

10376  
1972  
165

N° d'ordre : 134

50376  
1972  
165

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES  
DE LILLE

pour obtenir le titre de Docteur-Ingénieur

par

Jérôme OUDIN



CONTRIBUTION A L'ETUDE DU COMPORTEMENT LIMITE  
DES PLAQUES RECTANGULAIRES FLECHIES

soutenu le 20 Décembre 1972

devant la COMMISSION D'EXAMEN

MM. GONTIER	Président
PARSY	Rapporteur
DYMENT	Examineur
KERGUIGNAS	Examineur
OUZIAUX	Examineur

## A V A N T     P R O P O S

Nous tenons à remercier vivement et à assurer de notre profonde reconnaissance :

Monsieur Michel DEBEUNNE, Directeur de l'ICAM, qui nous a beaucoup aidé dans la préparation et la réalisation de cette étude ;

Monsieur le Professeur GONTIER, Directeur de l'IMFL, pour les encouragements qu'il nous a témoignés en cours de ces travaux ;

Monsieur PARSY, Directeur de l'UER de Mathématiques Pures et Appliquées, qui a été extrêmement intéressé par le sujet et qui nous a apporté une aide précieuse ;

Monsieur KERGUIGNAS, Professeur de Constructions Civiles à l'ENSAM, qui a amicalement insisté pour que nous présentions ces travaux ;

Monsieur OUZIAUX, Professeur de Mécanique Appliquée à l'ENSAM, qui a accepté d'examiner nos travaux ;

Messieurs les Professeurs MASSONNET et SAVE qui nous ont aidé à définir le sujet ;

Mes collaborateurs du Département Matériaux, Structures et Mise en Forme de l'ICAM ;

Mes collègues du Département Chimie-Métallurgie de l'ICAM.

Les études et les expériences ont été faites sans crédits spéciaux avec les moyens propres du Département et sans perturber la marche normale des travaux pratiques des élèves-ingénieurs.

Le laboratoire d'Essais des Matériaux et des Structures est occupé toutes les après-midi de l'année scolaire par ces travaux.

De ce fait, les expériences ont été souvent interrompues, quelquefois perturbées par des montages et démontages successifs.

## S O M M A I R E

La présente étude apporte une contribution théorique et expérimentale concernant le comportement à la ruine des plaques rectangulaires métalliques soumises à la flexion plane, en chargement quasi-statique, à la température ambiante. La partie théorique fait appel aux théorèmes d'extremum (LOWER-BOUND et UPPER-BOUND) .

Nous avons mis en oeuvre deux champs de vitesses de déformation, établis à partir de la théorie des lignes de glissement sur le matériau idéalisé en matériau rigide plastique parfait. Nous admettons que l'état plastique est atteint lorsque la contrainte tangentielle maximale en un point atteint la valeur limite  $k$  . Cette valeur est égale à la moitié de la limite élastique conventionnelle  $R_e$  définies par les Normes Françaises AFNOR.

Le premier de ces champs de vitesses a déjà été utilisé pour étudier le comportement limite des poutres droites, à section droite rectangulaire, encastées à une extrémité. Le second est, à notre connaissance, nouveau. Ces champs transmettent des efforts et des moments qui sont supérieurs aux efforts et aux moments réels. Il s'agit de bornes supérieures.

Le second champ de vitesses de déformation est meilleur que le premier puisqu'il transmet des efforts et des moments plus faibles. Il se rapproche mieux de la solution exacte.

Il convenait de s'assurer si la solution précédente ne s'éloignait pas trop de la réalité. Dans ce but, nous avons étudié des champs de contraintes. Le premier de ces champs a déjà été utilisé pour des poutres droites. Les suivants sont des champs constitués de blocs et séparés par des lignes de discontinuité de contraintes. Ils constituent une application nouvelle de cette technique au problème du comportement limite des plaques rectangulaires.

Les solutions obtenues sont assez proches des solutions cinématiques et permettent de situer la solution exacte à 5 % près dans un chargement dans lequel, en pratique industrielle, on distingue deux parties, l'une où l'effort tranchant est prépondérant, l'autre où le moment fléchissant est à son tour prépondérant.

La mise en évidence par l'expérience des zones plastifiées ou zones de déformation non réversibles n'est pas très aisée. Nous avons observé sur la surface des plaques fléchies, préalablement recuites et polies, des zones dépolies. Pour faciliter leur observation, nous avons utilisé les propriétés du réactif de *FRY*, bien connu dans l'industrie de transformation. A son contact, les zones plastifiées des pièces en acier doux apparaissent noires. Le procédé permet de révéler des déformations supérieures à 0,5 ‰.

Des vérifications expérimentales ont permis de dégager une nouvelle définition de la charge limite  $P_L$ , susceptible d'être utilisée pour les problèmes expérimentaux de plaques et de coques. Sa mise en oeuvre est très aisée et la corrélation avec l'étude théorique est assez bonne grâce aux expériences menées en laboratoire sur des aciers au carbone convenablement recuits. Leur reproduction en milieu industriel conduirait à une dispersion beaucoup plus grande (environ 15 %) .

Cette étude met en lumière un certain nombre de possibilités d'étude du comportement limite des structures.

De nombreux prolongements sont possibles pour d'autres cas de chargement et d'autres types de structure.

## T A B L E   D E S   M A T I E R E S

## I. LES LOIS DE LA PLASTICITE.

- 1,1. Le comportement plastique.
- 1,2. Les critères d'écoulement.
- 1,3. Les lois d'écoulement.
- 1,4. Les méthodes extrêmes.
- 1,5. Application des méthodes extrêmes.
- 1,6. Conclusion.

## II. LES CHAMPS CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLES.

- 2,1. Introduction.
- 2,2. Champ cinématiquement admissible symétrique.
- 2,3. Champ cinématiquement admissible asymétrique.
- 2,4. Conclusion.

## III. LES CHAMPS STATIQUEMENT ADMISSIBLES.

- 3,1. Introduction.
- 3,2. Champ statiquement admissible continu.
- 3,3. Champ statiquement admissible par blocs symétriques.
- 3,4. Champ statiquement admissible par blocs asymétriques.
- 3,5. Conclusion.

## IV. L'ETUDE EXPERIMENTALE.

- 4,1. Préparation des essais.
- 4,2. Dispositif expérimental.
- 4,3. Lois de comportement.
- 4,4. Figures d'écoulement.
- 4,5. Courbes d'interaction expérimentale.
- 4,6. Conclusions.

I

LES LOIS DE LA PLASTICITE.

## 1,1. LE COMPORTEMENT PLASTIQUE.

### 1,1,1. L'essai de traction.

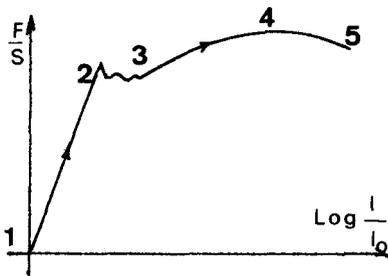


Figure 1,1,1

La figure (1,1,1) représente le résultat d'un essai de traction jusqu'à la ruine d'une éprouvette cylindrique à la température ambiante en vitesse lente.

Selon le point d'arrêt de l'essai, nous avons les comportements typiques suivants :

Point d'arrêt 2 : le comportement est élastique linéaire (Figure 1,1,2) .

Point d'arrêt 3 : le comportement est élastique plastique parfait (Fig. 1,1,3) .

Point d'arrêt 4 : le comportement est élastique plastique écrouissable (Fig. 1,1,4) .

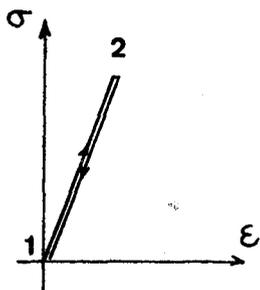


Figure 1,1,2

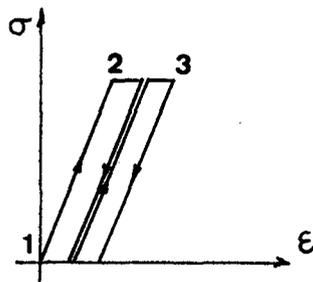


Figure 1,1,3

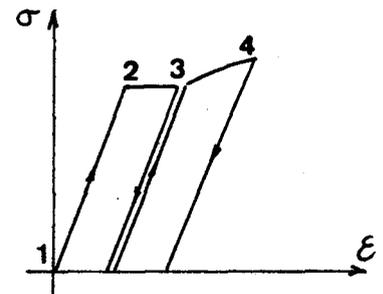


Figure 1,1,4

Le point 2 correspond au seuil de plasticité, la contrainte correspondante  $\sigma = R_e$  est la contrainte d'écoulement.

Cette contrainte varie avec l'amplitude de la déformation préalable à l'essai : c'est la conséquence de l'écrouissage.

La contrainte d'écoulement est donc une caractéristique essentielle de l'état du matériau à un instant de son histoire.

*LÜDERS* avait observé l'apparition d'un réseau de lignes sur la surface d'une éprouvette en acier à faible taux de carbone lorsque le matériau atteignait son seuil d'écoulement (6) (28) .

Ces lignes apparaissent aussi dans d'autres circonstances et notamment sur les plaques en acier. Les figures (1,1,5) et (1,1,6) nous montrent des lignes de ce type dans des plaques sollicitées en flexion pure.

Des interprétations atomiques de ces faits sont possibles à partir des mécanismes de déformation dus à l'existence des défauts dans l'édifice cristallin (dislocations, macles) (3) (30) .

#### 1,1,2. Schématisation de la loi de comportement.

Les schématisations découlent de l'observation des figures (1,1,3) et (1,1,4) .

La figure (1,1,7) représente le comportement d'un matériau élastique plastique parfait, la figure (1,1,8) le comportement d'un matériau élastique plastique écrouissable.

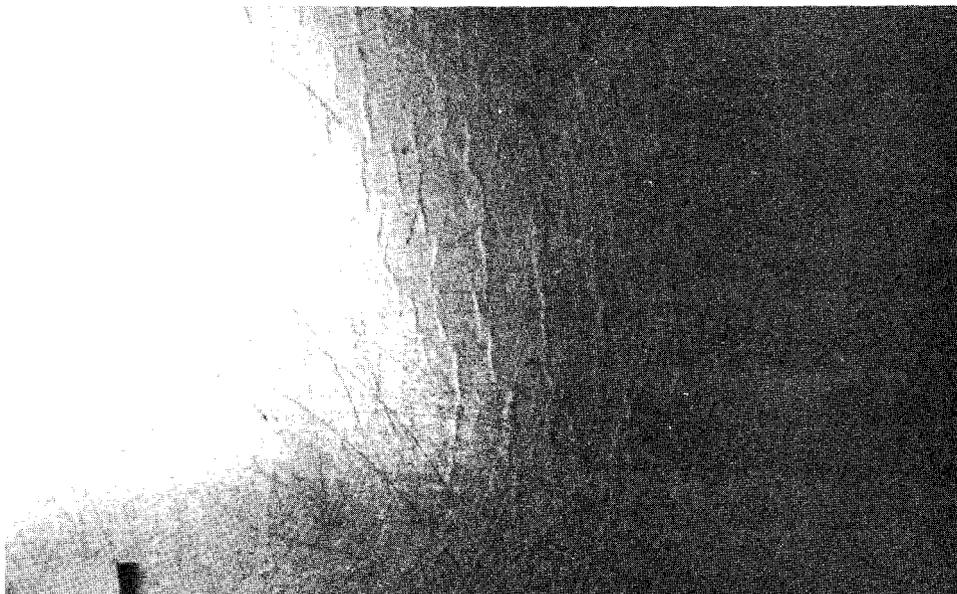


Figure 1,1,5

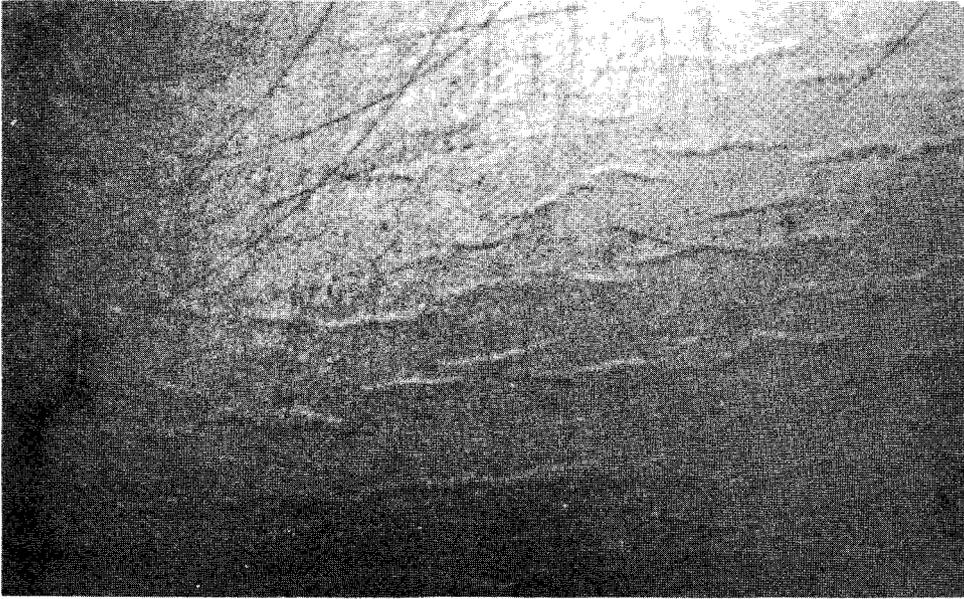


Figure 1,1,6

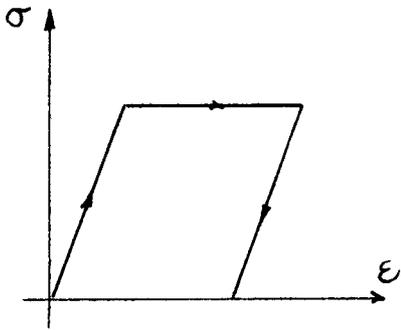


Figure 1,1,7

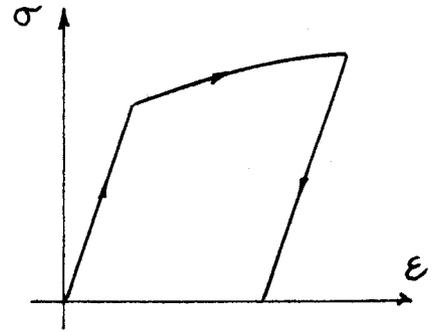


Figure 1,1,8

La figure (1,1,9) est déduite de la figure (1,1,7) lorsque les déformations élastiques sont négligées : la loi de comportement est celle du matériau rigide plastique parfait.

La figure (1,1,10) est déduite de la figure (1,1,8) dans les mêmes conditions : la loi de comportement obtenue est celle du matériau rigide plastique écrouissable.



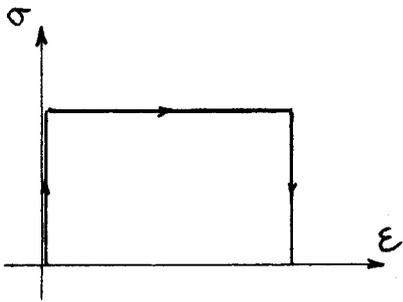


Figure 1,1,9

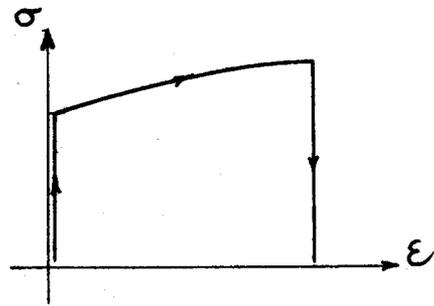


Figure 1,1,10

Nous retenons dans ce qui suit la schématisation du matériau rigide plastique parfait (R.P.P.) .

Les effets de température, de vitesses de déformation, d'écroutissage, et l'effet *BAUSCHINGER* seront négligés. Ceci est justifié par les conditions expérimentales décrites au chapitre IV.

## 1,2. LES CRITERES D'ECOULEMENT.

### 1,2,1. Forme générale du critère d'écoulement pour le matériau R.P.P.

Au seuil d'écoulement (point 2 de la figure 1,1,1), les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  vérifient la relation suivante (14) :

$$f(\sigma_{ij}) - R_e = 0 \quad (1,2,1)$$

Nous considérons un matériau isotrope. Dans ce cas, le critère ne dépend que des contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et non de leur direction.

Il vient :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - R_e = 0 \quad (1,2,2)$$

Nous supposons que l'écoulement est peu influencé par la pression hydrostatique (partie sphérique du tenseur des contraintes) .

Il vient donc :

$$f(s_1, s_2, s_3) - R_e = 0 \quad (1,2,3)$$

$s_1, s_2, s_3$  sont les composantes du déviateur des contraintes.

La relation (1,2,2) définit la surface d'écoulement  $\Sigma$  dans le système d'axes  $(O\sigma_1, O\sigma_2, O\sigma_3)$  .

Cette surface  $\Sigma$  est une surface cylindrique ayant pour axe  $\Delta$  la trissectrice des axes  $O\sigma_1, O\sigma_2$  et  $O\sigma_3$  (Figure 1,2,1) .

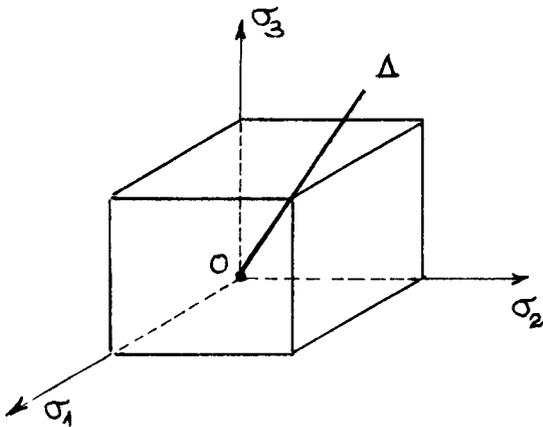


Figure 1,2,1

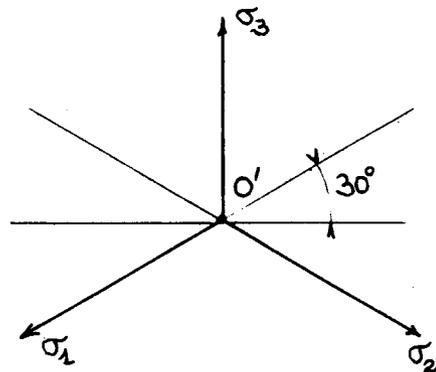


Figure 1,2,2

Il suffit donc de déterminer la trace de la surface d'écoulement dans le plan perpendiculaire à l'axe  $\Delta$  (Figure 1,2,2) .

La trace est symétrique par rapport aux axes  $O'\sigma_1$ ,  $O'\sigma_2$  et  $O'\sigma_3$  pour le matériau isotrope (2) .

La trace est aussi symétrique par rapport aux normales à ces axes pour le matériau sous effet *BAUSCHINGER* (2) . Il suffit de la définir dans un secteur de  $30^\circ$  (Figure 1,2,2) .

### 1,2,2. Critère de *MISES*.

D'après *MISES*, l'écoulement se produit lorsque l'énergie de distorsion ou la contrainte tangentielle octaédrique atteint une certaine valeur caractéristique du matériau.

Son expression est :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 R_e^2 = 6 k^2 \quad (1,2,4)$$

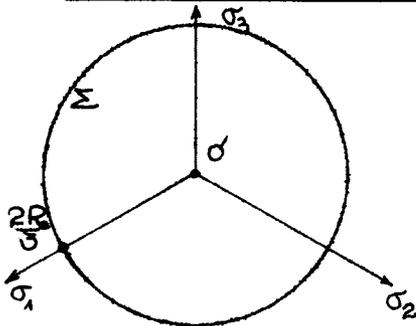


Figure 1,2,3

$R_e$  est la contrainte d'écoulement en traction pure et  $k$  la contrainte d'écoulement en cisaillement pur.

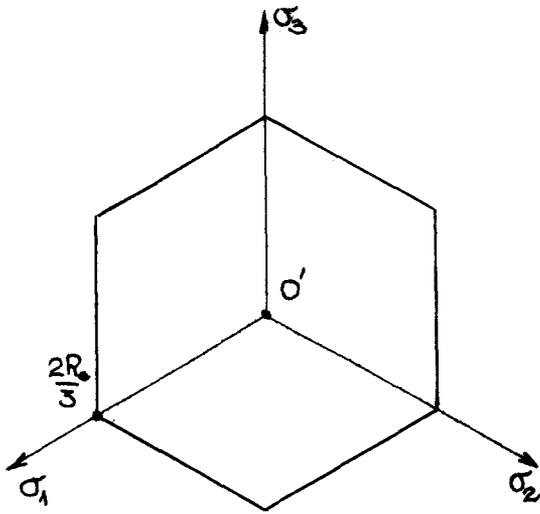
Sa représentation est celle de la figure (1,2,3) .

### 1,2,3. Critère de *TRESCA*.

Le seuil d'écoulement est atteint lorsque la contrainte tangentielle a une valeur caractéristique du matériau.

Le critère s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm R_e = \pm 2k \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm R_e = \pm 2k \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \pm R_e = \pm 2k \end{aligned} \quad (1,2,5)$$



Sa représentation est celle de la figure (1,2,4) .

Figure 1,2,4

Dans l'étude qui suit, nous admettons le critère de *TRESCA* bien vérifié pour les matériaux recuits avec écrouissage faible (2) . Ceci correspond aux conditions expérimentales exposées au chapitre IV.

### 1,3. LOIS D'ÉCOULEMENT.

#### 1,3,1. Le potentiel plastique.

Après l'écoulement, les déformations ne sont plus réversibles. A un état de contraintes  $\sigma_{ij}$  correspondent plusieurs états de déformation.

Lorsque l'écoulement se produit, le critère s'écrit :

$$f(\sigma_{ij}) - R_e = 0 \quad \text{et} \quad df(\sigma_{ij}) = 0 \quad (1,3,1)$$

l'écroutissage étant négligé.

Soient  $d\epsilon_{ij}$  les vitesses de déformation. Si l'on représente dans le même repère les contraintes et les vitesses de déformation, le vecteur de composantes  $d\epsilon_{ij}$  est normal au plan tangent, au point P  $(\sigma_{ij})$  à la surface d'écoulement  $\Sigma$ .

En effet

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} d\sigma_3 = 0$$

Il vient :

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1,3,2)$$

La relation (1,3,2) est la traduction de la loi du potentiel plastique.

En tenant compte du critère de *MISES* (1,2,4) , il vient :

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda' s_{ij} \quad (1,3,3)$$

$s_{ij}$  sont les termes du déviateur des contraintes.

#### 1,3,2. Théorème de la puissance maximale.

La puissance dissipée par unité de volume s'écrit :

$$dW^o = \sigma_1 d\epsilon_1 + \sigma_2 d\epsilon_2 + \sigma_3 d\epsilon_3 \quad (1,3,4)$$

A un champ de vitesse correspond une puissance dissipée unique.

Considérons un autre champ de contraintes  $\sigma_1^*$  ,  $\sigma_2^*$  ,  $\sigma_3^*$  .

$$f(\sigma_1^*) - R_e \leq 0 .$$

La puissance dissipée est :

$$dW^* = \sigma_1^* d\varepsilon_1 + \sigma_2^* d\varepsilon_2 + \sigma_3^* d\varepsilon_3$$

Il vient :

$$\boxed{\sigma_i^* d\varepsilon_i \leq \sigma_i d\varepsilon_i} \quad (1,3,5)$$

La puissance dissipée est maximale pour l'état réel des contraintes.

La surface d'écoulement  $\Sigma$  est nécessairement convexe.

## 1,4. METHODES EXTREMALES.

## 1,4,1. Théorème statique. - Borne inférieure.

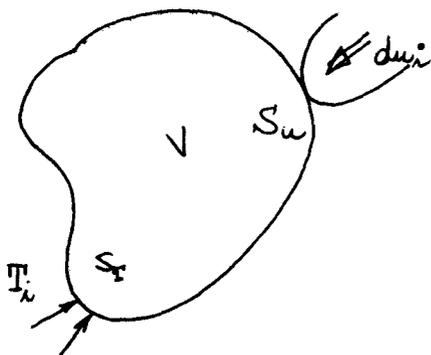


Figure 1,4,1

Considérons un corps rigide plastique parfait de volume  $V$ , délimité par une surface  $S$  (Figure 1,4,1).

Les contraintes  $T_i$  et les déplacements  $du_i$  sont définis sur  $S$ .

Soit  $\sigma_{ij}$  le champ de contraintes exact, satisfaisant les conditions sur  $S_T$ , les conditions d'équilibre et ne violant pas le critère de plasticité (1,2,2).

Le théorème des travaux virtuels s'écrit :

$$\iint_S T_i du_i dS = \iiint_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV$$

ou équivalentement avec

$$S = S_U + S_T$$

$$\iint_{S_U} T_i du_i dS + \iint_{S_T} T_i du_i dS = \iiint_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV \quad (1,4,1)$$

Soit  $\sigma_{ij}^*$  un champ de contraintes admissibles, satisfaisant les conditions sur  $S$ , les conditions d'équilibre et ne violant pas le critère de plasticité. En considérant des contraintes fictives  $T_i^*$  le long de la surface avec les mêmes déplacements réels  $du_i$ , il vient :

$$\iint_{S_U} T_i^* du_i dS + \iint_{S_T} T_i^* du_i dS = \iiint_V \sigma_{ij}^* d\epsilon_{ij} dV \quad (1,4,2)$$

or sur  $S_T$  :

$$T_i^* = T_i.$$

Par différence des expressions, il vient :

$$\iint_{S_U} (T_i - T_i^*) du_i dS = \iiint_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\epsilon_{ij} dV$$

D'après (1,1,10) :

$$\boxed{\iint_{S_U} (T_i - T_i^*) du_i dS \geq 0} \quad (1,4,3)$$

La valeur réelle du champ des contraintes est la valeur maximale des champs de contraintes statiquement admissibles.

#### 1,4,2. Théorème cinématique.

Pour le champ de contraintes exacts, nous avons toujours :

$$\iint_{S_U} T_i du_i dS + \iint_{S_T} T_i du_i dS = \iiint_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV$$

Soit  $du_i^*$  un écoulement fictif. Il vient :

$$\iint_{S_U} T_i du_i^* dS + \iint_{S_T} T_i du_i^* dS = \iiint_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^* dV \quad (1,4,4)$$

or sur  $S_U$  :

$$du_i^* = du_i .$$

Soit :

$$\iint_{S_U} T_i du_i dS = \iiint_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^* dV - \iint_{S_T} T_i du_i^* dS$$

D'après le théorème du travail maximum (1,3,5) :

$$\iint_{S_U} T_i du_i dS \leq \iiint_V \sigma_{ij}^* d\epsilon_{ij}^* dV - \iint_{S_T} T_i du_i^* dS$$

$d\epsilon_{ij}^*$  est lié à  $\sigma_{ij}^*$  par la loi d'écoulement. En tenant compte de la relation (1,4,4) , il vient :

$$\iiint_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV - \iint_{S_T} T_i du_i dS \leq \iiint_V \sigma_{ij}^* d\epsilon_{ij}^* dV - \iint_{S_T} T_i du_i^* dS \quad (1,4,5)$$

1.5. APPLICATION DES METHODES EXTREMALES.1.5.1. Champs cinématiquement admissibles par lignes de glissement.1.5.1.1. Les contraintes.

Nous considérons le corps rigide plastique parfait (1,1,2) obéissant au critère de *TRESCA* (1,2,3) en état plan de déformation.

En état plan de déformation les critères de *TRESCA* et de *MISES* (1,2,3) sont identiques.

Si  $\sigma_3$  est nul, ces critères s'expriment comme suit :

$$\boxed{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 4 k^2} \quad (1,5,1)$$

La contrainte  $\sigma_3$  est la contrainte intermédiaire entre  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

Le critère peut encore s'écrire :

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2 = 4 k^2 \quad (1,5,2)$$

Les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  doivent vérifier les équations d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1,5,3)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

Le critère est satisfait pour les valeurs de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  suivantes :

$$\sigma_x = -p - k \sin 2\phi$$

$$\sigma_y = -p + k \sin 2\phi \quad (1,5,4)$$

$$\tau_{xy} = k \cos 2\phi$$

$\phi + \frac{\pi}{4}$  est défini par l'angle  $(x, \sigma_1)$  (Figure 1,5,1) et  $-p = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y)$

(Figure 1,5,2).

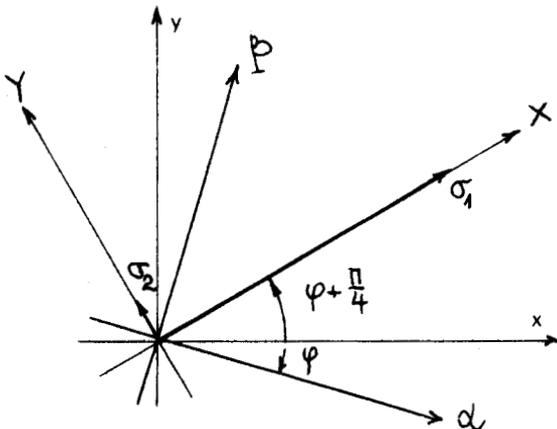


Figure 1,5,1

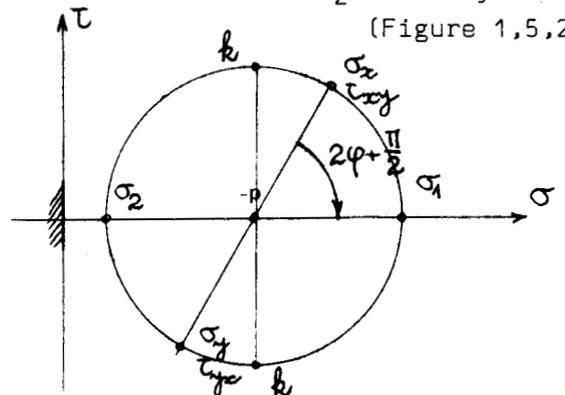


Figure 1,5,2

Compte tenu de (1,1,19), les relations (1,1,18) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial p}{\partial x} - 2k \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} - 2k \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 \\
 -\frac{\partial p}{\partial y} - 2k \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2k \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1,5,5}$$

Nous obtenons des équations aux dérivées partielles du premier ordre, de type hyperbolique, où les inconnues sont  $p(x, y)$  et  $\phi(x, y)$ .

Dans les directions caractéristiques  $\alpha$  et  $\beta$ , le système (1,5,5) se réduit à une équation différentielle ordinaire :

$dp + 2k d\phi = 0 \quad \text{sur} \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \phi$	(1,5,6)
$dp - 2k d\phi = 0 \quad \text{sur} \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\phi + \frac{\pi}{2})$	

et

Ce sont les relations de *HENCKY*.

### 1,5,1,2. Les vitesses.

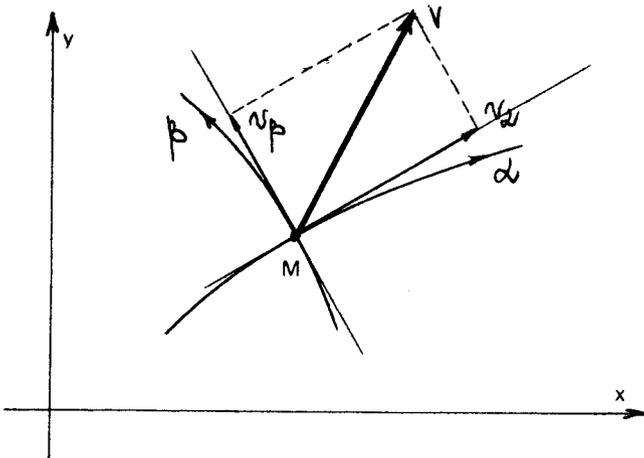


Figure 1,5,3

Soient  $v_\alpha$  et  $v_\beta$  les composantes selon les tangentes en M aux lignes caractéristiques  $\alpha$  et  $\beta$  du vecteur vitesse  $\vec{V}$  du matériau en ce point (Figure 1,5,3).

Selon ces directions, le tenseur des contraintes se réduit à :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p & k \\ k & -p \end{bmatrix}$$

Les vitesses de déformation  $d\epsilon_x$  et  $d\epsilon_y$  sont donc nulles selon  $\alpha$  et  $\beta$ .

Exprimons cette propriété en évaluant  $d\epsilon_x$  et  $d\epsilon_y$  en fonction de  $v_\alpha$  et  $v_\beta$ . Il vient :

$$\begin{aligned}
 d\epsilon_x &= \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} - v_\beta \frac{\partial \phi}{\partial s_\alpha} = 0 \\
 d\epsilon_y &= \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta} + v_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial s_\beta} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1,5,7}$$

Les équations (1,5,7) peuvent aussi s'écrire sous la forme :

$dv_\alpha - v_\beta d\phi = 0$ le long de $\alpha$	(1,5,8)
$dv_\beta + v_\alpha d\phi = 0$ le long de $\beta$	

Ce sont les relations de *GEIRINGER* (19).

La distorsion  $d\epsilon_{x',y'}$  doit être positive. La condition est la suivante :

$d\epsilon_{x',y'} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} - v_\beta \frac{\partial \phi}{\partial s_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} + v_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial s_\alpha} \right) \geq 0$	(1,5,9)
---	---------

### 1.5.1.3. Utilisation.

Les réseaux caractéristiques ont trouvé de très nombreuses applications notamment dans les problèmes industriels de filage, extrusion et forgeage (13) .

Lorsque les conditions cinématiques sont vérifiées, les efforts  $P^*$ , transmis par le réseau des caractéristiques, sont supérieurs aux efforts réels  $P$  (1,4,2) .

### 1.5.2. Champs statiquement admissibles par blocs.

Un champ de contraintes  $\sigma_{ij}^*$  statiquement admissible doit vérifier en tout point du matériau les équations de compatibilité statique

$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} = 0$
---

à l'intérieur du matériau et aux frontières.

De plus, le champ doit vérifier le critère de plasticité (relation 1,2,1)

$f(\sigma_{ij}^*) - R_e \leq 0$
---------------------------------

Le champ peut être composé de blocs séparés par des lignes de discontinuité. Les conditions d'équilibre sont à vérifier le long de ces lignes.

La contrainte normale et la contrainte tangentielle à une facette tangente à la ligne doivent être identiques de part et d'autre de la ligne de discontinuité (2) .

Les efforts  $P^*$ , calculés à partir d'un tel champ (continu ou par blocs), sont inférieurs aux efforts  $P$  réels (1,4,1).

Ces champs sont de ce fait moins utilisés dans la pratique.

1,6. CONCLUSION.

Nous appliquons dans ce qui suit les méthodes extrêmes à l'étude du comportement limite des plaques rectangulaires fléchies obéissant au critère de *TRESCA*.

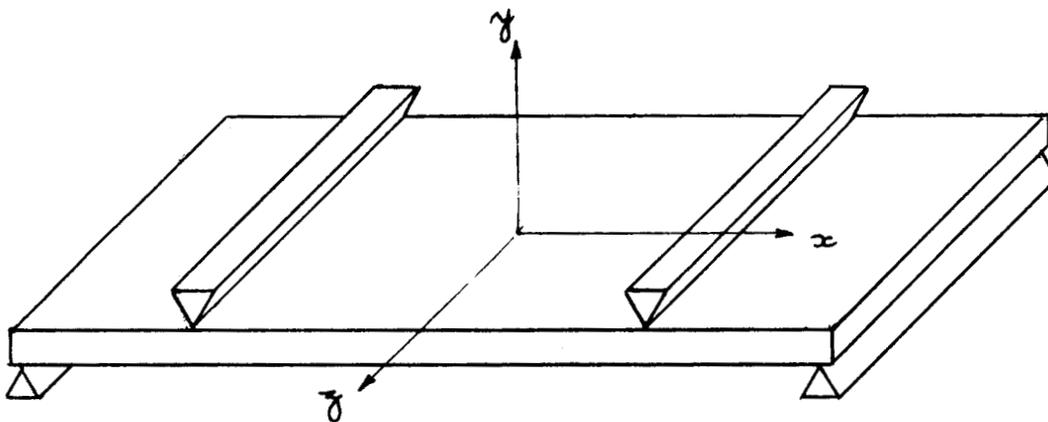


Figure 1,6,1

Le cas de charge est représenté à la figure 1,6,1.

Nous étudierons successivement des champs cinématiques admissibles (chapitre II) et des champs statiquement admissibles (chapitre III) .

II

LES CHAMPS CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLES.

## 2.1. INTRODUCTION.

L'étude suivante propose deux champs cinématiquement admissibles de comportement limite des plaques fléchies.

Les champs sont constitués par des réseaux de lignes de glissement (1,5,1) . Après la définition géométrique des réseaux, nous étudions la répartition des pressions,  $p$  , puis celle des vitesses,  $v_\alpha$  et  $v_\beta$  , et enfin nous évaluons les efforts  $P^*$  et les moments  $M^*$  transmis par les réseaux.

Nous traçons à partir de ces valeurs les courbes d'interaction ( $P^*$ ,  $M^*$ ) propres à chaque réseau.

## 2,2. CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE SYMETRIQUE.

### 2,2,1. Introduction.

Nous considérons un réseau de lignes de glissement du type symétrique par rapport au plan moyen de la plaque d'après *GREEN* (20) et *SHIELD* (37) .

### 2,2,2. Description générale du réseau.

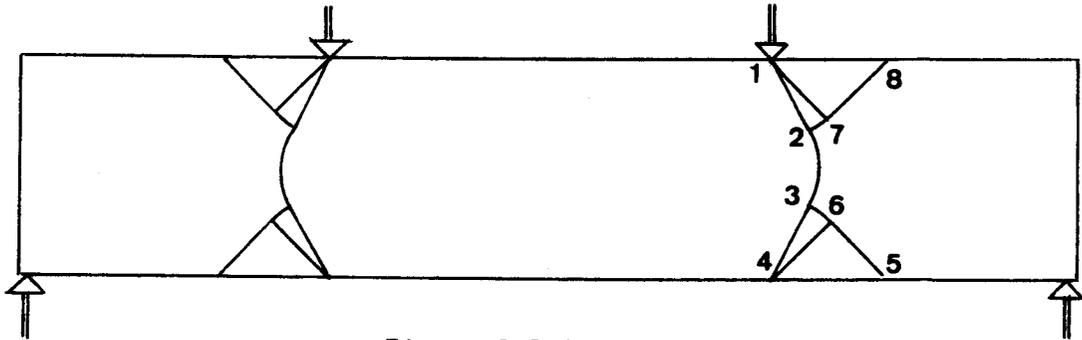


Figure 2,2,1

Le réseau proposé comprend deux champs homogènes 1,7,8 et 4,6,5 , deux champs semi-homogènes 1,2,7 et 3,4,6 et une ligne circulaire 2,3 .  
(Figure 2,2,1)

Ce réseau peut prendre les quatre formes suivantes :

Réseau N° 1 : deux champs homogènes (Figure 2,2,2)

Réseau N° 2 : deux champs homogènes et deux champs semi-homogènes (Fig.2,2,3)

Réseau N° 3 : deux champs homogènes, deux champs semi-homogènes et  
une ligne circulaire (Figure 2,2,4)

Réseau N° 4 : une ligne circulaire (Figure 2,2,5)

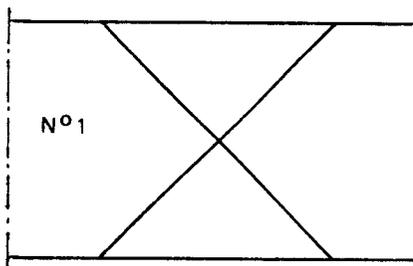


Figure 2,2,2

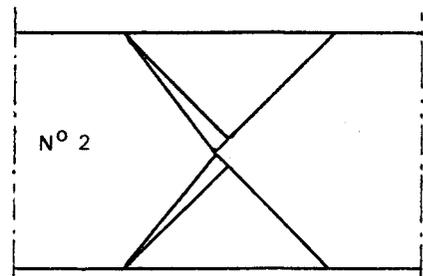


Figure 2,2,3

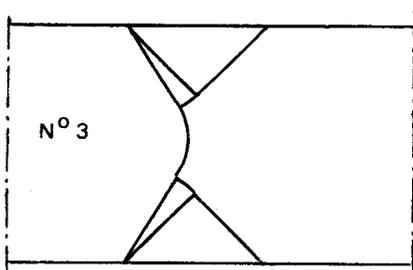


Figure 2,2,4

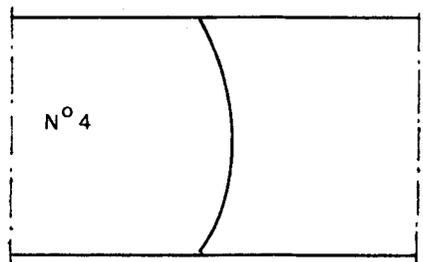


Figure 2,2,5

Nous commençons par l'étude du réseau N° 3 qui est le plus général ; les autres réseaux sont des cas particuliers du réseau N° 3.

### 2,2,3. Etude du réseau N° 3.

#### 2,2,3,1. Détermination des pressions.

Soit le réseau de lignes de glissement de la figure (2,2,5) .

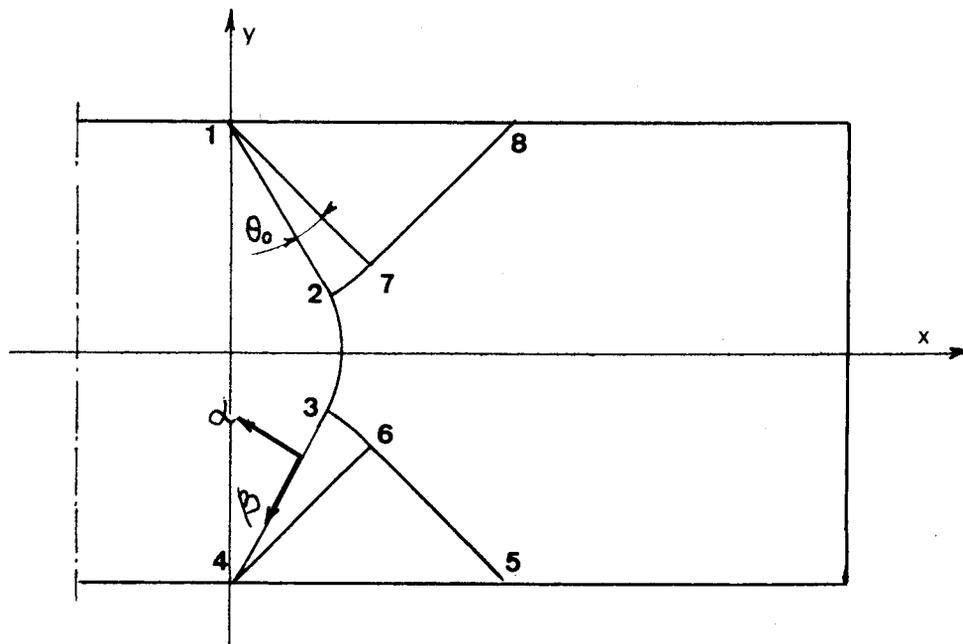


Figure 2,2,5

Les lignes  $\alpha$  et  $\beta$  sont dirigées comme indiquées sur cette figure.

L'angle entre le bord libre et les lignes  $\alpha$ ,  $\beta$  du champ homogène 1,7,8 est de  $\pi/4$  (de même pour le champ 4,5,6 par raison de symétrie par rapport au plan moyen de la plaque) .

En 8, les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  satisfont à la condition à la limite

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -p + k = 0 \\ \sigma_2 &= -p - k = -2k\end{aligned}$$

D'où

$$p_8 = k$$

(2,2,1)

$$p_7 = k$$

la ligne  $\alpha$  1,7 est rectiligne.

La pression en 2 est donnée par la relation

$$p_2 - p_7 = -2k(\phi_2 - \phi_7) \quad (\text{Figure 2,2,5})$$

$$p_2 - k = -2k\left(-\frac{3\pi}{4} - \theta_0 + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$p_2 = k(1 + 2\theta_0) \quad (2,2,2)$$

et, par symétrie, nous avons :

$$p_5 = p_6 = -k \quad (2,2,3)$$

$$p_3 = -k(1 + 2\theta_0) \quad (2,2,4)$$

La pression au point 0 doit être nulle pour raison de symétrie. Il vient :

$$p_2 - p_0 = 2k(\phi_2 - \phi_0)$$

$$p_2 = k(1 + 2\theta_0) = 2k\left(-\frac{3\pi}{4} - \theta + \pi\right)$$

D'où

$$\theta_0 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \quad (2,2,5)$$

Cette valeur définit l'angle des champs semi-homogènes 1,2,7 et 3,4,6.

### 2,2,3,2. Détermination des vitesses.

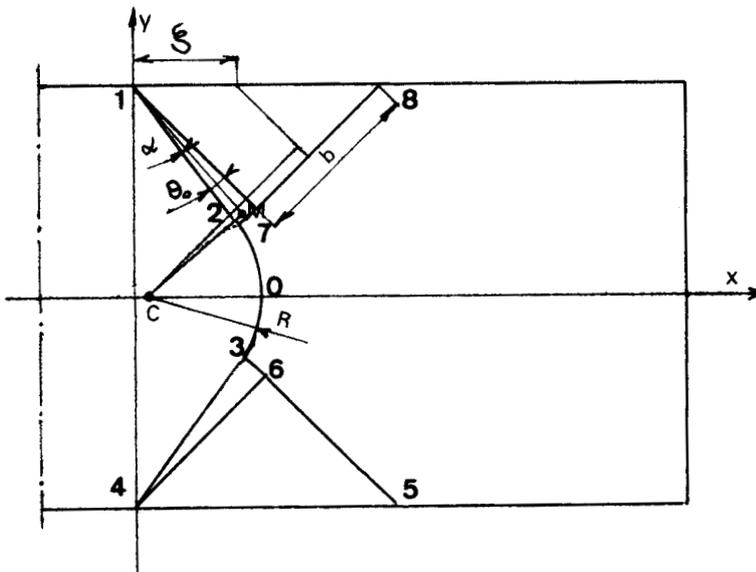


Figure 2,2,6

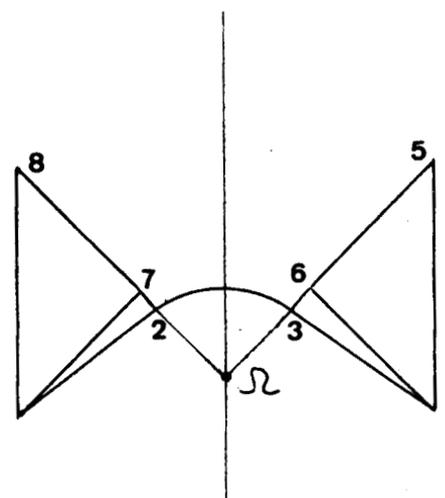


Figure 2,2,7

Considérons la figure 2,2,6.

Le bloc situé à gauche de la ligne de glissement 1,2,3,4 reste rigide ; les vitesses sont nulles partout. La ligne 1,2,3,4 est donc une ligne de discontinuité de vitesses.

La composante de vitesse  $v_\alpha$  est continue au travers de 1,2,3,4.

Donc

$$v_\alpha = 0 \quad \text{le long de 1,2,3,4} \quad (2,2,6)$$

Or le long d'une ligne  $\beta$

$$dv_\beta + v_\alpha d\phi = 0 .$$

La vitesse  $v_\beta$  est donc constante le long de 1,2,3,4. Nous posons :

$$v_\beta = - R \quad \text{le long de 1,2,3,4} \quad (2,2,7)$$

La vitesse le long d'une ligne  $\beta$  dans le champ semi-homogène 1,2,7 est donnée par la longueur  $CM$ , perpendiculaire abaissée de  $C$  sur une ligne  $\beta$ .

Soit  $\alpha$  l'angle entre la ligne considérée et la ligne 1,2 ; soit  $b$  la longueur 12. (Figure 2,2,6)

Il vient :

$$v_\beta = - R \cos \alpha - b \sin \alpha \quad \text{dans 1,2,6} \quad (2,2,8)$$

La vitesse  $v_\alpha$  est donnée par :

$$dv_\alpha - v_\beta d\phi = 0$$

$$dv_\alpha = - (R \cos \alpha + b \sin \alpha) d\phi$$

soit

$$v_\alpha = - R \sin \alpha - b \cos \alpha + b \quad (2,2,9)$$

Dans le champ 1,7,8, les vitesses  $v_\alpha$  et  $v_\beta$  le long de chaque ligne  $\alpha$  et  $\beta$  sont constantes.

Il vient (Figure 2,2,6) :

$$v_\beta = - R \cos \theta_0 - b \sin \theta_0 + \frac{\zeta}{\sqrt{2}} \quad \text{dans 1,7,8} \quad (2,2,10)$$

$$v_\alpha = - R \sin \theta_0 - b \cos \theta_0 + b \quad \text{dans 1,7,8} \quad (2,2,11)$$

Les vitesses dans les autres champs sont déduites des précédentes par symétrie.

L'hodographe correspondant est représenté à la figure (2,2,7) .

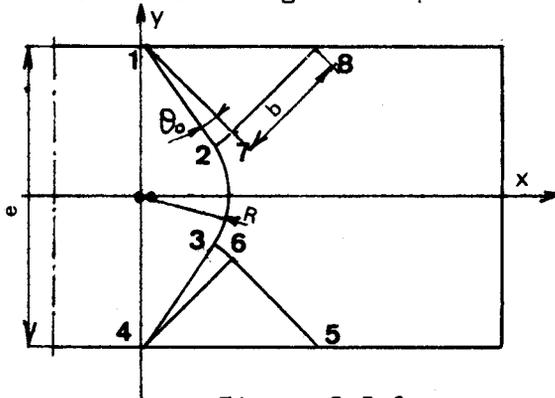
La puissance dissipée est partout positive ou nulle, la relation de *GEIRINGER* suivante est vérifiée dans tous les champs.

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} - v_\beta \frac{\partial \phi}{\partial s_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} + v_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial s_\alpha} \geq 0 \quad (2,2,12)$$

### 2,2,3,3. Conditions géométriques.

Considérons la figure (2,2,8).

La condition géométrique s'écrit :



$$R \cos \left( \frac{\pi}{4} + \theta_0 \right) = \frac{e}{2} - b \sin \left( \frac{\pi}{4} + \theta_0 \right) \quad (2,2,13)$$

Figure 2,2,8

### 2,2,3,4. Efforts transmis par le réseau.

Evaluons les efforts transmis par la ligne 1,2,3,4. (Figure 2,2,9)

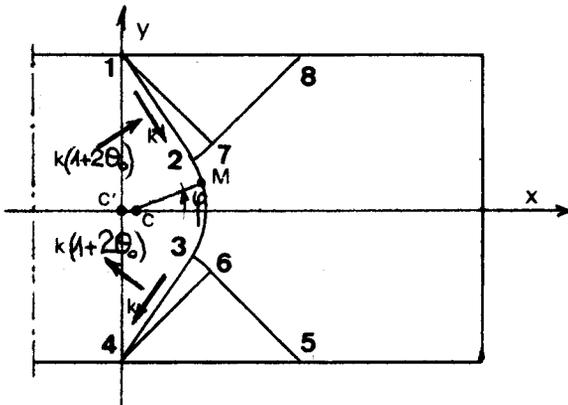


Figure 2,2,9

Par raison de symétrie par rapport à l'axe  $x$ , la résultante des efforts horizontaux est nulle.

$$\Sigma X_i = 0 \quad (2,2,14)$$

le long de 1,2,3,4.

Les efforts verticaux sont :  
pour la ligne 12 :

$$Y_1 = -kb \sin \left( \frac{\pi}{4} + \theta_0 \right) + kb (1 + 2\theta_0) \cos \left( \frac{\pi}{4} + \theta_0 \right)$$

$$Y_1 = kb \left\{ (1 + 2\theta_0) \cos \left( \frac{\pi}{4} + \theta_0 \right) - \sin \left( \frac{\pi}{4} + \theta_0 \right) \right\} \quad (2,2,15)$$

pour la ligne 23 :

$$dY_2 = -k R d\phi \sin \phi + p R d\phi \cos \phi$$

avec la pression  $p$  en un point de la ligne

$$p = 2k \phi \quad (2,2,16)$$

$$\text{il vient : } Y_2 = k R \left\{ \cos \left( \frac{\pi}{4} + \theta_0 \right) - (1 + 2\theta_0) \sin \left( \frac{\pi}{4} + \theta \right) \right\} \quad (2,2,17)$$

L'effort tranchant  $-P$  par unité de largeur de plaque vaut donc :

$$-P = 2(Y_1 + Y_2)$$

Compte tenu des relations (2,2,13) , (2,2,15) et (2,2,17) , il vient :

$$P = ke \left\{ (1 + 2\theta_0) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \theta_0 \right) - 1 \right\} - kb \left[ \frac{2(1 + 2\theta_0)}{\cos \left( \frac{\pi}{4} + \theta_0 \right)} - 4 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \theta_0 \right) \right]$$

soit :

$$\frac{P}{ke} = \left[ (1 + 2\theta_0) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \theta_0 \right) - 1 \right] - \frac{b}{e} \left[ \frac{2(1 + 2\theta_0)}{\cos \left( \frac{\pi}{4} + \theta_0 \right)} - 4 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \theta_0 \right) \right] \quad (2,2,18)$$

### 2,2,3,5. Moment transmis par le réseau.

Nous calculons le moment par rapport au point  $C'$  (Figure 2,2,9) .

Le long de 1,2, nous avons en posant  $\psi = \frac{\pi}{4} - \theta_0$

$$M_1 = kb(R - CC' \cos \psi) + 2k \psi b(CC' \sin \psi + \frac{b}{2})$$

$$M_1 = kb(R - R \cos^2 \psi + b \sin \psi \cos \psi) + 2 kb \psi (R \sin \psi \cos \psi - b \sin^2 \psi + \frac{b}{2})$$

Compte tenu de l'expression (2,2,13) qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} R \sin \psi &= \frac{e}{2} - b \sin \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) \\ R &= \frac{\frac{e}{2} - b \cos \psi}{\sin \psi} \end{aligned} \quad (2,2,19)$$

Il vient :

$$\frac{4M_1}{ke^2} = \frac{2b}{e} \left[ \left( \frac{1}{\sin \psi} - \frac{2b}{e} \cotg \psi \right) (1 - \cos^2 \psi + 2\psi \sin \psi \cos \psi) \right] + \frac{2b}{e} \left[ \frac{2b}{e} \sin \psi \cos \psi + \frac{2b}{e} \psi (1 - 2 \sin^2 \psi) \right] \quad (2,2,20)$$

Le long de 2,3 (pour la moitié située au-dessus de l'axe x), nous avons :

$$dM_2 = k R d\phi (R - CC' \cos \phi) + 2k \phi R d\phi CC' \sin \phi$$

$$M_2 = \int_0^\psi k R \{ R - (R \cos \psi - b \sin \psi) \cos \phi \} d\phi + \int_0^\psi 2k R \phi \{ R \sin \phi \cos \psi - b \sin \phi \sin \psi \} d\phi$$

$$M_2 = k R^2 (\psi + \sin \psi \cos \psi - 2\psi \cos^2 \psi) + k R b (-\sin^2 \psi + 2\psi \sin \psi \cos \psi)$$

Compte tenu de (2,2,19), l'expression se met sous la forme :

$$\frac{4M_2}{ke^2} = \frac{4b^2}{e^2} (-\psi \cotg^2 \psi + \cotg \psi) - \frac{b}{e} \left\{ \left( \psi - \frac{1}{\sin^2 \psi} \right) \psi \cos \psi + \frac{1}{\sin \psi} - \frac{\sin \psi}{2} \right\} + \frac{\psi}{\sin^2 \psi} + \cotg \psi (1 - 2\psi \cotg \psi) \quad (2,2,21)$$

Le moment total a pour valeur :

$$2M = 4M_1 + 4M_2$$

à cause de la symétrie du réseau.

Il vient d'après les expressions (2,2,20) et (2,2,21) :

$$\frac{2M}{ke^2} = \left( \frac{4b^2}{e^2} - \frac{b}{e} \cos \psi \right) (\cotg \psi - \frac{\psi}{\sin^2 \psi}) + \frac{\psi}{\sin^2 \psi} + \cotg \psi (1 - 2\psi \cotg \psi) \quad (2,2,22)$$

### 2,2,3,6. Limites du réseau N° 3.

Le réseau N° 3 évolue vers le réseau N° 2 (Figure 2,2,3) lorsque la ligne circulaire 2,3 disparaît. La condition est :

$$b = \frac{e}{2 \sin(\frac{\pi}{4} + \theta_0)} ; \quad R = 0 \quad (2,2,23)$$

Reportons cette condition dans les expressions (2,2,18) , (2,2,22) et, avec (2,2,5)

$$\theta_0 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} ,$$

il vient :

$$\boxed{\frac{P}{ke} = 0,03756} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{2M}{ke^2} = 1,03113}$$

Lorsque les champs homogènes 1,7,8 et 4,5,6 disparaissent, le réseau se réduit à la ligne circulaire du N° 4.

