THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
de LILLE I

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ

(Mathématiques appliquées)

par

Luc DURIEZ

APPLICATION DES PERTURBATIONS SECULAIRES A LA DETERMINATION DES ELEMENTS MOYENS DE L'ANNEAU DES PETITES PLANETES

THÈSE soutenue le 25 Juin 1971

devant la Commission d'examen

Monsieur M. DECUYPER, Président
Monsieur F. PARSY, Examinateur
Monsieur B. MORANDO, Examinateur
Monsieur P. BACCHUS, Rapporteur

UNIVERSITE DE LILLE

FACULTE DES SCIENCES

DOYENS HONORAIRES

MM. H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. ARNOULT, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DOLLE, FLEURY, P. GERMAIN, KAMPE DE FERIET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, MM. MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PAUTHENIER, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKY.

PROFESSEURS TITULAIRES

M.	BACCHUS Pierre	Astronomie et Calcul
M.	BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Générale
M.	BLOCH Vincent	Psychophysiologie
M.	BONNEMAN Pierre	Chimie Industrielle
M.	BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M.	CELET Paul	Géologie Générale
M.	CONSTANT Eugène	Electronique
M.	CORSIN Pierre	Paléobotanique
M.	DECUYPER Marcel	Mathématiques
M.	DEDECKER Paul	Mathématiques
M.	le Doyen DEFRETIN René	Directeur du Laboratoire de Biologie Maritime de Wimereux
M.	DELATTRE Charles	Géologie Générale
M.	DURCHON Maurice	Biologie Animale
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	Electronique
M.	GLACET Charles	Chimie Organique
M.	GONTIER Gérard	Mécanique des Fluides
M.	GUILLAUME Jean	Biologie Végétale
M.	HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	MONTREUIL Jean	Chimie Biologique
Mme	SCHWARTZ Marie Hélène	Mathématiques
M.	TILLIEU Jacques	Physique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie Minérale Appliquée E.N.S.C.L.
M.	VIDAL Pierre	Automatique
M.	VIVIER Emile	Biologie Animale
M.	WATERLOT Gérard	Géologie et Minéralogie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique

PROFESSEURS A TITRE PERSONNEL

M. BOUISSET Simon	Physiologie Animale
M. DELHAYE Michel	Chimie Physique et Minérale 1er Cycle
M. LINDER Robert	Biologie Végétale
M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. SAVARD Jean	Chimie Générale
M. SCHALLER François	Biologie Animale
M. SCHILTZ René	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique
M. BODART Marcel	Biologie Végétale
M. BOILLET Pierre	Physique
M. DERCOURT Jean-Michel	Géologie et Minéralogie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
Mle MARQUET Simone	Mathématiques
M. MONTARIOL Frédéric	Chimie Minérale Appliquée
M. PROUVOST Jean	Géologie et Minéralogie
M. VAILLANT Jean	Mathématiques

MAITRES DE CONFERENCE (et chargés des fonctions)

M. AUBIN Thierry	Mathématiques Pures
M. BEGUIN Paul	Mécanique des Fluides
M. BILLARD Jean	Physique
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CARREZ Christian	Calcul
M. CORDONNIER Vincent	Calcul
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COULON Jean-Paul	Electrotechnique
M. DEBRABAN Pierre	Sciences Appliquées
M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FROLICH Daniel	Sciences Appliquées
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M. HERMAN Maurice	Physique
M. HUARD de la MARRE Pierre	Calcul
M. JOURNEL Gérard	Sciences Appliquées
Mle KOSMANN Yvette	Mathématiques
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie Générale
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANDAIS Jean	Chimie Organique
M. LAURENT François	Automatique
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOUAGE Francis	Sciences Appliquées

M.	LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M.	MAES Serge	Physique
M.	MAIZIERES Christian	Automatique
M.	MESSELYN Jean	Physique
M.	MIGEON Michel	Sciences Appliquées
M.	MONTEL Marc	Physique
M.	OUZIAUX Roger	Sciences Appliquées
M.	PANET Marius	Electrotechnique
M.	PAQUET Jacques	Sciences Appliquées
M.	PARSY Fernand	Mécanique des Fluides
M.	POVY Jean-Claude	Sciences Appliquées
M.	RACZY	Radioélectrique
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie Animale
M.	ROYNETTE Bernard	Mathématiques
M.	SALMER Georges	Electronique
M.	SMET Pierre	Physique
M.	VANDORPE Bernard	Sciences Appliquées
M.	WATERLOT Michel	Géologie Générale
Mme	ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

Je tiens à témoigner toute ma gratitude à Monsieur le Professeur DECUYPER pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Que Monsieur le Professeur BACCHUS, directeur du Laboratoire d'Astronomie de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, qui m'a introduit, guidé et encouragé dans les voies de la recherche, et à qui je dois l'idée de cette thèse et les nombreux conseils nécessaires à son élaboration, trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie vivement Monsieur MORANDO, astronome du Bureau des Longitudes, qui s'est intéressé à mon travail et qui a bien voulu accepter de faire partie du jury.

Je remercie également Monsieur PARSY, Maître de Conférences à l'Université des Sciences et Techniques de Lille, qui a bien voulu juger ce travail.

Que Madame HARDRÉ, qui s'est particulièrement attachée à rendre agréable la présentation de cette thèse, et tous ceux qui ont contribué à sa réalisation matérielle reçoivent également mes plus vifs remerciements.

A mes parents,

APPLICATION DES PERTURBATIONS SECULAIRES A LA DETERMINATION DES ELEMENTS MOYENS DE L'ANNEAU DES PETITES PLANETES

INTRODUCTION

Les éléments moyens auxquels on s'intéresse ici, sont d'une part le plan moyen de l'anneau des petites planètes, d'autre part l'excentricité et le périhélie de cet anneau. Le plan d'une orbite est caractérisé par son pôle, point représentatif sur la sphère céleste du vecteur unitaire normal au plan ; le point du plan complexe : $\sin i\ e^{j\theta}$ ($j^2 = -1$) représente alors, à une rotation de 90° près, la projection sur un plan de référence (par exemple l'écliptique d'une certaine époque) du pôle d'une orbite inclinée de l'angle i sur ce plan, et dont le noeud est à la longitude θ. Le pôle moyen de n planètes est le barycentre de leurs n pôles également pondérés et le plan moyen des n orbites sera, par définition, le plan passant par le Soleil, qui a pour pôle ce pôle moyen.

De la même façon, le point du plan complexe $e\ e^{j\tilde{\omega}}$ définit ce qu'on appelle le vecteur de Lizt ou le point de Lizt d'une planète dont l'excentricité est e et dont la longitude du périhélie (dans un repère convenable) est $\tilde{\omega}$. Le point de Lizt moyen de n petites planètes, barycentre de leurs n points de Lizt également pondérés définit alors l'excentricité moyenne et la longitude moyenne du périhélie des n orbites.

Avec ces définitions, on trouve l'inclinaison du plan moyen (sur l'écliptique par exemple) et l'excentricité moyenne bien différentes de la moyenne des inclinaisons et de la moyenne des excentricités. En fait, ces deux dernières quantités (respectivement égales à 8°,5 et 0,15) caractérisent plutôt la dispersion des pôles et des points de Lizt autour de leur point moyen.

On retrouvera aussi l'accumulation des périhélies dans la direction du périhélie de Jupiter, corrélation qui fut décelée et expliquée dès 1860 par Newcomb [8], puis confirmée par toutes les études ultérieures (Cf. [9], [10], [18], [4]). Par contre, la corrélation analogue des noeuds avec le noeud de Jupiter, prédite par Newcomb, ne fut jamais trouvée évidente.

En fait, l'utilisation des pôles est nécessaire car la considération des noeuds indépendamment des inclinaisons conduit à rattacher les orbites à l'écliptique, repère auquel les petites planètes ne sont pas associées de façon naturelle.

Ainsi, la détermination récente [1] du pôle moyen des 1725 orbites cataloguées [24] le situe à peu près aligné avec le pôle de Jupiter et celui de plan invariable du Système Solaire. La théorie des perturbations séculaires des plans d'orbite, limitée à l'ordre 1 des inclinaisons, avec Jupiter pour seul corps perturbateur, justifie qualitivement ce résultat mais le rapport théorique des distances entre ces pôles ne concorde pas avec celui donné par l'observation. C'est pour trouver les raisons de désaccord et aussi pour réaliser une étude analogue avec les points de Lizt que fut entrepris ce travail.

Dans une première partie, on a ainsi repris l'étude des perturbations séculaires des pôles et des points de Lizt des petites planètes et tenant compte des effets de toutes les grosses planètes, mais en limitant au 1er ordre les inclinaisons et les excentricités. Cette théorie, connue depuis longtemps, est présentée d'une façon particulière : d'une part, on utilise la notation matricielle, très concise, d'autre part on visualise les résultats en présentant les trajectoires décrites par les pôles et les points de Lizt des grosses planètes sous l'effet des perturbations séculaires. Il apparaît alors que le degré de complexité de ces courbes peut caractériser d'une certaine façon le pouvoir perturbateur de la planète considérée.

Cette théorie du 1er ordre permet de prévoir que, sous l'hypothèse de la régularité de la distribution des pôles et des points de Lizt d'un grand nombre de petites planètes, leur pôle moyen est sensiblement aligné avec les pôles de Jupiter et de Saturne, et décrit, en phase avec eux, à peu près un cercle en 50 000 ans. Quant à leur point de Lizt moyen, il décrit une épicycloïde presque parfaite (périodes 58000 ans et 349000 ans) en phase avec le point de Lizt de Jupiter ; on retrouve alors la corrélation des périhélies indiquée plus haut, et on peut prévoir son évolution à long terme.

Cependant l'application de cette théorie aux petites planètes du système Solaire demande quelques précautions à cause des valeurs élevées que peuvent prendre l'inclinaison et l'excentricité.

Aussi dans une deuxième partie, on a étudié les mouvements séculaires du pôle et du point de Lizt d'une petite planète sans limitation de l'ordre de l'inclinaison et de l'excentricité. Cette étude numérique, fondée sur la méthode de Gauss, ne concerne cependant que le cas où Jupiter est le seul corps perturbant et possède une orbite circulaire, mais suffit pour montrer les limitations du 1er ordre ; le mouvement du pôle est toujours rétrograde tandis que celui du point de Lizt peut être direct ou rétrograde ou même libratoire autour d'une direction fixe, selon les conditions initiales.

Enfin, dans une troisième partie, après l'élimination des effets de sélection du catalogue des petites planètes, on constate l'accord entre les positions théorique et observée du pôle moyen et du point de Lizt moyen de l'anneau des petites planètes.

CHAPITRE I : THEORIE DES PERTURBATIONS SECULAIRES DU 1er ORDRE

L'ensemble des corps en présence est constitué par les neuf grosses planètes du système solaire et n petites planètes. La distinction entre grosses et petites planètes est due à leur masse : les neuf grosses planètes ont une masse suffisante pour se perturber sensiblement l'une l'autre tandis que les petites planètes ont une masse trop faible pour perturber les grosses mais sont perturbées par elles. Dans ces conditions, les équations du mouvement des grosses planètes ne dépendent pas des petites. Elles peuvent être résolues séparément et il suffira ensuite de reporter leur solution dans les équations du mouvement des petites planètes.

1. GROSSES PLANETES

L'expression générale des inégalités séculaires des grosses planètes s'obtient facilement lorsqu'on limite la fonction perturbatrice à l'ordre 2 en inclinaison et en excentricité, (Cf. [2] p. 404 ou [5]). On note :

a_k	demi-grand axe de l'orbite de la $k^{\text{ème}}$ planète $(1 \leq k \leq 9)$		
n_k	moyen mouvement sur l'orbite de la $k^{\text{ème}}$ planète		
e_k	excentricité	"	"
i_k	inclinaison	"	"
Θ_k	longitude du noeud	"	"
$\tilde{\omega}_k$	longitude du périhélie	"	"
m_k	masse de la $k^{\text{ème}}$ planète	"	"

$u_k = \sin i_k\, e^{i\Theta_k} = p_k + iq_k$: représentation complexe de la projection du pôle de la $k^{\text{ème}}$ orbite sur l'écliptique

$v_k = e_k\, e^{i\tilde{\omega}_k} = h_k + il_k$: représentation complexe du vecteur de Lizt.

Les équations de Lagrange pour les parties réelles et imaginaires s'écrivent (Cf [2] p. 407) :

$$(1)\qquad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{1}{n_k a_k^2}\frac{\partial R_k}{\partial q_k} \quad ; \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{1}{n_k a_k^2}\frac{\partial R_k}{\partial p_k}$$

$$\frac{dh_k}{dt} = -\frac{1}{n_k a_k^2}\frac{\partial R_k}{\partial l_k} \quad ; \quad \frac{dl_k}{dt} = \frac{1}{n_k a_k^2}\frac{\partial R_k}{\partial h_k}$$

R_k est la partie séculaire de la fonction perturbatrice de la planète k limités à l'ordre 2 en p, q, h et l :

$$(2)\quad R_k = C + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{9} f\, m_j\, N_{kj}\,(h_j^2 + l_j^2 + h_k^2 + l_k^2 - p_j^2 - q_j^2 - p_k^2 - q_k^2 + 2(p_j p_k + q_j q_k))$$

$$- 2 \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{9} f\, m_j\, P_{kj}\,(h_j h_k + l_j l_k)$$

f est la constante de Gauss

Les coefficients N_{jk} et P_{jk} ne dépendent que des demi-grands axes (a_j, a_k)

Les équations (1) s'écrivent pour les variables u_k et v_k :

$$(3)\qquad \frac{du_k}{dt} = \sum_{j=1}^{9} A_{kj}\, i\, u_j \qquad k = 1, \ldots, 9$$

$$\frac{dv_k}{dt} = \sum_{j=1}^{9} B_{kj}\, i\, v_j \qquad k = 1, \ldots, 9$$

On a $N_{kj} = N_{jk}$ et $P_{kj} = P_{jk}$ mais $A_{kj} \neq A_{jk}$ et $B_{kj} \neq B_{jk}$ $(j \neq k)$

On peut transformer ces inégalités en égalités par le changement de variables :

$$u'_k = a_k \sqrt{m_k n_k}\, u_k$$

$$v'_k = a_k \sqrt{m_k n_k}\, v_k$$

Chaque nouvelle variable représente aussi bien le pôle ou le vecteur de Lizt d'une planète que l'ancienne puisqu'elle n'en diffère que par un facteur constant, qui est la racine carrée de son moment cinétique orbital.

Les équations (3) deviennent alors :

$$(3')\quad \begin{cases} \dfrac{du'_k}{dt} = \displaystyle\sum_{j=1}^{9} A'_{kj}\, i\, u'_j \\[2ex] \dfrac{dv'_k}{dt} = \displaystyle\sum_{j=1}^{9} B'_{kj}\, i\, v'_j \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A'_{kk} = -\,B'_{kk} = -\dfrac{2f}{n_k\, a_k^2} \displaystyle\sum_{j\neq k} m_j \; N_{kj} \\[2ex] A'_{kj} = \dfrac{2f\sqrt{m_k m_j}}{\sqrt{n_k n_j}\; a_k a_j}\, N_{kj} = A'_{jk} \\[2ex] B'_{kj} = -\dfrac{2f\sqrt{m_k m_j}}{\sqrt{n_k n_j}\; a_k a_j}\, P_{kj} = B'_{jk} \end{cases}$$

En appelant A (resp. B) la matrice constante réelle, symétrique, ne dépendant que des masses et des demi-grands axes des orbites, d'éléments A'_{kj} (resp. B'_{kj}), et U (resp. V) le vecteur de composantes u'_k (resp. v'_k), les systèmes (3') s'écrivent :

$$(4)\qquad \frac{dU}{dt} = i\, A\, U \qquad \text{et} \qquad \frac{dV}{dt} = i\, B\, V$$

Ces deux équations différentielles dans l'espace produit complexe C^9 remplacent les 36 équations différentielles (1) dans R.

Les solutions de ces deux équations sont de la forme :

$$(5)\qquad \begin{aligned} U &= P\, e^{i\Lambda_a t}\, \alpha \\ V &= Q\, e^{i\Lambda_b t}\, \beta \end{aligned}$$

P est la matrice réelle des vecteurs propres de A ; Λ_a est la matrice diagonale formée des valeurs propres λ_k de A, qui sont toutes réelles non positives, $e^{i\Lambda_a t}$ est la matrice diagonale formée des éléments $e^{i\lambda_k t}$; α est un vecteur colonne complexe arbitraire ; on a des définitions analogues pour Q, Λ_b et β, et les valeurs propres de β sont toutes réelles positives.
α et β sont liés aux conditions initiales :

$$U = P\, e^{i\Lambda_a t}\, \alpha \Longrightarrow \alpha = e^{-i\Lambda_a t}\, P^{-1} U$$

	demi-grand axe (en U.A.)	$M_\odot/M$ et référence		moyen mouvement diurne	longitude du PERIHELIE	EXCENTRICITE	longitude du NOEUD	INCLINAISON
MERCURE	0,387098	6110000	(19)	14732",4237	75°53'49",67	0,205615	47° 8'40",93	7° 0'10",85
VENUS	0,723330	408539	(19)	5767",6769	130° 8'25",91	0,006816	75°47'17",04	3°23'37",09
TERRE	1,0000013	328906	(19)	3548",1932	101°13' 7",15	0,016750	173°57' 3",00	0° 0' 0",00
MARS	1,523678	3098600	(19)	1886",5243	334°13' 5",81	0,093309	48°47'12",04	1°51' 1",09
JUPITER	5,202561	1047,36	(20)	299",1263	12°43'15",34	0,048335	99°26'36",19	1°18'31",45
SATURNE	9,554747	3499,6	(19)	120",4547	91° 5'53",38	0,055892	112°47'25",40	2°29'33",07
URANUS	19,21814	22930	(19)	42",2309	171°32'55",14	0,046344	73°28'37",55	0°46'20",87
NEPTUNE	30,10957	19349	(21)	21",5349	46°43'38",37	0,008997	130°40'52",89	1°46'45",27
PLUTON*	39,4387	1812000	(22)	14",3259	225° 8'18",35	0,250224	110°52' 9",47	17°11' 6",15

Eléments moyens rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe 1900,0 (23)

TABLEAU I

(*) Eléments osculateurs pour le 23 Sept. 1960 à 0^hTE , ramenés à l'époque 1900,0 .

Si U_o désigne le vecteur U à l'instant origine (t=o) et sachant que, P étant orthogonale, P^{-1} coincide avec sa transposée $\tilde{P}$, on aura :

$$\alpha = \tilde{P}\, U_o$$

d'où $$U = P\, e^{i\Lambda_a t}\, \tilde{P}\, U_o$$

et de la même façon :
$$V = Q\, e^{i\Lambda_b t}\, \tilde{Q}\, V_o$$

Comme les valeurs propres sont réelles, les éléments $e^{i\lambda_k t}$ restent bornés au cours du temps. Par développement des produits matriciels, les composantes de U et V sont des sommes de termes de la forme $ae^{i\lambda t}$. Leur représentation dans le plan complexe est donc le résultat de la composition de mouvements circulaires. Le calcul des matrices A et B montre que leur diagonale est quasi prépondérante, ce qui permettra de faire quelques remarques sur la prépondérance de certains des mouvements circulaires.

Ces matrices sont données dans les tableaux II et III avec leurs valeurs propres et leurs vecteurs propres, ainsi que l'amplitude et la phase (pour l'époque 1900.0) de chacun des mouvements circulaires. Le calcul des constantes d'intégration a été effectué à partir des éléments d'orbite donnés dans le tableau I. Les masses utilisées proviennent des déterminations les plus récentes. On remarquera que chaque ligne de la matrice A correspond à l'équation du mouvement du pôle d'une planète, la première pour Mercure, la seconde pour Venus et ainsi de suite jusqu'à Pluton. On a la même remarque pour la matrice B.

MATRICE "A" DES POLES

-5,535490239	0,633122529	0,176775323	0,012239135	0,010969864	0,000825995	0,000033220	0,000008401	0,000000361
0,633122529	-12,069159743	6,150171984	0,201796491	0,130057996	0,009613383	0,000384398	0,000097105	0,000004172
0,176775323	6,150171984	-12,785230656	0,712734635	0,264336794	0,019072572	0,000756968	0,000190948	0,000008200
0,012239135	0,201796491	0,712734635	-17,749372504	0,198450645	0,013348738	0,000518824	0,000130352	0,000005592
0,010969864	0,130057996	0,264336794	0,198450645	-7,464818814	11,528404169	0,276002298	0,064074173	0,002688883
0,000825995	0,009613383	0,019072572	0,013448738	11,528404169	-18,468968483	0,647639531	0,117104301	0,004619103
0,000033220	0,000384398	0,000756968	0,000518824	0,276002298	0,647639531	-2,742355020	0,342957698	0,009121941
0,000008401	0,000097105	0,000190948	0,000130352	0,064074173	0,117104301	0,342957698	-0,673442161	0,069136300
0,000000361	0,000004172	0,000008200	0,000005592	0,002688883	0,004619103	0,009121941	0,069136300	-0,834266279

VALEURS PROPRES , PERIODES CORRESPONDANTES ET VECTEURS PROPRES

-5",2040399	0,872537563	-6",5657376	-0,487917788	-18",7445121	0,021097054
	0,367371431		0,623882979		-0,625322951
249037 ans	0,319915338	197388 ans	0,607487347	69140 ans	0,688583590
	0,024588433		0,048946624		-0,366569802
	-0,020835679		-0,026156563		-0,000144895
	-0,016978623		-0,023523237		-0,002304425
	0,006600955		0,005652133		0,000089786
	0,000209968		0,000392412		0,000012460
	0,000012612		0,000016159		0,000000467

-17",6358099	0,010855636	-0",6599229	0,002131591	-25",7502501	0,000160621
	-0,289804969		0,008840754		0,000317978
73487 ans	0,230796752	1963865 ans	0,010478503	50329 ans	0,008868859
	0,928638031		0,003598741		0,011016446
	-0,002405403		0,253434337		-0,533171907
	-0,015912679		0,155770448		0,845706895
	0,000697700		-0,065538875		-0,017375019
	0,000096745		-0,886870335		-0,002349248
	0,000003633		-0,347083297		-0,000086370

-2",9037321	-0,004221748	0"	0,005360492	-0",8590990	0,000610762
	-0,010989857		0,024237457		0,002460314
446322 ans	-0,011999202		0,029290977	1508557 ans	0,002898069
	-0,003152756		0,010602553		0,000978006
	-0,177559536		0,783741121		0,067802034
	-0,092234060		0,499211428		0,041183758
	0,969689688		0,232268877		-0,032860695
	-0,139191287		0,282885840		-0,337722767
	0,000812459		0,031273136		0,937312385

AMPLITUDE DES MOUVEMENTS CIRCULAIRES (rd)

MERCURE	0,1264586	-0,0359090	0,0040955	0,0011672	0,0017795	0,0002786	-0,0033197	0,0279226	0,0009524
VENUS	0,0117757	0,0101549	-0,0268482	-0,0068920	0,0016323	0,0001220	-0,0019112	0,0279226	0,0008486
TERRE	0,0084853	0,0081821	0,0244636	0,0045417	0,0016008	0,0028157	-0,0017267	0,0279226	0,0008271
MARS	0,0018017	0,0018213	-0,0359786	0,0504849	0,0015189	0,0096626	-0,0012534	0,0279226	0,0007711
JUPITER	-0,0000206	-0,0000131	-0,0000002	-0,0000018	0,0014470	-0,0063264	-0,0009549	0,0279226	0,0007232
SATURNE	-0,0000264	-0,0000186	-0,0000048	-0,0000184	0,0013963	0,0157542	-0,0007788	0,0279226	0,0006896
URANUS	0,0000221	0,0000096	0,0000040	0,0000017	-0,0012627	-0,0006956	0,0175974	0,0279226	-0,0011827
NEPTUNE	0,0000006	0,0000005	0,0000000	0,0000002	-0,0140295	-0,0000772	-0,0020739	0,0279226	-0,0099801
PLUTON	0,0000003	0,0000002	0,0000000	0,0000001	-0,0496655	-0,0000257	0,0001095	0,0279226	0,2505524

PHASES

18°,968855	317°,368772	254°,728361	296°,062066	338°,608687	126°,653436	314°,410328	106°,675768	102°,916850

TABLEAU II

MATRICE "B" DES POINTS DE LIZT

5,535490239	-0,406828584	-0,083854672	-0,003854763	-0,001019564	-0,000041822	-0,000000836	-0,000000135	-0,000000004
-0,406828584	12,069159743	-5,120764061	-0,116112656	-0,022548072	-0,000909058	-0,000018082	-0,000002916	-0,000000096
-0,083854672	-5,120764061	12,785230656	-0,548068476	-0,063214553	-0,002491745	-0,000049219	-0,000007926	-0,000000260
-0,003854763	-0,116112656	-0,548068476	17,749372504	-0,071849934	-0,002652347	-0,000051377	-0,000008243	-0,000000270
-0,001019564	-0,022548072	-0,063214553	-0,071849934	7,464818814	-7,525052550	-0,092520308	-0,013786896	-0,000442411
-0,000041822	-0,000909058	-0,002491745	-0,002652347	-7,525052550	18,468968483	-0,388981975	-0,045847376	-0,001388372
-0,000000836	-0,000018082	-0,000049219	-0,000051377	-0,092520308	-0,388981975	2,742355020	-0,257556170	-0,005377833
-0,000000135	-0,000002916	-0,000007926	-0,000008243	-0,013786896	-0,045847376	-0,257556170	0,673442161	-0,060006405
-0,000000004	-0,000000096	-0,000000260	-0,000000270	-0,000442411	-0,001388372	-0,005377833	-0,060006405	0,834266279

VALEURS PROPRES , PERIODES CORRESPONDANTES ET VECTEURS PROPRES

5",4623790	0,981272200	7",3438822	-0,191743351	17",3299923	0,015429364
	0,151973986		0,713318605		-0,570750757
237259 ans	0,117983504	176473 ans	0,672538731	74784 ans	0,571786718
	0,006974057		0,043221719		0,589080452
	-0,005473887		-0,012777818		-0,001383617
	-0,003110382		-0,008390946		-0,006908278
	0,000626327		0,000953203		0,000189392
	0,000011516		0,000046104		0,000016766
	0,000000568		0,000001406		0,000000480

18",0040064	-0,009496826	3",7126102	0,003302513	22",2939279	0,000022456
	0,377119522		0,010041849		-0,000494288
71984 ans	-0,454610623	349080 ans	0,012134287	58132 ans	0,002675664
	0,806846007		0,005056022		0,006322365
	-0,000455669		0,862979687		-0,452409948
	-0,004376796		0,433289852		0,891646296
	0,000112450		-0,259054149		-0,015579954
	0,000010029		0,011504353		-0,001416584
	0,000000287		-0,000097469		-0,000040494

2",7018111	0,000438931	0",6230606	0,000014180	0",8514340	-0,000004534
	0,001954267		0,000097649		-0,000030131
479678 ans	0,002501034	2080055 ans	0,000137078	1522138 ans	-0,000041921
	0,001200948		0,000079341		-0,000023875
	0,223784083		0,017058781		-0,005061734
	0,130063195		0,012272842		-0,003572585
	0,957648943		0,119628564		-0,035275641
	-0,126094138		0,953971890		-0,271852056
	0,001144175		0,274198794		0,961672345

AMPLITUDES DES MOUVEMENTS CIRCULAIRES

MERCURE	0,1814319	-0,0231877	0,0015566	-0,0017023	0,0242045	0,0001135	0,0005836	0,0000027	-0,0000069
VENUS	0,0062145	0,0190783	-0,0127351	0,0149504	0,0162773	-0,0005524	0,0005746	0,0000042	-0,0000102
TERRE	0,0039922	0,0148842	0,0105571	-0,0149130	0,0162756	0,0024746	0,0006085	0,0000049	-0,0000118
MARS	0,0006519	0,0026426	0,0300474	0,0731204	0,0187350	0,0161541	0,0008073	0,0000078	-0,0000185
JUPITER	-0,0000069	-0,0000106	-0,0000009	-0,0000006	0,0432598	-0,0156377	0,0020349	0,0000228	-0,0000531
SATURNE	-0,0000062	-0,0000109	-0,0000075	-0,0000084	0,0340997	0,0483861	0,0018568	0,0000257	-0,0000588
URANUS	0,0000027	0,0000027	0,0000004	0,0000005	-0,0438184	-0,0018171	0,0293843	0,0005395	-0,0012496
NEPTUNE	0,0000000	0,0000001	0,0000000	0,0000000	0,0015977	-0,0001356	-0,0031767	0,0035324	-0,0079071
PLUTON	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	-0,0001224	-0,0000351	0,0002607	0,0091842	0,2530184

PHASES

87°,973956	193°,279731	333°,910344	317°,090801	28°,766193	128°,936858	108°,169415	118°,457752	227°,183667

TABLEAU III

2. PETITES PLANETES

Une petite planète est un corps suffisamment isolé et de masse suffisamment petite pour ne perturber aucun autre corps. A la limite on lui donne une masse nulle ; alors elle est perturbée mais non perturbante. Dans ce cas on peut considérer chaque petite planète indépendamment de toutes les autres, en présence des neuf grosses. Lorsqu'on se fixe la configuration des grosses planètes (masses et demi-grands axes), le problème des perturbations séculaires de l'orbite de chaque petite planète traité dans la théorie du 1er ordre en e et i, dépendra d'un paramètre, a, (son demi-grand axe, qui est invariant).

Notons comme pour les grosses planètes :

$$(6) \qquad \begin{aligned} u_o &= \sin i \; e^{i\theta} && \text{pôle de la petite planète} \\ v_o &= e \; e^{i\tilde{\omega}} && \text{son vecteur de Lizt.} \end{aligned}$$

On obtient alors 10 équations du même type que les équations (3) mais le changement de variable :

$$u'_o = a_o \sqrt{m_o n_o}\, u_o$$

$$v'_o = a_o \sqrt{m_o n_o}\, v_o$$

ne peut pas se faire car $m_o = 0$. Il reste néanmoins valable pour les grosses planètes de sorte qu'on aboutit à des équations du type suivant :

$$(7) \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U \\ u_o \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} A & 0 \\ \tilde{a}_o & -a_{oo} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ u_o \end{pmatrix} = i\, A' \begin{pmatrix} U \\ u_o \end{pmatrix}$$

et

$$(8) \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} V \\ v_o \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} B & 0 \\ \tilde{b}_o & a_{oo} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ v_o \end{pmatrix} = i\, B' \begin{pmatrix} V \\ v_o \end{pmatrix}$$

où U, V, A, B sont les vecteurs et les matrices définies précédemment pour les grosses planètes ; a_o et b_o sont des vecteurs colonne de R^9 dépendant du paramètre a ; a_{oo} est un scalaire positif dépendant de a. A titre indicatif, on a représenté ses variations sur la figure 1.

La résolution des équations (7) et (8) se fait à partir de la solution U, V obtenue pour les grosses planètes :

$$(9) \quad \frac{du_o}{dt} = - i a_{oo} u_o + i \tilde{a}_o U \qquad \text{avec} \qquad U = P e^{i\Lambda_a t} \tilde{P} U_o$$

$$(10) \quad \frac{dv_o}{dt} = i a_{oo} v_o + i \tilde{b}_o V \qquad \text{avec} \qquad V = Q e^{i\Lambda_b t} \tilde{Q} V_o$$

La solution de chacune de ces équations s'écrit :

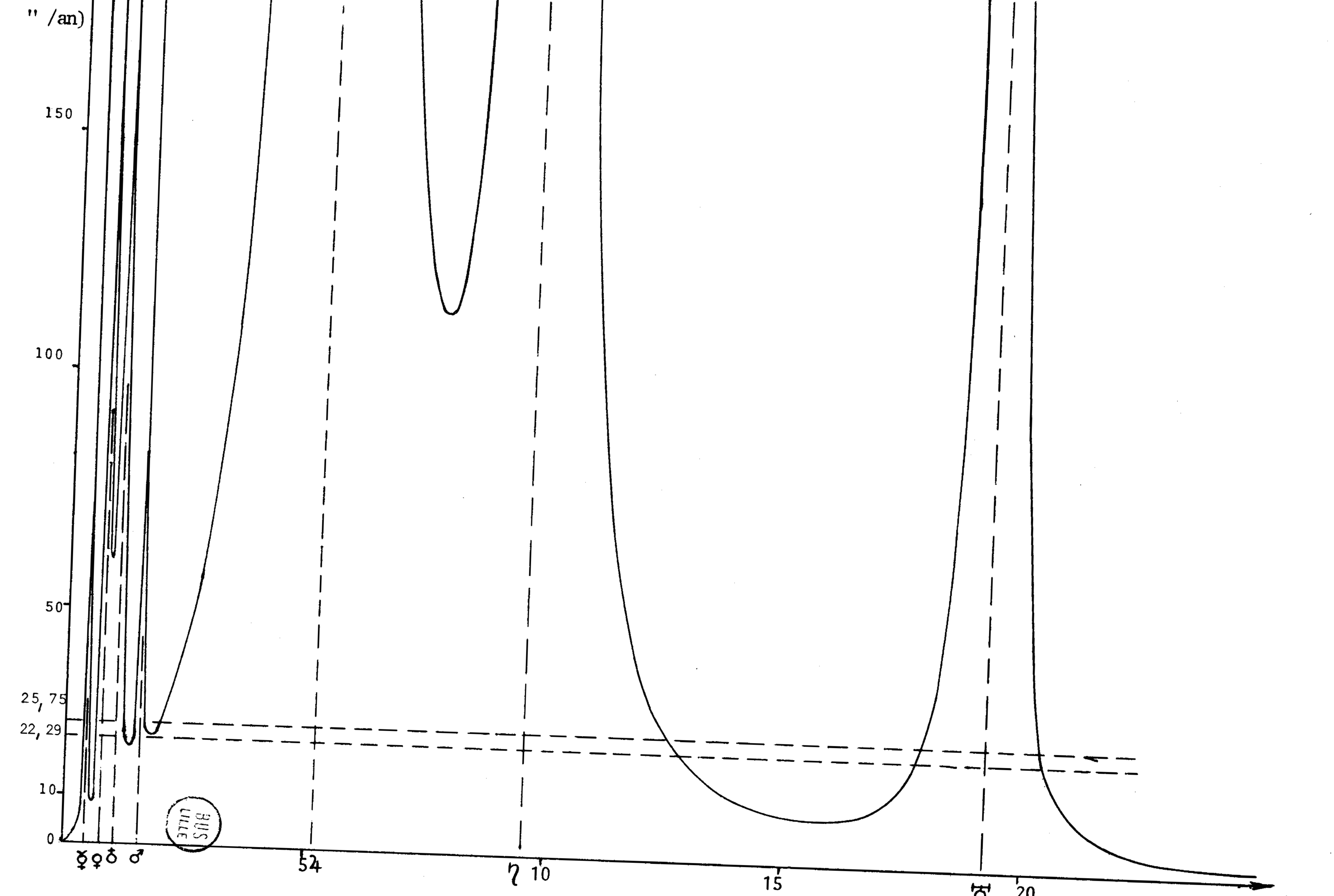
$$(11) \quad u_o = C e^{-i a_{oo} t} + \tilde{a}_o P(\Lambda_a + a_{oo} I)^{-1} e^{i\Lambda_a t} \tilde{P} U_o$$

$$(12) \quad v_o = D e^{i a_{oo} t} + \tilde{b}_o Q(\Lambda_b - a_{oo} I)^{-1} e^{i\Lambda_b t} \tilde{Q} V_o$$

I désignant la matrice unité d'ordre 9, les matrices $\Lambda_a + a_{oo}I$ et $\Lambda_b - a_{oo}I$ sont diagonales et donc inversibles si et seulement si a_{oo} est différent de chacun des modules des valeurs propres de A et B. La figure 1 montre que dans l'intervalle]1,62 U.A ; 12,5 U.A[intéressant le système des petites planètes, la seule valeur de a donnant un a_{oo} égal à une valeur propre de A est 1,95 U.A (alors, a_{oo} = 25",75 par an). C'est pour cette valeur de a que Le Verrier disait qu'une petite planète de tel demi-grand axe, verrait son inclinaison croître indéfiniment sous l'influence de Jupiter et de Saturne Cf [2] p. 429). Cette valeur critique existe encore lorsqu'on tient compte de toutes les planètes.

On a d'ailleurs un point critique du même type pour les vecteurs de Lizt : pour $a \simeq 1.70$ U.A, a_{oo} = 22",29 plus grande valeur propre de B.

Pour ces valeurs de a, les points u_o ou v_o sont alors rejetés à l'infini, ou tout au moins, puisque la théorie utilisée est du 1er ordre en e et i, on peut dire que $|u_o|$ (ou $|v_o|$) ne reste pas petit. Ces valeurs correspondent à la limite inférieure de l'anneau des petites planètes de sorte que les relations (11) et (12) sont valables pour la quasi totalité de l'ensemble. La présence de ces points critiques explique peut être cette limite. Il n'y a pas de tels problèmes pour un éventuel anneau de petites planètes entre Jupiter et Saturne. Par contre entre Saturne et Uranus, on aurait plusieurs points critiques.



<u>Figure 1</u> : Variations de a_{oo} en fonction du demi-grand axe

On voit, d'après les relations (7) et (8) que A' admet toutes les valeurs propres de A, plus une autre qui est $-a_{oo}$; de même B' a les valeurs propres de B et en plus la valeur a_{oo}. Cette nouvelle valeur propre est dite *associée* à la petite planète. L'amplitude $|C|$ (resp. $|D|$) correspondante est appelée inclinaison propre (resp. excentricité propre) [6].

3. DISTINCTION ENTRE GROSSES ET PETITES PLANETES

3.1. *Associations valeurs propres - Grosses planètes*

Dans ce paragraphe, les raisonnements porteront sur la matrice A des pôles. On aboutit aux mêmes conclusions avec la matrice B des vecteurs de Lizt.

On vient de voir qu'une valeur propre de A' (égale à a_{oo}) est associée à une planète de masse nulle. On remarque d'autre part que certaines valeurs propres de A sont très voisines d'un terme diagonal de cette matrice (Cf tableau II) ; ceci incite à les associer aux planètes correspondantes.

Pour s'assurer de ces correspondances et aussi pour détecter des associations moins évidentes, on va utiliser la continuité du spectre de la matrice A, par rapport à la masse d'une planète au voisinage de zéro. En regroupant dans A les termes proportionnels à la masse m_k de la $k^{\text{ème}}$ planète, ceux où m_k intervient par sa racine carrée et ceux indépendant de m_k, on met A sous la forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{kk} & 0 \\ \hline 0 & A^{(k)} \end{array}\right) + m_k \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D^{(k)} \end{array}\right) + \sqrt{m_k}\left(\begin{array}{c|c} 0 & \tilde{a}_k \\ \hline a_k & 0 \end{array}\right) \qquad (13)$$

où le scalaire a_{kk}, le vecteur colonne a_k, la matrice d'ordre 8 $A^{(k)}$ et la matrice diagonale $D^{(k)}$ sont indépendants de m_k.

Si m_k tend vers zéro, le spectre de A tend vers la réunion du spectre de $A^{(k)}$ et de la valeur propre a_{kk}. Une valeur propre de A tend donc vers a_{kk}. On a représenté sous forme d'une application de l'ensemble des planètes dans celui des valeurs propres de A, la correspondance entre chaque planète et la valeur propre qui tend vers son a_{kk}. On a fait figurer également les résultats relatifs à la matrice B.

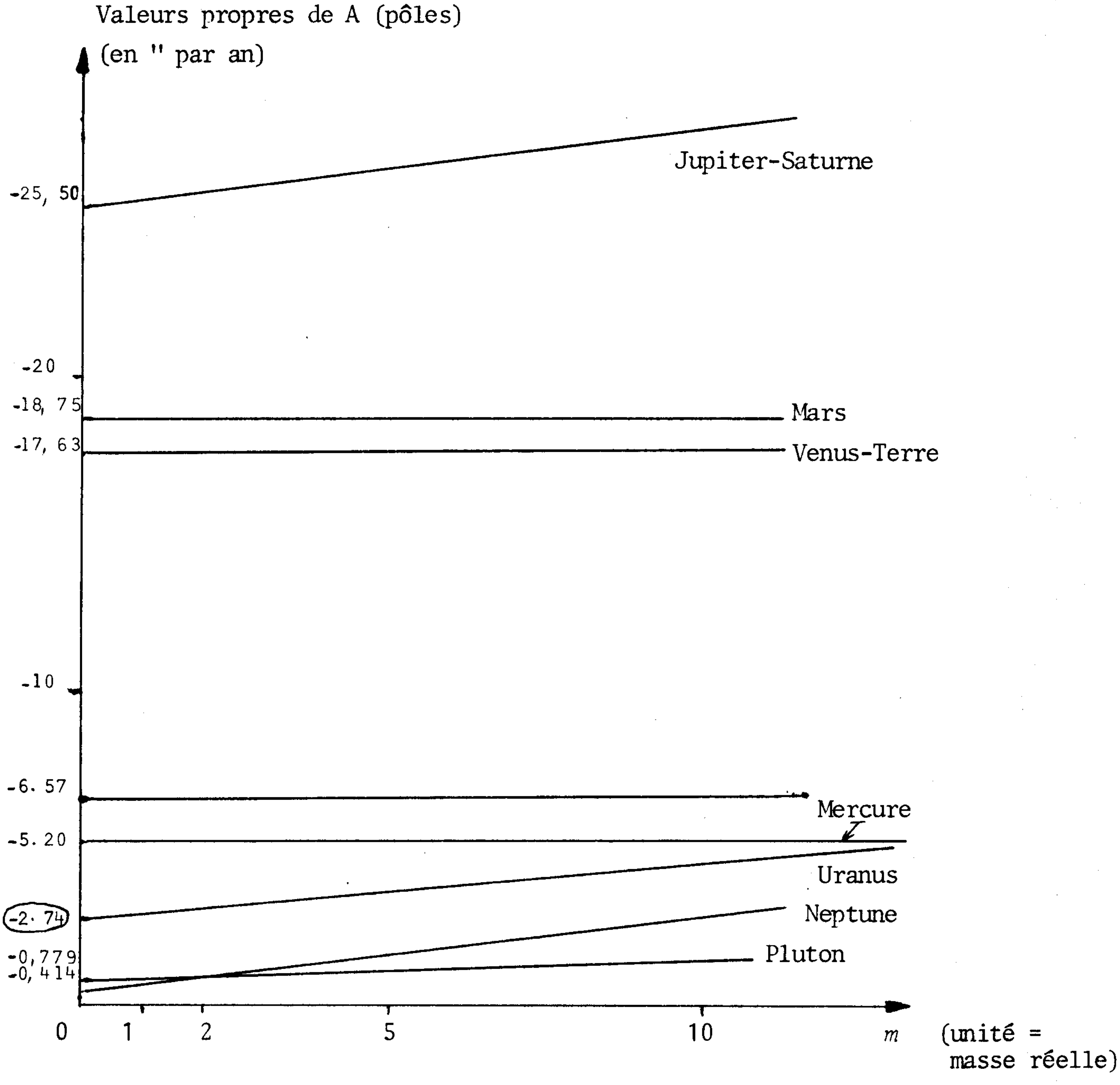


Figure 2 : Paramètre variable : masse d'Uranus

Matrice A		Matrice B
- 5,20	☿	5,46
- 6,56	♀	7,34
- 18,74	♁	17,33
- 17,63	♂	18,00
0	♃	3,71
- 25,75	♄	22,29
- 2,90	♅	2,70
- 0,659	♆	0,623
- 0,859	♇	0,851

On constate que pour le sous ensemble des cinq planètes : Mercure, Mars, Uranus, Neptune, Pluton, cette application est une bijection. On dira que les cinq valeurs propres sont *associées* aux planètes correspondantes.

