N° d'ordre 333

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

Le Titre de Docteur de Spécialité

(Mathématiques Pures)

par

Jean-pierre EZIN

PROBLEMES MIXTES POUR CERTAINES EQUATIONS HYPERBOLIQUES DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS MATRICIELS

Soutenue le 27 Juin 1972

Membres du Jury : M. GONTIER, Président
M. PARSY, Rapporteur
M. VAILLANT, Examinateur

A mon PERE et ma MERE

dont les nombreux sacrifices acceptés en toute générosité ont permis à mes jeunes frères et moi de faire des études.

A VICTOIRE - HAPPY

dont la destinée s'unit à la mienne.

A mon oncle KPOKOU, mes amis, mes camarades et tous ceux qui m'ont aidé et m'aident encore sur le chemin de la vie.

J'exprime ma profonde reconnaissance à mes maîtres d'école :

A Monsieur le Professeur GONTIER qui a bien voulu présider le jury qui jugera cette thèse ;

A Monsieur le Professeur J. VAILLANT qui m'a patiemment et avec dévouement initié à la recherche mathématique, qui, après avoir accepté de consacrer plusieurs heures à écouter des exposés des parties importantes de ce travail et de me donner des conseils très bénéfiques, a bien voulu être membre du jury ;

A Monsieur BOUBAKAR BA qui m'a laissé au cours de l'année scolaire 1967-1968 un souvenir inoubliable et donné le goût des mathématiques pures ;

Au groupe de travail sur les équations aux dérivées partielles que dirige Monsieur J. VAILLANT pour ses critiques constructives.

J'exprime ma reconnaissance toute particulière à Monsieur PARSY qui m'a proposé le sujet de ce travail, en a suivi avec ardeur et disponibilité l'évolution et qui a dirigé mes recherches avec une grande maîtrise.

Je remercie vivement Madame BÉRAT et sa collaboratrice Madame LENGAIGNE pour la rapidité, la compétence et le dévouement avec lesquels elles ont assuré la mise en page et, par-delà elles, je remercie tout le personnel du secrétariat de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées.

*

*   *

INTRODUCTION.

L'idée de ce travail nous a été fournie par un article de H. WILCOX paru dans Archive for Rational Mechanics and Analysis sous le titre : "Initial Boundary Value for linear hyperbolic Partial Differential Equations of the Second Order", en 1962. Il s'agissait essentiellement d'étudier un problème mixte d'ordre deux du type hyperbolique, qui constitue la base mathématique de la théorie de la diffraction.

Nous reprenons le même problème à partir d'un opérateur différentiel paramétrique L d'ordre deux défini sur un sous-espace de l'espace $F(\Omega,H)$ des fonctions définies dans une variété Ω différentielle, paracompacte de classe C^∞ munie d'une métrique riemannienne et à bord $\partial\Omega$, et à valeurs dans un espace de Hilbert H de dimension n égale à la dimension de Ω. Les coefficients de l'opérateur L sont des matrices bornées, $(n \times n)$ variables avec $x \in \Omega$. De sorte que le problème mixte de Cauchy associé à L revient à la résolution d'un système d'équations non homogènes du type hyperbolique d'ordre 2 l'opérateur L est défini par :

$$L = \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbb{A}_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}) + \mathbb{A}_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathbb{A}(x)$$

et il s'agit alors de trouver, pour trois fonctions données : $\vec{\rho}$ définie dans $\Omega\times I$ (I ensemble auquel appartient le paramètre t), $\vec{f}$ et $\vec{g}$ définies dans Ω, $\vec{u} \in F(\Omega \times I, H)$ telle que :

$$L\,\vec{u} + \vec{\rho} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{dans} \quad \Omega \times I$$

vérifiant

$$\begin{cases} \vec{u}(x,0) = \vec{f}(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x,0) = \vec{g}(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

et

$$\vec{u}(x,t) = 0 \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

$$\left(\text{ou} \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial N_L} \equiv \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} N_j = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\right) .$$

La recherche de la classe d'unicité et d'existence de solution pour ce problème nous a conduits à établir le résultat essentiel de ce travail : l'inégalité du domaine de dépendance dont découlent la plupart des assertions qui vont suivre.

Dans le cas particulier où les coefficients $\mathbb{A}_{ij}$ sont constants, nous obtenons un résultat marginal qui ne semble pas manquer d'intérêt.

L'ensemble du travail est divisé en cinq chapitres.

Les deux premiers précisent les notions générales sur les équations aux dérivées partielles et sur l'analyse fonctionnelle dont nous allons avoir besoin.

Le troisième chapitre est consacré à l'exposé du problème.

Le quatrième rassemble les résultats de base et établit l'inégalité du domaine de dépendance.

Dans le dernier chapitre, nous établissons l'existence et l'unicité de la solution du problème posé.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES.

PROBLEMES AUX LIMITES.

I.1- *Mesures et distribution sur les variétés différentielles* C^∞.

Variétés différentielles C^∞.

Soit X un espace topologique séparé.

Définitions I.1.1.- X est une variété topologique réelle de dimension n si tout point x de X admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une variété topologique est donc un espace localement euclidien.

Si $(u_i)_{i=1,\dots,n}$ sont des fonctions coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ et U un ouvert, de $\mathbb{R}^p$, l'application $f : U \to R^n$ est de classe C^∞ (on écrira $f \in C^\infty$) si les fonctions numériques $(u_i \circ f)_{i=1,\dots,n}$ ont des dérivées partielles continues de tous ordres non négatifs.

Soit x un point de la variété topologique X, V un voisinage ouvert de x et ψ un homéomorphisme de V sur un ouvert de R^n. On dira que ψ est un système de coordonnées en x et l'on notera $(x_1,\dots,x_n)$ pour désigner les fonctions coordonnées $(u_1 \circ \psi, \dots, u_n \circ \psi)$.

Définition I.1.2.- Une variété différentiable de classe C^∞ X de dimension n, est la donnée d'une variété topologique X et d'une famille de couples $(V_\alpha,\psi_\alpha)_{\alpha\in I}$ où V_α est un ouvert de X, ψ_α un homéomorphisme de V_α sur un ouvert de R^n, satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) : $\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha = X$;

(ii) $\forall\alpha, \forall\beta \in I$ tels que $V_{\alpha\beta} = V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, l'application :

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \to \varphi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$$

est de classe C^∞ ainsi que sa réciproque $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$.

Soit X une variété (différentiable de classe) C^∞ de dimension n. Une structure C^∞ sur X est un ensemble maximal $S = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de couples satisfaisant aux propriétés (i) et (ii).

Les éléments de S sont appelés des cartes locales et φ_α des systèmes de coordonnées dans U_α :

Si X et Y sont deux variétés C^∞, l'application $\psi : X \to Y$ est de classe C^∞ $(\Psi \in C^\infty)$ si étant donné les deux systèmes de coordonnées φ et θ respectivement sur X et Y, l'application $\theta \circ \Psi \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^∞.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, dashed, "\varphi^{-1}" ', "\varphi"] & Y \arrow[d, "\theta"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\theta \circ \Psi \circ \varphi^{-1}" '] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

Fig. 1

Espace tangent à une variété.

Soit X une variété C^∞ et p un point de X.

Définitions I.1.3.- Une courbe C^∞ dans X est une application définie sur un intervalle fermé $[a,b]$, à valeurs dans X et prolongeable en une application C^∞ sur un intervalle ouvert.

Soit γ est une courbe C^∞ dans X et $F(X,p)$ le faisceau des fonctions numériques C^∞ définies dans un voisinage de p. La dérivée d'une fonction $f \in F(X,p)$ au point p le long de γ est la fonction linéaire :

$$\gamma_*(x) : \mathcal{F}(X,\gamma(s)) \mapsto \mathbb{R}$$
$$f \mapsto (f \circ \gamma)'(s)$$

avec $\gamma(s) = p$.

Une tangente en p à X est une application numérique $\mathcal{T}$ définie sur $\mathcal{F}(X,p)$ ayant les propriétés suivantes :

1 - $\mathcal{T} : \mathcal{F}(X,p) \to \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

2 - $\mathcal{T}$ est une dérivation c'est-à-dire que :

$$\forall f.g \in \mathcal{F}(X,p), \quad \mathcal{T}(fg) = \mathcal{T}(f)\, g(p) + f(p)\, \mathcal{T}(g) .$$

L'ensemble $T_p(X)$ des tangentes en p à X est l'espace tangente à la variété X au point p.

Proposition 1.1.1.- Si X est une variété C^∞ de dimension n, alors $T_p(X)$ est un espace vectoriel de dimension n.

Preuve.

Soit $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in T_p(X)$, il est immédiat que :

$+ \mathcal{T}' \in T_p(X)$

et $\lambda \mathcal{T} \in T_p(X) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$T_p(X)$ est donc un espace vectoriel réel.

Soit $\psi = (x_1,\dots,x_n) = (u_1 \circ \psi,\dots,u_n \circ \psi)$ un système de coordonnées en p de X. La dérivée en p par rapport à x_k d'une fonction f définie sur X est l'application tangente définie par :

$$[D_{x_k}(p)](f) = \frac{\partial}{\partial u_k} (f \circ \psi^{-1})(\psi(p)) \quad k \in \{1,\dots,n\}$$

$[D_{x_k}(p)]_{1 \leq k \leq n}$ est un système libre de $T_p(X)$. En effet si

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k D_{x_k}(p) = 0 \qquad \text{avec } \alpha_k \in \mathbb{R}$$

on a : $$\left(\sum_k \alpha_k D_{x_k}(p)\right)(x_j) = \sum_k \alpha_k D_{x_k}(p)\, x_j = 0$$

$$= \sum_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial u_k} (x_j \circ \psi^{-1}) \quad (p)$$

$$= \sum_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial u_k} (u_j \circ \psi \circ \psi^{-1})\ \psi(p)$$

$$= \alpha_k \delta_{kj} = 0 = 1 \quad \alpha_k = 0$$

$\forall k \in \{1,\ldots,n\}$ où les δk_j sont les "deltas de Kronecker".

$[D_{x_k}(p)]_{1 \leq k \leq n}$ engendre $T_p(X)$. En effet soit $f \in F(R^n,a)$. D'après le développement de Taylor de f dans un voisinage de $a = (a_1,\ldots,a_n)$, il existe des fonctions C^∞ $g_1,\ldots,g_n$ dans $F(R^n,a)$ telles que

$$f = f(a) + \sum_{k=1} \frac{(u_k - a_k)^k}{k!} g_k \,.$$

g_k étant telles que $g_k(a) = (D_k f)(a)$.

Soit alors $f \in F(X,p)$. Posons $a = \psi(p)$. Il existe des $g_k \in F(R^n,\psi(p))$ telles que :

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \psi^{-1})\ \psi(p) + \sum_k \frac{(u_k - a_k)^k}{k!} g_k$$

dans un voisinage V de $\psi(p) = a$ et $g_k(a) = D_k(f \circ \psi^{-1})(a)$.

Soit $b \in V$. Posons $b = (q)$. Il vient alors :

$u_k(b) = (u_k \circ \psi)(q) = x_k(q)$;

$$(f \circ \varphi^{-1})(q) = (f \circ \varphi^{-1})\ \varphi(p) + \sum \frac{(x_k(q)-x_k(p))^k}{k!} (D_{x_k} f)(q).$$

D'où dans un voisinage de p, on a :

$$f = f(p) + \sum \frac{(x_k - x_k(p))^k}{k!} D_{x_k} f \ .$$

Par suite, $\forall\, T \in T_p(X)$.

$$Tf = \sum_k \frac{k!}{k!} T(x_k)(D_{n_k} f)(p)$$

$$= (\sum_k T(x_k)\ D_{x_k}(p)\ f.$$

Donc $$T = \sum_{k=1}^{n} (x_k)\ D_{x_k}(p)\ .$$

$[D_{x_k}(p)]_{1 \leq k \leq n}$ est bien une base de $T_p(X)$ et par suite $\dim T_p(X) = \dim X = n$.

Définition I.1.4.- Soient X et Y deux variétés C^∞ et $\Psi : X \to Y$ une application C^∞. La différentielle de Ψ en p est l'application $d\Psi : T_p(X) \to T_{\Psi(p)}(Y)$ définie par :

$$[d\Psi(T)](f) = T(f \circ \Psi)$$

où $$T \in T_p(X) \quad \text{et} \quad f \in F(Y, \Psi(p)).$$

Si $Y = \mathbb{R}$, alors $d\Psi$ est une forme linéaire sur $T_p(X)$, donc un élément du dual $T_p^*(X)$ de $T_p(X)$. $T_p^*(X)$ est l'espace cotangent au point p à la variété X.

$$d\Psi(T)f = (f \circ \Psi)$$

$$d\Psi : T_p(X) \to \mathbb{R}_{\Psi(p)} = \mathbb{R}\ .$$

On a alors : $$d\phi(T)\ f = T(f).$$

Par rapport à un système de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$

$$dx_i(D_{x_k}(p) = \delta_{i_k} .$$

Donc $(dx_1,\dots,dx_n)$ est une base de $T_p^*(X)$ duale de $(D_{n_k}(p)_{1\leq<k\leq n}$.

On écrira désormais pour toute fonction $f + F(X,p)$

$$df = \sum_k D_{x_k}(p)\ dx_k .$$

Champ de vecteurs sur une variété.

Définition 1.1.5.- Un champ de vecteurs S sur une variété C^∞ X est une fonction définie sur une partie A de X qui associe à tout point p un vecteur $S(p)$ de $T_p(X)$.

Si S est un champ de vecteurs sur X et $f \varepsilon F(X,p)$ Sf est la fonction définie sur l'intersection des domaines de définition de S et de f par :

$$(Sf)\ (m) = S(m)\ (f) .$$

S sera dit de classe C^∞ s'il est défini sur un ouvert U de X et si pour tout point p de U et toute fonction f de $\tilde{F}(X,p)$. Sf appartient à $\tilde{F}(X,p)$.

De plus $S(p) \varepsilon T_p(X)$, il existe $\xi_{i_k}(p) \varepsilon \mathbb{R}$ tels que :

$$S(p) = \sum_{k=1}^{n} \xi_{i_k}(p)\ D_{x_{i_k}}(p) \qquad (I.1.1.)$$

Lemme I.1.1.- S est un champ de vecteurs C^∞ sur X si et seulement si ξ_{i_k} est un élément du faisceau $\tilde{F}(X,p)$ pour tout k, $1\leq k\leq n$.

Preuve.- Si $\xi_k \in \tilde{F}(X,p)$, il est clair que l'application

$$S : p \to \sum_{k=1}^{n} \xi_k(p)\, D_{x_k}(p)$$

est égale à la somme :

$$S = \sum \xi_k\, D_{x_k}$$

et donc est C^∞ et $S(p)$ est un vecteur de $T_p(X)$

$$S(p) = \sum_k \xi_k(p)\, D_{x_k}(p) = (\sum_k \xi_k\, D_{x_k})\,(p)\ .$$

Si S définie sur un voisinage U_p de p par la relation (I.1.1.) est de classe C^∞ alors $\sum \xi_k\, D_{x_k}$ est de classe C^∞. Donc $\sum \xi_k\, D_{x_k}\, x_j = \xi_k\, \delta_{k_j}$ est de classe C^∞ et par suite $\xi_k \in F(X,p)$.

Conséquence : L'application définie sur X par $p \to D_{x_k}(p)$ est un champ de vecteurs sur X.

Variété à bord.- Soit $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n_+$, nous dirons qu'une fonction sur f définie sur U est de classe C^∞ s'il existe un ouvert U' de $\mathbb{R}^n$ et une fonction F C^∞ sur U' telle que :

$$F_{|U} = f\ .$$

Définition I.1.6.- Une variété C^∞ X à bord est la donnée d'un espace topologique séparé X et d'une famille $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ où U_α est un ouvert de X et φ_α un homéomorphisme de U_α dans un ouvert de $\mathbb{R}^n_+$ et vérifiant :

$\forall\, \alpha, \beta \in I$ la restriction de $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ à $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ est de classe (I.1.2.).

Une structure C^∞ sur X est une famille maximale vérifiant (I.1.2.).

Les $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sont encore appelés des cartes locales.

Un point m de X sera dit point intérieur s'il existe une carte locale (U, φ) telle que, m appartenant à U, $\varphi(U)$ ne rencontre pas l'ensemble $\{x_1 = 0\}$ de R^n_+. Un point de X qui n'est pas intérieur est dit point du bord. L'ensemble des points du bord qui est le bord de X sera noté ∂X..

Remarque I.1.3.- Le bord X d'une variété C^∞ X a une structure naturelle C^∞ (sans bord !).

Définition I.1.7.- Soit $p \in X$ et G_p l'ensemble des germes de fonctions nulles en p.

Un vecteur T tangent en p à X $(T \in T_p(X))$ est dit positif (ou une normale intérieure à ∂X) si :

- pour toute fonction $f \in G_p$ et $f \geq 0$, on a :

$$Tf \geq 0$$

- et il existe au moins une $f \in G_p$ et $f \geq 0$ telle que $f > 0$.

Définition *I.1.8*.- La variété C^{∞} X est dite orientable s'il existe sur X une n-forme continue non nulle sur X.

Si X est une variété C^{∞} orientable à bord ∂X, alors le bord est aussi orientable.

Une orientation sur X connexe sera un choix de classe de n-formes équivalentes sur X en considérant comme équivalentes deux n-formes non nulles sur X Ψ_1 et Ψ_2 telles qu'il existe une fonction continue f qui est soit positive soit négative et qui vérifie $\Psi_1 = f\,\Psi_2$.

Il existe donc deux orientations possibles sur une variété C^{∞} connexe.

La variété X sera dite orientée si on a fixé une orientation sur X.

Fibrés vectoriels sur une variété.

Soit X,E deux espaces topologiques séparés et π une application continue.

Le triplet $\xi = (E,\pi,X)$ est appelé un fibré vectoriel complexe de rang k sur l'espace X si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\forall\, a \in X$, $\pi^{-1}(a) = E_a$ a une structure d'espace vectoriel complexe de dimension k.

(ii) $\forall\, a \in X$, il existe un voisinage V de a et un homéomorphisme h_V de $\pi^{-1}(V) = E_V$ dans $V \times C^k$ tel que si p est la projection de $V \times C^k$ sur V, on ait :

$$p o h_V = \pi \quad \text{sur} \quad E_V$$

et que, pour tout $x \in V$, la restriction de h_V à E_x soit un isomorphisme complexe de E_x dans $\{x\} \times C^k$.

