

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à
L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE
pour obtenir
le grade de Docteur de 3ème Cycle
par

Nouredine HASSANI



BORDISME COMPLEXE EQUIVARIANT
CAS DU GROUPE FINI DES QUATERNIONS

Membres du Jury : MM. P. DEDECKER, Président
D. LEHMANN, Rapporteur
R. BKOUCHE, Examineur
Mme M.H. SCHWARTZ, Examineur



Soutenue le 17 Juin 1971

A ma femme.

Je remercie très vivement Monsieur Dedecker d'avoir bien voulu présider le jury.

J'adresse mes remerciements à Madame Schwartz et Monsieur Bkouche d'avoir accepté de faire partie du jury.

Que Monsieur Lehmann, qui m'a proposé le sujet, qui m'a guidé dans ce travail par ses conseils inestimables, trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Je n'oublierai pas enfin de remercier Madame Lengaigne, qui a rendu possible la réalisation matérielle de ce travail, dans des délais relativement courts.

INTRODUCTION.

Les groupes de bordisme équivariant $\Omega_n(\mathbb{Z}_p)$, p premier, ont été déterminés (cf. [3] et [4]) par Conner et Floyd, dans le cas orienté et complexe. Dans [4], l'ordre des générateurs du Ω_* -module $\Omega_*(\mathbb{Z}_p^k)$, p premier impair a été calculé dans le cas du bordisme orienté.

On se propose dans ce travail d'étudier le bordisme complexe équivariant, lorsqu'on prend le groupe fini Q_8 des quaternions à huit éléments.

Au chapitre II, en s'inspirant des méthodes utilisées dans [3] et [4], on étudie les relations liant les groupes de bordisme de Q_8 et ceux de ses sous groupes.

Au chapitre III et IV, après avoir donné un système de générateurs de $\Omega_*(\mathbb{Z}_{2^k})$ et calculé l'ordre des générateurs, généralisant ainsi au cas complexe les résultats [4], obtenus dans le cas orienté pour $\Omega_*(\mathbb{Z}_p^k)$, p impair, on donne un système de générateurs de $\Omega_*(Q_8)$ et une borne inférieure de l'ordre des générateurs.

Enfin au chapitre V on établit une formule de décomposition en produit, du Ω_* -module $\Omega_*(\mathbb{Z}_m)$, m un entier quelconque, dans le cas orienté et complexe.

*

*

*

BORDISME COMPLEXE EQUIVARIANT
CAS DU GROUPE Q_8 DES QUATERNIONS.

CHAPITRE I - RAPPELS.

- 1 - Les groupes $\Omega_n(X)$
- 2 - Les groupes $\Omega_n(G)$
- 3 - La suite spectrale de bordisme

CHAPITRE II -

- 1 - Ordre des groupes $\tilde{\Omega}_n(Q_8)$ - (Q_8 groupe fini des quaternions)
- 2 - Les homomorphismes i et t en homologie ordinaire
- 3 - Les homomorphismes $\hat{i}$ et $\hat{t}$ en bordismes équivariant
- 4 - Applications au groupe Q_8

CHAPITRE III -

- 1 - Générateurs de $\tilde{\Omega}_* (\mathbb{Z}_2 k)$
- 2 - Générateurs de $\tilde{\Omega}_* (Q_8)$

CHAPITRE IV -

- 1 - Calcul de l'ordre des générateurs de $\tilde{\Omega}_* (\mathbb{Z}_2 k)$
- 2 - Sur l'ordre des générateurs de $\tilde{\Omega}_* (Q_8)$

CHAPITRE V -

- 1 - Bordisme orienté et complexe des groupes cycliques
- 2 - Conséquences

CHAPITRE I

BORDISME COMPLEXE ET ORIENTE. RAPPELS.

1 - LES GROUPES DE BORDISMES.

1.1. - Variétés faiblement complexes.

Soit ξ un fibré vectoriel réel de rang $2k$, sur un espace topologique X ; $F_x \cong \mathbb{R}^{2k}$, la fibre au-dessus du point $x \in X$.

Une prestructure complexe sur ξ [cf. 1 et 2], est la donnée d'un morphisme de fibré :

$$J : \xi \rightarrow \xi$$

tel que :

$$J_x : F_x \rightarrow F_x$$

vérifie :

$$J_x^2 = - \text{Id}_{F_x}$$

Une structure complexe sur ξ est alors la donnée d'une classe d'homotopie d'une telle prestructure.

1.1.1. - Définition. - Une variété différentiable est dite faiblement complexe, si son fibré tangent stable est muni d'une structure complexe.

Dans la suite on appellera, pour simplifier, une variété faiblement complexe : une U-variété.

Soient M^n et M'^n deux U-variétés, $T(M^n)$ et $T(M'^n)$ leur fibré tangent respectivement ; supposons donné un difféomorphisme :

$$f : M^n \rightarrow M'^n$$

Si on note df l'application linéaire tangente induite par f , et par $(2k-n)I$ le fibré trivial de rang $(2k-n)$ sur M^n et M'^n , on a l'application :

$$Id \oplus df : (2k-n)I \oplus T(M^n) \rightarrow (2k-n)I \oplus T(M'^n)$$

Désignons par J et J' les classes d'homotopies d'applications, qui définissent respectivement les structures faiblement complexes des U -variétés M^n et M'^n .

1.1.2. - Définition. - On dit que le difféomorphisme f préserve les structures faiblement complexes de M^n et M'^n , ou bien que f est un U -difféomorphisme, si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (2k-n)I \oplus T(M^n) & \xrightarrow{Id \oplus df} & (2k-n)I \oplus T(M'^n) \\ \downarrow J & & \downarrow J' \\ (2k-n)I \oplus T(M^n) & \xrightarrow{Id \oplus df} & (2k-n)I \oplus T(M'^n) \end{array}$$

1.2. - Les groupes de bordisme orienté et complexe.

Supposons fixé un espace topologique X ; soit M^n une variété orientée compacte et sans bord (respectivement une U -variété compacte sans bord) et f une application continue :

$$f : M^n \rightarrow X$$

On a [cf. 1 et 4] .

1.2.1. - Définition. - Le couple (M^n, f) est appelé une variété singulière, dans l'espace topologique X .

Une variété singulière compacte (M^n, f) , dans X , est dite un bord, s'il existe une variété compacte à bord W^{n+1} et une application continue F :

$$F : W^{n+1} \rightarrow X$$

telle que :

$$(i) \quad M^n = \partial W^{n+1}$$

$$(ii) \quad F/M^n = f$$

Entre variétés singulières sans bord, on définit la relation d'équivalence suivante :

Deux variétés singulières orientées (respectivement deux U-variétés singulières). (B^n, f) et (C^n, g) , dans X , sont dites bordantes si la somme disjointe : $(B^n \cup -C^n, f \cup g)$ est un bord dans X ; $-C^n$ étant la variété C^n munie de l'orientation opposée.

L'ensemble des classes d'équivalences des variétés singulières de dimension n , est muni d'une structure de groupe abélien noté Ω_n^{SO} dans le cas orienté, $\Omega_n^U(X)$ dans le cas complexe.

La classe de (M^n, f) sera notée : $[M^n, f]$

Le foncteur Ω_* , définit une théorie d'homologie généralisée, dont les groupes de coefficients sont les groupes de Thom [cf. 10] notés $\Omega_n^{SO}(pt) = \Omega_n^{SO}$ pour le bordisme orienté ; dans le cas complexe les groupes de coefficients sont les groupes de Milnor [cf. 8] notés $\Omega_n^U(pt) = \Omega_n^U$.

On notera dans la suite $\tilde{\Omega}$, le bordisme réduit.

2 - LES GROUPES DE BORDISME EQUIVARIANT.

Soit G un groupe fini opérant différenciablement et sans point fixe sur une variété M^n .

On supposera dans la suite de ce travail, les variétés M^n toujours compacte sans bord.

On a [cf. 3 et 4] :

2.1. - Définition. - Une G -variété principale orientée et la donnée d'un couple (G, M^n) , où G opère sans point fixe sur la variété orientée M^n , comme un groupe de difféomorphisme de M^n préservant l'orientation de M^n .

2.2. - Définition. - Une G -variété principale faiblement complexe est la donnée d'un couple (G, M^n) , où G opère sans point fixe sur la U -variété M^n , comme un groupe de U -difféomorphisme de M^n .

Une G -variété principale (G, M^n) est dite un bord équivariant si il existe une G -variété principale à bord (G, W^{n+1}) telle que :

$$(G, \partial W^{n+1}) = (G, M^n)$$

On définit entre G -variétés principales sans bord la relation d'équivalence suivante :

Deux G -variétés principales orientées (G, B^n) et (G, C^n) (respectivement : deux G -variétés principales faiblement complexes) sont dites un bord équivariant si la somme disjointe $(G, B^n \cup -C^n)$ est un bord équivariant.

L'ensemble des classes d'équivalence des G -variétés singulières en dimension n , forme un groupe abélien noté : $\Omega_n^{SO}(G)$ dans le cas orienté, $\Omega_n^U(G)$ dans le cas complexe.

La classe de (G, M^n) sera notée : $[G, M^n]$

Soit B_G un espace classifiant, pour le groupe G et (G, M^n) une G -variété principale.

Considérons l'espace des orbites M^n/G et l'application classifiante :

$$f : M^n/G \rightarrow B_G$$

On a [cf. 3 et 4] :

2.3. - Proposition.- L'application $\phi : \Omega_n^{SO}(G) \rightarrow \Omega_n^{SO}(B_G)$ (respectivement $\phi : \Omega_n^U(G) \rightarrow \Omega_n^U(B_G)$) définie par :

$$\phi([G, M^n]) = [M^n/G, f]$$

est alors un isomorphisme de groupe.

On identifiera dans tout ce qui suit, $\Omega_n(G)$ et $\Omega_n(B_G)$

3 - LA SUITE SPECTRALE DE BORDISME.

