N° d'ordre 320

50376
1972
113

50376
1972
113

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le titre de Docteur de Spécialité

(Mathématiques Appliquées)

par

Serge LAPIQUONNE

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE

SUR LES ENSEMBLES DE VALEURS D'UNE INFORMATION GENERALISEE

Membres du Jury : M. KAMPE DE FERIET, Président et Rapporteur
Mlle MARQUET, Examinateur
MM POUZET, Examinateur
BOSQ, Examinateur

Soutenue le 15 Juin 1972

Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur J. KAMPE DE FERIET qui m'a proposé ce sujet et qui, par ses conseils et son aide constante, m'a permis de mener à terme ce travail passionnant.

Je tiens à dire ma reconnaissance à Monsieur le Professeur P. POUZET qui a bien voulu faire partie du Jury et qui a facilité la réalisation matérielle de cette thèse.

Je remercie vivement Mademoiselle le Professeur S. MARQUET et Monsieur le Professeur D. BOSQ, qui ont accepté de faire partie de la Commission d'examen.

Que Monsieur le Professeur BUI TRONG LIEU, qui m'a initié à la Recherche et qui m'a présenté à Monsieur le Professeur J. KAMPE DE FERIET, trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je tiens enfin à remercier Madame DESCARPENTRIES pour le soin qu'elle a apporté à la présentation de ce travail, et tous ceux qui ont participé à la réalisation matérielle de cette thèse.

INTRODUCTION

N. WIENER et C. SHANNON furent à l'origine (1948), de la définition, à partir d'une probabilité, de la mesure de l'information apportée par la réalisation d'un événement A :

$$J(A) = C \operatorname{Log} \frac{1}{P(A)} \ , \ C > 0$$

J étant définie sur une classe $\mathcal{C}$ de parties d'un ensemble d'événements élémentaires Ω .

Les succès de la théorie ne vinrent cependant pas de recherches approfondies sur l'axiomatisation de la définition ci-dessus. Les travaux s'orientèrent vers la traduction mathématique des notions d'entropie et de mesure de l'incertitude, introduite par C. SHANNON :

Si $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ sont n évenements incompatibles de $\mathcal{C}$, de probabilités de réalisation respectives $P(A_i)$, l'incertitude moyenne se mesure par :

$$H(\{A_i\}_{i=1}^{n}) = \sum_{i}^{n} P(A_i)\ J(A_i)$$

c'est-à-dire par :

$$H(\{A_i\}_{i=1}^{n}) = C \sum_{i}^{n} P(A_i) \operatorname{Log} \frac{1}{P(A_i)}$$

C'est cette formule qui fit la réputation de la théorie et permit d'obtenir des résultats importants dans des domaines très divers comme les Télécommunications, la linguistique, etc...

Cependant, la notion de probabilité d'un événement A étant fortement liée à celle de fréquence, c'est-à-dire à la possibilité de répétition indéfinie de l'événement A , il est alors impossible, à

l'aide d'une information dérivant d'une probabilité, de mesurer l'information fournie par un événement qui, par sa structure même, ne peut se répéter.

Or, très peu d'études eurent pour objet la définition de la notion d'information, indépendamment de celle de probabilité.

En 1967, J. KAMPE DE FERIET, à la suite de travaux sur l'application de la théorie de l'information à la Mécanique Statistique, proposa, avec B. FORTE [5] , une axiomatique fondant la notion d'information indépendamment de celle de probabilité.

Nous rappelons en détail, dans le chapitre I, l'ensemble de ces axiomes et de leurs conséquences. Nous présentons les principaux types d'information auxquels ont abouti les derniers travaux :

D'une part, les types M et M' définis à partir d'une fonction d'ensembles qui peut être, non seulement une mesure non finie, mais plus généralement une fonction seulement additive; types dont l'information classique de WIENER-SHANNON, apparaît alors comme un cas particulier.

D'autre part, le type infimum qui n'est plus construit à partir d'une mesure et dont certaines familles d'informations peuvent être définies à partir d'une fonction de Ω dans $\bar{\mathbb{R}}^+$, dite fonction génératrice.

A τ , fonction d'ensembles définie sur une classe $\mathcal{C}$ de parties de Ω , associons les ensembles de valeurs :

$$\Gamma_1(\tau) = \{x : \exists\, A \in \mathcal{C} \,,\, x = \tau(A)\}$$

et, pour $n \geq 2$:

$$\Gamma_n(\tau) = \{(x_1,\dots,x_n) : (A_1,\dots,A_n) \in C^n \ , \ A_j \cap A_k = \emptyset \ , \ x_j = \tau(A_j)\}$$

D'autre part, τ sera dite composable, s'il existe une opération de composition F, telle que :

$$\forall\ A,B \in C \ , \quad A \cap B = \emptyset$$

on a :

$$\tau(A \cup B) = F\left[\tau(A) \ , \ \tau(B)\right]$$

Les travaux ici exposés ont pour objet l'étude des ensembles de valeurs définies ci-dessus, pour $n = 1$ et 2, dans le cas où τ est une information, soit de type M ou M', définie à partir d'une mesure μ, soit de type infimum, définie à partir d'une fonction génératrice. Nous présentons, au chapitre III, l'ensemble des résultats obtenus.

Mais, auparavant, pour pouvoir traiter les types M et M', nous exposons, dans le chapitre II, quelques propriétés sur les ensembles $\Gamma_1(\mu)$ et $\Gamma_2(\mu)$.

Dans le cas de $\Gamma_1(\mu)$, on trouve exposé par P.R. HALMOS ([3],[4]), un ensemble complet de propositions relatives aux mesures finies ou σ-finies non-atomiques, et aux mesures finies quelconques. Nous avons, à l'aide d'un exercice de N. BOURBAKI, complété ces résultats pour les mesures purement atomiques finies.

Par contre, les propriétés des ensembles $\Gamma_n(\mu)$ pour $n \geq 2$ sont fort peu étudiées. Ceci vient certainement du fait que la mesure étant additive :

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \qquad \forall\ A,B \in C \ , A \cap B = \emptyset$$

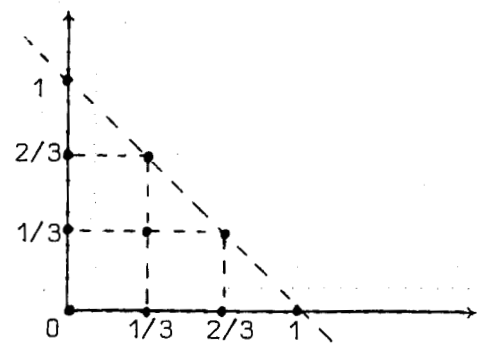
son opération de composition $F(x,y) = x+y$ est très connue.

Cependant, lorsqu'on utilise l'instrument mathématique qu'est une mesure, il est quelquefois intéressant de savoir si l'ensemble $\Gamma_2(\mu)$ est un sous-espace discret de $\bar{R}^+ \times \bar{R}^+$ ou s'il remplit tout un domaine continu. Par exemple, si on prend la probabilité P_1 définie par :

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

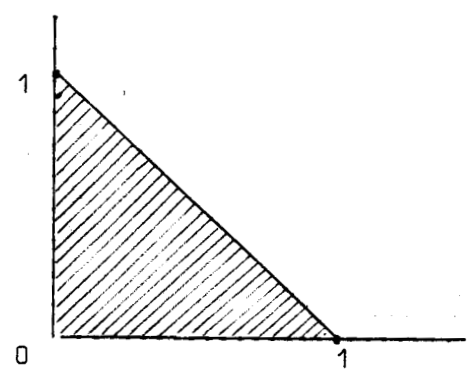
$$P_1(A_i) = \frac{1}{3} \qquad i = 1,2,3$$

nous obtenons l'ensemble $\Gamma_2(P_1)$:



$\Gamma_2(P_1) = \{\bullet\}$

Par contre, si nous prenons la mesure de LEBESGUE sur $[0,1]$, comme probabilité P_2 , alors on a comme ensemble $\Gamma_2(P_2)$:



Nous avons étudié, d'autre part, aussi bien le cas d'une mesure que dans celui d'une information de type M ou M' , la notion de fonction d'ensembles injective.

Une mesure μ est injective s'il n'existe pas deux ensembles A et B , qui ne soient pas μ-équivalents et pour lesquels $\mu(A) = \mu(B)$; nous avons démontré qu'une mesure purement atomique finie ne peut pas être injective, ceci se transpose immédiatement aux informations du type M .

-=-=-=-=-=-=-=-

SOMMAIRE

CHAPITRE I : RAPPELS SUR LA THEORIE DE L'INFORMATION

1-A - Axiomatique

1-B - Les informations de type M , M' et inf.

CHAPITRE II : SUR LES ENSEMBLES DE VALEURS D'UNE MESURE

2-A - Rappels de définitions et propriétés

2-B - Propriétés de $\Gamma_1(\mu)$ et $\Gamma_2(\mu)$

2-C - Mesure injective

CHAPITRE III : SUR LES ENSEMBLES DE VALEURS D'UNE INFORMATION

3-A - Information et Atome

3-B - Propriétés des ensembles de valeurs des informations du type M et M'

3-C - Quelques résultats sur l'information de type inf.

NOTATIONS ET SYMBOLES

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

Dans ce qui suit, nous noterons par :

$\mathbb{N}$	:	L'ensemble des entiers positifs ou nuls
$\mathbb{R}$	:	La droite réelle $]-\infty, +\infty[$
$\mathbb{R}^+$	:	La demi-droite réelle $[0, +\infty[$
$\bar{\mathbb{R}}^+$	:	La demi-droite réelle achevée $[0, +\infty]$
$\emptyset$	:	L'ensemble vide.

Les symboles suivants désigneront :

$\cup$	:	La réunion
$\cap$	:	L'intersection
A^c	:	Complémentaire de l'ensemble A
$\subset$	:	L'inclusion stricte et $\not\subset$: la non-inclusion
$\subseteq$	:	L'inclusion large
$\in$	:	L'appartenance et $\notin$ la non appartenance
$\Longrightarrow$	:	L'implication et $\not\Longrightarrow$ la non-implication
$\exists$	:	Il existe ...
$\forall$	:	Quel que soit

[n] renvoie aux références correspondantes données à la fin.

C H A P I T R E I

RAPPELS SUR LA THEORIE DE L'INFORMATION

1-A.- AXIOMATIQUE

Soit Ω un ensemble dont les éléments ω représentent les événements élémentaires définis à partir de l'observation des états d'un système quelconque.

Soit C une classe de parties de Ω , $C \subset P(\Omega)$. On n'a pas besoins, a priori, de munir C d'une structure d'ensemble particulière. Cependant, compte tenu des axiomes et du caractère de la présente étude, nous supposerons toujours que C est une algèbre ou une σ-algèbre que nous noterons de préférence S .

I - AXIOME 1.-

Une information définie sur une algèbre ou σ-algèbre S est une fonction d'ensembles J , telle que :

$$J : S \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^{+}$$

$$J(A) \geqslant 0 \qquad \forall A \in S \qquad [6]$$

AXIOME 2.-

Une information J définie sur S est une application monotone par rapport à l'inclusion :

$$(A,B) \in S \times S \quad , \quad B \subset A \Longrightarrow J(B) \geqslant J(A)$$

Si on calcule alors les valeurs de J en $\emptyset$ et Ω , on obtient :

$$0 \leqslant J(\Omega) \leqslant \inf_{A \in S} J(A) \leqslant \sup_{A \in S} J(A) \leqslant J(\emptyset) \leqslant +\infty$$

Mais ces inégalités, suffisantes pour Ω , S et J donnés, ne conviennent plus si l'on veut des quantités $J(\Omega)$ et $J(\emptyset)$ valables quels que soient Ω , S et J .

On affecte donc à J , en $\emptyset$ et Ω , des valeurs dites universelles, à savoir :

$$J(\Omega) = 0 \quad \text{et} \quad J(\emptyset) = +\infty \qquad [6]$$

NOTATION.-

Pour un ensemble quelconque $E \in \mathcal{S}$, nous noterons :

$$E^{(i)} \quad , \quad i = 0,1 : E^{(0)} = E \quad , \quad E^{(1)} = E^c$$

AXIOME 3.-

Si, en vertu de la structure du système observé, les événements A *et* $B \in \mathcal{S}$ *sont indépendants, toute information* J *définis sur* $\mathcal{S}$ *doit satisfaire aux quatre conditions,* [6] :

$$(\alpha) \qquad J(A^{(i)} \cap B^{(j)}) = J(A^{(i)}) + J(B^{(j)}) \qquad i,j = 0,1$$

On peut interpréter ce troisième axiome comme une définition :

Pour une information J , définie sur $\mathcal{S}$, deux événements A et $B \in \mathcal{S}$ sont indépendants si (α) est vérifiée. On parlera alors de préférence, de l'indépendance des deux algèbres :

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$$

définie par :

$$J(E \cap F) = J(E) + J(F) \quad , \quad E \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad F \in \mathcal{B}$$

Ce qui nous amène à la généralisation suivante :

Soit $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ une famille d'algèbres ou de σ-algèbres. Soit $\mathcal{K}$ la classe de toutes les parties de Ω appartenant à au

moins une des A_i .

DEFINITION 1.- *Si* J *est une information définie sur* S *contenant* K , *les* A_i *sont dites* J-*indépendantes si, pour toute sous-famille finie* $I' \subset I$, *on a :*

$$J\left[\bigcap_{i\in I'} A_i\right] = \sum_{i\in I'} J(A_i) \qquad \forall\, A_i \in A_i \qquad [6]$$

Cependant, pour une information J , la notion d'indépendance ne se limite pas au cas où les sous-familles I' sont finies.

DEFINITION 2.- *Si* J *est une information définie sur* S , *contenant* K , *les* A_i *sont dites* J-σ-*indépendantes, si pour toute famille dénombrable* $I' \subset I$, *on a :*

$$J\left[\bigcap_{i\in I'} A_i\right] = \sum_{i\in I'} J(A_i) \qquad \forall\, A_i \in A_i \qquad [6]$$

EXEMPLE.- Soit $\Omega \equiv \mathbb{N}$ et J définie sur $P(\mathbb{N})$, par :

$$A \text{ fini} \quad : \quad J(A) = 1$$
$$A \text{ infini} \quad : \quad J(A) = 0$$

On constate alors que si on prend deux parties de $\mathbb{N}$, l'une finie, l'autre infinie, elles sont indépendantes.

NOTATION.- Rappelons qu'à toute information J , on associe les ensembles de valeurs :

$$\Gamma_1(J) = \{x : \exists\, A \in S \,,\, J(A) = x\}$$

et pour $n \geq 2$:

$$\Gamma_n(J) = \{(x_1,\dots,x_n) : (A_1,\dots,A_n) \in S^n \,,\, A_j \cap A_k = \emptyset \,,\, x_j = J(A_j)\}$$

II - Les trois premiers axiomes semblent être les seuls que l'on puisse imposer intuitivement à la mesure de l'information fournie par un événement. En effet, si nous cherchons à calculer l'information fournie par l'événement $A \cup B$, sachant l'information fournir par A et l'information fournie par B, A et B étant incompatibles, les perspectives s'avèrent extrêmement diverses.

De l'axiome 2, on déduit seulement :

$$J(A \cup B) \leq \inf[J(A), J(B)]$$

En général, on ne peut pas calculer $J(A \cup B)$, à l'aide des seuls $J(A)$ et $J(B)$. Aussi, par analogie avec l'information de WIENER-SHANNON, et pour pouvoir procéder à des calculs algébriques, bien que cela restreigne quelque peu la notion d'information, on impose à J d'être telle que

$$J(A \cup B) = F[J(A), J(B)] \qquad A \cap B = \emptyset \quad , \quad A,B \in S$$

<u>AXIOME 4</u>.- *Une information* J *définie sur* S *est dite composable si elle vérifie*, [6] :

$$J(A \cup B) = F[J(A), J(B)] \qquad \forall\, A,B \in S$$

tels que $\qquad A \cap B = \emptyset$

$F(x,y)$ *est l'opération de composition de* J.