Remarque *I.1.1*.- $\xi = (E,\pi,X)$ est un fibré vectoriel complexe de classe C^{∞}, si E et X sont des variétés C^{∞}, si E et X sont des variétés C^{∞} et π

une application différentiable C^{∞}.

Remarque 1.1.2.- Une section de ξ est une application $s : X \to E$ telle que $\pi \circ s = Id_X$ (Id_X est l'application identique de X).

Exemples de fibrés vectoriels.

1.- *Fibrés tangent et cotangent à une variété* C^{∞}.

Soit X une variété différentielle C^{∞}.

Posons : $T(X) = \bigcup_{p\in X} T_p(X)$.

$T(X)$ a une structure naturelle de variété C^{∞}. Soit $\pi : T(X) \to X$ la projection canonique de $T(X)$ sur X. Alors le triplet $(T(X),\pi,X)$ est un fibré vectoriel de rang n.

De la même façon, en posant $T^*(X) = \bigcup_{p\in X} T_p^*(X)$ et $\pi^* : T^*(X) \to X$ on définit le triplet $(T^*(X),\pi^*,X)$ comme un fibré vectoriel sur la variété X.

$T(X)$ et $T^*(X)$ sont dits respectivement fibrés vectoriels tangent et cotangent à la variété X.

2.- *Fibré vectoriel des* q-*formes différentielle*.

Soit $\Lambda^q T_q^*(X)$ la q-ième puissance extérieure de l'espace vectoriel $T_p^*(X)$.

Posons :

$$\Lambda^q T^*(X) = \bigcup_{p\in X} \Lambda^q T_p^*(X) .$$

$\Lambda^q T^*(X)$ a une structure naturelle de variété C^{∞} de dimension $\{n+\binom{n}{q}\}$.

Soit $: \Lambda^q T^*(X) \to T^*(X)$ la projection canonique de $\Lambda^q T^*(X)$ sur $T^*(X)$. Le triplet $(\Lambda^q T^*(X), ,T^*(X))$ est un fibré vectoriel C^{∞}.

Définition I.1.8.- On appelle une q-forme différentielle sur un ouvert A de X, une section de $\Lambda^q T^*(X)$ au-dessus de l'ouvert A.

Mesure et distribution.

Considérons les fibrés vectoriels complexes $\Lambda^q T^*(X)$ sur la variété X, C^∞ de dimension n.

Soit $(X,\Lambda^q T(X)^*)$ l'ensemble des q-formes au-dessus de X.

Désignons, pour toute partie compacte K de X, par $\Lambda_q(X,K)$ l'ensemble des q-formes de classe C^∞ à support dans K. Posons :

$$\mathcal{D}_q(X) = \bigcup_{K \subset X} \mathcal{D}_q(X,K) \ .$$

Définition I.1.9.- Un q-courant sur X est une forme linéaire F sur $\mathcal{D}_q(X)$ dont la restriction à chaque $\mathcal{D}_q(X,K)$ est continue.

Une distribution sur X est un 0-courant sur X.

Soit $\mathcal{D}_q^{(r)}(X,K)$ l'espace des q-formes différentielles de classe C^r à support dans K.

Si F est un p-courant tel que, pour tout compact K X, la restriction de F à $\mathcal{D}_q(X,K)$ est continue pour la topologie induite par celle de $\mathcal{D}_q^{(r)}(X,K)$, on dit alors que F est d'ordre supérieur ou égal à r.

L'ordre d'un q-courant est le plus petit entier r ayant la propriété ci-dessus.

Une mesure sur une variété X est une distribution d'ordre 0.

I.2- Equations aux dérivées partielles. Problèmes aux limites.

Soit (E,π,X) un fibré vectoriel sur la variété différentielle C^∞ X. Notons I_a, l'idéal formé par les germes des sections C nulles au point a

de X. Désignons par $Z_k(E)$ ou Z_k si aucune confusion n'est à craindre) la partie de I_a formée par des fonctions qui s'annulent $(k+1)$ fois en a.

Définition I.2.1.- On appelle fibré vectoriel des k-jets de (E,π,X), le fibré vectoriel $(J_k(E),\pi,X)$ dont la fibre en a est l'espace vectoriel quotient :

$C^\infty(E)/Z_k(E) = \mathcal{E}/Z_k(E)$ où $C^\infty(E) = \mathcal{E}$ est le faisceau des sections C^∞ de (E,π,X) (ou plus simplement E).

Soit s une section C^∞ de E au-dessus d'un ouvert U de X et x un point de U. Posons $j_k(s)(x)$ la germe de s au point x. $j_k(s)(x) \in J_k(E)_x$. L'application

$$\begin{aligned} U &\to J_K(E)\ , \\ y &\mapsto j_k(s)(y)\ , \end{aligned}$$

est une section de $J_k(E)$ au-dessus de l'ouvert U et $s \mapsto j_k(s)$ est un morphisme de faisceaux de $\mathcal{E}$ vers le faisceau des sections C^∞ $\mathcal{I}_k(\mathcal{E})$ de $J_k(E)$.

En désignant par π_{k-1} la projection de $J_k(E)$ sur $J_{k-1}(E)$ et par $S^K T^*$ le $k^{\underline{\text{ième}}}$ produit symétrique du fibré cotangent $T^*(X)$. On montre (R.S. PALAIS [1]) que la suite :

$$0 \to S^k T^* \otimes E \xrightarrow{\mathcal{E}} J_k(E) \to J_{k-1}(E) \to 0$$

est exacte.

Si F est un deuxième fibré vectoriel de base X et si $\emptyset : J_k(E) \to F$ est un morphisme de fibrés, alors le symbole de $\emptyset$ est la composition :

$$\psi \circ \varepsilon : S^k T^* \otimes E \to F .$$

L'application ψ induit canoniquement un morphisme de faisceaux que nous notons encore ψ et qui associe le faisceau $\mathcal{F}$ des sections C^∞ de F au faisceau $\mathcal{I}_k(\mathcal{E})$.

Définition I.2.2.- On appelle opérateur différentiel linéaire d'ordre k de E vers F, un morphisme D de faisceaux de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "D"] \arrow[dr, "j_k"'] & & \mathcal{F} \\ & \mathcal{I}_k(\mathcal{E}) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Soit $x \in X$ et $s \in \mathcal{E}$ tels que $s(x) = 0$ dans un voisinage de x et en x. Le diagramme ci-dessus étant commutatif, on a :

$$D(s) = (\psi \circ j_k)(s) = \psi[j_k(s)].$$

D'où :

$$[D(s)](x) = [j_k(s)](x) = \psi(j_k[(s(x)]) = \psi(0) = 0 .$$

Par suite :

$\{x \in X : s(x) = 0\}$ est contenu dans

$\{x \in X : D(s)(x) = 0\}$.

En conséquence :

$$\mathrm{Supp}\, D(s) \subset \mathrm{Supp}\, s .$$

Définition I.2.3.- Soit (E,π,X) un fibré vectoriel sur X.

Une partie P de E est un sous-fibré vectoriel de (E,π,X) s'il existe une suite exacte de fibrés

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{f} E$$

telle que $P = f(E')$.

Une équation linéaire homogène H_k aux dérivées partielles d'ordre k sur le fibré E est un sous-fibré de $J_k(E)$ et une solution de H_k est une section s de E au-dessus d'un ouvert U de X telle que :

$$j_k(s)(x) \in H_k \qquad \forall\, x \in U .$$

I.3- *Types d'opérateurs différentiels linéaires. Problèmes aux limites.*

Expression locale des opérateurs différentiels linéaire.

Définition I.3.1.- Soit U un ouvert de R^n. Une application linéaire D définie sur $C\,(U)$ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre k à coefficients C^∞ (nous dirons par la suite plus simplement opérateur différentiel d'ordre k) si elle est de la forme :

$$D : u \mapsto Du = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha D^\alpha u .$$

où pour chaque α, a_α est une fonction de classe C^∞ définie sur U et

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1},\dots,\partial x_n} \qquad \text{avec} \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n .$$

Si Ω est un ouvert d'une variété X, on définit un opérateur différentiel D

d'ordre k sur Ω comme étant l'application linéaire D sur $C^{\infty}(\Omega)$ telle que pour toute carte locale (U,φ) il existe un opérateur différentiel d'ordre k $\tilde{D}$ vérifiant :

$$(Du) \circ \varphi^{-1} = \tilde{D}(u \circ \varphi^{-1}) \ .$$

Soit $V \subset R^n$ (ou $V \subset X$, variété C^{∞} de dimension n) et H un espace vectoriel de dimension p. Nous dirons que D est à coefficients matriciels de classe C^q s'il est défini sur $C^{\infty}(V,H)$ et s'écrit :

$$Dn = \sum_{|\alpha| \leq k} A_{\alpha} D^{\alpha} \vec{n}$$

où A_{α} est une matrice rectangulaire $n \times p$ de fonctions de classe C^q définies sur V.

Lorsque D est défini sur $U \subset \mathbb{R}^n$, nous définissons le polynôme caractéristique de D comme étant égal à

$$D_k(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_{\alpha} \xi^{\alpha} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \ .$$

$D_k(\xi)$ est aussi appelé la partie principale de D.

L'opérateur différentiel D est dit elliptique si sa partie principale vérifie :

$$D_k(\xi) \neq 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\{0\} \ .$$

Définition 1.3.2.- Un polynôme P sur $\mathbb{R}^n$ est dit hyperbolique par rapport à $\eta \in \mathbb{R}^n$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $P_k(\eta) \neq 0$.

(ii) il existe un réel h tel que :

$\forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$ et $t < h$ $\quad P(\xi + it\ \eta) \neq 0$.

Un opérateur différentiel d'ordre D sur $C^\infty(U)$ sera dit hyperbolique si le polynôme associé

$$D(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha\ \xi^\alpha \quad \text{est hyperbolique.}$$

Sa partie principale $D_k(\xi)$ est alors hyperbolique. D_k étant homogène la condition d'hyperbolicité par rapport à $\eta \in \mathbb{R}^n$ est équivalente à :

(i)' $D_k(\eta) \neq 0$

(ii)' $D_k(\xi + t\eta) = 0$ n'admet que des racines réelles quand $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Problème mixte de Cauchy du type hyperbolique.

Soit D un opérateur différentiel hyperbolique d'ordre k sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$.

Un système hyperbolique de n équations aux dérivées partielles à n fonctions (ou distributions) inconnues associé à D est la donnée :

$$\text{(I.3.1)} \qquad \begin{cases} D\vec{u} = \vec{\rho} \\ D\vec{u} = \sum\limits_{|\alpha| \leq k} A_\alpha(x)\ D^\alpha\ \vec{u} \quad ; \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n). \end{cases}$$

où $\vec{u}$ est une fonction (ou distribution) vectorielle à valeurs dans un espace vectorielle H de dimension n.

$\mathbb{A}_\alpha$, pour chaque α, est une matrice $n \times n$, indéfiniment dérivable (pour que I.3.1 ait un sens pour toute distribution $\vec{u}$).

$\vec{\rho}$ est une fonction (ou une distribution) vectorielle donnée.

Le problème de Cauchy consiste alors en la recherche d'une solution $\vec{s}$ de (I.3.1.) satisfaisant en outre aux conditions suivantes sur une hypersurface S.

$$(\text{I.3.2.})\begin{cases} 1. \quad \vec{s} = \vec{f} \quad \text{sur } S \text{ (condition de Dirichlet).} \\ 2. \quad \dfrac{\partial \vec{s}}{\partial N} = \vec{g} \quad \text{sur } S \text{ (condition de Neumann).} \end{cases}$$

Dans la suite l'hypersurface sera le bord ∂U de U.

$\frac{\partial \vec{s}}{\partial N}$ est la dérivée de s suivant la normale $\vec{N}(N_1,\ldots,N_n)$ à S.

Par définition $\frac{\partial \vec{s}}{\partial N} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s}{\partial x_i} N_i$.

Lorsque D dépend en outre d'un paramètre t, on considère simplement D défini sur $U \times [0,T]$ et nous allons joindre à (I.3.1.) les conditions :

$$(\text{I.3.3.})\begin{cases} (1)' : \quad \vec{s} = \vec{h} \text{ pour } t = 0 \text{ et } s = f_1 \text{ sur } S \times [0,T] \\ \qquad \text{(c'est la condition de Dirichlet).} \\ (2)' : \quad \vec{s} = \vec{h} \text{ pour } t = 0 \text{ et } \dfrac{\partial s}{\partial N} \equiv f_2 \text{ sur } S \times [0,T] \\ \qquad \text{(c'est la condition de Neumann).} \end{cases}$$

Le problème de Cauchy (I.3.1.) avec les conditions (I.3.3.) sera appelé problème mixte des valeurs limites du type hyperbolique.

On appellera classe où le "problème de Cauchy est bien posé" un ensemble de fonctions (ou de distributions le cas échéant) où il existe une solution pour tout choix de conditions de Dirichlet.

Une classe d'unicité est un espace de fonctions (ou de distributions) sur lequel l'unité de la solution est garantie pour des conditions de Dirichlet données.

Résoudre le problème de Cauchy pour un opérateur D c'est construire la classe d'unicité et la classe ou le problème est bien posé.

Nous nous proposons dans ce qui suit de résoudre un problème de Cauchy associé à un opérateur différentiel d'ordre deux défini formellement par :

$$L\vec{u} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}) + \mathbb{A}_i(x) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} + \mathbb{A}(x)\vec{u}$$

où $\mathbb{A}_{ij}$, $\mathbb{A}_i$, $\mathbb{A}$ sont des matrices et $\vec{u}$ une fonction vectorielle dont les propriétés seront précisées plus loin.

Avant d'aborder la question, donnons quelques précisions sur les espaces fonctionnels dont nous allons avoir besoin.

CHAPITRE II.

SUR QUELQUES POINTS D'ANALYSE FONCTIONNELLE.

Dans toute la suite, la variété X sera un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^n$ dont le bord est noté $\partial\Omega$.

L'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$ c'est-à-dire celle qui contient la n-forme canonique $d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_n$ induit une orientation sur Ω et $\partial\Omega$.

De même la métrique riemanienne de $\mathbb{R}^n$ induit des métriques sur Ω et $\partial\Omega$. Il sera donc loisible de parler de normale au bord $\partial\Omega$.

H désignera un espace de Hilbert séparable réel. $< \; >_H$ est le produit scalaire sur H et $|| \; ||_H$ est la norme associée.

$I =]0,T[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}^+$ que nous appellerons intervalle-temps.

<u>Définition</u> II.1.1.- On appellera espace fondamental l'espace produit $Q = \Omega \times I$.

Q est muni de la topologie produit de la topologie sous-jacente à la variété différentielle Ω et de la topologie ordinaire de $\mathbb{R}$ induite sur I.

On désignera par $F(\Omega,H)$ l'espace des fonctions vectorielles $\vec{u}$ définies sur Ω, à valeurs dans H.

Sur $F(\Omega,H)$ les notions de dérivées, de continuité restent naturellement définies comme pour les fonctions numériques.

Posons :

$C^m(\Omega,H) = \{\vec{u} \in F(\Omega,H),\ \vec{u}$ m-fois continûment dérivables sur $\Omega\}$.

$C^m_o(\Omega,H) = \{\vec{u} \in C^m(\Omega,H)$ supp $\vec{u}$ compact dans $\Omega\}$.

$C^m(\bar{\Omega},H) = \{\vec{u} \in C^m(K,H),\ K$ ouvert de $\Omega\}$.

$C^\infty_o(\Omega,H) = \{\vec{u} \in F(\Omega,H)$, supp $\vec{u}$ compact dans $\Omega\}$.

Suivant le contexte cet espace sera aussi noté $\mathcal{D}(\Omega,H)$

Définition II.1.2.- Une fonction $\vec{u} \in F(\Omega,H)$ est mesurable si pour tout x de Ω.

$$<\vec{u}(x),\ h>_H$$

est mesurable au sens de Lebesgue pour tout h de H.

Définition II.1.3.- $\vec{u} \in F(\Omega,H)$ est intégrable si et seulement si :

1) $\vec{u}$ est mesurable.

2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} ||\vec{u}(x)||_H\, dx < \infty$.

L'intégrale de $\vec{u}$ est alors l'élément I de H noté $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \vec{u}(x)\, dx = \int \vec{u}$ tel que pour tout $h \in H$, on ait

$$<\int_{\mathbb{R}^n} \vec{u}(x)\, dx,\ h>_H = \int_{\mathbb{R}^n} <\vec{u}(x),\ h>_H\, dx\ .$$

Evidemment $||\int \vec{u}||_H \leq \int ||\vec{u}(x)||_H$

Espaces de Sobolev.- On désigne par $L^p(\Omega,H)$, l'espace (la classe) de fonctions de $F(\Omega,H)$ de puissance p-ième intégrables.

Proposition II.1.2.- Muni de la norme $\| \ \|_{L^p(\Omega,H)} = \| \ \|_p$ définie pour toute fonction $\vec{u}$ par :

$$\|\vec{u}\|_p = \left(\int_\Omega \|\vec{u}(x)\|_H^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} , \quad p > 1$$

l'espace $L^p(\Omega,H)$ est un espace de Banach (c'est-à-dire un espace normé complet pour $\| \ \|_p$).

Preuve.- Soit $(\vec{u}_n)$ une suite de Cauchy de $L^p(\Omega,H)$ i.e. $\lim\limits_{n_1 m\to\infty} \|\vec{u}_n-\vec{u}_m\| = 0$. Il existe alors une sous-suite de $(\vec{u}_n)$ soit $(\vec{u}_{n_k})$ telle que :

$$\sum_k \|\vec{u}_{n_{k+1}}-u_{n_k}\|_p < \infty$$

Posons, pour $t \in \mathbb{N}$

$$\vec{v}_t(s) = \|\vec{u}_{n_1}(s)\|_H + \sum_{k=1}^{t} \|\vec{u}_{n_{k+1}}(s)-u_{n_k}(s)\|_H, \ s \in \Omega.$$

$\vec{v}_t$ est une fonction mesurable positive sur Ω.

D'après le lemme de Fatou, on a :

$$\int_\Omega \lim_{t\to\infty} (v_t(s))^p \, ds \leq \lim_{t\to\infty} \int_\Omega (v_t(s))^p = \lim_{t\to\infty} \|\vec{v}_t\|_p^p$$

Mais $$\|\vec{v}_t\|_p^p \leq \left(\|\vec{u}_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \|\vec{u}_{n_{k+1}}-\vec{u}_{n_k}\|_p\right)^p$$

Par suite $\lim_t \vec{v}_t(s)$ existe p.p. dans $L^p(\Omega,H)$.

Par ailleurs $\|\vec{u}_{n_{t+1}}(s)\|_H \leq \lim\limits_{t\to\infty} \vec{v}_t(s)$.