Les valeurs correspondantes de  $\frac{P}{ke}$  et de  $\frac{2M}{ke^2}$  sont obtenues pour  $\frac{b}{e}$  nul.

$$\text{Soit} \quad \boxed{\frac{P}{ke} = 0,71763} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{2M}{ke^2} = 0,83065}$$

Les limites du réseau sont donc :

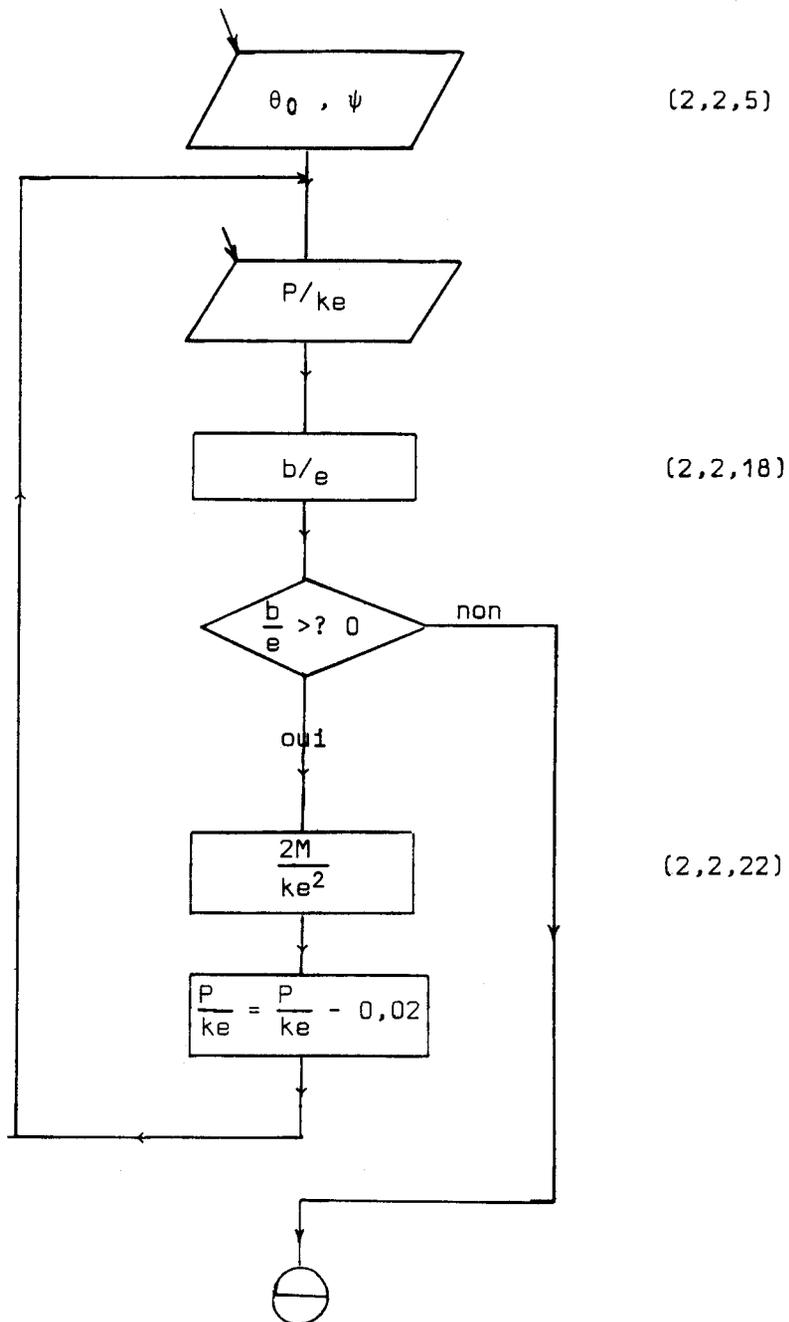
$$\boxed{0,03756 \leq \frac{P}{ke} \leq 0,71763} \quad (2,2,24)$$

$$\boxed{1,03113 \geq \frac{2M}{ke^2} \geq 0,83065} \quad (2,2,25)$$

### 2,2,3,7. Courbe d'interaction.

Les valeurs de  $P/ke$  et de  $2M/ke^2$  du réseau N° 3 sont calculées selon l'ordinogramme suivant et reportées dans le tableau (2,2,1) . La courbe d'interaction est tracée à la figure (2,2,10) . Un réseau N° 3 est représenté à la figure (2,2,11) .

## RESEAU N° 3.



CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE SYMETRIQUE - RESAU N° 3

$\frac{b}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{a}{e}$	$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$
0.62463	0.00000	13.72730	0.03756	1.03119
0.60399	0.02756	8.72684	0.06	1.04722
0.56720	0.07569	5.35977	0.10	1.07195
0.53041	0.12583	3.89921	0.14	1.09178
0.49362	0.17496	3.07415	0.18	1.10669
0.45683	0.22410	2.53795	0.22	1.11670
0.42005	0.27322	2.15729	0.26	1.12179
0.38326	0.32236	1.86996	0.30	1.12198
0.34647	0.37149	1.64301	0.34	1.11725
0.30968	0.42063	1.45739	0.38	1.10761
0.27290	0.46975	1.30127	0.42	1.09307
0.23611	0.51889	1.16697	0.46	1.07361
0.19932	0.56802	1.04925	0.50	1.04925
0.16253	0.61716	0.94442	0.54	1.01997
0.12575	0.66628	0.84982	0.58	0.98578
0.08896	0.71541	0.76346	0.62	0.94669
0.05214	0.76459	0.68386	0.66	0.90268
0.00000	0.83535	0.57874	0.71763	0.83065

Tableau 2,2,1



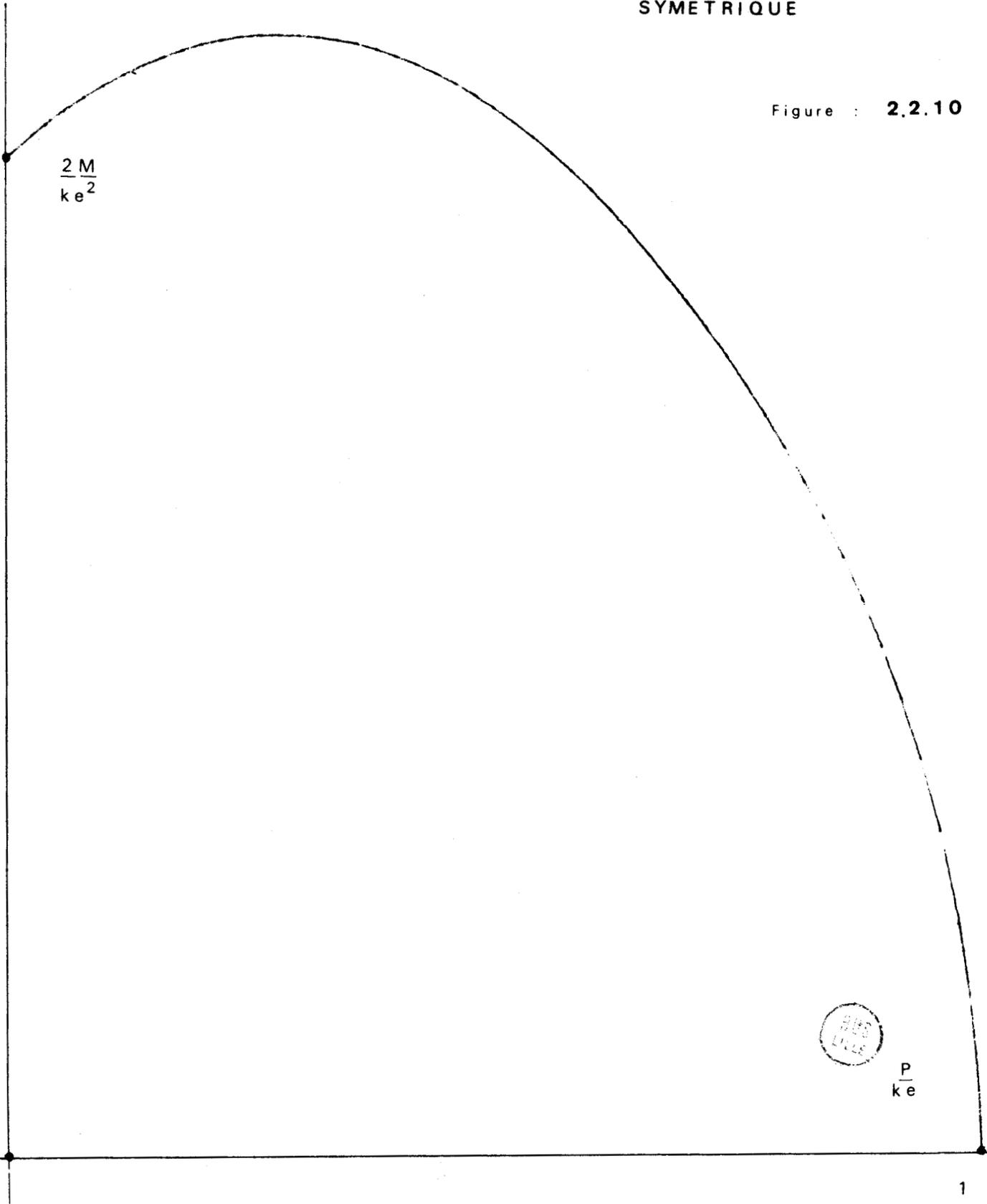
CHAMP

2.2.10 bis

CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE

SYMETRIQUE

Figure : 2.2.10



CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE SYMETRIQUE - RESEAU N° 3.

$\frac{P}{ke} = 0,25$	$\frac{2M}{ke^2} = 1,121$	$\frac{a}{e} = 2,15$	$\frac{b}{e} = 0,42$	$\frac{R}{e} = 0,27$
-----------------------	---------------------------	----------------------	----------------------	----------------------

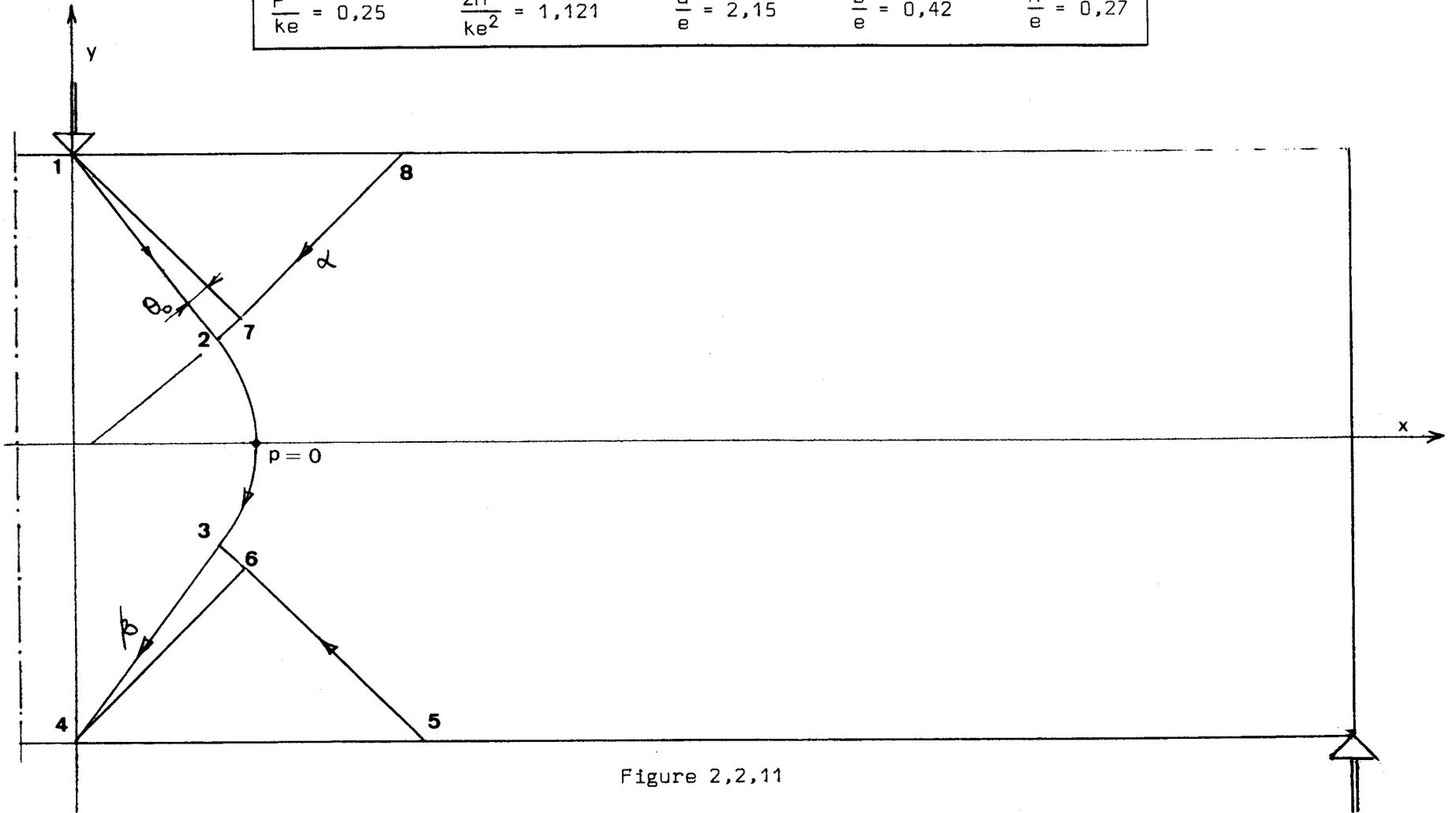


Figure 2,2,11



2,2,4. Etude du réseau N° 4.

Ce réseau se réduit à une ligne circulaire (Figure 2,2,5) .

L'effort  $P$  et le moment  $M$ , transmis par la ligne, sont déduits des relations (2,2,18) et (2,2,20) en posant  $b/e = 0$  .

Soit

$$\frac{P}{ke} = (1 + 2\theta_0) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{8} + \theta_0 \right)$$

ou

$$\boxed{\frac{P}{ke} = 2\psi \cot \psi - 1} \quad (2,2,26)$$

et

$$\boxed{\frac{2M}{ke^2} = \frac{\psi}{\sin^2 \psi} + \cotg \psi (1 - 2\psi \cotg \psi)} \quad (2,2,27)$$

L'angle  $\psi$  est maintenant variable de  $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$  jusqu'à zéro.

Les limites de ce réseau sont :

$$\boxed{\begin{aligned} 0,71763 &\leq \frac{P}{ke} < 1 \\ 0,83065 &\geq \frac{2M}{ke^2} > 0 \end{aligned}} \quad (2,2,28)$$

Les valeurs correspondantes sont dans le tableau (2,2,2), la courbe d'interaction est reportée sur la figure (2,2,10), un réseau est représenté à la figure (2,2,14) .

CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE SYMETRIQUE - RESEAU N° 4.

$\frac{R}{e}$	$\frac{a}{e}$	$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$
0.83535	0.57874	0.71763	0.83065
0.83829	0.57463	0.72829	0.82746
0.89491	0.50720	0.76	0.77095
0.96888	0.44263	0.80	0.70820
1.07060	0.37937	0.84	0.63735
1.22619	0.31555	0.88	0.55537
1.47894	0.24789	0.92	0.45613
2.06815	0.16889	0.96	0.32427
2.91065	0.11721	0.98	0.22973
4.11446	0.08195	0.99	0.16227
12.32925	0.02707	0.999	0.05908

Tableau 2,2,2



CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE SYMETRIQUE - RESEAU N° 4.

$\frac{P}{ke} = 0,76$	$\frac{2M}{ke^2} = 0,77$	$\frac{a}{e} = 0,50$	$\frac{R}{e} = 0,89$
-----------------------	--------------------------	----------------------	----------------------

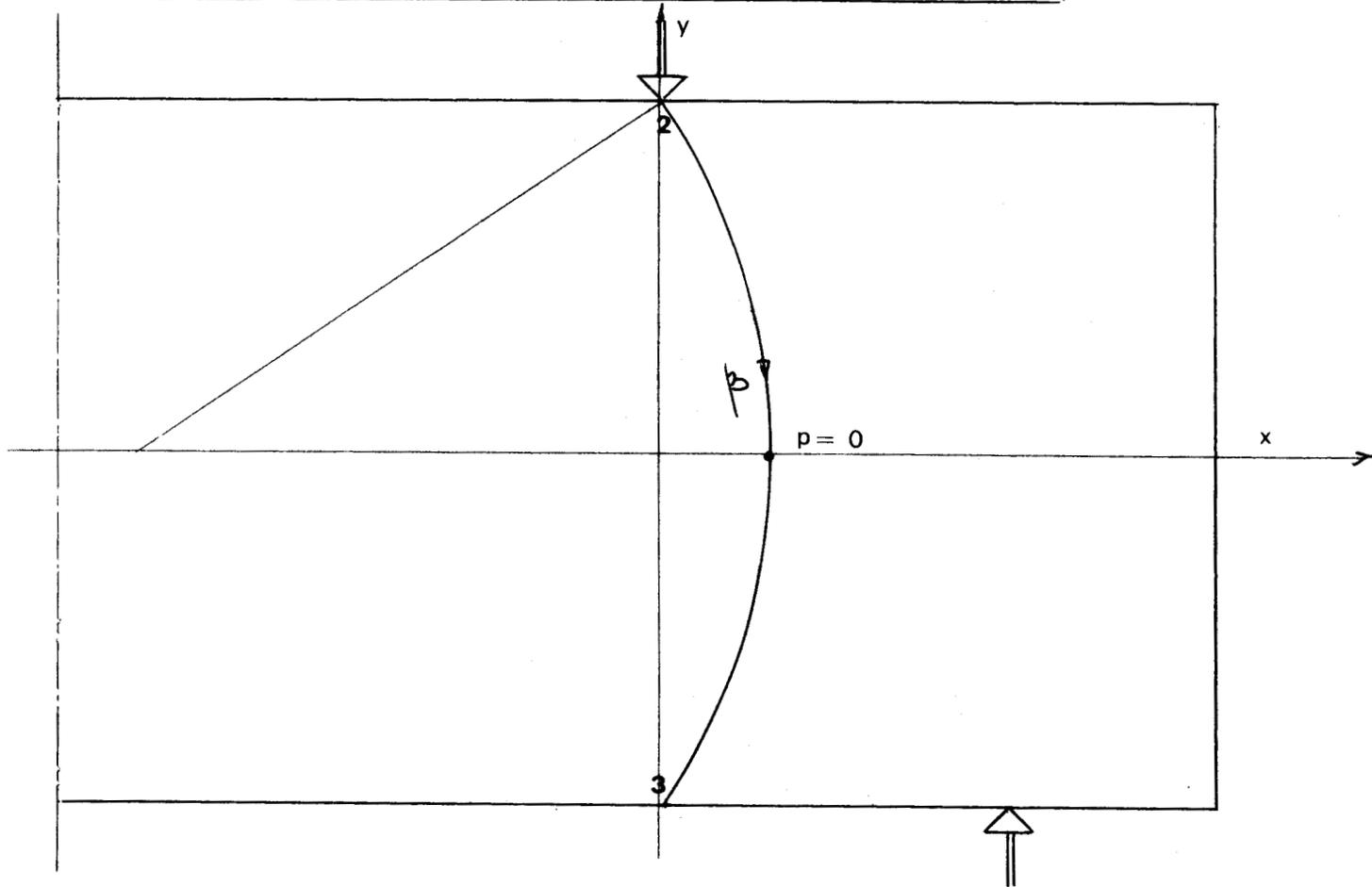
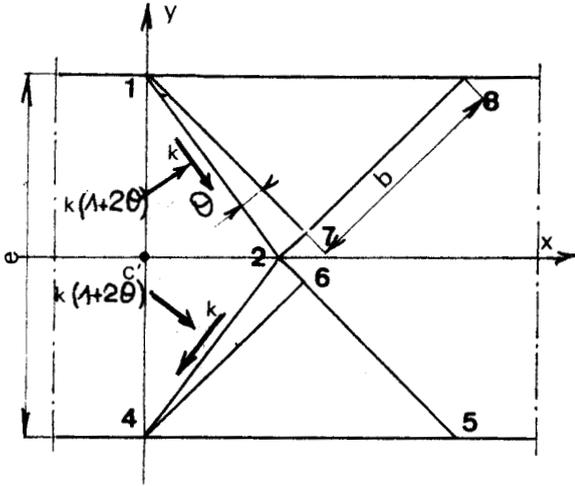


Figure 2,2,14



2,2,5. Etude du réseau N° 2.

Considérons la figure (2,2,13) .

Les efforts verticaux transmis par le réseau sont :

$$Y = - 2kb \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + 2k(1 + 2\theta)b \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$$

avec :  $b = \frac{e}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}$  et  $P = - Y$

il vient :

$$\frac{P}{ke} = 1 - \frac{1 + 2\theta}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)} \quad (2,2,29)$$

Figure 2,2,13

Le moment  $M$  par unité de largeur est :

$$M = 2kb \frac{e}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + 2k(1 + 2\theta)\left\{\frac{e}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - \frac{b}{2}\right\}$$

soit :

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)} + (1 + 2\theta) \left[ 1 - \frac{1}{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)} \right] \quad (2,2,30)$$

L'angle  $\theta$  varie de  $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$  à 0 . Lorsque  $\theta$  est nul, il vient :

$$\frac{P}{ke} = 0$$

$$\frac{2M}{ke^2} = 1$$

Le réseau est constitué par les deux champs homogènes 1,7,8 et 4,5,6 : c'est le réseau N° 1 de la figure (2,2,2) .

Les limites du réseau N° 2 sont donc :

$$0 \ll \frac{P}{ke} \ll 0,03756$$

$$1 \ll \frac{2M}{ke^2} \ll 1,03119$$

(2,2,31)

Les résultats du N° 2 sont reportés dans le tableau (2,2,3) et sur la courbe d'interaction de la figure (2,2,10) .

CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE SYMETRIQUE - RESEAU N° 2.

$\frac{a}{e}$	$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$
3481.18175	0.00001	1.00001
807.83980	0.00062	1.00060
239.25248	0.00209	1.00201
113.70724	0.00442	1.00415
66.57639	0.00756	1.00696
43.87080	0.01152	1.01039
31.19820	0.01626	1.01439
23.40009	0.02177	1.01889
18.25530	0.02804	1.02386
14.67881	0.03506	1.02925
13.72730	0.03756	1.03119

Tableau 2,2,3



## 2,3. CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE ASYMETRIQUE.

### 2,3,1. Introduction.

Nous considérons maintenant un réseau de lignes de glissement asymétrique de façon à améliorer les résultats obtenus avec le réseau symétrique.

### 2,3,2. Description générale du réseau.

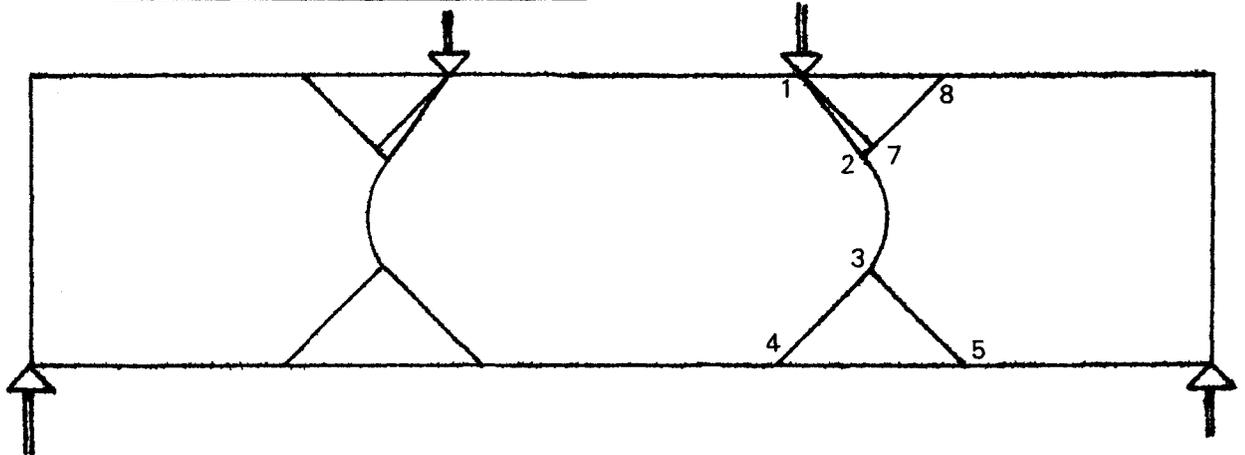


Figure 2,3,1

Le réseau proposé maintenant comprend deux champs homogènes 1,7,8 et 3,4,5, un champ semi-homogène 1,2,7 et une ligne circulaire 2,3 (Figure 2,3,1) .

Selon le mode de chargement, le réseau peut prendre les six formes, représentées ci-dessous :

Réseau N° 1 : deux champs homogènes (Figure 2,3,2)

Réseau N° 2 : deux champs homogènes et un champ semi-homogène (Figure 2,3,3)

Réseau N° 3 : deux champs homogènes, un champ semi-homogène, une ligne circulaire (Figure 2,3,4)

Réseau N° 4 : un champ homogène, une ligne circulaire (Figure 2,3,5)

Réseau N° 5 : deux lignes circulaires (Figure 2,3,6)

Réseau N° 6 : une ligne droite et une ligne circulaire (Figure 2,3,7)

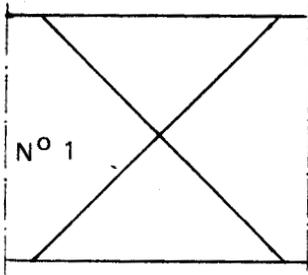


Figure 2,3,2

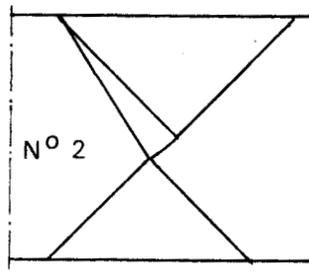


Figure 2,3,3

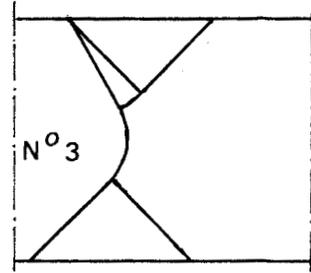


Figure 2,3,4

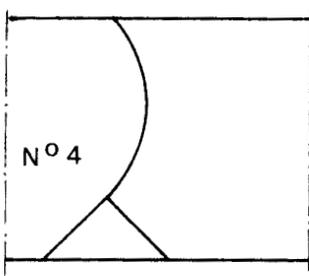


Figure 2,3,5

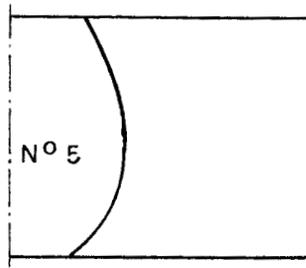


Figure 2,3,6

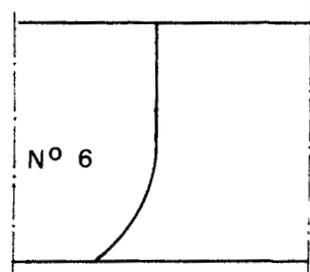


Figure 2,3,7

Comme il a été fait plus haut (2,2,2) , nous présentons d'abord le réseau N° 3.

### 2,3,3. Etude du réseau N° 3.

#### 2,3,3,1. Détermination des pressions.

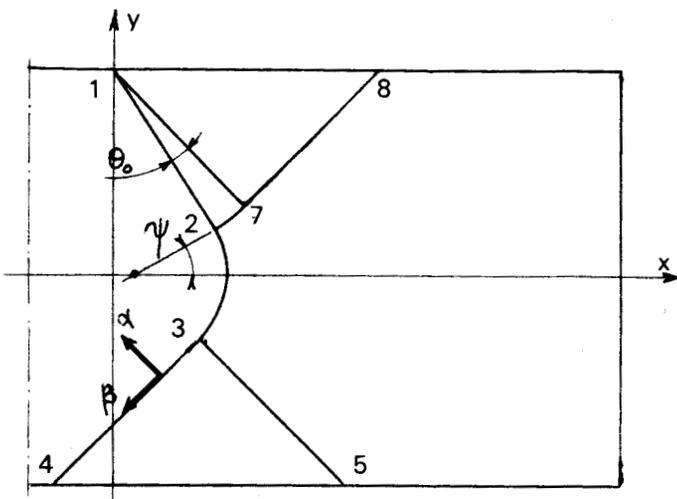


Figure 2,3,8

Soit le réseau de lignes de glissement de la figure (2,3,8) .

L'angle entre les bords libres et les lignes  $\alpha$  ,  $\beta$  du champ homogène 1,7,8 d'une part, les lignes  $\alpha$  ,  $\beta$  du champ homogène 3,4,5 d'autre part est de  $\pi/4$  .

L'angle du champ semi-homogène 1,2,7 est  $\theta_0$  et

$$\psi = \frac{\pi}{4} - \theta_0 \quad (2,3,1)$$

En 5, les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  satisfont à la condition à la limite :

$$\sigma_1 = -p + k = 2k$$

$$\sigma_2 = -p - k = 0$$

Soit

$$p_5 = -k$$

(2,3,2)

$$p_3 = -k$$

En 2, la pression est :

$$p_2 - p_3 = 2k(\phi_2 - \phi_3)$$

$$p_2 + k = 2k\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$p_2 = k\left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1\right)$$

(2,3,3)

En 7, nous avons donc :

$$p_2 - p_7 = -2k(\phi_2 - \phi_7)$$

$$p_7 = k\left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1\right) - 2k\theta_0$$

compte tenu de (2,3,1)

$$p_7 = k(4\psi - 1) .$$

Or en 8, les conditions sont les suivantes :

$$\sigma_1 = -p + k = 0$$

$$\sigma_2 = -p - k = -2k$$

Donc

$$p_7 = k$$

(2,3,4)

$$p_8 = k$$

avec

$$\psi = \frac{1}{2}$$

(2,3,5)



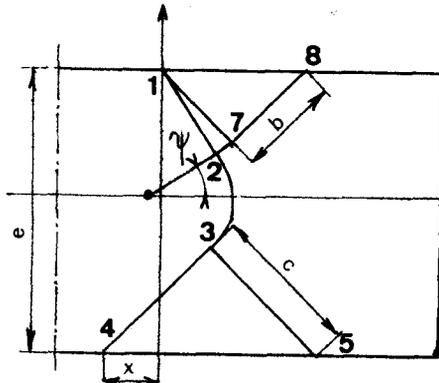
2,3,3,3. Conditions géométriques.

Figure 2,3,11

Soit  $b$  la longueur 7,8,  $c$  la longueur 3,5,  
 $x$  la distance entre l'axe  $y$  et le point 4.

Les conditions géométriques du réseau sont les  
 suivantes (Figure 2,3,11) :

$$\frac{x}{e} = \frac{b}{e} \sin \psi - \frac{R}{e} \left( \cos \psi - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{c}{e} \quad (2,3,13)$$

$$\text{et } \frac{b}{e} \cos \psi + \frac{R}{e} \left( \sin \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{c}{e} = 1 \quad (2,3,14)$$

2,3,3,4. Efforts transmis par le réseau.

Les efforts horizontaux transmis par la ligne  
 1,2,3,4 sont les suivantes (Figure 2,3,12) :

Pour la ligne 1,2 :

$$X_{12} = kb \sin \psi + k \left( 2\psi + \frac{\pi}{2} - 1 \right) b \cos \psi$$

$$X_{12} = kb \left( \sin \psi + \frac{\pi}{2} \cos \psi \right)$$

Pour la ligne 2,3 :

$$X_{23} = kR \left( \cos \psi + \frac{\pi}{2} \sin \psi - \sqrt{2} \right)$$

et pour la ligne 3,4 :

$$X_{34} = -kc\sqrt{2}$$

Figure 2,3,12

La somme des efforts horizontaux transmis par la ligne 1,2,3,4 doit être nulle.

La condition s'exprime comme suit :

$$b \left( \sin \psi + \frac{\pi}{2} \cos \psi \right) + R \left( \cos \psi + \frac{\pi}{2} \sin \psi - \sqrt{2} \right) - c\sqrt{2} = 0 \quad (2,3,15)$$

Les efforts verticaux sont les suivants :

$$Y_{12} = kb \cos \psi - kb \left( 2\psi + \frac{\pi}{2} - 1 \right) \sin \psi$$

et

$$Y_{23} = kR \left( \frac{\pi}{2} \cos \psi - \sin \psi \right)$$

enfin

$$Y_{34} = 0$$

Il vient :

$$-P = Y_{12} + Y_{23} + Y_{34}$$

P étant la charge appliquée par unité de largeur de plaque.

Soit

$$\frac{P}{ke} = -\frac{b}{e} \left\{ \left( 2\psi + \frac{\pi}{2} - 1 \right) \sin \psi - \cos \psi \right\} + \frac{R}{e} \left\{ \frac{\pi}{2} \cos \psi - \sin \psi \right\} \quad (2,3,16)$$

2,3,3,5. Moment transmis par le réseau.

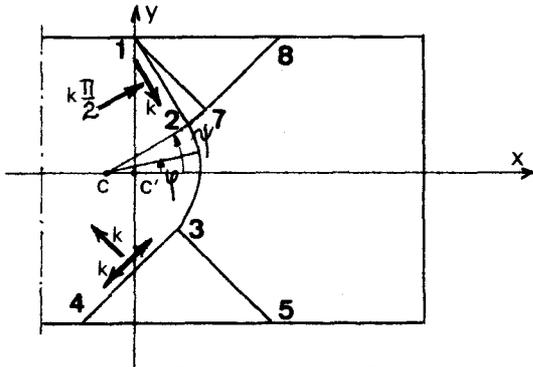


Figure 2,3,13

Le moment par unité de largeur de plaque est calculé par rapport au point c' (Figure 2,3,13) .

Selon 1,2, il vient :

$$M_{12} = -kb(R - cc' \cos \psi) - k \frac{\pi}{2} b(cc' \sin \psi + \frac{b}{2})$$

avec  $cc' = R \cos \psi - b \sin \psi$  .

Il vient :

$$M_{12} = -kb \left[ R \sin \psi \left( \sin \psi + \frac{\pi}{2} \cos \psi \right) + b \sin \psi \left( \cos \psi - \frac{\pi}{2} \sin \psi \right) + \frac{\pi}{4} \right]$$

soit :

$$\frac{2M_{12}}{ke^2} = -\frac{2b}{e} \left[ \frac{R}{e} \sin \psi \left( \sin \psi + \frac{\pi}{2} \cos \psi \right) + \frac{b}{e} \left\{ \sin \psi \left( \cos \psi - \frac{\pi}{2} \sin \psi \right) + \frac{\pi}{4} \right\} \right] \quad (2,3,17)$$

En un point de la ligne 2,3, la pression est :

$$P_M = k \left( 2\phi + \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

et le moment élémentaire :

$$dM_{23} = -k(R - cc' \cos \phi)R d\phi - k \left( 2\phi + \frac{\pi}{2} - 1 \right) cc' \sin \phi$$

en intégrant entre  $-\frac{\pi}{4}$  et  $\phi$  , il vient :

$$M_{23} = -kR \left\{ R \left( \psi + \frac{\pi}{4} \right) - cc' \left( -\sin \psi + \frac{\pi}{2} \cos \psi \right) \right\}$$

soit

$$\frac{2M_{23}}{ke^2} = \frac{2R}{e} \left[ -\frac{R}{e} \left( \frac{\pi}{4} + \psi \right) + \left( \frac{R}{e} \cos \psi - \frac{b}{e} \sin \psi \right) \left( -\sin \psi + \frac{\pi}{2} \cos \psi \right) \right] \quad (2,3,18)$$

Selon 3,4, il vient :

$$M_{34} = -kc \left( R + \frac{c}{2} \right)$$

$$\frac{2M_{34}}{ke^2} = -\frac{2c}{e} \left( \frac{R}{e} + \frac{c}{2e} \right) \quad (2,3,19)$$

Le moment total  $M$  par unité de largeur de plaque est fourni par :

$$M = M_{12} + M_{23} + M_{34}$$

Il sera calculé à partir des expressions (2,3,14) , (2,3,17) , (2,3,18) et (2,3,19) .

#### 2,3,3,6. Limites du réseau N° 3.

Le réseau N° 3 est remplacé par le réseau N° 2 lorsque la ligne circulaire disparaît.

La condition (2,3,14) devient :

$$\frac{b}{e} \cos \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{c}{e} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{R}{e} = 0 .$$

La valeur correspondante de  $P/ke$  est :

$$\frac{P}{ke} = 0,06892$$

et

$$\frac{2M}{ke^2} = 1,04669$$

Lorsque le champ homogène 1,7,8 disparaît, le réseau N° 3 est remplacé par le réseau N° 4 et :

$$\frac{R}{e} \left( \sin \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{c}{e} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{b}{e} = 0 .$$

Il vient :

$$\frac{P}{ke} = 0,69434$$

$$\frac{2M}{ke^2} = 0,78799$$

Les limites du réseau N° 3 sont donc :

$$0,06892 \leq \frac{P}{ke} \leq 0,69434 \quad (2,3,20)$$

$$1,04669 \geq \frac{2M}{ke^2} \geq 0,78799 \quad (2,3,21)$$

#### 2,3,3,7. Courbe d'interaction.

Les valeurs de  $P/ke$  et de  $2M/ke^2$  du réseau N° 3 sont calculées comme en (2,2,3,7) et sont reportées dans le tableau (2,3,1) .

La courbe d'interaction est tracée à la figure (2,3,14) et le réseau est représenté aux figures (2,3,15) et (2,3,16) .

CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE ASYMETRIQUE - RESEAU N° 3.

$\frac{b}{e}$	$\frac{c}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{a}{e}$	$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$
0.55353	0.72719	0.00000	7.59351	0.06892	1.04669
0.54372	0.71640	0.01369	6.57738	0.08	1.05238
0.52602	0.69693	0.03838	5.30860	0.10	1.06172
0.50832	0.67745	0.06308	4.45771	0.12	1.06985
0.49062	0.65799	0.08777	3.84561	0.14	1.07677
0.47292	0.63850	0.11247	3.38278	0.16	1.08249
0.45522	0.61903	0.13717	3.01944	0.18	1.08700
0.41981	0.58008	0.18656	2.48275	0.22	1.09241
0.38441	0.54113	0.23595	2.10190	0.26	1.09299
0.34901	0.50218	0.28534	1.81458	0.30	1.08875
0.31361	0.46323	0.33473	1.58776	0.34	1.07968
0.27821	0.42428	0.38412	1.40236	0.38	1.06579
0.24280	0.38553	0.43351	1.24651	0.42	1.04707
0.20740	0.34638	0.48290	1.11253	0.46	1.02353
0.17200	0.30744	0.53229	0.99516	0.50	0.99516
0.13660	0.26849	0.58169	0.89071	0.54	0.96197
0.10120	0.22954	0.63108	0.79651	0.58	0.92396
0.06579	0.19059	0.68047	0.71058	0.62	0.88112
0.03039	0.15164	0.72986	0.63141	0.66	0.83346
0.00000	0.11765	0.77306	0.56744	0.69434	0.78799

Tableau 2,3,1



2,3,9 bis

CHAMP  
CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE  
ASYMETRIQUE

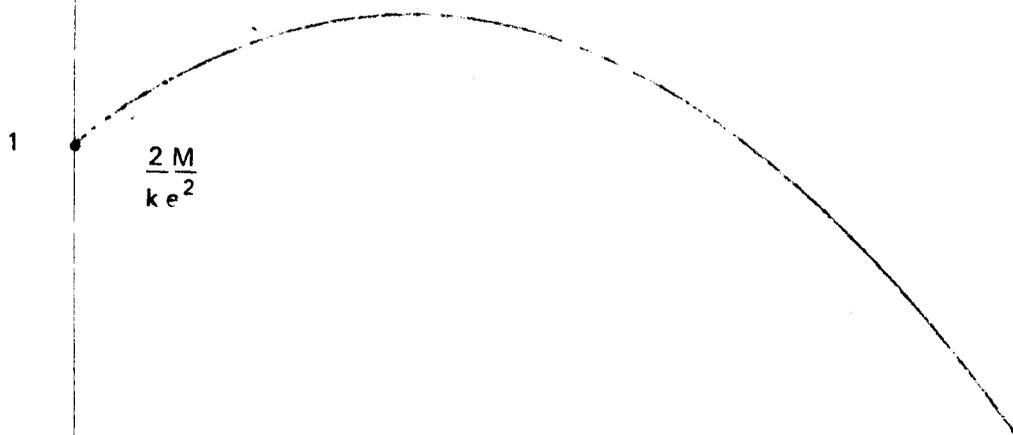


Figure : 2.3.14



$\frac{P}{ke}$

$\frac{P}{ke} = 0,40$	$\frac{2M}{ke^2} = 1,057$	$\frac{b}{e} = 0,260$	$\frac{c}{e} = 0,404$	$\frac{R}{e} = 0,408$	$\frac{a}{e} = 1,321$
-----------------------	---------------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

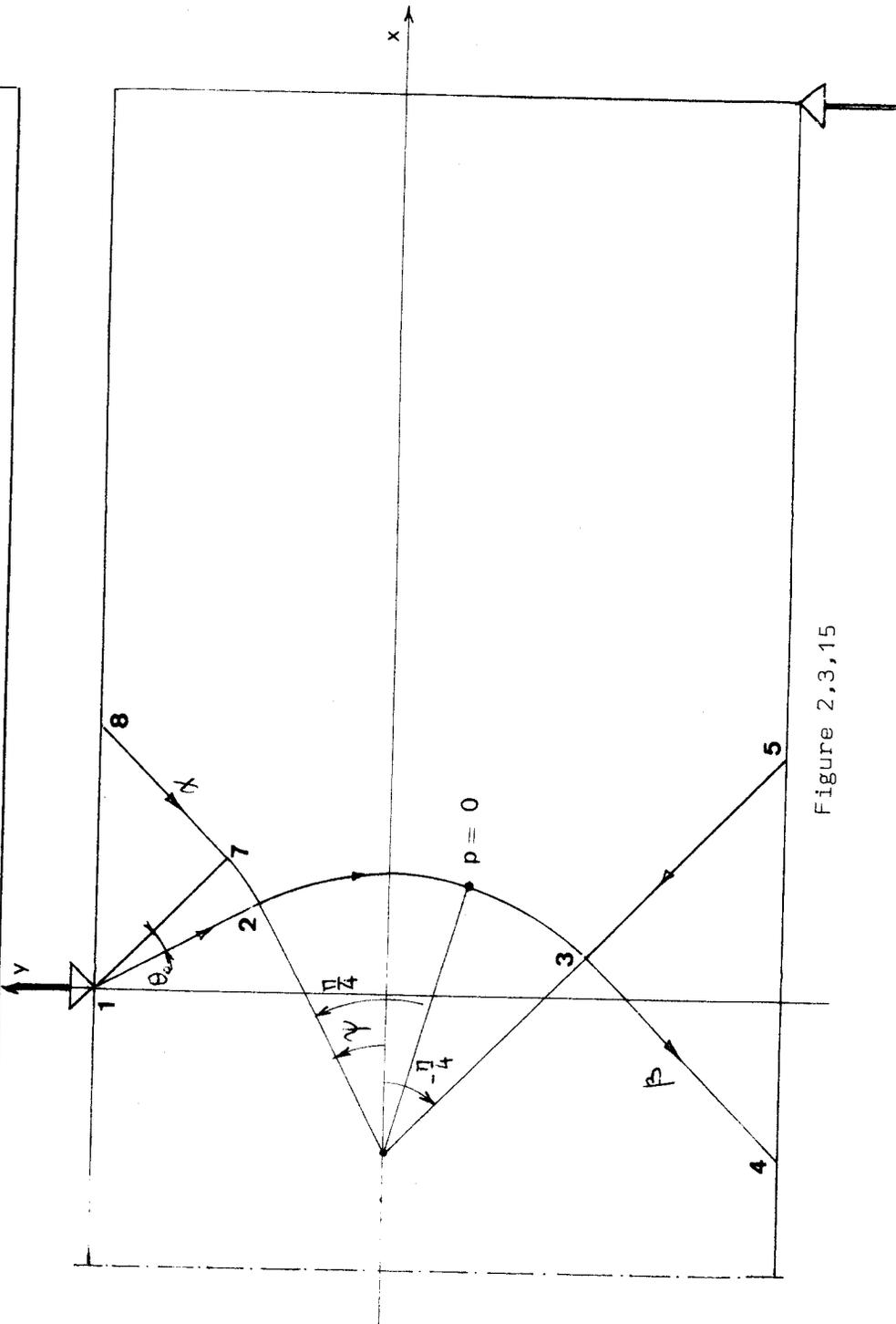


Figure 2,3,15



$\frac{P}{ke} = 0,694$	$\frac{2M}{ke^2} = 0,787$	$\frac{b}{e} = 0$	$\frac{c}{e} = 0,117$	$\frac{R}{e} = 0,773$	$\frac{a}{e} = 0,567$
------------------------	---------------------------	-------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

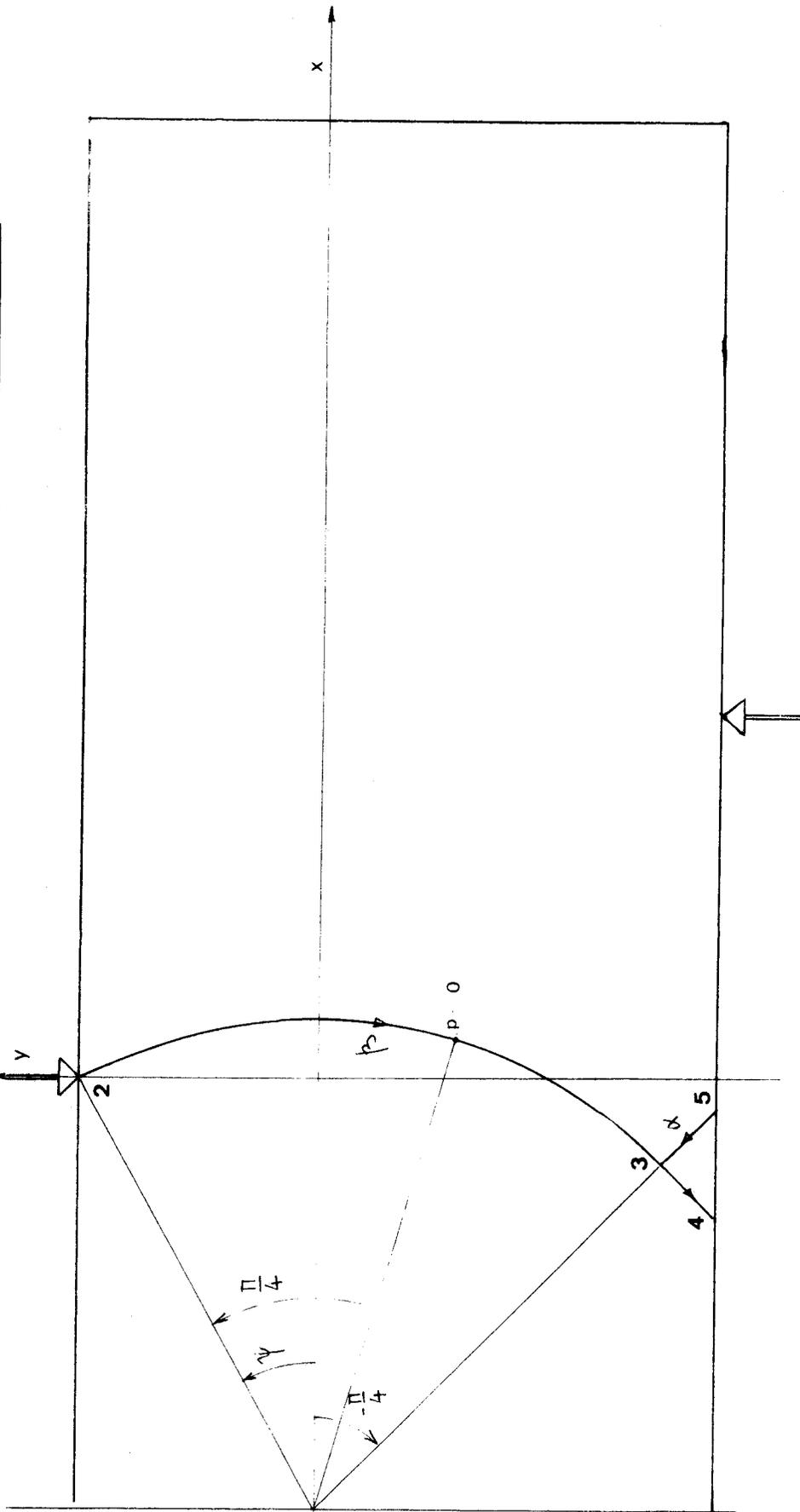


Figure 2.3,16



2,3,4. Etude du réseau N° 2.2,3,4,1. Détermination des pressions.

Le réseau N° 2 est obtenu à partir du réseau N° 3 en supprimant la ligne circulaire (Figure 2,3,3) .

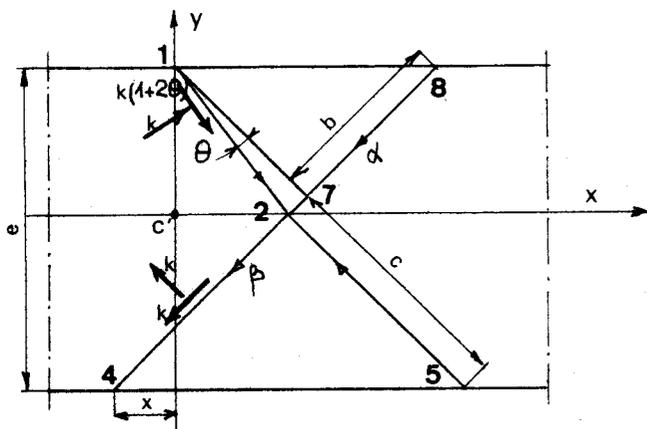


Figure 2,3,17

Considérons la figure (2,3,17) .

Au point 5

$$p_5 = -k$$

d'après (2,3,2) .

De même, au point 8

$$p_8 = k$$

d'après (2,3,4) .

Au point 2, nous avons :

$$p_2 = k(1 + 2\theta)$$

d'après (2,3,3) .

2,3,4,2. Conditions géométriques.

Les conditions géométriques sont déduites de (2,3,13) et (2,3,14)

Soit :

$$\frac{x}{e} = -\frac{b}{e} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{c}{e} \quad (2,3,22)$$

et

$$\frac{b}{e} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{c}{e} = 1 \quad (2,3,23)$$

2,3,4,3. Efforts transmis par le réseau.

Les efforts horizontaux transmis par la ligne 1,2,4 sont les suivants. (Figure 2,3,17)

Pour la ligne 1,2 :

$$X_{12} = kb(1 + 2\theta) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + kb \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right).$$

Pour la ligne 2,4 :

$$X_{24} = - kc \sqrt{2} .$$

Nous avons la condition

$$X_{12} + X_{24} = 0 .$$

Soit :

$$b\{(1 + 2\theta) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\} - c\sqrt{2} = 0 \quad (2,3,24)$$

Les efforts verticaux sont donnés par les relations ci-dessous :

$$Y_{12} = - kb \sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + kb(1 + 2\theta)\cos \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$$

et  $Y_{24} = 0 .$

Il vient :

$$- P = Y_{12} .$$

Soit :

$$\frac{P}{ke} = \frac{b}{e}\{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - (1 + 2\theta) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\} \quad (2,3,25)$$

#### 2,3,4,4. Moment transmis par le réseau.

Le moment par unité de largeur de plaque est calculé par rapport au point  $c'$  (Figure 2,3,17) .

Pour la ligne 1,2, il vient :

$$M_{12} = - kb^2 \left[ \sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + (1 + 2\theta) \left\{ \frac{1}{2} - \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \right\} \right]$$

et pour la ligne 2,4 :

$$M_{24} = - \frac{kc^2}{2}$$

Il vient :

$$\frac{2M}{ke^2} = - \frac{2b^2}{e^2} \left[ \sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + (1 + 2\theta) \left\{ \frac{1}{2} - \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \right\} \right] - \frac{c^2}{e^2} \quad (2,3,26)$$

2,3,4,5. Limites du réseau N° 2.

Les limites du réseau N° 2 sont les suivantes d'après (2,3,20) :

$$0 \leq \frac{P}{ke} \leq 0,06892 \quad (2,3,27)$$

$$1 \leq \frac{2M}{ke^2} \leq 1,04669 \quad (2,3,28)$$

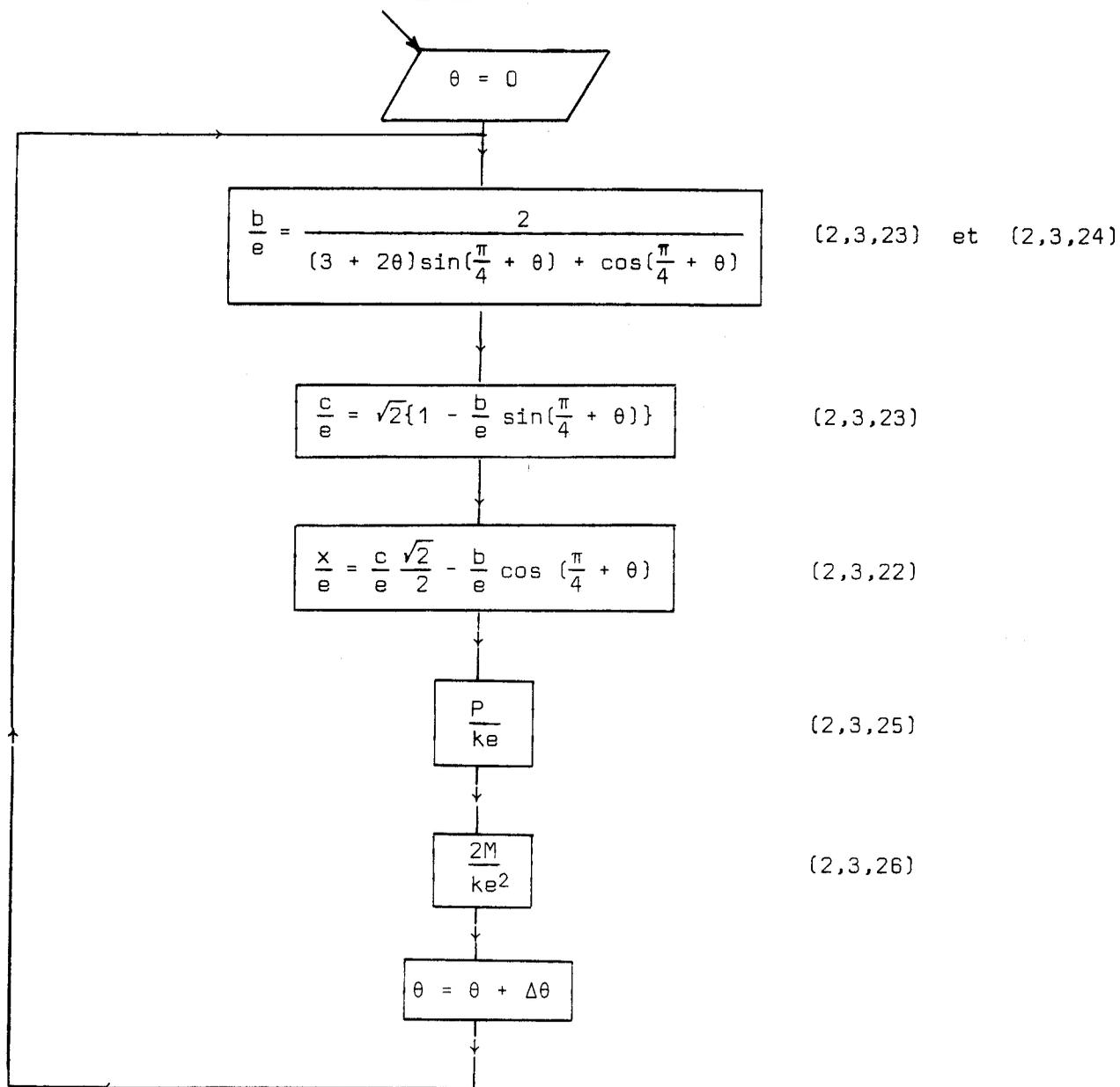
2,3,4,6. Courbe d'interaction.

Les valeurs de  $P/ke$  et de  $2M/ke^2$  du réseau N° 2 sont calculées selon l'ordinogramme suivant. Les valeurs sont reportées dans le tableau (2,3,2) .

La courbe d'interaction est représentée à la figure (2,3,14) , commune avec la courbe d'interaction du réseau N° 3.

Deux réseaux particuliers sont représentés aux figures (2,3,18) et (2,3,19) .

## RESEAU N° 2.



CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE ASYMETRIQUE - RESEAU N° 2.

$\frac{b}{e}$	$\frac{c}{e}$	$\frac{x}{e}$	$\frac{a}{e}$	$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$
0.70710	0.70710	0.00000	$\infty$	0.00000	1.00000
0.67992	0.70764	0.03921	320.98718	0.00156	1.00148
0.65483	0.70914	0.07689	82.68586	0.00608	1.00546
0.63167	0.71146	0.11310	37.87865	0.01335	1.01136
0.61031	0.71447	0.14792	21.97347	0.02318	1.01869
0.59060	0.71806	0.18142	14.44866	0.03541	1.02704
0.57243	0.72212	0.21367	10.38334	0.04989	1.03605
0.55570	0.72659	0.24473	7.85816	0.06652	1.04545
0.55353	0.72719	0.24884	7.59351	0.06892	1.04669

Tableau 2,3,2



CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE ASYMETRIQUE - RESEAU N° 2.

$\frac{P}{ke} = 0,0689$	$\frac{2M}{ke^2} = 1,0466$	$\frac{b}{e} = 0,553$	$\frac{c}{e} = 0,727$	$\frac{x}{e} = 0,248$	$\frac{a}{e} = 0,759$
-------------------------	----------------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

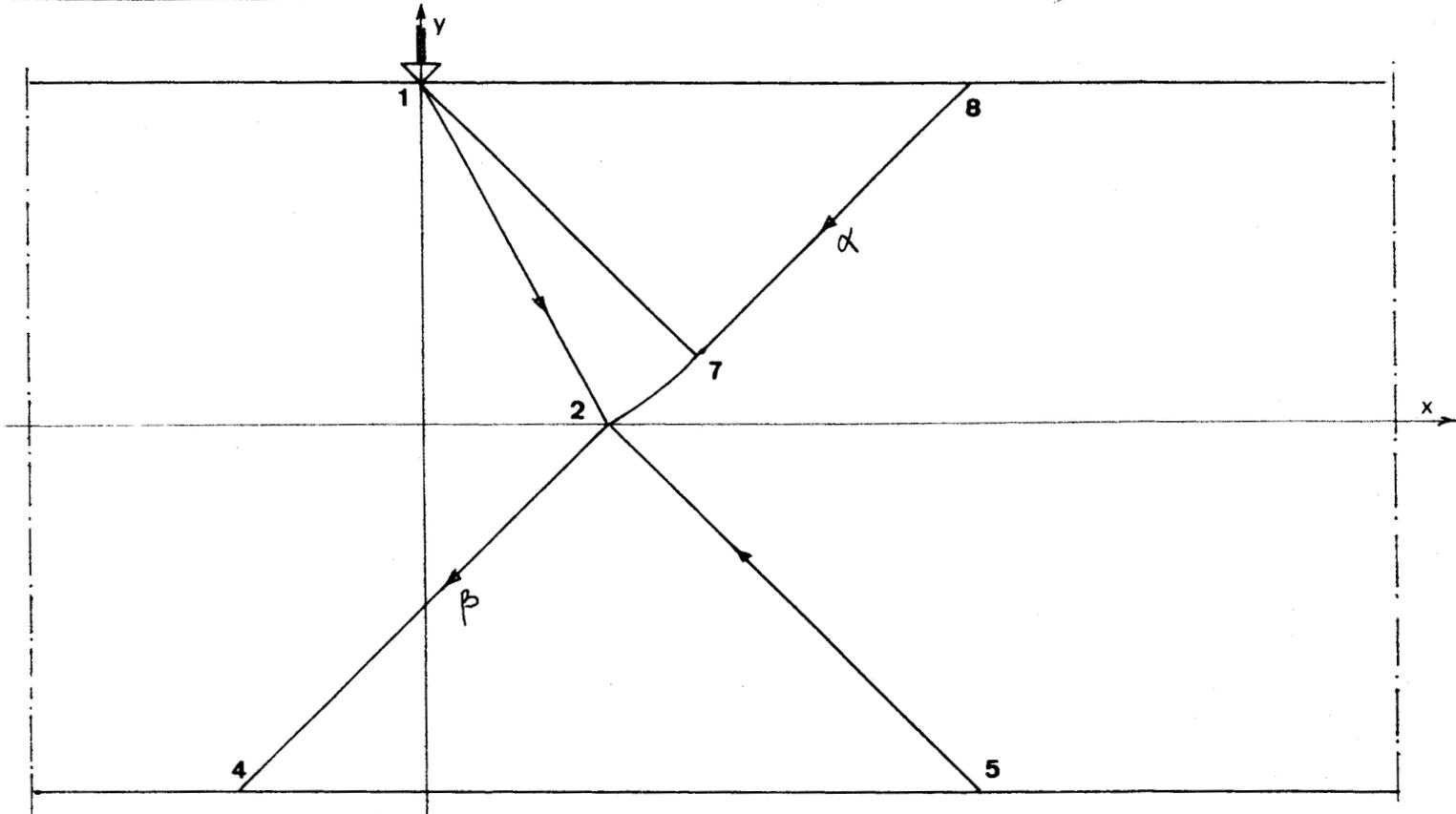


Figure 2,3,18



CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE ASYMETRIQUE - RESEAU N° 2.