Si les événements A et B sont quelconques, on a évidemment :

$$J(A \cup B) = F[J(A), J(B-A)]$$

Des propriétés suivantes de la réunion :

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \subset B \Longrightarrow A \cup C \subset B \cup C$$

on déduit, pour l'opération $F(x,y)$, les propriétés :

SYMETRIE	:	$F(x,y) = F(y,x)$
ASSOCIATIVITE	:	$F[x,F(y,z)] = F[F(x,y),z]$
ELEMENT NEUTRE	:	$F(x,+\infty) = x$
MONOTONICITE	:	$x < y \Longrightarrow F(z,x) \leq F(z,y)$ [6]

Ces quatre propriétés sont vraies, quelque soit l'opération de composition considérée. Cependant, dans la présente étude, nous étudions essentiellement des informations dont l'opération de composition est régulière :

<u>DEFINITION 3</u>.- [7]. *Une opération de composition* $xTy = F(x,y)$ *est régulière (O.c.r) si elle satisfait :*

(C_1) $\quad F : \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+ \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$

(C_2) $\quad F \in C[\bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+]$

(C_3) $\quad F(y,x) = F(x,y)$

(C_4) $\quad F[x,F(y,z)] = F[F(x,y),z]$

(C_5) $\quad F(x,+\infty) = x$

(C_6) $\quad x' < x'' \Longrightarrow F(x',y) \leq F(x'',y)$

ce qui implique

(C_7) $$F(x,y) \leq \inf(x,y)$$

Toute o.c.r. définit ainsi un semi-groupe topologique sur $\bar{\mathbb{R}}^+$.

D'autre part, à partir d'une o.c.r. F , on construit la suite :

$$F_1(x_1) = x_1$$

$$F_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = F\left[F_n(x_1,\ldots,x_n) \ , \ x_{n+1}\right]$$

Nous noterons le support d'une fonction F_n par :

$$\Gamma_n^*(F)$$

On a évidemment $\Gamma_1^*(F) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+$. Dans la présente étude, nous ne mentionnerons que l'ensemble $\Gamma_2^*(F)$ qui n'est autre que le support de $F(x,y)$:

$$\Gamma_2^*(F) = \overline{\{(x,y) : F(x,y) > 0\}}$$

Il est important, enfin, de préciser que la condition (C_1) n'entraîne pas que J est composable sur tout $\bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$, mais que J est composable, d'après l'axiome 4 , sur l'ensemble :

$$\Gamma_2(J) = \{(x,y) : \exists\ A,B \in \mathcal{S} \ , \ A \cap B = \emptyset \ , \ J(A) = x \ , \ J(B) = y\}$$

<u>EXEMPLE</u>.- Prenons l'information de WIENER-SHANNON :

$$\forall\ A \in \mathcal{S} : J(A) = c \operatorname{Log} \frac{1}{P(A)} \quad , \quad c > 0$$

P étant une probabilité définie sur $\mathcal{S}$, on a pour opération de

composition :

$$F(x,y) = - c \operatorname{Log} (e^{-x/c} + e^{-y/c})$$

Pour avoir une opération de composition régulière, il faut prendre :

$$F(x,y) = \operatorname{Sup}\left[- c \operatorname{Log}(e^{-x/c} + e^{-y/c}) \ , \ 0\right]$$

Mais, il faut alors préciser que J n'est composable que sur une partie du domaine :

$$\Gamma_2^*(F) = \{(x,y) \ : \ e^{-x/c} + e^{-y/c} \leqslant 1\}$$

c'est-à-dire que pour l'information de WIENER-SHANNON :

$$\Gamma_2(J) \subseteq \Gamma_2^*(F) \ .$$

<u>AXIOME 5</u>.- *Une information* J *définie sur une* σ*-algèbre* $\mathcal{S}$ *, est* σ*-composable si elle vérifie :*

$$J\left[\bigcup_1^{\infty} A_n\right] = \mathop{\mathrm{T}}_1^{+\infty} J(A_n)$$

avec

$$\mathop{\mathrm{T}}_1^{\infty} J(A_n) = \lim_{n\to\infty} J(A_1) \ \mathrm{T} \ J(A_2) \ \mathrm{T} \ \ldots \ \mathrm{T} \ J(A_n)$$

avec

$$A_n \in \mathcal{S} \quad \forall \ n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad A_j \cap A_k = \emptyset \quad \text{si} \quad j \neq k$$

Dans le cas où la suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas deux à deux disjointes :

$$J\left[\bigcup_{1}^{\infty} A_n\right] = \bigcap_{1}^{\infty} J(A_n - B_n)$$

avec

$$B_1 = \emptyset \quad ; \quad B_n = \bigcup_{1}^{n-1} A_j \quad ; \quad n > 1 \quad ; \quad A_n \in S \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad [6]$$

III - Donnons maintenant quelques résultats importants concernant la σ- composabilité :

<u>DEFINITION 4</u>.- *Une information* J *possède la continuité séquentielle ascendante en* $A \in S$ *, (resp. descendante en* $A \in S$*) , si,* $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *étant une suite croissante, (resp. décroissante), d'éléments de* S *tendant vers*

$$\bigcup_{1}^{\infty} A_i = A \quad \left(\text{resp. } \bigcap_{1}^{\infty} A_i = A\right)$$

on a :

$$J\left[\bigcup_{1}^{\infty} A_i\right] = \lim_{n\to\infty} J\left[\bigcup_{1}^{n} A_i\right] \quad ; \quad \left(\text{resp. } J\left[\bigcap_{1}^{\infty} A_i\right] = \lim_{n\to\infty} J\left[\bigcap_{1}^{n} A_i\right]\right)$$

<u>THEOREME 1</u>.- *Pour une information* J *définie sur* σ*-algèbre* S *, les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) J *possède la continuité séquentielle ascendante*
(b) J *est* σ*-composable* *(Cf [6] Th. 5.3.)*

<u>THEOREME 2</u>.- *Pour une information* J *définie sur une* σ*-algèbre* S *, d'opération de composition régulière, possédant la continuité séquentielle descendante en* $\emptyset$ *, on a :*

(a) J *possède la continuité séquentielle descendante* $\forall\, A \in S$
(b) J *possède la continuité séquentielle ascendante,*

$\forall\, A \in S$ *tel que* $J(A) > 0$ *(Cf. [6] Th. 5.4)*

1-B.- LES INFORMATIONS DE TYPE M , M' ET INF.

Soit un ensemble Ω quelconque, muni d'une σ-algèbre $\mathcal{S}$. Soit μ une mesure définie sur $\mathcal{S}$, c'est-à-dire une fonction d'ensemble, non négative, σ-additive et telle que $\mu(\emptyset) = 0$

- INFORMATION DE TYPE M -

On désignera par information du type M , une information définie par :

$$J(A) = \Theta[\mu(A)] \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

Θ étant une application de $[0,\mu]$ dans $\bar{\mathbb{R}}^+$, avec $\bar{\mu} = \mu(\Omega)$, vérifiant les propriétés :

(a) $\Theta(0) = +\infty$, $\Theta(\bar{\mu}) = 0$

(b) $\Theta(x)$ strictement décroissante

(c) $\Theta(x) \in C[0,\bar{\mu}]$

On vérifie aisément que J admet les axiomes 1 et 2 . Pour l'axiome 3, on raisonne dans le sens d'une définition.

D'autre part, de :

$$\mu(A) = \Theta^{-1}[J(A)]$$

et de

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \ , \ A \cap B = \emptyset$$

On déduit que J est composable, d'opération de composition :

$$F[J(A) \ , \ J(B)] = J(A \cup B) = \Theta[\Theta^{-1}(J(A)) + \Theta^{-1}(J(B))]$$

avec $A, B \in \mathcal{S}$ et $A \cap B = \emptyset$

d'autre part,

$$\Gamma_2^*(F) = \{(x,y) : \theta^{-1}(x) + \theta^{-1}(y) \leq \bar{\mu}\}$$

et on a : $\Gamma_2(J) \subseteq \Gamma_2^*(F)$

car si : $(x,y) \in \Gamma_2(J)$, $\exists$ A et $B \in \mathcal{S}$,

disjoints, tels que :

$$J(A) = x \quad \text{et} \quad J(B) = y$$

on a alors évidemment :

$$\theta^{-1}[J(A \cup B)] = \theta^{-1}(x) + \theta^{-1}(y) \leq \bar{\mu}$$

d'où : $(x,y) \in \Gamma_2^*(F)$

Enfin, précisons que, μ étant σ-additive, les informations de type M sont σ-composables.

REMARQUES.-

(1). L'information du type M se définit en général, (cf [6] , 8), en supposant que μ est une fonction d'ensembles, non négative et simplement additive. Cela suffit pour que J , définie à partir de θ , soit composable.

Cependant, nous n'étudierons ici que des informations du type M définies à partir d'une mesure. Aussi, dans la présentation ci-dessus, du type M , nous avons supposé, comme dans [8] , que la fonction d'ensemble μ est une mesure.

(2). Si une information J du type M , possède la pléni-

tude binaire, (Cf [7], Déf. 2) , on a :

$$\Gamma_2^*(F) \equiv \Gamma_2(J)$$

Car, en effet, si J possède la plénitude binaire, on a, par définition :

$$\Gamma_2^*(F) \subseteq \Gamma_2(J)$$

Or, on a vu que, pour le type M , on a, en général :

$$\Gamma_2(J) \subseteq \Gamma_2^*(F)$$

D'autre part, $\Gamma_2^*(F)$ étant un domaine fermé, symétrique et convexe de $\bar{\mathbb{R}}^2$, la plénitude binaire implique que J est composable sur un ensemble non discret.

EXEMPLES.-

(1). Dans le cas où on prend pour μ une mesure de probabilité P et pour Θ l'application :

$$\Theta(x) = c \operatorname{Log} \frac{1}{x} \qquad c > 0$$

on retrouve l'information de WIENER-SHANNON citée plus haut. Le type M apparaît donc comme une généralisation de WIENER-SHANNON.

(2). En choisissant $\Theta(x) = \frac{1}{x}$, et une mesure μ telle que $\mu(\Omega) = +\infty$, on obtient des informations dont l'opération de composition F correspond au semi-groupe hyperbolique :

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{-1} \qquad [6]$$

avec ici : $\Gamma_2^*(F) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$, ce qui n'est pas toujours le cas.

Si on considère alors le cas plus précis où :

$\Omega \equiv N$ et $\mu(A) = n(A)$ = nombre de points de A ,

L'information $J(A) = \frac{1}{n(A)}$ est une information du type M qui vérifie

$$J(a+m) = J(A) \quad , \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \qquad [6]$$

C'est une propriété que ne possède jamais l'information de WIENER-SHANNON : l'invariance pour toute translation.

- INFORMATION DU TYPE M' -

On désignera par information du type M' , une information définie par :

$$J(A) = \varphi\left[\mu(A)\right] \qquad \forall\, A \in \mathcal{S}$$

La mesure μ est telle que $\mu(\Omega) = +\infty$

φ est une application de $\bar{\mathbb{R}}^+$ dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \Theta(x) \qquad x \in [0,\bar{\mu}] \\ &= 0 \qquad x \in [\bar{\mu},+\infty] \end{aligned}$$

$\bar{\mu}$ étant un nombre réel fini, positif, et Θ une bijection de $[0,\bar{\mu}]$ dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ vérifiant, comme pour le type M , les trois conditions (a) , (b) , (c) .

L'opération de composition est ici donnée par :

$$F(x,y) = \varphi\left[\Theta^{-1}(x) + \Theta^{-1}(y)\right] \qquad [6]$$

D'autre part, on a comme pour le type M :

$$\Gamma_2^*(F) = \{(x,y) \ : \ \Theta^{-1}(x) + \Theta^{-1}(y) \leqslant \bar{\mu}\}$$

Cependant, pour les ensembles $\Gamma_2(J)$ et $\Gamma_2^*(F)$, il n'y pas obligatoirement, comme pour le type M , une relation d'inclusion.

Enfin, le type M' est aussi, de par la σ-additivité de μ , σ-composable.

REMARQUES.-

(1). De même que pour le type M , l'additivité simple de la fonction d'ensemble μ suffit pour qu'on ait composabilité. Mais, dans la présente étude, nous n'étudierons aussi que des informations du type M' définies à partir d'une mesure.

(2). La plénitude binaire entraîne aussi pour le type M' qu'une telle information est composable sur un ensemble non discret.

EXEMPLE.- Prenons la mesure de LEBESGUE sur $\bar{\mathbb{R}}^+$, m et $\Theta(x)$ telle que :

$$\Theta(x) = c \operatorname{Log} \frac{\bar{\mu}}{x} \quad \text{pour} \quad x \in [0,\bar{\mu}]$$

L'information J définie par :

$$\begin{aligned} J(A) &= c \operatorname{Log} \frac{\bar{\mu}}{m(A)} && m(A) \leq \bar{\mu} \\ &= 0 && m(A) \geq \bar{\mu} \end{aligned} \qquad [6]$$

est une information du type M' . C'est également une généralisation de WIENER-SHANNON qui possède aussi la propriété d'être invariante pour toute translation.

- INFORMATION DE TYPE INFIMUM -

On dira qu'une information J définie sur S est du type infimum (inf.), si l'opération de composition de J , est de la forme :

$$F(x,y) = \inf(x,y) \qquad [6]$$

c'est-à-dire

$$J(A \cup B) = \inf[J(A)\ ,\ J(B)] \quad , \quad \forall\ A,B \in \mathcal{S} \quad , \quad A \cap B = \emptyset\ .$$

THEOREME 1.- *L'information* J *étant définie sur un anneau* R, *si* $J(A \cup B) = \inf[J(A)\ ,\ J(B)]$ *est satisfaite pour tous les couples disjoints* $(A,B) \in R \times R$, *elle est nécessairement vérifiée pour tous les couples de l'anneau. L'opération* $F(x,y) = \inf(x,y)$ *est la seule qui possède cette propriété.* *([6] Th. 9.2)* .

THEOREME 2.- *Pour une information du type inf., définie sur un anneau* R , *quelle que soit la famille finie* $\{A_i\}_{i\in I}$ *telle que :*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = A \quad , \quad A_i \in R \quad \forall\ i \in I \ ,$$

il existe au moins un A_i *tel que* $J(A_i) = J(A)$ *(Cf. [6] Th. 9.3).*

COROLLAIRE.- *Si* J *du type inf. est définie sur une algèbre* $\mathcal{S}$, *alors* $\forall\ A \in \mathcal{S}$, *au moins une des deux informations* $J(A)$ *ou* $J(A^c)$ *est égale à* 0 *:*

$$\inf[J(A)\ ,\ J(A^c)] = J(\Omega) = 0 \qquad \textit{(Cf. [6] , cor. 9.3.).}$$

D'autre part, nous avons vu que, pour une information du type inf définie sur $\mathcal{S}$, on avait :

$$(\beta) \qquad J\Big[\bigcup_{i\in I} A_i\Big] = \inf_{i\in I}\{J(A_i)\}$$

pour toute famille $\{A_i\}_{i\in I}$ finie, d'éléments de $\mathcal{S}$.

On n'a, en général, pas l'égalité si la famille est infinie. On distingue alors :

DEFINITION 1.- *Une information* J *est du type inf-σ ou inf-c , selon que la propriété* (β) *est vérifiée pour toute famille dénombrable infinie ou pour toute famille infinie quelconque d'indices* I [6] .

EXEMPLE.-

Soit $\Omega \equiv \mathbb{R}$. Définissons J sur $P(\mathbb{R})$ par :

A fini ou dénombrable : $J(A) = 1$

A non dénombrable : $J(A) = 0$

J est une information du type inf-σ , mais non du type inf-c; (Cf. [6] , page213).

Dans l'étude qui suit, nous n'étudions, comme information du type infimum, que des informations du type inf-c , construites de la façon suivante :

THEOREME 3.- *Soit* $\phi(\omega)$ *une application de* Ω *dans* $\bar{\mathbb{R}}^+$ *, telle que* $\inf_{\omega\in\Omega} \phi(\omega) = 0$. *L'information définie sur* $P(\Omega)$ *par :*

$$J(A) = \inf_{\omega\in A} \phi(\omega)$$

est du type inf-c *(Cf [6] th. 9.6.)*

EXEMPLE.- ([6] , page 214). Soit $\Omega \equiv \mathbb{N}$ et soit x_n les rationnels de $\bar{\mathbb{R}}^+$ indexés d'une manière quelconque.

Prenons la fonction ϕ telle que :

$$\phi(n) = x_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

alors $J(A) = \inf_{n\in A} x_n$ est une information de type inf-c .

Pour terminer cette présentation, rappelons un résultat général important.

