

50376

1971

N° d'ordre : 118

159

50376

1971

159

T H E S E

présentée

à l'Université de Lille 1

pour obtenir

le titre de DOCTEUR-INGENIEUR

par

Dominique R E G N I E R

Ingénieur I.D.N.



Titre de la thèse :

" Contribution à l'analyse des régimes dynamiques des systèmes continus. Applications aux circuits non linéaires "

Soutenue le 25 Juin 1971 devant la commission d'examen :

Messieurs :	P. VIDAL	Président
	F. LAURENT	Rapporteur
	G. SALMER	
	J.M. TOULOTTE	
	R. BOSSUT	



030 019960 5

A mes parents,

A ma fiancée.

Introduction

L'un des premiers problèmes que doit résoudre l'ingénieur lorsqu'il se propose d'étudier une installation est l'identification du système à asservir, c'est-à-dire de la détermination d'un modèle permettant de décrire complètement le système à l'aide d'équations.

Si la précision requise n'est pas très importante, certains systèmes sont correctement représentés par un modèle linéaire et les techniques classiques peuvent être employées pour l'analyse et la synthèse. Mais très souvent, soit parce que les non-linéarités ne se prêtent pas à une linéarisation, soit parce que le calcul nécessite une grande précision, il importe d'introduire dans les équations différentielles du modèle des coefficients non constants. C'est dans cette hypothèse que sont placés les travaux présentés dans ce mémoire.

La plupart des modèles couramment utilisés sont obtenus en donnant une forme a priori aux équations et en recherchant des lois de variations des coefficients permettant de décrire correctement le système.

La méthode d'identification, issue de la méthode de Kron, que nous présentons dans une première partie utilise la structure du système pour déterminer la forme des équations. Les caractéristiques des éléments non linéaires apparaissent alors explicitement grâce à un choix de variables d'état guidé par l'étude des connexions du système. L'interprétation de ces résultats conduit à des représentations par des systèmes asservis élémentaires couplés.

La seconde partie est consacrée, pour le modèle précédemment trouvé, à l'application des notions théoriques de stabilité, d'unicité de réponse et de précision. Une simulation sur calculatrice hybride (EAI 580) complète ce travail et met en évidence les phénomènes de non unicité prévus par la théorie.

Chapitre I

Formulation des systèmes continus multivariables

I.1. Introduction

Parmi les divers types de représentation des systèmes, l'automatique moderne emploie de préférence la notion de vecteur d'état. La justification de ce choix se trouve naturellement dans la souplesse d'utilisation de ce modèle mathématique.

Dans le domaine non linéaire, cette formulation conduit à des conditions suffisantes de stabilité, d'unicité de réponse, etc... Ces conditions assurent la sécurité de fonctionnement impossible à obtenir par la méthode du premier harmonique issue de la fonction de transfert de l'automatique classique. Cette dernière a, en effet, le grave inconvénient d'être approchée et de ne pas permettre une évaluation simple de l'incertitude de calcul.

De plus, la notion d'état d'un système est indépendante du nombre d'entrées et de sorties ce qui facilite les extensions aux systèmes multivariables.

Définition du vecteur d'état

Un vecteur d'état est un ensemble ordonné de paramètres indépendants caractérisant l'état du système à chaque instant. Cette définition implique que la connaissance des équations du système, des valeurs des composantes du vecteur d'état à un instant t_0 et des excitations définit sans ambiguïté l'évolution du système pour toute valeur de t supérieure à t_0 .

L'évolution d'un système peut être caractérisée par la trajectoire de son point représentatif dans l'espace d'état. S'il est en équilibre cette trajectoire se réduit à un point.

Il est alors naturel de chercher à imposer l'état final en respectant certaines contraintes de performances.

I.2. Différents modes de commande

On constate que dans la plupart des cas un signal de commande ne tenant compte que de l'état initial et de la structure du système permet de l'amener dans l'état désiré. Un tel fonctionnement suppose une identification parfaite de chaque élément de la chaîne et une connaissance rigoureuse de toutes les grandeurs d'entrée y compris celles que l'on nomme habituellement perturbations.

L'asservissement d'un système implique donc l'introduction d'une rétroaction. Cette nouvelle structure permet l'élaboration d'une fonction de commande tenant compte à tout instant de la différence entre la réponse souhaitée et la réponse réelle. En raison des propriétés qualitatives des systèmes bouclés, toutes les imperfections d'identification se trouvent ainsi automatiquement corrigées, au moins dans une certaine mesure.

Cet ensemble est schématisé figure 1.1.

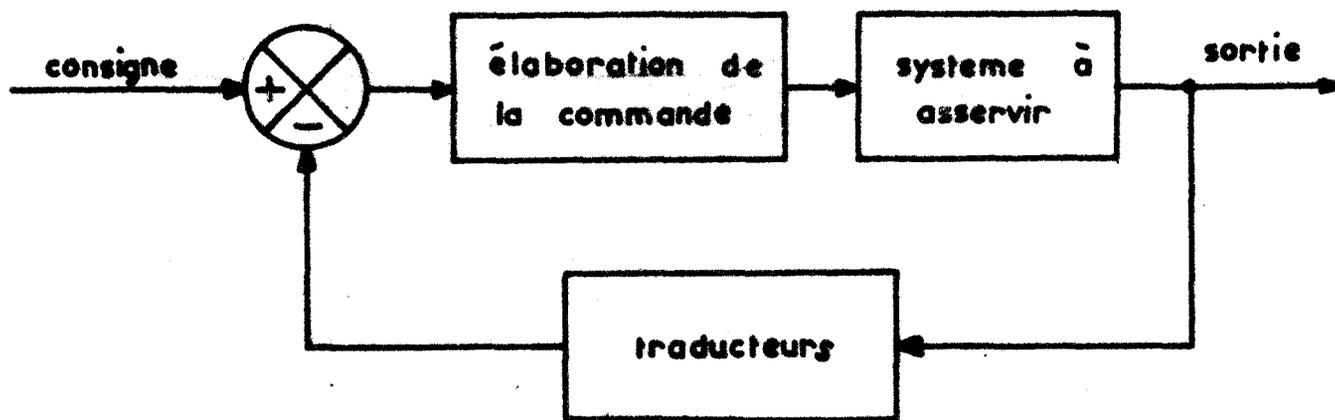


Figure 1.1.

1.3. Formulation des systèmes monovariables en boucle ouverte

Un système monovariante en boucle ouverte est représenté par le schéma-bloc de la figure 1.2.

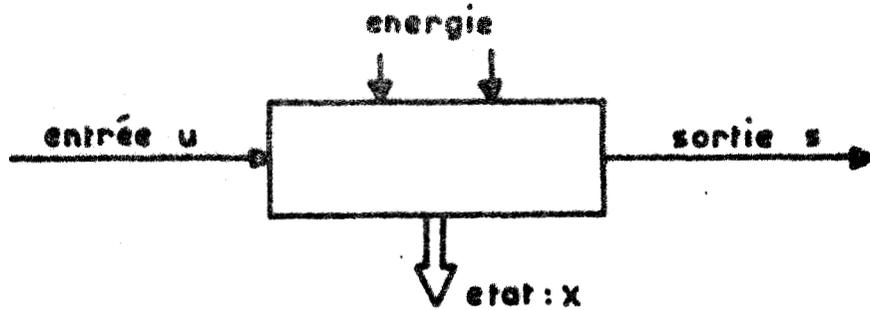


Figure 1.2.

quatre sortes de grandeurs peuvent intervenir dans un tel modèle :

- l'énergie qui ne joue de rôle que sur le plan technologique (elle ne sera plus mentionnée au niveau de la théorie)
- l'entrée, désignée par le scalaire u , qui commande l'évolution du système
- la sortie, désignée par la lettre s , qui est la grandeur physiquement utilisable.
- le vecteur d'état X , de dimension p et de composantes x_i

Le système étant linéaire, on attache au système des équations différentielles qui prennent la forme :

$$(1.1.) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j + b_i u$$

Soit, sous forme matricielle :

$$(1.2.) \quad X' = AX + Bu$$

ou :

$$(1.3.) \quad X' - AX = Bu$$

A : matrice (p × p) à coefficients constants caractéristique du régime autonome.
B : vecteur colonne à coefficients constants traduisant l'influence de l'entrée sur le comportement du système.

A ce stade de la description du processus, il est important de déterminer s'il possède les propriétés de stabilité et de commandabilité.

1.3.1. Stabilité /6/

Définissons pour le système (1.2) une norme pour u(t) et une norme pour X(t) que nous noterons respectivement |u(t)| et ||X(t)|| .

Le système est stable si, sous l'influence d'une entrée limitée en amplitude, le vecteur d'état X conserve une norme ||X|| bornée supérieurement pour toute valeur de t.

L'intégration de l'équation (1.3.) ne présente aucune difficulté et

t :

$$(1.4.) \quad X = e^{At} \left[X_0 + \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \right]$$

La formule de Sylvester permet d'écrire :

$$(1.5.) \quad e^{At} = \sum_{i=1}^p e^{\lambda_i t} w_i$$

λ_i : valeurs propres de la matrice A

w_i : matrices constantes

Considérons séparément $e^{At} X_0$ qui correspond au régime libre et $e^{At} \left[\int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \right]$ qui correspond à la contribution de l'entrée.

$e^{At} X_0$ est non divergent si, et seulement si, les valeurs propres λ_i de la matrice A sont à partie réelle non positive. Il tend asymptotiquement vers zéro si les parties réelles des λ_i sont négatives strictement.

L'entrée étant limitée en amplitude, il est possible de trouver U positif tel que :

$$|u(t)| < U$$

pour toute valeur de t.

En introduisant une norme multiplicative :

$$H = \left\| \int_0^t e^{At} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \right\| \leq \left\| e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} d\tau \right\| \cdot \|B\| \cdot U$$

Si la matrice A est inversible nous déduisons :

$$H \leq \left\| e^{At} A^{-1} \left[I - e^{-At} \right] \right\| \cdot \|B\| \cdot U$$

Soit :

$$H \leq \left\| e^{At} \right\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|B\| \cdot U + \left\| e^{At} A^{-1} e^{-At} \right\| \cdot \|B\| \cdot U$$

Si aucune valeur propre de A n'a une partie réelle positive, le premier terme est majoré par :

$$\left\| e^{At} \right\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|B\| \cdot U$$

En remarquant que e^{At} est commutable avec A, il vient :

$$\left\| e^{At} A^{-1} e^{-At} \right\| = \left\| A^{-1} (e^{At} A) \cdot (e^{At} A)^{-1} \right\| = \|A^{-1}\|$$

Nous déduisons de ces résultats que si la matrice de transformation A est inversible, le vecteur d'état a une norme bornée si les λ_i sont à partie réelle négative.

1.3.2. Commandabilité /5,7,8/

Un système est commandable si, étant dans un état X_0 , il est possible de trouver une commande admissible le transférant dans un état X_1 arbitraire.

Ces transformations sont possibles si et seulement si la matrice N définie par :

$$N = \begin{bmatrix} B, & AB, & \dots, & A^{p-1} B \end{bmatrix}$$

et de rang p.

1.4. Systemes bouclés

La seule information utilisable en vue de la réalisation d'une chaîne d'asservissement est la sortie du système. Cette grandeur est liée au vecteur d'état et à la commande par la relation linéaire :

$$(1.6.) \quad s = C X + d u$$

C : matrice (1 × p) à coefficients constants

d : scalaire constant

Cette relation jointe à (1.2) caractérise complètement le filtre

1.4.1. Observabilité /5,7,8/

Il n'est possible d'envisager d'imposer l'état d'un système que s'il est possible de déterminer son état initial par simple observation de s sur un intervalle de temps.

On démontre qu'un système possède cette propriété d'observabilité si, et seulement si, la matrice M définie par :

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix}$$

est de rang p.

1.4.2. Formulation des systèmes bouclés linéaires

Considérons l'asservissement de la figure 1.3.

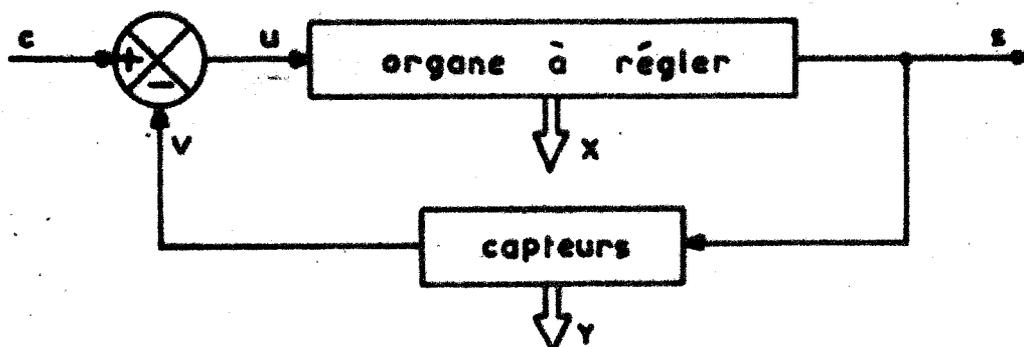


Figure 1.3.

L'organe à régler est linéaire et le vecteur d'état X qui lui est attaché d'ordre p . Nous supposons les filtres servant à élaborer la commande incorporés dans cet organe.

L'ensemble des systèmes d'observation ou capteurs admet un vecteur d'état Y d'ordre q .

Les équations attachées aux deux blocs s'écrivent :

$$(1.7.) \quad \begin{aligned} X' &= A_1 X + B_1 u \\ s &= C_1 X + d_1 u \end{aligned}$$

$$(1.8.) \quad \begin{aligned} Y' &= A_2 Y + B_2 s \\ v &= C_2 Y + d_2 s \end{aligned}$$

A_1, A_2 matrices ($p \times p$) et ($q \times q$)
 B_1, B_2 vecteurs colonnes de p et q composantes
 C_1, C_2 vecteurs lignes de p et q composantes
 d_1, d_2 scalaires.

Le fonctionnement de l'asservissement est entièrement défini par l'adjonction d'une relation introduite par le discriminateur.

$$(1.9.) \quad u = c - v$$

L'état de l'organe est défini par p paramètres, celui de l'ensemble des capteurs par q paramètres, il est naturel de chercher, pour le système d'entrée c et de sortie s , un vecteur d'état d'ordre $p + q$.

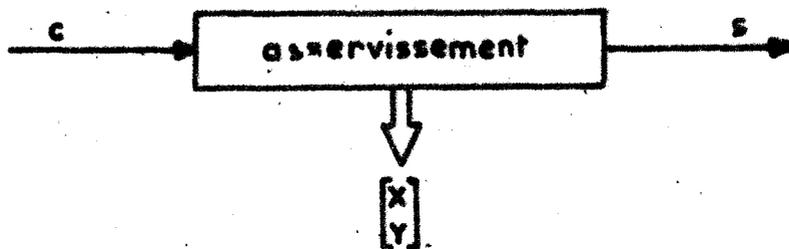


Figure 1.4. (a)

En supposant $d_1 \cdot d_2$ différent de moins un, l'élimination de u et v entre les relations (1.7.) (1.8.) et (1.9.) conduit aux nouvelles relations matricielles :

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - \frac{B_1 d_2 C_1}{1+d_1 d_2} & - \frac{B_1 C_2}{1+d_1 d_2} \\ \frac{B_2 C_1}{1+d_1 d_2} & A_2 - \frac{B_2 d_1 d_2}{1+d_1 d_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{B_1}{1+d_1 d_2} \\ \frac{B_2 d_1}{1+d_1 d_2} \end{bmatrix} e$$

$$s = \begin{bmatrix} \frac{C_1}{1+d_1 d_2} & - \frac{d_1 C_2}{1+d_1 d_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \frac{d_1}{1+d_1 d_2} c$$

Nous trouvons ainsi une forme semblable à celles qui sont liées aux systèmes en boucle ouverte soit, en notant l'état total Z :

$$(1.10.) \quad \begin{aligned} Z' &= A Z + B c \\ s &= C Z + d c \end{aligned}$$

Les conditions de stabilité, commandabilité, observabilité, s'appliquent aux relations (1.10.)

Dans le cas où $d_1 d_2 = -1$, la relation qui donne v s'écrit :

$$v = \begin{bmatrix} d_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} - u$$

La fermeture de la chaîne conduit à

$$\begin{bmatrix} d_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = c$$

Les composantes du vecteur Z ne sont plus indépendantes et le choix d'un nouveau vecteur d'état s'impose.

1.5. Systemes à commande non linéaire /1,2,3,4,9,10/

Une représentation linéaire ne correspond généralement qu'à une approximation dans l'identification ou à des limitations dans les conditions d'utilisation du système.

Afin d'améliorer le modèle, il convient d'introduire dans les équations différentielles le régissant des coefficients non constants. L'outil mathématique dont nous disposons alors, beaucoup moins perfectionné que dans le domaine linéaire, ne nous permettra plus, en général, de calculer la solution avec précision.

Un grand nombre de structures, fondamentalement différentes peuvent se présenter dans de tels systèmes. Nous n'envisagerons que des asservissements dont le modèle, généralement admis par les automaticiens, peut se ramener au schéma bloc de la figure 1.4. (b)

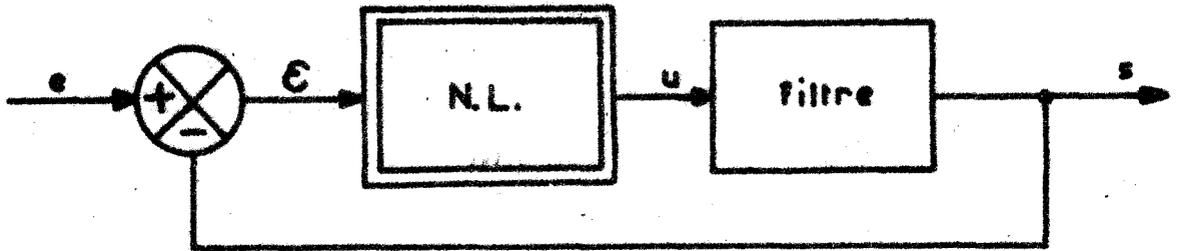


Figure 1.4. (b)

Le signal de commande u est élaboré par la non-linéarité à partir du signal d'erreur e selon une loi de la forme $u = f(\epsilon)$ s'il n'apparaît aucun effet de mémoire notable.

Cette structure rend compte de phénomènes comme le pompage, la synchronisation ou le saut qu'une théorie placée dans l'hypothèse linéaire est impuissante à expliquer.

La formulation complète de ces systèmes s'obtient en adjoignant aux équations (1.7.) et (1.8.) les relations :

$$(1.11.) \quad \begin{cases} u = f(\epsilon) \\ \epsilon = e - v \end{cases}$$

Lorsque le retour est unitaire, conformément au schéma de la figure 1.4 (b) le modèle devient :

$$(1.12.) \quad \begin{cases} X' = AX + Bu \\ s = CX + du \\ u = f(\epsilon) \\ \epsilon = e - s \end{cases}$$

L'introduction du coefficient flottant f^* défini par $f^* = \frac{f(\epsilon)}{\epsilon}$ permet d'écrire $u = f^* \cdot \epsilon$. Les relations (1.12.) se réduisent alors à :

$$\left\{ \begin{array}{l} X' = \left(A - \frac{f^*}{1+df^*} BC \right) X + \frac{f^* e}{1+df^*} = Q X + \frac{f^* e}{1+df^*} B \\ s = \frac{1}{1+df^*} CX + \frac{df^*}{1+df^*} e \end{array} \right.$$

Cette écriture permet l'étude d'un certain nombre de propriétés des systèmes non linéaires. Nous citerons deux résultats connus relatifs à la stabilité provenant de l'utilisation de fonctions de Ljapunov de type quadratique. Les conditions obtenues limitent la variation du coefficient f^* .

Le premier indique que pour assurer la stabilité du système il suffit qu'il existe une matrice \underline{C} carrée d'ordre p telle que pour chaque ligne on puisse écrire :

$$c_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p |c_{ij}| < 0$$

c_{ij} coefficients de la matrice \underline{C}
 \underline{C} peut être Q , sa transposée Q^t ou encore la somme $\frac{Q+Q^t}{2}$

Pour les systèmes dont la matrice de transformation A est réelle symétrique, on peut affirmer que le domaine de stabilité linéaire est inclus dans le domaine de stabilité non linéaire.

1.6. Systèmes multivariables linéaires /I4, I5/

Un système multivariable possède m entrées et n sorties scalaires qu'il est possible d'ordonner sous forme vectorielle. Il existe alors, dans le domaine linéaire, un modèle mathématique formellement analogue à celui d'un système monovariable.

$$(1.13.) \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = AX + BU \\ S = CX + DU \end{array} \right.$$

X, U, S vecteurs d'état, des commandes et des sorties de dimensions respectives p, m, n .

A, B, C, D matrices à coefficients constants de dimensions $(p \times p), (p \times m), (n \times p), (n \times m)$.

Il est souvent préférable de chercher à identifier un processus sous la forme :

$$(1.14.) \quad \left\{ \begin{array}{l} FX' = AX + BU \\ S = CX + DU \end{array} \right.$$

En effet, la matrice F est souvent introduite naturellement par la structure même du système et l'identification sous la forme :

$$\begin{aligned} X' &= F^{-1} AX + F^{-1} BU \\ S &= CX + DU \end{aligned}$$

peut devenir très pénible et, à la limite, inextricable.

1.6.1. Stabilité des systèmes multivariables

En chaîne ouverte, la loi d'évolution du vecteur X en fonction du temps et des conditions initiales s'écrit :

$$(1.15.) \quad X = e^{At} \begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{-A\tau} B U(\tau) d\tau$$

La condition nécessaire et suffisante de stabilité s'énonce donc de la même façon que pour un système monovarié : il faut et il suffit que les valeurs propres λ_i de la matrice A soient à partie réelle négative.

1.6.2. Commandabilité

Un système multivariable est commandable s'il existe un vecteur de commande $U(t)$ permettant de le transférer d'un état initial X_0 quelconque à un état final X_1 arbitraire.

Certains systèmes peuvent être commandés à l'aide d'une entrée e_j . L'étude se réduit alors au cas monovarié en ne considérant que la colonne j de la matrice B .

Les systèmes dont toutes les entrées possèdent cette propriété sont appelés normaux.

L'intérêt des systèmes multivariables est particulièrement important lorsqu'ils ne sont commandables par rapport à aucune entrée prise séparément. Un signal de commande faisant intervenir plusieurs ou toutes les entrées peut alors, sous certaines conditions, amener le système dans l'état désiré.

Appliquons la formule de Sylvester dans la relation (1.15.) :

$$Y(t) = e^{-At} X - X_0 = \int_0^t \sum_{k=1}^p a_k(\tau) \cdot A^{k-1} B U(\tau) d\tau$$

Soit, en restant u_j les composantes du vecteur U :

$$Y(t) = \sum_{k=1}^p A^{k-1} B \begin{bmatrix} \int_0^t a_k u_1 d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t a_k u_m d\tau \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^p A^{k-1} B V_k$$

Sous forme matricielle il vient :

$$Y(t) = \begin{bmatrix} B, AB, \dots, A^{p-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_p \end{bmatrix} = N \cdot W$$

Ce système de p équations à m×p inconnues admet une infinité de solutions s'il est possible d'extraire de la matrice N, par suppression de colonnes, une matrice régulière d'ordre p.

Les degrés de liberté qui en découlent pourraient, théoriquement, être exploités au cours d'une synthèse pour tenir compte d'un plus grand nombre de contraintes.

Dans le cas où aucune sous matrice régulière d'ordre p ne peut être trouvée, le système n'est pas commandable.

1.6.3. Observabilité

Un système multivariable est observable si la connaissance de ses entrées et de ses sorties sur un intervalle de temps (t₀, t₁) permet de déterminer son état initial X(t₀).

Nous sommes ainsi amenés à résoudre les équations vectorielles :

$$\begin{cases} C X_0 = S_0 \\ CA X_0 = S'_0 \\ \dots\dots\dots \\ CA^{p-1} X_0 = S_0^{(p-1)} \end{cases}$$

Ces p équations vectorielles représentent m p équations scalaires servant à déterminer les p composantes du vecteur d'état.

En notant :

$$S_{mv} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S'_0 \\ \vdots \\ S_0^{(p-1)} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix} \quad SM = \begin{bmatrix} S_0, C \\ S'_0, CA \\ \dots\dots\dots \\ S_0^{(p-1)}, CA^{p-1} \end{bmatrix}$$

il vient : $M X_0 = S_{mv}$

Le système est observable si et seulement si la matrice M est de rang p et si tous les déterminants d'ordre p+1 de la matrice SM sont nuls.

Il est évident, que, dans la pratique, la seconde condition ne pourra pas être vérifiée puisqu'elle suppose une précision mathématique dans l'identification et les

mesures de S_0 et de ses dérivées. Les valeurs des déterminants d'ordre $p+1$ de la matrice SM pourront donc servir à évaluer grossièrement l'incertitude sur les résultats expérimentaux obtenus.

1.7. Systèmes multivariables non linéaires

Lorsque l'approximation linéaire s'avère inadaptée au système étudié, il faut introduire des termes non constants dans les matrices A et B.

Il est impossible de considérer les problèmes posés par les systèmes multivariables non linéaires dans toute leur généralité, aussi nous limiterons-nous, dans le cadre de ces travaux à l'étude d'un type de structure ayant les propriétés suivantes :

Le système possède n entrées e_j et autant de sorties s_i . Chaque information e_j est traitée par un ou plusieurs filtres linéaires L_{ij} fournissant chacun une information w_{ij} .

Les n grandeurs \underline{E}_i définies par :

$$\underline{E}_i = \sum_{j=1}^k w_{ij}$$

constituent les commandes de n systèmes asservis monovariables non linéaires correspondant à la structure précédemment définie.

Un deuxième ensemble de filtres monovariables linéaires introduit des couplages entre les différents asservissements élémentaires. Un filtre M_{il}^α capte une information α en un point de l'asservissement i et sa sortie, notée y_{il}^α , est injectée sur le discriminateur Σ_l du système bouclé de rang l .

Dans ces conditions, les différentes sorties apparaissent comme des entrées parmi les autres sur les discriminateurs des systèmes asservis monovariables.

Le schéma-bloc correspondant à cette définition est représenté à la figure 1.5.

L'étude des \underline{E}_i peut se faire indépendamment des vecteurs d'état X et Y, ils pourront donc être considérés comme entrées du système multivariable non linéaire.

