

50376
1972
31

50376
1972
31

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE SPECIALITE
EN PHYSIQUE DU SOLIDE

par

Gilles JOLY

*

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA PROPAGATION DE CERTAINES ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LES PILES DE REUSCH



Soutenu le 25 MAI 1972 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury.	M. WERTHEIMER	Président
	M. BILLARD	Rapporteur
	M. FOURET	Examineur
	M. PARODI	Invité

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

M. H. LEFEBVRE, PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES des anciennes Facultés de Droit et
Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

MM. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER,
DEHEUVELS, DEHORNE, DEHORS, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE,
LAMPE DE FERIET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE,
MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE,
SOUVELLE, WIEMAN, ZAMANSKY.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. DEFRETIN René

Professeur de Biologie Marine
Directeur de l'Institut de
Biologie Maritime et Régionale de Wimereux

PROFESSEURS TITULAIRES

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Générale
M. BECART Maurice	Physique
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BLOCH Vincent	Psychophysiologie
M. BONNEMAN Pierre	Chimie et Physico-Chimie Industrielle
M. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CAPET Marcel-Francis	Institut de Préparation aux Affaires
M. CELET Paul	Géologie
M. CONSTANT Eugène	Physique Industrielle-Electronique
M. CORSIN Pierre	Paléobotanique
M. DECUYPER Marcel	Mathématiques Générales
M. DEFRETIN René	Biologie Marine
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale
M. DURCHON Maurice	Zoologie Générale et Appliquée
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	Radio-Electricité-Electronique
M. GEHU Jean-Marie	Institut Agricole
M. GLACET Charles	Chimie Organique
M. GONTIER Gérard	Mécanique
M. GUILLAUME Jean	Biologie Végétale
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M. JOLY Robert	Biologie Animale (Amiens)
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique Expérimentale
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M. MONTREUIL Jean	Chimie Biologique

PROFESSEURS TITULAIRES (suite)

. POUZET Pierre	Informatique
ne SCHWARTZ Marie-Hélène	Analyse Supérieure
. TILLIEU Jacques	Physique Théorique
. TRIDOT Gabriel	Chimie
. VAILLANT Jean	Mathématiques
. VIDAL Pierre	Automatique
. VIVIER Emile	Biologie Animale
. WERTHEIMER Raymond	Physique

PROFESSEURS A TITRE PERSONNEL

. BOUISSET Simon	Physiologie Animale
. DELHAYE Michel	Chimie
. FLATRES Pierre	Géographie
. LEBRUN André	Electronique
. LINDER Robert	Botanique
. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
. PARREAU Michel	Mathématiques Appliquées
. PRUDHOMME Rémy	Droit et Sciences Economiques
. SCHILTZ René	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

. BELLET Jean	Physique
. BILLARD Jean	Physique
. BODARD Marcel	Botanique
. BOILLET Pierre	Physique
. DERCOURT Jean-Michel	Géologie
. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
. GRUSON Laurent	Mathématiques
. GUILBAULT Pierre	Biologie
. LACOSTE Louis	Biologie
. LANDAIS Jean	Chimie
. LEHMANN Daniel	Mathématiques
. LOUCHEUX Claude	Chimie
. MAES Serge	Physique
lle MARQUET Simone	Mathématiques
. MONTEL Marc	Physique
. PANET Marius	I.E.E.A.
. PROUVOST Jean	Minéralogie

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés de fonctions)

. ADAM Michel	Economie Politique
. ANDRE Charles	Sciences Economiques
. ANGRAND Jean-Pierre	Géographie
. ANTOINE Philippe	Mathématiques
. AUBIN Thierry	Mathématiques
. BART André	Biologie
. BEGUIN Paul	Mécanique des Fluides
. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
. BOILLY Fénoni	Biologie
. BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
. BRUYELLE Pierre	Géographie et Aménagement Spatial
. CAPURON Alfred	Biologie Animale
. CARREZ Christian	I.E.E.A.
. CORDONNIER Vincent	Informatique
. CORTOIS Jean	Physique
. COULON Jean	I.E.E.A.
. DEBRABANT Pierre	Sciences Appliquées
. DOUKHAN Jean-Claude	Physique
. DRIEUX Baudouin	I.E.E.A.

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés de fonctions)(suite)

. DYMENT Arthur	Mathématiques
. ESCAIG Bertrand	Physique
. FONTAINE Jacques	Génie Electrique
. FROELICH Daniel	Sciences Appliquées
. GAMBLIN André	Géographie
. GOBLOT Rémi	Mathématiques
. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
. HERMAN Maurice	Physique
. HUARD de la MAIRE Pierre	I.E.P.A.
M. JOURNEL Gérard	Sciences Appliquées
Mlle KOSMANN Yvette	Mathématiques
M. KREMBEL Jean	Chimie
M. LABLACHE COMBLER Alain	Chimie
M. LAURENT François	Automatique
M. LAVAGNE Pierre	Sciences Economiques et Sociales
Mlle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mlle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mlle LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LENTACKER Firmin	Géographie et Aménagement Spatial
M. LEROY Jean-Marie	Chimie
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOUAGE Francis	Sciences Appliquées
Mlle MAILLET Monique	Sciences Economiques
M. MAIZIERES Christian	I.E.P.A.
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques et Sociales
M. MANERINI Jean	Biologie
M. MERIAUX Emile	Sciences de la Terre
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MIGEON Michel	Chimie (Sciences Appliquées)
M. MUSSCHE Guy	Sciences Economiques
M. NICOLE Jacques	Chimie Analytique
M. OLIVEPPEAU Jean-Michel	Biologie
M. OUZIAUX Roger	Technologie des Machines
M. PAQUET Jacques	Sciences Appliquées
M. PARSY Fernand	Mathématiques
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PONSOLLE Louis	Chimie (Valencienne)
M. POVY Jean-Claude	Sciences Appliquées
M. RACZY Ladislas	Physique
Mlle RENVERSEZ Françoise	Sciences Economiques et Sociales
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M. SALMER Georges	Radio Electricité Electronique
M. SEGUIER Guy	Electronique
M. SIMON Michel	Psychologie
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SMET Pierre	Physique
M. SOMME Jean	Géographie
Mlle SPIK Geneviève	Chimie Biologique
M. TOULOTTE Jean-Marc	Sciences Appliquées
M. TREANTON Jean-René	Sciences Economiques et Sociales
M. VANDORPE Bernard	Chimie Physique
M. VILETTE Michel	Génie Mécanique
M. WATERLOT Michel	Géologie

A mes Parents.

Ce travail a été effectué au laboratoire de Physique des Stases anisotropes de l'Unité d'enseignement et de recherche de Physique fondamentale de l'Université des Sciences et Techniques de Lille.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur le Professeur BILLARD qui m'a accueilli dans ce laboratoire et qui m'a constamment aidé de ses conseils et de ses encouragements.

Monsieur le Professeur WERTHEIMER a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury et Monsieur le Professeur FOURET a accepté d'en être membre : qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur PARODI pour l'intérêt qu'il porte à mon travail.

Je tiens aussi à exprimer ma profonde gratitude à tous les membres du laboratoire et à tous mes amis de l'Unité d'enseignement et de recherche pour l'ambiance sympathique qu'ils ont su créer. Parmi ceux-ci je m'adresse particulièrement à Messieurs SOULESTIN et COLSON qui m'ont aidé à effectuer les calculs numériques.

Cette étude a bénéficié de l'aide du Centre National de la Recherche Scientifique ainsi que de travaux et de réalisations effectués au laboratoire de Physique de la Matière condensée du Collège de France : que ces deux organismes en soient remerciés.

Enfin, je ne saurais oublier Melle KACZMAREK, Messieurs CAREY, DESCAMPS et RAFFAUD qui ont permis la réalisation matérielle de ce mémoire.

T A B L E D E S M A T I E R E S

<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>CHAPITRE I : RÔLE DES REFLEXIONS AUX DIOPTRES</u>	3
I - Définitions	3
II - Vibrations propres d'une pile de deux lames à biréfringence rectiligne	4
A) Etude qualitative d'une pile de deux lames identiques à biréfringence rectiligne éclairée sous l'incidence normale	5
B) Lame éclairée de part et d'autre	7
C) Pile de deux lames à biréfringence rectiligne	11
D) Etats de polarisation des vibrations propres	13
III - Vérification expérimentale	16
A) Détermination des conditions expérimentales	16
B) Dispositif expérimental	18
1) Montage adopté	18
2) Réglages du microellipsomètre	19
3) Réalisation de la pile de deux lames	20
C) Résultats	21
1) Mesures	21
2) Cause de l'échec de la vérification expérimentale	22
3) Discussion	23
<u>CHAPITRE II : PILE HELICOÏDALE DE LAMES A BIREFRINGENCE RECTILIGNE</u>	26
I - Etude qualitative d'une pile hélicoïdale	26
II - Matrice itérative	28
<u>CHAPITRE III : VIBRATIONS ITERATIVES D'UNE PILE HELICOÏDALE DE LAMES A BIREFRINGENCE RECTILIGNE</u>	31
I - Etats de vibration itératifs	31
II - Signification des valeurs propres de la matrice itérative	33

A) Résolution de l'équation aux valeurs propres	33
B) Indices de réfraction et d'extinction	35
C) Différents types de vibrations itératives pouvant exister dans la pile	36
III - Etats de polarisation des vibrations itératives	42
IV - Pile finie	44
A) Dioptre séparant un milieu isotrope d'un milieu à biréfringence rectiligne	44
B) Conditions de couplage entre les vibrations itératives	45
 <u>CHAPITRE IV : QUELQUES PROPRIETES DES PILES HELICOIDALES DE LAMES</u> <u>A BIREFRINGENCE RECTILIGNE</u>	 48
I - Introduction	48
II - Indices de réfraction des vibrations itératives d'une pile de lames très minces	49
III - Etats de polarisation des vibrations itératives d'une pile de lames très minces	52
IV - Discussion	53
A) Théories des propriétés optiques des nématiques torsadés	53
B) Equivalence entre piles de lames et milieux à torsion continue	55
1) Quelques résultats numériques	55
2) Remarques sur le résultat précédent	56
3) Quelques réalisations expérimentales possibles	56
4) Possibilité d'existence de plusieurs domaines de diffusion sélective avec une pile de lames à biréfringence rectiligne	57
5) Incidence oblique sur les piles hélicoïdales de lames biréfringentes	59
V - Applications du formalisme	60
A) Cas des milieux biréfringents inactifs torsadés	60
B) Cas des milieux biréfringents actifs torsadés	60
 <u>CONCLUSION</u>	 62

TABLE DES NOTATIONS

Les notations qui ne figurent pas dans cette liste sont définies dans le texte.

d	distance entre deux lames baignant dans un milieu isotrope.
e	épaisseur d'une lame.
\vec{E}	champ électrique.
f	nombre complexe représentatif de l'état de polarisation d'une vibration elliptique.
$f_\ell, \ell = 1 \text{ à } 4$	nombres complexes représentatifs des états de polarisation des vibrations itératives.
f'_1, f'_2	nombres complexes représentatifs des états de polarisation des vibrations propres d'une pile de deux lames.
$f_\ell, \ell = 1 \text{ à } 4$	vibrations itératives d'une pile hélicoïdale.
$g_r, r = 1 \text{ à } 4$	nombres complexes représentatifs des états de polarisation des ondes de type I.
\vec{H}	champ magnétique.
$i = \sqrt{-1}$	
$k - 1, k, k + 1$	numéros de trois lames consécutives de la pile.
$[M]$	matrice itérative caractérisant la traversée d'un dioptre et d'une lame.
n	indice de réfraction du milieu isotrope d'immersion.
n_1, n_2	indices de réfraction d'une lame à biréfringence rectiligne.
p	pas de torsion de la pile.
v	vitesse de propagation des ondes dans le milieu isotrope d'immersion.
v_1, v_2	vitesse de propagation des vibrations privilégiées d'une lame.

$\alpha_l, l = 1 \text{ à } 4$	valeurs propres de la matrice $[M]$, caractérisent le déphasage et l'atténuation des vibrations itératives entre deux points homologues de la pile.
η	angle d'ellipticité d'une vibration elliptique.
η_1, η_2	angles d'ellipticité des vibrations propres d'une pile de deux lames.
λ	longueur d'onde dans le vide de la vibration incidente.
ν_e	indice de réfraction complexe des vibrations itératives.
θ	angle entre lignes neutres de même nom de deux lames consécutives.
θ_1, θ_2	azimuts des vibrations propres d'une pile de deux lames.
θ_f	azimut du grand axe d'une vibration elliptique.
ϕ_1, ϕ_2	angles de déphasage subis par chacune des vibrations privilégiées rectilignes d'une lame.
Φ	angle de déphasage produit par une pile de deux lames.
ω	pulsation de la vibration incidente.

I N T R O D U C T I O N

Les milieux nématiques sont spontanément biréfringents. Quand on leur impose une torsion [1] on obtient des milieux présentant apparemment un pouvoir rotatoire proportionnel à l'angle de torsion. Certaines préparations cholestériques éclairées en lumière blanche présentent de vives couleurs [2]. En effet, elles diffusent ou réfléchissent l'une des deux vibrations circulaires qui peuvent s'y propager dans un domaine étroit (100 Å environ) de longueurs d'onde [3]. Ce phénomène est connu sous le nom de diffusion sélective. De part et d'autre de la bande de diffusion sélective, le milieu semble doué de pouvoir rotatoire dans le sens inverse de la torsion pour les faibles longueurs d'onde et dans le même sens pour les plus grandes [3, 4, 5, 6]. MAUGUIN [7] montre que ces propriétés optiques s'expliquent par l'existence de deux vibrations qui se propagent en conservant en chaque point le même état de polarisation par rapport aux lignes neutres du milieu au point considéré. Il les appelle vibrations favorisées du milieu.

Ce même auteur [7] propose deux méthodes d'étude des propriétés optiques des milieux nématiques à torsion. La première, adoptée par de nombreux auteurs [8, 9, 10] consiste à considérer les nématiques à torsion comme des milieux biréfringents à torsion continue. Cette méthode conduit à des vibrations favorisées non orthogonales.

La seconde méthode d'étude proposée par MAUGUIN [7] consiste à assimiler une lame nématique à torsion à une pile de lames biréfringentes très minces dont l'orientation varie progressivement dans la pile. Une telle pile constitue une généralisation des piles de lames de mica réalisées par REUSCH [11, 12]. Le calcul de MAUGUIN conduit pour cette pile à des vibrations favorisées orthogonales.

DE VRIES [9] montre que ce dernier calcul est incomplet car les réflexions aux divers dioptries ont été négligées. Bien plus, il propose de rechercher l'origine des propriétés optiques des nématiques à torsion dans les réflexions aux dioptries d'une pile hélicoïdale de lames à laquelle il assimile le milieu. Cette méthode reprise par CHANDRASEKHAR et SRINIVASA RAO permet des raisonnements qualitatifs satisfaisants [13].

Le premier chapitre du présent travail étudie l'influence des réflexions aux dioptries sur l'état de polarisation des ondes qui se propagent dans une pile de lames biréfringentes. Les chapitres suivants montrent l'équivalence entre une pile hélicoïdale de lames biréfringentes très minces et un milieu biréfringent à torsion continue. Cette équivalence peut dans certains cas être obtenue avec une pile de lames d'épaisseur finie.

Les calculs ont été menés en supposant que le rayonnement ne perturbe pas le milieu [approximation de l'optique linéaire] et que les effets des termes de dispersion spatiale sont négligeables par rapport aux effets de la torsion. D'autre part, le problème a été traité en supposant la cohérence de toutes les vibrations considérées ce qui revient à admettre que dans la pile se propagent des ondes parfaitement monochromatiques.

C H A P I T R E I

RÔLE DES REFLEXIONS AUX DIOPTRÉS

L'étude qui suit est limitée à la propagation d'ondes planes et homogènes, dans des piles de lames à faces planes et parallèles parfaitement transparentes. Ces "lames" immergées dans un milieu isotrope inactif parfaitement transparent sont éclairées sous l'incidence normale par un faisceau de lumière parallèle monochromatique.

L'état de polarisation d'une onde peut-être caractérisé par un nombre complexe. Si V_x et V_y sont les composantes complexes d'une vibration elliptique, l'état de polarisation $\frac{V_y}{V_x} = f$ permet de calculer l'ellipticité η et l'inclinaison θ_f du grand axe de la vibration sur les axes de référence [10], [14] :

$$\theta_f = \frac{1}{2} \text{Arc tg } \frac{2p_r f}{1 - ff^*} \quad \eta = \frac{1}{2} \text{Arc sin } 2i \frac{p_i f}{1 + ff^*} \quad (1, 0)$$

I - Définitions

Les vibrations privilégiées dont la notion fut introduite par FRESNEL [15], [16] se propagent sans déformation dans les milieux homogènes. Dans les milieux anisotropes ce sont, en général, des vibrations d'ellipticité bien définie. En tout point du milieu les vibrations privilégiées ont même état de polarisation par rapport à un référentiel fixe.

Soit un faisceau de lumière parallèle polarisée elliptiquement tombant sous l'incidence normale sur une association de lames anisotropes à faces planes et parallèles quelconques. La vibration émergente de chaque lame est l'incidente sur la lame suivante et la traversée de chaque lame impose une variation de l'état de polarisation de la vibration qu'elle transmet. L'existence d'une vibration d'état de polarisation adéquat incidente conduisant à une vibration émergente de la dernière lame ayant même état de polarisation que l'incidente par rapport au même référentiel sera établie. De telles vibrations sont appelées vibrations propres du système [10].

En chaque point d'un milieu anisotrope à torsion uniforme peut-être défini un référentiel dont l'un des axes coïncide avec l'axe de torsion et les

deux autres sont parallèles aux directions principales du plan perpendiculaire à l'axe de torsion au point considéré.

MAUGUIN [7] explique la propagation des ondes perpendiculaires à l'axe de torsion par l'existence de deux vibrations "favorisées" qui ont en chaque point du milieu même état de polarisation par rapport au référentiel défini en ce point. Les vibrations favorisées sont donc des vibrations qui se propagent en restant identiques à elles-mêmes mais dont les axes principaux sont animés du même mouvement de rotation uniforme que le référentiel mobile défini ci-dessus.

Enfin, deux vibrations elliptiques sont dites orthogonales quand elles vérifient les trois conditions suivantes :

- 1) Axes de même nom orthogonaux ;
- 2) Même ellipticité ;
- 3) Sens de parcours inverses.

II - Vibrations propres d'une pile de deux lames à biréfringence rectiligne

Soit une pile de lames non dichroïques à vibrations privilégiées orthogonales. Ces lames sont d'épaisseurs quelconques. Le raisonnement suivant, qui néglige les ondes réfléchies aux divers dioptries, permet d'établir une propriété généralement admise des vibrations propres de la pile [17]. Sur la sphère de POINCARÉ [14] l'action de chaque lame est représentée par une rotation autour du diamètre dont les extrémités caractérisent les vibrations privilégiées orthogonales de la lame. Le produit de ces diverses rotations étant une rotation autour d'un diamètre D de la sphère, l'action de la pile est équivalente à celle d'une lame L dont les vibrations privilégiées sont représentées par les extrémités de D. Les vibrations privilégiées de la lame équivalente sont les vibrations propres de la pile.

Les vibrations propres d'une pile de lames non dichroïques à vibrations privilégiées orthogonales sont orthogonales. BILLARD [10] donne un exemple de pile où le mode de raisonnement précédent conduit à une difficulté : si on éclaire cette pile avec une de ses deux vibrations propres, l'émergente a une amplitude supérieure à celle de l'incidente. Une critique des hypothèses du raisonnement montre que l'origine de la difficulté peut provenir de la non-prise en compte des ondes réfléchies aux divers dioptries.

L'étude qui suit, montre la nécessité de tenir compte de toutes les ondes réfléchies pour calculer les états de polarisation des vibrations propres d'une pile de deux lames à biréfringence rectiligne.

A - Etude qualitative d'une pile de deux lames identiques à biréfringence rectiligne éclairée sous l'incidence normale.

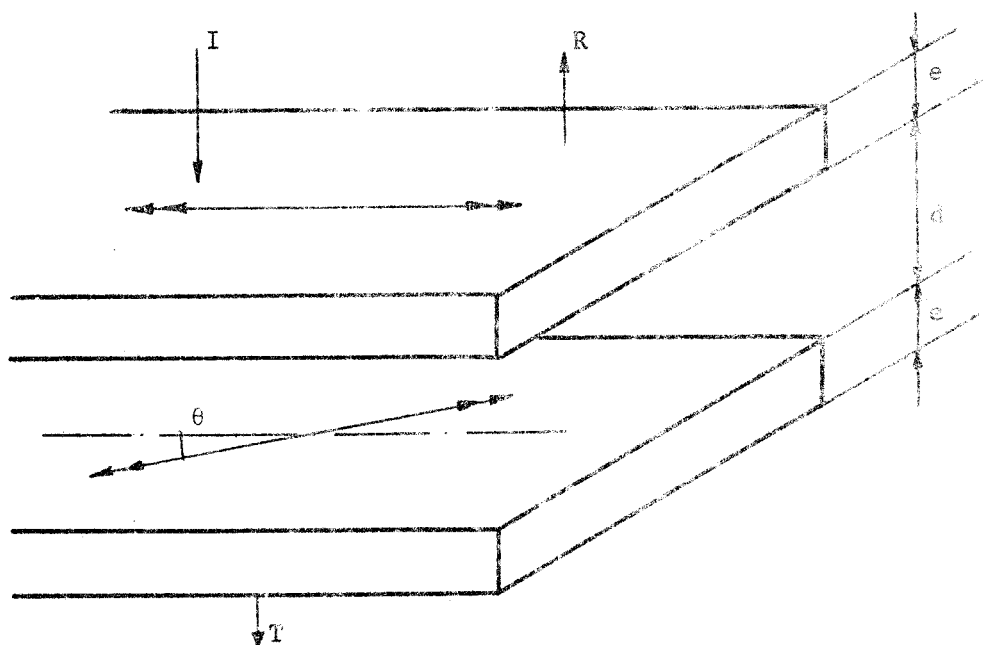


Figure 1 : Pile de deux lames identiques à biréfringence rectiligne éclairées sous l'incidence normale.

Les deux lames de la pile représentée sur la figure (1) sont supposées être taillées dans un même milieu anisotrope inactif, parfaitement transparent et dont la perméabilité magnétique μ est isotrope. Elles ont même épaisseur e et baignent dans un milieu isotrope inactif. Soit d la distance qui sépare les deux lames et θ l'angle entre les lignes neutres de même nom.

La pile est éclairée sous l'incidence normale par une onde lumineuse plane homogène et monochromatique. Soient I , T , R les ondes incidente, réfléchie et transmise. Cette notation sera adoptée dans toute la suite.

