UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur de 3ème Cycle

par

Norreddine MAHAMMED

SUR LA K-THEORIE

DES ESPACES LENTICULAIRES

Membres du Jury : Mme M.H. SCHWARTZ, Président
MM. D. LEHMANN, Rapporteur
R. BKOUCHE, Examinateur

Soutenue le 16 Mars 1971

A mes parents.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Madame Schwartz qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

J'adresse à Monsieur Bkouche tous mes remerciements pour avoir bien voulu faire partie de la commission d'examen.

J'ai mené à bien ce travail sous la direction de D. Lehmann. Je ne pourrais jamais dire combien ses suggestions et ses conseils m'ont été précieux. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie enfin Madame Bérat qui a rendu possible la réalisation matérielle de ce travail avec célérité et gentillesse.

INTRODUCTION

En 1966, T. Kambé a étudié la K-théorie des espaces lenticulaires ordinaires $L^n(p)$. Plus précisément, en posant $n = (p-1)s + r$ avec $0 \leq r < p - 1$, il a montré [10] que

1.- pour p premier $\widetilde{KU}(L^n(p)) = (\mathbb{Z}_{p^{s+1}})^r \oplus (\mathbb{Z}_{p^s})^{p-1-r}$;

2.- pour p premier impair, soit $p = 2q + 1$

$$\widetilde{KO}(L^n(p)) = \begin{cases} (\mathbb{Z}_{p^{s+1}})^{[\frac{r}{2}]} \oplus (\mathbb{Z}_{p^s})^{q-[\frac{r}{2}]} & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod 4 , \\ \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_{p^{s+1}})^{[\frac{r}{2}]} \oplus (\mathbb{Z}_{p^s})^{q-[\frac{r}{2}]} & \text{si } n \equiv 0 \pmod 4 ; \end{cases}$$

$[\frac{r}{2}]$ désignant la partie entière de $\frac{r}{2}$.

Dans son travail sur les champs de vecteurs sur les sphères, J.F. Adams avait d'autre part déterminé la K-théorie des espaces projectifs réels $P^{2n+1}(R) = L^n(2)$.

Dans ce qui suit nous étudions la K-théorie des espaces lenticulaires généralisés $L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)$ pour p quelconque. Après quelques rappels sur ces espaces, nous précisons [chapitre 2] l'ordre et la torsion des groupes $\widetilde{KU}^i(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ (p quelconque) et $\widetilde{KO}^i(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ (p impair). Nous montrons ensuite que la K-théorie complexe des espaces lenticulaires généralisés est indépendante de $(p_0,p_1,\dots,p_n)$ pour tout $p > 1$ [chapitre 3, th. 1.4.]. A l'aide d'un théorème de factorisation [chapitre 3, th. 2.1.] nous ramenons le calcul de $\widetilde{KU}(L^n(p))$ avec p quelconque à celui de $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ avec p premier et $m \geq 1$. Le résultat obtenu chapitre 3, th. 3.7. permet de retrouver celui de T. Kambé dans le cas $m = 1$.

Dans le chapitre 4 nous énonçons des résultats analogues en K-théorie réelle pour p impair. Enfin, dans la dernière partie, nous donnons un critère de non-immersion et de non-plongement d'un espace lenticulaire ordinaire dans un espace numérique.

CHAPITRE I

RAPPELS SUR LES ESPACES LENTICULAIRES.

1. *Action libre d'un groupe fini dans un espace topologique.*

Soient X un espace topologique séparé et G un groupe fini d'élément neutre e.

1.1. *Définition*.- On dit que G agit, ou opère, librement à gauche dans X s'il existe une application continue Φ de $G \times X$ dans X (G étant muni de la topologie discrète) telle que

1) $\Phi(g.g',x) = \Phi(g, (g',x)) \quad \forall g \in G, \ \forall g' \in G, \ \forall x \in X,$

2) $\Phi(e,x) = x \quad \forall x \in X,$

3) s'il existe $g \in G$ et $x \in X$ tels que $\Phi(g,x) = x$ alors $g = e$.

On dira aussi que G agit sans point fixe à gauche dans X.

Une telle application Φ étant donnée, on convient, sauf ambiguité, de noter

$$\Phi(g,x) = g.x \quad \forall g \in G, \ \forall x \in X.$$

Quand le groupe G^o opposé de G agit librement à gauche dans X, on dit que G agit librement à droite dans X. Dans tout ce qui suit chaque fois que l'on parlera d'action ou d'opération il s'agira, sauf indication contraire, d'action à gauche.

1.2. *Rappel des propriétés de* X/G.

On note X/G l'espace des orbites des points de X pour l'action de G, muni de la topologie quotient. Rappelons que

1) si X est compact alors X/G est compact [5] ;

2) si X est connexe alors X/G est connexe [4] .

Quand X possède une structure de variété et G agit librement et différentiablement dans X, on sait [6] que

1) X/G est une variété ayant la même dimension que X ;

2) si X est orientable et si G opère en respectant l'orientation de X alors X/G est orientable.

1.3. *Cas des formes sphériques.*

On appelle forme sphérique toute variété du type S^n/G où G est un groupe fini opérant librement sur la sphère S^n.

On montre [7] que

1) si n est pair, G est soit réduit à $\{e\}$ soit isomorphe à $\mathbb{Z}_2$ auquel cas $S^n/\mathbb{Z}_2$ est homéomorphe à l'espace projectif réel $P^n(\mathbb{R})$;

2) si n est impair et G abélien, G est un groupe cyclique $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $(p > 1)$ auquel cas la forme sphérique $S^n/\mathbb{Z}_p$ est appelé <u>espace lenticulaire d'ordre</u> p ;

3) si $\sigma : G \to O(2n+2)$ est une représentation linéaire orthogonale de G, telle que, par σ, G opère librement sur $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ alors σ se factorise en une représentation unitaire $\bar{\sigma}$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\bar{\sigma}"'] & & O(2n+2) \\ & U(n+1) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

en particulier G opère différentiablement sur S^{2n+1} en respectant l'orientation.

2. *Espaces lenticulaires.*

2.1. *Définitions.*

On considère sur la sphère

$$S^{2n+1} = \{(z_0,z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{k=0}^{n} |z_k|^2 = 1\}$$

la rotation $\gamma : S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ définie par

$$\gamma(z_0,z_1,\dots,z_n) = (e^{\frac{2i\pi p_0}{p}}.z_0 , e^{\frac{2i\pi p_1}{p}}.z_1 , \dots , e^{\frac{2i\pi p_n}{p}}.z_n)$$

où $p, p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}^*$ et sont tels que

1) $p \neq 1$,

2) $(p_k,p) = 1$ pour tout $k \in \{0,1,\dots,n\}$.

Dans ces conditions le groupe $\Gamma = \{\gamma^i\}_{1\leq i\leq p}$ est un groupe cyclique d'ordre p agissant librement sur S^{2n+1} isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. La forme sphérique S^{2n+1}/Γ est appelée <u>espace lenticulaire généralisé d'ordre</u> p et notée $L^n(p ; p_0,p_1,\dots,p_n)$. Quand $p_0 = p_1 = \dots = p_n = 1$ $L^n(p ; 1,1,\dots,1)$ est noté $L^n(p)$ et appelé <u>espace lenticulaire ordinaire d'ordre</u> p. D'après les propriétés rappelées en 1.2. on voit que $L^n(p ; p_0,p_1,\dots,p_n)$ est une variété différentiable de dimension $2n+1$, compacte, connexe et orientale. En particulier $L^n(2)$ est l'espace projectif réel $P^{2n+1}(\mathbb{R})$.

Enfin tout espace lenticulaire possède une structure naturelle de c.w. complexe fini avec une cellule en chaque dimension [9]. Dans toute la suite on notera $L_0^n(p ; p_0,p_1,\dots,p_n)$ (respectivement $L_0^n(p)$) le 2n-squelette de $L^n(p ; p_0,p_1,\dots,p_n)$ (resp. $L^n(p)$).

2.2. *Cohomologie des espaces lenticulaires.*

Proposition 2.2.1. [13] - Les groupes de cohomologie entière de $L^n(p ; p_0,p_1,\dots,p_n)$ sont donnés par

$$H^i(L^n(p ; p_0,p_1,\dots,p_n), \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } i = 0,2n+1, \\ \mathbb{Z}_p & \text{pour } i = 2,4,\dots,2n, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Proposition 2.2.2. - Les groupes de cohomologie entière de $L_0^n(p ; p_0,p_1,\dots,p_n)$ sont donnés par

$$H^i(L_0^n(p\ ;\ p_0,p_1,\dots p_n),\ \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } i = 0, \\ \mathbb{Z}_p & \text{pour } i = 2,4,\dots,2n, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$L_0^n(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n)$ étant une variété connexe et compacte de dimension $2n$, il vient

(1) $$H^i(L_0^n(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n),\ \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } i = 0, \\ 0 & \text{pour } i > 2n. \end{cases}$$

Comme $L^n(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n)/L_0^n(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n)$ est isomorphe à S^{2n+1}, la suite exacte de cohomologie associée à la paire $(L^n(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n),$ $L_0^n(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n))$ s'écrit

$$\to H^i(S^{2n+1},\mathbb{Z}) \to H^i(L^n(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n),\mathbb{Z}) \to H^i(L_0^n(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n),\mathbb{Z}) \to H^{i+1}(S^{2n+1},\mathbb{Z}) \to \dots$$

Il s'ensuit pour $1 \leq i \leq 2n-1$

$$H^i(L^n(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n),\mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} H^i(L_0^n(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n),\mathbb{Z}),$$

c'est-à-dire en utilisant 2.2.1.

(2) $$H^i(L_0^n(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n),\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p & \text{pour } i = 2,4,\dots,2n-2, \\ 0 & \text{pour } i = 1,3,\dots,2n-1. \end{cases}$$

Considérons $L_0^n(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n)$ et $L_0^{n-1}(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n)$: leur quotient est isomorphe à $S^{2n-1} \bigcup_\phi e^{2n}$ où $\phi\colon S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ est l'application d'attachement cellulaire, on sait [9] que ϕ est de degré p. La suite de cohomologie associée à la paire $(L_0^n(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n),L_0^{n-1}(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n))$ nous donne

$$\dots \to H^{2n-1}(L_0^{n-1}(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n),Z) \to H^{2n}(S^{2n-1} \bigcup e^{2n},Z) \to H^{2n}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n),Z)$$
$$\to H^{2n}(L_0^{n-1}(p;p_0,p_1,\dots,p_n),Z) \to \dots$$

et, compte tenu de (1) et (2), nous en déduisons

(3) $$H^{2n}(S^{2n-1} \bigcup_\phi e^{2n},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} H^{2n}(L_0^n(p\ ;\ p_0,p_1,\dots,p_n),\mathbb{Z}).$$

Ecrivons la suite exacte de cohomologie associée à la paire $(S^{2n-1}\bigcup_{\phi} e^{2n}, S^{2n-1})$ dont le quotient est isomorphe à S^{2n}

$$H^{2n-1}(S^{2n},\mathbb{Z}) \to H^{2n-1}(S^{2n-1}(S^{2n-1}\bigcup_{\phi} e^{2n},\mathbb{Z}) \to H^{2n-1}(S^{2n-1},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H^{2n}(S^{2n},\mathbb{Z}) \to H^{2n}(S^{2n-1}\bigcup_{\phi} e^{2n},\mathbb{Z}) \to H^{2n}(S^{2n-1},\mathbb{Z}) \to \dots$$

D'où la suite exacte

$$0 \to H^{2n-1}(S^{2n-1}\bigcup_{\phi} e^{2n},\mathbb{Z}) \to H^{2n-1}(S^{2n-1},\mathbb{Z}) \to H^{2n},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H^{2n}(S^{2n-1}\bigcup_{\phi} e^{2n},\mathbb{Z}) \to 0$$

L'homomorphisme cobord ∂ est le composé de l'homomorphisme $\phi^* : H^{2n-1}(S^{2n-1},\mathbb{Z}) \to H^{2n-1}(S^{2n-1},\mathbb{Z})$ induit par ϕ et de l'isomorphisme $S^* : H^{2n-1}(S^{2n-1},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\approx} H^{2n}(S^{2n},\mathbb{Z})$ induit par la suspension $S : S^{2n-1} \to S^{2n}$. ϕ étant de degré p, ϕ^* est la multiplication dans Z par p et il en est de même de $\partial = S^* \circ \phi^*$. Alors, d'une part

$$H^{2n-1}(S^{2n-1}\bigcup_{\phi} e^{2n},\mathbb{Z}) = 0$$

et d'autre part

(4) $$H^{2n}(S^{2n-1}\bigcup_{\phi} e^{2n},\mathbb{Z}) \xleftarrow{\approx} \mathbb{Z}_p .$$

Moyennant (3) on a bien $H^{2n}(L_0^n(p ; p_0,p_1,\dots,p_n),\mathbb{Z}) \xleftarrow{\approx} \mathbb{Z}_p$, ce qui démontre entièrement la proposition.

<u>Corollaire</u> 2.2.3.- Soit k un nombre entier plus grand que 1, alors

1) $$H^i(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n),\mathbb{Z}_k) = \begin{cases} \mathbb{Z}_k & \text{pour } i = 0, 2n+1, \\ \mathbb{Z}_{(p,k)} & \text{pour } i = 1,2,3,\dots,2n, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

2) $$H^i(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n),\mathbb{Z}_k) = \begin{cases} \mathbb{Z}_k & \text{pour } i = 0, \\ \mathbb{Z}_{(p,k)} & \text{pour } i = 1,2,3,\dots,2n \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

.Il suffit d'appliquer successivement le théorème des coefficients universels à $L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)$ et à son 2n-squelette et d'utiliser les résultats des calculs précédents pour établir ce corollaire. Il sera employé dans la suite pour $k = 2$.

1. *La suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch.*

Soit h^* une théorie réduite de cohomologie généralisée, alors Atiyah et Hirzebruch ont montré que pour tout c.w. complexe fini X il existrait une suite spectrale [2]

$$E_2^{i,j} = \tilde{H}^i(X, h^j(S^o)) \Longrightarrow h^{i+j}(X) .$$

Lorsque X et un c.w. complexe fini de dimension $2n+1$, <u>2n-connexe</u>, sur lequel opère librement un groupe fini G d'ordre p, on a le critère de trivialité suivant.

