REVISTA DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES

MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

11

COHOMOLOGIE A COEFFICIENTS DANS UN PRESQUE-GROUPE SIMPLICIAL ET K-THEORIE ALGEBRIQUE

par

Carlos RUIZ SALGUERO
Universidad Nacional de Colombia

Publicaciones del

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

y de la

SOCIEDAD COLOMBIANA DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.E.

1972

Edición a cargo de Yu Takeuchi

Publicación auspiciada por el Fondo Colombiano de Investigaciones Científicas y Proyectos Especiales "Francisco José de Caldas" COLCIENCIAS.

REVISTA DE MATEMATICAS ELEMENTALES

MONOGRAFIAS MATEMATICAS

11

COHOMOLOGIE A COEFFICIENTS DANS UN PRESQUE-GROUPE SIMPLICIAL ET K-THEORIE ALGEBRIQUE

por

Carlos RUIZ SALGUERO

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad Nacional de Colombia

Publicaciones del

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y ESTADISTICA

DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

y de la

SOCIEDAD COLOMBIANA DE MATEMATICAS

BOGOTA, D.E.

1972

T H E S E

Presentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE LILLE

Pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Carlos RUIZ SALGUERO

COHOMOLOGIE A COEFFITIENTS DANS UN PRESQUE - GROUPE SIMPLICIAL ET K-THEORIE ALGEBRIQUE

Soutenue le 23 Janvier 1971 devant la Commision d'examen

M.M.	P.	DEDECKER	President Rapporteur
	B.	BKOUCHE	
	M.	KAROUBI	
	R.	LAVEND'HOMME	
	D.	LEHMAN	
	A.	MICALI	

A la memoria del

MEDICO GUERRILLERO

HERMIAS RUIZ SALGUERO

C K-Theorie Algébrique

1. El capítulo A no contiene sino las definiciones y las notas queme parecían necesarias para tratar la cohomología de los grupos cruzados. No obstante, los capítulos B y C se sirven en varias ocasiones del primero :

   a) El espectro $S[f]$ de una flecha $f : G \to H$ entre grupos simpliciales ha sido definido con la ayuda de los fibrados torcidos ,

   b) La caracterización de la cohomología $h^*(X, G)$ en el caso abeliano, emplea varias veces la teoría de fibrados y su clasificación ;

   c) Yo desarrollo un método que me permite asociar a una teoría de la cohomología , una K - teoría algebraica. Así que cuando yo aplico estemétodo a los H^q definidos en A.3, obtengo, para todo conjunto simplicial X y para todo anillo de Banach A, una serie de grupos abelianos $K^q(X, A)$, que se reducen a la K-teoría de Karoubi-Villamayor cuando X es la esfera S^o.

2. Pasemos al capítulo B en donde se encuentra una parte importante del trabajo. El resultado fundamental puede resumirse de la manera siguiente :

A cada morfismo $f : G \to H$ de grupos simpliciales puede asociarse una teoría de la cohomología generalizada (sobre la categoría de los conjuntos simpliciales provista de las nociones de homotopía y cofibración tradicionales)

$$h^q(-,[f]) \qquad q \text{ en } \mathbb{Z}$$

Y a cada pareja de flechas componibles (g, f) puede ser asociada una transformación natural de grado $+1$

$$\delta_{(g,f)} : h^*(-,[f]) \to h^*(-,[g])$$

De manera a satisfacer las propiedades siguientes :

2.1 El triángulo

$$\begin{tikzcd} h^*(\_,[fg]) \arrow[r] & h^*(\_,[f]) \arrow[dl, "\delta_{(g,f)}"] \\ h^*(\_,[g]) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

asociado al diagrama

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "g"'] & \cdot \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f.g"] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ \cdot \arrow[r, "f"'] & \cdot \arrow[r, "1"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

es exacto ;

2.2 Invariancia homotópica con respecto a la variable $[f]$. Como es natural, la definición de homotopía en la categoría de las flechas es la siguiente : dos flechas a_o y a_1 son homótopas

$$a_i = (u_i, v_i) : [f] \to [g] \qquad i = o, 1$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u_i"'] & B \arrow[d, "v_i"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

si existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \times I \arrow[r, "f \times 1"] \arrow[d, "U"'] & B \times I \arrow[d, "V"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

que comporta dos homotopías U (de u_o en u_1) y V (de v_o en v_1) en la categoría de los grupos simpliciales;

Dicho esto, se puede demostrar que los homomorfismos

$$(u_o, v_o)_* \ , \ (u_1, v_1)_* : h^*(\_, [f]) \to h^*(\_, [g])$$

inducidos por las flechas homótopas (u_o, v_o) y (u_1, v_1) coinciden.

NOTACION. Si $0_G : G \to 0$ represente la flecha nula, es conveniente escribir

$$h^*(\_, G) \text{ en lugar de } h^*(\_, [0_G])$$

Con esta notación, la relación $0_G \circ f = g$ y la propiedad de sucesión exacta (2.1) dan lugar a un triángulo exacto

$$\begin{tikzcd} & h^*(\_, G) \arrow[d] \\ h^*(\_, [f]) \arrow[ur] & h^*(\_, H) \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad (f : G \to H)$$

2.3 Cuando los grupos son abelianos se encuentra la teoría estudiada por NUGENDHINGOG en su tesis. A saber

$$h^n(X, G) = \begin{cases} [X, \overline{W}^n(G)] & \text{si} \quad n \geqq o \\ [X, \Omega^{-n}(G)] & \text{si} \quad n \leqq o \end{cases}$$

Más aún, en ese caso, la cohomología $h^*(X, [f])$ no depende sino del núcleo de f:

$$h^*(X, [f]) = h^*(X, Ker(f))$$

Nota 1. El caso abeliano puede expresarse, para los valores $p > o$, como los funtores derivados

$$Ext^n(F_X)(G) = h^n(X, G) \quad n > o$$

del funtor

$$F_X : G \to Hom(X, G)$$

de la categoría de los grupos abelianos simpliciales a la categoría de los grupos abelianos.

Es por esta razón que, en el parágrafo B.2.17, aparece un estudio de los objetos inyectivos de una categoría de C-objetos simpliciales.

Nota 2. Existe otra manera de ver el caso abeliano y que consiste en definir, como de costumbre, una cadena

$$(C^p(X,G);\ d^p)$$

cuya homología es, para todos los valores de p, $h^p(X,G)$.

2.4 Pasemos un momento a los grupos abelianos discretos : los grupos de Ens. El complejo singular $c(E)$ de uno de esos grupos, es de tipo $K(E,o)$; y su clasificante $\bar{W}^n(cE)$ es de tipo $K(E,n)$. En consecuencia, la cohomología

$$h^p(X,c(E))$$

es nula si p es negativo, y es igual a la cohomología singular si p es positivo o nulo :

$$h^p(X,c(E)) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 0 \\ [X, K(E,p)] & \text{si } p \geq 0 \end{cases}$$

3. Veamos, antes de pasar al capítulo C, cuál es, a grosso modo, el método empleado en la construcción de la cohomología $h^*(X,G)$: como consecuencia del hecho que el funtor $\bar{W}$ conmuta con los productos, el clasificante $\bar{W}(G)$, de un grupo abeliano G, es de nuevo un grupo abeliano. Y en ese caso el clasificante iterado $\bar{W}^n(G)$ está bien definido.

Como de otra parte, existe una equivalencia natural

$$a_G : G \to \Omega\bar{W}(G)$$

la cohomología $h^*(X, G)$ en el caso abeliano, no es otra que la del espectro $(S^*(G))$, definido a continuación :

$$S^p(G) = \begin{cases} \Omega^{-p}(G) & \text{si} \quad p \leq 0 \\ \bar{W}^p(G) & \text{si} \quad p \geq 0 \end{cases}$$

$$a^p = \begin{cases} 1_{S^p(G)} : S^p(G) \approx \Omega S^{p+1}(G) & p \leq 0 \\ a_{\bar{W}^p(G)} : & p \geq 0 \end{cases}$$

Este caso inspira una definición en el caso general, siempre y cuando que se pueda dar una definición consecuente del ``clasificante iterado'' de un grupo simplicial no abeliano. Las definiciones deben entonces conducir a una serie de funtores $w^n(G)$ y de transformaciones naturales

$$b^n : w^n(G) \rightarrow \Omega w^{n+1}(G)$$

(a las que no se puede exigir de ser equivalencias !) de tal manera que :

i) $w^1(G) = \bar{W}(G)$

ii) en el caso abeliano $w^n(G) = \overset{n}{\bar{W}}(G)$

iii) Los w^n sepan conservar las homotopías, con el fin de asegurar de antemano la propiedad 2.2.

El procedimiento, que me parece natural, consiste en definir w sobre los conjuntos simpliciales de la forma $\bar{W}(G)$, empleando una fórmula del tipo

$$w(\bar{W}(G)) = \bar{W} F(\bar{W}(G))$$

en la que F es un functor que transforma ``de manera conveniente'' el conjunto

$\bar{W}(G)$ en un grupo simplicial.

Es para encontrar F que yo me veo forzado a trabajar en una categoría más extensa que la de los grupos simpliciales y que contiene además los clasificantes y, cuando estos sean definidos, los clasificantes iterados. Es la categoría $P(Gr)$ de los "presque"- grupos simpliciales.

El functor

$$F : P(Gr) \to \hat{Gr} = \text{grupos simpliciales}$$

puede ser, por ejemplo, el adjunto j de la inclusión

$$i : \hat{Gr} \to P(Gr)\,.$$

Hay, sin embargo, otro functor que conviene a nuestros propósitos, notado [?].

Los dos satisfacen a la propiedad $F(G) = G$ cuando G es un grupo simplicial y están provistos de una transformación natural

$$X \to iF(X)$$

indispensable a la construcción del espectro.

Se obtienen en consecuencia dos cohomologías h^* y k^* según que se emplee $j(?)$ ó $[?]$, y que coinciden en el caso abeliano.

Yo no se si ellas coinciden para todo grupo pero tengo la convicción de que no es así.

En los dos casos, digámoslo para terminar, se emplea aproximadamente el mismo método para definir la cohomología a coeficientes relativos $h(\_, [f])$, $k(\_, [f])$.

4. El contenido del tercer capítulo (Cap. C) no puede resumirse, en realidad de verdad, bajo la fórmula "Relaciones entre la cohomología h^* y la K-teoría". Me explico :

Supongamos de manera general que $t^P(X, [f]$ sea una cohomología truncada, es decir, que $\underline{a} \leq p \leq \underline{b}$, en donde $\underline{a}$ y $\underline{b}$ son enteros eventualmente infinitos ; y supongamos además que $t^P(X, -)$ depende "como se debe" de la variable f, es decir, que las propiedades 2.1 y 2.2 enunciadas anteriormente, sean satisfechas. En esas condiciones, una parte del camino que conduce a la definición de una "K-teoría algebraica sobre un espacio X", queda recorrida :

En efecto si A es una subcategoría de la categoría de los anillos topológicos y si

$$Q : A \rightarrow \hat{Annt}$$

es un functor covariante, se definen los $K^q_{Q,t^*}(X, R)$ como los grupos abelianos $t^q(X, GL(Q(R)))$, en donde GL es el prolongamiento a los anillos simpliciales del functor "grupo lineal".

El functor Q da lugar i) a una noción de homotopía, propicia a hacer de $K^*_Q(X, -)$ un invariante homotópico y ii) a una noción de fibración en función de la cual se enuncia la existencia de sucesiones exactas largas.

1. Un problema es, entonces, estudiar en detalle sea las fibraciones, sea los functores Q, o más precisamente las parejas (Q, t^*), que van a dar K-teorías algebraicas conocidas.

   Consideremos como ejemplo el caso en que la teoría $t^*(X, G)$ sea aquella definida por los H^q $q \leq 0$, definida en el primer capítulo.

   Yo exhibo un functor de la categoría B de los anillos de Banach en la categoría de los anillos simpliciales cuyas nociones de fibración y homotopía equivalen a las de Karoubi-Villamayor, y tal que en el caso particular en que X sea la esfera simplicial S^o

$$K^q_{Q,H^*}(X, R) \quad X = S^o$$

   es la K-teoría algebraica de Karoubi-Villamayor : $K^p(R)$ $p < 0$ (K-théorie Algébrique et K-théorie Topologique, Institut de Recherche Mathematique Avancée de Strasbourg 1969-70).

2. Otro caso importante concierne, no solamente los anillos de Banach sino todos los ani-

llos topológicos, y para tratarlo es necesario de definir Q de una manera aparentemente diferente.

Digamos en fin, que este último functor Q, permite definir una teoría

$$L^p(X, A) \quad p \text{ en } Z \qquad \begin{array}{l} X = \text{conj. simplicial} \\ A = \text{anillo topológico} \end{array}$$

tal que

I) $L^*(\_, A)$ es una cohomología generalizada sobre la categoría de los conjuntos simpliciales, esta última provista de las nociones de co-fibración y de homotopía tradicionales;

II) $L^*(X, \_)$ es un invariante homotópico.

III) Más aún, si $f: A \to B$ es un homomorfismo de anillos topológicos, se define también

$$L^p(X, [f]) \quad p \text{ en } Z$$

y se encuentra una sucesión exacta, natural en X y en $[f]$:

$$\cdots \to L^p(X,[f]) \to L^p(X,A) \to L^p(X,B) \to L^{p+1}(X,[f]) \to \cdots$$

IV) Y en fin, si f es una "fibración"

$$L^p(X,[f]) = L^p(X, \operatorname{Ker} f) \quad p \text{ en } Z$$

A. Le bifoncteur H^1. (Dedecker |1|)

A.1 Le foncteur $(\ )^0$

Par la suite B (resp. G) représente un ensemble simplicial (resp. un groupe simplicial non nécessairement abélien).

A.1.1 Définition. *Une zéro cochaîne f de B à valeurs dans G est une suite $(f_n)\ n \geqq 0$*

$$f_n : B_n \to G_n$$

d'applications qui conmutent avec les opérateurs de face et de dégénérescence, sauf éventuellement, avec d_o :

$$d_i \circ f_n = f_{n-1} \circ d_i \quad , \quad n \geqq i \geqq 1$$

$$f_n \circ s_i = s_i \circ f_{n-1} \quad , \quad n-1 \geqq i \geqq 0$$

L'ensemble des zéros cochaines de B à valeurs dans G est noté $C^\circ(B,G)$. On remarquera que la structure de groupe de G n'intervient pas dans la définition mais que elle induit une structure de groupe sur $C^\circ(B, G)$ la multiplication de deux cochaînes se faisant point par point. Si l'on fixe B on obtient un foncteur

$$X \to C^\circ(B, X)$$

de la catégorie des ensembles simpliciaux, (resp. des groupes simpliciaux) dans la catégorie des ensembles (resp. des groupes). De façon semblable si l'on fixe X. Dans ce cas :

A.1.2 Proposition. *Soit X un ensemble simplicial. Alors le foncteur*

$$B \to C^\circ(B, X)$$

est représentable. On note X° l'objet simplicial qui le représente. Si X est *un groupe simplicial il en est de même de* X^o.

En effet il suffit de prendre

$$(X^o)_n = C^o(\Delta[n]\, X)$$

où $\Delta[n]$ *est l'ensemble simplicial type en dimension* n. *Les opérateurs de face sont définis par composition avec les opérateurs* η^i *et* ϵ^i

$$\Delta[n] \overset{\eta^i}{\to} \Delta[n-1] \overset{\epsilon^i}{\to} \Delta[n]$$

A.1.3 *A un morphisme*

$$f : X \to Y$$

d'ensembles simpliciaux (resp. de groupes simpliciaux) correspond un morphisme de foncteurs

$$C^o(-, X) \to C^o(-, Y)$$

et donc un morphisme simplicial,

$$f^o : X^o \to Y^o$$

On constate que

$$X \rightsquigarrow X^o$$

est un foncteur covariant de source et but de la catégorie des ensembles simpliciaux (resp. des groupes simpliciaux).

A.1.4 Proposition. *Si*

$$1 \to G' \underset{\phi}{\to} G \underset{\psi}{\to} G'' \to 1$$

est une suite exacte de groupes simpliciaux. Alors la suite

$$1 \to G'^{o} \to G^{o} \to G''^{o} \to 1$$

est exacte.

Il suffit de montrer que pour tout ensemble simplicial B, *le foncteur* $C^o(B.-)$ *est exacte. Qu'il soit exact à gauche est évident. Il reste à montrer que si*

$$\psi : G \to G''$$

est épijective il en est de même de

$$\psi_* = C^o(B, \psi)$$

Cela est une conclusion des deux lemmes suivants

Lemme 1.- *Soit*

$$f : E \to X$$

une fibration de Kan. Soit B *une composante connexe de* X *et* B' *est un sous-complexe de* B. *Alors, tout relèvement*

$$\rho' : B' \to E$$

de f, *c'est-à-dire toute application satisfaisant aux conditions*

r. 1. $\rho' \in C^o(B', E)$

r, 2. $f \circ \rho' = id_{B'}$

se prolonge en un relèvement

$$\rho : B \to E$$

de f.

On en déduit que si

$$f : E \rightarrow X$$

est surjective et satisfait à la condition de Kan, alors un relèvement défini sur un sous-complexe X' de X, éventuellement vide, se prolonge à X tout entier. Car il suffit d'appliquer le lemme 1, composante par composante.

Nous ne reproduisons pas ici la démonstration du lemme 1. donnée par H. Cartan ([1] exposé 4) au cas où $\tilde{X}$ est connexe.

Lemme 2. *Soit G un groupe simplicial et E un G-ensemble simplicial. C'est-à-dire que G opère librement (à droite par exemple) sur E. Alors l'application*

$$E \rightarrow X = E/G$$

est une fibration de Kan. En particulier tout morphisme épijectif de groupes simpliciaux est une fibration de Kan.

A.2 Le foncteur $\bar{W}$

A.2.1 Définition. *Une* *<u>1-cochaîne</u>* r *de* B *à valeurs dans* G *est une suite*

$$r_n : B_n \rightarrow G_{n-1} \qquad n \geq 1$$

d'applications, satisfaisant aux conditions.

(a) $\quad r_{n-1} \circ d_i = d_{i-1} \circ r_n \qquad 2 \leq i \leq n-1$

(b) $\quad r_n \circ s_i = s_{i-1} \circ r_{n-1} \qquad 1 \leq i \leq n-1$

(c) $\quad r_n \circ s_0 =$ *élément neutre de* G_{n-1} $\quad n \geq 1$.

On dira que τ *est un cocycle ou une fonction tordante si satisfaisant à a) b) c) il satisfait en outre à*

(d) $\quad \tau_n d_1 = \tau_n d_o \times d_o \tau_{n+1}$

c'est-à-dire que pour tout $b \in B_{n+1}$ *(et pour tout* n *)*

$$\tau_n d_1(b) = \tau_n d_o(b) \times d_o \tau_{n+1}(b)$$

(Le produit dans le groupe est noté $\times$ *).*

On note ainsi

$C^1(B, G)$ = *ensemble de 1-cochaînes.*

$Z^1(B, G)$ = *ensemble de 1-cocycles,*

Il est facile de voir que si

$$\tau : B \to G$$

est une fonction tordante, et si

$$h : B' \to B$$

$$(\text{resp. } k : G \to G')$$

est une application simpliciale (resp. un homomorphisme de groupes simpliciaux) alors $\tau \circ h$ *(resp.* $k \circ \tau$*) est à nouveau une fonction tordante (où* $(\tau \circ h)(x') = \tau(h(x'))$*).*

A.2.2. Proposition.- *Soit* G *un groupe simplicial.*

Les foncteurs

$$B \rightsquigarrow C^1(B, G)$$

et

$$B \rightsquigarrow Z^1(B,G)$$

sont représentables.

On note G^1 *l'ensemble (c'est en fait un groupe) qui représente* C^1 *et* $\bar{\bar{W}}(G)$ *celui représente* $Z^1(B,G)$. *On a donc*

$$Hom(B,G^1) \approx C^1(B,G) \qquad (1)$$

$$Hom(B,\bar{\bar{W}}G) \approx Z^1(B,G) \qquad (2)$$

On note aussi

$$\tau_G : \bar{\bar{W}}G \rightarrow G \qquad (3)$$

la fonction tordante qui par l'isomorphisme (2) correspond à l'identité de $\bar{\bar{W}}G = B$. *Toute fonction tordante*

$$\tau : B \rightarrow G$$

s'écrit donc de façon unique sous la forme

$$\tau_G \circ f$$

où

$$f : B \rightarrow \bar{\bar{W}}G$$

est une application simpliciale.

Démonstration.- *Si dans les formules (1) et (2) on pose* $B = \Delta[n]$ $(n \geq 0)$ *on trouve la définition de* $(G^1)_n$ *et* $(\bar{\bar{W}}G)_n$:

$$G^1_n = C^1(\Delta[n],G) \qquad (4)$$

$$(\bar{\bar{W}}G)_n = Z^1(\Delta[n],G) \qquad (5)$$

Les opérateurs de face ω^* *sont définis par composition avec les opérateurs*

$$\omega : \Delta[m] \rightarrow \Delta[n]$$

La 1-cochaîne universelle

$$c^1_G : G^1 \to G$$

qui va donner lieu à l'isomorphisme (1), est celle qui à chaque cochaîne

$$\tau : \Delta[n] \to G$$

fait correspondre l'élément

$$c_G(\tau) = (\delta^n)$$

de G_{n-1}, *Ici* δ^n *est l'unique simplexe non dégénéré en dimension* n *de* $\Delta[n]$.
L'inclusion canonique

$$Z^1(B,G) \to C^1(B,G)$$

induit un monomorphisme

$$\bar{W}G \to G^1 \qquad (6)$$

qui composé avec c_G *nous donne* τ_G.

A.2.3. *En explicitant l'ensemble simplicial* $\bar{W}G$ *défini par la formule (5) on constate que c'est exactement la "construction Bar" de Mc Lane :*

$$(\bar{W}G)_o = pt$$

$$(\bar{W}G)_n = (\bar{W}G)_{n-1} \times G_{n-1} = G_o \times \dots \times G_{n-1}$$

$$d_o(g_o, \dots, g_{n-1}) = (g_o, \dots, g_{n-2})$$

$$d_1(g_o, \dots, g_{n-1}) = (g_o, \dots, g_{n-3}, g_{n-2} \cdot d_o g_{n-1})$$

$$d_k(g_o, \dots, g_{n-1}) = (g_o, \dots, g_{n-k-2}, g_{n-k-1} \cdot d_o g_{n-k}, d_1 g_{n-k+1}, \dots, d_{k-1} g_{n-1})$$

si $1 \leq k \leq n$

$$d_n(g_o, \dots, g_{n-1}) = (d_1 g_1, \dots, d_{n-1} g_{n-1})$$

$$s_o(g_o, \dots, g_{n-1}) = (g_o, \dots, g_{n-1}, 1)$$

$$s_k(g_o, \dots, g_{n-1}) = (g_o, \dots, g_{n-k-1}, s_o g_{n-k}, \dots, s_{k-1} g_{n-1})$$

Si $1 \leqq k \leqq n-1$

$s_n(g_o, \ldots, s_{n-1} g_{n-1})$.

A.2.4. *Adjoint à gauche du foncteur* $\bar{W}$ *(Kan [1]).*

$\bar{W}$ *est un foncteur de la catégorie* $\Delta^o G_r$ *des groupes simpliciaux dans la catégorie* $\Delta^o Ens$ *des ensembles simpliciaux, voire d'ensembles simpliciaux pointés car l'ensemble des simplexes en dimension zéro de* $\bar{W}G$ *est réduit à un point.*

Proposition. *Le foncteur*

$$\bar{W} : \Delta^o G_r \to \Delta^o Ens$$

admet un adjoint à gauche

$$G : \Delta^o Ens \to \Delta^o G_r$$

On a donc

$$\Delta^o G_r(GX, H) \approx Hom(X, \bar{W}H)$$
$$\approx Z^1(X, H)$$

Démonstration. *Soit* $(GX)_{n-1}$ *le groupe libre engendré par* $X_n - s_o X_{n-1}$. *Ou ce qui revient au même le groupe à un générateur* $r(x)$ *pour chaque élément* x *de* X_n *et des relations*

$$r(s_o\, z) = 1$$

pour tout $y \in X_{n-1}$.

On note

$$r_n : X_n \to (GX)_{n-1}$$

l'application qui associe à $x \in X$ *le générateur* $r(x)$ *de* $(GX)_{n-1}$. *Les applications*

$$r_n \circ d_i : X_{n+1} \to (GX)_{n-1} \qquad i > 1$$

$$r_n^{-1}\, d_o \times r_n\, d_1 : X_{n+1} \to (GX)_{n-1}$$

$$\tau_{n+1} \circ s_i : X_n \to (GX)_n \qquad i \geqq 1$$

s'annullent sur les éléments de la forme

$$s_o(x) \qquad x \in X .$$

Il existe donc un et un seul homomorphisme de groupes

$$d_i : (GX)_n \to (GX)_{n-1} \qquad i \geq 0$$

tel que

$$d_{i-1} \circ \tau_{n+1} = \tau_n \, d_i \qquad i > 1$$

$$d_o \circ \tau_{n+1} = \tau_n^{-1} d_o \times \tau_n \, d_1$$

On déduit aussi l'éxistence d'homomorphismes

$$s_i : (GX)_{n-1} \to (GX)_n$$

tels que

$$\tau_{n+1} \circ s_i = s_{i-1} \circ \tau_n$$

Les définitions sont telles que GX *est un groupe simplicial et que* $\tau_X = \tau$ *est une fonction tordante .*

Elle satisfait la propriété universelle :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\tau_X"'] \arrow[dr, "\tau' \text{ (tordante)}"] & \\
GX \arrow[r, "f(\tau')"'] & H
\end{tikzcd}$$

Pour toute application tordante

$$\tau' : X \to H$$

il existe un et un seul homomorphisme de groupes simpliciaux

$$f(r') : GX \to H$$

tel que

$$f(r') \circ r_x = r'$$

En effet l'application

$$r'_{n+1} : X_{n+1} \to H_n$$

est nulle sur les éléments de la forme $s_o(x)$ *avec* $x \in X_n$. *De la définition de* $(GX)_n$ *on déduit l'existence d'un et seul morphisme de groupes.*

$$f_n : (GX)_n \to H_n$$

tel que

$$f_n \circ (r_x)_{n+1} = r'_{n+1}$$

Pour montrer que f *commute aux opérateurs* d_i $(i \geq 1)$ *il suffit de constater que*

$$f\, d_i\, r = d_i\, f\, r$$

Or, pour $i \geq 1$

$$\begin{aligned} f\, d_i\ r &= f(r\, d_{i+1}) \\ &= r'\, d_{i+1} \\ &= di\ r' \\ &= d_i(f r) \end{aligned}$$

De même pour $i = 0$

$$\begin{aligned} f\, d_o\ r &= f(r^{-1}\, d_o \times r\, d_i) \\ &= f r^{-1}\, d_o \times f\, r\, d_i \\ &= r^{-1\prime}\, d_o \times r' d_1 \\ &= d_o\, r' \\ &= d_o\, f\, r \end{aligned}$$

Pareillement pour les s_i $i \geq 0$.

A.2.5. Corollaire. *Le foncteur* $\bar{W}$ *(resp.* G*) conmute aux produits (resp. aux sommes). En particulier si* G *est un groupe abélien simplicial il en est de même de* $\bar{W}G$.

A.2.6. *Rappelons une description du foncteur* Ω = *Espace de lecets* [*Moore* [1]]

Soit X *un ensemble simplicial pointé et* $* \in X$ *le point base de* X. *L'espace de lacets de* X *au point* $*$ *se décrit comme suit :*

a) $(\Omega X)_n = \{ x \mid x \in X_{n+1}, d_0 x = * \text{ et } d_{i_0} \ldots \ldots d_{i_n}(x) = * \}$

où $0 \leq i_k \leq n+1$ $k = 0, \ldots, n$.

b) $d_i : (\Omega X)_n \to \Omega X_{n+1}$ *est induit par*

$$d_{i+1} : X_{n+1} \to X_n$$

c) $s_i : (\Omega X)_n \to (\Omega X)_{n+1}$ *est induit par*

$$s_{i+1} : X_{n+1} \to X_{n+2}$$

D'après cette définition et de la description du foncteur $\bar{W}$ *(A.2.3.) il se dégage une équivalence naturelle en* G

$$\Omega \bar{W}(G) \simeq G \tag{7}$$

A.3. Définition de H^p. $p \leq 1$, $p \in Z$

A.3.1. *Action de* C^o *sur* Z^1.

Le bifoncteur en groupes C^o *opère sur* Z^1 *de la manière suivante :*

Soient

$$f \in C^o(B, G)$$

$$r \in Z^1(B, G)$$

Alors le cocycle

$$\sigma \perp r \in Z^1(B,G)$$

est donné par

$$(\sigma \perp r)_n(b) = \sigma_{n-1} d_o(b) \times r_n(b) \times d_o \sigma_n^{-1}(b)$$

où

$$b \in B_n \quad , \quad n \geq 1$$

Ce qui de façon plus courte s'écrit

$$\sigma \perp r = \sigma d_o \times r \times d_o \sigma^{-1} \qquad (8)$$

Il suffit d'un simple calcul pour montrer que l'action est bien définie et qu'elle est naturelle en B et en G.

si

$$* \in Z^1(B,G)$$

dénote, pour tout B, la fonction tordante à valeur constante égale à l'élément neutre de G, on écrit pour chaque $\sigma \in C^o(B,G)$

$$\delta(\sigma) = \sigma \perp * = \sigma d_o \times d_o \sigma^{-1} \qquad (9)$$

ce qui donne lieu à une transformation naturelle

$$\delta : C^o \to Z^1 \qquad (10)$$

Le noyau de

$$\delta_G^B : C^o(B,G) \to Z^1(B,G)$$

est $Hom(B,G)$. D'où une suite exacte

$$Hom(-,G) \to C^o(-,G) \to Z^1(-,G) \qquad (11)$$

En fait le foncteur en groupes $Hom(-, G)$ opère sur $C^o(-, G)$ par *translations : deux éléments* σ *et* μ *de* $C^o(B,G)$ *ont la même image dans* $Z^1(B,G)$ *s'il existe* h *de* $Hom(B,G)$ *tel que*

$$\sigma = \mu \times h .$$

En effet

$$\delta_G^B(\sigma) = \delta_G^B(\mu)$$

équivaut à

$$(\mu^{-1} \times \sigma)\, d_o = d_o(\mu^{-1} \times \sigma)$$

Ou ce qui revient au même

$$h = \mu^{-1} \times \sigma \in Hom(B,G)$$

Néanmoins δ_G^B *n'est pas épijectif, il le sera par exemple pour les ensembles simpliciaux* B *de la forme* $\Delta[n]$ $(n \in Z)$.

Puisque d'autre part $C^o(-,G)$ *et* $Z^1(-,G)$ *sont représentables et représentés par* $\mathcal{E}$ *et* $\bar{W}(G)$ *respectivement* (A.2.2.) ; *on dispose alors d'un morphisme simplicial*

$$\delta_G : G^o \to \bar{W}G$$

et d'une suite exacte naturelle en G

$$G \xrightarrow{e_G} G^o \xrightarrow{\delta_G} \bar{W}G \qquad (12)$$

dans laquelle δ_G *est épijective,* G *est la fibre de* δ_G *au dessus du point base de* $\bar{W}G$ *et* $\bar{W}G$ *est le quotient de* G^o *par l'action à droite de son sous-groupe* G.

A.3.2. **Définition.** *On note* H^1 *le bifoncteur quotient de* Z^1 *par l'action de* C^o. (A.3.1.) $H^1(B,G)$ *est par définition l'ensemble des classes de 1-cohomologie de*

B à valeurs dans G.

A.3.3. *La connaissance du* H^1 *permet de définir les* H^p *pour* $p \leq 1$ *et cela par application du foncteur sur une suspension :*

Définition. *Soit* B *un ensemble simplicial pointé et* G *un groupe simplicial. On pose*

$$H^p(B,G) = H^1(\Sigma^{1-p} B, G) \tag{13}$$

où p *est un entier* ≤ 1, *et* ΣB *est la suspension de* B *au point base. On démontrera plus loin que les* H^p *sont représentables. En fait il suffit de le faire pour* $p = 1$. *Ceci est fait à l'aide de la théorie d'espaces fibrés tordus, qui donne une équivalence*

$$H^1(B,G) \approx [B, \bar{W}G]$$

où $[X, Y]$ *dénote l'ensemble des classes d'homotopie d'applications simpliciales de* X *dans* Y.