DEFINITION 2.- *Une loi de composition* $F(x,y)$ *, est dite universelle quand elle peut s'appliquer à tout espace mesurable* (Ω,S) .

DEFINITION 3.- *Soit* $\{A_i\}_{i\in I}$ *une famille d'algèbres ou de* σ*-algèbres. Les* A_i *sont dites* M*-indépendantes ou* M-σ*-indépendantes, si on a :*

$$\bigcap_{i\in I_n} A_i \neq \emptyset \quad , \quad A_i \in \mathcal{A}_i \quad \text{et} \quad A_i \neq \emptyset \quad , \quad \forall\, i \in I_n$$

Ceci, $\forall$ sous-famille I_n finie ou infinie dénombrable d'indices de I .

THEOREME 4.- *Les deux lois de composition :*

(1) $F(x,y) = -\,c\,\mathrm{Log}(e^{-x/c} + e^{-y/c})$

(2) $F(x,y) = \inf(x,y)$

sont les seules lois universelles pour lesquelles, étant donné une famille d'algèbres ou de σ*-algèbres* $\{A_i\}_{i\in I}$, M*-indépendantes ou* M-σ*-indépendantes, on peut choisir arbitrairement une information* J_i *sur chaque algèbre ou* σ*-algèbre* A_i *, de façon qu'il existe une et une seule information* J *, définie sur l'algèbre ou la* σ*-algèbre* S *engendrée par les* A_i *, possédant les deux propriétés :*

(a) J *prend les valeurs données sur chaque algèbre ou* σ*-algèbre :*

$$J(A_i) = J_i(A_i) \quad , \quad \forall\, A_i \in \mathcal{A}_i \qquad i \in I$$

(b) Les algèbres ou σ*-algèbres* A_i *sont* J*-indépendantes ou* J-σ*-indépendantes :*

$$J\Big[\bigcap_{i\in I_n} A_i\Big] = \sum_{i\in I_n} J(A_i) \qquad A_i \in \mathcal{A}_i \qquad \forall\, i \in I_n$$

Ceci pour toute sous-famille finie ou infinie dénombrable I_n , d'indices de I .

CHAPITRE II

SUR LES ENSEMBLES DE VALEURS D'UNE MESURE

II-A.- RAPPELS DE DEFINITIONS ET PROPRIETES

- THEORIE DE LA MESURE -

Soit X un ensemble quelconque.

II-A-1.- DEFINITION. *Une algèbre de Boole S définie sur X, est une classe de parties de X, $S \subseteq P(X)$, contenant $\emptyset$ et X et stable pour les opérations de complémentation, de réunion et d'intersection finies.*

II-A-2.- DEFINITION. *On dira que S est une σ-algèbre de parties de X, si :*

(a) S est une algèbre de Boole de parties de X.

(b) S est stable pour la réunion dénombrable.

REMARQUE.- Dans la définition ci-dessus, (a) et (b) entraînent que S est stable pour l'intersection dénombrable.

II-A-3.- DEFINITION. *Soit S une σ-algèbre de parties de X. On appelle mesure sur S, toute application μ de S dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, telle que :*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) $\forall$ suite $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux disjoints de S, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$$

C'est la propriété de σ-additivité.

REMARQUE.- Nous appellerons ensemble mesurable les éléments d'une σ-algèbre S quelconque, sur laquelle on peut définir une mesure.

NOTATION.- Rappelons les définitions des différents ensembles de valeurs d'une mesure, données dans l'introduction :

A toute mesure μ , on associe les ensembles :

$$\Gamma_1(\mu) = \{x : \exists\, A \in S \quad , \quad \mu(A) = x\}$$

et, pour $n \geq 2$:

$$\Gamma_n(\mu) = \{(x_1,\dots,x_n) : \exists\, (A_1,\dots,A_n) \in S^n \quad , \quad A_j \cap A_k = \emptyset \quad , \quad J(A_j) = x_j\}$$

D'autre part, de par la propriété d'additivité, toute mesure a comme opération de composition dans $\bar{\mathbb{R}}^+$:

$$F(x,y) = x + y$$

Construisons, à partir de F , la suite de fonctions :

$$F_1(x_1) = x_1$$

$$F_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1}) = F\left[F_n(x_1,\dots,x_n) \ , \ x_{n+1}\right]$$

On constate alors que :

$$F_n(x_1,\dots,x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad , \quad \forall\, n$$

et, si on note le support de F_n dans $\bar{\mathbb{R}}^{+n}$ par $\Gamma_n^*(F)$, on a :

$$\Gamma_n^*(F) \equiv \bar{\mathbb{R}}^{+n} \quad , \quad \forall\, n$$

d'où : $$\Gamma_n(\mu) \subseteq \Gamma_n^*(F) \quad , \quad \forall\, n$$

Dans la présente étude, nous nous interessons uniquement aux ensembles $\Gamma_1(\mu)$ et $\Gamma_2(\mu)$.

II-A-4.- <u>DEFINITION</u>. *Une mesure* μ *, définie sur une* σ*-algèbre* S *de parties de* X *est dite finie si on a :*

$$\mu(X) < +\infty$$

II-A-5.- <u>DEFINITION</u>. *Une mesure* μ *, définie sur une* σ*-algèbre* S *de parties de* X *est dite* σ*-finie, si* $\mu(X) = +\infty$ *, et si il existe une suite* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* S *, telle que :*

(a) $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$

(b) $\mu(E_n) < +\infty \quad , \forall\, n \in \mathbb{N}$

II-A-6.- <u>DEFINITION</u>. *Un élément* E *, d'une* σ*-algèbre* S *, de mesure positive, et un atome si* $\forall\, F \in S$ *tel que* $F \subset E$ *, on a :*

Soit $\mu(F) = 0$

Soit $\mu(E-F) = 0$.

II-A-7.- <u>DEFINITION</u>. *Deux ensembles* E *et* $F \in S$ *,* σ*- algèbre, sont égaux modulo la mesure* μ *, et on note* $E \equiv F[\mu]$ *, si et seulement si :*

$$\mu(E \,\Delta\, F) = 0$$

II-A-8.- <u>DEFINITION</u>. *Une mesure* μ *est dite non-atomique, si elle ne possède aucun atome.*

II-A-9.- <u>DEFINITION</u>. *Une mesure* μ *est dite purement atomique si,* $\{A_i\}_{i\in I}$ *étant l'ensemble de ses atomes, on a :*

$$X = \{\bigcup_{i\in I} A_i\} \cup K \quad \text{avec} \quad \mu(K) = 0$$

II-A-10.- <u>THEOREME</u>. *Si* μ *est une mesure* σ*-finie,* μ *possède au plus un nombre dénombrable d'atomes.*

<u>PREUVE</u>.- Montrons d'abord le théorème pour une mesure μ , finie Remarquons d'abord que si nous avons deux atomes A et B distincts, c'est-à-dire tels que :

$$A \not\equiv B \ [\mu]$$

alors : $\mu(A \cap B) = 0$, sinon il existerait $F = A \cap B$, $F \in \mathcal{S}$, $F \subset A$ tels que $\mu(F) \neq 0$ et A ne serait pas un atome.

D'autre part, puisque $\mu(X) < +\infty$, il existe au plus n atomes de mesure $\geq \frac{\mu(X)}{n}$, donc au plus une infinité dénombrable d'atomes distincts. (Cf. [9] compl. I-4-3).

Si on suppose maintenant que μ est σ-finie, il existe une suite $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles de $\mathcal{S}$ tels que :

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \quad \text{et} \quad \mu(E_n) < +\infty \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

On peut transformer cette suite en une suite $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'élements de $\mathcal{S}$ deux à deux disjoints en prenant :

$$F_n = E_n - \bigcap_{i=0}^{n} E_i \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

comme $F_n \subset E_n$, $\forall n$, on a toujours :

$$\mu(F_n) < +\infty \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

de plus : $$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

Considérons alors la restriction de μ à la trace sur F_n de la σ-algèbre $\mathcal{S}$. Cette restriction est une mesure finie qui possède dont au plus un nombre dénombrable d'atomes. Un atome de cette

restriction étant évidemment un atome de μ , le nombre total d'atomes de μ est donc égal à la somme des atomes des restrictions de μ à chaque ensemble F_n .

Or, une union dénombrable d'ensembles de cardinal dénombrable donne un ensemble dénombrable. μ possède donc au plus un nombre dénombrable d'atomes.

REMARQUE.- La condition : μ σ-finie, du théorème précédent est essentielle. Une mesure qui n'est pas σ-finie, peut avoir un nombre d'atomes d'une puissance quelconque. Par exemple :

Soit X un cardinal supérieur au dénombrable. Donnons comme mesure à un ensemble $E \subset X$, son nombre de points s'il est fini et $+\infty$ s'il est infini.

Nous avons alors défini sur $\mathcal{P}(X)$ une mesure non σ-finie, pour laquelle tout point de X est de mesure 1 et est donc un atome.

II-A-11.- LEMME. *Soient* μ *une mesure purement atomique finie, et* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *l'ensemble de ses atomes. Notons* $a_i = \mu(A_i)$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$. *Soit* $A \in \mathcal{S}$ *un ensemble quelconque :* $A = \bigcup_n A_{i_n}$ *et* $\mu(A_{i_n}) = a_{i_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. *Notons par* K *l'ensemble*

$$\{a_{i_1} , a_{i_2} , \dots a_{i_n} , \dots \}$$

Alors, il existe toujours $a_{i_k} \in K$ *tel que* $a_{i_k} = \operatorname{Sup}_n a_{i_n}$.

PREUVE.- Soit donc A quelconque $\in \mathcal{S}$. A peut s'écrire sous la forme :

$$A = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_n} \cup \dots$$

union finie ou infinie d'atomes de μ , avec :

$$\mu(A_{i_n}) = a_{i_n} \quad \text{et} \quad \mu(A) = \sum_n a_{i_n}$$

Si l'ensemble $K = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}, \dots\}$ possède un nombre fini d'éléments, la démonstration est évidente.

Supposons donc que K possède un nombre infini d'éléments; $\{a_{i_n}\}_{n\in N}$ est alors une sous-suite de $\{a_n\}_{n\in N}$ et μ étant une mesure finie ; on a :

$$\sum_n a_n < +\infty \quad , \quad \text{d'où} \quad : \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

La suite $\{a_n\}_{n\in N}$ n'a donc qu'un point d'accumulation, à savoir 0 .

Or, s'il existait $a = \operatorname{Sup}_i a_i$ tel que l'on ne puisse trouver un indice k vérifiant $a = a_k$, a serait un deuxième point d'accumulation de $\{a_n\}$, ce qui est impossible. Ce raisonnement étant valable pour $\{a_{i_n}\}_{n\in N}$ on démontre l'existence de :

$$a_{i_k} = \operatorname{Sup}_n a_{i_n} \quad .$$

- TOPOLOGIE ET ANALYSE -

Nous donnons ici principalement la démonstration d'un exercice de N. BOURBAKI sur les familles sommables de nombres réels, positifs ou nuls, qui nous sera très utile dans l'étude des mesures purement atomiques finies.

Mais auparavant, rappelons un résultat classique de topologie.

II-A-12.- PROPOSITION. (1) *Dans un espace compact, toute suite de*

points possède au moins une valeur d'ahérence.

(2) Si elle a une seule valeur d'adhérence, la suite converge vers elle. (Cf [2] prop. 11-5)

II-A-13.- LEMME. *Soit* $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite sommable dans* $\mathbb{R}$ *, de nombres* > 0 *, satisfaisant aux conditions :*

$$U_n \leqslant \sum_{U_k<U_n} U_k \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Alors, pour tout nombre a *tel que*

$$0 < a \leqslant s = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \quad ,$$

il existe une partie I *de* $\mathbb{N}$ *, telle que :*

$$a = \sum_{n\in I} U_n \qquad \textit{(Cf. [1] exerc. 4)}$$

PREUVE.- La condition $U_n \leqslant \sum_{U_k<U_n} U_k$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ est équivalente à :

$$\begin{cases} U_{n+1} \leqslant U_n \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \\ U_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

car $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite sommable de nombres réels > 0 , il suffit de les ordonner convenablement.

Soit donc $a \in \,]0,s[$. Nous supposons que $a \neq U_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, sinon la démonstration est évidente.

Considérons alors la sous-suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ construite de la façon suivante :

$v_0 = U_{n_0}$, U_{n_0} étant le plus grand élément de $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

tel que $U_{n_0} < a$.

$v_1 = U_{n_0+k_1}$, $U_{n_0+k_1}$ étant le plus grand élément de $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :

$$U_{n_0} + U_{n_0+k_1} \leqslant a .$$

On peut toujours trouver un tel élément dans la mesure où :

$$a - U_{k_0} > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} U_n = 0$$

De plus, si on a égalité, alors $I = \{n_0 , n_0 + k_1\}$ est tel que

$$\sum_{n\in I} U_n = a$$

et le problème est résolu.

Sinon, de proche en proche, on obtient v_n tel que :

$$v_n = U_{n_0+k_n} , \quad U_{n_0+k_n}$$

étant le plus grand élément de $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que

$$U_{n_0} + U_{n_0+k_1} + \dots + U_{n_0+k_n} \leqslant a$$

Et on peut toujours trouver $U_{n_0+k_n}$, car si on suppose qu'on a trouvé :

$$U_{n_0} , U_{n_0+k_1} , \dots , U_{n_0+k_{n-1}}$$

tels que :

$$U_{n_0} + U_{n_0+k_1} + \dots + U_{n_0+k_{n-1}} < a$$

alors on a :

$$a - U_{n_0} - U_{n_0+k_1} - \dots - U_{n_0+k_{n-1}} > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} U_n = 0$$

Si, au bout d'un rang, n_0+k_n fini, on obtient :

$$U_{n_0} + U_{n_0+k_1} + \dots + U_{n_0+k_n} = a \quad ,$$

le problème est résolu avec :

$$I = \{n_0 \ , \ n_0+k_1 \ , \ \dots \ , \ n_0+k_n\} \subset N$$

Sinon, on obtient une sous-suite $\{v_n\}_{n\in N}$ de $\{U_n\}_{n\in N}$ qui tend, elle aussi, vers 0 quand n tend vers l'infini.

De plus, on a par construction :

$$v_0 \leq \sum_{k>n_0} U_k = R_{k_0} \qquad \text{en prenant} \quad k_0 = 0$$

$$v_1 \leq \sum_{k>u_0+k_1} U_k = R_{k_1}$$

$$\vdots \quad \dots\dots\dots\dots$$

$$v_n \leq \sum_{k>n_0+k_n} U_k = R_{k_n}$$

La suite $\{R_{k_n}\}_{n\in N}$ étant uns sous-suite de la suite des restes $\{R_n\}_{n\in N}$ de la série $\sum_{n\in N} U_n$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} R_{k_n} = 0$$

Notons alors $S_0 = v_0$

$$S_1 = v_0 + v_1$$

$$\vdots$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$\{v_n\}_{n\in N}$ étant une sous-suite de $\{U_n\}_{n\in N}$, on a :

$$S_n \uparrow \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n < \sum_{n=0}^{\infty} U_n < +\infty$$

Considérons alors la suite définie par :

$K_n = a - S_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, alors :

$K_n \downarrow$ et par construction de $\{v_n\}_{n\in N}$, on a :

$K_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

De plus, on a :

$$K_n < R_{k_n} \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

en effet :

$$K_n = a - S_n = a - U_{n_0} - U_{n_0+k_1} - \dots - U_{n_0+k_{n-1}} - U_{n_0+k_n}$$

et : $$K_n < U_{n_0+k_n-1} - U_{n_0+k_n}$$

car : $$U_{n_0} + U_{n_0+k_1} + \dots + U_{n_0+k_{n-1}} + U_{n_0+k_n-1} > a$$

de par le choix de l'élément $U_{n_0+k_n}$, d'où :

$$K_n < \sum_{k>n_0+k_n-1} U_k - U_{n_0+k_n} = \sum_{k>U_0+k_n} U_k = R_{k_n}$$

La suite $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée terme à terme par la suite $\{R_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l' ∞ .

On a donc :

$$\lim_{n\to\infty} K_n = 0$$

ce qui entraîne que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a$$

On a donc trouvé :

$$I = \{n_0 , n_0+k_1 , \dots , n_0+k_n , \dots\} \subset \mathbb{N}$$

tel que :

$$\sum_{n\in I} U_n = U_{n_0} + \sum_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} U_{n_0+k_n} = a \quad .$$

II-B.- PROPRIETES DE $\Gamma_1(\mu)$ ET DE $\Gamma_2(\mu)$.

