

50376

N° d'ordre 261

1972  
157

50376  
1972  
157

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES  
ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

**Zaki BASSIOUNI**

Ingénieur E. N. S. P. M.



**Contribution à la création et au développement  
d'une nouvelle méthode de diagraphie pétrolière  
" LE TELELOG "**



*Soutenue le Mercredi 22 Novembre 1972, devant la COMMISSION D'EXAMEN*

<b>MM. R. GABILLARD</b>	<b>Président</b>
<b>E. BRUN</b>	<b>Examineur</b>
<b>P. DEBRABANT</b>	<b>Examineur</b>
<b>F. LOUAGE</b>	<b>Examineur</b>
<b>R. DESBRANDES</b>	<b>Invité</b>

UNIVERSITE DES SCIENCES

ET TECHNIQUES DE LILLE

DOYENS HONORAIRES

MM. H. LEFEBVRE, PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DEHORS, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE. PASCAL, PAUTHENIER, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKY.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE  
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. DEFRETIN René Professeur de Biologie Marine

PROFESSEURS TITULAIRES

M.	BACCHUS Pierre	Astronomie et Calcul Numérique
M.	BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Générale
M.	BECART Maurice	Physique
M.	BLOCH Vincent	Psychophysiologie
M.	BIAYS Pierre	Géographie et Aménagement Spatial
M.	BONNEMAN Pierre	Chimie Industrielle
M.	BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Botanique
M.	CAPET Marcel-Francis	Institut de Préparation aux Affaires
M.	CELET Paul	Géologie Générale
M.	CONSTANT Eugène	Physique Industrielle
M.	CORSIN Pierre	Paléobotanique
M.	DECUYPER Marcel	Mathématiques
M.	DEDECKER Paul	Mathématiques
M.	DEFRETIN René	Biologie Animale - Directeur de l'Institut de Biologie Maritime de Wimereux
M.	DELATTRE Charles	Géologie Générale
M.	DURCHON Maurice	Zoologie Générale et Appliquée
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	Radio-Electricité et Electronique
M.	GEHU Jean-Marie	Institut Agricole
M.	GLACET Charles	Chimie Organique
M.	GONTIER Gérard	Mécanique des Fluides
M.	GUILLAUME Jean	Biologie Végétale
M.	HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique Expérimentale (Optique Atmosphérique)
M.	LOMBARD Jacques	Sociologie
M.	MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M.	MONTREUIL Jean	Biochimie
M.	POUZET Pierre	Informatique

Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Mathématiques
M.	TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie Minérale Appliquée
M.	VAILLAND Jean	Mathématiques
M.	VIDAL Pierre	Automatique
M.	VIVIER Emile	Biologie Animale
M.	WATERLOT Gérard	Géologie et Minéralogie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique Générale

#### PROFESSEURS A TITRE PERSONNEL

M.	BOUISSET Simon	Physiologie Animale
M.	DELHAYE Michel	Chimie Physique et Minérale 1 <sup>er</sup> Cycle
M.	FLATRES Pierre	Géographie
M.	LEBRUN André	Electronique
M.	LINDER Robert	Botanique
M.	LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	PRUDHOMME Rémy	Sciences Economiques
M.	SCHILTZ René	Physique

#### PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	BELLET Jean	Physique
M.	BODARD Marcel	Biologie Végétale
M.	BOILLET Pierre	Physique
M.	DERCOURT Jean-Michel	Géologie
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie
M.	LANDAIS Jean	Chimie Organique
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie Macromoléculaire
Mlle	MARQUET Simone	Mathématiques
M.	PROUVOST Jean	Minéralogie

#### MAITRES DE CONFERENCES ET CHARGES DES FONCTIONS

M.	ADAM Michel	Economie Politique
M.	ANDRE Charles	Mathématiques et Statistiques
M.	ANGRAND Jean-Pierre	Géographie
M.	AUBIN Thierry	Mathématiques Pures
M.	BEGUIN Paul	Mécanique des Fluides
M.	BILLARD Jean	Physique
M.	BKOCHE Rudolphe	Mathématiques
M.	BOILLY Bénoni	Zoologie
M.	BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M.	BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M.	BRIDOUX Michel	Chimie (Béthune)
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie et Aménagement Spatial
M.	CAPURON Alfred	Biologie Animale
M.	CARREZ Christian	Analyse Numérique
M.	CHOQUET Marcel	Biologie Appliquée
M.	CORDONNIER Vincent	Informatique
M.	CORTOIS Jean	Physique

M.	COULON Jean-Paul	Electrotechnique
M.	DEBRABANT Pierre	Instrumentation Physique
M.	ESCAIG Bertrand	Physique
Mme	EVRARD Micheline	Chimie (I.U.T.)
M.	FAIDHERBE Jacques	Psychophysiologie
M.	FONTAINE Jacques	Génie Electrique
M.	FROELICH Daniel	Chimie
M.	GAMBLIN André	Géographie
M.	GOBLOT Rémi	Mathématiques
M.	GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M.	GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M.	HERMAN Maurice	Physique
M.	HUARD DE LA MARRE Pierre	Mathématiques Appliquées
M.	JOLY Robert	Biologie (Amiens)
M.	JOURNEL Gérard	Physique Appliquée
Mlle	KOSMANN Yvette	Mathématiques
M.	KREMBEL Jean	Biochimie
M.	LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Générale
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M.	LAURENT François	Automatique
M.	LAVAGNE Pierre	Gestion
Mlle	LEGRAND Solange	Mathématiques
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LEHMANN Josiane	Mathématiques
M.	LENTACKER Firmin	Géographie et Aménagement Spatial
M.	LEROY Jean-Marie	Chimie (E.N.S.C.L.)
M.	LEROY Yves	Electronique
M.	LHENAFF Renée	Géographie
M.	LOCQUENEUX Robert	Physique
M.	LOUAGE Francis	Mesures Industrielles
M.	MAES Serge	Physique
Mme	MAILLET Monique	Sciences Economiques
M.	MAIZIERES Christian	Automatique
M.	MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques
M.	MESSELYN Jean	Physique
M.	MIGEON Michel	Instrumentation Chimique
M.	MONTEL Marc	Physique
M.	MONTUELLE Bernard	Biologie Végétale
M.	MUSSCHE Guy	Economie et Sociologie d'Entreprises
M.	NICOLE Jacques	Chimie Analytique (E.N.S.C.L.)
M.	NOWOGROCKI Guy	Chimie (Amiens)
M.	OUZIAUX Roger	Construction Mécanique
M.	PANET Marius	Physique Industrielle
M.	PAQUET Jacques	Géotechnique
M.	PARSY Fernand	Mathématiques Appliquées
M.	PECQUE Marcel	Chimie (Béthune)
M.	PERROT Pierre	Chimie
M.	PONSOLLE Louis	Chimie
M.	POVY Jean-Claude	Automatique non linéaire
M.	RACZY Ladislas	Physique Industrielle et Radioélectricité
Mme	RENVERSEZ Françoise	Sciences Economiques
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M.	ROYNETTE Bernard	Mathématiques
M.	SALMER Georges	Radio-Electricité et Electronique
M.	SEQUIER Guy	Electronique
M.	SIMON Michel	Psychologie
M.	SLIWA Henri	Chimie Organique
M.	SMET Pierre	Physique

M.	SOMME Jean	Géographie
Mlle	SPIK Geneviève	Biochimie
M.	THOMAS Daniel	Chimie Minérale Appliquée
M.	TOULOTTE Jean-Marc	Informatique
M.	TREANTON Jean-René	Psychologie
M	VANDORPE Bernard	Chimie Minérale
M.	VILETTE Michel	Génie Mécanique
M.	WATERLOT Michel	Géologie
Mme	ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

--oo 0 oo--

*Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein de l'équipe de Radiopropagation et Electronique de l'Université des Sciences et Techniques de LILLE.*

*C'est un agréable devoir pour moi d'exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur GABILLARD qui a bien voulu m'accueillir dans son équipe et a dirigé ce travail. Les longs entretiens qu'il m'a accordés, les encouragements et conseils précieux qu'il m'a prodigués, ont été déterminants pour la réalisation de cette étude.*

*Je remercie Monsieur le Professeur BRUN, Membre de l'Institut, qui m'a fait l'honneur de participer à mon Jury. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma déférente gratitude.*

*Messieurs DEBRABANT et LOUAGE ont bien voulu examiner mon travail et faire partie de mon Jury, je leur en suis vivement reconnaissant et les en remercie.*

*Je suis particulièrement reconnaissant à M. DESBRANDES, Maître de Recherches à l'Institut Français du Pétrole pour l'aide qu'il m'a généreusement apportée.*

*Je remercie également les membres de l'équipe de Radiopropagation et Electronique pour le chaleureux accueil qu'ils m'ont réservé. Tous ne ménagèrent ni leur temps, ni leurs conseils avisés pendant la durée de ce travail. Leur amitié et leur compétence me furent toujours d'un précieux soutien.*

*Nous devons, à l'Institut Français du Pétrole, à la Société Nationale des Pétroles d'Aquitaine, à Gaz de France, à la Société de Prospection Electrique Schlumberger, au Bureau de Recherches Géologiques et Minière et à la Société Générale Géotechnique d'avoir pu effectuer toutes les expériences dont nous avons besoin. Qu'il me soit permis de remercier leurs Directeurs pour l'aide considérable qu'ils nous ont apportée.*

*J'ai bénéficié au cours de cette étude d'une bourse de recherche accordée par le Ministère des Affaires Etrangères et l'Ecole Nationale Supérieure du Pétrole et des Moteurs. Je leur en suis vivement reconnaissant.*

*Je ne terminerai pas cet avant-propos sans exprimer ma gratitude au personnel technique et administratif du laboratoire de Radiopropagation et Electronique de LILLE.*

## S O M M A I R E

### *I N T R O D U C T I O N*

### 1ère P A R T I E

<i>L E T E L E L O G . (La Télédiagraphie)</i>
--

#### 1ère ETAPE

##### *EBAUCHE D'UNE METHODE DE PROSPECTION DES TERRAINS SITUES AUTOUR D'UN FORAGE*

- I.1. Idée initiale
- I.2. Premier mode de réalisation du Procédé Télélog
- I.3. Les études expérimentales et les résultats obtenus jusqu'au mois de décembre 1967
- I.4. Conclusions

#### 2ème ETAPE

##### *ESSAI D'INTERPRETATION QUANTITATIVE DES TELELOGS "DIPOLE ELECTRIQUE VERTICAL (D.E.V.) EN TERRAIN STRATIFIE"*

- II.1. Théorie matricielle de la propagation, dans un terrain stratifié, d'une onde électromagnétique émise par un dipôle électrique vertical
- II.2. Application à l'interprétation des télélogs
- II.3. Expériences effectuées au PERRAY en novembre 1968
- II.4. Conclusions

3ème ETAPE

*INVERSION DES POSITIONS DE L'EMETTEUR ET DU RECEPTEUR*

- III.1. Appareillage de terrain
- III.2. Méthode de traitement des télélogs
- ✓ III.3. Méthodes provisoires d'interprétation des télélogs
- III.4. Expériences effectuées au PERRAY en juin 1969
- III.5. Expériences de Télédiagraphie de St ILLIERS, octobre 1969
- III.6. Théorie matricielle de la propagation dans un milieu stratifié d'une onde électromagnétique émise par un dipôle électrique horizontal (D.E.H.)
  - III.6.1. Explication de l'aspect du télélog
  - III.6.2. Mise en évidence de l'éventuelle existence d'une anomalie latérale dans la direction du D.E.H.
- III.7. Conclusions

4ème ETAPE

*ETUDE ANALOGIQUE*

- IV.1. Le modèle analogique
- IV.2. Effet d'une hétérogénéité latérale sur le télélog
- ✓ IV.3. Méthode de prospection et d'interprétation pour déterminer l'azimut et la profondeur de l'anomalie
- IV.4. Mesure de la distance "d" du bord du gisement à l'axe du forage
- IV.5. Vérification théorique
- IV.6. Conclusion

5ème ETAPE

*EXPERIENCES DE TELELOG EFFECTUEES A BEYNES*

- V.1. But des expériences
- V.2. Description du champ de BEYNES et mesures effectuées

- V.3. Mise en évidence de la présence ou de l'absence d'une anomalie à résistivité élevée dans une direction déterminée
- V.4. Mesure de la distance "d" du bord du gisement à l'axe du forage
- V.5. Conclusions

#### 6ème ETAPE

DEBUT DU DEVELOPPEMENT DESTINE A FAIRE DU TELELOG UNE METHODE INDUSTRIELLE  
DETERMINATION DE LA DISTANCE DU BORD DU GISEMENT DE LUSSAGNET A L'AXE DU  
FORAGE CENTRAL LUG 39

- VI.1. Le gisement de LUSSAGNET
- VI.2. Reprise du forage Lug 39
- VI.3. Interprétation des mesures
- VI.4. Suite des opérations Téléglog
- VI.5. Conclusions

### 2ème PARTIE

ETUDE THEORIQUE
-----------------

#### CHAPITRE. I.

PROPAGATION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE EMISE DANS UN MILIEU STRATIFIE  
QUELCONQUE PAR UN DIPOLE ELECTRIQUE HORIZONTAL

- I.1. Définitions
- I.2. Composantes du champ électromagnétique
- I.3. Expression du potentiel de Hertz
- I.4. Conditions aux limites
- I.5. Conditions aux limites vectorielles

- I.6. Formule de récurrence
- I.7. Potentiel de Hertz dans une couche  $m$  quelconque
- I.8. Cas d'un dipôle situé dans l'atmosphère
- I.9. Application à la télédiagraphie : calcul de la conductivité par récurrence
- I.10. Conclusion

## CHAPITRE II

### *CALCUL DU CHAMP ELECTRIQUE VERTICAL PRODUIT DANS UNE COUCHE QUELCONQUE D'UN TERRAIN STRATIFIE PAR UN D.E.H. PLACE DANS L'ATMOSPHERE*

- II.1. Introduction
- II.2. Expression du potentiel électrique produit dans une couche quelconque par un dipôle placé dans la couche supérieure d'un terrain stratifié. Cas du courant continu.
- II.3. Analogie entre l'expression de la composante verticale  $E_z$  du champ électrique produit dans une couche quelconque  $m$  par un D.E.H. placé à la surface du sol, et la composante radiale  $E_r$  produite dans la même couche  $m$  par un D.E.V. situé également en surface
- II.4. Expression du champ électrique vertical produit dans une couche  $m$  quelconque par un D.E.H. placé en surface et parcouru par un courant alternatif
- II.5. Application à la Télédiagraphie : calcul du champ électrique vertical dans une couche  $m$  quelconque créé par un D.E.H. placé en surface et parcouru par un courant alternatif

## CHAPITRE, III.

### *CALCUL DU POTENTIEL DANS UN TERRAIN HOMOGENE ENFERMANT UNE ANOMALIE A RESISTIVITE ELEVEE*

- III.1. Introduction
- III.2. Expression du potentiel

- III.3. Détermination de la fonction  $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$
- III.4. Cas d'une anomalie sous forme d'une couche très mince
- III.5. Calcul de l'intégrale  $I_i$
- III.6. Application à la Télédiagraphie

C O N C L U S I O N

R E F E R E N C E S

A N N E X E S

## I N T R O D U C T I O N

Le pétrole est connu depuis la plus haute antiquité, mais on considère que l'ère industrielle a débuté il y a seulement un siècle, aux environs de 1860. La production mondiale, d'abord faible - son usage le plus important était alors l'éclairage - s'est développée rapidement après la mise au point du moteur à explosion à la fin du XIXème siècle. Depuis elle n'a pas cessé de croître et la multiplication rapide des applications des produits pétroliers ne laisse pas présager un quelconque ralentissement.

En effet, si la plus grande part de l'huile et du gaz naturel est réservée à la production d'énergie, une quantité toujours croissante est absorbée par l'industrie pétrochimique (engrais, matières plastiques, textiles, etc ...) ; on entrevoit même le moment où le pétrole sera plus ou moins directement utilisé pour nourrir les hommes.

Différentes voies sont ouvertes qui peuvent mener à un accroissement des réserves connues en faisant intervenir les techniques, soit de l'exploitation, soit de l'exploration :

1) Dans un gisement on laisse toujours en place un volume considérable d'huile, parfois plus de 80%, que les méthodes naturelles de récupération sont incapables d'extraire. Une amélioration des méthodes de production autorisant un pourcentage, même faible, de récupération supplémentaire est sans conteste intéressante.

2) La recherche de régions nouvelles encore inconnues ou peu connues est l'un des objectifs majeurs de l'exploitation. Après l'expansion des années récentes, la prospection s'est attaquée à des régions d'accès très difficile comme l'Arctique, la forêt amazonienne, et notamment aux bassins sédimentaires recouverts par la mer.

3) La troisième voie enfin, l'intensification de la prospection dans les régions déjà prouvées productrices, offre les plus grandes possibilités aux différentes méthodes d'exploration et à leur développement. L'expérience a montré que l'huile et le gaz sont des constituants des bassins sédimentaires relativement très répandus. Même dans les régions qui paraissent très connues on découvre de nouveaux gisements. Mais bien entendu il s'agit alors d'accumulations souvent enfermées dans des pièges complexes ; leur découverte exige une connaissance accrue de la géologie locale, beaucoup d'imagination et une grande finesse des outils de la prospection géophysique. Il est toutefois probable que dans cette voie s'exercera au cours des prochaines années la plus grande partie de l'activité d'exploration.

Ceci est à l'origine des développements de plusieurs procédés de prospection des terrains situés autour d'un forage. Le procédé Télélog (Télédiagraphie) étudié par l'équipe de Géopropagation de l'Université des Sciences et Techniques de LILLE, en est un. Cette méthode, à la création de laquelle nous avons participé, fait l'objet de notre thèse.

La mise au point du procédé a nécessité un travail étendu sur les domaines de recherche suivants :

1. Réalisation de l'émetteur et du récepteur nécessaires pour effectuer des mesures sur le terrain.
2. Etude des problèmes de simulation, et réalisation d'un modèle analogique permettant l'étude en laboratoire du procédé sur une maquette du gisement.
3. Etude des problèmes concernant l'interprétation des mesures effectuées.

Ces différents domaines ont fait l'objet de travaux effectués par les membres de l'équipe de Géopropagation du Professeur GABILLARD.

*Notre travail particulier a été l'élaboration d'une méthode d'interprétation des résultats obtenus sur le terrain. Ceci a impliqué des études théoriques, des études sur modèle analogique, et des mesures expérimentales effectuées sur le terrain.*

Dans la première partie de notre thèse, nous relatons dans leur ordre chronologique les différentes étapes des recherches qui ont conduit au procédé Télélog.

Dans la seconde partie, nous exposons l'ensemble des études théoriques qui ont permis l'élaboration de la méthode d'interprétation des mesures de Télédiagraphie.

1ère PARTIE

LE TELELOG (LA TELEDIAGRAPHE)

1ère ETAPE

EBAUCHE D'UNE METHODE DE PROSPECTION DES TERRAINS SITUES AUTOUR D'UN FORAGE

---

I.1. IDEE INITIALE

Les procédés actuellement utilisés en prospection des couches géologiques traversées par un forage sont généralement des procédés de mesure de la résistivité électrique du sol ou des procédés acoustiques mesurant la vitesse de propagation d'ondes élastiques dans ces couches géologiques. Les procédés de mesure de la résistivité consistent à descendre dans le forage, avant qu'il ait reçu un tubage métallique, une sonde possédant généralement quatre électrodes, dite sonde de mesure de résistivité. Son fonctionnement est bien connu et il en existe de nombreuses variantes<sup>(21), (22)</sup>.

Ces sondes permettent d'obtenir un enregistrement de la résistivité des terrains en fonction de la profondeur, appelé diagraphie ou log de résistivité. Cette diagraphie, utilisée conjointement avec d'autres obtenues par d'autres méthodes de prospection, permet de déterminer la nature des terrains traversés par le forage et de localiser en particulier les zones pétrolifères.

L'inconvénient d'une telle méthode est de ne donner que des mesures locales de résistivité.

Le rayon d'investigation des sondes classiques autour du forage ne dépasse généralement pas quelques mètres. Dans le cas particulier des pièges stratigraphiques un forage peut ainsi très bien passer au voisinage d'une lentille de sable imprégné d'huile sans que l'on puisse en avoir connaissance.

Les autres diagraphies (acoustiques, nucléaires) ont un rayon d'investigation encore plus limité.

L'idée initiale était donc de fournir un procédé qui permette d'une part d'obtenir une diagraphie de résistivité qui donne la résistivité moyenne des terrains sur un rayon assez important autour du forage et qui,

d'autre part, permette de déceler une anomalie de résistivité située au voisinage du forage.

Cet objectif peut être atteint avec le procédé "Télélog" inventé par Monsieur le Professeur R.GABILLARD<sup>(2),(19),(20)</sup> et mis au point à l'Université de LILLE.1.

### I.2. PREMIER MODE DE REALISATION DU PROCEDE TELELOG

Le Procédé "Télélog" consiste, dans sa première variante, en l'émission dans le sol d'un courant alternatif de basse fréquence au moyen de deux électrodes situées sur une sonde pouvant être déplacée verticalement dans le forage.

Cette sonde constitue ainsi ce que les radioélectriciens appellent un dipôle électrique vertical D.E.V. Il est bien connu que le courant ainsi injecté dans le sol circule ensuite dans les diverses couches de terrain en rayonnant autour du dipôle émetteur. Lorsque ce courant atteint la surface du sol, il y détermine un champ électrique radial, c'est-à-dire dont la direction passe par l'axe du forage ; ce champ se manifeste par une différence de potentiel entre deux piquets enfoncés dans le sol suivant une direction radiale.

Avant de pouvoir atteindre la surface du sol, le courant a dû se réfléchir un nombre élevé de fois sur les divers interfaces séparant les diverses couches de terrain dont est constitué le sous-sol. On comprend ainsi facilement que l'intensité du champ électrique à la surface du sol sera fonction de la structure du sous-sol.

Le procédé tire partie de ce phénomène physique pour reconstituer la structure du terrain.

### I.3. LES ETUDES EXPERIMENTALES ET LES RESULTATS OBTENUS JUSQU'AU MOIS DE DECEMBRE 1967

Le sondage expérimental "LE PERRAY" de l'INSTITUT FRANCAIS du PETROLE, où s'effectue la mise au point d'une nouvelle méthode de forage

dite "Flexoforage", possède un câble spécial qui alimente le moteur qui se trouve au fond. Ce câble a été utilisé pour alimenter la sonde qui constitue le D.E.V.

Une première expérience effectuée au mois de janvier 1967 a mis en évidence la possibilité de recevoir un signal en surface lorsqu'on émettait du courant dans le forage.

A la suite de cette première expérience, une deuxième série d'essais a été effectuée au mois de Juin 1967. Les mesures effectuées ont montré qu'il était possible de faire un relevé d'intensité du champ à une distance assez importante du forage (1000 mètres avec le récepteur de l'époque).

Etant donné ces résultats, on a, au mois de décembre 1967, enregistré en fonction de la profondeur de la sonde la composante radiale du champ électrique  $E_r(z)$  mesurée en surface.

La figure.(1). montre ce premier télélog enregistré avec un pas de 10mètres, le récepteur étant immobilisé à 300mètres de l'axe du forage. La fréquence d'émission était de 312,5Hz.

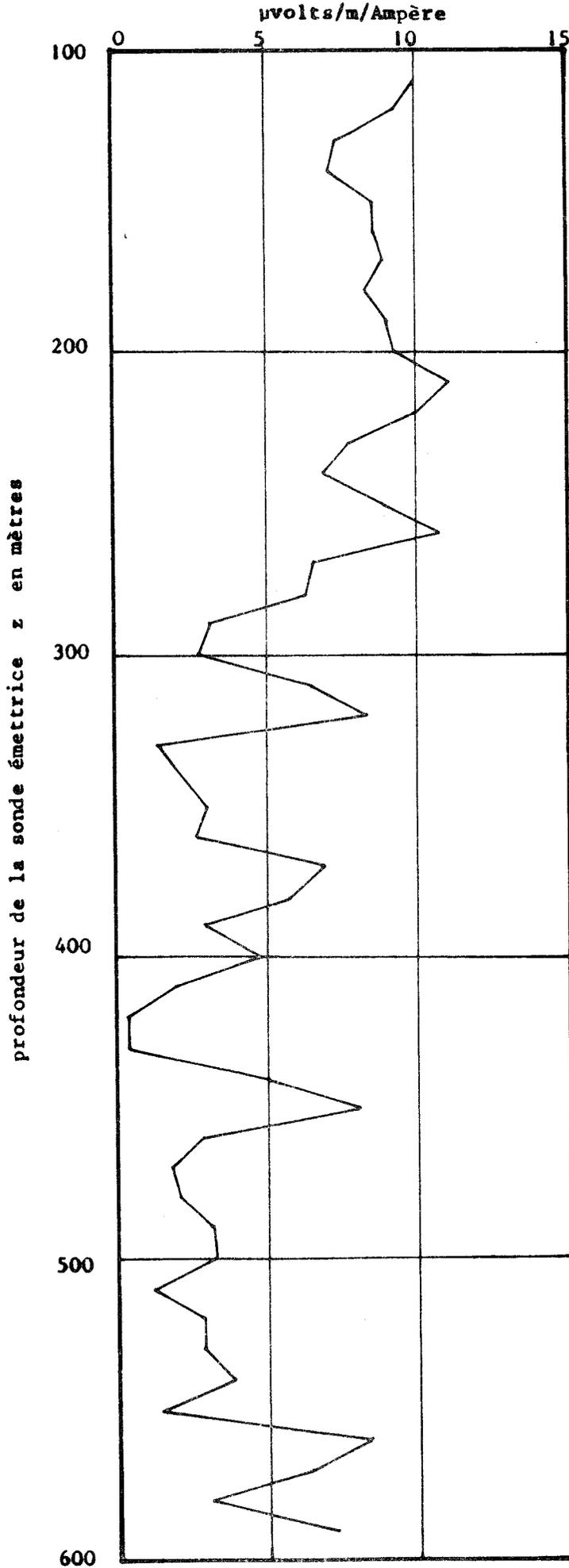
Nous avons examiné ce  $\log E_r(z)$  et montré qu'il corrélait parfaitement avec le log de résistivité classique enregistré dans le même forage ; par conséquent les fluctuations présentées par le télélog sont dues aux différentes couches traversées.

#### I.4. CONCLUSIONS

Les travaux effectués jusqu'à la fin de l'année 1967 ont montré que l'on pouvait espérer développer le procédé Télélog. D'une part il avait été possible d'obtenir un signal mesurable à la surface du sol en émettant dans le forage et d'autre part les premiers télélogs enregistrés semblaient refléter l'image de la structure du sous-sol.

Pour pouvoir exploiter d'avantage ces Télélogs il fallait entreprendre une étude théorique rigoureuse.

LA COMPOSANTE RADIALE DU CHAMP ELECTRIQUE  $E_r(z)$



le premier télélog  
LE PERRY  
Décembre 1967

Figure (1)



2ème ETAPE

ESSAI D'INTERPRETATION QUANTITATIVE DE TELELOG "DIPOLE ELECTRIQUE VERTICAL  
- D.E.V. - EN TERRAIN STRATIFIE"

L'année 1968 a vu naître une théorie rigoureuse due au Professeur GABILLARD<sup>(26)</sup>, puis une méthode d'interprétation des télélogs<sup>(17)</sup> basée sur cette théorie.

Cette méthode a été essayée au PERRY en novembre 1968<sup>(16)</sup>.  
Un brevet I.F.P. a été pris<sup>(20)</sup>.

Dans le domaine de l'appareillage, un émetteur plus puissant et des récepteurs plus précis et d'emploi plus facile ont été construits<sup>(35), (36)</sup>.

II.1. THEORIE MATRICIELLE DE LA PROPAGATION, DANS UN TERRAIN STRATIFIE,  
D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE EMISE PAR UN DIPOLE ELECTRIQUE VERTICAL

Le terrain dans lequel le phénomène de propagation a été étudié se compose de  $M+1$  couches géologiques séparées les unes des autres par des interfaces plans et parallèles (figure.47.). Chaque couche homogène et isotrope est caractérisée par sa permittivité électrique  $\epsilon_m$ , sa conductivité  $\sigma_m$  et son épaisseur  $h_m$ .

La théorie matricielle de la propagation dans ce terrain stratifié d'une onde électromagnétique émise par un D.E.V. conduit à l'expression suivante du potentiel de Hertz dans l'atmosphère<sup>(26)</sup> :

$$\Pi_o(n) = \int_0^{\infty} p_n e^{-u_n(z-z_1)} \frac{N_{22}(n) + N_{12}(n)}{u_n G_n} J_o(\lambda r) d\lambda \quad (1)$$

avec :  $u_n = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_n^2}$

L'indice  $n$  indique que la sonde émettrice est dans la couche  $n$ ;  $\gamma_n$  est le facteur de propagation,  $J_0$  est la fonction de BESSEL de première espèce,  $r$  est la distance radiale du point de mesure à l'axe du forage et  $z$  la profondeur,  $p_n$  étant le pouvoir émissif de la sonde (voir définitions §.I.1. 2ème partie).

$N_{12}^{(n)}$ ,  $N_{22}^{(n)}$  et  $G_n$  sont des fonctions de la variable  $\lambda$ .

Le calcul de ces fonctions est théoriquement possible mais il nécessite la connaissance des épaisseurs  $h_n$  de toutes les couches, de leur conductivité  $\sigma_n$  et éventuellement de leur constante diélectrique  $\epsilon_n$ . Ces données n'étant pas connues (elles sont précisément celles que l'on recherche), le calcul de l'intégrale (1) donnant le potentiel de Hertz est a priori impossible.

Une observation va permettre pourtant d'apporter une solution au problème ainsi posé.

Cette observation est que, quelles que soient les épaisseurs  $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots, h_{M-1}$  des couches successives de terrain, il est toujours possible de leur trouver un diviseur commun  $h$ . Il suffit de choisir  $h$  assez petit (voir §.I.9.1. 2ème partie. Principe de la stratification fictive). On considèrera alors la formation comme constituée d'un empilement de  $N-1$  couches d'épaisseur uniforme  $h$  (les couches 0 (atmosphère) et  $N$  (socle) ayant une épaisseur infinie).

Grâce à cette observation la théorie matricielle a permis d'établir une formule qui donne le contraste de conductivité  $\sigma_{n-1}/\sigma_n$  entre deux couches  $n-1$  et  $n$ . Lorsque deux de ces couches fictives sont situées à l'intérieur de la même couche géologique, leurs conductivités seront simplement identiques. Cette formule est la suivante :

$$\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} = \frac{(1 + \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}})E_{n-1} - (1 + h^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2})E_n}{E_{n-2}} \quad (2)$$

$E_n$ ,  $E_{n-1}$  et  $E_{n-2}$  sont respectivement les composantes radiales du champ électrique mesurées en surface avec l'émetteur placé dans les couches  $n$ ,  $n-1$  et  $n-2$ .

Nous voyons d'après la formule (2) qu'il faut un matériel capable de mesurer, à la distance  $r$  du forage et pour chaque profondeur  $z_n$  du D.E.V. émetteur, le champ électrique radial  $E_n$  et sa dérivée seconde par rapport à  $r$ .

Pour effectuer la mesure de la dérivée seconde  $\partial^2 E_n / \partial r^2$  on dispose sur une droite passant par l'axe du forage quatre piquets A, B, C et D espacés de la distance a. Le piquet A est à la distance r du forage ( $a \ll r$ ).

Avec un amplificateur dont la masse est reliée au piquet A et qui mesure la tension :

$$e_n = V_D - V_A$$

et un amplificateur différentiel dont la masse sera également reliée au piquet A et qui mesure la tension :

$$e'_n = V_C - V_B$$

la formule (2) nous donnera <sup>(16)</sup> :

$$\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} = \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}} \alpha_n + \beta_n + \gamma_n \quad (3)$$

avec :

$$\alpha_n = \frac{e_{n-1}}{e_{n-2}}$$

$$\beta_n = \frac{e_{n-1} - e_n}{e_{n-2}}$$

$$\gamma_n = - \frac{3h^2}{a^2} \left( \frac{e_n - 3e'_n}{e_{n-2}} \right)$$

## II.2. APPLICATION A L'INTERPRETATION DES TELELELOGS

La méthode d'interprétation de ce premier type de télélogs que nous avons mise au point d'après l'étude théorique qui avait été faite par le Professeur GABILLARD, est basée sur la comparaison du télélog au log classique de résistivité <sup>(21), (22)</sup> (Latérolog par exemple). Nous avons montré (voir réf. (16) et (18)) que lorsque les couches n'ont pas de variations latérales de résistivité, la grandeur mesurée par le Télélog est proportionnelle à la résistivité. Ceci s'est vérifié sur les enregistrements du puits du PERRY. En positionnant convenablement les deux logs l'un par rapport à l'autre on obtient une excellente corrélation de leurs creux et de leurs maxima successifs, sauf pour un nombre limité de couches où l'on décèle ainsi, qualitativement, une "anomalie du télélog". Nous allons montrer comment cette anomalie peut être interprétée comme une variation latérale de résistivité.

Les couches anormales étant ainsi repérées : on peut calculer pour chacune d'elles la différence entre la résistivité locale autour du forage (donnée par le latérolog) et la valeur moyenne de la résistivité vraie prise dans un volume étiré dans la direction du récepteur par rapport à l'axe du forage. En effet les lignes de courant qui contribuent à la mesure de résistivité par le télélog englobent une zone de terrain très vaste et étirée dans la direction du récepteur placé en surface.

Ce calcul utilise la formule (3) dans laquelle on porte les valeurs locales de la résistivité lues sur le latérolog et les valeurs du champ électrique du Télélog :

$$(\rho_n)_T = \rho_{n-1} \left( \frac{\rho_{n-1}}{\rho_{n-2}} \alpha_n + \beta_n + \gamma_n \right) \quad (4)$$

$(\rho_n)_T$  étant la résistivité de la couche  $n$  vue par la sonde Télélog.  
 $\rho_n$ ,  $\rho_{n-1}$  et  $\rho_{n-2}$  étant les résistivités des trois couches  $n$ ,  $n-1$  et  $n-2$  vues par la sonde latérolog.

L'anomalie latérale sera mesurée par :

$$\Delta\rho_n = (\rho_n)_T - \rho_n \quad (5)$$

Nous pouvons également l'exprimer comme un pourcentage :

$$A_n = \frac{\Delta\rho_n}{\rho_n} \cdot 100 \quad (6)$$

Cette méthode d'interprétation ne met en jeu que les mesures effectuées dans les couches adjacentes à la couche anormale et ainsi les erreurs de mesure ne s'accumulent pas d'un bout à l'autre du log.

### II.3. EXPERIENCES EFFECTUEES AU PERRAY EN NOVEMBRE 1968

Le but des expériences était d'effectuer une mesure précise du champ électrique radial et de sa dérivée seconde afin d'appliquer la formule (4).

La figure.(2). montre côte à côte, en position de corrélation, un extrait du Télélog et du latérolog pour l'intervalle 265-370 mètres de profondeur.

Les mesures des deux fonctions  $e_n(z)$  (en trait plein) et de  $e'_n(z)$  (en pointillé) ont été faites avec un pas de mesure de 2m. Le récepteur était à 280mètres de l'axe du forage dans l'azimut  $164^\circ$ .

La comparaison du Télélog et du latérolog montre une "non-concordance" dans l'intervalle 334-339mètres de profondeur. Cette "non-concordance" décèle la présence d'une anomalie latérale à ce niveau. La valeur de la résistivité Télélog calculée par la formule (4) est de  $74 \Omega m$  contre  $40 \Omega m$  relevée sur le latérolog. Cela représente un taux d'anomalie de 85%.

Partout ailleurs le pourcentage d'anomalie était faible, ce qui semblait indiquer une structure de terrain homogène autour de l'axe du forage du PERRY sauf au niveau de l'intervalle 334-339 mètres où nous avons une anomalie positive de résistivité.

Les géologues ont estimé ces résultats satisfaisants puisqu'ils répondent à l'image de la structure connue d'eux pour le PERRY.

En effet un changement latéral au niveau de l'intervalle 334-339 mètres est possible car cette couche marque le passage entre deux formations d'âge géologique différent, le cénomaniens et le sénoturoniens<sup>(16)</sup>.

#### II.4. CONCLUSIONS

Les résultats positifs précédents avaient montré en 1968 que l'on pouvait faire du Télélog une méthode permettant de déceler jusqu'à probablement quelques centaines de mètres d'un forage les anomalies latérales de résistivité dues à un changement de la nature géologique des couches et probablement de leur contenu en fluide ou en gaz au voisinage du forage. Le Professeur GABILLARD en accord avec l'I.F.P. avait donc pensé que si ce but pouvait être atteint, il présenterait pour l'industrie pétrolière un intérêt indiscutable. Mais l'industrialisation du Télélog sous son premier mode de réalisation c'est-à-dire émetteur au fond et récepteur en surface posait un

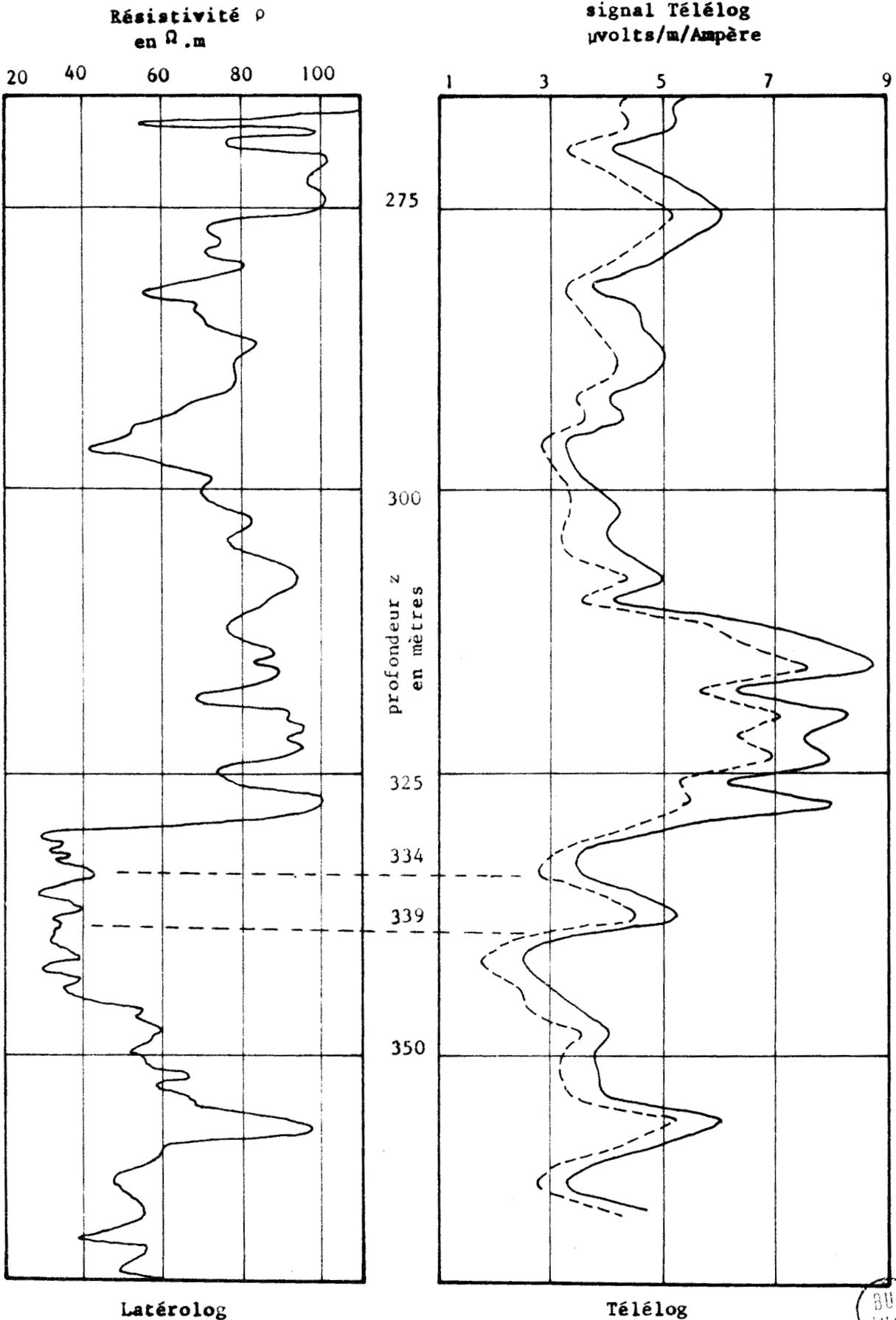


Figure.2.

problème d'ordre pratique : en effet un derrick conventionnel de forage ne se prête pas à l'utilisation d'un câble pouvant assurer jusqu'au fond la transmission de la puissance nécessaire à l'émission.

Le procédé Télélog ne pouvait donc devenir vraiment industrialisable que si il était possible d'inverser la technique en plaçant l'émetteur en surface et en ne descendant dans le forage que le récepteur. Ce que l'on peut faire avec un câble de mesures classique de diagraphie.

3ème ETAPE

INVERSION DES POSITIONS DE L'EMETTEUR ET DU RECEPTEUR

---

L'inversion de la technique Télélog en plaçant l'émetteur en surface et le récepteur dans le forage (voir figure.3.) a nécessité la construction d'une sonde réceptrice pouvant être descendue dans le forage au bout du câble du camion de mesures de la Société SCHLUMBERGER. Plusieurs essais ont été nécessaires avant d'obtenir l'ensemble d'appareillage actuel que nous décrivons plus loin.

Cette inversion a nécessité également de reprendre l'étude théorique précédente cette fois avec un dipôle électrique horizontal D.E.H. placé à la surface du sol. La théorie à faire est beaucoup plus complexe que celle initialement établie par le Professeur GABILLARD car elle fait intervenir des matrices à 4 lignes et 4 colonnes (contre 2 lignes et 2 colonnes dans la théorie initiale). Cette extension de la méthode théorique a constitué notre première contribution personnelle importante à l'étude du procédé Télélog.

En attendant les résultats de cette étude théorique nous avons mis au point des méthodes provisoires d'interprétation des télélogs. C'est à l'aide de ces méthodes que nous avons interprété les mesures effectuées au PERRAY et à St ILLIERS dans le courant de l'année 1969.

III.1. APPAREILLAGE DE TERRAIN

L'appareillage utilisé pour effectuer les expériences de télédia-  
graphie sur le terrain a été entièrement réalisé par l'équipe de Géopropagation  
de l'Université des Sciences et Techniques de LILLE<sup>(35), (36), (37), (38)</sup>.  
Nous donnons ci-dessous un aperçu succinct des caractéristiques essentielles de  
ce matériel.

# TELELOG

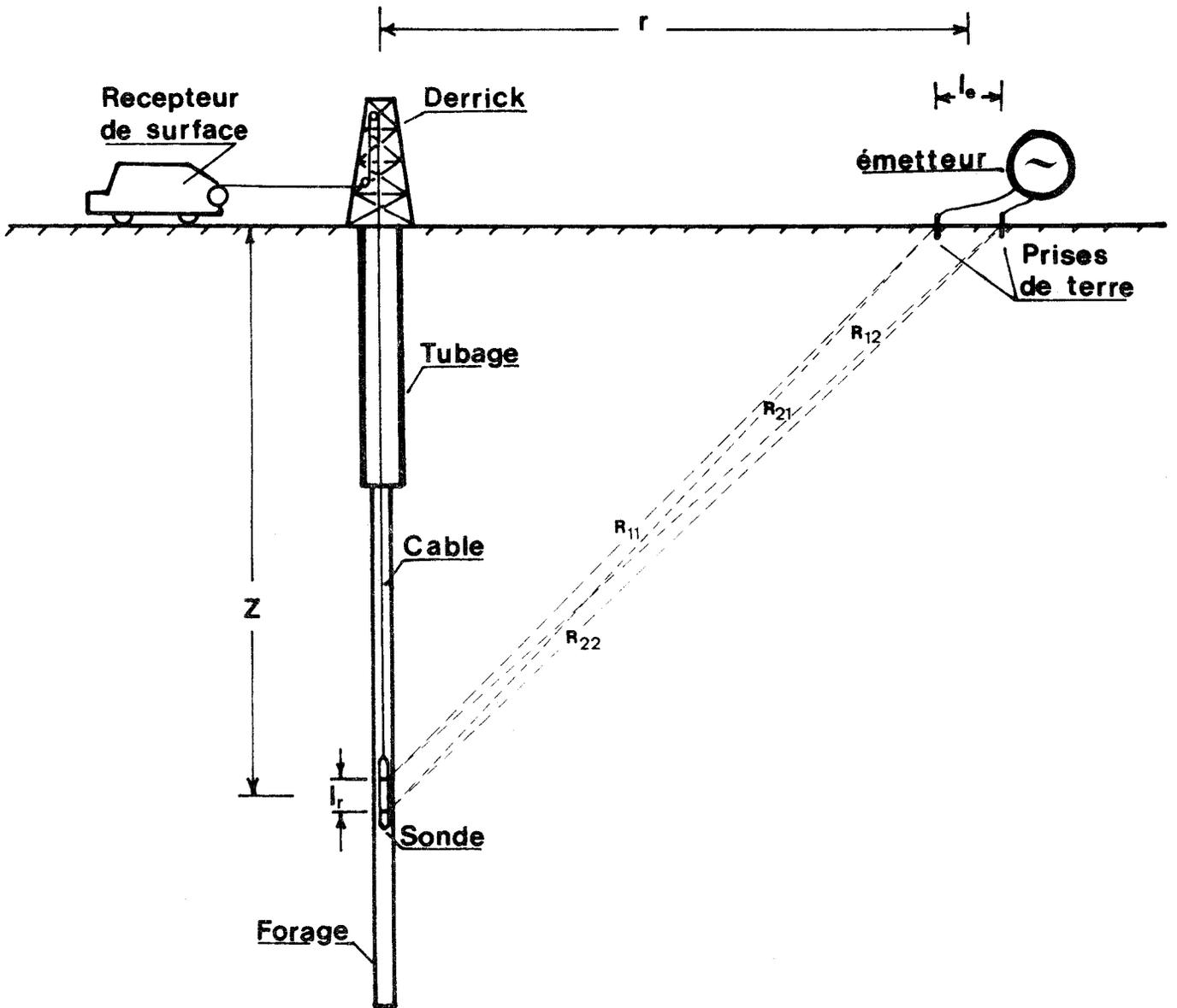


Figure . 3 .



### III.1.1. Choix de la fréquence de travail

Les premiers appareils réalisés fonctionnaient à une fréquence de 312,5Hz<sup>(35), (36)</sup>. A cette fréquence, et pour des terrains de résistivité moyenne (100 ~~Ωm~~), la profondeur maximum d'investigation de la sonde de mesure est de l'ordre de 800 mètres. Pour permettre d'effectuer des mesures à de plus grandes profondeurs, il faut choisir une fréquence plus basse. En effet, la profondeur de pénétration d'une onde électromagnétique dans un milieu conducteur est d'autant plus grande que sa fréquence est faible.

Il faut donc choisir une fréquence aussi basse que possible. Toutefois, aux très basses fréquences (fréquences inférieures à 10Hz), un certain nombre de contraintes interviennent<sup>(38)</sup>. En effet, la densité spectrale de bruit dans le sol ainsi que dans les amplificateurs électroniques croît lorsque la fréquence décroît. Pour réduire l'influence de ces bruits parasites, il faut augmenter le temps de mesure.

La fréquence de 12,5Hz qu'on a choisie devrait permettre d'effectuer des mesures jusqu'à 3000 mètres de profondeur tout en conservant un temps de mesure acceptable. Cette profondeur devrait être atteinte dans des terrains de résistivité moyenne avec une puissance d'émission de quelques kW.

### III.1.2. Poste d'émission

Le poste mobile d'émission se trouve en surface (figure.3.) ; l'émetteur de puissance qui alimente le D.E.H. est placé dans une camionnette chargée également par tout le matériel accessoire.

Le D.E.H. est formé de deux électrodes d'un mètre de longueur et 35mm de diamètre que l'on place dans deux trous remplis de boue de forage.

Les caractéristiques essentielles de l'émetteur dont la partie puissance est constituée par un cycloconvertisseur 400Hz-12,5Hz, sont les suivantes<sup>(37)</sup> :

Fréquence	: 12,5Hz
Tension maximum de sortie	: 700volts efficaces
Puissance maximum	: 10kW
Régulation de courant de sortie	> 5.10 <sup>-3</sup>

### III.1.3. Chaîne de réception

La chaîne de réception est composée de deux parties : une sonde descendue dans le forage (figure.3.) et un récepteur de surface relié à la sonde par un câble.

La sonde doit adapter le signal reçu aux bornes des électrodes de mesure aux caractéristiques du câble. Elle est constituée d'un amplificateur différentiel caractérisé par un très faible bruit propre et un taux de réjection en mode commun très élevé, suivi d'un filtre qui élimine une grande partie des signaux parasites captés par les électrodes et d'un amplificateur dont le gain peut être réglé à partir de la surface de façon à adapter la sonde à toutes les conditions de mesure<sup>(38)</sup>. Cette sonde est protégée contre l'humidité et peut fonctionner jusqu'à 125°C avec une précision de  $\pm 1\%$ .

Le récepteur de surface amplifie, filtre et détecte les signaux transmis par le câble et permet leur transcription sur un enregistreur optique ou magnétique. Lorsque la sonde se déplace dans un forage le signal reçu peut varier dans des proportions importantes. C'est pourquoi le détecteur possède une très grande dynamique suivi d'un amplificateur logarithmique qui permet un enregistrement aisé du signal.

Les caractéristiques essentielles de cette chaîne sont les suivantes :

Fréquences	:	12,5 ou 78,125Hz	
Gain de la sonde	:	400, 4000 ou 40000	$\pm 1\%$
Taux de réjection en mode commun de l'amplificateur différentiel	:	100dB	
Gain du récepteur de surface	:	2,5 ; 8,33 ; 25 ou 83,3	$\pm 1\%$
Bande passante de la chaîne	:	0,5 ; 0,1 et 0,02 Hz	
Dynamique du détecteur	:	80dB	
Diamètre de la sonde	:	petit Télélog 1 1/2"	grand Télélog 4"
Ecartement des électrodes	:	1m	15,40m
Longueur de la cartouche électrique :			1,20m
Longueur du câble	:		indifférente
Résistivité de la boue du forage	:		indifférente

La chaîne de réception réalisée par l'équipe de Géopropagation permet de traiter des signaux très faibles noyés dans un bruit de fond important. Cette chaîne est compatible avec l'appareillage de la Société de prospection électrique SCHLUMBERGER.

### III.2. METHODE DE TRAITEMENT DES TELELOGS

Les télélogs donnent une information brute sur le champ reçu dans un forage. On doit les normaliser puis les interpréter. Vu la nature fastidieuse de ce travail, celui-ci doit être fait sur ordinateur. Le traitement automatique des logs nécessite un enregistrement sous forme numérique.

#### III.2.1. Enregistrements sous forme numérique

Comme nous l'avons indiqué au §.III.1.3. précédent, le récepteur de surface permet la transcription des signaux reçus sur bande magnétique. L'enregistrement de la Société SHLUMBERGER nous a permis, lors des expériences effectuées à St ILLIERS (voir §.III.5.), d'enregistrer les télélogs sur bande magnétique.

L'équipe de Géopropagation<sup>(39)</sup> a mis au point un programme de traitement de mesures enregistrées sur bande magnétique. Ce programme permet la normalisation de logs, leur interprétation, et permet également de tracer les courbes correspondantes directement sur la table traçante annexée à l'ordinateur.

Dans le cas où l'enregistrement numérique fait défaut, nous pouvons digitaliser les logs enregistrés sur film photographique. Cette digitalisation est faite par la Société FRANLAB au moyen d'un procédé classique. Le résultat en est un paquet de cartes perforées. Chaque carte porte la valeur de la profondeur, la valeur de la résistivité locale, ainsi que les différentes valeurs de mesures effectuées à cette profondeur pour les différents emplacements de l'émetteur.

Cette technique justifie le principe de stratification fictive évoqué au §.I.9.1. 2ème partie.

### III.2.2. Normalisation des mesures

L'enregistrement brut obtenu doit être tout d'abord normalisé. En effet, l'interprétation se faisant par comparaison des intensités des signaux reçus pour des positions d'émetteur ou de récepteur différentes, il est indispensable d'appliquer aux résultats des mesures les corrections suivantes :

- a. Correction des variations du courant d'émission
- b. Correction des variations de longueur des bases d'émission
- c. Correction des variations de gain de la chaîne de réception.

Il ne s'agit pas là de variations aléatoires imprévisibles, mais de modifications résultant des commutations effectuées au cours des mesures par les opérateurs en fonction des conditions opératoires qui se présentent. Ces modifications résultent essentiellement de :

- a. La variation du courant de l'émission en fonction de l'impédance de la base
- b. L'impossibilité pratique d'installer une base à l'endroit théoriquement prévu sur le terrain
- c. La nécessité d'éviter la saturation d'un amplificateur de la chaîne de réception ou de l'enregistreur.

La normalisation que nous adoptons ramène le courant d'émission à un ampère, et le gain à 1. La normalisation étant faite sur ordinateur, nous pouvons avoir les valeurs normalisées enregistrées de nouveau sur bande magnétique ou inscrites sur cartes perforées. Cette dernière bande ou paquet de cartes est maintenant prêt à l'interprétation.

Le dernier modèle du récepteur de surface permet la normalisation par rapport aux différents paramètres. Cela nous donne des mesures directement exploitables et rend l'opération moins coûteuse.

III.3. METHODES PROVISOIRES D'INTERPRETATION DES TELELOGS (1969)

III.3.1. Terrain homogène équivalent à un terrain réel donné

Dans un sol parfaitement homogène de résistivité  $\rho$ , le champ électrique vertical  $E$  produit à la profondeur  $z$  le long de l'axe d'un forage par un D.E.H. situé à la surface à la distance  $r$  du forage et orienté vers lui, est donné par la formule :

$$E_z = 2p \frac{rz}{R_o^5} (3+3\gamma R_o + \gamma^2 R_o^2) e^{-\gamma R_o} \quad (7)$$

avec :

$$p = \frac{I \ell_e \rho}{4\pi}$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu/\rho}$$

$I$  et  $\ell_e$  étant respectivement le courant d'émission et la longueur du dipôle émetteur.

En réalité, le dispositif d'émission ne constitue pas un dipôle infinitésimal, pas plus que celui de réception. Pour obtenir la tension  $V$  disponible entre les électrodes de la sonde de réception, il faut intégrer la formule (7) par rapport à  $z$  entre  $(z-\ell_r/2)$  et  $(z+\ell_r/2)$  et par rapport à  $r$  entre  $(r-\ell_e/2)$  et  $(r+\ell_e/2)$ . Nous obtenons ainsi en remplaçant  $\rho$  par  $\rho_a$ :

$$V(z) = \frac{I \rho_a}{2\pi} \left( \frac{e^{-\gamma_a R_{11}}}{R_{11}} - \frac{e^{-\gamma_a R_{12}}}{R_{12}} - \frac{e^{-\gamma_a R_{21}}}{R_{21}} + \frac{e^{-\gamma_a R_{22}}}{R_{22}} \right) \quad (8)$$

avec :

$$\gamma_a = \sqrt{j\omega\mu/\rho_a}$$

$\rho_a$  étant la résistivité du terrain homogène équivalent au terrain réel.  $\rho_a$  est évidemment une fonction  $\rho_a(z)$  de la profondeur de la sonde réceptrice. La signification de  $R_{ij}$  est indiquée sur la figure.3.