1.1. *Proposition* [11].

La suite spectrale $E_2^{i,j} = H^i(X/G,h^j(S^o)) \Longrightarrow h^{i+j}(X/G)$ est triviale si les conditions suivantes sont réalisées

1. $H^{2i+1}(G,h^*(S^o)) = 0$ pour $i = 0,1,\dots,n-1$,
2. $H^{2i}(G,h^{impair}(S^o)) = 0$ pour $i = 1,2,\dots,n$,
3. $H^{2n+1}(X/G,h^{pair}(S^o))$ n'admet, éventuellement, des éléments de torsion que d'ordre premier avec p.

Sous les hypothèses précédentes, on a alors

1. $h^{2s+1}(X/G) = H^{2n+1}(X/G,h^{2(s-n)}(S^o))$,
2. $\mathcal{G}_*[h^{2s}(X/G)] = \bigoplus_{i=1}^{n} H^{2i}(G,h^{2(s-i)}(S^o)) \oplus H^{2n+1}(X/G,h^{2(s-n)-1}(S^o))$.

[$\mathcal{G}_*$ désigne le gradué associé pour une filtration convenable].

En appelant Y_o le 2n-squelette de X/G, on a également le critère de trivialité suivant

1.2. *Proposition.*

La suite spectrale $E_2^{i,j} = \tilde{H}^i(Y_o,h^j(S^o)) \Longrightarrow h^{i+j}(Y_o)$ est triviale sous les hypothèses suivantes

1. $H^{2i+1}(G,h^*(S^o)) = 0$ pour $i = 0,1,\dots,n-1$,
2. $H^{2i}(G,h^{\text{impair}}(S^o)) = 0$ pour $i = 1,2,\dots,n-1$,
3. $H^{2n}(Y_o,h^{\text{impair}}(S^o)) = 0$.

En particulier

1. $h^{\text{impair}}(Y_o) = 0$,
2. $\mathscr{G}_*[h^{2s}(Y_o)] = \bigoplus_{i=1}^{n-1} H^{2i}(G,h^{2(s-i)}(S^o)) \oplus H^{2n}(Y_o,h^{2(s-n)}(S^o))$.

2. *Application à la K-théorie des espaces lenticulaires.*

Selon que $n \equiv 0$ ou 1 (mod 2), on sait que $\tilde{K}U^{-n}(S^o) = \mathbb{Z}$ ou 0 : il est alors clair que la proposition 1.1. s'applique à la K-théorie réduite complexe. De façon plus précise pour $X = S^{2n+1}$ et $G = \mathbb{Z}_p$, on obtient :

2.1. *Proposition*.- Le groupe $\tilde{K}U^{-1}(L^n(p : p_0,p_1,\dots,p_n))$ est isomorphe à Z ; l'ordre du groupe $\tilde{K}U^o(L^n(p : p_0,p_1,\dots,p_n))$ est p^n quel que soit l'entier $p > 1$. [Plus précisément $\mathscr{G}_*[\tilde{K}U^o(L^n(p ; p_0,p_1,\dots,p_n))] = (\mathbb{Z}_p)^n$].

La proposition 1.1. ne s'applique en K-théorie réduite réelle que pour p impair. Compte tenu du fait que $\tilde{K}O^i(S^o)$ est donné par

$$\begin{array}{lcccccccc} i \equiv & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \ (\text{mod } 8) \\ \tilde{K}O^i(S^o) = & Z & 0 & 0 & 0 & Z & 0 & Z_2 & Z_2 \end{array}$$

on obtient pour les espaces lenticulaires

1. $\tilde{K}O^{2s+1}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) = H^{2n+1}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n), \tilde{K}O^{2(s-n)}(S^o))$;
2. $\mathscr{G}_*[\tilde{K}O^{4s}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))] = (Z_p)^{[\frac{n}{2}]} \oplus H^{2n+1}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n), \tilde{K}O^{4s-(2n+1)}(S^o))$;
3. $\mathscr{G}_*[\tilde{K}O^{4s+2}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))] = (Z_p)^{[\frac{n+1}{2}]} \oplus H^{2n+1}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n),\tilde{K}O^{4s-2n+1}(S^o))$.

Il s'ensuit la proposition suivante :

2.2. *Proposition.*- Pour p impair non nécessairement premier

$$1.\ \tilde{K}O^{2s+1}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } s-n \equiv 0 \text{ ou } 2 \pmod 4, \\ 0 & \text{pour } s-n \equiv 1 \pmod 4, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{pour } s-n \equiv 3 \pmod 4 \ ; \end{cases}$$

2. Si s est pair, le groupe $\tilde{K}O^{2s}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ a pour ordre $2.p^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ quand $s-n \equiv 0 \pmod 4$, $p^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ quand $s-n \not\equiv 0 \pmod 4$;

3. Si s est impair, le groupe $\tilde{K}O^{2s}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ a pour ordre $2.p^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ quand $s-n \equiv 0 \pmod 4$, $p^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ quand $s-n \equiv 0 \pmod 4$.

La proposition 1.2. s'applique en K-théories complexe quel que soit p et réelle pour p impair. Elle donne les résultats suivants

2.3. *Proposition.*

1. $\tilde{K}U^{-1}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) = 0$ et le groupe $\tilde{K}U^0(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ a pour ordre p^n.

2. $\tilde{K}O^{2s+1}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) = 0$ et, selon que s est pair ou impair, le groupe $\tilde{K}O^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ a pour ordre $p^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ ou $p^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$.

3. *Relation entre la K-théorie des espaces lenticulaires et celle de leurs 2n-squelettes.*

Soient i l'inclusion canonique de $L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)$ dans $L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)$ et j la projection canonique de $L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)$ sur $L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)/L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)$ qui est homéomorphe à S^{2n+1}. Elles induisent les homomorphismes suivants

$$i^{\mathbb{C}} : \tilde{K}U^0(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \longrightarrow \tilde{K}U^0(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)),$$

$$i^{\mathbb{R}} : \tilde{K}O^{2s}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \longrightarrow \tilde{K}O^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)),$$

$$j^{\mathbb{R}} : \tilde{K}O^{2s}(S^{2n+1}) \longrightarrow \tilde{K}O^{2s}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)).$$

3.1. *Proposition.*

1. Pour tout entier $p > 1$, $i^{\mathbb{C}}$ est un isomorphisme d'anneaux quel que soit n.

2. Pour tout entier impair $p > 1$:

   a) $i^{\mathbb{R}}$ est un isomorphisme d'anneaux lorsque $s-n \not\equiv 0 \pmod 4$;

   b) $j^{\mathbb{R}}$ possède une rétraction $\tilde{j}^{\mathbb{R}}$ lorsque $s-n \equiv 0 \pmod 4$ et alors l'homomorphisme

$$\tilde{i}^{\mathbb{R}} = (\tilde{j}^{\mathbb{R}}, i^{\mathbb{R}}) : \tilde{K}O^{2s}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \to \mathbb{Z}_2 \oplus \tilde{K}O^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$$

   est un isomorphisme de groupes.

Démonstration.-

Il suffit d'appliquer successivement à la paire $(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n),$ $L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ les suites exactes associées de $\widetilde{KU}$ et $\widetilde{KO}$-théories.

Considérons ainsi la suite exacte

$$\dots \to \widetilde{KU}^o(S^{2n+1}) \to \widetilde{KU}^o(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \xrightarrow{i^{\mathbb{C}}} \widetilde{KU}^o(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \to \widetilde{KU}^1(S^{2n+1}) \to \dots$$

Comme $\widetilde{KU}^o(S^{2n+1}) = 0$, $i^{\mathbb{C}}$ est injectif donc bijectif puisque (prop. 2.1. et 2.3.) les groupes $\widetilde{KU}^o(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ et $\widetilde{KU}^o(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ ont même ordre.

De même nous avons la suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccc} \dots \to \widetilde{KO}^{2s-1}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) & \xrightarrow{\partial} & \widetilde{KO}^{2s}(S^{2n+1}) & \xrightarrow{j^{\mathbb{R}}} & \widetilde{KO}^{2s}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle i^{\mathbb{R}}} \\ & & \dots \leftarrow \widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n+1}) & \xleftarrow{\partial} & \widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \end{array}$$

où $\widetilde{KO}^{2s-1}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) = 0$ (pop. 2.3.).
Lorsque $s - n \not\equiv 0 \pmod 4$, $\widetilde{KO}^{2s}(S^{2n+1}) = 0$ et $i^{\mathbb{R}}$ est un homomorphisme injectif donc un isomorphisme, les groupes $\widetilde{KO}^{2s}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ et $\widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ ayant même ordre.
Lorsque $s - n \equiv 0 \pmod 4$, nous avons $\widetilde{KO}^{2s}(S^{2n+1}) = \mathbb{Z}_2$ et $\widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n+1}) = \mathbb{Z}$: ∂ est alors nécessairement nul puisque $\widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ est un groupe fini non trivial. Il s'ensuit la suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{j^{\mathbb{R}}} \widetilde{KO}^{2s}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \xrightarrow{i^{\mathbb{R}}} \widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \to 0 ,$$

si s est pair $\widetilde{KO}^{2s}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ et $\widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ ont respectivement $2.p^{[\frac{n}{2}]}$ et $p^{[\frac{n}{2}]}$ pour ordre : p étant impair, cette suite est scindée. Un raisonnement analogue tient pour s impair. Donc $j^{\mathbb{R}}$ possède une rétraction $\tilde{j}^{\mathbb{R}}$ et $\tilde{i}^{\mathbb{R}} = (\tilde{j}^{\mathbb{R}}, i^{\mathbb{R}})$ est un isomorphisme de groupes.

. Cette proposition montre, en particulier, que la $\widetilde{KO}$-théorie des espaces lenticulaires se ramène à celle de leurs $2n$-squelettes.

CHAPITRE 3

K-THEORIE COMPLEXE DES ESPACES LENTICULAIRES.

1. *K-théorie complexe des espaces lenticulaires généralisés.*

Soient G un groupe fini et E un G-module complexe que l'on pourra toujours supposer unitaire puisque G est fini, tels que G agisse librement sur la sphère $S(E)$ associée à E.

Soit $\phi : R(G) \to R(G)$ la multiplication, dans l'anneau des représentations linéaires $\sigma : G \to U(E)$, par $\sum_{i=0}^{\dim E} (-1)^i \Lambda^i\sigma$. A l'aide de l'isomorphisme de Thom en K-théorie équivariante, Atiyah a alors montré [ ] que la suite

$$0 \to KU^1(S(E)/G) \to R(G) \xrightarrow{\phi} R(G) \to KU^0(S(E)/G) \to 0$$

est exacte.

Dans le cas où $E = \mathbb{C}^{n+1}$ et $G = \mathbb{Z}_p$, nous avons donc la suite exacte

$$(1) \qquad 0 \to KU^1(S^{2n+1}/Z_p) \to R(Z_p) \xrightarrow{\phi} R(Z_p) \to KU^0(S^{2n+1}/Z_p) \to 0 .$$

Dans ce qui suit nous nous proposons de calculer ϕ afin de déterminer $KU^0(S^{2n+1}/Z_p)$.

Lemme 1.1.- Toute représentation linéaire $\sigma : \mathbb{Z}_p \to U(\mathbb{C}^{n+1})$ se décompose en une somme de représentations linéaires de rang 1.

Soit $\sigma : Z_p \to U(\mathbb{C}^{n+1})$, il est clair que σ est totalement déterminée par $\sigma(\bar{1})$ puisque $\sigma(\bar{k}) = (\sigma(\bar{1}))^k$ pour tout $\bar{k} \in Z_p$ en appelant $\bar{k}$ la classe des entiers relatifs congrus à k modulo p. D'autre part la relation

$$(\sigma(\bar{1}))^p = id_{\mathbb{C}^{n+1}}$$

implique nécessairement

$$\sigma(\bar{1}) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi p_0}{p}} & & & 0 \\ & e^{\frac{2i\pi p_1}{p}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\frac{2i\pi p_n}{p}} \end{pmatrix}$$

avec $p_0, p_1, \ldots, p_n$ des nombres entiers satisfaisant aux conditions précisées au chapitre 1, § 2. En appelant $\sigma_k (0 \leq k \leq n)$ la représentation linéaire de rang 1 définie par

$$\sigma_k(\bar{1}) = e^{\frac{2i\pi p_k}{p}} . id_{\mathbb{C}} ,$$

il est donc clair que $\sigma = \bigoplus_{k=0}^{n} \sigma_k$.

Lemme 1.2.- Avec les notations précédentes $\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \Lambda^k \sigma = \prod_{k=0} (1 - \sigma_k)$.

. Soient $\alpha : \mathbb{Z}_p \to U(\mathbb{C}^{n_1})$ et $\beta : \mathbb{Z}_p \to U(\mathbb{C}^{n_2})$ deux représentations linéaires, on sait que la représentation linéaire $\Lambda^k(\alpha \oplus \beta) : \mathbb{Z}_p \to U(\Lambda^k \mathbb{C}^{n_1+n_2})$ est telle que

$$\Lambda^k(\alpha \oplus \beta) = \sum_{i_1+i_2=k} \Lambda^{i_1}\alpha \otimes \Lambda^{i_2}\beta.$$

Dans le cas présent nous avons donc pour $0 \leq k \leq n+1$

$$\Lambda^k\sigma = \Lambda^k(\sigma_0 \oplus \sigma_1 \oplus \ldots \oplus \sigma_n) = \sum_{i_0+i_1+\ldots+i_n=k} \Lambda^{i_0}\sigma_0 \otimes \Lambda^{i_1}\sigma_1 \otimes \ldots \otimes \Lambda^{i_n}\sigma_n .$$

Comme σ_r est, pour chaque $r \in \{0,\ldots,n\}$, une représentation linéaire de rang 1, il vient

$$\Lambda^{i_r}\sigma_r = \begin{cases} 0 & \text{si } i_r > 1 , \\ \sigma_r & \text{si } i_r = 1 , \\ 1 & \text{si } i_r = 0 . \end{cases}$$

Par conséquent la somme définissant $\Lambda^k\sigma$ est uniquement constituée des termes où k des indices $i_0, i_1, \ldots, i_n$ sont égaux à 1 et les autres à 0. De façon plus précise appelons $P_k(0,1,\ldots,n)$ l'ensemble des parties ordonnées de k éléments distincts de $\{0,1,\ldots,n\}$. Alors

$$\sigma^k(\sigma_0 \oplus \sigma_1 \oplus \ldots \oplus \sigma_n) = \sum_{(i_0,i_1,\ldots,i_{k-1}) \in P_k(0,1,\ldots,n)} \sigma_{i_0} \otimes \sigma_{i_1} \otimes \ldots \otimes \sigma_{i_{k-1}}$$

Notons que dans cette somme il y a $\binom{n+1}{k}$ termes. Il s'ensuit

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \Lambda^k\sigma = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k . \sum_{(i_0,i_1,\ldots,i_{k-1}) \in P_k(0,1,\ldots,n)} \sigma_{i_0} \otimes \sigma_{i_1} \otimes \ldots \otimes \sigma_{i_{k-1}}$$

Comme $\prod_{k=0}^{n} (1-\sigma_k) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \sum_{(i_0,i_1,\ldots,i_{k-1}) \in P_k(0,1,\ldots,n)} \sigma_{i_0} \otimes \sigma_{i_1} \otimes \ldots \otimes \sigma_{i_{k-1}}$, l'assertion proposée est démontrée.