Afin de simplifier encore le modèle, on effectue sur le schéma de la figure 1.5 une suite de transformations élémentaires qui mènent à la représentation de la figure 1.6. \underline{E}_i devient E_i et V_i est défini par :

$$(1.16.) \quad V_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^u y_{ji}$$

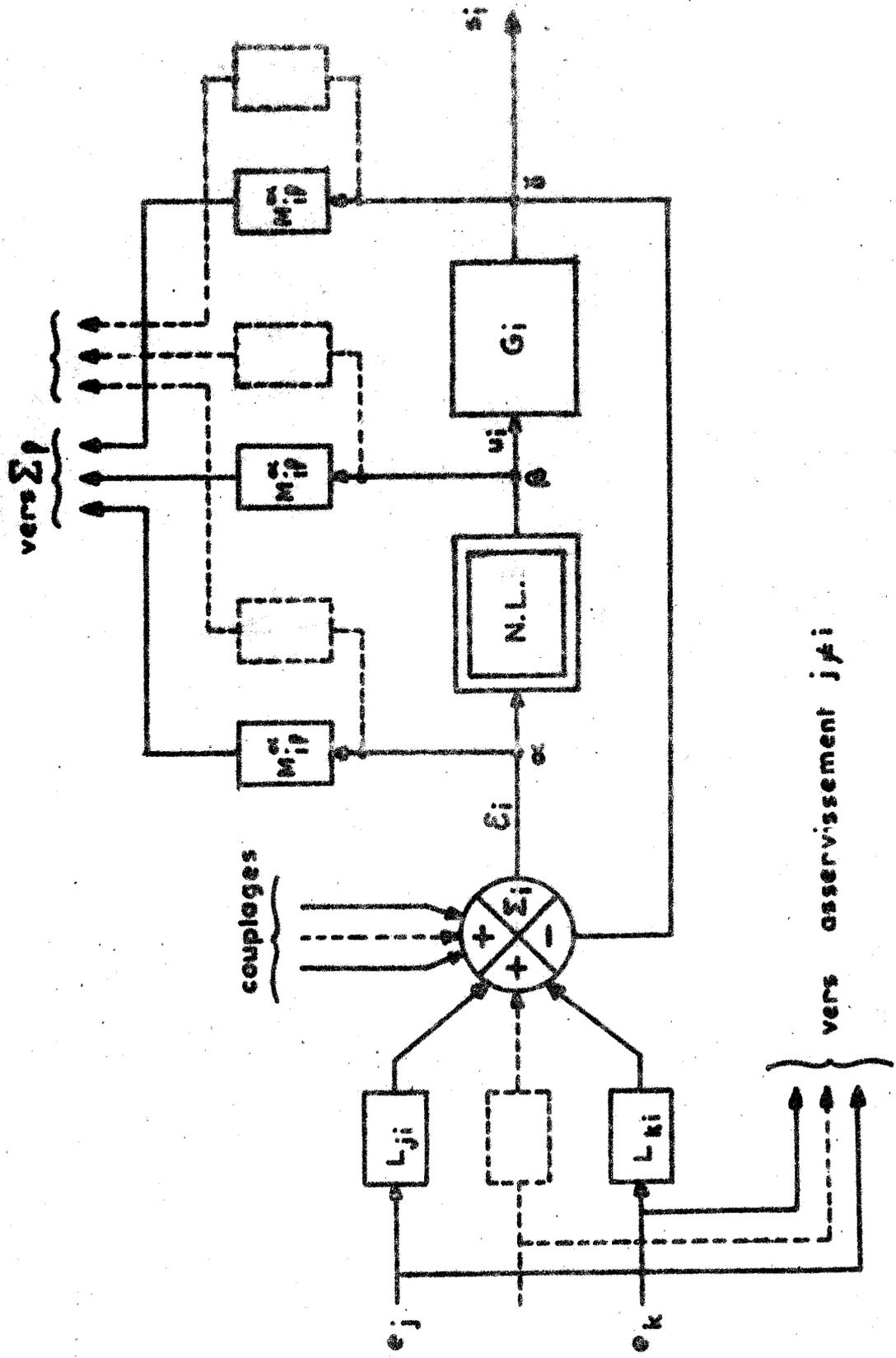


Figure 1-5



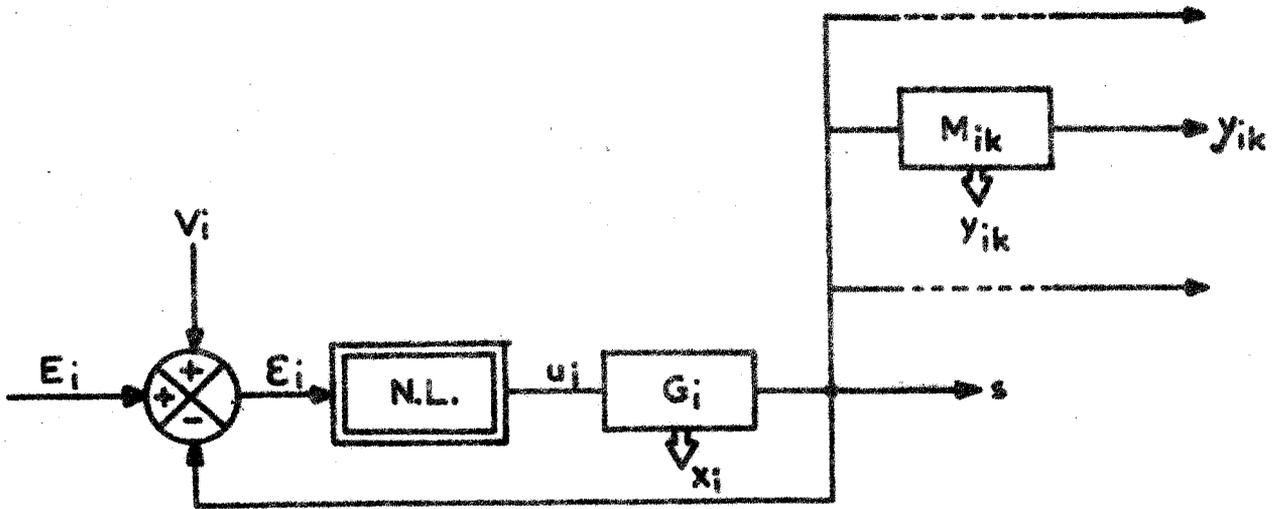


Figure 1.6.

Ces systèmes sont régis par l'ensemble d'équations

$$(1.17.) \quad X'_i = A_{ii} X_i + B_{ii} u_i$$

$$(1.18.) \quad s_i = C_{ii} X_i + d_{ii} u_i$$

$$(1.19.) \quad u_i = f(\epsilon_i) = f_i^* \cdot \epsilon_i$$

$$(1.20.) \quad \epsilon_i = E_i + V_i - s_i$$

$$(1.21.) \quad Y'_{ik} = A_{ik} Y_{ik} + B_{ik} s_i$$

$$(1.22.) \quad y_{ik} = C_{ik} Y_{ik} + d_{ik} s_i$$

Pour la plupart des systèmes, le coefficient d_{ii} est nul, il vient alors :

$$(1.23.) \quad X'_i = A_{ii} X_i + B_{ii} f_i^* \left[E_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (C_{ji} Y_{ji} + d_{ji} C_{jj} X_j) - C_{ii} X_i \right]$$

$$(1.24.) \quad Y'_{ik} = A_{ik} Y_{ik} + B_{ik} C_{ii} X_i$$

$$(1.25.) \quad s_i = C_{ii} X_i$$

En ordonnant les composantes des vecteurs d'état de tous les filtres dans un vecteur d'état total Z et en groupant entrées et sorties dans des vecteurs E et S , nous pouvons réduire les écritures (1.23.), (1.24.) (1.25.) à :

$$(1.26.) \quad Z' = AZ + BE$$

$$(1.27.) \quad S = CZ$$

Les matrices A et B ont des coefficients non constants: il n'est donc pas possible d'utiliser les méthodes propres aux systèmes linéaires pour l'étude de ce modèle. Par contre, les critères élaborés sur les systèmes monovariabiles non linéaires et ne faisant intervenir que les propriétés de la matrice A sont utilisables.

Chapitre 2

Méthode d'étude des réseaux linéaires

2.1. Introduction

Un réseau électrique linéaire peut être considéré comme un processus multivariable composé d'un certain nombre de systèmes asservis monovariabiles présentant des interactions. Les deux ensembles admettent alors les mêmes équations.

La méthode de Kron permet de systématiser cette recherche. Des représentations du système dans l'espace d'état en découlent très naturellement. Il est possible, si on le désire, d'en déduire les relations entre les entrées et les sorties par la matrice de transfert.

L'introduction des opérateurs de dérivation et d'intégration $\frac{1}{p}$ allège considérablement les écritures. Dans le cadre d'une théorie linéaire, les grandeurs R, C, L sont constantes, même s'il s'agit de mutuelles impédances.

2.2. Méthode de Kron /I1, I2, I3/

Dans les branches du circuit peuvent circuler des courants dont les intensités dépendent des sources d'énergie.

En définissant des sens positifs de référence concordants pour la tension et le courant, il vient, pour la branche j :

$$(2.1.) \quad V_j = E_j - Z_{jj} I_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^b Z_{jk} I_k$$

V_j, I_j, Z_{jj} tension, courant et impédance de la branche j

Z_{jk} mutuelle impédance de la branche k sur la branche j.

Ces b relations s'écrivent matriciellement :

$$(2.2.) \quad \begin{bmatrix} V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_b \end{bmatrix} - Z_b \begin{bmatrix} I_b \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} V_b \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} I_b \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} E_b \end{bmatrix}$ vecteurs des tensions, courants et forces électromotrices de branches.

Z_b matrice des impédances de branches.

Si le réseau comporte n noeuds, la première loi de Kirchoff introduit n-1 relations entre les courants, il faut donc b-n+1 équations de mailles indépendantes pour résoudre le problème.

Le choix des mailles indépendantes est un problème délicat si l'on n'utilise pas la notion d'arbre. En effet, un arbre est un ensemble de n-1 branches reliant les n noeuds du réseau ; aucun courant ne peut y circuler mais l'adjonction d'une branche définit sans ambiguïté une maille.

2.3. Méthode des mailles

Il est possible de choisir les courants de maille comme courants indépendants et de les ordonner dans un vecteur $\begin{bmatrix} i \end{bmatrix}$. La première loi de Kirchoff conduit alors à :

$$(2.3.) \quad \begin{bmatrix} I_b \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} i \end{bmatrix}$$

α matrice $b \times (b-n+1)$ de terme général α_{pq} .

$\alpha_{pq} = 0$ si la branche p n'appartient pas à la maille q

$\alpha_{pq} = \pm 1$ si la branche p appartient à la maille q. Le signe + correspond au cas où les sens de référence sont les mêmes pour le courant de branche et le courant de maille dans la branche p. Le signe - correspond au cas contraire.

En remarquant qu'à une colonne de la matrice α correspond une maille du réseau et en notant α^t la matrice transposée de α , la deuxième loi de Kirchoff s'écrit :

$$(2.4.) \quad \alpha^t \begin{bmatrix} V_b \end{bmatrix} = 0$$

Par rapprochement des égalités (2.2.) et (2.6.) et en utilisant la relation de liaison (2.3.), il vient :

$$(2.5.) \quad \alpha^t \begin{bmatrix} E_b \end{bmatrix} = \alpha^t Z_b \alpha \begin{bmatrix} i \end{bmatrix}$$

Par inversion de la matrice d'opérateurs $Z = \alpha^t Z_b \alpha$ on déduit la matrice de transfert qui lie les courants de branches aux forces électromotrices de branches :

$$(2.6.) \quad \begin{bmatrix} I_b \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \alpha^t Z_b \alpha \end{bmatrix}^{-1} \alpha^t \begin{bmatrix} E_b \end{bmatrix}$$

Le terme général z_{qr} de la matrice impédance Z est l'impédance symbolique de la branche commune aux mailles q et r affectée du signe $+$ si les sens de référence des deux mailles y coïncident ou du signe $-$ s'ils diffèrent.

Cette propriété montre que la matrice Z est symétrique par rapport à sa diagonale principale et le terme a_{qq} est la somme de toutes les impédances symboliques de la maille q .

2.4. Modèles mathématiques associés à la méthode des mailles

La méthode de Kron ne fait pas appel à la notion d'état du système. Mais nous nous proposons de déduire de cette méthode un modèle dans l'espace d'état susceptible de conduire à un algorithme de calcul numérique / I9 / ou analogique.

Posons :

$$\alpha^t \begin{bmatrix} E_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \end{bmatrix}$$

Le terme e_j du vecteur $\begin{bmatrix} e \end{bmatrix}$ est la somme des forces électromotrices de la maille j .

La jème ligne de l'expression (2.5.) s'écrit :

$$(2.7.) \quad e_j = L_{jj} \frac{di_j}{dt} + R_{jj} i_j + \frac{\int_0^t i_j dt}{c_{jj}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{b-n+1} \left(L_{jk} \frac{di_k}{dt} + R_{jk} i_k + \frac{\int_0^t i_k dt}{c_{jk}} \right)$$

En notant :

$$(2.8.) \quad v_j = R_{jj} i_j + \frac{\int_0^t i_j dt}{c_{jj}} = R_{jj} i_j + \frac{Q_j}{c_{jj}}$$

et :

$$(2.9.) \quad w_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{b-n+1} \left(L_{jk} \frac{di_k}{dt} + R_{jk} i_k + \frac{\int_0^t i_k dt}{c_{jk}} \right)$$

il vient :

$$(2.10.) \quad L_{jj} \frac{di_j}{dt} = e_j - v_j - w_j = \frac{d\phi_j}{dt}$$

Cette décomposition conduit au schéma fonctionnel de la figure 2.1. qui fait apparaître pour le système élémentaire deux variables d'état possibles : ϕ_j et Q_j .

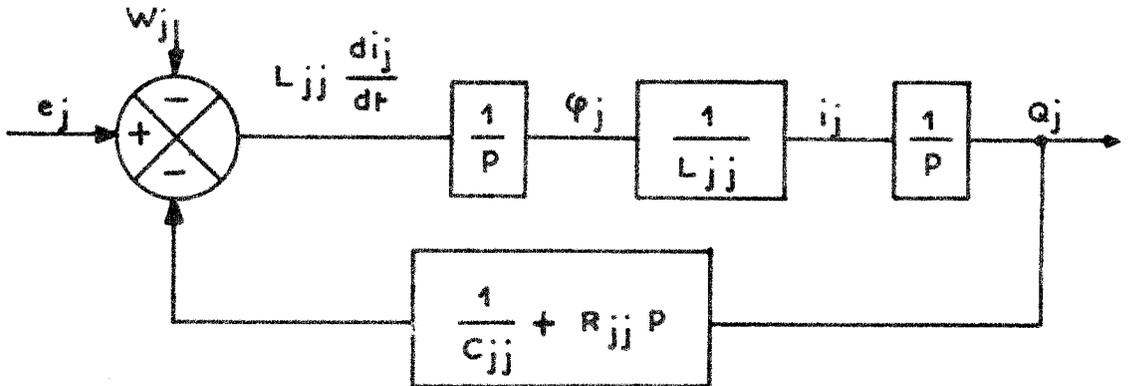


Figure 2-1

Soient :

$$x_j^1 = \phi_j$$

$$x_j^2 = Q_j$$

les "variables d'état" que l'on ordonne dans un vecteur X. L'expression (2.7.) entraîne alors :

$$(2.11.) \quad \dot{x}_j^1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{b-n+1} \frac{L_{jk}}{L_{kk}} \dot{x}_k^1 = e_j - \left[\frac{R_{jj}}{L_{jj}} x_j^1 + \frac{x_j^2}{c_{jj}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{b-n+1} \left(\frac{R_{jk}}{L_{kk}} x_k^1 + \frac{x_k^2}{c_{jk}} \right) \right]$$

$$(2.12.) \quad \dot{x}_j^2 = \frac{x_j^1}{L_{jj}}$$

L'ensemble de toutes les relations (2.11.) et (2.12.) obtenues en faisant varier j de 1 à b-n+1 se réduit à une écriture matricielle de la forme :

$$(2.13.) \quad F \dot{X} = A \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \end{bmatrix}$$

L'équation (2.13.) n'est une équation d'état que si les composantes du vecteur X ainsi définies sont indépendantes.

2.5. Modalités de choix des variables d'état

Si le déterminant de l'une des deux matrices A ou F est nul, le choix d'un nouveau vecteur d'état s'impose. Nous allons donc étudier les conditions de nullité de ces déterminants et en déduire des règles qui permettent, dans la plupart des cas, d'obtenir des variables d'état indépendantes dès la première mise en équation.

Tous les termes de la diagonale principale de F sont égaux à 1. Elle ne peut donc comporter ni ligne ni colonne identiquement nulle.

Si le choix d'un arbre fait apparaître une maille ne comportant qu'une seule self et que celle-ci appartient à une branche de l'arbre, l'égalité relative à la maille k :

$$L_{jk} = L_{kk}$$

introduit un 1 en dehors de la diagonale principale de F.

Si la maille j possède la même propriété, les égalités :

$$(2.14.) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_{jk} = L_{kj} \\ L_{kj} = K_{jj} \end{array} \right.$$

montrent que, s'il n'existe pas de valeurs de m et n telles que :

$$(2.15.) \quad L_{jm} \neq L_{km}$$

et :

$$(2.16.) \quad \frac{L_{nj}}{L_{jj}} \neq \frac{L_{nk}}{L_{kk}}$$

soient simultanément vérifiées, l'égalité de deux lignes ou deux colonnes de la matrice F entraîne la nullité de son déterminant.

S'il existe deux mailles j et k telles que $c_{jj} = c_{kk} = c_{jk} = c_{kj}$, le déterminant de la matrice A est nul s'il n'existe pas de valeur de l telle que :

$$(2.17.) \quad c_{lj} \neq c_{lk}$$

Tout arbre respectant ces conditions conduira à des variables d'état indépendantes sauf pour certains ensembles de valeurs numériques particuliers. Dans ce cas, on

réduira la dimension du vecteur X en tenant compte des remarques faites sur la matrice.

Si l'on ne cherche pas à obtenir tous les arbres satisfaisant aux conditions énoncées plus haut, on pourra procéder de la façon suivante :

- a) Toutes les branches purement résistives ne formant pas de mailles seront adoptées.
- b) S'il est nécessaire d'adjoindre d'autres branches pour constituer l'arbre, on les prendra selon l'ordre de priorité décroissante suivant :
 - α) Les branches n'engendrant aucune maille dont le seul terme inductif ou capacitif soit celui de la branche d'arbre
 - β) Les branches ne faisant pas apparaître plus d'une maille du type α
 - γ) Les branches ne respectant pas ces conditions et pour lesquelles il faut faire les vérifications définies par les relations (2.14.) à (2.17.).

2.6. Exemple d'application

Soit le réseau de la figure 2.2.

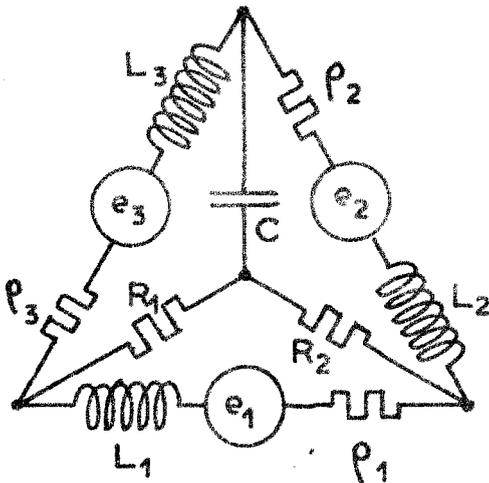


Figure 2.2.

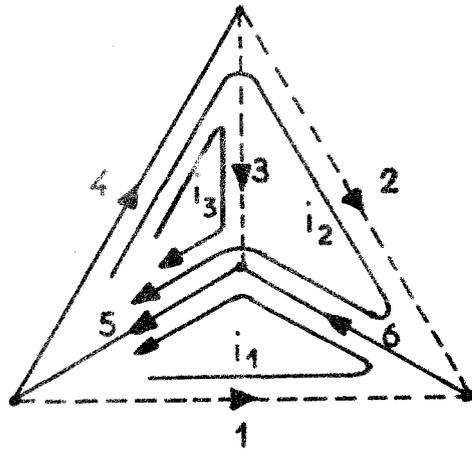


Figure 2.3.

Nous choisissons l'arbre constitué de R_1 , R_2 , R_3 , L_3 qui correspond aux règles indiquées.

Si, au lieu de prendre cet arbre, nous avions retenu celui composé des éléments R_1 , R_2 et C , les deux mailles définies par (R_1, C, R_3, L_3) et

(R_2, C, ρ_2, L_2) auraient comporté le condensateur C. Le circuit ne comprenant pas d'autre condensateur, la même charge Q serait intervenue dans deux asservissements élémentaires et le système aurait semblé être d'ordre cinq alors qu'il n'est que d'ordre quatre.

Le schéma de la figure 2.3. associé au réseau précise la numérotation et les sens de référence. La matrice impédance s'écrit alors :

$$Z = \begin{bmatrix} L_1 p + R_1 + R_2 + \rho_1 & R_1 + R_2 & R_1 \\ R_1 + R_2 & (L_2 + L_3) p + R_1 + R_2 + \rho_2 + \rho_3 & L_3 p + R_1 + \rho_3 \\ R_1 & L_3 p + R_1 + \rho_3 & L_3 p + R_1 + \rho_3 + \frac{1}{c p} \end{bmatrix}$$

Le système est donc régi par les équations :

$$(2.18.) \quad L_1 \frac{di_1}{dt} = e_1 - (R_1 + R_2 + \rho_1) i_1 - (R_1 + R_2) i_2 - R_1 i_3$$

$$(2.19.) \quad (L_2 + L_3) \frac{di_2}{dt} = e_2 - (R_1 + R_2 + \rho_2 + \rho_3) i_2 - (R_1 + R_2) i_1 - L_3 \frac{di_3}{dt} - (R_1 + \rho_3) i_3$$

$$(2.20.) \quad L_3 \frac{di_3}{dt} = e_3 - (R_1 + \rho_3) i_3 - \frac{\int_0^t i_3 dt}{c} - R_1 i_1 - L_3 \frac{di_2}{dt} - (R_1 + \rho_3) i_2$$

Le schéma fonctionnel correspondant à ces équations (Figure 2.4.) met en évidence une propriété générale des circuits électriques à éléments passifs : les systèmes multivariables associés présentent des couplages de type proportionnel où le temps n'intervient pas. L'ordre du système global est donc déterminé par l'ordre des boucles élémentaires exclusivement.

Le choix des variables d'état suivant :

$$* x_1^1 = L_1 i_1 = \phi_1 \quad * x_2^1 = (L_2 + L_3) i_2 = \phi_2 \quad * x_3^1 = L_3 i_3 = \phi_3$$

$$* x_3^2 = \int_0^t i_3 dt = Q$$

mène au modèle matriciel (2.21.)

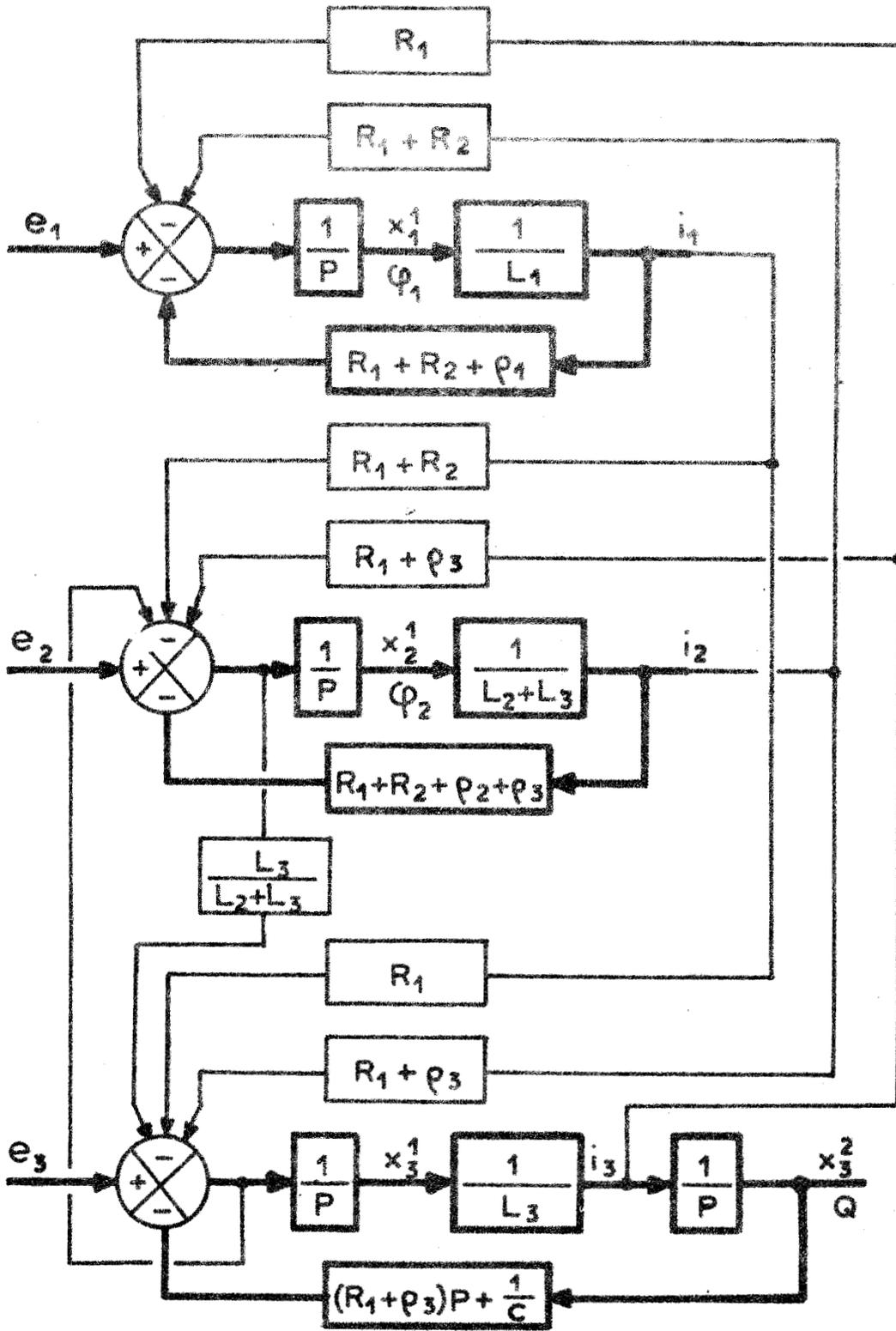


Figure 2.4.