Au niveau de chaque dioptre existent lumières transmise et réfléchie. Le problème peut-être simplifié en étudiant les ondes globales qui se propagent

dans chaque sens. Ainsi R désigne non seulement l'onde réfléchie par le premier dioptre mais la résultante des ondes qui se propagent en sens inverse de la vibration incidente I et qui émergent de la face d'entrée de la pile. Ces ondes sont représentées sur le schéma de la figure 2 :

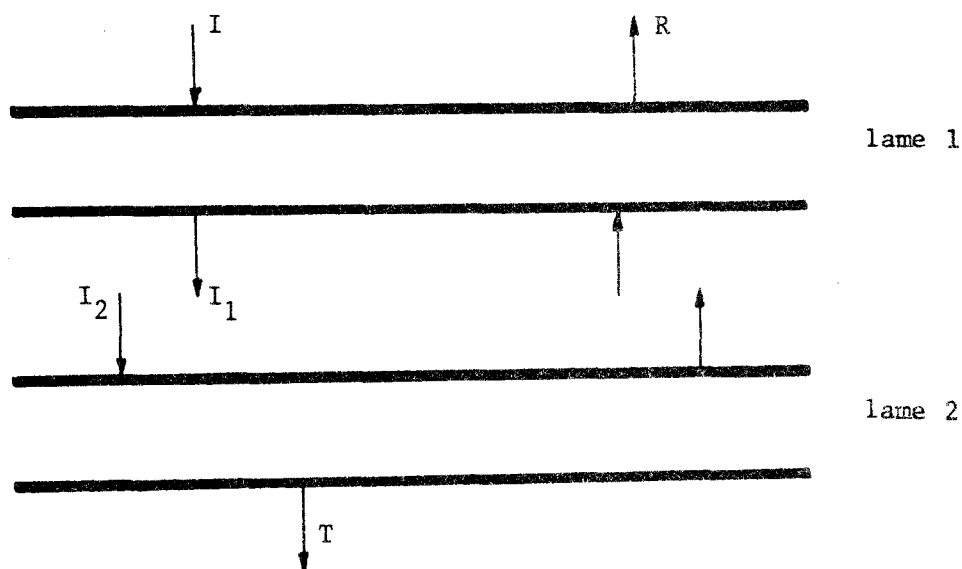


Figure 2 : Ondes se propageant dans une pile de deux lames.

La méthode habituelle d'étude des piles de lames (qui ne tient pas compte des réflexions aux dioptres) consiste à associer à chaque lame une matrice représentative $[L_k]$ liant ondes incidente (I_k) et émergente (T_k) de la lame k :

$$(T_k) = [L_k] (I_k)$$

L'onde émergente d'une lame étant l'incidente sur la suivante, une matrice pile $[P]$ peut-être définie comme produit des matrices représentatives de chaque lame. Cette matrice $[P]$ établit la relation entre l'onde incidente (I) sur la pile et l'onde transmise (T) par la pile :

$$(T) = [P] (I) = [L_n] \dots [L_k] \dots [L_1] (I)$$

L'étude de la pile de deux lames a été menée formellement de la même manière à l'aide d'une relation matricielle liant ondes incidente et transmise d'une lame éclairée de part et d'autre.

B - Lame éclairée de part et d'autre.

Soit une lame à biréfringence rectiligne parfaitement transparente éclairée de part et d'autre par les ondes I^- et I^+ normales aux faces de la lame (fig. 3).

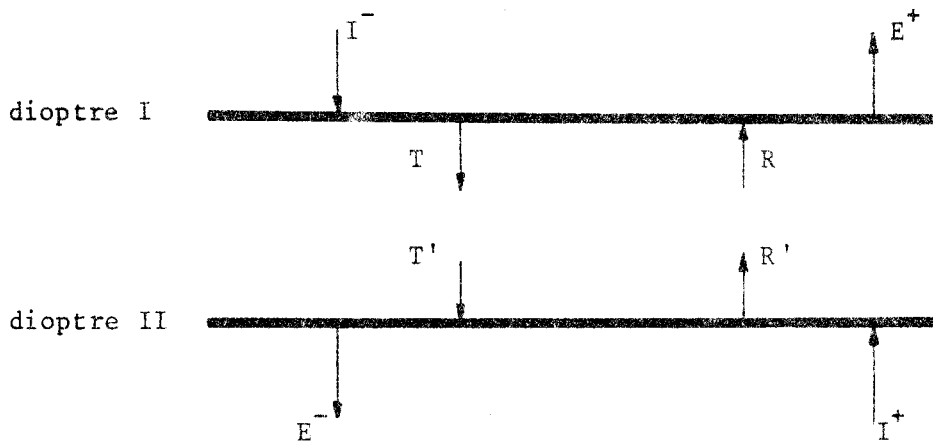


Figure 3 : Ondes résultantes existant au niveau des dioptries.

Pour l'écriture des conditions de passage aux dioptries I et II, les champs électrique et magnétique \vec{E} et \vec{H} sont décomposés selon les axes x et y parallèles aux lignes neutres de la lame (figure 4).

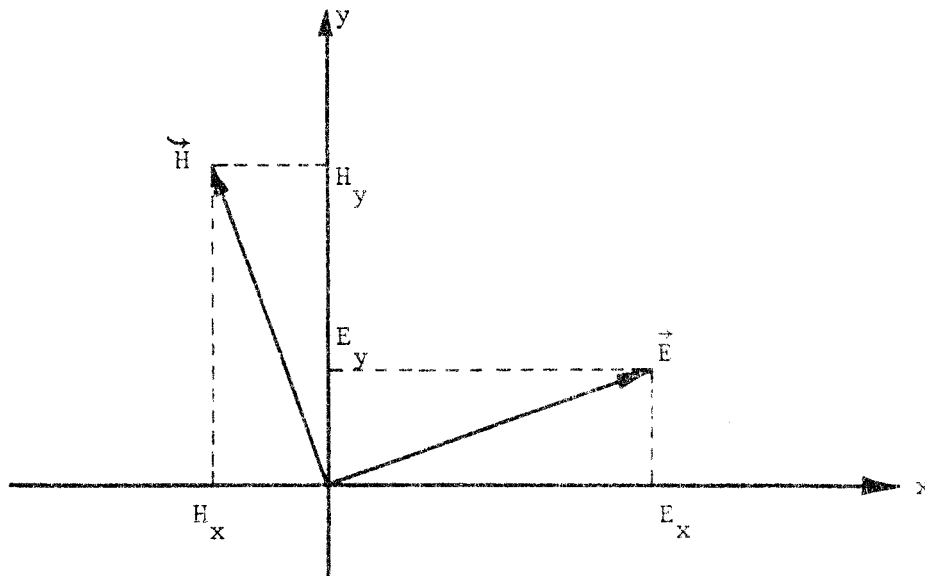


Figure 4 : Décomposition des champs électrique et magnétique selon les lignes neutres de la lame.

Soient n_1 et n_2 les indices de réfraction selon les lignes neutres de la lame. Soit n l'indice du milieu isotrope dans lequel baigne la lame. Les vibrations privilégiées rectilignes sont supposées satisfaire au principe de retour inverse. Soient v_1 et v_2 les vitesses de propagation de ces vibrations dans le sens de la lumière incidente.

Au dioptré I :

les conditions de passage pour les composantes de champs se propageant à la vitesse v_2 s'écrivent, en affectant de l'indice ℓ les champs à l'intérieur de la lame :

$$E_x^- + E_x^+ = E_{x\ell}^- + E_{x\ell}^+ \quad (1, 1)$$

$$H_y^- + H_y^+ = H_{y\ell}^- + H_{y\ell}^+ \quad (1, 2)$$

En changeant x en y on obtient les conditions de passage des composantes se propageant dans la lame à la vitesse v_1 .

Les symboles + et - caractérisant des propagations en sens inverse, la relation (1, 2) peut être écrite :

$$n (E_x^- - E_x^+) = n_2 (E_{x\ell}^- - E_{x\ell}^+)$$

En revenant aux notations adoptées pour caractériser les ondes sur la figure 3 les conditions de passage au dioptré I deviennent :

$$\left. \begin{aligned} I_x^- + E_x^+ &= T_x + R_x \\ n (I_x^- - E_x^+) &= n_2 (T_x - R_x) \\ I_y^- + E_y^+ &= T_y + R_y \\ n (I_y^- - E_y^+) &= n_1 (T_y - R_y) \end{aligned} \right\} \text{Système I}$$

Les conditions de passage des ondes au niveau du dioptré II sont établies de la même manière :

$$\left. \begin{aligned} T_x' + R_x' &= E_x^- + I_x^+ \\ n_2 (T_x' - R_x') &= n (E_x^- - I_x^+) \\ T_y' + R_y' &= E_y^- + I_y^+ \\ n_1 (T_y' - R_y') &= n (E_y^- - I_y^+) \end{aligned} \right\} \text{Passage du dioptré II}$$

Soit ω la pulsation de la vibration incidente et λ sa longueur d'onde dans le vide. Les propagations selon les axes x et y se faisant aux vitesses v_2 et v_1 on peut écrire les relations :

$$T'_x = T_x e^{-\frac{i\omega z}{v_2}} = T_x e^{-\frac{2i\pi n_2 z}{\lambda}}$$

$$T'_y = T_y e^{-\frac{2i\pi n_1 z}{\lambda}}$$

$$R'_x = R_x e^{\frac{2i\pi n_2 z}{\lambda}}$$

$$R'_y = R_y e^{\frac{2i\pi n_1 z}{\lambda}}$$

Ces relations permettent de transformer le système des conditions de passage au dioptre II :

$$\left. \begin{aligned} E_x^- + I_x^+ &= e^{-\frac{2i\pi n_2 z}{\lambda}} T_x + e^{\frac{2i\pi n_2 z}{\lambda}} R_x \\ n(E_x^- - I_x^+) &= n_2 \left(e^{-\frac{2i\pi n_2 z}{\lambda}} T_x - e^{\frac{2i\pi n_2 z}{\lambda}} R_x \right) \\ E_y^- + I_y^- &= e^{-\frac{2i\pi n_1 z}{\lambda}} T_y + e^{\frac{2i\pi n_1 z}{\lambda}} R_y \\ n(E_y^- - I_y^+) &= n_1 \left(e^{-\frac{2i\pi n_1 z}{\lambda}} T_y - e^{\frac{2i\pi n_1 z}{\lambda}} R_y \right) \end{aligned} \right\} \text{Système II}$$

En considérant les équations relatives aux composantes selon ox des systèmes I et II, il vient :

$$2I_x^- = \left(1 + \frac{n_2}{n}\right) T_x + \left(1 - \frac{n_2}{n}\right) R_x$$

$$2E_x^+ = \left(1 - \frac{n_2}{n}\right) T_x + \left(1 + \frac{n_2}{n}\right) R_x$$

$$2E_x^- = \left(1 + \frac{n_2}{n}\right) T_x e^{-\frac{2i\pi n_2 z}{\lambda}} + \left(1 - \frac{n_2}{n}\right) R_x e^{\frac{2i\pi n_2 z}{\lambda}}$$

$$2I_x^+ = \left(1 - \frac{n_2}{n}\right) T_x e^{-\frac{2i\pi n_2 z}{\lambda}} + \left(1 + \frac{n_2}{n}\right) R_x e^{\frac{2i\pi n_2 z}{\lambda}}$$

Les expressions de R_x et T_x en fonction de I_x^- et I_x^+ permettent facilement d'aboutir aux résultats :

$$E_x^- = \frac{4 \frac{n_2}{n} I_x^- + 2i \left[1 - \left(\frac{n_2}{n} \right)^2 \right] \sin \frac{2\pi n_2 e}{\lambda} I_x^+}{\left(1 + \frac{n_2}{n} \right)^2 e^{\frac{2i\pi n_2 e}{\lambda}} - \left(1 - \frac{n_2}{n} \right)^2 e^{-\frac{2i\pi n_2 e}{\lambda}}}$$

$$E_x^+ = \frac{2i \left[1 - \left(\frac{n_2}{n} \right)^2 \right] \sin \frac{2\pi n_2 e}{\lambda} I_x^- + 4 \frac{n_2}{n} I_x^+}{\left(1 + \frac{n_2}{n} \right)^2 e^{\frac{2i\pi n_2 e}{\lambda}} - \left(1 - \frac{n_2}{n} \right)^2 e^{-\frac{2i\pi n_2 e}{\lambda}}}$$

Les relations relatives aux composantes selon oy des systèmes I et II étant semblables aux relations précédentes, on obtient pour E_y^- et E_y^+ des expressions analogues en I_y^- et I_y^+ à condition de changer n_2 en n_1 .

D'où les relations matricielles liant les ondes émergentes aux ondes incidentes (figure 3) :

$$\begin{pmatrix} E_x^- \\ E_y^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x^- \\ I_y^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x^+ \\ I_y^+ \end{pmatrix} \quad (1, 3)$$

$$\begin{pmatrix} E_x^+ \\ E_y^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x^- \\ I_y^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x^+ \\ I_y^+ \end{pmatrix} \quad (1, 4)$$

où les termes A et B sont de la forme :

$$A = \frac{4 \frac{n_2}{n}}{\left(1 + \frac{n_2}{n} \right)^2 e^{\frac{2i\pi n_2 e}{\lambda}} - \left(1 - \frac{n_2}{n} \right)^2 e^{-\frac{2i\pi n_2 e}{\lambda}}} \quad (1, 5)$$

$$B = \frac{2i \left[1 - \left(\frac{n_2}{n} \right)^2 \right] \sin \frac{2\pi n_2 e}{\lambda}}{\left(1 + \frac{n_2}{n} \right)^2 e^{\frac{2i\pi n_2 e}{\lambda}} - \left(1 - \frac{n_2}{n} \right)^2 e^{-\frac{2i\pi n_2 e}{\lambda}}} \quad (1, 6)$$

Les termes A' et B' sont obtenus à partir de A et B en remplaçant n_2 par n_1 . Les ondes étudiées ici ont toutes été rapportées aux lignes neutres de la lame.

C - Pile de deux lames à biréfringence rectiligne

Soit une pile de deux lames identiques du type précédent (fig. 5). Ces lames plongées dans un milieu isotrope d'indice n sont séparées par une distance d . Choisissons comme axes de référence les axes de la lame 1. Les axes de la lame 2 font avec les axes de référence un angle θ . Les notations sont celles de la figure 5.

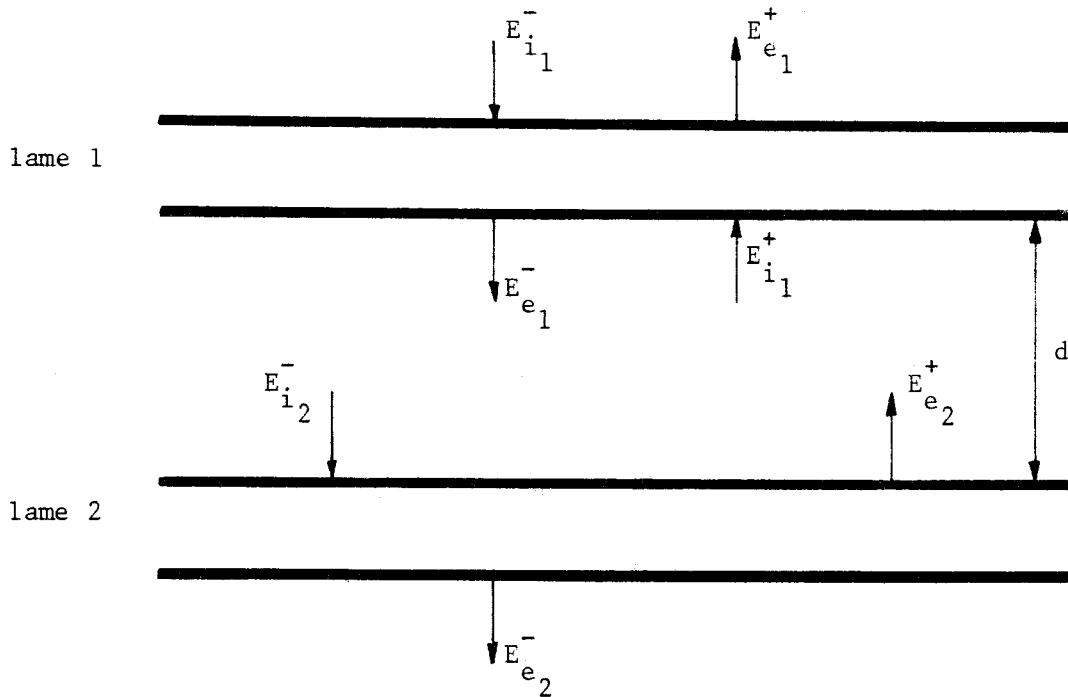


Figure 5 : Ondes globales existant dans le milieu d'immersion au niveau de chaque dioptre d'une pile de deux lames.

Si la pile n'est éclairée que d'un seul côté par la vibration incidente E_{i1}^- , la lame 1 est éclairée de part et d'autre, tandis que la lame 2 ne l'est que par E_{i2}^- .

Pour la lame 1 dans les axes de référence, les relations (1, 3) et (1, 4) s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} E_{e1x}^- \\ E_{e1y}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{i1x}^+ \\ E_{i1y}^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{i1x}^- \\ E_{i1y}^- \end{pmatrix} \quad (1, 7)$$

et

$$\begin{pmatrix} E_{e2x}^+ \\ E_{e2y}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{i2x}^+ \\ E_{i2y}^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{i2x}^- \\ E_{i2y}^- \end{pmatrix} \quad (1, 8)$$

Si v est la vitesse de propagation dans le milieu isotrope séparant les deux lames, il vient :

$$\begin{bmatrix} E_{i_2}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{e_1}^- \end{bmatrix} e^{-\frac{i\omega d}{v}} \quad (1, 9)$$

$$\begin{bmatrix} E_{e_2}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{i_1}^+ \end{bmatrix} e^{\frac{i\omega d}{v}} \quad (1, 10)$$

La lame 2 n'est éclairée que par $\begin{bmatrix} E_{i_2}^- \end{bmatrix}$. Dans les quatre relations qui précèdent, les composantes de $\begin{bmatrix} E_{i_2}^- \end{bmatrix}$ sont prises selon les axes de référence. Les axes de la lame 2 faisant un angle θ avec les axes de référence, il faut faire intervenir les matrices de rotation $\underline{R}(\theta)$ et $\underline{R}(-\theta)$ pour que $\begin{bmatrix} E_{e_2}^- \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} E_{e_2}^+ \end{bmatrix}$ obtenus à partir de $\begin{bmatrix} E_{i_2}^- \end{bmatrix}$ avec les relations matricielles (1, 3 et 4), soient exprimés dans les axes de référence :

$$\begin{bmatrix} E_{e_2}^- \end{bmatrix} = \underline{R}(-\theta) \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix} \underline{R}(\theta) \begin{bmatrix} E_{i_2}^- \end{bmatrix} \quad (1, 11)$$

$$\begin{bmatrix} E_{e_2}^+ \end{bmatrix} = \underline{R}(-\theta) \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{bmatrix} \underline{R}(\theta) \begin{bmatrix} E_{i_2}^- \end{bmatrix} \quad (1, 12)$$

Les équations (1, (7, 8, 9, 10, 11, 12)) conduisent à la relation matricielle liant $\begin{bmatrix} E_{e_2}^- \end{bmatrix}$ vibration transmise par la pile à $\begin{bmatrix} E_{i_1}^- \end{bmatrix}$ vibration incidente sur la pile :

$$\begin{bmatrix} E_{e_2}^- \end{bmatrix} = e^{\frac{i\omega d}{v}} \underline{R}(-\theta) \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix} \underline{R}(\theta) \left[I e^{\frac{2i\omega d}{v}} - \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{bmatrix} \underline{R}(-\theta) \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{bmatrix} \underline{R}(\theta) \right]^{-1} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{i_1}^- \end{bmatrix} \quad (1, 13)$$

En posant $X = e^{\frac{2i\omega d}{v}}$ la relation (1, 13) devient :

$$\begin{bmatrix} E_{e_2}^- \end{bmatrix} = -\frac{e^{\frac{i\omega d}{v}}}{\delta} \begin{bmatrix} A^2 (B'^2 - X) \cos^2\theta + AA' (BB' - X) & \begin{bmatrix} AA' (BB' - X) - A'^2 (B^2 - X) \end{bmatrix} \\ \times \sin^2\theta & \times \sin\theta \cos\theta \\ \hline \begin{bmatrix} A^2 (B'^2 - X) - AA' (BB' - X) \end{bmatrix} & AA' (BB' - X) \sin^2\theta \\ \times \sin\theta \cos\theta & + A'^2 (B^2 - X) \cos^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{i_1}^- \end{bmatrix} \quad (1, 14)$$

où $\delta = (BB' - X)^2 - X \cos^2\theta (B - B')^2$

B - Etats de polarisation des vibrations propres

La relation (1, 14) est de la forme :

$$\begin{bmatrix} E_{e_2}^- \end{bmatrix} = [P] \begin{bmatrix} E_{i_1}^- \end{bmatrix}$$

Soit $\begin{bmatrix} E_{i_1}^- \end{bmatrix}$ le vecteur propre de $[P]$ associé à sa valeur propre γ_1 :

$$[P] \begin{bmatrix} E_{i_1}^- \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} E_{i_1}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{e_2}^- \end{bmatrix}$$

Comme les composantes de $\begin{bmatrix} E_{e_2}^- \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} E_{i_1}^- \end{bmatrix}$ ont été prises par rapport au même système d'axes, les vibrations propres de la pile sont les directions propres de la matrice $[P]$.

Les valeurs propres γ_1 et γ_2 de $[P]$ (1, 14) sont solutions de l'équation :

$$\gamma^2 - \gamma T_P + |[P]| = 0 \quad (1, 15)$$

où T_P est la trace de $[P]$ et $|[P]|$ son déterminant. Un calcul rapide montre que $\frac{|[P]|}{T_P} < 1$. Cela signifie [10] que l'intensité transmise par la pile des deux lames transparentes considérées n'est pas égale à l'intensité incidente. En effet, il existe une intensité réfléchie.

