

50.376  
N° d'ordre 253

1971  
62

50376  
1971  
62

# THÈSE

*présentée à*

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES  
ET TECHNIQUES DE LILLE

*pour obtenir le grade de*

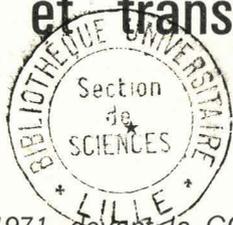
DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ  
EN PHYSIQUE DU SOLIDE

par

**Noël ISAERT**

★

Contribution à l'étude  
des propriétés optiques  
de quelques milieux  
actifs et transparents



Soutenue le 17 Juin 1971, devant la COMMISSION D'EXAMEN

M. SCHILTZ	Président
M. BILLARD	Rapporteur
M. FOURET	Examineur
M. KLEMAN	Invité



PROFESSEURS A TITRE PERSONNEL

M. BOUISSET Simon	Physiologie Animale
M. DELHAYE Michel	Chimie Physique et Minérale 1er Cycle
M. LEBRUN André	Electronique
M. LINDER Robert	Biologie Végétale
M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. PRUDHOMME Rémy	Sciences Economiques et Sociales
M. SAVARD Jean	Chimie Générale
M. SCHALLER François	Biologie Animale
M. SCHILTZ René	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique
M. BODARD Marcel	Biologie Végétale
M. BOILLET Pierre	Physique
M. DERCOUPT Jean-Michel	Geologie et Minéralogie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M. LOMBARD Jacques	Sciences Economiques et Sociales
Mlle MARQUET Simone	Mathématiques
M. MONTARIOL Frédéric	Chimie Minérale Appliquée
M. PROUVOST Jean	Géologie et Minéralogie
M. VAILLANT Jean	Mathématiques

MAITRES DE CONFERENCES (et charges des fonctions)

M. ADAM Michel	Sciences Economiques et Sociales
M. ANDRE Charles	Sciences Economiques et Sociales
M. AUBIN Thierry	Mathématiques Pures
M. BEGUIN Paul	Mécanique des Fluides
M. BILLARD Jean	Physique
M. BKUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M. BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. BRIDOUX Michel	I.U.T. Bethune
M. BRUYELLE Pierre	Géographie et Aménagement Spatial
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CARREZ Christian	Calcul Numérique
M. CHOQUET Marcel	I.U.T. Lille
M. CORDONNIER Vincent	Calcul Numérique
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COULON Jean-Paul	Electrotechnique
M. DEBRABANT Pierre	Sciences Appliquées
M. ESCAIG Bertrand	Physique
Mme EVRARD Micheline	I.U.T. Lille
M. FAIDHERBE Jacques	Biologie Animale
M. FONTAINE Jacques	I.U.T. Lille
M. FROELICH Daniel	Sciences Appliquées
M. GAMBLIN André	Géographie et Aménagement Spatial
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel	Sciences Economiques et Sociales
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GRANELLE	Sciences Economiques et Sociales

M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M. HERMAN Maurice	Physique
M. HUARD DE LA MARRE Pierre	Calcul Numérique
M. JOLY Robert	Biologie (Amiens)
M. JOURNEL Gerard	Sciences Appliquées
Mlle KOSMANN Yvette	Mathématiques
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Générale
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANDAIS Jean	Chimie Organique
M. LAURENT François	Automatique
M. LAVAGNE Pierre	Sciences Economiques et Sociales
Mlle LEGRAND Solange	Mathématiques
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LENTACKER Firmin	Géographie et Aménagement Spatial
M. LEROY Jean-Marie	E.N.S.C.L.
M. LEROY Yves	I.U.T. Lille
M. LHENAFF René	Géographie et Aménagement Spatial
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOUAGE Francis	Sciences Appliquées
M. LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M. MAES Serge	Physique
Mme MAILLET Monique	Sciences Economiques et Sociales
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques et Sociales
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MIGEON Michel	Sciences Appliquées
M. MONTEL Marc	Physique
M. MONTUELLE Bernard	I.U.T. Lille
M. MUSSCHE Guy	Sciences Economiques et Sociales
M. NICOLE Jacques	E.N.S.C.L.
M. OUZIAUX Roger	Sciences Appliquées
M. PANET Marius	Electrotechnique
M. PAQUET Jacques	Sciences Appliquées
M. PARSY Fernand	Mécanique des Fluides
M. PONSOLLE Louis	Chimie (Valenciennes)
M. POVY Jean-Claude	Sciences Appliquées
M. RACZY Ladislas	Radioélectricité
Mme RENVERSEZ Françoise	Sciences Economiques et Sociales
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M. ROYNETTE Bernard	Mathématiques
M. SALMER Georges	Electronique
M. SEGUIER Guy	I.U.T. Béthune
M. SIMON Michel	Sciences Economiques et Sociales
M. SMET Pierre	Physique
M. SOMME Jean	Géographie et Aménagement Spatial
M. THOMAS Daniel	Chimie Minérale Appliquée
M. TOULOTTE Jean-Marc	Sciences Appliquées
M. TREANTON Jean René	Sciences Economiques et Sociales
M. VANDORPE Bernard	Sciences Appliquées
M. VILETTE Michel	I.U.T. Béthune
M. WATERLOT Michel	Géologie Générale
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

*A mes parents.*

*A ma femme.*

*Cette étude a été effectuée au laboratoire de Physique des Stases anisotropes de l'U.E.R. de Physique Fondamentale de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, sous la direction de Monsieur le Professeur BILLARD.*

*Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour les encouragements et les conseils qu'il m'a donnés.*

*Je remercie les spécialistes qui ont accepté de juger ce travail : Monsieur le Professeur SCHILTZ qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury et Monsieur le Professeur FOURET qui a accepté d'en être membre.*

*Mes remerciements s'adressent également à Monsieur KLEMAN pour l'intérêt qu'il porte à mon travail.*

*Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous les membres du laboratoire pour l'ambiance sympathique qu'ils ont créée, et particulièrement à Monsieur SOULESTIN qui m'a aidé à effectuer les calculs numériques.*

*Enfin, je ne saurais oublier Mademoiselle KACZMAREK, Messieurs CAREY, DESCAMPS et RAFFAUD pour la réalisation technique de ce mémoire.*

## TABLE DES MATIERES

NOTATIONS	1
INTRODUCTION	4
I - <u>Conditions de conservation de l'énergie pour une lame transparente, éclairée normalement d'un seul côté.</u>	6
I.1. - Ondes privilégiées d'un milieu homogène.	6
I.2. - Conditions de continuité aux dioptries.	8
I.3. - Conditions de conservation de l'énergie.	11
II - <u>Application à certains milieux uniaxes actifs : Mise en équation des conditions de conservation de l'énergie.</u>	15
II.1. - Application des équations de Maxwell.	16
II.2. - Etat de polarisation et vitesse de phase des vibrations privilégiées.	19
II.3. - Conditions particulières de conservation de l'énergie.	22
II.4. - Diverses façons d'écrire ces conditions de conservation de l'énergie.	25
III - <u>Résolution des équations de conservation de l'énergie.</u>	28
III.1. - Lame taillée perpendiculairement à l'axe optique.	28
III.2. - Lame taillée parallèlement à l'axe optique.	30
III.3. - Lame taillée de façon quelconque : étude d'une première condition de conservation de l'énergie.	33
III.4. - Lame taillée de façon quelconque : calcul d'une dernière condition.	34
III.5. - L'étude de cette dernière condition de conservation de l'énergie conduit à deux solutions.	35
III.6. - Cas particulier de vibrations privilégiées rectilignes parallèles ou perpendiculaires à la projection de l'axe optique sur le plan d'onde.	37
III.7. - Les faits expérimentaux ne permettent de retenir qu'une seule des deux solutions.	38

IV	-	<u>Lame taillée dans un milieu uniaxe actif éclairée normalement des deux côtés.</u>	43
		IV.1. - Mise en équation des conditions de conservation de l'énergie.	43
		IV.2. - Résolution des équations de conservation de l'énergie	48
V	-	<u>Milieux anaxiaux actifs qui sont des cas particuliers des milieux uniaxes étudiés.</u>	59
VI	-	<u>Propriétés optiques des milieux uniaxes ou isotropes étudiés.</u>	60
		VI.1. - Vitesse de phase des ondes privilégiées.	60
		VI.2. - Etat de polarisation des vibrations privilégiées.	65
		VI.3. - Détermination expérimentale des paramètres du milieu.	72
		VI.4. - Réversibilité, changement du sens du temps.	77
		VI.5. - Propriétés des tenseurs représentatifs des propriétés électromagnétiques du milieu.	78
		VI.6. - Application du théorème de Poynting : couplage entre les ondes privilégiées.	79
		CONCLUSION.	83
		BIBLIOGRAPHIE.	85

C O R R E C T I O N S

page 7 formule  $I_{1,2}$   $\text{rot } \vec{\zeta} = -\delta_t \vec{B}$

page 23 ligne 2 ...  $\left. \begin{aligned} & \vec{V}_1^+, (v_1 [\zeta_{1'}]^+ - v_1 [\zeta_{1''}]) \vec{V}_{1''} \frac{E_{y1''}}{E_{y2'}} \end{aligned} \right\} = 0$

page 32 ligne 3 ...  $-\omega^2 (\gamma_3 + \gamma_2^*) \left( \frac{K_2}{v_2^2} - \frac{K_1}{v_1^2} \right) = 0.$

page 42 formule  $IV_{2,2}$  ... 
$$\begin{bmatrix} \frac{j}{\omega} & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & -\frac{j}{\omega} & . \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

page 62 ligne 2  
 .... à  $\frac{c}{v_1}$  et  $\frac{c}{v_2}$ , l'on obtient les ellipsoïdes des indices de réfraction des ....

ligne 7 ... des indices ordinaires ..

Figure 5 : Ellipsoïdes des indices.

$$C \sqrt{\epsilon_3 \mu_1}, C \sqrt{\epsilon_1 \mu_3}, C \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}.$$

i-

page 64 ligne 8 ... ellipsoïdes des indices ...

Figure 6 : Surface des indices : ...

page 66 formule  $VI_{2,2}$  
$$\Omega = \frac{4 \pi^2 \mu_1 C^2 \gamma_1}{(1 - \omega^2 \alpha_1 \gamma_1) \lambda^2}$$

page 71 ligne 16 
$$\Omega = \frac{4 \pi^2 \mu_1 C^2 \gamma_1}{(1 - \omega^2 \alpha_1 \gamma_1) \lambda^2}$$

page 79 ligne 2

$\gamma_1 = -\gamma_3$ ,  $\alpha_1 = -\alpha_3$ , entraînant

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} = \frac{\mu_1}{\mu_3} \quad \text{si} \quad \epsilon_1 \alpha_1 = \mu_1 \gamma_1 \quad \text{et} \quad \epsilon_3 \alpha_3 = \mu_3 \gamma_3.$$

NOTATIONS

A, B	nombres complexes.
$\vec{B}, \vec{B}_0, \vec{B}$	induction magnétique.
$B_{x_1}, B_{x_2}, B_{x_3}; B_x, B_y, B_z$	composantes de l'induction magnétique.
a, b	nombres complexes.
c	célérité de la lumière dans le vide.
D	nombre complexe.
$\vec{D}, \vec{D}_0, \vec{D}$	induction électrique.
$D_{x_1}, D_{x_2}, D_{x_3}; D_x, D_y, D_z$	composantes de l'induction électrique.
e	épaisseur d'une lame
$\vec{E}, \vec{E}_0, \vec{E}$	champ électrique.
$E_{x_1}, E_{x_2}, E_{x_3}; E_x, E_y, E_z$	composantes du champ électrique.
$[\epsilon]$	matrice représentative des propriétés électriques d'un milieu.
f	indice d'hétérogénéité d'une onde plane.
$\vec{H}, \vec{H}_0, \vec{H}$	champ magnétique.
$H_{x_1}, H_{x_2}, H_{x_3}; H_x, H_y, H_z$	composantes du champ magnétique.
h	nombre entier.
I	intensité de la lumière.
i	indice relatif aux ondes incidentes.
j	$\sqrt{-1}$
k	nombre entier.

K	nombre caractéristique d'un état de polarisation.
$l$	nombre entier.
$\overline{M}$	matrice représentative des propriétés magnétiques d'un milieu.
m	nombre entier.
n, $n_1$ , $n_2$ , $n_0$ , $n_e$ , $n_d$ , $n_g$	indice de propagation de la lumière.
O	Origine.
(0, x, y, z), ( $0x_1$ , $x_2$ , $x_3$ )	trièdres orthogonaux directs.
p	nombre entier.
$\vec{P}$	vecteur de POYNTING.
q	nombre entier.
r	indice relatif aux ondes réfléchies.
t	indice relatif aux ondes transmises.
t	temps.
$\vec{v}, \vec{v}$	vecteurs.
v, $v_1$ , $v_2$	vitesse de phase des ondes privilégiées d'un milieu.
$v_0$	vitesse de phase des ondes dans le milieu d'immersion d'une lame.
$x_1$ , $x_2$ , $x_3$	coordonnées cartésiennes d'un point dans le repère 0, $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ .
x, y, z.	coordonnées cartésiennes d'un point dans le repère 0, x, y, z.
$\alpha_{hkl}$ , $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\alpha_3$ , $\alpha$	termes gyromagnétiques.
$\gamma_{hkl}$ , $\gamma_1$ , $\gamma_2$ , $\gamma_3$ , $\gamma$	termes gyroélectriques.

$\epsilon_{hk}, \epsilon_1, \epsilon_3$	permittivité diélectrique.
$[\epsilon]$	matrice reliant l'induction au champ électrique.
$n, n_1, n_2, n_0, n_e$	ellipticité de vibrations.
$\theta$	Angle entre la normale à l'onde et l'axe optique d'un milieu uniaxe.
$\lambda$	longueur d'onde des ondes considérées dans le vide.
$\mu_{hk}, \mu_1, \mu_3$	perméabilités magnétiques.
$[\mu]$	matrice reliant l'induction au champ magnétique.
$\delta$	symbole de dérivation.
$\sum$	symbole de sommation.
$\chi$	coefficient d'absorption.
$\omega$	pulsation.
p.r.	partie réelle.
p.i.	partie imaginaire.
*	complexe conjugué de
$\vec{V}^+$	vecteur adjoint.
$[M]^+$	matrice adjointe.

I N T R O D U C T I O N

Le pouvoir rotatoire est découvert par F. ARAGO [1] pour une lame de quartz taillée perpendiculairement à l'axe optique.

En introduisant dans l'équation de propagation de la variable lumineuse des dérivées spatiales d'ordres impairs, A. CAUCHY [2, 3, 4] donne une explication théorique du pouvoir rotatoire.

J.W. GIBBS [5] étudie l'activité optique des milieux uniaxes en faisant les hypothèses suivantes :

- le vecteur induction électrique  $\vec{D}$  s'exprime linéairement en fonction du champ électrique  $\vec{E}$  et de ses dérivées spatiales premières :

$$D_{x_h} = \sum_k \epsilon_{hk} E_{x_k} + \sum_k \sum_\ell \gamma_{hk\ell} \delta_{x_\ell} E_{x_k},$$

- le vecteur induction magnétique  $\vec{B}$  s'exprime linéairement en fonction du champ magnétique  $\vec{H}$  :

$$B_{x_h} = \sum_k \mu_{hk} H_{x_k}$$

H.A. LORENTZ [6] prévoit l'existence d'une double réfraction dans les cristaux cubiques par l'introduction de termes du second ordre dans le développement de l'induction électrique :

$$D_{x_h} = \sum_k \epsilon_{hk} E_{x_k} + \sum_k \sum_\ell \gamma_{hk\ell} \delta_{x_\ell} E_{x_k} + \sum_k \sum_\ell \sum_m \gamma_{hk\ell m} \delta_{x_\ell}^2 E_{x_m}$$

A. TIMOREV [7] et R. GANS [8] généralisent la conception de GIBBS en développant l'induction magnétique au premier ordre également :

$$B_{x_h} = \sum_k \mu_{hk} H_{x_k} + \sum_k \sum_\ell \alpha_{hk\ell} \delta_{x_\ell} H_{x_k}$$

A l'aide de ces hypothèses et en supposant hermitiques les tenseurs représentatifs des propriétés électromagnétiques du milieu, J. BILLARD [9] fait apparaître dans un cas particulier simple le paradoxe suivant : le principe de conservation de l'énergie rend incompatibles la transparence parfaite et l'activité optique.

Ce problème est réexaminé ici en abandonnant l'hypothèse de l'hermiticité. L'hypothèse de linéarité est conservée : l'amplitude du rayonnement est supposée suffisamment faible pour que les phénomènes non linéaires puissent être négligés. De plus, les termes de dispersion spatiale d'ordre plus élevé que ceux de GIBBS, GANS et TIMOREV sont négligés.

Le moyen utilisé sera l'étude des conditions de conservation de l'énergie pour une lame à faces planes et parallèles, taillée dans un milieu transparent et actif, immergée dans un milieu isotrope et inactif, et éclairée sous l'incidence normale.

I - CONDITIONS DE CONSERVATION DE L'ENERGIE POUR UNE LAME TRANSPARENTE, ECLAIREE NORMALEMENT D'UN SEUL CÔTE.

I.1. - Ondes privilégiées d'un milieu homogène

Rappelons les équations relatives aux propriétés électromagnétiques de la matière :

$$(I_{1,1}) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_{x_h} = \sum_k \epsilon_{hk} \mathcal{E}_{x_k} + \sum_k \sum_l \gamma_{hkl} \delta_{x_l} \mathcal{E}_{x_k} \\ \mathcal{B}_{x_h} = \sum_k \mu_{hk} \mathcal{H}_{x_k} + \sum_k \sum_l \alpha_{hkl} \delta_{x_l} \mathcal{H}_{x_k} \end{cases}$$

Considérons des ondes électromagnétiques monochromatiques, planes, homogènes qui se propagent dans la direction oz avec la vitesses de phase v, soient :

$$\vec{V} = \vec{V}_{(z)} \exp j\omega t = \vec{V}_0 \exp j\omega (t - \frac{z}{v})$$

où le vecteur  $\vec{V}$  peut représenter les vecteurs  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ .

Pour les ondes du type considéré, les dérivées spatiales et temporelles sont, le repère (oxyz) étant orthogonal direct :

$$\begin{aligned} \delta_t &= j \omega \\ \delta_x &= 0, \quad \delta_y = 0 \\ \delta_z &= -j \frac{\omega}{v} \end{aligned}$$

et les relations de matière  $I_{1,1}$  peuvent se mettre sous la forme matricielle :

$$(I_{1,1} \text{ bis}) \quad \begin{aligned} \vec{D} &= [\hat{\epsilon}] \vec{E} \\ \vec{B} &= [\hat{\mu}] \vec{H} \end{aligned}$$

Dans les tenseurs  $[\hat{\epsilon}]$  et  $[\hat{\mu}]$  figurent :

- les permittivités diélectriques  $\epsilon_{hk}$ ,
- les perméabilités magnétiques  $\mu_{hk}$ ,
- les coefficients gyroélectriques  $\gamma_{hkl}$ ,

- les coefficients gyromagnétiques  $\alpha_{hkl}$ ,
- la pulsation  $\omega$ ,

et la vitesse de phase  $v$  de l'onde considérée.

Pour de telles ondes, les équations de Maxwell prennent la forme suivante [9] :

$$(I_{1,2}) \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{\mathcal{H}} = \delta_t \vec{\mathcal{D}} \implies \frac{1}{v} \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{D}} = [\hat{\epsilon}] \vec{\mathcal{E}} \\ \text{rot } \vec{\mathcal{E}} = \delta_t \vec{\mathcal{B}} \implies \frac{1}{v} \begin{bmatrix} \cdot & -1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{B}} = [\hat{\mu}] \vec{\mathcal{H}} \end{cases}$$

Si l'on pose :

$$\vec{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix},$$

ces équations montrent que les composantes longitudinales  $D_z$  et  $B_z$  sont nulles, donc que les vecteurs  $\vec{\mathcal{D}}$  et  $\vec{\mathcal{B}}$  sont transversaux [9].

Si l'on note

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix},$$

les composantes transversales des vecteurs  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{H}}$ , le système d'équations de Maxwell peut s'écrire :

$$(I_{1,3}) \quad \begin{cases} E_z = - \frac{\hat{\epsilon}_{31} E_x + \hat{\epsilon}_{32} E_y}{\hat{\epsilon}_{33}} \\ H_z = - \frac{\hat{\mu}_{31} H_x + \hat{\mu}_{32} H_y}{\hat{\mu}_{33}} \end{cases}$$

et :

$$\begin{array}{l}
 \vec{H} = v \begin{bmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} [\zeta] \vec{E} \quad \text{avec} \quad [\zeta] = \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_{11} - \frac{\hat{\epsilon}_{31} \hat{\epsilon}_{13}}{\hat{\epsilon}_{33}} & \hat{\epsilon}_{12} - \frac{\hat{\epsilon}_{32} \hat{\epsilon}_{13}}{\hat{\epsilon}_{33}} \\ \hat{\epsilon}_{21} - \frac{\hat{\epsilon}_{31} \hat{\epsilon}_{23}}{\hat{\epsilon}_{33}} & \hat{\epsilon}_{22} - \frac{\hat{\epsilon}_{32} \hat{\epsilon}_{23}}{\hat{\epsilon}_{33}} \end{bmatrix} \\
 \\
 \vec{E} = v \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ -1 & \cdot \end{bmatrix} [\mathcal{M}] \vec{H} \quad \text{avec} \quad [\mathcal{M}] = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{11} - \frac{\hat{\mu}_{31} \hat{\mu}_{13}}{\hat{\mu}_{33}} & \hat{\mu}_{12} - \frac{\hat{\mu}_{32} \hat{\mu}_{13}}{\hat{\mu}_{33}} \\ \hat{\mu}_{21} - \frac{\hat{\mu}_{31} \hat{\mu}_{23}}{\hat{\mu}_{33}} & \hat{\mu}_{22} - \frac{\hat{\mu}_{32} \hat{\mu}_{23}}{\hat{\mu}_{33}} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

(I<sub>1,4</sub>)

Les équations (I<sub>1,4</sub>) constituent un système de quatre équations linéaires sans second membre à quatre inconnues  $[E_x, E_y, H_x, H_y]$ . Ce système possède une solution non triviale si son déterminant est nul, ce qui fournit une équation dont les racines sont les vitesses de phase des ondes considérées.

Les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  solutions de ce système et les vecteurs  $\vec{D}$  et  $\vec{B}$  qui se déduisent des équations de matière sont des champs et inductions d'ondes que l'on appelle ondes privilégiées.

Les équations de Maxwell forment un système linéaire sans second membre. Les champs et inductions des ondes privilégiées sont donc définis à un facteur multiplicatif près.

### 1.2. - Conditions de continuité aux dioptrés

Soit une lame à faces planes et parallèles d'épaisseur  $e$ , taillée dans un milieu transparent, éclairée sous l'incidence normale d'un seul côté par une onde polarisée plane homogène, monochromatique de pulsation  $\omega$ .

Le trièdre de référence (oxyz) est choisi de la façon suivante :

- l'axe oz a le sens de propagation de l'onde incidente ;
- le plan (ox, oy) est le plan de la face d'entrée de la lame.

Le milieu d'immersion supposé transparent et inactif est caractérisé par sa permittivité diélectrique  $\epsilon_0$ , sa perméabilité magnétique  $\mu_0$ , la vitesse de phase des ondes planes et homogènes y est  $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ . Les quantités  $\epsilon_0, \mu_0, v_0$  sont réelles et positives.

La lame est supposée taillée dans un milieu où, dans une direction donnée, existent quatre ondes privilégiées dont les vitesses de phase sont opposées deux à deux et sont notées  $v_1, v_2, -v_1, -v_2$ . Les vecteurs ( $\vec{E}$  etc...) et les tenseurs représentatifs des propriétés électromagnétiques sont munis d'un indice 1', 1'', 2', 2'' quand ils sont relatifs respectivement à  $v_1, -v_1, v_2, -v_2$ .

Pour l'onde incidente considérée, les conditions de continuité aux dioptries permettent de déduire que dans la lame et dans le milieu d'immersion, se propagent des ondes de la forme :

$$\vec{V} = \vec{V}_0 \exp j\omega \left( t - \frac{z}{v} \right).$$

Dans le milieu d'immersion, se propagent avec la vitesse absolue de phase  $v_0$ , les ondes incidente, réfléchie et transmise.

Dans la lame, se propagent les ondes privilégiées du milieu.

Déterminons maintenant, en fonction de l'onde incidente, l'onde réfléchie, l'onde transmise, l'amplitude et la phase de chaque onde privilégiée qui se propage dans le milieu. Ce calcul se fait en étudiant les conditions aux limites pour les deux dioptries. Il est analogue à ceux effectués par F.I. FEDOROV [10, 11, 12] et J. BILLARD [9].

L'on appelle  $\vec{E}_1, \vec{E}_r, \vec{E}_{1'}, \vec{E}_{2'}, \vec{E}_{1''}, \vec{E}_{2''}$ , les champs électriques au niveau du dioptre d'entrée des ondes incidente, réfléchie, et des ondes qui se propagent à l'intérieur de la lame.

L'on appelle  $\vec{E}_t$  le champ électrique au niveau du dioptre de sortie, de l'onde transmise.

et respectivement  $H_1, H_r, \dots, H_t$ .

