

Diverses personnes ou organismes tant en Europe qu'au Canada nous ont aidés dans la rédaction de ces pages:

Du côté Européen:

Nous exprimons nos plus vifs remerciements, Mr. P. VIDAL, Professeur, Directeur du Laboratoire d'Automatique de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, pour l'aide constante qu'il nous a apporté dans l'élaboration de ce mémoire.

Nous remercions Mr. DANTHINE, Professeur, Directeur du Laboratoire d'Automatique de l'Université de Liège, qui a bien voulu nous faire l'honneur de participer au Jury d'examen, alors qu'il était en visite à l'Université de Lille.

Nous remercions Mr. MIRA, Professeur à l'Université Paul Sabatier à Toulouse, Chercheur au Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales, qui a répondu favorablement à l'invitation que nous lui avons faite, acceptant ainsi d'être "membre invité" du Jury d'examen.

Nous remercions également Mr. TOULOTTE, Professeur à l'Université des Sciences de Lille, qui a accepté de nous "examiner".

Du côté Canadien, nous remercions:

Le Conseil National de Recherches du Canada, qui en nous attribuant une subvention (contrat No A-7845) nous a permis de nous consacrer à nos recherches, dont le présent mémoire constitue les premiers résultats.

L'Université du Québec à Montréal où nous avons pu travailler dans d'excellentes conditions.

Enfin nous remercions tout particulièrement Mlle Lucie RAYMOND qui a assuré avec une extrême compétence la dactylographie de ces pages, ceci à partir d'un très mauvais manuscrit.

PREFACE

Ce mémoire présente les éléments d'une approche unifiée au problème de la conduite optimale des processus en présence de bruits de mesure et de retard à l'observation.

Le modèle d'approche est celui d'une estimation préalable de l'état du système suivie d'une optimisation de la commande faite au moyen des résultats de cette mesure. Le problème se présente ainsi comme étant celui de la détermination optimale de l'estimation et de la commande pour un système donné.

L'idée de base de cette approche est la suivante: l'estimateur optimale devrait être dimensionné pour fournir, non pas la meilleure estimation de l'état du système, mais la meilleure estimation de l'Hamiltonien du problème. Cette hypothèse trouve son origine dans la remarque selon laquelle l'optimisation de la fonction initiale de coût se réduit à celle de l'Hamiltonien, et que par conséquent, si ce dernier est bien estimé, la commande sera elle aussi bien déterminée. Ce thème central sera développé de la façon suivante:

Chapitre 0. C'est l'introduction qui rappelle succinctement ce qu'est le problème de la commande optimale avec observation parfaite, et situe la question des erreurs d'observation.

Chapitre 1. Il rappelle les principaux résultats qui ont été obtenus en commande optimale avec bruits de mesure et retard à l'observation et montre la nécessité d'une approche permettant d'optimiser l'estimation elle-même.

Chapitre 2. Dans cette partie, on propose un critère d'optimisation de l'estimation. Ce critère est ensuite "justifié" par un théorème de continuité fonctionnelle qui montre que les performances du problème avec observation imparfaite, sont d'autant plus voisines de celles du problème à observation parfaite, que l'estimation de l'Hamiltonien est meilleure.

Chapitre 3. Le critère exposé au chapitre 2 est appliqué à l'optimisation du filtre dans le cas particulier des problèmes non linéaires avec bruits Gaussiens. Partant de la remarque que les dynamiques réelles et observées du système à commander doivent être aussi voisines que possible, on se donne à priori une classe de filtres, et

on optimise ensuite le filtre et la commande. On établit ainsi, en particulier une extension du principe de séparation de l'estimation et de la commande.

Chapitre 4. Ce chapitre traite de la commande optimale en présence de retard à l'information. Après avoir choisi un critère définissant la meilleure approximation par extrapolation d'une fonction donnée, on établit la formulation qui donne l'extrapolation et la commande optimale.

Chapitre 5. Conclusion. Dans cette prospective nous montrons comment les résultats de l'étude précédente peuvent permettre d'aborder le problème de la commande optimale en présence de bruits et de retard à l'information simultanément.

TABLE DES MATIERES

PREFACE

CHAPITRE 0

Introduction

CHAPITRE 1

Principaux résultats obtenus en commande optimale
avec bruit de mesure ou retard à l'observation .

1.1 Un problème classique .

1.2 Commentaires .

1.3 Classification des problèmes avec retard pur.

CHAPITRE II

Proposition pour un critère d'estimation optimale en
contrôle optimale avec bruits d'observation ou retard
à l'information.

2.1 Généralités. Recherche d'un modèle .

2.2 Un théorème de continuité fonctionnelle .

2.3 Proposition pour un critère optimal d'estimation .

2.4 Quelques conséquences immédiates.

2.5 Sur la définition du problème d'optimisation .

2.6 Un critère particulier d'estimation de l'Hamiltonien .

2.7 Une classe d'estimateurs sous optimaux .

CHAPITRE III

Commande optimale avec bruit d'observation .

3.1 Introduction .

3.2 Rappel succinct sur le filtre de Kalman-Bucy .

3.3 Extension du principe de séparation de l'estimation et de la commande .

3.3.1. Modèle 1

3.3.2. Modèle 2

3.3.3. Modèle 3

3.3.4. Modèle 4

3.3.5. Sur une extension du principe de séparation de l'estimation et de la commande .

3.4 Conclusions .

CHAPITRE IV

Optimisation de l'extrapolateur et de la commande en contrôle optimale avec retard à l'information.

4.1 Une approche sous-optimale .

4.2 Sur une statistique des erreurs d'extrapolation déterministe d'une fonction certaine .

4.3 Quelques classes d'extrapolations optimales .

4.4 Optimisation simultanée de l'extrapolateur et de la commande.

Annexe: Dérivée d'une fonction de matrice.

CHAPITRE V

Conclusion .

Perspectives sur une approche unifiée à l'estimation optimale en présence de bruits et de retard à l'information .

5.1 Problème .

5.2 Processus d'optimisation .

5.3 Conclusions générales .

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

POSITION DU PROBLEME

INTRODUCTION

POSITION DU PROBLEME

On considère le problème suivant, sur lequel les hypothèses mathématiques restent volontairement imprécises. (Elles seront ultérieurement définies).

Soit le système différentiel

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (0-1)$$

défini sur l'intervalle $t \in [t_0, T]$, dans lequel $x(t)$ est le vecteur état de dimension n ; et $u(t)$ le vecteur de contrôle, de dimension m . Le problème est de déterminer la commande $u(t)$ qui minimise la fonctionnelle de coût

$$G = h [x(t), T] + \int_{t_0}^T g [x(t), u(t), t] dt \quad (0-2)$$

On suppose dans la suite que T est une constante.

Cette question a reçu un développement considérable au cours des dernières années, tant du point de vue théorique que pratique. Tout au plus, nous contenterons-nous ici de montrer comment, moyennant des hypothèses mathématiques de continuité relativement fortes, on peut établir assez facilement les usuelles conditions nécessaires d'optimalité.

On introduit le vecteur multiplicateur de Lagrange $p(t)$ et on considère la fonction de coût auxiliaire

$$J = h [x(T), T] + \int_{t_0}^T \left\{ g [x(t), u(t), t] + p'(t) \left[f [x(t), u(t), t] - \dot{x} \right] \right\} dt, \quad (0-3)$$

dans laquelle la notation (prime) indique l'opération de transposition. On définit l'Hamiltonien $H [x(t), u(t), p(t), t]$ par l'expression

$$H (\cdot) \triangleq g [x(t), u(t), t] + p'(t) f [x(t), u(t), t]$$

ce qui donne pour J ,

$$J = h [x(T), T] + \int_{t_0}^T \left\{ H [x(t), u(t), p(t), t] - p'(t) \cdot \dot{x}(t) \right\} dt \quad (0-5)$$

Une intégration par partie du dernier terme, procure

$$J = h [x(T), T] - p'(T) x(T) + \int_{t_0}^T \left[H (x, u, p, t) + p'(t) x(t) \right] dt \quad (0-6)$$

Cela étant, une variation $\delta u(t)$ autour de la valeur optimale de u , si celle-ci existe, induit une variation δJ du premier ordre en δu , exprimée par

$$\delta J = \delta x' \left[\frac{\partial h}{\partial x(T)} - p(T) \right] + \int_{t_0}^T \left\{ \delta x' \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{p} \right] + \delta u' \left[\frac{\partial H}{\partial u} \right] \right\} dt . \quad (0-7)$$

Un ensemble de conditions nécessaires d'optimalité est obtenu en écrivant que δJ est nul pour toute variation arbitraire δu , ce qui donne

$$\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial x} , \quad p(T) = \frac{\partial h}{\partial x(T)} \quad (0-8)$$

$$\dot{x} = f(x, u, t) = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (0-9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (0-10)$$

Si l'on cherche des lois de commande en « chaîne fermée », $u = \psi [x(t), t]$; un calcul analogue au précédent conduit aux équations

$$\dot{p} = - \frac{\partial H [x, \psi(x, t), t]}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} , \quad p(T) = \frac{\partial h}{\partial x(T)} \quad (0-11)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$u = \psi(x, t) \text{ minimise } H . \quad (0-12)$$

En fait, les lois de commande ainsi déterminées n'ont de sens que si celui qui contrôle, et qui par conséquent prend les décisions, a une information parfaite sur l'état $x(t)$ du système. Si l'on s'en rend compte aisément dans le cas des commandes en « boucles fermées », cela semble moins évident pour les commandes **en chaînes** ouvertes.

On peut toutefois y arriver assez simplement dans le cas où la fonction de coût se réduit à l'intégrale

$$\int_t^T g [x(t), u(t), t] dt. \text{ En effet, d'après le principe}$$

d'optimalité, la commande optimale, si elle existe, minimise à chaque instant la quantité

$$\int_t^T g [x(t), u(t), t] dt \triangleq G(t), \text{ et est solution de l'équation}$$

$$0 = \min_u \left\{ g [x(t), u(t), t] + \frac{dG^*}{dt} \right\}$$

où G^* représente le gain optimal.

Il est facile de voir que cette optimisation n'est possible que si l'on a accès effectivement à la connaissance de $x(t)$.

Les problèmes physiques de commande s'écartent du modèle théorique précédent essentiellement par deux aspects:

(i) l'état $x(t)$ du système est observé par l'intermédiaire d'un instrument de mesure qui fournit une estimation entachée d'erreur aléatoire,

(ii) souvent, $x(t)$ est détecté exactement en grandeur, mais avec un retard τ en sorte qu'à l'instant t , on connaisse non pas $x(t)$, mais $x(t-\tau)$.

L'optimisation de la commande en présence de ces deux types de défauts d'information a été envisagée séparément par de nombreux auteurs, suivant le schéma de la Fig. 0-1

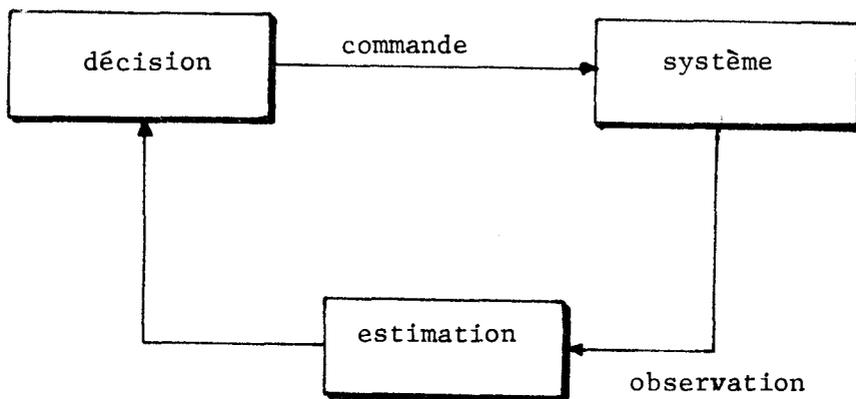


Fig. 0-1: Commande en présence de défaut d'information

Avant de faire une analyse critique (tout au moins du point de vue qui nous intéresse) de ces travaux, dégageons dès maintenant leurs principales caractéristiques, lesquelles sont précisément à la base de notre travail.

(1) Ces deux types de défauts sont traités séparément, et il ne semble pas qu'on ait considéré un problème avec, simultanément, bruit de mesure et retard à l'information.

(2) La plupart des travaux considèrent des bruits de mesure gaussiens indépendants de l'état. De telles hypothèses sont assez restrictives et nombre de cas réels s'en écartent notablement: mentionnons simplement la destruction d'une cible fixe par un engin air-sol autoguidé par radar incorporé.

(3) Aucune approche n'est proposée en ce qui concerne l'optimisation de l'estimateur lui-même. Les auteurs considèrent le plus souvent une dynamique linéaire et se contentent de vérifier après coup que le principe de séparation de l'estimation et de la commande est valable. Là aussi l'hypothèse de linéarité est relativement restrictive: pour un

aérodynamique, par exemple, les forces aérodynamiques sont proportionnelles au carré de la vitesse! On se rend bien compte qu'un problème plus général dans sa structure, pourra recevoir une solution approximative par linéarisation; oui mais alors quel est le critère de linéarisation le plus approprié à une structure donnée?

Le travail que nous présentons ici, est une tentative pour répondre, au moins partiellement, à ces questions.

Dans un premier chapitre nous ferons un inventaire aussi complet que possible des résultats obtenus en commande optimale avec bruits de mesure ou retard à l'information et nous essayerons d'en dégager les traits saillants.

Dans le second chapitre, nous proposerons un critère d'optimisation de l'estimateur pour la commande optimale avec erreur d'observation. Ce critère sera "justifié" par un théorème de continuité fonctionnelle qui lui donnera un sens. Comme conséquence directe de ce critère,

nous déterminerons les conditions exactes de validité du principe de séparation, et de l'estimation. Nous appliquerons ceci aux bruits de mesure dans le chapitre 3.

Le chapitre 4 traitera de la commande optimale en présence de retard à l'information. Le problème sera abordé selon le schéma de la Fig. 0-2: on estime d'abord l'état par une

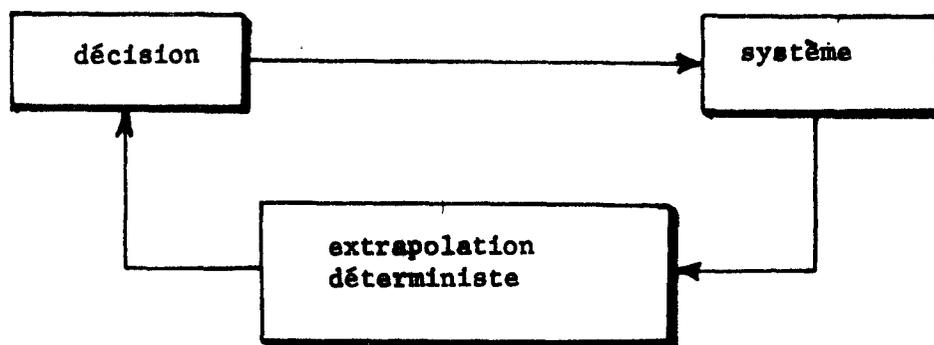


Fig. 0-2: Commande optimale en présence de retard à l'information.

formule d'extrapolation déterministe, et ensuite on détermine la commande au moyen de cette estimation. La clé de ce chapitre réside dans ce qui suit: on donne une interprétation statistique (et non stochastique!) aux erreurs d'extra-

polation déterministe, ce qui permet d'optimiser l'extrapoleur et la commande en utilisant les outils mathématiques du chapitre précédent.

Dans la conclusion on envisagera les problèmes où il y a simultanément bruit de mesure et retard à l'information, ce qui mettra en évidence (nous l'espérons!) l'utilité possible de l'approche unifiée ainsi proposée pour ces deux problèmes.

Les connaissances mathématiques utilisées dans ce mémoire seront particulièrement simples: le calcul variationnel classique. Il y a à cela trois raisons:

- Nous nous préoccupons ici, non pas du problème de l'existence de commandes optimales dans des espaces fonctionnels abstraits, mais de la réalisation possible de systèmes concrets. Autrement dit, plutôt que de rechercher les conditions minimales requises pour que le problème ait au moins une solution, nous supposerons que cette solution existe, et nous chercherons comment la déterminer effectivement.

- Dans une première approche, nous cernerons mieux le problème des optimisations simultanées de l'estimation de l'Hamiltonien et de la commande, en restant dans le cadre restreint du calcul variationnel.

- par ailleurs il semble que dans la plupart des problèmes physiques réels, les modèles mathématiques des composants doivent avoir des caractéristiques suffisamment régulières pour qu'ils soient vraiment représentatifs. En effet, de par leurs inerties et leurs propriétés de lissage, les sorties des éléments réels sont généralement continues et dérivables, par ailleurs ces éléments restent insensibles à tout changement de leur entrées sur un ensemble de mesure nulle, et en dernier lieu, la classe de commandes généralement admissibles est celle des fonctions presque partout continûment différentiables!

Il en résulte que les hypothèses mathématiques de régularité que nous ferons pour utiliser le calcul variationnel, conduirons néanmoins à des modèles décrivant une classe assez large de systèmes réels.

CHAPITRE I

PRINCIPAUX RESULTATS OBTENUS EN COMMANDE OPTIMALE AVEC
BRUIT DE MESURE OU RETARD A L'OBSERVATION

PREMIERE PARTIE

COMMANDE OPTIMALE STOCHASTIQUE

On décrit d'abord (énoncé et résultats) un problème central, par son importance, en commande optimale stochastique. Ensuite, on verra par quels aspects les divers travaux publiés s'en écartent.

1.1 UN PROBLEME CLASSIQUE

On considère le système décrit par l'équation différentielle linéaire stochastique

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + w \quad (1-0)$$

dans laquelle on a les définitions suivantes:

x représente le vecteur état du système de dimension n ;

u représente le vecteur commande de dimension m et parcourt l'espace Euclidien de dimension m ;

$A(t)$ représente une matrice carrée $n \times n$, continue en t ;

B (t) représente une matrice carrée n x n continue en t;

w est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de covariance

$$E \{ w (t) w' (\tau) \} = Q_2 (t) \delta (t - \tau) . \quad (1-1)$$

$\delta (t)$ désigne la distribution de Dirac. Le système est initialement en l'état x_0 : $x (t_0) = x_0$ où x_0

est un vecteur aléatoire gaussien indépendant de w, de moyenne $E \{ x (t_0) \} = \bar{x}_0$,

$$(1-2)$$

et de covariance

$$E \{ [x (t_0) - \bar{x}_0] [x (t_0) - \bar{x}_0]' \} = P_2 (t_0) + \bar{x}_0 \bar{x}_0' . \quad (1-3)$$

A l'instant t, le contrôleur observe non pas x(t), mais y (t) défini par la relation

$$y (t) = C (t) x (t) + v (t) \quad (1-4)$$

où

y est un vecteur de dimension p,

v est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de covariance

$$E \{ v(t) v'(\tau) \} = R_2(t) \delta(t-\tau). \quad (1-5)$$

$v(t)$ et $w(t)$ sont indépendants de $u(t)$ et x_0 .

Le problème est de déterminer la commande $u(t)$ qui minimise le critère quadratique

$$G = E \left\{ \frac{1}{2} x'(T) S x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [x'(t) Q_1(t) x(t) + u'(t) R_1(t) u(t)] dt \right\} \quad \text{où} \quad (1-6)$$

T a une valeur fixe. R_1 et R_2 sont des matrices symétriques définies positives, Q_1 et Q_2 sont des matrices symétriques semi définies positives. $w(t)$ est un bruit perturbant la dynamique même du système, $v(t)$ est le bruit de mesure proprement dit.

1.1.1. SOLUTION POUR $y(t) = x(t)$. On recherche la solution dans le cas où l'observation $y(t)$ est identique à l'état $x(t)$.

Etape 1. Pour cela, on définit $V[x(t), t]$ par

$$V[x(t), t] = E \left\{ \frac{1}{2} x'(T) S x(T) + \frac{1}{2} \int_t^T [x'(s) Q_1(s) x(s) + u'(s) R_1(s) u(s)] ds \mid x(t), t \right\} \quad (1-7)$$

où $u^*(s)$ est la commande optimale si elle existe. Utilisant un procédé classique dans la théorie d'Hamilton-Jacobi-Bellman, on met l'intégrale de (1-7) sous la forme d'une somme de deux autres intégrales l'une prise sur l'intervalle $(t, t+\delta t)$ l'autre sur l'intervalle $(t+\delta t, T)$ où δt désigne un infiniment petit; ce qui donne,

$$\begin{aligned}
 V[x(t), t] = & E \{ V[x(t+\delta t), t+\delta t] \} + \quad (1-8) \\
 & + \delta t E \left\{ \frac{1}{2} x'(t+\theta\delta t) Q_1(t+\theta\delta t) x(t+\theta\delta t) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} u^*(t+\theta\delta t) R_1(t+\theta\delta t) u^*(t+\theta\delta t) \right\},
 \end{aligned}$$

avec $0 < \theta < 1$.

On développe en série de Taylor du second ordre le terme $V[x(t+\delta t), t+\delta t]$, soit,

$$\begin{aligned}
 V[x(t+\delta t), t+\delta t] = & V[x(t), t] + \frac{\partial V}{\partial t} \delta t + \\
 & + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)' \delta x + \delta x' \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \delta x + \mathcal{O}(\delta t^2). \quad (1-9)
 \end{aligned}$$

Tenant compte de la relation

$$x = \dot{x} \delta t,$$

on reporte (1-9) dans (1-8), et par passage à la limite, plus précisément quand $\delta t \rightarrow 0$, on obtient:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} x' (t) Q_1 (t) x (t) + \frac{1}{2} u^{*'} (t) R_1 (t) u^* (t) + \tag{0-10}$$

$$+ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)' [A (t) x (t) + B (t) u^* (t)] + \text{trace} \left[Q_2 (t) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] = 0$$

avec la condition terminale

$$V [x (T), T] = \frac{1}{2} x' (T) S x (T) . \tag{1-11}$$

Etape 2. La relation (1-10) suggère une généralisation de la théorie classique d'Hamilton-Jacobi et l'introduction de l'«Ha-
miltonien» défini par

$$H [x (t), u (t), p (t), w (t), t] \triangleq \frac{1}{2} x' (t) Q_1 (t) x (t) + \tag{1-12}$$

$$+ \frac{1}{2} u' (t) R_1 (t) u (t) + p (t) [A (t) x (t) + B (t) u (t) + w (t)] ,$$

où $p(t)$, qui représente d'habitude le « vecteur adjoint » a ici la signification plus précise d'être la dérivée partielle $\partial V / \partial x$. La commande qui minimise l'Hamiltonien est

$$u^*(t) = -R_1^{-1}(t) B'(t) \left\{ \frac{\partial V[x(t), t]}{\partial x} \right\}, \quad (1-13)$$

et pour cette valeur de la commande, l'équation (1-10) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} x'(t) Q_1(t) x(t) + \frac{1}{2} \left[B'(t) \frac{\partial V}{\partial x} \right]' R^{-1}(t) \left[B'(t) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \\ + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)' A(t) x(t) + \text{trace} \left[Q_2(t) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (1-14) \end{aligned}$$

Etape 3. Par analogie avec le cas où il n'y a pas de bruit dans la dynamique même du système, ($w = 0$) on cherche une solution sous la forme

$$V[x(t), t] = \frac{1}{2} x'(t) P_1(t) x(t) + \bar{\omega}(t) \quad (1-15)$$

En reportant cette expression dans (1-14) on obtient $P_1(t)$ et $\bar{\omega}(t)$ comme solutions des équations suivantes:

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 = & -P_1 (t) A (t) - A' (t) P_1 (t) \\ & + P_1 (t) B (t) R_1^{-1} (t) B' (t) P_1 (t) - Q_1 (t) \end{aligned} \quad (1-16,a)$$

$$P_1 (T) = S \quad (1-16,b)$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = - \text{trace} \left[Q_2 (t) P_1 (t) \right] \quad (1-17,a)$$

$$\bar{\omega} (T) = 0 \quad (1-17,b)$$

Par ailleurs, la comparaison de (1-13) avec (1-15) fournit immédiatement la commande optimale.

$$u^* (t) = - R_1^{-1} (t) B' (t) P_1 (t) x (t) \quad (1-18)$$

1.1.2 Solution pour $y (t) = C (t) x (t) + \check{V} (t)$

On se propose maintenant de résoudre le problème dans le cas plus général, par induction à partir de la solution du cas précédent: en s'en inspirant, on choisit l'expression mathématique de la commande optimale, et on vérifie à posteriori

la validité de cette démarche.

Etape 1. Soit $\hat{x}(t)$ la meilleure estimation de l'état $x(t)$ du système, générée à partir des observations $\{y(\cdot), [t_0, t]\}$. A priori, $\hat{x}(t)$ est donnée par le filtre de Gauss Kalmann - Bucy [1] [2] [3], mais on ne sait pas encore si c'est le filtre optimal pour ce problème!

On considère à priori la commande $u_0(t)$ définie par

$$u_0(t) \triangleq -R_1^{-1}(t) B'(t) P_1(t) \hat{x}(t), \quad (1-19)$$

et qui est obtenue à partir de (1-18) par la substitution $x(t) \leftarrow \hat{x}(t)$; et on se propose de voir si $u_0(t)$ ne serait pas effectivement la commande optimale.

Etape 2. L'erreur de l'estimation, définie par

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t),$$

n'est pas affectée par la commande $u(t)$.