III.3.2. Définition d'un indice d'anomalie

Nous pouvons définir un indice d'anomalie  $A(z)$  de la façon suivante :

$$A(z) = \frac{\rho_a(z)_n}{\rho_a(z)_l} \quad (9)$$

$\rho_a(z)_n$  est calculé par la formule (8) en y portant les valeurs de  $R_{ij}$ ,  $n$  désigne le numéro de télélog à interpréter.

$\rho_a(z)_l$  est calculé de la même façon, l'indice  $l$  indique qu'il s'agit d'un télélog obtenu avec l'émetteur placé à un endroit et dans une direction où on est bien sûr qu'il n'existe pas de gisement ou de structure géologique pouvant donner une anomalie de résistivité.

Le calcul de  $\rho_a$  par la formule (8) se fait sur ordinateur par une méthode d'approximations successives<sup>(2)</sup>.

En tenant compte du fait que nous utilisons de très basses fréquences, la formule (8) peut être mise sous la forme :

$$V(z) = \frac{I\rho_a(z)}{2\pi} F(R_{ij}) \quad (10)$$

avec :

$$F(R_{ij}) = \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} \quad (11)$$

et l'indice d'anomalie (9) devient :

$$A(z) = \frac{F_l(R_{ij}) \cdot V_n(z)}{F_n(R_{ij}) \cdot V_l(z)} \quad (12)$$

ou encore, si les points  $n$  et  $l$  sont symétriques par rapport au forage :

$$A(z) = \frac{V_n(z)}{V_l(z)} \quad (13)$$

#### III.4. EXPERIENCES EFFECTUEES AU PERRAY EN JUIN 1969

Le but de ces expériences était la mise en évidence de la possibilité d'effectuer un télélog avec la réception au fond et l'émission par un D.E.H. en surface.

En plus des essais de l'appareillage nouvellement construit (voir réf. 15), 2 télélogs ont été relevés en fonction de la profondeur avec l'émission située à 300mètres du forage en trois directions à 120°. Comme il s'agit de points symétriques nous appliquons la formule (13). La figure.4.

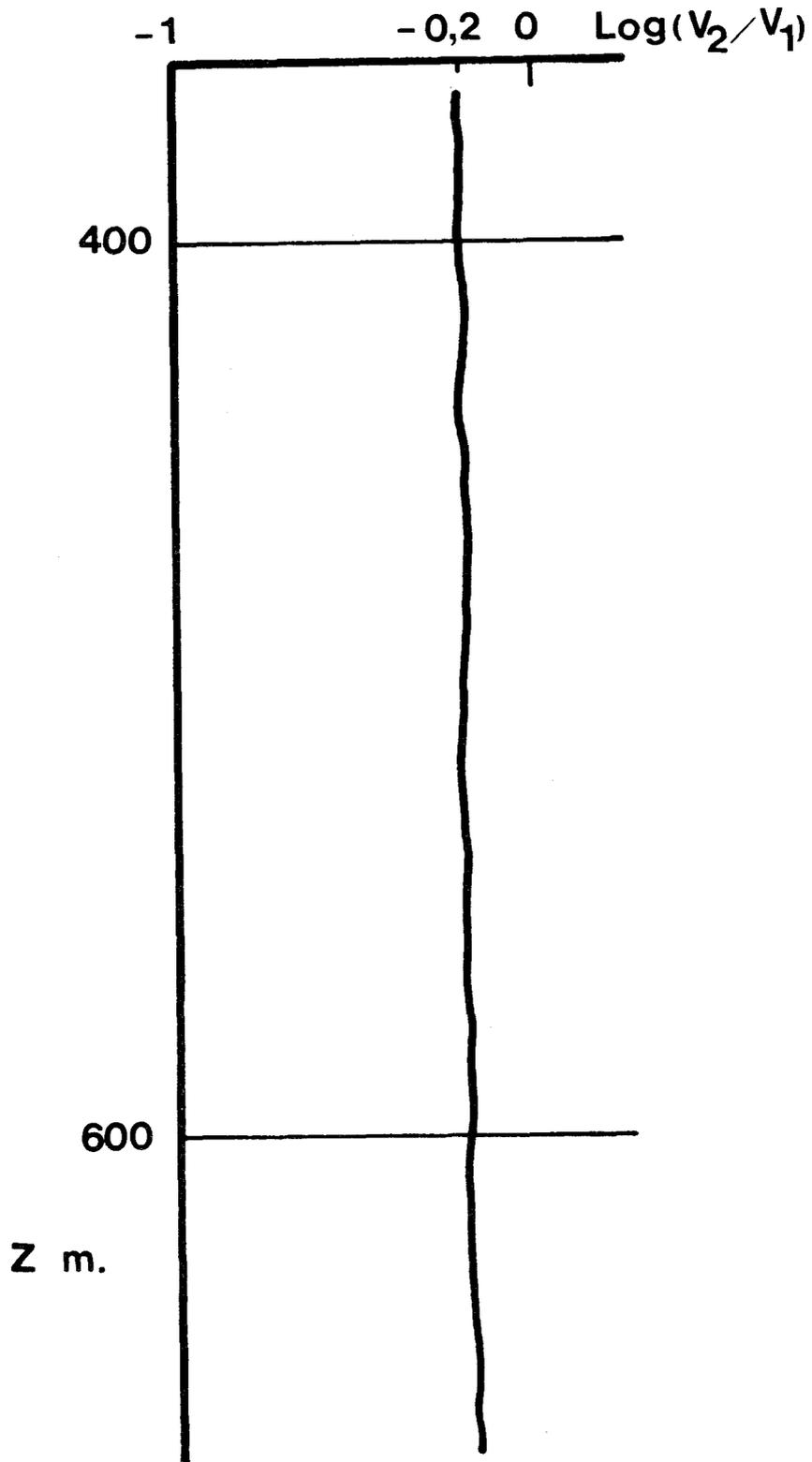


Figure - 4 -



montre le logarithme du rapport  $V_2(z)/V_1(z)$ , la direction (1) étant choisie comme direction de référence. Nous constatons ainsi pour le rapport  $V_3(z)/V_1(z)$ , un tracé parfaitement droit qui indique une parfaite symétrie de révolution des couches géologiques constituant le terrain autour du forage. Ce résultat est en accord avec les données géologiques.

Le tracé de la figure.4. ne passe pas pourtant par zéro, nous avons en effet :

$$\text{Log } \frac{V_2(z)}{V_1(z)} = -0,2$$

La cause de cette erreur vient du fait qu'à l'époque où les mesures ont été effectuées, on ne pouvait garantir ni la stabilité du gain du récepteur G, ni la stabilité du courant de l'émission I. A ceci s'ajoute l'erreur possible commise sur la valeur de la longueur  $\ell$  de la base d'émission. Nous avons en effet :

$$v_i(z) = (I_i \ell_i G_i) V_i(z)$$

$v_i(z)$  et  $V_i(z)$  étant respectivement enregistrées en surface et la tension au niveau des électrodes réceptrices par unité du courant et unité de longueur de la base d'émission, d'où

$$\text{Log } \frac{v_2(z)}{v_1(z)} = \text{Log } \frac{V_2(z)}{V_1(z)} + \text{Log } \frac{I_2 \ell_2 G_2}{I_1 \ell_1 G_1}$$

Si l'on est pas sûr de l'égalité de  $I_1 \ell_1 G_1$  et de  $I_2 \ell_2 G_2$  l'indice d'anomalie ne peut être défini qu'à une constante près. Ceci explique pourquoi l'équipe de Géopropagation s'est donné tant de mal pour obtenir les appareils stables que l'on possède actuellement.

### III.5. EXPERIENCES DE TELEDIAGRAPHE DE St ILLIERS, octobre 1969

#### III.5.1. But des expériences

Les expériences antérieures effectuées au PERRAY ont mis en évidence les possibilités du Télélog. Dans ce cas particulier étant donné la structure symétrique du terrain, les télélogs avaient parfaitement reflété la

régularité de cette structure. Il est donc apparu intéressant de tester le procédé dans un cas de structure de terrain plus accidenté. Le champ de St ILLIERS comporte en effet un piège structural utilisé pour stocker du gaz naturel.

Le but de ces expériences était le suivant :

- . Examiner le fonctionnement du dispositif récepteur qui avait subi un certain nombre de modifications compte tenu des résultats obtenus au PERRY.
- . Mettre en évidence la possibilité de déceler le gisement de gaz par des mesures de télédiagraphie.

### III.5.2. Description du champ de St ILLIERS

Le champ de St ILLIERS est situé en YVELINES. Ce champ appartient à la Société GAZ de FRANCE. Un piège structural, anticlinal, dont le sommet se situe à -340m par rapport au niveau de la mer, est utilisé pour stocker du gaz naturel. La couche réservoir est composée de sable moyen à grain très fin avec un banc de grés calcaire. La couche est de porosité 30%, et d'épaisseur moyenne de 30,4 mètres.

Le puits SI29 était disponible. C'est un puits de contrôle qui traverse la roche-réservoir dans la zone d'eau c'est-à-dire qu'il ne passe pas par le gisement de gaz lui-même. Le choix des bases d'émission nous a été imposé par les conditions de surface (topographie, bois, champs cultivés, etc...) et les possibilités d'accès. On a pu émettre sur 6 bases dont 4 sont situées dans la direction (A) du gisement; les deux autres sont dans la direction (B) opposée<sup>(14)</sup>.

### III.5.3. Résultats obtenus

Avec l'émission au point n°1 situé à 200m de l'axe du forage dans la direction opposée du gisement, un télélog d'essai a été enregistré pour l'intervalle 570 à 260 mètres de profondeur. L'examen de ce log nous a permis de

contrôler le bon fonctionnement et la stabilité des appareils et la qualité de mesure. Ce télélog a été choisi comme référence.

Nous donnons ci-après l'interprétation du télélog obtenu au point (2) situé à 600 mètres de l'axe du forage dans la direction du gisement. La figure.5. montre les deux fonctions  $\rho_a(z)_1$  et  $\rho_a(z)_2$  calculées par la formule (8) et la figure.6. montre l'indice  $d$  d'anomalie calculé par la formule (9). Dans un terrain ne possédant que des stratifications horizontales sans variations latérales de résistivité, l'indice  $A(z)$  devrait être constamment nul (cas du PERRY). Or, nous observons une nette valeur positive entre 479 et 539 mètres de profondeur. Cet intervalle est quasiment centré sur la profondeur du gisement qui est de 500 mètres par rapport au niveau du sol. Cette déviation de l'indice est certainement due à la présence du gaz.

Les déviations plus localisées de l'indice entre  $z=412$  et  $424m$ , puis entre  $z = 463$  et  $479m$ ètres, peuvent être dues aussi à des anomalies latérales de résistivité situées près du forage. Mais elles peuvent aussi être dues au fait que dans la direction choisie comme référence le terrain n'est pas dépourvu de toute anomalie, d'où l'inconvénient de cette méthode provisoire d'interprétation.

Nous pouvons conclure en disant que les télélogs de St ILLIERS ont permis de mettre en évidence des valeurs positives des indices d'anomalie. Ces résultats sont en accord avec la présence du gisement de gaz connu situé à 500 mètres de profondeur et à environ 300 mètres de l'axe du forage.

#### III.5.4. Remarques

En 1969 nous n'avions pas été capables de trouver (en utilisant les méthodes d'interprétation dont nous disposions alors) , autre chose qu'un indice de présence du gaz. En reprenant l'interprétation des résultats expérimentaux de 1969 avec les méthodes d'interprétation mises au point en 1970, on peut aussi en extraire la distance  $d$  du bord du gisement au forage.

En effet, nous constatons que  $\rho_a$  tracé en fonction de  $r$  dans la direction du gisement pour  $z = h = 500$  mètres, présente un minimum pour une distance critique  $r_c$  (figure.7.):

$$400 < r_c < 500 \text{ mètres}$$

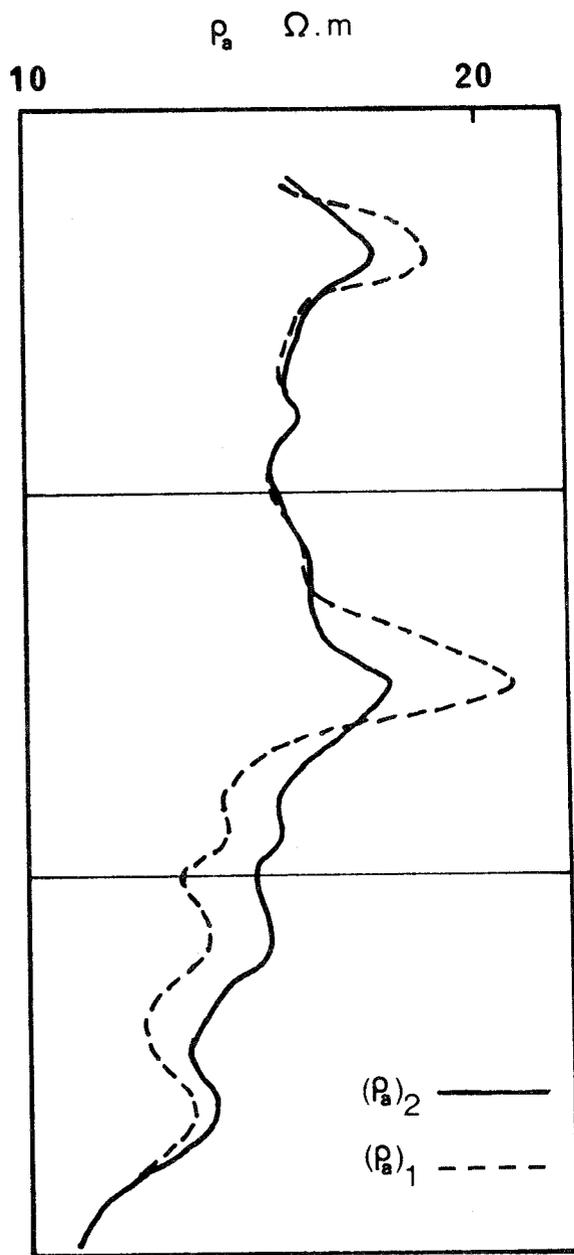


Figure . 5 .

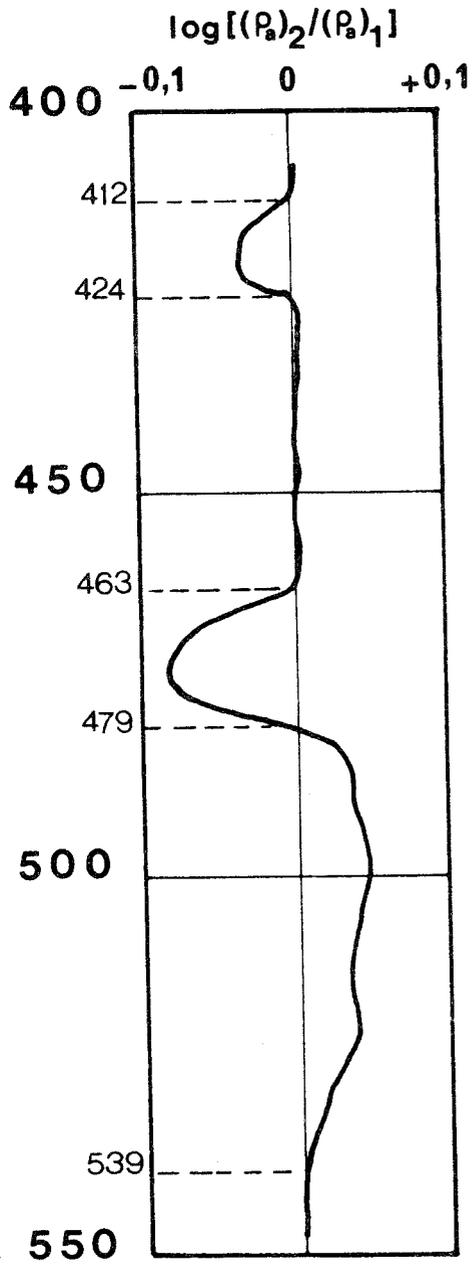
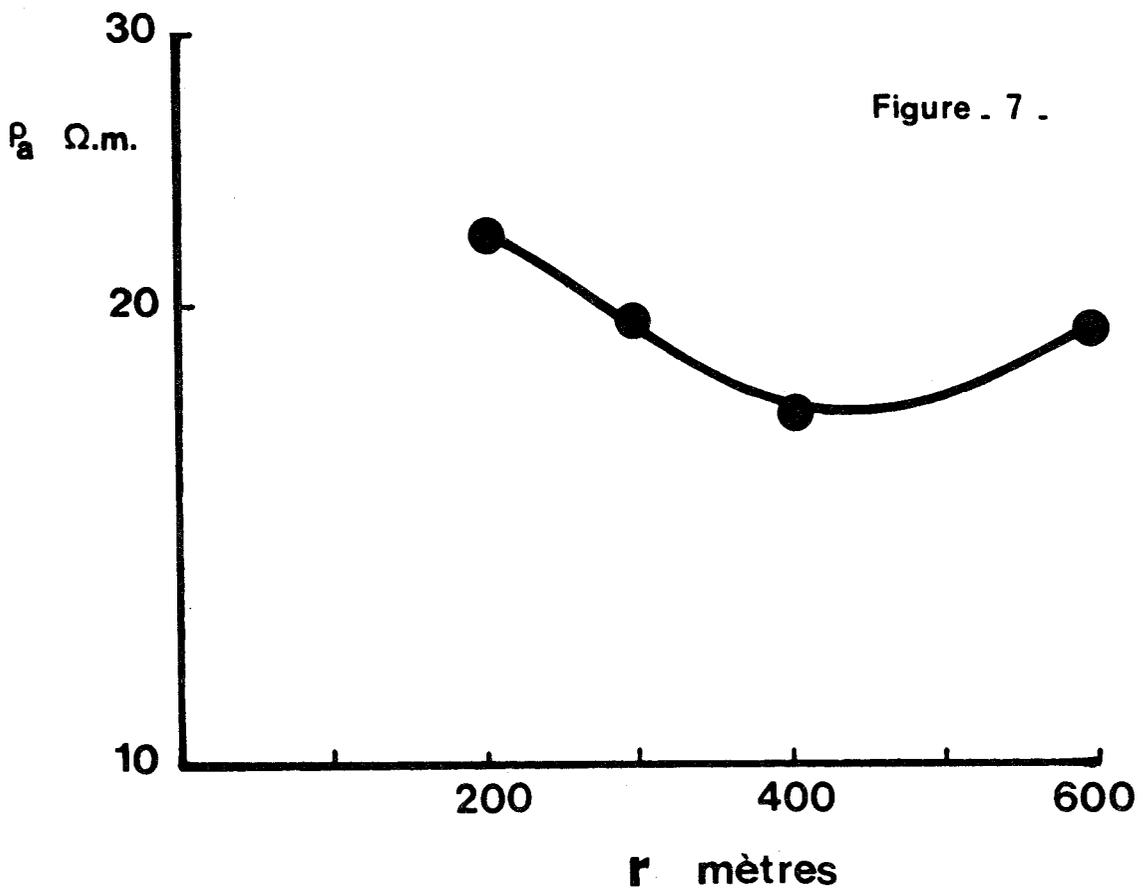


Figure . 6 .





qui donne à l'aide de l'abaque théorique  $d(r_c)$  de la figure.52. :

$$280 < d < 330 \text{ mètres}$$

Au moment des expériences le contact eau-gaz était à - 420 mètres au-dessous du niveau de la mer. Ceci correspond à une distance  $d$  de 300 mètres. Cette valeur est bien située dans la fourchette donnée par le Télélég.

III.6. THEORIE MATRICIELLE DE LA PROPAGATION DANS UN MILIEU STRATIFIE  
D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE EMISE PAR UN DIPOLE ELECTRIQUE  
HORIZONTAL (D.E.H.)

Cette théorie que nous exposons au chapitre premier de la deuxième partie de notre thèse constitue une contribution importante que nous avons personnellement apportée aux méthodes d'interprétation. Elle donne sous forme d'intégrale (formule I.123.) l'expression du champ électrique vertical produit dans une couche quelconque du milieu stratifié par un D.E.H. à la surface du sol. Le calcul de cette intégrale est a priori impossible. Néanmoins, nous avons utilisé l'expression (I.123.) sous sa forme intégrale pour expliquer l'aspect du télélég et pour établir une formule définissant la contraste de conductivité  $\sigma_{m+1}/\sigma_m$  de deux couches adjacentes.

III.6.1. Explication de l'aspect du télélég

Sur la figure.8. nous voyons un extrait de "latérolog" enregistré dans le forage du PERRAY; sur l'intervalle présenté, on distingue facilement quatre couches différentes. La première couche est de 22 mètres d'épaisseur (431 - 453 mètres) dont la résistivité moyenne est de 70 Ohms.m. Les trois autres couches sont de 5, 3 et 4,5 m. d'épaisseur, leur résistivité moyenne est respectivement de 20, 40 et 12 Ohms.m.

Nous voyons à gauche l'extrait du télélég enregistré dans le même forage. Sur le même intervalle, nous distinguons encore les 4 mêmes couches que précédemment, et nous constatons que le signal reçu

Résistivité en  $\Omega.m.$

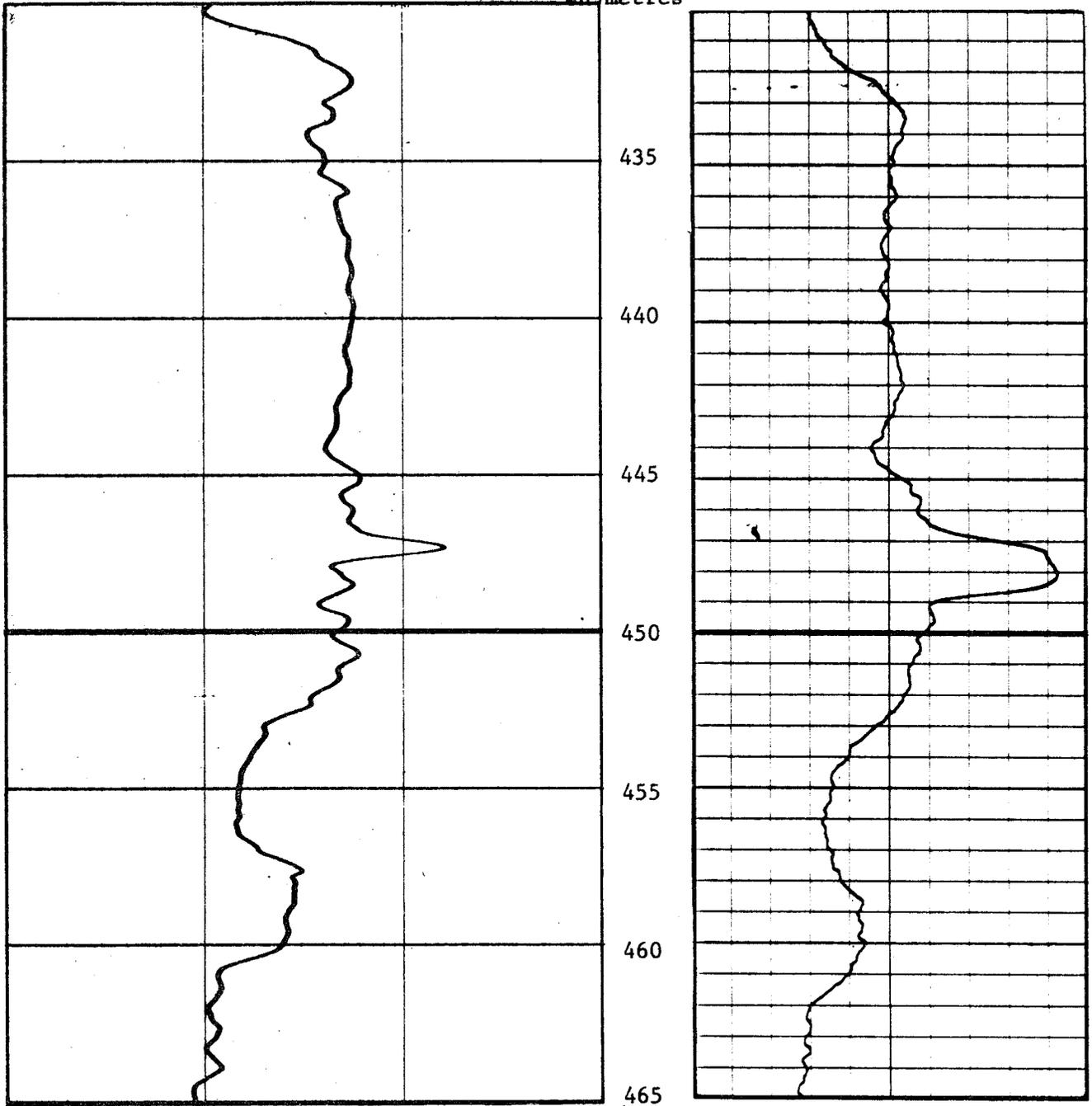
Signal reçu en Volts

10 100

Profondeur  
en mètres

5

10



Log de résistivité  
Extrait du Latérolog

Télédiagraphie  
Extrait du Log n°1  
LE PERRYAY JUIN 1969



Figure. 8.

par la sonde de Télédiagraphie est proportionnel à la résistivité. Les limites des couches sont néanmoins moins nettes sur le télélog. L'intercallation résistive qui existe au sein de la première couche à 447,5 mètres de profondeur se trouve de ce fait exagérée sur le télélog. Mais il s'agit là de petites différences qui résultent du fait que les deux sondes ne possèdent pas la même résolution verticale.

Il existe donc entre le Télélog et le latérolog une corrélation remarquable. Cette corrélation s'explique à l'aide de la formule (I.123.) que nous mettons sous la forme schématique suivante :

$$E_m = \rho_m \left( - \frac{I \ell}{4\pi} \cos \phi \right) \int_0^{\infty} F(L_{ij}, N_{ij}, z) J_1(\lambda r) \frac{\lambda^2}{u_0} d\lambda \quad (14)$$

$\rho_m$  ( =  $\frac{1}{\sigma_m}$  ) étant la résistivité de la couche m.

$L_{ij}$  et  $N_{ij}$  sont respectivement les éléments des matrices  $(V)_{m_0}$  et  $(V)_{M_0}$ . Les éléments  $L_{ij}$  dépendent des caractéristiques des  $(m+1)$  couches numérotées de 0 à m qui se trouvent entre l'émetteur et le récepteur. Nous pouvons donc associer l'intégrale intervenant dans l'expression (I.123.) à la notion de conductivité équivalente  $\sigma_e$ . Celle-ci est la conductivité du terrain supposé homogène qui devrait exister entre l'émetteur et le récepteur pour qu'on obtienne le même champ  $E_m$ .

Lorsque le récepteur passe de la couche m à la couche suivante m+1, seuls les éléments  $L_{ij}$  et  $\rho_m$  varient avec la profondeur z du récepteur. L'intégrale dépend maintenant des caractéristiques du nouvel ensemble des couches numérotées de 0 à m+1 et elle peut être associée à nouveau à la conductivité équivalente, la couche m+1 étant cette fois prise en considération.

Une formule approchée souvent employée en géophysique définit  $\sigma_e$  (18) :

$$\sigma_e = \left[ \frac{\sum_m h_m \sqrt{\sigma_m}}{\sum_m h_m} \right]^2 \quad (15)$$

Il en résulte que pour chaque nouvelle couche traversée la variation correspondante de  $\sigma_e$  est d'autant plus faible que la profondeur de la sonde ( $z = \sum_m h_m$ ) est plus grande.

La conductivité équivalente  $\sigma_e$  varie donc beaucoup moins rapidement avec la profondeur que la conductivité locale  $\sigma_m$ . Le signal recueilli par la sonde de Télédiagraphie sera donc modulé par la résistivité locale des couches. Ceci explique très bien la corrélation qui existe entre le téléllog et un log de résistivité

Les extraits de téléllog et de latérollog de la figure.9. confirment cette corrélation. Cependant aux petites différences qui existent entre les deux logs à cause de leurs résolutions verticales différentes s'ajoutent quelques anomalies. En effet la couche située entre 537,5 et 602 m. de profondeur peut être considérée d'après le latérollog comme une couche plus ou moins homogène de résistivité moyenne 140  $\Omega.m$  ayant tendance à diminuer avec la profondeur. Le signal de télédiagraphie enregistré dans cette couche n'est pas celui d'une couche homogène ; en outre ce signal augmente avec la profondeur.

La sonde de latérollog est un outil de mesure locale de résistivité dont le rayon d'investigation est de quelques mètres seulement. Par contre le téléllog possède un rayon d'investigation plus important du fait que l'émetteur est situé en surface. L'anomalie remarquée est donc une anomalie latérale située à une certaine distance de l'axe du forage et de ce fait non décelable par les outils conventionnels de diagraphie. Une valeur de la résistivité des couches calculée à partir du téléllog est donc très intéressante car elle mettra en évidence l'existence des anomalies latérales, ce que nous illustrons au §.III.6.2. suivant.

### III.6.2. Mise en évidence de l'éventuelle existence d'une anomalie latérale dans la direction du D.E.H.

L'étude théorique de la propagation dans un terrain stratifié d'une onde électromagnétique émise à la surface du sol par un D.E.H. nous a permis également d'établir une formule de récurrence liant deux valeurs consécutives de la résistivité des différentes couches de terrain.(3)

Cette formule (voir formule I.151.) s'écrit en remplaçant la conductivité  $\sigma_m$  par  $1/\rho_m$  :

$$\rho_{m+1} = \rho_m \frac{E_{m+1}}{E_m} / \left\{ E_m \left( 1 + \sum_{q=1}^{\infty} I_q \right) - \sum_{q=0}^{\infty} J_q \right\} \quad (16)$$

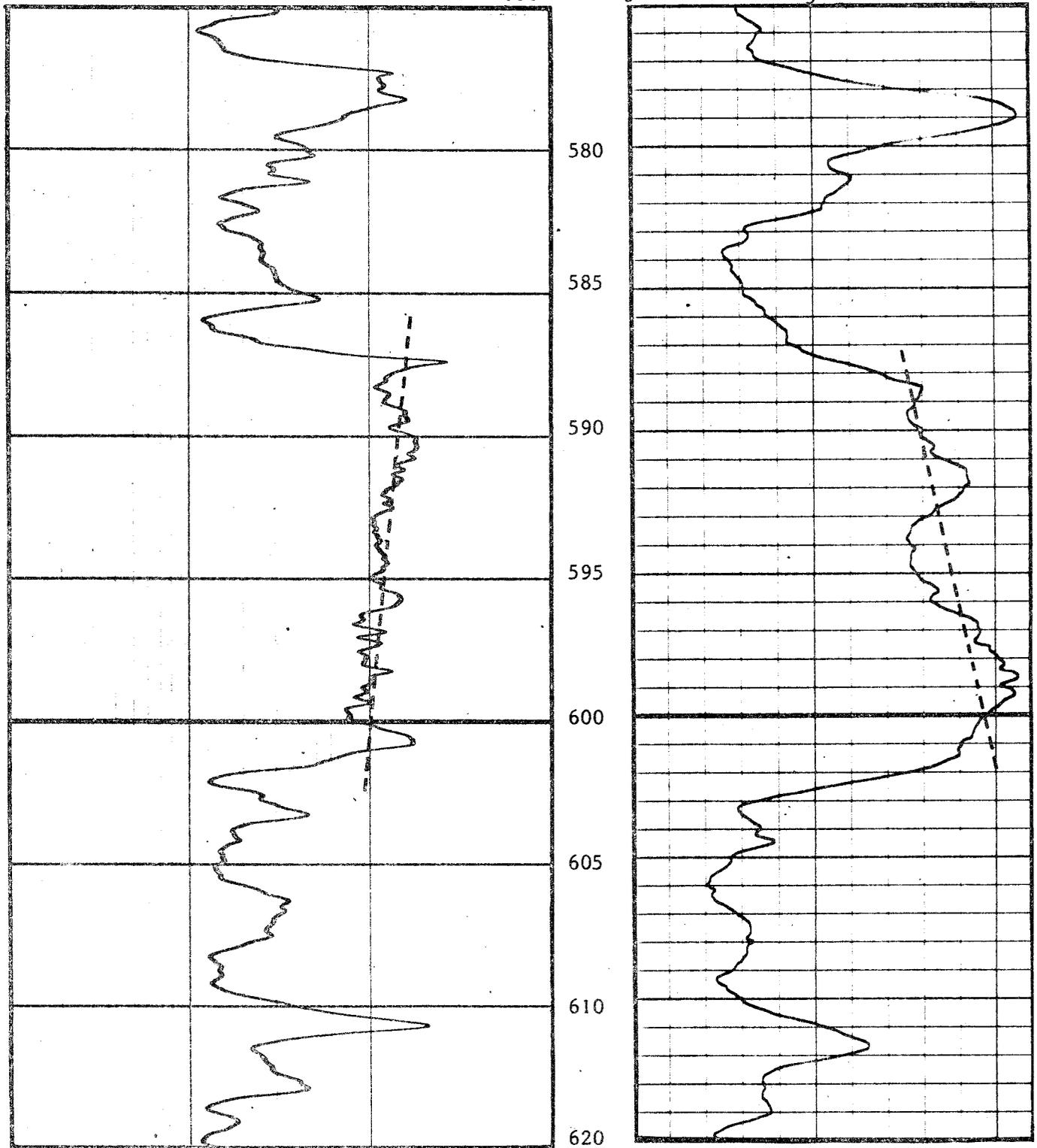
Résistivité en  $\Omega.m.$

Profondeur  
en mètres

Signal reçu en Volts

10 100 1000

0 5 10



Log de résistivité  
Extrait du Latérolog

Télédiagraphie  
Extrait du Log n°1



-LE PERRY JUN 1969 -

Figure. 9.

avec :

$$I_q = \frac{(2j)^q}{-2q!} \left( \frac{h}{\delta_m} \right)^{2q}$$

$$J_q = \frac{h^{2q+1}}{(2q+1)!} \frac{\partial^{2q+1}}{\partial z^{2q+1}} E_m$$

$E_m$  et  $E_{m+1}$  sont les deux valeurs du champ électrique vertical mesurées dans les deux couches consécutives  $m$  et  $m+1$  ;  $h$  est l'épaisseur régulière des couches fictives (voir §.I.9. 2ème partie. Principe de la stratification fictive), et  $\delta_m$  est la profondeur de pénétration définie par la formule (I.150.).

Les moyens techniques dont on dispose permettent de choisir  $h$  égale à 0,25 mètre ;  $h$  est donc suffisamment petit pour que l'on puisse réduire les sommes de terme général  $I_q$  et  $J_q$  qui figurent dans la formule de récurrence (16) à leurs seuls premiers termes  $I_1$  et  $J_0$  définis par les formules suivantes :

$$I_1 = j \left( \frac{h}{\delta_m} \right)^2 \tag{17}$$

$$J_0 = h \frac{\partial E_m}{\partial z} \tag{18}$$

D'autre part, nous avons par définition :

$$\frac{\partial E(z)}{\partial z} = \frac{1}{h} \{ E(z+h) - E(z) \} \tag{19}$$

ce qui s'écrit encore d'après le principe de la stratification fictive :

$$\frac{\partial E_m}{\partial z} = \frac{1}{h} (E_{m+1} - E_m) \tag{20}$$

La formule (16) s'écrit donc :

$$\rho_{m+1} = \rho_m / \left\{ \frac{E_m}{E_{m+1}} \left[ 2 + j \left( \frac{h}{\delta_m} \right)^2 \right] - 1 \right\} \tag{21}$$

Cette formule de récurrence peut être utilisée pour interpréter les mesures de télédiagraphie afin de mettre en évidence l'influence d'une anomalie latérale éventuelle dans la direction du D.E.H. situé à la surface du sol.

Considérons deux couches adjacentes  $m$  et  $m+1$  dont les valeurs  $E_m$  et  $E_{m+1}$  sont obtenues à partir des mesures de télédiagraphie. Nous relevons également les valeurs de la résistivité locale  $(\rho_m)_L$  et  $(\rho_{m+1})_L$  sur un log classique de résistivité. Si l'on suppose que la couche  $m$  ne contient aucune anomalie, on a :

$$\rho_m = (\rho_m)_L$$

et on extrait facilement la valeur de  $\rho_{m+1}$  à l'aide de la formule (21).

Définissons l'indice d'anomalie latérale qui peut exister dans la couche  $m+1$  par la formule :

$$A_{m+1}(z) = \frac{\{\rho_{m+1}(z)\}_{\text{télélog}}}{\{\rho_{m+1}(z)\}_{\text{locale}}} - 1 \quad (22)$$

Considérons ensuite les deux couches suivantes d'indice  $m+1$  et  $m+2$  et appliquons le même principe de calcul jusqu'à ce que l'intervalle intéressant soit couvert. La fonction  $A(z)$  ainsi obtenue indique les différentes couches possédant une anomalie latérale et l'importance de celle-ci.

L'indice d'anomalie ainsi calculé pour l'intervalle 353 - 615 mètres de profondeur du forage du PERRAY est situé dans la fourchette  $\pm 4\%$  (voir tableau.I. et figure.10.). Ainsi on ne relève aucune anomalie importante; ceci est en parfait accord avec la structure géologique connue que traverse le forage.

Nous pouvons également mettre en évidence l'éventuelle existence d'une anomalie latérale en calculant un autre indice d'anomalie défini par la formule suivante :

$$A_m(z) = \frac{E_m(z)_{\text{mesuré}}}{E_m(z)_{\text{théorique}}} - 1 \quad (23)$$

Dans cette formule,  $E_m(z)$  théorique est calculé par la formule (II.64.) que nous avons établie au chapitre.2. de la deuxième partie de notre thèse.

La figure.11. montre, en trait plein, un extrait du télélog  $E_m(z)$  théorique calculé par la formule (II.64.) pour un émetteur placé à 300m de l'axe du forage du PERRAY. Nous avons tracé en pointillé sur la même figure le télélog effectivement mesuré sur le terrain.

LE\*PERRY\*

CALCUL\*DE\*LA\*RESISTIVITE\*PAR\*RECURRENCE\*

Profondeur en mètres	Résistivité locale ohms.mètres (Latéolog)	Log de Télédiagraphie volts	Résistivité calculée ohms.mètres	Indice d'anomalie %
353.00	67.47	8.45	66.52	-1.42
353.25	66.92	8.38	66.48	-.66
353.50	66.00	8.30	65.62	-.58
353.75	64.83	8.20	64.39	-.67
354.00	63.42	8.09	63.11	-.50
354.25	62.12	7.98	61.80	-.52
354.50	60.80	7.88	60.51	-.47
354.75	59.17	7.78	59.35	.30
355.00	57.15	7.70	57.90	1.31
355.25	55.75	7.62	56.05	.53
355.50	55.15	7.56	54.88	-.49
355.75	55.12	7.52	54.53	-1.07
356.00	55.40	7.50	54.76	-1.16
356.25	55.80	7.49	55.29	-.92
356.50	56.08	7.49	55.84	-.42
356.75	55.90	7.50	56.26	.65
357.00	55.35	7.53	56.31	1.74
357.25	54.83	7.58	56.13	2.38
357.50	54.45	7.67	56.07	2.97
357.75	54.52	7.78	56.00	2.70
358.00	54.75	7.89	56.23	2.71
358.25	55.27	8.03	56.62	2.43
358.50	56.83	8.16	57.17	.60
358.75	59.40	8.30	58.81	-1.00
359.00	60.87	8.44	61.47	.99
359.25	61.25	8.57	62.74	2.43
359.50	61.35	8.68	62.73	2.25
359.75	61.47	8.75	62.38	1.48
360.00	61.55	8.79	62.11	.91
360.25	61.40	8.82	61.97	.93
360.50	61.30	8.84	61.57	.45
360.75	61.47	8.84	61.30	-.28
361.00	61.55	8.83	61.41	-.23
361.25	61.35	8.83	61.48	.21
361.50	60.85	8.81	61.14	.48



Extrait des résultats numériques de l'interprétation du log de télédiagraphie n°1

LE PERRY - JUIN 1969 -

TABLEAU I.

LE PERRAY

CALCUL DE LA RESISTIVITE PAR RECURRENCE

INDICE D'ANOMALIE --%

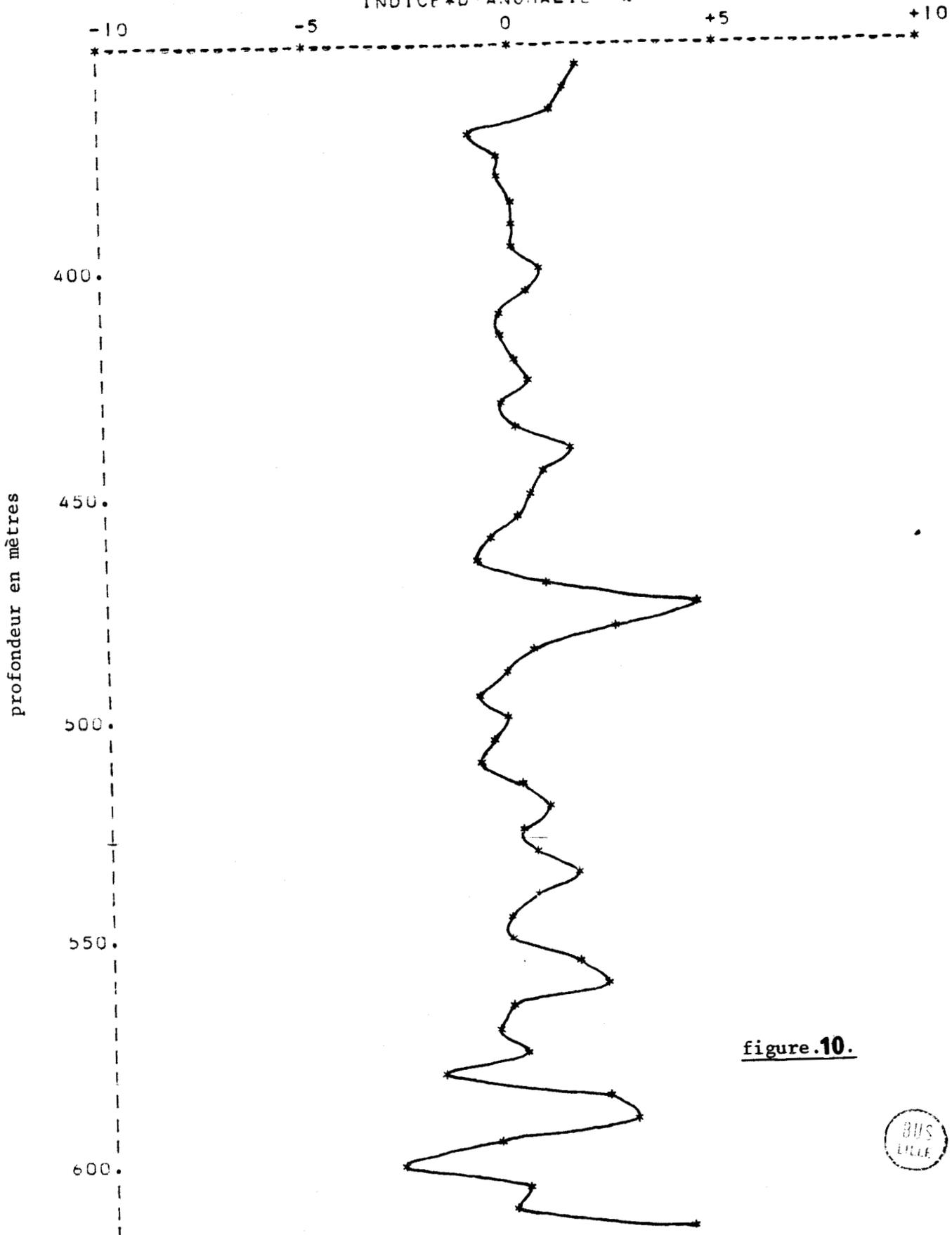


figure.10.



Pour le calcul du champ, nous avons relevé les valeurs de la résistivité des couches sur le latérolog. Le télélog théorique possède donc une résolution verticale semblable à celle du latérolog. Ceci explique la discordance entre le télélog théorique et le télélog mesuré pour les couches minces dont l'épaisseur est inférieure à 1 mètre.

A part les couches minces et la couche "a" située entre 589 et 592 mètres de profondeur, nous constatons une corrélation remarquable entre les deux logs présentés figure.11. Une telle corrélation est compréhensible car au PERRY les couches sont horizontales et présentent peu d'anomalies latérales.

Etant donné ces résultats, la formule (II.64.) peut avoir une deuxième application en Télédiagraphie. Cette application est le calcul d'un télélog théorique. Nous savons ainsi l'ordre de grandeur du champ que l'on devrait mesurer et nous pouvons en toute connaissance de cause choisir le gain optimum de la chaîne de réception.

### III.7. CONCLUSIONS

Cette nouvelle technique Télélog, avec l'émetteur en surface et le récepteur au fond, était facilement industrialisable. L'installation des bases d'émission ne diffère point des travaux qui sont nécessaires lors d'une campagne de géophysique classique de surface. La chaîne de réception peut être facilement rendue compatible avec les appareillages des Sociétés de prospection. Cette chaîne est déjà compatible avec ceux de la Société de prospection électrique SCHLUMBERGER.

Pour cette nouvelle technique nous avons donc mis au point une méthode d'interprétation capable de mettre en évidence l'existence d'une hétérogénéité latérale et de la situer en profondeur.

La distance séparant cette hétérogénéité de l'axe du forage était un autre paramètre très important qui restait à déterminer.

L'étude théorique du problème de propagation des ondes électromagnétiques dans un terrain enfermant des hétérogénéités implique l'écriture des conditions aux limites sur l'interface air-sol, mais également sur toutes

champ électrique vertical  $E_z$   $\mu$ volts/mètre

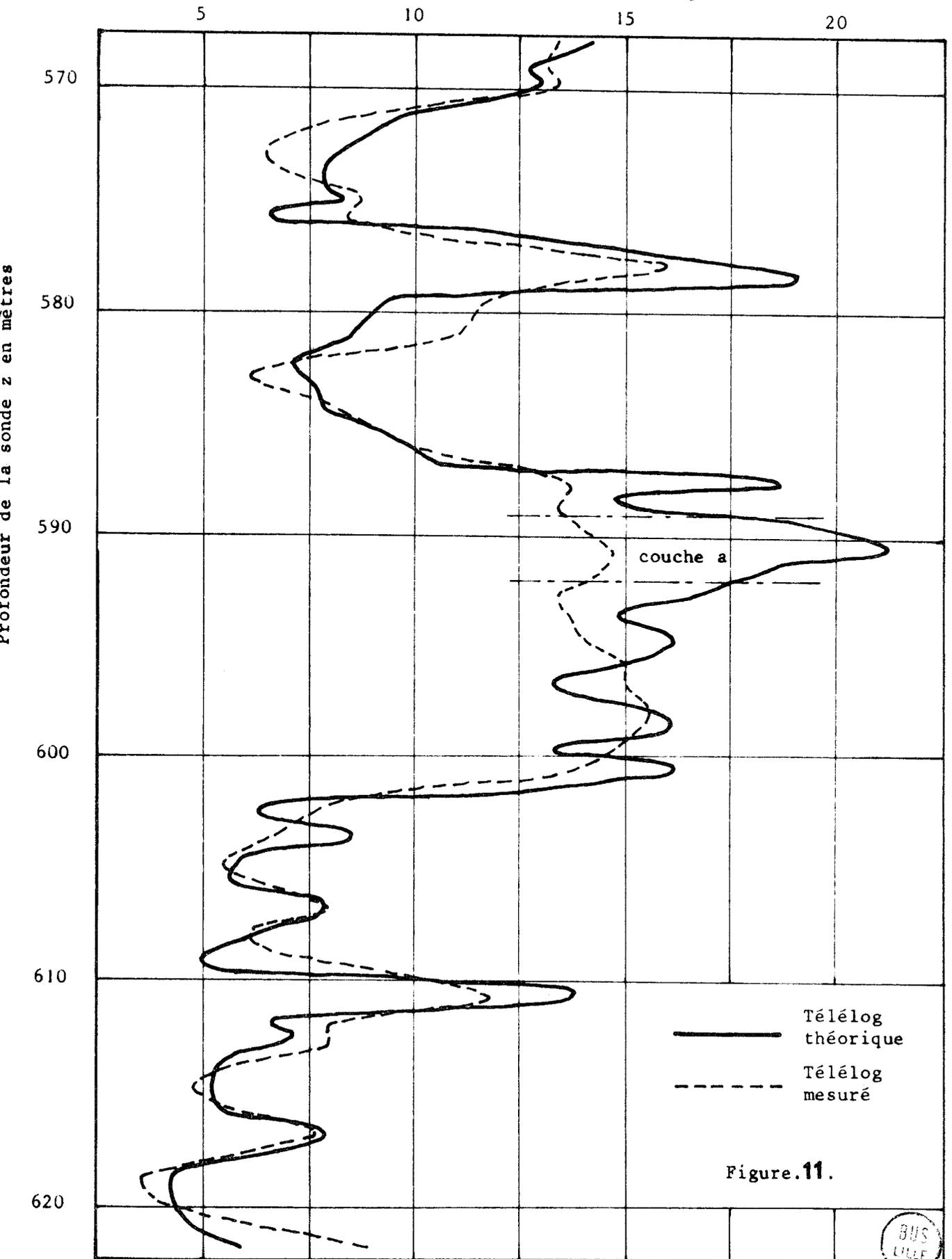


Figure.11.

BUS  
LILLE

les surfaces de discontinuité. Le traitement d'un tel problème est compliqué, voire impossible lorsque les hétérogénéités présentent des formes quelconques, ce qui est presque toujours le cas. Il était par contre possible d'étudier ce problème sur modèle analogique<sup>(30), (46)</sup>.

4ème ETAPE

ETUDE ANALOGIQUE

IV.1. LE MODELE ANALOGIQUE

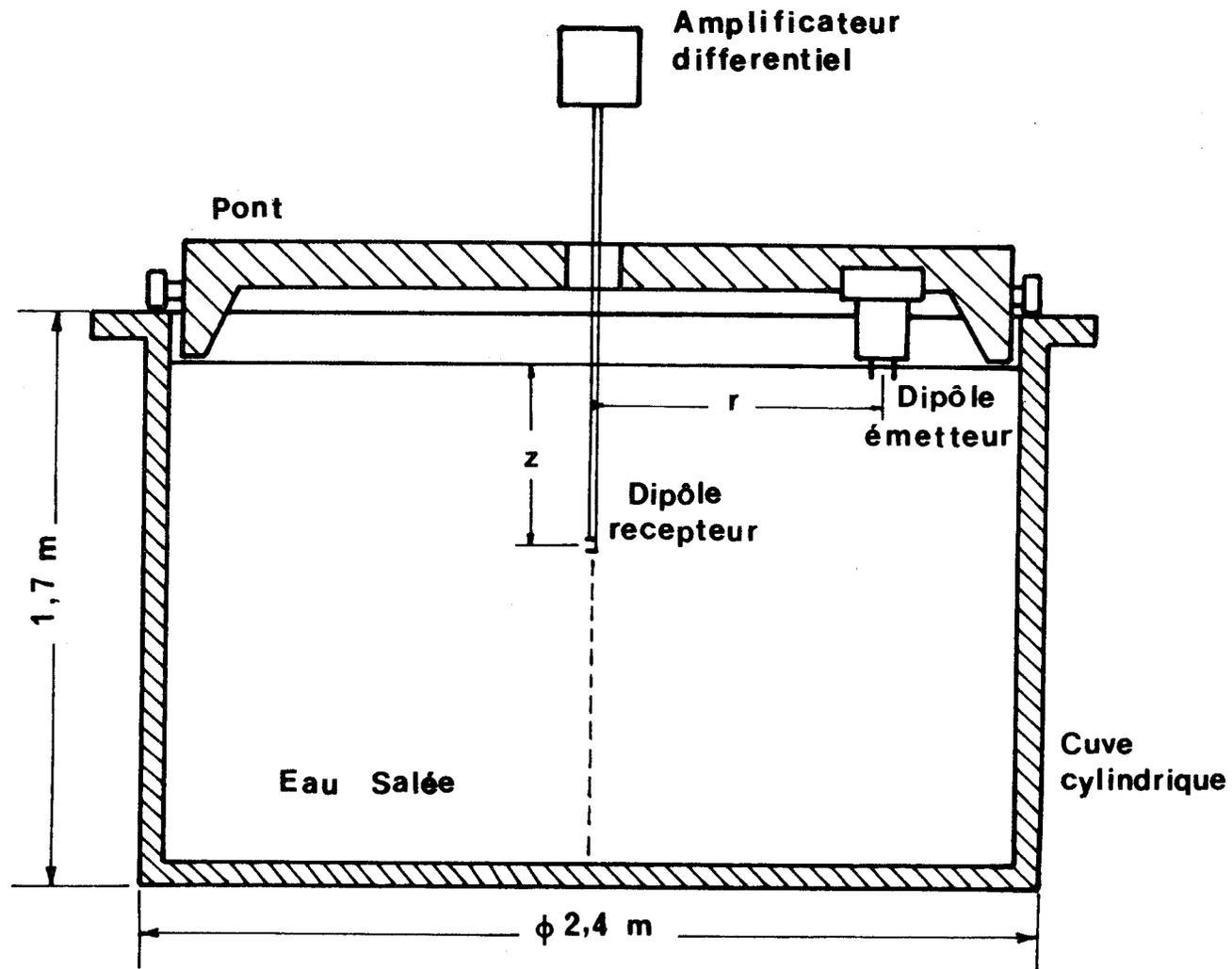
IV.1.1. Description du modèle

Le modèle analogique (figure.12.) a été mis au point par l'équipe de géopropagation <sup>(32), (33), (34)</sup>. Le milieu conducteur est constitué d'une solution d'eau salée dont la conductivité varie suivant la concentration en sel. Cette solution est contenue dans une cuve cylindrique réalisée en stratifié de laine de verre. La cuve est de 2,40 m de diamètre sur 1,70 m de profondeur.

Le dispositif émetteur se compose d'un générateur de courant sinusoïdal de fréquence 200kHz. Ce générateur excite un dipôle électrique horizontal placé à la surface de l'électrolyte. Ce dipôle, de longueur  $l_e$  égale à 2cm, peut se déplacer sur toute la surface du liquide.

Le dispositif de réception se compose d'un dipôle vertical de longueur  $l_r$  ( $l_r = 2$  cm). Ce dipôle se déplace suivant l'axe vertical de la cuve. Les dipôles émetteur et récepteur se déplacent à l'aide de moteurs électriques ; des capteurs indiquent leurs positions de façon précise.

Le signal recueilli est amplifié, filtré et détecté avec un gain suffisant afin d'être exploité convenablement. L'enregistrement de ce signal se fait sur table traçante et sur bande perforée.



## Modèle analogique

Figure .12.



#### IV.1.2. Etalonnage du modèle

L'étalonnage du modèle analogique est effectué en relevant la tension  $V$  aux bornes des électrodes réceptrices pour une valeur donnée de la distance radiale  $r$  de l'émetteur, ceci en fonction de la profondeur  $z$ .

La figure.13. montre les courbes  $V_z(r)$  relevées pour  $r$  égal à 20, 30, et 40 cm. Les croix indiquent les points calculés à partir de l'expression théorique de "V" donnée pour un demi-milieu homogène et infini :

$$V = \frac{I}{2\pi\sigma} \left\{ \frac{e^{-\gamma R_{11}}}{R_{11}} - \frac{e^{-\gamma R_{12}}}{R_{12}} - \frac{e^{-\gamma R_{21}}}{R_{21}} + \frac{e^{-\gamma R_{22}}}{R_{22}} \right\} \quad (24)$$

où  $I$ ,  $\sigma$  et  $\gamma$  sont respectivement le courant émis, la conductivité de l'électrolyte et la constante de propagation.