D'après A.2.6. et d'après le fait que Σ *et* Ω *soient adjoints il est alors immédiat que*

$$H^p(B,G) = \bullet[\Sigma^{-p} B, G] \qquad p \leq 0$$

où $\bullet[\,,\,]$ *est le bifoncteur* Hom *dans la catégorie homotopique des ensembles simpliciaux pointés.*

Il en résulte que $H^0(B,G)$ *est un groupe, tandis que les* $H^p(B,G)$ $(p < 0)$ *sont abéliens.*

Si le groupe G *est abélien, tous les* $H^i(B,G)$ *sont abéliens (A.2.5.)*

A.4. Fibres principiaux tordus.

A.4.1. *Soit* G *un groupe simplicial. Soit* E *un* G*-ensemble simplicial,* X *le quotient de* E *par* G *et*

$$p : E \to X$$

la projection canonique.

On dit que E *est un fibré principal de groupe* G *au-dessus de* X *si la flèche*

$$\phi : (x, g) \rightsquigarrow (x.g, x)$$

est un isomorphisme :

$$\begin{tikzcd} E \times G \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p \circ pr_1"'] & & E \hat{\times}_X E \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

où $E \hat{\times}_X E$ *dénote le produit fibré de* E *avec lui-même au-dessus de* X. *Pour que* E *soit un* G*-fibré principal il faut et il suffit que l'action de* G *sur* E *satisfasse la condition :*

pour tout couple d'objets x, y *de* E *tels que*

$$p(x) = p(y)$$

il existe un et un seul élément $g \in G$ *tel que*

$$x . g = y$$

A.4.2. *D'après A.1,4. lemme 2. Tout fibré principal est un fibré au sens de Kan.*

Il adment donc un relèvement

$$r : X \to E$$

$$r \in C^o(X, E)$$

$$p \circ r = id_X$$

En général $r\, d_o(x)$ *et* $d_o r(x)$ *ne coïncident pas, mais ils se trouvent dans la même fibre. Alors il existe un et un seul élément*

$$\mu(x) \in G$$

tel que

$$r\, d_o(x) = d_o\, r(x) \cdot \mu(x)$$

Un simple calcul montre que

$$r = \mu^{-1} : X \to G$$

est une fonction tordante, dépendant du relèvement r. Supposons que r et r' sont deux relèvement de.

$$p : E \to G$$

Soit

$$t : X \to G$$

l'application définie par la relation

$$r'(x) = r(x) \cdot t(x)$$

Alors

$$t \in C^o(X, G)$$

Soient μ et μ' les applications définies par

$$r\, d_o = d_o\, r \cdot \mu$$

$$r'\, d_o = d_o\, r' \cdot \mu'$$

Alors

$$(r \cdot t)\, d_o = d_o(r \cdot t) \cdot \mu'$$

$$= (d_o\, r) \cdot (d_o\, t \times \mu')$$

Mais d'autre part

$$\begin{aligned}(r ; t)\, d_o &= r\, d_o \cdot t\, d_o \\ &= (d_o\, r \cdot \mu) \cdot t\, d_o \\ &= (d_o\, r) \cdot (\mu \times t\, d_o)\end{aligned}$$

D'où la relation

$$d_o\, t \times \mu' = \mu \times t\, d_o \ .$$

On peut en conclure que

si r *et* r' *sont deux relèvements d'un fibré principal*

$$E \to X$$

de groupe G , *il existe un* $\sigma \in C^o(X, G)$ *tel que*

$$\sigma \rfloor r = r' \qquad \text{(voir A.3.1. (8))}$$

où r *et* r' *sont les fonctions tordantes associées à* r *et* r' *respectivement.*

La classe

$$T_X(E) = [r] \in H^1(X, G)$$

ne dépend que du fibré E *.*

Si

$$f : E \to F$$

est une aplication équivariante de G-fibres principiaux au-dessus d'un même X

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "c"] & F \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

et si r *(resp.* s*) est un relèvement de* p *(resp.* q*) tel que*

$$f \circ r = s .$$

alors les fonctions tordantes associées aux relèvements r *et* s *coïncident. En effet, soient* μ *et* η *définis par*

$$r\, d_o = d_o\, r \cdot \mu$$

$$s\, d_o = d_o\, s \cdot \eta$$

Alors

$$\begin{aligned} s\, d_o = (f \circ r)\, d_o &= f(d_o\, r \cdot \mu) \\ &= (f\, d_o\, r) \cdot \mu \\ &= (d_o\, f\, r) \cdot \mu \\ &= d_o\, s \cdot \mu \end{aligned}$$

D'où $\mu = \eta$.

Le procédé que l'on vient de décrire nous a permis de définir une application

$$T_X : \epsilon_G(X) \to H^1(X, G)$$

de l'ensemble $\epsilon_G(X)$ *de classes de fibrés principiaux de groupe* G *et base* X *dans l'ensemble de 1-cohomologie de* X *à valeurs dans* G. *Il s'agit en fait d'une transformation naturelle de foncteurs*

$$T_G : \epsilon_G \to H^1(-, G)$$

C'est même une transformation de bifoncteurs, qui, d'après le théorème ci-après est une équivalence :

A.4.3. Théorème. *La transformation*

$$T_G : \epsilon_G(\ ) \to H^1(-, G)$$

est une équivalence .

pour démontrer ce théorème on se sert dela notion de fibré tordu : à une fonction tordante on associe un fibré muni d'un relèvement dont la fonction tordante associée (A.4.2.) est celle du départ. Cela nous permet de construire la transformation inverse de T_G. (A.4.4.) :

A.4.4. Soit

$$r : X \to G$$

une fonction tordante .

On définit le fibré principal tordu $E(r)$ associé à r comme suit :

$$E(r)_n = X_n \times G_n$$

$$d_i(x,g) = (d_i x, d_i g) \qquad i \geq 1$$

$$s_i(x,g) = (s_i x, s_i g) \qquad i \geq 0$$

$$d_0(x,g) = (d_0 x, r(x) \cdot d_0 g)$$

$E(r)$ est un ensemble simplicial sur lequel G opère à droite par la loi

$$(x,g) \cdot g' = (x, gg')$$

La première projection

$$p : E(r) \to X$$

qui est une application simpliciale et compatible avec l'action, fait de X le quotient de $E(r)$ par l'action de G.

L'application

$$x \to (x, 1)$$

de X dans $E(r)$ est un relèvement de p, dont la fonction tordante associée est justement r.

On dira que

$$E(\tau) \quad \text{noté aussi} \quad X \underset{\tau}{\times} G$$

est le fibré principal tordu associé à la fonction tordante $\tau : X \to G$. La fonction

$$E : Z^1(X,G) \to \epsilon_G(X)$$
$$\tau \rightsquigarrow E(\tau) = X \underset{\tau}{\times} G$$

est compatible avec l'action de $C^o(X,G)$. (A.3.2.)

Soit en effet $\sigma \in C^o(X,G)$ et

$$\tau' = \sigma \perp \tau$$

Alors l'application simpliciale équivariante

$$f : E(\tau) \to E(\tau')$$
$$(x,g) \rightsquigarrow (x, \tau(x) \times g)$$

est un isomorphisme, d'inverse

$$(x,g) \rightsquigarrow (x, \sigma^{-1}(x) \times g).$$

Montrons que f est simplicial : le seul point interessant est

$$f\, d_o = d_o\, f .$$

Or

$$f\, d_o(x,g) = f(d_o x, \tau(x)\, d_o\, g)$$
$$= (d_o x, \sigma(d_o x) \times \tau(x) \times d_o g)$$

$$d_o f(x,g) = d_o(x, \sigma(x) \times g)$$
$$= (d_o x, \tau'(x) \times d_o\, \sigma(x) \times d_o g)$$

Pour qu'ils coïncident il faut et il suffit que

$$\sigma\, d_0 \times \tau = \tau' \times d_0\, \sigma$$

ou, ce qui revient au même, que

$$\tau' = \sigma \mid \tau$$

Inversement soit

$$f : E(\tau) \rightarrow E(\tau')$$

un morphisme de fibres principiaux au-dessus de X.

Pour chaque couple

$$(x\,,g) \in E(\tau) = X \underset{\tau}{\times} G$$

$f(x,g)$ s'écrit sous la forme

$$f(x,g) = (x, h(x,g)) \in E \underset{\tau'}{\times} G$$

D'autre part f est compatible avec les actions.

$$f(x, gg') = f(x,g) \cdot g'$$

Ce qui entraîne que la donnée de

$$f(x,1) \in E(\tau')$$

détermine celle de

$$f(x,g) = f(x,1) \cdot g$$

Alors.

$$\begin{aligned} f(x,g) &= f(x,1) \cdot g \\ &= (x, h(x,1)) \cdot g \\ &= (x, h(x,1) \cdot g) \\ &= (x, \sigma(x) \cdot g) \qquad \text{ou} \quad \sigma(x) = h(x,1) \end{aligned}$$

et donc

$$\sigma \perp \tau = \tau'$$

On vient ainsi de montrer le

Lemme. *L'ensemble*

$$Hom_G(E(\tau), E(\tau'))$$

des morphismes de fibrés principiaux est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des

$$\sigma \in C^0(X, G)$$

tels que

$$\sigma \perp \tau = \tau'$$

En particulier tout morphisme de fibrés principiaux

$$f : E(\tau) \to E(\tau')$$

est un isomorphisme

A.4.5. *L'application* E_G *du numéro précédent passe au quotient donnant lieu à une application notée encore* E_G :

$$E_G : H^1(X, G) \to \epsilon_G(X)$$

qui associe à chaque classe $[\tau]$ *la classe du fibré tordu*

$$E(\tau) = X \times_{\tau} G$$

On a aussi démontré que

$$T_G \circ E_G = id$$

La démonstration du théorème A.4.3. sera complète si l'on constate que :

L'ensemble $\epsilon_G(X)$ *de classes d'isomorphie des fibrés principiaux de base* X *et groupe* G *est canoniquement isomorphe à l'ensemble* $\epsilon^t_G(X)$ *des classes d'isomorphie de fibrés principiaux tordus de base* X *et groupe* G. *Plus précisément:*

Lemme. *Soit* $Y \to X$ *un fibré principal de groupe* G *et base* X. r *un relèvement de* p *de fonction tordante* τ. *Alors il existe un et un seul morphisme*

$$f : Y \to E(\tau)$$

de fibres principiaux, compatible avec r *et le relèvement canonique de* $E(\tau)$. *En fait* f *est un isomorphisme.*

Démontrons le lemme.

Si

$$f : Y \to E(\tau)$$

existe elle est nécéssairement de la forme

$$f(y) = (x, h(y))$$

ou

$$x = p(y)$$

et l'application

$$h : Y \to G$$

satisfait entre autre à la relation

$$h(y \cdot g) = h(y) \cdot g$$

Il suffit donc de connaitre h *sur un point de chaque fibre de* Y *pour qu'elle* *soit déterminée partout.*

Or, par hypothèse

$$fr(x) = (x, 1)$$

Alors

$$h(r(x)) = 1 = \text{élément neutre de } G.$$

Ce qui montre l'unicité.

On définit f *en conséquence :*

$$f(y) = (x, h(y)) \qquad (x = p(y))$$

où $h(y)$ *est l'unique élément de* G *tel que*

$$y = r(x) \cdot h(y)$$

L'application k *inverse de* f *est*

$$k : E(r) = E \times_r G \to Y$$

$$k(x, g) = r(x) \cdot g$$

A.4.6. *Il est bien connu que le foncteur* ϵ_G *est un invariant homotopique. Il se factorise à travers la catégorie homotopique de la catégorie des ensembles simpliciaux, donnant lieu à un foncteur noté encore*

$$\epsilon_G : \Delta^o Ens_h \to Ens.$$

Théoreme. *Le foncteur*

$$\epsilon_G : \Delta^\circ Ens_h \to Ens.$$

est représentable. Plus précisément il existe un isomorphisme canonique

$$a_X : \epsilon_G(X) \approx [X, \bar{W}G]$$

Contentons nous de définir ici l'application a_X *et son inverse. D'après le lemme A.4.5. il suffit de travailler avec des fibrés tordus.*

Si τ *est une fonction tordante et si*

$$f_\tau : B \to \bar{W}(G)$$

dénote l'application simpliciale qui lui correspond par l'isomorphisme

$$Z^1(X,G) \approx Hom(X, \bar{W}(G)) \qquad (A.2.2.)$$

alors on pose

$$a(cl\, E(\tau)) = cl(f_\tau)$$

(où cl = *classe de ....)*

Inversement soit

$$\tau_G : \bar{W}(G) \to G$$

la fonction tordante canonique du groupe G *(A.2.2. (3))*

Soit

$$W(G) = E(\tau_G) \qquad (A.4.4.)$$

le fibré tordu sur $\bar{W}(G)$.

Si

$$f : X \to \bar{W}(G)$$

est une application simpliciale on lui fait correspondre le fibré principal de groupe G *et base* X

$$f^{*}(E(\tau_G))$$

image réciproque de $E(\tau_G)$ *par* f.

On définit β *, l'inverse de* α *, par*

$$\beta(cl(f)) = cl\, f^{*}(E(\tau_G))$$

Pour une démostration complète du théorème on peut sonsulter le séminaire Cartan 56'/57.

A.4.7. **Remarque.** *On ne doute pas que le point critique dans la démonstration du théorème précédant est celui qui concerne les relations d'équivalence dans les ensembles*

$$Z^1(X,G) \quad \text{et} \quad Hom(X, \bar{W}G)$$

et le comportement de l'isomorphisme A.2.2.(2), par rapport à ces relations. De façon précise

Corollaire. *Soient* τ , τ' *deux fonctions tordantes et*

$$f_\tau \, , \, f_{\tau'} : X \to \bar{W}G$$

les applications simpliciales qui leurs correspondent par l'isomorphisme A.2.2. (2) :

$$Z^1(X,G) \approx Hom(X, \bar{W}G)$$

Pour qu'il existe

$$\sigma \in C^{\circ}(X,G)$$

tel que

$$\sigma \perp \tau = \tau' \qquad (A.3.1.)$$

il faut et il suffit que f_r *et* $f_{r'}$ *soient homotopes.*

On en déduit que le foncteur H^1 *est le quotient du foncteur* Z^1 *par la relation d'homotopie :*

$$Z^1(I \times X, G) \underset{\epsilon_1^*}{\overset{\epsilon_0^*}{\rightrightarrows}} Z^1(X,G) \to H^1(X,G)$$

A.4.8. *Pour que*

$$f, g : X \to G$$

soient homotopes il faut et il suffit qu'il existe

$$\sigma \in C^\circ(X, \Omega G)$$

tel que

$$\sigma \perp f = g \, .$$

Soient en effet

$$[f'] \, , \, [g']$$

les éléments de

$$[\Sigma X, \bar{W} G]$$

qui correspondent à

$$[f] \quad et \quad [g]$$

par l'isomorphisme

$$[\Sigma X, \bar{W}G] \approx [X, G].$$

Or pour que f' *et* g' *soient homotopes il faut et il suffit qu' il existe*

$$\sigma' \in C^{\circ}(\Sigma X, G)$$

tel que

$$\sigma' \perp f' = g'$$

En composant σ' *avec*

$$j : X \to \Sigma X \quad (1)$$

on déduit que

$$\sigma \perp f = g \qquad \text{où} \qquad \sigma = j \circ \sigma' .$$

A.4.9. *L'isomorphisme* $\overset{o}{G} \approx \bar{W}(G)$

A.4.9. a. *Soient* G *un groupe simplicial,* E *un G-ensemble simplicial et*

$$f : E \to G$$

un morphisme de G-objets

$$f(e \cdot g) = f(e) \cdot g \qquad e \in E, g \in G \tag{a.1}$$

qui conmutent aux faces et dégénérescences sauf, éventuellement avec d_o, *c'est-à-dire que l'on n'a pas nécessairement*

$$f d_o \ \text{ égal à } \ d_o f .$$

On définit une aplication de degré moins 1

$$\tau : E \to G$$

par la formule

$$f\, d_o(e) = \tau(e) \cdot d_o\, f(e) \qquad e \in E \tag{a.2}$$

D' après (a.1)

$$\tau(e) \cdot g\,) = \tau(e) \tag{a.3}$$

pour tout

$$e \in E_n \ , \ g \in G_n \qquad n \geq 1$$

D' où une application tordante

$$\tau_f : E/G = B \to G$$

dont le fibré tordu associé $E(\tau_f)$ est justement E

$$u : E \xrightarrow{\approx} E(\tau_f) = B \underset{\tau_f}{\times} G \tag{a.4}$$

$$e \to ([e]\ ,\ f(e))$$

En effet si

$$u(e) = u(e')$$

alors $[e] = [e']$ ce qui veut dire qu'il existe $g \in G$ tel que

$$e \cdot g = e' \ .$$

Mais on a aussi

$$f(e) = f(e') = f(e \cdot g) = f(e) \cdot g$$

Or on se trouve alors dans G *, donc* $g = 1$ *et* $e = e'$.

Démontrons maintenant que u *est surjective*.

Pour tout

$$(b,g) \in B \underset{r_f}{\times} G$$

il existe $e \in E$ *tel que*

$$[\dot{e}] = b$$

et aussi il existe $g \in G$ *tel que*

$$f(e) \cdot g' = g$$

On a évidemment

$$u(e,g') = (b,g).$$

A.4.9.0. *Inversement, il existe pour chaque produit tordu*

$$B \underset{r}{\times} G$$

une application

$$f : B \underset{r}{\times} G \to G$$

satisfaisant (a.1), à savoir

$$f(b\,,g) = g\,.$$

La fonction tordante qui lui correspond par la méthode décrite dans a) est justement, r .

A.4.9.c. *On note comme d'habitude*

$$Hom_G(E\,,\,F)$$

l'ensemble des applications simpliciales de E *dans* F *satisfaisant à (a.1).*

De même

$$C^{\circ}_G(E\,,\,F)$$

est l'ensemble des zéro-cochaînes équivariantes.

On a

$$Hom_G(E\,,\,\mathring{F}) \approx C^{\circ}_G(E\,,\,F) \qquad (a.5)$$

La projection

$$p_G : W(G) = \bar{W}(G) \underset{\tau_G}{\times} G \to G$$

est un élément de

$$C^{\circ}_G(WG, G) \approx Hom_G(WG, \mathring{G})$$

En outre si

$$f \in C^{\circ}_G(E\,,\,G)$$

il existe un et un seul morphisme simplicial équivariant

$$h : E \to W(G)$$

tel que

$$p_G \circ h = f\,.$$

Cette propriété universelle caractérise le couple

$$(\bar{W}(G),\ p_G)$$

On a ainsi

$$Hom_G(E, \bar{W}(G)) \approx C^\circ_G(E,G) \approx Hom_G(E, G^\circ) \qquad (a.6)$$

Démontrons la propriété universelle : Soit

$$f \in C^\circ_G(E, G)$$

D'après A.4.9. a. il existe une fonction tordante

$$\tau_f \in Z^1(E / G, G)$$

de fibré E .

D' où une et une seule application simpliciale

$$k : E / G = B \to \bar{\bar{W}}(G)$$

telle que

$$\tau_f = \tau_G \circ k \qquad (A.2,2.)$$

L'application produit

$$h \times id : B \underset{\tau_f}{\times} G \to \bar{\bar{W}}(G) \underset{\tau_G}{\times} G$$

est simpliciale et équivariante .

Soit h_f le composé

$$E \overset{\approx}{\to} B \underset{\tau_f}{\times} G \overset{k \times id}{\to} \bar{\bar{W}}(G) \underset{\tau_G}{\times} G = \bar{W}(G)$$

Par construction

$$p_G \circ h_f = f .$$

Démontrons maintenan l'unicité de h.

Si h *est donée il est nécessairement de la forme*

$$h = (k , f)$$

où

$$k : E \to \bar{W}(G)$$

est une application simpliciale satisfaisant

$$h(e \cdot g) = k(e)$$

De plus la relation

$$hd_o = d_o h$$

implique (A.4.4.) que

$$r_G k(e) \cdot f(e) = fd_o(e)$$

Ou ce qui revient au même (A.4.9.a.)

$$r_G \circ k = r_f$$

D'où

$$h = h_f$$

A.4.9.d. *Proposition .- Les G-ensembles simpliciaux* $\mathcal{E}$ *et* $W(G)$ *sont canoniquement isomorphes . Il en est de même des fibrés.*

$$G^o \to \bar{\bar{W}}G \qquad (A.3.1.(12))$$

$$\bar{W}G \to \bar{\bar{W}}G$$

G^o est ainsi l'espace total du fibré universel du groupe G. L'espace sous-jacent est donc contractil.

A.4.9.e. De ce qui précède on déduit une structure de groupe simplicial sur l'ensemble $\bar{W}G$ dont G est un sous-groupe et $\bar{\bar{W}}G$ l'espace homogène quotient.

De façon explicite, l'application

$$r_G : G^o \to G$$

correspondant à l'identité de G^o par l'isomorphisme

$$C^o(G^o, G) \approx Hom(G^o, G^o) \qquad (A.1.2.)$$

est telle que si

$$i_G : G \to G^o$$

est l'injection canonique, alors

$$r_G \circ i_G = id_G$$

Ceci implique que si

$$\sigma \in G^o_n \ , \ g \in G_n$$

Alors

$$r_G(\sigma \cdot g) = r_G(\sigma) \cdot r_G(g) = r_G(\sigma) \cdot g$$

D'où

$$r_G \in G^o_G(G^o , G) \approx Hom_G(G^o , G^o)$$

Soit

$$E = G^o$$

dans la formule (a.6)

L'isomorphisme

$$h : G^o \to \bar{W}(G)$$

correspond à la zéro-cochaîne

$$r_G : G^o \to G$$

qui, elle, correspond avec l'identité de G^o. *Le transport de la structure de groupe simplicial de* G^o *sur* $\bar{W}(G)$ *se fait alors comme suit :*

Soit

$$x = (\omega , g) \in \bar{W}(G) = \bar{\bar{W}}G \underset{r_G}{\times} G$$

il existe un et un seul

$$\sigma_x \in G^o$$

tel que

$$G(\sigma_x) = \omega$$

$$r_G(\sigma_x) = g$$

Si

$$x, y \in \bar{W}(G)$$

$$x = (\omega , g)$$

$$y = (\underline{\omega} , \underline{g})$$

Alors

$$y\,x = (\underline{\omega} , \underline{g}) \cdot (\omega , g)$$

$$= (\delta(\sigma_y \times \sigma_x) , \underline{g}\, g) \qquad (a.7)$$

B.1. RAPPELS CONCERNANT LES COHOMOLOGIES GENERALISEES.

Sauf mention expresse du contraire les complexes simpliciaux dont il sera question satisfont la condition d'extension de Kan.

B.1.1. *Rappelons qu'un spectre sur la catégorie* Δ° *Ens, des ensembles simpliciaux pointés, est la donnée d'une collection* $E^n (n \in Z)$ *d'objets de* Δ° *Ens et des applications simpliciales pointées.*

$$a^n : E^n \to \Omega E^{n+1} \qquad n \in Z.$$

On définit pareillement la notion de spectre sur la catégorie homotopique : dans ce cas les a^n *sont des classes d'homotopie de flèches.*

Si les a^n *sont des équivalences d'homotopie on dit que* $\{ E^n , a^n \}$ *est un* Ω *-spectre.*

Un morphisme de degré r *entre deux spectres*

$$E = \{ E^n , a^n \} \quad et \quad F = \{ F^n , \beta^n \}$$

est une suite $f = (f^n), \ n \in Z$

$$f^n : E^n \to F^{n+r} \quad avec \quad \beta^{n+r} . f^n = (\Omega f^{n+1}) . a^n .$$

On note Sp *la catégorie dont les objets sont les spectres sur* Δ° *Ens. et dont les flèches sont les morphismes de degré* $r (r \in Z)$.

B.1.2.1. *A chaque spectre simplicial* $\{ E^n , a^n \}$ *est associé de* Ω*-spectre* $\{\underline{E}^n, \underline{a}^n\}$ *définie par les formules (1) et (2) ci-après.*

$$\underline{E}^n = \varinjlim_k \{ \Omega^k E^{n+k}, \beta^k \} \tag{1}$$

où

$$\beta^k = \Omega^k a^{n+k}$$

De même

$$\underline{a}^n : \underline{E}^n \to \Omega \underline{E}^{n+1} \tag{2}$$

est la seule application simpliciale dont les composés avec les applications canoniques

$$j^{k+1,n} : \Omega^{k+1} E^{n+k+1} \to \underline{E}^n$$

donne les flèches $\Omega j^{k,n+1}$:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{k+1} E^{n+k+1} \arrow[rr, "\Omega j^{k,n+1}"] \arrow[dr, "j^{k+1,n}"'] & & \Omega \varinjlim_j \Omega^j E^{n+j+1} \arrow[dl, "a^n"] \\
& \underline{E}^n &
\end{tikzcd}$$

Notons enfin

$$j^n : E^n \to \underline{E}^n \tag{3}$$

l'application canonique $j^{o,n}$. La famille $\{ j^n \}$ est un morphisme de spectres (de degré 0).

B.1.2.2. Lemme. *L'application simpliciale*

$$\underline{a}^n : \underline{E}^n \to \Omega\, \underline{E}^{n+1}, \qquad (n \in Z)$$

est une équivalence d'homotopie faible, c'est-à-dire qu'elle induit des isomorphismes en homotopie.

$$\pi_k(a^n) : \pi_k(E^n) \xrightarrow{\approx} \pi_{k+1}(E^{n+1}), \qquad k \geq 0.$$

Il suffit de montrer que la limite en question commute avec les foncteurs π_k d'homotopie $(k \geq 0)$. En général si $\{A^k, a^k\}$ est une donnée de limite avec $a^k : A^k \to A^{k+1}$ dans la catégorie des ensembles simpliciaux de Kan, alors l'application

$$\lim_{\vec{k}} (\pi_j A^k, \pi_j(a^k)) \to \pi_j \lim_{\vec{k}} (A^k, a^k)$$

induite par les $\pi_j(j^k) : \pi_j(A^k) \to \pi_j(\lim_{\vec{k}} A^k)$

est un isomorphisme. (Il suffit en fait d'une limite filtrante à droite pour avoir le résultat). Cette affirmation se démontre facilement en utilisant la définition donnée par Kan [2] *des groupes d'homotopie d'un complexe satisfaisant la condition d'extension.*

B.1.2.3. Lemme. *Soit*

$$f : X \to Y$$

une application simpliciale entre ensembles simpliciaux satisfaisant la condition d'extension. Pour que f soit une équivalence d'homotopie il faut et il suffit que

i) $\pi_k f : \pi_k(X, x) \to \pi_k(Y, f(x))$

soit, pour tout $k > 0$ et tout $x \in X_0$, un isomorphisme et que

ii) $\pi_o f : \pi_o(X) \to \pi_o(Y)$ soit une bijection.

Le lemme précédant est démontré au cas ou X et Z sont connexes, dans Moore [1] pp, 1c-4. Considérons que X et Y sont quelconques. $(\pi_o f)$, est une bijection entre l'ensemble de composantes connexes de X et de Y. On écrit X et Y comme somme de x composantes connexes avec le même ensemble d'indices. $L = \pi_o X \cong \pi_o Y$.

$$X = \coprod_{\lambda \in L} X_\lambda \qquad Y = \coprod_{\lambda \in L} Y_\lambda$$

L'application f est alors une somme f_λ d'applications.

$$f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$$

entre complexes connexes.

Or par hypothèse pour chaque $x \in X_o$, dont la classe est $\lambda = [x] \in \pi_o X$, l'homomorphisme

$$(\pi_R f) : \pi_k(X, x) = \pi_k(X_{(\lambda)}, x) \to \pi_k(Y, fx) = \pi_k(Y_{(\lambda)}, fx)$$

est un isomorphisme. Donc chacune des applications f_λ est une équivalence faible entre complexes connexes et d'après Moore (Loc. cit.) une équivalence d'homotopie. En conséquence $\coprod_\lambda f_\lambda = f$ est une équivalence d'homotopie.

B.1.2.4. Corollaire. *Le spectre E (B.1.2.1.) associée à E est un Ω-spectre.*

B.1.3. Rappel de la notion de cohomologie généralisée sur Δ° Ens.

B.1.3.1. *Soit $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne et*

$$\Sigma : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

un endomorphisme de $\mathfrak{A}$. *On dit que* $\mathfrak{A}$ *est* Σ-*stable (ou stable) si* Σ *est un automorphisme.*

Au cas d'une catégorie Σ-*stable le foncteur* Σ *est exacte. Un triangle*

$$A \to B \to C \overset{\partial}{\to} \Sigma A$$

est (par définition) exacte si la suite

$$A \to B \to C \to \Sigma A \to B \to \ldots$$

est exacte.

Dans ce qui suit il sera presque toujours question dela catégorie des groupes abélien gradués avec comme notion de suspension :

$$(\Sigma A)^n = A^{n-1}$$

B.1.3.2. *Le domaine des cohomologies généralisées dont il sera question par la suite est la catégorie* $.\Delta^{\circ} Ens$ *des ensembles simpliciaux pointés, avec*

1. *Comme cofibrations, les monomorphismes.*
2. *La notion d'homotopie classique.*

Notation. Les foncteurs canoniques de la catégorie $(.\Delta^{\circ} Ens)^2$ *des couples de morphismes composables dans la catégorie* $.\Delta^{\circ} Ens$ *associant à* $X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z$ *les espaces* X, Y, Z *seront notés* T_1, T_2, T_3 *respectivement.*

ie :

$$T_1(f,g) = X$$
$$T_2(f,g) = Y$$
$$T_3(f,g) = Z \,.$$

B.1.3.3. *Une cohomologie généralisée dont le domaine est* $\Delta^\circ Ens$ *et le rang une catégorie abélienne stable* $\mathfrak{A}$ *(B.1,3.1.), est un couple* (k, ∂) *où*

$$k : \Delta^\circ Ens \to \mathfrak{A}$$

est un foncteur contravariant satisfaisant

$$(3) \quad f \simeq g \Longrightarrow k(f) = k(g)$$

Et où ∂ *est une transformation naturelle*

$$\partial : k T_1 \to \Sigma k T_3 .$$

Le tout soumis à axiome.

(4) Si f *est une cofibration de cofibre* g.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z ,$$

Alors le triangle

$$kZ \to kY \to kX \xrightarrow{\partial} kZ$$

est exacte.

Remarque. On dit parfois que le domaine d'une cohomologie généralisées est la catégorie homotopique K *des ensembles simpliciaux pointés satisfaisant la condition d'extension.*

B.1.3.4. *L'axiome d'exicion (4) appliqué à la cofibration*

$$X \xrightarrow{1} X \to pt$$

donne l'égalité

$$k^{\cdot}(pt) = 0$$

De même si l'on l'applique à la cofibration

$$A \to CA \to \Sigma A$$

on obtient un isomorphisme

5. $\Sigma \cdot k \cong k \cdot \Sigma$

dit de suspension.

B.1.3.5. *Axiome du Wedge.*

Soit $\{X_a\}_{a \in I}$ *une famille d'ensembles simpliciaux. Pour chaque* a, $i_a : X_a \to \bigvee_a X_a$ *dénote l'injection canonique. Les* i_a *induisent des homomorphismes.*

$$i_a^* : k^{\cdot}(\bigvee_a X_a) \to k(X_a)$$

D'où un homomorphisme

$$i : k^{\cdot}(\bigvee_a X_a) \to \prod_a k(X_a)$$

qui est un isomorphisme si l'ensemble d'indices I *est fini. On dit qu'une cohomologie satisfait l'axiome du Wedge lorsque pour tout ensemble d'indices* I, *l'homomorphisme canonique* i *est un isomorphisme.* /

B.1.4. Cohomologie associée a un spectre.