Pour ces planètes, on remarque d'ailleurs que le terme a_{kk} est nettement plus grand que chacun des éléments du vecteur $\sqrt{m_k}\, a_k$. Ceci manifeste le faible pouvoir perturbateur de chacune de ces planètes sur les autres. On peut aussi le constater sur les courbes de variation du spectre en fonction de leur masse. A titre d'exemple, on a représenté ces courbes en fonction de la masse d'Uranus(1) (figure 2). Celles relatives aux quatre autres planètes sont analogues. On note la faible pente de chacune des droites : si Uranus n'existait pas ou avait une masse par exemple double, il n'y aurait pas grand changement dans le mouvement des autres planètes : une certaine variation relative de la masse d'Uranus ne provoque qu'une variation relative 17 fois plus faible pour sa valeur propre. Pour Mercure, ce rapport est de 15,5, pour Mars 140, pour Neptune 47 et pour Pluton 55.

Pour ces raisons, ces planètes peuvent être qualifiées de *petites planètes*.

---

(1) Pour une masse d'Uranus double de ce qu'elle est, les courbes relatives aux valeurs propres de Neptune et de Pluton se coupent. La matrice A possède alors une valeur propre double. Lagrange ayant démontré que dans le cas de deux planètes on ne peut pas avoir de valeur propre double, Seeleger ayant généralisé ce résultat au cas de trois planètes de masse quelconque non nulle, la conjecture faite par Tisserand d'une généralisation à un nombre quelconque de planètes trouve ici un exemple contraire. (Cf [2] p. 414)

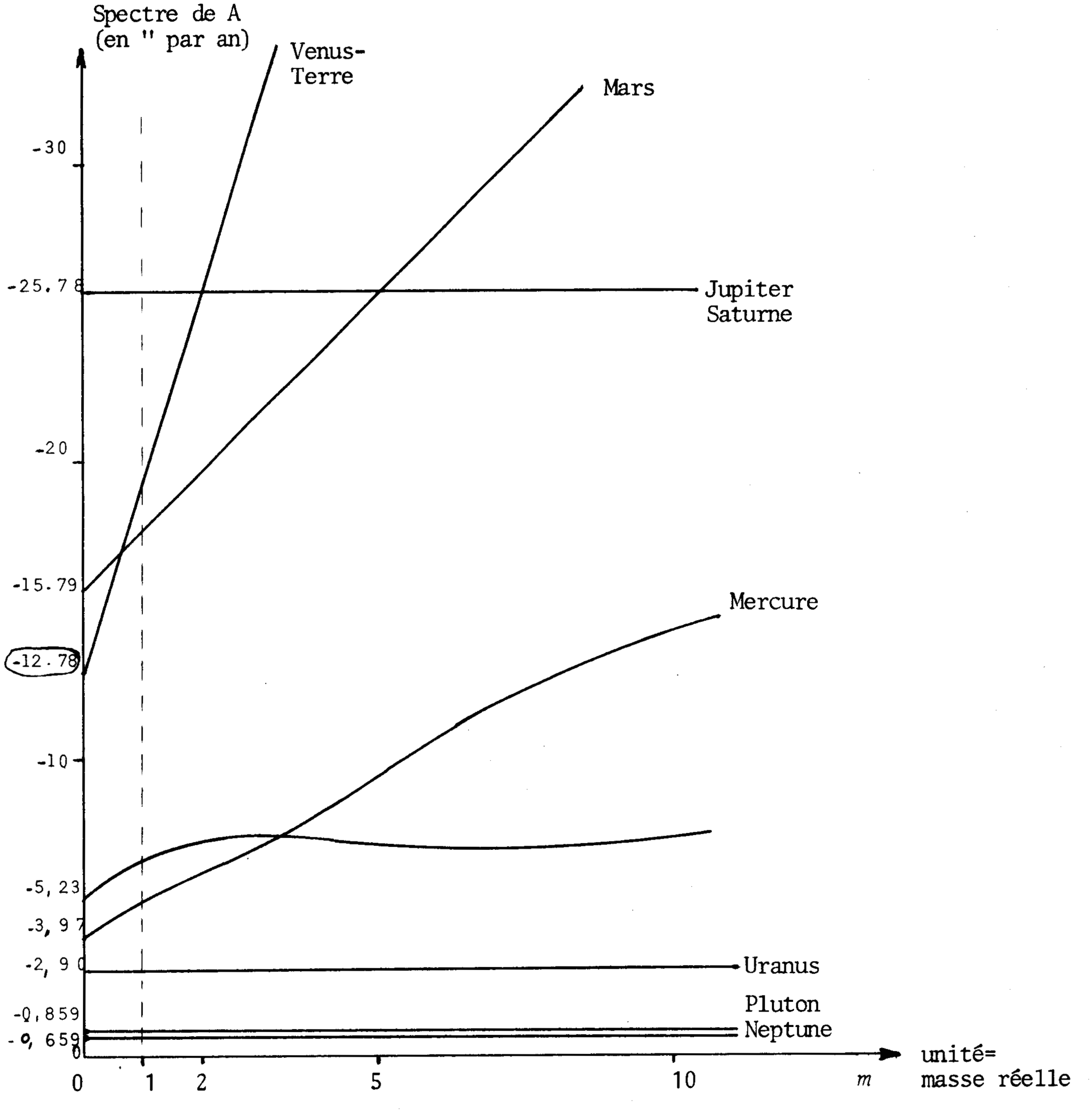


Figure 3 : Paramètre variable : masse de la Terre

Revenant à l'application des 9 planètes dans les 9 valeurs propres, on constate que deux valeurs propres sont associées chacune à un couple de planètes. On voit d'autre part que pour chaque couple (Venus-Terre ou Jupiter-Saturne), le terme diagonal a_{kk} correspondant à l'une des planètes du couple est du même ordre de grandeur que l'élément du vecteur $\sqrt{m_k}\, a_k$ correspondant à l'autre planète. Dans le couple, les perturbations mutuelles ne sont pas négligeables. Les courbes de variation du spectre en fonction d'une des masses d'un couple manifestent d'ailleurs bien l'effet de ces perturbations.

Pour le couple Venus-Terre, la figure 3 donne le spectre de A en fonction de la masse de la Terre. Les pentes sont nettement plus fortes que dans le cas d'Uranus : une certaine variation relative de la masse de la Terre provoque une variation relative seulement 2,1 fois plus faible pour sa valeur propre (-18,74). Pour Venus ce rapport est de 1,8. Ce sont des rapports dix fois plus importants que dans le cas des planètes à valeur propre associée. On ne peut pas considérer Venus et la Terre comme de petites planètes. Si, pour une suite décroissante de valeurs de la masse de Venus, on fait tendre vers zéro la masse de la Terre (ou réciproquement), on s'aperçoit qu'il suffit qu'une des masses soit le cinquième de ce qu'elle est pour pouvoir associer une valeur propre à Venus et une autre à la Terre. En d'autres termes, ces planètes sont cinq fois plus massives qu'elles ne devraient l'être pour posséder une valeur propre associée, et donc pouvoir être considérées comme petites.

Alors que pour le couple Venus-Terre, les perturbations du spectre sont surtout sensibles sur les valeurs propres associées à Mars et à Mercure, pour le couple Jupiter-Saturne, les effets perturbateurs sont visibles sur toutes les planètes (voir figure 4 où le paramètre variable est la masse de Jupiter). Une certaine variation relative de la masse de Jupiter entraîne une variation relative 1,6 fois plus forte pour sa valeur propre (- 25,75). Ce rapport n'est que de 0,4 pour Saturne. Ceci montre bien la prépondérance de Jupiter sur les autres planètes.

Enfin, il reste deux valeurs propres (- 6,56 et 0) qui ne sont associées à aucune planète. La méthode utilisée permet en effet de ne détecter que des associations simples. En fait, le même procédé appliqué non plus à une seule masse variable mais à un couple de masses (en l'occurrence Venus-Terre), et ceci en utilisant une décomposition 2-7 de la matrice A au lieu de la décomposition 1-8, montre que le couple de valeurs propres (-6,56 et -18,74) tend vers le couple des deux termes diagonaux correspondant à Venus et à la Terre lorsque les deux masses tendent vers zéro. Dans ce cas, on peut parler d'un couple de valeurs propres (-6,56 et -18,74) associé au couple Venus-Terre.

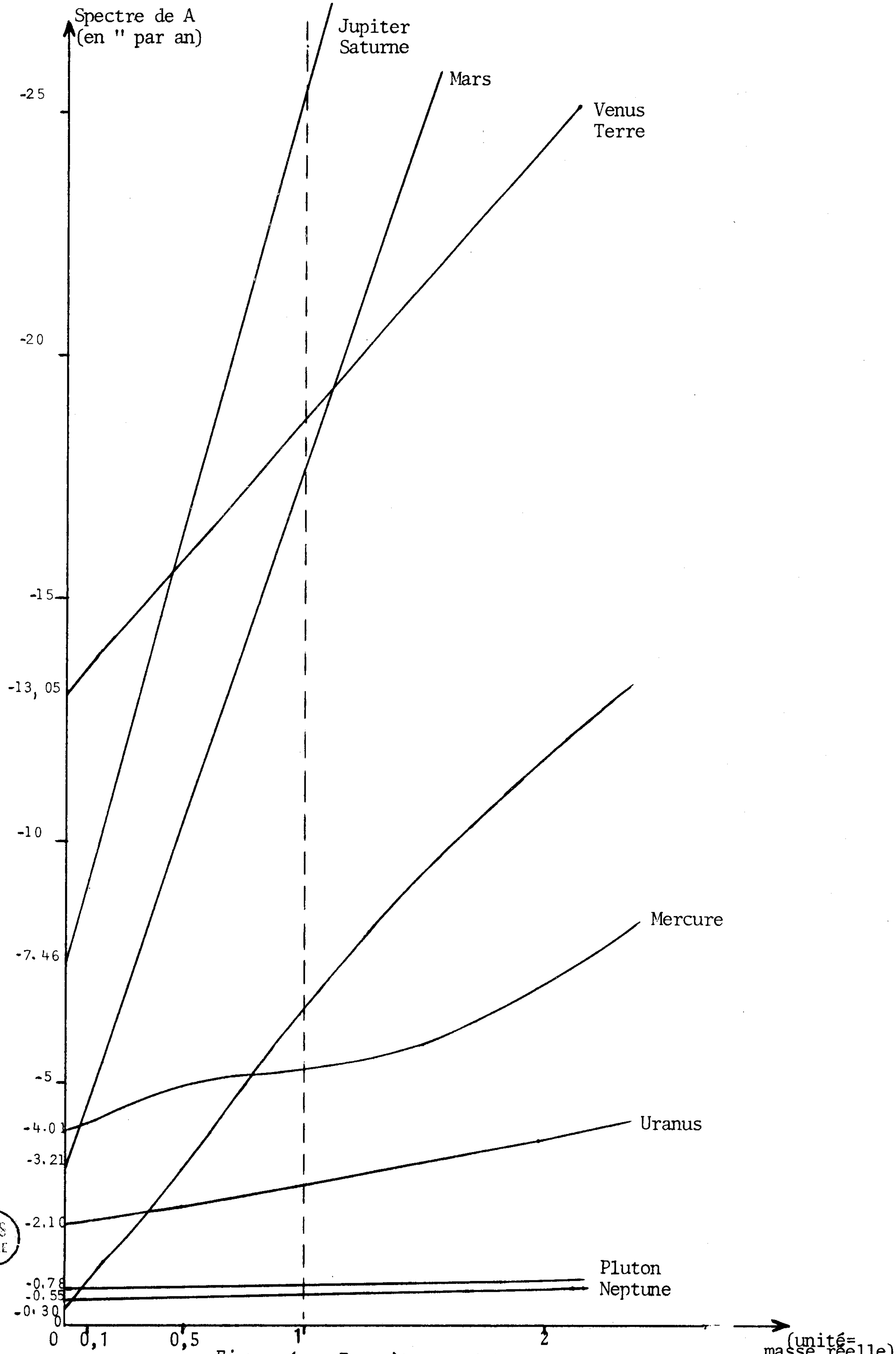


Figure 4 : *Paramètre variable : masse de Jupiter*

De la même façon, pour la matrice B, le couple de valeurs propres (7,34 et 17,33) est aussi associé au couple Venus-Terre, et le couple (3,71 et 22,29) à Jupiter-Saturne.

Le cas de la valeur propre nulle de A est différent dans le sens qu'elle existe quelles que soient les masses en présence. Elle caractérise un invariant du système solaire : le moment cinétique orbital total ; elle fixe un plan de référence (plan invariable ou plan du maximum des aires du système solaire) auquel peuvent être rapportés les plans de toutes les orbites.
La position de ce plan est liée à la distribution des moments cinétiques à l'instant initial. Cette valeur propre ne peut donc être associée à aucune planète. Cependant, Jupiter et Saturne monopolisant 86 % du moment cinétique total, le plan invariable est fortement lié à la position initiale des plans d'orbite de Jupiter et de Saturne. Dans ce sens, la valeur propre nulle est liée à Jupiter et à Saturne.

Remarque : Les courbes de variation du spectre de **A** et **B** en fonction des masses montrent que la détermination de ces masses à partir des valeurs propres (déterminées par l'observation des perturbations séculaires) peut être satisfaisante pour celle de Jupiter et, à un degré moindre pour celle de Venus, de la Terre et de Saturne. Elle est tout à fait médiocre pour les autres.

3.2. *Remarque sur la Prépondérance de certains mouvements circulaires*

On a vu précédemment que le mouvement du pôle (ou du point de Lizt) d'une planète peut se représenter par une composition de mouvements circulaires dont les pulsations sont les valeurs propres de A (ou B).

Si on a pu associer une valeur propre λ à cette planète (association simple), alors, l'amplitude du mouvement circulaire correspondant a des chances d'être prépondérant sur celles de tous les autres. Le caractère aléatoire vient de ce que les amplitudes dépendent de la distribution initiale des pôles (ou des points de Lizt).

En effet, λ étant associé à la planète k, est voisin du terme diagonal a_{kk} de A. Dans ces conditions, le $k^{\text{ème}}$ élément (x_k) du vecteur propre normé X associé à λ est voisin de 1. On sait d'autre part que le mouvement du pôle de cette planète s'écrit :

$$(14) \qquad u_k = P_k \, e^{i\Lambda_a t} \, \tilde{P} U_o$$

(P_k désigne la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice P des vecteurs propres de A)

$\tilde{X} U_o$ est le $k^{\text{ème}}$ élément du vecteur $\tilde{P} U_o$. Sa valeur est voisine de l'inclinaison $\left(i_k\right)_o$ de la planète k à l'instant initial si à cet instant les planètes influentes sur la planète k n'ont pas leur inclinaison beaucoup plus grande que $\left(i_k\right)_o$. Dans ce cas, l'expression u_k contient un terme prépondérant sensiblement égal à $\left(i_k\right)_o \, x_k^2 \, e^{i\lambda t}$.

Un raisonnement s'applique évidemment de la même façon au mouvement des points de Lizt.

Ainsi, pour Mercure et Pluton, on aura un mouvement circulaire prépondérant dû à leur forte excentricité et à leur forte inclinaison initiales. Celles-ci resteront alors toujours du même ordre de grandeur. Par contre pour Neptune, principalement perturbé par Pluton, on ne peut plus assurer a priori une telle prépondérance.

Pour les associations par couple, on aura de la même façon deux amplitudes du même ordre de grandeur, prépondérantes sur les autres, si les planètes influentes sur ce couple n'ont pas à l'instant initial des inclinaisons ou des excentricités trop grandes ou si les perturbations dues aux autres planètes sont faibles. C'est le cas du couple Jupiter-Saturne mais non de Venus-Terre.

Pour la valeur propre nulle, l'amplitude associée va dépendre de l'origine choisie pour mesurer les inclinaisons des orbites. Elle est nulle si l'origine est le plan invariable du système solaire. Si on choisit l'écliptique pour une certaine époque comme plan de référence, l'amplitude associée sera l'inclinaison du plan invariable sur l'écliptique à cette époque.

La distribution des moments cinétiques orbitaux montre que le pôle $\mathcal{M}$ du plan invariable est lié principalement à la position des pôles de Jupiter et de Saturne à l'instant initial. Si on néglige les perturbations des autres planètes, leurs pôles, alignés avec le point $\mathcal{M}$ et de part et d'autre de celui-ci, décriront avec la vitesse - 25",75 par an, deux cercles concentriques, centrés sur $\mathcal{M}$, le rapport des rayons étant égal au rapport de leur moment cinétique ($\simeq$ 2,47).

4. REPRESENTATION DES MOUVEMENTS SECULAIRES DES GROSSES PLANETES

Les tableaux II et III donnent les amplitudes des mouvements circulaires décrits par les pôles et les points de Lizt. Mais, comme une courbe est toujours beaucoup plus suggestive qu'un tableau de chiffres, on a aussi voulu tracer les courbes représentatives des mouvements des pôles et des points de Lizt sur une durée de quelques centaines de milliers d'années. L'étude des associations valeur propre-planète et la remarque sur la prépondérance éventuelle d'un mouvement circulaire permettent de mieux comprendre l'allure de ces courbes.

Celles-ci ont été réalisées sur la table traçante de l'ordinateur M 40 du Laboratoire de Calcul. On a d'autre part tracé les limites du domaine susceptible d'être parcouru par chaque pôle ou chaque point de Lizt. En effet, le module d'une somme de mouvements circulaires $a_k\, e^{i\lambda_k t}$, est borné :

$$(15) \qquad \delta = |a_j| - \sum_{k \neq j} |a_k| \leq \left| \sum_k a_k\, e^{i\lambda_k t} \right| \leq \sum |a_k| = \rho$$

$$\text{avec} \quad |a_j| = \max_k \left(|a_k|\right)$$

Le pôle ou le point de Lizt de chaque planète se déplace donc dans une couronne limitée par les cercles de rayon ρ et $\max(\delta, o)$. Pour les pôles cette couronne est centrée sur le point $\mathcal{M}$, pôle du plan invariable du système Solaire, et c'est relativement à ce plan que l'on comptera les inclinaisons extrêmes précisées à propos de chaque planète. Pour les points de Lizt, la couronne est centrée à l'origine. Le repère choisi est l'écliptique et l'équinoxe de l'époque 1900,0. Sur chaque courbe, le point noté 0 représente la position actuelle du pôle ou du point de Lizt.

Remarques : Les résultats numériques publiés ici diffèrent un peu de ceux obtenus par D. BROUWER et A. van WOERKOM [5]. Ces auteurs ont en effet négligé Pluton et ont fait intervenir des termes supplémentaires dans la fonction perturbatrice de Jupiter et de Saturne. Ces termes, dus à la grande inégalité de 800 ans, modifient quelque peu les valeurs propres de la matrice B et amènent deux mouvements circulaires supplémentaires au mouvement de chaque vecteur de Lizt (Cf [7]).

D'autre part les masses utilisées ici diffèrent légèrement des leurs.

On a représenté le mouvement du pôle et du point de Lizt de Pluton comme ceux des autres planètes tout en sachant que la théorie présentée ici est fort approximative en ce qui le concerne d'une part, à cause de sa forte excentricité (0,25) et de sa grande inclinaison (17°), d'autre part à cause de son moyen mouvement qui, très voisin des deux tiers de celui de Neptune, lui confère un caractère de résonance.

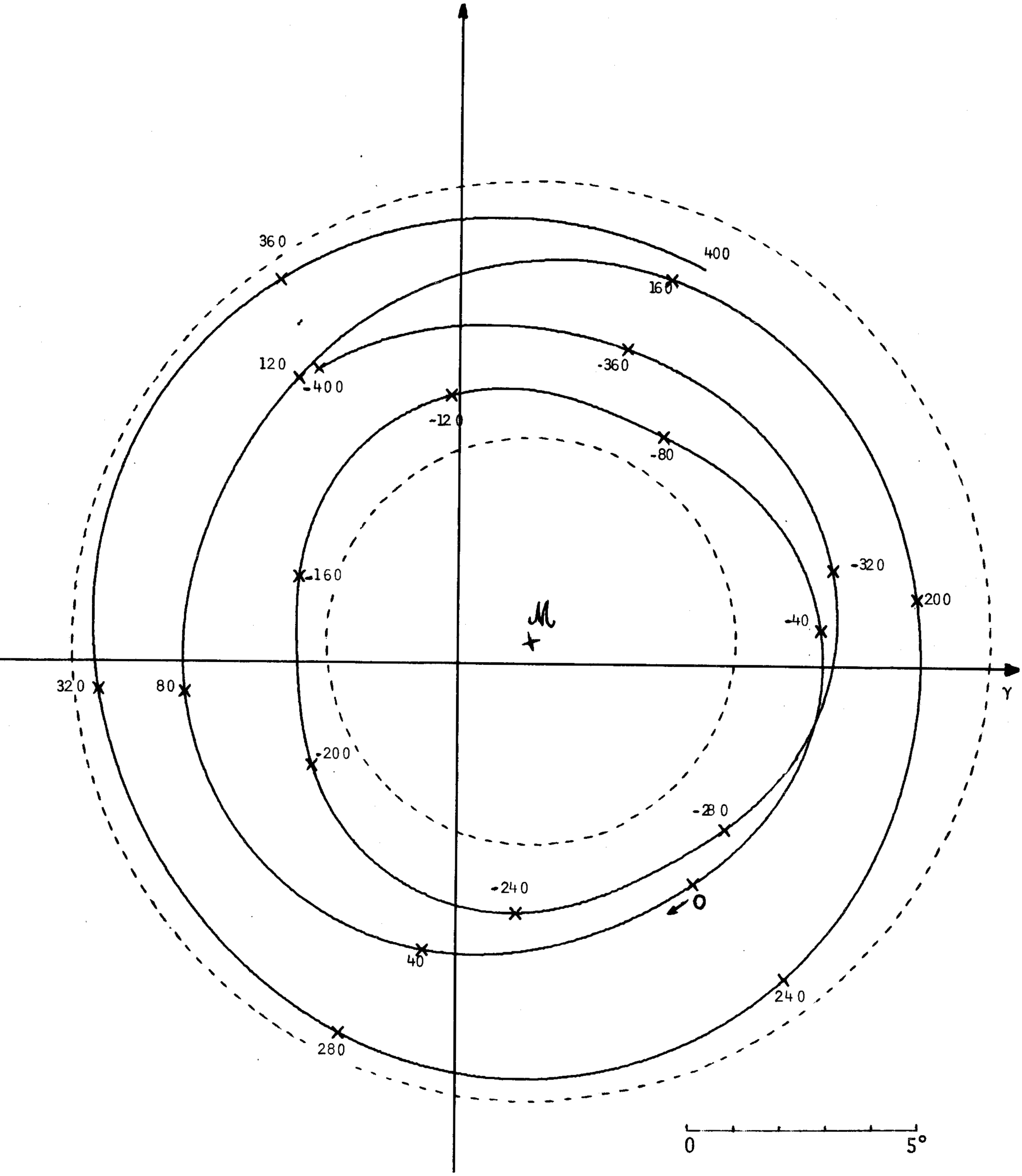
Pôle de MERCURE

Valeurs extrêmes de l'inclinaison :

$i_M = 0,173957$ rd

$i_m = 0,078959$ rd

On note la prépondérance du mouvement circulaire associé à Mercure d'amplitude 0,1264 rd et de période 249 037 ans. Il s'y ajoute une composante d'amplitude 0,0359 rd et de période 197 388 ans.
Les autres composantes ont des amplitudes de 4.10^{-3} rd à 9.10^{-4} rd.



Pôle de MERCURE

Figure 5

-400 000 ans ⟶ +400 000 ans
échelle : 1 cm ⟶ 0.02

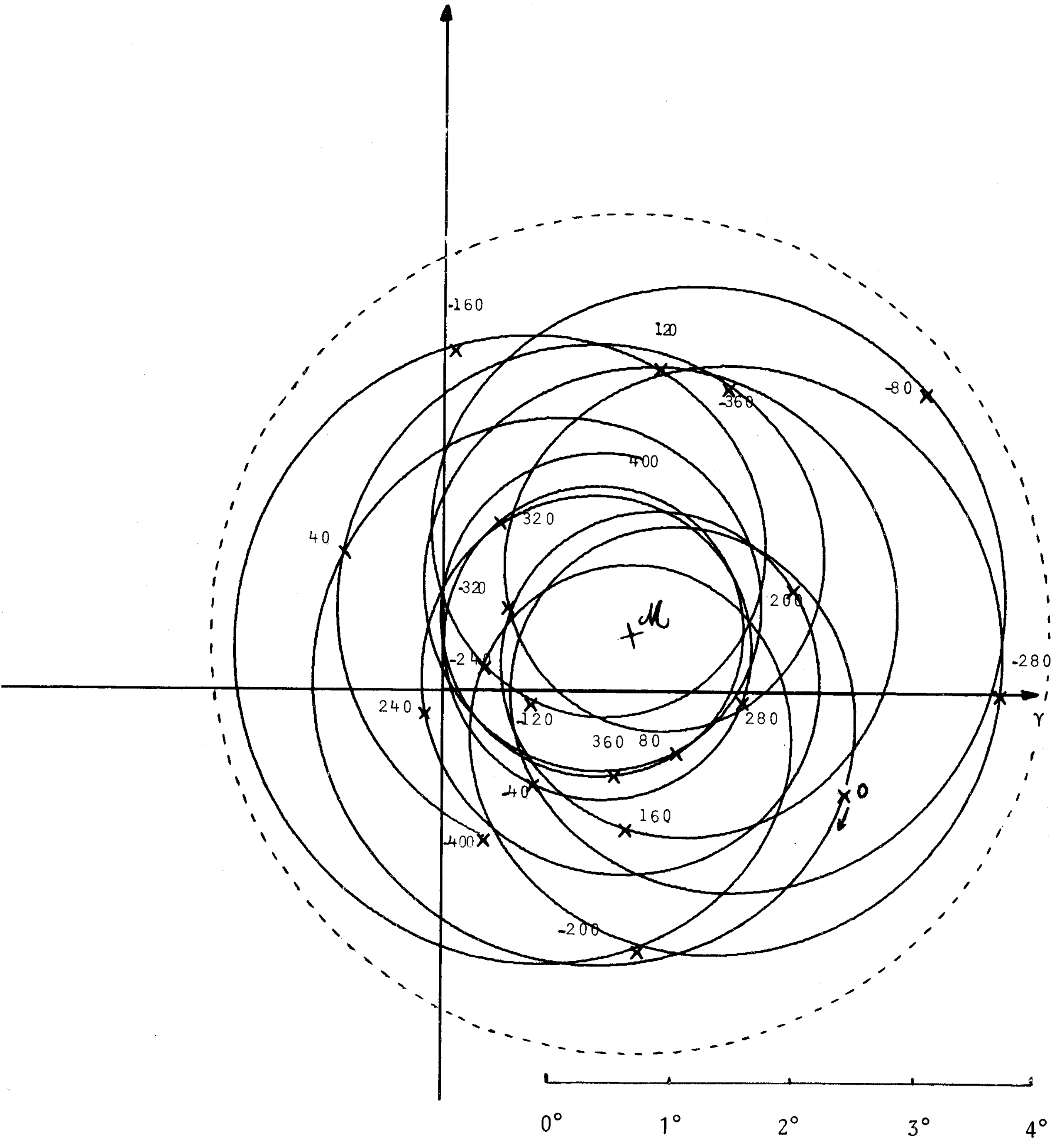
distance de deux points successifs : 40 000 ans

Pôle de VENUS

On n'a pas de borne inférieure pour l'inclinaison. Celle-ci ne peut pas dépasser 0,060145 rd (3°,446). On observe la combinaison de trois mouvements principaux d'amplitudes et de périodes :

0,026848 rd	69 140 ans	provenant du couple Venus-Terre
0,010154 rd	197 388 ans	
0,011775 rd	249 037 ans	dû à l'influence de Mercure.

Les autres composantes ont des amplitudes comprises entre 0,0069 rd et 0,00083 rd.



Pôle de VENUS

Figure 6

de -400 000 ans à +400 000 ans
échelle : 1 cm ⟶ 0.008

distance de deux points successifs : 40 000 ans

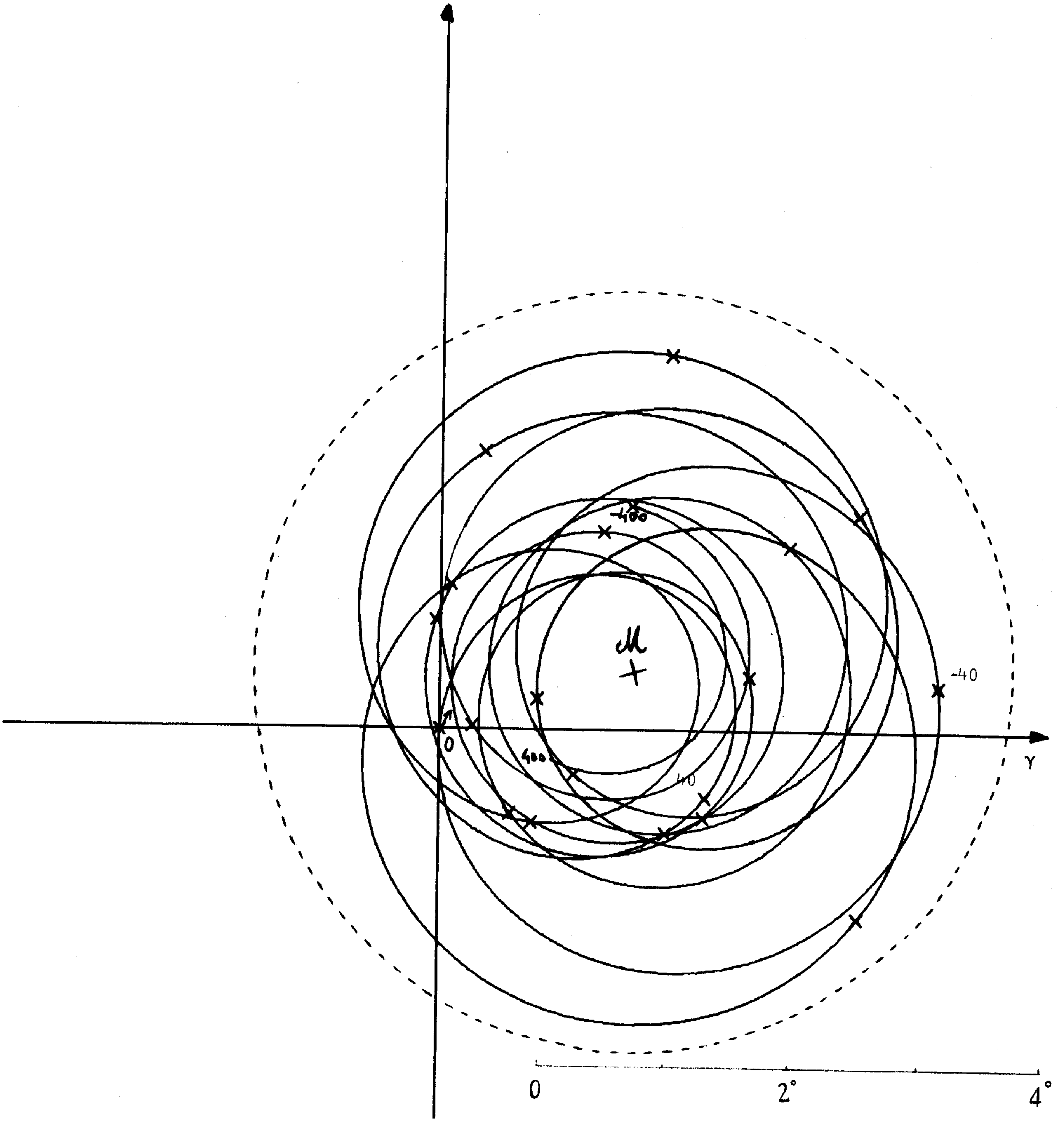
Pôle de la TERRE

Valeur maximale de l'inclinaison : $i_M = 0{,}052626$ rd ($3^\circ{,}015$)

Amplitudes et périodes des principales composantes :

0,024464 rd	69 140 ans	dûs au couple Venus-Terre
0,008182 rd	197 388 ans	
0,008485 rd	249 037 ans	dû à Mercure
0,004541 rd	74 487 ans	dû à Mars

Les autres composantes ont des amplitudes de 0,0028 rd à 0,0008 rd.



Pôle de la TERRE

de -400 000 ans à +400 000 ans
échelle : 1 cm ⟶ 0.008

Figure 7

distance de deux points successifs : 40 000 ans

origine : écliptique et équinoxe 1900.0

Pôle de MARS

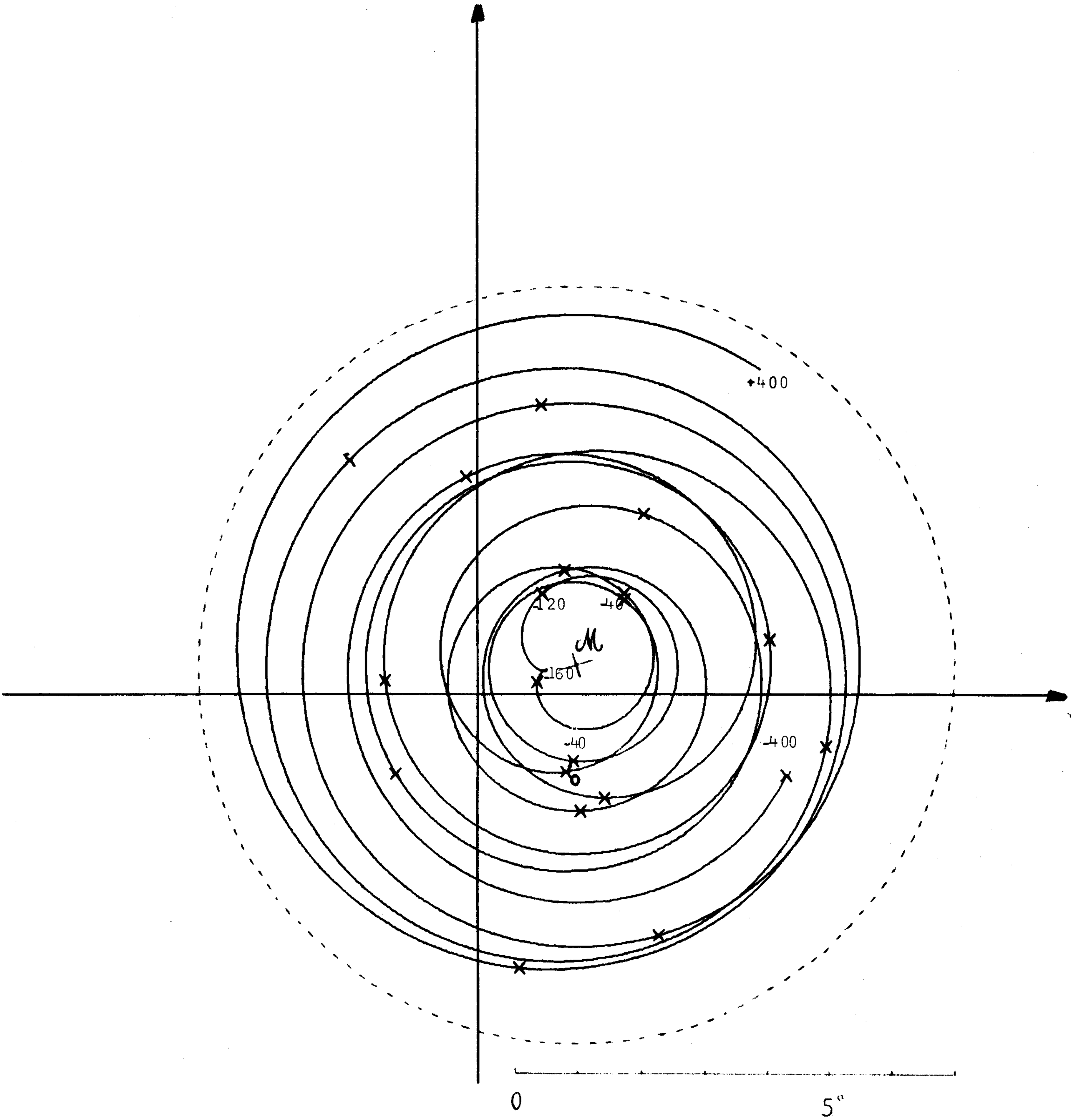
Valeur maximale de l'inclinaison : $i_M = 0{,}103432$ rd ($5{,}^\circ926$)

Amplitudes et périodes de trois composantes prépondérantes :

0,0359786 rd	69 140 ans	(Venus-Terre)
0,0504849 rd	73 487 ans	(Mars)
0,0096625 rd	50 329 ans	(Jupiter-Saturne)

A noter le point de rebroussement par lequel est passé le pôle de Mars il y a environ 150 000 ans. A cette époque le pôle de Mars était quasiment immobile. La régularité de la courbe est due à un phénomène de battement entre les deux premières périodes.

Les autres composantes ont des amplitudes comprises entre 0,0018 et 0,0007 rd mais les périodes qui leur correspondent sont plus grandes (de 2.10^5 ans à 2.10^6 ans).



Pôle de MARS

Figure 8

de -400 000 ans à +400 000 ans
échelle : 1 cm ⟶ 0.20

distance de deux points successifs : 40 000 ans

Pôle de JUPITER

Valeurs extrêmes de l'inclinaison :

i_M = 0,0094498 rd (0°,541)

i_m = 0,0032198 rd (0°,184)

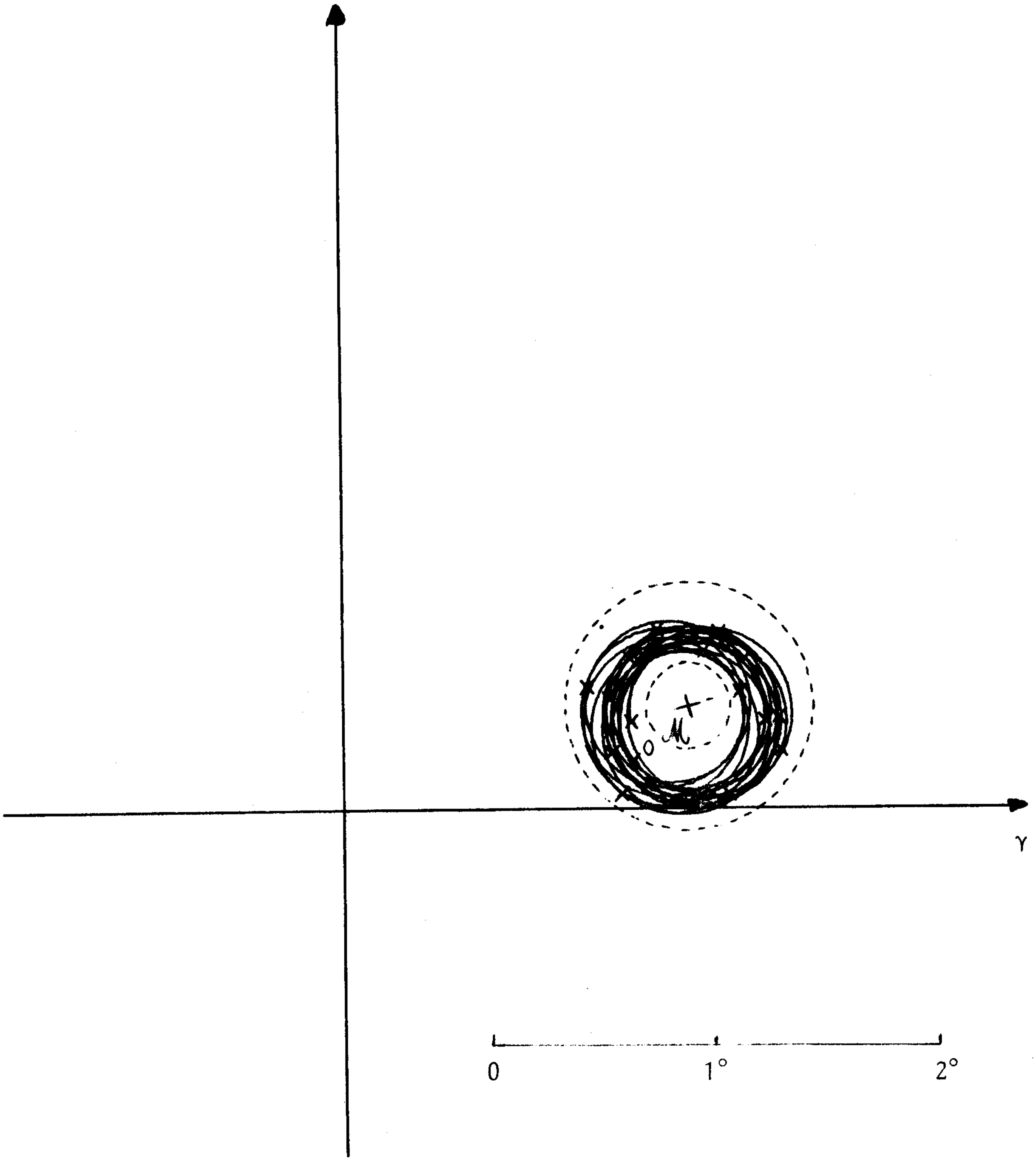
L'inclinaison reste donc toujours faible ; cela est dû à la prépondérance de la masse de Jupiter : le plan de son orbite ne peut être que fort voisin du plan invariable du système Solaire.