Donc $\lim_t \vec{u}_{n_{t+1}}(s) = \vec{f}(s)$ et $\vec{f} \in L^p(\Omega,H)$

En appliquant de nouveau le lemme de Fatou il vient :

$$||\vec{f}-\vec{u}_{n_k}||_p^p = \int_\Omega \lim ||\vec{u}_{n_t}(s)-\vec{u}_{n_k}(s)||_H^p$$

$$\leq \left(\sum_{\ell=k}^{\infty} ||\vec{u}_{n_{\ell+1}}-\vec{u}_{n_\ell}||_p\right)^p$$

Donc $\lim\limits_{k\to\infty} ||\vec{f}-\vec{u}_{n_k}|| = 0$

Mais on a :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} ||\vec{f}-\vec{u}_n||_p \leq \lim_{k\to\infty} ||\vec{f}-\vec{u}_{n_k}||_p + \overline{\lim} ||\vec{u}_{n_k}-\vec{u}_n|| = 0$$

Donc $\overline{\lim} ||\vec{f}-\vec{u}_n||_p = 0$

Par suite $(\vec{u}_n)$ converge dans $L^p(\Omega,H)$.

Dans le cas particulier ou $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega,H)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire :

$$(\vec{u},\vec{v})_{L^2(\Omega,H)} = (\vec{u},\vec{v})_2 = \int_\Omega \langle\vec{u}(x),\vec{v}(x)\rangle_H \, dx \ .$$

Définition II.1.4.-

Soit D un opérateur différentiel défini sur un fibré (E,π,Ω) et à valeurs dans le fibré (F,π,Ω). On appellera adjoint formel de D, l'opérateur différentiel D^* défini sur (F,π,Ω) et à valeurs dans (E,π,Ω) tel que :

$$(Df,g) = (f,D^*g) \quad \forall\ f,\ g \in C_o^\infty(\Omega).$$

On considére un opérateur différentiel D et son adjoint formel D^* à coefficients mesurables bornés sur Ω.

Définition II.1.5.- Soit $L^2_{loc}(\Omega,H)$, la classe des fonctions de carré localement intégrable sur Ω et $\vec{u} \in L^2_{loc}(\Omega,H)$.

On dira que $D\vec{u}$ existe et est égal à $\vec{v} \in L^2_{loc}(\Omega,H)$ pour exprimer que :

$$\int_\Omega <\vec{u}(x),(D^*\vec{\psi})(x)>_H dx = \int_\Omega <\vec{v}(x), \vec{\psi}(x)>_H dx \qquad \text{II.1.}$$

pour toute fonction $\vec{\psi} \in C^\infty_o(\Omega,H)$.

Dans le premier membre, $\operatorname{supp} D^* \vec{\psi} \subset \operatorname{Supp} \vec{\psi}$ et les coefficients de D^* sont mesurable, bornés. Donc $D^* \vec{\psi} \in L^2_{loc}(\Omega,H)$. Donc le premier membre est bien défini.

$C^\infty_o(\Omega,H)$ est partout dense dans $L^2_{loc}(\Omega,H)$. Par conséquent si $D\vec{u}$ existe, il est unique.

Remarquons que $\vec{u} \in L^2_{loc}(\Omega,H)$ implique que $\vec{u} \in \mathcal{D}^1(\Omega,H)$. Donc dans $\mathcal{D}^1(\Omega,H)$, la définition II.1.5. signifie $\mathcal{D}\vec{u} = \vec{v}$.

Considérons alors $(D_1,\dots,D_m)$ une suite de m opérateurs différentiels partiels à coefficients mesurables bornés sur Ω

Posons

$$\mathcal{H}^p_m(\Omega,H) = \{\vec{u} \in L^p(\Omega,H) : D_1 \vec{u}_1 \dots D_m \vec{u} \text{ sont dans } L^p(\Omega,H)\} .$$

On sait munir $\mathcal{H}^p_m(\Omega,H)$ d'une structure de Banach.

Dans le cas $p = 2$, on a

<u>*Proposition II.1.2.*</u>- $H^2_m(\Omega_1,H) = \{\vec{u} \in L^2(\Omega_1,H),\ D_1\ \vec{u} \ldots D_m\ \vec{u}\}$ sont dans $L^2(\Omega,H)\}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(\vec{u},\vec{v})_{H^2_m(\Omega,H)} = (\vec{u}_i,\vec{v})_{2,m} = \int_\Omega \{<\vec{u},\vec{v}>_H + \sum_{i=1}^{m} (D_i\ \vec{u},D_i\ \vec{v})_H\} \qquad (2.1)$$

et $H^2_m(\Omega_1,H)$ est séparable si $L^2(\Omega,H)$ l'est.

<u>*Preuve*</u>.- Montrons que $H^2_m(\Omega,H)$ est complet pour la norme associée au produit scalaire (2.1.)

$$||\vec{u}||^2_{2,m} = ||\vec{u}||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{m} ||D_i\ \vec{u}||^2_{L^2(\Omega)}$$

Soit (u_k) une suite de Cauchy dans $H^2_m(\Omega,H)$. Pour tout $i\ \varepsilon\{1,\ldots,m\}$, $D_i\ \vec{u}_k$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega,H)$ qui est hilbertien, il s'ensuit que $\lim_k(D_i,\vec{u}_k) = \vec{f}_i$ dans $L^2(\Omega,H)$. Soit $\vec{u} = \lim_k \vec{u}_k$ dans $L^2(\Omega,H)$. $(\vec{u}_k)$ converge vers $\vec{u}$ dans l'espace $\mathcal{D}^1(\Omega)$ des distributions sur Ω . Donc $D^\alpha\ \vec{u} = \lim_k D^\alpha\ \vec{u}_k$ au sens des distributions.

Posons :

$$D_i\ \vec{u} = \sum_\alpha A_i\ D^\alpha\ \vec{u}\ .$$

Puisque A^α_i est borné pour chaque α_1 on a :

$$\lim_k(A^\alpha_i\ D^\alpha\ \vec{u}_k) = A^\alpha_i\ D^\alpha\ \vec{u} \quad \text{dans } \mathcal{D}^1(\Omega).$$

En sommant sur α, il vient :

$$\sum_\alpha \lim_k A^\alpha_i\ D^\alpha\ \vec{u}_k = \sum_\alpha A^\alpha_i\ D^\alpha\ \vec{u} \quad \text{dans } \mathcal{D}^1(\Omega).$$

Donc $\lim_k \sum_\alpha A^\alpha_i\ D^\alpha\ \vec{u}_k = \lim_k D_i\ \vec{u}_k = D_i\ \vec{u} = \vec{f}_i$ pour tout i. Donc $\vec{u} \in H^2_m(\Omega,H)$.

$L^2(\Omega,H)$ est séparable. Considérons alors l'application

$\psi : u \mapsto (\vec{u}, D_1\vec{u}, \ldots D_m\vec{u})$ de $H_m^2(\Omega,H)$ dans $\Gamma = L^2(\Omega,H) \times L^2(\Omega,H) \ldots L^2(\Omega,H)$ $(m+1)$ fois. ψ est une isométrie en ce sens que :

$$||\psi(\vec{u})||^2_{2,m} = ||\vec{u}||_{L^2(\Omega,H)} + \sum_{i=1}^{m} ||D_i\vec{u}||_{L^2(\Omega,H)}$$

Mais Γ est séparable comme produit d'espaces séparables. Donc $H_m^2(\Omega,H)$ est séparable (i.e. contient une partie dénombrable dense).

<u>*Remarque*</u> *II.1.1.-*

Désignons par $D = (D_1,\ldots,D_m)$ la suite des m opérateurs différentiels définis ci-dessus.

On posera $H_m^p(D;\Omega,H) = \{\vec{u} \in L^p(\Omega,H)\ ;\ D_1\vec{u}, \ldots. D_m\vec{u}$ sont dans $L^p(\Omega,H)\ \}$.

En particulier si $D = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ avec $|\alpha| \leq m$ l'espace $H_m^p(D;\Omega,H)$ est l'espace de Sobolev d'ordre (m,p) que nous noterons $H^{p,m}(\Omega,H)$ et dont les propriétés sont connues.

Ainsi :

$$H^{2,1}(I,H) = \{\vec{u} \in F(\Omega,H) : \vec{u}_1\ \frac{d\vec{u}}{dt} \in L^2(\Omega,H)\}$$

$$H^{2,2}(I,H) = \{\vec{u} \in F(\Omega,H) : \vec{u}_1\ \frac{d\vec{u}}{dt}\ ,\ \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \in L^2(\Omega,H)\}$$

On écrira $H^{p,m}_{loc}(\Omega,H)$ pour désigner les fonctions de $H^{p,m}(\Omega \wedge K,H)$ où K est un compact de $\mathbb{R}^n$ et $H_o^{p,m}(\Omega,H)$ les fonctions de $H^{p,m}(\Omega,H)$ qui ont un support borné sur Ω.

Théorème II.1.1.-

Soit $\vec{g}$ est un élément de $L^2(I,H)$, alors $\vec{g}$ est intégrable et la fonction

$$\vec{f} : t \mapsto \vec{f}(0) + \int_0^t \vec{g}(\tau)\, d\tau$$

est dérivable sur I et $f'(t) = g(t)$ presque partout (p.p.). De plus $\vec{f} \in H^{2,1}(I,H)$.

Preuve.- Soit $\vec{g} \in L^2(I,H)$. $\vec{g}^2$ est alors bornée sur I il existe $M > 0$,

$$||\vec{g}(t)||_H^2 < M \qquad \forall\, t \in I$$

Donc
$$||\vec{g}(t)||_H < \sqrt{M} \qquad \forall\, t \in I$$

Par suite $\vec{g} \in L^1(I,H)$ puisque la mesure de I est finie.

Posons :

$$\vec{f}(t) = \vec{f}(0) + \int_0^t \vec{g}(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{aligned} J(h,t) &= \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} \vec{g}(\tau)\, d(\tau) - \int_0^t g(\tau)\, d\tau\right) . \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \vec{g}(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

et $\lim\limits_{h \to 0} J(h,t) = \vec{g}(t)$ p.p.

Mais on a : $\lim\limits_{h\to 0} J(h,t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} = \vec{f}(t)$ H étant séparé on a $\vec{f}'(t) = \vec{g}(t)$.

Par ailleurs, puisque $\vec{g}$ est intégrable, $||\vec{f}(0)||_H$ est fini.

Donc pour presque tout t,

$$||f(t)||^2 \leq ||\vec{f}(0)||_H^2 + ||\vec{\alpha}(t)||^2 < \infty$$

où
$$\vec{\alpha}(t) = \int_0^t \vec{g}(T)\, dT$$

Par suite
$$\vec{f} \in H^{2,1}(I,H) .$$

Nous proposons ci-dessous une "sorte" de réciproque.

Proposition II.1.2.- Si $\vec{f} \in H^{2,1}(I,H)$, alors

i) $\vec{f}'$ est intégrable sur I

ii) $\vec{f}$ est p.p. égale à une fonction continue de I sur H.

iii) $\vec{f}(b) - \vec{f}(a) = \int_a^b \vec{f}(t)\, dt$ pour presque tout a et tout b dans I ($\varepsilon < b$).

Preuve.-

i) La première partie est immédiate car $\vec{f}$ appartient $H^{2,1}(I,H)$ entraîne $\vec{f}'$ appartient à $L^2(I,H)$ et d'après le théorème II.1.2. $\vec{f}'$ est intégrable.

ii) Soit $\vec{v} \in L^2(I,H)$, pour tout $\vec{\alpha} \in H$, la fonction $(\vec{v},\vec{\alpha})_H : t \mapsto <\vec{v}(t),\vec{\alpha}>_H$ est de carré intégrable sur I puisque d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$|<\vec{v}(t),\vec{\alpha}>_H| \leq ||\vec{v}(t)||_H^{\frac{1}{2}}\, ||\vec{\alpha}||_H^{\frac{1}{2}}$$

i.e.
$$(<\vec{v}(t),\vec{\alpha}>_H)^2 \leq ||\vec{v}(t)||_H\, ||\vec{\alpha}||_H$$

Donc $<\vec{v}(t),\vec{\alpha}>_H$ est borné sur I et donc de carré intégrable.

Posons $\frac{d\vec{f}}{dt} = \vec{f}^1 = \vec{u}$ et considérons l'expression

$$\vec{g}(t) = \vec{f}(t) = \int_\varepsilon^t \vec{u}(T)\, dT \qquad 0 < \varepsilon < a.$$

Il est clair que $\vec{g} \in L^2(I,H)$. Donc $(\vec{g},\vec{\alpha})_H \in L^2(I,H)$ et

$$<\frac{d}{dt}<\vec{g}(t),\vec{\alpha}>_H,\psi>_{L^2(I,H)} = - <<\vec{g}(t),\vec{\alpha}>_H,\psi'>_{L^2(I,H)} \qquad \forall\, \psi \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) .$$

$$<\frac{d}{dt}<\vec{g}(t),\vec{\alpha}>_H,\psi>_{L^2(I,H)} = <\frac{d}{dt}<\vec{f}(t),\vec{\alpha}>_H,\psi> -$$

$$- <\frac{d}{dt}<\int_\varepsilon^t \vec{u}(\ )d\ ,\vec{\alpha}>_H,\psi>_{L^2(I,H)}$$

$$= <<\vec{u}(t),\vec{\alpha}>_H,\psi>_{L^2(I,H)} - <<\vec{u}(t),\vec{\alpha}>_H,\psi>_{L^2(I,H)}$$

$$= <<\vec{u}(t),\vec{\alpha}>_H - <\vec{u}(t),\vec{\alpha}>_H,\psi> = 0 \qquad \forall\, \psi \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}).$$

Donc $\frac{d}{dt} <\vec{g}(t),\vec{\alpha}>_H = <\frac{d}{dt}\, \vec{g}(t),\vec{\alpha}> = 0$.

Par suite $\vec{g}(t)$ ne dépend pas de t et $\vec{g}(t) = \vec{\lambda}$ p.p. sur I, $\vec{\lambda}$ fixé dans H.

On en déduit :

$$\vec{f}(t) = \vec{\lambda} + \int_\varepsilon^t \vec{u}(T)\, dT$$

et $\vec{f}$ est égale à une fonction continue p.p.

iii) $\vec{f}(a) = \vec{\lambda} + \int_\varepsilon^a \vec{u}(T)\, dT$ pour presque tout $a \in I$

$\vec{f}(b) = \vec{\lambda} + \int_\varepsilon^b \vec{u}(T)\, dT$ pour presque tout $b \in I$

Par suite $\vec{f}(b) - \vec{f}(a) = \int^b \vec{u}(T)\, dT + \int_a^{\varepsilon} \vec{u}(T)\, dT$

$$= \int^b \vec{u}(T)\, dT$$

et la proposition est établie.

<u>*Corollaire*</u> *II.1.1.*- Si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont deux fonctions de $H^{2,1}(I,H)$ alors :

$$\int_a^b <\vec{f}'(t),\vec{g}(t)>_H dt + \int_a^b <\vec{f}(t),\vec{g}'(t)>_H dt$$

$$= \left[<\vec{f}(t),\vec{g}(t)>_H\right]_a^b \qquad 0 \leq a \leq b \leq T$$

<u>*Preuve*</u>.- Posons :

$$\vec{\psi}(t) = <\vec{f}(t),\vec{g}(t)>_H$$

$\vec{\psi} \in H^{2,1}(I,H)$. D'après la proposition II.1.2. on a :

$$\vec{\psi}(b) - \vec{\psi}(a) = \int_a^b \vec{\psi}'(t)\, dt \qquad \text{pour presque tous } a,b \in I$$

$$= \int_a^b <\vec{f}'(t),\vec{g}(t)>_H dt + \int_a^b <\vec{f}(t),\vec{g}'(t)> dt$$

puisque $\vec{\psi}'(t) = <\vec{f}'(t),\vec{g}(t)>_H + <\vec{f}(t),\vec{g}'(t)>$ p.p.

Par suite :

$$\int_a^b <\vec{f}'(t),\vec{g}(t)> dt + \int_a^b <\vec{f}(t),\vec{g}'(t)> dt = <\vec{f}(b),\vec{g}(b)>_H -$$

$$- <\vec{f}(a),\vec{g}(a)>_H .$$

CHAPITRE III

SOLUTIONS ET SOLUTIONS STRICTES DU PROBLEME MIXTE ASSOCIE A L'OPERATEUR L

III.1. - *Exposé du problème*.-

Soit L l'opérateur différentiel linéaire d'ordre 2 défini dans $F(Q,H)$ en coordonnées locales par :

$$L\,\vec{u} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbb{A}_{ij}(x)\,\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}\right) + \mathbb{A}_i(x)\,\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} + \mathbb{A}(x)\,\vec{u}$$

$$i\ j = 1,2,\ldots,n$$

On se propose de chercher une fonction $\vec{u}$ dans un sous-espace "convenable" de $F(Q,H)$ satisfaisant au système d'équations :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L\,\vec{u} + \vec{\rho}(x,t) \quad \text{dans } Q \qquad \text{(III.1.1.)}$$

et qui vérifie les conditions "initiales"

$$\vec{u}(x,0) = \vec{f}(x)\ ;\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x,0) = \vec{g}(x) \quad \text{dans } \Omega \qquad \text{(III.1.2.)}$$

et les conditions "aux bornes"

$$\vec{u}(x,t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times I$$

$$\left(\text{ou } \frac{\partial \vec{u}}{N_L}(x,t) \equiv \mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial \vec{u}}{x_i}\,N_j = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times I\right) \qquad \text{(III.1.3.)}$$

On désigne par $\vec{N}(N_1,\ldots,N_n)$ la normale extérieure à l'hypersurface $\partial\Omega$, bord de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $\frac{\partial \vec{u}}{N_L}$ $\mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial \vec{u}}{x_i}\,N_j$ est alors la dérivée normale de $\vec{u}(x,t)$ pour l'opérateur L.

$\vec{\rho}$, $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont trois fonctions données : $\vec{\rho}$ est définie dans Q, $\vec{f}$ et $\vec{g}$ dans Ω. Elles sont toutes à valeurs dans H.

La matrice $\mathbb{A}_{ij}$ est définie positive de sorte que le problème mixte de Cauchy ainsi posé est du type hyperbolique. De plus $\mathbb{A}_{ij} = {}^t\mathbb{A}_{ji}$

$\mathbb{A}_{ij}(x)$, $\mathbb{A}_i(x)$, $\mathbb{A}(x)$ sont des matrices "fonctions" symétriques, mesurables, (au sens de Lebesgue), bornées, définies sur Ω ainsi que la dérivée $\dfrac{\partial \mathbb{A}_{ij}}{\partial x_i}$.