Les distance  $R_{ij}$  sont définies par :

$$R_{11}^2 = \left( r - \frac{l_e}{2} \right)^2 + \left( z - \frac{l_r}{2} \right)^2 \quad (25)$$

$$R_{12}^2 = \left( r + \frac{l_e}{2} \right)^2 + \left( z - \frac{l_r}{2} \right)^2 \quad (26)$$

$$R_{21}^2 = \left( r - \frac{l_e}{2} \right)^2 + \left( z + \frac{l_r}{2} \right)^2 \quad (27)$$

$$R_{22}^2 = \left( r + \frac{l_e}{2} \right)^2 + \left( z + \frac{l_r}{2} \right)^2 \quad (28)$$

Les courbes expérimentales montrent une bonne concordance avec les points théoriques. Le modèle simule avec une assez bonne précision un demi-milieu homogène infini.

#### IV.1.3. Simulation des hétérogénéités

On a, pour des raisons pratiques, simulé l'air par l'air et le sol par une solution d'eau salée. Il reste à déterminer les matériaux dans lesquels les modèles réduits des hétérogénéités vont être découpés.

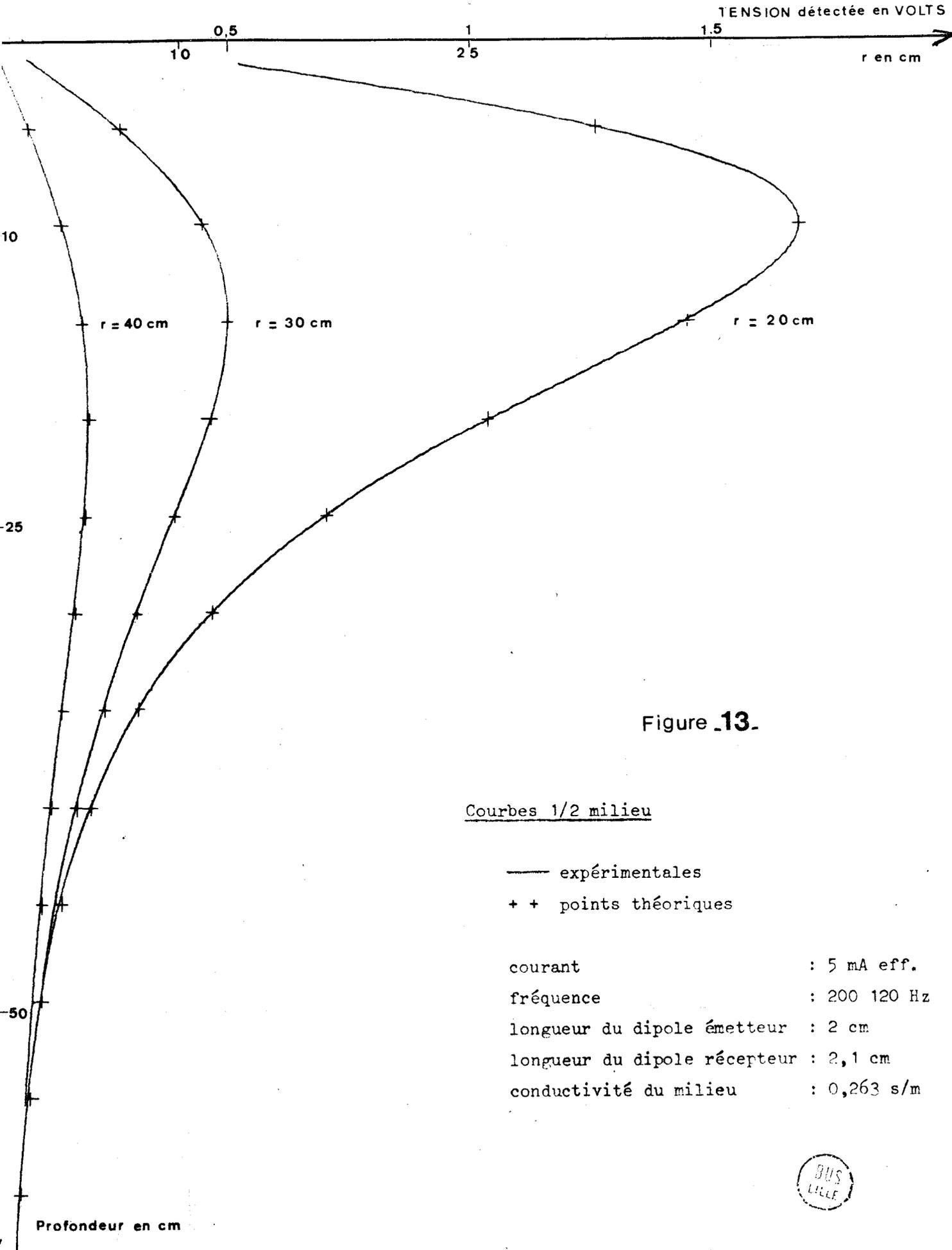


Figure 13.

Courbes 1/2 milieu

- expérimentales
- + + points théoriques

courant : 5 mA eff.  
fréquence : 200 120 Hz  
longueur du dipole émetteur : 2 cm  
longueur du dipole récepteur : 2,1 cm  
conductivité du milieu : 0,263 s/m



Nous avons choisi le "lucoflex". Le lucoflex est une matière plastique de résistivité très élevée. Ce matériau peu coûteux se trouve facilement dans le commerce sous différentes formes.

Ce choix a été fait sur la base de deux critères. Premièrement la Télédiagraphie s'intéresse tout particulièrement à la détection des gisements de gaz et de pétrole. Ces gisements possèdent une résistivité beaucoup plus élevée que celle du milieu encaissant. Deuxièmement, la formule (III.59.) et la figure.57. montrent que les courbes  $\rho_a(r)$  (voir §.III.6. 2ème partie), se déplacent verticalement en fonction du contraste de résistivité entre l'anomalie et le milieu encaissant. Ces courbes gardent toujours la même physionomie. La distance  $r_c$  à laquelle la fonction  $\rho_a(r)$  passe par un minimum (figure.51.) ou par un maximum (figure.54.), ne dépend pas du contraste.

Ce choix simplifie la condition de simulation (voir annexe.8.). Le facteur de réduction  $K$  ne dépend désormais que du rapport des fréquences  $\omega$  et  $\omega'$  :

$$K = \frac{\omega'}{\omega} \quad (29)$$

sachant que  $\omega'$  (fréquence du modèle) est égale à 200kHz, nous donnons ci-après quelques valeurs de  $K$  en fonction de la fréquence réelle  $\omega$  :

$\omega$	$K$
312,5Hz	640
78,125	3360
12,5	16000

#### IV.1.4. Simulation d'un milieu stratifié

Pour étudier l'effet des stratifications sur les télélogs, nous avons placé des anneaux de différentes épaisseurs autour de l'axe de la cuve. Ces anneaux sont isolants puisque taillés dans du "lucoflex".

La figure.14. montre en traits pleins la fonction  $V(z)$  enregistrée en présence des anneaux. Elle montre également en pointillé la courbe  $V(z)$  enregistrée pour un demi-milieu.

On constate que le signal reçu est modulé pour les stratifications du terrain. Ceci confirme les conclusions obtenues au §.III.6.1.

IV.2. EFFET D'UNE HETEROGENEITE LATERALE SUR LE TELELOG

IV.2.1. Effet d'une hétérogénéité latérale placée dans un milieu homogène

Considérons un terrain homogène dans lequel n'existe qu'une seule anomalie résistive. Un tel terrain est facilement simulable sur la cuve analogique. Il suffit d'y immerger la maquette de l'anomalie. Nous présentons le cas où l'anomalie est un disque isolant de 50 cm de diamètre et 1 cm d'épaisseur. Le centre du disque est situé à 52 cm de profondeur et à 45 cm de l'axe de la cuve.

La figure.15. montre l'effet sur le télélog  $V(z)$  du disque isolant. Le fait que les lignes de courant doivent le contourner, provoque une augmentation de  $V(z)$  répartie sur une plage de profondeur assez vaste s'étendant à peu près symétriquement de part et d'autre de la profondeur de l'anomalie.

IV.2.2. Effet d'une hétérogénéité latérale placée dans un milieu stratifié

Le terrain considéré au paragraphe précédent est inexistant dans la nature. Les anomalies qui nous intéressent (gisements de gaz et de pétrole) se trouvent toujours dans un terrain stratifié. La figure.16. montre l'effet du même disque cette fois-ci placé dans un milieu stratifié.

La figure.17. montre le taux d'anomalie  $A(z)$  calculé dans les deux cas. En pointillé nous avons tracé  $A(z)$  obtenu pour le milieu homogène. La courbe en trait plein présente celle obtenue pour le milieu stratifié.  $A(z)$  étant défini par :

$$A(z) = \frac{V(z) - V_0(z)}{V_0(z)} \quad (30)$$

$V(z)$  est le signal obtenu avec l'anomalie  
 $V_0(z)$  " " " " sans "

Tension détectée en Volts

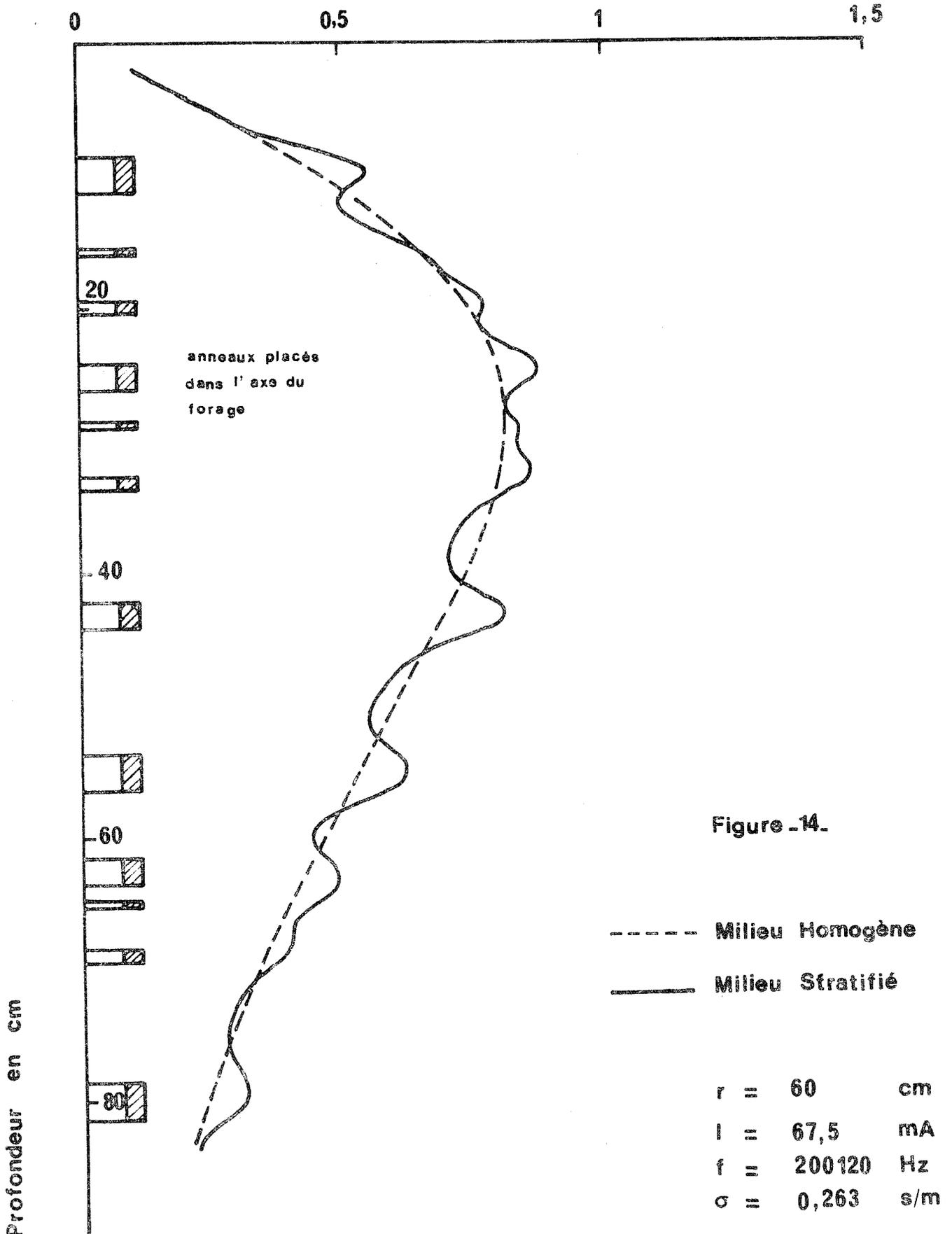
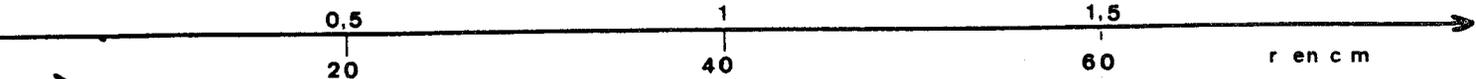


Figure -14-





20

40

-60

-80

0.5  
20

1  
40

1.5  
60

r en cm

r = 60 cm

disque Ø 50 cm



Figure .15.

Disque isolant

- sans disque
- avec disque

courant : 67,5 mA  
 fréquence : 200 120 Hz  
 longueur du dipole émetteur : 2 cm  
 longueur du dipole récepteur : 2,1 cm  
 conductivité du milieu : 0,263 s/m

Profondeur en cm



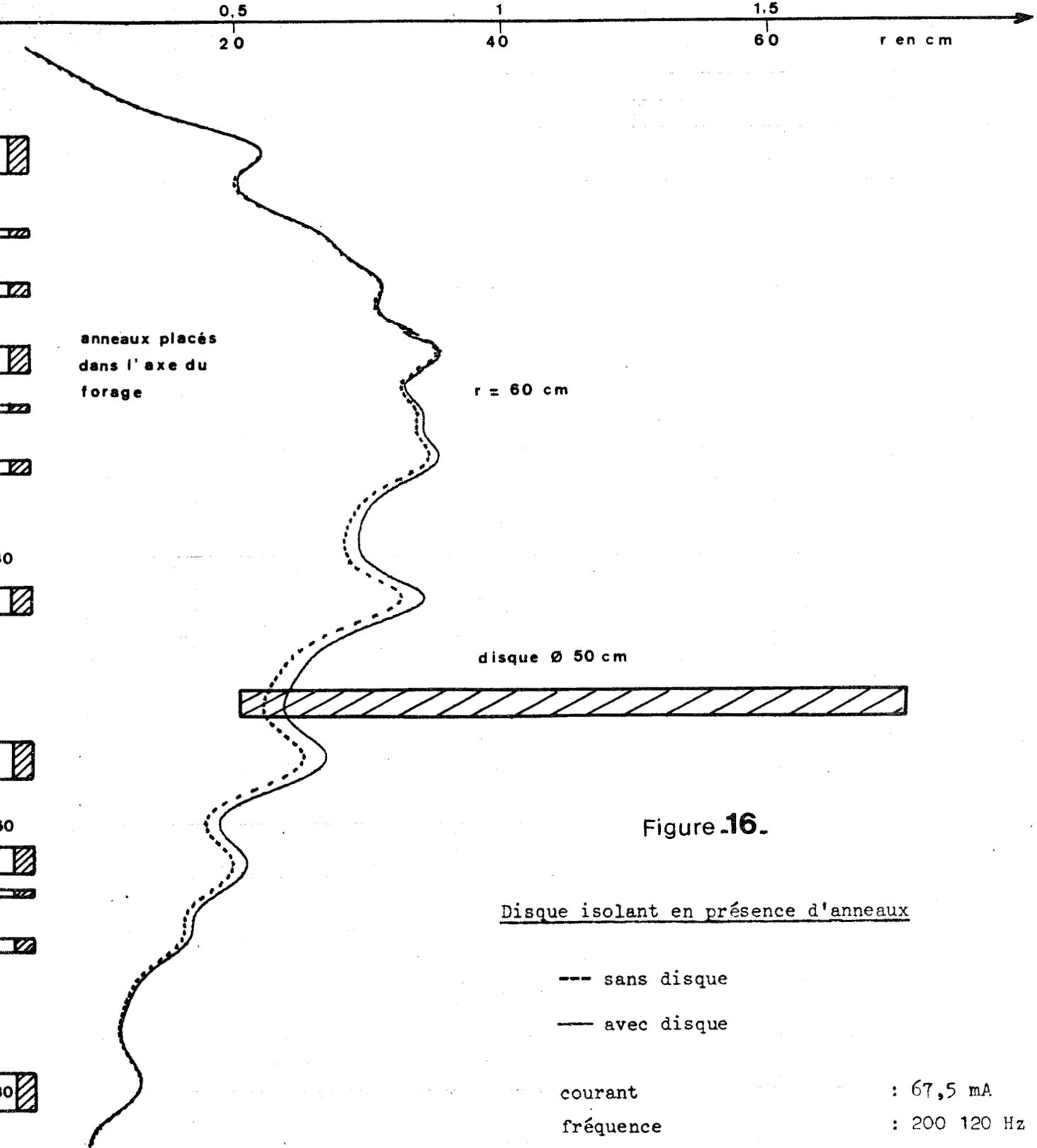


Figure 16.

Disque isolant en présence d'anneaux

--- sans disque

— avec disque

courant : 67,5 mA

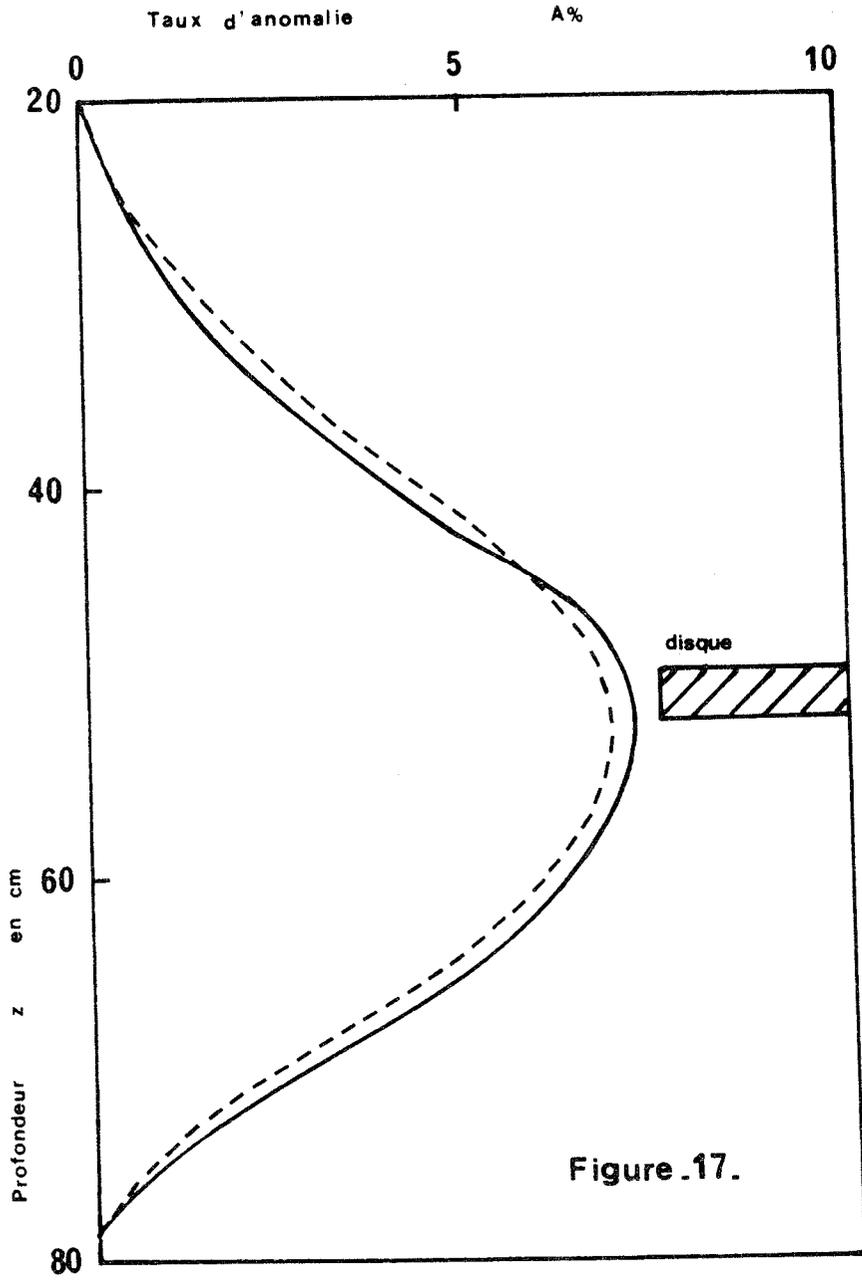
fréquence : 200 120 Hz

longueur du dipole émetteur : 2 cm

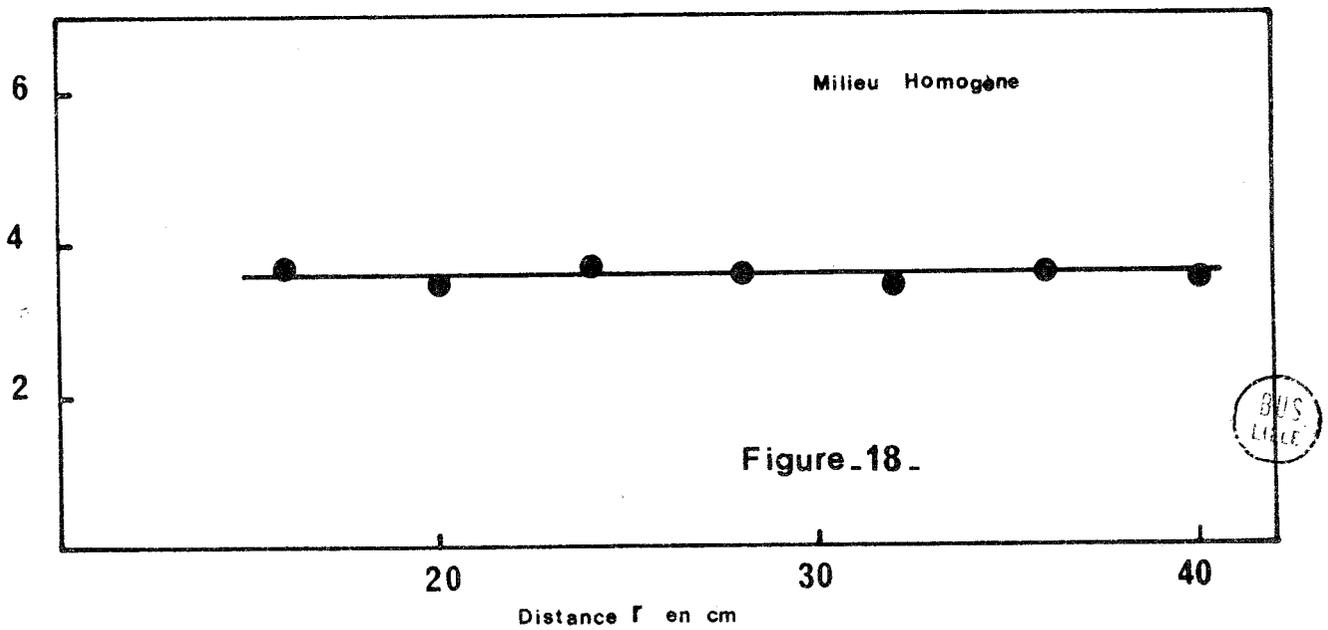
longueur du dipole récepteur : 2,1 cm

conductivité du milieu : 0,263 s/m





$\rho_a$  en  $\Omega.m$



Un simple examen des quatre dernières figures.14.,.15.,.16., et .17. montre que dans un terrain réel, la présence d'une anomalie latérale, une couche imprégnée d'huile ou de gaz, produira le même effet sur le télég. Mais à cet effet, dans le terrain réel, se superposera une modulation due aux variations de résistivité des diverses couches traversées.

Ce résultat est très important. En effet, nous pouvons entreprendre des études théoriques (chapitre.III.2ème partie) et analogiques en supprimant les stratifications. Le modèle théorique ou analogique qui simulera désormais pour nous un champ pétrolier sera une simple couche résistante placée dans un milieu absolument homogène.

#### IV.3. METHODE DE PROSPECTION ET D'INTERPRETATION POUR DETERMINER L'AZIMUT ET LA PROFONDEUR DE L'ANOMALIE

Pour localiser une anomalie par rapport à l'axe du forage, simulé par l'axe de la cuve, il faut déterminer les trois paramètres suivants :

1. L'azimut de l'anomalie ; l'azimut est l'angle  $\phi$  formé par la direction du centre de l'anomalie avec le nord magnétique
2. La profondeur de l'anomalie h par rapport à la surface du sol
3. La distance d séparant l'axe du forage du bord de l'anomalie.

La figure.17. montre que la fonction A(z) passe par un maximum à une côte égale à la profondeur de l'anomalie. Et on montre théoriquement (31) pour une anomalie de forme sphérique, et analogiquement pour une anomalie de forme quelconque, que la fonction A( $\phi$ ) est symétrique par rapport au plan passant par le centre de l'anomalie et l'axe du forage, et elle passe par un maximum.

Il en résulte que la méthode de prospection que nous proposons consiste à effectuer des mesures de télédiagraphie, à r constant, en

fonction de l'azimut de l'émetteur par rapport au forage, la sonde étant immobilisée dans le forage à une certaine profondeur  $z$ . Si l'on calcule l'indice d'anomalie  $A(\phi)$  à l'aide de la formule (23) qui s'écrit dans ce cas particulier :

$$A(\phi) = \frac{E(\phi)_{\text{mesuré}}}{E_{\text{théorique}}} - 1 \quad (31)$$

le maximum de cette fonction indiquera l'azimut de l'anomalie.

L'émetteur étant placé sur la direction de l'anomalie, maintenant connue, à une certaine distance  $r$ , relevons un télégog en fonction de la profondeur. A l'aide de la formule (22) ou (23), calculons la fonction  $A(z)$ , le maximum de cette fonction situe l'anomalie en profondeur.

### III.4. MESURE DE LA DISTANCE "d" DU BORD DU GISEMENT A L'AXE DU FORAGE

#### III.4.1. Cas d'un forage qui ne recoupe pas de gisement (latéral)

Le gisement est simulé par une maquette dont la forme est taillée selon un isobath séparé par une distance "d" de l'axe du forage. ~~Cette maquette est~~ Avec la sonde placée à une profondeur  $z$ ,  $z = h$  de préférence ; nous relevons la fonction  $V(r)$  dans la direction de l'anomalie.

Nous utilisons la formule (24) en sens inverse pour déterminer  $\rho_a(r)$  en y portant les valeurs  $V(r)$ ,  $\rho_a$  étant la résistivité apparente.

La résistivité apparente est la valeur numérique de la résistivité qu'il faut introduire dans la formule (IV.24.) donnant la différence de potentiel apparaissant aux bornes de la sonde dans un demi-milieu parfaitement homogène pour que cette tension soit égale à celle que l'on a effectivement mesurée en présence de l'anomalie.

Lorsque le milieu est vraiment homogène, on obtient une valeur indépendante de la distance  $r$  (figure.18.). Par contre, dans le

cas où une maquette simulant le gisement est placée dans la cuve, on trouve une valeur  $\rho_a$  qui est une fonction de la distance  $r$ .

La figure.19. montre les courbes  $\rho_a(r)$  obtenues en simulant le gisement de gaz de BEYNES et le forage B104 (voir §.V.2.). Chacune des courbes correspond à un isobath différent c'est-à-dire à un espacement  $d$  différent entre le bord du gisement et l'axe du forage. Nous constatons que chaque courbe passe, pour une distance "forage-émetteur" que nous appellerons  $r_c$ , par un minimum ;  $r_c$  est une fonction de  $d$  comme le montre l'abaque  $d(r_c)$  de la figure.20.

Supposons maintenant que l'on veuille déterminer la distance  $d$  qui sépare le bord du vrai gisement de BEYNES de l'axe du forage. On effectue une mesure de  $V(r)$  dans la direction du gisement, d'où on calcule  $\rho_a(r)$ . Le minimum  $r_c$  de cette dernière fonction nous donne alors la distance  $d$  à l'aide de l'abaque  $d(r_c)$  construit par simulation.

#### IV.4.2. Cas du forage qui recoupe le gisement (central)

Plaçons la maquette de façon à ce que l'axe de la cuve la recoupe à une distance " $d$ " du bord. Nous reprenons les mêmes étapes du travail effectué pour le cas du forage latéral.

La figure.21. montre les courbes  $\rho_a(r)$  obtenues en simulant le gisement de gaz de LUSSAGNET et le forage LUG 39 (voir §.VI.I.). Chaque courbe correspond à une distance  $d$  différente. On constate que chacune de ces courbes présente un maximum à une distance critique  $r_c$  qui est une fonction de  $d$  comme le montre l'abaque de la figure.22.

#### IV.5. VERIFICATION THEORIQUE

Pour vérifier les résultats obtenus sur la cuve analogique nous avons étudié (voir chapitre.III, 2ème partie) dans l'approximation du courant continu le cas d'un terrain homogène enfermant une anomalie à résistivité élevée.

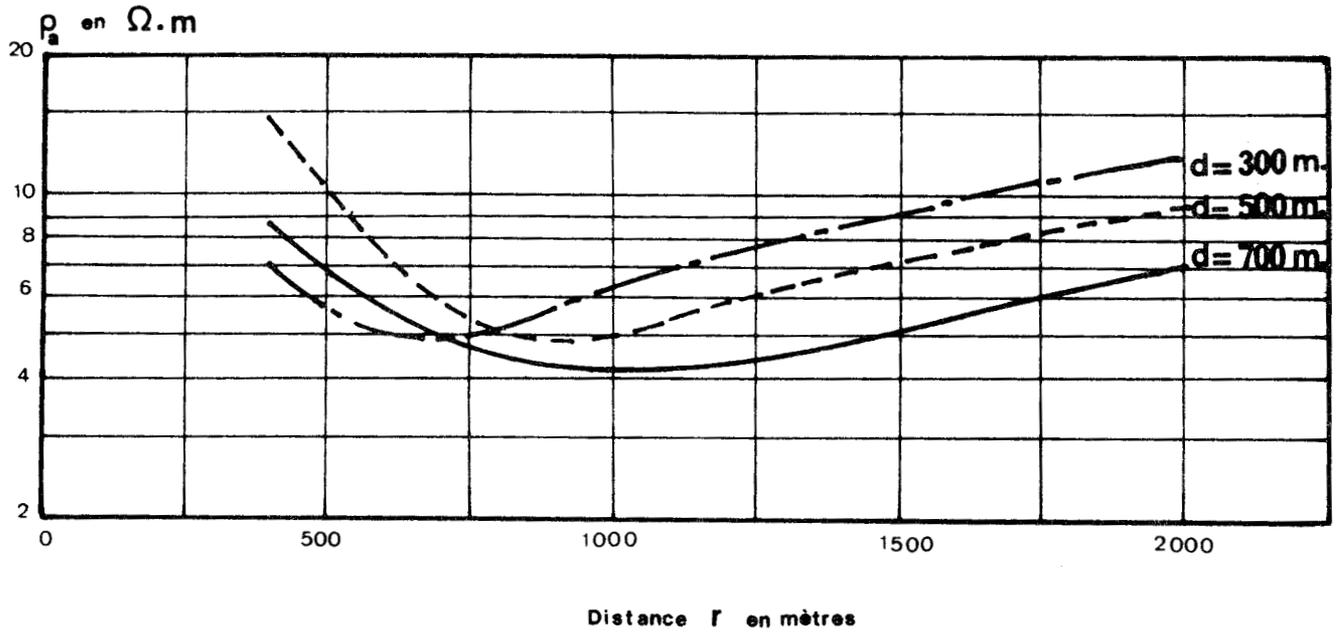


Figure .19 .

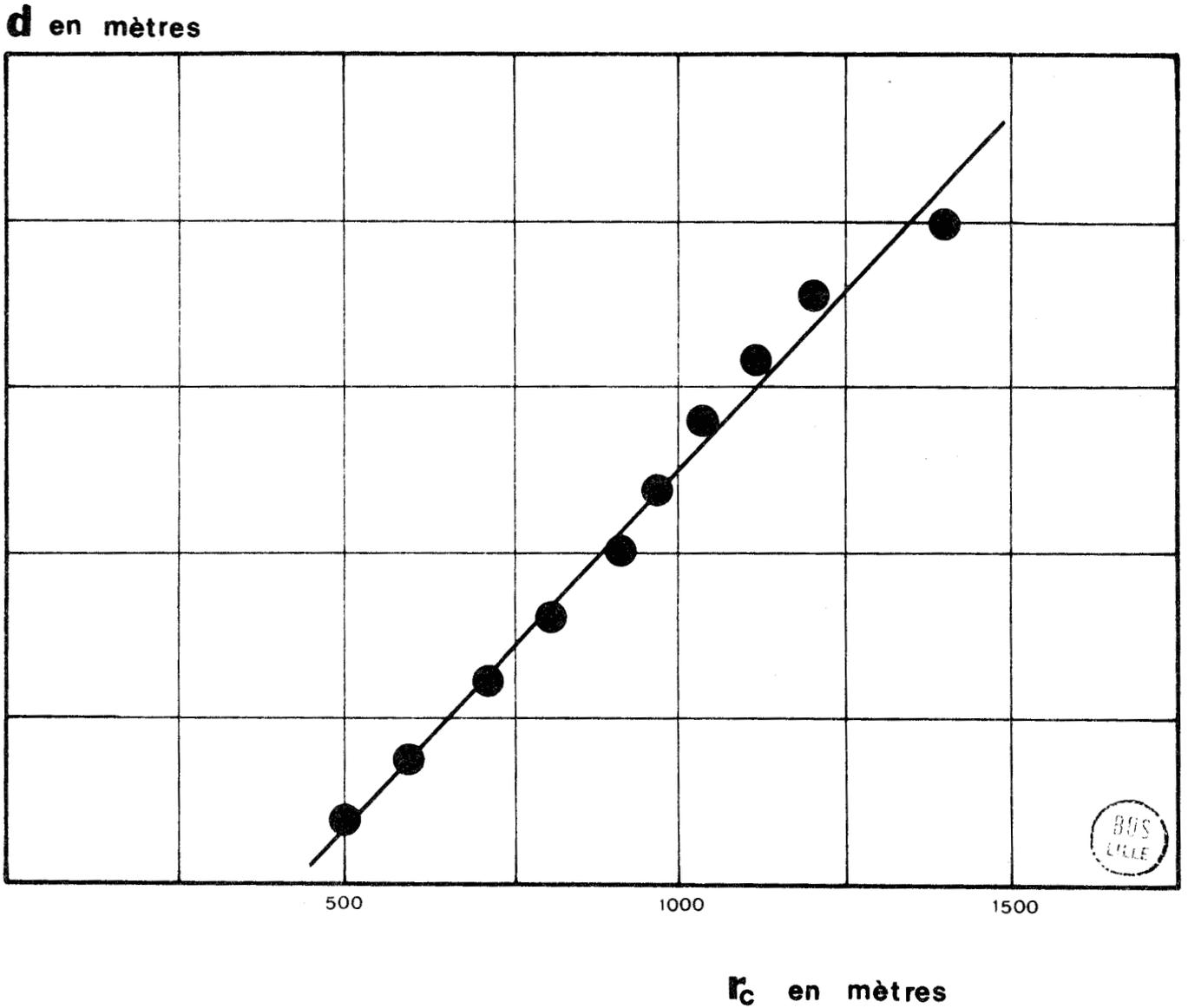


Figure .20.

Figure 21.

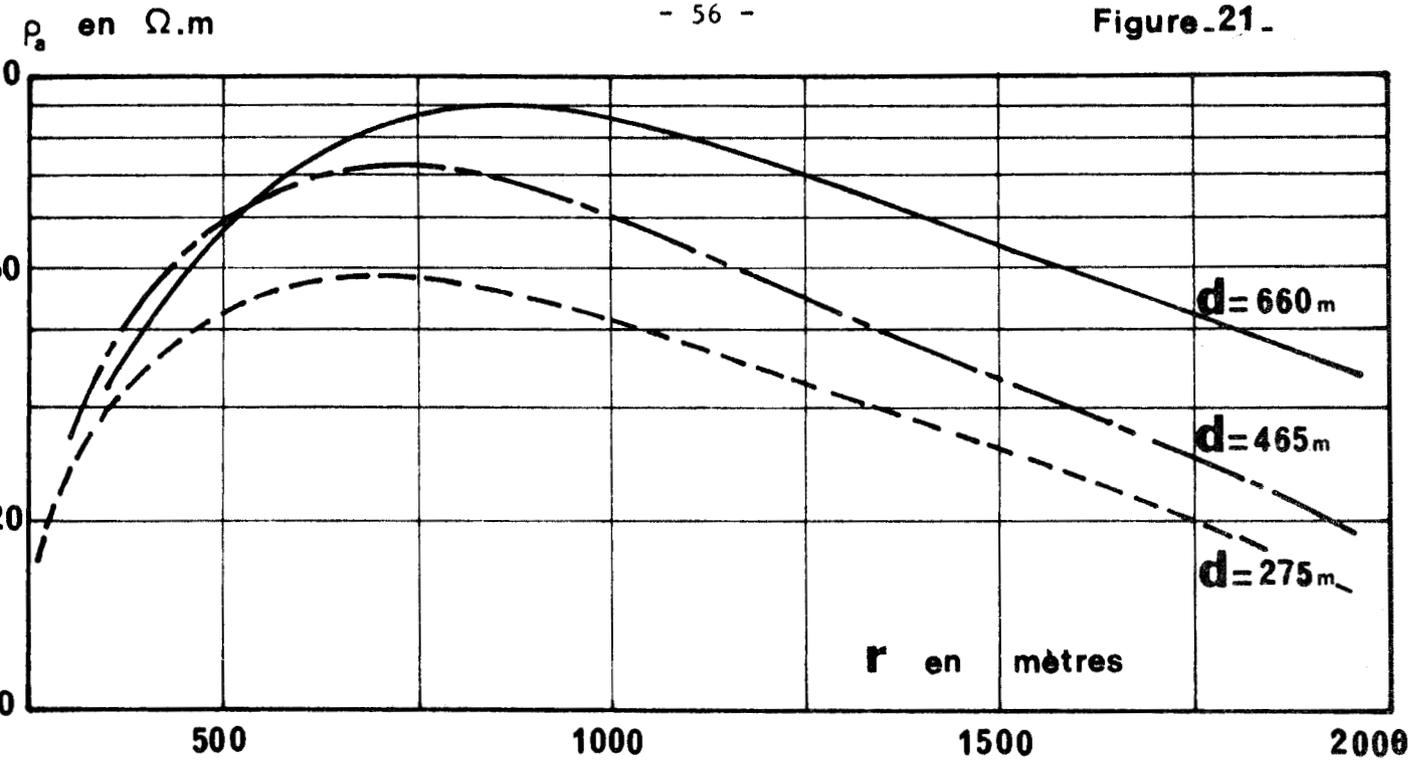
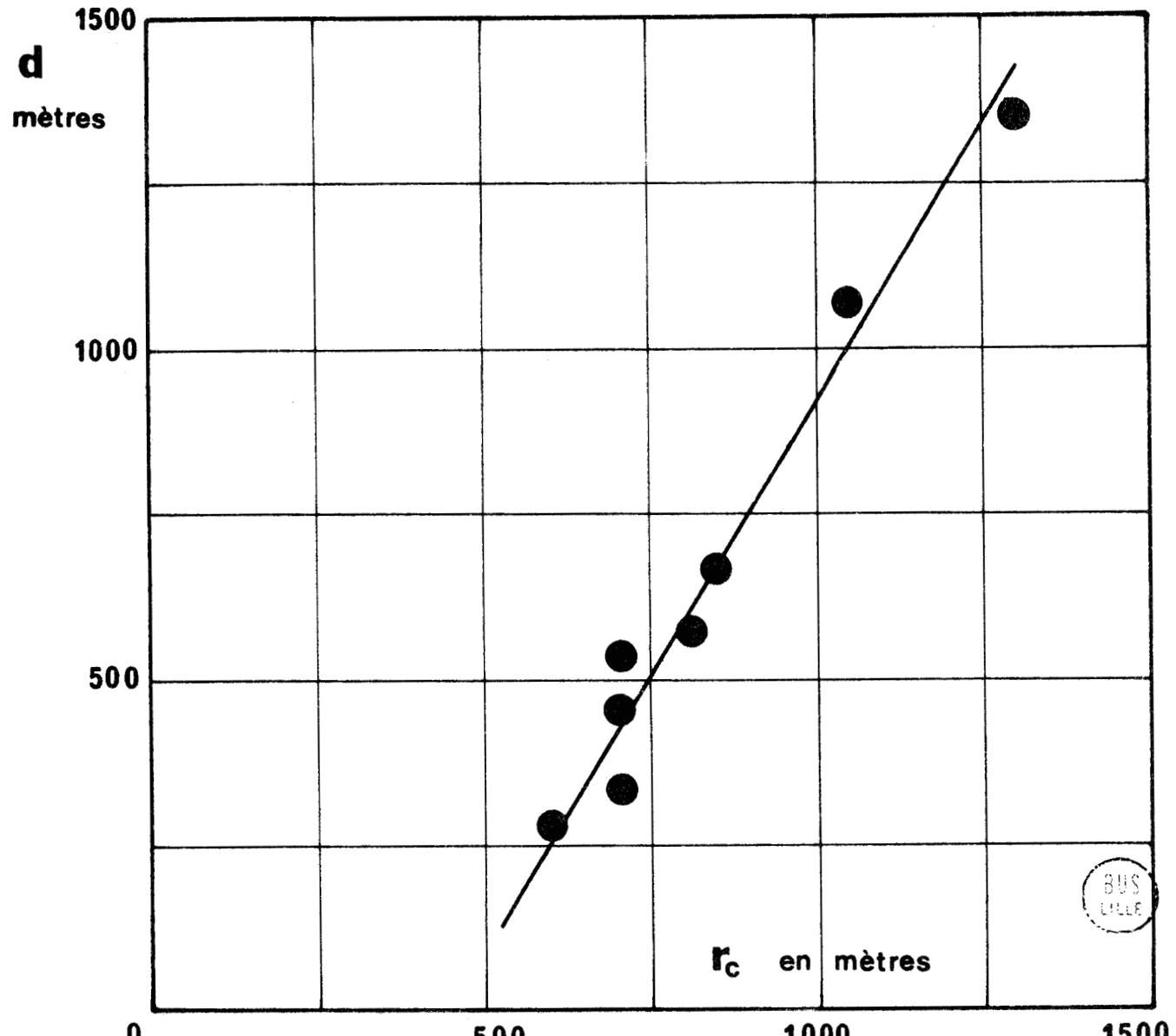


Figure 22.



Cette étude théorique constitue la partie la plus importante de notre contribution personnelle au développement du Télélog.

Les résultats de cette étude théorique sont en accord avec ceux obtenus sur la cuve. La fonction  $\rho_a(r)$  calculée théoriquement présente un minimum si le forage est latéral et un maximum si le forage est central. Dans les deux cas la distance critique  $r_c$  à laquelle se trouve le maximum ou le minimum est une fonction linéaire de la distance "d"..

Nous avons vérifié également que la fonction  $\rho_a(z)$  présente un maximum pour une profondeur égale à celle de l'anomalie.

#### IV.6. CONCLUSIONS

L'étude analogique nous a permis de définir une méthode de prospection des gisements de gaz et de pétrole.

La cuve analogique est un outil indispensable pour l'interprétation des mesures. Elle reste à présent le seul moyen qui permette de construire les abaques  $d(r_c)$  en tenant compte de la forme exacte de l'anomalie.

Cette étude a conduit également à un résultat important. Nous pouvons, en effet, simuler, afin d'entreprendre des études théoriques ou analogiques, un champ pétrolier par une simple couche isolante placée dans un milieu homogène.

5ème ETAPE

EXPERIENCES DE TELELOG EFFECTUEES A BEYNES\*

V.1. BUT DES EXPERIENCES

Le procédé Télélog a été testé sur le terrain au PERRAY et à St ILLIERS. A deux reprises, les résultats étaient en accord avec la structure géologique du terrain. Mais une nouvelle série d'expériences était indispensable pour confirmer ces résultats, et montrer la validité de la méthode. Il fallait montrer en effet que l'accord entre les mesures et la réalité n'était pas le fruit d'un hasard et, également, que l'on n'observait aucune anomalie de résistivité dans une direction opposée à celle du gisement. Cette démonstration était nécessaire avant d'envisager de passer à la phase d'industrialisation de la méthode.

La vérification sur le terrain de la méthode de prospection et d'interprétation établie par l'étude analogique précédente était toutefois le but essentiel de ces expériences.

V.2. DESCRIPTION DU CHAMP DE BEYNES ET MESURES EFFECTUEES

Le champ de BEYNES appartient également à la Société GAZ de FRANCE. Un anticlinal (couche du Wealdien), dont le sommet se trouve à -300mètres par rapport au niveau de la mer, forme un piège structural utilisé pour le stockage souterrain du gaz naturel (voir figure.23.). Les puits B.102 et B.104 se trouvent à l'extérieur du gisement.

\* Voir références (5), (6), (12), (13)

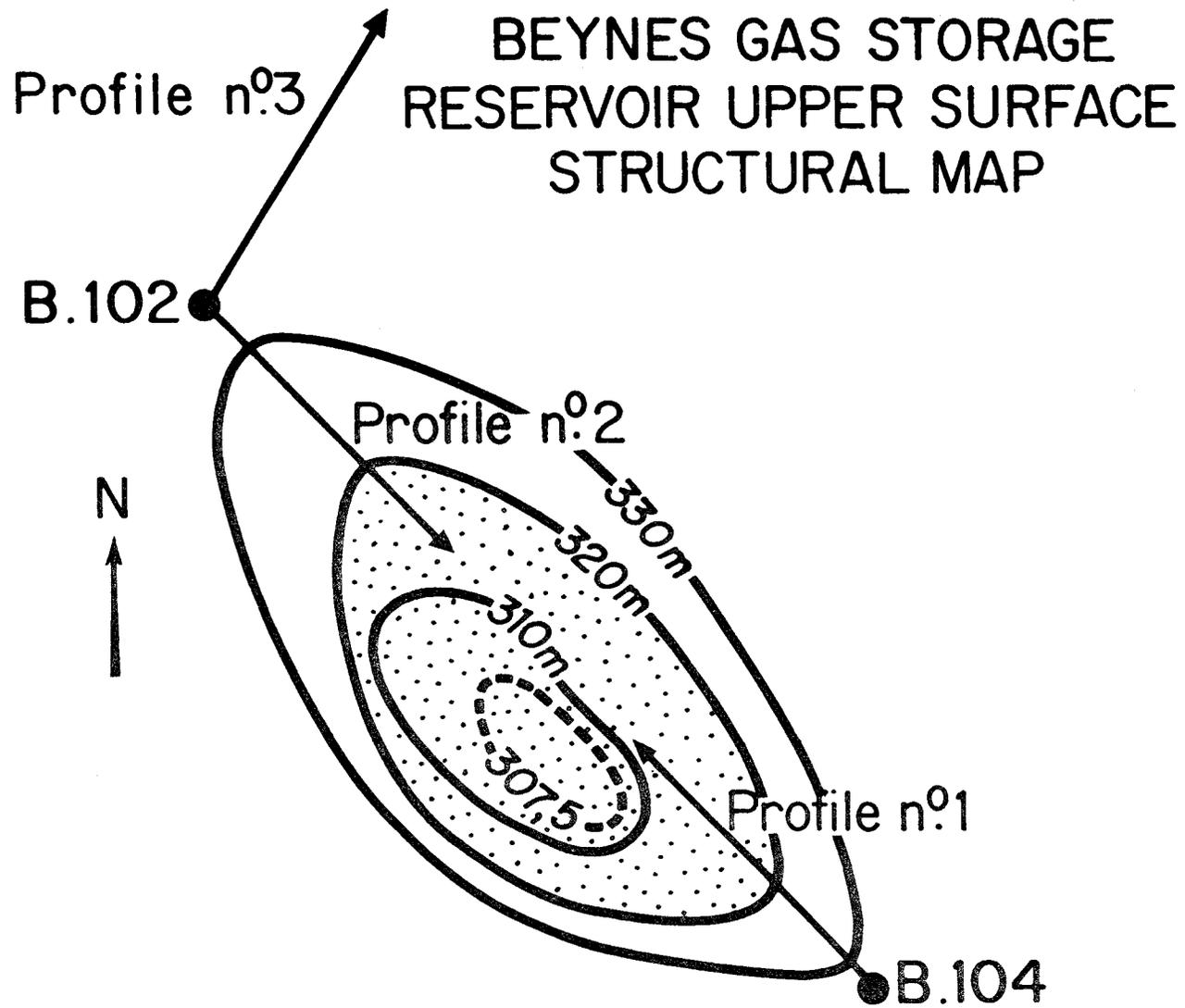


Figure.23.

L'examen de la carte d'Etat-Major nous a permis de choisir 3 profils sur lesquels nous pouvions effectuer nos mesures. Les profils (1) et (2) s'étendent respectivement du forage B.104 et B.102 dans la direction du gisement. Le profil (3) s'étend lui du forage B.102 dans une direction située en dehors du gisement (figure.23.).

Les conditions de surface ont permis l'installation de 6 bases d'émission sur le profil (1), de 8 bases sur chacun des profils (2) et (3). La longueur de chaque base était en général de 200 mètres.

Pour chacune de ces bases nous avons enregistré, avec la sonde immobilisée à une profondeur donnée, un log en fonction du temps en modulant par tout ou rien en amplitude le courant de l'émission. Un tel enregistrement dont la figure.24. montre un exemple, nous permet d'évaluer le rapport signal/bruit et d'avoir une courbe précise de l'intensité du signal en fonction de la distance "forage-émetteur" à cette profondeur.

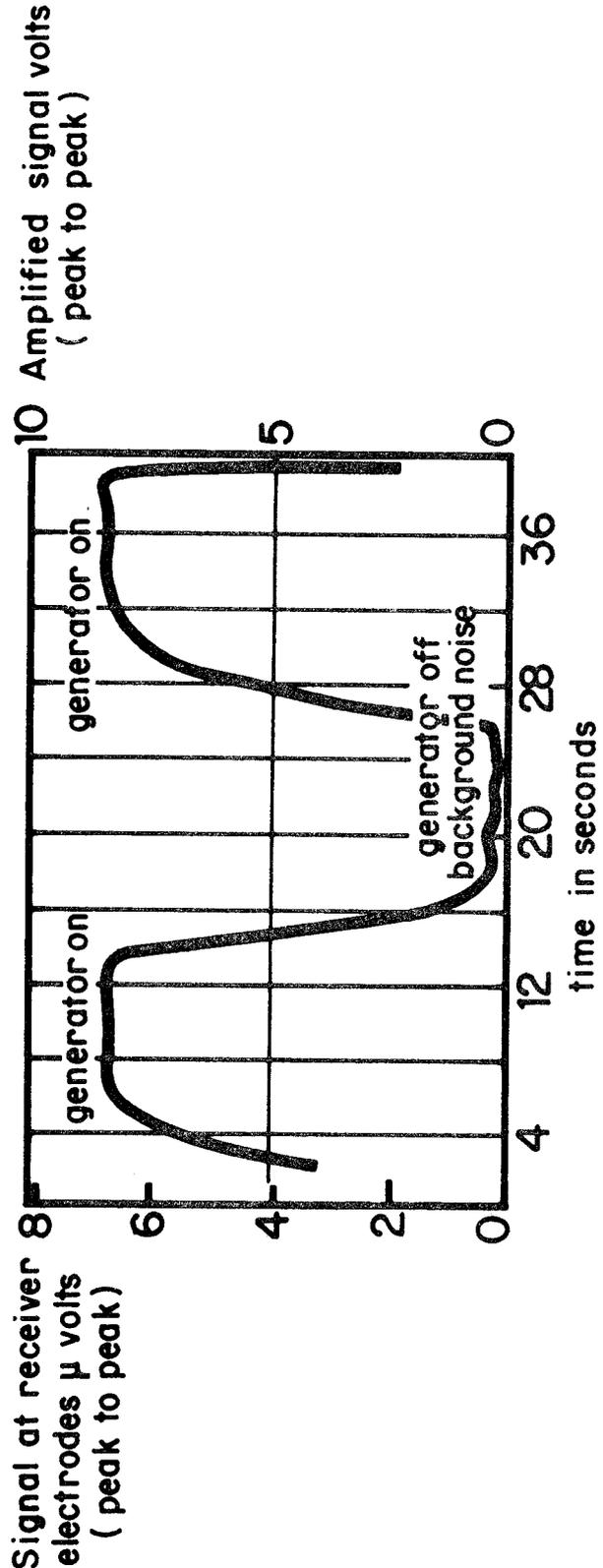
Pour chaque valeur mesurée nous avons calculé, à l'aide d'un abaque  $V(r)$  précalculé (voir exemple figure.25.) ou à l'aide de la formule (24), une valeur de la résistivité apparente  $\rho_a$ .