B.1.4.1. *La Cohomologie généralisée associée à un spectre* $E = \{E^n, a^n\}$ *est définie, pour un ensemble simplicial pointe* X, *comme le groupe gradué* $(h^n(X,E))_{n \in Z}$ *où*

$$h^n(X,E) = \varinjlim_{p} \{[X, \Omega^p E^{n+p}] \ , \ \beta^p\} \tag{3}$$

où

$$\beta^p = \Omega^p \ a^{n+p}$$

La définition du foncteur $h^\cdot(-,E)$ *sur les flèches se fait aussi par passage à la limite. On notera* $f^\#$. *l'homomorphisme de groupes gradués associé à une application simpliciale* $f: X \to Y$.

Il ne nous reste donc qu'à rappeler la définition de l'opérateur ∂.

Pour ce faire remarquons tout d'abord qu'il résulte des définitions un isomorphisme

$$\sigma^p : h^p(X,E) \simeq h^{p+1}(\Sigma X, E)$$

naturel en X *(et en* E *!).*

Cela dit soit

$$X \xrightarrow{f} Y \to cf \xrightarrow{\partial f} \Sigma X \to \Sigma Y$$

La suite de Puppe (Gabriel-Zisman) de l'application f.

Alors.

$$\partial^p : h^p(X,E) \to h^{p+1}(cf) \qquad (p \in Z)$$

est le composé

$$h^p(X,E) \xrightarrow{\sigma^p} h^{p+1}(\Sigma X, E) \xrightarrow{(\partial f)^\#} h^{p+1}(cf, E). \tag{4}$$

Il est bien connu que $(h^\cdot(-,E), \partial)$ *est une cohomologie généralisée réduite, satisfaisant l'axiome du Wedge.*

B.1.4.2. *Un morphisme (de degré* r*)*

$g : E \to F$

entre les spectres simpliciaux E et F donne lieu à un homomorphisme (de même degré) entre les cohomologies associées, noté

$$g_\# : h^\cdot(\ ,E) \to h^\cdot(\cdot, F)$$

Ce procédé donne évidemment lieu à un foncteur covariant

$$h : s_p \to G$$

de la catégorie des spectres simpliciaux dans celle des théories de la cohomologie définies sur la catégorie des ensembles simpliciaux.

B.1.5. Suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch. (Segal (1))

B.1.5.1. D'après Gabriel-Zisman (1 . p. 139) la réalisation géométrique de Milnor,

$$|?| : \Delta^\circ Ens \to Top$$

induit une équivalence entre la catégorie $.K$ des complexes (pointés) de Kan modulo homotopie, la catégorie homotopique $.CW$ de la catégorie des cw-complexes.

C'est pourquoi il existe une correspondance biunivoque entre les cohomologies généralisées dont le domaine est $.K$ est celles dont le domaine est $.CW$ (cette dernière avec la notion de cofibration et d'homotopies classiques).

B.1.5.2. Ce qui précède nous permet de conclure à l'existence d'une suite spectrale d'Atizah-Hirzebruch pour les cohomologies définies sur $.K$. Plus précisément soit k une cohomologie généralisée définie sur $.K$ et prenant ses valeurs dans la catégorie $\wp$ des groupes abéliens gradués.

Pour chaque ensemble pointé Z *on convient de noter* cY *l'ensemble simplicial dont l'ensemble des simplexes en dimension* p $(p \geq 0)$ *est* Z *et dont les faces sont toutes égales à l'identité de* Y. cY *est un ensemble simplicial minimal de type* $K(Y,0)$, c *est un foncteur covariant de la catégorie des ensembles dans celle des ensembles simpliciaux (minimaux) satisfaisant la condition d' extension.*

Cela dit, soit X *un ensemble simplicial (pointé). On note* $(k^q, \bar{X})$ *le complexe de chaînes*

$$\cdots \quad k^q(cX_n) \xrightarrow{\partial^n} k^q(c(X_{n+1})) \to \cdots \qquad (5)$$

où

$$\partial^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \, k^q(c(d_i))$$

où les $d_i : X_{n+1} \to X_n$ *sont les faces de* X.

Théoreme. *Soit* k *une cohomologie réduite satisfaisant l'axiome du Wedge (B.1.3.e). Il existe une suite spectrale naturelle en* X, *se terminant par* $k^{\cdot}(X)$ *et dont le terme* E_2 *est donné par*

$$E_2^p = H^p((k^q, \bar{X})) \qquad (6)$$

= p-ième groupe d'homologie
du corplexes de chaînes $(k^q, \bar{X})$

B.1.5.3. *On peut cepedant démontrer le théorème sans passer par la catégorie desespaces topologiques. C'est cela que nous ferons par la suite.*

Suivant les notations de Cartan-Eilenberg (p. 333) soit

$$H(p,q) = k^\cdot(X^{(q)}/X^{(p)}) \qquad -\infty \leqq p \leqq q \leqq \infty$$

où $\quad X^{(q)} =$ q-ième squelet de X.

$$X^{\infty} = X$$

$$X^{-1} = X^{-2} = \dots = X^{-\infty} = pt$$

Si $\quad p \leqq p'$ $\quad$ et $\quad q \leq q'$ l'application

$$H(p',q') \to H(p,q)$$

est celle induite par l'application évidente

$$X^{(q)}/X^{(p)} \to X^{(q')}/X^{(p')}$$

De même que si $\quad -\infty \leqq p \leqq q \leqq r \leqq \infty$

$$\delta : H(p,q) \to H(q,r)$$

est l'opérateur bord

$$\delta : k^\cdot(X^{(q)}/X^{(p)}) \to k^\cdot(X^{(r)}/X^{(q)})$$

de la suite exacte de cohomologie, relative à la cofibration

$$X^{(q)}/X^{(p)} \to X^{(r)}/X^{(p)} \to X^{(r)}/X^{(q)}$$

On démontre que les propriétés $SP1,\dots,5$ de Eilenberg-Cartan (loc.cit.) sont satisfaites.

On note

$$
\begin{aligned}
H^{(p)} &= H(p,\infty)\\
H &= H(-\infty,\infty)\\
F^{p}H &= Im(H(p) \to H)\\
Z^{p}_{r} &= Im(H(p,p+r) \to H(p,p+1))\\
B^{p}_{r} &= Im(H(p-r+1,p) \to H(p,p+1))\\
E^{p}_{r} &= Z^{p}_{r} / B^{p}_{r}. \qquad\qquad 1 \leqq r \leqq \infty\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad -\infty < p < \infty
\end{aligned}
$$

Explicitons les termes E^{p}_{∞} , E^{p}_{1} *et* E^{p}_{2}.

B.1.5.4. *Le terme* E^{p}_{∞} .

D' après les définitions

$$E^{p}_{\infty} = Im(H(p,\infty) \to H(p,p+1))/_{Im(H(-\infty,p) \to H(p,p+1)}$$

$$= \frac{Im(k^{\bullet}(X/X^{p}) \to k^{\bullet}(X^{p+1}/X^{p}))}{Im(K^{\bullet}(X^{p}) \to k^{\bullet}(X^{p+1}/X^{p}))}.$$

Démontrons que

$$E^{p}_{\infty} = F^{(p)}H/F^{(p+1)}H \qquad (7)$$

Pour ce faire nous allons appliquer le Lemme: Si dans le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\bullet \arrow[ur] \arrow[r, "\varphi'"'] & \bullet \arrow[r, "\eta"'] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

la suite horizontale est exacte, alors on a un isomorphisme canonique

$$Im(\varphi) / Im(\varphi') \xrightarrow{\sim} Im(\psi)$$

Evident.

Considérons maintenant les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
 & k^{\bullet}(X/X^{p}) \arrow[d] \arrow[dr, "\psi"] & \\
k^{\bullet}(X^{p}) \arrow[ur, "\partial"] \arrow[r] & k^{\bullet}(X^{p+1}/X^{p}) \arrow[r] & k^{\bullet}(X^{p+1})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & k^{\bullet}(X/X^{p}) \arrow[d] \arrow[dr, "\psi"] & \\
k(X/X^{p+1}) \arrow[ur] \arrow[r] & k^{\bullet}(X) \arrow[r] & k^{\bullet}(X^{p+1})
\end{tikzcd}$$

Ils donnent lieu aux isomorphismes

$$Im\,\psi = \frac{Im(k^{\bullet}(X/X^{p}) \rightarrow k^{\bullet}(X^{p+1}/X^{p}))}{Im(k^{\bullet}(X^{p}) \rightarrow k(X^{p+1}/X^{p}))}$$

$$\mathrm{Im}\,\psi \simeq \frac{\mathrm{Im}(k(X/X^p) \to k(X))}{\mathrm{Im}(k^{\cdot}(X/X^{p+1}) \to k(X))}$$

B.1.5.5. *Le terme* E_1^p.

On note $X_p^d \subset X_p$ *l'ensemble des p-simplexes dégénérés de* X.

Proposition. *Il existe des isomorphismes canoniques* $\simeq$ *rendant commutatif le diagramme :*

$$(8) \qquad \begin{tikzcd} E_1^{p,q} = k^{p+q}(X^p/X^{p-1}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\wr"] & E_1^{p+1,q} = k^{p+q+1}(X^{p+1}/X^p) \arrow[d, "\wr"] \\ k^q(c(X_p/X_p^d)) \arrow[r] \arrow[d] & k^q(c(X_{p+1}/X_{p+1}^d)) \arrow[d] \\ k^q(c(X_p)) \arrow[r, "\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i k^q(c(d_i))"'] & k^q(c(X_{p+1})) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X_p/X_p^d \\ X_p \arrow[u, "\text{projection canonique}"] \end{tikzcd}$$

Le lemme suivant nous donne ces isomorphismes.

B.1.5.6. Lemme. *Pour tout ensemble simplicial pointé* X, *la suspension itérée p-fois de l'ensemble simplicial* $c(X_p/X_p^d)$ *est isomorphe au quotient* X^p/X^{p-1} :

$$\Sigma^p c(X_p/X_p^d) \simeq X/X^{p-1} \tag{9}$$

(remarque sur le cas $p = 0$*).*

On remarque d'abord que si A *est un ensemble pointé alors*

$$cA = \bigvee_{\lambda \in A - \{pt\ base\}} (S^{\circ}_{\lambda}) \qquad \text{(Wedge de Sphéres)} \tag{10}$$

où $S^{\circ}_{\lambda} = S^{\circ} =$ *zéro sphère simpliciale.*

D'où un isomorphe

$$\begin{aligned} \Sigma^{p}(cA) &= \Sigma^{p} \bigvee_{\lambda} S^{\circ}_{\lambda} \\ &\approx \bigvee_{\lambda} \Sigma^{p} S^{\circ}_{\lambda} \\ &\bigvee_{\lambda \in A - \{pt\}} S^{p} \end{aligned} \tag{11}$$

En particulier, pour tout ensemble simplicial X *et tout entier* $p \geq 0$

$$\Sigma^{p} c(X_p / X^{d}_{p}) \approx \bigvee_{\substack{\lambda \in X_p \\ \lambda \text{ non dégénéré}}} S^{p}_{\lambda} \tag{12}$$

On sait que le p-ième squelet X^{p} *d'un ensemble simplicial* X *s'obtient à partir du (p-1)-ième squelet par adjonction des sphères* S^{p-1}_{x} *, une pour chaque* $x \in X_p$ *non dégénéré.*

De façon précise

Lemme (Gabriel Zisman p. 30-31) Soit $N(p)$ *l'ensemble des p-simplexes non dégénérés de* X. *Pour chaque* $\sigma \in N(p)$ *soit*

$$\tilde{\sigma} : \Delta[p]' = \Delta[p] \sqcup \Delta[0] \to X.$$

l'application simpliciale pointé somme de $\sigma : \Delta[p] \to X$ *et de l'application nulle*

$$\text{pt. base} : \Delta[0] \to X.$$

On convient de noter

$$\dot{\Delta}[p]' = \dot{\Delta}[p] \sqcup \Delta[0] \xrightarrow{a_\sigma} X^{p-1}$$

et

$$\Delta[p]' \xrightarrow{\beta_\sigma} X^{p}$$

les restrictions de $\tilde{\sigma}$ *aux* $(p-1)$*-ième et* p*-ieme squelets. Dans ces conditions le diagramme ci-après est cocartesien.*

$$\begin{tikzcd}
\bigvee_{\sigma \in N(p)} \dot{\Delta}[p]'_\sigma \arrow[r, "\bigvee_\sigma (a_\sigma)"] \arrow[d, "\text{inclusion}"] & X^{p-1} \arrow[d, "\text{inclusion}"] \\
\bigvee_{\sigma \in N(p)} \dot{\Delta}[p]' \arrow[r, "\bigvee_\sigma (\beta_\sigma)"'] & X^{p}
\end{tikzcd} \tag{13}$$

(où $\Delta[p]'_\sigma = \Delta[p]'$ *quelque soit* $\sigma \in N(p)$*)*

En conséquence les cofibres des deux flèches verticales coïncident et l'on a alors les équivalences.

$$X^p / X^{p-1} \approx \bigvee_\sigma \Delta[p]'_\sigma \Big/ \bigvee_\sigma \dot{\Delta}[p]'_\sigma$$

$$\approx \bigvee_\sigma (\Delta[p]_\sigma \big/ \dot{\Delta}[p]_\sigma)$$

$$\approx \bigvee_{\sigma\in N(p)} S^p_\sigma \tag{14}$$

où

$$S^p = \Delta[p] \big/ \dot{\Delta}[p] \approx \Sigma^p S^\circ .$$

L'isomorphisme (9) est alors une conséquence des isomorphismes (12) et (14). Il donne lieu, au cas d'une cohomologie réduite à un isomorphisme

$$k^{p+q}(X^p / X^{p-1}) \underset{(9)}{\approx} k^{p+q}(\Sigma^p c(X_p / X^d_p))$$

$$\approx k^q(c(X_p / X^d_p)) \tag{15}$$

Si en outre $k^\bullet$ *satisfait l'axiome du Wedge on peut écrire*

$$k^{p+q}(X^p / X^{p-1}) \approx \prod_{\sigma\in N(p)} k^{p+q}(S^p_\sigma)$$

$$\approx \prod_{\sigma\in N(p)} p^q(S^\circ_\sigma) \tag{16}$$

Remarque. *On définit aussi directement l'application (9)*

$$u^p_X : \Sigma^p c(X_p / X^d_p) \rightarrow X^p / X^{p-1}$$

ou plutot son adjointe

$$\underline{u}_X^p : c(X_p / X_d^d) \to \Omega^p(X^p / X^{p-1})$$

comme suit : Pour tout ensemble pointé A *et tout ensemble simplicial* Y *(pointés tous deux), on a un isomorphisme canonique :*

$$.\Delta^\circ Ens\,(cA, Y) \approx .Ens(A, Y_\circ)$$

La définition de $\underline{u}_X^p$ *se fait alors très facilement. Il suffit de se donner une application ensembliste*

$$X_p / X_p^d \to (\Omega^p(X^p / X^{p-1}))_\circ$$

Or d'après la description du foncteur Ω *donnés au A.2.6.*

$$(\Omega^p(X^p / X^{p-1}))_\circ = X_p / X_p^d$$

Afin de montrer la commutativité du diagramme (8) il nous faut donner une description détaillée de l'operateur bord (∂) *dans la suite*

$$\frac{X^p}{X^{p-1}} \to \frac{X^{p+1}}{X^{p-1}} \to \frac{X^{p+1}}{X^p} \xrightarrow{\partial} \Sigma \frac{X^p}{X^{p-1}}$$

B.1.5.7. *Description de l'opérateur* $\partial : X^{p+1} / X^p \to \Sigma (X^p / X^{p-1})$

1) Notations : soit $\mu \in X_{p+1}$. *L'application simpliciale*

$$\mu : \Delta[p+1] \to X$$

associée se factorise à travers le $(p+1)$-squelet. Elle sera encore notée

$$\mu : \Delta[p+1] \to X^{p+1}$$

De même

$$\begin{array}{ccc} \dot{\mu} : \dot{\Delta}[p+1] & \to & X^{p} \qquad \dot{\mu} = \mu \mid \text{p-ième squelet} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \ddot{\mu} : \ddot{\Delta}[p+1] = (\Delta[p+1])^{p-1} & \to & X^{p-1} \end{array}$$

$$\ddot{\mu} = \mu \mid (p\text{-}1)\text{-ième squelet}$$

Les applications induites par μ, $\dot{\mu}$ et $\ddot{\mu}$ par passage au quotient sont notées

$$\mu/\dot{\mu} : \Delta[p+1] \,/\, \dot{\Delta}[p+1] \to X^{p+1}/X^{p}$$

$$\dot{\mu}/\ddot{\mu} : \dot{\Delta}[p+1] \,/\, \ddot{\Delta}[p+1] \to X^{p}\,/\,X^{p-1}$$

$$\mu/\ddot{\mu} : \Delta[p+1] \,/\, \ddot{\Delta}[p+1] \to X^{p+1}/X^{p-1}$$

2) Comme conséquence de la naturalité de l'operateur ∂ dans la suite de Puppe d'une cofibration, le diagramme ci-dessous est homotopiquement commutatif $(\mu \in X_{p+1})$:

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{X^{p}}{X^{p-1}} \arrow[r] & \dfrac{X^{p+1}}{X^{p-1}} \arrow[r] & \dfrac{X^{p+1}}{X^{p}} \arrow[r] & \Sigma\dfrac{X^{p}}{X^{p-1}} \\
\dfrac{\dot{\Delta}[p+1]}{\ddot{\Delta}[p+1]} \arrow[u, "\dot{\mu}/\ddot{\mu}"] \arrow[r] & \dfrac{\Delta[p+1]}{\ddot{\Delta}[p+1]} \arrow[u, "\mu/\ddot{\mu}"] \arrow[r] & \dfrac{\Delta[p+1]}{\dot{\Delta}[p+1]} \arrow[u, "\mu/\dot{\mu}"] \arrow[r, "\partial\mu"] & \Sigma\dfrac{\dot{\Delta}[p+1]}{\ddot{\Delta}[p+1]} \arrow[u, "\Sigma(\dot{\mu}/\ddot{\mu})"]
\end{tikzcd}$$

Et lorsque μ *parcourt* X_{p+1} *on en déduit la commutativité du diagramme suivant* *(où* $\frac{\Delta[p+1]}{\dot\Delta[p+1]}\mu = \frac{\Delta[p+1]}{\Delta[p+1]}$ *quelque soit* $\mu \in X_{p+1}$*)*

$$\begin{tikzcd}
\frac{X^{p+1}}{X^{p}} \arrow[rr, "\partial"] & & \Sigma\frac{X^{p}}{X^{p-1}} \\
\bigvee_{\mu}\frac{\Delta[p+1]}{\dot\Delta[p+1]}\mu \arrow[u, "V(\mu/\dot\mu)"] \arrow[rr, "\bigvee\partial_\mu"] & & \bigvee_{\mu}\Sigma\frac{\Delta[p+1]}{\ddot\Delta[p+1]}\mu \doteq \Sigma\bigvee_{\mu}\frac{\dot\Delta[p+1]}{\ddot\Delta[p+1]}\mu \arrow[u, "V(\Sigma[\dot\mu/\ddot\mu)]"']
\end{tikzcd}$$

3) Les complexes $\Delta[p]$ *s'enboîtent dans le complexe* $\Delta[p+1]$ *de façon à recouvrir entièrement la frontière.*

De façon précise si

$$\epsilon^{i} : \Delta[p] \to \Delta[p+1]$$

est l'application induite par l'injection

$$\epsilon^{i} : [p] \to [p+1] \qquad \epsilon^{i}(j) \neq i \qquad j = 0,\dots,p.$$

alors l'application

$$\bigvee_{i=0}^{p+1}(\dot\epsilon^{i}/\ddot\epsilon^{i}) : \bigvee_{i=0}^{p+1}\frac{\Delta[p]}{\dot\Delta[p]}_{i} \to \frac{\dot\Delta[p+1]}{\ddot\Delta[p+1]} \tag{18}$$

est un isomorphisme (où $\frac{\Delta[p]}{\dot\Delta[p]}_{i} = \frac{\Delta[p]}{\dot\Delta[p]}$ *pour tout i).*

des deux bouquets de $p+1$ *sphères en dimension* p.

4) Soit $\mu \epsilon X_{p+1}$, alors quelque soit i

$$\dot{\mu} \circ \dot{\epsilon}^{i} = \frac{d_i(\mu)}{\dot{d}_i(\mu)} \qquad 0 \leq i \leq p+1$$

$$\begin{array}{ccc} & X^p / X^{p-1} & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \frac{\Delta[p]}{\dot{\Delta}[p]} & \longrightarrow & \frac{\dot{\Delta}[p+1]}{\ddot{\Delta}[p+1]} \end{array}$$

C'est pourquoi le diagrame (20) est commutatif :

$$\frac{X^p}{X^{p-1}} \qquad \underset{\alpha}{V}(\alpha/\dot{\alpha}) \qquad \underset{\alpha}{V}\left(\frac{\Delta[p]}{\dot{\Delta}[p]}\alpha\right)$$

(20) $\underset{\mu}{V}(\dot{\mu}/\ddot{\mu})$ deus descriptions des éléments de X^p/X^{p-1}. (μ, V_i) $id_{(\mu, i)}$ $d_i\mu$

$$\underset{\mu}{V}\frac{\dot{\Delta}[p+1]}{\ddot{\Delta}[p+1]}\mu \qquad \underset{\mu}{V}\underset{i}{V}(\dot{\epsilon}^i/\ddot{\epsilon}^i) \qquad \underset{\mu}{V}\overset{i=p+1}{\underset{i=o}{V}}\left|\frac{\Delta[p]}{\dot{\Delta}[p]}\right|(\mu, i)$$

(où α parcourt les élements de X_p; μ parcourt X_{p+1},

$$\frac{\Delta[p]}{\dot{\Delta}[p]}(\mu, i) = \frac{\Delta[p]}{\dot{\Delta}[p]} \qquad \text{pour chaque } \mu \epsilon X_{p+1}, \ i = 0, \ldots, p+1$$

et enfin

$$id^{d_i\mu}_{(\mu,i)} : \frac{\Delta[p]}{\dot\Delta[p]}(\mu,i) \to \frac{\Delta[p]}{\dot\Delta[p]} d_i\mu$$

est l'identité).

(5) Si l'on met côte à côte le diagramme (17) et la suspension du diagramme (20), on obtient, aprés application de foncteur k, le diagramme (21) où il ne reste à connaitre que les $k(\partial_\mu)$, et cela pour chaque $\mu \in X_{p+1}$. Ce qui d'ailleur est fait dans le lemme ci-après.

$$\begin{array}{ccccc}
k(X^{p+1}/X^p) & \xrightarrow{k(\partial)} & k(\Sigma\{X^p/X^{p-1}\}) & & k(\Sigma \bigvee_\alpha \frac{\Delta[p]}{\dot\Delta[p]}\ \alpha) \\
\downarrow \text{Diag. } (*) + \text{Foncteur } k & & \downarrow \text{Diag.} + \text{suspension} + \text{foncteur } k & & \downarrow \\
k(\bigvee_\mu \frac{\Delta[p+1]}{\dot\Delta[p+1]}\mu) & \longrightarrow & k(\Sigma \bigvee_\mu \frac{\dot\Delta[p+1]}{\dot\Delta[p+1]}\mu) & = & k(\Sigma \bigvee_{(\mu,i)} \frac{\Delta[p]}{\dot\Delta[p]}(\mu,i)) \\
\approx\downarrow \text{Axiomme de Wedge} & & \approx\downarrow & & \approx\downarrow \\
\prod_\mu k(\frac{\Delta[p+1]}{\dot\Delta[p+1]}\mu) & \longrightarrow & \prod_\mu k(\Sigma \frac{\dot\Delta[p+1]}{\dot\Delta[p+1]}\mu) & = & \prod_\mu k(\Sigma \bigvee_i \frac{\Delta[p]}{\dot\Delta[p]}(\mu,i))
\end{array}$$

(6) Description de $\partial_\mu = \partial$

Lemme. Le diagramme ci-dessous est homotopiquement commutatif (la flèche verticale de gauche est la co-multiplication iterée $p+1$ fois. D'autre part

$$(-1)^i : \Sigma(\Delta[p]/\dot\Delta[p]) \approx S^{p+1} \to \Sigma([p]/\dot\Delta[p]) \approx S^{p+1}$$

dénote une application de degré $(-1)^i$ *,* $i = 0,\dots,p+1$)

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{\Delta[p+1]}{\dot\Delta[p+1]} & \xrightarrow{\partial} & \Sigma\, \dfrac{\dot\Delta[p+1]}{\Delta[p+1]} & \approx & \Sigma \bigvee_{i=o}^{i=p+1} \dfrac{\Delta[p]}{\dot\Delta[p]}\, i \\
\downarrow & & & & \Big\| \approx \\
\bigvee_{i=o}^{i=p+1} \dfrac{\Delta[p+1]}{\dot\Delta[p+1]}\, i & \approx & \bigvee_i \Sigma\, \dfrac{\Delta[p]}{\dot\Delta[p]}\, i & \xrightarrow{\bigvee_i (-1)^i} & \bigvee_i \Sigma\, \dfrac{\Delta[p]}{\dot\Delta[p]}\, i
\end{array}$$

B.1.6. CONSEQUENCES DE LA SUITE SPECTRALE d' A-H.

B.1.6.1. *On dira qu'un ensemble simplicial* X *est de dimention finie, s'il existe un entier* p *tel que* $X^p = X$. *Le plus petit entier* d *tel de* $X^d = X$ *est la dimention de* X.

La suite spectral d' Atiyah-Hirzebruch nous permet de voir que deux théories de la cohomologie qui coïncident sur les sphères coïncident sur tout ensemble simplicial de dimension finie. Et donc partout (Th. B.1.6. 3.). En particulier un spectre S *et son* Ω*-spectre* S ( ) *définissent la même théorie.*

B.1.6.2. **Lemme.** *Soit* $\lambda : \dot h \to \dot k$ *un morphisme entre deux cohomologie satisfaisant l' axiome du Wedge. Pour que* λ *soit un isomorphisme sur tout ensemble simplicial de dimension finie il faut et il suffit que*

$$\lambda_{S^\circ} : \dot h(S^\circ) \to \dot k(S^\circ)$$

soit un isomorphisme .

En effet, le terme $E_2^{\cdot}$ *de la suite spectrale de* h *est l'homologie du complexe*

$$\longrightarrow \prod_{\sigma\epsilon X_p} h(S^\circ)_\sigma \xrightarrow{\partial} \prod_{\mu\epsilon X_{p+1}} h(S^\circ)_\mu \xrightarrow{\partial}$$

avec $\partial(x_\sigma)_\sigma = (\gamma_\mu)_\mu$

$$\gamma_\mu = \sum_{i=o}^{p+1} (-1)^i x_{d_i\sigma}$$

Si λ_{S° *est un isomorphisme, les termes* E_2 *de* h *et* k *coïncident. D'où un isomorphisme entre les gradués associés aux filtrations de* $h(X)$ *et de* $k(X)$. *Si* X *est de dimension finie,* p *par exemple, alors*

$$\begin{aligned} F^{p+1}h(X) &= Im(h(X/X^{p+1}) \to h(X)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La relation

$$\lambda : Grad\ h(X) \rightleftarrows Grad\ k(X)$$

implique alors que

$$F^p h(X) \rightleftarrows F^p k(X)$$

Et par récurrence descendante

$$F^i h(X) \rightleftarrows F^i k(X) \qquad i \leq p$$

Ainsi que pour $i = -1$ *on trouve*

$$\lambda_X : h(X) \rightleftarrows k(X).$$

B.1.6.3. Théoreme. *Pour qu'une transformation naturelle $\lambda : h \to k$ entre deux théories de la cohomologie satisfaisant l'axiome du Wedge soit un isomorphisme il faut et il suffit que*

$$\lambda_{S^\circ} : h(S^\circ) \to k(S^\circ)$$

soit un isomorphisme.

La condition étant évidemment nécessaire, démontrons qu'elle est suffisante. D'après le lemme précédent elle implique que les deux théories coïncident sur tout ensemble simplicial de dimension finie.

En particulier $\lambda_{X^p} : h(X^p) \cong k(X^p)$ est un isomorphisme pour tout p et tout ensemble simplicial X.

Or, d'après Milnor (1) on a une suite exacte courte

$$o \to \varprojlim_p{}^{(1)} h^{q-1}(X^p) \to h^q(X) \to \varprojlim_p h^q(X^p) \to o \qquad (23)$$

Le lemme de cinq implique alors que dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
o & \to & \varprojlim_p h^{q-1}(X^p) & \to & h^q(X) & \to & \varprojlim_p h^q(X^p) & \to & o \\
 & & \downarrow \approx \varprojlim^{(1)} \lambda(X^p) & & \downarrow \lambda X & & \downarrow \approx \varprojlim \lambda(X^p) & & \\
o & \to & \varprojlim_p{}^{1} k^{q-1}(X^p) & \to & k^q(X) & \to & \varprojlim_p k^q(X^p) & \to & o
\end{array}$$

$$\lambda_X : h^q(X) \to k^q(X)$$

est un isomorphisme (pour tout q) C. Q. F. D.

B.1.6.4. Soit E un spectre. On note

$$\begin{aligned}\Pi_p(E) &= \underrightarrow{\lim}\ \pi_p(\tilde{E}^{p+k}) \\ &= \underrightarrow{\lim}\ \pi_o(\Omega^p E^{p+k}) \\ &= k^k(S^\circ, E) \qquad (24)\end{aligned}$$

On se réfère aux π_k comme aux groupes d'homotopie du spectre E. Il est évident que si $\underline{E}$ dénote le Ω-spectre associé à E (B.1.2.1.) alors

$$\pi_k(E) = \pi_k(\underline{E}) \qquad (25)$$

De même que si E est un Ω-spectre

$$\pi_k(E) = \Pi_o(E^k) \qquad (26)$$

Corollaire. Soit

$$f : E \to F$$

un morphisme de spectres simpliciaux. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

a) Le morphisme :

$$f^* : h^*(\cdot,) \to h^*(\cdot, F)$$

entre les cohomologies associées à E et F est un isomorphisme.

b) l'homomorphisme

$$\pi_*(f) : \pi_*(E) \to \pi_*(F)$$

associé à F, *entre les groupes d'homotopie des spectres, est un isomorphisme.*

c) Si $\underline{E}$ *et* $\underline{F}$ *sont les* Ω-*spectres associés à* E *et* F ( )
alors pour tout $k \in \mathbf{Z}$

$$\pi_0(f) : \pi_0(\underline{E}^k) \to \pi_0(\underline{F}^{k+d})$$

où d = *degré de* f.

B.2. CLASSIFIANT GENERALISE.

B.2.1. *On note* Δ *la catégorie dont les objets sont les ensembles ordonnés* $[n] = \{0 \leq 1 \leq \ldots \leq n\}$ *et les flèches les applications croissantes au sens large. On sait bien que la catégorie* $\Delta^\circ C$ *des objets simpliciaux d'une catégorie* C, *est la catégorie des foncteurs contravariants de* Δ *dans* C. *On note* δ *la catégorie discrète associée à* Δ : *ses objets sont ceux de* Δ *et les flèches sont les identités. Il est clair qu'un foncteur contravariant (ou covariant) de* δ *dans une catégorie* C *est tout simplement un* C-*objet gradué. Notons*

$$v : \delta \to \Delta$$

le foncteur évident. Pour chaque catégorie C, *le foncteur*

$$V : \Delta^\circ C \to \delta^\circ C$$

associé à v, *est celui qui oublie les opérateurs d'un objet simplicial pour ne laisser que l'objet gradué sous-jacent.*

Sous certaines conditions sur C, *le foncteur* V *admet un adjoint à droite* U. *Ce paragraphe est dédié à l'étude du foncteur* U *lorsque* C *est la catégorie des groupes, ou celle des groupes abéliens.*

B.2.2. C *dénote une des catégories ci-après : ensembles, groupes, semi-groupes, groupes abéliens, semi-anneaux, anneaux commutatifs avec unité, module sur un anneau* Δ *(comm. avec 1).*

Proposition. *Le foncteur oubli*

$$V : \Delta^{\circ} C \to \delta^{\circ} C$$

admet un adjoint à droite.