La dérivation est prise au sens des distributions i.e. :

$$\int_\Omega \frac{\partial \mathbb{A}_{ij}}{\partial x_i} \vec{\psi} = - \int_\Omega \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} \qquad \forall \vec{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega)$$

III.2. - L'opérateur différentiel L_0

III.2.1. - Définition de L_0 *et du problème de Cauchy associé.-*

Dans l'approche de l'étude du problème ainsi posé, considérons l'opérateur différentiel L_0 défini localement sur $\mathcal{F}(\Omega,H)$ par :

$$\begin{aligned} L_0 \vec{u} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}\right) - \vec{u} \\ &= \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \mathbb{A}_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} - \vec{u} \end{aligned} \qquad \text{(III.2.1.)}$$

Sur l'opérateur L_0, nous faisons l'hypothèse de la forte éllipticité uniforme c'est-à-dire pour tout $x \in \Omega$, il existe m, constante positive telle que :

$$m^2 \xi_i \xi_i \leq \mathbb{A}(\vec{\eta}) \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \qquad \forall \vec{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in R^n$$

où
$$\mathbb{A}(\vec{\eta}) = \mathbb{A}_{ij} \eta_i \eta_j$$

Puisque les matrices $\mathbb{A}_{ij}$ sont bornées, il existe M^2 constante positive telle que

$$m^2 \xi_i \xi_i \leq \mathbb{A}(\vec{n}) \quad \vec{\xi}.\vec{\xi} \leq M^2 \xi_i \xi_i \tag{III.2.2.}$$

A L_0, on associe le problème de Cauchy formel suivant :

Trouver une fonction $\vec{u}$ de $F(\Omega,H)$ telle que $\vec{\rho}$ étant donnée sur Ω, on ait :

$$\begin{cases} L_0 \vec{u} = \vec{\rho} & \text{dans } \Omega \\ \vec{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{III.2.3.}$$

ou

$$\begin{cases} L_0 \vec{u} = \vec{\rho} & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial N_{L_0}} = \mathbb{A}_{ij} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} N_j = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{III.2.4.}$$

Le problème (III.2.3.) (resp. III.2.4.) sera appelé dans toute la suite "problème de Cauchy avec les conditions de Dirichlet (resp. de Neumann)".

Les coefficients de L_0 sont mesurables, bornés dans Ω : les conditions de la définition (II.1.5.) sont satisfaites. On peut donc définir l'espace $H^2_{loc}(L_0;\Omega,H)$ et dire que la condition "$L_0 \vec{u} = \vec{\rho}$ dans Ω" signifie que $\vec{u} \in H^2_{loc}(L_0; \ ,H)$ et que $L_0 \vec{u} = \vec{\rho}$ dans $L^2_{loc}(\Omega,H)$.

La condition de Dirichlet "$\vec{u} = 0$ sur $\partial\Omega$" suppose des domaines à bord "régulier" et des fonctions assez régulières sur le bord. Nous allons lui substituer une autre moins contraignante sur la régularité des fonctions sur $\partial\Omega$.

Posons :

$$H^{2,D}_{loc} = \{\vec{u} \in H^{2,1}_{\ell oc}(\Omega,H) : \int_\Omega \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \vec{V}_i + \vec{u} \sum_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial x_i}\right] dx = 0 \quad \forall \vec{V}_i \in H^{2,1}_0(\Omega,H)\}$$
$$i = (1,\dots,n)$$

Nous remplaçons alors la condition "$\vec{u} = 0$ sur $\partial\Omega$" par $\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,D}_{loc}$.

D'autre part, considérons l'intégrale :

$$I = \int_\Omega \vec{v}(L_0\ \vec{u}) = \int_\Omega \{\vec{v}\ \frac{\partial}{\partial x_i}\ (\mathbb{A}_{ij}\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}) - \vec{u}\ \vec{v}\}$$

<u>Formellement,</u> on peut écrire :

$$I = \int_{\partial\Omega} \vec{v}(\mathbb{A}_{ij}\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}\ N_j)\ dS - \int_\Omega \{\mathbb{A}_{ij}\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} + \vec{u}\ \vec{v}\} \qquad (III,2.5.)$$

Cette expression n'a aucun sens si $\partial\Omega$ et les fonctions $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas "suffisamment réguliers". Nous admettrons que $\partial\Omega$ a la régularité requise pour permettre l'intégration par parties (III.2.5.). Dès lors :

$$\int_\Omega \{\vec{v}(L_0\ \vec{u}) + \mathbb{A}_{ij}\ \frac{\partial \vec{u}}{x_j}\ \frac{\partial \vec{v}}{x_i} + \vec{u}\ \vec{v}\} = \int_{\partial\Omega} \vec{v}(\mathbb{A}_{ij}\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}\ N_j)\ dS$$

pour des fonctions $\vec{u}$ et $\vec{v}$ "convenables".

Posons :

$$\mathcal{H}^{2,N}_{loc}(L_0;\ ,H) = \{\vec{u} \in \mathcal{H}^2_{loc}(L_0,\Omega,H) \cap \mathcal{H}^{2,1}_{loc}(\Omega,H)$$

$$\int_\Omega \left[v(L_0\ \vec{u}) + \mathbb{A}_{ij}\ \frac{\partial \vec{u}}{x_j}\ \frac{\partial \vec{v}}{x_i} + \vec{u}\ \vec{v}\right] = 0$$

$$\forall\ \vec{v} \in \mathcal{H}^{2,1}_0(\Omega,H)\}$$

Nous remplaçons alors la condition de Neumann "$\frac{\partial \vec{u}}{\partial N_{L_0}} = 0$ sur $\partial\Omega$" par "$\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,N}_{loc}(L_0;\Omega,H)$".

Par symétrie, nous poserons :

$$H^{2,D}_{loc}(L_0;\Omega,H) = H^2_{loc}(L_0;\Omega,H) \cap H^{2,D}_{loc}(\Omega,H)$$

Remarques III.2.1.-

1) Si $\vec{u} \in H^{2,1}_{loc}(\Omega,H)$ et si K est une partie mesurable bornée sur $\mathbb{R}^n$, les $\mathbb{A}_{ij}(x)$ étant bornées, mesurables sur Ω, l'intégrale

$$I_{\c{e}} = \int_{\Omega\cap K} (\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j} + u^2)$$

est définie.

Nous dirons alors que $H^{2,1}_{loc}(\Omega,H)$ est l'espace des fonctions "à énergie localement finie" (en abrégé A.E.L.F.) pour l'opérateur différentiel L $(L_0$ $1)$.

Toutes les fonctions de $H^{2,D}_{loc}(\Omega,H)$ et de $H^{2,N}_{loc}(L_0;\Omega,H)$ sont A.E.L.F.

2) Parallèlement nous dirons que chacune des classes de fonctions suivantes sont "à énergie finie" (A.E.F. en abrégé).

$$H^{2,D}(\Omega,H) = \{\vec{u} \in H^{2,1}(\Omega,H), \int_\Omega \{\frac{\partial u}{\partial x_i} \vec{V}_i + \vec{u} \sum_i \frac{\partial\vec{V}_i}{x_i} = 0$$

$$\forall \vec{V}_i \in H^{2,1}(\Omega,H) \quad , \quad i = 1,\ldots,n\}$$

$$H^{2,D}(L_0;\Omega,H) = H^2(L_0;\Omega,H) \cap H^{2,D}(\Omega,H)$$

$$H^{2,N}(L_0;\Omega,H) = \{\vec{u} \in H^2(L_0;\Omega,H) \cap H^{2,1}(\Omega,H)$$

$$\int_\Omega \{\vec{v}(L_0\ \vec{u}) + \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j} \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_i} + \vec{v}\ \vec{u}\} = 0$$

$$\forall \vec{v} \in H^{2,1}(\Omega,H)\}$$

III.2.2. - Solutions et solutions strictes.-

Définition III.2.1.- Nous dirons qu'une fonction $\vec{u} \in \mathcal{F}(\Omega,H)$ est une solution stricte A.E.L.F. de (III.2.3.) de source $\vec{\rho} \in L^2_{loc}(\Omega,H)$ pour exprimer que :

i) $\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,D}_{loc}(L_0;\Omega,H) = \mathcal{H}^2_{loc}(L_0;\Omega,H) \cap \mathcal{H}^{2,D}_{loc}(\Omega,H)$.

ii) $L_0\,\vec{u} = \vec{\rho}$ dans $L^2_{loc}(\Omega,H)$.

$\vec{u} \in \mathcal{F}(\Omega,H)$ est solution stricte A.E.L.F. de (III.2.4.) de source $\vec{\rho} \in L^2_{loc}(\Omega,H)$ signifie :

i') $\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,N}_{loc}(L_0;\Omega,H)$

ii') $L_0\,\vec{u} = \vec{\rho}$ dans $L^2_{loc}(\Omega,H)$.

Définition III.2.2.- Nous dirons qu'une fonction $\vec{u} \in \mathcal{F}(\Omega,H)$ est une solution A.E.L.F. de (III.2.3.) de source $\vec{\rho} \in L^2_{loc}(\Omega,H)$ si et seulement si :

i) $\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,D}_{loc}(\Omega,H)$

ii) $\forall\,\vec{\psi} \in \mathcal{H}^{2,D}_0(\Omega,H)$

$$\int_\Omega \left(\mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\,\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial x_j} + \vec{u}\,\vec{\psi}\right) = -\int_\Omega \vec{\rho}\,\vec{\psi}$$

On dira que $\vec{u}$ est une solution A.E.L.F. de (III.2.4.) de source $\vec{\rho} \in L^2_{loc}(\Omega,H)$ si et seulement si :

i') $\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,1}_{loc}(\Omega,H)$

ii') $\forall\,\vec{\psi} \in \mathcal{H}^{2,1}_0(\Omega,H)$

$$\int_\Omega \left(\mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\,\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial x_j} + \vec{u}\,\vec{\psi}\right) = -\int_\Omega \vec{\rho}\,\vec{\psi}$$

Théorème III.2.1.- Une fonction $\vec{u} \in F(\Omega,H)$ est solution stricte A.E.L.F. si et seulement si $\vec{u}$ est solution A.E.L.F.

Preuve.- Remarquons d'abord que pour toute fonction $\vec{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega,H)$, $\vec{V}_i = \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_j}$ est un élément de $H_0^{2,1}(\Omega,H)$ et de plus :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial x_i} = \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial^2 \vec{\phi}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \mathbb{A}_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_j} = L_0 \vec{\phi} + \vec{\phi} \qquad \text{(III.2.6.)}$$

puisque l'on a :

$$\forall \vec{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega,H), \int_\Omega \{\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial^2 \vec{\phi}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \mathbb{A}_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_j}\} \vec{\psi} =$$

$$= \int_\Omega \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial^2 \vec{\phi}}{\partial x_i \partial x_j} \vec{\psi}\, dx + \int_\Omega \frac{\partial \mathbb{A}_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_j} \cdot \vec{\psi}\, dx =$$

$$\int_\Omega \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial^2 \vec{\phi}}{\partial x_i \partial x_j} \vec{\psi} - \int_\Omega (\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial^2 \vec{\phi}}{\partial x_j \partial x_i} \cdot \vec{\psi} + \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i})\, dx =$$

$$- \int_\Omega \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} = - \int_\Omega \vec{V}_i \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i}$$

De même si $\vec{u} \in H^{2,D}_{loc}(L_0;\Omega,H)$, on a évidemment

$$\vec{W}_i = \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \in H^{2,1}_{loc}(\Omega,H) \qquad \text{pour chaque } i = 1,\ldots,n$$

De plus $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{W}_i}{\partial x_i} = L_0 \vec{u} + \vec{u}$ (III.2.7.)

En effet, $\vec{V}_i$ étant défini comme ci-dessus, $\forall \vec{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega,H)$ il vient :

$$\int_\Omega (L_0 \vec{u} + \vec{u}) \vec{\phi}\, dx = \int_\Omega \{(L_0 \vec{u}) \vec{\phi} + \vec{u} \vec{\phi}\}\, dx = \int_\Omega \{\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}) \vec{\phi} - \vec{u} \vec{\phi} + \vec{u} \vec{\phi}\}$$

$$= - \int_\Omega \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_i} = - \int_\Omega \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_i} = \int \vec{u} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_i})$$

puisque $\mathbb{A}_{ij} = {}^t\mathbb{A}_{ji}$. En permuttant les indices, et en ajoutant $\int_\Omega \{-\vec{u}\,\vec{\psi} + \vec{u}\,\vec{\psi}\}$, il vient :

$$\int_\Omega \{\vec{u}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,(\mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial x_i}) - \vec{u}\,\vec{\psi} + \vec{u}\,\vec{\psi}\} =$$

$$= \int_\Omega \vec{u}(L_0\,\vec{\psi} + \vec{\psi})\,dx = \int_\Omega \vec{u}\,\sum_i \frac{\partial\vec{V}_i}{\partial x_i} = - \int_\Omega \frac{\partial\vec{u}}{x_i}\,\vec{V}_i$$

$$= - \int_\Omega \mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\,\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial x_j} = - \int_\Omega \vec{W}_j\,\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial x_j}$$

Donc $$\int_\Omega (L_0\,\vec{u} + \vec{u})\,\vec{\psi} = - \int_\Omega \vec{W}_j\,\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial x_j} = \int_\Omega (\sum_j \frac{\partial W_j}{\partial x_j})\,\vec{\psi}\,.$$

Ce qui établit (III.2.7.)

Démonstrons alors le théorème III.2.1.

A) *Cas du problème III.2.3. (Condition de Dirichlet)*.

La condition est nécessaire.

Soit en effet $\vec{u}$ solution stricte A.E.L.F. de source $\vec{\rho}$ $\vec{u} \in H^{2,D}_{loc}(L_0;\Omega,H)$ et $L_0\,\vec{u} = \vec{\rho}$ dans $L^2_{loc}(\Omega,H)$.

La condition (i) de la définition (III.2.2.) est trivialement vérifiée.

Soit $\vec{\psi} \in H^{2,D}_0(\Omega,H)$, alors :

$$\int_\Omega \vec{\rho}\,\vec{\psi} = \int_\Omega (L_0\,\vec{u})\,\vec{\psi} = \int_\Omega (\sum_i \frac{\partial\vec{W}}{\partial x_i} - \vec{u})\,\vec{\psi}$$

$$= - \int_\Omega (\vec{W}_i\,\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial x_i} + \vec{u}\,\vec{\psi}) = - \int_\Omega (\mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j}\,\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial x_i} + \vec{u}\,\vec{\psi})$$

Par suite $\vec{u}$ est une solution A.E.L.F.

La condition est suffisante

Soit $\vec{u}$ solution A.E.L.F. de source $\vec{\rho}$ $\vec{u} \in H^{2,D}_{loc}(L_0;\Omega,H)$ et $\forall \vec{\psi} \in H^{2,D}_0(\ ,H)$, on a :

$$\int_\Omega (\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + \vec{u}\,\vec{\psi}) = - \int_\Omega \vec{\rho}\,\vec{\psi}\ ,\quad \vec{\rho} \in L^2_{loc}(\Omega,H)\ .$$

Le premier membre s'écrit encore :

$$\int_\Omega (\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + \vec{u}\,\vec{\psi}) = \int_\Omega (\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \cdot \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + \vec{u}\,\vec{\psi}) =$$

$$\int_\Omega \frac{\partial \vec{\ }}{\partial x_i}\,\vec{V}_i + \vec{u}\,\vec{\psi}) = - \int_\Omega (\vec{u} \sum_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial x_i} - \vec{u}\,\vec{\psi}) = - \int_\Omega (L_0\,\vec{u})\,\vec{\psi}$$

Donc
$$\int_\Omega (L_0\,\vec{u})\,\vec{\psi} = \int_\Omega \vec{\rho}\,\vec{\psi}$$

et $L_0\,\vec{u}$ existe dans $L^2_{loc}(\Omega,H)$ et vérifie $L_0\,\vec{u} = \vec{\rho}$.

B) *Cas du problème III.2.4. (Condition de Neumann)*.-

La condition est nécessaire.

Soit $\vec{u}$ solution stricte A.E.L.F. de source $\vec{\rho}$:
$\vec{u} \in H^{2,N}_{loc}(L_0;\Omega,H) \subset H^{2,1}_{loc}(\Omega,H)$ et $L_0\,\vec{u} = \vec{\rho}$.

Pour toute fonction $\vec{\psi} \in H^{2,1}_0(\Omega,H)$, on a :

$$\int_\Omega \vec{\rho}.\vec{\psi} = \int_\Omega (L_0\,\vec{u})\,\vec{\psi} = - \int_\Omega (\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + \vec{u}\,\vec{\psi})$$

d'après la définition de $H^{2,N}_{loc}(L_0;\Omega,H)$.

La condition est suffisante.

Soit $\vec{u}$ une solution A.E.L.F. de source $\vec{\rho}$: $\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,1}_{loc}(\Omega,H)$.

Si $\vec{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega,H)$, alors $\vec{\psi} \in \mathcal{H}^{2,1}_{0}(\Omega,H)$. Posons $K = \operatorname{supp} \vec{\psi} \subset \Omega$ et $\Gamma = \mathcal{D}(K) \cap \mathcal{H}^{2,1}(K,H)$. Γ est dense dans $L^2(K,H)$ il existe donc une suite $\vec{u}_k$ dans Γ qui converge vers u au sens des distributions de $L^2(K,H)$.

$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} \cdot u_k \in \mathcal{D}(\Omega)$. Donc :

$$\int_\Omega \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} \cdot \vec{u}_k\right) = - \int_\Omega \frac{\partial \mathbb{A}_{ij}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} \cdot \vec{u}_k\right)$$

ce qui est équivalent à :

$$\int_\Omega \left(\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial x_j} + \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot u_k + \frac{\partial \mathbb{A}_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} \cdot \vec{u}_k\right) dx = 0$$

En passant à la limite, il vient :

$$\int_\Omega \left\{\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \left(\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \mathbb{A}_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i}\right) \vec{u}\right\} dx = 0$$

$$= \int_\Omega \left\{\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + (L_0 \vec{\psi} + \vec{\psi}) \vec{u}\right\} = 0$$

i.e. $$\int_\Omega \left\{\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u} \cdot \vec{\psi}\right\} = - \int_\Omega \vec{\psi}(L_0 \vec{u}) =$$

$$= - \int_\Omega \vec{\rho}\, \vec{\psi}$$

Donc $L_0 \vec{u}$ existe dans L^2_{loc} et est égal à $\vec{\rho}$.