### V.3. MISE EN EVIDENCE DE LA PRESENCE OU DE L'ABSENCE D'UNE ANOMALIE A RESISTIVITE ELEVEE DANS UNE DIRECTION DETERMINEE

Nous pouvons facilement mettre en évidence, de façon purement qualitative, la présence ou l'absence d'une anomalie à résistivité élevée dans une direction déterminée en portant la valeur du signal mesuré en fonction de la distance  $r$  sur l'abaque de  $V(r)$  calculé pour la profondeur à laquelle les mesures ont été effectuées. La figure .28. montre la fonction  $V(r)$  mesurée à 688 mètres de profondeur sur le profil.3. On observe une diminution continue et à peu près régulière de l'intensité du signal au fur et à mesure que l'on éloigne l'émetteur. En outre, à partir de 1100 mètres de distance, la fonction mesurée est située entre les deux courbes représentant l'intensité théorique du signal calculée pour des milieux homogènes de 160 et 170  $\Omega \cdot m$  de résistivité. Le terrain réel se comporte donc comme un milieu homogène dont la

# TELELOG

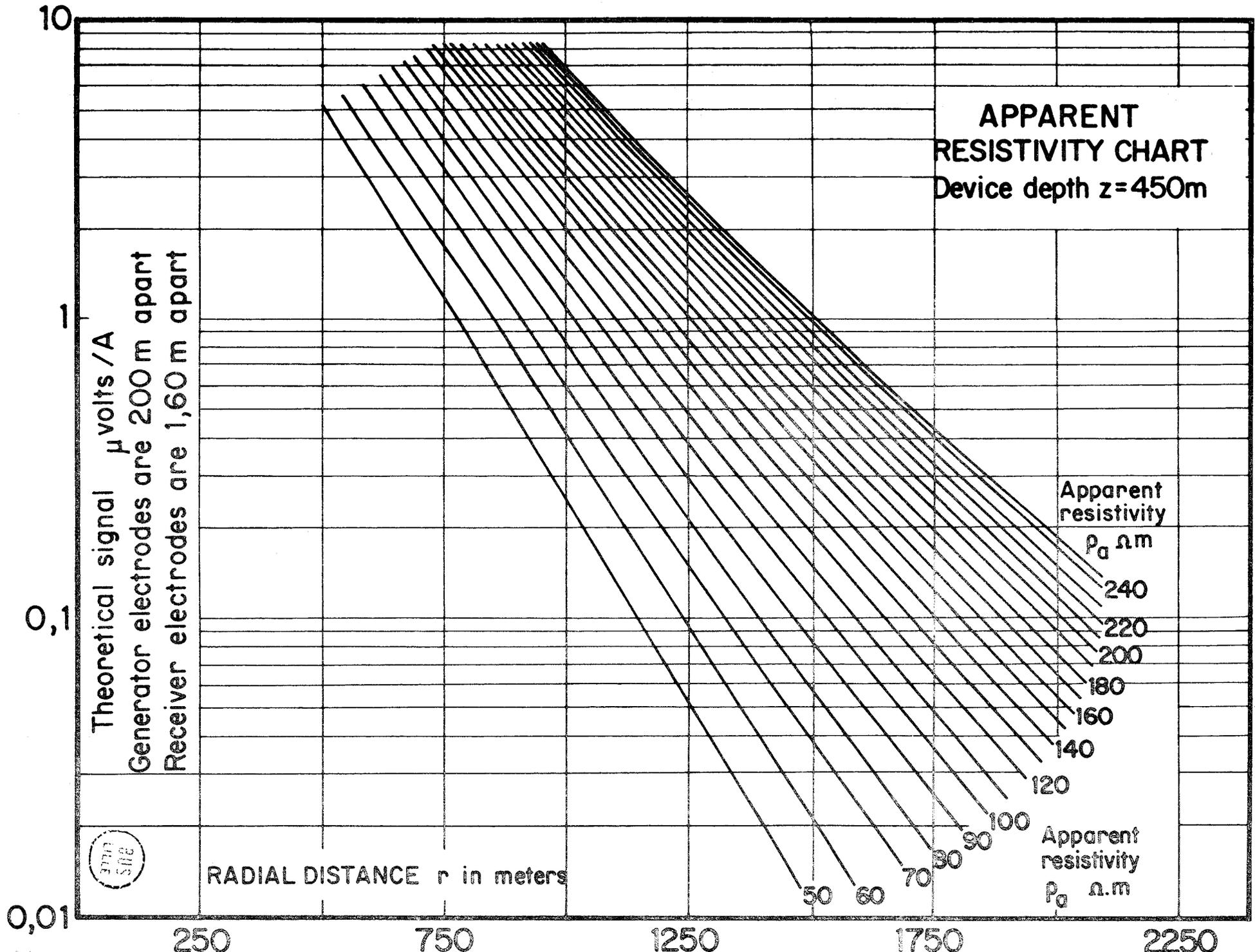
Field : BEYNES (France)  
Well : B.102  
Date : 7-2-1970



Receiver depth : 688m  
 Generator electrodes : 1200 and 1400m (on profile n°2)  
 radial distance  
 Total gain :  $1.2 \cdot 10^6$   
 Current : 5.25 Amp.eff.



Figure .24.

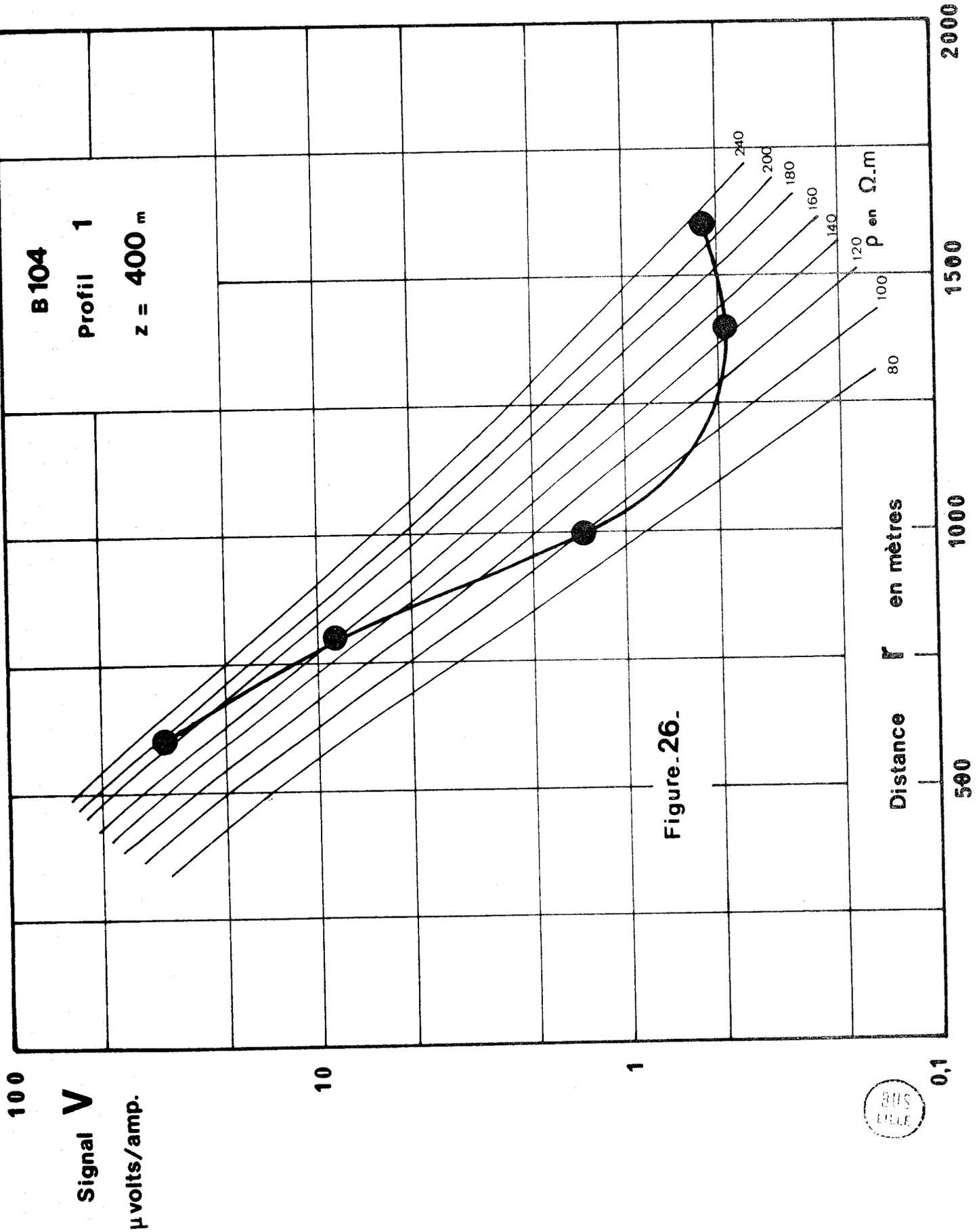


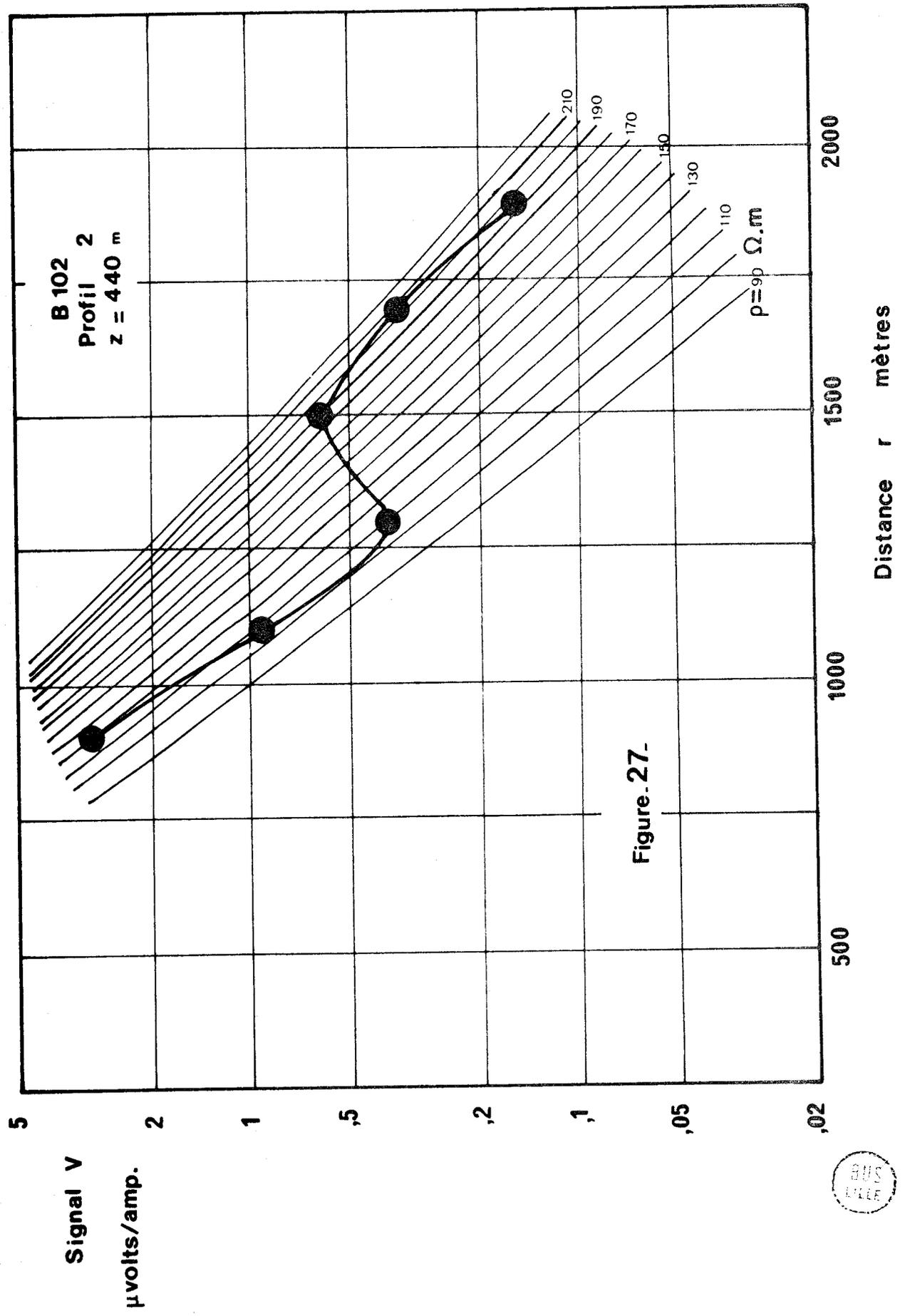
résistivité moyenne est de  $165 \Omega \cdot m$ . Ceci indique l'absence totale de toute anomalie résistive dans cette direction qui est, en fait, située en dehors du gisement.

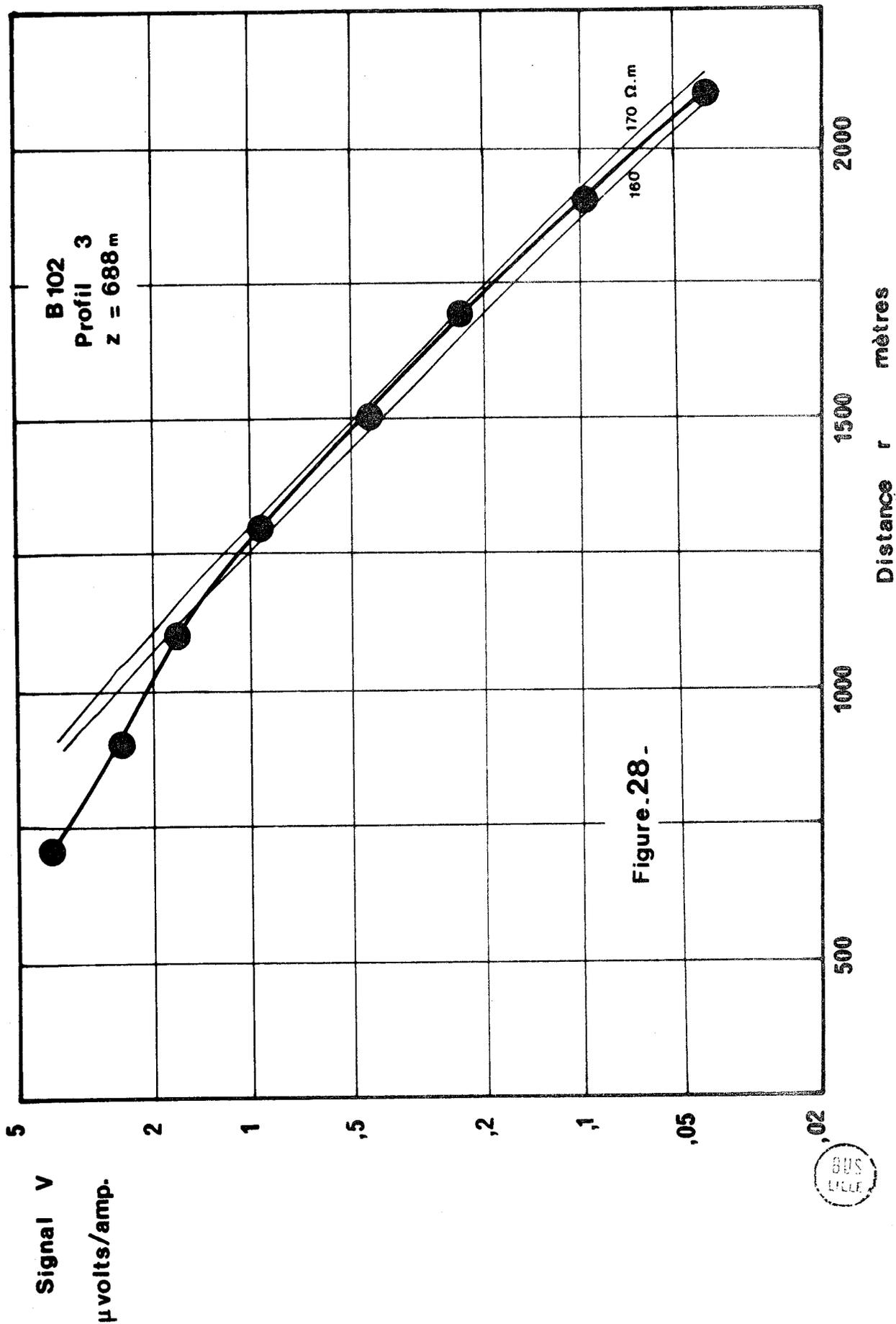
Les figures.26. et .27. montrent l'évolution de l'intensité du signal en fonction de la distance  $r$  pour les profils (1) et (2). Ces deux courbes ont été enregistrées avec la sonde immobilisée respectivement à  $z = 600$  mètres dans le forage B.104 et  $z = 440$  mètres dans le forage B.102. Ces courbes sont parfaitement caractéristiques de la présence d'une anomalie résistive, en l'occurrence le gisement de gaz. D'une part ces courbes sont déformées et ne présentent aucune ressemblance avec les courbes des milieux homogènes, d'autre part chaque courbe présente un point de mesure qui correspond à une valeur minimum de la résistivité apparente.

La précédente interprétation est faisable sur le terrain à condition bien sûr de se munir des abaques précalculés qui donnent l'intensité du signal  $V(r)$  pour des milieux homogènes de différentes résistivités. Mais il est peu probable d'avoir toujours un abaque calculé pour la profondeur  $z$  à laquelle nous avons effectivement immobilisé la sonde. Pour cela, il faut que nous disposions d'un recueil d'abaques calculés tous les cinquante mètres par exemple. Et comme cette interprétation est seulement qualitative, nous pouvons utiliser l'abaque calculé pour la profondeur qui s'approche le mieux de la profondeur de la sonde.

Ce genre d'interprétation est très important dans le cas où nous ignorons la direction dans laquelle se trouve le gisement, car nous pouvons, sur place, et pendant que le forage est disponible, décider d'augmenter le nombre des profils à faire dans la direction du gisement. L'interprétation sur le terrain permet également de multiplier le nombre des bases d'émission sur un profil quelconque pour obtenir un minimum de la fonction  $\rho_a(r)$  bien accusé.







V.4. MESURE DE LA DISTANCE "d" DU BORD DU GISEMENT A L'AXE DU FORAGE

Les figures.29., .30., et .31, montrent les valeurs de la résistivité apparente  $\rho_a$  calculées pour les différents profils et les différentes profondeurs. Pour le profil (3) nous remarquons qu'à partir de 1100 m la valeur de  $\rho_a$  tend à devenir indépendante de la distance  $r$ . Par contre les courbes (figures.29. et .30.) obtenues pour les deux profils (1) et (2) passent par un minimum pour une valeur critique  $r_c$  de l'émetteur. Si nous portons les valeurs de  $r_c$  dans l'abaque de  $d(r_c)$  que montre la figure.20. nous obtenons les valeurs correspondantes de la distance  $d$ .

PROFIL 1

$$\begin{aligned} & 1000 \text{ m} < r_c < 1100 \text{ m} \\ \text{d'où :} & \quad 680 \text{ m} < d < 800 \text{ m} \end{aligned} \quad (32)$$

PROFIL 2

$$\begin{aligned} & 1150 \text{ m} < r_c < 1300 \text{ m} \\ \text{d'où :} & \quad 850 \text{ m} < d < 960 \text{ m} \end{aligned} \quad (33)$$

Nous avons donné une fourchette pour la valeur de  $r_c$  car nous n'avons pas pu disposer de points de mesure assez nombreux. En multipliant le nombre de points de mesure et en diminuant la longueur de la base d'émission, nous pouvons efficacement réduire la largeur de cette fourchette. Les valeurs (32) et (33) des fourchettes obtenues pour la valeur "d" correspondent parfaitement à ce qui était connu de la position de la bulle de gaz estimée par les techniciens de GAZ de FRANCE à la date de nos expériences.

V.5. CONCLUSIONS

Ainsi par deux fois, nous avons déterminé à une distance de l'ordre d'un kilomètre du forage la position du bord d'un gisement de gaz. A chaque fois, les résultats des mesures de Télédiagraphie ont donné une valeur parfaitement vraisemblable.

# BEYNES B104

## Profil 1

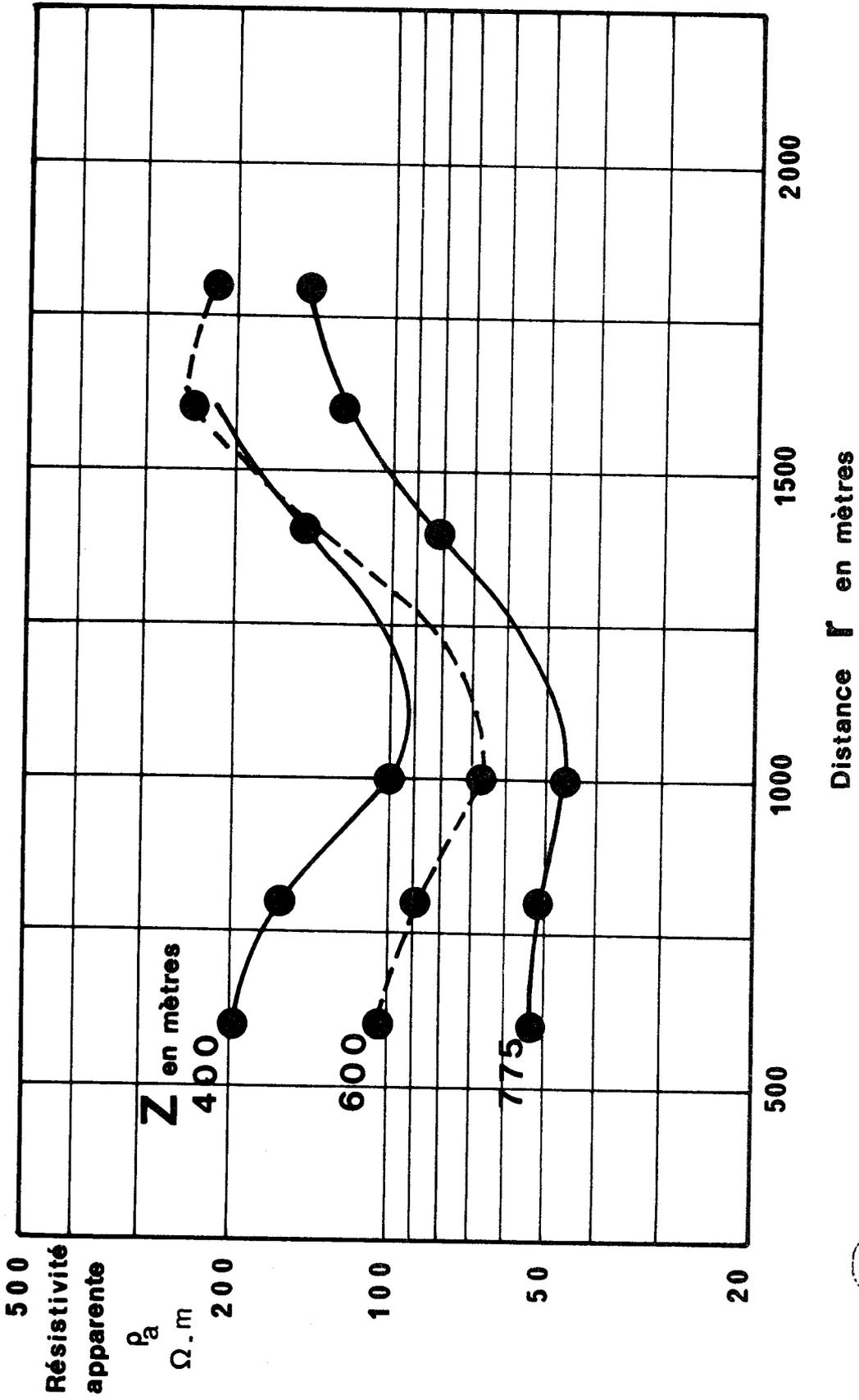


Figure -29-

# BEYNES B.102

## Profile n°2

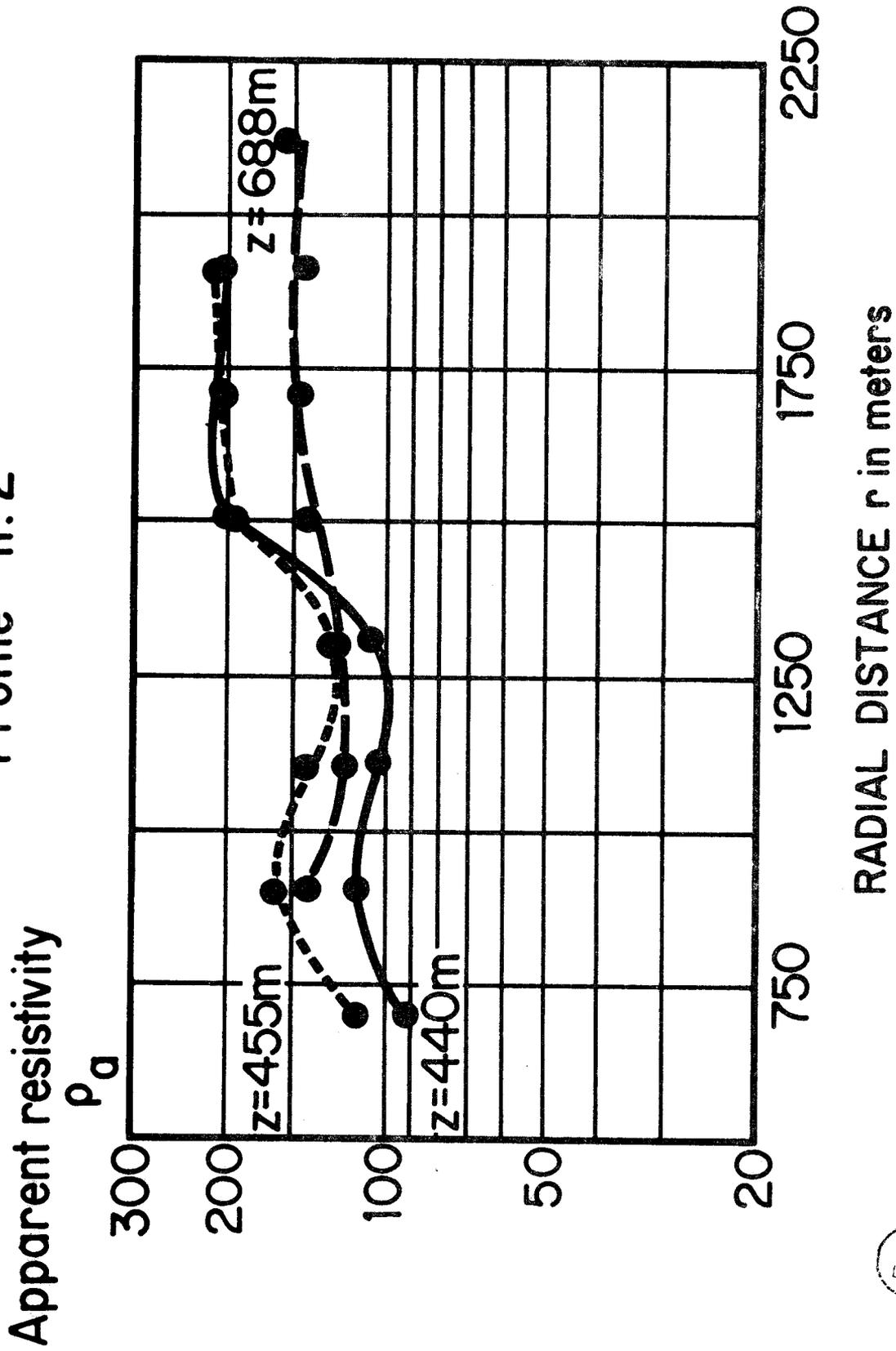


Figure-30-

BEYNES B.102  
Profile n°3

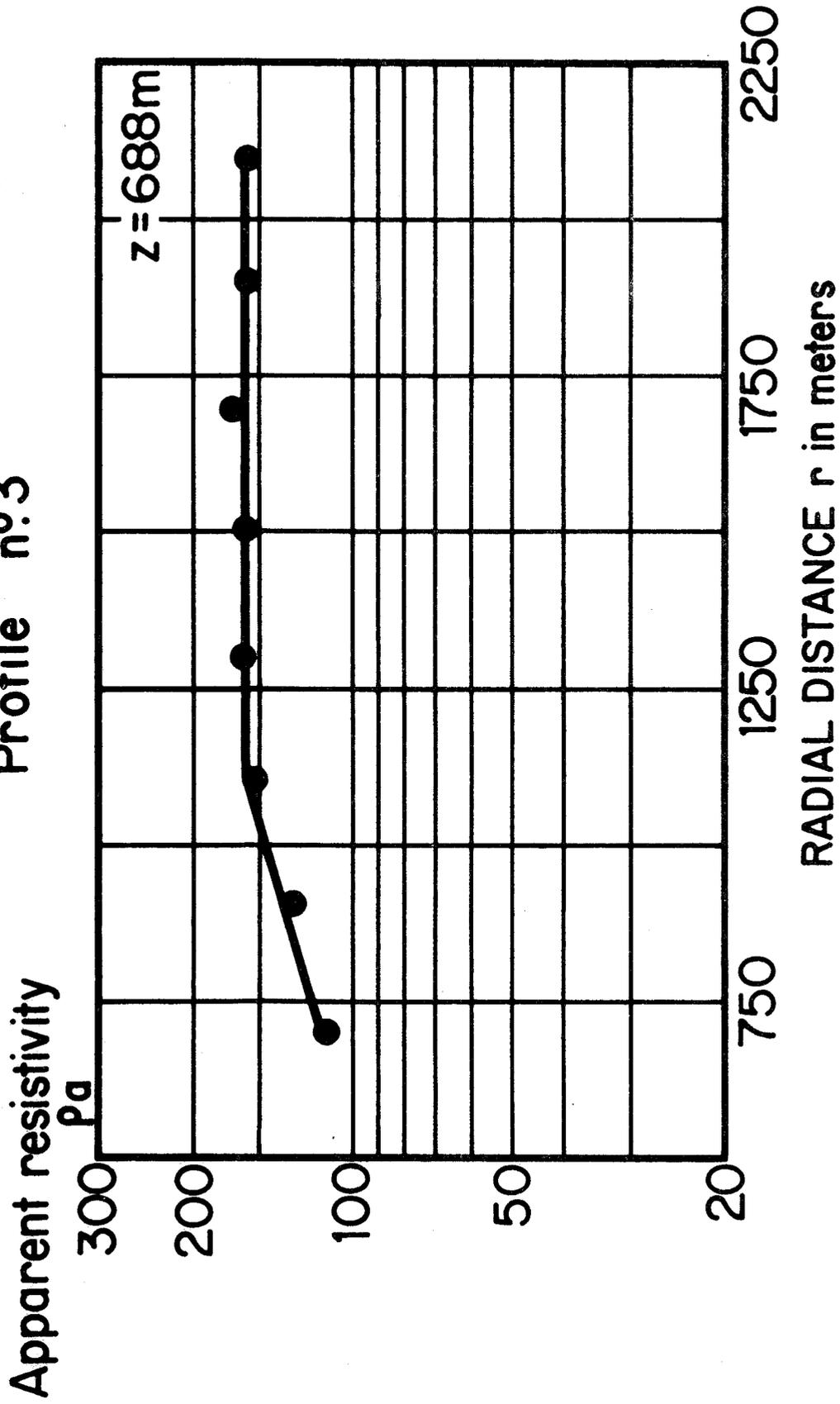


Figure .31 -

De plus, les mesures faites dans une direction différente de celle du gisement n'ont révélé aucune anomalie. Comme il n'y a aucune raison pour que des hétérogénéités du terrain ne soient présentes que dans la direction du gisement, nous pouvons en conclure que les anomalies de résistivité que révèle le Téléglog sont un indice certain de la présence d'un gisement de gaz ou d'huile. Le Téléglog nous semble donc pouvoir maintenant entrer dans une phase d'application industrielle.

6ème ETAPE

DEBUT DU DEVELOPPEMENT DESTINE A FAIRE DU TELELOG UNE METHODE INDUSTRIELLE

DETERMINATION DE LA DISTANCE DU BORD DU GISEMENT DE LUSSAGNET A L'AXE DU

FORAGE CENTRAL LUG 39\*

VI.1. LE GISEMENT DE LUSSAGNET

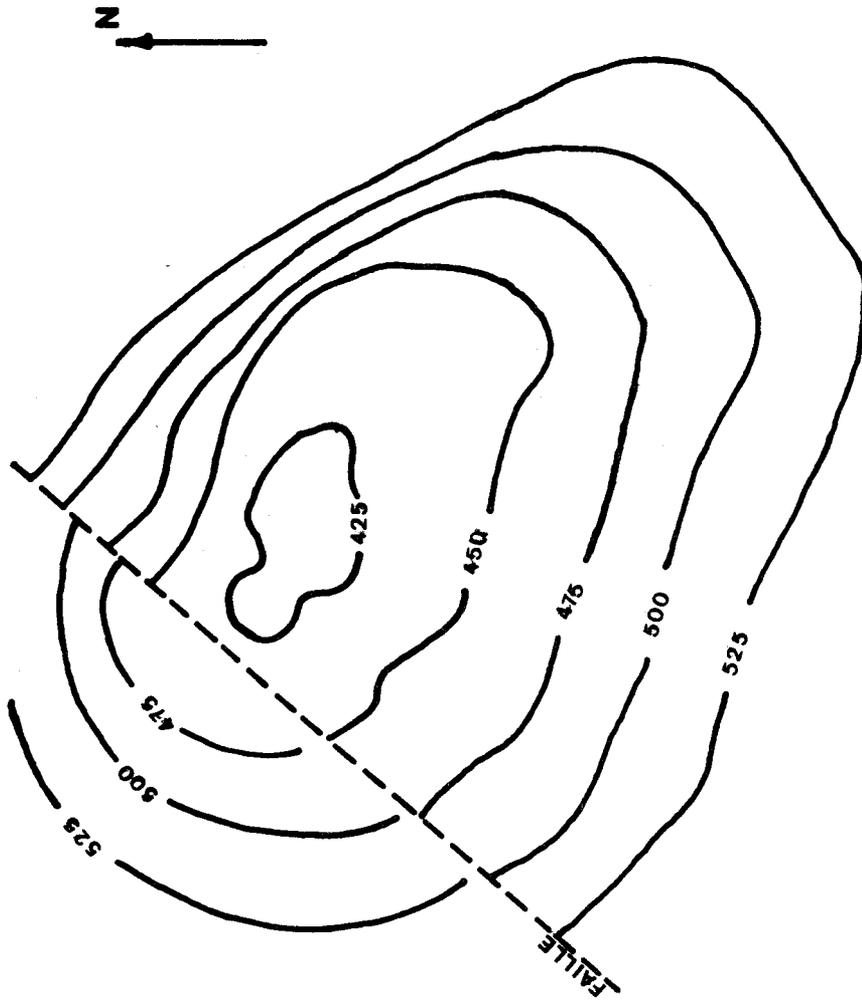
Depuis 1957 la Société Nationale des Pétroles d'Aquitaine (S.N.P.A.) produit du gaz dans le champ de LACQ situé dans la région Sud-Ouest de la FRANCE. Pour assurer une bonne exploitation du champ de LACQ il fallait assurer le stockage d'une importante quantité de gaz. La S.N.P.A. a eu recours à la technique du stockage souterrain.

Le stockage souterrain de LUSSAGNET est situé à 60 kilomètres au Nord de LACQ sur l'axe principal "gaz-pipe" qui alimente la région parisienne. Cet emplacement présente un avantage considérable. Le stockage se fait par un anticlinal faillé (voir figure.32.). Tous les puits sont presque situés dans la partie haute de la structure pour éviter autant que possible les venues d'eau.

La S.N.P.A. s'est rendu compte à l'exploitation et lors de l'ajustement d'un modèle numérique simulant le gisement, qu'une fraction grandissante du gaz allait probablement loger dans le compartiment Ouest et ne revenait pas aisément vers les puits de production en raison d'un "water-drive" très actif. Il fallait donc implanter un ou plusieurs puits sur le compartiment Ouest pour drainer ce gaz.

En 1966, une réinterprétation de la sismique montra que ce compartiment était d'ailleurs nettement plus étendu qu'on ne l'imaginait lors du développement (voir carte structurale de la figure.33.).

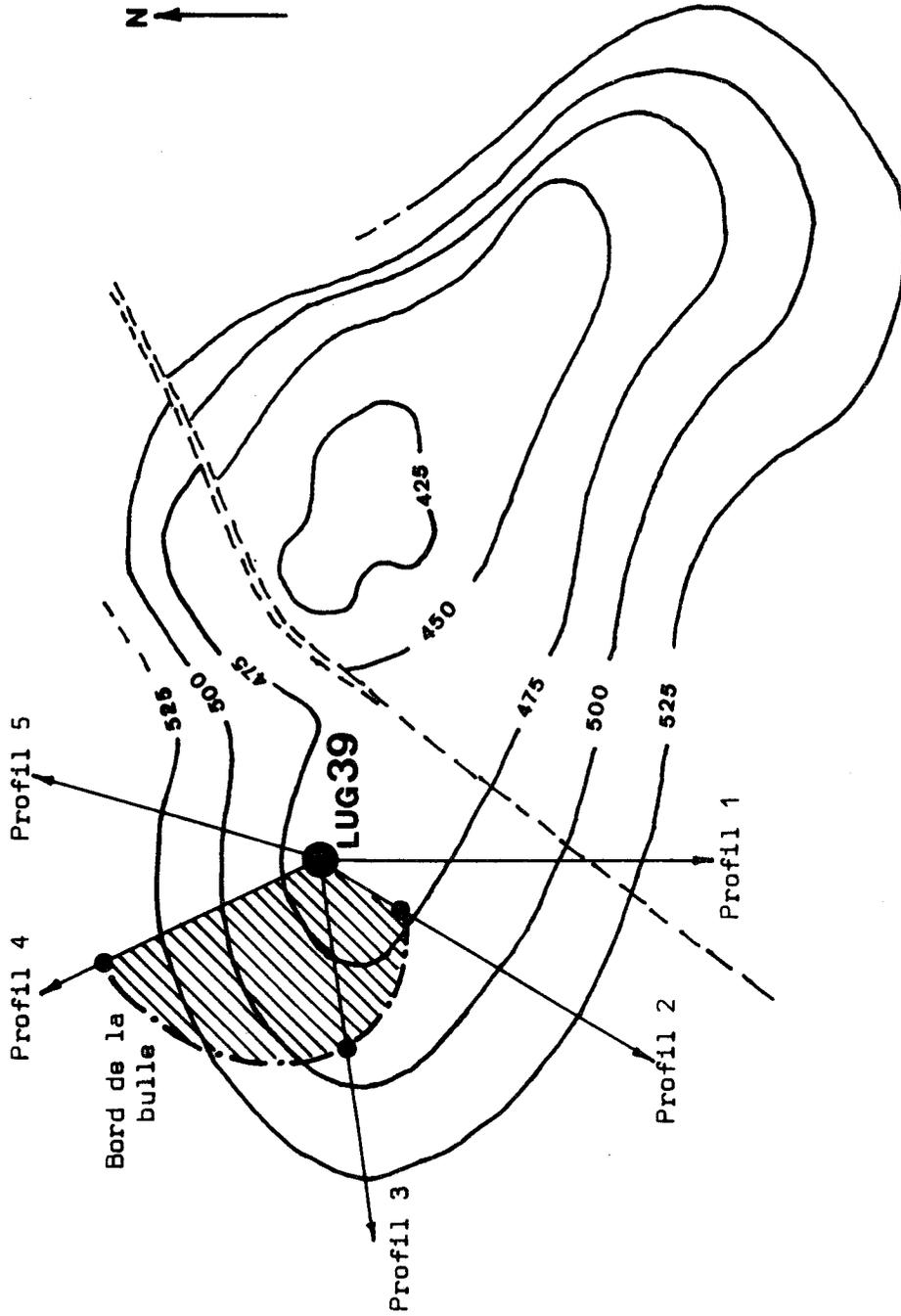
\* voir références (1), (10), et (11)



**LUSSAGNET**  
ISOBATHES DU TOIT DU RESERVOIR (1959)  
Echelle 1:20000

Figure -32-





L U S S A G N E T - ISOBATHES DU TOIT DU RESERVOIR (1966)  
Localisation du bord de la bulle - Echelle 1/20000°

Figure-33-



Un sondage, Lug 39, fut donc réalisé en 1969. Il confirma la nouvelle interprétation structurale et prouva la présence du gaz à l'Ouest de la faille<sup>(23)</sup>. Mais le puits jugé inexploitable fut laissé en attente, et la question se posait de savoir s'il y avait lieu de chercher encore à réaliser un puits productif, et à quel endroit implanter ce puits.

## VI.2. REPRISE DU FORAGE LUG 39

Ayant entendu parler de Télélog, la S.N.P.A. nous contacta en Janvier 1971 afin d'étudier si la méthode était applicable dans le cas de LUSSAGNET. Sur une réponse positive de notre part, fondée sur des études théoriques et sur des essais analogiques<sup>(11)</sup>, une campagne Télélog fut décidée pour le mois d'Octobre 1971. Pour effectuer cette campagne la S.N.P.A. a repris le forage Lug 39 qui avait été abandonné en 1969. Cette reprise a nécessité le forage des "cement plugs" et le changement de la vieille boue<sup>(24)</sup>.

### VI.2.1. Implantation des prises de terre

Une campagne des mesures topographiques a permis de tracer cinq profils sur lesquels nous pouvions effectuer des mesures Télélog. Sur chacun nous avons préparé un certain nombre de prises de terre. Les prises de terre étaient en général espacées de 100 mètres, constituant la longueur de la base d'émission.

Profil n°	Azimut
1	180°
2	212°
3	263°
4	335°
5	17°

### VI.2.2. Mesures Télélog en trou ouvert

Le temps qui a été consacré aux opérations Télélog en trou ouvert a permis d'effectuer des mesures sur les profils 2, 3 et 4 pour une profondeur de la sonde de 517 m, 484 m, 440 m et 400 m respectivement.

Les figures 34 à 43 montrent les différentes courbes de  $\rho_a(r)$  calculées à partir de ces mesures.

### VI.2.3. Mesures Télélog en trou tubé

Après les mesures Télélog en trou ouvert le forage a été alésé puis tubé avec un tubage en plastique "Epoxy"<sup>(24)</sup>. La cimentation de ce tubage faite, nous avons effectué des mesures de Télélog sur les profils 1, 3 et 5.

Il a été très difficile de positionner la sonde au droit des tubes équipés de colliers métalliques assurant la jonction électrique intérieur-extérieur<sup>(24)</sup>. A cette cause s'ajoutaient d'autres difficultés techniques qui rendent l'interprétation impossible.

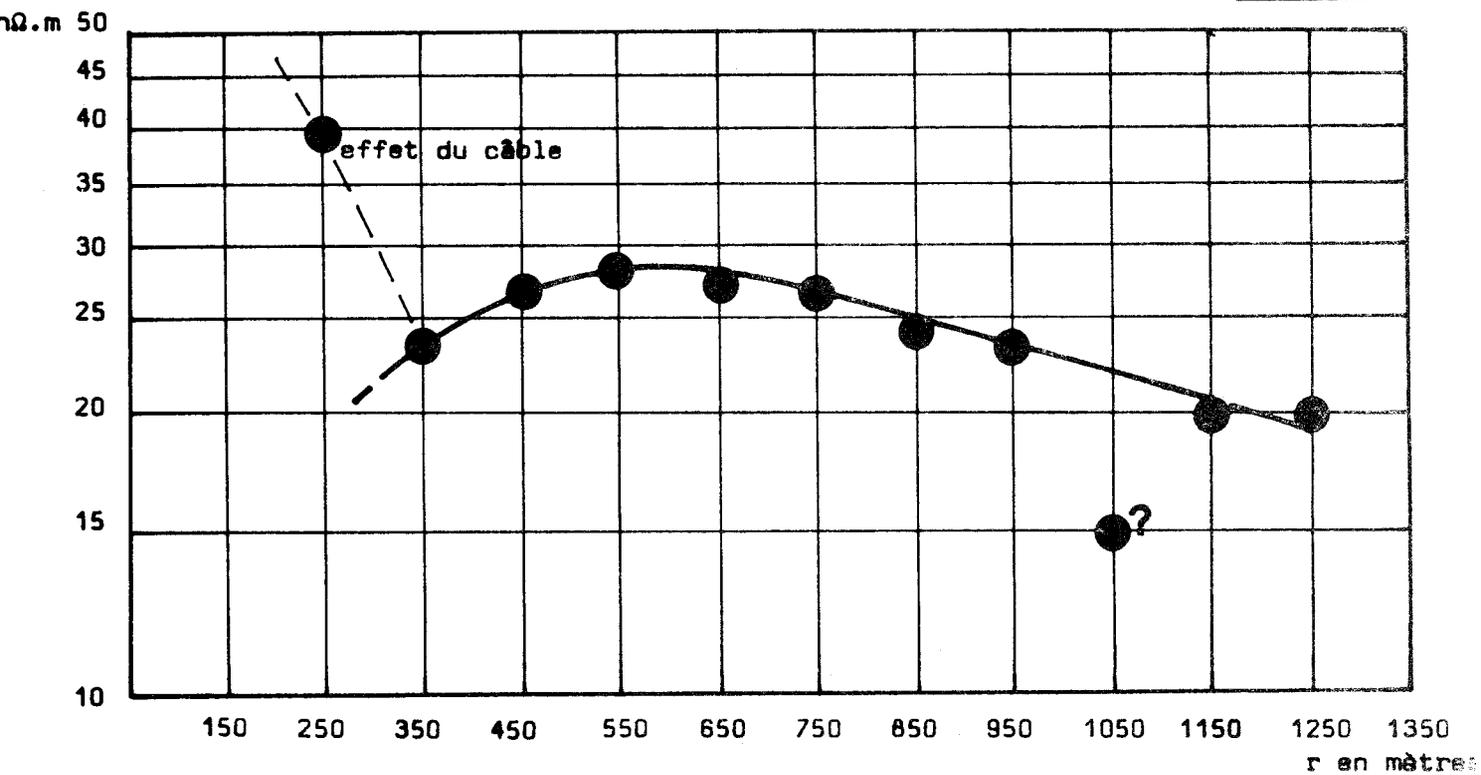
Un programme de recherche pour étudier l'influence du tubage est en cours. Le but de ce programme est l'adaptation sur Lug 39 d'un poste permanent de contrôle du bord du gisement par Télélog.

### VI.3. INTERPRETATION DES MESURES

Les courbes de  $\rho_a(r)$  obtenues en trou ouvert (figures 34 à 43) ont pratiquement la même forme : tout près de l'axe du forage la valeur de la résistivité est assez élevée pour être vraisemblable ; en outre elle diminue rapidement au fur et à mesure que l'on s'éloigne du forage. Cet effet parasite est probablement imputable au câble mono-conducteur et non isolé que nous avons utilisé pour remonter le signal<sup>(6)</sup>. Au-delà de la distance sur laquelle cet effet se manifeste, les courbes ressemblent aux courbes théoriques et à celles obtenues sur la cuve analogique.

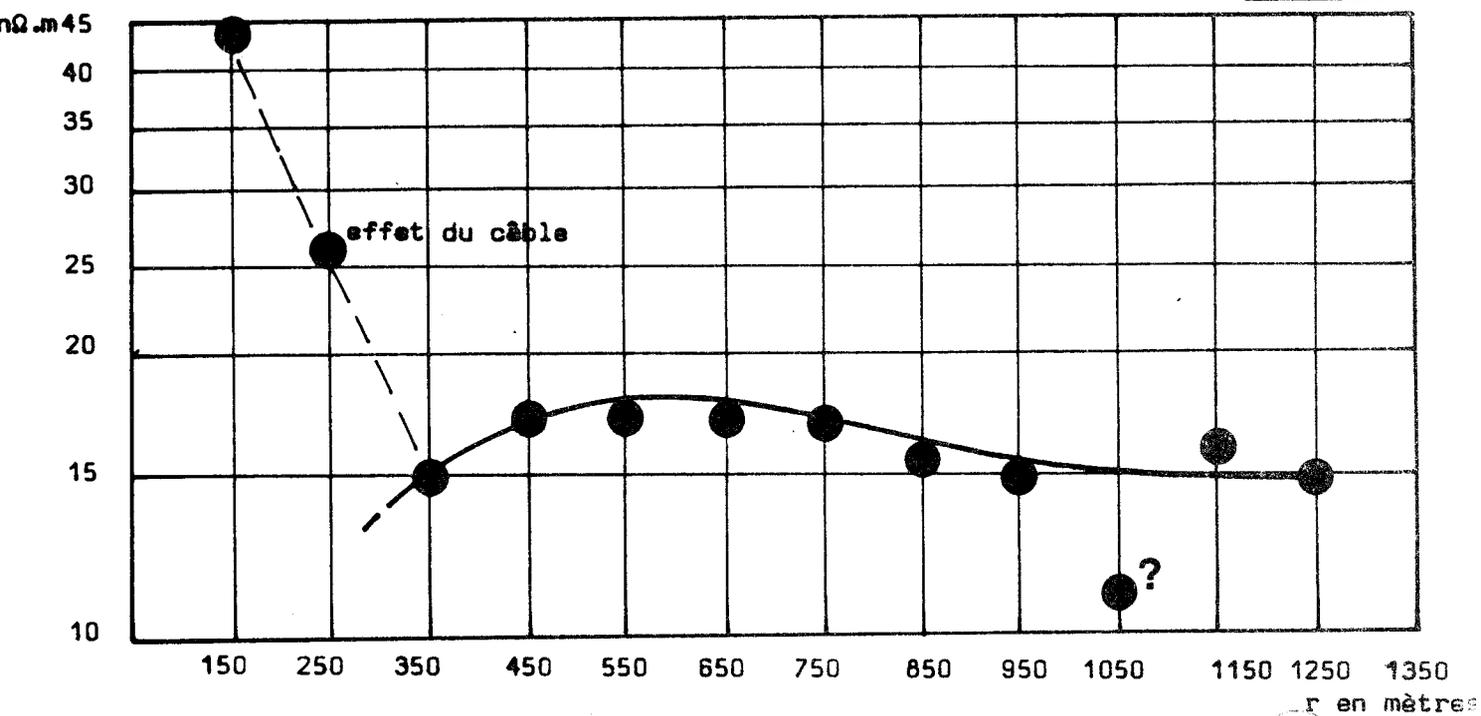
PROFIL 2  
z=517 mètres

Figure. 34



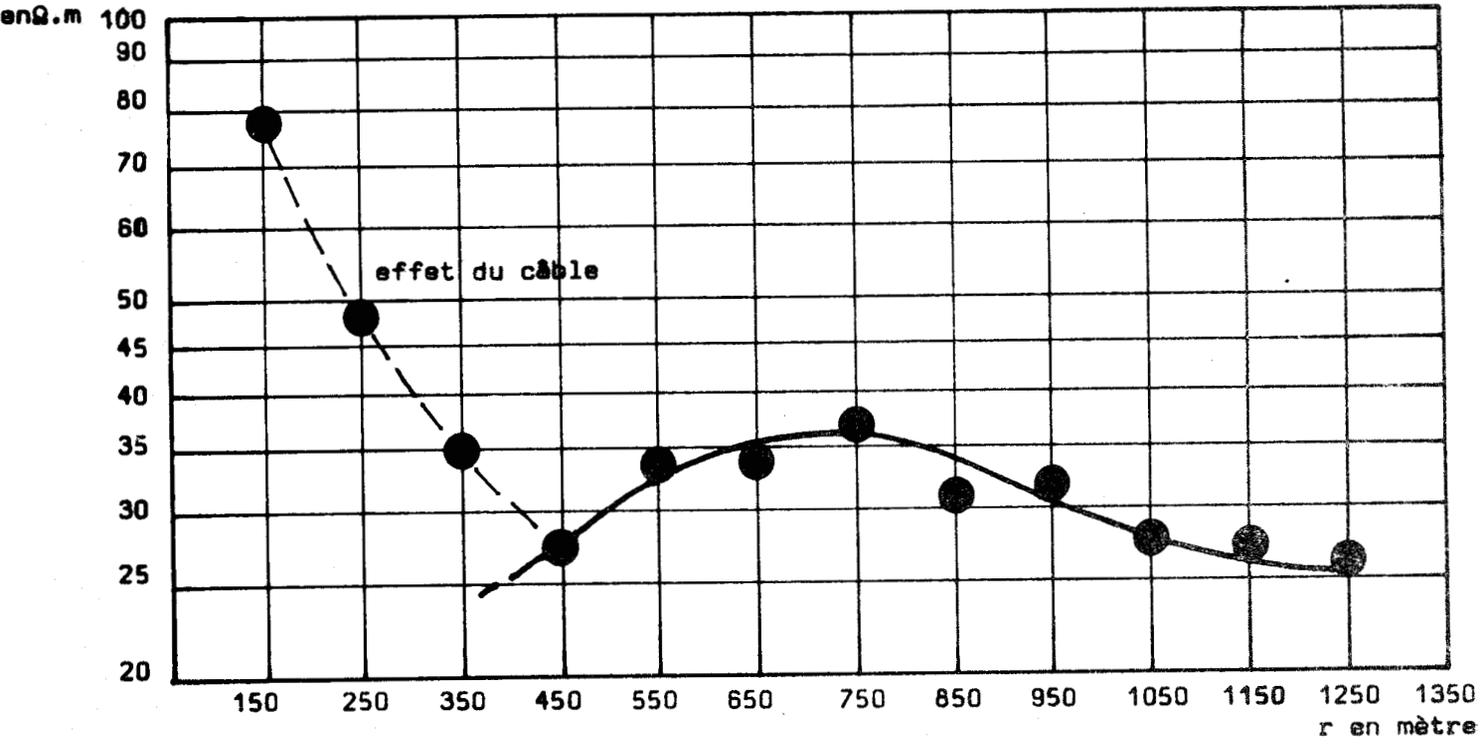
PROFIL 2  
z=484 mètres

Figure. 35



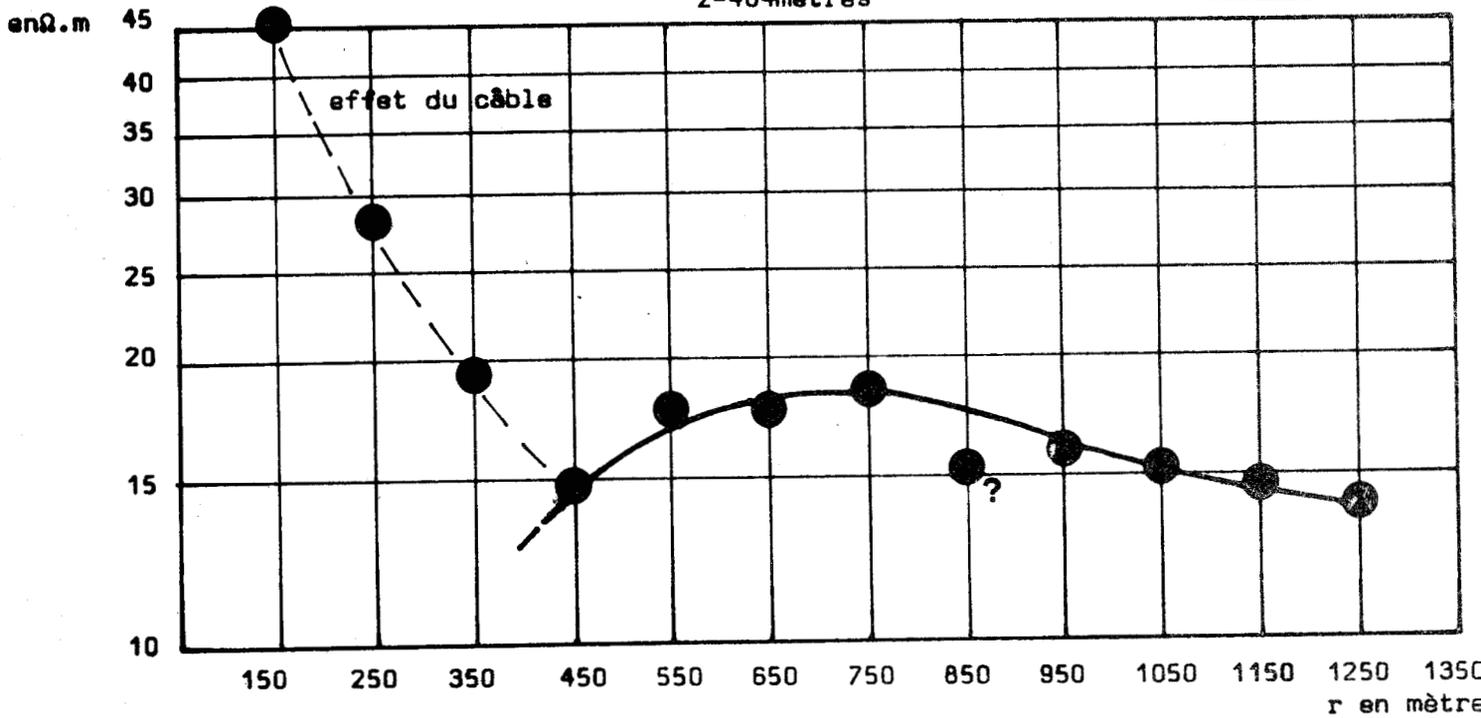
PROFIL 3  
z=517 mètres

Figure.36-



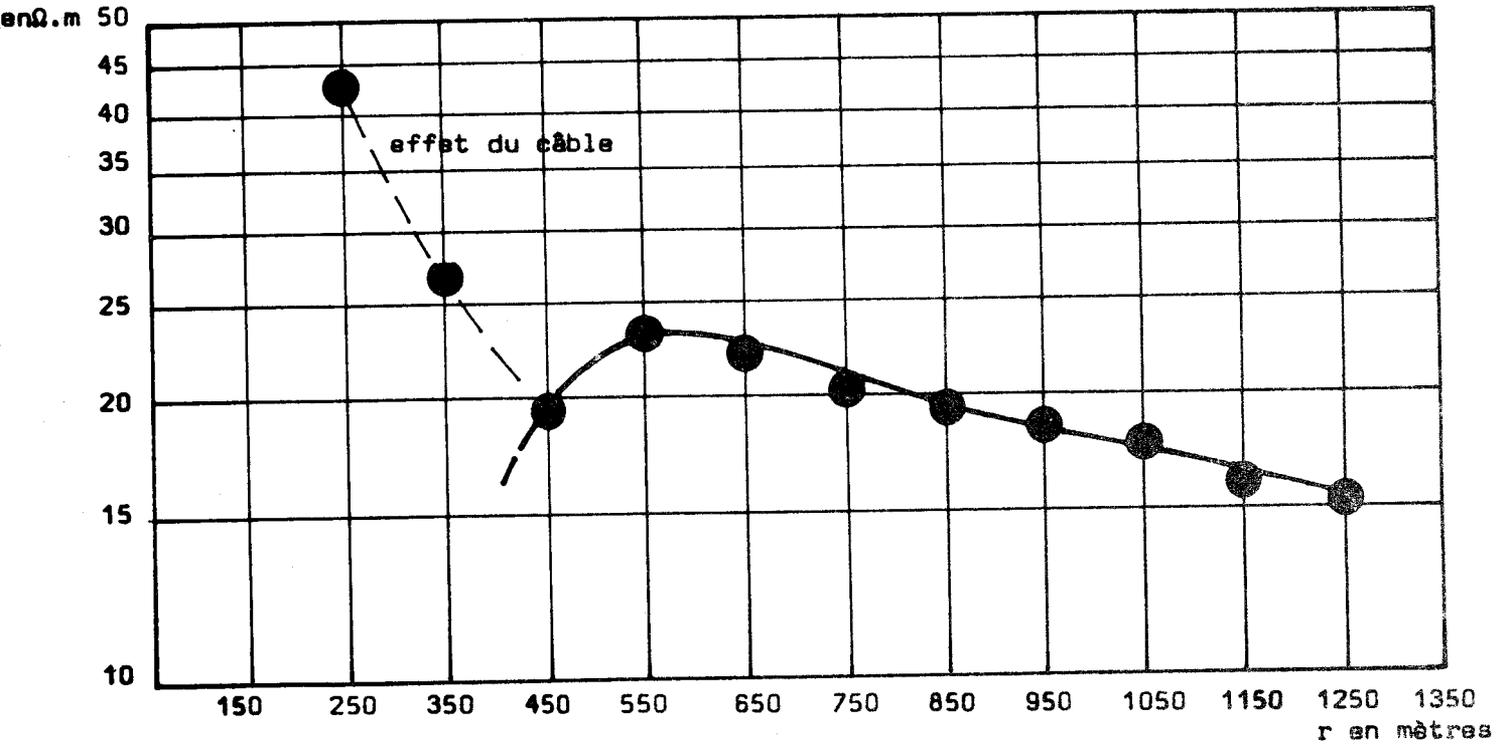
PROFIL 3  
z=484mètres

Figure.37-



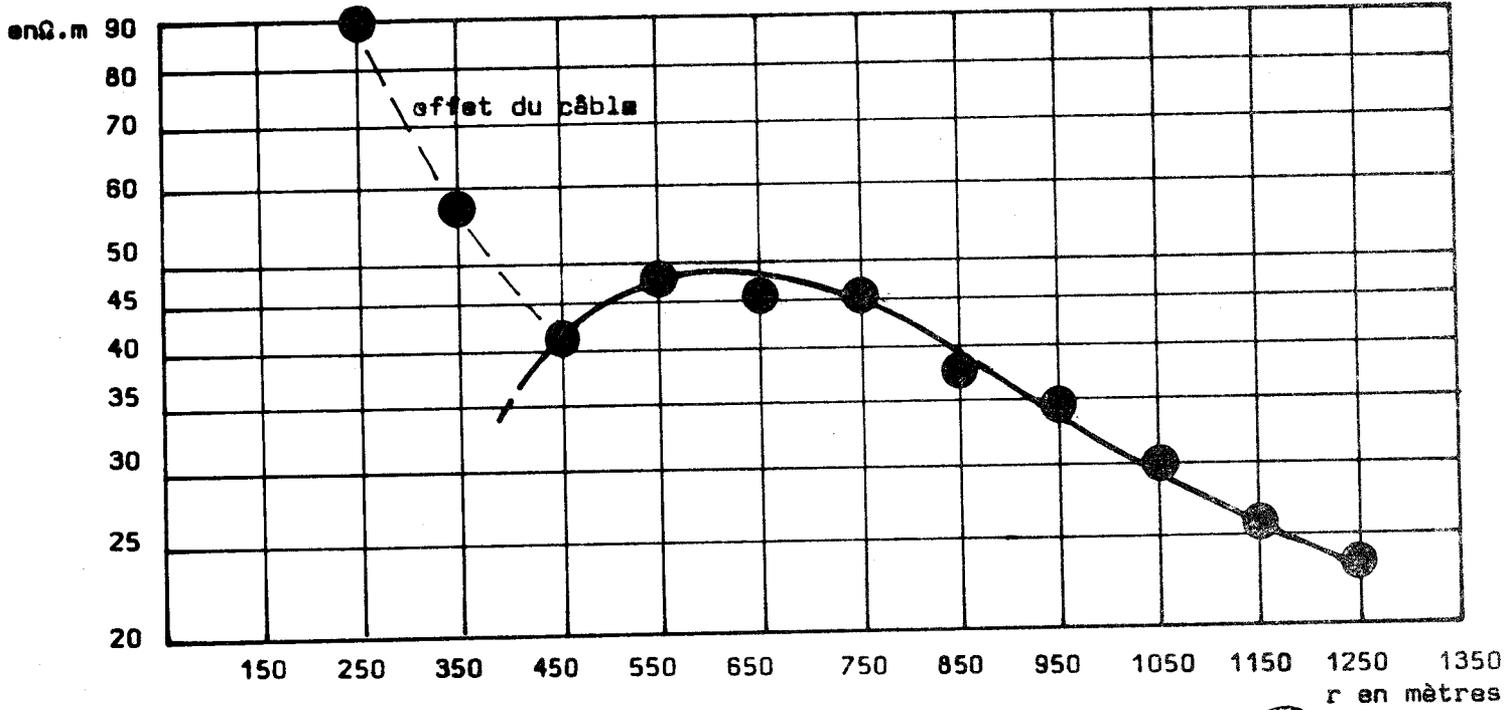
PROFIL 3  
z = 440mètres

Figure.38.



