

50376  
1972  
49

N°287

50376  
1972  
49

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

# MEMOIRE

présenté par

**Michel PANET**

Maître ès Sciences

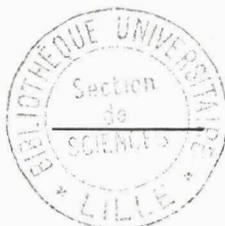
Ingénieur I. D. N

Diplômé C. H. E. C

pour l'obtention du titre de Docteur 3ème Cycle

Spécialité : Mécanique des Fluides

## ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DU POINÇONNEMENT DES SABLES



Présenté le 7 Janvier 1972 devant la Commission d'Examen

MM GONTIER	Président
TCHENG	Rapporteur
PARSY	Examineur
DE BEER	Invité

A V A N T      P R O P O S

---

Le présent mémoire expose les résultats d'un travail effectué au CENTRE EXPERIMENTAL DE RECHERCHES ET D'ETUDES DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS de St Rémy-lès-Chevreuse sous la direction de Monsieur TCHENG, Ingénieur en Chef.

Il m'a été très agréable d'entreprendre cette étude en restant en liaison avec l'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE à laquelle je dois ma formation initiale en Mécanique. Ma gratitude s'adresse tout particulièrement à Messieurs les Professeurs GONTIER et PARSY qui ont suivi ce travail avec beaucoup d'attention et m'ont souvent accordé de longs et fructueux entretiens.

Je remercie très vivement Messieurs LEBEGUE et TCHENG de m'avoir accueilli au Centre et orienté vers un sujet de recherches intéressant sur les plans théorique et pratique ; je leur suis très reconnaissant d'avoir mis à ma disposition les moyens importants qui étaient nécessaires à leur réalisation et aussi de m'avoir toujours apporté leurs conseils et fait bénéficier de leur expérience.

Monsieur le Professeur DE BEER, Directeur Général de l'Institut Géotechnique de l'Etat Belge, Professeur aux Universités de GAND et de LOUVAIN a bien voulu s'intéresser à ce travail et me permettre de le faire connaître à l'Université de GAND ; sa présence dans le Jury est pour moi un honneur et un plaisir dont je le remercie.

J'assure aussi de ma gratitude mes collègues et amis du C.E.B.T.P. qui m'ont beaucoup aidé dans bien des problèmes matériels.

---

INTRODUCTION

Un bref rappel historique est nécessaire avant de commencer notre exposé . Il permettra de situer le problème que nous étudions dans l'ensemble très important que constituent les recherches entreprises en Mécanique des Sols pour déterminer la force portante des fondations . Nous définirons l'objet de l'étude à la suite de ce rappel .

Le poinçonnement d'un matériau limité par une surface libre horizontale a donné lieu à des études théoriques et expérimentales nombreuses . La théorie de la plasticité permet de trouver la solution mathématique de certains problèmes particuliers de poinçonnage en utilisant des schémas simples qui caractérisent le comportement du matériau dans le domaine plastique .

Le schéma rigide plastique permet de résoudre les problèmes de rupture par écoulement naissant en appliquant la théorie des charges limitées . R.T. SHIELD utilise cette méthode pour déterminer la contrainte moyenne appliquée à un poinçon à base circulaire au début de l'enfoncement dans un matériau obéissant au critère de TRESCA et aux relations de LEVY MISES . J.F.W BISHOP précise la notion de solution complète afin de calculer la borne inférieure de la limite de rupture . Dans le but de définir la dureté d'un métal , R. HILL a résolu les problèmes d'écoulements plastiques libres lors du poinçonnage par des solides de différentes formes ; ses études expérimentales sur le cuivre et le plomb sont en accord avec ses prévisions et confirment les résultats de SHIELD .

Quand l'écoulement plastique est empêché par la présence du matériau environnant , les déformations plastiques sont contenues , on suppose en général que le matériau est élastique à l'extérieur de la zone plastifiée , le schéma de comportement est alors élasto-plastique .

R. HILL , J. SALENÇON et ZANGHELLINI ont résolu les problèmes d'expansion de cavités sphériques dans un milieu de dimensions infinies à l'aide de ce schéma ; la solution qu'ils exposent permet d'évaluer la contrainte appliquée à un poinçon au moment de la rupture , quand celle-ci apparaît à une profondeur importante par rapport au diamètre du poinçon .

Ces études concernent les matériaux pour lesquels la contrainte de cisaillement est indépendante de la contrainte normale appliquée à la surface de glissement lors de la déformation plastique . Les problèmes de poinçonnage des matériaux à frottement interne sont plus complexes , leur abord par la théorie des charges limites est souvent impossible , car on ne connaît pas les champs de vitesse cinématiquement admissibles ; RADENKOVIC définit les matériaux non standard, qui ne vérifient pas le principe du travail maximal , et il précise pour ces matériaux une borne supérieure et une borne inférieure de la charge limite . R. NEGRE utilise les résultats de cet auteur, il détermine par le calcul numérique les coefficients de capacité portante d'une fondation cylindrique de révolution .

En utilisant l'hypothèse des déformations planes , J. MANDEL montre que le glissement seul le long des surfaces caractéristiques des contraintes est en général insuffisant pour décrire les déformations des sols s'il n'est pas complété par un autre mécanisme dont l'importance dépendrait de la masse volumique du matériau . Ses prévisions théoriques concernant les lignes caractéristiques des vitesses sont en accord avec les expériences de K.H. ROSCOE qui définissent ces dernières en utilisant la notion de dilatance .

L'expérimentation permet de préciser la résistance au poinçonnement des sols ainsi que la validité des résultats théoriques que nous venons de rappeler . Les laboratoires de mécanique des sols , et en particulier le Centre Expérimental du Bâtiment et des Travaux Publics de Paris , ont étudié les problèmes relatifs à la force portante des fondations, profondes et superficielles , en milieu sableux .

L'objet de ce travail est de présenter un procédé nouveau qui permet d'étudier en laboratoire l'équilibre limite des fondations dans les matériaux pulvérulents . Nous envisagerons plus particulièrement le problème du pieu isolé et essaierons d'apporter une contribution nouvelle à l'étude expérimentale de la résistance de pointe et à l'interprétation des résultats obtenus .

Ce sujet a déjà donné lieu à de nombreux travaux , sur le plan théorique et expérimental , qui tentent d'expliquer le poinçonnement du sol par la pointe d'un pieu, ou à la base d'une fondation profonde .

On distingue d'une part les théories fondées sur l'hypothèse du refoulement qui dérivent de la théorie de PRANDTLI , et d'autre part , les théories fondées sur l'hypothèse de la compression qui négligent la part de la résistance du sol due à la résistance au cisaillement .

Ces théories trouvent une application intéressante dans l'interprétation des résultats des essais de pénétration en profondeur ; DE BEER remarque qu'elles déterminent des caractéristiques de la résistance au cisaillement et de compressibilité situées nécessairement du côté de la sécurité .

Cependant du fait que ces hypothèses correspondent à des comportements complètement différents du matériau , les théories peuvent difficilement expliquer d'une manière satisfaisante le phénomène réel de poinçonnement , aussi a-t-on fréquemment recours à l'expérimentation .

Les premières études ont été réalisées en modèles réduits en semi-grandeur . La seule échelle des longueurs était considérée et l'on pouvait , en opérant sur des structures de dimensions réduites , dans

.....

un rapport compris entre 10 et 20, obtenir rapidement une vue d'ensemble du comportement des sols et de leur résistance aux sollicitations développées par une fondation. Cependant, les résultats obtenus dépendent des dimensions de la structure, c'est ce que l'on appelle "l'effet d'échelle".

On constate, lors d'un essai de chargement d'une fondation superficielle, que la valeur du coefficient de capacité portante  $K_y$  augmente très rapidement quand les dimensions de la fondation modèle diminuent.

Les essais en modèle réduit ne donnent par conséquent qu'une vision qualitative des phénomènes tant que l'on ne connaît pas les lois de similitude qui permettent de comparer avec certitude, le comportement de deux fondations de dimensions différentes.

La recherche expérimentale s'est orientée vers les essais en vraie grandeur. Ces essais sont exécutés sur chantier ou bien en laboratoire. Leurs résultats sont applicables aux ouvrages réels.

Afin de mettre au point une méthode de mesure qui présente les avantages des modèles en semi-grandeur, c'est à dire la rapidité de l'expérimentation, conservant la valeur quantitative des essais en vraie grandeur, on a cherché à préciser les lois de similitude des sols puis à construire un appareil respectant ces lois.

La première partie de ce mémoire, divisée en trois chapitres, présente l'étude expérimentale du poinçonnement des sables de Loire et de Fontainebleau par une fondation profonde ; les essais sont réalisés avec gradient hydraulique dans le modèle réduit du Centre Expérimental du Bâtiment et des Travaux Publics de Paris .

Le premier chapitre résume les travaux antérieurs de J. MANDEL et de Y. TCHENG . Il présente les lois de la similitude avec conservation du matériau, des contraintes et des déformations , ainsi que des essais

.....

de poinçonnement en vraie grandeur . A partir des résultats connus, nous montrons que l'échelle des contraintes est inversement proportionnelle au produit de la perméabilité par la masse volumique du sol , et nous en déduisons que la compressibilité du matériau ne perturbe pas la mesure des contraintes .

Après avoir décrit le modèle avec gradient hydraulique , au second chapitre, nous présentons au troisième chapitre , nos résultats expérimentaux . Notre étude prolonge les travaux de A. ZELIKSON , nous montrons qu'il est possible d'atteindre la valeur de la résistance de pointe limite dans le sable de Fontainebleau en respectant certaines conditions expérimentales que nous précisons . Dans les sables peu compacts , de faible perméabilité, l'effet d'échelle est important ; nous précisons pour ces milieux, l'influence de la pression de l'écoulement de filtration et du diamètre du pieu modèle, sur la résistance de pointe ; les conditions expérimentales qui en résultent nous permettent de mesurer assez exactement la valeur de la pression limite de pointe dans le sable de Fontainebleau .

Nos essais dans le sable de Loire démontrent la validité de la similitude dans un matériau dont la dimension des grains est importante par rapport au diamètre du pieu modèle ; nous avons examiné le comportement d'un pieu ancré dans ce matériau . Nos expériences vérifient les interprétations connues à l'heure actuelle ; nous en faisons la synthèse afin de proposer un mécanisme de rupture du sol . Nous étudions l'importance du refoulement et de la zone de plasticité contenue à la base du pénétromètre , en fonction de la profondeur d'ancrage de la structure , de la densité du sol et de son écrouissage .

Dans la seconde partie , divisée en deux chapitres , nous exposons les résultats théoriques établis au cours des dernières années, et nous déterminons la pression limite par un calcul simple .

Les travaux théoriques antérieurs font l'objet du premier chapitre . Nous rappelons les théorèmes généraux de la théorie de la plasticité puis la résolution du problème de poinçonnement par écoulement naissant du matériau rigide-plastique de TRESCA . La méthode des caractéristiques détermine les champs statiquement et cinématiquement admissibles . Nous rappelons la définition des matériaux standards et non standards ainsi que le calcul des coefficients de capacité portante d'une fondation profonde dans un matériau à frottement interne ; la charge limite qui résulte de ces calculs est très inférieure à la valeur expérimentale .

Après avoir analysé les causes de cette différence , nous proposons, dans le second chapitre , un calcul rapide de la pression limite, qui tient compte de la résistance au cisaillement et de la compressibilité du sol. Les résultats expérimentaux de A. BELOT nous permettent d'exprimer un critère de rupture nouveau et une loi de compressibilité . Nous précisons le mécanisme de rupture afin de calculer une valeur approchée des dimensions de la zone de plasticité contenue, nous en déduisons un ordre de grandeur de la pression limite , assez voisin de celui que nous donne l'expérience . Nous vérifions que la pression limite de pointe demeure élevée quand le pieu possède une extrémité en forme de cône dont l'angle d'ouverture est très faible .

PREMIERE PARTIE

ETUDE EXPERIMENTALE DU POINÇONNEMENT

D'UN SABLE HOMOGÈNE

Le but de cet exposé est de présenter une nouvelle méthode qui permet d'étudier en modèle réduit, le comportement des matériaux pulvérulents sollicités par une fondation. On s'est intéressé en particulier au problème de la résistance au poinçonnement d'un sable homogène par un pieu isolé. La méthode peut toutefois être appliquée à des systèmes plus complexes, formés par exemple de groupes de pieux ou de quadrillages de semelles superficielles ou semi-enterrées.

On étudie les conditions de similitude des sols d'où l'on déduit le principe de fonctionnement du modèle. Cet appareil doit conserver le matériau, les contraintes et les déformations afin de réaliser une similitude approchée en mécanique des sols. Quand le milieu obéit à la loi de DARCY, on peut conserver les contraintes en augmentant le poids spécifique apparent du sol grâce au "gradient hydraulique", on réalisera de cette manière une similitude approchée.

On précise la validité de la similitude dans les sables de la Loire et de Fontainebleau en comparant les essais en modèle et en vraie grandeur.

On étudie le comportement des pieux ancrés par moulage et par fonçage dans le Sable de Loire, et l'on formule quelques remarques au sujet du comportement d'une fondation profonde dans un sable.

L'interprétation proposée est valable quand la structure s'est enfoncée d'une profondeur au moins égale au diamètre ou à la dimension transversale la plus faible. On n'a pas étudié la relation entre l'effort de pointe et le déplacement du pieu avant le poinçonnement du sol, c'est-à-dire entre l'instant où l'effort appliqué est nul et celui pour lequel les grandes déformations du matériau et sa mise en plasticité apparaissent.

CHAPITRE I - RAPPELS GENERAUX

I.1. - CONDITIONS DE SIMILITUDE

L'article de J. MANDEL, intitulé "ESSAIS SUR MODELE REDUIT EN MECANIQUE DES TERRAINS", précise les conditions de similitude des sols. Il nous semble intéressant de citer certains passages de ce travail très général, qui montre les difficultés de la réalisation des modèles quand il s'agit d'étudier le comportement des matériaux, les sols en particulier dans le domaine des déformations plastiques.

La connaissance des lois de comportement des sols est actuellement à son commencement ; il n'existe pas encore de relations générales entre les contraintes et les déformations de ces matériaux, dans l'hypothèse des sollicitations tridimensionnelles ; aussi, on ne peut pas avoir recours à la similitude exacte, en déduisant les conditions de similitude de l'invariance des équations rhéologiques. L'expérience en modèle en géotechnique n'est donc pas un moyen permettant de vérifier la théorie :

" La similitude en Mécanique des Sols est une similitude approchée, dont on vérifie le degré d'approximation par rapport à l'essai en vraie grandeur ".

Le comportement rhéologique du matériau est décrit par les courbes effort-déformation de la presse triaxiale ( Fig 1 ) .

Dans une similitude où l'échelle des contraintes est  $\bar{\sigma}$  et celle des déformations  $\bar{\epsilon}$  , on passe de la courbe effort - déformation ( S ) du prototype à la courbe effort - déformation ( M ) du modèle par une affinité de rapport (  $\bar{\epsilon}$  ,  $\bar{\sigma}$  ) suivant les axes de coordonnées .

La courbe ( S ) dépend de la contrainte latérale appliquée lors de l'essai triaxial , aussi la courbe ( M ) du modèle doit se déduire de chaque courbe ( S ) associée aux différentes valeurs de la contrainte latérale , par la même affinité de rapport (  $\bar{\epsilon}$   $\bar{\sigma}$  ) .

Cette condition est pratiquement irréalisable dans le cas des matériaux réels .

Elle impliquerait que la courbe intrinsèque du matériau constituant le modèle se déduise de celle du matériau prototype par une homothétie de rapport  $\bar{\sigma}$  , suivant les deux axes de coordonnées . Ce qui est une condition expérimentale pratiquement impossible à respecter , sauf pour les matériaux parfaitement pulvérulents ( fig 2 ) , dont la courbe intrinsèque est conservée dans une telle homothétie .

On ne peut donc pas dans le modèle , simuler le comportement du sol utilisé dans le prototype à l'aide d'un matériau de nature différente , dont les propriétés mécaniques pourraient se déduire de celles du prototype par une loi simple . On préfère que la similitude conserve la loi rhéologique du sol , les courbes ( S ) et ( M ) doivent donc être confondues ; cette condition sera vérifiée si le modèle conserve le matériau , les contraintes et les déformations de l'expérience en vraie grandeur .

Nous aurons : ( 1 )  $\bar{\gamma} = 1$  ( 2 )  $\bar{\sigma} = 1$  et ( 3 )  $\bar{\epsilon} = 1$

.....

Les équations de la dynamique impliquent des conditions de similitude supplémentaires . Les notations adoptées dans ce paragraphe sont :

masse volumique:  $\gamma$

dérivée de la masse volumique par rapport au temps  $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$

force de masse :  $g$  = champ de pesanteur  
 $\bar{g}$  = champ gravitaire dans la maquette

longueur :  $l$

déplacement :  $\xi$

vitesse de déplacement :  $v = \frac{d\xi}{dt}$

accélération :  $\frac{d^2\xi}{dt^2}$

temps :  $t$

L'équation d'équilibre d'un milieu continu est :

$$(4) \operatorname{div} \vec{\sigma} + \gamma (\vec{g} - \frac{d^2\xi}{dt^2}) = 0$$

Elle introduit les conditions :

$$(5) \vec{\sigma} = \gamma \cdot \bar{g} \cdot \bar{l} \quad \text{et} \quad (6) \bar{\xi} = \bar{g} \bar{t}^2$$

Si l'accélération  $\frac{d^2\xi}{dt^2}$  est négligeable par rapport à  $\vec{g}$ ,

le phénomène est quasi-statique , seule la condition ( 5 ) est à vérifier.

Les relations (1) (2) et (5) montrent que le modèle conservera les contraintes si :

$$(7) \bar{g} = \frac{1}{\bar{l}}$$

Les contraintes appliquées à des fondations de dimensions différentes, sollicitant le même matériau, seront donc égales si le matériau

est soumis à un champ de gravité dont l'intensité est inversement proportionnelle aux dimensions de la fondation considérée, et si le temps est conservé.

La filtration d'un liquide dans le sol, en régime permanent et laminaire, permet d'appliquer au matériau un champ de pesanteur d'intensité réglable. Soit un domaine (D) de sol (fig. 3), limité par la frontière (S), saturé par un liquide dont la pression est p. Les contraintes totales appliquées à la surface (S) sont  $\sigma_{ij}$  les contraintes intergranulaires sont  $\sigma'_{ij}$ , nous avons :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{si } i = j$$

$\vec{n}$  est la normale à la surface (S), orientée vers l'extérieur de (D)

La résultante générale,  $\vec{F}_e$ , des forces extérieures appliquées au domaine est :

$$(8) \quad \vec{F}_e = \iint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \, dS + \iiint_D \gamma \vec{g} \, dv$$

Le moment résultant au point O est  $\vec{M}_e$

$$(9) \quad \vec{M}_e = \iint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \wedge \vec{OM} \, dS + \iiint_D \gamma \vec{g} \wedge \vec{OM} \, dv$$

En introduisant les contraintes  $\sigma'_{ij}$ , et en appliquant la formule de

**GAUSS** nous avons

$$(10) \quad \vec{F}_e = \iint_S \vec{\sigma}' \cdot \vec{n} \, dS + \iiint_D \gamma \vec{g} - \vec{\text{grad}} p \, dV$$

$$(11) \quad \vec{M}_e = \iint_S \vec{\sigma}' \cdot \vec{n} \wedge \vec{OM} \, dS + \iiint_D (\gamma \vec{g} - \vec{\text{grad}} p) \wedge \vec{OM} \, dV$$

Remplaçons le sol saturé par un sol sec , de masse volumique  $\gamma_d$  , occupant le domaine  $D$  , soumis aux actions de contact  $\vec{\sigma}'$  , le long de la frontière  $S$  , et au champ de forces de masse  $\vec{G}$  tel que la relation :

$$(12) \quad \gamma_d \vec{G} = \gamma \vec{g} - \vec{\text{grad}} p$$

soit vérifiée . Si le sol contenu dans le prototype est humide , il suffira de remplacer  $\gamma_d$  par  $\gamma_h$  ;  $\gamma_h = \gamma_d (1 + w)$  .  $w$  est la teneur en eau .

Les éléments de réduction des forces appliquées au sol sec occupant le domaine  $D$  sont :

$$(13) \quad \vec{F}_e = \iint_S \vec{\sigma}' \cdot \vec{n} \, dS + \iiint_D \gamma_d \vec{G} \, dV$$

$$(14) \quad \vec{M}_e = \iint_S \vec{\sigma}' \cdot \vec{n} \wedge \vec{OM} \, dS + \iiint_D \gamma_d \vec{G} \wedge \vec{OM} \, dV$$

La relation ( 12 ) montre que les valeurs de  $\vec{F}_e$  et  $\vec{M}_e$  sont égales à celles des équations ( 10 ) et ( 11 ) . Le sol saturé ainsi défini est donc équivalent à un sol sec soumis aux mêmes actions de contact, à un champ de forces de masse proportionnel à la perte de charge de l'écoulement .

.....

Si les lignes de courant ont leur direction parallèle au vecteur  $\vec{g}$ , et que l'écoulement relatif est laminaire, on peut dériver la relation (14) en valeur algébrique appliquée sur l'axe  $oz$  :

$$\gamma_d G = \gamma g - \text{grad } p, \quad \text{grad } p = \frac{dp}{dz}$$

La condition de similitude est donc :

$$(15) \quad \frac{G}{g} = \frac{1}{\bar{l}} = \frac{\gamma g - \text{grad } p}{\gamma_d g}$$

Les sables obéissent à la loi de Darcy, la charge de l'écoulement précédent dépend de la vitesse de débit selon la relation :

$$(16) \quad v = -k \text{ grad}(p + \gamma_w g z)$$

Quand le sol est homogène, le coefficient de perméabilité  $k$  est uniforme ; en régime permanent, la perte de charge linéique est constante dans l'ensemble du matériau, l'échelle des longueurs est alors déterminée par la relation (15).

Si le sol n'est pas homogène, nous commettons une erreur sur l'échelle  $\bar{l}$  en supposant que  $\bar{l}$  est constante quel que soit le point considéré.

En négligeant  $\gamma g$  par rapport à  $\text{grad } p$ , on peut dériver :

$$\frac{G}{g} = \frac{\bar{\sigma}'}{\bar{l}} = - \frac{\text{grad } p}{\gamma_d g}, \quad \frac{\bar{\sigma}'}{\bar{l}} = \frac{v}{g} \frac{1}{k \gamma_d}$$

Nous voyons que  $\frac{\bar{\sigma}'}{\bar{l}}$  est inversement proportionnel au produit  $k \gamma_d$ . Nous avons étudié les variations de ce coefficient pour les sables de Fontainebleau et de Loire. (Fig. 4)

Dans le cas du sable de Loire,  $k\gamma_d$  varie linéairement en fonction de  $\gamma_d$ . La pente,  $a$ , de la droite de variation ( $k\gamma_d, \gamma_d$ ) est :

$$a = \frac{d(k\gamma_d)}{d\gamma_d} = -0,243 \text{ cm/s}$$

Dans le cas du sable de Fontainebleau :

$$1,35 \leq \gamma_d \leq 1,40 \quad (\text{t/m}^3) \quad a = -0,30 \text{ cm/s}$$

$$1,40 \leq \gamma_d \leq 1,55 \quad a = -0,0015 \text{ cm/s}$$

Nous avons supposé, dans le cas d'une fondation sur sable de Loire, (fig. 4<sup>bis</sup>) que  $\gamma_d$  variait entre les valeurs  $1,70 \text{ t/m}^3$  en A, et  $1,78 \text{ t/m}^3$  en B, sous la fondation. Pour une échelle des longueurs donnée, quand on passe du point A au point B, la variation  $d\bar{\sigma}'$  de l'échelle des contraintes est :

$$\frac{d\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}'} = -a \frac{d\gamma_d}{(k\gamma_d)_A} = 4\%$$

On commet donc une erreur de 4 % par excès, sur l'échelle des contraintes. Cette valeur est négligeable par rapport à la précision des mesures, elle serait encore plus faible dans le cas du sable de Fontainebleau. On peut donc négliger l'effet des variations de la densité sur l'échelle des contraintes.

Ces résultats montrent qu'il est possible de vérifier la condition  $\bar{\sigma} = 1$ .

La seconde condition est  $\bar{\epsilon} = 1$ . Elle signifie que "la similitude géométrique doit être vérifiée à tous les stades de la déformation". L'équation de continuité conduit à la même conclusion.

En variables d'Euler nous avons :

$$\frac{d\gamma}{dt} + \gamma \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad v = \frac{d\epsilon}{dt}$$

Si l'on modifie les échelles , le premier terme est multiplié par  $\bar{\gamma} \cdot \bar{t}^{-1}$  , le second par  $\bar{\gamma} \cdot \bar{\xi} \cdot \bar{t}^{-1} \cdot \bar{I}^{-1}$  , d'où la condition  $\bar{t} = 1''$

Avant de présenter nos résultats , nous rappelons les phénomènes observés lors de la pénétration d'un pieu isolé dans un sable .

## I2 - ESSAIS DE PENETRATION EN VRAIE GRANDEUR DANS LES SABLES

L'étude expérimentale des fondations profondes en milieu pulvérulent est l'objet de nombreux travaux . Les essais de KRUISEL , ADAM, Y. KOHENO et L'HERMITEAU se distinguent de l'ensemble des expériences réalisées . Ils sont exécutés au CENTRE EXPERIMENTAL DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS . Leur originalité est de mettre en oeuvre des structures de dimensions très importantes qui permettent d'étudier en laboratoire le problème de la pénétration d'une fondation dans un milieu sableux homogène semi-infini . Les essais consistent à enfoncer un pieu cylindrique de révolution dans un sable , en appliquant un effort croissant à la partie supérieure . Ce pieu porte deux dynamomètres, situés à chaque extrémité et qui mesurent séparément les efforts , de pointe  $R_p$  et total  $R_t$ , appliqués pendant l'enfoncement .

Les résultats de ces auteurs nous permettront de discuter de la validité de notre méthode qui a pour but d'étudier en modèle réduit la force portante des fondations sur sable homogène .

Les expériences en vraie grandeur que nous décrivons à présent sont réalisées dans les sables de Loire et de Fontainebleau . L'angle de frottement interne , la densité et la granulométrie ( fig. 5 ) caractérisent ces matériaux qui sont , au premier abord , très différents .

. Le sable de Fontainebleau, d'origine éolienne, est très fin , il

. . . . .

est formé de particules anguleuses de silice dont les dimensions sont de l'ordre de 0,1 mm .

Le Sable de Loire est formé de grains ronds , sa granulométrie est étendue ; il est peu sensible à l'humidité .

Ces matériaux sont compactés dans une cuve ( fig. 6 ) de 6,40 m de diamètre et de 10 m de hauteur . Afin de s'assurer de l'homogénéité du sable , on mesure la densité en de nombreux points ; la valeur indiquée sur les graphiques est la moyenne de toutes les mesures . Il est pratiquement impossible d'obtenir une densité rigoureusement uniforme ; aussi la résistance varie-t-elle parfois très brusquement pendant l'enfoncement du pieu ; sur l'ensemble de l'essai , on peut toutefois définir une courbe moyenne de pénétration dont la reproductibilité est très bonne . Cette courbe représente la variation de l'effort appliqué au pieu (  $R_p$  ou  $R_t$  ) en fonction de son enfoncement .

Les essais sont réalisés à l'aide de pieux de différents diamètres ( 216 mm , 60 mm , 40 mm ) enfoncés à partir de la surface libre du sable , ou à partir d'une profondeur d'ancrage obtenue par moulage .

Le matériau est sec dans la plupart des expériences , mais nous avons également pratiqué quelques essais en milieu saturé .

La figure 7 représente les résultats principaux des essais de pénétration dans un Sable de Loire qui est légèrement humide (  $w = 4\%$  ) . Les courbes en trait plein correspondent au pieu de 216 mm . Au début de l'enfoncement , la résistance de pointe augmente proportionnellement à la profondeur, puis elle devient constante au-delà de la profondeur critique . Nous avons indiqué sur ces graphiques les courbes qui correspondent à plusieurs valeurs de la densité : 1,58 , 1,69 , 1,73 , 1,76 , et 1,78 .

La forme de la courbe de pénétration est sensiblement la même quelle que soit la densité, par contre la résistance limite augmente très rapidement dans les milieux compacts, ce qui montre que la compressibilité du sol joue un rôle important dans le mécanisme de rupture .

On peut dire que le début de l'enfoncement correspond à une rupture par cisaillement et qu'au delà de la profondeur critique , une rupture par compressibilité apparaît .

La résistance totale est mesurée au cours de l'essai à la densité 1,73 , elle est légèrement supérieure à la résistance de pointe .

La rupture apparaît moins nettement à cause du frottement latéral du sable sur le pénétromètre. Le frottement latéral augmente légèrement avec la densité , mais sa valeur demeure négligeable par rapport à la résistance de pointe , du moins pour le Sable de Loire . Il est de l'ordre de 5 % de la résistance totale .

Les essais à la densité 1,76 sont réalisés sur des pieux de 40 et 60 mm de diamètre . Ils s'intercalent entre les essais du pieu de 216 mm . Les résistances limites sont donc sensiblement indépendantes du diamètre , par contre la profondeur critique diminue quand le diamètre décroît . L'essai de pieu moulé à la profondeur de 4;50 m est particulièrement intéressant ; il montre que la résistance limite est égale à celle qui correspond à l'essai à partir de la surface libre , la rupture apparaît pour une profondeur beaucoup plus grande . Un essai à partir de la surface libre détermine donc la valeur de la résistance limite que l'on peut prendre en compte sous un pieu moulé dans un sable homogène .

La figure 8 compare deux essais de pénétration à partir de la surface libre dans le Sable de Loire humide , puis saturé , disposé à la densité sèche de 1,69 . Nous avons indiqué les points expérimentaux sur ces graphiques pour montrer l'effet d'une variation de la densité autour de la valeur moyenne sur la résistance de pointe . En certains points ,  $\gamma_d$  atteignait les valeurs 1,66 et 1,73 , ce qui explique le tracé irrégulier de la courbe de pénétration de l'essai saturé . On constate que la résistance de pointe en milieu immergé est inférieure à celle qui est obtenue dans le milieu humide au début de l'enfoncement ; puis quand l'enfoncement est assez grand , la courbe de pénétration du milieu saturé

rejoint celle du milieu humide , la saturation n'a donc pas d'influence sur la valeur de la résistance limite , mais elle augmente la profondeur critique .

Des essais dans le sable de Fontainebleau , identiques à ceux que nous venons de décrire sont résumés par la Fig. 9 . La résistance de pointe du pénétromètre 216 mm augmente au début de l'enfoncement , puis elle devient constante . Le phénomène semble identique à celui que nous avons observé dans le Sable de Loire ; mais la variation de la résistance limite en fonction de la densité est différente pour ces deux sables ; contrairement au Sable de Loire , la résistance limite dans le Sable de Fontainebleau n'augmente que très peu en fonction de la densité quand celle-ci est faible , puis une augmentation très brutale de la résistance de pointe apparaît quand la densité est comprise entre 1,52 et 1,57 (Fig.10) La transition entre l'état lâche et l'état compact est très brutale dans le sable de Fontainebleau , elle est beaucoup plus progressive dans le sable de Loire .

La résistance totale est très supérieure à l'effort de pointe . Le frottement latéral dans le sable de Fontainebleau est important .

Seule la profondeur critique dépend du diamètre ; elle varie dans le même sens que le diamètre . Elle est plus grande dans un milieu saturé . La résistance limite change peu quand on sature le sable de Fontainebleau .

Nous nous proposons d'étudier les phénomènes que nous venons de rappeler à l'aide du modèle réduit que nous décrivons à présent .

Les tableaux suivants précisent les pressions limites d'un pieu isolé dans les sables de Loire et de Fontainebleau ; ils résument l'ensemble des essais de pénétration en vraie grandeur .

. . . . .

$d$ ( $t/m^3$ )	1,41	1,48	1,49	1,57
$\emptyset$ (mm)				
216	45	70		300
100	38		57	300
45	40	55	85	320

Sable de Fontainebleau  $w \sim 4\%$

$d$ ( $t/m^3$ )	1,58	1,69	1,73	1,78
$\emptyset$ (mm)				
320	15			320
216	23	120	175	320
110		125		305
45		110	130	280

Sable de Loire  $w \sim 4 \text{ à } 6\%$

- Résistance de pointe à la rupture ( en bars )

en fonction de la masse volumique et du diamètre



## CHAPITRE II - DESCRIPTION DU MODELE

### II.1. - CIRCUIT HYDRAULIQUE ( Fig I2 )

L'eau du réseau urbain constitue le liquide de filtration .

Le principe de fonctionnement du circuit hydraulique permet d'obtenir une gamme d'échelle importante ( de 1 à 1/100 ) , par un réglage précis de la perte de charge dans le sable .

Un réservoir de 3 m<sup>3</sup> contient l'eau , une pompe centrifuge assure une charge de 11 bars et un débit de 100 m<sup>3</sup>/h au fonctionnement nominal , l'échelle est alors égale à 1/100 . Les vannes v<sub>1</sub> , v<sub>2</sub> et v<sub>3</sub> , règlent le débit et la valeur des pressions P<sub>1</sub> et P<sub>2</sub> du liquide filtrant , existant respectivement à la surface du sable et à la partie inférieure . La commande des vannes v<sub>2</sub> et v<sub>3</sub> est manuelle , ces vannes permettent d'obtenir les échelles comprises entre 1 et 1/50 . La vanne v<sub>1</sub> , dont l'ouverture dépend de la pression qui est de cette manière stabilisée automatiquement , est utilisée pour les échelles comprises entre 1/50 et 1/100 , les pertes de charges correspondantes sont de 4 bars et 8 bars environ . Afin d'atténuer les vibrations , les conduites assurant l'alimentation en eau de la cellule sont flexibles et un réservoir tampon est disposé entre v<sub>2</sub> et la cellule .

Un circuit hydraulique auxiliaire est monté en dérivation sur les conduites principales , il alimente la structure d'essai en vue de respecter les conditions de similitude à la base de la fondation .

### II.2. Cellule de mesure ( fig. I3 a et b )

Le sable est placé dans un réservoir de section circulaire de 58 cm de diamètre et de 1 m de hauteur . Seize prises piézométriques sont fixées sur le réservoir ; leur espacement vertical le long d'une génératrice est de 5 cm . La précision des manomètres mesurant la

pression du liquide filtrant est de 1 % .

Les conduites d'arrivée et d'évacuation de l'eau sont fixées sur deux viroles disposées aux extrémités du réservoir . Pour que l'écoulement soit laminaire dans le sable , nous avons placé un brise - jet isolant le niveau supérieur du sol de la zone de turbulence provoquée par les arrivées d'eau . La figure 14 représente les variations de la pression du liquide filtrant en régime turbulent ( sans brise - jet ) et laminaire ( avec brise - jet ) . Nous constatons que le brise - jet permet d'obtenir une répartition de pression linéaire ( fig. 15 ) , la pente des droites ainsi définies permet de déterminer l'échelle des longueurs .

Les sables utilisés dans le modèle sont autofiltrants , la percolation de l'eau sous haute pression ne provoquera donc pas de ségrégation dans le matériau , les risques de colmatage sont donc limités . Une toile est placée sous le massif de sable et assure parfaitement le bon fonctionnement du circuit hydraulique .

### II.3. Dispositifs d'enfoncement ( fig. 13 )

Deux vérins hydrauliques à double effet sont disposés sur la cuve , ils exercent chacun une force de 2,5 t , leur course est de 0,50 m . Ils transmettent à la structure l'effort d'enfoncement ou de dégagement par l'intermédiaire d'un longeron transversal qui se déplace en translation **verticale** . Nous pouvons régler à tout instant la pression d'huile des vérins afin de faire croître progressivement l'effort pendant l'enfoncement , et de réaliser des essais quasi statiques .

### II.4. Structures d'essais - appareillage électrique ( fig. 16 a et b )

Nous étudions les fondations profondes sur pieux à l'aide de pénétrètres à base plate , de section circulaire de 20 mm et de 40 mm de diamètre . Une semelle rectangulaire nous permet d'étudier le comportement à la rupture des fondations superficielles et semi - enterrées .

#### II.4.1. Pénétrètres isolés - groupes de pieux

Les essais de poinçonnement par un seul pénétrètre sont exécutés à l'aide de poinçons cylindriques de révolution de 50 cm de longueur ; leur surface latérale est en acier lisse . Deux dynamomètres sont encastrés aux extrêmités , ils mesurent les efforts de pointe et total n'excédant pas 1,5 t , ce qui correspond à une contrainte de 477 bars . Le pieu de 40 mm est équipé de dynamomètres mesurant une contrainte maximale de 416 bars pour un effort de 5 t .

Les pénétrètres de 20 mm de diamètre peuvent être enfoncés simultanément , groupés de différentes manières et en nombre variable n'excédant pas 5 .

#### II.4.2. Fondations superficielles et semi-enterrées ( fig.16 a et b )

La fondation superficielle est composée d'une semelle de 40mm x 200 mm , équipée d'un dynamomètre de 5 t mesurant l'effort total appliqué . Au centre , un dynamomètre de 800 kg mesure la pression du sol sur une surface de dimensions réduites ( 40 mm x 40 mm ) , isolée des parties latérales . Les déformations sont planes dans cette région centrale et nous pourrons comparer les contraintes qui y sont appliquées aux résultats des calculs théoriques rigides plastiques donnant les coefficients de capacité portante  $N_c$  ,  $N_\gamma$  et  $N_q$  .

CHAPITRE III - RESULTATS D'ESSAIS et INTERPRETATION

---

III.0. - REMARQUES PRELIMINAIRES SUR LE MODE OPERATOIRE

Des essais de pénétration à partir de la surface libre, dans les sables de Loire et de Fontainebleau, nous ont permis d'étudier les conditions expérimentales à respecter pour reproduire en modèle les phénomènes observés au cours des expériences en vraie grandeur; ce problème est à lui seul assez complexe.

La principale difficulté est de réaliser un massif de sol homogène et d'en connaître la densité. L'exiguïté de la cellule ne permet pas de mesurer la densité en de nombreux points. En conséquence, il est impossible d'utiliser les méthodes statistiques des essais en vraie grandeur, qui déterminent les variations et la valeur moyenne de la densité du sol avec précision. La mesure du poids total de sable introduit dans la cuve divisée par le volume occupé par le sol n'est pas assez précise.

Le remplissage de la cellule a donc fait l'objet d'une étude particulière : le sable est disposé humide, en couches de 50 Kg, de 10 cm de hauteur environ. Un mouton de 15 kg compacte chaque couche. Pour réaliser un massif de sol homogène, nous avons procédé par tâtonnements.

Pendant les premiers essais, nous avons distribué à chaque couche un nombre égal de coups de mouton. Les couches inférieures recevant une énergie de compactage plus grande sont probablement plus denses que les couches supérieures. Nous avons mesuré la densité à la fin de l'essai, au sein du massif, en un point situé à 30 cm sous la surface libre.

Pour obtenir une masse volumique uniforme, nous avons réalisé d'autres remplissages en compactant davantage les couches supérieures. Chaque couche reçoit de cette manière la même énergie de compactage. Il suffit de mesurer la densité à la surface libre du sol, ce qui

.....

simplifie considérablement le mode opératoire.

Avant d'établir le régime laminaire, nous saturons le sol. Cette opération est délicate quand le sol est formé de particules fines,

; il est alors nécessaire de saturer le sol d'autant plus lentement que sa densité est élevée. La durée de la saturation est d'une journée environ. Dès que le sol est saturé, nous établissons progressivement le régime laminaire et enfonçons la structure dès que la pression hydraulique garde une valeur constante.

Il était également nécessaire de connaître l'influence de la perte de charge sur la courbe de pénétration en exécutant des essais sous différentes pressions hydrauliques et d'autres essais en supprimant l'écoulement dans le matériau.

Nos expériences n'ont pas permis de différencier les efforts, total et de pointe. Le modèle ne conserve pas le frottement latéral. La percolation de l'eau diminue très certainement le coefficient de frottement du sol sur la surface latérale qui est d'ailleurs très peu adhérente.