. Soit $\theta : Z_p \to U(C)$ la représentation naturelle $\bar{k} \to e^{\frac{2i\pi k}{p}}$ et appelons ξ le fibré complexe de rang 1

$$S^{2n+1} \times_\theta C \longrightarrow L^n(p;p_0,p_1,\ldots,p_n)$$

associé par θ au revêtement universel $S^{2n+1} \to L^n(p;p_0,p_1,\ldots,p_n)$.
Dans tout ce qui suit on convient de noter encore ξ la classe de ξ dans $KU^0(L^n(p;p_0,p_1,\ldots,p_n))$.

Proposition 1.3.- Pour tout $(p;p_0,p_1,\ldots,p_n)$ (avec p non nécessairement premier) on a

$$KU^0(L^n(p;p_0,p_1,\ldots,p_n)) \cong \frac{Z[\xi]}{< \prod_{i=0}^{i=n} (1-\xi^{p_i}) \, , \, \xi^p - 1 >}$$

en désignant par $< \prod_{i=0}^{i=n} (1-\xi^{p_i}) \, , \, \xi^p-1 >$ l'idéal engendré par les polynômes

$\prod_{i=0}^{i=n}(1-\xi^{p_i})$ et ξ^p-1 dans l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Démonstration.- La suite exacte (1) montre que $KU^0(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)$ est isomorphe au quotient de $R(\mathbb{Z}_p) = \dfrac{Z[\theta]}{<\theta^p-1>}$ par $\phi(R(\mathbb{Z}_p))$. La proposition s'ensuit clairement en utilisant le lemme 1.2.

Théorème 1.4.- Pour tout $(p;p_0,p_1,\dots,p_n)$ (avec p non nécessairement premier) il existe un isomorphisme d'anneaux :

$$\tilde{\phi} : \tilde{KU}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \to \tilde{KU}(L^n(p))$$

caractérisé par $\tilde{\phi}(\xi-1) = \eta-1$ où η désigne ξ lorsque $p_0 = p_1 = \dots = p_n = 1$.

Preuve. Considérons l'homomorphisme

$$\phi : KU(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \to KU(L^n(p))$$

défini, à l'aide de 1.3., par $\phi(\bar{P}(\xi)) = \bar{P}(\eta)$ où $\bar{P}(\xi)$ (resp. $\bar{P}(\eta)$) est la classe du polynôme $P(\xi) \in Z[\xi]$ (resp. $P(\eta) \in Z[\eta]$) modulo l'idéal $<\prod_{i=0}^{i=n}(1-\xi^{p_i}), \xi^p-1>$ (resp. $<(1-\eta)^{n+1}, \eta^p-1>$).

Soient $\alpha : KU(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \to Z$ et $\beta : KU(L^n(p)) \to Z$ les augmentations définies par

$$\alpha(\bar{P}(\xi)) = P(1) \quad , \beta(\bar{Q}(\eta)) = Q(1) .$$

Elles ont pour noyaux $\tilde{KU}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ et $\tilde{KU}(L^n(p))$ respectivement. L'homomorphisme ϕ est surjectif et induit l'homomorphisme surjectif

$$\tilde{\phi} : \tilde{KU}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \to \tilde{KU}(L^n(p)),$$

qui est en fait bijectif puisque (prop. 2.1. Chapitre 2) $\tilde{KU}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ et $\tilde{KU}(L^n(p))$ sont des groupes de même ordre.

Le théorème 1.4. montre que la K-théorie complexe des espaces lenticulaires généralisés se ramène à celle des lenticulaires ordinaires. Nous nous limiterons désormais, dans tout ce chapitre, à l'étude de $\widetilde{KU}(L^n(p))$.

2. *Un théorème de factorisation.*

Soient ξ, η et ρ les fibrés complexes de rang 1 respectivement associés aux revêtements $S^{2n+1} \to L^n(p)$, $S^{2n+1} \to L^n(q)$ et $S^{2n+1} \to L^n(pq)$ par les représentations naturelles

$$k(\text{mod } p) \to e^{\frac{2i\pi k}{p}} \ , \ \ell(\text{mod } q) \to e^{\frac{2i\pi \ell}{q}} \quad \text{et} \quad m(\text{mod } pq) \to e^{\frac{2i\pi m}{pq}}$$

respectivement.

Théorème 2.1.- Soient p et q deux nombres premiers entre eux, alors il existe un isomorphisme d'anneaux :

$$\tilde{\Psi} : \widetilde{KU}(L^n(p)) \oplus (\widetilde{KU}(L^n(q)) \longrightarrow \widetilde{KU}(L^n(pq)) \ ,$$

caractérisé par :

$$\tilde{\Psi}(\xi-1,0) = \rho^q-1 \ , \ \tilde{\Psi}(0, -1) = \rho^p-1 \ .$$

Démonstration.- Considérons l'application

$$\Psi : KU(L^n(p)) \otimes_Z KU(L^n(q)) \longrightarrow KU(L^n(pq))$$

définie, au moyen de la proposition 1.3., par

$$\Psi(\bar{P}(\xi) \otimes \bar{Q}(\eta)) = \overline{P(\rho).Q(\rho)}$$

où $\bar{P}(\xi)$ [resp. $\bar{Q}(\eta)$; resp. $\overline{P(\rho).Q(\rho)}$] désigne la classe du polynôme $P(\xi) \in Z[\xi]$ [resp. $Q(\eta) \in \mathbb{Z}[\eta]$; resp. $P(\rho).Q(\rho) \in Z[\rho]$]. Il est facile de vérifier que Ψ est un homomorphisme d'anneaux.

En fait Ψ est surjectif : pour le voir il suffit de montrer que, pour tout $k \in \{1,\ldots,pq-1\}$, l'élément $(\bar{\rho})^k$ de $KU(L^n(p.q))$ est l'image par Ψ d'un élément de $KU(L^n(p)) \otimes_Z KU(L^n(q))$. En effet, p et q étant premiers entre eux, il existe (identité de Bezout) $u',v' \in Z$ tels que

$$pv' + qu' = k \ .$$

Alors on peut toujours écrire

$$(\bar{\rho})^k = (\bar{\rho})^{pv'+qu'} = \Psi[(\bar{\xi})^u \otimes (\eta)^v]$$

avec $u,v \in \mathbb{N}$ tels que $u \equiv u' \pmod p$, $v \equiv v' \pmod q$.

Considérons les augmentations

$$\alpha : KU(L^n(p)) \otimes_Z KU(L^n(q)) \to \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \beta : KU(L^n(pq)) \to \mathbb{Z}$$

définies, au moyen de la prop. 1.3., par

$$\alpha(\bar{P}(\xi) \otimes \bar{Q}(\eta)) = P(1).Q(1) \quad \text{et} \quad \beta(\bar{R}(\rho)) = R(1) \ .$$

Comme $(p,q) = 1$, nous avons

$$\tilde{KU}(L^n(p)) \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{KU}(L^n(q)) = 0 \ ,$$

car $\tilde{KU}(L^n(p))$ et $\tilde{KU}(L^n(q))$ ne contiennent respectivement que de la p-torsion et de la q-torsion, et par conséquent α et β ont pour noyaux respectifs $\tilde{KU}(L^n(p)) \oplus \tilde{KU}(L^n(q))$ et $\tilde{KU}(L^n(pq))$.

Nous avons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{KU}(L^n(p)) \oplus \tilde{KU}(L^n(q)) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\Psi}"] & KU(L^n(p)) \otimes_Z KU(L^n(q)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\Psi"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\Psi}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{KU}(L^n(pq)) \arrow[r] & KU(L^n(pq)) \arrow[r, "\beta"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les homomorphismes $\tilde{\Psi}$ et $\bar{\Psi}$ sont induits par l'homomorphisme surjectif Ψ : $\bar{\Psi}$ est un isomorphisme et $\tilde{\Psi}$ est surjectif. Puisque (prop. 2.1.,chapitre 2) les groupes $\tilde{KU}(L^n(p)) \oplus \tilde{KU}(L^n(q))$ et $\tilde{KU}(L^n(pq))$ ont respectivement même ordre $p^n.q^n = (pq)^n$, l'homomorphisme $\tilde{\Psi}$ est un isomorphisme.

Remarque.- Nous avons démontré que Ψ est un isomorphisme. D'autre part le théorème précédent implique, pour tout nombre $p > 1$, l'isomorphisme

$$\bigotimes_{i=1}^{i=r}{}_{Z}\ KU(L^n(p_i^{m_i})) \xrightarrow{\simeq} KU(L^n(p))$$

avec $p = \prod_{i=1}^{i=r} p_i^{m_i}$ où $p_i^{m_i}$ sont les facteurs premiers de la décomposition de p. En d'autres termes il nous suffit d'étudier désormais la K-théorie complexe des espaces lenticulaires ordinaires d'ordre p^m où p est un nombre premier.

3. *Calcul de* $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ *pour* p *premier.*

Nous avons vu (proposition 1.3.) que $KU(L^n(p^m)) = \dfrac{Z[\xi]}{<(1-\xi)^{n+1}\ ,\ \xi^{p^m-1}>}$.

Posons $1-\xi = -x$, alors $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ a $\bar{x}, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^{p^m-1}$, pour famille génératrice en tant que groupe ; les relations

$$\bar{x}^{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad (\bar{x}+1)^{p^m} - 1 = 0$$

caractérisent sa structure d'anneau.

. Puisque $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ est un groupe abélien d'ordre p^{mn} (prop. 2.1., chapitre 2), il s'écrit comme somme de sous-groupes cycliques dont les générateurs respectifs sont des combinaisons des $\bar{x}^i$, $1 \leqslant i \leqslant p^m - 1$. Nous sommes donc amenés à chercher à quelles conditions des combinaisons de x^i , $1 \leqslant i \leqslant p^m - 1$, seront congrues à 0 modulo l'idéal

$$I = <x^{n+1}\ ,\ (1+x)^{p^m-1}>$$

de $\mathbb{Z}[x]$.

. De façon plus précise nous allons d'abord chercher les conditions que doivent vérifier des $a_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant p^h - 1$, pour que

$$\sum_{i=1}^{p^h-1} a_i x^i \equiv 0 \quad (\text{mod } I)\ ,$$

avec h donné appartenant à $\{1,2,\ldots,m\}$. Il en sera ainsi si et seulement s'il existe A et B de $Z[x]$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p^h-1} a_i x^i = A(x).x^{n+1} + B(x).[(x+1)^{p^m} - 1] ,$$

ou de façon équivalente s'il existe $B(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}\ x^{n-1}$ avec $b_k \in \mathbb{Z}\ \forall k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, tel que

$$\sum_{i=1}^{p^h-1} a_i x^i \equiv (\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k).(\sum_{j=1}^{p^m} \binom{p^m}{j} x^j) \quad (\text{mod } <x^{n+1}>) .$$

<u>En supposant $n \geq p^h$,</u> il est clair que ce sera le cas si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées

(1) $\quad \sum_{j=1}^{j=i} \binom{p^m}{j} b_{i-j} = a_i \quad , \forall i \in \{1,2,\ldots,p^h-1\} \quad ;$

(2) $\quad \sum_{j=1}^{j=k} \binom{p^m}{j} b_{k-j} = 0 \quad , \forall k \in \{p^h, p^h+1,\ldots,n\} \quad .$

. L'ordre de $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ étant une puissance de p, dans tout ce qui va suivre nous allons étudier les caractères de divisibilité des b_k, pour $k = 0,1,\ldots,n-1$, donc des a_i, pour $i = 1,2,\ldots,p^h-1$. Les relations (1) et (2) montrent alors que les caractères de divisibilité des coefficients binômiaux vont jouer un rôle fondamental.

Rappelons donc le résultat suivant

<u>Lemme</u> 3.1. [8]

Soient $p, m, j \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 1$, <u>p premier</u> et $1 \leq j \leq p^m$. Ecrivons $j = p^a.\alpha$ avec $a \in \mathbb{N}$ et α entier <u>premier</u> avec p.

Alors $\binom{p^m}{j}$ est divisible par p^{m-a}, mais non par p^{m-a+1} .

. Pour les b_k, $k = 0,1,\ldots,n-1$, nous avons en vue la proposition suivante

<u>Proposition</u> 3.2.- Soient p, m et n trois entiers tels que p soit premier, $m \geq 1$ et $n \geq 1$. Soit $1 \leq h \leq m$ et supposons que $n \geq p^h$. Soient $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ des entiers relatifs tels que

(2) $$\sum_{j=1}^{j=k} \binom{p^m}{j} b_{k-j} = 0 \quad \text{pour tout} \quad k \in \{p^h, p^{h+1}, \dots, n\}.$$

Pour chaque $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$, écrivons

$$n - p^{h-1} - i = p^{h-1}.(p-1).q_i + r_i \quad \text{avec} \quad 0 \leq r_i < p^{h-1}.(p-1) .$$

Alors p^{q_i} divise b_i, $\forall i \in \{0,1,\dots,n-1\}$.