L'allure de la courbe est due à la prépondérance du mouvement circulaire rapide (période associée au couple Jupiter-Saturne) auquel se superposent trois autres mouvements d'amplitudes non négligeables mais beaucoup plus lents manifestant les actions d'Uranus, Neptune et Pluton :

0,0063264 rd	50 329 ans	(Jupiter-Saturne)
0,0014470 rd	1 963 865 ans	(Neptune)
0,0009549 rd	446 322 ans	(Uranus)
0,0007232 rd	1 508 557 ans	(Pluton)

Les autres composantes ont leur amplitude comprise entre 2.10^{-5} et 10^{-7} rd.

On remarque surtout sur la courbe le mouvement perturbateur d'Uranus ; les deux autres ont une période trop grande comparée à l'intervalle de temps considéré.



Pôle de JUPITER

Figure 9

de -400 000 ans à +400 000 ans

échelle : 1 cm ⟶ 0.005

1 valeur propre prépondérante : $\omega_5 = -25''\!,75$/an

Pôle de SATURNE

Valeurs extrêmes de l'inclinaison :

i_M = 0,018631 rd (1°,067)

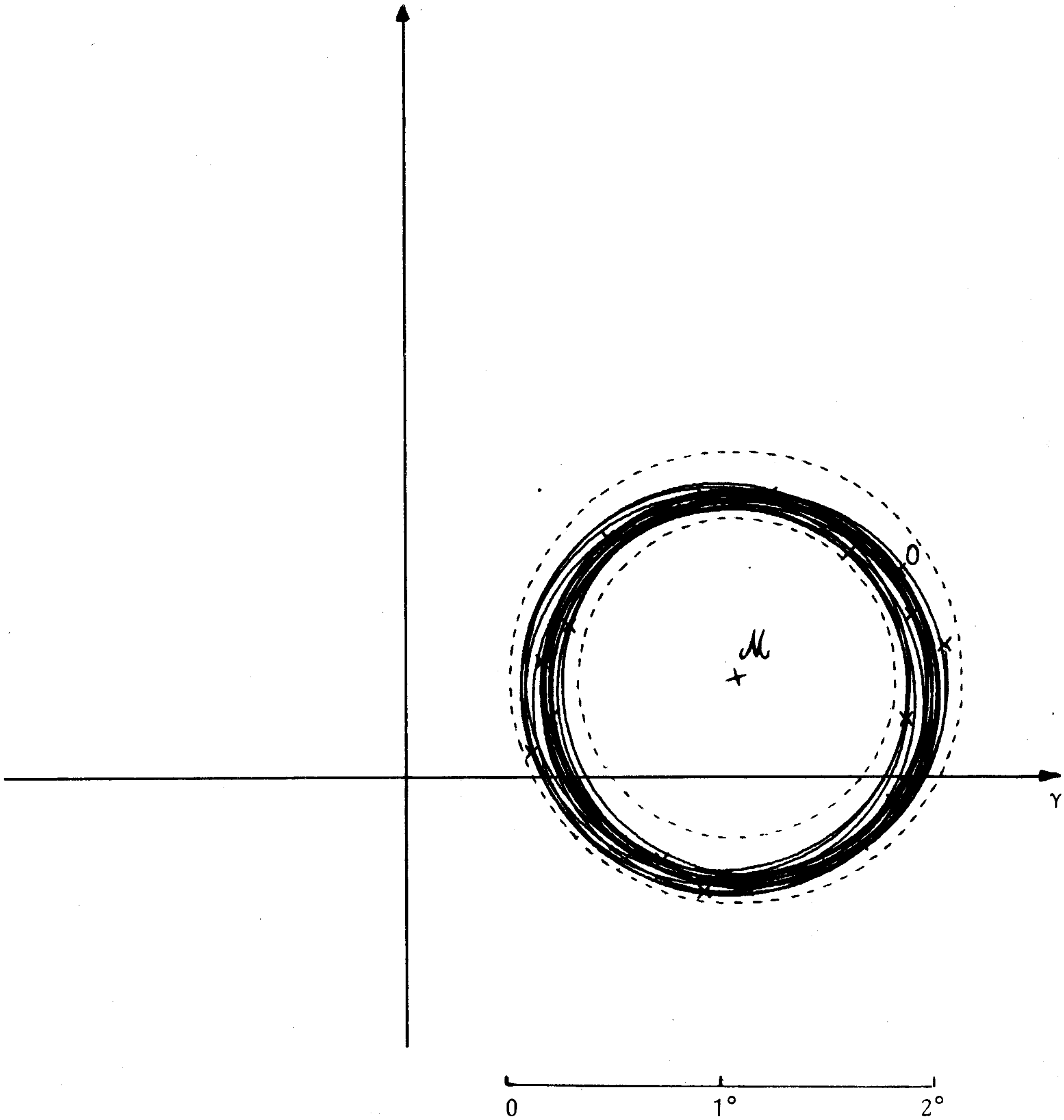
i_m = 0,012859 rd (0°,737)

Les mêmes remarques que pour Jupiter s'appliquent ici.

Amplitudes et périodes des mouvements circulaires prépondérants :

0,0157542 rd	50 329 ans	(Jupiter-Saturne)
0,0013963 rd	1 963 865 ans	(Neptune)
0,0007787 rd	446 322 ans	(Uranus)
0,0006896 rd	1 508 557 ans	(Pluton)

Les autres composantes ont une amplitude comprise entre 2.10^{-5} rd et 4.10^{-7} rd.



Pôle de SATURNE

Figure 10

de -400 000 ans à +400 000 ans
échelle : 1 cm ⟶ 0.005

1 valeur propre prépondérante : $\omega_5 = -25''75/\mathrm{an}$

Pôle d'URANUS

Valeurs extrêmes de l'inclinaison :

$i_M = 1°188$

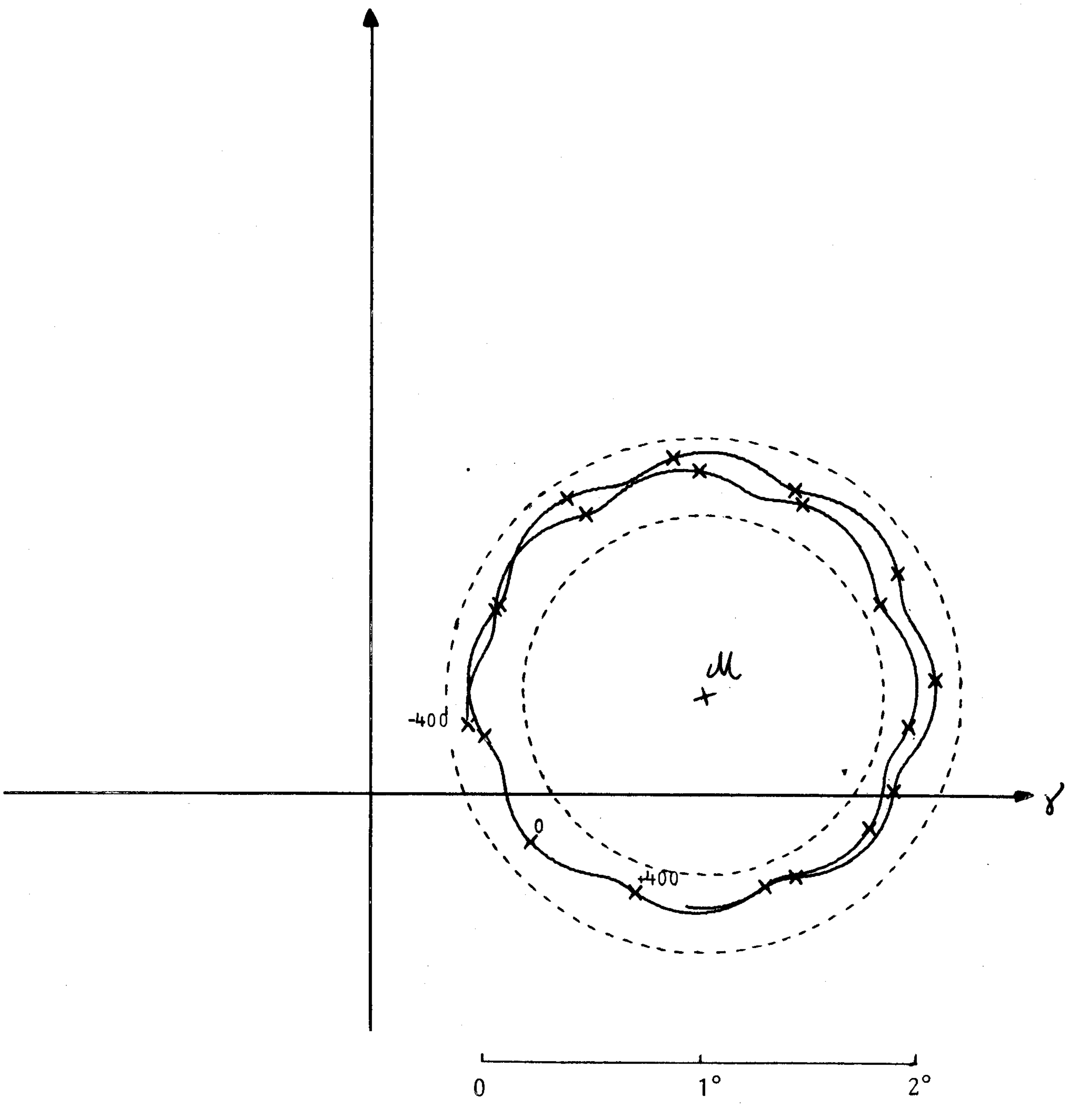
$i_m = 0°737$

Le mouvement circulaire associé à Uranus est prépondérant (période de 446322 ans). Il s'y superpose un petit mouvement plus rapide (période de 50329 ans), dû à Jupiter et à Saturne ; les autres périodes sont trop longues pour être visibles sur la figure.

Amplitudes et périodes des mouvements circulaires prépondérants :

0,0175973 rd	446 322 ans	(Uranus)
0,0006956 rd	50 329 ans	(Jupiter-Saturne)
0,0011826 rd	1 508 557 ans	(Pluton)
0,0012627 rd	1 963 865 ans	(Neptune)

Les autres composantes ont leur amplitude comprise entre 2.10^{-5} rd et 4.10^{-8} rd.



Pôle d'URANUS

Figure 11 de -400 000 ans à + 400 000 ans

échelle : 1 cm ⟶ 0.005

Pôle de NEPTUNE

Valeurs extrêmes de l'inclinaison :

$i_M = 0,025618$ rd $(1{,}^{\circ}467)$

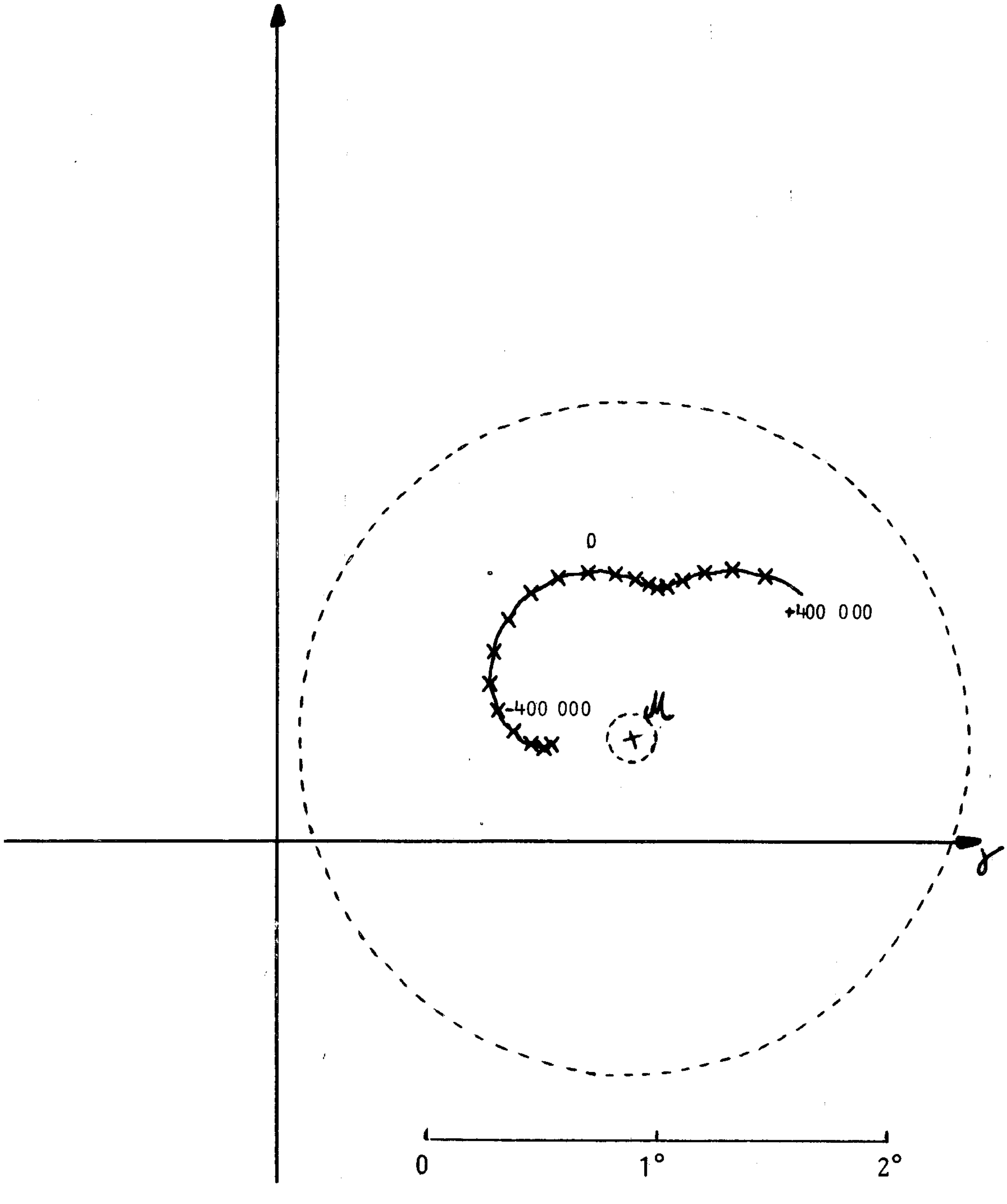
$i_m = 0,001690$ rd $(0{,}^{\circ}097)$

La courbe tracée est très fragmentaire : les mouvements circulaires d'amplitudes prépondérantes sont très lents. On observe surtout la composante de période 446322 ans et on devine celle de période 50329 ans.

Amplitudes et périodes des mouvements circulaires prépondérants :

0,014029 rd	1 963 865 ans	(Neptune)
0,009980 rd	1 508 557 ans	(Pluton)
0,002073 rd	446 322 ans	(Uranus)
0,000077 rd	50 329 ans	(Jupiter-Saturne)

Les autres composantes ont une amplitude de l'ordre de 10^{-7} rd.



Pôle de NEPTUNE

Figure 12

de -400 000 ans à +400 000 ans
échelle : 1 cm ——> 0.005

Pôle de PLUTON

Valeurs extrêmes de l'inclinaison :

$$i_M = 17{,}^\circ140$$

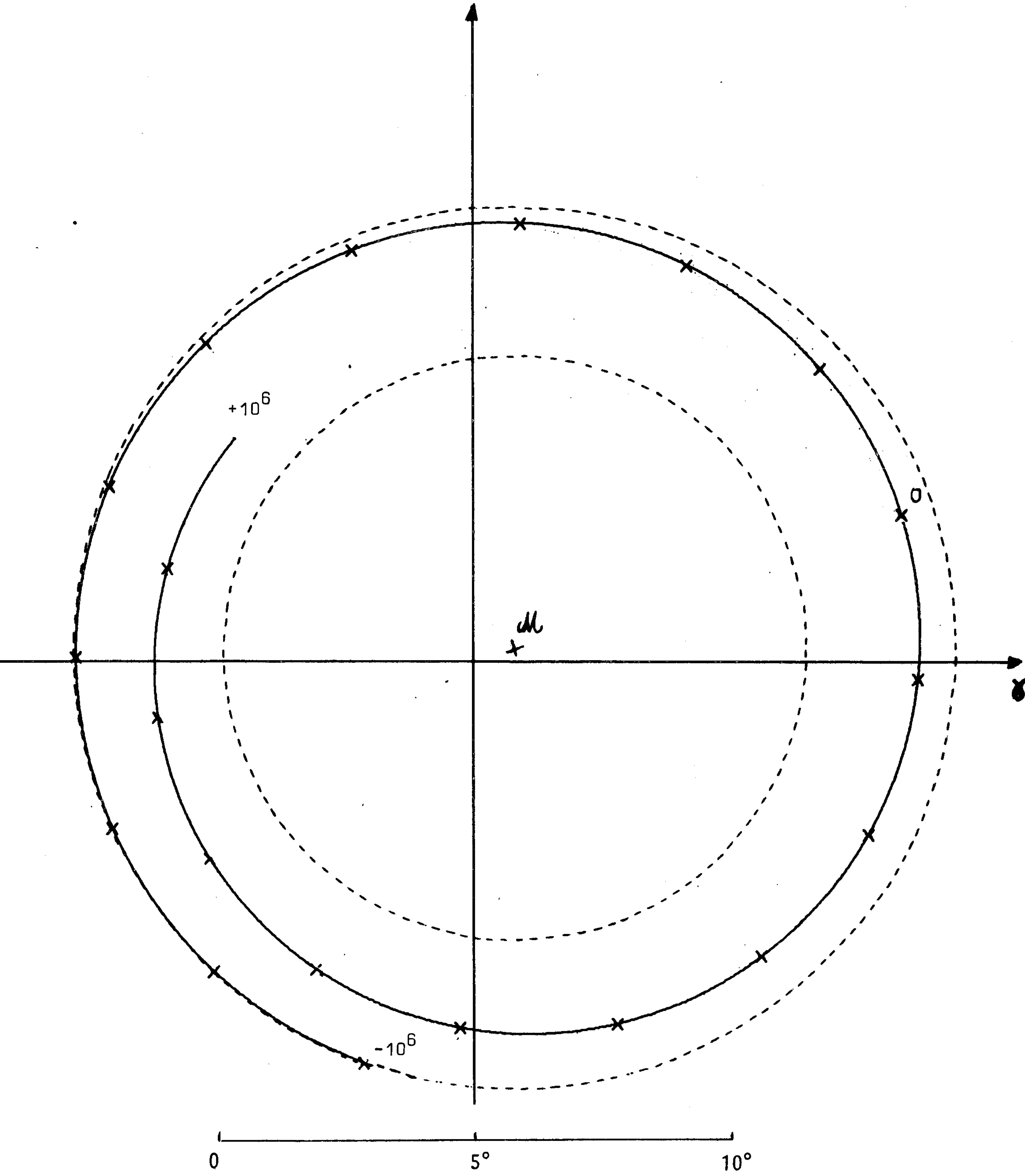
$$i_m = 11{,}^\circ666$$

L'inclinaison de l'orbite de Pluton reste donc toujours très grande.

On distingue la composante prépondérante de période 1 508 557 ans associée à Pluton. Il s'y superpose la composante de période 1 963 865 ans due à Neptune.

Amplitude	Période
0,25055 rd	1 508 557 ans
0,04966 rd	1 963 865 ans

Les autres composantes ont leur amplitude comprise entre 10^{-4} rd et 10^{-8} rd.



Pôle de PLUTON

Figure 13

de -10^6 ans à 10^6 ans
échelle : 1 cm ⟶ 0.035

distance de deux points successifs : 10^5 ans

Vecteur de Lizt de MERCURE

Valeurs extrêmes de l'excentricité :

$e_M = 0,232710$

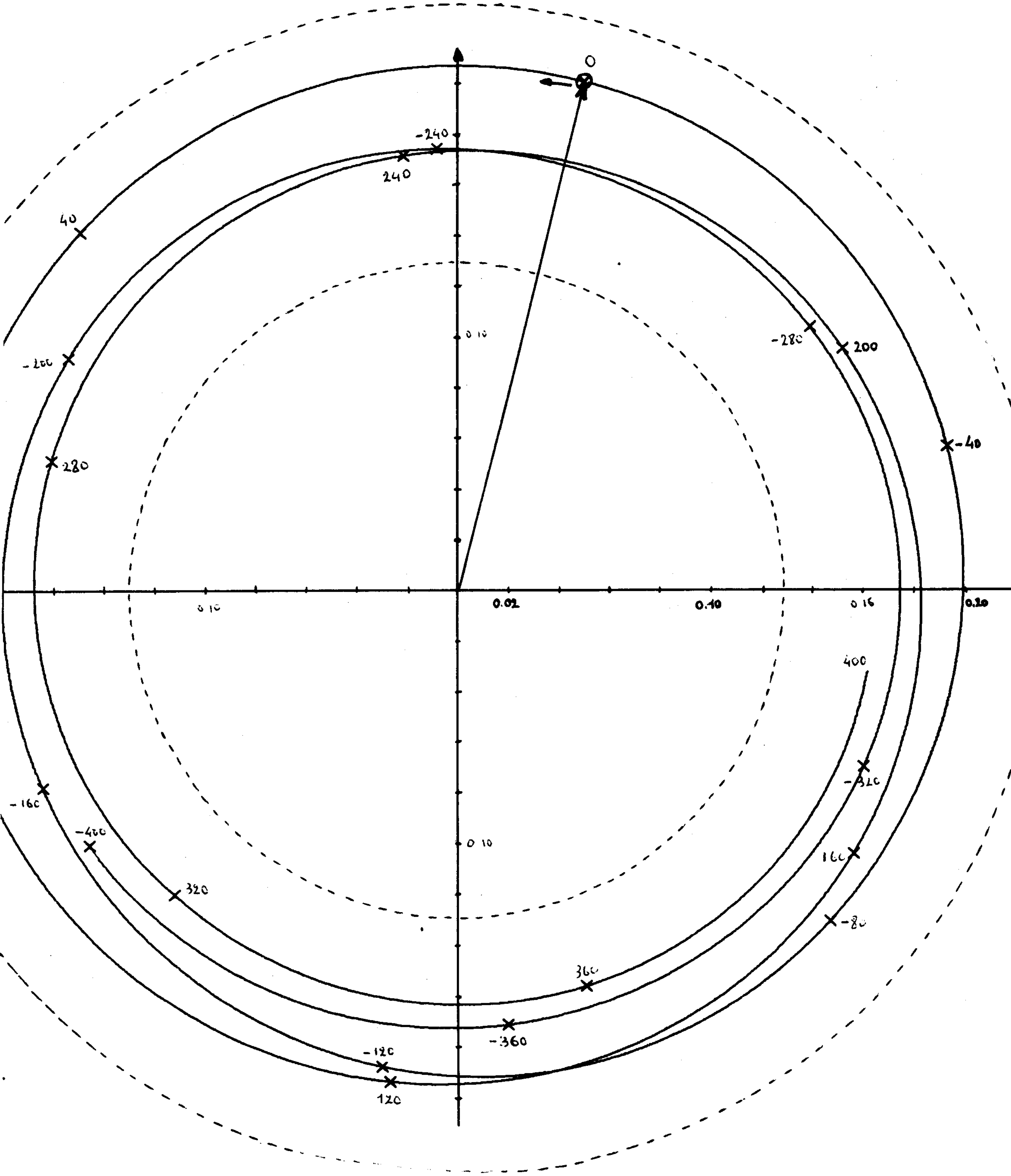
$e_m = 0,130232$

L'excentricité reste donc toujours importante.

L'allure régulière de la courbe décrite s'explique par la présence de la composante d'amplitude prépondérante, de période 237 259 ans associée à Mercure et de deux composantes d'amplitudes non négligeables dont les périodes sont du même ordre de grandeur :

0,181432	237 259 ans	(Mercure)
0,024204	349 080 ans	(Jupiter-Saturne)
0,023187	176 473 ans	(Venus-Terre)

Les autres composantes ont des amplitudes comprises entre 0,0015 et 7.10^{-6}



Vecteur de Lizt de MERCURE

de -400 000 ans à +400 000 ans
échelle : 1 cm ⟶ 0.02

1 valeur propre prépondérante : λ = 5",46238/an
origine en 1900.0

"distance" de deux points consécutifs : 40 000 ans.

Figure 14

Vecteur de Lizt de VENUS

Excentricité maximale :

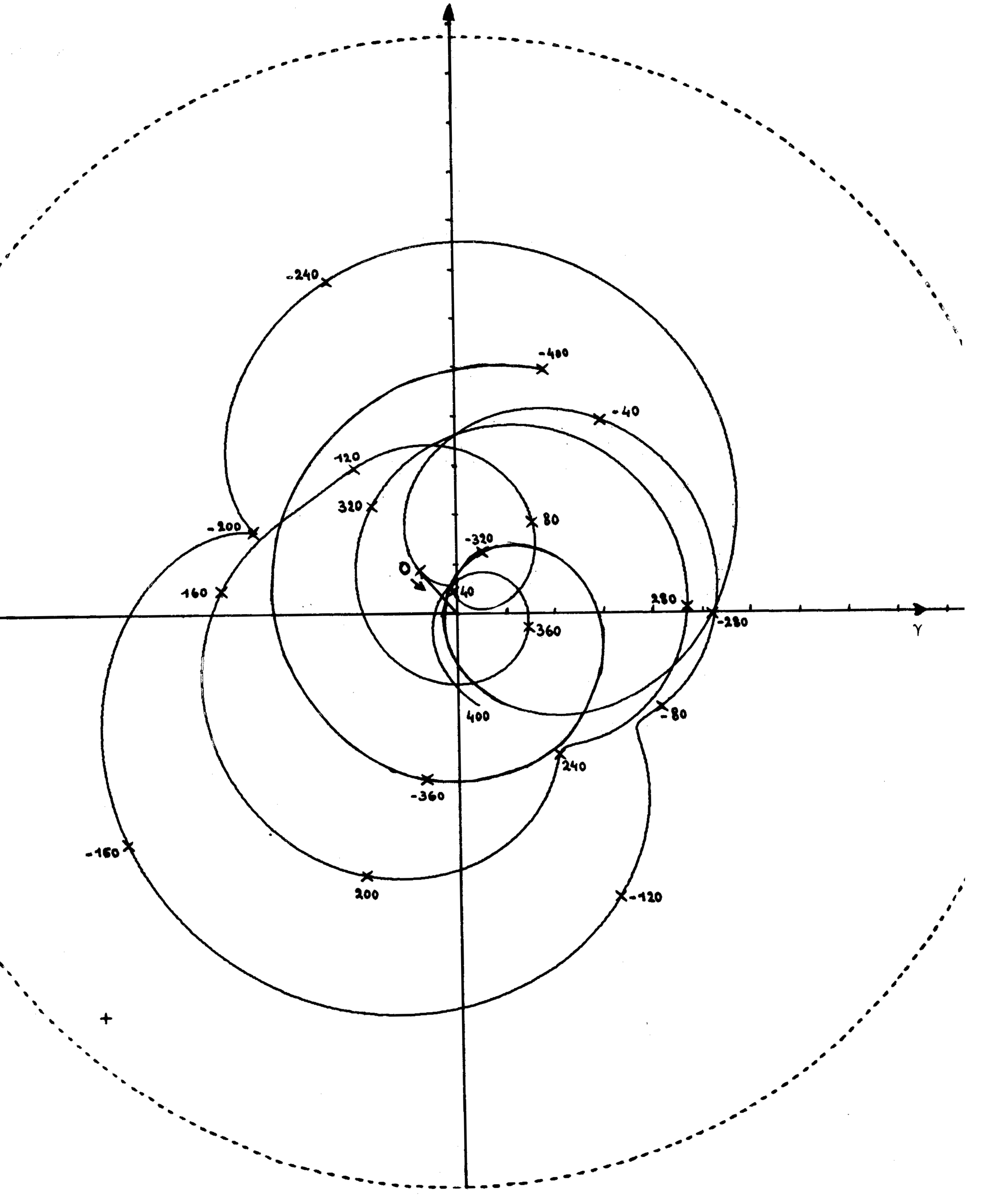
$e_M = 0{,}070394$

La courbe décrite est complexe car quatre composantes ont pratiquement la même amplitude :

0,019078	176 473 ans	(Venus-Terre)
0,016277	349 080 ans	(Jupiter-Saturne)
0,014950	71 984 ans	(Mars)
0,012735	74 784 ans	(Venus-Terre)

Les autres composantes ont des amplitudes allant de 0,0062 à 10^{-5}

Actuellement, l'excentricité de Venus est petite mais on voit qu'il n'en est pas toujours ainsi.



Vecteur de Lizt de VENUS

Figure 15

de -400 000 ans à +400 000 ans

échelle : 1 cm ——→ 0.006

Vecteur de Lizt de la TERRE

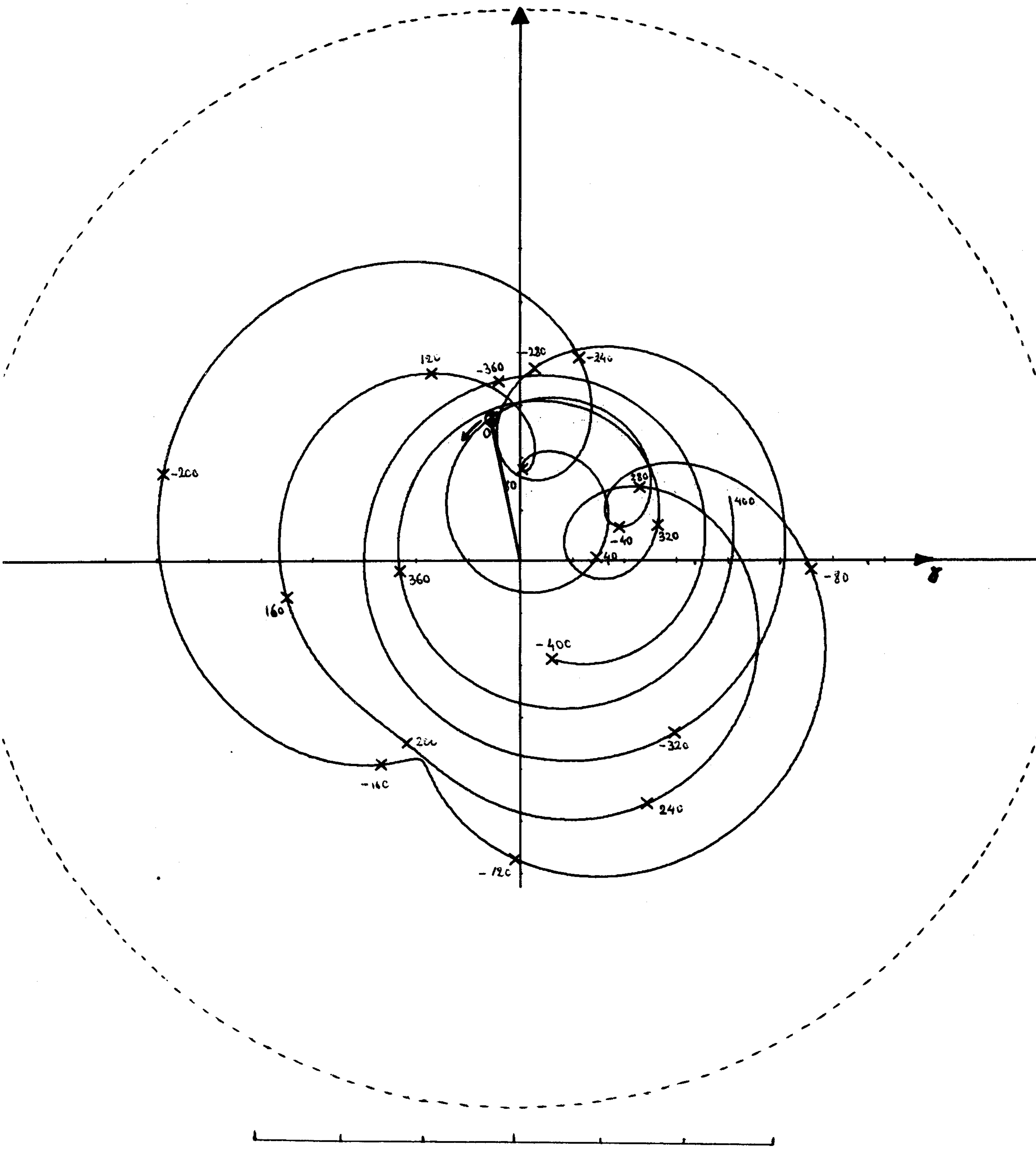
Excentricité maximale :

$e_M = 0,063774$

Comme pour Venus on a quatre composantes d'amplitudes voisines :

0,016275	349 080 ans	(Jupiter-Saturne)
0,014913	71 984 ans	(Mars)
0,014884	176 473 ans	(Venus-Terre)
0,010557	74 784 ans	

Les autres composantes ont des amplitudes variant de 4.10^{-3} à 11.10^{-6}



0 0.03 0.06

Vecteur de Lizt de la TERRE

Figure 16

de -400 000 ans à +400 000 ans
échelle : 1 cm ———> 0.006

Vecteur de Lizt de MARS

Valeurs extrêmes de l'excentricité :

$$e_M = 0,142631$$

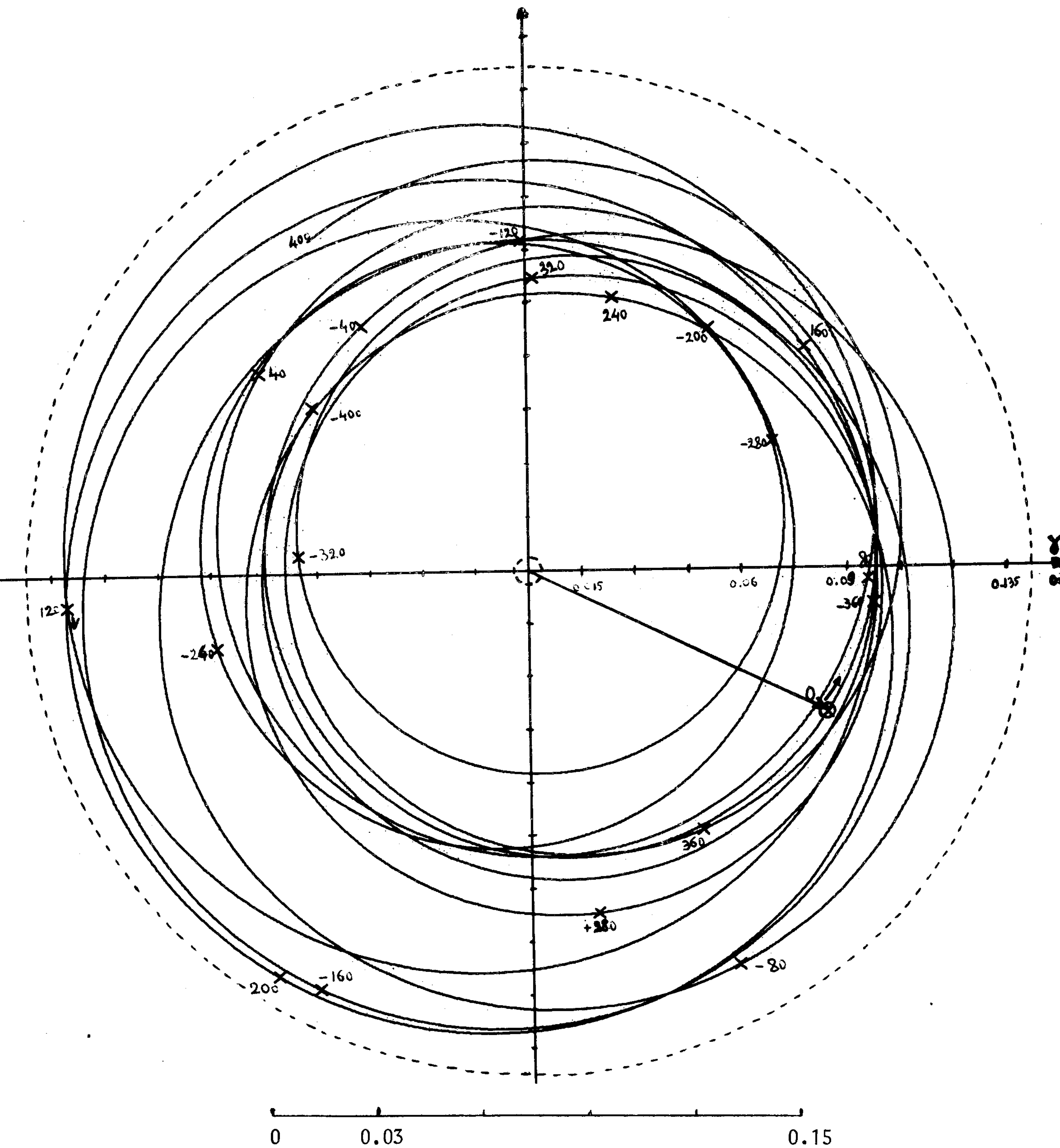
$$e_m = 0,003877$$

L'excentricité peut donc varier dans de grandes proportions.
Cela n'apparaît pas a priori d'après la courbe. Cela est dû à ce que les deux composantes prépondérantes ont presque la même période :

0,073120	71 984 ans	(Mars)
0,030047	74 784 ans	(Venus-Terre)
0,018735	349 080 ans	(Jupiter-Saturne)
0,016154	58 132 ans	

Les autres composantes ont des amplitudes allant de 0,0026 à 0,000015

Actuellement Mars n'a pas de faible excentricité. Cela est dû principalement au phénomène de battement entre les deux premières périodes.



Vecteur de Lizt de MARS

Figure 17

de -400 000 ans à +400 000 ans
échelle : 1 cm ⟶ 0.015

Vecteur de Lizt de JUPITER

Valeurs extrêmes de l'excentricité :

$e_M = 0{,}061116$

$e_m = 0{,}025410$

La forme extrêmement régulière de la courbe est due à ce que les périodes 349 080 ans et 58 132 ans des deux composantes d'amplitudes prépondérantes sont presque dans un rapport simple : 58 132 × 6 = 348 792

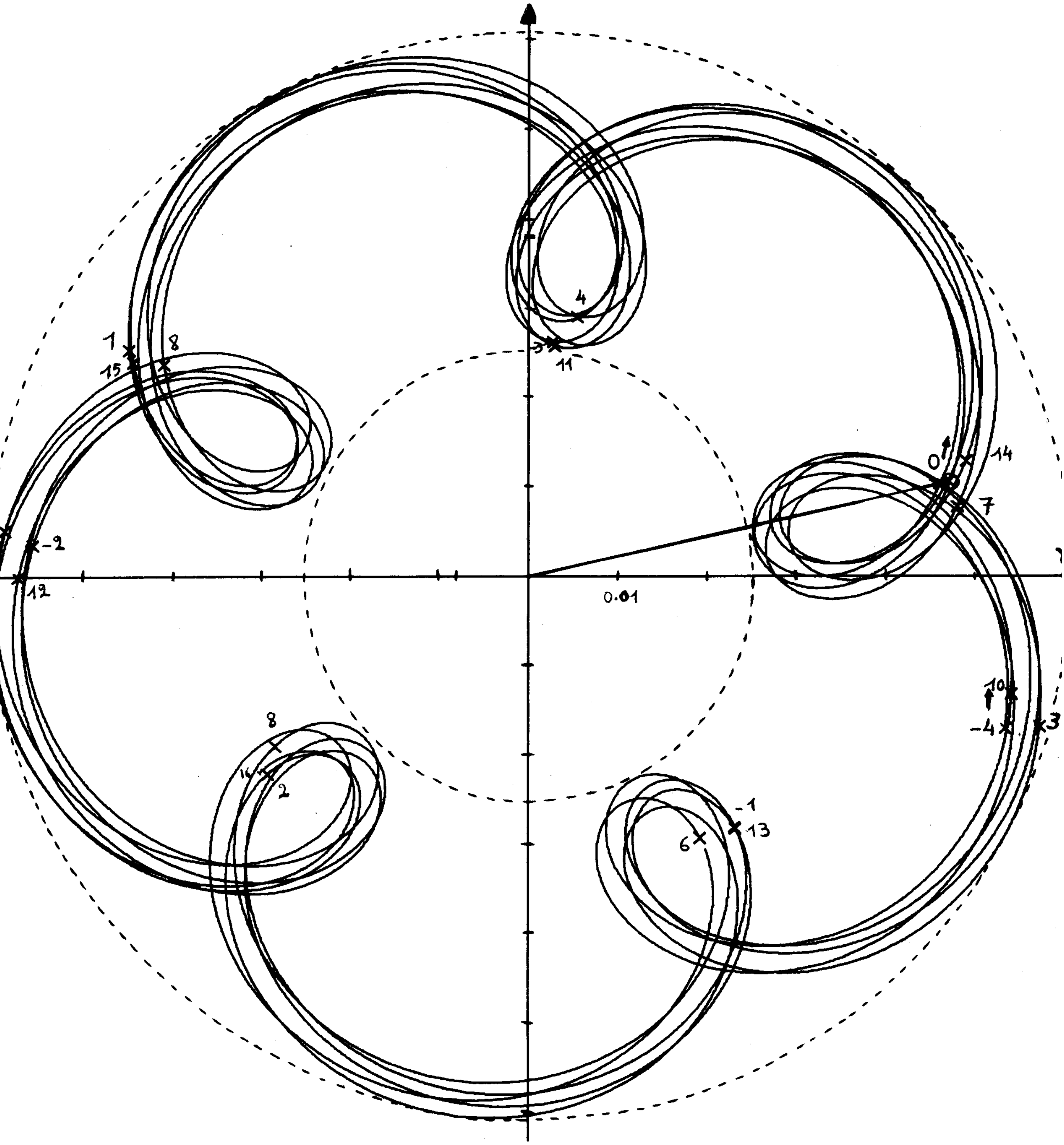
L'"épaisseur" de cette épicycloïde presque parfaite est due à une troisième composante (due à Uranus) de faible amplitude et à longue période (479 678 ans).

