UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur de 3ème cycle

par

Alexandre DELCAMBRE

LOCALISATION ET CONDITIONS D'HYPERBOLICITE FORTE POUR LES OPERATEURS DIFFERENTIELS MATRICIELS AVEC LES ORDRES DE VOLEVIC

Membres du Jury : MM. PARREAU, Président
VAILLANT, Rapporteur
AUBIN, Examinateur

Soutenue le 24 Janvier 1972

Je remercie les membres du Jury, Monsieur Parreau, Monsieur Aubin et particulièrement Monsieur Vaillant pour les conseils et encouragements qu'il m'a donnés.

Je remercie Monsieur Landais et tous ceux grâce à qui, ce travail a pu être mené à bien, particulièrement Mesdames Bérat, Lengaigne et Tatti qui l'ont dactylographié.

I. INTRODUCTION.

On considère d'abord un système d'équations aux dérivées partielles, linéaires, à coefficients constants :

$$(1) \qquad h^A_B(D)\ y^B(x) = f^A(x) \qquad A,B = 1,\dots,m$$

où $x = (x^o,\dots,x^n) \in R^{n+1}$, $h^A_B(D)\ y^B(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant s^A_B} a^A_{B\alpha}\ y^B(x)$.

Au système (1) on associe la matrice

$$(h^A_B(\ell)) \quad \text{où} \quad \ell = (\ell_o,\dots,\ell_n) \quad , \quad h^A_B(\ell) = \sum_{|\alpha| \leqslant s^A_B} a^A_{B\alpha}\ \ell^\alpha$$

D'importantes propriétés d'un tel système sont liées à celles du polynôme $\det(h^A_B(\ell))$. Par exemple, nous verrons que le système (1) est hyperbolique si et seulement si $\det(h^A_B(\ell))$ est hyperbolique. Nous nous intéressons particulièrement à la partie principale $H(\ell)$ de $\det(h^A_B(\ell))$. Dans la suite, nous supposerons $\det(h^A_B(\ell)) \not\equiv 0$, donc $H(\ell) \not\equiv 0$. On conviendra que le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Nous nous proposons de définir, dans différents cas, une matrice $(H^A_B(\ell))$ dite matrice caractéristique, telle que $\det(H^A_B(\ell)) = H(\ell)$.

On pose : $d^o(\det h^A_B(\ell)) = r$.

Cas simple.- On suppose que $s^A_B \leqslant t$ pour $A,B = 1,\dots,m$ et que $r = mt$.

$H_B^A(\ell)$ est alors la partie principale de $h_B^A(\ell)$ si $s_B^A = t$, $H_B^A(\ell) = 0$ sinon .

Cas de Pétrowski.- On pose $t_B = \sup_A s_B^A$.
On suppose que $r = \sum_B t_B$. $H_B^A(\ell)$ est la partie principale de $h_B^A(\ell)$ si $s_B^A = t_B$, $H_B^A(\ell) = 0$ sinon :

Cas de Leray, Douglis, Niremberg, Volevič.

Soit $\sigma \in S_m$. On pose $r_\sigma = d^o(\prod_B h_B^{\sigma(B)}(\ell))$. On suppose que $r = \sup_{\sigma \in S_m)} r_\sigma$. On dit alors que le système n'est pas dégénéré. Dans ce cas, il existe un système, dit système d'ordres de Volevič, de 2m entiers n_A, m_B, $A, B = 1,\dots,m$, tels que $s_B^A \leq n_A - m_B$ et $\sum_A n_A - \sum_B m_B = r$. La matrice caractéristique est définie de la manière suivante :

$H_B^A(\ell)$ est la partie principale de $h_B^A(\ell)$ si $s_B^A = n_A - m_B$. $H_B^A(\ell) = 0$ sinon .

Remarquons que le choix des ordres n'est pas unique.

Les systèmes du cas simple et du cas de Pétrowski sont des cas particuliers de systèmes avec ordres. En effet, dans le cas simple, on peut prendre $n_A = t$ pour $A = 1,\dots,m$ et $m_B = 0$ pour $B = 1,\dots,m$.

Dans le cas de Pétrowski on peut prendre $n_A = 0$ pour tout A, $m_B = -t_B$ pour tout B.

Soit $\sum$ une hypersurface d'équation $x^o = 0$. Résoudre le problème de Cauchy dans C^∞ pour une équation aux dérivées partielles d'ordre t, à données sur une hypersurface $\sum$, consiste, étant donnée une fonction $z(x) \in C^\infty(R^{n+1})$, à trouver une solution $y(x)$ de cette équation, telle que $(y-z)(x)$ s'annule t fois sur $\sum$, c'est-à-dire telle que $D_o^k(y-z)(x) = 0$ sur $\sum$ pour tout k, $0 \leq k \leq (t-1)$.

Pour un système, dans le cas simple, on se donne m fonctions

$z^1(x),\dots,z^m(x)$ et on cherche des solutions telles que, pour tout B, $(y^B-z^B)(x)$ s'annule t fois sur $\sum$. En fait on se donne mt dérivées transversales des $y^B(x)$ sur $\sum$.

Dans le cas d'un système avec ordres, soit n un entier supérieur ou égal à $\sup_A n_A$. On aura des données $z^1(x),\dots,z^m(x)$, et on cherche des solutions $y^B(x)$ telles que $(y^B-z^B)(x)$ s'annule $(n-m_B)$ fois sur $\sum$ ([2]).

On voit que pour qu'un tel problème ait des solutions, il est nécessaire que les données satisfassent aux conditions de compatibilité :

$$(f^A(x) - h^A_B(D)\, z^B(x)) \text{ s'annule } (n-n_A) \text{ fois sur } \textstyle\sum.$$

En fait on donne $\sum_B (n-m_B)$ dérivées transversales des $y^B(x)$ sur $\sum$. et ces données ont assujetties à $\sum_A (n-n_A) = \sum_B (n-m_B) - r$ conditions de compatibilités.

Notre étude portant sur les systèmes fortement hyperboliques, il convient de rappeler les définitions de l'hyperbolicité.

Soit P un polynôme complexe de $(n+1)$ variables $(\ell_0,\dots,\ell_n)$, de degré m, de partie principale P_m. Soit $N \in R^{n+1}$, $N \neq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $P_m(N) \neq 0$ et il existe $\tau_0 \in R$, $P_m(\ell+i\tau N) \neq 0$ $\forall\, \ell \in R^{n+1}$, $\forall \tau$, $|\tau| < \tau_0$.

(2) $P(D)$ a une solution fondamentale E à support dans un cône K ayant son sommet à l'origine et tel que $K - \{0\} \subset \{<x,N> > 0\}$, (Gårding), c'est-à-dire une distribution E à support dans K telle que $P(D)\,E = \delta$ où δ est la même de Dirac en 0,

(3) Le problème de Cauchy à données sur $\{<x,N> = 0\}$ est bien posé

dans C^∞ pour $P(D)$.

Définition.- Si l'une des trois conditions (1), (2), (3) est satisfaite, nous disons que l'opérateur $P(D)$ est hyperbolique par rapport à N.

Un polynôme homogène P est hyperbolique par rapport à N si et seulement si $P(N) \neq 0$ et l'équation $P(\xi+\tau N)=0$ n'a que des racines réelles pour tout $\xi \in R^{n+1}$.

Pour que P soit hyperbolique, il est nécessaire que sa partie principale P_m soit hyperbolique. Dans [3] on trouve la condition suffisante :

(4) Pour que P soit hyperbolique, il suffit que P_m soit hyperbolique et que $P < P_m$ (P plus faible que P_m)

$$P < P_m \quad \text{signifie} \quad \frac{\tilde{P}(\xi)}{\tilde{P}_m(\xi)} < C \qquad \forall\, \xi \in R^{n+1}$$

$$\text{où} \quad (\tilde{P}(\xi))^2 = \sum_{|\alpha| \geq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 .$$

La nécessité de cette condition dans le cas $n = 2$ et pour n quelconque dans le cas de multiplicité localement constante, est démontrée dans [11].

Citons encore la condition suffisante de Gårding :

(5) Pour que P soit hyperbolique, il suffit que :

- P_m soit hyperbolique ;
- les zéros en σ de $P(\sigma(\tau N+i\xi)) = 0$ tendent vers 0 uniformément par rapport à ξ $q^d\tau \to \infty$.

Gårding avait conjecturé que cette condition est nécessaire.

Dans [12] Svensson démontre cette conjecture et l'équivalence de (4) et

(5) et applique ces résultats aux systèmes avec ordres.

Rappelons que le cône caractéristique est défini par $P_m(\ell) = 0$. Si $\xi \neq 0$ est un élément de ce cône, ξ est un vecteur caractéristique. ξ est simplement caractéristique si $\sum \left|\frac{\partial P_m}{\partial \ell_j}(\xi)\right|^2 \neq 0$.

Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que tout polynôme P ayant pour partie principale P_m soit hyperbolique par rapport à N :

(6) P_m est hyperbolique par rapport à N et les caractéristiques réelles sont simples.

(7) $P_m(N) \neq 0$ et $P_m(\xi+\tau N)$ à ses racines réelles et simples pour tout ξ non proportionnel à N.

Si une des conditions (6), (7) est satisfaite, P est dit strictement hyperbolique par rapport à N.

Considérons maintenant le système (1).
On lui associe la matrice $(h_B^A(\ell))$. Nous dirons que l'opérateur $(h_B^A(D))$ est hyperbolique par rapport à N, s'il a une solution fondamentale E à support dans un cône K, ayant sont sommet à l'origine et tel que $K - \{0\} \subset \{\langle x,N\rangle > 0\}$ c'est-à-dire s'il existe une matrice $E = (E_B^A)$ où les E_B^A sont des distributions à support dans K, telle que :

$$h_B^A(D)\ \delta * E = \delta I .$$

Soit (H_B^A) la matrice caractéristique associée à un système d'ordres n_A, m_B. Nous disons que $(h_B^A(D))$ est fortement hyperbolique si pour tout opérateur $(R_B^A(D))$ tel que $d^o(R_B^A(\xi)) < n_A - m_B$, l'opérateur $(h_B^A + R_B^A)(D)$ est hyperbolique.

Il est clair que l'hyperbolicité forte de $(h_B^A(D))$ équivaut à l'hyperbolicité forte de $(H_B^A(D))$.

Dans la suite nous parlerons indifféremment d'opérateur $(h_B^A(D))$ fortement hyperbolique ou de matrice $(h_B^A(\ell))$ fortement hyperbolique. La notion d'hyperbolicité forte pour les systèmes correspond à celle d'hyperbolicité stricte dans le cas d'une seule équation.

Pour qu'une matrice $(h_B^A(\ell))$ soit hyperbolique il faut et il suffit que $\det(h_B^A(\ell))$ soit hyperbolique. Par contre, il n'est pas nécessaire, pour que $(h_B^A(\ell))$ soit fortement hyperbolique, que $\det(h_B^A(\ell))$ soit strictement hyperbolique. Nous verrons en effet qu'il existe des systèmes fortement hyperbolique à caractéristiques multiples.

Des conditions nécessaires et suffisantes d'hyperbolicité forte ont d'abord été données par Kasahara et Yamaguti [4] (1960) pour des systèmes du type :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n_i} u_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\substack{|\alpha| \leq n_j \\ \alpha_0 < n_j}} a_{ij}^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_0} \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha_n} u_j(x,t)$$

$$x = (x^1, \dots, x^n) \qquad 1 \leq j \leq m \qquad n_i > 0 \qquad \forall i$$

On reconnaît un système de Pétrowski tel que $t_A > 0 \quad \forall A$ et $H_B^A(q) \neq 0$ où $q = (0, -, 0, 1)$.

Plus récemment (1968) Svensson a donné des conditions suffisantes et des conditions nécessaires d'hyperbolicité forte pour les systèmes avec ordres :

Théorème 4.3.- (Svensson [12] p. 160).

On considère la matrice caractéristique $(H_B^A(\ell))$ du système (1).

- Pour que $(H_B^A(\ell))$ soit fortement hyperbolique par rapport à $N \in R^{n+1}$, il suffit que $(H_B^A(\ell+iN))^{-1} = (C_B^A(\ell))$ existe $\forall\ \ell \in R^{n+1}$ et que $\exists$ C, $|C_B^A(\ell)| \leq C(1+|\ell|)^{1-(n_B-m_A)}$.

- Si les ordres sont tels que $n_A-m_B > 0$ pour $A,B = 1,\dots,m$ et si $(H_B^A(\ell))$ est fortement hyperbolique, $\exists$ C, $|C_B^A(\ell)| \leq C(1+|\ell|)^{1-(n_B-m_A)}$.

Dans [8] J. Vaillant utilise les conditions de Kasahara et donne des conditions (C) suffisantes et des conditions C_I, C'_{II} nécessaires d'hyperbolicité forte pour les systèmes du cas simple. Les conditions (C) expriment que :

C_I. Chaque forme réduite de la matrice caractéristique, considérée comme matrice d'éléments de l'anneau localisé de l'anneau des polynômes par rapport à chaque idéal premier défini par un facteur irréductible du déterminant caractéristique, ne contient comme facteur invariant, que l'anneau lui-même ou l'idéal maximal de l'anneau localisé.

C_{II}. Le radical de l'idéal caractéristique est engendré par un polynôme strictement hyperbolique.

La condition C'_{II} est : Le radical de l'idéal caractéristique est engendré par un polynôme hyperbolique. Ceci équivaut à : H est hyperbolique.

L'objet de la première partie de notre travail est l'extension de ces résultats aux systèmes avec ordres. Nous utiliserons les résultats de Svensson.

Dans une deuxième partie les coefficients sont variables. On définit de même les ordres du système en un point de la variété. Si un système d'ordres est admissible en un point a, il l'est dans un voisinage de a. Nous supposons les conditions (C) satisfaites au voisinage d'un point de la variété. Nous transformons le système donné en un système à partie principale diagonale, hyperbolique strict au sens de Leray-Ohya. Nous obtenons des solutions dans des espaces de Sobolev quels que soient les termes non principaux des polynômes de dérivation.

Enfin, les conditions (C) étant supposées satisfaites au voisinage d'un point de la variété, nous donnons des solutions du problème de Cauchy sous forme de somme des ondes asymptotiques. Ces problèmes auront $\sum n_A - \sum m_B = r$ données, dont la répartition dépend du système considéré. Ces données ne seront pas assujetties à des conditions de compatibilité.

Dans le cas oscillatoire nous obtiendrons une généralisation des résultats obtenus par J. Vaillant dans [8]. Nous démontrons ensuite la convergence dans le cas analytique. Nous utiliserons les majorantes de C. Wagshall [14]. Enfin, dans le cas de données singulières, les singularités se propagent le long des caractéristiques issues du support singulier des données.

II. CONDITIONS D'HYPERBOLICITE FORTE UTILISANT LA LOCALISATION POUR LES SYSTEMES A COEFFICIENTS CONSTANTS.

Considérons le système :

$$(1) \qquad h_B^A(D)\, y^B(x) = f^A(x) \quad ; \quad x \in R^{n+1} \qquad \begin{array}{l} 1 \leq A \leq m \\ 1 \leq B \leq m \end{array}$$

On suppose que la matrice associée $(h_B^A(\xi))$ n'est pas dégénérée. Il existe donc un système d'entiers n_A, m_B tel que $d^o(h_B^A(\xi)) \leq n_A - m_B$ et $d^o(\det h_B^A(\xi)) = \sum_A n_A - \sum_B m_B$. Pour un choix de tels entiers, la matrice caractéristique $(H_B^A(\xi))$ est constituée de polynômes $H_B^A(\xi)$ de degré $(n_A - m_B)$ ou nuls. $H_B^A(\xi)$ est la partie principale de $h_B^A(\xi)$ si $d^o(h_B^A(\xi)) = n_A - m_B$, $H_B^A = 0$ sinon. On pose $H = \det(H_B^A)$. H se décompose en facteurs irréductibles : $H = H_1^{\nu_1} \times H_2^{\nu_2} \times \ldots \times H_\sigma^{\nu_\sigma}$.* On pose $\sum_A n_A - \sum_B m_B = r$, $d^o(H_S) = \tau_S$, $d^o(H_1 \times \ldots \times H_\sigma) = \tau$. On a $d^o(H) = r$.

Nous rappelons les conditions (C) énoncées par J. VAILLANT dans [8].

CI pour tout S, $1 \leq S \leq \sigma$

$$(H_B^A) \sim \left[\begin{array}{cccc} H_S & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & H_{S_1} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} H_S \\ \ddots \\ H_{S_1} \end{array}}\right\} \nu_S \\ \\ \\ \end{array}$$

dans l'anneau Φ_S localisé de $C(\ell_0, \ldots, \ell_n)$ par rapport à H_S.

