

50.376
1971
23
N° d'ordre 240

50376
1971
23

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

T H E S E

présentée à

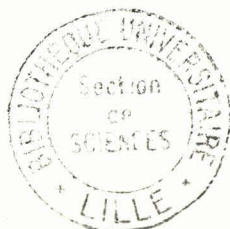
L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le titre de Docteur es-sciences de Troisième Cycle

par

Bruno S I O N



"SUR UNE EXTENSION DU THEOREME DE LA CONSTRUCTION STANDARD"

Membres du Jury : MM. PARREAU, Président
MMme SCHWARTZ, Rapporteur
MM. BKOUCHE {
MMme LEHMANN { Examineurs

Soutenue le 30 mars 1971

Cette thèse de troisième cycle est la conclusion de travaux effectués à Lille, sous l'impulsion et le contrôle de Madame M.H. SCHWARTZ, autour du théorème de la "construction standard" tel qu'on le trouve dans l'exposé XI du Séminaire Henri CARTAN (année 1951-52 - 1^o édition).

La rédaction de cet exposé, modifiée dans la récente réédition, souffrait de quelques inexactitudes (on en trouve par exemple une rédaction correcte dans un papier de B. CALLENAERE, à Lille). Nous appellerons ponctuel ce théorème. Nous avons cherché à l'étendre en un théorème local, faisant intervenir une suite fondamentale de voisinages d'un point ; la difficulté venait de ce que l'anneau des sections de $\mathcal{O}_n$ au-dessus d'un ouvert, au contraire de celui de la fibre de $\mathcal{O}_n$ en un point, n'est pas noethérien.

Le théorème que nous avons démontré est en fait la conséquence de résultats publiés par H. CARTAN dans les Annales Scientifiques de l'E.N.S. (t. 61-1944 ; p. 190 sq), bien que la notion de Construction Standard n'y figurât pas explicitement. On pourra donc considérer les pages qui suivent comme la présentation détaillée, dans le langage de la Construction Standard, avec l'outil des faisceaux cohérents, d'un théorème qui résulte aussi du mémoire fondamental de Henri CARTAN.

*

*

*

Les notations sont celles du cours de D.E.A. de Madame M.H. SCHWARTZ rédigé par M. BONIFACE : "Fonctions analytiques et théorie des faisceaux", Faculté des Sciences de Lille 1965-1966 ; nous y ajoutons quelques notations particulières : nous noterons $\mathcal{O}_n$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes de n variables complexes, et $\mathcal{O}_n^p$ le faisceau somme directe de p faisceaux égaux à $\mathcal{O}_n$ ($\mathcal{O}_n^p$ est encore le faisceau des germes de fonctions holomorphes p -dimensionnelles de n variables). Etant donné un système fini $(s_i)_{i \in I}$ de sections de $\mathcal{O}_n^p$ au-dessus d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, nous noterons $L(s_i, i \in I)$ ou parfois $L(s_i)$, le préfaisceau, et $L(s_i, i \in I)$, ou parfois $L(s_i)$, le faisceau de modules associés au système $(s_i)_{i \in I}$. (cf. Annexe 1).

Définition.-

Construction relative au faisceau $L(s_i, i \in I)$ sur une suite décroissante d'ouverts.

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $(s_i)_{i \in I}$ un système fini de sections de $\mathcal{O}_n^p$ au-dessus de U , et $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de U décroissante pour la relation d'inclusion. Nous appelons construction de $L(s_i, i \in I)$ sur la suite $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ toute famille $(\lambda_m^i)_{m \in \mathbb{N}, i \in I}$ d'applications

$$\lambda_m^i : \Gamma(U_m, \mathcal{O}_n^p) \longrightarrow \Gamma(U_m, \mathcal{O}_n)$$

possédant les propriétés suivantes :

- 1) $\forall i \in I, \forall m \in \mathbb{N}, \lambda_m^i$ est $\mathbb{C}$ -linéaire et continue pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de U_m .
- 2) $\forall i \in I, \forall m \in \mathbb{N}, \forall m' \in \mathbb{N}, [m \geq m'] \implies [\lambda_m^i \circ \rho_{U_m, U_{m'}} = \rho_{U_m, U_{m'}} \circ \lambda_{m'}^i]$
- 3) $\forall i \in I, \forall m \in \mathbb{N}, \forall f \in \Gamma(U_m, \mathcal{O}_n^p),$

$$[f \in \Gamma(U_m, L(s_i, i \in I))] \implies [f = \sum_{i \in I} \lambda_m^i(f) \rho_{U_m, U}(s_i)]$$

Remarque 1. - La propriété 2 exprime la commutativité d'un diagramme : pour $m \geq m'$, on a :

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma(U_{m'}, \mathcal{O}_n^P) & \xrightarrow{\lambda_{m'}^i} & \Gamma(U_{m'}, \mathcal{O}_n) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Gamma(U_{m'}, \mathcal{O}_n^P) & \xrightarrow{\lambda_m^i} & \Gamma(U_m, \mathcal{O}_n)
 \end{array}
 \quad \text{commutatif.}$$

Nous dirons alors que les λ_m^i commutent aux restrictions.

Remarque 2. - La propriété 3 peut être remplacée par la propriété équivalente 3' :

3') $\forall i \in I, \forall m \in \mathbb{N}, \forall f \in \Gamma(U_m, \mathcal{O}_n^P)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) : $f \in L(U_m; s_i, i \in I)$.

(ii) : $f \in \Gamma(U_m, L(s_i, i \in I))$.

(iii) : $f = \sum_{i \in I} \lambda_m^i(f) \rho_{u_m u}(s_i)$

en effet, on a évidemment $3' \Rightarrow 3$; mais on a aussi $3 \Rightarrow 3'$: on a toujours (i) $\Rightarrow$ (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (i) , et 3 exprime que (ii) $\Rightarrow$ (iii).

THEOREME. -

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}^n$ contenant l'origine, A un ensemble fini, et, $\forall \alpha \in A, (s_{i_\alpha})_{i_\alpha \in I_\alpha}$ un système fini de sections de $\mathcal{O}_n^{p_\alpha}$ au dessus de U . Alors il existe dans U une suite décroissante de voisinages ouverts et connexes de l'origine, de diamètres tendant vers zéro, sur laquelle, $\forall \alpha \in A$, le faisceau $L(s_{i_\alpha}, i_\alpha \in I_\alpha)$ admette une construction.

Nous démontrerons ce théorème par une double récurrence sur n

et sur $p = \sup_{\alpha \in A} p_\alpha$; soit $th(n, p)$ le théorème, nous démontrerons successivement que

$th(0,1)$ est vrai

si $th(n, p-1)$ est vrai, alors $th(n, p)$ est vrai

si, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $th(n-1, p)$ est vrai, alors $th(n-1)$ est vrai.

1) $th(0,1)$ est vrai.

$\mathbb{C}^0$ est le corps réduit à $\{0\}$, le seul voisinage ouvert connexe de l'origine est $\mathbb{C}^0$ lui-même. Le faisceau $\mathcal{O}_0$ est le faisceau d'anneau $\mathbb{C}$ et de base l'origine ; ses sections s'identifient à des éléments de $\mathbb{C}$. La topologie de la convergence uniforme sur tout compact coïncide avec la topologie habituelle de $\mathbb{C}$, puisqu'elle admet la même base d'ouverts : les ensembles de la forme $V(f, k, \varepsilon)$ (cf annexe 3, note 1) sont ici les disques de centre f et de rayon ε .