Les conditions de continuité des composantes transversales  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont alors :

$$\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_{1'} + \vec{E}_{2'} + \vec{E}_{1''} + \vec{E}_{2''}$$

$$\vec{H}_i + \vec{H}_r = \vec{H}_{1'} + \vec{H}_{2'} + \vec{H}_{1''} + \vec{H}_{2''}$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{1'} \exp(-j \frac{\omega e}{v_1}) + \vec{E}_{2'} \exp(-j \frac{\omega e}{v_2}) + \vec{E}_{1''} \exp(j \frac{\omega e}{v_1}) + \vec{E}_{2''} \exp(j \frac{\omega e}{v_2})$$

$$\vec{H}_t = \vec{H}_{1'} \exp(-j \frac{\omega e}{v_1}) + \vec{H}_{2'} \exp(-j \frac{\omega e}{v_2}) + \vec{H}_{1''} \exp(j \frac{\omega e}{v_1}) + \vec{H}_{2''} \exp(j \frac{\omega e}{v_2}) .$$

Compte tenu des équations de Maxwell I<sub>1,4</sub>, ces équations sont équivalentes à :

$$2 \vec{E}_i = \left[ 1 + \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_1'] \right] \vec{E}_{1'} + \left[ 1 + \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_2'] \right] \vec{E}_{2'}$$

(I<sub>2,1</sub>)

$$+ \left[ 1 - \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_1''] \right] \vec{E}_{1''} + \left[ 1 - \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_2''] \right] \vec{E}_{2''}$$

$$0 = \exp(-j \frac{\omega e}{v_1}) \left[ 1 - \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_1'] \right] \vec{E}_{1'} + \exp(-j \frac{\omega e}{v_2}) \left[ 1 - \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_2'] \right] \vec{E}_{2'}$$

(I<sub>2,2</sub>)

$$+ \exp(j \frac{\omega e}{v_1}) \left[ 1 + \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_1''] \right] \vec{E}_{1''} + \exp(j \frac{\omega e}{v_2}) \left[ 1 + \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_2''] \right] \vec{E}_{2''}$$

$$2 \vec{E}_r = \left[ 1 - \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_1'] \right] \vec{E}_{1'} + \left[ 1 - \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_2'] \right] \vec{E}_{2'}$$

(I<sub>2,3</sub>)

$$+ \left[ 1 + \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_1''] \right] \vec{E}_{1''} + \left[ 1 + \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_2''] \right] \vec{E}_{2''}$$

$$(4) \quad 2 \vec{E}_t = \left[ 1 + \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_{1'}] \right] \exp(-j \frac{\omega e}{v_1}) \vec{E}_{1'} + \left[ 1 + \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_{2'}] \right] \exp(-j \frac{\omega e}{v_2}) \vec{E}_{2'} \\ + \left[ 1 - \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_{1''}] \right] \exp(j \frac{\omega e}{v_1}) \vec{E}_{1''} + \left[ 1 - \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_{2''}] \right] \exp(j \frac{\omega e}{v_2}) \vec{E}_{2''}$$

Les équations vectorielles (I<sub>2,1</sub>) et (I<sub>2,2</sub>) forment un système de quatre équations linéaires avec second membre. La résolution de ce système permet de connaître, en fonction de l'onde incidente, les amplitudes et les phases des ondes qui se propagent dans la lame, dont les états de polarisation ont été déterminés au paragraphe précédent. Les équations (I<sub>2,3</sub>) et (I<sub>2,4</sub>) permettent de calculer ensuite l'onde réfléchie et l'onde transmise.

### I.3. - Conditions de conservation de l'énergie

Divers auteurs ont souligné les difficultés du calcul du flux d'énergie dans un milieu anisotrope et actif [13, 9]. Ces difficultés n'existent pas pour les ondes homogènes se propageant dans les milieux isotropes et inactifs, c'est pourquoi nous traitons le problème d'une lame immergée dans un milieu isotrope et inactif, et nous calculons les flux d'énergie à travers une surface appartenant au milieu d'immersion.

Pour des ondes planes et homogènes se propageant dans un milieu isotrope et inactif, l'énergie moyenne traversant une surface par unité de temps est donné par le flux moyen du vecteur de Poynting [14, 15] :

$$\vec{P} = \frac{1}{4} (\vec{E} + \vec{E}^*) \wedge (\vec{H} + \vec{H}^*)$$

Du côté de la face d'entrée ( $z < 0$ ), se propagent l'onde incidente et l'onde réfléchie. Le flux d'énergie correspondant entrant dans la lame est :

$$\frac{1}{2} \text{p.r.} \left[ \left( \vec{E}_i \exp j\omega \left( t - \frac{z}{v_0} \right) + \vec{E}_r \exp j\omega \left( t + \frac{z}{v_0} \right) \right) \wedge \left( \vec{H}_i \exp -j\omega \left( t - \frac{z}{v_0} \right) \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + \vec{H}_r \exp -j\omega \left( t + \frac{z}{v_0} \right) \right) \right]$$

ou, en remplaçant  $\vec{H}_i$  par  $\epsilon_0 v_0 \begin{bmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \vec{E}_i$

et  $\vec{H}_r$  par  $-\epsilon_0 v_0 \begin{bmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \vec{E}_r$ ,

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 v_0 \left[ \vec{E}_i^+ \cdot \vec{E}_i - \vec{E}_r^+ \cdot \vec{E}_r \right].$$

où  $\vec{E}^+$  est le vecteur adjoint de  $\vec{E}$ .

et p.r. signifie : partie réelle.

Du côté de la face de sortie ( $z > e$ ), se propage l'onde transmise. Le flux d'énergie est, pour cette onde :

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 v_0 \left[ \vec{E}_t^+ \cdot \vec{E}_t \right]$$

L'énergie moyenne qui entre dans la lame par unité de surface et de temps est :

$$(I_{3,1}) \quad \frac{1}{2} \epsilon_0 v_0 \left[ \vec{E}_i^+ \cdot \vec{E}_i - \vec{E}_r^+ \cdot \vec{E}_r - \vec{E}_t^+ \cdot \vec{E}_t \right].$$

Si le principe de la conservation de l'énergie est satisfait, et si le milieu est parfaitement transparent, cette quantité doit être nulle.

En utilisant les relations  $(I_{2,1})$ ,  $(I_{2,2})$ ,  $(I_{2,3})$ ,  $(I_{2,4})$ , qui lient entre eux des champs électriques des diverses ondes considérées, la condition de conservation de l'énergie devient :

$$(I_{3,2}) \quad \text{p.r.} \left\{ \begin{aligned} & \vec{E}_1^+ \left[ v_1 [\zeta_1]^+ + v_2 [\zeta_2] \right] \vec{E}_2' \cdot \left[ 1 - \exp j\omega e \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) \right] \\ & + \vec{E}_1^+ \left[ v_1 [\zeta_1]^+ - v_1 [\zeta_1] \right] \vec{E}_1'' \cdot \left[ 1 - \exp 2j \frac{\omega e}{v_1} \right] \\ & + \vec{E}_1^+ \left[ v_1 [\zeta_1]^+ - v_2 [\zeta_2] \right] \vec{E}_2'' \cdot \left[ 1 - \exp j\omega e \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \vec{E}_{2'}^+ \left[ v_2 [\zeta_{2'}]^+ - v_1 [\zeta_{1''}] \right] \vec{E}_{1''} \cdot \left[ 1 - \exp \omega e \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) \right] \\
 (I_{3,2}) \quad & + \vec{E}_{2'}^+ \left[ v_2 [\zeta_{2'}]^+ - v_2 [\zeta_{2''}] \right] \vec{E}_{2''} \cdot \left[ 1 - \exp 2j \frac{\omega e}{v_2} \right] \\
 & - \vec{E}_{1''}^+ \left[ v_1 [\zeta_{1''}]^+ + v_2 [\zeta_{2''}] \right] \vec{E}_{2''} \cdot \left[ 1 - \exp j \omega e \left( \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) \right]
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} & + \vec{E}_{2'}^+ \left[ v_2 [\zeta_{2'}]^+ - v_1 [\zeta_{1''}] \right] \vec{E}_{1''} \cdot \left[ 1 - \exp \omega e \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) \right] } \right\} \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

où la matrice  $[\zeta]^+$  est la matrice adjointe de  $[\zeta]$ .

En particulier, si l'épaisseur de la lame est telle que :

$$\omega e \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) = 2k\pi$$

(k entier, lame onde), cette équation devient :

$$(I_{3,3}) \quad \text{p.r.} \left\{ \begin{aligned} & \vec{E}_{1'}^+ \left[ v_1 [\zeta_{1'}]^+ - v_1 [\zeta_{1''}] \right] \vec{E}_{1''} \\ & + \vec{E}_{2'}^+ \left[ v_2 [\zeta_{2'}]^+ - v_2 [\zeta_{2''}] \right] \vec{E}_{2''} \\ & + (\vec{E}_{1'}^+)^+ \left[ v_1 [\zeta_{1'}]^+ - v_2 [\zeta_{2''}] \right] \vec{E}_{2''} \\ & + (\vec{E}_{2'}^+)^+ \left[ v_2 [\zeta_{2'}]^+ - v_1 [\zeta_{1''}] \right] \vec{E}_{1''} \end{aligned} \right\} = 0$$

Et si l'épaisseur e est telle que :

$$\omega e \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) = 2k\pi,$$

la condition de conservation de l'énergie devient :

$$(I_{3,4}) \quad \text{p.r.} \left\{ \begin{aligned} & \vec{E}_{1'}^+ \left[ v_1 [\zeta_{1'}]^+ + v_2 [\zeta_{2'}] \right] \vec{E}_{2'} \left( 1 - \exp 2j \frac{\omega e}{v_1} \right) \\ & + \vec{E}_{1'}^+ \left[ v_1 [\zeta_{1'}]^+ - v_1 [\zeta_{1''}] \right] \vec{E}_{1''} \left( 1 - \exp 2j \frac{\omega e}{v_1} \right) \\ & + \vec{E}_{2'}^+ \left[ v_2 [\zeta_{2'}]^+ - v_2 [\zeta_{2''}] \right] \vec{E}_{2''} \left( 1 - \exp - 2j \frac{\omega e}{v_1} \right) \\ & - \vec{E}_{1''}^+ \left[ v_1 [\zeta_{1''}]^+ + v_2 [\zeta_{2''}] \right] \vec{E}_{2''} \left( 1 - \exp - 2j \frac{\omega e}{v_1} \right) \end{aligned} \right\} = 0$$

Ces relations font intervenir des quantités du type :

$$\vec{E}_p^+ \left[ v_p [\vec{\zeta}_p]^+ + v_q [\vec{\zeta}_q] \right]^+ \vec{E}_q$$

qui expriment un couplage entre ondes privilégiées.

Les expressions  $(I_{1,2}) ; (I_{1,3}) ; (I_{1,4}) ; (I_{2,1}) ; (I_{2,2}) ; (I_{2,3}) ; (I_{2,4}) ; (I_{3,2}) ; (I_{3,3}) ; (I_{3,4})$  sont une généralisation à un milieu supposé "a priori" non hermitique, des relations établies pour un milieu hermitique où les coefficients gyroélectriques et gyromagnétiques sont réels, par J. BILLARD [9].

II - APPLICATION A CERTAINS MILIEUX UNIAXES ACTIFS : MISE EN EQUATIONS  
DES CONDITIONS DE CONSERVATION DE L'ENERGIE.

La difficulté que pose le principe de la conservation de l'énergie a été mise en évidence par J. BILLARD [9] dans les milieux anisotropes et actifs.

Nous étudierons les plus simples de ces milieux : les milieux hémihédres holoaxes dont les classes de symétrie sont 422, 622,  $\infty 2$ .

Les réductions par symétrie des tenseurs représentatifs de la permittivité diélectrique, de la perméabilité magnétique, de la gyroélectricité et du gyromagnétisme ont été effectuées par Y. LE CORRE [16] et J. BILLARD [9].

Dans un repère orthogonal direct  $(o, x_1, x_2, x_3)$  où l'axe  $ox_3$  est l'axe de plus grande symétrie, ces tenseurs sont, pour ces trois classes :

$$[\epsilon_{hk}] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \epsilon_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \epsilon_3 \end{bmatrix}, \text{ matrice diélectrique, et respectivement } [\mu_{hk}], \mu_1, \mu_3 \text{ pour la perméabilité magnétique :}$$

$$[\gamma_{hke}] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \gamma_2 \\ \cdot & \gamma_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\gamma_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -\gamma_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \gamma_3 & \cdot \\ -\gamma_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \text{ matrice gyroélectrique ;}$$

et respectivement  $[\alpha]$ , matrice gyromagnétique, avec  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Ces tenseurs sont invariants dans toute rotation autour de l'axe optique qui est l'axe de plus grande symétrie. Les propriétés optiques sont donc les mêmes dans tous les plans qui font le même angle avec l'axe optique.

Ces propriétés font que les milieux considérés sont les milieux uniaxes actifs les plus simples.

Les coefficients  $\epsilon_1, \epsilon_3, \mu_1, \mu_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sont supposés complexes et quelconques, avec toutefois :

$$\epsilon_1 \neq \epsilon_3 \quad \text{ou} \quad \mu_1 \neq \mu_3 .$$

Le cas :

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 \quad \text{et} \quad \mu_1 = \mu_3$$

sera examiné au chapitre V.

Etudions une lame taillée dans un tel milieu, éclairée dans les conditions définies au chapitre précédent, et examinons si le principe de conservation de l'énergie entraîne des relations nécessaires entre les composantes de ces tenseurs, dans le cas d'un milieu parfaitement transparent .

- Le flux total d'énergie entrant dans la lame doit être nul quels que soient :

- . l'état de polarisation de l'onde incidente,
- . l'indice du milieu d'immersion,
- . l'épaisseur de la lame,
- . la direction de l'axe optique par rapport aux faces de la lame.

### II.1. - Application des équations de Maxwell

Le repère orthogonal direct (oxyz) est défini comme suit (figure 1) :

- oz a la direction et le sens de propagation de l'onde incidente,
- oy est la projection de l'axe optique dans la face d'entrée de la lame,
- ox complète le trièdre,
- l'angle de l'axe optique et de l'axe oz est appelé  $\theta$ .

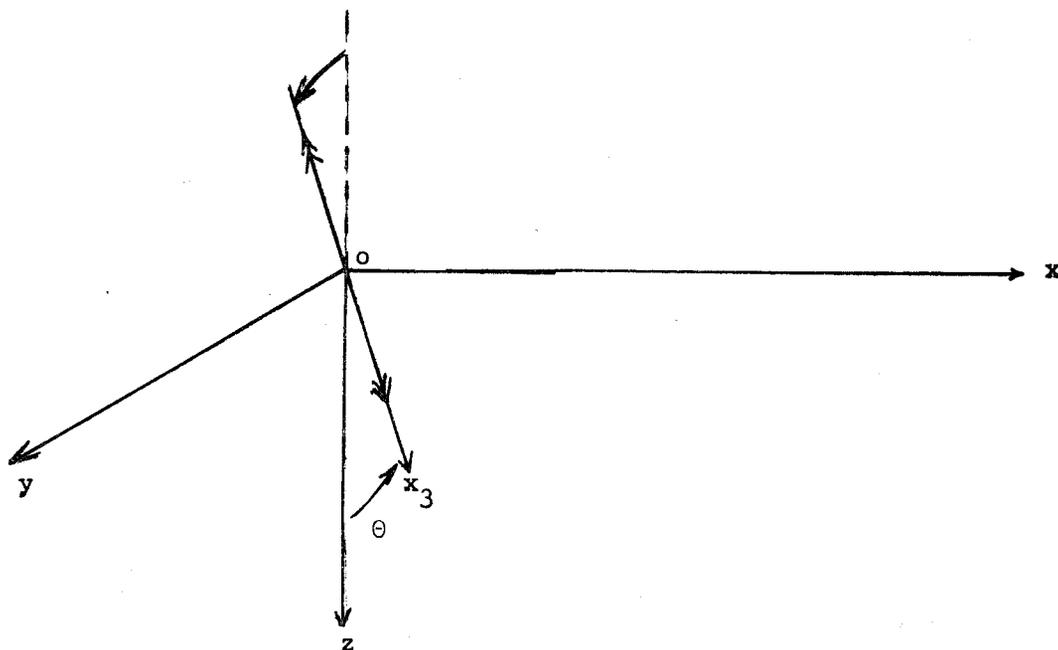


Figure 1 axes choisis : (ox, oy) est le plan de la face d'entrée de la lame ; oz est normal à la lame ; l'axe optique a la direction de ox<sub>3</sub>.

Dans le système d'axes choisis, l'on obtient :

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} \epsilon_1 & -j \frac{\omega}{v} (\gamma_1 \cos^2 \theta - \gamma_2 \sin^2 \theta) & -j \frac{\omega}{v} (\gamma_1 + \gamma_2) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \hline j \frac{\omega}{v} (\gamma_1 \cos^2 \theta - \gamma_3 \sin^2 \theta) & \epsilon_1 \cos^2 \theta + \epsilon_3 \sin^2 \theta & (\epsilon_1 - \epsilon_3) \sin \theta \cos \theta \\ \hline j \frac{\omega}{v} (\gamma_1 + \gamma_3) \sin \theta \cos \theta & (\epsilon_1 - \epsilon_3) \sin \theta \cos \theta & \epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_3 \cos^2 \theta \end{array} \right]$$

et respectivement  $[\hat{\mu}]$ , avec  $\mu_1, \mu_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Les équations de Maxwell (I<sub>1,2</sub>) s'écrivent sous la forme d'un système de six équations linéaires à six inconnues :



$$(II_{1,3}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_3 = \frac{\gamma_1 \epsilon_3 \cos^2 \theta - \gamma_3 \epsilon_1 \sin^2 \theta}{\epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_3 \cos^2 \theta} \\ \text{et respectivement } \mathcal{M}_{11}, \mathcal{M}_{22}, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \mu_{11} \text{ en remplaçant } \epsilon \text{ par } \mu \\ \text{et } \gamma \text{ par } \alpha. \end{array} \right.$$

## II.2. - Etat de polarisation et vitesse de phase des vibrations privilégiées

La condition pour que le système d'équations de Maxwell ait une solution non triviale est ici une équation bicarrée en  $v$  dont les racines sont les vitesses de phase des ondes privilégiées .

Cette équation est :

$$(II_{2,1}) \quad \frac{A}{v^4} - \frac{B}{v^2} + D = 0.$$

où

$$\begin{aligned} A = & \epsilon_3 \mu_3 (1 - \omega^2 \alpha_1 \gamma_1)^2 \cos^4 \theta \\ & + \epsilon_1 \mu_1 (1 - \omega^2 \alpha_2 \gamma_2) (1 - \omega^2 \alpha_3 \gamma_3) \sin^4 \theta \\ & + \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 \mu_3 (1 + \omega^2 \alpha_1 \gamma_2) (1 + \omega^2 \alpha_1 \gamma_3) \\ + \epsilon_3 \mu_1 (1 + \omega^2 \gamma_1 \alpha_2) (1 + \omega^2 \gamma_1 \alpha_3) \\ + \omega^2 \mu_1 \mu_3 (\gamma_1 + \gamma_2) (\gamma_1 + \gamma_3) \\ + \omega^2 \epsilon_1 \epsilon_3 (\alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_1 + \alpha_3) \end{array} \right\} \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = & \epsilon_3 \mu_3 [2 \epsilon_1 \mu_1 + \omega^2 [\gamma_1^2 \mu_1^2 + \alpha_1^2 \epsilon_1^2]] \cos^2 \theta \\ & + \epsilon_1 \mu_1 [\epsilon_3 \mu_1 + \epsilon_1 \mu_3 + \omega^2 [\mu_1 \mu_3 \gamma_2 \gamma_3 + \epsilon_1 \epsilon_3 \alpha_2 \alpha_3]] \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$D = \epsilon_1^2 \mu_1^2 \epsilon_3 \mu_3.$$

Cette équation possède quatre racines opposées deux à deux.

Si l'on pose :

$$\frac{1}{v} = \frac{n - j \chi}{c},$$

$c$  étant la vitesse de phase de la lumière dans le vide, les ondes privilégiées sont de la forme :

$$\vec{V} = \vec{V}_0 \exp j \omega \left( t - \frac{n z}{c} \right) \exp - \frac{\omega}{c} \chi z.$$

$n$  est l'indice réel de propagation.

$\chi$  est le coefficient d'absorption.

Pour que le milieu soit parfaitement transparent, il faut que les vitesses de phase des ondes privilégiées soient réelles ( $\chi = 0$ ) ou encore que leurs carrés soient réels et positifs, ce qui entraîne les trois conditions suivantes :

- Pour que les racines de l'équation bicarrée aux vitesses soient réelles il faut que le discriminant de l'équation soit positif ou nul, soit :

$$(II_{2,2}) \quad [B^2 - 4 A D \geq 0.$$

Les racines  $v_1^2$  et  $v_2^2$  doivent être toutes deux positives, soient :

$$(II_{2,3}) \quad \text{et} \quad \left[ \begin{array}{l} v_1^2 v_2^2 = \frac{A}{D} > 0. \\ v_1^2 + v_2^2 = \frac{B}{D} > 0. \end{array} \right.$$

Ces trois conditions nécessaires sont suffisantes pour que toutes les vitesses de phase soient réelles, c'est-à-dire pour que le milieu soit transparent.

Les cas où une vitesse de phase est imaginaire pure, c'est-à-dire où une vibration privilégiée est une oscillation évanescente de la forme :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \exp j \omega t \cdot \exp - \frac{\omega}{c} \chi z$$

ne seront pas traités ici.

L'état de polarisation de la composante transversale du champ électrique est défini par :

$$(II_{2,5}) \quad \frac{E_x}{E_y} = - j \frac{\omega}{v} \frac{M_{22} \zeta_2 + \zeta_{22} M_3}{\frac{1}{v^2} (1 - \omega^2 \zeta_3 M_3) - \zeta_{11} M_{22}}$$

ou encore :

$$(II_{2,5 \text{ bis}}) \quad \frac{E_x}{E_y} = - j \frac{\frac{1}{v} \frac{1}{v^2} (1 - \omega^2 \zeta_2 M_2) - \zeta_{22} M_{11}}{\omega \zeta_{11} M_2 + \zeta_3 M_{11}}$$

qui est de la forme :

$$\frac{E_x}{E_y} = - j \frac{\omega}{v} K (v^2)$$

Pour les ondes perpendiculaires à l'axe optique, le rapport

$\frac{E_x}{E_y}$  est égal à  $\pm j$ , les deux vibrations sont circulaires inverses. Le milieu présente en général un pouvoir rotatoire pour les ondes perpendiculaires à l'axe optique.

Pour les ondes parallèles à l'axe optique, l'on a :

$$(II_{2,6}) \quad \frac{E_x}{E_y} = -j \frac{\omega \frac{1}{v} - \frac{\omega^2}{v^2} \alpha_3 \gamma_2 - \epsilon_3 \alpha_3}{\omega \frac{1}{v} - \frac{\omega^2}{v^2} \alpha_3 \gamma_3 - \epsilon_1 \mu_3}$$

ou :

$$(II_{2,6 \text{ bis}}) \quad \frac{E_x}{E_y} = -j \frac{v \frac{1}{\omega} - \frac{\omega^2}{v^2} \alpha_2 \gamma_2 - \epsilon_3 \mu_1}{\omega \frac{1}{v} - \frac{\omega^2}{v^2} \alpha_2 \gamma_3 - \epsilon_1 \alpha_2}$$

Ce sont des ellipses non orthogonales dont les axes ne sont pas en général les axes de référence.

Ce sont des vibrations rectilignes orthogonales orientées selon les axes de référence si :

$$\frac{\epsilon_3}{\mu_3} = -\frac{\gamma_2}{\alpha_3} \quad \text{et} \quad \frac{\epsilon_1}{\mu_1} = -\frac{\gamma_3}{\alpha_2} ;$$

Si  $\alpha_2, \gamma_2, \alpha_3, \gamma_3$  sont réels et  $\epsilon_1, \epsilon_3, \mu_1, \mu_3$  imaginaires purs, ou si  $\alpha_2, \gamma_2, \alpha_3, \gamma_3$  sont imaginaires purs et  $\epsilon_1, \mu_3$  et  $\epsilon_3, \mu_1$  réels, les deux vibrations sont des vibrations rectilignes non orthogonales.

Pour  $\theta$  quelconque,  $K (v^2)$  est en général complexe. Les vibrations privilégiées sont en général elliptiques (sauf si  $\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2, \gamma_2, \alpha_3, \gamma_3$  sont imaginaires purs et  $\epsilon_1, \epsilon_3, \mu_1, \mu_3$  réels ou si  $\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2, \gamma_2, \alpha_3, \gamma_3$  sont réels et  $\epsilon_1, \epsilon_3, \mu_1, \mu_3$  imaginaires purs).

Le changement de  $v$  en  $-v$  change  $\frac{E_x}{E_y}$  en  $-\frac{E_x}{E_y}$  ; les vibrations relatives à deux vitesses opposées sont donc symétriques par rapport aux axes de référence (figure 2). Cette propriété est évidente par symétrie ; en effet, les milieux considérés possèdent les mêmes propriétés que le milieu de symétrie  $\infty 2$ , pour lequel l'axe  $ox$ , perpendiculaire à l'axe optique, est un axe binaire .

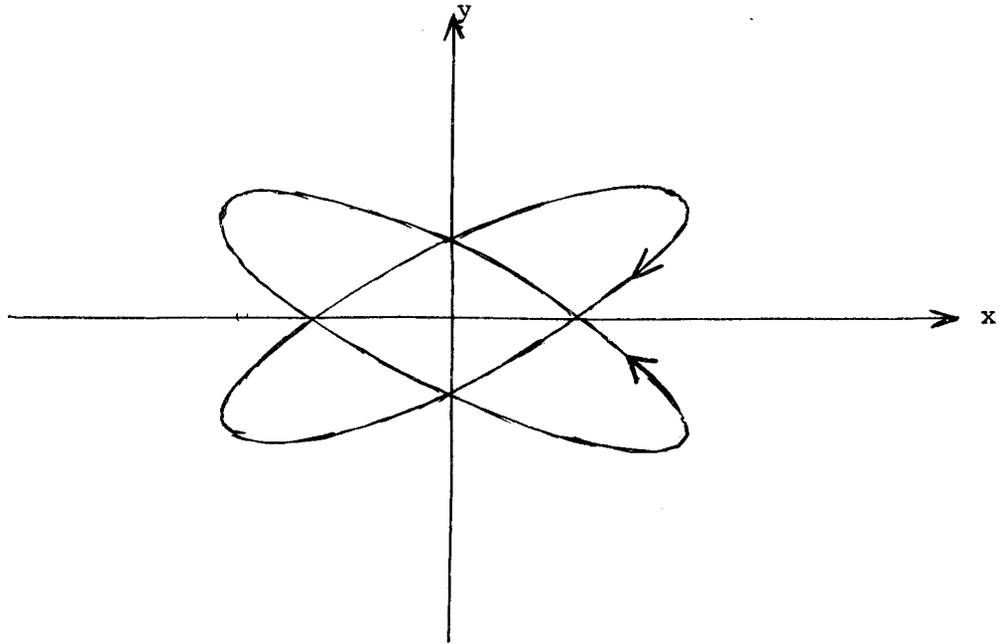


Figure 2 : Vibrations privilégiées relatives à deux vitesses opposées.