Les valeurs propres de $[P]$ se déduisent de (1, 15) :

$$\gamma = \frac{2AA' (BB' - X) \sin^2\theta + [A'^2 (B^2 - X) + A^2 (B'^2 - X)] \cos^2\theta \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\text{où } \Delta = \cos^2\theta [A'^2 (B^2 - X) - A^2 (B'^2 - X)]^2 - \sin^2\theta \cos^2\theta [(A'B - AB')^2 - X (A - A')^2]^2$$

Les rapports f'_1 et f'_2 des composantes des vecteurs propres fournissent les états de polarisation des vibrations propres de la pile :

$$f'_1 = \frac{\cos^2\theta [A^2 (B'^2 - X) - A'^2 (B^2 - X)] + \sqrt{\Delta}}{2 [A'^2 (B^2 - X) - AA' (BB' - X)] \sin\theta \cos\theta}$$

$$f'_2 = \frac{\cos^2\theta [A^2 (B'^2 - X) - A'^2 (B^2 - X)] - \sqrt{\Delta}}{2 [A'^2 (B^2 - X) - AA' (BB' - X)] \sin\theta \cos\theta}$$

D'après (1, 9) f'_1 et f'_2 suffisent à déterminer les vibrations propres

$$\begin{bmatrix} E_{i_1}^- \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} E_{i_2}^- \end{bmatrix}.$$

- Pour $\theta = 0^\circ$ c'est-à-dire quand les lames sont superposées de manière que leurs lignes neutres de même nom coïncident, f'_1 et f'_2 prennent les valeurs ∞ et 0. Les vibrations propres de la pile sont rectilignes et orthogonales ; ce sont en effet les vibrations privilégiées de chaque lame.
- Pour $\theta = 90^\circ$ la matrice prend une forme diagonale, les éléments de la diagonale étant égaux. Les vecteurs propres de la matrice sont donc indéterminés. (f'_1 et f'_2 prennent la forme indéterminée $\frac{0}{0}$). Cela signifie que les effets des deux lames se compensent même si toutes les réflexions sont prises en compte. Toute vibration incidente sur la pile est propre.

Dans le cas où l'angle θ entre les lignes neutres de même nom est quelconque compris entre 0° et 90° , appelons θ_2 et θ_1 les azimuts de deux vibrations propres et η_2 et η_1 leurs ellipticités.

Un calcul non reproduit ici permet d'établir la relation :

$$\frac{2 (p_1 f'_1)}{1 + f'_1 f_1^*} = \frac{-2 (p_1 f'_2)}{1 + f'_2 f_2^*}$$

c'est-à-dire, d'après (1, 0), $\eta_1 = -\eta_2$. Les vibrations propres ont même ellipticité et des sens de parcours opposés.

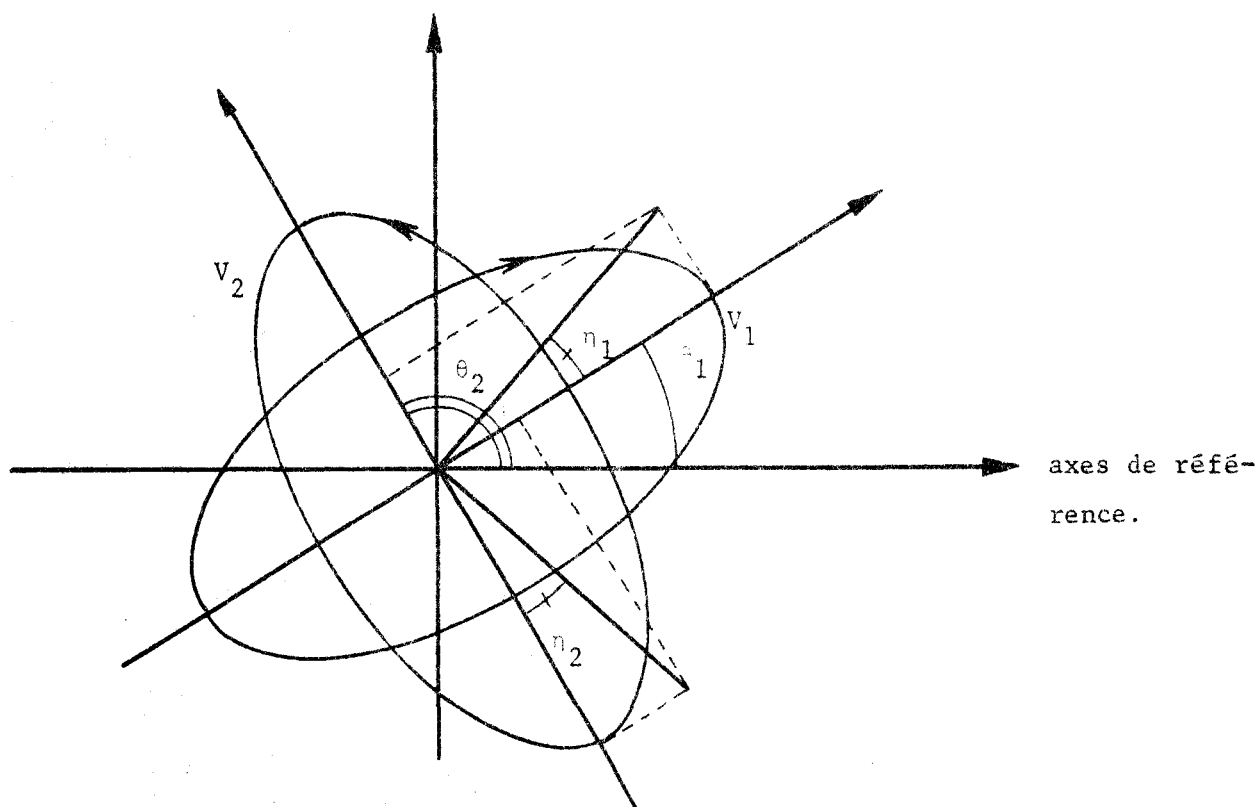


Figure 6 : Vibrations propres d'une pile de deux lames

Les valeurs de $n_1 = |n_2|$ ellipticité des vibrations propres, $\theta_2 - \theta_1$ angle entre les axes de même nom de ces vibrations et ϕ angle de déphasage de la pile ont été calculés numériquement sur ordinateur. $\theta_2 - \theta_1$ est calculé à partir de f'_1 et f'_2 à l'aide de (1, 0) tandis que ϕ est calculé de la manière suivante :

soient V_1 et V_2 les vibrations propres de la pile; $[P] V_1 = \gamma_1 V_1$ et $[P] V_2 = \gamma_2 V_2$
 Les valeurs propres γ_1 et γ_2 de $[P]$ sont deux nombres complexes qui caractérisent la pile en transmission et qui peuvent être écrits :

$$\gamma_1 = \rho_1 e^{-i\phi_1} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \rho_2 e^{-i\phi_2}$$

où ρ_1, ρ_2 et ϕ_1, ϕ_2 caractérisent l'extinction et le déphasage des vibrations propres à-travers la pile.

Le déphasage entre V_1 et V_2 est l'angle de déphasage de la pile :

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 = \text{Arg } \gamma_2 - \text{Arg } \gamma_1$$

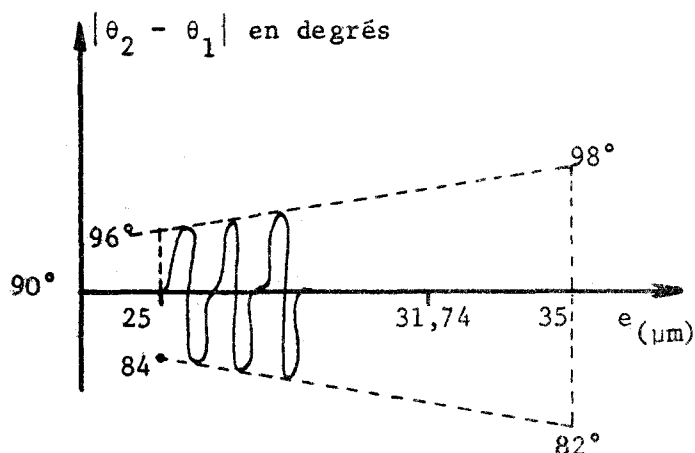


Figure 7a

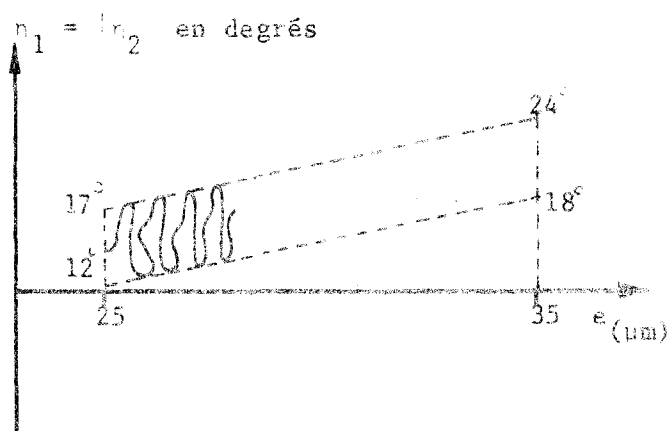


Figure 7b

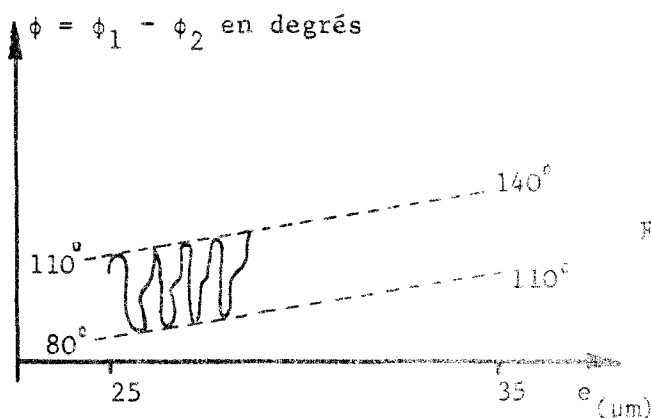


Figure 7c

Figure 7 : Variations de l'angle $\theta_2 - \theta_1$ entre les axes des vibrations propres, du déphasage de la pile ϕ et de l'ellipticité des vibrations propres en fonction de l'épaisseur des lames. Les données numériques sont relatives aux indices du mica pour la raie verte du mercure (5461 Å). L'angle entre les lignes neutres des deux lames est de 45° et l'épaisseur d'air entre les lames de 45 μm .

Les courbes de la figure 7 donnent les variations de $\theta_2 - \theta_1$, n_1 et $\phi = \phi_2 - \phi_1$ en fonction de l'épaisseur des lames quand l'angle entre les lignes neutres et l'épaisseur d'air entre les lames (fig. 1) sont constants. Elles ont été tracées en donnant à n_1 et n_2 les valeurs des indices d'un mica muscovite pour la raie verte du mercure.

III - Vérification expérimentale

A - Détermination des conditions expérimentales

Les premiers calculs numériques de $\theta_2 - \theta_1$ ayant montré que les vibrations propres n'ont en général pas leurs grands axes orthogonaux, les calculs numériques ont été poursuivis afin de déterminer l'épaisseur des lames, l'angle entre lignes neutres de même nom et l'épaisseur d'air à réaliser pour une éventuelle vérification expérimentale.

Les conditions optimales conduisent aux courbes de la figure 7. Ces courbes tracées en donnant à n_1 et n_2 les valeurs des indices d'un mica muscovite pour la raie verte du mercure montrent qu'avec des lames approximativement quart d'onde ($31,75 \mu\text{m}$) dont les lignes neutres font entre elles un angle de 45° l'écart à 90° de $\theta_2 - \theta_1$ peut atteindre 8° . Les variations de l'angle entre lignes neutres des lames affectent uniquement l'amplitude des maxima des diverses courbes de la figure 7, le maximum maximorum étant atteint pour $\theta = 45^\circ$.

ϕ , n_1 et $\theta_2 - \theta_1$ varient de façon rapide et approximativement périodique avec l'épaisseur des lames (pas $0,17 \mu\text{m}$ pour des lames de mica) : sur l'intervalle 25 à $35 \mu\text{m}$ par exemple, les variations relatives d'amplitude de $\theta_2 - \theta_1$ ne dépassent pas 3 %.

Les lames devant être approximativement quart d'onde, la détermination du retard qu'elles introduisent a été réalisée par la méthode de FRIEDEL [18] :

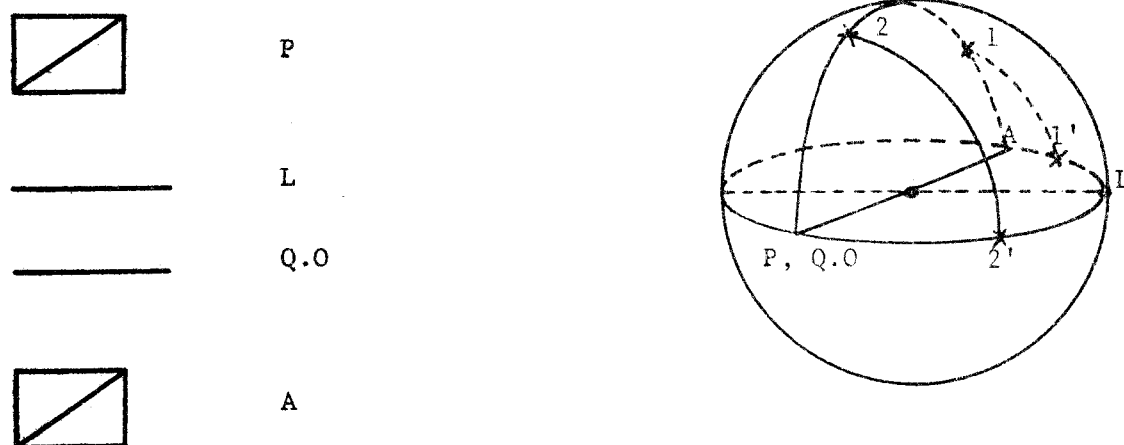


Figure 8 : Détermination de l'épaisseur d'une lame L approximativement quart d'onde.

La lame à étudier L et une lame quart d'onde Q.O sont disposées entre polariseur P et analyseur A croisés. L'axe lent de Q.O coïncide avec la direction privilégiée de P et l'axe lent de L fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec celui de Q.O. La lame L transforme la vibration rectiligne fournie par P en (1) ou (2) selon que son retard est supérieur ou inférieur à $\frac{\pi}{2}$. La lame quart d'onde Q.O transforme les vibrations (1) et (2) en des vibrations rectilignes (1') et (2'). Si le retard de la lame L est inférieur à $\frac{\pi}{2}$ l'extinction est rétablie par une rotation de l'analyseur inférieure à 45° dans le sens trigonométrique, sinon l'extinction est rétablie par une rotation supérieure à 45° dans le sens trigonométrique.

Une lame de mica quart d'onde ($e \approx 32 \mu\text{m}$, $\phi = 90^\circ$) correspond à une rotation de l'analyseur de 45° . La mesure de cette rotation étant effectuée à 8' près, avec le microscope polarisant utilisé, l'erreur sur ϕ est approximativement de 8' ce qui correspond à une erreur de $5 \cdot 10^{-2} \mu\text{m}$ sur l'épaisseur de la lame de mica.

Cette valeur est nettement inférieure à la pseudo-période des oscillations rapides des états de polarisation des vibrations propres avec l'épaisseur des lames.

L'allure des courbes (fig. 7) en fonction de l'épaisseur des lames montre que la probabilité de tailler une lame d'épaisseur conduisant à un défaut d'orthogonalité d'au moins 4° est de 40 %.

B - Dispositif expérimental

1) Montage adopté

Pour déterminer les vibrations propres d'un système, il faut trouver les vibrations incidentes telles que les vibrations émergentes correspondances du système ont même état de polarisation que les vibrations incidentes qui leur donnent naissance.

La manipulation a été réalisée sur un microscope polarisant transformé en microellipsomètre de transmission. La pile de deux lames posée sur la platine du microscope est placée entre polariseur et analyseur elliptiques croisés. Si la vibration fournie par le polariseur elliptique est une vibration propre du système elle "traverse" ce dernier sans déformation et est éteinte par l'analyseur elliptique.

La précision de la mesure dépend essentiellement du dispositif analyseur. En l'absence d'analyseur à quatre plages de CHAUMONT, le dispositif analyseur à pénombre a été constitué d'une lame quart d'onde Q_f couvrant la moitié du champ d'un biquartz de Macé DE LEPINAY [19] (prisme composé d'un quartz droit et d'un quartz gauche accolés). Les lignes neutres de Q_f coïncident avec les directions du polariseur et de l'analyseur.

Le montage adopté est celui de la figure 9a.

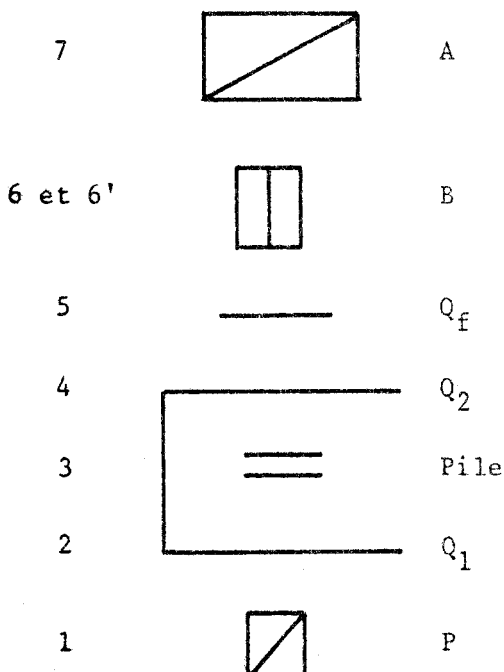


Figure 9a : Dispositif expérimental.

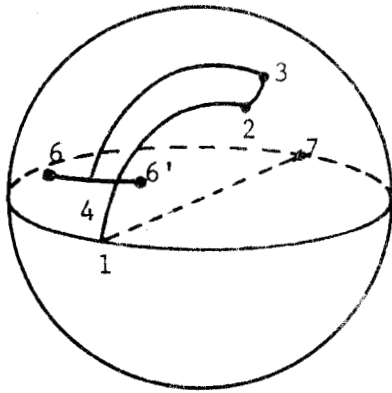


Figure 9b

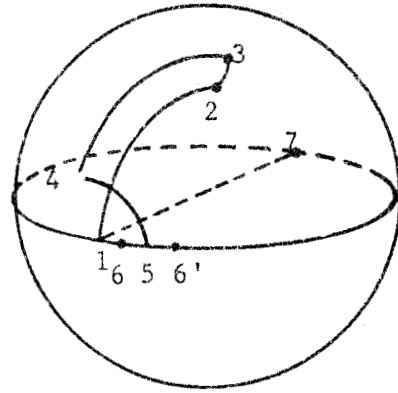


Figure 9c

Figures 9b et 9c : Etats de polarisation successifs de la lumière traversant B seul (9b) et traversant Q_f et B (9c).

Le polariseur P et la quart d'onde Q_1 constituent le polariseur elliptique. Les quarts d'onde Q_2 et Q_f , le biquartz de Macé DE LEPINAY B et l'analyseur A constituent l'analyseur elliptique à pénombre. A, B, Q_f et P sont fixes.

2) Réglages du microellipsomètre

Le biquartz de Macé DE LEPINAY précédé de la quart d'onde Q_f est disposé entre polariseur et analyseur. Q_f est fixée au biquartz de manière à ne recouvrir qu'une moitié du champ (fig. 9d).

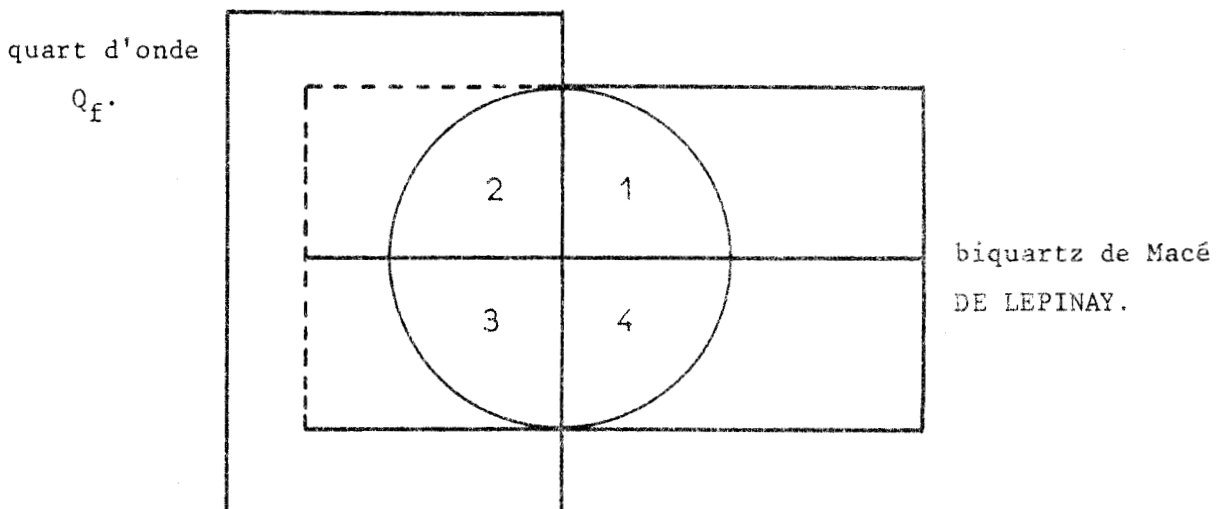


Figure 9d : Disposition du biquartz de Macé DE LEPINAY et de la quart d'onde Q_f .

Le polariseur P, le biquartz solidaire de Q_f et l'analyseur A sont alors orientés de manière à ce que les quatre plages visibles du champ aient même luminosité. L'angle de pénombre est choisi petit pour ce réglage.

Le polariseur et l'analyseur sont alors croisés et les lignes neutres de la quart d'onde Q_f parallèles aux directions de P et A.

Les quarts d'onde Q_1 et Q_2 sont ensuite successivement introduites dans le montage en rétablissant à chaque fois l'égalité d'éclairement des quatre plages. Ce réglage terminé, Q_1 et Q_2 sont rendues solidaires l'une de l'autre.

Pour que le polariseur et l'analyseur elliptiques soient croisés, il faut que les lignes neutres de même nom de Q_1 et Q_2 soient orthogonales. Cela est réalisé quand une rotation simultanée de Q_1 et Q_2 n'entraîne pas de déséquilibre de la luminosité des plages de l'analyseur à pénombre.

Le microellipsomètre dont les réglages viennent d'être décrits est enfin complété par l'insertion, entre Q_1 et Q_2 c'est-à-dire entre polariseur et analyseur elliptiques, de la platine tournante du microscope munie d'un chariot mobile.

3) Réalisation de la pile de deux lames

La pile étudiée expérimentalement est constituée de deux lames tirées d'un même clivage de mica disposées de manière que l'angle entre les lignes neutres de même nom soit de 45° .