Soient X un ensemble quelconque, $\mathcal{S}$ une σ-algèbre de parties de X et μ une mesure, fonction d'ensembles définie sur $\mathcal{S}$. Nous nous proposons, dans ce paragraphe, d'établir quelques propriétés des ensembles :

$$\Gamma_1(\mu) = \{x : \exists\, A \in \mathcal{S} \ , \ \mu(A) = x\}$$

$$\Gamma_2(\mu) = \{(x,y) : \exists\, A,B \in \mathcal{S} \ , \ A\cap B = \emptyset \ , \ \mu(A) = x \ , \ \mu(B) = y\}.$$

- CAS D'UNE MESURE FINIE QUELCONQUE -

Soit μ une mesure finie. Notons par Y la réunion de tous les atomes de X et par Z l'ensemble $X-Y$, ou partie non-atomique de X.

II-B-1.- LEMME. *Tout ensemble mesurable $E \subset Z$, de mesure positive, contient des sous-ensembles mesurables de mesure possitive arbitrairement petite.* *(Cf. [3] Lem. 1).*

PREUVE.- E n'étant pas un atome, $\exists\, F \in S$, $F \subset E$ tel que

$$0 < \mu(F) < \mu(E)$$

Notons par E_1 celui des deux ensembles F ou $E-F$ dont la mesure n'est pas plus grande que :

$$\mu(E)/_2$$

On peut construire, de même, un ensemble $E_2 \subset E_1$ tel que :

$$0 < \mu(E_2) \leqslant \mu(E_1)/_2 \leqslant \mu(E)/_4$$

aussi $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n(\varepsilon)$ tel que :

$$0 < \mu(E_n) \leqslant \mu(E)/_n \leqslant \varepsilon$$

E_n se construisant comme indiqué ci-dessus, par récurrence.

II-B-2.- LEMME. *L'ensemble des valeurs de μ sur les sous-ensembles mesurables de Z est l'intervalle fermé :*

$$0 \leqslant x \leqslant \mu(Z) \qquad \text{(Cf. [3], Lem. 2)}$$

PREUVE.- Si $\mu(Z)$ est nul, il n'y a rien à prouver. Supposons donc que $\mu(Z) > 0$, et soit α tel que :

$$0 < \alpha < \mu(Z)$$

Le lemme précédent entraîne alors que $\exists\, E_1 \subset Z$ mesurable, tel que :

$$0 < \mu(E_1) \leqslant \alpha$$

S'il y a égalité, la démonstration est terminée, sinon, on applique à novueau le lemme pour trouver un ensemble mesurable $E_2 \subset Z-E_1$ et tel que :

$$0 < \mu(E_2) \leqslant \alpha - \mu(E_1)$$

De la sorte, ou bien on obtiendra un E_n tel que :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \alpha \quad \text{avec} \quad n \quad \text{fini,}$$

ou bien, on aura une suite dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux disjoints, tels que :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \alpha.$$

II-B-3.- LEMME. *L'ensemble des valeurs de* μ *sur les sous-ensembles mesurables de* Y *est fermé.* *(Cf.* [3] *Lem. 3)*

PREUVE.- Soient $y_1, y_2, \ldots$ les atomes de Y, qui sont en nombre au plus dénombrable (II-A-10).

Soit Γ l'ensemble de toutes les suites :

$$\gamma = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\} \quad \text{où} \quad \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1.$$

Dans la topologie usuelle des espaces produit cartésien, Γ est un

espace topologique compact et chacune des fonctions : $\varepsilon_i(\gamma) = \varepsilon_i$ est une fonction continue.

Considérons alors la fonction $\phi(\gamma)$ définie par les séries :

$$\phi(\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i(\gamma)\ \mu(y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} U_i(\gamma)$$

Pour que ϕ soit continue, il suffit que la série $\sum_{i=1}^{\infty} U_i(\gamma)$ soit uniformément convergente sur Γ , et que chacune des fonctions U_i soit continue sur Γ .

Or, $U_i(\gamma) = \varepsilon_i(\gamma)\ \mu(y_i)$ est continue sur Γ , $\forall$ i car $\varepsilon_i(\gamma)$ l'est, et, de plus, on a :

$$0 \leqslant \varepsilon_i\ \mu(y_i) = U_i(\gamma) \leqslant \mu(y_i) \quad , \quad \forall\ i \quad \text{et} \quad \forall\ \gamma \in \Gamma$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(y_i) = \mu(Y) < +\infty$$

Ceci entraîne donc, d'après le critère de WEIERSTRASS, que la série $\sum_{i=1}^{\infty} U_i(\gamma)$ est uniformément convergente sur Γ .

On en déduit que $\phi(\gamma)$ est continue sur Γ . Or, l'image continue d'un espace compact est compact et par là-même fermé, puisque dans R .

Comme l'image $\{\phi(\Gamma)\}$ est exactement l'ensemble de toutes les valeurs de μ sur les sous-ensembles mesurables de Y , le lemme est démontré.

II-B-4.- <u>THEOREME</u>. *Pour toute mesure* μ *finie ;* $\Gamma_1(\mu)$ *est fermé. (Cf.* [3] *Th. 1).*

PREUVE.- $X = Y \cup Z$ avec $Y \cap Z = \emptyset$, donc, d'après II-B-2 , on a :

$$\Gamma_1(\mu) = [0,\mu(Z)] \cup \{x : \exists\, A \in \mathcal{S} \,,\, A \subset Y \,,\, \mu(A) = x\}$$

et de II-B-3 , on déduit que $\Gamma_1(\mu)$ est fermé comme union de deux fermés.

II-B-5.- THEOREME. *Si* μ *est une mesure finie, non-atomique, alors :*

$$\Gamma_2(\mu) \equiv \{(x,y) : x \geq 0 \,,\, y \geq 0 \,,\, x+y \leq \mu(X)\}$$

PREUVE.- Soit donc $x \in [0,\mu(X)]$ et posons $\bar{\mu} = \mu(X)$. Il existe toujours $A \in \mathcal{S}$ tel que $\mu(A) = x$ d'après II-B-2.

Si alors (x,y) est tel que $x+y \leq \bar{\mu}$, montrons qu'il existe $B \in \mathcal{S}$ tel que :

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{et} \quad \mu(B) = y$$

En effet, on a :

$$A \cup A^c = X$$

d'où :

$$\mu(A^c) = \bar{\mu} - x$$

Considérons alors la mesure restriction de μ à la trace sur A^c de $\mathcal{S}$. Alors toujours d'après II-B-2 ,

$$\forall\, y \leq \bar{\mu} - x \,,\; \exists\, B \subset A^c \,,\; B \in \mathcal{S}$$

tel que : $\mu(B) = y$.

- CAS D'UNE MESURE PUREMENT ATOMIQUE FINIE -

Nous avons vu, au Lemme II-B-2 , que si une mesure μ finie, est non-atomique, alors $\Gamma_1(\mu) \equiv [0,\mu(X)]$. Autrement dit, qu'elle est surjective comme fonction d'ensembles à valeurs dans $[0,\mu(X)]$.

Dans le cas d'une mesure purement atomique finie, nous avons pu, à partir d'un exercice de N. BOURBAKI, (II-A-13), établir un résultat de caractère général.

Soit μ une mesure purement atomique finie. Soient $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ses atomes en nombre au plus dénombrable, (II-A-10).

Notons $a_i = \mu(A_i)$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$.

II-B-6.- THEOREME. *Une mesure* μ *, purement atomique finie, est telle que* $\Gamma_1(\mu) \equiv [0,\mu(X)]$ *, si et seulement si :*

$$a_i \leqslant \sum_{a_k<a_i} a_k \quad , \quad \forall\, i \in \mathbb{N} .$$

PREUVE.- Montrons d'abord la condition nécessaire. Pour cela, raisonnons par l'absurde ; supposons donc que :

$$\exists\, p \quad \text{entier tel que} \quad a_p > \sum_{a_k<a_p} a_k$$

Notons :

$$a'_p = \sum_{a_k<a_p} a_k$$

Alors, si on prend $x \in]a'_p , a_p[$, on ne peut pas trouver $A \in \mathcal{S}$ tel que $\mu(A) = x$; en effet :

Soit $A \in \mathcal{S}$ quelconque, on peut écrire

$$A = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_n} \cup \dots$$

union finie ou infinie dénombrable d'atomes de μ , avec :

$$\mu(A_{i_n}) = a_{i_n} \quad \text{et} \quad \mu(A) = \sum_n a_{i_n}$$

Si $\mathbb{K} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}, \dots\}$, nous savons, d'après le lemme II-A-11, qu'il existe un entier k tel que :

$$a_{i_k} = \operatorname{Sup}_n a_{i_n} \quad \text{avec} \quad a_{i_k} \in \mathbb{K}$$

alors, si $a_{i_k} \geqslant a_p$, on a :

$$\mu(A) \geqslant a_{i_k} \geqslant a_p > x$$

Sinon, on a $a_{i_k} < a_p$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ , \quad a_{i_n} < a_p$$

donc :

$$\mu(A) = \sum_n a_{i_n} \leqslant \sum_{a_k < a_p} a_k = a'_p < x$$

d'où la condition nécessaire.

Réciproquement, supposons que $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $a_i \leqslant \sum_{a_k < a_i} a_k$, alors, μ étant finie, la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable, et, d'après le lemme II-A-13, nous savons que : $\forall\, a$ tel que :

$$0 < a \leqslant s = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \mu(X)$$

on peut trouver $I \subset \mathbb{N}$ tel que $a = \sum_{n \in I} a_n$.

Donc, $\forall\, a \in [0, \mu(X)]$, il existe $A = \bigcup_{n \in I} A_n$ tel que :

$$\mu(A) = a \ .$$

- CAS D'UNE MESURE σ-FINIE -

Nous supposerons maintenant, que la mesure μ définie sur la σ-algèbre $\mathcal{S}$ de parties de X, est σ-finie.

II-B-7.- LEMME. *Si* μ *est une mesure* σ*-finie, non atomique, alors* $\forall E_0 \in \mathcal{S}$, *tel que* $\mu(E_0) \neq 0$, *on a* :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists E \in \mathcal{S}$$

tel que :

$$E \subset E_0 \quad \text{et} \quad 0 < \mu(E) < \varepsilon$$

(Cf. [4] *§41,(1))*

PREUVE.- Supposons, tout d'abord que E_0 est de mesure finie. Alors, d'après II-B-1, appliqué à la restriction de μ à la trace sur E_0 de $\mathcal{S}$, qui est une mesure finie, la propriété est démontrée.

Soit donc E_0 de mesure σ-finie. Alors, il existe une suite $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles de $\mathcal{S}$, telle que :

$$\mu(E_n) < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \quad E_0$$

à partir des E_n, on peut construire la suite $\{E'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$E'_n = E_n \cap E_0 \quad \text{d'où} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E'_n \equiv E_0$$

avec toujours :

$$\mu(E'_n) < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On construit ensuite la suite d'ensembles disjoints deux à deux $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$F_1 = E'_1$$
$$F_2 = E'_2 - E'_1$$
$$F_3 = E'_3 - E'_2 \cup E'_1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Les ensembles F_n vérifient encore :

$$\mu(F_n) < +\infty \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \equiv E_0$$

Soit alors un $\varepsilon > 0$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n)$ étant divergente, $\exists\, n_0$ tel que :

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) > \varepsilon$$

Considérons l'ensemble :

$$F_0 = \bigcup_{i=1}^{n_0} F_i$$

on a : $\mu(F_0) < +\infty$ et, d'après II-B-1 , il existe un ensemble mesurable $F \subset F_0$ tel que :

$$0 < \mu(F) < \varepsilon$$

or $F \subset E_0$, ce qui termine la démonstration.

II-B-8.- <u>LEMME</u>. *Si* μ *est une mesure* σ*-finie, non atomique, et si* $E_0 \in S$ *, on a :*

$$\forall\, \alpha \in \bar{\mathbb{R}}^+ \quad , \quad \alpha \leqslant (E_0) \quad , \quad \exists\, E \in S$$

tel que $E \subset E_0$ et $\mu(E) = \alpha$

(Cf. [4] *§ 41 (2)).*

PREUVE.- Si $\alpha = +\infty$ alors $\alpha = \mu(E_0) = +\infty$. On prend alors $E_1 = E_0 - \{$un nombre fini de points de $E_0\}$ et on obtient :

$$\mu(E_1) = +\infty = \alpha \quad \text{et} \quad E_1 \subset E_0$$

Si $\alpha < +\infty$, alors on applique le lemme II-B-7 pour construire une suite dénombrable d'ensembles de $\mathcal{S}$ deux à deux disjoints, et tels que :

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \alpha \quad \text{avec} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset E_0$$

exactement comme pour la démonstration de II-B-2.

II-B-9.- THEOREME. *Si* μ *est une mesure* σ*-finie, non-atomique, on a :*

$$\Gamma_1(\mu) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+$$

PREUVE.- Elle se déduit immédiatement du lemme précédent.

II-B-10.- THEOREME. *Si* μ *est une mesure* σ*-finie, non atomique, on a :*

$$\Gamma_2(\mu) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$$

PREUVE.- Si $x = y < +\infty$ le résultat découle de II-B-9 et II-B-8. Si $x = y = +\infty$, μ étant σ-finie, non atomique, on peut toujours trouver $A,B \in \mathcal{S}$ disjoints, tels que :

$$\mu(A) = \mu(B) = +\infty$$

Si $x < +\infty$ et $y = +\infty$ alors, d'après II-B-9 , on peut trouver $A \in \mathcal{S}$ tel que $\mu(A) = x$ et il reste

$$\mu(A^c) = +\infty = y .$$

Si, enfin, x et $y < +\infty$ et $x \neq y$, on peut trouver $A \in \mathcal{S}$ tel que $\mu(A) = x$, et, d'après II-B-8 :

Comme $\mu(A^c) = +\infty$, $\forall\, y < +\infty$, $\exists\, B \subset A^c$, $B \in \mathcal{S}$, tel que :

$$\mu(B) = y \ .$$

II-B-11.- <u>THEOREME</u>. *Si μ est une mesure σ-finie, purement atomique, $\Gamma_1(\mu)$ est la limite d'une suite dénombrable croissante de fermés.*

<u>PREUVE</u>.- X étant de mesure σ-finie, il existe une suite d'ensembles de $\mathcal{S}$, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, telle que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \equiv X \quad \text{et} \quad \mu(E_n) < +\infty \ , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Soit $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$F_0 = E_0 \ , \quad F_1 = E_0 \cup E_1 \ ; \quad \ldots \ ; \quad F_n = E_0 \cup \ldots \cup E_n \ ;$$

$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dénombrable croissante d'ensembles de $\mathcal{S}$ et on a :

$$\mu(F_n) < +\infty \ , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Soit μ_n la restriction de μ à la trace sur F_n de la σ-algèbre $\mathcal{S}$. D'après II-B-3, $\Gamma_1(\mu_n)$ est fermé et ceci $\forall\, n \in \mathbb{N}$. D'autre part :

$$\Gamma_1(\mu_n) \subseteq \Gamma_2(\mu_{n+1})$$

et $\{\Gamma_1(\mu_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fermés.

Or :

$$\Gamma_1(\mu) = \lim_{n\to\infty} \Gamma_1(\mu_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_1(\mu_n)$$

REMARQUE.- D'après le théorème ci-dessus, on ne peut rien dire, en général, de l'ensemble $\Gamma_1(\mu)$, pour une mesure μ σ-finie, purement atomique. En particulier, $\Gamma_1(\mu)$ n'est pas toujours fermé; en voici un exemple :

Soit la mesure μ , σ-finie, purement atomique, définie sur une σ-algèbre $\mathcal{S}$, par :

$$\mu(A_i) = a_i \quad , \quad \forall\, i \in \mathbb{N} \ .$$

$\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ étant les atomes de μ , vérifiant :

(1) La suite $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

(2) $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = a$, avec $0 < a < +\infty$

Alors , $a \in \overline{\Gamma_1(\mu)}$, cependant, on ne peut trouver un ensemble $A \in \mathcal{S}$, tel que :

$$\mu(A) = a$$

II-C.- MESURE INJECTIVE

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est dite injective lorsque :

$\forall\, x,y \in E$ tels que $x \neq y$ on a $f(x) \neq f(y)$.