Puisque $p = 1$, $p_\alpha = 1 \quad \forall \alpha \in A$. On prend la suite $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ constante : $U_m = \mathbb{C}^0 = \{0\}$; c'est bien une suite décroissante de voisinages ouverts connexes de l'origine, de diamètres tendant vers zéro ; il faut montrer que, $\forall \alpha \in A$, le faisceau $L(s_i, i \in I_\alpha)$ admet une construction sur $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

On peut définir comme suit les morphismes λ_m^i :

- si $\forall i \in I_\alpha$, $s_i = 0$, alors $L(s_i, i \in I_\alpha)$ est nul ; on pose que λ_m^i est, $\forall i \in I_\alpha$, $\forall m \in \mathbb{N}$, l'application nulle de $\Gamma(U_m, \mathcal{O}_0) \equiv \mathbb{C}$ dans lui-même ; les propriétés 1, 2, 3 sont trivialement vérifiées.
- si $\exists i_0 \in I_\alpha$, $s_{i_0} \neq 0$, alors $L(s_i, i \in I_\alpha) = \mathcal{O}_0$; on pose, $\forall m \in \mathbb{N}$, que $\lambda_m^{i_0}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}$ défini par $\lambda_m^{i_0}(f) = \frac{f}{s_{i_0}}$, et que, pour $i \neq i_0$, λ_m^i est l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}$; les propriétés 1, 2, 3 sont encore vérifiées (la division par s_{i_0} est une application continue).

donc $\forall \alpha \in A$, il existe une construction de $L(s_i, i \in I_\alpha)$ sur la suite

$(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$

2) Soit $p > 1$; si $\text{th}(n, p-1)$ est vrai, alors $\text{th}(n, p)$ est vrai.

Soient U un voisinage ouvert connexe de l'origine dans $\mathbb{C}^n$,
 A un ensemble fini, et, $\forall \alpha \in A$, $(s_{i_\alpha})_{i_\alpha \in I_\alpha} \in I_\alpha$ un système fini d'éléments
de $\Gamma(U, \mathcal{O}_n^p)$ avec $p_\alpha \leq p$.

Faisons une partition de A en B et C , avec $B = \{\alpha \in A ; p_\alpha = p\}$ et $C = \{\alpha \in A ; p_\alpha \leq p-1\}$. Soient d'autre part $\tilde{\Pi}$ et $\hat{\Pi}$ les projections canoniques de $\mathcal{O}_n^p$ sur $\mathcal{O}_n$ et sur $\mathcal{O}_n^{p-1}$; pour $f \in \mathcal{O}_n^p$, notons $\tilde{f} = \tilde{\Pi}(f)$, $\hat{f} = \hat{\Pi}(f)$, et $f = (\tilde{f}, \hat{f})$ ($\tilde{f}$ étant la première application coordonnée de f). La restriction $\hat{\Pi}$ à $\text{Ker } \tilde{\Pi}$ est un isomorphisme.

Considérons, $\forall \beta \in B$, le faisceau $N_\beta = \text{Ker } \tilde{\Pi} \bigcap L(s_{i_\beta}, i_\beta \in I_\beta)$: $L(s_{i_\beta}, i_\beta \in I_\beta)$ est cohérent (cf. annexe 1, remarque 2) et $\text{Ker } \tilde{\Pi}$ est cohérent ; donc N_β est cohérent, et en particulier de type fini : il existe dans U un voisinage ouvert V_β de l'origine, et un système fini $(\phi_j)_{j \in J_\beta}$ d'éléments de $\Gamma(V_\beta, N_\beta)$ tels que la restriction du faisceau N_β à V_β soit le faisceau $L(\phi_j, j \in J_\beta)$.

De plus, $\phi_j \in \Gamma(V_\beta, N_\beta)$ et $\Gamma(V_\beta, N_\beta) \subset \Gamma(V_\beta, L(s_{i_\beta}, i_\beta \in I_\beta))$, on peut donc restreindre V_β de manière qu'il existe des fonctions a_{j0}^i , $i \in I_\beta$, $j \in J_\beta$ holomorphes dans V_β , telles que $\forall j \in J_\beta$, $\phi_j = \sum_{i \in I_\beta} a_{j0}^i \rho_{V_\beta} U(s_i)$: en effet considérons le germe à l'origine de la fonction $\phi_j : \phi_{j0}$ appartient à $N_{\beta 0}$ et donc à $L_0(s_{i_\beta}, i_\beta \in I_\beta)$; d'après la remarque 1 de l'annexe 1, il existe des germes à l'origine de fonctions holomorphes a_{j0}^i tels que $\forall j \in J_\beta$, $\phi_{j0} = \sum_{i \in I_\beta} a_{j0}^i s_{i0}$; on restreint V_β à un voisinage ouvert de l'origine tel que les germes a_{j0}^i (en nombre fini) possèdent des représentants a_j^i .

Soit V un voisinage ouvert connexe de l'origine inclus dans l'intersection $\bigcap_{\beta \in B} V_\beta$. On peut appliquer $\text{th}(n, p-1)$ à la donnée suivante :

le voisinage V de l'origine, l'ensemble fini $A = B \cup C$, et pour chaque $\beta \in B$, les deux systèmes finis $(\rho_{VU}(\tilde{s}_i))_{i \in I_\beta}$ et $(\rho_{VU}(\hat{\phi}_j))_{j \in J_\beta}$, et pour chaque $\gamma \in C$ le système fini $(\rho_{VU}(s_i))_{i \in I_\gamma}$. (l'ordre est bien -1 :

$\rho_{VU}(\tilde{s}_i) \in \Gamma(V, \mathcal{O}_n^p)$; $\rho_{V\hat{V}_\beta}(\hat{\phi}_j) \in \Gamma(V, \mathcal{O}_n^{p-1})$, et, pour $\gamma \in C$, $i \in I_\gamma$,
 $\rho_{VU}(s_i) \in \Gamma(V, \mathcal{O}_n^{p_\gamma})$ avec $p_\gamma \leq p-1$.

Il existe donc dans V une suite décroissante $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de voisinages ouverts connexes de l'origine, de diamètres tendant vers zéro, sur laquelle, $\forall \beta \in B$, les faisceaux $L(\tilde{s}_i, i \in I_\beta)$ et $L(\hat{\phi}_j, j \in J_\beta)$ et, $\forall \gamma \in C$, le faisceau $L(s_i, i \in I_\gamma)$ admettent une construction.

Montrons que, $\forall \alpha \in A$, le faisceau $L(s_i, i \in I_\alpha)$ admet une construction sur $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$; on le sait déjà si $\alpha \in C$, prenons donc $\alpha \in B$.

Soient $(\mu_m^j)_{j \in J_\alpha, m \in \mathbb{N}}$ la construction de $L(\phi_j, j \in J_\alpha)$ et

$(v_m^i)_{i \in I_\alpha, m \in \mathbb{N}}$ celle de $L(\tilde{s}_i, i \in I_\alpha)$ sur la suite $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

Définissons (en utilisant la méthode du séminaire Henri CARTAN) une famille

$(\lambda_m^i)_{m \in \mathbb{N}, i \in I_\alpha}$ d'applications $\lambda_m^i : \Gamma(U_m, \mathcal{O}_n^p) \longrightarrow \Gamma(U_m, \mathcal{O}_n)$ en posant :

$$\lambda_m^i = v_m^i \circ \tilde{\Pi}_{U_m} + \sum_{j \in J_\alpha} \{ \mu_m^j \circ [\hat{\Pi}_{U_m} - \sum_{k \in J_\alpha} (v_m^k \circ \tilde{\Pi}_{U_m}) \rho_{U_m U}(\hat{s}_k)] \} \rho_{U_m V_\alpha}(a_j^i)$$

i.e. $\forall f \in \Gamma(U_m, \mathcal{O}_n^p)$:

$$\lambda_m^i(f) = v_m^i(\tilde{f}) + \sum_{j \in J_\alpha} \mu_m^j[\hat{f} - \sum_{k \in I_\alpha} v_m^k(\tilde{f}) \rho_{U_m U}(\hat{s}_k)] \rho_{U_m V_\alpha}(a_j^i)$$

1) λ_m^i est bien $\mathbb{C}$ -linéaire et continue pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de U_m , comme combinaison linéaire à coefficients holomorphes de composées de telles applications.