Les conditions de similitude sont valables pour les matériaux que l'on peut assimiler à des milieux continus. Le sable de Fontainebleau en fait partie car ses grains sont très petits par rapport aux dimensions des fondations d'essai.

Dans le cas du sable de Loire, l'hypothèse de continuité peut ne pas être respectée car les grains ont des dimensions beaucoup plus importantes. Il était donc intéressant de vérifier la validité de la similitude de ce matériau plus grossier que l'on rencontre fréquemment dans la nature.

.....

La perméabilité du sable de Loire est 100 fois plus grande environ que celle du sable de Fontainebleau ; nous n'avons par conséquent pas eu de difficultés au sujet des équipotentielles de pression sous la structure; les essais ont montré que l'écoulement sous la fondation était correct, que celle-ci soit ou non alimentée en eau par l'intérieur.

Nous avons réalisé des essais de pénétration à partir de la surface libre à l'aide du pieu de diamètre 20 mm, et des essais de pieux ancrés à 20 cm ou à 40 cm par moulage ou par poinçonnement.

### III.1. - ESSAIS DE PENETRATION DANS LE SABLE DE FONTAINEBLEAU

#### III.1.1 - Compactage du sol - résultats obtenus dans les milieux de densité élevée.

La figure 17 est relative aux premiers essais dans le sable de Fontainebleau. Le remplissage de la cuve était à "densité variable", bien que cette définition soit impropre puisqu'il est expérimentalement très délicat de déterminer la densité en tous points ; le mouton de compactage tombait donc le même nombre de fois sur chaque couche.

.....

Pour les valeurs les plus faibles de la densité , 1,40 et 1,47 , la similitude ne reproduit la courbe de pénétration que de manière qualitative . La comparaison des essais aux densités 1,40 et 1,41 montre que la résistance de pointe est très inférieure , dans les essais en modèle , aux valeurs des expériences en vraie grandeur .

Quand la densité augmente , l'écart entre les courbes de pénétration diminue ; l'essai à la densité 1,50 est assez proche des essais en vraie grandeur ; la profondeur critique n'est pas atteinte . Ce résultat semble tout-à-fait acceptable à première vue puisque la profondeur critique augmente avec la compacité du matériau et, que par ailleurs, nous opérons sur un sol saturé possédant dans une certaine mesure des propriétés visco-plastiques .

Il nous semblait néanmoins indispensable d'atteindre la profondeur critique dans les milieux très denses afin de pouvoir comparer les résistances limites .

Les essais en vraie grandeur montrent que l'élancement critique, égal au rapport de la profondeur critique divisée par le diamètre du pieu ne dépend que du diamètre pour une densité déterminée . Il diminue quand le diamètre augmente , et il est intéressant de remarquer au passage que la profondeur critique n'est pas , par conséquent , proportionnelle au diamètre et que ses variations, en fonction du diamètre , dépendent du processus de formation du bulbe plastique autour de la pointe du pieu .

A la densité 1,48 , l'élancement critique décroît de 30 à 12 quand le diamètre augmente de 45 à 216 mm . Cette observation nous a conduits à augmenter encore l'échelle des longueurs .

Nous avons réalisé un essai à la densité 1,51 ( fig. 18 ) à l'échelle 1/39 ; la profondeur critique est égale à 3,50 m . Ce résultat est contradictoire puisque la profondeur critique augmente avec le diamètre et la densité . Il est probable que cette divergence entre

. . . . .

les mesures est due à l'hétérogénéité du sol qui peut également se traduire par des irrégularités dans les variations de la résistance de pointe , avec parfois l'apparition de plusieurs paliers de rupture .

La mise en place du sable de Fontainebleau dans la cellule est d'autant plus difficile à réaliser que l'on désire obtenir une densité élevée . Tant que la densité est inférieure à 1,50 , on peut compacter chaque couche de manière identique et obtenir un sol homogène .

Pour les valeurs supérieures à 1,50 , le sable de Fontainebleau devient très rigide . Considérons alors deux couches consécutives (fig.19 ). Pendant le compactage de la couche supérieure , la densité de la couche inférieure demeure égale à sa valeur initiale , par exemple 1,54 , tant que la densité de la couche supérieure est inférieure à 1,50 ; dès que cette valeur est atteinte , l'énergie de compactage est dissipée dans les deux couches ; la couche inférieure en reçoit une fraction d'autant plus importante que la densité de la couche supérieure est élevée . La densité de chaque couche augmentera donc et l'ensemble ne sera de même densité , supérieure à 1,54 , qu'après un certain temps . Il suffirait alors de déterminer cette valeur finale en fonction du nombre de coups distribués à chaque couche , et de leur épaisseur , pour résoudre le problème .

Quand le nombre de couches est plus important , les effets de profondeur de paroi , de teneur en eau , rendent l'étude de compactage encore plus complexe , et nous ne l'avons pas abordée dans sa généralité . La remarque précédente , relative au compactage de deux couches , montre que l'énergie distribuée lors du compactage de la seconde couche , sera plus grande que celle qui était nécessaire à compacter la première couche à la densité 1,54 , puisque la densité finale de l'ensemble des deux couches est supérieure à 1,54 . Nous avons donc réalisé des remplissages en augmentant l'énergie de compactage des couches supérieures et nous avons pu relever les irrégularités probables de la densité

d'après les variations de la résistance de pointe lues sur la courbe de pénétration . Bien que cette méthode ne soit pas parfaitement rigoureuse, elle nous a permis de déterminer les couches éventuellement trop ou pas assez compactées . Ainsi nous avons obtenu un massif homogène , de densité uniforme après quelques rectifications .

Les essais à l'échelle 1/12 ( fig. 20 ) ont été exécutés dans un sable de densité élevée , égale à environ 1,55 . On constate que les variations de la résistance de pointe en fonction de l'énergie de compactage distribuée à un niveau donné sont assez significatives . Des irrégularités apparaissent sur la courbe de pénétration aux niveaux 2,3 et 4 ; grâce à elles nous avons pu corriger le compactage .

Au premier essai ( o ) nous avons compacté très faiblement les couches 1 et 2 , aussi l'énergie de compactage apportée par les couches supérieures est-elle insuffisante pour uniformiser la densité à la base du massif de sable . Nous observons alors une décroissance rapide de la résistance de pointe dans la couche 2 .

Nous avons alors augmenté légèrement le compactage des couches supérieures et plus fortement celui des couches 1 et 2 pour réaliser l'essai suivant : (  $\Delta$  ) . La résistance de pointe demeure alors pratiquement constante dans la couche 2 .

Puis nous avons modifié l'intensité de compactage de la couche 3 pour supprimer l'augmentation brutale de la résistance de pointe à ce niveau ; la courbe de pénétration obtenue ( essai  $\square$  ) présente alors un aspect correct et elle s'intercale très bien entre les essais en vraie grandeur à la densité 1,52 et 1,57 .

Les résultats de la similitude sont donc corrects dans le sable de Fontainebleau de densité élevée.

Nous avons confirmé ce résultat en réalisant 2 essais à l'échelle 1/12 dans des sables de compacité élevée ( Fig. 21 ) ; on vérifiera que la similitude conserve la courbe de pénétration en se référant aux essais en vraie grandeur ( Fig. 9 ) .

Il sera donc nécessaire de respecter les conditions de similitude avec une attention particulière dans les milieux de faible compacité que nous étudions à présent .

### III.I.2. Sables de faibles densités ( $\gamma_d < 1,48$ )

Pour diminuer l'influence de l'effet d'échelle sur la mesure de la résistance de pointe , nous pouvons d'une part régler le débit et la pression hydraulique , et d'autre part augmenter le diamètre du pénétrètre utilisé . Voyons tout d'abord l'influence du débit de filtration.

Nous avons réalisé dans les milieux lâches et moyennement compacts des essais de pénétration du pieu de 20 mm de diamètre ( fig.22 ) pour les valeurs 1,42 , 1,47 , 1,48 et 1,53 de la densité . L'échelle 1/12 correspond à une perte de charge de un bar à travers une épaisseur de sable de 55 cm ; la perméabilité du sable de Fontainebleau est de  $10^{-3}$  cm/s environ , le débit filtration par unité de surface est  $q = 10^{-3} \times \frac{1\ 000}{55} = 18\ \text{mg} / \text{s} / \text{cm}^2$  , la vitesse de débit est de  $18\ 10^{-3}$  cm/s .

La comparaison de nos résultats avec les essais en vraie grandeur aux densités 1,41 , 1,48 et 1,52 montre que la courbe de

. . . . .

pénétration est conservée quand la densité est supérieure ou égale à 1,48 . Quand la densité est inférieure à cette valeur , le modèle donne des valeurs beaucoup trop faibles de la résistance de pointe . Nous pensons pouvoir attribuer cette différence au fait que les conditions de similitude n'étaient pas suffisamment respectées dans les milieux lâches où l'effet d'échelle est très important . La base du pénétromètre était en métal poreux mais elle se colmatait pendant l'expérience , les équipotentielles de pression étaient donc perturbées dans le voisinage de la pointe du pieu , car la faible vitesse de débit de l'écoulement environnant et la valeur encore plus faible de la perméabilité du sol ne permettaient pas au liquide de filtrer correctement sous la structure .

Afin d'améliorer les conditions de filtration du liquide , nous avons à la fin de chaque essai , arrêté l'enfoncement du pénétromètre et augmenté la perte de charge jusqu'à 4 bars ; nous avons ensuite repris l'enfoncement . La résistance de pointe a alors augmenté suivant le tracé indiqué en pointillé sur chaque courbe, et pour les milieux moins compacts de densité 1,42 et 1,47 elle s'est stabilisée à une valeur voisine de celle des essais en vraie grandeur . Cette variation dans un sens favorable de la résistance peut correspondre à une amélioration des conditions de similitude sous la structure , puisqu' en multipliant par 4 la perte de charge on augmentait le débit de filtration sous le pénétromètre .

On voit que l'écoulement de filtration a une très grande influence sur la validité de la similitude dans les sables peu compacts , de faible perméabilité tel que le sable de Fontainebleau . La percolation du liquide dans le domaine de sol sollicité par la fondation doit être contrôlée très correctement afin de réduire l'effet d'échelle dans les milieux lâches et d'obtenir des résultats voisins des essais en vraie grandeur .

Nous avons confirmé ces hypothèses en utilisant une structure de 40 mm de diamètre qui possédait une extrémité parfaitement perméable ; le diamètre plus élevé permettait de réduire l'effet d'échelle et de contrôler l'écoulement sous la base de la fondation avec plus de précision.

Quatre essais sont réalisés sans alimentation de la base de la fondation, par le circuit hydraulique auxiliaire ( fig. 23 ) Ils montrent une amélioration des mesures par rapport au pieu de 2 cm de diamètre ( fig. 22 ) et une diminution très nette de l'écart avec les essais en vraie grandeur. On constate également que les irrégularités des courbes de pénétration, provoquées par des variations locales de densité, sont atténuées grâce à l'augmentation du diamètre de la structure.

Pour la densité la plus faible  $\gamma_d = 1,40$ , nous avons rétabli l'écoulement sous la fondation, par le circuit hydraulique auxiliaire. Cet essai est délicat à réaliser, nous nous sommes efforcés de maintenir sous le pénétromètre une pression égale à celle de l'écoulement environnant, en réglant le débit à l'intérieur de la structure par la vanne de laminage disposée à cet effet sur le circuit hydraulique auxiliaire.

La courbe de pénétration ne semble pas conservée avant le poinçonnement du sol, la profondeur critique est beaucoup plus grande dans l'essai en modèle que dans l'essai en vraie grandeur. L'alimentation en eau a pour effet d'augmenter la valeur de la résistance limite et de la faire coïncider correctement avec les essais en vraie grandeur.

. . . . .

Nous avons représenté ( fig. 24 ) les résistances limites des essais en modèle et en vraie grandeur, pour différentes valeurs de la densité. Les essais en vraie grandeur correspondant au pieu de 216 mm de diamètre pénétrant dans un sable de Fontainebleau sec.

On voit que le pieu modèle, non alimenté en eau, de diamètre 20 mm, donne des résultats corrects dans les milieux compacts de densité supérieure à 1,50; pour les compacités inférieures, l'écart relatif entre les essais en modèle et en vraie grandeur est plus élevé, il varie entre 18 et 76 % quand la densité diminue de 1,48 à 1,42.

En utilisant le pieu de 40 mm, non alimenté en eau, on diminue l'écart relatif dans les milieux lâches dans un rapport de 2 environ, et en établissant l'écoulement auxiliaire dans la structure quand la densité est égale à 1,40, on obtient un résultat voisin de l'essai en vraie grandeur (essai ▲ )

### III.2. Essai de pénétration dans le Sable de Loire

Les conditions de similitude sont valables pour les matériaux que l'on peut assimiler à des milieux continus. Le sable de Fontainebleau en fait partie car ses grains sont très petits par rapport aux dimensions des fondations d'essai.

Dans le cas du sable de Loire, l'hypothèse de continuité peut ne pas être respectée car les grains ont des dimensions beaucoup plus importantes. Il était donc intéressant de vérifier la validité de la similitude de ce matériau plus grossier que l'on rencontre fréquemment dans la nature.

La perméabilité du sable de Loire est 100 fois plus grande environ que celle du sable de Fontainebleau, nous n'avons par conséquent pas eu de difficultés au sujet des équipotentielles de pression

sous la structure ; les essais ont montré que l'écoulement sous la fondation était correct, que celle-ci soit ou non alimentée en eau par l'intérieur.

Nous avons réalisé des essais de pénétration à partir de la surface libre, à l'aide du pieu de diamètre 20 mm, et des essais de pieux ancrés à 20 cm ou à 40 cm, par moulage ou par poinçonnement.

### III.2.1. - Essais de pénétration à partir de la surface libre.

L'échelle des premiers essais ( fig. 25 ) était assez importante, ainsi que la perte de charge appliquée au sol. Le compactage du sol n'a pas été spécialement étudié, puisque chaque couche recevait la même intensité de compactage. Ces essais avaient pour but de préciser l'allure des phénomènes.

. . . . .

La résistance de pointe augmente au début de l'enfoncement, puis elle se stabilise à la valeur limite quand la profondeur est très importante .

Les valeurs de la résistance limite s'alignent exactement avec celles des essais en vraie grandeur dans les sables de densités forte et faible . Dans l'essai en modèle, la valeur limite est atteinte progressivement alors que le terrain de la courbe de pénétration apparaît plus nettement dans l'essai en vraie grandeur , cette différence provient du compactage du sol; aussi avons nous réalisé d'autres remplissages aux densités 1,65 et 1,75 en compactant les couches supérieures avec une intensité plus grande que les couches inférieures afin de répartir l'énergie de compactage de manière uniforme dans l'ensemble du sol .

Les essais aux densités 1,65 et 1,75 ( Fig. 26 ) à l'échelle 1/10 sont assez voisins des essais en vraie grandeur avec densités 1,69 et 1,73 .

Ils sont réalisés sous une perte de charge plus faible que celle des essais aux densités 1,70 , 1,77, 1,79 , et 1,82 que nous avons présentés ( Fig.25 ) On voit que les conditions de similitude sont établies correctement dans le sable de Loire même quand l'échelle n'est que de 1/10 , alors qu'elles étaient beaucoup plus délicates à établir dans le sable de Fontainebleau .

Les résistances limites sont du même ordre de grandeur, quand l'échelle est de 1/10 et de 1/30 ; on retrouve le résultat des essais en vraie grandeur : la résistance limite est pratiquement indépendante du diamètre à condition qu'il soit suffisamment élevé pour que l'effet d'échelle soit négligeable .

. . . . .

### III.2.2. - Essais de pieux moulés

Les essais de pénétration à partir de la surface libre ayant prouvé la valeur très satisfaisante de la similitude par gradient hydraulique , nous avons étudié le problème du pieu ancré à une certaine profondeur, par moulage ou par poinçonnement dans le Sable de Loire . Dans le premier cas , le sol est vierge , dans le second cas , il est écroui . Les profondeurs d'ancrage du modèle sont de 20 et 40 cm . Un forage par carottier permet de mouler le pieu à la profondeur choisie , ce procédé nous paraît correspondre mieux à la réalité que la méthode utilisée généralement en laboratoire pour étudier les pieux moulés , et qui consiste à compacter le sol autour du pieu placé au préalable dans la cuve d'essai .

Nous avons utilisé le pieu de 40 mm de diamètre afin d'obtenir des mesures plus précises et étudié en particulier l'influence de la profondeur d'ancrage du pieu , sur la courbe de pénétration , pour diverses valeurs de la densité du Sable de Loire : 1,64 , 1,65 , 1,67 , 1,70 et 1,72 . L'échelle de ces essais est de 1/6 , la perte de charge est de 0,5 bar .

En observant les courbes de pénétration ( fig. 27 ) on constate que les enfoncements avant rupture sont plus grands quand le pieu est moulé que lorsqu'il est enfoncé depuis la surface libre du sol . L'enfoncement critique du pieu moulé varie en fonction de la densité . Pour la profondeur de moulage de 20 cm , l'enfoncement critique demeure constant quand la densité varie entre 1,64 et 1,70 ; il augmente brutalement quand la densité est de 1,72 . Nous pensons que cette variation brusque est due à un phénomène dépen -

. . . . .

dant du moulage et de la compacité du milieu . En augmentant la profondeur de moulage , on constate que ce phénomène disparaît puisque les profondeurs critiques des essais réalisés aux densités 1,67 et 1,72 pour une profondeur de moulage de 40 cm sont assez voisines . L'enfoncement dans le milieu de densité 1,72 est divisé par deux quand la profondeur de moulage augmente de 20 à 40 cm . La profondeur de moulage a donc une influence importante sur la pente de la courbe de pénétration tant que l'enfoncement est inférieur à la valeur critique, cette influence est d'autant plus grande que la compacité est élevée .

Les essais de HABIB dans un sable de Seine de compacité élevée confirment nos résultats . Le pénétromètre utilisé avait 43 mm de diamètre , il était moulé à 30 cm de profondeur dans un sable vibré à la densité maximale 1,78 ; l'enfoncement n'était pas appréciable tant que la résistance de pointe était inférieure à 45 bars .

La résistance limite des essais de pieux moulés est égale à celle des essais de pieux enfoncés depuis la surface libre ; la profondeur de moulage n'a aucune influence sur la résistance limite ( fig. 28 ) .

Les essais de pieux ancrés par poinçonnement ont donné des résultats encore différents ( fig. 29 ) . Le pénétromètre modèle était donc disposé par fonçage dans le sable de Loire sec depuis la surface libre à la profondeur d'ancrage 20 cm pour la densité 1,67 ; pour le milieu de compacité plus élevée (  $\gamma_d = 1,72$  ) nous avons foncé le modèle à 40 cm de profondeur , afin de supprimer le phénomène complémentaire observé sur l'essai de pieu moulé à 20 cm de profondeur dans le milieu à la densité 1,72 , et de réaliser des essais de même nature pour les densités 1,67 et 1,72 .

On constate que les enfoncements des pieux poinçonnés lors de l'accroissement de la charge sont encore plus faibles que ceux des pieux moulés dont nous avons indiqué les courbes de pénétration . Pour le milieu moyennement compact et pour le milieu très compact , les profondeurs critiques sont divisées par deux environ , et la résistance limite est inchangée par rapport au pieu moulé .

L'ensemble de ces essais de pénétration de pieux , enfoncés depuis la surface libre ou ancrés , nous a permis de donner une interprétation au problème de poinçonnement d'un sol par une fondation profonde . Il était nécessaire de faire la synthèse des idées émises par de nombreux auteurs . Nous proposons donc les idées suivantes en vue d'expliquer le mécanisme de rupture du sol pendant l'enfoncement d'un pieu ou plus généralement lors de la mise en charge d'une fondation profonde de grand élancement .

### III.3. - Mécanisme de rupture du sol sollicité par une fondation profonde .

Dans le domaine qui précède la rupture sous un pieu foncé à partir de la surface du sol , deux phénomènes différents déterminent la loi de variation de la résistance de pointe en fonction de l'enfoncement :

- Une zone de sol , dont les dimensions dépendent de la densité , est fortement comprimée sous la pointe du pieu , dans cette zone les déformations sont élasto-plastiques , en effet , on ne peut pas négliger les déformations élastiques du matériau , par rapport aux déformations plastiques car le sol environnant empêche ces dernières de se développer librement et d'atteindre des valeurs importantes par rapport auxquelles les déformations élastiques seraient négligeables . La compressibilité , la résistance au cisaillement et les propriétés élastiques du sol déterminent la relation entre les contraintes et les déformations dans ce domaine . La dimension de cette zone de plasticité contenue est très délicate à déterminer expérimentalement et jusqu'à présent on l'évalue à 6 à 10 fois le diamètre du pieu dans les milieux denses .

- Le matériau est chassé de cette zone élasto-plastique par refoulement vers la surface libre ; le refoulement est d'autant plus intense que la surface libre est proche de la base du pieu . L'effet de la surface libre est de faciliter la pénétration du pieu dans le sol ; elle favorise l'écoulement libre du matériau .

L'importance du mécanisme de refoulement dépend de la densité du sol et de la distance entre la surface libre et la zone élasto-plastique.

Dans les milieux très denses , cette zone occupe un volume important, elle exerce des pressions élevées qui augmentent avec la densité , à l'intérieur du matériau . Les pressions dirigées vers la surface libre provoquent le refoulement du sol susjacent. On voit que le sol situé au-dessus de la pointe du pieu est équivalent à une surcharge qui équilibre les pressions développées par la zone élasto-plastique .

A densité constante , le refoulement sera donc d'autant plus faible que l'enfoncement sera grand , ou inversement , que la densité sera plus faible à profondeur constante . On explique en partie par ces remarques , l'augmentation de la profondeur critique en fonction de la densité et également les résultats expérimentaux de l'étude exécutée par IADANYI à L'UNIVERSITE de GAND sous la direction du Professeur DE BEER . IADANYI montre que la rupture par refoulement provoquée par l'expansion d'une cavité sphérique en équilibre élasto-plastique dans un sable limité par une surface libre horizontale, apparaît dans les sables denses quand la distance de la cavité à la surface libre est grande ; dans les sables lâches , elle n'apparaît que si la cavité est enfoncée à très faible profondeur .

Il existe donc une profondeur limite , augmentant en fonction de la densité , au-delà de laquelle le refoulement est très faible . Les courbes de pénétration des pieux moulés à des profondeurs supérieures à cette valeur limite ne dépendront que du développement de la zone élasto-plastique dans un milieu infini et elles seront sensiblement indépendantes de la profondeur de moulage .

Ces hypothèses sont parfaitement vérifiées par les essais aux densités 1,67 et 1,72 . Pour la densité la plus faible , les courbes

de pénétration sont pratiquement confondues quand la profondeur de moulage varie entre 20 et 40 cm . Le sol est alors assez peu chassé vers la surface libre ; car la compressibilité du milieu est assez grande pour que la zone élasto-plastique puisse se développer .

Quand la densité est <sup>de</sup>  $\lambda 1,72$  , la compressibilité est faible ; en augmentant la profondeur de moulage de 20 à 40 cm , on diminue l'effet de refoulement , on observe que les enfoncements sont environ deux fois plus faibles pour la plus grande profondeur de moulage.

Il serait intéressant d'étudier le double mécanisme de rupture que nous avons proposé par des expériences permettant de visualiser les déformations du sol au cours des essais d'enfoncement de pieux moulés , ou foncés depuis la surface libre du sol.

La comparaison entre les essais de pieux moulés et poinçonnés met en évidence le rôle important de la zone élasto-plastique quand le pieu est ancré à grande profondeur . Dans cette hypothèse les propriétés mécaniques du sol contenu dans la zone élasto-plastique ont une influence prépondérante sur la courbe de pénétration ; le sol demeure à l'état vierge sous le pieu moulé. Quand le pieu est ancré par poinçonnement , le sol a subi une préconsolidation et un écrouissage avant la mise en charge de la structure , sa rigidité est donc beaucoup plus élevée que dans l'état vierge , En conséquence les enfoncements sont plus faibles avant la profondeur critique , quand le pieu est ancré par poinçonnement .

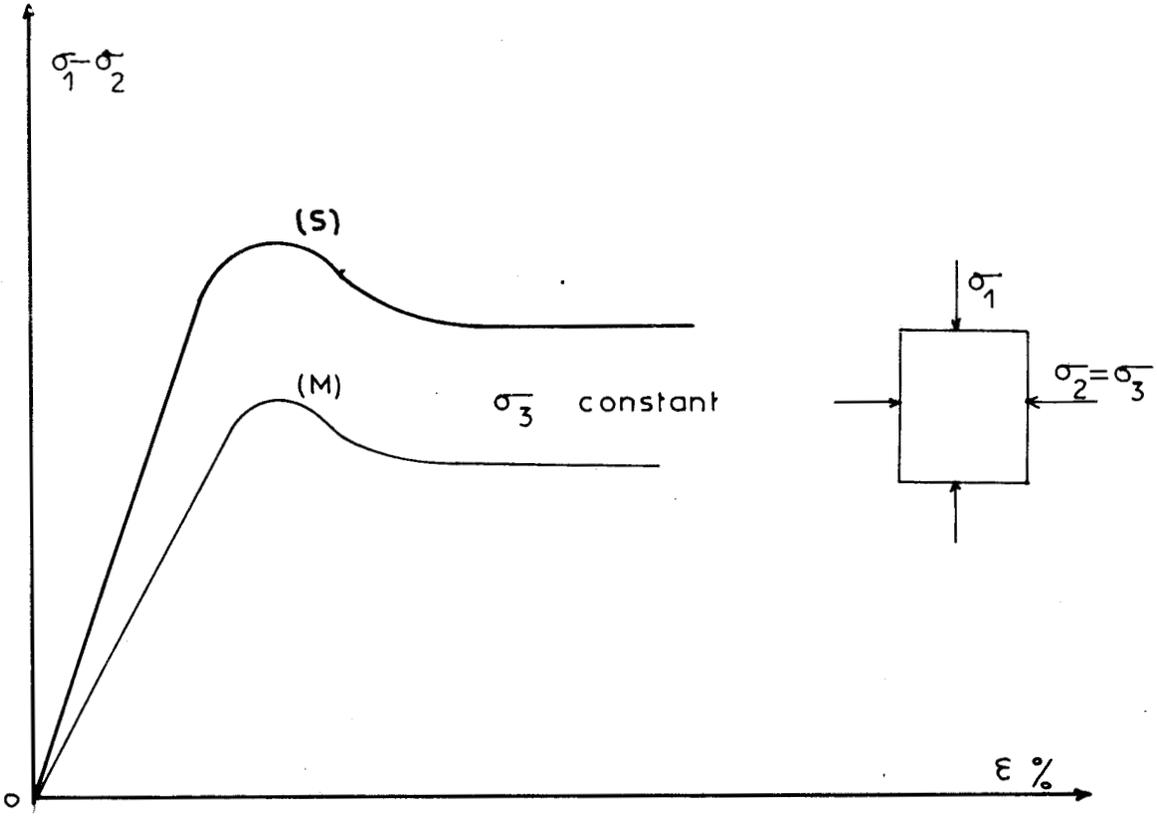


Fig 1 : Courbe effort déformation d'un sable

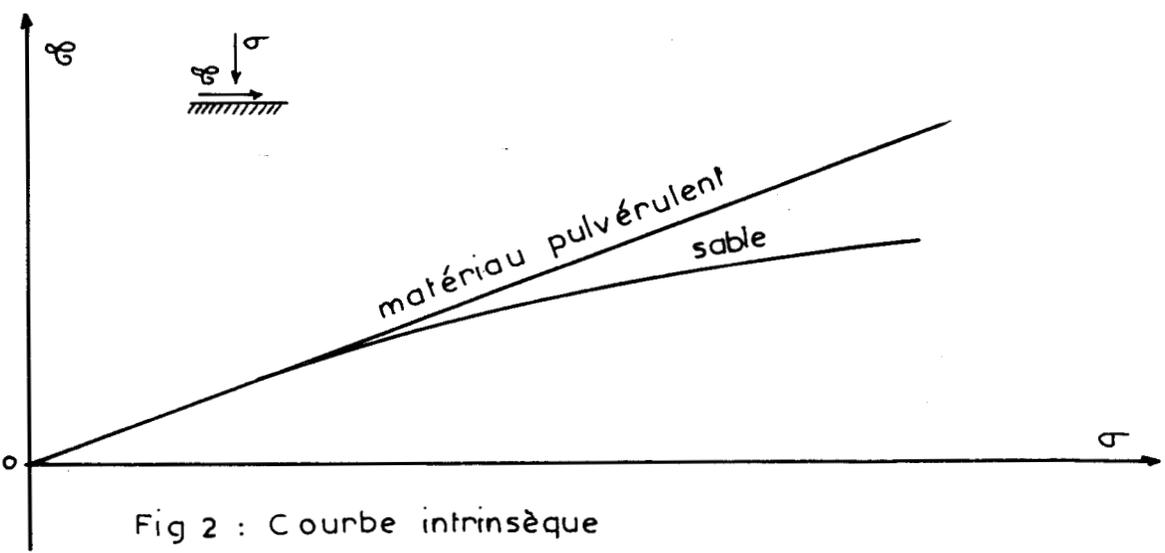
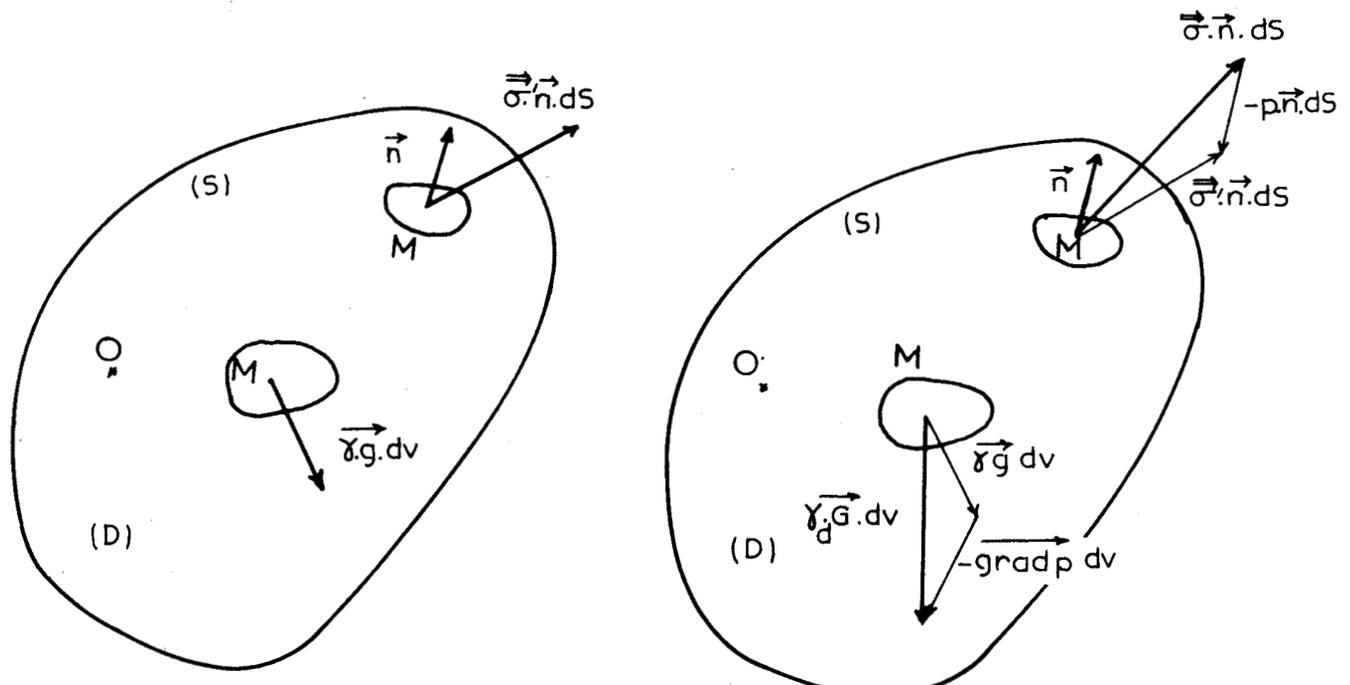


Fig 2 : Courbe intrinsèque





$$F_e = \iint_{(S)} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot dS + \iiint_{(D)} \vec{\gamma} g \cdot dv$$

$$F_e = \iint_{(S)} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot dS + \iiint_{(D)} \vec{\gamma} g - \vec{\text{grad}} p \cdot dv$$

$$\vec{\gamma}_d \vec{G} = \vec{\gamma} g - \vec{\text{grad}} p$$

$$\frac{G}{g} = \frac{1}{1} = \frac{\gamma g - \text{grad } p}{\gamma_d g}$$

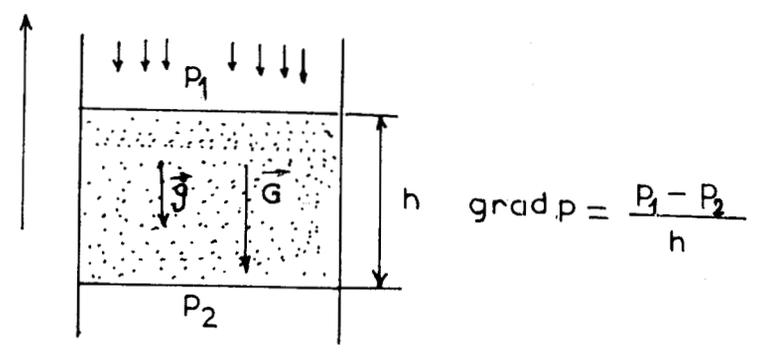


Fig 3 : Conditions de similitude



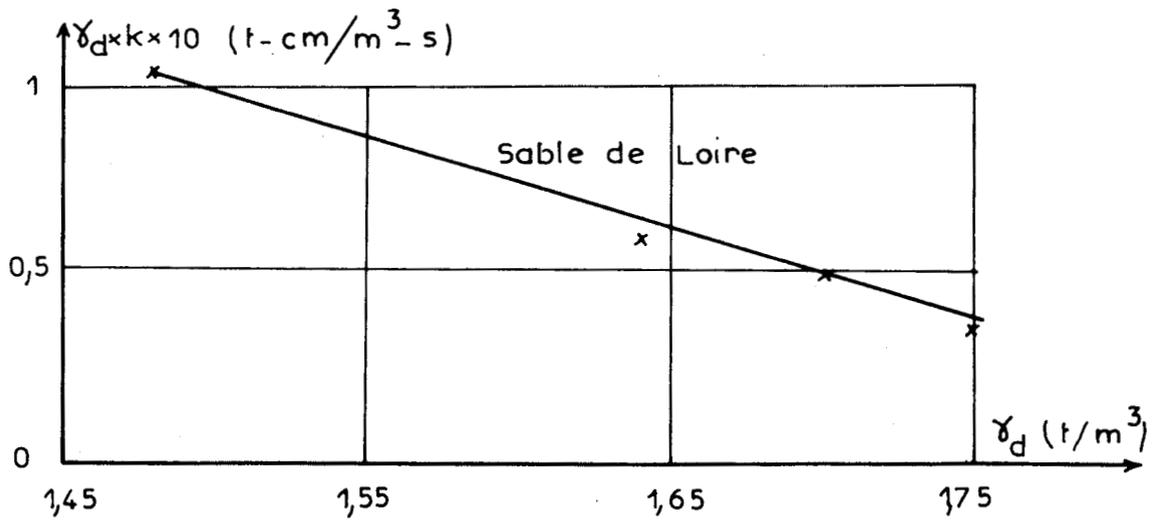
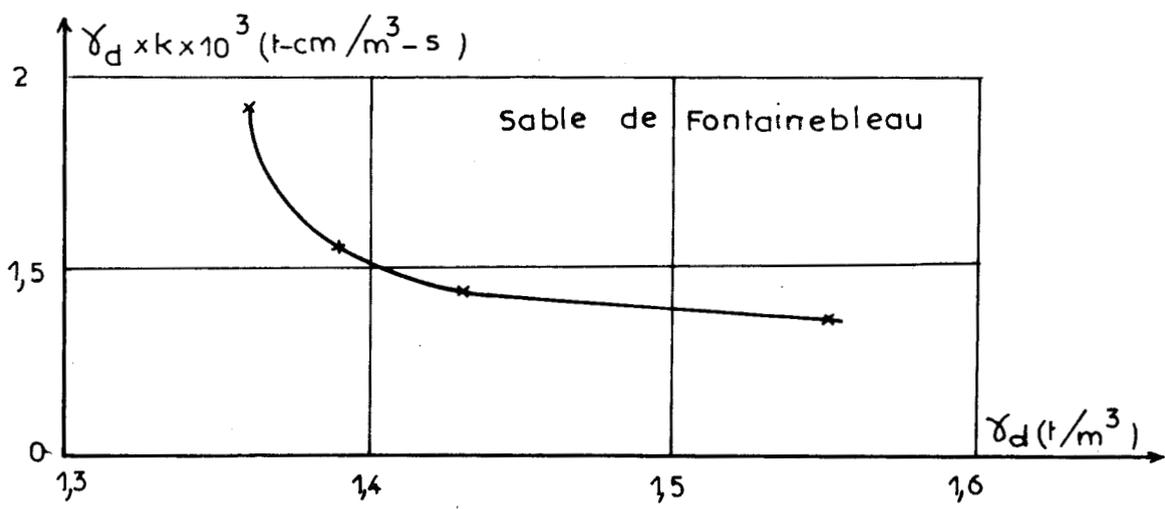


Fig 4 : Variations de  $k \cdot \gamma_d$  en fonction de  $\gamma_d$

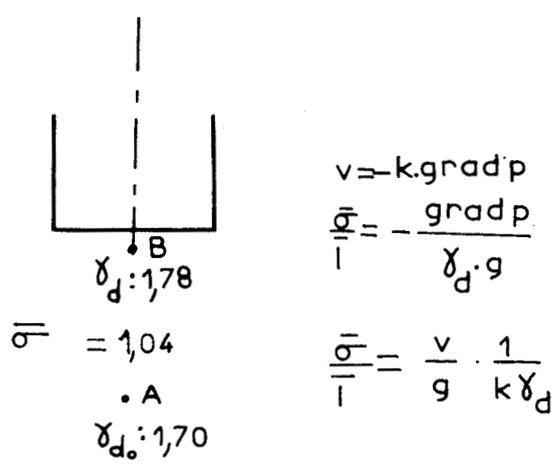
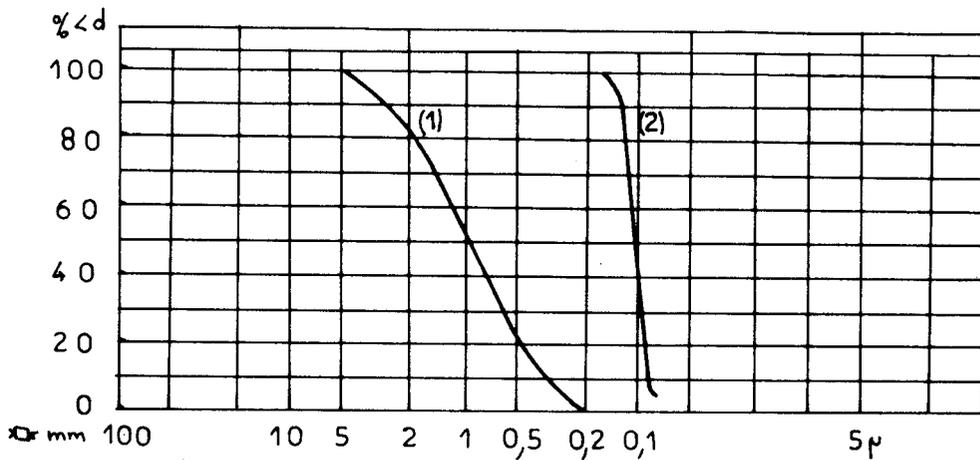