Par analogie, nous dirons d'une mesure μ , définie sur

une σ-algèbre $\mathcal{S}$ de parties de X, qu'elle est injective quand :

II-C-1.- <u>DEFINITION</u>. *Une mesure* μ *est injective lorsque* $\forall\, A,B \in \mathcal{S}$ *tels que* $A \not\equiv B[\mu]$, *on a* $\mu(A) \neq \mu(B)$.

Cette définition est équivalente à :

II-C-2.- <u>DEFINITION</u>. *Une mesure* μ *est injective lorsque* $\forall\, A,B \in \mathcal{S}$ *tels que* $A \cap B = \emptyset$ *et* $\mu(A \cup B) \neq 0$, *on a* $\mu(A) \neq \mu(B)$.

En effet, supposons qu'une mesure μ soit injective, selon la définition II-C-1. . Montrons qu'elle est injective selon II-C-2.

Soient $A,B \in \mathcal{S}$ tels que $A \cap B = \emptyset$ et $\mu(A \cup B) \neq 0$.

Montrons que $\mu(A) \neq \mu(B)$. On a :

$$\mu(A \,\Delta\, B) = \mu(A \cup B) \neq 0 \quad \text{d'où} \quad A \not\equiv B[\mu]$$

et on a donc : $\mu(A) \neq \mu(B)$.

Supposons, réciproquement, que μ soit injective selon II-C-2.

Soient alors $A,B \in \mathcal{S}$ tels que $A \not\equiv B[\mu]$

Montrons que $\mu(A) \neq \mu(B)$. On a :

$$\mu(A \,\Delta\, B) = \mu\big[(A-B) \cup (B-A)\big] \neq 0$$

Or $(A-B) \cap (B-A) = \emptyset$

Donc, d'après II-C-2. :

$$\mu(A-B) \neq \mu(B-A)$$

Or :

$$A = (A-B) \cup (A \cap B) \quad \text{et} \quad B = (B-A) \cup (A \cap B)$$

d'où :

$$\mu(A) = \mu(A-B) + \mu(A \cap B) \quad \text{et} \quad \mu(B) = \mu(B-A) + \mu(A \cap B)$$

On en déduit alors que :

$$\mu(A) \neq \mu(B) \ .$$

- MESURE NON ATOMIQUE -

II-C-3.- THEOREME. *Toute mesure* μ *, non-atomique, finie ou* σ*-finie, est non injective.*

PREUVE.- Soit donc une mesure μ non-atomique. Notons $\mu(X) = \bar{\mu}$.

(a) $\bar{\mu} < +\infty$. Soit un ensemble $A \in \mathcal{S}$ tel que :

$$\mu(A) < \bar{\mu}/_2$$

posons $\mu(A) = \alpha$; alors on a :

$$0 \leq \alpha < \bar{\mu}/_2 < \mu(A^c)$$

et II-B-8 entraîne qu'il existe $B \subset A^c$, $B \in \mathcal{S}$ tel que :

$$\mu(B) = \alpha$$

(b) $\bar{\mu} = +\infty$, μ est σ-finie.

Alors si on prend un ensemble $A \in \mathcal{S}$ tel que :

$$\alpha = \mu(A) < +\infty$$

II-B-8 entraîne encore l'existence de $B \subset A^c$, $B \in \mathcal{S}$ tel que :

$$\mu(B) = \alpha .$$

- MESURE PUREMENT ATOMIQUE -

Soit μ une mesure purement atomique. Elle possède au plus, (II-A-10) , un nombre dénombrable d'atomes si elle est finie ou σ-finie.

Notons $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les atomes de μ ; on a :

$$A_n \in \mathcal{S} \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\} \cup K = X \quad \text{avec} \quad \mu(K) = 0$$

D'autre part, μ fait correspondre à chaque atome une masse positive, que nous noterons :

$$\mu(A_i) = a_i \quad , \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Ceci entraîne que $\forall A \in \mathcal{S}$, on a :

$$\mu(A) = \sum_{A_i \subset A} a_i$$

Nous supposerons, dans l'étude présente, que les a_i sont tous distincts, sinon la mesure μ serait a priori non-injective.

II-C-4.- THEOREME. *Pour qu'une mesure purement atomique* μ , *soit injective, il faut que :* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

PREUVE.- Supposons, pour raisonner par l'absurde, que la suite $\{a_n\}_{n\in N}$ ne tende pas vers 0 . On a alors deux possibilités :

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, a fini ou infini.

Dans ce cas, on peut extraire de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux sous-suites $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\{a_{n_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ n'ayant pas tous leurs termes identiques et tendant vers la même limite a que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

On obtient alors A et B tels que :

$$\mu(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{n_k} = +\infty \quad \text{pour} \quad A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n_k}$$

$$\mu(B) = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} a_{n_\ell} = +\infty \quad \text{pour} \quad B = \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} A_{n_\ell}$$

avec $A \not\equiv B[\mu]$

(b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Alors, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de points de $\bar{\mathbb{R}}^+$, espace compact, possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes, sinon (II-A-12) , si elle n'en n'avait qu'une, elle convergerait vers cette unique valeur d'adhérence.

D'autre part, l'une de ces deux valeurs d'adhérence différentes est forcément distincte de 0 , et on peut alors extraire de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge vers elle; on est alors ramené en (a) .

II-C-5.- THEOREME. *Pour que* μ *, purement atomique finie, soit injective, il suffit que l'on ait :*

$$a_i > \sum_{a_k<a_i} a_k \quad , \quad \forall\, i \in \mathbb{N} \ .$$

<u>PREUVE</u>.- Soient donc deux ensembles $A,B \in \mathcal{S}$ vérifiant $A \cap B = \emptyset$ et $\mu(A \cup B) \neq 0$

On peut écrire :

$$A = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_n} \cup \dots$$

$$B = A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \dots \cup A_{j_m} \cup \dots$$

Unions finies ou infinies d'atomes de μ , avec :

$$\mu(A_{i_n}) = a_{i_n} \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{i_n}$$

$$\mu(A_{j_m}) = a_{j_m} \quad , \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mu(B) = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{j_m}$$

de plus :

$$i_n \neq J_m \quad , \quad \forall\, (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad \text{car} \quad A \cap B = \emptyset \quad .$$

Notons :

$$K_A = \{a_{i_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad K_B = \{a_{j_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$$

D'après le lemme II-A-11, on a :

$$\exists\, a_{i_k} \in K_A \quad \text{et} \quad a_{j_\ell} \in K_B$$

tels que : $a_{i_k} = \operatorname{Sup}_n a_{i_n}$ et $a_{j_\ell} = \operatorname{Sup}_m a_{j_m}$

On a alors deux possibilités pour A et B :

(a) $a_{i_k} < a_{j_\ell}$ d'où :

$$\mu(B) = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{j_m} \geq a_{j_\ell} > \sum_{a_t < a_{j_\ell}} a_t \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{i_n} = \mu(A)$$

d'où : $\mu(B) > \mu(A)$

(b) $a_{i_k} > a_{j_\ell}$ d'où :

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{i_n} \geq a_{i_k} > \sum_{a_t<a_{i_k}} a_t \geq \sum_{m\in\mathbb{N}} a_{j_m} = \mu(B)$$

d'où :

$$\mu(A) > \mu(B) .$$

II-C-6.- <u>COROLLAIRE</u>. *Supposons que* μ *, purement atomique finie, soit telle que* $a_i > a_{i+1}$, $\forall\ i \in \mathbb{N}$. *Alors, pour que* μ *soit injective, il suffit que :*

$$a_i > \sum_{k>i} a_k \quad , \quad \forall\ i \in \mathbb{N}$$

<u>EXEMPLE</u>.- Si on considère la mesure μ vérifiant

$$a_i = \frac{1}{3^i} \quad , \quad \forall\ i \in \mathbb{N}$$

on a bien : $$\frac{1}{3^i} > \sum_{k=i+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$$

et cette mesure est injective.

II-C-7.- <u>THEOREME</u>. *Soit* μ *, purement atomique finie. Alors les deux propositions suivantes sont incompatibles :*

(α) $\Gamma_1(\mu) \equiv [0,\mu(X)]$

(β) μ *est injective.*

<u>PREUVE</u>.- Il suffit de montrer que :

(α) $\Longrightarrow$ non (β)

Nous savons, d'après II-B-6 que :

$$(\alpha) \Longleftrightarrow a_i \leqslant \sum_{a_k<a_i} a_k \quad , \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

Alors $\forall\, i \in N$, $\exists\, A \in \mathcal{S}$ tel que $A_i \cap A = \emptyset$ et tel que :

$$\mu(A_i) = a_i = \mu(A)$$

En effet, soit $I = \{\ell \in \mathbb{N} : a_\ell \geqslant a_i\}$.

Si on considère la mesure μ' , restriction de μ à la trace de $\mathcal{S}$ sur $Y = X - \bigcup_{\ell \in I} A_\ell$, alors μ' vérifie :

$$A_j \leqslant \sum_{a_k<a_j} a_k \quad , \quad \forall\, j \in \mathbb{N}-I$$

Or, d'après II-B-6 , μ' est telle que :

$$\Gamma_1(\mu') \equiv \left[0, \mu'(Y) = \sum_{a_k<a_i} a_k\right]$$

Or $a_i \in [0, \mu'(Y)]$ donc $\exists\, A \in \mathcal{S}$, tel que :

$$\mu'(A) = a_i = \mu(A)$$

avec : $A_i \cap A = \emptyset$

II-C-8.- <u>LEMME</u>. *Soit* μ , *purement atomique finie vérifiant*

$$a_i > \sum_{a_k<a_i} a_k \quad , \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

Notons $a'_i = \sum_{a_k<a_i} a_k$. *On a alors :*

$$]a'_i \, , \, a_i[\cap \Gamma_1(\mu) = \emptyset$$

<u>PREUVE</u>.- Soit donc $x \in]a'_i \, , \, a_i[$ pour i quelconque. Soit A quelconque $\in \mathcal{S}$, on peut écrire :

$$A = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_n} \cup \dots$$

union finie ou infinie d'atomes de μ .

D'après II-A-11, $\exists\, a_{i_k}$ tel que :

$$a_{i_k} = \operatorname{Sup}_n a_{i_n}$$

Alors on a deux cas possibles :

(a) $a_{i_k} < a_i$, d'où :

$$\mu(A) \leq \sum_{a_\ell \leq a_{i_k}} a_\ell \leq a'_i < x$$

c'est-à-dire

$$\mu(A) < x$$

(b) $a_{i_k} \geq a_i$ et : $\mu(A) > x$

Donc $\exists\, A \in S$ tel que $\mu(A) = x$

d'où $x \notin \Gamma_1(\mu)$.

<u>REMARQUES</u>.-

(1). La condition du théorème II-C-4 :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

est nécessaire mais non suffisante.

Si on considère, en effet, la mesure μ telle que :

$$a_i = \frac{1}{2^i} \quad , \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

on a bien $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, or, on peut trouver deux ensembles disjoints, ayant même mesure non nulle. En effet, l'atome A_1 est tel que $\mu(A_1) = \frac{1}{2}$ et on trouve :

$$B = \bigcup_{i=2}^{\infty} A_i \quad \text{tel que} \quad A_1 \cap B = \emptyset$$

et tel que :

$$\mu(B) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}$$

(2). La condition du théorème II-C-5 :

$$a_i > \sum_{a_k < a_i} a_k \quad , \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

est suffisante, mais non nécessaire.

En effet, considérons la mesure μ suivante :

$$a_1 = \frac{20}{153} \quad \text{et} \quad a_i = \frac{1}{3^i} \quad \text{pour} \quad i \geqslant 2$$

μ est telle que :

$$a_i > a_{i+1} \quad , \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

et :

$$a_1 < \sum_{i=2}^{\infty} a_i = \frac{1}{6}$$

$$a_i > \sum_{k>i} a_k \quad \text{pour} \quad i \geqslant 2$$

Donc la condition $a_i > \sum_{a_k < a_i} a_k$ n'est pas vérifiée $\forall\, i \in \mathbb{N}$.

Nous allons cependant montrer que μ est une mesure injective. Il suffit pour cela de prouver que pour un couple quelconque d'ensembles de $\mathcal{S}$, disjoints, A et B , tels que $\mu(A \cup B) \neq 0$, on a $\mu(A) \neq \mu(B)$.

Envisageons donc les différents cas possibles :

(a) A et B ne contiennent pas l'atome A_1 .

Soit alors $Y = X - A_1$. Si on considère la restriction μ' de μ à la trace sur Y de $\mathcal{S}$, μ' vérifie la condition :

$$a_i > \sum_{k>i} a_k \quad , \quad \forall\, i = 2,3,\ldots$$

et μ' est donc injective, d'après II-C-6 , donc :

$$\mu(A) \neq \mu(B) \ .$$

(b) L'un des deux ensembles A et B contient A_1 .

Par exemple $A = A_1 \cup A'$ avec :

$$A' = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_n} \cup \ldots$$

Peut-on alors avoir $\mu(A) = \mu(B)$?

On remarque, tout d'abord, que l'ensemble B doit contenie l'atome A_2 , sinon on a :

$$\mu(B) \leq \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{18} < \frac{20}{153} \leq \mu(A)$$

On peut donc écrire :

$$B = A_2 \cup B' \quad \text{avec} \quad B' = A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \ldots \cup A_{j_m} \cup \ldots$$

avec : i_n et $J_m \geq 3$, $\forall\, n$ et $\forall\, m \in \mathbb{N}$.

De plus, comme $A \cap B = \emptyset$, on doit avoir :

$$i_n \neq J_m \quad , \quad \forall\, (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ .$$

on a alors les inégalités suivantes :

$$\mu(B) \leqslant \frac{1}{6} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{3^i} \Longleftrightarrow \mu(B') \leqslant \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

Donc, on ne peut avoir $\mu(A) > \frac{1}{6}$, car alors :

$$\mu(B) \leqslant \frac{1}{6} < \mu(A)$$

On en déduit que :

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A') \leqslant \frac{1}{6}$$

ce qui équivaut à :

$$\mu(A') \leqslant \frac{1}{6} - \frac{20}{153} = \frac{11}{306} < \frac{1}{27}$$

D'autre part, on doit avoir :

$$\mu(B) \geqslant \frac{20}{153}$$

sinon :

$$\mu(B) < \frac{20}{153} \leqslant \mu(A) ,$$

donc : $$\mu(B) = \mu(B') + \frac{1}{9} \geqslant \frac{20}{153}$$

ce qui équivaut à :

$$\mu(B') \geqslant \frac{20}{153} - \frac{1}{9} = \frac{1}{51}$$

Considérons alors l'intervalle :

$$\left] \frac{1}{54} , \frac{1}{27} \right[\quad , \quad \text{on a} \quad a_3 = \frac{1}{27} \quad \text{et} \quad a'_3 = \frac{1}{54}$$

et, d'après le lemme II-C-8 , appliqué à la mesure μ' , restriction de μ à la trace de $\mathcal{S}$ sur $Y = X - A_1$, il n'existe pas $A \in \mathcal{S}$, tel que :

$$\mu(A) = x \quad , \quad \forall\, x \in \left] a'_3 , a_3 \right[$$

Ceci entraîne alors que :

$$\mu(B') \geqslant \frac{1}{51} \quad \text{d'où} \quad \mu(B') \geqslant \frac{1}{27}$$

$$\mu(A') < \frac{1}{27} \quad \text{d'où} \quad \mu(A') \leqslant \frac{1}{54}$$

ce qui donne

$$\mu(B) = \mu(B') + \frac{1}{9} \geqslant \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{4}{27}$$

$$\mu(A) = \mu(A') + \frac{1}{51} \leqslant \frac{1}{51} + \frac{1}{54} = \frac{35}{306}$$

or : $\frac{4}{27} > \frac{35}{306}$ d'où $\mu(B) > \mu(A)$ et on ne peut avoir :

$$\mu(A) = \mu(B) \quad .$$

C H A P I T R E III

SUR LES ENSEMBLES DE VALEURS D' UNE INFORMATION

III-A.- INFORMATION ET ATOME.

Soient Ω un ensemble quelconque, $\mathcal{S}$ une σ-algèbre de parties de Ω et J une mesure d'information définie sur $\mathcal{S}$.