2) soit $m \geq m'$; on sait que μ_m^j et v_m^i commutent aux restrictions,

puisque ce sont des constructions ; d'autre part les projections $\tilde{\Pi}_{U_m}$

et $\hat{\Pi}_{U_m}$ commutent aux restrictions, et l'on a :

$$\rho_{U_m U_{m'}} \circ \lambda_{m'}^i = \rho_{U_m U_{m'}} \circ \tilde{\Pi}_{U_{m'}} + \sum_{j \in J_\alpha} \rho_{U_m U_{m'}} \circ \mu_{m'}^j \circ [\hat{\Pi}_{U_{m'}} - \sum_{k \in I_\alpha} (v_{m'}^k \circ \tilde{\Pi}_{U_{m'}}) \rho_{U_{m'} U}(\hat{s}_k)]$$

$$\rho_{U_m U_{m'}} \circ \rho_{U_{m'} V_\alpha}(a_j^i)$$

$$\rho_{U_m U_m} \circ \lambda_m^i = v_m^i \circ \tilde{\Pi}_{U_m} \circ \rho_{U_m U_m} + \sum_{j \in J_\alpha} \{ \mu_m^j \circ [\hat{\Pi}_{U_m} \circ \rho_{U_m U_m} - \sum_{k \in I_\alpha} (v_m^k \circ \tilde{\Pi}_{U_m} \circ \rho_{U_m U_m}) \rho_{U_m U}(\hat{s}_k)] \} \rho_{U_m V_\alpha}(a_j^i)$$

$\rho_{U_m U_m} \circ \lambda_m^i = \lambda_m^i \circ \rho_{U_m U_m}$, et les λ_m^i commutent aux restrictions.

3) soit $f \in \Gamma(U_m, \hat{O}_P)$, telle que $f \in \Gamma(U_m, L(s_i, i \in I_\alpha))$. Alors, en projetant par $\tilde{\Pi}$, $\tilde{f} \in \Gamma(U_m, L(s_i, i \in I_\alpha))$; or $(v_m^i)_{m \in \mathbb{N}, i \in I_\alpha}$ est une construction de $L(\tilde{s}_i, i \in I_\alpha)$, donc

$$\tilde{f} = \sum_{k \in I_\alpha} v_m^k(\tilde{f}) \rho_{U_m U}(\tilde{s}_k)$$

Considérons $g = f - \sum_{k \in I_\alpha} v_m^k(\tilde{f}) \rho_{U_m U}(s_k)$; $\tilde{g}$ est nul, et g appartient

à $\Gamma(U, L(s_i, i \in I_\alpha))$ donc g appartient à $\Gamma(U_m, N_\alpha)$. Or

$\Gamma(U_m, L(\phi_j, j \in J_\alpha))$. Donc, après projection par $\hat{\Pi}$,

$\hat{g} \in \Gamma(U_m, L(\hat{\phi}_j, j \in J_\alpha))$. Et comme $(\mu_m^j)_{m \in \mathbb{N}, j \in J_\alpha}$ est une construction de $L(\hat{\phi}_j, j \in J_\alpha)$, on a : $\hat{g} = \sum_{j \in J_\alpha} \mu_m^j(\hat{g}) \rho_{U_m V_\alpha}(\hat{\phi}_j)$, ce qu'on

peut encore écrire, puisque la restriction de $\hat{\Pi}$ à $\text{Ker } \tilde{\Pi}$ est un isomorphisme :

$$g = \sum_{j \in J_\alpha} \mu_m^j(\hat{g}) \rho_{U_m V_\alpha}(\phi_j) \quad (I)$$

Considérons maintenant $\sum_{i \in I_\alpha} \lambda_m^i(f) \rho_{U_m U}(s_i)$:

$$\sum_{i \in I_\alpha} \lambda_m^i(f) \rho_{U_m U}(s_i) = \sum_{i \in I_\alpha} v_m^i(\tilde{f}) \rho_{U_m U}(s_i) + \sum_{i \in I_\alpha} \sum_{j \in J_\alpha} \mu_m^j(\hat{g}) \rho_{U_m V_\alpha}(a_j^i) \rho_{U_m U}(s_i)$$

Or on a défini les a_j^i pour que $\sum_{i \in I_\alpha} \rho_{U_m V_\alpha}(a_j^i) \rho_{U_m U}(s_i) = \rho_{U_m V_\alpha}(\phi_j)$

$$\text{donc } \sum_{i \in I_\alpha} \lambda_m^i(f) \rho_{U_m U}(s_i) = \sum_{i \in I_\alpha} v_m^i(\tilde{f}) \rho_{U_m U}(s_i) + \sum_{j \in J_\alpha} \mu_m^j(\hat{g}) \rho_{U_m V_\alpha}(\phi_j)$$

ce qui d'après la relation (I) et la définition de g donne le résultat



cherché :

$$\sum_{i \in I_\alpha} \lambda_m^i(f) \rho_{U_m U}(s_i) = f \quad .$$

et $(\lambda_m^i)_{i \in I_\alpha, m \in \mathbb{N}}$ est une construction de $L(s_i, i \in I_\alpha)$ sur la suite $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

3) Soit $n > 0$; si $th(n-1, p)$ est vrai quel que soit l'entier p , alors $th(n, 1)$ est vrai.

Soient U un voisinage ouvert connexe de l'origine dans $\mathbb{C}^n$,
 A un ensemble fini, et $\forall \alpha \in A$, $(s_i)_{i \in I_\alpha}$ un système fini d'éléments de
 $\Gamma(U, \mathcal{O}_n)$.

S'il existe α dans A tel que $\forall i \in I_\alpha$, s_i soit nul, alors
 $L(s_i, i \in I_\alpha)$ admet la construction nulle (λ_m^i nul $\forall i \in I_\alpha$ et $\forall m \in \mathbb{N}$)
sur toute suite décroissante d'ouverts : on peut donc supposer que, $\forall \alpha \in A$,
les s_{i_α} ne soient pas tous nuls.

De plus on peut même supposer que, $\forall \alpha \in A$, aucune des sections
 s_{i_α} ne soit nulle : soit en effet $K_\alpha = \{i \in I_\alpha ; s_i \neq 0\}$; $K_\alpha \neq \emptyset$,
puisque les s_{i_α} ne sont pas tous nuls ; toute construction $L(s_i, i \in K_\alpha)$ peut
se prolonger à $L(s_i, i \in I_\alpha)$ en posant que, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall i \in I_\alpha - K_\alpha$,
 λ_m^i est nul.