La simplicité de la courbe vient de la prédominance des masses de Jupiter et de Saturne. Voici les amplitudes prépondérantes et les périodes correspondantes :

0,0432639	349 080 ans	(Jupiter-Saturne)
0,0156657	58 132 ans	
0,0020323	479 678 ans	(Uranus)

Les autres amplitudes s'échelonnent de 9.10^{-5} à 5.10^{-7}

Il est à noter que les périodes trouvées par D. Brouwer et Van Woerkom sont de 301 682 ans et 46 662 ans au lieu des 349 080 ans et 58 132 ans obtenues ici ; leur rapport n'est plus aussi voisin d'un entier. Ces différences sont dues à la considération des termes provenant de la grande inégalité de 800 ans.



Vecteur de Lizt de JUPITER

de -400 000 ans à 1 600 000 ans
échelle : 1 cm ⟶ 0.006

Figure 18

2 valeurs propres prépondérantes : λ_1 = 3''7125/an
et λ_2 = 22''2939/an
($6\lambda_1$ = 22''2464)

"distance" de deux points consécutifs : 100 000 ans

Vecteur de Lizt de SATURNE

Valeurs extrêmes des excentricités :

$e_M = 0,084522$

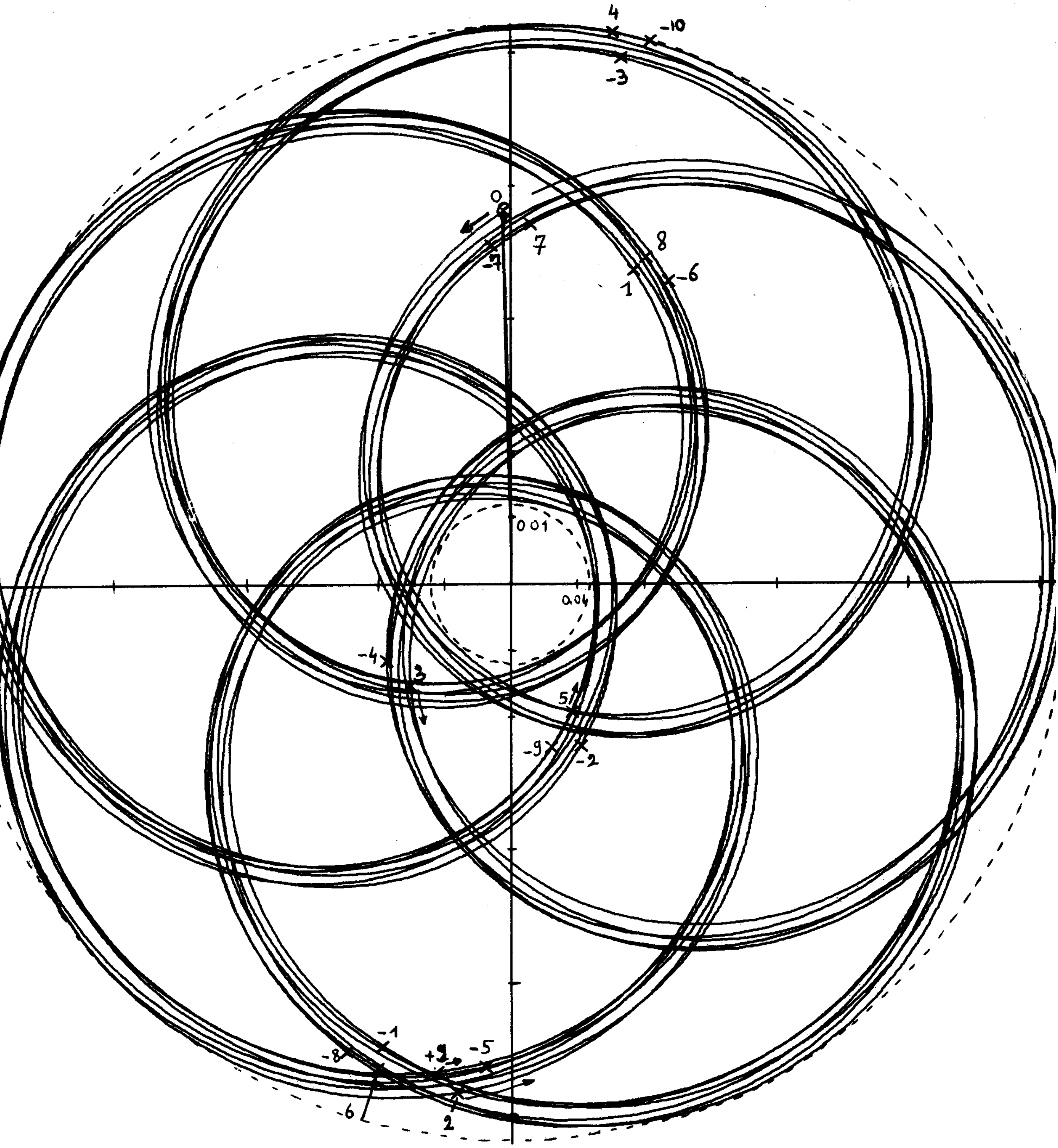
$e_m = 0,012206$

Les commentaires faits pour Jupiter s'appliquent de la même façon pour Saturne.

Voici les amplitudes et les périodes des principales composantes :

0,0483861	58 132 ans	(Jupiter-Saturne)
0,0340997	349 080 ans	(Jupiter-Saturne)
0,0018568	479 678 ans	(Uranus)

Les autres amplitudes varient de 25.10^{-4} à 6.10^{-6}



Vecteur de Lizt de SATURNE

Figure 19

de -1 000 000 ans à 1 000 000 ans
échelle : 1 cm ⟶ 0.008

2 valeurs propres prépondérantes : 3''7126/an

et 22''2939/an

Vecteur de Lizt de URANUS

Valeurs extrêmes de l'excentricité :

$e_M = 0,076815$

$e_m = 0,010821$

On a deux amplitudes prépondérantes avec les périodes :

0,043818	349 080 ans	(Jupiter-Saturne)
0,029384	479 678 ans	(Uranus)

On aperçoit également la composante de période 58 132 ans et d'amplitude 0,001856.

La composante

0,001249	1 522 138 ans	(Pluton)

apparaît moins nettement du fait de sa très longue période.

Les autres amplitudes vont de 2.10^{-6} à 4.10^{-7}

Vecteur de Lizt de NEPTUNE de -10^6 ans à 5.10^5 ans

même échelle : 1 cm ⟶ 0,008

Valeur maximum de l'excentricité :

$e_M = 0,016350$

Amplitudes prépondérantes :

0,007907	1 522 138 ans	(Pluton)
0,003532	2 080 055 ans	(Neptune)
0,003176	479 678 ans	(Uranus)
0,001597	349 080 ans	(Jupiter-Saturne)
0,000136	58 132 ans	(Jupiter-Saturne)

Les autres sont de l'ordre de 10^{-7}

Les deux premières composantes donnent l'aspect épicycloïdal de la figure. On remarque la composante de 58 132 ans malgré sa petite amplitude.

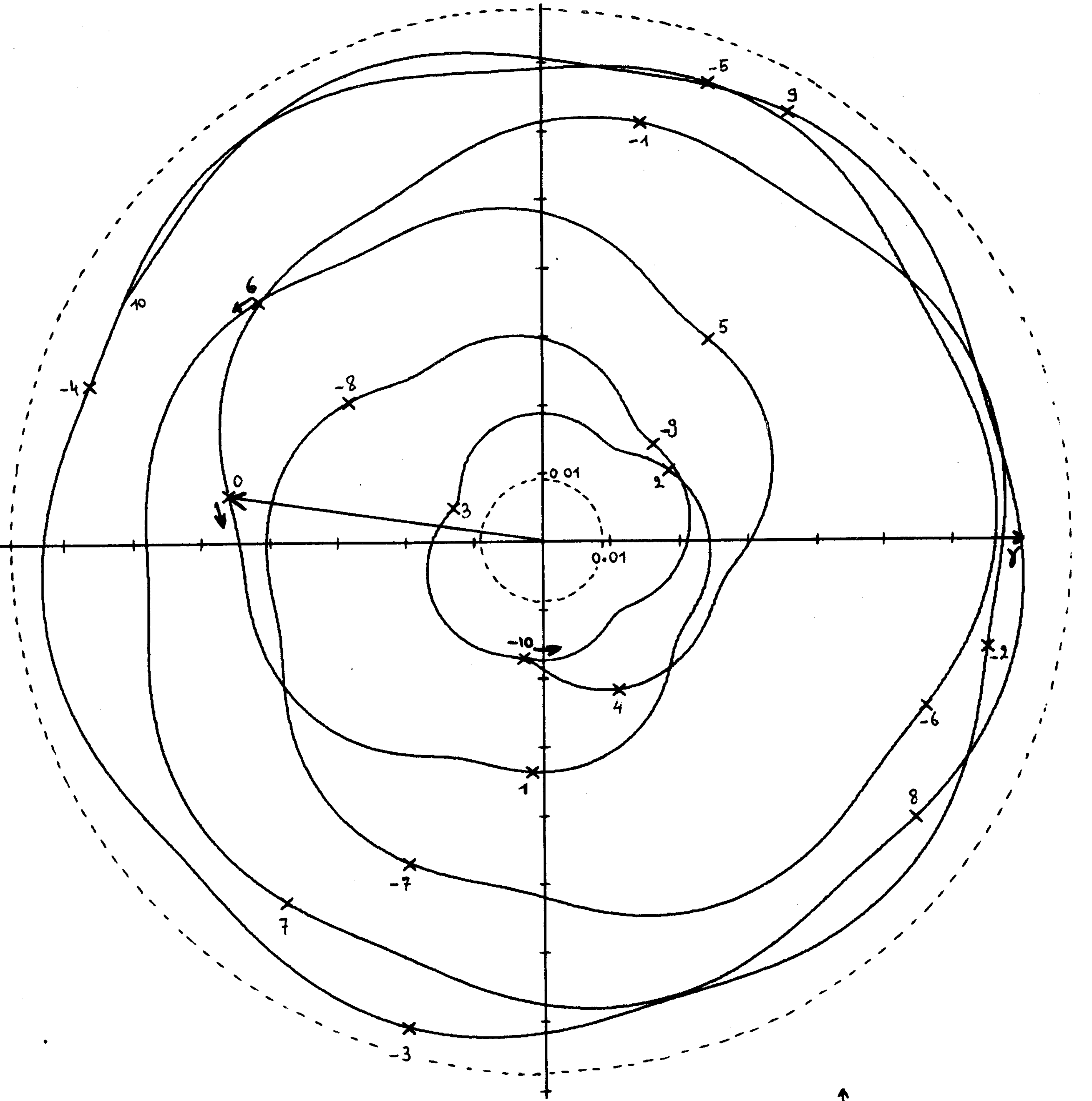


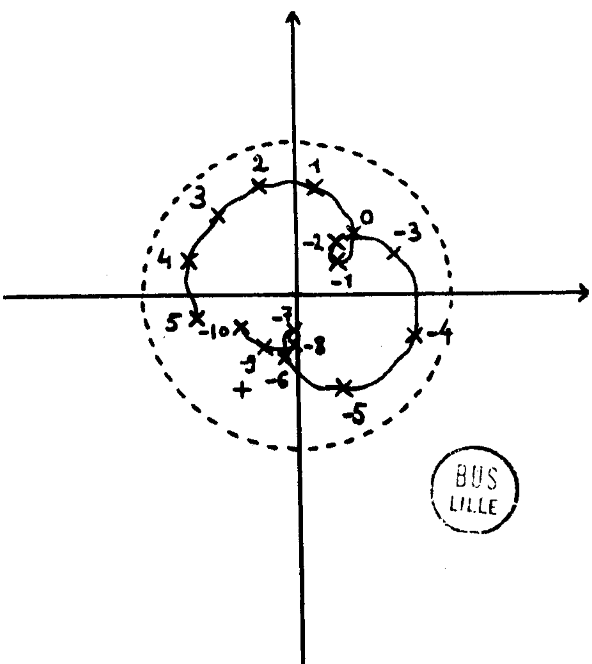
Figure 20

Vecteur de Lizt de URANUS

de -10^6 ans à $+10^6$ ans

échelle : 1 cm ⟶ 0.008

Vecteur de Lizt de NEPTUNE



Vecteur de Lizt de PLUTON

Valeurs extrêmes de l'excentricité :

$e_M = 0,262621$

$e_m = 0,243416$

Le mouvement est quasi circulaire ; la composante de Pluton est nettement prépondérante :

0,253018	1 522 138 ans	(Pluton)

Vient ensuite la composante de Neptune :

0,009184	2 080 055 ans	(Neptune)

Les autres composantes ne participent que pour 0,16 % dans le mouvement.

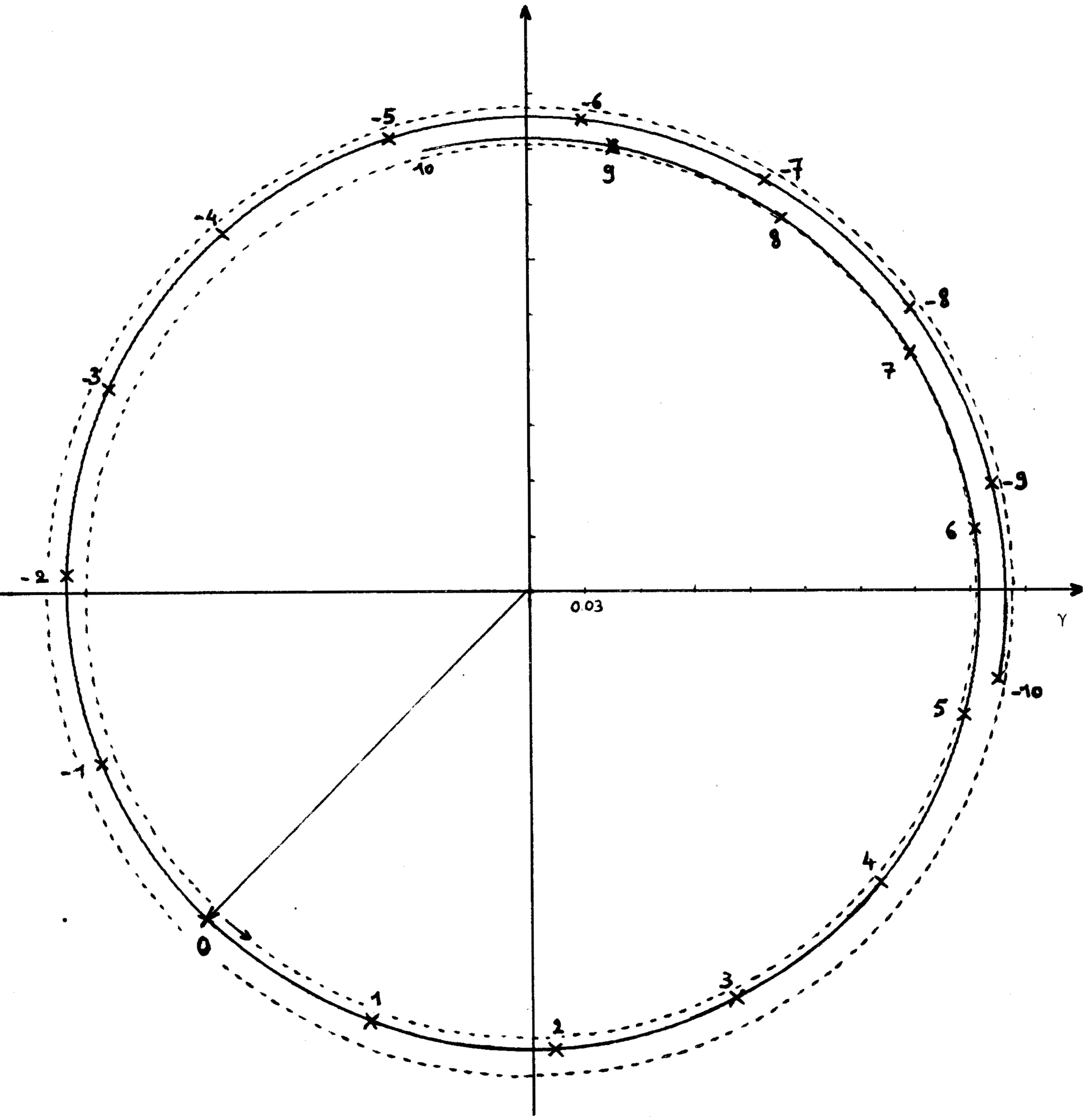
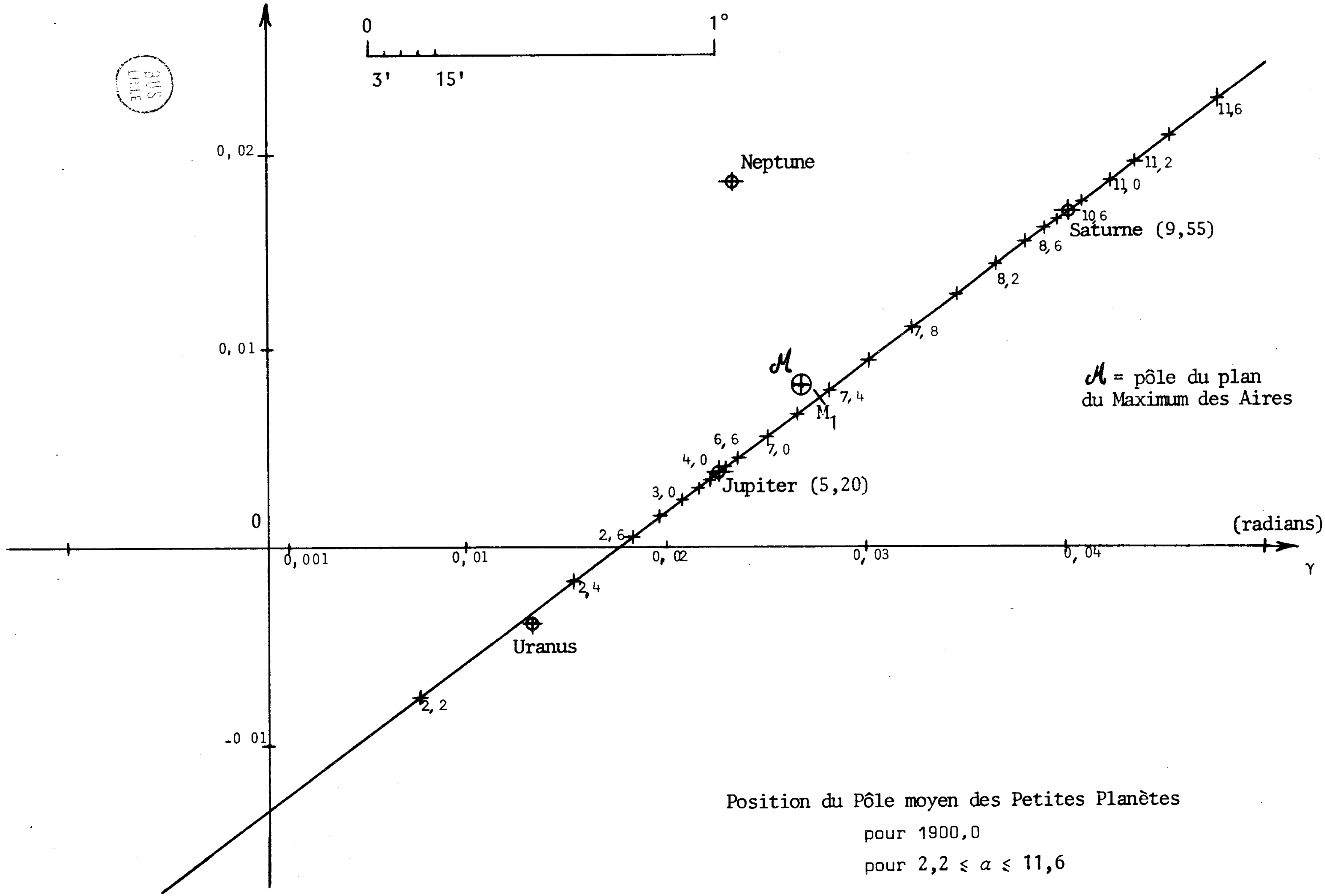


Figure 21 Vecteur de Lizt de PLUTON

de -10^6 ans à 10^6 ans

échelle : 1 cm ⟶ 0,030



Position du Pôle moyen des Petites Planètes

pour 1900,0

pour $2,2 \leq a \leq 11,6$

Figure 22

5. REPRESENTATION DES MOUVEMENTS SECULAIRES DES PETITES PLANETES

Comme pour les grosses planètes, les courbes représentatives des mouvements du pôle et du point de Lizt d'une petite planète dépendent de leur position initiale. Leur diversité nous empêche de les représenter toutes. On peut cependant mettre en évidence les caractéristiques générales de ces courbes en fonction du demi-grand axe a de leur orbite.

5.1. *Pôles moyens*

La rotation (11) donnant le mouvement du pôle d'une petite planète peut s'écrire :

$$u_o = C\, e^{-ia_{oo}(a)t} + \mathbf{P}(a,t) \tag{16}$$

On y a mis en évidence le paramètre a, demi-grand axe de l'orbite. Le mouvement du pôle se présente ainsi comme une relation de pulsation $-a_{oo}(a)$ autour du point $P(a,t)$. Les conditions initiales relatives au pôle de la petite planète n'interviennent que dans le coefficient C (pôle propre) : elles n'affectent que l'amplitude et la phase de ce vecteur.

$P(a,t)$ sera appelé *Pôle moyen* de la petite planète de demi-grand axe a. Il ne dépend pas de la position initiale du pôle ; toutes les petites planètes de même demi-grand axe a ont le même pôle moyen $P(a,t)$. Leurs vrais pôles tournent sur des cercles concentriques centrés en P avec une vitesse commune : $-a_{oo}(a)$.

On pourrait tracer la courbe décrite au cours du temps par le pôle moyen $P(a,t)$ pour a fixé, et ceci pour différentes valeurs de a. Il est cependant préférable de représenter ensemble les pôles moyens pour différentes valeurs de a et à un instant donné, car on verra mieux ainsi les relations qui existent entre les petites planètes : la figure 22 donne la position des pôles moyens pour 1900,0 et pour a variant de 2 U.A à 12 U.A ; on voit que dans cet intervalle, les pôles moyens sont sensiblement alignés avec les pôles de Jupiter et de Saturne. Ceci s'explique par la prépondérance de ces deux planètes sur les autres:

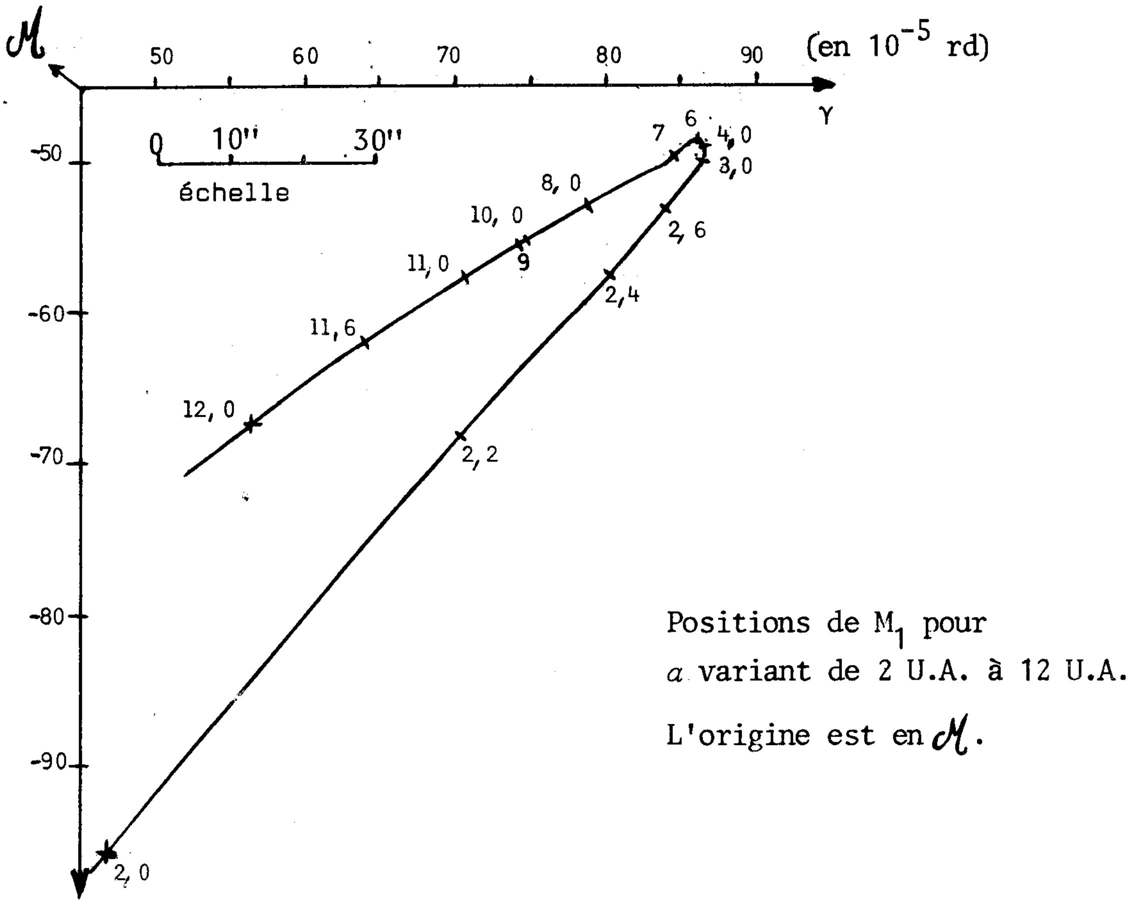


Figure 23 (agrandissement : 50 par rapport à la *figure 22*)

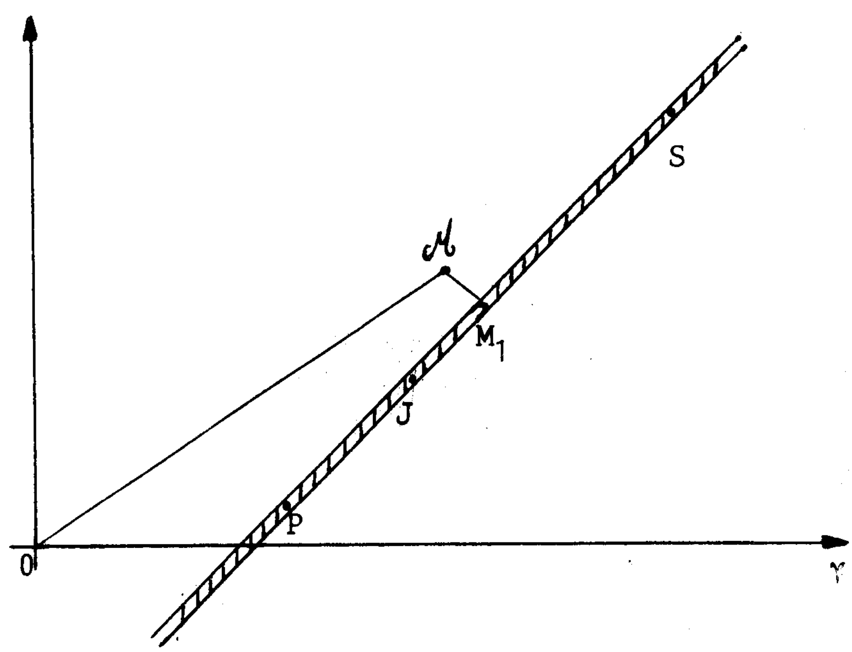


Figure 24

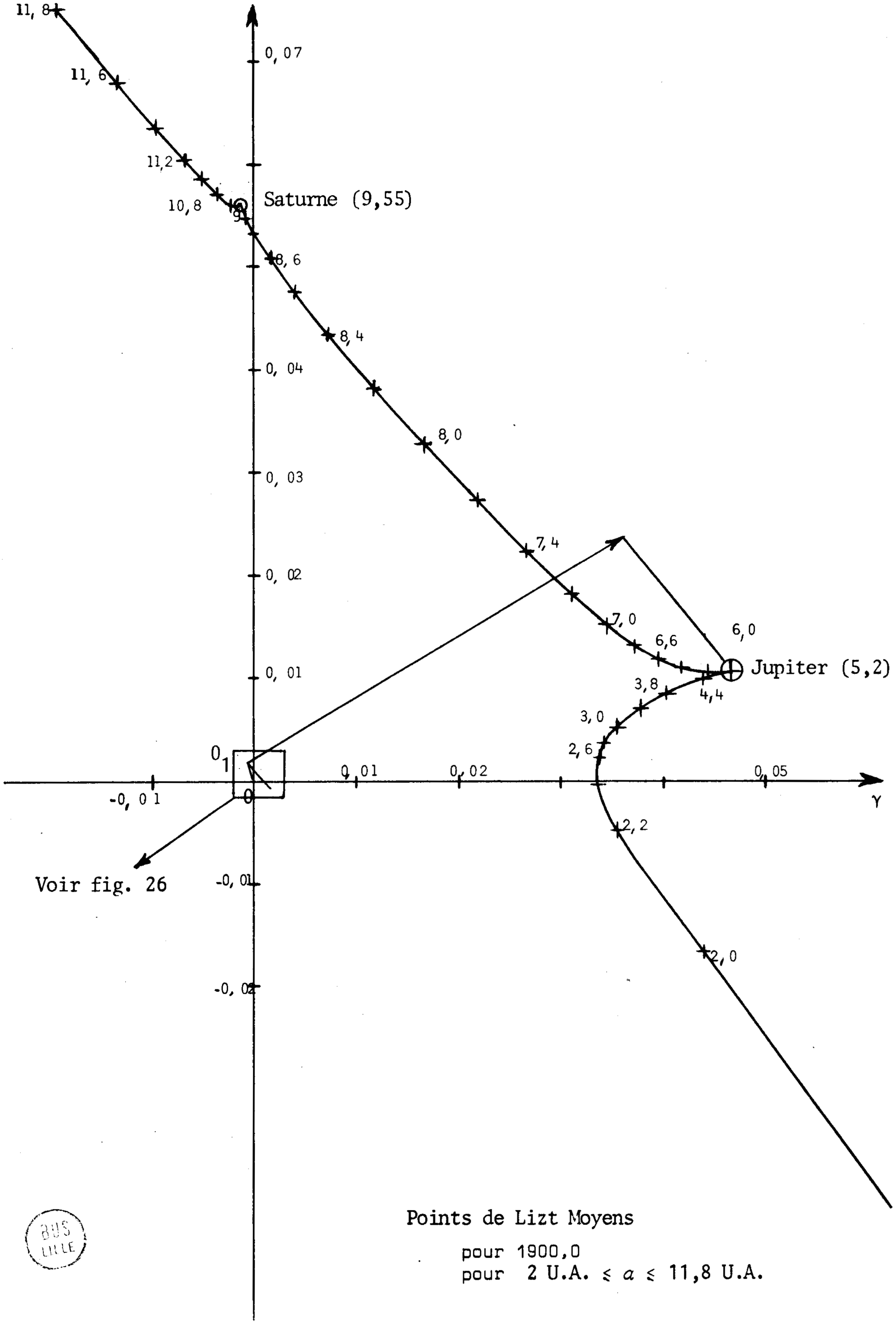
$P(a,t)$ est en effet l'extrémité du vecteur résultant de la composition de neuf vecteurs tournants dont les vitesses angulaires sont les valeurs propres de la matrice A et dont les phases dépendent des positions initiales des grosses planètes ; vitesses angulaires et phases sont donc indépendantes de a. Seule l'amplitude de ces vecteurs en dépend et ce, à des degrés divers conduisant à leur regroupement en trois classes :

- 1 vecteur indépendant de a : $\overrightarrow{O\mathcal{M}}$; c'est le vecteur fixe correspondant à la valeur propre nulle de A.
- 7 vecteurs quasiment indépendants de a : ils correspondent aux sept valeurs propres de A autres que -25,75 et 0. Leur somme $\overrightarrow{\mathcal{M}M_1}$ a actuellement un module d'environ 3",5. Les variations de la position de M_1 avec a sont données sur la figure 23. On voit qu'elles ne sont que de quelques dizaines de secondes pour l'intervalle de a considéré.
- 1 vecteur dépendant fortement de a : $\overrightarrow{M_1P}$; il correspond à la valeur propre -25,75 associée au couple Jupiter-Saturne. Son module peut varier de plusieurs degrés lorsque a parcourt l'intervalle [2, 12], soit environ 100 fois plus que $\mathcal{M}M_1$.

A chaque valeur de a correspond un point M_1 (Cf. figure 23) et de ce point est issu le vecteur $\overrightarrow{M_1P}$ dont la direction D est indépendante de a. Il s'en suit que l'ensemble des points P n'est pas rigoureusement une droite mais reste compris entre les deux droites parallèles de direction D qui enveloppent la courbe de la figure 23. (Cf. figure 24).

Les variations de M_1 sont trop petites pour être visibles sur la figure 22, d'autant plus qu'elles sont encore atténuées par l'orientation de la courbe de la figure 23, sensiblement la même que la droite JS de la figure 22. De ce fait, on peut assimiler la petite courbe décrite par M_1 avec le point noté M_1 sur la figure 22. C'est la différence d'ordre de grandeur entre la variation des différents vecteurs qui donne l'allure rectiligne du lieu de P.

Pour toute petite planète, a étant une constante, la distance M_1P est invariable. En négligeant les déformations du lieu de M_1 au cours du temps, on peut dire que les pôles moyens décrivent des cercles concentriques centrés en M_1, à la vitesse de -25",75 par an, en phase avec les pôles de Jupiter et de Saturne et en restant alignés avec ceux-ci. A ce degré d'approximation, c'est-à-dire à quelques secondes d'arc près, les distances entre ces pôles et entre les pôles moyens sont donc constantes ; ainsi l'inclinaison de Jupiter sur Saturne est quasiment constante et égale à 1°,265.



11, 8
11, 6
11,2
10, 8
9
8, 6
8, 4
8, 0
7, 4
7, 0
6, 6
6, 0
3, 8
4, 4
3, 0
2, 6
2, 2
2, 0
Saturne (9,55)
Jupiter (5,2)
0, 07
0, 04
0, 03
0, 02
0, 01
-0, 01
-0, 02
0, 01
0, 02
0, 05
-0, 0 1
0
0
1
Y
Voir fig. 26
Points de Lizt Moyens
pour 1900,0
pour 2 U.A. ≤ a ≤ 11,8 U.A.

Figure 25

La petitesse du vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}M_1}$ manifeste la prépondérance de Jupiter et de Saturne sur les autres planètes : si elles étaient les deux seules, M_1 serait confondu avec $\mathcal{M}$ et rigoureusement aligné avec leurs pôles J et S. Il diviserait le segment JS dans le rapport de leurs moments cinétiques soit -2,47. On voit que la présence des autres planètes ne modifie pas grand' chose.

A noter enfin, l'éjection du pôle moyen à l'infini pour a = 1,95 U.A et a = 12,5 U.A (Cf. p. 4). D'autre part, la construction géométrique des pôles met en évidence d'une autre façon l'association du couple Jupiter-Saturne avec la valeur propre -25,75.

5.2. *Points de Lizt moyens*

Comme pour les pôles, l'équation du mouvement du point de Lizt d'une petite planète peut s'écrire :

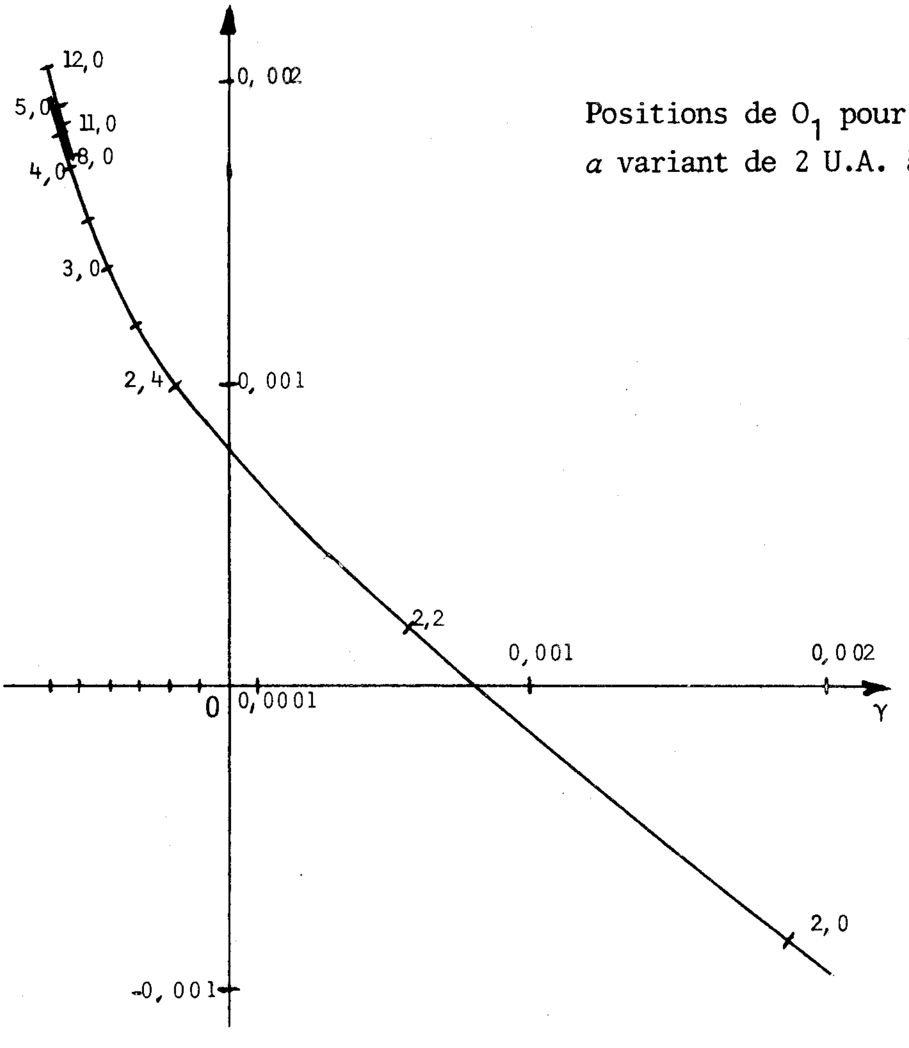
$$v_0 = D\, e^{i a_{00}(a) t} + Q(a,t) \tag{17}$$

et $Q(a,t)$ est appelé *Point de Lizt moyen*.

On peut voir sur la figure 25, la position de ces points moyens pour 1900,0 et lorsque a varie de 2 U.A à 12 U.A. On ne retrouve plus ici la simplicité obtenue pour les pôles moyens. En effet, le partage de l'ensemble des 9 vecteurs intervenant dans la construction d'un point Q, d'après leur dépendance avec a, est différent : il n'y a plus de vecteur indépendant de a mais il reste :

- 2 vecteurs prépondérants dépendant de a : ils correspondent aux deux valeurs propres de B : 22,29 et 3,71 associées au couple Jupiter-Saturne. Leur module varie de quelques centièmes lorsque a parcourt l'intervalle [2,12].
- 7 vecteurs petits et dépendant peu de a : leur somme $\overrightarrow{OO_1}$ a un module de l'ordre du millième et sa variation avec a, représentée sur la figure 26, est du même ordre, soit dix fois plus petite que pour les deux vecteurs prépondérants.

La figure 27 schématise la construction des points Q à partir de ces vecteurs. En négligeant les vecteurs $\overrightarrow{OO_1}$, on voit que les points Q décrivent des épicycloïdes analogues à celles parcourues par les points de Lizt de Jupiter et de Saturne (Cf. fig. 18 et 19), et en phase avec ceux-ci. A noter le rejet à l'infini des points Q pour a = 1,8 U.A et a = 12,7 U.A.



Positions de O_1 pour
a variant de 2 U.A. à 12 U.A.