$\frac{P}{ke} = 0,035$	$\frac{2M}{ke^2} = 1,027$	$\frac{b}{e} = 0,590$	$\frac{c}{e} = 0,714$	$\frac{x}{e} = 0,147$	$\frac{a}{e} = 10,38$
------------------------	---------------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

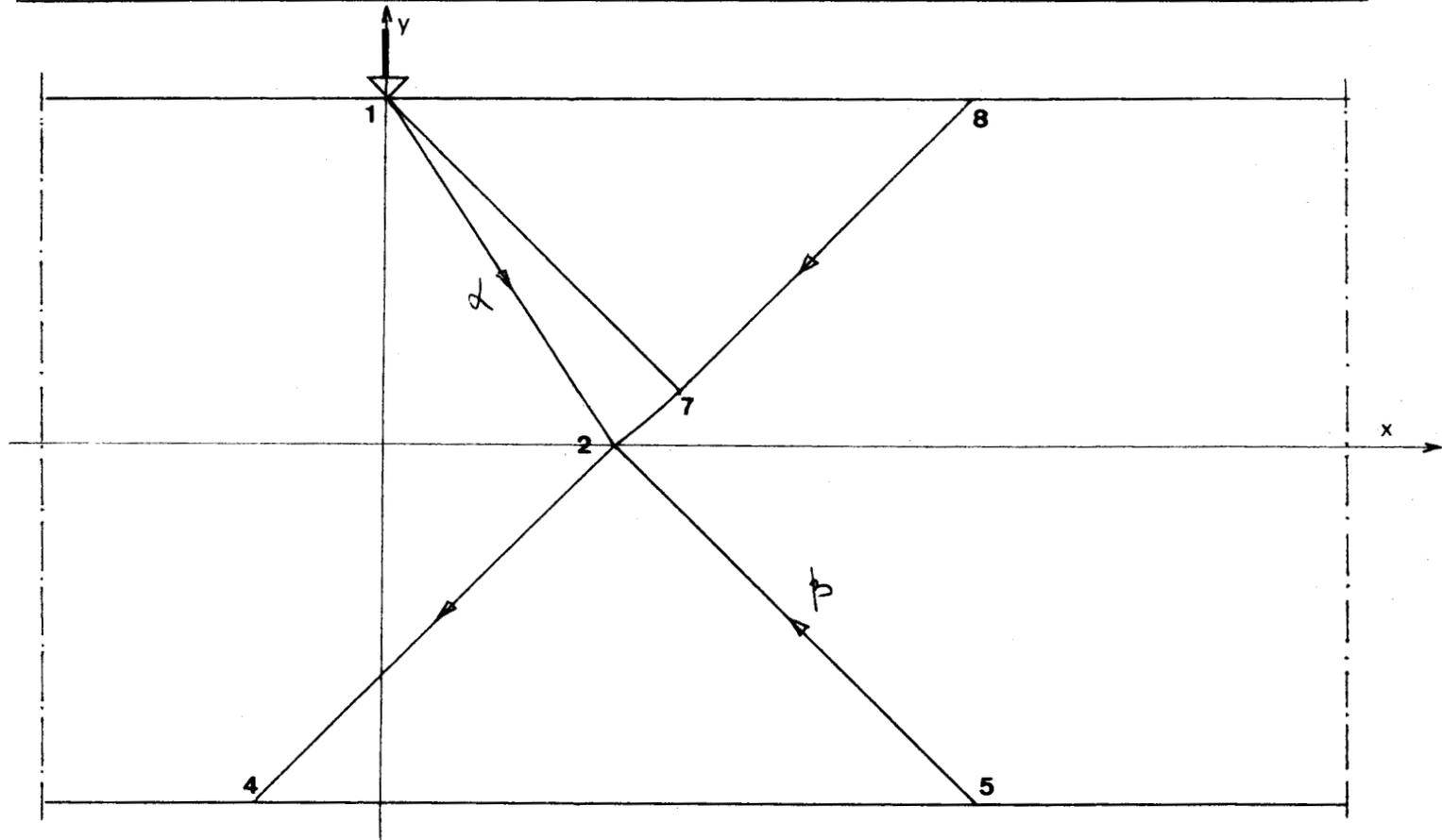


Figure 2,3,19



2,3,5. Etude du réseau N° 4.2,3,5,1. Détermination des pressions.

Considérons le réseau N° 4 représenté à la figure (2,3,20) .

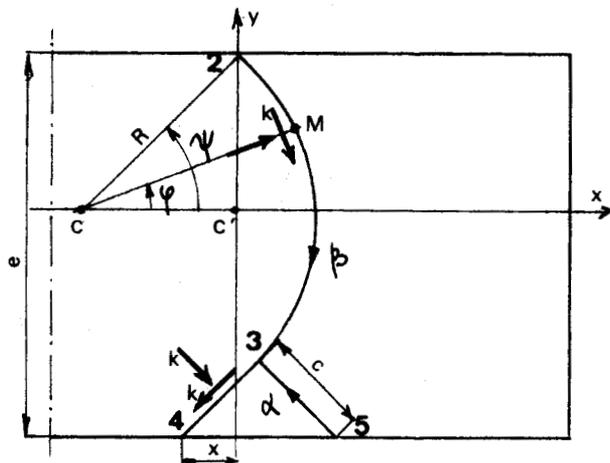


Figure 2,3,20'

En 5, la pression est

$$p_5 = -k$$

d'après (2,3,2) .

En un point courant de la ligne 2,3, nous avons :

$$p_M - p_3 = 2k(\phi_M - \phi_3)$$

$$p_M = k\left(2\phi + \frac{\pi}{2} - 1\right)$$

2,3,5,2. Conditions géométriques.

Les conditions géométriques sont les suivantes (2,3,13) et (2,3,14) :

$$\frac{x}{e} = -\frac{R}{e} \cos \psi - \frac{\sqrt{2}}{e} \frac{c}{e}$$

et

$$\frac{R}{e} \left( \sin \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{c}{e} = 1$$

(2,3,29)

2,3,5,3. Efforts transmis par le réseau.

Pour la ligne 2,3, les efforts horizontaux sont :

$$dX_{23} = k\left(2\phi + \frac{\pi}{2} - 1\right)R \cos \phi d\phi + kR \sin \phi d\phi$$

En intégrant de  $-\frac{\pi}{4}$  à  $\psi$  :

$$X_{23} = kR\left\{\left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1\right)\sin \psi + \cos \psi - \sqrt{2}\right\}$$

et pour la ligne 3,4 :

$$X_{34} = -kc\sqrt{2} .$$

D'où la condition :

$$R\left\{\left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1\right)\sin \psi + \cos \psi - \sqrt{2}\right\} - c\sqrt{2} = 0 \quad (2,3,30)$$

Les efforts verticaux sont :

$$dY_{23} = k\left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1\right)R \sin \phi \, d\phi - kR \cos \phi \, d\phi .$$

Par intégration entre  $-\frac{\pi}{4}$  et  $\psi$  :

$$Y_{23} = kR\left\{\sin \psi - \left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1\right)\cos \psi\right\}$$

et

$$Y_{34} = 0 .$$

Soit :

$$\frac{P}{ke} = \frac{R}{e}\left\{\left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1\right)\cos \psi - \sin \psi\right\} \quad (2,3,31)$$

#### 2,3,5,4. Moment transmis par le réseau.

Le moment transmis le long de la ligne 2,3 est :

$$dM_{23} = -k\left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1\right)R^2 \cos \psi \sin \phi \, d\phi - kR(R - R \cos \psi \cos \phi) \, d\phi$$

$$M_{23} = kR^2 \left[ -\psi - \frac{\pi}{4} + \cos \psi \left\{ \left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1\right)\cos \psi - \sin \psi \right\} \right]$$

soit :

$$\frac{2M_{23}}{ke^2} = \frac{2R^2}{e^2} \left[ -\psi - \frac{\pi}{4} + \cos \psi \left\{ \left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1\right)\cos \psi - \sin \psi \right\} \right] \quad (2,3,32)$$

Pour la ligne 3,4, il vient :

$$M_{34} = -kc\left(\frac{c}{2} + R\right)$$

$$\frac{2M_{34}}{ke^2} = -\frac{2c}{e}\left(\frac{c}{2e} + \frac{R}{e}\right) \quad (2,3,33)$$

Le moment total est fourni par :

$$M = M_{23} + M_{34}$$

2,3,5,5. Limites du réseau N° 4.

La limite du réseau N° 4 avec le réseau N° 3 a été définie plus haut (2,3,20) et (2,3,21) .

Le réseau N° 4 est remplacé par le réseau N° 5 lorsque le champ homogène 3,4,5 disparaît. La condition est :

$$\frac{c}{e} = 0 .$$

Il vient alors :

$$\boxed{\frac{P}{ke} = 0,80338} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{2M}{ke^2} = 0,62077}$$

Les limites du réseau N° 4 sont donc :

$$\boxed{0,69434 \leq \frac{P}{ke} \leq 0,80338} \quad (2,3,34)$$

$$\boxed{0,78799 \geq \frac{2M}{ke^2} \geq 0,62077} \quad (2,3,35)$$

2,3,5,6. Courbe d'interaction.

Les valeurs de  $P/ke$  et de  $2M/ke^2$  du réseau N° 4 sont calculées selon l'ordinogramme suivant et sont reportées dans le tableau (2,3,3) .

La courbe d'interaction est représentée à la figure (2,3,20) avec celles des réseaux suivants.

Un réseau particulier est représenté à la figure (2,3,21) .

RESEAU N° 4.

$P/ke$

$\psi = 0,1$

$$\frac{R}{e} = \frac{2}{(\sin \psi + \frac{\pi}{2} - 1)\sin \psi - \cos \psi}$$

(2,3,29) et (2,3,30)

$P'/ke$

$\frac{|P' - P|}{ke} <? 0,001$

oui

non

$\psi = 0,1 + \frac{P' - P}{ke}$

$$\frac{c}{e} = \sqrt{2}\{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \psi)\}$$

(2,3,30)

$\frac{c}{e} <? 0$

oui

non

$$-\frac{c}{e} \left( \frac{R}{e} + \frac{c}{2e} \right)$$

(2,3,33)

$\psi > 0,5$

oui

non

$$\frac{R^2}{e^2} \left[ -\psi - \frac{\pi}{4} - \cos \psi \left\{ (2\psi + \frac{\pi}{2} - 1)\cos \psi - \sin \psi \right\} \right]$$

(2,3,32)

$2M/ke^2$

$\frac{P}{ke} = \frac{P}{ke} + 0,01$



CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE ASYMETRIQUE - RESEAU N° 4.

$\frac{c}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{a}{e}$	$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$
0.11765	0.77306	0.56744	0.69434	0.78799
0.11211	0.78010	0.55734	0.70	0.78028
0.10219	0.79283	0.53973	0.71	0.76641
0.09209	0.80593	0.52238	0.72	0.75223
0.08180	0.81942	0.50529	0.73	0.73773
0.07131	0.83331	0.48845	0.74	0.72291
0.06062	0.84762	0.47183	0.75	0.70774
0.04973	0.86235	0.45542	0.76	0.69224
0.03863	0.87754	0.43921	0.77	0.67638
0.02732	0.89318	0.42318	0.78	0.66016
0.01579	0.90931	0.40732	0.79	0.64357
0.00403	0.92593	0.39163	0.80	0.62660
0.00000	0.93166	0.38635	0.80338	0.62077

Tableau 2,3,3



CHAMP

2.3,23 bis

CINEMATIQUEMENT

ADMISSIBLE

ASYMETRIQUE

Figure : 2.3.20

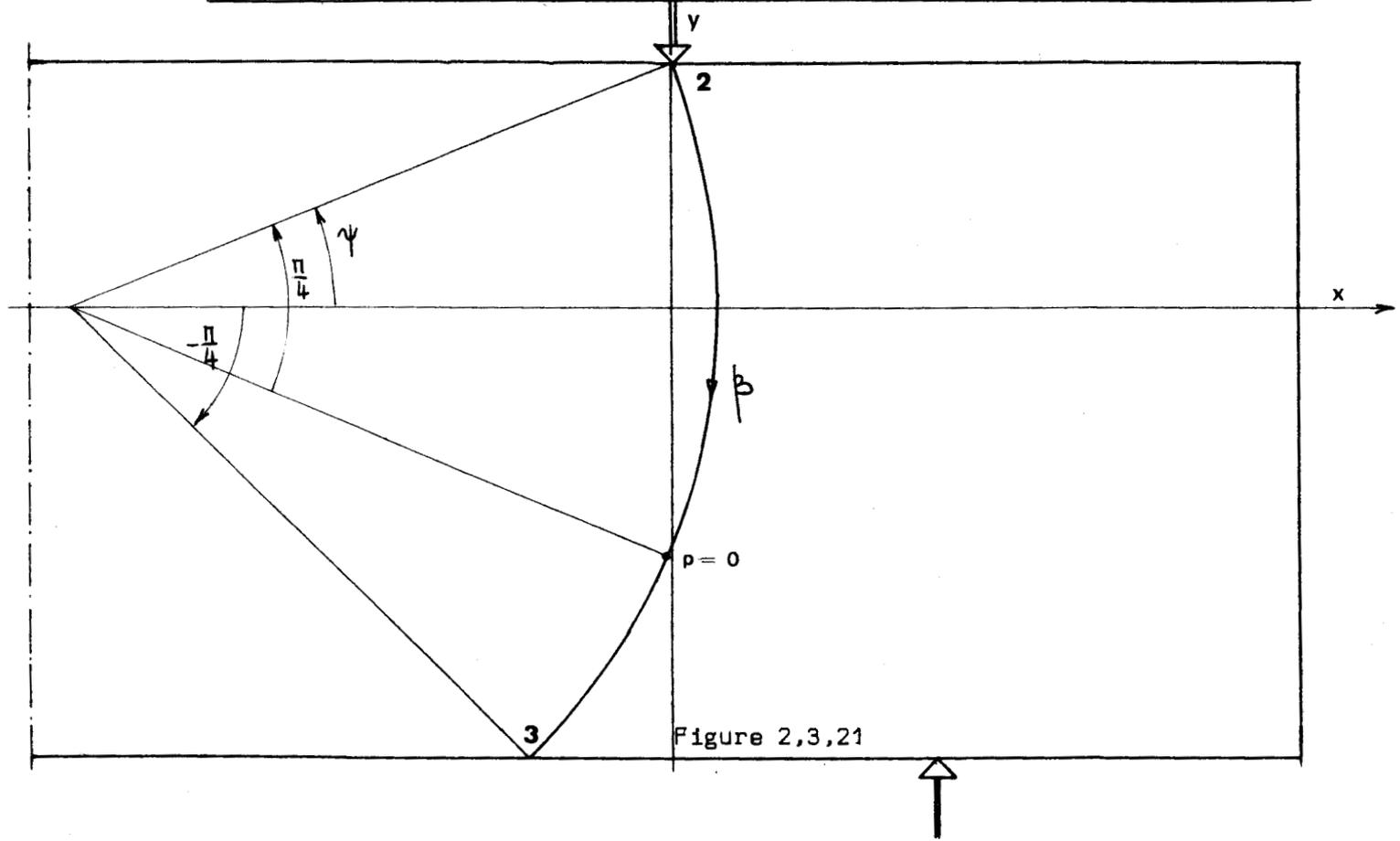
1

$\frac{2M}{ke^2}$

$\frac{P}{ke}$

CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE ASYMETRIQUE - RESEAU N° 4.

$\frac{P}{ke} = 0,803$	$\frac{2M}{ke^2} = 0,620$	$\frac{c}{e} = 0,000$	$\frac{R}{e} = 0,931$	$\frac{a}{e} = 0,386$
------------------------	---------------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------



### 2,3,6. Etude du réseau N° 5.

#### 2,3,6.1. Détermination des pressions.

Le réseau N° 5 succède au réseau N° 4 lorsque le champ homogène 3,4,5 disparaît.

Il est représenté à la figure (2,3,22) .

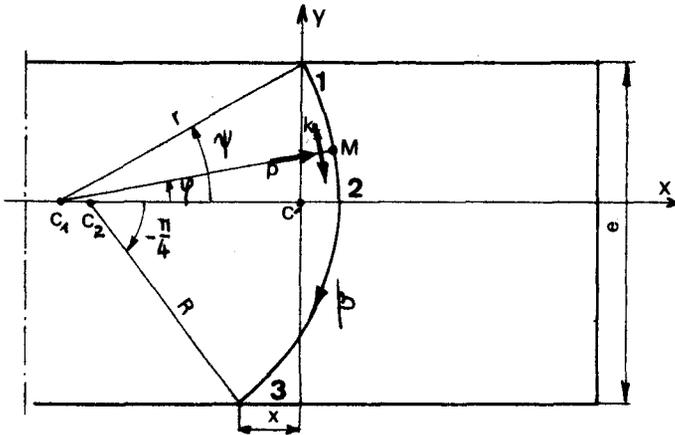


Figure 2,3,22

Soit  $R$  le rayon de la ligne 2,3 et  $r$  le rayon de la ligne 1,2.

Au point 3, la pression est toujours :

$$p_3 = -k$$

d'après (2,3,2) .

Au point 2, nous avons :

$$p_2 - p_3 = 2k(\phi_2 - \phi_3)$$

$$p_2 = k\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

En un point  $M$  de la ligne 1,2 de rayon  $r$  , la pression est :

$$p_M = k\left(2\phi + \frac{\pi}{2} - 1\right)$$

#### 2,3,6.2. Conditions géométriques.

Les conditions géométriques (Figure 2,3,22) sont :

$$\frac{x}{e} = -\frac{R}{e}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + r(\cos \psi - 1)$$

et

$$\frac{r}{e} \sin \psi + \frac{R}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

(2,3,36)

#### 2,3,6.3. Efforts transmis par le réseau.

Les efforts horizontaux transmis par la ligne circulaire 1,2 sont :

$$dX_{12} = \{k \sin \phi + k\left(2\phi + \frac{\pi}{2} - 1\right)\cos \phi\}r d\phi$$

Par intégration entre 0 et  $\psi$ , il vient :

$$X_{12} = kr\left\{\left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1\right)\sin\psi + \cos\psi - 1\right\}$$

Pour la ligne 2,3, les efforts horizontaux sont :

$$dX_{23} = \{k \sin\phi + k\left(2\phi + \frac{\pi}{2} - 1\right)\cos\phi\}R d\phi$$

En intégrant de  $-\frac{\pi}{4}$  à 0, nous obtenons :

$$X_{23} = kR(1 - \sqrt{2}) .$$

Nous avons la condition :

$$X_{12} + X_{23} = 0 .$$

Elle s'exprime ainsi :

$$r\left\{\left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1\right)\sin\psi + \cos\psi - 1\right\} + R(1 - \sqrt{2}) = 0 \quad (2,3,37)$$

Les efforts verticaux sont :

pour la ligne 1,2 :

$$dY_{12} = \{-k \cos\phi + k\left(2\phi + \frac{\pi}{2} - 1\right)\sin\phi\}r d\phi$$

Soit, en intégrant entre 0 et  $\psi$  :

$$Y_{12} = kr\left\{-\left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1\right)\cos\psi + \sin\psi + \frac{\pi}{2} - 1\right\}$$

De même pour la ligne 2,3, et nous avons :

$$Y_{23} = kR\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) .$$

L'effort P par unité de largeur de plaque est :

$$-P = Y_{12} + Y_{23}$$

soit

$$\frac{P}{ke} = \frac{R}{e}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{r}{e}\left\{\left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1\right)\cos\psi - \sin\psi - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right\} \quad (2,3,38)$$

#### 2,3,6.4. Moment transmis par le réseau.

D'après la figure (2,3,22), le moment transmis par la ligne 1,2 est :

$$dM_{12} = -k(r - c_1c' \cos\phi)r d\phi - k\left(2\alpha + \frac{\pi}{2} - 1\right)c_1c' \sin\phi r d\phi$$

soit par intégration entre 0 et  $\psi$  :

$$\frac{2M_{12}}{ke^2} = -\frac{2r^2}{e^2} \left[ \psi - \cos \psi \left\{ (2\psi + \frac{\pi}{2} - 1) \cos \psi - \sin \psi - (\frac{\pi}{2} - 1) \right\} \right] \quad (2,3,39)$$

De la même façon, nous avons le moment transmis par la ligne 2,3 en remarquant que

$$c_2c' = c_1c' - (r - R)$$

$$c_2c' = r(\cos \psi - 1) + R$$

et

$$\frac{2M_{23}}{ke^2} = \frac{2R}{e^2} \left[ -R \frac{\pi}{4} + \{R + r(\cos \psi - 1)\} (\frac{\pi}{2} - 1) \right] \quad (2,3,40)$$

Le moment total M est obtenu comme suit :

$$M = M_{12} + M_{23}$$

#### 2,3,6,5. Limites du réseau N° 5.

La limite du réseau N° 5 avec le réseau N° 4 a été fixée en (2,3,34) et (2,3,35) .

Le réseau N° 5 est remplacé par le réseau N° 6 lorsque la ligne circulaire 1,2 se transforme en ligne droite. La condition est :

$$\psi = 0 \quad \frac{r}{e} = \infty$$

Il vient :

$$\frac{P}{ke} = 0,904945$$

et

$$\frac{2M}{ke^2} = 0,34372$$

Les limites du réseau N° 5 sont les suivantes :

$$0,80338 < \frac{P}{ke} < 0,904945 \quad (2,3,41)$$

$$0,62077 > \frac{2M}{ke^2} > 0,34372 \quad (2,3,42)$$

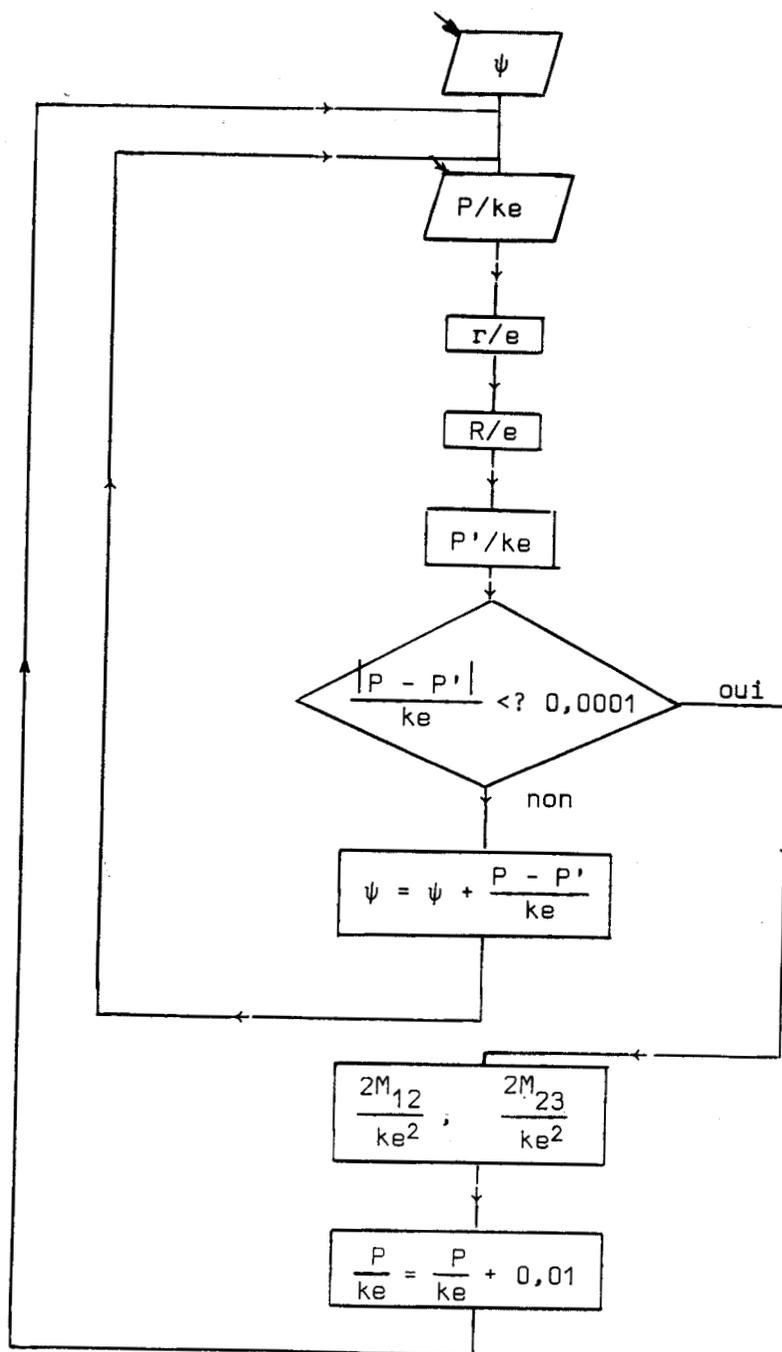
#### 2,3,6,6. Courbe d'interaction.

Les valeurs de  $P/ke$  et de  $2M/ke^2$  calculées sont reportées dans le tableau (2,3,4) .

La courbe d'interaction est représentée à la figure (2,3,20) .

Deux réseaux particuliers sont représentés aux figures (2,3,23) et (2,3,24) .

RESEAU N° 5.



(2,3,36)

(2,3,37)

(2,3,38)

(2,3,39) (2,3,40)



CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE ASYMETRIQUE - RESEAU N° 5.

$\frac{r}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{a}{e}$	$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$
0.92797	0.93166	0.38635	0.80338	0.62077
1.15993	0.90544	0.36043	0.82	0.59111
1.35547	0.88760	0.34395	0.83	0.57095
1.61610	0.86838	0.32692	0.84	0.54922
1.97794	0.84764	0.30927	0.85	0.52576
2.50937	0.82522	0.29091	0.86	0.50037
3.35722	0.80092	0.27174	0.87	0.47282
4.90403	0.77455	0.25163	0.88	0.44286
8.55680	0.74584	0.23044	0.89	0.41018
27.10639	0.71451	0.20802	0.90	0.37443
$\infty$	0.69793	0.18991	0.904945	0.34372

Tableau 2,3,4



CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE ASYMETRIQUE - RESEAU N° 5.

$\frac{P}{ke} = 0,86$	$\frac{2M}{ke^2} = 0,50$	$\frac{\Gamma}{e} = 2,50$	$\frac{R}{e} = 0,82$	$\frac{a}{e} = 0,29$
-----------------------	--------------------------	---------------------------	----------------------	----------------------

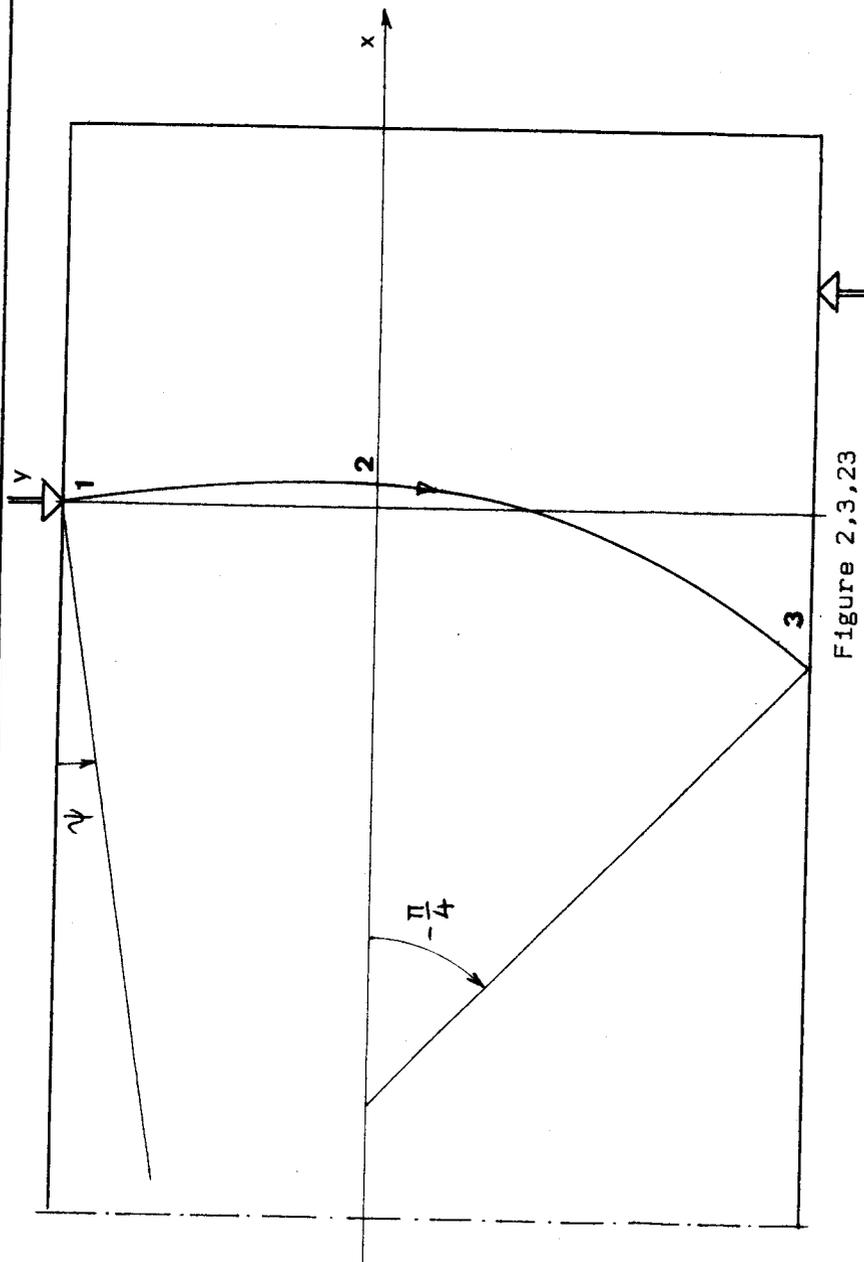
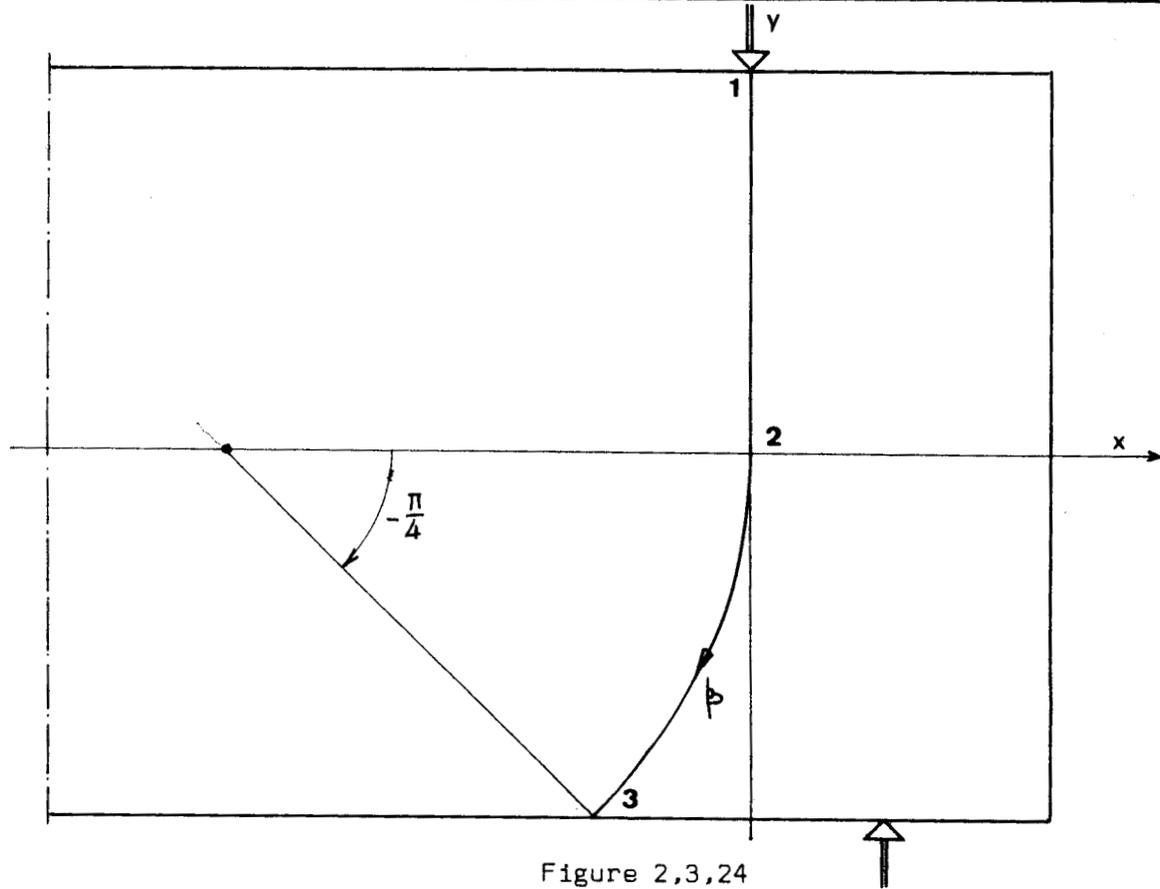


Figure 2,3,23



CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE ASYMETRIQUE - RESEAU N° 5.

$\frac{P}{ke} = 0,9049$	$\frac{2M}{ke^2} = 0,3437$	$\frac{r}{e} = \infty$	$\frac{R}{e} = 0,697$	$\frac{a}{e} = 0,189$
-------------------------	----------------------------	------------------------	-----------------------	-----------------------



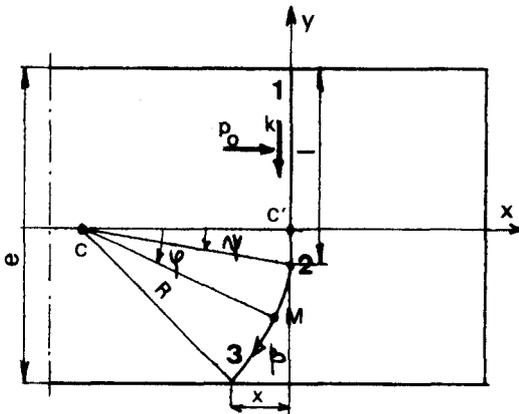
2,3,7. Etude du réseau N° 6.2,3,7,1. Détermination des pressions.

Figure 2,3,24

Soit le réseau de la figure (2,3,24) .

La ligne droite a une longueur  $l$  .

Soit  $p_0$  la pression le long de cette ligne.

Au point 3, la pression est toujours

$$p_3 = -k$$

d'après (2,3,2) .

En un point M de la ligne 2,3, nous avons :

$$p_M = k(2\phi + \frac{\pi}{2} - 1)$$

2,3,7,2. Conditions géométriques.

Les conditions géométriques sont :

$$\frac{l}{e} + \frac{R(\sqrt{2}}{e} - \sin \psi) = 1 \quad (2,3,43)$$

2,3,7,3. Efforts transmis par le réseau.

Les efforts horizontaux sont les suivants :

pour la ligne 1,2 :

$$X_{12} = p_0 l$$

pour la ligne 2,3 :

$$X_{23} = kR\{(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1)\sin \psi + \cos \psi - \sqrt{2}\} .$$

La condition

$$X_{12} + X_{23} = 0$$

s'écrit :

$$p_0 l + kR\{(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1)\sin \psi + \cos \psi - \sqrt{2}\} = 0 \quad (2,3,44)$$

Les efforts verticaux sont pour la ligne 1,2 (2,3,44) :

$$Y_{12} = -k\ell$$

pour la ligne 2,3 :

$$Y_{23} = kR\{\sin \psi - (2\psi + \frac{\pi}{2} - 1)\cos \psi\}$$

soit :

$$\frac{P}{ke} = \frac{\ell}{e} + \frac{R}{e}\{(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1)\cos \psi - \sin \psi\} \quad (2,3,45)$$

#### 2,3,7,4. Moment transmis par le réseau.

Le moment transmis le long de 1,2 est :

$$M_{12} = P_0 \frac{\ell}{2} (2e - R\sqrt{2} - \ell)$$

et le long de 2,3 :

$$M_{23} = kR^2 \left[ \psi + \frac{\pi}{4} + \sin \psi - \{2(\psi + \frac{\pi}{4}) - 1\} \cos \psi \right]$$

Le moment total  $M$  a pour expression :

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{2P_0\ell}{ke} \left( \frac{\ell}{2e} - \frac{R}{e} \sin \psi \right) + \frac{R^2}{e^2} \left[ \psi + \frac{\pi}{4} + \sin \psi - \{2(\psi + \frac{\pi}{4}) - 1\} \cos \psi \right] \quad (2,3,46)$$

#### 2,3,7,5. Limites du réseau N° 6 et courbe d'interaction.

Les limites du réseau sont :

$$0,904945 \leq \frac{P}{ke} \leq 1$$

$$0,34372 \geq \frac{2M}{ke^2} \geq 0$$

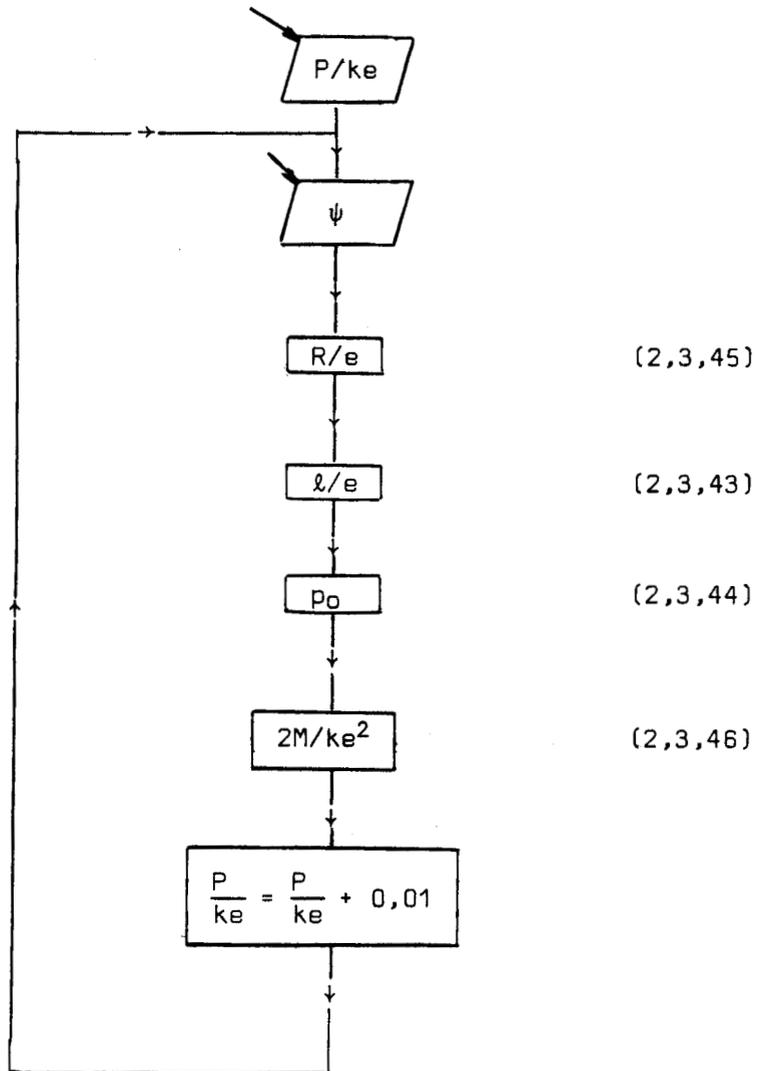
(2,3,47)

d'après (2,3,41) et (2,3,42) .

Les valeurs de  $P/ke$  et de  $2M/ke^2$  sont reportées dans le tableau (2,3,5) .

La courbe d'interaction est représenté à la figure (2,3,20) avec celles des autres réseaux.

## RESEAU N° 6.



CHAMP CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE ASYMETRIQUE - RESEAU N° 6.

$\frac{l}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{P_0}{k}$	$\frac{a}{e}$	$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$
0.50646	0.69793	0.57080	0.18991	0.904945	0.34372
0.53313	0.66026	0.51299	0.18291	0.91	0.33291
0.58500	0.58690	0.41555	0.15764	0.92	0.29005
0.63688	0.51353	0.33399	0.13369	0.93	0.24866
0.68875	0.44017	0.26472	0.11103	0.94	0.20874
0.74063	0.36681	0.20515	0.08962	0.95	0.17028
0.79250	0.29345	0.15338	0.06942	0.96	0.13329
0.84438	0.22009	0.10796	0.05040	0.97	0.09777
0.89625	0.14672	0.06781	0.03251	0.98	0.06371
0.94813	0.07336	0.03205	0.01572	0.99	0.03112
1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.00	0.00000

Tableau 2,3,5



#### 2.4. CONCLUSION.

Comparons les courbes d'interaction représentées par les figures (2,2,10) et (2,3,20) .

La représentation est faite à la figure (2,4,1) .

Les résultats du champ cinématiquement admissible asymétrique sont meilleurs que ceux du champ cinématiquement admissible symétrique.

Pour obtenir la charge limite  $P$  et le moment limite  $P_a$  pour une plaque d'épaisseur  $e$  , on cherche l'intersection de la droite passant par l'origine et de pente  $2a/e$  .

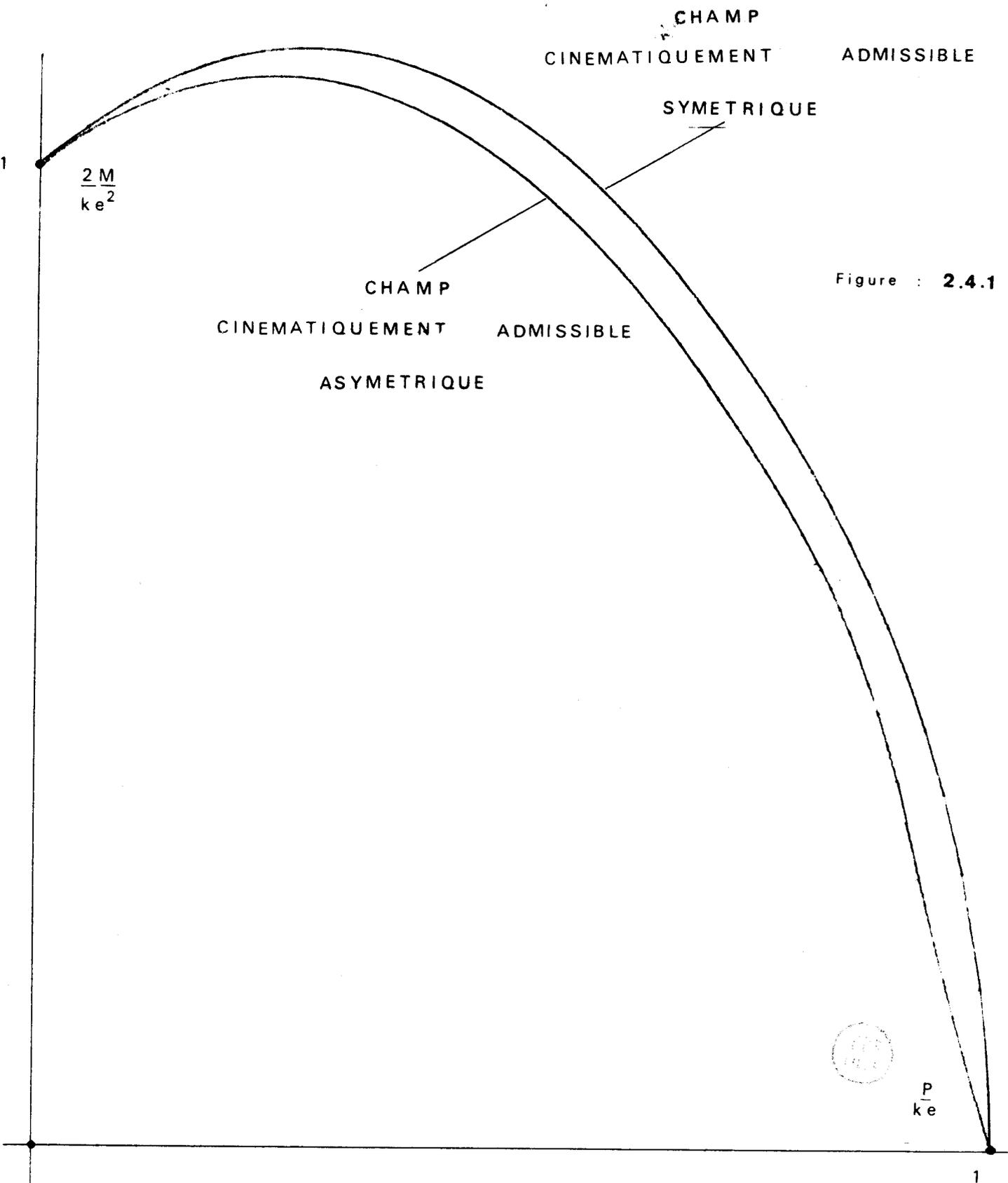


Figure : 2.4.1

III

LES CHAMPS STATIQUEMENT ADMISSIBLES.

### 3,1. INTRODUCTION.

En application du théorème statique, nous proposons trois champs statiquement admissibles.

Le premier est un champ continu, les deux suivants sont des champs constitués par des blocs.

Nous étudions dans chaque cas les conditions d'équilibre, les conditions de continuité.

Nous évaluons enfin les efforts  $P^*$  et les moments  $M^*$  repris par le champ proposé.

Nous en déduisons les courbes d'interaction  $(P^*, M^*)$  propres à chaque champ.

### 3,2. CHAMP STATIQUEMENT ADMISSIBLE CONTINU.

#### 3,2,1. Introduction.

Les contraintes dans le champ sont déterminées à partir des équations d'équilibre et doivent respecter le critère de *TRESCA* selon le schéma proposé par *DRÜCKER* (18) .

#### 3,2,2. Constitution du champ.

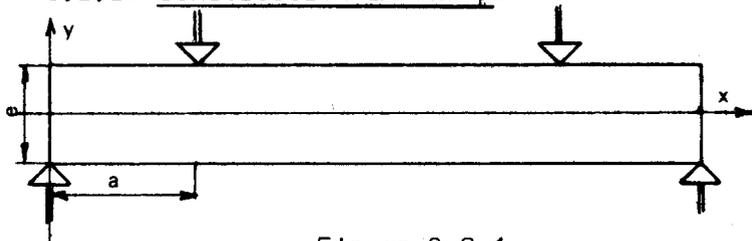


Figure 3,2,1

Nous supposons que la contrainte  $\sigma_y$  est nulle dans tout le champ de façon à satisfaire simplement la condition à la limite.

(Figure 3,2,1)

$$\sigma_y = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm \frac{e}{2}$$

Nous admettrons un état plan de déformation. Le tenseur des contraintes s'écrit alors :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_x}{2} \end{bmatrix}$$

Les équations d'équilibre sont les suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (3,2,1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (3,2,2)$$

Il vient :  $\tau_{xy} = \tau(y)$

Ainsi la relation (3,2,1) s'écrit :

$$\sigma_x = -x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + K$$

Compte tenu de la condition à la limite :

$$x = 0 \quad \sigma_x = 0 \quad (3,2,3)$$

$\sigma_x$  a pour valeur :

$$\sigma_x = -x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (3,2,4)$$

La section critique correspond à l'abscisse  $x = a$ .

Vérifions le critère de *TRESCA* dans cette section. Il s'écrit :

$$\sigma_x^2 + 4 \tau_{xy}^2 = 4 k^2 \quad (3,2,5)$$

Compte tenu de (3,2,4) et pour  $x = a$  :

$$\left(-a \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right)^2 + 4 \tau_{xy}^2 = 4 k^2$$

Les solutions de cette équation pour des valeurs de  $y$  négatives sont :

$$\tau_{xy} = -k \sin \frac{e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) \quad (3,2,6)$$

et

$$\sigma_x = 2k \frac{x}{a} \cos \frac{e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) \quad (3,2,7)$$

La condition  $\sigma_x$  positif pour  $y$  négatif entraîne :

$$\frac{e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) \leq \frac{\pi}{2} \quad (3,2,8)$$

avec

$$0 \leq 1 + \frac{2y}{e} \leq 1$$

soit

$$\frac{e}{a} \leq \frac{\pi}{2} \quad (3,2,9)$$

Pour

$$\frac{e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) > \frac{\pi}{2} \quad (3,2,10)$$

Les contraintes sont prises égales à :

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -k \\ \sigma_x &= 0 \end{aligned} \quad (3,2,11)$$

### 3,2,3. Evaluation de l'effort tranchant par unité de largeur.

L'équivalence entre la charge  $P$  par unité de largeur et les contraintes tangentielles dans la section  $x = a$  s'écrit :

$$P = -2 \int_{-\frac{e}{2}}^0 \tau_{xy} dy$$

Lorsque la condition (3,2,8) est réalisée

$$\alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

L'effort  $P$  a pour expression :

$$P = \int_{-\frac{e}{2}}^0 -k \sin \frac{e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) dy$$

$$P = -2k \left[ -\frac{a}{2} \cos \frac{e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) \right]_{-\frac{e}{2}}^0$$

soit

$$\boxed{\frac{P}{ke} = \frac{a}{e} (1 - \cos \frac{e}{a})} \quad \begin{matrix} \alpha \ll \frac{\pi}{2} \\ \frac{e}{a} \ll \frac{\pi}{2} \end{matrix} \quad (3,2,12)$$

Lorsque la condition (3,2,10) est réalisée

$$\alpha > \frac{\pi}{2}$$

il vient, en tenant compte de (3,2,6) et (3,2,11) :

$$P = -2 \left[ \int_{-\frac{n}{2}}^0 -k dy + \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{n}{2}} -k \sin \frac{e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) dy \right]$$

L'ordonnée  $\frac{n}{2}$  représente le maximum de la fraction circulaire  $\tau_{xy}$ .  
Sa valeur est donnée par :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = \frac{e}{a} \left(1 - \frac{n}{e}\right)$$

soit

$$n = e - \frac{\pi}{2} a$$

et

$$\frac{n}{2} = \frac{e}{2} - \frac{\pi}{4} a$$

L'expression de  $P$  est donc :

$$P = 2 \left( k \frac{n}{2} \right) + ka = k(n + a)$$

soit

$$\boxed{\frac{P}{ke} = \frac{a}{e} \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + 1} \quad \begin{matrix} \alpha > \frac{\pi}{2} \\ \frac{e}{a} > \frac{\pi}{2} \end{matrix} \quad (3,2,13)$$

### 3,2,4. Evaluation du moment fléchissant par unité de largeur de plaque.

Nous avons la relation d'équivalence entre les contraintes normales à la section droite et le moment par unité de largeur :

$$M = 2 \int_{-\frac{e}{2}}^0 \sigma_x y dy$$

Lorsque la condition (3,2,8) est réalisée  $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , nous avons pour  $x = a$  :

$$M = 2 \int_{-\frac{e}{2}}^0 2k \cos \frac{e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) y \, dy$$

$$M = k \left[ y \frac{a}{2} \sin \frac{e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) + \frac{a^2}{4} \cos \frac{e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) \right]_{-\frac{e}{2}}^0$$

$$M = ka^2 \left(1 - \cos \frac{e}{a}\right)$$

soit

$$\boxed{\frac{2M}{ke^2} = 2 \frac{a^2}{e^2} \left(1 - \cos \frac{e}{a}\right)} \quad \begin{array}{l} \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{e}{a} \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \quad (3,2,14)$$

Pour l'autre condition (3,2,10)  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ , il vient :

$$M = \int_{-\frac{e}{2}}^{-\frac{n}{2}} 2k \cos \frac{e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) y \, dy$$

$$M = 4k \left(\frac{a^2}{4} + \frac{na}{4}\right)$$

$$M = ka \left[ a \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + e \right]$$

d'où

$$\boxed{\frac{2M}{ke^2} = 2 \frac{a}{e} \left[ \frac{a}{e} \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \right]} \quad \begin{array}{l} \alpha > \frac{\pi}{2} \\ \frac{e}{a} > \frac{\pi}{2} \end{array} \quad (3,2,15)$$

### 3,2,4. Courbe d'interaction.

La courbe d'interaction est obtenue à partir des relations (3,2,12) et (3,2,14) pour  $\frac{e}{a} \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{P}{ke} = \frac{a}{e} \left(1 - \cos \frac{e}{a}\right)$$

$$\frac{2M}{ke^2} = 2 \frac{a^2}{e^2} \left(1 - \cos \frac{e}{a}\right)$$

Les intervalles de variation sont alors les suivants :

$$0 \leq \frac{P}{ke} \leq \frac{2}{\pi}$$

$$\frac{8}{\pi^2} < \frac{2M}{ke^2} \leq 1 \quad \frac{e}{a} \leq \frac{\pi}{2}$$

Pour  $\frac{a}{e} > \frac{\pi}{2}$ , la courbe d'interaction est donnée par les relations (3,2,13) et (3,2,15) :

$$\frac{P}{ke} = \frac{a}{e} \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$\frac{2M}{ke^2} = 2 \frac{a}{e} \left[ \frac{a}{e} \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \right]$$

avec intervalles de variation :

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{P}{ke} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{2M}{ke^2} \leq \frac{8}{\pi^2}$$

$$\frac{e}{a} > \frac{\pi}{2}$$

Les valeurs sont reportées dans le tableau (3,2,1) .

La courbe d'interaction est représentée par la figure (3,2,2) .

CHAMP STATIQUEMENT ADMISSIBLE CONTINU

$\frac{a}{e}$	$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$
10	0.04996	0.99917
6.66667	0.07486	0.99813
4.44444	0.11203	0.99579
2.96296	0.16715	0.99054
1.97531	0.24776	0.97882
1.31687	0.36179	0.95286
0.87791	0.51055	0.89645
0.58528	0.66593	0.77950
0.39018	0.77728	0.60657
0.26012	0.85152	0.44300
0.17342	0.90102	0.31250
0.11561	0.93401	0.21596
0.07707	0.95600	0.14737
0.05138	0.97067	0.09975
0.03425	0.98045	0.06717
0.02284	0.98696	0.04508
0.01522	0.99131	0.03018
0.01015	0.99421	0.02018
0.00677	0.99614	0.01348

Tableau 3,2,1



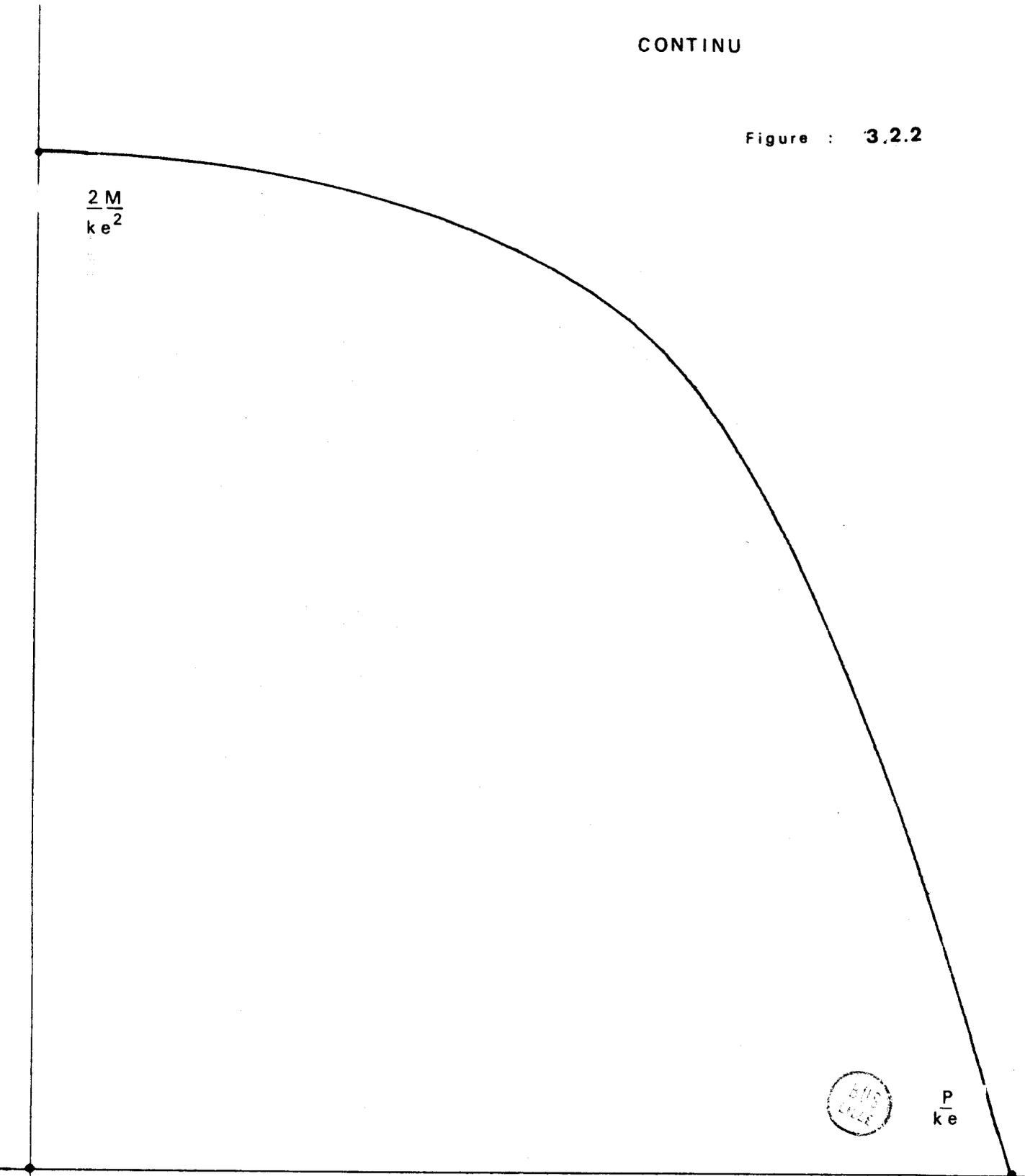
CHAMP

STATIQUEMENT

ADMISSIBLE

CONTINU

Figure : 3.2.2



### 3.3. CHAMP STATIQUEMENT ADMISSIBLE PAR BLOCS SYMETRIQUES.

#### 3.3.1. Description du champ.

Nous considérons un champ constitué par sept blocs numérotés I, II, III, IV, V, VI et VII.

L'axe  $x$  passe par le milieu de la frontière entre III et V.

Les contraintes sont constantes dans les blocs I, II, IV, V, VI et VII.

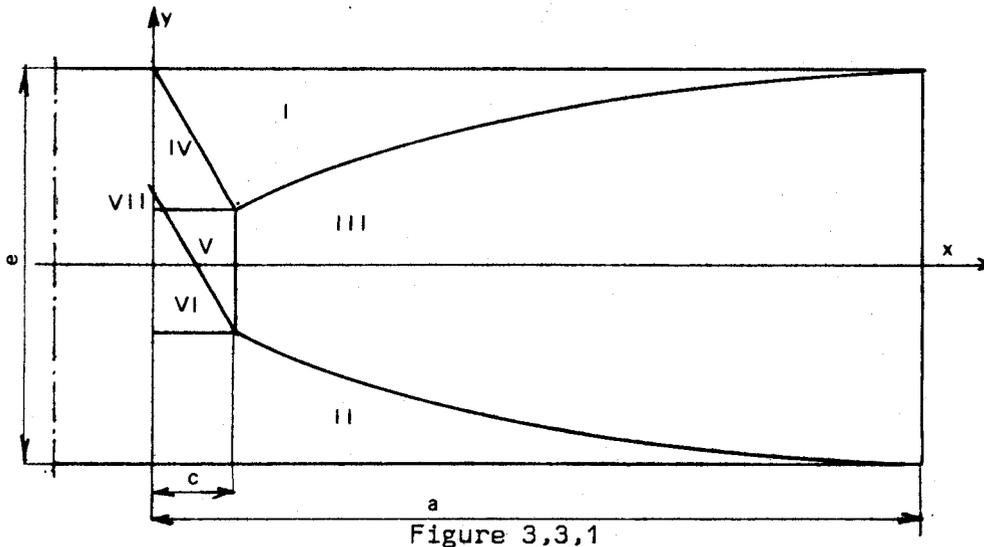


Figure 3,3,1

Dans les blocs I et II, les contraintes sont choisies pour satisfaire aux conditions aux limites.

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm \frac{e}{2} \quad (3,3,1)$$

Elles vérifient le critère de plasticité de *TRESCA*

$$\sigma_x^2 = 4 k^2 \quad (3,3,2)$$

Pour simplifier les expressions ultérieures, nous poserons le critère sous la forme

$$\sigma_x^2 = 1 .$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{array}{ll} \text{en I} & \sigma_x = -1 \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \\ \text{en II} & \sigma_x = 1 \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \end{array} \quad (3,3,3)$$

Dans tous les autres blocs, les contraintes sont définies à partir des conditions aux limites, des équations d'équilibre et du critère de plasticité.

### 3,3,2. Contraintes dans le bloc III.

Les conditions à respecter à la frontière entre le bloc III et le bloc V sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x = c & \Rightarrow \sigma_x = 0 \\ & \Rightarrow \tau_{xy} = \tau(c) \end{aligned} \quad (3,3,4)$$

$\tau(c)$  est une constante puisque les contraintes sont constantes dans le bloc V.

De la même façon pour

$$\begin{aligned} x = a & \Rightarrow \sigma_x = 0 \\ & \Rightarrow \tau_{xy} = \tau(a) \end{aligned} \quad (3,3,5)$$

et  $\tau(a)$  est aussi une constante.

Nous posons que la contrainte  $\sigma_x$  est nulle dans tout le bloc III.

$$\boxed{\sigma_x = 0} \quad (3,3,6)$$

Il vient :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

soit

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau(x)} \quad (3,3,7)$$

La contrainte  $\sigma_y$  vaut donc :

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$$

d'où :

$$\boxed{\sigma_y = - \tau'(x)y + \sigma(x)} \quad (3,3,8)$$

### 3,3,3. Conditions aux limites entre les blocs I et III, II et III.

Soit  $y = \beta(x)$  l'équation de la frontière entre les blocs I et III et  $\beta$  l'angle de l'axe  $x$  et de la tangente à la courbe  $\beta(x)$ .

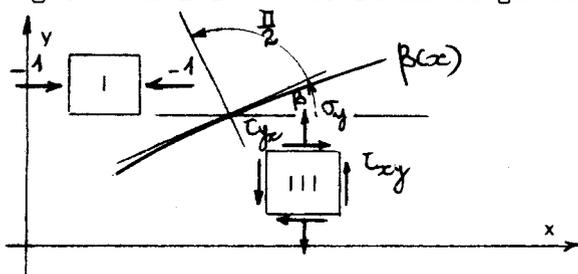


Figure 3,3,2

Les conditions d'équilibre impliquent la continuité des contraintes normales et des contraintes tangentielles à la frontière (2).

$$2\sigma_n = \sigma_y + \sigma_y \cos 2\beta - 2\tau_{xy} \sin 2\beta = -1 + \cos 2\beta \quad (3,3,9)$$

$$2\tau_n = -\sigma_y \sin 2\beta - 2\tau_{xy} \cos 2\beta = -\sin 2\beta \quad (3,3,10)$$

De (3,3,10), nous obtenons

$$(\sigma_y - 1) \sin 2\beta = -2\tau_{xy} \cos 2\beta$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\tau_{xy}}{1 - \sigma_y}} \quad (3,3,11)$$

De (3,3,9), nous obtenons

$$\sigma_y + 1 + (\sigma_y - 1) \cos 2\beta - 2\tau_{xy} \sin 2\beta = 0$$

$$\frac{\sigma_y + 1}{\cos 2\beta} + (\sigma_y - 1) - 2\tau_{xy} \operatorname{tg} 2\beta = 0$$

Après transformation et compte tenu de (3,3,11), il vient :

$$\cos 2\beta = \frac{1 - \sigma_y^2}{(1 - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

avec la relation :

$$\frac{1}{\cos^2 2\beta} = 1 + \operatorname{tg}^2 2\beta$$

nous obtenons :

$$\frac{\{(1 - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2\}^2}{(1 - \sigma_y)^2(1 + \sigma_y)^2} = 1 + \frac{4\tau_{xy}^2}{(1 - \sigma_y)^2}$$

soit :

$$\frac{(1 - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}{(1 - \sigma_y)^2} = 1$$

et :

$$\boxed{\tau_{xy}^2 = \sigma_y} \quad (3,3,12)$$

Cette valeur reportée dans (3,3,11) donne :

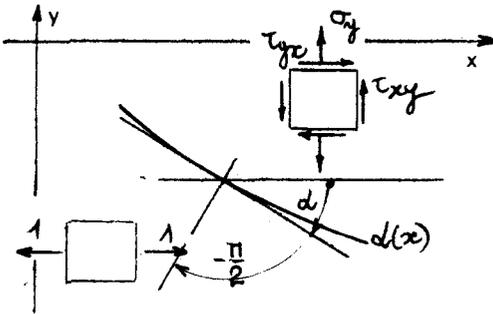
$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\tau_{xy}}{1 - \tau_{xy}^2} = \frac{2\beta'_{(x)}}{1 - \beta'^2_{(x)}}$$

d'où :

$$\boxed{\beta'_{(x)} = \tau_{(x)}} \quad (3,3,13)$$

et :

$$\boxed{\beta'^2_{(x)} = \sigma_y} \quad (3,3,14)$$



Etudions la continuité entre les blocs II et III.

Soit  $y = \alpha(x)$  la frontière entre ces deux blocs . (Figure 3,3,3)

Figure 3,3,3

$$2\sigma_n = \sigma_y + \sigma_y \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 1 - \cos 2\alpha \quad (3,3,15)$$

$$2\tau_n = -\sigma_y \sin 2\alpha - 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = \sin 2\alpha \quad (3,3,16)$$

De (3,3,16) :

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{-\sigma_y - 1}} \quad (3,3,17)$$

De (3,3,15) et (3,3,17)

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \sigma_y^2}{(1 + \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3,3,18)$$

Il vient finalement :

$$\boxed{\alpha'_{(x)} = -\tau(x)} \quad (3,3,19)$$

$$\boxed{\alpha''_{(x)} = \sigma_y} \quad (3,3,20)$$

### 3,3,4. Détermination des frontières du bloc III.

Les relations (3,3,13) et (3,3,19) donnent :

$$\beta' + \alpha' = 0$$

soit

$$\beta + \alpha = K_1 .$$

Les conditions aux limites sont :

$$x = c \quad \beta + \alpha = 0$$

$$x = a \quad \beta + \alpha = 0$$

donc :

$$\boxed{\beta + \alpha = 0} \quad (3,3,21)$$

Les relations (3,3,14) et (3,3,20) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\beta'\tau &= -\beta\tau' + \sigma \\ \alpha'\tau &= -\alpha\tau' + \sigma.\end{aligned}$$

Par différence :

$$\begin{aligned}\tau(\beta' - \alpha') &= -\tau'(\beta - \alpha) \\ \tau(\beta' - \alpha') + \tau'(\beta - \alpha) &= 0\end{aligned}$$

ou

$$\frac{d}{dx} \{\tau(\beta - \alpha)\} = 0$$

$$\tau(\beta - \alpha) = K_2$$

Les lignes frontières  $\beta(x)$  et  $\alpha(x)$  sont symétriques par rapport à l'axe des  $x$  :

$$2\tau\beta = K_2$$

ou, avec (3,3,13) :

$$2\beta'\beta = K_2$$

$$\beta^2 = \alpha^2 = K_2x + K_3$$

et

$$\beta = \sqrt{K_2x + K_3} \quad (3,3,22)$$

$$\alpha = -\sqrt{K_2x + K_3} \quad (3,3,23)$$

Les conditions aux limites sont (Figure 3,3,4) :

$$\begin{aligned}x = c & \quad \beta = d \\ x = a & \quad \beta = \frac{e}{2}\end{aligned}$$

L'équation (3,3,22) doit vérifier ces conditions :

$$d^2 = K_2c + K_3$$

$$\frac{e^2}{4} = K_2a + K_3$$

Soit :

$$K_2 = \frac{\frac{e^2}{4} - d^2}{a - c} = \frac{e^2 - 4d^2}{4(a - c)}$$

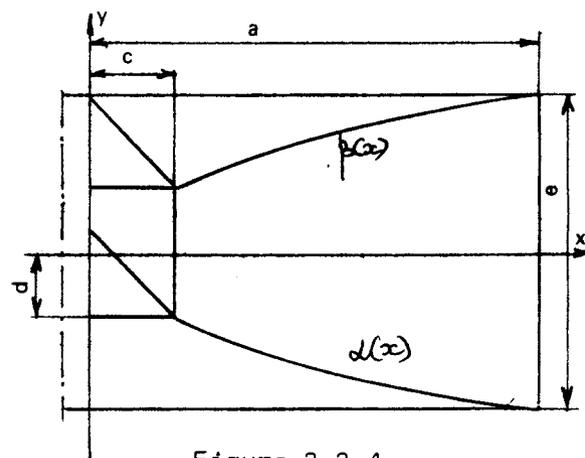


Figure 3,3,4

et

$$\frac{e^2}{4} + d^2 = \frac{e^2 - 4d^2}{4(a - c)} (a + c) + 2K_3$$

$$K_3 = \frac{4ad^2 - ce^2}{4(a - c)}$$

Compte tenu des valeurs des constantes,  $K_2$  et  $K_3$ ,  $\beta(x)$  a pour expression :

$$\beta(x) = \sqrt{\frac{(e^2 - 4d^2)x + 4ad^2 - ce^2}{4(a - c)}} \quad (3,3,24)$$

### 3.3.5. Conditions aux limites entre les blocs I et IV, IV et V, V et VI.

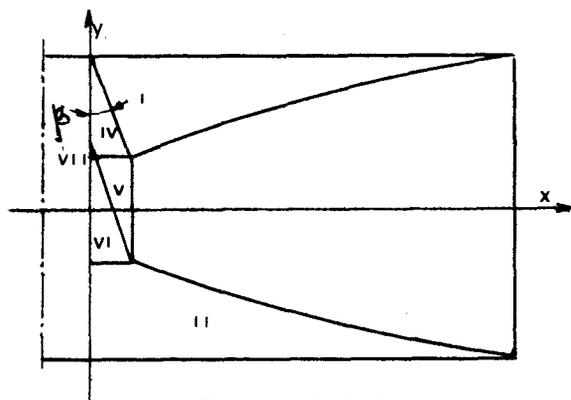


Figure 3,3,5

Soit  $\beta$  l'angle entre la frontière des blocs I et IV et l'axe  $y$ , et

$$A = \sigma_x + \sigma_y$$

$$B = \sigma_x - \sigma_y \quad \text{dans le bloc IV}$$

$$C = \tau_{xy}$$

Les conditions de continuité sont (2) :

$$A + B \cos 2\beta + 2C \sin 2\beta = -1 - \cos 2\beta \quad (3,3,25)$$

$$-B \sin 2\beta + 2C \cos 2\beta = \sin 2\beta \quad (3,3,26)$$

De (3,3,26), il vient :

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2C}{B+1} = t \quad (3,3,27)$$

Le critère de plasticité s'écrit :

$$B^2 + 4C^2 = 1 \quad (3,3,28)$$

Le bloc IV est plastifié lorsque :

$$4C^2 = (B+1)^2 t^2 = 1 - B^2$$

ou

$$B^2(t^2 + 1) + 2Bt^2 + t^2 - 1 = 0.$$

La solution est :

$$B = -\frac{t^2 + 1}{t^2 + 1} \quad (3,3,29)$$

La valeur de  $C$  est donnée par (3,3,27) :

$$2C = (B+1)t = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

$$C = \frac{t}{t^2 + 1} \quad (3,3,30)$$

La valeur de A vient de (3,3,25) :

$$A = -1 - (B + 1) \cos 2\beta - 2C \sin 2\beta \quad (3,3,31)$$

L'autre détermination de B, possible dans le critère, ne convient pas car elle conduit à des contraintes positives.

Le bloc V est défini par les conditions de continuité avec IV et III.

En V

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= \frac{A - B}{2} \\ \tau_{xy} &= C \end{aligned} \quad (3,3,32)$$

d'après (3,3,6) .

Le bloc VII a les mêmes contraintes que le bloc I.

En VII

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -1 \\ \sigma_y &= \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (3,3,33)$$

Le bloc VI a ses contraintes définies en reportant la discontinuité sur  $\sigma_x$  entre IV et V sur la discontinuité sur  $\sigma_x$  entre VI et VII.

Ainsi en VI

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -1 - \frac{A + B}{2} \\ \sigma_y &= \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (3,3,34)$$

### 3,3,6. Conditions dans les blocs III et V.

Le choix de l'angle  $\beta$  est fait en fonction du critère de plasticité dans le bloc III.

$$\sigma_y^2 + 4\tau_{xy}^2 \leq 1$$

D'après (3,3,14), (3,3,20) et (3,3,24),  $|\sigma_y|$  est maximum sur  $\beta$ .

En effet :

$$\begin{aligned} \beta' \tau &= -\beta \tau' + \sigma \\ \alpha' \tau &= -\alpha \tau' + \sigma \end{aligned}$$

Il vient :

$$2\sigma = \tau(\beta' + \alpha') + \tau'(\beta + \alpha)$$

Par symétrie  $\beta + \alpha = 0$  et  $\beta' + \alpha' = 0$

$$\sigma_{(x)} = 0 \quad (3,3,35)$$

et

$$\sigma_y = -\tau'_{(x)}\beta = \beta'^2 \quad (3,3,36)$$

Le critère s'écrit donc :

$$\beta'^4 + 4\beta'^2 - 1 \leq 0 .$$

Ceci implique :

$$\beta' \leq 0,486$$

ou

$$\tau_{(c)} \leq 0,486 \quad (3,3,37)$$

Dans le champ V, la condition de plasticité s'écrit d'après (3,3,32) :

$$\left[ \frac{A - B}{2} \right]^2 + 4C^2 = 1$$

et, compte tenu des valeurs de A , B et C données par (3,3,29) , (3,3,30) et (3,3,31) , l'angle  $\beta$  optimum (Figure 3,3,5) est :

$$\beta = 0,56079 \quad (3,3,38)$$

### 3,3,7. Définition complète des blocs.

Les contraintes dans chacun des blocs sont les suivantes :

$$\text{I} : \quad \sigma_x = -1 \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (3,3,39)$$

$$\text{II} : \quad \sigma_x = 1 \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (3,3,40)$$

$$\text{III} : \quad \begin{array}{l} \sigma_x = 0 \\ \tau_{xy} = \tau_{(x)} \\ \sigma_y = -\tau'_{(x)}y \end{array} \quad (3,3,41)$$

d'après (3,3,7) , (3,3,35) et (3,3,36)

$\tau$  est défini par (3,3,13) et (3,3,24) .

IV :

$$\begin{array}{l} \sigma_x = - 1,24568 \\ \tau_{xy} = 0,39118 \\ \sigma_y = - 0,62284 \end{array} \quad (3,3,42)$$

d'après (3,3,29) , (3,3,30) et (3,3,31)

V :

$$\begin{array}{l} \sigma_x = 0 \\ \tau_{xy} = 0,39118 \\ \sigma_y = - 0,62284 \end{array} \quad (3,3,43)$$

d'après (3,3,32)

VI :

$$\begin{array}{l} \sigma_x = 0,24568 \\ \tau_{xy} = 0 \\ \sigma_y = 0 \end{array} \quad (3,3,44)$$

d'après (3,3,34)

VII :

$$\sigma_x = - 1 \quad \tau_{xy} = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad (3,3,45)$$

d'après (3,3,33)

Les blocs I, II, IV, V et VII sont plastifiés ; les blocs III et VI sont rigides.

La figure 3,3,6 donne une répartition de ces blocs pour  $\frac{a}{e} = 2,17$  .

CHAMP STATIQUE PAR BLOCS SYMETRIQUES

Répartition des blocs.

$\frac{P}{ke} = 0,13$	$\frac{2M}{ke^2} = 1,013$	$\frac{a}{e} = 2,17$	$\frac{d}{e} = 0,172$	$\frac{c}{e} = 0,206$
-----------------------	---------------------------	----------------------	-----------------------	-----------------------

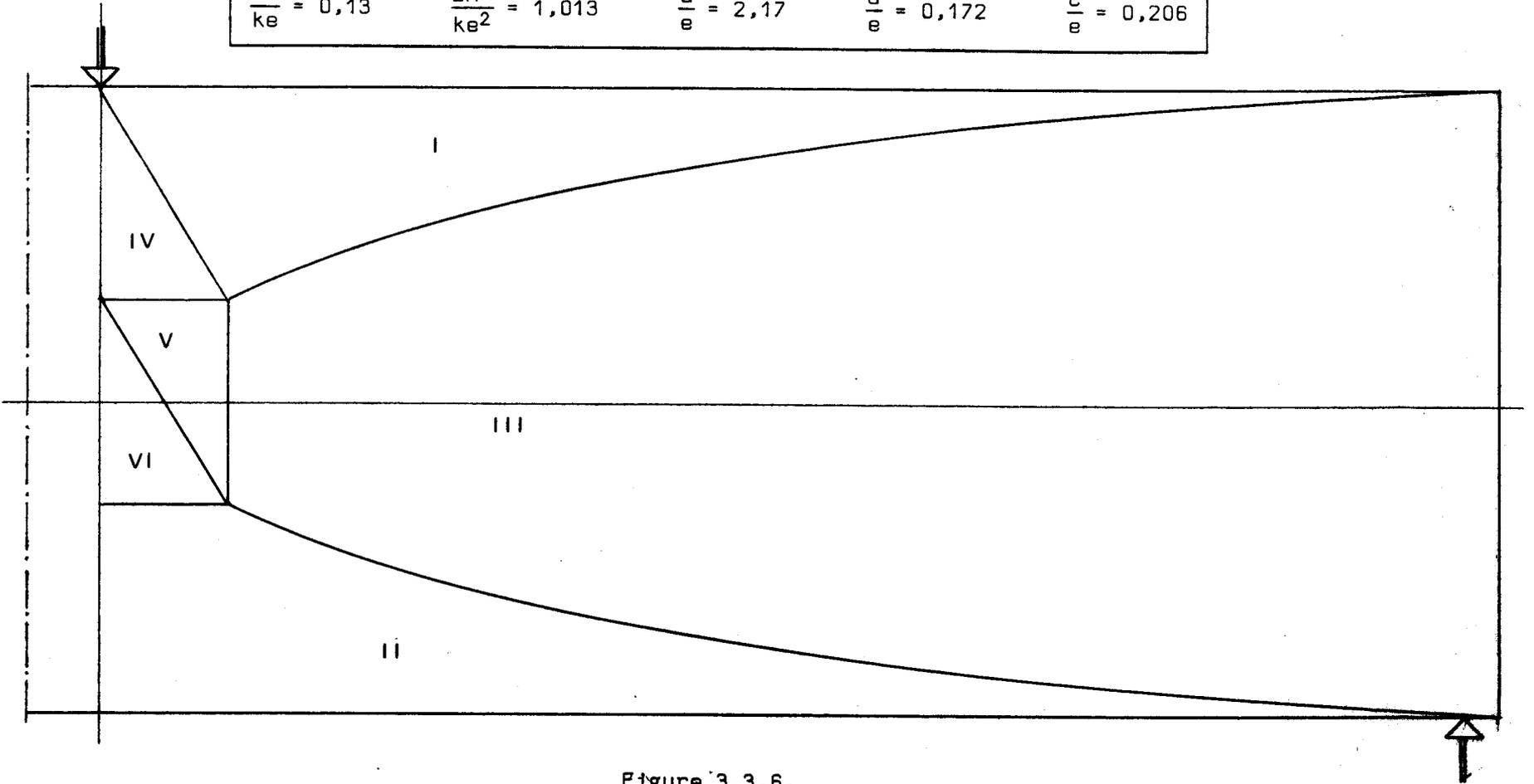


Figure 3,3,6.



3,3,10

3,3,8. Tracé de la courbe d'interaction.

Evaluons la contrainte  $\tau_{xy}$  dans le bloc III.

$$\tau_{xy} = \tau(x) = \beta'_{(x)}$$

d'après (3,3,7) et (3,3,13) .

Or  $\beta'_{(x)}$  a pour valeur, compte tenu de (3,3,24) :

$$\beta'_{(x)} = \frac{1}{2} \frac{e^2 - 4d^2}{4(a-c)} \frac{\sqrt{4(a-c)}}{\sqrt{(e^2 - 4d^2)x + 4ad^2 - ce^2}}$$

$$\beta'_{(x)} = \frac{e^2 - 4d^2}{4\sqrt{\{(e^2 - 4d^2)x + 4ad^2 - ce^2\}(a-c)}}$$

Pour  $x = c$  , nous avons :

$$\beta'_{(c)} = \tau(c) = \frac{e^2 - 4d^2}{4\sqrt{4d^2(a-c)^2}} = \frac{e^2 - 4d^2}{8d(a-c)}$$

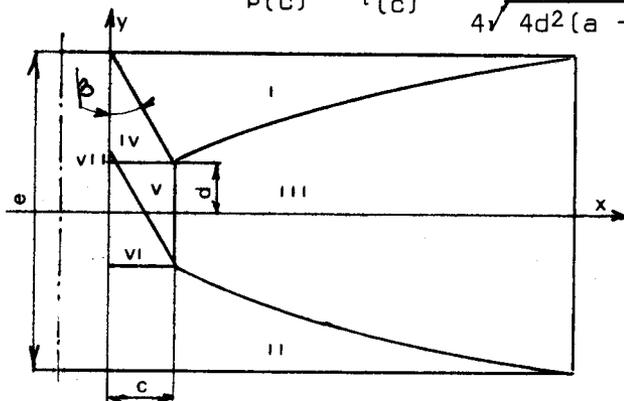


Figure 3,3,7

Or, d'après la figure (3,3,7) :

$$d = \frac{e}{2} - \frac{c}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{e}{2} - \frac{c}{t}$$

Il vient donc :

$$\frac{2\tau(c) t + 1}{t^2} \left(\frac{c}{e}\right)^2 - \left[\frac{2\tau(c) a}{t e} + \tau(c) + \frac{1}{t}\right] \frac{c}{e} + \tau(c) \frac{a}{e} = 0$$

soit :

$$\frac{c}{e} = \frac{(2\frac{a}{e} + t)\tau(c) + 1 - \sqrt{\{ \tau(c) (\frac{2a}{e} + t) + 1 \}^2 - 4\tau(c) \frac{a}{e} (2t\tau(c) + 1)}}{2(2\tau(c) t + 1)} \quad (3,3,46)$$

La charge  $P$  par unité de largeur de plaque est équivalente à la résultante des contraintes tangentielles s'exerçant sur la section droite à l'abscisse  $x = a$  .

Soit

$$P = 2k \tau(a)e .$$

Il vient :

$$\frac{P}{ke} = 2 \tau(a) .$$

Or

$$\tau(a) = \beta'(a) = \frac{1 - 4\left(\frac{d}{e}\right)^2}{4\left(\frac{a}{e} - \frac{c}{e}\right)}$$

et

$$\frac{P}{ke} = \frac{1 - 4\left(\frac{d}{e}\right)^2}{2\left(\frac{a}{e} - \frac{c}{e}\right)}$$

(3,3,47)

Le moment par unité de largeur est :

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{P}{ke} \left(\frac{2a}{e}\right) .$$

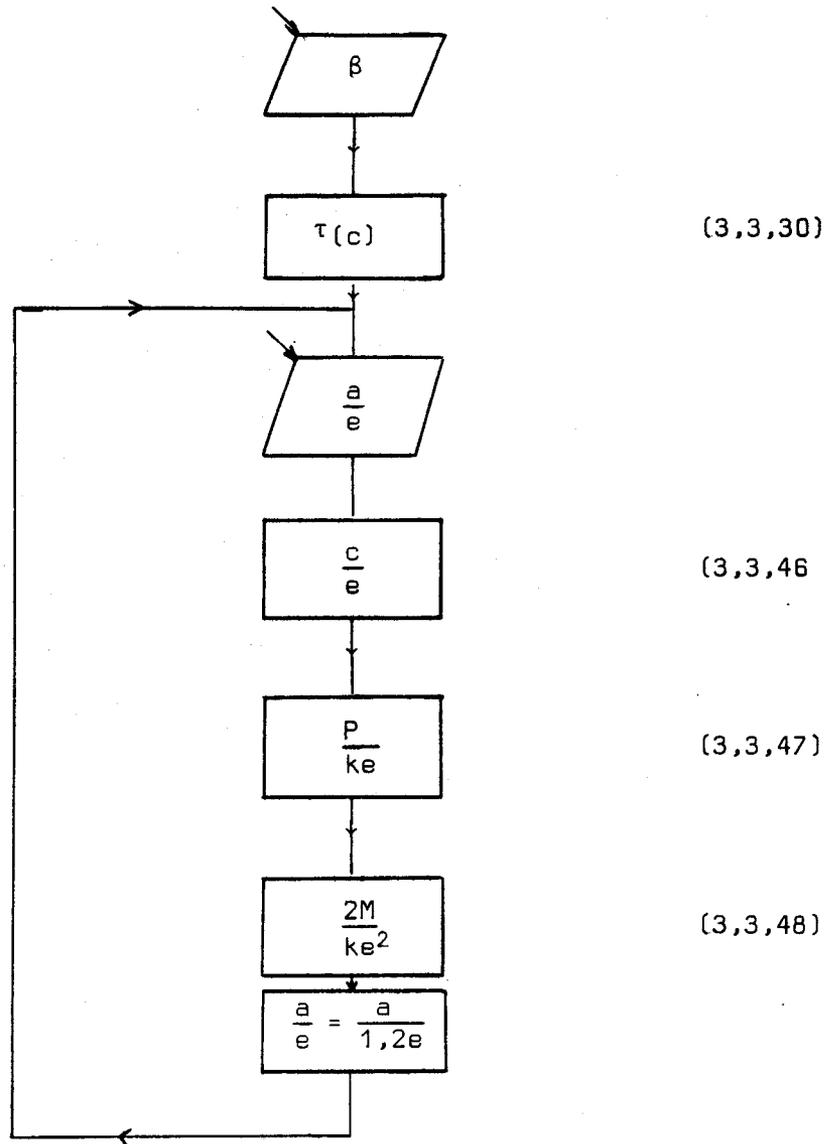
(3,3,48)

Le calcul des valeurs de  $\frac{2M}{ke^2}$  et  $\frac{P}{ke}$  est effectué selon l'ordinogramme de la page suivante.

Les valeurs sont reportées dans le tableau (3,3,1) .

La courbe d'interaction est représentée par la figure (3,3,8) .

## TRACE DE LA COURBE D'INTERACTION.



CHAMP STATIQUE PAR BLOCS SYMETRIQUES.

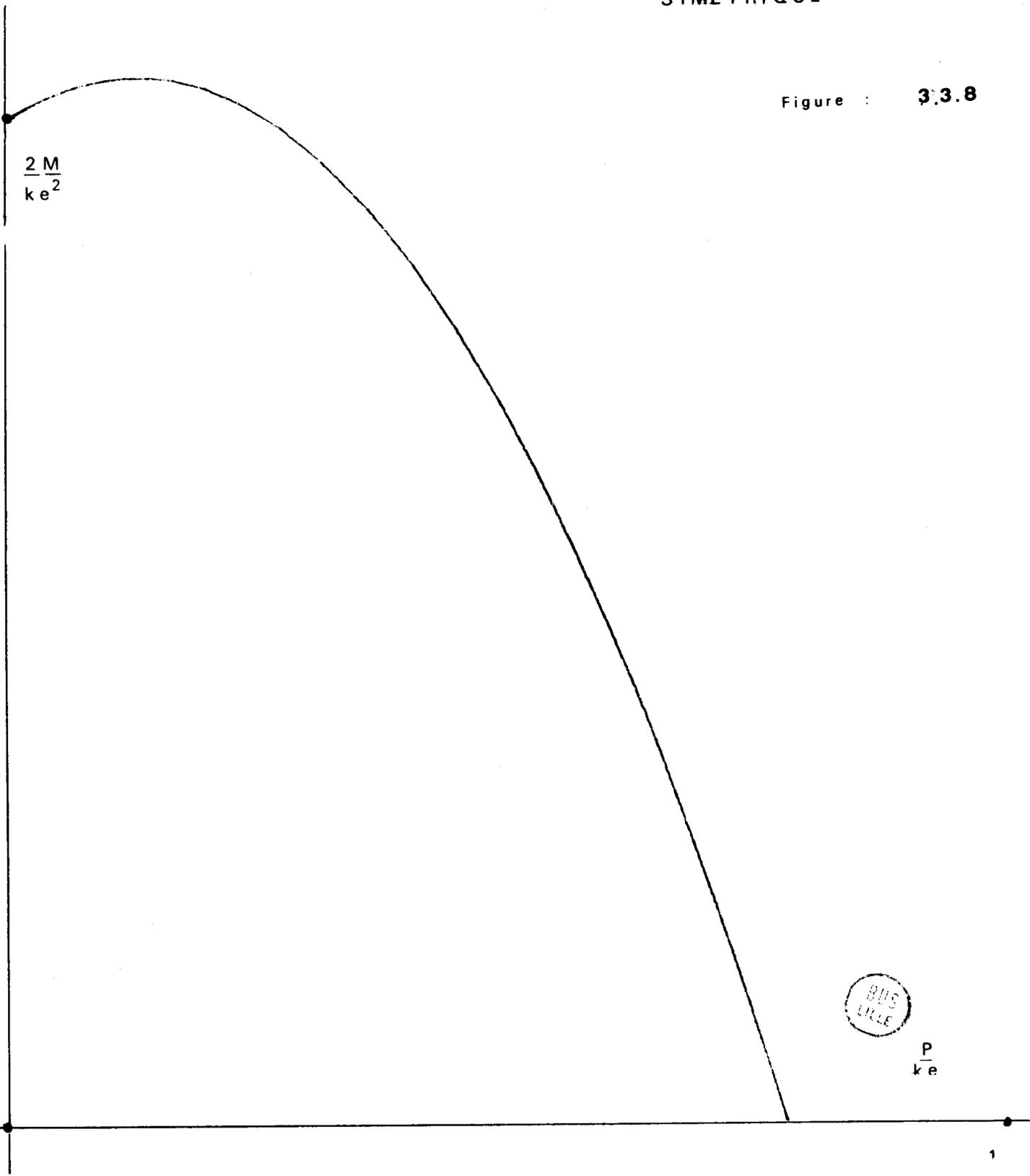
$\frac{c}{e}$	$\frac{a}{e}$	$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$
0.31201	100	0.0502	1.00309
0.31112	69.44444	0.0723	1.00441
0.30984	48.22531	0.01043	1.00629
0.30798	33.48980	0.01506	1.00891
0.30529	23.25680	0.02177	1.01252
0.30138	16.15056	0.03150	1.01736
0.29571	11.21567	0.04563	1.02359
0.28746	7.78886	0.06618	1.03089
0.27552	5.40879	0.09594	1.03783
0.25844	3.75610	0.13847	1.04025
0.22041	2.17367	0.23329	1.01394
0.16902	1.25791	0.36127	0.90889
0.11618	0.72796	0.49289	0.71761
0.07394	0.42127	0.59813	0.50395
0.04505	0.24379	0.67011	0.32673
0.02682	0.14108	0.71553	0.20190
0.01577	0.08165	0.74307	0.12134
0.00921	0.04725	0.75941	0.07176
0.00373	0.01899	0.77306	0.02936
0.00150	0.00763	0.77861	0.01188
0.00060	0.00307	0.78084	0.00479
0.00020	0.00103	0.78184	0.00161

Tableau 3,3,1.



CHAMP 3,3,15  
STATIQUEMENT ADMISSIBLE  
SYMETRIQUE

Figure : 3.3.8



### 3,4. CHAMP STATIQUEMENT ADMISSIBLE PAR BLOCS ASYMETRIQUES.

#### 3,4,1. Description du champ.

Nous considérons un champ, constitué par six blocs numérotés I, II, III, IV, V, VI (Figure 3,4,1). L'axe  $x$  passe par le milieu de la frontière entre III et V et ne coïncide plus avec la trace du plan moyen de la plaque.

Les contraintes sont constantes dans les blocs I, II, IV, V et VI.

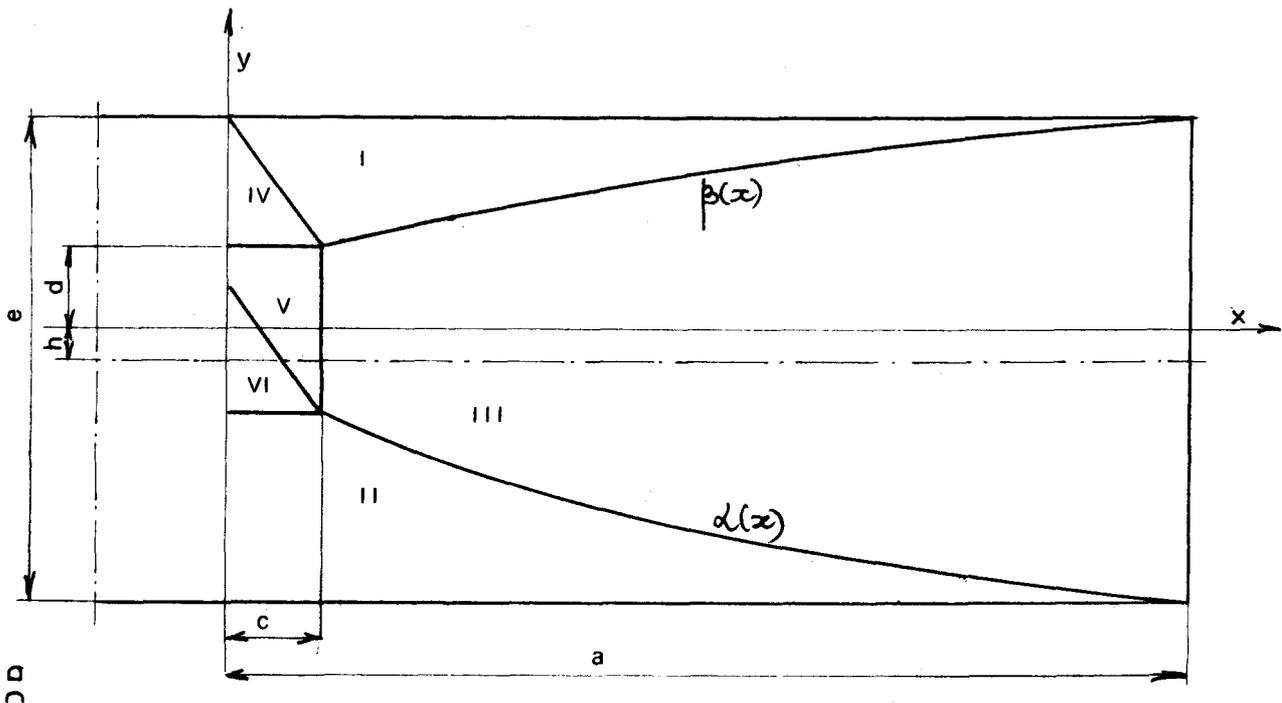


Figure 3,4,1

Dans les blocs I et II, les contraintes sont choisies comme précédemment. Elles satisfont aux conditions aux limites

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \frac{e}{2} - h \quad (3,4,1)$$

$$y = -\frac{e}{2} - h$$

Elles vérifient le critère de plasticité de TRESCA en déformation plane :

$$\sigma_x^2 = 4k^2 = 1 \quad (3,4,2)$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{array}{ll} \text{en I} & \sigma_x = -1 \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \\ \text{en II} & \sigma_x = +1 \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \end{array} \quad (3,4,3)$$

Les contraintes dans les blocs III et V seront définies à partir des conditions aux limites, des équations d'équilibre et du critère de plasticité.

Dans tous ces champs, la contrainte  $\sigma_z$  est la contrainte intermédiaire et n'intervient donc pas dans le critère.

### 3,4,2. Contraintes dans le bloc III.

A la frontière entre le bloc III et le bloc V, les conditions à respecter sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x = c & \Rightarrow \sigma_x = 2\sigma_{(c)} \\ & \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{(c)} \end{aligned} \quad (3,4,4)$$

$\sigma_{(c)}$  et  $\tau_{(c)}$  sont des constantes. En effet,  $\sigma_x$  et  $\tau_{xy}$  sont constantes le long de cette frontière puisque les contraintes sont constantes dans le bloc V.

A la frontière extérieure du bloc, nous avons :

$$\begin{aligned} x = a & \Rightarrow \sigma_x = 0 \\ & \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{(a)} \end{aligned} \quad (3,4,5)$$

$\tau_{(a)}$  est une constante.

Nous choisissons pour l'expression de  $\sigma_x$  une fonction circulaire

$$\sigma_x = \sigma_{(c)}(1 - \cos \gamma) \quad (3,4,6)$$

avec l'angle  $\gamma = \frac{\pi(x - a)}{a - c}$ , de façon à vérifier les conditions (3,4,4) et (3,4,5).

Il vient :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = + \frac{\pi}{a - c} \sigma_{(c)} \sin \gamma$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$$

Soit

$$\tau_{xy} = - \frac{\pi}{a - c} \sigma_{(c)} y \sin \gamma + \tau_{(x)} \quad (3,4,7)$$

pour  $x = c \quad \gamma = -\pi \quad \tau_{xy} = \tau_{(c)}$

$x = a \quad \gamma = 0 \quad \tau_{xy} = \tau_{(a)}$

La contrainte  $\sigma_y$  est donnée par :

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = - \frac{\pi^2}{(a-c)^2} \sigma(c) y \cos \gamma + \tau'(x)$$

D'où

$$\sigma_y = + \frac{\pi^2}{(a-c)^2} \sigma(c) \frac{y^2}{2} \cos \gamma - y \tau'(x) + \sigma(x) \quad (3,4,8)$$

### 3,4,3. Conditions aux limites entre les blocs I et II, II et III.

Soit  $y = \beta(x)$  la frontière entre les blocs I et III et  $\beta$  l'angle de l'axe  $x$  et de la tangente à la courbe  $y = \beta(x)$ .

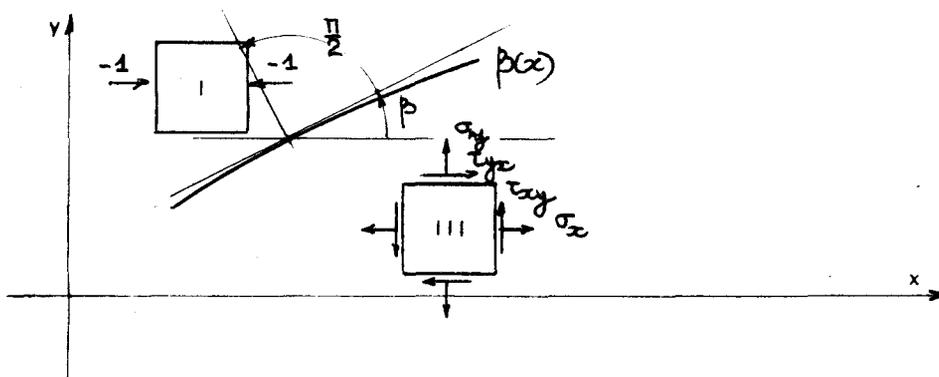


Figure 3,4,2

La continuité des contraintes normales et des contraintes tangentielles à la frontière s'exprime ainsi :

$$2\sigma_n = A + B \cos(2\beta + \pi) + 2C \sin(2\beta + \pi) = -1 - \cos(2\beta + \pi) \quad (3,4,9)$$

$$2\tau_u = -B \sin(2\beta + \pi) + 2C \cos(2\beta + \pi) = \sin(2\beta + \pi) \quad (3,4,10)$$

avec

$$A = \sigma_x + \sigma_y$$

$$B = \sigma_x - \sigma_y \quad \text{dans le bloc III}$$

$$C = \tau_{xy}$$

Il vient de la seconde relation :

$$B \sin 2\beta - 2C \cos 2\beta = - \sin 2\beta$$

soit

$$\text{tg } 2\beta = \frac{2C}{B + 1} \quad (3,4,11)$$

D'après (3,4,9)

$$A - B \cos 2\beta - 2C \sin 2\beta = -1 + \cos 2\beta$$

$$(B + 1) \cos 2\beta = (A + 1) - 2C \sin 2\beta$$

$$\frac{1}{\cos 2\beta} = \frac{(B + 1)^2 + 4C^2}{(B + 1)(A + 1)}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 2\beta = \frac{1}{\cos^2 2\beta}$$

En tenant compte de (3,4,11) :

$$(B + 1)^2 + 4C^2 = (A + 1)^2$$

$$(A + B + 2)(-A + B) = 4C^2 = 0$$

Soit

$$\boxed{(\sigma_x + 1)\sigma_y = \tau_{xy}^2} \quad (3,4,12)$$

En reprenant la relation (3,4,11), et en tenant compte de (3,4,12), il vient :

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y + 1} = \frac{\frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x + 1}}{1 - \frac{\tau_{xy}^2}{(\sigma_x + 1)^2}}$$

D'où

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x + 1}$$

ou

$$\boxed{\beta^1(x) = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x + 1}} \quad (3,4,13)$$

avec (3,4,12)

$$\boxed{\beta^2(x) = \frac{\sigma_y}{\sigma_x + 1}} \quad (3,4,14)$$

Considérons maintenant la frontière entre les blocs II et III.

Soit  $y = \alpha(x)$  cette frontière, et  $\alpha$  l'angle de l'axe  $x$  et de la tangente à cette courbe.

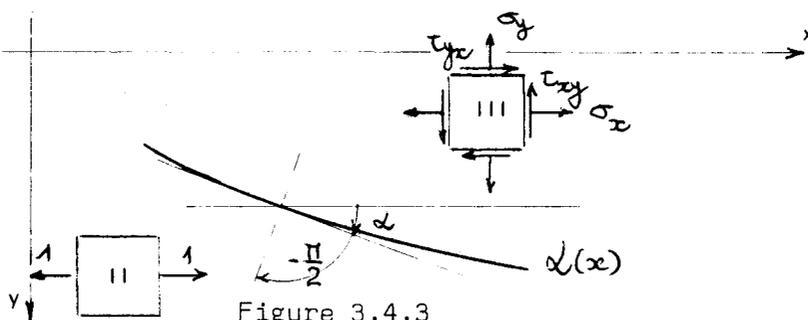


Figure 3,4,3

La continuité s'exprime par

$$2\sigma_n = A + B \cos(2\alpha + \pi) + 2C \sin(2\alpha + \pi) = 1 + 1 \cos(2\alpha + \pi) \quad (3,4,15)$$

$$2\tau_n = -B \sin(2\alpha + \pi) + 2C \cos(2\alpha + \pi) = -\sin(2\alpha + \pi) \quad (3,4,16)$$

La relation (3,4,16) donne :

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2C}{B-1}} \quad (3,4,17)$$

Les relations (3,4,15) et (3,4,17) donnent :

$$(B-1)^2 + 4C^2 = (A-1)^2$$

$$(A+B-2)(A-B) = 4C^2$$

Soit

$$\boxed{\sigma_y(\sigma_x - 1) = \tau_{xy}^2} \quad (3,4,18)$$

et

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y - 1} = \frac{\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - 1}}{1 - \frac{\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - 1)^2}}$$

d'où

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - 1}$$

$$\boxed{\alpha'_{(x)} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - 1}} \quad (3,4,19)$$

avec (3,4,18) :

$$\boxed{\alpha''_{(x)} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x - 1}} \quad (3,4,20)$$

#### 3,4,4. Détermination des frontières du bloc III.

Nous partons des relations (3,4,13) et (3,4,14) sur  $\beta(x)$  et des relations (3,4,19) et (4,4,20) sur  $\alpha(x)$ .

Nous définissons les contraintes dans ce bloc pour les relations simplifiées issues de (3,4,6), (3,4,7) et (3,4,8) suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x \\ \tau_{xy} &= -\sigma'_x y + \tau \\ \sigma_y &= \sigma''_x \frac{y^2}{2} - \tau'_y + \sigma \end{aligned}} \quad (3,4,21)$$

Les relations (3,4,13) et (3,4,19) donnent avec les formules (3,4,21) :

$$\alpha'(\sigma_x - 1) = -\sigma_x' \alpha + \tau$$

$$\beta'(\sigma_x + 1) = -\sigma_x' \beta + \tau$$

En éliminant  $\tau(x)$ , nous obtenons :

$$\beta'(\sigma_x + 1) + \sigma_x' \beta = \alpha'(\sigma_x - 1) + \sigma_x' \alpha$$

$$\sigma_x'(\beta - \alpha) + \sigma_x'(\beta' - \alpha') = -\alpha' - \beta'$$

$$\text{ou} \quad \frac{d}{dx}[\sigma_x(\beta - \alpha)] = -\frac{d}{dx}(\beta + \alpha).$$

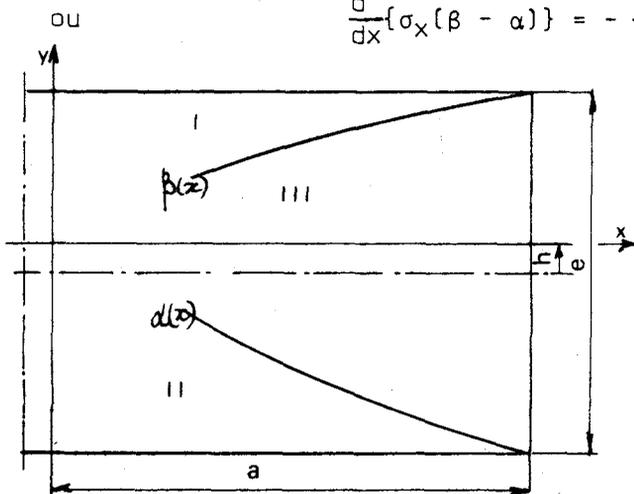


Figure 3,4,4

En intégrant :

$$\beta + \alpha = -\sigma_x(\beta - \alpha) + K_1$$

A la limite

$$x = a \quad \sigma_x = 0 \quad (3,4,5)$$

$$\beta + \alpha = K_1 = -2h \quad (\text{Fig.3,4,4})$$

$(\beta + \alpha)$  a donc pour valeur :

$$\beta + \alpha = -\sigma_x(\beta - \alpha) - 2h \quad (3,4,22)$$

La somme des relations (3,4,13) et (3,4,19) fournit :

$$\beta'(\sigma_x + 1) + \alpha'(\sigma_x + 1) = -\sigma_x'(\beta + \alpha) + 2\tau$$

$$2\tau = \sigma_x'(\beta + \alpha) + \sigma_x(\beta' + \alpha') + \beta' - \alpha'$$

$$2\tau = \frac{d}{dx}[\sigma_x(\beta + \alpha) + \beta - \alpha] \quad (3,4,23)$$

De (3,4,13) et (3,4,14) d'une part, de (3,4,19) et (3,4,20) d'autre part, nous obtenons :

$$\sigma_y = \tau_{xy} \alpha' \quad \text{sur } \alpha(x)$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} \beta' \quad \text{sur } \beta(x)$$

soit :

$$\beta'(-\sigma_x' \beta + \tau) = \sigma_x'' \frac{\beta^2}{2} - \tau' \beta + \sigma$$

$$\alpha'(-\sigma_x' \alpha + \tau) = \sigma_x'' \frac{\alpha^2}{2} - \tau' \alpha + \sigma$$

(3,4,24)

Par différence, nous écrivons :

$$-\sigma'_x(\beta\beta' - \alpha\alpha') + \tau(\beta' - \alpha') = \frac{\sigma''_x}{2} (\beta^2 - \alpha^2) - \tau'(\beta - \alpha)$$

ou 
$$\tau'(\beta' - \alpha') + \tau'(\beta - \alpha) = \frac{\sigma''_x}{2} (\beta^2 - \alpha^2) + \sigma'_x(\beta\beta' - \alpha\alpha')$$

$$\frac{d}{dx} \{\tau(\beta - \alpha)\} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \{\sigma'_x(\beta^2 - \alpha^2)\} .$$

En intégrant

$$2\tau(\beta - \alpha) = \sigma'_x(\beta + \alpha) + K_2$$

La condition à la limite (3,4,4) et la figure (3,4,5) donnent :

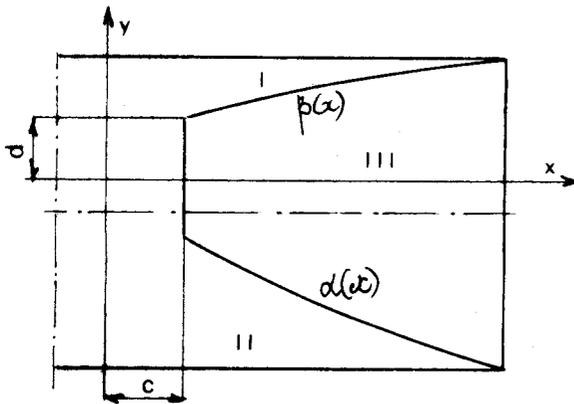


Figure 3,4,5

$$\begin{aligned} x = c \quad \tau &= \tau(c) \\ \beta + \alpha &= 0 \\ \beta - \alpha &= 2d \end{aligned}$$

$$2\tau(c) = \frac{K_2}{\beta - \alpha}$$

$\tau$  a pour expression finale :

$$\boxed{2\tau = \sigma'_x(\beta + \alpha) + \frac{4\tau(c)d}{\beta - \alpha}} \quad (3,4,25)$$

La somme des relations (3,4,24) s'écrit :

$$\tau(\beta' + \alpha') - \sigma'_x(\beta\beta' + \alpha\alpha') = \frac{\sigma''_x}{2} (\beta^2 + \alpha^2) - \tau'(\beta + \alpha) + 2\sigma$$

$$\tau(\beta' + \alpha') + \tau'(\beta + \alpha) = \frac{\sigma''_x}{2} (\beta^2 + \alpha^2) + \sigma'_x(\beta\beta' + \alpha\alpha') + 2\sigma$$

$$\frac{d}{dx} \{\tau(\beta + \alpha)\} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \{\sigma'_x(\beta^2 + \alpha^2)\} + 2\sigma$$

$$\boxed{2\sigma = \frac{d}{dx} \{\tau(\beta + \alpha) - \frac{1}{2} \sigma'_x(\beta^2 + \alpha^2)\}} \quad (3,4,26)$$

Cette relation et (3,4,25) déterminent  $\sigma(x)$  et  $\tau(x)$  dans le bloc III en fonction de l'équation de ses frontières.

Les relations (3,4,23) et (3,4,25) donnent :

$$\sigma'_x(\beta + \alpha) + \sigma_x(\beta' + \alpha') + \beta' - \alpha' = \sigma'_x(\beta + \alpha) + \frac{4\tau(c)d}{\beta - \alpha}$$

En tenant compte de (3,4,22)

$$\beta' + \alpha' = -\sigma'_x(\beta - \alpha) - \sigma_x(\beta' - \alpha')$$

nous avons la transformation suivante :

$$\sigma_x \{-\sigma'_x(\beta - \alpha) - \sigma_x(\beta' - \alpha')\} = \frac{4 \tau(c) d}{\beta - \alpha}$$

ou  $(\beta - \alpha)(\beta' - \alpha')(1 - \sigma_x^2) - \sigma_x \sigma'_x (\beta - \alpha)^2 = 4 \tau(c) d$

$$\frac{d}{dx} \{(\beta - \alpha)^2 (\sigma_x^2 - 1)\} = -8 \tau(c) d$$

$$(\beta - \alpha)^2 (\sigma_x^2 - 1) = -8 \tau(c) d x + K_3$$

La condition à la limite d'après (3,4,4) et la figure (3,4,4) donne :

$$\begin{aligned} x = a & \quad \sigma_x = 0 \\ & \quad \beta + \alpha = -2h \\ & \quad \beta - \alpha = e \end{aligned}$$

donc

$$-e^2 = -8 \tau(c) d a + K_3$$

$$(\beta - \alpha)^2 = \frac{-8 \tau(c) d (x - a) - e^2}{\sigma_x^2 - 1}$$

soit

$$\beta - \alpha = \sqrt{\frac{8 \tau(c) d (a - x) - e^2}{\sigma_x^2 - 1}} \quad (3,4,27)$$

D'après (3,4,22) :

$$\beta + \alpha = -\sigma_x(\beta - \alpha) - 2h$$

et

$$2\beta = \beta + \alpha + \beta - \alpha$$

$$2\beta = -\sigma_x(\beta - \alpha) + \beta - \alpha - 2h$$

$$2\beta = (\beta - \alpha)(1 - \sigma_x) - 2h$$

avec (3,4,27) :

$$\beta = \sqrt{\frac{1 - \sigma_x}{1 + \sigma_x}} \sqrt{\frac{e^2}{4} - 2 \tau(c) d (a - x) - h} \quad (3,4,28)$$

Les conditions aux limites (Figures 3,4,4 et 3,4,5) sont :

$$\begin{aligned} x = a & \quad \beta = \frac{e}{2} - h \\ x = c & \quad \beta = d \end{aligned}$$

Portons la seconde condition dans (3,4,28) :

$$d = \sqrt{\frac{1 - \sigma_x}{1 + \sigma_x}} \sqrt{\frac{e^2}{4} - 2\tau(c)d(a - c) - h}$$

$$(d + h)^2 = \frac{1 - \sigma_x}{1 + \sigma_x} \left[ \frac{e^2}{4} - 2\tau(c)d(a - c) \right] \quad (3,4,29)$$

Effectuons les mêmes calculs pour la courbe  $\alpha$ . D'après (3,4,22) :

$$2\alpha = -(\beta - \alpha)(1 + \sigma_x) - 2h$$

avec (3,4,27) :

$$\alpha = -\sqrt{\frac{1 + \sigma_x}{1 - \sigma_x}} \sqrt{\frac{e^2}{4} - 2\tau(c)d(a - x) - h} \quad (3,4,30)$$

Les conditions aux limites du bloc III sont (Figures 3,4,4 et 3,4,5) :

$$\begin{aligned} x = a & \quad \alpha = -\frac{e}{2} - h \\ x = c & \quad \alpha = -d \end{aligned}$$

La seconde condition fournit :

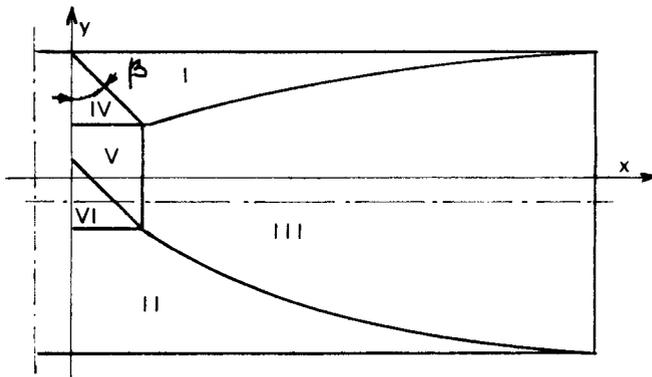
$$d = \sqrt{\frac{1 + \sigma_x}{1 - \sigma_x}} \sqrt{\frac{e^2}{4} - 2\tau(c)d(a - c) - h}$$

soit

$$(d - h)^2 = \frac{1 + \sigma_x}{1 - \sigma_x} \left[ \frac{e^2}{4} - 2\tau(c)d(a - c) \right] \quad (3,4,31)$$

Les expressions (3,4,27) à (3,4,31) déterminent complètement les limites du bloc III et les expressions (3,4,25) et (3,4,26) fixent les valeurs de  $\sigma$  et  $\tau$  en fonction de ces limites.