Nous nous proposons, dans le présent paragraphe, d'étudier les notions d'atomes, de J-équivalence et d'ensembles J-négligeables, déduites de celles, classiques, de la théorie de la mesure.

Nous introduisons la notion d'atome dans un sens plus large que J. KAMPE DE FERIET et P. BENVENUTI, [7], qui ont eu besoin d'une définition plus restrictive pour les informations du type inf.

III-A-1.- DEFINITION. *Pour une information* J *quelconque,* $E \in \mathcal{S}$ *est un atome au sens large (s.l.), si :*

(a) $J(E) < +\infty$

(b) $\forall F \subset E$, $F \in \mathcal{S}$, *on a, soit* $J(F) = +\infty$, *soit* $J(E-F) = +\infty$

III-A-2.- PROPOSITION. *Pour une information* J *composable, la relation :* $A \mathcal{R} B$, $A,B \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow J(A \Delta B) = +\infty$ *est une relation d'équivalence.*

PREUVE.- (1) $\mathcal{R}$ est réflexive car $J(A \Delta A) = +\infty$

(2) $\mathcal{R}$ est symétrique car $A \Delta B = B \Delta A$, d'où

$$J(A \Delta B) = +\infty \Longleftrightarrow J(B \Delta A) = +\infty$$

(3) $\mathcal{R}$ est transitive car :

$$A \mathcal{R} B \Longrightarrow J(A-B) = J(B-A) = +\infty$$

$$B \mathcal{R} C \Longrightarrow J(B-C) = J(C-B) = +\infty$$

Or, nous avons :

$$C-A = [C \cap (B-A)] \cup [C - (A \cup B)]$$

$$A-C = [A \cap (B-C)] \cup [A - (B \cup C)]$$

de plus :

$$[C \cap (B-A)] \cap [C - (A \cup B)] = \emptyset$$

$$[A \cap (B-C)] \cap [A - (B \cup C)] = \emptyset$$

Par ailleurs, la monotonicité de J entraîne que :

$$C \cap (B-A) \subset (B-A) \Longrightarrow J[C \cap (B-A)] \geq J(B-A) = +\infty$$

$$[C - (A \cup B)] \subset (C-B) \Longrightarrow J[C - (A \cup B)] \geq J(C-B) = +\infty$$

et de même :

$$A \cap (B-C) \subset (B-C) \Longrightarrow J[A \cap (B-C)] \geq J(B-C) = +\infty$$

$$[A - (B \cup C)] \subset (A-B) \Longrightarrow J[A - (B \cup C)] \geq J(A-B) = +\infty$$

On en déduit alors que :

$$J(C-A) = J(A-C) = +\infty$$

donc que $$J(A \Delta C) = +\infty .$$

Ce résultat nous permet d'introduire, pour les informations composables, la notion de J-équivalence.

III-A-3.- <u>DEFINITION</u>. *A et $B \in S$ sont J-équivalents, si :*

$$J(A \Delta B) = +\infty$$

Cette définition est équivalente à :

$$J(A-B) = J(B-A) = +\infty$$

Nous noterons cette relation par $A \equiv B[J]$

III-A-4.- <u>THEOREME</u>. *Si* $A, B \in S$ *vérifient* $A \equiv B[J]$, *alors tout* $C \in S$ *tel que* $A \cap B \subset C \subset A \cup B$ *est* J-*équivalent à* A *et* B , *et on a :*

$$J(A \cap B) = J(C) = J(A) = J(B) = J(A \cup B)$$

<u>PREUVE</u>.- La condition $A \cap B \subset C \subset A \cup B$ entraîne :

$$(A-C) \subset (A-B) \quad \text{et} \quad (C-A) \subset (B-A)$$

d'où : $J(A-C) = J(C-A) = +\infty$

ce qui implique que :

$A \equiv C[J]$ et par transitivité :

$B \equiv C[J]$

D'autre part :

$$J(A) = J[(A-B) \cup (A \cap B)] = J(A-B) \top J(A \cap B)$$

$$" \quad = J(A \cap B)$$

De même :

$$J(B) = J[(B-A) \cup (A \cap B)] = J(B-A) \top J(A \cap B)$$

$$" \quad = J(A \cap B)$$

De plus :

$$J(A \cup B) = J\left[(A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)\right]$$
$$" \quad = J(A-B) \top J(A \cap B) \top J(B-A)$$
$$" \quad = J(A \cap B)$$

Enfin, pour terminer, on remarque que la condition :

$$A \cap B \subset C \subset A \cup B$$

entraîne que : $J(A \cap B) \geqslant J(C) \geqslant J(A \cup B)$
d'où :

$$J(A \cap B) = J(C) = J(A) = J(B) = J(A \cup B)$$

III-A-5.- <u>DEFINITION</u>. (N. PINTACUDA [10]). $A \in \mathcal{S}$ *est* J*-négligeable si :* $J(A) = +\infty$

Si J est composable, cette définition est équivalente à :

$$A \equiv \emptyset[J]$$

N. PINTACUDA a montré, [10] , qu'on peut compléter d'une manière unique la σ- algèbre $\mathcal{S}$, en lui adjoignant toutes les parties de Ω contenues dans un ensemble J-négligeable. Nous supposerons donc, dans la suite de notre exposé, que les σ-algèbres $\mathcal{S}$ que nous utiliserons, sont complètes par rapport à J .

III-A-6.- <u>THEOREME</u>. *Soient* $A, C \in \mathcal{S}$, $J(A) < +\infty$, $J(C) = +\infty$
Alors :
Si $C \not\subset A$ *on a* $A \cup C \equiv A[J]$
Si $C \subset A$ *on a* $A-C \equiv A[J]$

<u>PREUVE</u>.- Supposons d'abord que $C \not\subset A$
On a alors :

$$A \Delta (A \cup C) = [A - (A \cup C)] \cup [(A \cup C) - A] = C-A$$

d'où :

$$J[A \Delta (A \cup C)] = J(C-A) \geqslant J(C) = +\infty$$

et on a :

$$A \cup C \equiv A[J]$$

D'autre part, si $C \subset A$, alors :

$$A \Delta (A-C) = [A - (A-C)] \cup [(A-C) - A] = C$$

d'où :

$$J[A \Delta (A-C)] = J(C) = +\infty$$

donc :

$$A-C \equiv A[J] \ .$$

III-A-7.- PROPOSITION. *La réunion d'un nombre fini d'ensembles J-négligeables, est J-négligeable.*

PREUVE.- Il suffit de faire la démonstration pour la réunion de deux ensembles $A,B \in \mathcal{S}$, J-négligeables.

On peut choisir A et B disjoints, car on a :

$$A \cup B = A \cup (B-A) \quad \text{avec} \quad J(B-A) \geqslant J(B) = +\infty$$

on a alors :

$$J(A \cup B) = J(A) \top J(B)$$

or :

$$J(A) = J(B) = +\infty \ , \quad \text{d'où} \quad J(A \cup B) = +\infty \ .$$

III-A-8.- PROPOSITION. *Les ensembles J-négligeables sont deux à deux J-équivalents.*

PREUVE.- Soient $A,B \in \mathcal{S}$ deux ensembles J-négligeables.
On a :

$$A \Delta B = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)$$

et

$$J(A \Delta B) = J(A-B) \top J(A \cap B) \top J(B-A)$$

or :

$$J(A) = J(B) = +\infty$$

On en déduit : $J(A \Delta B) = +\infty$.

Nous pouvons alors établir quelques propriétés des atomes s.l.

III-A-9.- <u>PROPOSITION</u>. *Si* $E \in \mathcal{S}$ *est un atome s.l. , alors* $\forall F \in \mathcal{S}$, $F \subset E$, *on a, soit* $J(E) = J(F)$, *soit* $J(E) = J(E-F)$.

<u>PREUVE</u>.- En effet, $F \subset E \Longrightarrow E = (E-F) \cup F$, d'où

$$J(E) = J(E-F) \top J(F) ,$$

or, E étant un atome s.l. , on a :

Soit $J(F) = +\infty$ d'où $J(E) = J(E-F)$

Soit $J(E-F) = +\infty$ d'où $J(E) = J(F)$.

<u>REMARQUE</u>.- La réciproque de la proposition ci-dessus est fausse car :

$$J(E) = J(E-F) \not\Longrightarrow J(F) = +\infty$$

De même : $J(E) = J(F) \not\Longrightarrow J(E-F) = +\infty$

III-A-10.- <u>PROPOSITION</u>. *Si* $A,B \in \mathcal{S}$ *sont deux atomes s.l. , on a :*

Soit $J(A \cap B) = +\infty$,

Soit $J(A \Delta B) = +\infty$.

PREUVE.- On a en effet, d'après III-A-9 :

$$A \cap B \subset A \Longrightarrow \begin{cases} \text{Soit } J(A \cap B) = +\infty \\ \text{Soit } J(A-B) = +\infty \end{cases}$$

$$A \cap B \subset B \Longrightarrow \begin{cases} \text{Soit } J(A \cap B) = +\infty \\ \text{Soit } J(B-A) = +\infty \end{cases}$$

ce qui donne, en résumé :

$$\text{Soit } J(A \cap B) = +\infty \quad , \quad \text{soit } J(A \Delta B) = +\infty \, .$$

III-A-11.- PROPOSITION. *Tout* $E \in \mathcal{S}$, *J-équivalent à un atome s.l. est un atome s.l.*

PREUVE.- Soient A un atome s.l. et $E \in \mathcal{S}$ tel que :

$$E \equiv A[J]$$

On remarque, tout d'abord, que $J(E) < +\infty$

Soit alors $F \in \mathcal{S}$, $F \subset E$, on a :

$$E = (E-A) \cup (E \cap A)$$

d'où :

$$F = [(E-A) \cap F] \cup [E \cap A \cap F]$$

Or :

$$J[(E-A) \cap F] \geq J(E-A) = +\infty \quad , \quad \text{car} \quad E \equiv A[J]$$

d'où : $$J(F) = J(E \cap A \cap F)$$

D'autre part :

$$E-F = \{[(E-A) \cap (E-F)] \cup [(E \cap A) \cap (E-F)]\}$$

or : $$J[(E-A) \cap (E-F)] \geqslant J(E-A) = +\infty$$

d'où : $$J(E-F) = J[E \cap A \cap (E-F)]$$

Notons : $$B = E \cap A \cap F$$

et $$C = E \cap A \cap (E-F)$$

On constate alors que :

$$B \cap C = \emptyset \quad \text{et} \quad B \cup C = E \cap A$$

d'où : $$A-B = (A-E) \cup C$$

et $$A-C = (A-C) \cup B$$

or, B et C étant de plus inclus dans un atome s.l., on a :

$$\begin{cases} \text{Soit} \quad J(B) = +\infty \\ \text{Soit} \quad J(A-B) = J[(A-E) \cup C] = J(A-E) \top J(C) \\ \qquad\quad '' \quad = J(C) = +\infty \end{cases}$$

ou bien encore :

$$\begin{cases} \text{Soit} \quad J(C) = +\infty \\ \text{Soit} \quad J(A-C) = J[(A-E) \cup B] = J(A-E) \top J(B) \\ \qquad\quad '' \quad = J(B) = +\infty \end{cases}$$

Or : $$J(B) = J(F) \quad \text{et} \quad J(C) = J(E-F)$$

III-A-12.- <u>COROLLAIRE</u>. *Si* A *est un atome s.l., et* $C \in S$ *tel que*

$J(C) = +\infty$, *alors :*

Si $C \not\subset A$ *on a :* $A \cup C$ *est un atome s.l.*
Si $C \subset A$ *on a :* $A - C$ *est un atome s.l.*

III-A-13.- DEFINITION. *Une information quelconque* J *est dite non-atomique, si elle ne possède aucun atome.*

III-A-14.- DEFINITION. *Une information quelconque* J *est dite purement atomique si,* $\{A_i\}_{i\in I}$ *étant l'ensemble de ses atomes, on a :*

$$\Omega = \{\bigcup_{i\in I} A_i\} \cup K \quad \text{avec} \quad J(K) = +\infty$$

III-B.- PROPRIETES DES ENSEMBLES DE VALEURS DES INFORMATIONS DU TYPE M OU M' .

Soit un ensemble quelconque Ω , muni d'une σ-algèbre $\mathcal{S}$ sur laquelle est définie une mesure d'information J , du type M ou du type M' .

Nous supposons donc qu'il existe une mesure μ , définie sur $\mathcal{S}$, telle que $\forall A \in \mathcal{S}$:

$$J(A) = \Theta[\mu(A)] \quad \text{pour le type M}$$

$$J(A) = \varphi[\mu(A)] \quad \text{pour le type M'}$$

φ et Θ étant définies comme au chapitre II .

III-B-1.- THEOREME. J *étant du type* M *ou* M' , $A \in \mathcal{S}$ *est* J*-négligeable, si et seulement si* A *est* μ*-négligeable.*

PREUVE.- Supposons que $A \in \mathcal{S}$ est J-négligeable, alors

$J(A) = +\infty$ et $\Theta^{-1}[J(A)] = \mu(A) = 0$ et A est μ-négligeable.

Réciproquement, si $\mu(A) = 0$, on a :

$$J(A) = \Theta(0) = +\infty$$

III-B-2.- <u>COROLLAIRE</u>. *Soit* J *du type* M *ou* M' *, définie sur une* σ*-algèbre* $\mathcal{S}$ *.* $\mathcal{S}$ *est complète par rapport à* J *si et seulement si elle est complète par rapport à* μ *.*

III-B-3.- <u>COROLLAIRE</u>. *Pour* J *du type* M *ou* M' *, toute union dénombrable d'ensembles* J*-négligeables est* J*-négligeable.*

III-B-4.- <u>THEOREME</u>. *Pour* J *du type* M *ou* M'*,* $A \in \mathcal{S}$ *est un atome s.l., si et seulement si* A *est un* μ*-atome.*

<u>PREUVE</u>.- Soit $A \in \mathcal{S}$, un atome s.l. : alors $\forall B \in \mathcal{S}$ tel que $B \subset A$, on a :

Soit B est J-négligeable, soit $A-B$ est J-négligeable et, d'après II-B-1., c'est équivalent à :

Soit B est μ-négligeable, soit $A-B$ est μ-négligeable.

D'autre part : $J(A) < +\infty \Longleftrightarrow \mu(A) > 0$

III-B-5.- <u>COROLLAIRE</u>. *Toute information* J *du type* M *ou* M' *définie à partir d'une mesure* μ *, finie ou* σ*-finie, possède au plus un nombre dénombrable d'atomes s.l.*

Nous pouvons alors transposer au cas d'une information du type M ou M' , les résultats obtenus pour une mesure.

.../...

- PROPRIETES DE $\Gamma_1(J)$ -

III-B-6.- THEOREME. *Pour* J *du type* M , *on a* $\Gamma_1(J) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+$, *si et seulement si la mesure* μ *vérifie :* $\Gamma_1(\mu) \equiv [0,\bar{\mu}]$.

PREUVE.- Supposons d'abord que $\Gamma_1(J) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+$ et montrons que $\Gamma_1(\mu) \equiv [0,\bar{\mu}]$.

Raisonnons par l'absurde : soit $x \in [0,\bar{\mu}]$ tel que $\nexists A \in S$ avec $\mu(A) = x$.

Alors, on a $y = \Theta(x) \notin \Gamma_1(J)$ car Θ est injective et on n'aurait donc pas $\Gamma_1(J) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+$.

Réciproquement, si $\Gamma_1(\mu) \equiv [0,\bar{\mu}]$, Θ étant une fonction surjective, on a :

$$\Gamma_1(J) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+ .$$

III-B-7.- THEOREME. *Pour* J *du type* M', *on a* $\Gamma_1(J) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+$, *si et seulement si la mesure* μ *vérifie* $\Gamma_1(\mu) \supset [0,\bar{\mu}[$

PREUVE.- La démonstration est exactement la même que pour le théorème précédent. On remarque simplement que μ peut ne pas prendre la valeur $\bar{\mu}$, sans pour cela empêcher que $\Gamma_1(J) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+$.

III-B-8.- COROLLAIRE. *Si* J *est du type* M *ou* M' , *non-atomique, définie à partir de* μ , *finie ou* σ*-finie pour le type* M , σ*-finie pour le type* M' , *on a* $\Gamma_1(J) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+$.

PREUVE.- Elle résulte directement des résultats de II-B-2 et II-B-9 sur les valeurs prises par une mesure et des théorèmes III-B-4, III-B-6 et III-B-7 sur les informations.