Pour toute fonction $\vec{\psi} \in \mathcal{H}^{2,1}_0(\Omega,H)$, III.2.2. (ii') est vérifié et $\vec{\rho} = L_0 \vec{u}$. Par suite $\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,N}_{loc}(L_0;\Omega,H)$ et le théorème est démontré.

Parallèlement à ce qui précède, nous posons les définitions et théorèmes suivants.

Définition III.2.3.- On dira qu'une fonction $\vec{u} \in \mathcal{F}(\Omega,H)$ est solution A.E.F. du problème (III.2.3.) (resp. (III.2.4.)) de source $\vec{\rho} \in L^2(\Omega,H)$ si et seulement si :

i) $\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H)$ (resp. $\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)$)

ii) $\forall \vec{\psi} \in \mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H)$ (resp. $\vec{\psi} \in \mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)$)

$$\int_\Omega \left(\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial\vec{\psi}}{\partial x_j} + \vec{u}\,\vec{\psi}\right) = -\int_\Omega \vec{\rho}\,\vec{\psi}$$

Définition III.2.4.- Une fonction $\vec{u} \in \mathcal{F}(\Omega,H)$ est solution stricte A.E.F. de (III.2.3.) (resp. de III.2.4.) de source $\vec{\rho} \in L^2(\Omega,H)$ si et seulement si

i) $\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,D}(L_0;\Omega,H)$ (resp. $\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,N}(L_0;\Omega,H)$)

ii) $L_0\,\vec{u} = \vec{\rho}$

Théorème III.2.2.- Pour que $\vec{u} \in \mathcal{F}(\Omega,H)$ soit une solution stricte A.E.F. de (III.2.3.) (resp. III.2.4.), il faut et il suffit que $\vec{u}$ soit une solution A.E.F. de (III.2.3.) (resp. III.2.4.).

La démonstration est analogue à celle du théorème (III.2.1.) il suffit de remarquer que nous ne faisons plus la restriction de "locale intégrabilité" des fonctions sur Ω.

Théorème III.2.3. - *Existence et unicité de solution A.E.F.*- Le problème de Cauchy associé à l'opérateur différentiel L_0 avec les conditions aux bornes de Dirichlet (resp. de Neumann) admet une solution et une seule A.E.F. pour toute fonction source $\vec{\rho}$ donnée dans $L^2(\Omega,H)$.

Preuve.- L'application q définie par :

$$q(u,v) = \int_\Omega (A_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} + \vec{u}\,\vec{v})\,dx$$

est une forme bilinéaire sur $\mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H)$ (resp. $\mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)$).

Les coefficients A_{ij} étant bornés et L_0 fortement uniformément elliptique, il existe m et M, constantes positives telles que :

$$p^2 \, ||\vec{u}||^2_{\mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)} \leqslant q(\vec{u},\vec{u}) \leqslant P^2 \, ||\vec{u}||^2_{\mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)} \qquad \text{(III.2.8.)}$$

avec

$$||\vec{u}||^2_{\mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)} = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}\right)^2 + \vec{u}^2 \right) = ||\vec{u}||^2_1$$

Par suite q définit un produit scalaire sur $\mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H)$ (resp. $\mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)$) et la norme associée est équivalente à la norme $||\ \ ||_1$ de $\mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)$.

Donc muni du produit scalaire q, $\mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H)$ (resp. $\mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)$ est hilbertien.

Pour $\vec{\rho} \in L^2(\Omega,H)$ et $\vec{\psi} \in (\mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H), q)$, posons :

$$\Lambda : \vec{\psi} \mapsto - \int_\Omega \vec{\rho}\,\vec{\psi}$$

Λ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H), q)$ pour $\vec{\rho}$ fixé. En effet :

$$|\Lambda\,\vec{\psi}| = \left|\int_\Omega \vec{\rho}\,\vec{\psi}\right| \leqslant ||\vec{\rho}||_{L^2(\Omega,H)} \, ||\vec{\psi}||_{L^2(\Omega,H)} \leqslant ||\vec{\rho}||_{L^2(\Omega,H)} \, ||\vec{\psi}||_{\mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)}$$

$$\leqslant \frac{1}{p} \, ||\vec{\rho}||_{L^2(\Omega,H)} \, ||q(\vec{\psi},\vec{\psi})||$$

Λ est ainsi bornée sur $(\mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H), q)$ (resp. $\mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H), q)$ donc continue.

Donc d'après le théorème de représentation de Riesz il existe $\vec{u} \in (\mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H),q)$ (resp. $\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H), q)$ telle que :

$$q(\vec{u},\vec{\psi}) = \Lambda(\vec{\psi}) = - \int \vec{\rho}\ \vec{\psi}$$

$\forall\ \vec{\psi} \in (\mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H),q)$ (resp. $\vec{\psi} \in \mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H), q)$.

i.e.
$$\int_\Omega (\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + \vec{u} \cdot \vec{\psi}) = - \int_\Omega \vec{\rho} \cdot \vec{\psi}$$

L'existence de $\vec{u}$ s'en déduit

Soit $\vec{u}$ la solution de source $\vec{\rho} = 0$. Alors $\forall\ \vec{\psi} \in \mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H)$ (resp. $\mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)$), on a :

$$q(\vec{u},\vec{\psi}) = - \int_\Omega \vec{\rho}\ \vec{\psi} = 0 \ .$$

Donc $\vec{u} = 0$. L'unicité de la solution A.E.F. en résulte.

Compte tenu du théorème III.2.1., le théorème III.2.3. peut se formuler en termes de solution stricte A.E.F.

Proposition *III.2.1.-*

Munis de la norme de $\mathcal{H}^2(L_0;\Omega,H)$:

$$||\vec{u}||^2_{\mathcal{H}^2(L_0;)} = \int_\Omega \{\vec{u}^2 + (L_0\ \vec{u})^2\}\ dx$$

Les espaces $\mathcal{H}^{2,D}(L_0;\Omega,H)$ et $\mathcal{H}^{2,N}(L_0;\Omega,H)$ sont hilbertiens.

Preuve.- Il nous suffit de montrer que $H^{2,D}(L_0;\Omega,H)$ et $H^{2,N}(L_0;\Omega,H)$ sont fermés pour la norme $\| \ \|_{H^2(L_0)}$ dans $H^2(L_0;\Omega,H)$.

Faisons la démonstration pour $H^{2,N}(L_0;\Omega,H)$

Soit $(\vec{u}_k)$ une suite de fonctions de $H^{2,N}(L_0;\Omega,H)$ convergeant vers $\vec{u}$ dans $H^2(L_0;\Omega,H)$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} \lim_k \vec{u}_k = \vec{u} & \text{dans } L^2(\Omega,H) \\ \lim_k \vec{\ell}_k = \lim_k L_0 \vec{u}_k = \vec{\rho} = L_0 \vec{u} & \text{dans } L^2(\Omega,H) \end{cases}$$

La différence $(\vec{u}_k-\vec{u}_\ell)$ est une solution stricte de source $\vec{\rho}_k - \vec{\rho}_\ell$ de (III.2.4.).

Donc
$$q(\vec{u}_k-\vec{u}_\ell,\vec{\psi}) = - \int_\Omega (\vec{\rho}_k-\vec{\rho}_\ell) \cdot \vec{\psi}$$

$\forall \vec{\psi} \in H^{2,1}(\Omega,H)$. En particulier pour $\vec{\psi} = \vec{u}_k - \vec{u}_\ell$

$$q(\vec{u}_k-\vec{u}_\ell,\ \vec{u}_k-\vec{u}_\ell) = - \int_\Omega (\vec{\rho}_k-\vec{\rho}_\ell)\ (\vec{u}_k-\vec{u}_\ell)$$

Mais d'après (III.2.8.).

$$p^2\ \|\vec{u}_k-\vec{u}_\ell\|^2_{H^{2,1}(\Omega,H)} \leq q(\vec{u}_k-\vec{u}_\ell,\vec{u}_k-\vec{u}_\ell) \leq \|\vec{\rho}_k-\vec{\rho}_\ell\|_{L^2(\Omega)}\ \|\vec{u}_k-\vec{u}_\ell\|_{H^{2,1}(\Omega,H)}$$

D'où
$$\|\vec{u}_k-\vec{u}_\ell\|_{H^{2,1}(\Omega,H)} \leq \frac{1}{P^2}\ \|\vec{\rho}_k-\vec{\rho}_\ell\|_{L^2(\Omega)} \ .$$

Donc
$$\frac{\partial \vec{u}_k}{\partial x_i} \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{v}_i \quad \text{dans } L^2(\Omega,H) \ .$$

D'autre part pour tout $k = 1,2,\ldots$

$$\int_\Omega \vec{u}_k \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial x_i} \vec{\phi}\, dx \qquad \forall\, \vec{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega,H)$$

et

$$\int_\Omega \{\vec{\psi}(L_0\, \vec{u}_k) + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} (A_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_j})\}\, dx = 0$$

$$\forall\, \vec{\psi} \in \mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H) .$$

En passant à la limite, il vient :

$$\int_\Omega \vec{u} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_i} = -\int \overrightarrow{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}} \vec{\phi}$$

(donc il existe $\vec{v}_i$ dans $L^2(\Omega,H)$ tel que $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} = \vec{v}_i$).

$$\int_\Omega \{\vec{\psi}(L_0\, \vec{u}) + \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} (\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j})\}\, dx = 0$$

$$\forall\, \vec{\psi} \in \mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)$$

Donc $\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,N}(L_0;\Omega;H)$ et la proposition est établie.

Pour le sous-espace $\mathcal{H}^{2,D}(L_0;\Omega,H)$ la démonstration est identique.

III.3. - <u>L'OPERATEUR DIFFERENTIEL PARAMETRIQUE</u> L.

Dans ce paragraphe, nous allons étendre au problème mixte de Cauchy associé à l'opérateur L, les notions de solution A.E.L.F. et solution A.E.F. ainsi que celles de solution stricte A.E.L.F. et A.E.F.

Pour simplifier, posons :

$$F = L^2(I, \mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)) \cap \mathcal{H}^{2,1}(I, L^2(\Omega,H)) = \mathcal{H}^{2,1}(I, \mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H))$$

$$F^D = F \cap \{\vec{u} : \vec{u}(t) \in \mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H) \text{ pour presque tout } t \in I\}$$

$$G = L^2(I, \mathcal{H}^2(L_0;\Omega,H) \quad \mathcal{H}^{2,1}(I, \mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)) \quad \mathcal{H}^{2,2}(I, L^2(\Omega,H))$$

$$G^D = G \cap \{\vec{u} : \vec{u}(t), \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(t) \in \mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H) \text{ p.p. sur } I\}$$

$$G^N = G \cap \{\vec{u} : \vec{u}(t) \in \mathcal{H}^{2,N}(L_0;\Omega,H) \text{ p.p. sur } I\}$$

A chacun de ces espaces $\mathcal{E}$, on associera conformément aux notations antérieures les espaces $\mathcal{E}_{loc}$ et $\mathcal{E}_0$, correspondants pour désigner respectivement les éléments de $\mathcal{E}$ qui vérifient localement la propriété et les éléments de $\mathcal{E}$ qui ont un support borné.

Remarquons que les espaces $\mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)$, $\mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H)$ $\mathcal{H}^2(L_0;\Omega,H)$, $\mathcal{H}^{2,D}(L_0;\Omega,H)$ et $\mathcal{H}^{2,N}(L_0;\Omega,H)$ sont séparables puisque $L^2(\Omega,H)$ est séparable. On peut donc appliquer sur chacun d'entre eux la notion d'intégrale à valeurs vectorielles (définition II.1.3.).

Formellement, l'opérateur différentiel L est défini sur $\mathcal{F}(\Omega,H)$ par :

$$L\,\vec{u} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}\right) + \mathbb{A}_i(x)\,\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbb{A}(x)\,\vec{u}$$

$$= L_0\,\vec{u} + \mathbb{A}_i\,\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + (\mathbb{A}(x) + I)\,\vec{u} \qquad \text{(III.3.1.)}$$

où I désigne la matrice unité.

On peut donc définir $L\,\vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,D}(L_0;\Omega,H)$ $(\vec{u} \in \mathcal{H}^{2,N}(L_0;\Omega,H))$.

Les matrices $\mathbb{A}_i(x)$ et $\mathbb{A}(x)$ étant mesurables et bornées dans Ω, $L\,\vec{u} \in L^2(\Omega,H)$.

III.3.1. - Solution et solution stricte du problème associé à L.

Définition III.3.1.- On dira que $\vec{u} \in F(Q,H)$ est une solution A.E.F. du problème mixte de Cauchy associé à L avec la condition aux bornes de Dirichlet (resp. de Neumann) par rapport à $\vec{\rho} \in L^2(Q,H)$, $\vec{f} \in L^2(\Omega)$ et $\vec{g} \in L^2(\Omega)$ pour exprimer que :

i) $\vec{u} \in F^D$ (resp. $\vec{u} \in F$)

ii) $\vec{u}(x,0) = \vec{f}(x)$ p.p. dans Ω

iii) $$\int_Q \{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + A_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \cdot \vec{\psi} + \mathbb{A}\, \vec{u}\, \vec{\psi} + \vec{\rho} \cdot \vec{\psi}\}\, dx\, dt + \int_\Omega \vec{g}(x)\, \vec{\psi}(x,0)\, dx = 0$$

pour toute fonction $\vec{\psi} \in F^D$ (resp. $\vec{\psi} \in F$) telle que $\vec{\psi}(T) = 0$ dans $L^2(\Omega,H)$

Définition III.3.2.- $\vec{u} \in F(\Omega,H)$ est une solution stricte A.E.F. du problème mixte de Cauchy avec la condition aux bornes de Dirichlet (resp. de Neumann) par rapport à $\vec{\rho} \in L^2(Q,H)$, $\vec{f} \in H^{2,1}(\Omega,H)$, $\vec{g} \in L^2(\Omega,H)$ si et seulement si :

i) $\vec{u} \in G^D$ (resp. $\vec{u} \in G^N$)

ii) $\vec{u}(0) = \vec{f}$, $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(0) = \vec{g}$ p.p. dans Ω.

iii) $\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = L\, \vec{u} + \vec{\rho}$ p.p. dans Q

Définition III.3.3.- $\vec{u} \in F(\Omega,H)$ est une solution A.E.L.F. du problème mixte de Cauchy avec la condition aux bornes de Dirichlet (resp. de Neumann) par rapport aux fonctions $\vec{\rho} \in L^2_{loc}(Q,H)$, $\vec{f} \in L^2_{loc}(\Omega,H)$, $\vec{g} \in L^2_{loc}(\Omega,H)$ si et seulement si :

i) $\vec{u} \in F^D_{loc} (\vec{u} \in F_{loc})$

ii) $\vec{u}(x,0) = \vec{f}(x)$ p.p. dans Ω

iii) $$\int_Q \{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + \mathbb{A}_i(x) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \cdot \vec{\psi} + \vec{\rho} \cdot \vec{\psi}\}$$

$$+ \int_\Omega \vec{g}(x) \vec{\psi}(x,0) \, dx = 0$$

$\forall \vec{\psi} \in F^D_0 \ (\vec{\psi} \in F_0)$ et $\vec{\psi}(T) = 0$ p.p. dans Ω

De même

Définition III.3.4.- Nous dirons que $\vec{u} \in F(\Omega,H)$ est une solution stricte A.E.L.F. du problème mixte de Cauchy avec la condition aux bornes de Dirichlet (resp. de Neumann) par rapport aux données $\vec{\rho} \in L^2_{loc}(Q,H)$, $\vec{f} \in H^{2,1}_{loc}(\Omega,H)$, $\vec{g} \in L^2_{loc}(\Omega,H)$ pour exprimer que :

i) $\vec{u} \in G^D_{loc}$ (resp. $\vec{u} \in G^N_{loc}$)

ii) $\dfrac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = L\,\vec{u} + \vec{\rho}$ p.p; dans Q

iii) $\vec{u}(0) = \vec{f}$, $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}(0) = \vec{g}$ p.p. dans Ω.

Entre une solution et une solution stricte, il existe une équivalence logique dont rend compte le :

Théorème III.3.1.-

1) Si $\vec{u}$ est une solution stricte A.E.F., alors $\vec{u}$ est une solution A.E.F.

2) Si $\vec{u}$ est une solution A.E.F. et si $\vec{u} \in G^D$ $(\vec{u} \in G^N)$, alors $\vec{u}$ est une solution stricte A.E.F.

Preuve.-

1) Soit $\vec{u}$ une solution stricte A.E.F. et $\vec{\varphi} \in F^D$ (resp. $\vec{\varphi} \in F$).

Alors on a :

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = L\,\vec{u} + \vec{\rho} \quad \text{avec} \quad \vec{\rho} \in L^2(Q,H)$$

$$\Longrightarrow \int_Q \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}\,\vec{\varphi} = \int_Q (L\,\vec{u}\,.\,\vec{\varphi} + \vec{\rho}\,\vec{\varphi})$$

$$\int_Q \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}\,\vec{\varphi} - L\,\vec{u}\,.\,\vec{\varphi}\right) dx\,dt = \int_Q \vec{\rho}\,.\,\vec{\varphi}\;dx\,dt$$

$\vec{\psi}$ et $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ étant dans $H^{2,1}(I,L^2(\Omega,H))$, on peut "intégrer par parties".

$$\int_Q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,.\,\vec{\varphi}\,dx\,dt = \int_0^T \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}\,.\,\vec{\varphi}\right)_{L^2(\Omega)} = \left[\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\,.\,\vec{\varphi}\right)_{L^2(\Omega)}\right]_0^T - \int_0^T \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\,.\,\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t}\right)_{L^2(\Omega,H)} dt$$

De plus :

$$\int_\Omega (L_0\,\vec{u})\,.\,\vec{\varphi}\,dx = -\int_\Omega \left(\mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}\,.\,\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_j} + \vec{u}\,\vec{\varphi}\right) dx \quad \text{p.p. sur } I \tag{III.3.2.}$$

puisque $\vec{u}(.,t) \in H^{2,D}(L_0;\Omega,H)$ et $\vec{\varphi}(.,t) \in H^{2,D}(\Omega,H)$ p.p. sur I

(resp. $\vec{u}(.,t) \in H^{2,N}(L_0;\Omega,H)$, $\vec{\varphi}(.,t) \in H^{2,1}(\Omega,H)$ p.p. sur I).