Puisque U est connexe, les germes à l'origine des sections
 s_{i_α} ne sont pas nuls, et l'on peut appliquer le théorème de Weierstrass à la
famille finie de sections holomorphes (s_{i_α}) où $\alpha \in A$ et $i_\alpha \in I_\alpha$: on peut
faire dans $\mathbb{C}^n$ un changement linéaire de coordonnées, et l'on écrira
 $\mathbb{C}_z^n = \mathbb{C}_{z'}^{n-1} \times \mathbb{C}_{z_n}$ de manière qu'il existe dans U un polydisque centré à l'ori-
gine Ω et des fonctions holomorphes inversibles h_{i_α} définies dans Ω , et
des polynômes distingués P_{i_α} , tels que l'on ait :

$$\forall \alpha \in A, \quad \forall i_\alpha \in I_\alpha, \quad \rho_{\Omega U}(s_{i_\alpha}) = h_{i_\alpha} P_{i_\alpha}$$

dans Ω , les faisceaux de $\mathcal{O}_n$ -modules $L(s_i, i \in I_\alpha)$ et $L(P_{i_\alpha}, i \in I_\alpha)$ coïncident.

Soient p_{i_α} le degré de P_{i_α} , $p_\alpha = \sup_{i \in I_\alpha} p_i$, $p = \sup_{\alpha \in A} p_\alpha$, et

pour chaque $\alpha \in A$, P_{1_α} un des polynômes P_{i_α} de degré maximal p_α .

Soit Π la projection canonique de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}^{n-1}$, $\Pi : z \rightsquigarrow z'$; pour tout entier strictement positif r , le faisceau F_r des germes de polynômes de degré strictement inférieur à r coïncide avec l'image réciproque par Π du faisceau $\mathcal{O}_{n-1}^r$ (cf. annexe 2); soit ϕ_r l'application canonique de $F_r = \Pi^* \mathcal{O}_{n-1}^r$ sur $\mathcal{O}_{n-1}^r$; si V est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ de la forme $V = V' \times D$ avec V' ouvert de $\mathbb{C}^{n-1}$ et D disque centré à l'origine, alors ϕ_r permet de définir une application $\phi_{rV} : \Gamma(V, F_r) \longrightarrow \Gamma(V', \mathcal{O}_{n-1}^r)$ qui est un homéomorphisme $\mathbb{C}$ -linéaire (on munit $\Gamma(V, F_r)$ de la topologie induite par celle de $\Gamma(V, \mathcal{O}_n)$) (cf. annexe 2; $\phi_{rV} : a_0 + a_1 z_n + \dots + a_{r-1} z_n^{r-1} \rightsquigarrow (a_0, a_1, \dots, a_{r-1})$).

Considérons, $\forall \alpha \in A$, le faisceau $L^*(z_n^k P_{i_\alpha})$ associé au système fini $(z_n^k P_{i_\alpha})_{i_\alpha \in I_\alpha, 0 \leq k \leq p_\alpha - 1}$, le faisceau d'anneau de base étant ici F_1 (c'est-à-dire $\Pi^* \mathcal{O}_{n-1}^1$, c'est-à-dire encore les fonctions de z qui sont constantes par rapport à z_n). $L^*(z_n^k P_{i_\alpha})$ est un sous-faisceau de F_r -modules de $L(s_i, i \in I_\alpha)$. Et comparons les F_r -modules $M_\alpha = F_p \bigcap L^*(z_n^k P_{i_\alpha})$.

On a une inclusion évidente $N_\alpha \subset M_\alpha$; montrons qu'ils ont même fibre à l'origine : pour cela montrons donc que $M_{\alpha 0} \subset N_{\alpha 0}$. Soit $P_0 \in M_{\alpha 0}$ $P_0 = \sum_{i \in I_\alpha} a_0^i P_{i_0}$ avec $a_0^i \in \mathcal{O}_{n0}$, et P_0 est un polynôme en z_n de degré inférieur à p_α .

Divisons, pour tout $i \in I_\alpha$, le germe a_0^i par le polynôme distingué P_{1_0} :

$$a_0^i = A_0^i P_{1\alpha} + B_0^i ; \quad B_0^i \text{ est un polynôme de degré inférieur à } p_\alpha , \text{ donc}$$

$$P_0 = \sum_{i \in I_\alpha} A_0^i P_{1\alpha} P_{i0} + \sum_{i \in I_\alpha} B_0^i P_{i0} ,$$

donc

$$\left(\sum_{i \in I_\alpha} A_0^i P_{i0} \right) P_{1\alpha} = P_0 - \sum_{i \in I_\alpha} B_0^i P_{i0}$$

le second membre est un polynôme de degré inférieur à $2p_\alpha$; en le divisant par le polynôme $P_{1\alpha}$, on obtient encore un polynôme, et comme le quotient est uni-

que, $\sum_{i \in I_\alpha} A_0^i P_{i0}$ est un polynôme A_0 ; le degré de A_0 est inférieur à

$2p_\alpha - p_\alpha = p_\alpha$, et finalement $P_0 = A_0 P_{1\alpha} + \sum_{i \in I_\alpha} B_0^i P_{i0}$ avec A_0 et B_0^i

appartenant à F_{p_α} ; donc P_0 est bien une combinaison linéaire à coefficients dans $F_{1,0}$ des germes $z_n^k P_{i0}$, où $i \in I_\alpha$ et où $0 \leq k \leq p_\alpha - 1$; donc

$$P_0 \in N_{\alpha 0} .$$

F_p est un faisceau F_1 -cohérent, comme image réciproque d'un faisceau cohérent. $L^*(z_n^k P_{i\alpha})$ est aussi un faisceau F_1 -cohérent (cf. annexe 1, remarque 2). Donc N_α est un faisceau F_1 -cohérent, et il est en particulier de type fini : il existe un voisinage ouvert connexe V_α de l'origine, qu'on peut prendre "de Weierstrass pour $P_{1\alpha}$ " (nous dirons qu'un ouvert V est de Weierstrass pour un polynôme distingué P s'il est de la forme $V = V' \times D$ avec V' ouvert de $\mathbb{C}^{n-1}$ et D disque de $\mathbb{C}_{z_n}$ centré à l'origine, tels que P ne s'annule pas sur $V' \times \dot{D}$ et tels que l'origine soit le seul zéro de P dans $\{0'\} \times D$) et un système fini $(Q_j)_{j \in J_\alpha}$ de sections de N_α au-dessus de V_α , tels que la restriction de N_α à V_α soit $L^*(Q_j, j \in J_\alpha)$ (égalité de F_1 -modules). De plus, $\forall j \in J_\alpha$, Q_j est en particulier une section de $L(s_{i_\alpha})$, et selon un raisonnement déjà fait, on peut restreindre V_α de manière qu'il existe des fonctions a_j^i holomorphes dans V_α , où $i \in I_\alpha$ et $j \in J_\alpha$

telles que, $\forall j \in J_\alpha$, $Q_j = \sum_{i \in I_\alpha} a_j^i \rho_{V_\alpha U}(s_i)$.

Considérons le polynôme $P = \prod_{\alpha \in A} P_{1_\alpha}$: c'est encore un polynôme distingué, et l'on peut trouver dans $\bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha$ un polydisque V centré à l'origine et "de Weierstrass pour P " ; V est en particulier "de Weierstrass" pour chaque P_{1_α} . Posons $V = V' \times D$; on peut appliquer $th(n-1, p)$ à la donnée suivante : V' , A , et, $\forall \alpha \in A$, le système fini $[\rho_{V', V'_\alpha} \circ \phi_{P_\alpha V_\alpha}(Q_j)]_{j \in J_\alpha}$ de sections de $\mathcal{O}_{n-1}^{P_\alpha}$ au dessus de V' : il existe dans V' une suite décroissante $(U'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de voisinages ouverts et connexes de l'origine, de diamètres tendant vers zéro, sur laquelle chacun des $\mathcal{O}_{n-1}$ -faisceaux de modules associés aux systèmes $[\rho_{V', V'_\alpha} \circ \phi_{P_\alpha V_\alpha}(Q_j)]$ admette une construction μ_m^j .