Fig 4bis : Influence de la compressibilité du sol sur l'échelle des contraintes



sable de			
Loire		Fontainebleau	
$\gamma_d$	$\varphi$	$\gamma_d$	$\varphi$
1,58	33°	1,41	33°
1,69	37°	1,48	35°
1,73	39°	1,57	37°
1,78	41°		

Densité - angle de frottement



Courbes granulométriques  
(1) sable de Loire  
(2) „ „ Fontainebleau

Fig 5: Caractéristiques des sables utilisés



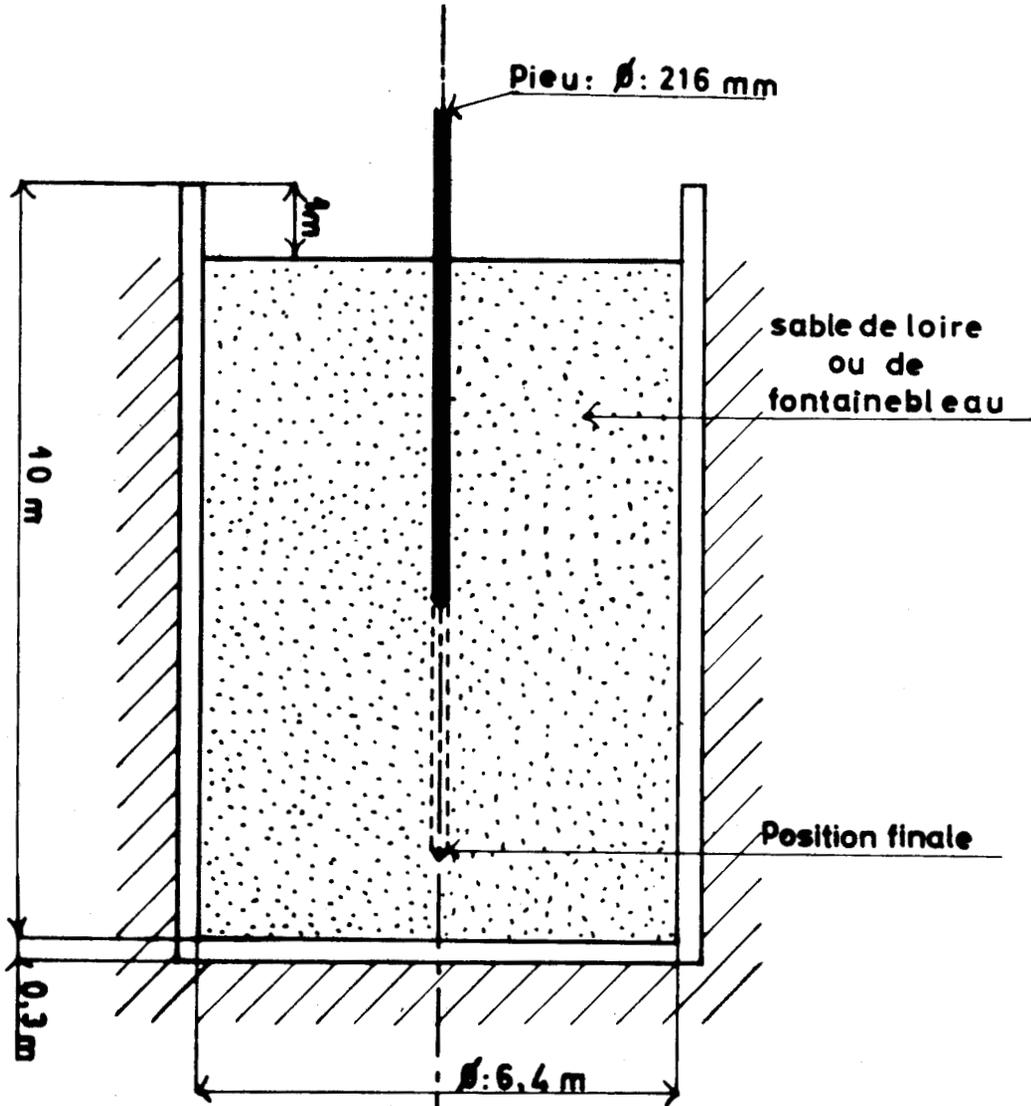


Fig:6, Cuve d'essai



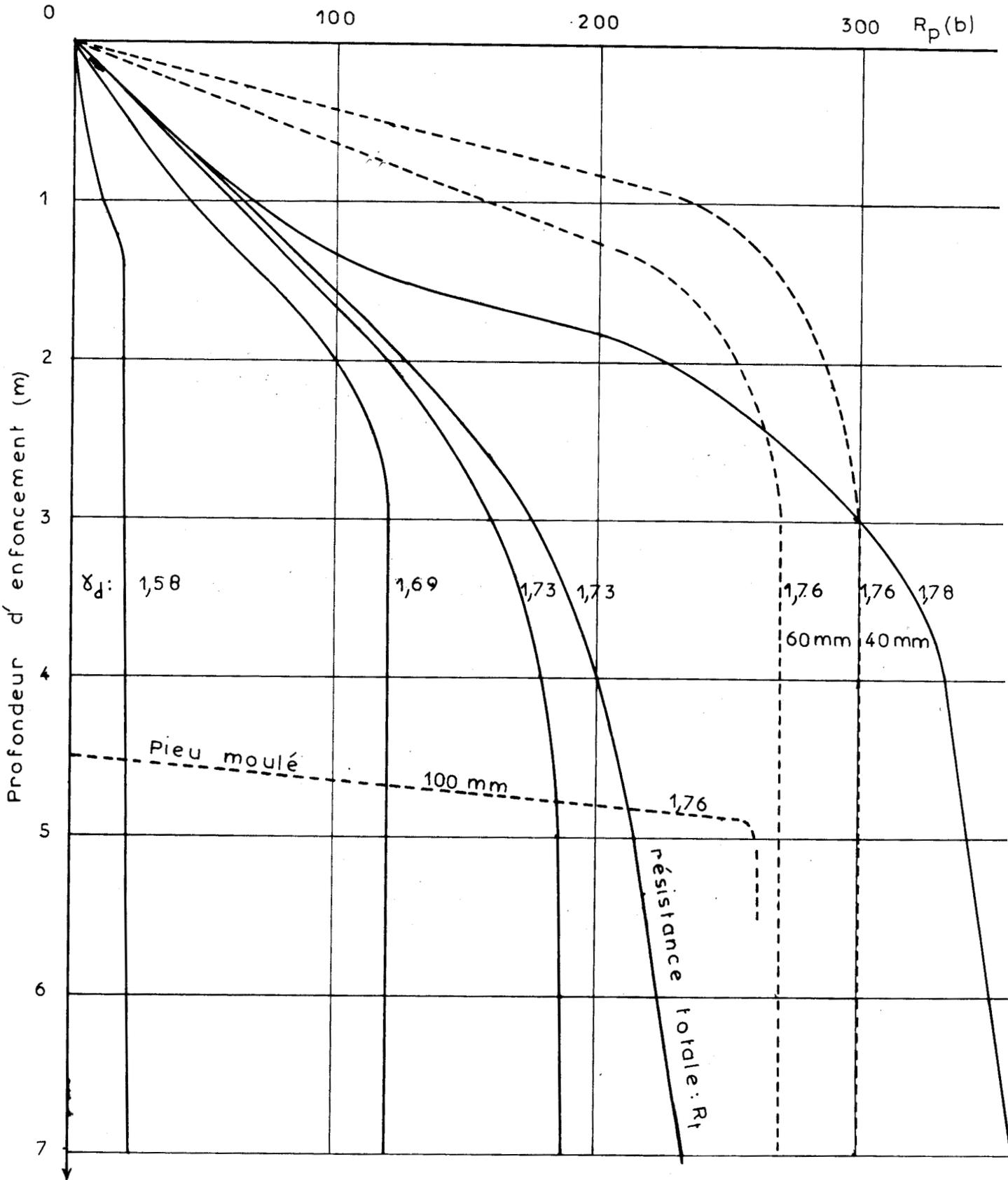


Fig.7 Essais de pénétration - Pieu  $\phi$  216 mm  
Sable de Loire



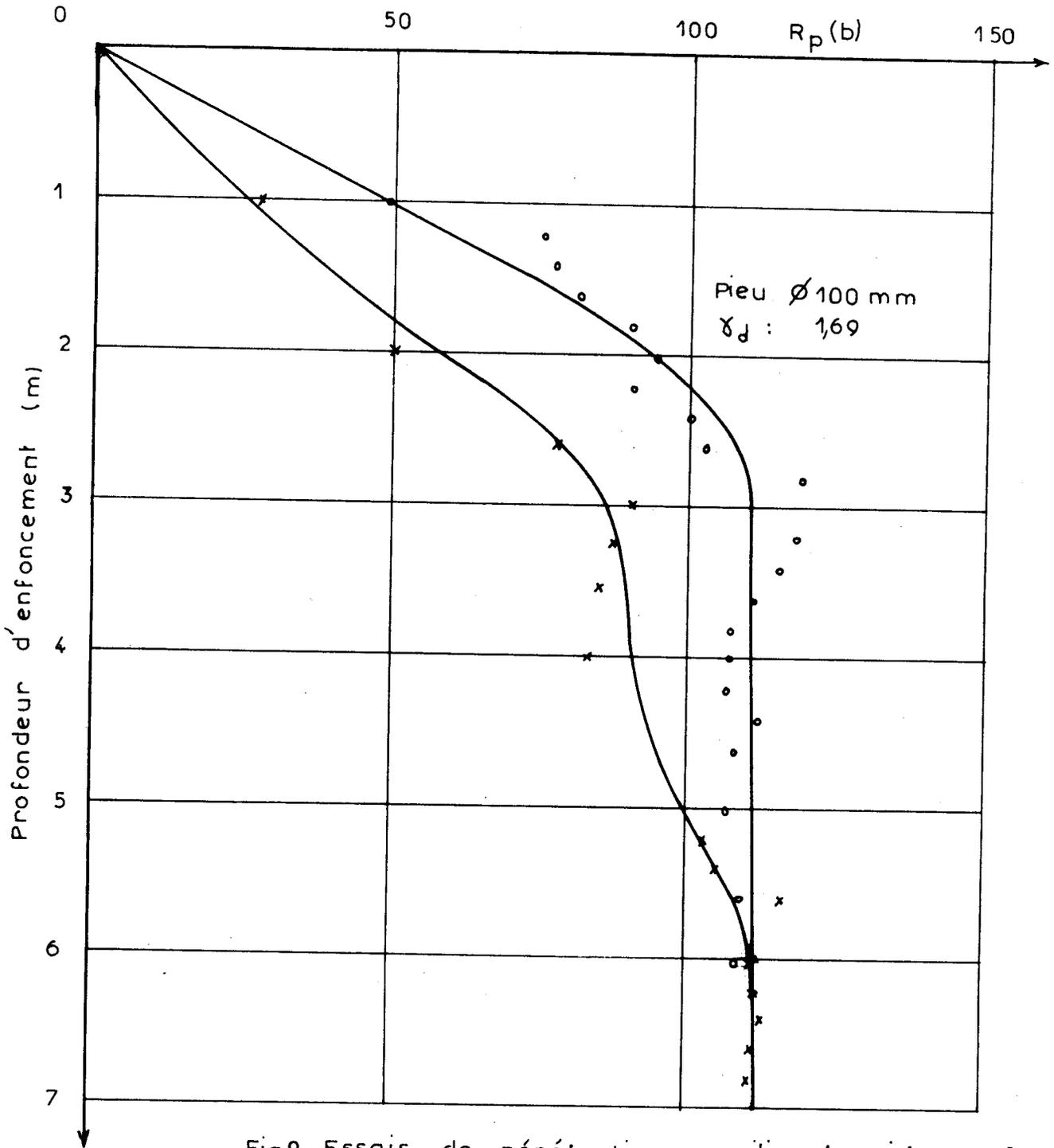


Fig8: Essais de pénétration en milieu humide  $w_s 6\%$  et saturé (x) - Sable de Loire



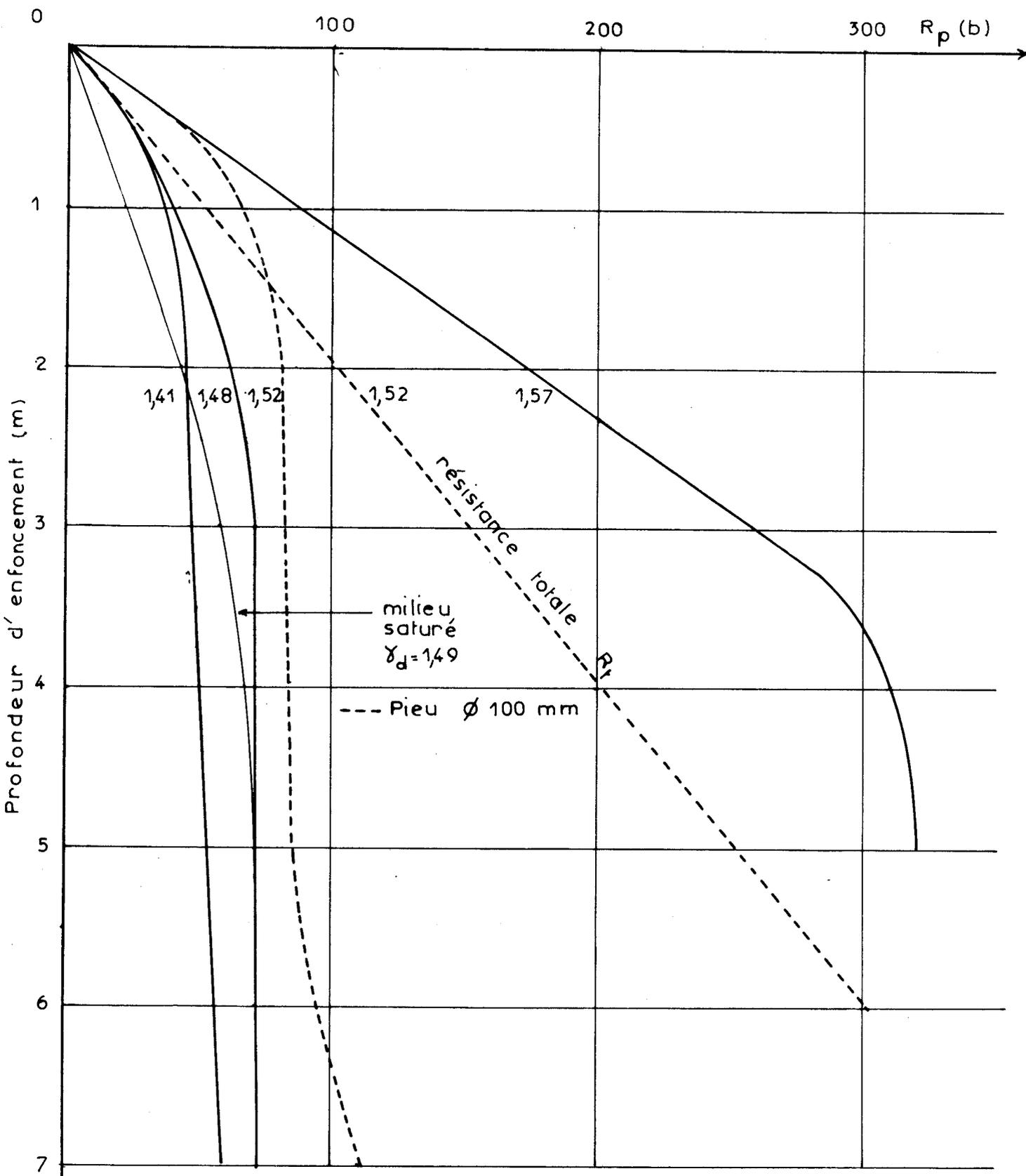


Fig 9 : Essais de pénétration - Pieu  $\phi$  216 mm  
sable de Fontainebleau



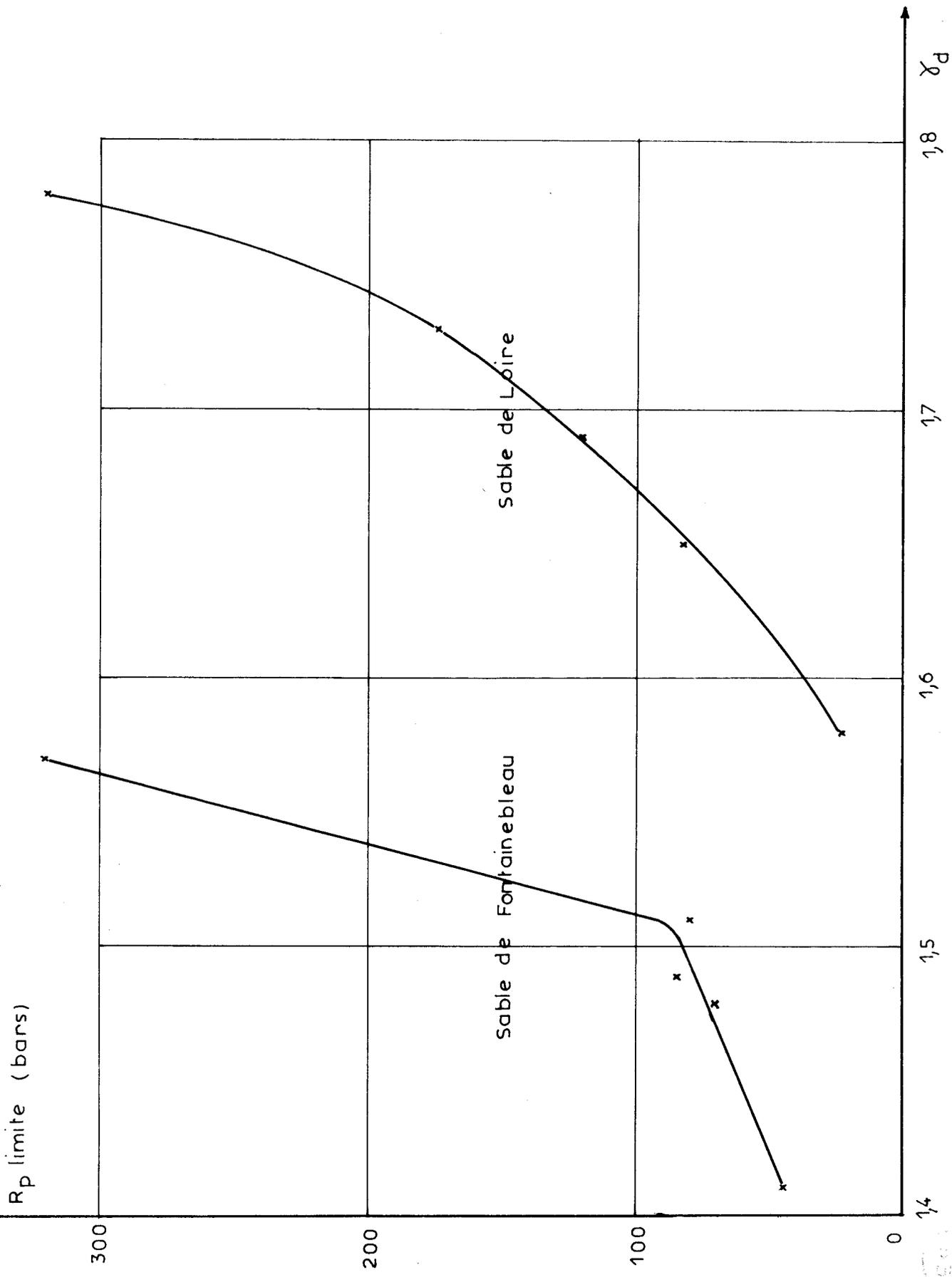


Fig 10: Résistance de pointe limite



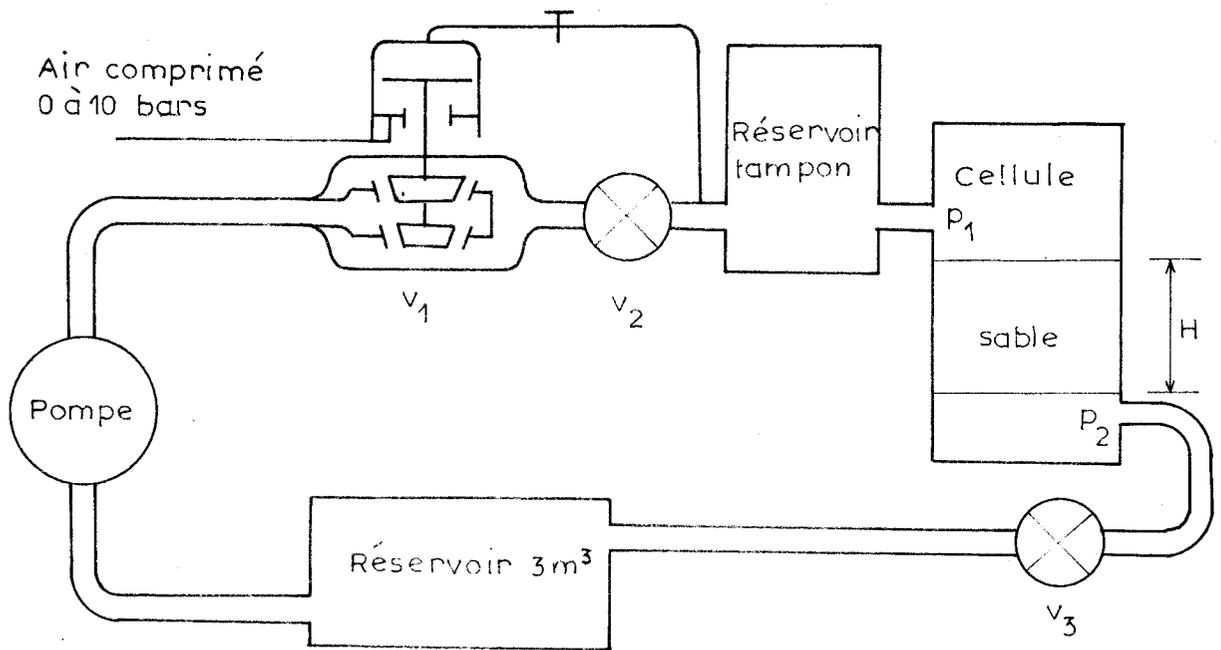


Fig 12 : Circuit Hydraulique

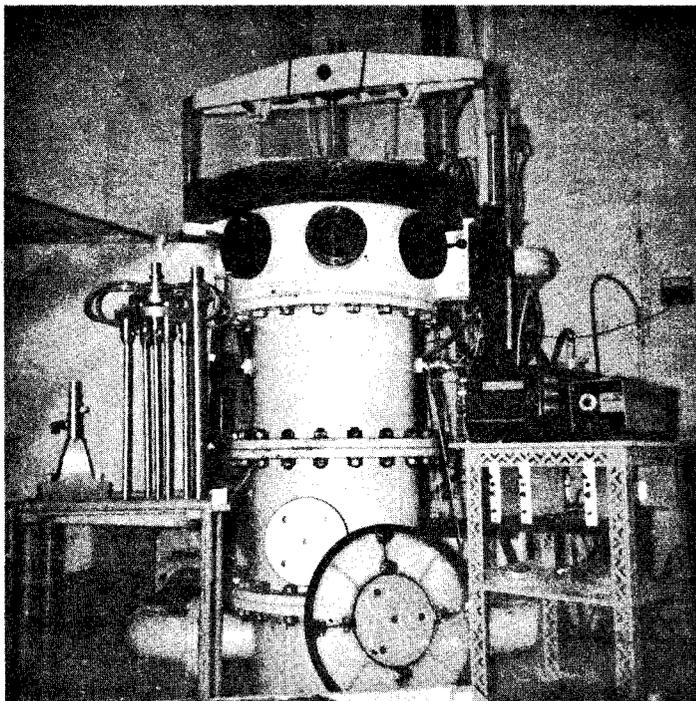
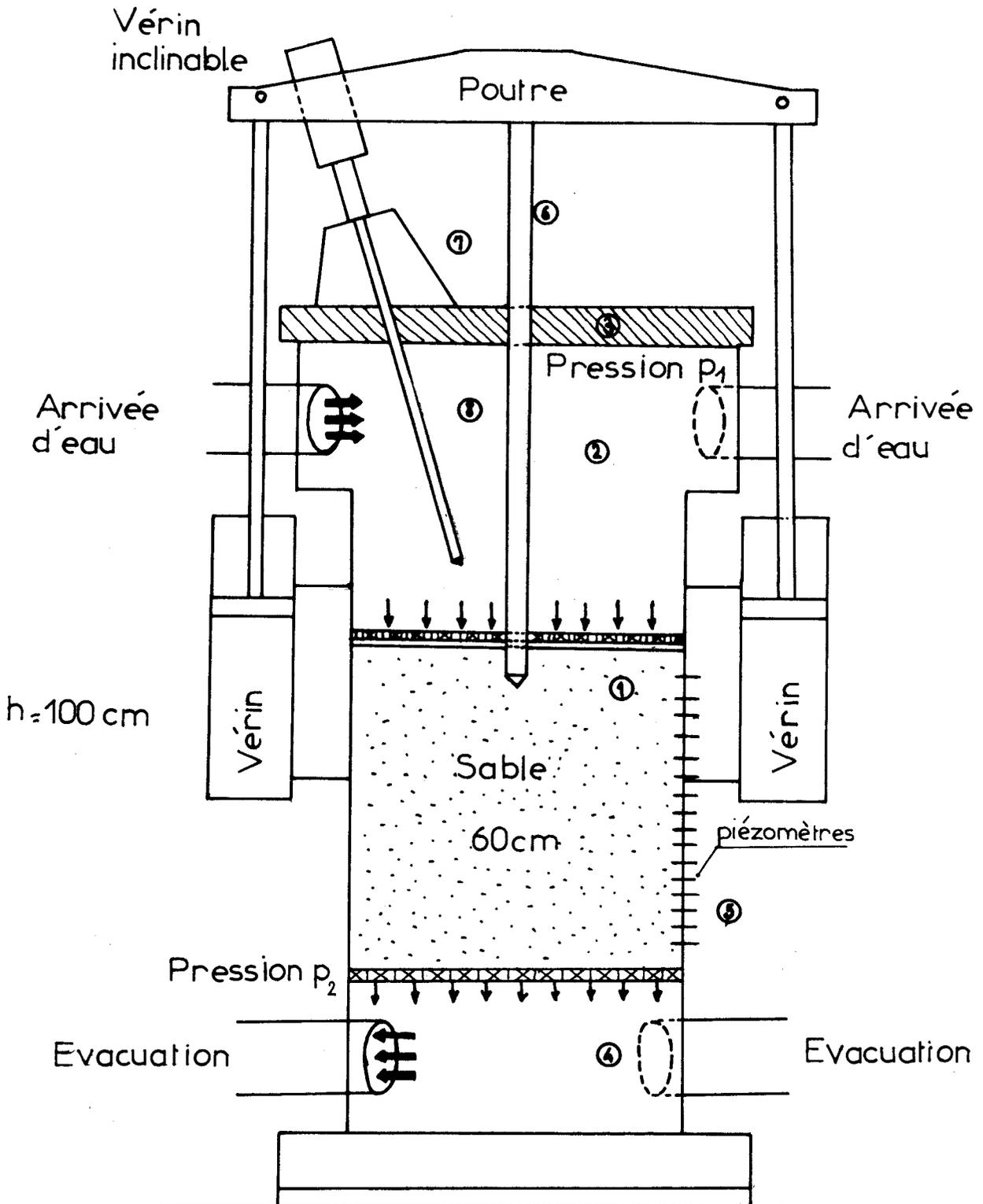


Fig 13a : Matériel d'essai



Fig 13b Cellule de mesure



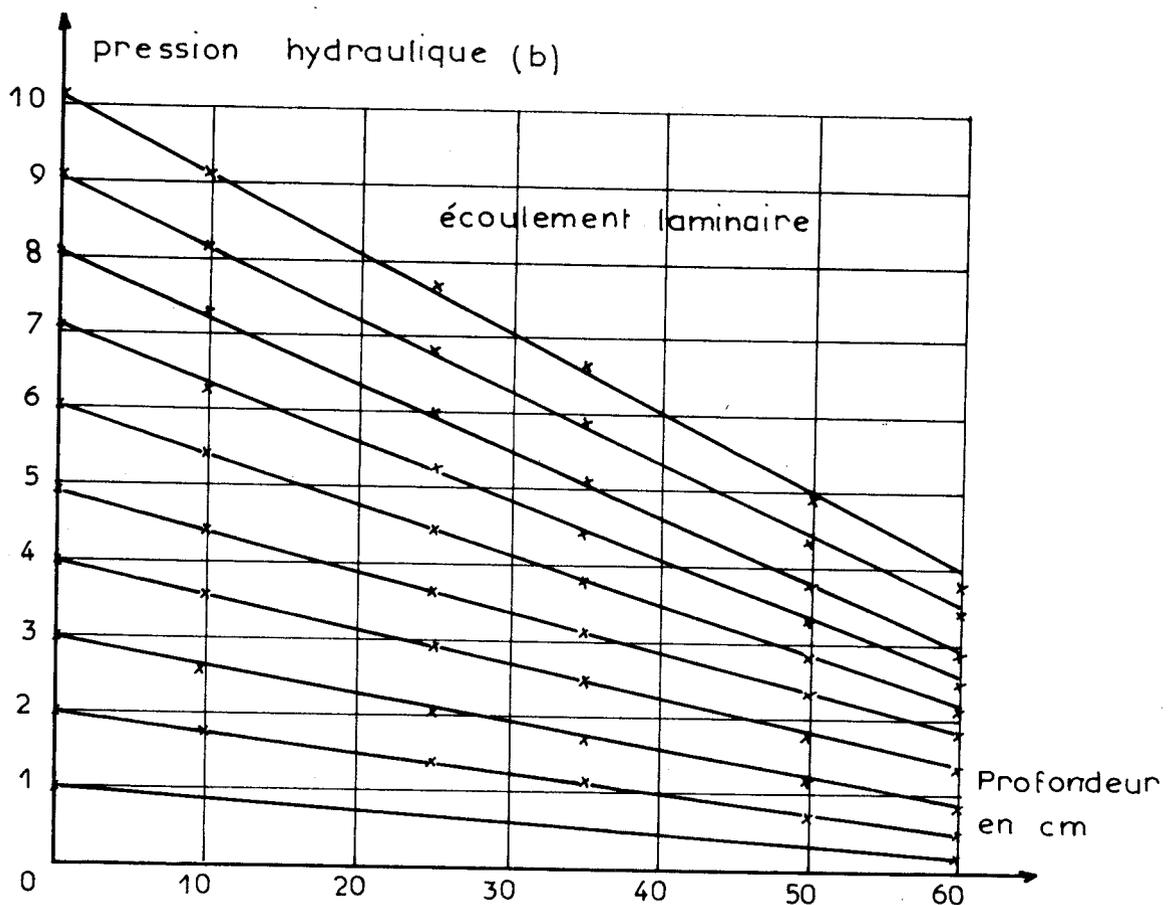
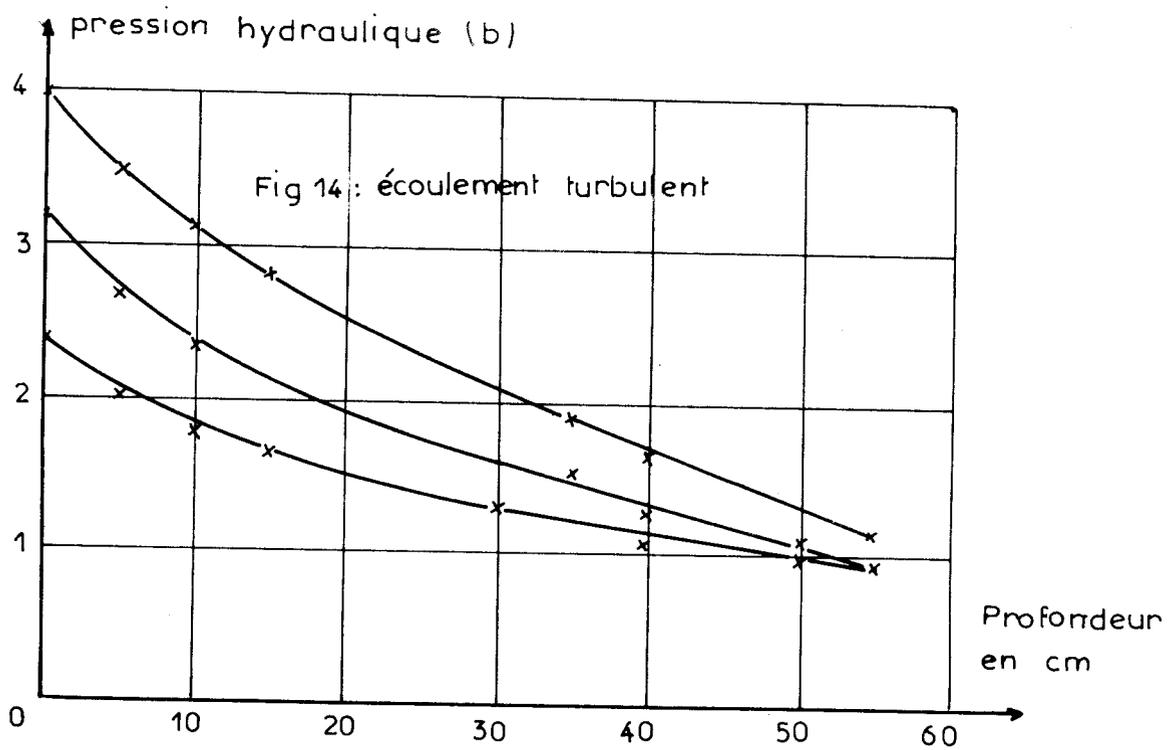


Fig 15 Variation de la pression de l'écoulement  
Sable de Loire :  $\gamma_s = 168$



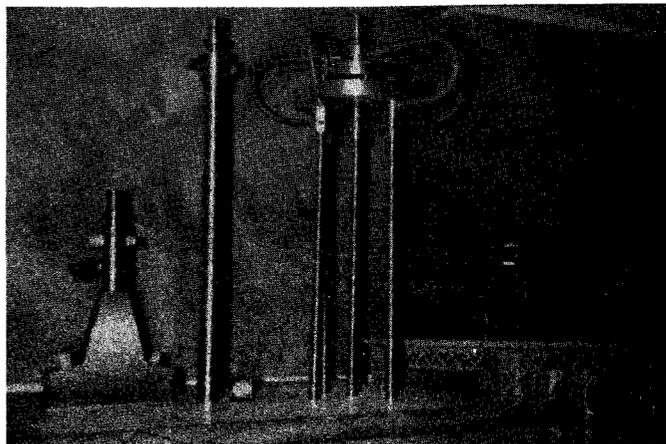
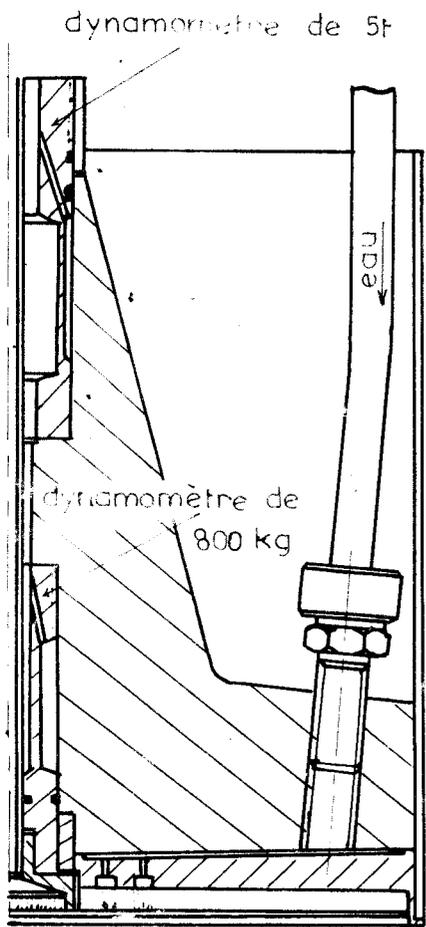


Fig 16 b : 1/2 Coupe fondation superficielle

- semelle
- pieu isolé
- groupe de pieux



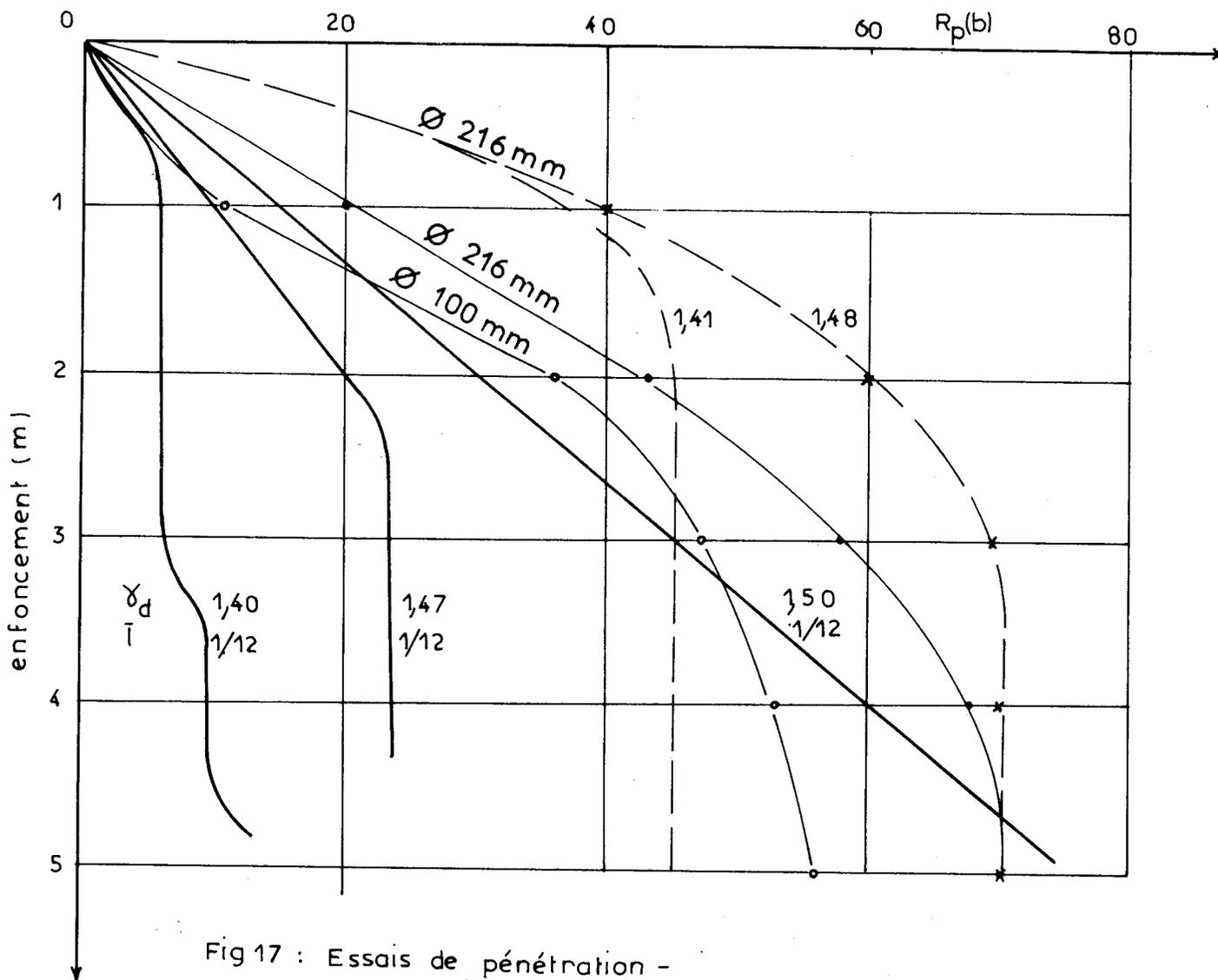


Fig 17 : Essais de pénétration -  
Sable de Fontainebleau

Essais en vraie grandeur { ——— sol humide  $w \sim 6\%$   
 ——— sol saturé  $\gamma_d = 1,49$