Pour cela, la première lame est fixée au chariot de la platine puis réglée à l'extinction entre polariseur et analyseur croisés. Après avoir fait tourner la platine de 45° , la seconde lame est superposée à la première de manière que les lames aient des parties non communes qui puissent être amenées dans le champ par mouvements du chariot. Cette seconde lame est réglée manuellement à l'extinction. Pour ce faire, la lame supérieure est soulevée légèrement puis tournée. Quand le réglage est correct, elle est reposée sur la lame inférieure. Ces opérations sont effectuées avec un manipulateur à ventouse. Cet appareil comporte une pompe qui assure une faible dépression d'air. Celle-ci est reliée à un trocart par un tube souple. Un large trou ménagé dans la paroi du tube peut être obturé par l'index de l'opérateur. Le réglage de la seconde lame peut ainsi être réalisé sans altération du réglage de la première lame. Une rotation de -45° permet de contrôler que la première lame, dont une partie non superposée à la seconde est amenée dans le champ à l'aide du chariot

de la platine, est encore à l'extinction. La zone où les deux lames sont superposées constitue la pile proprement dite.

La pile étant disposée sur la platine tournante du microscope située entre les quarts d'onde Q_1 et Q_2 du microellipsomètre, son orientation par rapport à Q_1 et Q_2 est variable ce qui permet de modifier l'azimut des vibrations elliptiques qu'elle reçoit. La rotation de Q_1 permet une modification de l'ellipticité de la vibration fournie par le polariseur elliptique.

La pile de deux lames peut donc être éclairée avec des vibrations elliptiques d'azimut et d'ellipticité quelconques. Q_1 et Q_2 étant solidaires l'une de l'autre, polariseur et analyseur elliptiques sont constamment croisés. Une vibration elliptique fournie par Q_1 telle que l'émergente de la pile est éteinte par l'analyseur est une vibration propre de la pile.

C - Résultats

1) Mesures

L'étude théorique a été menée en supposant que les deux lames de la pile sont d'épaisseurs égales. D'après les calculs numériques, l'écart le plus important à l'orthogonalité des vibrations propres doit se produire avec des lames approximativement quart d'onde pour la radiation utilisée (fig. 7).

La pile étudiée expérimentalement a été constituée de deux lames tirées d'un même clivage de mica de retard 83° , disposées de manière que l'angle entre les lignes neutres de même nom soit de 45° .

Pour des lames de retard 83° , un calcul ne tenant compte des réflexions conduit à des vibrations orthogonales d'ellipticité $16^\circ 01'$.

Les mesures effectuées ont conduit aux résultats suivants :

- 1) L'angle entre les axes de même nom des vibrations propres est de $90^\circ 16'$ avec un écart moyen de $52'$.
- 2) Les ellipticités des vibrations propres sont égales à $16^\circ 21'$ avec un écart moyen de $18'$.

Ces résultats ne permettent pas de confirmer la validité du calcul théorique.

2) Cause de l'échec de la vérification expérimentale

L'origine de la divergence entre théorie et expérience doit être recherchée dans le phénomène d'oscillations rapides qui affecte les courbes de la figure 7.

Le raisonnement qualitatif suivant explique l'existence de ces oscillations en fournissant des valeurs numériques de la pseudo-période un bon accord avec celles décelées en traçant les courbes :

les états de polarisation des vibrations propres sont fonctions des coefficients A, A', B, B' (1, 5 et 6). Les termes A et B sont des fonctions trigonométriques de l'angle $\frac{2\pi n_1 e}{\lambda}$ tandis que ceux de A' et B' sont des fonctions trigonométriques de l'angle $\frac{2\pi n_2 e}{\lambda}$. Si l'on choisit e/λ comme paramètre du phénomène observé A et B sont de période $1/n_1$ et A' et B' de période $1/n_2$. Il en résulte que les variations de $\theta_2 - \theta_1$, n_1 et ϕ en fonction de e/λ sont constituées par la modulation d'une oscillation rapide de pseudo-période $\frac{1}{n_1 + n_2}$ par une oscillation lente de période $\frac{1}{n_1 - n_2}$.

Une variation de e/λ d'une pseudo-période $\frac{1}{n_1 + n_2}$ peut-être obtenue à épaisseur ou à longueur constante :

$$\Delta \left(\frac{e}{\lambda} \right) = \frac{1}{n_1 + n_2} = \frac{\Delta e}{\lambda} + e \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2}$$

Avec les indices du mica utilisé (# 1,6) une variation de $\left(\frac{e}{\lambda} \right)$ de $\frac{1}{n_1 + n_2}$ est réalisée à longueur d'onde constante (5461 Å) pour $\Delta e = 0,17 \mu\text{m}$ tandis que la même variation de $\left(\frac{e}{\lambda} \right)$ est réalisée à épaisseur constante pour une variation $\Delta \lambda \approx 30 \text{ Å}$. Les calculs numériques effectués confirment pleinement ce raisonnement puisque les courbes $\theta_2 - \theta_1$, n_1 et ϕ en fonction de λ sont des courbes analogues à celles de la figure 7 avec une pseudo-période de 28 Å - (épaisseur d'air entre les lames 5 μm) -

C'est dans cette oscillation rapide du phénomène en fonction de λ qu'il faut rechercher l'origine de la contradiction entre calculs numériques et expérience : la lumière utilisée est fournie par une lame à vapeur de mercure à laquelle a été associé un filtre interférentiel "ORIEL OPTIC" de bande passante à mi-hauteur de 100 Å.

Même en considérant que la taille des lames est parfaite, une telle bande spectrale conduit à observer simultanément trois pseudo-périodes des

courbes $\theta_2 - \theta_1$ et n_2 en fonction de la longueur d'onde. Seules les valeurs moyennes de $\theta_2 - \theta_1$ et n_2 sont donc accessibles.

La valeur moyenne calculée de $\theta_2 - \theta_1$ pour des lames de retard 83° est de $90^\circ 18'$ tandis que celle de n est de $16^\circ 13'$. Ces valeurs montrent qu'avec le matériel utilisé l'écart à l'orthogonalité des vibrations propres ne peut-être mis en évidence.

L'emploi d'un laser ou d'un meilleur monochromateur comme source monochromatique quand les problèmes d'adaptation d'une telle source sur le microscope auront été résolus, devrait permettre de reprendre avec succès l'étude de la non-orthogonalité des vibrations propres.

3) Discussion

L'oscillation rapide caractéristique des vibrations propres avec la longueur d'onde montre que la pile de deux lames constitue un milieu relativement dispersif.

On peut considérer la pile comme une sorte d'interféromètre Fabry - Pérot dont les réflecteurs seraient anisotropes (fig. 5). On sait qu'un interféromètre Fabry - Pérot peut-être utilisé en monochromateur de faible bande passante.

La version étudiée et réalisée par KATZENSTEIN et WARD [20, 21] permet de réduire cette bande passante approximativement d'un facteur dix. Le principe consiste à introduire dans une cavité Fabry - Pérot une lame à biréfringence rectiligne placée entre deux rotateurs à effet Faraday. La cavité est placée entre polariseur et analyseur croisés.

L'expérience confirme les prévisions du calcul basé sur la théorie des matrices de JONES [22] : la longueur d'onde sélectionnée par le filtre est celle pour laquelle la lame biréfringente est onde ou demi-onde selon le sens des rotations Faraday. La largeur d'un pic est de l'ordre de quelques centièmes d'Angström avec un Fabry - Pérot sphérique de vingt centimètres d'épaisseur.

Qualitativement, le montage peut-être interprété de la manière suivante : un pic résulte de l'interférence constructive de la totalité des rayons

successifs. Cela signifie que deux rayons consécutifs doivent être déphasés de $2k\pi$. Chaque rayon transmis par l'interféromètre traversant un nombre pair de fois la lame biréfringente, une traversée de la lame doit introduire un retard multiple de π .

L'effet des rotateurs Faraday est de faire tourner le plan de vibration de chacune des vibrations privilégiées issues de la lame à chaque traversée. Les faisceaux réfléchis par les miroirs isotropes ne sont donc jamais polarisés selon les lignes neutres de la lame et celle-ci introduit bien un retard de π entre les composantes de tous les faisceaux successifs. Un tel retard n'étant réalisé correctement que pour une faible bande spectrale liée à la dispersion de la biréfringence de la lame, l'effet de la lame biréfringente est donc d'affiner le profil des pics par la cavité Fabry - Pérot.

La pile étudiée ici constitue une sorte de Fabry - Pérot à lames anisotropes. On peut donc s'attendre à un effet de Fabry - Pérot habituel et à un affinement de la largeur des pics dû aux traversées multiples des lames biréfringentes. La rotation des lames l'une par rapport à l'autre joue le même rôle que les rotateurs Faraday dans le montage de KATZENSTEIN et WARD [20, 21].

L'étude de la pile de deux lames en vue d'un éventuel usage en monochromateur n'a pas été abordée puisque la présente étude est consacrée aux états de polarisation des vibrations propres pour un rayon monochromatique. Cependant, avec une épaisseur d'air de cinq millimètres entre les deux lames, la courbe pseudo-périodique (période 28 \AA) donnant les variations de $\theta_2 - \theta_1$ en fonction de la longueur d'onde montre une oscillation rapide de largeur 2 à 3 Å . Il serait donc intéressant d'étudier l'intensité transmise par la pile de deux lames en fonction de la longueur d'onde comme pour un Fabry - Pérot classique pour juger si l'emploi de lames anisotropes permet de réduire la largeur des pics fournis par le Fabry - Pérot équivalent.

Il ressort de certains calculs numériques effectués qu'une variation d'une dizaine de microns de l'épaisseur d'air entre les lames de la pile est équivalente à une translation d'un quart de pseudo-période sur les courbes à oscillations rapides de la figure 7. Il s'ensuit que cette variation de l'épaisseur d'air entraîne une variation de $\theta_2 - \theta_1$, angle entre les axes de même nom des vibrations propres, d'une valeur de 8° si la pile est constituée de deux lames quart d'onde dont les lignes neutres font entre elles un angle de 45° . Si les deux lames peuvent être translatées l'une par rapport à l'autre dans une direction perpendiculaire à leurs plans tout en conservant leurs orientations res-

pectives, la mesure de l'écart entre les azimuts des vibrations propres doit permettre de contrôler l'épaisseur d'air à quelques dixièmes de microns près, ce qui réalise un nouveau type de micromètre.

Les variations de la distance optique entre les lames peuvent aussi être réalisées en modifiant le milieu d'immersion. Mais une augmentation de l'indice d'immersion entraîne une diminution du pouvoir réflecteur au niveau des dioptries : par conséquent l'écart à l'orthogonalité des vibrations propres décroît, puisque les réflexions aux dioptries deviennent moins importantes. De manière générale une modification de l'indice du milieu d'immersion entraîne une modification de l'écart à l'orthogonalité des vibrations propres. Cette propriété peut conduire à l'utilisation de la pile de deux lames comme réfractomètre.

C H A P I T R E I I

PILE HELICOÏDALE DE LAMES A BIREFRINGENCE RECTILIGNE

Les premières réalisations de piles hélicoïdales de lames biréfringentes dûes à REUSCH [11] consistent en des empilements de lames de mica ; les seuls cas qu'il étudie sont ceux où les lignes neutres de même nom de deux lames successives font des angles de 45 ou 60 degrés.

Pour expliquer les diverses observations [11], [12] des propriétés optiques de ces piles, POINCARE a recours à la représentation géométrique des vibrations elliptiques sur la sphère de POINCARE [14], [23]. Le raisonnement utilisant des représentations sur la sphère de POINCARE et qui a permis à MAUGUIN [7] d'expliquer qualitativement les propriétés optiques des milieux nématiques à torsion considérés comme des édifices hélicoïdaux de lamelles à biréfringence rectiligne ne tient pas compte des ondes réfléchies aux divers dioptries.

Par conséquent, le raisonnement basé sur la sphère de POINCARE qui a permis à MAUGUIN de montrer l'existence des vibrations favorisées dans les milieux biréfringents à torsion ne conduit pas à priori aux états de polarisation corrects de ces vibrations.

I - Etude qualitative d'une pile hélicoïdale

Soit une pile de lames identiques, parfaitement transparentes, non dichroïques à biréfringence rectiligne empilées avec un pas de torsion constant. Les intervalles entre les lames sont nuls. La pile d'épaisseur infinie est éclairée sous l'incidence normale. Soient n_1 et n_2 les indices de réfraction des vibrations privilégiées rectilignes orthogonales de chaque lame.

Le pas de torsion étant constant, la pile de deux lames consécutives $k - 1$ et k sera d'abord étudiée. Le sens de propagation de la lame $k - 1$ vers la lame k , c'est-à-dire du haut vers le bas sur tous les schémas, sera affecté d'un indice +.

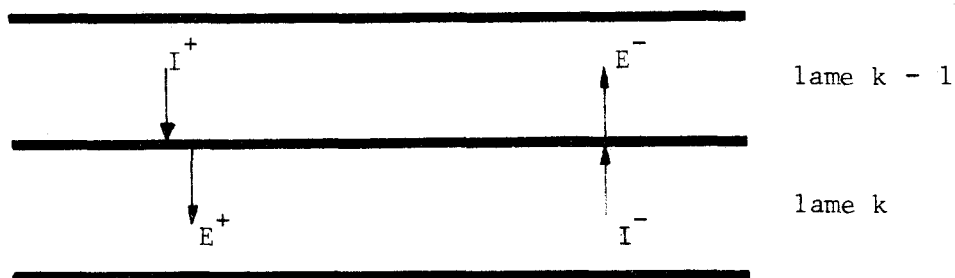


Figure 10 : Deux lames consécutives de la pile.

Les vibrations qui se propagent dans chaque lame sont des vibrations rectilignes. Les vecteurs $[I^+]$, $[E^-]$, $[I^-]$, $[E^+]$ représentent les champs électriques qui existent au niveau du dioptre - (fig. 10) -

$[I^+]$ caractérise la répartition de champ qui résulte de la superposition, au niveau du dioptre, des vibrations privilégiées rectilignes de la lame $k - 1$ qui se propagent vers le dioptre. Le sens de propagation de ces vibrations privilégiées est repéré par la flèche associée à $[I^+]$.

De même $[I^-]$ est au niveau du dioptre la répartition de champ obtenue par superposition des vibrations privilégiées de la lame k qui se propagent vers le dioptre.

La superposition des vibrations privilégiées qui dans les lames $k - 1$ et k s'éloignent du dioptre conduit aux répartitions $[E^-]$ et $[E^+]$ situées de part et d'autre du dioptre. $[E^-]$ résulte de l'interférence de la fraction de $[I^-]$ transmise par le dioptre et de la fraction de $[I^+]$ réfléchi.

Les champs électriques au voisinage du dioptre sont $[I^+] + [E^-]$ dans la lame $k - 1$ et $[E^+] + [I^-]$ dans la lame k .

II - Matrice itérative

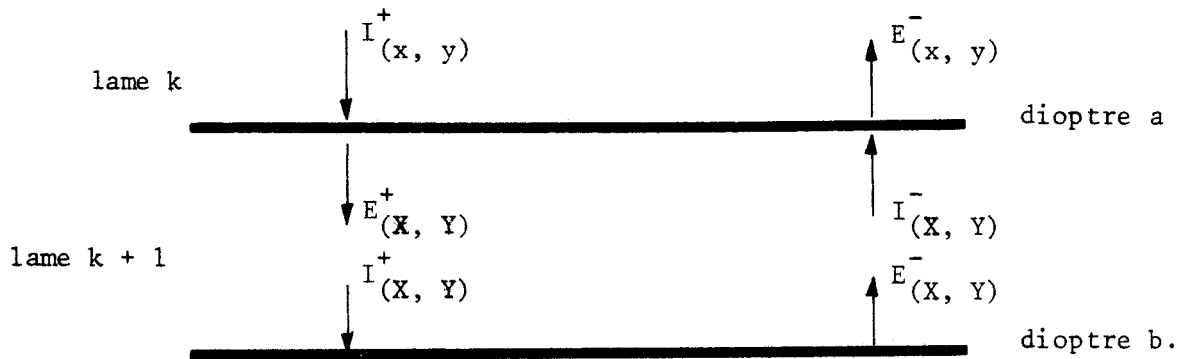


Figure 11 : Répartitions de champ pour deux lames consécutives.

Le dioptre représenté sur la figure 11 sépare les lames consécutives k et k + 1 dont les lignes neutres de même nom font entre elles un angle θ .

Les champs polarisés rectilignement qui se propagent dans chaque lame selon les lignes neutres orthogonales des lames seront notés x et y pour la lame k, X et Y pour la lame k + 1.

Soit n_1 l'indice de réfraction des vibrations parallèles à x et X et n_2 celui des vibrations parallèles à y et Y. Un vecteur de composantes V_x et V_y a pour composantes V_X et V_Y :

$$V_X = V_x \cos \theta + V_y \sin \theta \quad (2, 0)$$

$$V_Y = -V_x \sin \theta + V_y \cos \theta \quad (2, 1)$$

Le dioptre étant éclairé sous l'incidence normale, les conditions de continuité du champ électrique s'écrivent :

selon X
$$E_X^+ + I_X^- = [\cos \theta I_x^+ + \sin \theta I_y^+] + [\cos \theta E_x^- + \sin \theta E_y^-] \quad (2, 2)$$

selon Y
$$E_Y^+ + I_Y^- = [-\sin \theta I_x^+ + \cos \theta I_y^+] + [-\sin \theta E_x^- + \cos \theta E_y^-] \quad (2, 3)$$

De même les conditions de continuité du champ magnétique s'écrivent, en tenant compte des sens de propagation différents pour $[I^+]$, $[E^-]$ et $[E^+]$, $[I^-]$:

$$n_1 (E_X^+ - I_X^-) = [\cos \theta n_1 I_x^+ - \sin \theta n_2 I_y^+] - [\cos \theta n_1 E_x^- + \sin \theta n_2 E_y^-] \quad (2, 4)$$

$$n_2 (E_Y^+ - I_Y^-) = [-\sin \theta n_1 I_x^+ + \cos \theta n_2 I_y^+] - [-\sin \theta n_1 E_x^- + \cos \theta n_2 E_y^-] \quad (2, 5)$$

La combinaison des équations (2, 2) et (2, 4) donne :

$$E_X^+ = \cos \theta I_x^+ + \frac{n_1 + n_2}{2n_1} \sin \theta I_y^+ + \frac{n_1 - n_2}{2n_1} \sin \theta E_y^-$$

$$I_X^- = \cos \theta E_x^- + \frac{n_1 - n_2}{2n_1} \sin \theta I_y^+ + \frac{n_1 + n_2}{2n_1} \sin \theta E_y^-$$

De même les équations (2, 3) et (2, 5) conduisent à :

$$E_Y^+ = -\frac{n_2 + n_1}{2n_2} \sin \theta I_x^+ - \frac{n_2 - n_1}{2n_2} \sin \theta E_x^- + \cos \theta I_y^+$$

$$I_Y^- = \frac{n_1 - n_2}{2n_2} I_x^+ - \frac{n_1 + n_2}{2n_2} \sin \theta E_x^- + \cos \theta E_y^-$$

La traversée d'un dioptre séparant deux milieux à biréfringence rectiligne, et dont les lignes neutres font entre elles un angle θ est donc caractérisée par une relation matricielle de la forme :

$$\begin{bmatrix} E_X^+ \\ E_Y^+ \\ I_X^- \\ I_Y^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \frac{n_1 + n_2}{2n_1} \sin \theta & 0 & \frac{n_1 - n_2}{2n_1} \sin \theta \\ -\left(\frac{n_1 + n_2}{2n_2}\right) \sin \theta & \cos \theta & \left(\frac{n_1 - n_2}{2n_2}\right) \sin \theta & 0 \\ 0 & \left(\frac{n_1 - n_2}{2n_1}\right) \sin \theta & \cos \theta & \left(\frac{n_1 + n_2}{2n_1}\right) \sin \theta \\ \left(\frac{n_1 - n_2}{2n_2}\right) \sin \theta & 0 & -\left(\frac{n_1 + n_2}{2n_2}\right) \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x^+ \\ I_y^+ \\ E_x^- \\ E_y^- \end{bmatrix} \quad (2, 6)$$

Les déphasages subis par chaque composante des ondes lors de la traversée de la lame $k + 1$ permettent d'écrire (fig. 11) :

$$\begin{bmatrix} I_X^+ \\ I_Y^+ \\ E_X^- \\ E_Y^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\phi_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_X^+ \\ E_Y^+ \\ I_X^- \\ I_Y^- \end{bmatrix} \quad (2, 7)$$

Les relations (2, 6) et (2, 7) caractérisant le passage d'un dioptré et la traversée d'une lame permettent d'établir la relation liant les couples de répartitions de champ

$$\left(\begin{matrix} I_X^+ \\ I_Y^+ \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} E_X^+ \\ E_Y^+ \end{matrix} \right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{matrix} I_X^+ \\ I_Y^+ \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} E_X^+ \\ E_Y^+ \end{matrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta e^{-i\phi_1} & \frac{n_1 + n_2}{2n_1} \sin\theta e^{-i\phi_1} & 0 & \frac{n_1 - n_2}{2n_1} \sin\theta e^{-i\phi_1} & I_X^+ \\ \left(\frac{n_1 + n_2}{2n_2}\right) \sin\theta e^{-i\phi_2} & \cos\theta e^{-i\phi_2} & \left(\frac{n_1 - n_2}{2n_2}\right) \sin\theta e^{-i\phi_2} & 0 & I_Y^+ \\ 0 & \left(\frac{n_1 - n_2}{2n_1}\right) \sin\theta e^{i\phi_1} & \cos\theta e^{i\phi_1} & \left(\frac{n_1 + n_2}{2n_1}\right) \sin\theta e^{i\phi_1} & E_X^- \\ \left(\frac{n_1 - n_2}{2n_2}\right) \sin\theta e^{i\phi_2} & 0 & -\left(\frac{n_1 + n_2}{2n_2}\right) \sin\theta e^{i\phi_2} & \cos\theta e^{i\phi_2} & E_Y^- \end{bmatrix}$$

(2, 8)

(2, 8) constitue la relation matricielle liant les répartitions de champ en deux points homologues de la pile. Elle caractérise la traversée du dioptré a et de la lame k + 1 sans traversée du dioptré b (fig. 11). Cette relation ayant été établie en considérant deux lames consécutives quelconques de la pile, (2, 8) peut-être écrite, quelque soit k, sous la forme abrégée :

$$\begin{pmatrix} I_{k+1}^+ \\ E_{k+1}^- \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} I_k^+ \\ E_k^- \end{pmatrix} \quad (2, 9)$$

A l'aide de [M] définie par (2, 8), on peut étudier, compte tenu de toutes les réflexions aux dioptrés, toutes les propriétés optiques d'une pile finie de lames à biréfringence rectiligne, à condition d'introduire dans le calcul les matrices caractérisant le passage des dioptrés extrêmes de la pile.

Cette méthode de calcul est à rapprocher de celle adoptée par quelques auteurs [24 à 28] pour étudier les piles "périodiques" de lames isotropes, l'indice de réfraction des lames variant périodiquement dans la direction d'empilement. Le problème est résolu en associant à chaque période une matrice [M]. Si la pile comporte N périodes la matrice qui la caractérise est [M]^N dont les éléments s'expriment en série de polynômes de Tchebycheff.