### 3,4,5. Conditions aux limites entre les blocs I et IV et les blocs IV et V.



Considérons les blocs I et IV.  
Soit  $\beta$  l'angle entre la frontière et la verticale.

Soit

$$A = \sigma_x + \sigma_y$$

$$B = \sigma_x - \sigma_y \quad \text{dans le bloc IV}$$

$$C = \tau_{xy}$$

Figure 3,4,6

Les conditions d'équilibre sur la frontière s'expriment comme suit :

$$A + B \cos 2\beta + 2C \sin 2\beta = -1 - \cos 2\beta \quad (3,4,32)$$

$$-B \sin 2\beta + 2C \cos 2\beta = \sin 2\beta \quad (3,4,33)$$

La seconde condition s'écrit :

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2C}{B+1} = t \quad (3,4,34)$$

Le critère de plasticité s'écrit :

$$B^2 + 4C^2 = 1$$

ou 
$$\pm B = \sqrt{1 - 4C^2}$$

Lorsque le bloc IV est entièrement plastifié, il vient, compte tenu de (3,4,34) :

$$4C^2 = (B+1)^2 t^2 = 1 - B^2$$

soit 
$$B^2(t^2 + 1) + 2Bt^2 + t^2 - 1 = 0$$

La solution à retenir est :

$$B = \frac{-t^2 + 1}{t^2 + 1} \quad (3,4,35)$$

La seconde condition conduit à C nul, valeur qui ne convient pas aux conditions du problème.

Cette valeur est reportée dans (3,4,34)

$$2C = (B+1)t = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

$$C = \frac{t}{t^2 + 1} \quad (3,4,36)$$

La valeur de A est déterminée à partir de (3,4,33) :

$$A = -1 - (B+1)\cos 2\beta - 2C \sin 2\beta \quad (3,4,37)$$

L'autre détermination de B possible dans le critère consiste à prendre  $B = \sigma_y - \sigma_x$ . Il vient :

$$B = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \quad \text{l'autre solution conduit à C nul}$$

$$C = (-B+1) \frac{t}{2}$$

$$A = -1 - (-B+1) \cos 2\beta - 2C \sin 2\beta$$

Pour les valeurs de l'angle  $\beta$  comprises entre  $\frac{\pi}{4}$  et 0, les valeurs de  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  trouvées sont positives. Elles ne conviennent pas au problème.

Nous retenons les valeurs de  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  suivantes :

$$\begin{array}{l} \sigma_x = \frac{A + B}{2} \\ \sigma_y = \frac{A - B}{2} \\ \tau_{xy} = C \end{array} \quad (3,4,38)$$

A, B, C ayant les valeurs fixées d'après les relations (3,4,35), (3,4,36) et (3,4,37).

Entre les blocs IV et V, les contraintes  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  sont continues.

Lorsque le bloc V est entièrement plastifié, la contrainte  $\sigma_x$  peut être la même que dans le bloc IV ou prendre une autre valeur, fixée par la seconde détermination de B.

Soient  $\sigma_{IVx}$  et  $\sigma_{Vx}$  ces deux valeurs.

Nous avons :

$$\begin{array}{l} B = \sigma_{IVx} - \sigma_y \\ -B = \sigma_{Vx} - \sigma_y \end{array}$$

Ainsi :

$$\sigma_{Vx} = 2\sigma_y - \sigma_{IVx} \quad (3,4,39)$$

Le tableau ci-après donne les valeurs de  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_{IVx}$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_{Vx}$  pour les angles  $\beta$  compris entre  $\frac{\pi}{4}$  et 0.

Les conditions du bloc III fixeront ultérieurement le choix de  $\beta$  et de  $\sigma_{Vx}$ .

CONTRAINTES DANS LES BLOCS IV ET V  
EN FONCTION DE  $\beta$

$\beta$	$\tau_{xy}$	$\sigma_x$ (IV)	$\sigma_y$	$\sigma_x$ (V)
0.78540	0.00000	-1.00000	0.00000	1.00000
0.68722	0.19134	-1.15703	0.23315	0.69073
0.62177	0.30438	-1.21812	0.42476	0.36859
0.52360	0.43301	-1.25000	0.75000	0.25000
0.45815	0.48296	-1.23817	0.97935	0.72053
0.39270	0.50000	-1.20711	-1.20711	-1.20711
0.32725	0.48296	-1.16394	-1.42276	-1.68158
0.26180	0.43301	-1.11603	-1.61603	-2.11603
0.19635	0.35355	-1.07033	-1.77743	-2.48454
0.13090	0.25000	-1.03291	-1.89894	-2.76496
0.06545	0.12941	-1.00848	-1.97441	-2.94033
0.00000	0.00000	-1.00000	-2.00000	-3.00000

Tableau 3,4,1

3,4,6. Conditions dans le bloc III.

Il convient de vérifier que le critère n'est pas violé dans le bloc III.

La zone critique correspond à la frontière entre le bloc III et le bloc V.  
(Figure 3,4,6)

Exprimons le critère de plasticité sur la frontière  $\beta(x)$  et sur la frontière  $\alpha(x)$ .

Son expression est

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \leq 1 \quad (3,4,40)$$

Sur la frontière  $\beta(x)$ , nous avons d'après (3,4,12) et (3,4,14) :

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^2 &= (\sigma_x + 1)\sigma_y \\ \sigma_y &= \beta'^2(\sigma_x + 1) \end{aligned}$$

Le critère se transforme ainsi :

$$\{\sigma_x - \beta'^2(\sigma_x + 1)\}^2 + 4\beta'^2(\sigma_x + 1)^2 \leq 1.$$

Soit :

$$\beta'^4(\sigma_X + 1)^2 - 2\beta'^2 \sigma_X(\sigma_X + 1) + \sigma_X^2 + 4\beta'^2(\sigma_X + 1)^2 \leq 1$$

$$\beta'^4(\sigma_X + 1)^2 + 2\beta'^2(\sigma_X + 1)(2 + \sigma_X) + \sigma_X^2 - 1 \leq 0$$

La condition à vérifier est :

$$\beta'^2 \leq \frac{- (\sigma_X + 2) + \sqrt{4\sigma_X + 5}}{\sigma_X + 1} \quad (3,4,41)$$

Sur la frontière  $\alpha(x)$ , nous avons d'après (3,4,18) et (3,4,20) :

$$\{\sigma_X - \alpha'^2(\sigma_X - 1)\}^2 + 4\alpha'^2(\sigma_X - 1)^2 \leq 1$$

$$\alpha'^4(\sigma_X - 1)^2 + 2\alpha'^2(\sigma_X - 1)(\sigma_X - 2) + \sigma_X^2 - 1 \leq 0$$

D'où la condition :

$$\alpha'^2 \leq \frac{- (\sigma_X - 2) + \sqrt{5 - 4\sigma_X}}{\sigma_X - 1} \quad (3,4,42)$$

Dans tout le bloc III, la condition de plasticité s'écrit, compte tenu de la forme simplifiée (3,4,21) :

$$\left(\sigma_X - \sigma_X'' \frac{y^2}{2} + \tau'_y - \sigma\right)^2 + 4\tau^2 \leq 1$$

$$\text{ou } \left(\sigma_X - \sigma_X'' \frac{y^2}{2}\right)^2 + (\tau'_y - \sigma)^2 + 2(\tau'_y - \sigma)\left(\sigma_X - \sigma_X'' \frac{y^2}{2}\right) + 4\tau^2 \leq 1 \quad (3,4,43)$$

La valeur de  $\tau'$  est fournie par la relation (3,4,23) :

$$2\tau' = \sigma_X''(\beta + \alpha) + \sigma_X(\beta'' + \alpha'') + 2\sigma_X'(\beta' + \alpha') + \beta'' - \alpha'' \quad (3,4,44)$$

celle de  $\sigma$  par la relation (3,4,26) :

$$2\sigma = \tau(\beta' + \alpha') + \tau'(\beta + \alpha) - \frac{\sigma_X''}{2}(\beta^2 + \alpha^2) - \sigma_X'(\beta\beta' + \alpha\alpha') \quad (3,4,45)$$

Pour la frontière  $x = c$ , il vient d'après (3,4,4) :

$$2\tau' = \sigma_X(\beta'' - \alpha'') + \beta'' - \alpha''$$

et

$$2\sigma = \tau(\beta' - \alpha') - \sigma_X'' d^2$$

Les expressions de  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\alpha''$ ,  $\beta''$  sont déduites des relations (3,4,28) et (3,4,30).

$$\alpha' = \frac{\sigma'_x}{(1 - \sigma'_x)^2} \sqrt{\frac{1 - \sigma'_x}{1 + \sigma'_x}} \sqrt{\frac{e^2}{4} - 2\tau(c)d(a - x)} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + \sigma'_x}{1 - \sigma'_x}} \frac{2\tau(c)d}{\sqrt{\frac{e^2}{4} - 2\tau(c)d(a - x)}}$$

pour  $x = c$

$$\alpha' = - \frac{\tau(c)d}{\beta + h} \quad (3,4,46)$$

$$\beta' = \frac{-\sigma'_x}{(1 + \sigma'_x)^2} \sqrt{\frac{1 + \sigma'_x}{1 - \sigma'_x}} \sqrt{\frac{e^2}{4} - 2\tau(c)d(a - x)} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \sigma'_x}{1 + \sigma'_x}} \frac{2\tau(c)d}{\sqrt{\frac{e^2}{4} - 2\tau(c)d(a - x)}}$$

pour  $x = c$

$$\beta' = - \frac{\tau(c)d}{\alpha + h} \quad (3,4,47)$$

et

$$\alpha'' = - \frac{\sigma''_x(1 - \sigma'_x)}{(1 - \sigma'_x)^3} (\beta + h) + \frac{\tau(c)d}{(\beta + h)^2} \beta' \quad (3,4,48)$$

$$\beta'' = \frac{\sigma''_x(1 + \sigma'_x)}{(1 + \sigma'_x)^3} (\alpha + h) + \frac{\tau(c)d}{(\alpha + h)^2} \alpha' \quad (3,4,49)$$

Les relations (3,4,43) à (3,4,49) permettent de s'assurer que le critère n'est pas violé le long de la frontière entre les blocs III et V. En fait, il suffit de vérifier qu'il n'est pas violé sur  $\beta(x)$  comme nous le verrons dans ce qui suit.

### 3,4,7. Valeur optimale de l'angle $\beta$ .

Reprenons les relations (3,4,29) et (3,4,31) et posons

$$d + h = X$$

$$d - h = X - 2d$$

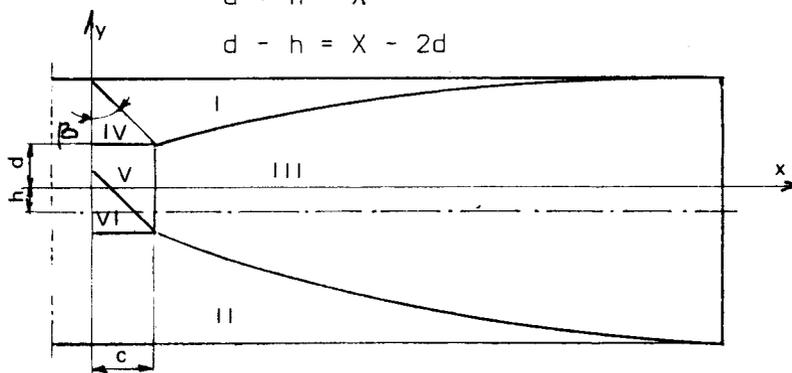


Figure 3,4,6

Il vient :

$$\frac{d+h}{d-h} = \pm \frac{1-\sigma_x}{1+\sigma_x} = \frac{X}{X-2d}$$

Choisissons d'abord :

$$\boxed{\frac{X}{X-2d} = -K = \frac{1-\sigma_x}{1+\sigma_x}} \quad (3,4,50)$$

et posons :

$$\boxed{t = \operatorname{tg} \beta} \quad (3,4,51)$$

$\beta$  étant l'angle formé par la frontière entre les blocs I et IV et l'axe  $y$ .

D'après la figure (3,4,6) :

$$t = \frac{c}{\frac{e}{2} - h - d} = \frac{c}{\frac{e}{2} - X}$$

$$\boxed{c = t\left(\frac{e}{2} - X\right)} \quad (3,4,52)$$

Compte tenu de (3,4,50) et de (3,4,52), la relation (3,4,29) devient :

$$X^2 = -K \left[ \frac{e^2}{4} - 2\tau(c)d \left\{ a - t\left(\frac{e}{2} - X\right) \right\} \right]$$

$$X^2 - 2\tau(c)d K \left( a - \frac{te}{2} \right) + \frac{Ke^2}{4} - 2\tau(c)d K t X = 0$$

soit

$$\boxed{\frac{X^2}{e^2} - 2\tau(c) \frac{d}{e} K t \frac{X}{e} - K \left[ 2\tau(c) \frac{d}{e} \left( \frac{a}{e} - \frac{t}{2} \right) - \frac{1}{4} \right]} = 0 \quad (3,4,53)$$

De la relation (3,4,50), nous avons :

$$d = \frac{K+1}{2K} X \quad (3,4,54)$$

La relation (3,4,53) s'écrit :

$$\boxed{\frac{X^2}{e^2} \left[ 1 - t \tau(c) (K+1) \right] - \frac{X}{e} \tau(c) \left( \frac{a}{e} - \frac{t}{2} \right) (K+1) + \frac{K}{4} = 0} \quad (3,4,55)$$

Il s'agit maintenant de déterminer la valeur de l'angle  $\beta$ .

Nous exprimons que le critère n'est pas violé dans le bloc III. La zone critique correspond à la section droite d'abscisse  $c$ .

Les conditions à vérifier sont fournies par les expressions (3,4,41) et (3,4,42) fixant les limites de  $\alpha'^2$  et  $\beta'^2$ . Les valeurs de  $\alpha'$  et  $\beta'$  sont données par les relations (3,4,46) et (3,4,47).

Ces relations s'écrivent, compte tenu de (3,4,50) :

$$\begin{aligned} \alpha'^2 &= \left[ \frac{\tau(c) d}{X} \right]^2 \\ \beta'^2 &= \left[ \frac{\tau(c) dK}{X} \right]^2 \end{aligned} \quad (3,4,56)$$

Les valeurs de  $\sigma(c)$ ,  $\tau(c)$  et de  $\beta$  sont prélevées dans le tableau (3,4,1) et les calculs sont faits sur calculateur HEWLET PACKARD 9100 B, selon les ordinogrammes de la page suivante.

Le critère de plasticité est vérifié sur  $\beta$ , n'est pas violé sur  $\alpha$ , pour  $x = c$  avec les valeurs particulières suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -0,25 = -1/4 \\ \tau_{xy} &= 0,43301 = \sqrt{3}/4 \\ \beta &= 0,52360 = \pi/6 \end{aligned} \quad (3,4,57)$$

Pour toute autre valeur de  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  et  $\beta$ , compatibles avec les blocs voisins, le critère est violé sur  $\beta$ . Il en est de même pour la seconde détermination de

$$K = \frac{1 - \sigma_x}{1 + \sigma_x}.$$

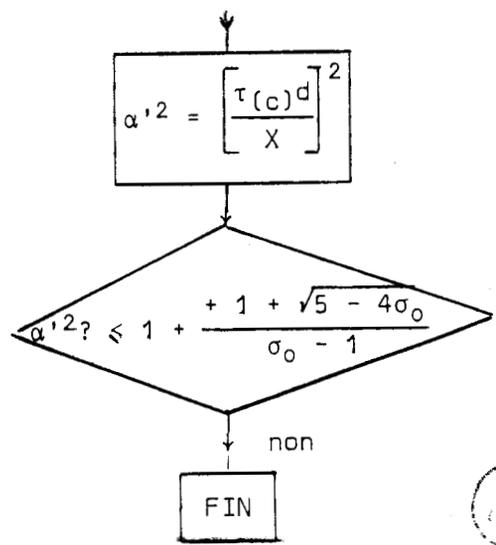
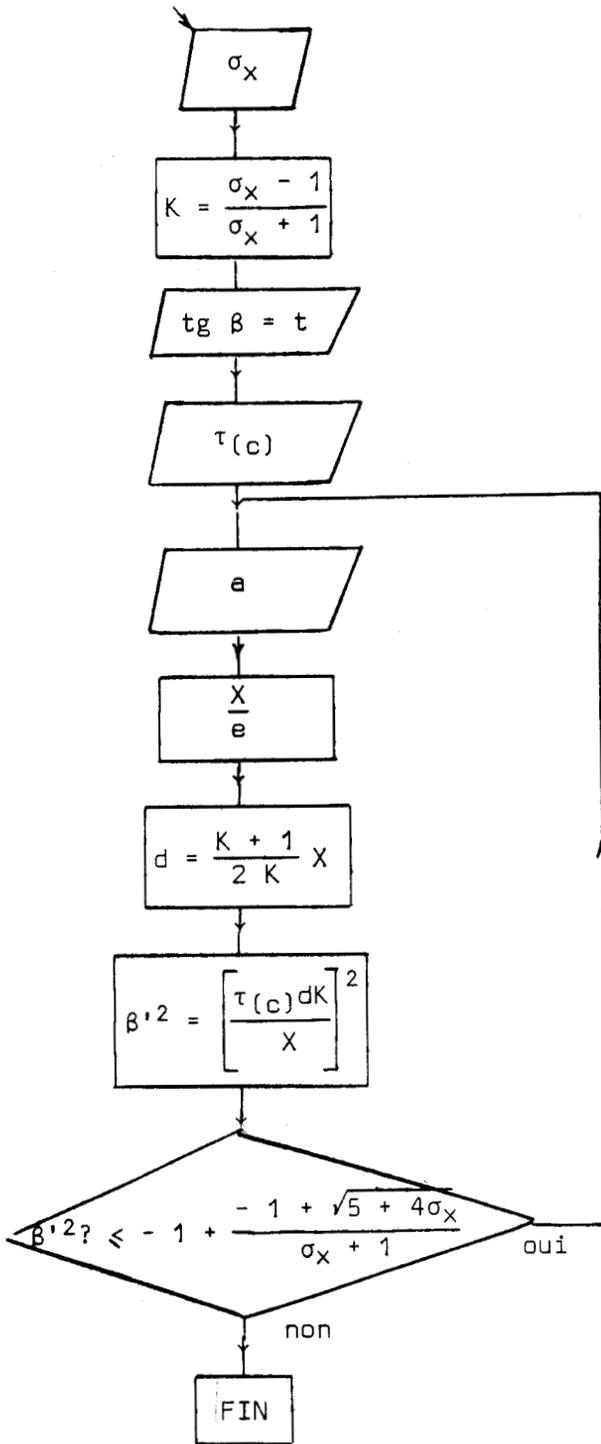
Cette valeur de  $\beta$  a déjà été obtenue dans un problème de poinçonnement par *SHIELD* (36).

Nous retenons donc ces valeurs pour définir complètement les contraintes dans les blocs III, IV, V et VI, en tenant compte des conditions de continuité entre ces différents blocs.

VERIFICATION DU CRITERE

sur  $\beta$

sur  $\alpha$



3,4,8. Définition complète des blocs.

Les contraintes dans chacun des blocs sont donc les suivantes :

I	$\sigma_x = -1$	$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$
II	$\sigma_x = 1$	$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$

(3,4,58)

d'après (3,4,3)

III	$\sigma_x = -\frac{1}{8}(1 - \cos \gamma)$	$\gamma = \frac{\pi(x - a)}{a - c}$
	$\tau_{xy} = +\frac{\pi}{8(a - c)} y \sin \gamma + \tau(x)$	(3,4,59)
	$\sigma_y = -\frac{\pi^2}{16(a - c)^2} y^2 \cos \gamma - \tau'(x) + \sigma(x)$	

d'après (3,4,6) , (3,4,7) et (3,4,8)

$\tau$  et  $\sigma$  sont définis par (3,4,25) et (3,4,26)

IV	$\sigma_x = -\frac{5}{4}$	(3,4,60)
	$\tau_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{4}$	
	$\sigma_y = -\frac{3}{4}$	

d'après (3,4,57)

V	$\sigma_x = -\frac{1}{4}$	(3,4,61)
	$\tau_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{4}$	
	$\sigma_y = -\frac{3}{4}$	

d'après le tableau (3,4,1)

VI	$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$	(3,4,62)
----	---------------------------------------	----------

d'après (3,4,32) et (3,4,33)

Les blocs I, II, IV et V sont entièrement plastiques ; le bloc VI est libre de toute contrainte. Le bloc III est rigide.

La figure (3,4,7) donne la répartition exacte de ces blocs pour  $\frac{a}{e} = 2,17$ .

CHAMP STATIQUE PAR BLOCS ASYMETRIQUES

Répartition des blocs

$\frac{P}{ke} = 0,23$	$\frac{2M}{ke^2} = 1,02$	$\frac{a}{e} = 2,17$	$\frac{d}{e} = 0,13$	$\frac{c}{e} = 0,093$
-----------------------	--------------------------	----------------------	----------------------	-----------------------

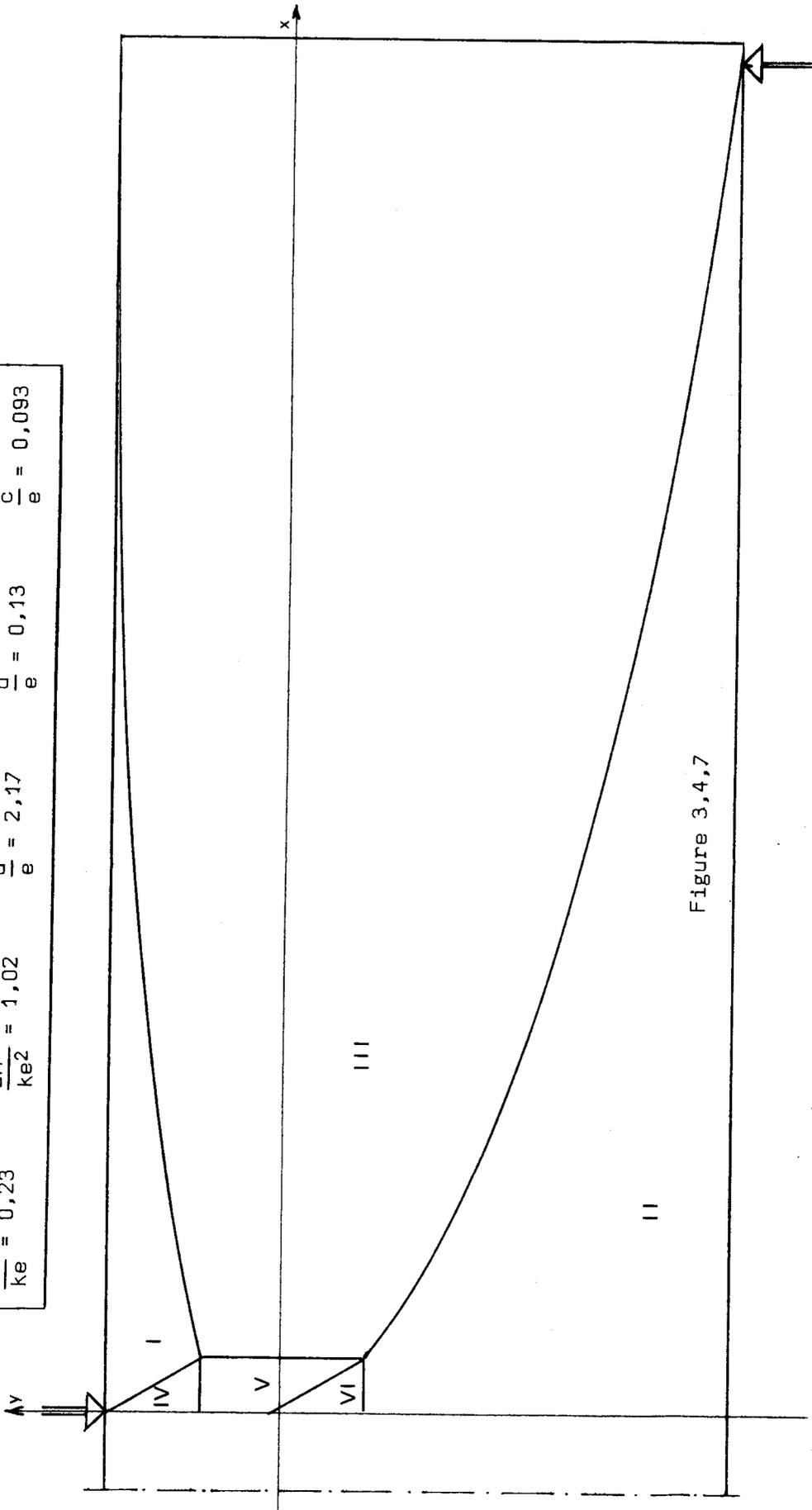


Figure 3.4.7



3,4,9. Tracé de la courbe d'interaction.

La relation (3,4,53) se transforme avec les valeurs données par (3,4,57) :

avec 
$$K = \frac{\sigma_x - 1}{\sigma_x + 1} = -\frac{5}{3}$$

$$\frac{X^2}{e^2} + \frac{2\sqrt{3}}{4} \frac{d}{e} \frac{5}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{X}{e} + \frac{5}{3} \left[ 2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{d}{e} \left( \frac{a}{e} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{4} \right] = 0 \quad (3,4,63)$$

D'après (3,4,50), X est défini en fonction de d

$$\frac{X}{X - 2d} = \frac{5}{3}$$

soit 
$$X = \frac{5}{4} d .$$

Cette valeur, reportée dans l'équation (3,4,63), nous donne une relation entre d/e et a/e .

Il vient :

$$\frac{X^2}{e^2} + \frac{5}{6} \frac{d}{e} \frac{X}{e} + \frac{5}{2\sqrt{3}} \frac{d}{e} \left( \frac{a}{e} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) - \frac{5}{12} = 0$$

soit 
$$25 \frac{d^2}{e^2} + \frac{24}{\sqrt{3}} \left( \frac{a}{e} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \frac{d}{e} - 4 = 0$$

La valeur de  $\frac{d}{e}$  est donnée par :

$$\frac{d}{e} = \frac{-\frac{12}{\sqrt{3}} \left( \frac{a}{e} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) + \sqrt{\frac{144}{3} \left( \frac{a}{e} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 + 100}}{25} \quad (3,4,64)$$

Exprimons l'équivalence entre la charge P par unité de largeur de la plaque et la résultante des contraintes tangentielles s'exerçant dans la section droite d'abscisse  $x = c$  (il reviendrait au même d'exprimer l'équivalence dans la section d'abscisse  $x = a$ ) .

Ainsi 
$$P = 2k \tau(c) 2d = \sqrt{3} \frac{d}{e} .$$

D'où 
$$\frac{P}{ke} = \sqrt{3} \frac{d}{e} \quad (3,4,65)$$

Le moment M par unité de largeur de plaque est :

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{P}{ke} \left( \frac{2a}{e} \right) \quad (3,4,66)$$

Les relations (3,4,64) , (3,4,65) et (3,4,66) permettent le calcul des valeurs successives de  $\frac{d}{e}$  ,  $\frac{a}{e}$  ,  $\frac{P}{ke}$  et  $\frac{2M}{ke^2}$  .

Ces valeurs sont reportées dans le tableau (3,4,2) .

La courbe d'interaction est représentée par la figure (3,4,8) .

CHAMP STATIQUE PAR BLOCS ASYMETRIQUES

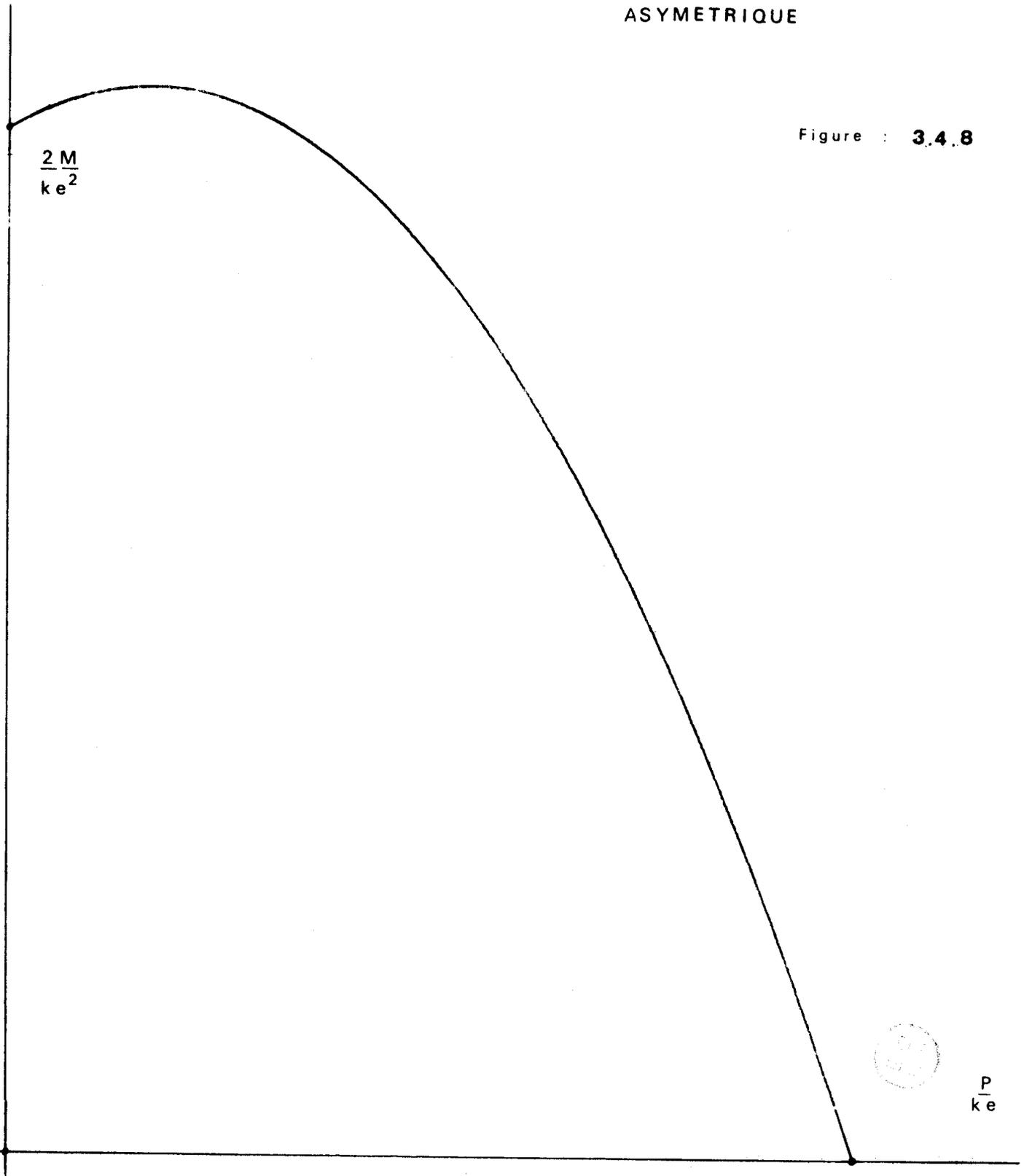
$\frac{d}{e}$	$\frac{a}{e}$	$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$
0.00289	100	0.005014	1.00284
0.00417	69.4444	0.00722	1.00406
0.00602	48.22530	0.01043	1.005794
0.00869	33.48979	0.01505	1.00821
0.01255	23.25680	0.02174	1.01157
0.01816	16.15055	0.03785	1.01610
0.02630	11.21566	0.04556	1.02198
0.038140	7.78865	0.06606	1.02904
0.05530	5.40878	0.09578	1.03618
0.07992	3.75610	0.13844	1.04000
0.13555	2.17367	0.23478	1.02071
0.21321	1.25791	0.36929	0.92908
0.29637	0.72795	0.51334	0.74738
0.36493	0.42127	0.63209	0.53256
0.41263	0.24379	0.71469	0.34847
0.44298	0.14108	0.76727	0.21650
0.46146	0.08164	0.79928	0.13051
0.47246	0.04724	0.81833	0.07733
0.48166	0.01898	0.83426	0.03168
0.48539	0.00763	0.84073	0.01283
0.48690	0.00306	0.84334	0.00517
0.48758	0.00102	0.84451	0.00173

Tableau 3,4,2



CHAMP  
STATIQUEMENT ADMISSIBLE  
ASYMETRIQUE

Figure : 3.4.8



### 3,5. CONCLUSION.

Comparons les courbes d'interaction, représentées par les figures (3,2,2) , (3,3,8) et (3,4,8) .

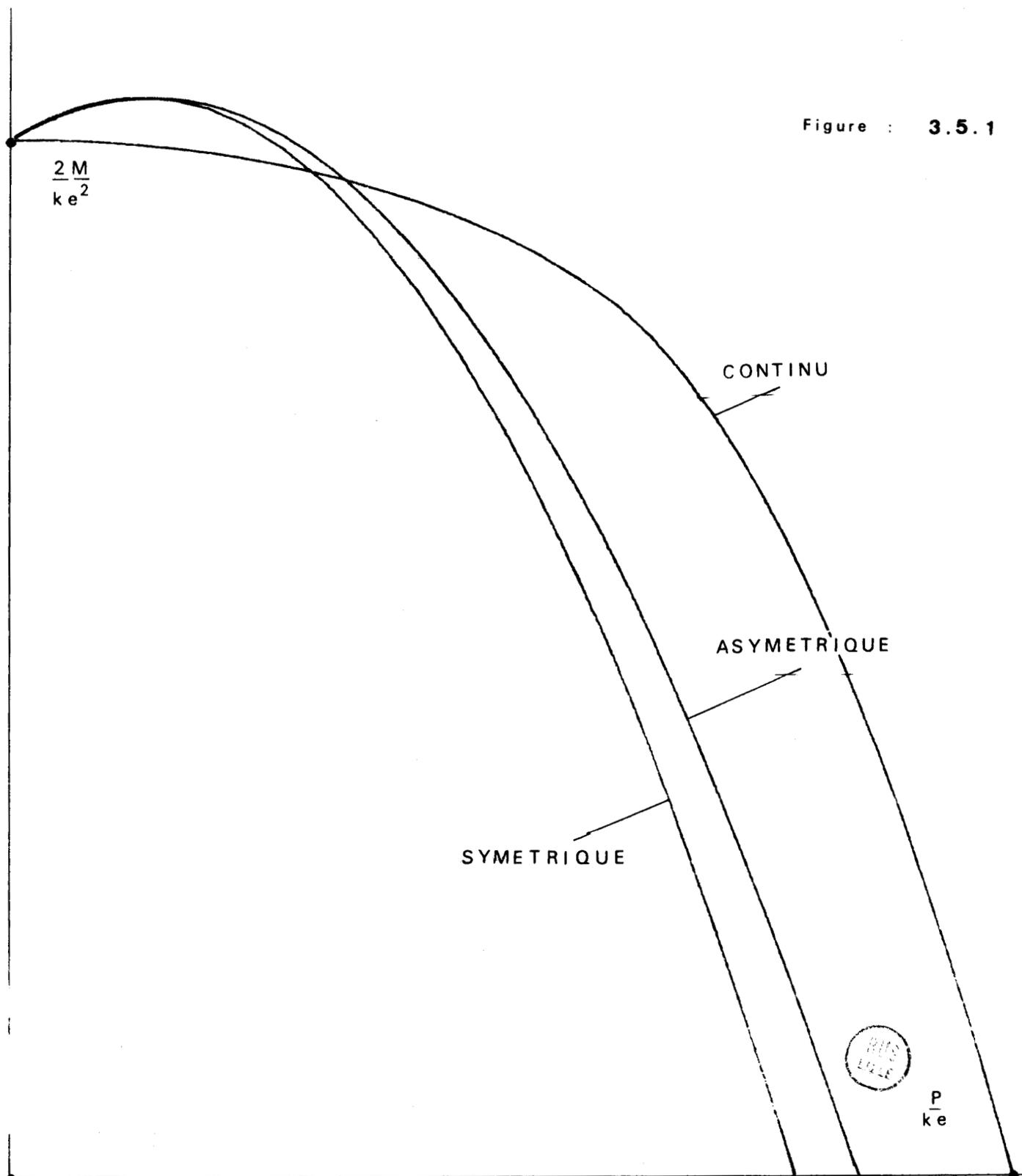
La représentation est faite à la figure (3,5,1) .

Les champs par blocs sont meilleurs que les champs continus dans les charge-ments à faible effort tranchant.

La figure (3,5,2) reprend les courbes d'interaction des champs cinématique-ment admissibles et des champs statiquement admissibles.

La zone de passage de la courbe d'interaction réelle est bien délimitée.

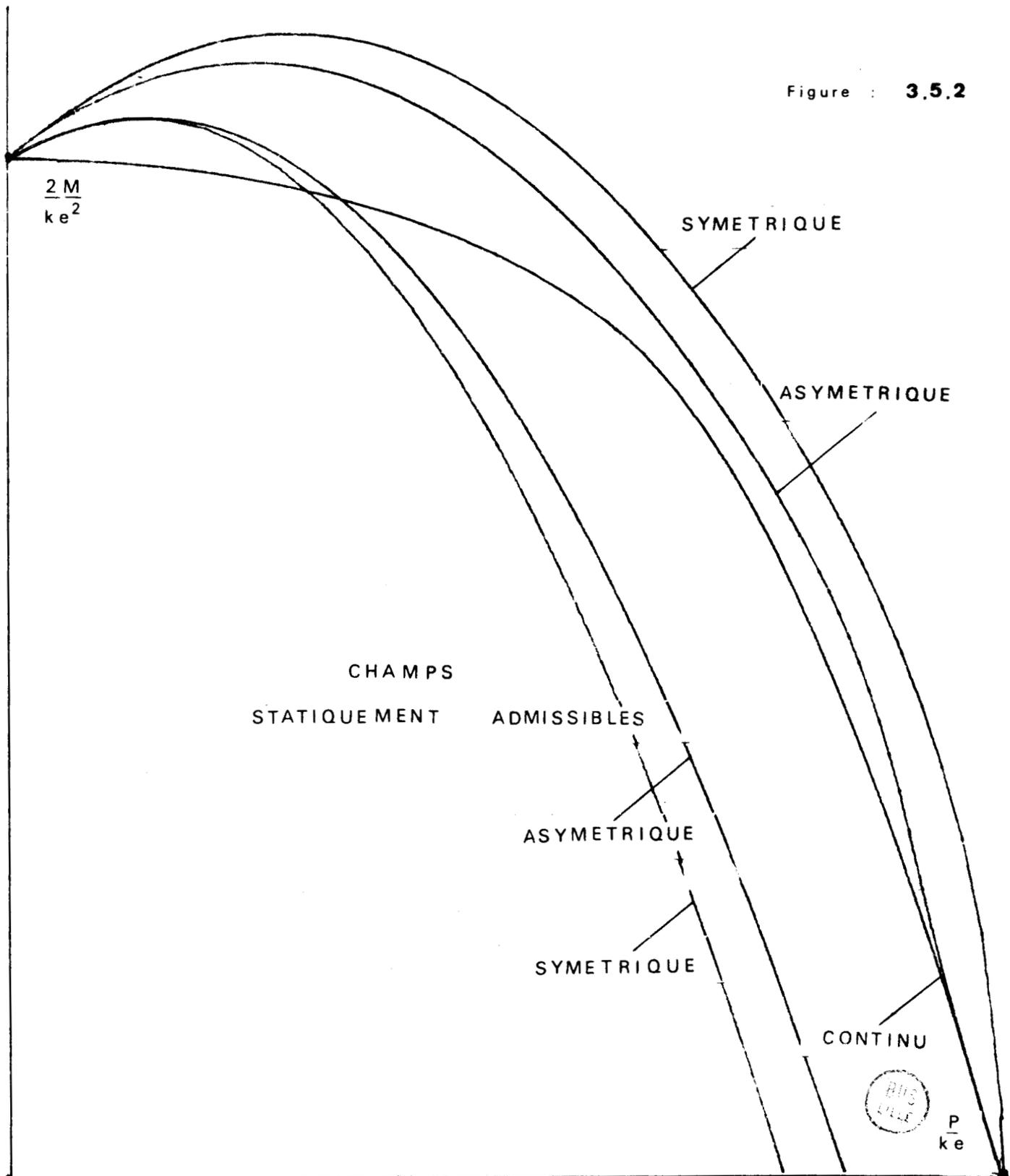
Figure : 3.5.1



CHAMPS

CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLES

Figure : 3.5.2



IV

L'ETUDE EXPERIMENTALE.

#### 4,1. PREPARATION DES ESSAIS.

Les essais sont effectués sur des plaques en acier doux qui proviennent soit de produits plats laminés (séries 40, 50 et 60) , soit de tôles laminées (séries 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140 et 150) .

Les plaques ont une largeur d'environ 100 mm, une longueur de 150 mm, et l'épaisseur varie entre 5 mm et 50 mm. (Figure 4,1,1)

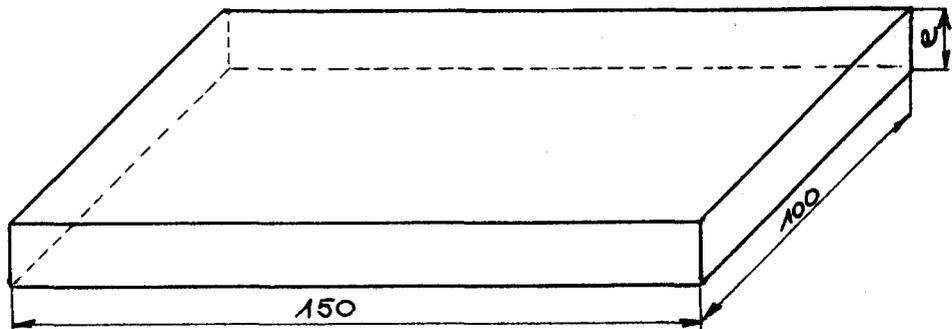
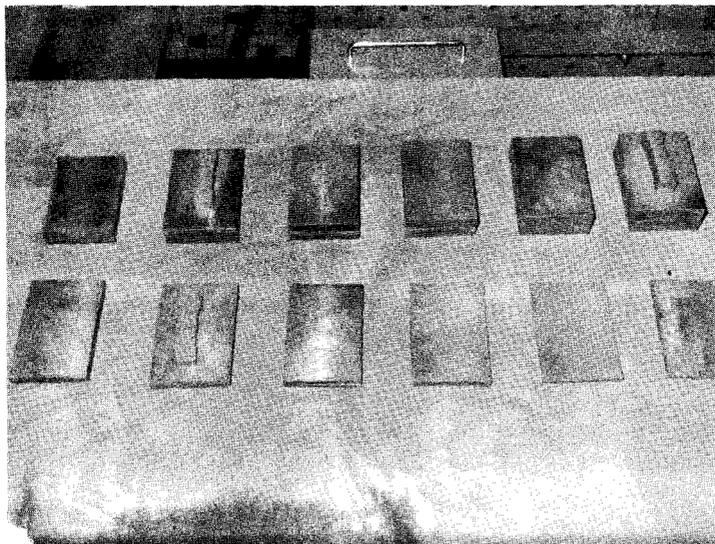


Figure 4,1,1

Pour chaque série, on prélève dans le produit deux éprouvettes de traction dans le sens longitudinal et deux dans le sens transversal.

Les plaques et les éprouvettes sont usinées sur fraiseuse avec des outils en carbure de tungstène qui permettent des vitesses de coupe rapides.



Plaques et éprouvettes de traction.

Figure 4,1,2

Après usinage, les plaques et les éprouvettes sont recuites pendant trente minutes à 900°C. Pour éviter la formation de calamine, les pièces sont placées dans des boîtes métalliques s'emboîtant les unes dans les autres (Fig. 4,1,3) ; les intervalles entre les boîtes sont remplis de copeaux de fonte étuvés. L'ensemble est ensuite enfourné (Figure 4,1,4) .

Le refroidissement se fait dans le four pendant trois heures.

Les pièces sont alors prêtes pour les essais.

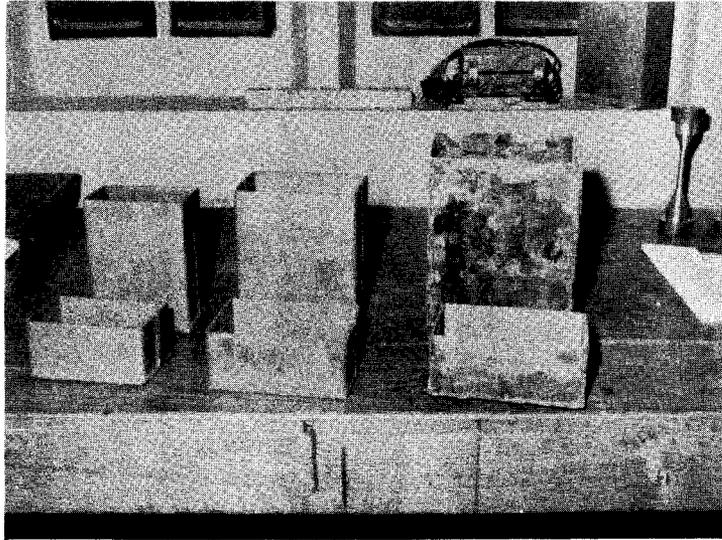


Figure 4,1,3

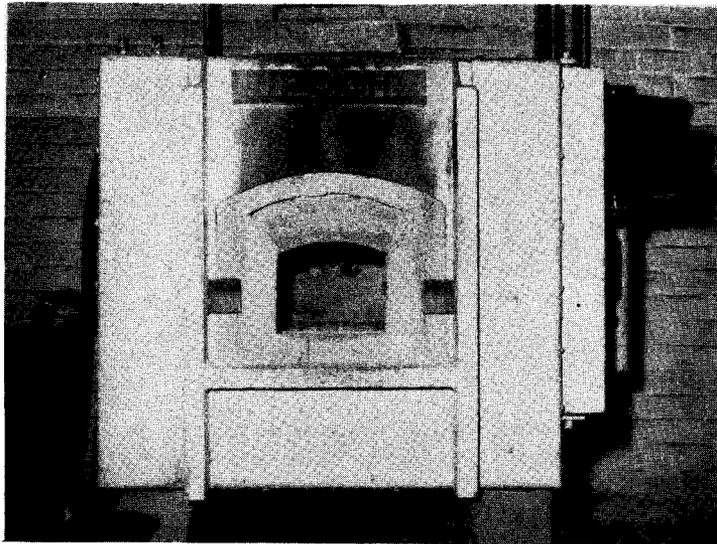


Figure 4,1,4



#### 4,2. DISPOSITIF EXPERIMENTAL.

La figure (4,2,1) montre le schéma du dispositif expérimental.

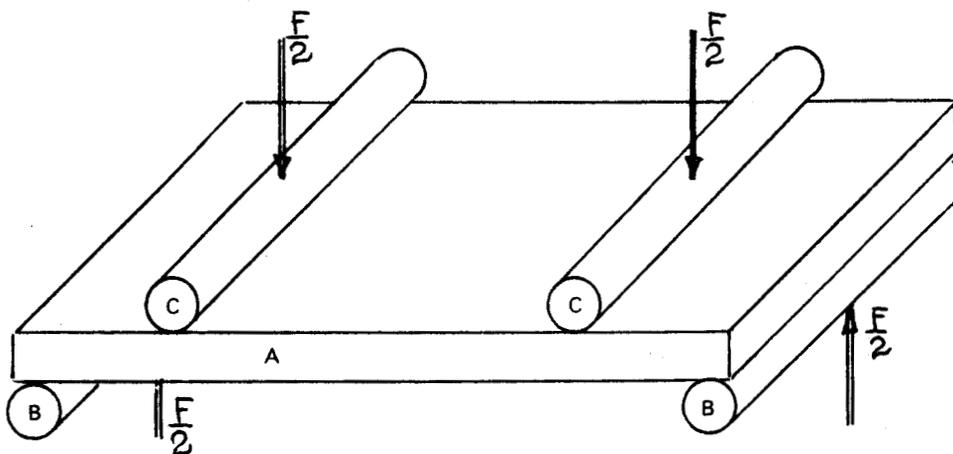


Figure 4,2,1

La plaque A repose sur des appuis B constitués par deux cylindres de diamètre 50 ; les efforts sont introduits par les deux cylindres C .

Les figures (4,2,2) et (4,2,3) décrivent le dispositif expérimental réalisé sur machine d'essai WOLPERT (force : 20 tonnes) et le dispositif expérimental réalisé sur machine d'essai MOHR (force : 500 tonnes) .

Un comparateur ROCH ou un capteur de déplacement HOTTINGER mesure la flèche au centre de la plaque.

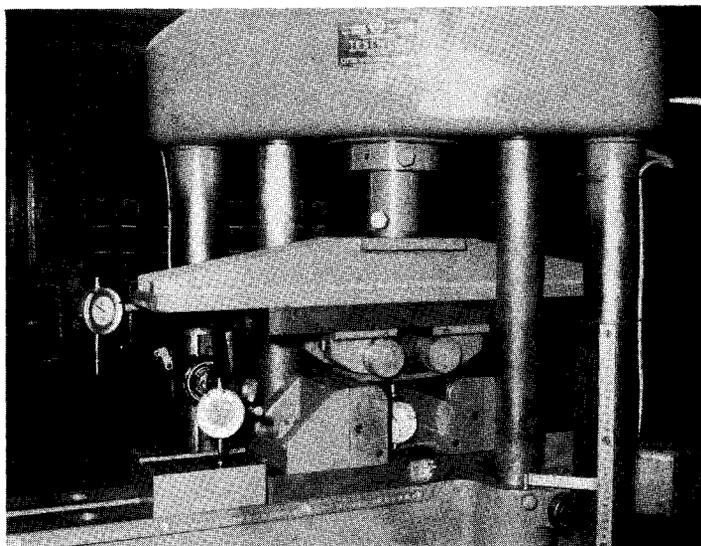


Figure 4,2,2

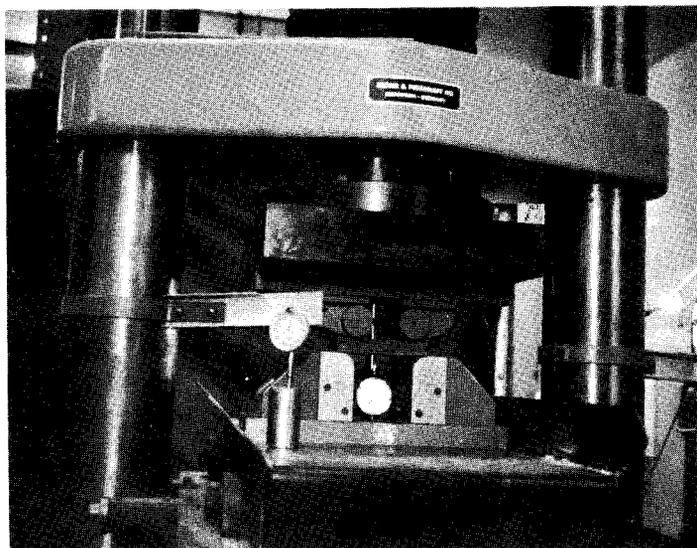
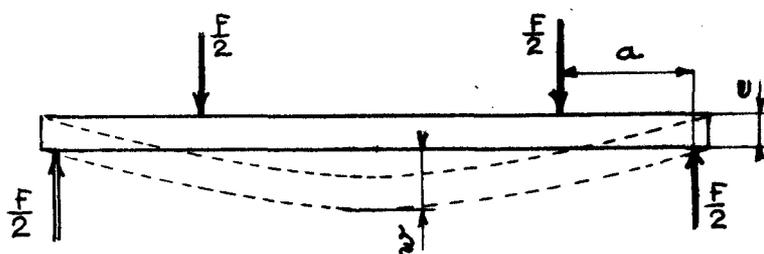


Figure 4,2,3



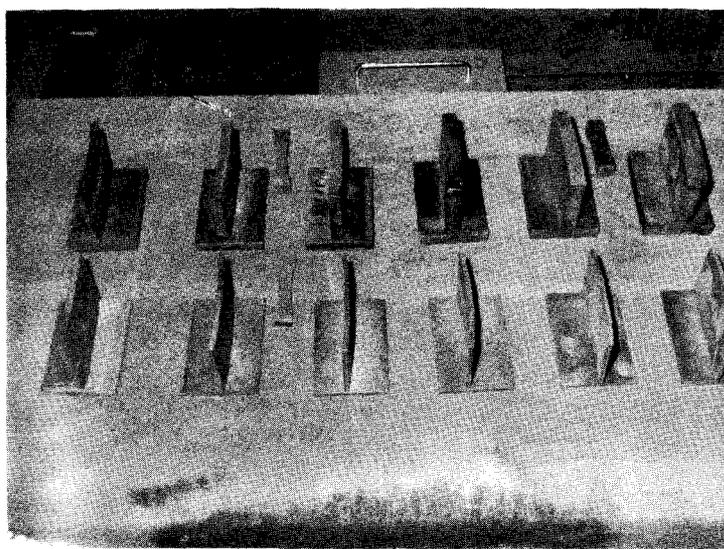
4.3. LOIS DE COMPORTEMENT.

La charge  $F$  est appliquée régulièrement à la plaque en imposant le déplacement au centre  $w$ .

Les figures des pages suivantes donnent pour chaque plaque la loi expérimentale de son comportement  $(F, w)$ .

Les valeurs de  $e$ ,  $a$  ont été choisies en fonction des capacités des machines et du montage, de façon à parcourir la plus grande partie possible de la courbe d'interaction  $(P/ke, 2M/ke^2)$  (Figure 3,5,2).

L'expérience est poursuivie au delà du comportement élastique jusqu'à ce que la flèche  $w$  atteigne trois ou quatre fois la valeur de la flèche maximale obtenue en comportement élastique.