On a [cf. 1 et 4] :

3.1. - Proposition.- Pour tout C.W. complexe X et pour les théories Ω_*^{SO} et Ω_*^U , il existe une suite spectrale :

$$E_{p,q}^2(X) = H_p(X, \Omega_q) \Rightarrow \Omega_{p+q}(X)$$

Soit l'homomorphisme naturel de Thom-Steenrod :

$$\mu : \Omega_n(X) \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z})$$

défini par :

$$\mu[M^n, f] = \sigma(M^n) ,$$

où $\sigma(M^n)$ est la classe fondamentale de variété M^n .

On a :

3.2. - Proposition.- La suite spectrale précédente est triviale si et seulement si, l'homomorphisme de Thom-Steenrod, est surjectif pour tout entier n .

On a, la proposition, [cf. 5], qui nous donne un critère de trivialité de la suite spectrale précédente :

3.3. - Proposition.- Si G est un groupe fini, vérifiant :

$$H_{2i}(G, \mathbb{Z}) = 0, \forall i > 0$$

alors la suite spectrale :

$$E_{p,q}^2(G) = H_p(G, \Omega_q^U) \Rightarrow \Omega_{p+q}^U(G)$$

est triviale.

Si G un groupe fini, ne contenant pas de torsion paire et vérifiant :

$$H_{2i}(G, \mathbb{Z}) = 0, \forall i > 0$$

alors la suite spectrale :

$$E_{p,q}^2(G) = H_p(G, \Omega_q^{SO}) \Rightarrow \Omega_{p+q}^{SO}(G)$$

est triviale.

Considérons maintenant le Ω_*^U -module gradué : $\Omega_*^U(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^U(X)$, où X est un C.W. complexe à squelettes finis, en toute dimension.

On a le lemme suivant :

3.4. - Lemme. - Supposons que la suite spectrale associée à X , soit triviale; soit $\{C_n^i\}_n$ un système de générateurs homogènes de $H_*(X; \mathbb{Z})$ et soit $\{\gamma_n^i\}_n$ une famille d'éléments de $\Omega_*^U(X)$, tels que : $\mu(\gamma_n^i) = C_n^i$, alors $\{\gamma_n^i\}_n$ engendrent $\Omega_*^U(X)$ en tant que Ω_*^U -module.

CHAPITRE II

BORDISME COMPLEXE EQUIVARIANT DU GROUPE DES QUATERNIONS .

Dans ce chapitre, on notera par $\Omega_n(X)$ les groupes de bordisme complexe.

1 - ORDRE DES GROUPE $\tilde{\Omega}_k(Q8)$.

Soit $Q8$ le groupe des huit quaternions :

$$(\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k)$$

Il est muni de la multiplication habituelle.

1.1. - Lemme.- Les groupes d'homologie entière de $Q8$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} H_0(Q8; \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} \\ H_{2i}(Q8; \mathbb{Z}) &= 0, \quad \text{pour } i > 0 \\ H_{4n-1}(Q8; \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}_8, \quad \text{pour } n \geq 1 \\ H_{4n+1}(Q8; \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad \text{pour } n \geq 0 \end{aligned}$$

Puisque $H_{2i}(Q8; \mathbb{Z}) = 0$, pour $i > 0$, il s'en suit (proposition 3.3. du chapitre I) que la suite spectrale de bordisme est triviale ; on peut alors calculer l'ordre des groupes $\tilde{\Omega}_k(Q8)$.

On a, en notant : $|\tilde{\Omega}_k(Q8)|$ l'ordre de $\tilde{\Omega}_k(Q8)$:

$$|\tilde{\Omega}_{2n+1}(Q8)| = \prod_{p=0}^n |H_{2p+1}(Q8; \Omega_{2(n-p)})|$$

Mais [cf. 8], $\Omega_{2(n-p)}$ est un groupe libre de rang $\pi(n-p)$, $\pi(n-p)$ étant le nombre de partitions de l'entier $(n-p)$, et $\Omega_{2i+1} = 0$

$$|H_{2p+1}(Q8; \Omega_{2(n-p)})| = |H_{2p+1}(Q8; \mathbb{Z})|^{\pi(n-p)}$$

et compte tenu du lemme précédent :

$$|\tilde{\Omega}_{4n+1}(Q8)| = (2^2)^{\sum_{i=0}^{n-1} \pi(2n-2i)} \times (2^3)^{\sum_{j=1}^{n-1} \pi(2n-2j+1)}$$

$$|\tilde{\Omega}_{4n-1}(Q8)| = (2^2)^{\sum_{i=1}^{n-1} \pi(2n-2i+1)} \times (2^3)^{\sum_{j=0}^{n-1} \pi(2n-2j)}$$

$$|\tilde{\Omega}_{2n}(Q8)| = 0$$

2 - LES HOMOMORPHISMES ι ET t EN HOMOLOGIE ORDINAIRE.

Soit G un groupe fini quelconque, H un sous-groupe de G ; on a [cf. 6] , les homomorphismes de groupes :

$$t : H_p(G; \mathbb{Z}) \rightarrow H_p(H; \mathbb{Z})$$

$$\iota : H_p(H; \mathbb{Z}) \rightarrow H_p(G; \mathbb{Z})$$

t étant le transfert, et ι induit par l'inclusion de H dans G .

On a les deux propositions suivantes :

2.1.1. - Proposition. - L'homomorphisme composé :

$$\iota \circ t : H_p(G; \mathbb{Z}) \rightarrow H_p(G; \mathbb{Z})$$

est la multiplication par l'indice de H dans G .

2.1.2. - Proposition. - Si G est un groupe à cohomologie périodique, de période q , et si $g \in H_{q-1}(G; \mathbb{Z})$ est un générateur maximal, alors $t(g) \in H_{q-1}(H; \mathbb{Z})$ est aussi un générateur maximal.

3 - LES HOMOMORPHISMES $\hat{i}$ ET $\hat{t}$ EN BORDISME EQUIVARIANT.

On définit [cf. 4] , en théorie de bordisme équivariant des homomorphismes $\hat{i}$ et $\hat{t}$, analogues aux homomorphismes i et t en homologie ordinaire, du paragraphe précédent.

Soit G un groupe fini quelconque, H un sous groupe de G ; on va définir les deux homomorphismes de Ω_* -module :

$$\hat{i} : \Omega_*(H) \rightarrow \Omega_*(G)$$

$$\hat{t} : \Omega_*(G) \rightarrow \Omega_*(H)$$

3.1. - Définition de $\hat{t}$.

On considère une G -variété principale (G, M^n) ; le sous groupe H opère sur M^n sans point fixe, par restriction on pose alors :

$$\hat{t}[G, M^n] = [H, M^n]$$

avec $[G, M^n] \in \Omega_n(G)$, $[H, M^n] \in \Omega_n(H)$.

3.2. - Définition de $\hat{i}$.

On part d'une H -variété principale (H, M^n) ; on considère la variété produit :

$$G \times M^n$$

G étant considéré comme variété de dimension zéro.

On fait opérer H sur $G \times M^n$ par :

$$h(g, x) = (g h^{-1}, hx) , x \in M^n , g \in G , h \in H.$$

Cette action de H sur $G \times M^n$ est évidemment sans point fixe.

Dans l'espace des orbites $\frac{G \times M^n}{H}$, notons par $[g, x]$ la classe de

$$(g, x) \in G \times M^n$$

On fait opérer G sur $\frac{G \times M^n}{H}$ par :

$$\hat{g}[g, x] = [gg, x]$$

Cette action de G sur $\frac{G \times M^n}{H}$ est aussi sans point fixe ; on obtient alors la G -variété principale $(G, \frac{G \times M^n}{H})$.

On définit $\hat{i}$ par :

$$\hat{i}[H, M^n] = [G, \frac{G \times M^n}{H}]$$

Remarque. - On voit, par définition, que $\hat{i}$ et $\hat{t}$ sont des homomorphismes de Ω_* -module, de degré zéro.

3.3. - Calcul du composé $\hat{t} \circ \hat{i}$.

Soit G un groupe fini quelconque et H un sous groupe normal de G .

On désigne par $A(G)$ le groupe des automorphismes de G et par $I(G)$ le sous groupe normal des automorphismes intérieurs.

Nous allons définir une représentation de $\frac{A(G)}{I(G)}$, dans le Ω_* -module $\Omega_*(G)$, [cf. 4].

Soit l'homomorphisme noté ϕ :

$$\phi : A(G) \times \Omega_n(G) \rightarrow \Omega_n(G)$$

défini par :

$$\phi(\gamma, [G, M^n]) = \gamma_*[G, M^n], \quad \gamma \in A(G)$$

où $\gamma_*[G, M^n]$ est la classe d'équivalence dans $\Omega_n(G)$, de la G -variété principale $\gamma_*(G, M^n)$, $\gamma_*(G, M^n)$ étant la G -variété M^n sur laquelle G opère par :

$$g^*x = \gamma(g).x, \quad g \in G, \quad x \in M^n$$

La G -variété principale (G, M^n) étant la variété M^n sur laquelle l'action de G est donnée par :

$$g^* x = g.x, \quad g \in G, \quad x \in M^n.$$

On pose donc :

$$\gamma_*[G, M^n] = [\gamma_*(G, M^n)].$$

Maintenant nous allons voir que $I(G)$ opère trivialement sur $\Omega_n(G)$.

En effet :

$$\exists h \in G, \forall g \in G, \gamma(g) = h g h^{-1}$$

Définissons une application :

$$m : M^n \rightarrow M^n$$

par :

$$m(x) = h.x, \quad h \in G, \quad x \in M^n.$$

L'application m est un U -difféomorphisme de (G, M^n) sur $[\gamma_*(G, M^n)]$, car on a alors :

$$g^* m(x) = h g h^{-1} h x = h g.x = m(g.x)$$

Cette égalité montre que m est U -difféomorphisme équivariant ; donc pour $\gamma \in I(G)$

$$\gamma_*[G, M^n] = [G, M^n]$$

On a donc une représentation de $\frac{A(G)}{I(G)}$ dans le Ω_* -module $\Omega_*(G)$. Elle va nous permettre de calculer $\hat{t} \circ \hat{i}$.