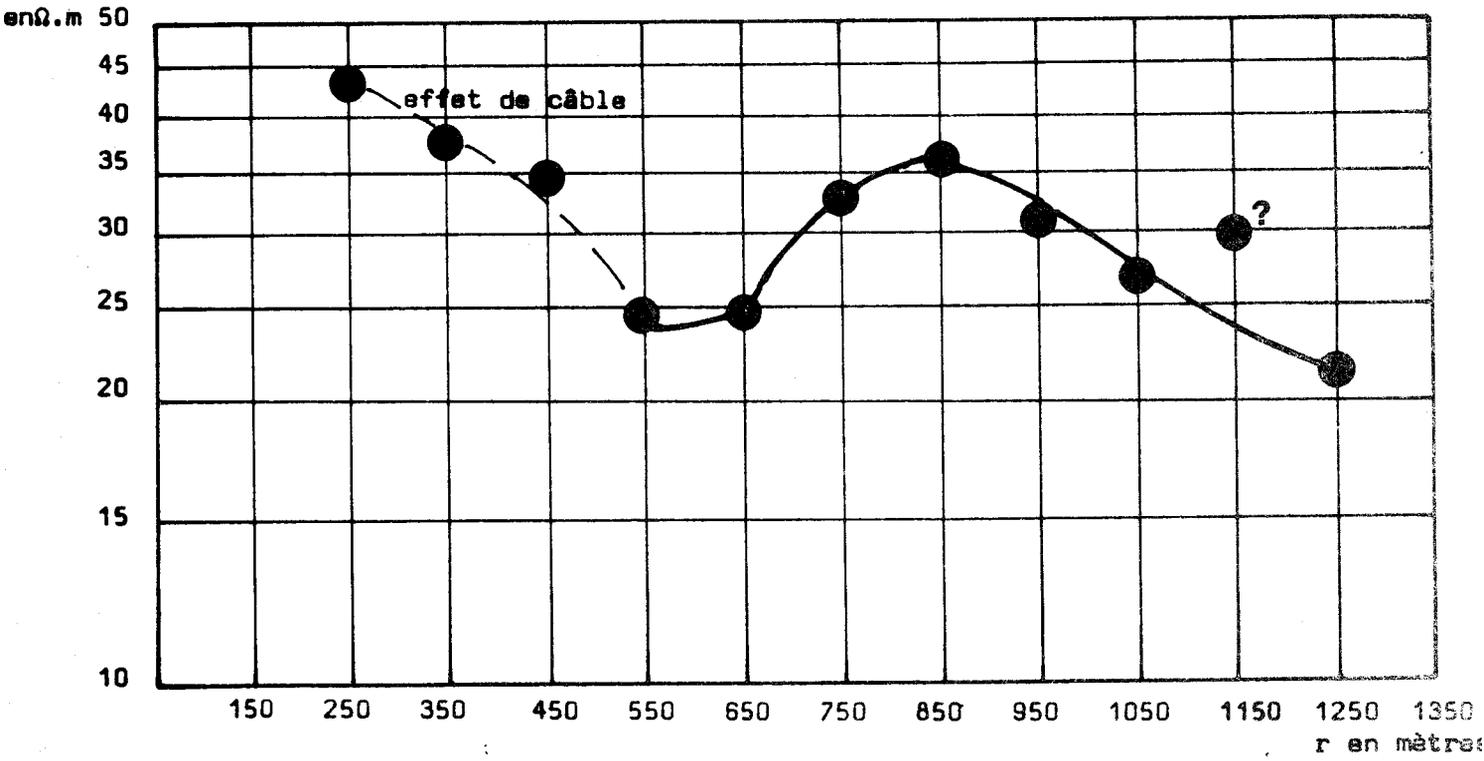
PROFIL 3  
z = 400mètres

Figure.39.



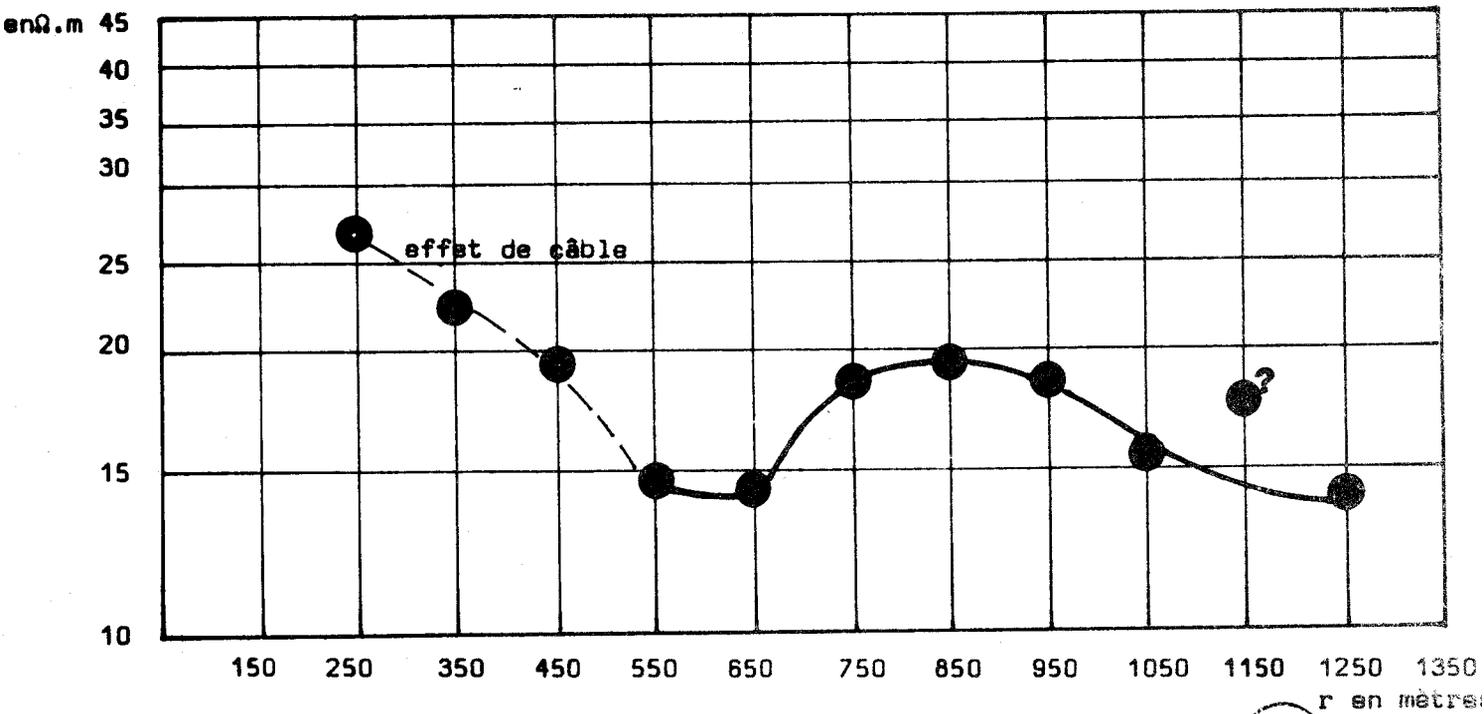
PROFIL 4  
z = 517mètres

Figure.40-



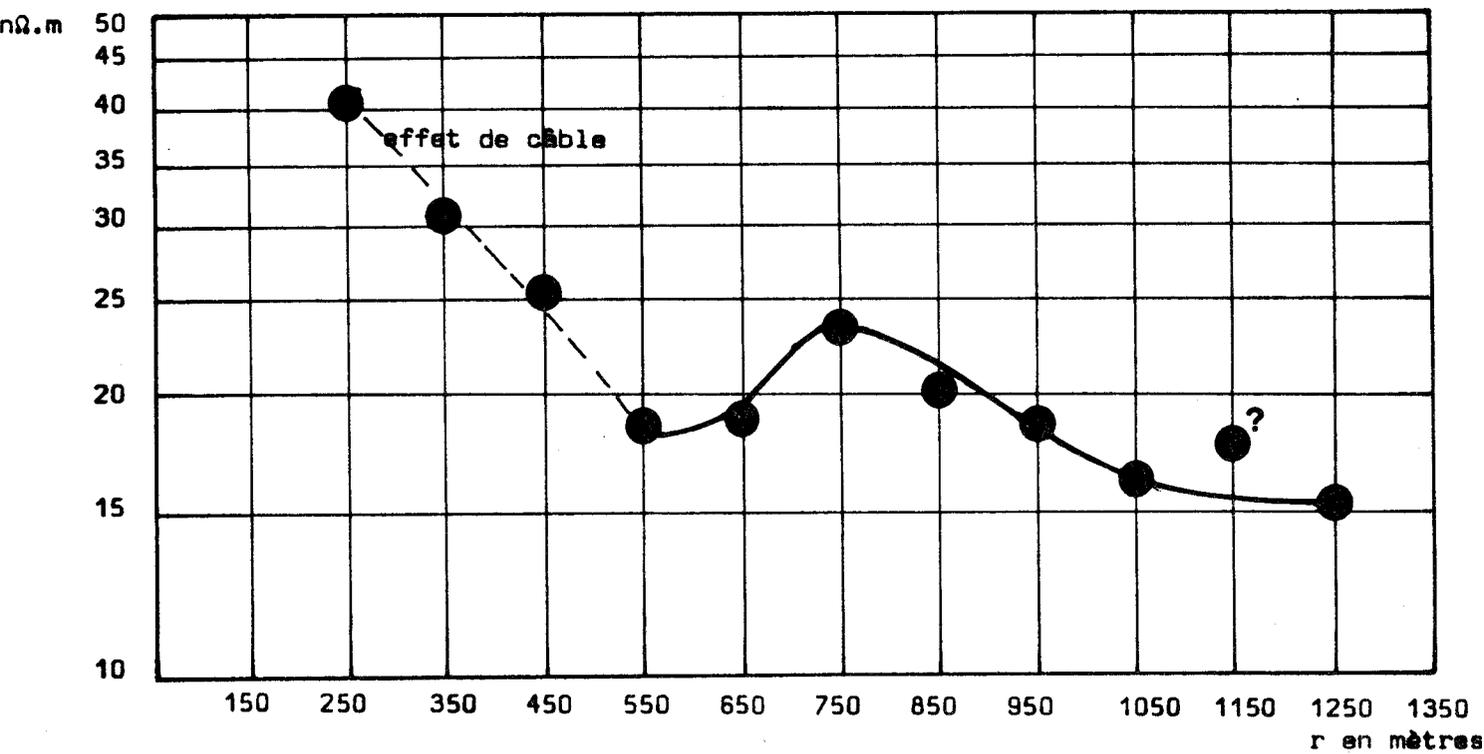
PROFIL 4  
z = 484mètres

Figure.41-



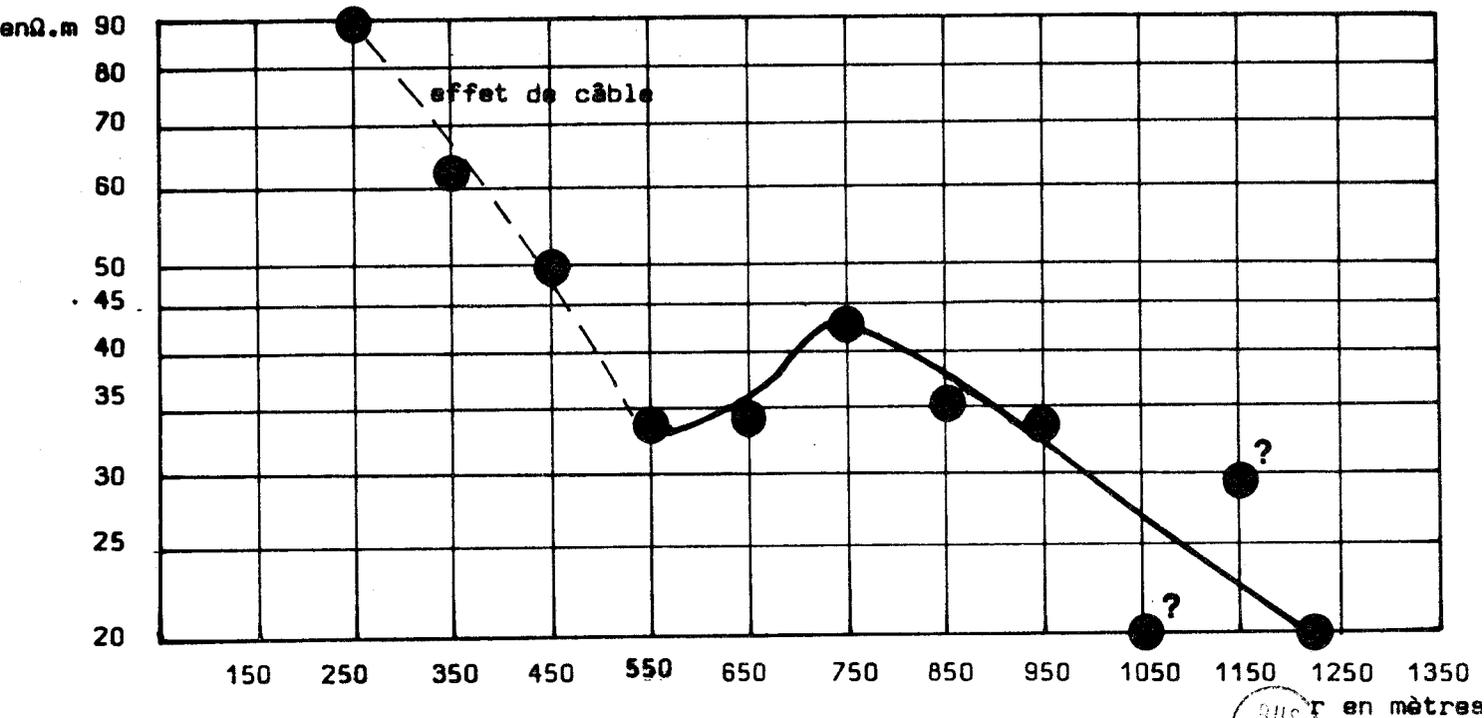
PROFIL 4  
z = 440mètres

Figure.42.



PROFIL 4  
z = 400mètres

Figure.43.



BUS  
VILLE

Nous obtenons des résultats concordants quelle que soit la côte du récepteur. Mais nous ne retiendrons, pour l'interprétation quantitative, que les mesures effectuées à la profondeur maximum  $z = 517$  m.

A cette profondeur, et pour les trois profils 2, 3 et 4, nous avons calculé l'indice d'anomalie :

$$\Delta = 100 \left( \frac{\rho_a}{\rho_o} - 1 \right)$$

$\rho_o$  étant la résistivité moyenne du terrain évaluée à partir du latérog. Ici elle est de 20  $\Omega$ .m.

Sur les figures.44, 45 et 46 qui montrent la fonction  $\Delta(r)$  pour les 3 profils, nous relevons les valeurs suivantes :

Profil	$r_c$ mètres	d mètres	max %
2	600	200	36
3	750	500	58
4	850	650	70

le bord de la bulle de gaz se situerait à 200 m de Lug 39 sur le profil 2, à 500 m sur le profil 3 et à 650 m sur le profil 4.

Ce bord de la bulle (figure.33.) ne correspond pas très bien aux isobathes, mais, d'une part ces isobathes sont peut être quelque peu imprécis dans ce secteur car contrôlés par un nombre insuffisant de puits, d'autre part le gaz se met en place en fonction des aléas de faciès dans le réservoir et peut descendre plus bas dans les châteaux très perméables. Enfin, le Télég voit la bulle seulement lorsque l'épaisseur en gaz est suffisante pour constituer une anomalie ; il ne peut donc pas déceler la fine bordure du gaz qui ne provoque qu'un effet évanescent.

TELEDIAGNOSTIC - LUSSAGNET -

LUG 39 (z=517mètres)

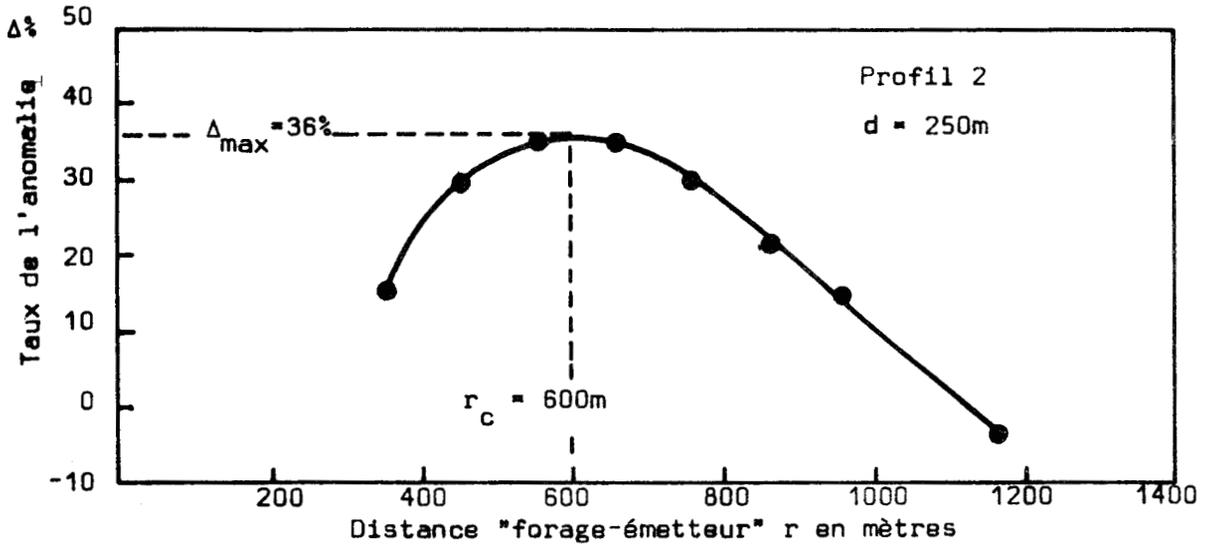


Figure.44-

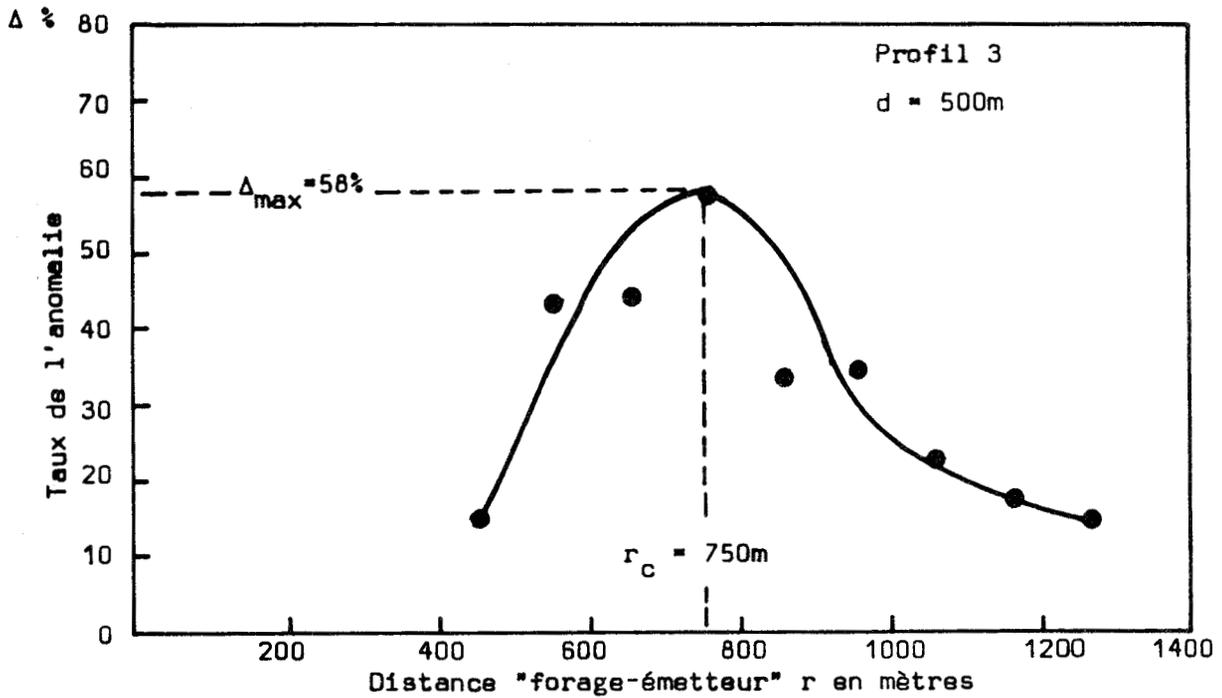


Figure.45-



TELEDIAGNOSTIC - LUSSAGNET -

LUG 39 (z = 517mètres)

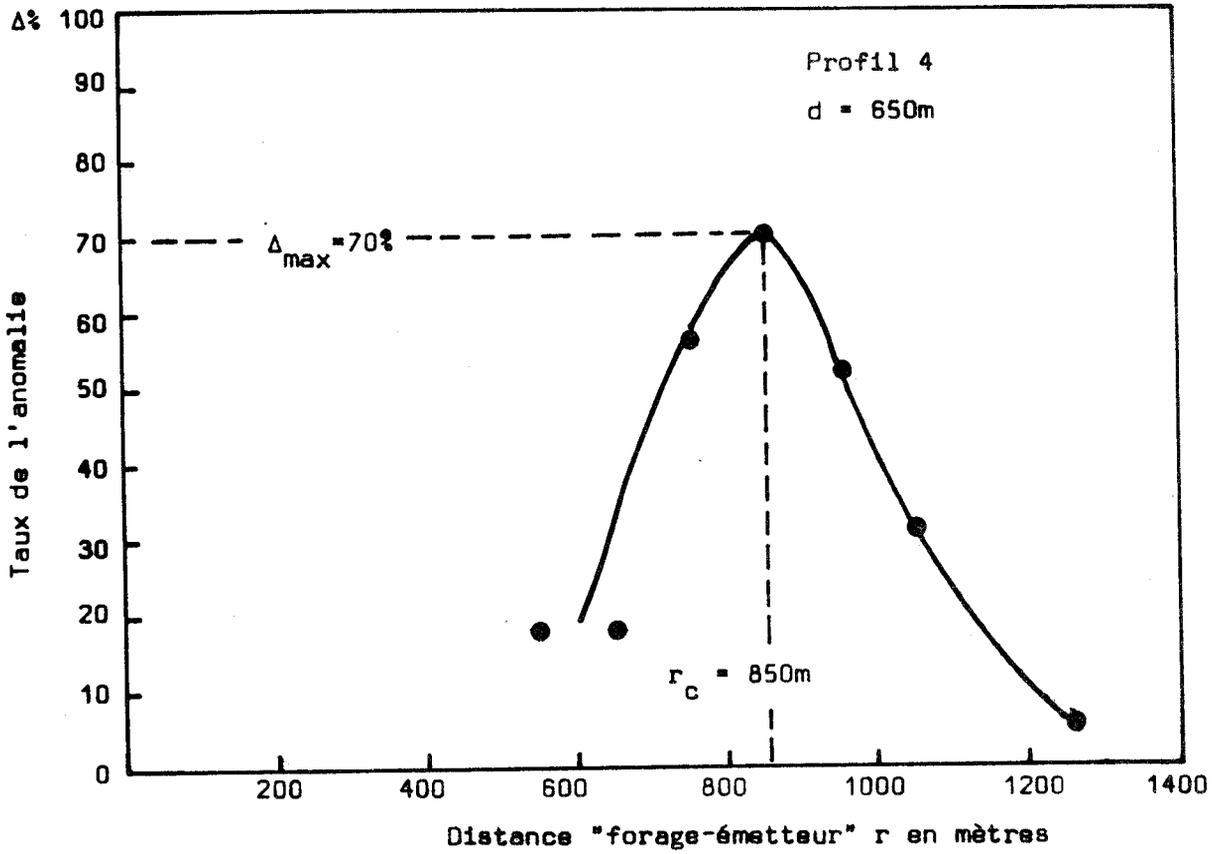


Figure.46.



#### VI. 4. SUITE DES OPERATIONS TELELOG

Au vu de ces résultats, en collaboration avec le service production et le service géologique de la S.N.P.A., il a été ~~décidé~~ de fair le puits Lug 40 à partir de l'emplacement de Lug 39 déviant de 150 m dans l'azimut du profil ; ce profil serait la direction d'allongement maximum de la bulle<sup>(25)</sup>.

Le forage Lug 40 à touché le toit du réservoir à - 464m de profondeur par rapport au niveau de la mer. Ce forage est un producteur convenable. De plus, il permet de préciser la carte structurale du toit du réservoir.

#### V. 5. CONCLUSIONS

Le résultat positif obtenu à LUSSAGNET a incité d'importantes sociétés à faire appel au Télélog.

Nous avons effectué des mesures Télélog à CHEMERY<sup>(7)</sup> et à VELAINÉ sur des gisements artificiels de gaz appartenant à "GAZ de FRANCE". Nous avons effectué également des mesures à GUIPY<sup>(4)</sup>,<sup>(10)</sup> (B.R.G.M.) et à ORLEANS<sup>(8)</sup> (Générale Géotechnique).

L'ensemble des expériences Télélog a donné lieu à des résultats positifs et montre que l'on peut continuer le développement industriel du procédé Télélog.

2ème PARTIE

ETUDE THEORIQUE

CHAPITRE . I.

PROPAGATION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE EMISE DANS UN MILIEU  
STRATIFIE QUELCONQUE PAR UN DIPOLE ELECTRIQUE HORIZONTAL (D.E.H.)

I.1. DEFINITIONS

Le milieu stratifié dans lequel nous allons étudier le phénomène de propagation d'une onde électromagnétique est représenté figure. 47. Il est formé d'un empilement de  $M+1$  couches séparées les unes des autres par des interfaces horizontaux plans et parallèles numérotés de 1 à  $M$ .

Chaque couche est homogène, isotrope, et est caractérisée par les constantes électromagnétiques  $\epsilon_m$  et  $\sigma_m$  qui sont respectivement la constante diélectrique et la conductivité électrique. La perméabilité magnétique est supposée la même pour toutes les couches.  $m$  est l'indice de la couche, son épaisseur est  $h_m$ . Les couches extrêmes 0 et  $M$  sont des demi-milieus infinis vers le haut ( $h_0 \rightarrow \infty$ ) et vers le bas ( $h_M \rightarrow \infty$ ).

Ce milieu stratifié simulera par exemple un terrain formé de  $M-1$  couches géologiques sédimentaires surmontant un substratum d'épaisseur très grande et surmonté par l'atmosphère. La surface du sol est alors l'interface d'indice 1.

Nous utiliserons pour caractériser chaque couche sa conductivité complexe  $k_m$  et le facteur de propagation  $\gamma_m$  définis respectivement par :

$$k_m = \sigma_m + j\omega\epsilon_m \quad (I.1.)$$

$$\gamma_m^2 = j\omega\mu k_m \quad (I.2.)$$

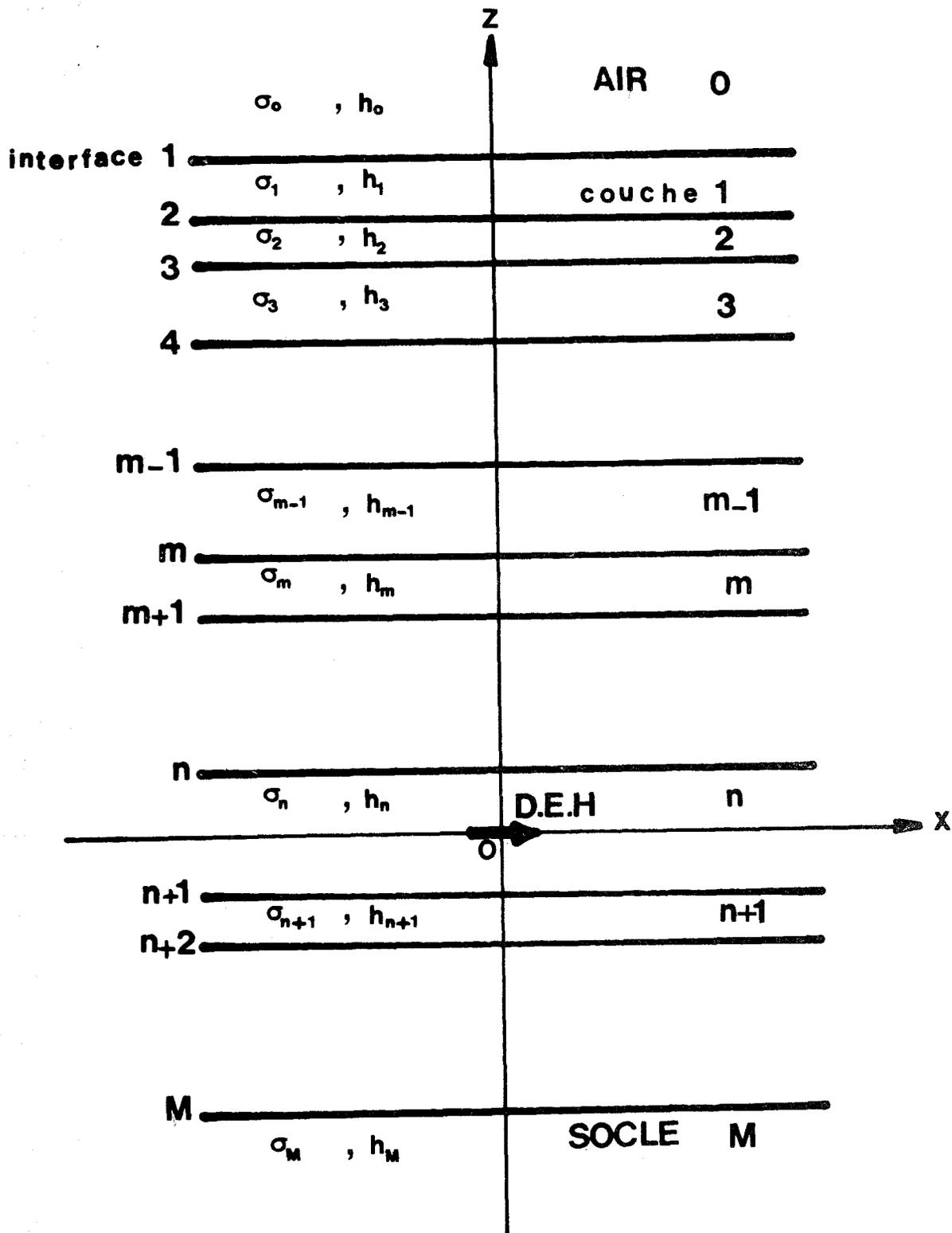


Figure .47.



Nous supposons qu'un dipôle électrique horizontal (D.E.H.) se trouve placé sur l'axe oz au sein de l'une des couches que nous identifierons en l'affectant de l'indice n.

L'axe du dipôle est orienté suivant la direction ox prise comme origine de la coordonnée  $\phi$  du système de coordonnées cylindriques  $(r, \phi, z)$ .

L'axe vertical oz est orienté positivement vers le haut et son origine est prise au niveau du dipôle émetteur (voir figure.47.).

Le "pouvoir émissif" du D.E.H. est défini par :

$$P_n = \frac{I\ell}{4\pi k_n} \quad (I.3.)$$

avec :

$$I = I_0 e^{j\omega t} \quad (I.4.)$$

$I_0$  est l'amplitude du courant d'alimentation du dipôle et  $\omega$  sa fréquence angulaire

$\ell$  est la longueur du dipôle.

## I.2. COMPOSANTES DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Dans chaque couche m du terrain, les deux vecteurs champ électrique  $\vec{E}_m$  et champ magnétique  $\vec{H}_m$  dérivent du potentiel vecteur de Hertz  $\vec{\Pi}_m$ , ayant deux composantes  $(\Pi_x)_m$  et  $(\Pi_z)_m$ .

Les formules reliant les champs au potentiel sont <sup>(27)</sup> :

$$\vec{E}_m = \text{rot rot } \vec{\Pi}_m \quad (I.5.)$$

$$\vec{H}_m = k_m \text{ rot } \vec{\Pi}_m \quad (I.6.)$$

La formule (I.5.) peut se remplacer par :

$$\vec{E}_m = -\Delta \vec{\Pi}_m + \text{grad div } \vec{\Pi}_m \quad (I.7.)$$

or, d'après l'équation de Helmholtz que vérifie  $\Pi^m$  :

$$\Delta (\nabla^2 \Pi^m) = 0 \tag{I.8.}$$

et

$$\text{div } \vec{\Pi}^m = \frac{\partial x}{\partial x} \Pi^m + \frac{\partial z}{\partial z} \Pi^m \tag{I.9.}$$

On en déduit facilement les trois composantes de  $\vec{E}^m$  sur les axes ox, oy et oz (oy étant l'axe formant avec ox et oz un trièdre trirectangle direct).

Nous avons :

$$(E^x)^m = -\lambda^m \Pi^m + \frac{\partial x}{\partial x} \Pi^m + \frac{\partial z}{\partial z} \Pi^m \tag{I.10.}$$

$$(E^y)^m = \frac{\partial y}{\partial x} \Pi^m + \frac{\partial x}{\partial x} \Pi^m + \frac{\partial z}{\partial z} \Pi^m \tag{I.11.}$$

$$(E^z)^m = -\lambda^m \Pi^m + \frac{\partial z}{\partial x} \Pi^m + \frac{\partial x}{\partial x} \Pi^m + \frac{\partial z}{\partial z} \Pi^m \tag{I.12.}$$

Enfin, on extrait facilement de (I.6.) :

$$(H^x)^m = k^m \frac{\partial y}{\partial x} \Pi^m \tag{I.13.}$$

$$(H^y)^m = k^m \left\{ \frac{\partial z}{\partial x} \Pi^m - \frac{\partial x}{\partial z} \Pi^m \right\} \tag{I.14.}$$

$$(H^z)^m = -k^m \frac{\partial y}{\partial x} \Pi^m \tag{I.15.}$$

### I.3. EXPRESSION DU POTENTIEL DE HERTZ

Il est bien connu que les potentiels de Hertz dans une couche  $m$  quelconque sont donnés par les intégrales de SOMMERFELD (27) :

$$(H^x)^m = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ a^m e^{-u z} + b^m e^{u z} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda \tag{I.16.}$$

$$(\Pi_z)_m = - \cos\phi \int_0^\infty \{ f_m e^{-u_m z} + g_m e^{u_m z} \} J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (I.17.)$$

avec :

$$u_m = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_m^2} \quad (I.18.)$$

Le signe de ce radical est choisi de manière à avoir toujours la partie réelle de  $u_m$  positive :

$$R_e(u)_m \geq 0 \quad (I.19.)$$

$\lambda$  est une variable d'intégration.

Dans la couche  $n$  où se trouve placé le dipôle émetteur, il faut tenir compte du "potentiel primaire" créé par celui-ci et dirigé suivant son axe ; (I.16.) et (I.17.) s'écrivent alors :

$$(\Pi_x)_n = \int_0^\infty \left\{ p_n \frac{\lambda}{u_n} e^{+u_n z} + a_n e^{-u_n z} + b_n e^{u_n z} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (I.20.)$$

$$(\Pi_y)_n = - \cos\phi \int_0^\infty \{ f_n e^{-u_n z} + g_n e^{u_n z} \} J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (I.21.)$$

La partie réelle de  $u_n$  étant positive, il faut que le double signe du terme exponentiel du potentiel primaire soit + si  $z$  est négatif (région située en-dessous du dipôle émetteur) et - si  $z$  est positif (région située au-dessus du dipôle émetteur).

#### I.4. CONDITIONS AUX LIMITES

Les conditions de continuité des composantes tangentielles du champ électromagnétique exigent que sur une interface  $m$  quelconque de profondeur  $z_m$  on ait<sup>(27)</sup> :

$$(E_x)_{m-1} = (E_x)_m \quad (I.22.)$$

$$(E_y)_{m-1} = (E_y)_m \quad (I.23.)$$

$$(H_x)_{m-1} = (H_x)_m \quad (I.24.)$$

$$(H_y)_{m-1} = (H_y)_m \quad (I.25.)$$

Ces conditions seront satisfaites si l'on a :

$$k_{m-1} \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_x)_{m-1} = k_m \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_x)_m \quad (I.26.)$$

$$k_{m-1} (\Pi_x)_{m-1} = k_m (\Pi_x)_m \quad (I.27.)$$

$$k_{m-1} (\Pi_z)_{m-1} = k_m (\Pi_z)_m \quad (I.28.)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Pi_x)_{m-1} + \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_z)_{m-1} = \frac{\partial}{\partial x} (\Pi_x)_m + \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_z)_m \quad (I.29.)$$

Posons :

$$X_m = a_m e^{-u_m z} + b_m e^{u_m z} \quad (I.30.)$$

$$Z_m = f_m e^{-u_m z} + b_m e^{u_m z} \quad (I.31.)$$

$$\dot{X}_m = \frac{\partial}{\partial z} (X_m) \quad (I.32.)$$

et

$$\dot{Z}_m = \frac{\partial}{\partial z} (Z_m) \quad (I.33.)$$

remarquons que :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Pi_x)_m = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} (\Pi_x)_m \quad (I.34.)$$

et qu'en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \phi \quad (I.35.)$$

et que :

$$\frac{\partial}{\partial r} J_0(\lambda r) = -\lambda J_1(\lambda r) \quad (I.36.)$$

(I.34.) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Pi_x)_m = -\cos\phi \int_0^\infty X_m J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (I.37.)$$

Il est évident que les conditions aux limites (I.26.), (I.27.), (I.28.) et (I.29.) seront satisfaites si nous avons respectivement :

$$k_{m-1} \dot{X}_{m-1}(z_m) = k_m \dot{X}_m(z_m) \quad (I.38.)$$

$$k_{m-1} X_{m-1}(z_m) = k_m X_m(z_m) \quad (I.39.)$$

$$k_{m-1} Z_{m-1}(z_m) = k_m Z_m(z_m) \quad (I.40.)$$

$$X_{m-1}(z_m) + Z_{m-1}(z_m) = X_m(z_m) + Z_m(z_m) \quad (I.41.)$$

### I.5. CONDITIONS AUX LIMITES VECTORIELLES

Le problème que nous avons à résoudre est d'exprimer tous les coefficients  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $f_m$  et  $g_m$  en fonction du "pouvoir émissif"  $p_n$  du D.E.H. Nous allons résoudre ce problème en considérant les termes

$a_m e^{-u_m z}$ ,  $b_m e^{u_m z}$ ,  $f_m e^{-u_m z}$  et  $g_m e^{u_m z}$  comme les quatre composantes, dans un espace fonctionnel à quatre dimensions, d'un vecteur :

$$\vec{A}_m(z) = \begin{pmatrix} a_m e^{-u_m z} \\ b_m e^{u_m z} \\ f_m e^{-u_m z} \\ g_m e^{u_m z} \end{pmatrix} \quad (I.42.)$$

Nous définissons également le vecteur  $\overrightarrow{Z_m(z)}$  dont l'expression matricielle est :

$$\overrightarrow{Z_m(z)} = \begin{pmatrix} k_m \dot{X}_m \\ k_m X_m \\ k_m Z_m \\ X_m + \dot{Z}_m \end{pmatrix} \quad (\text{I.43.})$$

Ce vecteur est relié au vecteur  $\overrightarrow{A_m(z)}$  par la relation matricielle :

$$\overrightarrow{Z_m(z)} = k_m V_m \overrightarrow{A_m(z)} \quad (\text{I.44.})$$

$V_m$  étant la matrice :

$$V_m = \begin{pmatrix} -u_m & u_m & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/K_m & 1/K_m & -u_m/k_m & u_m/k_m \end{pmatrix} \quad (\text{I.45.})$$

Avec ces vecteurs, les conditions aux limites (I.38.), (I.39.), (I.40.) et (I.41.) s'écrivent simplement :

$$\overrightarrow{Z_{m-1}(z_m)} = \overrightarrow{Z_m(z_m)} \quad (\text{I.46.})$$

Au moyen de (I.44.) on transforme facilement la condition (I.46.) en une condition portant sur les vecteurs  $\overrightarrow{A_m(z)}$  :

$$\overrightarrow{A_{m-1}(z_m)} = \frac{k_m}{k_{m-1}} V_{m-1}^{-1} V_m \overrightarrow{A_m(z_m)} \quad (\text{I.47.})$$

Cette formule est valable également dans la couche  $n$  où se trouve le dipôle émetteur à condition d'écrire pour l'indice  $n$  :

$$\overrightarrow{A}_n(z) = \begin{pmatrix} \left\{ a_n + p_n \frac{\lambda}{u_n} \right\} e^{-u_n z} \\ b_n e^{u_n z} \\ f_n e^{-u_n z} \\ g_n e^{u_n z} \end{pmatrix} \quad \text{si } z > 0 \quad (\text{I.48.})$$

et

$$\overrightarrow{A}_n(z) = \begin{pmatrix} a_n e^{-u_n z} \\ \left\{ b_n + p_n \frac{\lambda}{u_n} \right\} e^{u_n z} \\ f_n e^{-u_n z} \\ g_n e^{u_n z} \end{pmatrix} \quad \text{si } z < 0 \quad (\text{I.49.})$$

### I.6. FORMULE DE RECURRENCE

On vérifie facilement sur la figure.47. que :

$$z_{m+1} = z_m - h_m \quad (\text{I.50.})$$

et par suite, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{A}_m(z_m) = \begin{pmatrix} a_m e^{-u_m z_{m+1}} \cdot e^{-u_m h_m} \\ b_m e^{u_m z_{m+1}} \cdot e^{u_m h_m} \\ f_m e^{-u_m z_{m+1}} \cdot e^{-u_m h_m} \\ g_m e^{u_m z_{m+1}} \cdot e^{u_m h_m} \end{pmatrix} \quad (\text{I.51.})$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\overrightarrow{A_m(z_m)} = D_m^{-1} \overrightarrow{A_m(z_{m+1})} \quad (I.52.)$$

avec :

$$D_m = \begin{pmatrix} e^{d_m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-d_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{d_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-d_m} \end{pmatrix} \quad (I.53.)$$

où :

$$d_m = u_m h_m \quad (I.54.)$$

En portant la valeur (I.52.) de  $\overrightarrow{A_m(z_m)}$  dans (I.47.) on obtient une relation de récurrence entre  $\overrightarrow{A_{m-1}(z_m)}$  et  $\overrightarrow{A_m(z_{m+1})}$  :

$$\overrightarrow{A_{m-1}(z_m)} = \frac{k_m}{k_{m-1}} V_{m-1}^{-1} V_m D_m^{-1} \overrightarrow{A_m(z_{m+1})} \quad (I.55.)$$

Donnons-nous alors deux indices  $p$  et  $q$  tels que l'on ait toujours :

$$p < q \quad (I.56.)$$

L'emploi répété des formules (I.47.) et (I.52.) nous permet d'écrire :

$$\overrightarrow{A_p(z_{p+1})} = \frac{k_q}{k_p} (V)_{pq} \overrightarrow{A_q(z_q)} \quad (I.57.)$$

(V)<sub>pq</sub> étant le produit de matrices :

$$(V)_{pq} = V_p^{-1} V_{p+1} D_{p+1}^{-1} V_{p+1} \dots V_m D_m^{-1} V_m^{-1} \dots V_{q-1} D_{q-1}^{-1} V_{q-1}^{-1} V_q$$

$$(I.58.)$$

où  $m$  est un indice courant.

Pour faciliter l'exploitation des formules (I.57.) et (I.58.) nous adopterons la convention d'écriture suivante : l'inversion de la matrice  $(V)_{pq}$  sera représentée par l'inversion de l'ordre de ses indices.

Nous aurons donc :

$$(V)_{qp} = (V)_{pq}^{-1} = V_q^{-1} V_{q-1} D_{q-1} V_{q-1}^{-1} \dots V_m D_m V_m^{-1} \dots V_{p+1} D_{p+1} V_{p+1}^{-1} V_p \quad (I.59.)$$

avec  $p < q$ .

### I.7. POTENTIEL DE HERTZ DANS UNE COUCHE m QUELCONQUE

Dans une couche quelconque d'indice  $m$  les deux composantes du potentiel de Hertz sont données par les intégrales de SOMMERFELD (I.16.) et (I.17.) que nous pouvons écrire sous la forme :

$$(\Pi_x)_m = \int_0^\infty I_x \overrightarrow{A_m(z)} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (I.60.)$$

$$(\Pi_z)_m = -\cos\phi \int_0^\infty I_z \overrightarrow{A_m(z)} J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (I.61.)$$

avec :

$$I_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (I.62.)$$

$$I_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.63.)$$

$z$  est l'altitude du récepteur supposé situé dans la couche  $m$ , ce qui implique :

$$z_{m+1} < z < z_m \quad (I.64.)$$

et nous pouvons exprimer le vecteur  $\overrightarrow{A_m(z)}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{A_m(z_m)}$  ou  $\overrightarrow{A_m(z_{m+1})}$  par les formules :

$$\overrightarrow{A_m(z)} = D_m(z_{m+1} - z) \cdot \overrightarrow{A_m(z_{m+1})} \quad (I.65.)$$

$$\overrightarrow{A_m(z)} = D_m(z_m - z) \cdot \overrightarrow{A_m(z_m)} \quad (I.66.)$$

avec :

$$D_m(z_{m+1} - z) = \begin{pmatrix} e^{u_m(z_{m+1} - z)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-u_m(z_{m+1} - z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{u_m(z_{m+1} - z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-u_m(z_{m+1} - z)} \end{pmatrix} \quad (I.67.)$$

$$D_m(z_m - z) = \begin{pmatrix} e^{u_m(z_m - z)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-u_m(z_m - z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{u_m(z_m - z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-u_m(z_m - z)} \end{pmatrix} \quad (I.68.)$$

Il suffit donc de déterminer le vecteur  $\overrightarrow{A_m(z_m)}$  ou  $\overrightarrow{A_m(z_{m+1})}$  pour obtenir l'expression du potentiel de Hertz.

Nous allons utiliser le fait que les deux couches extrêmes d'indices 0 et M sont infinies. Pour que le potentiel tende vers zéro quand  $z \rightarrow \pm \infty$  il faut que :

$$a_m = 0 \quad (I.69.)$$

$$b_0 = 0 \quad (I.70.)$$

$$f_M = 0 \quad (I.71.)$$

$$g_0 = 0 \quad (I.72.)$$

La formule de récurrence (I.57.) que nous venons d'établir nous permet de relier par une matrice dont tous les éléments sont connus le vecteur  $\overrightarrow{A_0(z_1)}$  au vecteur  $\overrightarrow{A_n(z_n)}$ . Cette relation nous fournira deux équations entre les quatre inconnues  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $f_n$  et  $g_n$ .

Nous pouvons de la même façon relier le vecteur  $\overrightarrow{A_M(z_M)}$  au vecteur  $\overrightarrow{A_n(z_{n+1})}$ . Nous obtiendrons alors deux autres équations entre les mêmes inconnues.

Au total nous aurons quatre équations entre quatre inconnues et nous pourrions exprimer les coefficients  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $f_n$  et  $g_n$  en fonction du "pouvoir émissif"  $p_n$  du dipôle.

C'est encore à l'aide de la formule (I.57.) que nous pourrions exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{A_m(z_m)}$  et  $\overrightarrow{A_m(z_{m+1})}$  en fonction de  $\overrightarrow{A_n(z_{n+1})}$  et  $\overrightarrow{A_n(z_n)}$  maintenant connus.

En faisant dans (I.57.)  $p = 0$  et  $q = n$ , puis ensuite  $p = n$  et  $q = M$ , nous obtenons :

$$\overrightarrow{A_0(z_1)} = \frac{k_n}{k_0} (V)_{on} \overrightarrow{A_n(z_n)} \quad (I.73.)$$

$$\overrightarrow{A_n(z_{n+1})} = \frac{k_M}{k_n} (V)_{nM} \overrightarrow{A_M(z_M)} \quad (I.74.)$$



Et avec la convention d'écriture que nous avons adoptée, l'inversion de la relation matricielle (I.74.) nous donne :

$$\overrightarrow{A_M(z_M)} = \frac{k_n}{k_M} (V)_{Mn} \overrightarrow{A_n(z_{n+1})} \quad (I.75.)$$

Nous allons définir les matrices  $(V)_{on}$  et  $(V)_{Mn}$  que nous allons être amenés à utiliser par les relations suivantes :

$$(V)_{on} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \quad (I.76.)$$

$$(V)_{Mn} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} \\ N_{41} & N_{42} & N_{43} & N_{44} \end{pmatrix} \quad (I.77.)$$

On remarquera, en tenant compte des formes particulières des matrices  $V_m$  et  $D_m$ , que pour toutes les valeurs des indices p et q de  $(V)_{pq}$  et  $(V)_{qp}$  les éléments des matrices  $M_{ij}$  et  $N_{ij}$  dont les indices sont 13, 14, 23 et 24 sont des zéros.

(I.76.) et (I.77.) s'écrivent donc sous une forme plus simple :

$$(V)_{on} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \quad (I.78.)$$

$$(V)_{Mn} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & 0 & 0 \\ N_{21} & N_{22} & 0 & 0 \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} \\ N_{41} & N_{42} & N_{43} & N_{44} \end{pmatrix} \quad (I.79.)$$

Le dipôle émetteur étant placé au milieu de la couche n, nous avons  $z_n > 0$  et  $z_{n+1} < 0$ . Il faudra donc utiliser respectivement pour  $\overrightarrow{A_n(z_n)}$  et  $\overrightarrow{A_n(z_{n+1})}$  les expressions (I.48.) et (I.49.)