Démonstration.- Elle se fait en raisonnant par récurrence sur n et comporte plusieurs étapes.

1.- Considérons le cas $n = p^h$: (2) se réduit à la seule relation

(2') $$\binom{p^m}{p^h} b_0 = - \sum_{j=1}^{p^h-1} \binom{p^m}{j} b_{p^h-j} .$$

Pour chaque $1 \leq j \leq p^{h-1}$, écrivons

$$j = p^{a_j}.\alpha_j \quad \text{avec} \quad a_j \in \mathbb{N} \;,\; \alpha_j \in \mathbb{N} ,$$

tels que $(p,\alpha_j) = 1$. Le lemme 3.1 montre que $\binom{p^m}{j} b_{p^h-j}$ est au moins divisible par p^{m-a_j} pour $1 \leq j \leq p^{h-1}$ et par conséquent $\sum_{j=1}^{p^h-1} \binom{p^m}{j} b_{p^h-j}$ est divisible par $p^{m-(h-1)}$. Comme le premier membre de (2') est divisible par p^{m-h}, il s'ensuit que p divise b_0 ce qui est l'assertion proposée avec

$$i = 0 \quad , \quad q_0 = 1 \quad , \quad r_0 = 0 \quad .$$

Lorsque $i = 1,2,\dots,n-1$, l'assertion est triviale car elle signifie "1 divise b_i".

2.- Supposons l'assertion 3.2. vraie jusqu'à n et étudions le rang $n+1$. Autrement dit nous avons par hypothèse

$$\sum_{j=1}^{j=k} \binom{p^m}{j} b_{k-j} = 0 \quad , \quad \forall\, k \in \{p^h, p^{h+1}, \dots, n, n+1\}.$$

La division

$$n + 1 - p^{h-1} - i = p^{h-1}.(p-1)q_i + r_i \quad , \quad 0 \leq r_i < p^{h-1}.(p-1)$$

pour $0 \leq i \leq n$, s'écrit aussi

$$n - p^{h-1} - i = p^{h-1}.(p-1)q_i + r_i - 1$$

avec

$$-1 \leq r_i - 1 < p^{h-1}(p-1) - 1 < p^{h-1}(p-1) \; ;$$

ainsi pour tous les i de $\{0,1,\ldots,n\}$ pour lesquels $r_i \geq 1$ l'assertion proposée est vraie puisqu'elle l'est pour n.

Il ne reste donc plus qu'à la vérifier pour les i tels que $r_i = 0$, c'est-à-dire

$$n + 1 - p^{h-1} - i = p^{h-1}(p-1)q$$

autrement dit pour ceux s'écrivant

$$i = n + 1 - p^{h-1}(p-1)q - p^{h-1}$$

ou bien

$$i = n + 1 - p^{h-1}(p-1)(q-1) - p^h \; .$$

3.- <u>Nous allons montrer que 3.2. est vraie pour</u> $i = n + 1 - p^{h-1}(p-1).(q-1) - p^h$. Autement dit, avec les hypothèses faites, il s'agit d'établir le lemme suivant

Lemme 3.3.- $b_{n+1-p^{h-1}.(p-1)(q-1)-p^h}$ est divisible par p^q.

Raisonnons par récurrence sur q : considérons le cas $q = 1$ et montrons que b_{n+1-p^h} est divisible par p. La relation

$$\sum_{j=1}^{n+1} \binom{p^m}{j} b_{n+1-j} = 0$$

[elle est tirée de (2) pour $k = n+1$], en posant $\ell = \inf(p^m, n+1)$ s'écrit

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{j=\ell} \binom{p^m}{j} b_{n+1-j} = 0 .$$

L'hypothèse de récurrence sur n montre que, pour tout $j \in \{1,2,\ldots,\ell\} - \{p^{h-1}, p^h\}$, b_{n+1-j} est divisible par p^{q_j} avec

$$n - p^{h-1} - (n+1-j) = p^{h-1}.(p-1)q_j + r_j \quad , \quad 0 \leq r_j < p^{h-1}.(p-1) ,$$

c'est-à-dire

$$j - p^{h-1} - 1 = p^{h-1}(p-1)q_j + r_j \quad , \quad 0 \leq r_j < p^{h-1}.(p-1) .$$

Posons, pour tout $j \in \{1,2,\ldots,\ell\}$, $j = p^{a_j}.\alpha_j$ avec $a_j, \alpha_j \in \mathbb{N}$ et $(a_j, \alpha_j) = 1$. Alors pour tout $j \in \{1,2,\ldots,\ell\} - \{p^{h-1}, p^h\}$, $\binom{p^m}{j} b_{n+1-j}$ est divisible par $p^{m-a_j+q_j}$.

Comme nous nous intéresserons à la divisibilité de b_{n+1-p^h} par p, écrivons (3) sous la forme

$$(3') \qquad -\binom{p^m}{p^h} b_{n+1-p^h} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \{p^{h-1}, p^h\}}}^{j=\ell} \binom{p^m}{j} b_{n+1-j} + \binom{p^m}{p^{h-1}} b_{n+1-p^{h-1}} .$$

Puisque $\binom{p^m}{p^{h-1}} b_{n+1-p^{h-1}}$ est au moins divisible par $p^{m-(h-1)} = p^{m-h+1}$, nous sommes ramenés à montrer que

Lemme 3.4.- Avec les notations introduites ci-dessus, $\forall\, j \in \{1,2,\ldots,\ell\} - \{p^{h-1}, p^h\}$ nous avons

$$m - a_j + q_j \geq m - h + 1 .$$

Preuve.- Ceci équivaut à $q_j - a_j + h - 1 \geq 0$ pour $j \in \{1,2,\ldots,\ell\} - \{p^{h-1}, p^h\}$.

Si $1 \leq j < p^{h-1}$ alors $0 \leq a_j < h - 1$ d'où $h - a_j - 1 > 0$ et à fortiori

$q_j + a_j + h - 1 > 0$;

si $p^{h-1} < j < p^h$ alors $0 \leq a_j < h$ d'où $h-a_j > 0$ et à fortiori

$q_j + h - a_j - 1 > 0$;

enfin si $p^h < j < \ell$: soit $0 \leq a_j < h$ et alors $q_j + h - a_j - 1 \geq 0$, soit $a_j \geq h$ et alors

$$j - p^{h-1} - 1 = p^{a_j}.\alpha_j - p^{h-1} - 1 \geq p^{a_j} - p^{h-1} - 1 = p^{h-1}.(p^{a_j-(h-1)} - 1) - 1$$

$$j - p^{h-1} - 1 \geq p^{h-1}.(p-1)(1 + p + \dots + p^{a_j-h}) - 1$$

$$q_j = \left[\frac{j-p^{h-1}-1}{p^{h-1}(p-1)}\right] \geq \left[1 + p + \dots + p^{a_j-h} - \frac{1}{p^{h-1}.(p-1)}\right] \geq p + p^2 + \dots + p^{a_j-h}$$

i.e. à fortiori

$$q_j \geq a_j - h + 1$$

car $p \geq 2$.

. Ce lemme montre que $\binom{p^m}{p^h} b_{n+1-p^h}$ est divisible par p^{m-h+1} (voir (3')), comme $\binom{p^m}{p^h}$ est seulement divisible par p^{m-h}, il s'ensuit que b_{n+1-p^h} est divisible par p. Le lemme 3.3. est donc vrai pour $q = 1$.

. Supposons maintenant que p^q divise $b_{n+1-p^{h-1}.(p-1)(q-1) - p^h}$: nous allons montrer que

$$p^{q+1} \text{ divise } b_{n+1-p^{h-1}.(p-1)q-p^h} .$$

En procédant de la même façon que pour $q = 1$, nous sommes amenés à considérer la relation

$$\sum_{j=1}^{n+1-p^{h-1}.(p-1)q} \binom{p^m}{j} b_{n+1-p^{h-1}.(p-1)q-j} = 0$$

extraite de (2) pour $k = n + 1 - p^{h-1}.(p-1)$, et à poser $\ell = \inf(p^m, n + 1 - p^{h-1}.(p-1)q)$. Elle s'écrit alors

$$(4)\qquad -\binom{p^m}{p^h} b_{n+1-p^{h-1}.(p-1)q-p^h} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\notin\{p^{h-1},p^h\}}}^{\ell} \binom{p^m}{j} b_{n+1-p^{h-1}.(p-1)q-j} + \binom{p^m}{p^{h-1}} b_{n+1-p^{h-1}(p-1)q-p^{h-1}}$$

Pour $j \in \{1,2,\dots,\ell\} - \{p^{h-1},p^h\}$, considérons la division

$$n - p^{h-1} - [n + 1 - p^{h-1}.(p-1)q-j] = p^{h-1}.(p-1)q_j + r_j \quad \text{avec} \quad 0 \leq r_j < p^{h-1}.(p-1) \ ;$$

l'hypothèse de récurrence sur n montre que $b_{n+1-p^{h-1}.(p-1)q-j}$ est divisible par p^{q_j} donc $\binom{p^m}{j}.b_{n+1-p^{h-1}.(p-1)q-j}$ par $p^{m-a_j+q_j}$. Mais la division précédente s'écrit aussi

$$j - p^{h-1} - 1 = p^{h-1}.(p-1)(q_j-q) + r_j \ , \ 0 \leq r_j < p^{h-1}.(p-1)$$

pour $j \in \{1,2,\dots,\ell\} - \{p^{h-1},p^h\}$. Le lemme 3.4. permet alors d'affirmer que

$$\forall\, j \in \{1,2,\dots,\ell\} - \{p^{h-1},p^h\} \ , \ m - a_j + q_j \geq m - h + 1 + q \ .$$

Il en résulte que $\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\notin\{p^{h-1},p^h\}}}^{\ell} \binom{p^m}{j} b_{n+1-p^{h-1}.(p-1)q-j}$ est divisible par $p^{m-h+1+q}$.

D'autre part $\binom{p^m}{p^{h-1}} b_{n+1-p^{h-1}.(p-1)q-p^{h-1}} = \binom{p^m}{p^{h-1}} b_{n+1-p^{h-1}.(p-1)(q-1)-p^h}$ est divisible par $p^{m-(h-1)}.p^q = p^{m-h+1+q}$ à cause de l'hypothèse de récurrence sur q.

(4) implique donc : p^{q+1} divise $b_{n+1-p^{h-1}.(p-1)q-p^h}$.

. Le lemme 3.3. est démontré et par conséquent la proposition 3.2. également.

Proposition 3.5.- Soient p, m et n trois entiers tels que p soit premier, m et $n \geq 1$; supposons que $n \geq p^h$ où $1 \leq h \leq m$. Soient $a_1, a_2, \dots, a_{p^h-1}$ et $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ des entiers relatifs tels que

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{j=i} \binom{p^m}{j} b_{i-j} = a_i \quad , \ \forall\, i \in \{1,2,\dots,p^h-1\} \ ;$$

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{j=k} \binom{p^m}{j} b_{k-j} = 0 \quad , \ \forall\, k \in \{p^h, p^h+1,\dots,n\} \ .$$

Ecrivons $n - p^{h-1} + 1 = p^{h-1}.(p-1)q_h + r_h$ avec $0 \leq r_h < p^{h-1}.(p-1)$.

Alors :

1. lorsque $1 \leq i < r_h + p^{h-1}$, a_i est divisible par $p^{m-h+1+q_h}$;
2. lorsque $r_h + p^{h-1} \leq i \leq p^h - 1$, a_i est divisible par p^{m-h+q_h} .

Démonstration.

Soient $i \in \{1,2,\dots,p^h - 1\}$ et $1 \leq j \leq i$, en écrivant

$$(5) \qquad n - p^{h-1} - (i-j) = p^{h-1}.(p-1)q_{i-j} + r_{i-j} \quad \text{avec} \quad 0 \leq r_{i-j} < p^{h-1}.(p-1)$$

la proposition 3.2. montre que b_{i-j} est divisible par $p^{q_{i-j}}$.

Remplaçons dans (5) n par $p^{h-1}.(p-1)q_h + r_h - 1$, il vient

$$j = p^{h-1}(p-1).(q_{i-j} - q_h) + r_{i-j} - r_h + i + 1$$

ou encore

$$(6) \qquad j - p^{h-1} - 1 = p^{h-1}.(p-1)(q_{i-j} - q_h) + r_{i-j} - r_h + i - p^{h-1}$$

pour $i \in \{1,2,\dots,p^h - 1\}$ et $1 \leq j \leq i$.

Soit d'autre part pour tout $j \in \{1,2,\dots,i\}$

$$j - p^{h-1} - 1 = p^{h-1}.(p-1)q_j + r_j \quad \text{avec} \quad 0 \leq r_j < p^{h-1}.(p-1) \ ,$$

et $j = p^{a_j}.\alpha_j$ avec $a_j, \alpha_j \in \mathbb{N}$ et $(p, \alpha_j) = 1$. Le lemme 3.4. implique alors

$$q_j - a_j + h - 1 \geq 0$$

pour tout $j \in \{1,2,\ldots,i\}$ pourvu que $j \neq p^{h-1}$. $[$Ici $j \neq p^h$ car $1 \leq i \leq p^h - 1]$.
Nous allons comparer (6) et la division de $j - p^{h-1} - 1$ par $p^{h-1}.(p-1)$.

1. Supposons d'abord que $-r_h + i - p^{h-1} < 0$, alors l'unicité de la division implique

$$q_{i-j} - q_h \geq q_j \quad , \quad \forall\, j \in \{1,2,\ldots,i\} .$$

Ainsi $q_{i-j} \geq q_j + q_h \geq q_h + a_j - h + 1$; autrement dit pour $1 \leq i < p^{h-1} + r_h$ b_{i-j} est divisible par $p^{q_h + a_j - h + 1}$ pour tout $1 \leq j \leq i$, sauf éventuellement pour $j = p^{h-1}$, et par conséquent $\binom{p^m}{j} b_{i-j}$ est divisible par

$$p^{m-a_j}.p^{q_h+a_j-h+1} = p^{m-h+1+q_h} .$$

Il est clair qu'il suffit maintenant de voir que ceci est encore valable pour $j = p^{h-1}$ pour établir complétement la première partie de la proposition.
Soit donc $j = p^{h-1}$, la relation (6) devient

(6 bis) $\quad - 1 = p^{h-1}(q_{i-p^{h-1}} - q_h) + r_{i-p^{h-1}} + i - p^{h-1} - r_h$.