* On factorise dans $R(\ell_0, \ldots, \ell_n)$ si les coefficients des $h_B^A(\xi)$ sont réels, dans $C(\ell_0, \ldots, \ell_n)$ sinon. CII (ou C'II) ne pourra être satisfaite que si les H_S sont proportionnels à des polynômes à coefficients réels. (cf [3] Coroll. 5.5.1.)

CII $\exists\, N \in R^{n+1}$ tel que $H_1 \times \ldots \times H_\sigma$ soit strictement hyperbolique par rapport à N.

On fera un changement de coordonnées, de telle sorte que $N = (1,0-0)$. Nous dirons que le système (1) est fortement hyperbolique par rapport à N pour un choix des entiers n_A, m_B, si la matrice (h_B^A) est fortement hyperbolique par rapport à N, ce qui équivaut à l'hyperbolicité forte de (H_B^A) par rapport à N.

Dans une première partie, nous donnons une traduction géométrique de la condition d'hyperbolicité forte de Svensson (théorème cité p. 6). Dans le cas où CI est vérifiée, la condition obtenue se simplifie, et nous montrons qu'elle est satisfaite si CII l'est.

Dans une deuxième partie, nous montrons, dans le cas où $(n_j - m_k) > 0$ pour $j, k = 1,\ldots,m$, que les conditions CI, C'II sont nécessaires. (C'II : $H_1 \times \ldots \times H_\sigma$ hyperbolique par rapport à N). CI n'est pas nécessaire si $\exists\, j, \exists\, k$, $(n_j - m_k) \leqslant 0$.

1. On note ξ' l'élément $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ de R^n, $(\xi_o + i\,\xi_{n+1}, \xi') = (\zeta,\xi')$ l'élément générique de $C \times R^n$; ξ désigne $(\xi_o,\xi') \in R^{n+1}$, $(\zeta,\xi') = (\xi + i\,\xi_{n+1}\,N)$, $\|(\zeta,\xi')\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} |\xi_i|^2$.

On suppose H hyperbolique, donc $(H(\xi + i\,N))^{-1}$ existe pour tout $\xi \in R^{n+1}$. Soit A_B^A le coefficient de H_A^B dans le déterminant H. $C_B^A(\xi) = \dfrac{A_B^A(\xi + i\,N)}{H(\xi + i\,N)}$. A_B^A est nul ou de degré $r - (n_B - m_A)$. En effet

$$A_B^A = \sum_{\substack{\sigma \in Sm \\ \sigma(B)=A}} \varepsilon_\sigma\, H^1_{\sigma(1)} \times \ldots \times H^{B-1}_{\sigma(B-1)} \times \ldots \times H^m_{\sigma(m)}$$

et les substitutions $H^1_{\sigma(1)} \times \dots \times H^m_{\sigma(m)}$ sont ou bien nulles, si l'un des $H^i_{\sigma(i)}$ est nul, ou bien des polynômes de degré :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ i\neq B}} (n_i - m_{\sigma(i)}) = \sum_{i\neq B} n_i - \sum_{j\neq A} m_j = r - (n_B - m_A) .$$

Les polynômes H et A^A_B sont homogènes. On a donc :

$$C^A_B(\xi) \cdot ||\xi+i\,N||^{n_B-m_A-1} = \frac{1}{||\xi+i\,N||} \times \frac{A^A_B\left(\dfrac{\xi+i\,N}{||\xi+i\,N||}\right)}{H\left(\dfrac{\xi+i\,N}{||\xi+i\,N||}\right)} .$$

$(\xi+i\,N) \to \dfrac{\xi+i\,N}{||\xi+i\,N||}$ est une bijection de $\{\xi_{n+1} = 1\}$ sur $S \cap \{\xi_{n+1} > 0\}$

$\dfrac{1}{||\xi+i\,N||}$ est la partie imaginaire de la première coordonnée de $\dfrac{\xi+i\,N}{||\xi+i\,N||}$

La condition de Svensson :

$|C^A_B(\xi)| \cdot ||\xi+i\,N||^{n_B-m_A-1}$ majoré sur R^{n+1} équivaut donc à la suivante :

$$\left|\xi_{n+1} \cdot \frac{A^A_B(\xi_0+i\,\xi_{n+1},\xi')}{H(\xi_0+i\,\xi_{n+1},\xi')}\right| \quad \text{majoré sur } S \cap \{\xi_{n+1} > 0\} .$$

(Dans la condition de Svensson, on a remplacé $(1+||\xi||)$ par $||\xi+i\,N||$ ce qui est licite car :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+||\xi||) \leq ||\xi+i\,N|| \leq (1+||\xi||)) .$$

D'où le lemme :

Lemme.- On suppose H hyperbolique. A_B^A étant le cofacteur de H_A^B, la condition :

$$\left| \frac{\xi_{n+1} \cdot A_B^A(\xi_o + i\ \xi_{n+1}, \xi')}{H(\xi_o + i\ \xi_{n+1}, \xi')} \right| \leqslant C \quad \text{sur} \quad S \cap \{\xi_{n+1} > 0\}$$

pour $A, B = 1,\ldots,m$, est suffisante pour que (H_B^A) soit fortement hyperbolique.

Si les ordres sont tels que $n_A - m_B > 0$ pour $A, B = 1,\ldots,m$, cette condition est aussi nécessaire.

Si la condition CI est satisfaite,
$A_B^A = H_1^{\nu_1 - 1} \times \ldots \times H_\sigma^{\nu_\sigma - 1}\ \mathcal{B}_B^A$ où $\mathcal{B}_B^A$ est un polynôme nul ou de degré $\tau - (n_B - m_A)$, (proposition 1 dans [8]).

$$\text{Donc} \quad C_B^A(\xi) = \frac{\mathcal{B}_B^A(\xi + i\ N)}{H_1 \times \ldots \times H_\sigma(\xi + i\ N)} .$$

La condition du lemme s'écrit donc :

$$\left| \frac{\xi_{n+1} \cdot \mathcal{B}_B^A(\xi_o + i\ \xi_{n+1}, \xi')}{H_1 \times \ldots\ H \times (\xi_o + i\ \xi_{n+1}, \xi')} \right| \leqslant C \quad \text{sur} \quad S \cap \{\xi_{n+1} > 0\}$$

Nous allons montrer que si CII est satisfaite, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|H_1 \times \ldots \times H_\sigma(\xi_o + i\ \xi_{n+1}, \xi')| \geqslant \alpha |\xi_{n+1}| \quad \text{sur} \quad S \cap \{\xi_{n+1} > 0\}$$

ce qui implique évidemment la condition précédente. Soit $S' = S \cap \{\xi_{n+1} = 0\}$. Il suffit de montrer que $|H_1 \times \ldots \times H_\sigma(\xi_0 + i\,\xi_{n+1}, \xi')| \geq \alpha|\xi_{n+1}|$ dans un voisinage V de S'.

Soit $\xi^0 \in S'$. Posons $K = H_1 \times \ldots \times H_\sigma$.
Si $K(\xi^0) \neq 0$, il existe un voisinage V_{ξ^0} de ξ^0 dans $C \times R^n$ et un réel $\alpha_{\xi^0} > 0$ tels que $|K(\xi + \xi_{n+1}\, i\, N)| \geq \alpha_{\xi^0}|\xi_{n+1}|$.

En effet, quand $(\xi + \xi_{n+1}\, i\, N) \to \xi^0$, $\xi_{n+1} \to 0$,

$$K(\xi + \xi_{n+1}\, i\, N) \to K(\xi^0) \neq 0 \quad \text{donc} \quad \left|\frac{1}{\xi_{n+1}} K(\xi + \xi_{n+1}\, i\, N)\right| \to +\infty.$$

Supposons $K(\xi^0) = 0$. Nous allons obtenir le même résultat comme cas particulier du lemme :

Lemme 2.- On suppose que K est hyperbolique.
Soit $\xi^0 \in S'$ tel que ξ_0^0 soit racine d'ordre r_1 de $K(\ell_0, \xi^{0'}) = 0$. Il existe un voisinage V_{ξ^0} de ξ^0 dans $C \times R^n$ et un nombre $\alpha_{\xi^0} > 0$, tels que $|K(\xi_0 + i\,\delta, \xi') \geq \alpha_{\xi^0}|\delta|^{r_1}$ dans V_{ξ^0}.

Soient δ^0_{1,r_1}, $\delta^0_{2,r_2}, \ldots, \delta^0_{h,r_h}$ les racines d'ordre r_i $(r_i \geq 1)$ de $K(\xi_0^0 + i\,\delta, \xi^{0'}) = 0$. $(\sum_{i=1}^{h} r_i = \tau)$.

On a $\delta^0_{1,r_1} = 0$, $\delta^0_{i,r_i} \neq 0$ pour $i \neq 1$. Posons $P(\delta,\xi) = K(\xi_0 + i\,\delta, \xi'$
Soit $\rho_0 = \inf|\delta^0_{i\, r_i} - \delta^0_{j\, r_j}|$; $P(\delta,\xi)$ est holomorphe en δ. Prenons $\rho < \rho_0$ et assez petit pour que $P(\delta,\xi^0) \neq 0$ sur les cercles $\{|\delta - \delta^0_{i;r_i}| = \rho\}$.

On a $|P(\delta,\xi^0)| \geq \gamma > 0$ sur ces cercles.

Soit $\eta > 0$, tel que $|P(\delta,\xi^o) - P(\delta,\xi)| < \gamma$ pour $|\xi-\xi^o| < \eta$.

D'après le théorème de Rouché l'équation $P(\delta,\xi) = 0$ a autant de racines en δ que $P(\delta,\xi^o) = 0$ dans $\{|\delta-\delta^o_{i,r_i}| < \rho\}$, pour $|\xi-\xi^o| < \eta$.

On obtient donc pour tout i, $1 \leq i \leq h$, r_i racines $\delta_{i,1}(\xi),\dots,\delta_{i,r_i}(\xi)$ qu'on pourra ordonner par

$i\,\delta_{i,1}(\xi) \leq i\,\delta_{i,2}(\xi) \leq \dots \leq i\,\delta_{i,r_i}(\xi)$ puisqu'elles sont imaginaires pures, et par conséquent r_i fonctions $\delta_{i,k}(\xi)$ continues au voisinage de ξ^o et tendant vers δ^o_{i,r_i} quand $\xi \to \xi^o$.

On a l'identité valable pour δ réel :

$$P(\delta,\xi) = \Big[K(1,-0)\, i^\tau \prod_{i=2}^{h} \Big(\prod_{k=1}^{r_i} (\delta-\delta_{i,k}(\xi))\Big)\Big] \times \Big(\prod_{k=1}^{r_1} (\delta-\delta_{1,k}(\xi))\Big) .$$

Quand $(\xi_o+i\,\delta,\xi') \to \xi^o$, $\delta \to 0$, $\xi \to \xi^o$,

et $\Big[K(1,-0)i^\tau \prod_{i=2}^{h} \Big(\prod_{k=1}^{r_i} (\delta-\delta_{i,k}(\xi))\Big)\Big] \to K(1-0)i^\tau \prod_{2}^{h} (\delta^o_{i,r_i})^{r_i} \neq 0$ donc

$$\Big|\Big[K(1,0)i^\tau \prod_{i=2}^{h} \Big(\prod_{k=1} (\delta-\delta_{i,k}(\xi))\Big)\Big]\Big| \geq \alpha_{\xi_o} > 0 \text{ dans un voisinage } V_{\xi^o} \text{ de } \xi^o$$

dans $C \times R^n$ et, puisque $\delta_{1,k}(\xi)$ est imaginaire pur et δ réel :

$$|P(\delta,\xi') = |K(\xi_o+i\,\delta,\xi')| \geq \alpha_{\xi^o} |\delta|^{r_1} \text{ dans } V_{\xi^o} .$$

Si K est strictement hyperbolique, il existe donc, pour tout $\xi' \in S'$, un voisinage $V_{\xi^o} \subset C \times R^n$ de ξ^o et $\alpha_{\xi^o} > 0$ tels que

$$|K(\xi_o+i\ \delta,\xi')| \geqslant \alpha_{\xi^o}|\delta| \quad \text{dans} \quad V_{\xi^o}.$$

On en déduit l'existence d'un voisinage V du compact S' et d'un réel $\alpha > 0$, tels que $|K(\xi_o+i\ \delta,\xi')| \geqslant \alpha|\delta|$ sur V.

Les conditions (C) sont donc suffisantes pour que le système (1) soit fortement hyperbolique par rapport à N.

2. Il est clair que la condition :

C'II : $H_1 \times \dots \times H_\sigma$ hyperbolique par rapport à N, est nécessaire pour que (H_B^A) soit fortement hyperbolique par rapport à N.

Nous montrons que si $n_A - m_B > 0$ pour $A, B = 1,\dots,m$, la condition CI est nécessaire.

On suppose que pour un certain $S \in \{1,\dots,\sigma\}$,

$$(H_B^A) \quad \sim \quad \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} H_S^{\alpha_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & H_{S_1}^{\alpha_{k_S}} & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{array}\right] \end{array} \; \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} k_S < \nu_S \\ \\ \\ \end{array}$$

où $\alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_{k_S}$, dans l'anneau Φ_S. On pose $\alpha_{k_S} = \mu_S$. Les mineurs d'ordre $(m-1)$ de (H_B^A) sont divisibles par $H_S^{\nu_S-\mu_S}$, un au moins de ces mineurs n'est pas divisible par $H_S^{\nu_S-\mu_S+1}$. Si A_B^A désigne le coefficient de H_A^B dans le déterminant H, on a pour tout (A,B) :

$$A_B^A = H_1^{\nu_1-\mu_1} \times \dots H_S^{\nu_S-\mu_S} \times \dots \times H_\sigma^{\nu_\sigma-\mu_\sigma} \quad \mathcal{B}_B^A .$$

D'après l'hypothèse, on a $\mu_S \geqslant 2$, $\mu_i \geqslant 1$ pour $i \neq S$, et un au moins des $\mathcal{B}_B^A$ n'est pas divisible par H_S.

$$\text{Donc} \quad C_B^A(\xi) = \frac{A_B^A(\xi+i\ N)}{H_1^{\nu_1} \times \dots \times H_\sigma^{\nu_\sigma}(\xi+i\ N)} = \frac{\mathcal{B}_B^A(\xi+i\ N)}{H_1^{\mu_1} \times \dots \times H_S^{\mu_S} \times \dots \times H_\sigma^{\mu_\sigma}} \quad , \text{ et il}$$

existe un couple (i,j), H_S ne divise pas $\mathcal{B}_j^i$. H_S étant hyperbolique, $\exists\ \xi^o \in S$, $H_S(\xi^o) = 0$ et $\mathcal{B}_j^i(\xi^o) \neq 0$. En effet H_S est premier et ne divise pas $\mathcal{B}_j^i$. Il existe des polynômes P, Q et D tels que :

$$P(\xi_o,\xi')\ H_S(\xi_o,\xi') + Q(\xi_o,\xi')\ \mathcal{B}_j^i(\xi_o,\xi') = D(\xi') \qquad ([3])$$

où D n'est pas le polynôme nul. On choisit $\xi^{o'}$ tel que $D(\xi^{o'}) \neq 0$ $\exists\ \xi_o^o$, $H_S(\xi_o^o,\xi^{o'}) = 0$ car H_S est hyperbolique, et $\mathcal{B}_j^i(\xi_o^o,\xi^{o'}) \neq 0$ sinon on aurait $D(\xi^{o'}) = 0$. Enfin, H_S et $\mathcal{B}_j^i$ étant homogènes, on peut choisir ξ^o tel que $||\xi^o|| = 1$.

Nous allons montrer que $|C_j^i(\xi)|.(1+||\xi||)^{n_j-m_i-1}$ n'est pas borné sur R^{n+1}, ce qui contredit l'hyperbolicité forte (Svensson [12] th. 4.3.).

$$\text{On a} \quad d^o\ \mathcal{B}_j^i = \sum_{i=1}^{\sigma} \mu_i\ \tau_i - (n_j-m_i).$$

Les polynômes considérés étant homogènes, on a :

$$|C_j^i(\lambda\xi^o)|\ (1+|\lambda\xi^o|)^{n_j-m_i-1} = \left(\frac{1+|\lambda|}{|\lambda|}\right)^{n_j-m_i-1} \quad \frac{\mathcal{B}_j^i(\xi^o+\frac{i}{\lambda}\ N)}{|\lambda.H_1^{\mu_1}\times\dots\times H_\sigma^{\mu_\sigma}(\xi^o+\frac{i}{\lambda}\ N)|}$$

Quand $\lambda \to +\infty$, $\left(\frac{1+|\lambda|}{|\lambda|}\right)^{n_j-m_i-1} \times |B_j^i(\xi^o + \frac{i}{\lambda} N)| \to |B_j^i(\xi^o)| \neq 0$.