Les relations (I.73.) et (I.74.) nous fournissent alors le système de quatre équations suivant :

$$0 = M_{21} \left( a_n + p_n \frac{\lambda}{u_n} \right) e^{-u_n z_n} + M_{22} \cdot b_n e^{u_n z_n} \quad (I.80.)$$

$$0 = M_{41} \left( a_n + p_n \frac{\lambda}{u_n} \right) e^{-u_n z_n} + M_{42} \cdot b_n e^{u_n z_n} + M_{43} f_n e^{-u_n z_n} + M_{44} g_n e^{u_n z_n} \quad (I.81.)$$

$$0 = N_{11} \cdot a_n e^{-u_n z_{n+1}} + N_{12} \left( b_n + p_n \frac{\lambda}{u_n} \right) e^{u_n z_{n+1}} \quad (I.82.)$$

$$0 = N_{31} \cdot a_n e^{-u_n z_{n+1}} + N_{32} \left( b_n + p_n \frac{\lambda}{u_n} \right) e^{u_n z_{n+1}} + N_{33} f_n e^{-u_n z_{n+1}} + N_{34} g_n e^{u_n z_{n+1}} \quad (I.83.)$$

### I.7.1. Calcul de $\overline{A_{n-n}}$

Les quatre dernières équations peuvent s'écrire en tenant compte de  $z_{n+1} = z_n - h_n$  et de  $u_n h_n = d_n$  :

$$N_{11} e^{d_n} \left( a_n + p_n \frac{\lambda}{u_n} \right) e^{-u_n z_n} + N_{12} e^{-d_n} b_n e^{u_n z_n} = p_n \frac{\lambda}{u_n} \{ N_{11} e^{-u_n z_{n+1}} - N_{12} e^{u_n z_{n+1}} \} \quad (I.84.)$$

$$M_{21} \left( a_n + p_n \frac{\lambda}{u_n} \right) e^{-u_n z_n} + M_{22} b_n e^{u_n z_n} = 0 \quad (I.85.)$$

$$\begin{aligned} N_{31} e^{d_n} \left( a_n + p_n \frac{\lambda}{u_n} \right) e^{-u_n z_n} + N_{32} e^{-d_n} b_n e^{u_n z_n} + N_{33} e^{d_n} d_n f_n e^{-u_n z_n} + N_{34} e^{-d_n} d_n g_n e^{u_n z_n} \\ = p_n \frac{\lambda}{u_n} \{ N_{31} e^{-u_n z_{n+1}} - N_{32} e^{u_n z_{n+1}} \} \end{aligned} \quad (I.86.)$$

$$M_{41} \left( a_n + p_n \frac{\lambda}{u_n} \right) e^{-u_n z_n} + M_{42} b_n e^{u_n z_n} + M_{43} f_n e^{-u_n z_n} + M_{44} g_n e^{u_n z_n} = 0 \quad (I.87.)$$

Ces quatre équations peuvent aussi s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} N_{11}e^{d_n} & N_{12}e^{-d_n} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 \\ N_{31}e^{d_n} & N_{32}e^{-d_n} & N_{33}e^{d_n} & N_{34}e^{-d_n} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \xrightarrow{A_n(z_n)} p_n \frac{\lambda}{u_n} \begin{pmatrix} N_{11}e^{-u_n z_{n+1}} & -N_{12}e^{u_n z_{n+1}} \\ 0 & 0 \\ N_{31}e^{-u_n z_{n+1}} & -N_{32}e^{u_n z_{n+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.88.})$$

On en tire facilement :

$$\xrightarrow{A_n(z_n)} = p_n \frac{\lambda}{u_n} \frac{\vec{P}_n}{\Delta_{n1} \Delta_{n2}} \quad (\text{I.89.})$$

avec :

$$\vec{P}_n = \begin{pmatrix} M_{22} \Delta_{n2} G_{n1} \\ -M_{21} \Delta_{n2} G_{n1} \\ (M_{44} \Delta_{n3} - N_{34} e^{-d_n \Delta_{n4}}) G_{n1} + M_{44} \Delta_{n1} G_{n2} \\ (-M_{43} \Delta_{n3} + N_{33} e^{d_n \Delta_{n4}}) G_{n1} + M_{43} \Delta_{n1} G_{n2} \end{pmatrix} \quad (\text{I.90.})$$

$$G_{n1} = N_{11}e^{-u_n z_{n+1}} - N_{12}e^{u_n z_{n+1}} \quad (\text{I.91.})$$

$$G_{n2} = N_{31}e^{-u_n z_{n+1}} - N_{32}e^{u_n z_{n+1}} \quad (\text{I.92.})$$

$$\Delta_{n1} = M_{22}N_{11}e^{d_n} - M_{21}N_{12}e^{-d_n} \quad (\text{I.93.})$$

$$\Delta_{n2} = M_{44}N_{33}e^{d_n} - M_{43}N_{34}e^{-d_n} \quad (\text{I.94.})$$

$$\Delta_{n3} = M_{21}N_{32}e^{-d_n} - M_{22}N_{31}e^{d_n} \quad (\text{I.95.})$$

$$\Delta_{n4} = M_{21}M_{42} - M_{22}M_{41} \quad (\text{I.96.})$$

I.7.3. Calcul du vecteur  $\overrightarrow{A_n(z_{n+1})}$

On peut aussi écrire les quatre équations (I.80.), (I.81.), (I.82.) et (I.83.) de la manière suivante :

$$\overrightarrow{p_{n+1}} =$$

$$N_{11} \cdot a_n e^{-u_n z_{n+1}} + N_{12} \cdot (b_n + p_n \frac{\lambda}{u_n}) e^{u_n z_{n+1}} = 0 \quad (I.97)$$

$$M_{21} e^{-d_n} \cdot a_n e^{-u_n z_{n+1}} + M_{22} e^{d_n} \cdot (b_n + p_n \frac{\lambda}{u_n}) e^{u_n z_{n+1}} = p_n \frac{\lambda}{u_n} (M_{22} e^{u_n z_n} - M_{21} e^{-u_n z_n}) \quad (I.98.)$$

$$N_{31} \cdot a_n e^{-u_n z_{n+1}} + N_{32} (b_n + p_n \frac{\lambda}{u_n}) e^{u_n z_{n+1}} + N_{33} f_n e^{-u_n z_{n+1}} + N_{34} g_n e^{u_n z_{n+1}} = 0 \quad (I.99.)$$

$$M_{41} e^{-d_n} \cdot a_n e^{-u_n z_{n+1}} + M_{42} e^{d_n} (b_n + p_n \frac{\lambda}{u_n}) e^{u_n z_{n+1}} + M_{43} e^{-d_n} f_n e^{-u_n z_{n+1}} + M_{44} e^{d_n} g_n e^{u_n z_{n+1}} = p_n \frac{\lambda}{u_n} (M_{42} e^{u_n z_n} - M_{41} e^{-u_n z_n}) \quad (I.100.)$$

$\Delta_{n1}$  et  $\Delta_{n2}$  sont e

ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

I.7.3. Les vecteur

Le entre 0 et n s'ob En tenant compte

$$\overrightarrow{A_m}$$

Pour obtenir les il suffit de fai de  $\overrightarrow{A_n(z_{n+1})}$ . Nou:

$$\overrightarrow{A_m}$$

Si le point de r utilise les form situé en-dessous (I.109.).

$$\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & 0 & 0 \\ M_{21} e^{-d_n} & M_{22} e^{d_n} & 0 & 0 \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} \\ M_{41} e^{-d_n} & M_{42} e^{d_n} & M_{43} e^{-d_n} & M_{44} e^{d_n} \end{pmatrix} \overrightarrow{A_n(z_{n+1})} = p_n \frac{\lambda}{u_n} \begin{pmatrix} 0 \\ M_{22} e^{u_n z_n} & -M_{21} e^{-u_n z_n} \\ 0 \\ M_{42} e^{u_n z_n} & -M_{41} e^{-u_n z_n} \end{pmatrix} \quad (I.101.)$$

d'où :

$$\overrightarrow{A_n(z_{n+1})} = p_n \frac{\lambda}{u_n} \frac{\overrightarrow{p_{n+1}}}{\Delta_{n1} \Delta_{n2}} \quad (I.102.)$$

avec :

$$\vec{p}_{n+1} = \begin{pmatrix} -N_{12} \Delta_{n2} G_{n3} \\ N_{11} \Delta_{n2} G_{n3} \\ (-M_{44} e^{d_n \Delta_{n5} + N_{34} \Delta_{n6}}) G_{n3} - N_{34} \Delta_{n1} G_{n4} \\ (M_{43} e^{-d_n \Delta_{n5} - N_{33} \Delta_{n6}}) G_{n3} + N_{33} \Delta_{n1} G_{n4} \end{pmatrix} \quad (\text{I.103.})$$

$$G_{n3} = M_{22} e^{u_n z_n} - M_{21} e^{-u_n z_n} \quad (\text{I.104.})$$

$$G_{n4} = M_{42} e^{u_n z_n} - M_{41} e^{-u_n z_n} \quad (\text{I.105.})$$

$$\Delta_{n5} = N_{11} N_{32} - N_{12} N_{31} \quad (\text{I.106.})$$

$$\Delta_{n6} = N_{11} M_{42} e^{d_n} - N_{12} M_{41} e^{-d_n} \quad (\text{I.107.})$$

$\Delta_{n1}$  et  $\Delta_{n2}$  sont encore donnés par (I.93.) et (I.94.).

### I.7.3. Les vecteurs $\vec{A}_{m(z_m)}$ et $\vec{A}_{m(z_{m+1})}$

Les vecteurs de toutes les couches d'indice  $m$  compris entre 0 et  $n$  s'obtiennent en faisant  $p = m$  et  $q = n$  dans la relation (I.57.). En tenant compte de (I.3.) et de (I.89.), nous avons :

$$\vec{A}_{m(z_{m+1})} = p_m \frac{\lambda}{u_n} (V)_{mn} \frac{\vec{p}_n}{\Delta_{n1} \Delta_{n2}} \quad (0 \leq m < n) \quad (\text{I.108.})$$

Pour obtenir les vecteurs des couches d'indice  $m$  compris entre  $n$  et  $M$ , il suffit de faire  $M = m$  dans (I.75.) et d'y porter la valeur (I.102.) de  $\vec{A}_n(z_{n+1})$ . Nous obtenons :

$$\vec{A}_m(z_m) = p_m \frac{\lambda}{u_n} (V)_{mn} \frac{\vec{p}_{n+1}}{\Delta_{n1} \Delta_{n2}} \quad (n < m \leq M) \quad (\text{I.109.})$$

Si le point de réception est situé au-dessus du dipôle émetteur ( $m < n$ ) on utilise les formules (I.65.) et (I.108.). Si le point de réception est situé en-dessous du dipôle émetteur on utilise les formules (I.66.) et (I.109.).

I.8. CAS D'UN DIPOLE SITUE DANS L'ATMOSPHERE

Dans le cas où un dipôle émetteur est situé dans la couche supérieure de la stratification (c'est-à-dire dans l'atmosphère pour l'exemple géologique), on ne peut pas utiliser sans précautions les formules que nous venons d'obtenir. En effet, celles-ci supposent le dipôle émetteur placé dans la couche  $n$  entre un interface supérieur d'altitude  $z_n$  et un interface inférieur d'altitude  $z_{n+1}$ . Si on se contente de faire  $n=0$  dans la formule (I.109.), on se trouve devant la nécessité d'explicitier le vecteur  $\vec{p}_1$  et l'expression (I.103.) montre que  $\vec{p}_1$  contient des termes en  $e^{\pm u_0 z_0}$ .

$z_0$  est l'altitude de l'interface situé immédiatement au-dessus du dipôle émetteur et on ne sait pas quelle valeur attribuer à  $z_0$  pour la simple raison que cet interface n'existe pas.

Mais l'expression (I.103.) de  $\vec{p}_{n+1}$  provient du système de quatre équations (I.97.), (I.98.), (I.99.) et (I.100.), et nous ne devons pas oublier que dans la couche d'indice 0, du fait même de l'absence d'interface supérieur nous avons  $b_0=0$  et  $g_0=0$ . Les deux équations (I.97.) et (I.99.) suffisent alors à elles seules à déterminer  $a_0$  et  $f_0$ , et les équations (I.98.) et (I.100.) où se trouve le terme gênant peuvent être abandonnées.

En faisant  $n=0$ ,  $b_0=0$  et  $g_0=0$  dans (I.97.) et (I.99.), nous obtenons directement :

$$a_0 e^{-u_0 z_1} = - p_0 \frac{\lambda}{u_0} e^{u_0 z_0} \frac{N_{12}}{N_{11}} \quad (I.110.)$$

$$f_0 e^{-u_0 z_1} = p_0 \frac{\lambda}{u_0} e^{u_0 z_1} \frac{N_{11} N_{32} - N_{31} N_{12}}{N_{11} N_{33}} \quad (I.111.)$$

$N_{ij}$  sont les éléments de la matrice  $(V)_{Mn}$  dans laquelle il faut aussi faire  $n=0$ .

Nous avons donc :

$$\vec{A}_0(z_1) = \begin{pmatrix} a_0 e^{-u_0 z_1} \\ p_0 \frac{\lambda}{u_0} e^{u_0 z_1} \\ f_0 e^{u_0 z_1} \\ 0 \end{pmatrix} = p_0 \frac{\lambda}{u_0} e^{u_0 z_1} \begin{pmatrix} -\frac{N_{12}}{N_{11}} \\ 1 \\ \frac{N_{11} N_{32} - N_{31} N_{12}}{N_{11} N_{33}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (I.112.)$$

Il suffit ensuite de faire  $M = m$  et  $n = 0$  dans (I.75.) pour obtenir :

$$\vec{A}_m(z_m) = \frac{K_0}{K_m} (V)_{m0} \vec{A}_0(z_1) \quad (I.113.)$$

Si le dipôle émetteur est placé sur l'interface d'indice 1 (surface du sol), nous avons  $z_1 = 0$ , et d'autre part  $p_0 \frac{K_0}{K_m} = p_m$ . Nous obtenons donc, en portant (I.112.) et (I.113.) dans (I.66.) :

$$\vec{A}_m(z) = p_m \frac{\lambda}{u_0} D_m(z_m - z) (V)_{m0} \vec{p}_0 \quad (I.114.)$$

avec :

$$\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{N_{12}}{N_{11}} \\ 1 \\ \frac{N_{11} N_{32} - N_{13} N_{12}}{N_{11} N_{33}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (I.115.)$$

En utilisant les formules (I.102.), (I.103.), nous obtenons :

$$(\Pi_x)_m = p_m \int_0^\infty \{A_m e^{-u_m(z-z_m)} + B_m e^{u_m(z-z_m)}\} \frac{\lambda}{u_0} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (I.116.)$$

$$(\Pi_z)_m = -p_m \cos\phi \int_0^\infty \{F_m e^{-u_m(z-z_m)} + G_m e^{u_m(z-z_m)}\} \frac{\lambda^2}{u_0} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (I.117.)$$

avec :

$$A_m = -L_{11} \frac{N_{12}}{N_{11}} + L_{12} \quad (I.118.)$$

$$B_m = -L_{21} \frac{N_{12}}{N_{11}} + L_{22} \quad (I.119.)$$

$$F_m = -L_{31} \frac{N_{12}}{N_{11}} + L_{32} + L_{33} \frac{N_{11}N_{32} - N_{31}N_{12}}{N_{11}N_{33}} \quad (I.120.)$$

$$G_m = -L_{41} \frac{N_{12}}{N_{11}} + L_{42} + L_{43} \frac{N_{11}N_{32} - N_{31}N_{12}}{N_{11}N_{33}} \quad (I.121.)$$

$L_{ij}$  sont les éléments de la matrice  $(V)_{mo}$  définie par :

$$(V)_{mo} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{pmatrix} \quad (I.122.)$$

Le champ électrique vertical  $E_m$  dans une couche  $m$  quelconque dérive du potentiel de Hertz  $\vec{\Pi}_m$  par la formule (I.12.).

Si l'on porte dans (I.12.) les valeurs (I.116.) et (I.117.) de  $(\Pi_x)_m$  et  $(\Pi_z)_m$  et si on tient compte de (I.18.), (I.35.) et (I.37.), on obtient :

$$E_m = -p_m \cos\phi \int_0^\infty \{ (-u_m A_m + \lambda^2 F_m) e^{-u_m(z-z_m)} + (u_m B_m + \lambda^2 G_m) e^{u_m(z-z_m)} \} \frac{\lambda^2}{u_0} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (I.123.)$$

$A_m$ ,  $B_m$ ,  $F_m$  et  $G_m$  sont définis par les formules (I.118.), (I.119.), (I.120.), et (I.121.). Nous remarquerons que le calcul des éléments  $N_{ij}$  et  $L_{ij}$  est théoriquement possible dès que la structure du terrain ainsi que les paramètres  $k_m$  de chacune des couches sont connus.

Il suffit pour cela d'utiliser les formules (I.122.), (I.79.) et (I.59.)

et d'appliquer les règles automatiques de la multiplication des matrices aux matrices de base  $V_m$  et  $D_m$  définies par (I.45.) et (I.53.).

Un tel calcul est difficile et le calcul de l'intégrale (I.123.) est trop laborieux pour pouvoir être envisagé. Néanmoins nous utiliserons l'expression (I.123.) sous sa forme intégrale pour expliquer l'aspect du Télélog (voir §.6.1. 1ère partie), et pour établir une formule définissant le contraste de conductivité  $\frac{\sigma_{m+1}}{\sigma_m}$  entre deux couches adjacentes.

### I.9. APPLICATION A LA TELEDIAGRAPHE : CALCUL DE LA CONDUCTIVITE PAR RECURRENCE

#### I.9.1. Principe de la stratification fictive

Nous allons établir une formule de récurrence liant deux valeurs consécutives de la conductivité des différentes couches de terrain à partir d'une relation liant deux valeurs consécutives  $E_m$  et  $E_{m+1}$  du champ électrique vertical.

Pour cela nous imaginons que le terrain est formé de stratifications fictives régulières de hauteur  $h$ , et que le récepteur se déplace sur les interfaces de ces couches fictives.

Sur le plan pratique (voir §.III.2. 1ère partie), ces couches fictives et régulières résultent de la digitalisation du télélog enregistré sur film photographie (figures.8. et.9.). Le pas de digitalisation est égal à  $h$ , et à chaque couche fictive correspond une valeur du champ mesuré.

Si nous considérons que le récepteur se déplace sur les interfaces supérieures des couches fictives, nous avons  $z = z_m$ . Il en résulte que l'argument de l'exponentielle intervenant dans l'expression (I.123.) du champ électrique et de ses dérivées est nul.

I.9.2. Mise de l'expression de  $E_m$  sous forme d'une somme

Pour alléger le formalisme, nous écrivons la relation (I.123.) sous la forme d'une somme de cinq termes, chacun de ceux-ci étant défini de la manière suivante :

$$(E_i)_m = -p_m \cos \phi \int_0^{\infty} (W_i)_m \frac{\lambda^2}{u_0} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (I.126.)$$

avec :

$$(W_1)_m = \frac{N_{12}}{N_{11}} u_m \{L_{11}(m) - L_{21}(m)\} \quad (I.127.)$$

$$(W_2)_m = u_m \{L_{22}(m) - L_{12}(m)\} \quad (I.128.)$$

$$(W_3)_m = \lambda^2 \left(-\frac{N_{12}}{N_{11}}\right) \{L_{31}(m) + L_{41}(m)\} \quad (I.129.)$$

$$(W_4)_m = \lambda^2 \{L_{32}(m) + L_{42}(m)\} \quad (I.130.)$$

$$(W_5)_m = \lambda^2 \left(\frac{N_{11}N_{32} - N_{12}N_{31}}{N_{11}N_{33}}\right) \{L_{33}(m) + L_{43}(m)\} \quad (I.131.)$$

$E_m$  est donc de la forme :

$$E_m = \sum_{i=1}^5 (E_i)_m \quad (I.132.)$$

I.9.3. Relation entre les valeurs  $(E_1)_m$  et  $(E_1)_{m+1}$  -

Considérons le premier terme  $(E_1)_m$  de la relation (I.132.). D'après le principe de la stratification fictive, deux positions consécutives du récepteur correspondent aux indices  $m$  et  $m+1$ . Pour l'indice  $m+1$ ,  $(E_1)_{m+1}$  est exprimé par une intégrale du type (I.126.) dans laquelle la quantité  $(W_1)_{m+1}$  s'écrit, en tenant compte de la formule (14) de l'annexe.1., de la manière suivante :

$$(W_1)_{m+1} = \frac{N_{12}}{N_{11}} u_m \{L_{11}(m) e^{d} - L_{21} e^{-d}\} \quad (I.133.)$$

En remplaçant dans cette expression les exponentielles par leur développement en série ci-dessous :

$$e_m^d = e^{u_m h} = 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(u_m h)^q}{q!} \quad (\text{I.134.})$$

$$e_m^{-d} = e^{-u_m h} = 1 + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \frac{(u_m h)^q}{q!} \quad (\text{I.135.})$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{N_{11}}{N_{12}} \frac{1}{u_m} (W_1)_{m+1} &= \{L_{11}(m) - L_{21}(m)\} \left\{ 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(u_m h)^{2q}}{2q!} \right\} \\ &+ \{L_{11}(m) + L_{21}(m)\} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(u_m h)^{2q+1}}{(2q+1)!} \end{aligned} \quad (\text{I.136.})$$

En tenant compte de (I.127.) on peut écrire :

$$\frac{\partial^{2q+1}}{\partial z^{2q+1}} (W_1)_m = -\frac{N_{12}}{N_{11}} (u_m)^{2(q+1)} \{L_{11}(m) + L_{21}(m)\} \quad (\text{I.137.})$$

et (I.136) devient :

$$(W_1)_{m+1} = (W_1)_m \left\{ 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(u_m h)^{2q}}{2q!} \right\} - \sum_{q=0}^{\infty} \frac{h^{2q+1}}{(2q+1)!} \frac{\partial^{2q+1}}{\partial z^{2q+1}} (W_1)_m \quad (\text{I.138.})$$

En portant cette dernière expression dans l'intégrale du type (I.126.), nous obtenons, en tenant compte de  $p_m = \mathcal{L} / 4\pi K_m$ , la relation suivante :

$$\frac{K_{m+1}}{K_m} (E_1)_{m+1} = (E_1)_m + \sum_{q=1}^{\infty} I_q^1 - \sum_{q=0}^{\infty} J_q^1 \quad (\text{I.139.})$$

avec :

$$I_q^1 = -p_m \cos \phi \int_0^{\infty} \frac{(u_m h)^{2q}}{2q!} (W_1)_m \frac{\lambda^2}{u_0} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (\text{I.140.})$$

$$J_q^1 = \frac{h^{2q+1}}{(2q+1)!} \frac{\partial^{2q+1}}{\partial z^{2q+1}} (E_1)_m \quad (\text{I.141.})$$

Considérons l'intégrale (I.140.) ; celle-ci peut être calculée par la méthode du col<sup>(28), (43), (47)</sup>. Dans ces conditions, nous intégrons sur des contours de plus grande pente issus des branches de coupures introduites par les fonctions  $u_m$  dans le plan de la variable  $\lambda$ . Sur ces contours, la contribution la plus importante de l'intégrand est celle obtenue au voisinage du col choisi à l'origine. Cette limitation du domaine de variation de la variable  $\lambda$  va nous permettre de faire l'approximation suivante (voir annexe.2.) :

$$u_m = \gamma_m \quad (I.142.)$$

et l'expression de  $I_q^1$  s'écrit, en tenant compte de (I.126.) :

$$I_q^1 = \frac{(\gamma_m h)^{2q}}{2q!} (E_1)_m \quad (I.143.)$$

I.9.4. Relation entre les valeurs consécutives  $E_m$  et  $E_{m+1}$  du champ électrique vertical

En procédant de la même manière pour les autres termes de (I.132.), nous obtenons la relation générale liant deux valeurs consécutives du champ électrique :

$$\frac{K_{m+1}}{K_m} E_{m+1} = E_m \left( 1 + \sum_{q=1}^{\infty} I_q \right) - \sum_{q=0}^{\infty} I_q \quad (I.144.)$$

avec :

$$I_q = \frac{(\gamma_m h)^{2q}}{2q!} \quad (I.145.)$$

$$J_q = \frac{h^{2q+1}}{(2q+1)!} \frac{\partial^{2q+1}}{\partial z^{2q+1}} E_m \quad (I.146.)$$

I.9.5. Approximation des basses fréquences

En pratique, pour avoir une pénétration suffisante des ondes électromagnétiques dans le sol, on utilise des courants de très basses fréquences. Ceci entraîne que dans chaque couche de terrain la condition suivante est vérifiée :

$$\sigma_m \gg \omega \epsilon_m \quad (I.147.)$$

avec cette approximation, on a :

$$k_m = \sigma_m \quad (\text{I.148.})$$

et

$$\gamma_m^2 = j\omega\mu\sigma_m = \frac{2j}{\delta_m^2} \quad (\text{I.149.})$$

$\delta_m$  étant la profondeur de pénétration des ondes dans la couche m ;  
 $\delta_m$  est défini par la formule ci-après :

$$\delta_m = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_m}} \quad (\text{I.150.})$$

### I.9.6. Formule de récurrence

Dans l'approximation des basses fréquences, (I.144.)  
s'écrit, en tenant compte de (I.148.) et (I.149.), sous la forme :

$$\sigma_{m+1} = \frac{\sigma_m}{E_{m+1}} \left\{ E_m \left( 1 + \sum_{q=1}^{\infty} I_q \right) - \sum_{q=0}^{\infty} J_q \right\} \quad (\text{I.151.})$$

avec :

$$I_q = \frac{(2j)^q}{2q!} \left( \frac{h}{\delta_m} \right)^{2q} \quad (\text{I.152.})$$

$$J_q = \frac{h^{2q+1}}{(2q+1)!} \frac{\partial^{2q+1}}{\partial z^{2q+1}} E_m \quad (\text{I.153.})$$

Les résultats expérimentaux (figures 8 et 9) montrent que la fonction  $E(z)$  est une fonction continue et monotone.

Les dérivées successives  $\frac{\partial^{2q+1}}{\partial z^{2q+1}} E_m$  restent donc finies et il est

possible de calculer tous les termes  $J_q$ . En outre, compte tenu du principe de la stratification fictive,  $h$  peut être choisi aussi petit que l'on veut de manière à avoir  $\delta_m$  toujours supérieur à  $h$ . Il en résulte que les séries entières de terme général  $I_q$  et  $J_q$  se limitent aux premiers termes de leurs développements.

I.10. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons développé la théorie du dipôle électrique horizontal en présence d'un terrain stratifié quelconque. Cette théorie nous a permis d'expliquer l'aspect du télélog qui présente une corrélation remarquable avec le log de résistivité.

Elle nous a permis également d'établir une formule qui calcule par récurrence la conductivité de différentes couches. Cette formule peut être utilisée pour interpréter les télélogs afin de mettre en évidence l'éventuelle existence d'une anomalie latérale dans la direction du dipôle électrique horizontal situé à la surface du sol.

C H A P I T R E . 2 .

CALCUL DU CHAMP ELECTRIQUE VERTICAL PRODUIT DANS UNE COUCHE  
QUELCONQUE D'UN TERRAIN STRATIFIE PAR UN D.E.H. PLACE DANS  
L'ATMOSPHERE

II.1. INTRODUCTION

La composante verticale du champ électrique produit dans une couche quelconque d'un terrain stratifié par un D.E.H. ( $E_{mz}^{DEH}$ ) peut être calculée à l'aide d'un formalisme établi au chapitre.1. Ce calcul se révèle très compliqué. Cette complexité provient du fait que le potentiel de Hertz dans le cas d'un D.E.H. possède deux composantes, et que nous étions contraints d'utiliser des matrices carrées à quatre dimensions (4 lignes, 4 colonnes).

Dans ce chapitre nous allons établir une analogie entre les expressions des composantes du champ électrique produit par un D.E.V. et celles du champ produit par un D.E.H.

Cette analogie établie, nous pourrions écrire sous forme d'intégrale l'expression du champ électrique vertical  $E_m$  produit dans une couche quelconque et émis par un D.E.H. placé en surface ; l'intégrand est le produit de matrices cette fois à deux dimensions (2 lignes, 2 colonnes), donc plus faciles à utiliser.

Nous établissons cette analogie d'abord pour le cas du courant continu et nous l'étendrons par la suite au cas du courant alternatif.

II.2. EXPRESSION DU POTENTIEL ELECTRIQUE PRODUIT DANS UNE COUCHE  
QUELCONQUE PAR UN DIPOLE PLACE DANS LA COUCHE SUPERIEURE D'UN  
TERRAIN STRATIFIE. CAS DU COURANT CONTINU.

II.2.1. Conditions aux limites vectorielles et formule de récurrence

Le milieu stratifié dans lequel nous allons effectuer l'étude dans le cas du courant continu est celui représenté figure.47. Nous utilisons toujours un système de coordonnées cylindriques dont l'axe vertical oz est orienté positivement vers le haut. L'origine de cet axe est prise au niveau du dipôle émetteur.

Les conditions aux limites à satisfaire sont la continuité du potentiel et la continuité de la densité du courant normal sur les interfaces qui séparent les différentes couches.  $\psi_m$  étant le potentiel électrique dans une couche m quelconque, les deux conditions aux limites sur l'interface  $m(z=z_m)$  s'écrivent :

$$\psi_{m-1} = \psi_m \quad (II.1.)$$

$$\sigma_{m-1} \frac{\partial}{\partial z} \psi_{m-1} = \sigma_m \frac{\partial}{\partial z} \psi_m \quad (II.2.)$$

Le potentiel  $\psi_m$  est donné par une intégrale de Sommerfeld de la forme (40) :

$$\psi_m = \int_0^{\infty} Z_m(z) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (II.3.)$$

avec :

$$Z_m(z) = a_m e^{-\lambda z} + b_m e^{\lambda z} \quad (II.4.)$$

Dans la couche supérieure d'indice 0 où se trouve le dipôle émetteur, il faut tenir compte du potentiel primaire  $\psi_p$  créé par celui-ci. On montre annexe.3. que  $\psi_p$  peut également être exprimé sous forme intégrale :

$$\psi_p = p_0 \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_V(\lambda r) d\lambda \quad (II.5.)$$

$v = 0$  si le dipôle est vertical

et  $v = 1$  si le dipôle est horizontal

$p_0$  étant le "pouvoir émissif" du dipôle défini par :

$$p_0 = \frac{I \ell}{4\pi \sigma_0} \quad (\text{II.6.})$$

Le double signe du terme exponentiel primaire est  $+$  si  $z$  est négatif et  $-$  si  $z$  est positif.

Dans la couche d'indice 0, en tenant compte du potentiel primaire et du fait que  $b_0=0$  puisque cette couche est infinie vers le haut, l'expression (II.4.) prend la forme particulière suivante :

$$Z_0(z) = C_0 e^{+\lambda z} + a_0 e^{-\lambda z} \quad (\text{II.7.})$$

avec :

$$C_0 = p_0 \lambda \quad \text{pour le D.E.V.} \quad (\text{II.8.})$$

$$\text{et } C_0 = p_0 \lambda \frac{J_1(\lambda r)}{J_0(\lambda r)} \quad \text{pour le D.E.H.} \quad (\text{II.9.})$$

Le problème que nous avons à résoudre est analogue à celui du chapitre 1. En effet, nous avons à exprimer tous les coefficients  $a_m$  et  $b_m$  en fonction du pouvoir émissif du dipôle. Nous allons donc utiliser le même principe de calcul, mais en considérant les termes  $a_m e^{-\lambda z}$  et  $b_m e^{\lambda z}$  comme étant les deux composantes dans un espace fonctionnel à deux dimensions d'un vecteur  $\overrightarrow{A_m(z)}$  défini par :

$$\overrightarrow{A_m(z)} = \begin{pmatrix} a_m e^{-\lambda z} \\ b_m e^{\lambda z} \end{pmatrix} \quad (\text{II.10.})$$

Et nous écrivons les conditions aux limites (II.1.) et (II.2.) sous la forme vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{Z_{m-1}(z_m)} = \overrightarrow{Z_m(z_m)} \quad (\text{II.11.})$$

le vecteur  $\overrightarrow{Z_m(z)}$  étant défini par la relation :

$$\overrightarrow{Z_m(z)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_m \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} Z_m(z) \quad (\text{II.12.})$$

En effectuant les mêmes calculs qu'aux §.I.5. et I.6. nous obtenons la relation de récurrence identique à la formule (I.57.) qui s'écrit, en tenant compte de  $k_m = \sigma_m$  puisque  $\omega = 0$  :

$$\overrightarrow{A_p(z_{p+1})} = \frac{\sigma_q}{\sigma_p} (V)_{pq} \overrightarrow{A_q(z_q)} \quad (p < q) \quad (\text{II.13.})$$

Les matrices  $(V)_{pq}$  et  $(V)_{qp}$  sont toujours données par (I.58.) et (I.59.) dans lesquelles  $V_m$  et  $D_m$  s'écrivent :

$$V_m = \begin{pmatrix} \rho_m & \rho_m \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \quad (\text{II.14.})$$

$$D_m = \begin{pmatrix} e^{d_m} & 0 \\ 0 & e^{-d_m} \end{pmatrix} \quad (\text{II.15.})$$

avec :

$$\rho_m = \frac{1}{\sigma_m} \quad (\text{II.16.}) \quad d_m = \lambda h_m \quad (\text{II.17.})$$

### II.2.2. Calcul du vecteur $\overrightarrow{A_o(z_1)}$

Dans le cas particulier où le dipôle émetteur est situé dans la couche d'indice 0,  $\overrightarrow{A_o(z_1)}$  s'écrit d'après (II.7.) :

$$\overrightarrow{A_o(z_1)} = \begin{pmatrix} a_o e^{-\lambda z_1} \\ C_o e^{\lambda z_1} \end{pmatrix} \quad (\text{II.18.})$$

En faisant dans (II.13.)  $p = 0$  et  $q = M$ , nous obtenons, en adoptant pour l'inversion des matrices la même convention d'écriture qu'au §.I.6. :

$$\overrightarrow{A_M(z_M)} = \frac{\sigma_o}{\sigma_M} (V)_{Mo} \overrightarrow{A_o(z_1)} \quad (\text{II.19.})$$

Du fait que la couche M est infinie vers le bas, nous avons  $a_M=0$  et (II.18.) donne facilement :

$$a_0 e^{-\lambda z_1} = -C_0 e^{\lambda z_1} \cdot \frac{W_{12}}{W_{11}} \quad (\text{II.20.})$$

$W_{ij}$  sont des éléments de la matrice  $(V)_{Mo}$  définie par :

$$(V)_{Mo} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{II.21.})$$

En portant (II.20) dans (II.18.) nous obtenons :

$$\overrightarrow{A_0(z_1)} = C_0 e^{\lambda z_1} \begin{pmatrix} -\frac{W_{12}}{W_{11}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.22.})$$

### II.2.3. Calcul du vecteur $\overrightarrow{A_m(z_m)}$

La formule (II.13.) s'écrit en faisant  $p=0$  et  $q=m$  :

$$\overrightarrow{A_m(z_m)} = \frac{\sigma_0}{\sigma_m} (V)_{mo} \overrightarrow{A_0(z_1)} \quad (\text{II.23.})$$

Un simple examen de la relation (I.59.) permet d'écrire :

$$(V)_{mo} = D_m^{-1} (V)_{mM} (V)_{Mo} \quad (\text{II.24.})$$

Nous définissons les éléments de la matrice  $(V)_{mM}$  par :

$$(V)_{mM} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{II.25.})$$

En tenant compte de (II.15.), (II.21.) et (II.25.) et de la relation :

$$C_m = \frac{\sigma_0}{\sigma_m} C_0 \quad (\text{II.26.})$$

nous obtenons, en portant (II.22.) et (II.24.) dans (II.23.) :

$$\overrightarrow{A_m(z_m)} = C_m e^{\lambda z_1} \frac{\Delta W}{W_{11}} \begin{pmatrix} S_{12} e^{-d_m} \\ S_{22} e^{d_m} \end{pmatrix} \quad (\text{II.28.})$$

II.2.4. Expression du potentiel  $\psi_m$

On tire facilement de la formule (II.27.), en tenant compte de  $z_{m+1} = z_m - h_m$  :

$$a_m = C_m e^{\lambda z_1} \frac{\Delta W}{W_{11}} S_{12} e^{\lambda z_{m+1}} \quad (\text{II.29.})$$

$$b_m = C_m e^{\lambda z_1} \frac{\Delta W}{W_{11}} S_{22} e^{-\lambda z_{m+1}} \quad (\text{II.30.})$$

Si  $h_e$  est le nombre positif mesurant l'altitude du dipôle émetteur au-dessus de l'interface d'indice 1, nous avons :

$$h_e = -z_1 \quad (\text{II.31.})$$

et (II.3.) s'écrit, en lui adjoignant (II.29.) et (II.30.) :

$$\psi_m = \int_0^\infty C_m e^{-\lambda h_e} (S_{12} e^{\lambda(z_{m+1}-z)} + S_{22} e^{-\lambda(z_{m+1}-z)}) \frac{\Delta W}{W_{11}} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (\text{II.32.})$$

II.3. ANALOGIE ENTRE L'EXPRESSION DE LA COMPOSANTE VERTICALE  $E_z$  —  
DU CHAMP ELECTRIQUE PRODUIT DANS UNE COUCHE QUELCONQUE  $m$   
PAR UN D.E.H. PLACE A LA SURFACE DU SOL, ET CELLE DE LA  
COMPOSANTE RADIALE  $E_r$  PRODUITE DANS LA MEME COUCHE  $m$  PAR  
UN D.E.V. EGALEMENT SITUE EN SURFACE

En électrostatique, le champ électrique dérive du potentiel scalaire  $\psi_m$  par :

$$\overrightarrow{E}_m = \overrightarrow{\text{grad}} \psi_m \quad (\text{II.33.})$$

d'où :

$$E_{mr} = \frac{\partial \psi_m}{\partial r} \quad (\text{II.34.})$$

$$E_{mz} = \frac{\partial \psi_m}{\partial z} \quad (\text{II.35.})$$

Si le dipôle est vertical,  $C_m$  est égal à  $p_m \lambda$ , mais si le dipôle est horizontal on a :  $C_m = p_m \lambda \frac{J_1(\lambda r)}{J_0(\lambda r)}$  (formules II.8. et II.9), et la dérivée de (II.32.) par rapport à la variable  $r$ , puis par rapport à la variable  $z$ , nous donne :

$$(E_{mr})_{DEV} = I_{12} + I_{22} \quad (\text{II.36.})$$

$$(E_{mz})_{DEH} = I_{12} - I_{22} \quad (\text{II.37.})$$

avec :

$$I_{12} = -p_m \int_0^{\infty} e^{-\lambda h} e^{S_{12}} e^{\lambda(z_{m+1}-z)} \frac{\Delta W}{W_{11}} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \quad (\text{II.38.})$$

$$I_{22} = -p_m \int_0^{\infty} e^{-\lambda h} e^{S_{22}} e^{-\lambda(z_{m+1}-z)} \frac{\Delta W}{W_{11}} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \quad (\text{II.39.})$$

Les expressions (II.36.) et (II.37.) possèdent une particularité très intéressante. En effet,  $(E_{mr})_{DEV}$  est donné par l'addition de deux intégrales  $I_{12}$  et  $I_{22}$  tandis que  $(E_{mz})_{DEH}$  s'obtient par la soustraction de ces deux mêmes intégrales.

#### II.4. EXPRESSION DU CHAMP ELECTRIQUE VERTICAL PRODUIT DANS UNE COUCHE $m$ QUELCONQUE PAR UN D.E.H. PLACE EN SURFACE ET PARCOURU PAR UN COURANT ALTERNATIF

Le principe du calcul exposé chapitre.1. peut être utilisé pour résoudre le problème de propagation d'une onde électromagnétique émise par un dipôle horizontal ou vertical du type électrique ou magnétique. Il suffit pour cela de mettre les conditions

aux limites sous forme vectorielle, c'est-à-dire définir les vecteurs  $\overrightarrow{A_m(z)}$  et  $\overrightarrow{Z_m(z)}$ . Les matrices fondamentales  $V_m$  et  $D_m$  sont automatiquement définies ; elles doivent vérifier les équations (I.44.) et (I.52.).

S'il s'agit d'un D.E.V., le potentiel de Hertz dans une couche  $m$  quelconque est donné par une intégrale du type suivant<sup>(45)</sup> :

$$\Pi_m = \int_0^{\infty} Z_m(z) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (\text{II.40.})$$

avec :

$$Z_m(z) = a_m e^{-u_m z} + b_m e^{u_m z} \quad (\text{II.41.})$$

$\overrightarrow{A_m(z)}$  est donc de la forme :

$$\overrightarrow{A_m(z)} = \begin{pmatrix} a_m e^{-u_m z} \\ b_m e^{u_m z} \end{pmatrix} \quad (\text{II.42.})$$

La condition d'égalité des composantes tangentielles du champ électromagnétique sur l'interface  $m$  est donnée par la formule (I.46.) à condition d'écrire  $Z_m(z)$  sous la forme<sup>(22)</sup> :

$$\overrightarrow{Z_m(z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \\ k_m \end{pmatrix} Z_m(z) \quad (\text{II.43.})$$

Les matrices  $V_m$  et  $D_m$  sont alors définies par les formules suivantes :

$$V_m = \begin{pmatrix} -u_m/k_m & u_m/k_m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.44.})$$

$$D_m = \begin{pmatrix} d_m & 0 \\ e & -d_m \\ 0 & e \end{pmatrix} \quad (\text{II.45.})$$

$$\text{avec : } d_m = u_m h_m \quad (\text{II.46.})$$

Des calculs analogues à ceux de §.II.2.2., §.II.2.3. et §.II.2.4., ou également des §.I.6., §.I.7. et §.I.8. nous donnent l'expression du potentiel de Hertz produit dans la couche m par un D.E.V. placé en surface :

$$\Pi_m = P_m \int_0^\infty e^{-u_0 h} e^{u_m(z_{m+1}-z)} + T_{22} e^{-u_m(z_{m+1}-z)} \frac{\Delta Y}{Y_{11}} J_0(\lambda r) \frac{\lambda}{u_0} d\lambda \quad (\text{II.47.})$$

$T_{ij}$  et  $Y_{ij}$  sont des éléments des matrices  $(V)_{mM}$  et  $(V)_{Mo}$  définies par :

$$(V)_{mM} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{II.48.})$$

$$(V)_{Mo} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{II.49.})$$

Ces matrices sont toujours définies par la formule (I.58.),  $V_m$  et  $D_m$  étant données par (II.44.) et (II.45.).

La composante radiale  $E_{mr}$  du champ électrique dérive du potentiel de Hertz  $\Pi_m$  par la formule :

$$(E_{mr})_{DEV} = \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial r \partial z} \quad (\text{II.50.})$$

Ainsi l'expression de la composante  $(E_{mr})_{DEV}$  dans la couche m s'écrit sous la forme :

$$(E_{mr})_{DEV} = G_{12} + G_{22} \quad (\text{II.51.})$$

avec :

$$G_{12} = P_m \int_0^\infty e^{-u_0 h} e^{u_m(z_{m+1}-z)} \frac{\Delta Y}{Y_{11}} \frac{u_m}{u_0} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \quad (\text{II.52.})$$

$$G_{22} = p_m \int_0^{\infty} e^{-u_0 h} e^{-u_m(z_{m+1}-z)} T_{22} e^{-u_m(z_{m+1}-z)} \frac{\Delta Y}{Y_{11}} \frac{u_m}{u_0} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \quad (\text{II.53.})$$

Si on fait  $\omega = 0 (u_m = \lambda)$ , on montre (annexe.5.) que  $T_{12} = -S_{12}$ ,  $T_{22} = S_{22}$

et que  $\frac{Y_{11}}{\Delta Y} = \frac{W_{11}}{\Delta W}$ ; on vérifie donc ainsi que dans ces conditions :

$$G_{12} = I_{12} \text{ et } G_{22} = I_{22}.$$

Nous avons donc dans le cas du courant alternatif obtenu une expression de  $(E_{mr})_{DEH}$  tout à fait analogue à celle obtenue en courant continu. En conséquence, pour le calcul de la composante  $(E_{mz})_{DEH}$  dans le cas du courant alternatif, l'expression (II.37.) trouvée en continu va nous permettre d'écrire, en généralisant l'analogie précédente :

$$(E_{mz})_{DEH} = G_{12} - G_{22} \quad (\text{II.54.})$$

En effet, lorsque dans cette expression on fait  $\omega = 0$ , on obtient bien l'expression (II.37.).

Dans le cas d'un demi-milieu<sup>(41)</sup> et d'un milieu à 3 couches<sup>(28)</sup> on a pu vérifier que cette analogie était bien applicable.

L'expression  $(E_{mz})_{DEH}$  s'écrit donc, en tenant compte de (II.54.); (II.53.) et (II.52.) :

$$(E_{mz})_{DEH} = p_m \int_0^{\infty} e^{-u_0 h} e^{-u_m(z_{m+1}-z)} (T_{12} e^{u_m(z_{m+1}-z)} + T_{22} e^{-u_m(z_{m+1}-z)}) \frac{\Delta Y}{Y_{11}} \frac{u_m}{u_0} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \quad (\text{II.55.})$$

II.5. APPLICATION A LA TELEDIAGRAPHE : CALCUL DU CHAMP ELECTRIQUE VERTICAL DANS UNE COUCHE m QUELCONQUE CREE PAR UN D.E.H. PLACE EN SURFACE ET PARCOURU PAR UN COURANT ALTERNATIF

Selon le principe de la stratification fictive (§.I.9.1.) nous pouvons considérer que le récepteur se déplace sur les interfaces

inférieures des couches fictives et nous avons  $z = z_{m+1}$ ; et la formule (II.55.) devient donc en remplaçant la notation  $(E_{mz})_{DEH}$  par la notation

$E_m$  :

$$E_m = p_m \int_0^{\infty} e^{-u \cdot h} e^{\frac{T_{12} + T_{22}}{\left( \frac{Y_{11}}{\Delta Y} \right)} \frac{u}{u_0}} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \quad (II.56.)$$

Le calcul des éléments de la matrice  $(V)_{pq}$  est donné en annexe.4..  $Y_{11}/\Delta Y$  est un élément de la matrice  $(V)_{oM}$ ; il s'obtient donc en remplaçant p par 0 et q par N dans la formule (17) de cette annexe. Nous obtenons, en tenant compte des formules (I.141.) et (I.149.), avec la conductivité de l'atmosphère  $\sigma_0=0$  :

$$\frac{Y_{11}}{\Delta Y} = \frac{1}{2} \{1 + (1+j)h \sqrt{\frac{2\pi f \mu}{\sigma_M}} \sum_{i=1}^{M-1} \sigma_i\} \quad (II.57.)$$

h étant l'épaisseur des couches régulières de la stratification fictive.

Pour les valeurs les plus défavorables suivantes :

$$f = 1\text{Hz} \quad (II.58.)$$

$$h = 0,01\text{m} \quad (II.59.)$$

et pour un socle granitique ( $\sigma_M = 10^{-8}$  Siemens/m), le terme  $h \sqrt{\frac{2\pi f \mu}{\sigma_M}}$  est égal à 0,28. Il suffit donc d'une structure sédimentaire ( $\sigma = 10^{-2}$  Siemens/m) de 36 mètres d'épaisseur seulement pour que l'on puisse négliger dans la formule (II.57.) le 1 devant le deuxième terme. Nous obtenons finalement :

$$\frac{Y_{11}}{\Delta Y} = \frac{1}{2} (1+j)h \sqrt{\frac{2\pi f \mu}{\sigma_M}} \sum_{i=m+1}^{M-1} \sigma_i \quad (II.60.)$$

En faisant p=m et q=M dans les formules (15) et (16) de l'annexe.4., nous obtenons, en tenant compte du raisonnement précédent :

$$T_{12} + T_{22} = (1+j)h \sqrt{\frac{2\pi f \mu}{\sigma_M}} \sum_{i=m+1}^{M-1} \sigma_i \quad (II.61.)$$

Dans l'approximation des basses fréquences connue également sous le nom de cas "quasi statique"<sup>(27)</sup>, on pose  $\gamma_0^2 = 0$  à condition d'avoir  $|\gamma_0 r| \ll 1$ . Il en résulte que :

$$u_0 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_0^2} = \lambda \quad (\text{II.62.})$$

L'expression (II.56.) de  $E_m$  devient, en tenant compte de (II.60.), (II.61.) et (II.62.) :

$$E_m = 2p_m \frac{\sum_{i=1}^{M-1} \sigma_i}{\sum_{i=1}^{M-1} \sigma_i} \int_0^\infty e^{-\lambda h} e^{u_m J_1(\lambda r)} \lambda d\lambda \quad (\text{II.63.})$$

La solution de l'intégrale qui figure dans cette dernière formule est donnée en annexe.6. Nous obtenons également, pour le cas où le dipôle émetteur est placé à la surface du sol ( $h_e=0$ ) :

$$E_m = 2p_m \frac{\sum_{i=1}^{M-1} \sigma_i}{\sum_{i=1}^{M-1} \sigma_i} \frac{1}{r^2} (p+jQ) \quad (\text{II.64.})$$

avec :

$$p = \gamma_m \left( 1 - \frac{3}{2\gamma_m r^2} \right) \quad (\text{II.65.})$$

et

$$Q = \gamma_m e^{-\gamma_m r} \left( 1 + \frac{3}{2\gamma_m r} - \frac{3}{8\gamma_m r^2} + \frac{9}{2\gamma_m r^3} \right) \quad (\text{II.66.})$$

La formule (II.64.) peut avoir deux applications en télédiagraphie à condition de disposer d'un log de résistivité effectué dans le forage où on est appelé à faire des mesures de télédiagraphie ou dans un autre forage à proximité. Ce dernier forage doit alors présenter une corrélation stratigraphique suffisante avec le premier.

La première application est le calcul d'un télélog théorique. Nous savons ainsi l'ordre de grandeur du champ qu'on devrait mesurer et nous pouvons en toute connaissance de cause choisir le gain optimum de la chaîne de réception.

La deuxième application est le calcul d'un indice d'anomalie défini par la formule suivante :

$$A_m = \frac{(E_m)_{\text{mesuré}}}{(E_m)_{\text{théorique}}} - 1 \quad (\text{II.67.})$$

Cet indice peut mettre en évidence l'existence d'une anomalie latérale et la situer en profondeur.

C H A P I T R E . 3 .

CALCUL DU POTENTIEL DANS UN TERRAIN HOMOGENE ENFERMANT UNE

ANOMALIE A RESISTIVITE ELEVEE

III.1. INTRODUCTION

Les résultats obtenus dans les chapîtres.I. et .II. permettent d'interpréter les télélogs. Cette interprétation peut déceler les anomalies latérales et détermineur leurs profondeurs respectives. Un autre paramètre important reste à déterminer, c'est la distance séparant cette anomalie de l'axe du forage. Pour ceci il faut traiter le cas du terrain enfermant une anomalie.

Les études analogiques (voir §.IV.2.1ère partie) ont montré qu'il était possible de simuler un gisement de gaz ou de pétrole par une simple couche résistante placée dans un milieu homogène infini. Nous allons traiter ce cas. Le modèle mathématique que nous proposons est présenté figure.48. (cas d'approximation du courant continu).

La figure.48. montre une couche de résistivité  $\rho_2$ , d'épaisseur  $t$ , enfermée dans un demi-milieu de résistivité  $\rho_1$  ( $\rho_2 > \rho_1$ ) à une profondeur  $h$ .

La circulation du courant est créée par deux sources  $+I$  et  $-I$  placées aux points  $Q(r,0,0)$  et  $Q'(r+l,0,0)$  respectivement. Nous calculons la composante verticale  $E_z$  du champ électrique au point  $R(0,0,z)$ .

Tout d'abord nous calculons le champ produit au point  $R$  par la source  $+I$ , l'effet de surface étant remplacé par l'image<sup>(52)</sup> de la couche comme le montre la figure.48.

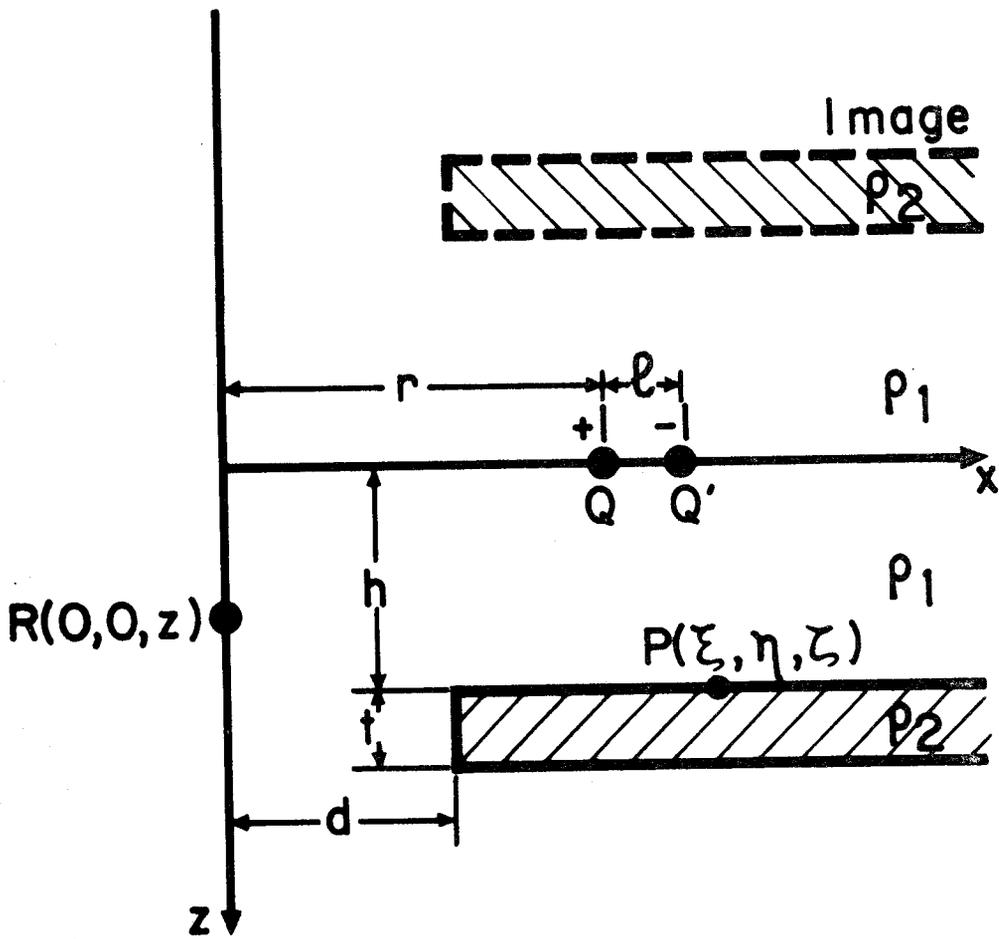


Figure .48.



III.2. EXPRESSION DU POTENTIEL

Le courant émis I crée un potentiel électrique U qui satisfait l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{III.1.})$$

Cette équation possède la solution particulière suivante :

$$V(x,y,z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad (\text{III.2.})$$

(III.1.) s'écrit alors :

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{III.3.})$$

ou encore :

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = u^2 \quad (\text{III.4.})$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -u^2 \sin^2 v \quad (\text{III.5.})$$

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -u^2 \cos^2 v \quad (\text{III.6.})$$

u et v sont des constantes arbitraires.