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{L_3}{L_2+L_3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{R_1+R_2+\rho_1}{L_1} & \frac{R_1+R_2}{L_2+L_3} & \frac{R_1}{L_3} & 0 \\ \frac{R_1+R_2}{L_1} & \frac{R_1+R_2+\rho_2+\rho_3}{L_2+L_3} & \frac{R_1+\rho_3}{L_3} & 0 \\ \frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1+\rho_3}{L_2+L_3} & \frac{R_1+\rho_3}{L_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(2.21.)

2.7. Remarque

S'il y a un transformateur linéaire dans le circuit, son étude peut être envisagée par la même méthode.

Supposons les enroulements primaire et secondaire parcourus respectivement par des courants i_1 et i_2 (figure 2.6.)

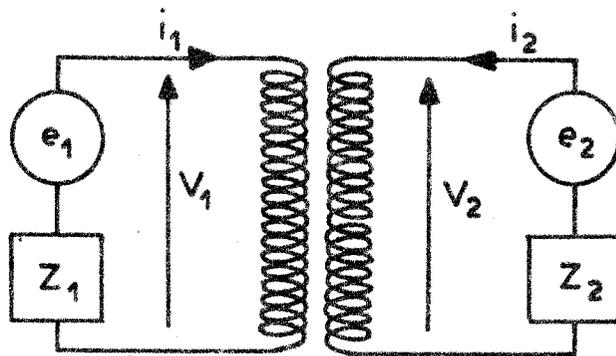


Figure 2.6.

Son fonctionnement est régi par les relations :

$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

En choisissant comme variables d'état :

$$\phi_1 = L_1 i_1 \quad \text{et} \quad \phi_2 = L_2 i_2$$

La "sous matrice premier membre" lui correspondant dans le modèle mathématique s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{M}{L_2} \\ \frac{M}{L_1} & 1 \end{bmatrix}$$

Le déterminant associé est nul si :

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} = 1$$

Un transformateur sans pertes est donc un système d'ordre un, mais si des pertes interviennent linéairement, le système est d'ordre 2. Dans le premier cas, son état est repéré par la valeur du flux dans le noyau de fer et dans le second cas par les deux intensités i_1 et i_2 .

2.8. Méthode des noeuds

La méthode des noeuds est, en tous points, semblable à la méthode des mailles.

A partir du choix d'un arbre, elle considère les tensions dans ses branches comme inconnues indépendantes et établit les liaisons par l'intermédiaire de la seconde loi de Kirchoff.

La connaissance de la matrice des admittances de branches Y_b et du vecteur sources de courant $\underline{I_s}$ conduit au système d'équations suivant où \underline{v} désigne le vecteur des tensions de branches d'arbre :

$$(2.22.) \quad \underline{I_b} = \underline{I_s} - Y_b \underline{v_b}$$

$$(2.23.) \quad \underline{v_b} = \beta \underline{v}$$

$$(2.24.) \quad \beta^t \underline{I_b} = 0$$

Il vient alors la relation :

$$(2.25.) \quad \beta^t \underline{I_s} = \beta^t Y_b \beta \underline{v}$$

La matrice $\beta^t Y_b \beta$ a la même forme que la matrice Z et les propriétés se correspondent selon les lois du tableau suivant :

Maille.....	Noeud
Association série.....	Association parallèle
Source de tension.....	Source de courant
tension v.....	Courant i
Flux ϕ	Charge Q
Résistance R.....	Admittance G
Self inductance L.....	Capacité C.

En régime permanent sinusoïdal, nous remarquons que deux réseaux qui se correspondent selon ces règles sont duals. En effet, le système est représenté par l'opérateur matriciel $Z_b(j\omega)$ dans la loi :

$$\begin{bmatrix} v_b \end{bmatrix} = Z_b(j\omega) \begin{bmatrix} I_b \end{bmatrix}$$

et l'opérateur M^* adjoint à Z_b est défini par la relation :

$$M^* = Z_b^t$$

M^* a la structure d'une matrice admittance.

2.9. Conclusion

Ce nouvel outil d'analyse des réseaux électriques linéaires permet d'aborder l'étude de ces circuits au moyen des méthodes propres aux systèmes asservis.

La formulation des systèmes dans l'espace d'état permet une extension au domaine non linéaire, c'est pourquoi nous allons, dans le chapitre suivant, envisager les problèmes posés par la présence d'éléments non linéaires.

Chapitre 3

Extension de la méthode de Kron aux systèmes non linéaires

3.1. Généralités /I8, I9/

En première analyse, il peut sembler qu'un réseau comportant des éléments pour lesquels le principe de superposition ne s'applique pas amène une formulation mathématique peu exploitable. Cependant, il est généralement possible d'isoler les non-linéarités en étendant les méthodes d'identification relatives au domaine linéaire issues des travaux de Kron.

Les réseaux que nous étudions dans ce chapitre sont constitués de selfs impédances linéaires ou non. Les variables qui caractérisent l'état des circuits sont d'une part les flux et d'autre part la charge des capacités.

Les valeurs des termes résistifs R , capacitifs C et inductifs L seront, dans l'hypothèse non-linéaire, respectivement définis par les relations :

$$\begin{aligned} R^* &= R(i) & \text{ou} & & R^* &= R(v) \\ C^* &= C(q) \\ L^* &= L(i) & \text{ou} & & L^* &= L(\phi) \quad \text{avec} \quad \phi = L^* i. \end{aligned}$$

i est le courant parcourant le composant, v la différence de potentiel à ses bornes et q la charge du condensateur.

3.2. Modèles associés à la méthode des mailles

S'il est possible de choisir un arbre linéaire constitué de toutes les branches purement résistives ne formant pas de maille complété par des branches inductives respectant les conditions (2.14) à (2.17) d'indépendance des variables flux et charges, il existe un modèle à commande non linéaire associé.

3.2.1. Maille à self non linéaire /I7/

Nous supposons qu'il n'y a aucun terme inductif commun à cette maille et à l'arbre. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 (3.1.) \quad \frac{d \phi_j}{dt} &= e_j - \frac{R_{jj}}{L_{jj}^*} \phi_j - \frac{1}{c_{jj}} q_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{b-n+1} \frac{R_{jk}}{L_{kk}^*} \phi_k + \frac{1}{c_{jk}} q_k \\
 &= e_j - \frac{R_{jj}}{L_{jj}^*} \phi_j - \frac{1}{c_{jj}} q_j - v_j
 \end{aligned}$$

$$(3.2.) \quad \frac{d q_j}{dt} = \frac{1}{L_{jj}^*} \phi_j$$

Le modèle associé est représenté à la figure 3.1. Il est aisé de le ramener à celui de la figure 3.2. où la commande est non linéaire.

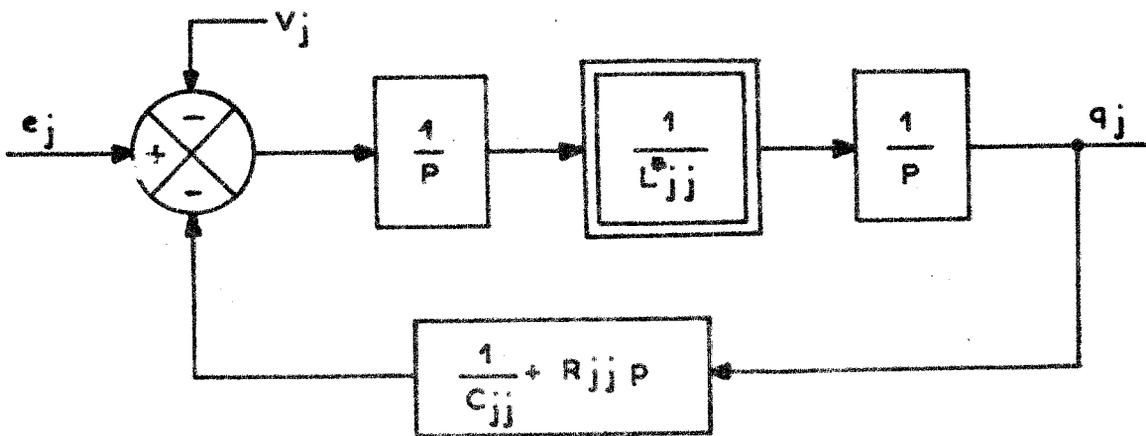


FIGURE 3.1.

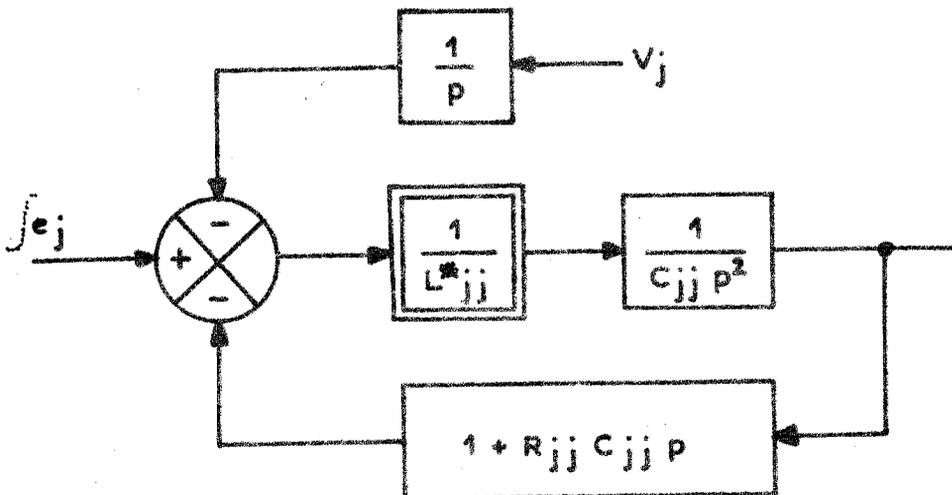


FIGURE 3.2.

L'équation matricielle d'état liée à un ensemble de $m = b-n+1$ mailles de ce type s'écrit :

$$(3.3.) \quad \begin{bmatrix} \vdots \\ \phi_1 \\ \vdots \\ q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_m \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{R_{11}}{L_{11}^*} & \frac{1}{c_{11}} & \dots & \frac{R_{1m}}{L_{mm}^*} & \frac{1}{c_{1m}} \\ -\frac{1}{L_{11}^+} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{R_{m1}}{L_{11}^*} & \frac{1}{c_{m1}} & \dots & \frac{R_{mm}}{L_{mm}^*} & \frac{1}{c_{mm}} \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{L_{mm}^*} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_m \\ q_m \end{bmatrix}$$

Les termes non linéaires L_{jj}^* apparaissent dans tous les coefficients non nuls de la colonne de rang $2j-1$. Cette disposition particulière permet de décomposer la matrice en un produit de deux matrices dont les termes de l'une sont constants et dont l'autre est diagonale non linéaire.

3.2.2. Mailles à résistances non linéaires

Lorsque la résistance R_{jj} est non constante, les relations (3.1.) et (3.2.) s'écrivent :

$$(3.4.) \quad \frac{d\phi_j}{dt} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{b-n+1} \frac{L_{jk}}{L_{kk}} \frac{d\phi_k}{dt} = e_j - \frac{R_{jj}^*}{L_{jj}} \phi_j - \frac{1}{c_{jj}} q_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{b-n+1} \left(\frac{R_{jk}}{L_{kk}} \phi_k + \frac{1}{c_{jk}} q_k \right)$$

$$(3.5.) \quad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\phi_j}{L_{jj}}$$

Notons :

$$V_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{b-n+1} \left(\frac{L_{jk}}{L_{kk}} \frac{d\phi_k}{dt} + \frac{R_{jk}}{L_{kk}} \phi_k + \frac{1}{c_{jk}} q_k \right)$$

Cette décomposition conduit au schéma fonctionnel de la figure 3.3. et une transformation élémentaire permet d'en déduire le modèle à commande non linéaire de la figure 3.4.

Les équations 3.4. et 3.5. obtenues en faisant varier j de 1 à b-n+1 conduisent à la formulation matricielle (3.6.) dans l'espace d'état :

$$(3.6.) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{L_{12}}{L_{22}} & \dots & \frac{L_{1j}}{L_{jj}} & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{L_{j1}}{L_{11}} & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ q_1 \\ \vdots \\ \phi_j \\ q_j \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \\ \vdots \\ e_j \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{R_{11}^*}{L_{11}} & \frac{1}{c_{11}} & \dots & \frac{R_{1j}}{L_{jj}} & \frac{1}{c_{1j}} & \dots \\ \frac{-1}{L_{11}} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{R_{j1}}{L_{11}} & \frac{1}{c_{j1}} & \dots & \frac{R_{jj}^*}{L_{jj}} & \frac{1}{c_{jj}} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{L_{jj}} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ q_1 \\ \vdots \\ \phi_j \\ q_j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

La localisation des termes non linéaires dans la matrice d'état est particulièrement intéressante. En effet, ils n'apparaissent chacun qu'une seule fois et sur la diagonale principale.

3.2.3. Mailles à capacités non constantes

La présence d'une capacité dont la valeur est fonction de sa charge conduit aux équations :

$$(3.7.) \quad \frac{d\phi_j}{dt} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{b-n+1} \frac{L_{jk}}{L_{kk}} \phi_k = e_j - \frac{R_{jj}}{L_{jj}} \phi_j - \frac{1}{c_{jj}^*} q_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{b-n+1} \left(\frac{R_{jk}}{L_{kk}} \phi_k + \frac{1}{c_{jk}} q_k \right)$$

$$(3.8.) \quad \frac{dq_j}{dt} = \frac{1}{L_{jj}} \phi_j$$

Le schéma fonctionnel associé à ces équations est représenté sur la figure (3.5.) et le modèle à commande non linéaire sur la figure (3.6.).

FIGURE 3.4.

FIGURE 3.3.

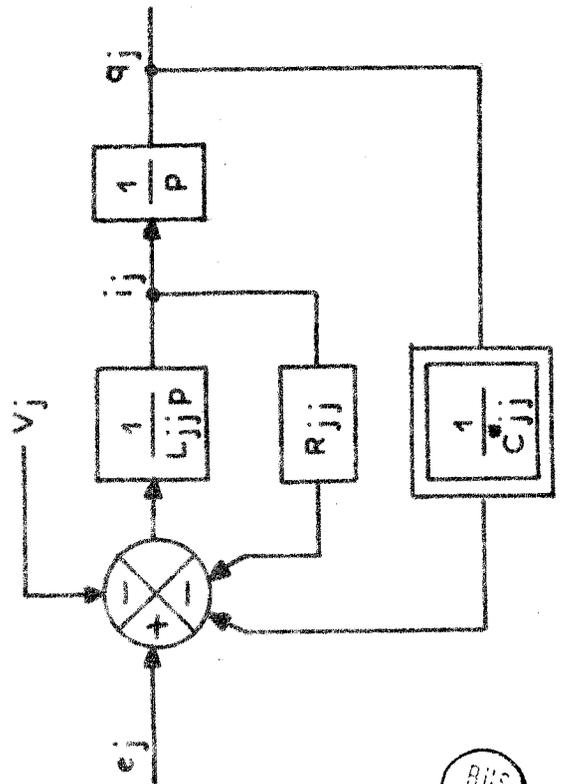
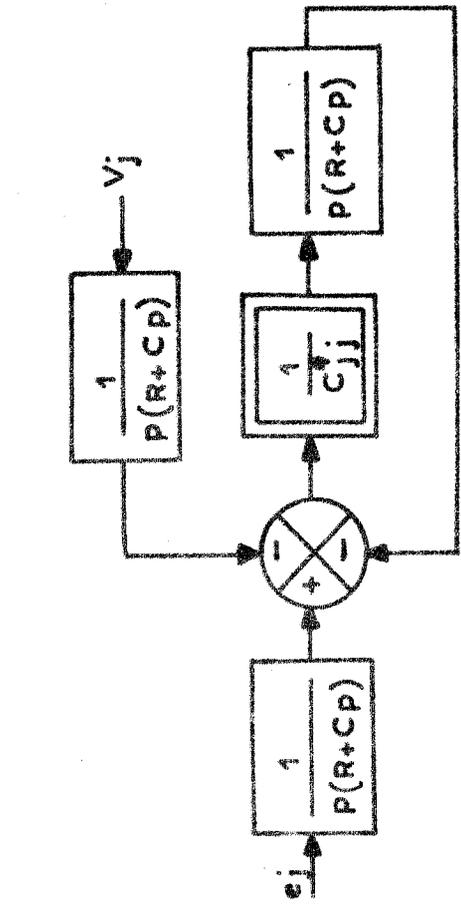
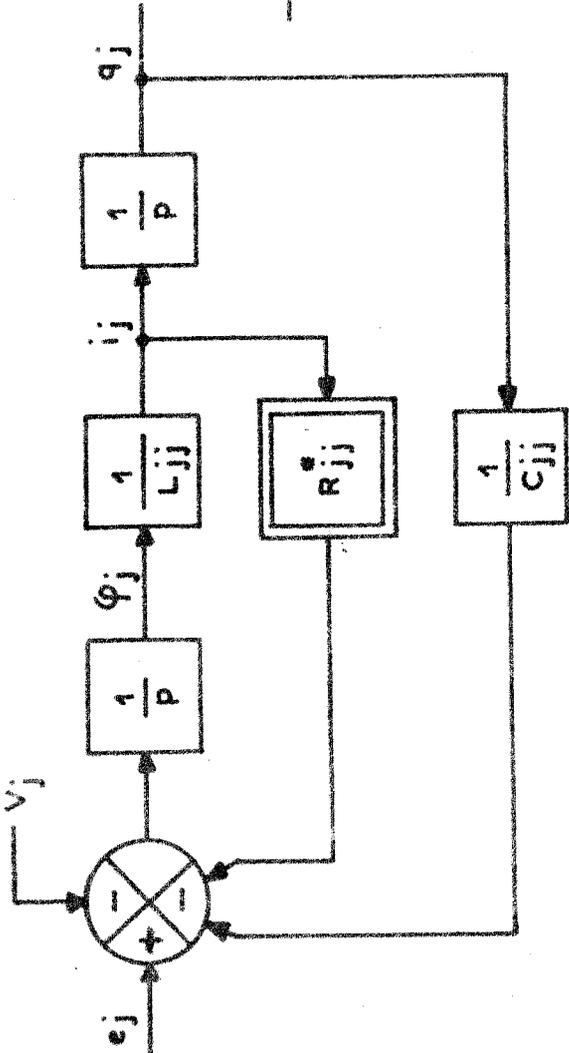
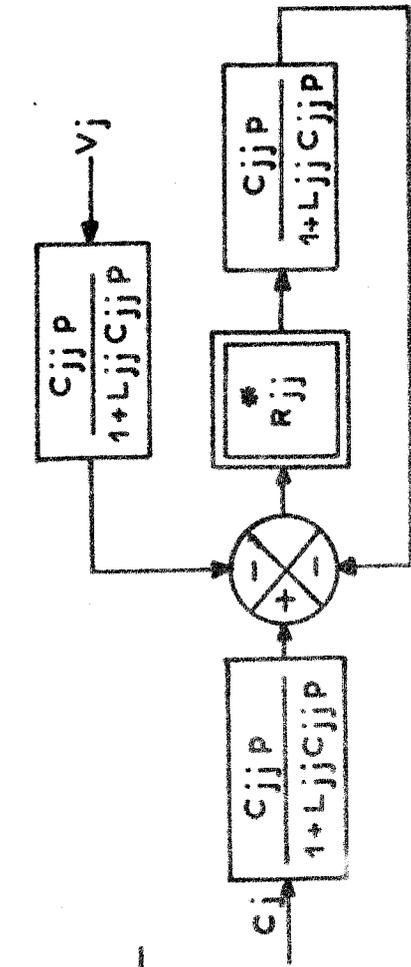


FIGURE 3.6.

FIGURE 3.5.



L'évolution des variables d'état de tels réseaux est régie pour une équation matricielle analogue à l'équation 3.6. La seule différence réside dans le fait que les termes non linéaires sont les c_{jj}^* de la sur-diagonale principale au lieu d'être les R_{jj}^* de la diagonale.

3.3. Modèles associés à la méthode des noeuds

S'il existe un arbre du graphe comportant tous les éléments non-linéaires du réseau, la connaissance du vecteur $[v]$ des tensions de branches d'arbre conduit aux relations :

$$(3.9.) \quad \begin{bmatrix} I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s \end{bmatrix} - Y_b^* \begin{bmatrix} V_b \end{bmatrix}$$

$$(3.10.) \quad \begin{bmatrix} V_b \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} v \end{bmatrix}$$

$$(3.11.) \quad \beta^t \begin{bmatrix} I_s \end{bmatrix} = \beta^t Y_b \beta \begin{bmatrix} v \end{bmatrix}$$

Celles-ci représentent l'extension au domaine non linéaire des relations (2.22.) à (2.25.). Elles sont semblables à celles que l'on obtient par la méthode des mailles, la correspondance se fait naturellement comme dans le cadre des circuits linéaires.

Notons I_j le terme de rang j du vecteur colonne $\beta^t \begin{bmatrix} I_s \end{bmatrix}$; il vient alors, dans le cas général et pour le noeud j :

$$(3.12.) \quad I_j = \frac{dq_j}{dt} + \frac{1}{R_{jj}^* c_{jj}^*} q_j + \frac{\phi_j}{L_{jj}^*} + J_j$$

$$(3.13.) \quad \frac{d\phi_j}{dt} = \frac{q_j}{c_{jj}^*}$$

et lorsque la capacité c_{jj} est linéaire nous avons :

$$J_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n-1} \frac{dq_{jk}}{dt} + \frac{1}{c_{kk} R_{jk}} q_k + \frac{\phi_k}{L_{jk}}$$

ou bien, pour l'hypothèse contraire :

$$J_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n-1} \left(\frac{1}{c_{kk} R_{jk}} q_k + \frac{\phi_k}{L_{jk}} \right)$$

Les schémas fonctionnels correspondants aux cas des capacités, résistances au selfs non constantes se déduisent simplement du schéma-bloc de la figure 3.7.

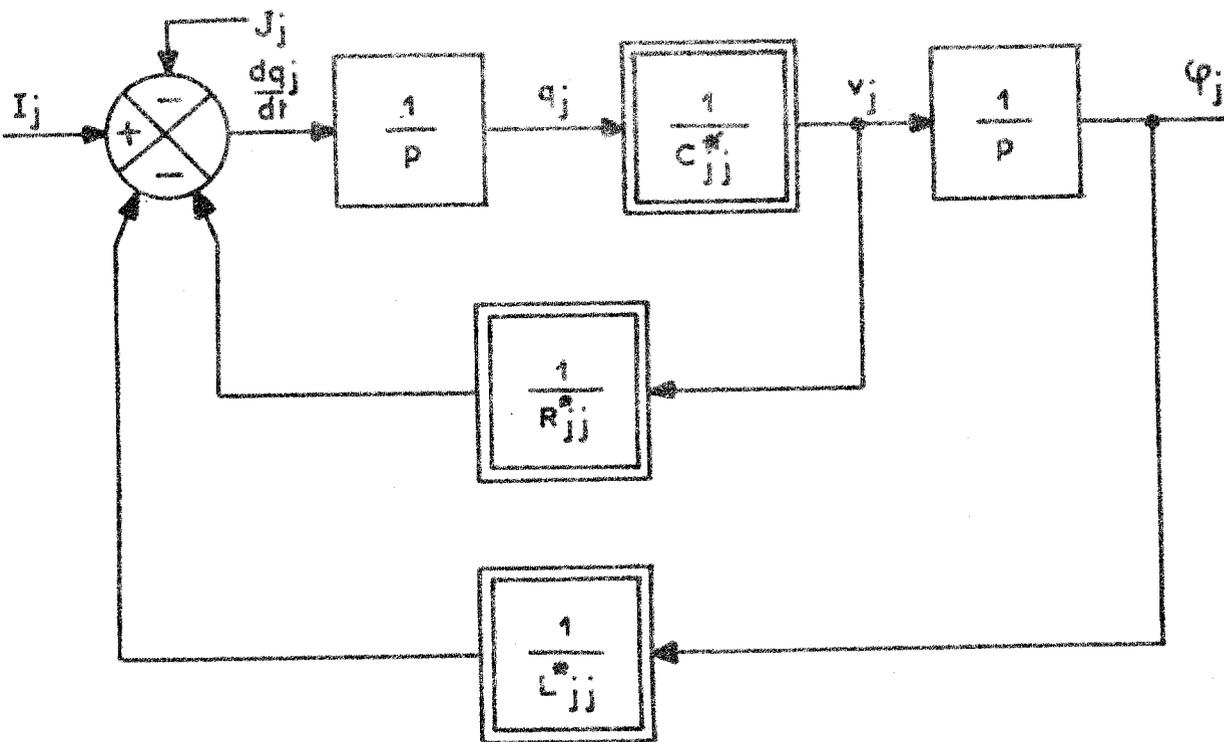


FIGURE 3.7.

Les équations scalaires (3.12.) et (3.13.) mènent à une formulation matricielle dans l'espace d'état semblable à celle que l'on obtient par la méthode des mailles.

3.4. Exemples d'applications

3.4.1. Méthode des mailles

Si ρ_1 , ρ_2 et c sont les composants non constants du réseau de la figure 2.3, le modèle mathématique se déduit aisément de la relation (2.21.) en remplaçant ρ_1 par ρ_1^* , ρ_2 par ρ_2^* , c par c^* .

3.4.2. Méthode des noeuds

Les branches du circuit de la figure 3.8. sont constituées d'associations d'éléments en série ou en parallèle. L'étude de ce système par la méthode des noeuds nécessite l'introduction des variables intermédiaires w_1, w_2, w_3 , tensions des noeuds 4, 5 et 6 représentés sur la figure 3.8. (b) qui précise en outre, la numérotation et le choix des branches d'arbre.

