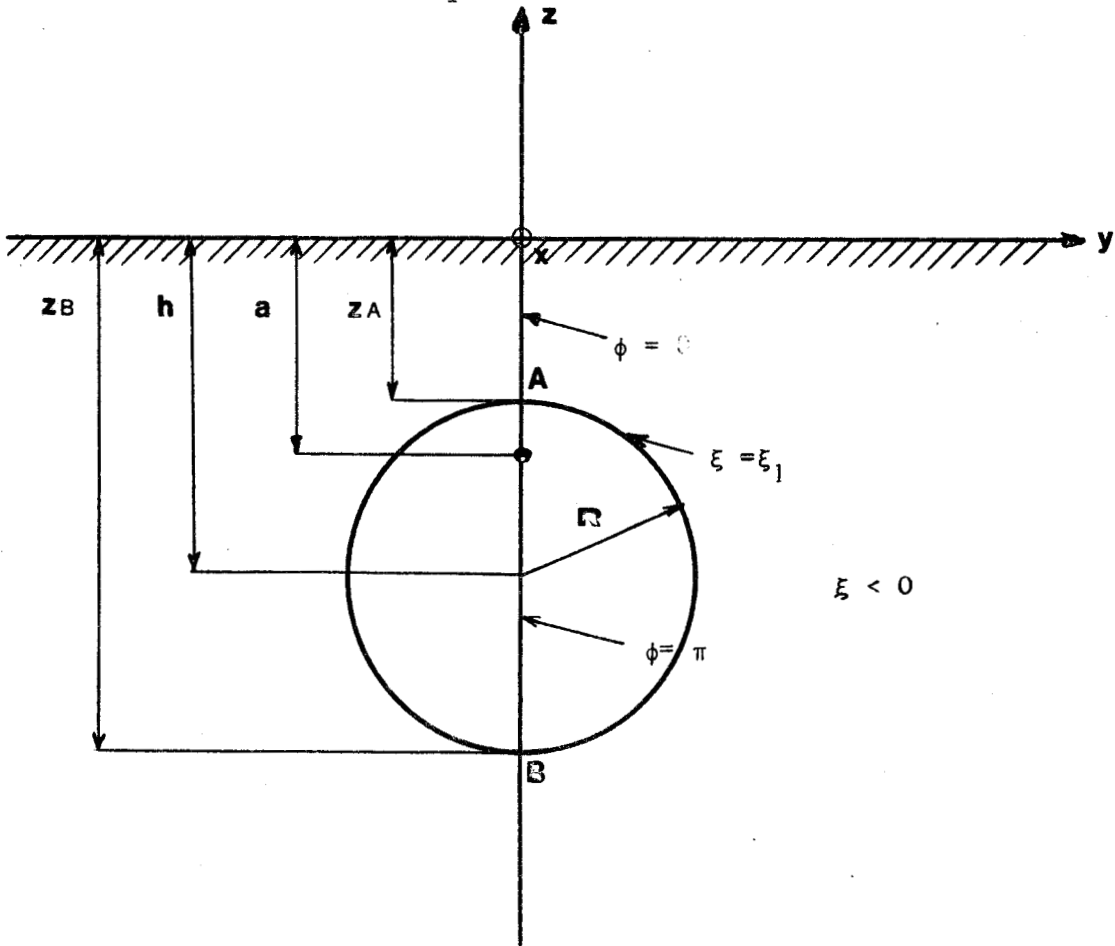
d'où :

$$\cos \phi'_1 = \frac{a^2 \cos^2 \psi'_1 - OC^2 \left[1 - \frac{(r-d \cos \theta)}{20C^2} d\ell \right]^2}{a^2 \cos^2 \psi'_1 + OC^2 \left[1 - \frac{(r-d \cos \theta)}{20C^2} d\ell \right]^2} \quad (11)$$

De même :

$$\cos \psi'_2 = \frac{a^2 \cos^2 \psi'_2 - y_2^2}{a^2 \cos^2 \psi'_2 + y_2^2}$$

$$\cos^2 \psi'_2 = \frac{a^2 \cos^2 \psi'_2 - OC^2 \left[1 + \frac{(r-d\cos\theta)d\ell}{2OC^2} \right]^2}{a^2 \cos^2 \psi'_2 + OC^2 \left[1 + \frac{(r+d\cos\theta)d\ell}{2OC^2} \right]^2} \quad (12)$$