Nous ferons la construction de

$$U : \delta^{\circ} C \to \Delta^{\circ} C$$

au cas où C *est la catégorie des groupes. Pour les autres cas la démonstration est semblamle.*

Supposons tout d'abord que $C = Ens$.

Il s'agit en effet de montrer qu'étant donné un ensemble gradué G, *le foncteur qui à chaque ensemble simplicial* X *fait correspondre l'ensemble des applications graduées de* X *dans* G, *est représentable. Il est représenté par* $U(G)$:

$$U(G)_n = \delta^{\circ} Ens\ (V\ \Delta[n]\ , G)$$

Pour les catégories C *qui nous intéressent le membre droit est de nouveau dans* C, *si* G *est un objet de* C. *Les faces sont définies de façon évidente : si* $\omega : [n] \to [m]$ *est une flèche de* Δ, *et* $\omega_* : \Delta[n] \to \Delta[m]$ *la flèche de* $\Delta^{\circ} Ens$ *associée, alors l'application*

$$\omega^*: \delta^\circ C(V\ \Delta[m], G) \to \delta^\circ C(V\ \Delta[n], G)$$

qui en résulte est dans C :

$$\omega^*: U(G)m \to U(G)n.$$

On a défini UG *de telle façon que*

$$\delta^\circ Ens\ (V\ \Delta\ [n], G) = (U\ G)n$$

$$= \Delta^\circ Ens\ (\Delta[n],\ U\ G)$$

Plus généralement pour tout ensemble simplicial X :

$$\delta^\circ Ens\,(V\,X, G) = \Delta^\circ Ens\,(X,\ U\ G) \qquad (*)$$

Cet isomorphisme est associé à l'application

$$r_G : V\ U\ G \to G$$

définie sur $x : V\,\Delta[n] \to G$ *par*

$$r_G(x) = x(\delta^n)\ ,\quad 1_n = \delta^n \in \Delta_n[n]$$

Si G *est un groupe gradué, la multiplication dans* $U\,G$ *se fait par points*

$$x, y : V\ \Delta[n] \to G$$

$$(x\cdot y)(t) = x(t)\cdot y(t),\qquad t \in \Delta[n].$$

et alors

$$r_G(x\cdot y) = (x\cdot y)(\delta^n)$$

$$= x(\delta^n) \cdot y\ (\delta^n)$$

$$= r_G(x) \cdot\ r_G(y)$$

Lemme. *Si* G *est un objet de* $\delta^{\circ}C$,

$$r_G : V\ U\ G \to G$$

est un morphisme de $\delta^{\circ}C$.

Démontrons maintenant que la relation ( ) a lieu. Par définition elle a lieu lorsque* X *est représentable, c'est-à-dire que pour chaque* $n \geq o$ *et pour chaque* $x : V\Delta[n] \to G$ *il existe une, et une seule application simpliciale*

$$\overline{x} : \Delta[n] \to U(G)$$

telle que :

$$r_G \circ V\ \overline{x} = x$$

Soit maintenant X *un ensemble simplicial quelconque, et*

$$f : VX \to G$$

une application d'ensembles gradués. Soit $x \in X_n$. *On note encore*

$$x : \Delta[n] \to X$$

l'application simpliciale qui lui est associée. Alors à l'application

$$f \circ V(x) : V\Delta[n] \to G$$

correspond une et une seule application simpliciale

$$\dot{f}(x) = \overline{f \circ V(x)} : \Delta[n] \to U(G)$$

(ou, ce qui revient au même, un élément

$$\dot{f}(x) \in U(G)_n\ )$$

telle que

$$r_G \circ V\dot{f}(x) = f \circ V(x)$$

L'application $x \dashrightarrow \dot{f}(x)$ de X dans $U(G)$ est simpliciale : car si

$$\omega : [m] \to [n]$$

est un morphisme de Δ et si

$$\omega_* : \Delta[m] \to \Delta[n]$$

$$\omega_* : X_n \to X_m$$

sont les applications associées, alors pour tout $x : \Delta[n] \to X$ ie $x \in X_n$
$\dot{f}(\omega^*(x)) : \Delta[m] \to U$ est la seule application simpliciale telle que

$$r_G \circ V(\dot{f}(\omega^*(x))) = f \circ V(\omega^*(x))$$

Or, d'une part

$$\begin{aligned} f \circ V(\omega^*(x)) &= f \circ V(x \circ \omega_*) \\ &= f \circ V(x) \circ V(\omega_*) \\ &= r_G \circ V(\dot{f}(x)) \circ V(\omega_*) \end{aligned}$$

$$= r_G \circ V(\bar{f}(x) \circ \omega_*)$$

$$= r_G \circ V(\omega^*(\bar{f}(x)))$$

et d'autre part

$$\omega^*(\bar{f}(x)) : \Delta[m] \to U(G)$$

est aussi simpliciale, alors l'unicité nous donne l'identité cherchée :

$$\bar{f}(\omega^*(x)) = \omega^*(\bar{f}(x)).$$

Il nous reste à voir que si X et G sont des C-objets simpliciaux, alors

$$\delta^\circ C(V X, G) = \Delta^\circ C(X, U G) \qquad (\bullet\bullet)$$

La démonstration sera faite lorsque C est la catégorie des groupes. Soit donc G un groupe gradué, X un groupe simplicial, et

$$f : V X \to G$$

un homomorphisme de groupes gradués, alors, l'unique application simpliciale

$$\bar{f} : X \to U G$$

telle que

$$r_G \circ V \bar{f} = f$$

est est un homomorphisme de groupes simpliciaux. Car pour tout couple x, y de simplexes en dimension n de X, on a

$$r_G \circ V \bar{f}(x\, y) =$$

$$= f(x)\ f(y)$$

$$= (r_G \circ V(\bar{f}(x)))\ (r_G \circ V(\bar{f}(y)))$$

$$= r_G \circ V(\bar{f}(x) \cdot \bar{f}(y))$$

Alors

$$\bar{f}(x\, y) = \bar{f}(x) \cdot \bar{f}(y)$$

B.2.3. Proposition. *Soient*

$$f, g : G \to H$$

deux morphismes de $\delta^0 C$. *Alors les morphismes*

$$U(f),\ U(g) : U(G) \to U(H)$$

sont homotopes.

Par commodité nous allons démontrer la proposition au cas où C *est la catégorie de groupes. Soit*

$$F : V\, \Delta[1] \times G \to H$$

l'application graduée donnée par

$$F(o,x) = f(x)$$

$$F(1,x) = g(x)$$

$$F(t,x) = f(x),\ t \neq 1$$

Ici o (resp. 1) représente un simplexe de $\Delta[1]$ *dans l'image de l'application* $\epsilon^1 : \Delta[o] \to \Delta[1]$ *(resp.* $\overset{\circ}{\epsilon}$*).*

Cette application satisfait en outre à la relation

$$F(t, xy) = F(t,x)F(t,y)$$

pour tout couple x, y *de* G*, et tout* t *de* $V\Delta[1]$.

L'homotopie cherchée entre $U(f)$ *et* $U(g)$ *est le composé*

$$F' : \Delta[1] \times U(G) \xrightarrow[s \times 1]{} UV\Delta[1] \times U(G) \xrightarrow{U(F)} U(H)$$

où

$$s : \Delta[1] \to UV\Delta[1]$$

est l'injection simpliciale associée à l'identité de $V\Delta[1]$*, par l'isomorphisme d'adjonction*

$$\delta^\circ Ens(V\Delta[1], V\Delta[1]) \approx \Delta^\circ Ens(\Delta[1], UV\Delta[1])$$

L'application F' *a le même comportement que* F *vis-à-vis des opérations :*

$$F'(t, x.y) = F'(t,x).F'(t,y)$$

$x, y \in UG$ *et* $t \in \Delta[1]$

Soit C *une des catégories suivantes : groupes (resp. abéliens),* Δ*-modules, semi-groupes, ensembles pointés, La proposition précédente nous donne le :*

B.2.4. Corollaire. *Pour tout* $G \in \delta^\circ C$, *le* C-*objet simplicial* $U(G)$ *est contractile:*

Il existe donc une homotopie

$$F : \Delta[1] \times U(G) \to U(G)$$

telle que a) $F(o, x) = x$ $x \in U(G)$

b) $F(1, x) = *$

c) *pour tout* n *et* $t \in \Delta[1]$ *en dimmension* n

$$F(t, \ ) : (U(G))_n \to (U\,G)_n$$

est une flèche de C.

Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $G = H$ *et* $f =$ *identité de* G *et* $g =$ *l'application nulle* $= *$

B.2.5. *Soit* G *un groupe simplicial. Alors l'application canonique*

$$s_G : G \to U\,V\,G$$

est un morphisme de groupes simpliciaux. Cette application fait correspondre à chaque $x \in G_n$

$$x : \Delta[n] \to G$$

l'application graduée

$$V\,x : V\ \Delta[n] \to V\,G$$

ie :

$$V(x) \in U\,(V(G))_n$$

Le corollaire B.2.4. nous permet alors de conclure que l'ensemble simplicial

UVG/G

quotient de $UV(G)$ par l'action de son sous-groupe simplicial G, est le classifiant de G.

B.2.6. *Soit maintenant X un ensemble simplicial tel que $V(X)$ est un groupe gradué. C'est-à-dire que chaque X_n est un groupe mais les faces de X ne sont pas des morphismes de groupes.*

Alors $UV(X)$ est un groupe simplicial mais l'application simpliciale (injective)

$$s_X : X \to U\,V(X)$$

n'est pas, dimension par dimension, un homomorphisme de groupes.

On note $[X]$ le plus petit sous-groupe simplicial de $U\,V(X)$ contenant $s_X(X)$.

Remarques. a) *Si X est un groupe simplicial alors $[X] = X$*

b) *Si $f : X \to Y$ est une application simpliciale telle que*

$$V(f) : VX \to VY$$

est une flèche de $\delta^\circ Gr$, alors elle induit un homomorphisme de groupes simpliciaux

$$f_\# : [X] \to [Y]$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] \arrow[rr, bend left, "s_X"] & {[X]} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_\#"] & U\,V(X) \arrow[d, "V(f)"] \\
Y \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "s_Y"'] & {[Y]} \arrow[r, hook] & U\,V(Y)
\end{tikzcd}$$

En effet, les hypothèses sur f *impliquent que* $U\ V(f)$ *est un homomorphisme simplicial. Si* $s_X(x_1)\cdot\ldots\cdot s_X(x_n)$ *est le produit dans* $U\ V(X)$ *de* n *éléments de* X, *de même dimension, alors.*

$$U\ V(f)\ (s_X(x_1)\cdot\ldots\cdot s_X(x_n)) =$$

$$U\ V(f)(s_X(x_1))\cdot\ldots\cdot U\ V(f)\ (s_X(x_n)) =$$

$$s_Y(f(x_1))\cdot\ldots\cdot s_Y(f(x_n))$$

Or $[X]_n$ *est le sous-groupe de* $U\ V(X)$ *formé des éléments de la forme* $s_X(x_1)\cdot\ldots\cdot s_X(x_p)$ *avec* $x_1,\ldots,x_p \in X_n$.

B.2.7. **Définition.** *1) Soit* X *un ensemble simplicial tel que* VX *est un groupe gradué.*

Alors on note $\bar{W}(X)$, *et on appelle*[1] *classifiant généralisé de* X, *l'ensemble simplicial* $\bar{W}[X]$ *classifiant du groupe* $[X]$ *engendré par* X *dans* $U\ V(X)$.

2) De même, si $f : X \to Y$ *est une application simpliciale telle que*

$$V(f) : V X \to V Y$$

est une flèche de $\delta°\ Gr$, *on note* $\bar{W}(f)$ *l'application simpliciale*

$$\bar{W}(f_\#) : \bar{W}[X] \to \bar{W}[Y]$$

3) Si G *est un groupe simplicial, l'ensemble* $\bar{W}(G)$ *décrit au numéro A. 2. 3., est tel que* $V\bar{W}(G)$ *est un groupe gradué. On note* $\bar{W}^2(X)$ *le classifiant de l'ensemble* $\bar{W}[G]$. *On définit aussi par récurrence*

$$\bar{W}^n(X) = \bar{W}(\bar{W}^{n-1}X)$$

---

(1) de façon plus précise : on parle de [ ]-classifiant généralisé

Remarque. Si X est un groupe simplicial, le classifiant de X donné par A. 2. 3. et celui donné par la définition précédente coïncident.

B.2.8. Notons $P(Gr) = P$ le produit fibré des deux foncteurs.

$$\begin{tikzcd} & \Delta^{\circ}Ens \arrow[d, "V"] \\ \delta^{\circ}Gr \arrow[r, "E"'] & \delta^{\circ}Ens \end{tikzcd}$$

où E est le foncteur qui à chaque groupe gradué associe l'ensemble gradué sous-jacent. Les objets de la catégorie P sont les triples (G, a, X) où G est un groupe gradué, X un ensemble simplicial, et

$$a : E(G) \xrightarrow{\approx} V(X)$$

un isomorphisme dans $\delta^{\circ}Ens$ (i.e : a est bijective). Bref, un objet de P est un ensemble simplicial dont l'ensemble gradué sous-jacent est muni d'une structure de groupe gradué. Les flèches de P sont les couples (f, g)

$$f : G \to G' \text{ flèche de } \delta^{\circ}Gr$$

$$g : X \to X' \text{ flèche de } \Delta^{\circ}Ens$$

tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} E(G) \arrow[r, "a", "\approx"'] \arrow[d, "E(f)"'] & V(X) \arrow[d, "E(g)"] \\ E(G') \arrow[r, "\approx", "a'"'] & V(X') \end{tikzcd}$$

commute. Il s'agit donc des applications simpliciales $f : X \to X'$ *qui sont des homomorphismes des "groupes gradués sous-jacents".*

Il existe un plongement fidèle

$$i : \Delta^{\circ}Gr \to P(Gr)$$

de la catégorie des groupes simpliciaux dans P. *C'est l'unique foncteur de coordonnées.*

$$\Delta^{\circ}Gr \xrightarrow{E} \Delta^{\circ}Ens \qquad \text{(foncteur oubli de la structure de groupe)}$$

$$\Delta^{\circ}Gr \xrightarrow{V} \delta^{\circ}Gr \qquad \text{(oubli de la structure simpliciale)}.$$

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{\circ}Gr \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& P(Gr) \arrow[r] \arrow[d, "V'"] & \Delta^{\circ}Ens \arrow[d, "V"] \\
& \delta^{\circ}Gr \arrow[r] & \delta^{\circ}Ens
\end{tikzcd}$$

D'autre part le foncteur $\bar{W}$ *défini dans A.2.3. prend ses valeurs dans la catégorie des ensembles simpliciaux, mais il se factorise à travers* P *(B.2.7.), donnant lieu à foncteur noté encore*

$$\bar{W} : \Delta^{\circ}Gr \to P(Gr)$$

D'après B.2.7. celui-ci se prolonge en un foncteur, noté toujours $\bar{W} : P(Gr) \to P(Gr)$ *et appelé classifiant (généralisé)*

$$\begin{tikzcd} \Delta^{\circ}Gr \arrow[rr] \arrow[dr, "\bar{W}"'] & & P(Gr) \arrow[dl, "\bar{W}"] \\ & P(Gr) & \end{tikzcd}$$

Remarque. Ce qui précède reste encore valable si au lieu de la catégorie Gr des groupes, on utilise la catégorie SGr des semi-groupes, la catégorie Ab des groupes abéliens, ou celle des modules sur un anneau.

L'inclusion

$$Gr \xrightarrow{j} Ab$$

induit un foncteur $P(j)$ rendant commutatif le diagramme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} P(Gr) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{W}"'] & P(Ab) \arrow[d, "\bar{W}"] \\ P(Gr) \arrow[r] & P(Ab) \end{tikzcd}$$

De même si Ab est remplacée par SGr.

B.2.9. Proposition. *Le foncteur*

$$i : \Delta^{\circ}C \to P(C)$$

admet un adjoint à gauche

$$j : P(C) \to \Delta^{\circ}C$$

i (resp. j) commute donc aux limites projectives (resp. inductives).

Nous ferons la démonstration au cas où $C = Gr$. Soit donc X un ensemble sim-

plicial dont l'ensemble gradué sous-jacent est muni d'une structure de groupe gradué.
Soit $D(X)$ *le plus petit sous groupe simplicial distingué de* $[X]$ *contenant les éléments de la forme*

$$s_x \cdot \omega^*(xy) \cdot s_x\omega^*(y^{-1}); \; s_x\omega^*(x^{-1}) \qquad (M)$$

où $x, y \in X_n$, $\omega : [m] \to [n]$ *est une flèche de* Δ, *et où* $s_X : X \to [X]$ *est l'injection canonique.*

Soit enfin

$$j(X) = [X] / D(X) \qquad (1)$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & D(X) \arrow[r] & X \arrow[r] & j(X) \arrow[r] & 1 \\ & & X \arrow[u, "s_X"] \arrow[ur, "t_X"'] & & \end{tikzcd}$$

il est clair que l'application t_X

i) *est simpliciale*

ii) *pour tout* n, $(t_X)_n : X_n \to j(X)_n$ *est un homomorphisme de groupes.*

En outre elle est universelle pour ces deux propriété. C'est à dire que pour tout groupe simplicial H *et toute application* $t : X \to H$ *satisfaisant à i) et ii) il existe un et un seul homomorphisme de groupes simpliciaux* $u : jX \to H$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "t_X"'] \arrow[rr] & & H \\ & j(x) \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

En effet on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "s_x"'] & H \arrow[d, "s_H"', "S"] \\ {[X]} \arrow[r, "t"] \arrow[ur, dashed, "\Psi"] & {[H]} \end{tikzcd}$$

où s_H *est un isomorphisme car* H *est un groupe simplicial, et où* $\psi = s_H^{-1} \circ t$ *est un homomorphisme de groupes simpliciaux. En outre*

$$\Psi(s\,\omega^*(xy)\,.\,s\,\omega^*(y^{-1})\,.\,s\,\omega^*(x^{-1})) =$$

$$\Psi\,s(\omega^*(xy))\,.\,\Psi\,s\,\omega^*(y^{-1})\,.\,\Psi\,s\,\omega^*(x^{-1}) =$$

$$t\,\omega^*(xy)\,.\,t\,\omega^*(y^{-1})\,.\,t\,\omega^*(x^{-1}) =$$

$$\omega^*t(xy)\,.\,\omega^*t(y^{-1})\,.\,\omega^*t(x^{-1}) =$$

$$(\text{dans } H)\ \omega^*\,tx\,.\,\omega^*t(y^{-1})\,.\,\omega^*t(x^{-1}) = 1$$

Ψ *est donc nulle sur le sous-groupe simplicial de* X *engendré par les éléments (M), donc sur le sous-groupe distingué engendré par les éléments de la forme* xMx^{-1} *et à fortiori, sur* $D(X)$. *D'où un homomorphisme de groupes simpliciaux* $u : j(X) \to H$ *tel que* $u \circ t_X = t$.

L'unicité de u *est immédiate : si* u *et* u' *sont deux solutions*

$$u \circ t_X = u'\,.\,t_X = t$$

alors les homomorphismes Ψ , Ψ' *de groupes simpliciaux*

$$\begin{tikzcd}[X] \arrow[rr, "\Psi\,,(\Psi')"] \arrow[dr] & & H \\ & jX \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

donnés par

$$\Psi = u \circ t_X$$

$$\Psi' = u' \circ t_X$$

sont tels que

$$\Psi = s_X = \Psi' \circ s_X = t$$

Or, en chaque dimension, $[X]$ *est engendré par des "mots"* $s_X(x_1)\ldots s_X(x_p)$ *, donc* Ψ *et* Ψ' *coïncident, et, avec eux, leurs quotients* u *et* u'.

B.2.10. Corollaire. *Le foncteur composé*

$$U' = i \circ U : \delta^\circ C \to \Delta^\circ C \to P(C)$$

est adjoint à droite du foncteur

$$V \circ j : P(C) \to \Delta^\circ C \to \delta^\circ C$$

B.2.10. Bis 1. *On decrit le groupe* jX *comme le groupe quotient du groupe simplicial libre* FX *engendré par* X *modulo la relation d'equivalence*

$$\omega^*(x\ \ y) = \omega^*x \cdot \omega^*y \qquad x, y \in X,$$

L'application canonique $X \to jX$ *est surjective. Pour qui elle soit un isomor-*

phisme il fout et il suffit que X *soit un groupe simplicial .*

B.2.10. Bis 2. *Pour que l'application canonique*

$$t_{\bar{W}A} : \bar{W}A \to j\,\bar{W}A$$

soit un isomorphisme il et il suffit que le groupe A *soit abélien .*

En effet on identifie

$$d_1(x_0 y_0, \ldots, x_n y_n) \quad \text{et} \quad d_1(x_0, \ldots, x_n)\, d_1(y_0, \ldots, y_n)$$

Si $t_{\bar{W}A}$ *est injective on a necessairement*

$$x_{n-1}\, y_{n-1} \cdot d_0 x_n \cdot d_0 y_n = x_{n-1}\, d_0 x_n \cdot y_{n-1}\, d_0 y_n$$

D' où

$$y_{n-1}(d_0 x_n) = (d_0 x_n) \cdot y_{n-1} \qquad \text{dans} \quad A_{n-1}$$

Or d_0 *est surjective, alors pour tout* n

A_n *est commutatif et donc* A *est un groupe simplicial abélien .*

B.2.10. (3) Notation . $X \in P(Gr)$, $\omega(X) = \bar{W}\, j(X)$

$$\bar{W}(X) = \bar{W}[X]$$

On dit parfois que $\omega(X)$ *(resp.* $\bar{W}(X)$*)* *est le* j *- classifiant (resp. le* $[\ ]$ *- classifiant) de* X *. Ou, si auoune confusion n'est à craindre, on parlera des classifiants généralisés*

B.2.10.(1) *On décrit aussi le groupe* jX *comme le groupe quotient du groupe simplicial libre* FX *engendré par* X *modulo la relation d'équivalence (où* w^* *est une face quelconque)* $w^*(x\ y) = w^*(x) \cdot w^*(y)$ x, y *dans* X

L'application canonique $X \to jX$ *est surjective. Pour qu'elle soit un isomorphisme il faut et il suffit que* X *soit un groupe simplicial.*

B.2.10.(2). *Pour que l'application canonique*

$$t_{\bar{W}A} : \bar{W}A \to j\bar{W}A$$

soit un isomorphisme il faut et il suffit que le groupe A *soit abélien.*

En effet, on identifie

$$d_1(x_o y_o, \ldots, x_n y_n) \quad \text{et} \quad d_1(x_o, \ldots, x_n)\, d_1(y_o, \ldots, y_n)$$

Si $t_{\bar{W}A}$ *est injectif on a necessairemente*

$$x_{n-1}\, y_{n-1}\, d_o x_n\, d_o y_n = x_{n-1}\, d_o x \;\; y_{n-1}\, d_o y_n$$

D'où

$$y_{n-1}\, d_o x_n = d_o x_n\, y_{n-1} \quad \text{dans } A_{n-1}$$

Or, quel que soit n, d_o *est surjective, donc* A_{n-1} *est commutatif et donc* A *est un groupe simplicial abélien.*

B.2.10.(3) *Notation : on convient de noter*

$$\omega(X) = \bar{W}j(X)$$

$$\bar{W}(X) = \bar{W}[X]$$

Où X *est un objet de* $P(Gr)$.

La transformation naturelle

$$[X] \to jX$$

induit une transformation

$$\bar{W}(X) \to \omega(X)$$

D'autre part, par application de l'espace de lacets, elle rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & {[X]} = \Omega \bar{W}(X) \arrow[d] \\
X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & j(X) = \Omega\, \omega(X)
\end{tikzcd}$$

On parle parfois de $\omega(X)$ *(resp. de* $\bar{W}(X)$*) comme du* j*-classifiant (resp.* $[\ ]$*-classifiant) de l'objet* X*. Ils coïncident si* X *est un groupe simplicial.*

Nous aurons à nous servir de ces deux généralisation du classifiant de MacLane notamment dans la construction des deux spectres associés à un Presque-groupe simplicial, dont les cohomologies $k(\ ,X)$ *et* $h(\ ,X)$ *seront étudiées au § B.3.*

B.2.11. Proposition. *Le composé*

$$\Delta^{\circ}C \xrightarrow{i} P(C) \xrightarrow{j} \Delta^{\circ}C$$

est le foncteur identique

Corollaire. *Le foncteur* $p = i \circ j : P(C) \to P(C)$ *est un projecteur i.e.* $p^2 = p$.

COMPORTEMENT DE j ET $[\ ]$ VIS-A-VIS DES HOMOTOPIES

B.2.12. Définition.

Une homotopie $F : f_o \simeq f_1 : (X, \alpha, G) \to (Y, \beta, H)$

entre deux flèches de $P(C)$ *est une homotopie simpliciale* F *entre* f_o *et* f_1

$$F : \Delta_1 \times X \to Y$$

telle que pour tout $n \geq 0$ *et tout* $t \in \Delta[1]_n$ *la flèche composé*

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "F(t,-)"] & Y_n \arrow[d, "\beta_n^{-1}"] \\ G_n \arrow[u, "\alpha_n"] \arrow[r, dashed] & H_n \end{tikzcd}$$

est dans C.

Si par exemple C *est la catégorie des groupes cela s'exprime en disant que pour tout* $t \in \Delta[1]_n$ *et* $x, x' \in X_n$

$$F(t, x \top x') = F(t, x) \top F(t, x')$$

où $\top$ *dénote la loi de* Xn, *resp.* Yn, *induite par* α, *resp.* β.

B.2.13. Proposition. *Le foncteur (B.3.7.)*

$$[\ ] : P(C) \to \Delta^{\circ}C$$

transforme flèches homotopes en flèches homotopes.

Il suffit en effet de montrer que l'application

$$\bar{F} : \Delta_1 \times [X] \to [Y]$$

obtenue par restriction de

$$G = (UF) \circ s_{\Delta[1]} \times 1_{U(x)} : \Delta 1 \times UX \to U\Delta 1 \times UX \to UY$$

(où $F : \Delta 1 \times X \to Y$ *est une homotopie dans* $P(C)$*) est une flèche de* $\Delta^{\circ}C$.

Tout d'abord il est certain que

$$G(t,y) = G(t,x) \;.\; G(t,y)$$

pour tout $x, y \in (UX)_n$:

$$F(t,x.y) : \Delta[n] \to X \quad \textit{(app. graduée)}$$

$$\begin{aligned} F(t,x.y)(s) &= F(t(s),(x.y)(s)) \\ &= F(t(s), s(s) \top y(s)) \\ &= F(t(s), s(s)) \top F(t(s), y(s)) \\ &= F(t,x)(s) \top F(t,y)(s) \\ &= (F(t,x) \,.\, F(t,y))(s) \end{aligned}$$

pour tout $s \in \Delta[n]$. *où* $\top$ *dénote les lois de* X *et* Y. *En particulier si*

$$x, y \in X \subset UX$$

$$\begin{aligned} \bar{F}(t,x.y) &= G(t,x.y) \\ &= G(t,x) \,.\, G(t,y) \\ &= \bar{F}(t,x) \,.\, \bar{F}(t,y) \end{aligned}$$

Puisque les éléments de $[X]$ *sont de la forme* $x_1 \cdot \ldots \cdot x_p$ *avec* $x_i \in X \subset UX$ *, la relation précédente montre que* $\bar{F}$ *transforme les éléments de* $I \times [X]$ *en éléments de* $[Y]$.

B.2.14. **Proposition.** *Si dans* (X, a, G), *la loi* $\top$ *induite par* a *sur* X *satisfait à la condition*

$$s_i(x \top y) = s_i(x) \top s_i(y)$$

et ce, pour toute dégénérescence s_i *, alors toute homotopie*

$$F : f_o \simeq f_1 : (X, a, G) \to (Y, \beta, H)$$

entre flèches de $P(C)$ *induit une homotopie*

$$j(f_o) \simeq j(f_1) : \Delta[1] \times j(X) \to j(Y)$$

dans $\Delta^{\circ}C$

Soit $\tilde{F} : \Delta 1 \times [X] \to [Y]$ *l'homotopie associée à* F . *D'après B.2.9. (1) il suffit de montrer que*

$$K = \phi_Y \circ \tilde{F} : \Delta 1 \times [X] \to j(Y)$$

satisfait à l'égalité

$$K(r, \omega^*(x \top y)) = K(t, \omega^* x) . K(t, \omega^* y)$$

chaque fois que $t \in \Delta[1]_p$

$\omega : \Delta[p] \to \Delta[n]$

$x, y \in X_n$

Comme tout opérateur $\omega^*: X_n \to X_p$ associé à un ω de Δ est le composé des faces et dégénérescences, il suffit de montrer que pour tout i,

$$K(t, d_i(x \top y)) = K(t, d_i x) \,.\, K(t, d_i y)$$
$$K(t, s_i(x \top y)) = K(t, s_i x) \,.\, K(t, s_i y)$$

Or

1) $K(t, d_i(x \top y)) = K(d_i s_i t, d_i(x \top y))$
$$= d_i K(s_i t, x \top y)$$
$$= d_i (K(s_i t, x) \,.\, K(s_i t, y))$$
$$= d_i K(s_i t, x) \,.\, d_i K(s_i t, y)$$
$$= K(t, d_i x) \,.\, K(t, y)$$

2) $K(t, s_i(x \top y) = K(t, s_i x \top s_i y)$
$$= K(t, s_i x) \,.\, K(t, s_i y) \,.$$

Remarque. On a écrit $K(t, x \top y)$ an lieu de $K(t, s_X(x \top y))$ où $s_X : X \to [X] \subset U(X)$ est l'injection simpliciale canonique, qui n'est pas un homomorphisme. Cepedant $\phi_X \circ s_X = t_X : X \quad jX$ satisfait à l'égalité

$$t_X(x \mid y) = t_X(x) \,.\, t_X(y) \,.$$

C'est pourquoi

$$K(t, x \mid y) = K(t, s_X(x \mid y))$$
$$= t_Y F(t, x \mid y)$$
$$= t_Y (F(t, x) \mid F(t, y))$$
$$= t_Y F(t, x) \,.\, t_Y F(t, y)$$
$$= K(t, x) \,.\, K(t \,.\, y)$$

B.2.15. Proposition. *Si f et g sont homotopes dans $\Delta^\circ C$ alors $\bar{W}f$ et $\bar{W}g$ sont homotopes dans $P(C)$*

Soit $F : f \simeq g : G \to H$ une homotopie, avec

$$F(t, x \cdot y) = F(t,x) \cdot F(t,y)$$

Alors on pose

$$F'(t,a) = (F(d_0^{\,n} t, x_0), F(d_0^{\,n-1} t, x_1), \ldots, F(d_0 t, x_{n-1}))$$

où $a = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in (\bar{W}G)_n$ *et* $t \in \Delta[1]_n$.

On constate sans difficulté que F' est une homotopie de $\bar{W}(f)$ dans $\bar{W}(g)$, et que

$$F'(t, a \top b) = F'(t,a) \top F'(t,b)$$

où $\top$ dénote la loi de $\bar{W}(G)$ induite - dimension par dimension - par celle de G.

B.2.16. Corollaire. *Les foncteurs composés*

$$\bar{W} \circ [\ ] : P(C) \to P(C)$$

et

$$j \circ \bar{W} : \Delta^\circ C \to \Delta^\circ C$$

sont compatibles avec les relations d'homotopie.