Calcul de $\hat{t} \circ \hat{i}$.

On a l'homomorphisme naturel

$$\tau : G \rightarrow A(H)$$

défini par :

$$\tau(g) = \{h \rightarrow g h g^{-1}\}, h \in H, g \in G.$$

Il est clair que si $h \in H$, l'homomorphisme précédent prend ses valeurs dans $I(H)$.

On déduit donc un homomorphisme naturel que nous noterons encore τ :

$$\tau : G/H \rightarrow \frac{A(H)}{I(H)}$$

Considérons le composé $\hat{t} \circ \hat{i}$; pour $[H, M^n] \in \Omega_n(H)$, on a par définition :

$$\hat{t} \circ \hat{i}[H, M^n] = [H, \frac{G \times M^n}{H}]$$

L'action de H sur $\frac{G \times M^n}{H}$ étant la restriction de celle de G .

Cette action est donc donnée par :

$$h[g, x] = [hg, x], h \in H, [g, x] \in \frac{G \times M^n}{H}$$

on a aussi :

$$[hg, x] = [gg^{-1} h g, x] = [g, g^{-1} h g x]$$

puisque $g^{-1} h g \in H$; H étant un sous groupe normal de G .

L'action de H sur $\frac{G \times M^n}{H}$ sera notée dans la suite par :

$$h[g, x] = [g, g^{-1} h g x]$$

Nous allons montrer maintenant comment H opère sur la variété produit $G/H \times M^n$, et exprimer dans un sens qui sera précisé plus loin, $[H, G/H \times M^n]$

en fonction de $[H, M^n]$.

Soit l'homomorphisme naturel :

$$\eta : G \rightarrow \frac{G}{H}$$

G/H étant fini, soient : $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_k$ ses éléments. Choisissons : $g_1, g_2, \dots, g_k$ dans G tels que :

$$\eta(g_j) = \bar{g}_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

Considérons la variété $G/H \times M^n$ et définissons sur elle une action de H par :

$$h(\eta(g_j), x) = (\eta(g_j), g_j^{-1} h g_j x)$$

Cette action est bien définie puisque H est normal dans G . Pour g_j fixé, la variété $\eta(g_j) \times M^n$ est laissée invariante par l'action de H .

Avec les notations précédentes, l'action de H sur $\eta(g_j) \times M^n \cong M^n$, n'est autre que $\tau(\eta(g_j))_* (H, M^n)$ puisque $\tau(\eta(g_j)) \in \frac{A(H)}{I(H)}$.

On en conclut donc que :

$$[H, G/H \times M^n] = \sum_{k=1}^k \tau(\eta(g_j))_* [H, M^n]$$

On a le lemme suivant [cf. 4].

3.3.1. - Lemme. - Dans $\Omega_n(H)$, on a :

$$[H, \frac{G \times M^n}{H}] = [H, G/H \times M^n]$$

Il en résulte alors :

3.3.2. - Théorème. - Si H est un sous groupe normal de G , alors :

$$\hat{t} \circ \hat{i}[H, M^n] = \sum_{j=1}^k \tau(\eta(g_j))_* [H, M^n].$$

Remarque.- Le composé $\hat{t} \circ \hat{i}$, s'exprime donc en fonction de l'action de $\frac{A(H)}{I(H)}$ sur le Ω_* - module $\dot{\Omega}_*(H)$.

3.3.3. - Corollaire.- Si G est un groupe fini abélien, H un sous groupe de G , alors le composé $\hat{t} \circ \hat{i}$ est la multiplication par l'indice de H dans G .

On a la proposition [cf. 4].

3.3.4. - Proposition.- Pour tout groupe G et tout sous groupe H , le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_n(H) & \xrightarrow{\hat{i}} & \Omega_n(G) & \xrightarrow{\hat{t}} & \Omega_n(H) \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ H_n(H; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{l} & H_n(G, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{t} & H_n(H, \mathbb{Z}) \end{array}$$

est commutatif.

4 - APPLICATION AU GROUPE Q8 DES QUATERNIONS.

Soit donc :

$$Q8 = (\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k)$$

Soit π_1 le sous groupe de $Q8$, engendré par l'élément i ; il est cyclique d'ordre quatre, donc isomorphe à $\mathbb{Z}_4$. Il est facile de voir en outre que π_1 est normal dans $Q8$.

Les automorphismes de π_1 , sont les homomorphismes qui appliquent un générateur sur un autre. Comme π_1 admet les deux générateurs i et $i^3 = -i$, il s'en suit que $A(\pi_1)$ le groupe des automorphismes de π_1 est :

$$\begin{aligned} \text{Id}_{\pi_1} : \pi_1 &\rightarrow \pi_1 \\ \alpha : \pi_1 &\rightarrow \pi_1 \end{aligned}$$

l'automorphisme α étant défini par :

$$\alpha(i) = -i$$

$$\text{Donc } A(\pi_1) = (\text{Id}_{\pi_1}, \alpha) \simeq \mathbb{Z}_2$$

D'autre part puisque π_1 est abélien on a :

$$I(\pi_1) = 0$$

Soit l'application naturelle, définie au paragraphe précédent :

$$\tau : \frac{Q8}{\pi_1} \rightarrow \frac{A(\pi_1)}{I(\pi_1)} = A(\pi_1)$$

Le groupe $Q8$ ayant huit éléments, il s'en suit :

$$\frac{Q8}{\pi_1} \simeq \mathbb{Z}_2$$

Dans $\frac{Q8}{\pi_1}$, les seuls éléments distincts sont les classes des éléments 1 et j ,
puisque dans $\frac{Q8}{\pi_1}$

$$j = -j = k = -k.$$

En notant $\bar{1}$ et $\bar{j}$ les classes respectives de 1 et j , on a :

$$\frac{Q8}{\pi_1} = (\bar{1}, \bar{j})$$

4.1. - Lemme.- L'application $\tau : \frac{Q8}{\pi_1} \rightarrow A(\pi_1)$ est un isomorphisme.

Démonstration.-

Par définition on a :

$$\tau(g) = (h \rightarrow g h g^{-1})$$

donc ici :

$$\tau(\bar{i}) = (h \rightarrow i h i^{-1} = h), \quad h \in \pi_1$$

et

$$\tau(\bar{i}) = \text{Id}_{\pi_1}$$

$$\tau(\bar{j}) = (h \rightarrow j h j^{-1})$$

Mais $j^{-1} = -j$, pour calculer $\tau(\bar{j})$, il suffit de le faire pour $h = i$,
générateur de π_1 .

donc :
$$\tau(\bar{j}) = (i \rightarrow j i (-j) = -i) = \alpha$$

d'où :

$$\tau(\bar{j}) = \alpha$$

Remarque 1.- On a un résultat analogue au lemme 4.1., lorsqu'on prend
le sous groupe π_2 de $Q8$, engendré par l'élément j .

$$\frac{G}{\pi_2} \simeq A(\pi_2) \simeq \mathbb{Z}_2$$

Remarque 2.- Compte tenu du lemme 4.1. et du théorème 3.3.2, nous
donnerons, dans le chapitre suivant, le calcul explicite du composé $\hat{t} \circ \hat{i}$, dans
le cas du groupe $Q8$ et de ses sous groupes normaux π_1 et π_2 .

CHAPITRE III

GENERATEURS DE $\tilde{\Omega}_*(Q8)$.

1 - GENERATEURS DU Ω_* -MODULE $\tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_{2^k})$

Afin de déterminer les générateurs de $\tilde{\Omega}_*(Q8)$, nous allons déterminer ceux de $\tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_4)$ et plus généralement ceux de $\tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_{2^k})$, pour $k \geq 1$. Il s'agit dans ce chapitre de bordisme complexe.

1.1. Cas où $k = 1$.

On a le résultat : [cf. 3] , S^{2n+1} étant les sphères de dimension $2n+1$:

1.1.1. - Proposition.- L'ensemble $([\mathbb{Z}_2, S^{2n+1}])_{n \geq 0}$ est un système de générateurs de $\tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_2)$ et l'ordre de $[\mathbb{Z}_2, S^{2n+1}]$ dans $\Omega_{2n+1}(\mathbb{Z}_2)$, est égal à 2^{n+1} .

1.2. Cas où $k \geq 2$.

Considérons la représentation de $\mathbb{Z}_{2^k}$, dans le groupe unitaire $U(n)$, des matrices $n \times n$ complexe :

$$\sigma : \mathbb{Z}_{2^k} \rightarrow U(n)$$

donnée par les matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{2^k}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & e^{\frac{2i\pi}{2^k}} \end{pmatrix}$$

On sait que, [cf. 7], le groupe $\mathbb{Z}_k$ opère sans point fixe sur les sphères S^{2n+1} ; on supposera S^{2n+1} plongée dans $\mathbb{C}^{n+1}$

$$S^{2n+1} = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \text{ avec } \sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i = 1, \quad z_i \in \mathbb{C}.$$

Il est clair que sur S^{2n+1} , ainsi plongée, le groupe $\mathbb{Z}_k$ opère par σ , comme un groupe de U-difféomorphismes (S^{2n+1} étant muni de sa structure naturelle de U-variété).

On a alors, de façon analogue à [4] :

1.2.1. - Proposition. - L'ensemble $([\mathbb{Z}_{2^k}, S^{2n+1}])$ est un système de générateurs du Ω_* -module $\Omega_*^{\gamma}(\mathbb{Z}_{2^k})$.

Démonstration. -

Les groupes d'homologie entière de $\mathbb{Z}_{2^k}$, $k \geq 1$ sont :

$$H_0(\mathbb{Z}_{2^k}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

$$H_{2i}(\mathbb{Z}_{2^k}, \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{pour } i \geq 1$$

$$H_{2i+1}(\mathbb{Z}_{2^k}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{2^k} \quad \text{pour } i \geq 0$$

Considérons le sous groupe $\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathbb{Z}_{2^k}$ (inclusion induite par la multiplication par 2^{k-1}).