Essais en modèle  $\varnothing 20\text{ mm}$



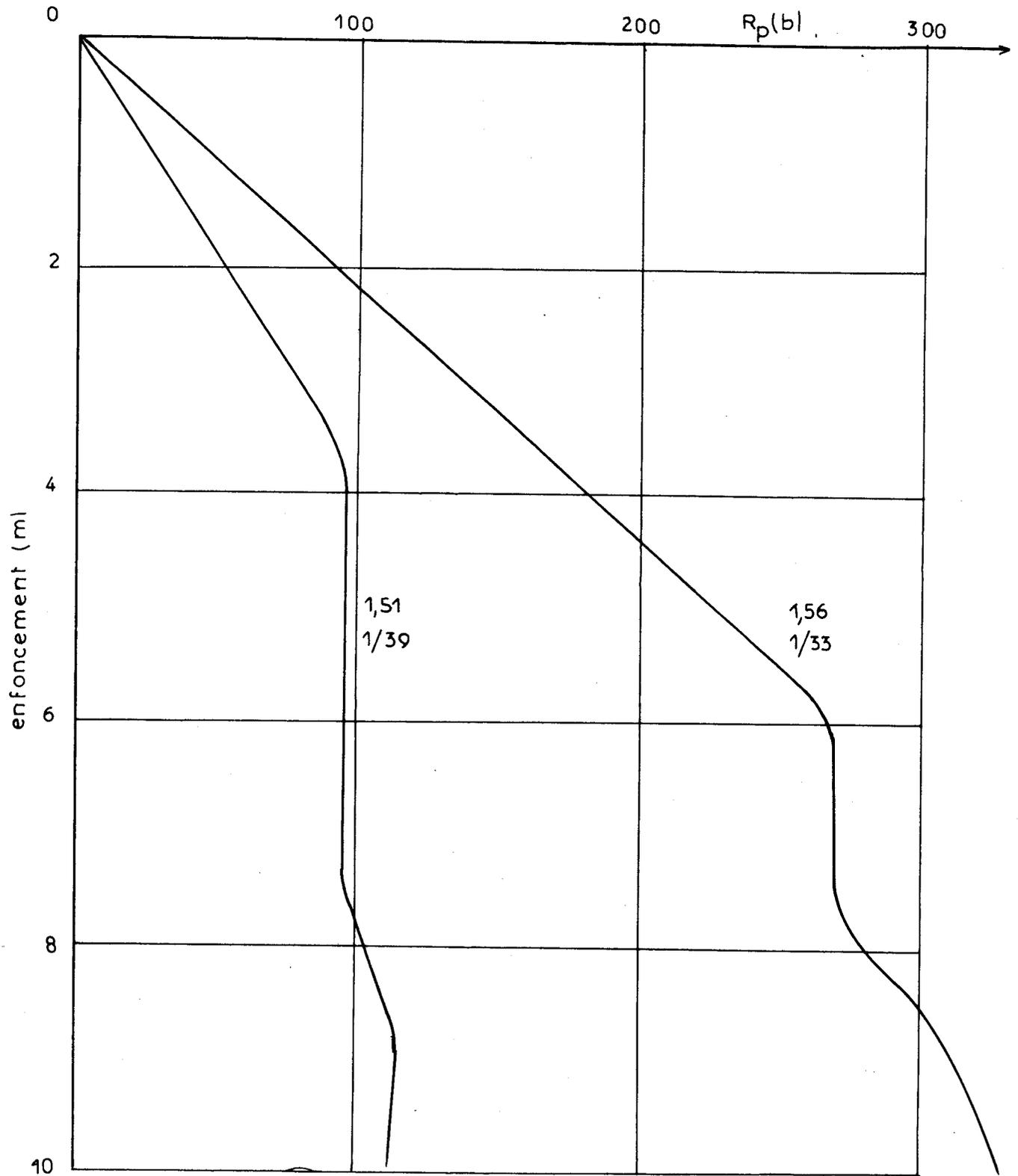
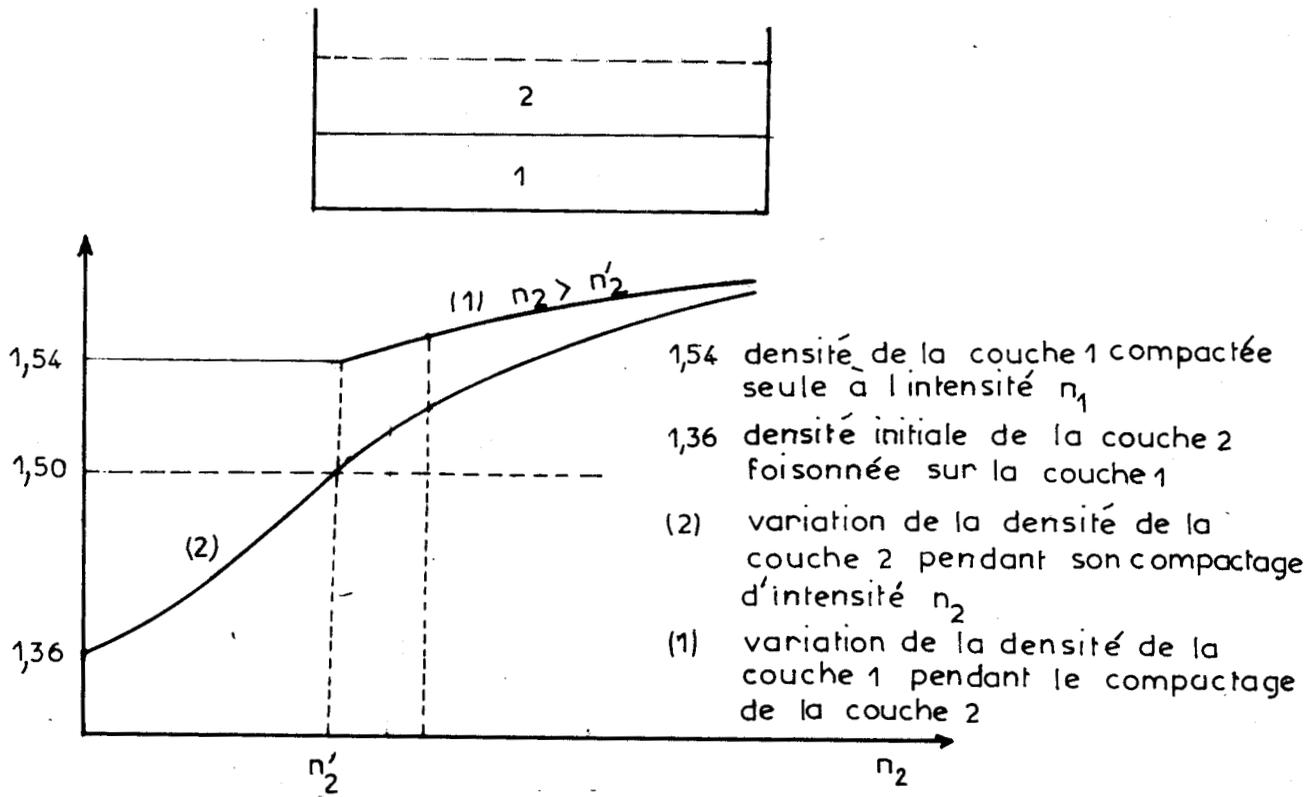


Fig 18 : Essais de pénétration — pieu  $\varnothing$  20 mm  
Sable de Fontainebleau





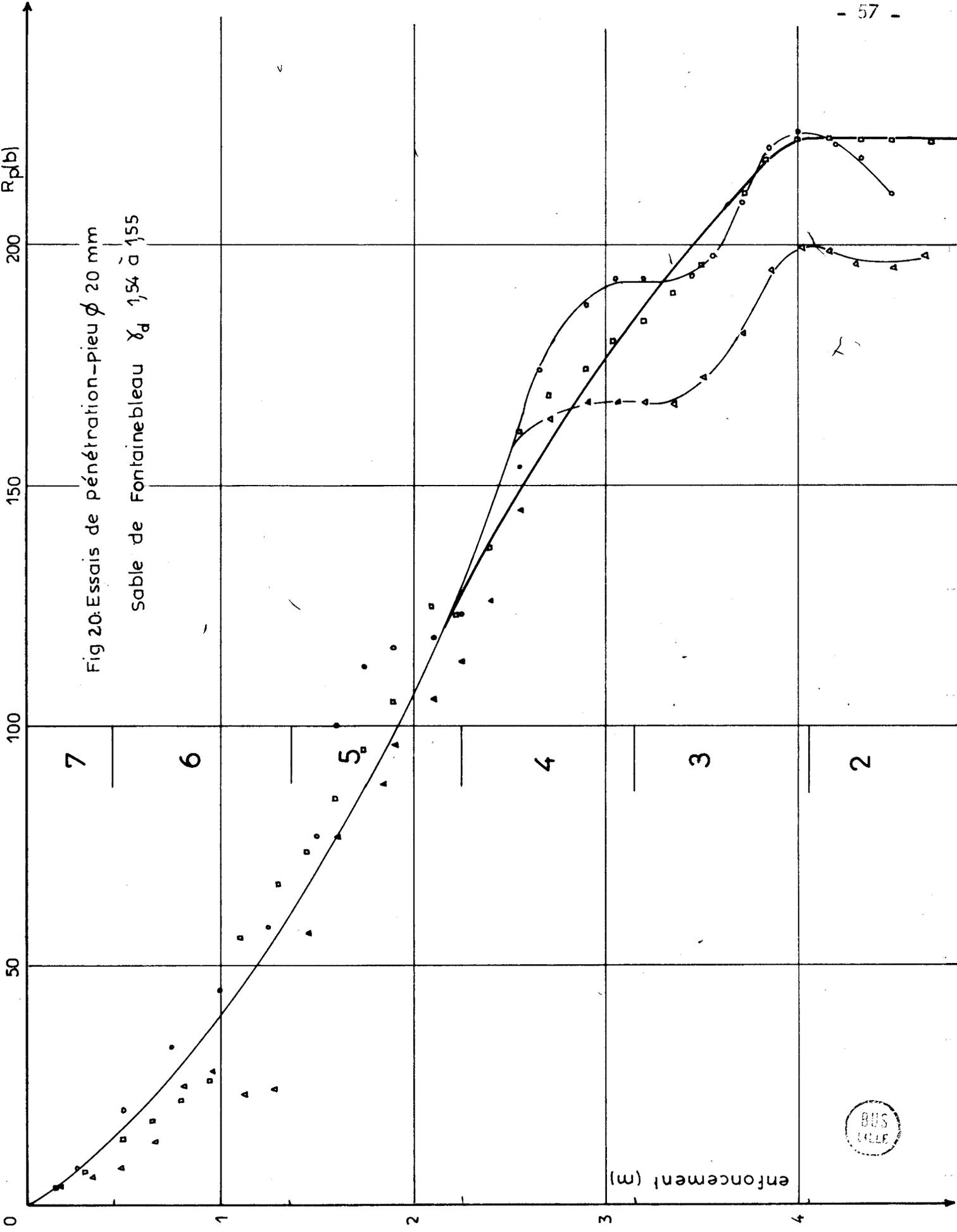
		nombre de chutes du mouton			
		$\gamma_d$ 1,47	1,47	1,48	1,53
		o	x	Δ	□
6	couche n°1	80	80	200	300
5		80	80	100	100
4		40	40	60	80
3		40	50	60	80
2		20	20	20	20
1		20	20	20	20

		$\gamma_d$ 1,54 à 1,55		
		o	Δ	□
7		400	500	500
6		200	300	300
5		200	200	200
4		200	250	250
3		200	200	100
2		20	100	100
1		20	50	50

Fig 19 : Compactage du sol



Fig 20: Essais de pénétration - pieu  $\phi$  20 mm  
Sable de Fontainebleau  $\gamma_d$  1,54 à 1,55



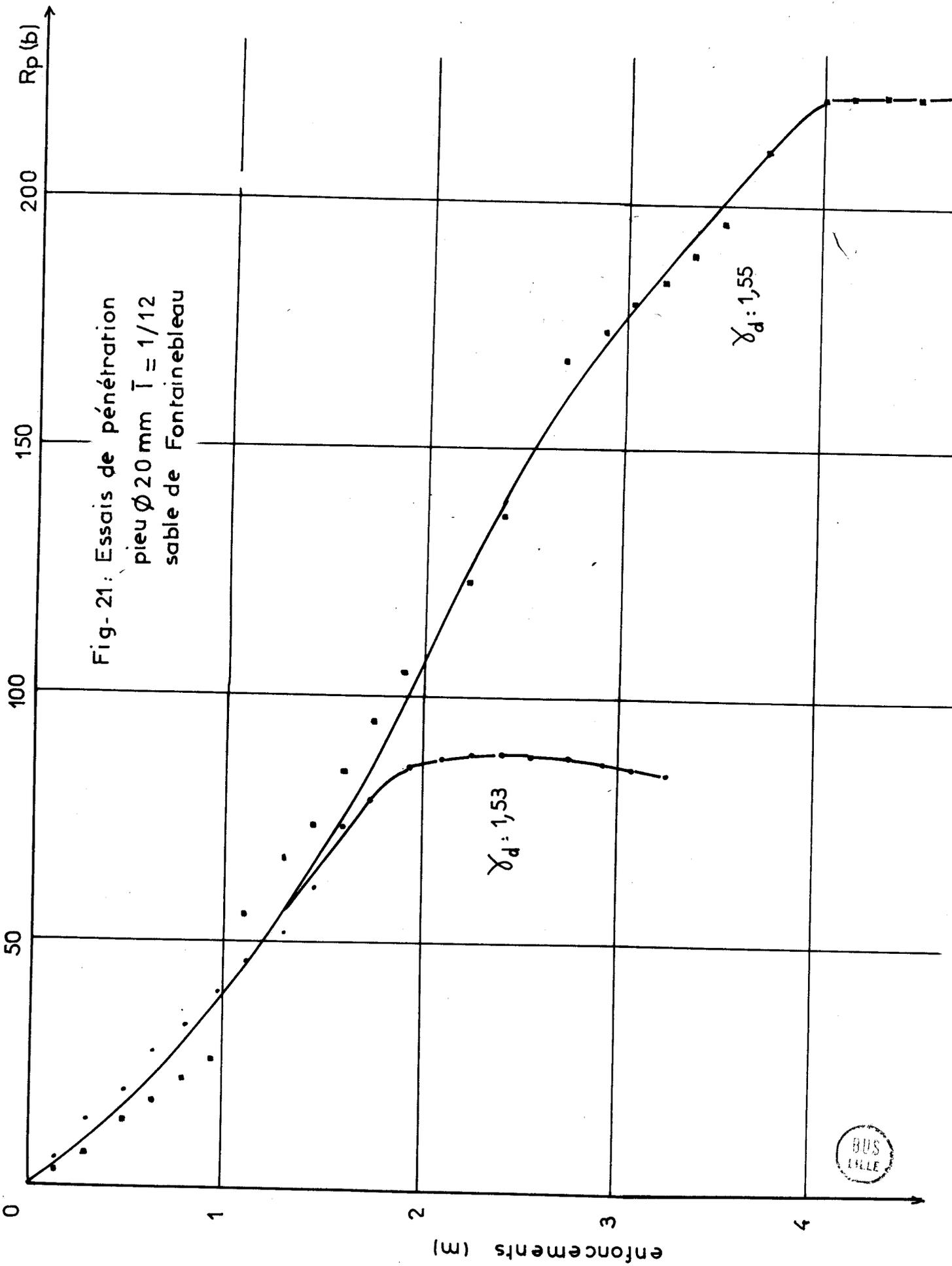
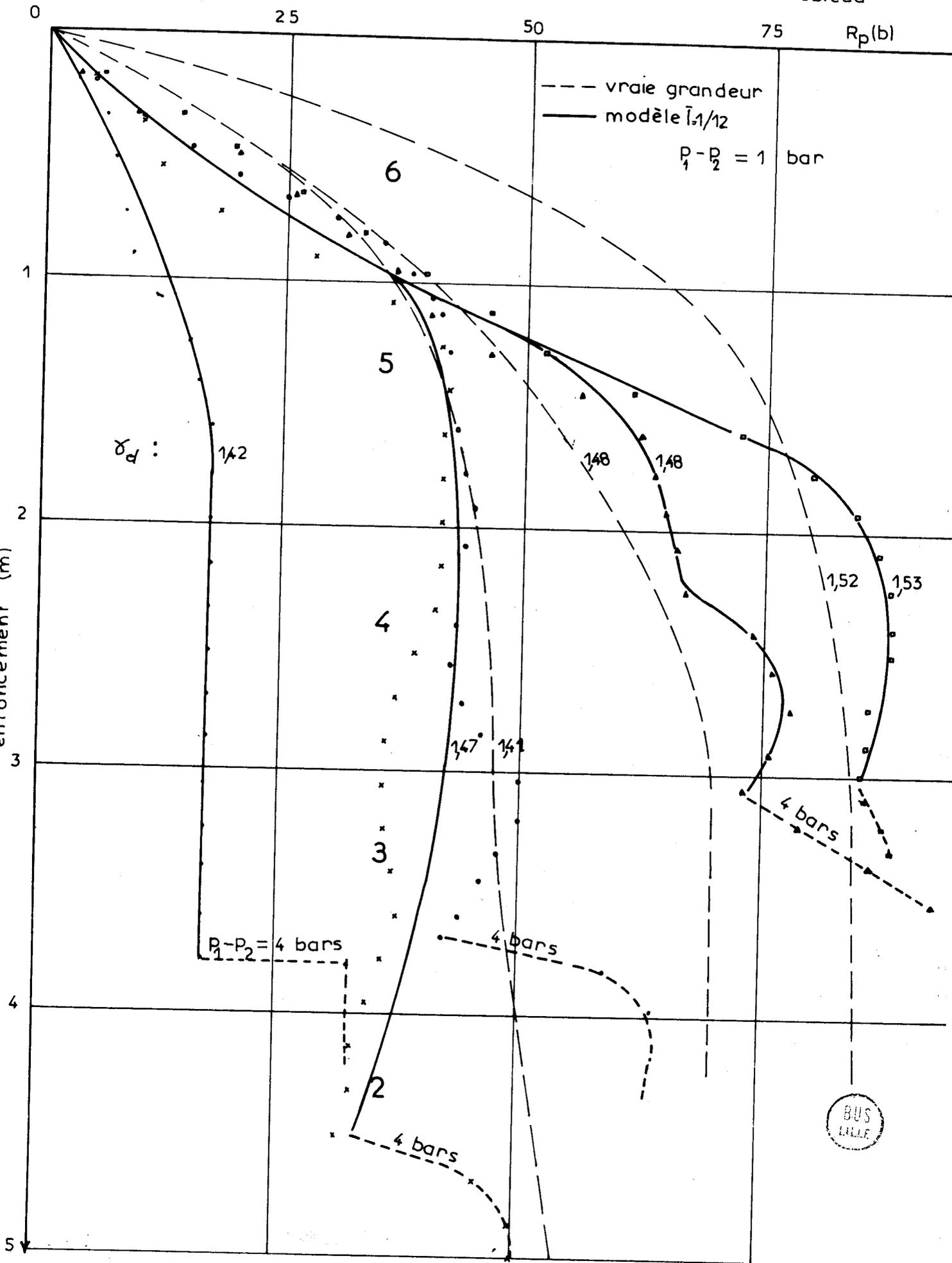


Fig- 21: Essais de pénétration  
pieu  $\varnothing$  20 mm  $\bar{T} = 1/12$   
sable de Fontainebleau



Fig 22: Essais de pénétration - pieu  $\phi$  20 mm - sable de Fontainebleau



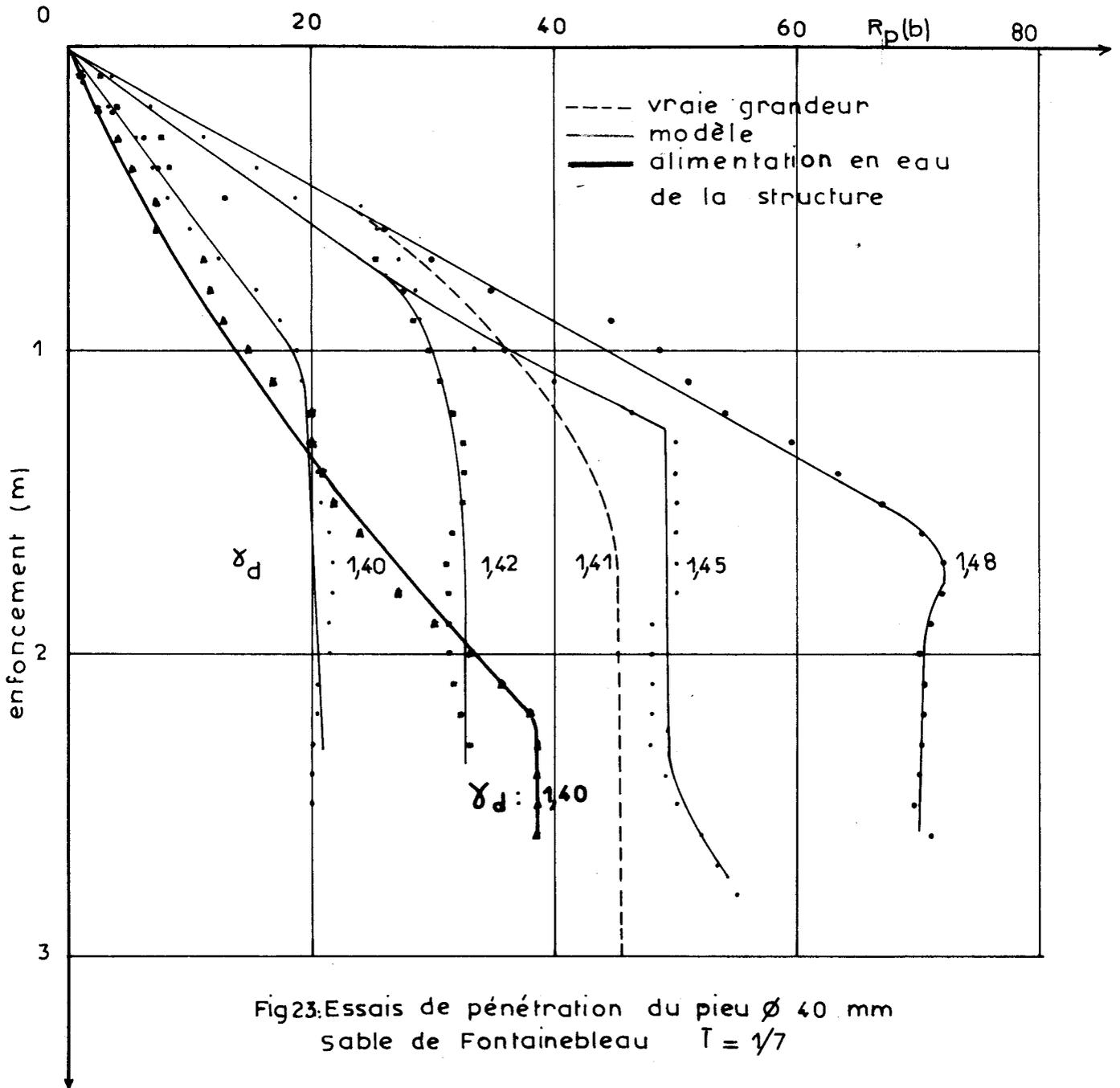


Fig23: Essais de pénétration du pieu  $\varnothing$  40 mm  
sable de Fontainebleau  $T = 1/7$

	1,40	1,42	1,45	1,48
	100	100	200	300
	80	100	100	100
	60	80	100	100
	60	50	30	80
	30	50	30	50

Compactage du sol



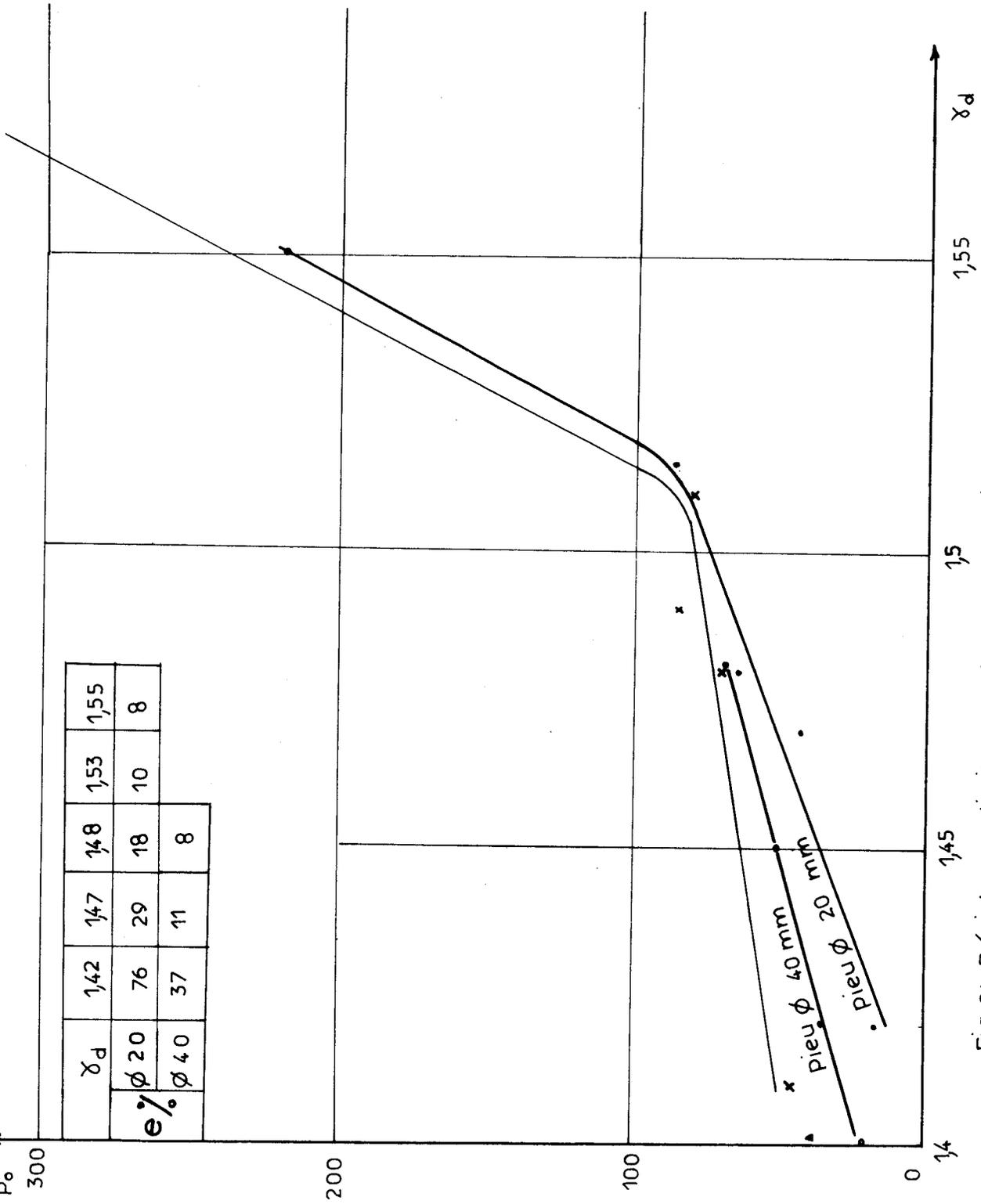


Fig 24 : Résistance - limite - sable de Fontainebleau  
 Domaine de validité de la similitude



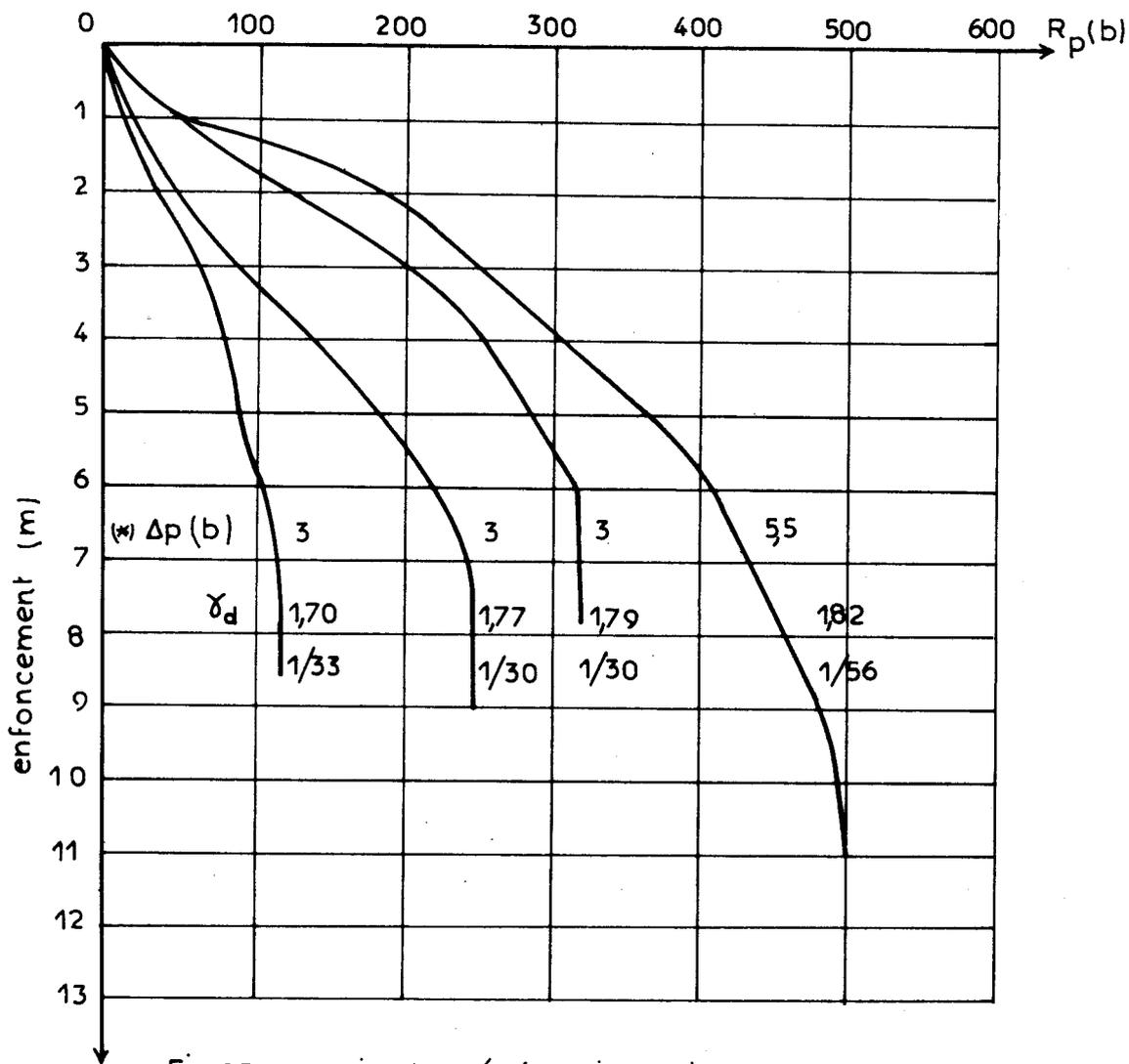
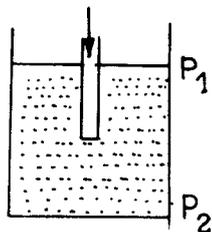


Fig 25: Essais de pénétration -pieu  $\varnothing$  20 mm  
Sable de Loire

(\*)  $\Delta p = P_1 - P_2$



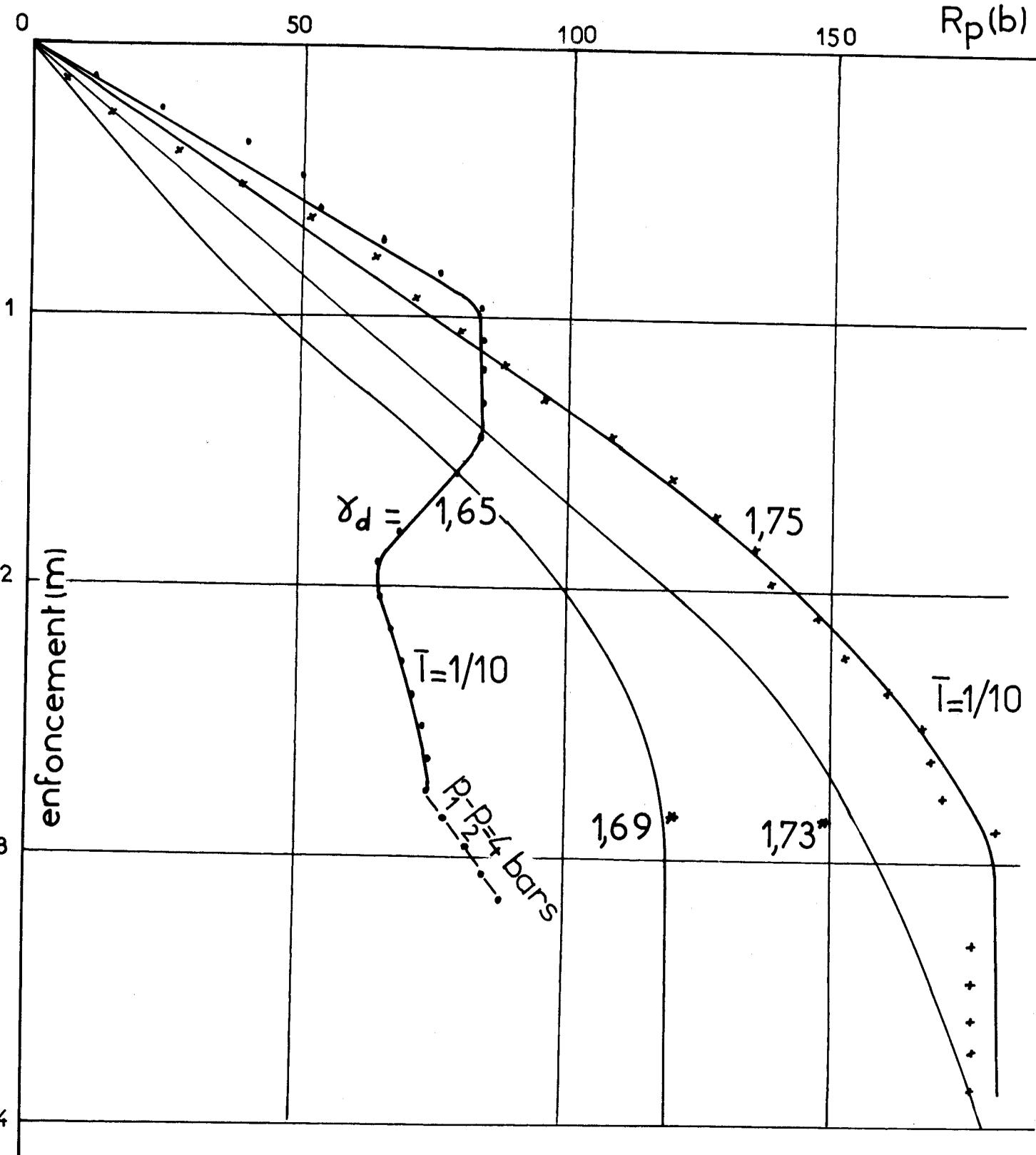


Fig 26 Essais de pénétration - pieu  $\varnothing$  20 mm  
Sable de Loire

(\*) Essais en vraie grandeur  $\varnothing$  216mm



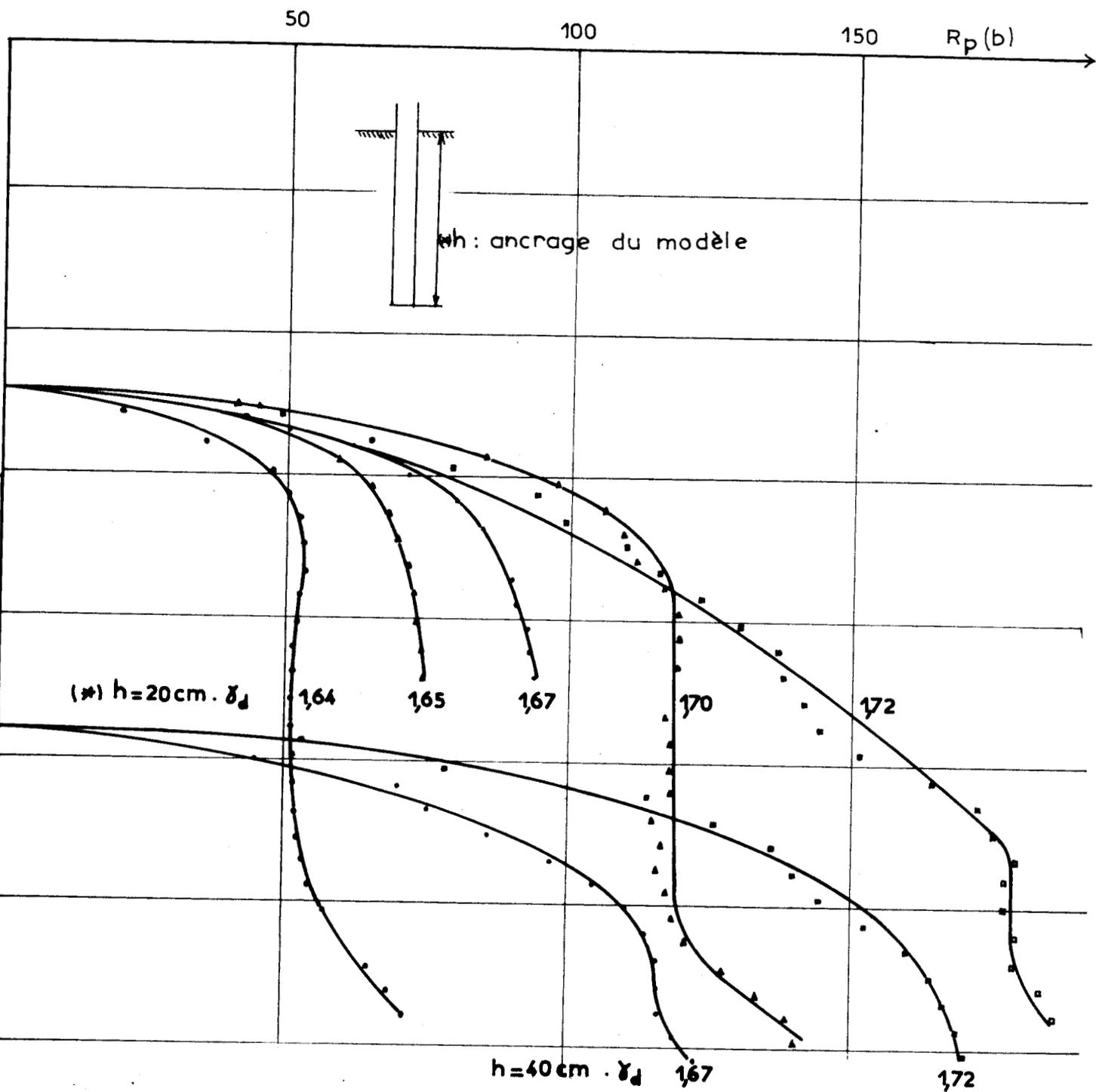


Fig 27: Essais de pénétration pieu  $\varnothing$  40 mm moulé  
Sable de Loire échelle 1/6



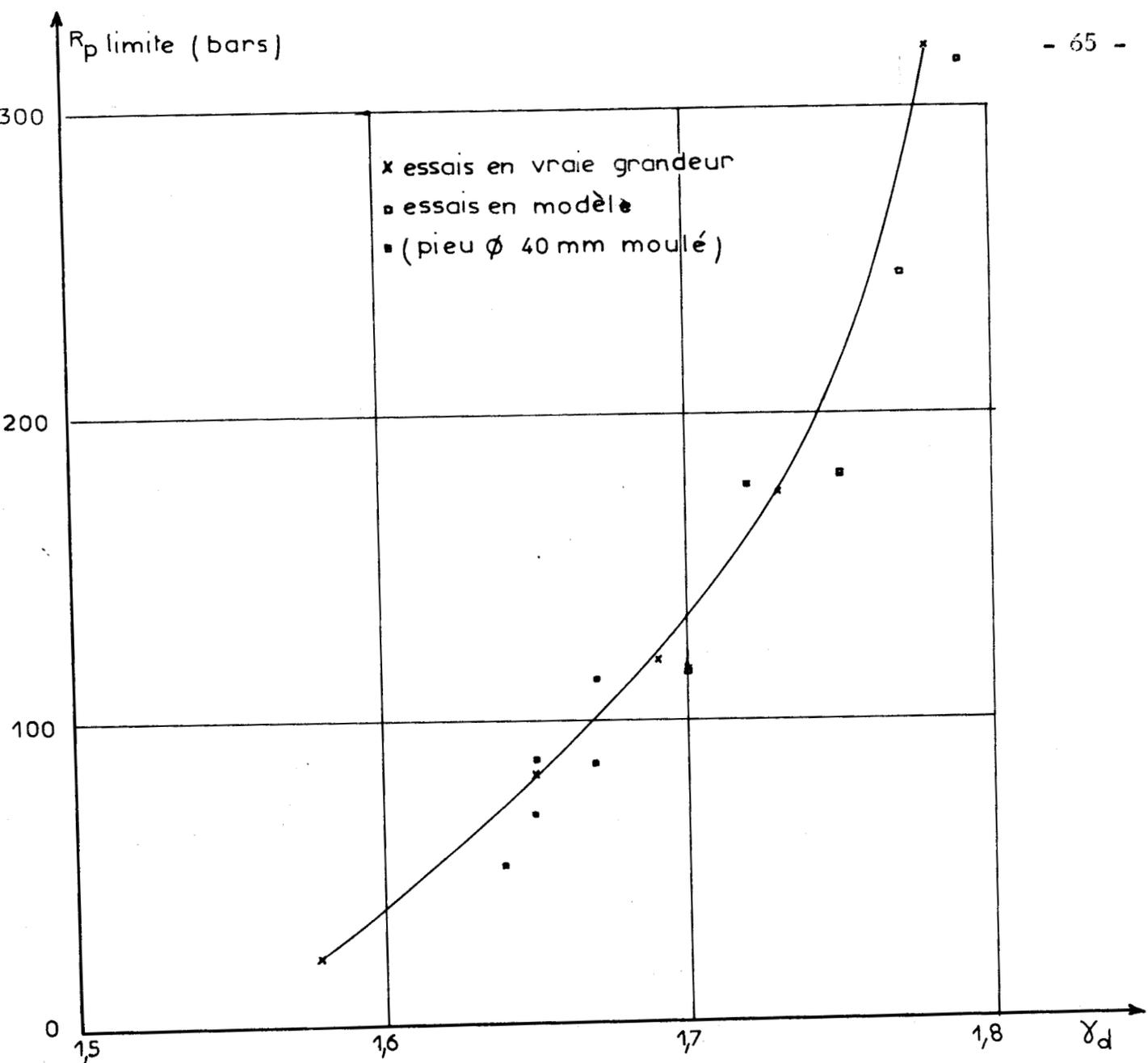


Fig 28 : Résistance de pointe limite  
Sable de Loire



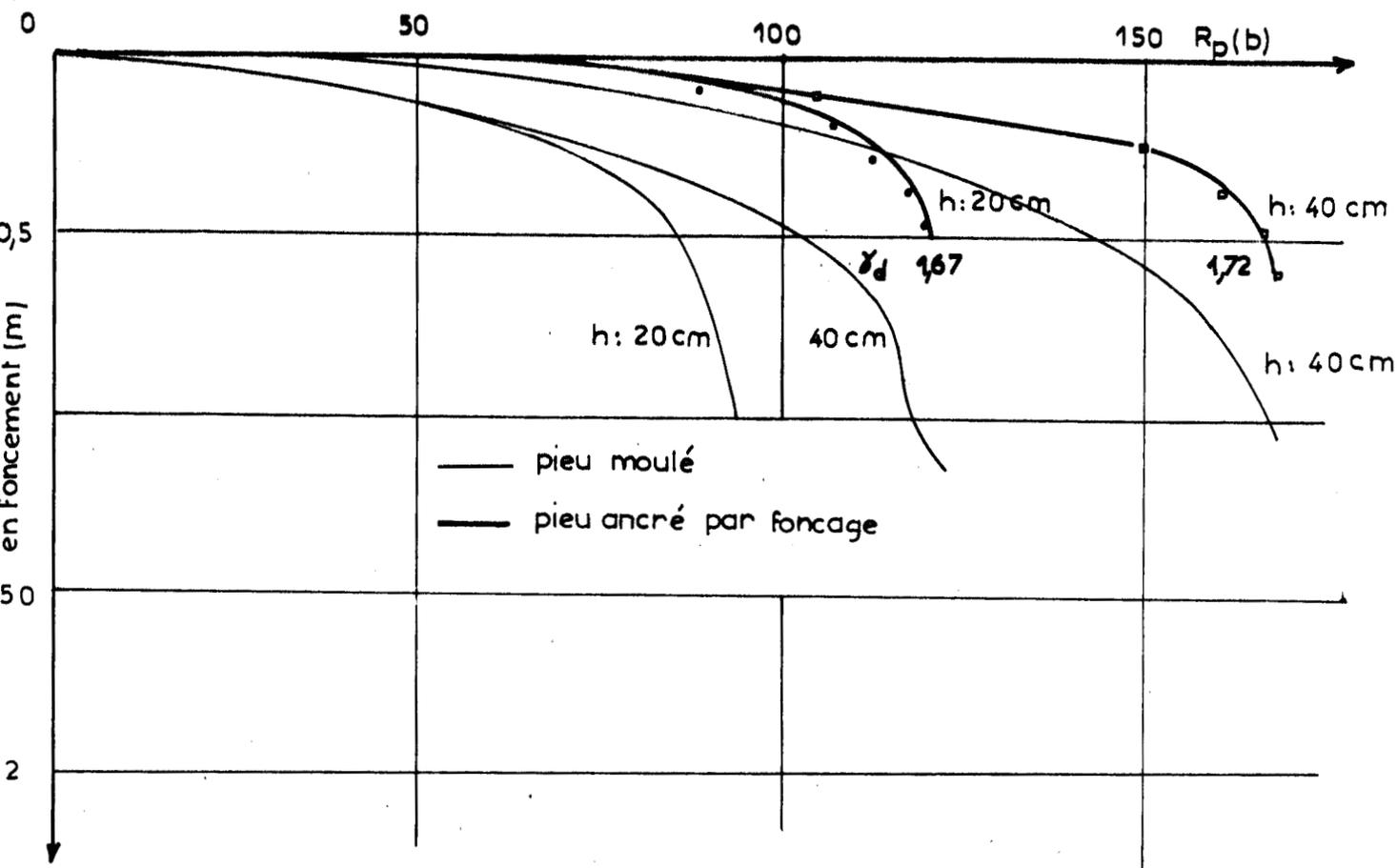


Fig 29 : Essais de pénétration - Pieu  $\phi$  40 mm  
Sable de Loire - échelle: 1/6

l'origine des enfoncements est placée  
au niveau de la pointe du pieu avant  
chargement

SECONDE PARTIE  
ETUDE THEORIQUE DES PROBLEMES DE  
POINCONNEMENT

CHAPITRE I - ETUDE DES PROBLEMES DE POINCONNEMENT  
PAR LA THEORIE DE LA PLASTICITE

I.1. - LOIS ET THEOREMES GENERAUX DE LA THEORIE DE LA  
PLASTICITE.

I.1.1. Principe du travail maximal - potentiel plastique

Les lois de comportement des métaux, dans le domaine plastique, s'expriment en première approximation, par les relations suivantes :

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| (1) $\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 2k^2$   | Critère de rupture HUBERT-MISES |
| (2) $d\varepsilon'_{ij} = \frac{d\sigma'_{ij}}{2.G} + \sigma'_{ij} \cdot d\lambda$ | Relation de PRANDTL-REUSS       |
| (3) $d\varepsilon_{ii} = \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_{ii}$                            | Variation de volume.            |

Les contraintes de traction, et les allongements sont positifs, donc  $d\lambda$  est un facteur positif, fonction de point et du temps.

Ces relations, déduites d'études expérimentales, montrent que :

- (1) Le critère de rupture ne dépend pas de la contrainte moyenne
- (2) La déformation plastique est isovolume.

...../.....

Dans le plan  $\pi$ , perpendiculaire à la trissectrice de l'espace des contraintes principales, la relation (1) est représentée par le cercle (c) de rayon  $OP$ . Le vecteur  $\vec{OQ}$ , de composantes  $2G \cdot d\varepsilon'_{ij}$ , est dans ce plan. Le vecteur  $\vec{OP}$  représente le déviateur  $\sigma'_{ij}$ . Dans le domaine élastique, P et Q sont confondus à l'intérieur du cercle (c). Après la rupture, P et Q sont distincts.

Au cours d'une variation  $d\sigma'_{ij}$  de  $\sigma'_{ij}$ , les points P et Q se déplacent en P' et Q' (figure 30). Si les directions principales des contraintes ne tournent pas par rapport à l'élément de matériau qui se déforme, les tenseurs  $\sigma'_{ij}$  et  $d\sigma'_{ij}$  ont mêmes directions principales; il en résulte que les directions principales des accroissements des déformations  $d\varepsilon_{ij}$  et des contraintes  $d\sigma_{ij}$ , sont confondues avec celles du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$ .

La relation (2) montre que les accroissements de déformation élastique et plastique sont respectivement parallèle et perpendiculaire à  $\vec{PP}'$ . Le travail dissipé pendant la déformation est :

$$(4) \quad dw = \frac{\vec{OP} \times \vec{OQ}'}{2G}$$

$dw$  est du signe de  $d\lambda$ , donc positif ou nul. Il est maximal si la déformation élastique est nulle, c'est à dire dans le cas des relations de LEVY-MISES :

$$(5) \quad d\varepsilon_{ij}^P = \sigma'_{ij} \cdot d\lambda$$

**Théorème du travail maximal :**

Parmi les états de contraintes statiquement admissibles, l'état de contrainte réel, à la limite d'écoulement, fournit le travail maximal pendant la déformation plastique.

...../.....

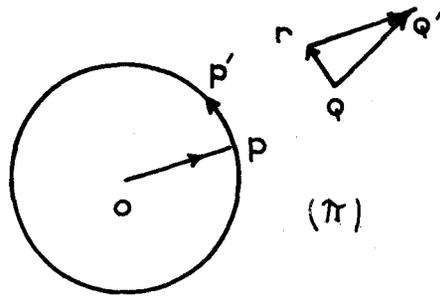


Fig 30 Représentation plane  
Contraintes - Déformations

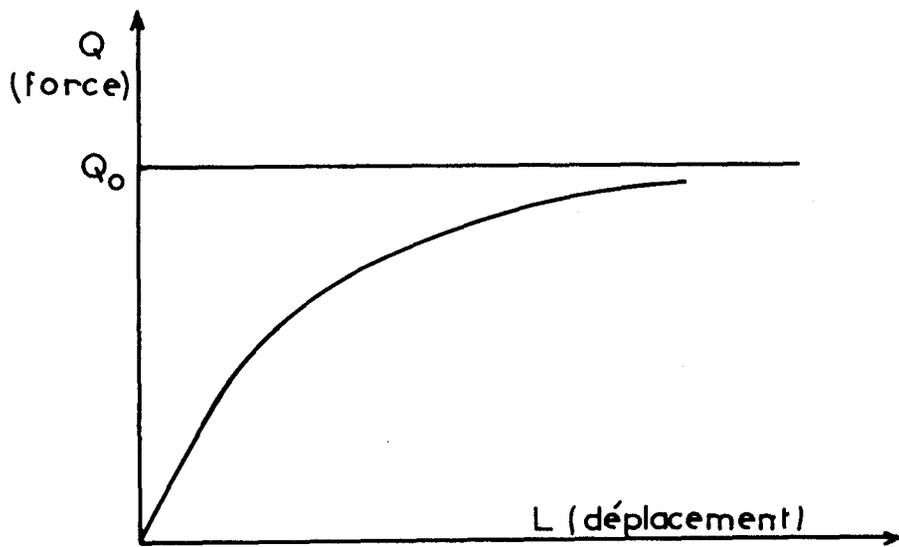


Fig 31 Courbe de chargement

Conséquences du théorème du travail maximal - potentiel  
plastique :

L'équation  $f(\sigma_{ij}) = 0$  représente le critère de rupture(1)

Le théorème du travail maximal s'écrit alors :

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma_{pq}} (\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P - f d\lambda) = 0$$

où  $d\lambda$  est un facteur multiplicateur indéterminé. Les déformations  
plastiques dérivent donc du potentiel  $f$  par la relation :

$$(7) \quad d\epsilon_{ij}^P = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\lambda$$

La relation (3) montre que  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 0$

Le critère de rupture ne dépend pas de la contrainte  
moyenne, la surface de charge, qui représente dans l'espace  
 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  la relation  $f(\sigma_{ij}) = 0$ , est un cylindre dont les  
généatrices sont parallèles à la trissectrice. Le long de chaque  
généatrice, le vecteur  $\vec{OP}$  demeuré équipollent à lui-même, les cer-  
cles de MOHR limites sont donc tangents aux droites parallèles à  
l'axe des contraintes normales. L'ordonnée de ces droites dépend  
de la génératrice considérée. Le critère de rupture peut donc s'ex-  
primer par la relation de TRESCA :

$$\sup (\sigma_i - \sigma_j) \leq 2 k$$

On exprime la relation (2) sous une forme plus générale  
en écrivant que les accroissements des déformations permanentes  
infinitésimales sont linéaires par rapport aux accroissements des  
contraintes.

$$(8) \quad (d\epsilon^P)_{ij} = A_{ijkh} \cdot d\sigma_{kh}$$

Les expériences de DRUCKER et STOCKON ( 1953), ont montré que les coefficients  $A_{ijhk}$  ne dépendent pas des accroissements  $d\sigma_{kh}$  ;  $(d\varepsilon^P)_{ij}$  doit s'annuler pour toutes les variations  $d\sigma_{kh}$  qui maintiennent l'état de contraintes sur la surface

$f(\sigma_{hk}) = 0$ , c'est à dire telles que :

$$(9) \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{hk}} d\sigma_{hk} = 0$$

On en déduit que :  $A_{ijhk} = H_{ij} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{hk}}$

d'où  $(d\varepsilon^P)_{ij} = H_{ij} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{hk}} \cdot d\sigma_{hk} = H_{ij} \cdot df$

Dans le cas où le matériau suit le principe du travail maximal :

$$(d\varepsilon^P)_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda$$

$$\text{donc : (10) } \frac{H_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} = \frac{d\lambda}{df} = g(J_2, J_3)$$

L'expression générale permettant de calculer  $(d\varepsilon^P)_{ij}$  est donc :

$$(11) \quad (d\varepsilon^P)_{ij} = g(J_2, J_3) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} df.$$

$df$  est positif vers l'extérieur de la surface de charge, donc la fonction  $g(J_2, J_3)$  est positive.

...../.....

### I.1.2. Limites des charges limites

Les paramètres d'effort  $Q$ , et de déplacements  $L$ , définissent le système  $L, Q$  type. La courbe  $(Q, L)$  précise le comportement du matériau étudié (figure 31) ; on admet en général qu'elle est une asymptote d'ordonnée  $Q_0 = Q_0$  est la charge limite que le matériau peut supporter au cours de l'expérience considérée.

Les théorèmes des travaux virtuels et du travail maximal permettent de montrer que l'on peut déterminer par le calcul une charge  $Q_0$  unique, ne dépendant que de la répartition des forces extérieures sur le système. Ce résultat est la base du calcul à la rupture. Il permet de connaître les efforts limites (ou ultimes) par rapport auxquels sont définis les coefficients de sécurité qu'il semble raisonnable d'adopter.

Cette valeur de  $Q_0$  est déterminée chaque fois qu'il est possible de trouver dans le système, un champ de contraintes statiquement admissible, (c'est à dire un champ qui vérifie les conditions aux limites, les équations d'équilibre et qui ne viole nulle part le critère de rupture) et de lui associer un champ de vitesses qui vérifie les conditions aux limites, par les relations de comportement (fig. 31).

Dans les autres cas, les théorèmes de la borne inférieure et de la borne supérieure permettent de calculer 2 valeurs extrêmes encadrant  $Q_0$ .

Théorème de la borne inférieure :

L'effort limite, déterminé à partir d'un champ de contraintes statiquement admissible est toujours inférieur à la charge, limite actuelle.

...../.....

**Théorème de la borne supérieure :**

L'effort limite, déterminé en égalant le travail virtuel des contraintes associées à un champ de vitesses cinématiquement admissible, au travail des forces extérieures, est toujours supérieur à la charge limite actuelle.

**I.2. - POINÇONNEMENT PAR ECOULEMENT NAISSANT**

Dans ces problèmes, on suppose que le matériau est rigide-plastique, et que l'écoulement plastique est libre (fig. 32 et 33). A l'extérieur de la zone plastique, il n'y a aucune déformation. Ces hypothèses semblent acceptables dans l'exemple suivant :

Un poinçon est posé à la surface libre horizontale du matériau, il lui applique un effort  $Q$ . On suppose que le déplacement du poinçon est très faible tant que  $Q$  est inférieur à  $Q_0$ , la géométrie du système à l'état limite ( $Q = Q_0 - \epsilon$ ) et la courbe  $(Q, L)$  peuvent donc être représentés par les figures 32 et 33.

En associant le champ cinématiquement admissible au champ statiquement admissible, SHIELD calcule la valeur de  $Q_0$  quand le poinçon est cylindrique et sans frottement à sa base.

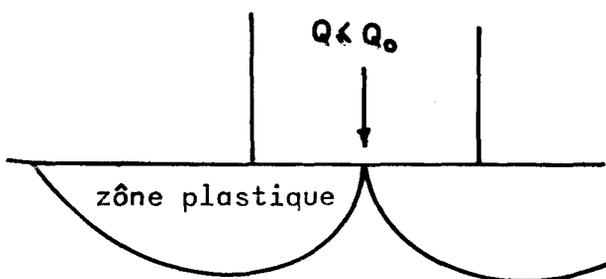


Fig. 32 - Écoulement naissant.

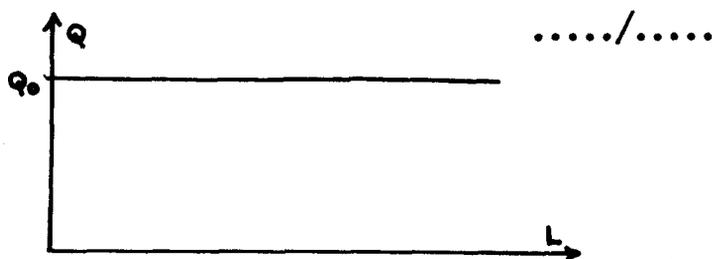


Fig. 33 - Comportement rigide-plastique.

Le régime plastique est celui de HAAR KARMANN :

$$\sigma_1 = \sigma_3 \geq \sigma_2$$

Les lignes marginales, pour lesquelles la scission est maximale, font l'angle  $\phi$  (ligne  $\alpha$ ), et  $\frac{\pi}{2} + \phi$  ( ligne  $\beta$  ) avec l'axe  $o r$  ( fig. 35 )

Les équations du problème sont :

$$(12) \quad dp + 2kd\phi + k(\sin\phi + \cos\phi)ds_\alpha/r = 0, \quad dU - Wd\phi + Uds_\alpha/2r = 0$$

$$(13) \quad dp - 2kd\phi - k(\sin\phi + \cos\phi)ds_\beta/r = 0, \quad dW + Ud\phi + Uds_\beta/2r = 0$$

$$(14) \quad \Gamma = \frac{\partial U}{\partial s_\beta} + \frac{\partial W}{\partial s_\alpha} + U \frac{\partial \phi}{\partial s_\alpha} - W \frac{\partial \phi}{\partial s_\beta}, \quad \Gamma \geq \frac{U}{r} \geq 0$$

La méthode des caractéristiques permet d'obtenir les résultats suivants :

Les lignes caractéristiques des contraintes et des vitesses, sont les lignes marginales  $\alpha$  et  $\beta$ . La déformation résulte donc de glissements le long de ces lignes de discontinuités de la vitesse.

La pression moyenne  $Q_0$  est égale à 5,69 k

Il est nécessaire de déterminer un champ de contraintes statiquement admissible dans le domaine rigide, afin d'appliquer le théorème de la borne inférieure. Ce problème a été étudié par J.F.W. BISHOP. ( figure 36)

Les données le long de la ligne BCDO, et la condition  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  sur l'axe de symétrie, engendrent le champ des contraintes à gauche de la ligne  $\alpha$  issue du point B. A droite de cette ligne, on suppose, pour prolonger le champ, que la surface BL ne supporte pas d'efforts. Les lignes  $\alpha$  se coupent au point K, avec la ligne

...../.....

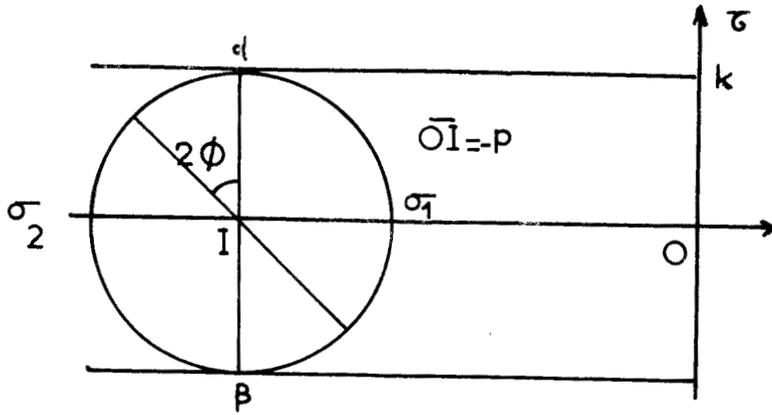


Fig 34 Etat de contraintes au point P

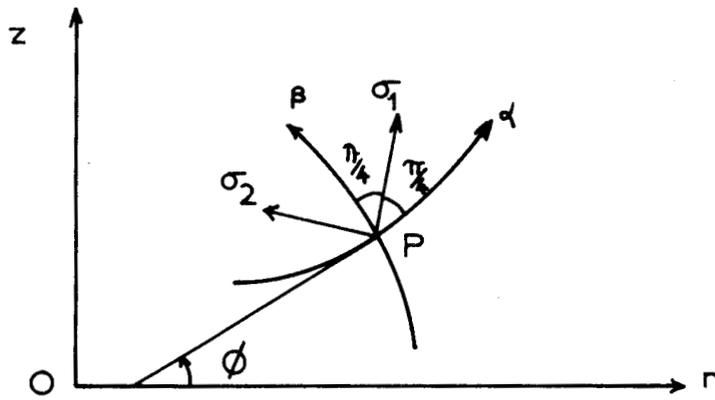


Fig 35 Caractéristiques  $\alpha$  et  $\beta$



CHARGE LIMITE :  $Q_0 = 5,69 \text{ k}$

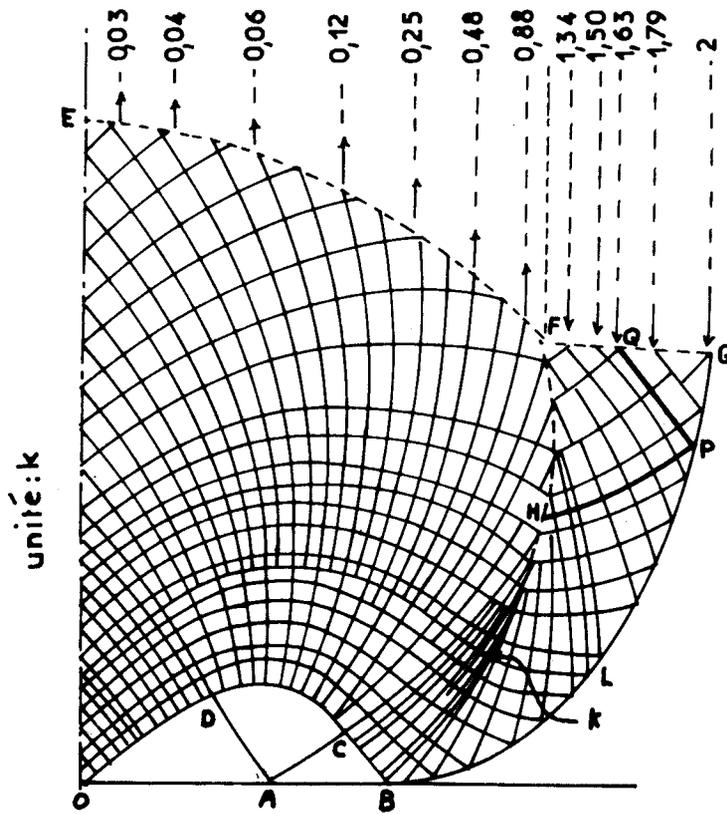


Fig 36 Caracteristiques des contraintes



s'applique pas dans le cas général. RADENKOVIC suppose alors que les déformations dérivent du potentiel  $g(\sigma_{ij})$  :

$$(17) \quad d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

Les directions principales du tenseur des contraintes et des accroissements de déformation sont confondues. Le matériau est dit standard si  $f = g$  ; il est non standard dans le cas contraire.

Si la surface d'équation  $g(\sigma_{ij}) = 0$  est convexe, intérieure à la surface  $f(\sigma_{ij}) = 0$ , RADENKOVIC généralise la théorie des charges limites :

1. La charge limite pour le matériau standard, défini par  $f(\sigma_{ij})$ , est une borne supérieure de la charge limite pour le matériau non standard considéré.

2. La charge limite pour le matériau standard, défini par  $g(\sigma_{ij})$ , est une borne inférieure de la charge limite pour le matériau non standard considéré.

" L'unicité de la solution n'étant pas assurée, on définit la solution admissible. Cette solution doit vérifier l'ensemble des équations d'équilibre, d'écoulement, le critère de rupture et les conditions aux limites statiques et cinématiques ; le champ des contraintes doit pouvoir être prolongé dans la zone rigide, sans que le critère de rupture soit violé. Le travail de déformation doit être positif en tout point.

L'unicité d'une solution admissible n'a pas encore été établie ; beaucoup d'auteurs considèrent cette propriété d'unicité comme probable. "

(R. NEGRE, Contribution à l'Equilibre limite des Sols et des Matériaux Pulvérulents et Cohérents.)

...../.....

### I.3.2. Matériaux de COULOMB - Force portante d'une fondation.

#### I.3.2.1. définition du matériau de COULOMB :

Nous comptons positivement les contraintes de compression. R. NEGRE définit les matériaux à frottement interne par les relations :

$$(18) \quad f(\sigma_{ij}) = \sigma_i - \sigma_j - (\sigma_i + \sigma_j) \sin \varphi - 2c \cos \varphi = 0 \\ (i, j \quad 1, 2, 3)$$

$$(19) \quad g(\sigma_{ij}) = \sigma_i - \sigma_j - (\sigma_i + \sigma_j) \sin \varphi^* - 2c \cos \varphi^*$$

Ce sont les équations de surfaces prismatiques, symétriques par rapport à la trissectrice (fig. 37), dont la trace sur le plan  $(\pi)$  est un hexagone. Leur forme montre que le critère de rupture dépend de la contrainte moyenne.

Les expériences de STUTZ, visualisant le champ des vitesses aux différentes phases de l'écoulement, permettent de contrôler les prévisions théoriques déduites de l'hypothèse (19). Dans le domaine des petites déformations  $\varphi \ll \varphi^* = 0$ .

#### I.3.2.2. Etude des champs statiques et cinématiques

Les équations d'équilibre et la relation (18) déterminent un champ de contraintes statiquement admissible ; nous considérons que les contraintes  $\sigma_z$  sont supérieures aux contraintes  $\sigma_r$ , et rappelons les résultats obtenus par R. NEGRE dans le cas du régime de KARMAN, pour lequel  $\sigma_2 = \sigma_3 \leq \sigma_1$ .

...../.....

En introduisant les variables  $\sigma$  et  $\omega$  (fig. 40), les contraintes  $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{rz}$  vérifient les équations :

$$(20) \quad \sigma_z = \sigma (1 + \sin \varphi \cdot \cos 2\omega) - H$$

$$\sigma_r = \sigma (1 - \sin \varphi \cdot \cos 2\omega) - H$$

$$\sigma_\theta = \sigma (1 - \sin \varphi) - H$$

$$\sigma_{rz} = \sigma \sin \varphi \cdot \sin 2\omega$$

Après avoir introduit les variables :

$$(21) \quad \xi_1 = \frac{1}{2} \cotg \varphi \operatorname{Log} \frac{\sigma}{\sigma_0} + \omega$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \cotg \varphi \operatorname{Log} \frac{\sigma}{\sigma_0} - \omega$$

on obtient le système en  $\xi_1, \xi_2$  du régime statique :

$$(22) \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial z} + \operatorname{tg}(\omega + \mu) \frac{\partial \xi_1}{\partial r} = a$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial z} + \operatorname{tg}(\omega - \mu) \frac{\partial \xi_2}{\partial r} = b$$

Dans ces expressions :

$$(23) \quad a = - \frac{\gamma g \sin(\omega - \mu)}{2 \sigma \sin \cos(\omega + \mu)} - \frac{\sin \omega \sin \mu}{r \cos(\omega + \mu)}$$

$$b = \frac{\gamma g \sin(\omega + \mu)}{2 \sigma \sin \cos(\omega - \mu)} + \frac{\sin \omega \sin \mu}{r \cos(\omega - \mu)}$$

Le régime plastique considéré correspond à l'arête A de la surface limite d'équation  $g(\sigma_{ij}, \varphi) = 0$ . La vitesse de déformation plastique  $\dot{\epsilon}_i^p$  est perpendiculaire à cette arête ; elle est située dans l'angle BAF (fig. 37), on peut donc écrire :

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_1 = \lambda (1 - \sin \varphi^*) \\ \dot{\epsilon}_2 = -\lambda \eta (1 + \sin \varphi^*) \\ \dot{\epsilon}_3 = -\lambda (1 - \eta) (1 + \sin \varphi^*) \end{array} \right.$$

où  $0 \leq \eta \leq 1$ .

$\eta = 0$  correspond au plan AB

$\eta = 1$  correspond au plan AF

En éliminant  $\lambda$  et  $\eta$  de ces équations, il vient :

$$(25) \quad \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) \sin \varphi^* + (1 - \sin \varphi^*) \dot{\epsilon}_3 = 0$$

La coïncidence des directions principales des tenseurs des contraintes et vitesses de déformation s'écrit :

$$(26) \quad 2 \dot{\epsilon}_{rz} = (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_r) \cdot \operatorname{tg} 2\omega$$

Ces équations définissent le système du champ cinématique :

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\cos 2\omega + \sin \varphi^*) \frac{\partial w}{\partial z} + (\cos 2\omega - \sin \varphi^*) \frac{\partial u}{\partial r} = \\ = - (1 - \sin \varphi^*) \cos 2\omega \frac{u}{r} \\ \sin 2\omega \frac{\partial w}{\partial z} - \cos 2\omega \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \sin 2\omega \frac{\partial u}{\partial r} \\ = 0 \end{array} \right.$$

...../.....

condition déduite de l'égalité de la puissance dissipée :

La puissance dissipée par unité de volume à l'instant initial a pour expression :

$$(28) \quad D = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1$$

Pour le régime plastique considéré, le calcul donne :

$$(29) \quad D = \lambda [(\sigma_1 + \sigma_2) (\sin \varphi - \sin \varphi^*) + 2 c \cos \varphi]$$

La relation  $0 < \varphi^* < \varphi$  entraîne que D et  $\lambda$  sont de même signe. La dissipation d'énergie doit être positive pendant la déformation plastique, d'où le critère  $\lambda \geq 0$  (\*)

(\*)  $\dot{\epsilon}_3 = \dot{\epsilon}_\theta$  est négatif, la déformation a donc lieu à partir de l'axe de révolution.

La méthode des caractéristiques de CAUCHY permet de trouver la solution numérique approchée des problèmes d'équilibre limite dont nous avons rappelé les équations. Les caractéristiques des champs statiques et cinématiques sont définies par les relations suivantes :

caractéristiques statiques :

$$(30) \quad \frac{d r}{d z} = \operatorname{tg}(\omega + \mu) \quad \frac{d \xi_1}{d z} = a$$

$$\frac{d r}{d z} = \operatorname{tg}(\omega - \mu) \quad \frac{d \xi_2}{d z} = b$$

Caractéristiques cinématiques :

$$(31) \quad \frac{dr}{dz} = \operatorname{tg}(\omega + \rho^*), \quad \frac{d\omega}{dz} + \operatorname{tg}(\omega + \rho^*) \frac{d\mu}{dz} = - \frac{1 - \sin \varphi^*}{2 \cos^2(\omega + \rho^*)} \cdot \frac{\mu}{r}$$

$$\frac{dr}{dz} = \operatorname{tg}(\omega - \rho^*), \quad \frac{d\omega}{dz} + \operatorname{tg}(\omega - \rho^*) \frac{d\mu}{dz} = - \frac{1 - \sin \varphi^*}{2 \cos^2(\omega - \rho^*)} \cdot \frac{\mu}{r}$$

Les directions principales des contraintes bissectent l'angle formé par les caractéristiques de chaque famille. Les caractéristiques sont inclinées de  $(\varphi - \varphi^*)/2$  par rapport aux caractéristiques statiques et font entre elles l'angle  $2\rho^*$  (figure 39).

Dans le cas où les fonctions  $f$  et  $g$  coïncident, les deux réseaux de caractéristiques sont confondus.

Dans le cas du matériau incompressible, les caractéristiques cinématiques sont inclinées de  $\varphi/2$  par rapport aux caractéristiques statiques et forment un réseau orthogonal.

La non coïncidence de deux réseaux dans le cas général entraînera des restrictions au domaine de validité des solutions généralement admis.

La résolution du problème consiste à trouver une solution numérique avec des conditions aux limites données. On résoud en premier lieu le système statique et ensuite le système cinématique où  $\omega$  est alors connu.

#### I.3.2.3. Application au calcul de la force portante d'une fondation cylindrique de révolution.

La théorie générale précédente permet de déterminer la force portante d'une fondation cylindrique de révolution. On consi-

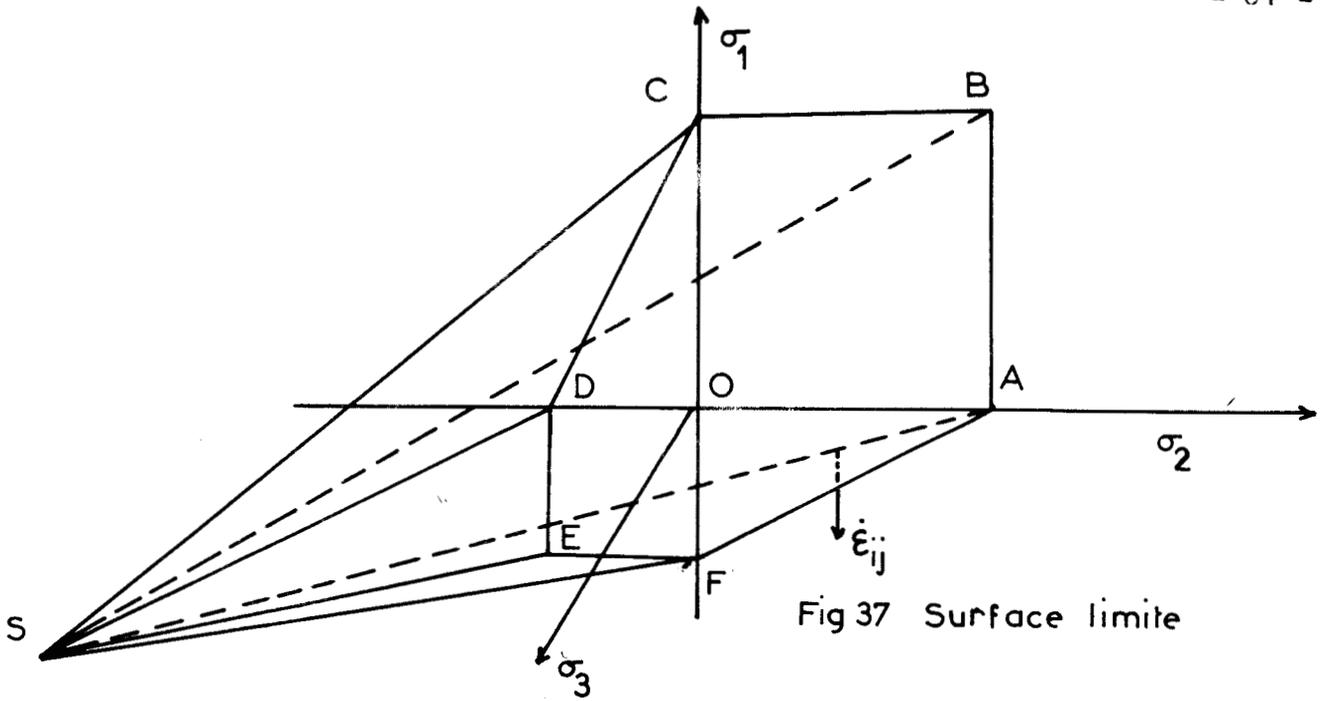


Fig 37 Surface limite

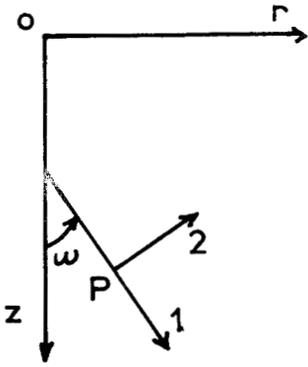


Fig 38 Orientation des axes principaux

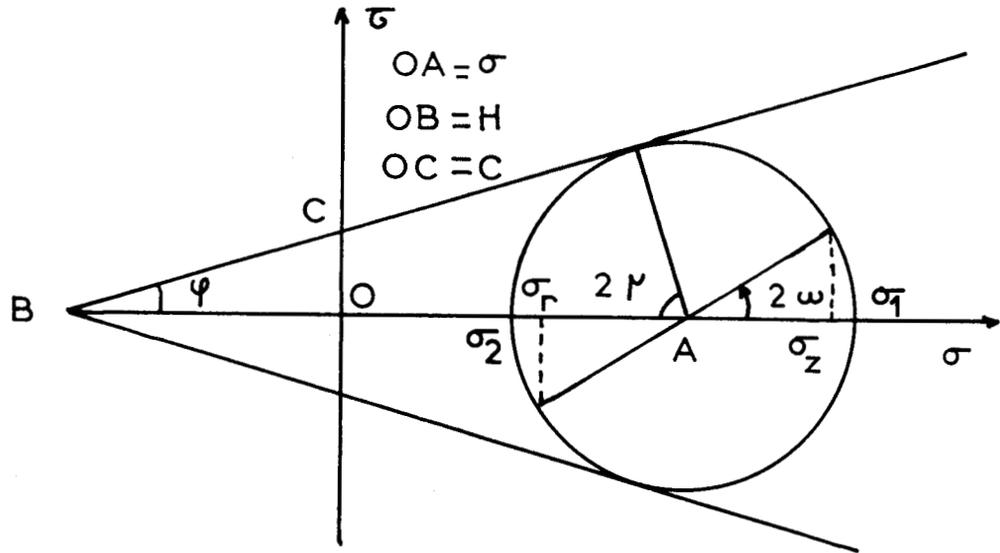


Fig 40 Contraintes limites au point P

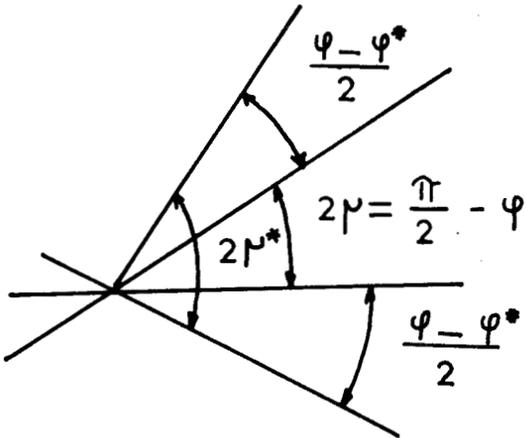


Fig 39 Caractéristiques statiques et cinématiques



dère le massif au niveau de la base de la fondation et on assimile la profondeur d'enfoncement  $D$  à une surcharge normale et uniforme  $P = \gamma D$ . Seule l'étude statique nous intéresse pour déterminer la force portante de la fondation.

Les schémas résolutifs permettant de déterminer les champs statiquement admissibles ont été décrits en détail par R. NEGRE, dont nous résumons l'étude. Il en existe trois, utilisés le plus fréquemment pour résoudre le problème de poinçonnement.

Les conditions aux limites sont :

$$\text{Sur OA : } \omega = \frac{\pi}{2} ; \quad \sigma_2 = \gamma D$$

$$\text{En B } \quad \omega = \delta = 0 \text{ par symétrie}$$

Il est alors possible d'envisager deux classes de schémas résolutifs :

a) Schémas avec discontinuité sur l'axe de la fondation :

Dans ce schéma (fig.41), l'angle de frottement  $\delta_f$  est donné sur la totalité de l'écran OB ; il caractérise la rugosité de la fondation. Le point B est alors singulier pour la répartition des contraintes, sauf si  $\delta_f = 0$ .

b) Schémas utilisant les données sur l'axe de symétrie :

( fig.42 ) Ces schémas, utilisés par STUTZ dans le cas plan, ont été généralisés aux systèmes de révolution. Ils engendrent la solution dans la région (BOD') à l'aide de la condition  $\omega = 0$  le long de l'axe de symétrie et des données sur la caractéristique OD'. Nous rappelons les changements de variables de KRAVTCHENKO qui permettent de progresser au delà de la caractéristique OC, déterminée à partir des données le long de OA.

...../.....

L'origine des coordonnées étant le point O, on pose :

$$r = s \sin \beta \quad , \quad z = s \cos \beta \quad , \quad \psi = \omega - \beta$$

Les équations d'équilibre s'écrivent alors :

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos(\psi + \mu) \frac{\partial \xi_1}{\partial s} + \frac{1}{s} \sin(\psi + \mu) \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta} &= a. \cos(\psi + \beta + \mu) \\ \cos(\psi - \mu) \frac{\partial \xi_2}{\partial s} + \frac{1}{s} \sin(\psi - \mu) \frac{\partial \xi_2}{\partial \beta} &= b. \cos(\psi + \beta - \mu) \end{aligned} \right.$$

Les caractéristiques de ce système ont pour équation :

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\beta}{ds} &= \frac{\operatorname{tg}(\psi - \mu)}{s} \quad , \quad \frac{d\xi_2}{ds} = b \frac{\cos(\psi + \beta - \mu)}{\cos(\psi - \mu)} \\ \frac{d\beta}{ds} &= \frac{\operatorname{tg}(\psi + \mu)}{s} \quad , \quad \frac{d\xi_1}{ds} = a \frac{\cos(\psi + \beta + \mu)}{\cos(\psi + \mu)} \end{aligned} \right.$$

Au point O, il vient donc :

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{d\beta} &= 0 \quad , \quad \xi_1 = \frac{1}{2} \cotg \varphi^* \operatorname{Log} \frac{\gamma D + H(1 + \sin \varphi)}{\sigma_0} + \frac{\pi}{2} \\ \xi_2 &= \xi_1 - 2(\beta + \mu) \end{aligned} \right.$$

Schéma à 4 zones :

Quand OD' ne coupe pas l'axe de symétrie, on se donne

$\delta_F$  le long de OE, la ligne EF étant la ligne caractéristique qui coupe l'axe de symétrie en F (fig. 43). Les données le long de l'axe ( $\omega = 0$ ) et de EF, engendrent la solution dans la zone BEF.

...../.....

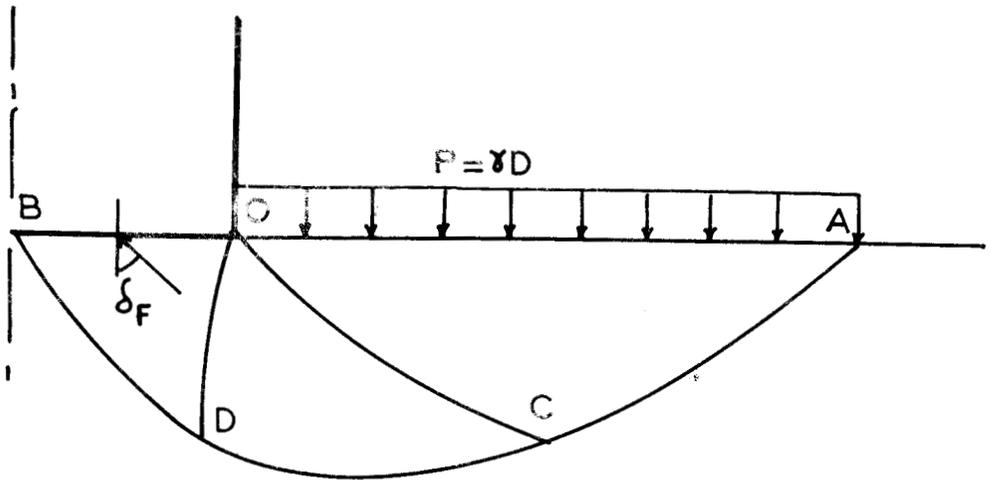


Fig 41 Schéma avec discontinuité sur l'axe de la fondation

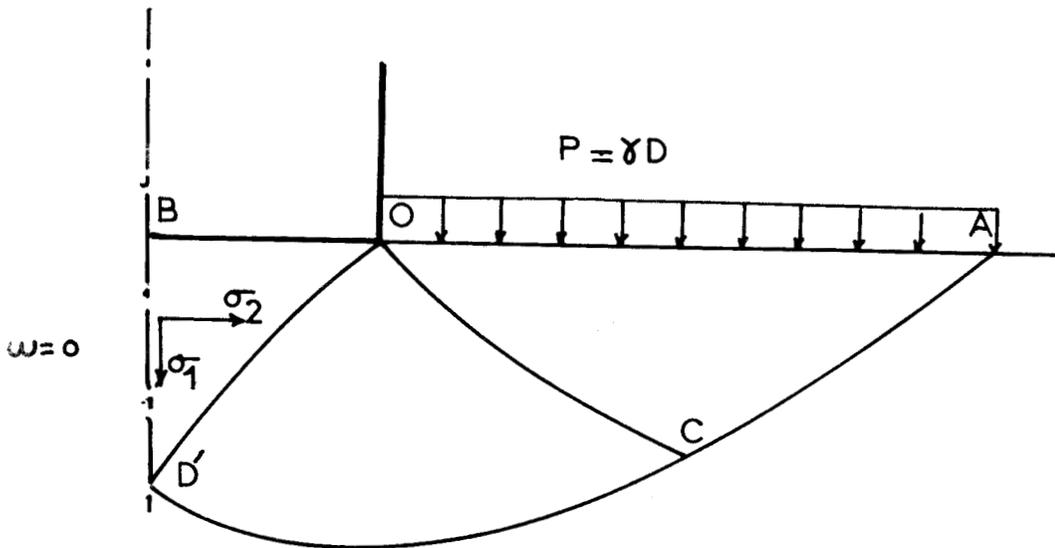


Fig 42 Schéma de rupture 2A

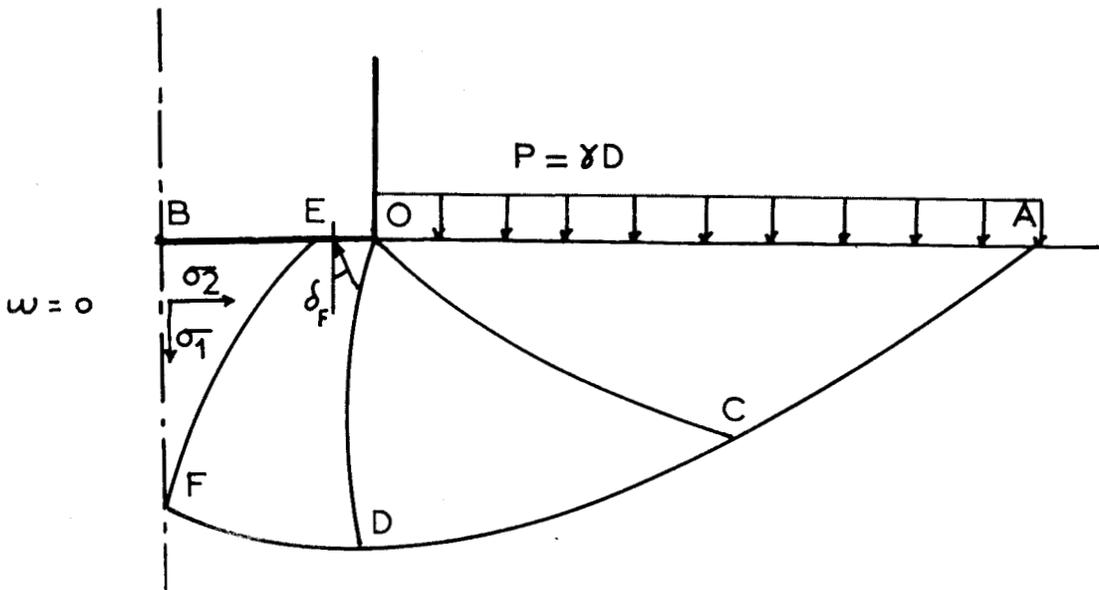


Fig 43 Schéma de rupture 2B à 4 zones



On constate qu'à partir d'une certaine profondeur, la force portante limite unitaire  $Q_0$  peut s'exprimer linéairement en fonction de la profondeur par la relation :

$$(35) \quad Q_0 + H = \gamma R N_{\gamma R} + \gamma D N_{qR} + C N_{cR}$$

Les coefficients  $N_{\gamma R}$ ,  $N_{qR}$  et  $N_{cR}$ , ne dépendent que de l'angle de frottement  $\varphi$  (fig. 44).

Quand la profondeur diminue, le calcul montre que l'on passe du schéma 2A au schéma 2B, mais la valeur de  $Q_0$  change un peu, la formule (35) est encore valable.

A titre d'exemple nous calculons la force portante d'un pieu de diamètre  $\varnothing$  216 mm ancré à 7 m de profondeur dans un sable de Fontainebleau dont les caractéristiques sont :

$$\begin{aligned} \gamma &= 1,56 \text{ t/m}^3 \\ \varphi &= 38^\circ \\ c &\text{ négligeable} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{\gamma R} &= 85 \\ N_{qR} &= 115 \end{aligned}$$

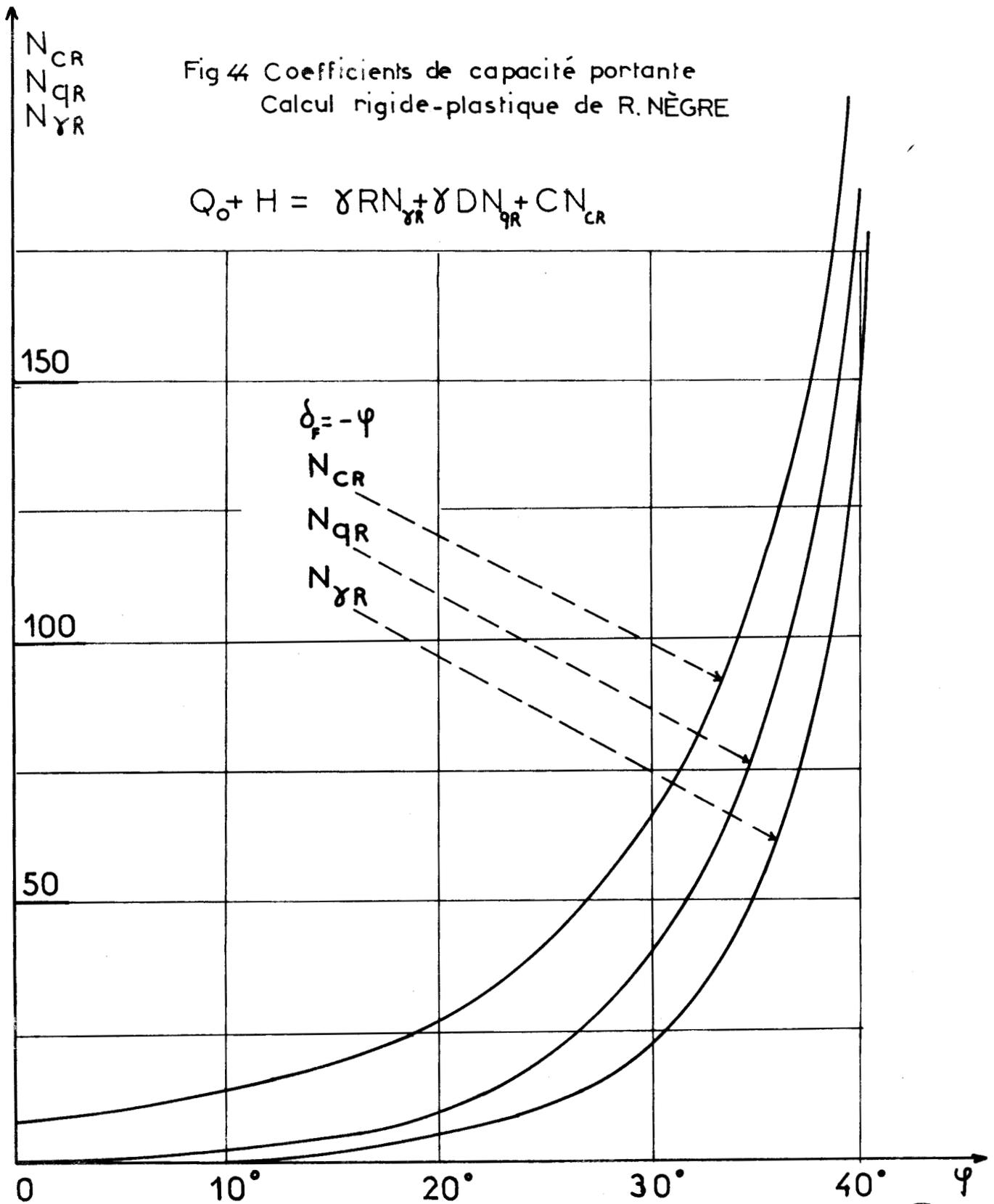
$$Q_0 = 1,56 \times 0,108 \times 85 + 1,56 \times 7 \times 115 = 1.264 \text{ t/m}^2$$

Cette valeur de  $Q_0$  est très inférieure à la valeur mesurée qui est de l'ordre environ de 300 b.

L'écart entre ces valeurs peut provenir des raisons suivantes :

- La rupture d'un sable par poinçonnement est un problème de déformations plastiques contenues dont l'aspect physique est différent de celui des schémas résolutifs proposés pour le résoudre. Ces schémas de rupture par écoulement naissant, sont applicables le plus souvent aux problèmes de poinçonnage des métaux ; ils permettent d'évaluer leur dureté, dans le cas des fondations profondes dans les matériaux à frottement interne, ils semblent ne pas convenir.

.../...



- Ces schémas imposent la géométrie du domaine plastique, et en donnent une description parfois erronée (schéma ZA).

- Les conditions aux limites proposées ne représentent qu'un aspect très approché des phénomènes.

- Le critère de COULOMB ne définit pas l'ensemble des propriétés mécaniques des sables dans le domaine plastique et la fonction  $g$ , identique à ce critère, ne permet pas de préciser les lois de déformations auxquelles le matériau obéit réellement.

- Le schéma rigide plastique ne tient pas compte des phénomènes mis en jeu avant la rupture, il est probable que ceux-ci ont une influence sur le mécanisme de rupture.

Nous exposons au chapitre suivant un calcul simplifié de la pression limite. Nous avons principalement cherché à ne pas nous écarter des résultats expérimentaux, et à déterminer un ordre de grandeur convenable de la pression limite.

CONTRIBUTION AU CALCUL DES FONDATIONS

PROFONDES A LA RUPTURE

---

Les méthodes de calcul de la force portante des fondations profondes ne tiennent en général pas compte de la masse volumique du sol rencontré. Dans le cas des terrains homogènes résistants tel que les sables, ce paramètre a une influence prépondérante sur la valeur de la contrainte limite que peut supporter le sol.

Nous exposons une méthode de calcul à la rupture basée sur les propriétés mécaniques d'un sable et en particulier sur sa compressibilité. Nous pouvons ainsi déterminer la contrainte maximale que l'on peut appliquer à un pieu isolé, au-delà de laquelle la rupture du sol par poinçonnement apparaîtra.

Des études expérimentales ont été exécutées par A. BELOT à la Faculté des Sciences de Grenoble et par Y. TCHENG au Centre Experimental de Recherches et d'Etudes du Bâtiment et des Travaux Publics. Notre interprétation théorique semble trouver sa justification dans la concordance qu'elle établit entre les résultats de ces auteurs.

## II-1 - CONTRIBUTION A L'ETUDE DES PROPRIETES PLASTIQUES DES SABLES

### II-1.1. INTRODUCTION

La théorie de la plasticité permet de résoudre les problèmes qui concernent la rupture des matériaux pour lesquels le critère de rupture ne dépend pas de la contrainte moyenne.

Les matériaux à frottement interne ne vérifient pas cette condition. Il est alors impossible de déterminer le champ des vitesses de l'écoulement plastique.

Afin de subvenir à l'absence de relations de comportement de ces matériaux, nous proposons une expression analytique du critère de rupture d'un sable, ainsi qu'une relation entre la masse volumique et la contrainte moyenne à l'état plastique.

Nous exposons les résultats des essais triaxiaux de A. BELOT.

Ces essais ont été réalisés dans les laboratoires de la Faculté de GRENOBLE.

### II-1.2. NOTATIONS

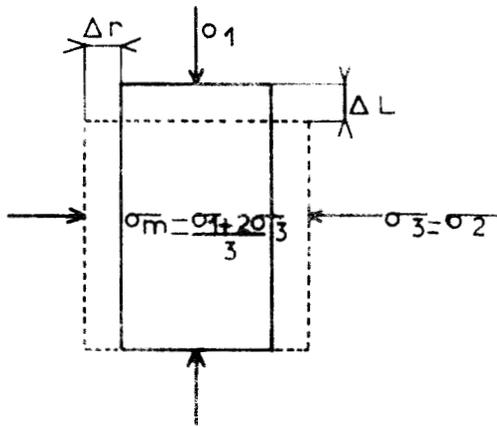
- $\sigma_1$  : contrainte axiale
- $\sigma_3$  : contrainte latérale
- $\sigma_m$  : contrainte moyenne
- $\tau$  : contrainte tangentielle
- $\gamma$  : masse volumique
- $\varphi$  : angle de frottement interne

### II-1.3. ESSAI TRIAXIAL

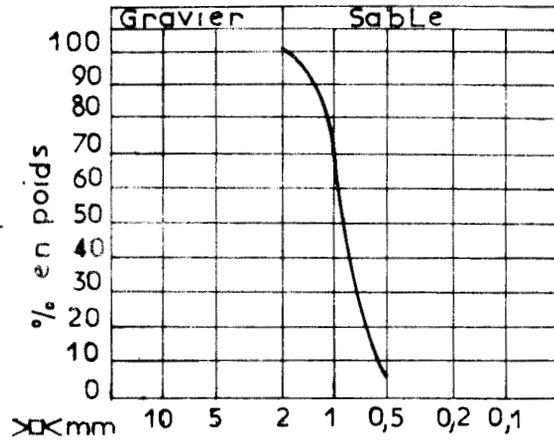
Un échantillon cylindrique de sable est saturé, puis consolidé sous la pression hydrostatique  $\sigma_3$  dans une cellule triaxiale.

La masse volumique initiale est  $\gamma_i$ . Il est soumis à la contrainte  $\sigma_1$  (figure 1).

La granulométrie du sable de laboratoire est précisé par la figure 2. .../...

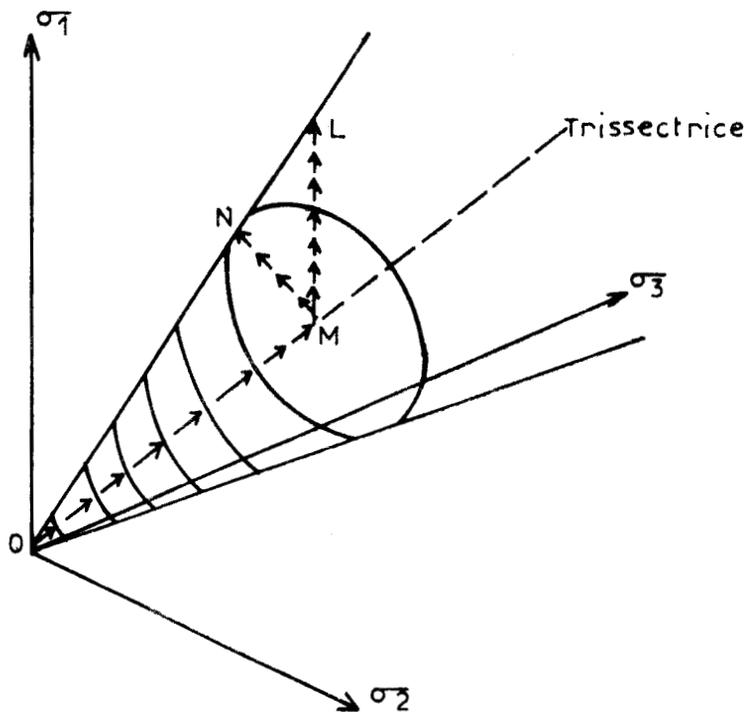


**FIGURE 1 : CONTRAINTES ET DEFORMATIONS D'UN ECHANTILLON.**



**FIGURE 2 : COURBE GRANULOMETRIQUE**

Dans l'espace des contraintes principales (figure 3), les trajets O M N et O M L correspondent respectivement aux essais triaxiaux à contrainte moyenne et à contrainte latérale constante.



**FIGURE 3 : CHEMINEMENT DES CONTRAINTES AU COURS DES ESSAIS TRIAXIAUX**



II- 1.4. RÉSULTATS DE L'ESSAI TRIAXIAL :

II-1.4.1. Essai à contrainte latérale constante :

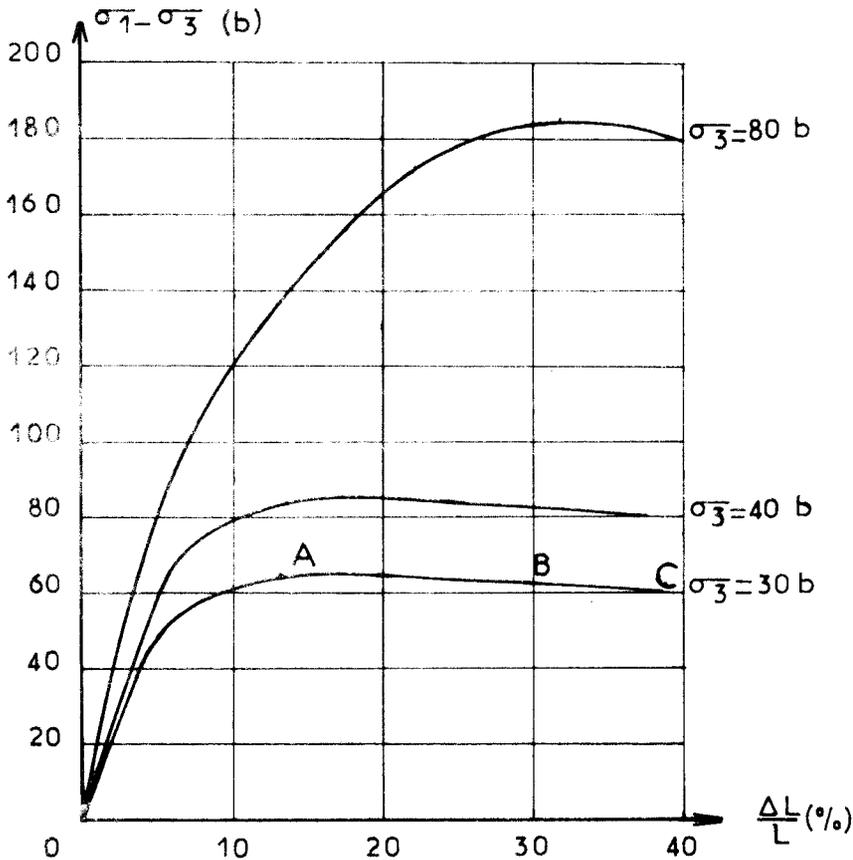


FIGURE 4 : COURBES EFFORTS-DEFORMATIONS

La contrainte  $\sigma_3$  est maintenue constante. La contrainte  $\sigma_1$  augmente à partir de la valeur initiale  $\sigma_1 = \sigma_3$ . La courbe représentative des variations de  $\sigma_1 - \sigma_3$  en fonction du raccourcissement axial  $\Delta l/l$  de l'échantillon est d'abord croissante, elle passe par un maximum au point A, puis devient parallèle à l'axe des dilatations le long du palier BC. La rupture plastique commence au point A et se prolonge le long du palier BC (figure 4).

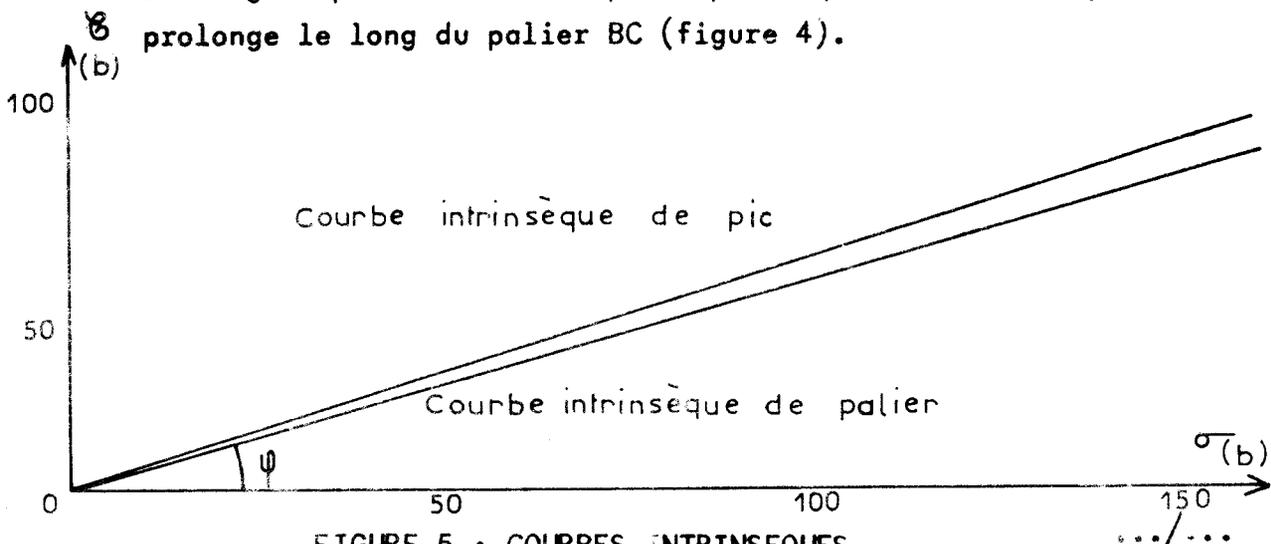


FIGURE 5 : COURBES INTRINSEQUES

Nous traçons la courbe intrinsèque, enveloppe des cercles de MOHR de diamètre  $\sigma_1 - \sigma_3$ . Cette courbe dépend de l'amplitude des déformations du matériau avant sa mise en plasticité parfaite (palier BC). Les courbes de "pic" et de "palier" (figure 5), associées respectivement au point A et au palier BC, déterminent les positions extrêmes de la courbe intrinsèque, elles sont linéaires dans un domaine étendu de contraintes, le critère de rupture qui en résulte s'exprime par la relation de COULOMB : (1)  $\sigma_3 = K_a \sigma_1$  où

$$K_a = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

II-1.4.2. Essais à contrainte moyenne constante :

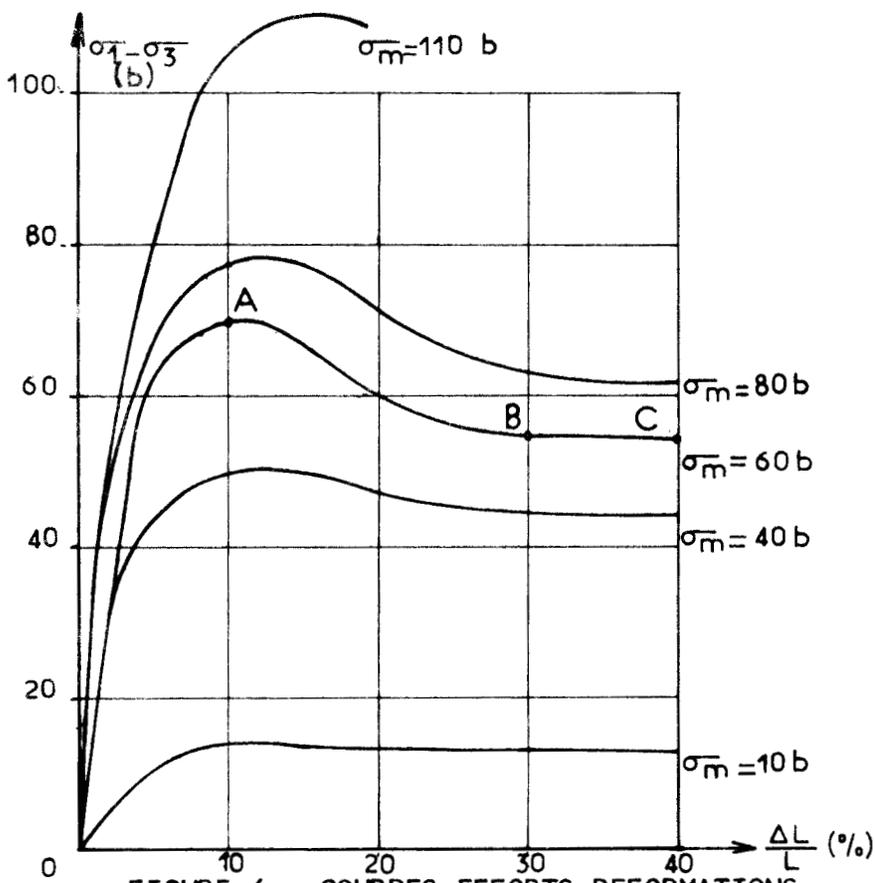


FIGURE 6 : COURBES EFFORTS DEFORMATIONS

La pression moyenne  $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}$  est constante. Les courbes efforts déformations (figure 6) présentent un maximum et un palier plastique. La mise en plasticité du matériau apparaît pour des déformations axiales inférieures à celles des essais à pression latérale constante.

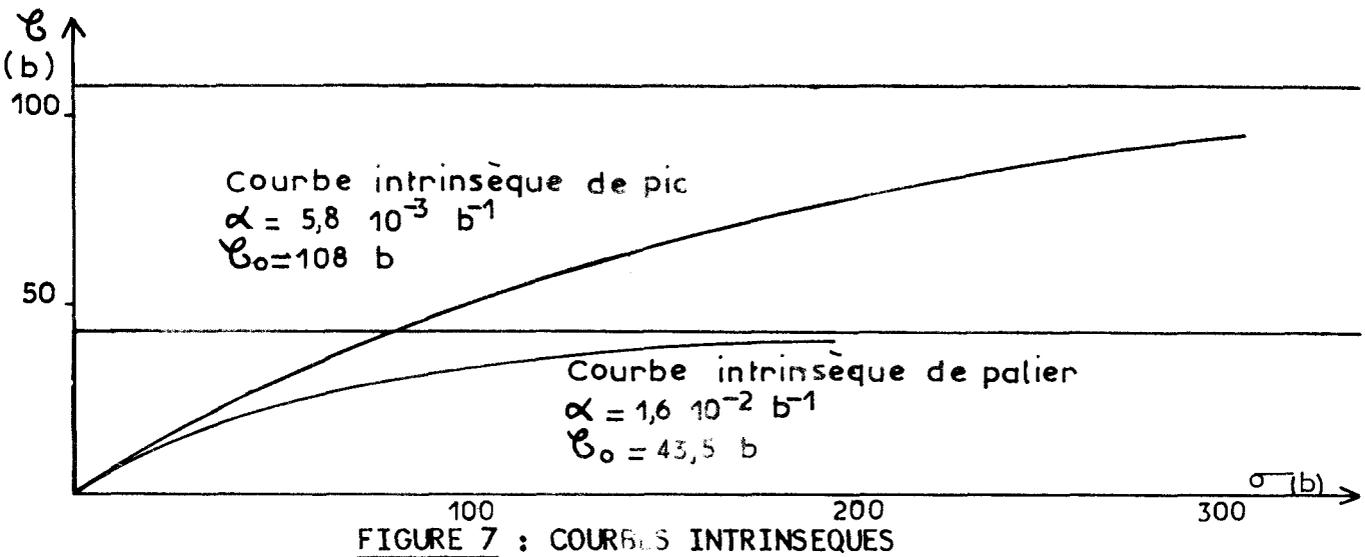


FIGURE 7 : COURBES INTRINSEQUES

Les courbes intrinsèques de pic et de palier ne sont pas linéaires.

Jusqu'à 100 bars, leur équation est de la forme :

$$\tau = \tau_0 (1 - e^{-\alpha \sigma}) \quad (2)$$

Il serait nécessaire d'exécuter des essais sous contraintes très élevées afin de vérifier si le critère de rupture devient équivalent au critère de TRESCA, qui est une forme asymptotique de la relation (2) quand la contrainte normale  $\sigma$  tend vers l'infini.

Cette relation permet également d'établir un critère de rupture pour lequel la courbe intrinsèque n'a pas d'asymptote d'ordonnée  $\tau_0$  :

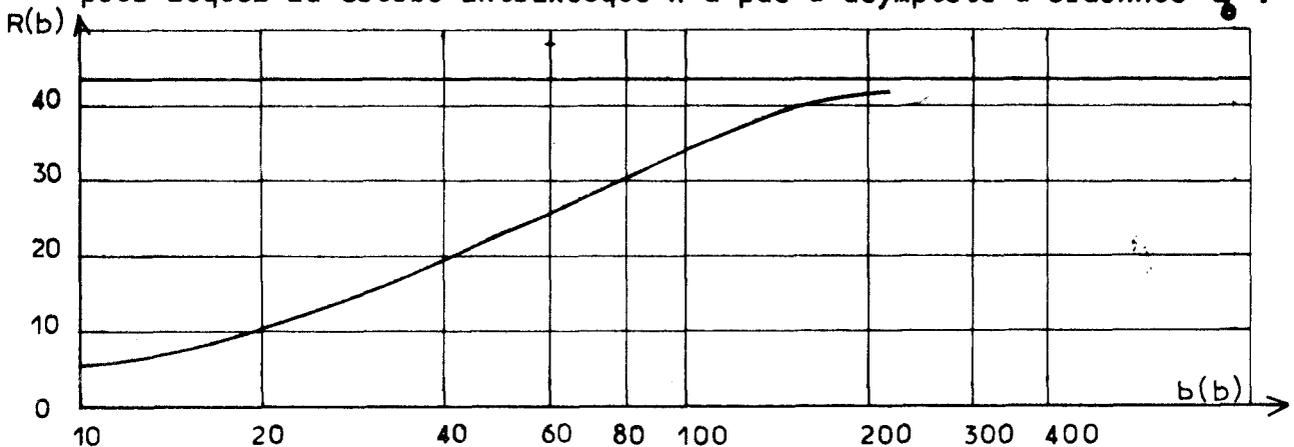
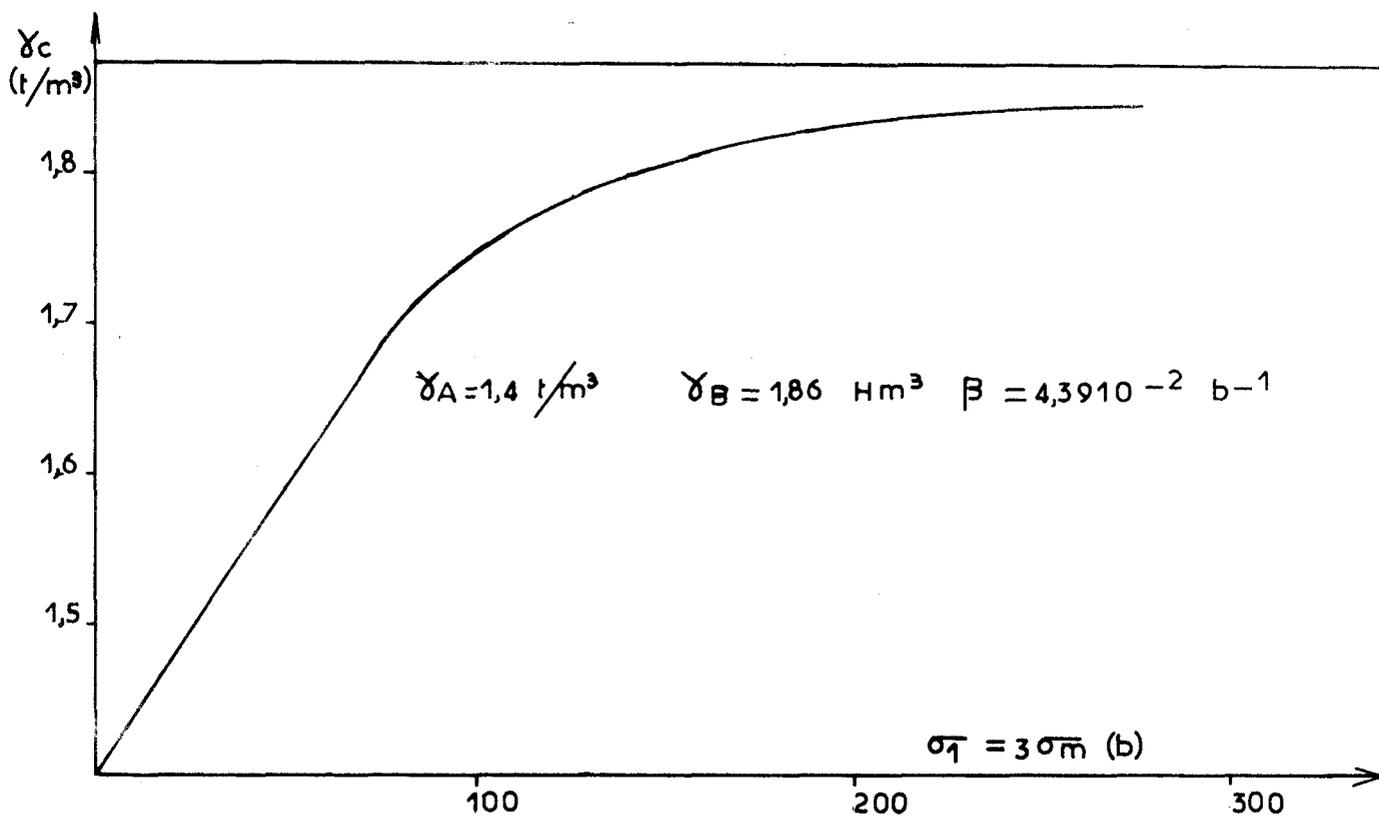


FIGURE 8 : VARIATION DU RAYON DES CERCLES DE MOHR LIMITES EN FONCTION DE L'ABSCISSE DE LEUR CENTRE

La figure 8 représente les variations du rayon R des cercles de MOHR tangents à la courbe intrinsèque de palier, en fonction de l'abscisse b de leur centre . Cette courbe montre que le critère de rupture peut être défini par la relation :

$$R = a \text{ Log } \frac{b}{b_0} \quad (3) \quad \text{où } a = 0,25 \text{ bar et } b_0 = 10 \text{ bars}$$

Cette expression est une autre extrapolation possible de la courbe intrinsèque.