Il nous faut montrer que $b_{i-p^{h-1}}$ est divisible par p^{q_h} donc nous devons montrer que

$$q_{i-p^{h-1}} \geq q_h .$$

De (6 bis) il vient $- 1 - i + p^{h-1} + r_h = p^{h-1}.(p-1).(q_{i-p^{h-1}} - q_h) + r_{i-j}$;
comme nous avons supposé $i \leq p^{h-1} - 1 + r_h$, nous en déduisons

$$p^{h-1}(p-1)(q_{i-p^{h-1}} - q_h) + r_{i-j} \geq 0 ,$$

c'est-à-dire

$$p^{h-1}.(p-1).(q_{i-p^{h-1}} - q_h) \geq 0$$

puisque $0 \leq r_{i-j} < p^{h-1}(p-1)$; d'où $q_{i-p^{h-1}} \geq q_h$ car $p \geq 2$.

2. <u>Plaçons nous dans le cas $r_k + p^{h-1} \leq i \leq p^h - 1$</u> ; reprenons (6) et écrivons-là

(6 ter) $\quad j - p^{h-1} - 1 = p^{h-1}.(p-1)(q_{i-j} - q_h + 1) + r_{i-j} + i - r_h - p^h$

pour tout $1 \leq j \leq i$. Nous avons $i - r_h - p^h < 0$ et le même raisonnement que ci-dessus implique

$$q_{i-j} - q_h + 1 \geq q_j \qquad , \quad \forall j \in \{1,2,\dots,i\} .$$

Puisque pour $j \neq p^{h-1}$, nous avons $q_j \geq a_j - h + 1$, il vient ici

$$q_{i-j} \geq q_h - 1 + q_j \geq a_j - h + q_h$$

pour $1 \leq j \leq i$ sauf éventuellement pour $j = p^{h-1}$. En fait c'est encore vrai quand $j = p^{h-1}$. En effet (6 ter) s'écrit

(6 quater) $\quad -1 + p^h + r_h - i = p^{h-1}.(p-1)(q_{i-p^{h-1}} - q_h + 1) + r_{i-p^{h-1}}$

avec $0 \leq r_{i-p^{h-1}} < p^{h-1}.(p-1)$; mais $i \leq p^h - 1$ entraîne

$$p^h - 1 - i + r_h \geq r_h \geq 0$$

et (6 quater) n'est autre chose que la division de $p^h - 1 - i + r_h$ par $p^{h-1}(p-1)$: donc $q_{i-p^{h-1}} - q_h + 1 \geq 0$ ce qui est l'inégalité recherchée puisque, pour $j = p^{h-1}$ nous avons $a_j - h + q_h = h - 1 - h + q_h = q_h - 1$.

Ainsi pour $r_h + p^{h-1} \leq i \leq p^h - 1$, $\forall j \in \{1,\dots,i\}$ b_{i-j} est divisible par $p^{a_j-h+q_h}$ donc $\binom{p^m}{j} b_{i-j}$ par

$$p^{m-a_j}.p^{a_j-h+q_h} = p^{m-h+q_h} \quad ;$$

d'où la seconde assertion de la proposition.

Proposition 3.6.- Soient m, n et p trois entiers tels que m et $n \geqslant 1$ et p premier ; soit $1 \leqslant i \leqslant s$ où $s = \inf(p^m - 1, n)$. Appelons h l'entier tel que $p^{h-1} \leqslant i < p^h$ et posons $n - p^{h-1} + 1 = p^{h-1}.(p-1).q_h + r_h$ avec $0 \leqslant r_h < p^{h-1}.(p-1)$.

Soient $(a_i^j)_{1 \leqslant j \leqslant i}$ des entiers relatifs tels que

$$\sum_{j=1}^{j=i} a_i^j.x^j \equiv 0 \pmod{I} \quad ;$$

alors :

1. si $p^{h-1} \leqslant i < r_h + p^{h-1}$, il existe $\alpha_i^j \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant j \leqslant i$, tels que

$$a_i^j = \alpha_i^j.p^{m-h+1+q_h} \quad , \quad \forall\, j \in \{1,2,\ldots,i\} \; ;$$

2. si $r_h + p^{h-1} \leqslant i < p^h$, il existe $\beta_i^j \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant j \leqslant i$, tels que

$$a_i^j = \beta_i^j.p^{m-h+q_h} \quad , \quad \forall\, j \in \{1,2,\ldots,i\} \; .$$

Démonstration.- Cette proposition se déduisant immédiatement de la précédente, il suffit seulement de vérifier que 3.5. est encore vraie pour $1 \leqslant n < p$, l'hypothèse

$$\sum_{j=1}^{j=i} a_i^j.x^j \equiv 0 \pmod{I}$$

(dans laquelle $1 \leqslant i < n$) implique l'existence d'entiers relatifs $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ tels qu'en particulier

$$\sum_{j=1}^{j=i} \binom{p^m}{j} b_{i-j} = a_i \quad ;$$

comme $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n < p$, nous avons $(j,p) = 1$ donc $\binom{p^m}{j} b_{i-j}$ divisible par

p^m pour tout $1 \leqslant j \leqslant i$, c'est-à-dire a_i divisible par p^m : ce qui est précisément le résultat donné par la seconde assertion de 3.5. pour $h = 1$.

Théorème 3.7.- Soient m, n et p des entiers tels que m et $n \geqslant 1$ et p premier. Pour tout entier h de $\{1,2,\ldots,m\}$, on pose $n - p^{h-1} + 1 = p^{h-1}.(p-1)q_h + r_h$ avec $0 \leqslant r_h < p^{h-1}.(p-1)$. Alors

1. Pour $n \geqslant p^{m-1}$, on a

$$\widetilde{KU}(L^n(p^m)) = \bigoplus_{h=1}^{m} (Z_{p^{m-h+1+q_h}})^{r_h} \oplus (Z_{p^{m-h+q_h}})^{p^{h-1}.(p-1)-r_h} .$$

2. Pour $p^{\ell-1} \leqslant n < p^{\ell}$ avec $1 \leqslant \ell \leqslant m-1$, on a

$$\widetilde{KU}(L^n(p^m)) = \left[\bigoplus_{k=1}^{\ell-1} (Z_{p^{m-h+1+q_h}})^{r_h} \oplus (Z_{p^{m-h+q_h}})^{p^{h-1}.(p-1)-r_h}\right] \oplus (Z_{p^{m-\ell+1}})^{n-p^{\ell-1}+1} .$$

Démonstration.- Elle se fait en plusieurs étapes.

1. Soit $i \in \{1,2,\ldots,s\}$ avec $s = \inf(p^m-1,n)$; h étant l'entier tel que $p^{h-1} \leqslant i < p^h$, nous poserons (avec les notations de 3.6.)

$$(1) \qquad m_i = \begin{cases} m - h + 1 + q_h & \text{pour } p^{h-1} \leqslant i < r_h + p^{h-1} , \\ m - h + q_h & \text{pour } r_h + p^{h-1} \leqslant i < p^h . \end{cases}$$

$\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ étant un groupe abélien d'ordre fini p^{mn}, il existe des entiers $(a_i^j)_{1\leqslant j\leqslant i}$ tels que

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{j=i} a_i^j.\bar{x}^j = 0 \quad \text{et} \quad a_i^i \neq 0 .$$

Posons $a_i^i = p^{n_i}.v_i$ avec v_i entier tel que $(v_i,p) = 1$. La proposition 3.6. montre qu'alors nécessairement p^{m_i} divise chaque a_i^j, $1 \leqslant j \leqslant i$ et en particulier

$$n_i \geqslant m_i \ .$$

Parmi toutes les familles d'entiers $(a_i^j)_{1\leqslant j\leqslant i}$ vérifiant (2), choisissons celle pour laquelle n_i est le plus petit possible, soit $(t_i^j)_{1\leqslant j\leqslant i}$.

La proposition 3.6. montre qu'il existe des entiers $(u_i^j)_{1\leqslant j\leqslant i}$ tels que

$$t_i^j = p^{m_i}.u_i^j \ , \ \forall\, j \in \{1,2,\ldots,i\}.$$

Notons qu'en particulier

$$u_i^i = p^{n_i-m_i}.v_i \ .$$

Nous avons alors

$$p^{m_i}.(\sum_{j=1}^{i-1} u_i^j.\bar{x}^j + p^{n_i-m_i}.v_i.\bar{x}^i) = 0 \ .$$

Posons

(3) $$\hat{x}_i = \sum_{j=1}^{i-1} u_i^j.\bar{x}^j + p^{n_i-m_i}.v_i.\bar{x}^i$$

En faisant parcourir à i l'ensemble $\{1,2,\ldots,s\}$, nous obtenons ainsi une famille $(\hat{x}_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ d'éléments de $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$.

2. Soit G le sous-groupe de $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ engendré par la famille $(\hat{x}_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$. Chaque $\hat{x}_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, engendre un sous-groupe G_i de G. Comme $p^{m_i}.\hat{x}_i = 0$, G_i est un groupe cyclique d'ordre au plus égal à p^{m_i}. Supposons que l'ordre de G_i soit p^{ℓ_i} avec $\ell_i < m_i$; nous aurions $p^{\ell_i}.\hat{x}_i = 0$ soit (avec (3))

$$\sum_{j=1}^{i-1} u_i^j.p^{\ell_i}.\bar{x}^j + p^{m_i-n_i+\ell_i}.v_i.\bar{x}^i = 0$$

avec $v_i \neq 0$. Vu le choix fait pour u_i^j, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, et v_i, nous devons avoir nécessairement $n_i-m_i+\ell_i \geqslant n_i$ c'est-à-dire $\ell_i \geqslant m_i$ ce qui contredit l'hypothèse $\ell_i < m_i$.

Autrement dit, $\forall\, i \in \{1,2,\ldots,s\}$, G_i est un groupe cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}_{p^{m_i}}$.

3. Nous allons montrer que $G = \bigoplus_{i=1}^{i=s} G_i$. Supposons qu'il existe $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq s$, tels que

$$\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i.\hat{x}_i = 0 \quad .$$

A l'aide de (3), nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{j=i-1} u_i^j.\bar{x}^j + p^{n_i-m_i}.v_i.\bar{x}^i\Big) = 0 \ .$$

C'est un polynôme, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de degré s, dont le coefficient dominant est

$$\lambda_s.p^{n_s-m_s}.v_s \ .$$

Posons $\lambda_s = p^{k_s}.\mu_s$ avec μ_s entier tel que $(\mu_s,p) = 1$, alors

$$\lambda_s.p^{n_s-m_s}.v_s = p^{n_s-m_s+k_s}.\mu_s.v_s \ .$$

Etant donnée la construction de $\hat{x}_s$, nous devons avoir

$$n_s - m_s + k_s \geq n_s$$

c'est-à-dire $k_s \geq m_s$ et par conséquent

$$\lambda_s \equiv 0 \pmod{p^{m_s}} \quad .$$

Ainsi $\lambda_s.\hat{x}_s = 0$ et nous avons donc $\sum_{i=1}^{s-1} \lambda_i.\hat{x}_i = 0$; en raisonnant de la même manière il vient $\lambda_{s-i}.\hat{x}_{s-1} = 0$ et de proche en proche

$$\lambda_i \equiv 0 \pmod{p^{m_i}} \quad , \ \forall\, i \in \{1,2,\dots,s\}.$$

Il s'ensuit que G est isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^{i=s} \mathbb{Z}_{p^{m_i}}$.

4. Calculons l'ordre de G en utilisant (1). Supposons d'abord que $n \geqslant p^{m-1}$, alors G a pour ordre

$$\sum_{h=1}^{h=m} (m - h + 1 + q_h).r_h + (m - h + q_h)(p^h - p^{h-1} - r_h) =$$

$$= \sum_{h=1}^{h=m} r_h + q_h.p^{h-1}(p-1) + (m-h)(p-1)p^{h-1} = \sum_{h=1}^{h=m} n - p^{h-1} + 1 + (m-h)(p^h - p^{h-1}) =$$

$$= \sum_{h=1}^{h=m} (p-1)(mp^{h-1} - hp^{h-1}) - p^{h-1} + n + 1 = mn + m + m(p^m - 1) - \sum_{h=1}^{h=m} (p-1)hp^{h-1} + p^{h-1} =$$

$$= mn + mp^m - \sum_{h=1}^{h=m} p^m - p^{h-1} + p^{h-1} = mn.$$

Supposons maintenant $1 \leqslant n < p^{m-1}$, il existe alors $1 \leqslant \ell \leqslant m-1$ tel que $p^{\ell-1} \leqslant n < p^{\ell}$; G a pour ordre

$$\left[\sum_{h=1}^{\ell-1} (m - h + 1 + q_h)r_h + (m - h + q_h)(p^h - p^{h-1} - r_h)\right] + (m - \ell + 1)(n - p^{\ell-1} + 1) =$$

$$= (m - \ell + 1)(n - p^{\ell-1} + 1) + \sum_{h=1}^{\ell-1} n - p^{h-1} + 1 + (m-h)(p^h - p^{h-1}) =$$

$$= (m - \ell + 1)(n - p^{\ell-1} + 1) + (n+1)(\ell-1) + \sum_{h=1}^{\ell-1} (p-1)(mp^{h-1} - hp^{h-1}) - p^{h-1} =$$

$$= mn + (\ell-1)p^{\ell-1} - \sum_{h=1}^{\ell-1} (p-1) \frac{p^{\ell-1} - p^{h-1}}{p - 1} + p^{h-1} = mn .$$

Nous voyons que le sous-groupe G de $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ a, pour tout $n \geqslant 1$, même ordre que $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$: il est donc isomorphe à $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ et le théorème se trouve entièrement démontré.

Remarque.