Le composé $i \circ t$:

$$i \circ t : H_{2n+1}(\mathbb{Z}_{2^k}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{2n+1}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{2n+1}(\mathbb{Z}_{2^k}, \mathbb{Z})$$

est la multiplication par 2^{k-1} , d'après la proposition 2.1.1., chapitre II. Il en résulte que $I_m(i \circ t)$ possède deux éléments, donc que t est surjective et i injective.

D'autre part, par la proposition 3.3.4, chapitre II, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega}_{2n+1}(\mathbb{Z}_{2^k}) & \xrightarrow{\hat{t}} & \tilde{\Omega}_{2n+1}(\mathbb{Z}_2) \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ \tilde{H}_{2n+1}(\mathbb{Z}_{2^k}) & \xrightarrow{t} & \tilde{H}_{2n+1}(\mathbb{Z}_2) \end{array}$$

nous donne :

$$\hat{t}[\mathbb{Z}_{2^k}, S^{2n+1}] = [\mathbb{Z}_2, S^{2n+1}]$$

Mais puisque $H_{2i}(\mathbb{Z}_{2^k}, \mathbb{Z}) = 0$, $i > 0$, la suite spectrale

$$E_{p,q}^2(\mathbb{Z}_{2^k}) = H_p(\mathbb{Z}_{2^k}, \mathbb{Z}) \Rightarrow \Omega_{p+q}(\mathbb{Z}_{2^k})$$

est triviale [proposition 3.3. chapitre I].

Par la proposition 1.1.1. chapitre III, $\mu[\mathbb{Z}_2, S^{2n+1}]$ est un générateur de $H_{2n+1}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}_2$, donc $\mu[\mathbb{Z}_{2^k}, S^{2n+1}]$ est aussi un générateur de $H_{2n+1}(\mathbb{Z}_{2^k}, \mathbb{Z})$; enfin par le lemme 3.4, du chapitre I, $([\mathbb{Z}_{2^k}, S^{2n+1}])_{n \geq 0}$ est un système de générateur de $\Omega_*(\mathbb{Z}_{2^k})$.

On a aussi pour $\mathbb{Z}_{2^k} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{2^{k+1}}$, induit par la multiplication par 2 :

1.2.2. - Proposition.- Les homomorphismes $\hat{t}$ et $\hat{i}$:

$$\begin{array}{ccc} \hat{t} : \tilde{\Omega}_{2n+1}(\mathbb{Z}_{2^{k+1}}) & \rightarrow & \tilde{\Omega}_{2n+1}(\mathbb{Z}_{2^k}) \\ \hat{i} : \tilde{\Omega}_{2n+1}(\mathbb{Z}_{2^k}) & \rightarrow & \tilde{\Omega}_{2n+1}(\mathbb{Z}_{2^{k+1}}) \end{array}$$

sont respectivement surjectif et injectif.

Démonstration.-

Pour montrer que $\hat{i}$ est injectif, on utilise le fait que :

$$\begin{array}{ccc} i \otimes \text{Id} : H_p(\mathbb{Z}_{2^k}, \mathbb{Z}) \otimes \Omega_q & \rightarrow & H_p(\mathbb{Z}_{2^{k+1}}, \mathbb{Z}) \otimes \Omega_q \\ S|| & & S|| \\ E_{p,q}^2(\mathbb{Z}_{2^k}) & & E_{p,q}^2(\mathbb{Z}_{2^{k+1}}) \end{array}$$

est un monomorphisme et que les suites spectrales associées à $\mathbb{Z}_2^k$ et $\mathbb{Z}_2^{k+1}$ sont triviale

Pour $\hat{t}$, il suffit de voir que :

$$\hat{t} [\mathbb{Z}_2^{k+1}, S^{2n+1}] = [\mathbb{Z}_2^k, S^{2n+1}]$$

Comme $\hat{t}$ est un homomorphisme de Ω_* - module, et que :

$$([\mathbb{Z}_2^{k+1}, S^{2n+1}])_n \text{ engendre } \Omega_*(\mathbb{Z}_2^{k+1}), ([\mathbb{Z}_2^k, S^{2n+1}])_n$$

engendre $\tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_2^k)$, il en résulte que $\hat{t}$ est surjectif.

2 - GENERATEURS DE $\tilde{\Omega}_*(Q_8)$.

Soit Q_8 le groupe des quaternions à huit éléments et π_1 le sous groupe engendré par l'élément i .

2.1. - Générateurs de dimension $4n+1$.

On sait que [cf. 7], $H_1(Q_8; \mathbb{Z}) = \frac{Q_8}{[Q_8:Q_8]}$, avec $[Q_8:Q_8]$ le sous groupe des commutateurs de Q_8 .

$$[Q_8:Q_8] \cong \mathbb{Z}_2$$

Donc $\frac{Q_8}{[Q_8:Q_8]} = (\{1\}, \{i\}, \{j\}, \{k\}), \{\alpha\}$ désignant la classe de $\alpha \in Q_8$,

dans $\frac{Q_8}{[Q_8:Q_8]}$. Dans $\frac{Q_8}{[Q_8:Q_8]}$, tout élément est d'ordre deux ; on identifiera

désormais : $\frac{Q_8}{[Q_8:Q_8]}$ à $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, par l'isomorphisme f défini par :

$$f(\{i\}) = (1,0)$$

$$f(\{j\}) = (0,1)$$

Soit g_1 (respectivement g_2) l'isomorphisme :

$$g_1 : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \pi_1$$

(respectivement $g_2 : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \pi_2$) qui applique la classe de 1 modulo 4 sur i (resp. j).

On identifie $H_1(\pi_1, \mathbb{Z})$ à π_1 , $H_1(\pi_2, \mathbb{Z})$ à π_2 et $H_1(Q8, \mathbb{Z})$ à $\frac{Q8}{[Q8:Q8]}$

Soient les homomorphismes :

$$i_1 : H_1(\pi_1; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(Q8; \mathbb{Z})$$

$$i_2 : H_1(\pi_2; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(Q8; \mathbb{Z})$$

On a :

$$(i_1 \circ g_1) (1 \text{ modulo } 4) = (1, 0)$$

$$(i_2 \circ g_2) (1 \text{ modulo } 4) = (0, 1)$$

de sorte que $(i_1 \circ g_1) (\mathbb{Z}_4)$ est le premier facteur $\mathbb{Z}_2$ dans $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ et $(i_2 \circ g_2) (\mathbb{Z}_4)$ le second.

Dans le cas $n > 0$, l'homomorphisme i_1 (resp. i_2)

$$i_1 : H_{4n+1}(\pi_1, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{4n+1}(Q8; \mathbb{Z})$$

est le même que dans le cas $n = 0$, i_1 (resp. i_2) commutant avec les isomorphismes de périodicité :

$$H_1(Q8; \mathbb{Z}) \cong H_5(Q8; \mathbb{Z}) \cong \dots \cong H_{4n+1}(Q8; \mathbb{Z})$$

$$H_1(\pi_1; \mathbb{Z}) \cong H_5(\pi_1; \mathbb{Z}) \cong \dots \cong H_{4n+1}(\pi_1; \mathbb{Z})$$

Générateurs de $\Omega_*(Q8)$

On a :

$$\Omega_n(\pi_1) \cong \Omega_n(\mathbb{Z}_4)$$

Comme $([\mathbb{Z}_4, S^{2n+1}])_n$ engendre le Ω_* -module $\Omega_*(\mathbb{Z}_4)$ (proposition 1.2.1. chapitre III), donc $([\pi_1, S^{2n+1}])_n$ engendre aussi $\Omega_*(\pi_1)$.

De la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Omega_n(\pi_1) & \xrightarrow{\hat{i}_1} & \Omega_n(Q8) \\ \downarrow & & \downarrow \mu \\ H_n(\pi_1; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_1} & H_n(G; \mathbb{Z}) \end{array}$$

il s'en suit que $\mu[\mathbb{Z}_4, S^{4n+1}]$ étant un générateur de $H_{4n+1}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z})$, $\mu[\pi_1, S^{4n+1}]$ est aussi un générateur de $H_{4n+1}(\pi_1; \mathbb{Z})$; mais comme :

$$i_1 \circ \mu[\pi_1, S^{4n+1}] = \mu \circ \hat{i}_1[\pi_1, S^{4n+1}]$$

et que :

$$\mu \circ \hat{i}_1[\pi_1, S^{4n+1}] = \mu\left[Q8, \frac{Q8 \times S^{4n+1}}{\pi_1}\right]$$

par définition de $\hat{i}_1$, pour cette dernière égalité,

On a donc :

$$\mu\left[Q8, \frac{Q8 \times S^{4n+1}}{\pi_1}\right] = (1, 0) \in \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

Il en est de même pour le sous groupe π_2 ; nous avons cette fois ci :

$$\mu\left[Q8, \frac{Q8 \times S^{4n+1}}{1}\right] = (0, 1) \in \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

Les images par μ de $\left[Q8, \frac{Q8 \times S^{4n+1}}{\pi_1}\right]$ et de $\left[Q8, \frac{Q8 \times S^{4n+1}}{\pi_2}\right]$, sont les deux générateurs de $H_{4n+1}(Q8; \mathbb{Z})$

2.2. - Cas de la dimension $4n-1$

Le groupe $Q8$ opère sans point fixe sur les sphères de dimension $4n-1$ [cf. 7] . On supposera toujours que sur S^{4n-1} , $Q8$ opère par une représentation

dans $U(n)$.

On a :

$$H_{4n-1}(Q8; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_8, \text{ pour } n \geq 1$$

et d'après la proposition 2.1.1., chapitre I, le composé :

$$\iota_1 \circ t_1 : H_{4n-1}(Q8; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{4n-1}(\pi_1; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{4n-1}(Q8; \mathbb{Z})$$

est la multiplication par deux.