C H A P I T R E I I I

VIBRATIONS ITERATIVES D'UNE PILE HELICOÏDALE
DE LAMES A BIREFRINGENCE RECTILIGNE

I - Existence de vibrations itératives

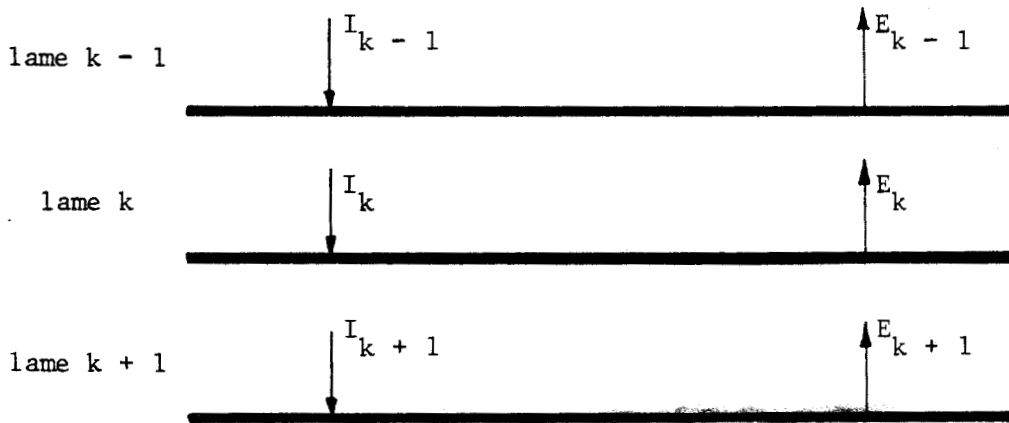


Figure 12 : Trois lames consécutives de la pile.

La figure 12 représente trois lames consécutives quelconques de la pile. Entre les répartitions de champ au niveau des dioptres peuvent être écrites des relations du type (2, 9) :

$$\begin{pmatrix} I_{k+1} \\ E_{k+1} \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} I_k \\ E_k \end{pmatrix} \quad (2, 9)$$

Cette relation s'écrit sous la forme équivalente :

$$\begin{pmatrix} E_k \\ E_{k+1} \end{pmatrix} = [M'] \begin{pmatrix} I_k \\ I_{k+1} \end{pmatrix} \quad (3, 1)$$

où $[M']$ se déduit aisément de $[M]$.

La répartition de champ de type I qui a même état de polarisation par rapport aux lignes neutres [notées x et y] de chaque lame est telle que :

$$\frac{I_{k+1}^Y}{I_{k+1}^X} = \frac{I_k^Y}{I_k^X} = \frac{I_{k-1}^Y}{I_{k-1}^X}$$

Cela s'écrit encore :

$$\left[I_{k+1} \right] = \alpha \left[I_k \right] \quad \left[I_k \right] = \alpha \left[I_{k-1} \right] \quad (3, 2)$$

où α est un nombre complexe caractérisant extinction et déphasage subis par une répartition de champ entre deux points homologues de la pile.

La relation (3, 1) se met alors sous la forme :

$$\begin{pmatrix} E_k \\ E_{k+1} \end{pmatrix} = [M'] \begin{pmatrix} I_k \\ I_{k+1} \end{pmatrix} = \alpha [M'] \begin{pmatrix} I_{k-1} \\ I_k \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} E_{k-1} \\ E_k \end{pmatrix} \quad (3, 3)$$

soit $\begin{pmatrix} E_k \\ E_{k+1} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} E_{k-1} \\ E_k \end{pmatrix}$

(3, 3) est équivalente aux relations suivantes qui sont à rapprocher de (3, 2) :

$$(E_k) = \alpha (E_{k-1}) \quad \text{et} \quad (E_{k+1}) = \alpha (E_k) \quad (3, 4)$$

Ces relations expriment que la répartition de champ de type E se retrouve aux divers dioptries avec le même état de polarisation $\frac{E^Y}{E^X}$ par rapport aux axes des lames $k-1$, k et $k+1$.

Par conséquent si une répartition de champ de type I conserve par rapport aux axes locaux de la pile un état de polarisation constant caractérisé par le nombre complexe f' , il faut lui associer une répartition de type E qui conserve un état de polarisation constant caractérisé par f'' . Le même nombre complexe α caractérise extinction et déphasage des répartitions de champ de types E et I entre deux points homologues de la pile.

L'étude des répartitions de champ qui possèdent à chaque dioptrie de la pile le même état de polarisation par rapport aux axes locaux conduit donc à écrire (2, 9) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} I_{k+1} \\ E_{k+1} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} I_k \\ E_k \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} I_k \\ E_k \end{pmatrix} \quad (3, 5)$$

Dans ce cas le vecteur $\begin{pmatrix} I_k \\ E_k \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $[M]$ et α la valeur propre associée.

Le fait que $\begin{pmatrix} I_k \\ E_k \end{pmatrix}$ soit vecteur propre de $[M]$ signifie que les rapports deux à deux des quatre composantes $I_k^x, I_k^y, E_k^x, E_k^y$ peuvent être calculés à partir des éléments de $[M]$.

En particulier les rapports $\frac{I_k^y}{I_k^x}$ et $\frac{E_k^y}{E_k^x}$ fixent les états de polarisation des répartitions de champ existant au niveau de chaque dioptre. $\frac{E_k^x}{I_k^x}$ et $\frac{E_k^y}{I_k^y}$ établissent les relations d'amplitude entre les composantes de ces répartitions de champ.

Le champ électrique $[F_k] = [I_k] + [E_k]$ au niveau du dioptre a l'état de polarisation :

$$f_k = \frac{I_k^y + E_k^y}{I_k^x + E_k^x} = \frac{\frac{I_k^y}{I_k^x} \left(1 + \frac{E_k^y}{I_k^y} \right)}{1 + \frac{E_k^x}{I_k^x} \left(\frac{E_k^y}{E_k^x} \right)} \quad (3, 6)$$

Les rapports $\frac{I_k^y}{I_k^x}, \frac{E_k^x}{E_k^y}$ et $\frac{E_k^x}{I_k^x}$ étant fixés, f_k est constant. (3, 6) étant valable pour une lame quelconque de la pile, c'est-à-dire quelque soit k , cet indice sera désormais omis. Il existe donc dans la pile deux systèmes de répartitions de champ I et E associés à des ondes de même sens de propagation.

Ces répartitions de champ I et E ont des états de polarisation constants par rapport aux axes locaux et tels qu'au niveau de chaque dioptre la répartition de champ résultant de leur interférence a un état de polarisation constant par rapport aux axes locaux. Les états de polarisation de deux états de vibration itératifs consécutifs se déduisent l'un de l'autre par la même rotation que les deux lames consécutives correspondantes.

II - Signification des valeurs propres de la matrice itérative :

A - Résolution de l'équation aux valeurs propres :

L'équation aux valeurs propres $\det ([M] - \alpha [1]) = 0$ s'écrit :

$$\begin{aligned} & \alpha^4 - 2\alpha^3 \cos \theta (\cos \phi_1 + \cos \phi_2) \\ & + \alpha^2 \left[2 \cos^2 \theta + 2 \cos^2 \theta \cos \phi_1 \cos \phi_2 + 2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 n_2} \sin^2 \theta \sin \phi_1 \sin \phi_2 \right] \\ & - 2\alpha \cos \theta (\cos \phi_1 + \cos \phi_2) + 1 = 0 \end{aligned} \quad (3, 7)$$

Les angles ϕ_1 et ϕ_2 qui représentent les déphasages subis par les vibrations privilégiées rectilignes selon chacune des lignes neutres d'une lame de la pile sont liés par la relation :

$$\phi_1 / \phi_2 = n_1 / n_2 \quad (3, 8)$$

et le coefficient $\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 n_2}$ de l'équation (3, 7) peut alors s'écrire $\frac{\phi_1}{\phi_2} + \frac{\phi_2}{\phi_1}$.

L'équation (3, 7) est une équation réciproque qui dépend donc de trois paramètres θ , ϕ_1 et ϕ_2 .

Pour des raisons de commodité d'écriture elle sera désormais écrite sous la forme :

$$\alpha^4 + a \alpha^3 + b \alpha^2 + a \alpha + 1 = 0 \quad (3, 7')$$

Cette équation est à coefficients réels, elle admet des racines réelles ou deux à deux conjuguées. Le coefficient $(-a)$ égal à la somme des racines de (3, 7') représente la trace T_M de la matrice $[M]$ tandis que le coefficient 1 égal au produit des racines représente le déterminant $||M||$ de la matrice $[M]$.

En mettant α^2 en facteur, (3, 7') s'écrit sous la forme :

$$\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) + a \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) + b = 0 \quad (3, 9)$$

En posant $\alpha + \frac{1}{\alpha} = y$ ce qui s'écrit encore $\alpha^2 - \alpha y + 1 = 0$ (3, 10)

il vient :

$$y^2 + ay + b - 2 = 0 \quad (3, 9')$$

Les quatre racines de l'équation (3, 7) s'obtiennent en résolvant simultanément les équations (3, 9') et (3, 10). L'équation (3, 9') admet deux racines réelles ou complexes conjuguées selon le signe de son discriminant $a^2 - 4b + 8$:

$$y_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b + 8}}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b + 8}}{2}$$

D'après (3, 10) à partir de y_1 sont calculées deux valeurs propres de $[M]$ α_1^+ et α_1^- dont le produit est égal à un :

$$\alpha_1^+ = \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_1^- = \frac{1}{\alpha_1^+} = \frac{y_1 - \sqrt{y_1^2 - 4}}{2} \quad (3, 11)$$

De même, à partir de y_2 sont calculées les deux autres valeurs propres de $[M]$ inverses l'une de l'autre.

L'équation (3, 7) admet donc quatre racines deux à deux inverses l'une de l'autre, chaque couple de racines inverses étant obtenu à partir de la même racine de (3, 9'). Selon le signe de $a^2 - 4b + 8$ (3, 9') et les positions de y_1 et y_2 par rapport à -2 et 2 (3, 11) ces racines sont réelles ou complexes. Mais d'après la remarque précédente ce caractère réel ou complexe n'a pas d'influence sur le produit des racines qui est toujours égal à un.

B - Indices de réfraction et d'extinction

Entre les répartitions de champ de la figure 12 a été établie la relation :

$$\begin{pmatrix} I_{k+1} \\ E_{k+1} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} I_k \\ E_k \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} I_k \\ E_k \end{pmatrix} \quad (3, 5)$$

A chaque valeur propre α est associé un vecteur propre de $[M]$ caractérisant un état de vibration itératif pour la pile (3, 6). Le scalaire α défini par la relation (3, 5) lie les répartitions de champ correspondant à un même état de vibration itératif qui existent en deux points successifs de la pile. Le module τ de α caractérise donc la modification d'amplitude de ces répartitions de champ d'un dioptre à l'autre tandis que l'argument de α représente le déphasage existant entre ces répartitions de champ. Entre deux dioptres distants de e , ce déphasage peut être écrit sous la forme :

$\frac{2\pi n(e) e}{\lambda}$ où $n(e)$ joue le rôle d'indice de réfraction pour l'état de vibration itératif associé à α . Cela revient à écrire :

$$\alpha = \tau e^{-\frac{2i \pi n(e) e}{\lambda}} \quad (3, 12)$$

τ peut être mis sous la forme $e^{-\frac{2\pi \chi e}{\lambda}}$ ce qui revient à écrire α sous la forme :

$$\alpha = e^{-\frac{2i \pi}{\lambda} (n(e) - i\chi)e} = e^{-\frac{2i \pi}{\lambda} v(e) e} \quad (3, 13)$$

où $v(e)$ sera appelé indice de réfraction complexe et χ indice d'extinction.

Avec les conventions adoptées, le déphasage entre les répartitions de champ entre deux dioptrés successifs pris dans le sens de la lumière incidente est négatif.

Par conséquent les valeurs propres α_1 et α_2 caractérisant un déphasage $-\frac{2\pi n(e)e}{\lambda}$ négatif sont associées aux répartitions de champ itératives semblant se propager dans le sens de la lumière incidente tandis que les valeurs propres $\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_1}$ et $\alpha_4 = \frac{1}{\alpha_2}$ sont associées aux répartitions de champ "se propageant" en sens inverse. L'indice de réfraction pour l'état de vibration itératif associé à α se calcule de la manière suivante :

$$n(e) = \left(-\frac{\lambda}{2\pi e} \right) \text{Arg } \alpha \quad (3, 14)$$

C - Différents types de vibrations pouvant exister dans la pile :

Le principe de la résolution de l'équation aux valeurs propres de [M] a été exposé au paragraphe A.

Les valeurs propres α peuvent être réelles ou complexes selon le signe du discriminant de l'équation (3, 9') $\Delta = a^2 - 4b + 8$ et la position de y_1 et y_2 par rapport à -2 et $+2$. Cette position, quand Δ est positif, est connue en étudiant le signe du trinôme $f(y) = y^2 + ay + b - 2$ (3, 9') quand y prend les valeurs -2 et 2 .

1) Si $f(2) = b + 2 + 2a$ et $f(-2) = b + 2 - 2a$ sont tous deux positifs, les racines réelles y_1 et y_2 de (3, 9') sont comprises entre -2 et 2 . Dans ce cas $\sqrt{y^2 - 4}$ est imaginaire pur. Les valeurs propres α^+ et α^- correspondant à une même valeur de y sont complexes conjuguées et la condition (3, 11) $\alpha^+ = \frac{1}{\alpha^-}$, leur impose d'avoir un module égal à l'unité. D'après la forme (3, 13) de α cela signifie que l'indice d'extinction χ est nul.

Dans la pile les quatre vibrations itératives sont d'amplitudes constantes, deux de phases décroissantes et deux de phases croissantes.

2) Si $f(2)$ et $f(-2)$ sont de signes contraires, une des racines y_1 ou y_2 est comprise entre -2 et 2 . Les valeurs propres qui lui sont associées (3, 10) sont complexes conjuguées de module unité. D'après (3, 10) la racine y extérieure à $[-2, 2]$ conduit à deux valeurs propres réelles inverses l'une de l'autre. D'après la forme (3, 13) de α , une valeur propre réelle est obtenue pour $n = 0$ et $\chi \neq 0$. Une telle valeur propre est associée à une vibration ité-

rative dont l'amplitude s'atténue de manière exponentielle d'un dioptre au suivant. Une telle vibration itérative correspond à une oscillation évanescence dans un milieu continu (pile de lames infiniment minces).

Dans la pile existent deux vibrations itératives d'amplitude constante, une de phase croissante, l'autre de phase décroissante et deux vibrations itératives de phase constante, l'une d'amplitude croissante, l'autre d'amplitude décroissante.

3) Si $f(2)$ et $f(-2)$ sont tous deux négatifs, les racines y_1 et y_2 sont extérieures à l'intervalle $[-2, 2]$. Toutes les valeurs propres de $[M]$ sont réelles. Dans la pile existent quatre vibrations itératives de phase constante, deux d'amplitudes croissantes, deux d'amplitudes décroissantes.

Quand Δ est négatif, les racines y_1 et y_2 de (3, 9') sont complexes. Les valeurs propres sont complexes et de module différent de l'unité. D'après (3, 11) deux valeurs propres sont de module inférieur à l'unité et deux sont de module supérieur à l'unité.

Dans la pile existent deux vibrations itératives d'amplitudes et de phases croissantes et deux vibrations itératives d'amplitudes et de phases décroissantes.

Δ , $f(2)$ et $f(-2)$ sont des fonctions de θ , ϕ_1 et ϕ_2 . Les courbes représentées sur les figures (13 a, b, c, d) indiquent, pour diverses valeurs de θ , les signes de Δ , $f(2)$ et $f(-2)$ pour ϕ_1 et ϕ_2 compris entre 0 et 2π . Les expressions de Δ , $f(2)$ et $f(-2)$ étant symétriques en ϕ_1 et ϕ_2 , les domaines délimités par les courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Les figures montrent que les quatre cas prévus dans la discussion précédente sont possibles.

Quand θ croît les domaines où Δ , $f(2)$ et $f(-2)$ sont négatifs s'élargissent sans contenir aucun point de la première bissectrice. En effet, sur cette droite $\phi_1 = \phi_2$. D'après (3, 8) les indices n_1 et n_2 selon les lignes neutres des lames sont alors égaux et la pile de lames est une pile de lames isotropes.

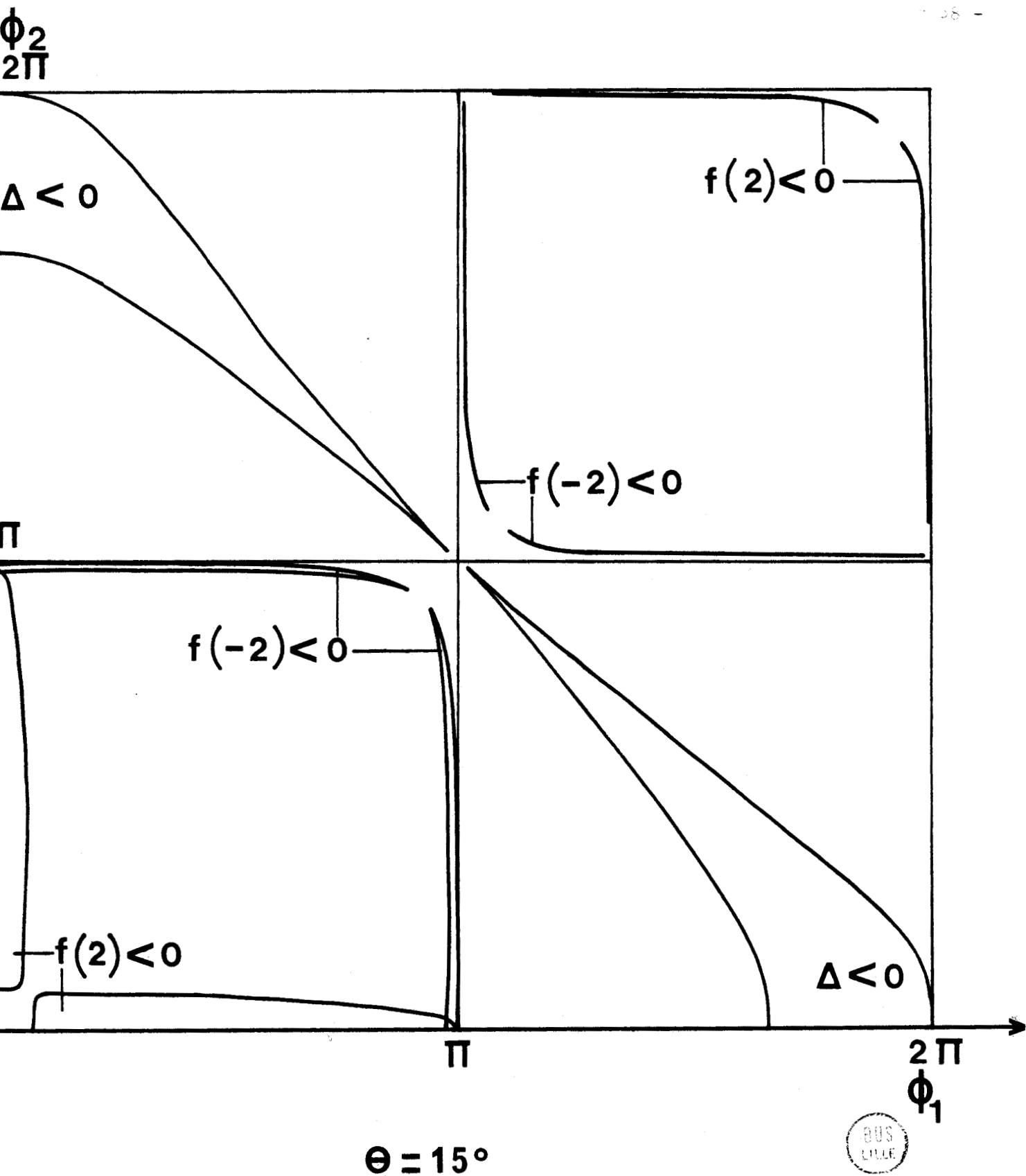


Figure 13 a : Etude des signes de Δ , $f(2)$, $f(-2)$ en fonction des angles de déphasage ϕ_1 et ϕ_2 selon les lignes neutres des lames pour $\alpha = 15^\circ$.

ϕ_2
 2π

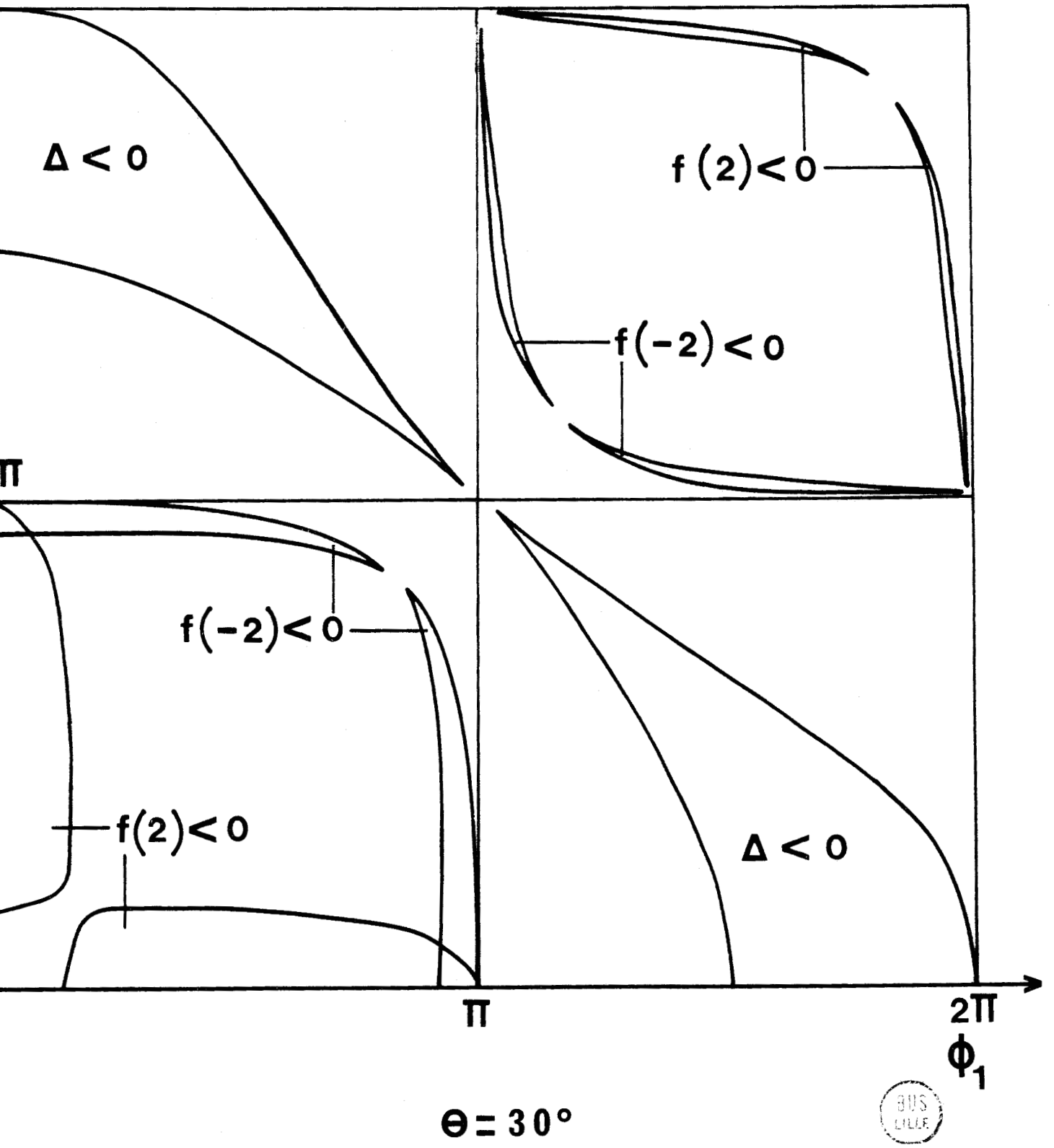


Figure 13 b : Etude des signes de Δ , $f(2)$, $f(-2)$ en fonction des angles de déphasage ϕ_1 et ϕ_2 selon les lignes neutres des lames pour $\alpha = 30^\circ$.