Figure 26

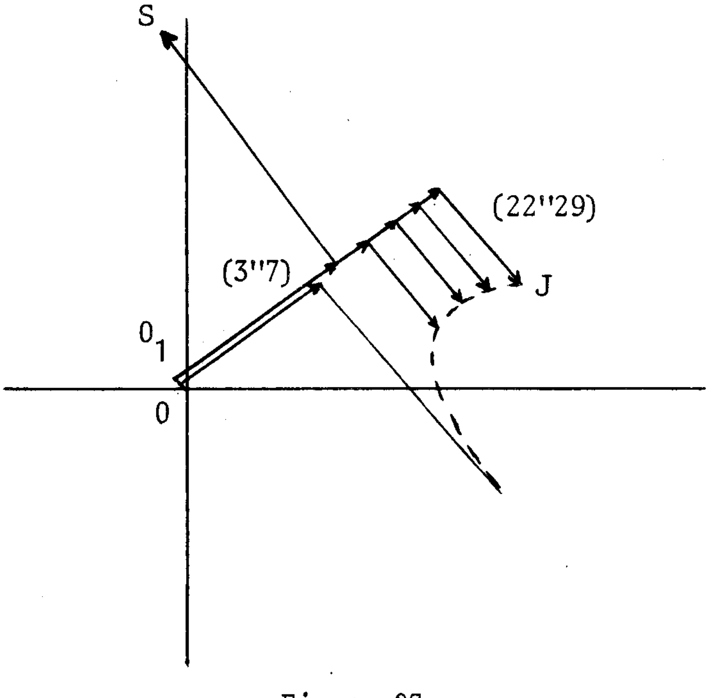


Figure 27

Plus généralement, en ne limitant plus l'intervalle de variation de a, on s'aperçoit que la courbe représentative des points de Lizt moyens (resp. pôles moyens) à un instant quelconque, relie continuement par rapport aux demi-grands axes les points de Lizt (resp. les pôles) de toutes les grosses planètes, sauf lorsque a_{oo} devient égal au module d'une des valeurs propres de B (ou A), auquel cas on a une discontinuité, et les points moyens sont rejetés à l'infini. On voit, d'après les intersections de la courbe des a_{oo} (fig. 1) par les droites $a_{oo} = |\lambda|$ (λ valeur propre de A ou B), que, seuls, les couples Jupiter Saturne et Venus-Terre sont reliés continuement par la courbe des points moyens ; toutes les autres planètes sont isolées sur des branches partant à l'infini pour les valeurs de a telles que a_{oo} égale 22,29 (ou 25,75). Ceci manifeste d'une autre façon l'isolement ou l'association des grosses planètes, telles qu'on les a mis en évidence par l'étude des correspondances entre valeurs propres et planètes.

Remarque : On a représenté sur la figure 28 la position des points de Lizt moyens d'après les valeurs numériques publiées par D. Brouwer et A. Van Woerkom [5]. Elle est légèrement différente de la figure 25. En effet, la considération de termes supplémentaires (jusqu'à l'ordre 6 en excentricité) dans la fonction perturbatrice de Jupiter et de Saturne a conduit à une solution semi numérique (analyse harmonique) du mouvement des points de Lizt de Jupiter et de Saturne, considérés comme seuls corps du système planétaire (Cf. G.W. HILL [7]). Cette solution est de la forme :

$$v = \sum_{k=1}^{7} \left[\alpha_k \, e^{i(k\lambda_1-(k-1)\lambda_2)t} + \beta_k \, e^{i((k-1)\lambda_1-k\lambda_2)} \right]$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres associées au couple Jupiter-Saturne, et α_k, β_k des coefficients numériques.

Lorsqu'on ne garde que les termes de ce développement correspondant à k=1 et k=2, comme dans [5], on a alors deux mouvements circulaires supplémentaires de pulsations : $2\lambda_1-\lambda_2$ et $2\lambda_2-\lambda_1$. Cette solution amène donc une nouvelle discontinuité dans la courbe des points de Lizt moyens chaque fois que a_{oo} égale une de ces nouvelles pulsations. C'est ce qui arrive pour a = 2,64 U.A. On a tracé en pointillés sur la figure 28 la courbe de la figure 23 : on voit que la nouvelle discontinuité est assez localisée ; on peut quand même se demander si la solution complète obtenue par Hill serait utilisable ici à cause du nombre de discontinuités nouvelles qu'elle amènerait.

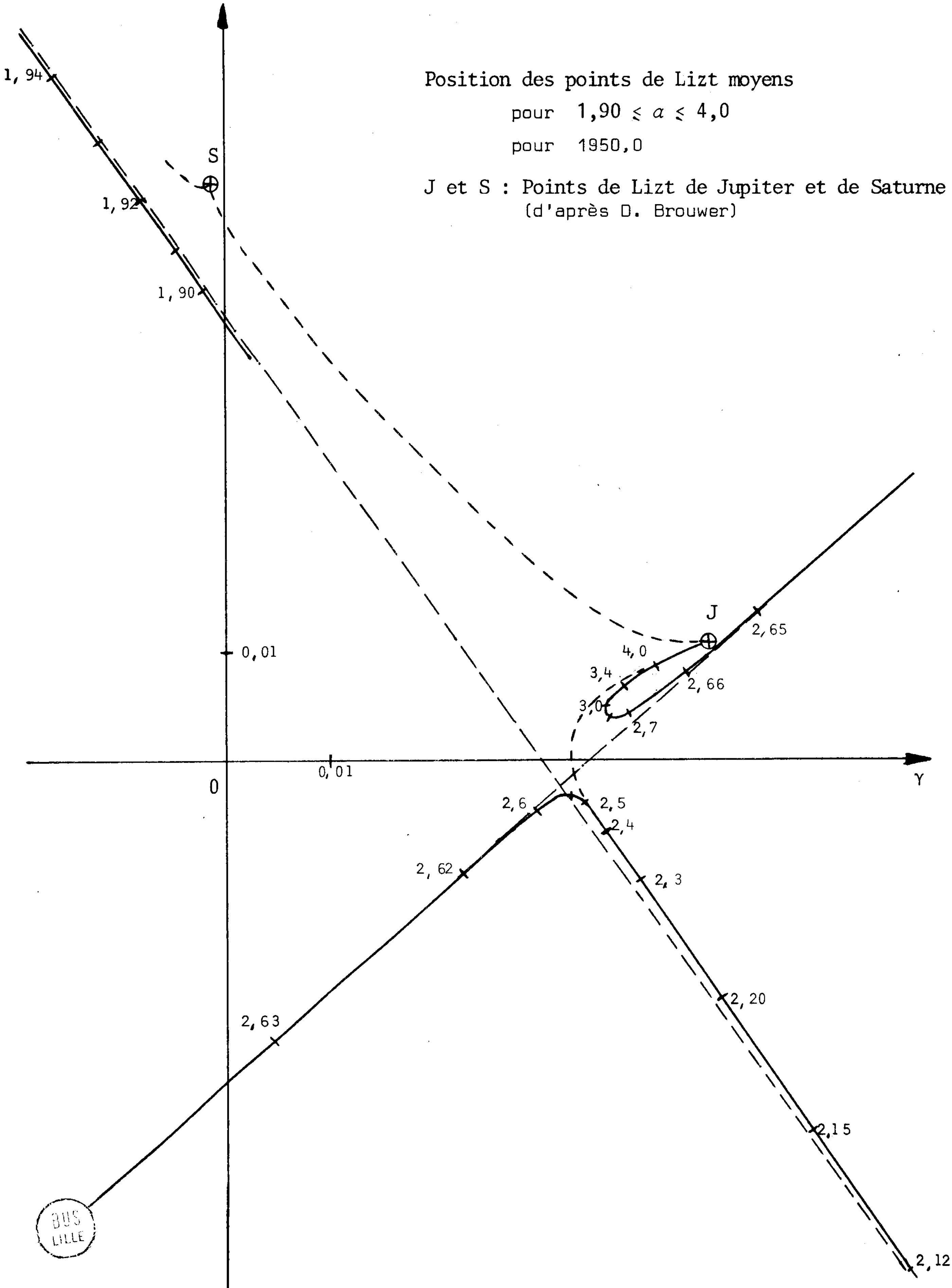

Position des points de Lizt moyens
pour 1,90 ≤ a ≤ 4,0
pour 1950,0
J et S : Points de Lizt de Jupiter et de Saturne
(d'après D. Brouwer)
S
J
0
0,01
0,01
Y
1,94
1,92
1,90
4,0
3,4
3,0
2,7
2,66
2,65
2,6
2,5
2,4
2,3
2,62
2,63
2,20
2,15
2,12

Figure 28

D'autre part, les valeurs de λ_1 et λ_2, légèrement différentes des valeurs propres de B associées au couple Jupiter-Saturne, causent un décalage des points de Lizt moyens par rapport à la figure 25, notamment au voisinage de 2 U.A : les points sont en effet rejetés à l'infini pour a =2,02 U.A au lieu de 1,80 U.A dans le cas de la figure 23.

6. CONSEQUENCES SUR LA DISTRIBUTION DES ELEMENTS D'ORBITES DANS L'ANNEAU DES PETITES PLANETES

La figure 22 montre que pour les valeurs de a comprises entre 2 U.A et 4 U.A., correspondant à l'endroit où l'on trouve la majorité des petites planètes dans le système solaire, les pôles moyens suivent des trajectoires analogues à celle du pôle de Jupiter et de Saturne et en phase avec ceux-ci. Cette corrélation se retrouve pour le pôle réel d'une petite planète si, du moins, son inclinaison propre est assez petite pour ne jamais l'écarter beaucoup du pôle moyen.

On peut espérer trouver une corrélation entre les pôles réels et le pôle de Jupiter quelles que soient les inclinaisons propres en considérant un ensemble de n petites planètes dont les demi-grands axes a_i $(i=1, \ldots, n)$ sont suffisamment voisins pour pouvoir confondre les pôles moyens $P(a_i, t)$ correspondants avec leur barycentre $\overline{P}$. Les pôles décrivent alors des cercles de rayon $|c_i|$ (inclinaisons propres) centrés en $\overline{P}$ mais avec des vitesses angulaires $-a_{00}(a_i)$ légèrement différentes les unes des autres de sorte qu'avec le temps, les différences d'élongations entre les différents pôles s'accumulent ; il s'en suit qu'après un temps suffisant, les pôles seront régulièrement distribués autour de $\overline{P}$ quelles que soient leurs positions initiales respectives.

D'autre part, le barycentre P_b des pôles des n petites planètes également pondérés peut s'exprimer en fonction du barycentre $\overline{P}$ des pôles moyens :

$$P_b = \overline{P} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |c_j| \, e^{i(-a_{00}(a_j)t + \phi_j)} \qquad (19)$$

Ce point sera voisin de $\overline{P}$ si n est assez grand et s'il n'existe pas de corrélation entre les amplitudes $|c_j|$ et les arguments $(-a_{00}t+\phi_j)$. De toutes façons, si de telles corrélations existent à un instant donné, elles ne sauraient être que passagères. La coincidence des points $\overline{P}$ et P_b fournit donc un test de la régularité de la distribution des n pôles.

Dans ce cas, P_b doit être aligné avec les pôles de Jupiter et de Saturne ; il tourne en phase avec ces pôles avec la vitesse angulaire $-25''\!,75$ par an ; la distance de ces points est constante.

Autrement dit, comme P_b définit le plan moyen des n orbites, on voit que son noeud dans le plan invariable reste constamment voisin des noeuds des orbites de Jupiter et de Saturne dans ce même plan.

Tout ce qui vient d'être dit à propos des pôles est vrai pour les points de Lizt : si la distribution des n points de Lizt est régulière, Q_b, barycentre de ces n points doit être voisin du point de Lizt moyen $\overline{Q}$.
Il est alors aussi dans le voisinage du point de Lizt de Jupiter, et donc on devra observer une concentration de périhélies de petites planètes dans la direction du périhélie de Jupiter. De plus, Q_b se déplace sur une épicycloïde analogue à celle parcourue par le point de Lizt de Jupiter (Cf. figure 18) et en phase avec lui de sorte que cette dissymétrie dans la distribution des périhélies doit toujours exister.

Enfin, au lieu de prendre des petites planètes de demi-grands axes a_i très voisins, on peut chercher où se trouve le barycentre P_b des pôles de l'ensemble des petites planètes comprises entre 2 U.A. et 4 U.A. ; P_b est le pôle du plan moyen de l'anneau des petites planètes. Les conclusions précédentes obtenues pour des petits intervalles de demi-grands axes et appliquées ensemble à la réunion [2 U.A, 4 U.A] de ces petits intervalles permettent de dire que P_b doit être voisin du barycentre P_m des pôles moyens également pondérés. La valeur a = 2,8 U.A. étant la moyenne des demi-grands axes, P_m sera voisin de $P(2{,}8,t)$. On voit sur la figure 22 que le rapport des distances $M_1P_{(2,8)}$ et M_1J est égal à 1,6. On devrait donc trouver P aligné avec les pôles de Jupiter et de Saturne, 1,6 fois plus loin de M_1 que le pôle de Jupiter. On peut mesurer son inclinaison moyenne sur le plan invariable : 0°,55.

De la même façon, le barycentre Q_b des points de Lizt de l'ensemble des petites planètes peut définir l'excentricité et l'orientation de l'ellipse représentant l'orbite moyenne de cet ensemble. Si la distribution des points de Lizt est régulière autour du barycentre Q_m des points de Lizt moyens, Q_b sera voisin de Q_m et donc aussi du point de Lizt de Jupiter. L'orbite moyenne des petites planètes a donc son périhélie dans une direction voisine de celui de Jupiter : ceci explique la dissymétrie observée depuis longtemps [8] dans la distribution des périhélies des petites planètes. Cette orbite moyenne se déforme; son point de Lizt se déplace sur une épicycloïde analogue à celle du point de Lizt de Jupiter. La corrélation entre les périhélies des petites planètes et celui de Jupiter est donc un phénomène durable. L'excentricité moyenne de l'anneau correspondant au point de Lizt moyen devrait être actuellement de 0,035 (Cf. figure 24).

Ainsi, la théorie des perturbations séculaires permet de prévoir la position du plan moyen ainsi que l'orientation et l'excentricité de l'orbite moyenne de l'anneau des petites planètes du système solaire. Cette orbite moyenne peut servir de base pour la description de l'anneau : toute orbite a de façon approchée ses éléments égaux à la somme (vectorielle) des éléments de l'orbite moyenne et de ses éléments propres (C et D).

Cependant, la théorie précédente ne considère que des inclinaisons et des excentricités infiniment petites du 1er ordre. Peut-on admettre que les petites planètes satisfont à cette condition quand on sait que l'inclinaison médiane (8°,5) et l'excentricité médiane (0,15) sont sensiblement plus importantes que pour les grosses planètes ? Avant de voir au chapitre 3 jusqu'à quel point ces prédictions se trouvent vérifiées dans le système solaire, on va donc d'abord essayer de mettre en évidence les limitations de la théorie du 1er ordre en intégrant numériquement le mouvement du pôle et du point de Lizt lorsque i et e ne sont plus petits.

CHAPITRE II : PERTURBATIONS SECULAIRES D'ORDRES SUPERIEURS

Il s'agit de déterminer les mouvements séculaires du pôle et du point de Lizt d'une petite planète dont l'inclinaison et l'excentricité sont quelconques. Pour simplifier, on considère que Jupiter est le seul corps perturbateur et que son orbite est fixe et circulaire (problème restreint des trois corps).

Divers auteurs (Gr. A. Antonacopoulos [12], Y. Kosai [13]) ont déjà attaqué ce problème par des méthodes analytiques mais qui ont l'inconvénient d'être d'application limitée : Gr. A. Antonacopoulos utilise un développement de la fonction perturbatrice F suivant les puissances croissantes de i et de e jusqu'à l'ordre 4 seulement. Quant à Y. Kosai, la lenteur de la convergence de son développement de F suivant les puissances croissantes de α, rapport des demi-grands axes, rend difficile son application pratique aux petites planètes du système solaire perturbées par Jupiter ($0,4<\alpha<0,75$). D'ailleurs l'étude du mouvement n'est faite que pour α très petit et l'application numérique faite pour $\alpha=0$ convient essentiellement à un satellite perturbé par le Soleil. Enfin, l'emploi des variables de Delaunay par ces deux auteurs amène naturellement l'élimination du noeud des orbites : la solution est alors donnée dans un repère tournant dans lequel le noeud est fixe mais le mouvement de ce repère n'est pas étudié.

On se propose ici de résoudre le problème lorsque α est grand et quels que soient i et e en utilisant la méthode de Gauss ; cette méthode numérique fournit les variations séculaires $\frac{di}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\Theta}{dt}$ et $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ permettant l'intégration immédiate du mouvement du pôle et du point de Lizt. L'étude préalable des équations différentielles du mouvement permet de plus la discussion des divers types de solutions possibles.

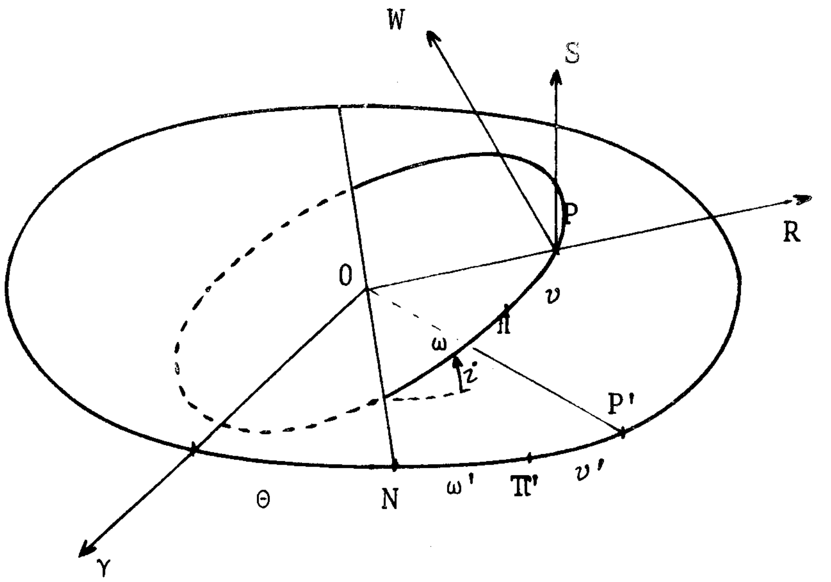


Figure 29

1. RAPPEL DE LA METHODE DE GAUSS

On calcule les inégalités séculaires des éléments d'orbite d'une planète P perturbée par une autre planète P' à un instant donné. Pour cela, il suffit de connaître les éléments et la disposition relative des deux orbites à cet instant :

a et a'	demi-grands axes de P et P'
e et e'	excentricités
i	inclinaison des deux plans d'orbite
Θ	longitude du noeud mesurée dans le plan de P' à partir d'une direction fixe $O\gamma$.
$\tilde{\omega}=\Theta+\omega$ et $\tilde{\omega}'=\Theta+\omega'$	longitudes des périhélies Π et Π' (Cf. fig. 29)

Les équations de Lagrange relatives à la planète P s'écrivent (Cf. par exemple [2] p. 433) :

$$
(20)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2m'}{1+m}\frac{na^3}{\sqrt{1-e^2}}\left(R e \sin v + S\,\frac{a(1-e^2)}{r}\right)\\
\frac{de}{dt} &= \frac{m'}{1+m}\,na^2\sqrt{1-e^2}\left(R\sin v + \frac{S}{ea}\left(\frac{a^2(1-e^2)}{r} - r\right)\right)\\
\frac{di}{dt} &= \frac{m'}{1+m}\,\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\quad Wr\cos(\omega+v)\\
\frac{d\Theta}{dt} &= \frac{m'}{1+m}\,\frac{na}{\sqrt{1-e^2}\,\sin i}\quad Wr\sin(\omega+v)\\
\frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= 2\sin^2\frac{i}{2}\,\frac{d\Theta}{dt} + \frac{m'}{1+m}\,\frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{e}\left(-R\cos v + S\left(1+\frac{r}{a(1-e^2)}\right)\sin v\right)
\end{aligned}
\right.
$$

où v représente l'anomalie vraie et ω l'argument de la latitude du périhélie.

Ces équations donnent les dérivées des éléments géométriques de l'orbite de la planète P en fonction de ces éléments eux-mêmes, de la position de P sur son orbite et des composantes R, S et W représentant, au facteur km près, les projections de la force perturbatrice sur les trois axes rectangulaires :

- prolongement du rayon vecteur de la planète perturbée P
- normale à ce rayon-vecteur dans le plan de l'orbite de P
- normale à ce plan.

Ces équations sont rigoureuses. Seule leur résolution fait appel à des approximations.

La force perturbatrice dont on doit calculer les composantes R, S et W est la différence de deux termes :

$$(21) \qquad F = kmm' \left[\frac{\overrightarrow{PP'}}{|PP'|^3} - \frac{\overrightarrow{SP'}}{|SP'|^3} \right]$$

Le premier représente l'attraction de la planète P' sur la planète P et le second l'attraction de P' sur le Soleil. Ce deuxième terme ne donne pas d'inégalités séculaires lorsqu'on se place dans la théorie du 1er ordre par rapport aux masses. On se placera désormais dans cette approximation et la force perturbatrice peut alors se réduire à son premier terme.

Les variations des éléments données par les équations 20 sont du même ordre que la masse perturbante (il faut seulement éviter que la distance PP' soit trop petite : l'excentricité de P devra être limitée en conséquence). Au 1er ordre par rapport aux masses les éléments d'orbites peuvent alors être considérés comme constants pendant le temps de quelques périodes de P ou de P', ou mieux, être assimilés à leur valeur moyenne. Dans ces conditions, les membres de droite des équations 20 sont périodiques et de période 2Π en M et en M', anomalies moyennes de P et de P'. On peut les développer en série de Fourier des deux arguments M et M'. L'une quelconque des équations 20 s'écrira :

$$(22) \qquad \frac{d\sigma}{dt} = A_{oo} + \sum_{j,j'} A_{jj'} \cos(jM + j'M' + q)$$

d'où :
$$(23) \qquad \sigma - \sigma_o = A_{oo} t + \sum_{j,j'} \frac{A_{jj'}}{jn + j'n'} \sin(jM + j'M' + q)$$

Si les moyens mouvements n et n' de P et de P' sont incommensurables, A_{oo} représente l'inégalité séculaire de l'élément σ. On supposera dans toute la suite que cette condition est réalisée.

Le calcul de A_{oo} par la méthode de Gauss consiste à éliminer les termes périodiques :

$$(24) \qquad A_{oo} = \frac{1}{4\Pi^2} \int_o^{2\Pi} \int_o^{2\Pi} \frac{d\sigma}{dt} \, dM \, dM'$$

A_{oo} ne dépend plus que des éléments géométriques de l'orbite. Le mouvement séculaire peut alors être déterminé de proche en proche à partir des conditions initiales.

Il représente les variations (lentes) des éléments moyens de l'orbite. Dans toute la suite le mot *mouvement* sera à prendre dans ce sens.

Comme le demi-grand axe a n'a pas d'inégalité séculaire (Cf. [1] p. 199), on pourra le considérer comme constant et ne s'intéresser qu'aux équations 20 relatives à e, i, Θ et $\tilde{\omega}$.

2. CALCUL NUMERIQUE DE A_{oo}

L'expression de $\frac{d\sigma}{dt}$ donnée par les formules (20) permet le calcul numérique de l'intégrale (24) : il suffit de calculer $\frac{d\sigma}{dt}$ pour des valeurs de M et de M' régulièrement réparties de 0 à 2Π et d'en faire la moyenne. Il y a bien un moyen de calculer l'intégrale $\int_0^{2\Pi} \frac{d\sigma}{dt}\, dM'$ en utilisant les fonctions elliptiques (Cf. [1] chap. 27) mais ce procédé, intéressant pour les calculs manuels car ces fonctions sont tabulées, est difficilement adaptable au calcul électronique. On a préféré utiliser la méthode de Simpson pour sa simplicité et sa meilleure automaticité.

La précision obtenue par cette méthode, évaluée en variant le nombre de points d'intégration, est de 10^{-3} pour une subdivision de l'intervalle d'intégration $(0,2\Pi)$ en 30 parties égales. Cette précision est largement suffisante pour l'utilisation qu'on a en vue.

Cela nécessite le calcul de $\frac{d\sigma}{dt}$ en 900 points. Le calcul des anomalies vraies à partir des 60 anomalies moyennes M et M' nécessite, compte tenu des symétries, 30 fois la résolution de l'équation de Kepler. (15 fois si l'excentricité de Jupiter est considéré comme nulle). On a utilisé à cet effet une méthode très performante associant les méthodes dites "de la corde" et "de la tangente" (Cf. [11] chap. 3). Le temps de calcul nécessaire pour obtenir les quatre inégalités séculaires (de e, i, Θ et $\tilde{\omega}$) est dans ces conditions de l'ordre de 15 secondes(1).

(1) sur Bull GAMMA 40, langage ALGOL.

3. APPLICATION DE LA METHODE DE GAUSS

L'automatisation de la méthode permet d'effectuer l'intégration numérique du mouvement du pôle et du point de Lizt. Pour cela, il faut se donner les conditions initiales a_0, i_0, e_0, ω_0 et Θ_0 à l'instant t_0, calculer les inégalités séculaires $\frac{di}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\Theta}{dt}$ et $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ correspondantes, et en déduire par une méthode de type Runge-Kutta les nouveaux éléments d'orbite pour un instant $t_0+\Delta t$. On itère le processus en prenant ces nouveaux éléments comme conditions initiales. L'inconvénient majeur de la méthode est de ne donner le mouvement du pôle et du point de Lizt que sur un intervalle de temps limité, sans possibilité de généralisation. D'autre part, les conditions initiales peuvent être si diverses que le nombre de cas à traiter pour obtenir un minimum de généralité dépasse nos possibilités de calcul. Aussi va-t-on plutôt déterminer d'abord l'aspect qualitatif du mouvement (symétries, périodicités), l'intégration numérique n'intervenant qu'à titre d'exemple et pour chiffrer les variations des éléments.

Ceci revient à étudier les inégalités séculaires en tant que fonctions des conditions initiales. L'orbite de Jupiter étant fixe et circulaire,

$\frac{di}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ et $\frac{d\Theta}{dt}$ ne dépendent que de a (qui est constant), de i, de e et de ω. Θ n'intervient pas par raison de symétrie.

La démarche sera la suivante :

Pas 1 - étude qualitative des inégalités séculaires en fonction des conditions initiales à partir de la forme des intégrales doubles.
On détermine notamment leur périodicité et leur parité en fonction de ω ainsi que le degré de liberté du système d'équations différentielles.

Pas 2 - étude quantitative des inégalités séculaires :
Pour une valeur de a, on détermine numériquement leurs caractéristiques principales, c'est-à-dire leur signe et leur dépendance vis-à-vis de chacun des éléments i, e et ω. On pourra ensuite généraliser à d'autres valeurs de a.

Pas 3 - étude des mouvements séculaires :

. *D'abord dans un repère tournant avec le noeud.*

On détermine graphiquement à partir du *pas 2* deux types de solutions :

- soit un mouvement progressif en ω pour lequel toutes les valeurs de 0 à 360° sont atteintes. Ce type de solution existe quelle que soit l'inclinaison.
- soit un mouvement libratoire en ω, autour de $\omega=90°$ ou 270° ; les valeurs $\omega=0°$ et 180° ne sont jamais atteintes. On trouve des cas particuliers d'orbites elliptiques stationnaires stables pour les trois paramètres : i, e, et $\omega=90°$; ce type de solution n'existe que si l'inclinaison est assez grande.

Entre ces deux types de mouvements on trouve une orbite elliptique tendant asymptotiquement vers une orbite circulaire. Pour ces deux types de solutions on démontrera la périodicité du mouvement en fonction du temps.

. *Ensuite dans un repère absolu.*

L'étude des mouvements périodiques du pôle et du point de Lizt donnera les résultats essentiels suivants :

Sur une période, pour toute condition initiale, le pôle a un mouvement rétrograde sans point double . Par contre, suivant les conditions initiales, le point de Lizt peut avoir un mouvement direct avec ou sans point double , un mouvement libratoire et périodique autour d'une direction fixe, ou un mouvement rétrograde avec ou sans point double . Des exemples d'intégration numérique donnent dans chaque cas un ordre de grandeur de l'amplitude des variations périodiques de ces mouvements.

Remarque : Pour pouvoir faire la comparaison avec la théorie du 1er ordre en i et e, il est utile de résumer ici les résultats auxquels elle aboutit dans le cas où Jupiter est le seul corps perturbateur.

- Le pôle de la petite planète décrit un cercle centré au pôle de Jupiter dans le sens rétrograde, à la vitesse angulaire constante a_{oo} ne dépendant que du demi-grand axe.
- Le point de Lizt décrit un cercle centré en un point Q du vecteur de Lizt de Jupiter, dans le sens direct avec la même vitesse a_{oo}. La distance de Q à l'origine est une fraction $\alpha\, e_j$ de l'excentricité e_j de Jupiter.

  α est inférieur à 1 et croît avec le demi-grand axe de la petite planète. Dans le cas d'une orbite de Jupiter circulaire, Q coïncide avec l'origine, le mouvement du point de Lizt est alors circulaire et uniforme.

3.1. *Symétries et périodicité des inégalités séculaires*

a' désignant le rayon de l'orbite de Jupiter, les quantités R, S et W s'écrivent :

$$(26)\qquad \begin{aligned} R &= (a' \cos M' \cos(\omega+v) + a' \sin M' \sin(\omega+v)\cos i - r)/\Delta^3 \\ S &= (-a'\cos M' \sin(\omega+v) + a'\sin M' \cos(\omega+v)\cos i)/\Delta^3 \\ W &= -a'\sin i \sin M' / \Delta^3 \end{aligned}$$

avec $\Delta^2 = a'^2 + r^2 - 2a'r(\cos M' \cos(\omega+v) + \sin M' \sin(\omega+v)\cos i)$

où r désigne le rayon vecteur de la petite planète.

Comme M' n'intervient que dans R, S et W, on peut effectuer l'intégration de ces trois quantités par rapport à M' ; on aura :

$$(27)\qquad R_o(\omega,v) = \int_o^{2\Pi} R(\omega,v,M')dM'$$

et des expressions analogues pour $S_o(\omega,v)$ et $W_o(\omega,v)$.

Les changements simultanés de ω en $\Pi-\omega$, de v en $-v$ et de M' en Π-M' ne modifient ni R ni W mais changent le signe de S. Comme ces quantités sont périodiques de période 2Π par rapport à M', leurs intégrales de 0 à 2Π sont invariantes par translation sur M'. On a donc :

$$(28)\qquad \begin{aligned} R_o(\omega,v) &= R_o(\Pi-\omega,\ -v) \\ S_o(\omega,v) &= -S_o(\Pi-\omega,\ -v) \\ W_o(\omega,v) &= W_o(\Pi-\omega,\ -v) \end{aligned}$$

De la même façon le changement simultané de ω en $\Pi+\omega$ et de M' en Π+M' sans changer v conduit aux relations :

$$(29)\qquad \begin{aligned} R_o(\omega,v) &= R_o(\Pi+\omega,v) \\ S_o(\omega,v) &= S_o(\Pi+\omega,v) \\ W_o(\omega,v) &= -W_o(\Pi+\omega,v) \end{aligned}$$

Les inégalités séculaires sont alors obtenues en intégrant par rapport à M les équations 20 dans lesquelles R_o, S_o et W_o remplacent R, S et W. On aura par exemple :

$$\frac{de}{dt} = K \int_o^{2\Pi} \left[R_o(\omega,v)\sin v + S_o(\omega,v)f(r)\right] dM$$

Compte tenu de (28), $\frac{de}{dt}$ est aussi égal à :

$$-K \int_0^{2\Pi} \left[R_0(\Pi-\omega,-v)\sin(-v) + S_0(\Pi-\omega,-v)f(r)\right] dM$$

on en conclut que $\frac{de}{dt}(\omega) = -\frac{de}{dt}(\Pi-\omega)$

on aboutit de la même manière à : $\frac{de}{dt}(\omega) = \frac{de}{dt}(\Pi+\omega)$

De ces deux résultats, on peut encore tirer :

$$\frac{de}{dt}(\omega) = -\frac{de}{dt}(-\omega) \qquad \text{et} \qquad \frac{de}{dt}\left(\frac{\Pi}{2}+\omega\right) = -\frac{de}{dt}\left(\frac{\Pi}{2}-\omega\right)$$

$\frac{de}{dt}$ est donc une fonction périodique de ω, de période Π et impaire de ω et de $\omega+\frac{\Pi}{2}$; elle possède deux centres de symétrie : l'un en $\omega=0$ et l'autre en $\omega=\frac{\Pi}{2}$, sur l'axe des abscisses.

On aboutit de la même façon au même résultat pour $\frac{di}{dt}$.

$\frac{d\Theta}{dt}$ et $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ sont aussi périodiques en ω, de période Π mais paires de ω et de $\omega+\frac{\Pi}{2}$; Ils possèdent deux axes de symétrie : en $\omega=0$ et en $\omega=\frac{\Pi}{2}$. Ce dernier résultat s'applique aussi évidemment à $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\tilde{\omega}}{dt} - \frac{d\Theta}{dt}$.

A partir des symétries des inégalités séculaires considérées comme fonctions de ω, on pourra tirer plus loin des conclusions sur la périodicité de i, e, Θ et $\tilde{\omega}$ en fonction du temps.

3.2. *Intégrales du mouvement*

Dans un repère tournant où le noeud est fixe, les équations différentielles donnant les dérivées $\frac{di}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ et $\frac{d\omega}{dt}$ dépendent d'un paramètre a et des trois coordonnées i, e et ω. Ces dernières ne sont pas indépendantes car il existe deux invariants séculaires : $\sqrt{1-e^2}\cos i = C_0$, et $V(i,e,\omega) = V_0$ représentant l'intégrale de l'énergie.

En effet, de l'expression : $H = \sqrt{a}\sqrt{1-e^2}\cos i$, on obtient par les formules 20 :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dH}{dt}\,dM\,dM' = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{m'}{1+m}\,na^{\frac{3}{2}}\left[\frac{a'r(\sin M'\cos(\omega+v)-\sin(\omega+v)\cos M'\cos i)}{\left(a'r+r^2-2a'r(\cos M'\cos(\omega+v)+\sin M'\sin(\omega+v)\cos i)\right)^{\frac{3}{2}}}\right]dM\,dM'$$

Cette expression est nulle car la quantité entre crochets est égale à $\frac{d}{dM'}\left(\frac{1}{\Delta}\right)$ et que Δ est périodique de M' de période 2π. La variation séculaire de H est donc nulle. Comme a est déjà un invariant séculaire il en est de même de $\sqrt{1-e^2}\cos i$.

H est une des variables de Delaunay ; son invariance apparait plus naturellement dans les équations canoniques écrites pour ces variables après y avoir éliminé le noeud (Cf [12] et [13]). On voit de plus que dans ces équations, après l'élimination des termes à courtes périodes, au 1er ordre par rapport aux masses, l'Hamiltonien du système est indépendant du temps : c'est une intégrale première du système différentiel du mouvement séculaire exprimée par la relation

$$(30) \qquad V(i,e,\omega) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dM\,dM'}{\Delta} = \text{Cte}$$

L'invariance de H et de V réduit ainsi à 1 le degré de liberté du système différentiel. Géométriquement, ceci veut dire que, le demi-grand axe étant fixé, dans l'espace de configuration (i,e,ω) la trajectoire décrite par le point (i,e,ω) représentant l'orbite, à partir des conditions initiales (i_o,e_o,ω_o), est l'intersection du cylindre

$$(31) \qquad C(i,e) \equiv \sqrt{1-e^2}\cos i = \sqrt{1-e_o^2}\cos i_o = C_o$$

et de la surface $V(i,e,\omega) = V(i_o,e_o,\omega_o) = V_o$.

La détermination analytique des trajectoires à partir de ces deux invariants a été faite par Y. Kosai ([13]) dans le cas où, le rapport α des demi-grands axes étant très petit, on peut négliger α^2. Elles s'expriment alors à partir des fonctions elliptiques.

Dans le cas des petites planètes du système solaire α est trop grand pour que cette approximation soit suffisante et l'intégrale $V(i,e,\omega)=V_o$ n'est pas exploitable analytiquement.

On pourrait bien déterminer numériquement les trajectoires en tabulant la fonction $V(i,e,\omega)=V_0$ mais ce procédé est lourd à mettre en oeuvre et manque de généralité d'autant plus qu'il est possible d'étudier graphiquement la nature des trajectoires et le mouvement sur ces trajectoires à partir de la forme des équations différentielles, déterminée par la méthode de Gauss en variant les conditions initiales.

3.3. *Etude numérique des inégalités séculaires*

L'application de la méthode de Gauss à des orbites de petites planètes, avec des conditions initiales régulièrement distribuées, permet de tracer les courbes de variations de $\frac{di}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\Theta}{dt}$ et $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ en fonction des éléments a, i, e et ω.

Voyons d'abord le cas le plus simple où l'orbite de la petite planète est circulaire mais inclinée d'un angle quelconque.

3.3.1. $e=0$; a et i quelconques

Les deux orbites étant circulaires et inclinées d'un angle i quelconque, on voit par symétrie que les intégrales doubles donnant $\frac{di}{dt}$ et $\frac{de}{dt}$ sont identiquement nulles. La solution est donc $i(t)=i_0$ et $e(t)=e_0=0$: les orbites circulaires sont des solutions d'équilibre. On verra plus loin que la stabilité de telles orbites n'est assurée que pour des inclinaisons $i \leq i^*$, i^* dépendant de a.

Le périhélie est dans ce cas indéterminé et Θ reste la seule quantité variable. Sa dérivée, $\frac{d\Theta}{dt}$ est toujours négative (Cf. fig. 30). Pour toute valeur fixée de a, c'est une fonction croissante de i. Elle est évidemment nulle pour $i=90°$: on ne voit pas pourquoi l'orbite tournerait alors dans un sens plutôt que dans l'autre. Notons que jusque $i=5°$, toutes les courbes sont confondues avec leur tangente horizontale à l'origine à moins de 1% près. Dans cet intervalle, la théorie du 1er ordre est donc valable avec cette précision. Au-delà, la variation de $\frac{d\Theta}{dt}$ avec i est d'autant plus grande que a est plus grand : pour $a=3,5$ U.A, $\frac{d\Theta}{dt}$ est égal à $\frac{1}{2}\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_{max}$ lorsque $i=25°$; avec $a=2,4$ U.A, ceci n'arrive que pour $i=42°$. D'autre part, $\frac{d\Theta}{dt}$ augmente en valeur absolue avec a. Ceci montre que la théorie du 1er ordre en i est d'autant moins valable que a est plus grand.

Le mouvement du pôle est circulaire et uniforme mais plus lent que dans la théorie du 1er ordre : par exemple, pour $a=3,1$ U.A. et $i=15°$, $\frac{d\Theta}{dt}$ vaut -70" par an soit une différence de 15 % avec le cas où i est petit.

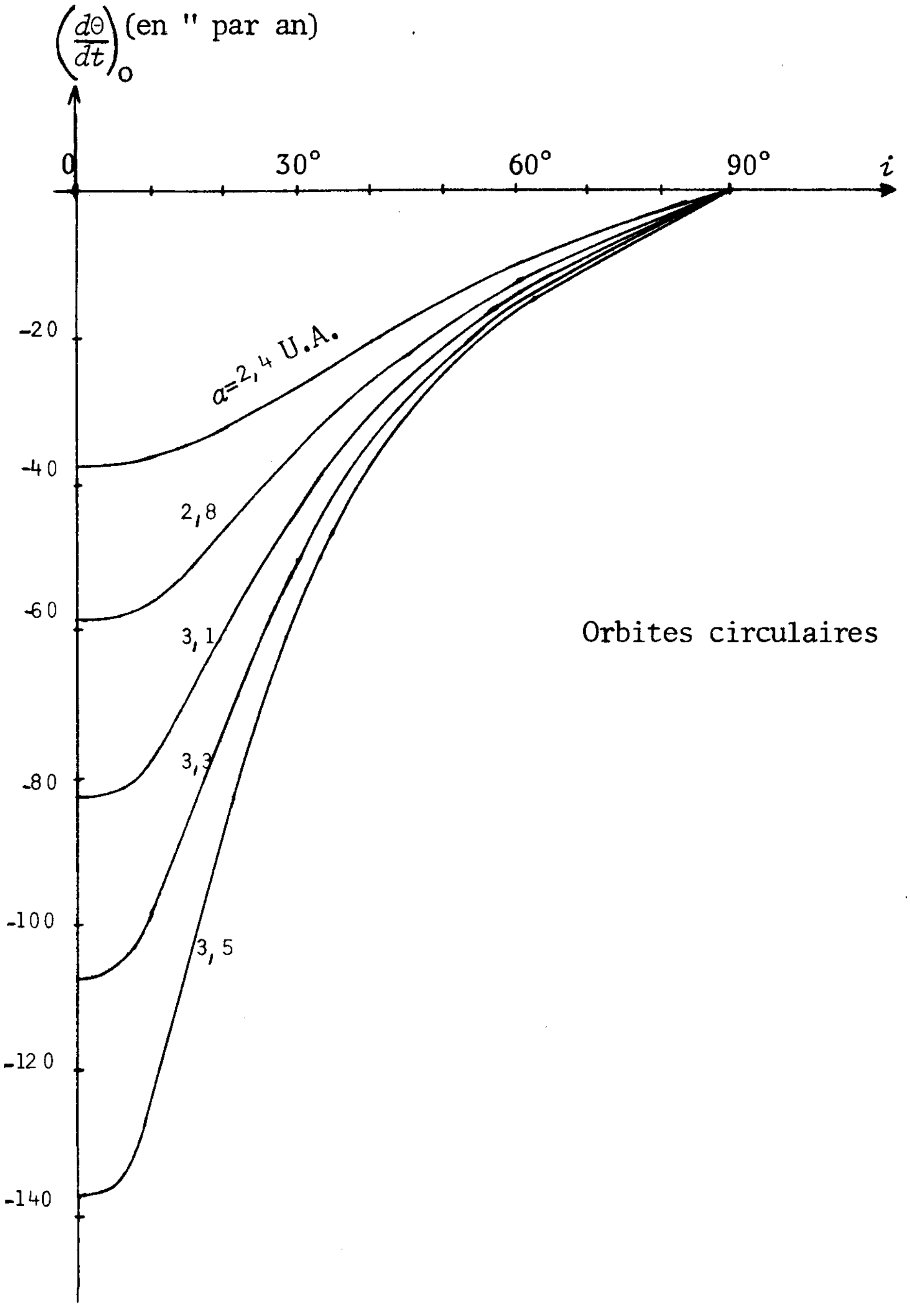

$\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_0$ (en " par an)
0
30°
60°
90°
i
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
a=2,4 U.A.
2,8
3,1
3,3
3,5
Orbites circulaires

Figure 30

Remarque : Les courbes de la figure 30 peuvent être représentées de façon approchée pour tout i de 0° à 90° par la formule empirique :

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_{max}}{1+\alpha \sin i \ \mathrm{tg}\, i} \qquad (32)$$

où α est une fonction croissante du rapport des demi-grands axes.