Intégrons (III.3.2.) par rapport à t. Il vient

$$\int_Q (L_0\,\vec{u})\,\vec{\varphi}\,dx\,dt = -\int_Q \left(\mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}\,\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_j} + \vec{u}\,\vec{\varphi}\right) dx\,dt$$

Ajoutons $\displaystyle\int_Q \{\mathbb{A}_i\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\vec{\varphi} + (A + I)\,\vec{u}\,\vec{\varphi}\}\,dx\,dt$ aux deux membres. On a :

$$\int_Q \left[L_0 \vec{u} + \mathbb{A}_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} + (\mathbb{A} + I) \vec{u}\right] \vec{\psi} \ dx\ dt =$$

$$= - \int_Q (\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} - \mathbb{A}_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} . \vec{\psi} \ - \mathbb{A} \vec{u} \vec{\psi}) \ dx\ dt$$

D'où

$$\int_Q (\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L \vec{u}) \vec{\psi} \ dx\ dt = [(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{\psi})_{L^2(\Omega)}]_0^T - \int_Q \{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial k_i} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} +$$

$$\mathbb{A}_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \vec{\psi} + \mathbb{A} \vec{u} . \vec{\psi}\} \ dx\ dt$$

$$\int_Q (\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L \vec{u}) \vec{\psi} \ dx\ dt = \langle \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} (T), \vec{\psi}(T) \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} (0), \vec{\psi}(0) \rangle_{L^2(\Omega)} -$$

$$- \int_Q \langle \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + \mathbb{A}_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \vec{\psi} + \mathbb{A} \vec{u} \vec{\psi}\} \ dx\ dt$$

$$= - [\int_\Omega g(x)\ \psi(x,0)\ dx + \int_Q \{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + \mathbb{A}_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \vec{\psi} +$$

$$+ \mathbb{A} \vec{u} . \vec{\psi}\} \ dx\ dt = \int_Q \vec{\rho} . \vec{\psi} \ dx\ dt \qquad \text{(III.3.3.)}$$

Donc $\vec{u}$ est une solution A.E.F.

Réciproquement, soit $\vec{u}$ solution A.E.F. et $\vec{u} \in G^D (\vec{u} \in G^N)$.
L'équation (III.3.3.) est vérifiée. De plus ($\vec{u}$ étant solution A.E.F.), on a :

$$\int_Q (\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L \vec{u}) \vec{\psi} = - \int_\Omega \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} (0)\ \vec{\psi}(x,0)\ dx$$

$$- \int_Q \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} . \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + \mathbb{A}_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \mathbb{A} \vec{u} . \vec{\psi}\} \ dx\ dt$$

Mais $- \int_Q \{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + \mathbb{A}_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \vec{\psi} + \mathbb{A} \vec{u} \vec{\psi}\} \ dx\ dt$

$$= \int_Q \vec{\rho} \vec{\psi} \ dx\ dt + \int_\Omega \vec{g}(x) . \vec{\psi}(x,0)\ dx .$$

Donc

$$\int_Q \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - L\,\vec{u}\right) \vec{\Phi}\, dx\, dt = \int_\Omega \left(\vec{g}(x) - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) . \vec{\Phi}(x,0)\, dx$$

$$+ \int_Q \vec{\rho} \,.\, \vec{\Phi}\, dx\, dt \qquad \text{(III.3.4.)}$$

Remarquant que $\mathcal{D}(Q) \subset F^D \subset F$, on peut prendre dans (III.3.4.), $\vec{\Phi} \in \mathcal{D}(Q)$ i.e. : $\vec{\Phi} \in \mathcal{D}(\Omega \times]0,T[)$. $\vec{\Phi}(x,0)$ est alors nul.

Donc $\displaystyle\int_Q \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - L\,\vec{u}\right) \vec{\Phi}\, dx\, dt = \int \vec{\rho}\, \vec{\Phi} \quad \forall\, \Phi \in \mathcal{D}(Q)$.

Par suite on a (III.3.2. ii) c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L\, u + \vec{\rho}\ .$$

Posons $\vec{\Phi}(x,t) = (T-t)\, \psi(x)$ avec $\vec{\psi} \in H^{2,D}(\Omega,H)$ (resp. $\vec{\psi} \in H^{2,1}(\Omega,H)$). Il vient :

$\vec{\Phi}(x,T) = 0$; $\vec{\Phi} \in F^D(\vec{\Phi} \in F)$ et d'après (III.3.4.)

$$\int_Q \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - L\,\vec{u}\right) (T-t)\, \vec{\psi}(x)\, dx\, dt = \int_Q \vec{\rho} \,.\, \vec{\Phi}\, dx\, dt + \int_\Omega T\left(\vec{g}(x) - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(0)\right) . \vec{\psi}(x)\, dx$$

et d'après la définition (III.3.2. ii); On a :

$$\int_\Omega \left(\vec{g}(x) - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x,0)\right) . \vec{\psi}(x)\, dx = 0$$

avec $\vec{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega)$

Donc $$\vec{g}(x) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x,0)\ .$$

Corollaire III.3.1.- Si $\vec{u}$ est une solution stricte A.E.L.F. alors u est une solution A.E.L.F.

Si $\vec{u}$ est une solution A.E.L.F. et si $\vec{u} \in G^D_{loc}$ (resp. $\vec{u} \in G^N_{loc}$), alors $\vec{u}$ est une solution stricte A.E.L.F.

La démonstration peut être "calquée" sur la précédente en remplaçant Ω par $\Omega \cap K$, Q par $Q \cap (K \times I)$ pour toute partie mesurable bornée K de $\mathbb{R}^n$.

III.4. - Cas d'un système à coefficients constants.-

Soit le système hyperbolique symétrique d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_i \partial x_j} \qquad \text{(III.4.1.)}$$

dans lequel $\vec{u} \in F(G,\mathbb{C}^K)$ où G est le domaine fondamental des variables (x,t) de bord ∂G supposé "suffisamment régulier".

Les matrices $\mathbb{A}_{ij}$ sont symétriques hermitiennes de rang k et ne dépendent ni de $x \in \mathbb{R}^n$, ni de t réel. De plus elles ont la propriété suivante :

$\mathbb{A}_{ij} = {}^t\mathbb{A}_{ji}$ et si $\vec{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ est un point de $\mathbb{R}^n$ différent de zéro, alors la matrice $\mathbb{A}(\vec{\xi}) = \sum_{i.j} \mathbb{A}_{ij}\, \xi_i\, \xi_j$ est non singulière. Nous nous proposons d'étudier les propriétés des solutions du système (III.4.1.) qui satisfont à la condition initiale :

$$\vec{u}(x,0) = \vec{f}(x)$$

sur une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ (III.4.2.).

Proposition (III.4.1.).-

1) Le problème des valeurs initiales du système (III.4.1.) admet une solution u et une seule de classe C^∞ à support compact pour toute fonction $\vec{f}$ donnée dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2) Si l'on note $W(\vec{u},t)$ l'énergie de cette solution $\vec{u}$ à l'instant t, c'est-à-dire :

$$W(\vec{u},t) = \int_{\mathbb{R}^n} \{\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + |\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}|^2\} \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} V(x,t) \, dx$$

où $V(x,t) = \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + |\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}|^2$

alors il existe une constante C_1 telle que :

$$W(\vec{u},T) = \int_{|x| \leqslant R - C_1 T} V(x,T) \, dx \leqslant W(\vec{u},0) = \int_{|x| \leqslant R} V(x,0) \, dx$$

$$\forall \, T > 0$$

Preuve.- Etant donné une fonction $\vec{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant (III.4.2.), il lui correspond une solution $\vec{u}$ de classe C^∞ à support compact, solution qu'on sait construire de façon standard à l'aide de la transformation de Fourier où d'après nos résultats du chapitre IV.

Démonstrons alors le 2°) Formons le produit scalaire des deux membres de (III.4.1.) par $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_i \partial x_j}\right) \qquad \text{(III.4.3.)}$$

en posant $(\vec{u},\vec{v}) = \int_{\mathbb{R}^n} \vec{u}\,\bar{\vec{v}}\,dx$.

Remarquons que les deux membres de (III.4.3.) existent puisque $\vec{u} \in C_0^\infty(G) \subset \mathcal{H}^{2,1}(G)$.

De (III.4.3.) on déduit :

$$\mathrm{Re}\,\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}\right) - \mathrm{Re}\,\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_i \partial x_j}\right) = 0 \qquad \text{(III.4.4.)}$$

(sommation sur i,j)

$$\mathrm{Re}\,\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right|^2$$

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial^2 \bar{\vec{u}}}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_j \partial t}, \mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial x_i}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}, \mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial x_i}\right)$$

$$+ \left(\mathbb{A}_{ji}\,\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 \bar{\vec{u}}}{\partial x_i \partial t}\right)$$

Mais

$$\left(\frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial t}, \mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial t}, \mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial^2 \bar{\vec{u}}}{\partial x_j \partial t}, \mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}\right)$$

D'où

$$2\,\mathrm{Re}\,\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_i \partial x_j}\right) = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial x_j}\,\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}\right)$$

En intégrant (III.4.4.) sur le domaine fondamental G, il vient :

$$\int_G \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\left|\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right|^2 + \left(\mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial x_j}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}\right)\right] - 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial x_i}\right)\right\} dx\,dt = 0$$

Pour un bord régulier de G. ∂G, on peut appliquer la formule de Stokes. D'où en appelant (n_i, n_t) la normale extérieure à ∂G et ∂S l'élément d'aire sur l'hypersurface ∂G, on a :

$$\int_{\partial G} [\{|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 + (\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial x_j}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i})\} n_t - 2 \operatorname{Re} (\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}) n_j] dS = 0$$

Posons :

$$|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 + \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial x_j}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} = (\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial t}) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial x_i}$$

$$= ({}^t U, \mathbb{E}\, U)$$

E est une matrice formée de blocs I_n, 0, et A_{ij}.

Formellement :

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} In & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_{ij} \end{pmatrix}$$

Remarquons que :

$$2 \operatorname{Re} (\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial x_i} n_j) = (\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial x_i} n_j) + (\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}, \mathbb{A}_{ji} n_j \frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial t})$$

Posons alors :

$$2 \operatorname{Re} (\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial x_i} n_j) = ({}^t U, \mathbb{A}(u)\, U)$$

(avec $n = (n_1, \ldots, n_n)$)

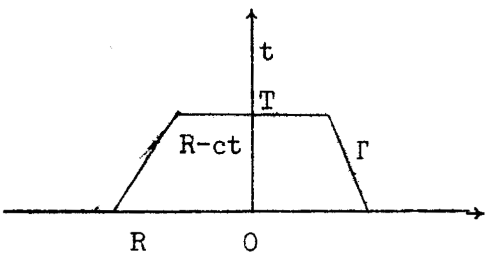
D'où l'on tire :

$$\int_{\partial G} \{({}^tU,\ n_t\ \mathbb{E}\ U) - {}^tU,\ \mathbb{A}(n)\ U\}\ dS = 0 \qquad \text{(III.4.5.)}$$

En prenant pour G le tronc de cône :

$$C = \{(x,t) : |x| \leqslant R - ct, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T\}$$

où R et C sont deux constantes positives.



L'identité (III.4.5.) s'écrit encore

$$\int_{\partial G} ({}^tU,\ (n_t\ \mathbb{E} - \mathbb{A}(n))\ \bar{U})\ dS = 0$$

Elle se décompose en trois intégrales :

$$\int_{|x|\leqslant R-cT} V(x,T)\ dx - \int_{|x|<R} V(x,0)\ dx + \int_{\Gamma} ({}^tU,(n_t\ \mathbb{E} - \mathbb{A}(n))\ \bar{U})\ dS = 0$$

où désigne la "surface" latérale du tronc de cône. Sur Γ, n_t est proportionnel à c et n_i à $\dfrac{x_i}{|x|}$. Posons :

$$\omega = \left(\frac{x_i}{|x|}\right)_{i=1,\dots,n}$$

Soit alors $c_1' = \underset{|\omega|=1}{\text{Max}}\ \text{v.p.}\ \mathbb{A}(\omega)$.

(où $\underset{|\omega|=1}{\text{Max}}$ v.p. $\mathbb{A}(\omega)$ est mis pour maximum des valeurs propres de $A(\omega)$ pour $|\omega| = 1$).

$\int_{\Gamma} ({}^tU,\ (n_t\ \mathbb{E} - \mathbb{A}(n))\ U)\ dS$ est positive si l'intégrant est positif.
Or cette expression s'écrit :

$$\int_{\Gamma} ({}^tU,\ (C\,\mathbb{E} - \mathbb{A}(\omega))\ U)\ dS$$

Donc l'intégrant est positif si $C > C_1'$. Il suffit de prendre $C_1 \leqslant C_1'$ pour obtenir :

$$\int_{|x|\leqslant R-C_1T} V(x,T)\ dx - \int_{|x|<R} V(x,0)\ dx \leqslant 0\ .$$

CHAPITRE IV

RESULTATS ESSENTIELS :

INEGALITES DU DOMAINE DE DEPENDANCE ET INEGALITES DE L'ENERGIE.

IV.1- *Théorème* (*d'existence et d'unicité*).

IV.1.1.- Nous énonçons ci-dessous le théorème d'existence et d'unicité de solution dont la démonstration fera l'objet du chapitre V.

Le problème mixte de Cauchy associé à l'opérateur L avec les conditions aux bornes (III.1.3.) de Dirichlet (resp. de Neumann) par rapport aux fonctions $\vec{\rho}$, $\vec{f}$ et $\vec{g}$ définies respectivement par (III.1.1.) et (III.1.2.) admet :

(i) une solution unique A.E.L.F. si

$\vec{\rho} \in L^2_{loc}(Q,H)$, $\vec{f} \in H^{2,D}_{loc}(\Omega,H)$ (resp. $\vec{f} \in H^{2,1}_{loc}(\Omega,H)$) et $\vec{g} \in L^2_{loc}(\Omega,H)$.

(ii) une solution unique A.E.F. si

$\vec{\rho} \in L^2(Q,H)$, $\vec{f} \in H^{2,D}_{(\Omega,H)}$ (resp. $\vec{f} \in H^{2,1}_{(\Omega,H)}$), $\vec{g} \in L^2(\Omega,H)$.

(iii) une solution stricte unique A.E.F. si

$\vec{\rho} \in H^{2,1}(I,L^2(\Omega,H))$, $\vec{f} \in H^{2,D}(L_0;\Omega,H)$ (resp. $\vec{f} \in H^{2,N}(L_0;\Omega,H)$ et $\vec{g} \in H^{2,D}(\Omega,H)$ (resp. $\vec{g} \in H^{2,1}(\Omega,H)$).

(iiii) admet une solution stricte unique A.E.L.F. si

$\vec{\rho} \in H^{2,1}(I,L^2(K \cap \Omega,H)$ où K est une partie mesurable bornée, de $\mathbb{R}^n$

$\vec{f} \in H^{2,D}_{loc}(L_0;\Omega,H)$ (resp. $\vec{f} \in H^{2,N}_{loc}(L_0;\Omega,H)$

$\vec{g} \in H^{2,D}_{loc}(\Omega,H)$ (resp. $\vec{g} \in H^{2,1}_{loc}(\Omega,H)$.

Conséquences.

IV.1.1.- Corollaire.- Les solutions A.E.L.F. ne dépendent pas de T en ce sens que ces solutions définies sur $]0,T[$ et $]0,T'[$ avec $T < T'$ coïncident sur $]0,T[$.

IV.1.2.- Corollaire.-

a) La solution A.E.L.F. définit des courbes continues

$$t \mapsto \vec{u}(t) \in H^{2,1}(K \cap \Omega, H)$$

$$t \mapsto \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \in L^2(K \cap \Omega, H)$$ pour toute partie mesurable bornée K de X et $\vec{u}(x,0) = \vec{f}(x)$ et $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x,0) = \vec{g}(x)$.

b) La solution A.E.F. définit des courbes continues

$$t \mapsto \vec{u}(t) \in H_p^{2,1}(\Omega, H)$$

$$t \mapsto \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(t) \in L^2(\Omega, H)$$

avec $\vec{u}(x,0) = \vec{f}(x)$ et $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x,0) = \vec{g}(x)$.

IV.2- Inégalité du domaine de dépendance.

Soit x_0 un point de R^n et r un nombre réel positif.

Posons

$$S_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| \leq r\}$$

une "hypersphère" de R^n,

$$C_r(x_0) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times I : |x-x_0| \leq r+M(T-t), \quad 0 \leq t \leq T\}$$

le tronc de cône de l'espace temps limité par les hyperplans : $t = 0$ et $t = T$.

Nous avons alors :

Théorème IV.2.1.- (*de l'Inégalité du domaine de dépendance*).

La solution A.E.L.F. du problème (III.1) et par conséquent la solution A.E.F. et la solution stricte A.E.F.) vérifie l'inégalité (dite du domaine de dépendance) :

$$\int_{S_r(x_0)\cap\Omega} \{(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t})^2 + \mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u}^2\}_{t=T}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant e^{CT}\left|\int_{S_{r+MT}(x_0)\cap\Omega}\{\vec{g}^2 + \mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_j} + f^2\}dx + 2\int_{C_r(x_0)\cap Q} e^{-CT}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}.\vec{\rho}(x,t)\,dx\,dt\right|$$

où C est une constante qui ne dépend que de n, de m ainsi que des bornes des coefficients de l'opérateur L.

Corollaire IV.2.1.- Si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont identiquement nulles dans $S_{r+MT}(a_0)$ et $\vec{\rho}$ identiquement nulle dans $C_r(x_0)\cap Q$, alors $\vec{u}(T)$ est identiquement nulle dans $S_r(x_0)\cap\Omega$.

Ce corollaire est évident. Quant à la démonstration du théorème, elle repose sur les trois lemmes suivants que nous allons établir.

Lemme IV.2.1.-

Si $\phi \in \mathcal{D}(R^{n+1})$ et $\vec{u} \in G^D_{loc}(\Omega,H)$ (resp. $\vec{u} \in G^N_{loc}(\Omega,H)$) alors :

$$\int_Q \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot(L_0\,\vec{u})\,\phi\,dx\,dt = -\int_Q \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\,dx\,dt -$$

$$-\int_Q \vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\,dx\,dt - \int_Q \mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x_j}\,\phi\,dx\,dt\ .$$

<u>*Preuve*</u>.- Soit K une partie mesurable bornée de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\operatorname{supp} \varphi \cap Q \subset K \times I$$

Les intégrales ci-dessus sont alors égales à des intégrales sur $Q \cap K \times I$: elles sont donc définies d'après la définition de $G^D_{loc}(\Omega,H)$ (resp. $G^N_{loc}(\Omega,H)$). Séparons la démonstration en deux

1 - <u>Soit $\vec{u} \in G^D_{loc}(\Omega,H)$.</u>

Pour presque tout $t \in I =]0,T[$, on a $\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t} \in \mathcal{H}^{2,D}_{loc}$.