En effet, d'après Kalman, la meilleure estimation $\hat{x}(t) = E \{ x(t) / y(t) \}$ vérifie, quelque soit la commande u , l'équation,

$$\dot{\hat{x}} = A(t) \hat{x}(t) + B(t) u(t) + K(t) [y(t) - C(t) \hat{x}(t)], \quad (1-20)$$

avec:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t_0) &= \bar{x}_0 \\ K(t) &= P_2(t) C'(t) R_2^{-1}(t) \end{aligned} \quad (1-21)$$

$$P_2(t) = \text{cov} [\tilde{x}(t), \tilde{x}(t)] \quad (1-22)$$

$$\dot{P}_2(t) = A(t) P_2(t) + P_2(t) A'(t) - \quad (1-23)$$

$$- P_2(t) C'(t) R_2^{-1} C(t) P_2(t) + Q_2(t), \quad P_2(t_0) = P_0.$$

Par ailleurs, les équations (1-0) et (1-20) donnent aisément, pour toute commande déterministe $u(t)$, l'équation différentielle de propagation de l'erreur, soit:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(t) \tilde{x}(t) - K(t) [v(t) + C(t) \tilde{x}(t)] + w(t). \quad (1-24)$$

Cette équation montre que si le filtre d'estimation est le filtre de Kalman, alors la commande n'a aucune influence sur la grandeur de l'erreur d'estimation, et en particulier peut être prise sous la forme d'une fonction de $\hat{x}(t)$ seule.

Etape 3. La commande (1-19) est bien optimale pour la dynamique de $\hat{x}(t)$.

En effet, cette dynamique est définie par l'équation (1-20) dans laquelle le terme $K(t) [y(t) - C(t) \hat{x}(t)]$ est un bruit blanc Gaussien de covariance $P_2(t) C'(t) R_2^{-1}(t) C(t) P_2(t)$. Par ailleurs, pour cette dynamique, l'information \hat{x} est parfaite. Ce problème est précisément celui qui a été traité en 1.1.1. La commande optimale est donc bien $u_0(t)$.

Il résulte de ceci que le principe de séparation de l'estimation et de la commande est valable pour ce problème, et conduit bien à la commande optimale.

1.2 COMMENTAIRES

Le problème que nous venons d'aborder, est le modèle central à partir duquel de nombreux auteurs ont travaillé. D'après ce que nous avons pu comprendre, il nous

a semblé que la plupart des travaux contribuaient essentiellement à la définition du problème, à son extension dans des espaces fonctionnels plus généraux, à la rigueur mathématique, à l'élégance des démonstrations, mais n'apportaient pas vraiment d'algorithmes nouveaux pouvant aider l'ingénieur dans la synthèse du filtre d'estimation lui-même.

Avant toute chose, il convient de remarquer que l'exposé précédent a fait délibérément abstraction de la rigueur mathématique. En fait, l'équation différentielle (1-0) doit être prise au sens de Ito, [4] [5], et le calcul qu'il convient d'utiliser est le calcul différentiel et intégral stochastique correspondant. (Nous rappelons au lecteur que la base même de ce calcul est la notion de bruit blanc Gaussien et la propriété qu'a ce dernier d'être la dérivée d'un processus de Wiener-Levy.)

Le problème de la commande optimale de système linéaires avec des perturbations sous forme de bruits blancs Gaussiens a été abordé pour la première fois semble-t-il, par JOSEPH-TOU [6], GUNCKEL-FRANKLIN [7] dans l'étude des systèmes échantillonnés. En 1964, LEE [8] considérait une classe plus large de problèmes qui traitent à la fois du

contrôle, de l'identification et de l'estimation optimale.

WONHAM, dans une série de travaux, dont on trouvera les principales références dans [9], reconsidérerait la question des équations différentielles stochastiques, et donneraient la rigueur mathématique nécessaire à la théorie. Dans une synthèse récente, BENSOUSSAN [10] généralise la validité du principe de séparation et de l'estimation à des espaces fonctionnels plus abstraits, et prouve en particulier son exactitude pour les systèmes linéaires à paramètre distribué: le schéma variationnel est celui de LIONS [11] (coërcivité d'opérateurs définis sur un espace Hilbertien, équations différentielles coercives), le modèle d'observation des variables d'état du système est celui de KALMAN, l'espace des probabilités étant un espace vectoriel topologique munie d'une mesure. Dans un travail plus récent non encore publié, KREE [12] [13] propose une présentation unifiée des équations du contrôle optimal, du filtrage, de l'estimation des paramètres. Cette généralisation comprend comme cas particulier, les systèmes décrits par une équation de type variationnel muni du schéma de LIONS.

Par ailleurs, on a voulu exploiter la simplicité des résultats relatifs aux systèmes linéaires avec coût quadratique pour résoudre des problèmes non linéaires plus généraux. La méthode procède de deux approximations simultanées: la dynamique du système est linéarisée et la fonction de coût est approchée par un coût quadratique. Ainsi, lorsque le bruit perturbateur est Gaussien, on utilise un filtre de Kalman, et le principe de séparation de l'estimation et de la commande est encore valable. Les commandes ainsi obtenues sont seulement sous-optimales, mais les résultats sont très suffisants dans la pratique.

Quoiqu'il en soit, cette linéarisation du système procède en général à partir de discrétisations, et les calculs qui en résultent atteignent très rapidement une dimension prohibitive. On peut dès lors se demander s'il n'existe pas de voie plus directe permettant d'obtenir un filtre suboptimale et donc une commande sous optimale? Par exemple, au lieu de chercher à obtenir la meilleure estimation de l'état du système, ce qui est plutôt restrictif, n'est-il par suffisant d'obtenir la meilleure estimation de la dynamique même du système, c-à-d de $x(t)$ et de la fonction de coût? Ainsi, la méthode

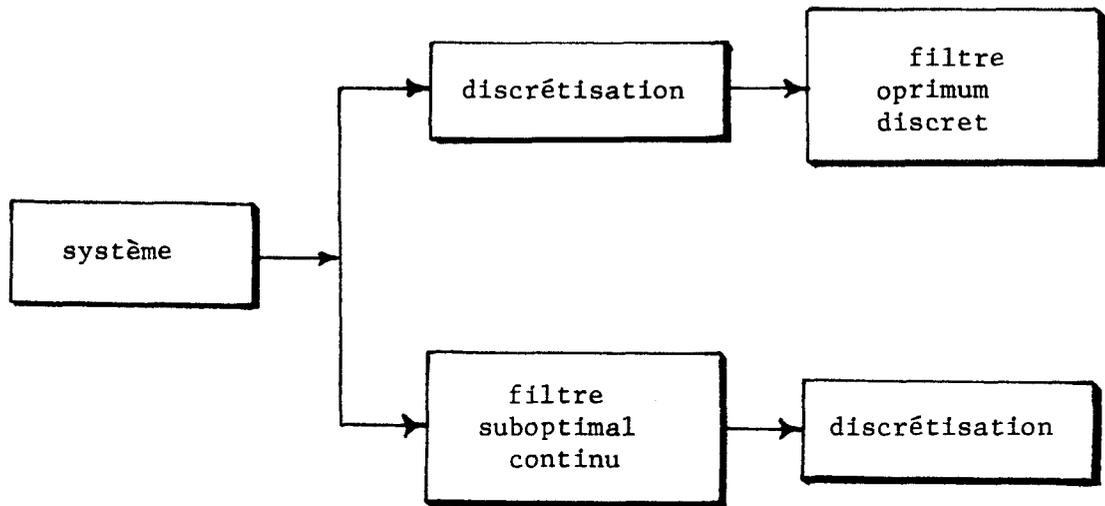


Fig. 1-1 Les deux voies d'obtention de commandes sub optimales d'un système donné

d'approximation, fondamentalement différente, comme l'indique la Fig. 1-1, pourrait-elle conduire à une réalisation plus simple?

SECONDE PARTIE

COMMANDE OPTIMALE AVEC RETARD

A L'OBSERVATION

1.3 CLASSIFICATION DES PROBLEMES AVEC RETARD PUR

Il existe de très nombreux travaux dans la littérature, dont les titres indiquent qu'ils traitent du contrôle de systèmes avec retard, mais qui ne précisent pas réellement la nature exacte de ce dernier.

Or il convient en effet de noter très soigneusement la situation fonctionnelle du retard pur dans le processus de contrôle.

Dans cet ordre d'idée, on peut distinguer trois classes de problèmes suivant la position du retard dans la chaîne: le processus de contrôle est constitué par le système proprement dit à contrôler, le processus de décision lui-même, et le retard pur qui s'insère quelque part dans la chaîne, caractérisant ainsi, selon la place qu'il occupe, la classe de problèmes qui lui sont associés.

1ère classe (Fig. 1-2)

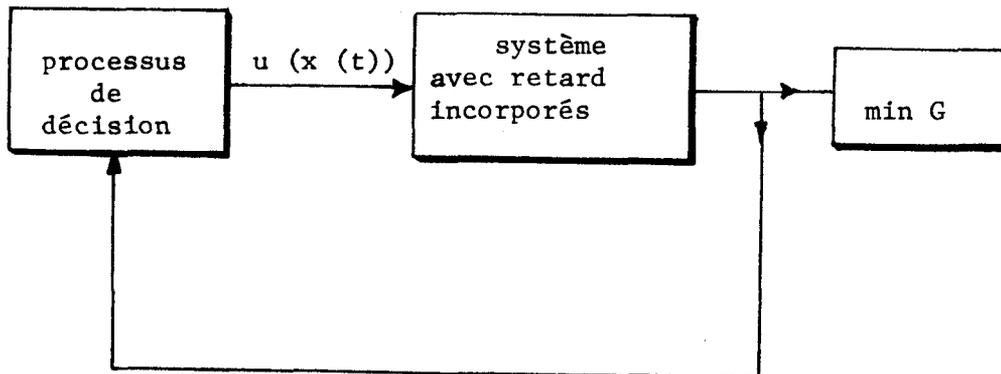


Fig. 1-2: Système avec retard incorporé

Les retards font partie intégrante, de la structure du système à commander et ne peuvent en être isolé formellement. La détection de position elle-même est exacte, et instantannée, soit $x(t)$; et la commande est une fonction directe ou implicite de $x(t)$: $u[x(t)]$

2ème classe (Fig. 1-3)

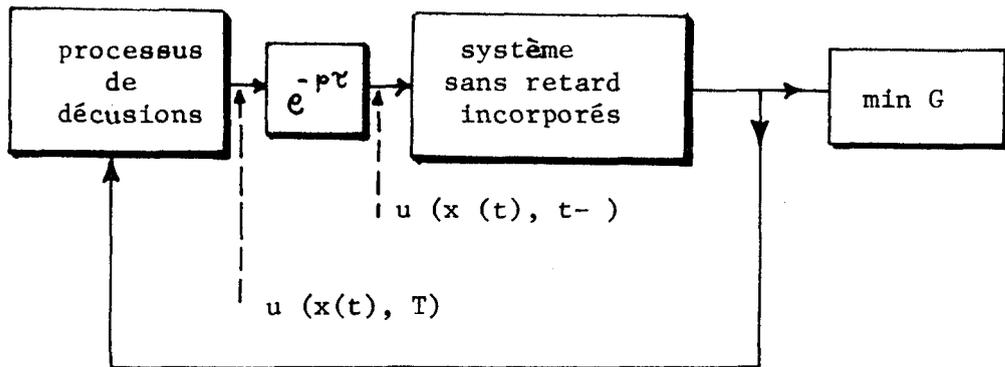


Fig. 1-3 Commande avec action retardée

Le système à contrôler n'a pas de retard de structure. La détection $x(t)$ est exacte et instantanée. La commande $u[x(t)]$ est donc correctement déterminée par la connaissance de $x(t)$, mais agit seulement avec un retard τ .

3^{ème} classe (Fig. 1-4)

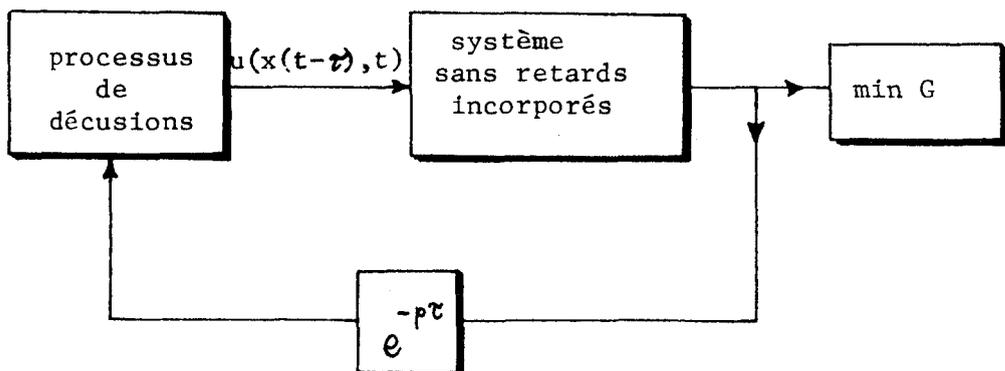


Fig. 1-4 Commande avec retard à la détection

Le système à contrôler n'a pas de retard pur. La détection est exacte mais a lieu avec un retard τ : à l'instant t on enregistre non pas $x(t)$, mais $x(t-\tau)$. La commande ainsi déterminée à l'aide de $x(t-\tau)$ est à action directe.

La différence entre ces problèmes est claire. Dans la première classe le retard est interne au système à contrôler, dans la seconde, la commande est estimée correctement à l'aide de la vraie valeur $x(t)$ mais appliquée avec un retard τ , dans la troisième, la commande à l'instant t est estimée approximativement à l'aide de $x(t-\tau)$ mais a une action instantanée.

Le premier problème est manifestement en dehors de nos préoccupations actuelles. Le dernier, qui nous concerne, ne semble pas avoir donné lieu à développement dans la littérature.

Le second problème, quoique n'étant pas exactement le nôtre, mérite qu'on s'y attarde à cause de sa ressemblance avec ce dernier et plus particulièrement à cause de la

similitude des méthodes qui peuvent être utilisées pour les résoudre, à savoir: l'estimation de la commande par estimation préalable de l'état du système.

(i) Dans le problème de classe 2 la commande agit avec un retard τ . On peut donc penser qu'une approche possible consiste à déterminer u en fonction, non pas de $x(t)$, mais de l'état futur $x(t + \tau)$.

(ii) Dans le problème de classe 3, l'état $x(t)$ est inconnu à l'instant t , et seule est disponible la donnée $x(t)$, $t \in [t_0, t - \tau]$. Une façon de faire consiste à estimer $x(t)$ à l'aide de ces valeurs antérieures, connues, et de déterminer la commande avec cette estimation.

Dans les deux cas on est conduit à estimer ou déterminer la valeur utile de l'état futur. Tel est le sens de la ressemblance entre les deux problèmes.

Bass [14] à [16] et Fuller [17] ont montré que, pour le problème de classe 2, la commande optimale est une

fonction de l'état futur $x(t + \tau)$; ce dernier notamment arrive à une formulation explicite de la solution dans le cas particulier d'un système linéaire de la façon suivante: il introduit l'état $w(z, t)$ du retard pur défini par l'expression ci-dessous (on rappelle que $u(t - \tau)$ représente la sortie du retard) ,

$$\begin{aligned}
 w(z, t) &= u(t - \tau + z), & (0 \leq z < \tau), & (\tau \leq t < \infty) \\
 &= u(t - \tau + z), & (\tau - t \leq z < \tau), & (0 \leq t < \tau) \\
 &= \phi(t - \tau + z), & (0 \leq z < \tau - t), & (0 \leq t < \tau),
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

où $\phi(t - \tau)$ représente la sortie initiale, arbitraire, du retard pur. Ensuite il détermine complètement la commande optimale du système décrit par l'équation vectorielle

$$\dot{x} = A x + B u(t - \tau) \tag{1.26}$$

en utilisant le fait que dans ce cas précis, $x(t + \tau)$ est égal à

$$x(t + \tau) = e^{A\tau} x(t) + e^{A\tau} \int_0^{\tau} e^{-Az} B w(z, t) dz. \tag{1.27}$$

Comme on peut le voir, l'analogie avec notre problème s'arrête à la notion d'estimation de l'état futur, et l'approche ci-dessus ne constitue pas vraiment une approche par

extrapolation en ce sens qu'il n'y a pas d'erreurs d'estimation.

On trouve encore une approche cette question de commande optimale avec retard à l'observation dans la théorie des jeux différentiels à information différée.

Brièvement, le problème du jeu différentiel à l'information parfaite consiste à rechercher des commandes $u^0(t)$ et $v^0(t)$ qui définissent le point selle d'une certaine fonctionnelle de gain $J(u,v)$;

$$J(u^0, v) \leq J(u^0, v^0) \leq J(u, v^0) \quad (1.28)$$

avec

$$J(u, v) = h[x(T), T] + \int_{t_0}^T g[x(\sigma), u(\sigma), v(\sigma), \sigma] d\sigma \quad (1.29)$$

compte tenu de la contrainte d'état

$$\dot{x}(t) = f(x, u, v, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.30)$$

$u(t)$ est la commande du joueur minimisant X , $v(t)$ celle du joueur maximisant Y . La formulation du jeu, ainsi posée, n'a plus de sens lorsque l'un des joueurs, par exemple X , a un retard

à l'information et l'approche doit être modifiée.

Si dans un tel jeu, on impose une valeur à la commande $v(t)$, le problème devient un problème d'optimisation unilatéral, et on pourra utiliser encore, quitte à la modifier quelque peu, la théorie des jeux à informations différées. Dans cette optique, nous interprétons ici divers résultats qui ont été obtenus dans cette théorie, et nous les appliquons au problème de commande optimale qui nous préoccupe.

En mai 1969, SOKOLOV [18] considère le problème d'optimisation décrit par la dynamique (0-1) et l'objectif terminal

$$\min h [x (T), T] . \quad (1.31)$$

Pour tenir compte du retard à l'information, il optimise non pas (1.31) mais la nouvelle quantité

$$h [x (T - \tau), T] \quad (1.32)$$

avec la contrainte

$$\dot{x} (t - \tau) = f [x (t - \tau), u (t - \tau), t - \tau] . \quad (1.33)$$

Ainsi formulé, le problème peut être résolu par les techniques usuelles.

En décembre 1969, CILETTI [19] considère une dynamique linéaire et un coût quadratique

$$\begin{aligned}
 x'(T) &= F(t) x(T) + \lambda \int_{t_0 - \tau}^T u'(\sigma) R(\sigma) u(\sigma) d\sigma \\
 &- \lambda \int_{t_0 - \tau}^{t_0} g'(\sigma) M(\sigma) g_0(\sigma) d\sigma \quad (1.34)
 \end{aligned}$$

où F , R et M désignent des matrices et où $g_0(\sigma)$ désigne une certaine "fonction initialisatrice" à priori indéterminée. Le coût est ainsi défini sans références aucune au problème à information parfaite mais on devine facilement, en y faisant $\tau = 0$, sa connexion avec le coût quadratique usuel.

En avril 1969, JUMARIE [20], [21] propose d'estimer l'état futur du système par une formule d'extrapolation déterministe d'ordre r ,

$$\hat{x}(t) = e [x(t-\tau), x(t-2\tau), \dots, x(t-r\tau)], (1.35)$$

et d'optimiser le coût

$$h [\hat{x}(T), T] + \int_{t_0}^T g [\hat{x}(\sigma), u(\sigma), \sigma] d\sigma, \quad (1.36)$$

avec la contrainte d'état

$$\dot{x}(t-j\tau) = f [x(\sigma), u(\sigma), \sigma]_{\sigma = t-j\tau}.$$

$$j = (1, 2, \dots, r)$$

Une caractéristique commune qui se dégage de ces trois derniers travaux est la suivante: d'une façon générale, l'expression du coût dans le problème à information parfaite n'a plus de sens lorsqu'il y a retard à l'information, et il convient de choisir un objectif plus approprié. On peut dès lors se poser les questions suivantes:

- (i) Comment évaluer la détérioration de performance ainsi induite par le retard à l'information?
- (ii) Comment définir la meilleure extrapolation pour un jeu donné?

Nous en reparlerons plus loin dans la suite de ce travail.

REFERENCES

- (1) GAUSS, K.F., Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxia 25-26, 45-47 (Gottigen)
- (2) KALMAN, R.E. "A new approach to linear filtering and prediction problems" Trans. ASME, Series D, Jour. Basic Eng., Vol. 82, pp. 34-45, Mars 1960.
- (3) KALMAN, R., Bucy, R., "New results in linear filtering and prediction theory". Trans. ASME, Series D, Jour. Basic. Eng., Vol. 83, pp. 95-108, Mars 1961.
- (4) ITO, K., "On stochastic Differential Equations," Mem. Amer. Math. Soc. 4 (1951)
- (5) JAZWINSKI, A.H., "Stochastic processes and filtering theory". Academic Press. N-Y. 1970
- (6) JOSEPH, P.D. TOU, J., "On linear control theory" Trans. AIEE (Appl. and Industry). Vol. 80 pp. 193-196. Septembre 1961.
- (7) GUNCKEL, T.L., FRANKLIN, G.F., "A general solution for linear, sampled-data control". Trans. ASME, Series D, Vol. 85, pp. 197-203, Juin 1963.

- (8) LEE, R.C.K., Optimal estimation, identification on control. MIT Press, Cambridge, Mass. 1964
- (9) WONHAM, W.M. "On the separation theorem of stochastic control" SIAM Journal on Control. Vol 6, No 2, 1968.
- (10) BENSOUSSAN, A. Filtrage optimal des systèmes linéaires, Dunod 1971
- (11) LIONS, J.L., Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. DUNOD, PARIS, 1968.
- (12) KREE, P. Synthésis and extension of some variational theories. Application to the theory of distributed parameter systems. (a paraître)
- (13) KREE, P. Analyse fonctionnelle et equations aux dérivées partielles (Janvier 71). Institute di Alto Matematica. Roma.

- (14) BASS, R.W., Q. Appl. Math., vol 14, p. 415-1956
- (15) ————— Jet Propul., vol. 26, p. 644, 1956
- (16) ————— Proc. Symp. Nonlinear Circuit Analysis.
(Polytechnic Institute of Brooklyn)
p. 163, 1956
- (17) FULLER A.T. Int. Jour. Control. Vol 8, No 2, p. 145
1968
- (18) SOKOLOV, B.N. et CHERNOOS'KD, F.L. "Differential games
with delay information". Prikl. Mat. Mekh (USSR),
v. 34, no 5. pp 812-819, 1970
- (19) CILETTI, M.D. "Differential games with time delays".
J. Optimiz. Theory and Applications, v. 5, no. 5,
pp. 347-362, May 1970
- (20) JUMARIE, G.R.: "Jeux Différentiels à informations dif-
férées" C.R. Acad. Sciences, Vol 268, Serie A, pp 1040-
1043, 1969.

- (21) _____ "A New Approach to the optimum control of lumped or distributed parameter systems with delay". Second LFAC Symposium on Multivariable Control Systems. Dusseldorf: 1970.

CHAPITRE II

PROPOSITION POUR UN CRITERE D'ESTIMATION OPTIMALE EN CONTRÔLE
OPTIMALE AVEC BRUITS D'OBSERVATION OU RETARD A L'INFORMATION

2.1 GENERALITES. RECHERCHE D'UN MODELE

On considère à nouveau le problème de commande optimale (PROBLEME 1) décrit succinctement dans l'introduction, et dont nous rappelons la définition: équations d'état,

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad x(t_0) = x_0 ; \quad (2-1)$$

fonctionnelle à minimiser ,

$$G = h[x(T), T] + \int_t^T g[x(t), u(t), t] dt \quad (2-2)$$

On suppose que la solution optimale de ce problème existe, et on la note (G^0, u^0, x^0) . Cela étant, on se place dans la situation suivante:

(i) on n'a pas accès à la connaissance de $x(t)$, mais seulement à celle de $x(t) + \varepsilon[x(t), t] \triangleq \xi(t)$, où ε représente une certaine fonction de x qui est "suffisamment petite" pour pouvoir être considérée comme un terme d'erreur.

(ii) on ne peut résoudre, soit parce que l'expression mathématique de $\xi(x, t)$ ne le permet pas, ou tout simplement n'est pas connue, soit parce que on en n'a pas le temps dans un problème en temps réel, l'équation en $x(t)$ définie par

$$\xi(t) = x(t) + \varepsilon[x(t), t] \quad (2-3)$$

Dans de telles conditions, le problème défini par (2-1) et (2-2) n'a plus de sens. Nous allons donc essayer de le reformuler.

(1) On considère le processus d'élaboration de commande représenté sur la Fig. 2-1.

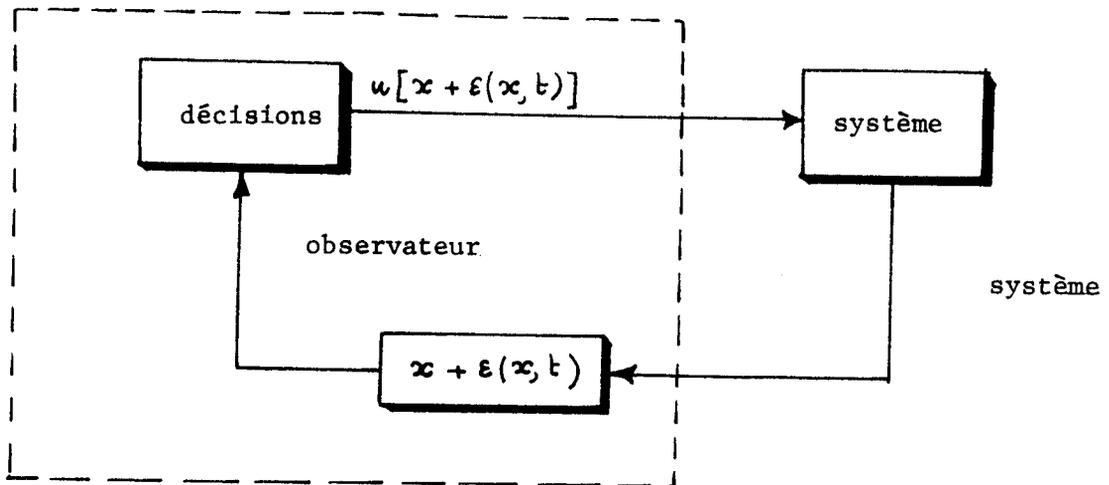


Fig 2-1: commande en présence de
l'information $x + \varepsilon(x, t)$

dans lequel l'expression $u(x + \varepsilon)$ signifie, non pas que la commande est une commande en boucle fermée, mais simplement qu'elle est déterminée au moyen de la connaissance de $(x + \varepsilon)$.