Plaques après essais

Figure 4,3,1

daN

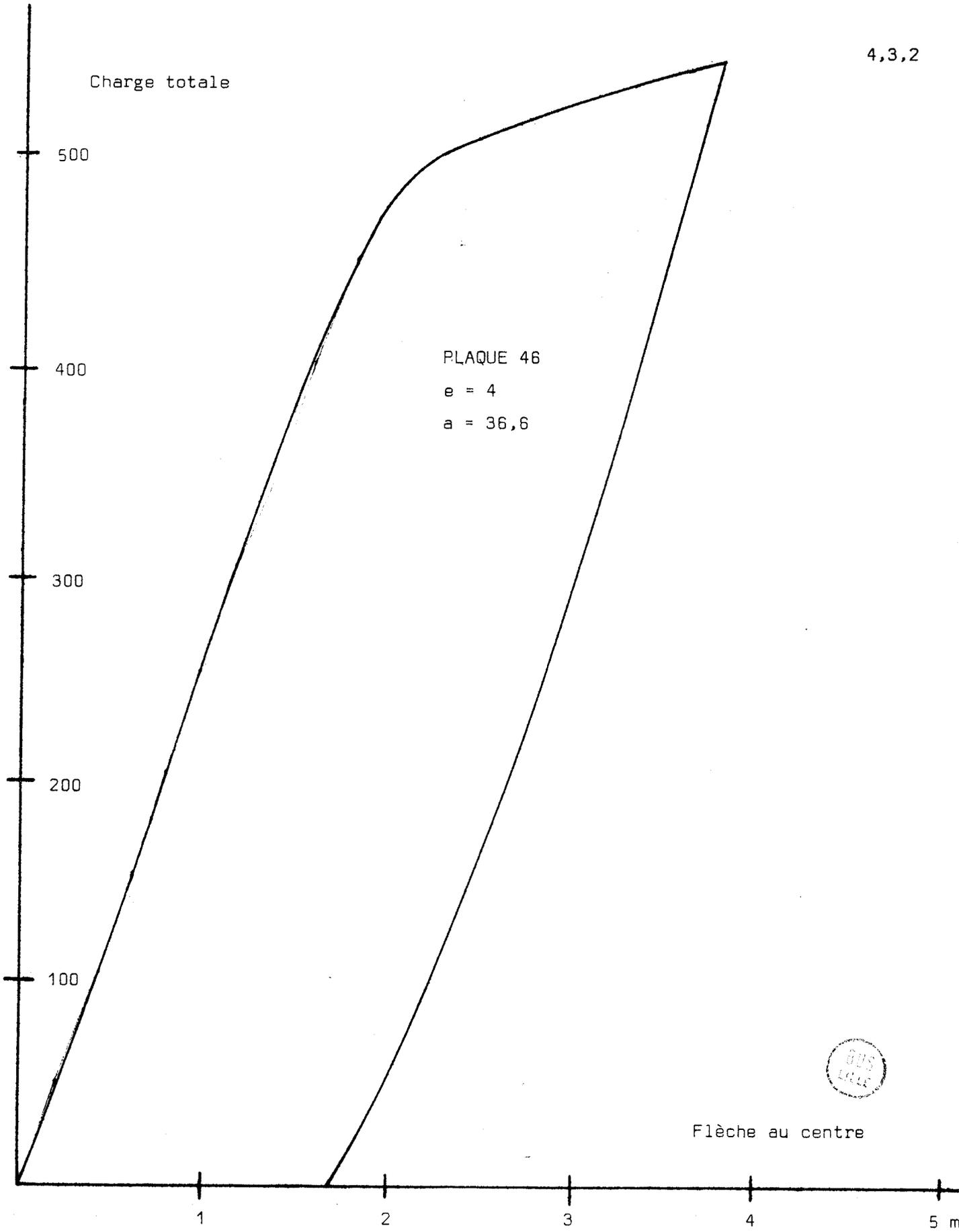
4,3,2

Charge totale

PLAQUE 46

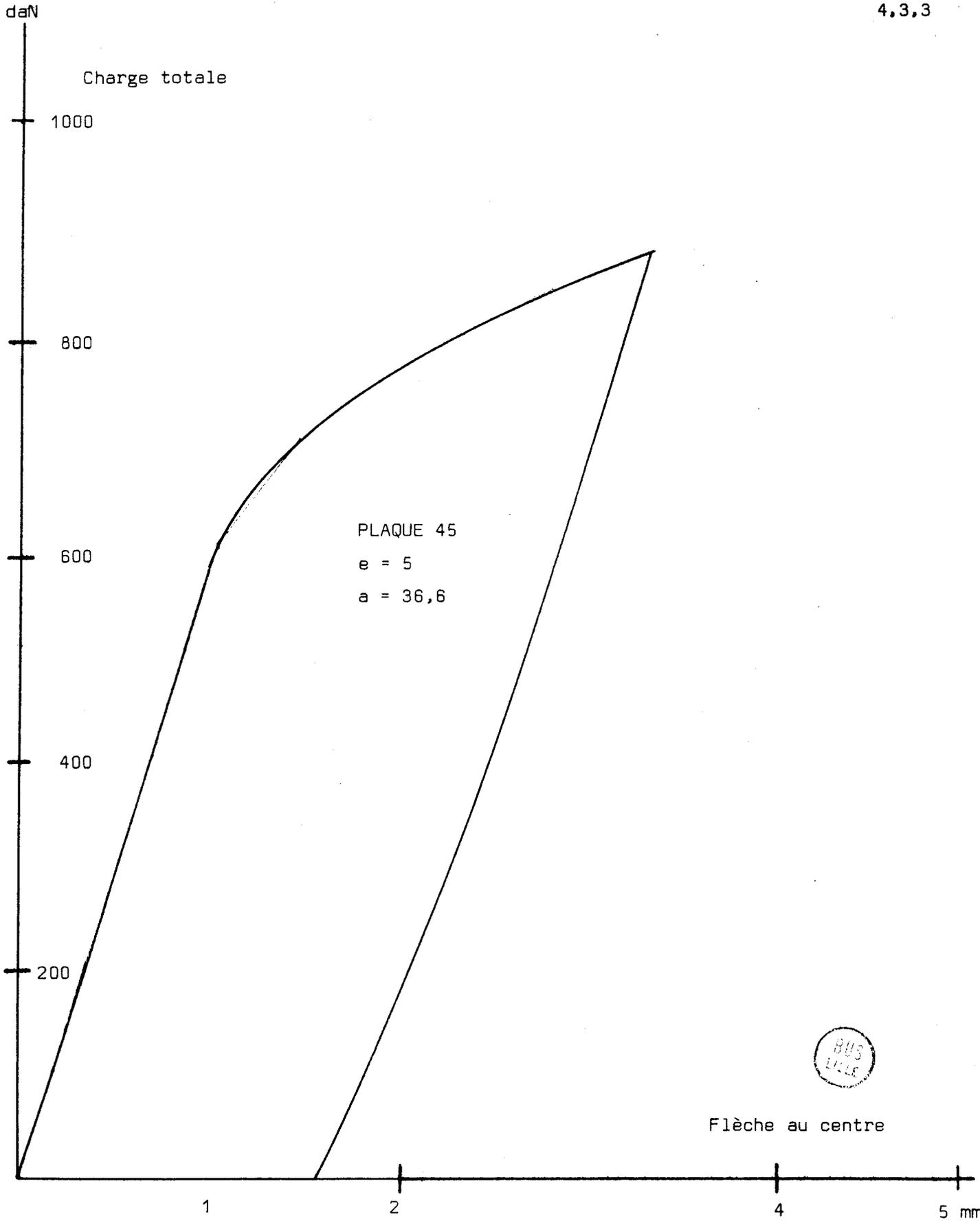
e = 4

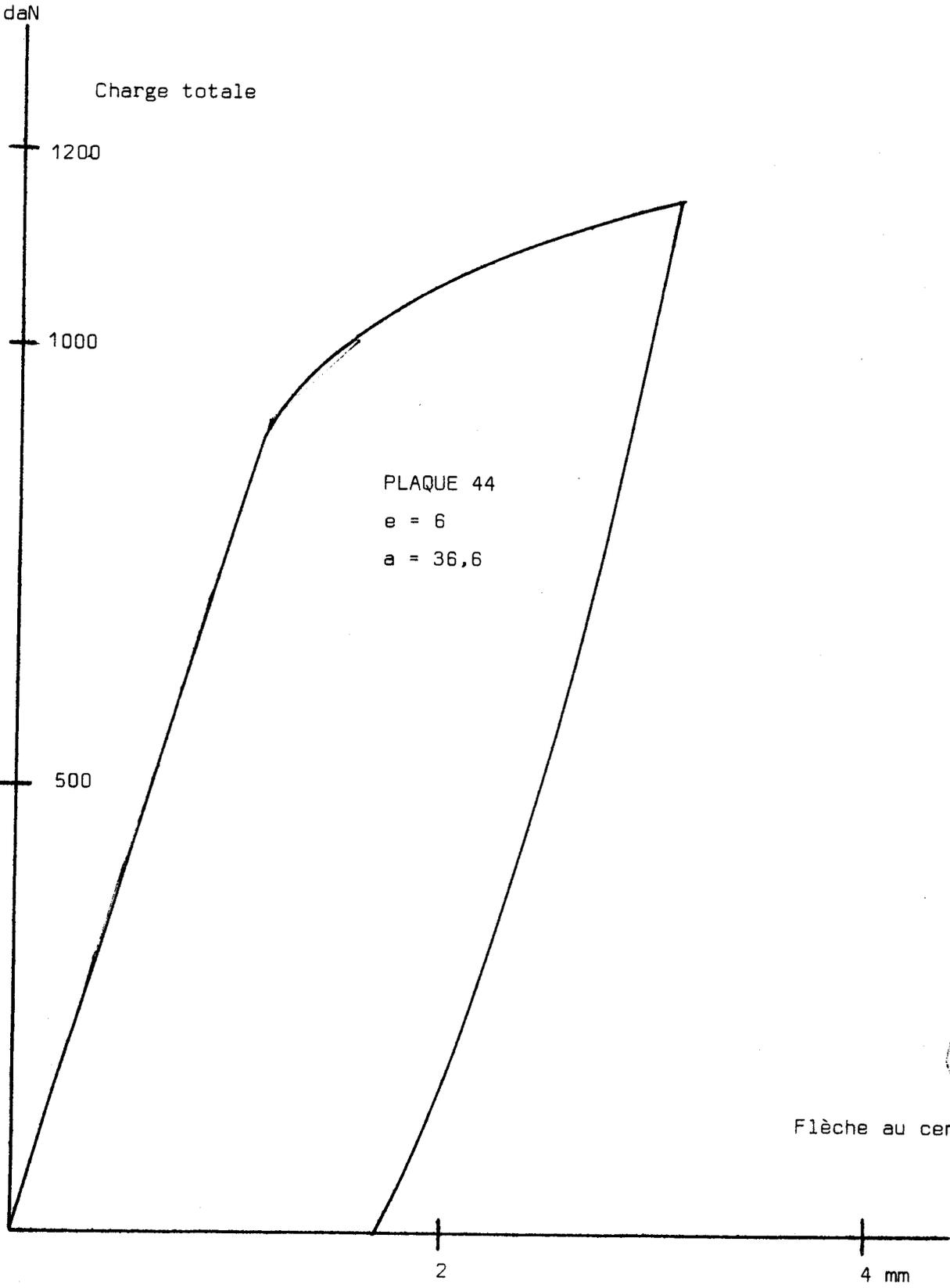
a = 36,6

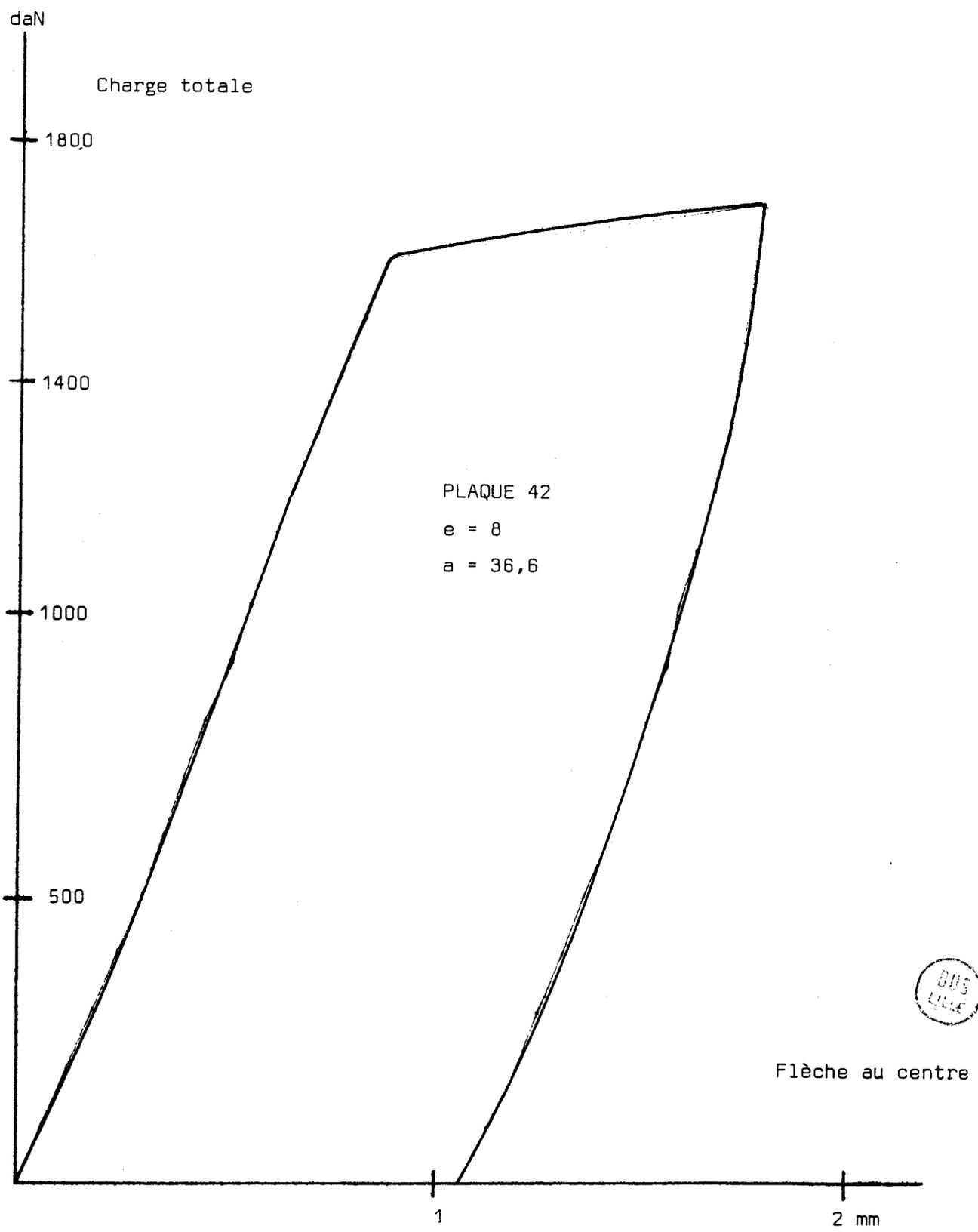


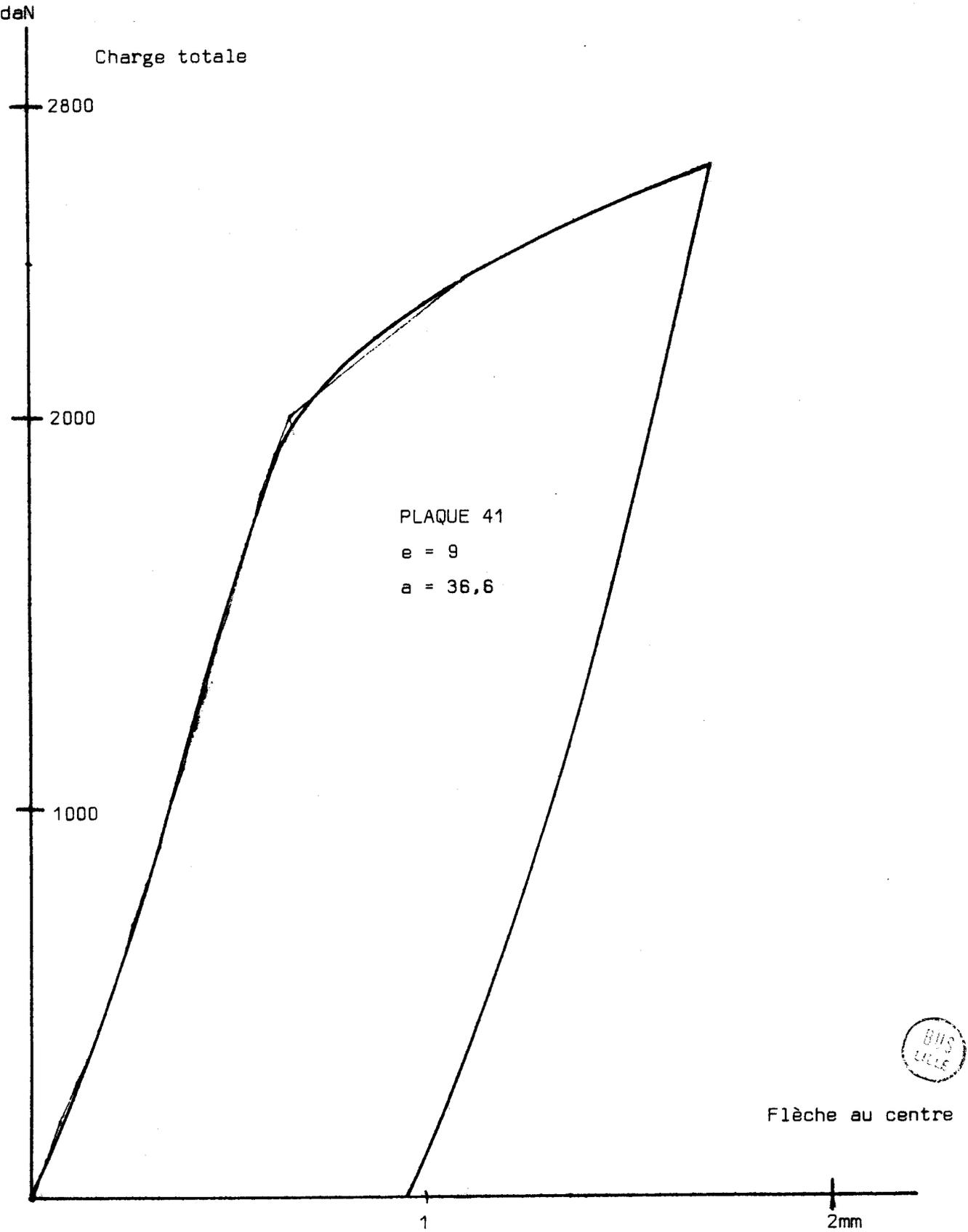
Flèche au centre

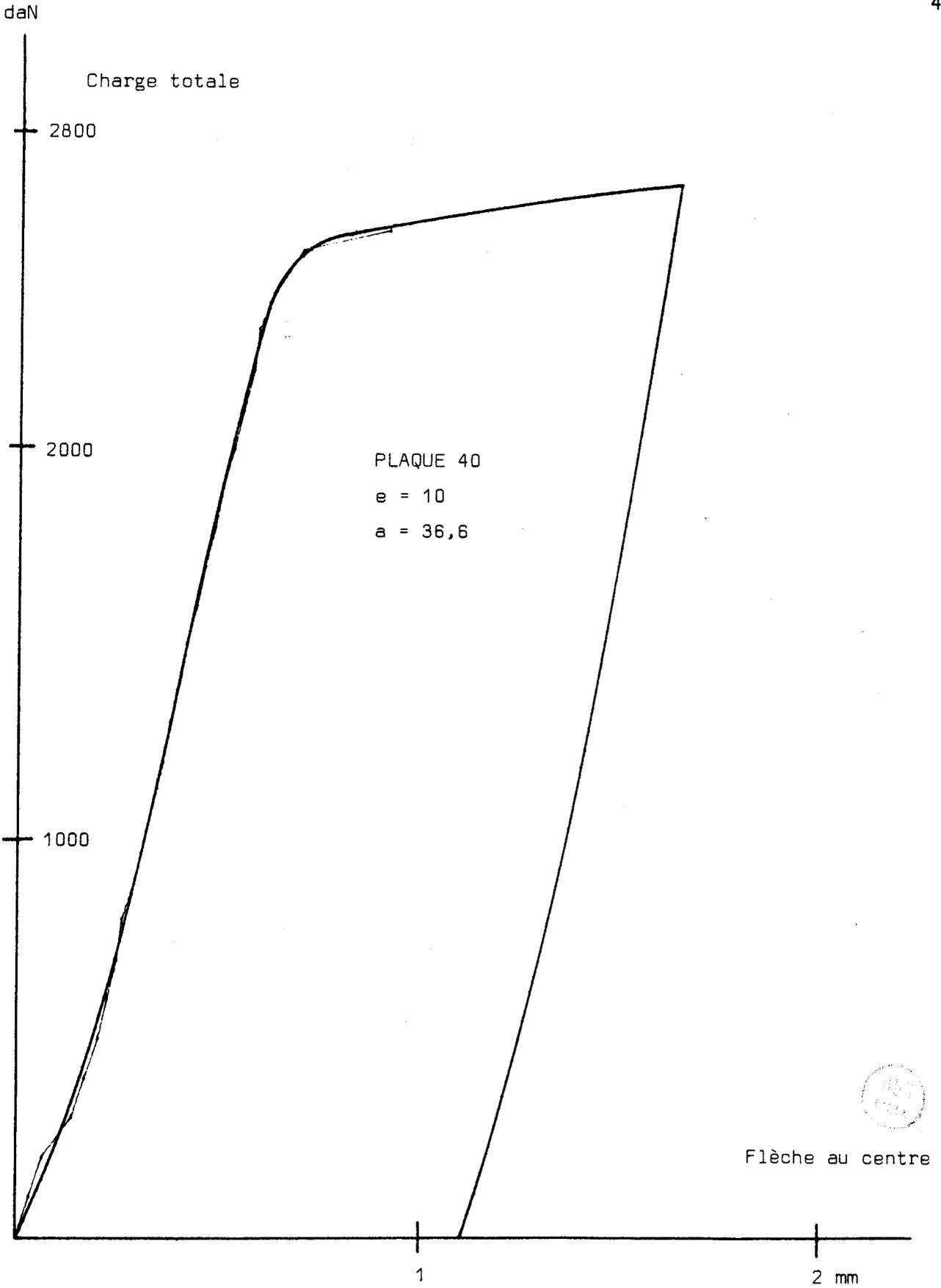












daN

Charge totale

800

600

400

200

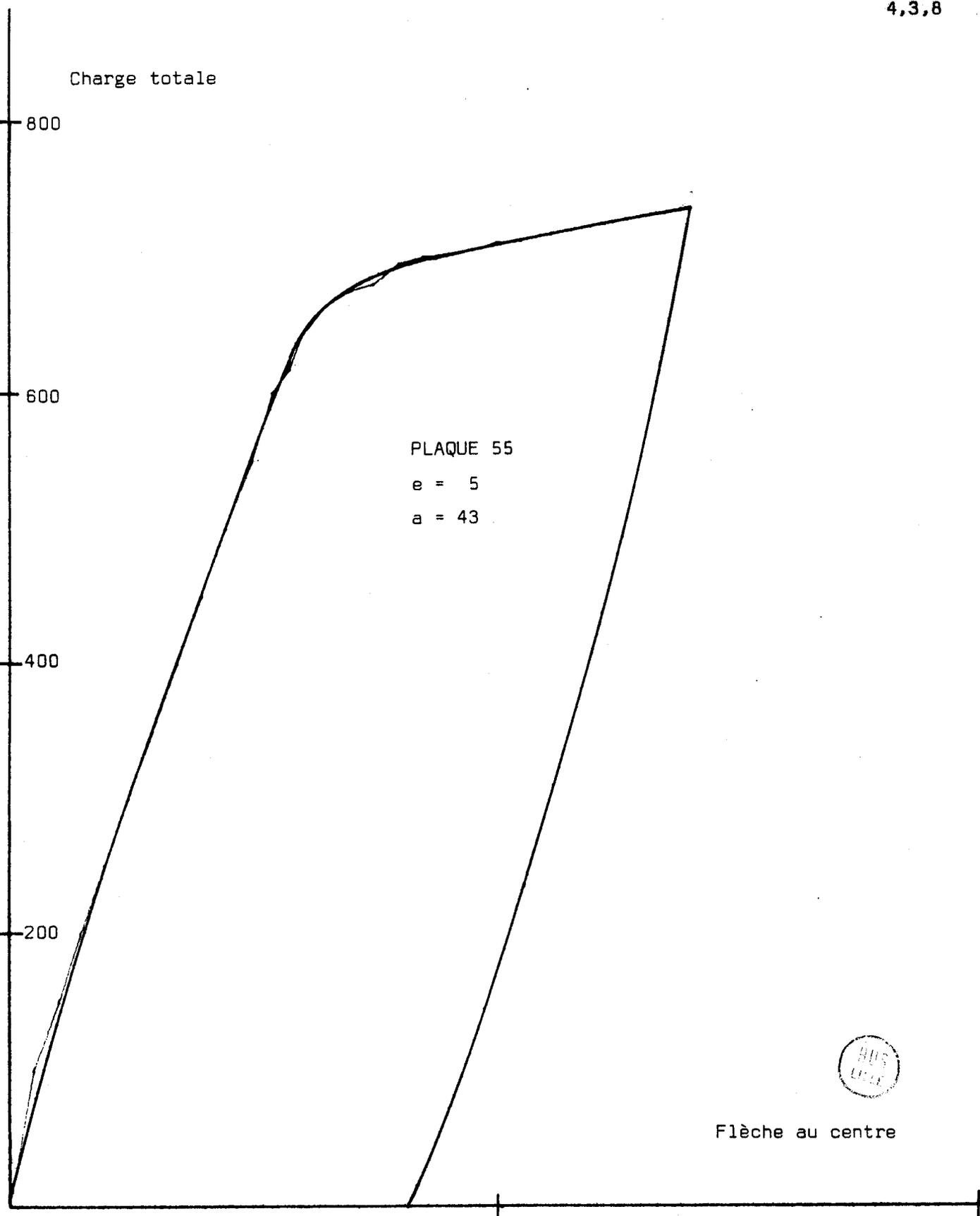
PLAQUE 55  
e = 5  
a = 43

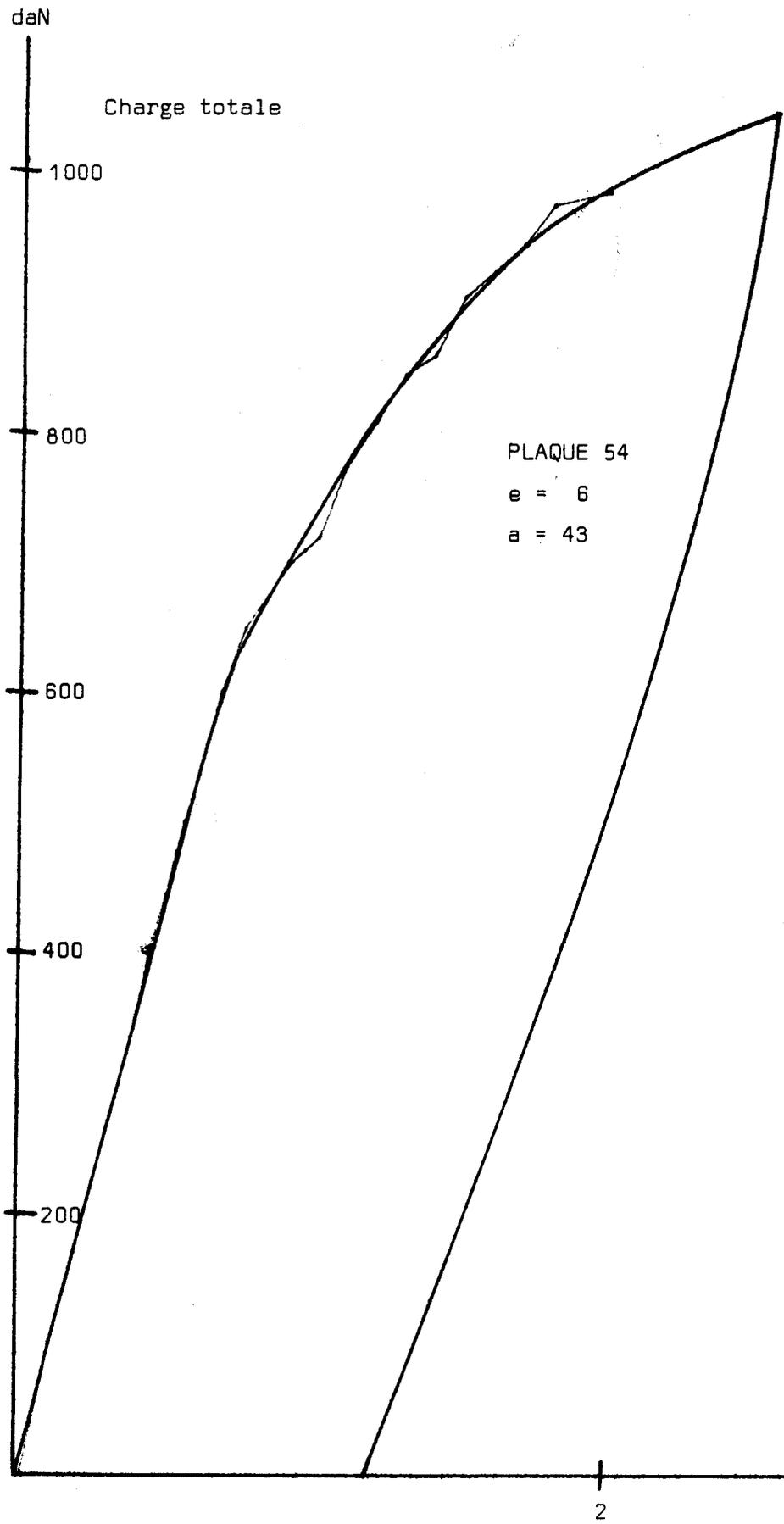


Flèche au centre

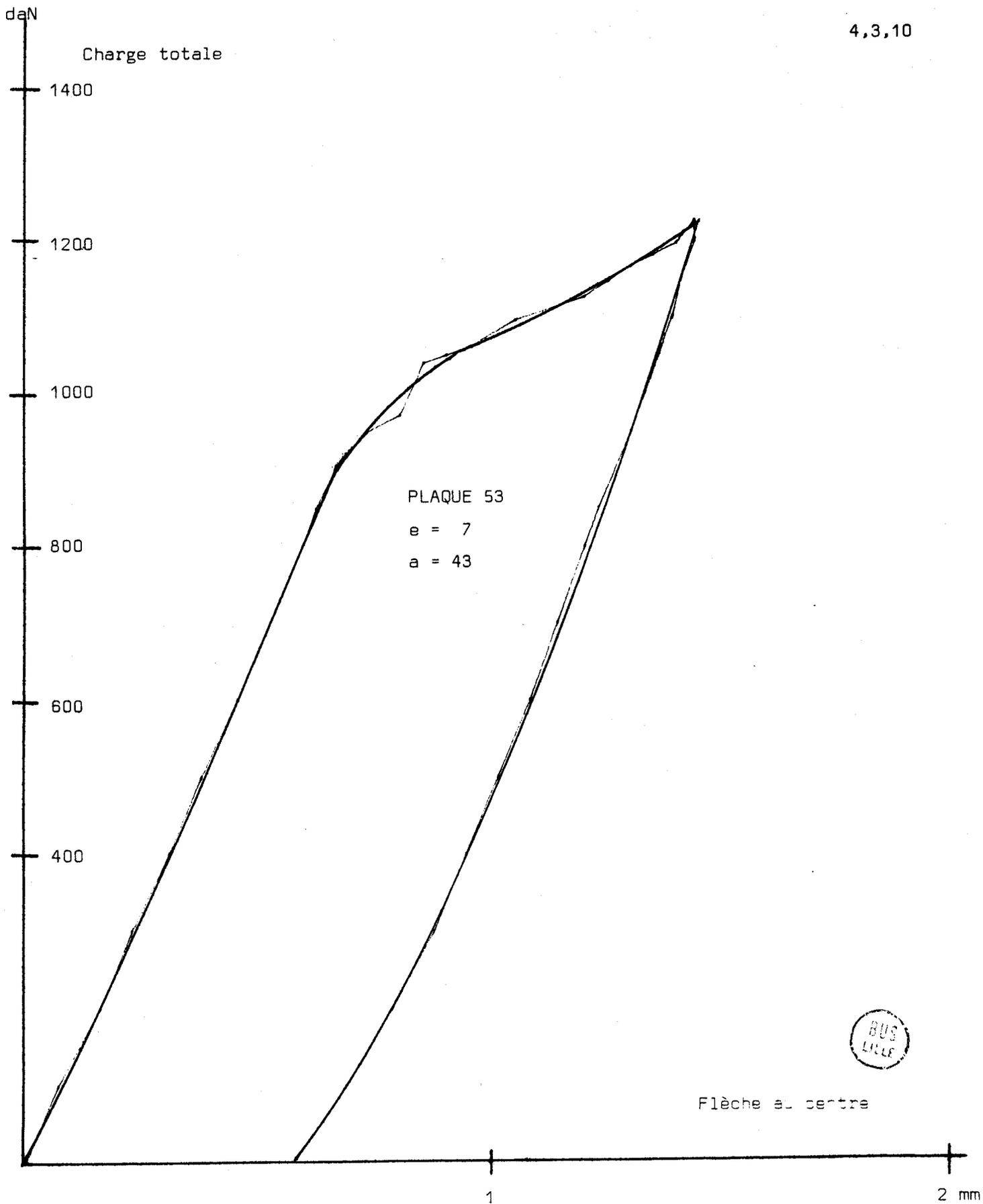
2

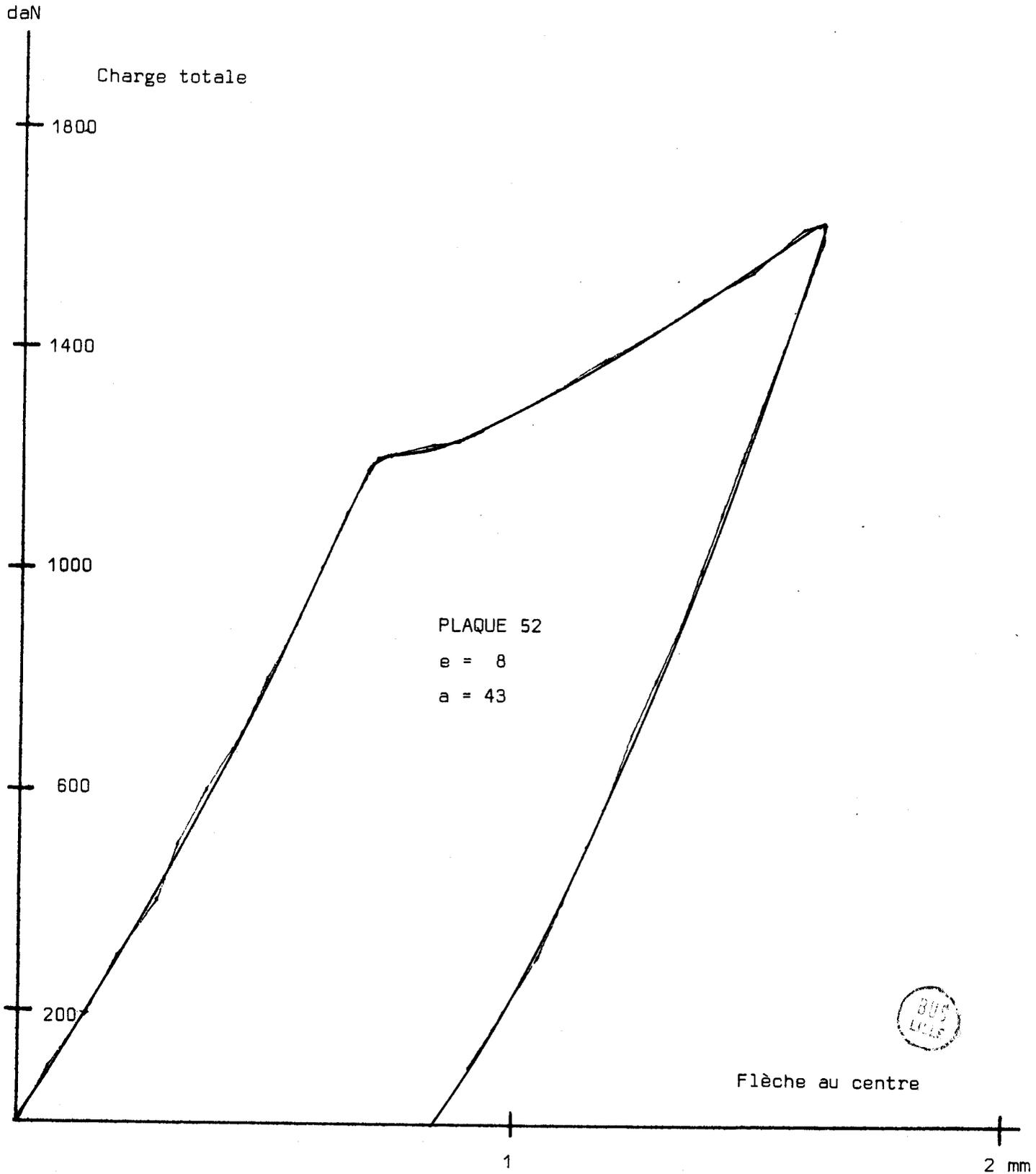
4m





4,3,10





daN

Charge totale

2200  
2000  
1600  
1200  
800  
400

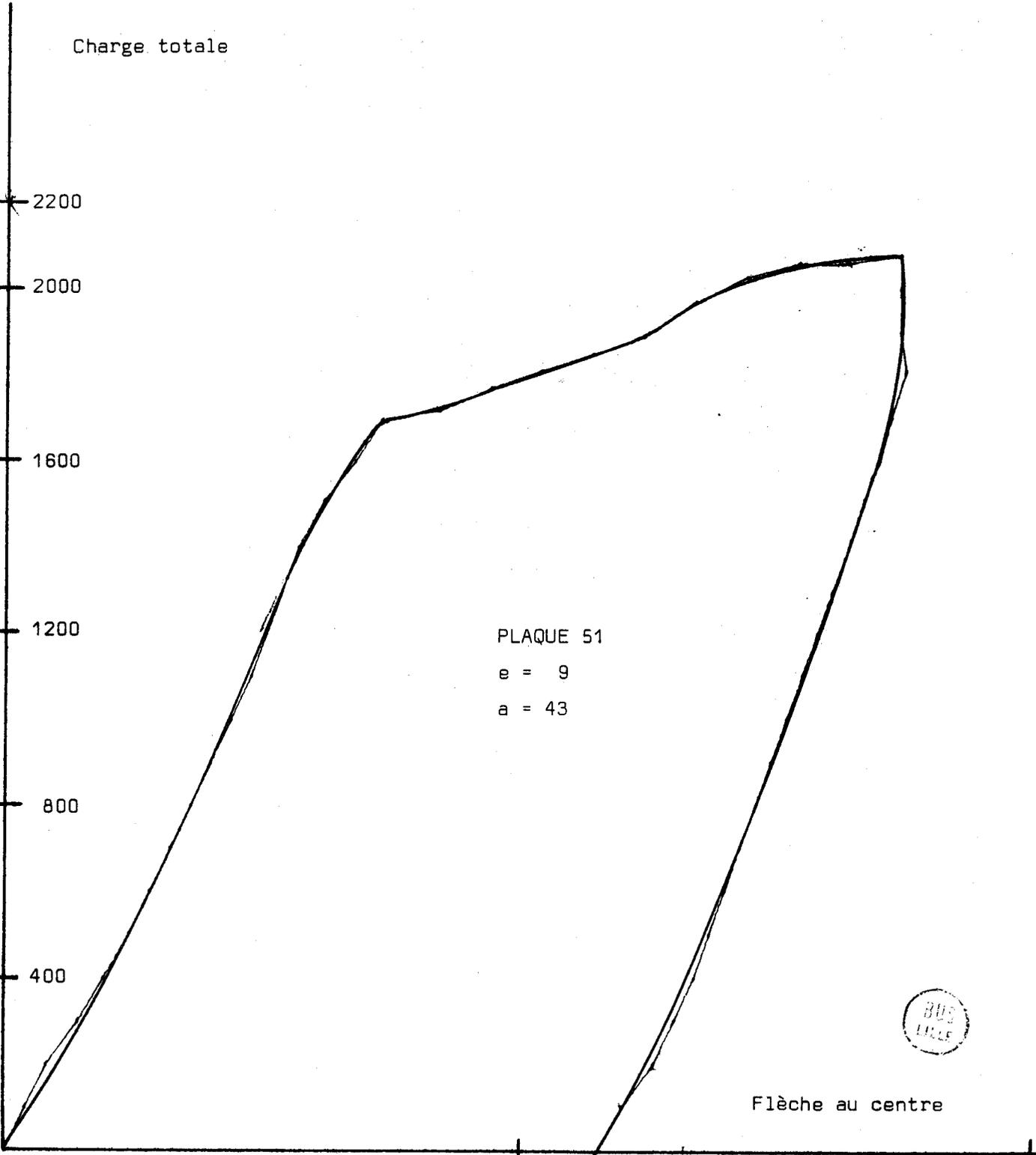
PLAQUE 51  
e = 9  
a = 43

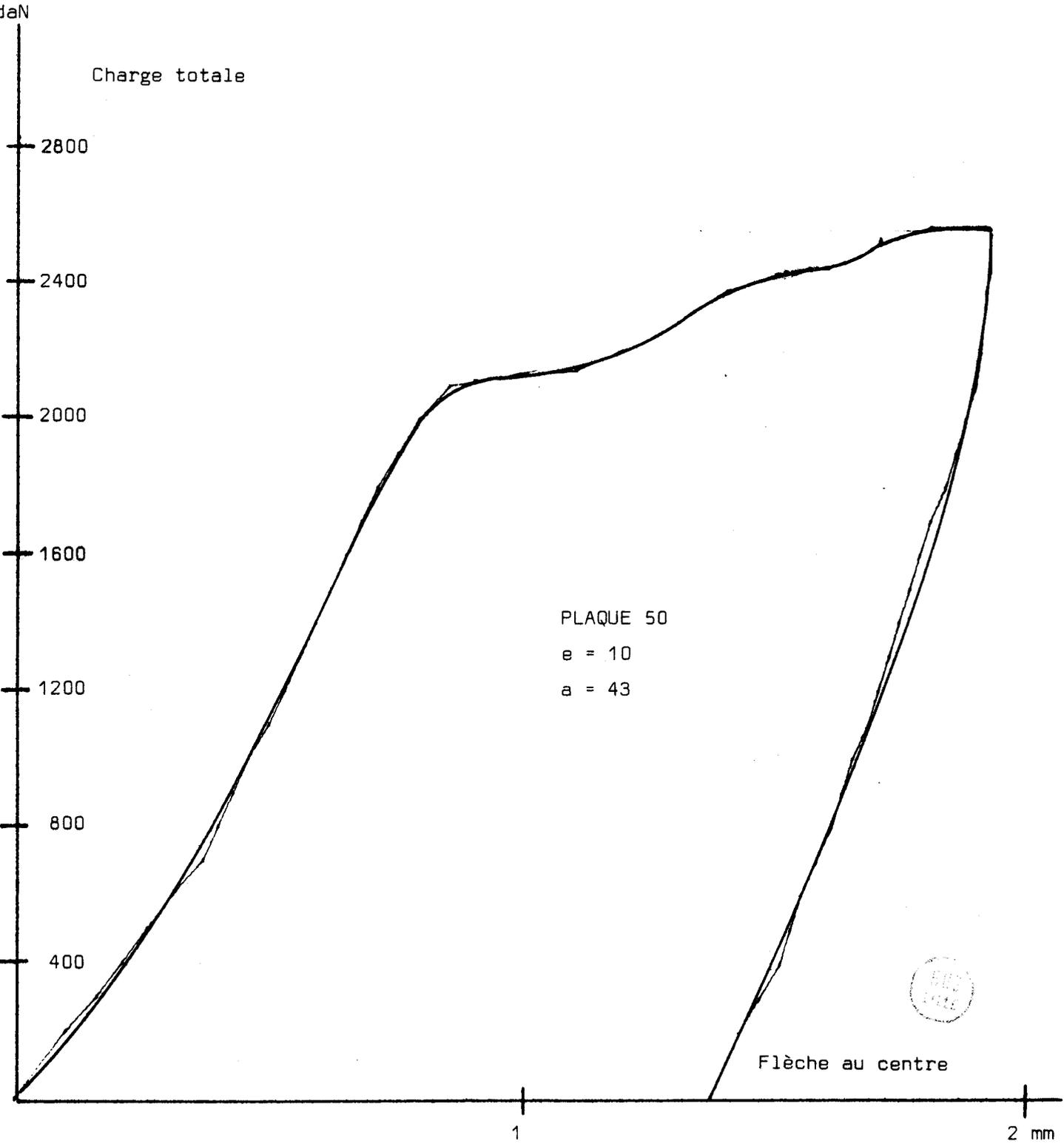


Flèche au centre

1

2 mm





daN

Charge totale

1000

800

600

400

200

PLAQUE 65

e = 5

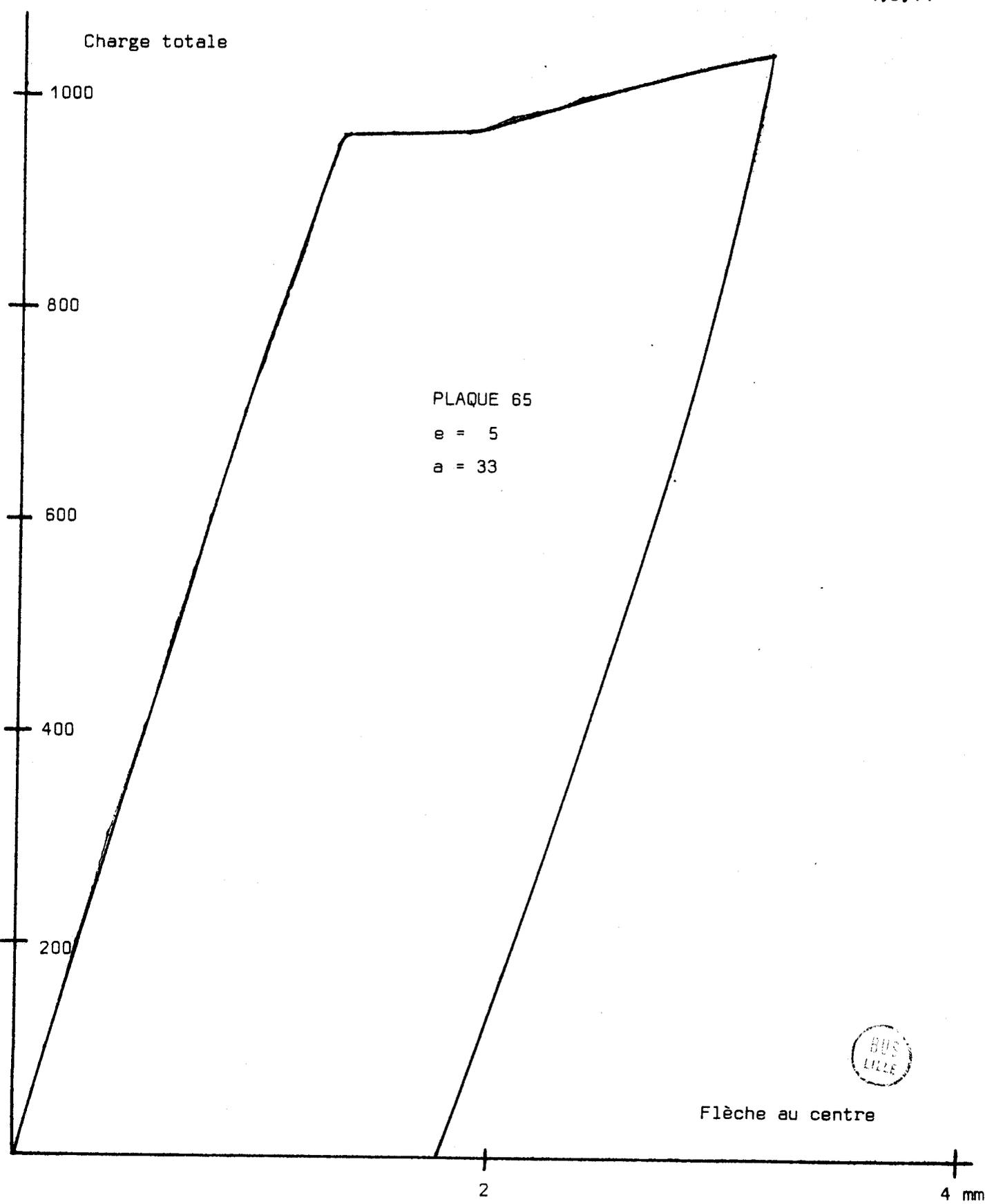
a = 33



Flèche au centre

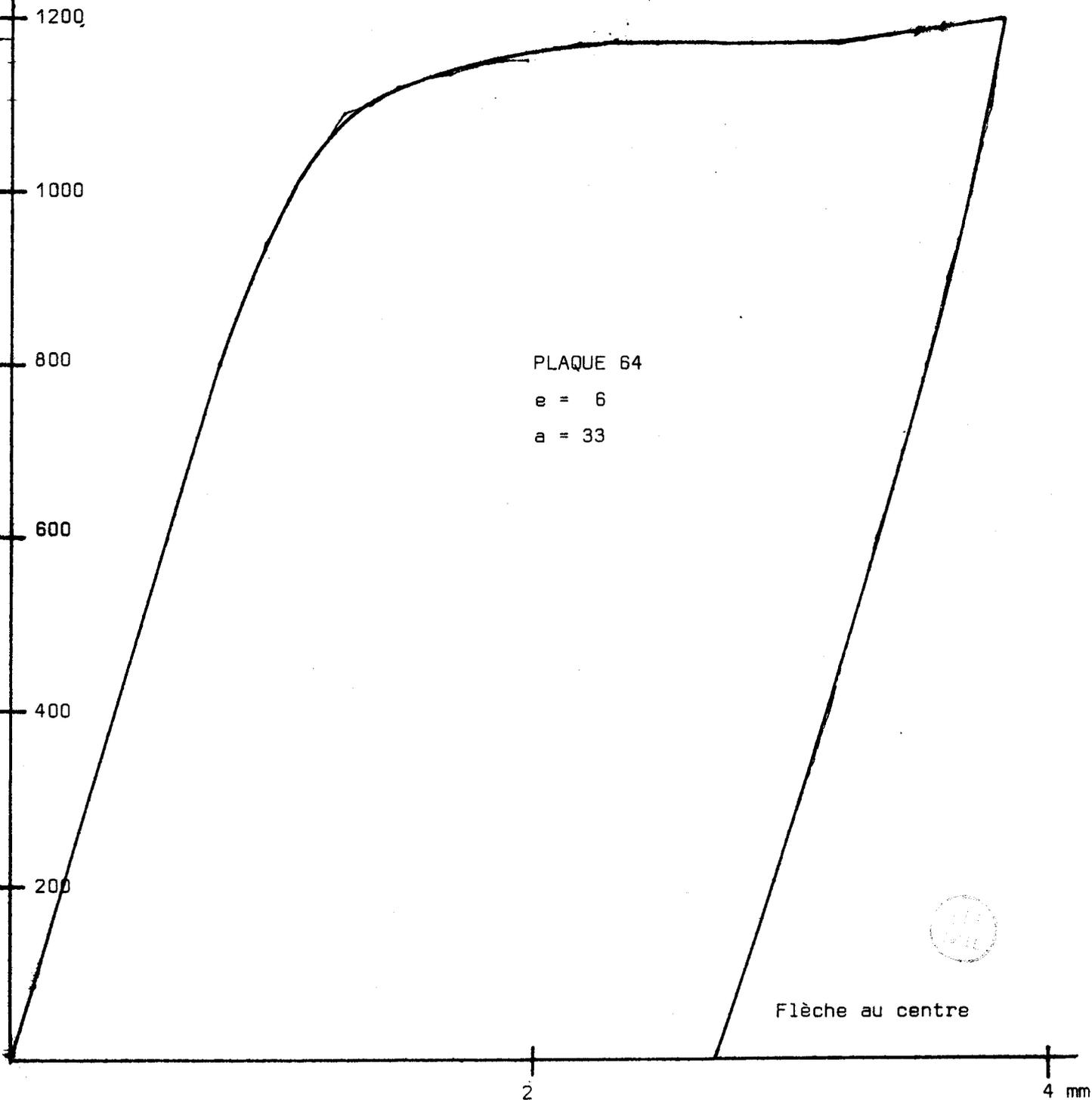
2

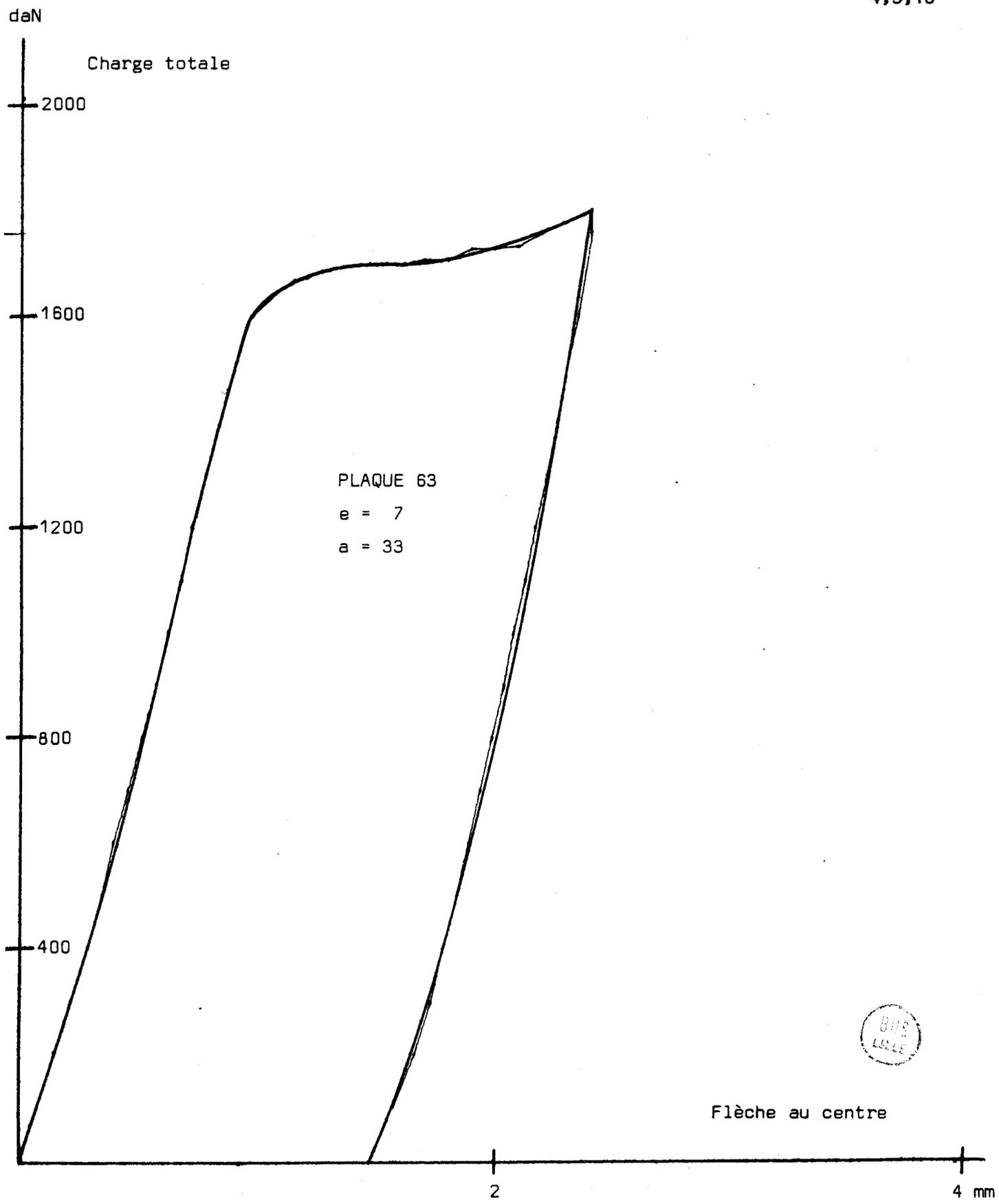
4 mm

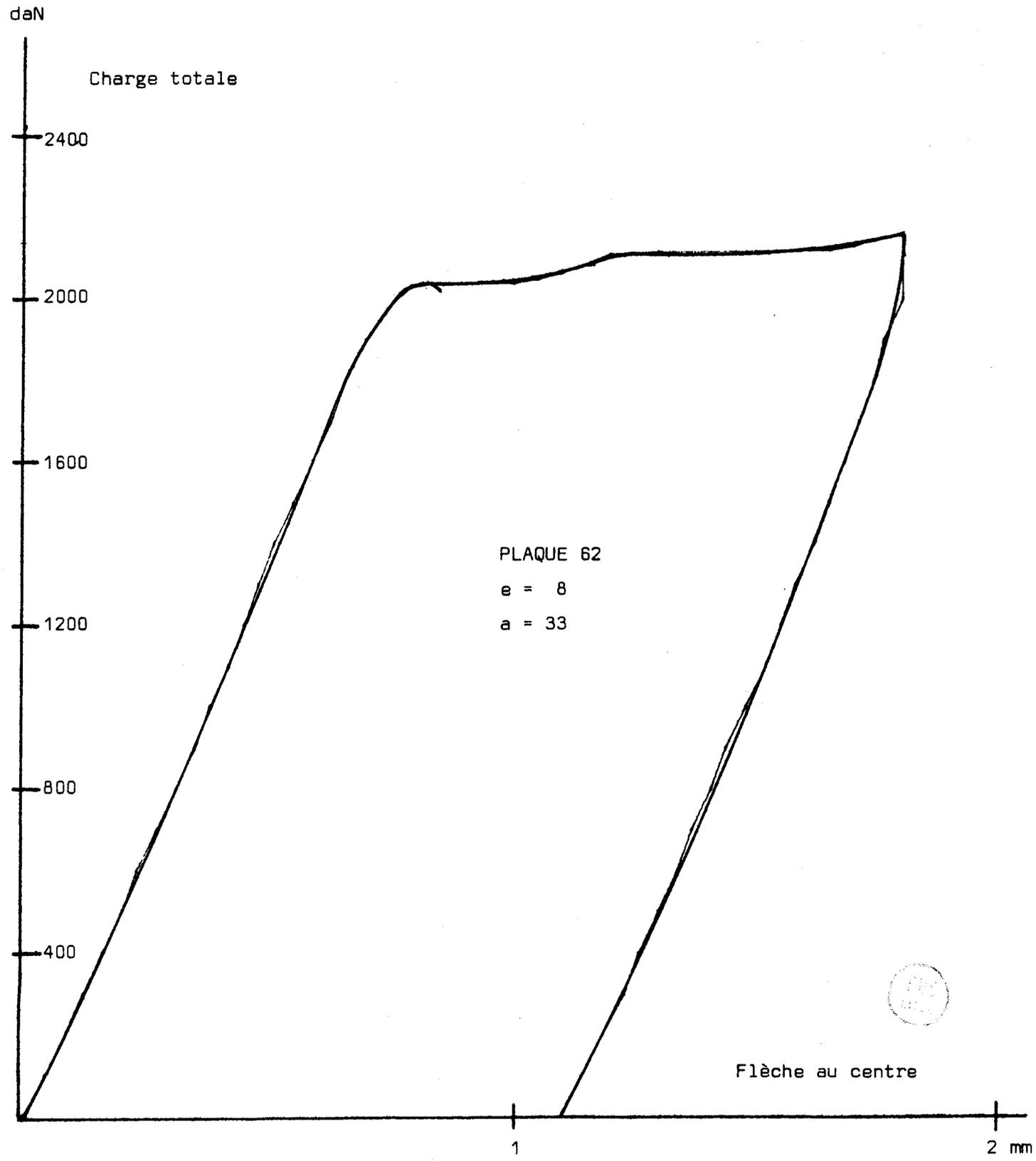


daN

Charge totale







daN

Charge totale

3000  
2800  
2600  
2400  
2200  
2000  
1600  
1200  
800  
400

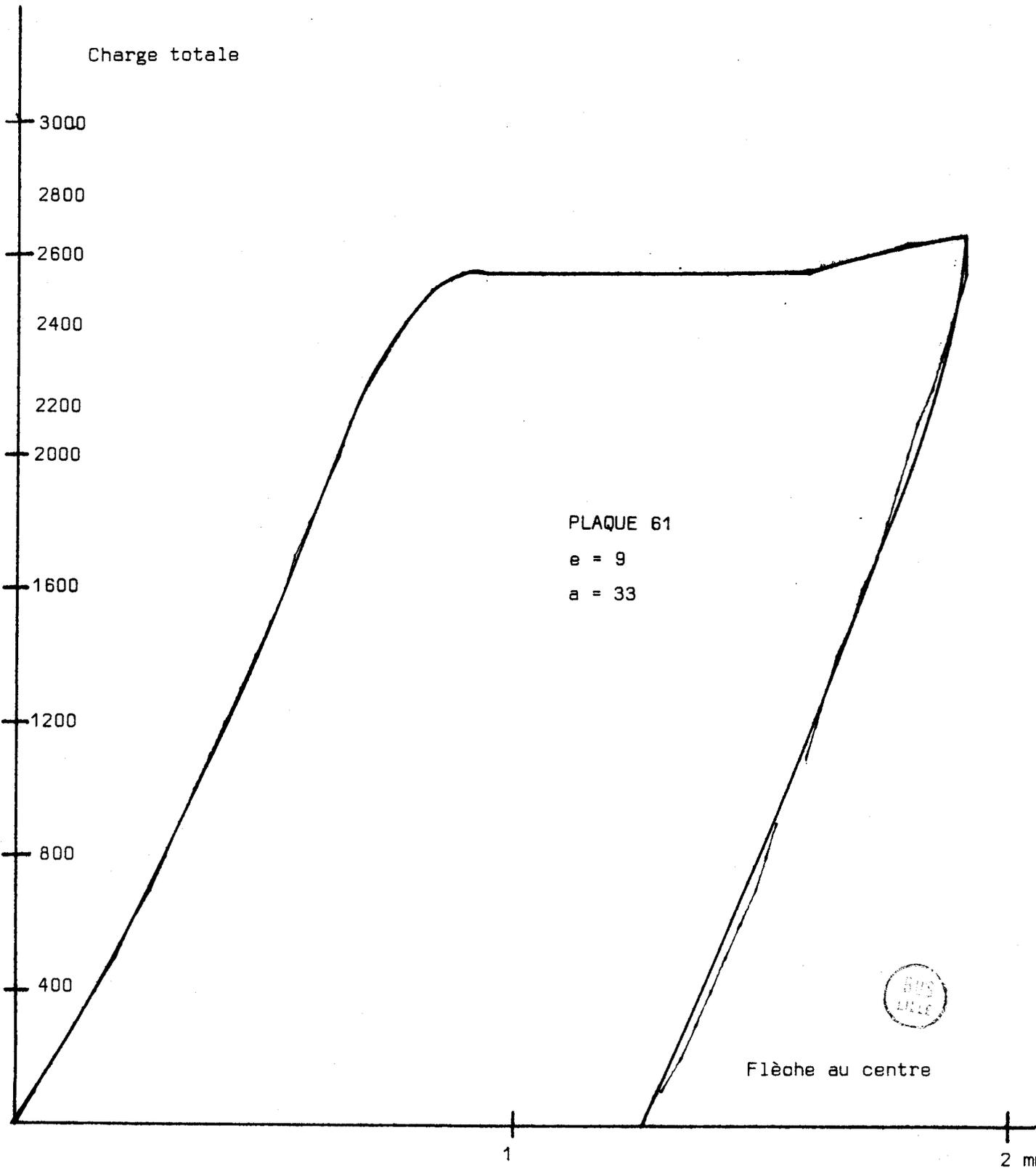
PLAQUE 61  
e = 9  
a = 33



Flèche au centre

1

2 mm



daN

Charge totale

3600

3200

2800

2400

PLAQUE 60

e = 10

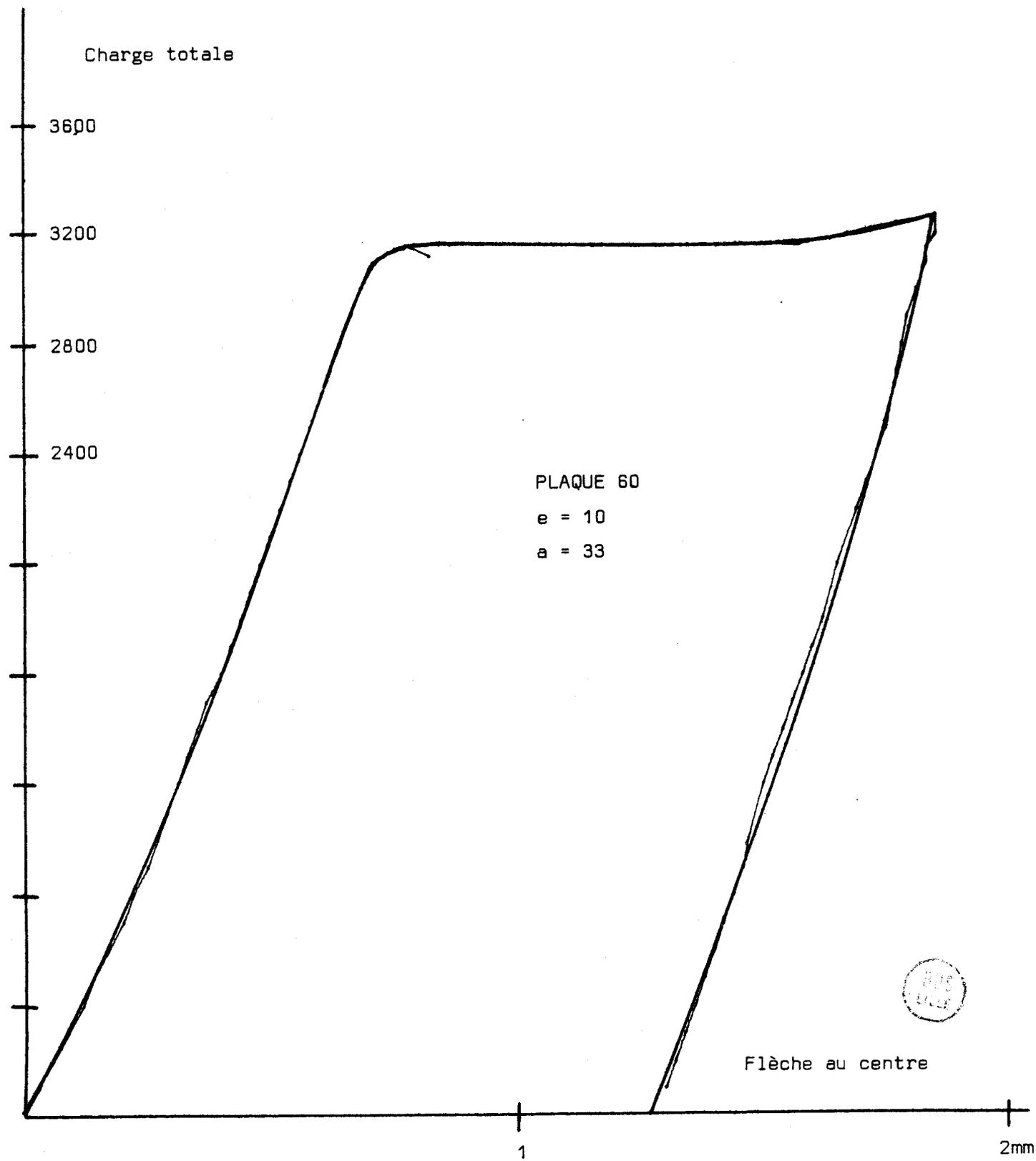
a = 33



Flèche au centre

1

2mm



daN

Charge totale

2000

1600

1200

800

400

PLAQUE 70

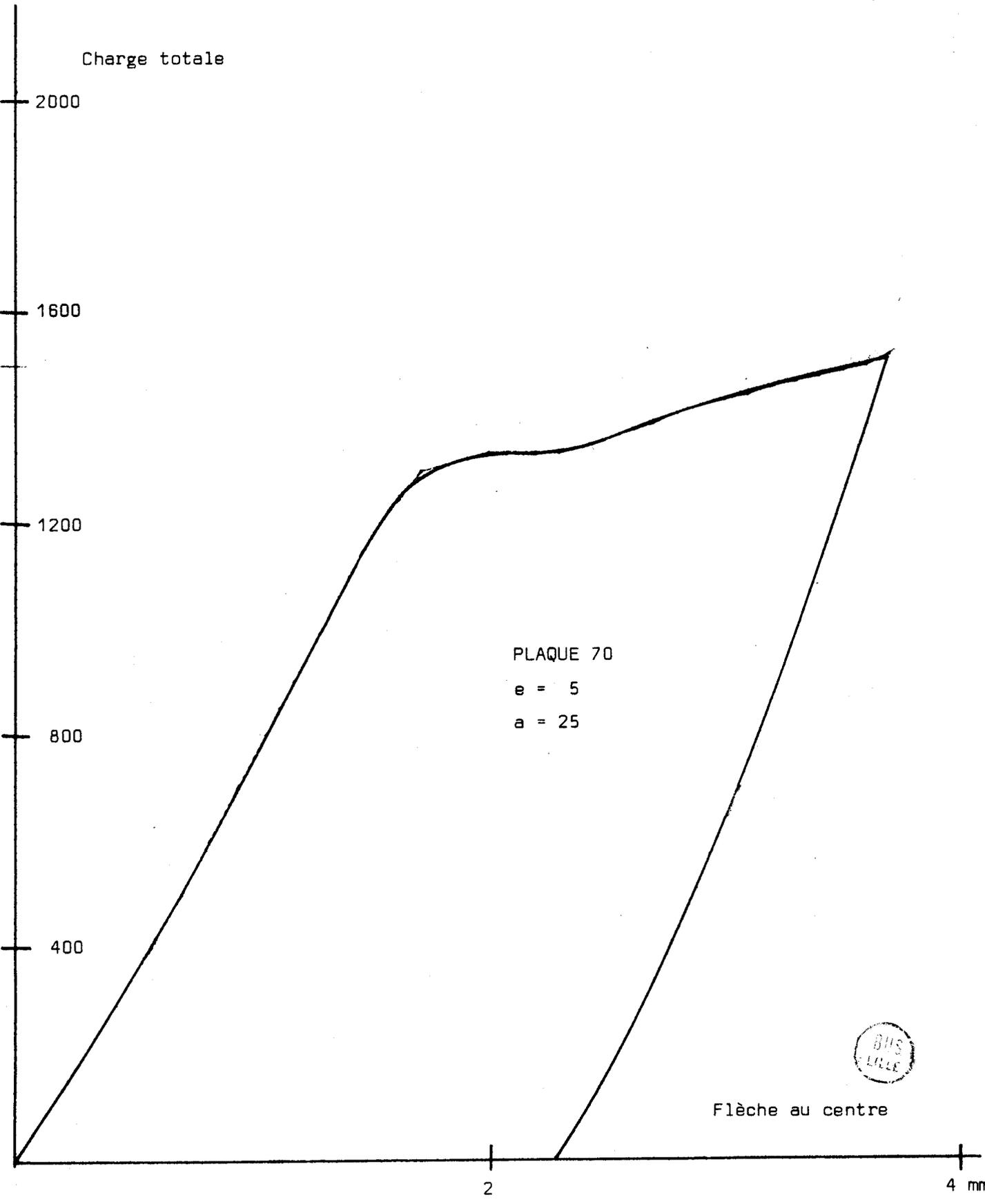
e = 5

a = 25

Flèche au centre

2

4 mm



daN

Charge totale

2000

1600

1200

800

400

PLAQUE 70

e = 6

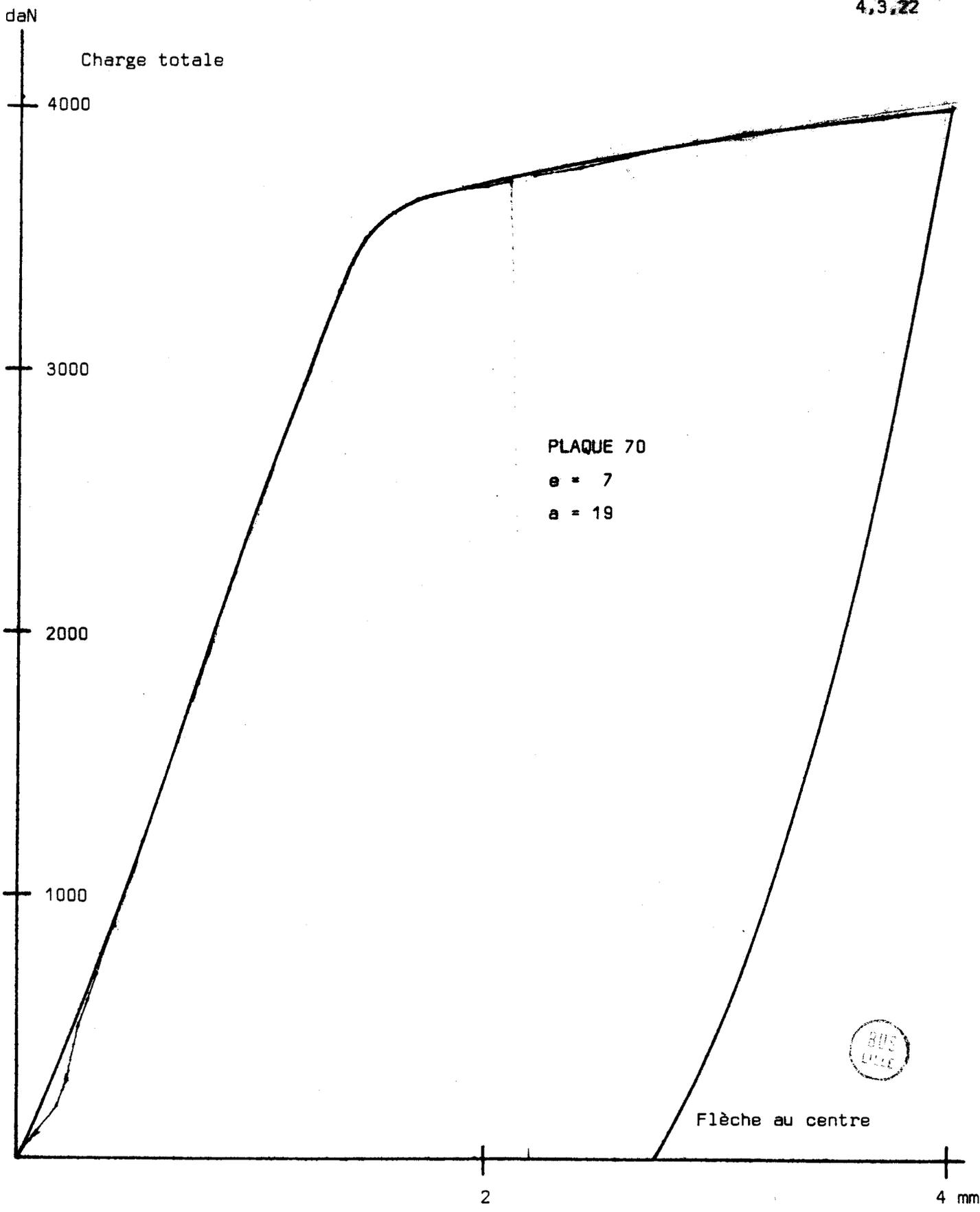
a = 30

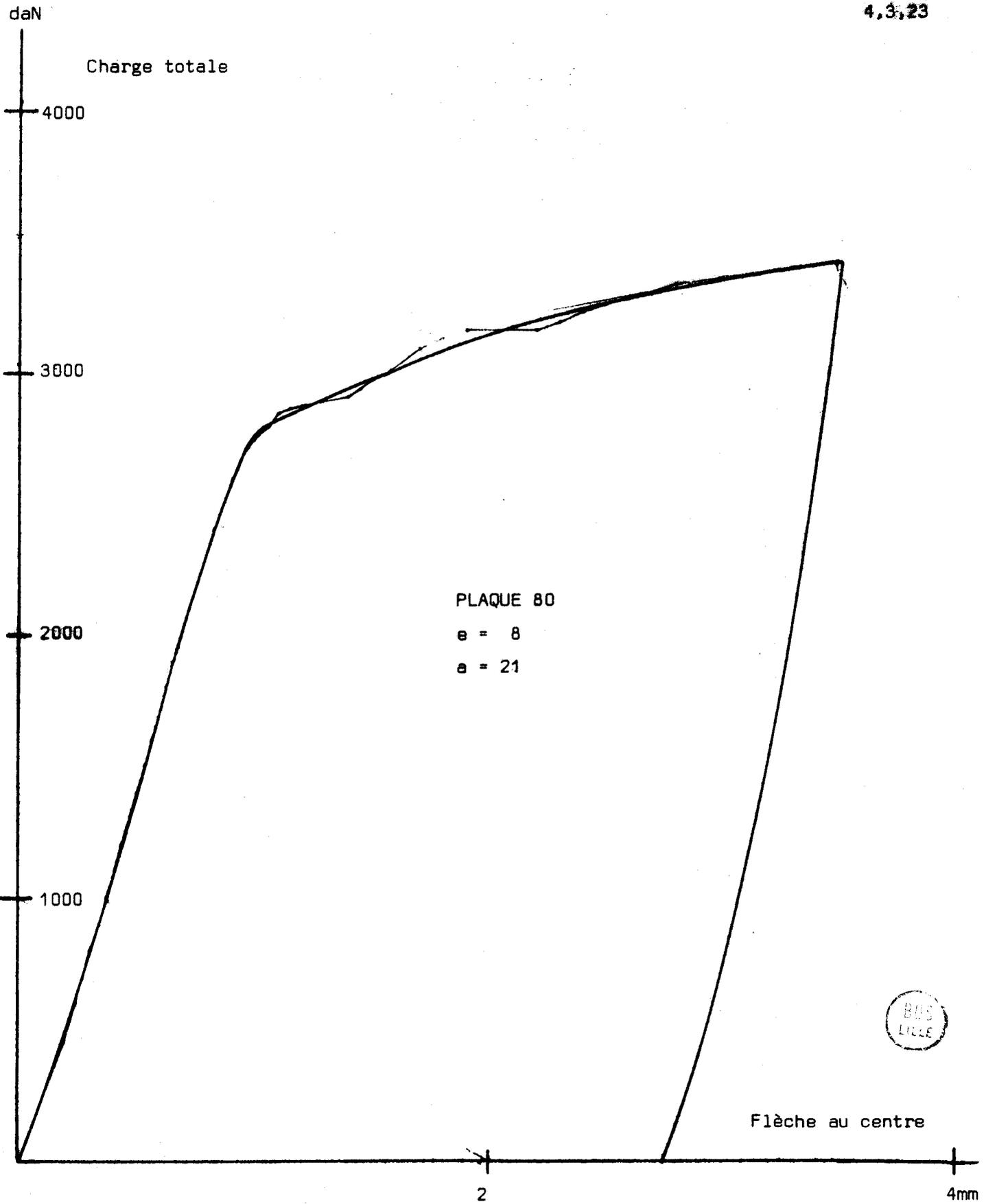
Flèche au centre

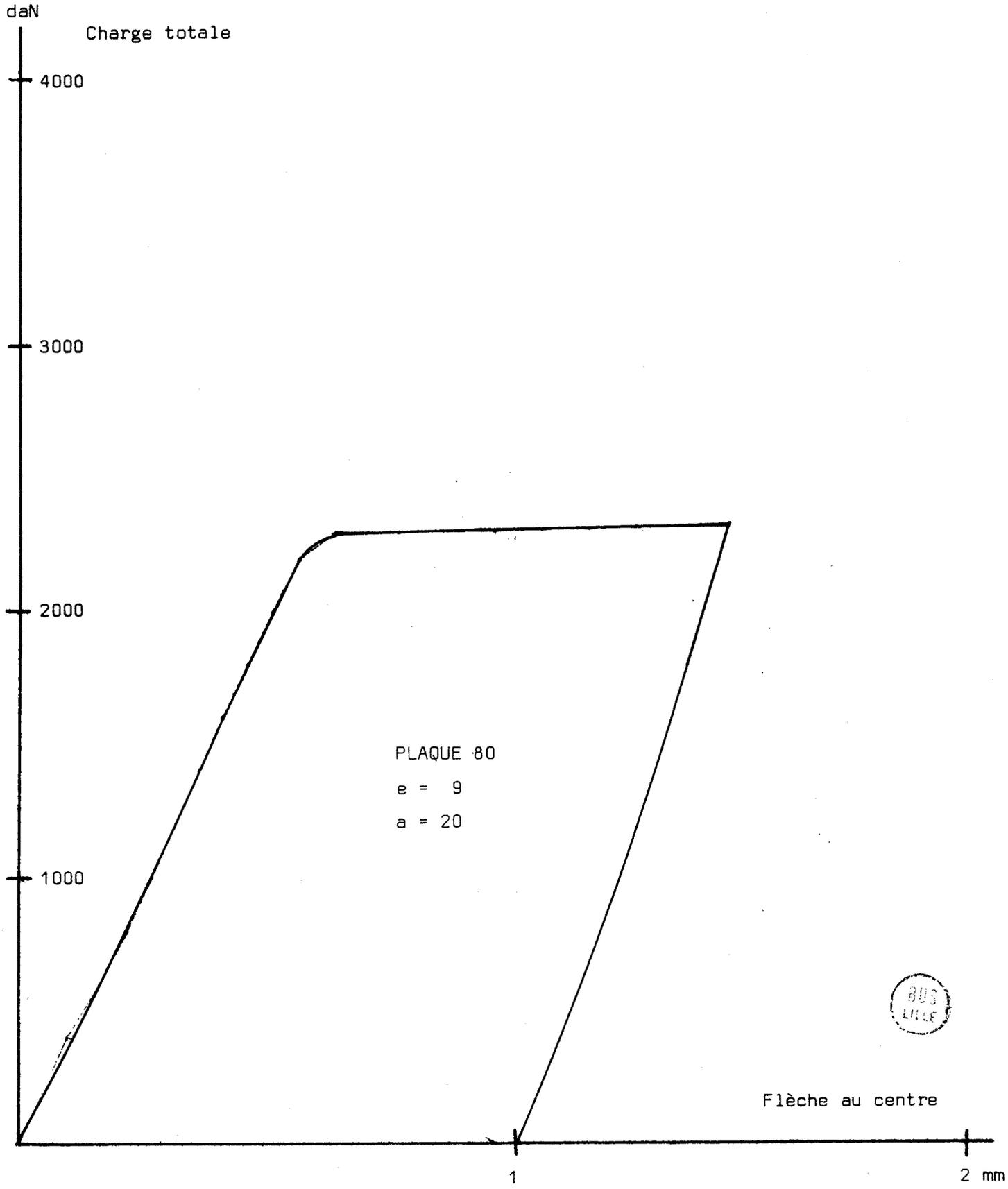
2

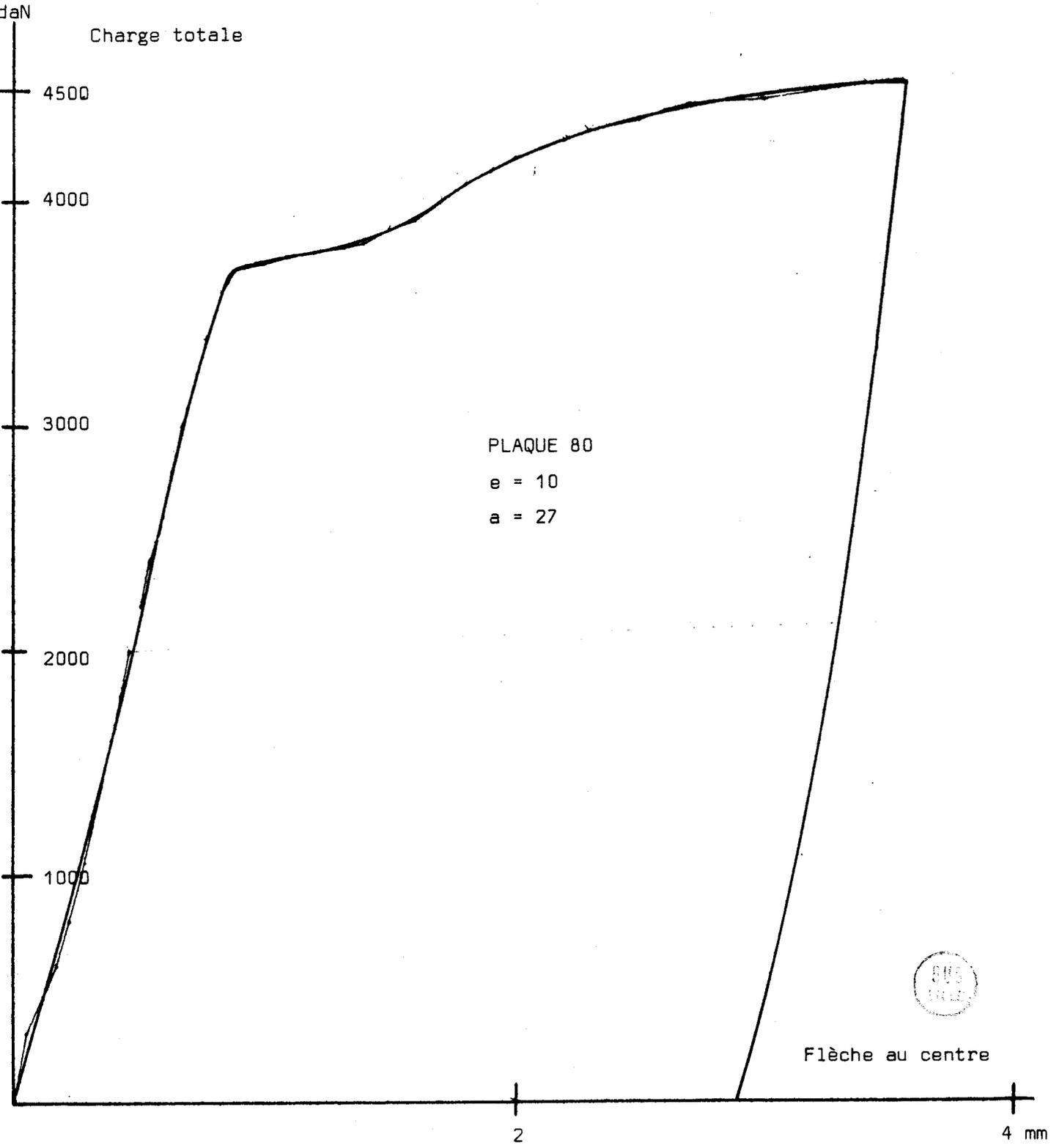
4mm

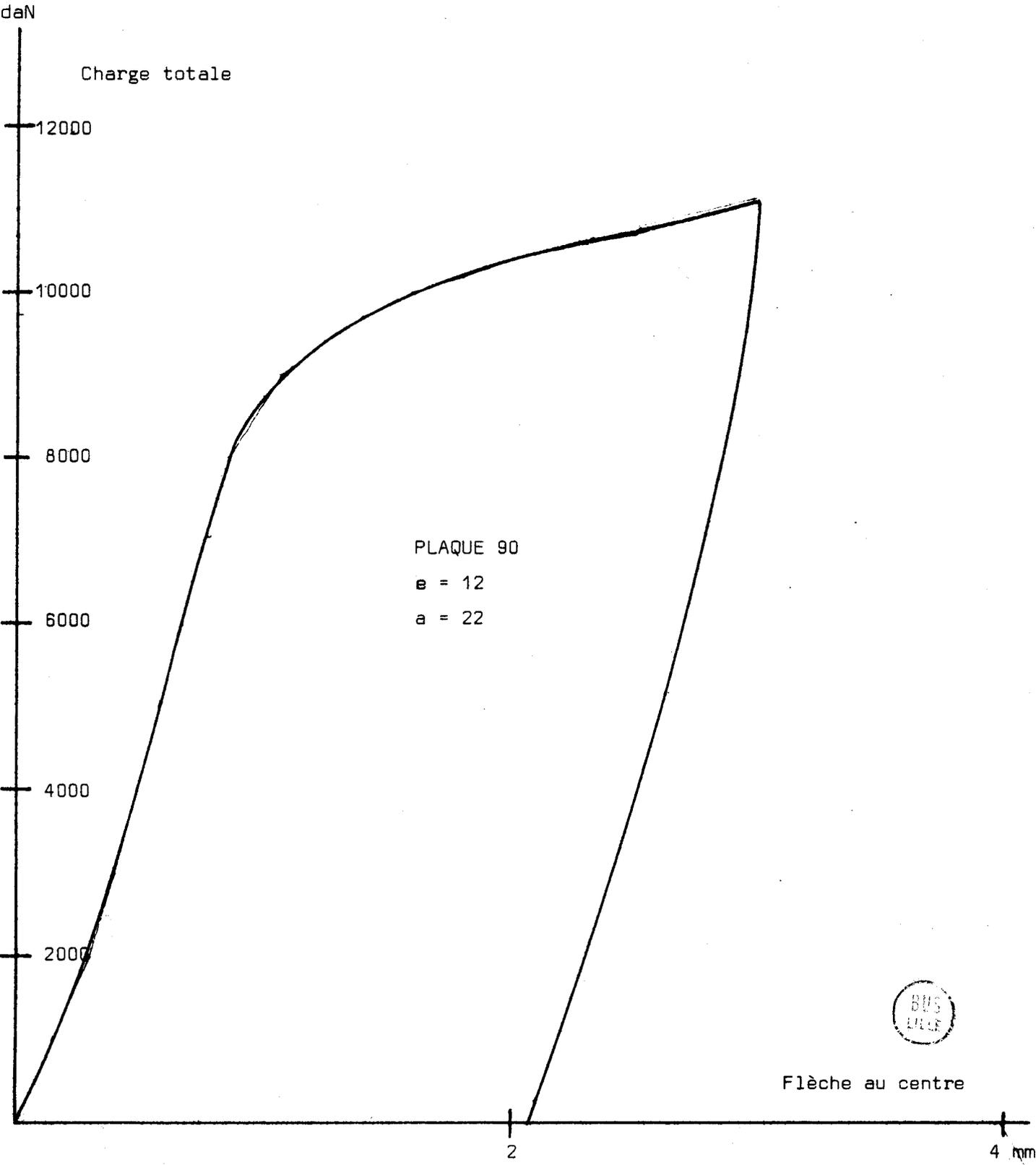


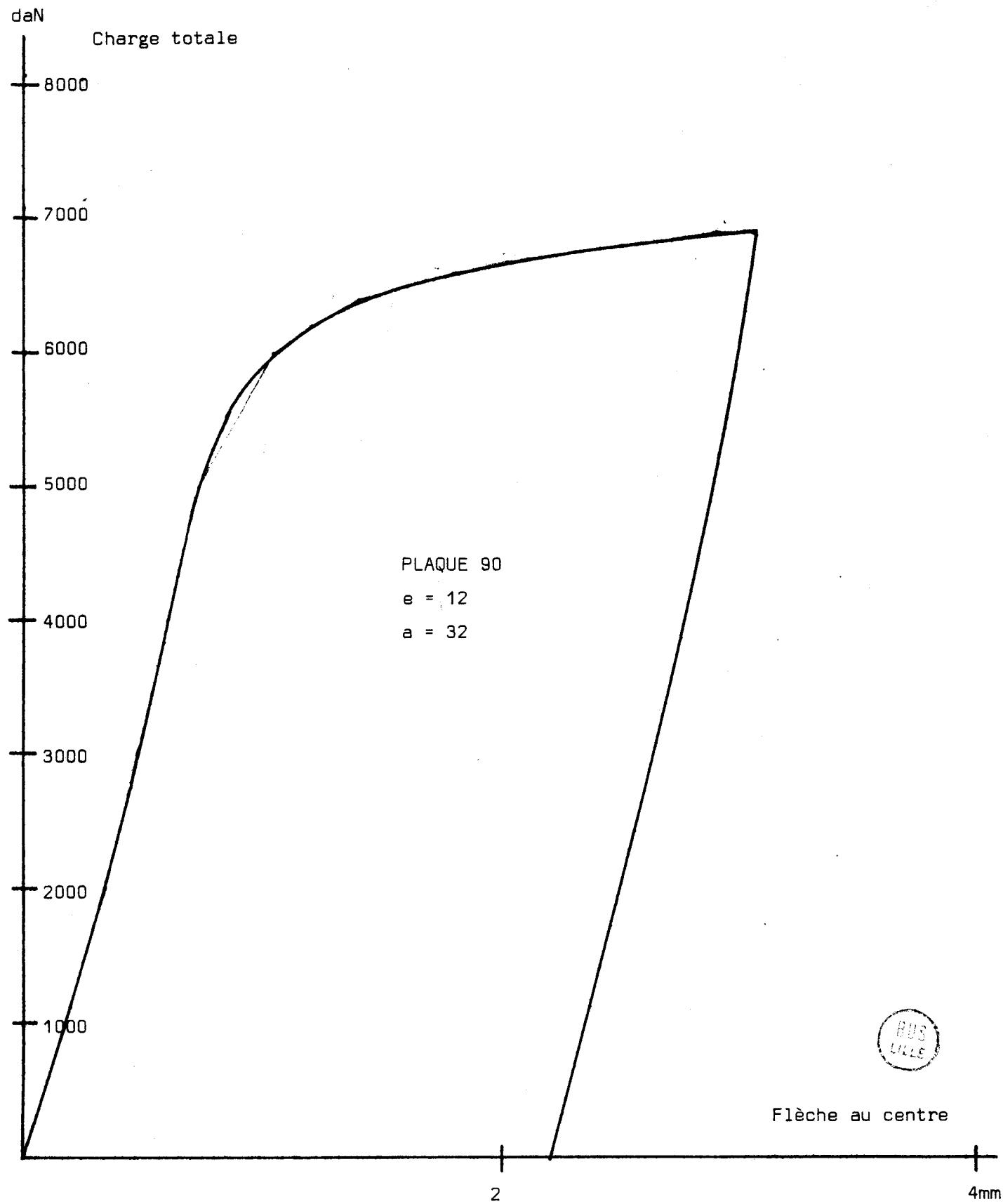


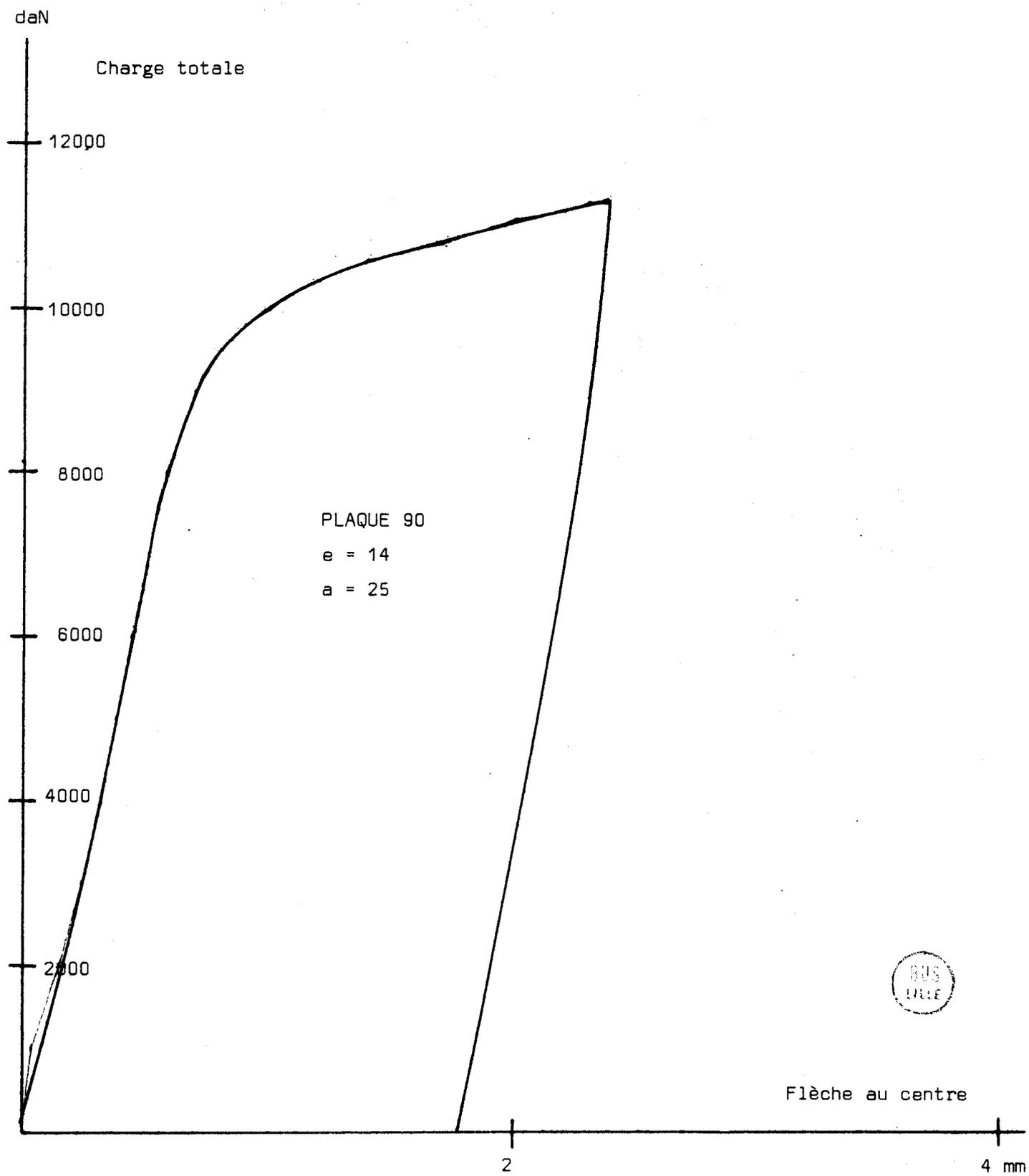












daN

Charge totale

8000

6000

4000

2000

PLAQUE 90

e = 14

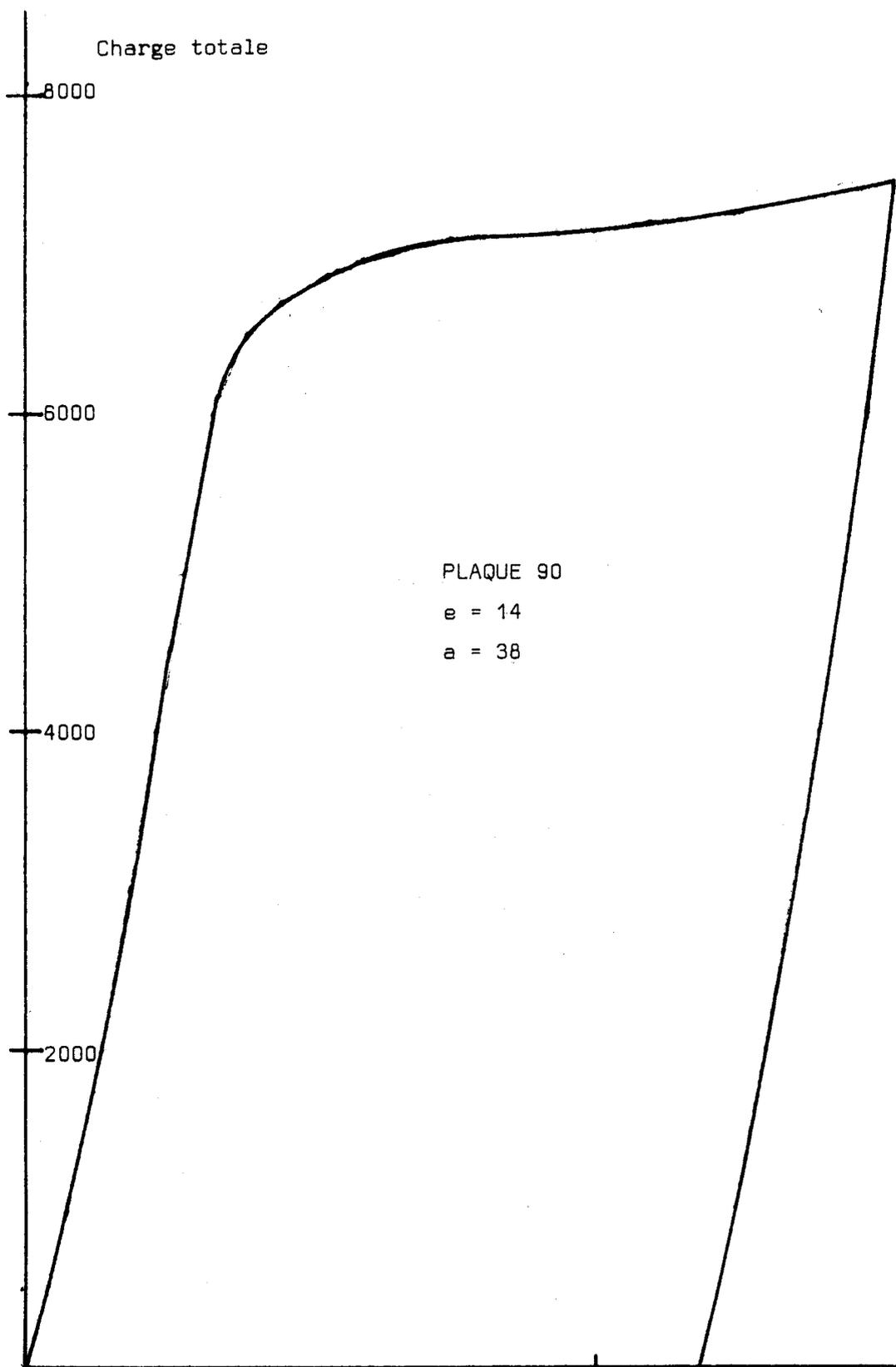
a = 38

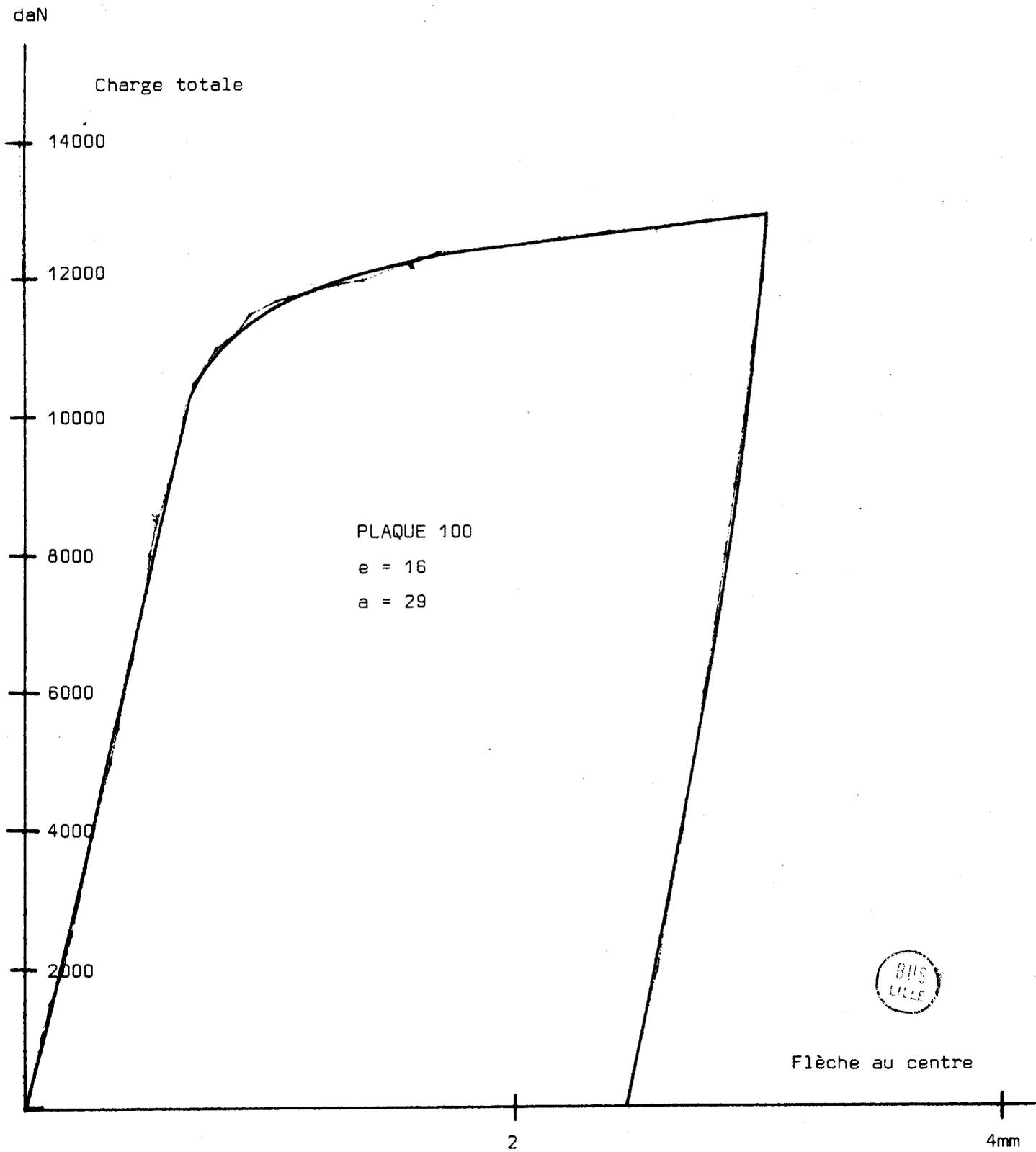


Flèche au centre

2

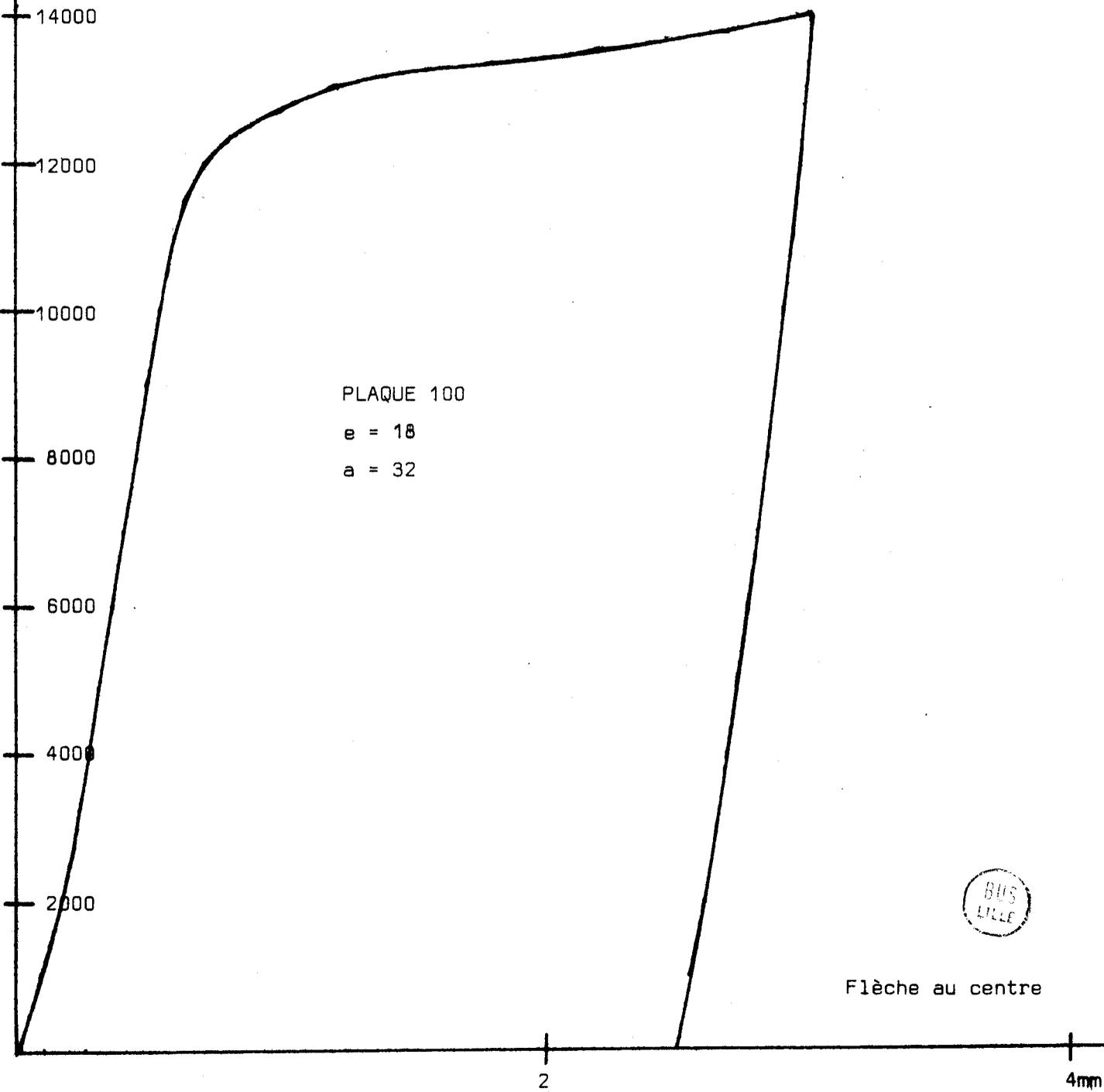
4 mm



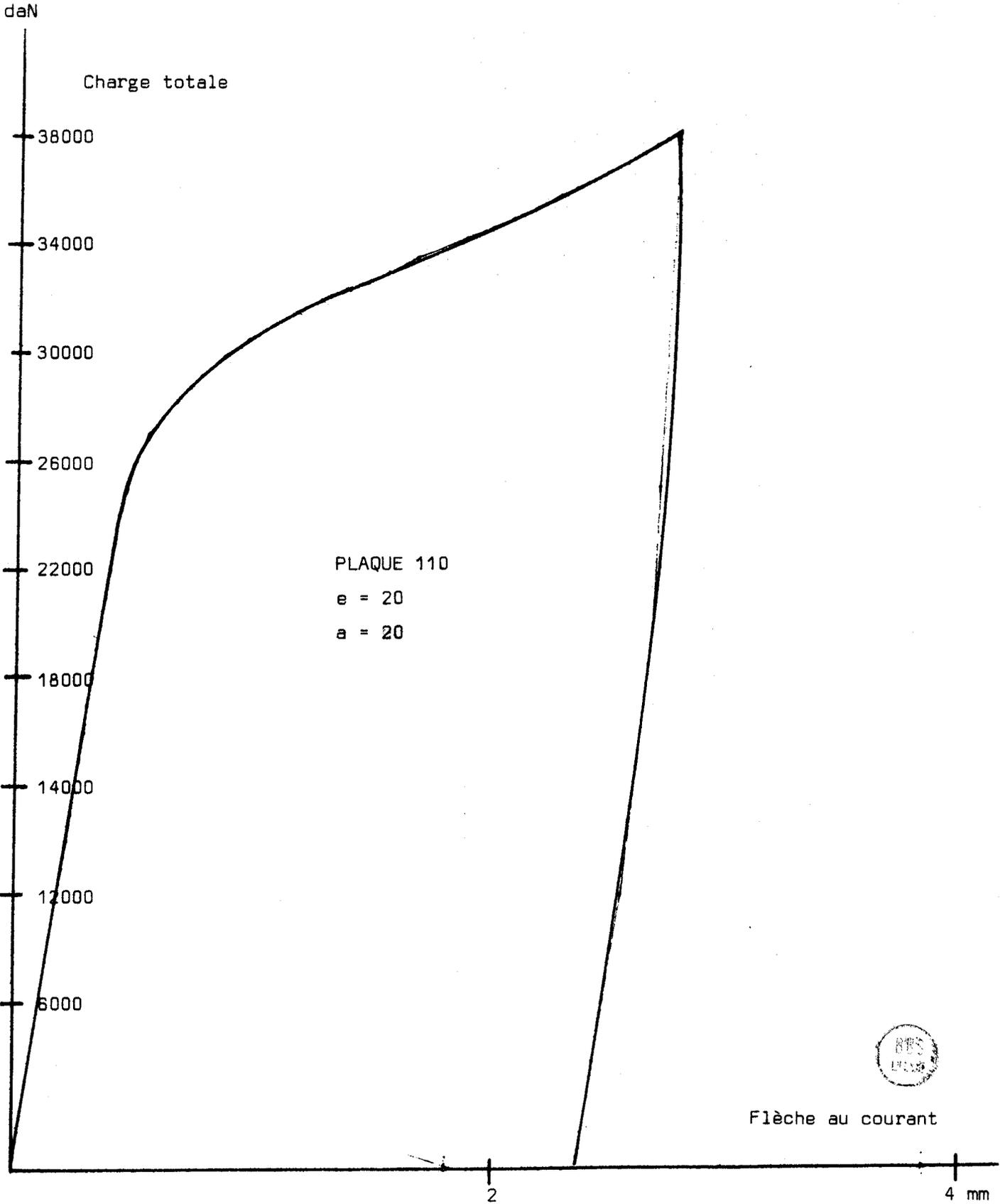


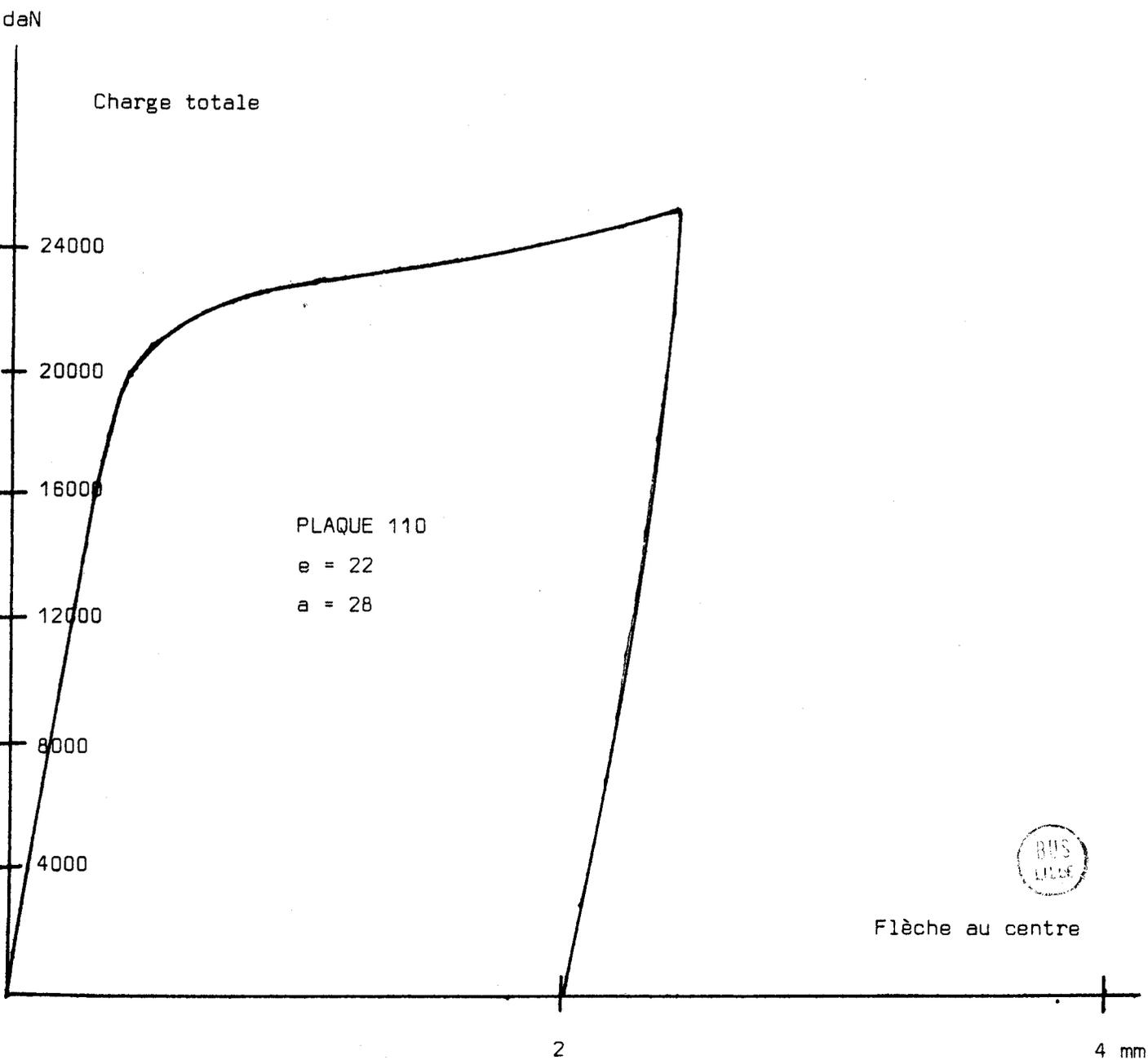
daN

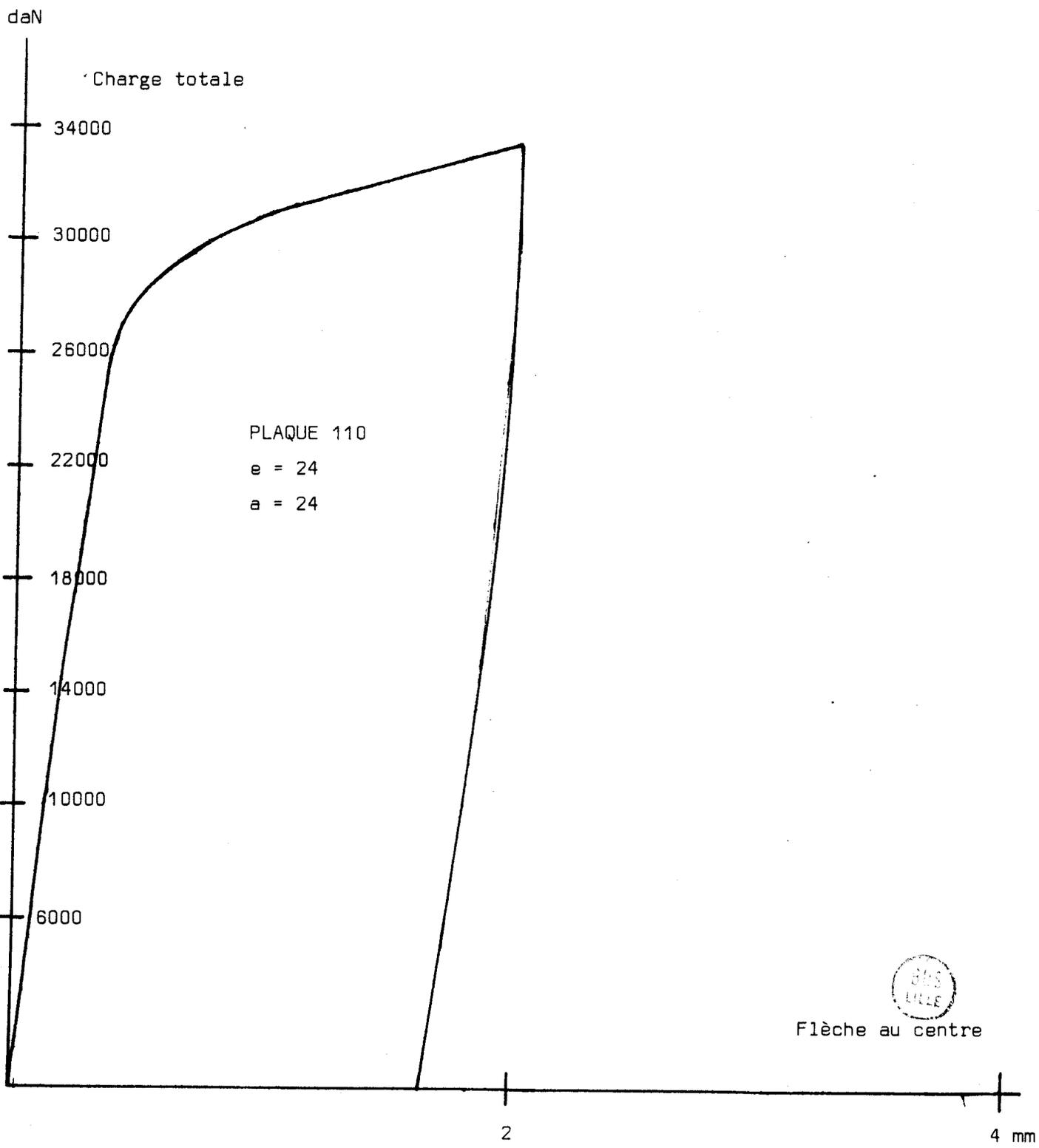
Charge totale

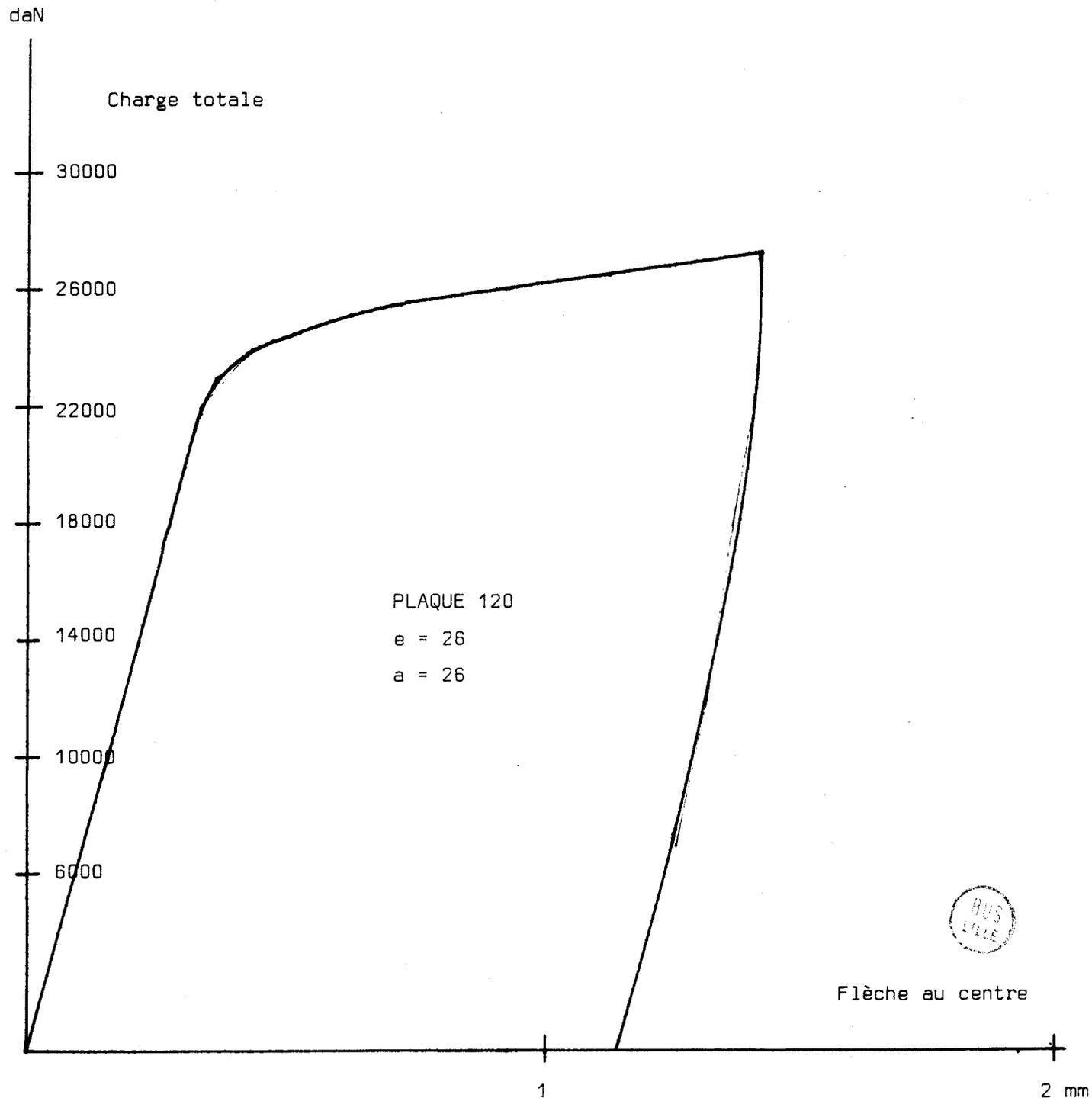


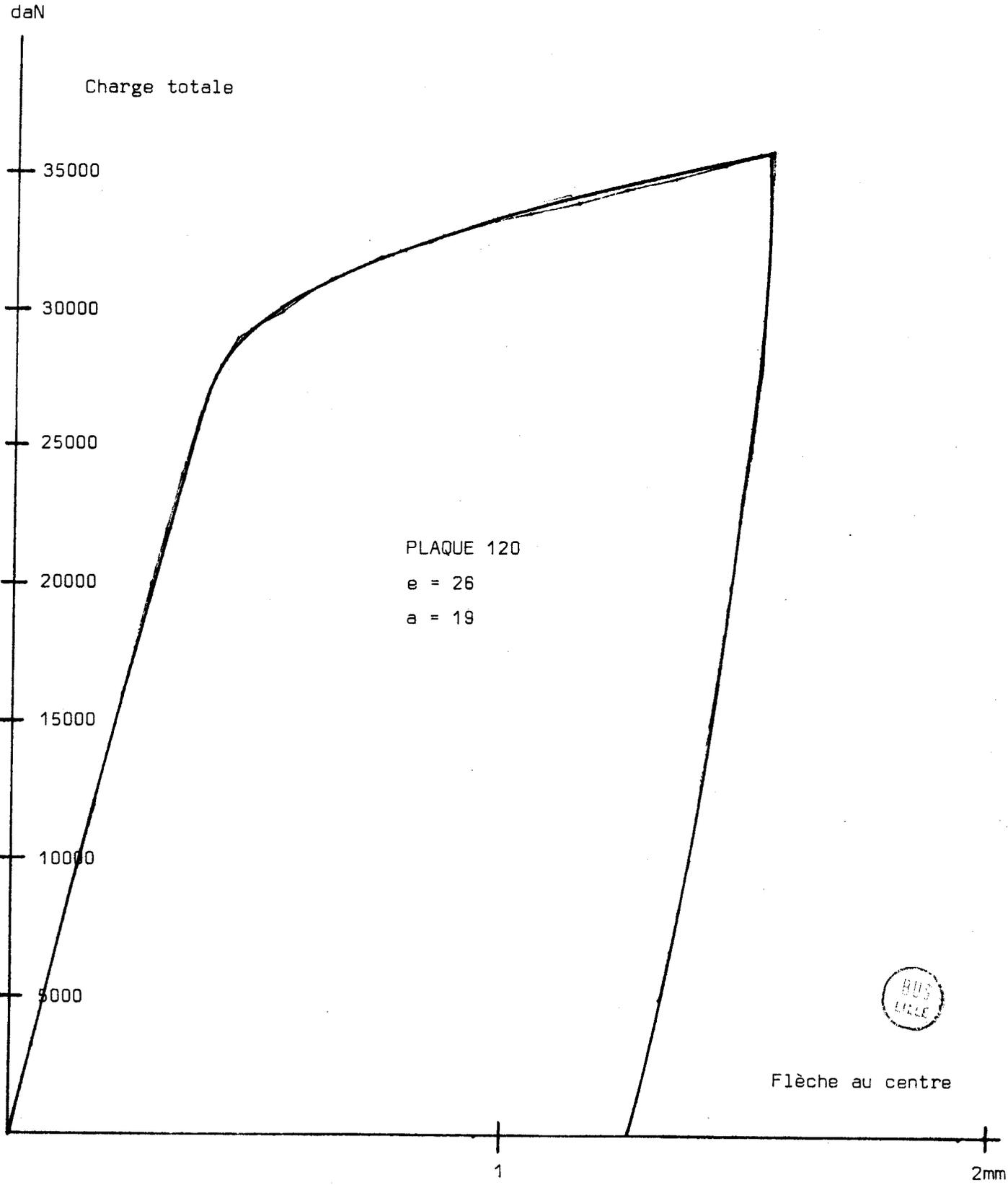
Flèche au centre

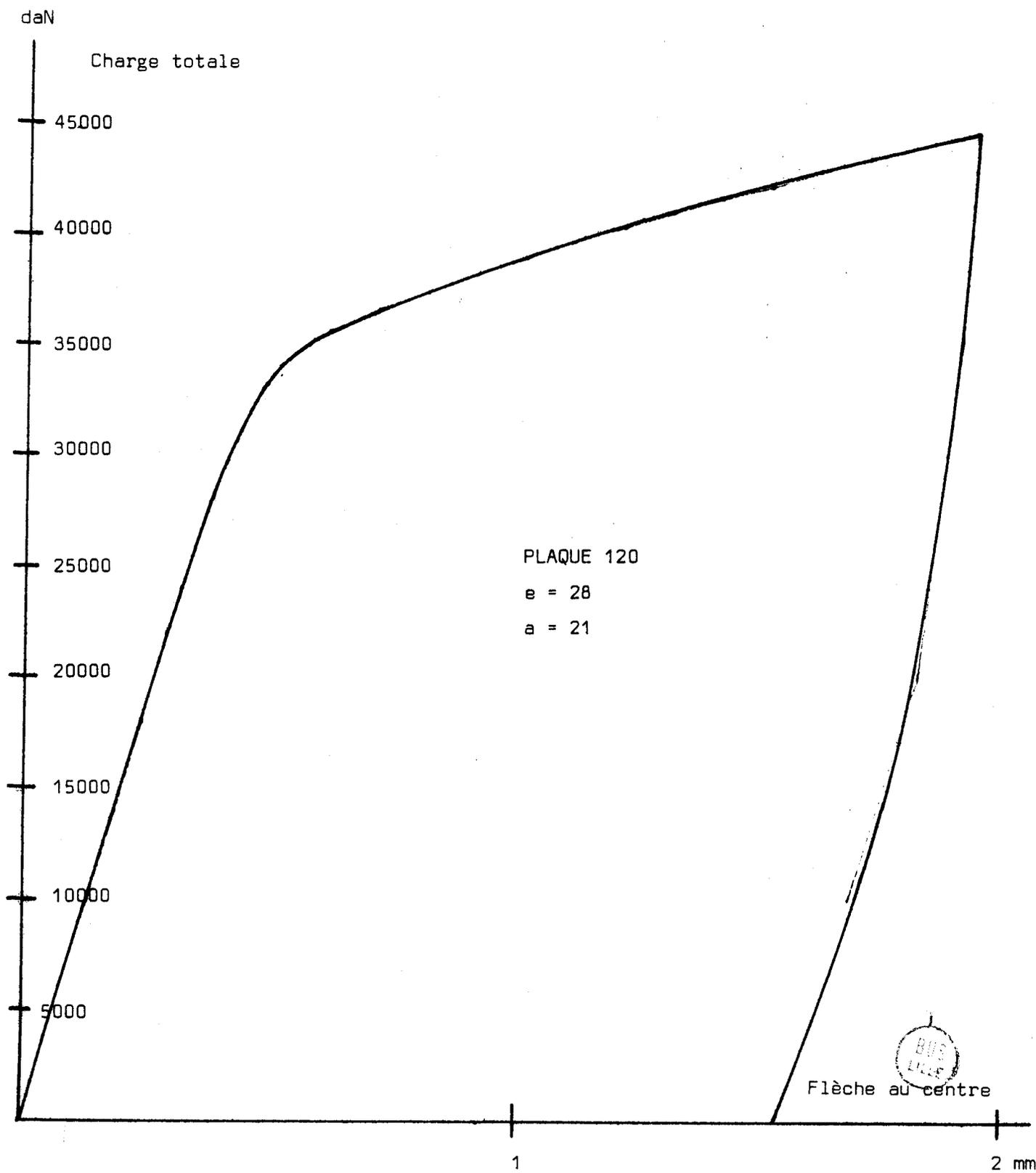




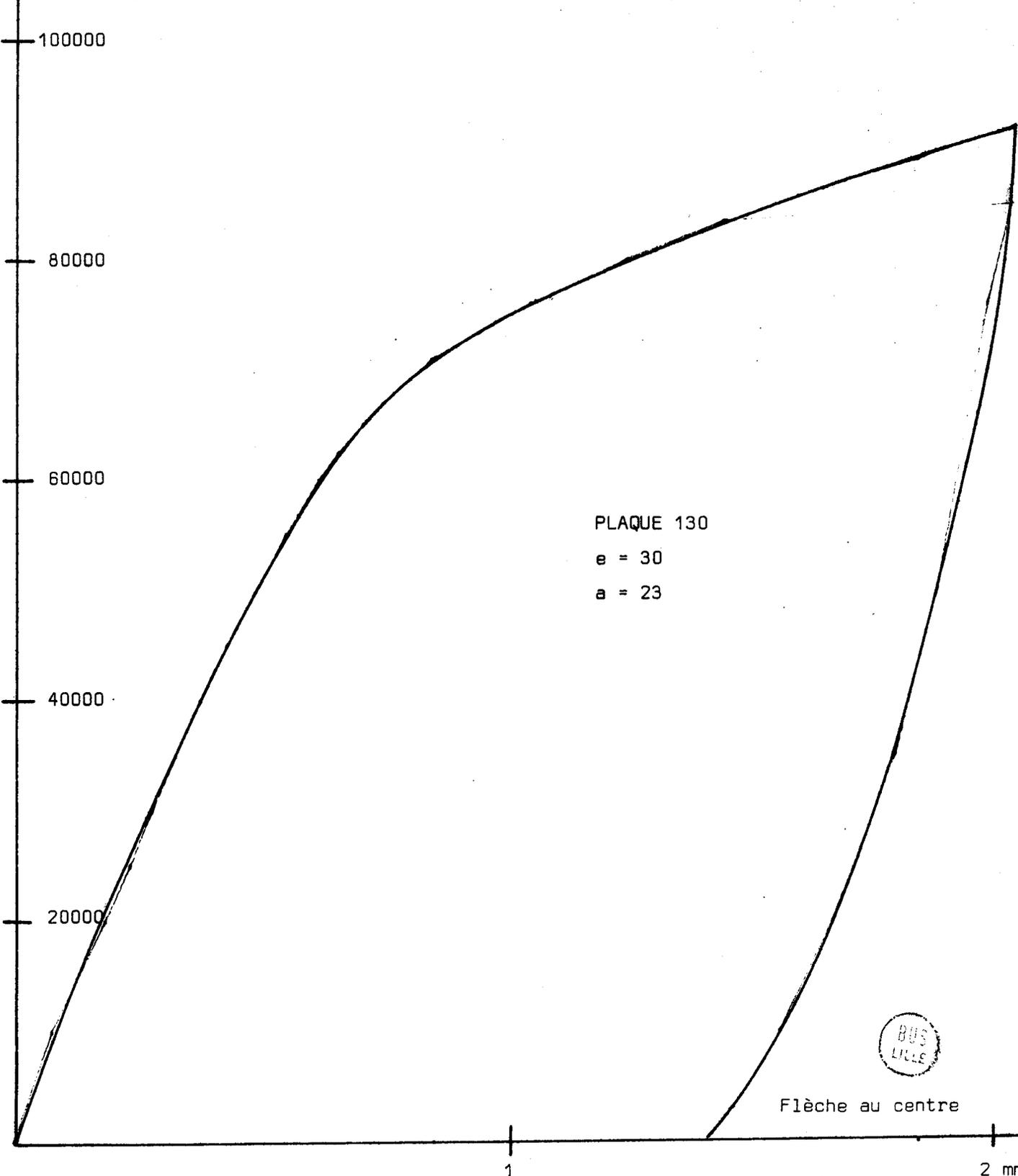


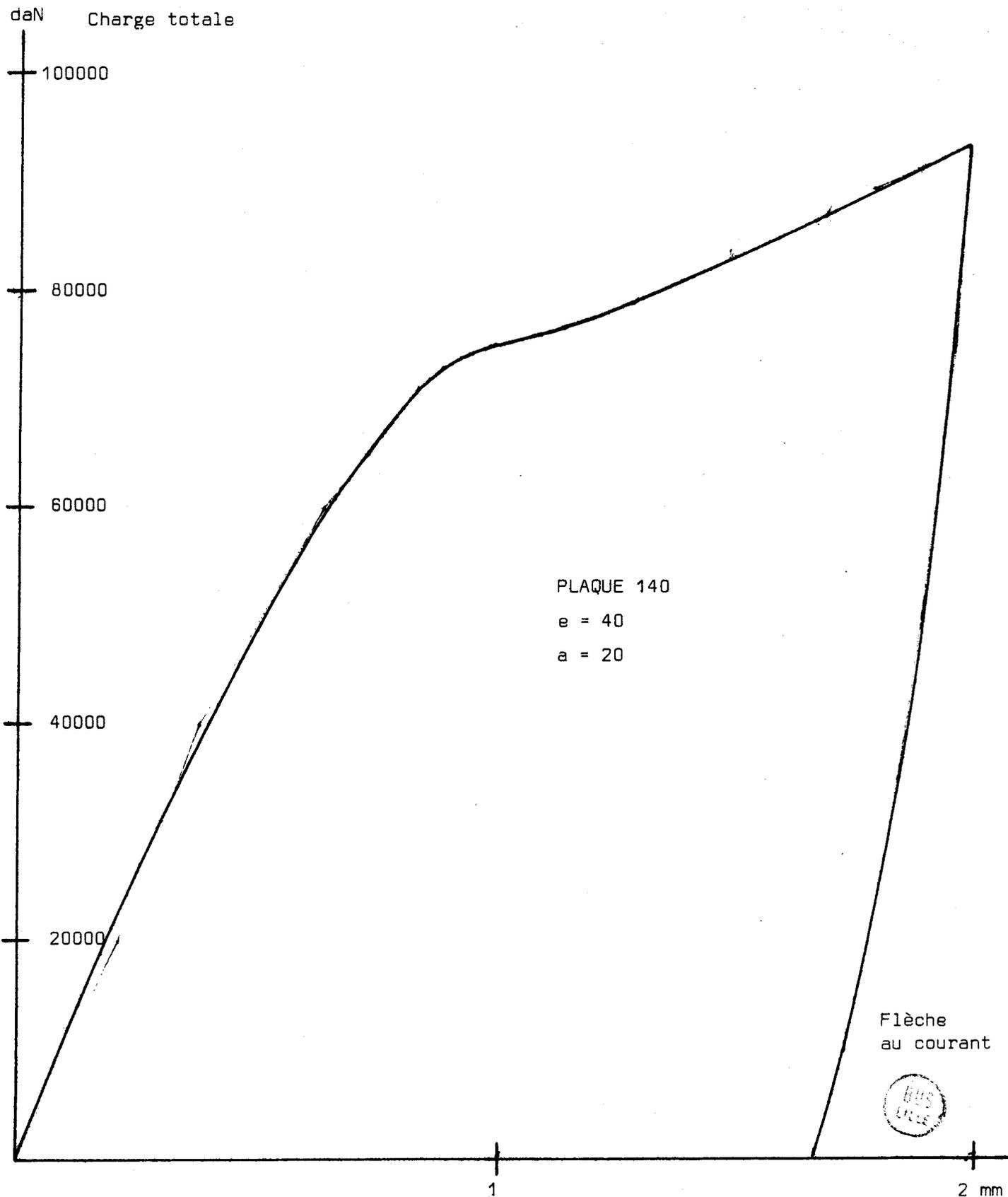




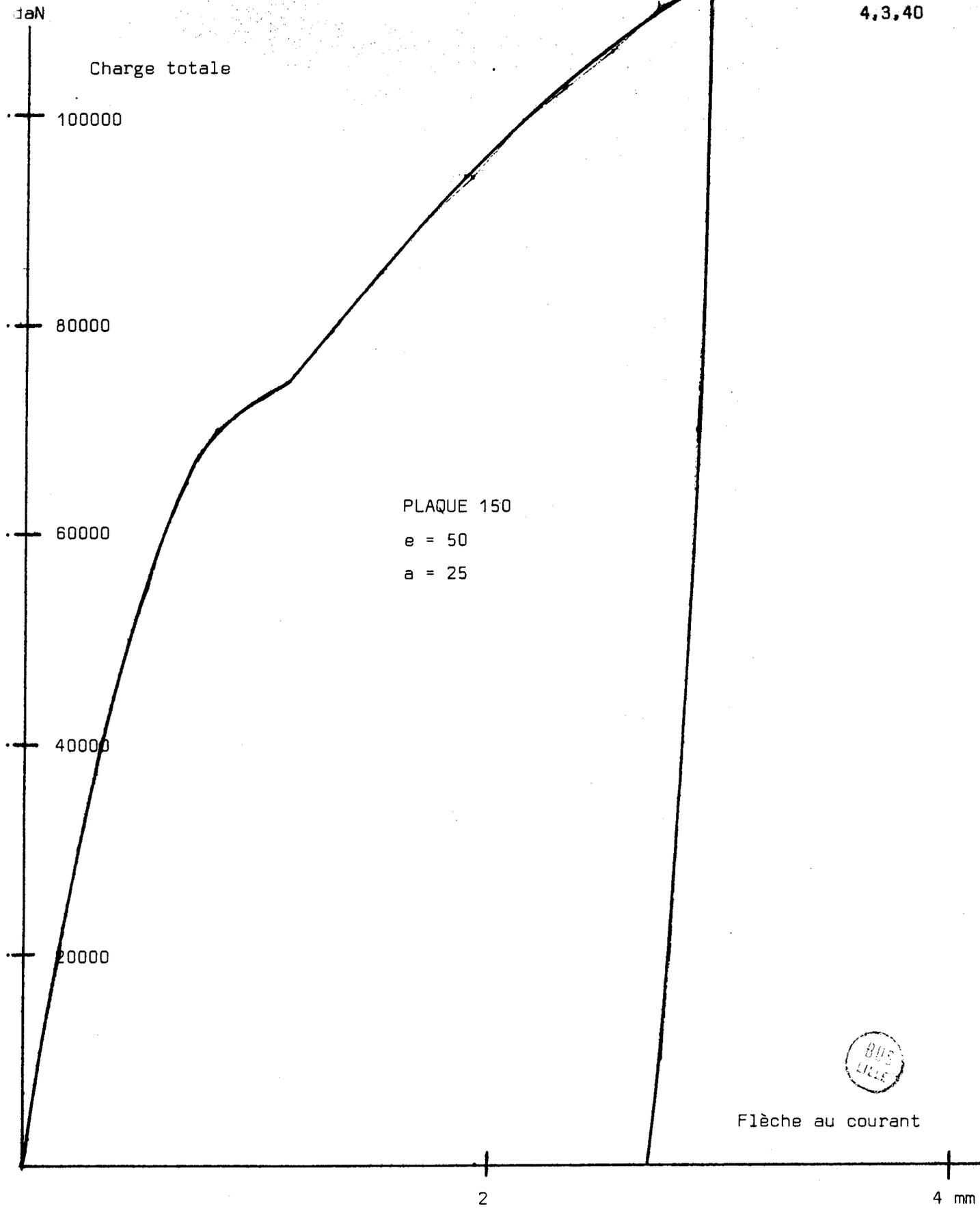


daN Charge totale





4,3,40



#### 4.4. FIGURES D'ÉCOULEMENT.

Il est intéressant de retrouver par la voie expérimentale les figures d'écoulement imaginées dans les champs cinématiquement admissibles. (Chapitre II)

Des expériences semblables ont été faits sur des poutres (8) (11) et sur des plaques circulaires (27) .

##### 4.4.1. Plaques des séries 40 , 50 et 60.

Les plaques des séries 40, 50 et 60 ont été, après usinage, finement polies (papiers de 120 à 600) . Après essai, on retrouve les figures d'écoulement sur la surface extérieure : elles se distinguent par une surface mate d'aspect légèrement granuleux.

Des vérifications complètes ont été faites sur ces plaques.

Il n'y a pas de différence visible aux grossissements de 100 à 400 entre la dimension des grains de la zone plastifiée (aspect mat) et la zone non plastifiée (aspect brillant) après polissage électrolytique et attaque au réactif de *BAUMAN*.

D'autre part, le recuit pratiqué n'a pas provoqué de grossissement sensible des grains. On distingue entre 350 et 450 grains au millimètre carré.

La dureté mesurée par le microduremètre de la figure (4,4,1) dans les zones mates est dans les cas les plus prononcés supérieure de 8 % à celle mesurée dans les zones brillantes.

Enfin, des mesures d'état de surface faites sur perthomètre ont mis en évidence des vallées (zones tendues) ou des pics (zones comprimées) de très faible amplitude (8 microns) .

L'écrouissage en chaque point est donc faible et le mouvement peut être considéré comme naissant. Nous pouvions donc établir nos schémas de vitesse sur la pièce non déformée.

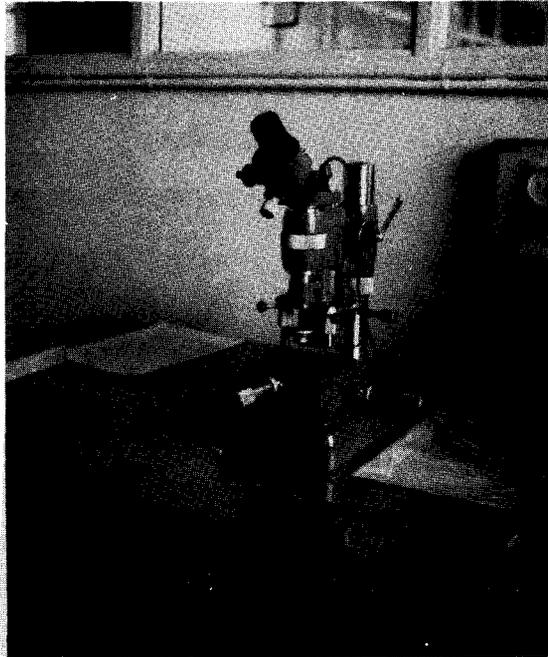


Figure 4,4,1

Ensuite, nous avons découpé dans ces plaques une partie pour mettre en évidence les figures d'écoulement dans les parties non visibles (Figure 4,4,2) .

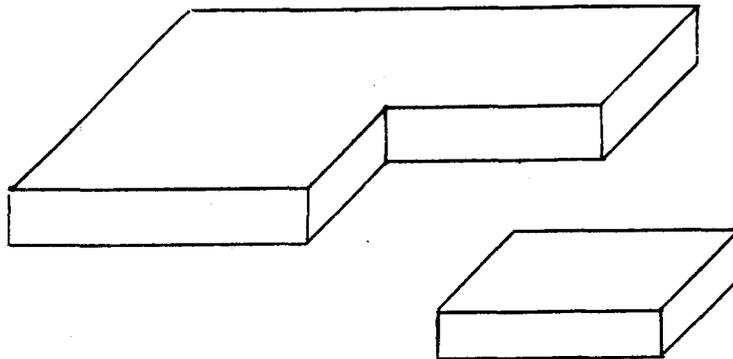


Figure 4,4,2

Les champs de ces morceaux ont été soigneusement polis, puis stabilisés à 250°C pendant trente minutes pour 12 mm d'épaisseur.

Après stabilisation, nous avons effectué les opérations suivantes :

- . attaque à l'acide chlorhydrique concentré pendant dix minutes à la température ambiante ;
- . passivation à l'acide nitrique par lavage rapide ;
- . rinçage à l'eau distillée ;
- . attaque au persulfate d'ammonium (1 g de persulfate pour 10 cm<sup>3</sup> d'eau) à 60°C pendant dix minutes. Cette préparation a pour but de sensibiliser le matériau au réactif de *FRY*.
- . enfin, lavage des pièces à l'eau et au savon.

Après cette préparation, les pièces sont plongées dans le réactif de *FRY* (45 g du chlorure cuivrique, 180 cm<sup>3</sup> d'acide chlorhydrique, 100 cm<sup>3</sup> d'eau) pendant deux à trois minutes. Les zones plastifiées apparaissent noires tandis que les autres parties restent grises.

Après l'attaque de *FRY*, les pièces sont rincées dans l'acide chlorhydrique (titre normal), à l'eau, à l'alcool méthylique, et enfin immédiatement séchées.

La conservation des figures d'attaque en atmosphère normale n'excède pas cinq heures.

Le procédé fait apparaître les allongements, certains égaux ou supérieurs à 1,5 ‰.