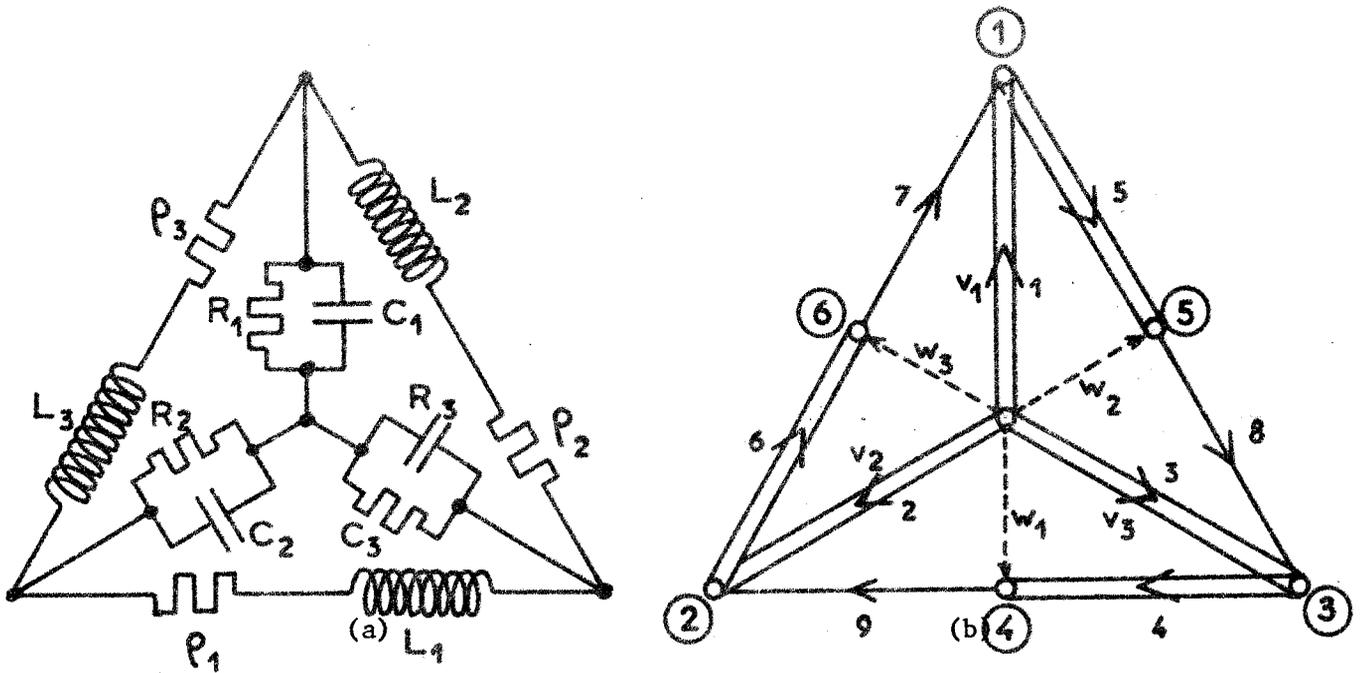


FIGURE 3.8.

En notant I_{sk} la somme des courants de sources au noeud k , il vient pour le noeud 1 :

$$\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{R_1 C_1} + \frac{1}{L_1} \int_0^t (v_1 - w_2) dt + \frac{1}{L_3} (v_1 - w_3) = I_{s1}$$

Soit:

$$(3.14.) \quad \frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{R_1 C_1} - \frac{\phi_2}{L_2} + \frac{\phi_3}{L_3} = I_{s1}$$

L'ensemble des six relations du type (3.14.) obtenues en procédant de façon identique pour les cinq autres noeuds conduit à l'équation matricielle d'état :

(3.15.)

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Is_1 \\ \rho_1 Is_4 \\ Is_2 \\ \rho_2 Is_5 \\ Is_3 \\ \rho_3 Is_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 & \frac{1}{L_3} \\ 0 & \frac{\rho_1}{L_1} & -\frac{1}{C_2} & 0 & \frac{1}{C_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & \frac{1}{R_2 C_2} & 0 & 0 & -\frac{1}{L_3} \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & \frac{\rho_2}{L_2} & -\frac{1}{C_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_2} & \frac{1}{R_3 C_3} & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & \frac{\rho_3}{L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \phi_1 \\ q_2 \\ \phi_2 \\ q_3 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$

3.5. Dispositions de composants non linéaires rendant délicat le choix d'un arbre

Il est impératif que les éléments non constants soient placés dans les branches indépendantes ce qui conduit quelquefois à utiliser un arbre que l'on n'aurait pas considéré dans le domaine linéaire. L'utilisation des relations de dépendance entre les variables d'état permet alors d'utiliser la méthode générale sans difficulté.

Par exemple, si les trois selfs du réseau 2.6. dépendent du flux qui les traverse, il n'est plus possible de choisir l'arbre défini lors de l'étude linéaire.

Nous sommes donc obligés de considérer l'arbre formé des éléments R_1 , R_2 , C et de tenir compte du fait que la même charge q intervient dans deux mailles distinctes.

Le schéma de la figure 3.9. précise la nouvelle numérotation et les courants de maille du réseau.

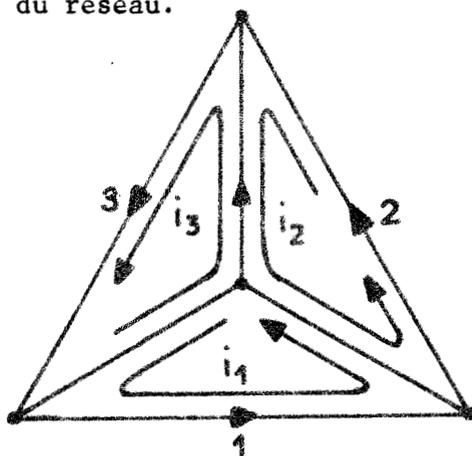


FIGURE 3.9.

Nous sommes alors conduits à l'équation (3.16.) et au schéma fonctionnel

(3.10.)

(3.16.)

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{R_1+R_2+\rho_1}{L_1^*} & -\frac{R_2}{L_2^*} & -\frac{R_1}{L_3^*} & 0 \\ -\frac{R_2}{L_1^*} & \frac{R_2+\rho_2}{L_2^*} & 0 & -\frac{1}{C} \\ -\frac{R_1}{L_1^*} & 0 & \frac{R_1+\rho_3}{L_3^*} & \frac{1}{C} \\ 0 & \frac{1}{L_2^*} & -\frac{1}{L_3^*} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ q \end{bmatrix}$$

3.6. Présence d'une maille résistive

Lorsqu'un réseau possède une maille purement résistive, les courants de branche ne sont plus déterminés uniquement par l'évolution des variables d'état.

Considérons donc le circuit de la figure 3.11. où les capacités C_1 et C_2 peuvent dépendre de leur charge.

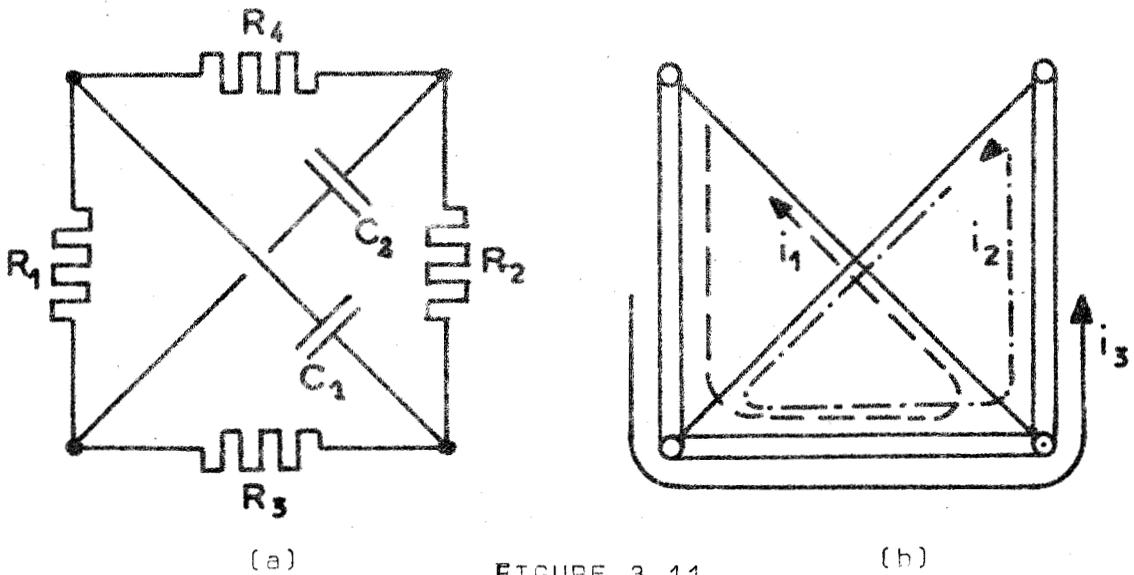


FIGURE 3.11.

L'évolution de ce circuit est régie par les équations :

$$(3.17.) \quad (R_1+R_3) \dot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} + R_3 \dot{q}_2 + (R_1+R_3) i_3 = e_1$$

$$(3.18.) \quad R_3 \dot{q}_1 + (R_2+R_3) \dot{q}_2 + \frac{q_2}{C_2} + (R_2+R_3) i_3 = e_2$$

$$(3.19.) \quad (R_1+R_3) \dot{q}_1 + (R_2+R_3) \dot{q}_2 + (R_1+R_2+R_3+R_4) i_3 = e_3$$

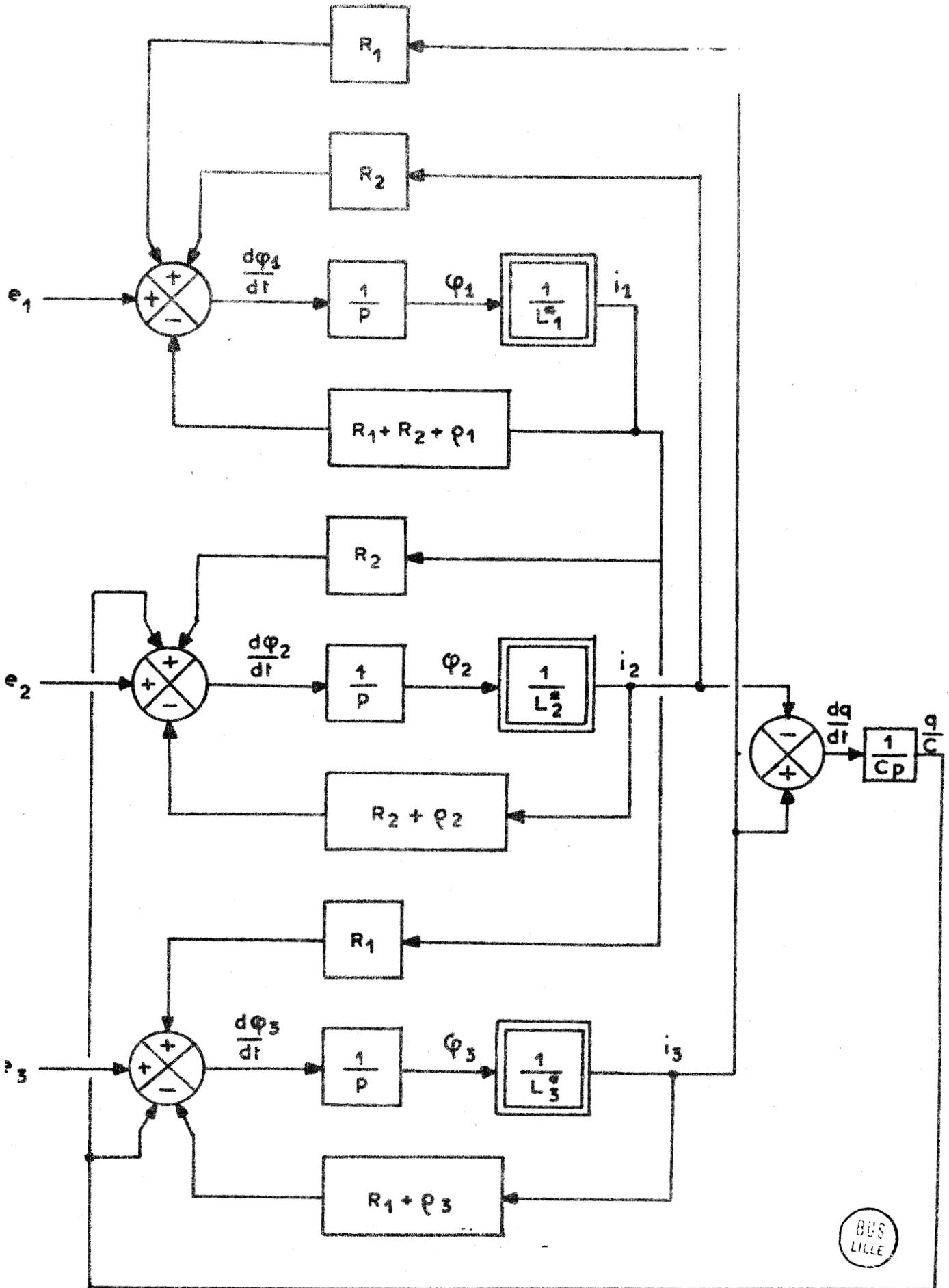


FIGURE 3.10.

Chaque maille intervenant avec son ordre, ce système est d'ordre 2. Il admet donc un modèle dont les matrices A et F sont de dimensions 2×2 et la réponse du réseau est entièrement définie par l'adjonction à l'équation (3.20.) de la relation (3.19.).

Notons $\rho = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$. Il vient alors :

$$(3.20.) \begin{bmatrix} (R_1 + R_3) & (R_2 + R_4) & R_3 R_4 - R_1 R_2 \\ R_3 R_4 - R_1 R_2 & (R_2 + R_3) & (R_1 + R_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \rho e_1 - (R_1 + R_3) e_3 \\ \rho e_2 - (R_2 + R_3) e_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\rho}{C_1^*} & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{C_2^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

3.7. Conclusion

L'extension au domaine non linéaire de la méthode de Kron nous a permis d'attacher à un réseau un modèle possédant une structure de système asservi multi-variable. L'étude des circuits électriques non linéaires pourra donc être abordée avec les outils des automaticiens.

Ces modèles se prêtent également à une étude sur calculateurs. En effet, la structure asservie conduit rapidement à un schéma de calcul analogique et la formulation matricielle à un algorithme de calcul numérique.

Chapitre 4

Circuits couplés

4.1. Introduction

La présence d'organes de couplages entre diverses parties d'un réseau nécessite une étude particulière. Ils se distinguent, en effet, des éléments considérés jusqu'à présent par un fonctionnement qui se ramène à un transfert d'informations.

Dans notre étude, nous distinguerons d'une part, les éléments passifs comme le transformateur qui ne mettent en jeu aucune source d'énergie extérieure, et d'autre part, les éléments actifs, tels les amplificateurs, pour lesquels l'état de la sortie n'a que peu d'influence sur l'entrée.

Dans de très nombreux cas, qu'ils soient de l'un ou l'autre type, les éléments de couplage amènent des changements de nature de l'information et établissent des correspondances entre grandeurs électriques, électromagnétiques, mécaniques etc... Ces éléments peuvent être des moteurs, des dynamos, des pompes des radiateurs etc... L'extension de la méthode de Kron à des systèmes comportant de tels organes permet alors d'envisager l'étude d'installations industrielles.

4.2. Relation générale caractéristique des circuits passifs

Soient deux systèmes couplés $\langle 1 \rangle$ et $\langle 2 \rangle$ isomorphes à des réseaux électriques.

Soient b_1, n_1 et b_2, n_2 leurs nombres respectifs de branches et de noeuds.

En utilisant les notations usuelles relatives aux circuits électriques, $\langle 1 \rangle$ est régi par l'équation :

$$\alpha^T (E_g + E_B) = \alpha^T Z_B \alpha \frac{dQ_m}{dt}$$

E_g et E_B désignent respectivement les vecteurs des sources de tensions des branches et des tensions de branches induites par $\langle 2 \rangle$.

< 2 > est régi par une équation du même type :

$$\gamma^T (\epsilon_g + \epsilon_B) = \gamma^T \xi_B \gamma \frac{d\psi_m}{dt}$$

L'influence de < 1 > sur < 2 > est traduite par la relation :

$$\epsilon_B = N \frac{dQ_B}{dt} \quad N : (b_2 \times b_1)$$

et celle de < 2 > sur < 1 > par :

$$E_B = M \frac{d\psi_B}{dt} \quad M : (b_1 \times b_2)$$

$\frac{dQ_B}{dt}$, $\frac{d\psi_B}{dt}$: vecteurs de dimensions b_1 , b_2 des "courants" de branches.

Les deux réseaux étant couplés par un élément passif, la puissance globale fournie par les deux systèmes à l'élément est nulle :

$$\epsilon_B^T \frac{d\psi_B}{dt} + E_B^T \frac{dQ_B}{dt} = 0$$

Soit :

$$\frac{dQ_B}{dt} N^T \frac{d\psi_B}{dt} + \frac{d\psi_B}{dt} M^T \frac{dQ_B}{dt} = 0$$

De cette relation scalaire on déduit, compte tenu de l'indépendance des vecteurs $\frac{dQ_B}{dt}$ et $\frac{d\psi_B}{dt}$:

$$M = -N^T$$

4.3. Transformateurs

4.3.1. Transformateurs linéaires

De nombreux circuits présentent des impédances mutuelles. Parmi celles-ci une des formes les plus répandues est introduite pour les transformateurs. Lorsque cet appareil est linéaire la recherche du modèle ne présente pas de difficultés majeures.

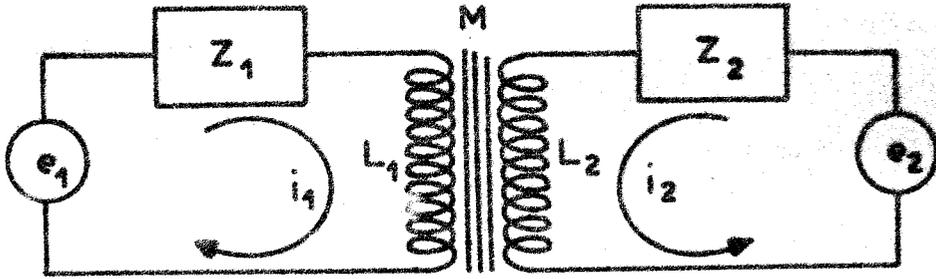


FIGURE 4.1.

Considérons, en effet, le transformateur présenté figure 4.1; les mailles du réseau comprennent les enroulements primaire et secondaire. Les équations qui régissent l'évolution du système s'écrivent :

$$(4.1.) \quad e_1 = Z_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = Z_1 i_1 + (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt}$$

$$(4.2.) \quad e_2 = Z_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = Z_2 i_2 + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} + M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt}$$

\$L_1\$, \$L_2\$ sont les selfs inductances des bobinages primaire et secondaire et \$M\$ le coefficient de mutuelle inductance.

Ces relations montrent que le transformateur peut être considéré comme une association en T de selfs linéaires (figure 4.2.) qui permet directement l'utilisation de la méthode de Kron.

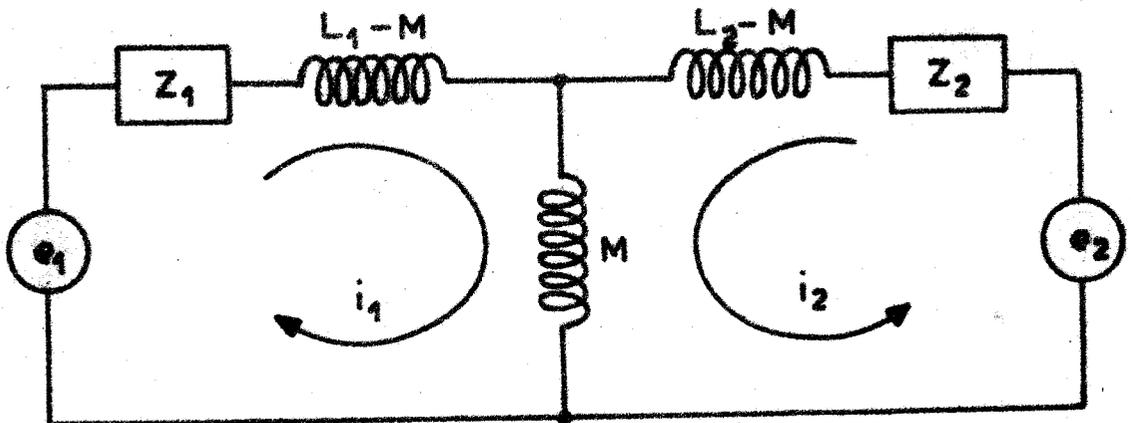


FIGURE 4.2.

4.3.2. Transformateurs non linéaires

Lorsque le transformateur n'est pas surdimensionné, la saturation du circuit magnétique ne peut plus être négligée ; $L_1 = M$, $L_2 = M$ et M dépendent du flux ϕ , lié de façon biunivoque à une somme pondérée de courants lorsque d'hystérésis est négligeable, ce que nous supposerons.

Considérons ainsi un transformateur comportant q bobinages montés sur un circuit magnétique sans dérivation et sans perte mais présentant une saturation.

Soit n_j le nombre de spires du bobinage de rang j , v_j la tension à ses bornes et i_j le courant le traversant.

Les notions de force magnétomotrice ϵ :

$$(4.3.) \quad \epsilon = \sum_{j=1}^q n_j i_j$$

et de reluctance $\sigma(\phi)$ ou $\sigma(\epsilon)$ autorisent une identification par la méthode de Kron. En effet, le flux ϕ dans le circuit magnétique est lié à ces deux grandeurs par la relation :

$$(4.4.) \quad \epsilon = \sigma(\phi) \cdot \phi$$

Les équations de fonctionnement d'un tel transformateur s'écrivent alors :

$$(4.5.) \quad v_j = n_j \frac{d\phi}{dt}$$

$$(4.6.) \quad \phi = \frac{\sum_{k=1}^q n_k i_k}{\sigma}$$

Soit :

$$(4.7.) \quad v_j = n_j \sum_{k=1}^q n_k \frac{d}{dt} \left(\frac{i_k}{\sigma} \right)$$

L'ensemble des q relations (4.7.) peut se réduire à l'équation matricielle :

$$(4.8.) \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_q \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sigma(\epsilon)} \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & \dots & n_1 n_q \\ n_2 n_1 & n_2^2 & \dots & n_2 n_q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_q n_1 & n_q n_2 & \dots & n_q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_q \end{bmatrix} \right]$$

Effectuons un changement de variables défini par la matrice non singulière à coefficients constants p^{-1} . Les composantes i_2, \dots, i_q restent inchangées mais à i_1 est substitué ϵ , grandeur dont dépend la valeur de la reluctance σ .

$$p^{-1} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & \dots & n_q \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Un calcul élémentaire conduit à :

$$p = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1} & -\frac{n_2}{n_1} & -\frac{n_3}{n_1} & \dots & -\frac{n_q}{n_1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Il vient alors :

$$\begin{bmatrix} n_1 v_1 + \dots + n_q v_q \\ v_2 \\ \vdots \\ v_q \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma(\epsilon) \\ \vdots \\ n_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^q n_j^2 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ i_2 \\ \vdots \\ i_q \end{bmatrix}$$

Ce changement de base appliqué dans l'expression matricielle qui traduit la seconde loi d'Ohm permet de faire intervenir σ exclusivement dans la colonne dont les termes impliquent une opération sur la variable ϵ .

4.3.3. Exemple

Soit le réseau de la figure 4.3.

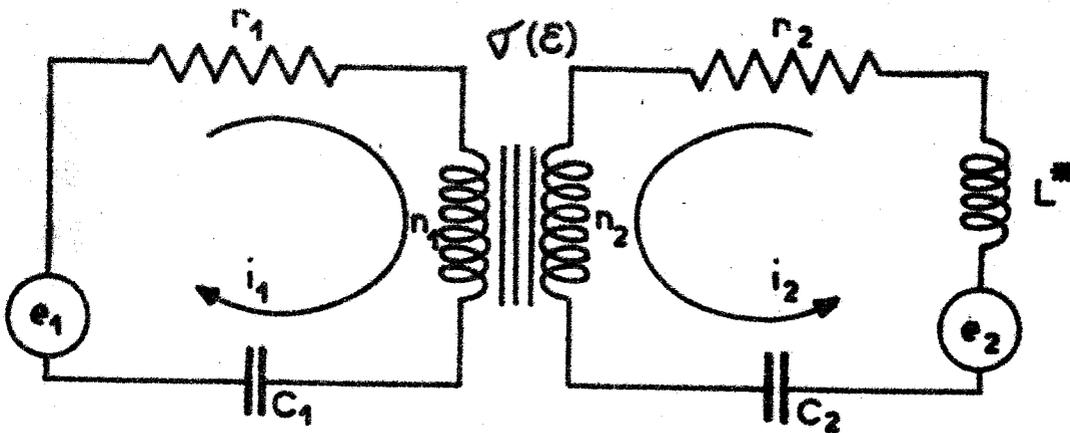


FIGURE 4.3.

Le circuit est composé de deux mailles parcourues respectivement par les courants i_1 et i_2 ; elles sont couplées par un transformateur dont les bobinages comportent n_1 et n_2 spires.

Notons q_1 , q_2 les charges des condensateurs C_1 , C_2 et ϕ le flux dans la self L^* .

La méthode des mailles conduit à la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + \frac{1}{C_1 p} & 0 \\ 0 & r_2 + \frac{1}{C_2 p} + \frac{1}{i_2} \cdot \frac{d\phi}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma(\epsilon)} \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 \\ n_2 n_1 & n_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Effectuons le changement de base défini au paragraphe 4.2.2.

$$\begin{bmatrix} n_1 e_1 + n_2 e_2 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + \frac{1}{C_1 p} & n_2 \left[(r_2 - r_1) + \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{1}{p} + \frac{1}{i_2} \cdot \frac{d\phi}{dt} \right] \\ 0 & r_2 + \frac{1}{C_2 p} + \frac{1}{i_2} \cdot \frac{d\phi}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ i_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma(\varepsilon)} \begin{bmatrix} n_1^2 + n_2^2 \\ n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ i_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Une équation d'état particulièrement simple, caractéristique du fonctionnement, s'en déduit aisément en posant :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{n_1^2 + n_2^2}{\sigma^*} \varepsilon & x_3 &= \phi \\ x_2 &= q_1 & x_4 &= q_2 \end{aligned}$$

Elle prend la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & n_2 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & n_2 \\ \frac{n_2}{\frac{2 \cdot n_2^2}{n_1 + n_2}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 e_1 + n_2 e_2 \\ 0 \\ e_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r_1 \sigma^*}{\frac{2 \cdot n_2^2}{n_1 + n_2}} & \frac{n_1}{C_1} & \frac{n_2 (r_2 - r_1)}{L^*} & \frac{n_2}{C_2} \\ \frac{-\sigma^*}{\frac{2 \cdot n_2^2}{n_1 + n_2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_2}{L^*} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L^*} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$



La non linéarité du circuit magnétique du transformateur intervient en colonne comme celle d'une self.

4.4. Couplages passifs avec modification de la nature physique de l'information

Les méthodes d'étude des transformateurs s'étendent sans difficultés aux systèmes présentant des couplages passifs avec modification de la nature de l'information.