Les trois dernières équations différentielles donnent la solution simple suivante :

$$V(x,y,z) = e^{u(\frac{+}{-}z - j y \cos v - j x \sin v)} \quad (\text{III.7.})$$

La solution de (III.1.) est une combinaison linéaire de ces différentes solutions simples, et nous pouvons écrire le potentiel U sous la forme :

$$U(x,y,z) = \int_0^{\infty} du \int_{-\pi}^{\pi} G(u,v) e^{u(\frac{+}{-}z \frac{+}{-}jy \cos v \frac{+}{-}jx \sin v)} dv \quad (\text{III.8.})$$

La fonction  $G(u,v)$  dépend de la nature du problème. Comme le problème est défini exclusivement à l'aide des conditions aux limites,  $G(u,v)$  dépend uniquement de la position des surfaces de discontinuité, des valeurs des résistivités  $\rho_1$  et  $\rho_2$  et de la position du pôle émetteur.

Il faut distinguer deux cas :

1. Les conditions aux limites sont satisfaites par la solution simple (III.7.)
2. la solution simple ne satisfait pas les conditions aux limites qui doivent alors être satisfaites par la solution générale (III.8.).

Le premier cas étudié par ALFANO<sup>(48)</sup> implique certaines restrictions sur les valeurs des résistivités ; seul le second cas nous intéresse.

Supposons une fonction  $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$  qui nous permet d'écrire la fonction  $G(u,v)$  sous la forme :

$$G(u,v) = \iiint e^{u(\frac{+}{-}\zeta \frac{+}{-}j\eta \cos v \frac{+}{-}j\xi \sin v)} \sigma(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{III.9.})$$

où  $\xi, \eta$  et  $\zeta$  sont également des coordonnées de l'espace.

Portant (III.9.) dans (III.8.), en tenant compte de la relation connue<sup>(56)</sup> :

$$\int_0^{\infty} du \int_{-\pi}^{\pi} e^{u\{(\epsilon h \frac{+}{-}z) + j(\eta \tau \frac{+}{-}y) \cos v + jx \sin v\}} dv = \frac{1}{\{(\epsilon h \frac{+}{-}z)^2 + (\eta \tau \frac{+}{-}y)^2 + x^2\}^{1/2}} \quad (\text{III.10.})$$

nous obtenons :

$$U(x,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\}^{1/2}} d\zeta \quad (\text{III.11.})$$

On montre <sup>(49), (50)</sup> que  $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$  est la fonction de distribution des charges sur les surfaces de discontinuité. La formule (III.11.) donne alors l'expression du potentiel secondaire au point R(x,y,z) créé par la distribution de charges  $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ . Si  $U_0(x,y,z)$  est le potentiel primaire, et comme  $\sigma$  s'annule en dehors des surfaces de discontinuité, le potentiel total au point R s'exprime :

$$U(x,y,z) = U_0(x,y,z) + \int_S \sigma(\xi, \eta, \zeta) M(x,y,z, \xi, \eta, \zeta) dS \quad (III.12.)$$

avec :

$$M(x,y,z, \xi, \eta, \zeta) = \{ (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 \}^{-1/2} \quad (III.13.)$$

### III.3. DETERMINATION DE LA FONCTION $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$

Si  $P_1(\xi, \eta, \zeta-\epsilon)$  et  $P_2(\xi, \eta, \zeta+\epsilon)$  sont deux points très proches de  $P(\xi, \eta, \zeta)$  comme le montre la figure.49., si  $\epsilon$  est infiniment petit, les charges situées sur le plan A donnent aux points  $P_1$  et  $P_2$  un champ électrique vertical <sup>(53)</sup> :

$$E_{S1} = -2\pi\sigma(P) \quad (III.14.)$$

$$E_{S2} = 2\pi\sigma(P) \quad (III.15.)$$

Supposons que  $U(P)$  soit la somme des potentiels créés par le point source Q et toutes les surfaces à l'exception du plan A. Le champ électrique total aux points  $P_1$  et  $P_2$  s'écrit :

$$E_1 = -\frac{\partial}{\partial z} U(P) - 2\sigma(P) \quad (III.16.)$$

$$E_2 = -\frac{\partial}{\partial z} U(P) + 2\sigma(P) \quad (III.17.)$$

Après un temps suffisant, la condition  $\frac{\partial}{\partial t} \sigma(P) = 0$  étant satisfaite, les composantes verticales de la densité du courant de part et d'autre du plan A sont égales. Ceci implique :

$$\frac{1}{\rho_1} E_1 = \frac{1}{\rho_2} E_2 \quad (III.18.)$$

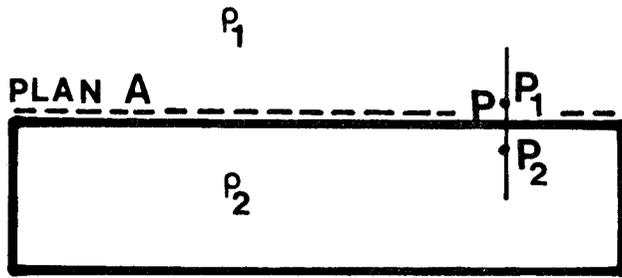


Figure .49.

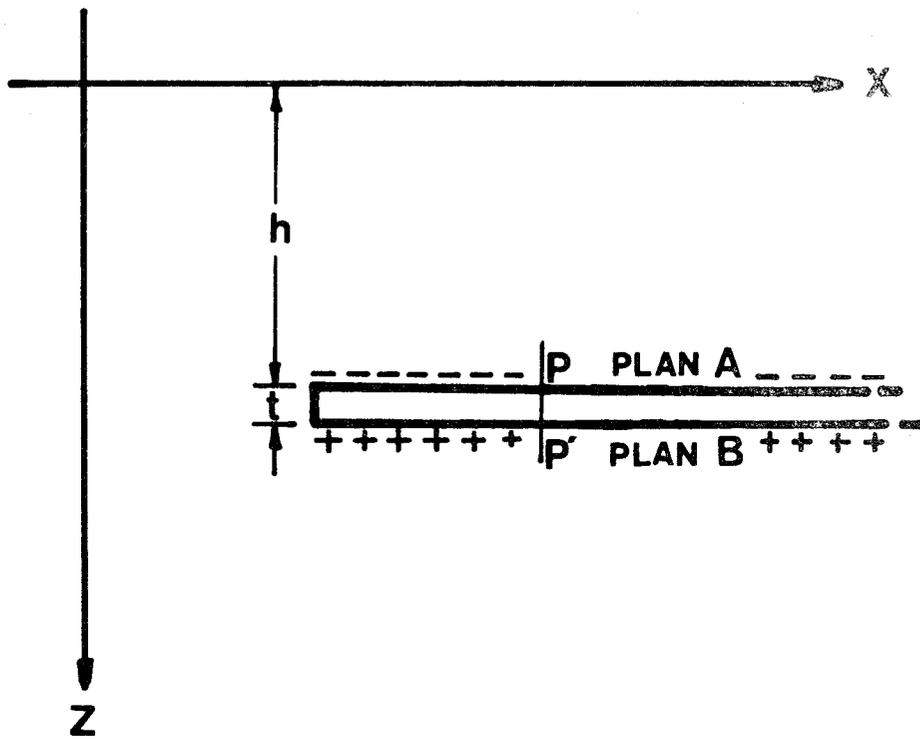


Figure .50.



et (II.16.), (III.17.) et (III.18.) nous donnent :

$$\sigma(P) = - \frac{K}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} U(P) \quad (\text{III.19.})$$

avec :

$$K = \frac{\rho_2^{-\rho_1}}{\rho_2^{+\rho_1}} \quad (\text{III.20.})$$

Nous pouvons alors utiliser la formule (III.12.) pour calculer U(P)

$$U(P) = U_0(P) + \int_{S'} \sigma(P') M(P, P') dS \quad (\text{III.21.})$$

$P'(\xi', \eta', \zeta')$  est la variable d'intégration.

$S'$  est l'ensemble des surfaces à l'exception de la surface sur laquelle se trouve le point P. L'intégrale prise sur  $S'$  est toujours convergente.

Les formules (III.12.), (III.19.) et (III.21.) sont les bases de calcul du potentiel électrique U ; en effet si  $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$  est définie, le potentiel peut être calculé par la formule (III.12.). Ces formules peuvent être exploitées numériquement par une méthode d'approximations successives<sup>(48), (51)</sup>.

### III.3.1. Méthode d'approximations successives

La formule (III.19.) s'écrit, en tenant compte de (III.21.) :

$$- \frac{2\pi}{K} \sigma(P) = \int_{S'} \sigma(P') \cdot \Gamma(P, P') dS + N_0(P) \quad (\text{III.22.})$$

avec :

$$N_0(P) = \frac{\partial}{\partial z} U_0(P) \quad (\text{III.23.})$$

$$\Gamma(P, P') = \frac{\partial}{\partial z} M(P, P') \quad (\text{III.24.})$$

Supposons que  $S(P)$  soit une valeur approchée de la densité de charge ; nous avons comme première approximation :

$$- \frac{2\pi}{K} \sigma_1(P) = \int_{S'} S(P') \Gamma(P, P') dS + N_0(P) \quad (\text{III.25.})$$

La deuxième approximation s'obtient en portant la valeur de  $\sigma_1(P)$  dans (III.25.) :

$$-\frac{2\pi}{K} \sigma_2(P) = \int_{S'} \sigma_1(P') \Gamma(P, P') dS + N_0(P) \quad (\text{III.26.})$$

En utilisant cette procédure itérative, la solution par la méthode d'approximations successives s'écrit :

$$-\frac{2\pi}{K} \sigma_i(P) = \int_{S'} \sigma_{i-1}(P') \Gamma(P, P') dS + N_0(P) \quad (\text{III.27.})$$

ou encore :

$$\sigma_i(P) = T_i^1 + T_i^2 \quad (\text{III.28.})$$

avec :

$$T_i^1 = -\frac{K}{2\pi} \left\{ N_0(P) - \left(\frac{K}{2\pi}\right) A_1(P) + \left(\frac{K}{2\pi}\right)^2 A_2(P) + \dots + \left(-\frac{K}{2\pi}\right)^{i-1} A_{i-1}(P) \right\} \quad (\text{III.29.})$$

$$T_i^2 = \left(-\frac{K}{2\pi}\right)^i B_{i-1}(P) \quad (\text{III.30.})$$

où :

$$A_1 = \int_{S'} \Gamma(P, P') N_0(P') dS \quad (\text{III.31.})$$

$$A_i = \int_{S'} \Gamma(P, P') A_{i-1}(P') dS \quad (\text{III.32.})$$

$$B_0 = \int_{S'} \Gamma(P, P') S(P') dS \quad (\text{III.33.})$$

$$B_i = \int_{S'} \Gamma(P, P') B_{i-1}(P') dS \quad (\text{III.34.})$$

Le polynôme  $T_i^1$  converge, puisque  $K$  est plus petit que 1 comme le montre sa définition donnée par (III.20.).

La rapidité de la convergence de la méthode dépend du choix de la valeur initiale  $S(P)$ . Si l'on commence par ne tenir compte que du premier terme de la formule (III.21.),  $S(P)$  s'écrit, d'après (III.19.), et en tenant compte de (III.23.) :

$$S(P) = - \frac{K}{2\pi} N_o(P) \quad (\text{III.35.})$$

Dans l'hypothèse où K est suffisamment petit, KELLER<sup>(49)</sup> et VOZOFF<sup>(51)</sup> montrent que l'on peut se contenter de porter directement cette valeur approchée dans (III.12.) pour obtenir des résultats semi-quantitatifs.

### III.4. CAS D'UNE ANOMALIE SOUS FORME D'UNE COUCHE TRES MINCE

#### III.4.1. Détermination de la fonction $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$

Si l'épaisseur t de l'anomalie est petite par rapport à sa profondeur h, l'anomalie se comporte comme une couche doublement chargée (figure.50.). Dans ce cas nous avons, P'( $\xi, \eta, (h-t)$ ) étant le point au-dessous du point P( $\xi, \eta, h$ ) :

$$\sigma(P) = -\sigma(P') \quad (\text{III.36.})$$

et :

$$E_{S1} = 0 \quad (\text{III.37.})$$

$$E_{S2} = 4\pi\sigma(P) \quad (\text{III.38.})$$

Le champ électrique total au point P<sub>1</sub> est donc créé uniquement par le potentiel primaire U<sub>o</sub>(P) et nous pouvons écrire :

$$E_1 = -N_o(P) \quad (\text{III.39.})$$

$$E_2 = -N_o(P) + 4\pi\sigma(P) \quad (\text{III.40.})$$

d'où :

$$\sigma(P) = - \frac{K'}{4\pi} N_o(P) \quad (\text{III.41.})$$

avec :

$$K' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \quad (\text{III.42.})$$

En tenant compte de l'égalité :

$$U_o(P) = \frac{I\rho}{4\pi} M(Q,P) \quad (\text{III.42.})$$

(III.41.) devient :

$$\sigma(P) = - \frac{I\rho_1 K'}{16\pi} \Gamma(Q,P) \quad (\text{III.44.})$$

III.4.2. Potentiel au point R

Le potentiel au point  $R(0,0,z)$  est donné par :

$$U(R) = U_0(R) + U_S(R) + U_S^*(R) \quad (\text{III.45.})$$

$U_S$  et  $U_S^*$  étant respectivement les potentiels secondaires créés par l'anomalie et son image. En tenant compte de (III.12.), nous pouvons écrire :

$$U_S(R) = \int_{S_A + S_B} \sigma(P) M(R,P) dS \quad (\text{III.46.})$$

Les domaines d'intégration  $S_A$  et  $S_B$  sont respectivement le plan supérieur et le plan inférieur (figure.50.). La formule (III.46.) s'écrit, en tenant compte de (III.36.) :

$$U_S(R) = \int d\xi \int \sigma(P) \{ M(R,P) - M(R,P') \} d\eta \quad (\text{III.47.})$$

ou encore, en remplaçant  $\sigma(P)$  par sa valeur (III.44.) :

$$U_S(R) = - \frac{I\rho_1 K'}{16\pi^2} \int d\xi \int \Gamma(Q,P) \{ M(R,P) - M(R,P') \} d\eta \quad (\text{III.48.})$$

Nous obtenons finalement, en tenant compte de la définition de  $M(R,P)$  et de  $\Gamma(R,P)$  donnée par (III.24.) et (III.13.) :

$$U_S(0,0,z) = \frac{I\rho_1 K' h}{16\pi} (I_1 - I_2) \quad (\text{III.49.})$$

avec :

$$I_1 = \int d\xi \int \left\{ \xi^2 + \eta^2 + (h-z)^2 \right\}^{-1/2} \left\{ (\xi-r)^2 + \eta^2 + h^2 \right\}^{-3/2} d\eta \quad (\text{III.50.})$$

$$I_2 = \int d\xi \int \left\{ \xi^2 + \eta^2 + (h+t+z)^2 \right\}^{-1/2} \left\{ (\xi-r)^2 + \eta^2 + h^2 \right\}^{-3/2} d\eta \quad (\text{III.51.})$$

Nous obtenons l'expression de  $U_S^*$  en remplaçant dans (III.49.)  $h$  et  $t$  par  $-h$  et  $-t$  :

$$U_S^*(0,0,z) = \frac{I\rho_1 K'h}{16\pi^2} (-I_3 + I_4) \quad (\text{III.52.})$$

avec :

$$I_3 = \int d\xi \int \left\{ \xi^2 + \eta^2 + (h+z)^2 \right\}^{-1/2} \left\{ (\xi-r)^2 + \eta^2 + h^2 \right\}^{-3/2} d\eta \quad (\text{III.53.})$$

$$I_4 = \int d\xi \int \left\{ \xi^2 + \eta^2 + (h+t+z)^2 \right\}^{-1/2} \left\{ (\xi-r)^2 + \eta^2 + h^2 \right\}^{-3/2} d\eta \quad (\text{III.54.})$$

### III.4.3. Résistivité apparente $\rho_a$

La composante verticale du champ électrique au point R est donnée par :

$$E_z = - \frac{\partial}{\partial z} U(0,0,z) \quad (\text{III.55.})$$

Si l'on suppose que le milieu est homogène et de résistivité  $\rho_a$ , on a :

$$E_z = - \frac{\partial}{\partial z} \frac{I\rho_a}{4\pi} (r^2+z^2)^{-1/2} \quad (\text{III.56.})$$

et

$$\rho_a = \frac{4\pi(r^2+z^2)^{1/2}}{I} U(0,0,z) \quad (\text{III.57.})$$

en tenant compte de (III.43.) et (III.45.) :

$$\rho_a = \rho_1 + \frac{4\pi(r^2+z^2)^{1/2}}{I} \{U_S(0,0,z) + U_S^*(0,0,z)\} \quad (\text{III.58.})$$

ou encore :

$$\rho_a = \rho_1 \left\{ 1 + \frac{(r^2+z^2)^{1/2}}{4\pi} K'h(I_1 - I_2 - I_3 + I_4) \right\} \quad (\text{III.59.})$$

### III.5. CALCUL DE L'INTEGRALE $I_i$

Les quatre intégrales qui figurent dans la formule (III.59.) sont toutes de la forme :

$$I_i = \int_{x_1}^{x_2} S_i(\xi) d\xi \quad (\text{III.60.})$$

(i=1,2,3,4)

avec :

$$S_i(\xi) = \int_{y_1}^{y_2} (\eta^2 + \alpha_i^2)^{-1/2} (\eta^2 + \beta^2)^{-3/2} d\eta \quad (\text{III.61.})$$

$$\alpha_i^2 = \xi^2 + H_i^2 \quad (\text{III.62.})$$

$$\beta_i^2 = (\xi - r)^2 + h^2 \quad (\text{III.63.})$$

$$H_1 = h - z \quad (\text{III.64.})$$

$$H_2 = h + t - z \quad (\text{III.65.})$$

$$H_3 = h + z \quad (\text{III.66.})$$

$$H_4 = h + t + z \quad (\text{III.67.})$$

Il faut distinguer deux cas : le cas où  $\alpha^2 < \beta^2$  et le cas où  $\alpha^2 > \beta^2$  (le cas  $\alpha = \beta$  conduit à une intégrale simple).

III.5.1. Calcul de l'intégrale  $I_i$  dans le premier cas  $\alpha^2 < \beta^2$

Prenons  $\psi$  comme nouvelle variable définie par :

$$\psi = \arcsin \sqrt{\frac{\beta^2}{\beta^2 + \eta^2}} \quad (\text{III.68.})$$

L'intégrale (III.61.) devient :

$$S(\xi) = -\frac{1}{\beta^3} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}} \quad (\text{III.69.})$$

avec :  $m^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}$  (III.70.)

(III.69.) peut s'écrire sous la forme :

$$S(\xi) = \frac{1}{\beta^3} \left( \int_0^{\phi_1} - \int_0^{\phi_2} \right) \quad (\text{III.70.})$$

Ces deux dernières intégrales peuvent être exprimées en fonction des intégrales elliptiques. En effet, nous avons<sup>(57)</sup> :

$$D(\phi, m) = \frac{F(\phi, m) - E(\phi, m)}{m^2} = \int_0^\phi \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \psi}} \quad (\text{III.72.})$$

$F(\phi, m)$  et  $E(\phi, m)$  sont respectivement les intégrales elliptiques de première et deuxième espèce :

$$F(\phi, m) = \int_0^\phi \frac{d\psi}{\Delta(\psi, m)} \quad (\text{III.73.})$$

$$E(\phi, m) = \int_0^\phi \Delta(\psi, m) d\psi \quad (\text{III.74.})$$

avec :

$$\Delta(\psi, m) = \sqrt{1-m^2 \sin^2 \psi} \quad (\text{III.75.})$$

Pour une limite  $\phi = \pi/2$ , nous obtenons les intégrales elliptiques complètes :

$$F(m) = F(\pi/2, m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\Delta(\psi, m)} \quad (\text{III.76.})$$

$$E(m) = E(\pi/2, m) = \int_0^{\pi/2} \Delta(\psi, m) d\psi \quad (\text{III.77.})$$

$$D(m) = \frac{F(m) - E(m)}{m^2} = D(\pi/2, m) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\Delta(\psi, m)} \quad (\text{III.78.})$$

L'intégrale  $I_i$  s'écrit alors :

$$I_i = \int_{x_1}^{x_2} \frac{D(\phi_1, m) - D(\phi_2, m)}{\beta^3} d\xi \quad (\text{III.79.})$$

Cette dernière intégrale est facilement calculable par une méthode numérique, la méthode de SIMPSON par exemple.

En annexe.7. nous donnons une solution entièrement analytique de l'intégrale  $I_i$  dans le cas où les limites sont  $y_1 = -\infty$  et  $y_2 = +\infty$ .

III.5.2. Calcul de l'intégrale  $I_i$  dans le deuxième cas  $\alpha^2 > \beta^2$

Dans ce cas, la nouvelle variable  $\psi$  est définie par :

$$\psi = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \eta^2}} \quad (\text{III.80.})$$

Cela nous donne :

$$S(\xi) = \frac{1}{\alpha^3} \left\{ \int_0^{\phi_1} \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\Delta^3(\xi, m)} - \int_0^{\phi_2} \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\Delta^3(\psi, m)} \right\} \quad (\text{III.81.})$$

avec :

$$m^2 = 1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad (\text{III.82.})$$

$\Delta(\psi, m)$  est toujours défini par la formule (III.75.).

Nous pouvons encore exprimer ces intégrales en fonction des intégrales elliptiques<sup>(57)</sup> :

$$\int_0^{\phi} \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\Delta^3(\psi, m)} = \frac{1}{1-m^2} \left\{ F(\phi, m) - D(\phi, m) - \frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi, m)} \right\} \quad (\text{III.83.})$$

III.5.3. Calcul de l'intégrale  $I_i$  en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, l'intégrale  $I_i$  s'écrit sous la forme<sup>(11)</sup> :

$$I_i = \int \frac{d\delta}{\sqrt{\delta^2 + H_i^2}} \cdot I_\theta \quad (\text{III.84.})$$

avec :

$$I_\theta = \int \frac{d\theta}{\sqrt{(a-b\cos\theta)^3}} \quad (\text{III.85.})$$

$$a = \delta^2 + r^2 + h^2 \quad (\text{III.86.})$$

$$b = 2r\delta \quad (\text{III.87.})$$

$I_\theta$  peut être exprimée en fonction des intégrales elliptiques<sup>(58)</sup> :

$$I_\theta = \int \frac{d\theta}{\sqrt{(a-b\cos\theta)^3}} = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a+b}} E(\phi, m) \quad (\text{III.88.})$$

avec :

$$\phi = \text{arc sin } \sqrt{\frac{(a+b)(1-\cos\theta)}{2(a-b\cos\theta)}} \quad (\text{III.89.})$$

$$m = \sqrt{\frac{2b}{a+b}} \quad (\text{III.90.})$$

### III.6. APPLICATION A LA TELEDIAGRAPHIE

Nous pouvons, maintenant, étant donné l'étude théorique que nous venons d'exposer, examiner l'aspect des fonctions  $\rho_a(r)$  et  $\rho_a(z)$ . Le but de cet examen est de montrer que ces deux fonctions présentent un aspect particulier et que, de cet aspect, nous pouvons déduire la profondeur de l'anomalie et la distance  $d$  qui sépare son bord de l'axe Oz.

Nous pouvons ainsi définir une méthode d'interprétation des télélogs puisque la figure.50. peut représenter un terrain enfermant un gisement d'huile ou de gaz (voir §.IV.2. 1ère partie) et puisque  $\rho_a$  est calculable à partir du télélog.

Nous distinguons deux cas ; le cas d'un puits qui ne recoupe pas le gisement et que nous appellerons "latéral", et le cas d'un puits qui le recoupe ("central"). Dans les deux cas, l'axe Oz représente l'axe du forage.

#### III.6.1. Cas d'un forage latéral

La figure.51. montre les valeurs de  $\rho_a/\rho_1$  en fonction de  $r$  calculées par la formule (III.59.) pour les paramètres suivants :

$$x_1 = d = 800 \text{ m}$$

$$x_2 = +\infty$$

$$y_1 = -\infty$$

$$y_2 = +\infty$$

$$z = h = 400 \text{ m}$$

$$t = 40\text{m}$$

$$\rho_2/\rho_1 = 100 \text{ et } 50$$

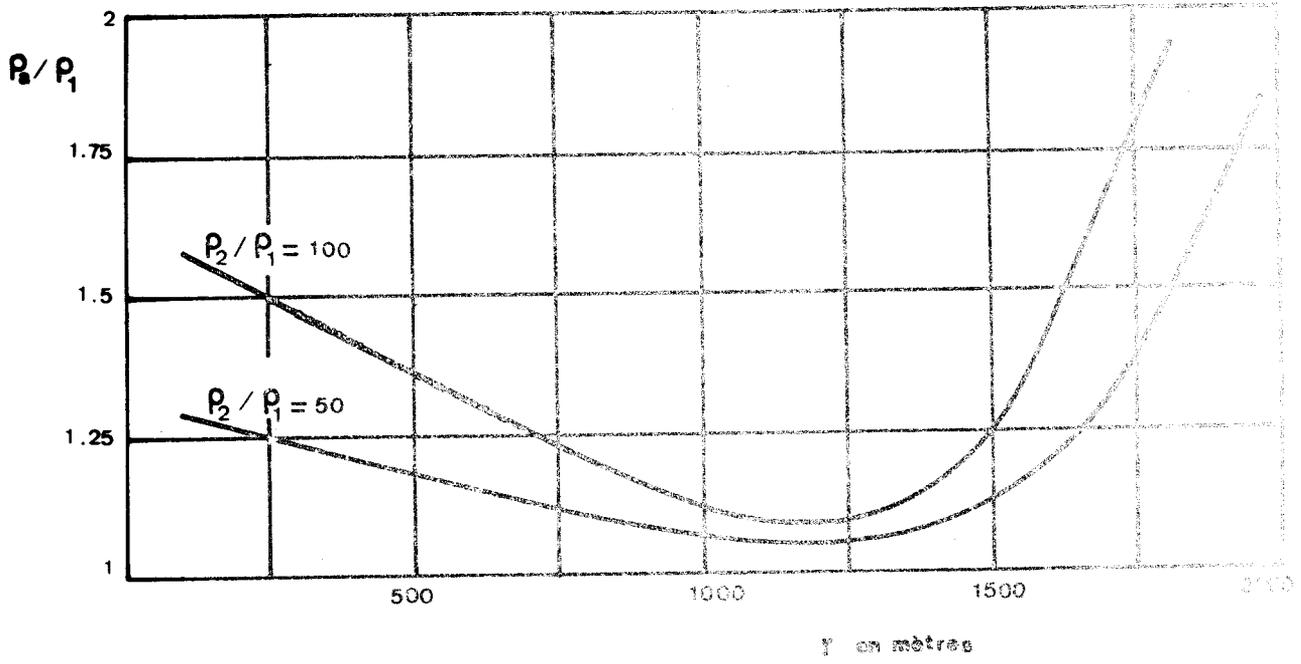


Figure 51.

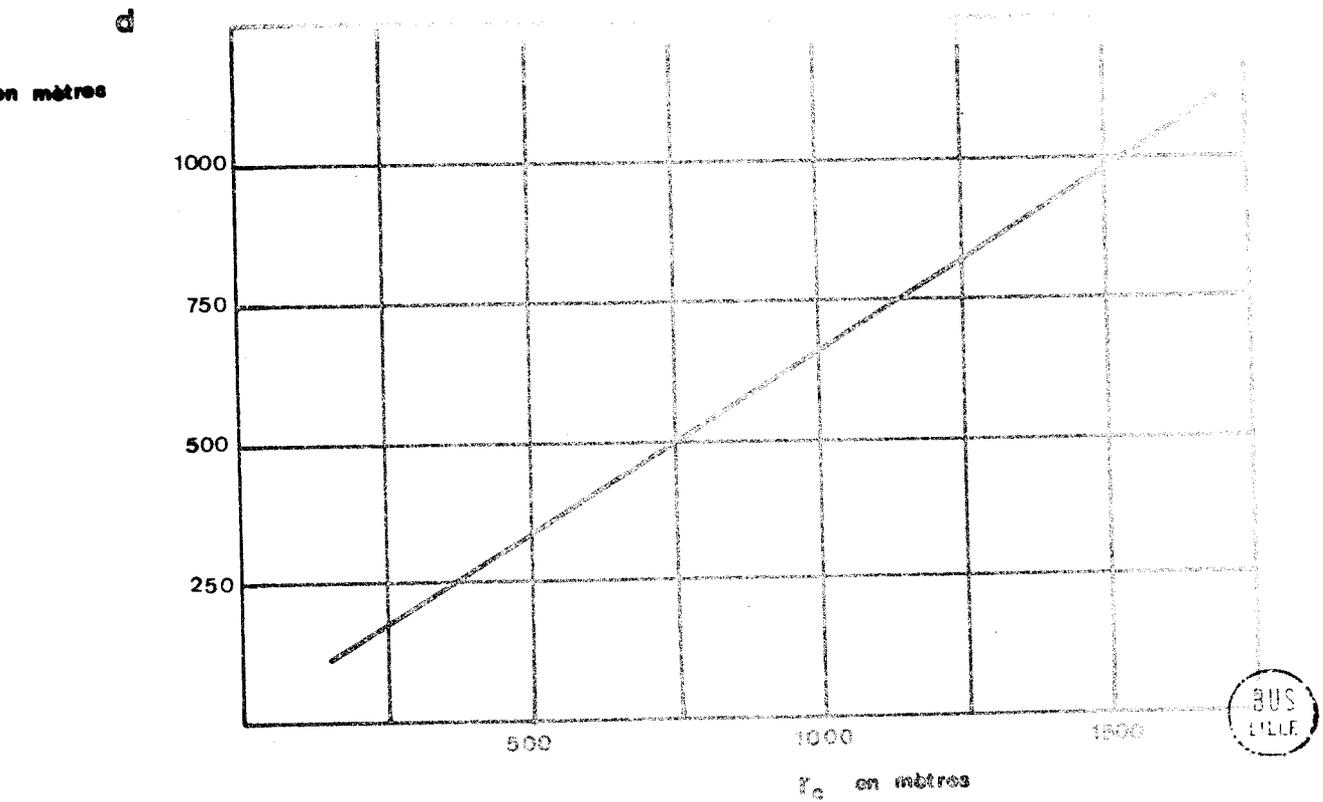


Figure 52.

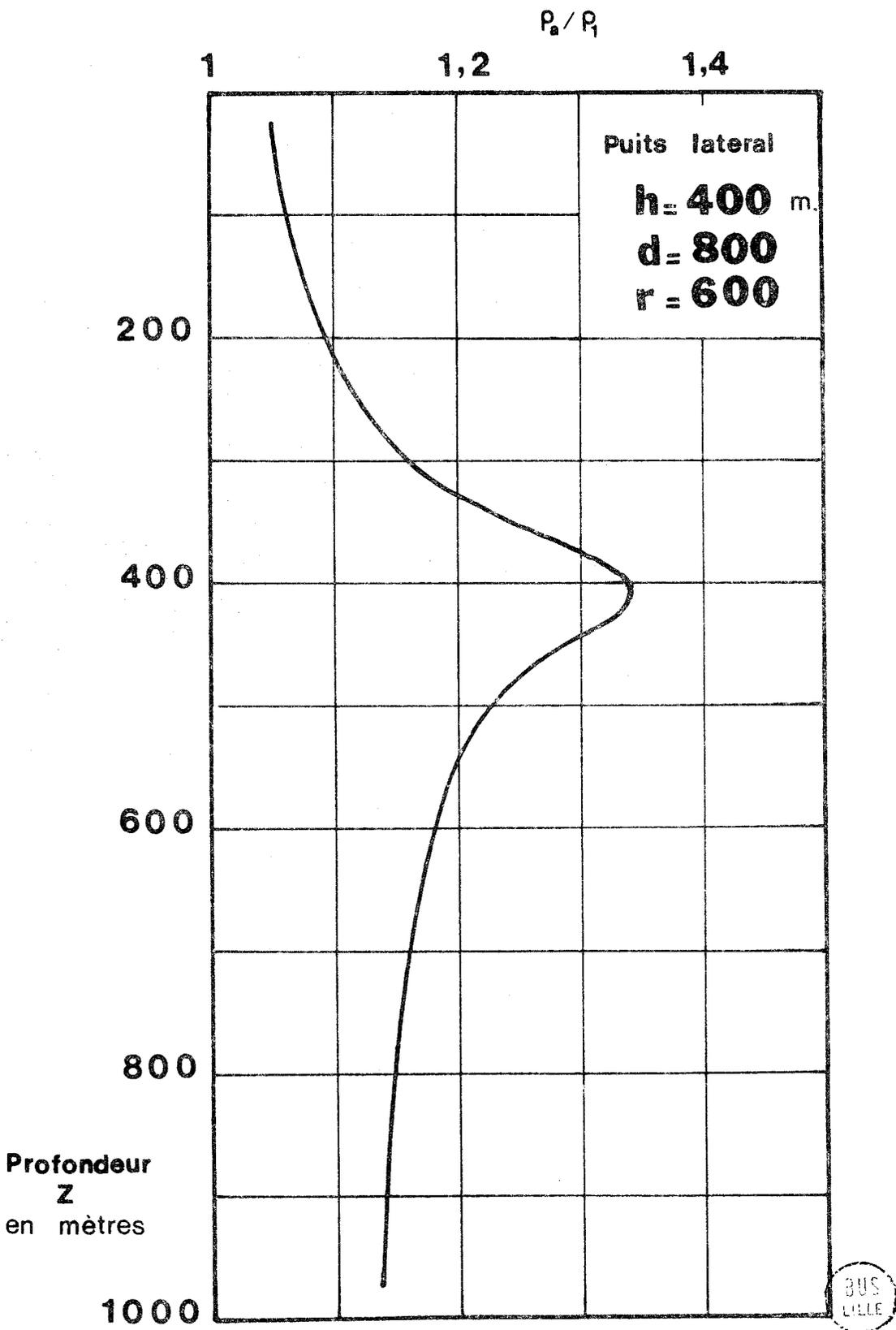


Figure.53.

Nous constatons que la fonction  $\rho_a(r)$  passe par un minimum pour une distance critique  $r_c$  de l'émetteur, et que  $r_c$  est fonction de la distance "d" comme le montre la figure.52.. Nous remarquons également que  $r_c$  ne varie pas avec le contraste  $\rho_2/\rho_1$  (figure.51.).

Gardons les mêmes paramètres et faisons varier  $z$  ; la fonction  $\rho_a(z)$  présente un maximum à une profondeur critique  $z_c$  égale à la profondeur  $h$  de l'anomalie (figure.53.).

### III.6.2. Cas d'un forage central

Pour un puits central dont l'axe passe par le centre d'une couche résistive ayant la forme d'un disque de rayon "d", la résistivité apparente  $\rho_a$  est donnée par la formule (III.59.) dans laquelle l'intégrale  $I_i$  est définie par la formule (III.84.) :

$$I_i = 2 \int_0^d \frac{d\delta}{\sqrt{\delta^2 + H_i^2}} \int_0^\pi \frac{d}{\sqrt{(a-b\cos\theta)^2}} \quad (\text{III.91.})$$

La figure.54. montre les valeurs de  $\rho_a/\rho_1$  en fonction de  $r$  pour différentes valeurs de la distance  $d$ . Les paramètres utilisés sont :

$$z = h = 600\text{mètres}$$

$$t = 40\text{mètres}$$

$$\rho_2/\rho_1 = 100$$

Chaque courbe présente un maximum pour une distance critique  $r_c$  ;  $r_c$  est une fonction de la distance  $d$  comme le montre l'abaque de la figure.55.

La figure.56. montre les valeurs de  $\rho_a/\rho_1$  en fonction de  $z$  pour :

$$d = 400 \text{ m}$$

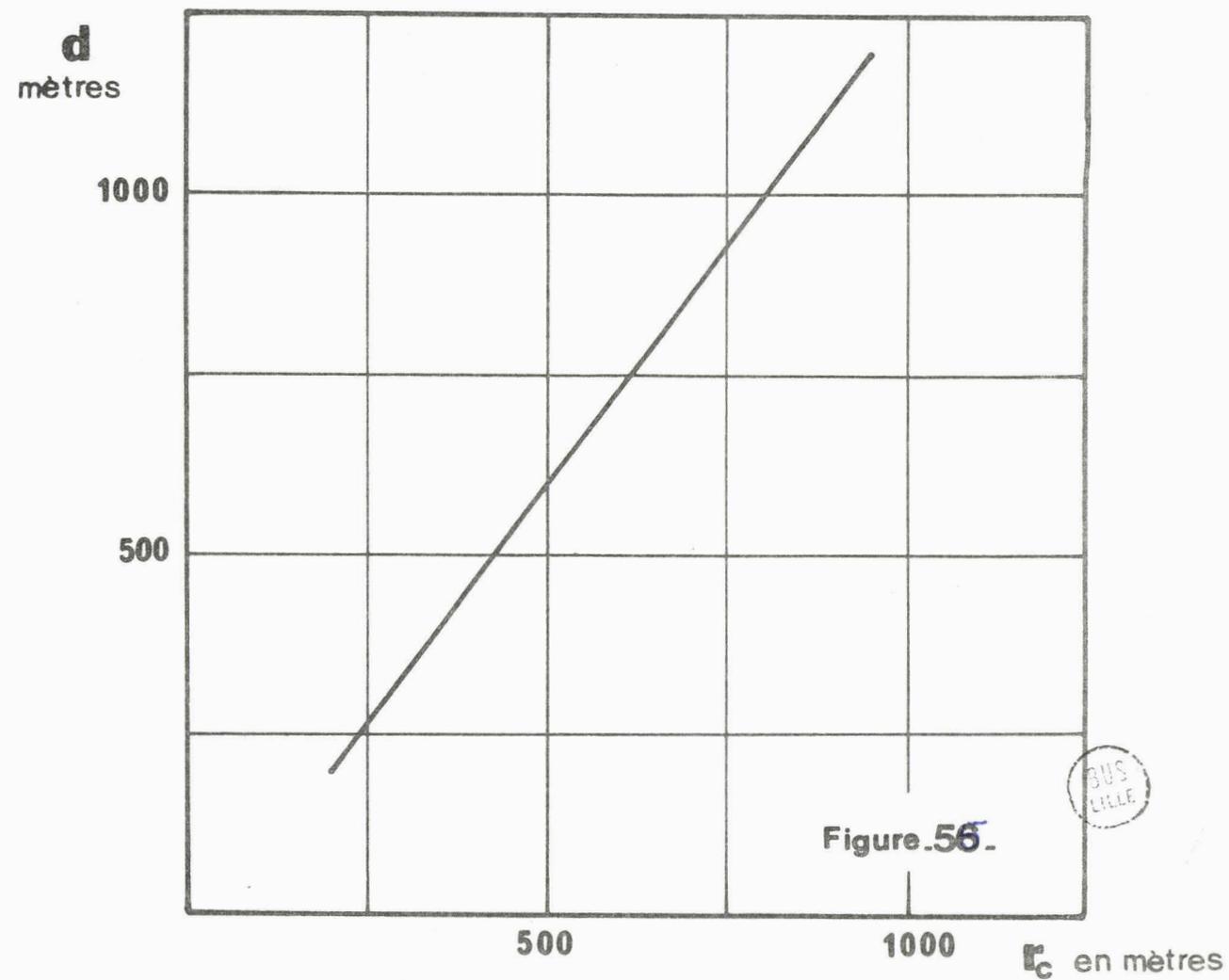
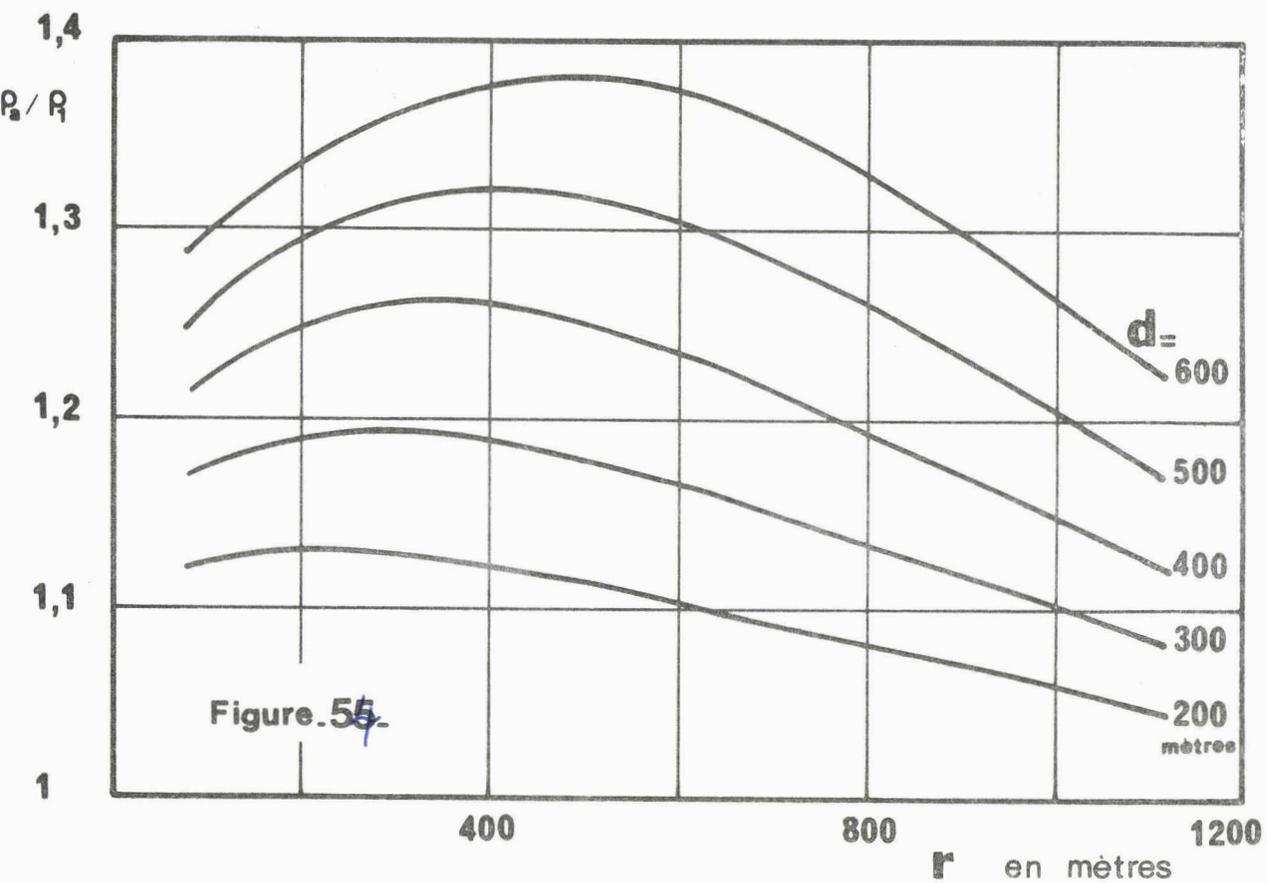
$$h = 600 \text{ m}$$

$$r = 200 \text{ m}$$

$$t = 40 \text{ m}$$

$$\rho_2/\rho_1 = 100$$

Cette courbe présente un maximum pour une valeur critique  $z_c$  égale à  $h$ .



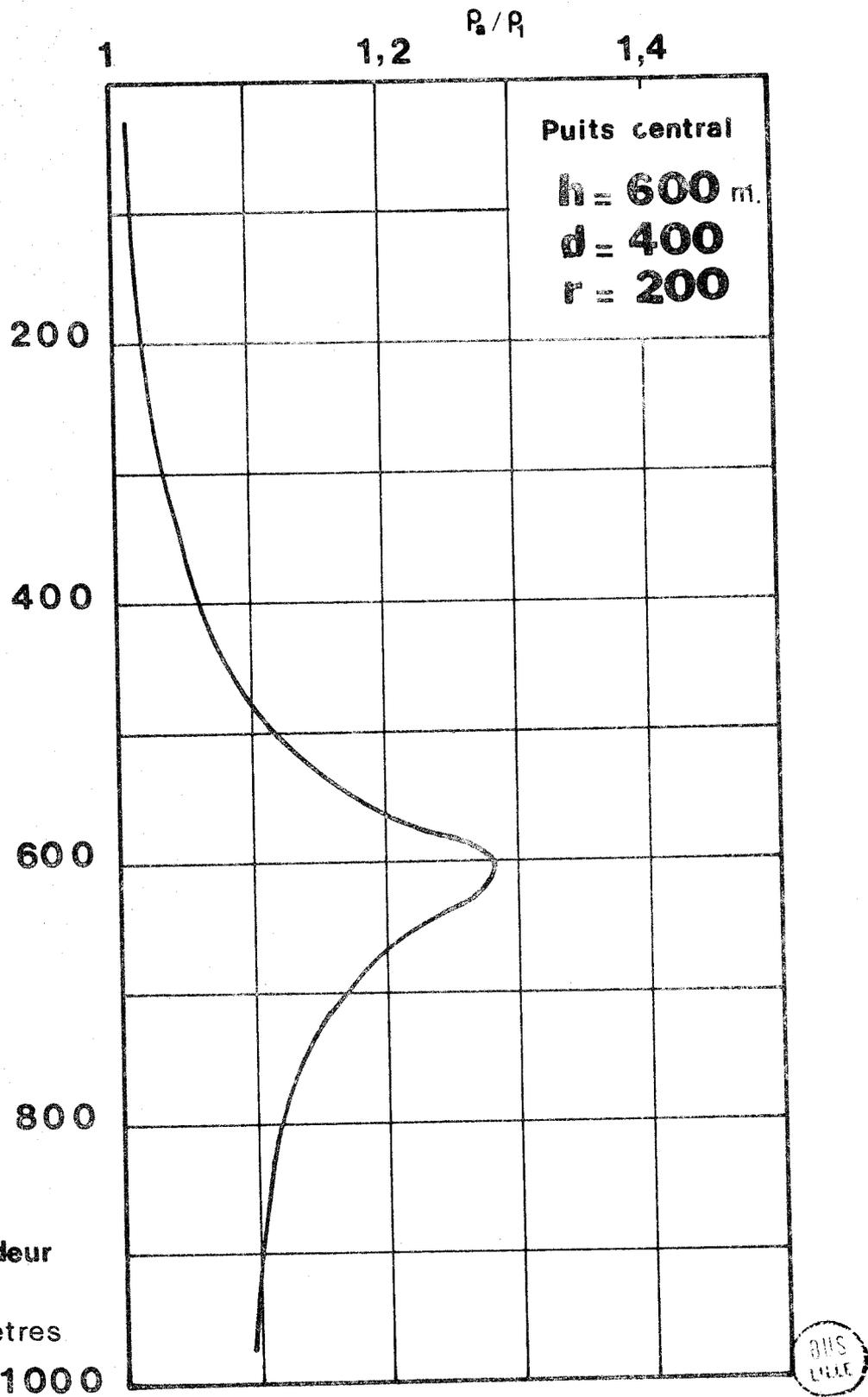


Figure .54.

### III.6.3. Conclusion

L'étude théorique précédente montre que la fonction  $\rho_a(r)$  présente un minimum à une distance critique  $r_c$  si le forage est latéral et qu'elle présente un maximum si le forage est central. Dans les deux cas, la distance critique  $r_c$  est une fonction linéaire de la distance "d". Elle montre également que la fonction  $\rho_a(z)$  présente un maximum pour une valeur critique  $z_c$  égale à la profondeur de l'anomalie.

Ces résultats sont en parfait accord avec ceux obtenus sur le modèle analogique.

C O N C L U S I O N

Au terme de cette étude théorique, analogique et expérimentale, nous pensons avoir contribué à la création d'une nouvelle méthode de prospection des gisements de gaz et de pétrole.

L'ensemble des expériences et applications industrielles effectuées sur le terrain jusqu'à ce jour a donné lieu à des résultats positifs et indiquent que la méthode de Télédiagraphie peut maintenant entrer dans une phase de développement en vue d'en faire un procédé industriel valable.

Outre la prospection pétrolière, le Télélog est applicable en Génie Civil, en prospection minière et notamment pour le contrôle des gisements artificiels utilisés pour le stockage souterrain de gaz naturel.

R E F E R E N C E S

- (1) BASSIOUNI Z., GABILLARD R., DESBRANDES R. and DE GELIS E.  
A new application of Telelog ;locating oil or gas field limits  
S.P.W.L.A., 13th Annual logging symposium, TULSA, May 1972
- (2) R. DESBRANDES, R. GABILLARD, Z. BASSIOUNI  
Nouvelle méthode de prospection électrique du sous-sol et appareillage pour  
sa mise en oeuvre  
Brevet français, n°72.08.333, Février 1972
- (3) BASSIOUNI Z., GABILLARD R., FONTAINE J.  
Sur le rayonnement du dipôle électrique horizontal en milieu stratifié, et  
application à une nouvelle méthode de diagraphie à grand rayon d'investigation  
C.R. Acad. Sci. PARIS, t.274, p.111-113, 10 Janvier 1972
- (4) GABILLARD R., LOUAGE F., BASSIOUNI Z., DESBRANDES R.  
Télédiagraphie, une méthode d'exploration directionnelle à grande distance d'un  
sondage  
Coll. Géophysique minière, B.R.G.M., ORLEANS, Nov.1971
- (5) DESBRANDES R., GABILLARD R., LOUAGE F., BASSIOUNI Z.  
Telelog spots oil strata 3000 feet from wellbore  
WORLD OIL, Sept.1971, p.58
- (6) GABILLARD R., LOUAGE F., BASSIOUNI Z., DESBRANDES R.  
Telelog, an electromagnetic method of directional exploration at great  
distance from borehole  
12th annual SPWLA logging symposium, DALLAS, TEXAS, May 1971
- (7) BASSIOUNI Z., GABILLARD R.  
Détermination de la forme du gisement de gaz de CHEMERY - GAZ DE FRANCE -  
par des mesures effectuées dans le forage Cs 33  
Rapport I.F.P., Réf.20076, Mars 1972
- (8) BASSIOUNI Z., BERTHELOT F., DESBRANDES R., LE CORRE A.  
Application de la Télédiagraphie en Génie Civil. Mesures effectuées pour  
la Société Générale Géotechnique  
Rapport I.F.P., réf.20058, Janv.1972
- (9) BASSIOUNI Z., GABILLARD R.  
Détermination de la distance du bord du gisement de gaz de LUSSAGNET (S.N.P.A.)  
à l'axe du puits Lug 39 par des mesures de Télédiagraphie  
Rapport I.F.P., réf.19849, Décembre 1971
- (10) GABILLARD R., BASSIOUNI Z.  
Application de la Télédiagraphie à la prospection minière (expériences de  
GUIPY - Juin 1971)  
Rapport I.F.P., n°19633, Sept.1971

- (11) GABILLARD R., BASSIOUNI Z.  
Détermination du bord du gisement à l'aide d'un puits central par des mesures de Télédiagraphie  
Rapport I.F.P., réf.19359, Juin 1971
- (12) GABILLARD R., BASSIOUNI Z.  
Expériences de Télédiagraphie sur le puits BEYNES 102  
Rapport I.F.P., réf.18876, Janv.1971
- (13) BASSIOUNI Z., CABILLARD R.  
Expériences de Télédiagraphie de BEYNES, puits BEYNES 104  
Rapport I.F.P., réf.18745, Déc.1970
- (14) GABILLARD R.  
Expériences de Télédiagraphie de St ILLIERS, Oct.1969  
Rapport I.F.P., réf.18019, Mars 1970
- (15) GABILLARD R., BASSIOUNI Z.  
Expériences de Télédiagraphie, LE PERRAY III, Juin 1969  
Rapport I.F.P., réf.17219, Août 1969
- (16) GABILLARD R., LOUAGE F., BASSIOUNI Z.  
Interprétation des expériences de Télédiagraphie effectuées au PERRAY en Novembre 1968  
Rapport I.F.P., réf.16794, Fév.1969
- (17) GABILLARD R., LOUAGE F., BASSIOUNI Z.  
Expériences de Télédiagraphie effectuées du 12 au 15 Novembre 1968 et nouvelle théorie matricielle  
Rapport I.F.P., réf.16554, Déc.1968
- (18) BASSIOUNI Z.  
Essai d'interprétation des mesures de Télédiagraphie  
D.E.A., LILLE, Juillet 1968
- (19) GABILLARD R., LOUAGE F., DESBRANDES R.  
Procédé de prospection des terrains situés autour d'un forage  
Brevet n°156 220 - Rapport I.F.P., réf.15981, 24 Juin 1968
- (20) GABILLARD R., LOUAGE F., DESBRANDES R.  
Procédé de prospection des terrains situés autour d'un forage  
Premier certificat d'addition P.V. n°156 232  
Rapport I.F.P., réf.16023, 24 Juin 1968
- (21) DESERANDES R.  
Théorie et interprétation des diagaphies  
Edition TECHNIP, PARIS, 1968

- (22) PIRSON Sylvain J.  
Handbook of well log analysis  
PRENTICE-HALL, Inc. ENGLEWOOD Cliffs, N.J., 1963
- (23) DE GELIS E.  
"LUSSAGNET 39"  
Rapport interne S.N.P.A. (D.E.P. PAU, 15 Juillet 1969) (R.G. 69 207)
- (24) DANGLES P.  
Reprise de Lug 39 et préparation de Lug 40  
Rapport interne S.N.P.A. (D.E.P.), PAU, 29 Septembre 1971 (71.284)
- (25) DE GELIS E.  
Télédiagraphie sur Lug 39  
Rapport interne S.N.P.A. (D.E.P.), PAU, 10 Novembre 1971, (R.G. n°71.350)
- (26) GABILLARD R., LOUAGE F., FONTAINE J., DUBUS J.P.  
Théorie matricielle de la propagation dans un terrain stratifié d'une onde électromagnétique émise par une antenne verticale souterraine  
Symposium sur les ondes électromagnétiques, STRESA, Juin 1968, session I.a., comm. n°154
- (27) GABILLARD R.  
Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs.  
Application aux télécommunications souterraines  
Cours D.E.A., LILLE, 1967
- (28) FONTAINE J.  
Contribution à la théorie du rayonnement des dipôles électriques enterrés et développement de méthodes d'optimisation des liaisons électromagnétiques entre terminaux souterrains  
Thèse doct. d'Etat, LILLE, 1969
- (29) LOUAGE F.  
Théorie et vérification expérimentale de la propagation des ondes électromagnétiques dans un guide d'ondes géologiques  
Thèse doct. d'Etat, LILLE, 1969, p.II.4.
- (30) DUBUS J.P.  
Recherche théorique et expérimentale des possibilités d'adaptation de certaines méthodes de prospection électromagnétique à la détection de cavités souterraines  
Thèse 3ème Cycle, LILLE, 1968, p.23
- (31) CAUTERMAN M.  
Etude théorique et expérimentale de l'influence d'une inclusion sphérique sur la distribution du courant dans un milieu conducteur homogène.  
Application à des méthodes de prospection géophysique  
Thèse 3ème Cycle, LILLE, 1971, p.32

- (32) GOETGHELUCK M.  
Etude et réalisation d'une cuve analogique haute fréquence. Application à l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur  
D.E.A., LILLE, 1969
- (33) VIVES J.P.  
Mise au point et perfectionnement d'une cuve analogique haute fréquence. Simulation de quelques problèmes de prospection télédiagraphique  
D.E.A., LILLE, 1970
- (34) LESTAMPS J.P.  
Etude et réalisation de l'équipement électronique d'une cuve rhéographique simulant la propagation électromagnétique en milieu absorbant  
Mémoire C.N.A.M., LILLE 1970
- (35) PODVIN D.  
Etude et réalisation d'amplificateurs basse fréquence à haut rendement  
Thèse 3ème Cycle, LILLE, 1968
- (36) THERY J.P.  
Contribution à l'étude et à la réalisation d'amplificateurs sélectifs à hautes performances et à leur adaptation dans des sondes de mesure de diagraphies pétrolières  
Thèse Doct.Ing., LILLE, 1970
- (37) VANLOOT D.  
Mém.C.N.A.M., LILLE, (à paraître)
- (38) MANGEZ P.  
Thèse 3ème Cycle, LILLE (à paraître)
- (39) SOIRON M.  
Traitement de mesures enregistrées sur bande magnétique. Application à l'interprétation des télédiagraphies  
D.E.A., LILLE, 1970
- (40) CAUTERMAN M., DUBUS J.P., GABILLARD R.  
Méthode permettant de déceler et de préciser le rayon et la profondeur d'un gisement de forme sphérique  
Coll. Géophysique minière, ORLEANS, B.R.G.M., Nov.1971
- (41) GABILLARD R., DUBUS J.P., LOUAGE F.  
Procédé électromagnétique pour la détection des carrières souterraines. Simulation sur cuve électrolytique H.F.  
Onde Electrique, Vol.49, fasc.2, pp.168-173, fév.1969
- (42) GABILLARD R., DUBUS J.P., CAUTERMAN M.  
Campagne de détection de carrières souterraines dans la région lilloise par une méthode de prospection électrique  
Bull. liaison labo P. et C., Août-Sept.1971, réf.1079

- (43) BANOS A.  
Dipole radiation in presence of a conducting half-space  
PERGAMON PRESS, 1966
- (44) SOCIETY OF EXPLORATION GEOPHYSICISTS  
Mining Geophysics, Vol.II, 1967, p.92
- (45) WAIT J.R.  
Electromagnetic waves in stratified media  
PERGAMON PRESS, 1970, p.37
- (46) WAIT J.R.  
Electromagnetic probing in geophysics  
ch.VIII, the GOLDEN PRESS, 1971
- (47) BREKHOVSKIKH L.  
Waves in layered media  
ACADEMIC PRESS, 1960, ch.IV, p.245
- (48) ALFANO L.  
Introduction to the interpretation of resistivity measurements for  
complicated structural conditions  
Geophysical prospecting, 1959, vol.7, p.311-366
- (49) KELLER G.V.  
Electrical prospecting for oil  
Quart. of the Col.School of Mines, Vol.63, n°2, Apr.1968, p.172-185
- (50) KELLER G.V. and FRISCHKNECHT C.  
Electrical methods in geophysical prospecting  
Int.ser.of monographs in electromagnetic waves, vol.10, PERGAMON PRESS,  
1970, p.188-196
- (51) VOZOFF K.  
Numerical resistivity interpretation : general inhomogeneity  
Geophysics, vol.XXV, n°6, Déc.1960, p.1184
- (52) MASON and WEAVER  
The electromagnetic field  
cote 5362 BUS
- (53) DURARD E.  
Electrostatique et Magnétostatique  
MASSON, 1953
- (54) PETIAU G.  
La théorie des fonctions de BESSEL  
C.N.R.S., 1955, ch.V, p.140
- (55) MORSE P.M., FESHBACH H.  
Methods of theoretical physics  
Mc GRAW-HILL, Book Inc., 1953, ch.IV, p.434

- (56) WATSON G.N.  
A treatise on the theory of BESSEL functions  
NEW YORK, 1948
- (57) JAHNKE-EMDE-LOGH  
Tafeln Hoherer Functionen  
B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, STUTTGART, p.43
- (58) GRADSHTEYN I.S., RYZHIK I.M.  
Table of integrals series and products  
ACADEMIC PRESS, New York and London, p.156
- (59) GROBNER W., HEFREITER N.  
INTEGRALTAFEL  
Wien and Innsbruck SPRINGER-VERLAG, 1949, p.47 et 48, Tome.I.
- (60) BYRD P.F., FRIEDMAN M.D.  
Handbook of elliptic integrals for Engineers and Physicists  
SPRINGER-VERLAG, BERLIN, 1954
- (61) CAYLEY A.  
Elementary treatise on elliptic functions  
BELL and Sons, LONDON, 1876
- (62) MONTESSUS de BALLORE de R.  
Fonctions elliptiques  
GAUTHIER-VILLARS, PARIS, 1917

A N N E X E S

A N N E X E . 1 .