Dans le cas d'une information purement atomique J, notons $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ les atomes s.l., et posons :

$$J(A_i) = x_i \quad , \quad \Theta^{-1}(x_i) = a_i = \mu(A_i) \quad , \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

III-B-9.- COROLLAIRE. *Si* J *est du type* M, *purement atomique, telle que* $\Theta^{-1}(0) < +\infty$, *on a* $\Gamma_1(J) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+$, *si et seulement si :*

$$\Theta^{-1}(x_i) \leq \sum_{x_k > x_i} \Theta^{-1}(x_k) \quad , \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

PREUVE.- Elle se déduit des théorèmes II-B-6 et III-B-6. Il faut simplement remarquer que la condition $\Theta^{-1}(0) < +\infty$, impose à l'information purement atomique J, d'être définie à partir d'une mesure finie.

III-B-10.- THEOREME. *Pour toute information* J *du type* M, *telle que* $\Theta^{-1}(0) < +\infty$, $\Gamma_1(J)$ *est un ensemble fermé.*

PREUVE.- $\Theta^{-1}(0) < +\infty$ impose à J d'être définie à partir d'une mesure finie. De plus, Θ étant une bijection continue, est bicontinue. Le résultat se déduit alors directement de II-B-4.

- PROPRIETES DE $\Gamma_2(J)$ -

III-B-11.- THEOREME. *Si* J *est du type* M, *non-atomique, telle que* $\Theta^{-1}(0) < +\infty$, *on a :*

$$\Gamma_2(J) \equiv \Gamma_2^*(F) \subset \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+ \quad .$$

PREUVE.- Nous savons déjà, d'après le chapitre I, que

$$\Gamma_2(J) \subseteq \Gamma_2^*(F)$$

montrons la réciproque.

Soit $(x,y) \in \Gamma_2^*(F)$, on a donc :

$$\theta^{-1}(x) + \theta^{-1}(y) \leq \theta^{-1}(0) = \bar{\mu}$$

Or, d'après II-B-5 , une telle propriété entraîne qu'on peut toujours trouver A et B $\in \mathcal{S}$, disjoints tels que :

$$\mu(A) = \theta^{-1}(x) \quad \text{et} \quad \mu(B) = \theta^{-1}(y)$$

d'où :

$$x = J(A) \quad \text{et} \quad y = J(B)$$

et :

$$(x,y) \in \Gamma_2(J) .$$

D'autre part, on remarque aisément, d'après la définition de $\Gamma_2^*(F)$ que :

$$\Gamma_2^*(F) \subset \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+ .$$

III-B-12.- <u>THEOREME</u>. *Si* J *est du type* M *ou* M' , *non-atomique définie à partir d'une mesure* μ σ*-finie, on a :*

$$\Gamma_2(J) \equiv \Gamma_2^*(F) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+ \qquad \textit{pour le type } M$$

$$\Gamma_2^*(F) \subset \Gamma_2(J) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+ \qquad \textit{pour le type } M'$$

<u>PREUVE</u>.- Supposons d'abord que J est du type M .

Soit alors $(x,y) \in \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$, on a :

$$\left[\theta^{-1}(x) , \theta^{-1}(y)\right] \in \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$$

Or, d'après II-B-10, $\exists$ toujours A et B $\in \mathcal{S}$, disjoints, tels que :

$$\mu(A) = \theta^{-1}(x) \quad \text{et} \quad \mu(B) = \theta^{-1}(y)$$

d'où :

$$J(A) = x \quad \text{et} \quad J(B) = y$$

et :

$$(x,y) \in \Gamma_2(J)$$

Ceci étant vrai $\forall\ (x,y) \in \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$, on a :

$$\Gamma_2(J) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+ \quad .$$

On sait, d'autre part, qu'on a toujours, pour le type M :

$$\Gamma_2(J) \subseteq \Gamma_2^*(F) \subseteq \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$$

d'où le résultat.

Supposons maintenant que J est du type M' . Nous avons vu, au chapitre I, qu'on ne pouvait ordonner par inclusion, de façon unique, les ensembles $\Gamma_2(J)$ et $\Gamma_2^*(F)$. Ici, on a :

$$\Gamma_2^*(F) = \{(x,y) : \theta^{-1}(x) + \theta^{-1}(y) \leqslant \bar{\mu} < +\infty\}$$

donc :

$$\Gamma_2^*(F) \subset \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$$

Il ne reste donc à montrer que :

$$\Gamma_2(J) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$$

Soit $(x,y) \in \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$, alors :

$$\left[\theta^{-1}(x)\ ,\ \theta^{-1}(y)\right] \in \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$$

et, d'après II-B-10, on trouve toujours A et B $\in \mathcal{S}$, disjoints tels que :

$$\mu(A) = \Theta^{-1}(x) \quad \text{et} \quad \mu(B) = \Theta^{-1}(y)$$

d'où : $J(A) = x$ et $J(B) = y$

ce qui entraîne que $\forall\ (x,y) \in \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$, on a $(x,y) \in \Gamma_2(J)$.

<u>REMARQUE</u>.- Dans le cas d'une information du type M , on constate que l'ensemble $\Gamma_2(J)$ n'est autre que le transformé, point par point, de l'ensemble $\Gamma_2(\mu)$, en prenant pour transformé d'un point (x',y') de $\Gamma_2(\mu)$; le point $[\Theta(x') , \Theta(y')]$; c'est-à-dire :

$$\Gamma_2(J) = \{(x,y) : x = \Theta(x') , y = \Theta(y') , (x',y') \in \Gamma_2(\mu)\}$$

En effet, si on prend $(x,y) \in \Gamma_2(J)$ cela veut dire qu'il existe A et $B \in \mathcal{S}$, $A \cap B = \emptyset$ tels que :

$$J(A) = x \quad \text{et} \quad J(B) = y$$

Mais, alors, si on pose :

$$\Theta^{-1}(x) = \mu(A) = x'$$

et :

$$\Theta^{-1}(y) = \mu(B) = y'$$

on a :

$$(x',y') \in \Gamma_2(\mu)$$

donc, à un (x,y) quelconque de $\Gamma_2(J)$ correspond un (x',y') de $\Gamma_2(\mu)$.

On vérifie la réciproque tout aussi simplement.

Précisons par un exemple.

Soit l'information de WIENER-SHANNON :

$$J(A) = C \operatorname{Log} \frac{1}{P(A)}$$

Nous prendrons ici comme unité d'information :

$$C = 1/_{\operatorname{Log} 2}$$

Etudions l'ensemble :

$$\Gamma_2^*(F) = \{(x,y) : e^{-x/c} + e^{-y/c} \leqslant 1\}$$

sa frontière : $e^{-x/c} + e^{-y/c} = 1$ s'écrit :

$$y = -\frac{1}{\operatorname{Log} 2} \times \operatorname{Log} \left[1 - (\tfrac{1}{2})^x\right]$$

on a alors :

$$\lim_{x \to 0} y = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} y = 0$$

De plus :

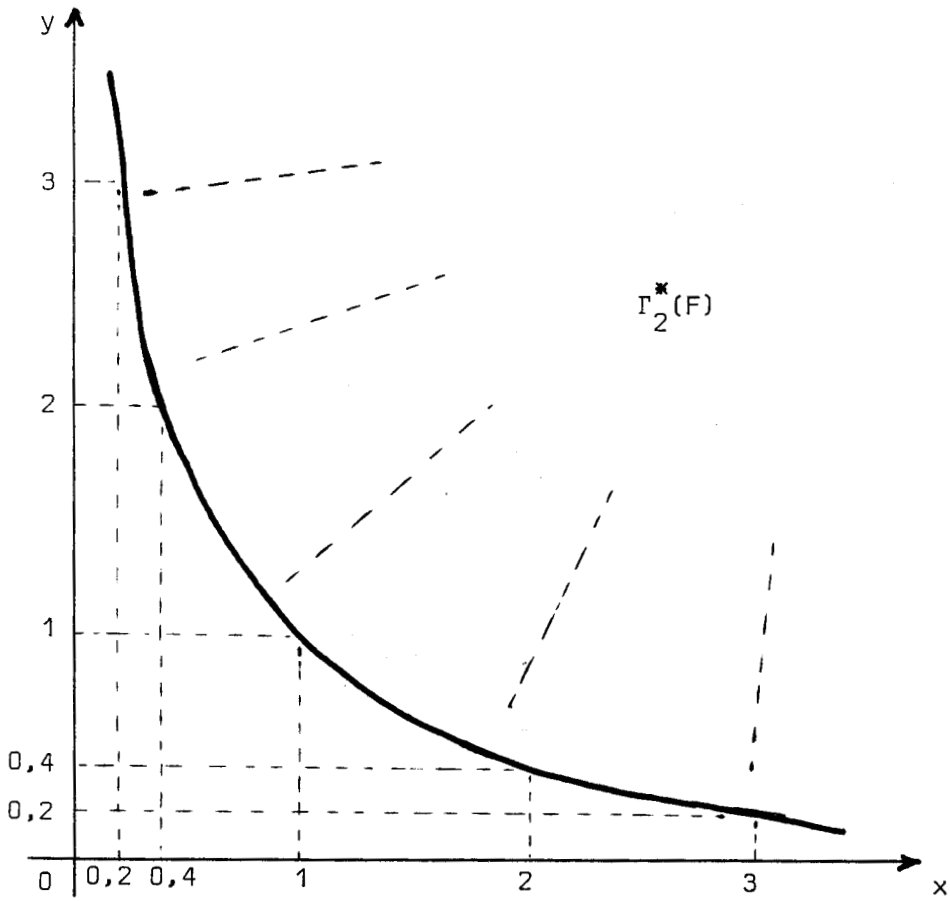
$$y' = -\frac{(\frac{1}{2})^x}{1 - (\frac{1}{2})^x} \quad \text{est toujours} \quad < 0$$

et ne s'annule que l'orsque x tend vers $+\infty$. La fonction y est donc strictement décroissante. Elle est d'autre part symétrique par rapport à la première bissectrice.

Si on calcule les valeurs de y pour x entier, on a la formule :

$$y = n - \frac{\operatorname{Log}(2^n - 1)}{\operatorname{Log} 2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

ce qui nous permet alors de tracer le graphe de la frontière de $\Gamma_2^*(F)$:



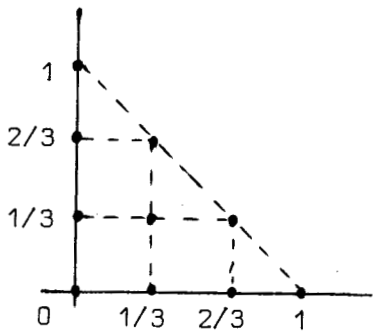
Si on prend alors pour P la probabilité P_1 définie par

$$\Omega \equiv A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

et :

$$P_1(A_i) = \frac{1}{3} \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

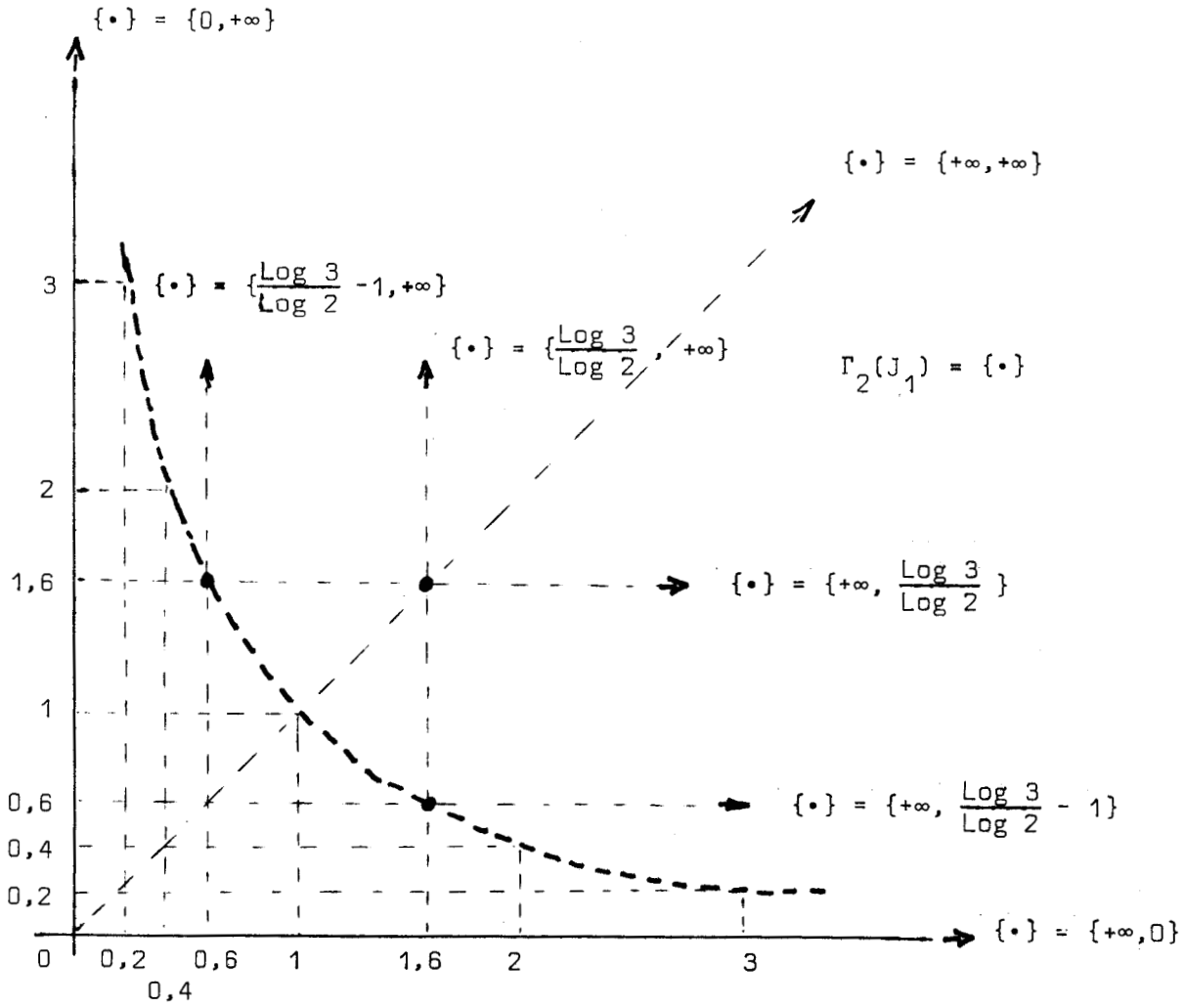
On a, pour $\Gamma_2(P_1)$:



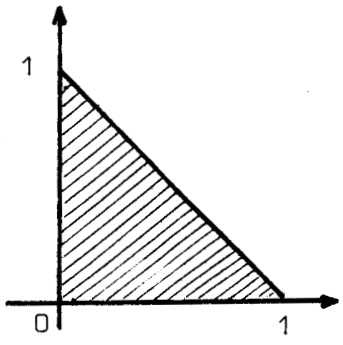
$\Gamma_1(P_1) = \{\bullet\}$

BUS LILLE

En transformant ces points par Θ , on obtient l'ensemble $\Gamma_2(J_1)$. Tous les points de $\Gamma_2(P_1)$ ayant une coordonnée nulle se transforment en des points à l'infini. Il ne reste que trois points finis, dont deux sur la frontière de $\Gamma_2(J_1)$.



Si, par contre, on prend pour probabilité P_2 , la mesure de LEBESGUE sur $[0,1]$, on a pour $\Gamma_2(P_2)$:



et l'ensemble $\Gamma_2(J_2)$ est alors confondu avec $\Gamma_2^*(F)$.

- INFORMATION INJECTIVE -

III-B-13.- DEFINITION. *Une information* J *quelconque, est injective lorsque* $\forall$ A,B $\in \mathcal{S}$ *tels que* $A \not\equiv B[J]$, *on a :*

$$J(A) \neq J(B)$$

III-B-14.- LEMME. *Soient* A,B $\in \mathcal{S}$ *et* J *du type* M *ou* M' . *Alors on a* $A \not\equiv B[J]$ *si et seulement si* $A \not\equiv B[\mu]$.