**FIGURE 9 : COURBE DE COMPRESSIBILITE**

A. BELOT a étudié les variations de la masse volumique du sable pendant l'essai triaxial. Ses mesures montrent que la masse volumique finale  $\gamma_c$ , qui correspond au palier plastique, ne dépend que de la contrainte moyenne  $\sigma_m$ . Ce résultat expérimental permet de donner une loi globale de comportement du matériau en représentant les variations de  $\gamma_c$  en fonction de  $\sigma_m$ . La courbe de compressibilité de la figure 9 est correctement définie par l'expression :

$$\gamma_c = \gamma_A + (\gamma_B - \gamma_A)(1 - e^{-\beta \sigma_m}) \quad (4)$$

La valeur du coefficient  $\gamma_A$  s'obtient par l'extrapolation de la courbe expérimentale.

## II- 1.5. CONCLUSIONS :

L'essai triaxial à contrainte moyenne constante permet d'étudier l'influence de la contrainte moyenne sur les propriétés des sols. La relation entre ce paramètre et la masse volumique du matériau est une donnée physique supplémentaire qui semble indispensable à la généralisation de la théorie de la plasticité aux matériaux compressibles.

Cet essai montre que la relation de COULOMB n'est pas un critère de rupture satisfaisant car elle ne tient pas compte des variations de l'angle de frottement du matériau en fonction des contraintes appliquées.

Pour ces raisons, nous pensons que l'essai triaxial à contrainte moyenne constante présente un intérêt plus grand que l'essai à contrainte latérale constante. Nous nous proposons d'en utiliser les résultats afin de déterminer la force portante d'un pieu en milieu sableux.

II- 2,- CALCUL DE LA FORCE PORTANTE D'UN PIEU EN MILIEU SABLEUX

II-2.1. RUPTURE D'UN SOL PAR POINÇONNEMENT :

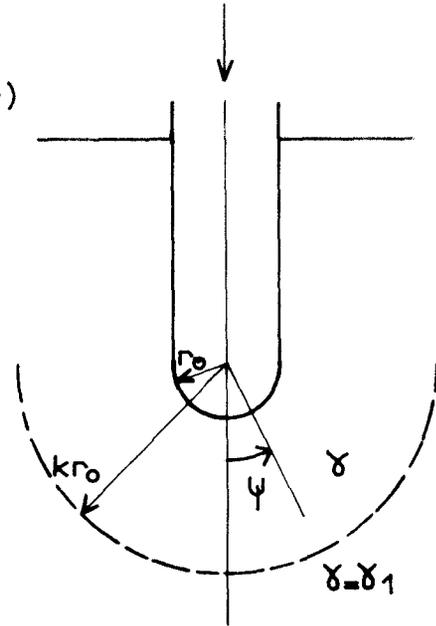
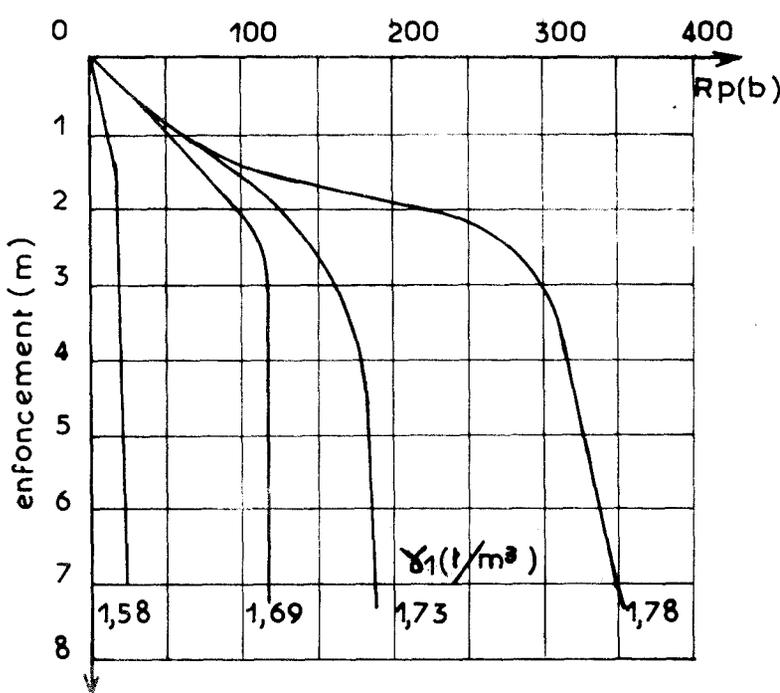


FIGURE 10 : RESISTANCE DE POINTE DU SABLE DE LOIRE (Essais de Y. TCHENG)

FIGURE 11 : BULBE PLASTIQUE ( $Z \gg Z_0$ )



Les courbes de pénétration (figure 10) représentent les variations de la pression  $R_p$ , appliquée à la pointe d'un poinçon qui pénètre dans un sable de Loire. Cette pression est d'abord proportionnelle à l'enfoncement, puis elle devient constante, égale à  $R_{p0}$ , au delà de la profondeur  $Z_0$ . Il existe alors une zone en plasticité parfaite à l'extrémité du pénétrömètre.

La forme géométrique de l'extrémité du poinçon (figure 11) permet de poser les hypothèses suivantes :

- la zone plastique est limitée par les demi sphères de rayons respectifs  $r_0$  et  $kr_0$ ,
- en coordonnées sphériques les contraintes principales sont :  $\sigma_r, \sigma_\psi, \sigma_\theta$ . Nous supposons que :  $\sigma_\psi \leq \sigma_\theta \leq \sigma_r$ . Le sol est compressible, sa masse volumique  $\gamma$  dépend de la contrainte moyenne  $\sigma_m$  par la relation :  $\gamma = \gamma_A + (\gamma_B - \gamma_A)(1 - e^{-\beta \sigma_m})$

La courbe intrinsèque du matériau est la droite de Coulomb, coupant l'axe des contraintes normales au point d'abscisse  $-H$  et faisant l'angle  $\varphi$  avec cet axe.

.../...

Les contraintes principales vérifient la relation :

$$(5) \quad \sigma_{\psi} + H = K_a (\sigma_r + H) \quad \text{où} \quad K_a = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Nous étudions un poinçonnement quasi statique et négligeons les forces de masses.

### II.2.2 - PRESSION LIMITE.

L'équation d'équilibre des systèmes à symétrie sphérique est :

$$(6) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{(\sigma_r - \sigma_{\psi})}{r} = 0$$

Après avoir éliminé  $\sigma_{\psi}$  en utilisant la relation (5), on obtient l'expression suivante de la pression limite  $R_{po}$ .

$$(7) \quad R_{po} = \frac{3}{1+2K_a} (H + \sigma_{m1}) k^{2(1-K_a)} - H$$

Dans cette relation,  $\sigma_{m1}$  est la valeur de la contrainte moyenne associée à la masse volumique  $\gamma_1$  par la courbe de compressibilité ; nous avons :

$$(8) \quad \sigma_m = \sigma_{m1} \quad , \quad \gamma = \gamma_1 \quad , \quad r = kr_0$$

### II.2.3 - APPLICATION NUMERIQUE.

La figure (12) représente les variations de la contrainte  $R_{po}$  en fonction de la masse volumique  $\gamma_1$  du sable.

La loi de compressibilité et le critère de rupture de ce matériau sont donnés par les relations :

$$(9) \quad \gamma = 1,4 + 0,46 e^{-4,39 m/100} \quad \text{et} \quad \sigma_{\psi} = \sigma_r/3$$

que nous avons déduites des résultats expérimentaux de A. BELOT.

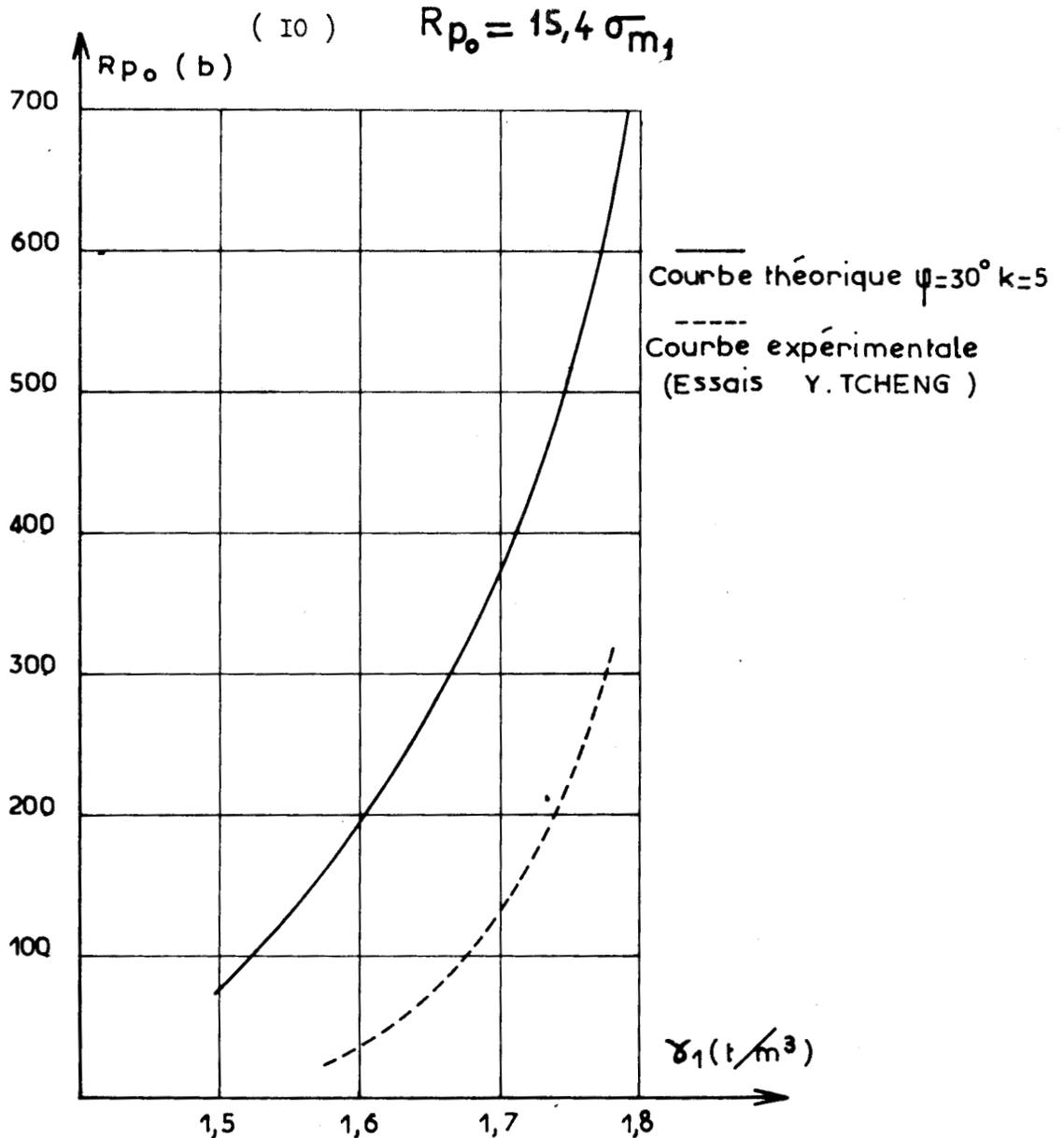
Cette valeur de  $K_a$  correspond à un angle de frottement interne de  $30^\circ$ .

.../...

Nous supposons  $k = 5$ . Ce coefficient dépend de la masse volumique  $\gamma_1$ .

La valeur 5 est en accord avec les observations expérimentales de Y. TCHENG.

Ces valeurs numériques permettent de calculer  $R_{p_0}$  :



**FIGURE 12** : Variation de la contrainte de rupture en fonction de la masse volumique

La méthode de calcul exposée donne des valeurs élevées de la pression limite appliquée à un pieu au moment de la rupture du sol. Afin de diminuer l'écart entre les valeurs, théorique et expérimentale, nous présentons une méthode qui tient compte de la variation de l'angle de frottement du matériau en fonction de la contrainte moyenne, et qui précise l'ordre de grandeur de la zone plastique localisée à l'extrémité du pieu.

II-2.4. CALCUL DES DIMENSIONS DE LA ZONE PLASTIQUE

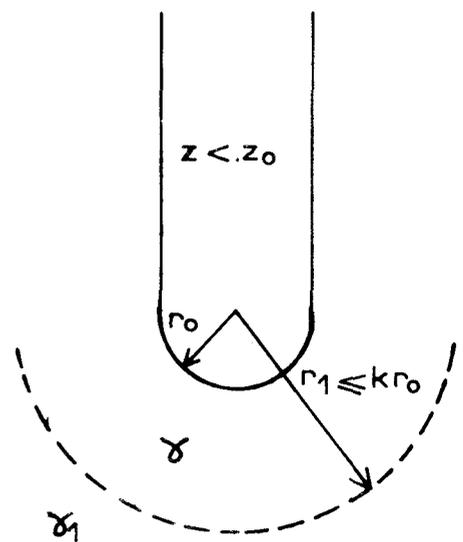
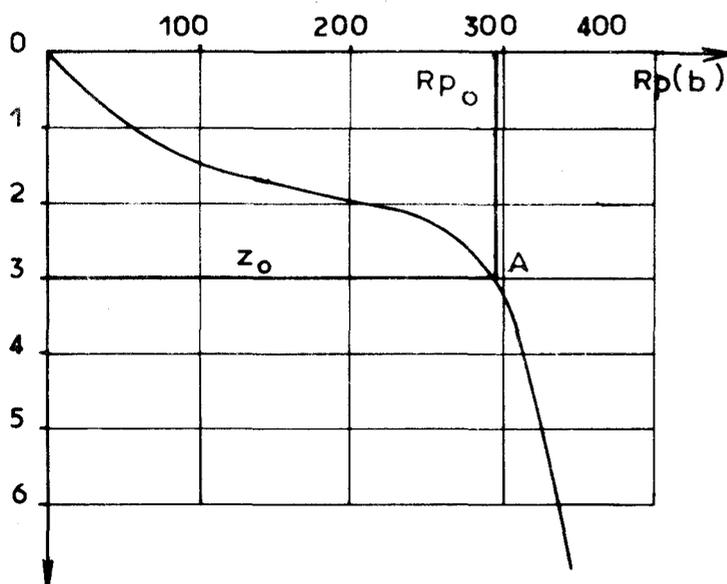


FIGURE 13 : RESISTANCE DU SABLE DE LOIRE

FIGURE 14 : BULBE PLASTIQUE

Avant d'atteindre la valeur définitive  $kr_0$ , le rayon de la zone plastique augmente pendant l'enfoncement  $OZ_0$  (figure 13). L'énergie qu'il est nécessaire de fournir au sol pour atteindre l'état plastique final est

$$(11) \quad W = \frac{\pi r^2}{2} \times R_{p0} \times Z_0$$

.../...

Cette énergie est absorbée par la demi sphère plastique pendant sa formation. L'état d'un élément de sol est défini par les paramètres :

$$p = \sigma_m, \quad q = \sigma_r - \sigma_\psi, \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{3} \frac{\Delta v}{v} \quad (\text{figure 2})$$

Pendant la déformation  $(\frac{\Delta l}{l}, \frac{\Delta v}{v})$ , l'énergie volumique reçue par l'élément est :

$$(12) \quad dw = p \frac{\Delta v}{v} + q \epsilon$$

Les états, initial et final, de chaque particule de sol située dans la zone plastique, sont représentés respectivement par les valeurs,  $p_1, q_1, \gamma_1$  et  $p, q, \gamma$  des paramètres. Afin de simplifier les calculs, nous poserons  $\gamma = \gamma_B$  et  $q = 2\sigma_0$

Pendant ce changement d'état, la particule devolume d'unité reçoit l'énergie :

$$(13) \quad w = \int dw = \int_{\gamma_1}^{\gamma_B} p \frac{d\gamma}{\gamma} + \int_{\gamma_1}^{\gamma_B} \frac{q}{3} \frac{d\gamma}{\gamma} + \int_{q_1}^{2\sigma_0} q \frac{d(\frac{\Delta l}{l})}{dq}$$

Le volume initial occupé par les particules contenues dans la zone plastique est :

$$v = \frac{2\pi r_0^3}{3} (k^3 - 1) \times \frac{\gamma_B}{\gamma_1} \quad \text{donc (14) } W = w \times v$$

Il est nécessaire de connaître les relations  $(q, \gamma)$  et  $(q, \frac{\Delta l}{l})$

pour calculer  $w$ .

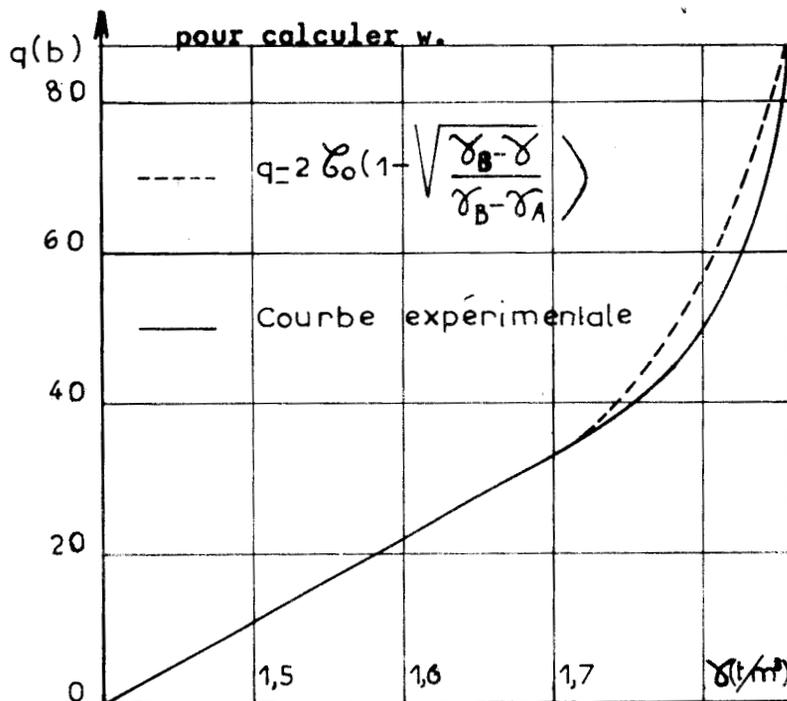


FIGURE 15 : COURBE DE VARIATION DE q EN FONCTION DE  $\gamma$

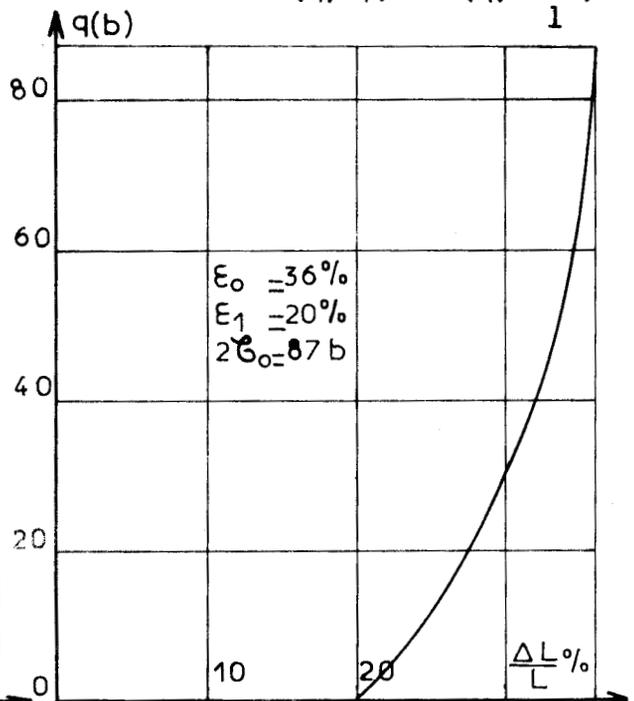


FIGURE 16 : COURBE DE VARIATION DE q EN FONCTION DE  $\frac{\Delta l}{l}$

$\frac{\Delta l}{l}$

Nous supposons que la déformation  $\frac{\Delta l}{l}$  correspond au début du palier plastique de la courbe effort-déformation relevée à pression moyenne constante. La critère de rupture est alors défini par la courbe intrinsèque de palier, qui associée à la courbe de compressibilité  $(p, \gamma)$ , détermine la courbe  $(q, \gamma)$  (figure 15), dont l'équation approchée est :

$$(15) \quad q = 2 \sigma_0 \left( 1 - \sqrt{\frac{\gamma_B - \gamma}{\gamma_B - \gamma_A}} \right)$$

La figure 16 représente la courbe  $(q, \frac{\Delta l}{l})$  d'équation :

$$(16) \quad \frac{\Delta l}{l} = \epsilon_0 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{4 \sigma_0^2} (q - 2 \sigma_0)^2$$

Nous remplaçons  $p$  et  $q$  par leur valeur en fonction de  $\gamma$ , et  $\frac{\Delta l}{l}$  en fonction de  $q$  dans la relation (3). Il vient donc après intégration :

$$(17) \quad w_1 = \int_{\gamma_1}^{\gamma_B} p \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{1}{\beta} \text{Log} \frac{\gamma_1}{\gamma_B} \times \text{Log} \frac{\gamma_B}{\gamma_B - \gamma_A} + \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\pi^2}{6} - \sum \frac{1}{n^2} \left( \frac{\gamma_1}{\gamma_B} \right)^n \right]$$

$$(18) \quad w_2 = \int_{\gamma_1}^{\gamma_B} \frac{q}{3} \frac{d\gamma}{\gamma} = 2 \sigma_0 \text{Log} \frac{\gamma_B}{\gamma_1} + \frac{2 \sigma_0}{3} \sqrt{\frac{\gamma_B}{\gamma_B - \gamma_A}} \left[ 2 \sqrt{1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_B}} + \text{Log} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_B}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_B}}} \right]$$

$$(19) \quad w_3 = \int_{q_1}^{2 \sigma_0} q \frac{d \frac{\Delta l}{l}}{dq} dq = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2 \sigma_0^2} \left[ \frac{q^3}{3} - \sigma_0 q^2 \right]_{q_1}^{2 \sigma_0}$$

Les relations (11), (14), (17), (18), (19) permettent d'écrire :

$$k^3 - 1 = \frac{3}{4} \frac{R_{p0}}{w} \times \frac{Z_0}{r_0} \times \frac{\gamma_1}{\gamma_B}$$

En première approximation, nous remplaçons  $R_{p0}$  par la valeur de la contrainte  $\sigma_r$  qui correspond à la masse volumique  $\gamma_1$ .

$$(20) \quad k^3 - 1 = \frac{3}{4} \frac{\sigma_{r1}}{w} \times \frac{Z_0}{r_0} \times \frac{\gamma_1}{\gamma_B}$$

Les essais de Y. TCHENG montrent que l'expression :

$$(21) \frac{z_0}{r_0} = 100(\gamma_1 - 1,4),$$

est vérifiée pour le sable de Loire quand  $r_0$  est assez grand ( $r_0 \sim 15$  cm).

II-2.5. APPROXIMATION DE LA COURBE INTRINSEQUE

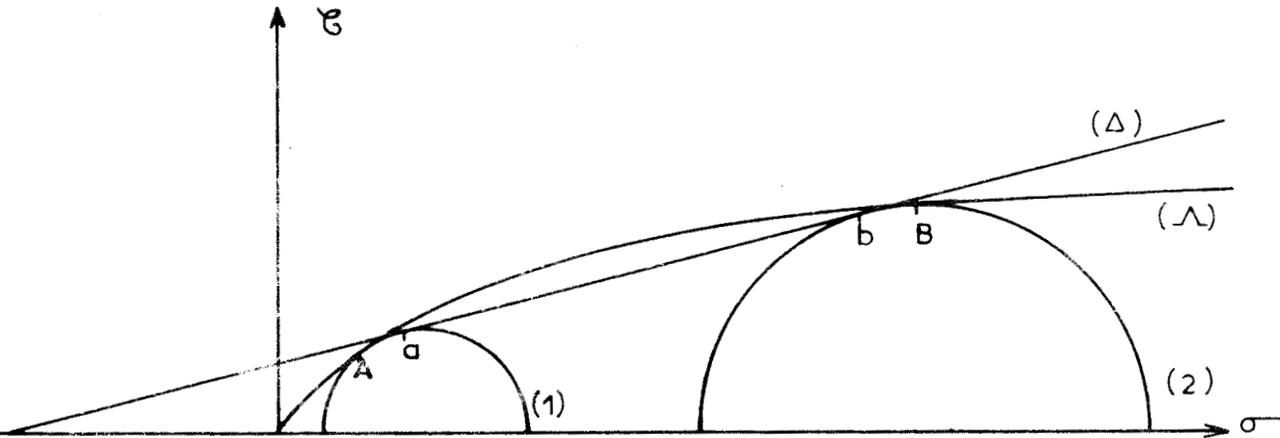


FIGURE 17 : APPROXIMATION DE LA COURBE INTRINSEQUE DANS LE BULBE PLASTIQUE

Les cercles de Mohr (1) et (2) (figure 17) représentent l'état de contraintes aux distances respectives  $kr_0$  et  $r_0$ . Ils sont tangents à la courbe intrinsèque ( $\lambda$ ) aux points A et B. Afin d'appliquer la relation :

$$R_{po} = \frac{3}{1 + 2K_a} (H + \sigma_{m1}) K^{2(1 - K_a)} - H$$

Nous remplaçons l'arc  $\widehat{AB}$  par un segment de droite  $ab$ , tangent en  $a$  et  $b$  aux cercles (1) et (2). Ce segment définit la droite de COULOMB ( $\Delta$ )

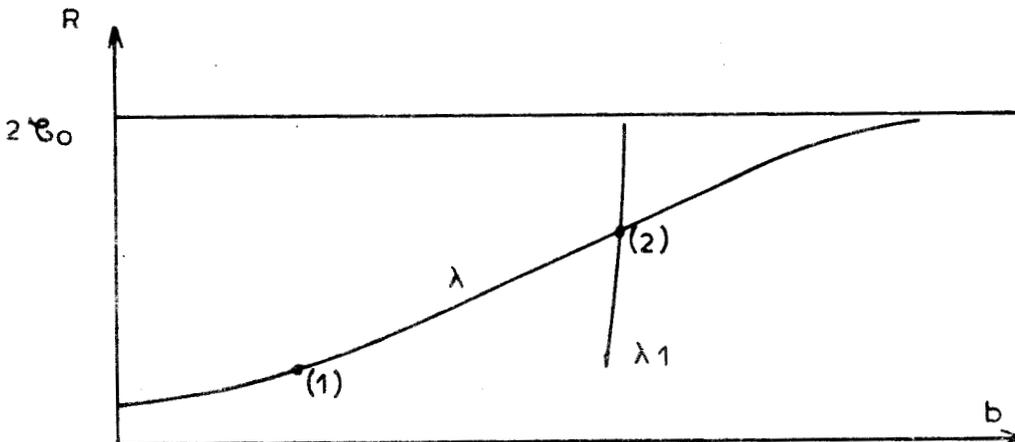


FIGURE 18 : DETERMINATION DU CERCLE LIMITE (2).

Soit une droite  $(\Delta)$ , de pente quelconque, tangente au cercle (1) connu par la condition  $\gamma = \gamma_1$ . Cette droite permet de calculer les paramètres  $H$  et  $K_\sigma$ , qui, substitués dans la relation (12), déterminent le cercle (2)' tangent à  $(\Delta)$ . Ce cercle représente l'état de contrainte à la distance  $r_0$ . L'abscisse de son centre est  $b'$ , son rayon est  $R'$ . La courbe  $(\lambda_1)$  (figure 6) est l'ensemble des points de coordonnées  $(b', R')$ , obtenus en faisant varier la pente de la droite  $(\Delta)$ ; cette courbe coupe l'image  $(\lambda)$  dans le plan  $(b, R)$  de la courbe intrinsèque  $(\lambda)$ , au point 2; ce point définit un cercle de Mohr tangent à  $(\Delta)$  et à la courbe  $\lambda$ . Nous admettrons que ce cercle est le cercle (2) cherché.

II-2.6. RESULTATS NUMERIQUES :

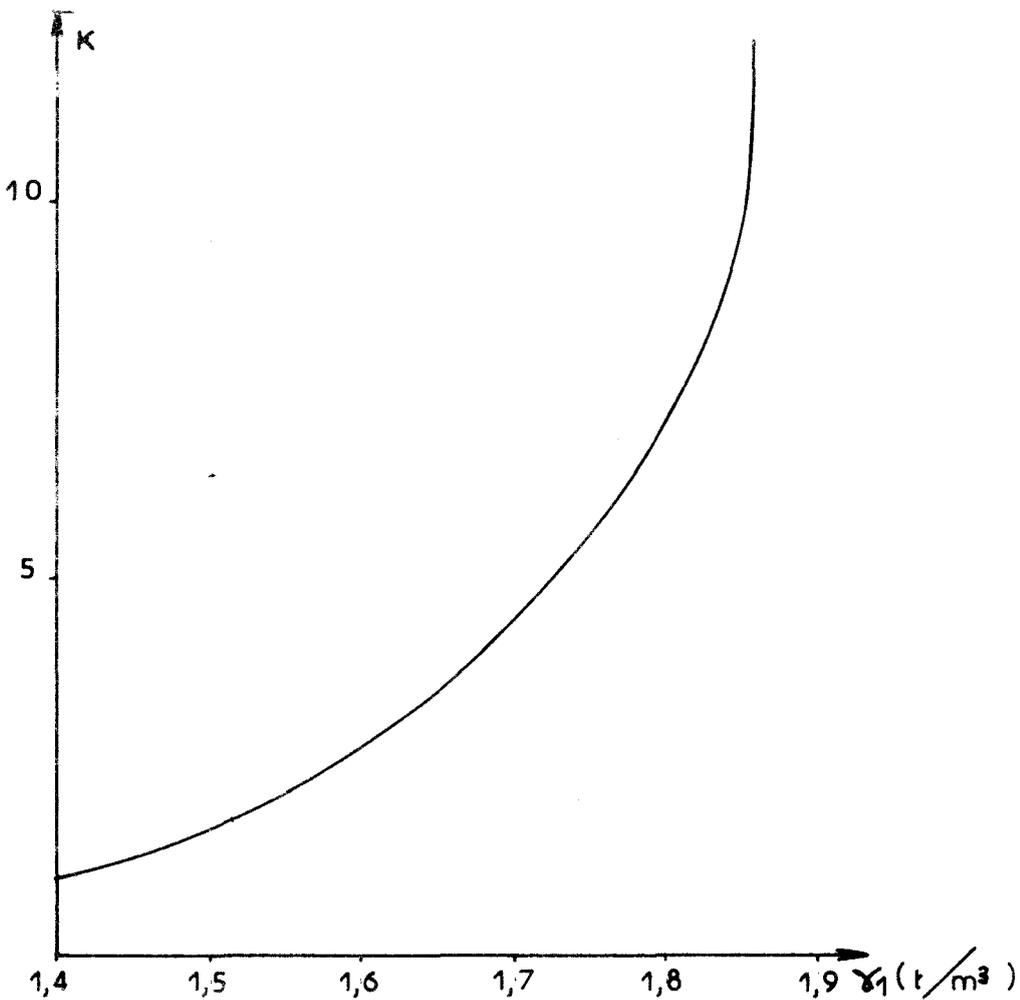


FIGURE 19 : VARIATION DES DIMENSIONS DE BULBE PLASTIQUE EN FONCTION DE LA MASSE VOLUMIQUE

Le paramètre  $k$  est une fonction croissante de la masse volumique  $\gamma_1$  (figure 19), il augmente depuis la valeur 1 jusqu'à l'infini quand  $\gamma_1$  varie de  $\gamma_A$  à  $\gamma_B$ . Ce résultat est en accord avec l'hypothèse des déformations plastiques contenues.

Détermination de la courbe intrinsèque ( $\lambda$ ) :

Si  $b$  est l'abscisse du point  $O$ , centre d'un cercle de Mohr, de rayon  $R$ , tangent à la courbe intrinsèque au point  $L$  d'abscisse  $\sigma$ , le critère de rupture est défini par la relation  $b = f(R)$ . Il est commode de représenter cette expression en prenant  $\sigma$  comme paramètre.

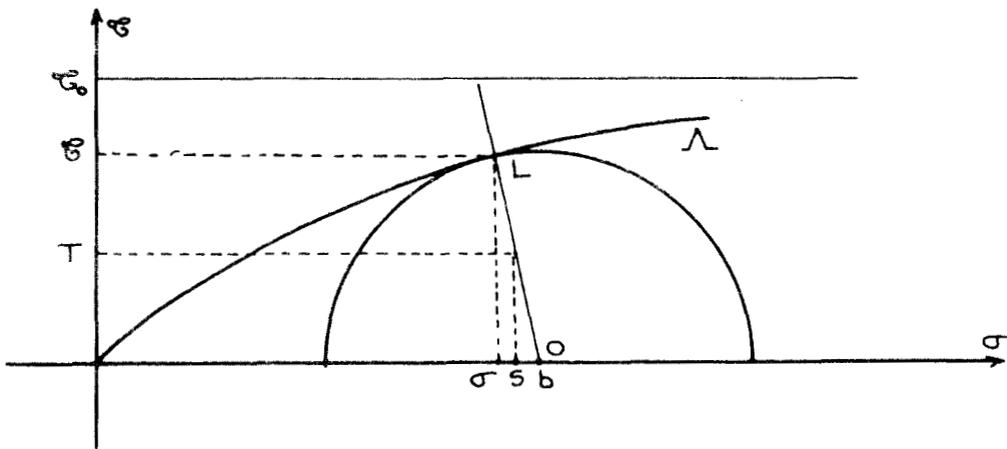
L'équation de la courbe intrinsèque est :

$$\sigma = \sigma_0 (1 - e^{-\alpha \sigma})$$

L'équation de la droite  $o L$  est :

$$T - \sigma = \frac{1}{\alpha \sigma_0} \frac{S - \sigma}{e^{-\alpha \sigma}}$$

$T$  et  $S$  sont les coordonnées du point courant de  $OL$ .



Il vient donc :  $b = \sigma + \alpha \sigma_0^2 e^{-\alpha \sigma} (1 - e^{-\alpha \sigma})$ .11

$$R = \sigma_0 (1 - e^{-\alpha \sigma}) \sqrt{1 + \alpha^2 \sigma_0^2 e^{-2\alpha \sigma}}$$

Ces relations définissent l'image ( $\lambda$ ) dans le plan  $(R, b)$ , de la courbe intrinsèque ( $\lambda$ )

Le cercle (1) est entièrement déterminé par la valeur de la contrainte moyenne  $\sigma_m$  que l'on calcule en fonction de  $\sigma$  par la relation

$$\sigma_m = b - \frac{R}{3}$$

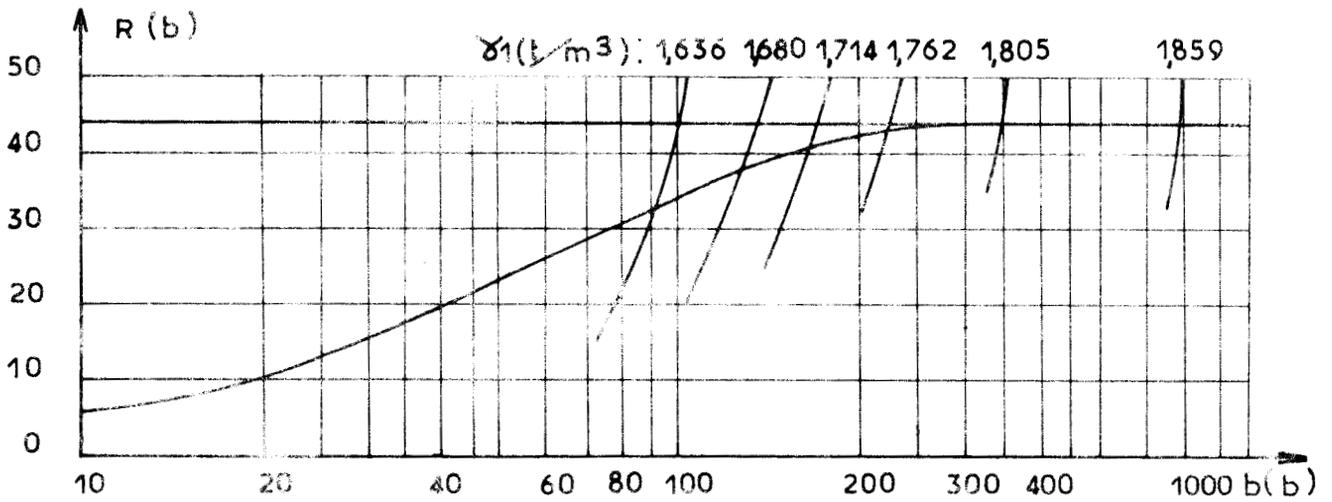


FIGURE 20 : DETERMINATION GRAPHIQUE DES CERCLES LIMITES (2)

Nous représentons (figure 20) le réseau des courbes ( $\lambda_1$ ) qui déterminent, par leur intersection avec la courbe ( $\lambda$ ), la résistance de pointe  $R_{po}$  en fonction de  $\gamma_1$  (figure 21).

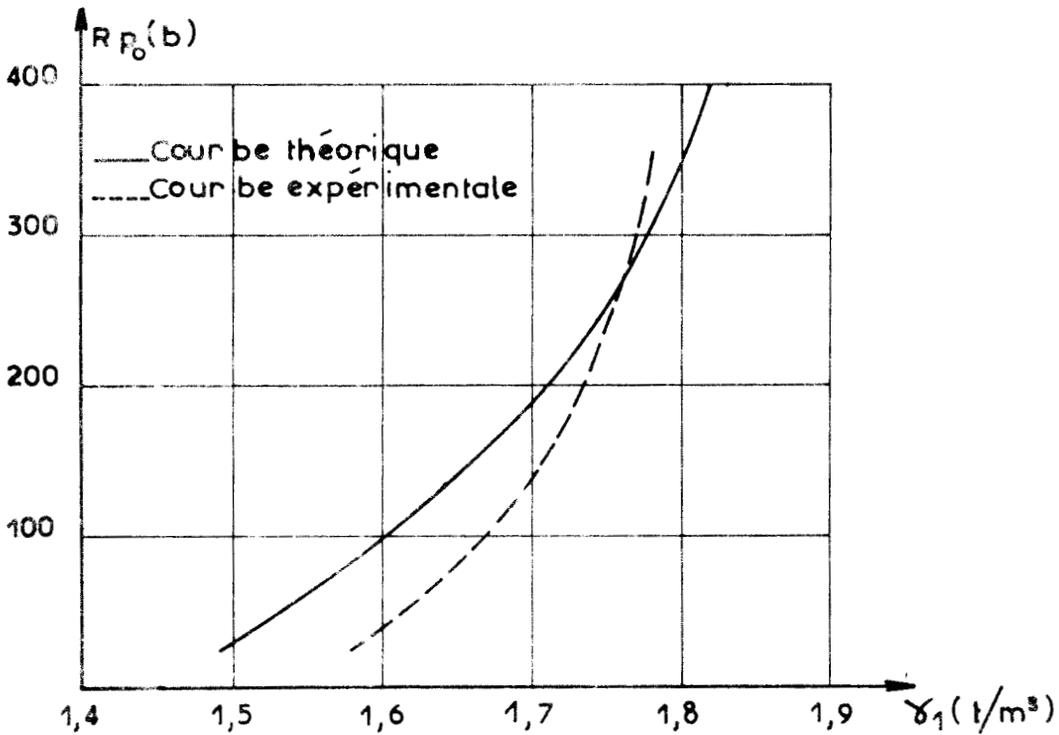


FIGURE 21 : VARIATION DE LA CONTRAINTE DE RUPTURE EN FONCTION DE LA MASSE VOLUMIQUE



II-3. POINÇONNEMENT PAR UN PENETROMETRE A BASE CONIQUE  
DONT L'ANGLE D'OUVERTURE EST FAIBLE

Quand la base du pénétromètre est formée d'un cône dont l'angle d'ouverture est faible, un calcul, analogue à celui que nous avons exposé aux paragraphes précédents, permet de déterminer la valeur de la limite de rupture  $R_{p_0}$ .