Posons $\vec{V}_i = \mathbb{A}_{ij} \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial x_j} . \varphi.$ $\quad i = 1,\dots,n.$

Pour chaque i, $\vec{V}_i \in \mathcal{H}^{2,1}_0(\Omega,H)$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\vec{V}_i}{\partial x_i} = \varphi(L_0\,\vec{u}) + \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \varphi.\vec{u} \quad \text{p.p. sur } I .$$

Donc d'après la définition de $\mathcal{H}^{2,D}_{loc}$, on a :

$$0 = \int_\Omega \{\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\vec{V}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t\partial x_i} V_i\}\, dx =$$

$$\int_\Omega \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} (L_0\vec{u}).\varphi\, dx + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i} . \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} dx + \int_\Omega \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} u.\varphi\, dx$$

$$+ \int_\Omega \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t\partial x_i} \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i} .\varphi.dx \qquad \text{p.p. sur } I .$$

En intégrant par rapport à t, il vient :

$$\int_Q \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}.(L_0\vec{u})\ \psi\ dx\ dt = -\int_Q \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}.A_{ij}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\ \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\ dx\ dt$$

$$+\int_Q \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}.\vec{u}\ \psi\ dx\ dt + \int_Q \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x_i}.A_{ij}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j}\ \psi\ dx\ dt\} .$$

2 - Soit $\vec{u} \in G^N_{loc}(\Omega,H)$.

$$\int_\Omega \{\vec{v}(L_0\vec{u}) + \frac{\partial v}{\partial\lambda_i}\ (A_{ij}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j}) + \vec{v}\vec{u}\}\ dx = 0$$

$$\forall\ \vec{v} \in H^{2,1}(\Omega,H) \qquad \text{p.p. sur } I.$$

Puisque supp ψ est compact et $\vec{u} \in H^{2,1}(I,H^{2,1}_{loc}(\Omega,H))$ on peut poser :

$$\vec{v} = \psi\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$$

D'où, on tire $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial x_i} = \dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}\ \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \psi\ \dfrac{\partial^2\vec{u}}{\partial t\partial x_i}$.

Par suite :

$$\int_\Omega \{\psi\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}.(L_0\vec{u}) + (\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \psi\ \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t\partial x_i}).A_{ij}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u}.\psi\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\}\ dx = 0 .$$

En intégrant par rapport à t sur $]0,T[$, il vient :

$$\int_Q \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}.(L_0\vec{u}).\psi\ dx\ dt = -\int_Q \{\vec{u}\psi.\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \psi\ .\ \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t\partial x_i})\ .\ A_{ij}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j}\}\ dx\ dt .$$

Lemme IV.2.2.-

Sous les hypothèses du lemme (IV.2.2.), on a :

$$2\int_Q \mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t\partial x_j}.\psi.dx.dt = \int_\Omega\left[A_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}.\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j}\psi\right]_0^T dx - \int_Q A_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial t}dx\,dt\ .$$

<u>*Preuve*</u>.- Soit $\vec{u}\in G^D_{loc}(\Omega,H)$ (resp. $\vec{u}\in G^N_{loc}(\Omega,H)$).

Si $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, on a alors pour chaque i :

$\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}$ et $\psi\,\mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j}$ qui sont dans $\mathcal{H}^{2,1}(I;L^2(K\cap\Omega,H))$.

De plus $\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi\ \mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial t}\cdot\mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j} + \psi\,\mathbb{A}_{ij}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t\partial x_j}$

D'où :

$$\int_Q \mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x_j\partial t}\psi\,dx\,dt = \int_0^T\left(\psi\ \mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\ ,\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j}\right)\right)_{L^2(K\cap\Omega,H)}dt$$

$$= -\int_0^T\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi\ \mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\right),\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j}\right)_{L^2(\Omega\cap K,H)}dt + \left[\left(\psi,\mathbb{A}_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\ \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)_{L^2(\Omega\cap K)}\right]_0^T$$

$$= -\int_0^T\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j}\right)_{L^2(K\cap\Omega)}dt - \int_0^T\left(\psi\,\mathbb{A}_{ij}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t\partial x_i}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j}\right)_{L^2(\Omega\cap K)}dt$$

$$+\left[\left(\psi\,\mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j}\right)_{L^2(\Omega\cap K)}\right]_0^T$$

i.e. :

$$2\int_Q\left(\mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x_j}\psi\right)dx\,dt = \int_\Omega\left[\mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j}\right]_0^T dx - \int\mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j}\psi\,dx\,dt\ .$$

Lemme IV.2.3.- Sous les hypothèses du lemme (IV.2.1.), on a :

1.) $2\displaystyle\int_Q \vec{u}.\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\,\psi\,dx\,dt = \int_\Omega \Big[(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t})^2\psi\Big]_0^T dx - \int_Q \vec{u}^2\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\,dx\,dt$.

2.) $2\displaystyle\int_Q \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\,.\,\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}\,\psi\,dx\,dt = \int_\Omega \Big[(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t})^2\psi\Big]_0^T - \int_Q (\frac{\partial\vec{u}}{\partial t})^2\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\,dx\,dt$.

Preuve.- Soit $\vec{u} \in G^D_{loc}(\Omega,H)$ (resp. $\vec{u} \in G^N_{loc}(\Omega,H)$).

$\vec{u}$, $\psi\,\vec{u}$ sont alors dans $\mathcal{H}^{2,1}(I,L^2(K\cap\Omega))$.

Donc $\displaystyle\int_0^T (\vec{u},\frac{\partial}{\partial t}(\psi\,\vec{u}))_{L^2(\Omega\cap K)}\,dt = \Big[(\vec{u},\psi\,\vec{u})_{L^2(\Omega\cap K)}\Big]_0^T -$

$$- \int_0^T (\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\psi\,\vec{u})_{L^2(\Omega\cap K)} = \int_0^T (\vec{u},\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\vec{u})_{L^2(\Omega\cap K)}\,dt +$$

$$+ \int_0^T (\vec{u},\psi\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial t})_{L^2(\Omega\cap K)}\,dt .$$

D'où :

$$2\int_0^T\int_\Omega \psi\,\vec{u}\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\,dx\,dt = \int_\Omega [u^2\ \psi]_0^T\,dx - \int_Q \vec{u}^2\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\,dx\,dt .$$

i.e.

$$2\int_Q \psi\,\vec{u}\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\,dx\,dt = \int_\Omega [\vec{u}^2\ \psi]_0^T\,dx - \int_Q \vec{u}^2\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\,dx\,dt .$$

De la même façon, on a :

$\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t}$ et $\psi\,\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t}$ qui sont $\mathcal{H}^{2,1}(I,L^2(K\cap\Omega))$.

$$\int_0^T \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)\right)_{L^2} dt = - \int_0^T \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}, \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{L^2} dt + \left[\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}, \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)_{L^2}\right]_0^T$$

$$= \int_0^T \left(\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}, \psi\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)_{L^2} dt + \int_0^T \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}, \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{L^2} dt\ .$$

D'où :

$$2 \int_Q \psi\ \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\ dx\ dt = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2 \psi\right]_0^T dx - \int_Q \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial\psi}{\partial t}\ dx\ dt\ .$$

<u>Conséquences.</u>

Il résulte des lemmes (IV.2.1.) et (IV.2.3.) :

$$\int_Q \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} - L_0\vec{u}\right) \psi\ dx\ dt = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2\right]_0^T dx - \int_Q \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial\psi}{\partial t}\ dx\ dt$$

$$+ \int_Q A_{ij}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x_j\ t}\ \psi\ dx\ dt + \int_Q \vec{u}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\ \psi\ dx\ dt + \int_Q A_{ij}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\ \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\ dx\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2 + A_{ij}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u}^2\right)\psi\right]_0^T dx$$

$$- \frac{1}{2}\int_Q A_{ij}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\ dx\ dt - \frac{1}{2}\int_Q \vec{u}^2\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\ dx\ dt - \int_Q \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) dx\ dt$$

$$+ \int_Q \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \cdot A_{ij}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\ \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\ dx\ dt.$$

D'où l'identité intégrale :

$$\int_Q \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}.\left(\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} - L_0\vec{u}\right) \psi \, dx \, dt = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + A_{ij} \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}.\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u}^2\right)\psi\right]_0^T$$

$$- \frac{1}{2}\int_Q \left\{\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2 + A_{ij} \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}.\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u}^2\right\} \frac{\partial\psi}{dt} \, dx \, dt$$

$$- \int_Q A_{ij} \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}.\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \, dx \, dt \quad (IV.2.2.) \; .$$

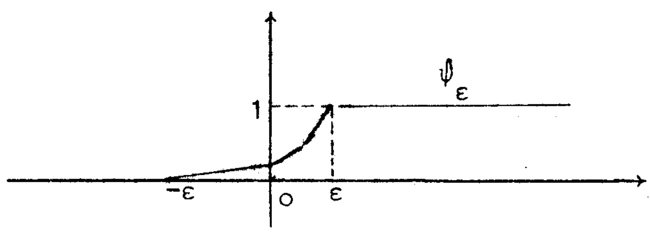
Par troucature, posons pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$.

$$\psi(x,t) = \psi_\varepsilon(\Psi(x)-t) \qquad \varepsilon > 0 \quad (IV.4.2.1.)$$

avec $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et est définie par :

$$\psi_\varepsilon(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \tau \leqslant -\varepsilon \\ 1 & \text{si} \quad \tau \geqslant \varepsilon \; , \end{cases}$$

et ψ_ε croissante



De plus $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\{x : \Psi(x)-t+\varepsilon. \geqslant 0$ et compact dans $\mathbb{R}^n$.

Dans ces conditions, nous avons la proposition .

Proposition IV.2.1.-

Si les hyperplans $\{x : \Psi(x)-t = \text{constante}\}$ sont tels que

$$A_{ij}(x) \frac{\partial\Psi}{\partial x_i}(x) \frac{\partial\Psi}{\partial x_j}(x) \leqslant 1, \quad \text{alors}$$

$$V(x,t) \equiv \left[(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 + \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + u^2\right] \frac{\partial \varphi}{\partial t} - 2(\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \leq 0$$

Preuve.- De (IV.2.1.), on tire :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\varphi'_\varepsilon(\tau) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \varphi'_\varepsilon(\tau) \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}$$

Donc, on a :

$$V(x,t) = - \varphi_\varepsilon(\tau)\left[(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 + \mathbb{A}_{ij}(x) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} (x,t) + \vec{u}^2(x,t)\right.$$

$$\left. + \mathbb{A}_{ij}(x) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} (x,t) \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} (x) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} (x,t)\right]$$

$$- \varphi'_\varepsilon(\tau)\left[(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 \mathbb{A}_{ij}(x) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} (x) \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} (x) + \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} (x,t) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} (x,t) + \vec{u}^2(x,t) +\right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} (x,t)(\mathbb{A}_{ij}(x) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} (x,t) \frac{\partial \Psi}{\partial x_j})\right]$$

$$- \varphi'_\varepsilon(\tau)\left[\mathbb{A}_{ij}(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} (x,t) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} (x) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} (x,t))(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} (x,t) \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} (x,t) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} (x,t)) + \vec{u}^2(x,t)\right] \leq 0.$$

Démonstration du théorème de l'inégalité du domaine de dépendance.

Soit $\vec{u} \in G^D_{loc}(\Omega,H)$ (resp. $\vec{u} \in G^N_{loc}(\Omega,H)$).

Posons :

$$W(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \{(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 + \mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + u^2\} \; \varphi(x,t) \; dx \; dt \; .$$

Par dérivation, on a :

$$W'(\tau) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\tau))^2 + \mathbb{A}_{ij}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}(\tau)\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}(\tau) + \vec{u}^2(\tau)\}\varphi(\tau)dx.$$

W' existe et est une fonction continue de τ, puisque $u \in G^D_{loc}(\Omega,H)$ (resp. $\vec{u} \in G^N_{loc}(\Omega,H)$). Donc si nous posons $Q_\tau = \Omega \times [0,\tau]$, l'identité intégrale (IV.2.2.) par rapport à Q_τ reste vraie et par suite

$$W'(\tau) = W'(0) + \int_{Q_\tau}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - L_0\vec{u})\ \psi\ dx\ dt + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} V(x,t)\ dx\ dt.$$ En posant :

$\psi(x,t) = \varphi_\varepsilon(\Psi(x) - t)$, il vient :

$$W'(\tau) \leq W'(0) + \int_{Q_t}\frac{\partial u}{\partial t}(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L_0 u)\ \varphi\ dx\ dt .$$

Rappelons :

$$L\vec{u} = L_0\vec{u} + A_i\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} + B\vec{u} \quad \text{où} \quad B = \mathbb{A} + I$$

$$\vec{\rho} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - L\vec{u} .$$

Il s'ensuit :

$$\begin{cases} W'(\tau) \leq W'(0) + \int_{Q_\tau}\frac{\partial u}{\partial t}.\vec{\rho}\ \varphi\ dx\ dt + Y(\tau) \\ \text{avec} \quad Y(\tau) = \int_{Q_\tau}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\mathbb{A}_i\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} + B\vec{u})\ \varphi\ dx\ dt . \end{cases}$$

Soit :

$$\left|\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x,t)\mathbb{A}_i(x)\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}(x,t)\right| \leq \lambda \left|\left|\frac{\partial \vec{u}(x,t)}{\partial t}\right|\right|_H \left|\left|\frac{\partial \vec{u}}{x_i}(x,t)\right|\right|_H \leq \frac{\lambda}{2}\left[(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 + (\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i})^2\right]$$

pour chaque $i = 1,\dots,n$; en posant $\lambda = \mathrm{Max}(\sup_{x\in\Omega}\mathbb{A}_i(x), \sup_{x\in\Omega}\mathbb{B}(x))$

$$\left|\left|\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \cdot B\vec{u}\right|\right|_H \leqslant \lambda \left|\left|\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}(x,t)\right|\right|_H \left|\left|\vec{u}(x,t)\right|\right|_H \leqslant \frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2 + \vec{u}^2\right] \quad . \text{ Donc :}$$

$$Y(\tau) \leqslant |Y(\tau)| \leqslant \int_{Q_\tau} \left|\left|\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\left(A_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i} + B\vec{u}\right)\right|\right|_H \psi(x,t)\, dx\, dt$$

$$\leqslant \int_{Q_\tau} \left\{\frac{n}{2}\lambda\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2 + \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\right) + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2 + \frac{\lambda}{2}\vec{u}^2\right\}\psi\, dx\, dt$$

$$\leqslant \int_{Q_\tau} \left\{\frac{(n+1)\lambda}{2}\left(\frac{\partial\vec{u}}{t}\right)^2 + \frac{\lambda}{2m^2}\left(A_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{x_i}\frac{\partial\vec{u}}{x_j}\right) + \frac{\lambda}{2}\vec{u}^2\right\}\psi\, dx\, dt$$

$$\leqslant C\, W(\tau) \quad \text{où} \quad C = \max\left\{(n+1)\lambda, \frac{\lambda}{m^2}, \lambda\right\} .$$

Par suite

$$\begin{cases} W'(\tau) \leqslant C\, W(\tau) + W'(0) + \int_0^\tau J(t)\, dt \\ \text{avec } \quad J(t) = \int_\Omega \frac{\partial\vec{u}(x,t)}{\partial t}\vec{\rho}(x,t)\psi(x,t)\, dx. \end{cases}$$

$$e^{-C\tau}(W'(\tau) - C\, W(\tau)) \leqslant e^{-C\tau}W'(0) + e^{-C\tau}\int_0^\tau J(t)\, dt$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[e^{-C\tau}W(\tau)\right] \leqslant e^{-C\tau}W'(0) + e^{-C\tau}\int_0 J(t)\, dt .$$

Par intégration :

$$\int_0^\tau \frac{d}{d\tau}(e^{-C} W(\alpha)d\alpha \leqslant W'(0)\int_0^\tau e^{-C\alpha}\, d\alpha + \int_0 e^{-c\alpha}d\alpha \int_0^\tau J(t)\, dt$$

$$\left[e^{-C\alpha}W(\alpha)\right]_0^\tau \leqslant W'(0)\left[\frac{e^{-C\alpha}}{-C}\right]_0^\tau + \int_0^\tau\int_0^\tau e^{-C\alpha} J(t)\, d\alpha\, dt.$$

Mais $W'(\tau) \leqslant C\, W(\tau) + W'(0) + \int_0^\tau J(t)\, dt.$ Donc

$$W'(\tau) \leqslant (1 - e^{-C\tau})\ W'(0)\ e^{C\tau} + C\ e^{C\tau}\int_0^\tau \int_0^\tau e^{-C\alpha}\ J(t)\ d\alpha\ dt + W'(0) + \int_0^\tau J(t)\ dt.$$

$$W'(\tau) \quad (e^{C\tau}-1)\ W'(0) + W'(0) + C\ e^{C\tau}\int_0^\tau e^{-C\alpha}\ J_1(\alpha)\ d\alpha + J_1(\tau)$$

$$\text{avec}\quad J_1(\tau) = \int_0^\tau J(t)\ dt\ .$$

Intégrons par parties :

$$W'(\tau) \leqslant e^{C\tau}\ W'(0) + C\ e^{C\tau}\left[\frac{e^{-C\alpha}}{-C}\ J_1(\alpha)\right]_0^\tau + \frac{C\ e^{C\tau}}{C}\int_0^\tau e^{-C\alpha}\ J(\alpha)\ d\alpha + J_1(\tau)\ .$$

$$W'(\tau) \leqslant e^{C\tau}\ W'(0) - e^{C\tau}\ e^{-C\tau}\ J_1(\tau) + e^{C\tau}\int_0^\tau e^{-C\alpha}\ J(\alpha)\ d\alpha$$

$$W'(\tau) \leqslant e^{C\tau}W'(0) + e^{C\tau}\int_0^\tau e^{-Ct}\ J(t)\ dt\ .$$

i.e.

$$\int_\Omega \{(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t})^2 + A_{ij}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u}^2\}_{t=\tau}\varphi(x,\tau)dx \leqslant$$

$$\leqslant e^{C\tau}\Big[\int_\Omega \{(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t})^2 + A_{ij}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u}^2\}_{t=0}\varphi(x,0)dx + 2\int_0^\tau e^{-C\tau}\int_\Omega \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\ .\vec{\rho}(x,t)\varphi(x,t)\ dx\ dt\Big]$$

(IV.2.3.)