Quels que soient a et i, cette formule donne des écarts inférieurs à 1% du $\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_{max}$ mais ne saurait être rigoureuse : $\frac{d\Theta}{dt}$, fonction de i, a une dérivée seconde nulle pour i=90° ce qui n'est pas le cas de l'expression (32).

Voyons maintenant le cas général où l'excentricité de la petite planète est quelconque. Cependant, pour limiter le volume de calculs, on ne considèrera qu'une valeur du demi-grand axe : a=3,1 U.A, représentative d'une des zones les plus peuplées de l'anneau des petites planètes. On déterminera pour cet a des valeurs critiques de i et de e correspondant à des changements dans le type du mouvement. On généralisera ensuite en recherchant ces valeurs critiques pour d'autres demi-grands axes.

3.3.2. a=3,1 U.A ; i, e et ω quelconques

On supposera dans toute la suite que e n'est pas nul pour éviter l'indétermination de ω.

3.3.2.1. Etude de $\frac{di}{dt}$ *et de* $\frac{de}{dt}$

Contrairement aux résultats de la théorie du 1er ordre en i et e, $\frac{di}{dt}$ et $\frac{de}{dt}$ ne sont en général pas nuls. On le voit sur la figure 31 où on a tracé leurs courbes de variation en fonction de ω pour quelques valeurs fixées de i et de e. On remarque la périodicité de 180° et les symétries par rapport aux points (0,0) et (90°,0) signalées en 3.1. L'allure des courbes est sensiblement sinusoïdale pour les petites valeurs de i ou de e mais il n'y a pas d'axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées : l'extremum situé entre ω=0 et ω=90° se trouve avant ω=45°.

D'autre part, les variations de i et de e sont toujours de signes opposés. Ceci est évidemment la conséquence de l'invariance de la quantité $\sqrt{1-e^2}\cos i$.

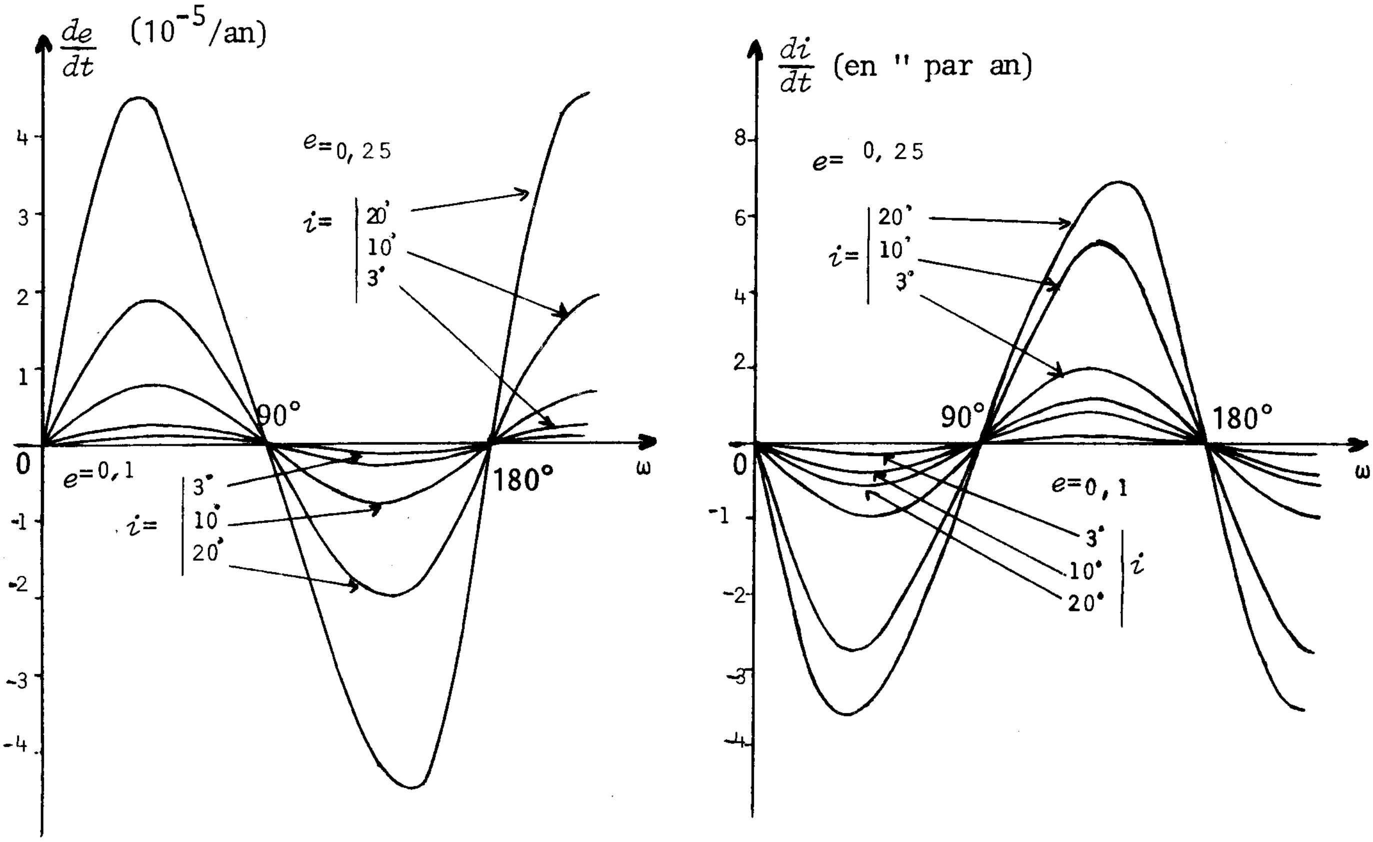


Figure 31 (a= 3,1 U.A)

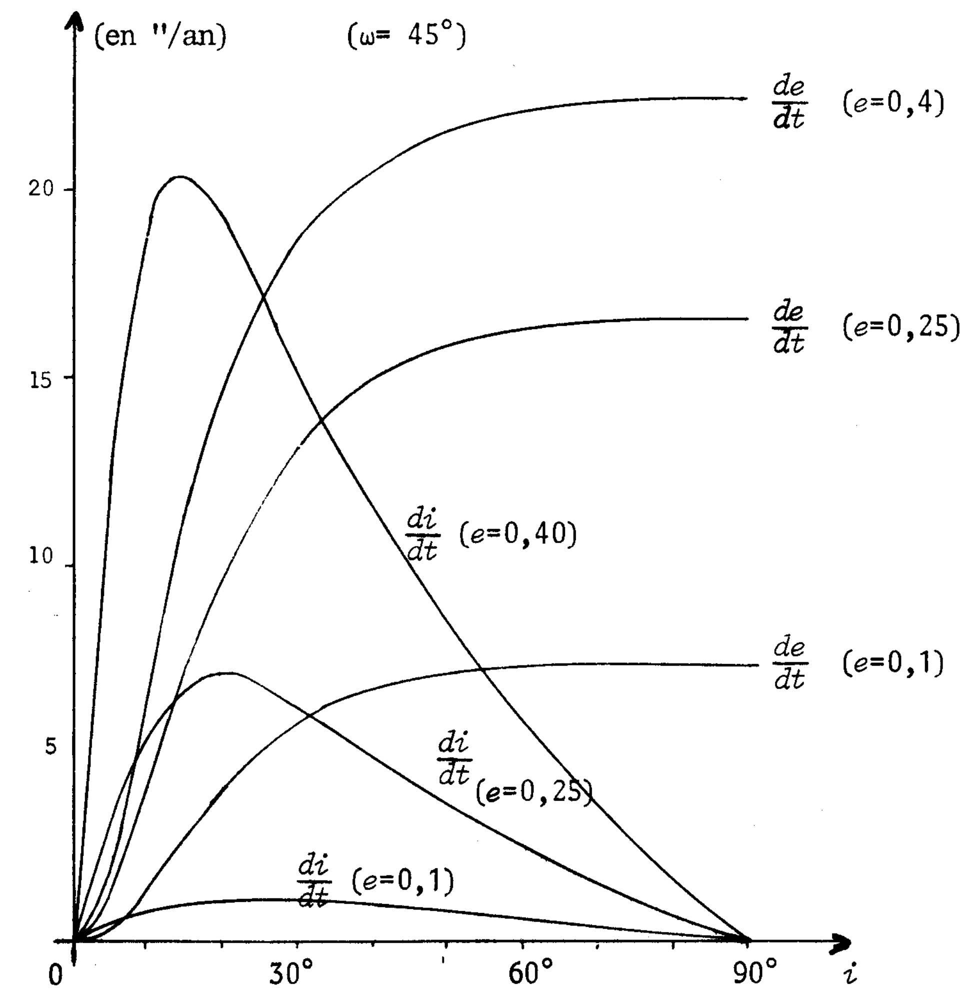


Figure 32 (a= 3,1 U.A)

On peut d'ailleurs la vérifier numériquement pour des valeurs diverses de i et de e. On doit en effet avoir dans ce cas :

$$\frac{\frac{de}{dt}}{\frac{di}{dt}} = - \operatorname{tg} i \cdot \frac{1-e^2}{e} \tag{33}$$

Le tableau IV permet de comparer la valeur de cette expression avec le rapport des inégalités séculaires calculées par la méthode de Gauss pour ω=30° et ω=60°. On vérifie ainsi que la précision du calcul est bien de l'ordre de 10^{-3} (Cf. 2.2). C'est également un test favorable de la validité de la méthode de Gauss pour tout i et tout e.

Enfin, examinons les courbes de variations de $\frac{di}{dt}$ ou $\frac{de}{dt}$ en fonction de i (fig. 32). ω a été fixé à 45°. On constate que $\frac{de}{dt}$ est une fonction croissante de i et de e. $\frac{di}{dt}$ est aussi fonction croissante de e qui prise en fonction de i montre un maximum pour i voisin de 15° et s'annule évidemment pour i=0 et i=90°. On remarque que la maximum de $\frac{di}{dt}$ est d'autant plus élevé et plus près de l'axe des ordonnées que l'excentricité est plus grande. D'ailleurs, pour $e \geq 0{,}67$, l'orbite perturbée (a=3,1 U.A) peut couper l'orbite perturbante ou même lui être tangente dans le cas i=0. Les perturbations augmentent alors indéfiniment. Au voisinage d'un tel cas, le 1er ordre par rapport aux masses, admis à l'origine de cette étude est certainement une approximation insuffisante. Aussi, dans toute la suite, on adoptera une valeur maximum de l'excentricité, égale dans le cas présent à 0,67.

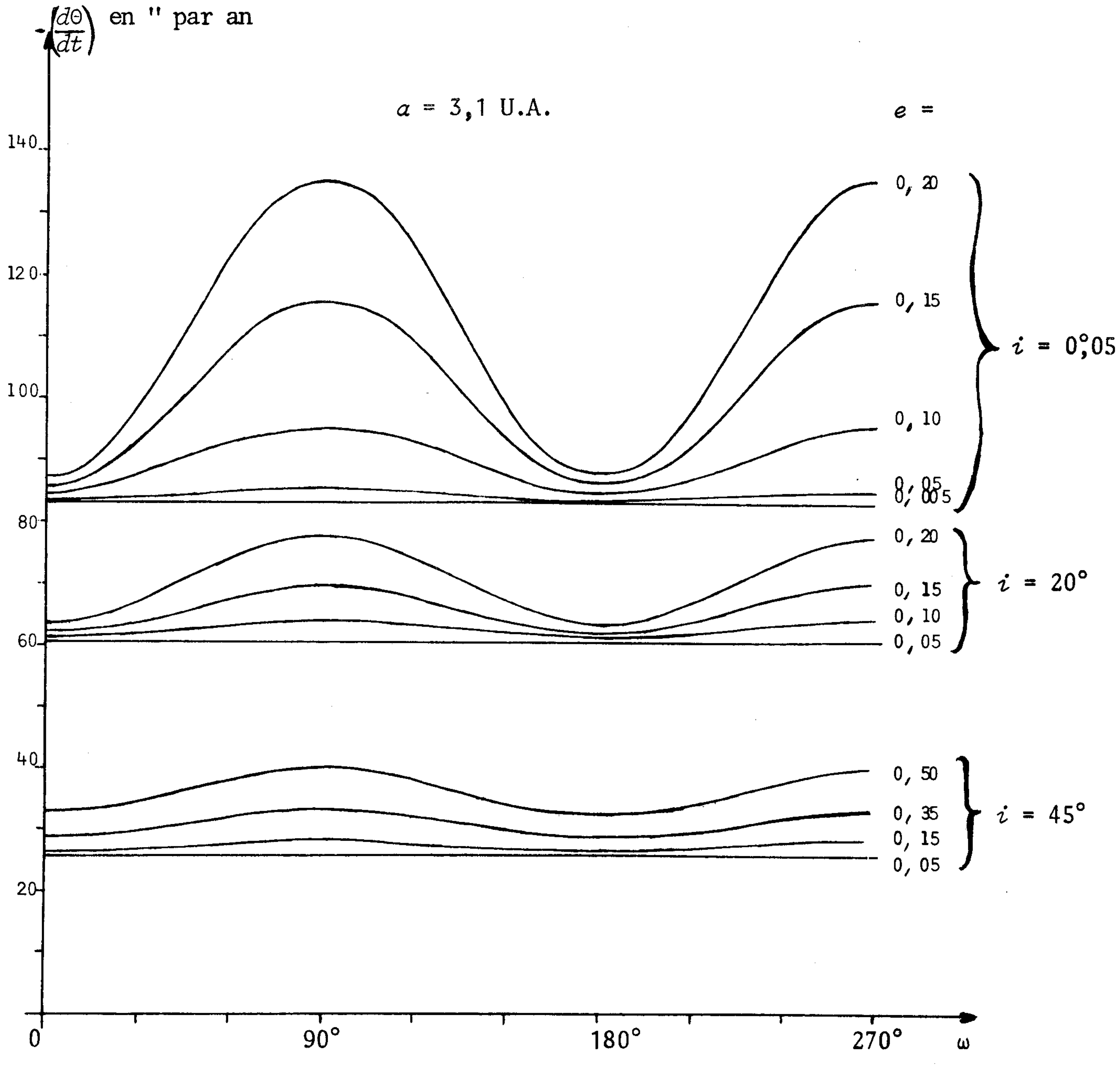
3.3.2.2. Etude de $\frac{d\Theta}{dt}$ et de $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$

Les figures 33 à 35 donnent les courbes de variations de $\frac{d\Theta}{dt}$ et de $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ en fonction de ω pour quelques valeurs fixées de i et de e. On voit que ces dérivées ne sont pas indépendantes de ω sauf si i et e sont très petits, auquel cas on retrouve le résultat de la théorie du 1er ordre en i et e, à savoir $\frac{d\Theta}{dt}$ et $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ égaux en valeur absolue à 82",5 par an pour tout ω.

Quels que soient i, e et ω, $\frac{d\Theta}{dt}$ est toujours négatif : le noeud ne peut que rétrograder. Il n'est nul que si i=90°. Sa variation avec i est d'ailleurs analogue à celle obtenue pour e=0 (Cf. fig. 30) : $\frac{d\Theta}{dt}$ est une fonction croissante de i.

e	i	3°	10°	20°	30°	45°	60°	80°
0,1	ω=30°	-0,520	-1,745	-3,63	-5,76	-9,95	-17,25	-55,4
	ω=60°	-0,518	-1,742	-3,60	-5,71	-9,92	-17,30	-58
	formule 33	-0,515	-1,745	-3,60	-5,72	-9,90	-17,15	-55,2
0,25	ω=30°	-0,231	-0,672	-1,37	-2,17	-3,78	- 6,60	-21,8
	ω=60°	-0,196	-0,658	-1,36	-2,16	-3,76	- 6,54	-21,6
	formule 33	-0,195	-0,660	-1,365	-2,165	-3,755	- 6,50	-21,3
0,40	ω=30°	-0,105	-0,372	-0,765	-1,215	-2,100	- 3,65	-12,05
	ω=60°	-0,108	-0,366	-0,765	-1,210	-2,130	- 3,66	-12,03
	formule 33	-0,109	-0,369	-0,765	-1,210	-2,100	- 3,64	-11,90
0,60	ω=30°	-0,0497	-0,184	-0,385	-0,622	-1,08	- 1,88	- 6,24
	ω=60°	-0,0495	-0,197	-0,388	-0,616	-1,067	- 1,85	- 6,07
	formule 33	-0,0555	-0,188	-0,388	-0,616	-1,067	- 1,85	- 6,05

TABLEAU IV



$-\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)$ en " par an
a = 3,1 U.A.
e =
140
120
100
80
60
40
20
0
90°
180°
270°
ω
0, 20
0, 15
0, 10
0, 05
0, 005
i = 0°,05
0, 20
0, 15
0, 10
0, 05
i = 20°
0, 50
0, 35
0, 15
0, 05
i = 45°

Figure 33

Pour ω et i fixés, $\frac{d\Theta}{dt}$ est fonction décroissante de e. L'écart avec le cas $e=0$ est plus important en $\omega=90°$ qu'en $\omega=0°$ et il est d'autant plus grand que i est plus petit et e plus grand : on voit ainsi que l'écart relatif entre les valeurs de $\frac{d\Theta}{dt}$ en $\omega=0°$ et $\omega=90°$ atteint 50% pour $i=0°,05$ et $e=0,2$. Pour la même excentricité, cet écart n'est plus que de 25% si $i=20°$ et de 10% si $i=45°$. L'écart à la théorie du 1er ordre en i et e est donc appréciable même pour des valeurs relativement petites de i et de e.

Quant à la longitude du périhélie, sa dérivée $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ n'est pas toujours positive. Son mouvement peut être direct, rétrograde ou même libratoire autour d'une direction fixe dans le cas où $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ est moyennement nul. On remarque que $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ dépend peu de e mais beaucoup de i et de ω : par continuité sur i, on voit qu'il existe une valeur $i_1(e)$, voisine de 19°, décroissant lentement avec e, telle que $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ s'annule en $\omega=90°$.

L'inclinaison $i_1(0)$ décroît légèrement avec le demi-grand axe : on en a déterminé la valeur pour différentes valeurs de a en calculant par dichotomie la racine de l'équation $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}=0$ avec $e\simeq0$ et $\omega=90°$. Les résultats sont présentés dans le tableau V.

a (U.A.)	$i_2(0)$	$i_1(0)$
2,0	35°,1	24°,6
2,5	32°,9	22°,6
3,0	30°,1	20°,0
3,5	26°,6	16°,8
4,0	22°,7	13°,3

TABLEAU V

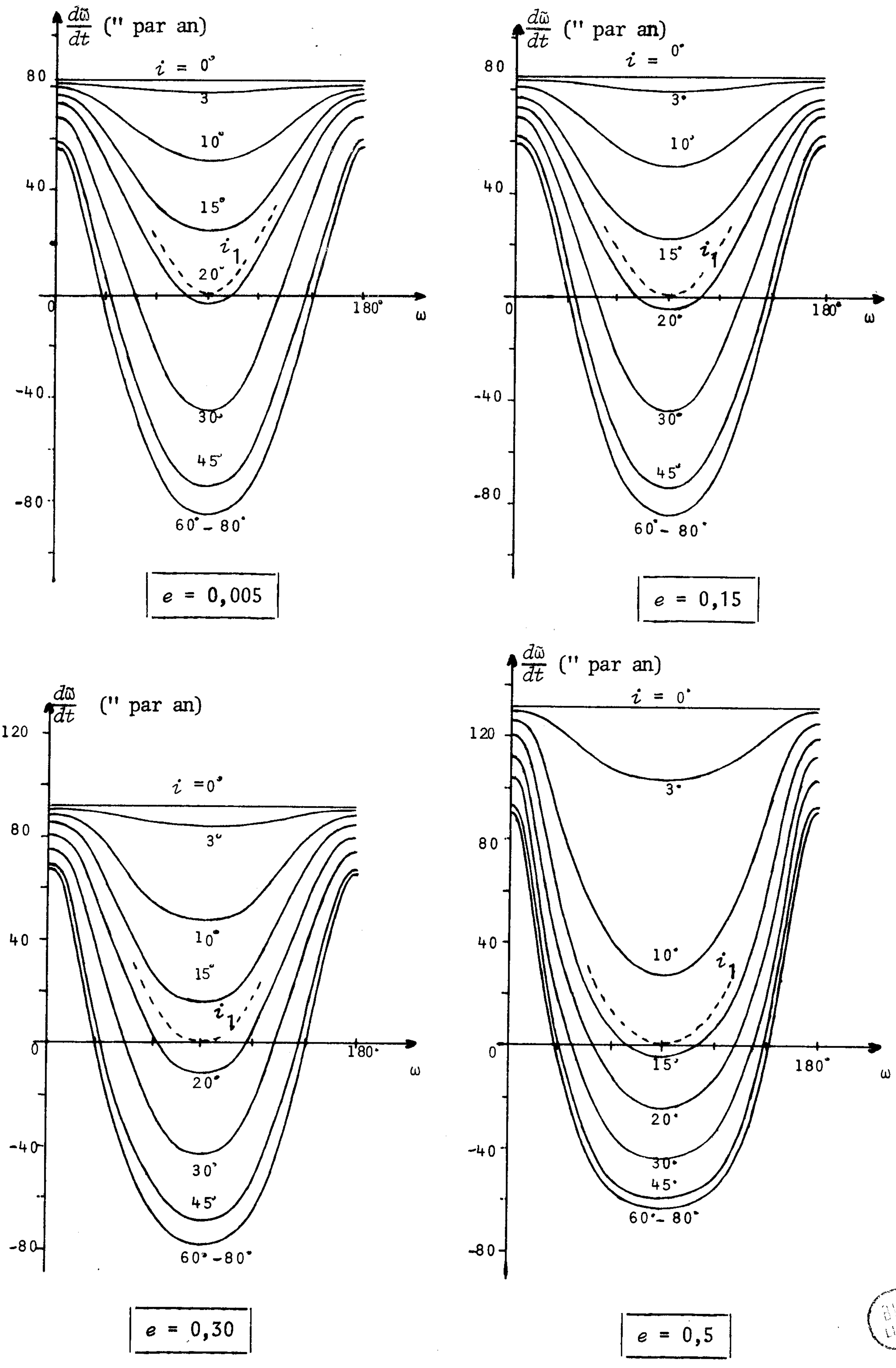


Figure 34 (a = 3,1 U.A.)

Notons que les courbes des figures 33 à 37 sont tracées pour des valeurs fixées de i et de e. Elles ne représentent pas le mouvement d'une petite planète donnée pour laquelle i et e varient. Avant de pouvoir déterminer complètement ce mouvement, il est utile de voir quelles sont les variations de ω. On les déduit évidemment de celles de Θ et de $\tilde{\omega}$:

On a ainsi tracé (fig. 35 à 37) les courbes de variations de $\frac{d\omega}{dt}$ en fonction de ω lui-même pour quelques valeurs fixées de i et de e. Leur allure suggère plusieurs remarques :

- Pour tout e, par continuité sur i, on voit qu'il existe une inclinaison $i'(e)$ pour laquelle la composante fondamentale du développement de Fourier en ω de $\frac{d\omega}{dt}$ a une amplitude nulle. $\frac{d\omega}{dt}$ est alors sensiblement indépendant de ω et voisin de 165"/an quel que soit e. Pour une orbite dont les conditions initiales sont e et $i'(e)$, $\frac{d\omega}{dt}$ n'est cependant pas constant au cours du temps, car i est lui-même variable. La fonction $i'(e)$ est croissante, nulle pour $e=0$: au 1er ordre en i et e, ω est une fonction linéaire du temps.
- Pour tout e, par continuité sur i, on voit qu'il existe une inclinaison $i_2(e)$ telle que $\frac{d\omega}{dt}$ s'annule pour $\omega=90°$. Comme pour cet ω, $\frac{di}{dt}$ et $\frac{de}{dt}$ sont également nuls, une orbite dont les conditions initiales seraient e, $i_2(e)$ et $\omega=90°$ est stationnaire pour ces trois variables. Cet état est permanent car les équations différentielles du mouvement ne dépendent que de e, i et ω et non du temps. On verra de plus qu'il est stable. Pour une telle orbite, seuls le noeud et le périhélie se déplacent, avec un même mouvement rétrograde et uniforme. La fonction $i=i_2(e)$ est lentement croissante. Sa valeur à l'origine $i_2(0)$ vaut 29°,6 pour a=3,1 U.A. $i_2(0)$ a été déterminé, comme $i_1(0)$, pour différentes valeurs de a (Tableau 5). Les résultats sont en parfait accord avec ceux que Y. Kosai a obtenu par ailleurs ([13]) à partir du développement de l'intégrale de l'énergie suivant les puissances de α. On voit que lorsque a passe de 2 U.A à 4. U.A, $i_2(0)$ ne varie que de 35°,1 à 22°,7. A noter que la valeur de $i_2(0)$ trouvée par Gr. A. Antonacopoulos, voisine de 19° pour a=3,1, est loin de la valeur exacte ce qui montre que son développement poussé jusqu'à l'ordre 4 en i et e est encore nettement insuffisant pour une représentation correcte du mouvement.

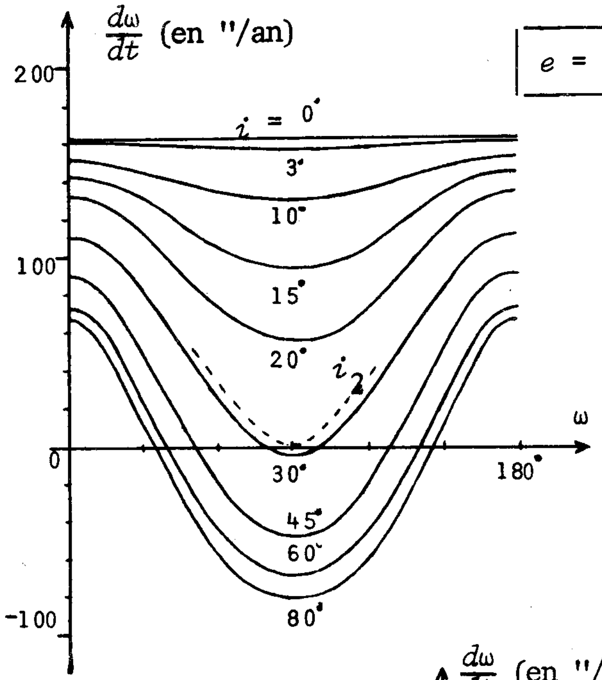


Figure 35

(a = 3,1 U.A.)

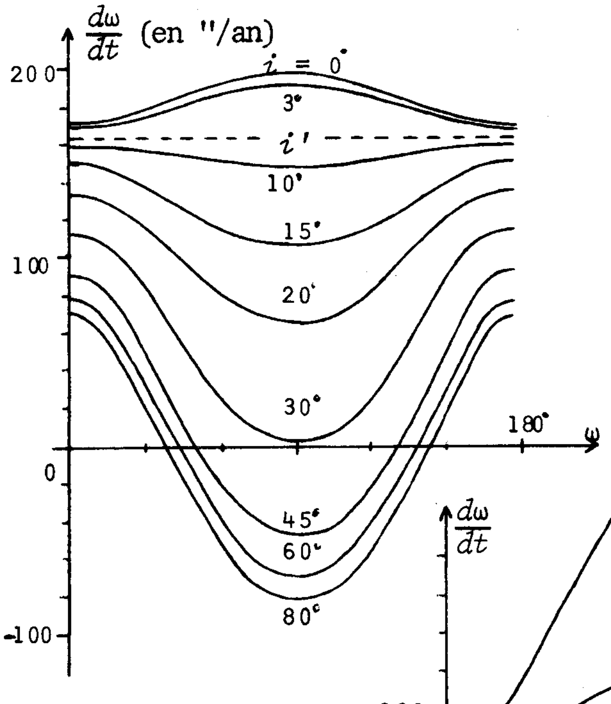


Figure 36

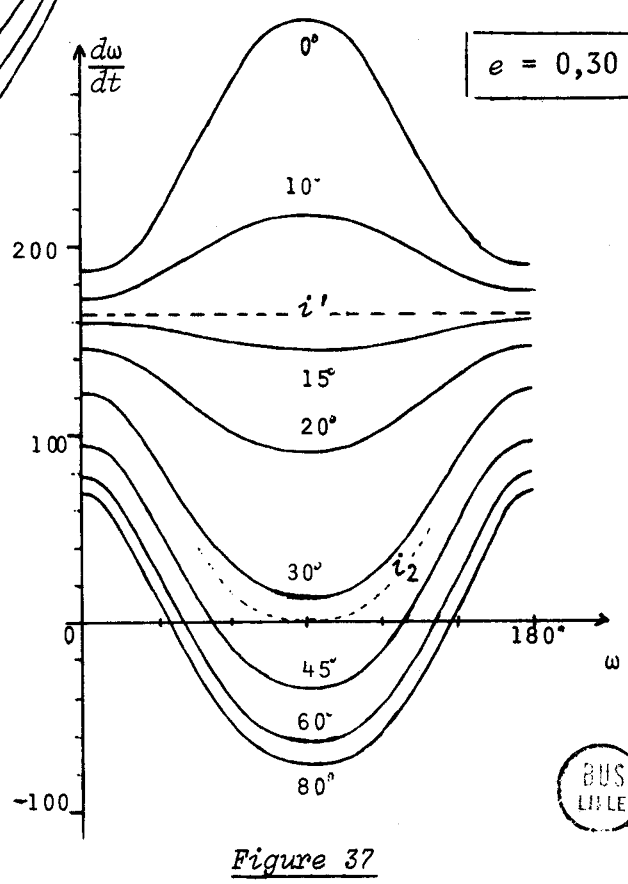


Figure 37

. Pour toute inclinaison inférieure à $i_2(e)$, $\frac{d\omega}{dt}$ est positif quel que soit ω. Pour les inclinaisons supérieures à $i_2(e)$, le signe de $\frac{d\omega}{dt}$ est toujours négatif en $\omega=90°$ et positif en $\omega=0$. Ceci ne présage en rien de l'existence d'orbites pour lesquelles les valeurs $\omega=0$ et $\omega=90°$ sont toutes deux atteintes au cours du temps. Pour en décider, il faut étudier en même temps les variations de i, de e et de ω, en fonction des conditions initiales. La combinaison des résultats précédents va maintenant permettre une description précise des différents types de mouvements séculaires possibles.

3.4. *Etude des mouvements séculaires*

L'étude numérique précédente a mis en évidence sur un cas particulier (a=3,1 U.A) des caractéristiques (notamment les fonctions $i_1(e)$ et $i_2(e)$) qu'on retrouve pour tout a, et dont l'ordre de grandeur reste le même lorsqu'on passe de 2 U.A. à 4 U.A.

Dans ces conditions, l'étude des mouvements séculaires peut être faite de façon plus générale en raisonnant pour a fixé mais quelconque, les figures et les exemples numériques étant pris pour a=3,1 U.A. et pour des astéroïdes du système solaire.

Partant du point de départ $P_o=(i_o,e_o,\omega_o)$, on sait que le point $P=(i,e,\omega)$, représentatif de l'orbite de la petite planète de demi-grand axe a dans un repère tournant avec le noeud, parcourt une trajectoire qui est l'intersection du cylindre :

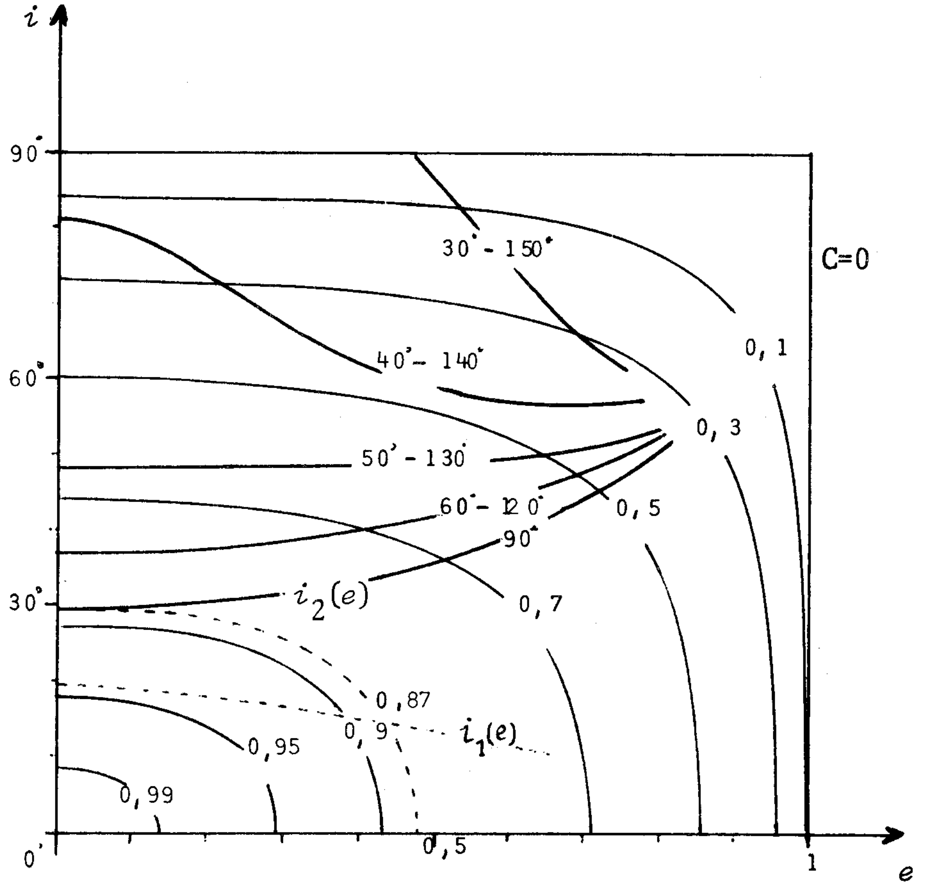
$$C(i,e) \equiv \sqrt{1-e^2}\cos i = \sqrt{1-e_o^2}\,\cos i_o = C_o$$

et de la surface $V(i,e,\omega)=V_o$.

On ne sait pas déterminer simplement cette deuxième surface mais son intersection avec le cylindre est la solution du système différentiel

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = f(\omega,e,i) \\[2mm] \dfrac{de}{dt} = g(\omega,e,i) \\[2mm] \dfrac{di}{dt} = h(\omega,e,i) \qquad \left(= -\dfrac{e}{\mathrm{tg}\,i\,(1-e^2)}\,g(\omega,e,i)\right) \end{cases}$$

dont on connait quelques représentations graphiques par les paragraphes précédents. En se plaçant sur le cylindre, l'étude de $\frac{d\omega}{di}$ ou de $\frac{d\omega}{de}$ permet de déterminer la nature des trajectoires :



$C = \sqrt{1-e^2}\cos i$

Figure 38

La figure 38 présente un projection sur le plan (e,i) les cylindres relatifs à quelques valeurs de C_o.

D'autre part, la condition $\frac{d\omega}{dt}=0$ fournit une relation entre i, e et ω à laquelle correspond une surface S_ω qui admet les plans $\omega = k\,\frac{\Pi}{2}$ comme plans de symétrie. En limitant ω à l'intervalle $[0,180°]$, on a représenté en projection sur le plan (e,i) les intersections de cette surface par des plans $\omega=$ Cte (Cf. fig. 38). En un point (e,i) situé sur l'une de ces courbes, $\frac{d\omega}{dt}$ est nul pour les valeurs de ω qui y sont marquées et négatif pour ω compris entre ces valeurs. On voit apparaître comme intersection de S_ω par le plan $\omega=90°$ la courbe $i=i_2(e)$. Cette courbe est la limite inférieure des inclinaisons en deçà de laquelle $\frac{d\omega}{dt}$ est positif quel que soit ω.

Comme le mouvement de P se fait sur le cylindre passant par P_o, il peut être utile de représenter son intersection éventuelle avec S_ω : développons pour cela le cylindre $C(i,e)=C_o$ dans un plan (u,ω), l'axe $u=0$ correspondant à la génératrice $e=0$. Lorsqu'elle existe, (i.e, $C_o < \cos(i_2(0))$ (Cf. fig. 38) l'intersection du cylindre et de S_ω est une courbe C_ω, symétrique par rapport à la droite $\omega=90°$, qui coupe l'axe $u=0$ en deux points M_1 et M_2 d'ordonnées ω_m et $180°-\omega_m$. Elle coupe également la droite $\omega=90°$ en un point M_3 d'abscisse u_M. C_ω délimite un domaine D_ω à l'intérieur duquel $\frac{d\omega}{dt}$ est strictement négatif. Dans le reste du plan $\frac{d\omega}{dt}$ est strictement positif. Notons que la pente de C_ω est nulle en M_1 et M_2 et infinie en M_3 (Cf. fig. 39). De plus, D_ω n'est convexe que si C_o est supérieur à une valeur C_1 (voisine de 0,6 dans le cas $a=3,1$).

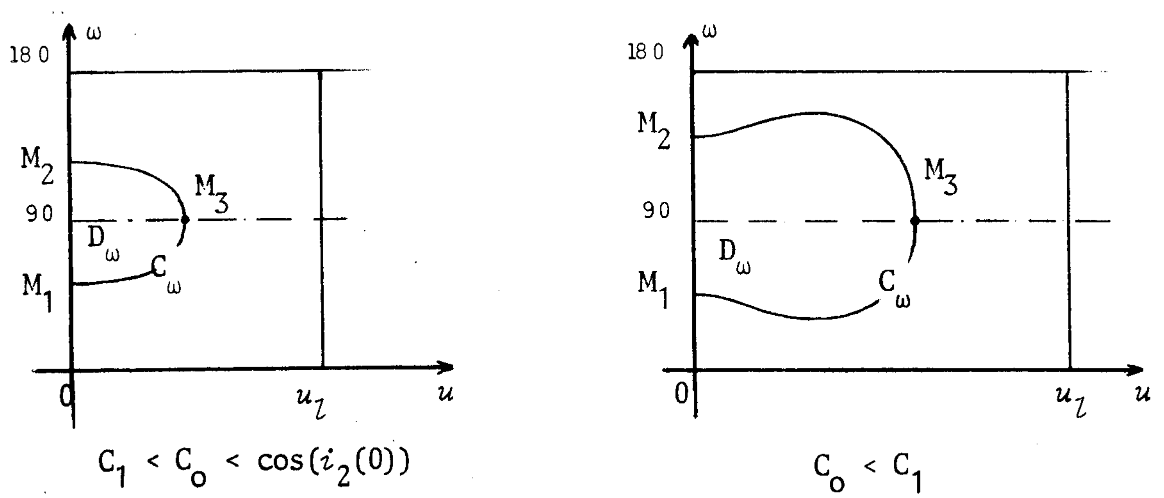


Figure 39

Notons qu'à tout point du plan (u,ω) correspond une orbite unique, sauf pour les points de l'axe $u=0$ qui représentent la même orbite circulaire d'inclinaison $i=$ Arc cos(C_o), et à condition que u soit inférieur à u_l, représentant la longueur de la courbe $C(i,e)=C_o$ avec i et e positifs ; à partir de la distance élémentaire de deux points du plan :

$$ds^2 = d\omega^2 + du^2 \qquad \text{avec} \qquad du^2 = di^2 + de^2$$

soit encore
$$du^2 = de^2 \left(1 + \frac{C_o^2\, e^2}{(1-e^2)(1-e^2-C_o^2)}\right) \qquad \text{(par (31) et (33))}$$

u_l est alors donné par l'expression :

$$u_l = \int_{e=0}^{e=\min(0{,}67,\sqrt{1-C_o^2})} du$$

(on a limité e à 0,67 pour rester dans le cadre du 1er ordre par rapport aux masses (Cf. 3.3.2.1))

En tout point P, $\frac{d\omega}{dt}$ et $\frac{du}{dt}$ déterminent de façon unique le vecteur vitesse de P par sa direction $(\frac{d\omega}{du})$ et son module $(\frac{ds^2}{dt} = \frac{d\omega^2}{dt} + \frac{du^2}{dt})$. L'étude numérique de $\frac{d\omega}{dt}$ et de $\frac{de}{dt}$ faite précédemment permet ainsi de connaître la forme de la trajectoire de P dans le plan.

Suivant que $\frac{d\omega}{dt}$ garde un signe constant ou non, deux cas sont à considérer :

3.4.1. $\underline{C_o \geq \cos(i_2(0))}$ ($\simeq$ 0,87 pour a=3,1 U.A)

Le cylindre ne coupe pas la surface S_ω (Cf. fig. 38). Ce cas regroupe la presque totalité des orbites de petites planètes.