$H_1^{\mu_1}\times\ldots\times H_\sigma^{\mu_\sigma}(\xi^o + \frac{i}{\lambda} N)$ est un polynôme en $(\frac{1}{\lambda})$ sans terme constant et sans terme du premier degré, puisque $\mu_S \geq 2$ et $H_S(\xi^o) = 0$.

Donc $\lambda H_1^{\mu_1}\times\ldots\times H_\sigma^{\mu_\sigma}(\xi^o + \frac{i}{\lambda} N) \to 0$ quand $\lambda \to +\infty$ d'où

$$|C_j^i(\lambda\xi^o)| \times (1+|\lambda\xi^o|)^{n_j-m_i-1} \longrightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad \lambda \to +\infty.$$

La condition CI est donc nécessaire.

On a donc le théorème :

Théorème 1.- Les conditions (C) sont suffisantes pour qui le système (1) soit fortement hyperbolique par rapport à N. La condition C'II est nécessaire. Si $n_A-m_B > 0$ pour $A, B = 1,\ldots,m$, la condition CI est nécessaire.

Remarque 1.- S'il existe un couple (A,B) tel que $n_A-m_B \leq 0$, la condition CI n'est pas nécessaire.

Considérons en effet la matrice ([12]) :

$$A(\xi) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & -1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} & \begin{bmatrix} \xi_0-\xi_1 & (\xi_1)^2 \\ 0 & (\xi_0-\xi_1) \end{bmatrix} \end{array}$$

On peut choisir $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $m_1 = 0$, $m_2 = -1$.

On a $n_1-m_1 = 0$.

$A(\xi)$ est fortement hyperbolique et pourtant $A \sim \begin{bmatrix} (\xi_0-\xi_1)^2 & \\ & 1 \end{bmatrix}$

dans $\Phi_{(\xi_0-\xi_1)}$ localisé de $C(\xi_0,\xi_1)$ par rapport à $(\xi_0-\xi_1)$.

3. Cas de multiplicités constantes.

On suppose que H est hyperbolique et que les multiplicités des racines en ℓ_0 de $H(\ell_0,\ell_i) = 0$ sont des fonctions constantes de $(\ell_i) \in R^n$. Ces conditions impliquent CII. En effet, soit $(p_i) \in R^n$ tel que $H_1\times\ldots\times H_\sigma(\ell_0,p_i)$ ait une racine multiple. Pour tout voisinage V de (p_i), il existe $\Pi_i \in V$ tel que $H_1\times\ldots\times H_\sigma(\ell_0,\Pi_i)$ n'ait que des racines simples. En effet $H_1\times\ldots\times H_\sigma(\ell_0,\ell_i)$ et $\dfrac{\partial}{\partial \ell_0}(H_1\times\ldots\times H_\sigma)(\ell_0,\ell_i)$ sont premiers entre eux. Il existe des polynômes $Q_1(\ell_0,\ell_i)$, $Q_2(\ell_0,\ell_i)$ tels que :

$$Q_1(\ell_0,\ell_i) \cdot H_1\times\ldots\times H_\sigma(\ell_0,\ell_i) + Q_2(\ell_0,\ell_i)\frac{\partial}{\partial \ell_0} H_1\times\ldots\times H_\sigma(\ell_0,\ell_i) = C(\ell_i)$$

où C n'est pas identiquement nul ([3]).

Soit $\Pi_i \in V$ tel que $C(\Pi_i) \neq 0$.

$H_1\times\ldots\times H_\sigma(\ell_0,\Pi_i)$ et $\dfrac{\partial}{\partial \ell_0}(H_1\times\ldots\times H_\sigma)(\ell_0,\Pi_i)$ ne peuvent avoir de racines communes. Toutes les racines de $H_1\times\ldots\times H_\sigma(\ell_0,\Pi_i)$ sont simples. La multiplicité d'une racine au moins de $H(\ell_0,\ell_i) = 0$ n'est pas une fonction constante de $(\ell_i) \in R^n$.

Si on suppose en outre que les ordres vérifient $n_A-m_B > 0$ pour $A, B = 1,\ldots,m$, la condition CI est donc nécessaire et suffisante pour que le système (1) soit fortement hyperbolique.

4. Exemples de systèmes vérifiant les conditions (C).

Exemple 1.- Considérons le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{(\partial x^o)^2} y^1(x^o,x^1) - \dfrac{\partial^2}{\partial x^o \partial x^1} y^1(x^o,x^1) + \dfrac{\partial y^3}{\partial x^o}(x^o,x^1) = f^1(x^o,x^1) \\[2ex] \dfrac{\partial y^2}{\partial x^o}(x^o,x^1) - \dfrac{\partial y^2}{\partial x^1}(x^o,x^1) = f^2(x^o,x^1) \\[2ex] \dfrac{\partial y^3}{\partial x^o} - \dfrac{\partial y^3}{\partial x^1} = f^3(x^o,x^1) \end{cases}$$

La matrice associée est :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{bmatrix} \xi_0(\xi_0-\xi_1) & 0 & \xi_0 \\ 0 & (\xi_0-\xi_1) & 0 \\ 0 & 0 & (\xi_0-\xi_1) \end{bmatrix} \end{array}$$

On peut prendre pour système d'ordres :

$$n_1 = 1, \quad n_2 = n_3 = 0 \quad ; \quad m_1 = -1, \quad m_2 = -1, \quad m_3 = -1 .$$

La matrice caractéristique est alors :

$$(H_B^A) = \begin{bmatrix} \xi_0(\xi_0-\xi_1) & 0 & 0 \\ 0 & (\xi_0-\xi_1) & 0 \\ 0 & 0 & (\xi_0-\xi_1) \end{bmatrix}$$

$$H = \xi_o(\xi_o-\xi_1)^3 = H_1 \times H_2^3$$

$$\sigma = 2 \quad , \quad \nu_1 = 1 \quad , \quad \nu_2 = 3 \quad , \quad \tau = 2 \; .$$

Dans le localisé Φ_1 de $R(\xi_o,\xi_1)$ par rapport à H_1 on a :

$$(H_B^A) \sim \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans Φ_2, on a :

$$(H_B^A) \sim \begin{bmatrix} H_2 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 \end{bmatrix}$$

La condition CI est satisfaite.

D'autre part $H_1 \times H_2 = \xi_o(\xi_o-\xi_1)$ est strictement hyperbolique par rapport à

(1,0) : CII est satisfaite.

Le système est fortement hyperbolique.

Par conséquent, les systèmes ayant pour matrice associée :

$$\begin{bmatrix} \xi_0(\xi_0\cdot\xi_1)+a\xi_0+b\xi_1+\alpha_1 & c\xi_0+d\xi_1+\alpha_2 & \xi_0+\alpha_3 \\ \alpha_4 & (\xi_0-\xi_1)+\alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & (\xi_0-\xi_1)+\alpha_9 \end{bmatrix}$$

où a, b, c, d, α_i sont des constantes, sont hyperboliques par rapport à (1,0).

Remarque.- La notion d'hyperbolicité forte dépend du choix des ordres. En effet, pour le système précédent le système d'ordres suivant est convenable : $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $m_1 = -1$, $m_2 = m_3 = 0$. Avec ces ordres, le système n'est pas fortement hyperbolique. En effet, la matrice caractéristique est alors :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \end{array} \\ A' = \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} (\xi_0-\xi_1)\xi_0 & 0 & \xi_0 \\ 0 & (\xi_0-\xi_1) & 0 \\ 0 & 0 & (\xi_0-\xi_1) \end{bmatrix} \end{array}$$

et dans Φ_2 on a :

$$A' \sim \begin{bmatrix} (\xi_0-\xi_1)^2 & & \\ & (\xi_0-\xi_1) & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

La condition CI n'est pas satisfaite.

Exemple 2.- On donne la matrice associée au système considéré

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad 2 \quad & \quad 0 \quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \xi_1-\xi_0+\alpha \\ (\xi_1-\xi_0)+\beta & \xi_2^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

On peut prendre $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $m_1 = 2$, $m_2 = 0$.

$$(H_B^A) = \begin{bmatrix} 0 & (\xi_1-\xi_0) \\ (\xi_1-\xi_0) & 0 \end{bmatrix}$$

$H = -(\xi_1-\xi_0)^2 \qquad \sigma = 1 \qquad \nu_1 = 2 \qquad \tau = 1$

dans $\Phi_{(\xi_1-\xi_0)}$, $(H_B^A) \sim \begin{bmatrix} (\xi_1-\xi_0) & \\ & (\xi_1-\xi_0) \end{bmatrix}$

et $(\xi_1-\xi_0)$ est strictement hyperbolique.

Les conditions CI et CII sont satisfaites.

III. HYPERBOLOCITE STRICTE AU SENS DE LERAY OHYA POUR LES SYSTEMES A COEFFICIENTS VARIABLES VERIFIANT LOCALEMENT NOS CONDITIONS.

Le système (1) est maintenant à coefficients variables :

$$(1) \qquad h^A_B(x,D)\; y^B(x) = f^A(x) \qquad A,B = 1,\ldots,m$$

où x appartient à un ouvert Ω d'une variété C^∞. Les coefficients de $h^A_B(x,D)$ sont C^∞ dans Ω. Pour chaque x, la matrice caractéristique $(H^A_B(x,\ell))$ est constituée de polynômes de degré $(n_A - m_B)$ ou nuls. ℓ appartient à l'espace cotangent T^*_x en x. On suppose que $H(x,\ell) = \det(H^A_B(x,\ell))$ n'est jamais le polynôme nul dans Ω.

En chaque point x, H se décompose en facteurs irréductibles* :

$$H = (H_1^{\nu_1}) \times \ldots \times (H_\sigma^{\nu_\sigma})$$

On suppose que chaque H_s est fonction C^∞ de x, et que chaque multiplicité ν_s est constante sur Ω.

Dire que le produit $H_1 \times \ldots \times H_\sigma$ est hyperbolique en un point x équivaut à dire qu'il existe au moins une forme $q \in T^*_x$ telle que :

$$(\mathrm{I}) \qquad (H_1 \times \ldots \times H_s \times \ldots \times H_\sigma)(q) \neq 0$$

(II) si on fait un changement de base dans T^*_x de sorte que q ait pour composants $(1,0 \ldots 0)$, l'équation $(H_1 \times \ldots \times H_\sigma)(\ell_0, p_i) = 0$ admette τ racines réelles distinctes ou non, en ℓ_0, pour tout (p_i). (τ est le degré de $(H_1 \times \ldots \times H_\sigma)$, p une forme de composantes $p_0, p_1, \ldots, p_n$. On désigne par (p_i)

* cf p. 9

l'élément $(0,p_1,\ldots,p_n)$.

On notera $\overset{\circ}{\Gamma}_x$ le cône de T^*_x dont les éléments sont les covecteurs q possédant les propriétés précédentes.

En chaque point x et pour chaque s, on considère l'anneau localisé ϕ_s de l'anneau des polynômes à $(n+1)$ variables $(\ell_0,\ldots,\ell_n)$ par rapport à l'idéal défini par H_s.

Dire que le système (1) satisfait aux conditions (C) en x, c'est dire que :

(I) pour tout s $1 \leqslant s \leqslant \sigma$

$$(H^A_B) \sim \left.\left[\begin{matrix} H_s & & & \\ & \ddots & & \\ & & H_{s_1} & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{matrix}\right]\begin{matrix}\}\nu_s \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m$$

dans l'anneau principal Φ_s.

(II) $H_1 \times \ldots\ldots \times H_s \times \ldots\ldots \times H_\sigma$ est strictement hyperbolique en x.

<u>*Théorème*</u>.- Un opérateur satisfaisant aux conditions (C) en chaque point de la variété est localement strictement hyperbolique au sens de Leray-Ohya, quels que soient les termes de degré $(<n_A-m_B)$ des polynômes de dérivation $h^A_B(x,D)$.

Soit A^B_A le cofacteur de H^A_B dans le déterminant de la matrice caractéristique. D'après la proposition I ([8]), on a :

$$A^B_A = H_1^{\nu_1-1} \times \ldots\ldots \times H_\sigma^{\nu_\sigma-1} \; \mathcal{B}^B_A$$

où $\mathcal{B}^B_A$ est de degré $\tau-(n_A-m_B)$,

Pour chaque (A,B), il existe localement un opérateur $b^B_A(x,D)$ de polynôme caractéristique $\mathcal{B}^B_A(x,\xi)$. (cf [1]). Au système :

(1) $h^A_B(x,D)\ y^B(x) = f^A(x)$, on associe le système :

$$(2) \qquad h^A_B(x,D)\ b^B_c(x,D)\ z^c(x) = f^A(x)$$

$\sum_B h^A_B(x,\xi)\ b^B_A(x,\xi)$ a pour partie principale $H_1\times\ldots\ldots\times H_\sigma$, et, pour $A \neq C$ $d^o(h^A_B(x,\xi)\ b^B_c(x,\xi)) \leqslant \tau+n_A-n_C$ mais $H^A_B(x,\xi)\ B^B_C(x,\xi) = 0$ donc

$$d^o(h^A_B(x,\xi)\ b^B_c(x,\xi)) \leqslant \tau+n_A-n_C-1$$

(2) s'écrit donc :

$$(2') \qquad (H_1\times\ldots\ldots\times H_\sigma)(x,D)\ z^A(x)+h'^A_C(x,D)\ z^C(x) = f^A(x)$$

avec $d^o(h'^A_C(x,\xi)) \leqslant \tau+n_A-n_C-1$.

Soit n un entier supérieur ou égal à $\sup_A n_A$. On suppose que $f^A(x)$ s'annule $(n-n_A)$ fois sur une hypersurface $\sum$ de la variété dont la forme cotangente q est dans $\overset{\circ}{\Gamma}_x$.

Au problème de Cauchy (I) :

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} (1) \quad h^A_B(x,D)\ y^B(x) = f^A(x) \\ y^B(x) \quad \text{s'annule } (n-m_B) \text{ fois sur } \sum \end{cases}$$

On associe le problème de Cauchy (II) :

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} H_1\times\ldots\ldots\times H_\sigma(x,D)\ z^A(x)+h'^A_C(x,D)\ z^C(x) = f^A(x) \\ z^C(x) \quad \text{s'annule } \tau \text{ fois sur } \sum. \end{cases}$$

([6])

Localement, le problème de Cauchy II se résoud dans des espaces de Sobolev. En fait, $z^C(x)$ s'annule $(\tau+n-n_C)$ fois sur $\sum$. ([14]). $y^B(x) = b^B_C(x,D)\ z^C(x)$ est alors une solution au problème de Cauchy (I).

En effet $y^B(x)$ s'annule $[(n+\tau-n_C)-(\tau-n_C+m_B)] = (n-m_B)$ fois sur $\sum$.

On a ensuite une solution pour des données de Cauchy quelconques et un théorème d'unicité [6]. Le problème de Cauchy (I) est donc résolu localement dans des espaces de Sobolev.

IV. SOLUTIONS SOUS FORME D'ONDES ASYMPTOTIQUES DU PROBLEME DE CAUCHY LOCAL.

§ 1 - PROBLEME FORMEL.

Les hypothèses générales sont celles de la partie II p. 23. Nous supposons pour simplifier, le 2e membre de (1) nul.

Définition.- On appellera onde asymptotique formelle dans un voisinage de a, une série formelle de la forme :

$$y^B(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{-m_B+j}(\phi(x))\, Y_j^B(x)$$

où

- (f_k) est une suite de fonctions telle que $\frac{d}{dt} f_k(t) = f_{k-1}(t)$
- ϕ est à valeurs réelles, C^∞, telle que grad$(\phi(x)) \neq 0$ dans le voisinage, et vérifie l'équation caractéristique : $H(x,\text{grad}\,\phi(x)) = 0$,
- Y_j^B est C^∞ dans le voisinage, et telle que, en reportant dans le système (1), la série formelle obtenue :

$$f_{-n_A}(\phi(x))\, F_o^A(x)+f_{-n_A+1}(\phi(x))\, F_1^A(x)+ \;\dots\; +f_{-n_A+k}(\phi(x))\, F_k^A(x)+ \;\dots$$

soit nulle.