PREUVE.- Supposons que $A \not\equiv B[\mu]$
Ceci est équivalent à $\mu(A \Delta B) = 0$ qui est équivalent à
$J(A \Delta B) \neq +\infty$ c'est-à-dire à $A \not\equiv B[J]$

III-B-15.- THEOREME. *Une information* J *du type* M *est injective si et seulement si* μ *est injective.*

PREUVE.- En effet, J injective entraîne que :

$\forall$ A,B $\in \mathcal{S}$ tels que $A \not\equiv B[J]$ on a $J(A) \neq J(B)$

or, d'après le lemme ci-dessus :

$$A \not\equiv B[J] \Longleftrightarrow A \not\equiv B[\mu]$$

De plus :

$$J(A) \neq J(B) \Longrightarrow \Theta^{-1}[J(A)] \neq \Theta^{-1}[J(B)]$$

d'où finalement :

$\forall$ A,B $\in \mathcal{S}$ tels que $A \not\equiv B[\mu]$ on a $\mu(A) \neq \mu(B)$

La réciproque se vérifie tout aussi aisément.

III-B-16.- COROLLAIRE. *Toute information* J *du type* M *, non-atomique, définie à partir d'une mesure* μ *, finie ou* σ*-finie, est non-injective.*

PREUVE.- Elle se déduit directement du théorème II-C-6 sur les mesures injectives et du théorème ci-dessus.

III-B-7.- COROLLAIRE. *Une information* J *du type* M *, purement atomique, telle que* $\Theta^{-1}(0) < +\infty$ *, est injective si :*

$$\Theta^{-1}(x_i) > \sum_{x_k > x_i} \Theta^{-1}(x_k) \quad , \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

PREUVE.- C'est une conséquence directe de II-C-5 et III-B-15.

III-B-18.- COROLLAIRE. *Si* J *est une information du type* M *, purement atomique, telle que* $\Theta^{-1}(0) < +\infty$ *, les deux propositions suivantes sont incompatibles :*

(1) $\Gamma_1(J) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+$

(2) J est injective.

PREUVE.- Conséquence directe de II-C-7 , III-B-6 et III-B-15.

III-B-19.- THEOREME. *Toute information* J *du type* M' *, définie à partir d'une mesure* μ *,* σ*-finie, est non injective.*

PREUVE.- Pour le type M' , on a : $0 < \bar{\mu} < \mu(\Omega) = +\infty$ et tous les ensembles de mesure $\geq \bar{\mu}$ sont d'information nulle. Or, on peut toujours en trouver deux disjoints.

3-C.- QUELQUES RESULTATS SUR L'INFORMATION DU TYPE INF.

Soient Ω un ensemble quelconque, $\mathcal{S}$ une σ-algèbre de parties de Ω et J une information de type inf., définie sur $\mathcal{S}$.

- LE TYPE INF-c -

Soit une information J de type inf-c , définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, à l'aide d'une fonction génératrice ϕ .

Soit donc $\phi : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}^+$, telle que :

$$\inf_{\omega \in \Omega} \phi(\omega) = 0$$

et considérons l'information de type inf-c , définie par :

$$J(A) = \inf_{\omega \in A} \phi(\omega) \quad , \quad \forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega)$$

L'ensemble $\Gamma_1(J)$ des valeurs prises par J , peut vérifier des caractèristiques très diverses.

Considérons, par exemple, les fonctions suivantes :

A un élément quelconque $a_i \in \bar{\mathbb{R}}^+$ tel que $a_i \neq 0$, associons la fonction ϕ_i à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ et définie sur Ω par :

$\forall\, \omega \in \Omega$ on a :

Soit $\phi_i(\omega) = a_i$, soit $\phi_i(\omega) = 0$, avec au moins un $\omega \in \Omega$ tel que $\phi_i(\omega) = 0$

Ces fonctions vérifient toujours :

$$\inf_{\omega \in \Omega} \phi_i(\omega) = 0$$

On peut alors construire, à partir d'elles, des informations J_i , telles que :

$$J_i(A) = \inf_{\omega \in A} \phi_i(\omega) \quad , \quad \forall A \in P(\Omega)$$

et on a alors :

$$J_i(A) = 0 \quad \text{si} \quad \exists\, \omega \in A \quad \text{tel que} \quad \phi_i(\omega) = 0$$

ou

$$J_i(A) = a_i \quad \text{si} \quad \forall\, \omega \in A \quad \text{on a} \quad \phi_i(\omega) = a_i$$

On a alors, quelque soit l'information J_i :

$$\Gamma_1(J_i) \equiv \{0, a_i, +\infty\} \quad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad a_i \neq 0$$

Par exemple, si on prend $\Omega \equiv N$ et si l'on définit :

$$\phi_i : N \to \bar{\mathbb{R}}^+$$

telle que :

$$\phi_i(j) = a_i\, \delta_i^j \quad , \quad \forall\, J \in \mathbb{N}$$

on obtient une information J_i qui prend la valeur a_i sur l'ensemble réduit à l'élément $\{i\}$ de $\mathbb{N}$ et qui est nulle sur tout autre ensemble $A \subset \mathbb{N}$.

Considérons maintenant un ensemble d'indices, fini, I . Soit $\{a_i\}_{i \in I}$ un ensemble fini de nombres réels positifs distincts :

$$0 < a_i < +\infty \quad , \quad \forall\, i \in I \quad \text{et} \quad a_i \neq a_j \quad \text{si} \quad i \neq j$$

Nous pouvons, à chaque a_i associer une fonction ϕ_i .

Notons A_i les ensembles :

$$A_i = \{\omega \in \Omega \mid \phi_i(\omega) = a_i\} \quad , \quad \forall\, i \in I$$

Soit alors la fonction Φ_I définie par :

$$\Phi_I : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}^+$$

$$\Phi_I(\omega) = \sum_{i \in I} \phi_i(\omega) \quad , \quad \forall\, \omega \in \Omega$$

Si nous supposons que $\bigcup_{i \in I} A_i \subset \Omega$, l'inclusion étant stricte, alors on a :

$$\inf_{\omega \in \Omega} \Phi_I(\omega) = 0$$

et on peut définir une information J_I telle que :

$$J_I(A) = \inf_{\omega \in A} \Phi_I(\omega) \quad , \quad \forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega)$$

Si nous supposons, de plus, que les A_i sont disjoints deux à deux, alors on a :

$$\Gamma_1(J_I) \equiv \{0, \{a_i\}_{i \in I}, +\infty\}$$

Sinon, on peut trouver des éléments de Ω appartenant à plusieurs ensembles A_i et on a :

$$\text{Si} \quad I_\omega = \{i \in I : \omega \in A_i\}$$

$$\Phi_I(\omega) = \sum_{i \in I_\omega} a_i$$

ce qui enrichit l'ensemble des valeurs de J_I d'un nombre fini d'éléments supplémentaires.

Si nous examinons, maintenant, le cas où I est un ensemble d'indices, infini dénombrable, on peut obtenir, à l'aide de fonctions

du type Φ_I , des informations J_I ayant un ensemble de valeur infini dénombrable. Par exemple :

Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels; deux à deux distincts, convergeant en décroissant vers une limite $a \in \mathbb{R}^+$, vérifiant $a_0 < +\infty$, et soit l'information J_N définie par :

$$J_N(A) = \inf_{\omega\in A} \Phi_N(\omega) \quad , \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$$

avec :

$$\Phi_N(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(\omega) \quad , \quad \forall \omega \in \Omega$$

Les ensembles $A_n = \{\omega \in \Omega : \phi_n(\omega) = a_n\}$, vérifiant

$$A_n \cap A_m = \emptyset \quad , \quad \forall (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n \neq m$$

et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \Omega$, l'inclusion devant être stricte dans le cas où $a > 0$.

Cette information $J_{\mathbb{N}}$ ne prend que les valeurs :

$$\Gamma_1(J_{\mathbb{N}}) \equiv \{0, a, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} , +\infty\} ,$$

c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de Φ_I , complété par $+\infty$ et a . Mais cette propriété n'est pas vérifiée par toute information définie à partir d'une fonction génératrice ϕ ayant un ensemble infini dénombrable de valeurs.

III-C-1.- <u>THEOREME</u>. *Soit Ω un ensemble au moins infini dénombrable. Soit J une information du type inf-c définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par une fonction génératrice ϕ , alors :*

L'intervalle $[a,b[$ de $\bar{\mathbb{R}}^+$ est contenu dans $\Gamma_1(J)$ si et seulement si $\exists A \subset \Omega$ tel que l'ensemble $\phi(A)$ des valeurs de ϕ sur A , soit partout dense dans $[a,b]$.

<u>PREUVE</u>.- Montrons d'abord la condition suffisante. Supposons donc

qu'il existe un ensemble $A \subset \Omega$ tel que :

$$\phi(A) = \{x : \exists\ \omega \in A\ ,\ \phi(\omega) = x\}$$

est partout dense dans $[a,b]$ c'est-à-dire qu'on a :

$$\overline{\phi(A)} = [a,b]$$

Cela entraîne que, pour tout voisinage V d'un point $x \in [a,b]$, $\exists\ y \in \phi(A)$ tel que $y \in V$.

Montrons alors que $\forall\ x_0 \in [a,b[$, $\exists\ A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que :

$$J(A) = x_0$$

Si $x_0 \in \phi(A)$, alors c'est évident.

Supposons donc que $x_0 \in [a,b[- \phi(A)$ et considérons les ensembles

$$B = \{x \in \phi(A) : x \geqslant x_0\} \neq \phi$$

et

$$[x_0,b]$$

alors on a :

B est dense dans $[x_0,b]$ et $\forall$ voisinage V de x_0 , $\exists\ x \in B$ tel que $x \in V$.

Cela entreîne que $x_0 = \inf B = \inf\limits_{\omega \in A} \phi(\omega)$, avec

$$A = \{\omega \in \Omega : \phi(\omega) \in B\}$$

d'où

$$J(A) = x_0 .$$

Montrons maintenant la condition nécessaire.

L'intervalle $[a,b[$ est donc tel que :

$$\Gamma_1(J) \supset [a,b[$$

Soit l'ensemble $A = \{\omega \in \Omega : \phi(\omega) \in [a,b[\}$.

Montrons que $\phi(A)$ est dense dans $[a,b]$ et pour cela, raisonnons par l'absurde :

Nous supposons donc que $\overline{\phi(A)} \not\equiv [a,b]$.

Cela entraîne l'existence d'un $x_0 \in [a,b[$ tel que

$$x_0 \notin \overline{\phi(A)}$$

car, en effet, si $\forall\, x_0 \in [a,b[$, on a $x_0 \in \overline{\phi(A)}$, cela veut dire que $\overline{\phi(A)} \supset [a,b[$ et donc que :

$$\overline{\phi(A)} \equiv [a,b] .$$

Soit donc $x_0 \in [a,b[$ et tel que $x_0 \notin \overline{\phi(A)}$, alors $\exists$ de partie K de $\phi(A)$ telle que :

$$\inf K = x_0 .$$

Cela entreîne que l'on ne peut trouver de partie Q de $\phi(\Omega)$ telle que :

$$\inf Q = x_0$$

En effet, supposons l'inverse, c'est-à-dire qu'il existe

$Q \subset \phi(\Omega)$ tel que $\inf Q = x_0$, alors, $\forall\, x \in Q$, on a $x \geq x_0$ et on peut trouver une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Q tendant en décroissant vers x_0 .

La convergence décroissante vers x_0 entraîne qu'à l'extérieur de $[x_0, b[$, on ne peut trouver qu'un nombre fini d'éléments de la suite.

Or $\forall\, x_n \in [x_0, b[$, on a $x_n \in \phi(A)$

d'où : $\inf Q \cap \phi(A) = x_0$

Or $Q \cap \phi(A)$ est une partie de $\phi(A)$.

Alors, si on ne peut trouver de partie Q de $\phi(\Omega)$ telle que $\inf Q = x_0$, cela entraîne qu'il n'existe pas de partie Q' de Ω telle que :

$$Q' = \{\omega : \phi(\omega) \in Q\}$$

et telle que :

$$x_0 = \inf_{\omega \in Q'} \phi(\omega)$$

d'où $x_0 \notin \Gamma_1(J)$ et $\Gamma_1(J) \not\supset [a, b[$

III-C-2.- <u>COROLLAIRE</u>. *Soient Ω un ensemble au moins infini dénombrable et J une information du type inf-c définie sur $P(\Omega)$ par une fonction génératrice ϕ ; alors on a : $\Gamma_1(J) \equiv \bar{\mathbb{R}}^+$ si et seulement si $\phi(\Omega)$ est partout dense dans $\bar{\mathbb{R}}^+$, en notant $\phi(\Omega) = \{x : \exists\, \omega \in \Omega,\ \phi(\omega) = x\}$.*

- <u>LE TYPE INF-σ</u> -

Soit une information J , de type inf-σ, définie sur une

σ-algèbre $\mathcal{S}$ de parties d'un ensemble Ω .

III-C-3.- <u>THEOREME</u>. *Si* J *du type* inf-σ *possède la continuité séquentielle descendante en* ϕ , *alors :*

$$\Gamma_1(J) \text{ est fermé dans } \bar{\mathbb{R}}^+ .$$

<u>PREUVE</u>.- Pour montrer que $\Gamma_1(J)$ est fermé, nous allons montrer que toute suite de points de $\Gamma_1(J)$, convergente, converge vers un point de $\Gamma_1(J)$.

Soit donc $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$x_n \in \Gamma_1(J) \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\exists\, A_n \in \mathcal{S} \quad \text{tel que} \quad J(A_n) = x_n$$

(1) Supposons que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors :

$$\lim_{n\to\infty} J\Big(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\Big) = J\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big) = \inf_i\{J(A_i)\} = x$$

or :

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{S} \quad \text{d'où} \quad x \in \Gamma_1(J)$$

(2) Supposons maintenant que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Considérons la suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ correspondant à

$$x_n = J(A_n)$$

Notons : $B_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$

$B_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\vdots$

$B_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$

$\{B_n\}_{n\in N}$ est une suite décroissante d'ensembles de $\mathcal{S}$ et on a :

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{S}$$

De plus, J possède la continuité séquentielle descendante en ϕ, donc d'après [6], théorème 5.4, en tout $A \in \mathcal{S}$.

Cela entraîne que :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\bigcap_{i=0}^{n} B_i\right) = J\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right)$$

Or, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, on a :

$$J(B_k) = J\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\right) = \inf_n\{J(A_n)\} = x_k$$

et : $$J\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} B_i\right) = J(B_k) = x_k$$

d'où : $$J\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) = x$$

or : $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{S}$ d'où $x \in \Gamma_1(J)$.

(3) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente quelconque vers x, avec $x_n \in \Gamma_1(J)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on peut toujours en extraire une sous-suite, soit croissante, soit décroissante, d'éléments de $\Gamma_1(J)$ tendant vers x. On est alors ramené aux deux cas précédents.

- R E F E R E N C E S -

[1] N. BOURBAKI — *TOPOLOGIE GENERALE*
Chapitre IV, § 8

[2] G. CHOQUET — *COURS D'ANALYSE (Tome II) "TOPOLOGIE"*
(MASSON, 1969, PARIS)

[3] P.R. HALMOS — *"ON THE SET OF VALUES OF A FINITE MEASURE"*
Bull. Amer. Math. Soc.
Vol. 53, 1947, pp. 138-141

[4] P.R. HALMOS — *MEASURE THEORY*
Van Norstrand, NEW YORK, 1956

[5] J. KAMPE DE FERIET et B. FORTE — *COMPTES RENDUS*
N° 265, série A, 1967
(a) p. 110
(b) p. 142
(c) p. 350

[6] J. KAMPE DE FERIET — *COLLOQUE INTERNATIONAL C.N.R.S.*
N° 186, CLERMONT FERRAND, 30 Juin/5 Juillet 1969,
C.N.R.S. PARIS, 1970, pp. 191-221

[7] J. KAMPE DE FERIET et P. BENVENUTI — *COMPTES RENDUS*
N° 274, Série A, 1972, p. 655

[8] J. KAMPE DE FERIET — *"MESURE DE L'INFORMATION FOURNIE PAR UN EVENEMENT."*
Séminaire sur les Questionnaires.
24 Novembre et 8 Décembre 1971.
Institut Henri Poincaré - PARIS

[9] J. NEVEU — *BASES MATHEMATIQUES DU CALCUL DES PROBABILITES.*
Masson, (1964), PARIS

[10] N. PINTACUDA — *COMPTES RENDUS*
N° 269, série A , 1969, p. 861

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE