UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le Grade de Docteur de 3ème Cycle

par

Jean-Claude THOMAS

"LES MORPHISMES D'ELIE CARTAN"

Membres du Jury : MM. M. PARREAU, Président
D. LEHMANN, Rapporteur
Mle P. LIBERMANN, Examinateur
Mle Y. KOSMANN, Examinateur

Soutenue le 11 Décembre 1972

Je remercie Monsieur PARREAU qui a bien voulu présider le jury, Monsieur LEHMANN qui m'a fait découvrir les G-structures et les pseudo-groupes et m'a constamment aidé, Mademoiselle LIBERMANN qui s'est intéressée à mon travail et a accepté de faire partie du jury, et Mademoiselle KOSMANN qui m'a beaucoup aidé lors de la rédaction.

Je remercie tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail, particulièrement Madame BÉRAT qui en a assuré la présentation dactylographiée.

INTRODUCTION

Elie Cartan a défini ([1]) les "isomorphismes mériédriques" et les "isomorphismes" entre deux pseudo-groupes. Mais Cartan n'avait pas défini des morphismes de pseudo-groupes au sens des catégories. En reprenant les travaux de Cartan nous avons étudié les notions de prolongement d'un pseudo-groupe, de prolongement surjectif, injectif, bijectif et construit le produit fibré de deux prolongements (les prolongements surjectifs coïncidant avec les "prolongements mériédriques", les prolongements bijectifs étant des "prolongements holoèdriques"). Puis nous considérons, sur les triplets (Q, P_1, P_2) où Q est un prolongement bijectif de P_1 et un prolongement de P_2, une relation d'équivalence dont les classes appelées "morphismes de Cartan" définissent la catégorie $\underline{C}$, les objets de $\underline{C}$ étant les pseudo-groupes (dans le cas où Q est un prolongement surjectif de P_2, un triplet (Q, P_1, P_2) est ce que Cartan a appelé un isomorphisme mériédrique).

Nous retrouvons en particulier les résultats de Kuranishi [3] et Matsushima [5-a] i.e. La relation "il existe un isomorphisme mériédrique entre deux pseudo-groupes" est réflexive et transitive. La relation "il existe un isomorphisme entre deux pseudo-groupes" est une relation d'équivalence.

Nous montrons d'autre part qu'une condition nécessaire pour que deux G-structures soient localement équivalentes est qu'il existe un isomorphisme de Cartan entre les pseudo-groupes des automorphismes de ces G-structures.

Dans une deuxième partie, nous construisons une catégorie $\underline{P}$ dont les objets sont des pseudo-groupes (on considère alors un pseudo-groupe sur M comme un faisceau de groupoïdes sur un ouvert M' de M) et les flèches, appelées "morphismes naïfs", des transformations naturelles particulières.

.../...

On associe à chaque morphisme naïf un et un seul morphisme de Cartan, définissant ainsi un isomorphisme de la catégorie $\underline{C}$ sur la catégorie $\underline{P}$, reliant de cette manière la notion de morphisme de faisceaux à celle de prolongement.

Toutes ces constructions faites sur les pseudo-groupes de difféomorphismes locaux sur une variété de classe C^k $(1 \leq k \leq +\infty)$ se généralisent au cas des pseudo-groupes d'homéomorphismes locaux sur un espace topologique.

Nous obtenons une théorie analogue dans le cas des pseudo-groupes infinitésimaux sur une variété de classe C^∞.

- PLAN -

I - DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Les variétés considérées seront supposées, de classe C^k, $0 \leq k \leq +\infty$ k suffisamment grand pour que les notations suivantes aient un sens, séparées et de dimension finie.

Soit M une variété, $Top(M)$ désignera la topologie sous-jacente à la structure de variété considérée sur M.

Nous noterons :

$J^\lambda(M,M)$ = l'ensemble des germes d'applications (locales) différentiables de M dans M.

$J^q(M,M)$ = l'ensemble des q-jets d'applications (locales) différentiables de M dans M $(0 \leq q \leq +\infty)$.

$\Pi^\lambda(M,M)$ = l'ensemble des germes de difféomorphismes (locaux) de M dans M.

$\Pi^q(M,M)$ = l'ensemble des q-jets de difféomorphismes (locaux) de M dans M $(0 \leq q \leq +\infty)$.

$J^\lambda(T(M))$ = l'ensemble des germes de sections locales du fibré vectoriel $T(M)$.

$J^q(T(M))$ = l'ensemble des q-jets de sections locales du fibré vectoriel $T(M)$ $(0 \leq q \leq +\infty)$.

$\alpha : J^q(M,M) \to M$: l'application source.

$\beta : J^q(M,M) \to M$: l'application but.

$J^\lambda(M,M)$ est un faisceau.

$J^\lambda(T(M))$ est un faisceau d'algèbres de Lie.

$J^q(M,M)$ est une variété différentiable, $\Pi^q(M,M)$ une sous-variété ouverte de $J^q(M(M))$.

$J^q(T(M))$ est un fibré vectoriel vectoriel de base M pour la projection source qui sera notée α.

Les projections naturelles,

$$p > q \qquad \alpha_q^p : J^p(M,M) \to J^q(M,M)$$

$$\alpha_q^p : J^p(T(M)) \to J^q(T(M))$$

sont des submersions

En particulier, $(\alpha_0^1 = (\alpha,\beta))$.

a) Groupoïdes - Groupoïdes de Lie.

Définition 1.-

Etant donné un ensemble M, nous appellerons groupoïde sur M la donnée :

1) d'un ensemble Π.

2) de deux applications surjectives α et β de Π dans M.

3) d'une loi de composition notée $\circ$, tels que

G.1.- $\forall X \in \Pi, \forall Y \in \Pi, \ \alpha(Y) = \beta(X) \iff Y \circ X \in \Pi$ et
$\alpha(Y \circ X) = \alpha(X), \beta(Y \circ X) = \beta(Y)$.

G.2.- $\forall x \in M, \ \exists 1_x \in \Pi, \ \alpha(1_x) = \beta(1_x) = x$ et $\forall X \in \Pi$,
$\alpha(X) = x \implies 1_x \circ X = X \circ 1_x = X$.

G.3.- $\forall X \in \Pi \ , \ \exists X^{-1} \in \Pi \ , \ X \circ X^{-1} = 1_{\beta(X)}$ et $X^{-1} \circ X = 1_{\alpha(X)}$.

Définition 2.-

Soit Π un groupoïde sur M, le groupe $\Pi_{x,x} = \{X | X \in \Pi, \alpha(X) = \beta(X) = x\}$ est appelé groupe d'isotropie de Π en x.

Définition 3.-

Nous dirons que le groupoïde Π est transitif si l'application

$$(\alpha,\beta) : \Pi \to M \times M$$

est surjective.

Il est clair que si Π est transitif, alors tous les groupes d'isotropie sont isomorphes.

Définition 4.-

Un groupoïde Π sur une variété M de classe C^k sera dit différentiable s'il existe sur Π une structure de variété telle que :

GD_1 - α et β soient deux submersions.

GD_2 - Les applications

$$\Pi \underset{(\alpha,\beta)}{\times} \Pi \to \Pi$$

$$(X\ ,\ Y) \rightsquigarrow Y \circ X$$

et

$$\Pi \to \Pi$$

$$X \rightsquigarrow X^{-1}$$

soient différentiables.

Définition 5.-

Nous appellerons groupoïde de Lie sur M, un groupoïde Π différentiable tel que :

GL - $(\alpha,\beta) : \Pi \to M \times M$ est une surmersion.

Remarque :

Un groupoïde de Lie est transitif.

Proposition 1.-

Si Π est un groupoïde de Lie alors, pour tout x de M, $\Pi_{x,x}$ est un groupe de Lie.

En effet, $\Pi_{x,x}$ (resp. $\Pi_{x,x} \times \Pi_{x,x}$) est une sous-variété fermée de Π (resp. de $\Pi \underset{(\alpha,\beta)}{\times} \Pi$), ceci d'après GD_1 (resp. GL). De GD_2, il en résulte que $\Pi_{x,x}$ est un groupe de Lie.

A un groupoīde de Lie Π, nous associons donc un groupe de Lie G, isomorphe à chacun des groupes d'isotropie $\Pi_{x,x}$.

Nous appellerons G, le groupe d'isotropie de Π. Notons :

$$\Pi_{x,*} = \alpha^{-1}(x) .$$

Proposition 2.- (Y. Matsushima [6-b]).

Si Π est un groupoīde de Lie, de groupe d'isotropie G, $\Pi_{x,*}$ possède une structure d'espace fibré principal, de groupe structural G et de base M.

En effet, $\Pi_{x,*} = \alpha^{-1}(x)$ est une sous-variété fermée de Π telle que :

$$\beta : \Pi_{x,*} \to M$$

soit une submersion.

D'autre part, $\Pi_{x,x}$ opère à gauche différentiablement et de manière simplement transitive sur chaque fibre $\Pi_{x,y}$.

Il en résulte une propriété analogue pour le groupe G isomorphe à $\Pi_{x,x}$, d'où la proposition 2.

Définition 6.-

Soient Π un groupoīde sur M, Π' un groupoīde sur M'.
Nous appellerons morphisme de groupoīde de Π dans Π' tout couple d'applications (ϕ,ψ) telles que :

1) Les diagrammes suivants soient commutatifs

$$
\begin{tikzcd}
\Pi \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha"'] & \Pi' \arrow[d, "\alpha'"] \\
M \arrow[r, "\psi"] & M'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\Pi \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\beta"'] & \Pi' \arrow[d, "\beta'"] \\
M \arrow[r, "\psi"] & M'
\end{tikzcd}
$$

2) $\forall\, X \in \Pi,\ \forall\, Y \in \Pi,\quad X \circ Y \in \Pi \implies \phi(X \circ Y) = \phi(X) \circ \phi(Y)$

$\forall\, X \in \Pi \quad \phi(X^{-1}) = (\phi(X))^{-1}$.

Proposition 3.-

Si M est une variété de classe C^∞, pour tout q, $0 \leqslant q \leqslant +\infty$, l'ensemble $\Pi^q(M,M)$ est un groupoïde de Lie dont le groupe d'isotropie est isomorphe au groupe de Lie L_n^q $(n = \dim M)$ où $L_n^q = \Pi^q_{0,0}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$.

b) Pseudo-groupes de transformations.

Soient M une variété de classe C^k, $0 \leqslant k \leqslant +\infty$, $Top(M)$ la topologie sous-jacente, nous désignerons par $\mathcal{O}(M)$ (ou plus simplement $\mathcal{O}$ lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible) une famille d'ouverts de M qui soit héréditaire et stable pour la réunion, i.e. :

a) $\forall\, U \in \mathcal{O}(M),\ \forall\, V \in Top(M)\ ,\quad V \subset U \implies V \in \mathcal{O}(M)$

b) $\forall\, \lambda \in \Lambda,\quad U_\lambda \in \mathcal{O}(M) \implies \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}(M)$.

Définition 7.-

Nous appellerons pseudo-groupe de transformations sur M la donnée :

1) d'une famille non vide $\mathcal{O}(M)$,

2) pour tout élément U de $\mathcal{O}(M)$, d'une famille non vide de difféomorphismes (1) de source U, à valeurs dans M, notée $P(U)$,

telle que :

PG_1 - $\forall\, U \in \mathcal{O}(M), \forall\, f \in P(U), \forall\, U' \in Top(M),\ U' \subset U \Longrightarrow f|_{U'} \in P(U')$.

PG_2 - $f = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ et $\forall\, \lambda \in \Lambda, f_\lambda \in P(U_\lambda) \Longrightarrow f \in P(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda)$.

PG_3 - $\forall\, U \in \mathcal{O}(M), \forall\, f \in P(U),\ f(U) \in \mathcal{O}(M)$ et $f^{-1} \in P(f(U))$.

PG_4 - $\forall\, U \in \mathcal{O}(M), \forall\, f \in P(U), \forall\, g \in P(f(U)),\ g \circ f \in P(U)$.

Remarque.-

Les axiomes PG_3 et PG_4 entraînent :

$$\forall\, U \in \mathcal{O}(M) \quad , \quad 1_U \in P(U) .$$

Nous noterons P, le pseudo-groupe de la définition précédente.

Exemple 1.-

Considérerons sur $M = \mathbb{R}^n$ le système d'équations différentielles

$$D = \begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = 0 & 1 \leq i < n \\ \\ \dfrac{dx^n}{dt} = 1 & \end{cases}$$

D définit un feuilletage de M par les droites

---

(1) Dans le cas topologique $(k=0)$ il s'agit d'homéomorphismes.

$$x^i = c^{te} \qquad 1 \leq i < n$$
$$x^n = t + c^{te}.$$

L'ensemble P des difféomorphismes locaux de classe C^1 qui laissent invariant ce feuilletage

(i.e. $\forall f \in P(U)$, $\forall D_1$, $\exists D_2$, $f(D_1 \cap U) \subset D_2$)

est un pseudo-groupe de transformations.

Tout élément de P est solution du système d'équations aux dérivées partielles,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^i}{\partial x^n} = 0 & 1 \leq i < n \\ \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^n} = 1 . \end{cases}$$

Exemple 2.-

Soit Ω un domaine du plan complexe. L'ensemble des transformations conformes de Ω et de leurs restrictions aux ouverts de Ω est un pseudo-groupe. Les éléments de ce pseudo-groupe sont solutions du système de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = - \dfrac{\partial u}{\partial y} . \end{cases}$$

Exemple 3.-

Un champ local sur une variété M définit un pseudo-groupe de transformations à un paramètre appelé habituellement "groupe" local à un paramètre.

Exemple 4.-

L'ensemble de tous les difféomorphismes locaux d'une variété M est un pseudo-groupe de transformations.

Remarques.-

a) D'après notre définition $\mathcal{O}(M)$ ne constitue pas nécessairement un recouvrement de M.

b) Un pseudo-groupe de transformations est en particulier un faisceau de groupoïdes lorsque $\mathcal{O}(M) = \mathrm{Top}(M)$.

Définition 8.-

Un sous pseudo-groupe est une partie P' de P qui est un pseudo-groupe.

Exemple 5.-

L'ensemble des difféomorphismes locaux de classe C^∞ d'une variété M est un sous-pseudo-groupe du pseudo-groupe des difféomorphismes locaux de classe C^k.

Proposition 4.-

Soit $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de pseudo-groupes sur une variété M, alors si $\Lambda \neq \phi$, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ est un pseudo-groupe sur M.

Remarque.-

Cette proposition permet de définir la notion de pseudo-groupe engendré par une famille de difféomorphismes locaux.

Exemple 6.-

Soit G un groupe de Lie qui opère à gauche sur une variété M.

L'ensemble des restrictions des translations à gauche sur M engendre un pseudo-groupe sur M, appelé pseudo-groupe déduit du groupe de Lie G.

Définition 9.-

Un pseudo-groupe P sur M est dit transitif si : $\forall (x,y) \varepsilon M^2$, $\exists$ $f \varepsilon P$ tel que $f(x) = y$.

Un pseudo-groupe P sur M est dit localement transitif si $\forall$ $x \varepsilon M$, $\exists$ $V_x \varepsilon \mathrm{Top}(M)$, $x \varepsilon V_x$, $\forall$ $y \varepsilon V_x$, $\exists$ $f \varepsilon P$, $f(x) = y$.

Remarque.-

Si P est localement transitif alors $\mathcal{O}(M)$ est un recouvrement de M.

Proposition 5.-

Soit P un pseudo-groupe sur M et N une sous-variété (pour la topologie induite) de M.

Supposons que :

$$\forall\ U \varepsilon \mathcal{O}(M)\ ,\ \forall\ f \varepsilon P(U)\ ,\ f(N \cap U) \subset N.$$

Alors, l'ensemble P' des restrictions des éléments de P à N est un pseudo-groupe sur N.

Remarque.-

Si N est un ouvert de M, alors P' est un sous pseudo-groupe de P.

c) Pseudo-groupes de Lie (M est de classe C^∞).

Soit P un pseudo-groupe de transformations de M, supposée de classe C^∞, posons

$$\Pi^q_{x,*}(P) = \{J^q_x f \mid f \varepsilon P,\ f \text{ défini en } x\},\quad 0 \leq q \leq +\infty$$

$$\Pi^{q}(P) = \bigcup_{x\varepsilon M'} \Pi^{q}_{x,*}(P)$$

où $M' = \bigcup_{U\varepsilon \mathcal{O}(M)} U.$

M' est une sous-variété ouverte de M et $\Pi^{q}(P)$ un sous-groupoïde de $\Pi^{q}(M',M')$.

Définition 10.-

$\Pi^{q}(P)$ est appelé le groupoïde d'ordre q associé ou pseudo-groupe P, $(0 \leqslant q \leqslant +\infty)$.

Posons

$$\Pi^{\lambda}_{x,*}(P) = \{J_x f \mid f \; \varepsilon \; P, \quad f \text{ défini en } x\}$$

$\Pi^{\lambda}(P) = \bigcup_{x\varepsilon M'} \Pi^{\lambda}_{x,*}(P)$ est un sous-faisceau de $\Pi^{\lambda}(M',M')$.

Définition 11.-

$\Pi^{\lambda}(P)$ est appelé le faisceau associé au pseudo-groupe P.

Nous avons alors les projections canoniques

$$\Pi^{\lambda}P \to \Pi^{\infty}P \to \ldots \to \Pi^{q}P \to \ldots \to \Pi^{o}P \to M' ;$$

Remarque.-

Si P est transitif, alors $M' = M$ et $\Pi^{o}P = M\times M$.

Définition 12.-

Un pseudo-groupe P est dit complet s'il existe un entier r tel que l'ensemble des difféomorphismes locaux de M' dont le jet d'ordre r est dans

$\Pi^r(P)$ soit égal à P.

Alors il est aisé de vérifier que si $s \geq r$, l'ensemble des difféomorphismes locaux de M' dont le jet d'ordre s est dans $\Pi^s(P)$ est aussi égal à P.

Nous appellerons, ordre de P, le plus petit entier r vérifiant la propriété précédente.

Définition 13.-

Nous appellerons pseudo-groupe de Lie sur M, un pseudo-groupe de transformations sur M tel que :

PGL_1 - P soit complet d'ordre q.

PGL_2 - $\forall\, r \leq q$, $\Pi^r P$ soit un sous-groupoïde de Lie de $\Pi^r(M',M')$.

Le pseudo-groupe défini dans l'exemple 1 est un pseudo-groupe de Lie d'ordre 1.

Définition 14.-

Un pseudo-groupe de Lie est dit de type fini s'il existe un entier r, tel que :

$$\forall\, s \geq r \quad , \quad \Pi^s P \text{ soit isomorphe à } \Pi^{r-1} P.$$

Le plus petit entier r, vérifiant cette propriété est appelé le degré de P.

Remarque.-

Le degré d'un pseudo-groupe de Lie est supérieur ou égal à son ordre.

d) Pseudo-groupes infinitésimaux.

Définition 15.-

Nous appellerons pseudo-groupe infinitésimal sur la variété M de classe C^∞, la donnée

1) d'une famille non vide $\mathcal{O}(M)$

2) Pour tout élément U de $\mathcal{O}(M)$, d'une famille non vide de champs de vecteurs tangents à M de source U, notée $\mathcal{P}(U)$

telle que :

PGI_1 - $\forall X \in \mathcal{P}(U)$, $\forall Y \in \mathcal{P}(U)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda X + \mu Y \in \mathcal{P}(U)$.

PGI_2 - $\forall X \in \mathcal{P}(U)$, $\forall Y \in \mathcal{P}(U)$, $[X,Y] \in \mathcal{P}(U)$.

PGI_3 - $\forall X \in \mathcal{P}(U)$, $\forall U' \in \mathrm{Top}(M)$, $U' \subset U \Longrightarrow X_{|U'} \in \mathcal{P}(U')$.

PGI_4 - $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ et $\forall \lambda \in \Lambda$, $X_\lambda \in \mathcal{P} \Longrightarrow X \in \mathcal{P}$.

Nous noterons $\mathcal{P}$ ce pseudo-groupe infinitésimal.

Définition 17.-

Un pseudo-groupe infinitésimal est dit transitif si

$$\forall x \in M' = \bigcup_{U \in \mathcal{O}(M)} U \quad , \quad \{X_x | X \in \mathcal{P}\} \text{ engendre } T_x(M).$$

Exemple 1.-

L'ensemble des champs locaux sur une variété M est un pseudo-groupe infinitésimal transitif.

Exemple 2.-

Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

L'ensemble des champs locaux sur G invariants à gauche est un pseudo-groupe infinitésimal sur G appelé pseudo-groupe déduit de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ par localisation.

Proposition 6.-

Soit $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de pseudo-groupes infinitésimaux sur M, alors si $\Lambda \neq \emptyset$, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ est un pseudo-groupe infinitésimal sur M.

Cette proposition nous permet de définir la notion de pseudo-groupe infinitésimal engendré par une famille de champs locaux sur une variété M.

Comme dans le cas des pseudo-groupes, à P, nous associons le faisceau $J^\lambda P$ des germes des éléments de P ($J^\lambda P$ est un sous-faisceau d'algèbre de Lie de $J^\lambda(T(M')))$ et les ensembles $J^q P$.

Nous remarquons que si P est transitif, alors $J^o(P) \simeq T(M')$.

Définition 18.-

Le pseudo-groupe infinitésimal P est dit complet s'il existe un entier q, tel que l'ensemble des champs locaux, dont le jet d'ordre q appartient à $J^q P$, soit égal à P.

L'ordre d'un pseudo-groupe infinitésimal P est le plus petit entier q qui réalise la propriété précédente.

Définition 19.-

Nous appellerons pseudo-groupe infinitésimal de Lie un pseudo-groupe infinitésimal P tel que

1) P soit complet d'ordre q.

2) $\forall\, r \leq q$, $J^r P$ soit un sous-fibré vectoriel de $J^r(T(M))$.

A l'aide de 7, on montre que : tout pseudo-groupe infinitésimal transitif complet d'ordre q est un pseudo-groupe infinitésimal de Lie (P. Libermann [5-c]).

Définition 20.-

Un pseudo-groupe infinitésimal $\mathcal{P}$ est dit de type fini s'il existe un entier r tel que $\forall x \geqslant r$, $J^s\mathcal{P}$ soit isomorphe à $J^{r-1}\mathcal{P}$.

Le plus petit entier r, vérifiant cette propriété, est appelé le degré de $\mathcal{P}$.

Soit $\mathcal{P}$ un pseudo-groupe infinitésimal sur M, chaque élément de $\mathcal{P}$ définit un pseudo-groupe à un paramètre de transformations sur M.

Le pseudo-groupe $a(\mathcal{P})$ engendré par la réunion de ces pseudo-groupes à 1 paramètre est appelé <u>pseudo-groupe engendré par</u> $\mathcal{P}$. ($a(\mathcal{P})$ est un pseudo-groupe sur $M' = \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$, où $\mathcal{O}$ est la famille d'ouverts de $\mathcal{P}$).

Soit maintenant un pseudo-groupe P de transformations sur M, alors l'ensemble des pseudo-groupes infinitésimaux $\mathcal{Q}$ sur M, tels que

$$a(\mathcal{Q}) \subset P$$

possède un élément maximum $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$ est appelé le <u>pseudo-groupe infinitésimal associé à</u> P.

Remarque.-

$\mathcal{P}$ peut être le pseudo-groupe infinitésimal nul, il suffit de prendre pour P le pseudo-groupe des unités sur M.

Proposition 7.-

Si le pseudo-groupe infinitésimal $\mathcal{P}$ est transitif le pseudo-groupe $a(\mathcal{P})$ est localement transitif (transitif si M' est connexe).

En effet, soient $(X^1,\ldots,X^n)$ n champs définis sur un voisinage d'un point x_o de M' tels que :

$$(X^1_{x_o},\ldots,X^n_{x_o}) \text{ engendre } T_{x_o}(M) .$$

Pour tout $i = 1,\ldots,n$, X^i définit un "groupe local" à un paramètre

$$\varphi_i :]-\varepsilon_i,\varepsilon_i[\times U_i \longrightarrow M'.$$

Posons :

$$\varepsilon = \inf(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$$

alors, il existe $U \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ tel que :

$$\begin{aligned} \Psi : (]-\varepsilon,\varepsilon[)^n \times U &\to M'. \\ (t_1,\ldots,t_n,x) &\rightsquigarrow \varphi_1(t_1,\varphi_2(t_2,\varphi_3(t_3,\ldots,\varphi_n(t_n,x)))). \end{aligned}$$

soit définie.

Le jacobien

$$\frac{D(\Psi^1,\ldots,\Psi^n)}{D(t^1,\ldots,t^n)} \text{ est différent de } 0 \text{ en } x_0 ;$$

donc Ψ définit un difféomorphisme d'un voisinage de x_0 dans M'.

D'où le résultat, car $\Psi \in a(\mathcal{P})$.

Remarque.-

La réciproque de la proposition précédente est fausse.

En effet, considérons sur R^3 les champs de composantes (X,Y,Z) vérifiant la relation

$$Z(x,y,z) = X(x,y,z) + z\, Y(x,y,z).$$

Le pseudo-groupe infinitésimal $\mathcal{P}$ engendré par ces champs n'est pas transitif sur R^3 alors que le pseudo-groupe $a(\mathcal{P})$ est transitif.

Nous avons en fait :

Proposition 8.-

Soit $\mathcal{P}$ un pseudo-groupe infinitésimal sur M, une condition nécessaire et suffisante pour que $a(\mathcal{P})$ soit un pseudo-groupe localement transitif est que pour tout $x \in M'$, il existe un voisinage U de x tel que l'algèbre de Lie engendrée par $\mathcal{P}(U)$ engendre $T_x(M)$.

e) G-structures et pseudo-groupes.

Soit H une G-structure d'ordre k sur M, c'est-à-dire un sous-fibré principal du fibré des k-repères de M, noté $\mathcal{R}^k(M)$.

$$z \in \mathcal{R}^k_x(M) \implies z = j^k_{0,x}\varphi \quad \text{où} \quad \varphi : (R^n,0) \xrightarrow{\simeq} (M,x).$$

Soit Ψ un difféomorphisme local de M dans M tel que : $\Psi(x) = y$.

Ψ se relève en un difféomorphisme local de $\mathcal{R}^k(M)$, noté Ψ^k, défini par :

$$\Psi^k(z) = j^k_{0,\Psi(x)}(\Psi \circ \varphi) \quad \text{où} \quad z = j^k_{0,x}(\varphi).$$

Si $\forall z \in H$, $\Psi^k(z) \in H$ nous dirons que Ψ est un automorphisme de H.

L'ensemble des automorphismes de la G-structure H est un pseudo-groupe sur M que l'on appelle le pseudo-groupe des automorphismes de H.

Soit P ce pseudo-groupe, le pseudo-groupe infinitésimal $\mathcal{P}$ associé à P est appelé le pseudo-groupe des automorphismes infinitésimaux de H.

Une G-structure H est dite transitive (isotrope) si

$$\forall (z_1, z_2) \in H^2 \quad , \exists\ \varphi \in P \quad , \quad \varphi^k(z_1) = z_2 .$$

Donc si H est transitive, alors P est un pseudo-groupe transitif, la réciproque étant évidemment fausse.

Si nous considérons l'ensemble

$$P^k = \{\varphi^k | \varphi \in P\}.$$

P^k est un pseudo-groupe sur H. P^k est appelé le <u>relèvement de P</u> dans H.

P^k sera d'après ce qui suit, un prolongement de P.

II - PROLONGEMENTS

Dans ce chapitre, nous désignerons, par fibré un triplet (E,π,M) où

. E est une variété de classe C^k, $0 \leq k \leq +\infty$.

. M est une variété de même classe que E.

. π une submersion de E sur M si $k \geq 1$, ou une application surjective ouverte si $k = 0$.

a) Prolongements d'un pseudo-groupe de transformations.

Définition 1.-

Soient (E,π,M) un fibré, g un difféomorphisme [(1)] local de E, f un difféomorphisme [(1)] local de M

$$g : \tilde{U} \xrightarrow{\simeq} \tilde{U}'$$

$$f : U \xrightarrow{\simeq} U'$$

Nous dirons que g est un prolongement de f si :

1) $\pi(\tilde{U}) = U$

2) $\forall z \in \tilde{U}, \quad \pi \circ g(z) = f \circ \pi(z).$

Lemme 1.-

Si g est un difféomorphisme [(1)] local de E,

$$g : U \xrightarrow{\simeq} U'$$

---

(1) si $k = 0$ il s'agit d'homéomorphismes.

tel que :

1) $\forall x \in \pi(U)$, $\forall z \in \pi^{-1}(x) \cap U$, $\forall z' \in \pi^{-1}(x) \cap U$, $\pi \circ g(z) = \pi \circ g(z')$

2) $\forall x \in \pi(U')$, $\forall z \in \pi^{-1}(x) \cap U'$, $\forall z' \in \pi^{-1}(x) \cap U'$, $\pi \circ g^{-1}(z) = \pi \circ g^{-1}(z')$

alors,

g est le prolongement d'un difféomorphisme (1) local de M.

Notation.-

Si g prolonge f, nous noterons $f = \pi.g$.

Définition 2.-

Soient (E,π,M) un fibré, Q un pseudo-groupe sur E, P un pseudo-groupe sur M.

Nous dirons que Q est un prolongement de P, si tout élément de Q, ayant une source connexe, prolonge un élément de P.

Notation.-

$$\begin{array}{c} Q \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ P \end{array}$$

Définition 3.-

Avec les notations de la définition 2, nous dirons que Q est un prolongement surjectif de P si :

1) Q prolonge P.

2) Pour tout f de P, ayant une source connexe, il existe un élément g de Q, qui prolonge f.

---

(1) si $k = 0$ il s'agit d'homéomorphismes.

Notation.-

$$\begin{array}{c} Q \\ \Big\downarrow \pi \\ P \end{array}$$

Ces prolongements généralisent les prolongements mérièdriques de E. Cartan [I].

Un pseudo-groupe P est en particulier un ensemble ordonné par la relation "$f < g$ si f est une restriction de g".

Nous appellerons <u>prolongement maximum</u> d'un élément f de P, l'élément $\tilde{f}$ de Q, ayant une source connexe, tel que pour tout élément g de Q, ayant une source connexe, la relation "g prolonge f" entraîne que g est une restriction de $\tilde{f}$.

L'existence d'un prolongement maximum n'est pas assurée, mais s'il existe il est unique.

Définition 4.-

Avec les notations de la définition 2, nous dirons que Q est un <u>prolongement injectif</u> de P si :

1) Q prolonge P.

2) Tout élément f de P, ayant une source connexe, prolongeable dans Q, admet un prolongement maximum dans Q.

3) Si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ désignent les prolongements maxima de f et g et si $g \circ f$ est défini (1) alors $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ est défini (1) et prolonge $g \circ f$.

4) Si U est un ouvert connexe de $\mathcal{O}(M)$, le prolongement maximum de 1_U existe et est l'identité sur un ouvert $\tilde{U}$ de E.

---

(1) $g \circ f$ est défini si la source de g est égale au but de f.

5) Si $\tilde{f}$ (resp. $\tilde{g}$) désigne le prolongement maximum de f (resp. de g) et si g est une restriction de f, alors $\tilde{g}$ est une restriction de $\tilde{f}$.

6) Si f (resp. f_λ, $\lambda \in \Lambda$) est un élément prolongeable, ayant une source connexe, de P, alors le prolongement maximum de $f = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ est $\tilde{f} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \tilde{f}_\lambda$ où pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\tilde{f}_\lambda$ désigne le prolongement maximum de f_λ dans Q.

Notation.-

$$
\begin{array}{c}
Q \\
\pi \big\downarrow \\
P
\end{array}
$$

Définition 5.-

Avec les notations de la définition 2, nous dirons que Q est un <u>prolongement bijectif</u> de P si Q est un prolongement injectif et surjectif de P.

Remarque.-

Les prolongements bijectifs généralisent les prolongements holoèdriques de E. Cartan.

Notation.-

$$
\begin{array}{c}
Q \\
\pi \big\downarrow \wr \\
P
\end{array}
$$

Exemple 1.-

Avec les notations de I - e, P^k est un prolongement bijectif de P.

Exemple 2.-

Prolongements canoniques d'un pseudo-groupe de Lie.

Soit P un pseudo-groupe de Lie d'ordre q sur une variété M de classe C^∞.

A un élément f de P de source U et de but U', on associe son relèvement dans $J^k(M,M)$,

$$\begin{aligned} f^k : \alpha^{-1}(U) &\longrightarrow \alpha^{-1}(U') \\ X^k &\rightsquigarrow X^k \circ J^k f^{-1} . \end{aligned}$$

Notons :

$$\Delta^k(P) = \{f^k | f \in P\}.$$

$\Delta^k(P)$ est un prolongement bijectif de P.

Considérons dans $\Delta^k(P)$, l'ensemble des difféomorphismes qui laissent invariante la sous-variété $\Pi^k(P)$ $(k \leqslant q)$, cet ensemble noté P^k est un pseudo-groupe sur $\Pi^k(P)$, d'après la proposition I - 5. De plus P^k est un prolongement bijectif de P (on considère la fibration principale $(\Pi^k(P),\alpha,M')$, où M' désigne la sous-variété ouverte de M, définie par $M' = \bigcup_{U \in \mathcal{O}(M)} U$).

Pour $k \leqslant q$, P^k est appelé <u>le k-ème prolongement canonique</u> de P.

Remarques.-

1) Dans notre définition du pseudo-groupe P, nous ne supposons pas que $\mathcal{O}(M) = \mathrm{Top}(M)$, ce qui entraîne en particulier que si $\tilde{1}_U = 1_{\tilde{U}}$, $\tilde{U}$ n'est pas forcément un ouvert saturé du fibré (E,π,M').

2) La relation "Q est un prolongement de P", (resp. est un prolongement surjectif, injectif, bijectif) est transitive.

3) L'axiome de recollement nous impose une condition restrictive dans la définition d'un prolongement.

Nous avons choisi la condition de connexité, de la source des applications projetables, pour des raisons de simplicité.

Une condition de "connexité verticale" suffit.

"Nous disons qu'un ouvert U de (E,π,M) est <u>verticalement connexe</u> si pour tout couple de composantes connexes (U_λ, U'_λ) de U, nous avons la relation

$$\pi(U_\lambda) \cap \pi(U_{\lambda'}) = \emptyset \text{ si } \lambda \neq \lambda'.$$

Proposition 1.-

Pour tout élément connexe U de $\mathcal{O}(M)$, si Q est un prolongement bijectif de P, les prolongements maxima des éléments de $P(U)$ sont éléments de $Q(\tilde{U})$, où $\tilde{U}$ est la source du prolongement maximum de 1_U dans Q.

Corollaire.-

$$\forall f \in P(U) \quad , \quad \forall g \in P(f(U)) \quad , \quad \tilde{g} \circ \tilde{f} = \widetilde{g \circ f}.$$

En effet, soit $f \in P(U)$, alors

$$f \circ 1_U = f$$

par suite,

. $\tilde{f} \circ \tilde{1}_U = \tilde{f} \circ 1_{\tilde{U}}$ est défini

. $\tilde{f} \circ 1_{\tilde{U}}$ est une restriction de $\tilde{f}$, nous en déduisons que :

$$\tilde{U} \subset V$$

où V désigne la source de $\tilde{f}$.

Or, puisque $\tilde{f}$ est un prolongement de f

$$\pi(\tilde{U}) = \pi(V) = U$$

donc 1_V est un prolongement de 1_U dans Q $(1_V = \tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1} \in Q)$.

Par conséquent :

$$1_{\tilde{U}} = 1_V \quad \text{et} \quad \tilde{U} = V .$$

D'où la proposition 1.

Produit fibré de deux prolongements.

Soient (E_1,π_1,M) et (E_2,π_2,M) deux fibrés, Q_1 un pseudo-groupe sur E_1, Q_2 un pseudo-groupe sur E_2, P un pseudo-groupe sur M, tels que Q_1 et Q_2 prolongent P.

Nous allons construire un pseudo-groupe qui soit un prolongement à la fois de Q_1 et de Q_2 (donc de P).

Considérons pour cela le produit fibré $(E_1 \underset{M}{\times} E_2, p_1, p_2)$

$$\begin{tikzcd}
 & E_1 \underset{M}{\times} E_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
E_1 \arrow[dr, "\pi_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

(p_1 et p_2 désignent les restrictions des projections canoniques de $E_1 \times E_2$ sur E_1 et E_2 à la sous-variété $E_1 \underset{M}{\times} E_2$).

Notons R, l'ensemble des couples (f,g) appartenant à $Q_1 \times Q_2$ et tels que pour chaque élément (f,g) de $Q_1 \times Q_2$, il existe un élément h de P, deux ouverts U et V de M vérifiant :

$$\pi_1 . f = h\big|_U \quad \text{et} \quad \pi_2 . f = h\big|_V$$

R est un pseudo-groupe sur $E_1 \times E_2$, dont la famille d'ouverts, notée $\mathcal{O}(E_1 \times E_2)$, est engendrée par $\mathcal{O}(E_1) \times \mathcal{O}(E_2)$ ($\mathcal{O}(E_i)$, $i = 1,2$ désignant la famille d'ouverts de Q_i).

Notons $\mathcal{O}(E_1 \underset{M}{\times} E_2)$, la famille d'ouverts engendrée par les éléments de la forme

$$U \cap (E_1 \underset{M}{\times} E_2)$$

où
$$U \in \mathcal{O}(E_1 \times E_2)$$

et $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$, l'ensemble des restrictions des éléments de R aux ouverts de $\mathcal{O}(E_1 \underset{M}{\times} E_2)$.

D'après la proposition I.5., $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$ est un pseudo-groupe sur $E_1 \underset{M}{\times} E_2$.

$Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$ est en fait, l'ensemble des couples (f,g) de $Q_1 \times Q_2$ tels que : $\pi_1.f = \pi_2.g \in P$.

Proposition 2.-

$Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$ est un prolongement de Q_1 et de Q_2.

En effet, tout élément h de $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$, ayant une source connexe, préserve la fibration p_1 (resp. p_2) et comme $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$ est un pseudo-groupe tout élément h ainsi que son inverse préserve la fibration p_1 (resp. p_2).

D'après le lemme II.1., tout élément h de $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$ prolonge un difféomorphisme local g de E_1 (resp. de E_2), de la construction de $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$, il résulte que g est en fait un élément de Q_1 (resp. de Q_2), d'où la proposition 2.

Notation.-

$$\begin{tikzcd} & Q_1 \underset{P}{\times} Q_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ Q_1 \arrow[dr, "\pi_1"'] & & Q_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Proposition 3.-

Soient (F,q_1,E_1) et (F,q_2,E_2) deux fibrés et R un pseudo-groupe sur F qui prolonge Q_1 et Q_2.

Si $\pi_1 \circ q_1 = \pi_2 \circ q_2$, alors R prolonge $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$.

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[ddl, "q_1"'] \arrow[ddr, "q_2"] & \\
 & E_1 \underset{M}{\times} E_2 \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
E_2 \arrow[dr, "\pi_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\
 & M &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & R \arrow[ddl, "q_1"'] \arrow[ddr, "q_2"] & \\
 & Q_1 \underset{P}{\times} Q_2 \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
Q_1 \arrow[dr, "\pi_1"'] & & Q_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\
 & P &
\end{tikzcd}$$

Puisque $\pi_1 \circ q_1 = \pi_2 \circ q_2$, F est un fibré sur $E_1 \underset{M}{\times} E_2$.

Notons :

$$r : F \longrightarrow E_1 \underset{M}{\times} E_2 \, .$$

la fibration ainsi définie.

Tout élément de R, ayant une source connexe, est compatible avec la fibration r (car $p_1 \circ r = q_1$ et $p_2 \circ r = q_2$) par suite tout élément de R, ayant une source connexe, prolonge un difféomorphisme local de $E_1 \underset{M}{\times} E_2$ (*Lemme II.1*).

Soit h, un élément de R, ayant une source connexe, notons f le difféomorphisme local de $E_1 \underset{M}{\times} E_2$ tel que :

$$f = r.h$$

$$h : \tilde{U} \xrightarrow{\simeq} \tilde{U}'$$

$$f : U \xrightarrow{\simeq} U'$$

$$U = r(\tilde{U}) \quad , \quad U' = r(\tilde{U}').$$

$$\forall\, z \in \tilde{U} \quad , \quad p_1(f(r(z))) = q_1(h(z)) \in E_1$$
$$p_2(f(r(z))) = q_2(h(z)) \in E_2$$

d'où

$$\forall\, x \in U \quad , \quad \pi_1(p_1(f(x))) = \pi_2(p_2(f(x)))$$

ce qui entraîne que :

$$f \in Q_1 \underset{P}{\times} Q_2 .$$

Nous en déduisons que R prolonge $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$.

Définition 6.-

$Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$ est appelé produit fibré des prolongements Q_1 et Q_2 de P.

Remarque.-

Nous n'avons pas vérifié que $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$ est solution d'un problème universel.

Proposition 4.-

Si Q_2 (resp. Q_1) est un prolongement surjectif de P, alors $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$ est un prolongement surjectif de Q_1 (resp. de Q_2).

Soit $f \in Q_1$, supposé de source connexe, f se projette en un élément h de P. Puisque Q_2 est un prolongement surjectif de P, il existe g dans Q_2 tel que $\pi_2 . g = h$.

Nous en déduisons que le couple (f,g) est un élément de $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$ qui prolonge f, d'où le résultat.

Proposition 5.-

Si Q_2 (resp. Q_1) est un prolongement injectif de P, alors $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$ est un prolongement injectif de Q_1 (resp. de Q_2).

1) Soit $f \in Q_1$, ayant une source connexe, supposons que f soit prolongeable par k dans $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$, $(p_1.k = f)$.

Posons :

$$p_2.k = g \in Q_2$$

$$h = \pi_1 \circ p_1.k = \pi_2 \circ p_2.k \in P$$

h est prolongeable dans Q_2, $(\pi_2.g = h)$ et a une source connexe, donc h admet un prolongement maximum unique $\tilde{h}$ dans Q_2.

Considérons, alors l'élément $(f,\tilde{h})$ de $Q_1 \underset{\cancel{P}}{\times} Q_2$ et posons :

$$\tilde{f} = (f,\tilde{h})\big|_{E_1 \underset{M}{\times} E_2}$$

$\tilde{f}$ est un élément de $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$ qui prolonge f.

Vérifions que $\tilde{f}$ est le prolongement maximum de $f \in Q_1$ dans $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$, pour cela vérifions que tout prolongement k' de f dans $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$, ayant une source connexe, est une restriction de $\tilde{f}$.

Soit $f : U \xrightarrow{\simeq} U'$ élément de Q_1, avec U connexe, un prolongement k' de f dans $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$, ayant une source connexe, est la restriction d'un élément (f,g) de $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$ à un ouvert $\tilde{U}$ de $E_1 \underset{M}{\times} E_2$ tel que :

$$\tilde{U} = U \times V \quad , \quad \pi_1(U) = \pi_2(V)$$

$$\forall (x,y) \in U \times V \quad , \quad \pi_1 \circ f(x) = \pi_2 \circ g(y) \ ,$$

or, $\pi_1.\tilde{f} = h$,

donc g prolonge h dans Q_2, ce qui entraîne que :

$$g = \tilde{h}|_V,$$

c'est-à-dire que $\tilde{h}$ est le prolongement maximum de h dans Q_2.

Nous en déduisons donc que :

$$k' = \tilde{f}_{|U\times V}$$

i.e. $\tilde{f}$ est le prolongement maximum de f dans $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$.

2) Soient $f \in Q_1$, $g \in Q_1$, $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ les prolongements maxima respectifs de f et g dans $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$, d'après la construction précédente si

$$h = \pi_1.f \quad \text{et} \quad k = \pi_1.g$$

$\tilde{f}$ (resp. $\tilde{g}$) est la restriction du couple $(f,\tilde{h})$ (resp. du couple $(g,\tilde{k})$) à $E_1 \underset{M}{\times} E_2$ où $\tilde{h}$ (resp. $\tilde{k}$) désigne le prolongement maximum de h (resp. de k) dans Q_2.

Si nous supposons que $g \circ f$ est défini, alors les éléments h et k de P sont composables ; il en est donc de même pour $\tilde{h}$ et $\tilde{k}$.

Nous en déduisons donc que $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont composables et que $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ prolonge $g \circ f$.

3) Soit U un ouvert connexe de $\mathcal{O}(E_1)$ et posons $f = 1_U$, alors $h = \pi_1.f = 1_{U'}$ et le prolongement maximum $\tilde{h}$ de h dans Q_2 est égal à 1_V (V ouvert de E_2 tel que $\pi_2(V) = U'$).

Par suite $\tilde{f} = 1_{U\times V}$.

4) Avec les notations de 2, si g est une restriction de f, alors

k est une restriction de h et $\tilde{k}$ une restriction de $\tilde{h}$.

Par suite, $\tilde{f} = (f,\tilde{h})$ est une restriction de $\tilde{g} = (g,\tilde{k})$.

5) Si f (resp. f_λ) est un élément prolongeable de Q_1, ayant une source connexe, tel que : $f = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$, alors

$$h = \pi_1 . f = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda$$

avec $h_\lambda = \pi_1 . f_\lambda$.

Soit $\tilde{h}$ (resp. $\tilde{h}_\lambda$), le prolongement maximum de h (resp. h_λ) dans Q_2, nous avons la relation :

$$\tilde{h} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \tilde{h}_\lambda$$

donc le prolongement maximum $\tilde{f}$ de f dans $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$ est égal à $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \tilde{f}_\lambda$ avec $\tilde{f}_\lambda = (f_\lambda,\tilde{h}_\lambda)\big|_{E_1 \underset{M}{\times} E_2}$.

D'après la construction faite en 1, $\tilde{f}_\lambda$ est le prolongement maximum de f_λ dans $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$.

Ceci termine la démonstration de 5.

Il résulte des propositions précédentes que :

Proposition 6.-

Si Q_2 (resp. Q_1) est un prolongement bijectif de P, alors $Q_1 \underset{P}{\times} Q_2$ est un prolongement bijectif de Q_1 (resp. de Q_2).

b) Prolongements d'un pseudo-groupe infinitésimal.

E et M désignent deux variétés de classe C^∞.

Définition 7.-

Soient (E,π,M) un fibré, Y un champ local sur E, X un champ local sur M.

Si $\tilde{U}$ (resp. U) désigne la source de Y (resp. de X) nous dirons que Y est un <u>prolongement</u> (relèvement) de X si

1) $\pi(\tilde{U}) = U$.

2) $\forall z \in \tilde{U}, \quad \pi'_z(Y_z) = X_{\pi(z)}$.

Notation.-

Si Y prolonge X, nous noterons: $X = \pi.Y$.

Définition 8.-

Soient (E,π,M) un fibré, $\mathcal{Q}$ un pseudo-groupe infinitésimal sur E, $\mathcal{P}$ un pseudo-groupe infinitésimal sur M.

Nous dirons que $\mathcal{Q}$ est un <u>prolongement</u> de $\mathcal{P}$ si tout élément de $\mathcal{Q}$, ayant une source connexe, prolonge un élément de $\mathcal{P}$.

Notation.-

$$\begin{array}{c} \mathcal{Q} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathcal{P} \end{array}$$

Définition 9.-

Avec les notations de la définition 8, nous dirons que $\mathcal{Q}$ est un <u>prolongement surjectif</u> de $\mathcal{P}$ si

1) $\mathcal{Q}$ prolonge $\mathcal{P}$.

2) Pour tout élément de $\mathcal{P}$, ayant une source connexe, il existe un

élément de $\mathcal{Q}$ qui le prolonge.

Notation.-

$$\begin{array}{c} \mathcal{Q} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathcal{P} \end{array}$$

Ces prolongements généralisent les prolongements mériédriques de P. Libermann [5-c].

Comme dans le cas des difféomorphismes, nous avons la notion de prolongement maximum d'un champ local.

Définition 10.-

Avec les notations de la définition 8, nous dirons que $\mathcal{Q}$ est un prolongement injectif de $\mathcal{P}$ si :

1) $\mathcal{Q}$ prolonge $\mathcal{P}$.

2) Tout élément X de $\mathcal{P}$, de source connexe et prolongeable dans $\mathcal{Q}$, admet un prolongement maximum dans $\mathcal{Q}$.

3) Si $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ désignent les prolongements maxima de X et Y et si $\lambda X+\mu Y$ est défini (1), alors $\lambda\tilde{X}+\mu\tilde{Y}$ est défini.

4) Si U est un ouvert connexe de $\mathcal{O}(M)$, le champ nul sur U est prolongeable, et son prolongement maximum est un champ local nul sur E.

5) Si $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ désignent les prolongements maxima de X et Y et si $[X,Y]$ est défini (1), alors $[\tilde{X},\tilde{Y}]$ est défini.

6) Si $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ désignent les prolongements maxima de X et Y et si Y est une restriction de X, alors $\tilde{Y}$ est une restriction de $\tilde{X}$.

---

(1) $\lambda X+\mu Y$ (resp. $[X,Y]$) est défini si la source de X est égale à la source de Y.

7) Si X, (resp. $X_\lambda, \lambda \in \Lambda$) est un champ projetable et de source connexe, alors le prolongement maximum de $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ est $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \tilde{X}_\lambda$ où $\tilde{X}_\lambda$ désigne le prolongement maximum de X_λ.

Notation.

$$\begin{array}{c} \mathcal{Q} \\ \big\downarrow \\ \mathcal{P} \end{array}$$

Définition 11.-

Avec les notations de la définition 8, nous dirons que $\mathcal{Q}$ est un prolongement bijectif de $\mathcal{P}$ si $\mathcal{Q}$ est un prolongement injectif et surjectif de $\mathcal{P}$.

Exemple 1.-

Soient (E,π,V), une variété fibrée, $\mathcal{P}$ le pseudo-groupe infinitésimal des champs locaux sur V, $\mathcal{Q}$ le pseudo-groupe infinitésimal des champs locaux projetables sur E, $\mathcal{Q}$ est un prolongement surjectif de $\mathcal{P}$.

Exemple 2.-

Soient (E,π,V) un fibré principal, ω une connexion sur E, le pseudo-groupe infinitésimal $\mathcal{Q}$ des champs horizontaux pour cette connexion n'est pas un prolongement du pseudo-groupe $\mathcal{P}$ des champs locaux sur la base V. Le pseudo-groupe des champs horizontaux projetables constitue un prolongement bijectif de $\mathcal{P}$.

Exemple 3.-

Avec les notations de I - e, le pseudo-groupe infinitésimal $\mathcal{P}^k$ associé à P^k est un prolongement bijectif du pseudo-groupe des automorphismes infinitésimaux de la G-structure H considérée.

Remarques.-

1) Dans notre définition du pseudo-groupe infinitésimal, nous ne supposons pas que $\mathcal{O}(M) = \mathrm{Top}(M)$, ce qui entraîne en particulier que si Y prolonge X, Y n'est pas forcément défini sur un ouvert saturé de E.

2) La relation "$\mathcal{Q}$ est un prolongement $\mathcal{P}$" (resp. un prolongement surjectif, injectif, bijectif) est transitive.

Produit fibré de deux prolongements.

Soient (E_1,π_1,M) et (E_2,π_2,M) deux fibrés, $\mathcal{Q}_1$ un pseudo-groupe infinitésimal sur E_1, $\mathcal{Q}_2$ un pseudo-groupe infinitésimal sur E_2, $\mathcal{P}$ un pseudo-groupe infinitésimal sur M, tels que $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ prolongent $\mathcal{P}$.

Nous allons construire un pseudo-groupe infinitésimal qui soit un prolongement à la fois de $\mathcal{Q}_1$ et de $\mathcal{Q}_2$ (donc de $\mathcal{P}$).

Soit $(E_1 \underset{M}{\times} E_2, p_1, p_2)$ le produit fibré de (E_1,π_1,M) et (E_2,π_2,M).

$$\begin{tikzcd} & E_1 \underset{M}{\times} E_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ E_1 \arrow[dr, "\pi_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Notons :

$\mathcal{Q}_1 \underset{P}{\times} \mathcal{Q}_2$ l'ensemble des couples (X_1,X_2) éléments de $\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2$ tels que :

1) La source de (X_1,X_2) soit un ouvert de $E_1 \underset{M}{\times} E_2$.

2) $\pi_1 . X_1 = \pi_2 . X_2$.

Il est clair, puisque $E_1 \underset{M}{\times} E_2$ est une sous-variété de $E_1 \times E_2$, que $\mathcal{Q}_1 \underset{\mathcal{P}}{\times} \mathcal{Q}_2$ est un pseudo-groupe infinitésimal sur $E_1 \underset{M}{\times} E_2$.

Nous noterons $\mathcal{O}(E_1 \underset{M}{\times} E_2)$, la famille d'ouverts associée à $\mathcal{Q}_1 \underset{\mathcal{P}}{\times} \mathcal{Q}_2$.

Proposition 7.-

$\mathcal{Q}_1 \underset{\mathcal{P}}{\times} \mathcal{Q}_2$ est un prolongement de $\mathcal{Q}_1$ et de $\mathcal{Q}_2$.

Ceci résulte de la construction de $\mathcal{Q}_1 \underset{\mathcal{P}}{\times} \mathcal{Q}_2$.

Notation.-

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{Q}_1 \underset{\mathcal{P}}{\times} \mathcal{Q}_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathcal{Q}_1 \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \mathcal{Q}_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & \mathcal{P} & \end{tikzcd}$$

Nous démontrons de la même manière que pour les propositions 3 - 4 - 5, les propositions suivantes :

Proposition 8.-

Soient (F, q_1, E_1) et (F, q_2, E_2) deux fibrés et $\mathcal{R}$ un pseudo-groupe infinitésimal sur F qui prolonge $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$.

Si $\pi_1 \circ q_1 = \pi_2 \circ q_2$, alors $\mathcal{R}$ prolonge $\mathcal{Q}_1 \underset{P}{\times} \mathcal{Q}_2$.

Définition 12.-

$\mathcal{Q}_1 \underset{\mathcal{P}}{\times} \mathcal{Q}_2$ est appelé produit fibré des prolongements $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ de $\mathcal{P}$.

Proposition 9.-

Si Q_2 (resp. Q_1) est un prolongement surjectif de P (resp. injectif, bijectif de P), alors $Q_1 \times_P Q_2$ est un prolongement surjectif de Q_1 (resp. injectif, bijectif de Q_1) (resp. de Q_2).

Remarque.-

Si le pseudo-groupe infinitésimal Q prolonge P (resp. prolonge surjectivement, injectivement, bijectivement) alors le pseudo-groupe $a(Q)$ prolonge $a(P)$ (resp. prolonge surjectivement, injectivement, bijectivement) ; (cf. p. 14).

III - MORPHISMES

a) Morphismes de Cartan.

Prolongement d'un couple de pseudo-groupes.

Définition 1.-

Nous appellerons prolongement du couple (P_1,P_2) de pseudo-groupes, un triplet (Q,P_1,P_2) tel que :

1) Q soit un prolongement bijectif de P_1.

2) Q soit un prolongement de P_2.

Notation.-

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr] & \\ P_1 & & P_2 \end{tikzcd}$$

Proposition 1.-

Soient (Q_1,P_1,P_2) et (Q_2,P_2,P_3) deux prolongements de couples, alors

$$(Q_1 \underset{P_2}{\times} Q_2,P_1,P_3)$$

est un prolongement du couple (P_1,P_3).

Ceci résulte des propositions II - 2 et II - 6.

Proposition 2.-

Soient (Q_1,P_1,P_2), (Q_2,P_2,P_3), (Q_3,P_3,P_4) trois prolongements alors

$$(Q_1 \underset{P_2}{\times} Q_2) \underset{P_3}{\times} Q_3 = Q_1 \underset{P_2}{\times} (Q_2 \underset{P_3}{\times} Q_3).$$

Supposons que P_i soit un pseudo-groupe sur M_i $(i = 1,2,3,4)$ et Q_j un pseudo-groupe sur E_j $(j = 1,2,3)$, nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & (E_1 \underset{M_2}{\times} E_2) \underset{M_3}{\times} E_3 \arrow[d, "q_1"', "\wr"] \arrow[drr, "q_1'"] & & E_1 \underset{M_2}{\times} (E_2 \underset{M_3}{\times} E_3) \arrow[d, "q_2'"] \arrow[dll, "q_2", "\approx"'] & & \\
 & & E_1 \underset{M_2}{\times} E_2 \arrow[dl, "p_1"', "\approx"] \arrow[dr, "p_1'"] & & E_2 \underset{M_3}{\times} E_3 \arrow[dl, "p_2"', "\approx"] \arrow[dr, "p_2'"] & & \\
 & E_2 \arrow[dl, "\pi_1"', "\approx"] \arrow[dr, "\pi_1'"] & & E_1 \arrow[dl, "\pi_2"', "\approx"] \arrow[dr, "\pi_2'"] & & E_3 \arrow[dl, "\pi_3"', "\approx"] \arrow[dr, "\pi_3'"] & \\
M_1 & & M_2 & & M_3 & & M_4
\end{tikzcd}$$

Classiquement, nous avons les égalités

$$E_1 \underset{M_2}{\times} (E_2 \underset{M_3}{\times} E_3) = (E_1 \underset{M_2}{\times} E_2) \underset{M_3}{\times} E_3 = E_1 \underset{M_2}{\times} E_2 \underset{M_3}{\times} E_3 .$$

La variété $E_1 \underset{M_2}{\times} E_2 \underset{M_3}{\times} E_3$ ainsi définie, se fibre en particulier sur M_1 et M_4.

Par ailleurs, d'après la proposition 1, les pseudo-groupes

$$(Q_1 \underset{P_2}{\times} Q_2) \underset{P_3}{\times} Q_3 \quad \text{et} \quad Q_1 \underset{P_2}{\times} (Q_2 \underset{P_3}{\times} Q_3)$$

définis sur $E_1 \underset{M_2}{\times} E_2 \underset{M_3}{\times} E_3$ sont des prolongements du couple (P_1,P_4). Il est immédiat de vérifier qu'ils coïncident.

Equivalence entre prolongements de couples.

Définition 2.-

Soient P et Q deux pseudo-groupes qui prolongent le même couple (P_1,P_2).

Nous dirons que (P,P_1,P_2) et (Q,P_1,P_2) sont semblables et nous noterons

$$(P,P_1,P_2) \sim (Q,P_1,P_2) ,$$

si pour tout élément f de P_1, ayant une source connexe, les prolongements maxima de f dans P et dans Q ont même projection dans P_2.

Proposition 3.-

La relation définie précédemment est une relation d'équivalence sur l'ensemble des prolongements d'un couple (P_1,P_2).

Il est clair, que cette relation est réflexive et symétrique.

Supposons que :

$$(P,P_1,P_2) \sim (Q,P_1,P_2) \quad \text{et} \quad (Q,P_1,P_2) \sim (R,P_1,P_2).$$

Le diagramme suivant fixe les notations.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "\pi_1\ \approx"'] \arrow[drrr, "\pi'_1"] & & Q \arrow[dl, "\pi_2\ \approx"'] \arrow[dr, "\pi'_2"] & & R \arrow[dlll, "\pi_3\ \approx"'] \arrow[dl, "\pi'_3"] \\
& P_1 & & P_2 &
\end{tikzcd}$$

Notons $\tilde{f}$ (resp. $\hat{f}$ et $\bar{f}$) le prolongement maximum de f appartenant à P_1 dans P (resp. Q et R), alors

$$\forall\, f \in P_1 , \ \pi'_1.\tilde{f} = \pi'_2.\hat{f} \quad \text{et} \quad \pi'_2.\hat{f} = \pi'_3.\bar{f}$$

donc ,

$$\forall\, f \in P_1 \quad , \quad \pi'_1.\tilde{f} = \pi'_3.\bar{f}$$

c'est-à-dire que :

$$(P,P_1,P_2) \sim (R,P_1,P_2) \quad .$$

Notation.-

Nous désignerons par $[P,P_1,P_2]$ la classe d'équivalence de (P,P_1,P_2).

Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible nous la désignerons plus simplement par $\tilde{P} : P_1 \to P_2$.

Morphismes de Cartan.

Définition 3.-

Nous appellerons morphisme de Cartan de source P_1 et de but P_2, la classe de similitude d'un prolongement du couple (P_1,P_2).

Nous désignerons par $\mathrm{Hom}_C(P_1,P_2)$ l'ensemble des morphismes de Cartan de source P_1 et de but P_2.

Il est clair que :

$$\mathrm{Hom}_C(P_1,P_2) \cap \mathrm{Hom}_C(P'_1,P'_2) = \emptyset$$

sauf si

$$P_1 = P'_1 \quad \text{et} \quad P_2 = P'_2 \ .$$

Proposition 4.-

Soient (P,P_1,P_2) et (Q,P_2,P_3) deux prolongements, alors

$$[P \times_{P_2} Q, P_1, P_3]$$

ne dépend que de

$$[P, P_1, P_2] \quad \text{et} \quad [Q, P_2, P_3].$$

En effet, soient (P', P_1, P_2) et (Q', P_2, P_3) tels que :

$$(P, P_1, P_2) \sim (P', P_1, P_2)$$

$$(Q, P_2, P_3) \sim (Q', P_2, P_3) \ .$$

Les notations sont fixées par les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
& & P \times_{P_2} Q \arrow[dl, swap, "r_1"] \arrow[dl, "\approx"] \arrow[dr, "r_2"] & & \\
& P \arrow[dl, swap, "p_1"] \arrow[dl, "\approx"] \arrow[dr, "p_2"] & & Q \arrow[dl, swap, "q_1"] \arrow[dl, "\approx"] \arrow[dr, "q_2"] & \\
P_1 & & P_2 & & P_3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & P' \times_{P_2} Q' \arrow[dl, swap, "r'_1"] \arrow[dl, "\approx"] \arrow[dr, "r'_2"] & & \\
& P' \arrow[dl, swap, "p'_1"] \arrow[dl, "\approx"] \arrow[dr, "p'_2"] & & Q' \arrow[dl, swap, "q'_1"] \arrow[dl, "\approx"] \arrow[dr, "q'_2"] & \\
P_1 & & P_2 & & P_3
\end{tikzcd}$$

Soient

$\tilde{f}$ le prolongement maximum de $f \in P_1$ dans P.

$\tilde{f}'$ le prolongement maximum de $f \in P_1$ dans P'.

$\hat{f}$ le prolongement maximum de $\tilde{f} \in P$ dans $P \times_{P_2} Q$.

$\hat{f}'$ le prolongement maximum de $\tilde{f}' \in P'$ dans $P' \times_{P_2} Q'$.

Alors $\hat{f}$ (resp. $\hat{f}'$) est le prolongement maximum de $f \in P_1$ dans $P \underset{P_2}{\times} Q$ (resp. dans $P' \underset{P_2}{\times} Q'$).

L'hypothèse,

$$(P,P_1,P_2) \sim (P',P_1,P_2)$$

entraîne que :

$$\forall f \in P_1 \quad , \quad p_2.\tilde{f} = p_2'.\tilde{f}' \ .$$

Nous en déduisons donc pour tout $f \in P_1$, de source connexe, que :

$$q_1 \circ r_2.\hat{f} = q_1' \circ r_2'.\hat{f}' \ .$$

Comme $r_2.\hat{f}$ (resp. $r_2'.\hat{f}'$) est le prolongement maximum dans Q (resp. dans Q') de

$$p_2'.\tilde{f}' = p_2.\tilde{f}$$

l'hypothèse

$$(Q,P_1,P_2) \sim (Q',P_1,P_2)$$

entraîne que

$$q_2 \circ r_2.\hat{f} = q_2' \circ r_2'.\hat{f} \ .$$

Nous avons donc démontré que :

$$(P \underset{P_2}{\times} Q,P_1,P_2) \sim (P' \underset{P_2}{\times} Q',P_1,P_2)$$

d'où le résultat annoncé.

Définition 4.-

Soient $\tilde{P} : P_1 \to P_2$ et $\tilde{Q} : P_2 \to P_3$, nous définissons $\tilde{Q} \circ \tilde{P} : P_1 \to P_3$ comme le morphisme de Cartan $[P \underset{P_2}{\times} Q, P_1, P_2]$.

Proposition 5.-

La composition des morphismes de Cartan est associative.

Ceci résulte de la proposition 2.

Proposition 6.-

Le morphisme de Cartan $1_P = [P,P,P]$ est un morphisme unité.

En effet, il est clair qu'un pseudo-groupe P est un prolongement bijectif de lui-même, donc $[P,P,P]$ est un morphisme de Cartan.

Nous devons vérifier que si,

$$\tilde{P} : P_1 \to P_2$$

alors

1) $\tilde{P} \circ 1_{P_1} = \tilde{P}$

2) $1_{P_2} \circ \tilde{P} = \tilde{P}$.

Pour démontrer 1) il suffit de montrer que :

$$(P,P_1,P_2) \sim (P_1 \underset{P_1}{\times} P, P_1, P_2) .$$

Le diagramme suivant fixe les notations :

$$\begin{tikzcd}
 & & P_1 \times_{P_1} P \arrow[dl, "r_1"', "\approx"] \arrow[dr, "r_2"] & & \\
 & P_1 \arrow[dl, "p_1"', "\approx"] \arrow[dr, "p_2"] & & P \arrow[dl, "q_1"', "\approx"] \arrow[dr, "q_2"] & \\
P_1 & & P_1 & & P_2
\end{tikzcd}$$

Soit $\tilde{f}$ le prolongement maximum de f appartenant à P_1 dans P, alors l'élément $(f,\tilde{f})$ de $P_1 \times_{P_1} P$ est le prolongement maximum de f dans $P_1 \times_{P_1} P$ et de manière évidente, nous avons :

$$r_2.(f,\tilde{f}) = \tilde{f} \ ,$$

$$q_2 \circ r_2.(f,\tilde{f}) = q_2.f \ .$$

Nous en déduisons donc que :

$$(P,P_1,P_2) \sim (P_1 \times_P P,P_1,P_2) \ .$$

De ce qui précède, nous déduisons :

Proposition 7.-

Les morphismes de Cartan définissent une catégorie dont les objets sont les pseudo-groupes.

Nous noterons $\underline{C}$ cette catégorie.

Remarque.-

Les prolongements des couples ne définissent pas une catégorie car il n'y a pas d'identité.

Définition 5.-

Nous dirons qu'un morphisme de Cartan $[P,P_1,P_2]$ est un

- monomorphisme si P est un prolongement injectif de P_2 ;
- épimorphisme si P est un prolongement surjectif de P_2 ;
- isomorphisme si P est un prolongement bijectif de P_2 .

Remarques.-

1) Il s'agit là, a priori, de mono, d'épi, d'isomorphismes "forts" car nous n'avons pas caractérisé les mono, les épi et les isomorphismes de la catégorie $\underline{C}$.

2) Un isomorphisme de Cartan généralise la notion d'isomorphisme, défini par E. Cartan.

Exemple 1.- (Exemple de prolongements semblables).

Soit H une G-structure d'ordre k, sur une variété M de classe C^∞.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & R^k \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Notons P, le pseudo-groupe de ses automorphismes et P^k le relèvement de P dans H.

Considérons d'autre part la projection

$$\pi^k_{k-1} : R^k \longrightarrow R^{k-1}$$

et posons $H' = \pi^k_{k-1}(H)$.

H' est une G-structure d'ordre $k-1$. Nous noterons P' le pseudogroupe des automorphismes de H' et P'^{k-1}, son relèvement dans H'.

Alors, il est clair que : (P^k, P, P'^{k-1}) est un prolongement de (P, P'^{k-1}). Nous allons construire, un autre prolongement de (P, P'^{k-1}).

Considérons pour cela, le monomorphisme de fibré principal i

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}^{k+1} \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr] & & J^1\mathcal{R}^k \arrow[dl] \\ & \mathcal{R}^k & \end{tikzcd}$$

défini par :

$$i(z) = J^1_x \sigma_{\varphi}$$

où $z = J^{k+1}_{0,x}\varphi$, $\varphi : \Omega \longrightarrow \varphi(\Omega) = U$ et

$$\sigma_{\varphi} : U \longrightarrow \mathcal{R}^k$$
$$y \rightsquigarrow \sigma_{\varphi}(y) = J^k_{0,y}(\varphi \circ \tau_{\varphi^{-1}(y)})$$

(τ_a désignant la translation de $\mathbb{R}^n$ de vecteur a).

Nous désignons par $\mathcal{R}^{k+1}_{|(H)}$ (resp. $\mathcal{R}^{k+1}_{|U}$, U ouvert de M) les restrictions à H (resp. à U) de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^{k+1} & & \mathcal{R}^{k+1} \\ \downarrow & \text{(resp.} & \downarrow \quad) \\ \mathcal{R}^k & & M \end{array}$$

Si H est intégrable à l'ordre $k+1$, on démontre que (cf. D. LEHMANN [4.a] et [4.b])

$$\begin{array}{ccc} i(\mathcal{R}^{k+1}_{|(H)}) \cap J^1(H) & & i(\mathcal{R}^{k+1}_{|(H)}) \cap J^1(H) \\ \Big\downarrow & \text{et} & \Big\downarrow \\ H & & M \end{array}$$

sont deux fibrés principaux.

Nous noterons $H^1 = i(R^{k+1}_{|H}) \cap J^1(H)$, H^1 est le premier prolongement de H.

Nous avons alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[d] \arrow[dr] & H^1 \arrow[dl] \arrow[d] \\ M & H' \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches sont des fibrations.

Soit f un difféomorphisme local de M

$$f : U \xrightarrow{\simeq} f(U)$$

f se relève dans $i(R^{k+1})$ en un difféomorphisme f^{k+1} défini par :

$$\begin{tikzcd} i(R^{k+1}_{|U}) \arrow[r, "f^{k+1}", "\simeq"'] \arrow[d] & i(R^{k+1}_{|f(U)}) \arrow[d] \\ U \arrow[r, "f", "\simeq"'] & f(U) \end{tikzcd}$$

$$\forall z \in R^{k+1}_x \quad (z = j^{k+1}_{0,x}\, \varphi) \quad f^{k+1}(i(z)) = j^1_{f(x)}\, \sigma_{f\circ\varphi}$$

Il est clair que si, $i(z) \in H^1$ et $f \in P$, alors $f^{k+1}(i(z)) \in H^1$.

Nous en déduisons que l'ensemble noté P^{k+1}, des restrictions à H^1 des f^{k+1} lorsque f parcourt P, est un pseudo-groupe, de plus P^{k+1} est un prolongement bijectif de P.

D'autre part, P^{k+1} est un prolongement de P'^{k-1}, car nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} H^1|_U \arrow[r, "f^{k+1}"] \arrow[d, "p"'] & H^1|_{f(U)} \arrow[d, "p"] \\ H'|_U \arrow[r, "f^{k-1}"] & H'|_{f(U)} \end{tikzcd} .$$

commutatif, car

$$p \circ f^{k+1}(i(z)) = p(J^1_{f(x)}\sigma_{f \circ \psi}) = J^{k-1}_{f(x)} \; f \circ \psi .$$

et

$$f^{k-1} \circ p(i(z)) = f^{k-1}(J^{k-1}_x \psi) = J^{k-1}_{f(x)} \; f \circ \psi .$$

Nous avons donc la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} P^k \arrow[d, "\wr"'] \arrow[drr] & & P^{k+1} \arrow[dll, "\simeq"'] \arrow[d] \\ P & & P'^{k-1} \end{tikzcd}$$

et les prolongements,

$$(P^k, P, P'^{k-1}) \quad \text{et} \quad (P^{k+1}, P, P'^{k-1})$$

sont équivalents.

<u>*Exemple*</u> 2.-

Un groupe de Lie G étant fixé, non dirons que les G-structures d'ordre k

$$\begin{array}{ccc} H & & H' \\ \downarrow & \text{et} & \downarrow \\ M & & M' \end{array}$$

sont équivalentes s'il existe un difféomorphisme ψ de M sur M', tel que son relèvement $\tilde{\psi}^k : R^k(M) \to R^k(M')$ soit un difféomorphisme entre les fibrés principaux H et H'.

Notons P (resp. P') le pseudo-groupe des automorphismes de H (resp. de H'), P^k et P'^k leur relèvement respectif.

Il est clair que l'ensemble

$$\tilde{P}^k = \{g^k \mid g^k = \tilde{\psi}^k \circ f^k \ , \ f \in P\}$$

est un pseudo-groupe qui prolonge bijectivement P et qui coïncide avec P'^k.

Nous en déduisons donc :

une condition nécessaire pour que H soit équivalente à H' est qu'il existe un isomorphisme de Cartan de P dans P'.

b) <u>Une catégorie isomorphe à la catégorie de Cartan.</u>

La forme de la définition I - 1 nous conduit à une définition naturelle d'un morphisme de pseudo-groupe.

Définition 6.-

Soient, P_1 et P_2 deux pseudo-groupes sur les variétés M_1 et M_2, $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ leurs familles d'ouverts associées.

Nous appellerons <u>morphisme naïf</u> de pseudo-groupe de source P_1 et de but P_2 la donnée de :

1) Une application $\alpha : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$

2) Une famille d'applications $(F_U)_{U \in \mathcal{O}_1}$

vérifiant :

1) $\forall U \in \mathcal{O}_1 \ , \ F_U : P_1(U) \to P_2(\alpha(U))$

2) Pour tout couple d'éléments emboités, $U' \subset U$, de $\mathcal{O}_1$

a) $\alpha(U') \subset \alpha(U)$;

b) Les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{array}{ccc} P_1(U) & \xrightarrow{F_U} & P_2(\alpha(U)) \\ \rho^U_{U'} \downarrow & & \downarrow \rho^{\alpha(U)}_{\alpha(U')} \\ P_1(U') & \xrightarrow[F_{U'}]{} & P_2(\alpha(U')) \end{array}$$

3) a) $\alpha(\bigcup_{\lambda\varepsilon\Lambda} U_\lambda) = \bigcup_{\lambda\varepsilon\Lambda} \alpha(U_\lambda)$

b) Si $f = \bigcup_{\lambda\varepsilon\Lambda} f_\lambda \ \varepsilon \ P_1(U)$ alors $F_U(f) = \bigcup_{\lambda\varepsilon\Lambda} F_{U_\lambda}(f_\lambda)$.

4) $\forall f \ \varepsilon \ P_1(U)$, $\forall g \ \varepsilon \ P_1(f(U))$

$$F_U(g \circ f) = F_{f(U)}(g) \circ F_U(f)$$

5) $\forall f \ \varepsilon \ P_1(U)$, $F_{f(U)}(f^{-1}) = [F_U(f)]^{-1}$.

Notation.-

Nous noterons, $F = (\alpha, F_U)$ un morphisme naïf de pseudo-groupe.

Lemme 1.-

$\forall f \ \varepsilon \ P_1(U)$, $F_U(f)(\alpha(U)) = \alpha(f(U))$.

En effet :

$\forall f \ \varepsilon \ P_1(U)$, $1_{\alpha(U)} = F_{f(U)}(f^{-1}) \circ F_U(f)$

or $$F_U(f) \in P_2(\alpha(U))$$

$$F_{f(U)}(f^{-1}) \in P_2(\alpha(f(U)))$$

donc

$$\alpha(f(U)) = F_U(f)(\alpha(U)) .$$

Définition 7.-

Soient $F = (\alpha, F_U) : P_1 \to P_2$ et $G = (\beta, G_V) : P_2 \to P_3$ deux morphismes naïfs. Nous appellerons composé de F et G, le morphisme $G \circ F = (\beta \circ \alpha,\ G_{\alpha(U)} \circ F_U)$.

Pour que cette définition ait un sens il faut vérifier que $G \circ F$ est effectivement un morphisme naïf.

Il est clair que :

1) $\forall\, U \in \mathcal{O}_1$, $G_{\alpha(U)} \circ F_U$ est une application de $P_1(U)$ dans $P_3(\beta \circ \alpha(U))$.

2) $\forall\, U \in \mathcal{O}_1$, $\forall\, U' \in \mathcal{O}_1$, la condition $U' \subset U$ entraîne que : $\beta \circ \alpha(U') \subset \beta \circ \alpha(U)$ et que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
P_1(U) \arrow[r, "G_{\alpha(U)} \circ F_U"] \arrow[d, "\rho^U_{U'}"'] & P_3(\beta \circ \alpha(U)) \arrow[d, "\rho^{\beta\circ\alpha(U)}_{\beta.\alpha(U')}"] \\
P_1(U') \arrow[r, "G_{\alpha(U')} \circ F_{U'}"'] & P_3(\beta \circ \alpha(U'))
\end{tikzcd}$$

3) Il est clair que si $f = \cup f_\lambda$, alors :

$$G_{\alpha(U)} \circ F_U(f) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_{\alpha(U_\lambda)} \circ F_{U_\lambda}(f_\lambda) .$$

4) $\forall f \in P_1(U) \quad , \quad \forall g \in P_1(f(U))$

$$G_{\alpha(U)} \circ F_U\ (g \circ f) = G_{\alpha(U)}(F_{f(U)}(g) \circ F_U(f))$$

$$= G_{F_U(f)(\alpha(u))}(F_{f(U)}(g)) \circ G_{\alpha(U)}(F_U(f))$$

$$= [G_{\alpha(f(U))} \circ F_{f(U)}](g) \circ [G_{\alpha(U)} \circ F_U](f)$$

ceci d'après le Lemme 1.

5) $\forall f \in P_1(U)$

$$[G_{\alpha(f(U))} \circ F_{f(U)}](f^{-1}) = G_{\alpha(f(U))}(F_{f(U)}(f^{-1}))$$

$$= G_{\alpha(f(U))}([F_U(f)]^{-1})$$

$$= [G_{\alpha(U)}(F_U(f))]^{-1}$$

$$= [G_{\alpha(U)} \circ F_U]^{-1}\ (f)$$

Proposition 8.-

La composition des morphismes naīfs de pseudo-groupe est associative.

Ceci résulte directement du Lemme 1 et de l'associativité de la loi de composition des applications.

Proposition 9.-

$1_P = (1_{\mathcal{O}_1}\ ,\ 1_{P(U)})$ est un morphisme unité.

Proposition 10.-

Les morphismes définis en III - 4 forment une catégorie dont les objets sont les pseudo-groupes.

Notation.-

Nous noterons $\underline{P}$ cette catégorie et nous l'appellerons la catégorie naîve des pseudo-groupes.

Equivalence de catégorie entre $\underline{C}$ *et* $\underline{P}$.

Théorème 1.-

Les catégories $\underline{C}$ et $\underline{P}$ sont isomorphes.

Démonstration :

Nous allons construire deux foncteurs $\tau : \underline{C} \to \underline{P}$ et $\theta : \underline{P} \to \underline{C}$.

a) Construction de τ :

Soit $[P,P_1,P_2]$ un morphisme de Cartan (Déf. III - 1), le diagramme suivant fixant les notations

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\pi_1"', "\wr"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ P_1 & & P_2 \end{tikzcd}$$

Si U est un ouvert connexe de $\mathcal{O}_1$, nous posons

$$\alpha(U) = \pi_2(\tilde{U})$$

où $\tilde{U}$ est défini par $\tilde{1}_U = 1_{\tilde{U}}$.

Si U est un ouvert quelconque de $\mathcal{O}_1$, U est réunion de ses composantes connexes U_λ, $\lambda \in \Lambda$.

Nous posons alors :

$$\alpha(U) = \bigcup_\lambda \alpha(U_\lambda) .$$

Ceci définit une application

$$\alpha : \mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathcal{O}_2 \ .$$

Et cette application est indépendante du choix du représentant (P,P_1,P_2) dans la classe $[P,P_1,P_2]$.

Considérons un élément $f \in P_1$ de source connexe U, soit $\tilde{f}$ son prolongement maximum dans P, nous posons : $F_U(f) = \Pi_2.\tilde{f}$, $F_U(f)$ est indépendante du choix de (P,P_1,P_2) dans la classe $[P,P_1,P_2]$.

$F_U(f)$ est un élément de P_2, de source $\alpha(U)$. Si f n'est pas de source connexe, nous posons :

$$F_U(f) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_{U_\lambda}(f)$$

où $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sont les composantes connexes de U.

Vérifions que $F = (\alpha,F_U)$ est morphisme naïf de P_1 dans P_2.

a) $\forall\, U \in \mathcal{O}_1$, $\forall\, U' \in \mathcal{O}_1$, la condition $U' \subset U$ entraîne : $\alpha(U') \subset \alpha(U)$.

En effet : si U et U' sont connexes,

$1_{U'}$ est la restriction de 1_U à U', donc d'après la définition II - 4

$1_{\tilde{U}'}$ est la restriction à $\tilde{U}'$ de $1_{\tilde{U}}$.

Par conséquent :

$$\pi_2(\tilde{U}') \subset \pi_2(\tilde{U})$$

c'est-à-dire

$$\alpha(U') \subset \alpha(U) \ .$$

Cette relation se prolonge, évidemment au cas où U et U' ne sont pas connexes.

b) $\forall U \in \mathcal{O}_1$, $\forall U' \in \mathcal{O}_1$ si $U' \subset U$, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P_1(U) & \xrightarrow{\quad F_U \quad} & P_2(\alpha(U)) \\ \Big\downarrow \rho^U_{U'} & & \Big\downarrow \rho^{\alpha(U)}_{\alpha(U')} \\ P_1(U') & \xrightarrow[\quad F_{U'} \quad]{} & P_2(\alpha(U')) \end{array}$$

Ceci résulte de la définition II - 4, en effet si U est connexe et si $f \in P(U)$, alors $(\widetilde{f_{|U'}})$ est la restriction à $\tilde{U}'$ de $\tilde{f}$.

Donc :

$$\begin{aligned} F_{U'}(f_{|U'}) &= \pi_2 . \tilde{f}_{|\tilde{U}'} \\ &= (\pi_2 . \tilde{f})_{|\alpha(U')} \\ &= F_U(f)_{|\alpha(U')} . \end{aligned}$$

Cette égalité se prolonge au cas où U n'est pas connexe.

c) Le corollaire de la proposition II - 1, entraîne que si U est connexe

$$\pi_2 . \widetilde{f' \circ f} = \pi_2 . \tilde{f}' \circ \pi_2 . \tilde{f}$$

ceci $\forall f \in P_1(U)$ et $\forall f' \in P_1(f(U))$, U étant supposé connexe.

Donc que :

$$F_U(f' \circ f) = F_{f(U)}(f') \circ F_U(f) .$$

Cette relation se prolonge au cas où U n'est pas connexe.

d) Si U est connexe, $\forall\, f \in P_1(U)$ $(\tilde{f})^{-1} = \widetilde{f^{-1}}$ (Déf. II - 4)

or

$$\begin{aligned} F_{f(U)}(f^{-1}) \circ F_U(f) &= F_U(f^{-1} \circ f) \\ &= \pi_2 . \tilde{f}^{-1} \circ f \\ &= 1_{\alpha(U)} . \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$F_{f(U)}(f^{-1}) = F_U(f)^{-1} .$$

Cette relation se prolonge au cas où U n'est pas connexe.

Lemme 1.-

Les applications

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{O}b(\underline{C}) &\longrightarrow \mathcal{O}b(\underline{P}) \\ P &\rightsquigarrow \tau(P) = P . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau : Fl(\underline{C}) &\longrightarrow Fl(\underline{P}) \\ [P,P_1,P_2] &\rightsquigarrow \tau([P,P_1,P_2]) = (\alpha, F_U) \end{aligned}$$

définissent un foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{P}$.

De manière évidente $\tau([P,P,P]) = 1_P$.

Soient $[P,P_1,P_2]$ et $[Q,P_2,P_3]$ deux morphismes de Cartan, les notations sont fixées par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "p_1"', "\wr"] \arrow[dr, "p_2"] & & Q \arrow[dl, "q_1"', "\wr"] \arrow[dr, "q_2"] & \\
P_1 & & P_2 & & P_3
\end{tikzcd}$$

Par définition :

$$\tau([P,P_1,P_2]) = F = (\alpha,F_U),$$

avec pour tout ouvert U connexe,

$$\forall\ f \in P_1(U) \quad , \quad F_U(f) = p_2.\tilde{f} \quad ,$$

où $\tilde{f}$ est le prolongement maximum de f dans P.

De même,

$$\tau([Q,P_2,P_3]) = G = (\beta,G_V),$$

avec pour tout ouvert V connexe,

$$\forall\ g \in P_2(V) \quad , \quad G_V(g) = q_2.\hat{g} \quad ,$$

où $\hat{g}$ est le prolongement maximum de g dans Q. Or :

$$[Q,P_2,P_3] \circ [P,P_1,P_2] = [P \underset{P_2}{\times} Q,P_1,P_3]$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & P \times_{P_2} Q \arrow[dl, "r_1"', "\approx"] \arrow[dr, "r_2"] & & \\
 & P \arrow[dl, "p_1"', "\approx"] \arrow[dr, "p_2"] & & Q \arrow[dl, "q_1"', "\approx"] \arrow[dr, "q_2"] & \\
P_1 & & P_2 & & P_3
\end{tikzcd}
$$

et par définition,

$$(P \times_{P_2} Q, P_1, P_3) = K = (\gamma, K_U),$$

avec pour tout ouvert U connexe,

$$\forall\, f \in P_1(U)\ ,\ K_U(f) = q_2 \circ r_2.\bar{f},$$

où $\bar{f}$ désigne le prolongement maximum de f dans $P \times_{P_2} Q$.

γ étant défini par : $\gamma(U) = q_2 \circ r_2(\bar{U})$ où $\bar{U}$ est tel que $\overline{1_U} = 1_{\bar{U}}$.

Il est immédiat que $\tilde{1}_U$ et $\overline{1_U}$ se projettent en $1_{\alpha(U)} \in P_2$. Si nous désignons par $\hat{1}_{\alpha(U)}$, le prolongement maximum de $1_{\alpha(U)}$ dans $\mathcal{Q}$, nous avons :

$$\overline{1_U} = (\tilde{1}_U, \hat{1}_{\alpha(U)}),$$

ce qui entraîne :

$$q_2 \circ r_2 \,.\, \overline{1_U} = q_2 \,.\, \hat{1}_{\alpha(U)}\ ,$$

donc,

$$\begin{aligned}\gamma(U) &= q_2(\widehat{\alpha(U)}) \\ &= \beta \circ \alpha(U)\ .\end{aligned}$$

Par suite $\gamma = \beta \circ \alpha.$

Avec des notations analogues aux précédentes nous avons :

$$\bar{f} = (f, \widehat{p_2 . \tilde{f}}) \in P \underset{P_2}{\times} Q.$$

Par suite,

$$q_2 \circ r_2 . \bar{f} = q_2 . \widehat{p_2 . \tilde{f}}.$$

Nous en déduisons donc que :

$$\begin{aligned} K_U(f) &= q_2 \circ r_2 . \bar{f} \\ &= q_2 . \widehat{p_2 . \tilde{f}} \\ &= G_{\alpha(U)} (p_2 . \tilde{f}) \\ &= G_{\alpha(U)} \circ F_U(f) . \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que : $K = G \circ F$, ce qui termine la démonstration du lemme.

b) <u>Construction de</u> θ.

Considérons un morphisme $F : P_1 \to P_2$, $F = (\alpha, F_U)$.

Si $\mathcal{O}_1$ (resp. $\mathcal{O}_2$) désigne la famille d'ouverts de P_1 (resp. P_2), notons $\mathcal{O}$ la famille d'ouverts engendrée par :

$$\{(U \times V) | U \in \mathcal{O}_1 , V \in \mathcal{O}_2\}.$$

Considérons l'ensemble P_F des restrictions des éléments $(f, F_U(f))$, (U variant dans $\mathcal{O}_1$, f variant dans P_1), aux ouverts de $\mathcal{O}$.