On suppose que le système (1) satisfait aux conditions (C) dans un voisinage de a. On pose $p(x) = \text{grad}\,\phi(x)$. On suppose que $H_s(a,p(a)) = 0$, donc $H_{s'}(a,p(a)) \neq 0$ pour $s' \neq s$, et dans un voisinage de a, $H_s(x,p(x)) = 0$ et $H_{s'}(x,p(x)) \neq 0$ pour $s' \neq s$.

Il existe au moins un mineur de $H_B^A(a,p(a))$ d'ordre $(m-\nu_s)$, soit Δ_s, tel que $\Delta_s(a,p(a)) \neq 0$.

D'où $\Delta_s(x,p(x)) \neq 0$ dans un voisinage de a. Le noyau de $H_B^A(x,p(x))$ est de dimension ν_s. ([8]). On considère les vecteurs $(d_{\bar{D}}^B(x,\ell))_{1\leq\bar{D}\leq\nu_s}$ définis à partir de Δ_s dans [9]. $d^B_{\bar{D}}(x,\ell)$ est un polynôme homogène invariant par changement de coordonnées, à coefficients C^∞. Les vecteurs $(d^B_{\bar{D}}(x,p(x))_{1\leq\bar{D}\leq\nu_s}$ forment une base du noyau de $H^A_B(x,p(x))$. $F^A_0 = 0$ s'écrit :

$$H^A_B(x,\mathrm{grad}\ \phi(x))\ Y^B_0(x) = 0$$

$Y^B_0(x)$ est donc de la forme :

$$Y^B_0(x) = U^{\bar{D}}_0(x)\ d^B_{\bar{D}}(x,p(x)) \tag{2}$$

où $U^{\bar{D}}_0(x)$ est C^∞ ; $1 \leq \bar{D} \leq \nu_s$.

$F^A_1 = 0$ s'écrit, dans des coordonnées locales contenant le voisinage envisagé :

$$H^A_B(x,p(x))\ Y^B_1(x) + \partial^\alpha\ H^A_B(x,p(x))\ \partial_\alpha\ Y^B_0(x) + M^A_B(x,p(x))\ Y^B_0(x) = 0 \tag{3}$$

en posant $\partial^\alpha = \dfrac{\partial}{\partial \ell_\alpha}$ et $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$. M^A_B est la partie homogène de degré $n_A - m_B - 1$ de h^A_B.

Multiplions par des vecteurs, analogues aux $d^B_{\bar{D}}(x,p)$, notés $g^{\bar{F}}_A(x,p)$ et forment une base du noyau de l'application transposée de l'application linéaire $H^A_B(x,p)$ ([9]). On obtient, en tenant compte de (2) les relations de compatibilité :

$$g^{\bar{F}}_A(x,p)\ \partial^\alpha\ H^A_B(x,p)\ \partial_\alpha\left[U^{\bar{D}}_0(x)\ d^B_{\bar{D}}(x,p)\right] + g^{\bar{F}}_A\ M^A_B(x,p)\ d^B_{\bar{D}}(x,p)\ U^{\bar{D}}_0(x) = 0 \tag{4}$$

On rappelle que $H^A_B\ d^B_{\bar{D}} = H_s\ \sigma^A_{\bar{D}}$; $g^{\bar{F}}_A\ H^A_B = H_s\ p^{\bar{F}}_B$; on pose $\mathcal{H}^{\bar{F}}_{\bar{D}} = \sigma^A_{\bar{D}}\ g^{\bar{F}}_A$. La matrice $\mathcal{H}^{\bar{F}}_{\bar{D}}(x,p)$ est inversible [9].

$$g^{\bar{F}}_A\ \partial^\alpha\ H^A_B\ \partial_\alpha\left[U^{\bar{D}}_0(x)\ d^B_{\bar{D}}(x,p)\right] = g^{\bar{F}}_A\ \partial^\alpha\ H^A_B\ \partial_\alpha\ U^{\bar{D}}_0\ d^B_{\bar{D}} + g^{\bar{F}}_A\ \partial^\alpha\ H^A_B\ \partial_\alpha\ d^B_{\bar{D}}\ U^{\bar{D}}_0 .$$

$$g_A^{\bar F}\,\partial^\alpha H_B^A\,\partial_\alpha U_0^{\bar D}\,d_{\bar 0}^B = \partial^\alpha \underbrace{[g_A^{\bar F}\,H_B^A\,d_{\bar D}^B]}_{H_{\bar D}^{\bar F}\,H_s}\,\partial_\alpha U_0^{\bar D} - [\partial^\alpha g_A^{\bar F}\,\underbrace{H_B^A\,d_{\bar D}^B]}_{H_s\,\sigma_{\bar D}^A}\,\partial_\alpha U_0^{\bar D} - \underbrace{[g_A^{\bar F}\,H_B^A}_{H_s\,p_B^{\bar F}}\,\partial^\alpha d_{\bar D}^B]\,\partial_\alpha U_0^{\bar D}$$

D'où puisque $H_s(p) = 0$

$$g_A^{\bar F}\,\partial^\alpha H_B^A\,\partial_\alpha U_0^{\bar D}\,d_{\bar D}^B = H_{\bar D}^{\bar F}\,\partial^\alpha H_s\,\partial_\alpha U_0^{\bar D}(x)$$

Posons $g_A^{\bar F}\,\partial^\alpha H_B^A\,\partial_\alpha d_{\bar D}^B\,U_0^{\bar D} + g_A^{\bar F}\,M_B^A\,d_{\bar D}^B\,U_0^{\bar D} = M'^{\bar F}_{\bar D}(x,p)\,U_0^{\bar D}$

(4) s'écrit :

$$H_{\bar D}^{\bar F}(x,p)\,\vec p^{\,\alpha}(x,p)\,\partial_\alpha U_0^{\bar D}(x) + M'^{\bar F}_{\bar D}(x,p)\,U_0^{\bar D}(x) = 0$$

On a donc encore :

$$\vec p^{\,\alpha}(x,p)\,\partial_\alpha U_0^{\bar D}(x) + M''^{\bar D}_{\bar F}(x,p)\,U_0^{\bar F} = 0$$

$U_0^{\bar D}$ est donc une solution $\mathcal{C}^\infty$ de ce système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. $U_0^{\bar D}$ est déterminé si on connaît sa restriction à une hyper-surface Q passant par a, pourvu que $\vec p$ ne soit pas tangent en a à Q, ce qui est réalisé si la forme cotangente q à Q en a est dans Γ_a^o.

Les relations de compatibilité (3) étant satisfaites, on posera :

$$Y_1^B(x) = U_1^{\bar D}(x)\,d_{\bar D}^B(x) + V_1^B(x)$$

où $V_1^B(x)$ est une solution particulière de (3). $F_2^A = 0$ s'écrit :

$$H_B^A(x,p)\,Y_2^B(x) + \partial^\alpha H_B^A(x,p)\,\partial_\alpha Y_1^B(x) + \text{termes en } Y_0^B(x) = 0$$

De même que ci-dessus, les conditions de compatibilité de ce système détermineront $U_1^{\bar D}(x)$, pourvu que soient données les restrictions à Q des $U_1^{\bar D}$.

On détermine de même tous les $U_k^{\bar D}$ et les Y_j^B par récurrence pourvu qu'on connaisse les restrictions des $U_k^{\bar D}$ à Q. Les calculs explicites seront faits plus loin.

Proposition.- Localement, une onde oscillatoire formelle est déterminée par les restrictions des $U_k^{\bar{D}}$ sur une hypersurface transverse aux bicaractéristiques.

H_s est strictement hyperbolique en a. Soit Q une hypersurface passant par a et telle que sa forme cotangente en a, soit dans Γ_a^o. On choisira les coordonnées locales de telle sorte que Q ait pour équation $x^o = 0$.

Soit $\psi(x^i)$ une fonction C^∞ à valeurs réelles définie dans le voisinage considéré, telle que $(\mathrm{grad}\ \psi)(a) \neq 0$. Posons $(\mathrm{grad}\ \psi)_i\ (a) = p_i(a)$. L'équation en ℓ_0 $H_s(a,\ell_0,\ p_i(a)) = 0$ a toutes ses racines réelles et simples. Soit p_0^ρ l'une d'elles. Un résultat classique [3] indique qu'il existe un voisinage de a, tel que dans ce voisinage, il existe une solution C^∞ et une seule ϕ^ρ de l'équation $H_s(x,\ \mathrm{grad}\ \phi(x)) = 0$ satisfaisant aux conditions initiales :

$$\phi^\rho(o,x^i) = \psi(x^i) \qquad (\mathrm{grad}\ \phi^\rho)_0(a) = p_0^\rho(a)$$

Il en est de même pour chaque racine de $H_1 \times \ldots \times H_\sigma(a,\ell_0,p_i(a)) = 0$

On obtient donc localement, τ fonctions ϕ^ρ infiniment différentiables, satisfaisant à l'équation $(H_1 \times \ldots \times H_\sigma)\ (x,\ \mathrm{grad}\ \phi(x)) = 0$, telles que $\phi^\rho(o,x^i) = \psi(x^i)$, $(\mathrm{grad}\ \phi^\rho)_0(a) = p_0^\rho(a)$.

On se donne r suites de fonctions C^∞ dans l'intersection d'un voisinage de a et de Q : $(Z_j^\ell(x^i))_{1\leq \ell\leq r}$. Dans le théorème suivant, ces suites seront indexées par r couples $\ell = (\tilde{B},\tilde{h}_B)$.

Théorème 1.- Il existe un choix de r couples $(\tilde{B},\tilde{h}_B)$ pris parmi les (B,h_B) où $1 \leq B \leq m$, $0 \leq h_B \leq n-m_B - 1$ tel que le système proposé ait dans un voisinage de a une solution formelle et une seule sous forme de somme des ondes asymptotiques formelles :

$$y^{B}(x) = \sum_{\rho=1}^{\tau} \sum_{j=0}^{\infty} f_{-m_B+j}(\phi^{\rho}(x))\, Y_j^{\rho B}(x)$$

vérifiant les r données de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \\[2ex] \dfrac{\partial}{(\partial x^{\circ})^{\tilde{h}_B}}\, y^{\tilde{B}}(0,x^{i}) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} f_{-m_{\tilde{B}}-\tilde{h}_B+j}(\psi(x^{i}))\, Z_j^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^{i}) \\[2ex] - \end{array} \right.$$

ceci ayant lieu quels que soient les termes de degré $< n_A - m_B$ des polynômes de dérivations $h_B^A(x,D)$.

Pour tout ρ, on pose grad $\phi^{\rho}(x) = p^{\rho}(x) = (p_0^{\rho}(x),\ p_i(x))$ et on considère la base $(d^{B}_{\rho\bar{D}(\rho)}(x,\ p^{\rho}(x)))_{1\leq\bar{D}(\rho)\leq\nu_s(\rho)}$ du noyau de $H_B^A(x,\ p^{\rho}(x))$. (cf. [8]) $s(\rho)$ est l'indice compris entre 1 et σ tel que $H_{s(\rho)}(p_0^{\rho}(x),\ p_i(x)) = 0$ dans un voisinage de a.

Lemme.- La matrice A(x) est de rang r dans un voisinage de a :

$$
A(x) = \left[\begin{array}{cccccccc}
d^1_{11} & \dots & d^1_{1\nu 1} & d^1_{21} & \dots & d^1_{\tau 1} & \dots & d^1_{\tau\nu\tau} \\
(p^1_0)d^1_{11} & \dots & (p^1_0)d^1_{1\nu 1} & (p^2_0)d^1_{21} & \dots & (p^\tau_0)d^1_{21} & \dots & (p^\tau_0)\,d^1_{\tau\nu\tau} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(p^1_0)^{n-m_1-1} d^1_{11} & \dots & (p^1_0)^{n-m_1-1} d^1_{1\nu 1} & (p^2_0)^{n-m_1-1} d^1_{21} & \dots & & & (p^\tau_0)^{n-m_1-1} d^1_{\tau\nu\tau} \\
d^2_{11} & \dots & d^2_{1\nu 1} & d^2_{21} & \dots & & & d^2_{\tau\nu\tau} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(p^1_0)^h d^2_{11} & \dots & & (p^2_0)^h d^2_{21} & \dots & & & (p^\tau_0)^h d^2_{\tau\nu\tau} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(p^1_0)^{m-m_2-1} d^2_{11} & \dots & & & & & & (p_0)^{n-m_2-1} d^2_{\tau\nu\tau} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
d^m_{11} & \dots & d^m_{1\nu 1} & d^m_{21} & \dots & & & d^m_{\tau\nu\tau} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(p^1_0)^{n-m_m-1} d^m_{11} & \dots & & & & & & (p^\tau_0)^{n-m_m-1} d^m_{\tau\nu\tau}
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\ell^1_0 \\
\ell^1_1 \\
\\
\ell^1_{n-m_1-1} \\
\ell^2_0 \\
\\
\ell^2_h \\
\\
\ell^2_{n-m_2-1} \\
\\
\\
\ell^m_0 \\
\\
\\
\ell^m_{n-m_m-1}
\end{array}
$$

$A(x)$ a $\sum_{s=1}^{\sigma} \nu_s \tau_s = r$ colonnes et $\sum_{B} (n-m_B)$ lignes.

Remarquons que $(n-m_B) \geq 0$. Si $n - m_B = 0$ il n'y a pas de ligne ayant B pour indice supérieur.

Démonstration.-

On montre que l'équation linéaire homogène associée n'a que la solution nulle.

On suppose donc :

$$7^{1}_{n-m_1-1} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\rho\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} d^{1}_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0 \\ - \\ \sum_{\rho\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} (p^{\rho}_{0})^{h} d^{1}_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0 \\ - \\ \sum_{\rho\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} (p^{\rho}_{0})^{n-m_1-1} d^{1}_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0 \end{array} \right.$$

- -

- -

$$7^{B}_{n-m_B-1} \left\{ \begin{array}{l} - \\ \sum_{\rho\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} (p^{\rho}_{0})^{h} d^{B}_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0 \quad 0 \leq h \leq n - m_B - 1 \\ - \end{array} \right.$$

- -

- -

$$7^{m}_{n-m_m-1} \left\{ \begin{array}{l} - \\ \sum_{\rho\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} (p^{\rho}_{0})^{h} d^{B}_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0 \quad 0 \leq h \leq n - m_m - 1 \\ - \end{array} \right.$$

Il n'y a pas de relations $7^{B}_{n-m_B-1}$ si $n - m_B = 0$

$H^A_B(\ell) = 0$ si $n_A - m_B < 0$

$$H^A_B(\ell) = H^A_B(q)\, \ell_0^{n_A - m_B} + \sum_{h=0}^{n_A-m_B-1} L^{Ah}_B(\ell_i)\, \ell_0^h \quad \text{si} \quad n_A - m_B \geq 0.$$

On a $H^A_B(p^\rho_0, p_i)\, d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}(p^\rho_0, p_i) = 0 \quad 1 \leq \bar{D}(\rho) \leq \nu_{s(\rho)}$

On peut restreindre la sommation aux B tels que $n_A - m_B \geq 0$:

$$\sum_{B, n_A - m_B \geq 0} \left[H^A_B(q)\, (p^\rho_0)^{n_A - m_B} + \sum_{h=0}^{n_A-m_B-1} L^{Ah}_B(p_i)\, (p^\rho_0)^h \right] d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0$$

On multiplie par $\lambda^{\rho\bar{D}(\rho)}\, (p^\rho_0)^{n-n_A}$:

$$\left[H^A_B(q)\, (p^\rho_0)^{n_A-m_B} + \sum_{h=0}^{n_A-m_B-1} L^{Ah}_B(p_i)\, (p^\rho_0)^h \right] \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)}\, (p^\rho_0)^{n-n_A}\, d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0$$

On somme par rapport à ρ, $\bar{D}(\rho)$:

$$H^A_B(q) \left(\sum_{\rho,\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} (p^\rho_0)^{n-m_B}\, d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} \right) + \sum_{h=0}^{n_A-m_B-1} L^{Ah}_B \left(\sum_{\rho\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} (p^\rho_0)^{n-n_A+h}\, d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} \right) = 0$$

$0 \leq h \leq n_A - m_B - 1 \Longrightarrow n - n_A + h \leq n - m_B - 1$ d'où

$$\sum_{\rho\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)}\, (p^\rho_0)^{n-n_A+h}\, d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0$$

d'après les relations $7^B_{n-m_B-1}$

On a donc pour tout A

$$\sum_{B, n_A - m_B \geq 0} H^A_B(q) \left(\sum_{\rho\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)}\, (p^\rho_0)^{n-m_B}\, d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} \right) = 0$$

En fait, on peut sommer pour tout B puisque $H^A_B(q) = 0$ si $n_A - m_B < 0$.