II.3. - Conditions particulières de conservation de l'énergie

Choisissons une lame d'épaisseur telle que :

$$\omega e \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) = 2k\pi$$

et une condition d'éclairage telle que l'amplitude de l'onde  $\vec{E}_{2''}$  soit nulle.

En posant :

$$\vec{E} = E_y \vec{V} \quad \text{où} \quad \vec{V} = \begin{bmatrix} -j \frac{\omega}{v} K \\ 1 \end{bmatrix},$$

la condition de conservation de l'énergie ( $I_{3,4}$ ) devient :

$$\begin{aligned} \text{(II}_{3,1}\text{)} \quad \text{p.r.} \quad (1 - \exp 2j \frac{\omega e}{v_1}) E_{y1}^* E_{y2}, & \left\{ \vec{V}_{1'}^+ (v_1 [\mathcal{L}_{1'}]^+ + v_2 [\mathcal{L}_{2'}]) \vec{V}_{2'} \dots \right. \\ & \left. \dots + \vec{V}_{1'}^+ (v_1 [\mathcal{L}_{1'}]^+ - v_1 [\mathcal{L}_{1''}]) \vec{V}_{1''} \frac{E_{y1''}}{E_{y2'}} \right\} \\ & = 0. \end{aligned}$$

ou

$$(II_{3,2}) \text{ p.r. } \left( \exp\left(-2j \frac{\omega e}{v_1}\right) - 1 \right) \exp\left(2j \frac{\omega e}{v_1}\right) \frac{E_{y2'}}{E_{y1'}} \left. \begin{array}{l} E_{y1'} \cdot E_{y1'}^* \left\{ \vec{V}_{1'}^+ (v_1 [\zeta_{1'}]^+ + v_2 [\zeta_{2'}]) \vec{V}_2' \right. \\ \left. + v_1^+ [\zeta_{1'}]^+ - v_1 [\zeta_{1''}] \right\} \vec{V}_{1''} \frac{E_{y1''}}{E_{y2'}} \end{array} \right\} = 0$$

La condition (I<sub>2,2</sub>) de continuité aux dioptries, soit :

$$0 = \left(1 - \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_{1'}]\right) \exp\left(-j \frac{\omega e}{v_1}\right) \vec{E}_{1'} + \left(1 - \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_{2'}]\right) \exp\left(-j \frac{\omega e}{v_2}\right) \vec{E}_{2'} \\ + \left(1 + \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_{1''}]\right) \exp\left(j \frac{\omega e}{v_1}\right) \vec{E}_{1''} + \left(1 + \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_{2''}]\right) \exp\left(j \frac{\omega e}{v_2}\right) \vec{E}_{2''}$$

constitue ici, compte tenu de l'épaisseur et de l'éclairage, un système de deux équations linéaires et homogènes en :

$$\exp\left(-j \frac{\omega e}{v_1}\right) E_{y1'}, \quad \exp\left(j \frac{\omega e}{v_1}\right) E_{y2'}, \quad \exp\left(j \frac{\omega e}{v_1}\right) E_{y1''}$$

dont les coefficients sont indépendants de l'épaisseur. Ce système d'équations permet donc de calculer de façon indépendante de l'épaisseur les quantités :

$$\frac{E_{y2'}}{E_{y1'}} \exp\left(2j \frac{\omega e}{v_1}\right) \quad \text{et} \quad \frac{E_{y1''}}{E_{y2'}}$$

Remarquons ensuite que les facteurs  $E_{y1'}$  et  $E_{y2'}$  sont en général non nuls. Pour une lame taillée parallèlement à l'axe optique, (biréfringence quasi-rectiligne [17]), le calcul donne en effet :

$$(III_{3,3}) \quad \frac{E_{y1'}}{E_{y1''}} \approx \exp\left(2j \frac{\omega e}{v_1}\right) \frac{\epsilon_0 v_0 + \epsilon_1 v_1}{\epsilon_0 v_0 - \epsilon_1 v_1}$$

et pour une lame taillée perpendiculairement à l'axe optique :

$$(III_{3,3 \text{ bis}}) \quad \frac{E_{y2'}}{E_{y1''}} = \exp\left(2j \frac{\omega e}{v_1}\right) \frac{\epsilon_0 v_0 + \epsilon_1 \left(v_1 - \omega \frac{v_1}{\epsilon_1}\right)}{v_1 \left(\epsilon_0 v_0 - \epsilon_1 \left(v_2 + \omega \frac{v_1}{\epsilon_1}\right)\right)}$$

Le seul terme de l'équation (III<sub>3,2</sub>) dépendant de l'épaisseur est :

$$\exp\left(-j \frac{\omega e}{v_1}\right) - 1 ;$$

la condition (III<sub>3,2</sub>) doit être satisfaite pour les divers multiples de :

$$e = \frac{2 \Pi}{\omega \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)}$$

Il est donc nécessaire que :

$$(II_{3,4}) \quad \vec{V}_1^+ (v_1 [\zeta_1^+] + v_2 [\zeta_2^+]) \vec{V}_2^+ + \vec{V}_1^+ (v_1 [\zeta_1^+] - v_2 [\zeta_1'']) \vec{V}_1'' \frac{E_{y1''}}{E_{y2'}} = 0$$

Dans cette dernière expression, le seul terme dépendant du milieu d'immersion est :

$$\frac{E_{y1''}}{E_{y2'}} \quad (\text{cf. III}_{3,3} \text{ bis}) .$$

Pour que l'équation de conservation de l'énergie (III<sub>3,4</sub>) soit satisfaite quel que soit le milieu d'immersion, il faut donc que :

$$(II_{3,5}) \quad (V_1^+)^+ [v_1 [\zeta_1^+] + v_2 [\zeta_2^+]] \vec{V}_2^+ = 0$$

$$(II_{3,6}) \quad \text{et } (V_1^+)^+ [[\zeta_1^+] - [\zeta_1'']] \vec{V}_1'' = 0 .$$

En choisissant l'onde incidente pour que l'amplitude de l'onde  $\vec{E}_1$ , soit nulle, l'on montre de la même façon que :

$$(II_{3,7}) \quad (\vec{V}_2^+)^+ [[\zeta_2^+] - [\zeta_2'']] \vec{V}_2'' = 0 .$$

$$(II_{3,8}) \quad (\vec{V}_1'')^+ [v_1 [\zeta_1''] + v_2 [\zeta_2'']] \vec{V}_2'' = 0 .$$

L'étude de la lame onde permet enfin de montrer par une méthode analogue que :

$$(II_{3,9}) \quad (\vec{V}_1^+)^+ [v_1 [\zeta_1^+] - v_2 [\zeta_2'']] \vec{V}_2'' = 0$$

$$(II_{3,10}) \quad \text{et } (\vec{V}_2^+)^+ [v_2 [\zeta_2^+] - v_1 [\zeta_1'']] \vec{V}_1'' = 0$$

Les équations (II<sub>3,6</sub>) et (II<sub>3,7</sub>), ainsi que (II<sub>3,9</sub>) et (II<sub>3,10</sub>) se correspondent par échange de  $v_1$  et  $v_2$ .

Les équations (II<sub>3,5</sub>) et (II<sub>3,8</sub>) se correspondent par le changement de  $v_1$  en  $-v_1$  et de  $v_2$  en  $-v_2$ .

Les conditions (II<sub>3,5</sub>) ... (II<sub>3,10</sub>) et leurs expressions conjuguées expriment que les termes de couplage entre ondes privilégiées sont nuls, soient :

$$(II_{3,11}) \quad \vec{E}_p^+ [v_p [\zeta_p^+] + v_q [\zeta_q]] \vec{E}_q = 0$$

pour  $v_p$  et  $v_q$  égaux à  $v_1, v_2, -v_1$  ou  $-v_2$ .

II.4. - Diverses façons d'écrire les conditions de conservation de l'énergie

La condition nécessaire de conservation de l'énergie (II<sub>3,9</sub>) devient, après y avoir développé les matrices  $[\zeta]$  et leurs produits par les vecteurs

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} -j \frac{\omega K}{v} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{cf. (II}_{1,3}) ; (\text{II}_{2,5}) ; (\text{II}_{2,5 \text{ bis}})) :$$

$$\begin{aligned} & \omega^2 \frac{K_1^* K_2}{v_1 v_2} \left[ -v_2 \zeta_{11}^2 + v_1 \zeta_{11}^{1*} \right] \\ & + \omega^2 \frac{K_2}{v_2} (\zeta_3 + \zeta_2^*) \\ & - \omega^2 \frac{K_1^*}{v_1} (\zeta_3^* + \zeta_2) \\ & + v_2 \zeta_{22} \\ & - v_1 \zeta_{22}^* = 0. \end{aligned} \quad (\text{II}_{4,1})$$

La condition (II<sub>3,10</sub>), qui se déduit de la condition (II<sub>3,9</sub>) par échange de  $v_1$  et  $v_2$  est, au signe près, le complexe conjugué de (II<sub>4,1</sub>). Ces deux conditions sont équivalentes.

Les conditions (II<sub>3,6</sub>) et (II<sub>3,7</sub>) sont respectivement équivalentes à :

$$\begin{aligned} & - \frac{\omega^2}{v_1^2} K_1 K_1^* \left[ \zeta_{11}^{1*} - \zeta_{11}^1 \right] \\ & + \frac{\omega^2}{v_1^2} K_1^* \left[ \zeta_3^* + \zeta_2 \right] \\ & - \frac{\omega^2}{v_1^2} K_1 \left[ \zeta_3 + \zeta_2^* \right] \\ & + \zeta_{22}^* - \zeta_{22} = 0, \end{aligned} \quad (\text{II}_{4,2})$$

et :

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\omega^2}{v_2^2} K_2 K_2^* [\zeta_{11}^{2*} - \zeta_{11}^2] \\
 & + \frac{\omega^2}{v_2^2} K_2^* [\zeta_3^* + \zeta_2] \\
 \text{(II}_{4,2} \text{ bis)} & - \frac{\omega^2}{v_2^2} K_2 [\zeta_3 + \zeta_2^*] \\
 & + \zeta_{22}^* - \zeta_{22} = 0.
 \end{aligned}$$

Les conditions (II<sub>3,5</sub>) et (II<sub>3,8</sub>) sont toutes deux équivalentes à :

$$\begin{aligned}
 & \omega^2 \frac{K_1 K_2}{v_1 v_2} (v_1 \zeta_{11}^{1*} + v_2 \zeta_{11}^2) \\
 \text{(II}_{4,3}) & + \omega^2 \frac{K_1^*}{v_1} (\zeta_3^* + \zeta_2) \\
 & + \omega^2 \frac{K_2}{v_2} (\zeta_3 + \zeta_2^*) \\
 & + v_1 \zeta_{22}^* + v_2 \zeta_{22} = 0
 \end{aligned}$$

En effectuant la différence membre à membre des expressions conjuguées des conditions (II<sub>4,1</sub>) et (II<sub>4,3</sub>), l'on obtient :

$$\text{(II}_{4,4}) \quad \omega^2 \frac{K_1 K_2^*}{v_1^2} \zeta_{11}^{2*} + \omega^2 \frac{K_1}{v_1^2} (\zeta_3 + \zeta_2^*) + \zeta_{22} = 0$$

et en effectuant la somme membre à membre :

$$\text{(II}_{4,4} \text{ bis)} \quad \omega^2 \frac{K_1^* K_2}{v_2^2} \zeta_{11}^{1*} + \omega^2 \frac{K_2}{v_2^2} (\zeta_3 + \zeta_2^*) + \zeta_{22} = 0$$

En éliminant dans les équations (II<sub>4,2</sub>) et (II<sub>4,2 bis</sub>) les quantités :

$\left[ \frac{\omega^2}{v^2} K (\zeta_3 + \zeta_2^*) + \zeta_{22} \right]$  calculées à l'aide des équations (II<sub>4,4</sub>) et (II<sub>4,4 bis</sub>), l'on obtient :

$$\begin{array}{l}
 (\text{II}_{4,5}) \\
 (\text{II}_{4,5 \text{ bis}})
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 K_1 K_1^* (\zeta_{11}^1 - \zeta_{11}^{1*}) + (K_1 K_2^* \zeta_{11}^{2*} - K_1^* K_2 \zeta_{11}^2) = 0 \\
 K_2 K_2^* (\zeta_{11}^2 - \zeta_{11}^{2*}) + (K_1^* K_2 \zeta_{11}^{1*} - K_1 K_2^* \zeta_{11}^1) = 0
 \end{array} \right.$$

Les ensembles d'équations :

- II 4,1 ; 2 ; 2 bis ; 3
- II 4,2 ; 2 bis ; 4,4 bis
- II 4,4 ; 4 bis ; 5 ; 5 bis

sont équivalents et forment chacun un ensemble nécessaire et suffisant de conditions.

III - RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

III.1. Lame taillée perpendiculairement à l'axe optique.

Pour les ondes perpendiculaires à l'axe optique, les vibrations privilégiées sont des vibrations circulaires inverses.

L'indice 1 est attribué à la vibration droite ;

L'indice 2 est attribué à la vibration gauche, soit :

$$K_1 = -\frac{v_1}{\omega} \quad K_2 = +\frac{v_2}{\omega}$$

Les éléments de la matrice  $[\zeta]$  sont, pour  $\theta = 0$ :

$$\zeta_{11} = \zeta_{22} = \varepsilon_1 ; \zeta_3 = \zeta_2 = \gamma_1.$$

En posant  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + j \varepsilon_1''$  et  $\gamma_1 = \gamma_1' + j \gamma_1''$ , la relation (II<sub>4,1</sub>) devient :

$$(v_2 - v_1) \varepsilon_1' + 2\omega \gamma_1' - j (v_1 + v_2) \varepsilon_1'' = 0,$$

ce qui est équivalent à :

$$(III_{1,1}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1'' = 0 \quad \text{ou} \quad \varepsilon_1 \text{ réel} \\ \text{et} \quad \gamma_1' = \frac{v_1 - v_2}{2\omega} \varepsilon_1 \end{array} \right.$$

En utilisant le vecteur champ magnétique  $\vec{H}$ , un raisonnement analogue entraîne de la même manière :

$$(III_{1,2}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \text{ réel} \\ \alpha_1' = \frac{v_1 - v_2}{2\omega} \mu_1 \end{array} \right.$$

Soit donc :

$$(III_{1,3}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \text{ réel}, \quad \mu_1 \text{ réel} \\ \mu_1 \gamma_1' = \varepsilon_1 \alpha_1' = \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{2\omega} (v_1 - v_2) \end{array} \right.$$

En outre, pour que le milieu soit parfaitement transparent, il est nécessaire que le produit  $v_1^2 v_2^2$  soit réel et positif, donc que :

$$\frac{1 - \omega^2 \alpha_1 \gamma_1}{\epsilon_1 \mu_1} \quad \text{soit réel (voir II}_{2,1} \text{ et II}_{2,3}\text{)}.$$

Ceci entraîne que  $\mu_1 \gamma_1'' + \epsilon_1 \alpha_1''$  doit être nul, donc que  $\epsilon_1 \alpha_1^* = \mu_1 \gamma_1$  (pour III<sub>1,3</sub>).

Nous avons donc maintenant :

$$(III_{1,4}) \quad \begin{cases} \epsilon_1, \mu_1 \text{ réels} \\ \epsilon_1 \alpha_1^* = \mu_1 \gamma_1 \end{cases}$$

Les vitesses de propagation des deux vibrations privilégiées, compte tenu de ces relations, sont :

$$(III_{1,5}) \quad v = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_1 \mu_1} - \omega^2 \frac{\gamma_1''^2}{\epsilon_1^2}} \pm \frac{\omega}{\epsilon_1} \gamma_1'$$

entraînant nécessairement  $\frac{1}{\epsilon_1 \mu_1} > \frac{\omega^2}{\epsilon_1^2} \gamma_1''^2$  pour qu'il existe des ondes progressives non atténuées.

Elles vérifient bien la condition (III<sub>1,3</sub>) :

$$(III_{1,6}) \quad \left[ \frac{\alpha_1^i}{\mu_1} = \frac{\gamma_1^i}{\epsilon_1} = \frac{v_1 - v_2}{2\omega} \right]$$

Les relations trouvées (III<sub>1,4</sub>) sont suffisantes pour que les conditions de conservation de l'énergie que nous étudions soient satisfaites pour  $\theta = 0$ . Il suffit pour le montrer de remplacer dans les équations (II<sub>4,2</sub>), (II<sub>4,2 bis</sub>) et (II<sub>4,3</sub>)

$$K_1 \text{ par } -\frac{v_1}{\omega}$$

$$K_2 \text{ par } \frac{v_2}{\omega}$$

$$\zeta_{11}, \zeta_{22} \text{ par la quantité réelle } \epsilon_1; \zeta_3 \text{ et } \zeta_2 \text{ par } \gamma_1.$$

L'étude d'une lame taillée perpendiculairement à l'axe optique, éclairée normalement d'un seul côté par une onde plane homogène, ne peut donc pas donner de renseignement supplémentaire.

L'expression de la vitesse de phase (III<sub>1,5</sub>) montre que la biréfringence circulaire pour les ondes perpendiculaires à l'axe optique est nulle si les coefficients  $\gamma_1$  [et  $\alpha_1$ ] sont nuls.

Pour que le pouvoir rotatoire pour les ondes perpendiculaires à l'axe optique ne soit pas nul, il est nécessaire dans le cadre de nos hypothèses, que les coefficients gyroélectrique et gyromagnétique  $\alpha_1$  et  $\gamma_1$  existent tous deux et soient liés par la relation :

$$\epsilon_1 \alpha_1^* = \mu_1 \gamma_1$$

Nous nous apercevons, sur l'exemple de la lame taillée perpendiculairement à l'axe optique que la réduction par symétrie n'était pas suffisante et qu'il convient d'effectuer une réduction supplémentaire pour que le milieu satisfasse le principe de conservation de l'énergie.

### III.2. - Lame taillée parallèlement à l'axe optique.

L'étude de certaines relations obtenues pour les ondes parallèles à l'axe optique ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) permet de définir deux types de solutions.

Pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , les éléments de matrice  $\mathcal{C}_{11}^1$  et  $\mathcal{C}_{11}^2$  sont égaux à  $\epsilon_1$  qui est réel.

Les conditions de conservation de l'énergie (II<sub>4,5</sub>) et (II<sub>4,5 bis</sub>) s'écrivent alors :

$$(III_{2,1}) \quad \frac{K_1}{K_2} = \frac{K_1^*}{K_2^*}, \text{ réel (si K est ni nul, ni infini).}$$

Les cas où K est nul ou infini seront étudiées au paragraphe III.6.

En remplaçant successivement  $K_1$  et  $K_2$  par leurs valeurs en fonction de la vitesse de phase [II<sub>2,6</sub> et II<sub>2,6 bis</sub>], la condition de réalité du rapport  $\frac{K_1}{K_2}$  entraîne :

$$(III_{2,2}) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{1 - \omega^2 \alpha_3 \gamma_3}{\mu_3} \quad \text{réel} \\ \frac{1 - \omega^2 \alpha_2 \gamma_2}{\epsilon_3} \quad \text{réel} \end{array} \right.$$

Un raisonnement analogue effectué à l'aide des vecteurs champs magnétiques  $\vec{H}$  donne :

$$(III_{2,2} \text{ bis}) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{1 - \omega^2 \alpha_3 \gamma_3}{\epsilon_3} \text{ réel} \\ \frac{1 - \omega^2 \alpha_2 \gamma_2}{\mu_3} \text{ réel} \end{array} \right.$$

Donc,

$$(III_{2,2} \text{ ter}) \quad \left[ \frac{\epsilon_3}{\mu_3} \text{ est réel.} \right.$$

Prenons maintenant les conditions de conservation de l'énergie (II<sub>4,4</sub>) et (II<sub>4,4</sub> bis). Elles exigent en particulier que

$$\omega^2 (\gamma_2^* + \gamma_3) \frac{K}{v^2} + \epsilon_3 \text{ soit réel.}$$

L'étude de cette condition, en exprimant la quantité K successivement à l'aide des expressions (II<sub>2,6</sub>) et (II<sub>2,6</sub> bis), montre :

$$(III_{2,3} \text{ a}) \quad \left[ \begin{array}{l} \epsilon_3 \text{ réel} \\ \mu_3 \text{ réel} \end{array} \right.$$

entraînant

$$(III_{2,3} \text{ b}) \quad \left[ \begin{array}{l} \alpha_2 \gamma_2 \text{ réel} \\ \alpha_3 \gamma_3 \text{ réel} \end{array} \right.$$

et

$$(III_{2,3} \text{ c}) \quad \left[ \begin{array}{l} \gamma_2 (\mu_3 \gamma_3 - \epsilon_3 \alpha_3^*) \text{ réel} \\ \gamma_3 (\mu_1 \gamma_2 - \epsilon_3 \alpha_2^*) \text{ réel} \\ \alpha_2 (\mu_3 \gamma_3^* - \epsilon_3 \alpha_3) \text{ réel} \\ \alpha_3 (\mu_1 \gamma_2^* - \epsilon_1 \alpha_2) \text{ réel} \end{array} \right.$$

Les quatre dernières relations se correspondent deux à deux par échange de  $\alpha$  et  $\gamma$ , et de  $\epsilon$  et  $\mu$ . Elles se déduisent l'une de l'autre en changeant les rôles des vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ .

Enfin, effectuons la différence membre à membre des conditions de conservation de l'énergie (II<sub>4,4</sub>) et (II<sub>4,4 bis</sub>) • Soit donc, pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$  :

$$\omega^2 \varepsilon_1 \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2 v_2^2} K_1^* K_2 - \omega^2 (\gamma_3 + \gamma_2) \left( \frac{K_2}{v_2^2} - \frac{K_1}{v_1^2} \right) = 0.$$

En y remplaçant K par l'expression donnée par (II<sub>2,6</sub>), cette condition est équivalente à :

$$(III_{2,3 d}) \quad \varepsilon_3 \alpha_3^* = \mu_3 \gamma_3$$

L'étude de l'ensemble des relations trouvées (III<sub>2,3 a</sub>; b; c; d) même à deux types de solutions possibles qui possèdent en commun les propriétés suivantes :

$$(III_{1,4}) \quad \begin{cases} \varepsilon_1, \mu_1 & \text{réels} \\ \varepsilon_1 \alpha_1^* & = \mu_1 \gamma_1 \end{cases}$$

$$(III_{2,3 a}) \quad \begin{cases} \varepsilon_3, \mu_3 & \text{réels} \\ \varepsilon_3 \alpha_3 & = \mu_3 \gamma_3^* \end{cases}$$

$\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2, \gamma_2, \alpha_3, \gamma_3$  peuvent être nuls.

La première des deux solutions possède la propriété suivante :

$$(III_{2,4}) \quad \varepsilon_1 \alpha_2^* = \mu_1 \gamma_2.$$

La seconde est telle que :

$$(III_{2,5}) \quad \frac{\gamma_2''}{\gamma_2'} = - \frac{\alpha_2''}{\alpha_2'} = - \frac{\gamma_3''}{\gamma_3'} = + \frac{\alpha_3''}{\alpha_3'}$$

où  $\gamma_2', \alpha_2', \gamma_3', \alpha_3'$  et  $\gamma_2'', \alpha_2'', \gamma_3'', \alpha_3''$  sont respectivement les parties réelles et imaginaires de  $\gamma_2, \alpha_2, \gamma_3, \alpha_3$ .

Il se vérifie que ces deux solutions satisfont pleinement, quel que soit  $\theta$ , les conditions de conservation de l'énergie (II<sub>4,2</sub>) et (II<sub>4,2 bis</sub>). Avec ces deux solutions, restent donc à étudier pour une lame taillée de façon quelconque, les conditions (II<sub>4,1</sub>) et (II<sub>4,3</sub>), ou bien les conditions équivalentes (II<sub>4,4</sub>) et (II<sub>4,4 bis</sub>).

III.3. - lame taillée de façon quelconque : Etude d'une première condition de conservation de l'énergie.

Avant d'aborder l'étude des conditions (II<sub>4,4</sub>) et (II<sub>4,4 bis</sub>), il est avantageux d'établir de suite que les éléments diagonaux  $\zeta_{11}$  et  $M_{11}$  des matrices représentatives des propriétés électriques  $[\zeta]$  et magnétiques  $[M]$  sont réels quel que soit  $\theta$ .

Etudions pour cela la condition nécessaire de conservation de l'énergie (II<sub>4,5</sub>). Elle s'exprime aisément de la façon suivante :

$$(III_{3,1}) \quad \frac{\zeta_{11}^2}{v_2^2} - \frac{K_1}{K_2} \zeta_{11}^1 \text{ réel}$$

ou, en écrivant  $\zeta_{11} = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_{11}}{v^2}$ ,

$$(III_{3,1 \text{ bis}}) \quad \varepsilon_{11} \left[ 1 - \frac{v_2^2 K_1}{v_1^2 K_2} \right] - v_2^2 \frac{K_1}{K_2} \varepsilon_1 \text{ réel,}$$

qui entraîne en exprimant les quantités  $K_1$  et  $K_2$  à l'aide de l'expression (II<sub>2,5</sub>):

$$(III_{3,1 \text{ ter}}) \quad \varepsilon_{11} \left[ 1 - \omega^2 \zeta_3^* M_3^* \right] + \omega^2 \varepsilon_1 v_1^2 \zeta_3 M_3 \text{ réel.}$$

Les relations  $\varepsilon_1 \alpha_1^* = \mu_1 \gamma_1$ ,  $\varepsilon_3 \alpha_3^* = \mu_3 \gamma_3$  font que la quantité  $\zeta_3 M_3$  est réelle quel que soit  $\theta$ .

Il faut donc que l'élément  $\varepsilon_{11}$  soit réel, ou :

$$(III_{3,2}) \quad \begin{cases} (\gamma_1 + \gamma_2) (\gamma_1 + \gamma_3) , \text{ ou } \zeta_{11} \text{ réel} \\ (\alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_1 + \alpha_3) , \text{ ou } M_{11} \text{ réel} \end{cases}$$

Remarquons que ceci entraîne que :

$$(III_{3,3}) \quad \left[ \frac{K_1}{K_2} \right] \text{ et } K_1^* K_2 \text{ sont réels quel que soit } \theta$$

La différence membre à membre des conditions (II<sub>4,4</sub>) et (II<sub>4,4 bis</sub>) est :

$$(III_{3,4}) \quad \omega^2 \varepsilon_1 \left[ \frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2} \right] + \omega^2 (\zeta_3 + \zeta_2^*) \left[ \frac{1}{v_2^2 K_1^*} - \frac{1}{v_1^2 K_2^*} \right] = 0$$

ce qui, en exprimant  $K_1$  et  $K_2$  à l'aide de l'expression (II<sub>2,5</sub>) entraîne :

$$(III_{3,5}) \quad \zeta_{22} M_3^* = M_{22} \zeta_3,$$

qui est vérifiée quel que soit  $\theta$  du fait des relations  $\varepsilon_1 \alpha_1 = \mu_1 \gamma_1^*$  et  $\varepsilon_3 \alpha_3 = \mu_3 \gamma_3^*$ .