FORMULES DE RECURRENCE POUR LES ELEMENTS DE LA MATRICE (V)<sub>mo</sub>

On voit immédiatement d'après la relation de définition {I.59.}\* qu'il existe entre les matrices (V)<sub>(m+1)0</sub> et (V)<sub>mo</sub> la relation :

$$(V)_{(m+1)0} = V_{m+1}^{-1} V_m D_m (V)_{mo} \quad (1)$$

Les matrices V<sub>m</sub> et D<sub>m</sub> sont définies par les formules {I.45.} et {I.53.}, d'où :

$$V_m^{-1} = \frac{1}{2u_m} \begin{pmatrix} -1 & u_m & 0 & 0 \\ 1 & u_m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_m & -k_m \\ 0 & -1 & u_m & k_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

et :

$$V_{m+1}^{-1} V_m D_m = \frac{1}{2u_{m+1}} \begin{pmatrix} (u_{m+1} + u_m) e^{d_m} & (u_{m+1} - u_m) e^{-d_m} & 0 & 0 \\ (u_{m+1} - u_m) e^{d_m} & (u_{m+1} + u_m) e^{-d_m} & 0 & 0 \\ (1 - \frac{K_{m+1}}{K_m}) e^{d_m} & (1 - \frac{K_{m+1}}{K_m}) e^{-d_m} & (u_{m+1} + u_m \frac{K_{m+1}}{K_m}) e^{d_m} & (u_{m+1} - u_m \frac{K_{m+1}}{K_m}) e^{-d_m} \\ (\frac{K_{m+1}}{K_m} - 1) e^{d_m} & (\frac{K_{m+1}}{K_m} - 1) e^{-d_m} & (u_{m+1} - u_m \frac{K_{m+1}}{K_m}) e^{d_m} & (u_{m+1} + u_m \frac{K_{m+1}}{K_m}) e^{-d_m} \end{pmatrix} \quad (3)$$

\* Les références aux formules du texte principal sont encadrées par { }

En portant cette matrice dans (1), nous avons :

$$L_{11}(m+1) = \frac{1}{2u_{m+1}} \{ (u_{m+1} + u_m) e^{d_m} L_{11}(m) + (u_{m+1} - u_m) e^{-d_m} L_{21}(m) \} \quad (4)$$

$$L_{21}(m+1) = \frac{1}{2u_{m+1}} \{ (u_{m+1} - u_m) e^{d_m} L_{11}(m) + (u_{m+1} + u_m) e^{-d_m} L_{21}(m) \} \quad (5)$$

$$L_{31}(m+1) = \frac{1}{2u_{m+1}} \left\{ \left(1 - \frac{K_{m+1}}{K_m}\right) [L_{11}(m) e^{d_m} + L_{21}(m) e^{-d_m}] \right. \\ \left. + (u_{m+1} + u_m) \frac{K_{m+1}}{K_m} e^{d_m} L_{31}(m) + (u_{m+1} - u_m) \frac{K_{m+1}}{K_m} e^{-d_m} L_{41}(m) \right\} \quad (6)$$

$$L_{41}(m+1) = \frac{1}{2u_{m+1}} \left\{ \left(\frac{K_{m+1}}{K_m} - 1\right) [L_{11}(m) e^{d_m} + L_{21}(m) e^{-d_m}] \right. \\ \left. + (u_{m+1} - u_m) \frac{K_{m+1}}{K_m} e^{d_m} L_{31}(m) + (u_{m+1} + u_m) \frac{K_{m+1}}{K_m} e^{-d_m} L_{41}(m) \right\} \quad (7)$$

$$L_{12}(m+1) = \frac{1}{2u_{m+1}} \{ (u_{m+1} + u_m) e^{d_m} L_{12}(m) + (u_{m+1} - u_m) e^{-d_m} L_{22}(m) \} \quad (8)$$

$$L_{22}(m+1) = \frac{1}{2u_{m+1}} \{ (u_{m+1} - u_m) e^{d_m} L_{12}(m) + (u_{m+1} + u_m) e^{-d_m} L_{22}(m) \} \quad (9)$$

$$L_{32}(m+1) = \frac{1}{2u_{m+1}} \left\{ \left(1 - \frac{K_{m+1}}{K_m}\right) [L_{12}(m) e^{d_m} + L_{22}(m) e^{-d_m}] \right. \\ \left. + (u_{m+1} + u_m) \frac{K_{m+1}}{K_m} e^{d_m} L_{32}(m) + (u_{m+1} - u_m) \frac{K_{m+1}}{K_m} e^{-d_m} L_{42}(m) \right\} \quad (10)$$

$$L_{42}(m+1) = \frac{1}{2u_{m+1}} \left\{ \left(\frac{K_{m+1}}{K_m} - 1\right) [L_{12}(m) e^{d_m} + L_{22}(m) e^{-d_m}] \right. \\ \left. + (u_{m+1} - u_m) \frac{K_{m+1}}{K_m} e^{d_m} L_{32}(m) + (u_{m+1} + u_m) \frac{K_{m+1}}{K_m} e^{-d_m} L_{42}(m) \right\} \quad (11)$$

$$L_{33}(m+1) = \frac{1}{2u_{m+1}} \left\{ (u_{m+1} + u_m) \frac{K_{m+1}}{K_m} e^{d_m} L_{33}(m) + (u_{m+1} - u_m) \frac{K_{m+1}}{K_m} e^{-d_m} L_{43}(m) \right\} \quad (12)$$

$$L_{43}(m+1) = \frac{1}{2u_{m+1}} \left\{ (u_{m+1} - u_m) \frac{K_{m+1}}{K_m} e^{d_m} L_{33}(m) + (u_{m+1} + u_m) \frac{K_{m+1}}{K_m} e^{-d_m} L_{43}(m) \right\} \quad (13)$$

En tenant compte des formules {I.127.} à {I.131.}, on peut écrire :

$$(W_1)_{m+1} = \frac{N_{12}}{N_{11}} u_m \{L_{11}(m)e^{dm} - L_{21}(m)e^{-dm}\} \quad (14)$$

$$(W_2)_{m+1} = u_m \{L_{22}(m)e^{dm} - L_{12}(m)e^{-dm}\} \quad (15)$$

$$(W_3)_{m+1} = \lambda^2 \left(-\frac{N_{12}}{N_{11}}\right) \{L_{31}(m)e^{dm} + L_{41}(m)e^{-dm}\} \quad (16)$$

$$(W_4)_{m+1} = \lambda^2 \{L_{32}(m)e^{dm} + L_{42}(m)e^{-dm}\} \quad (17)$$

$$(W_5)_{m+1} = \lambda^2 \left(\frac{N_{11}N_{32} - N_{12}N_{31}}{N_{11}N_{33}}\right) \{L_{33}(m)e^{dm} + L_{43}(m)e^{-dm}\} \quad (18)$$

A N N E X E . 2 .L'APPROXIMATION  $u_m = \gamma_m$ 

L'intégrale du type {I.140.}, dans le cas simple d'un terrain stratifié à deux couches d'indices 0 et m, est de la forme :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{-u_0 h} e^{-u_m z} H_0^{(1)}(\lambda r) d\lambda \quad (1)$$

C'est une intégrale d'une variable réelle  $\lambda$  à coefficients complexes puisque  $u_0$  et  $u_m$  sont définies par :

$$u_0 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_0^2} \quad (2)$$

et

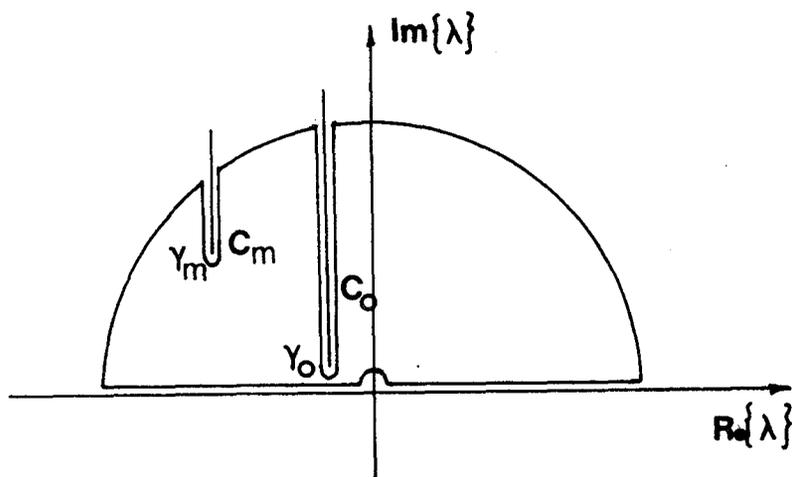
$$u_m = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_m^2} \quad (3)$$

et que  $\gamma_0$  et  $\gamma_m$  sont des nombres complexes.

Nous allons intégrer dans le plan complexe par la méthode des résidus. Pour cela nous déformons le contour d'intégration initial représenté par l'axe réel en intégrant sur un contour fermé formé d'un demi-cercle de rayon infini situé dans le demi-plan supérieur.

Les fonctions  $u_0$  et  $u_m$  étant multiformes, la fonction à intégrer présente deux points de branchement en  $\lambda = j\gamma_0$  et  $\lambda = j\gamma_m$ . Le chemin d'intégration doit contourner les branches de coupures issues de ces points de branchement par deux lacets  $C_0$  et  $C_m$  (figure.1.).

Ces deux coupures transforment le plan des  $\lambda$  en une surface de RIEMANN à quatre feuillets dans lesquels les parties réelles des fonctions  $u_0$  et  $u_m$  prennent la détermination positive ou négative. On montre<sup>(28)</sup> que dans le feuillet où les fonctions  $\text{Re}\{u_0\}$  et  $\text{Re}\{u_m\}$  sont positives, l'intégrale sur le demi-cercle infini est nulle en vertu du "Lemme de Jordan", la fonction à intégrer ne présentant pas de pôle.



Déformation du contour d'intégration dans le plan des  $\lambda$

Figure -1.

Le théorème des résidus donne alors :

$$I = I_{c_0} + I_{c_m} \quad (4)$$

L'intégration le long de ces deux contours va se faire par la méthode du col (28), (43), (47).

Par un changement de variable, l'intégrale (1) peut se mettre sous la forme :

$$I = \int_c F(\omega) e^{\phi(\omega)} d\omega \quad (5)$$

avec :

$$\omega = u + jv \quad (6)$$

et

$$\phi(\omega) = X(u, v) + jY(u, v) \quad (7)$$

$c$  est le contour transformé de  $c_0$  ou  $c_m$ .

Mise sous cette forme, l'intégrale sera pratiquement nulle dans les régions du plan où  $X$  est négatif et suffisamment grand en valeur absolue. Il suffira donc de choisir le changement de variable de manière à ce que le contour d'intégration transformé passe dans les régions du plan  $(u, v)$  où  $X$  est négatif. Seules les parties de ce contour sur lesquelles la valeur absolue de  $X$  est faible donneront une contribution non négligeable à l'intégrale.

$\phi(\omega)$  est une fonction complexe analytique ; X et Y sont donc des fonctions harmoniques formant un réseau de lignes orthogonales. Si on considère X(u,v) comme définissant une altitude, il y aura sur la surface  $\phi(\omega)$  des lignes de niveau pour lesquelles X(u,v)=cte et des lignes de plus grande pente pour lesquelles Y(u,v)=cte.

On montre que la fonction X(u,v) ne peut avoir en aucun point du plan un maximum ou un minimum fini<sup>(54)</sup>. Elle ne peut posséder que des points pour lesquels on a simultanément :

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial v} = 0 \quad (8)$$

Ces points sont appelés des "cols", ils permettent le passage entre les régions où X est négatif ou bien entre les régions où X est positif.

Le tracé le plus avantageux pour le chemin d'intégration sera donc un contour de plus grande pente Y=cte passant par le col. C'est en effet le chemin le plus rapide pour passer d'une région où X est négatif à une autre. C'est l'intégration sur ce contour, au voisinage du col, qui donnera la contribution la plus importante à l'intégrale.

Le changement de variable choisi pour passer de l'expression (1) à l'expression (5) est le suivant :

$$\lambda = j\gamma \cdot \cos\omega \quad (9)$$

et  $\phi(\omega)$  est choisi de telle manière que c soit une ligne de "plus grande pente" dans le plan des  $\omega$ :

$$\phi(\omega) = -\gamma \cdot r \cos\phi \quad (10)$$

Le col de cette fonction est situé en  $\omega = 0$ , et il en résulte que :

$$Y(u,v) = Y(o) \quad (11)$$

On introduit une nouvelle variable d'intégration x définie par la transformation conforme :

$$\frac{1}{2} x^2 = \phi(0) - \phi(\omega) \quad (12)$$

Ainsi, sur le contour de "plus grande pente"  $c$  du plan des  $\omega$ , la variable  $x$  est purement réelle à cause de la condition (11).

L'intégrale (5) se transforme donc en :

$$e^{-\phi(0)} I = \int_0^{\infty} \Psi(x) e^{-x^2/2} dx \quad (13)$$

dans laquelle :

$$\Psi(x) = \{F(\omega) + F(-\omega)\} \frac{d\omega}{dx} \quad (14)$$

$\Psi(x)$  est une fonction paire de  $x$  et peut se mettre sous la forme d'un développement en série au voisinage de l'origine puisque l'on a fait en sorte que le "col" de la fonction  $\phi(\omega)$  soit placé à l'origine. Nous pourrions écrire  $\Psi(x)$  sous la forme :

$$\Psi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_{2i} x^{2i} \quad (15)$$

avec :

$$|x| < \Lambda^{1/2} \quad (16)$$

où  $\Lambda^{1/2}$  est le rayon de convergence de la série défini par la singularité la plus proche de l'origine que présente la fonction  $\Psi(x)$  en  $x=x_0$  dans le plan complexe de la variable  $x$ .

Dans le cas du demi-milieu, en suivant la méthode de calcul que l'on vient d'expliquer, on montre que :

$$\Lambda^{1/2} = |4\gamma_0 r|^{1/2} \quad (17)$$

et nous devons avoir :

$$x < |4\gamma_0 r|^{1/2} \quad (18)$$

Cette limitation du domaine de variation de  $x$  réagit évidemment sur le domaine de variation de  $\omega$  et par suite de  $\lambda$  (qui sera lui-même limité). En effet, en portant (10) dans (12) nous obtenons :

$$|\cos \omega| < 1 \quad (19)$$

soit :

$$|\lambda| < |\gamma_0| \quad (20)$$

Ceci provient du fait que nous intégrons sur un contour "de plus grande pente" et que, sur ce contour, la contribution la plus importante de l'intégrale est celle obtenue au voisinage du col en  $\omega = 0$ . Cette limitation du domaine de variation de  $\lambda$  ou de  $\omega$  va nous permettre de faire une approximation très intéressante, dans l'hypothèse où :

$$\gamma_m \gg \gamma_0 \quad (21)$$

c'est-à-dire dans le cas où la couche d'indice zéro est l'atmosphère.

L'expression (3) s'écrit, en tenant compte de (9), sous la forme :

$$u_m = \gamma_m \sqrt{1 - \frac{\gamma_0^2}{\gamma_m^2} \cos^2 \omega} \quad (22)$$

mais nous avons, d'après (19) et (21),  $|\cos \omega| < 1$  et  $\gamma_m \gg \gamma_0$  ; (22) s'écrit donc sous la forme simple :

$$u_m \approx \gamma_m \quad (23)$$

Cette démonstration peut être extrapolée pour le cas de plusieurs couches (voir réf. (28), cas de 3 couches) et les  $u_m$  peuvent être considérés comme des constantes.

A N N E X E . 3.EXPRESSION SOUS FORME D'INTEGRALE DU POTENTIEL ELECTRIQUECREE PAR UN DIPOLE ELECTRIQUE PLACE DANS UN MILIEU HOMOGENE, ISOTROPE ET INFINI.CAS DU COURANT CONTINU.1. Potentiel électrique créé par un point source placé dans un milieu homogène, isotrope et infini

On suppose que le point source est placé au point O, figure.1.

A n'importe quelle surface sphérique S à une distance R du point source, le courant afflue radialement. Or la surface est de  $4\pi R^2$  ; la densité du courant à la distance R est alors :

$$J_R = \frac{I}{4\pi R^2} \quad (1)$$

Si  $\sigma$  est la conductivité électrique du milieu, on peut écrire la loi d'Ohm sous la forme :

$$E_R = \frac{1}{\sigma} J_R = \frac{I}{4\pi\sigma} \cdot \frac{1}{R^2} \quad (2)$$

Le potentiel  $\psi$  à la distance R est donné par l'intégrale de  $E_R$  entre R et l'infini :

$$\psi = \int_R^{\infty} E_R dR = \frac{I}{4\pi\sigma} \cdot \frac{1}{R} \quad (3)$$

En coordonnées cylindriques  $\psi$  s'écrit :

$$\psi = \frac{I}{4\pi\sigma} (z^2 + r^2)^{-1/2} \quad (4)$$

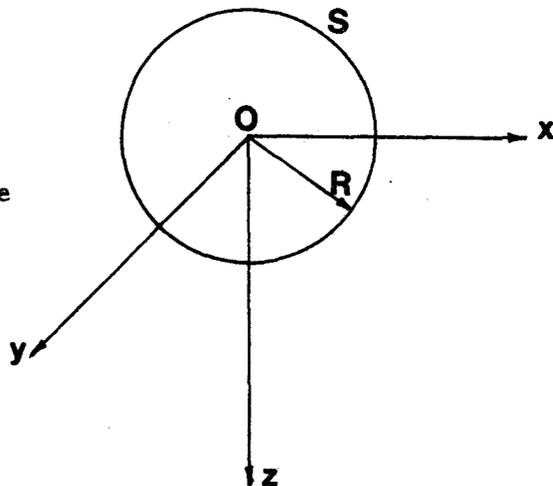


Figure -1.

Il est bien connu que la transformation de Laplace de la fonction de BESSEL d'ordre zéro et de première espèce est justement égale à  $(z^2+r^2)^{-1/2}$  :

$$(z^2+r^2)^{-1/2} = \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (5)$$

et le potentiel électrique s'écrit :

$$\psi = \frac{I}{4\pi\sigma} \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (6)$$

2. Dipôle électrique dans un milieu homogène, isotrope et infini

Le potentiel au point p quelconque, à une distance  $R_1$  et  $R_2$  respectivement des électrodes sources  $C_1$  et  $C_2$  (figure.2.), peut être obtenu par l'addition de deux potentiels  $\psi_1$  et  $\psi_2$  :

$$\psi_1 = \frac{I_1}{4\pi\sigma} \frac{1}{R_1} \quad (7)$$

$$\psi_2 = \frac{I_2}{4\pi\sigma} \frac{1}{R_2} \quad (8)$$

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{I_1}{4\pi\sigma} \frac{1}{R_1} + \frac{I_2}{4\pi\sigma} \frac{1}{R_2} \quad (9)$$

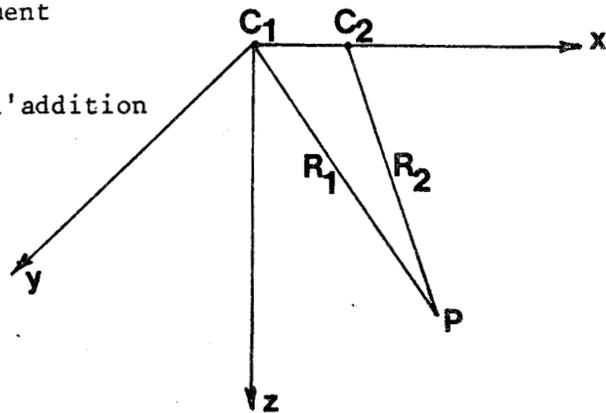


Figure.2.

Si l'on suppose que le courant entre dans le milieu par l'électrode  $C_1$  et sort par  $C_2$ , on peut écrire :

$$I = I_1 = - I_2 \quad (10)$$

$$\text{et } \psi = \frac{I}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (11)$$

2.a. Dipôle électrique vertical (D.E.V.)

Si le point p est assez éloigné du dipôle on peut faire les approximations suivantes : (voir figure.3.)

$$R_1 \approx R_2 \approx R \quad (12)$$

$$\theta' \approx \theta \quad (13)$$

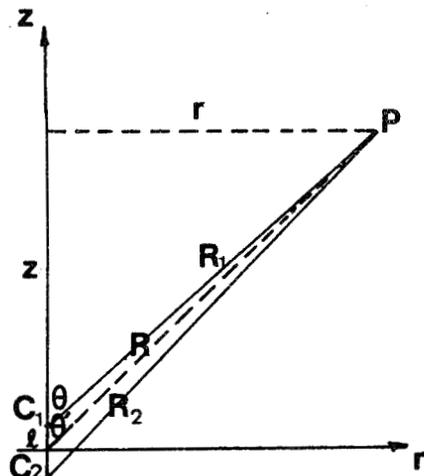


Figure.3.

(11) peut s'écrire :

$$\psi = \frac{I}{4\pi\sigma} \frac{\ell \cos\theta}{R^2} \quad (14)$$

mais :

$$\cos\theta = \frac{z}{R} \quad (15)$$

et :

$$R = (z^2 + r^2)^{1/2} \quad (16)$$

(14) s'écrit donc :

$$\psi = \frac{I\ell}{4\pi\sigma} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (17)$$

Si l'on dérive (6) par rapport à  $z$  on obtient :

$$\frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (18)$$

et le potentiel créé par un D.E.V. s'exprime sous la forme :

$$\psi = \frac{I}{4\pi\sigma} \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (19)$$

### 2.b. Dipôle électrique horizontal (D.E.H.)

En faisant les mêmes approximations

que dans le cas du D.E.V., le potentiel au point  $p$  (figure.4.) est donné par (14).

Mais ici on a :

$$\cos\theta = \frac{r}{R} \quad (20)$$

En tenant compte de (20) et (16), la formule (14) devient, dans le cas du D.E.H. :

$$\psi = \frac{I}{4\pi\sigma} \frac{r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (21)$$

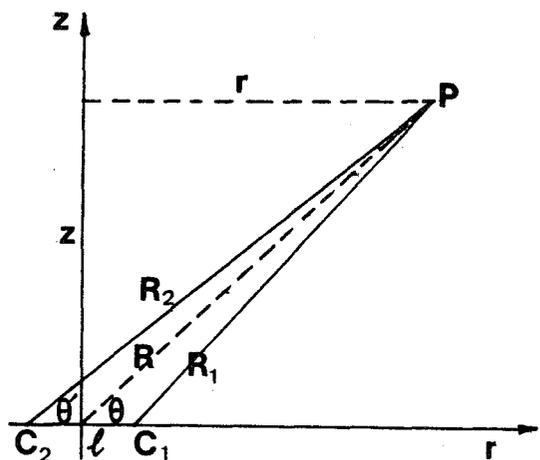


Figure - 4.

Si l'on dérive (6) par rapport à  $r$  on obtient :

$$\frac{r}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (22)$$

et (21) peut donc se mettre sous forme d'intégrale :

$$\psi = \frac{I\ell}{4\pi\sigma} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (23)$$

A N N E X E . 4 .CALCUL DES ELEMENTS DE LA MATRICE (V)<sub>pq</sub>

La matrice  $(V)_{pq}$  est définie par la formule {I.58.} que nous écrivons sous la forme :

$$(V)_{pq} = V_p^{-1} \left( \prod_{p+1}^{q-1} H_i \right) V_q \quad (1)$$

avec :

$$H_i = V_i D_i^{-1} V_i^{-1} \quad (2)$$

Remplaçons dans (2)  $V_i$  et  $D_i$  par leurs valeurs données par les formules {II.44.} et {II.45.} , puis effectuons les produits des matrices.

Il en résulte que :

$$H_i = C_i \begin{pmatrix} 1 & t_i u_i / k_i \\ t_i k_i / u_i & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

avec :

$$C_i = \text{ch}(u_i, h_i) \quad (4)$$

$$t_i = \text{th}(u_i, h_i) \quad (5)$$

Selon le principe de la stratification fictive {§.I.9.1.} nous avons :

$$h_i = h \quad (6)$$

$h$  peut être choisi aussi petit que l'on veut de manière à avoir  $\delta_m$  toujours très supérieur à  $h$ .

$C_i$  et  $t_i$  se simplifient en tenant compte de {I.142.} et {I.149.} :

$$C_i = 1 \quad (7)$$

$$t_i = u_i h \quad (8)$$

et (3) devient dans l'approximation des basses fréquences :

$$H_i = \begin{pmatrix} 1 & h u_i^2 / \sigma_i \\ h \sigma_i & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

et le produit de deux matrices  $H_i$  et  $H_{i+1}$  nous donne :

$$H_i H_{i+1} = \begin{pmatrix} 1+h^2 u_i^2 (\sigma_{i+1}/\sigma_i) & h\{(u_i^2/\sigma_i)+(u_{i+1}^2/\sigma_{i+1})\} \\ h(\sigma_i+\sigma_{i+1}) & 1+h^2 u_i^2 (\sigma_i/\sigma_{i+1}) \end{pmatrix} \quad (10)$$

Si l'on ne garde que les termes en  $h$  on a alors :

$$H_i H_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & h\{(u_i^2/\sigma_i)+(u_{i+1}^2/\sigma_{i+1})\} \\ h(\sigma_i+\sigma_{i+1}) & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

d'où :

$$\prod_{p+1}^{q-1} H_i = \begin{pmatrix} 1 & h \sum_{p+1}^{q-1} u_i^2 / \sigma_i \\ h \sum_{p+1}^{q-1} \sigma_i & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

En portant (12) dans (1) et en effectuant le produit des matrices, nous obtenons :

$$(V)_{pq} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \quad (13)$$

avec :

$$Q_{11} = \frac{\sigma_p}{2u_p} \left( \frac{u_q}{\sigma_q} - \sum_{p+1}^{q-1} \frac{u_i t_i}{\sigma_i} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{t_q}{\sigma_q} \sum_{p+1}^{q-1} \sigma_i \right) \quad (14)$$

$$Q_{12} = -\frac{\sigma_p}{2u_p} \left( \frac{u_q}{\sigma_q} + \sum_{p+1}^{q-1} \frac{u_i t_i}{\sigma_i} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{t_q}{\sigma_q} \sum_{p+1}^{q-1} \sigma_i \right) \quad (15)$$

$$Q_{21} = -\frac{\sigma_p}{2u_p} \left( \frac{u_q}{\sigma_q} - \sum_{p+1}^{q-1} \frac{u_i t_i}{\sigma_i} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{t_q}{\sigma_q} \sum_{p+1}^{q-1} \sigma_i \right) \quad (16)$$

$$Q_{22} = \frac{\sigma_p}{2u_p} \left( \frac{u_q}{\sigma_q} + \sum_{p+1}^{q-1} \frac{u_i t_i}{\sigma_i} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{t_q}{\sigma_q} \sum_{p+1}^{q-1} \sigma_i \right) \quad (17)$$

ANNEXE . 5.

On remarque d'après la relation de définition {I.58.} qu'il existe entre les matrices  $(V)_{pq}$  et  $(V)_{pq-1}$  la relation :

$$(V)_{pq} = (V)_{pq-1} \cdot D_{q-1} \cdot D_{q-1}^{-1} \cdot V_{q-1}^{-1} V_q \quad (1)$$

Examinons le produit  $D_{q-1}^{-1} V_{q-1}^{-1} V_q$  dans le cas du courant continu où les matrices  $V_m$  et  $D_m$  sont définies par {II.14.} {II.15.}

Nous obtenons, en effectuant le produit de ces trois matrices :

$$D_{q-1}^{-1} V_{q-1}^{-1} V_q = \frac{\sigma_{q-1}}{2\lambda} \begin{pmatrix} e^{-\lambda h_{q-1}} & 0 \\ 0 & e^{\lambda h_{q-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & -\rho_{q-1} \\ \lambda & \rho_{q-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_q & \rho_q \\ -\lambda & \lambda \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2\sigma_q} \begin{pmatrix} (\sigma_{q-1} + \sigma_q) e^{-\lambda h_{q-1}} & (\sigma_{q-1} - \sigma_q) e^{-\lambda h_{q-1}} \\ (\sigma_{q-1} - \sigma_q) e^{\lambda h_{q-1}} & (\sigma_{q-1} + \sigma_q) e^{\lambda h_{q-1}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Dans le cas d'un D.E.V. parcouru par un courant alternatif,  $V_m$  et  $D_m$  sont définis par {II.44.} et {II.45.}, et nous obtenons :

$$D_{q-1}^{-1} V_{q-1}^{-1} V_q = \frac{k_{q-1}}{2u_{q-1}} \begin{pmatrix} e^{-u_{q-1} h_{q-1}} & 0 \\ 0 & e^{u_{q-1} h_{q-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{u_{q-1}}{k_{q-1}} \\ 1 & \frac{u_{q-1}}{k_{q-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{u_q}{k_q} & \frac{u_q}{k_q} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Si nous faisons  $\omega = 0$ , (4) devient :

$$D_{q-1}^{-1} V_{q-1}^{-1} V_q = \frac{\sigma_{q-1}}{2\lambda} \begin{pmatrix} e^{-\lambda h_{q-1}} & 0 \\ 0 & e^{\lambda h_{q-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\sigma_{q-1}} \\ \frac{\lambda}{\sigma_{q-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{\sigma_q} & \frac{\lambda}{\sigma_q} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2\sigma_q} \begin{pmatrix} (\sigma_{q-1} + \sigma_q) e^{-\lambda h_{q-1}} & -(\sigma_{q-1} - \sigma_q) e^{-\lambda h_{q-1}} \\ -(\sigma_{q-1} - \sigma_q) e^{\lambda h_{q-1}} & (\sigma_{q-1} + \sigma_q) e^{\lambda h_{q-1}} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Appelons  $S_{ij}$  les éléments de la matrice  $(V)_{pq}$  calculés dans le cas du courant continu et  $T_{ij}$  les éléments de la même matrice calculés cette fois dans le cas du courant alternatif en faisant  $\omega = 0$ . On remarque, en tenant compte de (6), (3) et (1), que :

$$S_{11} = T_{11} \quad (7)$$

$$S_{12} = -T_{12} \quad (8)$$

$$S_{21} = -T_{21} \quad (9)$$

et  $S_{22} = T_{22} \quad (10)$

A N N E X E. 6.

SOLUTION DE L'INTEGRALE DU TYPE  $I = \int_0^{\infty} e^{-\lambda b} u_m J_1(\lambda r) \lambda d\lambda$

L'intégrale I :

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\lambda b} u_m J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (1)$$

est un cas particulier de l'intégrale J suivante :

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\lambda b - u_m a} u_m J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (2)$$

Cette dernière intégrale dérive d'une troisième intégrale K :

$$K = \int_0^{\infty} e^{-\lambda b - u_m a} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3)$$

par la formule :

$$J = \frac{\partial^2}{\partial r \partial a} K \quad (4)$$

Pour résoudre l'intégrale K nous développons le terme  $e^{-\lambda b}$  :

$$K = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n b^n}{n!} \int_0^{\infty} \lambda^n e^{-u_m a} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (5)$$

qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned} K &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2n} e^{-u_m a} J_0(\lambda r) d\lambda \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{2n} e^{-u_m a} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (6) \end{aligned}$$

Nous vérifions facilement que :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \gamma_m^2 \right)^n e^{-u_m a} = \lambda^{2n} e^{-u_m a} \quad (7)$$

et nous obtenons en portant (7) dans (6) :

$$K = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{2n}}{(2n)!} \left( \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \gamma_m^2 \right)^n \int_0^{\infty} e^{-u_m a} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} \left( \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \gamma_m^2 \right)^n \int_0^{\infty} e^{-u_m a} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (8)$$

La première intégrale de la formule (8) peut se mettre sous la forme :

$$\int_0^{\infty} e^{-u_m a} J_0(\lambda r) d\lambda = - \frac{\partial}{\partial a} L \quad (9)$$

L est l'intégrale connue de "FOSTER-LIEN"<sup>(43)</sup>:

$$L = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u_m a}}{u_m} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{2} j \pi J_0(x) H_0^1(y) \quad (10)$$

avec :

$$x = \frac{1}{2} j \gamma_m (R-a) \quad (11)$$

$$y = \frac{1}{2} j \gamma_m (R+a) \quad (12)$$

$$R = (r^2 + a^2)^{1/2} \quad (13)$$

La seconde intégrale s'obtient à partir de la fonction de GREEN :

$$\int_0^{\infty} e^{-u_m a} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = - \frac{\partial}{\partial a} \frac{e^{-\gamma_m R}}{R} \quad (14)$$

R est toujours défini par (13).

Nous obtenons en tenant compte de (9) et (14) :

$$K = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \gamma_m^2 \right)^n \left\{ \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial}{\partial a} \frac{e^{-\gamma_m R}}{R} - \frac{b^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial L}{\partial a} \right\} \quad (15)$$

A. EVALUATION DE L'INTEGRALE L

Nous pouvons écrire, en tenant compte de (10) :

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{\partial L^{(1)}}{\partial a} + \frac{\partial L^{(2)}}{\partial a} \quad (16)$$

avec :

$$\frac{\partial L^{(1)}}{\partial a} = \frac{j\pi}{4R} \{ xH_1^1(x) H_0^1(y) - yH_0^1(x) H_1^1(y) \} \quad (17)$$

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial a} = \frac{j\pi}{4R} \{ xH_1^2(x) H_0^1(y) - yH_0^2(x) H_1^1(y) \} \quad (18)$$

ou encore en développant les fonctions de HANKEL sous la conditions  $|\gamma_m r| > 1$  :  
(voir référence (43), page 137) :

$$\frac{\partial L^{(1)}}{\partial a} = \frac{j(y-x)}{2R(xy)^{1/2}} e^{j(x+y)} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{x+y}{jxy} \right) + \frac{9}{128} \left( \frac{x+y}{jxy} \right)^2 + \dots \right\} \quad (19)$$

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial a} = - \frac{(x+y)}{2R(xy)^{1/2}} e^{j(y-x)} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{x-y}{jxy} \right) + \frac{9}{128} \left( \frac{x-y}{jxy} \right)^2 + \dots \right\} \quad (20)$$

Les deux dernières formules (19) et (20) s'écrivent, en remplaçant x et y par leurs valeurs données en (11) et (12) :

$$\frac{\partial L^{(1)}}{\partial a} = \frac{ja}{Rr} e^{-\gamma_m R} \left\{ 1 - \frac{\gamma_m R}{2(\gamma_m r)^2} + \frac{9(\gamma_m R)^2}{8(\gamma_m r)^4} + \dots \right\} \quad (21)$$

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial a} = - \frac{1}{r} e^{-\gamma_m a} \left\{ 1 + \frac{\gamma_m a}{2(\gamma_m r)^2} + \frac{9(\gamma_m a)^2}{8(\gamma_m r)^4} + \dots \right\} \quad (22)$$

Si l'on remplace dans (21)  $e^{-\gamma_m R}/R$  par son expression suivante :

$$\frac{e^{-\gamma_m R}}{R} = \frac{e^{-\gamma_m r}}{r} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{2\gamma} + \frac{\alpha^4 - 4\alpha^2}{8\gamma^2} + \frac{\alpha^6 - 18\alpha^4}{48\gamma^3} + \dots \right\} \quad (23)$$

avec :

$$\alpha = - \gamma_m a \quad (24)$$

et :

$$\gamma = -\gamma_m r \quad (25)$$

nous obtenons :

$$\frac{\partial L^{(1)}}{\partial a} = \frac{j a e^{-\gamma_m r}}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1+\alpha^2}{2\gamma} + \frac{9-2\alpha^2+\alpha^4}{8\gamma^2} + \dots \right\} \quad (26)$$

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial a} = -\frac{e^{-\gamma_m a}}{r} \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2\gamma^2} + \frac{9\alpha^2}{8\gamma^4} + \dots \right\} \quad (27)$$

### B. EVALUATION DE L'INTEGRALE K

En portant (23) et (16) dans (15), et tenant compte de (26) et (27), nous obtenons :

$$K = K^{(1)} + K^{(2)} \quad (28)$$

avec :

$$\begin{aligned} K^{(1)} = & -\frac{j a e^{-\gamma_m r}}{r^2} \left\{ \left( 1 + \frac{\alpha^2+1}{2} + \frac{\alpha^4-2\alpha^2+9}{8\gamma^2} + \dots \right) \right. \\ & + \beta \left( 1 + \frac{\alpha^2-2}{2\gamma} + \frac{\alpha^4-12\alpha^2}{8\gamma^2} + \dots \right) \\ & + \frac{\beta^2}{2!} \left( 1 + \frac{\alpha^2-5}{2\gamma} + \frac{\alpha^4-22\alpha^2+21}{8\gamma^2} + \dots \right) \\ & + \frac{\beta^3}{3!} \left( 1 + \frac{\alpha^2-8}{2\gamma} + \frac{\alpha^4-32\alpha^2+72}{8\gamma^2} + \dots \right) \\ & \left. + \frac{\beta^4}{4!} \left( 1 + \frac{\alpha^2-11}{2\gamma} + \frac{\alpha^4-42\alpha^2+153}{8\gamma^2} + \dots \right) + \dots \right\} \quad (29) \end{aligned}$$

$$K^{(2)} = \frac{e^{-\gamma_m a}}{r} \left\{ 1 - \frac{\alpha+\beta^2}{2\gamma^2} + \frac{9\alpha^2+9\beta^2+18\alpha\beta^2+3\beta^4}{8\gamma^4} - \dots \right\} \quad (30)$$

et

$$\beta = -j\gamma_m b \quad (31)$$

### C. CAS PARTICULIER OU b=0

Si  $b = 0$ , l'intégrale  $K$  donnée en (3) s'écrit simplement en tenant compte de (9):

$$K = -\frac{\partial}{\partial a} L$$

et elle peut être évaluée à l'aide des formules (16), (26) et (27).

C.1. Evaluation de l'intégrale I

Pour évaluer l'intégrale I, nous calculons d'abord l'intégrale J qui dérive de l'intégrale K par la formule (4), puis nous faisons dans le résultat  $a=0$ . Nous calculons tout d'abord la dérivée de (26) et (27) par rapport à la variable  $a$  :

$$\frac{\partial^2 L(1)}{\partial a^2} = j \frac{e^{-\gamma_m r}}{r^2} \left( 1 + \frac{1+3\alpha^2}{2\gamma} + \frac{9-6\alpha^2+5\alpha^4}{8\gamma^2} + \dots \right) \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 L(2)}{\partial a^2} = \gamma_m \frac{e^{-\gamma_m a}}{r} \left( 1 - \frac{1+\alpha}{2\gamma} + \frac{9(2\alpha+\alpha^2)}{8\gamma^2} - \dots \right) \quad (34)$$

Comme nous ne dérivons plus par rapport à la variable  $a$ , nous pouvons dès maintenant mettre  $a = 0$ ; (33) et (34) deviennent :

$$\frac{\partial^2 L(1)}{\partial a^2} = j \frac{e^{-\gamma_m r}}{r^2} \left( 1 + \frac{1}{2\gamma} + \frac{9}{8\gamma^2} + \dots \right) \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 L(2)}{\partial a^2} = \frac{\gamma_m}{r} \left( 1 - \frac{1}{2\gamma} - \dots \right) \quad (36)$$

Et nous obtenons finalement en dérivant par rapport à  $r$  :

$$\frac{\partial^3 L(1)}{\partial a^2 \partial r} = -j \frac{\gamma_m}{r^2} e^{-\gamma_m r} \left\{ 1 + \frac{3}{2\gamma_m r} - \frac{3}{8(\gamma_m r)^2} + \frac{9}{2(\gamma_m r)^3} \right\} \quad (37)$$

$$\frac{\partial^3 L(2)}{\partial a^2 \partial r} = \frac{\gamma_m}{r^2} \left\{ \frac{3}{2(\gamma_m r)^2} - 1 \right\} \quad (38)$$

Et la solution de l'intégrale I avec  $b = 0$  s'écrit :

$$I = P + jQ$$

avec :

$$P = \frac{\gamma_m}{r^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2(\gamma_m r)^2} \right\} \quad (40)$$

$$Q = \frac{\gamma_m}{r^2} e^{-\gamma_m r} \left\{ 1 + \frac{3}{2\gamma_m r} - \frac{3}{8(\gamma_m r)^2} + \frac{9}{2(\gamma_m r)^3} \right\} \quad (41)$$

ANNEXE . 7.

$$\underline{\text{SOLUTION DE L'INTEGRALE DU TYPE I}} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi d\eta}{\{(\xi^2 + \eta^2 + H^2)\}^{1/2} \{(\xi-r)^2 + \eta^2 + h^2\}^{3/2}}$$

L'intégrale I :

$$I = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi d\eta}{\{(\xi^2 + \eta^2 + H^2)\}^{1/2} \{(\xi-r)^2 + \eta^2 + h^2\}^{3/2}} \quad (1)$$

peut s'écrire sous la forme :

$$I = \int_{\xi_1}^{\xi_2} S(\xi) d\xi \quad (2)$$

avec :

$$S(\xi) = 2 \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{(\eta^2 + \alpha^2)^{1/2} (\eta^2 + \beta^2)^{3/2}} \quad (3)$$

$$\alpha^2 = \xi^2 + H^2 \quad (4)$$

$$\beta^2 = (\xi-r)^2 + h^2 \quad (5)$$

A) cas où  $\alpha^2 < \beta^2$

Prenons comme nouvelle variable,  $\phi$ :

$$\phi = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\beta^2}{\beta^2 + \eta^2}} \quad (6)$$

L'intégrale (3) devient :

$$S(\xi) = \frac{2}{\beta^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \phi d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \quad (7)$$

avec :

$$k^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2} \quad (8)$$

Développons  $(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2}$  par la formule du binôme. La série obtenue sera convergente, puisque :

$$k^2 < 1 \quad (9)$$

on aura :

$$\begin{aligned} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} &= 1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \phi + \frac{1.3.k^4}{2^2.1.2.} \sin^4 \phi \\ &+ \frac{1.3.5.k^6}{2^3.1.2.3} \sin^6 \phi + \dots \\ &+ \frac{1.3. \dots (2n-1)k^{2n}}{2^n.1.2.3. \dots n} \sin^{2n} \phi + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Intégrons et posons :

$$I_{2n} = \int_0^\phi \sin^{2n} \phi d\phi \quad (11)$$

L'intégrale  $\int_0^\phi \frac{\sin^2 d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_0^\phi \frac{\sin^2 \phi d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} &= I_2 + \frac{1}{2} k^2 I_4 + \frac{1.3}{2.4} k^4 I_6 + \frac{1.3.5}{2.4.6} k^6 I_8 + \dots \\ &\dots + \frac{1.3.5. \dots (2n-1)}{2.4.6. \dots 2n} k^{2n} I_{2n+2} + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Les intégrales  $I_{2n}$  se calculent par récurrence. On vérifie en effet par dérivation que :

$$I_{2n} = - \frac{\sin^{2n-1} \phi \cos \phi}{2n} + \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} \quad (13)$$

Si  $\phi = \pi/2$ , cette dernière relation devient :

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} \quad (14)$$

d'où :

$$I_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} \dots \quad (15)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\phi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

$$I_{2n} = \frac{1.3.5. \dots (2n-1)}{2.4.6. \dots 2n} \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

et nous obtenons :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \phi d\phi}{(1-k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{4} k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{5}{6} k^4 + \dots \right. \\ \left. \dots + \left(\frac{1.3. \dots (2n-1)}{2.4. \dots 2n}\right)^2 \frac{2n+1}{2n+2} k^{2n} + \dots \right\} \quad (18)$$

L'intégrale (7) s'écrit alors :

$$S(\xi) = \frac{\pi}{\beta^3} \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \cdot F(n+1) k^{2n} \quad (19)$$

avec :

$$F(n) = \frac{2n!}{2^{2n} (n!)^2} \quad (20)$$

ou encore, en remplaçant  $k^2$  par sa valeur (8) :

$$S(\xi) = \frac{\pi}{\beta^3} \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \cdot F(n+1) \sum_{m=0}^n G(n,m) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m \quad (21)$$

$G(n,m)$  étant défini par :

$$G(n,m) = (-1)^m \frac{n!}{m!n-m!} \quad (22)$$

et l'intégrale de départ  $I$  s'écrit donc :

$$I = \pi \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \cdot F(n+1) \sum_{m=0}^n G(n,m) I_m \quad (23)$$

avec :

$$I_m = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\{\xi^2 + (h-z)\}^{2m}}{\{(\xi-r)^2 + h\}^{m+3/2}} d\xi \quad (24)$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$x = \xi - r \quad (23)$$

L'intégrale  $I_m$  vient :

$$I_m = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\{(x-r)^2 + (h-z)^2\}^m}{(x^2 + h^2)^{m+3/2}} dx \quad (26)$$

Le développement du numérateur par la formule du binôme donne une série des

intégrales du type  $\int \frac{x^m dx}{(x^2 + a^2)^{k+1/2}}$ . C'est une intégrale connue dont la

solution s'écrit (59)

$$\int \frac{x^{2m} dx}{(x^2 + a^2)^{k+1/2}} = \frac{1}{a^{2(k-m)}} \sum_{v=0}^{k-m-1} \frac{(-1)^v}{2m+2v+1} C(k-m-1, v) \left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)^{m+v+1/2} + Ct \quad (27)$$

( $k \geq m+1$ )

$$\int \frac{x^{2m+1} dx}{(x^2 + a^2)^{k+1/2}} = \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m+v+1}}{2k-2v-1} C(m, v) \frac{a^{2(m-v)}}{(x^2 + a^2)^{k-v-1/2}} + Ct \quad (28)$$

( $m \geq 0$ )

avec :

$$C(m, v) = \frac{m!}{v!m-v!} \quad (29)$$

B) Cas où  $\alpha^2 > \beta^2$

Dans ce cas la nouvelle variable  $\phi$  sera définie par :

$$\phi = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \eta^2}} \quad (30)$$

cela nous donne :

$$S(\xi) = \frac{2}{\alpha^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \phi d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \quad (31)$$

avec cette fois :

$$k^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} \quad (32)$$

Un calcul similaire à celui du § précédent nous donne :

$$S(\xi) = \frac{\pi}{\alpha^3} \sum_{n=0}^{\infty} F^2(n+1) \cdot 2(n+1)k^{2n} \quad (33)$$

d'où :

$$I = \pi \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) F^2(n+1) \sum_{m=0}^n G(n,m) I_m \quad (34)$$

d'où :

$$I = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\{(\xi-r)^2 + h^2\}^m}{\{\xi^2 + (h-z)^2\}^{m+3/2}} \quad (35)$$

$I_m$  peut être développé en somme d'intégrales du type  $\int \frac{\xi^m d\xi}{(\xi^2 + a^2)^{k+1/2}}$

dont la solution est toujours donnée par la formule (27) ou (28).

A N N E X E . 8 .THEORIE GENERALE DE LA SIMULATION

Supposons un point  $P(x,y,z)$  dans le milieu réel, et son homologue  $P'(x',y',z')$  dans le milieu réduit. Ces deux système sont reliés par la transformation :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (1)$$

K étant le facteur de réduction.

Les équations de Maxwell s'énoncent dans le milieu réel de la façon suivante :

$$\vec{\text{rot}} E(x,y,z,t) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H(x,y,z,t) \quad (2)$$

$$\vec{\text{rot}} H(x,y,z,t) = (\sigma + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}) E(x,y,z,t) \quad (3)$$

Pour que ces deux dernières équations restent vérifiées dans la transformation (1) il faut que :

$$E(x,y,z;t) = aE'(x',y',z',t') \quad (4)$$

$$H(x,y,z,t) = bH'(x',y',z',t') \quad (5)$$

$$t = ct' \quad (6)$$

a, b et c sont respectivement les facteurs de réduction de l'intensité du champ électrique E, du champ magnétique H et du temps t.

En général, nous utilisons dans le système réduit un milieu différent du milieu réel et les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}} E'(x', y', z', t') = - \mu'(x', y', z') \frac{\partial}{\partial t'} H'(x', y', z', t') \quad (7)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} H'(x', y', z', t') = \{ \sigma'(x', y', z') + \epsilon'(x', y', z') \frac{\partial}{\partial t'} \} E'(x', y', z', t') \quad (8)$$

Les transformations (1), (4), (5) et (6) permettent de vérifier que :

$$\overrightarrow{\text{rot}} E' = \frac{K}{a} \overrightarrow{\text{rot}} E \quad (9)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} H' = \frac{K}{b} \overrightarrow{\text{rot}} H \quad (10)$$

$$\frac{\partial E'}{\partial t'} = \frac{c}{a} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (11)$$

et

$$\frac{\partial H'}{\partial t'} = \frac{c}{b} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (12)$$

Nous obtenons, en portant ces quatre dernières équations dans (7) et (8) :

$$\overrightarrow{\text{rot}} E(x, y, z, t) = - \frac{ac}{Kb} \mu'(x', y', z') \frac{\partial}{\partial t} H(x, y, z, t) \quad (13)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} H(x, y, z, t) = \left\{ \frac{b}{Ka} \sigma'(x', y', z') + \frac{bc}{Ka} \epsilon'(x', y', z') \frac{\partial}{\partial t} \right\} E(x, y, z, t) \quad (14)$$

Pour une simulation parfaite, il faut que les formules (13) et (14) soient équivalentes aux formules (2) et (3). Ceci implique que :

$$\sigma' = \frac{Ka}{b} \sigma \quad (15)$$

$$\epsilon' = \frac{Ka}{bc} \epsilon \quad (16)$$

$$\mu' = \frac{Kb}{ac} \mu \quad (17)$$

Nous obtenons ainsi les propriétés électriques que doit avoir le milieu réduit en fonction des propriétés électriques du milieu réel et des facteurs de

réduction  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $K$ . Théoriquement, nous pouvons construire un modèle réduit qui représente un certain milieu réel en choisissant arbitrairement ces facteurs de réduction. En pratique, il est très difficile de trouver des matériaux possédant les propriétés électriques voulues pour construire le modèle. Le choix des facteurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $K$  doit alors obéir à certaines restrictions.

Dans notre cas, les différents milieux qui nous intéressent possèdent une perméabilité magnétique  $\mu$  peu différente de celle du vide ( $\mu_0$ ) et nous pouvons donc utiliser l'approximation suivante :

$$\mu' = \mu = \mu_0 \quad (18)$$

d'où :

$$\frac{Kb}{ac} = 1 \quad (19)$$

Dans les milieux conducteurs, nous pouvons négliger le courant de déplacement et comme nous avons un intérêt pratique à simuler l'air par l'air, il en résulte que nous pouvons choisir  $\epsilon' = \epsilon$ . D'où :

$$\frac{Ka'}{bc} = 1 \quad (20)$$

Les formules (19) et (20) sont satisfaites si :

$$a = b \quad (21)$$

et

$$K = c \quad (22)$$

(15) devient :

$$\sigma' = K\sigma \quad (23)$$

et (6) s'écrit en régime harmonique :

$$\omega' = K\omega \quad (24)$$

*Il existe donc une similitude entre le milieu réel et le milieu réduit quand le système d'équations simultanées suivant est vérifié :*

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{l}{l'} = K \quad (25)$$

$l$  et  $l'$  représentent respectivement l'unité de longueur du milieu réel et du modèle.