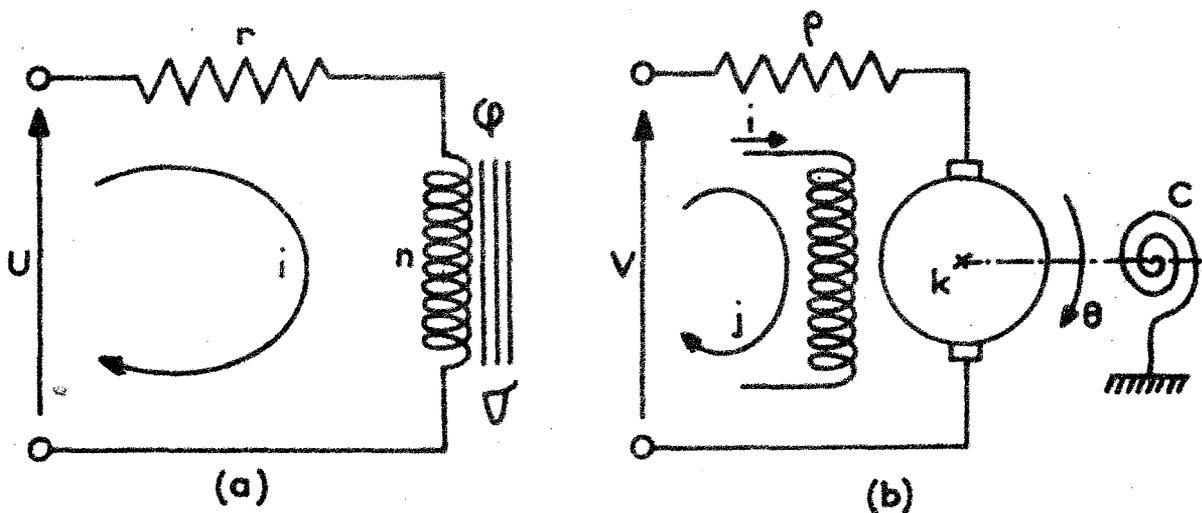
L'évolution du flux magnétique dans le circuit magnétique d'un transformateur est régie par une équation de type résistif :

$$\epsilon = \sigma^* \phi$$

Nous allons donc considérer des systèmes plus généraux où la variable "secondaire" est régie par une équation différentielle.

Nous présenterons cette théorie sur l'exemple d'un moteur à courant continu commandé par l'induit et à courant d'inducteur constant. La nature de cet élément destiné à élaborer un mouvement de rotation permet d'illustrer le couplage d'une maille électrique et d'une maille "mécanique".

Considérons les systèmes des figures 4.4. (a) et (b) commandés respectivement par des tensions U et V.



FIGURES 4.4.

La "maille" mécanique entraînée par le moteur est supposée sans frottement et sans inertie. Les lois régissant l'évolution de ces deux systèmes sont résumées dans le tableau suivant :

Système électromagnétique

$$U = r i + n \frac{d\phi}{dt}$$

$$\epsilon = n i$$

$$\phi = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

Système électromécanique

$$V = \rho j + k \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Gamma = k j$$

$$\theta = \frac{\Gamma}{C}$$

L'angle de rotation θ et le couple moteur Γ interviennent dans les équations "mécaniques" symétriquement au flux et à la force magnétomotrice dans les équations "magnétiques".

Dans la réalité, il est très rare de rencontrer un système dont les inerties et les frottements soient négligeables. Dans ce sens, étudions les problèmes qui impliquent une formulation mathématique complète et considérons l'exemple de la figure 4.5.

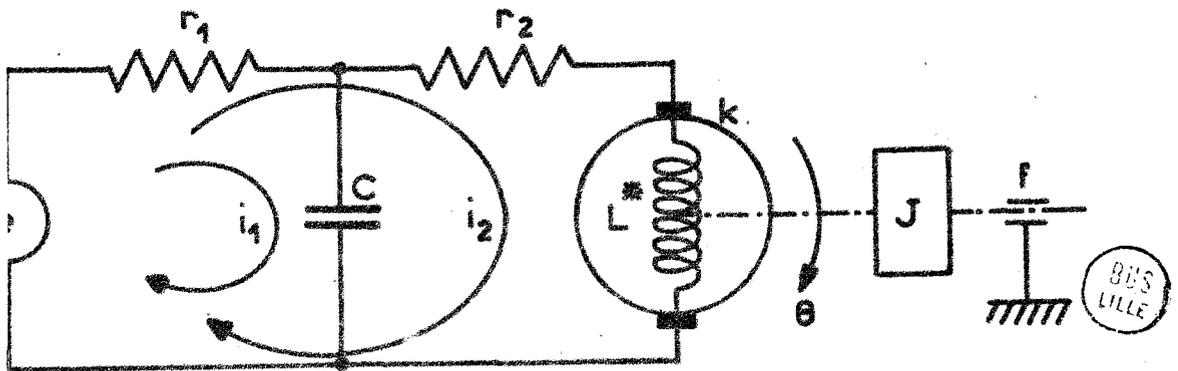


FIGURE 4.5.

Nous supposons le coefficient de couplage k constant, la saturation du circuit fer intervenant dans la valeur de la self de l'induit.

Notons ϕ le flux dans la self L^* , q la charge de la capacité C , ω la vitesse de rotation de l'arbre moteur et μ sa quantité de mouvement.

Les mailles définies sur la figure 4.5. conduisent à la relation (4.9.).

$$(4.9.) \quad \begin{bmatrix} e \\ e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + \frac{1}{C} & r_1 & 0 \\ r_1 & r_1 + r_2 + \frac{1}{i_2} \frac{d\phi}{dt} & k \\ 0 & -k & JP + f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \omega \end{bmatrix}$$

De l'interprétation de cette équation dans l'espace d'état il résulte :

$$(4.10.) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ e \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1 C} & \frac{1}{L^*} & 0 \\ 0 & \frac{r_2}{L^*} & \frac{k}{J} \\ 0 & -\frac{k}{L^*} & \frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \phi \\ \mu \end{bmatrix}$$

La méthode de Kron s'étend donc sans difficulté aux systèmes passifs comportant des couplages avec changement de nature de l'information.

4.5. Formulation d'une classe particulière de circuits couplés

4.5.1. Relation générale

Considérons deux systèmes couplés régis par les équations du paragraphe 4.2.

S'il est possible de décomposer les matrices Z_B et ξ_B selon les lois :

$$Z_B = R_B + \frac{1}{p} \frac{1}{C_B}$$

$$\xi_B = \rho_B + \frac{1}{p} \eta_B$$

où $\frac{1}{p}$ est l'opérateur d'intégration et $\frac{1}{C_B}$, η_B des matrices non singulières il vient :

$$(4.11.) \quad \alpha^T \begin{bmatrix} E_g - N \gamma \frac{d\psi_m}{dt} \end{bmatrix} = \alpha^T R_B \alpha \frac{dQ_m}{dt} + \alpha^T \frac{1}{C_B} \alpha Q_m$$

$$(4.12.) \quad \gamma^T \begin{bmatrix} \epsilon_g + N \alpha \frac{dQ_m}{dt} \end{bmatrix} = \gamma^T \rho_B \gamma \frac{d\psi_m}{dt} + \gamma^T \eta_B \gamma \psi_m$$

Nous en déduisons une représentation dans l'espace d'état :

$$(4.13.) \quad \begin{bmatrix} \alpha^T E_g \\ \gamma^T \epsilon_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^T R_B \alpha & \alpha^T N \gamma \\ -\gamma^T N^T \alpha & \alpha^T \rho_B \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_m \\ \dot{\psi}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^T \frac{1}{C_B} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma^T \eta_B \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_m \\ \psi_m \end{bmatrix}$$

Cette formulation s'étend sans difficulté au cas de n circuits couplés mais présente toutefois l'inconvénient de ne s'appliquer qu'à une classe particulière de systèmes. Elle nécessite en effet la présence d'un élément capacitif par maille.

4.5.2. Application aux systèmes électromagnétiques

La self L^* du réseau de la figure 4.3. possède n_3 spires et notons respectivement ϕ_T et ϕ_S les flux dans le fer du transformateur et de la self.

Choisissons les mêmes mailles que dans l'exemple 4.3.3. et les informations de branches suivantes :

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \text{ pour le circuit électrique} \qquad \begin{bmatrix} \phi_T \\ \phi_S \end{bmatrix} \text{ pour le circuit magnétique}$$

Les matrices suivantes traduisent la structure du réseau :

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

$$\rho_B \equiv 0 \qquad R_B = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{C_B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} \sigma_T^* & 0 \\ 0 & \sigma_S^* \end{bmatrix} \qquad E_g = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_g \equiv 0$$

Il vient donc, dans l'espace d'état :

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 & n_1 & 0 \\ 0 & r_2 & n_2 & n_3 \\ -n_1 & -n_2 & 0 & 0 \\ 0 & -n_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{\phi}_T \\ \dot{\phi}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_T^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_S^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \phi_T \\ \phi_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

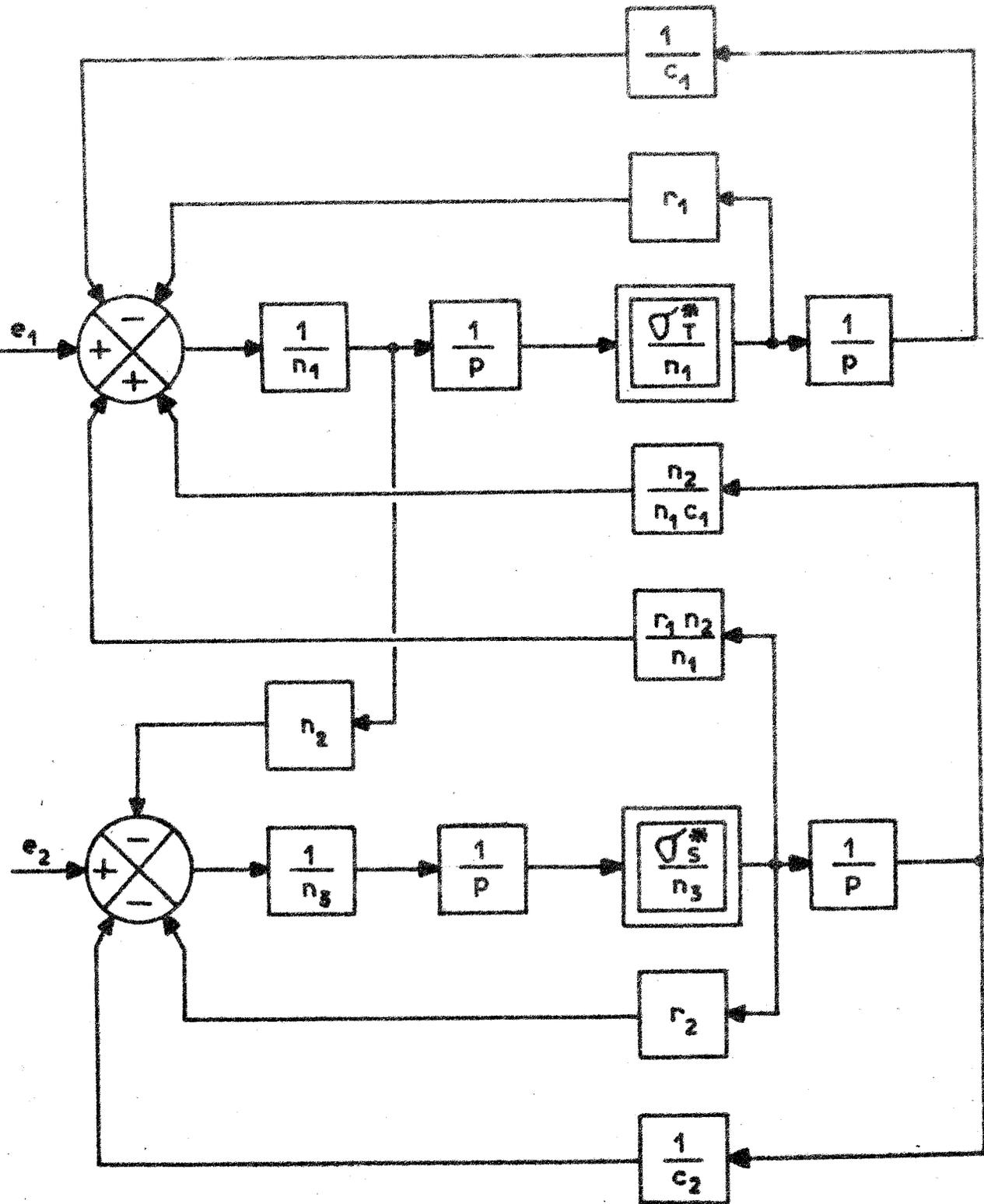


FIGURE 4.6.



Le modèle d'asservissement correspondant est représenté à la figure 4.6.

4.5.3. Réseau comportant un moteur

Le système représenté à la figure 4.7. est constitué de quatre circuits couplés.

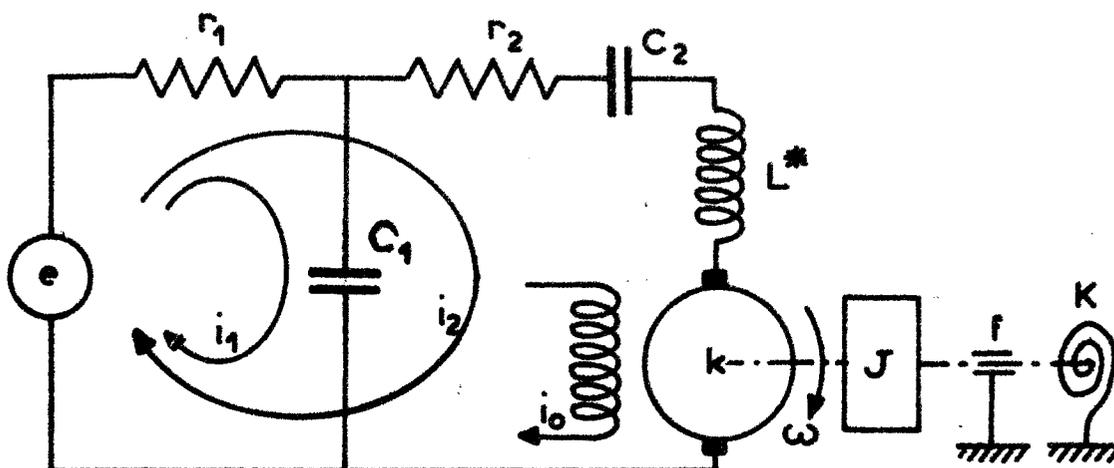


FIGURE 4.7.

- un circuit électrique formé de capacités et de résistances
- un circuit magnétique constitué d'une self
- un circuit mécanique comportant un frottement et un ressort
- un circuit mécanique analogue au circuit magnétique dans lequel la quantité de mouvement joue le rôle d'un flux.

Les variables d'état provenant du choix des mailles présentées sur la figure 4.7. sont : q_1, q_2 les charges des condensateurs C_1, C_2 ; θ l'angle de rotation de l'arbre moteur ; ϕ le flux dans la self L^* et μ la quantité de mouvement de l'arbre moteur.

L'exemple présenté conduit à la relation :

$$\begin{bmatrix} e \\ e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_1 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_1+r_2 & k & 1 & 0 \\ 0 & -k & f & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \theta \\ \phi \\ \mu \end{bmatrix}$$

4.6. Réseaux comportant des éléments actifs

Lorsqu'il existe, parmi les éléments constitutifs d'un réseau, une ou plusieurs sources d'énergie liées à des grandeurs internes l'identification doit être menée de façon légèrement différente.

Nous ne considérerons que des éléments actifs dont la grandeur de sortie est proportionnelle à sa grandeur d'entrée, à la dérivée de cette fonction ou à son intégrale par rapport au temps.

Un élément actif introduit dans la matrice impédance un terme au dehors de la diagonale principale rendant celle-ci non symétrique. Cette propriété traduit l'existence d'un apport d'énergie extérieur.

4.6.1. Cas de deux mailles séparées

Considérons (figure 4.8.) deux mailles électriques ne possédant aucun élément commun mais couplées par l'intermédiaire d'un système actif d'impédance d'entrée infinie et d'impédance de sortie nulle. Tous les éléments passifs peuvent être non linéaires.

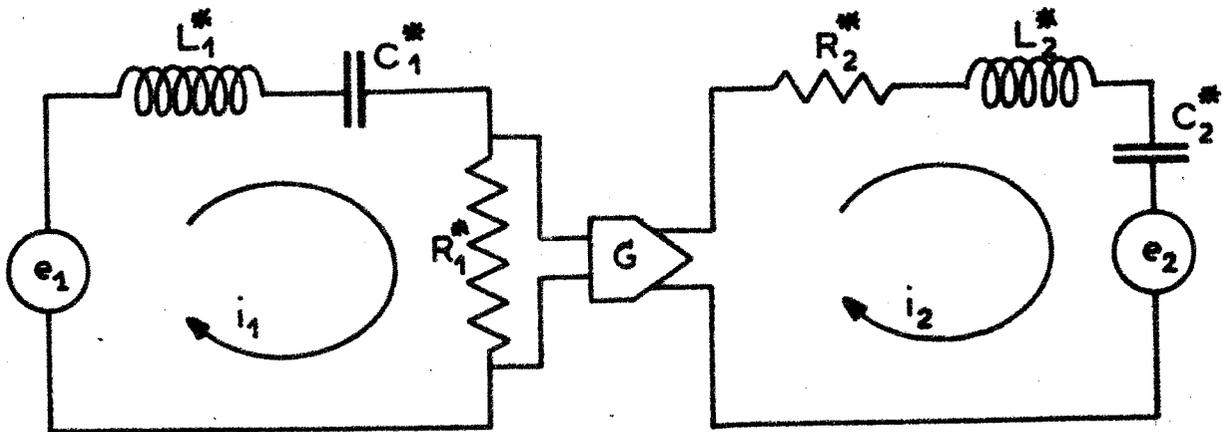


FIGURE 4.8.

Les sens de références étant indiqués sur la figure, nous choisissons, comme variables d'état, les charges q_1 , q_2 des capacités C_1 , C_2 et les flux ϕ_1 , ϕ_2 dans les selfs L_1 , L_2 .

Les deux mailles "électriques" comprenant une résistance, une self et un condensateur, le couplage G n'augmente pas l'ordre du système.

La loi d'Ohm s'exprime sous la forme :

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{i_1} \frac{d\phi_1}{dt} + R_1^* + \frac{1}{C_1^* p} & 0 \\ G R_1^* & \frac{1}{i_2} \frac{d\phi_2}{dt} + R_2^* + \frac{1}{C_2^* p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

où G peut être de la forme A, A.p ou $\frac{A}{p}$ (A étant constant).

L'équation d'état s'en déduit aisément dans les trois cas :

a) couplage proportionnel

$$(4.14.) \quad \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \\ e_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{R_1^*}{L_1^*} & \frac{1}{C_1^*} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1^*} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_1^* A}{L_1^*} & 0 & \frac{R_2^*}{L_2^*} & \frac{1}{C_2^*} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2^*} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ q_1 \\ \phi_2 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

b) le couplage intégral

$$(4.15.) \quad \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \\ e_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{R_1^*}{L_1^*} & \frac{1}{C_1^*} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1^* A & \frac{R_2^*}{L_2^*} & \frac{1}{C_2^*} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2^*} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ q_1 \\ \phi_2 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

c) Couplage dérivé

$$(4.16.) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ A & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \\ e_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{R_1^*}{L_1^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1^*} & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2^*}{L_2^*} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2^*} & \frac{1}{C_2^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ q_1 \\ \phi_2 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

4.6.2. Application aux systèmes asservis

Le discriminateur d'un système asservi étant généralement réalisé à l'aide d'un amplificateur électronique, cette méthode de recherche d'un modèle mathématique est particulièrement intéressante à utiliser.

Considérons le montage de régulation d'intensité dans un inducteur de génératrice ou de moteur à courant continu représenté à la figure 4.9.

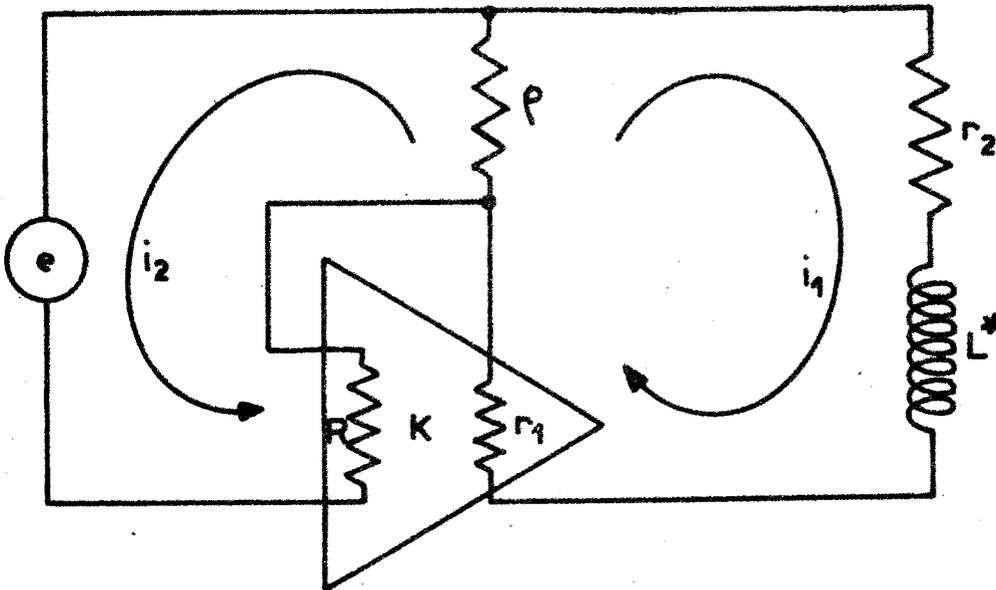


FIGURE 4.9.



Soit K le gain de l'amplificateur électronique, R , r_1 ses résistances d'entrée et de sortie et r_2 la résistance de l'inducteur. Notons r la somme $r_1 + r_2$.

Ce système possède deux mailles et choisissons la résistance ρ comme arbre. La première maille est d'ordre un et la seconde, purement résistive, d'ordre zéro. Ce système est donc régi par l'équation différentielle (4.17.) et par la relation 4.18.

$$(4.17.) \quad \frac{d\phi}{dt} = - \frac{(\rho R + r\rho + rR + K R\rho)}{R + \rho} \frac{\phi}{L^*} - \frac{\rho - KR}{R + \rho} e$$

$$(4.18.) \quad i_2 = \frac{e - \frac{\rho}{L^*} \phi}{R + \rho}$$

Il est intéressant de noter que ce système est instable pour les valeurs de K inférieures à $-1 - r \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \right)$

4.7. Conclusion

La méthode proposée présente un domaine d'applications très étendu et un certain intérêt dans l'identification de systèmes de grandes dimensions. Elle permet en effet d'étudier plusieurs sous-systèmes, leurs interactions intervenant ultérieurement d'une manière facile à mettre en oeuvre.

L'étude des modèles ainsi présentés peut alors conduire à des conditions suffisantes de stabilité et d'unicité du comportement ainsi qu'à la détermination théorique de la précision d'un calcul.

Une interprétation particulière des relations obtenues introduit des algorithmes de calcul et suggère des schémas de calcul analogique. La simulation complète alors les informations nécessaires à l'exploitation du système proposé.

Chapitre 5

Equations aux écarts

5.1. Généralités

Un système n'est utilisable que s'il possède un certain nombre de propriétés parfois d'une définition délicate. Les plus importantes et les plus utiles sont sans doute la stabilité, la vélocité et la précision.

Des critères donnant des conditions suffisantes de stabilité asymptotique ont été élaborés /2/ /3/. Lorsqu'ils sont vérifiés la sécurité du matériel n'est pas encore assurée, certaines limites technologiques pouvant ne pas être respectées au cours du régime transitoire ou pendant le régime permanent. Une étude plus précise sur calculateur s'impose alors.

Une idée assez grossière du temps de réponse peut être obtenue grâce à la majoration d'une mesure du vecteur d'état mais une simulation ou une expérimentation peuvent s'avérer nécessaires si la majoration du temps de réponse est trop importante.

Avec l'étude de la précision d'un système non linéaire se pose le problème de la validité même du calcul ou de l'expérimentation. En effet, dans le cas général, la réponse d'un système dépend à la fois de la sollicitation et des conditions initiales et il est difficilement envisageable d'effectuer une étude systématique dans l'espace des conditions initiales des systèmes de grandes dimensions.

Il importe donc de déterminer si le régime permanent du système est indépendant des conditions initiales, c'est-à-dire de déterminer s'il possède la propriété d'unicité de réponse.

S'il est impossible de conclure à l'unicité de réponse, une majoration de la dispersion entre les réponses permettra souvent de définir le domaine de validité de l'étude.

5.2. Equation aux écarts /16,17/

Soit un système régi par un ensemble de n équations qui s'écrivent sous forme matricielle.

$$(5.1.) \quad L \dot{X} = A^* X + B E$$

$$X = \{ x^i \} ; \quad E = \{ e^i \} , \quad L = \{ \lambda_{ij} \} , \quad A^* = \{ a_{ij}^* \} , \quad B = \{ b_{ij} \}$$

Le terme général de A^* sera indifféremment noté a_{ij}^* ou $a_{ij}^*(x^j)$

A deux ensembles (I_1) et (I_2) de conditions initiales correspondent, pour une même entrée $E(t)$, deux réponses $X_1(t)$ et $X_2(t)$ vérifiant la relation 5.1. soit :

$$(5.2.) \quad L \dot{X}_1 = A_1^* X_1 + B E$$

$$(5.3.) \quad L \dot{X}_2 = A_2^* X_2 + B E$$

Le système possède la propriété d'unicité de réponse si l'écart $X_1(t) - X_2(t)$ entre les deux réponses tend vers zéro lorsque le temps t croît indéfiniment.

Soustrayons membre à membre les relations (5.2.) et (5.3.) :

$$(5.4.) \quad L (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) = A_1^* X_1 - A_2^* X_2$$

La $j^{\text{ème}}$ ligne de cette identité est une équation différentielle du premier ordre en \dot{x}_1^j et \dot{x}_2^j :

$$(5.5.) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} (\dot{x}_1^j - \dot{x}_2^j) = \sum_{j=1}^n \left[a_{ij}^*(x_1^j) \cdot x_1^j - a_{ij}^*(x_2^j) \cdot x_2^j \right]$$

Si $a_{ij}^*(x^j) \cdot x^j$ est définie continue sur l'intervalle fermé $\left[x_1^j, x_2^j \right]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $\left] x_1^j, x_2^j \right[$, il existe au moins une valeur θ_j de x^j appartenant à l'ouvert $\left] x_1^j, x_2^j \right[$ tel que :

$$a_{ij}^*(x_1^j) \cdot x_1^j - a_{ij}^*(x_2^j) \cdot x_2^j = (x_1^j - x_2^j) \cdot \left[\frac{d a_{ij}^*(x^j) \cdot x^j}{d x^j} \right]_{x^j = \theta_j}$$

Notons :

$$(5.6.) \quad \frac{d a_{ij} (x^j) \cdot x^j}{d x^j} = f'_{ij} (x^j)$$

$$(5.7.) \quad f'_{ij} (\theta_j) = f'_{ij}^*$$

La relation 5.5. s'écrit alors :

$$(5.8.) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} (\dot{x}_1^j - \dot{x}_2^j) = \sum_{j=1}^n f'_{ij}^* \cdot (x_1^j - x_2^j)$$

Introduisons le vecteur Z de composantes z_i défini par :

$$(5.9.) \quad Z = X_1 - X_2$$

Il permet d'écrire l'équation aux écarts :

$$(5.10.) \quad L Z' = A'^* Z$$

Si le vecteur Z tend vers zéro lorsque le temps croît indéfiniment, le système possède la propriété d'unicité de réponse à une entrée quelconque vis à vis des conditions initiales.

5.2. Conditions suffisantes d'unicité de réponse

La relation (5.10.) a la même forme que l'équation d'état du système en régime autonome :

$$(5.12.) \quad L \dot{X} = A^* X$$

Il est donc possible d'étudier l'unicité de réponse d'un système à l'aide des critères élaborés pour l'étude de la stabilité.

Remarquons néanmoins que les conditions de stabilité conduisent à des limitations des coefficients a_{ij}^* , c'est-à-dire que la caractéristique $a_{ij}^* \cdot x^j$ de l'élément non linéaire doit être comprise entre deux droites de pentes k_1 et k_2 tandis que les conditions d'unicité de réponse limitent, en tout point, la pente de la tangente à la caractéristique entre les valeurs k_1 et k_2 .

5.3. Interprétation physique

Lors de l'étude des réseaux maillés, les termes a_{ij}^* prennent généralement la forme :

$$(5.13.) \quad a_{ij} (x^j) = k_{ij} \times \alpha_{ij} (x^j)$$

k_{ij} scalaire constant

$\alpha_{ij} (x^j)$ scalaire égal soit à zéro, soit à 1, soit à $v_j(x_j) = v_j^*$

v_j^* scalaire non constant indépendant de l'indice i de la ligne correspondante.

v_j^* peut, en particulier, prendre trois formes importantes :

$$\rightarrow v_j^* = \frac{1}{L_j(\phi_j)}$$

$$\rightarrow v_j^* = \frac{R_j(\phi_j)}{L_j}$$

$$\rightarrow v_j^* = \frac{1}{C_j(q_j)}$$

$v_j^* \times x^j$ est donc égal soit au courant traversant la self soit à la différence de potentiel aux bornes de la résistance ou de la capacité.

Cette constatation nous conduit à utiliser les caractéristiques $i(\phi)$ pour les selfs, $v(i)$ pour les résistances et $v(q)$ pour les capacités. Les limitations de v_j^* découlant de l'application d'un critère de stabilité apparaissent alors comme des limitations des gains statiques $\frac{i(\phi)}{\phi}$, $\frac{v(i)}{i}$ et $\frac{v(q)}{q}$

Les conditions d'unicité de réponse conduiront alors à des limitations des pentes de ces caractéristiques.

5.4. Dispersion des réponses

Il est quelquefois impossible d'écrire la relation 5.10 pour certains systèmes soit parce que le théorème des accroissements finis n'est pas applicable à un terme a_{ij}^* de la matrice A, soit parce que l'on veut tenir compte d'éventuelles modifications de structures.

La soustraction membre à membre des équations (5.2.) et (5.3.) entraîne :

$$(5.14.) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} (\dot{x}_j^1 - \dot{x}_j^2) = \sum_{j=1}^n \left[a_{ij}(x_1^j) \cdot x_1^j - a_{ij}(x_2^j) \cdot x_2^j \right]$$

Si l'on peut décomposer $a_{ij}(x^j) \cdot x^j$ selon la loi :

$$(5.15.) \quad a_{ij}(x^j) \cdot x^j = \mu_{ij}(x^j) + \delta_{ij}(x^j)$$

où $\mu_{ij}(x^j)$ est une fonction autorisant l'application du théorème des accroissements finis et $|\delta_{ij}|$ une fonction bornée par h_{ij} , l'équation (5.14.) s'écrit :

$$(5.16.) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \dot{z}_j = \sum_{j=1}^n \mu_{ij}^* \cdot z_j + k_i$$

avec :

$$\mu_{ij}^* = \left[\frac{d \mu_{ij}(x^j) \cdot x^j}{d x^j} \right]_{x^j = \theta^j}$$

$$(5.17.) \quad |k_i| \leq \sum_{j=1}^n |h_{ij}|$$

Les n relations 5.16. conduisent à :

$$(5.18.) \quad L \dot{Z} = A^* Z + K$$

Le vecteur K, d'ordre n, a toutes ses composantes bornées en module.

Il est alors possible de majorer les oscillations limites de 5.18. ce qui correspond à limiter le domaine de dispersion des réponses.

Lorsque L est la matrice unité, il est possible d'utiliser des critères connus que nous rappelons ci-après. Ils proviennent de l'utilisation des trois normes usuelles comme fonctions de Ljapunov.

a) Module de la composante maximale

$$V = \text{Max}_i |z^i|$$

Si $\text{Max}_i a_{ii}^* + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^*|$ est négatif, il vient :

$$(5.19.) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Max}_i |z^i| < \text{Max}_i \frac{-|k_i|}{a_{ii}^* + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^*|}$$

b) Somme des modules des composantes

$$V = \sum_{i=1}^n |z^i|$$

Si $\text{Max}_j a_{jj}^* + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}^*|$ est négatif, il vient :

$$(5.20.) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |z^i| < \frac{\sum_{i=1}^n |k_i|}{\left| \text{Max}_j a_{jj}^* + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}^*| \right|}$$

c) Norme euclidienne

$$V = \sum_{i=1}^n (z^i)^2$$

Si $\text{Max}_i a_{ii}^* + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^* + a_{ji}^*|$ est négatif, il vient :

$$(5.21.) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (z^i)^2 < \sum_{i=1}^n \left[\frac{k_i}{a_{ii}^* + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^* + a_{ji}^*|} \right]^2$$

Si d_i est l'écart maximum entre deux valeurs de la composante x^i et si l'on connaît une réponse, on peut affirmer que toute réponse se trouvera, au bout d'un temps assez long, entre $x^i + d_i$ et $x^i - d_i$.

La zone hachurée de la figure 5.1. représente le domaine de dispersion maximum à l'intérieur duquel peuvent se placer les régimes permanents autour d'une réponse connue x^i .

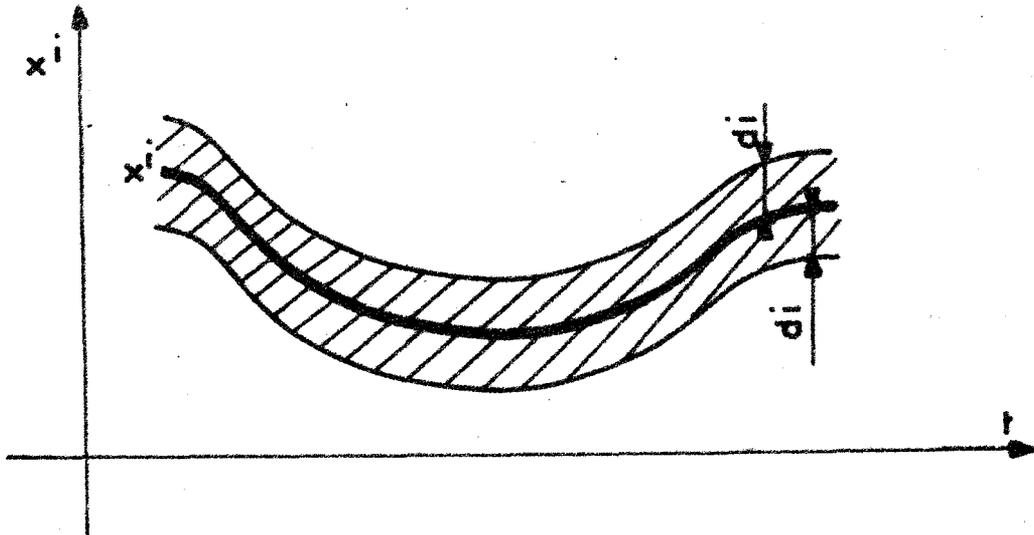


FIGURE 5.1.

Remarque :

Considérons un système dont la non-linéarité de rang i a une caractéristique $u(\epsilon)$ définie, continue, dérivable en tout point et vérifiant les conditions suffisantes de stabilité :

$$k_1 < \frac{u(\epsilon)}{\epsilon} < k_2$$

mais ne vérifiant pas les conditions d'unicité de réponse :

$$k_1 < \frac{d u(\epsilon)}{d \epsilon} < k_2$$

Il est généralement possible de la décomposer sous la forme :

$$u(\epsilon) = g(\epsilon) + h(\epsilon)$$

$h(\epsilon)$ fonction de ϵ , bornée

$g(\epsilon)$ définie, continue, dérivable quel que soit ϵ et vérifiant :

$$k_{g_1} < \frac{d g(\epsilon)}{d \epsilon} < k_{g_2}$$

Si l'intervalle $\left[k_{g_1}, k_{g_2} \right]$ permet de conclure à la stabilité du nouveau système, il est alors possible de limiter la dispersion des réponses en régime permanent.

5.5. Applications

5.5.1. Arbre purement résistif et résistances non linéaires

Considérons le système de la figure 5.2. L'arbre, formé de la résistance R_{12} , est linéaire et les variables d'état choisies sont ϕ_1 et ϕ_2 les flux dans les selfs L_{11} et L_{22} , Q_1 et Q_2 les charges des condensateurs C_1 et C_2 .

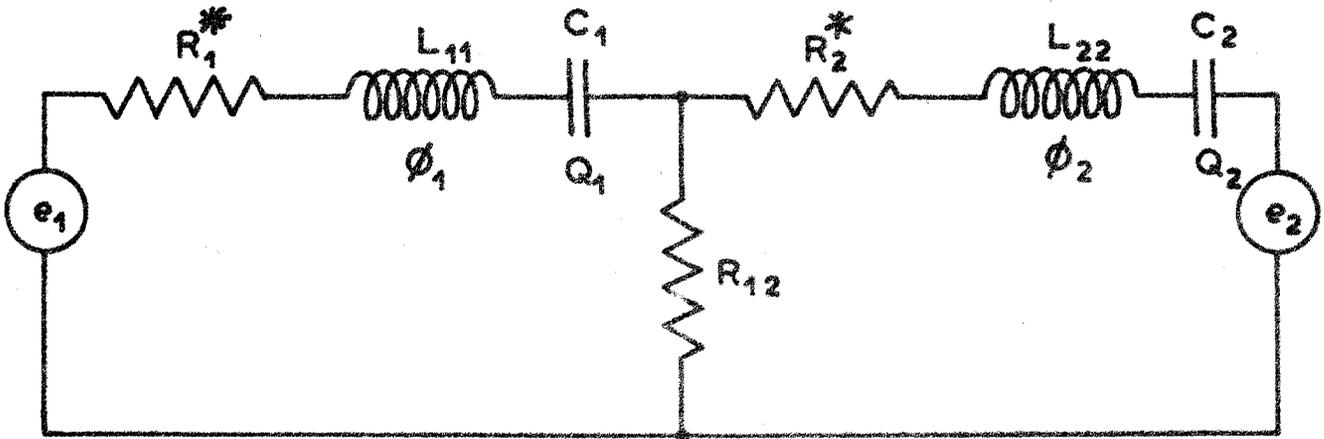


FIGURE 5.2.

L'équation d'état régissant l'évolution de ce réseau est de la forme :

$$\dot{X} = E - A^* X$$

La différence entre deux réponses à une même entrée correspondant à des conditions initiales différentes s'écrit :

$$\dot{Z} = - A^* Z$$

Soit, en explicitant cette écriture :

$$(5.22.) \quad \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1^1 - \dot{\phi}_1^2 \\ \dot{Q}_1^1 - \dot{Q}_1^2 \\ \dot{\phi}_2^1 - \dot{\phi}_2^2 \\ \dot{Q}_2^1 - \dot{Q}_2^2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{R_{11}^*}{L_{11}} & \frac{1}{C_1} & \frac{R_{12}}{L_{22}} & 0 \\ -\frac{1}{L_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_{12}}{L_{11}} & 0 & \frac{R_{22}^*}{L_{22}} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_{22}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^1 - \phi_1^2 \\ Q_1^1 - Q_1^2 \\ \phi_2^1 - \phi_2^2 \\ Q_2^1 - Q_2^2 \end{bmatrix}$$

avec $R_{11}^* = R_1^* + R_{12}$ et $R_{22}^* = R_2^* + R_{12}$

Adoptons la fonction de Ljapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2} Z^T \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} Z = \frac{1}{2} Z^T M Z$$

Il vient :

$$(5.23.) \quad \frac{dV}{dt} = - Z^T \begin{bmatrix} \frac{R_{11}^*}{L_{11}^2} & 0 & \frac{R_{12}}{L_{11} L_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_{12}}{L_{11} L_{22}} & 0 & \frac{R_{22}^*}{L_{22}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Z$$



Soit, en posant $\Delta\phi_1 = \phi_1^1 - \phi_1^2$ et $\Delta\phi_2 = \phi_2^1 - \phi_2^2$

$$\frac{dV}{dt} = - \begin{bmatrix} \Delta\phi_1 \\ \Delta\phi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{R_{11}^*}{L_{11}^2} & \frac{R_{12}}{L_{11} L_{22}} \\ \frac{R_{12}}{L_{11} L_{22}} & \frac{R_{22}^*}{L_{22}^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\phi_1 \\ \Delta\phi_2 \end{bmatrix} = - Y^T N Y$$

La forme quadratique (5.24.) est définie négative quelles que soient les valeurs des résistances et des selfs.

La matrice A^{**} gardant la même structure quel que soit le nombre de mailles, il est possible d'étendre ce calcul à l'ordre n et l'on peut énoncer :

Tout réseau dont il est possible d'extraire un arbre linéaire purement **résistif** et possédant des résistances non linéaires dans ses branches indépendantes de la propriété d'unicité de réponse si la condition :

$$\frac{d(R_{jj} i_j)}{d i_j} > 0$$

est vérifiée pour toute valeur de j .

5.5.2. Introduction d'une capacité dans l'arbre

Introduisons une capacité C_{12} en série avec la résistance R_{12} dans la branche de l'arbre (figure 5.2.).

Notons Q_{12} , Q_1 , Q_2 les charges des condensateurs C_{12} , C_1 et C_2 à l'instant t .

En choisissant les variables :

$$q_1 = \int_0^t i_1 dt$$

$$q_2 = \int_0^t i_2 dt$$

Il vient :

$$\begin{aligned} Q_{12}(t) &= Q_{12}(0) + q_1 + q_2 \\ Q_1(t) &= Q_1(0) + q_1 \\ Q_2(t) &= Q_2(0) + q_2 \end{aligned}$$

L'équation aux écarts s'écrit alors :

$$(5.25.) \quad \begin{bmatrix} \dot{\Delta\phi}_1 \\ \dot{\Delta q}_1 \\ \dot{\Delta\phi}_2 \\ \dot{\Delta q}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{R'_{11}}{L_{11}} & \frac{1}{C_{11}} & \frac{R_{12}}{L_{22}} & \frac{1}{C_{12}} \\ -\frac{1}{L_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_{12}}{L_{11}} & \frac{1}{C_{12}} & \frac{R'_{22}}{L_{22}} & \frac{1}{C_{22}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_{22}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi_1 \\ \Delta q_1 \\ \Delta\phi_2 \\ \Delta q_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta\left(\frac{Q_1(0)}{C_1} + \frac{Q_{12}(0)}{C_{12}}\right) \\ 0 \\ \Delta\left(\frac{Q_2(0)}{C_2} + \frac{Q_{12}(0)}{C_{12}}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cette écriture est de la forme :

$$\dot{Z} = - A'^* Z + K$$

La présence du vecteur K non nul ne nous permet plus de conclure à l'unicité de réponse.

Le vecteur K n'étant pas borné, il n'est pas non plus possible de limiter la dispersion des réponses.

5.6. Conclusion

Les modèles mathématiques considérés dans ces travaux nous ont conduit, par l'application de critères très simples, à des conditions suffisantes de stabilité asymptotique et surtout d'unicité de réponse.

Lorsque ces dernières ne sont pas satisfaites, l'adaptation des critères de majoration des oscillations limites à l'équation aux écarts nous a permis de localiser la dispersion des réponses et des conclusions ont pu en être déduites sur le plan de la précision et de la stabilité de structure.

Chapitre 6

Simulation

6.1. Introduction

Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'étudier l'asservissement en position d'un moteur à courant continu comme exemple d'application des résultats établis antérieurement.

Une simulation sur ordinateur hybride EAI 580 permettra de mettre en évidence le phénomène de non unicité de réponse prévu par le calcul.

6.2. Présentation du système

Considérons l'asservissement en position avec retour tachymétrique présenté à la figure 6.1.

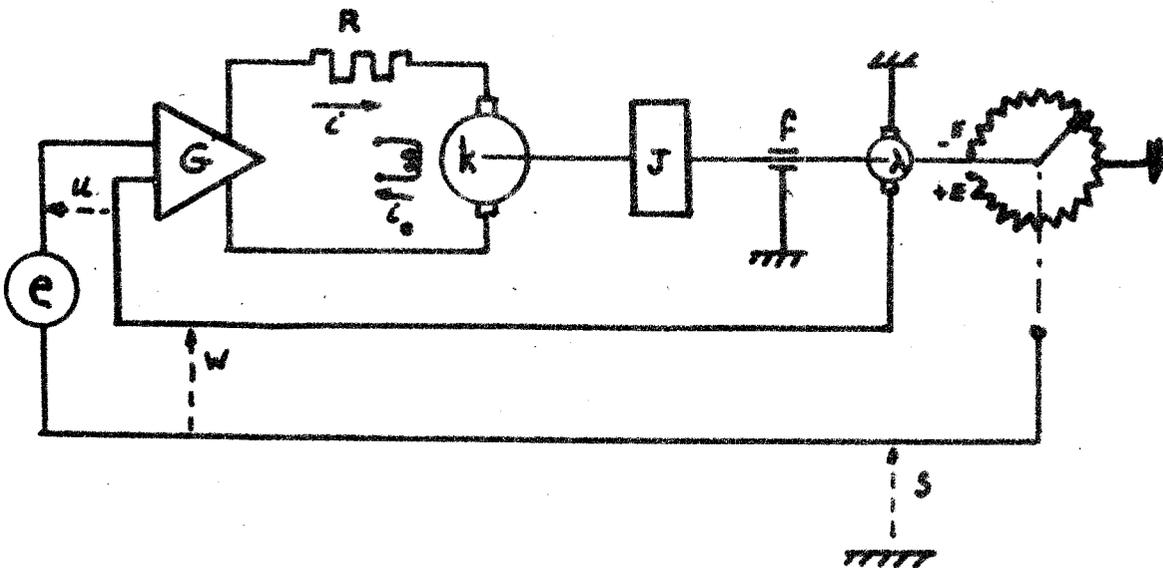


Figure 6.1.

L'arbre du moteur entraîne une inertie J , une dynamo tachymétrique de gain λ et un potentiomètre.

L'amplificateur de gain G possède une impédance d'entrée infinie. Il ne circule donc aucun courant dans le potentiomètre et l'on pourra considérer que celui-ci possède un gain constant h .

L'impédance de sortie de l'amplificateur et la résistance de l'induit du moteur sont matérialisés par la résistance R .

6.3. Modèle mathématique et équation aux écarts

Le système est constitué de trois mailles (deux mailles électriques et une "maille mécanique") couplées entre elles par trois éléments : la dynamo tachymétrique, le potentiomètre et l'amplificateur.

La première maille électrique comprend la source de tension e qui commande la position, la dynamo, le potentiomètre et l'entrée de l'amplificateur. Aucun courant ne circulant, l'équation régissant son évolution s'écrit :

$$(6.1.) \quad u = e - \lambda\omega - h\theta$$

u : tension aux bornes d'entrée de l'amplificateur.

La seconde maille électrique, parcourue par le courant i , comprend l'induit du moteur, la résistance R et la sortie de l'amplificateur. Son fonctionnement est régi par l'équation :

$$(6.2.) \quad g(u) = v = Ri + k\omega$$

La charge du moteur formant la "maille mécanique", il vient :

$$(6.3.) \quad -ki + J \frac{d\omega}{dt} + \phi\omega = 0$$

L'équation de fonctionnement de la "maille mécanique" faisant intervenir ω et sa dérivée, les organes de couplages électromécaniques fournissant des tensions respectivement proportionnelles à ω et θ , et le réseau électrique ne possédant aucune variable d'état, le système est d'ordre deux.

Nous pouvons donc prendre θ et ω comme variables d'état dans l'équation suivante :

$$(6.4.) \quad Kg (e^{-\lambda\omega - h\theta}) = \omega + \tau \frac{d\omega}{dt}$$

avec :
$$K = \frac{k}{R\phi + k^2}$$

$$\tau = \frac{RJ}{R\phi + k^2}$$

Dans la suite, nous utiliserons la notation g'^* définie antérieurement

$$g'^* = \left[\frac{dg(\epsilon)}{d\epsilon} \right]_{\epsilon=\theta_i}$$

La soustraction membre à membre de deux équations (6.4.) correspondant à une même entrée et l'application du théorème des accroissements finis conduisent, pour l'expression de l'écart à la relation :

$$(6.5.) \quad K \cdot \left[-\lambda(\omega_1 - \omega_2) - h(\theta_1 - \theta_2) \right] \cdot g'^* = \omega_1 - \omega_2 + \tau \left(\frac{d\omega_1}{dt} - \frac{d\omega_2}{dt} \right)$$

soit, en notant $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ et $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$

$$(6.6.) \quad K \cdot (-\lambda\Delta\omega - h\Delta\theta) \cdot g'^* = \Delta\omega + \tau \dot{\Delta\omega}$$

La relation matricielle correspondant à 6.6. s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{hK}{\tau} \cdot g'^* & -\frac{1}{\tau} - \frac{K\lambda}{\tau} \cdot g'^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \omega \end{bmatrix}$$

ou bien :

$$\dot{Z} = A'^* \cdot Z$$

Effectuons le changement de variables défini par la matrice P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h & \lambda \end{bmatrix} \implies P = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 \\ -\frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$$

Les nouvelles variables d'état sont $h\theta = s$ et $h\theta + \lambda\omega = w$, tensions représentées sur la figure (6.1.).

Il vient alors, pour l'équation aux écarts :

$$\begin{bmatrix} h\dot{\Delta\theta} \\ h\dot{\Delta\theta} + \lambda\dot{\Delta\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{\lambda} & \frac{h}{\lambda} \\ \frac{i}{\tau} - \frac{h}{\lambda} & -\frac{1}{\tau} + \frac{h}{\lambda} - \frac{K\lambda}{\tau} \cdot g'^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h\Delta\theta \\ h\Delta\theta + \lambda\Delta\omega \end{bmatrix}$$

Dans cette relation, g'^* est multiplié par la variable $h\Delta\theta + \lambda\Delta\omega$, variable d'état dont dépend sa valeur.

6.4. Conditions d'unicité de réponse

6.4.1. $\frac{\lambda}{h}$ plus petit que τ

Soit V une fonction de Ljapunov définie par la forme quadratique :

$$(6.9.) \quad V = Z^T M Z$$

avec :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{h}{\lambda} & -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & \frac{h}{\lambda} \end{bmatrix}$$

Les coefficients $\frac{h}{\lambda} - \frac{1}{\tau}$ et $\frac{h}{\lambda}$ étant positifs, la fonction V est définie et strictement positive. Sa dérivée prend la forme :

$$(6.10.) \quad \frac{dV}{dt} = Z^T (A^T M + M A) Z$$

avec :

$$(6.11.) \quad A^T M + M A = 2 \begin{bmatrix} \frac{h}{\lambda} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{h}{\lambda} \right) & 0 \\ 0 & \frac{h}{\lambda} \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{1}{\tau} - \frac{K\lambda}{\tau} \cdot g'^* \right) \end{bmatrix}$$

La condition suffisante d'unicité de réponse s'écrit alors :

$$(6.12.) \quad K g'^* > \frac{h\tau}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}$$

$\frac{h}{\lambda}$ étant plus petit que τ , cette condition exprime que le gain dynamique doit être plus grand qu'une valeur positive.

6.4.2. $\frac{\lambda}{h}$ égal à τ

Dans ce cas, l'équation (6.8.) se réduit à :

$$\begin{bmatrix} h \Delta \dot{\theta} \\ h \Delta \dot{\theta} + \lambda \Delta \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{\lambda} & \frac{h}{\lambda} \\ 0 & -\frac{K\lambda}{\tau} \cdot g'^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h\Delta\theta \\ h\Delta\theta + \lambda\Delta\omega \end{bmatrix}$$

et la condition d'unicité de réponse s'en déduit simplement :

$$(6.13.) \quad K g'^* > 0$$

Dans le cas de la non observabilité de la chaîne ouverte, la condition d'unicité de réponse exprime que le gain dynamique doit rester strictement positif.

6.4.3. τ plus petit que $\frac{\lambda}{h}$

Effectuons le changement de variables défini par la matrice P_1^{-1} :

$$P_1^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{\tau} - \frac{h}{\lambda}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{h}{\lambda}} \end{bmatrix}$$

Il vient :

$$4.) \begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{\lambda} & \sqrt{\frac{h}{\lambda} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{h}{\lambda} \right)} \\ \sqrt{\frac{h}{\lambda} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{h}{\lambda} \right)} & \frac{h}{\lambda} - \frac{1}{\tau} + \frac{K\lambda}{\tau} \cdot g'^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \dots \end{bmatrix}$$

La matrice étant symétrique, l'unicité de réponse du système sera assurée entre les valeurs K_1 et K_2 de g'^* égales aux limites de stabilité du système linéaire correspondant.

6.5. Schéma de cablage

La simulation de ce système consiste à résoudre sur calculateur hybride l'équation (6.4.) qui décrit entièrement son évolution.

Effectuons un changement d'échelle machine élémentaire et il vient :

$$(6.15.) \quad K g^* \cdot \varepsilon = \omega + \tau \frac{d\omega}{dt}$$

$$(6.16.) \quad \varepsilon = e - \lambda\omega - \theta$$

La non linéarité $g^* = \frac{g(\varepsilon)}{\varepsilon}$ sera réalisée par une méthode de sous-routine, procédure multi-vitesse qui permet de réaliser un traducteur de fonction hybride.

Nous considérerons des non linéarités symétriques par rapport à l'origine nécessitant l'introduction de retards purs dans la commande logique ce qui nous conduira à adapter la méthode classique de sous-routine. Au lieu d'élaborer $g(\varepsilon)$ nous élaborerons $g^* = \frac{g(|\varepsilon|)}{|\varepsilon|}$ qui sera ensuite injecté dans la chaîne d'action de l'asservissement par l'intermédiaire d'un multiplieur. La sortie de cet élément sera alors égale à :

$$\varepsilon \cdot \frac{g(|\varepsilon|)}{|\varepsilon|} = g(|\varepsilon|) \cdot \text{signe } \varepsilon = g(\varepsilon)$$

6.5.1. Remarque

L'utilisation de cette méthode nécessite un échantillonnage blocage de $\frac{g(\tau)}{\tau}$ aux instants $\tau^2 = \varepsilon^2(t)$. Si le mode répétitif de la partie rapide a une fréquence

très élevée vis à vis de la vitesse d'évolution de $\epsilon(t)$, la dispersion des réponses ne peut pas être mise en évidence sur les appareils d'observation utilisés.

en effet, le système n'est plus décrit par une relation du type :

$$\dot{X} = E - A^* X$$

mais par une du type :

$$\dot{X} = E - A^* X + K$$

où les composantes k^i de K sont très petites. Une majoration de l'écart entre deux réponses conduit à une relation de la forme :

$$\text{Max} || Z || < \frac{k^i}{F(A^*)}$$

Cette valeur peut être rendue aussi petite que l'on veut en augmentant la fréquence du répétitif rapide.

6.5.2. Modèle analogique de l'asservissement /20/

Le câblage doit traduire les équations (6.15.) et (6.16.) soit :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K \cdot g^* \cdot \epsilon}{\tau} - \frac{\omega}{\tau}$$

$$\epsilon = e - \lambda \omega - \theta$$

Il vient donc le modèle de base de la figure 6.2.

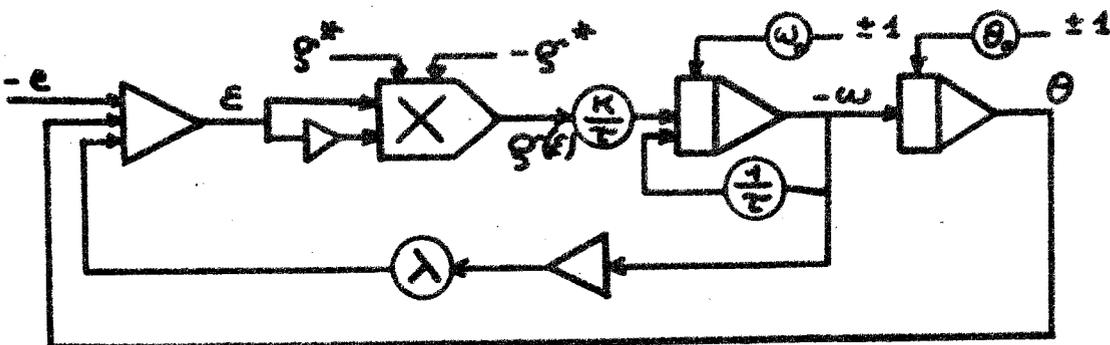


Figure 6-2

Ce montage permet de visualiser les évolutions de ω et θ sur oscilloscope ou table traçante.

6.5.3. Elaboration de g^* échantillonné bloqué

La méthode de sous-routine nécessite l'élaboration préalable d'une dent de scie d'horloge. Nous utiliserons pour cela un intégrateur ayant une référence comme entrée et une valeur initiale nulle. Un comparateur, attaquant une bascule RS, déclenchera la mise en condition initiale au moment où sa sortie atteindra l'unité ; un compteur, utilisé comme opérateur de retard pur, le fera revenir en mode calcul quelques instants plus tard. Le montage est présenté à la figure 6.3(a)

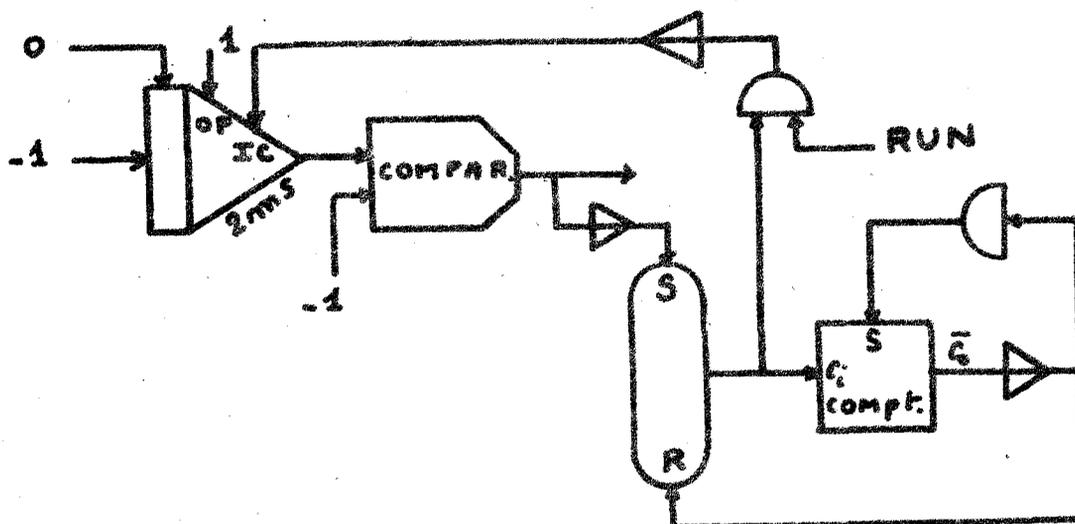
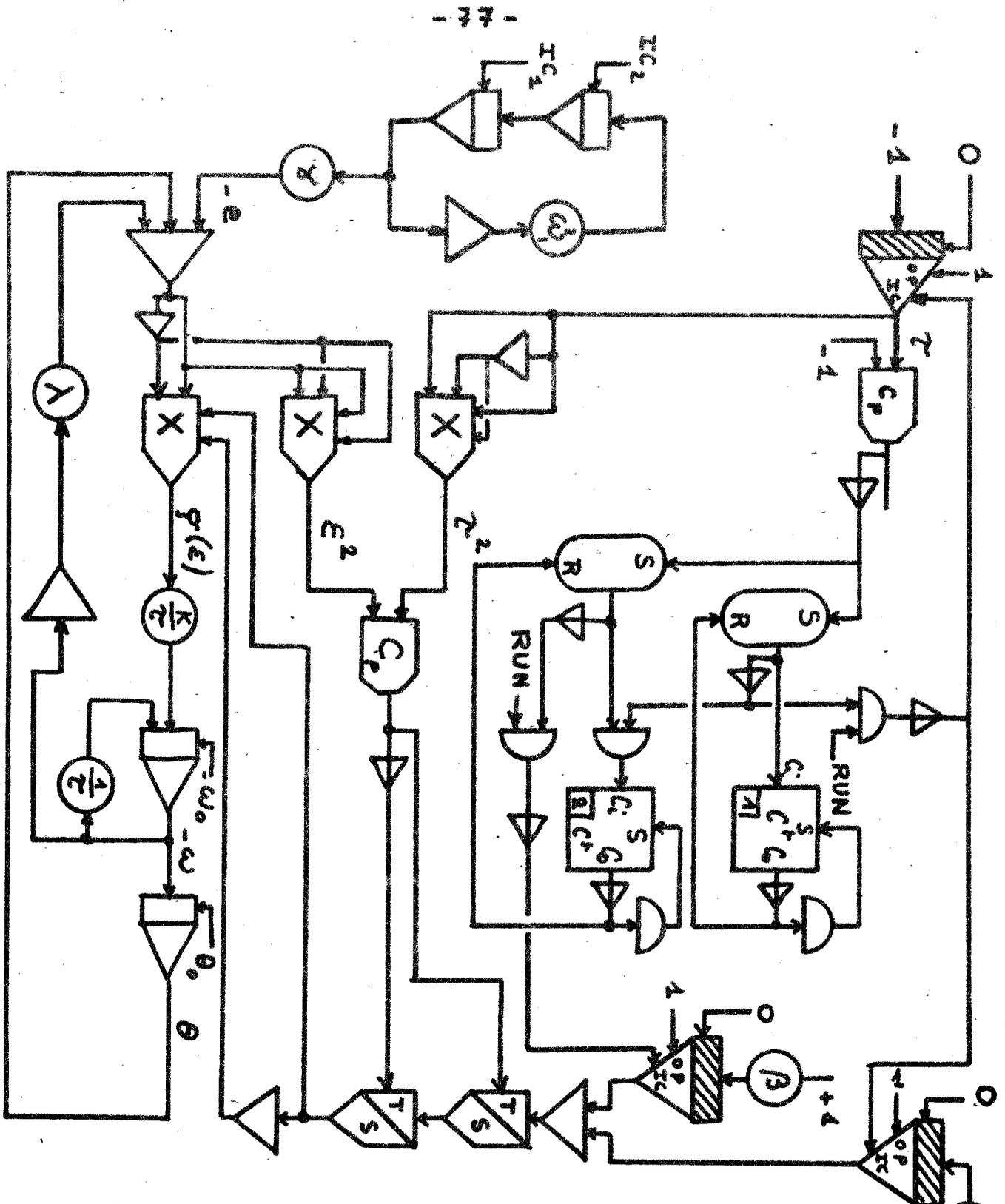


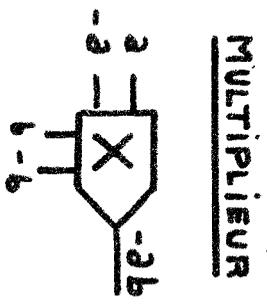
Figure 6.3.(a)

L'introduction de la fonction NAND ayant l'information RUN en entrée correspond à une sécurité. Elle permet en effet, lorsque la partie logique n'est pas en mode calcul, de mettre l'intégrateur en position condition initiale et d'éviter qu'il diverge.

Nous considérerons des non-linéarités $g(\epsilon)$ constituées de deux arcs de paraboles. Le gain g^* sera donc pris égal à la somme de deux rampes de pentes réglables (figure 6.3(b)), la première démarrant au temps $\tau = 0$ et la seconde quelques instants plus tard grâce à la présence d'un deuxième compteur utilisé comme organe de retard pur.



BUS LILLE

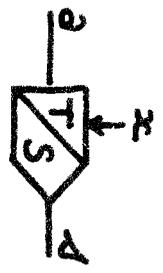


COMPARATEUR



$A=1$ si $a+b > 0$
 $A=0$ si $a+b < 0$

TRACK - STORE



$A=1$ si $x=1$
 $A=0$ si $x=0$

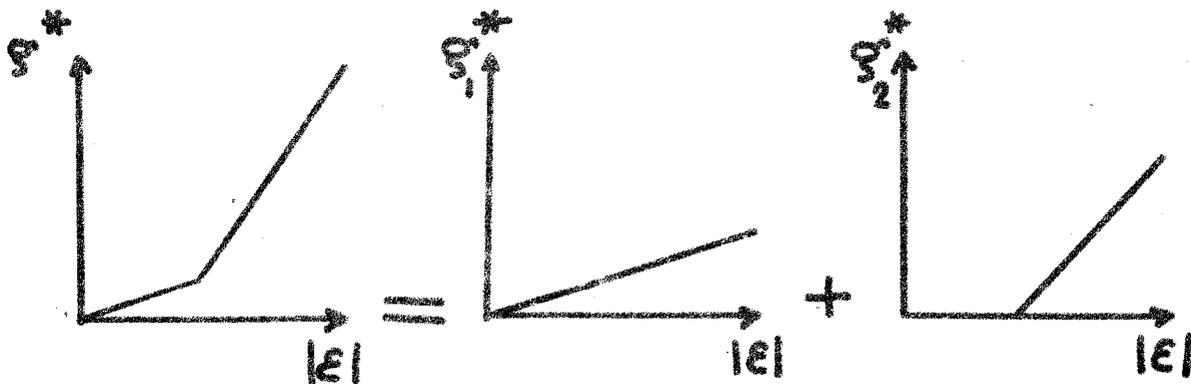


Figure 6.3.(b)

L'échantillonnage blocage sera réalisé à l'aide de deux track-stores montés en série et commandés par un comparateur traitant les informations τ^2 et $-\epsilon^2$.

Le montage complet est présenté figure 6.4. page 77 .

6.6. Simulation

Nous présentons dans les figures suivantes, quelques enregistrements significatifs montrant la non-unicité de réponse du système étudié pour des non-linéarités ne respectant pas les conditions définies antérieurement.

Nous emploierons deux méthodes pour mettre ce phénomène en évidence. La première consiste à relever, dans le plan de phase, l'évolution du système en régime autonome et constater que les points d'équilibre obtenus dépendent des conditions initiales. La seconde fait apparaître une démultiplication de fréquence en régime forcé.

Considérons en premier lieu, une non linéarité présentant un seuil (figure 6.5.).

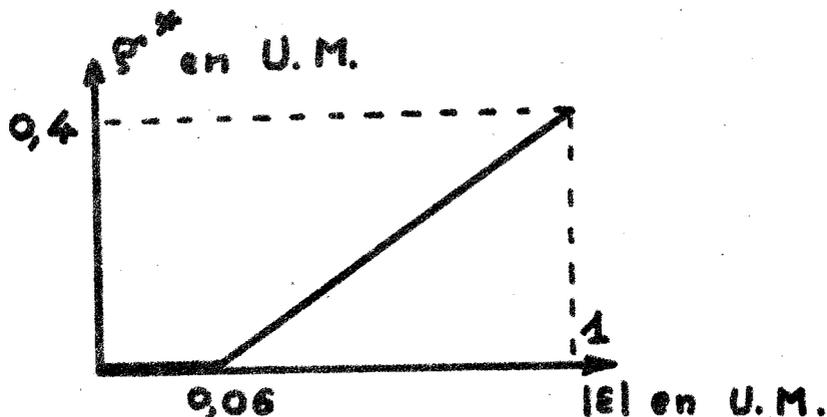
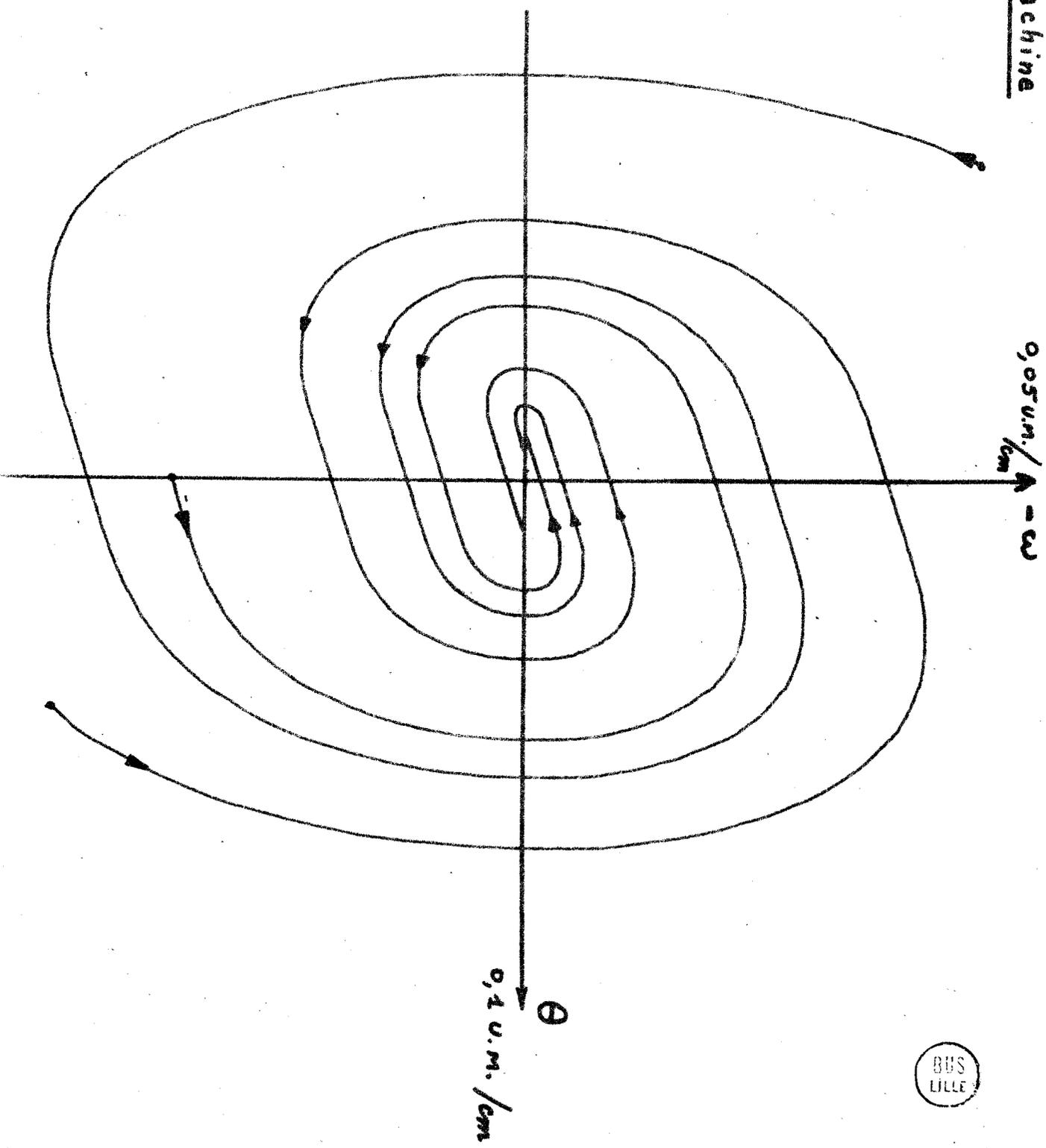


Figure 6.5.

U.M. = Unite' Machine

K = 0,5



BUS LILLE

Pour $\tau = 10$, $\lambda = 1$, la condition d'unicité de réponse :

$$K g^* > \frac{\tau - \lambda}{2} = 9$$

n'est pas vérifiée.

L'enregistrement dans le plan de phase de la figure (6.6.) met en évidence trois points d'équilibre pour trois ensembles de conditions initiales et celui de la figure (6.7.) montre un phénomène de démultiplication de fréquence qui, dans les conditions de l'expérience, est d'ordre 3.

Dans le cas $\lambda > \tau$, si l'on introduit une instabilité locale autour de l'origine (caractéristique de la figure 6.8.), l'évolution dans le plan de phase (figure 6.9.) montre qu'il existe deux points d'équilibre ; ce sont les conditions initiales qui déterminent le point d'arrivée.

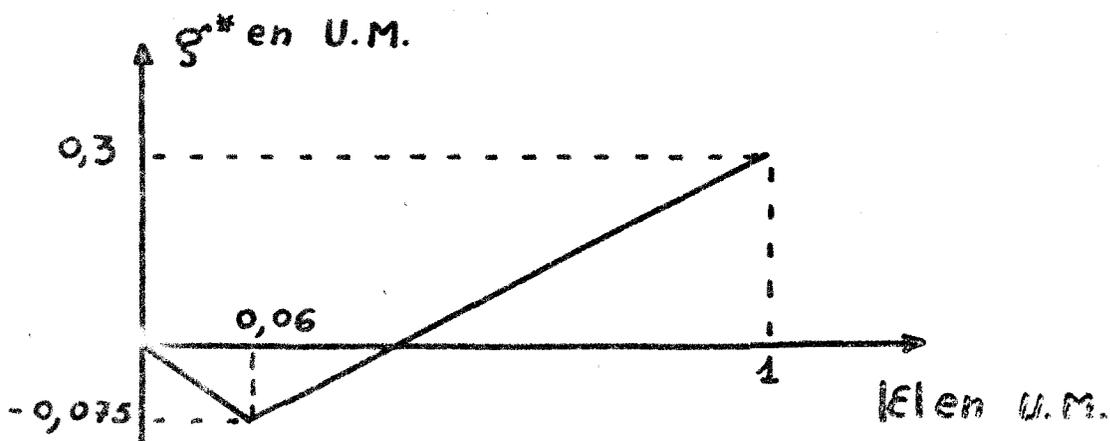


Figure 6.8.

Les figures 6.10. à 6.13 présentent divers cas de démultiplications de fréquences obtenus pour des réglages différents.

Au cours de l'expérimentation, nous avons pu faire apparaître plusieurs fois des sorties θ apériodiques; ce phénomène montre, lui aussi, la non-unicité de réponse. Un exemple est présenté à la figure 6.14.

$r = 1,25$
 $\lambda = 1$
 $k = 0,5$

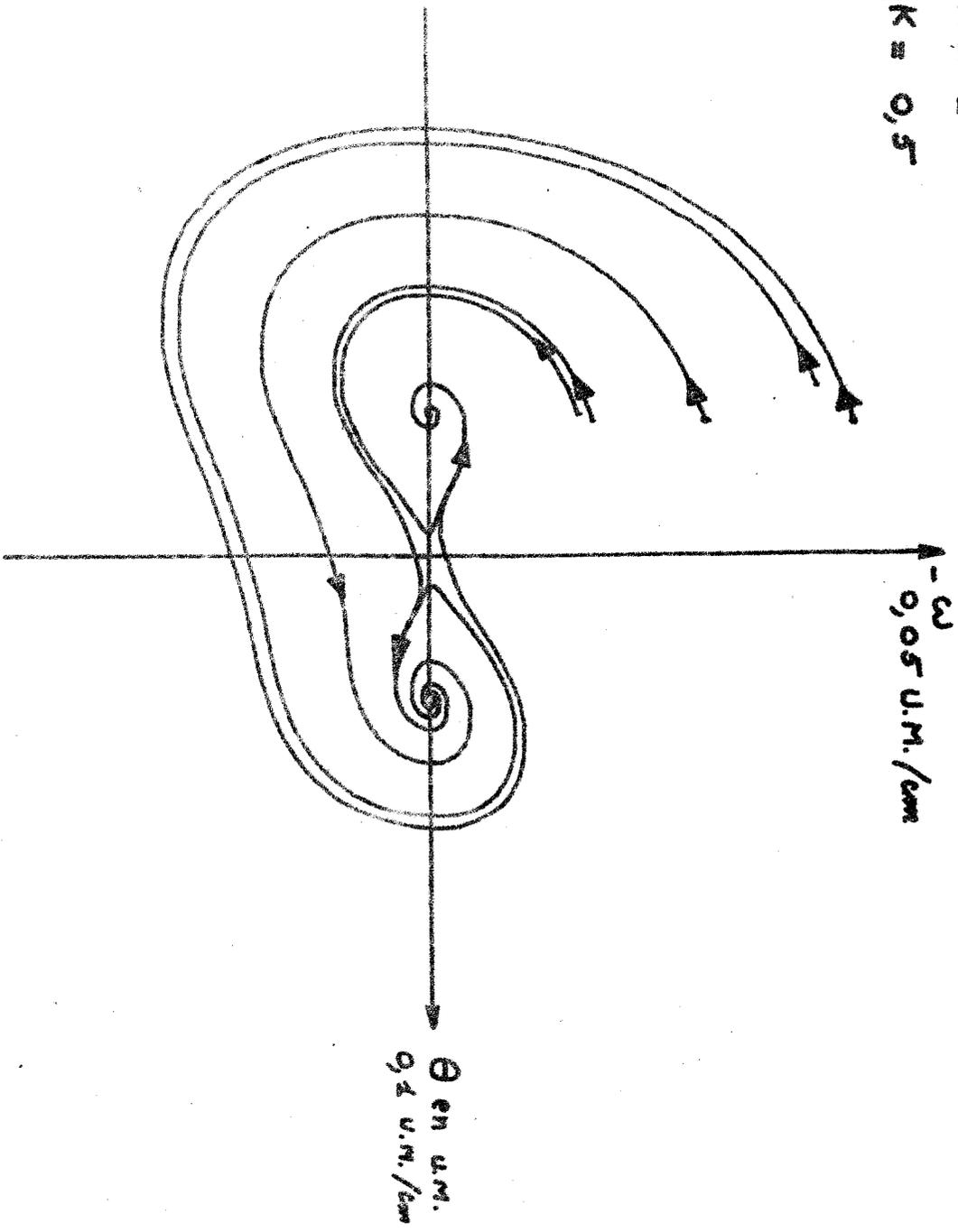
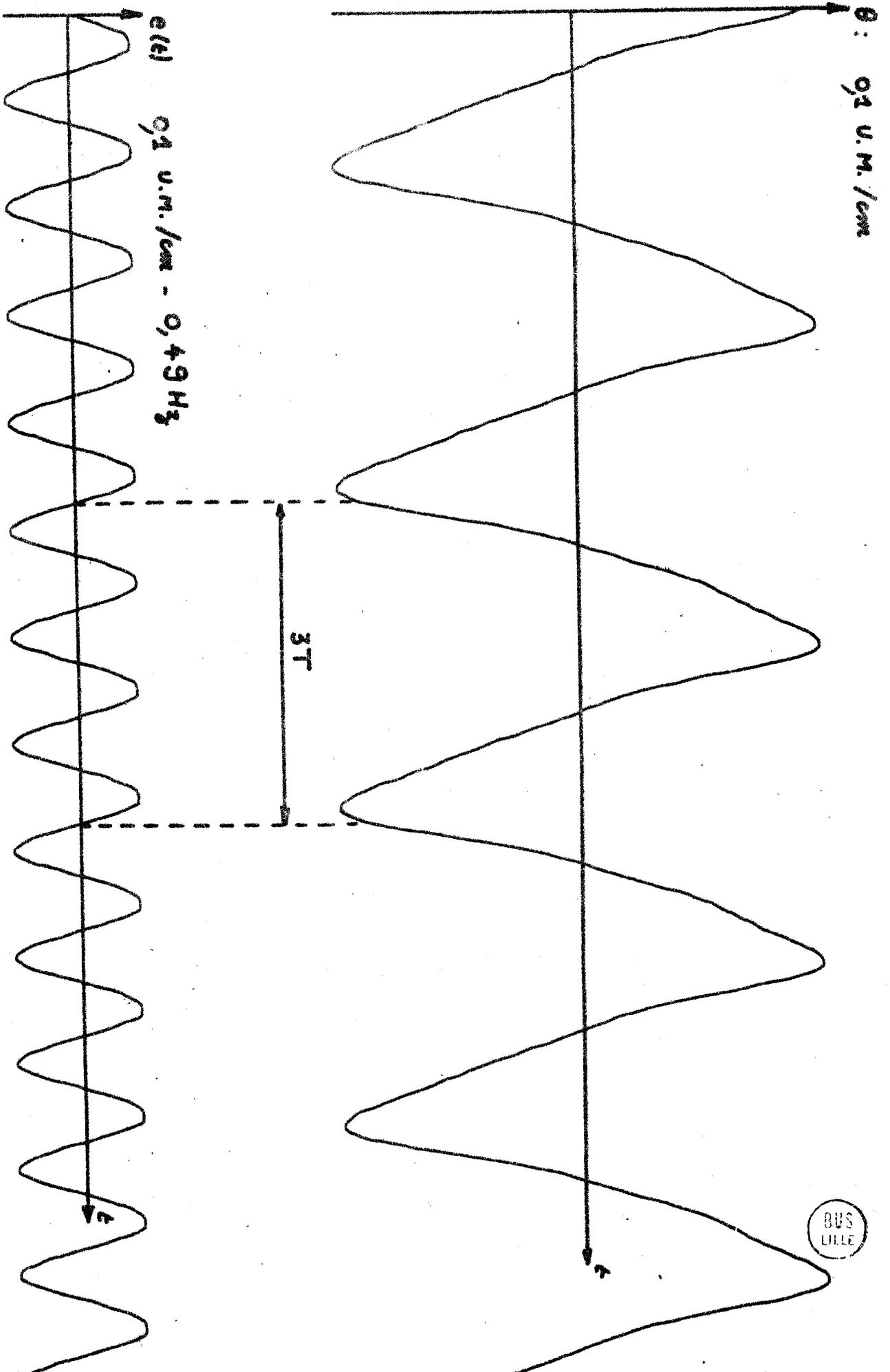
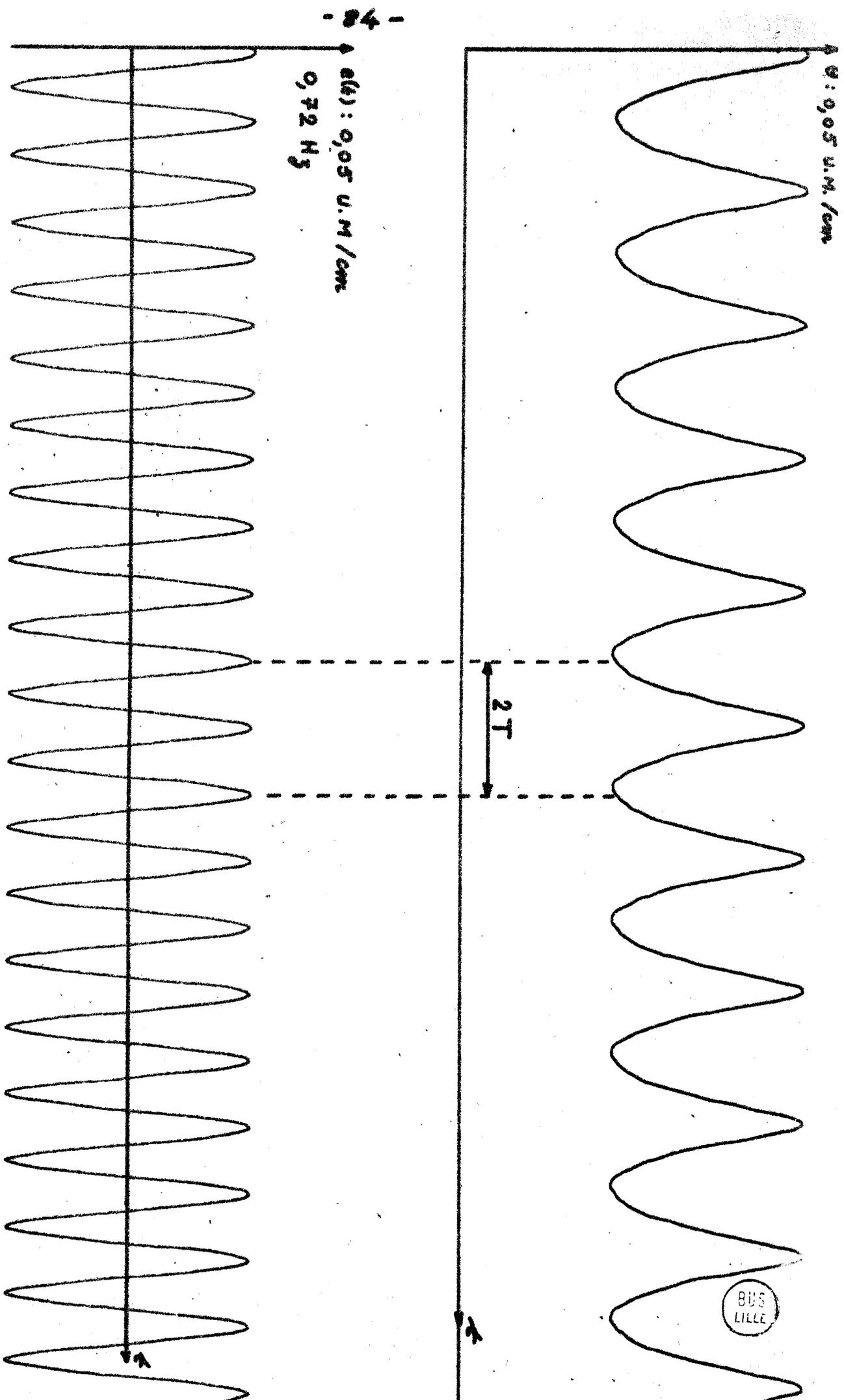


FIGURE 6-9





8-10-54



$\tau = 10 \quad \lambda = 1 \quad k = 0,5$

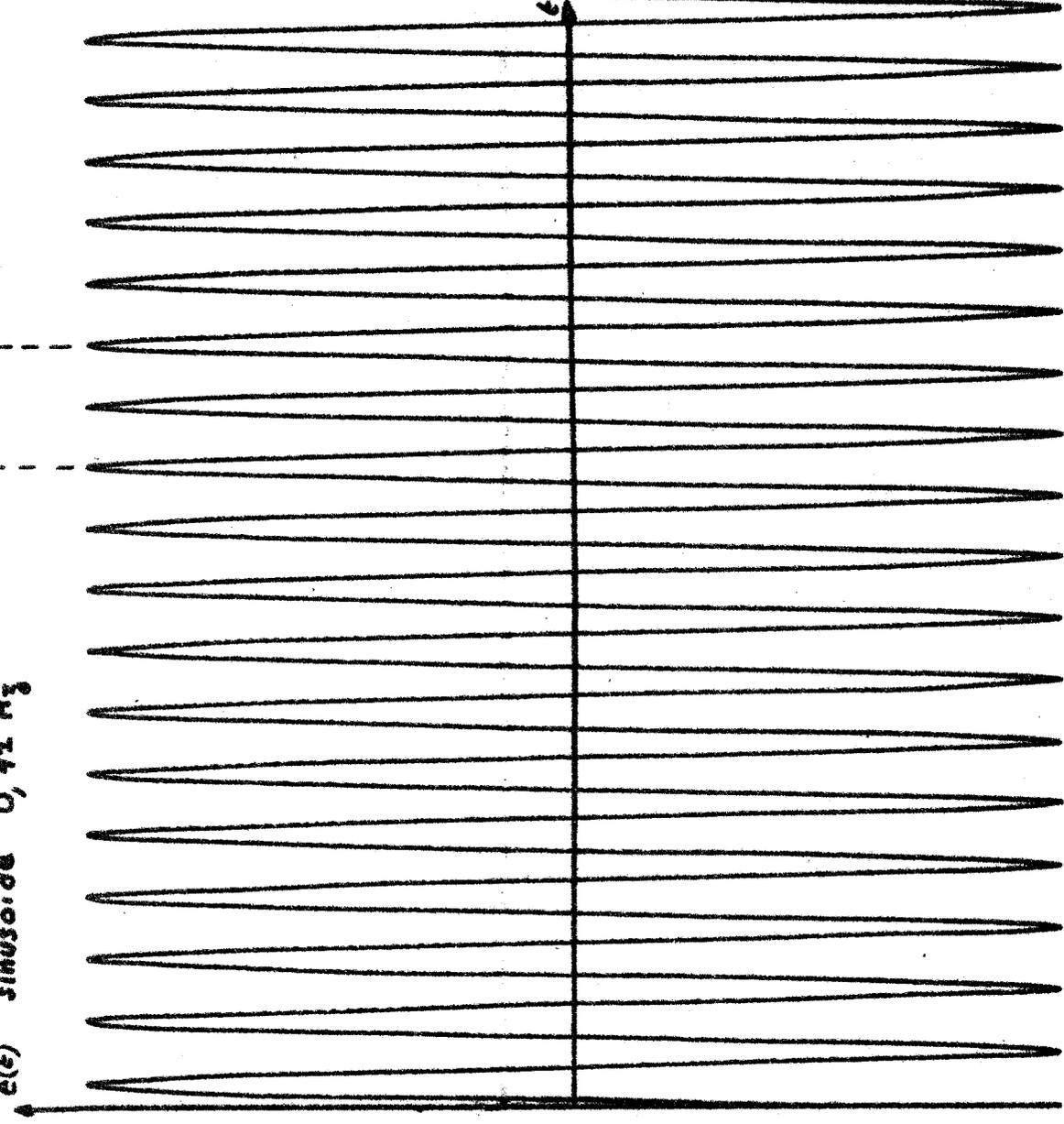
- 85 -

oscillation de θ autour d'une position d'équilibre du régime autonome



$2T$

$e(t)$ sinusoïde 0,41 Hz

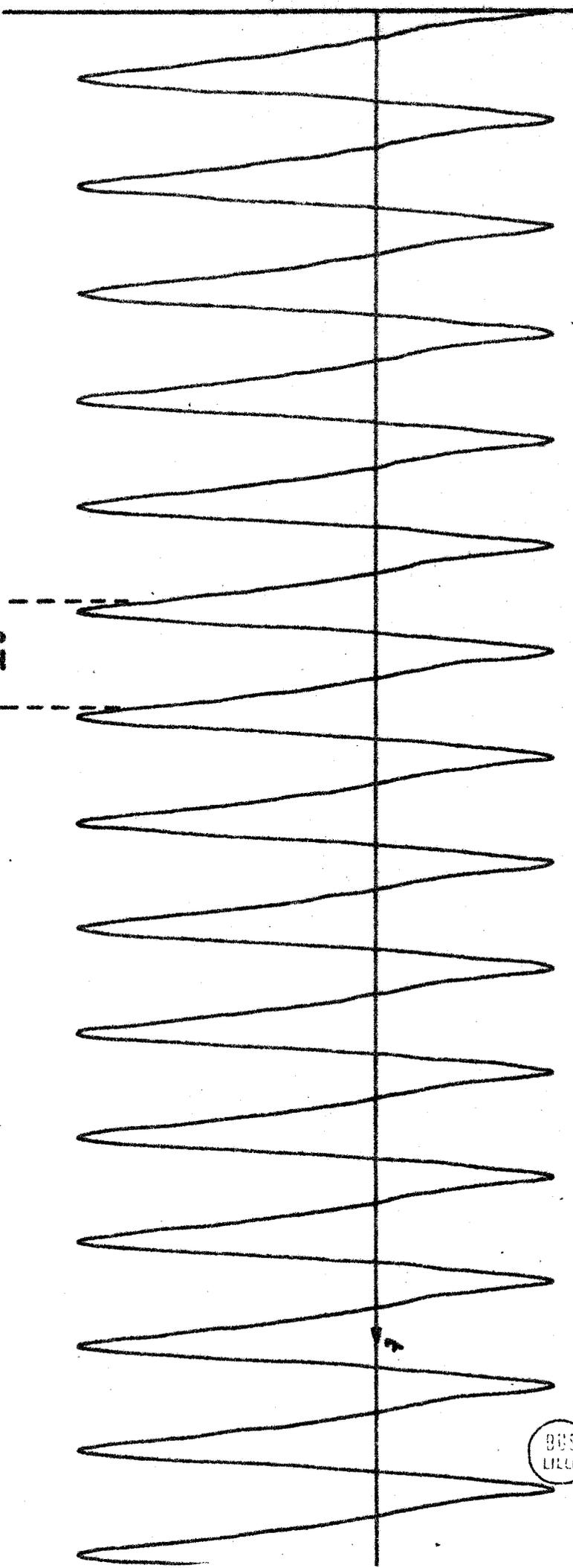


$\tau = 10$ $\lambda = 1$ $K = 0,5$

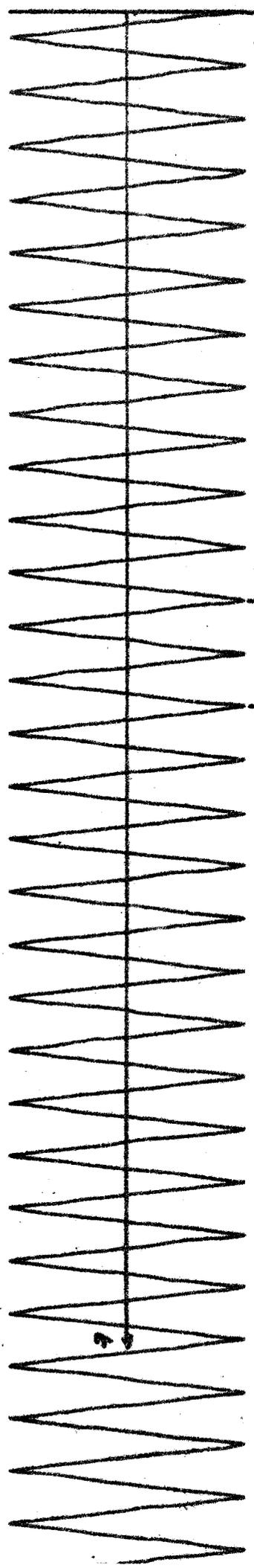
FIGURE 6-12

3713
LILLE

$\theta(t)$ 0,2 U.M./cm



$e(t)$ Triangles 0,4 Hz
0,2 U.M./cm



$T = 10$ $\lambda = 4$ $K = 0,5$

DBS
LILLE

FIGURE 6-13

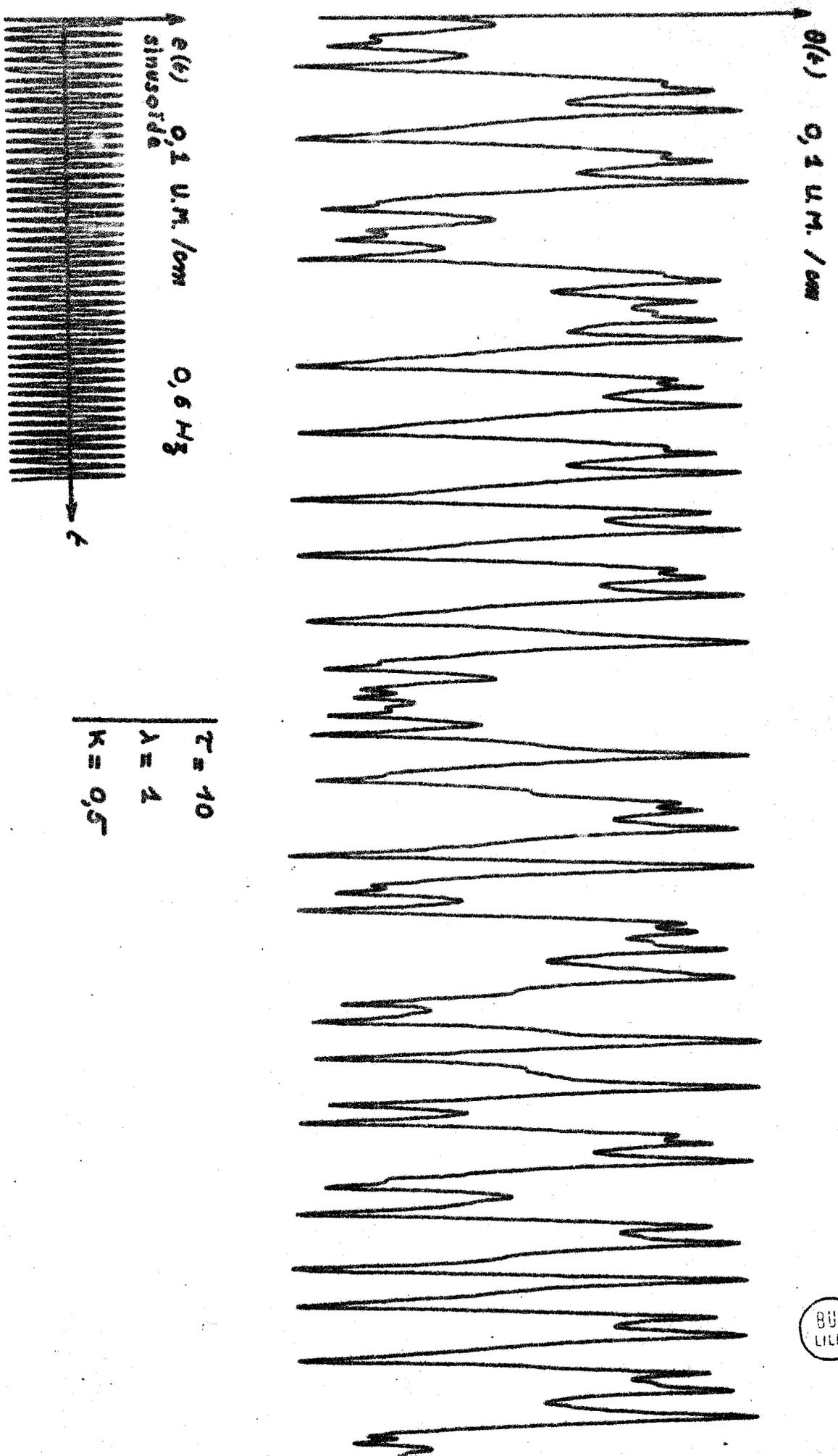


FIGURE 6-14



6.7. Conclusion

La simulation de l'asservissement du moteur sur calculateur hybride EAI 580 nous a permis de mettre en évidence la non unicité de réponse .

Nous avons pu remarquer, au cours de l'expérimentation, que la démultiplication de fréquence dépendait de nombreux paramètres.

Par exemple pour une même entrée périodique et pour un même ensemble de conditions initiales, la sortie peut présenter divers régimes dynamiques si une légère perturbation est introduite dans le système.

Cela montre qu'il est difficilement envisageable de contrôler un phénomène de démultiplication de fréquence.

La théorie nous a permis de trouver des conditions de structure assurant l'unicité de réponse d'un système. S'il ne possède pas naturellement cette propriété, il est donc possible de calculer une compensation le plaçant dans cette hypothèse afin de le rendre utilisable.

Conclusion

La complexité des installations industrielles augmentant sans cesse, l'ingénieur de système se heurte à des problèmes d'identification de plus en plus difficiles à résoudre.

L'extension de la méthode de Kron au domaine non linéaire, permet d'identifier de tels systèmes en les décomposant en un certain nombre de sous-systèmes de petites dimensions plus faciles à étudier, leurs interactions intervenant ultérieurement de façon simple.

Cette méthode conduit à des modèles autorisant l'application de critères simples. Des conditions suffisantes de stabilité ou d'unicité de réponse du système étudié peuvent en être déduites. Ces conditions portent sur la structure même du réseau et sur les formes des caractéristiques des éléments non linéaires.

L'étude du régime permanent des systèmes possédant la propriété d'unicité de réponse peut se faire à partir d'une réponse connue et indépendamment des conditions initiales. Par contre, l'étude des systèmes ne possédant pas cette propriété nécessite la détermination préalable d'une majoration de l'écart entre deux réponses à une même entrée.

Cette étude a été complétée par une simulation sur machine hybride et les résultats trouvés peuvent apporter une contribution à l'introduction de calculateurs dans la chaîne de commande.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.M. LJAPUNOV
" *Problème général de la stabilité du mouvement* "
Annales Faculté des Sciences Toulouse - Vol. 9. 1907.
- [2] A.M. LJAPUNOV
" *Stability of Motion* "
Academic Press 1966.
- [3] H. ROSEMBROCK
" *A method of investigating stability* "
I.F.A.C. Bâle Septembre 1963.
- [4] F. LAURENT, F. LHOTE
" *Sur une condition suffisante de stabilité asymptotique pour un système continu non-linéaire* "
C.R. Académie des Sciences. Paris, Série A. 1966. t. 262.
- [5] R. BOUDAREL, J. DELMAS, P. GUICHET
" *Commande optimale des processus* "
Tome 1 - Dunod 1967.
- [6] F.R. GANTMACHER
" *Théorie des matrices* "
Dunod 1966.
- [7] R.E. KALMAN, et J.E. BERTRAM
" *Control systems analysis and design via the second method of Ljapunov* "
Transactions of the A.S.M.S. J. of Bas. Eng.
- [8] R.E. KALMAN
" *On the general theory of control systems* "
Proc. I.F.A.C. 1960-1, 480-492 Butterworths. London 1961.

[9]

S. LEFSCHETZ

" *Stability of non linear control systems* "

Academic Press 1965.

[10]

F. LAURENT, A. PETTE, H. NGUYEN QUY

" *Critère de stabilité des systèmes continus et échantillonnés non linéaires* "

C.R. Académie des Sciences - PARIS - 1970, Série A - t.270.

[11]

J. LAGASSE

" *Electrotechnique générale - Etude des circuits électriques* "

Editions ENSEEHT

[12]

R. BONNEFILLE

" *Circuits électriques* "

Editions Sup. Elec.

[13]

R. ARNAL

" *Signaux et circuits* "

Dunod Université 1970.

[14]

ROSENBROCK

" *Multivariable system theory* "

Nelson 1970.

[15]

M.D. MESAROVIC, D. MACKO, Y. TAKAHARA

" *Theory of hierachical, Multilevel systems* "

Academic Press 1970.

[16]

M. PANET, C. MAIZIERES, E. LAURENT

" *Sur l'unicité de la réponse des systèmes multivariables non linéaires- Application aux réseaux électriques* "

I.F.A.C. Symposium - Dusseldorf 7-8 Octobre 1968.

17

F. LAURENT, C. MAIZIERES

" *Sur la majoration de l'écart entre les réponses, à une entrée quelconque, des systèmes asservis non linéaires, continus ou échantillonnés* "
C.R. Académie des Sciences - Paris 1968 - T. 266

18

J. RESWICK, C. TAFT

" *Introduction to dynamic systems* "
Prentice Hall International

19

H.V. SAHASRABUDDHE, H.K. KESAVAN

" *Network models for co-state equations of linear and non-linear systems* "
I.E.E.E. Int. J. Control. 1970, Vol 12. n° 4, 671-684.

20

C. MELIN, J.M. TOULOTTE

" *Les machines hybrides* "
Editions du laboratoire de Génie Electrique de la Faculté des Sciences
de Paris-Fontenay-aux-Roses.

Table des Matières

	Pages
<u>INTRODUCTION GENERALE</u>	1
<u>Chapitre 1 : Formulation des systèmes continus multivariables</u>	2
1.1. Introduction	2
1.2. Différents modes de commande	3
1.3. Formulation des systèmes monovariables en boucle ouverte	4
1.3.1. Stabilité	
1.3.2. Commandabilité	
1.4. Systèmes bouclés	7
1.4.1. Observabilité	
1.4.2. Formulation des systèmes bouclés linéaires	
1.5. Systèmes à commande non linéaire	10
1.6. Systèmes multivariables linéaires	11
1.6.1. Stabilité	
1.6.2. Commandabilité	
1.6.3. Observabilité	
1.7. Systèmes multivariables non linéaires	14
1.8. Conclusion	17
<u>Chapitre 2 : Méthode d'étude des réseaux linéaires</u>	
2.1. Introduction	18
2.2. Méthode de Kron	19
2.3. Méthode des mailles	19
2.4. Modèles associés à la méthode des mailles	20
2.5. Modalités de choix des variables d'état	22
2.6. Exemple d'application	23
2.7. Remarque	26
2.8. Méthode des noeuds	27
2.9. Conclusion	28

Chapitre 3 : Extension de la méthode de Kron aux systèmes non linéaires

3.1. Généralités-----	29
3.2. Modèles associés à la méthode des mailles-----	29
3.2.1. Mailles à selfs non linéaires	
3.2.2. Mailles à résistances non linéaires	
3.2.3. Mailles à capacités non linéaires	
3.3. Modèles associés à la méthode des noeuds-----	33
3.4. Exemples d'applications-----	35
3.4.1. Méthode des mailles	
3.4.2. Méthode des noeuds	
3.5. Dispositions des composants non linéaires rendant délicat le choix d'un arbre-----	37
3.6. Présence d'une maille résistive-----	38
3.7. Conclusion-----	40

Chapitre 4 : Circuits couplés

4.1. Introduction-----	41
4.2. Relation générale caractéristique des circuits passifs-----	41
4.3. Transformateurs-----	42
4.3.1. Transformateurs linéaires	
4.3.2. Transformateurs non linéaires	
4.4. Couplages passifs avec modification de la nature physique de l'information-----	48
4.5. Formulation d'une classe particulière de circuits couplés-----	50
4.5.1. Relation générale	
4.5.2. Applications aux systèmes électromagnétiques	
4.5.3. Réseau comportant un moteur	
4.6. Réseaux comportant des éléments actifs-----	54
4.6.1. Cas de deux mailles séparées	
4.6.2. Application aux systèmes asservis.	
4.7. Conclusion-----	57

Chapitre 5 : Equations aux écarts

5.1. Généralités-----	58
5.2.(a) Equation aux écarts-----	59
5.2.(b) Conditions suffisante d'unicité de réponse-----	60
5.3. Interprétation physique-----	61
5.4. Dispersion des réponses-----	61
5.5. Applications-----	65
5.5.1. Arbre purement résistif et résistances non linéaires	
5.5.2. Introduction d'une capacité dans l'arbre	
5.6. Conclusion-----	68

Chapitre 6 : Simulation

6.1. Introduction-----	69
6.2. Présentation du système-----	69
6.3. Modèle mathématique et équation aux écarts-----	70
6.4. Conditions d'unicité de réponse	
6.4.1. $\frac{h}{\lambda}$ plus petit que τ	
6.4.2. $\frac{h}{\lambda}$ égal à τ	
6.4.3. τ plus petit que $\frac{h}{\lambda}$	
6.5. Schéma de cablage-----	74
6.5.1. Remarque	
6.5.2. Modèle analogique de léasservissement	
6.5.3. Elaboration de g^* échantillonné bloqué	
6.6. Simulation-----	78
6.7. Conclusion-----	88
<u>CONCLUSION GENERALE</u> -----	89