(2) On minimise le coût

$$G_{\xi} = h[\xi(T), T] + \int_{t_0}^T g[\xi(t), u(t), t] dt \quad (2-4)$$

obtenu à partir de l'expression initiale de G où on a remplacé $x(t)$ par $\xi(t)$.

(3) L'optimisation portant sur une fonctionnelle de $\xi(t)$,

il convient d'avoir la dynamique de ξ (t). Dans le cas particulier où $\xi(x,t)$ est dérivable en x et en t , on peut l'obtenir assez facilement de la façon suivante: l'équation (2-1) est équivalente à

$$\dot{x} + \dot{\xi} = f(x + \xi - \xi, u, t) + \dot{\xi}$$

soit encore

$$\dot{\xi} = f(\xi - \xi(x,t), u, t) + \frac{\partial \xi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (2-5)$$

qui représente la dynamique de l'état observé.

Ainsi, pour ce nouveau problème, l'état du système est représenté par le vecteur $\eta \triangleq (x, \xi)$ dont la dynamique est composée des équations (2-1) et (2-5); et la fonctionnelle de coût, indépendante de x , est donnée par (2-4).

Si on suppose que $f(\xi - \xi, u, t)$ est développable en série de Taylor au voisinage de (ξ, u, t) , l'équation (2-5) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & f(\xi, u, t) - \xi(x,t) \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, u, t) + \\ & + \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} + \sigma(\xi) \end{aligned} \quad (2-6)$$

Autrement dit, l'ensemble des équations d'état (2-1) et (2-6)

a comme modèle

$$\dot{\gamma} = f(\gamma, u, t) + \lambda_1 f_1(\gamma, u, t), \quad \gamma(t_0) = \gamma_0 \quad (2-7)$$

où λ_1 est un "petit" paramètre réel, et $f_1(\gamma, u, t)$ une certaine fonction sur laquelle à priori, on peut faire des hypothèses mathématiques analogues à celles de $f(x, u, t)$.

Modèle 2

Toujours dans une telle situation d'information incomplète, une autre attitude est la suivante: on estime $x(t)$ à partir de $\xi(t)$ par une expression de la forme

$$\hat{x}(t) = \xi(t) - \varepsilon(x, t) + \nu(\xi, x, t) \quad (2-4)$$

dans laquelle $\nu(\xi, x, t)$ représente l'erreur de l'estimation. (Pour

$\nu = 0$, on a $\hat{x} = x$). En posant $\mu(\xi, x, t) \triangleq -\varepsilon(x, t) + \nu(\xi, x, t)$ on écrira encore

$$\hat{x}(t) = \xi(t) + \mu(\xi, x, t). \quad (2-5)$$

De la sorte, une fonctionnelle de coût que l'on peut considérer, parce que se rapprochant le plus de la fonctionnelle initiale G , est obtenue en remplaçant dans (2-2) $x(t)$ par $\hat{x}(t)$.

En fait, pour certaines raisons, soit parce que $\mu(\xi, x, t)$ n'est pas exactement connu, soit parce que l'on re-

cherche une sécurité dans la réalisation technologique du système on est conduit à envisager une autre fonctionnelle de coût définie de la façon suivante:

- \mathcal{N} désignant un opérateur linéaire vérifiant la relation de continuité

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \mathcal{N} \circ r[\xi + \mu(\xi, x, t), u, t] = r(\xi, u, t) \quad (2-6)$$

$\mu \rightarrow 0$

pour toute fonction $r(\xi, u, t)$, définie au moins sur l'intervalle $[t_0, T]$;

- on considère le coût

$$G_{\mathcal{N}} \triangleq \mathcal{N} \circ h[\xi(T) + u[\xi(T), x(T), T], T] + \mathcal{N} \circ \int_{t_0}^T g[\xi(t) + \mu, u(t), t] dt \quad (2-7)$$

Si les quantités $\mathcal{N} \circ h$ et $\mathcal{N} \circ g$ sont développables en séries de Taylor au voisinage de ξ , on aura encore

$$G_{\mathcal{N}} = h[\xi(T), T] + \frac{\partial \mathcal{N} \circ h(\xi, T)}{\partial \xi} \mu + \sigma_1(\mu) + \int_{t_0}^T \left[g[\xi(t), u(t), t] + \frac{\partial \mathcal{N} \circ g(\xi, u, t)}{\partial \xi} \mu + \sigma_2(\mu) \right] dt \quad (2-8)$$

Le modèle mathématique de cette expression

est de la forme

$$G_{\pi_6} = h [\xi(T), T] + \lambda_2 h_1 [\xi(T), T] + \int_{t_0}^T [g(\xi, u, t) + \lambda_3 g_1(\xi, u, t)] dt \quad (2-9)$$

où λ_2 et λ_3 sont des "petits" paramètres, h_1 et g_1 des fonctions qui à priori ont les mêmes comportements mathématiques que h et g respectivement.

Ainsi, sur un plan tout à fait formel, on est conduit à considérer le nouveau modèle unique de problème de commande optimale défini de la façon suivante:

Problème 2

- équation d'état,

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) + \lambda_1 f_1(x, u, t) \quad (2-10,a)$$

$$x(t_0) = x_0 + \lambda_2 x_1; \quad (2-10,b)$$

- fonctionnelle de coût,

$$G_{\lambda} = h[x(T), T] + \lambda_3 h_1[x(T), T] + \int_{t_0}^T [g(x, u, t) + \lambda_4 g_1(x, u, t)] dt \quad (2-11)$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 sont des petits paramètres.

2.2 UN THEOREME DE CONTINUITE FONCTIONNELLE.

On fait les hypothèses suivantes:

- (H1) Le problème 1 a seulement une commande optimale.
- (H2) Il n'y a pas de contrainte sur l'état et la commande.
- (H3) Les fonctions f , f_1 , g et g_1 sont continûment différentiables par rapport à x et u .
- (H4) Les fonctions h et h_1 sont continûment différentiables en x .

On introduit la norme $\|\lambda\|_{\infty} \triangleq \Lambda$ du vecteur $\lambda \triangleq (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. (On rappelle que $\Lambda = \sup_i \lambda_i$). On considère les commandes en boucle ouverte appartenant à l'espace Eucldien de dimension m . (voir définition dans le chapitre 0 consacré à l'introduction). On énonce:

Proposition 2.1 Il existe $\gamma > 0$ pour lequel le problème 2 a au moins une commande optimale lorsque $\Lambda < \gamma$. Si $(G_{\lambda}^0, x_{\lambda}^0, u_{\lambda}^0)$ sont les caractéristiques de la solution optimale correspondante, on a

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} (G_{\lambda}^0, x_{\lambda}^0, u_{\lambda}^0) = (G^0, x^0, u^0) \quad (2-12)$$

où (G^0, x^0, u^0) est la solution optimale du problème 1.

Démonstration.

On suppose que le problème 2 a effectivement une solution, c'est-à-dire qu'il existe une commande optimale u_λ^0 , pour un Λ suffisamment petit; et soit p_λ^0 le multiplicateur de Lagrange correspondant. On a la suite d'inductions suivantes:

(induction 1). La relation

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} (x_\lambda^0, u_\lambda^0) = (x^0, u^0)$$

entraîne

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} p_\lambda^0 = p^0(t)$$

où $p^0(t)$ est le "Le coefficient de Lagrange optimal" du problème 1.

Démonstration: On écrit l'équation adjointe sous la forme d'une équation intégrale de la façon suivante:

$$p_\lambda^0(T) - p_\lambda^0(t) = - \int_t^T \left[\frac{\partial (g + \lambda_4 f_1)}{\partial x} + p'_\lambda(\sigma) \frac{\partial (f + \lambda_1 f_1)}{\partial x} \right]_{0,\lambda} dt. \quad (2-13)$$

La notation $[X]_{0,\lambda}$ indique que la quantité X est considérée au point optimal, solution du problème 2. Les hypothèses (H3) et (H4) permettent d'écrire,

$$\left[\frac{\partial (g + \lambda_4 g_1)}{\partial x} \right]_{o,\lambda} = \left[\frac{\partial g}{\partial x} \right]_o + \sigma_1(\lambda) \quad (2-14)$$

$$\left[\frac{\partial (f + \lambda_1 f_1)}{\partial x} \right]_{o,\lambda} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_o + \sigma_2(\lambda) \quad (2-15)$$

$$p^o(T) = \left[\frac{\partial h[x(T), T]}{\partial x(T)} \right]_o + \sigma_3(\lambda), \quad (2-16)$$

où la notation $[Y]_o$ indique que la quantité Y est considérée au point optimal solution du problème 1. En reportant (2-14), (2-15) et (2-16) dans l'équation (2-13), on obtient

$$p^o_\lambda(t) = \sigma_4(\lambda) + \left[\frac{\partial h[x(T), T]}{\partial x(T)} \right]_o + \int_t^T \left[\frac{\partial g(x^o, u^o, \sigma)}{\partial x^o} + p^o_\lambda(\sigma) \frac{\partial f(x^o, u^o, \sigma)}{\partial x^o} \right] d\sigma \quad (2-17)$$

Soit $R(t, \sigma)$ la matrice résolvante de ce système d'équation intégrales de Volterra, et posons:

$$K(T, t, \lambda) \triangleq \sigma_4(\lambda) + \left[\frac{\partial h[x(T), T]}{\partial x(T)} \right]_o + \int_t^T \left[\frac{\partial g(x, u, \sigma)}{\partial x} \right]_o d\sigma. \quad (2-18)$$

La solution de (2-17) s'écrit alors ,

$$P_{\lambda}^{\circ}(t) = K(T, t, \lambda) + \int_t^T R'(t, \sigma) K(T, \sigma, \lambda) d\sigma . \quad (2-19)$$

Le second membre de cette relation est continu par rapport à

$K(T, t, \lambda)$. Par ailleurs on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} K(T, t, \lambda) = \left\{ \frac{\partial h [x(T), T]}{\partial x(T)} \right\}_0 - \int_t^T \left\{ \frac{\partial g(x, u, \sigma)}{\partial x} \right\}_0 d\sigma$$

qui est précisément le second membre de l'équation intégrale de $p^{\circ}(t)$. On en déduit la continuité annoncée de $p_{\lambda}^{\circ}(t)$ par rapport à λ .

Induction 2

La relation

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (p_{\lambda}^{\circ}, x_{\lambda}^{\circ}) = (p^{\circ}, x^{\circ})$$

entraîne

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u_{\lambda}^{\circ} = u_0 . \quad (2-20)$$

Démonstration: Supposons que u_{λ}° existe et soit $u_1(t, \lambda)$

la fonction accroissement définie par la relation

$$u_{\lambda}^{\circ}(t) = u^{\circ}(t) + u_1(t, \lambda) . \quad (2-21)$$

D'après l'hypothèse (H3), l'Hamiltonien du problème est différentiable par rapport à (x,u) et son équation d'optimisation est

$$\left[\frac{\partial H(x,u,p,t)}{\partial u} \right]_{(x_\lambda^0, u_\lambda^0, p_\lambda^0)} = 0 \quad (2-22)$$

Les conditions aux limites sur p^0 et x^0 permettent d'écrire,

$$x_\lambda^0 = x^0 + \sigma_5(\lambda), \quad p_\lambda^0 = p^0 + \sigma_6(\lambda);$$

ce qui met (2-22) sous la forme

$$\frac{\partial H}{\partial u} \left[x^0 + \sigma_5(\lambda), u_\lambda^0, p^0 + \sigma_6(\lambda), t \right] = 0 \quad (2-23)$$

Il en résulte, en utilisant (H1) et la continuité exprimée en (H3), que l'on a nécessairement

$$u_\lambda^0 = u^0 + \sigma_7(\lambda).$$

En effet, dans le cas contraire, autrement dit si on avait

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u_\lambda^0 = u^1 \neq u^0,$$

d'après (2-23) on aurait

$$\frac{\partial H}{\partial u} \left[x^0, u^1, p^0, t \right] = 0$$

et le problème 1 aurait plus d'une commande optimale ce qui est contraire à (H1).

Il résulte donc de (2-23) que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u_{\lambda} (t, \lambda) = 0 \quad .$$

$$\lambda \rightarrow 0$$

Induction 3 La relation

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u_{\lambda}^0 = u_0$$

$$\lambda \rightarrow 0$$

entraîne

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} x_{\lambda}^0 = x^0 \quad .$$

Démonstration : on note

$$\begin{aligned} \Delta x^0 &= x^0 - x_{\lambda}^0 \\ \Delta u^0 &= u^0 - u_{\lambda}^0 \quad . \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H3), l'équation (2-10a) procure

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\lambda}^0 + \frac{\dot{\Delta} x^0}{\Delta x^0} &= f(x^0, u^0, t) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x^0}^{\prime} \Delta x^0 + \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]_{u^0}^{\prime} \Delta u^0 + \\ &+ \sigma_6^{\prime} (\Delta x^0, \Delta u^0) + \lambda_1^{\prime} f_1(x^0 + \Delta x^0, u^0 + \Delta u^0, t) \quad . \end{aligned} \quad (2-24)$$

On simplifie cette équation en tenant compte de l'équation d'état (2-1) du problème 1, et ensuite on intègre le résultat de t_0 à t pour obtenir:

$$\begin{aligned} \Delta x^0 (t) &= \lambda_2 x_1 + \sigma_7 (\lambda) + \sigma_8 (\Delta x, \Delta u) + \\ &+ \int_{t_0}^T \left[\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x^0}^{\prime} \Delta x^0 (\sigma) + \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]_{u^0}^{\prime} \Delta u^0 (\sigma) \right] d\sigma \end{aligned} \quad (2-25)$$

On en déduit aisément, comme pour l'induction 1, par interprétation de l'équation intégrale de Volterra que

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \Delta x^0(t) = 0 \quad .$$

$$\Lambda \rightarrow 0$$

Induction 4) Les résultats précédents entraînent la relation

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} (G_{\lambda}^0, p_{\lambda}^0, u_{\lambda}^0, x_{\lambda}^0) = (G^0, p^0, u^0, x^0) \quad .$$

Démonstration. D'après nos hypothèses de continuité, le terme de gauche ci-dessus a une limite finie.

$$(G_{\lambda}^0, p_{\lambda}^0, u_{\lambda}^0, x_{\lambda}^0) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} (G^1, p^1, u^1, x^1).$$

Lorsque $\lambda \rightarrow 0$, les équations de définition du problème 2, convergent formellement, dans leurs structures, vers les équations de définitions du problème 1. Ainsi, par continuité en λ , on construit une solution optimale du problème 1.

Cela étant, d'après l'hypothèse (H1), le problème 1 a une commande optimale et une seule $u^0(t)$, et on a

$$\lim_{\lambda} u_{\lambda}^0(t) = u^0(t).$$

De là, d'après l'induction 3, $x_{\lambda}^0 \rightarrow x^0$;

puis, d'après l'induction 1, $p_{\lambda}^0 \rightarrow p^0$; d'où $G_{\lambda}^0 \rightarrow G^0$.

On vérifie à posteriori qu'il existe bien un γ ,
tel que

$$\Lambda \leq \gamma \Rightarrow \exists (J^0, u^0) \quad \blacksquare$$

2.3 PROPOSITION POUR UN CRITERE OPTIMAL D'ESTIMATION

On revient au problème 1 et on suppose que l'état $x(t)$ n'est pas observé directement. On en fait donc une estimation $\hat{x}(t)$, ce qui entraîne une certaine erreur d'estimation $\tilde{x}(t)$ définie par la relation

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) + \tilde{x}(t),$$

et on décide de la valeur de la commande au moyen de $\hat{x}(t)$.

Analysons de plus près le problème.

Soit δt un intervalle de temps infiniment petit. D'après la physique même du processus, à l'instant t , on évalue en temps réel la commande $u(t + \delta t)$ qui sera appliquée à l'instant ultérieur $t + \delta t$. Si la commande est une commande en chaîne fermée, $u(t + \delta t)$ dépend explicitement de l'état futur

$x(t + \delta t)$, si c'est une commande en chaîne ouverte, la dépendance n'est plus apparente mais seulement implicite. Quoiqu'il en soit, une estimation de cet état futur est nécessaire. Par exemple on pourra la faire au moyen de la formule

$$x(t + \delta t) = x(t) + f[x(t), u(t), t] \delta t + O(\delta t) \quad (2-26)$$

ce qui conduit au diagramme de la Fig 2-2.

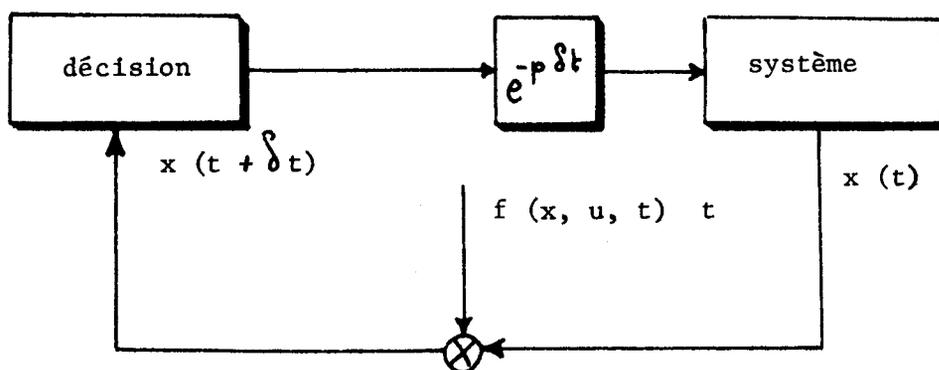


Fig 2-2. Analyse séquentielle du processus de décision

En supposant que l'on sache calculer sans erreur le second membre de (2-26) lorsque $f(\cdot)$ et toutes ses caractéristiques utiles sont connues, il n'en reste pas moins vrai qu'une erreur sur la fonction $f(\cdot)$ même induit une erreur sur

$x(t + \delta t)$. Or c'est précisément le cas dans un problème de commande avec information imparfaite: on n'a pas accès à la vraie valeur $f(x, u, t)$, mais seulement à la valeur approchée $f(\hat{x}, u, t)$ en sorte que l'on a l'approximation.

$$\hat{x}(t + \delta t) = \hat{x}(t) + f[\hat{x}(t), u(t), t] + o(\delta t) . \quad (2-27)$$

Ainsi, l'estimation de $x(t + \delta t)$ sera d'autant meilleure que l'estimation $f[\hat{x}, u, t]$ est bonne.

On est donc conduit à penser que l'estimateur optimal qui fournit \hat{x} devrait minimiser la quantité

$$\| f[x(t), u(t), t] - f[\hat{x}(t), u(t), t] \| \quad (2-28)$$

où la norme $\| \ \|$, choisie a priori, est le critère d'approximation.

On peut faire des remarques analogues en ce qui concerne l'optimisation de la fonctionnelle de coût, soit encore, plus directement, $g(x, u, t)$ elle-même. En effet, la commande $u(t)$ dépend de $x(t)$ par l'intermédiaire de l'optimisation de l'Hamiltonien, soit:

$$\tilde{H}(x, u, p, t) \triangleq \frac{\partial H(x, u, p, t)}{\partial u} = 0$$

Il en résulte que si les conditions de dérivabilité suffisantes sont satisfaites, l'accroissement de la commande δu défini par

$$u(t + \delta t) = u(t) + \delta u$$

est solution de l'équation

$$\begin{aligned} \tilde{H}[x(t), u(t), p(t), t] &+ \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}\right)'_t f(x, u, t) \delta t + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p}\right) \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}\right) \delta t \\ &+ \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}\right)' \delta t + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u}\right)' \delta u + o(\delta t) = 0 \end{aligned} \quad (2-29)$$

L'estimation de u sera d'autant meilleure que celle de $f(x, u, t)$, $g(x, u, t)$ ainsi que leurs dérivées partielles le sont. Si l'on considère qu'une bonne estimation des fonctions conduit à une bonne estimation de leurs dérivées, on peut penser que l'estimateur optimal devrait minimiser outre l'erreur sur f , (2-28), mais aussi la quantité.

$$\| g[x(t), u(t), t] - g[\hat{x}(t), u(t), t] \|.$$

Ainsi on serait conduit à l'optimisation de l'estimation simultanée de deux grandeurs.

D'une façon générale cette optimisation ne sera pas possible. Aussi, on ne peut guère qu'envisager l'optimisation d'une combinaison linéaire de la forme.

$$g[\hat{x}(t), u(t), t] + \mu'(t) f[\hat{x}(t), u(t), t] \quad (2-31)$$

ou $\mu(t)$ est un certain n-vecteur choisi à priori, et dont la dépendance en fonction du temps pourrait exprimer par exemple, l'importance de la pondération de chaque composante d'état.

Il semblerait à première vue que $\mu(t)$ puisse être choisi arbitrairement.

En fait, une combinaison telle que (2-31) s'impose plus particulièrement à l'esprit, à savoir:

$$g[\hat{x}(t), u(t), t] + p^{0'}(t) f[\hat{x}(t), u(t), t] \quad (2-32)$$

C'est précisément une estimation de l'Hamiltonien. Nous l'appellerons "Hamiltonien estimé", et la noterons $H(\hat{x}, u, p, t)$.

Cette dernière définition doit être prise comme

une définition purement formelle. L'Hamiltonien n'est pas considéré sur la trajectoire optimale, u n'est pas nécessairement la commande optimale.

Celà étant, nous allons voir qu'il existe une certaine identité de point de vue, entre l'estimation optimale de $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ d'une part, et celle de $H(\cdot)$ d'autre part. En effet:

- supposons que les fonctions $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ soient connues avec une certaine indétermination δf et δg vérifiant l'hypothèse (H3). Il en résulte une indétermination δH sur H , et d'après les résultats du paragraphe 2.2, on a

$$\lim_{\delta H \rightarrow 0} (G^0, x^0, u^0)_{H + \delta H} = (G^0, x^0, u^0),$$

la notation $(\cdot)_{H + \delta H}$ indiquant que les quantités entre parenthèses ont été calculées avec l'Hamiltonien $H + \delta H$.

- supposons maintenant, qu'au lieu d'utiliser l'Hamiltonien exact, on utilise l'Hamiltonien estimé

$$\hat{H}(\cdot) \equiv H(x - \tilde{x}, u, p, t).$$

Il en résulte une certaine imprécision δH sur H , imprécision que l'on peut écrire sous la forme

$$\delta H = \left(\frac{\partial H}{\partial f}\right)' \delta f + \left(\frac{\partial H}{\partial g}\right)' \delta g + o(\delta f, \delta g) \quad (2-33)$$

avec

$$\delta f \triangleq \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)' \tilde{x} \quad \delta g \triangleq \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)' \tilde{x},$$

et d'après le paragraphe 2.2, la solution déterminée avec $\hat{H}(\cdot)$ tendra bien vers (G^0, x^0, u^0) quand $\delta H \rightarrow 0$.

On est donc conduit à proposer le critère suivant pour optimiser l'estimation.

CRITERE D'OPTIMISATION DE L'ESTIMATEUR

On se propose de trouver la commande optimale du problème 1 dans lequel l'état $x(t)$ est connu seulement par l'intermédiaire d'une variable observée $\{ (t)$.

- on détermine $x(t)$ à l'aide d'un estimateur F , appartenant à une classe \mathcal{C} posée comme une donnée du problème:

$$\hat{x}(t) = F_0 \{ (t) ; \quad (2-34)$$

- on choisit une norme $\| \cdot \|_H$ définissant la meilleure approximation de $H(\cdot)$;

- l'estimateur optimal pour ϵ et $\| \cdot \|_H$ est celui qui donne la meilleure approximation de l'Hamiltonien, c'est-à-dire qui est solution de

$$\min_F \| H(x, u, p, t) - \hat{H}(F_0, u, p, t) \|_H . \quad (2-35)$$

2.4 QUELQUES CONSEQUENCES IMMEDIATES.

2.4.1. Séparation de l'estimation et de la commande.

Définition.

On entend par problème séparé, un problème dans lequel les fonctions $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont de la forme

$$f(x, u, t) = f_1(x) + f_2(u, t) \quad (2-36)$$

$$g(x, u, t) = g_2(u, t) \quad (2-37)$$

On énonce

Proposition 2.2 L'estimateur F d'un problème séparé défini par l'optimisation

$$\min_{\mathbf{F}} \| f_1(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{F} \circ \mathbf{f}) \| \quad (2-38)$$

est optimal pour ce problème

En effet, on a,

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) = g_2(\mathbf{u}, t) + \mathbf{p}'(t) [f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{u}, t)]$$

$$H(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) = g_2(\mathbf{u}, t) + \mathbf{p}'(t) [f_1(\hat{\mathbf{x}}) + f_2(\mathbf{u}, t)]$$

L'estimateur optimal minimise donc

$$\| \mathbf{p}'(t) [f_1(\mathbf{x}) - f_1(\hat{\mathbf{x}})] \|_H \quad (2-39)$$

Cette quantité est bien minimale quelque soit $\mathbf{p}(t)$ si $f(\hat{\mathbf{x}})$

est la meilleure estimée de $f(\mathbf{x})$. ■

Dans une approximation du premier ordre on

écrira (puisque $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}$),

$$f_1(\mathbf{x}) \approx f_1(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}) \tilde{\mathbf{x}},$$

et l'estimateur optimal sera obtenu par minimisation de la quantité

$$\| \mathbf{p}'(t) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}) \tilde{\mathbf{x}} \|_H \quad (2-40)$$

Dans le cas particulier où $f_1(\mathbf{x})$ est linéaire,

soit $A(t)\mathbf{x}$, le critère de minimisation rigoureux s'écrit

$$\min_F \left\| p'(t) \cdot A(t) x \right\|_H \quad (2-41)$$

On retrouve ainsi le fameux théorème de séparation de l'estimation et de la commande.

2.5 SUR LA DEFINITION DU PROBLEME D'OPTIMISATION

Le problème d'optimisation **apparaît** donc comme celui de la minimisation simultanée de deux fonctionnelles, ou encore d'une fonctionnelle à valeur vectorielle. Il convient donc de préciser le sens de cette optimisation.