Il est clair que P_F est un pseudo-groupe dont la famille d'ouverts est $\mathcal{O}$, qui prolonge P_1 et P_2.

De plus si U est connexe et si $f \in P_1(U)$, f admet un prolongement maximum dans P_F, qui n'est autre que $(f, F_U(f))$.

En résumé :

(P_F, P_1, P_2) est un prolongement du couple (P_1, P_2).

Lemme 2.-

Les applications

$$\theta : \mathcal{O}b(\underline{P}) \longrightarrow \mathcal{O}b(\underline{C})$$
$$P \rightsquigarrow \theta(P) = P$$

$$\theta : F(\underline{P}) \longrightarrow Fl(\underline{C})$$
$$F \rightsquigarrow \theta(F) = [P_F, P_1, P_2]$$

définissent un foncteur de P dans $\underline{C}$.

Il est clair que si $F = 1_P$, alors $P_F = P \times P$.

Comme,

$$[P \times P, P, P] = [P, P, P],$$

nous en déduisons que :

$$\theta(1_F) = [P, P, P].$$

Soient $F : P_1 \to P_2$, $G : P_2 \to P_3$ deux morphismes $(F = (\alpha, F_U)$, $G = (\beta, G_V))$.

Posons :

$$\theta(F) = P_F$$

$$\theta(G) = P_G$$

$$\theta(G \circ F) = P_{GoF}$$

et vérifions que :

$$[P_{GoF}, P_1, P_3] = [P_F \underset{P_2}{\times} P_G, P_1, P_3].$$

Le diagramme suivant fixe les notations

$$\begin{tikzcd}
 & & P_{GoF} \arrow[ddll, "s_1"', "\approx"] \arrow[ddrr, "s_2"] & & \\
 & & P_F \underset{P_2}{\times} P_G \arrow[dl, "r_1"', "\approx"] \arrow[dr, "r_2"] & & \\
 & P_F \arrow[dl, "p_1"', "\approx"] \arrow[dr, "p_2"] & & P_G \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\
P_1 & & P_2 & & P_3
\end{tikzcd}$$

Soient U un ouvert connexe et $f \in P_1(U)$, le prolongement maximum de f dans P_{GoF} est :

$$\tilde{f} = (f, G_{\alpha(U)} \circ F_U(f)),$$

son prolongement maximum dans $P_F \underset{P_2}{\times} P_G$ est :

$$f = ((f, F_U(f)) \; , \; (F_U(f), G_{\alpha(U)} \circ F_U(f))),$$

donc :

$$s_2 . \tilde{f} = q_2 \circ r_2 . \bar{f}$$

ce qui entraîne que :

$$[P_{GoF}, P_1, P_3] = [P_F \underset{P_2}{\times} P_G, P_1, P_3],$$

ou encore :

$$\theta(G \circ F) = \theta(G) \circ \theta(F) \; .$$

Ceci termine la démonstration du lemme.

c) $\underline{\theta \circ \tau = 1_{\underline{C}}}$.

Soit $[P,P_1,P_2]$ un morphisme de Cartan, posons :

$$F = \tau([P,P_1,P_2]) \ .$$

$F = (\alpha,F_U)$ et pour tout $U \in \mathcal{O}_1$, U connexe, nous avons

$$\forall f \in P_1(U) \quad F_U(f) = \pi_2.\tilde{f}$$

où $\tilde{f}$ est le prolongement maximum de f dans P.

Posons :

$$\theta(F) = [P_F,P_1,P_2]$$

où P_F est défini comme dans b).

Le diagramme suivant fixe les notations

$$\begin{tikzcd}
 & P_F \arrow[ddl, "p_1"'] \arrow[ddr, "p_2"] & \\
 & P \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
P_1 & & P_2
\end{tikzcd}$$

Si U est connexe, soit $f \in P_1(U)$, le prolongement maximum de f dans P est noté $\tilde{f}$, le prolongement maximum de f dans P_F est $\bar{f} = (f,F_U(f)) = (f,\pi_2.\tilde{f})$.

Alors, il est clair que :

$$\pi_2.\tilde{f} = p_2.\bar{f} \ .$$

Nous en déduisons que :

$$[P_F,P_1,P_2] = [P,P_1,P_2]$$

c'est-à-dire que :

$$\theta \circ \tau([P,P_1,P_2]) = [P,P_1,P_2]$$

d'où le résultat :

$$\theta \circ \tau = 1_{\underline{C}} .$$

d) $\underline{\tau \circ \theta = 1_P}$.

Soit $F = (\alpha, F_U)$ un morphisme de P_1 dans P_2.
$\theta(F) = [P_F, P_1, P_2]$ est défini comme dans b).

$$\begin{tikzcd} & P_F \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ P_1 & & P_2 \end{tikzcd}$$

Désignons par $\tilde{f} = (f, F_U(f))$, le prolongement maximum de $f \in P_1(U)$ dans P_F (U est connexe) et posons :

$$\tau([P_F, P_1, P_2]) = (\beta, G_V) = G .$$

β est défini pour tout ouvert connexe de $\mathcal{O}_1$ par :
$\beta(U) = p_2(\tilde{U})$ où $\tilde{U}$ est tel que :

$$\tilde{1}_U = 1_{\tilde{U}} .$$

Or

$$1_{\tilde{U}} = (1_U, F_U(1_U)) = (1_U, 1_{\alpha(U)}) .$$

Nous en déduisons donc que pour tout ouvert connexe de $\mathcal{O}_1$:

$$\beta(U) = \alpha(U) .$$

D'autre part, pour tout ouvert U connexe de $\mathcal{O}_1$:

$$\forall f \in P_1(U) \quad , \quad G_U(f) = p_2.\tilde{f}$$
$$= F_U(f).$$

Ce qui entraîne, pour tout ouvert U connexe de $\mathcal{O}_1$:

$$F_U = G_U \; .$$

Par suite :

$$F = G$$

c'est-à-dire :

$$\tau \circ \theta = 1_P .$$

De a), b), c), d) il résulte que les catégories $\underline{C}$ et $\underline{P}$ sont isomorphes.

Les démonstrations des théorèmes des paragraphes suivants étant calquées sur celles de III.a et III.b, nous nous contentons de citer les énoncés. Les variétés considérées seront supposées de classe C^∞.

c) Les morphismes infinitésimaux de Cartan.

Définition 8.-

Nous appellerons prolongement du couple $(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$ de pseudo-groupes infinitésimaux, un triplet $(\mathcal{Q},\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$ tel que :

1) $\mathcal{Q}$ soit un prolongement bijectif de $\mathcal{P}_1$.

2) $\mathcal{Q}$ soit un prolongement de $\mathcal{P}_2$.

Proposition 11.-

Soient $(\mathcal{Q}_1,\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{Q}_2,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3)$ deux prolongements de couples, alors

$$(Q_1 \underset{P_2}{\times} Q_2, P_1, P_3)$$

est un prolongement du couple (P_1, P_3).

Définition 9.-

Soient P et Q deux pseudo-groupes infinitésimaux qui prolongent le même couple (P_1, P_2).

Nous dirons que (P, P_1, P_2) et (Q, P_1, P_2) sont semblables et nous noterons :

$$(P, P_1, P_2) \sim (Q, P_1, P_2)$$

si, pour tout élément X de P_1, ayant une source connexe, les prolongements maxima de X dans P et dans Q ont même projection dans P_2.

Proposition 2.-

La relation définie précédemment est une relation d'équivalence sur l'ensemble des prolongements d'un couple (P_1, P_2).

Définition 10.-

Nous appellerons, morphisme infinitésimal de Cartan, de source P_1 et de but P_2, la classe de similitude d'un prolongement du couple (P_1, P_2).

Notation.-

$$[P, P_1, P_2] \quad \text{ou} \quad \tilde{P} : P_1 \to P_2 .$$

Proposition 13.-

La relation

$$[Q,P_2,P_3] \circ [P,P_1,P_2] = [P \underset{P_2}{\times} Q,P_1,P_3]$$

définit une loi de composition interne associative sur l'ensemble des morphismes infinitésimaux de Cartan.

Proposition 14.-

Les morphismes infinitésimaux de Cartan définissent une catégorie dont les objets sont les pseudo-groupes infinitésimaux.

Nous noterons $\underline{C}$ cette catégorie, et nous l'appellerons la catégorie de Cartan infinitésimale.

d) Une catégorie isomorphe à la catégorie de Cartan infinitésimale.

Définition 10.-

Soient P_1 et P_2 deux pseudo-groupes sur les variétés M_1 et M_2, O_1 et O_2 leurs familles d'ouvert associées.

Nous appellerons morphisme naïf de pseudo-groupe infinitésimal de source P_1 et de but P_2, la donnée

1) d'une application $\alpha : O_1 \longrightarrow O_2$;

2) d'une famille d'applications $(F_U)_{U \varepsilon O_1}$ vérifiant :

1) $\forall\, U \varepsilon O_1$, $F_U : P_1(U) \longrightarrow P_2(\alpha(U))$;

2) Pour tout couple d'éléments emboités, $U' \subset U$, de O_1

a) $\alpha(U') \subset \alpha(U)$;

b) Les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_1(U) \arrow[r, "F_U"] \arrow[d, "\rho^U_{U'}"'] & \mathcal{P}_2(\alpha(U)) \arrow[d, "\rho^{\alpha(U)}_{\alpha(U')}"] \\
\mathcal{P}_1(U') \arrow[r, "F_{U'}"'] & \mathcal{P}_2(\alpha(U'))
\end{tikzcd}$$

3) a) $\alpha(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \alpha(U_\lambda)$;

b) Si $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in \mathcal{P}_1(U)$ alors, $F_U(X) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_U(X_\lambda)$.

4) $\forall X \in \mathcal{P}_1(U)$, $\forall Y \in \mathcal{P}_1(U)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$,

a) $F_U(\lambda X + \mu Y) = \lambda F_U(X) + \mu F_U(Y)$;

b) $F_U([X,Y]) = [F_U(X) , F_U(Y)]$.

Nous noterons, $F = (\alpha, F_U)$ un morphisme naïf infinitésimal.

Proposition 15.-

Les morphismes naïfs infinitésimaux définissent une catégorie dont les objets sont les pseudo-groupes infinitésimaux.

Nous noterons $\underline{P}$ cette catégorie.

Théorème 2.-

Les catégories $\underline{C}$ et $\underline{P}$ sont isomorphes.

Remarque.-

S'il existe un morphisme infinitésimal de Cartan entre P et Q (resp. un mono, un épi, un iso), alors il existe un morphisme de Cartan (resp. un mono, un épi, un iso) de $a(P)$ dans $a(Q)$ (cf. p. 14 et p. 36).

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. CARTAN - *Sur la structure des groupes infinis de transformations.* (Ann. Ec. Norm. t. 21 - 1904, p. 153-206).

[2] C. EHRESMANN - *Structures infinitésimales et pseudo-groupes de Lie.* (Coll. Intern. C.N.R.S. Géométrie diff. Strasbourg - 1953).

[3] H. KURANISHI - *On the local theory of continous infinite pseudo-groupe II.* (Nagoya Math. J. 19 - 1961, p. 55-91).

[4] D. LEHMANN - *a) Sur les obstructions à l'intégrabilité des G-structures.* (Ann. Inst. Fourier TXXI - 1971, p. 83-93).

b) Sur l'obstruction à l'intégrabilité formelle. (Cours polycopié - Université des Sciences et Techniques de Lille - 1972).

[5] P. LIBERMANN - *a) Sur les problèmes d'équivalence de certaines structures infinitésimales* (Thèse Strasbourg, 1953. Annali di Matematica 36 - 1954).

b) Sur les pseudo-groupes de Lie. (Colloque de Topologie de Strasbourg 1954-55, polycopié).

c) Pseudo-groupes infinitésimaux. (C.R. Acad. Sc. Paris t. 246, 1958 - p. 41-43, p. 531-534, p. 1365-1368).

d) Pseudo-groupes infinitésimaux attachés aux pseudo-groupes de Lie. (Coll. Intern. C.N.R.S. 1959 - Lille - Bull. Soc. Math. 87 - 1959, p. 409-425).

[6] Y. MATUSHIMA - *a) Sur les prolongements d'un pseudo-groupe.* (Nagoya Math. J. 7, 1954, p. 103-110).

b) Pseudo-groupe de Lie transitif. (Séminaire Bourbaki, 1955, p. 1-12).

[7] I.M. SINGER - S. STERNBERG - *The infinite Groups of Lie and Cartan.* (Part. I d'Anal. (J. Anal. Math. Vol. 15 - 1955, p. 1-57).