II. Calcul des grandeurs a et ξ_1 la valeur de la cote z est donnée par la relation suivante :

$$z = \frac{ash\xi}{ch\xi + \cos\phi}$$

Au point A, ϕ est nul, tandis qu'au point B ϕ est égal à π , d'où :

$$z_A = \frac{a \operatorname{sh} \xi_1}{\operatorname{ch} \xi_1 + 1} = -h + R$$

$$z_B = \frac{a \operatorname{sh} \xi_1}{\operatorname{ch} \xi_1 - 1} = -h - R$$

$$-(h+R) (\operatorname{ch} \xi_1 - 1) = (h-R) (\operatorname{ch} \xi_1 + 1)$$

d'où :

$$\operatorname{ch} \xi_1 = \frac{h}{R} \quad (13)$$

$$\operatorname{sh} \xi_1 = -\frac{\sqrt{h^2 - R^2}}{R} \quad (14)$$

$$a = \sqrt{h^2 - R^2} \quad (15)$$

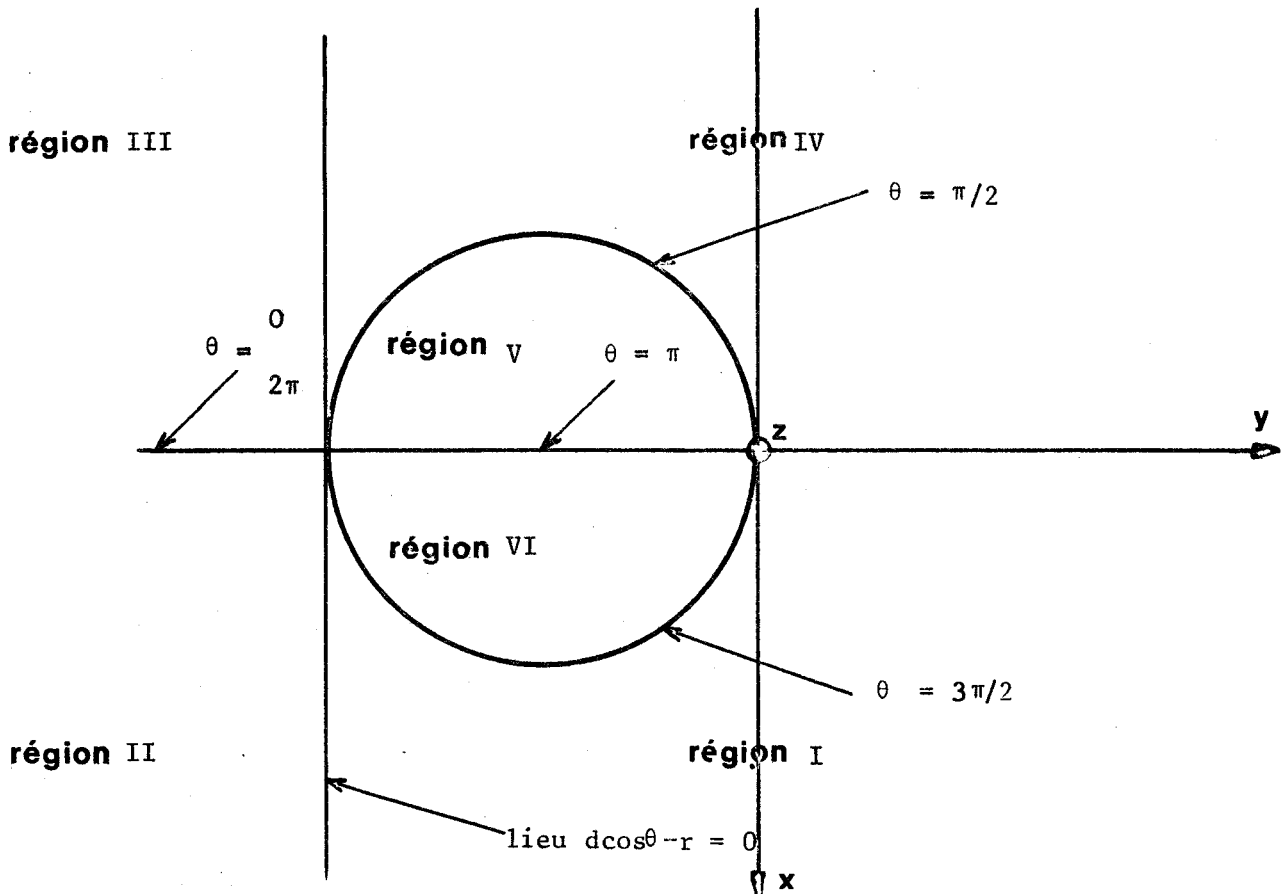
de (14) nous déduisons la valeur de ξ_1 :