2.5.1 Formulation du problème

Soit z la grandeur observée;

$$z = x + \eta(x, t) .$$

L'estimation \hat{x} par l'estimateur F sera notée $F \circ z$.

$$\hat{x} = F \circ z .$$

L'estimateur optimum devrait satisfaire à la condition

$$\min \left\| H(x, u, p, t) - \hat{H}(F \circ z, u, p, t) \right\| \triangleq \min K(x, z, F, u, p, t) \quad (2,40)$$

Le problème dès lors, peut être formulé de la façon suivante:

équations d'état:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (2,41)$$

$$\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial x} \qquad p(T) = - \frac{\partial h}{\partial x(T)} \qquad (2,42)$$

$$z = x + \varepsilon(x, t) , \qquad (2,43)$$

objectifs: déterminer F et u de façon à s'approcher pour le mieux des conditions

$$\min_u G(x, z, F, u) \qquad (2,44)$$

$$\min_F K(x, z, F, u, p, t) . \qquad (2,45)$$

Remarques.

- L'expression mathématique de F n'a pas été précisé. Cela n'est nullement gênant, notre propos ici n'étant pas de résoudre le problème d'optimisation mais de le définir.

- Les quantités K et G sont très différentes mathématiquement l'une de l'autre: K(.) est une fonction scalaire de l'instant t et la minimisation correspondante est instantannée, G(.) est une fonctionnelle définie à chaque instant sur l'intervalle de temps (t,T).

- F minimise K (.) seule, et u minimise G (.) seule. F et u peuvent donc être vues comme les commandes respectives des acteurs d'un jeu à deux personnes et de sommes non nulles.

2.5.2 Description des divers types d'équilibre.

On énumère ici les divers points d'équilibre possibles pour notre problème. On verra par la suite lequel choisir.

Pour un couple (F,u) donné compte tenu des relations (2,41) à (2,43), K (.) et G (.) sont des fonctions de F et u seules, ce que nous écrirons K (F, u) et G (F, u).

Equilibre de Nash (ou équilibre non coopératif)

Le couple admissible (F_N, u_N) est un équilibre de Nash si on a

$$G (F_N, u) \geq G (F_N, u_N) \quad (2,46)$$

$$K (F, u_N) \geq K (F_N, u_N) \quad (2,47)$$

pour tous couples (F_N, u) et (F, u_N) admissibles.

Equilibre minimax

Le couple admissible (F_M, u_M) est un couple minimax si on a

$$\max_F G(F, u_M) \leq \max_F G(F, u) \quad (2,48)$$

$$\max_u K(F_M, u) \leq \max_u K(F, u) \quad (2,49)$$

pour tout (F, u) admissible

Extremum de Pareto. (ou équilibre coopératif)

Le couple admissible (F_P, u_P) est un extrémum de Pareto si on a

$$G(F, u) \leq G(F_P, u_P) \Rightarrow G(F, u) = G(F_P, u_P) \quad (2,50)$$

$$K(F, u) \leq K(F_P, u_P) \Rightarrow K(F, u) = K(F_P, u_P) \quad (2,51)$$

pour tout (F, u) admissible.

2.5.3. Choix d'un équilibre

L'équilibre minimax est à rejeter. En effet, considérons l'inégalité (2,48); en clair elle traduit l'attitude prudente suivante: choisir $u = u_M$ de façon que le maximum possible pour $G(F, u_M)$ donné par l'estimateur F le plus défavorable

soit inférieur au maximum possible de $G(F, u)$ pour $u = u_M$;
 en terme de jeu on est sûr de gagner au moins $\max_F G(F, u_M)$.
 Cet attitude revient donc à admettre que le choix de F serait
 systématiquement le plus défavorable en ce qui concerne la va-
 leur de $G(\cdot)$. Ceci n'est évidemment pas réaliste ici.

Cela étant on remarque que tout extrémum de Pa-
 reto est un équilibre de Nash, puisque, d'après les inégalités
 (2,50) et (2,51)

on a

$$G(F_p, u) \geq G(F_p, u_p) \quad (2,52)$$

$$K(F, u_p) \geq K(F_p, u_p) \quad (2,53)$$

Ainsi, les extrêma de Pareto sont contenus dans l'ensemble
 des équilibres de Nash.

Par ailleurs il est clair que si F est choisi iden-
 tique à F_N , alors u_N est une commande optimale correspondante.

Ainsi, quoique l'extrémum de Pareto corresponde,
 d'un point de vue théorique, mieux à notre problème, nous adop-
terons dans ce qui suit l'optimisation au sens de Nash.

Les raisons de ce choix, essentiellement d'ordre pratique, sont les suivantes:

- D'après l'une des remarques précédentes, l'équilibre de Nash est plus général que l'extrémum de Pareto; ainsi nous pourrions donner un sens au problème même lorsque il n'y a pas d'extrémum de Pareto. D'ailleurs si l'équilibre de Nash existe et est unique, c'est aussi un extrémum de Pareto.

- Cette généralité de l'équilibre de Nash dans sa définition est encore accrue par des conditions mathématiques d'existence qui sont bien moins restrictives que celle relatives à l'extrémum de Pareto.

- Les équations de définition de l'équilibre de Nash sont en quelque sorte découplées, ce qui est très commode pour une solution quasi-optimale. Supposons par exemple que, par analogie avec un problème semblable déjà résolu, on choisisse à priori un certain filtre. La commande correspondante se détermine alors aisément, et ensuite on peut tester la validité des inégalités (2,46) et (2,47).

2.6 UN CRITERE PARTICULIER D'ESTIMATION DE L'HAMILTONIEN

Un critère particulier d'estimation de l'Hamiltonien est celui de l'estimation en moyenne quadratique sur $(0,T)$;

$$\min_F \int_0^T \left[H(x, u, p, t) - \hat{H}(\hat{x}, u, p, t) \right]^2 dt. \quad (2,54)$$

Nous ne chercherons pas ici à justifier par des arguments d'ordre physiques plus ou moins vrais (signification énergétique par exemple) ce critère. Sa réelle justification réside dans sa commodité d'utilisation.

- Il conduit à des calculs qui peuvent généralement être poursuivis jusqu'au bout.
- Il s'écrit encore

$$\min_F \int_t^T \left[H(x, u, p, t) - \hat{H}(\hat{x}, u, p, t) \right]^2 dt \quad (2,55)$$

Sous cette forme nous avons une similitude de forme avec le gain $G(\cdot)$, ce qui apporte plus d'unité au calcul

2.7 UNE CLASSE D'ESTIMATEURS SOUS OPTIMAUX

Lorsque l'erreur d'estimation est vraiment une erreur, c'est-à-dire a une amplitude faible comparée à celle du signal, on peut penser que le vecteur optimal de Lagrange du problème avec erreur d'observation sera voisin du vecteur p^0 . Dans ces conditions un critère sous-optimal sera le suivant:

- déterminer F de façon à minimiser la norme

$$\left\| H(x, p^0, u, t) - \hat{H}(\hat{x}, p^0, u, t) \right\| \quad (2,40)$$

Dans le même ordre d'idées, on peut remarquer que la commande du problème perturbé sera assez voisine de celle du problème initial, ce qui conduit à prendre $u \simeq u^0$ et à proposer le critère approché

$$\min_F \left\| H(x, p^0, u^0, t) - H(\hat{x}, p^0, u^0, t) \right\| \quad (2,41)$$

qui est plus simple à utiliser que (2,38).

COMMENTAIRES.

1. Dans une première étude de problème de l'estimation optimale faite à propos des jeux différentiels [1], nous avons proposé une approche basée uniquement sur une meilleure estimation de la densité $g(x, u, t)$ de la fonction de gain. Or si une telle estimation peut avoir un sens immédiat lorsque $g(x, u, t)$ est une fonction explicite de x , sa définition semble bien plus malaisée lorsque la densité de gain ne dépend plus de x . Dans ce cas en effet la notion d'estimation optimale n'aurait plus de sens. Une autre difficulté inhérente à cette approche réside dans la remarque la suivante: une estimation peut très bien être optimale pour $g(x, u, t)$ et être désastreuse pour $f(x, u, t)$; c'est-à-dire en première approximation, pour

$$x(t + \delta t) \cong x(t) + f(x, u, t) \int \delta t.$$

laquelle sert précisément à déterminer la commande optimale.

2. Le critère que nous venons de proposer a été énoncé sans démonstration pour la première fois dans [2].

3. Le problème de l'optimisation simultanée de plusieurs fonctionnelles est connue dans la littérature sous le vocable de "optimisation d'une fonction de coût à valeurs vectorielles". Elle s'est développée surtout dans le cadre de la théorie des jeux à plusieurs personnes. La différence avec notre problème étant alors des questions de rivalité entre joueurs, ce qui n'existe pas ici où le contrôleur choisit toutes les commandes. Nous renvoyons le lecteur à l'article initial de Nash [3]. On trouvera une discussion claire et concise de cette question dans l'article [4].

REFERENCES.

- (1) JUMARIE, G. "Synthèse d'un jeu différentiel a erreurs d'observation par comparaison avec le jeu à information parfaite". Revue du CETHEDC. 6ème année. no 20, pp. 31-58. Ministère de la Défense Nationale. 1969. PARIS.
- (2) ————— "Nouvelle approche au problème du filtrage optimal dans les jeux différentiels avec bruits d'observation ou retard à l'informat-on". Comptes Rendus Acad. Sciences. Tome 272, Série A, pp. 927-929 1971. PARIS.
- (3) NASH, A. "Non cooperative gams". Annals of Mathematics. Vol. 54, pp. 286-295. 1951.
- (4) STARR, A. W. HO Y.C. "Non zero-sum différentiel games". Jour. Optimiz. Theory and Applic. Vol 3. No 3. 1969.

CHAPITRE III

COMMANDE OPTIMALE AVEC BRUITS D'OBSERVATION

III-0

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment, en utilisant l'approche du chapitre II, on peut généraliser le principe de séparation de l'estimation et de la commande, pour des systèmes non linéaires quelconques avec erreur d'observation sous forme de bruits blancs.

3.1 INTRODUCTION

Une fois admis le critère d'optimisation proposé dans le second chapitre, il ne reste plus qu'à utiliser les techniques d'optimisation de filtres statistiques que nous avons actuellement à notre disposition. Le choix de l'approximation souhaitable sera plus ou moins complexe selon la précision désirée, et à ce propos on peut distinguer trois grandes voies d'approches.

(1) Optimisation simultanée de l'estimation de l'Hamiltonien et de l'objectif du problème. Dans sa généralité le problème est de trouver simultanément le filtre F qui minimise la norme

$$\min_F \left\| H(x, u, p, t) - H(\hat{x}, u, p, t) \right\| \quad (3,1)$$

et la commande $u(t)$ qui minimise la quantité

$$\min_u G(\hat{x}, u, T) \quad .$$

(2) Sous-optimisation de l'estimation de l'Hamiltonien et optimisation de l'objectif du problème.

L'optimisation globale se fait séquentiellement de la façon suivante:

- on cherche un filtre approché qui réalise

$$\min_F \quad \| H(x, u^0, p^0, t) - H(\hat{x}, u^0, p^0, t) \| \quad (3,2)$$

où rappelons-le, (u^0, p^0) désigne les caractéristiques optimales de commande du problème sans perturbation.

- on optimise la fonctionnelle $G(\hat{x}, u, T)$. ou \hat{x} est la valeur estimée de x à l'aide du filtre précédent.

(3) L'optimisation globale est une optimisation approchée comme en (2), mais l'optimisation statistique est faite par linéarisation de $H(\cdot)$.

Dans ce qui suit on se propose de voir comment les techniques dont nous disposons peuvent s'insérer dans ce cadre.

Nous illustrerons ceci en considérant successivement plusieurs modèles non linéaires dont l'erreur d'observation

se présente sous forme d'un bruit blanc gaussien, ce qui nous conduira à une extension du principe de séparation de l'estimation et de la commande.

3.2 RAPPEL SUCCINCT SUR LE FILTRE DE KALMAN-BUCY.

Nous rappelons ici l'essentiel du filtre optimal de Kalman-Bucy [1] dans le but principal d'en retenir certains des aspects qui pourront être mis à profit dans diverses approximations.

3.2.1 Processus Markovien.

Soit l'équation différentielle (au sens de Ito [2]) vectorielle (dimension de $x = n$)

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + v(t) ,$$

où $v(t)$ est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle ,

$$E \{ v(t) \} = 0 ,$$

et de matrice de covariance

$$E \{ v(t) v'(\tau) \} = R_2(t) \delta(t-\tau) .$$

$x(t_0)$ est un vecteur aléatoire gaussien indépendant de $v(t)$ pour $t \geq t_0$ et ayant les caractéristiques

$$E \{ x(t_0) \} = 0 \quad ,$$

$$E \{ x(t_0) x'(t_0) \} = \Lambda_0 \quad .$$

L'équation (3,3) représente l'évolution d'un processus Markovien. On peut montrer que réciproquement, sous certaines conditions de régularité, tout processus Markovien continu peut être représenté par une dynamique linéaire excitée par un bruit blanc.

Soit $A(t)$ une solution particulière de l'équation sans second membre

$$\dot{x}(t) = F(t) x(t) \quad ,$$

et posons

$$\phi(t, t_0) = A(t) A^{-1}(t_0) \quad .$$

La solution $x(t)$ de l'éq. (3,3) peut se mettre alors sous la forme

$$x(t) = \phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \sigma) v(\sigma) d\sigma \quad . \quad (3,4)$$

La covariance $\Lambda(t, \tau)$ de $x(t)$ est donnée par

$$\Lambda(t, \tau) = E \{ x(t) x'(\tau) \}$$

$$= \Phi(t, t_0) \Lambda_0 \Phi'(t, t_0) + \int_{t_0}^{\min(t, \tau)} \Phi(t, \sigma) R_2(\sigma) \Phi'(\tau, \sigma) d\sigma ; \quad (3,5)$$

en particulier la variance $\Lambda(t, t)$ de $x(t)$ est,

$$\Lambda(t, t) \triangleq \Lambda(t)$$

$$= \Phi(t, t_0) \Lambda_0 \Phi'(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \sigma) R_2(\sigma) \Phi'(t, \sigma) d\sigma. \quad (3,6)$$

Ce dernier résultat peut être obtenu directement de la façon suivante: d'après l'éq. (3,4), on a

$$x'(t) = x'(t_0) \Phi'(t, t_0) + \int_{t_0}^t v'(\sigma) \Phi'(t, \sigma) d\sigma. \quad (3,7)$$

On multiplie m-à-m les éqs. (3,4) et (3,7) on prend la moyenne du résultat obtenu, et on remarque que

$$E \left\{ \int_{t_0}^t \Phi(t, \sigma) \left[\int_{t_0}^t v(\beta) v'(\beta) \Phi'(t, \beta) d\beta \right] d\sigma \right\} = \int_{t_0}^t \Phi(t, \sigma) R_2(\sigma) \Phi'(t, \sigma) d\sigma.$$

En dérivant (3,6) on obtient l'éq. différentielle de $\Lambda(t)$, soit

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}(t) &= F(t) \Lambda(t) + \Lambda(t) F'(t) + R_2(t) \quad (3,8) \\ \Lambda(t_0) &= \Lambda_0 . \end{aligned}$$

Ces résultats peuvent être adaptés aisément à un système gouverné par la dynamique

$$\dot{z}(t) = F_1(t) z(t) + S(t) v(t) \quad (3,9)$$

où $S(t)$ est une matrice. En effet, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \text{cov} [S(t) v(t), S(\tau) v(\tau)] &= E \{ S(t) v(t) v'(\tau) S'(\tau) \} \\ &= S(t) R_2(\tau) (t-\tau) S'(\tau) . \quad (3,10) \end{aligned}$$

On a successivement:

$$z(t) = \Phi(t, t_0) z(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \sigma) S(\sigma) v(\sigma) d\sigma ,$$

$$\begin{aligned} \Lambda_z(t, \tau) &= E \{ z(t) z'(\tau) \} \\ &= \Phi(t, t_0) \Lambda_{z,0} \Phi'(t, t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^{\min(t, \tau)} \Phi(t, \sigma) S(\sigma) R_2(\sigma) S'(\sigma) \Phi'(t, \sigma) d\sigma , \quad (3,11) \end{aligned}$$

$$\Lambda_z(t) = \Phi(t, t_0) \Lambda_{z,0} \Phi'(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \sigma) \cdot S(\sigma) R(\sigma) S'(\sigma) \Phi'(t, \sigma) d\sigma, \quad (3,12)$$

$$\dot{\Lambda}_z(t) = F(t) \Lambda(t) + \Lambda(t) F'(t) + S(t) R(t) S'(t) \quad (3,13)$$

$$\Lambda_z(t_0) = \Lambda_{z,0}$$

3.2.2. Filtre de Kalman-Bucy

Le problème du filtrage linéaire est le suivant:

On considère à nouveau le processus Markovien

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + v(t) \quad (3,3)$$

Soit par ailleurs l'observation continue $y(t)$ définie par

$$y(t) = C(t)x + w(t) \quad (3,14)$$

où $w(t)$ est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de covariance

$$E \{ w(t) w'(\tau) \} = Q_2(t) \delta(t-\tau)$$

On veut calculer

$$\hat{x}(t) = E \{ x(t) / y(\sigma), \sigma \in [t_0, t] \} \quad (3,15)$$

Depuis les premiers travaux de Kalman-Bucy [1], [2], il a été proposé un nombre impressionnant de méthodes de résolution à ce problème. Pour ce que nous avons en vue, l'exposé abrégé suivant sera suffisant:

-Admettons que le filtre optimal a une dynamique de la forme

$$\hat{x}(t) = F(t) \hat{x} + K(t) [y(t) - C(t) \hat{x}(t)] \quad (3,16)$$

où $K(t)$ est une matrice de gain que nous déterminerons en utilisant la propriété qu'a le filtre optimum de minimiser la moyenne quadratique de l'erreur $\tilde{x} = x - \hat{x}$, soit;

$$\Sigma = E \{ \tilde{x} \tilde{x}' \}$$

La différence m-à-m entre les éqs. (3,3) et (3,16) donne

$$\dot{\tilde{x}} = (F-KC) \tilde{x} - Kw + v \quad (3,17)$$

et d'après l'éq. (3,8) la dynamique de $\Sigma(t)$ est

$$\dot{\Sigma} = (F - KC) \Sigma + \Sigma (F - KC)' + K Q_2 K' + R_2$$

Si $C(t)$ est choisi de façon à minimiser le second membre de cette équation, $\Sigma(t)$ sera lui-même minimum. Or on peut écrire encore $\dot{\Sigma}$ sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma} &= (K - \Sigma C' Q_2^{-1}) Q_2 (K' - Q_2^{-1} C \Sigma) + F \Sigma \\ &+ \Sigma F' - \Sigma C' Q_2^{-1} C \Sigma + R_2. \end{aligned}$$

On a donc

$$K \text{ opt} = \Sigma C' Q_2^{-1} \quad (3,18)$$

En ce qui concerne la recherche de solutions quasi-optimales que nous avons en vue, nous pouvons formuler les remarques d'ordre pratiques suivantes.

Remarque 1. Les équations linéaires (3,16) en \hat{x} et (3,3) en x ont le même opérateur principal $F(t)$, et diffèrent seulement par leurs seconds membres.

On peut généraliser cette remarque et penser que d'une façon générale, l'estimation $\hat{x}(t)$ aura une dynamique voisine de celle de la variable $x(t)$.

Considérons par exemple la dynamique

$$\dot{x}(t) = F_1(t) x + F_2(x,t) v_1(t) + v_2(t)$$

où $v_1(t)$ et $v_2(t)$ sont des bruits blancs gaussiens. Par ana-

logie avec le filtre de Kalman, on peut se définir une classe de filtres quasi-optimaux par la dynamique

$$\hat{x}(t) = F_1(t) \hat{x} + F_2(\hat{x}, t) K_1(t) [y(t) - C(t) \hat{x}(t)] \\ + K_2(t) [y(t) - C(t) \hat{x}(t)]$$

où $K_1(t)$ et $K_2(t)$ sont des matrices à déterminer.

Remarque 2. Cette similitude entre les équations de $x(t)$ et $\hat{x}(t)$ fait que la dynamique de l'erreur est aussi linéaire.

On peut généraliser cette remarque et choisir à priori une classe de filtre telle que l'erreur résultante ait une dynamique linéaire.

Remarque 3. Dans la présentation précédente la forme du filtre optimal a été choisi a priori (par analogie en fait avec le cas discret) et ensuite on a minimisé la dynamique du critère d'optimalité. C'est certainement là la méthode la plus directe à utiliser à partir du moment où une classe de filtre a été

choisie à priori.

Aussi nous adopterons ce procédé en opérant par minimisation du second membre de la dynamique de l'erreur.

Pour résumer, le processus d'optimisation proprement dit que nous devons insérer par la suite dans notre problème de contrôle optimal est le suivant:

- 1) Linéariser la dynamique de $x(t)$ au voisinage de la valeur estimée $\hat{x}(t)$ et en déduire la classe de filtre par la donnée d'une dynamique $\hat{x}(t)$ telle que la dynamique de l'erreur $\tilde{x}(t)$ soit linéaire.
- 2) Etablir l'équation de la dynamique du critère d'optimisation statistique.
- 3) Optimiser le second membre de la dynamique de ce critère.

3.3 EXTENSION DU PRINCIPE DE SEPARATION DE L'ESTIMATION ET DE LA COMMANDE

Nous avons vu aux chapitres précédents que d'une façon générale le problème de l'optimisation simultanée du filtre et de la commande est un problème d'optimisation d'un vecteur de coût. Pour les systèmes linéaires avec coût quadratiques, qui sont perturbés par des bruits gaussiens, ces deux problèmes sont séparés en ce sens que l'on peut optimiser séparément le filtre et la commande.

Nous allons montrer que pour des problèmes non linéaires avec perturbations par bruits gaussien, et pour des "filtres de Kalman non linéaires", on peut optimiser séquentiellement d'abord le filtre et ensuite la commande, ce qui constitue en quelque sorte une extension du principe de séparation de l'estimation et de la commande.

3.3.1. Modèle 1.

Le contexte est le suivant:

- observation entaché d'une erreur sous forme de bruit blanc gaussien indépendant de l'état du système.
- filtre de Kalman du premier ordre généralisé aux systèmes non linéaires.
- critère d'optimisation statistique: minimisation de la covariance de l'erreur.

3.3.1.1. Enoncé du problème

(1) Problème sans bruit de mesure

- Equations vectorielle d'état:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad x(t_0) = x \quad (3,19)$$

dimension de $x = n$.

- Fonction de coût à minimiser:

$$G(.) = h[x(T), T] + \int_{t_0}^T g(x, u, \sigma) d\sigma \quad (3,20)$$

Ce problème sera noté "problème 1" dans la suite.

(2) Problème avec bruit d'observation.

- Nature de la perturbation .

On observe non pas $x(t)$, mais le m -vecteur $y(t)$ défini par

$$y(t) = C(t) x(t) + v(t) \quad (3,21)$$

où $C(t)$ est une $m \times n$ matrice donnée et $v(t)$ un bruit blanc gaussien d'amplitude faible devant $x(t)$, de moyenne nulle, et de covariance

$$\text{cov} [v(t), v(\tau)] = R(t) \delta(t-\tau), \quad (3,22)$$

$R(t)$ désignant une matrice définie positive .

- On estime l'état $x(t)$ du système par un filtre, lequel restitue $\hat{x}(t)$. La commande $u(t)$, en boucle ouverte ou fermée, est déterminée à l'aide de $\hat{x}(t)$.

- Fonction de coût à minimiser:

$$G_b(.) = E \left\{ h[\hat{x}(T) + x(T), T] + \int_{t_0}^T g(\hat{x} + \tilde{x}, u, \sigma) d\sigma \right\} \quad (3,23)$$

Ce problème sera noté " problème 2" dans la suite.

3.3.1.2. Choix d'une classe de filtres

La classe de filtres est fixée par les considérations suivantes:

On peut penser que la dynamique de la valeur estimée \hat{x} de x sera d'autant plus voisine de celle de x que l'estimation est bonne; ce qui nous conduit à écrire

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t) + \sigma(\hat{x}, v)$$

où $\sigma(x, v)$ est un terme qui a priori devrait être petit avec x et v .

Un développement du premier ordre en x donne

$$\dot{\hat{x}} \approx f(\hat{x}, u, t) + f_x(x, u, t) \tilde{x} \quad ;$$

et, puisque les dynamiques respectives de \hat{x} et x doivent être aussi voisines que possibles, on prendra

$$\sigma(x, v) = f_x(x, u, t) \sigma_1(x, v) ,$$

Soit encore

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t) + f_x(\hat{x}, u, t) \sigma_1(x, v) .$$

Par analogie avec le filtrage linéaire, nous prendrons $\sigma_1(x, v)$ sous la forme

$$\sigma_1(x, v) = K(t) (y - C\hat{x}),$$

soit

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t) + f_x(\hat{x}, u, t) K(t) (y - C\hat{x}) \quad (3,24)$$

où $K(t)$ est la matrice de gain à déterminer selon un critère à choisir . Ce filtre (3,23) est représenté sur la Fig. 3,1.

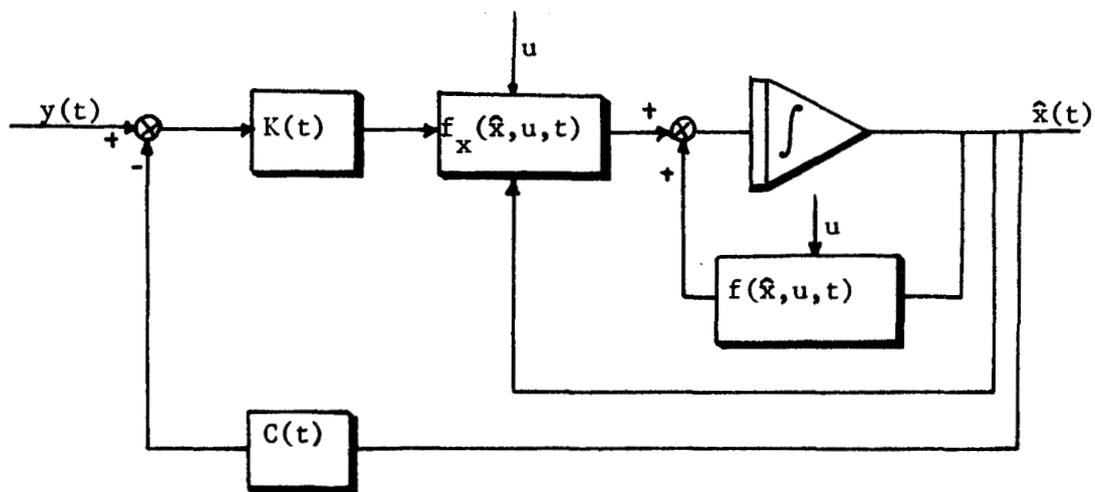


Fig. 3.1 Diagramme représentatif de la classe de filtres du modèle 1.

Critère d'optimisation statistique .

Le critère, choisi à priori comme donnée du problème est celui de la minimisation de la covariance

$$\Sigma = E\{\tilde{x}(t) \tilde{x}'(t)\} . \quad (3,25)$$

3.3.1.3. Optimisation statistique

L'optimisation statistique est conduite de la façon suivante:

(i) Explicitant y par sa valeur donnée par (3,21), l'éq. (3,23)

s'écrit encore

$$\hat{x} = f(\hat{x}, u, t) + f_x(\hat{x}, u, t) K(t) (C \tilde{x} + v) . \quad (3,26)$$

(ii) Un développement du premier ordre de l'éq. (3,19) au voi-

sinage de \hat{x} donne

$$\dot{\hat{x}} + \dot{\tilde{x}} = f(\hat{x}, u, t) + f_x(\hat{x}, u, t) \tilde{x} . \quad (3,27)$$

Par différence m-a-m, les éqs. (3,24) et (3,27) pro-

curent

$$\dot{\tilde{x}} = f_x(\hat{x}, u, t) (1 - KC) \tilde{x} - f_x(\hat{x}, u, t) Kv$$

d'où, d'après l'éq. (3,13)

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma} &= f_x(.) (1 - KC) \Sigma + \Sigma (1 - C' K') f'_x(.) + \\ &+ f_x(.) K R K' f'_x(.) . \end{aligned} \quad (3,28)$$

Σ sera minimal si K minimise le second membre de cette éq. d'où d'après le résultat (3,18) relatif au filtrage linéaire:

$$f_x(\hat{x}, u, t) K_{opt} = \Sigma C' R^{-1} \quad (3,29)$$

soit

$$K_{opt} = f_x^{-1}(\hat{x}, u, t) \Sigma C' R^{-1} .$$

Le filtre correspondant est représenté par le diagramme de la Fig. 3,2. On remarque en particulier qu'il est le même que la commande soit en boucle ouverte ou fermée, ce qui provient du fait que le gain réel du filtre est $f_x(\cdot) K$ et non pas K (Fig. 3,2)

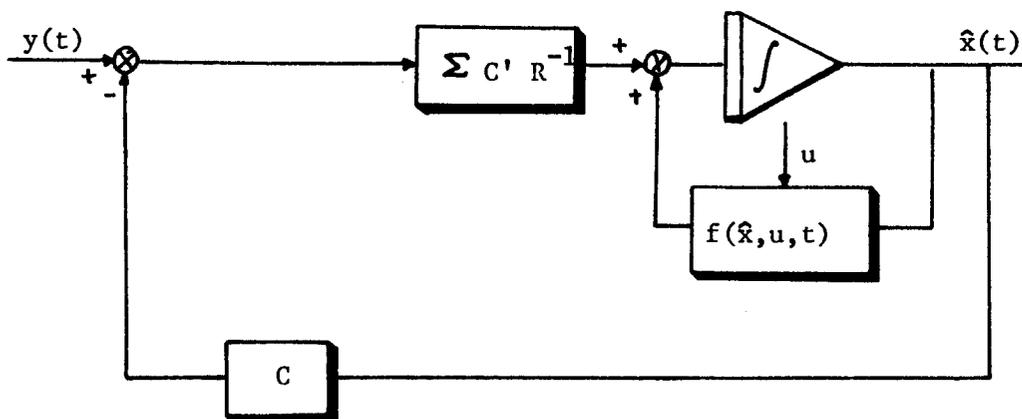


Fig. 3,2 Diagramme représentatif du filtre optimal du modèle 1.

Par ailleurs, la dynamique de l'estimation

\hat{x} s'écrit,

$$\begin{aligned}\hat{x} &= f(\hat{x}, u, t) + \Sigma C' R^{-1} (y - C\hat{x}) \\ &= f(\hat{x}, u, t) + \Sigma C' R^{-1} C \tilde{x} + \Sigma C' R^{-1} v\end{aligned}\quad (3,30)$$

et les dynamiques de x et Σ sont:

$$\dot{\tilde{x}} = [f_x(\cdot) - \Sigma C' R^{-1} C] \tilde{x} - \Sigma C' R^{-1} v \quad (3,31)$$

$$\dot{\Sigma} = f_x(\cdot) \Sigma + \Sigma f_x^1(\cdot) - \Sigma C' R^{-1} C \Sigma \quad (3,32)$$

3.3.1.4. Optimisation de la commande

La formulation du problème d'optimisation de la commande présente deux difficultés.

- Les éqs. (3,30) à (3,32) qui sont les éqs. de la dynamique de notre système, dépendent explicitement de $v(t)$.

- Il faut expliciter et développer le résultat de l'application de l'opération $E \left\{ \right\}$ dans la définition du gain moyen G_b .

Pour formuler le problème, on opérera comme suit:

1) Définition d'une dynamique moyenne.

Considérons pour fixer les idées l'éq.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

Un développement de Taylor du second ordre procure

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \approx f_1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t) + f'_{1x} \tilde{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}' f_{1xx} \tilde{\mathbf{x}} .$$

On obtient l'estimation $f_1(\cdot)$ de $f_1(\cdot)$ en prenant la moyenne statistique de cette expression, soit:

$$\hat{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \approx f_1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t) + \frac{1}{2} \text{Tr} [f_{1xx}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t) \Sigma] . (3,33)$$

Ainsi, nous écrivons la dynamique du système

$$\dot{\mathbf{x}}_1 \approx f_1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t) + f'_{1x} \tilde{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}' f_{1xx} \tilde{\mathbf{x}},$$

et sa moyenne statistique donne

$$\dot{\mathbf{X}}_1 = f_1(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{u}, t) + \frac{1}{2} \text{Tr} [f_{1xx}(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{u}, t) \Sigma] \quad (3, 34)$$

éq. qui représente la dynamique des observations moyennes. A ceci on ajoute l'éq. de propagation de la covariance.

$$\dot{\Sigma} = f_x(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t) \Sigma + \Sigma f_x'(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t) - \Sigma C' R^{-1} C \Sigma (3,35)$$

Les éqs. (3,34) et (3,35) sont les nouvelles éqs. dynamiques du système à optimiser.

Linéarisation de la fonctionnelle de coût.

Un développement du second ordre de $G_b \{.\}$ au voisinage de la valeur \hat{x} donne de façon analogue:

$$G_b \{.\} \simeq h[\hat{X}(T), T] + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[h_{xx} [\hat{X}(T), T] \Sigma(T) \right] + \int_{t_0}^T g(\hat{X}, u, \sigma) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[g_{xx}(\hat{X}, u, \sigma) \Sigma(\sigma) \right] . \quad (3,36)$$

Les éqs. (3,34) à (3,36) sont les éqs. d'un problème de commande optimale déterministe que l'on sait théoriquement résoudre.

Conséquence

On considère un problème séparé défini par les éqs. déterministes

$$\dot{x} = f_1(x, t) + f_2(u, t)$$

$$G(.) = h[x(T), T] + \int_{t_0}^T g(u, \sigma) d\sigma$$

D'après l'éq. (3,26) qui exprime la dynamique de Σ , cette dernière est indépendante de la commande $u(t)$, autrement dit, pour le critère d'optimisation qu'est la covariance, le filtre optimum est indépendant de $u(t)$, et ne dépend que de l'état du système.

3.3.2. Modèle 2

Le contexte est le suivant:

- observation entachée d'une erreur sous forme d'un bruit blanc gaussien dépendant de l'état du système ,

- filtre de Kalman du premier ordre généralisé aux systèmes non linéaires ,

- critère d'optimisation statistique: minimisation de la covariance de l'erreur.

3.3.2.1. Enoncé du problème

Les équations du problème à information parfaites sont les éqs. (3,19) et (3,20), et l'observation est

$$y = C(t) x + D(x, t) v(t) \quad (3,37)$$

où $D(x, t)$ est une matrice inversible et $v(t)$ le bruit blanc gaussien du modèle 1 (voir éq. 3,22) .

La fonctionnelle de coût est la moyenne statistique $G_b \{ . \}$ exprimée par l'éq. (3,23) .

3.3.2.2. Choix d'une classe de filtre

Par analogie avec les résultats relatifs au modèle 1, nous cherchons un filtre de la forme

$$\hat{x} = f(\hat{x}, u, t) + f_x(\hat{x}, u, t) K(t) \quad (3,38)$$
$$D^{-1}(\hat{x}, t) [y - C(t) \hat{x}] .$$

Le critère d'optimisation statistique est la covariance (3,25)

3.3.2.3. Optimisation statistique

En première approximation, nous écrivons

$$y \simeq C(t) x + D(\hat{x}, t) v(t),$$

ce qui met (3,38) sous la forme

$$\hat{x} = f(\hat{x}, u, t) + f_x(\hat{x}, u, t) K(t) \cdot$$

$$\cdot D^{-1}(\hat{x}, t) [C(\hat{x} + \tilde{x}) + D(\hat{x}, t) v] \cdot \quad (3,39)$$

D'où, par différence, m-à-m avec (3,27) ,

$$\dot{\tilde{x}} = [f_x(\cdot) - f_x(\cdot) K D^{-1}(\cdot) C] \tilde{x} - f_x(\cdot) K v \cdot \quad (3,40)$$

D'après (3,18) le gain du filtre optimum est

$$\{f_x(\cdot) K\}_{op} = \sum C' D^{-1} R^{-1} \cdot$$

L'éq. du filtre optimum s'écrit:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= f(\hat{x}, u, t) + \sum C' D^{-1} R^{-1} D^{-1} (y - C \hat{x}) \\ &= f(\hat{x}, u, t) + \sum C' D^{-1} R^{-1} D^{-1} C \tilde{x} \\ &\quad + \sum C' D^{-1} R^{-1} v(t) \end{aligned} \quad (3,41)$$

Le diagramme représentatif correspondant est donné par la Fig. 3.3 .

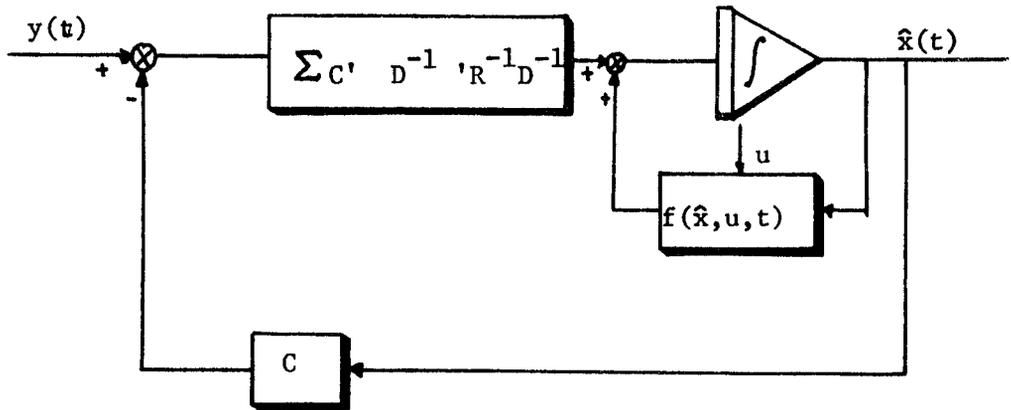


Fig. 3.3 Diagramme représentatif du filtre optimal du modèle 2.

L'éq. linéarisée de la dynamique de l'erreur est

$$\dot{\tilde{x}} = f_x(\cdot) \left[1 - \Sigma C' D^{-1} R^{-1} D^{-1} C \right] \tilde{x} - \Sigma C' D^{-1} R^{-1} v(t) \quad (3,42)$$

et celle de Σ est, d'après (3,18)

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma} = & f_x(\cdot) \left[1 - \Sigma C' D^{-1} R^{-1} D^{-1} C \right] \Sigma - \\ & + \Sigma \left[1 - \Sigma C' D^{-1} R^{-1} D^{-1} C \right] f_x'(\cdot) \\ & + \Sigma C D^{-1} R^{-1} D^{-1} C \Sigma \quad . \end{aligned} \quad (3,43)$$

Le problème déterministe à résoudre est formé des équations d'état (3,34) et (3,35) et de la fonctionnelle de coût (3,36)

3.3.3. Modèle 3.

Le contexte est le suivant:

- observation sous forme de la somme d'une fonction de l'état et d'un bruit blanc gaussien indépendant de cet état,

- filtre de Kalman généralisé du premier ordre pour systèmes non linéaires ,

- critère d'optimisation statistique: minimisation de la covariance de l'erreur.

3.3.3.1. Enoncé du problème

Les équations du problème à information parfaite sont les éqs. (3,19) et (3,20) et l'observation est le vecteur

$$y = E(x, t) + v(t) \quad (3,44)$$

où $E(x, t)$ est une matrice colonne dérivable en x , et $v(t)$ le bruit blanc gaussien défini par (3,22).

3.3.3.2. Choix d'une classe de filtres.

Par analogie avec les résultats relatifs au modèle 1, nous cherchons un filtre de la forme

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t) + K(t) [y - E(\hat{x}, t)] \quad (3,45)$$

Le critère d'optimisation statistique est la covariance (3,25).

3.3.3.3. Optimisation statistique

Un développement de Taylor du premier ordre au voisinage de \hat{x} donne

$$y \approx E(\hat{x}, t) + E_x(\hat{x}, t) \tilde{x} + v$$

(E_x désignant la dérivée de E par rapport à x) ce qui met $\dot{\hat{x}}$ sous la forme

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t) + K(t) [E_x(\hat{x}, t) \tilde{x} + v] \quad (3,46)$$

Faisant la différence m-a-m des éqs. (3,27 et (3,46), on obtient

la dynamique de l'erreur, soit

$$\dot{\tilde{x}} = \left[f_x(\hat{x}, u, t) - K E_x(\hat{x}, t) \right] \tilde{x} - K v . \quad (3,47)$$

D'après (3,18) le gain optimal est

$$K_{opt} = \Sigma E_x(\hat{x}, t) R^{-1} ,$$

et l'éq. du filtre optimum s'écrit

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t) + \Sigma E_x(\hat{x}, t) R^{-1} [y - E(\hat{x}, t)] \quad (3,48)$$

ce que nous représentons sur la Fig. 3.4.

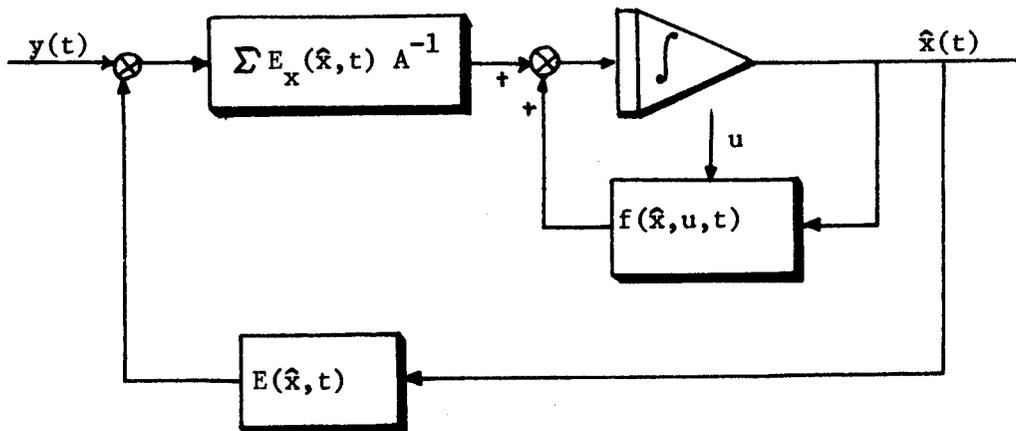


Fig. 3.4 Diagramme représentatif du filtre optimal du modèle 3.

Les éqs. linéarisées des propagations de l'erreur et de la covariance deviennent ,

$$\dot{\tilde{x}} = \left[f_x (\cdot) - \sum E_x R^{-1} E_x \right] \tilde{x} - \sum E_x R^{-1} v \quad (3,49)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma} = & \left[f_x (\cdot) - \sum E_x R^{-1} E_x \right] \Sigma + \\ & + \Sigma \left[f_x (\cdot) - \sum E_x R^{-1} E_x \right]' + \\ & + \sum E_x (\sum E_x R^{-1})' . \end{aligned} \quad (3,50)$$

3.3.3.4. Optimisation de la commande

Le problème déterministe à résoudre est formé des équations d'état (3,34) et (3,35) et de la fonctionnelle de coût (3,36)

3.3.4. Modèle 4.

Le contexte est le suivant:

- observation sous de la forme de la somme du vecteur état et d'un bruit blanc gaussien indépendant de cet état,
- filtre de Kalman généralisé du premier ordre pour systèmes non linéaires,

- critère d'optimisation statistique: détermination de la meilleure estimation de l'Hamiltonien.

3.3.4.1. Enoncé du problème

Les éq. du problème à information parfaite sont les éqs. (3,19) et (3,20) et l'observation est de la forme

$$y = C(t) x + v \quad (3,51)$$

où v est le bruit blanc gaussien caractérisé par (3,22) .

3.3.4.2. Reformulation du problème d'optimisation statistique

Le critère d'optimisation statistique s'établit de la façon suivante:

Un développement en série de Taylor du second ordre donne

$$H(x, u, p, t) \simeq H(\hat{x}, u, p, t) + H_x(\hat{x}, u, p, t) \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{x}' \cdot H_{xx}(\hat{x}, u, p, t) \tilde{x}, \quad (3,52)$$

d'où, en prenant la moyenne de cette expression,

$$\hat{H}(x, u, p, t) \simeq H(\hat{x}, u, p, t) + \frac{1}{2} H_{xx}(\hat{x}, u, p, t) \Sigma \quad (3,53)$$

où Σ désigne la covariance $E \{ \tilde{x}(t) \tilde{x}'(t) \}$.

Le critère de la meilleure estimation de $H(.)$
est donc

$$\min H_{xx} (.) \sum . \quad (3,54)$$

Malheureusement, ce critère n'est pas d'une utilisation pratique aisée. En effet, suivant notre canevas habituelle, nous devrions établir l'éq. de propagation du terme $H_{xx} (.)$ et minimiser son second membre. Or cette éq. du fait de la présence de $H_{xx} (.)$ n'est pas aisée à établir.

Afin de remédier à cet état de choses, nous allons reformuler le problème à l'aide des considérations suivantes.

- (1) Ainsi que nous l'avons dit; une bonne estimation de x a pour but surtout de donner une bonne estimation de l'Hamiltonien.
- (2) Or cet Hamiltonien estimé est en fait utilisable non pas directement, mais par l'intermédiaire du vecteur adjoint $p(t)$. Autrement dit, pour notre problème d'optimisation de commande ,

nous pouvons considérer que l'estimation de l'Hamiltonien est équivalent à l'estimation du vecteur adjoint.

(3) Ainsi, on parlera en terme de vecteur adjoint observé et non pas de vecteur d'état observé.

Cela permettra

- de reformuler le problème d'optimisation statistique et de rechercher un filtre optimal fonction de $H(\cdot)$,

- de découpler le problème d'optimisation du filtre de celui de la commande.

L'observation est donc de la forme

$$\dot{z} = H_x(y, u, p, t) \quad (3,55)$$

$$y = C(t) x + v \quad (3,56)$$

3.3.4.3. Choix d'une classe de filtre

Par analogie avec les résultats précédents, nous cherchons un filtre de la forme

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} = & f(\hat{x}, u, t) + \\ & + K(t) H_{xx}^{-1}(C \hat{x}, u, p, t) \left[\dot{z} - H_x(C \hat{x}, u, p, t) \right] \end{aligned} \quad (3,57)$$

ou $K(t)$ est le gain à déterminer.

3.3.4.4. Optimisation statistique

Le développement usuel de Taylor donne

$$\dot{z} \approx H_x(C \hat{x}, u, p, t) + H_{xx}(C \hat{x}, u, p, t) (C \tilde{x} + v)$$

d'où

$$\dot{\hat{x}} = f(\cdot) + K C \tilde{x} + K v \quad (3,58)$$

L'éq. de propagation de l'erreur $\tilde{x}(t)$ est

$$\dot{\tilde{x}} = [f_x(\hat{x}, u, t) - K C] \tilde{x} - K v \quad (3,59)$$

D'après (3,18) le gain optimum est

$$K_{op} = \sum C' R^{-1} ,$$

et l'éq. du filtre s'écrit

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t) + \sum C' R^{-1} H_{xx}^{-1}(C \hat{x}, u, p, t) [\dot{z} - H_x(C \hat{x}, u, p, t)] \quad (3,60)$$

Son diagramme représentatif est donné par la Fig. 3.5

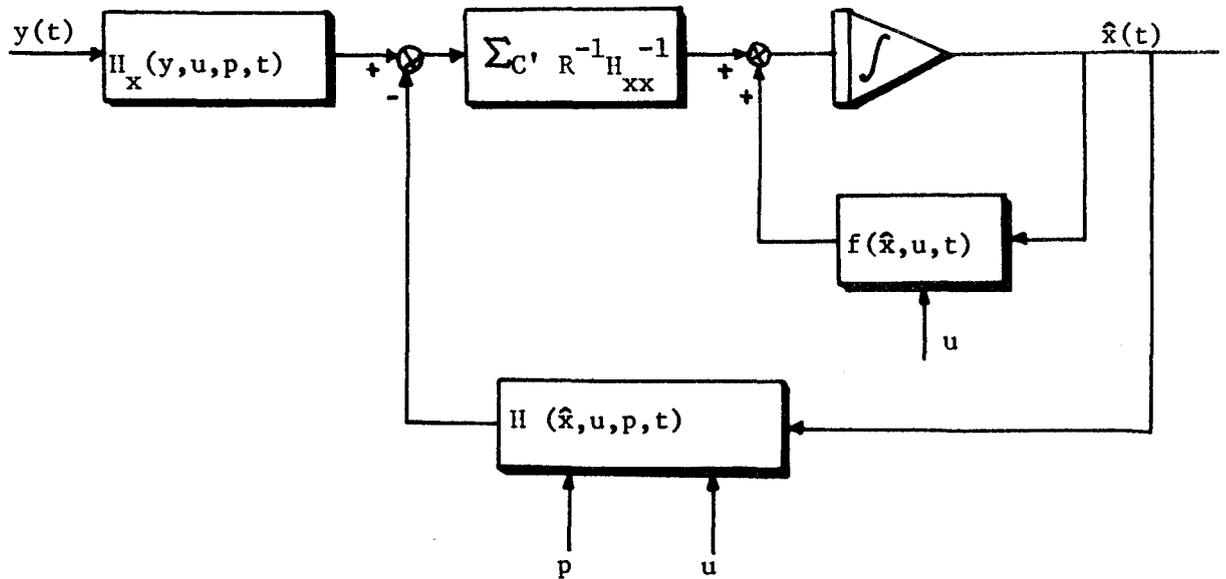


Fig. 3.5. Diagramme représentatif du filtre optimal du modèle 4.

3.3.4.5. Optimisation de la commande

Le problème déterministe à résoudre est formé des équations d'état (3,34) et (3,35) et de la fonctionnelle de coût (3,36) .

Cas du problème linéaire

Dans le sens particulier du système linéaire

$$\dot{x} = F(t) x + f(u) ,$$

avec densité de coût indépendante de $x(t)$, l'application brutale de l'éq. (3,60) conduit à

$$\dot{\hat{x}} = F(t) \hat{x} + f(u)$$

puisque $H_x(\cdot)$ est alors identiquement nul. En fait, on lève cette indétermination en utilisant un développement de Taylor du premier ordre, ce qui donne précisément la formule (3,58) et, pour le filtre, l'expression (3,59), c-à-d

$$\hat{x} = F(t) \hat{x} + f(u) + \sum C' R^{-1} (y - C\hat{x}) .$$

Cas d'un bruit dépendant de l'état .

Les résultats relatifs à ce modèle peuvent être appliqués aisément au cas d'une observation de la forme

$$y = C(t) x + D(x, t) v(t)$$

ou encore

$$\dot{z} = H_x(Cx + Dv, u, p, t) . \quad (3,61)$$

En effet combinant les résultats qui viennent d'être établis avec ceux du modèle 3.3.2. on cherchera un filtre optimal de la forme

$$\hat{x} = f(\hat{x}, u, t) + K(t) D^{-1}(\hat{x}, t) H_{xx}^{-1}(\hat{x}, u, p, t) [\dot{z} - H(C\hat{x}, u, p, t)] , \quad (3,62)$$

et l'optimisation statistique donne pour $K(t)$ la valeur

$$K(t) = \sum C' D^{-1} R^{-1} . \quad (3,63)$$

3.3.5. Sur une extension du principe de séparation de l'estimation et de la commande.

Le filtre de Kalman généralisé que nous avons utilisé jusqu'ici est une approximation des filtres non linéaires optimaux tels que nous les donne la théorie. Il en résulte que dans le cadre de cette précision, on a pour une fonction $\psi(x)$ quelconque ,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(\hat{x} + \tilde{x}) \\ &\simeq \psi(\hat{x}) + \psi_x(\hat{x}) \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{x}' \psi_{xx}(\hat{x}) \tilde{x} ; \end{aligned}$$

d'où l'estimation $\hat{\psi}(x)$ de $\psi(\cdot)$:

$$\hat{\psi}(x) \simeq \psi(\hat{x}) + \frac{1}{2} \psi_{xx}(\hat{x}) \Sigma .$$

Si le terme $\psi_{xx}(\hat{x}) \Sigma / 2$ est effectivement petit devant $\psi(\hat{x})$, on prendra

$$\hat{\psi}(x) \simeq \psi(x) .$$

Cette approximation est bien évidemment encore valable lorsque l'on utilise des filtres non linéaires plus élaborés.