Mais puisque $\iota_1 \circ t_1$ a pour image : $(\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6})$ dans $\mathbb{Z}_8$, il s'en suit que t_1 est surjectif.

Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{4n-1}(Q8) & \xrightarrow{\hat{t}_1} & \Omega_{4n-1}(\pi_1) \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ H_{4n-1}(Q8; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{t_1} & H_{4n-1}(\pi_1; \mathbb{Z}) \end{array}$$

Nous donne :

$$\mu \circ \hat{t}_1 = t_1 \circ \mu$$

Puisque $t_1 \circ \mu$ est surjectif, $\mu \circ \hat{t}_1$ l'est aussi. Mais $\mu[\pi_1, S^{4n-1}]$ est un générateur de $H_{4n-1}(\pi_1; \mathbb{Z})$, il en résulte que, $\pi[Q8, S^{4n-1}]$ est un générateur de $H_{4n-1}(Q8; \mathbb{Z})$, l'application :

$$t_1 : H_{4n-1}(Q8; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{4n-1}(\pi_1; \mathbb{Z})$$

appliquant les générateurs du premier groupe dans ceux du second, (proposition 2.1.2, chapitre II).

En tenant compte de ce qui précède et du lemme 3.4. (chapitre I) on a :

2.3. - Théorème. - Le système constitué par les Q8-variétés principales :

$$([Q8, \frac{Q8 \times S^{4i+1}}{\pi_1}]_{i \geq 0}), ([Q8, \frac{Q8 \times S^{4i+1}}{\pi_2}]_{i \geq 0}), ([Q8, S^{4i-1}]_{i \geq 1})$$

engendre $\tilde{\Omega}_*(Q8)$ en tant que Ω_* -module.

CHAPITRE IV

SUR L'ORDRE DES GÉNÉRATEURS DE $\tilde{\Omega}_*(\mathbb{Q}_8)$

1 - CALCUL DE L'ORDRE DES GÉNÉRATEURS DE $\tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_{2^k})$

On définit comme dans [4], un homomorphisme de Smith :

$$\Delta : \Omega_{2n+1}(\mathbb{Z}_{2^k}) \rightarrow \Omega_{2n-1}(\mathbb{Z}_{2^k})$$

C'est un homomorphisme de Ω_* -module, de degré (-2) , surjectif. Considérons l'homomorphisme :

$$\iota : H_{2n+1}(\mathbb{Z}_{2^k}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{2n+1}(\mathbb{Z}_{2^{k+1}}; \mathbb{Z})$$

Il est clair que ι est injectif ; il applique un générateur de $H_{2n+1}(\mathbb{Z}_{2^k}; \mathbb{Z})$ dans deux fois un générateur de $H_{2n+1}(\mathbb{Z}_{2^{k+1}}; \mathbb{Z})$.

On a la proposition :

1.1. - Proposition. - L'ordre de $[\mathbb{Z}_{2^k}, S^1]$ est égal à 2^k et

$$\hat{\iota}[\mathbb{Z}_{2^k}, S^1] = 2[\mathbb{Z}_{2^{k+1}}, S^1]$$

Démonstration. -

On a :

$$\tilde{\Omega}_1(\mathbb{Z}_{2^k}) \cong \tilde{H}_1(\mathbb{Z}_{2^k}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{2^k}$$

donc

$$\mu : \tilde{\Omega}_1(\mathbb{Z}_{2^k}) \rightarrow \tilde{H}_1(\mathbb{Z}_{2^k}; \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme.

Du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{\Omega}_1(\mathbb{Z}_{2^k}) & \xrightarrow{\hat{i}} & \hat{\Omega}_1(\mathbb{Z}_{2^{k+1}}) \\
 ||s \downarrow \mu & & ||s \downarrow \mu \\
 \hat{H}_1(\mathbb{Z}_{2^k}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i} & \hat{H}_1(\mathbb{Z}_{2^{k+1}}; \mathbb{Z})
 \end{array}$$

et du fait que i est un monomorphisme, la proposition est démontrée.

1.2. - Proposition. - Si $[V^n] \in \Omega_n$, alors $[\mathbb{Z}_{2^k}, s^1] [V^n] = 0$ si et seulement si $[V^n] \in 2^k \Omega_n$.

Démonstration. -

Supposons le résultat vrai pour $k < r + 1$, et supposons :

$$[\mathbb{Z}_{2^{k+1}}, s^1] [V^n] = 0.$$

D'après la proposition 1.1.,

$$\hat{i}([\mathbb{Z}_{2^r}, s^1] [V^n]) = 2[\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^1] [V^n] = 0$$

Comme i est injectif :

$$[\mathbb{Z}_{2^r}, s^1] [V^n] = 0$$

donc :

$$[V^n] \in 2^r \Omega_n.$$

Il existe alors une variété M^n telle que :

$$[V^n] = 2^r [M^n]$$

On a :

$$2^{r-1} \hat{i}([\mathbb{Z}_{2^r}, s^1] [M^n]) = 2^{r-1} . 2 [\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^1] [M^n] = [\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^1] [V^n] = 0.$$

donc :

$$[\mathbb{Z}_{2^r, S^1}] [2^{r-1} M^n] = 0, \text{ par induction,}$$

On a alors :

$$[2^{r-1} M^n] \in 2^r \Omega_n ;$$

il existe donc une variété X^n , telle que :

$$2^{r-1} [M^n] = 2^r [X^n]$$

d'où

$$[V^n] = 2^r [M^n] = 2^{r+1} [X^n] \Rightarrow [V^n] \in 2^{r+1} \Omega_n .$$

La proposition 1.1, nous permet de définir une application :

$$\alpha : \frac{\Omega_{2j}}{2^k \Omega_{2j}} \rightarrow \Omega_{2j+1}(\mathbb{Z}_k)$$

par :

$$\alpha[V^{2j}] = [\mathbb{Z}_{2^k, S^1}] [V^{2j}]$$

α est un monomorphisme d'après la proposition 1.2.

On a :

1.3. - Proposition. - La suite :

$$0 \rightarrow \frac{\Omega_{2j}}{2^k \Omega_{2j}} \xrightarrow{\alpha} \Omega_{2j+1}(\mathbb{Z}_k) \xrightarrow{\Delta} \Omega_{2j-1}(\mathbb{Z}_k) \rightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. -

Il est clair que $\Delta \circ \alpha = 0$

On a aussi :

$$|\tilde{\Omega}_{2j+1}(\mathbb{Z}_{2^k})| = (2^k)^{\sum_{i=0}^j \text{rang } \Omega_{2i}}$$

$$|\tilde{\Omega}_{2j-1}(\mathbb{Z}_{2^k})| = (2^k)^{\sum_{i=0}^{j-1} \text{rang } \Omega_{2i}}$$

donc :

$$|\ker \Delta| = (2^k)^{\text{rang } \Omega_{2j}}$$

Comme :

$$\left| \frac{\Omega_{2j}}{2^k \Omega_{2j}} \right| = (2^k)^{\text{rang } \Omega_{2j}}$$

α est injectif et Δ surjectif, la suite est bien exacte.

1.4. - THEOREME.- Dans $\tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_{2^k})$, l'ordre de $[\mathbb{Z}_{2^k}, S^{2n-1}]$ est égal à 2^{k-1+n} .

Démonstration.-

Nous allons raisonner par récurrence sur k et n à la fois. Le résultat est vrai pour $k = 1$ et n quelconque, d'après la proposition 1.1.1, chapitre III.

Le théorème est vrai pour k quelconque et $n = 1$, d'après la proposition 1.1. chapitre IV.

Supposons le résultat vrai :

- 1) pour $k < r + 1$, et pour n quelconque, $n \geq 1$
- 2) pour $k = r + 1$, et pour $n < s$

Nous allons montrer que le théorème est vrai pour $k = r + 1$, $n = s$, donc montrer que le théorème est vrai pour $[\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, S^{2s-1}]$.

Considérons :

$$A = \hat{i}[\mathbb{Z}_{2^r}, s^{2s-1}] - 2[\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^{2s-1}]$$

$$A \in \tilde{\Omega}_{2s-1}(\mathbb{Z}_{2^{r+1}}).$$

des homomorphismes $\hat{i}$ et $\hat{t}$ correspondant à l'inclusion

$$\mathbb{Z}_{2^r} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{2^{r+1}}$$

Comme $\hat{t} \circ \hat{i}$ est la multiplication par 2, donc :

$$\hat{t}(A) = 0$$

D'autre part :

$$\mu(\hat{i}[\mathbb{Z}_{2^r}, s^{2s-1}]) = \iota(\mu[\mathbb{Z}_{2^r}, s^{2s-1}])$$

mais $\mu[\mathbb{Z}_{2^r}, s^{2s-1}]$ étant un générateur de $H_{2s-1}(\mathbb{Z}_{2^r}; \mathbb{Z})$ et ι , appliquant le générateur de $H_{2s-1}(\mathbb{Z}_{2^k}; \mathbb{Z})$ dans deux fois le générateur de $H_{2s-1}(\mathbb{Z}_{2^{r+1}}; \mathbb{Z})$, donc :

$$\mu(\hat{i}[\mathbb{Z}_{2^r}, s^{2s-1}]) = 2(\mu[\mathbb{Z}_{2^r}, s^{2s-1}])$$

Puisque :

$\mu(A) = 0$, on peut alors écrire A de la façon suivante :

$$(i) \quad A = 2^{r+1}[\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^{2s-1}] [V^0] + \sum_{i=1}^s [\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^{2(s-i)}] [V^{2i}]$$

En appliquant $\hat{t}$, on obtient :

$$(ii) \quad \hat{t}(A) = 2^{r+1}[\mathbb{Z}_{2^r}, s^{2s-1}] [V^0] + \sum_{i=1}^s [\mathbb{Z}_{2^r}, s^{2(s-i)}] [V^{2i}] = 0$$

appliquons Δ à (ii), $(s-2)$ fois, on a :

$$2^{r+1}[\mathbb{Z}_{2^r}, s^3] [V^0] + [\mathbb{Z}_{2^r}, s^1] [V^2] = 0$$

Mais par hypothèse $[\mathbb{Z}_{2^r}, s^3]$ est d'ordre 2^{r+1} , donc

$$[\mathbb{Z}_{2^r}, s^1] [V^2] = 0$$

La proposition 1.2., chapitre IV, implique :

$$[V^2] \in 2^r \Omega_2$$

Il existe donc une variété $M^2 \in \Omega_2$, telle que :

$$[V^2] = 2^r [M^2]$$

Ecrivons A comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{1}[\mathbb{Z}_{2^r}, s^{2s-1}] - 2[\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^{2s-1}] &= 2^{r+1}[\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^{2s-1}] [V^0] + 2^r[\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^{2s-3}] [V^2] \\ &\quad + \sum_{i=2}^s [\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^{2(s-i)-1}] [V^{2i}] \end{aligned}$$

Par hypothèse l'ordre de $[\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^{2(s-i)-1}]$ est 2^{r+s-i} .