Les figures (4,4,3), (4,4,4) et (4,4,5) montrent quelques résultats de l'attaque chimique sur les pièces essayées.

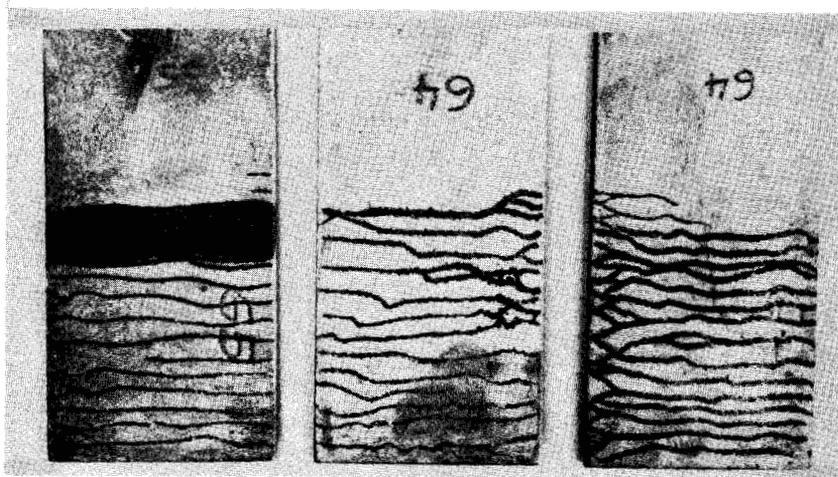


Figure 4,4,3

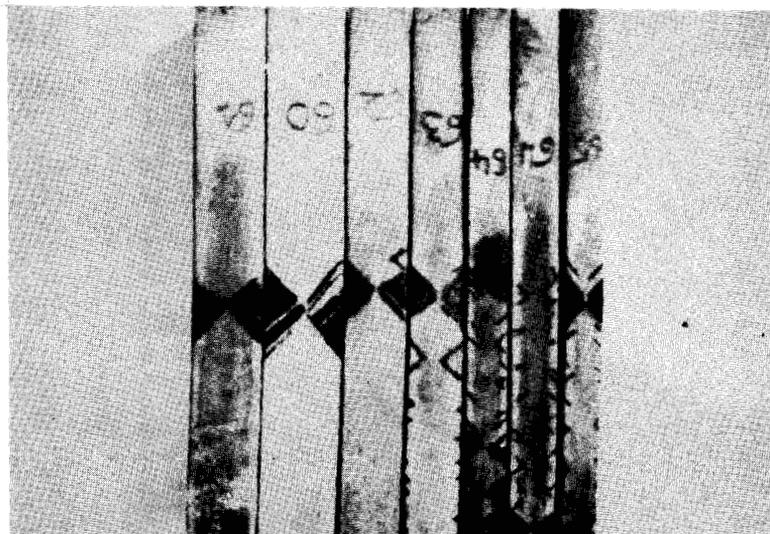


Figure 4,4,4

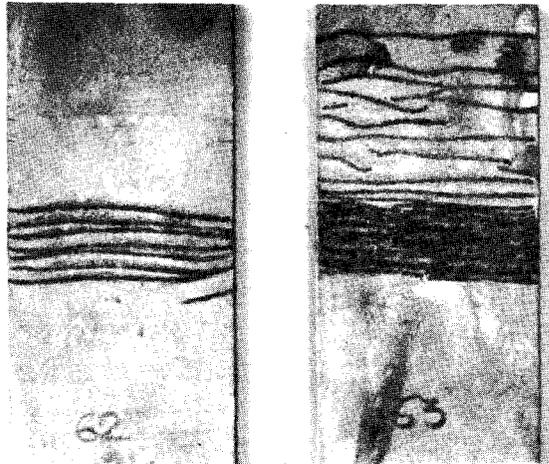


Figure 4,4,5

#### 4,4,2. Plaques des séries 50 à 150.

Pour les plaques de ces séries, les figures ont été obtenues en plongeant les plaques dans le réactif de *FRY* un bref instant.

Ensuite, elles ont été rincées dans l'acide chlorhydrique, puis dans l'eau et enfin dans l'alcool méthylique.

Dans ce cas, les figures sont fugitives et ne restent visibles que quelques minutes.

Les figures (4,4,6) et suivantes montrent quelques résultats de ces attaques. On note la bonne ressemblance avec les réseaux de lignes de glissement du chapitre II.

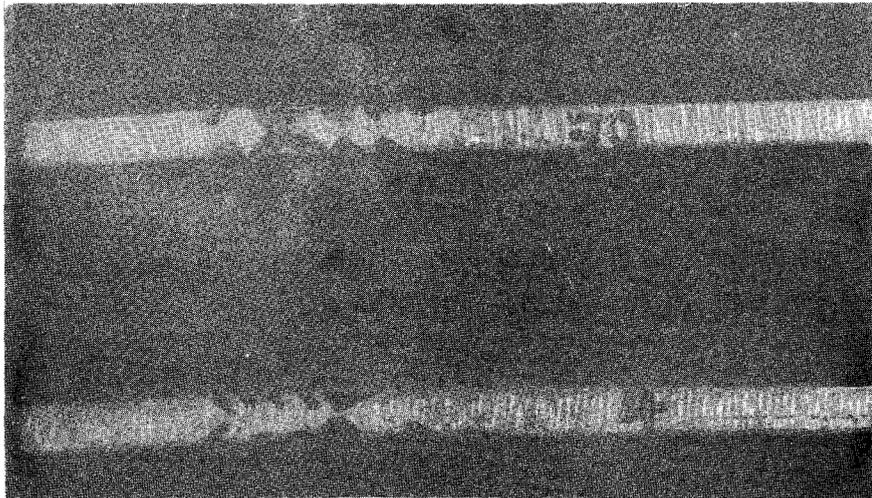


Figure 4,4,6

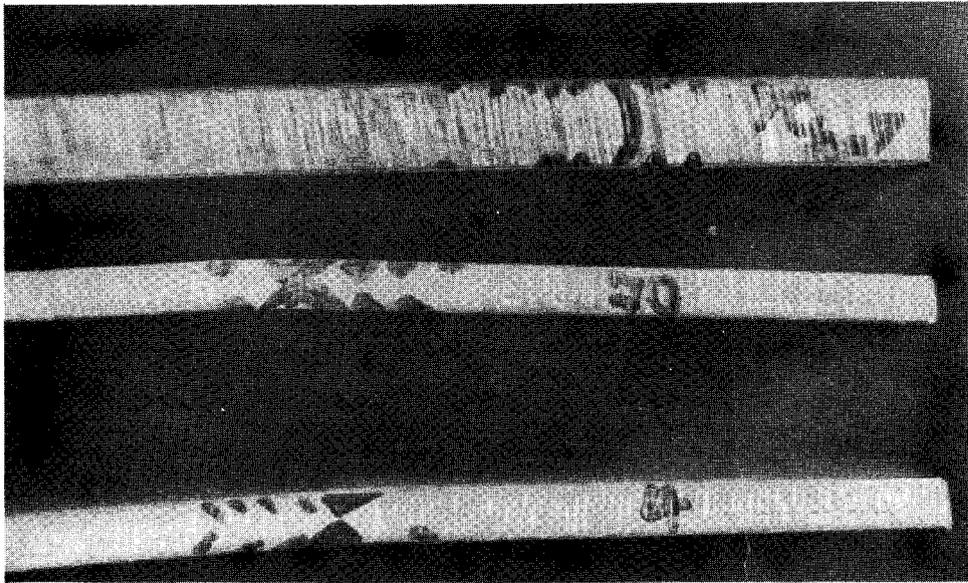


Figure 4,4,7



Figure 4,4,8

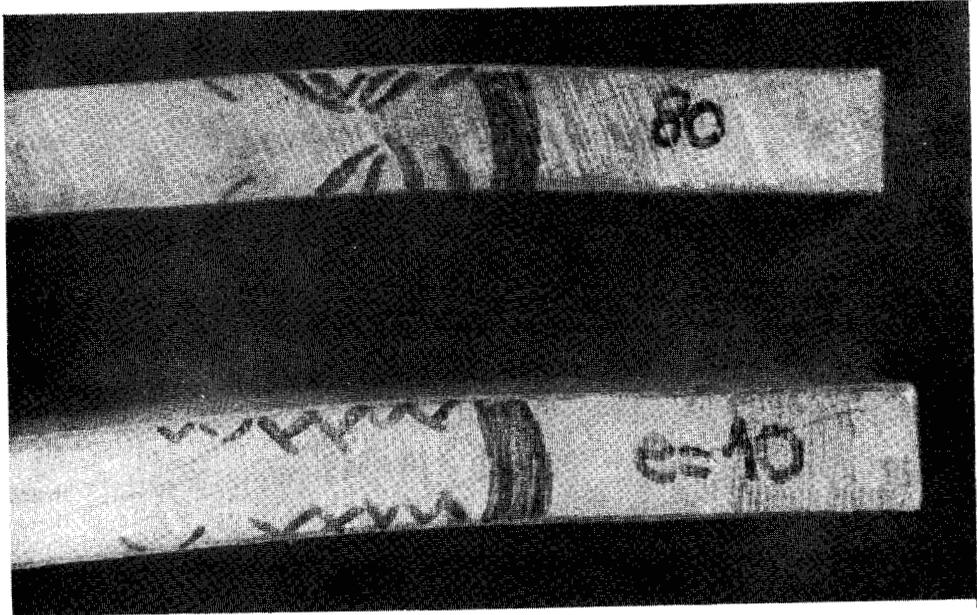


Figure 4,4,9

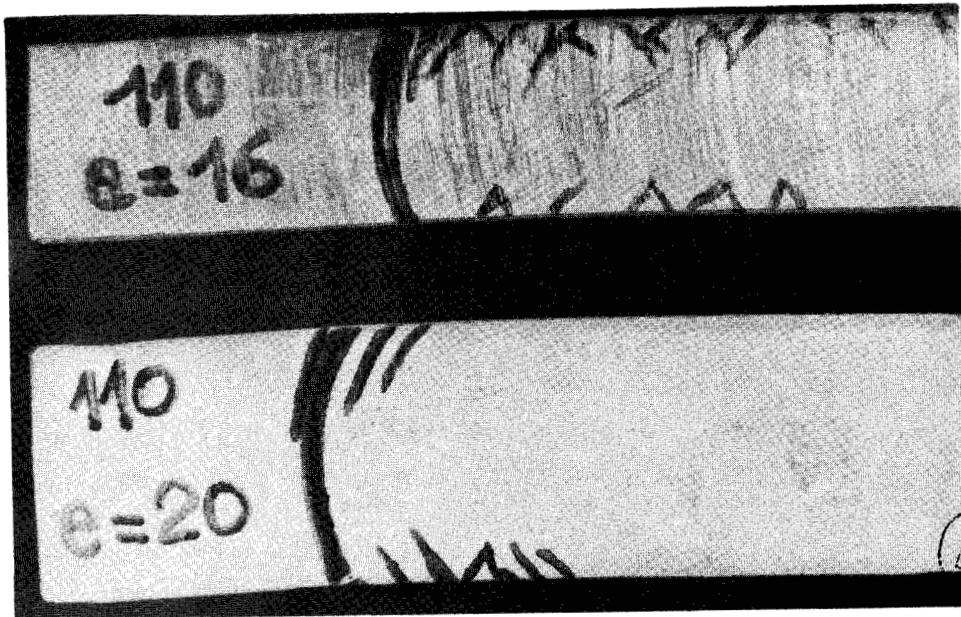


Figure 4,4,10

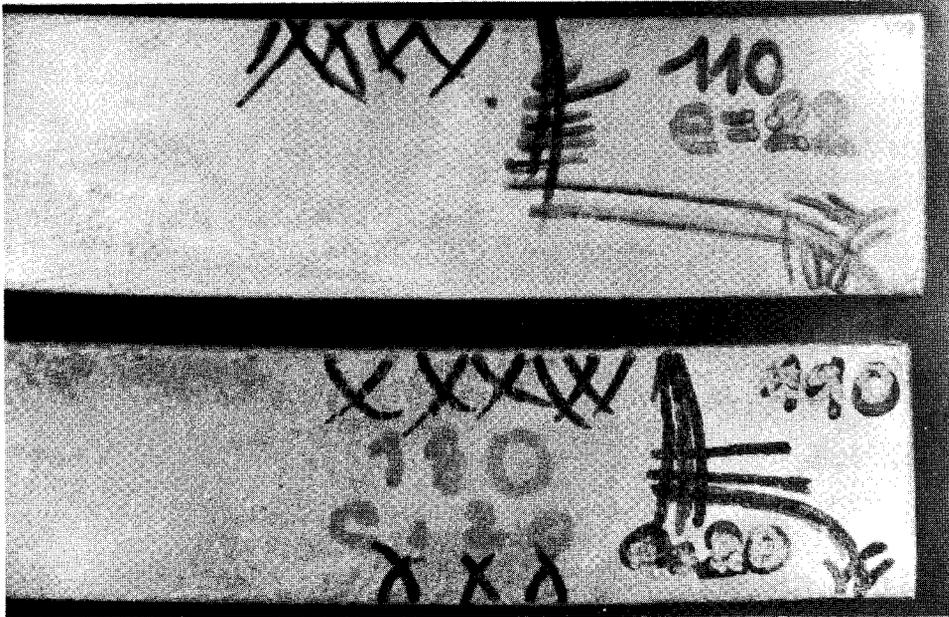


Figure 4.4.11



#### 4.5. COURBE D'INTERACTION EXPERIMENTALE.

##### 4.5,1. Détermination de la charge limite.

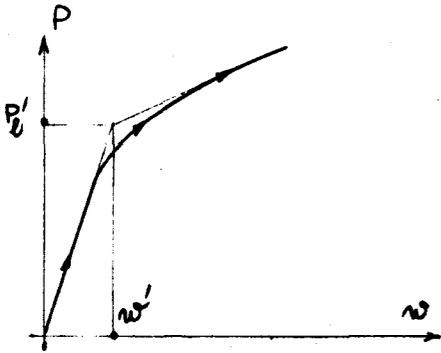


Figure 4,5,1

Dans la théorie des poutres (10) , on définit usuellement la charge limite  $P'_l$  par le seuil au delà duquel les déformations deviennent tout à coup très fortes.

Cette charge limite  $P'_l$  est obtenue comme indiqué sur la figure (4,5,1) .

Dans le cas des plaques, le coude des diagrammes est souvent moins prononcé. La charge peut donc dépasser ce seuil sans provoquer la ruine.

Plusieurs aménagements ont été proposés dans ce sens.

Nous proposons de prendre comme charge limite  $P_l$  , la charge qui donne une flèche  $w$  double de la flèche  $w'$  , obtenue pour  $P = P'_l$  (Figure 4,5,2) .

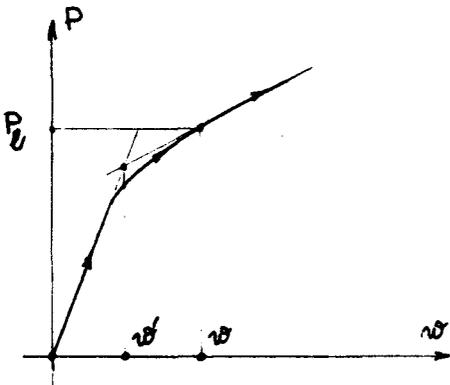


Figure 4,5,2

Dans le cas d'un coude plus prononcé, on retrouve la définition de la charge limite pour les poutres.

##### 4.5,2. Résultats expérimentaux.

Pour chaque loi expérimentale de comportement, il a été déterminé comme vu plus haut la charge limite  $P_l$  .

A partir de cette valeur, nous calculons l'effort  $P$  par unité de largeur et le moment  $M$  par unité de largeur

$$P = \frac{P_l}{2 \times b}$$

$$M = Pa$$

Nous déduisons les valeurs de  $P/ke$  et de  $2M/ke^2$  en prenant pour

$$k = R_e/2$$

$R_e$  est la limite d'élasticité moyenne des quatre éprouvettes de chaque série.

Les résultats sont reportés dans les tableaux (4,5,1) et (4,5,2) .

Les valeurs de  $P/ke$  et  $2M/ke^2$  pour chaque cas sont reportées sur la figure (4,5,3) .

La corrélation avec les courbes d'interaction obtenues par voie théorique est bonne.

Plus de 90% des points se situent à l'intérieur dans la zone délimitée par les courbes d'interaction de la figure (3,5,2) .

Les résultats expérimentaux ont une précision de 5%, liée aux conditions de travail en laboratoire sur des structures industrielles, une telle précision est évidemment impossible.

ESSAIS DE PLAQUESRESULTATS

N°	$P_{\ell}$	$\ell$	a	e	$R_e$	$\frac{a}{e}$	$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$
46/4	530	98	36.6	4	24.57	9.1500	0.0550	1.0070
45/5	800	98	36.6	5	23.00	7.3200	0.0710	1.0392
44/6	1 100	98	36.6	6	22.54	6.1000	0.0830	1.0126
42/8	1 710	98	36.6	8	20.00	4.5750	0.1091	0.9979
41/9	2 450	98	36.6	9	22.00	4.0667	0.1263	1.0269
40/10	2 620	98	36.6	10	20.00	3.6600	0.1337	0.9785
55/5	700	95	43	5	24.50	8.6000	0.0602	1.0346
54/6	950	95	43	6	22.80	7.1667	0.0731	1.0478
53/7	1 180	95	43	7	21.60	6.1429	0.0821	1.0093
52/8	1 510	95	43	8	21.60	5.3750	0.0920	0.9888
51/9	2 000	95	43	9	21.0	4.7778	0.1083	1.0348
50/10	2 470	95	43	10	21.60	4.3000	0.1204	1.0352
65/5	960	98	33	5	24.73	6.6000	0.0792	1.0457
64/6	1 170	98	33	6	21.36	5.5000	0.0932	1.0247
63/7	1 750	98	33	7	22.63	4.7143	0.1127	1.0629
62/8	2 150	98	33	8	22.63	4.1250	0.1212	0.9998
61/9	2 600	98	33	9	20.50	3.6667	0.1438	1.0545
60/10	3 100	98	33	10	20.50	3.3000	0.1543	1.0184

Tableau 4,5,1



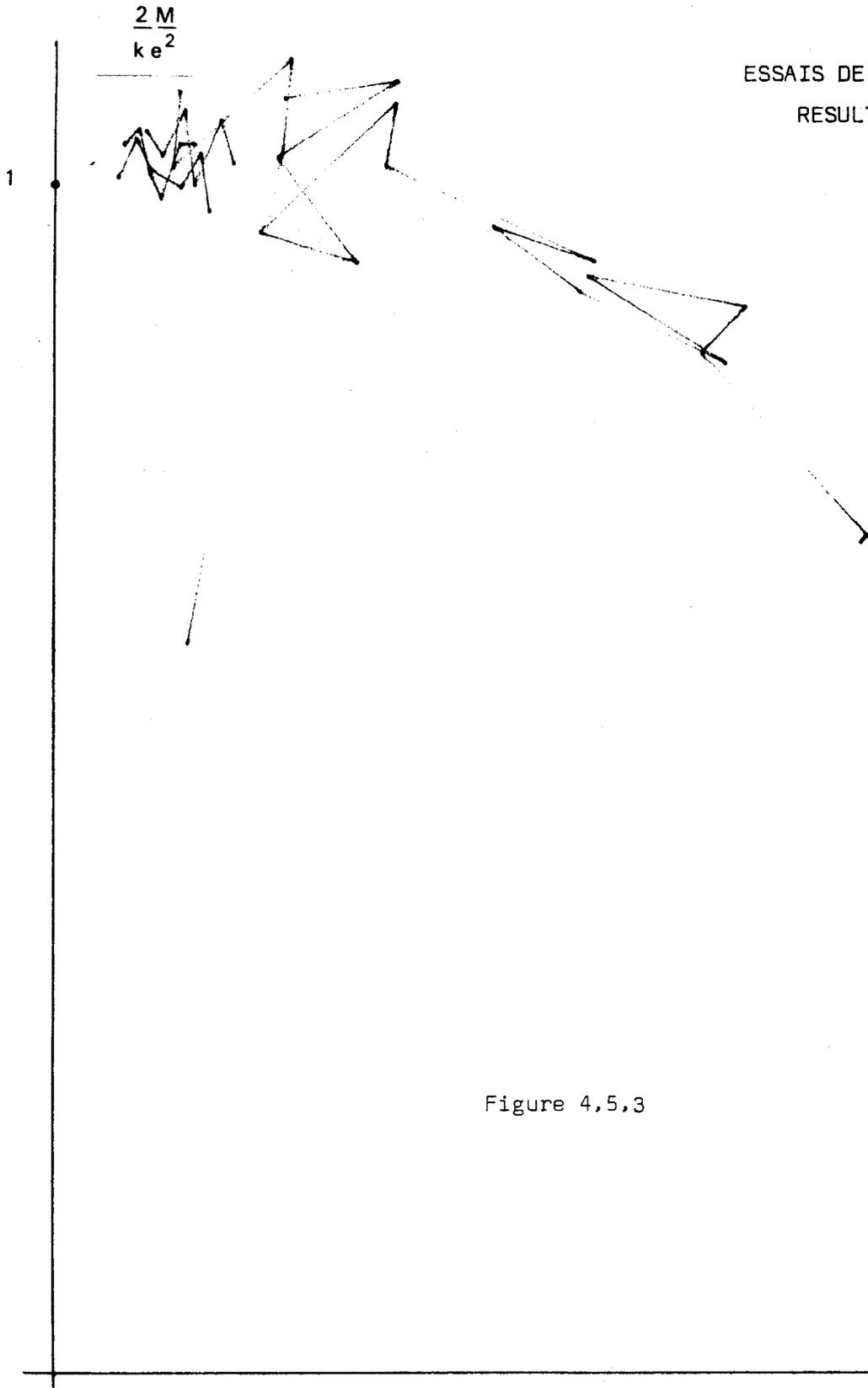
## ESSAIS DE PLAQUES

RESULTATS

N°	$P_{\ell}$	$\ell$	a	e	$R_e$	$\frac{a}{e}$	$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$
70/5	1.400	100	25	5	25.96	5.0000	0.1079	1.0786
70/6	1.580	100	30	6	25.96	5.0000	0.1014	1.0144
70/7	3.700	100	19	7	25.96	2.7143	0.2036	1.1059
80/8	3.150	100	21	8	20.13	2.6250	0.1956	1.0269
80/9	2.100	100	24	9	20.13	2.6667	0.1151	0.6138
80/10	4.000	100	27	10	20.13	2.7000	0.1987	1.0730
90/12	10.200	100	22	12	28.67	1.8333	0.2965	1.0871
90/12	6.600	100	32	12	28.67	2.6667	0.1918	1.0231
90/14	10.500	100	25	14	28.67	1.7857	0.2616	0.9343
90/14	7.100	100	38	14	28.67	2.7143	0.1769	0.9603
100/16	12.100	100	29	16	25.66	1.8125	0.2947	1.0684
100/18	13.200	100	32	18	25.66	1.7778	0.2858	1.0161
110/20	30.500	100	20	20	32.61	1.0000	0.4676	0.9359
110/22	22.000	100	28	22	26.37	1.2727	0.3792	0.9653
110/24	28.800	100	24	24	26.37	1.0000	0.4551	0.9101
120/26	32.500	100	19	26	21.50	0.7308	0.5814	0.8497
120/26	25.800	100	26	26	21.50	1.0000	0.4615	0.9231
120/28	36.000	100	21	28	21.50	0.75	0.5980	0.8970
130/30	70.000	100	23	30	41.66	0.7667	0.5601	0.8588
140/40	77.500	100	20	40	27.50	0.5000	0.7045	0.7045
150/50	85.000	100	25	50	24.33	0.5000	0.6986	0.6986

Tableau 4,5,2





ESSAIS DE PLAQUES  
RESULTATS

Figure 4,5,3

BUS  
LILLE

$\frac{P}{ke}$

#### 4,6. CONCLUSION.

Les résultats obtenus par l'étude cinématique (méthode de la borne supérieure) , par l'étude statique (méthode de la borne supérieure) et par l'étude expérimentale mettent en évidence l'intérêt considérable apporté par ces méthodes extrémales dans l'étude du comportement limite des structures.