On peut trouver une suite de réels $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$, décroissante et tendant vers zéro, de manière que, si D_m est le disque de $\mathbb{C}_{z_n}$ centré à l'origine et de rayon ε_m , $U'_m \times D_m$ soit encore un ouvert "de Weierstrass" pour P . En effet, supposons que cela ne soit pas possible : il existerait un réel strictement positif ε tel que, $\forall m \in \mathbb{N}$, ρ s'annule sur $U'_m \times \dot{D}(0, \varepsilon)$ (bord du disque de centre O et de rayon ε) ; on formerait ainsi une suite de points $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ vérifiant $x_m \in U'_m \times \dot{D}(0, \varepsilon)$ et $P(x_m) = 0$; les points x_m appartiennent au compact $\overline{V' \times D(0, \varepsilon)}$; on peut extraire une sous-suite convergente, soit $x = (x', x_n)$ sa limite ; $x' = 0$, car le diamètre de U'_m tend vers zéro, et $|x_n| = \varepsilon$, car $\forall m \in \mathbb{N}$, $|x_{mn}| = \varepsilon$, et $P(x) = 0$; donc l'origine ne serait pas le seul zéro de P dans $\{0'\} \times D$, ce qui est impossible (car V est "de Weierstrass" pour P).

Posons $U_m = U'_m \times D_m$. $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite de voisinages de l'origine ouverts, connexes, de diamètres tendant vers zéro. Montrons que, $\forall \alpha \in A$, le faisceau $L(s_i, i \in I)$ admet une construction sur cette suite d'ouverts.

Fixons donc $\alpha \in A$; U_m est "de Weierstrass" pour P , et donc a fortiori pour P_{1_α} , et l'on peut définir des applications quotient et reste de la division par P_{1_α} sur U_m (cf. annexe 3)

$$g_{m\alpha} : \Gamma(U_m, \mathcal{O}_n) \longrightarrow \Gamma(U_m, \mathcal{O}_n)$$

$$R_{m\alpha} : \Gamma(U_m, \mathcal{O}_n) \longrightarrow \Gamma(U_m, F_{P_\alpha})$$

définissons $\forall m \in N$,

$$\lambda_m^{1_\alpha} = \rho_{U_m \Omega} h_{1_\alpha}^{-1} \times g_{m\alpha} + \sum_{j \in J_\alpha} (\phi_{P_\alpha U_m}^{-1} \circ \mu_m^j \circ \phi_{P_\alpha U_m} \circ R_{m\alpha}) \times \rho_{U_m V_\alpha} (a_j^{1_\alpha})$$

et, si $i \neq 1_\alpha$

$$\lambda_m^i = \sum_{j \in J_\alpha} (\phi_{P_\alpha U_m}^{-1} \circ \mu_m^j \circ \phi_{P_\alpha U_m} \circ R_{m\alpha}) \times \rho_{U_m V_\alpha} (a_j^i)$$

λ_m^i est bien $\mathbb{C}$ linéaire et continue comme combinaison linéaire à coefficients holomorphes de composées de telles applications.

Les λ_m^i commutent aux restrictions : soit $m \geq m'$, comme le quotient $g_{m\alpha}$ commute aux restrictions, il suffit de le faire pour le terme général ($i \neq 1_\alpha$) :

$$\rho_{U_m U_{m'}} \circ \lambda_m^i = \sum_{j \in J_\alpha} (\rho_{U_m U_{m'}} \circ \phi_{P_\alpha U_m}^{-1} \circ \mu_m^j \circ \phi_{P_\alpha U_m} \circ R_{m\alpha}) \times \rho_{U_m U_{m'}} \circ \rho_{U_m V_\alpha} (a_j^i)$$

$$\rho_{U_m U_{m'}} \circ \lambda_m^i = \sum_{j \in J_\alpha} (\phi_{P_\alpha U_m}^{-1} \circ \mu_m^j \circ \phi_{P_\alpha U_m} \circ R_{m\alpha} \circ \rho_{U_m U_{m'}}) \times \rho_{U_m V_\alpha} (a_j^i)$$

$$\rho_{U_m U_{m'}} \circ \lambda_m^i = \lambda_m^i \circ \rho_{U_m U_{m'}}$$

Soit $f \in \Gamma(U_m, L(s_i, i \in I_\alpha))$. On a $R_{m\alpha}(f) = f - g_{m\alpha}(f) \rho_{U_m \Omega}(P_{1_\alpha})$ ou encore

$$R_{m\alpha}(f) = f - g_{m\alpha}(f) \rho_{U_m \Omega}(h_{1_\alpha}^{-1}) \rho_{U_m U}(s_{1_\alpha})$$

donc $R_{m\alpha}(f)$ est donc une section de $L(s_i)$ au dessus de U_m ; comme $R_{m\alpha}(f)$

est un polynôme de degré inférieur ou égal à p_α , $R_{m\alpha}(f)$ est aussi une section de F_{p_α} . Donc $R_{m\alpha}(f) \in \Gamma(U_m, M_\alpha)$. Or M_α et N_α ont même fibre à l'origine et le diamètre de U_m tend vers zéro : $\exists m' \in \mathbb{N}$, $R_{m',\alpha}(f) \in \Gamma(U_{m'}, N_\alpha)$. Or $\Gamma(U_{m'}, N_\alpha) = \Gamma(U_{m'}, L^*(Q_j))$; donc $\phi_{p_\alpha U_{m'}} \circ R_{m',\alpha}(f)$ est une section du O_{n-1} -module associé au système $[\rho_{U_{m'}, V_\alpha} \circ \phi_{p_\alpha V_\alpha}(Q_j)]$, dont μ_m^j est une construction :

$$\phi_{p_\alpha U_{m'}} \circ R_{m',\alpha}(f) = \sum_{j \in J_\alpha} [\mu_m^j \circ \phi_{p_\alpha U_{m'}} \circ R_{m',\alpha}(f)] \times \rho_{U_{m'}, V_\alpha} \circ \phi_{p_\alpha U_{m'}}(Q_j)$$

soit

$$R_{m',\alpha}(f) = \sum_{j \in J_\alpha} [\phi_{p_\alpha U_{m'}}^{-1} \circ \mu_m^j \circ \phi_{p_\alpha U_{m'}} \circ R_{m',\alpha}(f)] \times \rho_{U_{m'}, V_\alpha}(Q_j)$$

les deux fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe U_m : $R_{m\alpha}(f)$ et $\sum_{j \in J_\alpha} [\phi_{p_\alpha U_m}^{-1} \circ \mu_m^j \circ \phi_{p_\alpha U_m} \circ R_{m\alpha}(f)] \times \rho_{U_m V_\alpha}(Q_j)$ ont donc même restriction à l'ouvert $U_{m'}$, elles sont donc égales (1).