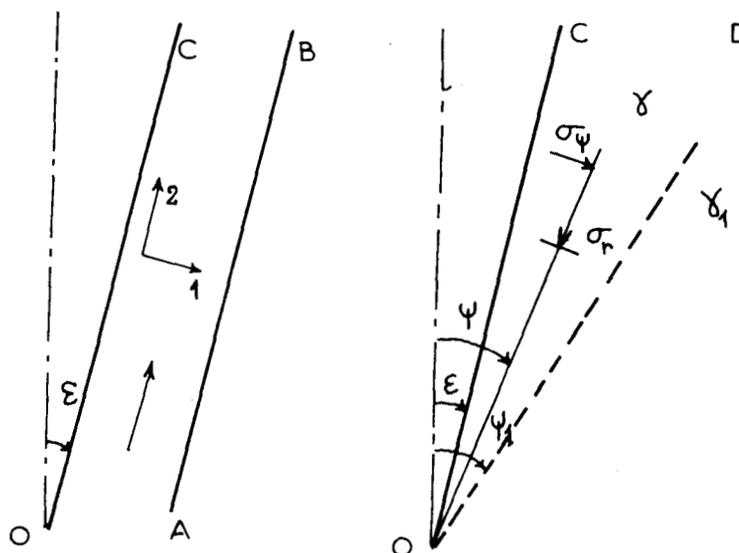


Figure 22 : SCHEMA DU DOMAINE PLASTIQUE

La figure (22) permet de préciser les hypothèses suivantes, vérifiées dans le domaine plastique situé au voisinage de la pointe :

a) le matériau situé dans la bande OABC subit des déformations petites ; son état est représenté par le point A de la courbe effort déformation (figure 6). Les paramètres du critère de rupture sont alors :

$$\sigma_0 = 108 b \quad \alpha = 5,8 \cdot 10^{-3} b^{-1}$$

b) La vitesse du sol par rapport au poinçon en première approximation parallèle à OC.

c) La surface limitée par OC est sans frottement. Les directions principales des contraintes dans le domaine OABC sont donc portées par les axes 1 et 2, respectivement perpendiculaire et parallèle à OC.

.../...

Afin de simplifier la résolution du problème, nous proposons un schéma voisin de celui que nous venons de décrire, en remplaçant la bande OABC par le domaine COD, limité par les angles  $\xi$  et  $\psi_1$ , Les contraintes principales ( $\sigma_r, \sigma_\psi$  et  $\sigma_\theta$ ) sont rangées dans l'ordre suivant :  
 $\sigma_r \ll \sigma_\theta \ll \sigma_\psi$

Les équations d'équilibre permettent d'écrire :

$$(21) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial p} - \frac{\partial \sigma_\psi}{\partial q} + 2(\sigma_r - \sigma_\psi) = 0, \quad p = \log r, \quad q = \log \sin \psi$$

Le critère de rupture s'exprime par la relation :

$$(22) \quad \sigma_r + H = K_a (\sigma_\psi + H)$$

En éliminant  $\sigma_\psi$  des équations (13) et (14) et en posant :

$$\Sigma_\psi = \text{Log} \sigma_\psi + \frac{K_a - 1}{K_a} p + (1 - K_a)q$$

on trouve :

$$\frac{\partial \Sigma_\psi}{\partial q} - K_a \frac{\partial \Sigma_\psi}{\partial p} = 0$$

Posant :

$$\xi = p - K_a q, \quad \eta = p + K_a q$$

On voit que :

$$\Sigma_\psi = G(\eta)$$

Par suite :

$$\sigma_\psi = e^G + \frac{1 - K_a}{K_a} \xi - H$$

$$(23) \quad \sigma_r = K_a \sigma_\psi + H(K_a - 1)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\psi + \frac{\partial \sigma_\psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_\psi}{\partial \eta}$$

Soit  $g = e^G$

.../...

$$u = \text{Log} \frac{\gamma^B - \gamma^A}{\gamma^B - \gamma}$$

Il vient donc :

$$3\sigma_m = \sigma_I = e^{-\frac{1-K_a}{K_a}\xi} [(1+2K_a)g + K_a \frac{dg}{d\eta}] - 3H$$

La loi de compressibilité permet de déterminer la masse volumique  $\gamma$  et la fonction  $g$  :

$$(25) \quad K_a \frac{dg}{d\eta} + (1+2K_a)g = 3\left(H - \frac{u}{\beta}\right) e^{\frac{K_a-1}{K_a}\xi}$$

On voit donc que :

$$u = \beta H + V(\eta) e^{-\frac{1-K_a}{K_a}\xi}$$

Les conditions aux limites sont :

$$(26) \quad r = 0 \quad u = u_1$$

$$(27) \quad \psi = \psi_1 \quad u = u_1$$

La condition (25) est vérifiée si :

$$v = v_1 e^{\frac{K_a-1}{K_a}\eta}$$

Alors :

$$u = \beta H + \frac{v_1}{(\sin\psi)^{2(1-K_a)}}$$

La condition (26) est vérifiée si :

$$v_1 = (\sin\psi_1)^{2(1-K_a)}(u_1 - \beta H)$$

Remplaçant  $u$  par sa valeur dans l'équation (24), nous déterminons la fonction  $g$ .

$$(27) \quad K_a \frac{dg}{d\eta} + (1+2K_a)g = -\frac{3v_1}{\beta} e^{\frac{K_a-1}{K_a}\eta}$$

.../...

La solution de l'équation (23) est :

$$g = - \frac{v_1}{\beta} e^{\frac{K_a - 1}{K_a} \eta} + B e^{-\frac{1 + 2K_a \eta}{K_a}}$$

Les contraintes ne sont pas infinies si  $r$  tend vers zéro, donc  $B = 0$

d'où :

$$\sigma_\psi = - \frac{v_1}{\beta} e^{\frac{1 - K_a}{K_a} (\xi - \eta)} - H$$

$$(28) \quad \sigma_r = - K_a \frac{v_1}{\beta} e^{\frac{1 - K_a}{K_a} (\xi - \eta)} - H$$

$$\sigma_e = \sigma_\psi$$

La contrainte de rupture est donc :

$$(29) \quad R_{po} = (\sigma_\psi)_{\psi=\xi} = (H + \sigma_{m1}) \left( \frac{\sin \psi_1}{\sin \xi} \right)^{2(1 - K_a)} - H$$

Nous introduisons la profondeur de rupture  $Z_o$  par la méthode appliquée au poinçon à base plate. Le volume final à l'état plastique est :

$$(30) \quad v = \frac{\pi r_o^3}{3} \cdot \frac{\text{tg}^2 \psi_1 - \text{tg}^2 \xi}{\text{tg}^3 \xi} \times \frac{\gamma_B}{\gamma_1}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$(31) \quad v \cdot w = \frac{\pi r_o^2}{2} \cdot R_{po} \cdot Z_o$$

$$\text{tg}^2 \psi_1 - \text{tg}^2 \xi = \frac{3}{2} \cdot \text{tg}^3 \xi \cdot \frac{R_{po}}{w} \cdot \frac{Z_o}{r_o} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_B}$$

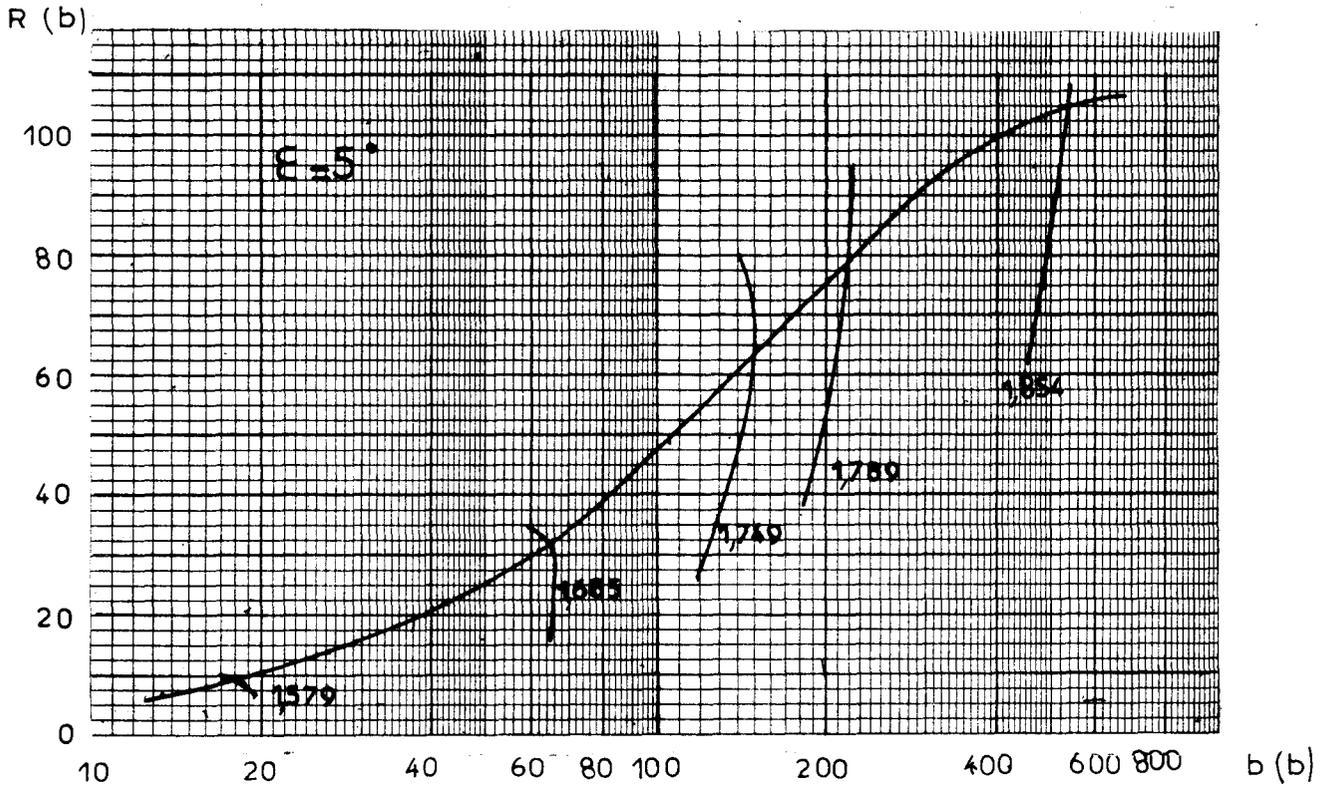
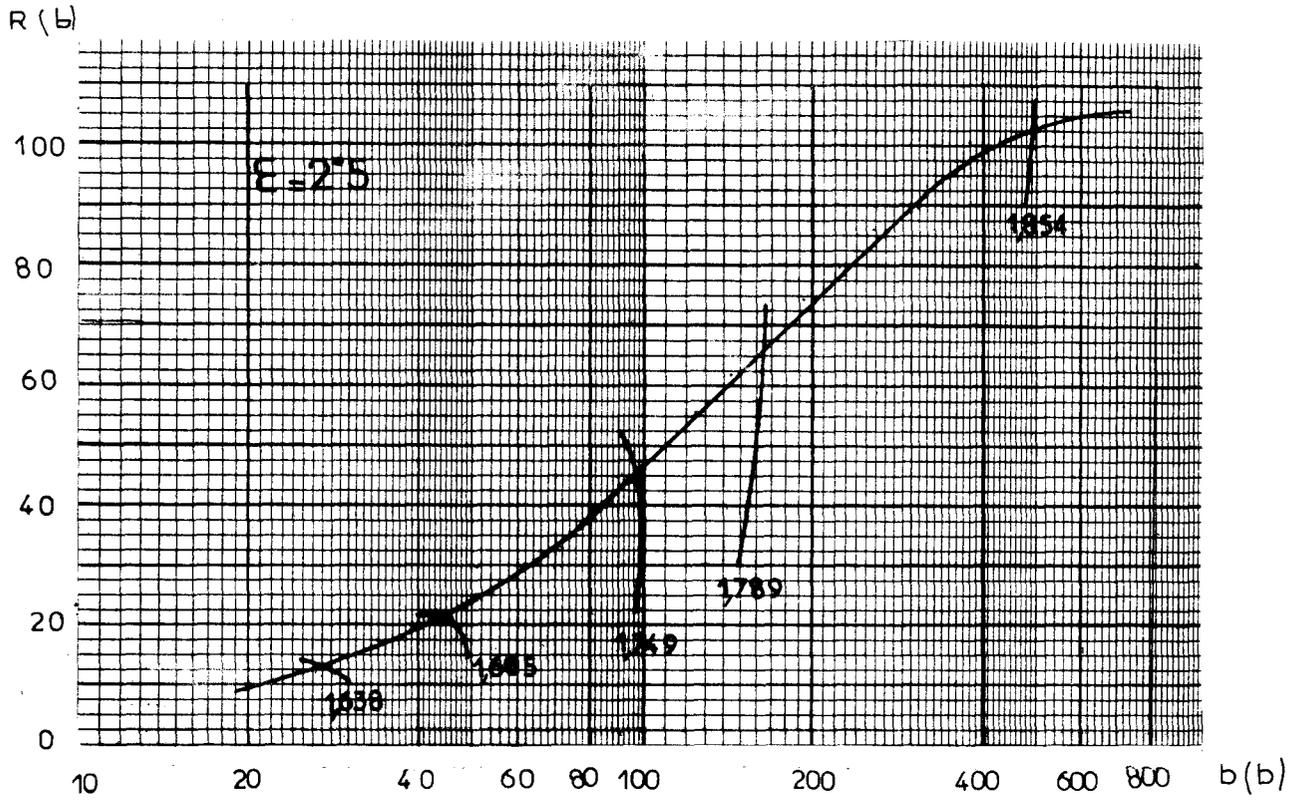
Soit :

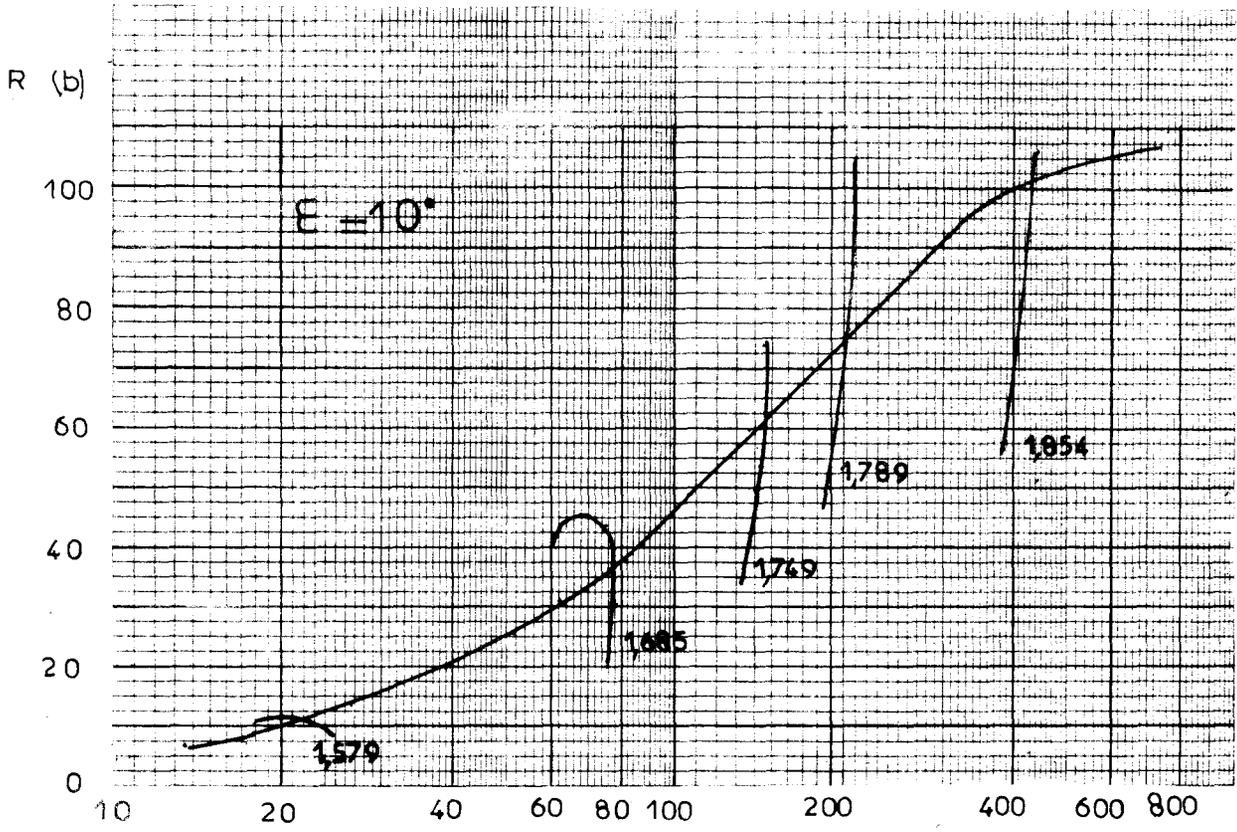
$$(32) \quad \text{tg} \psi_1 = \text{tg} \xi \sqrt{1 + \frac{3}{2} \cdot \text{tg} \xi \cdot \frac{R_{po}}{w} \cdot \frac{Z_o}{r_o} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_B}}$$

Les relations (27) et (30) permettent de calculer  $R_{po}$  en fonction du rapport  $\frac{Z_o}{r_o}$ , mais en première approximation, nous remplaçons  $R_{po}$  par  $\sigma_{r1}$  qui est la contrainte associée à la valeur  $\gamma_1$  de la masse volumique

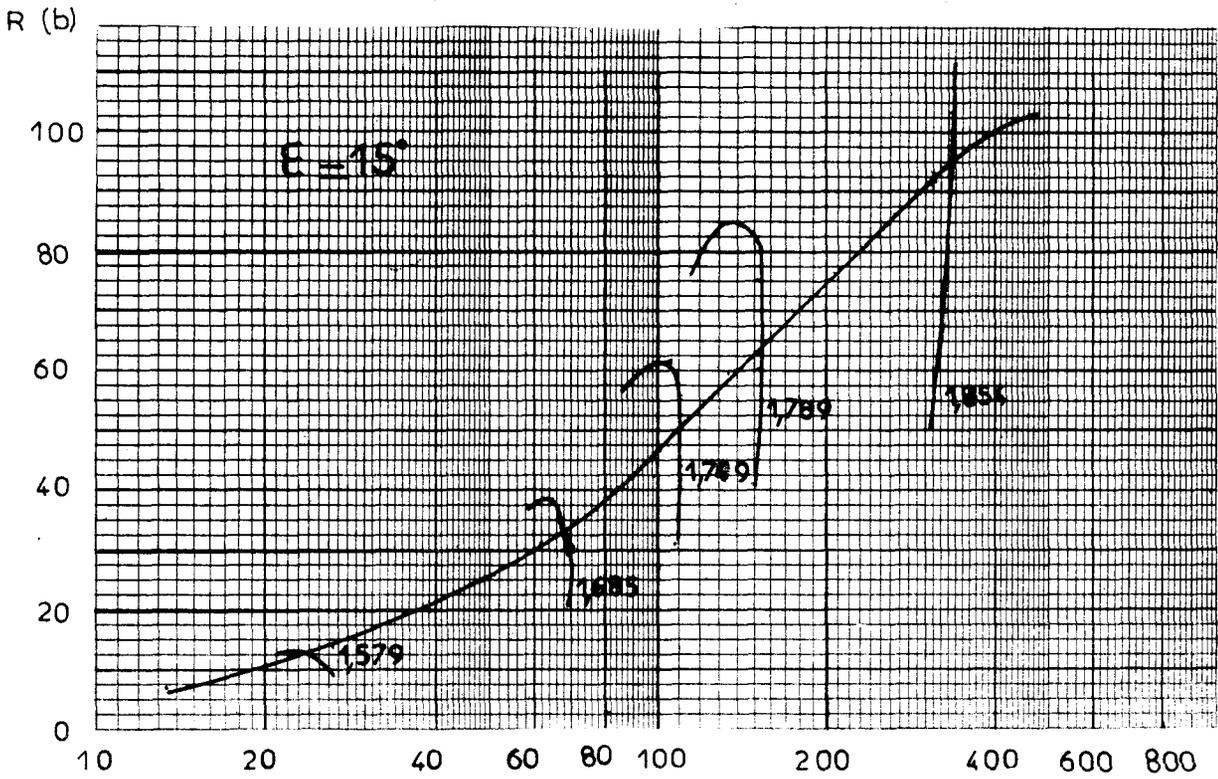
$$(33) \quad \frac{\text{tg} \psi_1}{\text{tg} \xi} = \sqrt{1 + \frac{3}{2} \cdot \text{tg} \xi \cdot \frac{\sigma_m}{w} \cdot \frac{Z_o}{r_o} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_B}}$$

.../...



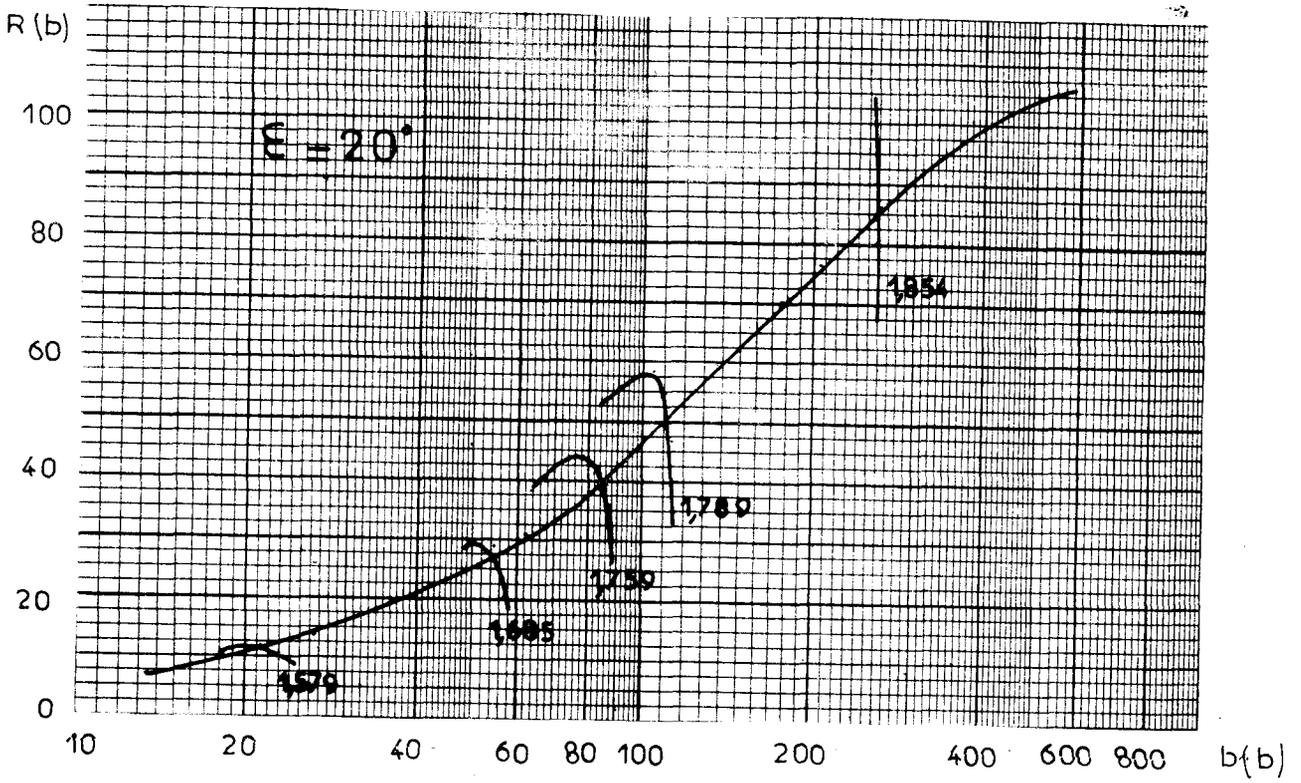


b(b)



b(b)





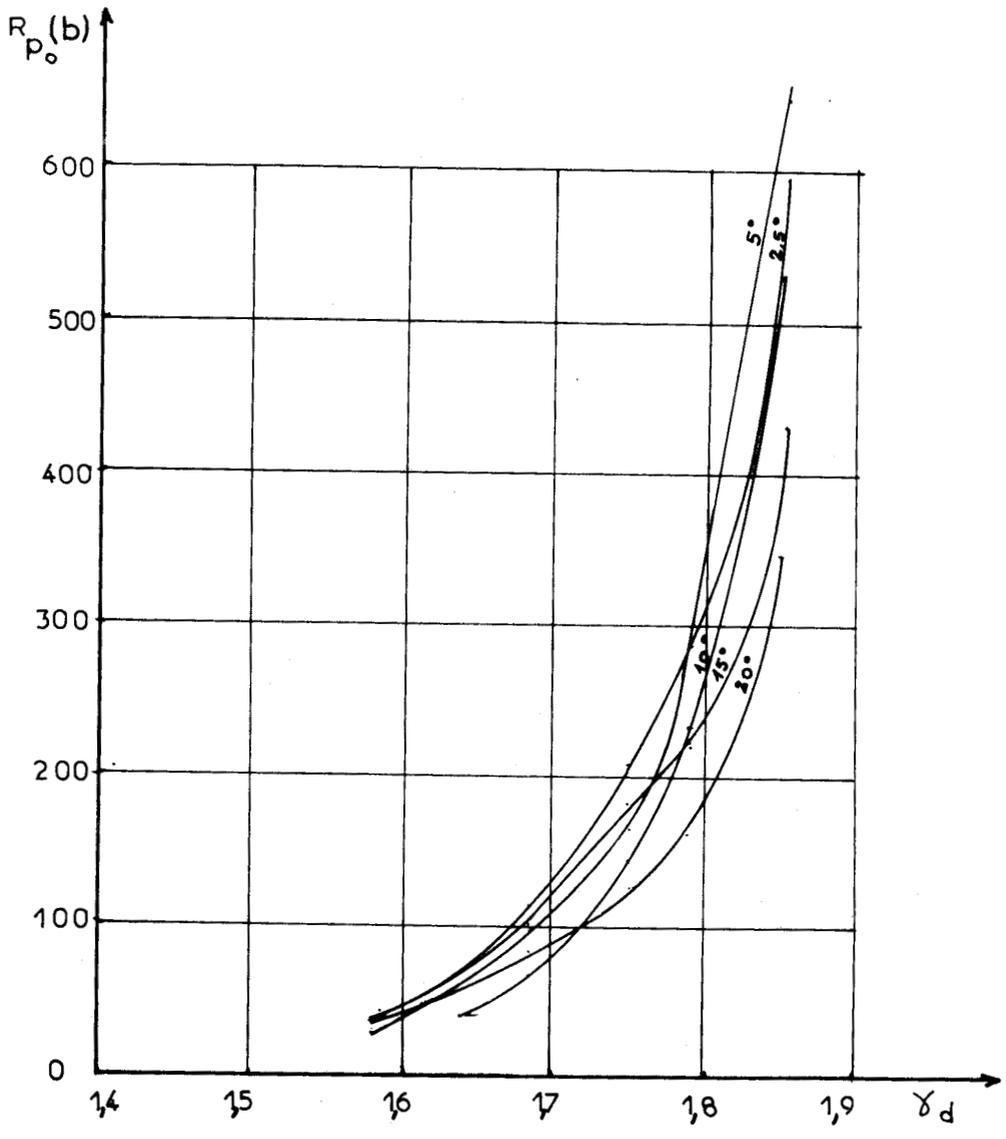


Fig 23 Résistance de pointe limite



#### IV - CONCLUSION.

---

Dans les sables de faible perméabilité ( $10^{-3}$  cm/s) le sable de Fontainebleau par exemple, la similitude rhéologique est parfaitement vérifiée. Quand la densité est faible, il est nécessaire d'établir avec soin les équipotentielles de pression au voisinage de la fondation. Les résultats obtenus sont meilleurs quand on augmente légèrement les dimensions de la structure. Il faut toutefois dans les milieux de faible compacité, que la perte de charge et le débit de l'écoulement ne soient pas trop élevés pour ne pas affecter la densité par compactage hydraulique; de plus, il convient d'éviter des phénomènes parasites en liaison avec la pression interstitielle; sans ces précautions, on pourrait fausser les mesures et obtenir des valeurs trop grandes de la résistance de pointe.

Ces difficultés n'existent plus quand la perméabilité du sol est élevée. Les résultats des essais de pénétration dans le sable de Loire de grande perméabilité ( $10^{-1}$  cm/s) sont très voisins des expériences en vraie grandeur, quelle que soit la compacité du sol; ils ont été réalisés avec le même pénétromètre de diamètre 20 mm dont l'extrémité n'était pas alimentée en eau.

Il est intéressant de constater que les résultats sont corrects dans ce sable grossier; la continuité de ce matériau n'est peut-être pas assurée car la dimension des grains est grande.

La similitude rhéologique avec conservation du matériau, des contraintes et du temps permet de supprimer l'effet d'échelle et d'étudier en laboratoire la résistance des sables chargés par une fondation; cette similitude est beaucoup plus évoluée que les essais en semi-grandeur, elle donne des résultats quantitatifs valables dans les cas simples que nous avons envisagés.

Elle nous a permis de proposer un schéma décrivant le mécanisme de la rupture du sol sous une fondation profonde. Nous avons vu que ce mécanisme dépend principalement de la compacité du matériau, de son écrouissage et de la profondeur d'ancrage qui détermine l'importance du refoulement du sol vers la surface libre.

. . . . .

Il serait à présent nécessaire de continuer ces expériences préliminaires déjà très concluantes par une étude plus complète.

Cette étude déterminerait l'influence du diamètre et du frottement latéral sur les enfoncements inférieurs à la profondeur critique. Enfin l'étude des groupes de pieux et des quadrillages de semelles que nous aborderons prochainement nous donnera des résultats nouveaux dans le domaine des fondations sur sable.

Les développements théoriques exposés dans la seconde partie mettent en évidence la difficulté de résoudre le problème du poinçonnement d'un sable. La théorie de la plasticité ne peut rendre compte de ce phénomène ; elle ne permet pas, même dans le cas de l'écoulement naissant, d'exposer une solution satisfaisante, car les méthodes numériques ne permettent pas de déterminer le champ cinématiquement admissible ; on ne vérifie pas que le travail de déformation est positif en tous points.

Une schématisation convenable des phénomènes nous a permis de calculer la résistance limite avec une meilleure précision. Il serait nécessaire, afin d'améliorer nos résultats, de tenir compte des déformations élastiques du sol et d'étudier la phase transitoire des enfoncements inférieurs à la profondeur critique.

NOTATIONS

-----

$l$	longueur
$\xi$	déplacement
$U, W$	composantes de la vitesse de glissement projetée sur les lignes marginales $\alpha$ et $\beta$
$u, w$	composantes de la vitesse de glissement projetée sur le repère orthonormé $(o_r, o_z)$
$v$	vitesse de filtration
$\epsilon_{ij}$	composante du tenseur des déformations
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	déformations principales
$\epsilon_{ij}^p$	composante du tenseur des déformations plastiques
$Z, Z_0$	profondeur et profondeur critique
$D$	profondeur d'ancrage de la fondation
$\sigma_{ij}$	composante du tenseur des contraintes
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	contrainte principale
$J_1, J_2, J_3$	invariants du tenseur des contraintes
$p, \sigma_m$	contrainte moyenne
$q$	diamètre du cercle de Mohr limite
$\sigma, \tau$	composantes normale et tangentielle de la contrainte
$p, \sigma$	abscisse du centre du cercle de Mohr limite
$p$	pression hydrostatique
$Q_0$	charge limite
$R_p, R_{p_0}$	pression de pointe et pression limite de pointe
$E$	module d'Young
$G$	module d'élasticité transversal
$\nu$	nombre de Poisson

.../...

t	temps
g.G.	champs de pesanteur
$\gamma_d$	masse volumique sèche
$\gamma_w$	masse volumique de l'eau
$(\vec{or}, \vec{oz})$	repère cartésien
(1 - 2)	directions principales
$\omega$	angle orienté ( $oz, 1$ )
$\varphi$	angle de frottement interne
$\mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$	
$\delta_F, \delta$	obliquité de la contrainte sous la fondation

o o

o

B I B L I O G R A P H I E

-----

R. HILL.

A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity  
Journal of the Mechanics and Physics of Solids. - 8 october 1947.

J. MANDEL.

"Contraintes et déformations dans les sols à frottement interne".  
Revue travaux 1948.

P. HABIB.

"Essais de charge portante de pieux en modèle réduit".  
Annales de l'I.T.B.T.P. - N° 63-64 - Mars-Avril 1953.

J.F.W. BISHOP.

On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid  
material.  
Journal of the Mechanics and Physics of Solids - Vol.2 - 30 July 1953.

R.T. SHIELD.

On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry.  
Proceedings of the Royal Society - 1955 - Tome 233.

J. MANDEL.

Bases physiques des théories mathématiques de la plasticité  
Conférences prononcées au Séminaire de Rhéologie non linéaire.  
Novembre - Décembre 1959.

B. LADANYI.

Etude des relations entre les contraintes et les déformations lors du  
cisaillement des sols pulvérulents.  
Annales des travaux publics de BELGIQUE - Fascicule N° 3 - Juin 1960.

B. LADANYI.

Etude théorique et expérimentale de l'expansion dans un sol pulvérulent d'une cavité présentant une symétrie sphérique ou cylindrique.

Annales des travaux publics de Belgique - Fascicules N° 2 - AVRIL 1961.  
et N° 4.

J. MANDEL.

"Essais sur modèles réduits en Mécanique des terrains, étude des conditions de similitude" Revue de l'industrie minière 44 - N° 9 - 1962.

S. IRMAY-D. ZASLAVSKY.

Flux spécifique et vitesse effective de la loi de DARCY. Analyse critique.

Rhéologie et Mécanique des sols. Symposium de GRENOBLE - Avril 1964.

A. BELOT.

Propriétés mécaniques sous fortes pressions d'un sable gréseux et d'un sable sans cohésion.

Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de GRENOBLE 1964.

Y. TCHENG.

Fondations profondes en milieu pulvérulent à diverses compacités.

Annales I.T.B.T.P. - Mars-Avril 1966 - N° 219-220.

P. HABIB et G. VOUILLE.

Sur la disparition de l'effet d'échelle aux hautes pressions.

C.R. Académie des Sciences de PARIS - t. 262 - 21 mars 1966.

J. SALENÇON.

Expansion quasi statique d'une cavité à symétrie sphérique ou cylindrique dans un milieu élasto plastique.

Annales des ponts et chaussées III - 1966.

J. MANDEL.

Sur les équations d'écoulement des sols idéaux en déformation plane et le concept du double glissement.

J. Mech. Phys Solids - Vol. 14 - 2 mai 1966.

A. ZELIKSON.

Représentation de la pesanteur par gradient hydraulique dans les modèles réduits en géotechnique.

Annales de l'I.T.B.T.P. - Novembre 1967 - N° 239.

R. NEGRE.

Contribution à l'étude de l'équilibre limite des sols et des matériaux pulvérulents et cohérents.

Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de GRENOBLE 1968.

LÊ LONG.

Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols sous fortes pressions.

Thèses présentées à la Faculté des Sciences de l'Université de GRENOBLE 1968.

I.F. COLLINS.

The Upper bound theorem for rigid plastic solids generalized to include Coulomb friction.

J. Mech. Phys. Solids Vol. 17 - 6 mai 1969

J.M. GRESILLON.

Etude des fondations profondes en milieu pulvérulent.

Thèses présentées à la Faculté des Sciences de l'Université de GRENOBLE. 1970.

F. ZANGHELLINI.

Expansion des cavités sphériques dans les sols - Application à la résistance en pointe des pieux.

Thèse présentée à la Faculté des Sciences de PARIS - 1970.

K.H. ROSCOE.

The Influence of Strains in soil Mechanics.

Geotechnique 20 - N° 2 - 129 - 170 . Tenth Rankine Lecture - 1970.

-----

T A B L E D E S M A T I E R E S

-----

	<u>Pages</u>
AVANT PROPOS. ....	1
INTRODUCTION. ....	2 - 7
<u>PREMIERE PARTIE</u> : Etude expérimentale du poinçonnement d'un sable homogène .....	8 - 66
<u>CHAPITRE I.</u> : Rappels généraux .....	9 - 20
- I.1 - : Conditions de similitude .....	9 - 16
- I.2 - : Essais de pénétration en vraie grandeur dans les sables .....	16 - 20
<u>CHAPITRE II.</u> : Description du modèle .....	21 - 23
- II.1 : Circuit hydraulique .....	21
- II.2 : Cellule de mesure .....	21 - 22
- II.3 : Dispositif d'enfoncement .....	22
- II.4 : Structure d'essais .....	22 - 23
- II.4.1 - : Pénétrètres isolés-groupes de pieux ..	23
- II.4.2 - : Fondations superficielles et semi-enter- rées .....	23
<u>CHAPITRE III.</u> : Résultats d'essais et interprétation .....	24 - 40
- III.0 : Remarques préliminaires sur le mode opératoire..	24 - 26
- III.1 : Essais de pénétration dans le sable de Fontai- nebleau .....	26
- III.1.1 - : Compactage du sol - résultats obtenus dans les milieux de densité élevée ....	26 - 30
- III.1.2 - : Sables de faibles densités .....	30 - 33
- III.2 : Essais de pénétration dans le sable de Loire ...	33
- III.2.1 - : Essais de pénétration à partir de la surface libre .....	34 - 36
- III.2.2 - : Essais de pieux moulés .....	36 - 38

(suite du CHAPITRE III.)

Pages

- III.3 : Mécanisme de rupture du sol sollicité par une fondation profonde .....	68 - 80
GRAPHIQUES .....	41 - 56
<u>SECONDE PARTIE</u> : Etude théorique des problèmes de poinçonnement .	67
<u>CHAPITRE I.</u> : Etude des problèmes de poinçonnement par la théorie de la plasticité .....	67 - 90
- I.1 - : Lois et théorèmes généraux de la théorie de la plasticité .....	67
- I.1.1. - : Principe du travail maximal - poten- tiel plastique .....	67 - 71
- I.1.2. - : Théorie des charges limites .....	72 - 73
- I.2 : Poinçonnement par écoulement naissant .....	73 - 77
- I.3 : Matériaux non-standards .....	77
- I.3.1. - : Définitions - théorie des charges limi- tes .....	77 - 78
- I.3.2. - : Matériau de Coulomb - Force portante d'une fondation .....	79
- I.3.2.1 - : Définition du matériau de Coulomb.	79
- I.3.2.2 - : Etude des champs statiques et ci- nématiques .....	79 - 83
- I.3.2.3 - : Application au calcul de la force portante d'une fondation cylindri- que de révolution .....	83 - 90
<u>CHAPITRE II.</u> : Contribution au calcul des fondations profon- des à la rupture .....	91 - 116
- II.1 : Contribution à l'étude des propriétés plasti- ques des sables .....	92
- II.1.1. - : Introduction .....	92
- II.1.2. - : Notations .....	92
- II.1.3. - : Essai triaxial .....	92 - 93
- II.1.4. - : Résultats de l'essai triaxial .....	94 - 97

- II.1.4.1. - : Essais à contrainte latérale constante ..... 95 - 97
- II.1.4.2. - : Essais à contrainte moyenne constante ..... 96 - 97
- II.1.5. - : Conclusions ..... 98
- II.2 : Calcul de la force portante d'un pieu en milieu sableux ..... 99 - 103
  - II.2.1. - : Rupture d'un sol par poinçonnement ..... 99 - 100
  - II.2.2. - : Pression limite ..... 100
  - II.2.3. - : Application numérique ..... 100 - 101
  - II.2.4. - : Calcul des dimensions de la zone plastique ..... 102 - 105
  - II.2.5. - : Approximation de la courbe intrinsèque .. 105 - 106
  - II.2.6. - : Résultats numériques ..... 106 - 108
- II.3 : Poinçonnement par un pénétromètre à base conique dont l'angle d'ouverture est faible ..... 109 - 111
- CONCLUSION ..... 117 - 118
- NOTATIONS ..... 119 - 120
- BIBLIOGRAPHIE ..... 121 - 122