$$\xi_1 = \operatorname{Log}(\operatorname{sh} \xi_1 + \sqrt{\operatorname{sh}^2 \xi_1 + 1})$$

$$\text{d'où : } \xi_1 = \operatorname{Log}(h - \sqrt{h^2 - R^2}) - \operatorname{Log} R \quad (16)$$

III. Calcul des coordonnées d'un point courant de l'espace $H(\xi, \phi, \psi)$

III.1. Calcul de ψ



Le plan xoy est divisé en 6 régions :

région I :	$3\pi/2 < \theta < 2\pi$	$d\cos\theta - r > 0$
région II :	$3/2 < \theta < 2$	$d\cos\theta - r > 0$
région III:	$0 < \theta < \pi/2$	$d\cos\theta - r > 0$
région IV :	$0 < \theta < \pi/2$	$d\cos\theta - r < 0$
région V :	$\pi/2 < \theta < \pi$	$d\cos\theta - r < 0$
région VI :	$\pi < \theta < 3\pi/2$	$d\cos\theta - r < 0$

en posant :

$$u = \text{Arc tg } \frac{d\sin\theta}{d\cos\theta - r}$$

$$\text{si } d\cos\theta - r < 0 \quad \alpha = u$$

$$\text{si } d\cos\theta - r > 0 \quad \alpha = \pi + u$$

il est alors possible de calculer ψ en fonction de θ et u , nous obtenons :

$$\text{si } d\cos\theta - r < 0 \quad \psi = 2\pi + u - \theta \quad (17)$$

$$\text{si } d\cos\theta - r > 0 \quad \psi = \pi - \theta + u \quad (18)$$

III.2. Calcul de ξ et ϕ

Soient x et y les coordonnées du point de réception P. Sa projection sur le plan xoy est le point F.

$$\text{D'où :} \quad P \quad \begin{cases} x = d\sin\psi \\ y = d\cos\psi \\ z \end{cases}$$

en utilisant les relations (4), (5) et (6) du chapitre .1. nous obtenons :

$$d = \frac{a\sin\phi}{\text{ch}\xi + \cos\phi} \quad (19)$$

$$z = \frac{a\text{sh}\xi}{\text{ch}\xi + \cos\phi} \quad (20)$$

d'où si $d \neq 0$ soit $\phi \neq 0$ ou π

nous obtenons :

$$\text{sh}\xi = \frac{z\sin\phi}{d} \quad \text{et} \quad \text{ch}\xi = \frac{(d^2 + z^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}{d} \quad (21)$$

d'où :

$$d \left[\frac{(d^2 + z^2 \sin^2 \phi)}{d} \right]^{1/2} + \cos \phi = a \sin \phi$$

Il en résulte que :

$$2ad \cos \phi = (a^2 - d^2 - z^2) \sin \phi$$

dans ces conditions, nous écrivons :