Multiplions les deux membres de l'égalité précédente par : 2^{r+s-2}

On obtient :

$$\begin{aligned} 2^{r+s-2} \hat{1}[\mathbb{Z}_{2^r}, s^{2s-1}] - 2^{r+s-1}[\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^{2s-1}] &= 2^{2r+s-1}[\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^{2s-1}] [V^0] + \\ &\quad + 2^{2r+s-2}[\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^{2s-3}] [V^2] \end{aligned}$$

les autres termes étant nuls.

Mais comme $r \geq 1$, l'égalité se simplifie

$$(iii) \quad 2^{r+s-2} \hat{1}[\mathbb{Z}_{2^r}, s^{2s-1}] - 2^{r+s-1}[\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^{2s-1}] = 2^{2r+s-1}[\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^{2s-1}] [V^0]$$

appliquons Δ , le second membre devient :

$$2^{2r+s-1}[\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, s^{2s-3}] [V^0] = 0$$

par hypothèse de récurrence.

Donc :

$$2^{2r+s-1} [\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, S^{2s-1}] [V^0] \in \ker \Delta .$$

Il peut s'écrire, proposition 1.3., chapitre IV,

$$2^{2r+s-1} [\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, S^{2s-1}] [V^0] = 2^r [\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, S^1] [X^{2s-2}]$$

l'égalité (iii) s'écrit donc :

$$(iv) \quad 2^{r+s-2} \hat{i} [\mathbb{Z}_{2^r}, S^{2s-1}] - 2^{r+s-1} [\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, S^{2s-1}] = 2^r [\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, S^1] [X^{2s-2}]$$

l'ordre de $[\mathbb{Z}_{2^r}, S^{2s-1}]$ est : 2^{r-1+s} ; multiplions l'égalité (iv) par 2, il vient :

$$2^{r+s} [\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, S^{2s-1}] = 0$$

Revenons à (iii) on a :

$$2^{2r+s-1} [\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, S^{2s-1}] = 2^{r-1} 2^{r+1} [\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, S^{2s-1}] = 0$$

ce qui implique :

$$2^{r+s-1} \hat{i} [\mathbb{Z}_{2^r}, S^{2s-1}] = 2^{r+s-1} [\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, S^{2s-1}]$$

Comme $\hat{i}$ est un monomorphisme, proposition 1.2.2, chapitre III,

alors :

$$2^{r+s-1} [\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, S^{2s-1}] \neq 0$$

Donc l'ordre de $[\mathbb{Z}_{2^{r+1}}, S^{2s-1}]$ est exactement 2^{r+s} .

2 - SUR L'ORDRE DES GENERATEURS DE $\hat{\Omega}_*(Q8)$.

Soit $\pi_1 \cong \mathbb{Z}_4$, le sous groupe de $Q8$, engendré par l'élément $i \in Q8$

On a :

$$\tilde{\Omega}_*(\pi_1) \cong \tilde{\Omega}_*(Z_4)$$

Soit S^{2n+1} plongée dans $\mathbb{C}^{n+1}$; on fait opérer π_1 sur S^{2n+1} par :

$$(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \rightsquigarrow (i z_1, i z_2, \dots, i z_{n+1})$$

avec $i = e^{\frac{2i\pi}{4}}$, puisque $\pi_1 = Z_4$.

Soit avec les notations du chapitre III, paragraphe 3.

$$\hat{t} \hat{t}[\pi_1, S^{2n+1}] = [\pi_1, S^{2n+1}] + \alpha_*[\pi_1, S^{2n+1}]$$

Cette égalité résultant du théorème 3.3.2. et du lemme 4.1., chapitre III.

2.1. - Proposition. - Dans $\tilde{\Omega}_{4n+1}(\pi_1)$, on a

$$\alpha_*[\pi_1, S^{4n+1}] = -[\pi_1, S^{4n+1}]$$

Démonstration. -

$\alpha_*[\pi_1, S^{4n+1}]$ est par définition la π_1 -variété S^{4n+1} , sur laquelle π_1 opère par $\alpha(i) = -i \in A(\pi_1)$; avec les notations précédentes, $\frac{\alpha(i)}{-\frac{2i\pi}{4}}$ est l'automorphisme qui opère sur S^{4n+1} par la multiplication par $e^{\frac{-2i\pi}{4}} = -i \in \mathbb{C}$.

$$(z_1, z_2, \dots, z_{2n+1}) \rightsquigarrow (-i z_1, -i z_2, \dots, -i z_{2n+1})$$

Considérons l'application :

$$f : S^{4n+1} \rightarrow S^{4n+1}$$

définie par :

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{2n+1}) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{2n+1})$$

f est un difféomorphisme équivariant puisque :

$$\alpha \circ f(z_1, \dots, z_{2n+1}) = (-i \bar{z}_1, -i \bar{z}_2, \dots, -i \bar{z}_{2n+1})$$

Mais comme :

$$-i \bar{z}_j = \overline{i z_j}, \quad j = 1, \dots, 2n+1$$

donc :

$$\alpha \circ f = f \circ i, \quad i \in \mathbb{C}$$

Mais f renversant la structure faiblement complexe de S^{4n+1} , [cf.1] la proposition est démontrée (le déterminant de f est égal à -1).

En dimension $4n-1$ nous avons la proposition :

2.2. - Proposition. - Dans $\tilde{\Omega}_{4n-1}(Q8)$, on a :

$$\alpha_*[\pi_1, S^{4n-1}] = [\pi_1, S^{4n-1}]$$

Démonstration. -

Puisque $Q8$ opère sur les sphères S^{4n-1} , il s'en suit qu'il existe un difféomorphisme équivariant de S^{4n-1} dans S^{4n-1} qui laisse invariante la structure naturelle de S^{4n-1} , comme variété faiblement complexe.

Il suffit de prendre : $j \in Q8$, $Q8$ opérant par une représentation dans $U(2n)$, puisque dans $Q8$:

$$(-i) j = j.i.$$

La proposition est démontrée.

On a le théorème :

2.3. - THEOREME. - Le composé :

$$\hat{t}_1 \circ \hat{i}_1 : \tilde{\Omega}_{4n+1}(\pi_1) \rightarrow \tilde{\Omega}_{4n+1}(Q8) \rightarrow \tilde{\Omega}_{4n+1}(\pi_1)$$

est nul.

Le composé :

$$\hat{t}_1 \circ \hat{i}_1 : \tilde{\Omega}_{4n-1}(\pi_1) \rightarrow \tilde{\Omega}_{4n-1}(Q8) \rightarrow \tilde{\Omega}_{4n-1}(\pi_1)$$

est la multiplication par deux.

La démonstration se fait directement, en utilisant les propositions 2.1. et 2.2. du chapitre IV.

2.4. - Proposition. - L'ordre des générateurs $[Q8, S^{4n-1}]$ en dimension $(4n-1)$, est un multiple de 2^{2n+1} .

Démonstration. -

On a :

$$\hat{t}_1[Q8, S^{4n-1}] = [\pi_1, S^{4n-1}]$$

Comme l'ordre de $[\pi_1, S^{4n-1}]$ est 2^{2n+1} , d'après la proposition 1.4, chapitre IV, la proposition est démontrée.

Considérons les deux sous groupes π_1 et π_2 de $Q8$; on a :

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \mathbb{Z}_2 = (+1, -1) .$$

Considérons les deux π_1 - variétés $[\pi_1, \frac{Q8 \times S^{4n+1}}{\pi_2}]$ et $[\pi_1, \frac{\pi_1 \times S^{4n+1}}{\pi_1 \cap \pi_2}]$, dans $\tilde{\Omega}_{4n+1}(\pi_1)$.

$$[\pi_1, \frac{Q8 \times S^{4n+1}}{\pi_2}] = \hat{t}_1 \circ \hat{i}_2[\pi_2, S^{4n+1}]$$

$\hat{t}_1 \circ \hat{i}_2$ étant le composé :

$$\hat{t}_1 \circ \hat{i}_2 : \tilde{\Omega}_{4n+1}(\pi_2) \rightarrow \tilde{\Omega}_{4n+1}(Q8) \rightarrow \tilde{\Omega}_{4n+1}(\pi_1)$$

et :

$$[\pi_1, \frac{\pi_1 \times S^{4n+1}}{\pi_1 \cap \pi_2}] = \hat{i}_0 \circ \hat{t}_0 [\pi_2, S^{4n+1}]$$

$\hat{i}_0 \circ \hat{t}_0$ étant le composé :

$$\hat{i}_0 \circ \hat{t}_0 : \tilde{\Omega}_{4n+1}(\pi_2) \rightarrow \tilde{\Omega}_{4n+1}(\pi_1 \cap \pi_2) \rightarrow \tilde{\Omega}_{4n+1}(\pi_1)$$

$\pi_1 \cap \pi_2$ étant considéré comme sous groupe de π_1 et π_2 .