III.4. - Direction de propagation quelconque : calcul d'une dernière condition.

L'étude d'une lame taillée perpendiculairement à l'axe optique a permis d'établir que :

$$(III_{1,4}) \quad \left[ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \text{ et } \mu_1 \text{ sont réels} \\ \text{et que } \varepsilon_1 \alpha_1^* = \mu_1 \gamma_1 \end{array} \right]$$

L'étude d'une lame taillée parallèlement à l'axe optique a conduit à la propriété suivante :

$$(III_{2,3} a) \quad \left[ \begin{array}{l} \varepsilon_3, \mu_3 \text{ réels} \\ \varepsilon_3 \alpha_3^* = \mu_3 \gamma_3 \end{array} \right]$$

$$(III_{2,3} d)$$

et a dégagé les deux types de solutions définis par :

$$(III_{2,4}) \quad \left[ \varepsilon_1 \alpha_2^* = \mu_1 \gamma_2 \right]$$

et

$$(III_{2,5}) \quad \left[ \frac{\gamma_2''}{\gamma_2'} = - \frac{\alpha_2''}{\alpha_2'} = - \frac{\gamma_3''}{\gamma_3'} = \frac{\alpha_3''}{\alpha_3'} \right]$$

Deux des quatre relations nécessaires et suffisantes de conservation de l'énergie [(II<sub>4,2</sub>) et (II<sub>4,2</sub> bis)] sont alors satisfaites quelle que soit la direction de propagation.

Il a été démontré au paragraphe (III.3.) que les quantités :

$$(III_{3,2}) \quad \left[ \begin{array}{l} (\gamma_1 + \gamma_2) (\gamma_1 + \gamma_3) \\ \text{et } (\alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_1 + \alpha_3) \end{array} \right] \text{ sont réelles,}$$

et que la condition résultant de la différence membre à membre des conditions (II<sub>4,4</sub>) et (II<sub>4,4 bis</sub>) est satisfaite quelle que soit la direction de propagation des ondes.

Reste donc à étudier une combinaison indépendante de celle citée ci-dessus des conditions (II<sub>4,4</sub>) et (II<sub>4,4 bis</sub>).

Nous étudierons la combinaison :

$$(III_{4,1}) \quad \begin{aligned} & v_1^2 \left[ \omega^2 \frac{K_1 K_2^*}{v_1^2} \zeta_{11}^{2*} + \omega^2 \frac{K_1}{v_1^2} (\zeta_3 + \zeta_2^*) + \zeta_{22} \right] \\ & - v_2^2 \left[ \omega^2 \frac{K_1^* K_2}{v_2^2} \zeta_{11}^{1*} + \omega^2 \frac{K_2}{v_2^2} (\zeta_3 + \zeta_2^*) + \zeta_{22} \right] \\ & = 0 \quad , \end{aligned}$$

qui se ramène à :

$$(III_{4,2}) \quad \omega^2 (1 - \omega^2 \zeta_3 M_3) + \zeta_{22} M_{22} \frac{v_1^2 v_2^2}{K_1^* K_2} = 0 .$$

### III.5. - L'étude de cette dernière condition de conservation de l'énergie conduit à deux solutions.

L'étude, faite par une lame taillée parallèlement à l'axe optique, de la condition de conservation de l'énergie (III<sub>4,2</sub>) conduit à :

$$(\gamma_2 + \gamma_3^*) (\mu_1 \gamma_2^* - \epsilon_1 \alpha_2) = 0 ,$$

ce qui entraîne :

$$(III_{5,1}) \quad \epsilon_1 \alpha_2^* = \mu_1 \gamma_2$$

[La condition  $\gamma_2 + \gamma_3^* = 0$  rend nulle la quantité K et sera discutée au paragraphe III.6.]

La relation  $\epsilon_1 \alpha_2^* = \mu_1 \gamma_2$  que nous venons d'établir montre que la solution (III<sub>2,5</sub>) est un cas particulier de la solution (III<sub>2,4</sub>).

C'est uniquement avec cette dernière solution que nous devons étudier pour une direction de propagation quelconque l'équation :

$$(III_{4,2}) \quad \omega^2 (1 - \omega^2 \zeta_3 M_3) + \zeta_{22} M_{22} \frac{v_1^2 v_2^2}{K_1^* K_2} = 0$$

Cette condition devient, en développant les quantités  $K_1$  et  $K_2$  :

$$(III_{5,2}) \quad \left[ \begin{array}{l} \omega^2 M_{22} (\zeta_2 + \zeta_3^*) (\zeta_2^* + \zeta_3) (1 - \omega^2 \zeta_3 M_3) \\ + \zeta_{22} (1 - \omega^2 \zeta_3 M_3 - M_{22} \epsilon_{11})^2 \\ - \zeta_{22} M_{22} \epsilon_1 (v_1^2 + v_2^2) (1 - \omega^2 \zeta_3 M_3 - M_{22} \epsilon_{11}) \\ + \zeta_{22} M_{22} \epsilon_1^2 v_1^2 v_2^2 = 0. \end{array} \right.$$

La somme et le produit des carrés des vitesses s'expriment en fonction du paramètre  $\theta$  par les coefficients de l'équation aux vitesses de phase des ondes privilégiées (II<sub>2,3</sub>).

Les coefficients  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  peuvent être remplacés par leurs expressions :

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1}{\epsilon_1} \gamma_1^*$$

$$\alpha_2 = \frac{\mu_1}{\epsilon_1} \gamma_2^*$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\epsilon_3} \gamma_3^*$$

L'équation (III<sub>5,2</sub>) se met alors sous la forme :

$$(II_{5,3}) \quad \frac{\omega^2 \mu_1 \mu_3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(\epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_3 \cos^2 \theta)^2 (\mu_1 \sin^2 \theta + \mu_3 \cos^2 \theta)^2} (\epsilon_1 \mu_3 - \epsilon_3 \mu_1) \left\{ (\gamma_2^* + \gamma_3) (\gamma_1 + \gamma_2) \sin^2 \theta + (\gamma_1 + \gamma_1^*) (\gamma_1^* + \gamma_2^*) \cos^2 \theta \right\} = 0.$$

Pour que cette condition soit vérifiée quelle que soit la direction de l'axe optique par rapport à la normale à la lame, il faut :

$$\text{Soit } \left| \begin{array}{l} (\gamma_2^* + \gamma_3) = 0 \text{ et } (\gamma_1 + \gamma_1^*) = 0 \\ \epsilon_1 \mu_3 = \epsilon_3 \mu_1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 0. \end{array} \right.$$

Dans la première éventualité, la quantité K est nulle pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ; l'une des vibrations privilégiées est une vibration rectiligne parallèle à l'axe optique. Ce cas fait l'objet d'une étude séparée (paragraphe III.6.).

La seconde possibilité est telle que :

$$(III_{5,4}) \quad \left[ \begin{array}{l} \varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_3, \mu_3 \text{ réels} \\ \frac{\varepsilon_1}{\mu_1} = \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2^*} = \frac{\gamma_3}{\alpha_3^*} = \frac{\gamma_1}{\alpha_1^*} \\ (\gamma_1 + \gamma_2) (\gamma_1 + \gamma_3) \text{ réel,} \end{array} \right.$$

La troisième est telle que :

$$(III_{5,5}) \quad \left[ \begin{array}{l} \varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_3, \mu_3 \text{ réels} \\ \frac{\varepsilon_1}{\mu_1} = \frac{\gamma_1}{\alpha_1^*} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2^*} \\ \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} = \frac{\gamma_3}{\alpha_3^*} \\ \gamma_2 = -\gamma_1, \alpha_2 = -\alpha_1 \end{array} \right.$$

### III.6. - Cas particuliers de vibrations privilégiées rectilignes parallèles ou perpendiculaires à la projection de l'axe optique sur le plan d'onde.

Les formules étudiées aux paragraphes précédents font figurer les quantités K et  $\frac{1}{K}$ . Nous avons dû supposer que les vibrations privilégiées n'étaient pas des vibrations rectilignes parallèles ou perpendiculaires à la projection de l'axe optique sur le plan d'onde pour éliminer les cas où la quantité K est nulle ou infinie.

Si l'on abandonne cette hypothèse restrictive, aucune solution supplémentaire n'apparaît.

En effet, pour les ondes parallèles à l'axe optique, l'on peut montrer que si l'une des vibrations privilégiées est une vibration rectiligne parallèle à l'axe optique, l'autre est une vibration rectiligne qui lui est perpendiculaire, et réciproquement.

Ceci mène :

- Soit à un milieu totalement inactif où tous les coefficients  $\alpha$  et  $\gamma$  sont nuls.

- Soit à un milieu où :

$$\frac{\epsilon_1}{\mu_1} = \frac{\epsilon_3}{\mu_3} = \frac{\gamma_1}{\alpha_1^*} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2^*} = \frac{\gamma_3}{\alpha_3^*}$$

avec  $\epsilon_1, \epsilon_3, \mu_1, \mu_3$  réels  
 et  $\gamma_2 = -\gamma_3^*$   
 $\alpha_2 = -\alpha_3^*$

Ces solutions sont des cas particuliers de celles définies précédemment qui contiennent donc toutes les solutions du problème.

III.7. - Les faits expérimentaux ne permettent de retenir qu'une seule des deux solutions.

Considérons la première solution, définie par les relations :

$$(III_{5,4}) \quad \left[ \begin{array}{l} \epsilon_1, \mu_1, \epsilon_3, \mu_3 \text{ réels} \\ \frac{\epsilon_1}{\mu_1} = \frac{\epsilon_3}{\mu_3} = \frac{\gamma_1}{\alpha_1^*} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2^*} = \frac{\gamma_3}{\alpha_3^*} \\ (\gamma_1 + \gamma_2) (\gamma_1 + \gamma_3) \text{ réel} \end{array} \right.$$

- Si tous les coefficients  $\alpha$  et  $\gamma$  sont nuls, les deux vitesses de phase des ondes privilégiées sont égales et telles que :

$$v_1^2 = v_2^2 = \frac{1}{\epsilon_1 \mu_1} (\sin^2 \theta + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} \cos^2 \theta) = \frac{1}{\epsilon_1 \mu_1} (\sin^2 \theta + \frac{\mu_1}{\mu_3} \cos^2 \theta)$$

Il n'y a pas de biréfringence, l'état de polarisation des vibrations est indéterminé quelle que soit la direction de propagation.

- Si les quantités  $\gamma_2 + \gamma_3^*$  et  $\alpha_2 + \alpha_3^*$  sont nulles, les vitesses de phase des ondes privilégiées sont égales pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Pour les ondes parallèles à l'axe optique les vibrations privilégiées sont indéterminées, il n'y a pas de biréfringence.

- Considérons maintenant un milieu où les coefficients gyroélectriques et gyromagnétiques sont non nuls et sont tels que :  $\gamma_2 + \gamma_3^* \neq 0$   
 $\alpha_2 + \alpha_3^* \neq 0$ .

Admettons, conformément à ce qui a toujours été observé dans les milieux uniaxes actifs, que les vibrations privilégiées des ondes parallèles à l'axe optique sont sensiblement rectilignes (carbonate de guanidine [17], quartz [36, 37]).

Dans cette hypothèse, l'on peut calculer que pour les ondes parallèles à l'axe optique, le produit :

$$\frac{E_x E_x^*}{E_y E_y^*} \text{ qui est peu différent de } \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} \text{ et de } \frac{\mu_3}{\mu_1}.$$

Ceci entraîne que les vibrations privilégiées sont des vibrations elliptiques inscrites dans un rectangle de côtés proportionnels à  $\sqrt{\epsilon_1}$ , et  $\sqrt{\epsilon_3}$ .

La figure 3 représente, au sens de parcours près, les vibrations de ce type.

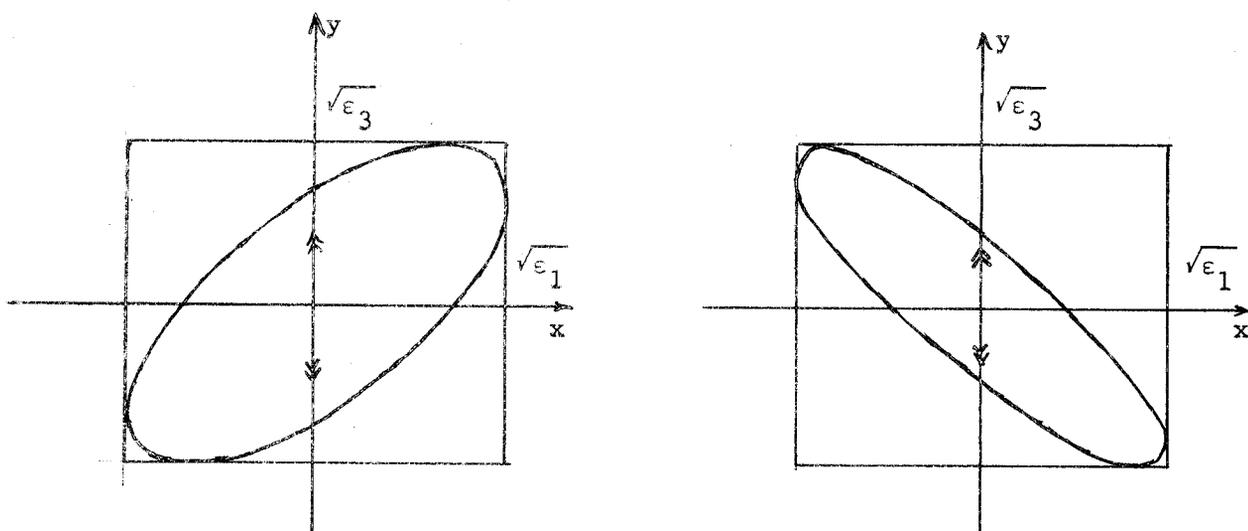


Figure 3 : Vibrations elliptiques inscrites dans un rectangle de côtés  $\sqrt{\epsilon_3}$  et  $\sqrt{\epsilon_1}$ .

Pour les ondes parallèles à l'axe optique, nous avons donc soit deux vibrations qui diffèrent peu l'une de l'autre au sens de parcours près (figure 4 a),

soit deux vibrations presque symétriques par rapport aux axes de référence (figure 4 b).

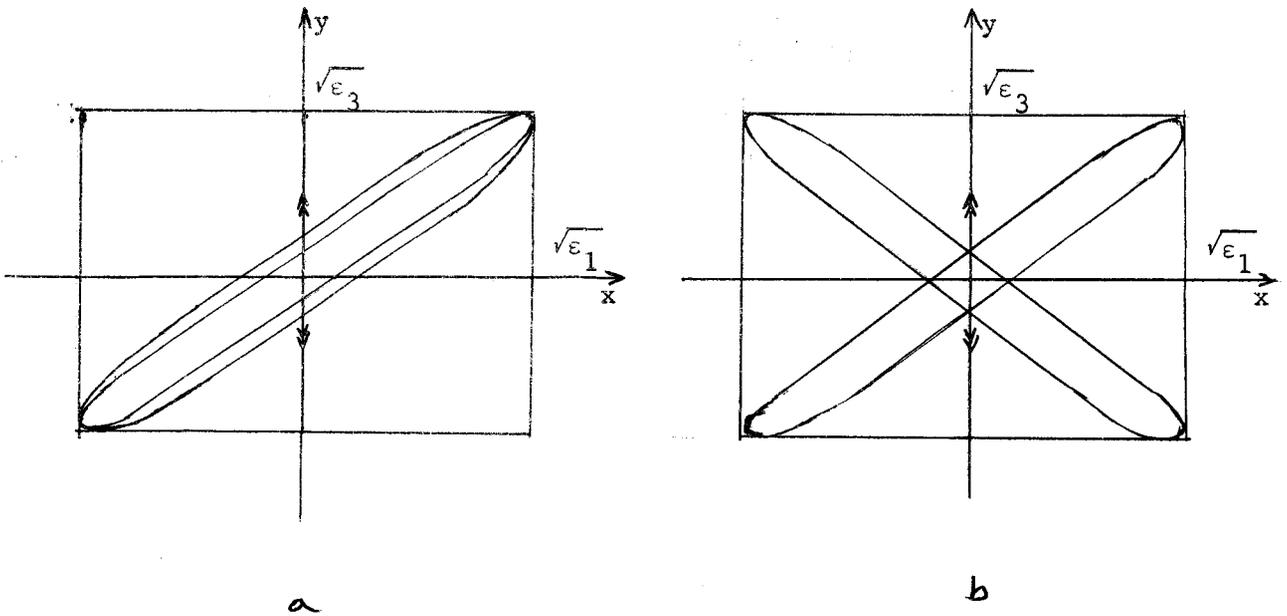


Figure 4 : Vibrations quasi-rectilignes inscrites dans un rectangle de côtés  $\sqrt{\epsilon_3}$  et  $\sqrt{\epsilon_1}$ .

La première solution (III<sub>5,4</sub>) ne peut donc en aucun cas rendre compte, pour les ondes parallèles à l'axe optique, d'une biréfringence quasi-rectiligne où les vibrations privilégiées sont sensiblement, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à l'axe optique. Elle est en contradiction avec l'expérience [17].

Examinons maintenant la deuxième solution.

Compte tenu des relations :

$$\left[ \begin{array}{l} \epsilon_1 \alpha_1 = \mu_1 \gamma_1^* \\ \alpha_2 = -\alpha_1, \gamma_2 = -\gamma_1 \\ \epsilon_3 \alpha_3 = \mu_3 \gamma_3^* \\ \epsilon_1, \epsilon_3, \mu_1, \mu_3 \text{ réels,} \end{array} \right.$$

cette solution est telle que le rapport  $\frac{E_x}{E_y}$  est égal à :

$$(III_{7,1}) \quad \frac{E_x}{E_y} = -j \frac{\omega}{v} K(v^2) = -j \frac{\omega}{v} \frac{M_{22} (\gamma_1 + \zeta_3^*)}{\frac{1}{v^2} (1 - \omega^2 \zeta_3 M_3) - \epsilon_1 M_{22}}$$

$$(III_{7,1} \text{ bis}) \quad \text{ou} \quad \frac{E_x}{E_y} = -j \frac{\omega}{v} K(v^2) = -j \frac{v}{\omega} \frac{\frac{1}{v^2} (1 - \omega^2 \alpha_1 \gamma_1) - \mu_1 \zeta_{22}}{\mu_1 (\gamma_1^* + \zeta_3)}$$

Les éléments des matrices  $[\zeta]$  et  $[M]$  sont tels que :

$$(III_{7,2}) \quad \begin{cases} \zeta_{11} = \epsilon_1, M_{11} = \mu_1, \\ \zeta_2 = \gamma_1, M_2 = \alpha_1 = \frac{\mu_1 \gamma_1^*}{\epsilon_1} \\ M_{22} \zeta_3^* = \zeta_{22} M_3 \end{cases}$$

L'équation aux vitesses de phase des ondes privilégiées devient :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon_1^2 \mu_1^2 v^4} \left[ 1 - \omega^2 \frac{\mu_1}{\epsilon_1} \gamma_1 \gamma_1^* \right] \left[ \left( \cos^2 \theta + \frac{\mu_1}{\mu_3} \sin^2 \theta \right) \left( \cos^2 \theta + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} \sin^2 \theta \right) \dots \right. \\ & \quad \left. \dots - \omega^2 \left\| \frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \cos^2 \theta - \frac{\gamma_3}{\epsilon_3} \sin^2 \theta \right\|^2 \epsilon_1 \mu_1 \right] \\ & - \frac{1}{\epsilon_1 \mu_1 v^2} \left[ \left( \cos^2 \theta + \frac{\mu_1}{\mu_3} \sin^2 \theta \right) + \left( \cos^2 \theta + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} \sin^2 \theta \right) + 2 \omega^2 \mu_1 \epsilon_1 \text{ p.r. } \dots \right. \\ & \quad \left. \dots \left( \frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \left( \frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \cos^2 \theta - \frac{\gamma_3}{\epsilon_3} \sin^2 \theta \right) \right) \right] \\ & + 1 = 0. \end{aligned} \right.$$

L'impossibilité de la solution  $(III_{5,4})$  résulte de l'égalité des quantités  $\epsilon_1 \mu_3$  et  $\mu_1 \epsilon_3$ .

La solution que nous étudions maintenant ne comporte plus cette égalité.

Dans la mesure où les termes gyroélectriques et gyromagnétiques sont faibles, de tels milieux sont donc en première approximation, peu différents des milieux uniaxes inactifs.

Dans cette hypothèse, nous retrouvons une biréfringence quasi-rectiligne sauf quand la direction de propagation est proche de l'axe optique, situation pour laquelle, l'anisotropie diélectrique et magnétique devenant nulle, le pouvoir rotatoire subsiste seul, et les vibrations privilégiées deviennent circulaires.

Dans cette hypothèse, il est évident que le rapport de la différence des indices ordinaire et extraordinaire des ondes parallèles à l'axe optique, à la différence des indices de propagation de l'onde circulaire droite et de l'onde circulaire gauche doit être grand,

$$\text{soit : } \left| \frac{n_o - n_e}{n_d - n_g} \right| \gg 1.$$

Ce rapport a été calculé par J. BILLARD [9] pour de nombreux corps. Les résultats qu'il a trouvés pour le carbonate de guanidine (classe de symétrie 422) sont :

$$\left| \frac{n_o - n_e}{n_g - n_d} \right| = \begin{array}{ll} 206 & \text{pour une lumière de longueur d'onde } \lambda = 535 \text{ nm,} \\ 208 & \text{_____} \lambda = 589,3 \text{ nm,} \\ 222 & \text{_____} \lambda = 671 \text{ nm.} \end{array}$$

Les solutions définies par les relations (III<sub>5,5</sub>) peuvent donc être en bon accord avec des faits expérimentaux.

IV - LAME TAILLEE DANS UN MILIEU UNIAXE ACTIF ECLAIREE NORMALEMENT  
DES DEUX CÔTES.

IV.1. - Mise en équation des conditions de conservation de l'énergie.

Nous éclairons maintenant sous l'incidence normale une lame, d'un côté par une onde dont le champ électrique est  $a \vec{E}_{ia}$ , et de l'autre côté par une onde dont le champ électrique est  $b \vec{E}_{ib}$ .

Les ondes qui se propagent dans la lame et dans le milieu d'immersion sont la somme d'un système d'ondes créé par  $a \vec{E}_{ia}$ , auquel sera attribué un indice  $a$ , et d'un système d'ondes créé par  $b \vec{E}_{ib}$  (indice  $b$ ).

Le trièdre de référence est celui utilisé précédemment.

Les vecteurs :

$$a \vec{E}_{ia} \exp j \omega \left( t - \frac{z}{v_0} \right) \quad (z \leq 0)$$

$$b \vec{E}_{ib} \exp j \omega \left( t + \frac{z - e}{v_0} \right) \quad (z \geq e)$$

$$a \vec{E}_{ra} \exp j \omega \left( t + \frac{z}{v_0} \right) \quad (z \leq 0)$$

$$b \vec{E}_{rb} \exp j \omega \left( t - \frac{z - e}{v_0} \right) \quad (z \geq e)$$

$$a \vec{E}_{ta} \exp j \omega \left( t - \frac{z - e}{v_0} \right) \quad (z \geq e)$$

$$b \vec{E}_{tb} \exp j \omega \left( t + \frac{z}{v_0} \right) \quad (z \leq 0)$$

sont les champs électriques des ondes incidentes, réfléchies et transmises.

Les vecteurs :

$$\left. \begin{aligned} &a \vec{E}_{1'a} \exp j \omega \left( t - \frac{z}{v_0} \right), \\ &a \vec{E}_{2'a} \exp j \omega \left( t - \frac{z}{v_0} \right), \\ &a \vec{E}_{1''a} \exp j \omega \left( t - \frac{z}{v_0} \right), \\ &a \vec{E}_{2''a} \exp j \omega \left( t - \frac{z}{v_0} \right), \end{aligned} \right\} 0 \leq z \leq e$$

$$\left. \begin{aligned} b \vec{E}_{1'b} \exp j \omega \left( t - \frac{z}{v_0} \right), \\ b \vec{E}_{2'b} \exp j \omega \left( t - \frac{z}{v_0} \right), \\ b \vec{E}_{1''b} \exp j \omega \left( t - \frac{z}{v_0} \right), \\ b \vec{E}_{2''b} \exp j \omega \left( t - \frac{z}{v_0} \right), \end{aligned} \right\} 0 \leq z \leq e$$

sont les composantes transversales des champs électriques qui se propagent à l'intérieur de la lame.

Les vecteurs champs magnétiques  $\vec{H}$  sont exprimés de façon analogue aux vecteurs champs électriques.

Les amplitudes des ondes  $\vec{E}_{ra}$ ,  $\vec{E}_{ta}$ ,  $\vec{E}_{1'a}$ ,  $\vec{E}_{2'a}$ ,  $\vec{E}_{1''a}$ ,  $\vec{E}_{2''a}$  se calculent à l'aide des équations de continuité aux dioptries  $(I_{2,1})$ ;  $(I_{2,2})$ ;  $(I_{2,3})$ ;  $(I_{2,4})$ .