Il suffit de remarquer que la loi de $\bar{W}G$ est compatible avec les dégénérescences. Et la proposition B.3.14 permet de conclure que si $f \simeq g$ alors $j\bar{w}(f) \simeq j\bar{w}(g)$

OBJETS INJECTIFS DE $\Delta^{\circ}C$

B.2.17. *Le propos de ce paragraphe est de montrer que les objets injectifs de $\Delta^{\circ}C$, et leurs classifiants sont contractiles.*

Définition. *Un objet I d'une catégorie quelconque est dit injectif si chaque diagramme*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, dashed, "w"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

où u est un monomorphisme, se complète par une flèche w. En particulier si

$$I \xrightarrow{a} B$$

est un monomorphisme de la catégorie et si I est injectif, il admet une retraction

$$r : B \to I$$
$$r \circ a = id_I$$

On sait bien que l'existence de retractions r pour toute inclusion $a : I \to B$ permet de conclure que I est injectif, si C satisfait à la propriété : pour tout couple de flèches

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "b"] \arrow[d, "c"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

où b est un monomorphisme, il existe un objet D, un monomorphisme b', et une flèche c', tels que le diagramme ci-après commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "a'"] \\ C \arrow[r, "b'"'] & D \end{tikzcd}$$

B.2.18. **Proposition.** *Un objet I de $\delta^{\circ}C$ est injectif si et seulement si I_n est injectif quel que soit n.*

B.2.19. **Proposition.** *Soient*

$$d : A \rightarrow B : g$$

deux foncteurs adjoints (g adjoint à gauche de d). Si g transforme mono en mono alors d transforme les objets injectifs de A en objets injectifs de B.

En effet dire que I est injectif dans A équivaut à dire que $Hom_A(-,I)$ transforme monomorphismes en épimorphismes.

Or, d'une part :

$$Hom_B(g-,I) = Hom_A(-,d(I))$$

et d'autre part g conserve les monomorphismes, alors $Hom_A(-,d(I))$ transforme monomorphismes en épimorphismes, et donc $d(I)$ est injectif.

B.2.20. **Proposition.** *Soit C une catégorie avec sommes finies et $n \geq 0$. Alors le foncteur*

$$dn : \Delta^{\circ}C \rightarrow C$$
$$F \longmapsto F_n$$

admet un adjoint à gauche g_n .

On définit g *de la façon suivante : soit* C *un objet de* $\mathcal{C}$.

$$g(C)_p = \bigsqcup G_a$$
$$G_a = G$$
$$a \in Hom([p],[n]).$$

si $w : [g] \to [p]$ *est une flèche de* Δ ,

$$\omega^* : g(C)_p \to g(C)_q$$

est l'homomorphisme induit par les applications

$$G_a = G \xrightarrow{p_a = id} G_{a \circ \omega} = G$$

$$a \in Hom([p],[n]).$$

On définit aussi $g(f)$ *où*

$$f : G \to H$$

est une flèche de $\mathcal{C}$, *comme l'application*

$$(gf)_p : \bigsqcup_{a : [p] \to [n]} G_a \to \bigsqcup_a H_a \qquad (p \geq 0)$$

induite par les morphismes

$$G_a = G \xrightarrow{q_a = f} H_a = H$$

et on remarque que g *est adjoint de* d.

B.2.21. **Corollaire.** *Supposons que* C *est une catégorie avec sommes finies, et telle que pour toute famille finie*

$$f_a : G_a \to H_a \quad , \; f_a \text{ monomorphisme}$$

de morphismes, $\bigsqcup f_a : \bigsqcup G_a \to \bigsqcup H_a$ *soit un monomorphisme. Dans ces conditions, si* $F \in \Delta^\circ C$ *est injectif, les objets* Fn *de* C *sont injectifs.* $(n \geq 0)$. *Le foncteur oubli* $V : \Delta^\circ C \to \delta^\circ C$ *transforme donc injectifs en injectifs.*

En effet (B.2.19.) il suffit de voir que la condition imposée à C *implique que pour chaque* $n \geq 0$ *le foncteur* g_n *(adjoint à gauche de* d_n*) transforme les monomorphismes en monomorphismes. Or il est évident que si une application simpliciale*

$$f : C \to D$$

est telle que f_n *est un monomorphisme pour chaque* $n \geq 0$ *alors* f *est un monomorphisme.*

B.2.22. *Considérons à nouveau une des catégories* C *concernées par le corollaire B.2.2.*

Proposition. *1) Le foncteur*

$$U : \delta^\circ C \to \Delta^\circ C$$

transforme injectifs en injectifs.

2) Si C *est une des catégories du corollaire B.2.4. alors tout objet injectif de* $\Delta^\circ C$ *est contractile.*

En particulier

$$\bar{W} : \Delta^\circ C \to P(C)$$

transforme objets injectifs en objets contractiles.

La partie 1 est une conséquence immédiate de la proposition B.2.19 et du fait que si f est un monomorphisme d'objets simpliciaux, il est aussi un monomorphisme des objets gradués sous-jacents.

Démontrons 2. Soit $F \in \Delta^{\circ}C$ un objet simplicial injectif. Le monomorphisme canonique

$$i : F \to UVF$$

admet donc une retraction r dans $\Delta^{\circ}C$.

Or UVF est contractile (B.2.4) donc l'inclusion i et l'application nulle de F dans UVF, sont homotopes. Alors $1_F = r \circ i$ et l'application nulle de F dans F sont aussi homotopes.

B.2.23. Corollaire. *Si M est un Λ-module simplicial injectif alors $\bar{W}^n M$ est un Λ-module contractile pour tout $n \geq 1$.*

B.2.24. Corollaire. *Pour qu'un Λ-module simplicial M soit injectif il faut et il suffit que*

- *1. M_n soit injectif pour tout n et que*
- *2. L'inclusion*

$$M \to UM$$

admette une retraction.

D'après ce qui précède la condition est nécessaire. Inversement si 1) est satisfait alors VM est injectif (B.2.18.) et donc UVM, noté UM, est injectif (B.2.22.). La condition 2. implique que M est un facteur direct de UM il est donc injectif, de même que son quotient $\bar{W}M$.

B.3. COHOMOLOGIE A COEFFICIENTS DANS UN P-GROUPE SIMPLICIAL NON ABELIEN.

B.3.1. Le spectre d'un P-groupe.

B.3.1.1. *On a défini au § B. 2. le classifiant généralisé* ωA *d'un objet* A *de* $P(Gr)$. *Le fait que* ωA *soit encore un presque-groupe permet de définir le classifiant itéré* $\omega^n A$. *Il existe en outre une transformation naturelle*

$$\lambda_A : A \to \Omega\omega A \qquad\qquad A \in P(Gr)$$

composée de l'adjonction

$$t_A : A \to jA$$

et de l'isomorphisme $\Omega\bar{W} \xrightarrow{\sim} id$:

$$\lambda_A : A \to jA \xrightarrow{\sim} \Omega\bar{W}A = \Omega\omega A$$

Lorsque A *est un groupe simplicial,* λ_A *est un isomorphisme.*

B.3.1.2. *Pour tout presque-groupe simplicial* $A \in P(Gr)$ *on note* $s(A)$ *le spectre défini comme suit :*

a) $s^n(A)$ *est l'ensemble simplicial sous-jascent de* $\omega^n A$ *si* $n \geq 0$, *où celui de* $\Omega^n A$ *si* $n \leq 0$. *(Par définition* $\omega^\circ A = \Omega^\circ A = A$ *).*

b) Les morphismes structuraux a^n_A *sont soit l'identité (si* $n \leq 0$*) soit*

$$\lambda_{s^n(A)} \quad : \quad s^n(A) \to \Omega s^{n+1}(A) \qquad\qquad (si \quad n \geq 0)$$

Si $f : A \to B$ *est une flèche de* $P(Gr)$ *on note* $f^n : s^n(A) \to s^n(B)$ *l'application simpliciale associée à* f *par le foncteur* ω^n *(si* $n \geqq 0$*)*, *ou par les foncteur* Ω^n *(si* $n \leqq 0$*).*

On vérifie que

$$\{f^n\} : \{s^n A, a_A^n\} \to \{s^n B, a_B^n\}$$

est un morphisme de spectres. Ceci vient du fait que

$$\lambda : id \to \Omega\omega$$

est une transformation naturelle.

B.3.1.3. *Le composé du foncteur*

$$s : P(Gr) \to s_p \qquad (\blacktriangle)$$

que l'on vient de définir, et du foncteur

$$h^\cdot : s_p \to G \qquad (B.1.4.2.)$$

associe à chaque objet du $P(Gr)$ *une théorie de la cohomologie sur la catégorie des ensembles simpliciaux pointés. On note* $h^\cdot(X,A)$, *et l'on appelle cohomologie de* X *à coéfficients dans* A, *la cohomologie* $h^\cdot(X, s(A))$ *de* X *dans la théorie définie par le spectre* $s(A)$.

Si $x : X \to Y$ *est une application d'ensembles simpliciaux pointés on note*

$$x_A^\# : h^\cdot(Y,A) \to h^\cdot(X,A)$$

l'isomorphisme de groupes gradués qui lui est associés.

De même

$$f_{\#}^{X} : h^{\cdot}(X,A) \to h^{\cdot}(X,B)$$

dénotra celui associé à une flèche $f : A \to B$ *de* $P(Gr)$.

B.3.2. *Le spectre* $s\{f\}$ *d'une flèche* f *de* $P(Gr)$.

B.3.2.1. *On entreprend par la suite la construction d'un foncteur, noté encore* s, *de la catégorie* $Fl(P(Gr))$, *des flèches de la catégorie* $P(Gr)$, *dans celle des spectres simpliciaux. Et qui prolonge* $(\blacktriangle)$ *en ce sens que si*

$$P(Gr) \to fl(P(Gr))$$

dénote le foncteur pleinement fidèle identifiant un objet $A \in P(Gr)$ *à la flèche* $A \to *$, *alors on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} P(Gr) \arrow[d] \arrow[dr, "s"] & \\ Fl(P(Gr)) \arrow[r, dotted, "s"'] & S_P \end{tikzcd}$$

Parmi les propriétés du foncteur s *on peut en citer trois particulièrement importantes:*

i) s *est un invariant homotopique*

ii) s *commute aux produits finis*

iii) le foncteur cohomologique

$$k = h^{\cdot} \circ s : fl(P(Gr)) \to G$$

associe à chaque couple de flèches composables (f, g) *un triangle exacte*

$$\begin{tikzcd} & k(g_0 f) \arrow[dr] & \\ k(f) \arrow[ur] & & k(g) \arrow[ll, "(+1)"] \end{tikzcd}$$

de cohomologies généralisées (B.3.3.3).

B.3.2.2. *Rappelons que si* $f : A \to B$ *est un homomorphisme de groupes simpliciaux, on note* $E(\tau_f)$ *le produit fibré des deux flèches* $\bar{W}(f)$ *et* p_B :

$$\begin{tikzcd} E(\tau_f) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & WB \arrow[d, "p_B"] \\ \bar{W}A \arrow[r, "\bar{W}f"'] & \bar{W}B. \end{tikzcd}$$

C'est le fibré tordu (A.4.4) principal de base $\bar{W}A$, *groupe* B, *et fonction tordante*

$$\tau_f : \bar{W}A \xrightarrow[\bar{W}f]{} \bar{W}B \xrightarrow[\tau_B]{} B$$

B.3.2.3. Proposition. *La suite* $P_{\bar{W}f}$:

$$A \xrightarrow[F]{} B \xrightarrow[i_f]{} E(\tau_f) \to \bar{W}A \xrightarrow[\bar{W}f]{} \bar{W}B$$

est exacte, en ce sens que pour tout ensemble simplicial pointé X, *la suite d'ensembles pointés* $[X, P_{\bar{W}f}]$:

$$[X,A] \to [X,B] \to [X,E(\tau_f)] \to [X,\bar{W}A] \to [X,\bar{W}B]$$

est exacte. En conséquence, si X *est un cogroupe dans la catégorie homotopique, la suite* $[X,P_{\bar{W}f}]$ *est exacte dans la catégorie des groupes.*

Démonstration. a) L'exactitude de la suite

$E(r_f) \to \bar{W}A \to \bar{W}B$

est conséquence immédiate du lemme [NGUYENDINHN. GOC p. 42] : Soit $E \to Y$ un fibré principal de groupe G induit par une application simpliciale $f: Y \to \bar{W}(G)$. Alors, pour tout ensemble simplicial X, la suite d'ensembles pointés

$$[X,E] \to [X,Y] \to [X,\bar{W}G]$$

est exacte.

b) La suite $B \to E(r_f) \to \bar{W}A$ est évidemment exacte car il s'agit d'un fibré principal et donc d'une fibration de Kan. D'où une suite exacte longue

$$\ldots \to \Omega\bar{W}A \to B \to G(r_f) \to \bar{W}A ,$$

où l'application

$$A \xrightarrow{\sim} \Omega\bar{W}A \to B$$

est homotope à l'application f.

On remarquera que $P_{\bar{W}f}$ n'est autre que la suite de Puppe de l'application $\bar{W}f$.

B.3.2.4. Rappel : D'après les définitions de $\bar{W}$ et W (A.2.3. et A.4.5.) il existe une application bijective , canonique et de degré $+1$ de WB dans $\bar{W}B$

$$\varphi_n : (WB)_n \to (\bar{W}B)_{n+1} \qquad n \geq o$$

telle que

$$\varphi_{n-1} \circ d_i = d_{i+1} \circ \varphi_{n-1} \qquad n \geq 1$$

$$\varphi_n \circ S_i = s_{i+1} \circ \varphi_{n-1} \qquad i \geq o$$

B.3.2.5. *Rappel.* L'ensemble des simplexes en dimension n de $\Omega W(H)$, où H est un groupe simplicial, est constitué des $x \in H_{n+1}$ tels que

$$d_{i_n} \circ \dots \circ d_{i_1}(X) = 1 \in H_o \qquad (///)$$

$$o \leq i_k \leq n+1-K \quad , \quad o \leq K \leq n$$

Les faces $d_o, \dots, d_n$ sont induites par $d_1, \dots, d_{n+1}$, respectivement. Pareillement pour les dégénérescences.

B.3.2.6. Ceux deux rappels faits, nous proposons d'exiber une transformation naturelle

$$\gamma : W \to \Omega W j \bar{W}$$

indispensable dans la construction des morphismes structuraux du spectre $s\{f\}$. D'après ce qui précéde il suffit de définir une application γ de degré $+1$

$$\gamma'_n : (WB)_n \to (j\bar{W}B)_{n+1}$$

satisfaisant aux égalités

$$\gamma' \cdot d_i = d_{i-1}\gamma'$$

$$\gamma' \cdot s_i = s_{i-1} \cdot \gamma'$$

On n'aura pas besoin de vérifier la condition (///) sur les images par cette application car $(j\bar{W}B)_o$ est réduit à un point.

L'application γ' est définie comme étant le composé de φ (rappel B.3.2.4.) et de l'homomorphisme canonique $t_{\bar{W}B}$

$$\gamma' : WB \xrightarrow[\text{(degré }+1)]{\varphi} \bar{W}B \longrightarrow j\bar{W}B$$

B.3.2.7. *La commutativité du diagramme*

$$\begin{tikzcd}
WB \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & \Omega W j\bar{W}B \arrow[d] \\
\bar{W}B \arrow[r, "t_{\bar{W}B}"'] & j\bar{W}B \simeq \Omega\bar{W}j(\bar{W}B)
\end{tikzcd}$$

et le fait que toutes les flèches qui γ *interviennent soient dans* $P(Gr)$ *sont des conséquences immédiates des définitions.*

B.3.2.8. *Nous allons maintenant définir une application*

$$a_f : E(\tau_f) \to \Omega E(\tau_{j\bar{W}(f)}) \qquad (*)$$

naturelle en f *et telle que les carrés du diagramme* $(\bullet)$ *soient commutatifs.*

$$\begin{tikzcd}
\Omega\bar{W}A \simeq A \arrow[r] \arrow[d, "\Omega t_{\bar{W}A}"'] \arrow[dr, phantom, "4"] & B \arrow[r, "i_f"'] \arrow[d, "\Omega t_{\bar{W}B}"] \arrow[dr, phantom, "3"] & E(\tau_f) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_f"] \arrow[dr, phantom, "2"] & \bar{W}A \arrow[r] \arrow[d, "t_{\bar{W}A}"] \arrow[dr, phantom, "1"] & \bar{W}B \arrow[d, "t_{\bar{W}B}"] \\
\Omega j\bar{W}A \arrow[r] & \Omega j\bar{W}B \arrow[r, "i_{\bar{W}f}"'] & \Omega E(\tau_{j\bar{W}f}) \arrow[r] & j\bar{W}A \arrow[r] & j\bar{W}B
\end{tikzcd} \qquad (\bullet)$$

Pour ce faire rappelons que Ω *commute aux produits fibrés.*

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Omega E(\tau_{j\bar{W}(f)}) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega \bar{W}(j\bar{W}B) \arrow[d] \\
j\bar{W}A \arrow[r, "j\bar{W}(f)"'] & j\bar{W}B \approx \Omega\bar{W}(j\bar{W}B)
\end{tikzcd}$$

est donc cartésien. Pour avoir a_f *il nous suffit ainsi des deux applications en pointillé du diagramme*

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
E(\tau_f) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, dashed, bend left] \arrow[ddrr, dashed] \arrow[dr, phantom, "\text{produit fibré}"] & \bar{W}B \arrow[r] \arrow[d, "p_B\ (B.3.2.7.)"] & \Omega \bar{W} j\bar{W}B \arrow[d, "\Omega p_{j\bar{W}B}"] & \\
\bar{W}A \arrow[r, "W_f"] \arrow[drr, "t_{\bar{W}A}"'] & \bar{W}B \arrow[r, "t_{\bar{W}B}"] \arrow[d, phantom, "\text{naturalité de } t"] & j\bar{W}B \approx & (\cdot\cdot) \\
& & j\bar{W}A \arrow[u, "j\bar{W}f"'] &
\end{tikzcd}$$

Le carré ② du diagramme (.) est automatiquement commutatif. Pour démontrer que le carré ③ est commutatif il suffit de démontrer que

i) les deux composés de B *dans* $\Omega \bar{W} j\bar{W}B$,

$$\begin{tikzcd}
& E(\tau_f) \arrow[dr] & & \\
B \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Omega E(\tau_{j\bar{W}f}) \arrow[r] & \Omega \bar{W} j\bar{W}B \\
& \Omega j\bar{W}B \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

coïncident :

ii) idem pour les composées

$$\begin{tikzcd}
 & E(r_f) \arrow[dr] & & \\
B \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Omega E(r_{j\bar{W}f}) & \Omega j W A \arrow[l, dashed] \\
 & \Omega j \bar{W} B \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

D'après les définitions le premier de ces deux diagramme peut se développer comme suit

$$\begin{tikzcd}
B = \Omega \bar{W} B \arrow[r, "(fibre)"'] \arrow[d, "\Omega t_{\bar{W}B}"] & E(r_f) \arrow[r, "projection"'] & WB \arrow[d, "\gamma"] \\
\Omega j \bar{W} B \arrow[rr, "\Omega\,(inclution)"'] & & \Omega W j \bar{W} B
\end{tikzcd}$$

L'application horizontal du bas du diagramme est induite par l'inclusion canonique

$$\begin{array}{ccc}
j\bar{W}B & \longrightarrow & W(j\bar{W}B) \\
x & \dashrightarrow & (1,\ldots,1,x)
\end{array}$$

La commutativité de ce dernier est évidente.

Quant au second diagramme, il prend la forme

$$\begin{tikzcd}
B \approx \Omega\bar{W}B \arrow[rr, "fibre"'] \arrow[dd] & & E(\tau_f) \arrow[d] \\
& & \bar{W}A \arrow[d] \\
\Omega(j\bar{W}B) \arrow[rr, "nulle"] \arrow[dr, "fibre"'] & & \Omega\bar{W}(j\bar{W}A) \approx j\bar{W}A \arrow[dl, "\Omega\,(Projection)"] \\
& \Omega E(\tau_{j\bar{W}f}) &
\end{tikzcd}$$

Il est donc commutatif

B.3.2.9. Définition du spectre $s\{f\}$, associée à un homomorphisme de groupes simpliciaux $f : A \to B$.

On note

$$s^1\{f\} = E(\tau_f)$$

$$(\;)\qquad s^n\{f\} = s^{n-1}\{j\bar{W}f\} \qquad\qquad n > 1$$

$$s^{-p}\{f\} = \Omega^{p+1} s^1\{f\}. \qquad\qquad p \geq 0$$

Les morphismes structuraux

$$a^n_f : s^n\{f\} \to \Omega s^{n+1}\{f\}$$

sont, soit l'application identique si $n \leq 0$.

soit

$$a^1_f = a_f \qquad\qquad (B.3.2.8.)$$

$$(\;)\qquad a^n_f = a^{n-1}_{j\bar{W}f} \qquad\qquad n > 1$$

B.3.2.10. *On remarquera que si*

$$0_A \; : \; A \longrightarrow *$$

dénote l'application nulle, alors le spectre $s\{0_A\}$ *coïncide avec* $s\{A\}$. *En effet*

$$E(\tau 0_A) = \bar{W}A = s^1(A)$$

$$s^n\{0_A\} = s^{n-1}\{j\bar{W}(0_A)\}$$

$$= s^{n-1}\{0_{j\bar{W}A}\}$$

$$= s^{n-2}\{J\bar{W}0_{j\bar{W}A}\} \dots$$

$$= \bar{W}(J\omega^{n-1}A) = \omega^n_A .$$

On n'a pas de peine à démontrer que les morphismes structuraux coïncident aussi.

B.3.2.11. **Définition de** $s\{f\}$ **lorsque** $f \in \mathrm{Fl}(\mathrm{P}(\mathrm{Gr}))$.

La définition B.3.2.9. se prolonge naturellement aux homomorphismes $f : A \to B$ *entre objets de* $P(Gr)$. *Il suffit pour cela de faire*

$$s^n\{f\} = s^n\{j(f)\}$$

Cette définition est tout-à-fait cohérente puisque, au cas où f *est un homomorphisme de groupes simpliciaux,* $jf = f$.

B.3.2.12. *Notons*

i) $h^p(X,\{f\}) = \underrightarrow{lim}\,[X, \Omega^n s^{n+p}\{f\}]$

la cohomologie de X *suivant le spectre* $s\{f\}$.

ii) $(u\,,v)_{\#} \,:\, h^{\cdot}(-,\{f\}) \to h^{\cdot}(-,\{g\})$

l'homomorphisme associé à la flèche $(u\,,v) : \{f\} \to \{g\}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "u"] \\ A' \arrow[r, "g"'] & B' \end{tikzcd}$$

B.3.2.13. *Dans tout le § B.3.2. nous avons utilisé de façon systématique l'existence de la transformation naturelle*

$$t_A \,:\, A \to j(A)$$

(A dans P(Gr)) qui est l'identité sur les objets de $\Delta^{\circ}Gr$. *On peut remarquer cepedant que nous n'avons utilisé que l'application simpliciale sous-jacente. C'est pourquoi, au lieu de se servir du couple* (j,t) *on peut employer le couple* $([\ \ ],s)$ *où*

$$s_X \,:\, X \to [X]$$

est l'injection canonique (Cf. B.2.6.), et ce pour obtenir un autre spectre, noté $u(f)$, *dont la cohomologie associée* $k(-,\{f\})$ *jouit de proprietés semblables à celles de* $h(-,\{f\})$.

Reprenons, par exemple la construction de la transformation naturelle (B.3.2.6.), en utilisant $[\ \ ]$ *à la place de* j *: il suffit, à nouveau de se donner* r' *de degré* $+1$, *telle que*

$$r' \circ d_i = d_{i-1} \circ r' \qquad r' \circ s_i = s_{i-1} \circ r'$$

La condition $(///)$ est vérifiée, car dans ce cas on a aussi

$$[\bar{W}(B)]_0 = (1) = \text{point}$$

On pose (Cf. B.3.2.5. et B.3.2.6.)

$$r' = s_{\bar{W}B} \circ \varphi : (WB \to \bar{W}B \to [\bar{W}B])$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} WB \arrow[r, "r"] \arrow[d, "(proj.)"'] & \Omega W[\bar{W}B] \arrow[d, "\Omega\,(proj.)"] \\ \bar{W}B \arrow[r, "s\bar{W}B"'] & {[\bar{W}B] = \Omega W[\bar{W}B]} \end{tikzcd}$$

est commutatif, mais les flèches horizontales ne sont que des applications simpliciales pointées, et non pas de morphismes de $P(Gr)$.

Le lecteur n'aura pas de peine à montrer que les constructions du § B.3.2.8. sont encore valabes si l'on change

i) j par $[\;\;]$

ii) t_X par s_X

iii) La transformation définie au B.3.2.6 par celle que l'on vient de définir.

On note

$$\beta_f : E(\tau_f) \to \Omega E(\tau_{[W(f)]})$$

l'application correspondante à a_f de B.3.2.8.

Dans ces conditions, la définition du spectre u *se fait comme au B.3.2.9 : si* $f: A \to B$ *est un homomorphisme de groupes simpliciaux, on pose*

$$u^1\{f\} = E(r_f)$$

$$u^n\{f\} = u^{n-1}([\bar{W}(f)]) \qquad n \geq 1$$

$$u^{-n}\{f\} = \Omega^{n+1} u^1\{f\} \qquad n \geq 0$$

Les morphismes structuraux

$$a_f^n : u^n\{f\} \to \Omega u^{n+1}\{f\}$$

sont soit l'application identique si n *est négatif, soit*

$$a_f^1 = \beta_f$$

$$a_f^n = a^{n-1}_{[\bar{W}f]} \qquad si \quad n > 1$$

Si, enfin, f *est une flèche de* $P(Gr)$, *on note*

$$u\{f\} = u[f]$$

B.3.3. Proprietés des Cohomologies a Coefitients dans un Presque-groupe.

Suite exacte longue sur la variable G de P(Gr).

B.3.3.0 *Nous avons définie un bifoncteur* $h^*(X, f)$ *dont les varaibles sont :*

X = ensemble simplicial de Kan (pointé)

f = flèche de $P(Gr)$

Si l'on fixe f, les propriétés du foncteur

$$X \rightsquigarrow h^*(X, f)$$

ont été étudiées au § B.1. Il s'agit, en effet, d'une theorie de la cohomologie sur la catégorie des ensembles simpliciaux cette dernière avec les notions d'homotopie et de cofibration classiques. On étudie, par ailleur, le cas où f est un homomorphisme de groupes simpliciaux abéliens (Cf. B.3.4) ; ainsi que la réduction au cas minimal et ses rapports avec la cohomologie Singulière (cf. B.3.5.).

Le propos de ce paragraphe-ci est celui d'étudier le comportement des foncteurs

$$f \rightsquigarrow h^*(X, f)$$

Nottament, on met en évidence l'existence d'une suite exacte longue associée au diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A & \to & A & \to & B \\ f\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & \to & * & \to & * \end{array}$$

De même on démontre que $h^*(X, -)$ est un invariant homotopique.

B.3.3.1. Soit $E = \{E^n, a^n\}$ un spectre. On note ΩE le spectre $\{F^n, \beta^n\}$ où

$$F^n = \Omega E^n \qquad \text{et} \qquad \beta^n = \Omega a^n$$

Le carré commutatif (3) du diagramme (.) de B.3.2.8 montre en faite l'existence d'un morphisme de spectres.

$$\delta_f : \Omega s(B) \to s\{f\}$$

De façon explicite, les δ^n sont donnes par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Omega s^n(B) \arrow[rr] \arrow[d] & & s^n\{f\} \arrow[d] \\
\Omega\omega^n(B) \approx j\omega^{n-1}B \arrow[rr] & & E(r_{j\omega^{n-1}f})
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont identitées, et la flèche horizontale du bas du diagramme est l'inclution $i_{\omega^{n-1}f}$ de la fibre dans l'espace total.

On dispose ainsi d'une suite exacte de spectres

$$\ldots \to \Omega s(A) \to \Omega s(B) \xrightarrow[\delta_f]{} s\{f\} \to s(A) \to s(B)$$

associée au morphisme $f: A \to B$ de $P(Gr)$. Le mot "exacte" veut dire ici que, pour tout X, la suite de groupes abéliens

$$\ldots \to h^p(X,A) \to h^p(X,B) \to h^{p+1}(X,\{f\}) \to h^{p+1}(X,A) \to \ldots$$

est exacte. Cette dernière est obténue en passant à la limite dans les suites du diagramme (////), apres application du foncteur $[X,-]$. L'exactitud, dans (////), des suites horizontales est une consequence de la proposition B.3.2.3. La commutativitée des carrés découle de B.3.2.8.

Diagramme [///].

$$\cdots \to s^{p-1}(A) \to s^{p-1}(B)$$

$$\cdots \to \Omega s^{p}(A) \to \Omega s^{p}(B) \xrightarrow{\delta_f^{p}} s^{p}\{f\} \to s^{p}(A) \xrightarrow{f^{p}} s^{p}(B)$$

$$\cdots \Omega^2 s^{p+1}(A) \to \Omega^2 s^{p+1}(B) \xrightarrow[\Omega\delta^{p+1}]{} \Omega s^{p+1}\{f\} \to \Omega s^{p+1}(A) \xrightarrow[\Omega f^{p}]{} \Omega s^{p+1}(B) \xrightarrow[\delta_f^{p+1}]{} s^{p+1}(f) \to s^{p+1}(A) \to s^{p+1}(B)$$

$$\vdots$$

B.3.3.2. *L'homomorphisme* $\delta_{g\cdot f}: h^{\cdot}(-,\{g\}) \to h^{\cdot}(-,\{g\}) \to h^{\cdot}(-,\{f\})$

Les fleches $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ $h = g\cdot f$ *donnent lieu à deux flèches de* $Fl(P(Gr))$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\alpha"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g\cdot f"] \arrow[dr, phantom, "\beta"] & B \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r] & C \arrow[r, equal] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \alpha = (1_A, g) \\ \beta = (f, 1_C) \end{array}$$

D'où, à des transformations naturelles (de degré zéro)

$$h^{\cdot}(-,\{f\}) \to h^{\cdot}(-,\{g_\circ f\}) \to h^{\cdot}(-,\{g\})$$

On a aussi une transformation naturelle de degré $+1$, *canonique en* (f,g), *noté* $\delta_{f\cdot g}$.

$$\delta_{f\cdot g}: h^{\cdot}(-,\{g\}) \to h^{\cdot}(-,\{f\}) \qquad \deg.\ \delta_{f\cdot g} = +1\,.$$

C'est le composé de l'application canonique que degré zéro

$$h^{\cdot}(-,(g)) \to h^{\cdot}(-,(B))$$

et de l'opérateur de degré $+1$

$$\delta^{\cdot}_f = h^{\cdot}(-,B) \to h^{\cdot}(-,\{f\})\,. \qquad (B.3.3.1)$$

On peut être encore plus explicite ; $\delta_{f\cdot g}$ *est la transformation associée au morphisme de spectres*

$$\Omega s\{g\} \to \Omega s(B) \xrightarrow{\delta_f} s\{f\}$$

où la première flèche est celle induite par le morphisme évident $(1_B, 0_C) : g \to 0_B$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "1_B"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "0_B"] \\ C \arrow[r, "0_C"'] & * \end{tikzcd}$$

Avec ces notations nous pouvons énnoncer la

B.3.3.3. Proposition. *Le triangle de cohomologies généralisées*

$$\begin{tikzcd} & h^\cdot(-,\{g_\circ f\}) \arrow[dr] & \\ h^\cdot(-,\{f\}) \arrow[ur] & & h^\cdot(-,\{g\}) \arrow[ll, "\delta_{f \cdot g}"] \end{tikzcd}$$

est exacte. C'est-à-dire que pour tout ensemble simplicial pointe (de Kan) X, *le triangle de groupes abéliens gradués*

$$\begin{tikzcd} & h^\cdot(X,\{g_\circ f\}) \arrow[dr] & \\ h^\cdot(X,\{f\}) \arrow[ur] & & h^\cdot(X,\{g\}) \arrow[ll, "\delta^X_{f \cdot g}"] \end{tikzcd}$$

est exacte.

Cette proposition est une conséquence immédiate de B.3.3.1. et du lemme suivant.