On a le théorème :

2.3. - THEOREME. - Dans $\tilde{\Omega}_{4n+1}(\pi_1)$, on a :

$$[\pi_1, \frac{Q8 \times S^{4n+1}}{\pi_2}] = [\pi_1, \frac{\pi_1 \times S^{4n+1}}{\pi_1 \cap \pi_2}]$$

$$\text{et } \hat{t}_1 \circ \hat{i}_2 = \hat{i}_0 \circ \hat{t}_0.$$

Démonstration.

Considérons la variété : $\frac{Q8}{\pi_2} \times S^{4n+1}$

$$\text{Soit : } n : Q8 \rightarrow \frac{Q8}{\pi_2}$$

l'application naturelle.

Choisissons $g_1, g_2 \in Q8$ les deux représentants des classes dans $\frac{Q8}{\pi_2}$

ici :

$$g_1 = 1, g_2 = i$$

Puisque :

$$\frac{Q8}{\pi_2} = (\bar{1}, \bar{i})$$

Définissons l'action de π_1 sur $\frac{Q8}{\pi_2} \times S^{2n+1}$ par :

$$h_1(n(g_j), x) = (n(g_j), g_j^{-1} h_1 g_j x) \quad \text{si } h_1 \in \pi_1 \cap \pi_2$$

$$h_1(n(g_j), x) = (n(h_1 g_j), x) \quad \text{si } h_1 = i \in \pi_1$$

$$h_1(n(g_j), x) = (n(h_1 g_j), -x) \quad \text{si } h_1 = -i \in \pi_1.$$

Cette action de π_1 sur $\frac{Q8}{\pi_2} \times S^{2n+1}$ est dans point fixe.

Soit maintenant : $[g, x] \in \frac{Q8 \times S^{2n+1}}{\pi_2}$; il existe alors un unique $j, h \in \pi_2$ tel que :

$$g = g_j h$$

Définissons alors une application :

$$m : \frac{Q8 \times S^{2n+1}}{\pi_2} \rightarrow \frac{Q8}{\pi_2} \times S^{2n+1}$$

Par :

$$m[g, x] = (n(g_j), h x) , h \in \pi_2$$

Cette application est bien définie car si

$$[g, x] = [\hat{g}, y]$$

alors :

$$\exists \hat{h} \in \pi_2, \hat{g} = g \hat{h}^{-1}, \hat{h} x = y$$

d'où

$$\hat{g} = g_j h \hat{h}^{-1}$$

et

$$m[\hat{g}, y] = (n(g_j), h \hat{h}^{-1} y) = (n(g_j), h x)$$

m est surjective car si :

$$(n(g_j), x) \in \frac{Q8}{\pi_2} \times S^{2n+1}$$

alors :

$$\exists h_2 \in \pi_2, \exists g \in Q8, g = g_j h_2$$

mais pour h_2 fixé et x fixé ,

$$\exists y \in S^{2n+1}, h_2 y = x$$

donc :

$$(n(g_j), x) = (n(g_j), h_2 y) = m[g, y]$$

m est injective car si :

$$(n(g_j), x) = (n(g'_j), y)$$

On a :

$$n(g_j) = n(g'_j), x = y$$

Par définition de g_j et g'_j on a :

$$g_j = g'_j$$

Donc d'après ce qui précède m est bien injective

L'application m est équivariante, car pour $h_1 \in \pi_1$, on a :

$$h_1[g, x] = [h_1 g, x]$$

Par définition de l'action de π_1 sur $\frac{Q8 \times S^{2n+1}}{\pi_2}$.

D'autre part :

si $h_1 \in \pi_1 \cap \pi_2$:

$$m[h_1 g, x] = (n(g_j), g_j^{-1} h_1 g_j h x) = h_1 m[g, x]$$

si $h_1 = i$

$$m[h_1 g, x] = (\eta(h_1 g_j), h x) = h_1 m[g, x]$$

et si $h_1 = -i$

$$\begin{aligned} m[h_1 g, x] &= m[-h_1 g, -h x] = (\eta(-h_1 g_j), -h x) \\ &= -h_1 (\eta(g_j), -h x) \\ &= h_1 (\eta(g_j), h x) = h_1 m[g, x] \end{aligned}$$

Donc :

$$[\pi_1, \frac{Q8 S^{2n+1}}{\pi_2}] = [\pi_1, \frac{Q8}{\pi_2} \times S^{2n+1}]$$

De façon analogue, considérons l'application

$$m' = \frac{\pi_1 \times S^{2n+1}}{\pi_1 \cap \pi_2} \rightarrow \frac{\pi_1}{\pi_1 \cap \pi_2} \times S^{2n+1}$$

définie par :

$$m'[h, x] = (\eta(h_j), h' x), h \in \pi_1, h' \in \pi_1 \cap \pi_2, h = h_j h'$$

On définit une action de π_1 sur $\frac{\pi_1}{\pi_1 \cap \pi_2} \times S^{2n+1}$, par :

$$h_1(\eta(h_j), x) = (\eta(h_j), h_1 x), \text{ si } h_1 \in \pi_1 \cap \pi_2$$

$$h_1(\eta(h_j), x) = (\eta(h_1 h_j), x), \text{ si } h_1 = i \in \pi_1$$

$$h_1(\eta(h_j), x) = (\eta(h_1 h_j), -x), \text{ si } h_1 = -i \in \pi_1$$

Comme précédemment, m' est bijective, équivariante.

donc :

$$[\pi_1, \frac{\pi_1 \times S^{2n+1}}{\pi_1 \cap \pi_2}] = [\pi_1, \frac{\pi_1}{\pi_1 \cap \pi_2} \times S^{2n+1}]$$

Soit l'homomorphisme :

$$\phi : \frac{Q8}{\pi_2} \rightarrow \frac{\pi_1}{\pi_1 \cap \pi_2}$$

défini par :

$$\phi(\bar{i}) = \bar{(i)} , \bar{i} \in \frac{Q8}{\pi_2} , i \in \frac{\pi_1}{\pi_1 \cap \pi_2}$$

C'est un isomorphisme.

Soit f l'application :

$$f : \frac{Q8}{\pi_2} \times S^{2n+1} \rightarrow \frac{\pi_1}{\pi_1 \cap \pi_2} \times S^{2n+1}$$

définie par :

$$f(g, x) = (\phi(g), x) , g \in \frac{Q8}{\pi_2} , x \in S^{2n+1}$$

C'est un difféomorphisme.

Une simple vérification montre que f commute à l'action de π_1 .

Donc :

$$[\pi_1, \frac{Q8}{\pi_2} \times S^{2n+1}] = [\pi_1, \frac{\pi_1}{\pi_1 \cap \pi_2} \times S^{2n+1}]$$

Compte tenu de ce qui précède, on a :

$$[\pi_1, \frac{Q8 \times S^{2n+1}}{\pi_2}] = [\pi_1, \frac{\pi_1 \times S^{2n+1}}{\pi_1 \cap \pi_2}]$$

et le théorème est démontré.

2.5. - Proposition.- Dans $\mathfrak{N}_{2n+1}(Q8)$, l'ordre de $[Q8, \frac{Q8 \times S^{2n+1}}{\pi_2}]$ et $[Q8, \frac{Q8 \times S^{2n+1}}{\pi_1}]$, est un multiple de 2^{n+1} .

Démonstration.-

On a :

$$\hat{t}_1 \left[Q8, \frac{Q8 \times s^{2n+1}}{\pi_2} \right] = \left[-1, \frac{Q8 \times s^{2n+1}}{\pi_2} \right]$$

mais :

$$\left[\pi_1, \frac{Q8 \times s^{2n+1}}{\pi_2} \right] = \left[\pi_1, \frac{\pi_1 \times s^{2n+1}}{\pi_1 \cap \pi_2} \right] = \hat{t}_0 \left[\pi_1 \cap \pi_2, s^{2n+1} \right]$$

Comme :

$$[\pi_1 \cap \pi_2, s^{2n+1}] = [\pi_2, s^{2n+1}]$$

Par la proposition 1.1.1., chapitre III, l'ordre de $[\pi_2, s^{2n+1}]$ est égal à 2^{n+1} .

Par la proposition 1.2.2., chapitre III, $\hat{t}_0$:

$$\hat{t}_0 : \hat{\Omega}_{2n+1}(\mathbb{Z}_2) \rightarrow \hat{\Omega}_{2n+1}(\mathbb{Z}_4) \cong \hat{\Omega}_{2n+1}(\pi_1)$$

est un monomorphisme.

Donc l'ordre de $\left[\pi_1, \frac{\pi_1 \times s^{2n+1}}{\pi_1 \cap \pi_2} \right]$ est égal à 2^{n+1} .

Il est de même pour $\left[\pi_1, \frac{Q8 \times s^{2n+1}}{\pi_2} \right]$.

Ainsi l'ordre de $\left[Q8, \frac{Q8 \times s^{2n+1}}{\pi_2} \right]$ est un multiple de 2^{n+1} , et celui de $\left[Q8, \frac{Q8 \times s^{2n+1}}{\pi_1} \right]$ aussi.

CHAPITRE V

BORDISME DES GROUPES CYCLIQUES.

1 - BORDISME ORIENTE ET COMPLEXE DES GROUPES CYCLIQUES.

Dans ce chapitre, on notera Ω , l'une des théories de bordisme Ω^{SO} ou Ω^U .

Considérons l'homomorphisme naturel de Ω_* -module :

$$\phi : \Omega(X) \otimes_{\Omega_*} \Omega(Y) \rightarrow \Omega(X \times Y)$$

X et Y étant deux espaces topologiques quelconques.

Soient p et q deux entiers, $p \geq 2$, $q \geq 2$, tels que p et q soient premiers entre eux.

On a :

$$\mathbb{Z}_{pq} \simeq \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$$

Soit $B_{\mathbb{Z}_{pq}}$, un espace classifiant pour $\mathbb{Z}_{pq}$. $B_{\mathbb{Z}_{pq}}$ a même type d'homotopie que $B_{\mathbb{Z}_p} \times B_{\mathbb{Z}_q}$.