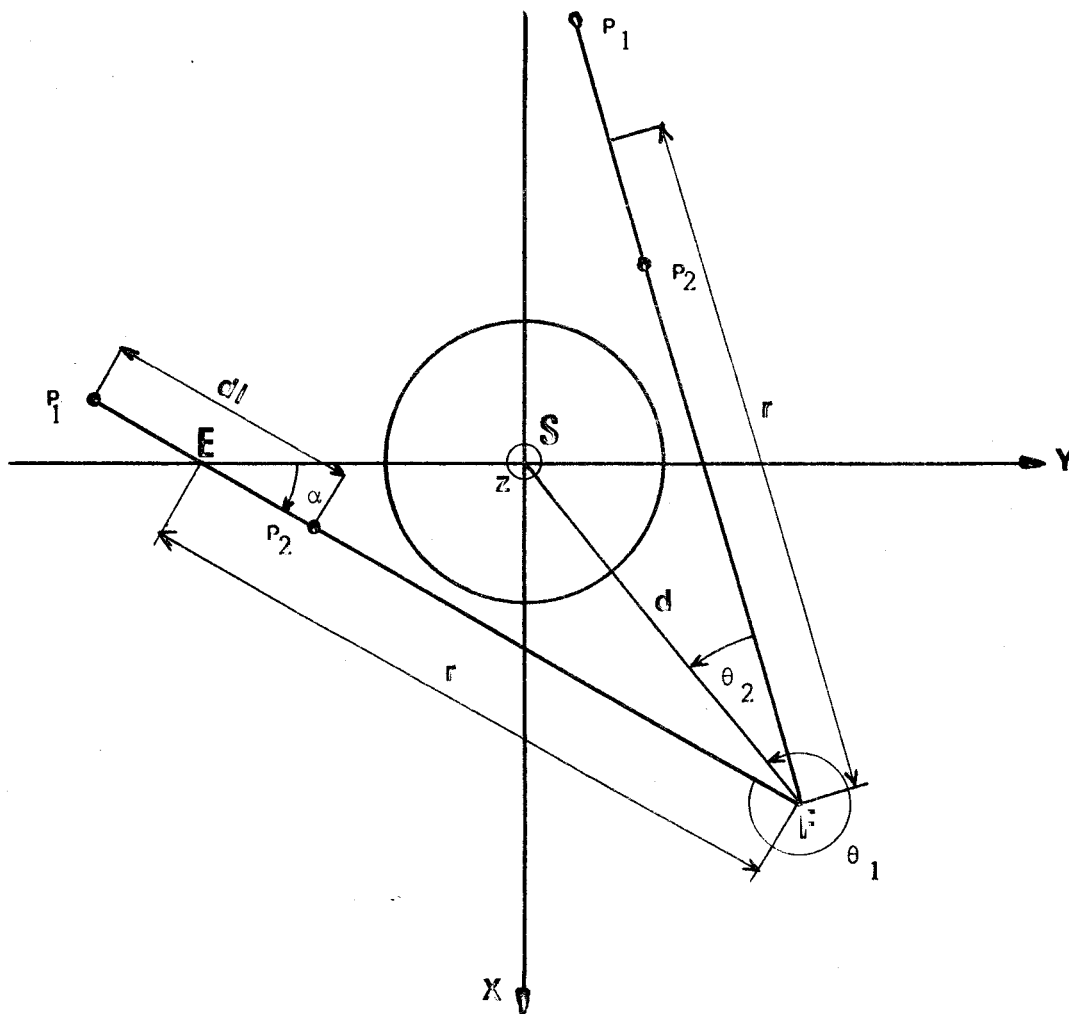
$$\cos \phi = \frac{a^2 - z^2 - d^2}{[(a^2 + d^2)^2 + z^2(z^2 + 2(d^2 - a^2))]^{1/2}} \quad (22)$$

cette relation est valable si $d = 0$:

$$\sin \phi = \frac{2 ad}{[(a^2 + d^2)^2 + z^2(z^2 + 2(d^2 - a^2))]^{1/2}}$$

de (21) et (22) nous déduisons :

$$\text{sh} \xi = \frac{2 za}{[(a^2 + d^2)^2 + z^2(z^2 + 2(d^2 - a^2))]^{1/2}}$$

ANNEXE . I I I .DEMONSTRATION DE LA SYMETRIE DE LA FONCTION POTENTIEL PAR RAPPORT
AU PLAN π PASSANT PAR L'AXE DU FORAGE ET LE CENTRE DE LA SPHERE

d est la distance de l'axe du forage au diamètre vertical de l'inclusion sphérique

r est la distance moyenne du forage aux prises de terre

θ est l'angle (\vec{FE}, \vec{FS})

L'amplitude du potentiel réduit créé par deux points sources de courant en un point du forage est donnée par la relation suivante :

$$U_1 = \left[\frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} + \left(\frac{\text{ch}\xi + \cos\phi}{a} \right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{(n+1/2)\xi} + e^{-(n+1/2)\xi} \right) \sum_{m=0}^n \left(C_{n1}^m \cos m\psi + C_{n2}^m \sin m\psi \right) P_n^m(\cos\phi) \right]$$

Comme nous l'avons montré dans les formules (57), (58), (59) et (60) les coefficients C_{ni}^m sont de la forme :

$$C_{ni}^m = \lambda_{n-1}^m M_{n-1}^m + \lambda_n^m M_{ni}^m + \lambda_{n+1}^m M_{n+1}^m$$

Les paramètres λ_n^m dépendant, lorsqu'ils existent, de la coordonnée torique ξ_1 de l'inclusion sphérique, et du contraste de conductivité existant entre l'anomalie et le sol, σ_2/σ_1 les coefficients M_{ni}^m dépendent seuls de la position des prises de terre.