Considérons $\sum_{i \in I_\alpha} \lambda_m^i(f)$, par définition des applications λ_m^i ,

cette fonction est égale à :

$$(\rho_{U_m \Omega} h_{1\alpha})^{-1} \times g_{m\alpha}(f) \times \rho_{U_m U_\alpha}(s_{i_\alpha}) + \sum_{i \in I_\alpha} \sum_{j \in J_\alpha} [\phi_{p_\alpha U_m}^{-1} \circ \mu_m^j \circ \phi_{p_\alpha U_m} \circ R_{m\alpha}(f)] \times \rho_{U_m V_\alpha}(a_j^i) \times \rho_{U_m U_\alpha}(s_{i_\alpha})$$

or

$$\sum_{i \in I_\alpha} \rho_{U_m V_\alpha}(a_j^i) \times \rho_{U_m U_\alpha}(s_{i_\alpha}) = \rho_{U_m V_\alpha}(Q_j)$$

et, en tenant compte de (1) :

$$\sum_{i \in I_\alpha} \lambda_m^i(f) \rho_{U_m U_\alpha}(s_{i_\alpha}) = g_{m\alpha}(f) \rho_{U_m \Omega}(P_{1\alpha}) + R_{m\alpha}(f) = f$$

ce qui achève la démonstration.



Définition. - Construction Standard.

On appelle construction standard toute construction obtenue par ce procédé de double récurrence.

Corollaire 1. - La construction Standard ponctuelle.

Notons $\tilde{O}_n$ l'anneau des germes à l'origine, $\tilde{s}$, de fonctions holomorphes p-dimensionnelles ; $\tilde{O}_n^p$ peut être muni de la topologie limite inductive de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, que nous noterons F .

Soient M un sous-module de $\tilde{O}_n^p$, $(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_q)$ un système de générateurs de M ($\tilde{O}_n$ est noethérien). Il existe q applications $\lambda^1, \dots, \lambda^q$, de $\tilde{O}_n^p$ dans $\tilde{O}_n$, $\mathbb{C}$ -linéaires et continues pour la topologie F , telles que, pour tout $\tilde{f}$ appartenant à $\tilde{O}_n^p$, on ait :

$$\tilde{f} \in M \implies \tilde{f} = \sum_{i=1}^q \lambda^i(\tilde{f}) \tilde{s}_i$$

en effet tous les résultats du théorème peuvent passer à la limite inductive, quand m tend vers l'infini, grâce à la compatibilité avec les morphismes de restriction.

Corollaire 2. - Faisceau de O_n -modules de sections

Définition. - faisceau de O_n -modules de sections

Un sous- O_n -module F de $\tilde{O}_n^p$ ayant pour base un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ est un faisceau de O_n -modules ^{de sections} s'il existe une famille $(s_\alpha)_{\alpha \in A}$, finie ou infinie, de sections de $\tilde{O}_n^p$ au-dessus de U telle que $F = L(s_\alpha, \alpha \in A)$ (cf. annexe 1).

Remarque. - un faisceau cohérent est localement un faisceau de O_n -modules ^{de sections}, puisqu'il est de type fini.

THEOREME.-

Tout faisceau de $\mathcal{O}_n$ -modules ^{de sections} est cohérent.

Puisque $\mathcal{O}_n^D$ est cohérent, il suffit de montrer que F est de type fini ; soient donc $a \in U$, et $(s_{ia})_{i \in I}$ un système de générateurs de la fibre F_a . I est une partie finie de A , puisque $\mathcal{O}_n$ est noéthérien. On peut donc appliquer le théorème de la construction standard au système fini $(s_i)_{i \in I}$: il existe une suite décroissante d'ouverts U_m sur laquelle le faisceau $L(s_i, i \in I)$ admette une construction.

Soient $x \in U_1$ et $(s_{jx})_{j \in J}$ un système de générateurs de la fibre F_x ; J est une autre partie finie de A . $\forall j \in J$, $s_{ja} \in F_a$, or $F_a = L_a(s_i, i \in I)$; on peut donc trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que $\rho_{U_m U}(s_j) \in L(U_m ; s_i, i \in I)$

$$\text{donc } \rho_{U_m U}(s_j) = \sum_{i \in I} \lambda_m^i(\rho_{U_m U}(s_i)) \times \rho_{U_m U}(s_i)$$

ce qu'on peut écrire :

$$\rho_{U_m U_1} \circ \rho_{U_1 U}(s_j) = \sum_{i \in I} \rho_{U_m U_1} \circ \lambda_1^i(\rho_{U_1 U}(s_j)) \times \rho_{U_m U_1} \circ \rho_{U_1 U}(s_i)$$

les fonctions holomorphes $\rho_{U_1 U}(s_j)$ et

$\sum_{i \in I} \lambda_1^i \circ \rho_{U_1 U}(s_j) \times \rho_{U_1 U}(s_i)$ ont même restriction à l'ouvert U_m , elles sont donc égales sur l'ouvert U_1 , et en particulier elles ont même germe en x :

$$\forall j \in J \quad s_{jx} = \sum_{i \in I} \left[\lambda_1^i \times \rho_{U_1 U}(s_j) \right]_x s_{ix}$$

et $(s_{ix})_{i \in I}$ est aussi un système de générateurs de F_x , et F est bien de type fini.

PREFAISCEAU, FAISCEAU DE MODULES ASSOCIES A UNE FAMILLE DE SECTIONS.

Soient $\mathcal{B}$ un faisceau d'anneaux sur un espace topologique X , $\mathcal{G}$ un faisceau de modules sur $\mathcal{B}$, et $(s_i)_{i \in I}$ une famille de sections de $\mathcal{G}$ au-dessus de X . On définit sur X un préfaisceau $L(s_i, i \in I)$ en posant, pour tout ouvert U de X , que $L(U; s_i, i \in I)$ est le $\Gamma(U, \mathcal{B})$ sous-module de $\Gamma(U, \mathcal{G})$ engendré par la famille $(\rho_{UX}(s_i))_{i \in I}$, et que, pour tout ouvert V inclus dans U , le morphisme de restriction de $L(U; s_i, i \in I)$ à $L(V; s_i, i \in I)$ est le morphisme induit par le morphisme de restriction de $\Gamma(U, \mathcal{G})$ à $\Gamma(V, \mathcal{G})$.

Ce préfaisceau $L(s_i, i \in I)$ est séparé, mais il n'est pas, en général, recollable : soit $X = \mathbb{R}$, prenons pour $\mathcal{B}$ le faisceau constant d'anneau $\mathbb{Z}$, et pour $\mathcal{G}$ le faisceau des fonctions numériques continues, $I = \{1, 2\}$, s_1 et s_2 les fonctions définies par

$$\begin{cases} x \leq -1 & s_1(x) = x + 1 & s_2(x) = x^2 - 1 \\ -1 < x < +1 & s_1(x) = 0 & s_2(x) = 0 \\ 1 \leq x & s_1(x) = x - 1 & s_2(x) = x^2 - 1 \end{cases}$$

Considérons $U_\alpha =]-\infty, +1[$ et $U_\beta =]-1, +\infty[$ formant un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$; et $f_\alpha = \rho_{U_\alpha X}(s_1)$ et $f_\beta = \rho_{U_\beta X}(s_2)$; on a $f_\alpha \in L(U_\alpha; s_i, i \in I)$, $f_\beta \in L(U_\beta; s_i, i \in I)$, $\rho_{U_\alpha \cap U_\beta}(f_\alpha) = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta}(f_\beta)$ mais la fonction numérique continue qui recolle f_α et f_β n'appartient pas à $L(\mathbb{R}; s_i, i \in I)$.

Par limite inductive, le préfaisceau $L(s_i, i \in I)$ définit un espace étalé, auquel on peut associer le faisceau de ses sections continues, que nous noterons $L(s_i, i \in I)$: $L(s_i, i \in I)$ et $L(s_i, i \in I)$ sont appelés

respectivement le préfaisceau et le faisceau de modules associés à la famille de sections $(s_i)_{i \in I}$.