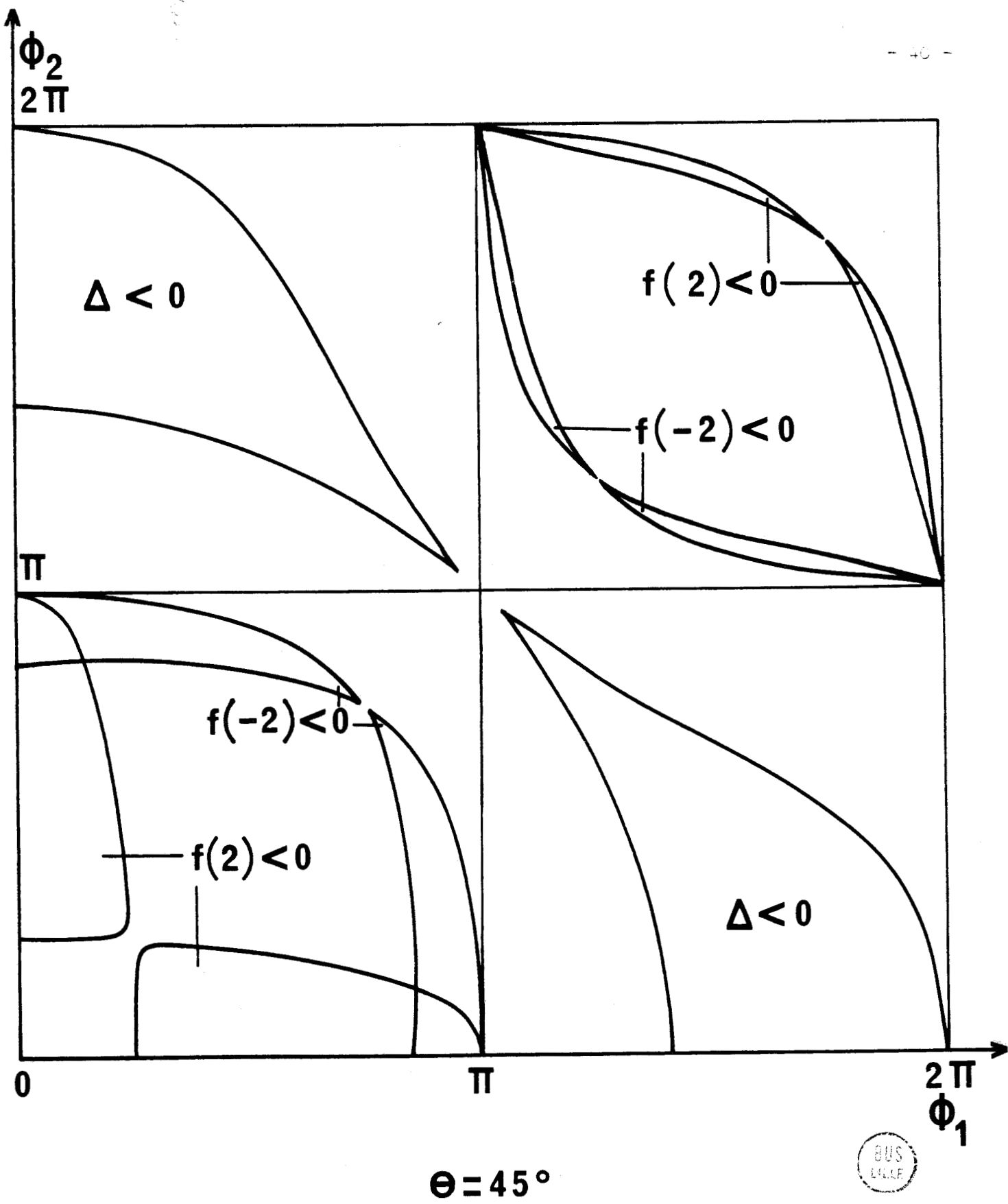
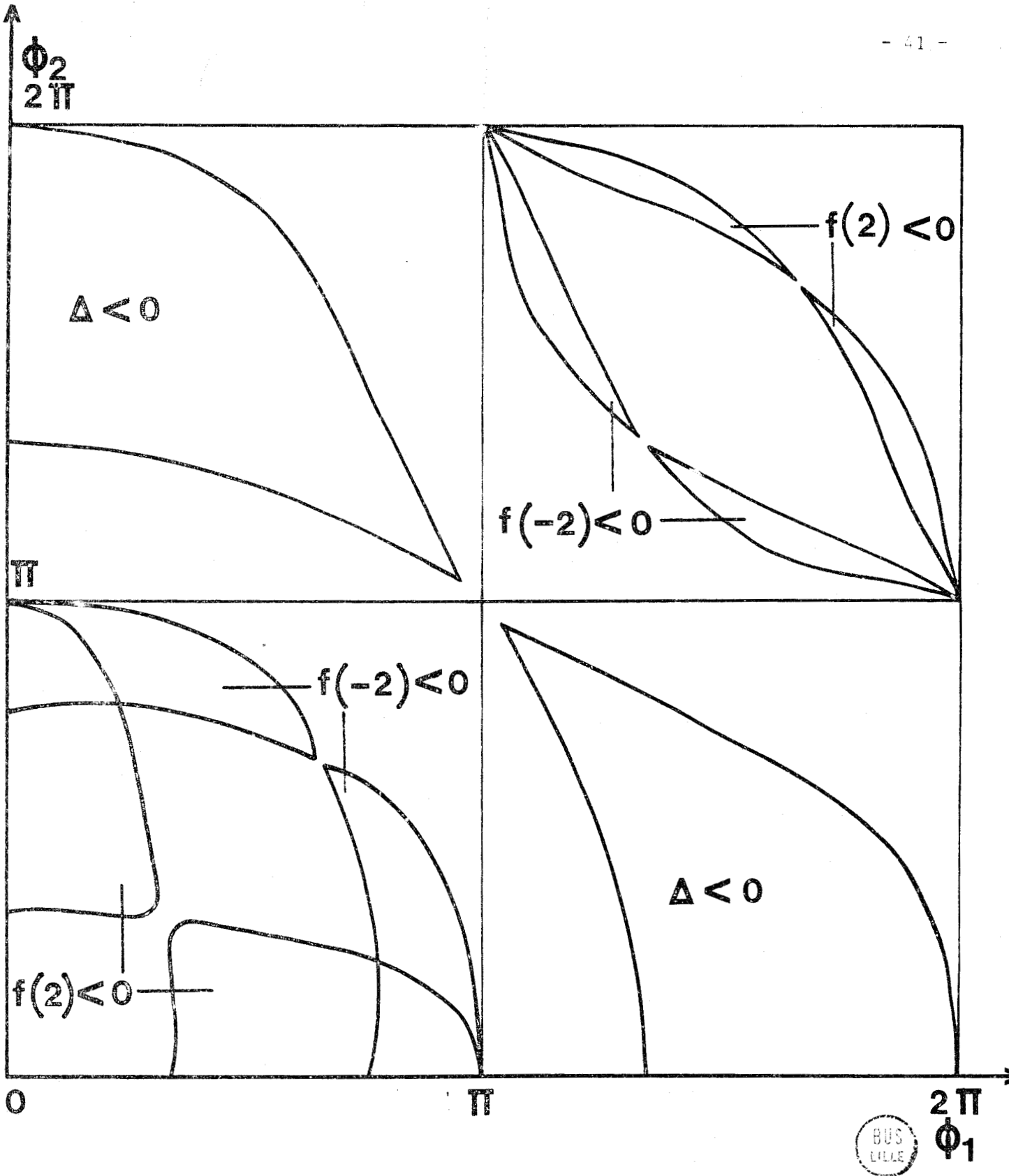


Figure 13 c : Etude des signes de Δ , $f(2)$, $f(-2)$ en fonction des angles de déphasage ϕ_1 et ϕ_2 selon les lignes neutres des lames pour $\theta = 45^\circ$.



$\Theta = 60^\circ$

Figure 13 d : Etude des signes de Δ , $f(2)$, $f(-2)$ en fonction des angles de déphasage ϕ_1 et ϕ_2 selon les lignes neutres des lames pour $\Theta = 60^\circ$.

III - Etats de polarisation des vibrations itératives :

A chaque valeur propre α_ℓ est associée un vecteur propre $\begin{bmatrix} I \\ E \end{bmatrix}_\ell$ vérifiant la relation :

$$[M] \begin{bmatrix} I \\ E \end{bmatrix}_\ell = \alpha_\ell \begin{bmatrix} I \\ E \end{bmatrix}_\ell \quad (3, 5)$$

En explicitant $[M]$ cette relation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta e^{-i\phi_1} - \alpha & \frac{n_1 + n_2}{2n_1} \sin \theta e^{-i\phi_1} & 0 & \frac{n_1 - n_2}{2n_1} \sin \theta e^{-i\phi_1} \\ -\left(\frac{n_1 + n_2}{2n_2}\right) \sin \theta e^{-i\phi_2} & \cos \theta e^{-i\phi_2} - \alpha & \frac{n_1 - n_2}{2n_2} \sin \theta e^{-i\phi_2} & 0 \\ 0 & \frac{n_1 - n_2}{2n_1} \sin \theta e^{i\phi_1} & \cos \theta e^{i\phi_1} - \alpha & \frac{n_1 + n_2}{2n_1} \sin \theta e^{i\phi_1} \\ \frac{n_1 - n_2}{2n_2} \sin \theta e^{i\phi_2} & 0 & -\left(\frac{n_1 + n_2}{2n_2}\right) \sin \theta e^{i\phi_2} & \cos \theta e^{i\phi_2} - \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ E_x \\ E_y \end{bmatrix} = 0 \quad (3, 15)$$

Les rapports $\frac{I_y}{I_x}$, $\frac{E_y}{E_x}$ et $\frac{E_x}{I_x}$ qui interviennent dans l'état de polarisation de F_ℓ (3, 6) associé à α_ℓ sont :

$$\frac{I_y}{I_x} = - \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta e^{-i\phi_1} - \alpha & 0 & \frac{n_1 - n_2}{2n_1} \sin \theta e^{-i\phi_1} \\ -\left(\frac{n_1 + n_2}{2n_2}\right) \sin \theta e^{-i\phi_2} & \frac{n_1 - n_2}{2n_2} \sin \theta e^{-i\phi_2} & 0 \\ 0 & \cos \theta e^{i\phi_1} - \alpha & \frac{n_1 + n_2}{2n_1} \sin \theta e^{i\phi_1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{n_1 + n_2}{2n_1} \sin \theta e^{-i\phi_1} & 0 & \frac{n_1 - n_2}{2n_1} \sin \theta e^{-i\phi_1} \\ \cos \theta e^{-i\phi_2} - \alpha & \frac{n_1 - n_2}{2n_2} \sin \theta e^{-i\phi_2} & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{2n_1} \sin \theta e^{i\phi_1} & \cos \theta e^{i\phi_1} - \alpha & \frac{n_1 + n_2}{2n_1} \sin \theta e^{i\phi_1} \end{vmatrix}}$$

Soit :

$$\frac{I_y}{I_x} = + i \frac{(n_1 + n_2) \alpha \sin \theta \sin \phi_1 e^{-i\phi_2}}{n_2 \left[\alpha^2 e^{-i\phi_1} - \alpha \cos \theta \left[1 + e^{-i(\phi_1 + \phi_2)} \right] + e^{-i\phi_2} \right]} \quad (3, 16)$$

De la même manière :

$$\frac{E_y}{I_y} = - \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2} \right) \frac{\left[\alpha^2 e^{i\phi_2} - \alpha \cos \theta \left[1 + e^{i(\phi_2 - \phi_1)} \right] + e^{-i\phi_1} \right]}{\left[\alpha^2 e^{-i\phi_2} - \alpha \cos \theta \left[1 + e^{-i(\phi_1 + \phi_2)} \right] + e^{-i\phi_1} \right]} \quad (3, 17)$$

$$\frac{E_x}{I_x} = \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2} \right) \frac{\left[\alpha^2 e^{i\phi_1} - \alpha \cos \theta \left[1 + e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \right] + e^{-i\phi_2} \right]}{\left[\alpha^2 e^{-i\phi_1} - \alpha \cos \theta \left[1 + e^{-i(\phi_1 + \phi_2)} \right] + e^{-i\phi_2} \right]} \quad (3, 18)$$

En reportant ces valeurs de $\frac{I_y}{I_x}$, $\frac{E_y}{I_y}$, $\frac{E_x}{I_x}$ dans (3, 6) il vient :

$$f = \left(\frac{I_y}{I_x} \right) \frac{N_1}{D_1} \quad (3, 19)$$

$$\text{où } N_1 = 2 \left\{ \left[n_2 \cos \phi_2 + i n_1 \sin \phi_2 \right] \left[\alpha \cos \theta e^{-i\phi_1} - \alpha^2 \right] + n_2 \left[\alpha \cos \theta - e^{-i\phi_1} \right] \right\} \\ \times \left\{ \alpha^2 e^{-i\phi_1} - \alpha \cos \theta \left[1 + e^{-i(\phi_1 + \phi_2)} \right] + e^{-i\phi_2} \right\}$$

$$\text{et } D_1 = 2 \left\{ \left[n_1 \cos \phi_1 + i n_2 \sin \phi_1 \right] \left[\alpha^2 - \alpha \cos \theta e^{-i\phi_2} \right] + n_1 \left[e^{-i\phi_2} + \alpha \cos \theta \right] \right\} \\ \times \left\{ \alpha^2 e^{-i\phi_2} - \alpha \cos \theta \left[1 + e^{-i(\phi_1 + \phi_2)} \right] + e^{-i\phi_1} \right\}$$

D'où finalement l'état de polarisation des vibrations itératives ($\ell = 1, 4$) :

$$f_\ell = i \frac{(n_1 + n_2) \alpha_\ell \sin \theta \sin \phi_1 e^{-i\phi_2}}{n_2 \left[\alpha_\ell^2 e^{-i\phi_2} - \alpha_\ell \cos \theta \left[1 + e^{-i(\phi_1 + \phi_2)} \right] + e^{-i\phi_1} \right]} \quad (3, 20) \\ \times \frac{\left[n_2 \cos \phi_2 + i n_1 \sin \phi_2 \right] \left[\alpha_\ell \cos \theta e^{-i\phi_1} - \alpha_\ell^2 \right] + n_2 \left[\alpha_\ell \cos \theta - e^{-i\phi_1} \right]}{\left[n_1 \cos \phi_1 + i n_2 \sin \phi_1 \right] \left[\alpha_\ell^2 - \alpha_\ell \cos \theta e^{-i\phi_2} \right] + n_1 \left[e^{-i\phi_2} - \alpha_\ell \cos \theta \right]}$$

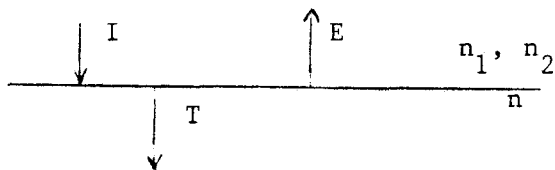
Les vibrations itératives d'une pile hélicoïdale de lames à biréfringence rectiligne sont en général elliptiques, non orthogonales ($f_1 f_2^* \neq -1$)

Leurs axes principaux ne coïncident pas avec les axes locaux de la pile. Leurs états de polarisation pour une longueur d'onde λ et un pas de torsion donnés ne dépendent que de l'épaisseur et des indices des lames.

IV - Pile finie :

Les résultats précédents ont été obtenus en supposant la pile infinie de part et d'autre des quelques lames étudiées. Soit une pile finie éclairée d'un seul côté sous l'incidence normale. Cette pile baigne dans un milieu isotrope d'indice n .

A - Dioptre séparant un milieu isotrope d'un milieu à biréfringence rectiligne



Le dioptre de sortie de la lame est éclairé sous l'incidence normale (fig. 14).

Soient n_1 et n_2 les indices de réfraction selon les lignes neutres Ox et Oy du milieu anisotrope. Les conditions de passage des composantes tangentielles des champs permettent d'écrire :

Figure 14 : Dioptre de sortie.

$$\left\{ \begin{array}{l} I_x + E_x = T_x \quad (1) \\ n_1 (I_x - E_x) = n T_x \quad (2) \\ I_y + E_y = T_y \quad (3) \\ n_2 (I_y - E_y) = n T_y \quad (4) \end{array} \right.$$

D'où les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{n_1 - n}{n_1 + n} I_x \\ T_x = \frac{2n_1}{n_1 + n} I_x \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E_y = \frac{n_2 - n}{n_2 + n} I_y \\ T_y = \frac{2n_2}{n_2 + n} I_y \end{array} \right. \quad (3, 21)$$

Ces relations constituent les conditions de passage du dioptre de sortie de la pile.

B - Conditions de couplage entre les vibrations itératives

Un état de vibration itératif résulte de l'interférence au niveau des dioptries d'une onde de type I et d'une onde de type E de composantes telles que $\frac{E_y}{I_y}$ et $\frac{E_x}{I_x}$ vérifient les relations (3, 17) et (3, 18).

L'existence du dioptre de sortie implique les valeurs particulières de $\frac{E_y}{I_y}$ et $\frac{E_x}{I_x}$ déterminées au paragraphe précédent (3, 21).

Les relations (3, 17 et 3, 18) et (3, 21) étant incompatibles, une vibration itérative ne peut exister seule dans la pile finie.

De même l'existence de deux vibrations itératives associées à des valeurs propres α ayant des arguments de signes opposés et qui semblent se propager en sens inverses dans la pile, est en général impossible car il en résulte une relation liant l'épaisseur et les indices des lames à l'indice n du milieu isotrope extérieur.

Les vibrations itératives existant dans une pile de dimension finie sont au nombre minimum de trois à condition d'éclairer la pile avec une onde d'état de polarisation convenable.

La figure 15 représente une pile finie ; seuls sont représentés la lame d'entrée et le dioptre de sortie.

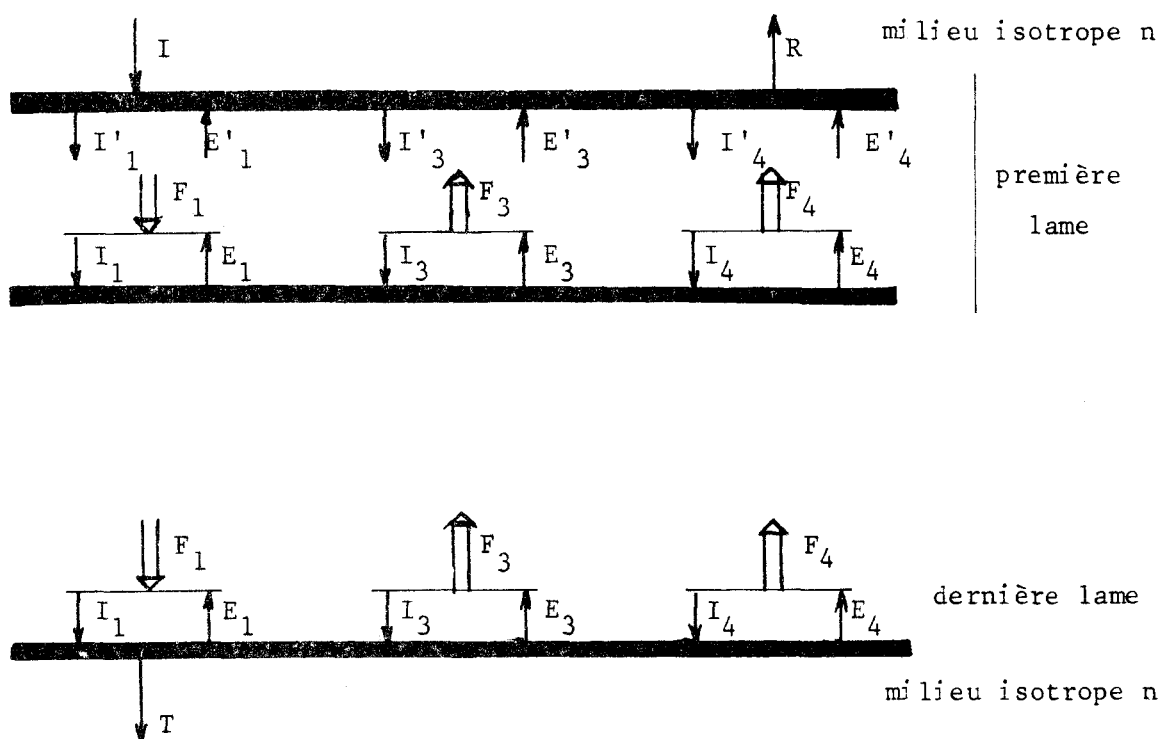


Figure 15 : Pile de dimension finie.

Les vibrations itératives F_1 , F_3 et F_4 présentes sont constituées chacune d'une répartition de champ de type I et d'une de type E vérifiant les relations (3, 17 et 3, 18).