B.3.3.4. **Lemme.** *Si dans le diagramme ($\square$) de groupes abéliens gradués, les suites verticales sont exactes et les carrés commutatifs, alors la suite*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & F^\bullet \arrow[r, "i"] & H^\bullet \arrow[r, "j"] & G^\bullet \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "r"'] & & F^\bullet \arrow[r, "i"] & H^\bullet \arrow[r] & \cdots \\
& & & & B^\bullet \arrow[ur, "\partial"'] & & &
\end{tikzcd}$$

est exacte.

$$\begin{tikzcd}
F^\bullet \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & H^\bullet \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"'] & G^\bullet \arrow[d, "r"] \\
A^\bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "v"'] & A^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\omega"] & B^\bullet \arrow[d, "u"] \\
B^\bullet \arrow[r, "\mu"'] \arrow[d, "\partial"'] & C^\bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "\partial"'] & C^\bullet \arrow[d, "\partial"'] \\
F^\bullet \arrow[r, "i"'] & H^\bullet \arrow[r, "j"'] & G^\bullet
\end{tikzcd} \qquad (\square) \qquad (\text{degré } \partial = +1)$$

On chasse sur le diagramme $\square$ pour démontrer le lemme, dont l'application à la proposition se fait en prenant

$$\begin{aligned}
F^\bullet &= h^\bullet(X, \{f\}) \\
H^\bullet &= h^\bullet(X, \{g_\circ f\}) \\
G^\bullet &= h^\bullet(X, \{g\}) \\
A^\bullet &= h^\bullet(X, A) \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

B.3.3.5. **Corollaire.** *Soient*

$$G^0 : 0 \to G$$

$$0_G : G \to 0$$

les homomorphismes évidents. Alors la transformation naturelle (de degré + 1)

$$\delta_G 0, 0_G \; : \; L^{\cdot}(-,0_G) \approx h^{\cdot}(-,G^0)$$

est un isomorphisme.

B.3.3.6. Proposition. *Si* $0_{CA} : A \to C$ *dénote l'application nulle alors*

$$h^p(X, \{0_{CA}\}) \approx h^p(X,A) + h^{p-1}(X,C)$$

En effet l'homomorphisme de $j(A)$ *dans* $j(C)$ *associé à* 0_{CA} *est nul. De même que l'on a l'égalité*

$$\omega(0_{CA}) = 0_{\tilde{\omega}C; \tilde{\omega}A} : \tilde{\omega}A \to \tilde{\omega}C .$$

La fonction tordante $r\,\bar{W}(0_{CA})$ *est en conséquence nulle et alors*

$$s^1(0_{CA}) = \omega A \times j\omega^{n\,1}(C) \qquad n \geq 1$$

D'où l'on tire l'égalité cherchée

$$h^p(X,\{0_{CA}\}) = \underset{n}{\underline{lim}}\,[X,\Omega^n s^{n+p}(0_{CA})]$$

$$= \underset{n}{\underline{lim}}\,[X,\Omega^n \omega^{n+p}(A)] \times \underset{n}{\underline{lim}}\,[X,\Omega^n j\,\omega^{n(n+p-1)}(C)]$$

$$= h^p(X,A) \times \underset{n}{\underline{lim}}\,[X,\Omega^{n+1}\omega^{n+p}(C)]$$

$$= h^p(X,A) \times h^{p-1}(X,C)$$

B.3.3.7. Corollaire. *Si le couple* (u, v)

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

est tel que $v \circ u = 0_{AC}$ *(il suffit en fait que* $v_\circ u$ *soit* l*-homotope à* 0_{AC} *).*

Alors on a une suite exacte

$$\begin{tikzcd} & h^p(X,A) \times h^{p-1}(X,C) \arrow[dr] & \\ h^p(X,(u)) \arrow[ur] & & h^p(X,(v)) \arrow[ll, "+1"] \end{tikzcd} \tag{27}$$

Conclusion immédiate de B.3.1.9 *et* B.3.2.2.

B.3.3.8. Invariance homotopique.

Soient

$$(u_\circ, v_\circ) : (f) \to (g) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u_\circ"'] & B \arrow[d, "v_\circ"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

$$(u_1, v_1) : (f) \to (g)$$

deux flèches de $P(Gr)$*. On dit qu'elles sont homotopes s'il existe des homotopies* $U : \ \sim u_1$ *,* $V : v_\circ \sim v_1$ *dans* $P(Gr)$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} I \times A \arrow[r, "i \times f"] \arrow[d, "U"] & I \times B \arrow[d, "V"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

B.3.3.9. Proposition. *Les homomorphismes*

$$(u_\circ, v_\circ)_\# \; ; (u_1, v_1)_\# \; : \; h^\cdot(-;(f)) \to h^\cdot(-;(g))$$

associés aux flèches homotopes

$$(u_\circ, v_\circ) \sim (u_1, v_1) \; : \; (f) \to (g)$$

coïncident.

B.3.3.20. Proposition. *Soit* $f : G \to H$ *un homomorphisme de* $P(Gr)$. *Si* G *et* H *sont de* Ω-p-*groupes alors,* $S(f)$ *est un* Ω-*spectre.*

On doit démontrer que si dans le diagramme des suites exactes (mixtes I) ci-dessous, les flèches verticales en pointillés sont des équivalences d'homotopie alors on peut en dire autant de la flèche du milieu.

$$\begin{array}{ccccccccc}
j\omega^{n-1}G & \to & j\omega^{n-1}H & \to & S^n(f) & \to & \omega^n G & \to & \omega^n H \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Omega j\omega^n G & \to & \Omega j\omega^n G & \to & \Omega S^{n+1}(f) & \to & j\omega^n G & \to & j\omega^n H
\end{array}$$

On se ramène au cas $n = 1$, *en faisant* $G' = j\omega^{n-1}G$

$H' = j\omega^{n-1}H$; *et la proposition est alors une conséquence du*

Lemme. *Si les applications canonique*

$$\begin{array}{ccccc}
t_{\bar{W}G} : & \bar{W}G & \to & j\bar{W}G \\
& \vdots & & \vdots \\
t_{\bar{W}H} : & \bar{W}H & \to & j\bar{W}H
\end{array}$$

sont des équivalences d'homotopie, alors pour tout homomorphisme de groupes simpliciaux l'application canonique

$$E(r_f) \to \Omega E(r_{j\bar{W}f})$$

est aussi équivalence d'homotopie.

Il suffit en effet de montrer que a_f *est alors une équivalence d'homotopie faible, c'est-à-dire que pour* $k \geq 0$, $\pi_k(a_f)$ *est bijective.*

Or on dispose d'un diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_k G & \to & \pi_k H & \to & \pi_k E(r_f) & \to & \pi_k \bar{W}(G) & \to & \pi_k \bar{W}(H) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_k(a_f)} & & \downarrow & & \downarrow \\
\pi_k \Omega j\bar{W}G & \to & \pi_k \Omega j\bar{W}H & \to & \pi_k(\Omega E(r_{jWf})) & \to & \pi_k(j\bar{W}(G)) & \to & \pi_k(j\bar{W}H)
\end{array}$$

Donc $\pi_k(a_f)$ *est un isomorphisme* $k > 0$

Pour $k = 0$, *on à le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_0 G & \to & \pi_0 H & \to & \pi_0 E(r_f) & \to & (*) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\pi_1 j\bar{W}H & \to & \pi_1 j\bar{W}H & \to & \pi_1 E(r_{jWf}) & \to & (*)
\end{array}$$

où $\pi_0 E(r_f)$ *(resp.* $\pi_1 E(r_{jWf})$*) est d'après A. A. 13 (3) le quotient de* $\pi_0 H$ *(resp.* $\pi_1 j\bar{W}H$*) par l'action de* $\pi_0 G$ *(resp.* $\pi_0 j\bar{W}G$*). D'où la conclusion.*

B.3.4. Cas abélien.

Sauf mention expresse du contraire, les groupes dont il est question dans ce paragraphe, sont abéliens.

B.3.4.1. *Soit* G *un groupe simplicial abélien. Le classifiant* $\bar{W}G$ *est un groupe simplicial abélien, car le foncteur* $\bar{W}$ *commute avec les produits. En conséquence les groupes* $j\bar{W}(G)$ *et* $\bar{W}(G)$ *coïncident et l'on trouve par récurrence l'identité*

$$\omega^n(G) = \bar{W}^n(G).$$

On en déduit aussi que, lorsque G *est un groupe simplicial abélien, le spectre* $s(G)$ *est un* Ω*-spectre. C'est pourquoi, quel que soit* X,

$$\begin{aligned} h^p(X,G) &= [X, s^p(G)] && p \in Z \\ &= [X, \Omega^{-p}(G)] && p \leq 0 \\ &= [X, \bar{W}^p(G)] && p \geq 0. \end{aligned}$$

B.3.4.2. *Plus généralement soit*

$$f : G \to H$$

un homomorphisme de groupes simpliciaux abéliens. Alors $s\{f\}$ *est un* Ω*-spectre (B.3.3.20.) et il est isomorphe au spectre du groupe abélien simplicial* $s^1\{f\}$.

$$s^p\{f\} = \bar{W}^{p-1}\, s^1\{f\} \qquad p \geq 1$$

$$s^p\{f\} = \Omega^{-p+1}\, s^1\{f\} \qquad , \quad p \leq 0 \; .$$

En conséquence

$$h^p(X, \{f\}) = h^p(X, s^1\{f\}) \qquad p \in \mathbf{Z}\, .$$

B.3.4.3. *Un cas particulièrement important est celui d'un homomorphisme de groupes abéliens simpliciaux dont l'application simplicial sous-jacente est une fibration de Kan. C'est le cas où par exemple* $f : G \to H$ *est une épijection. Dans ce cas* $s^1\{f\}$ *ne dépend que du noyau de* f.

De façon précise,

Proposition. *Le morphisme de spectres*

$$\gamma_{\#} : s(\mathrm{Ker}\ f) \to s\{f\}$$

associé à la flèche

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d, "f"] \\ * \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\underline{p}>"] & H \end{tikzcd}$$

est une équivalence lorsque f *est une fibration de Kan. (ie : il induit un isomorphisme entre les groupes d'homotopie des spectres.*

B.3.4.4. **Corollaire.** *Si l'homomorphisme*

$$f : G \to H$$

de groupes simpliciaux abéliens est une fibration de Kan, alors les cohomologies $h^{\circ}(-, \ker f)$ et $h^{\circ}(-, f)$ sont canoniquement isomorphes.

B.3.4.5. Corollaire. Soit

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0 \qquad (0)$$

une suite exacte de groupes abéliens simpliciaux. Il existe un opérateur fonctoriel en (P)

$$\delta : h^{\circ}(-, G'') \to h^{\circ}(-, G')$$

(de degré $+1$) tel que le triangle

$$\begin{tikzcd}
 & h^{\circ}(-, G) \arrow[dr] & \\
h^{\circ}(-, G') \arrow[ur] & & h^{\circ}(-, G'') \arrow[ll, "\delta"]
\end{tikzcd}$$

est exact.

B.3.4.6. Ce qui veut dire que pour chaque ensemble simplicial (pointé) X, le couple

$$(h^{\circ}(X, -), \delta)$$

est un δ-foncteur sur la catégorie des groupes abéliens simpliciaux. Plus encore

$$h^{p}(X, G) = P \qquad p \in \mathbf{Z}$$

si G est un groupe abéliens simplicial injectif. En effet si G est injectif, il en est de même de $\Omega^p G$ et de $\bar{\bar{W}}^p G$ (B.2.23), quel que soit p. Or tout groupe simplicial injectif est contractil (B.2.22).

B.3.4.7. Notons provisoirement F_X le foncteur, associant à chaque groupe simplicial abélien G, l'ensemble $Hom(X,G)$ d'applications simpliciales de X dans G. C'est un foncteur de la catégorie $\Delta^\circ Ab$ qui est catégorie abélienne ayant assez d'injectifs; les foncteurs dérivés à droite

$$R^p F_X \qquad p \geq 0$$

du foncteur F_X sont bien définis, et l'on a un isomorphisme canonique :

Proposition.

$$R^p F_X \approx h^p(X,\cdot) \qquad p \geq 1$$

$$\approx [X, \bar{\bar{W}}^p(\cdot)]$$

Pour le montrer il suffit de voir que le δ-foncteur effaçable (B.3.4.6)

$$(h^p(X,\cdot),\ \delta) \qquad p \geq 1$$

sur la catégorie des groupes abéliens simpliciaux peut se compléter en prenant F_X, pour $p = 0$. Il existe en effet une suite exacte longue

$$0 \to F_X(G') \to F_X(G) \to F_X(G'') \xrightarrow{\delta} h^1(X,G') \to h^1(X,G) \to \dots$$

où l'application

$$\delta : F_X(G'') \to h^1(X,G')$$

est celle associé à l'application , notée encore δ ,

$$\delta : G'' \to \bar{W}(G')$$

classifiant le fibré principal (de groupe G')

$$G \to G''.$$

Rappelons commet elle est définie pour voir qu'au cas abélien

$$\delta : Hom(X, G'') \to [X, \bar{W}G']$$

est un homomorphisme :

si $f'' : X \to G''$

est une application simpliciale, il existe

$$f : X \to G$$

une zéro co-chaîne (A.1) qui la relève, $\delta(f'')$ *est la classe d'homotopie de l'application simpliciale correspondant à la fonction tordante*

$$f d_0 - d_0 f : X \to G'$$

par l'isomorphisme

$$Z^1(X, G') \simeq Hom(X, \bar{W}(G'))$$

On démontre ensuite que deux relèvements de f'' induisent deux fonctions tordantes équivalentes ( ) et donc deux applications de X dans $\bar{W}G'$ homotopes. C'est-à-dire que $\delta(f'')$ ne dépend pas du relèvement f de f''. Si g est un relèvement de g'', alors $f+g$ en est un de $f''+g''$ et puisque

$$(f+g)d_0 - d_0(f+g) = (f\, d_0 - d_0\, f) + (g\, d_0 - d_0\, g)$$

on déduit

$$\delta(f+g) = \delta(f) + \delta(g) .$$

B.3.4.8. Nous allons donner ci-dessous une autre construction de la cohomologie

$$h^p(X, G) \qquad p > 0$$

lorsque G est abélien.

Pour tout p, soit $C^p(X,G)$ le groupe des suites

$$f = (f_n)_n \quad \text{où} \quad f_n : X_n \to G_{n-p}$$

soumises aux conditions suivantes.

a) $f s_{p-1} = \dots = f s_0 = *$ (resp. aucune condition si $p = 0$)

b) $f s_i = s_{i-p} f \qquad i \geq p$

c) $f d_i = d_{i-p} f \qquad i \geq p+1$

On définit

$$\delta : C^p(X, G) \to C^{p+1}(X, G) \ldots$$

par

$$\delta(f) = d_0 f + \sum_{i \leq p} (-1)^{p+i+1} f d_i$$

On constate aisément que $\delta(f)$ *est une* $p+1$ *cochaîne, de même que* $\delta\delta = 0$.

Notons provisoirement

$$\underline{H}^q(X, G)$$

le q-ième groupe d'homologie du complexe

$$(C^{\circ}(X, G), \delta')$$

Avant de montrer que, pour $q \geq 1$, $\underline{H}^q(X, G)$ *et* $h^q(X, G)$ *coïncident, il nous faut démontrer un lemme qui affirme que* $\underline{H}^q$ *satisfait aussi à la propriété* ( ) *au cas non abélien*

$$h^p(X, G) \approx h^{p-1}(X, \bar{W}(G)).$$

Lemme. *Les groupes* $\underline{H}^p(X, \bar{W}G)$ *et* $\underline{H}^{p+1}(X, G)$ *sont canoniquement isomorphes.*

En effet, on a un isomorphisme canonique

$$\beta : Z^p(X, \bar{W}G) \approx Z^{p+1}(X, G)$$

entre les groupes de cycles de δ, *induisant un isomorphisme entre les bords :*

si

$$f \in Z^p(X, \bar{W}(G))$$

et si

$$r : \bar{W}G \to G$$

est la fonction tordante canonique, alors

$$r \circ f : X \to G$$

est dans $Z^{p+1}(X, G)$.

On définit

$$\beta(f) = r \circ f.$$

Soit maintenant

$$g \in Z^{p+1}(X, G)$$

Définissons

$$f \in Z^p(X, \bar{W}G)$$

tel que

$$\beta(f) = g$$

On voit dans ce qui suit qu'il n'y a qu' un choix.

Sur X_p, f *est définie de façon unique*

$$f(x) = 0 \qquad x \in X_p$$

car $(\bar{W}G)_o = 0$.

Si $x \in X_{p+1}$,

$$f(x) \in (\bar{W}G)_1 = G_o$$

doit être un élément tel que

$$r \circ f(x) = g(x)$$

Or

$$r_1 : (\bar{W}G)_1 \to G_o$$

est l'identité de G_o, on est obligé de poser

$$f(x) = g(x) \qquad si \qquad x \in X_{p+1}.$$

Supposons que

$$f : X_n \to (\bar{W}G)_{n-p}$$

est définie pour $n < q$ et que les conditions a), b) c) soient satisfaites et qu' en outre

$$r \circ f_n = g_n \qquad pour \qquad n < q.$$

Il nous faut démontrer que

$$f_q : X_q \to (\bar{W}G)_{q-p} = (\bar{W}G)_{q-p-1} \times G_{q-p-1}$$

se définit automatiquement. En effet pour chaque n,

$$(\bar{W}G)_n = (\bar{W}G)_{n-1} \times G_{n-1}$$

et

$$d_o(x,y) = x$$

pour chaque $x \in (\bar{W}G)_{n-1}$ *et* $y \in G_{n-1}$;

En outre

$$r(x,y) = y \ ;$$

Si l'on veut que

$$r\ f = g$$

et que f *soit un cocycle il faut avoir*

$$f_q(z) = (x(z), g(z))$$

et

$$d_o\, f_q(z) = \sum_{i \leq p} (-1)^{i+p} f\, d_i\,(z)$$

C'est pourquoi

$$x(z) = \sum_{i \leq p} (-1)^{i+p} f_{q-1}(d_i(z))$$

Or, $d_i(z) \in B_{q-1}$ *est définie, alors nécessairement* $f_q(z)$ *est définie de de façon unique :*

$$f_q(z) = \left(\sum_{i \leq p} (-1)^{i+p} \; f_{q-1} \; d_i(z) \; ; \; g(z) \right),$$

On constate que f_q *satisfait à toutes les conditions exigées.*

Proposition. *Pour tout* $p \geq 1$ *les groupes de cohomologie* $H^p(X, G)$ *et* $h^p(X, G)$ *sont canoniquement isomorphes. Il suffit de montrer que* $H^1(X, G)$ *coïncident quel que soit le groupe* G. *Car alors le lemme précédent permet d'obtenir le résultat par récurrence.*

Soit pour cela

$$[f] \in H^1(X, G)$$

Dire que $\delta f = 0$ *équivaut à dire que, outre les propriétés a) b) et c) il satisfait à*

$$f d_1 = f \; do \; \dotplus \; do \; f$$

ou ce qui revient au même que f *est une fonction tordante.*

De même un bord δg, *provient d'une application de degré zéro*

$$g \; ; \; B \rightarrow G$$

qui commute avec les opérateurs de face sauf éventuellement avec do. Et

$$\delta g = do \; g - g \; do$$

En conséquence $H^1(X, G)$ *est le groupe de classes de fonctions tordantes de* X *à valeurs dans* G, *modulo la relation* $(\sim)$

$$f \sim (f \perp g) = f + \delta g$$

C.Q.F.D.

REDUCTION DU CAS ABELIEN AU CAS MINIMAL

B.3.4.9. *Soit* G *un groupe simplicial.*

L'application canonique

$$p^{(o)} : G_o \to \pi_o G$$

satisfait à la relation

$$p^{(o)} do = p^{(o)} d1$$

C'est pourquoi elle donne lieu à un homomorphisme de groupes simpliciaux noté encore $p^{(o)}$

$$p_G^{(o)} : G \to K(\pi_o G, 0).$$

si à la place de G *on pose* ΩG, *on a*

$$p^o_{\Omega G} : \Omega G \to K(\pi_1 G, 0)$$

si l'on applique le classifiant $\bar{W}$, *on en déduit au cas où le groupe est ebélien un homomorphisme de groupes simpliciaux*

$$p_G^1 : G \simeq \bar{W}\Omega G \to \bar{W} K(\pi_1 G, 0) = K(\pi_1 G, 1)$$

$$p_G^1 = \bar{W}\, p^o_{\Omega G}$$

En général on pose :

$$p^1_G = \bar{W} p^o_{\Omega G} \quad , \quad p^n_G = \bar{W} p^{n-1}_{\Omega^n G}$$

$$p^n_G : G \to K(\pi_n G , n)$$

Les p^n_G *ainsi définis donnent lieu à un homomorphisme de groupes simpliciaux*

$$P_G : G \to \prod_{n \geq o} K(\pi_n G, n)$$

qui induit un isomorphisme entre les groupes d'homotopie. D'après B. 1.6.4. il induit un isomorphisme entre les cohomologies associées à G *et* $\pi K(\pi_n G, n)$. *C'est-à-dire que lorsque* G *est abélien la cohomologie* $h^o(-, G)$ *se réduit toujours à celle d'un groupe abélien minimal, à savoir*

$$\prod_{n \geq o} K(\pi_n G , n)$$

B.3.5. COHOMOLOGIE A COEFFICIENTS DANS UN GROUPE TOPOLOGIQUE.

B.3.5.1. *Nous avons étudié la cohomologie*

$$h^o(X , G)$$

définie au cas où X *est un ensemble simplicial pointé et* G *un groupe simplicial, et démontré que par rapport à chacune des variables l'on dispose de suites exactes longues (cf. B.3. 1. 3 (4) et B.3.3.1) associées respectivement à une* *cofibration dans* $\Delta^{\circ}Ens$ *et à une flèche de* $P(Gr)$. *Cesi s'applique en particulier lorsque* X *et / ou* G *sont les complexes singuliers*

$$\text{sin } X' \quad , \quad \text{sing } G'$$

d'un espace topologique X' *et / ou d'un groupe topologique* G'.

Notre propos est de caractériser le cas abélien. Nous commençons par le cas discret. Et démontrons que le cas (abélien) général peut être réduit à celui-là (*).*

B.3.5.2. *Si*

$$T : C \rightarrow \Delta^{\circ}Ab$$

est un foncteur exact d'une catégorie abélienne C *dans la catégorie* $\Delta^{\circ}Ab$ *des groupes simpliciaux abéliens, on définit une théorie de la cohomologie-homologie*

$$h^{o}(X,E) \qquad X \in \Delta^{\circ}Ens \; , \; E \in C \, ,$$

en associant à chaque ensemble simplicial X *et à chaque objet* E *de la cohomologie*

$$h^{o}(X, T(E))$$

Parmi les propriétés de $h^{o}(X, T(\;))$ *citons.*

A une suite exacte

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$$

correspond un triangle exact

$$h^o(-,E)$$

$$h^o(-,E') \qquad\qquad h^o(-,E'')$$

B.3.5.3. *Soit maintenant* C *la catégorie* Ab *des groupes abéliens (discrets !). Et prenons pour* T *le foncteur*

$$c : Ab \to \Delta^o Ab$$

qui associe à chaque groupe E *l'ensemble simplicial*

$$c(E) = sing(E)$$

lorsque E *est considéré comme espace topologique discret. L'ensemble de simplexes en dimension* n *de* $c(E)$ *est donc égal à* E *et les faces sont égales à l'identité de* E. *(cf. B. 1.5.2).*

En fait c *est défini pour tout ensemble et transforme les groupes (resp. les groupes abéliens) en groupes (resp. en groupes abéliens) simpliciaux.*

Il s'agit aussi d'un prolongement fidéle et il est évidemment exact. En outre on a le

B.3.5.4. **Lemme 1.** *Pour tout ensemble* E, *l'ensemble simplicial* cE *est minimal et satisfait à la condition d'extension de Kan. Enfin*

$$\pi_i\, c(E) = 0 \qquad i \neq 0$$

$$\pi_o\, c(E) = E$$

La condition d'extension est évidemment satisfaite. Et pour qu'un complexe Z *de Kan soit minimal il faut et il suffit que pour tout couple* x, y *de simplexes de même dimension* (p *par exemple) et satisfaisant*

1. $d_i x = d_i y$ *quelque soit* i

2. *les applications simpliciales*

$$x, y : \Delta[p] \to Z$$

sont homotopes relativement à $\dot{\Delta}[p]$, *l'on ait nécessairement* $x = y$.

Cette condition est bien sûr satisfaite par cE. *La définition des groupes d'homotopie donnée par Kan, donne directement les* $\pi_i cE$, *comme énoncés plus haut.*

B.3.5.6. **Lemme 2.** *Pour tout groupe* E *de* Ens, *l'ensemble simplicial* $\bar{W}cE$ *est du type* $K(E,1)$. *Si en outre* E *est abélien,* $\bar{W}cE$ *est minimal et alors*

$$\bar{W}cE = K(E,1)$$

La première affirmation est une conséquence immédiate du lemme 1 et du fait que

$$\pi_i \bar{W} = \pi_{i-1} \qquad i \geq 1$$

$$\pi_o \bar{W} = *$$

Le caractère minimal de $\bar{W}c(E)$ *découle du fait que si* G *est un groupe simplicial abélien minimal il en est de même de* $\bar{W}G$. *Rappelons que pour qu'un groupe simplicial abélien soit minimal il faut et il suffit que pour tout* n *et pour tout* $x \in G_n$, si $\quad d_i(x) = 0 \qquad i \leq n-1$

alors $\quad d_n(x) = 0$

Démontrons cette propriété pour $\bar{W}G$ *sous l'hypothèse que* G *la satisfait.*

On sait que

$$(\bar{W}G)_{n+1} = (\bar{W}G)_n \times G_n$$

et que, sous cette décomposition, les opérateurs de face sont donnés par la relation

$$d_o(w, g) = w$$

$$d_1(w, g) = w_o\, d_o\, g$$

$$d_i(w, g) = (d_{i-1}\, w,\ d_{i-1}\, g) \qquad i > 1$$

Le "dot" dénote l'action évidente de G_{n-1} *sur*

$$(\bar{W}G)_n = (\bar{W}G)_{n-1} \times G_{n-1}.$$

Supposons donc que G *est abélien minimal.*

Soit

$$y = (w, g_n) \in (\bar{W}G)_{n+1}$$

tel que

$$d_i\, y = 0 \qquad i \leq n$$

Ceci implique que $w = 0$ *et que*

$$d_o\, g_n = \dots = d_{n-1}\, g_n = 0$$

Or G est minimal, cette dernière relation implique que

$$d_n\, g_n = 0$$

et donc

$$d_{n+1}\, y = (d_n\, w\, ,\, d_n\, g_n) = 0\, .$$

C.Q.F.D.

B.3.5.7. Soit maintenant E un groupe abélien de Ens. On sait que pour $n \geq 0$, $\bar{\bar{W}}K(E,n)$ a le même type d'homotopie de $K(E,n+1)$, et puisque $K(E,n)$ est minimal quelque soit n alors

$$\bar{\bar{W}}K(E,n) = K(E,n+1)$$

Le lemme 2 et l'équivalence précédente nous conduisent à affirmer que

$$K(E,n) = \bar{\bar{W}}^{n}(cE)$$

Ajoutons enfin que d'après la description de Ω donnée au paragraphe A.2.6.

$$\Omega^{p}\, cE = 0 \qquad\qquad p \geq 1.$$

C'est-à-dire que le spectre $s(cE)$ est donné par

$$s^{p}(cE) = \begin{cases} K(E,p) & p \geq 0 \\ 0 & p < 0 \end{cases}$$

Et en conséquence

B.3.5.8. **Proposition.** *Soit* E *un groupe abélien de* Ens. *Alors*

$$h^{p}(X,cE) = \begin{cases} [X, K(E,p)] & p \geq 0 \\ 0 & p < 0 \end{cases}$$

C. K- THEORIE ALGEBRIQUE

C.1. Groupe simplicial associé a un Anneau de Banach.

C.1.1. Définition de foncteur Gl.

C.1.1.1. *On note* Ann *la catégorie des anneaux non nécessairement commutatifs et non nécessairement avec élément unité.* $Ann^{(1)}$ *dénote la sous-catégorie (non pleine) de* Ann *formé des anneaux avec élément unité et des morphismes qui préservent l'élément unité.*

Le foncteur d'inclusion

$$Ann^{(1)} \to Ann$$

adment un adjoint à gauche

$$R \to R^*$$

L'anneau R^* *a comme groupe abélien sous-jacent* $R \times \mathbf{Z}$ *et la multiplication est donée par*

$$(r, n) . (r', n') = (rr' + n' \cdot r + nr' \cdot nn').$$

C.1.1.2. *Soit* A *un anneau.*

Dans l'ensemble des matrices

$$Q = (q_{ij})_{i,j \geq 1} \qquad q_{ij} \in A$$

n'ayant qu'un nombre fini de coordonées non nulles, on définit la loi de composition

$$P \circ Q = P + Q + PQ$$

On note

$$GL(A)$$

le groupe des matrices P *pour lesquelles il existe un* $Q = Q(P)$ *tel*

$$P \circ Q = Q \circ P = 0.$$

GL *est un foncteur covariant de la catégorie* *Ann.* *dans la catégorie des groupes.*

Si l'anneau A *a un élément unité alors la flèche*

$$Q \to I + Q \qquad I = \text{matrice identité}$$

est un isomorphisme entre le groupe $GL(A)$ *et le groupe des matrices inversibles*

$$\varinjlim_{n} Gl_n(A)$$

où $Gl_n(A)$ *est le groupe des matrices inversibles* $n \times n$ *à coefficients dans* A *et*

$$Gl_n(A) \to Gl_{n+1}(A)$$
$$M \to \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C.1.1.3. *On dira qu' une suite* $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$ *de* Ann *est exacte si la suite des groupes abéliens sous jacente est exacte. Avec cette définition d'exactitude dans* Ann *on peut montrer que si*

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$$

est exacte alors

$$Gl(A') = \ker (Gl(A) \to Gl(A''))$$

ie : que la suite $0 \to Gl(A') \to Gl(A) \to Gl(A'')$ *est exacte.*

En particulier $Gl(A)$ *est le noyau de l'homomorphisme* $Gl(A^+) \to Gl(\mathbf{Z})$ *assotié à la projection canonique* $A^+ \to \mathbf{Z}$

C.1.2. Définition du foncteur $R : Ann \to \Delta^\circ Ann$.

C.1.2.1. *On reprend les définitions de* $K \cdot V[1]$ *sur les anneaux de Banach. Un anneau de Banach est un anneau* A *(avec ou sans élément unité) muni d'une quasi-norme* $P_A = p : A \to \mathbf{R}^+$

(i) $p(x) = 0 \iff x = 0$

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(iii) $p(-x) = p(x)$

(iv) $p(xy) \leq C\, p(x)\, p(y)$

ou C *est une constante indépendante de* x *et de* y. *En outre on suppose que* A *est complet pour la distance* $d(x,y) \doteq p(x-y)$.

On note $Ann\, b$ *la catégorie des anneaux de Banach. Les flèches sont les homomorphismes bornés :* $f : A \to B$ *est dit borné s'il existe une constante* C *telle que*

$$p_B(f(x)) \leq C.\ p_A(x).$$

C.1.2.2. *L'anneau* Z *sera toujours considéré avec la quasi-norme* $||n|| = |n|$.

Si S *est un anneau de Banach sans élément unité, l'anneau* $A^+ = A \times Z$ *est un anneau de Banach pour la semi-norme* $||(a, n)|| = ||a|| + ||n||$.