Ainsi, pour le problème d'optimisation de commande qui nous intéresse ici, nous avons ce qui suit:

On considère l'optimisation statistique comme ayant pour but de déterminer la meilleure estimation de $x(t)$ à partir de la connaissance de $H(y, u, p, t)$ soit

$$\hat{x}(t) = E \left\{ x(t) / H[y(\tau), u(\tau), p(\tau), \tau], \tau \in [t_0, t] \right\} \quad (3,64)$$

Le filtre non linéaire optimal correspondant conduit à une moyenne statistique \hat{X} qui vérifie en première approximation l'équation

$$\dot{\hat{X}} = f(\hat{X}, u, t) \quad ,$$

et a une fonction de coût moyenne

$$G_b(.) = h[\hat{X}(T), T] + \int_{t_0}^T g[\hat{X}(\sigma), u(\sigma), \sigma] d\sigma \quad .$$

De plus, lorsque le filtre statistique utilisé est le filtre généralisé de Kalman, l'optimisation statistique est complètement découplé de l'optimisation de la commande.

De plus, lorsque le filtre statistique utilisé est le filtre généralisé de Kalman, l'optimisation statistique est complètement découplé de l'optimisation de la commande.

Dans ce sens nous pouvons parler d'une extension du principe de séparation de l'estimation et de la commande. Les quelques exemples artificiels qui vont suivre ont pour but simplement d'illustrer dans leurs principes la dépendance du filtrage par rapport à l'Hamiltonien.

Exemple 1

Soit le problème défini par les éqns.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3,65 - a)$$

$$\dot{x}_2 = kx_2^2 + u \quad (3,65 - b)$$

$$G(\cdot) = x_2[(T) - L]^2 + \mu \int_{t_0}^T g(u^2) d\sigma \quad (3,66)$$

$$y_1 = x_1 + \frac{\int_1}{x_1} \quad (3,67 - a)$$

$$y_2 = x_2 + \frac{\int_2}{x_1} \quad (3,68 - b)$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1^2 & 0 \\ 0 & R_2^2 \end{bmatrix} \quad (3,69)$$

Ce système représente en première approximation le mouvement d'un engin actodynamique se déplaçant sur un axe. x_1 est la position, x_2 la vitesse, le terme $k x_2^2$ représente les forces aérodynamiques qui sont proportionnelle à la vitesse. u le terme de poussée est en même temps la commande.

Cet engin doit atteindre une cible située à une distance initiale L et est piloté de façon à minimiser le critère de coût (3,38). L'engin est auto-guidé par un radar incorporé qui détecte x_2 et x_1 avec des bruits v_1 / x_1^2 et v_2 / x_1^2 inversement proportionnel à la distance.

Cet exemple un peu artificiel prendrait toute sa signification dans un problème de poursuite, c'est-à-dire dans un problème min-max. Nous considérons ici simplement la version unilatérale de cette poursuite.

L'application des résultats précédents donnent successivement:

- calcul de H'_x .

$$H'_x = \left[0, p_1 + 2p_2 x_2 \right]$$

H_x étant indépendant de x_1 , le filtre optimum de x_1 ne sera pas pondéré par H_{xx} et sera défini directement par la formule (3,41) relatif au modèle 3.3.2. Par contre l'estimation de x_2 , elle, fera intervenir le facteur de pondération H_{xx} .

- Calcul des principales grandeurs.

$$C' [D^{-1}]' R^{-1} D^{-1} = \begin{bmatrix} x_1^4 / R_1^2 & 0 \\ 0 & x_1^4 / R_2^2 \end{bmatrix}$$

$$H'_x (y \cdot) - H'_x (\hat{x} \cdot) = [0, 2p_2 (y_2 - \hat{x}_2)]$$

$$H_{xx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2p_2 \end{bmatrix}$$

On écrit Σ sous la forme

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

- Le filtre optimum a pour équation:

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 + \frac{\sigma_{11}(t)}{R_1^2} \hat{x}_1^4 (y_1 - \hat{x}_1) \quad (3,70)$$

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_2^2 + u + \frac{\sigma_{22}(t)}{R_2^2} \hat{x}_1^4 (y_2 - \hat{x}_2) \quad (3,71)$$

Exemple 2

Soit le système non linéaire

$$\dot{x}_1 = x_2^2 \quad (3,72 - a)$$

$$\dot{x}_2 = \omega_0^2 x_1 + k x_1^3 + u \quad (3,72 - b)$$

avec les observations (3,67 - a) et (3,67 - b), et le critère (3,66) .

- L'Hamiltonien est

$$H = p_1 x_2^2 + p_2 (\omega_0^2 x_1 + k x_1^3 + u) + g(u) ,$$

d'où,

$$H'_x = \left[p_2 (\omega_0^2 + 3k x_1^2), \quad 2p_1 x_2 \right]$$

et

$$H_{xx} = \begin{bmatrix} 6k p_2 x_1 & 0 \\ 0 & 2p_1 \end{bmatrix}$$

(2) On a

$$\Sigma C D^{-1} R^{-1} H_{xx}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \frac{x_1^4}{R_1^2} & \sigma_{12} \frac{x_1^4}{R_2} \\ \sigma_{21} \frac{x_1^4}{R_1^2} & \sigma_{22} \frac{x_1^4}{R_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6k p_2 x_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2p_1} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \frac{\sigma_{11} x_1^3}{6k p_2 R_1^2} & \frac{\sigma_{12} x_1^4}{2p_1 R_2^2} \\ \frac{\sigma_{21} x_1^3}{6k p_2 R_1^2} & \frac{\sigma_{22} x_1^4}{2p_1 R_2^2} \end{array} \right]$$

(3) Equations des filtres.

L'application de la formule (3,62) donne

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \frac{\sigma_{11}(t) \hat{x}_1^3}{2R_1^2} (y_1^2 - \hat{x}_1^2) + \frac{\sigma_{12}(t) \hat{x}_1^4}{R_2^2} (y_2 - \hat{x}_2) \quad (3,73)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \omega \hat{x}_1 + k \hat{x}_1^3 + u + \frac{\sigma_{21}(t) \hat{x}_1^3}{2R_1^2} (y_1^2 - \hat{x}_1^2) + \frac{\sigma_{22}(t) \hat{x}_1^4}{R_2^2} (y_2 - \hat{x}_2) \quad (3,73)$$

3.4 CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, nous avons montré comment l'approche générale du filtrage par estimation de l'Hamiltonien conduit à une extension du principe de séparation de l'estimation et de la commande lorsque les bruits d'observations sont Gaussiens. Cette extension a été obtenue, non pas en cherchant directement la meilleure estimation de l'Hamiltonien, mais en cherchant directement la meilleure estimation de l'état à partir de l'Hamiltonien observé.

Bien évidemment, notre exposé a été fait dans le cadre de la précision du filtre non linéaire de Kalman et il convient de ne pas perdre de vue les conséquences pratiques de cette approximation [3], en particulier que la précision du filtrage est sensible à sa durée, c'est-à-dire ici à T.

Néanmoins, la vraie raison de l'extension du principe de séparation est la nature Gaussienne des bruits, et on remédie aisément aux imperfections propres aux filtres non linéaires

de Kalman en utilisant un filtre non linéaire plus élaboré (voir par exemple (3)).

Il ne semble pas par contre que le principe de séparation soit encore valable dans le cas de bruits non Gaussiens dépendant de l'état du système; et l'on devrait s'attendre dans ce cas à ce que le problème global d'optimisation du filtre et de la commande se réduise à un problème d'optimisation de vecteur de coût.

Nous nous proposons d'aborder cette question dans une prochaine étude. Néanmoins, la formulation du prochain chapitre, qui a trait au problème de l'optimisation de l'extrapolateur dans les problèmes avec retard à l'information, donnera quelques indications sur la façon d'aborder l'optimisation du filtrage avec bruits non Gaussiens.

COMMENTAIRES.

(1) La théorie générale du filtrage non linéaire conduit au filtre non linéaire de Kalman comme cas particulier.

On trouve un excellent exposé de cette question dans la référence [3]. Malheureusement cette approche met en oeuvre des mathématiques élaborées et suppose en particulier une connaissance approfondie du calcul stochastique différentiel et intégral de Ito.

REFERENCE

- (1) KALMAN R.E. "A new approach to linear filtering and prediction and prediction problem". Trans. ASME, Ser. D: J. Basic Engineering, 82, pp 35-45. (1960)

KALMAN R.E. BUCY R.S., "New results in linear filtering and prediction theory". J. Basic Engineering 83, pp.95-108 (1961)

(2) ITO, K, "On stochastic differential equations", Mem Amer.
Math. Soc. 4 (1961)

(3) JAZWINSKI, A.H. "Stochastic processes and filtering theory".
376 ps. Academic Press. 1969, N-Y, London.

CHAPITRE IV

OPTIMISATION DE L'EXTRAPOLATEUR ET DE LA COMMANDE
EN CONTROLE OPTIMAL AVEC RETARD A L'INFORMATION

Ce chapitre développe trois questions principales: le calcul variationnel sur des équations avec retard, le choix d'une norme d'estimation et les implications que cela entraîne, l'optimisation simultanée de l'extrapolateur et de la commande en contrôle optimal . Du fait de la grande variété d'extrapolateurs possibles, ce dernier problème a évidemment plusieurs modèles; aussi, pour réduire l'exposé, nous développerons complètement un cas particulier, ce qui sera suffisant pour décrire la méthode.

4.1 UNE APPROCHE SUB-OPTIMALE

4.1.1 Problème. On reprend à nouveau le problème exposé dans l'introduction, mais en y introduisant cette fois un retard à l'information.

(i) Problème avec information parfaite.

équation d'état,

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad ; \quad (4,1)$$

fonctionnelle de coût,

$$G = h [x(T), T] + \int_{t_0}^T g [x(t), u(t), t] dt. \quad (4,2)$$

(ii) Problème avec retard τ à l'information: Le contrôleur a un retard τ à l'information, autrement dit, à l'instant t , il observe non pas l'état $x(t)$ mais $x(t - \tau)$.

(iii) Une approche suboptimale.

Le contrôleur estime la vraie valeur de $x(t)$ par une extrapolation déterministe $e(\cdot)$, soit

$$\hat{x}(t) = e \left[x(t-\tau), x(t-2\tau), \dots, x(t-k\tau) \right], \quad (4,3)$$

et considère la fonction de coût G_τ obtenue à partir de G en considérant $\hat{x}(t)$ au lieu de $x(t)$:

$$G_\tau \triangleq h \left[\hat{x}(T), T \right] + \int_{t_0}^T g \left[\hat{x}(t), u(t), t \right] dt \quad (4,4)$$

4.1.2 Solution par le calcul variationnel

Le problème est de déterminer la commande u^0 qui minimise G_τ , c'est-à-dire telle que

$$G_\tau(x^0, T) = \min_u G_\tau(x, T) \quad , \quad (4,5)$$

compte tenu de la contrainte

$$\dot{x}(t-j\tau) = f \left[x(t-j\tau), u(t-j\tau), t-j\tau \right] \quad . \quad (4,6)$$

$j = 1, 2, \dots, k$

On se propose de montrer comment le calcul variationnel classique peut conduire à une solution.

On introduit k vecteurs de Lagrange $p_j(t)$,

$j = 1, 2, \dots, k$, et on considère la fonction auxiliaire de coût

$$J = h \left[\hat{x}(T), T \right] + \int_{t_0}^T \left[\hat{g}(\cdot) + \sum_{j=1}^k p_j'(t) \left[(f)_{t-j\tau} - \dot{x}(t-j\tau) \right] \right] dt \quad (4,7)$$

où on a posé

$$\hat{g}(\cdot) \triangleq g(\hat{x}, u, t)$$

$$(f)_{t-j\tau} \triangleq f \left[x(t-j\tau), u(t-j\tau), t-j\tau \right] .$$

L'introduction de ces paramètres de Lagrange ne pose pas de difficulté nouvelle fondamentale: toute commande qui optimise (4,7) en vérifiant la contrainte (4,6) optimisera bien évidemment aussi (4,4); et réciproquement toute commande qui optimise (4,4), optimise (4,7).

Cela étant, par analogie avec la théorie classique on définit l'Hamiltonien H_{τ} par

$$H_{\tau}(\hat{x}, u, p_j, t) \triangleq \hat{g}(\cdot) + \sum_{j=1}^k p_j(t) (f)_{t-j\tau}, (4,8)$$

ce qui met J sous la forme

$$J = h \left[\hat{x}(T), T \right] + \int_{t_0}^T \left[H_{\tau}(\cdot) - p_j(t) \frac{dx(t-j\tau)}{dt} \right] dt, (4,9)$$

où le symbole $\sum_{j=1}^k$ a été omis pour simplifier l'écriture.

Une variation $\delta u(t)$ de la commande au voisinage de sa valeur optimale si elle existe, induit une variation δJ du premier ordre définie par

$$\delta J = \frac{\partial h}{\partial x(T-j\tau)} \delta x(t-j\tau) + \int_{t_0}^T \left[\delta x'(t-j\tau) \frac{\partial H}{\partial x(t-j\tau)} + \delta u'(t-j\tau) \frac{\partial H}{\partial u(t-j\tau)} - p_j'(t) \delta \frac{dx(t-j\tau)}{dt} \right] dt. (4,10)$$

On intègre le dernier terme en p_j' par partie, ce qui donne

$$\delta J = \left[\frac{\partial h}{\partial x(T-j\tau)} - p_j(T) \right] \delta x(t-j\tau) + \int_{t_0}^T \left[\delta x'(t-j\tau) \frac{\partial H}{\partial x(t-j\tau)} + \delta u'(t-j\tau) \frac{\partial H}{\partial u(t-j\tau)} + \dot{p}_j'(t) \delta x(t-j\tau) \right] dt. (4,11)$$

On obtiendra une condition nécessaire d'optimalité en écrivant que δJ est nulle pour tout accroissement arbitraire δu , ce qui donne:

$$\dot{p}_i(t) = - \frac{\partial H_{\tau}}{\partial x(t-j\tau)}, \quad p_i(T) = \frac{\partial h}{\partial x(T-j\tau)} \quad (4,12)$$

$$\int_{t_0}^T \delta u'(t-j\tau) \frac{\partial H_{\tau}}{\partial u(t-j\tau)} dt = 0 \quad (4,13)$$

Nous expliciterons cette expression sous la forme

$$\int_{t_0}^T \left[\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \frac{\partial H_{\tau}}{\partial u_i(t-j\tau)} \delta u_i(t-j\tau) \right] dt = 0. \quad (4,14)$$

Afin d'obtenir une condition qui porte non plus sur une intégrale, mais sur des quantités scalaires, on opère comme suit: on définit les fonctions $a_{i,j}(t)$ par la relation

$$u_i^0(t-j\tau) = a_{i,j}(t) u_i^0(t) \quad (4,15)$$

soit encore

$$a_{i,j}(t) = u_i^0(t-j\tau) / u_i^0(t) \quad (4,16)$$

où $u^0(t)$ représente la commande optimale. Les $a_{i,j}(t)$ peuvent être considérés comme donnant une description

particulière de $u^0(t)$. Cela étant, l'égalité (4,14) doit être vérifiée pour toute variation arbitraire $\delta u_i(t)$, et en particulier pour les variations $\delta u_i(t)$ et $\delta u_i(t-j\tau)$ qui vérifient les relations

$$\delta u_i(t-j\tau) = a_{i,j}(t) \delta u_i(t) \quad (4,17)$$

Ainsi, en reportant (4,17) dans (4,14), et en tenant compte de la définition (4,16) de $a_{i,j}$, on obtient l'équation

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \frac{\partial H \tau}{\partial u_i(t-j\tau)} \frac{u_i(t-j\tau)}{u_i(t)} = 0 \quad (4,18)$$

C'est la condition d'optimisation de l'Hamiltonien que nous avons en vue.

En définitive, les équations de la solution, sont,
 l'équation d'état (4,1) ,
 l'équation adjointe (4,12) ,

l'équation d'optimalisation de l'Hamiltonien (4,13) .

4.1.3 Commentaires et suggestions.

Le problème que nous venons de résoudre a été présenté comme une première approche au problème initialement posé, à savoir: la commande en présence d'un retard à l'information. Cet approche soulève deux questions: - comment initialiser l'extrapolateur?
- comment déterminer le meilleur extrapolateur pour une structure de système donné?

Nous allons répondre dès maintenant à la première de ces questions, la seconde fera l'objet de la suite de ce chapitre.

La détermination de l'estimée $\hat{x}(t)$ suppose l'acquisition préalable de $x(t-\tau)$, $x(t-2\tau)$, ... $x(t-k\tau)$. Au début du processus de commande, à l'instant t_0 , il est donc nécessaire de connaître $x(t_0-\tau)$, $x(t_0-2\tau)$, ... $x(t_0-k\tau)$. Ce ne sera possible que dans de très rares cas.

Dès lors, deux éventualités peuvent être envisagées :

- observer au préalable l'évolution du système, ce qui permet de déterminer les grandeurs désirées, avant de commencer le processus de commande lui même.
- estimer à priori les valeurs inconnues de l'état $x(t)$, et commencer le processus à l'instant t_0 en déterminant la commande à l'aide de cette estimation.

L'inconvénient de la première façon de faire est d'introduire un certain déphasage dans le système. A l'extrême limite, si $k\tau$ est supérieur à T , on ne peut même pas commencer le contrôle proprement dit!! On retrouve là, le compromis "élaboration de l'extrapolation accroissement du déphasage conséquent" bien connu dans la théorie classique des systèmes échantillonnés.

Dans le second procédé, le coût optimal est fonctionnelle d'une certaine fonction arbitraire. En effet, si $\varphi(t)$ est l'estimation de $x(t)$ sur l'intervalle $[t_0 - k\tau, 0]$,

$$\varphi(t) = \hat{x}(t) \quad , \quad t \in [t_0 - k\tau, t_0]$$

le coût optimum est une fonctionnelle de $\varphi(t)$, $G^{\circ}[\varphi(t)]$. Il en résulte une certaine indétermination sur les performances de la commande, et l'attitude qu'il conviendra d'adopter en face de cette imprécision sera spécifique à chaque cas. Par exemple, dans un problème de synthèse, on pourra dimensionner les paramètres du système en considérant le $\varphi(t)$ le plus défavorable, c'est-à-dire en considérant le gain optimal $\max_{\varphi} G^{\circ}[\varphi(t)]$.

4.2 SUR UNE STATISTIQUE DES ERREURS D'EXTRAPOLATION DETERMINISTE D'UNE FONCTION CERTAINE.

4.2.1 Problème

Le problème de l'extrapolation d'une fonction certaine n'est pas nouveau, et l'analyse numérique met à notre disposition nombre de méthodes et de résultats. Néanmoins, pour notre objectif de commande optimale, ces méthodes présentent deux inconvénients:

(1) Généralement, la grandeur de l'erreur d'extrapolation est donnée seulement par une borne supérieure qui est plus ou moins

"serrée" selon la classe de fonctions considérées.

(2) Pour une fonction donnée, soit par son expression explicite, soit par son équation différentielle, on sait rarement déterminer la meilleure formule d'extrapolation, c'est-à-dire celle qui donne la plus petite erreur selon une norme à préalablement définie.

Or c'est précisément le problème qui nous intéresse ici.

Nous allons dans ce qui suit, en proposer une approche, en nous inspirant assez fortement, quoique avec beaucoup de prudence! , de l'extrapolation stochastique.

4.2.2. Une interprétation statistique de l'extrapolation.

Soit $x(t)$ une fonction définie et sommable sur l'intervalle $[0, T]$, $T > 0$. (T est un nombre quelconque qui ne désigne pas nécessairement l'instant terminal du processus comme précédemment). Donnons-nous par ailleurs

une certaine formule d'extrapolation déterministe qui conduit à l'estimation $\hat{x}(t)$ de $x(t)$. L'erreur $\hat{x}(t)$ d'estimation est mesurée par

$$\mathfrak{X}(t) = x(t) - \hat{x}(t).$$

(Etape 1) On définit la fonction périodique $x_p(t)$ de période T , par

$$x_p(t) = x(t) \quad , \quad t \in]0, T[$$

$$x_p(t + T) = x_p(t).$$

Une telle fonction a comme moyenne $m\{x_p\}$,

$$\begin{aligned} m\{x_p\} &\stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{-A} x_p(t) dt. \quad (4,19) \end{aligned}$$

(Etape 2). De façon analogue, on définit l'estimation T -périodique $\hat{x}_p(t)$ par

$$\hat{x}_p(t) = \hat{x}(t) \quad , \quad t \in]0, T[$$

$$\hat{x}_p(t + T) = \hat{x}_p(t).$$

On en déduit l'erreur T-périodique $\tilde{x}_p(t)$,

$$\tilde{x}_p(t) \triangleq x_p(t) - \hat{x}_p(t),$$

dont la moyenne est, d'après la définition (4,19)

$$m\{\tilde{x}_p\} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} \tilde{x}(t) dt \quad (4,20)$$

(Etape 3) On définit la moyenne quadratique $m\{x_p^2\}$, toujours au sens déterministe du terme, par

$$\begin{aligned} m\{x_p^2\} &\triangleq \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{-A} x_p^2(t) dt \quad (4,21) \end{aligned}$$

Dans le même sens, la moyenne quadratique de l'erreur $\tilde{x}(t)$ est

$$\begin{aligned} m\{\tilde{x}^2\} &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}^2(t) dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} \tilde{x}_p^2(t) dt \quad (4,22) \end{aligned}$$

(Etape 4) Critère d'approximation: Par définition, l'extrapolation la meilleure minimise la moyenne quadratique $m \{ \tilde{x}^2 \}$.

Jusqu'ici il n'y a rien de bien nouveau, et nous avons simplement récapitulé des propriétés et définitions bien connues pour les fonctions périodiques, et plus particulièrement pour les fonctions trigonométriques.

Venons-en à l'application du critère lui-même. La formule (4,22) s'exprime à l'aide de $x(t)$ et de l'expression mathématique de l'extrapolation $\hat{x}(t)$. Ainsi, la conduite de l'opmisation dépend essentiellement de la façon dont est définie $x(t)$ d'une part, et de la classe d'extrapolations considérées d'autre part.

Dans ce qui suit, nous considérons la classe des extrapolateurs linéaires définis par l'expression

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) x(t-i\tau), \quad n \text{ donné}, \quad (4,23)$$

où les $a_1(t)$ peuvent être des constantes; et nous envisageons trois types de définitions pour $x(t)$:

- définition par son expression mathématique ,
- par sa "fonction de corrélation", voir paragraphe 4.2.3. ci-dessous,
- par son équation différentielle.

4.2.3. Fonction de corrélation On définit la fonction d'auto-corrélation $\phi_{xx}(\tau)$ de la fonction certaine $x(t)$ par la relation

$$\begin{aligned} \phi_{xx}(\tau) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} x_p(t+\tau) x_p(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x_p(t+\tau) x_p(t) dt \end{aligned} \quad (4,24)$$

$$\phi_{xx}(-\tau) = \phi_{xx}(\tau) , \quad \tau > 0 .$$

4.3 QUELQUES CLASSES D'EXTRAPOLATIONS OPTIMALES

4.3.1. Fonctions définies par leur expressions mathématiques.

(i) Extrapolations linéaires à coefficients constants.

On considère les extrapolateurs

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^n c_i x(t-i\tau), \quad n \text{ donné} \quad (4,25)$$

où les c_i sont des constantes. Le filtre optimal minimise l'erreur quadratique

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[x(t) - \sum_{i=1}^n c_i x(t-i\tau) \right]^2 dt,$$

et les coefficients c_i sont solutions du système d'équations linéaires

$$\sum_i \int_0^T x(t-j\tau) x(t-i\tau) dt = \int_0^T x(t) x(t-j\tau) dt \quad (4,26)$$

$$j = 1, \dots, n$$

(ii) Extrapolations linéaires à coefficients variables dans le temps.

On considère la classe d'extrapolateurs linéaires définis par l'eqn. (4,23) (on rappelle que les $a_i(t)$ sont des fonctions de t). On remarque alors que si le filtre

minimalise à chaque instant l'intégrale

$$\int_t^T \tilde{z}^2(t) dt$$

il minimalisera aussi le critère (4,22). Un calcul variationnel simple conduit au système d'équations intégrales linéaires:

$$\sum_i \int_t^T a_i(t) x(t-j\tau) x(t-i\tau) dt = \int_t^T x(t) x(t-j\tau) dt, \quad (4,27)$$

$j = 1, \dots, n$

soit encore

$$\sum_i a_i(t) x(t-j\tau) x(t-i\tau) = x(t) x(t-j\tau) .$$

4.3.2. Fonctions définies par leurs fonctions d'auto-corrélation.

Par définition, les fonctions de corrélation sont "stationnaires", ont un caractère permanent et par conséquent, on recherchera des extrapolations "stationnaires" elle aussi.

Si l'on se réfère à la condition d'optimisation (4,26) qui est encore valable, le système d'équations linéaires qui procure les c_i est:

$$\sum_1^j c_i \bar{\phi}_{xx} (|i-j| \tau) = \bar{\phi}_{x,x} (j \tau), j = 1, \dots, n \quad (4,28)$$

Application: On considère la formule d'extrapolation

$$\hat{x}(t) = x(t - \tau) + C [x(t - \tau) - x(t - 2\tau)]$$

On sait que la valeur $C = 1$ est généralement trop élevée et on se contente souvent dans la pratique de prendre une valeur voisine de $\frac{1}{2}$.

Dans le cadre du critère précédent, on peut obtenir une valeur plus précise de C de la façon suivante.