Donc, pour tout A, on a :

$$H_B^A(q)\ \Big(\sum_{\rho,\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)}\ (p_0^\rho)^{n-m_B}\ d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}\Big) = 0$$

On a donc pour tout B, $\Big(\sum_{\rho,\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} (p_0^\rho)^{n-m_B}\ d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}\Big) = 0$ puisque det $H_B^A(q) \neq 0$.

On obtient donc, pour tout B, les relations :

$$7_{n-m_B}\left\{\begin{array}{l} - \\ \displaystyle\sum_{\rho\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)}\ (p_0^\rho)^h\ d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0 \qquad 0 \leq h \leq n - m_B \\ - \end{array}\right.$$

Par récurrence on obtiendra les relations 7_{n-m_B+r} $\forall\ r > 0$.

Donc, pour tout B, on a $7^B_{\tau-1}$.

Ecrivons ces relations en séparant les sommations par rapport à ρ et $\bar{D}(\rho)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_\rho \Big(\sum_{\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)}\ d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}\Big) = 0 \\ \displaystyle\sum_\rho (p_0^\rho)\ \Big(\sum_{\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)}\ d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}\Big) = 0 \\ - \\ - \\ \displaystyle\sum_\rho (p_0^\rho)^{\tau-1}\ \Big(\sum_{\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)}\ d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}\Big) = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & - - - - - - & 1 \\ p_0^1 & - - - - - - & p_0^\tau \\ - - - & - - - & - - - \\ - - - & - - - & - - - \\ (p_0^1)^{\tau-1} & & (p_0^\tau)^{\tau-1} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{donc} \quad \sum_{\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} \, d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0 \quad \forall\rho, \ \forall B$$

$\forall\rho$, $(d^B_{\rho\bar{D}(\rho)})_{1\leq\bar{D}(\rho)\leq\nu_s(\rho)}$ est un système libre.

On a donc $\forall\rho$, $\forall\bar{D}(\rho)$, $\lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0$

$A(x)$ est de rang r. On peut en extraire un système de r lignes linéairement indépendantes. Soit donc $(\ell^{\tilde{B}}_{\tilde{h}_B})$ un tel système. Le problème de Cauchy dont les données sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \\ \dfrac{\partial}{(\partial x^\circ)^{\tilde{h}_B}} y^{\tilde{B}}(0,x^i) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{-m_{\tilde{B}}-\tilde{h}_B+j} (\psi(x^i)) \, Z_j^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i) \\ - \end{array} \right.$$

a une solution et une seule sous forme de somme des ondes asymptotiques formelles quels que soient les termes de $d^0 < n_A - m_B$ des polynômes de dérivation.

On identifie les séries formelles précédentes sur $x^0 = 0$.

On obtient :

$$(\tilde{h}_B=0) \left\{ \sum_{\rho=1}^{\tau} Y_j^{\rho\tilde{B}}(0,x^i) = Z_j^{\tilde{B},0}(x^i) \quad \text{pour} \quad j \geq 0 \right.$$

$$
(h_B \neq 0)\left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{\rho=1}^{\tau} p_0^\rho(0,x^i)^{\tilde{h}_B}\, Y_0^{\rho\tilde{B}}(0,x^i) = Z_0^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i) \\
- \\
\displaystyle\sum_{\rho=1}^{\tau} (p_0^\rho(0,x^i))^{\tilde{h}_B}\, Y_j^{\rho\tilde{B}}(0,x^i) + \text{termes en } Y_{j'}^{\rho\tilde{B}} = Z_j^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i) \quad \text{pour } j > 0
\end{array}\right.
$$

Pour déterminer les $Y_0^{\rho B}(0,x^i)$, on considère :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
- \\
\displaystyle\sum_{\rho=1}^{\tau} (p_0^\rho(0,x^i))^{\tilde{h}_B}\, Y_0^{\rho B}(0,x^i) = Z_0^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i) \\
- -
\end{array}\right.
$$

Soit, en fonction des $U_0^{\bar{D}}$:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
- \\
\displaystyle\sum_{\rho=1}^{\tau} U_0^{\rho\bar{D}(\rho)}(0,x^i)\,(p_0^\rho(0,x^i))^{\tilde{h}_B}\, d^{\tilde{B}}_{\rho\bar{D}(\rho)}(0,x^i) = Z_0^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i) \\
- -
\end{array}\right.
$$

Compte tenu du lemme, le déterminant de ce système est différent de 0 dans un voisinage de a. On obtient donc une solution et une seule $(U_0^{\rho\bar{D}(\rho)}(0,x^i))$ infiniment différentiable en x^i. D'après la démonstration de la proposition, on obtient les $U_0^{\rho\bar{D}(\rho)}(x)$ dans un voisinage de a et par suite les $Y_0^{\rho B}(x)$. Par récurrence, on obtient de même tous les $Y_j^{\rho B}(x)$.

Cas oscillatoire.-

Si l'on prend $f_j(s) = \dfrac{e^{i\omega s}}{i\omega}$, on obtient des solutions oscillatoires pour le problème de Cauchy à données oscillatoire. On étend ainsi aux systèmes avec ordres, les résultats obtenus par J. Vaillant dans [8] .

Exemple.- Considérons un système ayant pour matrice caractéristique :

$$H_B^A(\xi) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} -1 & \qquad\qquad -1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} (\xi_1-\xi_0) & (\xi_1-\xi_0) \\ & \\ 0 & (\xi_1-\xi_0)(\xi_1-2\xi_0)(\xi_1-3\xi_0) \end{bmatrix} \end{array}$$

avec les ordres $n_1 = 0$, $n_2 = 2$, $m_1 = -1$, $m_2 = -1$, $n = 2$.

$$H = (\xi_1-\xi_0)^2 (\xi_1-2\xi_0)(\xi_1-3\xi_0) \quad ; \quad \sigma = 3,\ \nu_1 = 2,\ \nu_2 = \nu_3 = 1,\ \tau = 3$$

$(\xi_1-\xi_0)(\xi_1-2\xi_0)(\xi_1-3\xi_0)$ est strictement hyperbolique par rapport à $(1,0)$.

La condition CI est également satisfaite.

$$p_0^1(p_i) = p_1 \qquad p_0^2(p_i) = \frac{p_1}{2} \qquad p_0^3(p_i) = \frac{p_1}{3}$$

$$(d_{11}^B) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (d_{12}^B) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (d_{21}^B) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (d_{31}^B) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A(x) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ p_1 & 0 & \frac{p_1}{2} & \frac{p_1}{3} \\ p_1^2 & 0 & \frac{p_1^2}{4} & \frac{p_1^2}{9} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & p_1 & -\frac{p_1}{2} & -\frac{p_1}{3} \\ 0 & p_1^2 & -\frac{p_1^2}{4} & -\frac{p_1^2}{9} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \longleftarrow \ell_0^1 \\ \longleftarrow \ell_1^1 \\ \longleftarrow \ell_2^1 \\ \longleftarrow \ell_0^2 \\ \longleftarrow \ell_1^2 \\ \longleftarrow \ell_2^2 \end{array} \end{array}$$

On pose :

$$y^1(x) = \sum_{\rho=1}^{3} \sum_{j=0}^{\infty} f_{1+j} \; (\phi^\rho(x)) \; Y_j^{\rho 1}(x)$$

$$y^2(x) = \sum_{\rho=1}^{3} \sum_{j=0}^{\infty} f_{1+j} \; (\phi^\rho(x)) \; y_j^{\rho 2}(x)$$

La matrice $A(x)$ a plusieurs systèmes de quatre lignes linéairement indépendantes, on a donc plusieurs problèmes de Cauchy "bien posés". Par exemple, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} h_B^A(0) \; y^B = f^A \\ y^1(0,x^1) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{1+j} \; (\psi(x^1)) \; Z_j^{1,0}(x^1) \\ \partial_0 \, y^1(0,x^1) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{1+j} \; (\psi(x^1)) \; Z_j^{1,1}(x^1) \\ \partial_{0^2} \, y^1(0,x^1) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{1+j} \; (\psi(x^1)) \; Z_j^{1,2}(x^1) \\ y^2(0,x^1) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{1+j} \; (\psi(x^1)) \; Z_j^{2,1}(x^1) \end{cases}$$

a une solution et une seule quels que soient les termes de degré $< n_A - m_B$ des polynômes de dérivation. Par contre, si on envisage une répartition "symétrique" des données : y^1, $\partial_0 \, y^1$, y^2, $\partial_0 \, y^2$, on n'a pas l'unicité du problème de Cauchy. En effet les lignes ℓ_0^1, ℓ_1^1, ℓ_0^2, ℓ_1^2 ne sont pas indépendantes.

§ 2.- *CONVERGENCE.*

Nous supposons la variété analytique, (réelle ou complexe). Les coefficients des opérateurs du système (1) et les données $Z_k(x')$, $(x' \in \Sigma)$, sont supposées analytiques dans un voisinage de a. Soit Σ une sous-variété de dimension n passant par a. La phase ψ donnée sur Σ est analytique et telle que $\psi(a) = 0$. On fait choix de coordonnées locales de telle sorte que $a = (0,\dots,0)$ et que Σ ait pour équation $x^o = 0$. La condition CI est satisfaite au voisinage de a. On suppose en outre que l'équation $H_1 \times \dots \times H_\sigma(a,(\ell_o, \text{grad}\ \psi(a))) = 0$ a ses racines distinctes. Soient $(p_o^\rho)_{1 \leq \rho \leq \tau}$ ces racines. Il existe τ fonctions $\phi^\rho(x^o,\dots,x^n)$ définies au voisinage de a, analytiques et telles que $H_1 \times \dots \times H_\sigma(x, \text{grad}\ \phi^\rho(x)) = 0$, $\phi^\rho(o,x^i) = \psi(x^i)$, $(\text{grad}\ \phi^\rho)_o(o) = p_o^\rho$ ([3]). On pose $\text{grad}\ \phi^\rho = p^\rho = (p_o^\rho, p_i)$.

Ces conditions étant satisfaites, nous obtenons les solutions formelles du théorème I. Nous allons montrer l'existence d'un voisinage de a dans lequel les $Y_j^{\rho B}(x)$ sont analytiques, et la convergence uniforme des séries $y^B(x) = \sum_{\rho=1}^{\tau} \sum_{j=o}^{\infty} f_{-m_B+j}(\phi^\rho(x))\ Y_j^{\rho B}(x)$ pour un choix convenable des fonctions f_j.

1) Nous explicitons les équations déterminant les fonctions $U_k^{\rho\bar{D}(\rho)}(x)$ et $Y_k^{\rho B}(x)$.

On pose $h_B^A(x,D) = H_B^A(x,D) + L_{B,(n_A-m_B-1)}^A(x,D) + \dots + L_{B,o}^A(x,D)$

$$y^{\rho B}(x) = \sum_{j=o}^{\infty} f_{-m_B+j}(\phi^\rho(x))\ Y_j^{\rho B}(x) \qquad y^B(x) = \sum_{\rho=1}^{\tau} y^{\rho B}(x) .$$

$h_B^A(x,D)\ y^{\rho B}(x)$ s'écrit :

$$f_{-n_A}(\phi^\rho(x))F_0^{\rho A}(x) + f_{-n_A+1}(\phi^\rho(x))F_1^{\rho A}(x) + \dots + f_{-n_A+k}(\phi^\rho(x))F_k^{\rho A}(x) + \dots$$

$F_{k+1}^{\rho A}(x) = 0$ s'écrit :

$$H_B^A(x,p^\rho)Y_{k+1}^{\rho B}(x) + \partial^\alpha\ H_B^A(x,p^\rho)\partial_\alpha\ Y_k^{\rho B}(x)$$

$$+ L^A_{B,(n_A-m_B-1)}(x,p^\rho)Y_k^{\rho B}(x) + \sum_B \sum_{S=2}^{n_A-m_B} P_{BS}^{\rho A}(x,D)\ Y_{k-S+1}^{\rho B}$$

où les opérateurs $P_{BS}^{\rho A}(x,D)$ sont d'ordre S et à coefficients ne dépendant que de ceux de $h_B^A(x,D)$.

On multiplie par $g_A^{\bar{F}}$ et on somme :

Compte-tenu de $Y_k^{\rho B}(x) = U_k^{\rho\bar{D}(\rho)}(x)\ d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}(x) + V_k^{\rho B}(x)$, on obtient :

$$g_A^{\bar{F}}\ \partial^\alpha\ H_B^A\ \partial_\alpha\ \left[U_k^{\bar{D}(\rho)}d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}\right] + g_A^{\bar{F}}\ \partial^\alpha\ H_B^A\ \partial_\alpha\ V_k^{\rho B}(x)$$

$$+ g_A^{\bar{F}}\ L^A_{B,n_A-m_B-1}(x,p^\rho)\,U_k^{\rho\bar{D}(\rho)}(x)\ d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}(x) + g_A^{\bar{F}}\ L^A_{B,n_A-m_B-1}\ V_k^{\rho B}(x)$$

$$+ g_A^{\bar{F}} \sum_B \sum_{S=2}^{n_A-m_B} P_{BS}^{\rho A}(x,D)\ Y_{k-S+1}^{\rho B}(x) = 0.$$

On rappelle que $H_B^A\ d_{\bar{D}}^B = H_S\ \sigma_{\bar{D}}^A \qquad g_A^{\bar{F}}\ H_B^A = H_S\ \rho_B^{\bar{F}}$

On pose $\mathcal{H}_{\bar{D}}^{\bar{F}} = \sigma_{\bar{D}}^A\ g_A^{\bar{F}} = \rho_B^{\bar{F}}\ d_{\bar{D}}^B$. La matrice $(\mathcal{H}_{\bar{D}}^{\bar{F}})$ est inversible ([9]).

$$g_A^{\bar{F}}\ \partial^\alpha\ H_B^A\ \partial_\alpha\ \left[U_k^{\rho\bar{D}(\rho)}d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}\right] = g_A^{\bar{F}}\ \partial^\alpha\ H_B^A\ \partial_\alpha\ U_k^{\rho\bar{D}(\rho)}d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} + g_A^{\bar{F}}\ \partial^\alpha\ H_B^A\ \partial_\alpha\ d_{\bar{D}}^B\ U_k^{\rho\bar{D}(\rho)}$$

$$g_A^{\bar{F}}\ \partial^\alpha\ H_B^A\ \partial_\alpha\ U_k^{\rho\bar{D}(\rho)}d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} =$$

$$\underbrace{\partial^\alpha [g_A^{\bar F} H_B^A d_{\bar D}^B]}_{H_{\bar D}^{\bar F} H_S} \partial_\alpha U_k^{\rho \bar D(\rho)} - [\partial^\alpha \underbrace{g_A^{\bar F} H_B^A}_{H_S \sigma_{\bar D}^A} d_{\bar D}^B] \partial_\alpha U_k^{\rho \bar D(\rho)} - [\underbrace{g_A^{\bar F} H_B^A}_{H_S \rho_B^{\bar F}} \partial_\alpha d_{\bar D}^B] \partial_\alpha U_k^{\rho \bar D(\rho)}$$

D'où, puisque $H_S(p) = 0$:

$$g_A^{\bar F} \partial^\alpha H_B^A \partial_\alpha U_k^{\rho \bar D(\rho)} d^B_{\rho \bar D(\rho)} = H_{\bar D}^{\bar F} \partial^\alpha H_S \partial_\alpha U_k^{\rho \bar D(\rho)}(x) .$$

Posons $g_A^{\bar F} \partial^\alpha H_B^A \partial_\alpha d_{\bar D}^B U_k^{\rho \bar D}(x) + g_A^{\bar F} L_{B,n_A-m_B-1}(x,p^\rho) d^B_{\bar D} U_k^{\rho \bar D}(x) = M_{\bar D,0}^{\rho \bar F}(x,p^\rho) U_k^{\rho \bar D}(x)$

$$g_A^{\bar F} \partial^\alpha H_B^A \partial_\alpha V_k^{\rho B}(x) + g_A^{\bar F} L^A_{B,n_A-m_B-1}(x,p^\rho) V_k^{\rho B}(x) = M_{B1}^{\rho \bar F}(x,D) V_k^{\rho B}(x)$$

$$g_A^{\bar F} \sum_B \sum_{S=2}^{n_A-m_B} P^A_{BS}(x,D) Y^{\rho B}_{k-S+1} = \sum_B g_A^{\bar F} \sum_{S=2}^{n_A-m_B} P^A_{BS}(x,D) Y^{\rho B}_{k-S+1}(x) =$$

$$= \sum_B \sum_{S=2}^{n-m_B} P^{\rho \bar F}_{B,S}(x,D) Y^{\rho B}_{k-S+1}(x) \quad \text{où}$$

$$n = \sup_A n_A .$$

$F^{\rho A}_{k+1}(x) = 0$ s'écrit donc :

$$H_{\bar L}^{\bar F}(x,p^\rho) p^\alpha(x,p^\rho) \partial_\alpha U_k^{\rho \bar L} + M_{\bar D,0}^{\rho \bar F}(x,p^\rho) U_k^{\rho \bar D} +$$

$$M_{B,1}^{\rho \bar F}(x,D) V_k^{\rho B}(x) + \sum_B \sum_{S=2}^{n-m_B} P^{\rho \bar F}_{B,S}(x,D) Y^{\rho B}_{k-S+1}(x) = 0$$

Soit $(K_{\bar F}^{\bar D})$ la matrice inverse de $(H_{\bar L}^{\bar F})$. $(K_{\bar F}^{\bar D} H_{\bar L}^{\bar F} = \delta_{\bar L}^{\bar D})$.