Dans la démonstration de ce théorème, nous avons mis en évidence la forme des générateurs des groupes cycliques composant $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$. En particulier, avec $N = \inf(p-1,n)$, les N premiers groupes cycliques ont respectivement pour générateurs

$$\hat{x}_1 = \bar{x}_1 \ , \ \hat{x}_2 = \bar{x}_2, \ \ldots, \ \hat{x}_N = \bar{x}_N \ .$$

Nous retrouvons ainsi, pour $m = 1$, les résultats établis dans [10] par T. Kambé.

CHAPITRE 4

K-THEORIE REELLE DES ESPACES LENTICULAIRES .

1. Les homomorphismes de Bott.

. Soient r le morphisme

$$\tilde{KU}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \longrightarrow \tilde{KO}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$$

qui à tout m-fibré complexe de base $L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)$ associe le 2m-fibré réel qui lui est sous-jacent ; c le morphisme

$$\tilde{KO}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \longrightarrow \tilde{KU}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$$

qui associe à tout m-fibré réel sa structure naturelle de m-fibré complexe ; et t le morphisme

$$\tilde{KU}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \longrightarrow \tilde{KU}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$$

qui associe à tout fibré complexe son conjugué.

Ils sont, d'après Bott [3], tels que

$$rc = 2 \quad , \quad cr = 1 + t \ .$$

Rappelons enfin que r est un homomorphisme de groupes, c et t des homomorphismes d'anneaux. De plus ils sont fonctoriels.

Proposition 1.1.-

Si p est impair, les homomorphismes de Bott

$$r : \tilde{KU}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \longrightarrow \tilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$$

$$c : \tilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \longrightarrow \tilde{KU}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$$

sont respectivement surjectif et injectif.

Preuve.- Considérons le morphisme

$$r.c : \widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \longrightarrow \widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$$

qui est la multiplication par 2 ; soit $a \in \widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ tel que

$$rc(a) = 2a = 0$$

alors a est nécessairement nul car $\widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ est un groupe d'ordre impair (proposition 2.3., chapitre 2). Autrement dit $rc = 2$ est un monomorphisme et, $\widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ étant un groupe fini, par conséquent un isomorphisme.

Le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "\approx", "rc = 2"'] & \widetilde{KU}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \arrow[d, "r"] \\ & \widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \end{tikzcd}$$

montre que c est injectif et r surjectif.

2. K-*théorie réelle des espaces lenticulaires généralisés*.

Théorème 2.1.-

Pour p impair (non nécessairement premier), il existe un isomorphisme d'anneaux :

$$\tilde{\chi} : \widetilde{KO}^{2s}(L^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \longrightarrow \widetilde{KO}^{2s}(L^n(p)) .$$

Démonstration.

Soit l'isomorphisme

$$\tilde{\phi}_0 : \widetilde{KU}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \longrightarrow \widetilde{KU}^{2s}(L_0^n(p))$$

défini par

$$\tilde{\phi}_0 = (i^C).\tilde{\phi}.(i^{\mathbb{C}})^{-1}$$

où i^C et $\tilde{\phi}$ sont les isomorphismes respectivement donnés par le théorème 1.4 (chapitre 3) et la proposition 3.1. (chapitre 2).

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{KU}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \arrow[r, "\tilde{\phi}_0"] \arrow[d, "r"'] & \widetilde{KU}^{2s}(L_0^n(p)) \arrow[d, "2r"] \\
\widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)) \arrow[r, "r\tilde{\phi}_0 c"] & \widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p))
\end{tikzcd} .$$

Comme $cr = 1 + t$ et t est fonctoriel, il est commutatif car

$$2r\tilde{\phi}_0 = rcr\tilde{\phi}_0 = r(1 + t)\tilde{\phi}_0 = r\tilde{\phi}_0(1 + t) = r\tilde{\phi}_0 cr \quad .$$

Puisque p est impair $2 = rc$ est un isomorphisme, r un épimorphisme (prop. 1.1.) et par suite $r\tilde{\phi}_0 c$ est un épimorphisme : c'est donc un isomorphisme, les groupes $\widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$ et $\widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p))$ ayant même ordre (prop. 2.3., chapitre 2). L'isomorphisme $\tilde{\chi}$ est alors donné par

$$\tilde{\chi} = \begin{cases} (i^{\mathbb{R}})^{-1}.r.\tilde{\phi}_0.c.(i^{\mathbb{R}}) & \text{si } s - n \not\equiv 0 \pmod 4 , \\[2ex] (\tilde{i}^{\mathbb{R}})^{-1}.\begin{pmatrix} id_{\mathbf{Z}_2} & 0 \\ 0 & r\tilde{\phi}_0 c \end{pmatrix}.\tilde{i}^{\mathbb{R}} & \text{si } s - n \equiv 0 \pmod 4 ; \end{cases}$$

avec les notations introduites au § 3 du chapitre 2.

Ce résultat montre que la KO-théorie des espaces lenticulaires généralisés d'ordre impair se ramène à celle des lenticulaires ordinaire d'ordre impair. Aussi n'étudierons-nous plus, dans tout ce qui suit que $\widetilde{KO}(L^n(p))$ avec p impair.

3. *Le théorème de factorisation en* $\widetilde{KO}$*-théorie.*

Théorème 3.1.-

Si p et q sont tous deux impairs et premiers entre eux, il existe un isomorphisme d'anneaux :

$$\tilde{\omega}_0 : \widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p)) \oplus \widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(q)) \longrightarrow \widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(pq)) .$$

Lorsque $s - n \not\equiv 0 \pmod 4$, $\tilde{\omega}_0$ induit un isomorphisme

$$\tilde{\omega} : \widetilde{KO}^{2s}(L^n(p)) \oplus \widetilde{KO}^{2s}(L^n(q)) \longrightarrow \widetilde{KO}^{2s}(L^n(pq)) .$$

Démonstration.

Nous noterons $i_k^{\mathbb{C}}$, $i_k^{\mathbb{R}}$ et $i_k^{\sim\mathbb{R}}$ $(k = p,q,pq)$ les isomorphismes induits par l'inclusion canonique $i_k : L_0^n(k) \to L^n(k)$. [cf. § 3, chapitre 2].

Soit Ψ_0 l'isomorphisme

$$\tilde{\Psi}_0 : \widetilde{KU}^{2s}(L_0^n(p)) \oplus \widetilde{KU}^{2s}(L_0^n(q)) \longrightarrow \widetilde{KU}^{2s}(L_0^n(pq))$$

induit par l'isomorphisme (th. 2.1., chapitre 3)

$$\tilde{\Psi} : \widetilde{KU}^{2s}(L^n(p)) \oplus \widetilde{KU}^{2s}(L^n(q)) \longrightarrow \widetilde{KU}^{2s}(L^n(q)) \quad ;$$

plus précisément

$$\tilde{\Psi}_0 = i_{pq}^{\mathbb{C}} \cdot \tilde{\Psi} \cdot \begin{pmatrix} (i_p^{\mathbb{C}})^{-1} & 0 \\ 0 & (i_q^{\mathbb{C}})^{-1} \end{pmatrix} .$$

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{KU}^{2s}(L_0^n(p)) \oplus \widetilde{KU}^{2s}(L_0^n(q)) \arrow[r, "\tilde{\Psi}_0"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}"'] & \widetilde{KU}^{2s}(L_0^n(pq)) \arrow[d, "2.r"] \\
\widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p)) \oplus \widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(q)) \arrow[r, "r.\tilde{\Psi}_0.\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}"] & \widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(pq))
\end{tikzcd} .$$

Là aussi la fonctorialité de t et les relations $rc = 2$, $cr = 1 + t$ impliquent sa commutativité. A l'aide de la proposition 1.1. nous voyons que $2r\tilde{\phi}_0$ et $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ sont des épimorphismes : $r\tilde{\Psi}_0 . \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est donc un épimorphisme. Comme $\widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p)) \oplus KO^{2s}(L_0^n(q))$ et $\widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(pq))$ sont même ordre, l'homomorphisme

$$\tilde{\omega}_0 = r.\tilde{\Psi}_0 . \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

est l'isomorphisme annoncé.

Lorsque $s - n \not\equiv 0 \pmod 4$, il est clair que

$$\tilde{\omega} = (i_{pq}^{\mathbb{R}})^{-1} . \tilde{\omega}_0 . \begin{pmatrix} i_p^{\mathbb{R}} & 0 \\ 0 & i_q^{\mathbb{R}} \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de $\widetilde{KO}^{2s}(L^n(p)) \oplus \widetilde{KO}^{2s}(L^n(q))$ sur $\widetilde{KO}^{2s}(L^n(p.q))$.

Remarque.

Ce théorème de factorisation ramène l'étude de $\widetilde{KO}^{2s}(L^n(p))$ pour p impair à celle de $\widetilde{KO}^{2s}(L^n(p_i^{m_i}))$ avec $p = \prod_{i=1}^{i=r} p_i^{m_i}$ où $p_i^{m_i}$ sont les facteurs premiers de la décomposition de p..

4. *Etude de* $\widetilde{KO}(L^n(p^m))$ *pour* p *premier impair.*

. Nous allons d'abord préciser le lien qui existe entre η, le fibré canonique complexe de rang 1 de base $P^n(\mathbb{C})$, et $\xi = S^{2n+1} \times_\theta \mathbb{C} \to L^n(p)$, le fibré complexe de rang 1 associé par la représentation naturelle

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{Z}_p &\to U(1) = \mathbb{C}^* \\ \bar{k} &\to e^{\frac{2i\pi k}{p}} \end{aligned}$$

au revêtement universel $S^{2n+1} \to L^n(p)$. Soient f, g et π les projections canoniques suivantes

$$\begin{tikzcd} & L^n(p) \arrow[d, "\pi"] \\ S^{2n+1} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & P^n(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

il est clair que $\pi.f = g$. Appelons E l'espace total de η et π^*E celui de son fibré image réciproque $\pi^*\eta$. Alors

Lemme 4.1.-

Les fibrés ξ et $\pi^*\eta$ sont isomorphes.

Preuve.-

Un élément $(\overline{z,\lambda})$ de $S^{2n+1} \times_\theta \mathbb{C}$ est la classe d'équivalence de $(z,\lambda) \in S^{2n+1} \times \mathbb{C}$ modulo la relation d'équivalence $\mathcal{R}$

$$((z,\lambda)\mathcal{R}(z',\lambda') \iff (\exists\, \bar{k} \in \mathbb{Z}_p \text{ tel que } z' = e^{\frac{2i\pi k}{p}}.z \text{ et } \lambda' = \lambda.e^{-\frac{2i\pi k}{p}}),$$

en considérant $S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z| = 1\}$.

Considérons l'application

$$\Omega : S^{2n+1} \times_\theta \mathbb{C} \longrightarrow \pi^*E$$

définie par

$$\Omega[(\overline{z,\lambda})] = [f(z),(g(z),\lambda.z)] \quad , \ \forall\, z \in S^{2n+1} \quad , \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \ .$$

En fait Ω est un morphisme de ξ dans $\pi^*\eta$ car d'une part le diagramme

$$\begin{tikzcd} S^{2n+1} \times_\theta \mathbb{C} \arrow[rr, "\Omega"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \pi^*E \arrow[dl, "\beta"] \\ & L^n(p) & \end{tikzcd}$$

où $\alpha[(\overline{z,\lambda})] = f(z)$, $\beta[f(z),(g(z),z')] = f(z)$ avec $z \in S^{2n+1}$, $z' \in g(z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, est commutatif et d'autre part Ω est clairement linéaire sur les fibres. Mieux Ω est l'isomorphisme annoncé. En effet c'est un monomorphisme puisque :

$$(\Omega[(\overline{z,\lambda})] = \Omega[(\overline{y,\mu})]) \implies (f(z) = f(y) \ , \ g(z) = g(y) \text{ et } \lambda z = \mu y)$$

i.e.

$$(\Omega[(\overline{z,\lambda})] = \Omega[(\overline{y,\mu})]) \Rightarrow (f(z) = f(y) \text{ et } \lambda z = \mu y) \iff \left(\begin{array}{l} \exists\, \bar{k} \in \mathbb{Z}_p \text{ tel que } y = e^{\frac{2i\pi k}{p}} .z \\ \lambda z = \mu y \end{array} \right)$$

ce qui équivaut à

$$(\Omega[(\overline{z,\lambda})] = \Omega[(\overline{y,\mu})]) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \exists\, k \in Z_p \text{ tel que } y = e^{\frac{2i\pi k}{p}} .z \\ \lambda = \mu e^{\frac{2i\pi k}{p}} \end{array} \right) \iff ((\overline{z,\lambda}) = (\overline{y,\mu})) \quad .$$

Soit maintenant $[f(z)\ ,\ (g(z),z')] \in \pi^{*}E$: comme $z' \in g(z)$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^{*}$ de norme 1 tel que $z' = \lambda z$; il vient clairement

$$\Omega[(\overline{z,\lambda})] = [f(z)\ ,\ (g(z)\ ,\ z')] \quad ,$$

autrement dit Ω est un épimorphisme, ce qui termine la preuve. Bien entendu, ce lemme vaut pour tout entier $p > 1$.

. Puisque l'inclusion canonique $i : L_0^n(p^m) \to L^n(p^m)$ induit l'isomorphisme $i^{\mathbb{C}} : \widetilde{KU}(L^n(p^m)) \to \widetilde{KU}(L_0^n(p^m))$, dans tout ce qui suit nous identifierons $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ et $\widetilde{KU}(L_0^n(p^m))$ afin de simplifier l'écriture. Ainsi, l'élément $\bar{x} = \xi - 1$ de $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ étant identifié avec son image $i^{\mathbb{C}}(\bar{x})$, $r(\bar{x})$ sera considéré comme appartenant à $\widetilde{KO}(L_0^n(p^m))$.

Proposition 4.2.-

L'homomorphisme injectif $c : \widetilde{KO}(L_0^n(p^m)) \to \widetilde{KU}(L_0^n(p^m))$ est tel que

$$c(r(\bar{x})) = \frac{(\bar{x})^2}{1 + x}$$

Démonstration.

Nous avons $c(r(\bar{x})) = (1+t)(\bar{x}) = \bar{x} + t(\bar{x})$ et il faut calculer $t(\bar{x})$.