Cependant, pour présenter des relations plus simples liant les coordonnées toriques aux coordonnées cylindriques, nous avons supposé que le centre du dispositif émetteur se trouvait toujours sur l'axe de coordonnée ψ égale à π (voir annexe.II.). Il en résulte que, pour démontrer la symétrie du potentiel, il faut étudier à la fois les expressions des lignes trigonométriques intervenant dans la formule du potentiel, et celles des ϕ'_i et ψ'_i intervenant dans l'expression des coefficients M_{ni}^m (que nous rappelons ci-dessous) :

$$M_{n1}^m = (2-\delta_0^m) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[(1+\cos\phi'_1)^{1/2} P_n^m(\cos\phi'_1) \cos m\psi'_1 - (1+\cos\phi'_2)^{1/2} P_n^m(\cos\phi'_2) \cos m\psi'_2 \right]$$

$$M_{n2}^m = (2-\delta_0^m) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[(1+\cos\phi'_1)^{1/2} P_n^m(\cos\phi'_1) \sin m\psi'_1 - (1+\cos\phi'_2)^{1/2} P_n^m(\cos\phi'_2) \sin m\psi'_2 \right]$$

Considérons les valeurs θ_1 et θ_2 de l'angle \vec{FE}, \vec{FS} définies figure.1.

- On affectera l'indice (1) de ψ , ϕ' et ψ' correspondant à la valeur θ_1 de l'angle θ et l'indice (2) aux valeurs ψ , ϕ' et ψ' correspondant à la valeur θ_2 .

Dans le cas de la figure.1. les angles θ_1 et θ_2 sont liés par la relation suivante :

$$\theta_1 = 2\pi - \theta_2 \quad 0 < \theta_2 < \pi$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \cos \theta_2 \\ \text{et} \quad \sin \theta_1 &= -\sin \theta_2 \end{aligned}$$

Dans ces conditions, et compte tenu des expressions de ψ_1 , ϕ'_1 , ψ' et ϕ'_2 données dans l'annexe.II., nous obtenons :

$$\begin{aligned} \psi'_1(1) &= \pi - \beta_1 & \psi'_1(2) &= \pi - \beta_1 \\ \psi'_2(1) &= \pi + \beta_2 & \psi'_2(2) &= \pi - \beta_2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \cos m\psi'_1(1) &= \cos m\psi'_1(2) & \sin m\psi'_1(1) &= -\sin m\psi'_1(2) \\ \cos m\psi'_2(1) &= \cos m\psi'_2(2) & \sin m\psi'_2(1) &= -\sin m\psi'_2(2) \end{aligned}$$

Comme seuls interviennent les $\cos \theta$ et $\cos \psi'_i$ dans les expressions des $\cos \phi'_i$ nous obtenons les relations suivantes pour les coefficients M_{ni}^m (avec $i=1,2$).

$$M_{n1}^{m(1)} = M_{n1}^{m(2)} \quad \text{et} \quad M_{n2}^{m(1)} = -M_{n2}^{m(2)} \quad (1)$$

Considérons maintenant la variable ψ ; son expression est donnée dans l'annexe.II.

Dans les deux cas, nous obtenons :

$$\psi(2) = -\psi(1) \quad (\text{mod. } 2\pi)$$

il en résulte que :

$$\begin{aligned} \cos m\psi(2) &= \cos m\psi(1) \\ \sin m\psi(2) &= -\sin m\psi(1) \end{aligned} \quad (2)$$

Compte tenu des expressions (1) et (2) nous constatons que le potentiel en tout point du forage est identique pour deux positions de prises de terre symétriques par rapport au plan π .

Nous donnons à titre d'exemple sur la planche A1 une courbe représentant le rapport $\phi_{MAX} / \phi_{MAX.MAX}$ en fonction des valeurs de l'angle θ .

- . ϕ_{MAX} est le maximum de l'indice d'anomalie, lorsqu'on calcule celui-ci en fonction de la profondeur de la sonde S pour une valeur donnée des "paramètres de prospection" r.
- . $\phi_{MAX.MAX}$ est le maximum de ces maxima.