On a:

$$\hat{x}(t) = x(t) - x(t - \tau) (1 + C) + Cx(t - 2\tau).$$

Elevant cette expression au carré, et prenant sa moyenne, le critère à minimiser s'écrit:

$$(1 + C + C^2) m \{x^2\} - (1 + 2C + C^2) \bar{\phi}_{xx}(\tau) + C \bar{\phi}_{x,x}(2\tau):$$

et les conditions de minimalisation sont

$$(1 + 2C) m \{x^2\} - 2(1 + C) \bar{\phi}(\tau) + \bar{\phi}(2\tau) = 0 \quad (4,29)$$

$$m \{x^2\} - \bar{\phi}_{x,x}(\tau) \geq 0 \quad (4,30)$$

1) La condition (4,30) exige que $\dot{\phi}_{xx}(\tau)$ soit une fonction décroissante de τ , autrement dit l'optimisation n'est valable que pour $\dot{\phi}_{xx}(\tau)$ vérifiant $d\dot{\phi}_{xx}(\tau)/d\tau < 0$.

2) Cela étant, l'éqn. (4,29) procure

$$C^* = \frac{2\dot{\phi}_{xx}(\tau) - \dot{\phi}_{xx}(2\tau) - m^2}{2[m^2 - \dot{\phi}_{xx}(\tau)]} \quad (4,31)$$

qui est l'expression de la valeur optimale de C.

3) On peut en obtenir une valeur plus explicite dans le cas particulier suivant: supposons que $\dot{\phi}_{xx}(\tau)$ soit développable en série sous la forme

$$\dot{\phi}(\tau) = m\{x^2\} + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2 + \sigma(\tau) \quad (4,32)$$

et que $x(t)$ soit assez régulière pour qu'un développement d'ordre 2 soit suffisant.

Sans ces conditions, on a

$$\dot{\phi}(2\tau) = m\{x^2\} + 2\alpha_1\tau + 4\alpha_2\tau^2 + \sigma_1(\tau) \quad (4,33)$$

Substituant (4,32) et (4,33) dans (4,31) on obtient la valeur approchée

$$C^* \approx \frac{\alpha_2\tau}{\alpha_1 + \alpha_2\tau} \quad (4,34)$$

Il en résulte que si α_1 et α_2 sont de même signes, on a bien $C^* < 1$, par contre, si α_1 et α_2 sont de signes contraire ce n'est plus nécessairement vrai.

4.3.3. Fonctions définies par une équation différentielle.

4.3.3.1. Exemple 1

Afin d'illustrer clairement la question, nous étudions d'emblée un exemple.

Soit la fonction $x(t)$ solution de l'équation différentielle scalaire

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t), \quad x(0) = x_0. \quad (4,35)$$

On se propose de déterminer l'extrapolation

$$\hat{x}(t) = \alpha(t)x(t-\tau) \quad (4,36)$$

qui minimise le critère

$$\frac{1}{T} \int_0^T [\hat{x}(t)]^2 dt. \quad (4,37)$$

Montrons comment l'utilisation du principe du maximum, où tout simplement du calcul des variations conduit à la solution du problème.

1) Equation différentielle de $\hat{x}(t)$.

L'éqn. (4,35) procure

$$\dot{x}(t-\tau) = a(t-\tau)x(t-\tau) + b(t-\tau)u(t-\tau),$$

d'où

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \frac{\dot{\alpha}(t)x(t-\tau)}{\alpha(t)} \\ &= \dot{\alpha}(t)x(t-\tau) + \alpha(t) [a(t-\tau)x(t-\tau) + \\ &\quad + b(t-\tau)u(t-\tau)] \\ &= \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} \hat{x}(t) + a(t-\tau)\hat{x}(t) + \alpha(t)b(t-\tau)u(t-\tau). \end{aligned} \tag{4,38}$$

2) Equation différentielle de $\tilde{x}(t)$.

On soustrait (4,38) de (4,35) ce qui donne

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -\frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} \tilde{x}(t) + a(t) \tilde{x}(t) + [a(t) - a(t-\tau)] \cdot \hat{x}(t) + b(t) u(t) - b(t-\tau) \alpha(t) u(t-\tau). \quad (4,39)$$

En définitive, la dynamique du vecteur (\hat{x}, \tilde{x}) est de la forme,

$$\dot{\hat{x}}(t) = f_1[\hat{x}(t), \alpha(t), \dot{\alpha}(t)] \quad (4,40)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f_2[\hat{x}(t), \tilde{x}(t), \alpha(t), \dot{\alpha}(t)] \quad (4,41)$$

Le problème dès lors consiste à trouver la "commande" $\alpha(t)$ qui minimise (4,37) compte tenu de la contrainte (4,40) et (4,41). A cette fin, on utilise le calcul variationnel de la façon suivante :

On considère la fonction de gain auxiliaire

$$J = \int_0^T [\tilde{x}^2 + P_1 (f_1 - \dot{\hat{x}}) + P_2 (f_2 - \dot{\tilde{x}})] dt .$$

En définissant l'Hamiltonien par

$$H(\hat{x}, \tilde{x}, \alpha, \dot{\alpha}, P_1, P_2, t) \triangleq \tilde{x}^2 + P_1 f_1 + P_2 f_2 ,$$

on a

$$J = \int_0^T [H(\cdot) - P_1 \dot{\hat{x}} - P_2 \dot{\tilde{x}}] dt$$

L'intégration par partie usuelle procure ,

$$J = \left[-P_1(t) \hat{x}(t) \right]_0^T + \left[-P_2(t) \tilde{x}(t) \right]_0^T - \int_0^T \left[H(\cdot) + \dot{P}_1 \hat{x} + \dot{P}_2 \tilde{x} \right] dt.$$

Celà étant, on donne à α un accroissement $\delta\alpha$ au voisinage de sa valeur optimale, il en résulte pour J un accroissement δJ du premier ordre défini par

$$\delta J = -P_1(T) \delta\hat{x}(T) - P_2(T) \delta\tilde{x}(T) + \int_0^T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \hat{x}} + \dot{P}_1 \right) \delta\hat{x} + \left(\frac{\partial H}{\partial \tilde{x}} + \dot{P}_2 \right) \delta\tilde{x} + \frac{\partial H}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial H}{\partial \dot{\alpha}} \delta\dot{\alpha} \right] dt.$$

Par ailleurs, on a

$$\int_0^T \frac{\partial H}{\partial \dot{\alpha}} \delta\dot{\alpha} dt = \left[\frac{\partial H}{\partial \dot{\alpha}} \delta\alpha \right]_0^T - \int_0^T \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial H}{\partial \dot{\alpha}} \right] dt,$$

Ce qui met l'expression définitive de δJ sous la forme

$$\begin{aligned} \delta J = & -P_1(T) \delta \hat{x}(T) - P_2(T) \delta \tilde{x}(T) + \left[\frac{\partial H}{\partial \alpha} \delta \alpha \right]_0^T + \\ & + \int_0^T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \hat{x}} + P_1 \right) \delta \hat{x} + \left(\frac{\partial H}{\partial \tilde{x}} + P_2 \right) \delta \tilde{x} + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial H}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\alpha}} \right) \right] \delta \alpha \right] dt . \end{aligned} \quad (4,42)$$

On obtient les conditions nécessaires d'optimalité en exprimant que δJ est nul pour tout accroissement $\delta \alpha$; d'où les équations:

$$\dot{P}_1(t) = - \frac{\partial H}{\partial \hat{x}} \quad P_1(T) = 0 \quad (4,43)$$

$$\dot{P}_2(t) = - \frac{\partial H}{\partial \tilde{x}} \quad P_2(T) = 0 \quad (4,44)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\alpha}} \right) = 0 \quad (4,45)$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \dot{\alpha}} \right)_{t=T} = \left. \frac{\partial H}{\partial \dot{\alpha}} \right)_{t=0} = 0 \quad (4,46)$$

4.3.3.2. Exemple 2

On reconsidère l'exemple précédent, mais où cette fois $x(t)$ est solution de l'équation différentielle.

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad , \quad x(0) = x_0 \quad ; \quad (4,47)$$

$f(x, u, t)$ désignant une fonction non linéaire. L'estimation $\hat{x}(t)$ est toujours donnée par l'éqn. (4,36) .

Afin d'obtenir une solution approchée du problème, nous opérons par linéarisation.

- (1) L'erreur $\tilde{x}(t)$ étant supposée être petite devant $\hat{x}(t)$ on a (si f est dérivable en \hat{x}).

$$f(x, u, t) = f(\hat{x} + \tilde{x}, u, t) \\ \approx f(\hat{x}, u, t) + \frac{\partial f(\hat{x}, u, t)}{\partial \hat{x}} \tilde{x} \quad . \quad (4,48)$$

- (2) Equation de \hat{x} .

$$\hat{x}(t) = \alpha(t) x(t - \tau) \\ \dot{\hat{x}}(t) = \dot{\alpha}(t) x(t - \tau) + \alpha(t) f[x(t - \tau), u(t - \tau), t - \tau]$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} \hat{x}(t) + \alpha(t) f \left[x(t-\tau), u(t-\tau), t-\tau \right] \\ &= \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} \hat{x}(t) + \alpha(t) f \left[\frac{\hat{x}(t)}{\alpha(t)}, u(t-\tau), t-\tau \right] \end{aligned}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) \triangleq f_1 \left[\hat{x}(t), u(t-\tau), \dot{\alpha}(t), \alpha(t), t-\tau \right] \quad (4,49)$$

(3) Equation de \tilde{x} .

La linéarisation de l'éqn. (4,47) procure

$$\dot{\tilde{x}}(t) \simeq f(\hat{x}, u, t) - \dot{\hat{x}}(t) + \frac{\partial f(\hat{x}, u, t)}{\partial \hat{x}} \tilde{x}(t) ,$$

soit, en tenant compte de (4,49) :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &\simeq f(\hat{x}, u, t) - f_1 \left[\hat{x}(t), u(t-\tau), \dot{\alpha}(t), \alpha(t), t-\tau \right] \\ &+ \frac{\partial f(\hat{x}, u, t)}{\partial \hat{x}} \tilde{x}(t) \\ &= f_2 \left[\hat{x}(t), x(t), u(t), u(t-\tau), \dot{\alpha}(t), \alpha(t), t-\tau \right]. \quad (4,50) \end{aligned}$$

Le problème dès lors est de minimaliser la contrainte (4,37) compte tenu de la dynamique décrite par les équations (4,49) et (4,50). La solution se conduit comme dans l'exemple 1 précédent.

4.3.3.3. Exemple 3. On considère le problème de la minimisation du critère

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T \left[f(x,u,t) - f(\hat{x},u,t) \right]^2 dt$$

compte tenu de la dynamique (4,47) et de l'estimation (4,36).

La linéarisation (4,48) procure l'expression approchée suivante du critère.

$$Q \approx \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial f(\hat{x},u,t)}{\partial \hat{x}} \right]^2 \tilde{x}^2(t) dt \quad (4,51)$$

On obtient un problème analogue à l'exemple 1.

4.3.3.4. Exemple 4

On considère encore la dynamique (4,47), l'extrapolation (4,36) et le critère

$$Q_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[g(x,u,t) - g(\hat{x},u,t) + p(t) \cdot \left[f(x,u,t) - f(\hat{x},u,t) \right] \right]^2 dt \quad (4,52)$$

où

$g(\cdot)$ et $f(\cdot)$ sont des fonctions non linéaires, $p(t)$ est une fonction donnée.

La linéarisation de l'éqn. (4,48) procure

$$Q_1 \approx \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial g(\hat{x}, u, t)}{\partial \hat{x}} + p'(t) \frac{\partial f(\hat{x}, u, t)}{\partial \hat{x}} \right] \tilde{x}^2(t) dt \quad (4,53)$$

Le problème est encore analogue à l'exemple 1 et se conduit de la même façon.

4.3.3.5. Extension à des extrapolations d'ordres supérieures à un.

On considère toujours la dynamique non linéaire (4,47) et le coût (4,37), mais l'estimation est cette fois donnée par $\hat{x}(t) = a_1(t) x(t-\tau) + a_2(t) x(t-2\tau) + \dots + a_n(t) x(t-n\tau)$,

$$(4,54)$$

On introduit le vecteur $X(t)$ défini par

$$X'(t) = [x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)]$$

avec

$$x_1(t) = x(t), x_2(t) = x(t-\tau), x_n(t) = x[t-(n-1)\tau];$$

et la $n \times n$ matrice $A(t)$ définie par

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1(t) & \dots & \dots & \dots & a_n(t) \end{bmatrix}.$$

Avec ces notations, l'extrapolation (4,54) s'écrit sous la forme matricielle,

$$\hat{X}(t) = A(t) X(t-\tau). \quad (4,55)$$

Soit

$$F[X, u, t] \quad \text{le vecteur colonne défini par l'éqn.}$$

$$F'(\cdot) \triangleq [f_0, f_1, \dots, f_{n-1}]$$

où $f_j(\cdot)$ représente la quantité

$$f_j(\cdot) \triangleq [f(x(t), u(t), t)]_{t \leftarrow t-j\tau}.$$

La dynamique du vecteur X est alors décrite par l'équation matricielle

$$\dot{X}(t) = F(X, U, t), \quad X(0) = X_0. \quad (4,56)$$

Les équations (4,55) et (4,56) sont formellement identiques aux équations (4,36) et (4,47) et on développe une méthode de résolution formellement identique à la précédente.

On a en effet:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{X}}(t) &= \dot{A}(t) A^{-1}(t) \tilde{X}(t) + A(t) F \left[A^{-1}(t) X(t), U, t \right] \\ &\cong F_1 \left[\tilde{X}(t), U, A, A, t \right] \end{aligned} \quad (4,57)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{X}}(t) &\cong F(\tilde{X}, U, t) - \dot{\tilde{X}} + \tilde{X}'(t) \frac{\partial F(\tilde{X}, U, t)}{\partial \tilde{X}} \\ &\cong F(\tilde{X}, U, t) - F_1(\tilde{X}, U, \dot{A}, A, t) + \\ &+ \tilde{X}'(t) \frac{\partial F(\tilde{X}, U, t)}{\partial \tilde{X}} \end{aligned} \quad (4,58)$$

avec le critère

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}_1^2(t) dt$$

à minimiser .

Le calcul variationnel sur cette donnée matricielle est tout- à-fait analogue au calcul variationnel que nous venons de faire sur les variables scalaires.

4.3.3.6. Extension à une fonction vectorielle

On considère le problème suivant:

Equation vectorielle d'état;

$$\dot{X} = F(X, U, T) \quad ,$$

$$X(0) = X_0 \quad (4,59)$$

Extrapolateur;

$$\hat{X} = A(t) X(t-\tau) \quad (4,60)$$

Critère d'optimisation;

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{X}'(t) R(t) \tilde{X}(t) dt \quad , \quad (4,61)$$

où $R(t)$ désigne une matrice symétrique définie positive.

La méthode de résolution est analogue à celle qui a été développée dans les exemples précédent relatifs à des fonctions scalaires.

Dans le cas où l'extrapolateur utilisé est d'ordre supérieur à un, soit par exemple

$$\hat{X}(t) = A_1(t) X_1(t-\tau) + A_2(t) X(t-2\tau) + \dots + A_n(t) X[t-(n-\tau)] \quad ,$$

on utilisera la formulation hypermatricielle suivante:

On introduit l'hypermatrice

$$\underline{\underline{A}}(t) \triangleq [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$$

$$\xi_j(t) \triangleq X [t - (j-1)\tau]$$

et la fonction d'hypermatrice Φ définie par

$$\Phi'(\cdot) = [F_0, F_1, F_2, \dots, F_{n-1}]$$

$$F_j(X, U, T) = [F(X, U, T)] \quad t \leq t-j \quad .$$

On introduit l'hypermatrice Λ d'ordre n définie par

$$\Lambda(t) \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_1(t) & A_2(t) & \dots & A_n(t) \end{bmatrix} \quad .$$

Avec ces notations, le problème se formule comme suit:

équation d'état:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \Phi(\underline{x}, U, t) \quad , \quad (4,62)$$

extrapolateur:

$$\hat{\underline{x}}(t) = \Lambda(t) \cdot \underline{x}(t-\tau) \quad (4,63)$$

critère d'optimisation (4,61) .

Le calcul variationnel correspondant se conduit comme dans les exemples précédents.

4.4 OPTIMISATION SIMULTANEE DE L'EXTRAPOLATEUR ET DE LA
COMMANDE.

On se propose dans ce paragraphe d'optimiser l'extrapolateur et la commande selon les critères exposés au chapitre 2.

4.4.1. Enoncé du problème.

(1) Problème initial sans retard à l'information.

- Equation vectorielle d'état:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad . \quad (4,64)$$

dimension de $x = n$.

- Fonction de coût à minimiser

$$G(.) = h[x(T), T] + \int_{t_0}^T g(x, u, \sigma) d\sigma \quad . \quad (4,65)$$

Ce problème sera noté "problème 1" dans la suite.

(2) Problème avec retard τ à l'information.

- classe d'extrapolateur.

$$\hat{x}(t) = a(t) x(t-\tau) \quad (4,66)$$

où $a(t)$ est une matrice diagonale ,

$$a(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) & & \\ & & \\ & & a_n(t) \end{bmatrix}$$

- Critère d'optimisation de l'extrapolateur:

L'Hamiltonien formel du problème initial à information parfaite étant noté $H(x, u, p, t)$, le critère d'optimisation de l'extrapolateur est ,

$$\min_a \int_{t_0}^T \left[H(x, u, p, t) - H(\hat{x}, u, p, t) \right]^2 dt \quad (4,67)$$

- Fonction de coût à optimiser.

$$G(.) = h[\hat{x}(T) + \tilde{x}(T), T] + \int_{t_0}^T g(\hat{x} + \tilde{x}, u, \sigma) d\sigma \quad (4,68)$$

Ce problème sera noté "problème 2" dans la suite.

(3). Formulation du problème avec retard.

Le vecteur adjoint $p(t)$ du problème 1 est considéré comme vecteur d'état pour le problème 2.

Nous avons alors:

- Equations vectorielles d'état du problème 2

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(x, u, t) \quad , x(0) = x_0 \quad (4,69)$$

$$\dot{\hat{p}}(t) = - \frac{\partial H}{\partial x} \quad , p(T) = \frac{\partial h[x(T), T]}{\partial x(T)} \quad (4,70)$$

avec

et

$$H(x, u, p, t) = \dot{x} g(\cdot) + p(t) f(\cdot) \quad (4,71)$$

- Quantité vectorielle à minimiser: $\Delta H(x, \hat{x}, u, p, t)$ et

$$G_{\tau}(\hat{x}, u, T).$$

4.4.2. Formulation du problème

Nous donnons d'abord directement les équations du nouveau problème d'optimisation, ensuite, on les expliquera.

- dynamique du système:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \dot{a}(t) a^{-1}(t) \hat{x}(t) + \\ &+ a(t) f[a^{-1}(t) \hat{x}(t), u(t-\tau), t-\tau], \hat{x}(t) = \hat{x}_0 \\ &\hat{=} f_1[a(t), \dot{a}(t), \hat{x}(t), u(t-\tau), t-\tau] \end{aligned} \quad (4,72)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= f[\hat{x}(t), u(t), t] - \dot{a}(t) a^{-1}(t) \hat{x}(t) - \\ &- a(t) f[a^{-1}(t) \hat{x}(t), u(t-\tau), t-\tau] + \\ &+ \frac{\partial f[\hat{x}(t), u(t), t]}{\partial \hat{x}(t)} \tilde{x}(t), x(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

$$\triangleq f_2 [a (t), \dot{a} (t), \hat{x} (t), u (t), u (t-\tau), t, t-\tau] (4,73)$$

$$\dot{\hat{p}} = \frac{-\partial g [\hat{x} (t) + \tilde{x} (t), u (t), t]}{\partial \hat{x}} - \hat{p}' (t) \frac{\partial h [\hat{x} (t) + x (t), u (t), T]}{\partial \hat{x} (t)}$$

$$\triangleq f_3 [\hat{x} (t), \tilde{x} (t), \hat{p} (t), u (t), t], \quad (4,74)$$

$$\hat{p} (T) = + \frac{\partial h [\hat{x} (T) + \tilde{x} (T), T]}{\partial [\hat{x} (T) + \tilde{x} (T)]}$$

- optimisation sur a (t):

$$\begin{aligned} \min_a \Delta H (.) &\approx \int_0^T \left[\left[\frac{\partial g (\hat{x}, u, t)}{\partial \hat{x}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{p}' (t) \frac{\partial f (\hat{x}, u, t)}{\partial \hat{x}} \right] \cdot \tilde{x} (t) \right]^2 dt \\ &\triangleq \int_0^T g_1 (\hat{x}, x, \hat{p}, u, t) dt \quad (4,75) \end{aligned}$$

- optimisation sur u(t);

$$\begin{aligned} \min_u \hat{G} (.) &= h [\hat{x} (T) + \tilde{x} (T), T] + \\ &\quad \int_0^T g [\hat{x} (t) + x (t), u (t), t] dt \quad (4,76) \end{aligned}$$

Etablissement de ces équations. On fait d'abord les remarques suivantes.

(1) On cherche une solution sous optimale par linéarisation des équations initiales autour de la valeur estimée \hat{x} : Ainsi nous définirons les équations du système observé à l'aide de $\hat{x}(t)$.

(2) La dynamique réelle du système n'étant alors pas connue, le vecteur adjoint $p(t)$ qui lui est associé sera connu seulement approximativement. Seul est accessible $\hat{p}(t)$ défini à partir de \hat{x} : l'optimisation sera donc formulée avec $\hat{p}(t)$.

Cela étant, on établit les équations (4,72) à (4,76) de la façon suivante:

(i) Dynamique de l'estimation \hat{x} : éq. (4,72).

Cette équation s'établit comme l'équation analogue (4,49) relative au cas scalaire. La condition initiale

$$\hat{x}(t_0) = a(t_0) x(t_0 - \tau)$$

est un paramètre puisque $x(t_0 - \tau)$ en principe n'est pas connu, mais seulement estimé.

(ii) Dynamique de l'erreur: éqn. (4,73)

Elle est obtenue comme l'éqn. (4,50) relative au cas scalaire, par linéarisation du terme $f(\hat{x} + \tilde{x})$.

(iii) Dynamique du vecteur adjoint estimé $\hat{p}(t)$ éqn. (4,74).

Le vecteur adjoint $p(t)$ du système initial est bien égal au second membre de l'éq. (4,74) d'après la relation $x = \hat{x} + \tilde{x}$. Mais du fait de la linéarisation introduite dans l'éq. (4,73) le terme $\tilde{x}(t)$ est seulement approximativement estimé, de là une certaine estimation de $\hat{p}(t)$ de $p(t)$.

(iiii) Critère d'estimation optimal: relation (4,75).

Ce critère approché est obtenu par linéarisation du critère (4,67).

Il est à noter que les linéarisations (ii) et (iiii) ne sont nullement impératives et définissent simplement un filtrage sous optimal.

4.4.3. Solution du problème

On utilise la méthode variationnelle classique couram-

ment utilisée pour la recherche de l'équilibre de Nash.

Succinctement, on introduit deux Hamiltoniens \mathcal{H}_1 , et \mathcal{H}_2 associés respectivement à $\Delta H(\cdot)$ et $G(\cdot)$, et on écrit l'optimisation de chacune de ces quantités. On obtient ainsi des conditions nécessaires d'optimalité qui définissent a et u .

(étape 1) Optimisation de $\Delta H(\cdot)$

On introduit (P_1, P_2, P_3) le vecteur adjoint correspondant, et on note l'Hamiltonien

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(\cdot) = & g_1[\hat{x}(t), \tilde{x}(t), \hat{p}(t), u(t), t] + \\ & + P_1'(t) f_1[a(t), \dot{a}(t), \hat{x}(t), u(t-\tau), t-\tau] + \\ & + P_2'(t) f_2[a(t), \dot{a}(t), \hat{x}(t), u(t), u(t-\tau), t, t-\tau] + \\ & + P_3'(t) f_3[\hat{x}(t), \tilde{x}(t), \hat{p}(t), u(t), t] \end{aligned}$$

Le filtre optimal est donné par la condition

$$\min_a \mathcal{H}_1 [a(t), \dot{a}(t), \hat{x}(t), x(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t), u(t), u(t-\tau), t, t-\tau]$$

Le calcul variationnel se poursuit comme au paragraphe 4.1.2. On introduit le coût auxiliaire J_1 par une formule analogue à (4,9). L'équivalent de la formule (4,11) donne

pour δJ_1 , l'expression

$$\delta J_1 = - \left[P_1' (t) \delta \hat{x} (t) \right]_0^T - \left[P_2' (t) \delta \tilde{x} (t) \right]_0^T + \int_{t_0}^T (.) dt$$

A partir d'ici, la différence avec le calcul précédent (section 4.1.2.) est la suivante: alors que $\delta \hat{x} (t_0) = \delta \tilde{x} (t_0) = 0$, on ne plus en dire autant pour $\delta \hat{p} (t_0)$, car $\hat{p} (t)$ est définie en T et non en t_0 .