On se propose de montrer la proposition suivante :

1.1. - Proposition.- Si p et q sont deux entiers positifs premiers entre eux, l'homomorphisme naturel :

$$\phi : \Omega_*(\mathbb{Z}_p) \otimes_{\Omega_*} \Omega_*(\mathbb{Z}_q) \rightarrow \Omega_*(\mathbb{Z}_{pq})$$

est un isomorphisme de Ω_* -module.

Pour la démonstration, on établit d'abord trois lemmes.

1.2. - Lemme.- Quels que soient les espaces topologiques X et Y $\tilde{\Omega}_n(X)$ et $\tilde{\Omega}_n(Y)$, s'identifient canoniquement à des sous groupes de $\tilde{\Omega}_n(X \times Y)$.

Démonstration.-

Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces pointés respectivement par x_0 et y_0 ; $X \times Y$ est pointé par (x_0, y_0) .

Considérons l'inclusion pointée :

$$i_1 : X \hookrightarrow X \times Y$$

et la projection :

$$p_1 : X \times Y \hookrightarrow X$$

On déduit les applications :

$$i_{1*} : \tilde{\Omega}_n(X) \rightarrow \tilde{\Omega}_n(X \times Y)$$

$$p_{1*} : \tilde{\Omega}_n(X \times Y) \rightarrow \tilde{\Omega}_n(X)$$

Soit $[B^n, f] \in \tilde{\Omega}_n(X)$

On a :

$$i_{1*} [B^n, f] = [B^n, i_1 \circ f] \in \tilde{\Omega}_n(X \times Y)$$

et :

$$p_{1*} \circ i_{1*} [B^n, f] = [B^n, p_1 \circ i_1 \circ f] = [B^n, f]$$

d'où

$$p_{1*} \circ i_{1*} = \text{Id}_{\tilde{\Omega}_n(X)}$$

Donc i_{1*} est un monomorphisme et $\tilde{\Omega}_n(X)$ s'identifie donc à un sous groupe de $\tilde{\Omega}_n(X \times Y)$. Il en est de même pour $\tilde{\Omega}_n(Y)$.

1.3. - Lemme.- Si $\tilde{\Omega}_n(X)$ et $\tilde{\Omega}_n(Y)$ sont des groupes finis, d'ordre premier entre eux, alors $\tilde{\Omega}_n(X) \oplus \tilde{\Omega}_n(Y)$ s'identifie canoniquement à un sous groupe de $\tilde{\Omega}_n(X \times Y)$.

La démonstration se fait à partir du lemme précédent.

1.4. - Lemme.- Pour les théories Ω^{SO} et Ω^U , l'homomorphisme de Thom-Steenrod :

$$\mu : \tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_m) \rightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{Z}_m; \mathbb{Z})$$

est toujours surjectif, quel que soit l'entier m , $m \geq 2$.

Démonstration.-

On fera la démonstration dans le cas orienté, et $\mathbb{Z}_m$ d'ordre pair, les autres cas ayant été étudiés dans [5].

Soit donc :

$$\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{2^k} \oplus \mathbb{Z}_s,$$

avec s impair et considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_{2^k}) \oplus \tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_s) & \xrightarrow{\hat{\psi}} & \tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_m) \\ \downarrow \mu_1 \oplus \mu_2 & & \downarrow \mu \\ \tilde{H}_n(\mathbb{Z}_{2^k}) \oplus \tilde{H}_n(\mathbb{Z}_s) & \xrightarrow{\psi} & \tilde{H}_n(\mathbb{Z}_m) \end{array}$$

Soient : $[B^n, f] \in \tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_{2^k})$, $[C^n, g] \in \tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_s)$

et les inclusions :

$$\begin{aligned} i_1 : B_{\mathbb{Z}_{2^k}} &\rightarrow B_{\mathbb{Z}_m} = B_{\mathbb{Z}_{2^k}} \times B_{\mathbb{Z}_s} \\ i_2 : B_{\mathbb{Z}_s} &\rightarrow B_{\mathbb{Z}_m} = B_{\mathbb{Z}_{2^k}} \times B_{\mathbb{Z}_s} \end{aligned}$$

Notons i_1^* et i_2^* les homomorphismes induits en bordisme par i_1 et i_2 respectivement, $\hat{i}_1$ et $\hat{i}_2$ les homomorphismes induits en homologie.

On a :

$$\begin{aligned}\hat{\psi}([B^n, f] \oplus [C^n, g]) &= [B^n, i_1 \circ f] + [C^n, i_2 \circ g] \\ &= i_{1*}[B^n, f] + i_{2*}[C^n, g]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mu \hat{\psi}([B^n, f] \oplus [C^n, g]) &= \mu i_{1*}[B^n, f] + \mu i_{2*}[C^n, g] \\ &= \gamma_1 \circ f_*(\sigma^n) + \gamma_2 \circ f_*(\sigma'^n)\end{aligned}$$

σ^n et σ'^n étant les classes fondamentales de B^n et C^n .

D'autre part :

$$\begin{aligned}\psi(\mu_1 \oplus \mu_2)([B^n, f] \oplus [C^n, g]) &= \psi(\mu_1[B^n, f] \oplus \mu_2[C^n, g]) \\ &= \psi(f_*(\sigma^n) \oplus f_*(\sigma'^m))\end{aligned}$$

$$\text{mais } \psi = \gamma_1 \oplus \gamma_2$$

donc

$$\psi(\mu_1 \oplus \mu_2) = \mu \circ \hat{\psi}.$$

Le diagramme précédent est donc commutatif.

Mais μ_1 est surjectif [cf. 4] : μ_2 est surjectif [cf. 5].

Comme ψ est un isomorphisme, il s'en suit que μ est surjectif et le lemme est démontré.

Démonstration de la proposition.-

Soit donc :

$$\mathbb{Z}_{pq} \simeq \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$$

Désignons par :

i_1 et i_2 les inclusions :

$$i_1 : B_{\mathbb{Z}_p} \rightarrow B_{\mathbb{Z}_{pq}}$$

$$i_2 : B_{\mathbb{Z}_q} \rightarrow B_{\mathbb{Z}_{pq}}$$

et par i_1^* et i_2^* les homomorphismes induits en bordisme.

D'après le lemme 1, i_1^* et i_2^* sont des monomorphismes.

Soit $\hat{\psi}$ l'homomorphisme :

$$\hat{\psi} : \tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_p) \oplus \tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_q) \rightarrow \tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_{pq})$$

défini par :

$$\begin{aligned} \psi([B^n, f] \oplus [C^n, g]) &= i_1^*[B^n, f] + i_2^*[C^n, g] \\ &= [B^n, i_1 \circ f] + [C^n, i_2 \circ g] \end{aligned}$$

où $[B^n, f] \in \tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_p)$ et $[C^n, g] \in \tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_q)$.

D'après les lemmes 2 et 3, l'homomorphisme $\hat{\psi}$ est un monomorphisme.

Le calcul des ordres des groupes $\tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_p)$, $\tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_q)$, $\tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_{pq})$ qui se fait en tenant compte de [5, 8, 9], montre que :

$$|\tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_{pq})| = |\tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_p)| \times |\tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_q)|$$

d'où il résulte que $\hat{\psi}$ est isomorphisme.

Considérons l'homomorphisme :

$$\phi : \Omega_*(\mathbb{Z}_p) \otimes \Omega_*(\mathbb{Z}_q) \rightarrow \Omega_*(\mathbb{Z}_{pq})$$

Comme :

$$\Omega_*(\mathbb{Z}_p) \otimes_{\Omega_*} \Omega_*(\mathbb{Z}_q) = \Omega_* \oplus \tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_p) \oplus \tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_q)$$

On a :

$$\phi/\Omega_* = \text{Id}_{\Omega_*} \quad \text{et} \quad \phi/\tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_p) \oplus \tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_q) = \hat{\psi}$$

d'où il résulte que ϕ est un isomorphisme.

2 - CONSEQUENCE.

Soit $\mathbb{Z}_m$ un groupe cyclique et sa décomposition en somme de groupes cycliques :

$$\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \mathbb{Z}_{k_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{k_s}$$

$p_1 \qquad p_2 \qquad p_s$

on suppose :

$$2 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_s$$

les p_i étant des entiers premiers et k_i des entiers positifs ou nuls.

2.1. - Proposition. - On a les isomorphismes

$$\tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_m) \approx \tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_{k_1}) \oplus \tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_{k_2}) \oplus \dots \oplus \tilde{\Omega}_n(\mathbb{Z}_{k_s})$$

$p_1 \qquad p_2 \qquad p_s$

$$\tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_m) \approx \tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_{k_1}) \otimes_{\Omega_*} \tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_{k_2}) \otimes_{\Omega_*} \dots \otimes_{\Omega_*} \tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_{k_s})$$

$p_1 \qquad p_2 \qquad p_s$

Démonstration. -

C'est une conséquence des lemmes 1.2, 1.3, 1.4 et de la proposition.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] CONNER *et* FLOYD - Torsion in SU-Bordisme. memoir of AMS.
- [2] A. BOREL - F. HIRZEBRUCH - Characteristic classes and homogeneous spaces
AM. J. of Math., 80 (1958).
- [3] CONNER *et* FLOYD - Periodic maps which preserve a complex
Structure - Bulletin of A.M.S., 70 (1964).
- [4] CONNER *et* FLOYD - Differentiable periodic maps - Springer (1964).
- [5] D. LEHMANN - Comptes rendus, série A, t. 268 (1969).
- [6] CARTAN - EILENBERG - Homological Algebra - Princeton.
- [7] SEMINAIRE H. CARTAN - 1950/1951, exposé 13.
- [8] J. MILNOR - Am. J. math., 82 (1960).
- [9] C.T.C. WALL - Ann. of Math., 72, (1960).
- [10] R. THOM - Comment. Math. Helv. 28, (1954).