Les amplitudes des ondes  $\vec{E}_{rb}$ ,  $\vec{E}_{tb}$ ,  $\vec{E}_{1'b}$ ,  $\vec{E}_{2'b}$ ,  $\vec{E}_{1''b}$ ,  $\vec{E}_{2''b}$  sont solutions des équations de continuité suivantes :

$$\begin{aligned} 2 \vec{E}_{ib} &= \left[ 1 - \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_1'] \right] \exp(-j \frac{\omega e}{v_1}) \vec{E}_{ib} + \left[ 1 - \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_2'] \right] \exp(-j \frac{\omega e}{v_2}) \vec{E}_{2'b} \\ &+ \left[ 1 + \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_1''] \right] \exp(j \frac{\omega e}{v_1}) \vec{E}_{1''b} + \left[ 1 + \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_2''] \right] \exp(j \frac{\omega e}{v_2}) \vec{E}_{2''b} \end{aligned} \quad (IV_{1,1})$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ 1 + \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_1'] \right] \vec{E}_{1'b} + \left[ 1 + \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_2'] \right] \vec{E}_{2'b} \\ &+ \left[ 1 - \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_1''] \right] \vec{E}_{1''b} + \left[ 1 - \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_2''] \right] \vec{E}_{2''b} \end{aligned} \quad (IV_{1,2})$$

$$\begin{aligned} 2 \vec{E}_{tb} &= \left[ 1 - \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_1'] \right] \vec{E}_{1'b} + \left[ 1 - \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_2'] \right] \vec{E}_{2'b} \\ &+ \left[ 1 + \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_1''] \right] \vec{E}_{1''b} + \left[ 1 + \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\gamma_2''] \right] \vec{E}_{2''b} \end{aligned} \quad (IV_{1,3})$$

$$(IV_{1,4}) \quad 2 \vec{E}_{rb} = \left[ 1 + \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_1'] \right] \exp\left(-j \frac{\omega}{v_1} \vec{E}_{1'b}\right) + \left[ 1 + \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_2'] \right] \exp\left(-j \frac{\omega}{v_2} \vec{E}_{2'b}\right) \\ + \left[ 1 - \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_1''] \right] \exp\left(j \frac{\omega}{v_1} \vec{E}_{1''b}\right) + \left[ 1 - \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} [\zeta_2''] \right] \exp\left(j \frac{\omega}{v_2} \vec{E}_{2''b}\right)$$

Le flux moyen d'énergie entrant dans la lame est :

$$(IV_{1,5}) \quad \epsilon_0 v_0 \left\{ \begin{aligned} & aa^* \vec{E}_{ia} \cdot \vec{E}_{ia} + bb^* \vec{E}_{ib} \cdot \vec{E}_{ib} \\ & - \left[ a \vec{E}_{ra} + b \vec{E}_{tb} \right]^+ \cdot \left[ a \vec{E}_{ra} + b \vec{E}_{tb} \right] \\ & - \left[ a \vec{E}_{ta} + b \vec{E}_{rb} \right]^+ \cdot \left[ a \vec{E}_{ta} + b \vec{E}_{rb} \right] \end{aligned} \right\} \\ \text{ou} \\ \epsilon_0 v_0 \left\{ \begin{aligned} & aa^* \left[ \vec{E}_{ia} \cdot \vec{E}_{ia} - \vec{E}_{ra} \cdot \vec{E}_{ra} - \vec{E}_{ta} \cdot \vec{E}_{ta} \right] \\ & + bb^* \left[ \vec{E}_{ib} \cdot \vec{E}_{ib} - \vec{E}_{rb} \cdot \vec{E}_{rb} - \vec{E}_{tb} \cdot \vec{E}_{tb} \right] \\ & + a^* b \left[ \vec{E}_{ra} \cdot \vec{E}_{tb} + \vec{E}_{ta} \cdot \vec{E}_{rb} \right] \\ & + a b^* \left[ \vec{E}_{tb} \cdot \vec{E}_{ra} + \vec{E}_{rb} \cdot \vec{E}_{ta} \right] \end{aligned} \right\}$$

Cette dernière expression est la somme :

- du flux d'énergie correspondant à une onde incidente  $a \vec{E}_{ia}$  seule ;
- du flux d'énergie correspondant à une onde incidente  $b \vec{E}_{ib}$  seule ;
- et d'un flux d'énergie de couplage entre les deux éclairages  $a \vec{E}_{ia}$  et  $b \vec{E}_{ib}$ .

Si le milieu est parfaitement transparent, les deux premiers termes sont nuls si les relations concernant l'éclairage d'un seul côté sont vérifiées.

Pour que l'énergie soit conservée quand l'on éclaire des deux côtés de la lame, il faut et suffit donc que l'énergie de couplage soit nulle, ce qui s'écrit :

$$(IV_{1,6}) \quad \text{p.r. } a^* b \left[ \vec{E}_{ra} \cdot \vec{E}_{tb} + \vec{E}_{ta} \cdot \vec{E}_{rb} \right] = 0$$

Comme il est possible de déphaser à volonté l'onde a  $\vec{E}_{ia}$  par rapport à l'onde b  $\vec{E}_{ib}$ , en faisant varier l'argument de b/a, cette équation entraîne :

$$(IV_{1,6 \text{ bis}}) \quad \vec{E}_{ra}^+ \cdot \vec{E}_{tb} + \vec{E}_{ta}^+ \cdot \vec{E}_{rb} = 0.$$

Si l'on tient compte des relations particulières aux milieux qui nous intéressent, soient :

$$\vec{E}_p^+ \left[ v_p [\zeta_p]^+ + v_q [\zeta_q] \right] \vec{E}_q = 0,$$

l'équation qui rend nulle l'énergie de couplage (IV<sub>1,6</sub>), développée à l'aide des relations (I<sub>2,1</sub>); (I<sub>2,2</sub>); (I<sub>2,3</sub>); (I<sub>2,4</sub>); (IV<sub>1,1</sub>); (IV<sub>1,2</sub>); (IV<sub>1,3</sub>); (IV<sub>1,4</sub>), donne la condition nécessaire et suffisante de conservation de l'énergie suivante :

$$(IV_{1,7}) \quad \sum_{\ell} \sum_k \left[ 1 + \exp - j \omega \epsilon \left[ \frac{1}{v_{\ell}} - \frac{1}{v_k} \right] \right] \vec{E}_{\ell a}^+ \left[ 1 + \frac{v_{\ell} v_k}{\epsilon_o^2 v_o^2} [\zeta_{\ell}]^+ [\zeta_k] \right] \vec{E}_{kb} = 0,$$

ou, en posant :

$$\vec{E} = E_y \begin{bmatrix} -j \frac{\omega}{v} K \\ 1 \end{bmatrix} = E_y \vec{V}$$

$$(IV_{1,7 \text{ bis}}) \quad \sum_{\ell} \sum_k \left[ 1 + \exp - j \omega \epsilon \left[ \frac{1}{v_{\ell}} - \frac{1}{v_k} \right] \right] E_{ya\ell}^* E_{ybk} \vec{V}_{\ell}^+ \left[ 1 + \frac{v_{\ell} v_k}{\epsilon_o^2 v_o^2} [\zeta_{\ell}]^+ [\zeta_k] \right] \vec{V}_k = 0.$$

Les composantes complexes  $E_{ya\ell}$  sont égales à :  $E_{ya1'}$ ,  $E_{ya2'}$ ,  $E_{ya1''}$ ,  $E_{ya2''}$ , et les composantes  $E_{ybk}$  à :  $E_{yb1'}$ ,  $E_{yb2'}$ ,  $E_{yb1''}$ ,  $E_{yb2''}$ .

L'équation (IV<sub>1,7 bis</sub>) peut encore être écrite :

$$(IV_{1,7 \text{ ter}}) \quad \vec{A}^+ [Q] \vec{B} = 0.$$

où les vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont les colonnes :

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} E_{ya1'} \\ E_{ya2'} \\ E_{ya1''} \\ E_{ya2''} \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} E_{yb1'} \\ E_{yb1''} \\ E_{yb1''} \\ E_{yb2''} \end{bmatrix}$$

et où la matrice  $[Q]$  est une matrice dont l'élément d'indices  $\ell$  et  $k$  est :

$$Q_{\ell k} = \left[ 1 + \exp j\omega \epsilon \left[ \frac{1}{v_\ell} - \frac{1}{v_k} \right] \right] \vec{V}_\ell^+ \left[ 1 + \frac{v_\ell v_k}{\epsilon_o^2 v_o^2} [\zeta_\ell]^+ [\zeta_k] \right] \vec{V}_k$$

Les éléments  $Q_{\ell k}$  et  $Q_{k\ell}$  sont complexes conjugués, la matrice  $[Q]$  est donc hermitique.

Les équations  $(I_{1,1})$  ;  $(I_{2,2})$  et  $(IV_{1,1})$  ;  $(IV_{1,2})$  permettent de calculer les composantes  $E_{yal}$  et  $E_{ybk}$  des ondes qui se propagent dans la lame. Ce sont des équations linéaires qui se mettent aisément sous la forme :

$$[N] \vec{A} = \begin{bmatrix} E_{iax} \\ E_{iax} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et :

$$[N] \vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{ibx} \\ E_{iby} \end{bmatrix}$$

A l'aide de ces relations, en posant :

$$[L] = [N]^{-1} ,$$

la condition de conservation de l'énergie  $(IV_{1,7} \text{ ter})$  s'écrit, en fonction des ondes incidentes :

$$(IV_{1,8}) \quad \left. \begin{bmatrix} \vec{E}_{ia^+} \\ \vec{O} \end{bmatrix} [S] \begin{bmatrix} \vec{O} \\ \vec{E}_{ib} \end{bmatrix} \right\} = 0$$

avec  $[S] = [L]^+ [Q] [L]$

La matrice  $[S]$  à quatre lignes et quatre colonnes est découpée en quatre sous matrices à deux lignes et deux colonnes de la façon suivante :

$$[S] = \left[ \begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline S_3 & S_4 \end{array} \right] .$$

Pour que la condition (IV<sub>1,8</sub>) soit satisfaite quels que soient l'état de polarisation de  $\vec{E}_{ia}$  et celui de  $\vec{E}_{ib}$ , il faut et suffit que :

$$(IV_{1,9}) \quad [S_2] = 0.$$

Pour calculer  $[S_2]$ , il peut être avantageux d'écrire  $[S]$  de la façon suivante :

$$[S] = [L']^+ [Q'] [L']$$

$$\text{avec } [L'] = \begin{bmatrix} \exp - j \frac{\omega e}{2 v_1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \exp - j \frac{\omega e}{2 v_2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \exp j \frac{\omega e}{2 v_2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \exp - j \frac{\omega e}{2 v_2} \end{bmatrix} \quad [L]$$

$$\text{avec } Q'_{\ell k} = \cos \frac{\omega e}{2} \left[ \frac{1}{v_\ell} - \frac{1}{v_k} \right] \vec{V}_\ell^+ \left[ 1 + \frac{v_\ell v_k}{\epsilon_0^2 v_0^2} \begin{bmatrix} \gamma_\ell^+ \\ \gamma_k \end{bmatrix} \right] \vec{V}_k$$

$[L']$  est l'inverse d'une matrice  $[N']$  telle que :

$$[N'] = [N] \begin{bmatrix} \exp j \frac{\omega e}{2 v_1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \exp j \frac{\omega e}{2 v_2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \exp - j \frac{\omega e}{2 v_1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \exp - j \frac{\omega e}{2 v_2} \end{bmatrix}$$

#### IV.2. - Résolution des équations de conservation de l'énergie.

L'étude des termes de couplage entre les ondes créés par chacune des deux ondes incidentes fournit, pour les milieux uniaxes qui nous intéressent, une information supplémentaire :

- les coefficients  $\gamma_1, \gamma_3, \alpha_1, \alpha_3$  sont réels.

Seule la façon dont ont été menés les calculs est exposée.

Les expressions (IV<sub>1,10</sub>) permettent de donner à la matrice [N'] une forme simple facilitant son inversion.

En effet, [N'] a la forme :

$$IV_{2,1} \begin{bmatrix} -j\omega & & & \\ & 1 & & \\ & & j\omega & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [N'_1] & [N'_2] \\ [N'_2] & [N'_1] \end{bmatrix}$$

[N'<sub>1</sub>] et [N'<sub>2</sub>] sont deux sous matrices à deux lignes et deux colonnes données dans les tableaux IV<sub>2,1</sub> et IV<sub>2,1</sub> bis. La matrice [L'], inverse de la matrice [N'] prend la forme simple :

$$(IV_{2,2}) \begin{bmatrix} [L'_1] & [L'_2] \\ [L'_2] & [L'_1] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{j}{\omega} & & & \\ & 1 & & \\ & & & -\frac{j}{\omega} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \dots / \dots$$



TABLEAU IV<sub>2,1</sub> :

$\exp j \frac{\omega e}{2 v_1} \left\{ \frac{K_1}{v_1} + \frac{1}{\epsilon_0 v_0} [\epsilon_1 K_1 + \gamma_1] \right\}$	$\exp j \frac{\omega e}{2 v_2} \left\{ \frac{K_2}{v_2} + \frac{1}{\epsilon_0 v_0} [\epsilon_1 K_2 + \gamma_1] \right\}$
$\exp j \frac{\omega e}{2 v_1} \left\{ 1 + \frac{1}{\epsilon_0 v_0} v_1 \left[ \frac{\omega^2}{v_1^2} K_1 \zeta_3 + \zeta_{22} \right] \right\}$	$\exp j \frac{\omega e}{2 v_2} \left\{ 1 + \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} \left[ \frac{\omega^2}{v_2^2} K_2 \zeta_3 + \zeta_{22} \right] \right\}$

TABLEAU IV<sub>2,1</sub> bis :

$\exp(-j \frac{\omega e}{2 v_1}) \left[ -\frac{K_1}{v_1} + \frac{1}{\epsilon_0 v_0} [\epsilon_1 K_1 + \gamma_1] \right]$	$\exp(-j \frac{\omega e}{2 v_2}) \left[ -\frac{K_2}{v_2} + \frac{1}{\epsilon_0 v_0} [\epsilon_1 K_1 + \gamma_1] \right]$
$\exp(-j \frac{\omega e}{2 v_1}) \left[ 1 - \frac{v_1}{\epsilon_0 v_0} \left[ \frac{\omega^2}{v_1^2} K_1 \zeta_3 + \zeta_{22} \right] \right]$	$\exp(-j \frac{\omega e}{2 v_2}) \left[ 1 - \frac{v_2}{\epsilon_0 v_0} \left[ \frac{\omega^2}{v_2^2} K_2 \zeta_3 + \zeta_{22} \right] \right]$

$$(IV_{2,3}) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{avec } [L'_1] = [N'_2]^{-1} \cdot \left[ [N'_1] [N'_2]^{-1} - [N'_2] [N'_1]^{-1} \right]^{-1} \\ [L'_2] = - [N'_1]^{-1} \cdot \left[ [N'_1] [N'_2]^{-1} - [N'_2] [N'_1]^{-1} \right]^{-1} \end{array} \right.$$

La matrice  $[Q']$  a la forme :

$$(IV_{2,4}) \quad [Q'] = \begin{bmatrix} [Q'_1] & [Q'_2] \\ [Q'_2] & [Q'_1] \end{bmatrix}$$

où  $[Q'_1]$  et  $[Q'_2]$  sont deux matrices hermitiques à deux lignes et deux colonnes données dans les tableaux  $(IV_{2,2})$  et  $(IV_{2,2} \text{ bis})$ .

La condition d'absence de couplage des vibrations privilégiées  $(IV_{1,9})$ , après simplification à gauche et à droite par la matrice régulière :

$$\left[ [N'_1] [N'_2]^{-1} - [N'_2] [N'_1]^{-1} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -j\omega \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{devient :}$$

$$(IV_{2,5}) \quad \left\{ \begin{array}{l} [N'_2]^{-1} + [Q'_2] [N'_2]^{-1} \\ + [N'_1]^{-1} + [Q'_2] [N'_1]^{-1} \\ - [N'_2]^{-1} + [Q'_1] [N'_1]^{-1} \\ - [N'_1]^{-1} + [Q'_1] [N'_2]^{-1} \\ = 0 \end{array} \right.$$

Le calcul de la matrice  $[S]$  comportait l'inversion d'une matrice à quatre lignes et quatre colonnes.

La forme  $(IV_{2,5})$ , comporte seulement des inverses de matrices à deux lignes et deux colonnes ; la façon de procéder employée ici est possible à chaque fois que :

$$\text{le vecteur } \vec{V} \text{ a la forme } \begin{bmatrix} j \frac{\omega}{v} \cdot K (v^2) \\ 1 \end{bmatrix}$$

et que

TABLEAU IV<sub>2,2</sub>

[Q<sub>1</sub>'] =

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{\omega^2}{v_1^2} K_1^* K_1 \\
 & + \frac{\omega^2}{\varepsilon_o^2 v_o^2} \left\{ \begin{aligned} & K_1^* K_1 \left( \varepsilon_1 + \frac{\omega^2}{v_1^2} \zeta_3 \zeta_3^* \right) \\ & + K_1^* \left( \varepsilon_1 \gamma_1 + \zeta_{22} \zeta_3^* \right) \\ & + K_1 \left( \varepsilon_1 \gamma_1^* + \zeta_{22} \zeta_3 \right) \\ & + \gamma_1 \gamma_1^* \\ & + \zeta_{22}^2 \frac{v_1^2}{\omega^2} \end{aligned} \right\} \\
 & \cos \frac{\omega e}{2} \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) \cdot \\
 & 1 + \frac{\omega^2}{v_1 v_2} K_1^* K_2 \\
 & + \frac{\omega^2}{\varepsilon_o^2 v_o^2} \left[ \begin{aligned} & K_1^* K_2 \left( \varepsilon_1^2 + \frac{\omega^2}{v_1 v_2} \zeta_3 \zeta_3^* \right) \\ & + K_1^* \left( \varepsilon_1 \gamma_1 + \zeta_{22} \zeta_3^* \frac{v_2}{v_1} \right) \\ & + K_2 \left( \varepsilon_1 \gamma_1^* + \zeta_{22} \zeta_3 \frac{v_1}{v_2} \right) \\ & + \gamma_1 \gamma_1^* \\ & + \zeta_{22}^2 \frac{v_1 v_2}{\omega^2} \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cos \frac{\omega e}{2} \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) \cdot \\
 & 1 + \frac{\omega^2}{v_1 v_2} K_1 K_2^* \\
 & + \frac{\omega^2}{\varepsilon_o^2 v_o^2} \left[ \begin{aligned} & K_1 K_2^* \left( \varepsilon_1^2 + \frac{\omega^2}{v_1 v_2} \zeta_3 \zeta_3^* \right) \\ & + K_1 \left( \varepsilon_1 \gamma_1^* + \zeta_{22} \zeta_3 \frac{v_2}{v_1} \right) \\ & + K_2^* \left( \varepsilon_1 \gamma_1 + \zeta_{22} \zeta_3^* \frac{v_1}{v_2} \right) \\ & + \gamma_1 \gamma_1^* \\ & + \zeta_{22}^2 \frac{v_1 v_2}{\omega^2} \end{aligned} \right] \\
 & 1 + \frac{\omega^2}{v_2^2} K_2^* K_2 \\
 & + \frac{\omega^2}{\varepsilon_o^2 v_o^2} \left\{ \begin{aligned} & K_2^* K_2 \left( \varepsilon_1^2 + \frac{\omega^2}{v_2^2} \zeta_3 \zeta_3^* \right) \\ & + K_2^* \left( \varepsilon_1 \gamma_1 + \zeta_{22} \zeta_3^* \right) \\ & + K_2 \left( \varepsilon_1 \gamma_1^* + \zeta_{22} \zeta_3 \right) \\ & + \gamma_1 \gamma_1^* \\ & + \zeta_{22}^2 \frac{v_2}{\omega^2} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

TABLEAU IV<sub>2,2</sub> bis

$$\cos \frac{\omega e}{v_1} \cdot$$

$$\left\{ \begin{aligned} & 1 - \frac{\omega^2}{v_1^2} K_1^* K_1 \\ & + \frac{\omega^2}{\epsilon_0^2 v_0^2} \left[ \begin{aligned} & K_1^* K_1 \left( \epsilon_1^2 - \frac{\omega^2}{v_1^2} \gamma_3 \gamma_3^* \right) \\ & + K_1^* \left( \epsilon_1 \gamma_1 - \gamma_{22} \gamma_3^* \right) \\ & + K_1 \left( \epsilon_1 \gamma_1^* - \gamma_{22} \gamma_3 \right) \\ & + \gamma_1 \gamma_1^* \\ & - \gamma_{22}^2 \frac{v_1^2}{\omega^2} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\cos \frac{\omega e}{2} \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) \cdot$$

$$\left\{ \begin{aligned} & 1 - \frac{\omega^2}{v_1 v_2} K_1^* K_2 \\ & + \frac{\omega^2}{\epsilon_0^2 v_0^2} \left[ \begin{aligned} & K_1^* K_2 \left( \epsilon_1^2 - \frac{\omega^2}{v_1 v_2} \gamma_3 \gamma_3^* \right) \\ & + K_1 \left( \epsilon_1 \gamma_1 - \gamma_{22} \gamma_3^* \frac{v_2}{v_1} \right) \\ & + K_2^* \left( \epsilon_1 \gamma_1 - \gamma_{22} \gamma_3 \frac{v_1}{v_2} \right) \\ & + \gamma_1 \gamma_1^* \\ & - \gamma_{22}^2 \frac{v_1 v_2}{\omega^2} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}$$

[Q'<sub>2</sub>]

$$\cos \frac{\omega e}{2} \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) \cdot$$

$$\left\{ \begin{aligned} & 1 - \frac{\omega^2}{v_1 v_2} K_1 K_2^* \\ & + \frac{\omega^2}{\epsilon_0^2 v_0^2} \left[ \begin{aligned} & K_1 K_2^* \left( \epsilon_1^2 - \frac{\omega^2}{v_1 v_2} \gamma_3 \gamma_3^* \right) \\ & + K_1^* \left( \epsilon_1 \gamma_1^* - \gamma_{22} \gamma_3 \frac{v_2}{v_1} \right) \\ & + K_2 \left( \epsilon_1 \gamma_1 - \gamma_{22} \gamma_3^* \frac{v_1}{v_2} \right) \\ & + \gamma_1 \gamma_1^* \\ & - \gamma_{22}^2 \frac{v_1 v_2}{\omega^2} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\cos \frac{\omega e}{v_2} \left\{ \begin{aligned} & 1 - \frac{\omega^2}{v_2^2} K_2^* K_2 \end{aligned} \right.$$

$$+ \frac{\omega^2}{\epsilon_0^2 v_0^2} \left[ \begin{aligned} & K_2^* K_2 \left( \epsilon_1^2 - \frac{\omega^2}{v_2^2} \gamma_3 \gamma_3^* \right) \\ & + K_2 \left( \epsilon_1 \gamma_1 - \gamma_{22} \gamma_3^* \right) \\ & + K_2^* \left( \epsilon_1 \gamma_1^* - \gamma_{22} \gamma_3 \right) \\ & + \gamma_1 \gamma_1^* \\ & - \gamma_{22}^2 \frac{v_2^2}{\omega^2} \end{aligned} \right]$$

la matrice  $\begin{bmatrix} \gamma \\ \epsilon \end{bmatrix}$  a la forme

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & -j \frac{\omega}{v} \gamma_{12} \\ j \frac{\omega}{v} \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

Il est donc probable que cette méthode convienne à d'autres classes de symétrie compatibles avec de l'activité optique de type naturel.

Le premier membre de la condition (IV<sub>2,5</sub>) est une matrice hermitique a deux lignes et deux colonnes.

Pour que l'équation (IV<sub>2,5</sub>) soit satisfaite, il faut et suffit que chaque élément de cette matrice soit nul. Ceci exige, compte tenu de l'hermiticité, que l'élément relatif à la première ligne et à la deuxième colonne soit nul, et que les éléments diagonaux soient nuls.

Chacun de ces éléments de matricé s'exprime linéairement en fonction des quantités  $\cos \frac{\omega e}{v_1}$ ,  $\cos \frac{\omega e}{v_2}$ ,  $\sin \frac{\omega e}{v_1}$ ,  $\sin \frac{\omega e}{v_2}$ .