On multiplie par $K_{\bar F}^{\bar D}$ et on somme :

$$\vec{p}^\alpha(x,p^\rho) \partial_\alpha U_k^{\rho \bar D}(x) + M'^{\rho \bar D}_{\bar L,0}(x,p^\rho) U_k^{\rho \bar L}(x) +$$

$$M'^{\rho\bar{D}}_{B,1}(x,D)\ V^{\rho B}_{k}(x) + \sum_{B}\sum_{S=2}^{n-m_B} P'^{\rho\bar{D}}_{B,S}(x,D)\ Y^{\rho B}_{k-S}(x) = 0 .$$

Et puisque $\vec{P}^{o} \neq 0$

$$\partial_o\ U^{\rho\bar{D}}_{k} = M_1(x,D')\ U^{\rho\bar{D}}_{k} + M^{\rho\bar{D}}_{L,0}(x,p^{\rho})\ U^{\rho L}_{k} +$$

$$M^{\rho\bar{D}}_{B,1}(x,D)\ V^{\rho B}_{k}(x) + \sum_{B}\sum_{S=2}^{n-m_B} P^{\rho\bar{D}}_{B,S}(x,D)\ Y^{\rho B}_{k-S+1}(x)$$

où $M_1(x,D')$ ne comprend pas de dérivation par rapport à x^o.

Explicitons $V^{\rho B}_{k}(x)$. $V^{\rho B}_{k}$ est une solution particulière de :

$$H^{A}_{B}(x,p)\ Y^{\rho B}_{k}(x) + \partial^{\alpha}\ H^{A}_{B}\ \partial_{\alpha}\ Y^{\rho B}_{k-1}(x) + L^{A}_{B,n_A-m_B-1}(x,p^{\rho})\ Y^{\rho B}_{k-1}(x) +$$

$$+ \sum_{B}\sum_{S=2}^{n_A-m_B} P^{\rho A}_{B,S}(x,D)\ Y^{\rho B}_{k-S}(x) = 0 .$$

Si p^{ρ}_{o} est racine de $H_S(\ell_o,p_i) = 0$, ce système est de rang $(m-\nu_S)$. On suppose que les inconnues et les équations principales sont les $(m-\nu_S)$ premières. On choisit $V^{\rho,m-\nu_S+1}_{k} = \ldots = V^{\rho,m}_{k} = 0$.

Un indice chapeauté variant entre 1 et $m-\nu_S$, soit $(K^{\hat{A}}_{\hat{B}})$ la matrice inverse de $(H^{\hat{A}}_{\hat{B}}(x,p))$.

$$H^{\hat{D}}_{\hat{L}}(x,p)\ V^{\rho\hat{L}}_{k}(x) =$$

$$\underbrace{- (\partial^{\alpha}\ H^{\hat{D}}_{B}\ \partial_{\alpha}\ Y^{B}_{k-1}(x) + L^{\hat{D}}_{B,n_A-m_B-1}(x,p^{\rho})Y^{\rho B}_{k-1}(x))}_{P^{\rho\hat{D}}_{B,1}(x,D)\ Y^{\rho B}_{k-1}(x)} - \sum_{B}\sum_{S=2}^{n-m_B} P^{\rho\hat{D}}_{B,S}(x,D)\ Y^{\rho B}_{k-S}(x)$$

On multiplie par $K^{\hat{B}}_{\hat{D}}$ et on somme :

$$V_k^{\hat{B}}(x) = \sum_L \sum_{S=1}^{n-m_L} M_{L,S}^{\rho\hat{B}}(x,D)\; Y_{k-S}^{\rho L}(x)$$

Finalement, pour $F_{k+1}^{A} = 0$, on obtient les conditions de compatibilité :

$$\partial_o\, U_k^{\rho\bar{D}(\rho)} = M_1(x,D')\; U_k^{\rho\bar{D}(\rho)} + M_{\bar{L},0}^{\rho\bar{D}}(x,p^{\rho})\, U_k^{\rho\bar{D}(\rho)} +$$

$$+ M_{\hat{B},1}^{\rho\bar{D}}(x,D) \sum_L \sum_{S=1}^{n-m_L} M_{L,S}^{\rho\hat{B}}(x,D)\; Y_{k-S}^{\rho L} + \sum_B \sum_{S=2}^{n-m_B} P_{B,S}^{\rho\bar{D}}(x,D)\; Y_{k-S+1}^{\rho B}(x) .$$

$$\partial_o\, U_k^{\rho\bar{D}(\rho)} = M_1(x,D')\; U_k^{\rho\bar{D}(\rho)} + M_{\bar{L},0}^{\rho\bar{D}}(x,p^{\rho})\, U_k^{\rho\bar{D}} +$$

$$+ \sum_L \sum_{S=1}^{n-m_L} M_{L,S+1}^{\rho\bar{D}}(x,D)\; Y_{k-S}^{\rho L} + \sum_B \sum_{S=2}^{n-m_B} P_{B,S}^{\rho\bar{D}}(x,D)\; Y_{k-S+1}^{\rho B}(x)$$

$$\text{I}\quad \boxed{\partial_o U_k^{\rho\bar{D}(\rho)}(x) = M_1(x,D')U_k^{\rho\bar{D}}(x) + M_{\bar{L},0}^{\rho\bar{D}}(x,p^{\rho})U_k^{\rho\bar{L}}(x) + \sum_B \sum_{S=1}^{n-m_B} P_{B,S+1}^{\rho\bar{D}}(x,D)\; Y_{k-S}^{\rho B}(x)}$$

D'autre part $Y_k^{\rho B} = U_k^{\rho\bar{D}}\, d_{\rho\bar{D}}^{B} + V_k^{\rho B}$, d'où :

$$\text{II}\quad \boxed{Y_k^{\rho B}(x) = U_k^{\rho\bar{D}}(x)\; d_{\rho\bar{D}}^{B}(x) + \sum_L \sum_{S=1}^{n-m_L} M_{L,S}^{\rho B}(x,D)\; Y_{k-S}^{\rho L}(x)} \qquad (M_{L,S}^{\rho B}(x,D) = 0 \text{ si } B > (m-\nu_S)).$$

$$y^{\rho B}(x) = \sum_{k=o}^{\infty} f_{-m_B+k}(\phi^{\rho}(x))\; Y_k^{\rho B}(x) \qquad y^{B}(x) = \sum_{\rho=1}^{\tau} y^{\rho B}(x)$$

On rappelle les données de Cauchy :

$$\frac{\partial}{(\partial x^o)^{\tilde{h}_B}}\; y^{\tilde{B}}(0,x^i) = \sum_{0}^{\infty} f_{-m_{\tilde{B}}-\tilde{h}_B+k}(\psi(x^i))\; Z_k^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i)$$

Nous utilisons le résultat suivant : Soient $L(x,D)$ une opérateur différentiel linéaire d'ordre L, $(f_j)_{j\varepsilon Z}$ une suite de fonctions telle que $\dfrac{df_j(\xi)}{d\xi} = f_{j-1}(\xi)$

et $u(x) = \sum\limits_{k=o}^{\infty} f_k(\phi(x))u_k(x)$ où les fonctions ϕ et u_k sont analytiques au voisinage de l'origine de R^{n+1} (ou C^{n+1}), ainsi que les coefficients de l'opérateur $L(x,D)$. Alors il existe des opérateurs différentiels linéaires $M_\ell(x,D)$, $0 \leqslant \ell \leqslant L$, d'ordre ℓ dont les coefficients, analytiques au voisinage de l'origine, ne dépendent que des coefficients de $L(x,D)$ et ϕ tels que :

$$L(x,D)\ u(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{\ell=o}^{L} f_{k-L+\ell}(\phi(x))\ M_\ell(x,D)\ u_k(x)\ .$$

De plus, si $L_o(x,D)$ désigne la partie principale de $L(x,D)$ on a : $M_o(x,D) = L_o(x,\text{grad}\ \phi(x))$. Dans le cas particulier où $L(x,D) = (D_o)^{\tilde{h}_B}$, les opérateurs $M_\ell(x,D)$ ne comprennent que des dérivations par rapport à x^o et $M_o(x,D_o) = (\text{Grad}\ \phi(x))_o^{\tilde{h}_B}$.

On a donc :

$$\frac{\partial}{(\partial x^o)^{\tilde{h}_B}}\ y^{\rho\tilde{B}}(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{\ell=o}^{\tilde{h}_B} f_{-m_{\tilde{B}}-\tilde{h}_B+\ell+k}(\phi^\rho(x))\ M^{\rho\tilde{h}_B}(x,D_o)\ Y_k^{\rho\tilde{B}}(x)$$

$$= \sum_{k=o}^{\infty} f_{-m_{\tilde{B}}-\tilde{h}_B+k}(\phi^\rho(x)) \sum_{\ell=o}^{\tilde{h}_B} M_\ell^{\rho\tilde{h}_B}(x,D_o)\ Y_{k-\ell}^{\rho\tilde{B}}(x)\ .$$

On identifie :

$$\sum_{\rho=1}^{\tau} \Big(\sum_{k=o}^{\infty} f_{-m_{\tilde{B}}-\tilde{h}_B+k}\ (\psi(x^i)) \sum_{\ell=o}^{\tilde{h}_B} M_\ell^{\rho\tilde{h}_B}((0,x^i),D_o)\ Y_{k-\ell}^{\rho\tilde{B}}(0,x^i)\Big) = \sum_{o}^{\infty} f_{-m_{\tilde{B}}-\tilde{h}_B+k}(\psi(x^i))\ Z_k^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i)$$

$$\text{pour} \quad k = 0 \quad : \sum_{\rho=1}^{\tau} (p_o^\rho)^{\tilde{h}_B}\ Y_o^{\rho\tilde{B}}(0,x^i) = Z_o^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i)$$

$$k > 0 \quad \sum_{\rho=1} (p_o^{\rho})^{\tilde{h}_B} Y_k^{\rho\tilde{B}}(o,x^i) + \sum_{\rho=1}^{\tau} \sum_{\ell=1}^{\tilde{h}_B} M_\ell^{\rho\tilde{h}_B}((o,x^i),D_o)\, Y_{k-\ell}^{\rho\tilde{B}}(o,x^i) = Z_k^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i)$$

Compte-tenu de $Y_k^{\rho\tilde{B}} = U_k^{\rho\bar{D}(\rho)} d_{\rho\bar{D}(\rho)}^{\tilde{B}} + V_k^{\rho\tilde{B}}$:

$$\sum_{\rho,\bar{D}(\rho)} (p_o^{\rho})^{\tilde{h}_B} d_{\rho\bar{D}(\rho)}^{\tilde{B}} U_k^{\rho\bar{D}(\rho)} + \sum_{\rho=1}^{\tau} (p_o^{\rho})^{\tilde{h}_B} V_k^{\rho\tilde{B}} +$$

$$\sum_{\rho=1}^{\tau} \sum_{\ell=1}^{\tilde{h}_B} M_\ell^{\rho\tilde{h}_B}(x^i,D_o)\, Y_{k-\ell}^{\rho\tilde{B}}(o,x^i) = Z_k^{\tilde{B},\tilde{h}_B}.$$

Soit $(\alpha_{\tilde{B},\tilde{h}_B}^{\rho\bar{D}(\rho)})$ la matrice inverse de $((p_o^{\rho})^{\tilde{h}_B} d_{\rho\bar{D}(\rho)}^{\tilde{B}})$

$$(\alpha_{\tilde{B},\tilde{h}_B}^{\rho\bar{D}(\rho)} (p_o^{S})^{\tilde{h}_B} d_{S\bar{D}(S)}^{\tilde{B}} = \delta_{S\bar{D}(S)}^{\rho\bar{D}(\rho)})$$

$$\alpha_{\tilde{B},\tilde{h}_B}^{\rho\bar{D}(\rho)} \left[\sum_{S,\bar{D}(S)} (p_o^{S})^{\tilde{h}_B} d_{S\bar{D}(S)}^{\tilde{B}}\, U_k^{S\bar{D}(S)} + \dots \right| = \alpha_{\tilde{B},\tilde{h}_B}^{\rho\bar{D}(\rho)} Z_k^{\tilde{B},\tilde{h}_B}.$$

$$U_k^{\rho\bar{D}(\rho)} + \alpha_{\tilde{B},\tilde{h}_B}^{\rho\bar{D}(\rho)} \sum_{q=1}^{\tau} (p_o^{q})^{\tilde{h}_B} V_k^{q\tilde{B}}(x) +$$

$$\alpha_{\tilde{B},\tilde{h}_B}^{\rho\bar{D}(\rho)} \sum_{q=1}^{\tau} \sum_{\ell=1}^{\tilde{h}_B} M_\ell^{q\tilde{h}_B}(x^i,D_o)\, Y_{K-\ell}^{q\tilde{B}}(o,x^i) = \alpha_{\tilde{B},\tilde{h}_B}^{\rho\bar{D}(\rho)} Z_k^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i) .$$

$$V_k^{q\tilde{B}}(x) = \sum_L \sum_{S=1}^{n-m_L} M_{LS}^{q\tilde{B}}(x,D)\, Y_{k-S}^{qL}(x)$$

$$\sum_{q=1}^{\tau} \alpha_{\tilde{B},\tilde{h}_B}^{\rho\bar{D}(\rho)} (p_o^{q})^{\tilde{h}_B} V_k^{q\tilde{B}}(x) = \sum_{q=1}^{\tau} \alpha_{\tilde{B},\tilde{h}_B}^{\rho\bar{D}(\rho)} (p_o^{q})^{\tilde{h}_B} \sum_L \sum_{S=1}^{n-m_L} M_{LS}^{q\tilde{B}}(x,D)\, Y_{k-S}^{qL}(x)$$

$$= \sum_{q=1}^{\tau} \sum_L \sum_{S=1}^{n-m_L} \alpha_{\tilde{B},\tilde{h}_B}^{\rho\bar{D}(\rho)} (p_o^{q})^{\tilde{h}_B} M_{LS}^{q\tilde{B}}(x,D)\, Y_{k-S}^{qL}(x)$$

$$\alpha_{\tilde{B},\tilde{h}_B}^{\rho\bar{D}(\rho)} (p_o^{q})^{\tilde{h}_B} M_{LS}^{q\tilde{B}}(x,D) = P_{L,S}^{\rho,\bar{D}(\rho),q}(x,D)$$

$$\sum_{q=1}^{\tau} \alpha^{\rho\bar{D}(\rho)}_{\tilde{B},\tilde{h}_B} \sum_{\ell=1}^{\tilde{h}_B} M_{\ell}^{q\tilde{h}_B}(x^i,D_o)\, Y^{q\tilde{B}}_{k-\ell}(o,x^i) =$$

$$\sum_{q=1}^{\tau} \sum_{\tilde{B}} \sum_{\tilde{h}_B} \sum_{\ell=1}^{\tilde{h}_B} \underbrace{\alpha^{\rho\bar{D}(\rho)}_{\tilde{B},\tilde{h}_B} M_{\ell}^{q\tilde{h}_B}(x^i,D_o)}_{P^{\rho\bar{D}(\rho)q}_{\tilde{B},\tilde{h}_B,\ell}(x^i,D_o)} Y^{q\tilde{B}}_{k-\ell}(o,x^i)$$

finalement :

$$U_k^{\rho\bar{D}(\rho)}(o,x^i) = \sum_{q=1}^{\tau} \sum_{L} \sum_{S=1}^{n-m_L} P^{\rho\bar{D}(\rho)q}_{LS}(x^i,D)\, Y^{qL}_{k-S}(o,x^i) +$$

$$+ \sum_{q=1}^{\tau} \sum_{\tilde{B},\tilde{h}_B} \sum_{\ell=1}^{\tilde{h}_B} P^{\rho\bar{D}(\rho)q}_{\tilde{B},\tilde{h}_B,\ell}(x^i,D_o)\, Y^{q\tilde{B}}_{k-\ell} + \alpha^{\rho\bar{D}(\rho)}_{\tilde{B},\tilde{h}_B}(o,x^i)\, Z_k^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i) .$$