Remarque 1.- $\forall x \in X$, $L_x(s_i, i \in I)$ est le B_x sous-module de G_x engendré par la famille $(s_{ix})_{i \in I}$, comme on le voit dans le passage à la limite inductive (s_{ix} désigne le germe en x de la section s_i , $L_x(s_i)$ la fibre en x de $L(s_i)$).

Remarque 2.- Si G est B -cohérent, si I est fini, alors $L(s_i, i \in I)$ est aussi B -cohérent : il est de type fini par construction, et c'est un sous-faisceau de G .

Remarque 3.- Le théorème de la construction standard permet de préciser les rapports entre le préfaisceau $L(s_i)$ et le faisceau $L(s_i)$ dans le cas où X est un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, B le faisceau $\mathcal{O}_n$, G le faisceau $\mathcal{O}_n^p$, et où I est fini : la suite décroissante (U_m) sur laquelle le faisceau $L(s_i, i \in I)$ admet une construction possède alors la propriété :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(U_m, L(s_i, i \in I)) = L(U_m; s_i, i \in I)$$

(ce résultat découle immédiatement de la remarque 2 précédant l'énoncé du théorème). Autrement dit, si une fonction f , holomorphe sur U_m , est localement combinaison linéaire des s_i en chaque point, alors elle est globalement sur U_m combinaison linéaire des $\rho_{U_m U}(s_i)$.

Le théorème B de Cartan permettrait de préciser ce résultat : dès que U est un ouvert "de Stein", $\Gamma(U, L(s_i)) = L(U, s_i)$ (cf "Faisceaux analytiques cohérents" par Monsieur H. Cartan, Rome 1964). Soit $I = \{1, 2, \dots, q\}$.

Considérons le morphisme $\phi : \mathcal{O}_n^q \longrightarrow L(s_i, i \in I)$ défini par sa valeur sur les germes :

$$\phi_x(f_x^1, \dots, f_x^q) = \sum_{i \in I} f_x^i s_{ix} ;$$

ϕ est surjectif d'après la remarque 1.

$L(s_i, i \in I)$ est cohérent d'après la remarque 2 ($\mathcal{O}_n^p$ est cohérent - c'est le théorème d'Oka). Donc $\text{Ker } \phi$ est un faisceau cohérent, et on a la suite exacte de faisceaux cohérents

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \phi \longrightarrow \mathcal{O}_n^q \xrightarrow{\phi} L(s_i, i \in I) \longrightarrow 0$$

Cette suite exacte induit une suite exacte en cohomologie

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \text{Ker } \phi) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_n^q) \xrightarrow{\phi_U} \Gamma(U, L(s_i, i \in I)) \longrightarrow H^1(U, \text{Ker } \phi)$$

Or $H^1(U, \text{Ker } \phi) = 0$, d'après le théorème B de Cartan ; donc ϕ_U est surjectif, et

$$\Gamma(U, L(s_i, i \in I)) = \phi_U(\Gamma(U, \mathcal{O}_n^q)) = L(U ; s_i, i \in I) .$$


II - FAISCEAUX F_r et $\Pi^* \mathcal{O}_{n-1}$

Soit Π la projection canonique de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}^{n-1}$, qui à $z = (z', z_n)$ associe z' . Cette application continue permet de définir au dessus de $\mathbb{C}^n$ les faisceaux images réciproques par Π des faisceaux $\mathcal{O}_{n-1}^r : \Pi^* \mathcal{O}_{n-1}^r$. Ces faisceaux sont des modules sur $\Pi^* \mathcal{O}_{n-1}$.

Définissons d'autre part, pour tout entier strictement positif r , le préfaisceau sur $\mathbb{C}^n$, F_r , de la manière suivante : pour tout U ouvert de $\mathbb{C}^n$, $F_r(U)$ est l'ensemble des polynômes en z_n à coefficients holomorphes en z' définis dans U , et de degré strictement inférieur à r ; ce préfaisceau est séparé comme sous-préfaisceau de groupe de $\mathcal{O}_n$; il est même recollable, car si deux polynômes sont égaux sur un ouvert, leurs coefficients sont égaux : on peut donc recoller les coefficients. Ce préfaisceau est donc un faisceau, que nous noterons F_r ; $\Gamma(U, F_r) = F_r(U)$; la fibre en un point x de ce faisceau est exactement l'ensemble des germes en x des polynômes en z_n à coefficients holomorphes en z' et de degré strictement inférieur à r .

On a $F_1 = \Pi^* \mathcal{O}_{n-1}$; montrons que $F_r = \Pi^* \mathcal{O}_{n-1}^r$; vérifions à cet effet que F_r est solution du problème universel définissant l'image réciproque $\Pi^* \mathcal{O}_{n-1}^r$: soit ϕ_r l'application de F_r dans $\mathcal{O}_{n-1}^r$ définie par sa valeur sur les fibres :

$$(a_0 + a_1 z_n + \dots + a_{r-1} z_n^{r-1})_x \longrightarrow (a_{0x'}, a_{1x'}, \dots, a_{r-1,x'})$$

cette application est continue : l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert : soient Ω un ouvert de $\mathcal{O}_{n-1}^r$, ξ un élément de $\phi_r^{-1}(\Omega)$; $\phi_r(\xi) \in \Omega$, donc

il existe un ouvert de base de $\mathcal{O}_{n-1}^r$ contenant $\phi_r(\xi)$ et inclus dans Ω : soit $s(U')$ cet ouvert de base (U' est un ouvert de $\mathbb{C}^{n-1}$, s est une section de $\mathcal{O}_{n-1}^r$ au dessus de U' ; on peut écrire $s = (s_1, \dots, s_r)$ avec $s_1, \dots, s_r$ sections de $\mathcal{O}_{n-1}$ au dessus de U') ; le polynôme $P = s_1 + s_2 z_n + \dots + s_r z_n^{r-1}$ est une section de F_r au dessus de l'ouvert $U' \times \mathbb{C}$, et $P(U' \times \mathbb{C})$ est un voisinage de ξ inclus dans ϕ_r^{-1}

Cette application ϕ_r rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_r & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{O}_{n-1}^r \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\Pi} & \mathbb{C}^{n-1} \end{array}$$

Soit A un faisceau sur $\mathbb{C}^n$, tel qu'il existe une application f de A dans $\mathcal{O}_{n-1}^r$ continue et rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}_{n-1}^r \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\Pi} & \mathbb{C}^{n-1} \end{array}$$

On écrit $f = (f_1, \dots, f_r)$, alors f se factorise d'une manière unique par ϕ_r :

$f = \phi_r \circ \bar{f}$ avec $\bar{f} : A \longrightarrow F_r$, définie par sa valeur sur les fibres

$$\bar{f}_x : A_x \longrightarrow F_{rx}$$

$$\xi \longrightarrow f_1(\xi) + f_2(\xi) z_{nx} + \dots + f_r(\xi) z_{nx}^{r-1}$$

où z_{nx} est le germe en x du polynôme z_n ($\bar{f}$ est unique car ϕ_{rx} est une

bijection) ; $\tilde{f}$ est continue : soit $s(U' \times D)$ un ouvert de base de F_r ; s est une section de F_r au dessus de $U' \times D$: $s = s_0 + s_1 z_n + \dots + s_{r-1} z_n^{r-1}$; $\sigma = (s_0, \dots, s_{r-1})$ est une section de $\mathcal{O}_{n-1}^r$ au dessus de U' . Si $\xi \in \tilde{f}^{-1}[s(U' \times D)]$, alors $f(\xi) = \phi_r \circ \tilde{f}(\xi)$, et $f(\xi)$ appartient à $\sigma(U')$; comme f est continue, il existe autour de ξ un ouvert de base $t(V)$ de A inclus dans $f^{-1}(\sigma(U'))$, et $t(V \cap (U' \times D))$ est un voisinage de ξ inclus dans $\tilde{f}^{-1}(s(U' \times D))$

Donc F_r , module sur F_1 , est bien l'image réciproque par Π de $\mathcal{O}_{n-1}^r$, module sur $\mathcal{O}_{n-1}$.