Pour que la condition (IV<sub>2,5</sub>) soit satisfaite quelle que soit l'épaisseur de la lame, il est alors nécessaire et suffisant que chaque coefficient de ces trois formes linéaires soit nul, soient donc douze conditions :

En posant (voir les tableaux IV<sub>2,1</sub> ; IV<sub>2,1</sub> bis ; IV<sub>2,2</sub> ; IV<sub>2,2</sub> bis)

$$(IV_{2,6}) \quad \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \\ Q'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp j \frac{\omega e}{2 v_1} \\ \cdot \\ \exp j \frac{\omega e}{2 v_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp - j \frac{\omega e}{2 v_1} \\ \cdot \\ \exp - j \frac{\omega e}{2 v_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p_{11} & \cos \frac{\omega e}{2} \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) \cdot p_{12} \\ \cos \frac{\omega e}{2} \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) \cdot p_{12}^* & p_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{l} [Q_2'] = \\ \cos \frac{\omega e}{v_1} q_{11} \\ \cos \frac{\omega e}{2} \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) \cdot q_{12} \\ \cos \frac{\omega e}{2} \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) \cdot q_{12} \\ \cos \frac{\omega e}{v_2} q_{22} \end{array} \right]$$

(IV<sub>2,6</sub>)

$$\delta_1 = r_{11} r_{22} - r_{12} r_{21}$$

$$\text{et } \delta_2 = s_{11} s_{22} - s_{12} s_{21},$$

les douze conditions s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 & \delta_2 \delta_2^* \left[ q_{11} r_{22} r_{22}^* - \text{pr} (q_{12} r_{21} r_{22}^*) \right] \\
 & + \delta_1 \delta_1^* \left[ q_{11} s_{22} s_{22}^* - \text{pr} (q_{12} s_{21} s_{22}^*) \right] \\
 & - 2 \text{pr} \delta_1 \delta_2^* \left( p_{11} r_{22} s_{22}^* - \frac{p_{12} r_{21} s_{22}^* + p_{12} r_{22} s_{21}^*}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

(IV<sub>2,7</sub>)

$$\begin{aligned}
 & \delta_2 \delta_2^* \left[ q_{22} r_{21} r_{21}^* - \text{pr} (q_{12} r_{21} r_{22}^*) \right] \\
 & + \delta_1 \delta_1^* \left[ q_{22} s_{21} s_{21}^* - \text{pr} (q_{12} s_{21} s_{22}^*) \right] \\
 & - 2 \text{pr} \delta_1 \delta_2^* \left( p_{22} r_{21} s_{21}^* - \frac{p_{12} r_{21} s_{22}^* + p_{12} s_{21} r_{22}^*}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

(IV<sub>2,8</sub>)

$$\begin{aligned}
 & \text{pi} \left\{ \begin{array}{l} - \delta_2 \delta_2^* q_{12} r_{21} r_{22}^* \\ + \delta_1 \delta_1^* q_{12} s_{21} s_{22}^* \\ - 2 \delta_1 \delta_2^* (-p_{11} r_{22} s_{22}^* + \frac{p_{12} r_{21} s_{22}^* + p_{12} r_{22} s_{21}^*}{2}) \end{array} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

(V<sub>2,9</sub>)

$$\begin{aligned}
 & \text{pi} \left\{ \begin{array}{l} \delta_2 \delta_2^* q_{12} r_{21} r_{22}^* \\ - \delta_1 \delta_1^* q_{12} s_{21} s_{22}^* \\ - 2 \delta_1 \delta_2^* (-p_{22} r_{21} s_{21}^* + \frac{p_{12} r_{21} s_{22}^* + p_{12} s_{21} r_{22}^*}{2}) \end{array} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

(IV<sub>2,10</sub>)

$$\begin{aligned}
 & \delta_2 \delta_2^* \left[ q_{22} r_{11} r_{11}^* - \text{pr} (q_{12} r_{12} r_{11}^*) \right] \\
 & + \delta_1 \delta_1^* \left[ q_{22} s_{11} s_{11}^* - \text{pr} (q_{12} s_{12} s_{11}^*) \right] \\
 & - 2 \text{pr} \delta_1 \delta_2^* \left( p_{22} r_{11} s_{11}^* - \frac{p_{12} r_{12} s_{11}^* + p_{12} r_{11} s_{12}^*}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

(IV<sub>2,11</sub>)

$$\begin{aligned}
 & \delta_2 \delta_2^* \left[ q_{11} r_{12} r_{12}^* - pr (q_{12}^* r_{12} r_{11}^*) \right] \\
 (IV_{2,12}) \quad & + \delta_1 \delta_1^* \left[ q_{11} s_{12} s_{12}^* - pr (q_{12}^* s_{12} s_{11}^*) \right] \\
 & - 2 pr \left\{ \delta_1 \delta_2^* (p_{11} r_{12} s_{12}^* - \frac{p_{12}^* r_{12} s_{11}^* + p_{12} r_{11} s_{12}^*}{2}) \right\} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & pi \left\{ \begin{aligned} & - \delta_2 \delta_2^* (q_{12}^* r_{12} r_{11}^*) \\ & + \delta_1 \delta_1^* (q_{12}^* s_{12} s_{11}^*) \end{aligned} \right. \\
 (IV_{2,13}) \quad & \left. - 2 \delta_1 \delta_2^* (- p_{22} r_{11} s_{11}^* + \frac{p_{12}^* r_{12} s_{11}^* + p_{12} r_{11} s_{12}^*}{2}) \right\} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & pi \left\{ \begin{aligned} & - \delta_2 \delta_2^* (q_{12}^* r_{12} r_{11}^*) \\ & + \delta_1 \delta_1^* (q_{12}^* s_{12} s_{11}^*) \end{aligned} \right. \\
 (IV_{2,14}) \quad & \left. + 2 \delta_1 \delta_2^* (- p_{11} r_{12} s_{12}^* + \frac{p_{12}^* r_{12} s_{11}^* + p_{12} r_{11} s_{12}^*}{2}) \right\} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \delta_2 \delta_2^* \left[ q_{11} r_{12} r_{22}^* - \frac{r_{11} q_{12} r_{22}^* + r_{12} q_{12}^* r_{21}^*}{2} \right] \\
 (IV_{2,15}) \quad & + \delta_1 \delta_1^* \left[ q_{11} s_{12} s_{22}^* - \frac{s_{11} q_{12} s_{22}^* + s_{12} q_{12}^* s_{21}^*}{2} \right] \\
 & - \delta_1 \delta_2^* \left[ p_{11} s_{22}^* r_{12} - \frac{s_{22}^* p_{12} r_{11} + s_{21}^* p_{12} r_{12}^*}{2} \right] \\
 & - \delta_2 \delta_1^* \left[ p_{11} r_{22}^* s_{12} - \frac{r_{22}^* p_{12} s_{11} + r_{21}^* p_{12} s_{12}^*}{2} \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \delta_2 \delta_2^* \left[ q_{22} r_{21}^* r_{11} - \frac{r_{11} q_{12} r_{22}^* + r_{12} q_{12}^* r_{21}^*}{2} \right] \\
 (IV_{2,16}) \quad & + \delta_1 \delta_1^* \left[ q_{22} s_{21}^* s_{11} - \frac{s_{11} q_{12} s_{22}^* + s_{12} q_{12}^* s_{21}^*}{2} \right] \\
 & - \delta_1 \delta_2^* \left[ p_{22} s_{21}^* r_{11} - \frac{s_{22}^* p_{12} r_{11} + s_{21}^* p_{12} r_{12}^*}{2} \right] \\
 & - \delta_2 \delta_1^* \left[ p_{22} r_{12}^* s_{11} - \frac{r_{22}^* p_{12} s_{11} + r_{21}^* p_{12} s_{12}^*}{2} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta_2 \delta_2^*}{2} \left[ r_{11} q_{12} r_{22}^* - r_{12} q_{12}^* r_{21}^* \right] \\
 & + \frac{\delta_1 \delta_1^*}{2} \left[ - s_{11} q_{12} s_{22}^* + s_{12} q_{12}^* s_{21}^* \right] \\
 (IV_{2,17}) \quad & - \delta_1 \delta_2 \left[ p_{11} s_{22}^* r_{12} - \frac{s_{22}^* p_{12} r_{11} + s_{21}^* p_{12}^* r_{12}}{2} \right] \\
 & - \delta_1^* \delta_2 \left[ - p_{11} r_{22}^* s_{12} + \frac{r_{22}^* p_{12} s_{11} + r_{21}^* p_{12}^* s_{12}}{2} \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta_2 \delta_2^*}{2} \left[ - r_{11} q_{12} r_{22}^* + r_{12} q_{12}^* r_{21}^* \right] \\
 & + \frac{\delta_1 \delta_1^*}{2} \left[ s_{11} q_{12} s_{22}^* - s_{12} q_{12}^* s_{21}^* \right] \\
 (IV_{2,18}) \quad & - \delta_1 \delta_2 \left[ p_{22} s_{21}^* r_{11} - \frac{s_{22}^* p_{12} r_{11} + s_{21}^* p_{12}^* r_{12}}{2} \right] \\
 & - \delta_1^* \delta_2 \left[ - p_{22} r_{21}^* s_{11} + \frac{r_{22}^* p_{12} s_{11} + r_{21}^* p_{12}^* s_{12}}{2} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Il faut remarquer que les équations :

(IV<sub>2,7</sub>) et (IV<sub>2,8</sub>) ; (IV<sub>2,9</sub>) et (IV<sub>2,10</sub>) ; (IV<sub>2,11</sub>) et (IV<sub>2,12</sub>) ;  
 (IV<sub>2,13</sub>) et (IV<sub>2,14</sub>) ; (IV<sub>2,15</sub>) et (IV<sub>2,16</sub>) ; (IV<sub>2,17</sub>) et (IV<sub>2,18</sub>) se  
 déduisent l'une de l'autre en intervertissant les rôles respectifs des vitesses de phase  $v_1$  et  $v_2$  et des quantités  $K_1$  et  $K_2$ .

Les premiers membres de ces douze équations sont des polynômes de degré huit en  $\frac{1}{\varepsilon_0 v_0}$ .

Pour que l'énergie soit conservée quel que soit le milieu d'immersion et quelle que soit la taille de la lame, il faut que chaque coefficient de ces polynômes en  $\frac{1}{\varepsilon_0 v_0}$  soit nul quel que soit l'angle  $\theta$ .

Les remarques suivantes :

$$\begin{aligned}
 s_{21} (\varepsilon_0 v_0) &= r_{21} (-\varepsilon_0 v_0) \\
 s_{22} (\varepsilon_0 v_0) &= r_{22} (-\varepsilon_0 v_0)
 \end{aligned}$$

$$s_{11} (\varepsilon_0 v_0) = - r_{11} (-\varepsilon_0 v_0)$$

$$s_{12} (\varepsilon_0 v_0) = - r_{12} (-\varepsilon_0 v_0)$$

$$\delta_2 (\varepsilon_0 v_0) = - \delta_1 (-\varepsilon_0 v_0)$$

permettant de constater que les équations (IV<sub>2,7</sub>), (IV<sub>2,8</sub>) ; (IV<sub>2,11</sub>), (IV<sub>2,12</sub>) ; (IV<sub>2,17</sub>), (IV<sub>2,18</sub>), ne font intervenir que des puissances paires (0, 2, 4, 6, 8) de  $\frac{1}{\varepsilon_0 v_0}$  et que les équations (IV<sub>2,9</sub>), (IV<sub>2,10</sub>) ; (IV<sub>2,13</sub>), (IV<sub>2,14</sub>) ; (IV<sub>2,15</sub>), (IV<sub>2,16</sub>) ne font intervenir que des puissances impaires (1, 3, 5, 7) de  $\frac{1}{\varepsilon_0 v_0}$ .

Les conditions (IV<sub>2,7</sub>), (IV<sub>2,9</sub>), (IV<sub>2,11</sub>), (IV<sub>2,13</sub>), (IV<sub>2,15</sub>), (IV<sub>2,17</sub>) sont développées à l'aide des remarques précédentes quant à la parité des polynômes en  $\varepsilon_0 v_0$ , en utilisant les équations (IV<sub>2,6</sub>), et les tableaux (IV<sub>2,1</sub>), (IV<sub>2,1 bis</sub>), (IV<sub>2,2</sub>), (IV<sub>2,2 bis</sub>).

La quantité K est exprimée à l'aide des expressions (III<sub>7,1</sub>) et (III<sub>7,1 bis</sub>). La somme et le produit des carrés des vitesses de phase sont donnés par les coefficients de l'équation aux vitesses (III<sub>7,3</sub>).

Il ressort de ce calcul que les équations (IV<sub>2,11</sub>) et (IV<sub>2,13</sub>) ne sont satisfaites quelle que soit la direction de propagation que si les quantités  $\gamma_1, \gamma_3, \alpha_1, \alpha_3$  et K sont réelles. L'on constate alors que les conditions (IV<sub>2,7</sub>) et (IV<sub>2,9</sub>) ; (IV<sub>2,15</sub>) et (IV<sub>2,17</sub>) sont satisfaites quel que soit l'angle de taille de la lame  $\theta$ . En outre, toutes ces équations, une fois développée, sont symétriques en  $v_1$  et  $v_2$  ; ceci rend inutile d'étudier les conditions IV<sub>2,8</sub> ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18, qui se déduisent des équations IV<sub>2,7</sub> ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 par échange de  $v_1$  et  $v_2$ .

La solution, telle qu'elle est définie par les conditions de conservation de l'énergie pour une lame éclairée normalement de part et d'autre est :

$$(IV_{2,19}) \quad \left[ \begin{array}{l} \varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_3, \mu_3 \text{ réels} \\ \alpha_1, \gamma_1, \alpha_3, \gamma_3 \text{ réels} \\ \gamma_2 = -v_1 \alpha_2 = -\alpha_1 \\ \varepsilon_1 \alpha_1 = \mu_1 \gamma_1 \\ \varepsilon_3 \alpha_3 = \mu_3 \gamma_3 \end{array} \right.$$

Il a été nécessaire d'étudier une lame éclairée des deux côtés pour établir que les coefficients gyroélectriques et gyromagnétiques sont réels.

Ceci est dû au fait qu'il est nécessaire de disposer de quatre paramètres indépendants (ici  $E_{ax}$ ,  $E_{ay}$ ,  $E_{bx}$ ,  $E_{by}$ ) pour avoir toutes les combinaisons possibles des quatre ondes privilégiées qui forment à l'intérieur de la lame un système d'interférence (A. KASTLER [18]).

Ce procédé d'éclairage permet en particulier de séparer les quantités électriques des quantités magnétiques. L'on peut en effet imaginer une lame infiniment mince placée dans un champ d'ondes stationnaires. Sa position peut être amenée à volonté d'un noeud électrique qui est un ventre magnétique, à un ventre électrique qui est un noeud magnétique. Ceci ne peut être réalisé par l'éclairage d'un seul côté, les facteurs de réflexion étant toujours inférieurs à l'unité.

V - MILIEUX ANAXIAUX ACTIFS QUI SONT DES CAS PARTICULIERS DES MILIEUX UNIAUXES ETUDIÉS.

La réduction par symétrie des tenseurs représentatifs des propriétés électromagnétiques donne, pour les milieux de symétrie (432) et ( $\infty^\infty$ )

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \epsilon_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \epsilon_1 \end{bmatrix} \quad \text{et respectivement} \quad [\mu]$$

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\gamma_1 \\ \cdot & \gamma_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \gamma_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -\gamma_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\gamma_1 & \cdot \\ \gamma_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \text{et respectivement} \quad [\alpha]$$

Ces milieux constituent un cas particulier des milieux uniauxes étudiés, où  $\epsilon_1$  est égal à  $\epsilon_3$ ,  $\mu_1$  à  $\mu_3$ ,  $\gamma_1$  à  $-\gamma_2$  et à  $-\gamma_3$ ,  $\alpha_1$  à  $-\alpha_2$  et à  $-\alpha_3$ , et où l'axe optique est indéterminé.

Ils sont optiquement isotropes. Leurs ondes privilégiées sont analogues aux ondes privilégiées perpendiculairement à l'axe optique des milieux uniauxes précédemment étudiés.

Les démonstrations qui mènent aux conditions de conservation de l'énergie pour une lame éclairée d'un seul côté utilisent le fait expérimental qu'il existe dans les milieux uniauxes étudiés, des vibrations sensiblement rectilignes pour les ondes parallèles à l'axe optique.

Cette démonstration n'est pas valable pour les milieux anaxiaux où les vibrations privilégiées sont polarisées circulairement.

Il est cependant aisé de montrer, pour une lame onde éclairée normalement d'un seul côté que les conditions (II<sub>3,9</sub>) et (II<sub>3,10</sub>) sont nécessaires.

L'étude de ces deux conditions, par un calcul en tout point identique à celui effectué au paragraphe (III.1.) pour une lame taillée perpendiculairement à l'axe optique donne alors les relations :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \text{ et } \mu_1 \text{ réels} \\ \varepsilon_1 \alpha_1 = \mu_1 \gamma_1^* \end{cases}$$

Ces conditions sont suffisantes pour que l'énergie soit conservée pour une lame éclairée normalement d'un seul côté.

Le problème de la lame éclairée normalement de part et d'autre ne présente lui, aucune difficulté pour démontrer que les coefficients  $\alpha_1$  et  $\gamma_1$  sont réels.

Les propriétés optiques des milieux anaxiaux actifs de lame de symétrie 432 et  $\infty$  peuvent donc se déduire de celles des milieux uniaxes de symétrie 422, 622,  $\infty 2$ , en y faisant :

Soit  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3, \mu_1 = \mu_3, \gamma_1 = -\gamma_2 = -\gamma_3, \alpha_1 = -\alpha_2 = -\alpha_3$

Soit  $\theta = 0$

Les relations établies sont applicables :

$$\begin{cases} \varepsilon_1, \mu_1, \alpha_1, \gamma_1 \text{ réels} \\ \varepsilon_1 \alpha_1 = \mu_1 \gamma_1 \end{cases}$$

VI - PROPRIETES OPTIQUES DES MILIEUX UNIAXES OU ANAXIAUX ETUDIES

VI.1. - Vitesse de phase des ondes privilégiées

Les vitesses de phase des ondes dans les milieux uniaxes actifs définis par les relations (IV<sub>2,19</sub>) sont les racines de l'équation :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\epsilon_1^2 \mu_1^2 v^4} \left[ 1 - \omega^2 \frac{\mu_1}{\epsilon_1} \gamma_1^2 \right] \left[ \left[ \cos^2 \theta + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} \sin^2 \theta \right] \left[ \cos^2 \theta + \frac{\mu_1}{\mu_3} \sin^2 \theta \right] - \omega^2 \epsilon_1 \mu_1 \dots \right. \\
 & \qquad \left. \left[ \frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \cos^2 \theta - \frac{\gamma_3}{\epsilon_3} \sin^2 \theta \right]^2 \right] \\
 (VI_{1,1}) \quad & - \frac{1}{\epsilon_1 \mu_1 v^2} \left[ \left[ \cos^2 \theta + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} \sin^2 \theta \right] + \left[ \cos^2 \theta + \frac{\mu_1}{\mu_3} \sin^2 \theta \right] + 2\omega^2 \epsilon_1 \mu_1 \frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \dots \right. \\
 & \qquad \left. \left[ \frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \cos^2 \theta - \frac{\gamma_3}{\epsilon_3} \sin^2 \theta \right] \right] \\
 & + 1 = 0
 \end{aligned}$$

C'est une équation bicarrée, elle a quatre racines opposées deux à deux.

Quand  $\gamma_1$  et  $\gamma_3$  sont nuls, l'on retrouve les expressions habituelles des milieux uniaxes inactifs :

$$(VI_{1,2}) \quad \begin{cases} v_1^2 = \frac{1}{\epsilon_1 \mu_1} \left( \cos^2 \theta + \frac{\mu_1}{\mu_3} \sin^2 \theta \right) \\ v_2^2 = \frac{1}{\epsilon_1 \mu_1} \left( \cos^2 \theta + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} \sin^2 \theta \right) \end{cases}$$

Pour  $\theta = 0$ , les deux vitesses sont égales à  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}$ ; quand les quantités  $\mu_1$  et  $\mu_3$  sont égales (milieu magnétiquement isotrope), la vitesse  $v_1$  est égale à  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}$ , c'est la vitesse de phase de l'onde ordinaire, et la vitesse  $v_2$

est égale à  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} \sin^2 \theta}$ , c'est la vitesse de phase de l'onde extraordinaire.

En portant dans la direction de propagation deux longueurs proportionnelles à  $v_1$  et  $v_2$  l'on obtient les ellipsoïdes des vitesses de phase des ondes privilégiées (figure 5). Ces deux surfaces ont une symétrie de révolution autour de l'axe optique. Elles sont tangentes dans la direction de l'axe optique [9].

Quand les coefficients  $\mu_1$  et  $\mu_3$  (ou  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_3$ ) sont égaux, l'ellipsoïde des vitesses de phase ordinaires est une sphère.

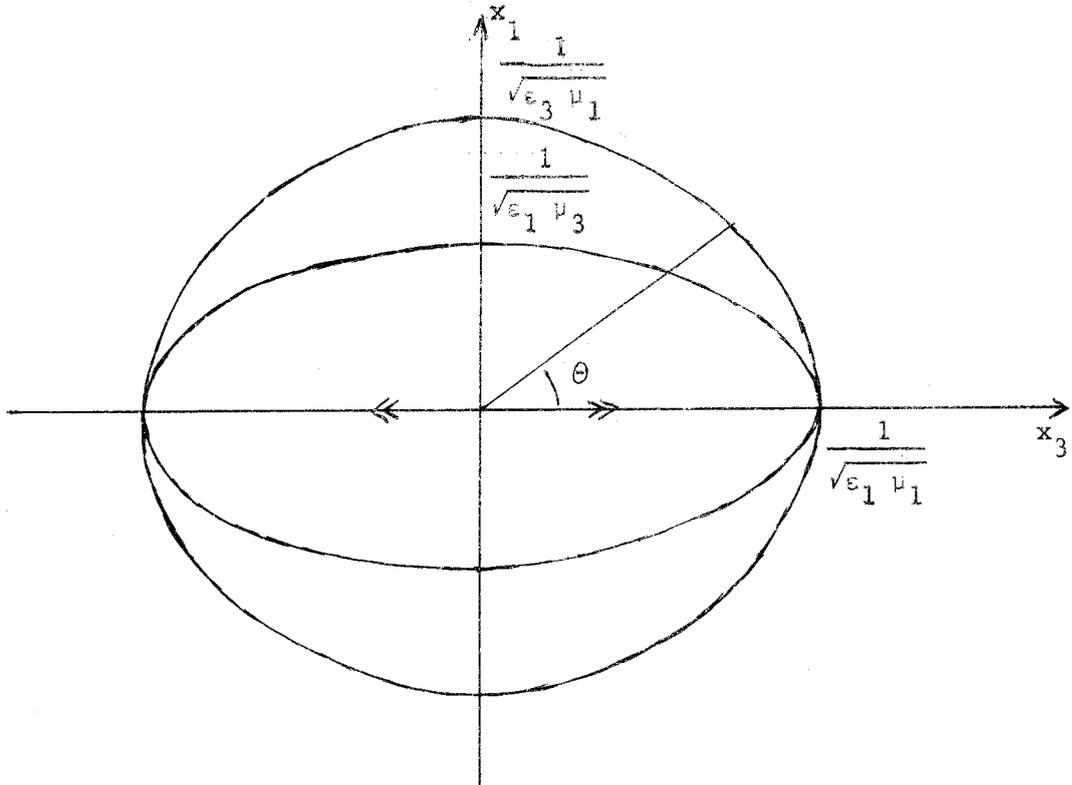


Figure 5 : Ellipsoïdes des vitesses.

Quand  $\gamma_1$  et  $\gamma_3$  ne sont pas nuls, les vitesses de phase des ondes privilégiées sont :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \cos^2 \theta + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} \sin^2 \theta \right] + \left[ \cos^2 \theta + \frac{\mu_1}{\mu_3} \sin^2 \theta \right] + 2\omega^2 \epsilon_1 \mu_1 \frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \dots \\
 & \dots \left[ \frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \cos^2 \theta - \frac{\gamma_3}{\epsilon_3} \sin^2 \theta \right] \\
 \epsilon_1 \mu_1 v^2 = & \frac{\dots}{2}
 \end{aligned}$$

.../...

(VI<sub>1,3</sub>)

$$\sqrt{\left[ \cos^2 \theta + \frac{\mu_1}{\mu_3} \sin^2 \theta \right] - \left[ \cos^2 \theta + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} \sin^2 \theta \right]^2 + 4\omega^2 \epsilon_1 \mu_1 \frac{\gamma_1^2}{\epsilon_1^2} \dots}$$

$$+ \dots \left[ 2 \cos^2 \theta + \frac{\mu_1}{\mu_3} \left[ 1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right] \sin^2 \theta \right] \left[ 2 \cos^2 \theta + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} \left[ 1 - \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \right] \sin^2 \theta \right]$$

2

Pour les ondes perpendiculaires à l'axe optique des milieux uniaxes ou pour les milieux anaxiaux, les vitesses de phase sont :

(IV<sub>1,4</sub>)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} \pm \omega \frac{\gamma_1}{\epsilon_1}$$

Pour les ondes parallèles à l'axe optique, elles sont :

$$\left[ \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} + \frac{\mu_1}{\mu_3} \right] - 2\omega^2 \epsilon_1 \mu_1 \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\epsilon_1 \epsilon_3} \pm \sqrt{\left[ \frac{\mu_1}{\mu_3} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} \right]^2 + 4\omega^2 \epsilon_1 \mu_1 \frac{\gamma_1^2}{\epsilon_1^2} \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_3 \mu_3} \dots}$$

$$\epsilon_1 \mu_1 v^2 = \frac{\dots \left[ 1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right] \left[ 1 - \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \right]}{2}$$

Les conditions de transparence et d'absence d'oscillations évanescentes ne sont pas toujours vérifiées.

La somme des carrés des vitesses de phase des ondes privilégiées est toujours positive si :

(VI<sub>1,6</sub>)

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} + \frac{\mu_1}{\mu_3} > 2\omega^2 \epsilon_1 \mu_1 \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\epsilon_1 \epsilon_3}$$

La réalité des vitesses de phase impose au discriminant de l'équation bicarrée d'être positif, et au produit des carrés des vitesses d'être positif. Ces conditions sont plus difficiles à analyser et ne conduisent pas à des relations simples.

Nous n'étudierons que les milieux vérifiant les relations :

(VI<sub>1,7</sub>)

$$\left| \omega^2 \alpha \gamma \right| < \left| \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} - \frac{\mu_1}{\mu_3} \right|$$

où  $\alpha = \alpha_1, \alpha_3$  et  $\gamma = \gamma_1, \gamma_3$ .

Ces relations sont suffisantes pour que la transparence soit parfaite pour toute direction de propagation. Elles sont vérifiées pour les milieux où les coefficients gyroélectriques et gyromagnétiques sont faibles, hypothèse qui rend compte correctement des phénomènes connus jusqu'ici (cf. chapitre III.7., [17], [9]).

Dans cette hypothèse, le discriminant de l'équation aux vitesses ne peut s'annuler, les vitesses de phase des ondes privilégiées ne peuvent être égales, les ellipsoïdes des vitesses de phase se déforment sans se couper, ce qui montre l'unicité de l'axe optique (figure 6).

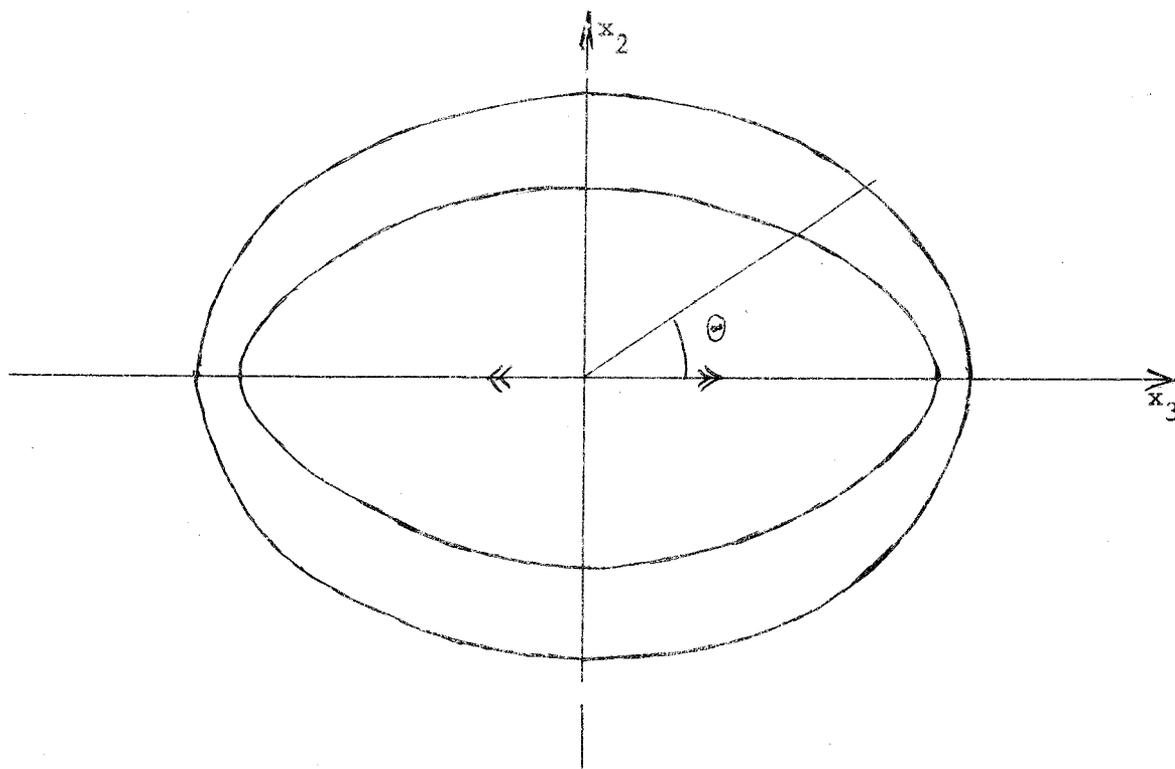


Figure 6. Surface des vitesses : milieux uniaxes actifs où les coefficients gyroélectriques et gyromagnétiques sont faibles.