1. *Périodicité de la solution*

$\frac{d\omega}{dt}$ reste toujours strictement positif. Quel que soit l'angle ω_o initial, il existe toujours un instant pour lequel ω passe par toute valeur comprise entre 0° et 180°. Prenons alors l'origine du temps quand $\omega=0$ et soient $\omega(t)$, $e(t)$, $i(t)$ les fonctions représentant les mouvements séculaires de l'orbite. Elles forment la solution du système différentiel :

$$(35) \qquad \begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= f(\omega,e,i) \\ \frac{de}{dt} &= g(\omega,e,i) \\ \frac{di}{dt} &= h(\omega,e,i) \qquad \left(= -\frac{e}{\mathrm{tg}\,i\,(1-e^2)}\, g(\omega,e,i)\right) \end{aligned}$$

où f, g et h sont les intégrales doubles du type (24).

La parité de f et g par rapport à ω (Cf. 3.1) entraîne que les fonctions $\omega_1(t) = -\omega(-t)$, $e_1(t) = e(-t)$ et $i_1(t) = i(-t)$ constituent aussi une solution. On a en effet :

$$f(\omega_1, e_1, i_1) = f(-\omega_1, e_1, i_1) = f(\omega, e, i) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt}$$

$$g(\omega_1, e_1, i_1) = -g(-\omega_1, e_1, i_1) = -g(\omega, e, i) = -\frac{de}{dt} = \frac{de_1}{dt}$$

Comme la solution est unique, on a nécessairement $\omega(t) = \omega_1(t)$, $e(t) = e_1(t)$ et $i(t) = i_1(t)$. ω est donc une fonction impaire du temps tandis que e et i en sont des fonctions paires.

En désignant par $\frac{T}{2}$ le temps mis par ω pour passer de 0° à 90°, la parité de f et g par rapport à ω+90° (Cf. 3.1) entraîne de la même façon que $\omega(t+\frac{T}{2})$ est impaire du temps et que $i(t+\frac{T}{2})$ et $e(t+\frac{T}{2})$ sont paires. i et e possédant ainsi deux axes de symétrie distants de $\frac{T}{2}$ sont périodiques de période T.

De même, ω possédant deux centres de symétrie distants de $\frac{T}{2}$ est périodique, modulo 180° avec la période T.

Comme le signe de $\frac{de}{dt}$ est positif pour ω compris entre 0 et 90° et négatif entre 90° et 180°, on voit que e est maximum pour ω=90° et minimum pour 0° et 180°. On a évidemment l'inverse pour i.

La figure 40 présente quelques unes des trajectoires du plan (u,ω) correspondant à C_o=0,95 et C_o=0,87 (= $\cos(i_2(0))$) pour a=3,1 U.A

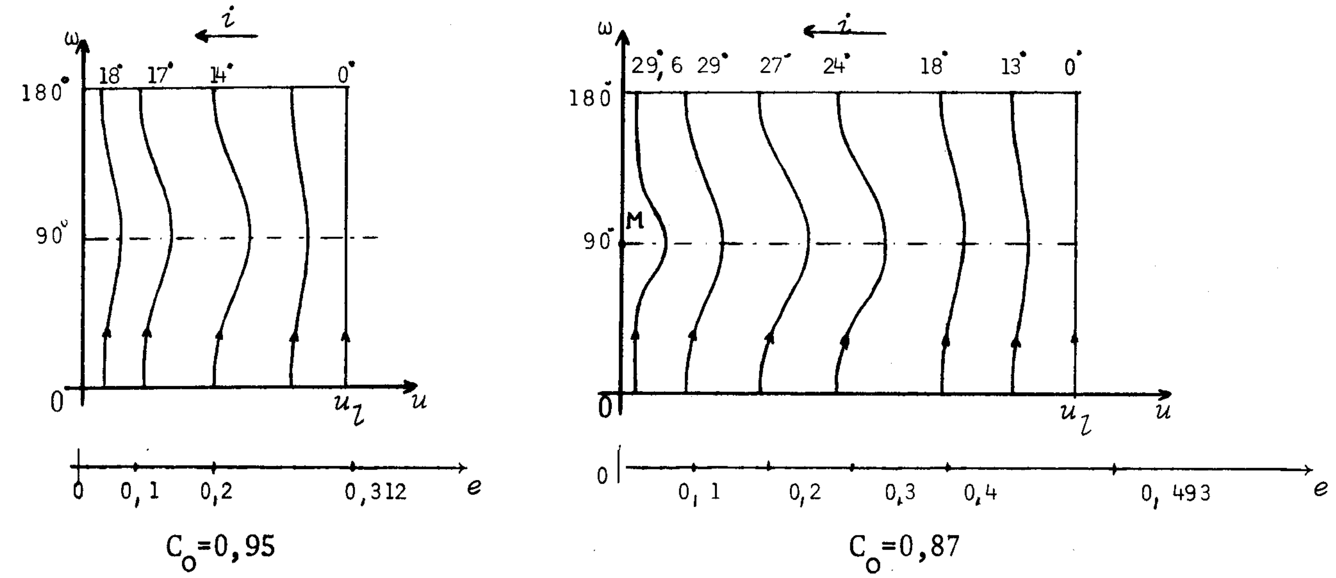


Figure 40

On voit sur ces figures que pour C_0 fixé l'inclinaison varie peu si l'excentricité est faible ; elle varie au contraire beaucoup si l'excentricité est voisine de $\sqrt{1-C_0^2}$. La période du mouvement en ω est de l'ordre de quelques milliers d'années mais peut être plus importante pour les orbites pour lesquelles C_0 est voisin de $\cos(i_2(0))$ et e très petit ; dans ce cas la trajectoire passe en effet près du point stationnaire M (Cf. fig. 40) où $\frac{d\omega}{dt}$ s'annule.

Remarques :

- Si e_0 est différent de zéro, e ne peut pas s'annuler car les orbites circulaires sont stationnaires.
- Comme e est maximum pour $\omega=90°$, en choisissant des conditions initiales $\omega_0=90°$ et $e=\varepsilon>0$, les variations de e sont alors inférieures à ε.
  Les orbites circulaires correspondant à $C_0 \geq 0,87$, c'est-à-dire telles que $i \leq i_2(0)$, sont donc stables.

2. *Mouvements séculaires du Pôle et du point de Lizt*

Les trajectoires précédentes sont celles du pôle et du point de Lizt dans un repère tournant avec le noeud. Ce mouvement d'entraînement est rétrograde et ne s'annule jamais. Pour tout a supérieur à 2 U.A, on peut même préciser que, C_0 étant supérieur à $\cos(i_2(0))$, $\frac{d\Theta}{dt}$ est toujours inférieur à -18'' par an, ce qui correspond à une révolution en moins de 72 000 ans.

Comme $\frac{d\Theta}{dt}$ et $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ ne dépendent que de i, e et ω (pour a fixé) et sont périodiques en ω avec la période 180°, ces deux dérivées sont aussi périodiques en fonction du temps avec la période T. Sur une période, le noeud rétrograde de l'angle Θ_T tandis que le périhélie se déplace d'un angle $\tilde{\omega}_T$ dont le signe dépend des conditions initiales. Le mouvement du pôle (resp. du point de Lizt) est alors périodique modulo Θ_T (resp. $\tilde{\omega}_T$) avec la période T.

Comme $\frac{d\Theta}{dt}$ est toujours négatif, la courbe décrite par le pôle sur une période ne comporte pas de points doubles. On peut en outre préciser que i et e variant en sens contraire, $\frac{d\Theta}{dt}$ est maximum en valeur absolue pour $\omega=90°$ et minimum pour $\omega=0$ (Cf. fig. 33). La valeur moyenne de i sur une période est donc plus voisine de son maximum que de son minimum. Par contre, suivant que i est supérieur ou inférieur à $i_1(0)$, $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ peut être positif ou négatif. On voit d'après la figure 38 qu'il faut considérer deux cas :

Déplacements du Pôle et du point de Lizt en 8000 ans pour les

conditions initiales
$$\left[\begin{array}{ll} a = 3{,}1 \text{ U.A.} & \\ i_o = 10^\circ & \Theta_o = 0^\circ \\ e_o = 0{,}15 & \omega_o = 0^\circ \end{array}\right.$$

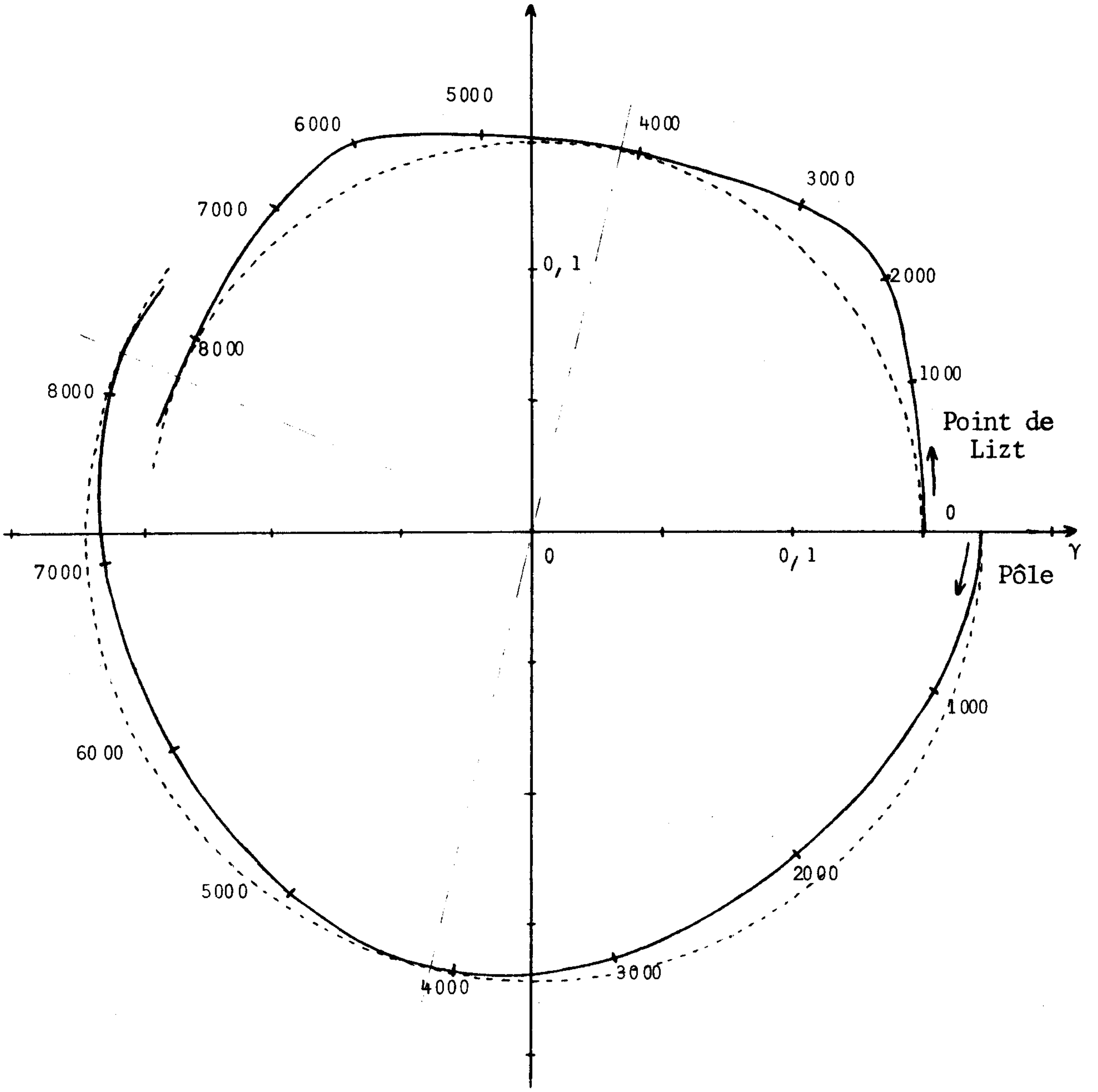


Figure 41

a) $C_0 \geq \cos(i_1(0))$ (i.e $C_0 \geq 0,943$ pour a=3,1 U.A)

$\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ est toujours positif. La courbe décrite par le point de Lizt sur une période ne possède donc pas de points doubles et le mouvement se fait dans le sens direct. Près de 90% des astéroïdes entre 2 et 4 U.A sont dans ce cas.

La figure 41 donne un exemple d'intégration numérique du mouvement du pôle et du point de Lizt correspondant à ce cas (a=3,1 U.A et C_0=0,983 ; avec une inclinaison de 10° et une excentricité de 0,15, cet exemple est bien représentatif de la moyenne des orbites des petites planètes).

On a tracé en même temps les trajectoires circulaires qui auraient été décrites par ces points dans la théorie du 1er ordre en i et e avec les mêmes conditions initiales . Notons que les écarts en excentricité (au plus 8,5% de la valeur maximum) et en inclinaison (au plus 7,8% du maximum) ne s'accumulent pas au cours du temps vu leur périodicité. Par contre, sur une période (T≃4100 ans), la vitesse moyenne du pôle (-96",7/an) et celle du point de Lizt (68",2/an) diffèrent de 17,3% de la valeur (± 82"5/an) qu'on obtiendrait au 1er ordre en i et e. Dans ces conditions, l'invariance de $\Theta+\tilde{\omega}$ au 1er ordre ne se conserve pas aux ordres supérieurs et les écarts en longitude entre position réelle et position du 1er ordre s'accumulent au cours du temps.

b) $C_0 < \cos(i_1(0))$ (194 astéroïdes entre 2 et 4 U.A sont dans ce cas)

$\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ est négatif dans un domaine $D_{\tilde{\omega}}$ du plan (u,ω) analogue à D_ω (Cf. fig. 42). On voit qu'il faut envisager trois types de mouvements suivant que la trajectoire de P dans ce plan passe à côté de ce domaine (*cas 1*), lui est tangent (*cas 2*) ou le coupe (*cas 3*).

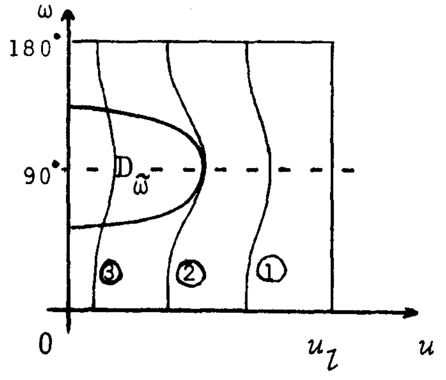
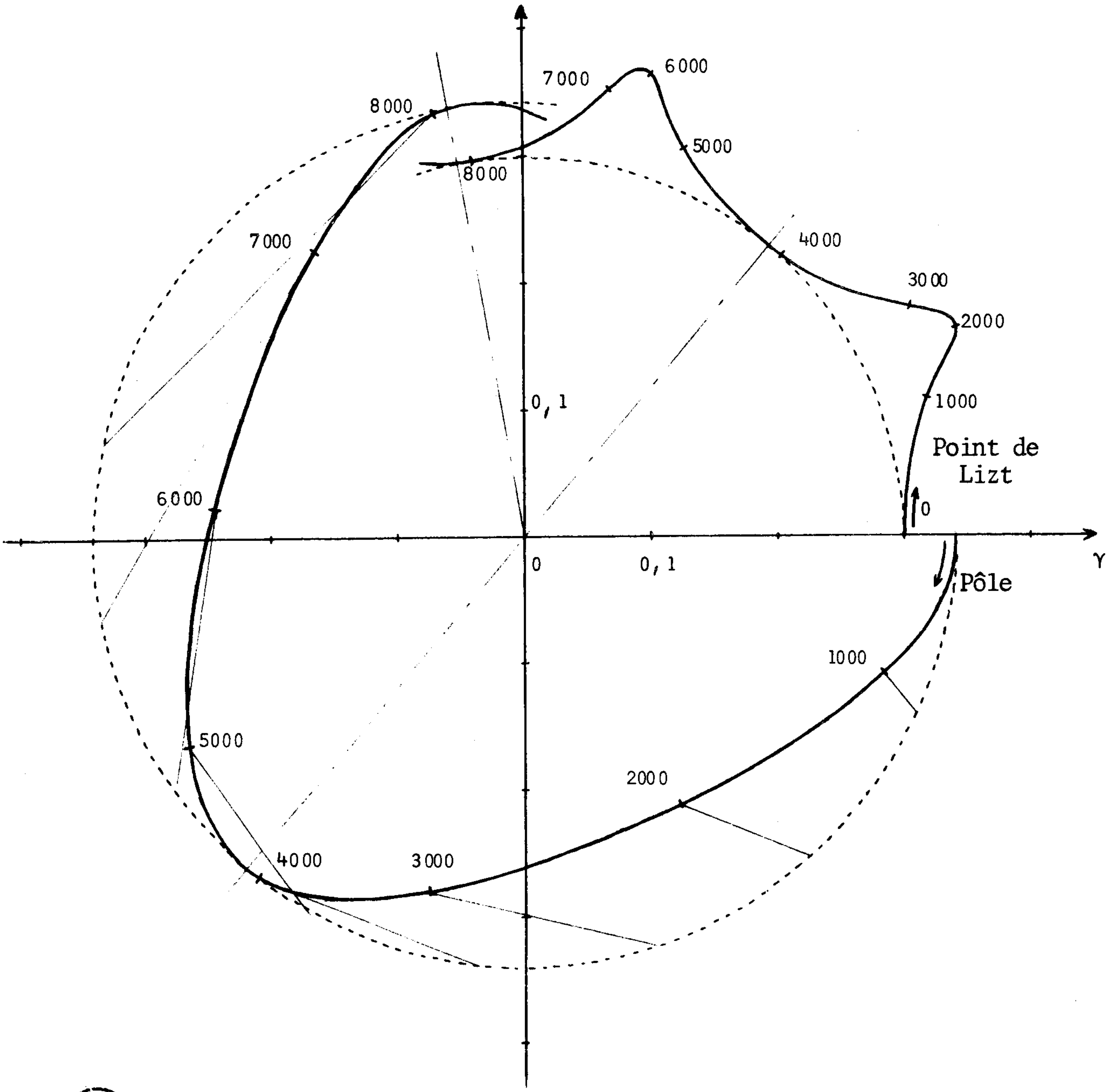


Figure 42

Déplacements du Pôle et du point de Lizt en 8 000 ans pour les

conditions initiales $\left[\begin{array}{ll} a = 3{,}1 \text{ U.A.} & \\ i_o = 20° & \omega_o = 0° \\ e_o = 0{,}30 & \Theta_o = 0° \end{array}\right.$



Figures 43 - 44

cas 1 $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ est toujours positif : comme dans le cas $C_o \geq \cos(i_1(0))$, le mouvement du point de Lizt se fait donc sans point double dans le sens direct. Cependant les variations de i et de e sont en général plus importantes car la trajectoire de P correspond généralement dans ce cas à des excentricités notables. Les figures 43 et 44 en donnent un exemple : les amplitudes des variations de i et de e sont respectivement égales à 29% de l'inclinaison maximum et à 20% de l'excentricité maximum. On a représenté avec le mouvement du pôle les vecteurs d'erreurs de la théorie du 1er ordre : nulle à l'origine des temps, leur longueur atteint rapidement l'ordre de grandeur de i. En effet, sur une période ($\simeq$ 4000 ans) la vitesse moyenne du pôle (-114"/an) est en valeur absolue 1,4 fois plus importante que celle donnée par le 1er ordre (82"5/an). Le décalage est encore plus grand pour le point de Lizt : sa vitesse moyenne (43",7/an) est 1,9 fois plus faible que celle du 1er ordre ; on remarque d'ailleurs qu'au voisinage de ω=90°, la vitesse du point de Lizt est presque nulle.

cas 2 $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ s'annule en ω=90° : le mouvement du point de Lizt présente alors un point de rebroussement. L'exemple de la figure 44 est très voisin de ce cas.

cas 3 $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ est négatif au voisinage de ω=90° : le point de Lizt rétrograde dans ce voisinage et la trajectoire est formée de boucles. Cependant, le moyen mouvement peut être positif, nul ou négatif suivant que l'angle :

$$\tilde{\omega}_T = \int_0^T \frac{d\tilde{\omega}}{dt}\, dt \tag{36}$$

dont s'est déplacé le point de Lizt sur une période est positif, nul ou négatif.

Pour déterminer une racine de l'équation $\tilde{\omega}_T=0$, on peut se fixer deux conditions initiales, e_o et ω_o par exemple, et chercher la troisième. Pour e_o=0,005 et ω_o=0 on a trouvé i_o=25°,5 (avec a=3,1 U.A). Si on a i_o > 25°,5, $\tilde{\omega}_T$ est négatif et si i_o < 25°,5, il est positif. La figure 45 montre le mouvement du point de Lizt pour i=25°,5 : c'est un mouvement libratoire, la trajectoire étant sensiblement circulaire, décentrée par rapport à l'origine et parcourue en environ 12 800 ans.

Mouvement libratoire du point de Lizt

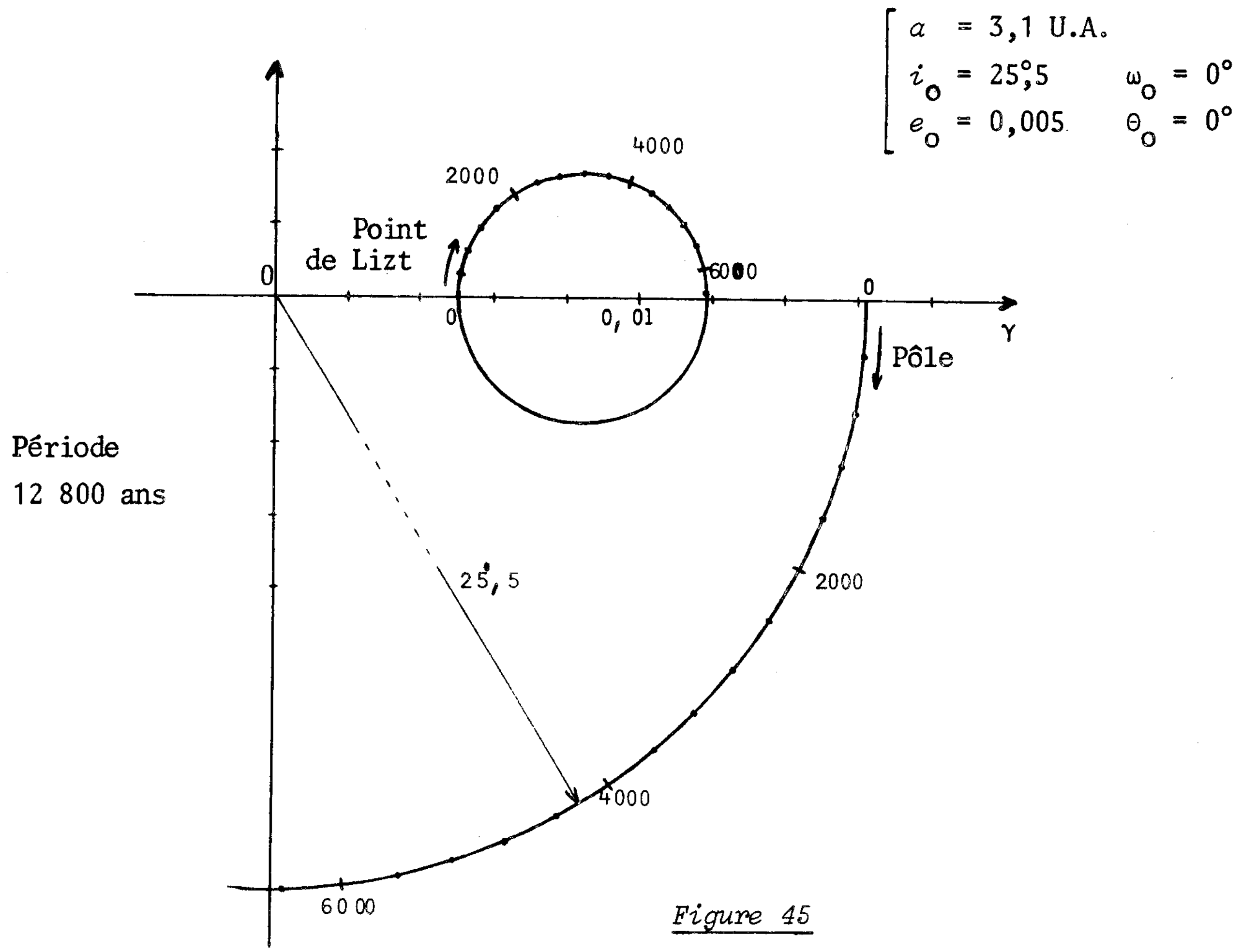


Figure 45

Mouvement du Point de Lizt rétrograde en moyenne

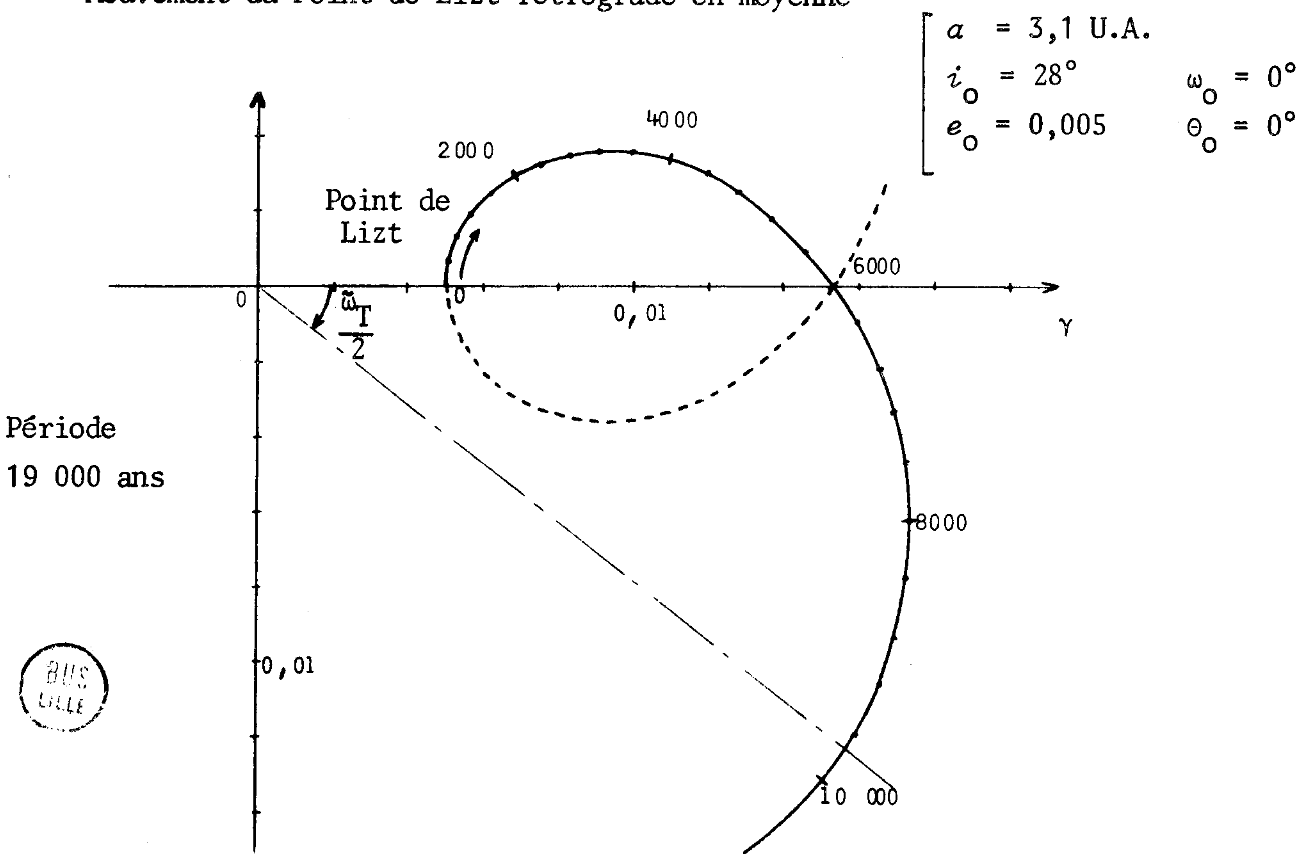


Figure 45 bis

La trajectoire du pôle est alors également fermée et sensiblement circulaire mais dans le temps 2T mis par le pôle pour faire un tour complet, le point de Lizt décrit deux fois sa trajectoire.

La figure 45 bis montre un exemple de mouvement à point double, rétrograde en moyenne. On peut remarquer les fortes variations relatives de e et l'instabilité de l'orbite libratoire. On peut évidemment déterminer d'autres couples (i_0, e_0) donnant, avec la condition $\omega_0=0$, un mouvement libratoire (i.e $\tilde{\omega}_T=0$) : l'ensemble des racines de l'équation $\tilde{\omega}_T=0$ (avec $\omega_0=0$) est une fonction $i=i_3(e)$ dépendant peu de e et telle que $i_3(0)$ soit sensiblement égal à 25°,5. Plus généralement, pour d'autres valeurs de a, on a la relation :

$$i_1(e) < i_3(e) < i_2(e)$$

On peut alors résumer ainsi les mouvements du pôle et du point de Lizt :

. Mouvement du pôle toujours rétrograde sans point double

. $C_0 \geq \cos(i_1(0))$: le mouvement du point de Lizt ne peut être que direct et sans point double.

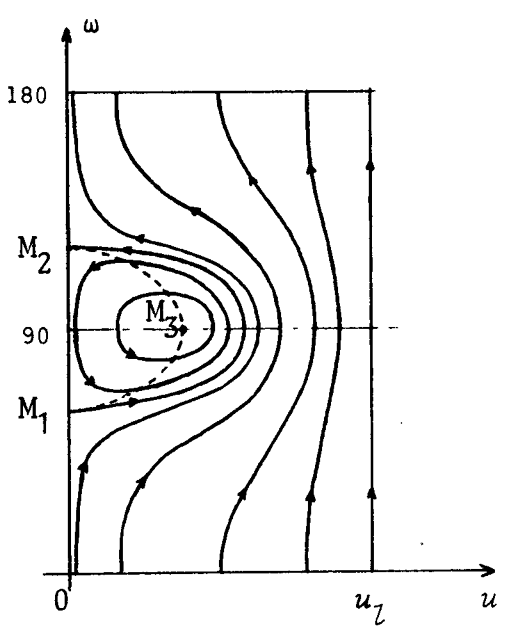
. $C_0 \geq \cos(i_3(0))$: on a en plus la possibilité d'un mouvement à points doubles mais direct en moyenne, avec un cas particulier de trajectoire avec points de rebroussements.

. $C_0 \geq \cos(i_2(0))$: on a en plus la possibilité d'un mouvement à point double, rétrograde en moyenne, avec un cas limite d'orbite libratoire.

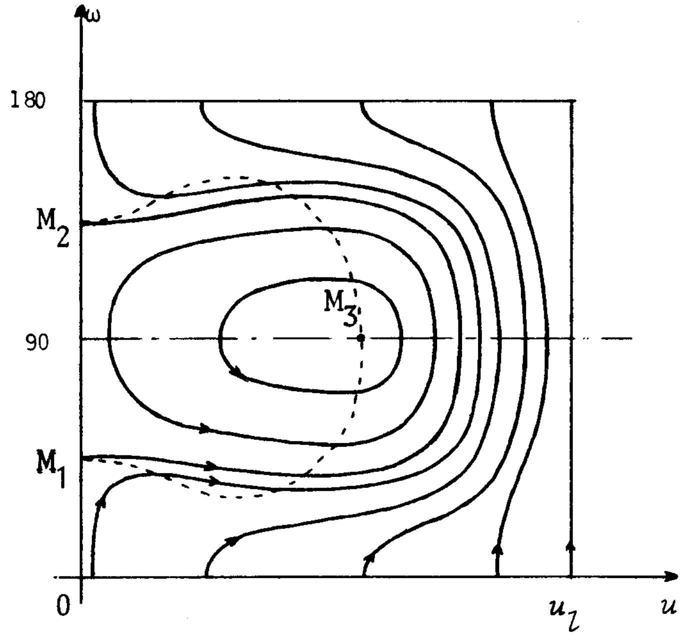
. On va maintenant voir que le cas $C_0 < \cos(i_2(0))$ amène une possibilité supplémentaire : celle d'un mouvement du point de Lizt, rétrograde et sans point double.

3.4.2. $\underline{C_0 < \cos(i_2(0))}$ (18 astéroïdes seulement correspondent à ce cas)

Le cylindre $C(i,e)=C_0$ coupe la surface S_ω (Cf. fig. 38). Il existe alors un domaine C_ω du plan (u,ω) où $\frac{d\omega}{dt}$ est négatif (voir fig. 39 ou la courbe en pointillés de la fig. 46). Les trajectoires de ce plan peuvent être déterminées notamment à partir des signes de $\frac{de}{dt}$ et de $\frac{d\omega}{dt}$ qui donnent en chaque point P la pente $\frac{d\omega}{du}$ de la trajectoire qui y passe. La figure 46 montre comment elles sont disposées.

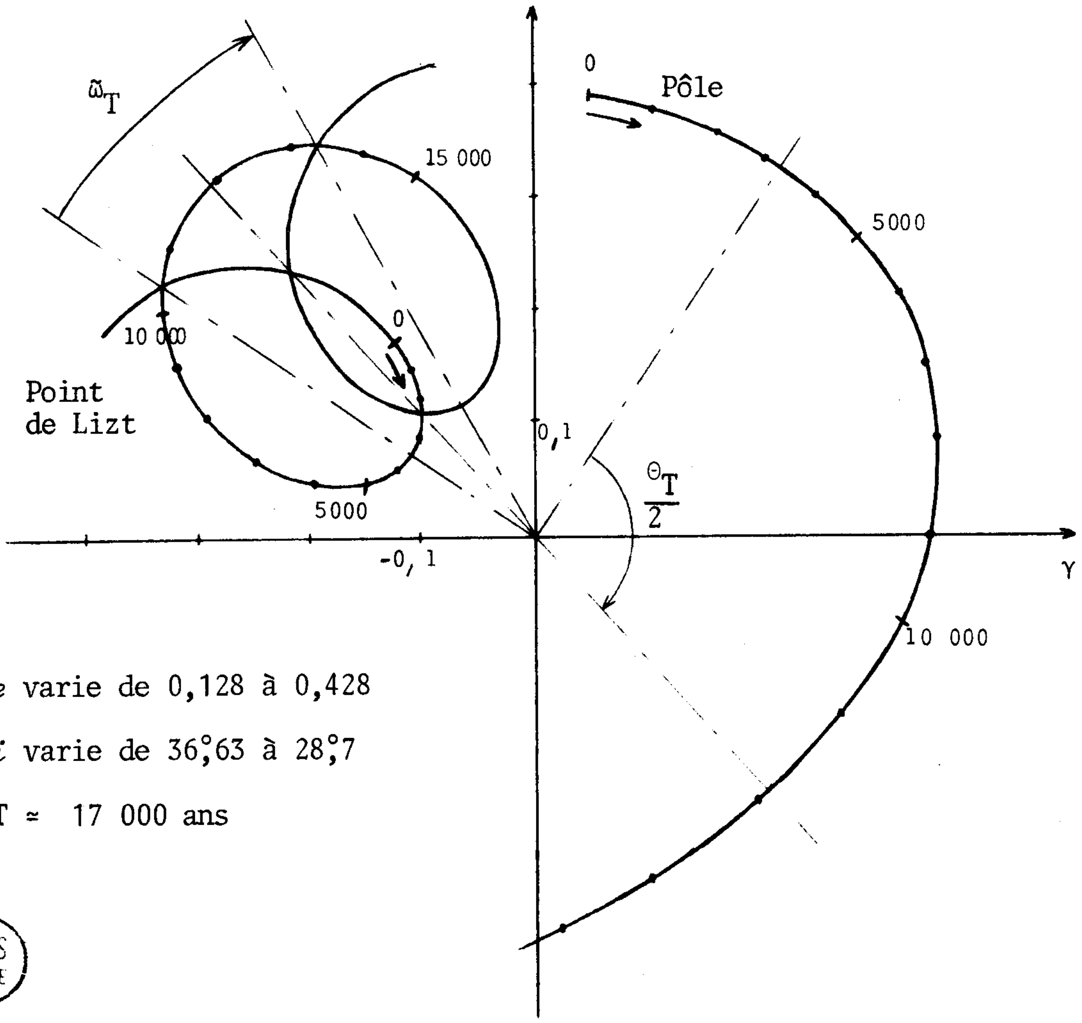


a) $C_1 < C_o < \cos(i_2(0))$



b). $C_o < C_1$

<u>*Figure 46*</u>



e varie de 0,128 à 0,428

i varie de 36°,63 à 28°,7

T ≈ 17 000 ans

Mouvements du pôle et du point de Lizt de PALLAS

<u>*Figure 47*</u>

On distingue un domaine D où les trajectoires sont fermées et correspondent à des oscillations de ω autour de la valeur 90°. Ces trajectoires entourent toutes, sans se couper, un point M_3 qui correspond à une orbite elliptique stationnaire stable. A l'extérieur de D_l, on a des trajectoires progressives pour lesquelles ω peut prendre toutes les valeurs. Entre ces deux types de mouvement on trouve une trajectoire conduisant le point P de M_1 en M_2 en un temps infini. (Notons que M_1 et M_2 représentent la même orbite circulaire stationnaire, inclinée de l'angle arc $\cos(C_o)$).

Ces trajectoires représentent aussi les intersections du cylindre avec la famille de surfaces $V(i,e,\omega)=V_o$ signalées en 3.2. M_3 est un point de contact d'une de ces surfaces avec le cylindre tandis que M_1 et M_2 sont des points d'intersection ; autrement dit, M_3 est un point double réel des branches imaginaires, caractéristiques de la stabilité, tandis que M_1 et M_2 sont des points doubles réels des branches réelles, caractéristiques de l'instabilité.

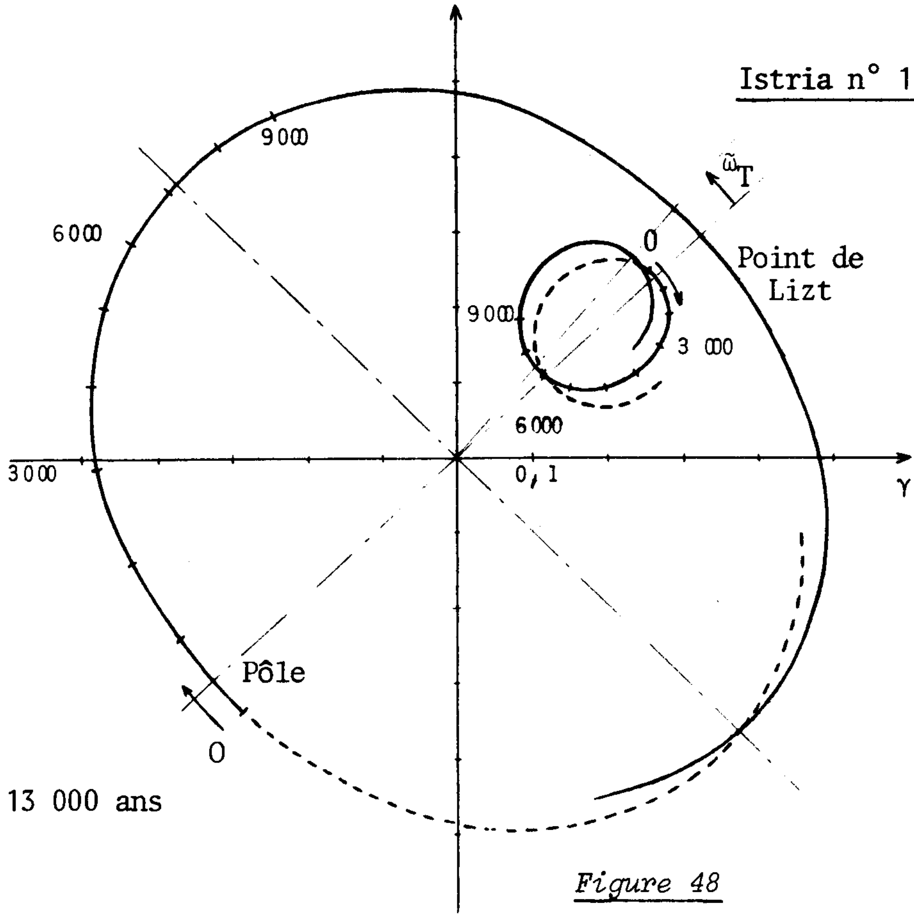
a) Trajectoires progressives

Cette classe de trajectoires est identique à celle étudiée précédemment pour $C_o \geq \cos(i_2(0))$, avec cependant des variations de e et de i beaucoup plus importantes car les trajectoires contournent le domaine D_l. D'autre part, si C_o est inférieur à une valeur C_1, voisine de 0,6 dans le cas où a=3,1 U.A, le domaine D_l ne contient pas entièrement le domaine C_ω : certaines trajectoires correspondant aux conditions initiales e_o très petit et $\omega_o=0$, traversent alors une partie de C_ω amenant une petite rétrogradation en ω (Cf. fig. 46,b).
Le mouvement du pôle et du point de Lizt ne se distinguent pas du cas traité au paragraphe précédent pour $C_o \geq \cos(i_2(0))$, sauf par les fortes variations de i et de e. A titre d'exemple, les figures 47 et 48 montrent que le mouvement du point de Lizt de Pallas est rétrograde en moyenne ($\tilde{\omega}_T<0$), tandis que celui de Istria (n° 183) est direct en moyenne ($\tilde{\omega}_T>0$).

b) Trajectoires libratoires

Il semble qu'un seul astéroïde (le n° 1373) corresponde à ce cas (Cf. [13], ou [14]). La périodicité de ces trajectoires, en i, e et ω, évidente sur la figure 46 se démontre comme en 3.4.1.1. à partir de la parité de $\frac{di}{dt}$, de $\frac{de}{dt}$ et de $\frac{d\omega}{dt}$ en ω . Comme les trajectoires de D_l coupent nécessairement la droite ω=+90° en deux points P_1 et P_2 et que le temps $\frac{T}{2}$ mis pour passer de P_1 en P_2 est fini (car la vitesse $\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{d\omega^2}{dt^2} + \frac{du^2}{dt^2}$ est strictement positive), les graphes de $i(t)$ et $e(t)$ possèdent deux axes de symétrie distants de $\frac{T}{2}$ et sont donc périodiques de période T. Il en est de même de $\omega(t)$ dont la variation est bornée.