On a donc les équations :

$$k = 0 \quad \begin{cases} \partial_o\, U_o^{\rho\bar{D}(\rho)}(x) = M_1(x,D')\, U_o^{\rho\bar{D}}(x) + M^{\rho\bar{D}}_{\bar{L},o}\, U_o^{\rho\bar{L}}(x) \\ U_k^{\rho\bar{D}}(o,x^i) = \alpha^{\rho\bar{D}(\rho)}_{\tilde{B},\tilde{h}_B}(o,x^i)\, Z_o^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i) \end{cases}$$

$$k > 0 \quad \begin{cases} \partial_o\, U^{\rho\bar{D}(\rho)}(x) = M_1(x,D')\, U_k^{\rho\bar{D}(\rho)}(x) + M^{\rho\bar{D}}_{\bar{L},o}(x)\, U_k^{\rho\bar{L}}(x) + \sum_{B} \sum_{S=1}^{n-m_B} P^{\rho\bar{D}}_{B,S+1}(x,D)\, Y^{\rho B}_{k-S} \\ U_k^{\rho\bar{D}(\rho)}(o,x^i) = \sum_{q=1}^{\tau} \sum_{L} \sum_{S=1}^{n-m_L} P^{\rho\bar{D}(\rho)q}_{LS}(x^i,D)\, Y^{qL}_{k-S}(o,x^i) \\ \quad + \sum_{q=1} \sum_{\tilde{B},\tilde{h}_B} \sum_{\ell=1}^{\tilde{h}_B} P^{\rho\bar{D}(\rho)q}_{\tilde{B},\tilde{h}_B,}(x^i,D_o)\, Y^{q\tilde{B}}_{k-\ell}(o,x^i) + \alpha^{\rho\bar{D}(\rho)}_{\tilde{B},\tilde{h}_B}\, Z_k^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i) \\ Y_k^{\rho B}(x) = U_k^{\rho\bar{D}(\rho)}(x)\, d^{B}_{\rho\bar{D}(\rho)}(x) + \sum_{L} \sum_{S=1}^{n-m_L} M^{qB}_{L,S}(x,D)\, V^{\rho L}_{k-S}(x) \end{cases}$$

Soit donc $\Delta = \{x \mid \underset{0\leq j\leq n}{\mathrm{Max}} |x_j| \leq R\}$ un polydisque dans lequel les $U_0^{\rho\bar{D}}(x)$ et les coefficients de tous les opérateurs figurant dans les équations de la page 47, admettent $\frac{M}{R-\sum_0^n x_j}$ pour fonction majorante.

On suppose en outre que $Z_k(x^1) << N \frac{k!}{(R-\sum_1^n x_j)^{k+1}}$.

Cette condition équivaut à la convergence des séries $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} Z_k^{\widetilde{Bh_B}}(x')$ au voisinage de l'origine ([15]).

On ajoute un entier convenable aux ordres n_A, m_B, de telle sorte que $n = \sup_A n_A = 0$.

On a alors $-m_B \geq 0 \quad \forall B$.

Nous allons montrer que les fonctions $Y_k^{\rho B}(x)$ sont analytiques dans un voisinage commun de l'origine et que les solutions $y^B(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{-m_B+j}(\phi^\rho(x))\, Y_j^{\rho B}(x)$, où la suite (f_j) est définie par $f_j(\xi) = \frac{\xi^j}{j!}$, sont des séries uniformément convergentes.

Nous utiliserons les majorantes introduites par C. Wagschall dans [14] :

$$\theta_k(\xi) = \frac{d^k}{(d\xi)^k}\left(\frac{1}{r_0-\xi}\right) = \frac{k!}{(r_0-\xi)^{k+1}} \quad \text{où} \quad \xi = \alpha x_0 + \sum_1^n x_j, \quad \alpha \geq 1$$

et les résultats suivants :([14])

- $\theta_k(\xi) << r_0\, \theta_{k+1}(\xi)$
- pour $r_0 < R \quad \frac{M}{R-\sum_0^n x_j} << \frac{M}{R-\xi} << \frac{C}{(r_0-\xi)}$ si $C \geq M \frac{r_0}{R}$
- Soit $Q_p(x,D)$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre p, à coefficients analytiques au voisinage du polydisque $\Delta = \{x \mid \underset{0\leq j\leq n}{\mathrm{Max}} |x_j| \leq R\}$. Soit $\frac{M}{R-\xi}$ une majorante des coefficients de $Q_p(x,D)$. Si $u(x) << \theta_k(\xi(x))$, il existe une constante C ne dépendant que de M, R, r_0 et p telle que

$$Q_p(x,D)\, u(x) << C\, \alpha^p \theta_{k+p}(\xi)$$

De plus si Q_p ne contient pas de dérivation en x_o, $Q_p(x,D)\ u(x) << C\ \theta_{k+p}(\xi)$. On prendra r_o tel que $0 < r_o < \inf(1,R)$. On peut donc choisir une constante C_1 telle que l'on ait, si $\Gamma_k^{\rho\overline{D}} << \theta_k(\xi)$, $\Gamma_{k-s}^{\rho B} << \theta_{k-s}(\xi)$ etc... :

$$M_1(x,D')\ \Gamma_k^{\rho\overline{D}}(x) << C_1\ \theta_{k+1}(\xi)$$

$$M_{L,0}^{\rho\overline{D}}(x)\ \Gamma_k^{\rho}\ (x) << C_1\ \theta_k(\xi) << C_1 r\theta_{k+1}(\xi) << C_1\theta_{k+1}(\xi)$$

$$P_{B,S+1}^{\rho\overline{D}}(x,D)\ \Gamma_{k-s}^{\rho B}(x) << C_1\ \alpha^{s+1}\theta_{k+1}(\xi)$$

$$P_{Ls}^{\rho\overline{D}(\rho)q}(x^i,D)\ \Gamma_{k-s}^{qL}(x) << C_1\ \alpha^s\ \theta_k(\xi)$$

$$P_{\tilde{\tilde{Bh}}_B\ell}^{\rho\overline{D}(\rho)q}(x^i,D_o)\ \Gamma_{k-\ell}^{q\tilde{B}}(x) << C_1\ \alpha^\ell\ \theta_k(\xi)$$

$$c_{\tilde{\tilde{Bh}}_B}^{\rho\overline{D}(\rho)}(x)\ \Gamma_k^{\tilde{\tilde{Bh}}_B}(x) << C_1\ \theta_k(\xi)$$

$$d_{\rho\overline{D}(\rho)}^{B}(x)\ \Gamma_k^{\rho\overline{D}(\rho)}(x) << C_1\ \theta_k(\xi)$$

$$M_{Ls}^{qB}(x,D)\ \Gamma_{k-s}^{\rho L}(x) << C_1\ \alpha^s\ \theta_k(\xi)$$

Nous allons montrer qu'il existe des constantes $C \geq 1$, $C_o \geq 1$, $C_\alpha \geq 1$ telles que $\forall k$ $U_k^{\rho\overline{D}}(x) << C_\alpha^k\ C_o^k\ C^{k+1}\theta_k(\xi)$ et $Y_k^{\rho\overline{D}}(x) << C_\alpha^{k+1}\ C_o^{k+1}\ C^{k+1}\theta_k(\xi)$.

On a bien $U_o^{\rho\overline{D}(\rho)}(x) << C\ \theta_o(\xi)$ pourvu que $C \geq M\ \frac{r_o}{R}$

D'où $Y_o^B(x) = U_o^{\rho\overline{D}(\rho)}d_{\rho\overline{D}(\rho)}^{B} << m\ C_1\ C\ \theta_o(\xi) << C_\alpha\ C_o\ C\ \theta_o(\xi)$ pourvu que $C_\alpha \geq 1$ et $C_o \geq m\ C_1$.

Supposons que $\forall k' < k$, on ait :

$$U_{k'}^{\rho\overline{D}(\rho)}(x) << C_\alpha^{k'}\ C_o^{k'}\ C^{k'+1}\ \theta_k(\xi)$$

$$Y_{k'}^{\rho\overline{D}(\rho)}(x) << C_\alpha^{k'+1}\ C_o^{k'+1}\ C^{k'+1}\ \theta_k(\xi)$$

Posons $\Phi_k(x) = C_\alpha^k\, C_o^k\, C^{k+1}\theta_k(\xi)$. Pour que Φ_k soit une majorante de $U_k^{\rho\overline{D}(\rho)}$ il suffit que :

$$\partial_o\Phi_k(x) \gg \check{M}_1(x,D')\Phi_k(x) + \sum_{\overline{L}} \check{M}^{\rho\overline{D}}_{\overline{L},o}(x)\Phi_k(x)$$

$$+ \sum_B \sum_{S=1}^{n-m_B} \check{P}^{\rho\overline{D}}_{B,S+1}(x,D)C_\alpha^{k-S+1}C_o^{k-S+1}C^{k-S+1}\theta_{k-s}(\xi)$$

$$\Phi_k(0,x^i) \gg \sum_{q=1}^{\tau}\sum_L\sum_{S=1}^{n-m_L} \check{P}^{\rho\overline{D}(\rho)q}_{LS}(x^i,D)\; C_\alpha^{k-S+1}C_o^{k-s+1}C^{k-S+1}\theta_{k-S}(\xi(x^i))$$

$$+ \sum_{q=1}^{\tau}\sum_{\tilde{B},\tilde{h}_B}\sum_{\ell=1}^{\tilde{h}_B} P^{\rho\overline{D}(\rho)q}_{\tilde{B},\tilde{h}_B,\ell}(x^i,D_o)\; C_\alpha^{k-\ell+1}C_o^{k-\ell+1}C^{k-\ell+1}\theta_{k-\ell}(\xi(x^i))$$

$$+ \sum_{\tilde{B},\tilde{h}_B} \check{\alpha}^{\rho\overline{D}(\rho)}_{\tilde{B},\tilde{h}_B}\; N\;\theta_k(\xi)$$

Où les opérateurs $\check{M}_1$, $\check{M}^{\rho\overline{D}}_{\overline{L},o}$, $\check{P}^{\rho\overline{D}}_{B,S+1}$ etc... sont obtenus à partir des opérateurs M_1, $M_{\overline{L},o}$, $P^{\rho\overline{D}}_{B,S+1}$ en remplaçant leurs coefficients par des fonctions majorantes.

Ceci conduit aux équations :

$$C_\alpha^kC_o^kC^{k+1}\alpha\theta_{k+1}(\xi) \gg (mC_1)C_\alpha^kC_o^kC^{k+1}\theta_{k+1}(\xi) + m\nu C_1\alpha^\nu C_\alpha^kC_o^kC^k\theta_{k+1}(\xi)$$

$$C_\alpha^kC_o^kC^{k+1}\theta_k(\xi) \gg \tau m\nu\alpha^\nu C_1C_\alpha^kC_o^kC^k\theta_k(\xi) + \tau r\nu C_1\alpha^\nu C_\alpha^kC_o^kC^k\theta_k(\xi)$$

$$+ r\,N\,C_1\theta_k$$

où l'on a posé $\nu = \sup_B(n-m_B)$.

On choisit $C_o \geq \tau\nu(m+r)C_1$. Il suffit alors que

$$\begin{cases} C\alpha \geqslant C_o C + C_o \alpha^{\nu} \\ C \geqslant C_o \alpha^{\nu} + r\,N \end{cases}$$

On choisit $\alpha \geqslant C_o$ puis $C \geqslant \dfrac{C_o \alpha^{\nu}}{(\alpha - C_o)}$ et enfin $C \geqslant C_o \alpha^{\nu} + r\,N$.

Donc pour $C_o \geqslant \sup(1,$ [illegible] $(m+r)C_1)$, $\alpha \geqslant C_o$,

$$C \geqslant \sup\left(M \frac{r_o}{R}, \frac{C_o \alpha^{\nu}}{\alpha - C_o}, C_o \alpha^{\nu} + rN, 1\right),$$

on a $U_k^{\rho\overline{D}(\rho)} \ll \Phi_k(\xi)$.

Montrons qu'on a alors $Y_k^{\rho B}(x) \ll C_\alpha^{k+1} C_o^{k+1} C^{k+1} \theta_k(\xi)$

$$Y_k^{\rho B}(x) = U_k^{\rho\overline{D}(\rho)} d^{B}_{\rho\overline{D}(\rho)} + \sum_L \sum_{S=1}^{n-m_L} M_{L,S}^{qB}(x,D) Y_{k-s}^{\rho L}$$

$$Y_k^{\rho B}(x) \ll mC_1 C_\alpha^k C_o^k C^{k+1} \theta_k + m\nu C_1 \alpha^{\nu} C_\alpha^k C_o^k C^{k+1} \theta_k$$

$$\begin{aligned} Y_k^{\rho B}(x) &\ll (mC_1)(1+\nu\alpha^{\nu}) C_\alpha^k C_o^k C^{k+1} \theta_k(\xi) \\ &\ll C_\alpha^{k+1} C_o^{k+1} C^{k+1} \theta_k(\xi) \end{aligned}$$

pourvu que $C_\alpha \geqslant (1+\nu\alpha^{\nu})$, puisque $C_o \geqslant 1$. $Y_k^{\rho B}(x)$ est donc analytique pour $|\xi(x)| < r_o$.

Posons $C_o C_\alpha C = \beta$.

Si la suite (f_j) est définie par :

$$f_j(t) = \frac{t^j}{j!},$$

on a

$$\left| f_j(\phi^{\rho}(x)) Y_j^{\rho B}(x) \right| \leqslant \frac{|\phi^{\rho}(x)|^j}{j!} \beta^{j+1} \frac{j!}{(r_o - \hat{\xi})^{j+1}}$$

où $\hat{\xi} = \alpha|x_o| + \sum_1^n |x_j|$.

On choisit $\Delta' \subset \Delta$ tel que $\hat{\xi} < \frac{r_o}{2}$ et $|\phi^\rho(x)| < \frac{r_o}{2^2\beta}$

$$|f_j(\phi^\rho(x))Y_j^{\rho B}(x)| \leqslant \frac{r_o^j \cdot \beta^{j+1} \cdot j! \cdot 2^{j+1}}{2^{2j} \cdot \beta^j \cdot j! \cdot r_o^{j+1}} \leqslant \left(\frac{2\beta}{r_o}\right) \times \frac{1}{2^j}$$

La série $y^{\rho B}(x)$ converge uniformément sur Δ'.

<u>*Théorème*</u> *II*.- La condition CI étant satisfaite dans un voisinage Ω d'un point a d'une variété analytique réelle ou complexe, on suppose en outre que les coefficients des opérateurs du système (1) sont analytiques dans Ω. On se donne une hypersurface $\sum$ d'équation $x^o = 0$, passant par $a = (0,-0)$, dans des coordonnées locales bien choisies, et une fonction ψ analytique, définie dans $\Omega \cap \sum$ et telle que $H_1 \times \ldots \times H_\sigma(a,(\ell_o, \mathrm{grad}\,\psi(a))$ ait ses racines en ℓ_o : $(p_o^\rho)_{1 \leqslant \rho \leqslant \tau}$ distinctes, et $\psi(a) = 0$. On suppose que les séries $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!} Z_k^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i)$ convergent dans un voisinage de $(0,a) \in C \times \sum$. Alors il existe un voisinage de a dans lequel les fonctions $Y_j^{\rho B}(x)$ sont analytiques, et les solutions $y^B(x) = \sum_{\rho=1}^{\tau} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\phi^\rho(x))^{-m_B+j}}{(-m_B+j)!} Y_j^{\rho B}(x)$ du problème de Cauchy à données sur $\sum$:

$$\frac{\partial}{(\partial x^o)^{\tilde{h}_B}} y^{\tilde{B}}(0,x^i) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\psi(x^i))^{-m_{\tilde{B}}-\tilde{h}_B+j}}{(-m_{\tilde{B}}-\tilde{h}_B+j)!} Z_j^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i)$$

sont des séries uniformément convergentes dans ce voisinage.

§ 3.- PROBLEME DE CAUCHY A DONNEES SINGULIERES.