Si pour les poutres, les résultats théoriques et expérimentaux sont très complets, bien des domaines restent inexplorés dans le comportement limite de structures plus complexes : plaques et coques dans différentes conditions de chargement. L'étude expérimentale réalisée montre qu'elle est capable de nous aider à formuler des champs de vitesses de déformation de bonne qualité.

Les méthodes extrémales s'appliquent aussi bien aux problèmes d'écoulement permanent qu'aux problèmes d'écoulement naissant.

De nombreuses applications ont été trouvées dans le domaine de la mise en forme des matériaux : laminage, filage, extrusion, fluotournage, forgeage. Il s'agit donc d'un outil extrêmement puissant, pratique et qui a l'avantage de reposer sur des hypothèses où la simplicité réapparaît.

Plusieurs règlements étrangers ont adopté ces méthodes de calcul pour les structures métalliques. Ces règlements reconnaissent donc le rôle primordial joué par la plasticité dans les constructions.

Le seuil plastique est atteint en de multiples points des structures dimensionnées élastiquement. Cela est dû, soit aux contraintes résiduelles, soit aux dispositifs d'assemblage, soit à des variations géométriques de montage, ... soit à des concentrations de contraintes, ...

L'étude du comportement limite a l'avantage de reconnaître ce comportement plastique et de remettre à sa véritable place la notion de sécurité.

## B I B L I O G R A P H I E

## A. OUVRAGES

- (1) *FREUDENTHAL A., GEIRINGER H.*  
The mathematical theory of inelastic continuum.  
HANDBUCH DER PHYSIK, Vol. 6, 1958
- (2) *HILL R.*  
The mathematical theory of plasticity.  
OXFORD CLARENDON PRESS, 1950
- (3) *HIRTH*  
Theory of dislocations.  
MAC GRAW HILL BOOK COMPANY, 1965
- (4) *HODGE Ph.*  
Plastic analysis of structure.  
MAC GRAW HILL BOOK COMPANY, 1959
- (5) *ILIOUCHINE A.A.*  
Plasticité.  
DUNOD, 1958
- (6) *JAOUL R.*  
Etude de la plasticité et application aux métaux.  
DUNOD, 1965
- (7) *JOHNSON W., MELLOR P.B.*  
Plasticité for mechanical engineers.  
VAN NOSTRAND COMPANY, 1962
- (8) *JOHNSON W., SOWERBY R., HADDOW J.B.*  
Plane-strain slip lines fields.  
EDWARD ARNOLD, 1970
- (9) *MANDEL J.*  
Cours de mécanique des solides.  
ECOLE POLYTECHNIQUE

- (10) *MASSONNET Ch., SAVE M.*  
Calcul plastique des constructions.  
CENTRE BELGO-LUXEMBOURGEOIS, 1963
- (11) *NADAI A.*  
Theory of flow and fractures of solids.  
MAC GRAW HILL BOOK COMPANY, 1950
- (12) *PRAGER W., HODGE Ph.*  
Theory of perfectly plastic solids.  
JOHN WILLEY, 1951
- (13) *THOMSEN E., YANG C., KOBAYASHI S.*  
Mechanics of plastic deformation in metal processing.  
MAC MILLAN COMPANY, 1965

## B. AUTRES PUBLICATIONS

- (14) *ALEXANDER J.M., KOMOLY T.J.*  
On the yielding of a rigid plastic bar with an izod notch.  
J. MECH. PHYS. SOLIDS, 1962, Vol. 10, p. 265
- (15) *BALL R.E., LEE S.L.*  
On the effect of uniform surface load upon the plastic yielding of simply supported beams.  
J. MCH. PHYS. SOLIDS, 1954, Vol. 10, p. 151
- (16) *BARLOW D.A.*  
Yield criteria and the bending of wide beams.  
J. MACH. PHYS. SOLIDS, 1954, Vol. 2, P. 259
- (17) *BISHOP J.F.*  
On the complete solution to problems of deformation of a plastic rigid material.  
J.MECH. PHYS. SOLIDS, 1953, Vol. 2, p. 43
- (18) *DRÜCKER D.C.*  
The effect of shear on the plastic bending of beams.  
J. APPL. MECH., 1956, p. 509
- (19) *GEIRINGER H.*  
Fondements mathematiques de la théorie des corps plastiques isotropes.  
MEM. SC. MATH., 1937, PARIS, Fasc. 86
- (20) *GREEN A.P.*  
A theory of the plastic yielding due to bending of cantilevers and beams.  
J. MACH. PHYS. SOLIDS, 1954, Vol. 3, p. 1 & p. 48
- (21) *GROUPE "MISE EN FORME"*  
Théorie de la plasticité, Méthodes de l'Ingénieur. Lignes de glissement.  
ECOLE DES MINES, PARIS, 1970
- (22) *HEYMANN J.*  
The full plastic moment of an I beam in the presence of shear force.  
J. MECH. PHYS. SOLIDS, 1970, Vol. 18, p. 359
- (23) *HILL R.*  
On the discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets.  
J. MECH. PHYS. SOLIDS, 1952, Vol. 1, p. 19

- (24) *HODGE J., BROOKLYN N.Y.*  
Interaction curves for shear and bending of plastic beams.  
J. APPL. MECH., 1957, p. 453
- (25) *HOPKINS H.G., PRAGER W.*  
The load carrying capacities of circular plates.  
H. MACH. PHYS. SOLIDS, 1953, Vol. 1, p. 1
- (26) *JOHNSON W.*  
Upper bounds to the load for the transverse bending of flat rigid perfectly plastic plates.  
INTER. J. MECH. SCIEN., 1969, 11, N° 11, p. 913
- (27) *LANCE R., ONAT E.*  
A comparison of experiments and theory in the plastic bending of circular plates.  
J. MECH. PHYS. SOLIDS, 1962, Vol. 10, p. 301
- (28) *LÜDERS*  
Demonstrating the elasticity of iron and steel beam and observing the molecular slip when bending this bar.  
DINGLERS JOURNAL, 1860, 155, p. 18
- (29) *LOMER W.M.*  
The yield phenomena in polycrystalline mild steel.  
J. MECH. PHYS. SOLIDS, 1952, Vol. 1, p. 64
- (30) *MURA T.*  
Approach to inelasticity through dislocations and extended slab analogy.  
NORTH WESTERN UNIVERSITY
- (31) *LOUDIN J.*  
Cours de résistance des structures.  
ICAM, LILLE (France), 1969
- (32) *OHASHI Y., MURAKAMI S.*  
Large deflection in elastoplastic bending of a simply supported circular plate under an uniform load.  
J. APPL. MECH., 1966, p. 866
- (33) *OLSZAK R.*  
Geometrical properties of slip lines fields in plane plastic flow of non homogeneous media.  
SIMP. ADV. APPL. MECA., 1962, HAÏFA

- (34) PRAGER W.  
Discontinuous fields of plastic stress and flow.  
SD. NAT. CONG. APP. MECH., 1954, p. 21
- (35) SAWCZUCK A., HODGE P.  
Limit analysis and yield line theory.  
H. APPL. MECH., 1968, p. 357
- (36) SHIELD R.T.  
The application of limit analysis to punch indentation problems.  
J. APPL. MECH., 1953, p. 453
- (37) SHIELD R.T., ONAT E.T.  
The influence of shearing force on the plastic bending of wide beams.  
PROC. SD. US CONG. APPL. MECH., 1954, p. 535