Soient g_1 , g_3 et g_4 les états de polarisation de I_1 , I_3 et I_4 (3, 16). Au dioptre de sortie les relations (3, 21) imposent :

$$\frac{n_1 - n}{n_1 + n} = \frac{E_{x_1} + E_{x_3} + E_{x_4}}{I_{x_1} + I_{x_3} + I_{x_4}} \quad \text{et} \quad \frac{n_2 - n}{n_2 + n} = \frac{E_{y_1} + E_{y_3} + E_{y_4}}{I_{y_1} + I_{y_3} + I_{y_4}}$$

Soit, en posant $\frac{E_{x_p}}{I_{x_p}} = X_p$ et $\frac{E_{y_p}}{I_{y_p}} = Y_p$

$$\frac{n_1 - n}{n_1 + n} = \frac{X_1 + X_3 \frac{I_{x_3}}{I_{x_1}} + X_4 \frac{I_{x_4}}{I_{x_1}}}{1 + \frac{I_{x_3}}{I_{x_1}} + \frac{I_{x_4}}{I_{x_1}}} \quad (3, 22)$$

$$\frac{n_2 - n}{n_2 + n} = \frac{Y_1 + Y_3 \frac{I_{y_3}}{I_{y_1}} + Y_4 \frac{I_{y_4}}{I_{y_1}}}{1 + \frac{I_{y_3}}{I_{y_1}} + \frac{I_{y_4}}{I_{y_1}}} \quad (3, 23)$$

Les états de polarisation sont tels que :

$$\frac{I_{y_3}}{I_{y_1}} = \left(\frac{g_3}{g_1} \right) \frac{I_{x_3}}{I_{x_1}} \quad (3, 24) \quad \text{et} \quad \left(\frac{I_{y_4}}{I_{y_1}} \right) = \left(\frac{g_4}{g_1} \right) \frac{I_{x_4}}{I_{x_1}} \quad (3, 25)$$

Les relations (3,22, 3,23, 3,24, 3,25) constituent un système de quatre équations conduisant aux relations entre les amplitudes des vibrations itératives de la pile.

D'après (3,21) l'état de polarisation de l'onde transmise par la pile est :

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{(n_1 + n) n_2}{(n_2 + n) n_1} g_1 \frac{1 + Y_3 + Y_4}{1 + X_3 + X_4} \quad (3, 26)$$

Les vibrations F_1, F_3, F_4 ne sont définies qu'au niveau du dioptré séparant la première lame de la seconde (fig. 15). La traversée de la lame d'entrée impose les relations :

$$I'_P = \begin{pmatrix} e^{+i\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{+i\phi_2} \end{pmatrix} I_P \quad \text{et} \quad E'_P = \begin{pmatrix} e^{-i\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_2} \end{pmatrix} E_P$$

D'où les conditions de continuité au dioptré d'entrée :

$$I_x + R_x = e^{+i\phi_1} (I_{1x} + I_{3x} + I_{4x}) + e^{-i\phi_1} (E_{1x} + E_{3x} + E_{4x}) \quad (3, 27)$$

$$n (I_x - R_x) = n_1 \left[e^{+i\phi_1} (I_{1x} + I_{3x} + I_{4x}) - e^{-i\phi_1} (E_{1x} + E_{3x} + E_{4x}) \right] \quad (3, 28)$$

$$I_y + R_y = e^{+i\phi_2} (I_{1y} + I_{3y} + I_{4y}) + e^{-i\phi_2} (E_{1y} + E_{3y} + E_{4y}) \quad (3, 29)$$

$$n (I_y - R_y) = n_2 \left[e^{+i\phi_2} (I_{1y} + I_{3y} + I_{4y}) - e^{-i\phi_2} (E_{1y} + E_{3y} + E_{4y}) \right] \quad (3, 30)$$

En combinant les équations (3, 27) et (3, 28) :

$$2n I_x = I_{1x} \left[(n_1 + n) e^{+i\phi_1} \left(1 + \frac{I_{3x}}{I_{1x}} + \frac{I_{4x}}{I_{1x}} \right) + (n - n_1) e^{-i\phi_1} \left(X_1 + \frac{I_{x3}}{I_{x1}} X_3 + \frac{I_{x4}}{I_{x1}} X_4 \right) \right] \quad (3, 31)$$

Et en combinant les équations (3, 29) et (3, 30) :

$$2n I_y = I_{1y} \left[(n_2 + n) e^{+i\phi_2} \left(1 + \frac{I_{3y}}{I_{1y}} + \frac{I_{4y}}{I_{1y}} \right) + (n - n_2) e^{-i\phi_2} \left(Y_1 + \frac{I_{y3}}{I_{y1}} Y_3 + \frac{I_{y4}}{I_{y1}} Y_4 \right) \right] \quad (3, 32)$$

Les relations (3,22, 3,23, 3,24, 3,25) permettent de calculer $\frac{I_{x3}}{I_{x1}}$, $\frac{I_{x4}}{I_{x1}}$, $\frac{I_{y3}}{I_{y1}}$ et $\frac{I_{y4}}{I_{y1}}$. L'état de polarisation de l'onde incidente s'obtient en reportant ces valeurs dans les équations (3, 31) et (3, 32). Cet état de polarisation ne peut être quelconque si le nombre de vibrations itératives de la pile est limité à trois.

Si les conditions d'éclairage d'une pile sont quelconques, ses quatre vibrations itératives y existent. [29].

C H A P I T R E I V

QUELQUES PROPRIETES DES PILES HELICOÏDALES DE LAMES

A BIREFRINGENCE RECTILIGNE

I - Introduction

Divers auteurs [5, 7, 9, 13] ont représenté les milieux nématiques à torsion comme des édifices hélicoïdaux de lamelles infiniment minces pour expliquer qualitativement leurs propriétés optiques. C'est en particulier à partir d'un tel schéma que MAUGUIN a introduit la notion de vibration favorisée. Les mesures effectuées à l'aide d'un prisme de petit angle contenant un cholestérique d'axe de torsion perpendiculaire aux faces du prisme [30 à 34] ont montré l'existence physique des vibrations favorisées et permis la détermination de leurs indices de réfraction. C'est pourquoi, après avoir montré l'existence de vibrations itératives pour une pile hélicoïdale de lames d'épaisseur quelconque, il semble intéressant d'étudier la forme que prennent les états de polarisation de ces vibrations et leurs indices de propagation (3, 14) quand l'épaisseur des lames diminue et tend vers zéro.

Soit p le pas de torsion de la pile. L'angle de rotation θ entre deux lames consécutives est lié à l'épaisseur e d'une lame par la relation :

$$\theta = \frac{2\pi e}{p}$$

Soient ϕ_1 et ϕ_2 les déphasages subis par les vibrations privilégiées selon chaque ligne neutre d'une lame :

$$\phi_1 = \frac{2\pi n_1 e}{\lambda} \qquad \phi_2 = \frac{2\pi n_2 e}{\lambda}$$

Si l'épaisseur e des lames d'une pile, à pas de torsion p constant, tend vers zéro, les angles θ , ϕ_1 , ϕ_2 deviennent infiniment petits et leurs lignes trigonométriques s'écrivent, en se limitant à l'ordre six :

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{2\Pi^2 e^2}{p^2} + \frac{2\Pi^4}{3p^4} e^4 - \frac{4}{45} \frac{\Pi^6}{p^6} e^6 \\ \sin \theta &= \frac{2\Pi e}{p} - \frac{4\Pi^3 e^3}{3p^3} + \frac{4\Pi^5}{15p^5} e^5 \\ \cos \phi_{1,2} &= 1 - \frac{2\Pi^2 e^2}{\lambda^2} n_{1,2}^2 + \frac{2\Pi^4 e^4}{3\lambda^4} n_{1,2}^4 - \frac{4\Pi^6 e^6}{45\lambda^6} n_{1,2}^6 \\ \sin \phi_{1,2} &= \frac{2\Pi e}{\lambda} n_{1,2} - \frac{4\Pi^3 e^3}{3\lambda^3} n_{1,2}^3 + \frac{4\Pi^5 e^5}{15\lambda^5} n_{1,2}^5 \end{aligned} \right. \quad (4, 0)$$

II - Indices complexes de réfraction des vibrations itératives d'une pile de lames très minces

Les valeurs propres de $[M]$ sont obtenues en résolvant simultanément les équations (3, 9') et (3, 10). Si Δ est le discriminant de l'équation, les solutions de (3, 9') s'écrivent :



$$y = \cos \theta (\cos \phi_1 + \cos \phi_2) \pm \sqrt{\Delta} \quad (4, 1)$$

$$\text{où } \Delta = \cos^2 \theta \left[\cos \phi_1 + \cos \phi_2 \right]^2 - 2 \left[(\cos^2 \theta + 1) \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \dots \right. \\ \left. \dots - \sin^2 \theta \left(1 + \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1 n_2} \sin \phi_1 \sin \phi_2 \right) \right]$$

L'équation (3, 10) conduit aux valeurs propres :

$$\alpha = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad (4, 2)$$

Δ peut s'exprimer sous forme d'un développement limité à l'ordre 6 et $\cos \theta (\cos \phi_1 + \cos \phi_2)$ sous forme d'un développement limité à l'ordre 4 :

$$\Delta = \left[\frac{32\Pi^4}{\lambda^2 p^2} (n_1^2 + n_2^2) + \frac{4\Pi^4}{\lambda^4} (n_1^2 - n_2^2)^2 \right] e^4 \\ - \left[\frac{8\Pi^6}{3\lambda^6} (n_1^2 + n_2^2) (n_1^2 - n_2^2)^2 + \frac{32\Pi^6}{\lambda^4 p^2} (n_1^4 + n_2^4) + \frac{128\Pi^6}{3\lambda^2 p^4} (n_1^2 + n_2^2) + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{64\Pi^6}{3\lambda^4 p^2} n_1^2 n_2^2 \right] e^6 + O(e^8) \quad (4, 3)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta (\cos \phi_1 + \cos \phi_2) &= 2 - \left[\frac{4\Pi^2}{p^2} + \frac{2\Pi^2 (n_1^2 + n_2^2)}{\lambda^2} \right] e^2 \\ &+ \left[\frac{4\Pi^4}{3p^4} + \frac{4\Pi^4 (n_1^2 + n_2^2)}{\lambda^2 p^2} + \frac{2\Pi^4 (n_1^4 + n_2^4)}{3\lambda^4} \right] e^4 + O(e^6) \end{aligned} \quad (4, 4)$$

Les développements de Δ et $\cos \theta (\cos \phi_1 + \cos \phi_2)$ ne comportant que des termes d'ordre pair en e , le développement limité à l'ordre quatre des solutions y_1 et y_2 (4, 1) de l'équation (3, 9') ne comporte que des termes d'ordre pair en e :

$$\begin{aligned} y &= 2 - \left[\frac{4\Pi^2}{p^2} + \frac{2\Pi^2 (n_1^2 + n_2^2)}{\lambda^2} \mp \sqrt{\frac{32\Pi^4}{\lambda^2 p^2} (n_1^2 + n_2^2) + \frac{4\Pi^4}{\lambda^4} (n_1^2 - n_2^2)^2} \right] e^2 \\ &+ \left[\left(\frac{4\Pi^4}{3p^4} + \frac{4\Pi^4}{\lambda^2 p^2} (n_1^2 + n_2^2) + \frac{2\Pi^4 (n_1^4 + n_2^4)}{3\lambda^4} \right) \right] \end{aligned} \quad (4, 5)$$

$$\left[\frac{\left(\frac{8\Pi^6}{3\lambda^6} (n_1^2 + n_2^2) (n_1^2 - n_2^2)^2 + \frac{32\Pi^6}{\lambda^4 p^2} (n_1^4 + n_2^4) + \frac{128\Pi^6}{3\lambda^2 p^4} (n_1^2 + n_2^2) + \frac{64\Pi^6}{3\lambda^4 p^2} n_1^2 n_2^2 \right)}{2 \sqrt{\frac{32\Pi^4}{\lambda^2 p^2} (n_1^2 + n_2^2) + \frac{4\Pi^4}{\lambda^4} (n_1^2 - n_2^2)^2}} \right] e^4 + O(e^6)$$

Pour simplifier l'écriture, soit :

$$y = 2 - A e^2 + B e^4 + O(e^6) \quad (4, 5')$$

En élevant les deux membres de (4, 5') au carré et en se limitant aux termes d'ordre quatre en e , il vient :

$$\sqrt{y^2 - 4} = \sqrt{-4A e^2 + (A^2 + 4B) e^4} = 2i \sqrt{A} e \sqrt{1 - \frac{A^2 + 4B}{4A} e^2} + O(e^5)$$

Le développement limité de $\sqrt{y^2 - 4}$ ne comporte que des termes d'ordre impair en e . D'où le développement limité à l'ordre quatre des valeurs propres α (4, 2) :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[2 - A e^2 + B e^4 \pm 2i \sqrt{A} e \left(1 - \frac{A^2 + 4B}{8A} e^2 \right) \right] + O(e^5)$$

Soit encore :

$$\alpha = 1 \pm i \sqrt{A} e - \frac{A}{2} e^2 \mp i \frac{A^2 + 4B}{8\sqrt{A}} e^3 + \frac{B}{2} e^4 + O(e^5) \quad (4, 6)$$

Les valeurs propres telles qu'elles ont été définies (3, 13), dépendent de l'épaisseur des lames de la pile. Soit :

$$\alpha_{(e)} = e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} v_{(e)}} \cdot e$$

Pour $e = 0$, la valeur propre correspondante $\alpha_{(0)}$ est égale à 1. Le développement valable quand $e \rightarrow 0$:

$$\alpha_{(e)} - \alpha_{(0)} = e \left(\frac{d\alpha}{de} \right)_{(0)} + \frac{e^2}{2!} \left(\frac{d^2\alpha}{de^2} \right)_{(0)} + \frac{e^3}{3!} \left(\frac{d^3\alpha}{de^3} \right)_{(0)} + \dots$$

s'écrit alors :

$$\alpha_{(e)} = 1 - i \frac{2\pi}{\lambda} v_{(0)} e - \left[i \frac{4\pi}{\lambda} \left(\frac{dv}{de} \right)_{(0)} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} v_{(0)}^2 \right] \frac{e^2}{2!} - \left[+ i \frac{6\pi}{\lambda} \left(\frac{d^2v}{de^2} \right)_{(0)} + \frac{24\pi^2}{\lambda^2} v_{(0)} \left(\frac{dv}{de} \right)_{(0)} - i \frac{8\pi^3}{\lambda^3} v_{(0)}^3 \right] \frac{e^3}{3!} + \dots \quad (4, 7)$$

(4, 7) équivaut à écrire le développement limité de $v_{(e)}$ quand $e \rightarrow 0$:

$$v_{(e)} = v_{(0)} + e \left(\frac{dv}{de} \right)_{(0)} + \frac{e^2}{2!} \left(\frac{d^2v}{de^2} \right)_{(0)} + \frac{e^3}{3!} \left(\frac{d^3v}{de^3} \right)_{(0)} + \dots \quad (4, 8)$$

Les différents termes de $v_{(e)}$ quand e tend vers zéro sont déterminés par identification des termes de même ordre en e des développements (4, 6) et (4, 7) de α .

Termes du premier ordre en e :

$$- i \frac{2\pi}{\lambda} v_{(0)} = \pm i\sqrt{A} \implies v_{(0)}^2 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} A \quad (4, 9)$$

La comparaison des termes du second ordre et la réalité du coefficient A (4, 5') imposent que :

$$\left(\frac{dv}{de} \right)_{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad - \frac{A}{2} = - \frac{2\pi^2}{\lambda^2} v_{(0)}^2 \quad (4, 10)$$

Ce résultat est équivalent à (4, 9). La comparaison des termes du troisième ordre en e permet d'écrire :

$$- \frac{1}{3!} \left[i \frac{6\pi}{\lambda} \left(\frac{d^2v}{de^2} \right)_{(0)} - i \frac{8\pi^3}{\lambda^3} v_{(0)}^3 \right] = \mp i \frac{A^2 + 4B}{8\sqrt{A}}$$

Soit avec (4, 9) :

$$-i \frac{\Pi}{\lambda} \left(\frac{d^2 v}{de^2} \right)_{(0)} \mp i \frac{A^{3/2}}{6} = \mp i \frac{A^{3/2}}{8} \mp i \frac{B}{2\sqrt{A}}$$

D'où :

$$\left(\frac{d^2 v}{de^2} \right)_{(0)} = \pm \left(\frac{3B - A^2}{8\sqrt{A}} \right) \quad (4, 11)$$

(4, 9), (4, 10) et (4, 11) permettent de mettre $v(e)$ sous la forme :

$$v(e) = v(0) \pm \frac{3B - A^2}{8\sqrt{A}} e^2 \quad (4, 12)$$

Quand $e = 0$, c'est-à-dire quand le milieu est continu, les vibrations itératives sont définies en tout point : ce sont les vibrations favorisées définies par MAUGUIN. La valeur constante $v(0)$ que prend $v(e)$ pour $e = 0$, indice de propagation des vibrations favorisées dans un milieu continu de même torsion que la pile, est donnée par (4, 9) :

$$v_{(0)}^2 = \frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} (n_1^2 - n_2^2) + \frac{2\lambda^2}{p^2} (n_1^2 + n_2^2)} \quad (4, 13)$$

C'est la relation établie par MAUGUIN [7] pour les milieux nématiques à torsion considérés comme continus.

III - Etats de polarisation des vibrations itératives d'une pile de lames très minces

L'équivalence de (4, 9) et (4, 10) signifie que le développement de $\alpha(e)$ coïncide avec celui de $e^{-\frac{2\Pi}{\lambda}} i v(0) e$ jusqu'au second ordre inclus. Pour l'étude des états de polarisation quand $e \rightarrow 0$, α peut donc être écrit sous la forme :

$$\alpha = 1 - i \frac{2\Pi}{\lambda} v_0 e - \frac{4\Pi^2}{\lambda^2} v_0^2 e^2.$$

En considérant la forme (3, 19) de l'état de polarisation f des vibrations itératives F , N_1 peut être mis sous forme d'un développement limité :

$$N_1 = - \frac{32\Pi^4}{\lambda^4} n_2 \left[(v_0 - n_1)^2 - \frac{\lambda^2}{p^2} \right] \left[v_0^2 + v_0 (n_1 - n_2) - n_1 n_2 - \frac{\lambda^2}{p^2} \right]$$

De même D_1 peut s'écrire :

$$D_1 = \frac{32\pi^4}{\lambda^4} n_1 \left[(v_o - n_2)^2 - \lambda^2/p^2 \right] \left[v_o^2 - v_o (n_1 - n_2) - n_1 n_2 - \lambda^2/p^2 \right]$$

D'autre part, l'état de polarisation $\frac{I_y}{I_x}$ devient quand e tend vers zéro :

$$\left(\frac{I_y}{I_x} \right)_{e \rightarrow 0} = -i \frac{n_1}{n_2} x \frac{(n_1 + n_2) \lambda/p}{\left[v_o^2 + v_o (n_1 - n_2) - n_1 n_2 - \lambda^2/p^2 \right]}$$

D'où l'état de polarisation des vibrations itératives quand e tend vers zéro :

$$(f)_{e \rightarrow 0} = i \frac{(n_1 + n_2) \lambda/p \left[(v_o - n_1)^2 - \lambda^2/p^2 \right]}{\left[(v_o - n_2)^2 - \lambda^2/p^2 \right] \left[v_o^2 - v_o (n_1 - n_2) - n_1 n_2 - \lambda^2/p^2 \right]}$$

Le dénominateur de f est une expression de degré quatre en v_o qu'on peut réduire en la comparant à l'équation aux indices v_o [7]. Finalement f se met sous la forme :

$$f = \frac{i \lambda/p (n_1 + n_2) \left[(v_o - n_1)^2 - \lambda^2/p^2 \right]}{\frac{n_1 + n_2}{2v_o} \left[(v_o - n_1)^2 - \lambda^2/p^2 \right] \left[n_2^2 - v_o^2 - \lambda^2/p^2 \right]} = i \frac{2v_o \lambda/p}{n_2^2 - v_o^2 - \lambda^2/p^2} \quad (4, 14)$$

C'est la forme établie par MAUGUIN [7] pour les états de polarisation des favorisées des nématiques à torsion considérés comme continus.

Quand les lames de la pile deviennent très minces, les vibrations itératives coïncident avec les vibrations favorisées du milieu à torsion continue de même pas. En effet, les vibrations itératives, comme les vibrations favorisées calculées à partir des équations de Maxwell, représentent la répartition effective de champ au point considéré du milieu.

Si les axes des vibrations itératives ne coïncident pas en général avec les lignes neutres des lames (chapitre III, II), ils coïncident avec celles-ci quand l'équation des lames tend vers zéro.

IV - Discussion

A - Théories des propriétés optiques des nématiques torsadés

MAUGUIN [7] montre dès 1911 que les propriétés optiques [6], [1] des nématiques torsadés dépendent essentiellement de la torsion spécifique λ/p du

milieu. Cependant, la méthode de la sphère de POINCARÉ qu'il emploie ne permet pas d'expliquer le phénomène de diffusion sélective connue depuis REINITZER [2].

Pour expliquer ce phénomène Hl. DE VRIES [9] calcule les états de polarisation et les indices de propagation des vibrations favorisées des nématiques torsadés en supposant la torsion continue. La méthode, déjà employée par MAUGUIN [7], consiste à écrire dans un référentiel mobile lié au milieu les équations de Maxwell et le tenseur des propriétés diélectriques. Les vibrations favorisées sont les ondes qui se propagent en conservant même état de polarisation par rapport au référentiel mobile. BILLARD [10] étudiant les résultats fournis par cette méthode montre que pour une torsion spécifique λ/p comprise entre les indices n_1 et n_2 du milieu non torsadé, une des vibrations favorisées du milieu a un indice de réfraction imaginaire pur.

On a donc affaire à une oscillation évanescence. L'énergie correspondante est renvoyée du même côté de la préparation que la vibration incidente sous forme d'une vibration circulaire de même sens que l'incidente.

Les états de polarisation et les indices de propagation des vibrations favorisées des milieux nématiques torsadés calculés par MAUGUIN, DE VRIES et BILLARD sont identiques à ceux fournis par les expressions [4, 3] et [4, 14] obtenues en considérant les nématiques torsadés comme des édifices hélicoïdaux de lamelles biréfringentes d'épaisseur infiniment petite à condition de tenir compte de toutes les réflexions aux dioptries. Ces réflexions sont donc à l'origine de l'écart à l'orthogonalité des vibrations favorisées ; elles sont aussi à l'origine du phénomène de diffusion sélective ainsi que l'ont pressenti DE VRIES [9] et CHANDRASEKHAR [13]. Ce dernier explique en particulier de la manière suivante le sens de polarisation anormal de la lumière réfléchie. Si un faisceau incident de lumière polarisée circulaire droite (par exemple) se réfléchit sur un miroir, chaque composante subit un même déphasage Π à la réflexion, la lumière réfléchie est polarisée circulaire gauche par rapport à la nouvelle direction de propagation. Soit maintenant une pile hélicoïdale de lames biréfringentes d'indices $n_1 > n_2$ et un faisceau de lumière polarisée circulaire droite émergent de la lame k qui tombe sur la lame $k + 1$. La composante qui se propage avec l'indice n_1 dans la lame k rencontre dans la lame $k + 1$ un milieu d'indice inférieur, tandis que celle se propageant avec l'indice n_2 dans la lame k rencontre un milieu d'indice supérieur. Cette dernière composante subit donc seule un déphasage de Π par réflexion et la lumière réfléchie est polarisée circulaire droite par rapport à la direction de propagation. Par

rapport à un repère fixe lumière incidente et lumière réfléchie sont donc polarisées en sens inverses.