Posons

$$\mu = \eta - 1$$

dans $\widetilde{KU}(P^n(C))$; le lemme 4.1. donne

$$\pi^*\mu = \pi^*(\eta - 1) = \xi - 1 = \bar{x} ,$$

d'où

$$c(r(\bar{x})) = \pi^*\mu + t(\pi^*\mu) \quad .$$

Compte-tenu de la fonctorialité de t qui donne $t(\pi^*\mu) = \pi^*(t(\mu))$, nous sommes ramenés au calcul de $t(\mu)$.

Soit a un générateur de $H^2(P^n(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, on sait [12] que la classe totale de Chern du fibré η est

$$\underline{c}(\eta) = 1 + a$$

comme $\underline{c}(t(\eta)) = 1 - a$, il vient

$$\underline{c}(\eta \otimes t(\eta)) = (1 + a)(1 - a) = 1 .$$

Les fibrés complexes de rang 1 étant classifiés par leur première classe de Chern, nous en déduisons

$$\eta . t(\eta) = 1 .$$

Il s'ensuit $1 = (1 + \mu)t(1 + \mu) = (1 + \mu)\ [1 + t(\mu)]$, soit

$$1 + t(\mu) = \frac{1}{1+\mu} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mu^i .$$

Alors

$$c(r(\bar{x})) = \pi^*\mu + \pi^*(t(\mu)) = \bar{x} + \pi^*(\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \mu^i) = \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i (\bar{x})^i = \frac{(\bar{x})^2}{1 + \bar{x}}$$

Théorème 4.3.-

Soient m, n et p des entiers tels que m et $n \geq 1$ et p premier impair. Pour tout entier h de $\{1,2,\dots,m\}$, on pose $n-p^{h-1}+1 = p^{h-1}.(p-1)q_h+r_h$ avec $0 \leq r_h < p^{h-1}.(p-1)$.

Alors avec $p = 2u + 1$:

1. pour $n \geq p^{m-1}$, on a

$$\tilde{KO}(L^n(p^m)) = \begin{cases} Z_2 \oplus \left[\bigoplus_{h=1}^{h=m} (Z_{p^{m-h+1+q_h}})^{[\frac{r_h}{2}]} \oplus (Z_{p^{m-h+q_h}})^{p^{h-1}.u-[\frac{r_h}{2}]} \right] & \text{si } n \equiv 0 \pmod 4, \\ \bigoplus_{h=1}^{h=m} (Z_{p^{m-h+1+q_h}})^{[\frac{r_h}{2}]} \oplus (Z_{p^{m-h+q_h}})^{p^{h-1}.u-[\frac{r_h}{2}]} & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod 4 ; \end{cases}$$

2. pour $p^{\ell-1} \leq n < p^{\ell}$ avec $1 \leq \ell \leq m-1$, on a

$$\tilde{KO}(L^n(p^m)) = \begin{cases} Z_2 \oplus \left[\bigoplus_{h=1}^{\ell-1} (Z_{p^{m-h+1+q_h}})^{[\frac{r_h}{2}]} \oplus (Z_{p^{m-h+q_h}})^{p^{h-1}.u-[\frac{r_h}{2}]} \right] \oplus (Z_{p^{m-\ell+1}})^{[\frac{n}{2}]-\frac{p^{\ell-1}-1}{2}} \\ \qquad \text{si } n \equiv 0 \pmod 4 , \\ \left[\bigoplus_{h=1}^{\ell-1} (Z_{p^{m-h+1+q_h}})^{[\frac{r_h}{2}]} \oplus (Z_{p^{m-h+q_h}})^{p^{h-1}.u-[\frac{r_h}{2}]} \right] \\ \qquad \text{si } n \not\equiv 0 \pmod 4 . \end{cases}$$

Démonstration.

Dans la démonstration du théorème 3.7. (chapitre 3) nous avions vu que les groupes cycliques composant $\tilde{KU}(L^n(p^m)) = \tilde{KU}(L_0^n(p^m))$ étaient respectivement engendrés par

$$\hat{x}_i = \sum_{j=1}^{i-1} u_i^j \, \bar{x}^j + p^{n_i - m_i}.v_i.\bar{x}^i$$

avec $i = \{1,2,\ldots,s = \inf(p^m-1,n)\}$.

Considérons dans $\tilde{KO}(L_0^n(p^m))$ les éléments

$$\check{x}_i = \sum_{j=1}^{i-1} u_{2i}^j \, (r(\bar{x}))^j + p^{n_{2i}-m_{2i}}.v_{2i}(r(\bar{x}))^i$$

pour $1 \leq i \leq [\frac{s}{2}] = \inf(\frac{p^m-1}{2}, [\frac{n}{2}])$. Avec l'homomorphisme d'anneaux c nous obtenons

$$c(\check{x}_i) = \sum_{j=1}^{i-1} u_{2i}^{j} \frac{(\bar{x})^{2j}}{(1+\bar{x})^{j}} + p^{n_{2i}-m_{2i}}.v_{2i} \frac{(\bar{x})^{2i}}{(1+\bar{x})^{i}}$$

en tenant compte de la proposition 4.2., ou encore

$$c(\check{x}_i) = \frac{1}{(1+\bar{x})^{i}} \sum_{j=1}^{i-1} u_{2i}^{j}(\bar{x})^{2j}.(1+\bar{x})^{i-j} + p^{n_{2i}-m_{2i}}.v_{2i}(\bar{x})^{2i} ,$$

pour $1 \leqslant i \leqslant [\frac{s}{2}]$. A l'àide de la proposition 3.6. et de la construction des $\hat{x}_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, qui engendrent $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$, nous voyons que

$$p^{m_{2i}}.c(\check{x}_i) = 0 \quad , \quad \forall\, i \in \{1,2,\dots,[\frac{s}{2}]\ \}.$$

Comme c est injectif, il s'ensuit

$$p^{m_{2i}}.\check{x}_i = 0 \quad , \quad \forall\, i \in \{1,2,\dots,[\frac{s}{2}]\ \} .$$

Soient $\check{G}$ le sous-groupe de $\widetilde{KO}(L^n(p^m))$ engendré par $(\check{x}_i)_{1 \leqslant i \leqslant [\frac{s}{2}]}$ et $\check{G}_i$ les sous-groupes cycliques respectivement engendrés par $\check{x}_i$. Alors, en raisonnant comme dans le théorème 3.7., on a

$$\check{G} = \bigoplus_{i=1}^{[\frac{s}{2}]} \check{G}_i .$$

Posons $p - 1 = 2u$ et remarquons que, pour $1 \leqslant h \leqslant m$, la division

$$n - p^{h-1} + 1 = p^{h-1}.(p-1).q_h + r_h \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r_h < p^{h-1}.(p-1)$$

implique

$$[\frac{n}{2}] - \frac{p^{h-1}-1}{2} = p^{h-1}.u.q_h + [\frac{r_h}{2}] .$$

Supposons $n \geqslant p^{m-1}$, alors l'ordre de $\check{G}$ est

$$\sum_{h=1}^{h=m} (m-h+1+q_h).\ [\frac{r_h}{2}] + (m-h+q_h)(p^{h-1}.u- [\frac{r_h}{2}])$$

$$\sum_{h=1}^{h=m} (m - h + 1 + q_h) . \left[\frac{r_h}{2}\right] + (m - h + q_h)(p^{h-1}.u - \left[\frac{r_h}{2}\right]) =$$

$$= \sum_{h=1}^{h=m} \left[\frac{r_h}{2}\right] + p^{h-1}.q_h.u + (m-h)p^{h-1}.u = \sum_{h=1}^{h=m} \left[\frac{n}{2}\right] - \frac{p^{h-1}-1}{2} + mup^{h-1} - hup^{h-1} =$$

$$= m \frac{n}{2} + \frac{m}{2} + mu \frac{p^m-1}{p-1} - \sum_{h=1}^{h=m} \frac{p^{h-1}}{2} + hup^{h-1} = m \left[\frac{n}{2}\right] + \frac{m}{2} p^m - \sum_{h=1}^{h=m} \frac{p^{h-1}}{2} + u \frac{p^m - p^{h-1}}{p-1} =$$

$$= m. \left[\frac{n}{2}\right] + \frac{m}{2}. p^m - \sum_{h=1}^{h=m} \frac{p^m}{2} = m. \left[\frac{n}{2}\right] .$$

Supposons $p^{\ell-1} \leqslant n < p^{\ell}$ avec $1 \leqslant \ell \leqslant m-1$, alors l'ordre de $\check{G}$ est

$$\sum_{h=1}^{\ell-1} (m-h+1+q_h).\left[\frac{r_h}{2}\right] + (m-h+q_h)(p^{h-1}.u - \left[\frac{r_h}{2}\right]) + (\left[\frac{n}{2}\right] - \frac{p^{\ell-1}-1}{2})(m-\ell+1) =$$

$$= (m-\ell+1)(\left[\frac{n}{2}\right] - \frac{p^{\ell-1}}{2}) + \sum_{h=1}^{h=\ell-1} \left[\frac{n}{2}\right] - \frac{p^{h-1}-1}{2} + mup^{h-1} - hup^{h-1} =$$

$$= m \left[\frac{n}{2}\right] + \frac{\ell-1}{2} + (m-\ell+1) \frac{p^{\ell-1}-1}{2} + \sum_{h=1}^{\ell-1} - \frac{p^{h-1}}{2} + mup^{h-1} - hup^{h-1} =$$

$$= m \left[\frac{n}{2}\right] + (\ell-1) \frac{p^{\ell-1}}{2} - \sum_{h=1}^{\ell-1} \frac{p^{\ell-1}}{2} = \bar{m} \left[\frac{n}{2}\right] .$$

Ainsi le sous-groupe $\check{G}$ de $\widetilde{KO}(L_0^n(p^m))$ a même ordre que $\widetilde{KO}(L_0^n(p^m))$; autrement dit $\widetilde{KO}(L_0^n(p^m))$ est isomorphe à

$$\check{G} = \bigoplus_{i=1}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \check{G}_i .$$

Alors, en tenant compte de la proposition 3.1. du chapitre 2, nous avons démontré le théorème proposé.

Remarque. Pour $m = 1$, le théorème 4.3. donne les résultats de Kambé [10] et, en posant $\check{N} = \inf(u, [\frac{n}{2}])$, la démonstration qui vient d'être faite montre que $\check{x}_i = [r(\bar{x})]^i$ pour $1 \leq i \leq \check{N}$.

5. *Détermination de* $\widetilde{KO}^i(L^n(p))$ pour p impair.

Pour tout nombre impair $p > 1$, les théorèmes 3.1. et 4.3. permettent de déterminer complètement $\widetilde{KO}^o(L^n(p))$. D'autre part la proposition 2.2. (chapitre 2) donne $\widetilde{KO}^i(L^n(p))$ lorsque i est impair. Dans ce paragraphe nous nous proposons de calculer $\widetilde{KO}^2(L^n(p))$, $\widetilde{KO}^4(L^n(p))$ et $\widetilde{KO}^6(L^n(p))$: la $\widetilde{KO}$-théorie des espaces lenticulaires ordinaires (et donc celle des lenticulaires généralisés) sera alors entièrement connue. Etant donné la relation existent entre la $\widetilde{KO}$-théorie des espaces lenticulaires et celle de leurs $2n$-squelettes (§ 3, chapitre 2), il suffira en fait de faire ce calcul pour les $2n$-squelettes $L_0^n(p)$.

Proposition 5.1.-

Pour tout entier impair $p > 1$:

1. $\widetilde{KO}^i(L_0^n(p)/L_0^{n-1}(p)) = 0$ pour i impair, quel que soit n ;

2. pour i pair, soit $i = 2s$

$$\widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p)/L_0^{n-1}(p)) = \begin{cases} 0 & \text{si } s-n \text{ est impair,} \\ \mathbb{Z}_p & \text{si } s-n \text{ est pair .} \end{cases}$$

Démonstration.

Nous savons que $L_0^n(p)/L_0^{n-1}(p)$ est isomorphe à $S^{2n-1} \cup_\phi e^{2n}$ où l'application d'attachement cellulaire $\phi : S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ est de degré p. La suite exacte de $\widetilde{KO}$-théorie associée à la paire $(S^{2n-1} \cup_\phi e^{2n}, S^{2n-1})$ s'écrit

$$\dots \to \widetilde{KO}^{i-1}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\partial} \widetilde{KO}^i(S^{2n}) \to \widetilde{KO}^i(S^{2n-1} \cup_\phi e^{2n}) \to \widetilde{KO}^i(S^{2n-1}) \xrightarrow{\partial} \widetilde{KO}^{i+1}(S^{2n}) \to \dots$$

Soient ϕ^* l'homomorphisme induit par ϕ et S^* l'isomorphisme de suspension induit par $S : S^{2n-1} \to S^{2n}$, alors $\partial = S^* \circ \phi^*$ est la multiplication par p. Examinons le cas où $i = 2s+1$, la suite précédente donne alors les suites exactes

$$0 \to \widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n-1} \cup_{\phi} e^{2n}) \to 0 \quad \text{pour} \quad s-n \equiv 0 \pmod 4 ,$$

$$0 \to \widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n-1} \cup_{\phi} e^{2n}) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \quad \text{pour} \quad s-n \equiv 1 \pmod 4 ,$$

$$0 \to \widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n-1} \cup_{\phi} e^{2n}) \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}_2 \quad \text{pour} \quad s-n \equiv 2 \pmod 4 ,$$

$$\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}_2 \to \widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n+1} \cup_{\phi} e^{2n}) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \quad \text{pour} \quad s-n \equiv 3 \pmod 4 ;$$

comme la multiplication par p (impair) dans $\mathbb{Z}_2$ est l'identité et dans $\mathbb{Z}$ un homomorphisme injectif, il est clair que $\widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n-1} \cup_{\phi} e^{2n}) = 0$ pour tout n. Dans le cas où $i = 2s$, nous obtenons les suites exactes suivantes

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \to \widetilde{KO}^{2s}(S^{2n-1} \cup_{\phi} e^{2n}) \to 0 \quad \text{pour} \quad s-n \equiv 0 \text{ ou } 2 \pmod 4 ,$$

$$0 \to \widetilde{KO}^{2s}(S^{2n-1} \cup_{\phi} e^{2n}) \to 0 \quad \text{pour} \quad s-n \equiv 1 \pmod 4 ,$$

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}_2 \to \widetilde{KO}^{2s}(S^{2n-1} \cup_{\phi} e^{2n}) \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}_2 \quad \text{pour} \quad s-n \equiv 3 \pmod 4 ;$$

l'assertion proposée est alors évidente.