Exemple 1.- Sur l'hyperplan $\sum$ d'équation $x^0 = 0$ de C^{n+1} on définit $\psi(x^i) = x^1$. Les coefficients des opérateurs du système (1) sont analytiques dans un voisinage Ω de 0. On suppose que $H_1 \times \ldots \times H_\sigma(0,(\ell_0 1,0,0))$ a τ racines distinctes. Soient $(p_0^\rho)_{1 \leq \rho \leq \tau}$ ces racines. On a τ fonctions $\phi^\rho(x)$ holomorphes dans $\Omega' \subset \Omega$ solutions de $H_1 \times \ldots \times H_\sigma(x, \text{grad } \phi^\rho(x)) = 0$ telles que $\phi^\rho(0,x^i) = x^1$ et $(\text{grad } \phi^\rho)_0(o) = p_0^\rho$. On note K^ρ les hypersurfaces caractéristiques : $\{x \in \Omega' \mid \phi^\rho(x) = 0\}$. On choisit Ω' de telle sorte que $(\text{grad } \phi^\rho)_0(0,x^i) = p_0^\rho(x^i)$ soient distinctes en tout point de $\Omega' \cap S$.

Soit u une fonction holomorphe sur le revêtement simplement connexe de $(\Omega' - \bigcup K^\rho)$. Nous disons que u est du type $(p,q) \in C \times N$ ([14]) et nous écrirons $u \in H(p,q)$ si u est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \sum_{\rho=1}^{\tau} (\phi^\rho(x))^p \, P_q^\rho(x, \log \phi^\rho(x)) & \text{si } p \text{ n'est pas un entier } < 0 \\ \sum_{\rho=1}^{\tau} (\phi^\rho(x))^p \, P_{q-1}^\rho(x, \log \phi^\rho(x)) + \sum_{\rho=1}^{\tau} P_q^\rho(x, \log \phi^\rho(x)) & \text{si } p \text{ est un entier négatif et } q \geq 1. \\ p_0(x) & \text{si } p \text{ est un entier } < 0 \text{ et } q = 0. \end{cases}$$

où les P_q^ρ sont des polynômes à coefficients holomorphes. Nous dirons qu'une fonction f d'une variable complexe est du type $(p,q) \in C \times N$ et nous écrirons $f \in h(p,q)$ si f est de la forme suivante : ([14])

$$\begin{cases} z^p \, P_q(\log z), & \text{si } p \text{ n'est pas un entier } < 0 \\ z^p \, P_{q-1}(\log z), & \text{si } p \text{ est un entier } < 0 \text{ et si } q \geq 1 \\ 0 & \text{si } p \text{ est un entier } < 0 \text{ et } q = 0. \end{cases}$$

où $P_q(\zeta)$ sont des polynômes en ζ de degré $\leq q$.

Soit $f_h(z)$ la fonction :

$$f_h(z) = \begin{cases} z^{p+h}(\log z)^q & \text{si } p+h \text{ n'est pas un entier } < 0 \text{ et } q \geq 0 \\ z^{p+h}(\log z)^{q-1} & \text{si } p+h \text{ est un entier } < 0 \text{ et } q \geq 1. \end{cases}$$

$f_h \in h(p+h,q)$. On peut construire une suite (f_j) telle que f_h soit la fonction définie ci-dessus, et telle que :

$$\frac{d}{dz} f_j(z) = f_{j-1}(z) \quad \text{et} \quad f_j \in h(p+j,q) \quad . \quad ([14])$$

On considère le problème de Cauchy :

$$\text{I} \quad \begin{cases} (1) \quad h_B^A(x,D)\, y^B(x) = u^A(x) \\[2ex] (2) \quad \dfrac{\partial}{(\partial x^o)^{\tilde{h}_B}}\, y^{\tilde{B}}(0,x^i) = z^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i) \end{cases}$$

où $u^A \in H(p+1-n_A,q)$, $z^{\tilde{B},\tilde{h}_B} \in H(p-m_{\tilde{B}}-\tilde{h}_B,q)$.

Nous montrerons qu'il existe une et une seule solution $y^B(x) \in H(p-m_B,q)$ de (1) telle que (2) soit satisfaite au voisinage de tout point $a \in \sum$ où une détermination des fonctions $\log \phi^\rho(x)$ a été choisie.

Il suffit de résoudre les cas particuliers suivants :

a) - $z^{\tilde{B},\tilde{h}_B} = 0 \qquad \forall \tilde{B} \ , \ \forall \tilde{h}_B$

- $u^A(x) = 0 \qquad \forall A \neq \bar{\bar{A}}$

$$u^{\bar{\bar{A}}}(x) = \sum_{\rho=1}^{\tau} (\phi^\rho(x))^{p+1-n_{\bar{\bar{A}}}} (\log \phi^\rho(x))^q\, u_1^{\rho\bar{\bar{A}}}(x)$$

On pose $f_{-n_{\bar{\bar{A}}}+1}(z) = z^{p+1-n_{\bar{\bar{A}}}}(\log z)^q$. Alors

$$u^{\bar{\bar{A}}} = \sum_{\rho=1}^{\tau} u^{\rho\bar{\bar{A}}} \quad \text{où} \quad u^{\rho\bar{\bar{A}}} = f_{-n_{\bar{\bar{A}}}+1}(\phi^{\rho}(x))\, u_1^{\rho\bar{\bar{A}}}(x) .$$

b) - $u^A = 0 \qquad \forall A$

$$- \quad z^{\bar{\tilde{B}},\bar{\tilde{h}}_B}(x^i) = (\psi(x^i))^{-m_{\bar{\tilde{B}}}-\bar{\tilde{h}}_B}(\log \ (x^i))^q \, Z_0^{\bar{\tilde{B}},\bar{\tilde{h}}_B}(x^i)$$

$$z^{\tilde{B},\tilde{h}_B} = 0 \quad \text{si} \quad (\tilde{B},\tilde{h}_B) \neq (\bar{\tilde{B}},\bar{\tilde{h}}_B)$$

On pose $f_{-m_{\bar{\tilde{B}}}-\bar{\tilde{h}}_B}(z) = z^{p-m_{\bar{\tilde{B}}}-\bar{\tilde{h}}_B}(\log (z))^q$.

On a $z^{\bar{\tilde{B}},\bar{\tilde{h}}_B}(x^i) = f_{-m_{\bar{\tilde{B}}}-\bar{\tilde{h}}_B}(\psi(x^i))\, Z_0^{\bar{\tilde{B}},\bar{\tilde{h}}_B}(x^i)$

<u>cas</u> a .- On considère la suite (f_j) définie comme plus haut pour $h = -n_{\underset{A}{=}} + 1$, et on cherche une solution sous la forme :

$$y^B(x) = \sum_{\rho=1}^{\tau} \sum_{j=0}^{\infty} f_{-m_B+j}\,(\phi^\rho(x))\; Y_j^{\rho B}(x) \quad .$$

Pour déterminer les $Y_j^{\rho B}(x)$ on dispose des équations de la page 4? (partie IV. 2) où $Z_k^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^1) = 0 \quad \forall\, k\,,\ \forall\, \tilde{B}\,,\ \forall\, \tilde{h}_B$ et où le second membre des équations aux dérivées partielles du premier ordre en $U_0^{\rho\bar{D}}$ est analytique. On a donc une solution et une seule quels que soient les termes de degré inférieurs des polynômes de dérivation. Les $Y_j^{\rho B}(x)$ ont un domaine commun d'holomorphie. Plus précisément :

$$|Y_j^{\rho B}(x)| \leq \mathcal{B}^{j+1} \frac{j!}{(r_0-\hat{\xi})^{j+1}} \quad \text{pour} \quad |\hat{\xi}| < r_0$$

où $\hat{\xi} = \alpha\,|x_0| + \sum_{j=1}^{n} |x_j|$.

D'autre part, pour tout j si $p - m_B$ n'est pas un entier négatif, pour j assez grand si $p - m_B$ est un entier négatif, on a :

$$f_{-m_B+j}(z) = z^{p-m_B+j} \sum_{k=0}^{q} a_{-m_B+j,k} \frac{(\log z)^k}{k!}$$

et il existe K tel que pour $j \geq K$,

$$M_j = \sup_{0\leq k\leq q} |a_{-m_B+j,k}| \leq \frac{\mathcal{B}_1^{j+1}}{(j+p_0)!}$$

où $\mathcal{B}_1$ est une constante positive et $p_0 \in Z$ ([14]) . Pour $j \geq K$ on a donc :

$$|a_{-m_B+j,k}\,(\phi^\rho(x))^j\; Y_j^{\rho B}(x)| \leq \frac{\mathcal{B}_1^{j+1}}{(j+p_0)!} \cdot \frac{\mathcal{B}^{j+1}.j!}{(r_0-\hat{\xi})^{j+1}}\; |\phi^\rho(x)|^j$$

Pour $\hat{\xi} < \dfrac{r_0}{2}$ et $|\phi^{\rho}(x)| \leqslant \dfrac{r_0}{2^2 \mathcal{B}_1 \; \mathcal{B}}$ on a :

$$\left| a_{-m_B+j,k} \cdot (\phi^{\rho}(x))^j \, . \, Y_j^{\rho B}(x) \right| \leqslant \frac{2 \, \mathcal{B}\mathcal{B}_1}{r_0} \; \frac{j!}{(j+p_0)!} \times \frac{1}{2^j}$$

La série $\sum\limits_{j \geq K}^{\infty} a_{-m_B+j,k} \; (\phi^{\rho}(x))^j \; Y_j^{\rho B}(x)$ converge donc uniformément.

Si $p - m_B$ n'est pas un entier négatif, on a

$$\forall j \qquad f_{-m_B+j}(z) = z^{p-m_B+j} \sum_{k=0}^{q} a_{-m_B+j,k} \; \frac{(\log z)^k}{k!}$$

Donc $y^B(x) = \sum\limits_{\rho=1}^{\tau} \sum\limits_{j=0}^{\infty} (\phi^{\rho}(x))^{p-m_B+j} \sum\limits_{k=0}^{q} a_{-m+j,k} \dfrac{(\log \phi^{\rho}(x))^k}{k!} \, Y_j^{\rho B}(x)$

$$y^B(x) = \sum_{\rho=1} (\phi^{\rho}(x))^{p-m_B} \sum_{k=0}^{q} \frac{(\log z)^k}{k!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{-m_B+j,k} \cdot (\phi^{\rho}(x))^j \; Y_j^{\rho B}(x) \right)$$

$\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{-m_B+j,k} \cdot (\phi^{\rho}(x))^j \; Y_j^{\rho B}(x) \right)$ étant analytique on a

$$y^B(x) \in H(p-m_B, \, q)$$

Si $(p-m_B)$ est un entier négatif et $q \geqslant 1$

$$f_{-m_B+j} = z^{p-m_B+j} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} \, b_{-m_B+j,k} \, (\log z)^k \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant m_B-p-1$$

$$f_{-m_B+j} = z^{p-m_B+j} \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \, a_{-m_B+j,k} \, (\log z)^k \quad \text{pour} \quad j \geqslant m_B-p$$

On en déduit comme précédemment que $y^B \in H(p-m_B, q)$.

Enfin si $(p-m_B)$ est un entier négatif et $q = 0$,

$f_k(z) = (p-n_A+1) \, ! \, \dfrac{z^k}{k!}$ $\qquad f_{-m_B+j} = 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m_B-p-1$.

Il en résulte que y^B est analytique d'où $y^B \in H(p-m_B, q)$

<u>cas b</u>.- On considère la suite (f_j) définie comme plus haut pour $h = -m_{\bar{\tilde{B}}} - \bar{\tilde{h}}_B$ et on cherche une solution sous la forme :

$$y^B(x) = \sum_{\rho=1}^{\tau} \sum_{j=0}^{\infty} f_{-m_B+j} \, (\phi^\rho(x)) \, Y_j^{\rho B}(x) \quad .$$

Pour déterminer les $Y_j^{\rho B}(x)$ on dispose des équations de la page 47 (partie IV 2) où

$$Z_k^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i) = 0 \quad \forall\, k \quad \text{pour} \quad (\tilde{B}, \tilde{h}_B) \neq (\bar{\tilde{B}}, \bar{\tilde{h}}_B)$$

$$Z_k^{\bar{\tilde{B}},\bar{\tilde{h}}_B}(x^i) = 0 \quad \forall\, k > 0$$

On démontre comme dans le cas a que $y^B \in H(p-m_B,q)$

<u>Théorème</u>.-

Soient $u^A \in H(p+1-n_A,\, q)$, $z^{\tilde{B},\tilde{h}_B}(x^i) \in H(p-m_{\tilde{B}},q)$ des fonctions holomorphes sur le revêtement simplement connexe de $(\Omega' - \cup K^\rho)$. Il existe un ouvert $\Delta \subset \Omega'$ tel que dans $(\Delta - \cup K^\rho)$, le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_B^A(x,D)\; y^B(x) \quad = u^A(x) \\ - - - - - - - - - - - - - - - \\ \dfrac{\partial}{(\partial x_o)^{\tilde{h}_B}} \; y^{\tilde{B}}(o,x^i) \; = z^{\tilde{B},\tilde{h}_B} \\ - - - - - - - - - - - - - - - \end{array} \right.$$

admet une solution sous la forme d'une somme d'ondes asymptotiques :

$$y^B(x) = \sum_{\rho=1}^{\tau} \sum_{j=0}^{\infty} f_{-m_B+j} \, (\phi^\rho(x)) \, Y_j^{\rho B}(x)$$

appartenant à $H(p-m_B,q)$

Exemple 2.- Etant donné une distribution C^∞ sauf en 0, on définit une suite f_j telle que pour $j \leq t$, f_j soit la dérivée d'ordre $(m-j)$ au sens des distributions d'une fonction continue g et que pour $j \geq m$ on ait $f'_{j+1} = f_j$ et $f_{j+1}(0) = 0$ ([7] , [15]). Pour $k > t$ on a $|f_k(z)| \leq M \frac{|z|^{k-t}}{(k-t)!}$ ([7]). Les $Z_j^{\rho\tilde{B}}$ vérifiant les conditions du théorème II, les données $z^{\tilde{B},\tilde{h}_B} = \sum_{j=0}^{\infty} (f_{-m_{\tilde{B}}-\tilde{h}_B} \circ \psi)\, Z_j^{\rho B}$ sont C^∞ dans $\Omega' \cap (\sum -\{\psi(x^i) = 0\})$.
En effet $\sum_{j \geq t} (f_{-m_{\tilde{B}}-\tilde{h}_B} \circ \psi)\, Z_j^{\rho\tilde{B}}$ est analytique dans cet ouvert.

$$h^B = \sum_{\rho=1}^{\tau} \sum_{j=0}^{t-1} (f_{-m_B+j} \circ \phi^\rho)\, Y_j^{\rho B} \quad \text{est une distribution } C^\infty$$

hors de $\cup K^\rho$ et $k^B = \sum_{\rho=1}^{\tau} \sum_{j \geq t} (f_{-m_B+j} \circ \phi^\rho)\, Y_j^{\rho B}$ est analytique dans Ω'.

La solution $y^B = h^B + k^B$ est donc une distribution dont le support singulier est inclus dans $\cup K^\rho$

B I B L I O G R A P H I E

[1] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT - J. Math. Pures et Appl. t. 45, 1966 - p. 371-386.

[2] GÄRDING, KOTAKE et LERAY - Bull. Soc. Math. Fr. t. 92, 1964, p. 263-361.

[3] HÖRMANDER - *Linear partial differential operators.* Springer-Verlag, Berlin, 1964.

[4] KASAHARA et YAMAGUTI - *Memoirs of the College of Science.* University of Kyoto, séries A, vol. XXX III, Mathematic, n° 1, 1960.

[5] LERAY - *Hyperbolic differential equations.* The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1952.

[6] LERAY et OHYA - *Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts,* Gauthier-Villars, Paris 1964.

[7] D. LUDWIG - Comm. Pure Appl. Math. Vol. 13 - 1960, p. 473-508.

[8] J. VAILLANT - J. Math. Pures et Appl. 50, 1971, p. 25 à 51.

[9] J. VAILLANT - J. Math. Pures et Appl. t. 47, 1968, p. 1-40.

[10] VAN DER WAERDEN - *Modern Algebra.* vol. I, Frederick Ungar Publish, New York 1946.

[11] CHAILLOU - *Thèse Sc. Math. Paris, 1969.* (à paraître au mémorial des Sciences Mathématiques).

[12] SVENSSON - *Arkiv för Mathematik.* Band 8 n° 17 - 1970.

[13] VOLEVIC - *Uspekhi math nank.* (1963) 18, n° 3 pp. 155-162.

[14] WAGSCHAL - *Problème de Cauchy à données singulières.* (à paraître journal de Math. Pures et Appliquées).

[15] DE PARIS - Comptes-Rendus, 272, série A, p. 1723-1726.