B - Equivalence entre piles de lames et milieux à torsion continue

1) Quelques résultats numériques

Combien de lames par pas une pile doit elle comporter pour que ses propriétés optiques soient les mêmes, à une approximation donnée, que celles d'un milieu à torsion continue de mêmes indices et même pas de torsion ?

Le tableau (16) donne les indices de réfraction et les ellipticités des vibrations itératives calculés à partir des formules (3, 14) et (3, 20).

$$\eta = \frac{1}{2} \text{Arc sin } 2i \frac{pif}{p + ff^*} \quad (1, 0) \quad .$$

Nombre de lames dans le pas	1	2	3	4	5	6	10	50
Indices de réfraction des itératives	1,5998	1,5998	0,5978	0,5972	0,5977	0,5978	0,5976	0,5976
	1,5955	1,5955	2,5974	0,5972	2,5978	2,5978	2,5976	2,5976
Ellipticités des itératives	rectilignes		- 44°51'	- 44°52'	- 44°51'	- 44°51'	- 44°51'	- 44°51'
			44°50'	44°52'	44°37'	44°58'	44°58'	44°58'

Tableau 16 : Indices de réfraction et ellipticités des vibrations itératives pour $\lambda/Ne = 1$.

Indices d'une lame $n_1 = 1,5998$ $n_2 = 1,5955$.

Si e est l'épaisseur d'une lame et N le nombre de lames dans le pas p la valeur du pas de la pile est $p = Ne$.

Pour les cas où la pile comporte une ou deux lames dans le pas, les lignes neutres de même nom des lames coïncident ; les vibrations itératives sont les vibrations rectilignes privilégiées des lames et se propagent avec les indices de réfraction n_1 et n_2 .

Pour un milieu biréfringent d'indices (choisis arbitrairement) $n_1 = 1,5998$ et $n_2 = 1,5955$ auquel est imposée une torsion continue telle que $\lambda/p = 1$, les vibrations favorisées définies par MAUGUIN sont des vibrations d'ellipticités 44°58' et 44°51' se propageant avec les indices 0,5976 et 2,5976. Toutes les valeurs d'angles sont données à 1' près.

Le tableau (16) montre que pour le cas particulier envisagé un minimum de six lames dans le pas est nécessaire pour avoir équivalence à $5 \cdot 10^{-4}$ près entre pile de lames et milieu à torsion continue. Quand le nombre de lames dans le pas croît, c'est-à-dire quand l'épaisseur des lames diminue, les caractéristiques des vibrations itératives (indices de réfraction et ellipticités) tendent uniformément vers celles des vibrations favorisées définies par MAUGUIN.

2) Remarques sur le résultat précédent :

Le cas étudié est celui de l'équivalence avec un milieu à torsion continue telle que $\lambda/p = 1$. Si la pile équivalente comporte au minimum six lames dans le pas p , les lames ont une épaisseur maximale de $0,1 \mu\text{m}$ dans le domaine des longueurs d'ondes optiques. Les états de polarisation et les indices de réfraction des vibrations itératives sont des fonctions des lignes trigonométriques de θ , angle entre les lignes neutres de même nom de deux lames consécutives, et de ϕ_1 et ϕ_2 , déphasages subis par les vibrations privilégiées de chaque lame lors de la traversée de cette lame. Une modification de l'épaisseur des lames telle que ϕ_1 et ϕ_2 deviennent $\phi_1 + 2k_1\pi$ et $\phi_2 + 2k_2\pi$ laisse donc ces états de polarisation et ces indices de réfraction inchangés. Soit E la valeur dont peut être augmentée l'épaisseur de chaque lame. Elle est telle que :

$$\frac{2\pi n_1 E}{\lambda} = 2k_1\pi \quad \text{et} \quad \frac{2\pi n_2 E}{\lambda} = 2k_2\pi$$

L'épaisseur E est multiple d'une épaisseur onde pour la radiation de longueur d'onde λ dans le vide :

$$E = (k_1 - k_2) \frac{\lambda}{n_1 - n_2} \quad (4, 15)$$

La pile obtenue comportant N lames par pas a alors un pas $P = N(E + e)$ soit $P = NE + p$.

Avec des lames biréfringentes d'épaisseur voisine de l'épaisseur E définie ci-dessus (4, 15), il est donc théoriquement possible d'observer en fonction de la valeur de λ/P [10], les phénomènes prévus pour les nématiques torsadés.

3) Quelques réalisations expérimentales possibles :

Les remarques ci-dessus montrent que si un pas de la pile comporte au moins six lames, la pile de lames discrète est pratiquement équivalente, pour $\lambda/P = 1$, à un milieu à torsion continue.

Les piles hélicoïdales de lames peuvent aussi être étudiées dans le domaine des longueurs d'onde hertziennes. Quelques réalisations [35, 36, 37] de piles hélicoïdales de lames ont été proposées dans ce domaine de longueurs d'onde. Les principales propriétés optiques des nématiques à torsion étant observées pour des valeurs de la torsion spécifique λ/P comprises entre 0 et 3 [10], l'emploi de grandes longueurs d'onde permet de donner aux lames des épaisseurs facilement réalisables.

Le phénomène de diffusion sélective se produit pour des valeurs de λ/p comprises entre celles des indices de réfraction du milieu non torsadé, c'est-à-dire pour des valeurs de λ/p comprises entre 1 et 2 dans le domaine des longueurs d'onde optiques. Soit un cristal possédant un axe de symétrie hélicoïdal. S'il existe plusieurs sortes d'atomes dans des plans perpendiculaires à cet axe, il peut en résulter des polarisabilités différentes dans deux directions perpendiculaires des plans perpendiculaires à l'axe.

Ce cristal réalise ainsi une pile hélicoïdale de couches biréfringentes. Un axe d'ordre trois ou six conduit alors à une pile comportant trois ou six lames dans le pas. Il serait intéressant d'étudier les ondes transmises et réfléchies par de tels cristaux dans le domaine des rayons X tels que λ/p soit voisin de 1.

4) Possibilité d'existence de plusieurs domaines de diffusion sélective avec une pile de lames à biréfringence rectiligne

Au chapitre 3 l'existence de divers types de vibrations itératives pouvant exister dans la pile a été discutée. Les courbes des figures (13 a, b, c, d) montrent que tous les cas envisagés sont possibles.

En particulier les domaines dans lesquels $f(2)$ ou $f(-2)$ sont négatifs correspondent à des valeurs propres réelles associées à des vibrations itératives à phase constante analogues à des oscillations évanescentes. Tout se passe donc comme dans le cas de la diffusion sélective où l'énergie correspondant à l'oscillation évanescence est renvoyée du même côté de la préparation que la vibration incidente.

Soit une pile hélicoïdale de lames à biréfringence rectiligne. Si n_1 et n_2 sont les indices de réfraction des vibrations privilégiées d'une lame, les angles de déphasage subis par chacune de ces vibrations lors de la traversée de la lame sont tels que :

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (3, 8)$$

L'équation (3, 8) représente, dans le diagramme (ϕ_1, ϕ_2) , une droite passant par l'origine et de pente $\frac{n_2}{n_1}$. Si cette pente est suffisante, la droite représentative de $\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{n_2}{n_1}$ coupe les domaines où $f(2)$ et $f(-2)$ sont négatifs.

Puisque $\phi_1 = \frac{2\pi n_1 e}{\lambda}$ et $\phi_2 = \frac{2\pi n_2 e}{\lambda}$, une variation continue de la longueur d'onde équivaut à un déplacement sur la droite $\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{n_2}{n_1}$ dans le diagramme (ϕ_1, ϕ_2) quand la dispersion des indices est négligée. Quand le point de coordonnées ϕ_1 et ϕ_2 se trouve dans un domaine dans lequel $f(2)$ ou $f(-2)$ est négatif, la vibration de longueur d'onde λ correspondante subit le phénomène de diffusion sélective.

Il faut donc s'attendre à l'existence, d'une série de domaines de diffusion sélective avec des lames de biréfringence suffisamment élevée.

Pour les valeurs de θ inférieures à 30° un seul domaine de diffusion sélective a une largeur notable, ce qui doit conduire pratiquement à l'existence d'une seule bande de diffusion sélective.

Par contre pour les valeurs de θ élevées (figure 13 d) les segments délimités par les domaines de diffusion sélective sur la droite $\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{n_2}{n_1}$ ont des longueurs équivalentes, au moins en ce qui concerne les quatre domaines représentés. Il faut donc s'attendre alors à l'existence de bandes multiples de diffusion sélective de largeurs sensiblement identiques et espacées de manière approximativement régulière. Expérimentalement ce dernier fait pourrait être interprété, à tort, comme la preuve de l'existence de domaines de diffusion sélective d'ordres 1, 2, etc...

Dans le diagramme (ϕ_1, ϕ_2) , les lames demi-ondes telles que : $|\phi_1 - \phi_2| = k\pi$ sont représentées par les points des droites parallèles à la première bissectrice et coupant les axes de coordonnées en $\phi_1 = k\pi$ et $\phi_2 = k\pi$. Ces droites ne coupent pas les domaines de diffusion sélective. Quel que soit l'angle θ entre les lignes neutres de même nom des lames, une pile de lames demi-onde pour une radiation donnée ne peut pas présenter le phénomène de diffusion sélective pour cette radiation.

5) Incidence oblique sur les piles hélicoïdales de lames biréfringentes

Soit une pile de lames uniaxes taillées parallèlement à l'axe et éclairées sous l'incidence oblique. A chaque dioptre, chaque onde se décompose en une onde extraordinaire et une onde ordinaire. Toutes les ondes ordinaires ont même direction d'isophasse. Les directions d'isophases des ondes extraordinaires varient d'une lame à la suivante. Les rayons ordinaires ont tous même direction mais il n'en est pas de même des rayons extraordinaires qui en général sortent du plan d'incidence.

Soit une pile de lames uniaxes non parallèles à l'axe et éclairées sous l'incidence normale. Les surfaces isophases des ondes ordinaires et extraordinaires sont parallèles aux dioptres. Les rayons ordinaires ne sont pas déviés. Les rayons extraordinaires ont même inclinaison par rapport à l'axe de torsion de la pile. Un rayon extraordinaire a pour forme une courbe constituée de segments de droites égaux dont les extrémités se trouvent sur une hélice circulaire dont l'axe est normal aux dioptres. Cette courbe tend vers l'hélice quand l'épaisseur des lames tend vers zéro.

Soit une pile de lames uniaxes non parallèles à l'axe éclairées sous l'incidence oblique. Toutes les ondes ordinaires ont même direction d'isophasse. Les rayons ordinaires ont tous même direction. Les directions d'isophases des ondes extraordinaires varient d'une lame à l'autre.

Dans le cas de l'incidence normale sur des lames taillées dans un milieu biaxe (cas des smectiques de type C torsadés) (38, 39), chaque onde privilégiée se divise en deux nouvelles ondes privilégiées au niveau de chaque dioptre. Les surfaces isophases sont parallèles aux dioptres.

Enfin, dans le cas de l'incidence oblique sur une pile de lames biaxes, il y a division de chaque onde privilégiée en deux ondes privilégiées au niveau de chaque dioptre. Les directions d'isophases de ces ondes varient d'un dioptre à l'autre.

Ces quelques remarques inspirées par l'équivalence entre piles de lames et milieu continu permettent de mieux comprendre les difficultés d'étude théorique des milieux biréfringents et torsadés éclairés sous l'incidence oblique.

V - Applications du formalisme

A - Cas des milieux biréfringents inactifs torsadés

Le formalisme présenté a été développé en considérant exclusivement des lames à biréfringence rectiligne ce qui revient à négliger les termes de dispersion spatiale du premier ordre qui rendent compte de l'activité optique de type naturel [40]. Une éventuelle anisotropie magnétique n'a pas non plus été envisagée. Par conséquent, ce formalisme s'applique essentiellement aux milieux biréfringents inactifs à torsion. Il faut citer parmi ceux-ci les nématiques torsadés obtenus par insertion entre les deux lèvres d'un clivage cristallin et les cristaux uniaxes soumis à une torsion d'axe perpendiculaire à leur axe optique [41]. EWELL [42] signale qu'il est possible d'expliquer les propriétés optiques des cylindres de gélatine torsadés à l'aide de la théorie incomplète de MALLARD [43] des piles de lamelles biréfringentes.

Certains échantillons de chlorate de potassium ($KClO_3$) [44] ou de phosphate monopotassique (KH_2PO_4) [45] ont des propriétés optiques présentant certaines analogies avec le phénomène de diffusion sélective. RAYLEIGH [44] suggère de rechercher l'origine des propriétés optiques de ces échantillons de chlorate de potassium dans les réflexions aux nombreux dioptries existant dans le milieu. HILL, HERMANN et ICHICKI [45] ont montré d'autre part qu'en portant à une température inférieure à leur température de Curie certains cristaux de phosphate monopotassique on obtient des édifices constitués d'un arrangement périodique de lamelles uniaxes d'égale épaisseur et d'orientations alternativement différentes. Ils proposent aussi d'expliquer les propriétés optiques de ces objets par les réflexions multiples aux divers dioptries de la pile.

A. KASTLER [46] suggère de conférer une anisotropie hélicoïdale à certains milieux matériels en les soumettant à un champ électromagnétique stationnaire hélicoïdal. Les milieux obtenus seraient à ranger dans la même catégorie de corps biréfringents inactifs à torsion.

B - Cas des milieux biréfringents actifs torsadés

D'autres milieux biréfringents et torsadés, possèdent en outre de l'activité optique. Les phases smectiques de type C [47] ou nématiques de corps achiraux additionnés d'une substance chirale, les phases cholestériques et les phases smectiques C de corps chiraux sont à ranger dans cette catégorie de corps biréfringents actifs torsadés.

Pour les milieux mésomorphes torsadés actifs et pour les longueurs d'onde telles que $\lambda/P < 1$ [4], le pouvoir rotatoire dû à l'activité optique est considérablement inférieur au pouvoir rotatoire dû à la structure torsadée, ce qui justifie qu'il soit négligé dans l'étude de la propagation des ondes le long de l'axe de torsion.

Les enroulements hélicoïdaux de corps cristallisés à partir de solutions dont l'un des constituants est actif [48 à 53] sont peut être aussi des corps biréfringents à torsion et actifs.

Le formalisme développé dans les chapitres précédents constitue une étude approchée des propriétés optiques des milieux biréfringents actifs à torsion, quand le pouvoir rotatoire dû à la dispersion spatiale est faible devant celui imposé par la structure. Une étude correcte des propriétés optiques de ces milieux consisterait à traiter le problème d'une pile de lames biréfringentes actives pour juger des rôles respectifs des termes de dispersion spatiale et de la torsion de la pile.

CONCLUSION

L'étude des vibrations propres d'une pile de deux lames à biréfringence rectiligne a montré l'influence importante des réflexions aux dioptries sur les états de polarisation des vibrations existant dans une pile de lames. La non-orthogonalité des vibrations propres n'a pu être vérifiée expérimentalement mais cet échec conduit à envisager la réalisation d'un nouveau type de monochromateur dérivé d'un appareil Fabry - Pérot ainsi que celles de nouveaux types de micromètre et de réfractomètre. L'existence de vibrations itératives a été établie pour une pile hélicoïdale de lames à biréfringence rectiligne d'épaisseur finie. Les états de polarisation de ces vibrations ne dépendent que de l'épaisseur des lames, de la longueur d'onde incidente, du pas de torsion de la pile et des indices de réfraction des lames. Les vibrations itératives ne sont pas orthogonales si toutes les réflexions aux dioptries sont prises en compte. Un indice de réfraction fonction de l'épaisseur des lames peut leur être associé.

La convergence des résultats avec ceux fournis par l'étude des milieux biréfringents torsadés considérés comme continus montre que l'origine de la diffusion sélective réside dans les réflexions internes multiples.

Le calcul prévoit la possibilité d'observer les propriétés optiques des nématiques à torsion avec une pile de lames biréfringentes d'épaisseur finie.

L'existence d'une série de domaines de diffusion sélective est prévue pour des piles hélicoïdales de lames fortement biréfringentes.

Le calcul suggère d'autre part l'existence d'un phénomène de diffusion sélective pour certaines structures cristallines dans le domaine des rayons X.

L'étude, avec le même formalisme, des piles hélicoïdales de lames biréfringentes et actives permettra de déterminer les influences respectives de la dispersion spatiale et de la torsion sur le pouvoir rotatoire.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] G. FRIEDEL et F. GRANDJEAN Bull. Soc. fr. Min. 33, 192 - 239 (1910).
- [2] F. REINITZER Monatschef. Chem. 9, 421 - 41 (1888).
- [3] G. FRIEDEL Ann. de Phys. IX 8, 273 - 474 (1922).
- [4] R. CANO Thèse - Montpellier (1966).
- [5] J.S. PRASAD Thèse - Mysore (1971).
- [6] F. STUMPF Phys. Z. 11, 780 - 4 (1910).
- [7] Ch. MAUGUIN Bull. Soc. fr. Min. Crist. 34, 71 - 117 (1911).
- [8] C.W. OSEEN Trans. Faraday Soc. 29, 883 - 99 (1933).
- [9] H.L. DE VRIES Acta Cryst. 4, 219 - 26 (1951).
- [10] J. BILLARD Molec. Cryst. 3, 227 - 40 (1967).
- [11] E. REUSCH Ann. der Phys. and Chem. V 18, 628 - 38 (1869).
- [12] BERTIN Ann. de Chi. et de Phys. IV 20, 207 - 15 (1870).
- [13] S. CHANDRASEKHAR et K.N. SRINIVASA RAO Acta Cryst. A 24, 445 - 51 (1968).
- [14] H. POINCARÉ Théorie Math. de la lumière II Carré, Paris 275 - 85 (1892).
- [15] F. ARAGO et A. FRESNEL Ann. de Chi. et de Phys. II 10, 228 - 305 (1819).
- [16] A. FRESNEL Ann. de Chi. et de Phys. II 7, 80 - 102, 167 - 96 et 312 - 5 (1821).
- [17] G.B. AIRY Trans. Cambridge Phil. Soc. 4, 79 - 123 et 199 - 208 (1833).
- [18] G. FRIEDEL C.R. Acad. Sci. 116, 272 - 4 (1893).
- [19] J. MACE DE LEPINAY J. Phys. 9, p. 585 - 8 (1900).
- [20] J. KATZENSTEIN J. Opt. Soc. Am. 58, 1348 - 55 (1968).
- [21] J. KATZENSTEIN et S. WARD App. Opt. 10, 1119 - 24 (1971).
- [22] R.C. JONES J. Opt. Soc. Am. 38, 671 - 85 (1948).

- [23] Ch. MAUGUIN Bull. Soc. fr. Min. Crist. 34, 6 - 15 (1911).
- [24] M. BORN et E. WOLF Principles of Optics, Pergamon Press, London p. 66 (1964).
- [25] A. HERPIN C.R. Acad. Sci. 225, 182 - 3 (1947).
- [26] C. DUFOUR et A. HERPIN Rev. Opt. 32, 321 - 48 (1953).
- [27] F. ABELES Ann. de Phys. 5, 596 - 640 et 706 - 781 (1950).
- [28] R. JACOBSON Ark. för Fys. 31, 191 - 200 (1966).
- [29] A.S. MARATHAY J. Opt. Soc. Am. 61, 1363 - 72 (1971).
- [30] O. PELLET et P. CHATELAIN Bull. Soc. fr. Min. Crist. 73, 154 - 72 (1950).
- [31] P. CHATELAIN et M. GERMAIN C.R. Acad. Sci. 259 C, 127 - 30 (1964).
- [32] P. CHATELAIN et J.C. MARTIN C.R. Acad. Sci. 268 C, 758 - 60 (1969).
- [33] M. BRUNET et J.C. MARTIN Mol. Cryst. and liq. Cryst. 2, 289 - 303 (1970).
- [34] M. BRUNET - GERMAIN C.R. Acad. Sci. 271 B, 1075 - 77 (1970).
- [35] R.E. COLLIN I.R.E. Trans. M.T.T.6, 206 - 9 (1958).
- [36] R.E. VAN DÛEREN I.E.E. M.T.T.14, 106 - 11 (1966).
- [37] C. GLENDON et Mc. COFMICK I.E.E. M.T.T.15, 443 - 50 (1967).
- [38] B. CVKIL, D. MOROI, W. FRANKLIN Mol. Cryst. and liq. Cryst. 12, 267 - 76 (1971).
- [39] W. HELFRICH, CHAN S.OH. 14, 289 - 92 (1971).
- [40] J.W. GIBBS Ann. J. Sci. III 23, 460 - 76 (1882).
- [41] Ch. MAUGUIN C.R. Acad. Sci. 156, 1246 - 7 (1913).
- [42] A.W. EWELL Phys. Rev. 31, 607 - 8 (1910).
- [43] E. MALLARD J. de Phys. I 10, 479 - 82, (1881).
- [44] Lord J.W. RAYLEIGH Phil. Mag. 26, 256 - 65 (1888).
- [45] R.M. HILL, G.F. HERMANN, S.K. ICHIKI J. App. Phys. 36, 3672 - 77 (1965).

- [46] A. KASTLER C.R. Acad. Sci. 271 B, 999 - 1001 (1970).
- [47] J. BILLARD Bull. Soc. fr. Min. Crist. 95 (à paraître) (1972).
- [48] F. WALLERANT C.R. Acad. Sci. 143, 555 - 7, 605 - 7 et 1169 - 70 (1906).
- [49] F. WALLERANT Bull. Soc. fr. Min. Crist. 30, 43 - 60 (1907).
- [50] P. GAUBERT C.R. Acad. Sci. 146, 829 - 31 (1908).
- [51] P. GAUBERT Bull. Soc. fr. Min. Crist. 32, 421 - 37 (1909).
- [52] P. GAUBERT Ann. de Phys. IX 6, 356 - 64 (1916).
- [53] H. BOUASSE Optique Cristalline - Polarisation Rotatoire - Etats Mésomorphes - Delagrave, Paris 333 - 63 (1925).