Remarque.

Il est clair que la proposition ci-dessus vaut également pour $\widetilde{KO}^i(L_0^n(p;p_0,p_1,\dots,p_n)/L_0^{n-1}(p;p_0,p_1,\dots,p_n))$.

Théorème 5.2.

Pour tout nombre impair $p > 1$:

1. $\widetilde{KO}^{4s}(L_0^n(p))$ est isomorphe à $\widetilde{KO}^o(L_0^n(p))$ pour tout n ;

2. suivant que n est pair ou impair, $\widetilde{KO}^{4s+2}(L_0^n(p))$ est respectivement isomorphe à $\widetilde{KO}^o(L_0^n(p))$ ou $\widetilde{KO}^o(L_0^{n+1}(p))$.

Démonstration.

Considérons l'homomorphisme

$$r\beta c \; : \; \widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p)) \to \widetilde{KO}^{o}(L_0^n(p))$$

où $\beta : \widetilde{KU}^{2s}(L_0^n(p)) \to \widetilde{KU}^{o}(L_0^n(p))$ est l'isomorphisme due à la périodicité de Bott. Il est alors immédiat de vérifier la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{KO}^{2s}(L_0^n(p)) & \xrightarrow{r\beta c} & \widetilde{KO}^{o}(L_0^n(p)) \\ r \uparrow & & \uparrow 2r \\ \widetilde{KU}^{2s}(L_0^n(p)) & \xrightarrow{\beta} & \widetilde{KU}^{o}(L_0^n(p)) \end{array} \quad ,$$

puisque r est surjectif (proposition 1.1.), $r\beta c$ est surjectif pour tout entier s. Comme $\widetilde{KO}^{4s}(L_0^n(p))$ et $\widetilde{KO}^{o}(L_0^n(p))$ ont même ordre, à savoir $p^{[\frac{n}{2}]}$, $r\beta c$ est un isomorphisme et la première assertion du théorème s'ensuit.

Considérons maintenant $\widetilde{KO}^{4s+2}(L_0^n(p))$: lorsque n est pair, son ordre $p^{[\frac{n+1}{2}]}$ est égal à $p^{[\frac{n}{2}]}$ qui est justement l'ordre de $\widetilde{KO}^{o}(L_0^n(p))$; $r\beta c$ est donc encore un isomorphisme. Il ne nous reste plus qu'à étudier $\widetilde{KO}^{4s+2}(L_0^n(p))$ lorsque n est impair. La suite exacte de $\widetilde{KO}$-théorie associée à la paire $(L_0^{n+1}(p), L_0^n(p))$ donne la suite exacte suivante

$$\widetilde{KO}^{4s+2}(L_0^{n+1}(p)) \to \widetilde{KO}^{4s+2}(L_0^n(p)) \to \widetilde{KO}^{4s+3}(L_0^{n+1}(p)/L_0^n(p)) \; .$$

Mais (proposition 5.1.) d'une part

$$\widetilde{KO}^{4s+3}(L_0^{n+1}(p)/L_0^n(p)) = 0$$

et d'autre part $\widetilde{KO}^{4s+2}(L_0^{n+1}(p))$ et $\widetilde{KO}^{4s+2}(L_0^n(p))$ ont même ordre puisque

$$p^{[\frac{n+2}{2}]} = p^{[\frac{n+1}{2}]}$$

pour n impair ; d'où l'isomorphisme $\widetilde{KO}^{4s+2}(L_0^{n+1}(p)) \xrightarrow{\approx} \widetilde{KO}^{4s+2}(L_0^n(p))$.
Lorsque n est impair, $n+1$ est pair et l'homomorphisme

$$r\beta c : \widetilde{KO}^{4s+2}(L_0^{n+1}(p)) \to \widetilde{KO}^{o}(L_0^{n+1}(p))$$

est bijectif d'après ce que nous avons déjà établi. En composant les isomorphismes

$$\widetilde{KO}^{4s+2}(L_0^n(p)) \xrightarrow{\approx} \widetilde{KO}^{4s+2}(L_0^{n+1}(p)) \xrightarrow{r\beta c} \widetilde{KO}^{o}(L_0^{n+1}(p))$$

on obtient l'isomorphisme annoncé.

CHAPITRE 5

IMMERSION ET PLONGEMENT DES ESPACES LENTICULAIRES.

1. Le critère de plongement et d'immersion d'Atiyah.

Soit V une variété différentiable compacte de dimension n. Soit $1 + KO(V)[[a]]^+$ le groupe multiplicatif des séries formelles à coefficients dans $KO(V)$ et de terme constant 1. Rappelons [1] que l'homomorphisme de Grothendieck

$$\gamma_a : KO(V) \to 1 + KO(V)[[a]]^+ ,$$

lié à celui d'Adams par la relation

$$\gamma_a = \lambda_{a/1-a} ,$$

définit les opérations de Grothendieck

$$\gamma^i : KO(V) \to KO(V)$$

par

$$\gamma_a(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^i(z).a^i .$$

Soit $T(V)$ le fibré tangent de V et appelons $T_0(V)$ l'élément $T(V) - n$ de $\widetilde{KO}(V)$ (avec des abus de notation évidents). M.F. Atiyah (1) a alors établi le théorème suivant :

Théorème 1.1.-

1. S'il existe une immersion de V dans $\mathbb{R}^{n+k}$, alors $\gamma^i(-T_0(V)) = 0$ pour $i > k$;
2. s'il existe un plongement de V dans $\mathbb{R}^{n+k}$, alors $\gamma^i(-T_0(V)) = 0$ pour $i \geqslant k$.

---

(1) Immersions and embeddings of manifolds [Topology, vol. 1 ; 1961].

2. *Application aux espaces lenticulaires ordinaires.*

T. Kambé dans son article [10], à l'aide de la caractérisation du fibré tangent complexe de l'espace projectif complexe donnée par J. Milnor [12]

$$T_c(P^n(\mathbb{C})) + 1 = (n+1)\eta$$

où η est le fibré complexe canonique de rang 1 de base $P^n(C)$, montre que

$$T_0(L^n(p)) = (n+1)\bar{x} \ ;$$

il en déduit la relation suivante

$$\gamma_a(\bar{x}) = 1 + \bar{x}(a-a^2) \ .$$

Il s'ensuit pour tout $p > 1$:

$$\gamma_a(-T_0(L^n(p)) = [\gamma_a(\bar{x})]^{-(n+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n+i}{i} \bar{x}^i.(a-a^2)^i \ . \tag{1}$$

Nous avons vu [chapitre 4, théorème 4.3.] que $\widetilde{KO}(L_0^n(p^m))$ est engendré, pour p premier impair supérieur à 1, par $(\check{x}_k)_{1 \leq k \leq [\frac{s}{2}]}$ avec $s = \inf(p^m-1,n)$. Alors tout $\bar{x}^i$ $(1 \leq i \leq [\frac{n}{2}])$ de $\widetilde{KO}(L_0^n(p^m))$ peut s'écrire

$$\bar{x}^i = \sum_{k=1}^{[\frac{s}{2}]} \lambda_k^i \check{x}_k$$

avec $\lambda_k^i \in \mathbb{Z}$, $\forall k \in \{1,2,\dots,[\frac{s}{2}]\}$.

Appelons u_i le plus petit entier tel que

$$p^{u_i}.\lambda_k^i \equiv 0 \pmod{p^{n_k}} \ , \ \forall k \in \{1,2,\dots,[\frac{s}{2}]\} \ ,$$

p^{n_k} désignant l'ordre du groupe engendré par $\check{x}_k$.

En notant $L(n,p,m)$ l'entier défini par

$$L(n,p,m) = \sup \{1 \leqslant i \leqslant [\tfrac{n}{2}] \,\Big|\, \binom{n+i}{i} \not\equiv 0 \pmod{p^{u_i}}\} \quad ,$$

le théorème d'Atiyah 1.1. et la relation (1) donnent alors

Théorème 2.1.- Pour tout nombre premier impair $p > 1$:

1. $L^n(p^m)$ ne peut pas être immergé dans $\mathbb{R}^{2n+2L(n,p,m)}$;
2. $L^n(p^m)$ ne peut pas être plongé dans $\mathbb{R}^{2n+2L(n,p,m)+1}$.

C'est là une généralisation d'un résultat de T. Kambé où $L(n,p) = L(n,p,1)$. Nous en déduisons le corollaire.

Corollaire 2.1.- Pour tout nombre premier impair p tel que $[\frac{n}{2}] < p^m - 1$, $L^n(p^m)$ ne peut pas être immergé dans $\mathbb{R}^{2n+2[\frac{n}{2}]}$ et ne peut pas être plongé dans $\mathbb{R}^{2n+2[\frac{n}{2}]+1}$.

Dans le cas général où p est un nombre impair quelconque supérieur à 1, les résultats précédents se généralisent ainsi : soit

$$p = \sum_{j=1}^{j=\ell} p_j^{m_j}$$

la décomposition en facteurs premiers de p ; soient $(\check{x}_{j_k})_{1 \leqslant k \leqslant [\frac{s_j}{2}]}$ les générateurs de $\widetilde{KO}(L_0^n(p_j^{m_j}))$, avec $s_j = \inf(p^{m_j}-1,n)$, pour tout $1 \leqslant j \leqslant \ell$. Tout $\bar{x}^i$ de $\widetilde{KO}(L_0^n(p))$ peut s'écrire

$$\bar{x}^i = \sum_{j=1}^{j=\ell} \Big(\sum_{k=1}^{[\frac{s_j}{2}]} \lambda_{j_k}^i \, \check{x}_{j_k} \Big) \quad ;$$

appelons, pour $1 \leqslant j \leqslant \ell$, u_i^j le plus petit entier tel que

$$p_j^{u_i^j} \cdot \lambda_{j_k}^i \equiv 0 \pmod{p_j^{n_{j_k}}}, \ \forall\, k \in \{1,2,\dots,[\frac{s_j}{2}]\},$$

$p^{n_{j_k}}$ désignant l'ordre du groupe engendré par $\check{x}_{j_k}$. Notons $M(n,p)$ l'entier défini par

$$M(n,p) = \{\sup \{1 \leq i \leq [\frac{n}{2}] \mid \binom{n+i}{i} \not\equiv 0 \pmod{\prod_{j=1}^{j=\ell} p_j^{u_i^j}}\}\} \ ;$$

alors

<u>*Théorème*</u> *2.2.* - Pour tout nombre impair $p > 1$:

1. $L^n(p)$ ne peut pas être immergé dans $\mathbb{R}^{2n+2M(n,p)}$;
2. $L^n(p)$ ne peut pas être plongé dans $\mathbb{R}^{2n+2M(n,p)+1}$.

B I B L I O G R A P H I E

[1] M.F. ATIYAH - *K-theory.* [Benjamin ; 1967].

[2] M.F. ATIYAH et F. HIRZEBRUCH - *Vector bundles and homogeneous spaces.* [Am. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 3 ; 1961].

[3] R. BOTT - *Quelques remarques sur les théorèmes de périodicité de topologie, Lille, 1959.* [Bull. Soc. Math. France, 87 ; 1959].

[4] N. BOURBAKI - *Topologie générale ; chapitres 1 et 2.* [Hermann ; 4ème édition ; 1965].

[5] N. BOURBAKI - *Topologie générale ; chapitres 3 et 4.* [Hermann ; 3ème édition ; 1960]

[6] N. BOURBAKI - *Variétés différentielles et analytiques ; fascicule de résultats.* [Hermann ; 1967].

[7] H. CARTAN - *Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux ; séminaire H. Cartan.* [Paris, 1950/1951].

[8] P. CARTIER - *Quelques remarques sur la divisibilité des coefficients binômiaux.* [L'enseignement math., IIe série, tome XVI, fasc. 1, janvier-avril 1970].

[9] G. DE RHAM - *Complexes à automorphismes et homéomorphies différentiables.* [Ann. Inst. Fourier, 2 ; 1950].

[10] T. KAMBE - *The structure of K_Λ-rings of the lens spaces and their applications.* [Jour. Math. Soc. Japan, 18 ; 1966].

[11] D. LEHMANN - *Classes caractéristiques généralisées des fibrés plats.* [Comptes-Rendus, tome 268, pp. 543-46 ; 1969].

[12] J. MILNOR - *Lectures on characteristic classes (notes multigraphiées).*
[Princeton University, New-Jersey ; 1957].

[13] N.E. STEENROD - *Cohomology opérations.*
[Princeton University, New-Jersey ; 1962].

*   *

*

Table des matières.

=================

	Pages
Introduction.	1
Chapitre 1. - RAPPELS SUR LES ESPACES LENTICULAIRES.	3
1. Action libre d'un groupe fini dans un espace topologique.	3
2. Espaces lenticulaires.	4
Chapitre 2. -	8
1. La suite spectrale d'Atiyah et Hirzebruch.	8
2. Application à la K-théorie des espaces lenticulaires.	9
3. Relation entre la K-théorie des espaces lenticulaires et celle de leurs 2n-squelettes.	10
Chapitre 3. - K-THEORIE COMPLEXE DES ESPACES LENTICULAIRES.	13
1. K-théorie complexe des espaces lenticulaires généralisés.	13
2. Un théorème de factorisation.	17
3. Calcul de $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ pour p premier.	19
Chapitre 4. - K-THEORIE REELLE DES ESPACES LENTICULAIRES.	35
1. Les homomorphismes de Bott.	35
2. K-théorie réelle des espaces lenticulaires généralisés.	36
3. Le théorème de factorisation en $\widetilde{KO}$-théorie.	38
4. Etude de $\widetilde{KO}(L^n(p^m))$ pour p premier impair.	39
5. Détermination de $\widetilde{KO}^i(L^n(p))$ pour p impair.	46
Chapitre 5. - IMMERSION ET PLONGEMENT DES ESPACES LENTICULAIRES.	50
1. Le critère de plongement et d'immersion d'Atiyah.	50
2. Application aux espaces lenticulaires ordinaires.	51
Bibliographie.	54