D'autre part si U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ de la forme $U' \times D$, avec U' ouvert contenant l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$ et D disque de $\mathbb{C}$ centré à l'origine, ϕ_r permet de définir une application

$$\phi_{rU} : \Gamma(U, F_r) \longrightarrow \Gamma(U', \mathcal{O}_{n-1}^r)$$

définie par $\phi_{rU}(a_0 + a_1 z_n + \dots + a_{r-1} z_n^{r-1}) = (a_0, \dots, a_{r-1})$

cette application est évidemment une bijection ; elle est bicontinue, si l'on munit $\Gamma(U, F_r)$ de la topologie induite par celle de $\Gamma(U, \mathcal{O}_n)$: on peut considérer les composantes de ϕ_{rU} comme les r premières itérées successives de l'application "reste de la division par le polynôme distingué z_n ," division qui est possible dans $\Gamma(U, F_r)$ puisque U est "de Weierstrass" pour le polynôme z_n ; or cette application "reste" est continue (cf annexe 3) pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (on peut aussi considérer ces composantes comme les applications "dérivées partielles par rapport à z_n " successives, qui sont continues classiquement). L'application réciproque ϕ_{rU}^{-1} est continue pour cette topologie, comme combinaison linéaire à coefficients holomorphes d'applications continues (l'application ψ_i , où $0 \leq i \leq r-1$, de $\Gamma(U, \mathcal{O}_{n-1}^r)$ dans $(U, \mathcal{O}_n)$ qui à $(a_0, \dots, a_{r-1})$ associe a_i considérée

comme fonction de n variables est évidemment continue).

De plus si V' est un ouvert inclus dans U' , on a évidemment, en posant $V = V' \times D : \phi_{rV} \circ \rho_{VU} = \rho_{V'U'} \circ \phi_{rU}$; les morphismes ϕ_{rU} commutent aux restrictions.

III - APPLICATIONS "QUOTIENT" ET "RESTE"

Soient dans $\mathbb{C}^n$ un système de coordonnées $z = (z', z_n)$, P un polynôme distingué de la variable z_n , à coefficients holomorphes en z' , de degré p , défini dans un voisinage ouvert U de l'origine, "de Weierstrass pour P " (rappelons que U est de la forme $U = U' \times D$ dans U' ouvert de $\mathbb{C}^{n-1}$ et D disque centré à l'origine tels que P ne s'annule pas sur $U' \times D$ et que l'origine soit le seul zéro de P dans le disque $\{0\} \times D$. Soit ρ le rayon de D .

A toute fonction f holomorphe dans U on peut associer de manière unique une fonction holomorphe $g_U(f)$ et un polynôme $R_U(f)$ de degré strictement inférieur à p , définis dans U , et tels que $f = g_U(f) P + R_U(f)$; de plus si f est un polynôme, alors $g_U(f)$ est un polynôme. On définit ainsi deux applications g_U et R_U de $\Gamma(U, \mathcal{O}_n)$ dans lui-même.

Lemme. ces applications g_U et R_U sont continues pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de U .

Il suffit de montrer la continuité de g_U , puisque $R_U(f) = f - P g_U(f)$. Or g_U est définie de la manière suivante (cf "Several complex variables" par HERVE, ch II, th. 2 - p. 13) : pour tout réel r inférieur ou égal à ρ , appelons γ_r le bord du disque D_r de centre 0 et de rayon r ; soit $z \in U$; choisissons r tel que $|z_n| < r < \rho$: on a alors :

$$g_U(f)(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z', t)}{P(z', t) t - z_n} dt$$

Les ouverts de base de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact

de U sont les ensembles de la forme

$$V(f, K, \epsilon) = \{h \in \Gamma(U, \mathcal{O}_n) ; \sup_{z \in K} |f(z) - h(z)| < \epsilon\}$$

(où f est un élément de $\Gamma(U, \mathcal{O}_n)$, K un compact de U , ϵ un réel strictement positif).

Soient Ω un ouvert de $\Gamma(U, \mathcal{O}_n)$ et f un élément de $\mathcal{G}_U^{-1}(\Omega)$; on peut trouver K et ϵ tels que $V(\mathcal{G}_U(f), K, \epsilon) \subset \Omega$; la distance de K au complémentaire de U est un réel strictement positif α ; choisissons r tel que $\rho - \frac{\alpha}{2} \leq r < \rho$ et tel que P ne s'annule pas sur $K' \times \gamma_r$ (c'est possible puisque P ne s'annule pas sur $U' \times \gamma_\rho$; K' , projection de K sur $\mathbb{C}^{n-1}$, est compact) ; soit $\beta = \inf_{(z', t) \in K' \times \gamma_r} |P(z', t)|$; $\beta > 0$, car $K' \times \gamma_r$ est compact

$$\forall z \in K, \mathcal{G}_U(f)(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z', t)}{P(z', t)} \frac{dt}{t - z_n}$$

(en effet $|z_n| \leq \rho - \alpha < r$) alors $V(f, K' \times \overline{D_r}, \frac{\alpha \beta \epsilon}{2})$ est un voisinage de f inclus dans $\mathcal{G}_U^{-1}(\Omega)$: en effet soit $h \in V(f, K' \times \overline{D_r}, \frac{\alpha \beta \epsilon}{2})$, on a :

$$\sup_{K' \times \gamma_r} |f(z', t) - h(z', t)| \leq \sup_{K' \times \overline{D_r}} |f(z', t) - h(z', t)| < \frac{\alpha \beta \epsilon}{2}$$

ce qui permet les majorations suivantes :

$$\sup_K |\mathcal{G}_U(f)(z) - \mathcal{G}_U(h)(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{K' \times \overline{D_r}} \left| \int \frac{f(z', t) - h(z', t)}{P(z', t)} \frac{dt}{t - z_n} \right| \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\beta} \frac{2}{\alpha} \frac{\alpha \beta \epsilon}{2} = \epsilon$$

donc $\mathcal{G}_U(h) \in \Omega$ et $h \in \mathcal{G}_U^{-1}(\Omega)$.



R_U et $\mathcal{G}_U$ commutent aux restrictions, du fait de l'unicité du couple quotient - reste.

B I B L I O G R A P H I E

=====

- H. CARTAN - Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure t. 61 (1944).
"Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes".
Appendice I - Idéaux et modules ponctuels p. 190 - 195.
- H. CARTAN - Faisceaux analytiques cohérents Rome 1964.
- Séminaire H. CARTAN - 1951-52. Exposé 11. "Anneaux des séries formelles et
convergentes".
- M.H. SCHWARTZ - Cours de DEA - Fonctions analytiques et théorie des faisceaux
Lille 1965.
- M. HERVE - Several complex variables Bombay 1963.
- R. GODEMENT - Topologie algébrique et théorie des faisceaux Paris 1964.

=====