Soit A *un anneau de Banach. On note* $A\{X_o, \ldots, X_n\}$ *l'anneau de Banach des séries formelles*

$$S = \Sigma\, a_{i_o, \ldots i_n} X^{i_o} \ldots X^{i_n}$$

pour la semi-norme $||S|| = \Sigma\, ||a_{i_o \ldots i_n}|| < +\infty$

C'est le complété de l'anneau des polynômes $A[X_o, \ldots, X_n]$ *pour la topologie définie par la norme*

$$||\Sigma\, a_{i_o \ldots i_n} X_o^{i_o} \ldots X_n^{i_n}|| = \Sigma\, ||a_{i_o \ldots i_n}||$$

On remarque enfin que le noyau de l'application

$$A^+\{X_o, \ldots, X_n\} \to [Z_o, \ldots, X_n],$$

associé à la projection canonique $A^+ \to Z$, *est justement* $A\{X_o, \ldots, X_n\}$

C.1.2.3. *Soit, tout d'abord,* A *un anneau avec élément unité.*

On note

$$d_i \; : \; A[X_o, \ldots, X_n] \to A[Y_o, \ldots, Y_{n-1}] \qquad 0 \leq i \leq n+1$$

les applications définies ci-après :

1-) si $0 \leq i \leq n$

$$d_i X_k = Y_k \qquad 0 \leq k \leq n-i-1$$

$$d_i X_{n-i} = 1$$

$$d_i X_k = Y_{k-1} \qquad n-i+1 \leq k \leq n$$

2.) si $i = n+1$

$$d_{n+1} X_o = n - \sum_{i=o}^{n-1} Y_i \qquad d_{n+1} X_j = Y_{j-1} \quad n \geq j \geq 1$$

3.) $d_i : A[X_o] \to A \qquad i = 0, 1$

$$d_o X_o = 1$$

$$d_1 X_o = 0$$

On définit aussi des applications

$$s_i \; : \; A[X_o, \ldots, X_{n-1}] \to A[Y_o, \ldots, Y_n] \qquad 0 \leq i < n-1$$

comme suit

1) si $2 \leq p \leq n$

$s_{n-p}(X_k) = Y_k$ si $0 \leq k \leq p-2$

$s_{n-p}(X_{p-1}) = -1 + Y_{p-1} + Y_p$

$s_{n-p}(X_k) = Y_{k+1}$ $p \leq k \leq n-1$

2) si $p = 1$

$s_{n-1}(X_o) = -1 + Y_o + Y_1$

$s_{n-1}(X_k) = Y_{k+1}$ $1 \leq k \leq n-1$

C.1.2.4. *Si A est un anneau sans élément unité on note*

$$A[X_o, \dots,]$$ *le noyau de homomorphismes*

$$A^+[X_o, \dots, X_n] \to Z[X_o, \dots, X_n]$$

associé à la projection canonique

$$A^+ \to Z.$$

Les applications d_i et s_i définies auparavant induisent des homomorphismes

$$d_i : A[X_o, \dots, X_n] \to A[X_o, \dots, X_{n-1}] \text{ (resp. des } s_i \dots)$$

C.1.2.5. *Si A est un anneau de Banach, on note encore*

$$d_i : A\{X_o,\ldots,X_n\{ \to A\{Y_o,\ldots,Y_{n-1}\{$$

et

$$s_i : A\{X_o,\ldots,X_n\{ \to A\{Y_o,\ldots,Y_{n-1}\{$$

les homomorphismes induits par les d_i et s_i définies au C.2.1.4.

C.1.2.6. *Définissons l'anneau simplicial $R(A)$ associé à un anneau de Banach $A \in Ann\, b$*

$$R(A)_o = A$$

$$R(A)_n = A\{X_o,\ldots,X_{n-1}\{ \qquad n \geq 1$$

Les faces et les dégénérescences sont donnés dans C. 1. 2.5. On démontre sans peine qu'elles font de $R(A)$ un anneau simplicial de Banach. L'action de R sur les flèches de $Ann\, b$ est immédiate

$R(A)$ est en fait un objet simplicial de la catégorie des anneaux de Banach : $R(A) \in \Delta^\circ Ann\, b$.

C.1.3. Homotopie dans la catégorie des Anneaux de Banach.

C.1.3.1. **Définition.** *On dira que deux homomorphismes d'anneaux de Banach (C. 1. 2. 1.)*

$$f.g : A \to B$$

sont homotopes, si les homomorphismes d'anneaux simpliciaux de Banach $R(f)$ et $R(g)$ sont homotopes dans la catégorie $\Delta^\circ Ann\, b$

C.1.3.2. *Rappelons un lemme donnant une caractérisation des homotopies dans la cat. des ensem-*

bles simpliciaux (resp. dans celle des anneaux simpliciaux, resp. dans Δ°*Ann b).*

Lemme. *Soient*

$$f, g : X \to Y$$

deux applications simpliciales (resp. deux homomorphismes d'anneaux simpliciaux). Pour qu'il existe une homotopie

$$F : f \sim g$$

dans la catégorie $\Delta^{\circ}Ens$ *(resp. dans* $\Delta^{\circ}Ann$*, resp. dans* $\Delta^{\circ}Ann\ b$*) il faut et il suffit qu'il existe des applications (resp. des homomorphismes d'anneaux, resp. des homomorphismes d'anneaux de Banach)* $h_i : X_q \to Y_{q+1}$ $\quad 0 \leqq i \leqq q,\ q \geqq 0$ *satisfaisant*

(i) $\quad d_o h_o = f \qquad d_{q+1} h_q = g$

(ii) $\quad d_i h_j = h_{j-1} d_i \qquad (i < j)$

$\qquad d_{j+1} h_{j+1} = d_{j+1} h_j$

$\qquad d_i h_j = h_j d_{j-1} \qquad (i > j+1)$

(iii) $\quad s_i h_j = h_{j+1} s_i \qquad (i \leqq j)$

$\qquad s_i h_j = h_j s_{i-1} \qquad (i > j)$

Rappelons la démonstration de ce lemme. Soit

$$F : \Delta[1] \times X \to Y$$

une homotopie de f à g. Soit

$$\delta^1 \in (\Delta[1])_1 = Hom_{\Delta}([1],[1])$$

l'identité de $[1]$ dans Δ.

On pose pour chaque $x \in X_q$

$$h_i(x) = F(s_q \dots s_{i+1}\ s_{i-1} \dots s_o \delta^1 ; s_i\ x)$$

Inversement, si les h_i sont donnés on pose

$$F(0, x) = g(x)$$

$$F(1,x) = f(x)$$

$$F(s_{q-1} \dots s_{i+1}\, s_{i-1} \dots s_o \delta^1 ; x) = d_{i+1}\, h(x)$$

On rappelle à ce propos que tout $t \in (\Delta[1])_q$, $q \geq 1$, différent des 0 et 1 s'écrit de façon unique sous la forme

$$t = s_{q-1} \dots s_{i+1}\, s_{i-1} \dots s_o\, \delta^1$$

Supposons maintenant que l'on se place dans $\Delta^\circ Ann$. F satisfait aux conditions

$$F(t, x+y) = F(t,x) + F(t,y)$$

$$F(t, x.y) = F(t,x) . F(t,y)$$

si et seulement si les h_i sont des homomorphismes d'anneaux.

S'il s'agit de la catégorie $\Delta^\circ Ann\ b$ on remarquera que pour que quel que soit

$t \in \Delta[1]_p$, $F(t,-) : X_p \to Y_p$ soit une flèche de Ann b" il faut et il suffit que "les h_i soient des flèches de Ann b ".

C.1.3.3. Proposition. *Pour que deux homorphismes*

$$f, g : A \to B$$

dans la catégorie Ann b soient homotopes (C. 1.3.1) il faut et il suffit qu'il existe un homomorphisme d'anneaux de Banach

$$h : A \to B\{X_o\{$$

tel que

$$d_o h = f \quad \text{et} \quad d_1 h = g$$

On retrouve ainsi la définition d'homotopie donnée par Karoubi-Villamayor [1].

Démonstration. *Supposons que $f \sim g$ au sens de notre définition C. 1.3.1. Il existe donc pour tout q des fonctions (de Ann b)*

$$h_i : R(A)_q \to R(B)_{q+1} \qquad 0 \leq i \leq q$$

satisfaisant aux conditions i), ii) et iii) de C. 1.3.2. On pose

$$h = h_o : R(A)_o = A \to R(B)_1 = B\{X_o\{$$

La condition (i) donne comme prévu

$$d_o h = f \quad \text{et} \quad d_1 h = g.$$

Inversement on doit construire les homomorphismes bornés.

$$h_i : R(A)_q \to R(B)_{q+1} \qquad 0 \leq i \leq q \, , \quad q \geq 0$$

satisfaisant (i), (ii) et (iii) de C. 1.3.2. à partir de

$$h : A \to B\{X_o\{$$

On démare avec $q = 0$ en posant

$$h_o = h : R(A)_o \to R(B)_1$$

à chaque a A correspond une série formelle $h(a)$ dont il est utile de rappeler l'indéterminé en écrivant

$$h(a) = h(a)[X_o]$$

On a alors

$$d_o h(a) = h(a)[X_o = 1] = f(a)$$

$$d_1 h(a) = h(a)[X_o = 0] = g(a)$$

Passons au cas $q = 1$. Nous allons donc définir

$$h_i : A\{X_o\{ \to B\{X_o, X_1\{ \qquad i = 0, 1$$

En fait, elles sont automatiquement définies sur les séries constantes par la relation iii):

$$h_i(a) = h_i(s_o(a)) \qquad \text{(voir C. 1. 2. 5)}$$

$$= \begin{cases} s_q\, h_o(a) & (i = 0) \\ & ((iii)\ C.\ 1.3.2) \\ s_o\, h_o(a) & (i = 1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} s_1\, h_o(a)\,[X_o] = h(a)\,[X_1] & (i = 0) \\ s_o\, h_o(a)\,[X_o] = h(a)\,[X_o + X_1 - 1] & (i = 1) \end{cases}$$

Par abus d'écriture (car nous sommes sur des anneaux qui n'on pas d'élément unité) posons

$$h_o(X_o) = -1 + X_o + X_1$$

$$h_1(X_o) = X_1$$

De façon précise sur une série

$$Q = \Sigma\, a_i\, X_o^i \in A\,\{X\}$$

h_o *et* h_1 *sont données par*

$$h_o\, Q = \Sigma(h(a_i)\,[X_1])\,(-1 + X_o + X_1)^i$$

$$h_1\, X = \Sigma\,(h(a_i)\,[X_o + X_1 - 1])\; X_1^i$$

On démontre facilement que les conditions exigées son satisfaites. Passons enfin au cas $q > 1$. *Remarquons que le choix des* h_i *des précédentes détermine celui des* $h^i : A_{q+1} \to A_{q+2}$ *car, d'après les définitions des opérateurs de dégénérescence, les*

X_k de $A\{X_o,\ldots,X_q\}$ peuvent être trouvé à partir des indéterminées X_j de $A\{X_o,\ldots,X_{q-1}\}$. Définissons par exemple les

$$h_i = h_i^{q+1} : A\{X_o,\ldots,X_q\} \to A\{X_o,\ldots,X_{q+1}\}$$

sur l'hypothèse que les h_i^q sont définies. Sur les polynômes constants :

$$\left.\begin{aligned} h_o^{q+1}(a) &= h_o^{q+1}(s_o(a)) \\ &= s_1\, h_o^q(a) \end{aligned}\right\} \quad \text{(iii. C. 1.3.2)}$$

Et sur les indéterminées :

$$h_i^{q+1}(X_k) = h_i^{q+1}(s_o\, X_o) \qquad k = 0$$

$$h_i^{q+1}(s_q\, X_{k-1}) \qquad 1 \leq k \leq q$$

$$= \begin{cases} s_1\, h_o^q(X_o) & i = 0,\ k = 0 \\ s_o\, h_{i-1}^q(X_o) & i \geq 1,\ k = 0 \\ s_{q+1}\, h_i^q(X_{k-1}) & q \geq i,\ 1 \leq k \leq q \\ s_q\, h_q^q(X_{k-1}) & i = q+1,\ 1 \leq k \leq q \end{cases}$$

C.1.4. Le foncteur $G : Ann\, b \to \Delta^o Gr$.

C.1.4.1. *Il est évident que chaque foncteur*

$$Ann \xrightarrow{F} Gr$$

de la catégorie des anneaux (resp. des anneaux de Banach) dans celle des groupes, donne lieu à un foncteur

$$\Delta^{\circ} F : \Delta^{\circ} Ann \to \Delta^{\circ} Gr.$$

Si A est un anneau simplicial, il est aussi un foncteur contravariant de Δ dans Ann, $(\Delta^{\circ}F)(A)$ est par définition le groupe simplicial

$$\Delta^{\circ} \xrightarrow{A} Ann \xrightarrow{F} Gr.$$

En dimension p, $(\Delta^{\circ}F)(A)$ est égal à $F(A_p)$, Les faces s'obtiennent des faces de A par applications de F. Parfois on notera encore F le foncteur $\Delta^{\circ} F$.

C.1.4.2. Le foncteur $\Delta^{\circ} F$ associé à un foncteur

$$F : Ann \to Gr$$

est un invariant homotopique. En ce sens que si $f \sim g$ dans $\Delta^{\circ}Ann$ (resp. $\Delta^{\circ} Ann\, b$) $(\Delta^{\circ}F)(f)$ est homotope à $(\Delta^{\circ} F)g$. Ce qui est évident d'après la description des homotopies dans $\Delta^{\circ}Ens$ (resp. $\Delta^{\circ}Ann$, resp. $\Delta^{\circ} Ann\, b$ et qui est encore valable au cas $\Delta^{\circ} Gr$) donné au C. 1.3.2.

Si $f \sim g$ dans $\Delta^{\circ}Ann$, il existe des flèches de Ann,

$$h_i : A_q \to B_{q+1} \qquad 0 \leq i \leq q \qquad q \geq 0$$

satisfaisant i) ii) et ii) de C. 1.3.2. Puisque F est un foncteur de Ann dans Gr, les homomorphismes de groupes

$$k_i = F(h_i) \; : \; F(A_q) \to F(B_{q+1})$$

satisfont les mêmes relations i) ii) et iii). Ce qui implique que $\Delta^{\circ}F(f)$ *et* $(\Delta^{\circ}F)(g)$ *sont homotopes dans* $\Delta^{\circ}Gr$.

C.1.4.2. *Ce qui précède sera appliqué dans ce qui suit lorsque* $F = GL$ *(C. 1. 1. 2). Si* A *est un anneau de Banach on note encore* $GL(A)$ *le groupe linéaire de son anneau sous-jascent.*

Corollaire. *Soient*

$$f, g : A \to B$$

deux homomorphismes d'anneaux de Banach. Si f *est homotope à* g *dans* $Ann\ b$ *(C. 1. 3.1) alors* $GL\ R(f)$ *et* $GL\ R(f)$ *sont homotopes dans la catégorie des groupes simpliciaux.*

C.1.4.3. *On note* G *le foncteur composé*

$$G = (\Delta^{\circ}GL) \circ R : Ann\ b \to \Delta^{\circ}Gr$$

du foncteur

$$R : Ann\ b \to \Delta^{\circ}Ann\ b \qquad (C.\ 1.2)$$

et du foncteur

$$\Delta^{\circ}GL : \Delta^{\circ}Ann\ b \to \Delta^{\circ}Gr \qquad (C.1.4.1)$$

associé au foncteur

$$GL : Ann\ b \to Gr \qquad (C.\ 1.\ 1)$$

Corollaire. *Le foncteur* G *est un invariant homotopique en ce sens que si*

$$f \sim g \quad \text{dans} \quad Ann\ b \qquad (C.\ 1.\ 3\ )$$

alors

$$G(f) \sim G(g) \quad \text{dans} \quad \Delta^{\circ} Gr \qquad (B.\ 1.\ 2.\ 12)\ .$$

C.1.4.4. *Remarque. Comme le groupe* $GL(A)$ *d'un anneau de Banach est un groupe topologique, on aurait pu considérer* GL *comme un foncteur de* $Ann\ b$ *dans la catégorie* $Gr\ t$ *des groupes topologiques. Et en conséquence* $\Delta^{\circ} GL$ *irait de* $\Delta^{\circ} Ann\ b$ *dans* $\Delta^{\circ} Gr\ t$ *et*

$$g\ :\ Ann\ b \to \Delta^{\circ} Gr\ t$$

Mais nous n'aurons pas à nous servir de la structure topologique du groupe simplicial $G(A)$.

C.2. APPLICATION DE LA THEORIE $H^p(X, G)$ au cas ou

$$G = F(A)\ ,\ F : \Delta^{\circ} Ann \to \Delta^{\circ} Gr$$

C.2.1. F-fibrations dans Δ° Ann.

C.2.1.1. *Soit*

$$F\ :\ \Delta^{\circ} Ann \to \Delta^{\circ} Gr$$

un foncteur covariant .

On dira qu'un flèche

$$f\ :\ A \to B$$

de $\Delta^{\circ} Ann$ *est une F-fibration faible si* $F(f)$ *est une fibration de Kan .*

Il est évident que le composé de deux F-fibrations est encore une F-fibration. Et que si F-commute aux produits fibrés alors l'ensemble des F-fibrations est stable par changement de base.

C.2.1.2. *Nous allons donner una caractérisation des fibrations de Kan*

$$f : G \to H$$

lorsque G et H sont des groupes simpliciaux et f est un homomorphisme.

Proposition. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

a) f *est une fibration de Kan.*

b) $f(G)$ *est une réunion de composantes connexes de H.*

$$F(G) = \bigcup_{\lambda \in L} H_\lambda \qquad L \subset \pi_0 H$$

c) *La composante connexe de l'élément neutre de H est contenue dans l'image de f.*

d) *Soit $x \in H$. S'il existe j tel que $d_j(x) = 1$ alors $x \in \mathrm{Im}\, f$.*

e) *Soit*

$$u^* : H_p \to H_q$$

une face quelconque de H. Alors

$$\ker u^* \subset \mathrm{Im}\, f.$$

f) *S'il existe une face u^*, telle que*

$$u^*(x) \in \mathrm{Im}\, f$$

alors $x \in Im\, f$.

g) *S'il existe* k *tel que* $d_k(x) \in Im\, f$ *alors* $x \in Im\, f$.

Démonstration. *Les implications* $b \Rightarrow c \Rightarrow e \Rightarrow d$ $f \Rightarrow e$, $f \Rightarrow$ *son évidentes.*

Démontrons que $d) \Rightarrow e)$. *On sait que toute face s'écrit sous la forme*

$$u_* = s_{i_k} \ldots s_{i_1} d_{j_t} \ldots d_{j_1}$$

où $i_1 < \ldots < i_s$ *et* $j_1 > \ldots > j_t$. *Supposons que*

$$u^*(x) = 1$$

Puisque les s_i *sont injectifs, il en résulte*

$$d_{j_t} \ldots d_{j_1}(x) = 1$$

La condition implique alors que

$$d_{j_{t-1}}(y) = d_{j_{t-1}}(\ldots d_{j_1}(x)) \in Im\, f.$$

On se ramène ainsi à démontrer que si

$$d_i(y) \in Im\, f$$

alors

$$y \in Im\, f.$$

(C'est-à-dire que $d \Rightarrow g$*).*

En effet, si on pose

$$d_i(y) = f(a)$$

Alors

$$d_i(s_i^{-1} f(a) \cdot y) = f(a')$$

D' où

$$y = f(s_i(a)) \cdot f(a') = f(s_i\, a \cdot a')$$

Ce qu'on voulait démontrer.

Démontrons que e) => c). Pour que deux éléments $x \in H_p$ et $y \in H_q$ soient dans la même composant il faut et il suffit qu'il y ait des faces $u_1, \ldots, u_{k+1}$ et des pointes $x_1, \ldots, x_q$ tels que

$$H_p \xrightarrow{u_1} H_{p_1} \xleftarrow{u_2} H_{p_2} \xrightarrow{u_3} H_{p_3} \quad u_4 \quad \cdots \to H_{q_k} \xleftarrow{u_{k+1}} H_q$$

$$u_1(x) = u_2(x_2)$$

$$u_3(x_2) = u_4(x_4)$$

$$\vdots$$

$$u_k(x_{k-1}) = u_{k+1}(y)$$

Pour démontrer c) on peut se limiter donc a démontrer que lorsque $\underline{y}$ est lié à $\underline{1}$ par des diagrammes ci-après

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "\omega_*"'] \arrow[dr, "\omega_*"] & \\ 1 & & y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "\omega_*"'] \arrow[dr, "u_*"] & \\ 1 & & y \end{tikzcd}$$

Alors $y \in Im\ f$.

En fait le second diagramme implique que $x = 1$, *et l'hypothèse e) permet de conclure que* $y \in Im\ f$.

Il ne nous reste à considérer que le premier. Par hypothèse : $x \in Im\ f$. *Alors*

$$x = f(a)$$

et donc

$$y = u_*(x) = u_* f(a)$$

$$= f(u_*(a)) \in Im\ f.$$

Pour démontrer que c) => b) on suit à peut près même méthode. On se ramène à démontrer que l'hypothèse c) implique chaque fois que

$$g = \omega_*(x) \in Im\ f$$

alors x *lui-même est dans* $Im\ f$. *C'est-à-dire on démontre que c) => f). Or toute face se décompose sous la forme*

$$\omega_* = s_{i_1} \ldots s_{i_p} d_{j_1} \ldots d_{j_q}$$

il nous suffira de faire la démonstration lorsque $\omega_* = s_i$ *ou* $\omega_* = d_i$. *Le premier étant évident, passons au second. Si* $d_i(x) = f(a)$ *alors* $s_i f(a^{-1}) \cdot x$ *est dans la composante de zéro et en conséquence*

$$s_i f(a^{-1}) \cdot x = f(a_1)$$

$$x = f(s_i\ a \cdot a_1)$$

On démontre que b) => a) en faisant remarquer que f se décompose

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & H \\ & f(G) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

en un épimorphisme f' - qui est toujours une fibration de Kan ( ) - et une injection i. La condition b) ou la condition f) équivalent au fait que i est une fibration de Kan. Pour démontrer enfin que la condition de Kan a) implique une des autres conditions, f) par exemple, rappelons que d'après Quillen ([1] Prop. 1 pp. 3-8), un homomorphisme

$$f : G \to H$$

est une fibration de Kan à la condition nécessaire et suffisante que l'homomorphisme

$$f : G \to K(\pi_0 G, 0) \underset{K(\pi_0 H, 0)}{\times} H$$

de coordonées f et p^o_G (B.3.4.9) soit surjectif. C'est-à-dire que si $x \in H_n$ et si par une face quelconque $\omega_* = d_{i_1} \dots d_{i_n}$

$$\omega_*(x) = f(y) \in H_o$$

alors x lui même est image d'un $z \in G_n$ tel que $\omega_*(z) = y$. Cette remarque complète la démonstration de la proposition.

C.2.1.3. Soit F un foncteur exact à gauche de la catégorie Ann dans la catégorie des groupes. On note $G = \Delta^\circ F$

Corollaire . *Les conditions ci-après sont équivalentes .*

a) $f : A \to B$ est une G-fibration (C.2.1.1.)

b) quelle que soit la face $\omega : [q] \to [p]$ $(p, q \geq 0)$

$$F(\ker \omega_*) \subset F(f_p)(F(A_p))$$

c) Pour que $x \in G(B)_p$ $(p \geq 0)$ soit dans l'image de $G(f)$ il suffit et il faut qu'il existe une face ω^* telle que

$$\omega^*(x) \in Im\, G(f)$$

d) Quel que soit n, et quelle que soit la face

$$d_i : A_n \to A_{n-1} \qquad (0 \leq i \leq n)$$

$$F(\ker d_i) \subset F(f_n)(F(A_n))$$

Le corollaire résulte des définitions et de la proposition C. 2. 1. 2.

C.2.2. La théorie $H^p_F(X, A)$

C.2.2.1. *Soit*

$$F : \Delta^\circ Ann \to \Delta^\circ Gr$$

un foncteur covariant. On note

$$H^p_F(X, A) = H^p(X, F(A)) \qquad Z \ni p \leq 1$$

(A.3).

De même, si $F = \Delta^\circ G$ ou $G : Ann \to Gr$ *on convient de noter* $H^p_G(X, A)$

Una falta involuntaria de mecanografía hizo saltar la numeración de la página 155 a la página 166 .

les $H^p_F(X,A)$.

$H^o_F(X,A)$ est un groupe et $H^p_F(X,A)$ est un groupe abélien pour $p \leqq -1$. Tandis que $H^1_F(X,A)$ n'est qu'un ensemble.

C.2.2.2. Supposons maintenant que F commute avec les noyaux.

A une F-fibration p

$$0 \to A' \to A \xrightarrow{p} A''$$

de noyaux A' correspond une fibration de Kan $F(p)$

$$1 \to FA' \to FA \to FA''$$

Et, pour toute ensemble simplicial X, une fibration de Kan

$$1 \to \underline{Hom}(X, FA') \to \underline{Hom}(X, FA) \to \underline{Hom}(X, FA'')$$

La suite exacte d'homotopie de cette dernière donne lieu à une suite exacte de groupes $(p \leq 0)$

$$\dots \to H^p_F(X,A') \to H^{p-1}_F(X,A) \to H^{p-1}_F(X,A'') \to H^p_F(X,A') \to \dots$$

C.2.2.3. Soit $F : Ann \to Gr$ un foncteur qui commute avec les produits fibrés. Alors les anneaux simpliciaux $\Omega(\Delta^o F)(A)$ et $(\Delta^o F)\Omega A$ sont canoniquement isomorphes.

C.2.3. Invariance homotopique.

C.2.3.1. Il est évident, d'après les définitions que si F transforme homomorphismes homotopes, en homomorphismes homotopes, alors $H^p_F(X,A)$ $(p \leq 0)$ est aussi un *invariant homotopique par rapport à la variable* A. *Ceci est en particulier le cas lorsque* F *est de la forme* $\Delta^{\circ} H$ *où* $H : Ann \to Gr$ *(C.1.4.2.)*

C.3. LA THEORIE $H^P_{GL}(X, A)$ et la k-Théorie ALGEBRIQUE DE KAROUBI - VILLAMAYOR.

C.3.1. La théorie $H^P_{GL}(X, A)$

C.3.1.1. Proposition. *A chaque* $\Delta^{\circ}(GL)$*-fibration*

$$A \xrightarrow{p} A''$$

de noyau A' *correspond de façon naturelle une suite exacte longue de groupes* $(p \leqq 0)$

$$\dots \to H^{P-1}_{GL}(X, A'') \to H^P_{GL}(X, A') \to H^P_{GL}(X, A) \to H^P_{GL}(X, A'') \to \dots$$

C.3.1.2. Proposition. *Les foncteurs*

$$H^P_{GL}(X, A)$$

sont des invariants homotopiques par rapport à chacune des variables. En conséquence

$$H^P_{GL}(X, A) = 0$$

si l'anneau simplicial A *est contractile.*

C.3.2. La théorie $H^P_{GL}(X, R(A))$

C.3.2.1. *Nous allons appliquer tout ce qui précède dans les cas particuliers où les anneaux simpli-*

ciaux sont de la forme $R(A)$ *où* $R : Ann\, b \to \Delta^{\circ} Ann$ *est le foncteur défini au § C. 1. 2. On obtiendra ainsi une théorie où la première variable est un ensemble simplicial* X *et la seconde un anneau de Banach* A.

Nous avons défini les homotopies dans la catégorie $Ann\, b$ *à l'aide du foncteur* R *(C. 1. 3. 1), et démontré postérieurement que cette notion d'homotopie et celle donnée par Karoubi-Villamayor coïncident (C. 1. 3. 3)*

Puisque, par définition

$$f \simeq g \text{ , ss , } R(f) \simeq R(g)$$

les

$$K_R^p(X, A) = H_{GL}^p(X, R(A)) \quad \text{(notation)} \qquad p \leq 0$$

$$= H^p(X, G(A)) \qquad p \leq 0$$

sont des invariants homotopiques et donc

$$K_R^p(X, A) = 0 \qquad p \leq 0$$

si par exemple, A *est un anneau contractile.*

De manière analogue on définit les fibrations dans Ann. *Un homomorphisme d'anneau de Banach* p *est une fibration si* $R(p)$ *est une* $\Delta^{\circ}(GL)$ *- fibration. Et l'on démontre (C. 3. 2. 3.) que cette notion de fibration coïncide avec celle donnée par Karoubi-Villamayor. La suite exacte C. 3. 1. 1. donne lieu a une suite exacte des* $K_R(X, A)$ *(C. 3. 2. 4.) associée à une fibration.*

On retrouve enfin la k-théorie de Karoubi-Villamayor lorsque X *est la sphère* S° *(C. 3. 3. 1.).*

C.3.2.2. Définition. *Un homomorphisme d'anneaux de Banach*

$$f : A \to B$$

est une fibration (rel. à R) si l'homomorphisme d'anneaux simpliciaux

$$R(f) : R(A) \to R(B)$$

est un $\Delta^{\circ}(GL)$ *- fibration (C. 2. 1.1.)*

C.3.2.3. Proposition. *Soit*

$$f : A \to B$$

un homomorphisme d'anneaux. On note $g = G(f) = GL\, R(f) : GA \to GB$. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1) $f : A \to B$ *est une fibration de* Ann b

2) *Si une matrice*

$$a = (P_{i_j}(X_o, \ldots, X_n))_{i,j} \in GL(B\{X_o, \ldots, X_n\})$$

Avec

$$P_{i_j}(1, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad i, j$$

il existe

$$\beta \in GL\, A\,[X_o, \ldots, X_n] = (GA)_{n+1}$$

tel que

$$g(\beta) = a$$

4) *Si une face* $\omega_*(a) \in GL\, B\{X_o, \ldots, X_q\}$ *est dans l'image de* g *alors,*

$a \in GL\, B\{X_o,\dots,X_p\}$ est aussi dans l'image de g.

5) Si une matrice polynomiale

$$a = (P_{ij}(X_o,\dots,X_n)) \in GL\, B\{X_o,\dots,X_n\}$$

est telle que

$$P_{ij}(0, X_1,\dots,X_n) = 0 \qquad i,j$$

Alors a est dans l'image de g.

6) Si une matrice polynomiale

$$a = (P_{ij}(X_o,\dots,X_n)) \in GL\, B\{X_o,\dots,X_n\}$$

est telle que

$$P_{ij}(0,\dots,0) = 0 \qquad i\,j$$

alors il existe $\beta \in GL\, A\{X_o,\dots,X_n\}$ telle que $f(\beta) = a$. (cf. Karoubi-Villamayor [1]).

Démonstration. Les propositions C.2.1.2. et C.2.1.3 donnent les implications

1 <=> 4) <=> 2) <=> 3) (changement de variable) <=> 5)

6) (Cf. [ ] Ruiy Salguero)

C.3.2.4. Proposition. Soit

$$0 \to A' \to A \xrightarrow{p} A''$$

une suite exacte d'anneaux, où l'homomorphisme p est une fibration (C.3.2.2.).

Alors à chaque ensemble simplicial X *est associé une suite exacte longue de groupes.*

$$\cdots \to H_R^{p-1}(X,A') \to K_R^{p-1}(X,A) \to K_R^{p-1}(X,A'') \to K_R^{p}(X,A') \to \cdots$$

(voir C. 3.1.1) et la définition C. 3.2.2).

Il s'agit en effet de la suite d'homotopie dela fibration de Kan

$$Hom(X, GL\ R(p)) : Hom(X, GL\ R(A)) \to Hom(X, GL\ R(A''))$$

C.3.3. Les groupes $H_{GL}^{P}(S^o R(A))$ et la *K-théorie* Algebrique de Karoubi - Villamayor.

C.3.3.1. *D'après les définitions les groupes* $H_{GL}^{P}(S^o_{,} R(A))$ *sont les groupes d'homotopie du groupe simplicial* $G(A) = GL\ R(A)$. *Le groupe* $H_{GL}^{o}(S^o, R(A))$ *est le groupe des classes de composantes du groupe simplicial* $GL\ R(A)$, *et il est donc le quotien t du groupe*

$$G(A)_o = GL\ R(A)_o = GL(A) .$$

par la relation : $\alpha \sim \beta$ *si et seulement s'il existe* $x \in G(A)_1 = GL\ A[X_o]$ *tel que*

$$d_o x = \alpha \quad \text{et} \quad d_1 x = \beta$$

On sait que cette relation est d'équivalence et compatible avec la structure de groupe puisque $G(A)$ *est un groupe simplicial et donc un complexe de Kan. En conséquence* $H_{GL}^{o}(S^o, R(A)) = K^o(S^o; A)$ *est le quotient de* $GL(A)$ *par la relation :* $\alpha \sim \beta$ *s'il existe une matrice*

$$p = (P_{ij}(X_o)) \in GL\ A\{X_o\}$$

telle que

$$(P_{ij}(0))_{ij} = \alpha$$

$$(P_{ij}(1))_{ij} = \beta$$

En conséquence $K^o(S^o, A)$ est le groupe abélien $K^{-1}(A)$ de Karoubi-Villamayor. [1. définition 3.7]

Proposition. Pour tout anneau de Banach A, les groupes $H^{-p}_{GL}(S^o, RA)$ et les groupes $K^{p-1}(A)$ et KV ([1])) sont canoniquement isomorphes. ($p \leq 0$). Cette proposition est conséquence du théorème d'unicité de la théorie de KV (Karoubi Villamayor)

C.3.4. Les groupes $H^P_{GL}(X, \bar{T}(A))$ lorsque A est un anneau topologique.