Cette étude des vitesses de phase des ondes privilégiées permet de donner une réponse à la question posée par P. LANGEVIN [34] quant aux relations entre la biréfringence et le dichroïsme :

- les milieux anisotropes et actifs qui ont été définis ici sont à la fois biréfringents et parfaitement transparents ;
- des milieux biréfringents actifs dénués d'absorption sont donc concevables, ce qui semble infirmer l'existence d'une relation entre la biréfringence et le dichroïsme.

VI.2. - Etat de polarisation des vibrations privilégiées

L'état de polarisation du champ électrique des vibrations privilégiées est tel que :

$$(VI_{2,1}) \quad \frac{E_x}{E_y} = - \frac{j \omega M_{22} (\gamma_1 + \zeta_3)}{v \frac{1}{v^2} (1 - \omega^2 \zeta_3 M_{33}) - \epsilon_1 M_{22}}$$

$$(VI_{2,1} \text{ bis}) \quad \text{ou} \quad \frac{E_x}{E_y} = - j \frac{\frac{1}{v} \frac{1}{v^2} (1 - \omega^2 \mu_1 \gamma_1) - \mu_1 \zeta_{22}}{\omega \mu_1 (\gamma_1 + \zeta_3)}$$

avec  $\zeta_{22} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_3}{\epsilon_1 \sin^2 \theta + \mu_1 \cos^2 \theta}$  , et respectivement  $M_{22}$

et  $\zeta_3 = \frac{\gamma_1 \epsilon_3 \cos^2 \theta - \gamma_3 \epsilon_1 \sin^2 \theta}{\epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_3 \cos^2 \theta}$  , et respectivement  $M_{33}$ .

A deux vitesses de phase opposées correspondent deux vibrations qui ne diffèrent que par le sens de parcours de l'ellipse (dans un même référentiel), l'activité optique a le même signe pour deux directions de propagation opposées, le principe du retour inverse de la lumière est satisfait.

L'activité optique change de signe quand  $\gamma_1$  et  $\gamma_3$  sont remplacés par  $-\gamma_1$  et  $-\gamma_3$ , deux énantiomères se correspondent par le changement des signes des coefficients gyroélectriques et gyromagnétiques.

Pour les ondes perpendiculaires à l'axe optique, les vibrations sont circulaires.

A la vitesse  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} + \frac{\omega \gamma_1}{\epsilon_1}$  correspond une vibration circu-

laire droite  $\left[ \frac{E_x}{E_y} = + j \right]$  ; et à la vitesse  $v_g = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} - \frac{\omega \gamma_1}{\epsilon_1}$  , correspond

une vibration circulaire gauche  $\left[ \frac{E_x}{E_y} = - j \right]$ .

Le pouvoir rotatoire spécifique est :

$$(VI_{2,2}) \quad \Omega = \frac{4 \pi^2 \mu_1 c^2 \gamma_1}{\sqrt{1 - \omega^2 \alpha_1 \gamma_1} \lambda^2}$$

Si l'on fait l'hypothèse que les coefficients  $\mu_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $\alpha_1$  dépendent peu de la longueur d'onde, le pouvoir rotatoire est en première approximation inversement proportionnel au carré de la longueur d'onde ; c'est la loi de dispersion rotatoire de BIOT [19].

Pour les ondes parallèles à l'axe optique, dans l'hypothèse où les termes de dispersion spatiale  $\alpha$  et  $\gamma$  ( $VI_{1,7}$ ) sont faibles, les vibrations privilégiées sont elliptiques, les grands axes des ellipses sont orthogonaux et dirigés selon des directions parallèle et perpendiculaire à l'axe optique ; les deux ellipses sont parcourues en sens inverse, leurs angles d'ellipticité  $\eta_1$  et  $\eta_2$  faibles et tels que :

. pour la vibration dirigée selon l'axe optique (oy) dont la vitesse de phase est  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_3}}$  :

$$(VI_{2,3}) \quad \text{tg } \eta_1 \approx - \sqrt{\epsilon_1 \mu_3} \frac{\omega \mu_1 (\gamma_1 - \gamma_3)}{\epsilon_3 \mu_1 - \epsilon_1 \mu_3}$$

. et, pour la vibration dirigée selon la normale (ox) à l'axe optique, dont la vitesse de phase est  $v_2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_3 \mu_1}}$  :

$$(VI_{2,3 \text{ bis}}) \quad \text{tg } \eta_2 \approx + \sqrt{\epsilon_3 \mu_1} \frac{\omega \mu_3 (\gamma_1 - \gamma_3)}{\epsilon_3 \mu_1 - \epsilon_1 \mu_3}$$

Ces angles d'ellipticités ne sont pas égaux ; ils sont tels que :

$$(VI_{2,4}) \quad \frac{\text{tg } \eta_2}{\text{tg } \eta_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_3 \mu_3}{\epsilon_1 \mu_1}}$$

Ces angles d'ellipticités sont nuls si :

$$\gamma_1 = \gamma_3.$$

Pour une direction de propagation quelconque, les vibrations privilégiées sont elliptiques. L'un des axes de l'ellipse est la projection de l'axe optique sur le plan d'onde.

Le produit  $\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} (v_1) \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}^* (v_2)$  est négatif ; les ellipses relatives aux vitesses  $+v_1$  et  $+v_2$  sont parcourues en sens inverses.

Nous avons vu sur l'exemple des ondes parallèles à l'axe optique (VI<sub>2,4</sub>) que les angles d'ellipticité des vibrations privilégiées ne sont pas égaux. L'hypothèse donnée par AIRY [21, 22, 23] selon laquelle les deux vibrations privilégiées sont orthogonales [Figure 7] n'est pas rigoureusement vérifiée.

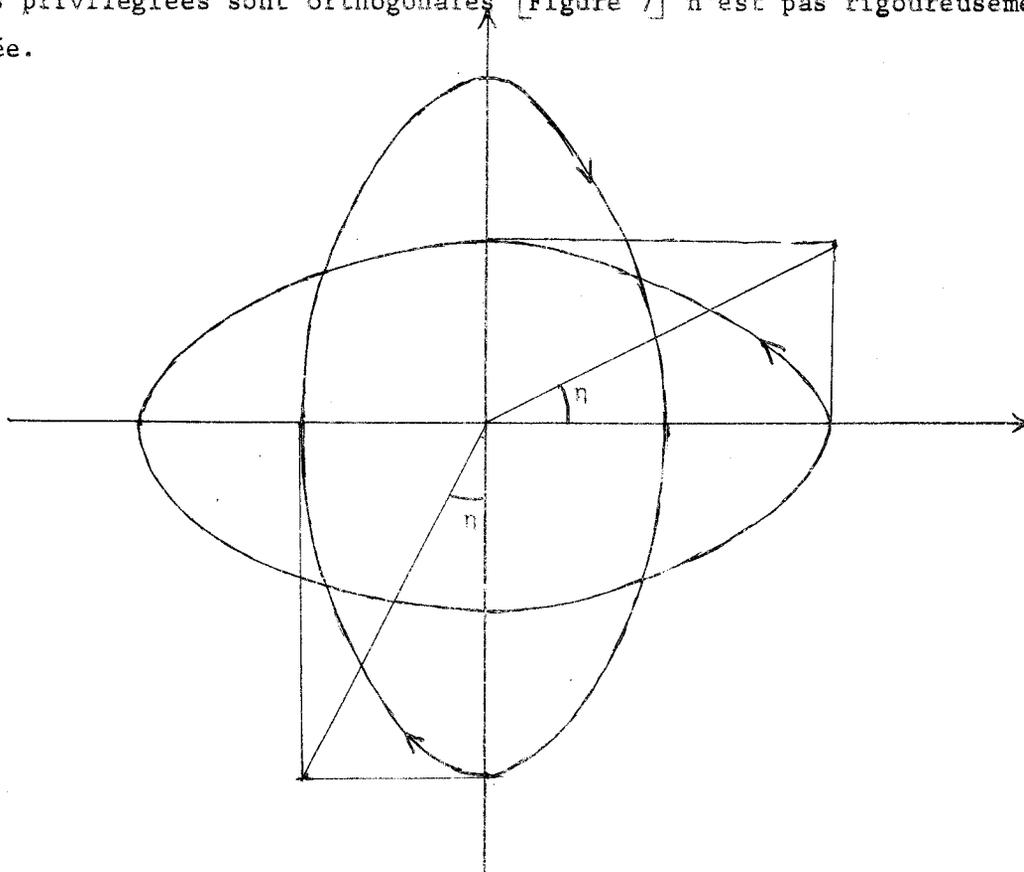


Figure 7 : Deux vibrations elliptiques orthogonales.

Dans l'hypothèse d'un milieu magnétiquement isotrope ( $\mu_1 = \mu_3$ ) la somme algébrique des angles d'ellipticité est :

$$\eta_1 + \eta_2 =$$

$$\left[ \frac{2\omega \gamma_1}{c \epsilon_1} \cos^2 \theta + \frac{\omega \gamma_1 - \gamma_3}{c \epsilon_3} \sin^2 \theta \right] \left[ \frac{v_1 v_2}{c^2} \epsilon_1 \mu_1 c^2 - \left[ 1 - \frac{\omega^2 \gamma_1^2}{c^2 \epsilon_1^2} \epsilon_1 \mu_1 c^2 \right] \right]$$

(VI<sub>2,5</sub>) Arc tg

$$\frac{v_2 - v_1}{c} \left[ \frac{\epsilon(\theta)}{\epsilon_3} \left[ 1 - \frac{\omega^2 \gamma_1^2}{c^2 \epsilon_1^2} \epsilon_1 \mu_1 c^2 \right] + \frac{v_1 v_2}{c^2} \epsilon_1 \mu_1 c^2 \right]$$

avec  $\epsilon(\theta) = \epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_3 \cos^2 \theta$

Si l'on appelle :

- .  $n_o$  l'indice de propagation de l'onde ordinaire parallèle à l'axe optique,
- .  $n_e$  l'indice extraordinaire,
- .  $\lambda$  la longueur d'onde dans le vide de la lumière utilisée,
- .  $\Omega$  le pouvoir rotatoire spécifique d'une lame taillée perpendiculairement à l'axe optique,
- .  $\eta_o$  l'angle d'ellipticité du champ électrique de l'onde ordinaire parallèle à l'axe optique,

à l'aide des relations :

$$\Omega = \frac{2\pi n_o^2 \omega \gamma_1}{\lambda c \epsilon_1}$$

(VI<sub>2,6</sub>)

$$\text{tg } \eta_o = - \frac{n_o n_e}{n_e^2 - n_o^2} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \frac{\gamma_1 - \gamma_3}{\epsilon_3}$$

la quantité  $(\eta_1 + \eta_2)$  s'exprime en fonction des observables  $n_o, n_e, \Omega, \eta_o$ , soit :

$$\eta_1 + \eta_2 =$$

$$\left[ 2 \frac{\Omega \lambda}{2\pi n_o} \cos^2 \theta - \text{tg } \eta_o \frac{n_e^2 - n_o^2}{n_o n_e^2} \sin^2 \theta \right] \left[ \frac{v_1 v_2}{c^2} n_o^2 - \left[ 1 - \left[ \frac{\Omega \lambda}{2\pi n_o} \right]^2 \right] \right]$$

(VI<sub>2,7</sub>) Arc tg

$$n_o \frac{v_2 - v_1}{c} \left[ \cos^2 \theta + \frac{n_o^2}{n_e^2} \sin^2 \theta \right] \left[ 1 - \left[ \frac{\Omega \lambda}{2\pi n_o} \right]^2 \right] + n_o^2 \frac{v_1 v_2}{c^2}$$

où l'on a :

$$(v_2 - v_1) \frac{no}{c} = \sqrt{\frac{no^2}{c^2} (v_1^2 + v_2^2) - 2 \frac{no^2}{c^2} v_1 v_2} ,$$

$$\frac{no^2}{c^2} (v_1^2 + v_2^2) = 2 + \sin^2 \theta \left[ \frac{no^2 - ne^2}{ne^2} \right] + 2 \left[ \frac{\Omega \lambda}{2\pi no} \right]^2 \left[ 1 - \sin^2 \theta \left[ \frac{no^2 + ne^2}{ne^2} \right] \right] \\ + 2 \sin^2 \theta \left[ \frac{\Omega \lambda}{2\pi no} \right] \frac{no^2 - ne^2}{ne^2} \operatorname{tg} \eta_0 ,$$

$$\text{et } \frac{no^4}{c^4} v_1^2 v_2^2 = \left[ 1 - \left[ \frac{\Omega \lambda}{2\pi no} \right]^2 \right] \cdot \left[ 1 + \frac{no^2 - ne^2}{ne^2} \sin^2 \theta \right. \\ \left. - \left[ \frac{\Omega \lambda}{2\pi no} \right] \left[ 1 - \sin^2 \theta \left[ 1 + \frac{no^2}{ne^2} \right] \right] + \frac{no^2 - ne^2}{ne^2} \operatorname{tg} \eta_0 \sin^2 \theta \right]^2$$

La quantité  $\eta_1 + \eta_2$  a été calculée pour un angle  $\theta$  variant de 0 à 90° (figure 8) avec les données suivantes relatives au carbonate de guanidine, mesurées par D. FONTAINE et J. BILLARD [17] :

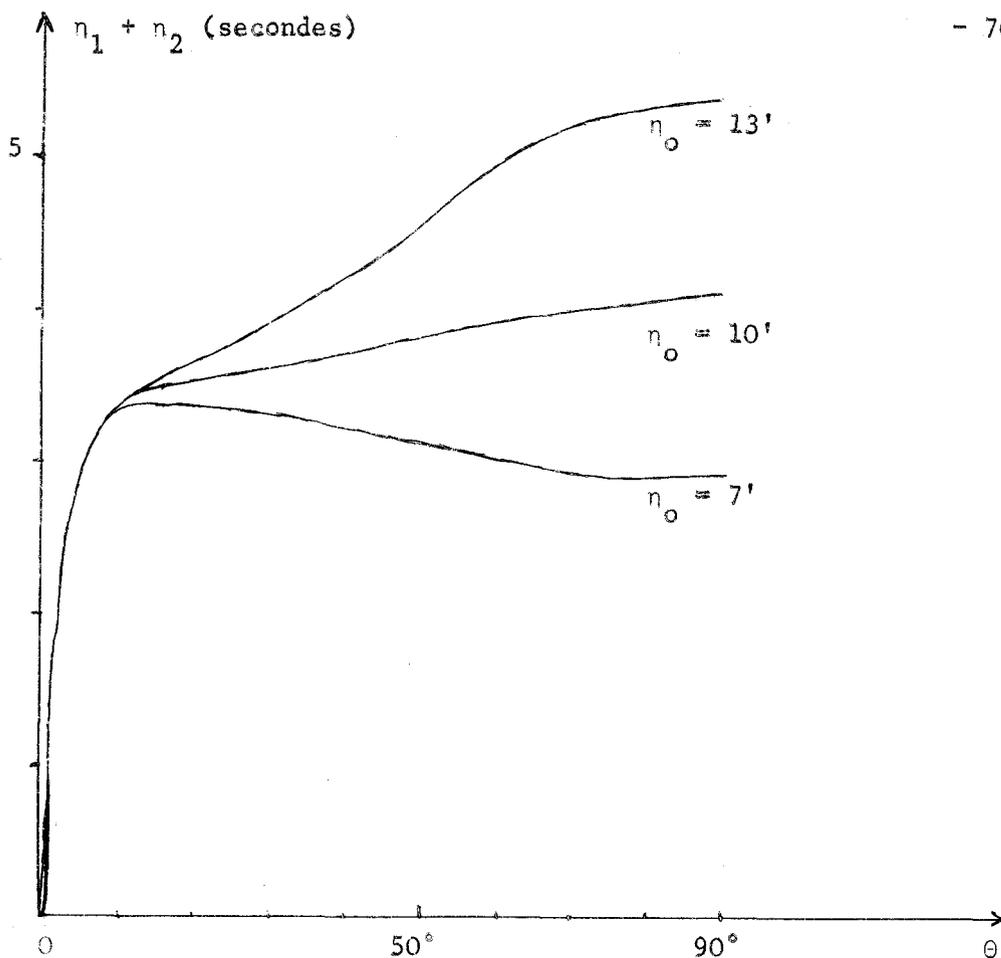
$$\lambda = 546,1 \text{ nm}$$

$$no = 1,4995$$

$$ne = 1,4892$$

$$\Omega = 16,4^\circ/\text{mm}$$

$$\eta_0 = 10' \pm 3'$$



**Figure 8** : Ecart entre les angles d'ellipticité pour le carbonate de guanidine en fonction de la direction de propagation, pour trois valeurs de  $\eta_0$ .

L'écart entre les angles d'ellipticité est nul pour  $\theta = 0$ .

Il est proche de sa valeur maximale pour les ondes parallèles à l'axe optique. Cet écart est de l'ordre de quatre secondes d'angle, une vérification expérimentale de ce résultat semble impossible actuellement.

A l'aide des mêmes données numériques, le calcul de l'écart entre les angles d'ellipticité a été effectué [35] pour un milieu hermitique ne vérifiant pas les relations :

$$\begin{cases} \epsilon_1 \alpha_1 = \mu_1 \gamma_1 \\ \epsilon_3 \alpha_3 = \mu_3 \gamma_3 \\ \gamma_2 = -\gamma_1 \end{cases}$$

Les courbes obtenues sont les mêmes que celles de la figure 8.

Les mesures d'indices de réfraction, de pouvoir rotatoire, et d'écart entre les angles d'ellipticité ne permettent donc pas de vérifier les relations entre les coefficients gyroélectriques et gyromagnétiques.

Il pourrait exister des corps où pour un angle  $\Theta$  particulier, les deux vibrations privilégiées seraient rectilignes et orthogonales, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à la projection de l'axe optique sur le plan d'onde. Cette direction de propagation est telle que :

$$(VI_{2,8}) \quad \operatorname{tg} \Theta = \sqrt{\frac{\epsilon_3 \cdot 2\gamma_1}{\epsilon_1 \gamma_3 - \gamma_1}}$$

Elle existe si la quantité  $\frac{\gamma_3 - \gamma_1}{\gamma_1}$  est positive.

L'activité optique d'une lame taillée parallèlement à l'axe optique peut s'exprimer par un "pouvoir rotatoire"  $\Omega //$  dont la valeur est donnée par :

$$(VI_{2,9}) \quad \Omega // = \frac{\pi}{\lambda} (n_1 - n_2) \operatorname{tg} 2 n_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n_1 c}{\mu_1 + n_2} \omega \mu_1 (\gamma_1 - \gamma_3)$$

$$\text{où } n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{c}{v_2} \quad [20].$$

Le pouvoir rotatoire spécifique d'une lame taillée perpendiculairement à l'axe optique est :

$$\Omega = \frac{4\pi^2 \mu_1 c^2 \gamma_1}{\sqrt{1 - \omega^2 \alpha_1 \gamma_1} \lambda^2}$$

Il existe donc une direction de propagation pour laquelle les vibrations privilégiées sont rectilignes et orthogonales si :

$$(VI_{2,10}) \quad \Omega // \cdot \Omega < 0$$

La courbe donnant l'écart entre les angles d'ellipticités des vibrations privilégiées, en fonction de la direction de propagation aurait alors la forme donnée par la figure 9.

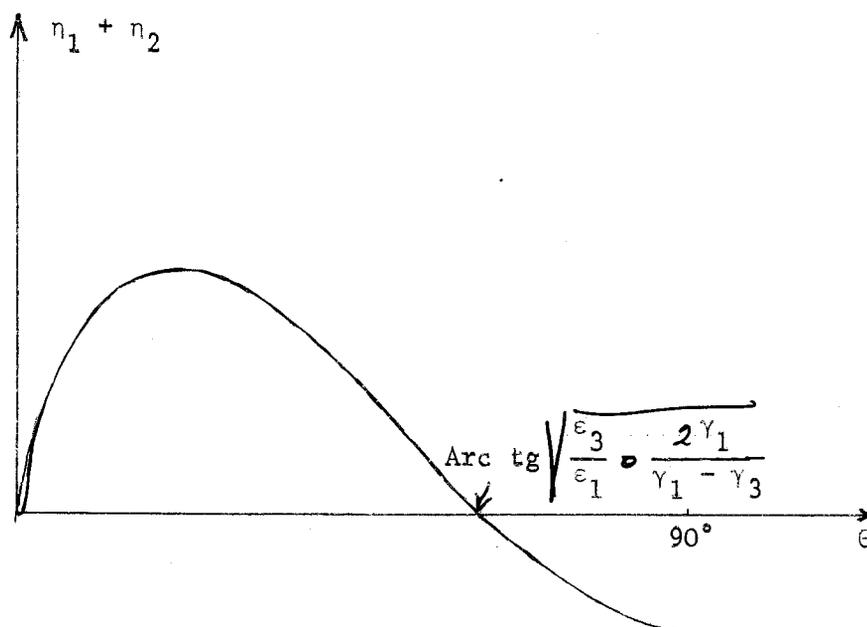


Figure 9 : Ecart entre les angles d'ellipticité en fonction de la direction de propagation quand les "pouvoirs rotatoires" pour des lames taillées parallèlement et perpendiculairement à l'axe optique sont de signes opposés.

Ce phénomène a été observé et a été expliqué de la même manière pour le quartz dont la classe de symétrie est (32) [9].

### VI.3. - Détermination expérimentale des paramètres du milieu

Il est en principe possible de déterminer tous les paramètres  $\epsilon_1, \mu_1, \gamma_1, \alpha_1, \epsilon_3, \mu_3, \alpha_3, \gamma_3$  en associant aux mesures d'indices de réfraction, de pouvoir rotatoire et d'ellipticités, des mesures d'impédances.

En effet, les vitesses de phase des ondes privilégiées perpendiculaires à l'axe optique sont :

$$v = \frac{c}{n} = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1 + \frac{\omega^2}{4} (\epsilon_1 \alpha_1 - \mu_1 \gamma_1)^2} \pm \frac{\omega}{2} (\epsilon_1 \alpha_1 + \mu_1 \gamma_1)}{\epsilon_1 \mu_1}$$

Si l'on se limite au cas où les coefficients  $\alpha_1$  et  $\gamma_1$  sont faibles, l'on a :

$$\frac{1}{\epsilon_1 \mu_1} \approx \frac{1}{4} \left[ \frac{c}{nd} + \frac{c}{ng} \right]^2$$

Si l'on considère une lame taillée perpendiculairement à l'axe optique immergée dans un milieu isotrope et inactif d'impédance  $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ , le rapport de l'intensité de lumière réfléchie  $I_r$  à l'intensité de lumière incidente  $I_i$  est égal à :

$$\frac{I_r}{I_i} \approx \left[ \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}} \right]^2$$

Le rapport  $\frac{\epsilon_1}{\mu_1}$  est donc égal à :

(VI<sub>3,2</sub>)

$$\frac{\epsilon_1}{\mu_1} \approx \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \left[ \frac{1 - \sqrt{\frac{I_r}{I_i}}}{1 + \sqrt{\frac{I_r}{I_i}}} \right]^2$$

Les quantités  $\epsilon_1$  et  $\mu_1$  peuvent alors être calculées à partir des mesures des indices  $nd$  et  $ng$  et du pouvoir réflecteur  $\frac{I_r}{I_i}$  :

(VI<sub>3,3</sub>)

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = \left[ \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1 - \sqrt{\frac{I_r}{I_i}}}{1 + \sqrt{\frac{I_r}{I_i}}} \right] \cdot \frac{2}{\left[ \frac{c}{nd} + \frac{c}{ng} \right]} \\ \mu_1 = \left[ \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1 + \sqrt{\frac{I_r}{I_i}}}{1 - \sqrt{\frac{I_r}{I_i}}} \right] \cdot \frac{2}{\left[ \frac{c}{nd} + \frac{c}{ng} \right]} \end{array} \right.$$

La mesure du pouvoir rotatoire spécifique  $\Omega$  permet de calculer la quantité  $\epsilon_1 \alpha_1 + \mu_1 \gamma_1$  :

$$(VI_{3,4}) \quad \frac{\mu_1 \gamma_1 + \epsilon_1 \alpha_1}{2} = \frac{\lambda^2 \Omega}{4\pi^2 c^2}$$

H.B.G. CASIMIR [24] étudie la réflexion des ondes par un dioptre plan séparant deux cristaux énantiomères taillés perpendiculairement à l'axe optique. Il montre que le rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie (R) à l'amplitude de l'onde incidente (I) est égal à :

$$(VI_{3,5}) \quad \frac{R}{I} = \frac{\omega \cdot \frac{\mu_1 \gamma_1 - \epsilon_1 \alpha_1}{2}}{2 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 + \frac{\omega^2}{4} (\epsilon_1 \alpha_1 - \mu_1 \gamma_1)^2} + \frac{\omega}{2} (\mu_1 \gamma_1 - \epsilon_1 \alpha_1)} = \frac{\omega}{2\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} (\mu_1 \gamma_1 - \epsilon_1 \alpha_1)$$

Les relations (VI<sub>3,4</sub>) et (VI<sub>3,5</sub>) permettent donc de déterminer les quantités  $\epsilon_1 \alpha_1$  et  $\mu_1 \gamma_1$ , soient :

$$(VI_{3,6}) \quad \begin{cases} \mu_1 \gamma_1 = \frac{\lambda^2 \Omega}{4\pi^2 c^2} + \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\omega} \frac{R}{I} \\ \epsilon_1 \alpha_1 = \frac{\lambda^2 \Omega}{4\pi^2 c^2} - \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\omega} \frac{R}{I} \end{cases}$$

Le coefficient gyroélectrique  $\gamma_1$  et le coefficient gyromagnétique  $\alpha_1$  peuvent alors être calculés en remplaçant les quantités  $\epsilon_1$  et  $\mu_1$  par leurs expressions en fonction des indices  $n_d$  et  $n_g$ , du pouvoir réflecteur  $\frac{I_r}{I_i}$  et du pouvoir rotatoire  $\Omega$ .

$$(VI_{3,7}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \left[ \frac{\lambda^2 \Omega}{4\pi^2 c^2} + \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\omega} \frac{R}{I} \right] \cdot \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right]^{1/2} \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \sqrt{\frac{I_r}{I_i}}}{1 + \sqrt{\frac{I_r}{I_i}}} \right] \\ \left[ \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right]^{1/2} \frac{1}{2} \left[ \frac{1 + \sqrt{\frac{I_r}{I_i}}}{1 - \sqrt{\frac{I_r}{I_i}}} \right] \end{array} \right] \cdot \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \\ \alpha_1 = \left[ \frac{\lambda^2 \Omega}{4\pi^2 c^2} - \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\omega} \frac{R}{I} \right] \cdot \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right]^{1/2} \frac{1}{2} \left[ \frac{1 + \sqrt{\frac{I_r}{I_i}}}{1 - \sqrt{\frac{I_r}{I_i}}} \right] \\ \left[ \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right]^{1/2} \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \sqrt{\frac{I_r}{I_i}}}{1 + \sqrt{\frac{I_r}{I_i}}} \right] \end{array} \right] \cdot \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \end{array} \right.$$

où 
$$\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} = \frac{2}{\frac{c}{n_d} + \frac{c}{n_g}}$$

Si  $n_1$  est l'indice de propagation de l'onde parallèle à l'axe optique dont la vibration est dirigée selon l'axe optique, nous avons :

$$(VI_{3,8}) \quad \mu_3 \approx \frac{1}{\epsilon_1} \frac{n_1^2}{c^2}$$

Si  $n_2$  est l'indice de propagation de l'onde parallèle à l'axe optique dont la vibration est dirigée selon la perpendiculaire à l'axe optique, nous avons :

$$(VI_{3,9}) \quad \epsilon_3 \approx \frac{1}{\mu_1} \frac{n_2^2}{c^2}$$

Ces formules permettent de calculer les quantités  $\epsilon_3$  et  $\mu_3$  à partir de la mesure des indices  $n_1$  et  $n_2$ .