Istria n° 183



t_o = 1950

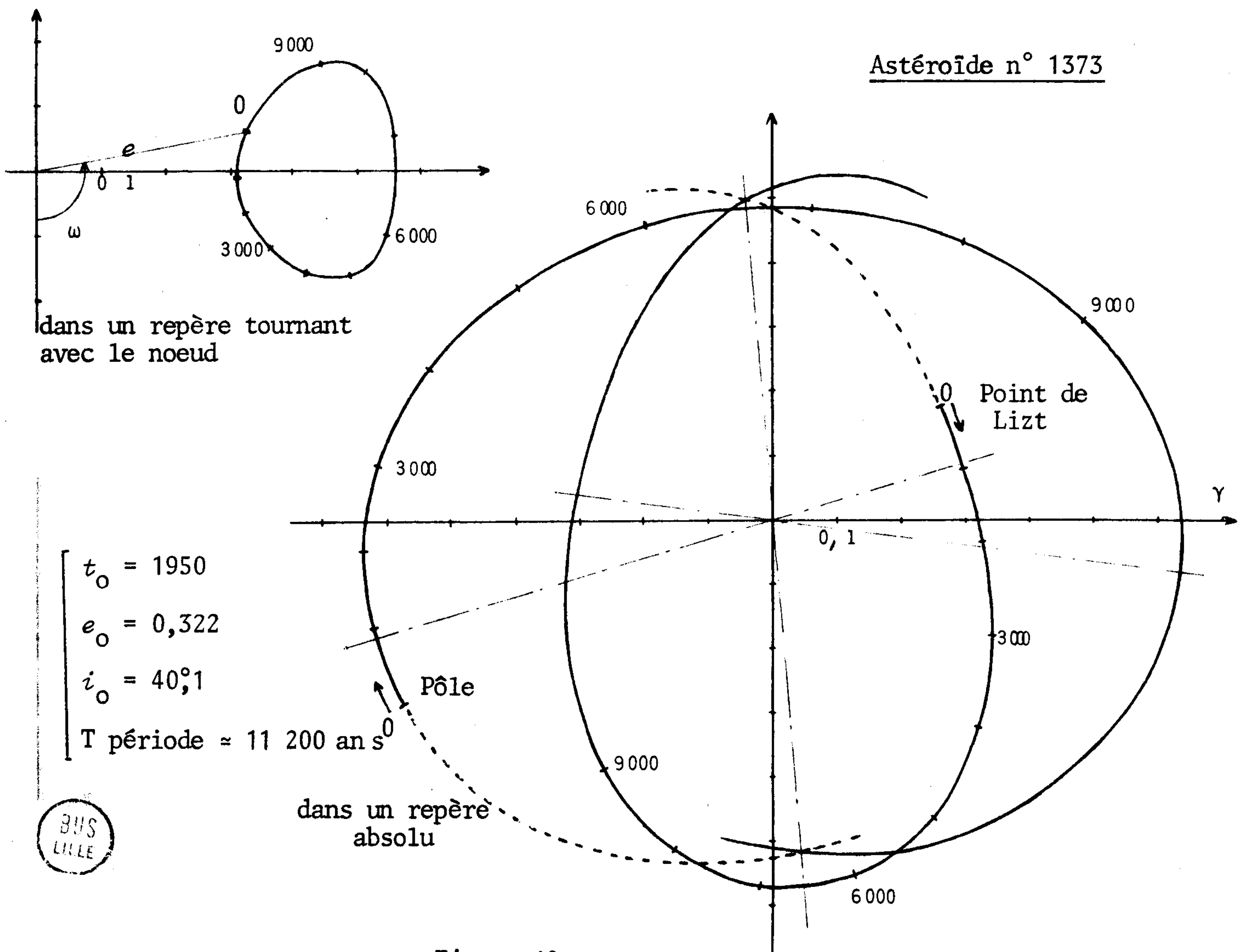
e_o = 0,348

i_o = 26°,45

T période ≃ 13 000 ans

Figure 48

Astéroïde n° 1373



t_o = 1950

e_o = 0,322

i_o = 40°,1

T période ≃ 11 200 ans

Figure 49

La période T au voisinage du point M, peut d'ailleurs être évaluée à partir des courbes de variation de $\frac{di}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ et de $\frac{d\omega}{dt}$ au voisinage de ω=90°. En posant $w = \frac{\Pi}{2} - \omega$ et $v = u - u_M$ (u_M abscisse de M_3), les équations différentielles du mouvement au voisinage de M_3 sont très sensiblement de la forme :

$$(37) \qquad \frac{dw}{dt} = \alpha v \quad \text{(en négligeant un terme en } w^2\text{)}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\beta\, w$$

avec α et $\beta > 0$.

Les conditions initiales $v_o > 0$ et $w_o = 0$ entraînent la solution :

$$(38) \qquad v = v_o \cos \sqrt{\alpha\ \beta}\ t$$

$$w = v_o \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sin \sqrt{\alpha\ \beta}\ t$$

La trajectoire est une ellipse décrite dans le temps $T = \frac{2\Pi}{\sqrt{\alpha\beta}}$. La solution d'équilibre en M_3 est donc stable. Les valeurs de α et β peuvent être tirées des courbes 31 à 37:par exemple pour e_o=0,15 et i_o=30°, α vaut environ 15" par an et β 20" par an d'où la période T de 75 000 ans.

La figure 49 représente le mouvement du point de Lizt de l'astéroïde n° 1373 dans un repère tournant avec le noeud et dans un repère absolu. Il faut noter la grande amplitude des variations de l'excentricité (de 0,31 à 0,56). Dans le même temps i varie de 29°,2 à 40°,4. Cependant, sur une période, la valeur moyenne de e est plus proche de son minimum que de son maximum ; on a évidemment l'inverse pour i.

Dans le repère absolu, le mouvement du point de Lizt est toujours rétrograde, comme celui du noeud qu'il suit à 90° ±21°. En particulier, pour le point M_3 stationnaire, le point de Lizt correspondant décrit un cercle, comme le pôle, avec la même vitesse négative et constante.

c) Trajectoires asymptotiques

On peut montrer le caractère asymptotique du mouvement à partir de la forme des équations différentielles au voisinage de e=0. D'après la figure 36 la variation de ω pour les grandes valeurs de i peut être représentée de façon approchée par l'expression :

$$(39) \qquad \frac{d\omega}{dt} = A + B\cos 2\omega$$

avec A et B >0, A < B.

Lorsque e est voisin de zéro, i est pratiquement constant et $\frac{d\omega}{dt}$ ne dépend de e que par son carré e^2: A et B peuvent être considérés comme constants.

$\frac{d\omega}{dt}$ s'annule pour les valeurs ω_m et $\Pi-\omega_m$, ordonnées des points M_1 et M_2 sur la figure 46.

De la même façon, $\frac{du}{dt}$, très sensiblement égal à $\frac{de}{dt}$, est de la forme (Cf. fig. 31) :

(40) $$\frac{du}{dt} = \alpha u \sin 2\omega \qquad (\alpha \text{ constante positive})$$

De (39) et (40) on déduit :

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{A + B\cos 2\omega}{\alpha u \sin 2\omega}$$

d'où: (41) $$u = u_0 \left| \frac{A + B\cos 2\omega_0}{A + B\cos 2\omega} \right|^{\frac{\alpha}{2B}}$$

. Si u_0 est différent de zéro, et si ω_0 est différent de ω_m ou de $\Pi-\omega_m$, u a un minimum strictement positif pour $\omega=0$ et $\omega=\frac{\Pi}{2}$: la trajectoire ne coupe pas l'axe $u=0$.

. Si $\omega_0=\omega_m$ (ou $\Pi-\omega_m$), la solution est de la forme :

(42) $$\begin{cases} \omega = \omega_m \quad (\text{ou } \Pi-\omega_m) \\ u = u_0\, e^{\alpha t \sin 2\omega_m} \quad (\text{ou } u_0\, e^{\alpha t \sin 2(\Pi-\omega_m)}) \end{cases}$$

Elle représente un mouvement asymptotique éloignant le point P de M_1 ou le rapprochant de M_2 en un temps infini. Cependant, dès que ω_0 est différent de ω_m (u_0 étant très petit) la trajectoire ne passe ni par M_1 ni par M_2. Ceci montre l'instabilité de l'orbite circulaire représentée par le point M_1 ou M_2. Comme de telles trajectoires n'existent que si on a $C_0 < \cos(i_2(0))$, on peut affirmer que les orbites circulaires sont instables dès que leur inclinaison est supérieure à $i_2(0)$.

4. CONSEQUENCES SUR L'ANNEAU DES PETITES PLANETES

L'étude précédente ne peut pas s'appliquer rigoureusement aux petites planètes du système solaire car on a négligé l'excentricité e_J de Jupiter et l'influence des autres planètes.

L'introduction de e_J entraîne celle de ω_J, argument du périhélie de Jupiter ; cet argument n'intervient dans les équations (20) que dans les combinaisons $\omega \pm \omega_J$. Si Jupiter est le seul corps perturbateur, son périhélie est fixe mais ω_J suit les mêmes variations que le noeud de la petite planète. Cependant, la petitesse de e_J ($\approx 0{,}05$) fait que le mouvement doit peu dépendre de ω_J : sa périodicité en ω est altérée mais reste approchée.

L'influence des autres planètes contribue aussi à modifier cette périodicité, mais l'effet le plus important semble devoir intervenir indirectement par les variations séculaires de l'orbite de Jupiter.

Dans ces conditions, la représentation du mouvement du pôle et du point de Lizt d'une petite planète par la composition de mouvements circulaires :

$$P = C\, e^{i\lambda(a)t} + P(a,t)$$

qui est propre à la théorie du 1er ordre en i et e, doit être modifiée lorsqu'on passe aux ordres supérieurs.

D'une part, le mouvement propre $Ce^{i\lambda(a)t}$, circulaire et uniforme, doit être remplacé par le mouvement plus complexe $C(t)\ e^{il(t)}$ où $C(t)$ et $\frac{d}{dt}\, l(t)$ ont des variations périodiques en rapport avec la périodicité de ω. D'un point de vue statistique, on peut ne considérer que leurs valeurs moyennes $\overline{C}$ et $\overline{\frac{dl}{dt}}$, mais qui diffèrent de celles fournies par le 1er ordre en i et e.

D'autre part, le point moyen $P(a,t)$ du 1er ordre ne dépend que du demi-grand axe mais par l'intermédiaire de $\lambda(a)$. Aux ordres supérieurs, la vitesse angulaire du mouvement propre dépend non seulement de a mais encore de i, e et ω . Dans ce cas, la détermination du pôle moyen théorique (ou point de Lizt moyen) d'un ensemble de petites planètes ne peut plus se faire suivant le seul paramètre a ; si on veut trouver la coïncidence entre le point moyen observé et $P(a,t)$ il faut limiter l'inclinaison et l'excentricité de façon à rester dans le voisinage du 1er ordre en i et e.

Pratiquement, il semble que la condition

$$\sqrt{1-e^2}\cos i \qquad > \cos(i_1(0))$$

permette de rester dans un voisinage satisfaisant du 1er ordre notamment pour le mouvement du point de Lizt propre qui, dans ce cas, s'effectue dans le sens direct et sans points doubles. Comme cette condition rassemble près de 90% des astéroïdes, les points moyens trouvés resteront encore bien représentatifs de l'ensemble des petites planètes.

Enfin, les résultats de ce chapitre suggèrent quelques remarques à propos des familles d'astéroïdes (Cf [6] et [17]). Celles-ci sont caractérisées par la similitude des demi-grands axes, des inclinaisons propres et des excentricités propres de chacun de leurs membres. Elles dépendent donc directement de la théorie du 1er ordre en e et i. Le fait qu'aux ordres supérieurs on ne retrouve plus ces quantités constantes permet de se demander si la notion de famille ne pourrait pas s'étendre à des ensembles d'astéroïdes de demi-grands axes voisins et dont les éléments propres subissent les mêmes variations séculaires. Il faudrait pour cela étudier plus en détail l'influence de l'excentricité de Jupiter et des autres planètes.

D'autre part, dans quelques familles, appelées "Jet streams" ou "courants" (Cf. [15], [16] et [17]), on a mis en évidence des similitudes entre les périhélies propres $\tilde{\omega}_1$ ainsi qu'entre les noeuds propres Θ_1. Le passage aux ordres supérieurs devrait permettre d'améliorer la connaissance de leur évolution. En effet, au 1er ordre en i et e, les quantités Θ_1 et $\tilde{\omega}_1$ varient linéairement en fonction du temps :

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_o + a_{oo}(t-t_o)$$

$$\Theta_1 = \Theta_o - a_{oo}(t-t_o)$$

On en conclut que la quantité $\tilde{\omega}+\Theta$ est un invariant (Théorème de Chazy).

Si à un instant donné, les longitudes des noeuds propres de plusieurs astéroïdes sont égales, ainsi que celles de leurs périhélies, elles ne le restent pas en général car a_{oo} dépend des demi-grands axes, mais leur somme reste constante. Dans un pareil cas, on devrait observer l'étalement des valeurs de Θ et de $\tilde{\omega}$ dans des intervalles de même longueur, mais aucun étalement des valeurs de $\Theta+\tilde{\omega}$. En réalité, dans tous les courants détectés, la dispersion des $(\Theta+\tilde{\omega})$ est du même ordre de grandeur que celle de Θ et de $\tilde{\omega}$.

Celle-ci pourrait s'expliquer lorsqu'on passe aux ordres supérieurs en i et e ; en effet, les vitesses du noeud et du périhélie ne sont plus constantes ni même égales en valeur absolue : le théorème de Chazy n'est donc plus valable.

Par exemple, le courant J_1 , le plus significatif (32 membres), signalé par Arnold [17], possède les éléments propres moyens suivants :

$$a = 2{,}21 \text{ U.A.}$$
$$i = 4^\circ \qquad \Theta = 214^\circ$$
$$e = 0{,}12 \qquad \tilde{\omega} = 11^\circ$$

On trouve par la méthode de Gauss que la vitesse du noeud varie de -31",3 à -37" par an tandis que celle du périhélie oscille entre 29",3 et 31",3 par an. Leurs valeurs moyennes sur une période sont respectivement égales à -34",2 et 30",6 par an. On a donc une dérive moyenne de $\Theta+\tilde{\omega}$ égale à 3",6 par an.

Cependant, les éléments i et e du courant sont dispersés respectivement de 0°,5 à 7° et de 0,07 à 0,17. La dérive de $\Theta+\tilde{\omega}$ varie donc d'un astéroïde à l'autre, provoquant l'étalement des valeurs de $\Theta+\tilde{\omega}$. On constate que cet étalement est égal à 255^c.

Par ailleurs, la dispersion des demi-grands axes entre 2,17 et 2,25 U.A. entraîne une dispersion de 2",4 par an sur les vitesses du noeud et du périhélie. L'étalement des valeurs de Θ et de $\tilde{\omega}$ (163° pour Θ et 154° pour $\tilde{\omega}$) correspondrait à une durée moyenne d'expansion de 240 000 ans. L'étalement de 255° pour les valeurs de $\Theta+\tilde{\omega}$ correspondrait dans ce cas à une dispersion des dérives de $\Theta+\tilde{\omega}$ égale à 3",8 par an. Cette dispersion, comparable aux 3",6 par an, serait explicable par la théorie des perturbations séculaires d'ordre supérieur.

La mise en évidence des limitations de la théorie du 1er ordre en i et e devrait inciter à reprendre l'étude aux ordres supérieurs et en tenant compte de toutes les grosses planètes. Elle devrait permettre une meilleure connaissance de la structure de l'anneau des petites planètes, mais aussi de son évolution à long terme.

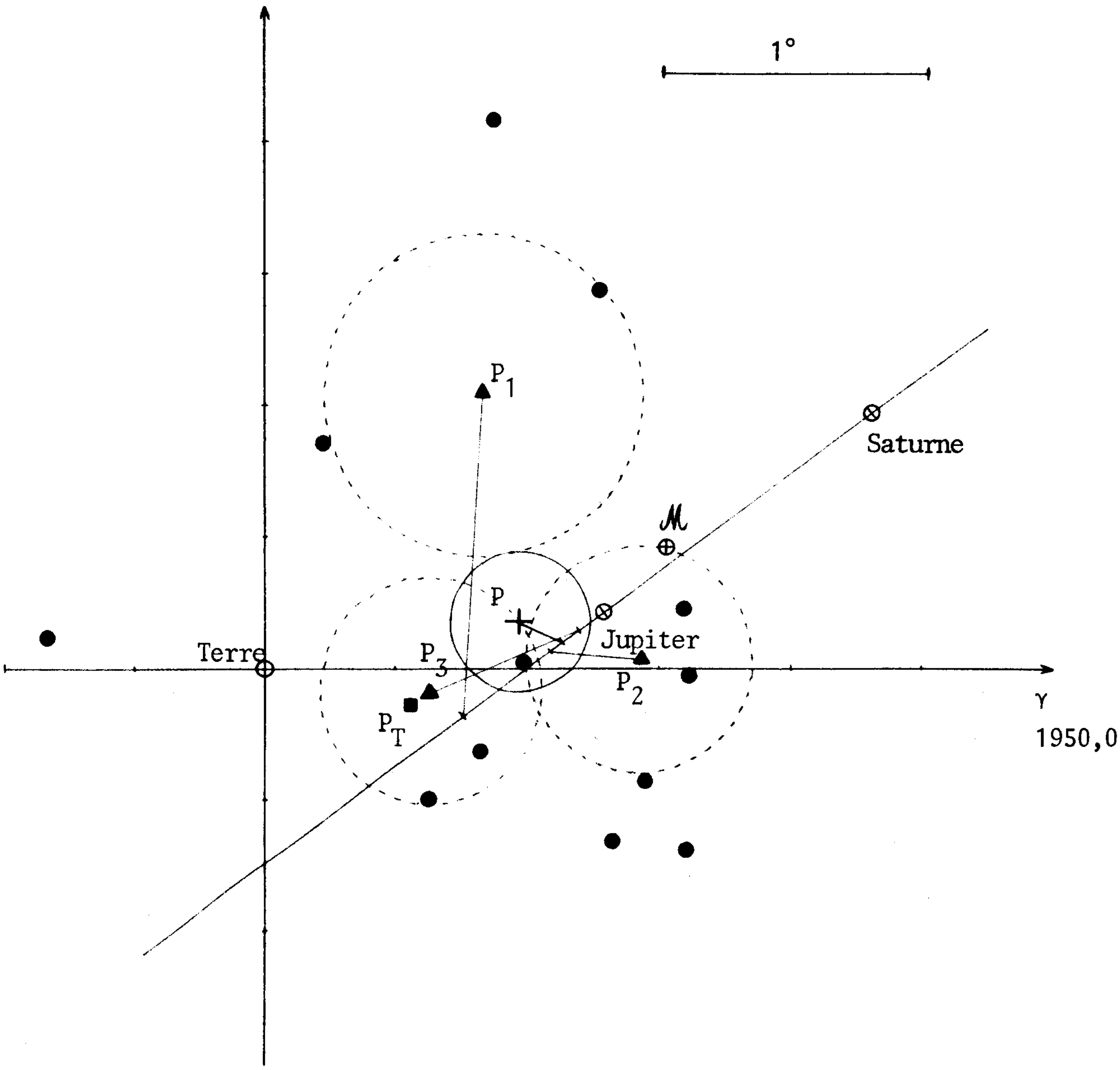
CHAPITRE III : DETERMINATION DU POLE MOYEN ET DU POINT DE LIZT MOYEN DE L'ANNEAU DES PETITES PLANETES

Les 1725 petites planètes cataloguées dans les éphémérides de Leningrad [24] ne représentent qu'une petite partie de l'ensemble existant dans le système Solaire : les dénombrements effectués par l'Observatoire de Mac Donald en 1958 [25] pour les astéroïdes plus brillants que la magnitude 16 (magnitude moyenne à l'opposition) puis ceux des Observatoires du Mont Palomar et de Leyde en 1970 [26] pour les astéroïdes d'éclats plus faibles montrent que leur nombre croît exponentiellement avec la magnitude.

D'après ces études, on peut voir que le catalogue [24] est complet à 100 % jusqu'à la magnitude 14 et à 95% jusqu'à la magnitude 15. Au-delà, les astéroïdes connus ne représentent qu'un échantillonnage affecté par des effets de sélection qu'il convient d'éliminer pour déterminer le pôle moyen et le point de Lizt moyen de l'anneau des petites planètes.

Ces effets de sélection ont été bien mis en évidence par T. Kiang en 1966 [3] sur l'hypothèse essentielle de la constance de la distribution des éléments d'orbite lorsqu'on passe d'une tranche de magnitude à la suivante. Cette hypothèse semble confirmée par le récent "Palomar-Leyden Asteroid Survey" [26], tout au moins pour la distribution des demi-grands axes, et des excentricités.

Tout d'abord, dans le catalogue [24], les astéroïdes de magnitude supérieure à 15 manifestent une surabondance de faibles inclinaisons car leur recherche s'effectue surtout au voisinage de l'écliptique. D'autre part, l'étude de la distribution des longitudes d'astéroïdes au moment de leur découverte montre deux maximums très nets aux longitudes 0° et [150°-180°] ; ils sont dus, semble-t-il, aux conditions d'observations plus favorables en Septembre et en Mars pour les principaux observatoires engagés dans la recherche des petites planètes. Ce facteur saisonnier combiné avec le facteur latitude donne une surabondance de noeuds d'orbites aux longitudes 0° et [150°-180°] pour les astéroïdes de magnitude supérieure à 15. Par contre, on ne voit pas apparaître d'effet de sélection dans la distribution des pôles d'orbite en deçà de la magnitude 15.



Pôle moyen de l'anneau des petites planètes

Figure 50

De la même manière, on observe une surabondance de fortes excentricités pour les astéroïdes de magnitude supérieure à 16 : il semble que, les astéroïdes étant classés par tranches de magnitude, dans une tranche fixée les premiers découverts soient ceux dont l'excentricité est élevée, cette découverte se faisant au voisinage du périhélie. Cependant, le facteur saisonnier n'apparaît pas nettement dans la distribution des périhélies. En conclusion, la distribution des points de Lizt des petites planètes n'est correcte qu'en deçà de la magnitude 16.

La détermination du pôle moyen de l'anneau des petites planètes pourra donc se faire avec les astéroïdes du catalogue [24] dont la magnitude est inférieure à 15, tandis que pour obtenir le point de Lizt moyen on utilisera les astéroïdes de magnitude inférieure à 16.

Parmi les astéroïdes ayant satisfait aux conditions d'éclat précédentes, on élimine ensuite ceux qui ne sont pas concernés par la théorie des perturbations séculaires exposée dans les Chapitres I et II à cause de leur mouvement moyen commensurable avec celui de Jupiter. Il s'agit des petites planètes du groupe Troyen ($a \simeq 5{,}2$ U.A.), celles du groupe de Hilda ($a \simeq 3{,}95$ U.A.) et de Hungaria ($a \simeq 1{,}95$ U.A.). Leur situation, bien en marge de l'anneau des petites planètes, et leur petit nombre les rendent d'ailleurs peu représentatives de l'ensemble. Pratiquement, on ne conserve que les orbites de demi-grand axe compris entre 2 U.A et 3,5 U.A.

Enfin, comme on l'a vu au chapitre II, une dernière condition :

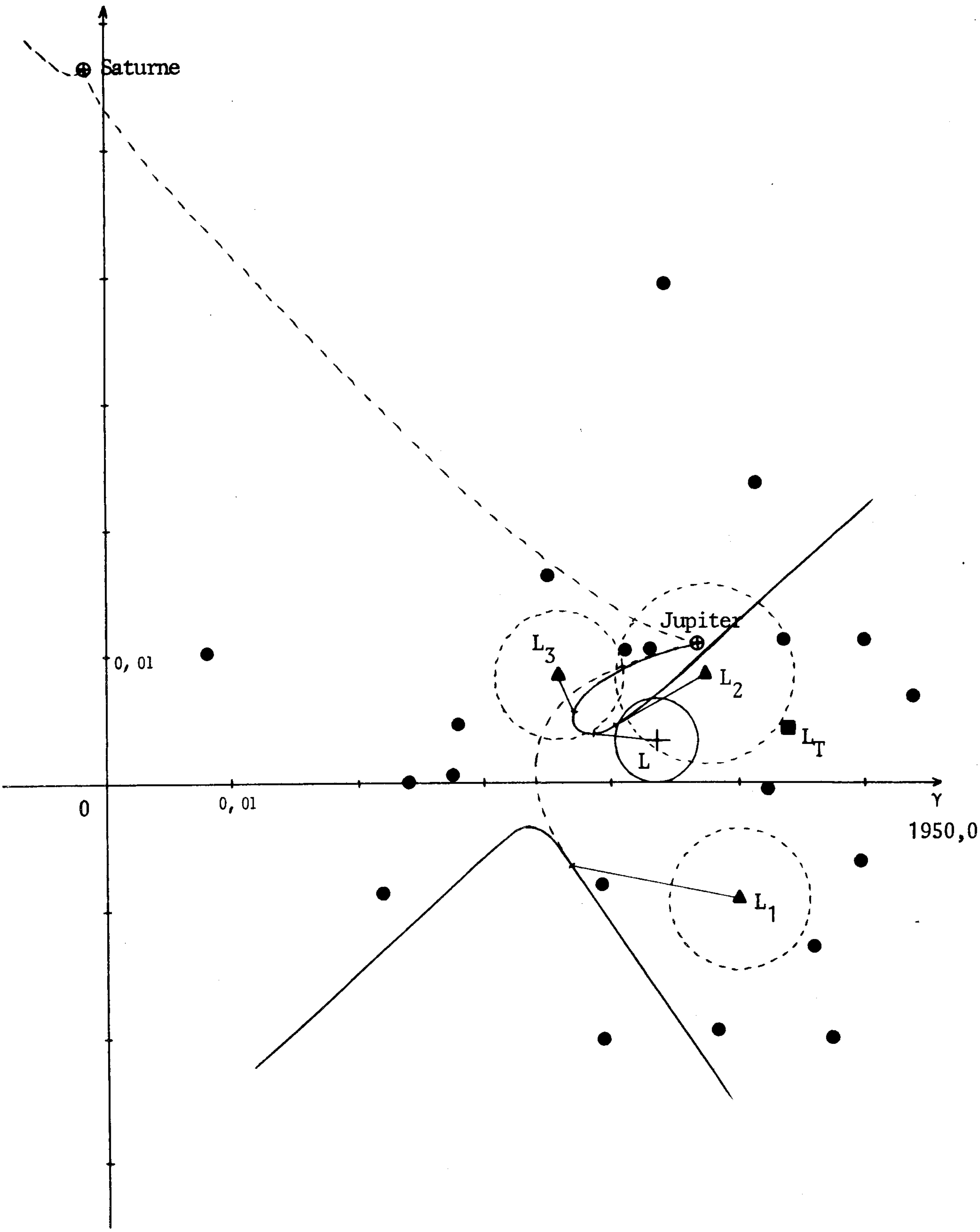
$$\sqrt{1-e^2}\cos i \geq \cos(i_1(0))$$

élimine les petites planètes qui ne suivent pas de près la théorie des perturbations séculaires du 1er ordre en i et e.

Il reste dans ces conditions 727 petites planètes pour déterminer le pôle moyen P, et 1183 pour le point de Lizt moyen L. Dans le repère écliptique 1950,0, ces points ont pour coordonnées :

$$P = \begin{cases} i_m = 0^\circ\!,976 & \text{(distance polaire moyenne)} \\ \Theta_m = 10^\circ\!,23 & \text{(longitude du pôle moyen)} \end{cases}$$

$$L = \begin{cases} e_m = 0^\circ\!,0439 & \text{(excentricité moyenne)} \\ \tilde{\omega}_m = 4^\circ\!,04 & \text{(longitude du périhélie moyen)} \end{cases}$$



Point de Lizt moyen de l'anneau des petites planètes

Figure 51

Le demi-grand axe moyen des 727 orbites est de 2,7744 U.A., et celui des 1183 orbites 2,7576 U.A.

Sur les figures 50 et 51, on a marqué d'une croix les points P et L ainsi que les points correspondants de Jupiter et de Saturne et on a représenté le lieu des points moyens théoriques déterminés au chapitre I. Le trait qui relie le point moyen observé (P ou L) et le point moyen théorique (P(2,77 U.A) ou L(2,76 U.A)) correspondant à la moyenne des demi-grands axes des petites planètes sélectionnées permet d'apprécier la concordance entre la théorie et l'observation.

Plus précisément, on peut déterminer l'erreur à craindre sur la position de P et de L. Dans ce but, on a partagé l'ensemble des N petites planètes sélectionnées en M groupes d'environ 60 membres (727 = 7 groupes de 61 + 5 groupes de 60, et 1183 = 3 groupes de 60 + 17 groupes de 59).

Les petites planètes sélectionnées étant rangées par numéros croissants, on compose le 1er groupe avec la 1ère petite planète, la $(M+1)^{\text{ème}}$, la $(2M+1)^{\text{ème}}$ ..... , le 2ème groupe avec la $2^{\text{ème}}$, la $(M+2)^{\text{ème}}$, la $(2M+2)^{\text{ème}}$ ....., et ainsi de suite jusqu'au $M^{\text{ème}}$ groupe. On obtient ainsi une bonne homogénéisation des groupes : on évite notamment que le 1er groupe ne soit composé que des plus gros astéroïdes (les premiers numérotés, car les premiers découverts).

Les points moyens P_i (ou L_i) de chacun de ces groupes redonnent, lorsqu'on en fait la moyenne, le point P (ou L); on les a représentés par des points ronds sur la figure 50 (ou 51). Comme chacun d'eux représente la moyenne d'un grand nombre de points (60 environ), leur distribution suit la loi normale. L'écart quadratique moyen σ sur chacune des coordonnées de P (ou de L) permet de déduire d'abord l'erreur à craindre sur celles-ci :

$$E = \frac{\sigma}{\sqrt{M-1}}$$

puis, le rayon du cercle dans lequel le point P (ou L) a la probabilité 1/2 de se trouver :

$$R = E\sqrt{2\,\mathrm{Log}2} = 1,177\ E.$$

Pour le pôle, les valeurs trouvées : $\sigma_x = 0\overset{\circ}{,}68$ et $\sigma_y = 0\overset{\circ}{,}83$ sont compatibles avec la symétrie de révolution de la distribution des P_i autour de P. Avec la valeur moyenne $\sigma = 0\overset{\circ}{,}75$, on obtient :

$$E = \frac{0\overset{\circ}{,}75}{\sqrt{11}} = 0\overset{\circ}{,}23 \qquad \text{et} \qquad R = 0\overset{\circ}{,}27.$$

Pour le point de Lizt, il se trouve que σ_x et σ_y sont égaux à 0,014. On en déduit :

$$E = \frac{0,014}{\sqrt{19}} = 0,0032$$

et $$R = 0,0038$$

Ce sont les cercles de rayon R qui sont tracés sur les figures 50 et 51. Le rayon du cercle dans lequel P (ou L) a 99% de chance de se trouver est 2,58 fois plus grand que R. On voit donc que la concordance entre la théorie et l'observation est satisfaisante.

Une étude analogue peut être faite en fonction du demi-grand axe : on partage l'ensemble des astéroïdes en trois sous-ensembles disjoints respectant les principales lacunes de la distribution de a :

groupe 1:	entre 2 U.A et 2,507 U.A	:	147 astéroïdes
groupe 2:	" 2,507 et 2,815 U.A	:	278 "
groupe 3:	" 2,815 et 3,5 U.A	:	302 "

Le nombre d'astéroïdes indiqué pour chacun des groupes correspond à la sélection : $m_0 \leqslant 15$ et $\sqrt{1-e^2}\,\cos i \geqslant \cos(i_1(0))$. Les pôles moyens correspondants P_1, P_2 et P_3 sont indiqués par un point triangulaire sur la figure 50 et sont reliés par un trait aux pôles moyens théoriques. On ne peut pas dire que la concordance soit évidente, mais il est vrai que la précision de définition de P_1, P_2 et P_3, proportionnelle à la racine carrée du nombre d'astéroïdes utilisés dans la moyenne, est respectivement 2,2, 1,6 et 1,5 fois moindre que celle de P.

En ce qui concerne les points de Lizt, la décomposition en trois groupes tient compte de la discontinuité des points de Lizt moyens théoriques pour a=2,64 U.A. :

groupe 1:	entre 2 U.A et 2,64 U.A.	:	408 astéroïdes
groupe 2:	entre 2,64 et 2,815 U.A	:	275 "
groupe 3:	" 2,815 et 3,5 U.A	:	500 "

Les points de Lizt moyens correspondants : L_1, L_2 et L_3, sont indiqués par un point triangulaire sur la figure 51. La corrélation entre points moyens théoriques et observés semble ici meilleure que dans le cas des pôles.

On a pensé améliorer cette corrélation en éliminant les astéroïdes faisant partie d'un courant (ou "jet stream"). Ceux-ci sont en effet caractérisés par la similitude de leurs pôles propres et de leurs points de Lizt propres, entraînant une dissymétrie dans la distribution des pôles et des points de Lizt. Cependant, le décalage des points moyens résultant de cette élimination est insignifiant et n'améliore pas la concordance entre la théorie et l'observation. Il faut sans doute rechercher la cause de ce défaut de concordance dans le nombre insuffisant de petites planètes dans chacun des trois groupes.

Enfin, à titre indicatif, on a marqué par un point carré le pôle moyen P_T et le point de Lizt moyen L_T correspondant à l'ensemble des petites planètes cataloguées [24] (avec $2 \leq a \leq 3{,}5$ U.A). On peut voir de cette façon l'importance des effets de sélection présents dans le catalogue.

Remarque : Le plan moyen de l'anneau des petites planètes est significativement différent de l'écliptique, et la longitude du pôle moyen est actuellement sensiblement la même que celle du point de Lizt moyen. Ces deux constatations combinées au fait que les astéroïdes passent davantage de temps dans la partie aphélique de leur orbite que dans la partie périhélique, entraînent qu'on devrait trouver en moyenne davantage d'astéroïdes au nord de l'écliptique qu'au sud. C'est à la conclusion inverse qu'aboutirent Kresak et Narin [4] par une simulation des mouvements de tous les astéroïdes catalogués (sans éliminer les effets de sélection) : Il s'agissait de déterminer une zone de moindre fréquentation des astéroïdes pour limiter les risques de collision avec eux d'un éventuel vaisseau spatial lancé vers Jupiter. D'après les éléments moyens de l'anneau des petites planètes, il vaudrait mieux passer au sud qu'au nord de l'écliptique, mais en réalité, on doit pouvoir négliger cette dissymétrie par rapport à l'écliptique, vue les très petites valeurs de i_m et de e_m.

CONCLUSION

La concordance entre points moyens théorique et observé manifeste une corrélation entre les pôles des petites planètes et ceux de Jupiter et de Saturne, ainsi qu'entre leurs points de Lizt et celui de Jupiter : la position moyenne dans le temps du pôle (resp. point de Lizt) d'une petite planète est en effet le pôle $\mathcal{M}$ du plan du maximum des aires (resp. l'origine), mais à tout instant, le pôle moyen (resp. point de Lizt moyen) de l'ensemble des petites planètes est significativement différent de $\mathcal{M}$ (resp. de l'origine). La théorie des perturbations séculaires montre en outre que l'évolution à long terme de ces corrélations est liée aux variations séculaires des éléments d'orbite de Jupiter (Cf. I,6).

Cette concordance, signe de la régularité de la distribution des pôles et des points de Lizt autour de leur point moyen (Cf. I,6), implique la stabilité de la distribution de ces éléments, et ne permet donc pas de préciser l'évolution passée de la structure de l'anneau.

D'ailleurs, l'étude faite ici ne constitue à cet égard qu'une première approximation consistant à négliger l'intéraction des petites planètes les unes sur les autres : dans un prolongement de cette étude, il faudrait en réalité tenir compte des modifications possibles des éléments d'orbite dues aux rapprochements et aux collisions des astéroïdes.

Cette étude pourrait être réalisée de façon statistique et, pourrait-on dire, "thermodynamique", en considérant la ceinture d'astéroïdes comme un nuage de points (dont on a précisé ici les éléments moyens) caractérisé par une certaine distribution de masses (densité) et animé d'un mouvement d'ensemble autour du Soleil (vent de petites planètes) ; à ce mouvement d'ensemble se superpose une agitation des petites planètes (température), caractérisée par une certaine distribution des vitesses résiduelles, en rapport avec la distribution des inclinaisons et des excentricités des orbites ; c'est cette agitation qui est seule responsable des rapprochements et des collisions.

Le calcul de la probabilité de présence de deux astéroïdes dans un même voisinage et de leur vitesse à cet endroit, permettrait de déterminer une probabilité de déformation des orbites qui résulte de ce rapprochement éventuel. Après intégration à tout l'espace et à tous les astéroïdes, on pourrait ainsi déterminer l'évolution de la distribution des éléments d'orbite des petites planètes en rapport avec leurs intéractions.

B I B L I O G R A P H I E

[1] P. BACCHUS (1968)
Sur la distribution de certains éléments des orbites des petites planètes.
Congrès pour l'avancement des Sciences, Besançon (1968)

[2] F. TISSERAND (1888)
Traité de Mécanique Céleste, Tome 1, Gauthier-Villars.

[3] T. KIANG (1966)
Bias-free statistics of orbital elements of asteroids.
Icanus 5, 437-449.

[4] L. KRESAK (1966)
The asymetry of the Asteroid belt.
BAC, vol. 18, n° 1, 27-36.

[5] D. BROUWER, A.J.J. Van WOERKOM (1950)
The secular variations of the orbital elements of the principal planets.
Astr. Pap. Am. Eph. XIII part. 2.

[6] D. BROUWER (1951)
Secular variations of the orbital elements of minor planets.
A.J., 56, 9-32.

[7] G.W. HILL (1897)
On the values of the excentricities and longitudes of the perihelia of Jupiter and Saturn for distant epoch.
A.J. 17, 81.

[8] S. NEWCOMB (1862)
Determination of the law of distribution of the modes and perihelia of the small planets between Mars and Jupiter.
A. Nachr. 58, 210-220.

[9] H.C. PLUMMER (1916)
Statistics of the minor planets
Monthly Notices R.A.S. 76, 378-390.

[10] A.V. BRUNN (1906)
Ueber die Verteilung der Perihellangen und Engentrizitäten der kleinen Planeten.
A. Nachr. 172, 273-284.

[11] J. HECQUET (1970)
Etude astrométrique du "SKY SURVEY".
Thèse de la Faculté des Sciences de Lille, chap. 3.

[12] Gr. A. ANTONACOPOULOS (1970)
Equilibrium solutions of the secular variations in the restricted three body problem and their stability.
Monthly Notices, R.A.S. 151, 123-132.

[13] Y. KOSAI (1962)
Secular perturbations of asteroids.
A.J. 67, 591.

[14] B.G. MARDSEN (1970)
Periodic orbits, stability and resonances
edited by G.E.O. Giacaglia, Reidel pub. Co.

[15] H. ALFVEN (1969)
Asteroidal jet streams.
Astrophysics and Space Sciences 4, p. 84.

[16] L. DANIELSON (1969)
Statistical arguments for asteroidal jet streams
Astrophysics and Space Science 5 p. 53.

[17] J.R. ARNOLD (1969)
Asteroidal families and jet streams
A.J. 74, 1235.

[18] J.F. COX (1932)
Recherches sur les petites planètes.
Thèse d'agrégation. Faculté des Sciences de Bruxelles.

[19] G.A. CHEBOTAREV (1967)
Analytical and Numerical methods in celestial mechanics.
American Elsevier Publishing Company.

[20] W.J. KLEPCZYNSKI (1969)
The Mass of Jupiter and the motion of four minor planets
A.J. 74, 774.

[21] P.K. SEIDELMANN, R.L. DUNCOMBE, W.J. KLEPCZYNSKI (1969)
The mass of Neptune and the orbit of Uranus.
A.J. 74, 776.

[22] R.L. DUNCOMBE, W.J. KLEPCZYNSKI, P.K. SEIDELMANN (1968)
Orbit of Neptune and the mass of Pluto
A.J. 73, 830

[23] *Connaissance des Temps (1970)*
Bureau des Longitudes.

[24] *Ephémérides des petites planètes (1968)*
Leningrad.

[25] G.P. KUIPER, Y. FUYITA, T. GEHRELS, I. GROENEVELD,
J. KENT, G. Van BIESBROECK, G.J. Van HOUTEN (1958)
Survey of asteroids
Astrophysical Journal, Supp. 3, p. 289.

[26] C.J. Van HOUTEN, I. Van HOUTEN-GROENEVELD, P. HERGET, T. GEHRELS (1970)
The Palomar-Leiden Survey of faint minor planets
Astronomy and Astrophysics, Supp. Series. Vol. 2, n° 5.