C.3.4.1. On définit le foncteur $T : Ann\, t \to \Delta^o Ann$ de la catégorie des anneaux topologiques dans celle des anneaux simpliciaux, comme le composé du foncteur "complexe singulier" et des attachements $[X_o, \ldots, X_n]$ ($n \geq 0$) :

$$(TA)_p = A_p[X_o, \ldots, X_{p-1}]$$

où

$$A_p = (Sing\ A)_p$$

et $d_j(\Sigma a_{i_o \ldots i_{p-1}} X_o^{i_o} \ldots X_{p-1}^{i_{p-1}}) = \Sigma\, d_j(a_{i_o \ldots i_{p-1}})(d_j X_o)^{io} \ldots (d_j X_{p-1})^{i_{p-1}}$

où les opérateurs $d_j : An \to An-1$ sont ceux du complexe singulier de A et les $d_j(X_k)$ sont définis par les formules de C. 1.2.3. Idem pour les s_j).

C.3.4.2. Disons que $f, g : A \to B$ sont homotopes relativemenr au foncteur T si $T(f)$

et $T(g)$ *sont homotopes considérés comme homomorphismes d'anneaux simpliciaux.*

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit qu'il existe des homomorphismes d'anneaux

$$h_k : A_p[X_o, \ldots, X_{p-1}] \to B_{p+1}[X_o, \ldots, X_p]$$

$0 \leq k \leq p$, $p \geq 1$ *et aussi*

$$h_o : A_o \to B_1[X_o]$$

qui satisfont aux relations i) ii) et iii) de C. 1.3.2. à condition d'y remplacer f *par* $T(f)$ *et* g *par* $T(g)$. *Il peut être démontré qu'il suffit d'avoir les* h_k *définies sur les éléments de* A_p $(p \geq 0)$ *satisfaisant aux mêmes relations, pour qu'il soit possible de les prolonger à* $A_p[X_o, \ldots, X_{p-1}]$ *de façon à voir l'homotopie. C'est pourquoi au cas où* A *est discret (et donc* $A_p = A$*) on pose*

$$h_k : A_p = A \to A_{p+1}[X_o, \ldots, X_p]$$

$$h_k(a) = a \qquad p > 0$$

et il suffit à ce moment là de se donner

$$h_o : A \to B[X_o]$$

avec $d_o h_o = f$, $d_1 h_o = g$ *(Cf.)*

C.3.4.3. *On définit de même les fibrations relativement à* T *par la formule :*

p *est une fibration relativement à* T, *ss,*

$T(p)$ *est une* GL-*fibration dans* $\Delta^\circ Ann$.

L'ensemble des fibrations relatives du foncteur T *est évidemment stables par composition, par changement de base et bien entendu contient une flèche* f *si* $T(f)$ *est un isomorphisme.*

C.3.4.4. *Si* $p : A \to B$ *est un homomorphisme d'anneaux discrets pour qu'il soit une fibration rel.* T *il faut et il suffit qu'il soit une fibration rel. à* R *au sens de la définition (C.3.2.2) et donc au sens de la définition de* K-V *(C.3.2.3).*

C.3.4.5. *La théorie dévelopée en C. 3. 1. donne, lorqu'on l'applique aux anneaux de la forme* $T(A)$ *les résultats que voici, où par notation*

$$K_T^{-p}(X, A) = H_{GL}^{-p}(X, TA)$$

$$= [X, \Omega^p GL\, T(A)] \qquad p \geq 0$$

1) $K_T^o(X, \_)$ *est un invariant homotopique (homotopie relative à T C. 3.4.2).*

2) *A chaque fibration* $A \xrightarrow{p} B$ *(rel. à T) correspond une suite exacte logue*

$$\ldots \to K_T^{-p}(X, C) \to K_T^{-p}(X, A) \to K_T^{-p}(X, B) \to K_T^{p+1}(X, C) \to \ldots$$

où $C = \ker p$.

3) *Lorsque* A *est discret*

$$K_T^{-p}(X, A) = K_R^{-p}(X, A)$$

(cf. C.3.2.1.)

4) $K_T^p(T\ \cdot, A)$ *est une théorie de la cohomologie réduite (tronquée* $p \in \mathbf{Z}$, $p \leq 0$).

C.4.1. La théorie $h^{\cdot}(X,G)$ et la cohomologie classifiante d'un groupe abélien.

C.4.1.1. *Nous allons montrer que la théorie de la cohomologie $h^{\cdot}(\ ,G)$ défini par le spectre (B. 3. 1. 2.)*

$$\begin{aligned} s^p(G) &= \omega^p(G) \qquad p \geq 0 \\ &= \Omega^p(G) \qquad p < 0 \end{aligned}$$

où $\omega = j\,\bar{W}$, peut s'interpréter comme la cohomologie classifiante associée à un groupe simplicial abélien A :

$$\begin{aligned} H^p(X,A) &= [X, \Omega^{-p} A] \qquad p < 0 \\ &= [X, \bar{W}^p A] \qquad p \geq 0 \end{aligned}$$

C.4.1.2. *Rappelons que*

$$j : P(Gr) \to \Delta^{\circ} Gr$$

est le foncteur adjoint à droite de l'induction

$$i : \Delta^{\circ} Gr \to P(Gr)$$

D'après la description de j donnée au B. 2.1.2 bis, $(jX)_n$ est le groupe à un générateur pour chaque élément de X_n et pour chaque triple (x, y, ω), où $x, y \in X_p$ et $\omega : [n] \to [p]$ est une flèche de Δ, une relation

$$\omega^*(x \perp y) \sim \omega^*(x) \perp \omega^*(y).$$

(où $\perp$ dénote la loi de groupe de X_p).

On peut démontrer aussi que $(jX)_n$ est la quotient du groupe X_n

par le normalisé du groupe engendré par les éléments de la forme

$$\omega^*(x \perp y) \perp \omega^*(y)^{-1} \perp \omega^*(x)^{-1}$$

Ou, enfin,

$$\theta_n : X_n \to (j\, X)_n \qquad n \geq 0$$

est déterminée par la propriété universelle :

Quelle que soit l'application monotone

$$\omega : [n] \to [m],$$

l'application composée

$$\theta_n \circ \omega^* : X_m \to (j\, X)_n$$

est un homomorphisme de groupes.

C.4.1.3. *Considérons le cas où le presque-groupe simplicial X est le classifiant $\bar{W}(G)$ d'un groupe simplicial G.*

Les opérateurs de dégénérescence sont alors des morphismes de groupes. Il en est de même pour les opérateurs

$$d_o,\, d_p : (\bar{W}\, G)_{p+1} \to (\bar{W}\, G)_p. \qquad \text{(Cf. A. 2. 3.)}$$

On en déduit que

$$(j\, \bar{W}G)_o = 0$$

et que $(j\, \bar{W}G)_p$ est le quotient de $(\bar{W}\, G)_p = G_o \times \ldots \times G_{p-1}$ par le sous-groupe normal N_p engendré par les éléments de la forme

$$\langle x, y, d_J \rangle = d_J(x \quad y) \quad d_J(y)^{-1} \quad d_j(x)^{-1}$$

où $\quad J = \{ i_1 < i_2 < \ldots < i_q \} \qquad q \geq 1$

$$d_J = d_{i_1} \, d_{i_2} \ldots d_{i_q}$$

Disons enfin que dans ce cas l'application simpliciale

$$\bar{W}G \xrightarrow{\theta_n} j\,\bar{W}G$$

est défini par les conditions

1) θ_n *est un morphisme de groupes.*

2) $\theta_n \circ d_i$ *est un morphisme de groupes.*

3) *elle est universelle pour ces deux propriétés.*

C.4.1.4. Théoreme . *Les groupes simpliciaux* $j\,\bar{W}(G)$ *et* $\bar{W}(G/_{[G,G]})$ *sont canoniquement isomorphes , (* $[G,G]$ *est le groupe des commutateurs)*

Tout d'abord l'application canonique

$$G \to G/_{[G,G]}$$

induit une flèche de $P(Gr)$

$$\bar{W}(G) \to \bar{W}(G/_{[G,G]})$$

et donc un homomorphisme de groupes simpliciaux

$$j\,\bar{W}(G) \to j\,\bar{W}(G/_{[G,G]})$$

Mais $G/_{[G,G]}$ *est abélien et* $\bar{W}(G/_{[G,G]})$ *est un groupe abélien simplicial et*

$$j\,\bar{W}(G/_{[G,G]}) = \bar{W}(G/_{[G,G]}) \qquad (B.2.7)$$

D' où un homomorphisme de groupes simpliciaux

$$J\ \bar{W}(G) \to \bar{W}(G/_{[G,G]})$$

Avant de montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme rappelons que le groupe de commutateurs $[A \times B,\ A \times B]$ d'un groupe produit est le produit des deux groupes de commutateurs $[A, A] \times [B, B]$. En conséquence :

$$\bar{W}(G/_{[G,G]})_n = G_o \times \dots \times G_{n-1}/C \quad \mathbf{Z}$$

où C = commutateurs du groupe produit $G_o \times \dots \times G_{n-1}$ Cela dit nous pouvons affirmer que $j\,\bar{W}(G)$ est abélien. En effet $(j\,\bar{W}(G))_n$ est le quotient de $(\bar{W}G)_n = G_o \times \dots \times G_{n-1}$ par la relation

$$d_i(x \perp y) \cdot d_i(y)^{-1} \cdot d_i(x)^{-1} \qquad n-1 \geq i \geq 1$$

$x\ ,\ y \in (\bar{W}G)_{n+1}$

Mais un élément $x \in (\bar{W}G)_n$ est de la forme

$$\begin{aligned} x &= (x_o, \dots, x_{n-1}) \\ &= (x_o, 1, \dots, 1) \perp (1, x_1, 1 \dots 1) \dots \perp (1, 1 \dots 1, x_{n-1}) \\ &= \bar{x}_o\ \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n-1} \end{aligned}$$

Et en conséquence le groupe $j(\bar{W}G)_n$ est engendré par les éléments de la forme

$$\theta(\bar{x}_i) \qquad 0 \leq i \leq n-1$$

$x_i \in G_i \to G_o \times \ldots \times G_{n-1}$.

On a évidemment

$$\tilde{x}_i \perp \tilde{x}_j = \tilde{x}_j \perp \tilde{x}_i \qquad i \neq j$$

Et si $i = j$, *la relation*

$$\theta\, d_k(x \perp y) = \theta\, d_k x \,,\, \theta\, d_k(y) \ldots \quad \forall k \ldots \qquad (\oplus)$$

implique que

$$\theta(\tilde{x}_i)\, \theta(\tilde{y}_i) = \theta(\tilde{y}_i)\, \theta(\tilde{x}_i)$$

Voyons pourquoi. Soit

$$x = (x_o, \ldots, x_{n-1}),\ y = (y_o, \ldots, y_{n-1})$$

$$d_k(x_o, \ldots, x_{n-1}) = (x_o, \ldots, x_{n-k-1}, d_o\, x_{n-k}, d_1\, x_{n-k+1}, \ldots, d_{k-1}\, x_{n-1})$$

En conséquence

$$< x, y, d_k > = d_k(x \perp y) \perp d_k(y)^{-1} \perp d_k(x)^{-1} =$$

$$= (1, \ldots, 1, x_{n-k-1}\, y_{n-k-1}\, d_o\, x_{n-k}\, y_{n-k-1} \cdot d_o\, x_{n-k}^{-1} \cdot$$

$$x_{n-k-1}^{-1}, 1, \ldots, 1)$$

$$= (1, \ldots, 1\ x_{n-k-1} [y_{n-k-1}, d_o . x_{n-k}^{-}] \cdot x_{n-k-1}^{-1}, 1 \ldots 1)$$

Ceci permet de tirer deux conclusions

1) *La formule* $\oplus$ *est vraie : il suffit de faire*

$x_p = 1 \qquad p \neq n-k \qquad (n-k-1 = i)$

$x_{n-k} = s_o\, a \qquad a \in G_i$

$y_{n-k-1} = b \qquad b \in G_i$

$y_p = 1 \qquad p \neq n-k-1 .$

Alors $<x, y, d_{n-i-1}> = (1, \ldots, 1, [b, a], 1, \ldots, 1)$

$$= \bar{b}_i\, \bar{a}_i\, \bar{b}_i^{-1}\, \bar{a}_i^{-1}$$

Or $<x, y, d_{n-i-1}>$ est dans le noyau de θ.

2) Pour tout x, y et tout k, $<x, y, d_k>$ est un commutateur.

En conséquence

$$(j\,\bar{W}G)_n = \frac{G_o \times \ldots \times G_{n-1}}{\text{commutateurs}}$$

C.Q.F.D.

C.4.1.5. Corollaire. *Les spectres $s(G)$ et $s(G/_{[G,G]})$ sont homotopiquement équivalentes. Ils définissent donc la même cohomologie*

$$h^{\cdot}(-, G) = h^{\cdot}(-, G/_{[G,G]}) \quad \text{coïncident.}$$

Or

$$\omega^q\, s^1(G) = s^{q+1}(G)$$

Donc $s^q(G)$ et $s^q(G/_{[G,G]})$ Coïncident pour $q \geq 1$.

C.4.1.6. *Si M est un G-module simplicial (où G est un groupe simplicial) on définit l'homologie $H_*(G, M)$ de G à coefficients dans M de la manière suivante :*

$$H_*(G,M) = \pi_*(\mathbf{Z}\,W(G) \underset{\mathbf{Z}(G)}{\oplus} M)$$

où $\mathbf{Z}A$ est le groupe simplicial libre engendré par l'ensemble simplicial A et $W(G) = \bar{W}(G) \times_{\tau_G} G$ est l'espace total du fibré universel (A.4.4)

Lemme. (Quillen [1], p.p. 6.16). *Si G est un groupe simplicial libre en chaque dimmension, l'homologie de G à coefficients dans $\mathbf{Z}$ est nulle si $n = 0$ et égale aux groupes d'homotopie de G rendu abélien :*

$$H_n(G, \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = 0 \\ \pi_{n-1}(G_{ab}) & n > 0 \end{cases}$$

(par abus de notation on écrit $H_n(G, \mathbf{Z})$ au lieu de $H_n(G, K(\mathbf{Z}, 0))$.)

Ce qui précède nous permet d'exprimer les groupes de coefficients de $h^{\bullet}(-, G)$ en fonction de l'homologie de G lorsque G est libre en chaque dimension

$$h^p(s, G) = 0 \qquad p > 0$$

$$h^{-p}(s, G) = H_{p+1}(G, \mathbf{Z}) \qquad p \geq 0$$

C.4.2. $h^{\bullet}$ - fibrations dans $\Delta^{\circ} Gr$.

C.4.2.1. *Soit*

$$f : G \to H$$

un homomorphisme de $P(Gr)$. Supposons que dans G et H les éléments neutres sont stables par les opérateurs d_i et s_i. Alors $\mathrm{Ker}\, f$ est dans $P(Gr)$. Notons a_f la flèche

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\, f \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d, "f"] \\ * \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "a_f"] & H \end{tikzcd}$$

dans $Fl(P(Gr))$

Définition.

$f : G \to H$ est une $h^\cdot$-fibration dans $P(Gr)$ si l'homomorphisme

$$(a_f)_\# : h^\cdot(-, \mathrm{Ker}\, f) \to h^\cdot(-, \{f\})$$

est un isomorphisme.

On définit de même une $h^\cdot$-fibration stable (par changement de base). C'est une flèche $f : G \to H$ telle que pour tout $g : K \to H$ la flèche $g^*(f) : K \times_H G \to K$ est une $h^\cdot$-fibration.

C.4.2.2. **Proposition.** Pour que f soit une $h^\cdot$-fibration il faut et il suffit que quel que soit $k \in Z$, l'homomorphisme

$$\Pi_k(a_f) : \Pi_k s(\ker\, f) \to \Pi_k\{f\}$$

C.4.2.3. Un exemple de $h^\cdot$-fibration est celui d'un épimorphisme $f : G \twoheadrightarrow H$ de groupes simpliciaux abéliens (B.3.4.5.)

C.4.2.4. *Si* $f : G \to H$ *est un épimorphisme de groupes simpliciaux, on peut intérpréter la cohomologie* $h^{\cdot}(-,\{f\})$ *de la manière suivante. Soit* K *le noyau de l'homomorphisme*

$$G/_{[G,G]} \xrightarrow{f'} H/_{[H,H]}$$

associé à f. *Alors on a un morphisme de triangles exacts*

$$\begin{tikzcd}
 & h^{\cdot}(-,G) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
h^{\cdot}(-,\{f\}) \arrow[ur] \arrow[dd] & & h^{\cdot}(-,H) \arrow[ll] \arrow[dd] \\
 & h^{\cdot}(-,G/_{[G,G]}) \arrow[dr] & \\
h^{\cdot}(-,\{f'\}) \arrow[ur] & & h^{\cdot}(-,H/_{[H,H]}) \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

associé au diagramme

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d] & H \arrow[d] \\
G/_{[G,G]} \arrow[r, "f'"] & H/_{[H,H]}
\end{tikzcd}$$

D'après C.4.1.5. et lemme de 5, on conclut que

$$h^{\cdot}(-,\{f\}) \xrightarrow{\sim} h^{\cdot}(-,\{f'\}) \qquad (C.4.2.3.)$$

$$\cong h^{\cdot}(-,K)$$

C.4.2.5.

Corollaire. *Pour qu'un épimorphisme de groupes simpliciaux $f : G \to H$ soit une $h^\bullet$-fibration il faut et il suffit que l'application canonique*

$$\frac{Ker\ f}{[Ker\ f, Ker\ f]} \to K$$

(où $K = ker\ f'$. B.4.2.4.) soit une équivalence d'homotopie faible. En effet dire que f est une h-fibration équivaut à

$$h^\bullet(-, \{f\}) \text{ isomorphe à } h^\bullet(-, Ker\ f) \ (\text{via } a_{f\#})$$

D'après ce qui précède cela veut dire

$$h^\bullet(-, Ker\ f) \quad \text{isomorphe à} \quad h^\bullet(-, K)$$

Ce dernier associé à l'application canonique $Ker\ f \to K$. Mais, comme la cohomologie $h^\bullet(-, Ker\ f)$ est d'après C.4.1.5., isomorphe à $h^\bullet(-, Ker\ f/[Ker\ f, Ker\ f])$ Pour que f soit une $h^\bullet$-fibration il faut et il suffit que l'application canonique

$$Ker\ f/_{[Ker\ f,\ Ker\ f]} \to K$$

induisse une équivalence entre les Ω-spectres

$$S^\bullet(Ker\ f/[Ker\ f, Ker\ f]) \to S^\bullet(K)$$

Ou ce qui revient au même entre les groupes d'homotopie des spectres. Or si A est un groupe abélien simplicial

$$\Pi_k S(A) = \begin{cases} 0 & k > 0 \\ \pi_{-k} A & k \leq 0 \end{cases}$$

Cette remarque permet d'en conclure.

C.4.2.5. *Soit* $\phi : G \to G''$ *un homomorphisme épijectif de groupes simpliciaux de noyau* G'.
Soit P *le produit fibré*

$$\begin{array}{ccc} P & \to & [G'', G''] \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\phi} & G'' \end{array}$$

Les groupes G' *et* $[G,G]$ *sont des sous-groupes distingués de* P, *et* P *est le plus petit groupe de* G *le contenant. En effet si* $x \in P$, $\phi(x)$ *est un commutateur de* G'', *il existe un commutateur* c *de* G *tel que* $\phi(x) = \phi(c)$. *Ce qui veut dire que* $x = c \cdot x'$ *ou* $x' \in G'$, *et donc* $P = [G,G] \cdot G'$.

Le noyau de

$$\phi' : G/[G,G] \to G''/[G'',G'']$$

est donc isomorphe au quotient

$$P/[G,G] = [G,G] \cdot G'/[G,G]$$
$$\approx G'/G' \cap [G,G]$$

En conséquence pour que ϕ *soit une* $h^{\cdot}$*-fibration il faut et il suffit que l'application canonique*

$$\frac{G'}{[G',G']} \to \frac{G'}{G'\cap[G,G]}$$

induite par l'identité soit une équivalence d'homotopie faible.

Or elle est surjective, il s'agit donc d'une fibration de Kan de fibre $G'\cap[G,G]/[G',G']$. *Et la condition "* ϕ *est une* $h^{\cdot}$*-fibration " est encore équivalente à l'ensemble simplicial sous-jacent du groupe abélien simplicial* $G'\cap[G,G]/[G',G']$ *est contractile. Si l'on applique à nouveau la suite exacte d'homotopie d'un fibré on déduit qu'à son tour cette dernière condition peut s'écrire :*

L'inclusion

$$[G',G'] \to G'\cap[G,G]$$

est une équivalence d'homotopie faible.

C.4.3. La théorie $h^{\cdot}(X, GL\,R(\cdot))$.

C.4.3.1. *On vient de démontrer que la théorie de la cohomologie* $h^{\cdot}(\cdot, G)$ *associé à un groupe simplicial* G *et faisant intervenir le foncteur* $j : P(Gr) \to Gr$ *peut s'interpréter comme la cohomologie classifiante du groupe simplicial* $G_{ab} = G/[G,G]$. *En particulier si* A *est un anneau simplicial*

$$h^p(X, GL(A)) = \begin{cases} [X, \Omega^{-p}(GL(A)/[GL(A),GL(A)])] & p \leq 0 \\ [X, \overline{W}^p(GL(A)/[GL(A),GL(A)])] & p \geq 1 \end{cases}.$$

En conséquence

$$h^{p}(S^{\cdot}, GL(A)) = 0 \qquad p > 0$$

et

$$h^{p}(S^{\cdot}, GL(A)) = \Pi_{o}\,\Omega^{-p}(GL(A)_{ab})$$

$$= \Pi_{-p}(GL(A)_{ab}) \qquad p \leq 0 .$$

pour $p = 0$,

$$h^{o}(S^{o}, GL(A)) = \Pi_{o}(GL(A)_{ab})$$

$$= H_{1}(GL(A), \mathbf{Z}) .$$

C.4.3.2. *Soit* A *un anneau de Banach et* $R(A)$ *l'anneau simplicial qui lui est associé par des attachements successifs* $\{x_0, \ldots, x_n\}$ $n \geq 0$. *comme se fait au* § C.1.2.6.

Alors la composante de l'identité en dimension zéro $GL^{o}(R(A))$ *du groupe* $GL\,R(A)$ *contient le groupe de commutateurs de* $GL(A)$.

$$GL^{o}\,R(A) \supset [GL\,A, GL\,A]$$

En effet d'après C.3.3.1. $GL^{o}\,R(A)$ *est formé des éléments* a *de* $GL(A)$ *tels qu'il existe* $P(X) \in A\{X\}$ *satisfaisant*

$$P(0) = 1 \qquad P(1) = a$$

Ce qui veut dire que $GL^{o}\,R(A)$ *est le groupe* $GL^{o}\,A$ *de matrices "homotopes à l'identités" suivant la terminologie de* KV(1) . *Or*

$$GL^{o}(A) \supset [GL(A), GL(A)] \qquad Th. 3.6.$$

En conséquence il existe un homomorphisme surjectif

$$\begin{array}{ccc}
\Pi_o(GL\ R(A)) & \twoheadrightarrow & \Pi_o(GL\ R(A)_{ab}) \\
\wr| & & |\wr \\
GL(A)/_{GL^o(A)} & & GL(A)_{ab}/GL(A)^o_{ab} \\
\wr| & & \\
\dfrac{GL(A)/[GL(A),GL(A)]}{GL^o(A)/[GL(A),GL(A)]} & &
\end{array}$$

Et pour démontrer qu'il est un isomorphisme il suffit de montrer que

$$GL^o(A)/[GL\,A, GL\,A] \xrightarrow{\sim} GL(A)^o_{ab}$$

où $GL(A)^o_{ab}$ *est la composante connexe en dimension zéro de l'élément neutre de* $GL\ R(A)_{ab}$.

Plus généralement pour tout anneau simplicial B *on a une suite exacte*

$$GL^o B \cap [GL(B), GL(B)] \to GL^o B \twoheadrightarrow (GL\,B)^o_{ab}$$

Et pour $B = R(A)$ *on en déduit le résultat désiré .*

Proposition.

$$h^o(S^o, GL\ R(A)) \xrightarrow{\sim} K^o_R(S^o, A) \qquad (C.3.2.1.)$$

Et en conséquence $h^o(S^o, GL\ R(A))$ *est le* $K^{-1}(A)$ *de* $KV[1]$.
(Cf. 3.3. 1.)

APENDICE

[1] *Bkouche m'a fait part d'une construction assez algébrique du foncteur*

$$R : Ann\, b \to A\hat{n}n\, b$$

Elle s'inspire du fait que si A *est un anneau de* Ens *dans l'anneau simplicial*

$$(A')_n = Ens([n], A)$$

avec, comme faces, les flèches

$$u^* : Ens([n], A) \to Ens([m], A)$$

associées en composant à guche les applications ensemblistes $[n] \to A$ *avec la co-face* $[m] \xrightarrow{u} [n]$ *; les applications*

$$X_i : [n] \to A, \quad X_i(j) = \&_{ij}$$

$i = 0, \ldots, n$, *satisfont la relation*

$$X_o + X_2 + \ldots + X_n = 1$$

Et que, en outre, tout élément de $(A')_n$ *s'écrit comme une conbinaison d'elements de la forme* $\underline{a} X_i$ *où* $\underline{a}$ *est dans* A.

[2] *Soit* A *un anneau de* Ens. *On note* $B(A)$ *l'anneau simplicial dont les simplexes en dimention* n *sont les éléments de* $A[X_o, X_1, \ldots, X_n]$. *Les faces et dégénérescenses sont définies comme suit :*

$$\begin{aligned} d_i(X_j) &= X_j & j &= 0, \ldots, i-1 \\ &= 0 & j &= i \\ &= X_{j-1} & j &= i+1, \ldots, n \end{aligned}$$

$$s_i(X_j) = X_j \qquad j = 0, \ldots, i-1$$

$$\qquad = X_{j+1} \qquad j = i, \ldots, n-1$$

On constate sans peinequ'il s'agit en effet d'un anneau simplicial.

[3] *Soit* J *l'idéal simplicial de* $B(A)$ *engendré par les éléments de la forme*

$$X_o + X_1 + \ldots + X_n - 1 \qquad \text{dans} \qquad B(A)_n \;;$$

On note $\underline{R(A)}$ *l'anneau simplicial quotient de l'anneau* $B(A)$ *par l'idéal* $J = J(A)$.

Théoreme. Les anneaux simpliciaux $\underline{R(A)}$ *et* $R(A)$ *sont canoniquement équivalents.*

On définie une application simpliciale mieux encore un homomorphisme d'anneaux simpliciaux

$$\varphi : B(A) \to R(A)$$

telle que pour tout $x \in J(A)$, $\varphi(x) = 0$. *Et on démontrera que l'homomorphisme qui en resulte*

$$\dot{\varphi} : \underline{R(A)} \to R(A)$$

est on fait, un isomorphisme.

Si $n \geq 1$, $\varphi(x_j) = 1 - x_j$ *si* $0 \leq j < n$

$$\varphi(x_n) = 1 - \sum_{j=o}^{n-1} (x_j).$$

$$= (1-n) + \sum_{j=o}^{n-1}$$

Si $n = 0$, $(x_o) = 1$.

Des calculus assez ennuyeux montrent qu'il s'agit d'une application simpliciale .

L'application inverse

$$\psi : R(A) \rightarrow R(A)$$

est donnée par

$$\psi_0 : A \rightarrow A \quad \text{identité}$$

$$\psi_1 (x_o) = [1 - x_o] = \text{classe de } (1 - x_o)$$

$$\psi_n(x_j) = [1 - x_j] \qquad 0 \leq j \leq n-1$$

Lemme . et ψ sont inverses l'une de l'autre. Puisque φ est simpliciale (resp. ψ) il en es de même de ψ (resp. φ).

BIBLIOGRAPHIE

H. BASS — K-THEORIE AND STABLE ALGEBRA
Pub. Math. I.H.E.S. n° 22, 1964

THE STABLE STRUCTURE OF QUITE GENERAL LINEAR GROUPS, *Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964)*

H. CARTAN — SUR LA THEORIE DE KAN
Séminaire de L'Ecole Normale Superieure 1955-56

B. ECKMANN — HOMOTOPIE ET COHOMOLOGIE
Presses de L'Université de Montréal (1964)

P. DEDECKER — SUR LA COHOMOLOGIE NON ABELIENNE
Can. J. Math. 1963 vol 15, pp 84-93

J. MOORE — ALGEBRIC HOMOTOPY THEORY
Policopié (1955-56)

SEMI-SIMPLICIAL COMPLEXES AND POSTNIKOV SYSTEMS, *Symposium International de Top. Alg. Universidad de Mexico y Unesco (1958)*

BARRAT, GUGENHEIM ET MOORE — ON SEMISIMPLICIAL FIBER BUNDLES
Amer. J. of Math. (1959)

GABRIEL ET ZISMAN — CALCULUS OF FRACTIONS AND HOMOTOPY THEORY
Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Band 35

SHH WEISHU — HOMOLOGIE DES ESPACES FIBRES
Pub. Math. I. H. E. S. n° 13

D.M. KAN — ON HOMOTOPY THEORY AND C.S.S. GROUPS
Ann. of Math. vol 68, (1958) pp 38-53

A COMBINATORIAL DEFINITION OF HOMOTOPY GROUPS
Ann. of Math. Vol 167 (1958) pp 282-312

MINIMAL FREE C.S.S. GROUPS
Ill. J. Math. 2 (1958) pp 537-547

G. SEGAL — CLASSIFYNG SPACES AND SPECTRAL SEQUENCES
Pub. Math. I.H.E.S. n° 34

J. MILNOR — ON AXIOMATIC HOMOLOGY THEORY
Pacific J. Math. 12 (1962) pp 337-341

M. KAROUBI ET O. VILLAMA-YOR — K-THEORY ALGEBRIQUE ET K-THEORY TOPOLOGIQUE
Institut de Recherche Mathematique Avancée Strasbourg 1969-70

FONCTEURS K^n EN ALGEBRE ET EN TOPOLOGIE
C. R. Univ. de Paris, tome 269 Serie B, (1969)

H. BASS ET S. SCHAUNEL — THE HOMOTOPY THEORY OF PROJECTIVE MODULES
Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962) 425-428

R. SWAN — NON ABELIAN HOMOLOGICAL ALGEBRA AND K-THEORY
Proc. of Symposia in pure Math. 17, 1970.

A. HELLER — HOMOTOPY RESOLUTIONS OF SEMI-SIMPLICIAL COMPLEXES. *Trans. Amer. Math. Soc. 80, (1955)*

D. QUILLEN — HOMOTOPICAL ALGEBRA
Lectures Notes n° 43 (1967)

D. QUILLEN — SPECTRAL SEQUENCES OF A DOUBLE SEMI SIMPLICIAL GROUP. *Topology 1966*

RATIONAL HOMOTOPY THEORY *Ann. of Math. 90 (1969) 205 - 295*

A. DOLD — HALBEXAKTE HOMOTOPIEFUNKTOREN *Springer - Verlag , 1966*

HOMOLOGY SYMMETRIC PRODUCTS AND OTHER FUNCTORS OF COMPLEXES *Ann. of Math. 1958*

C. RUIZ SALGUERO — ALGEBRAIC K-THEORY AND SIMPLICIAL THEORY *Revista Colombiana de Matemáticas* (a paraitre 1972).

C. RUIZ SALGUERO et R. RUIZ SALGUERO — KAN FIBRATIONS WICH ARE HOMOMORPHISM OF SIMPLICIAL GROUPS. *Revista Colombiana de Matemáticas* (a paraitre en 1972).