L'ellipticité de la vibration électrique parallèle à l'axe optique est telle que :

$$(VI_{3,10}) \quad \text{tg } \eta_1 \approx - \frac{\omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_3}}{\epsilon_3 \mu_1 - \epsilon_1 \mu_3} \cdot (\epsilon_1 \alpha_1 - \mu_1 \gamma_3)$$

L'ellipticité de la vibration électrique perpendiculaire à l'axe optique est telle que :

$$(VI_{3,11}) \quad \text{tg } \eta_2 \approx \frac{\omega \sqrt{\epsilon_3 \mu_1}}{\epsilon_3 \mu_1 - \epsilon_1 \mu_3} \cdot (\mu_3 \gamma_1 - \epsilon_3 \alpha_3)$$

La mesure de ces ellipticités permet de déduire la valeur des coefficients  $\alpha_3$  et  $\gamma_3$ .

Il est donc théoriquement possible de vérifier les relations qui lient les coefficients gyroélectriques et gyromagnétiques :

$$\epsilon_1 \alpha_1 = \mu_1 \gamma_1$$

$$\epsilon_3 \alpha_3 = \mu_3 \gamma_3$$

Le succès d'une telle vérification est malheureusement limité :

- Les valeurs des ellipticités  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont très faibles, et une mesure précise est impossible actuellement [17].
- H.B.G. CASIMIR signale d'autre part que l'amplitude de l'onde réfléchie à l'interface de deux cristaux énantiomères est faible si les coeffi-

cients gyroélectriques et gyromagnétiques sont faibles, et est inaccessible à la mesure [24].

. De plus, si la relation :

$$\epsilon_1 \alpha_1 = \mu_1 \gamma_1$$

est vérifiée, cette amplitude, non seulement est faible, mais est nulle comme le montre l'expression (VI<sub>3,5</sub>).

Ce résultat se retrouve par le calcul des impédances du milieu.

Pour la vibration droite, cette impédance est égale à :

$$(VI_{3,12}) \quad \frac{E_x}{H_y} = - \frac{E_y}{H_x} = \frac{1}{\epsilon_1 v'd - \omega \gamma_1}$$

Pour la vibration gauche, elle est égale à :

$$(VI_{3,13}) \quad \frac{1}{\epsilon_1 v'g + \omega \gamma_1}$$

Pour la vibration droite du milieu énantiomère, elle est égale à :

$$(VI_{3,14}) \quad \frac{1}{\epsilon_1 v'd - \omega \gamma_1} = \frac{1}{\epsilon_1 v'g + \omega \gamma_1}$$

et pour la vibration gauche du milieu énantiomère :

$$(VI_{3,15}) \quad \frac{1}{\epsilon_1 v'g + \omega \gamma_1} = \frac{1}{\epsilon_1 v'd - \omega \gamma_1}$$

Si la relation  $\epsilon_1 \alpha_1 = \mu_1 \gamma_1$  est vérifiée, ces quatre impédances sont égales à :

$$(VI_{3,16}) \quad \frac{2}{\epsilon_1 (v'd + v'g)}$$

et l'égalité de ces impédances entraîne que le pouvoir réflecteur d'un dioptré séparant deux milieux énantiomères est nul pour les milieux anaxiaux (432 ou  $\infty$ ) ou pour les milieux uniaxes taillés perpendiculairement à l'axe optique.

Si l'on remplace le milieu d'incidence par un milieu isotrope inactif d'impédance  $\frac{1}{\epsilon_0} v_0$ , le facteur de réflexion devient :

$$\frac{R}{I} = \frac{\epsilon_1 \left[ \frac{v'd + v'g}{2} \right] - \epsilon_0 v_0}{\epsilon_1 \left[ \frac{v'd + v'g}{2} \right] + \epsilon_0 v_0}$$

Il est en général non nul. Il ne dépend pas de l'état de polarisation de l'onde incidente. Ce facteur de réflexion ne change pas si l'on remplace le milieu de réfraction par un milieu énantiomère.

Si l'on considère un mélange de deux liquides actifs énantiomères formant une solution parfaite [38], le pouvoir réflecteur est donc indépendant de la composition de ce mélange.

Ces résultats ne peuvent évidemment pas être vérifiés expérimentalement pour des substances à faible pouvoir rotatoire, parce que les impédances données par les expressions (VI<sub>3,12</sub> ... VI<sub>3,15</sub>), sont "a priori" très peu différentes de l'impédance  $\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$  d'un milieu inactif de constantes diélectrique et magnétique  $\epsilon_1$  et  $\mu_1$ .

#### VI.4. - Réversibilité, Changement du sens du temps

Une onde privilégiée du milieu tel qu'il a été défini se propage sans qu'il y ait transformation de l'énergie électromagnétique en une autre forme. Le système doit être invariant par rapport au renversement du sens du temps, c'est-à-dire que l'expression obtenue en changeant le sens du temps dans une solution, doit être aussi une solution [25].

Les composantes réelles du champ et de l'induction électriques qui sont les quantités de la forme :

$$e(t) = e_0 \cos(\omega t - \phi_1)$$

sont transformées en :

$$e'(t) = e(-t) = e_0 \cos(\omega t + \phi_1),$$

ce qui revient, dans la représentation complexe à changer :

$$\vec{E}(t) \text{ en } \vec{E}(-t)^* \\ \text{et } \vec{D}(t) \text{ en } \vec{D}(-t)^* .$$

Si l'on considère que les vecteurs champ et induction magnétiques  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont créés par des déplacements de charges électriques ponctuelles, ils changent de signe quand l'on change le sens du temps.

Ceci entraîne que

$$\vec{H}(t) \text{ devient } -\vec{H}(-t)^* \\ \text{et } \vec{B}(t) \text{ devient } -\vec{B}(-t)^* \quad [26, 27].$$

Le changement du sens du temps change en particulier le sens de propagation de l'onde et le sens de parcours de l'ellipse décrite par la vibration considérée.

Pour les milieux qui nous intéressent, l'onde privilégiée de vitesse + v est transformée en l'onde privilégiée de vitesse - v, le principe de l'invariance par rapport au renversement du sens du temps est donc satisfait.

VI.5. - Propriétés des tenseurs représentatifs des propriétés électromagnétiques du milieu.

Les matrices de permittivité diélectrique et de perméabilité magnétique sont réelles et symétriques, et les matrices représentatives des propriétés gyroélectriques et gyromagnétiques ( $[\gamma_{hkl}]$  et  $[\alpha_{hkl}]$ ) sont réelles. Ces propriétés ont été démontrées par LANDAU et LIFCHITZ [27, 28], FEDOROV [29], ENDEMAN [30].

Par contre, nous ne retrouvons pas les relations :

$$\begin{cases} \gamma_{hkl} = -\gamma_{khl} & (\text{ici } \gamma_2 = \gamma_3) \\ \alpha_{hkl} = -\alpha_{khl} & (\text{ici } \alpha_2 = \alpha_3) \end{cases}$$

qui expriment que les matrices représentatives des propriétés électromagnétiques sont hermitiques.

Pour la solution que nous avons retenue, ces matrices sont :

$${}^{(VI_{5,1})} [\epsilon] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \epsilon_1 & -j \frac{\omega}{v} \gamma_1 \\ \hline j \frac{\omega}{v} (\gamma_1 \cos^2 \theta - \gamma_3 \sin^2 \theta) & \epsilon_1 \cos^2 \theta + \epsilon_3 \sin^2 \theta & (\epsilon_1 - \epsilon_3) \sin \theta \cos \theta \\ \hline j \frac{\omega}{v} (\gamma_1 + \gamma_3) \sin \theta \cos \theta & (\epsilon_1 - \epsilon_3) \sin \theta \cos \theta & \epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_3 \cos^2 \theta \\ \hline \end{array}$$

et respectivement  $[\mu]$ .

Elles ne sont hermitiques que si :

$$\gamma_1 = -\gamma_3, \quad \alpha_1 = -\alpha_3, \quad \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} = \frac{\mu_1}{\mu_3},$$

conditions qui sont réalisées dans le cas des milieux anaxiaux, mais qui ont été rejetées au paragraphe III.7. pour les milieux uniaxes.

Pour les milieux uniaxes étudiés, si le milieu est transparent et actif, les tenseurs  $[\hat{\epsilon}]$  et  $[\hat{\mu}]$  doivent donc être non hermitiques pour satisfaire la conservation de l'énergie.

#### VI.6. - Application du théorème de Poynting : Couplage entre les ondes privilégiées.

Nos résultats sont en contradiction avec ceux donnés par LANDAU et LIFCHITZ [27, 28], FEDOROV [29] et ENDEMAN [30].

Pour déceler l'origine de cette contradiction, nous allons étudier la conservation de l'énergie en appliquant le théorème de Poynting.

D'après le théorème de Poynting, l'énergie moyenne dissipée par unité de temps et de volume est égale à :

$$(VI_{6,1}) \quad Q = \sum_{\omega} \frac{\omega}{2} \text{pi} \left[ \vec{\mathcal{E}}^+ \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{H}}^+ \cdot \vec{\mathcal{B}} \right]$$

Une onde monochromatique plane et homogène peut toujours être décomposée sous la forme d'une combinaison linéaire des quatre ondes privilégiées :

$$(VI_{6,2}) \quad \vec{\mathcal{E}} = \sum_q \vec{\mathcal{E}}_q \exp + j\omega \left( t - \frac{z}{v_q} \right)$$

$$v_q = v_1, v_2, -v_1, -v_2$$

$$q = 1, 2, 3, 4$$

et respectivement  $\vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{B}}$ .

L'expression de l'énergie dissipée devient alors :

$$Q = \frac{\omega}{2} \text{pi} \left\{ \sum_p \sum_q \left( \vec{\mathcal{E}}_p^+ \cdot \vec{\mathcal{D}}_q + \vec{\mathcal{H}}_p^+ \cdot \vec{\mathcal{B}}_q \right) \exp j\omega \left( \frac{1}{v_p} - \frac{1}{v_q} \right) z \right\}$$

ou, en regroupant les couples (p, q) et (q, p) :

$$(VI_{6,3 \text{ bis}}) \quad Q = \frac{\omega}{2} \pi i \left\{ \begin{aligned} & \sum_{p=1}^4 \sum_{q=p}^4 (\vec{\zeta}_p^+ \cdot \vec{D}_q + \vec{\mathcal{H}}_p^+ \cdot \vec{B}_q) \exp j \left( \frac{1}{v_p} - \frac{1}{v_q} \right) z \\ & + (\vec{\zeta}_q^+ \cdot \vec{D}_p + \vec{\mathcal{H}}_q^+ \cdot \vec{B}_p) \exp - j \left( \frac{1}{v_p} - \frac{1}{v_q} \right) z \end{aligned} \right\}$$

Si le milieu est parfaitement transparent, cette quantité doit être nulle quel que soit z et quelle que soit la combinaison linéaire d'ondes privilégiées.

Ceci entraîne, quand p et q sont égaux :

$$(VI_{6,4}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\omega}{2} \pi i (\vec{\zeta}^+ \cdot \vec{D} + \vec{\mathcal{H}}^+ \cdot \vec{B}) = 0 \\ \text{ou} \\ & \frac{\omega}{2} \vec{\zeta}^+ ([\hat{\epsilon}] - [\hat{\epsilon}]^+) \vec{\zeta} + \vec{\mathcal{H}}^+ ([\hat{\mu}] - [\hat{\mu}]^+) \vec{\mathcal{H}} = 0 \\ & \text{pour toute onde privilégiée.} \end{aligned} \right.$$

. et quand p est différent de q :

$$(VI_{6,5}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \vec{\zeta}_p^+ \cdot \vec{D}_q + \vec{\mathcal{H}}_p^+ \cdot \vec{B}_q = [\vec{\zeta}_q^+ \cdot \vec{D}_p + \vec{\mathcal{H}}_q^+ \cdot \vec{B}_p]^* \\ \text{ou} \\ & \vec{\zeta}_p^+ ([\hat{\epsilon}]_q - [\hat{\epsilon}]_p^+) \vec{\zeta}_q + \vec{\mathcal{H}}_p^+ ([\hat{\mu}]_q - [\hat{\mu}]_p^+) \vec{\mathcal{H}}_q = 0. \end{aligned} \right.$$

Les auteurs cités au début de ce paragraphe déduisent l'hermiticité des matrices  $[\hat{\epsilon}]$  et  $[\hat{\mu}]$  de la relation (VI<sub>6,4</sub>) en disant que cette équation doit être identiquement nulle.

Or, nous montrons ci-dessus que la relation (VI<sub>6,4</sub>) n'est nécessaire que pour une onde privilégiée du milieu.

L'hermiticité des matrices  $[\hat{\epsilon}]$  et  $[\hat{\mu}]$ , qui est suffisante pour que l'expression :

$$\vec{\zeta}^+ ([\hat{\epsilon}] - [\hat{\epsilon}]^+) \vec{\zeta} + \vec{\mathcal{H}}^+ ([\hat{\mu}] - [\hat{\mu}]^+) \vec{\mathcal{H}}$$

soit nulle n'est donc pas nécessaire, il suffit que la condition (VI<sub>6,4</sub>) soit vérifiée pour toute onde privilégiée. Ceci est réalisé ici pour les milieux que nous avons définis, qui ne vérifient pas nécessairement les relations d'hermiticité.

L'équation (VI<sub>6,5</sub>) exprime que l'énergie de couplage entre deux ondes privilégiées planes et homogènes à vecteurs d'ondes différents et parallèles, se propageant simultanément, doit être nulle.

Cette condition est ici pleinement satisfaite pour tout couple d'ondes privilégiées du milieu défini par les équations relatives à la matière que nous avons établies. Nous remarquons que l'orthogonalité n'est pas une condition nécessaire d'absence de couplage entre les vibrations privilégiées, contrairement à l'affirmation de STOKES [31] qui n'a pas pris en considération les ondes réfléchies aux dioptries.

Les relations de couplage du type (VI<sub>6,5</sub>) entre ondes privilégiées différentes ne sont pas étudiées par LANDAU et LIFCHITZ', FEDOROV et ENDEMAN. Il est normal qu'ils ne trouvent pas les relations :

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= -\gamma_1 \\ \epsilon_1 \alpha_1 &= \mu_1 \gamma_1 \\ \epsilon_3 \alpha_3 &= \mu_3 \gamma_3 \end{aligned}$$

qui interdisent l'hermiticité pour les milieux uniaxes étudiés.

Les conditions résultant de la conservation de l'énergie pour une lame à faces planes et parallèles éclairée normalement des deux côtés sont donc suffisantes pour que la quantité :

$$\operatorname{div} \left( \vec{c}_A \vec{c}_B^* \right)$$

soit nulle pour toute onde plane homogène.

Il apparaît donc ici que l'hermiticité des tenseurs représentatifs des propriétés électromagnétiques pour les ondes considérées non seulement n'est pas une condition nécessaire de transparence parfaite et de conservation de l'énergie, mais est même exclue pour les milieux uniaxes que nous avons étudiés.

Pour les milieux à dispersion spatiale non nulle, l'hermiticité n'est d'ailleurs pas une propriété intrinsèque. Pour montrer cela, considérons un milieu de classe de symétrie 432 ou  $\infty^\infty$  où se propage dans la direction oz une onde plane monochromatique.

Si cette onde est homogène, de la forme :

$$\vec{V} = \vec{V}_0 \exp j\omega \left( t - \frac{z}{v} \right),$$

la matrice  $[\hat{\epsilon}]$  est :

$$[\hat{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & j \frac{\omega}{v} \gamma_1 & \cdot \\ -j \frac{\omega}{v} \gamma_1 & \epsilon_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \epsilon_1' \end{bmatrix}$$

Nous savons que  $\epsilon_1$  et  $\gamma_1$  sont réels, cette matrice est donc hermitique.

Considérons maintenant une onde plane hétérogène uniforme [32] de la forme :

$$\vec{V} = \vec{V}_0 \exp j\omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \exp - \omega \frac{f}{c} x,$$

c'est-à-dire une onde qui se propage selon l'axe oz, et dont l'amplitude décroît exponentiellement selon ox.

Pour une telle onde, la matrice  $[\hat{\epsilon}]$  est :

$$[\hat{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & j \frac{\omega}{v} \gamma_1 & \cdot \\ -j \frac{\omega}{v} \gamma_1 & \epsilon_1 & \omega \frac{f}{c} \gamma_1 \\ \cdot & -\omega \frac{f}{c} \gamma_1 & \epsilon_1' \end{bmatrix}$$

Le coefficient  $\omega \frac{f}{c}$  est réel, cette matrice n'est pas hermitique si le terme  $\gamma_1$  est non nul. Ceci montre que la forme des tenseurs représentatifs des propriétés électromagnétiques du milieu dépend non seulement du milieu, mais du type d'ondes qui s'y propagent, leur hermiticité n'est pas un caractère intrinsèque.

L'hermiticité n'étant pas un caractère intrinsèque, il n'est pas étonnant que la condition de transparence des milieux uniaxes étudiés ne soit pas l'hermiticité.

## C O N C L U S I O N

Cette étude a été menée dans le cadre des hypothèses suivantes :

- . Les équations relatives aux propriétés de la matière sont linéaires, et leur développement est limité au premier ordre.
- . Les ondes privilégiées sont calculées à partir des équations de Maxwell habituelles ; les conditions de continuité aux dioptries sont les conditions habituelles.

L'étude des conditions de conservation de l'énergie pour une lame transparente, permet d'établir, dans le cas particulier de milieux dont la classe de symétrie est 422, 622,  $\infty 2$ , 432 ou  $\infty^{\infty}$ , qu'il est possible qu'un milieu soit à la fois parfaitement transparent et actif.

La matrice représentative des propriétés électromagnétiques du milieu n'est pas forcément hermitique, et l'hermiticité peut, dans certains cas, être exclue. Si le milieu est actif, les coefficients gyroélectriques et gyromagnétiques sont tous deux nécessaires et sont liés entre eux par des relations faisant figurer les permittivités diélectriques et les perméabilités magnétiques.

La détermination expérimentale des termes gyroélectriques et gyromagnétiques n'a pas encore été réalisée : pour les milieux dont le pouvoir rotatoire est faible, la séparation par un moyen expérimental de ces termes semble impossible actuellement ; il faudra peut être chercher une preuve expérimentale de nos résultats dans l'étude de cristaux à grand pouvoir rotatoire.

Il en est de même pour la mesure du défaut d'orthogonalité des vibrations privilégiées : l'hypothèse d'Airy, selon laquelle les vibrations privilégiées sont orthogonales, reste une bonne approximation [9] pour les milieux que nous avons étudiés.

Les termes d'ordres supérieurs à ceux de GIBBS sont négligés.

Il en est de même pour les effets de non linéarité, et pour la piézoélectricité. Nous notons à ce sujet que, si le milieu est supposé parfaitement transparent aux fréquences considérées, le tenseur de génération du second harmonique est nul [39].

Le théorème de Poynting, dont la valeur est contestée pour les milieux étudiés ici [33] n'est pas utilisé. L'on constate pourtant que ce théorème est vérifié pour les milieux tels qu'ils ont été définis par l'étude de la lame et pour les ondes planes et homogènes. La réciproque est-elle vraie : retrouve-t-on par l'étude du théorème de Poynting les résultats déduits de l'étude de la lame ?

Enfin, l'utilisation des équations de Maxwell et des équations de continuité des champs est discutée pour certains milieux (H. ARZELIES [33]). L'on peut donc se demander si elles sont rigoureusement applicables aux milieux à dispersion spatiale.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] F. ARAGO Mém. ci. sci. math. phys., Institut impérial de France, I 12, p. 93 - 134, (1811).
- [2] A. CAUCHY C.R. de l'Acad. des Sci., 15, p. 910 - 6, (1842).
- [3] A. CAUCHY C.R. de l'Acad. des Sci., 15, p. 1076 - 96, (1842).
- [4] A. CAUCHY C.R. de l'Acad. des Sci., 18, p. 961 - 72, (1844).
- [5] J.W. GIBBS Am. J. Sci., III 23, p. 460 - 76, (1882).
- [6] H.A. LORENTZ Proc. Acad. Amsterdam, 24, p. 333, (1921).
- [7] V. BURSIAŃ et A. TIMOREV z. für Phys., 52, p. 161 - 74, (1928).
- [8] R. GANS Ann. der Phys., IV 79, p. 547 - 9, (1926).
- [9] J. BILLARD Thèse, Paris, (1966).
- [10] F.I. FEDOROV et A. CONSTANTINOVA Opt. i Spektr., 12, p. 505 - 9, (1962).  
Opt. and Spectr., 12, p. 280 - 2, (1962)
- [11] A.M. GONCHARENKO et F.I. FEDOROV Opt. i Spektr., 14, p. 94 - 9, (1963).  
Opt. and Spectr., 14, p. 48 - 50, (1963)
- [12] F.I. FEDOROV et A.M. GONCHARENKO Opt. i Spektr., 14, p. 100 - 5, (1963).  
Opt. and Spectr., 14, p. 51 - 3, (1963)
- [13] P. POINCELÓT Ann. des Télécom. 19, p. 113 - 6, (1964).
- [14] M. BORN et E. WOLF Principles of Optics, Pergamon, London, (1959).
- [15] A. AUTHIER Bull. Soc. Fr. Min. Crist. 84, p. 51 - 89, (1961).

- [16] Y. LE CORRE J. de Phys., 18, p. 312 - 7, (1957).
- [17] D. FONTAINE et J. BILLARD C.R. Acad. Sci. Paris, 270, p. 288 - 90, (1970).
- [18] A. KASTLER C.R. Acad. Sci. Paris, 271, p. 999 - 1001, (1970).
- [19] J.B. BIOT Mem. Acad. Sci., 2, p. 41 - 136, (1817).
- [20] G. BRUHAT Traité de Polarimétrie - Editions de la revue d'Optique Paris (1930).
- [21] G.B. AIRY Trans. Cambridge Phil. Soc., 4, p. 79 - 123, (1833).
- [22] G.B. AIRY Trans. Cambridge Phil. Soc., 4, p. 199 - 208, (1833).
- [23] G.B. AIRY Ann. der Phys. und Chem., 23, 204 - 80, (1831).
- [24] H.B.G. CASIMIR Philips Res. Repts. 21, p. 417 - 22, (1966).
- [25] J.J. SAKURAI Invariance Principles and elementary particles, Princeton University Press. Princeton (New Jersey) (1964).
- [26] R. CASTAING Thermodynamique statistique, Masson, Paris (1970).
- [27] L. LANDAU et E. LIFCHITZ V, Physique Statistique, Mir, Moscou (1967).
- [28] L. LANDAU et E. LIFCHITZ VIII, Electrodynamique des milieux continus, Mir, Moscou (1969).
- [29] F.I. FEDOROV Opt. i Spektr., 6, p. 85 - 93, (1959).  
Opt. and Spectr., 6, p. 49 - 53, (1959).
- [30] H.I. ENDEMAN Thèse, Utrecht (1965).
- [31] G.G. STOKES Trans. Cambridge Phil. Soc., 9, p. 399 (1852).
- [32] J. BILLARD et A. MOISES Colloque d'Optique Ultrahertzienne, Bordeaux, Juin 1970.

- [33] H. ARZELIES      Electricité, Gauthier Villars, Paris, p. 347, p. 404, (1963)
- [34] P. LANGEVIN      Le Radium, 7, p. 249 - 60, (1910).
- [35] J. BILLARD et J. JACQUES      Réun. de l'Assoc. fr. de Crist. Paris, (1970).
- [36] G. SZIVESSY et C. SCHWEERS      Ann. der Phys., I, p. 891 - 947, (1929).
- [37] G. BRUHAT et P. GRIVET      J. de Phys., VII, 6, p. 12 - 26 (1935).
- [38] M. LECLERCQ - J. BILLARD - J. JACQUES  
Mol. Cryst. and Liq. Cryst., 8, p. 367 - 387, (1969).
- [39] J. JERPHAGNON      Réun. Annuelle Assoc. fr. Crist. Lille, (1971).