Les valeurs des différents paramètres sont les suivantes :

H : profondeur du centre de l'hétérogénéité : 200m

R : rayon de la sphère : 45m

σ_2 / σ_1 : contraste de conductivité : nul

d : distance du forage au diamètre vertical : 100m

r : distance moyenne des prises de terre au forage : 200m.



ϕ MAX MAX

$r = 200\text{m}$
 $R = 45\text{m}$
 $d = 100\text{m}$
 $H = 200\text{m}$

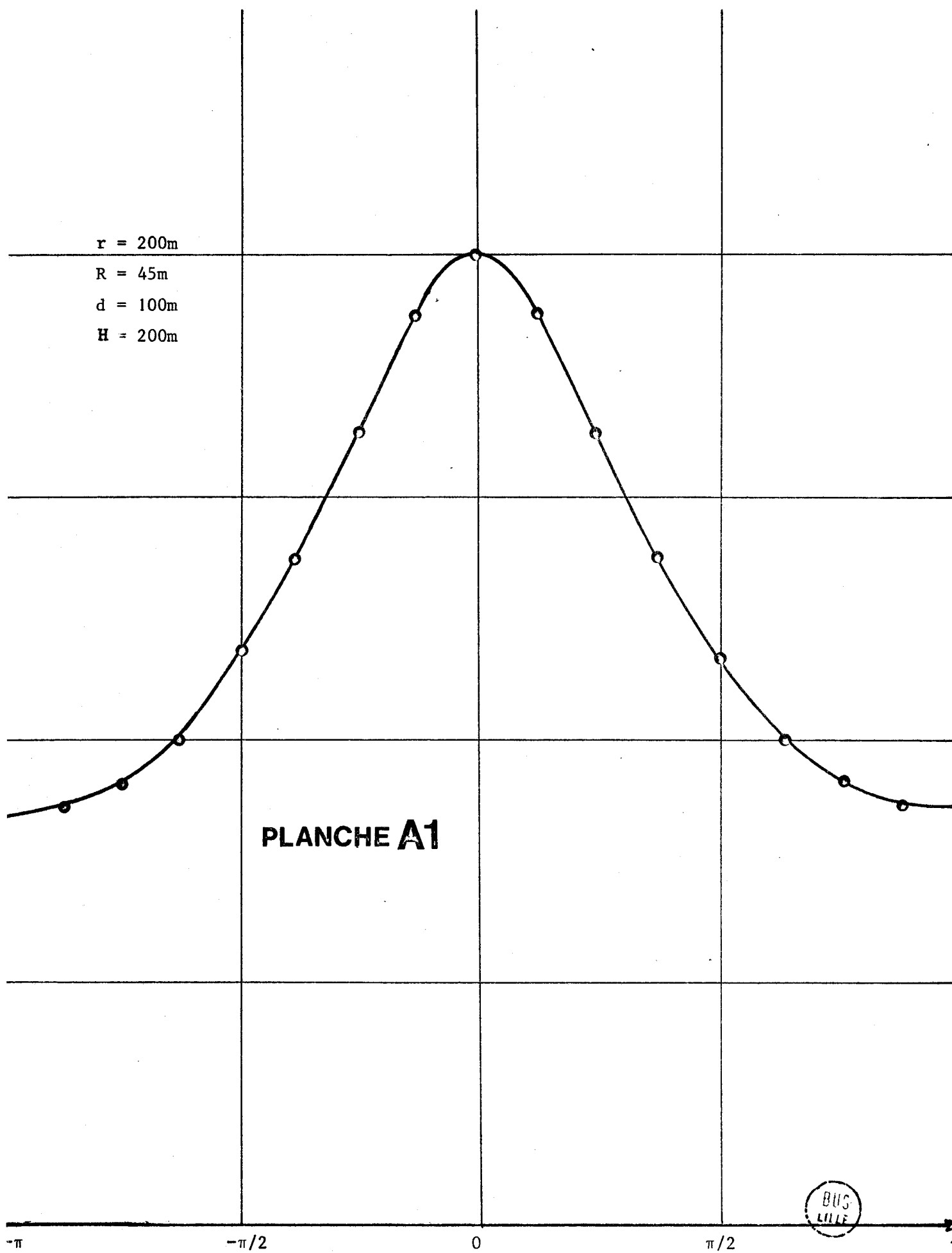


PLANCHE A1



Variation de l'angle θ