D'après (4,74), si $h[x (T), T]$ admet une dérivée seconde en $x (T)$, on a

$$\delta \hat{p} (T) = \frac{\delta^2 h [\hat{x} (T) + \tilde{x} (T), T]}{\delta^2 [\hat{x} (T) + \tilde{x} (T)]} \delta [\hat{x} (T) + \tilde{x} (T)]$$

$$\hat{=} A. \delta [\hat{x} (T) + \tilde{x} (T)] \quad (4,77)$$

avec

$$A \hat{=} \frac{\delta^2 h [\hat{x} (T) + x (T), T]}{\delta^2 [\hat{x} (T), +x (T)]}$$

la notation devant être prise avec la signification suivante:

$$\delta \hat{p}_i (T) = \sum_j \frac{\partial^2 h'(\cdot)}{\partial (\hat{x}_i + x_i) \partial \hat{x}_j} \delta (\hat{x}_j + \tilde{x}_j)$$

$$\triangleq \sum_j a_{ij} \delta (\hat{x}_j + x_j).$$

Reportant cette expression de $\delta \hat{p}$ (T) dans celle de δJ_1 on obtient ,

$$\delta J_1 = - \left[P_1 (T) + A' P_3 (T) \right]' \delta \hat{x} (T) - \left[P_2 (T) + A' P_2 (T) \right] \delta \tilde{x} (T)$$

$$+ P_3' (o) \delta \hat{p} (o) + \int_{t_0}^T (\cdot) dt \quad (4,78)$$

D'où les conditions nécessaires d'optimalité:

$$\dot{P}_1 (t) = - \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \hat{x}} \quad , \quad P_1 (T) + A' P_3 (T) = 0 \quad (4,79)$$

$$\dot{P}_2 (t) = - \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \tilde{x}} \quad , \quad P_2 (T) + A' P_3 (T) = 0 \quad (4,80)$$

$$\dot{P}_3 (t) = - \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \hat{p}} \quad , \quad P_3 (o) = 0 \quad (4,81)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \dot{a}} \right) = 0 \quad (4,82)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial a} \right|_{t=T} = \left. \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \dot{a}} \right|_{t=T} = 0 \quad (4,83)$$

Le sens de la dérivée matricielle $\partial \mathcal{H}_1 / \partial a$ est donnée en annexe à ce chapitre.

(étape 2) Optimisation de G

On introduit le vecteur adjoint associé (Q_1, Q_2, Q_3) et l'Hamiltonien \mathcal{H}_2 défini par l'expression

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2(\cdot) = & g [\hat{x}(t) + x(t), u(t), t] \\ & + Q_1'(t) f_1 [a(t), \dot{a}(t), \hat{x}(t), u(t-\tau), t-\tau] \\ & + Q_2'(t) f_2 [a(t), \dot{a}(t), \hat{x}(t), u(t), u(t-\tau), t, t-\tau] \\ & + Q_3'(t) f_3 [\hat{x}(t), \tilde{x}(t), \hat{p}(t), u(t), t] . \end{aligned}$$

La commande optimale est donnée par la condition

$$\min_u \mathcal{H}_2 \left[a(t), \dot{a}(t), \hat{x}(t), \tilde{x}(t), Q_1(t), Q_2(t), \right. \\ \left. Q_3(t), u(t), u(t-\tau), t, t-\tau \right] .$$

Le calcul variationnel conduit cette fois pour δJ_2 à une expression de la forme

$$\delta J_2 = \frac{\partial h' [\hat{x}(T) + \tilde{x}(T), T]}{\partial [\hat{x}(T) + \tilde{x}(T)]} \cdot \delta [\hat{x}(T) + \tilde{x}(T)] - \left[Q_1'(t) \delta \hat{x}(t) \right]_0^T - \left[Q_2'(t) \delta \tilde{x}(t) \right]_0^T - \left[Q_3'(t) \delta \hat{p}(t) \right]_0^T + \int_{t_0}^T (\cdot) dt, \quad (4,84)$$

d'où, compte tenu des résultats du paragraphe 4.1.2., les conditions nécessaires d'optimalité:

$$\dot{Q}_1(t) = - \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial \hat{x}}, \quad Q_1(T) + A' Q_3(T) = \frac{\partial h' [\hat{x}(T) + x(T), T]}{\partial [\hat{x}(T) + x(T)]} \quad (4,85)$$

$$\dot{Q}_2(t) = - \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial \tilde{x}}, \quad Q_2(T) + A' Q_3(T) = \frac{\partial h' [\hat{x}(T) + \tilde{x}(T), T]}{\partial [\hat{x}(T) + \tilde{x}(T)]} \quad (4,86)$$

$$\dot{Q}_3(t) = - \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial \hat{p}}, \quad Q_3(0) = 0 \quad (4,87)$$

$$\sum_i \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial u_i} + \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial u_i(t-\tau)} \cdot \frac{u_i(t-\tau)}{u_i(t)} = 0 \quad (4,88)$$

ANNEXE

DERIVEE D'UNE FONCTION DE MATRICE

On rappelle succinctement la définition des fonctions de matrice et de leurs dérivées.

Soit A une $n \times n$ matrice dont on suppose toutes les valeurs propres λ_i distinctes les unes des autres.

(1) Bases de A.

Les bases B_i , $i \in [1, n]$ de A sont définies par les relations

$$B_i B_j = 0, \quad \forall i \neq j$$

$$B_i^k = B_i, \quad \forall k \text{ entier positif}$$

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i B_i$$

B_i peut être calculée par la formule de Lagrange

$$B_i = \frac{\prod_{j \neq i} (A - \lambda_j I)}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)}$$

ou I est la $n \times n$ matrice unité.

(2) Fonction $f(A)$.

$f(x)$ désignant une fonction de la variable réelle x , on définit $f(A)$ par la relation

$$f(A) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) B_i$$

(3) Dérivée $f'(A)$.

Si $f(x)$ est dérivable en x , $f'(A)$ est défini par l'expression

$$f'(A) = \sum_{i=1}^n f'(\lambda_i) B_i$$

(4) Extension au cas de valeurs propres multiples. Les formules de Lagrange conduisent à l'équation suivante pour définir A .

$$\begin{vmatrix} f(A) & f(\lambda_1) & f(\lambda_2) & \dots & f(\lambda_n) \\ A^{n-1} & \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Lorsqu'il existe une valeur propre λ de multiplicité p , on a ce qui suit: au lieu d'avoir p colonnes identiques dans le déterminant ci-dessus, on a une colonne normale suivie

de colonnes qui sont les dérivées successives de la première par rapport à λ jusqu'à l'ordre $(p-1)$. Par exemple, pour une racine triple, on aurait la portion de tableau suivante:

$f(\lambda)$	$f'(\lambda)$	$f''(\lambda)$
λ^{n-1}	$(n-1)\lambda^{n-2}$	$(n-1)(n-2)\lambda^{n-3}$
λ^{n-2}	$(n-2)\lambda^{n-3}$	$(n-2)(n-3)\lambda^{n-4}$

λ^3	$3\lambda^2$	6λ
λ^2	2λ	2
λ	1	0
1	0	0

COMMENTAIRES

(1) L'approche variationnelle du paragraphe 4.1.1. et particulièrement la condition (4,18) a été proposée antérieurement dans [1], [2]. On définit ainsi une condition nécessaire d'existence, et une classe \mathcal{U}_1 de solutions possibles indexée par la fonctionnelle (4,17). Le choix d'une autre fonctionnelle, permettrait de définir une autre famille \mathcal{U}_2 , et la commande optimale u^* vérifie $u^* \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.

(2) La notion de fonction de corrélation d'une fonction déterministe a été utilisée pour la première fois semble-t-il par BLANC [3] [4] pour déterminer la dispersion quadratique des erreurs d'interpolation en analyse numérique. Cette notion et toutes les autres qui lui sont attachées ont été développées par J. BASS [5] dans sa théorie des fonctions pseudo-aléatoires, pour étudier des fonctions du temps qui, sans être stationnaire présentent néanmoins un caractère "permanent en moyenne".

REFERENCES

- 1 JUMARIE G, "Sur les conditions d'optimalité dans l'approche par extrapolation des jeux différentiels à information différée" Comptes Rendus Acad. Sciences. Série A, Tome 271, pp. 747-751. Septembre 1970.

- 2 ————— "The saddle point principle for a class of sub-optimal control in distributed parameter differential games with information time lag". Proceeding of "Symposium on Distributed Parameter System Control." June 1971. The University of Calgary. Calgary. Alberta. Canada.

- 3 C. BLANC. Comptes Rendus Acad. Sciences. Série A, Tome 233, p. 683, 1951.

- 4 ————— Comptes Rendus Acad. Sciences. Série A, Tome 233, p. 726, 1951.

- 5 BASS, J. "Nombres aléatoires. Suites arithmétiques. Méthodes de Monte-Carlo". Publication de l'Inst. Statist. l'Université de Paris. Vol 9. f s 3, pp 289-325, 1960.

CHAPITRE V

CONCLUSION GENERALE

PERSPECTIVES SUR UNE APPROCHE
UNIFIEE A L'ESTIMATION OPTIMA-
LE EN PRESENCE DE BRUITS ET DE
RETARD A L'INFORMATION

Dans cette dernière partie, on montre succinctement comment les éléments des chapitres précédents peuvent être réunis pour aborder le problème de l'optimisation lorsqu'on est en présence simultanée de bruit de mesure et de retard d'information.

5.1 PROBLEME. On reprend le problème exposé dans l'introduction, dans lequel cette fois on a simultanément un retard à l'information et un bruit de mesure.

(i) Problème avec information parfaite.

- équation d'état:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad ; \quad (5,1)$$

- fonctionnelle de coût:

$$G = h[x(T), T] + \int_{t_0}^T g[x(t), u(t), t] dt; \quad (5,2)$$

(ii) Problème avec erreur d'observation.

- l'état $x(t)$ du système est observable avec un retard τ ;

- cette observation est faite avec une certaine erreur sous forme d'un bruit $n(x, t)$. Autrement dit, à l'instant t , on observe non pas $x(t)$, mais la quantité

$$x(t - \tau) + n[x(t), t].$$

Le problème dès lors est de déterminer la commande optimale du système, toujours dans le contexte de la chaîne de décisions suivante:



A priori on a le choix entre deux modèles: celui du processus séquentiel de la Fig. 5-1 dans lequel on filtre avant d'extrapoler,

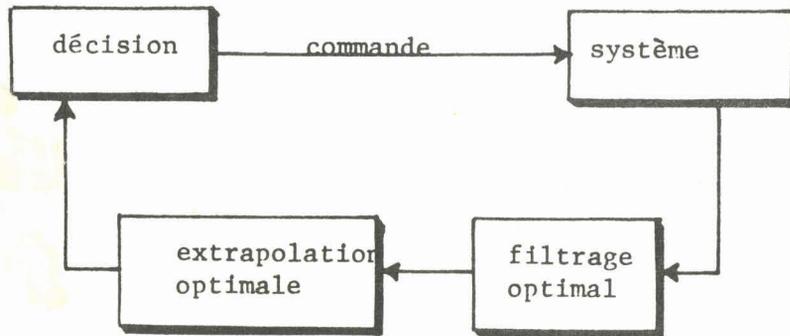


Fig. 5-1: modèle de commande en présence de bruit et retard à l'information.

celui de la Fig. 5-2 dans lequel cette fois on extrapole avant de filtrer.

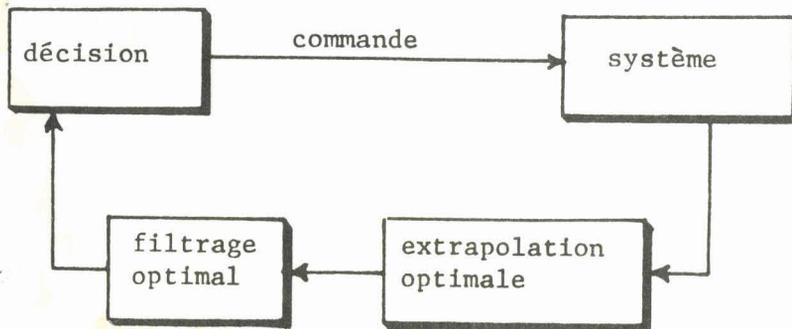


Fig. 5-2: modèle de commande en présence de bruit et retard.

En fait, dans la mesure où l'on se re-reint à une approche par combinaison d'un filtrage statistique et d'une extrapolation déterministe, seul le modèle de la Fig. 5-1. convient puisque l'extrapolation du modèle de la Fig. 5-2 n'a de sens que si c'est une prédiction statistique.

Le modèle définitif à considérer est donc représenté sur la Fig. 5-3.

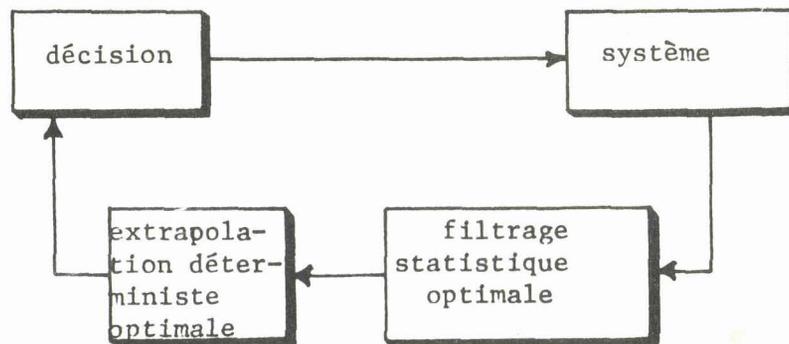


Fig. 5-3: Optimisation par filtrage statistique et extrapolation déterministe.

5.2 PROCESSUS D'OPTIMISATION. UN EXEMPLE INTRODUCTIF

Une fois admis le modèle d'optimisation de la Fig. 5-3, on peut esquisser le processus d'optimisation proprement dit.

5.2.1. Problème

Dans le contexte général de cette section, qui est celui d'une approche, nous nous limitons au problème scalaire suivant.

- équation d'état:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0; \quad (5,1)$$

- fonction de coût de problème à information parfaite:

$$G = h[x(T), T] + \int_{t_0}^T g[x(\sigma), u(\sigma), \sigma] d\sigma \quad (5,2)$$

- observation:

(i) retard τ à l'observation,

(ii) observation entachée d'erreur sous la forme d'un bruit blanc Gaussien $v(t)$ de moyenne nulle et de covariance

$$\text{cov}[v(t), v(\tau)] = R(t) \delta(t - \tau) \quad (5,3)$$

A l'instant t , l'observateur enregistre non pas $x(t)$ mais

$$y(t) \triangleq C(t) x(t - \tau) + v(t) \quad (5,4)$$

5.2.2. Choix des estimateurs

Les choix du filtre et de l'extrapolateur sont forte-

ment liés comme il apparaîtra par la suite. Afin d'éviter toute confusion dans ce qui suit, on notera:

$\bar{x}(t-\tau)$ l'estimation statistique de $x(t-\tau)$

$\hat{\bar{x}}(t)$ l'estimation de $\bar{x}(t)$ obtenue par extrapolation déterministe.

(i) Choix d'une classe d'extrapolateur.

L'extrapolateur est de la forme

$$\hat{\bar{x}}(t) = \alpha(t) \bar{x}(t-\tau) \quad (5,5)$$

Conformément aux résultats du chapitre 4, la valeur optimale de $\alpha(t)$ devrait être définie à partir de l'équation différentielle de $\bar{x}(t)$.

(ii) Choix et optimisation du filtre.

D'après les résultats du chapitre 4, exemple 2 du paragraphe 4.3.3.2. l'équation différentielle de la valeur extrapolée $\hat{\bar{x}}(t)$ de l'estimation statistique est donnée par la connaissance de la dynamique de $\bar{x}(t-\tau)$.

Par ailleurs, en se référant aux résultats du chapitre 3, modèle 1 du paragraphe 3.3.1., la dynamique du filtre est définie par l'équation

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t - \tau) = & f[\bar{x}(t - \tau), u(t - \tau), t - \tau] + \\ & + K(t) [y(t) - C(t) x(t - \tau)], \end{aligned} \quad (5,6)$$

avec

$$K(t) = \int (t - \tau) \cdot G'(t) R^{-1}. \quad (5,7)$$

(ii) Optimisation de l'extrapolateur.

L'optimisation de l'extrapolateur est effectuée à partir de l'équation (5,6) ci-dessus.

Une méthode semblable à celle qui est utilisée dans le chapitre V, exemple 2 du paragraphe 4.3.3.2, conduit à l'équation de propagation de $\hat{\bar{x}}$, suivante:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\bar{x}}}(t) = & \dot{\alpha}(t) x(t - \tau) + \alpha(t) f[\bar{x}(t - \tau), u(t - \tau), t - \tau] + \\ & + \alpha(t) K(t) [y(t) - C(t) \hat{\bar{x}}(t - \tau)] \\ = & \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} \hat{\bar{x}}(t) + \alpha(t) f\left[\frac{\hat{\bar{x}}(t)}{\alpha(t)}, u(t - \tau), t - \tau\right] \\ & + \alpha(t) K(t) \left[y(t) - \frac{C(t)}{\alpha(t)} \hat{\bar{x}}(t) \right] \end{aligned} \quad (5,8)$$

Cette équation donne le système de commande qui est représenté sur la Fig. 5-4.

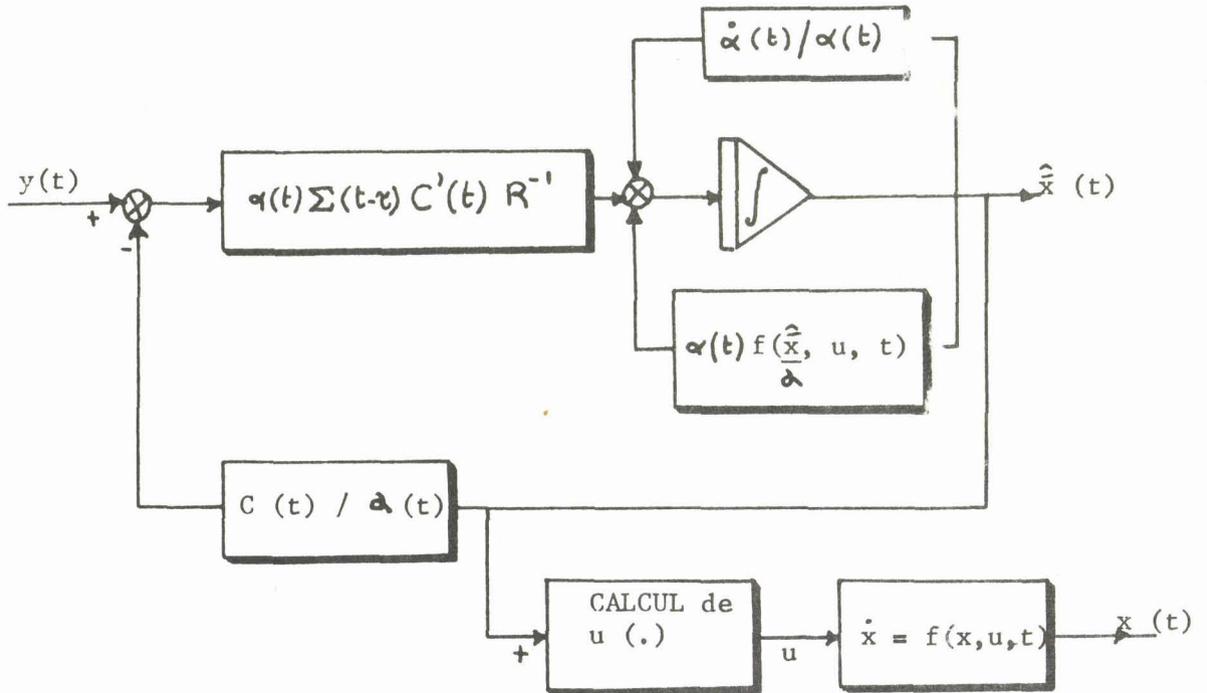


Fig. 5-4: Système de commande en présence de bruit et retard d'observation

Le problème nouveau qui apparaît ici, est directement lié à la présence simultanée du bruit d'observation et du retard à l'information, est celui de la détermination de $\alpha(t)$. D'après les résultats du quatrième chapitre le calcul de $\alpha(t)$ ne peut être fait qu'à partir d'une dynamique déterministe, ce qui n'est pré-

cisément par le cas de l'éq. (5,6) où apparaît explicitement la quantité aléatoire $y(t)$.

Pour y remédier, conformément à une remarque faite à la fin du chapitre III, nous chercherons une équ. statistique moyenne de la façon suivante: La dynamique observée est $f(x + \tilde{x}, u, t)$, et l'estimation $\bar{f}(\cdot)$ de f , obtenue au moyen d'un développement de Taylor du second ordre, peut s'écrire sous la forme

$$\bar{f}(x, u, t) \simeq f(\bar{x}, u, t) + \frac{1}{2} f_{xx}(\bar{x}, u, t) \Sigma .$$

Ainsi, dans ce cas précis, le filtrage conduit à la dynamique observée déterministe suivante:

$$\dot{\bar{X}} = f(\bar{X}, u, t) + \frac{1}{2} f_{xx}(\bar{X}, u, t) \Sigma \quad (5,9)$$

C'est l'équation qui permet de déterminer $\alpha(t)$.

Dans le cas plus général où on opère par l'intermédiaire de l'Hamiltonien observée comme dans le modèle 4 du chapitre 3, le problème qui se pose est le suivant: on sait que l'optimisation en présence du retard utilise l'équation retardée

$$\dot{x}(t - \tau) = f[x(t - \tau), u(t - \tau), t - \tau], \quad (5,10)$$

et la fonction de coût approximative G_τ exprimée à l'aide des variables retardées. On peut donc se demander si l'utilisation de l'observation

$$\dot{z} = H_x(y, u, p, t)$$

a un sens ici, et s'il ne vaudrait pas mieux prendre comme observation le système adjoint du problème retardé tel qu'il défini au chapitre IV, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \dot{z}(t - j\tau) = H_{\tau, x}(t - j\tau) & \left[y(t - \tau), \dots, -h\tau, \right. \\ & \left. u, p_1, \dots, p_r, t \right] \end{aligned} \quad (5,11)$$

$$j = (1, 2, \dots, r = \max j).$$

Cette approche semble à première vue préférable mais suppose connue à priori l'expression formelle du résultat de l'optimisation statistique.

5.3 CONCLUSIONS GENERALES

5.3.1. Conclusions proprement dites

Dans l'exemple illustratif qui précède, nous avons voulu

montrer comment les deux approches distinctes des chapitres III et IV peuvent être réunies pour résoudre le problème d'optimisation en présence des deux types d'erreurs. Cette réunion soulève de nouvelles difficultés qui proviennent de la nature profondément différentes des deux types d'estimation.

En effet, la dynamique elle-même du système étant déterministe, et seule l'observation étant retardée et aléatoire, le problème d'extrapolation que nous avons ici n'est pas celui de la prédiction d'une fonction aléatoire, mais bien celui de l'extrapolation la meilleure d'une fonction déterministe.

Il en résulte qu'on ne peut considérer l'estimation du point de vue de la meilleure prédiction d'une fonction aléatoire, mais que l'on doit bien la prendre comme la juxtaposition simultanée des deux estimations distinctes.

C'est la raison de l'optimisation séquentielle que nous avons proposée.

Il reste à approfondir de nombreuses questions pour que l'on puisse considérer la méthode d'approche comme définitivement élaborée. Récapitulons-les brièvement.

(1) Le troisième chapitre traite seulement du cas des bruits blancs Gaussiens indépendants ou non de l'état du système. On sait qu'en utilisant la représentation Gaussienne Markovienne du processus d'observation, on peut effectivement réduire une large classe de problèmes à ce modèle Gaussien. Les problèmes qui restent définitivement en dehors de ce modèle doivent être alors résolus par la méthode d'optimisation vectorielle du quatrième chapitre.

(2) La formulation mathématique du quatrième chapitre est très lourde, et il reste à développer des méthodes d'analyse numérique qui lui soient particulièrement appropriées.

(3) La synthèse même du filtrage et de l'extrapolation doit faire l'objet de recherches ultérieures.

5.3.2. Suggestions pour des recherches futures.

Indépendamment de l'amélioration proprement dite de la méthode que nous avons esquissée, les suggestions suivantes viennent à l'esprit.

(1) La formulation relative à l'extrapolation déterministe est très lourde dans son application. Pour palier ceci, on peut se demander si les considérations suivantes ne pourraient conduire à une approche plus simple.

Dans la mesure où la classe de la solution $\hat{x}(t)$ est connue; il est alors possible de déterminer les principales caractéristiques moyennes de la statistique de l'erreur d'extrapolation. Que se passe-t-il alors si l'on remplace cette erreur essentiellement déterministe par une fonction aléatoire de mêmes caractéristiques statistiques?

Si l'on arrivait à établir des conditions de validité, même seulement approximatives, pour cette substitution, l'unification de l'approche serait totale.

(2) Toujours dans le même but d'alléger la formulation du chapitre IV, on peut se demander s'il n'est pas préférable d'envisager une extrapolation adaptative ou réursive? Par exemple, l'extrapolation continue

$$\hat{x}(t) = \alpha(t) \times (t - \tau)$$

deviendrait dans le cas d'une discrétisation

$$\hat{x}(n\tau) = \alpha_n \times [(n-1)\tau],$$

formule dans laquelle le processus d'adaptation de α_n reste à déterminer. Cette approche adaptative présente l'avantage de bien s'ac-

comoder de la récursivité du filtrage statistique, ce qui a priori rendrait plus aisée la réunion des deux estimations.

(3) L'optimisation qui a été faite au quatrième chapitre est une optimisation à deux niveaux représentée symboliquement sur la Fig. 5-5.

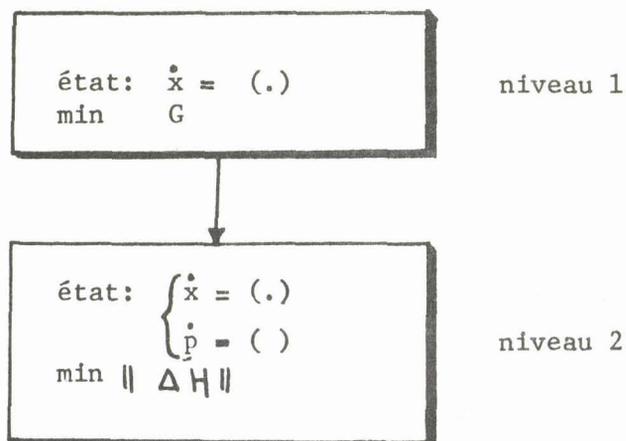


Fig. 5-5: Modèle d'optimisation à deux niveaux de l'extrapolation déterministe.

Ces deux niveaux ont été imbriqués de façon à être réduits à un problème d'optimisation de coût vectoriel. N'y aurait-il pas là une approche pour résoudre, par le calcul variationnel, des problèmes de commande avec objectifs hiérarchisés?