Posons $\Psi(x) - t = \dfrac{r + M(T-t) - |x-x_0|}{M}$

Ψ est de classe C^∞ sauf en $x = x_0$. Si, ε est assez petit, alors :

$\varphi_\varepsilon(\Psi(x)-t) \equiv 1$ dans un voisinage de x_0 et pour $t \in [0,T]$. Donc $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{Q})$ et $\{(x,t) : \Psi(x) - t + \varepsilon \geqslant 0\}$ est compact dans $\bar{Q}$. Par dérivation :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{r + M(T-t) - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0,i})^2}}{M}\right) \qquad (x_0 = (x_{0,i})_{i=1,\dots,n})$$

$$= -\frac{1}{M}\,\frac{x_i - x_{0,i}}{|x-x_0|}\ .$$

En posant : $\dfrac{x_i - x_{0,i}}{|x-x_0|} = \xi_i$, il vient $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = |\vec{\xi}|^2 = 1$

$$\text{et} \quad \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} = -\frac{1}{M}\,\xi_i$$

Par suite $\mathbb{A}_{ij}(x)\,\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_i}(x)\,\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_j}(x) = \dfrac{1}{M^2}\,\mathbb{A}(\vec{\xi})\ \xi_i\ \xi_j \leqslant 1$ d'après (III.2.2.).

Rappelons que :

$$\varphi(x,t) = \varphi_\varepsilon(\Psi(x)-t) = \varphi_\varepsilon\left(\frac{r + M(T-t) - |x-x_0|}{M}\right)$$

Soit $\Gamma = C_r(x_0) \cap Q$, alors :

$$\varphi_\varepsilon\left(\frac{r + M(T-t) - |x-x_0|}{M}\right) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ \dfrac{r + M(T-t) - |x-x_0|}{M} \leqslant -\varepsilon \\[2ex] 1 \ \text{ si } \ \dfrac{r + M(T-t) - |x-x_0|}{M} \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

Si $\varepsilon \to 0$, alors :

$$\begin{cases} r + M(T-t) - |x-x_0| \leqslant 0 \implies (x,t) \notin \Gamma \ \text{ et } \ \varphi_\varepsilon = 0 \\ r + M(T-t) - |x-x_0| \geqslant 0 \implies (x,t) \in \Gamma \ \text{ et } \ \varphi_\varepsilon = 1\ . \end{cases}$$

D'où $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon(x,t) = \chi_\Gamma(x,t)$.

χ_Γ désignant la fonction caractéristique de Γ.

En passant à la limite sous signe $\int$ dans (IV.2.3.), il vient :

$$\int_\Omega \{(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 + A_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u}^2\}_{t=\tau} \chi_\Gamma \leq$$

$$\leq e^{C\tau}\left[\int_\Omega \{(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 + A_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u}^2\}_{t=0} \chi_\Gamma + 2\int_Q e^{-Ct} \vec{\rho}(x,t)\chi_\Gamma(x,t) \, dx \, dt\right]$$

D'où :

$$\int_{S_r(x_0) \cap \Omega} \{(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 + A_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u}^2\}_{t=T} dx \leq$$

$$\leq e^{CT}\left[\int_{S_{r+MT}(x_0) \cap \Omega} \{(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 + A_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u}^2\}_{t=0} dx + 2\int_{C_r(x_0) \cap Q} e^{-Ct} \vec{\rho}(x,t) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dx \, dt\right].$$

IV.3- Les inégalités de l'énergie.

Théorème (*IV.3.1.*).- La solution A.E.F. du problème (III.1) satisfait aux inégalités :

$$E_1 : \int_\Omega \{(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 + A_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + u^2\}_{t=\tau} dx$$

$$\leq C_1\left[\int_\Omega \{\vec{g}^2 + A_{ij} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j} + \vec{f}^2\} dx + \int_Q \vec{\rho}^2(x,t) \, dx \, dt\right] \qquad \text{(IV.3.1.)}$$

$$E_2 : \int_\Omega \{(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} + \vec{u}^2\}_{t=\tau} dx \leq$$

$$C_2\left[\int_\Omega \{g^2 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} + \vec{f}^2\} dx + \int_Q \vec{\rho}^2(x,t) \, dx \, dt\right] \qquad \text{(IV.3.2.)}$$

$\forall \tau \in [0,T]$, où C_1 et C_2 sont deux constantes ne dépendant que de T, m et des bornes des coefficients de L.

Preuve.-

Soit $\vec{u} \in G^D (u \in G^N)$ une solution A.E.F. du problème (III.1).

Faisons tendre dans l'inégalité du domaine de dépendance r vers l'infini. Il vient :

$$\int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial t})^2 + A_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{x_i} \frac{\partial \vec{u}}{x_j} + \vec{u}^2\}_{t=\tau} dx$$

$$\leqslant e^{C\tau}\left[\int_\Omega \{\vec{g}^2 + A_{ij} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j} + \vec{f}^2\} dx + 2 \int_Q e^{-Ct} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \vec{\rho} \, dx \, dt\right] \quad \text{(IV.3.3.)}$$

Puisque $\vec{u}$ est un solution A.E.F. les deux membres de l'inégalité (IV.3.3.) sont finis. D'autre part, l'inégalité reste encore vraie pour tout $\tau \in [0,T]$.

Posons :

$$W_1(\tau) = \int_0^\tau \int_\Omega \{(\frac{\partial u}{\partial t})^2 + A_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u}^2\} dx \, dt \ .$$

D'après l'inégalité de Schwarz et puisque $e^{-Ct} \leqslant 1$

$$2 \int_Q e^{-Ct} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \vec{\rho} \, dx \, dt \leqslant 2(\int_Q (\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 dx \, dt)^{\frac{1}{2}} (\int_Q \vec{\rho}^2 dx \, dt)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \int_Q (\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 dx \, dt + \int_Q \vec{\rho}^2 dx \, dt$$

$$\leqslant W_1(T) + \int_Q \vec{\rho}^2(x,t) \, dx \, dt.$$

Donc d'après (III.3.3.)

$$W_1'(\tau) \leqslant e^{Ct}\left[(W_1'(0) + W(\tau) + \int_Q \vec{\rho}^{\,2}(x,t)\ dx\ dt\right] \qquad \tau \in [0,T]$$

$$W_1'(\tau) \leqslant e^{Ct}\left[(W_1'(0) + W(\tau) + \int_0^T I(t)\ dt\right] \quad \text{avec} \quad \tau \in [0,T]$$

$$\text{avec} \quad I(t) = \int_\Omega \vec{\rho}(x,t)dx$$

Il en résulte :

$$W_1'(\tau) - e^{CT}\ W_1(\tau) \leqslant e^{CT}\left[W_1(0) + \int_0 I(t)dt\right]$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[W_1(\tau)\ e^{-\tau\ e^{CT}}\right] = e^{-\tau\ e^{CT}}(W_1'(\tau) - e^{CT}\ W_1(\tau))$$

$$\leqslant e^{-e^{CT\tau}}\ e^{CT}\left[W_1'(0) + \int_0^T I(t)\ dt)\right]$$

Posons : $\alpha_1 = e^{CT}$ et $\alpha_2 = e^{CT}(W_1'(0) + \int_0^T I(t)dt)$.

Il vient : $\quad \dfrac{d}{d\tau}\ (W_1(\tau)e^{-\alpha_1\tau}) \leqslant \alpha_2\ e^{-\alpha_1\tau}$.

Intégrons l'inégalité sur $[0,\tau]$.

$$\left[W_1(t)\ e^{-\alpha_1 t}\right]_0^\tau \leqslant \int_0^\tau \alpha_2 e^{-\alpha_1 t} = \alpha_2\left[\frac{-e^{-\alpha_1 t}}{1}\right]_0^\tau = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\ (1-e^{-\alpha_1\tau})$$

$$W_1(\tau)\ e^{-\alpha_1\tau} \leqslant \frac{1-e^{-\alpha_1\tau}}{\alpha_1}\ \alpha_2$$

Soit encore :

$$\alpha_1\ W_1(\tau) \leqslant \alpha_2(e^{\alpha_1\tau}-1)$$

Par suite

$$W_1'(\tau) \leqslant \alpha_1\ W_1(\tau) + \alpha_2 \leqslant \alpha_2\ e^{\alpha_1\tau} + \alpha_2 - \alpha_2 \leqslant \alpha_2\ e^{\alpha_1 T}$$

i.e.

$$\int_\Omega \{(\frac{\partial u}{\partial t})^2 + A_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u}^2\} \, dx \, dt$$

$$\leqslant e^{\alpha_1 T} e^{CT} \Big[\int_\Omega \{(\frac{\partial u}{\partial t})^2 + A_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u}^2\}_{t=0} + \int_Q \vec{\rho}^2(x,t) \, dx \, dt\Big]$$

$$\int_\Omega \{(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 + A_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \vec{u}^2\}_{t=\tau} \, dx \, dt$$

$$\leqslant e^{(\alpha_1+C)T} \Big[\int_\Omega \{\vec{g}^2 + A_{ij} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j} + \vec{f}^2 \, dx + \int_Q \rho^2(x,t) \, dx \, dt\Big].$$

Puisque $m^2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \leqslant A_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}$ et $A_{ij} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j} \leqslant M^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}$.

On a :

$$\int_\Omega \{(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 + m^2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} + \vec{u}^2\} dx \leqslant \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial t})^2 \, dx + q(\vec{u},\vec{u})$$

$$C_1 \Big[\int_\Omega g^2 + q(\vec{f},\vec{f}) + \int_Q \rho^2(x,t) dx \, dt\Big] \leqslant C_1 \Big[\int_\Omega \{g^2 + M^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} + f^2\} \, dx +$$

$$+ \int_Q \rho^2(x,t) \, dx \, dt\Big] ,$$

avec $C_1 = e^{(e^{CT}+C)T}$.

Posons : $\omega = \min(1,m)$

$\gamma = \mathrm{Max}(1,M)$.

$$\omega^2 \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial t})^2 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} + \vec{u}^2\}_{t=\tau} \leqslant \int_\Omega \{(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})^2 + m^2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} + \vec{u}^2\}_{t=\tau}$$

$$\leqslant C_1\left[\int_\Omega \{g^2 + M^2 \frac{\partial\vec{f}}{\partial x_i}\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_i} + \vec{f}^2\ dx + \int_Q \rho^2(x,t)dx\ dt\right]$$

$$\leqslant \gamma^2\ C_1\left[\int_\Omega \{g^2 + \frac{\partial\vec{f}}{\partial x_i}\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_i} + \vec{f}^2\}dx + \int_Q \rho^2(x,t)dx\ dt\right].$$

D'où

$$\int_\Omega \{(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t})^2 + \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i} + \vec{u}^2\}_{t=\tau} \leqslant (\frac{\Upsilon}{\omega})^2\ C_1\left[\int_\Omega \{g^2 + \frac{\partial\vec{f}}{\partial x_i}\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_i} + \vec{f}^2\}dx + \int_Q \rho^2(x,t)dx\ dt\right].$$

Il suffit alors de poser :

$$C_2 = \left(\frac{\Upsilon}{\omega}\right)^2 C_1$$

et le théorème est démontré.

CHAPITRE V

THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE

Nous consacrons ce chapitre à l'établissement de l'existence et de l'unicité de solution du problème mixte (III.1) associé à L.

V.1.- *Unicité de la solution.*

V.1.1.- *Théorème* V.1.1. (d'unicité).

Pour établir l'unicité d'une solution de (III.1), il suffit de montrer que par rapport aux données : $(\vec{\rho},\vec{f},\vec{g}) = (0,0,0)$ p.p. dans Q dans Ω, alors $\vec{u} = 0$ p.p. dans Q.

Pusieurs assertions nous conduiront à ce résultat.

Proposition V.1.1.-

1 - Si $\vec{u}$ est une solution stricte A.E.L.F. par rapport à $\vec{\rho} = 0$, $\vec{f} = 0 = \vec{g}$, alors $\vec{u} = 0$ p.p. dans Q.

2 - Si $\vec{u}$ est une solution A.E.L.F. par rapport à $\vec{\rho} = 0$, $\vec{f} = 0 = \vec{g}$, alors $\vec{u} = 0$ p.p. dans Q.

Preuve.-

Si $\vec{u}$ est une solution stricte A.E.L.F. par rapport à $(0,0,0)$, elle vérifie l'inégalité du domaine de dépendance :

$$\int_{S_r(x_0)\cap\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2 + A_{ij} \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_j} + u^2 \right\}_{t=T} dx \leqslant 0 .$$

Donc

$$\int_{S_r(x_0)\cap\Omega}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2 dx + q(\vec{u},\vec{u}) = 0. \quad \text{D'où} \quad \vec{u} = 0. \text{ p.p.}$$

Avant de montrer la deuxième partie de la proposition, établissons le

Lemme V.1.1.-

Soit $\vec{u}$ une solution A.E.L.F de (III.1) avec la condition (III.1.3) de Dirichlet (resp. de Neumann) par rapport aux données $(\vec{\rho}.\vec{f}.\vec{g})$.

Posons :

$$\begin{cases} \vec{u}_1(x,t) = \displaystyle\int_0^t \vec{u}(x,\tau)\, d\tau & . \\ \vec{\rho}_1(x,t) = \displaystyle\int_0^t \vec{\rho}(x,\tau)\, d\tau & \text{(V.1.0).} \end{cases}$$

Alors $\vec{u}_1$ est une solution stricte A.E.L.F. de (III.1) avec la même condition aux bornes par rapport aux données $(\vec{\rho}_1+\vec{g}_1\ 0,\vec{f})$

Preuve.-

Soit $\tau \in [0,T]$ et $\vec{\psi} \in H^{2,D}(\Omega,H)$ (resp. $\vec{\psi} \in H_0^{2,1}(\Omega,H)$) et $\vec{\varphi}$ la fonction définie par :

$$\vec{\varphi} : (x,t) \mapsto \varphi(x,t) = \begin{cases} (\tau-t)\vec{\psi}(x) & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 \quad , & \tau \leq t \leq T \end{cases}$$

on a : $\vec{\varphi} \in F_0^D$ (resp. $\vec{\varphi} \in F_0$) et $\vec{\varphi}(T) = 0$ et d'après la définition (III.3.1), il vient :

$$\int_0^\tau\int_\Omega \{-\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\vec{\psi}(x) - (\tau-t)(\mathbb{A}_{ij}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}.\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial x_j} - \mathbb{A}_i\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\vec{\psi}(x) -$$

$$- \mathbb{A}\,\vec{u}\,\vec{\psi} - \vec{\rho}\,\psi(x))\}\, dx\, dt + \tau\int_\Omega \vec{g}(x)\,\psi(x)\, dx = 0.$$

pour presque tout $\tau \in [0,T]$.

En différentiant par rapport à τ, on a :

$$- \int_\Omega \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \cdot \vec{\psi}(x)\, dx - \int_0^\tau \int_\Omega \{\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} - \mathbb{A}_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}(x,t)\, \vec{\psi}(x) - \mathbb{A}\, \vec{u}\, \psi\} dx\, dt -$$

$$- \int_0^\tau \int_\Omega \vec{\rho}(x,t)\, \vec{\psi}(x)\, dx\, dt + \int_\Omega \vec{g}\, \vec{\psi}\, dx = 0 \qquad (V.1.1).$$

De $\vec{u}_1(t) = \int_0^t \vec{u}(x,\tau)\, d\tau$, il résulte :

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial \tau^2}(x,\tau) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}(x,\tau) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x,\tau) = \int_0^\tau \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}(x,t)\, dt$$

Par conséquent, d'après le théorème de Fubini (V.1.1) s'écrit encore :

$$- \int_\Omega \frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial \tau^2}\, \vec{\psi}\, dx - \int_\Omega \int_0^\tau (\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} - \mathbb{A}_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}\, \vec{\psi} - \mathbb{A}\, \vec{u}\, \psi - \vec{\rho}\psi)\, dx\, dt$$

$$+ \int_\Omega \vec{g}\, \vec{\psi}\, dx = 0$$

i.e.

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial \tau^2}\, \vec{\psi}\, dx - \int_\Omega \vec{g}\, \vec{\psi}\, dx + \int_\Omega \{\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} \int_0^\tau \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}(x,t) dt - \mathbb{A}_i\, \vec{\psi} \int_0^\tau \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}(x,t) dt\} dx$$

$$- \int_\Omega \mathbb{A}\, \vec{\psi} (\int_0^\tau \vec{u}(x,t) dt) dx - \int_\Omega \vec{\psi} (\int_0^\tau \vec{\rho}(x,t) dt)\, dx = 0$$

D'où

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial \tau^2}\, \vec{\psi}\, dx - \int_\Omega \vec{g}\, \vec{\psi}\, dx + \int_\Omega \{\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial x_i} - \mathbb{A}_i \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial x_i}\, \vec{\psi}\}\, dx +$$

$$+ \int_\Omega \{-\mathbb{A}\, \vec{u}_1\, \vec{\psi} - \vec{\rho}_1(x,\tau) \vec{\psi}\}\, dx = 0$$

i.e.

$$\int_\Omega \{\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + (\frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial \tau^2} - \mathbb{A}_i \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial x_i} - \mathbb{A} \vec{u}_1 - \vec{\rho}_1 - \vec{g}) \vec{\psi}\}\, dx = 0 \qquad (V.1.2)$$

Cette égalité est vraie pour presque tout $\tau \in [0,T]$. Soit E la partie négligeable de $[0,T]$ sur laquelle elle n'est pas vraie. E peut dépendre de $\vec{\psi}$ en ce sens que pour tout $\tau \in [0,T] - E$ (V.1.2) est vérifiée $\forall \vec{\psi} \in H_0^{2,D}(\Omega,H)$ (resp. $\vec{\psi} \in H_0^{2,1}(\Omega,H)$).

En effet, soit K une partie compacte fixée de $\mathbb{R}^n$.

Alors $H^{2,D}(\Omega \cap K,H)$ (resp. $H^{2,1}(\Omega \cap K,H)$) est un espace de Hilbert séparable.

Si $(\vec{\psi}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite partout dense de $H^{2,D}(K \cap \Omega,H)$ (resp. $H^{2,1}(\Omega \cap K,H)$), alors (V.1.2) est vrai pour $\psi = \psi_k$ et pour tout $\tau \in [0,T] - E_k$ où E_k est un ensemble négligeable. Par suite (V.1.2) est vrai pour chaque élément de la suite $(\vec{\psi}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et pour tout $\tau \in [0,T] - (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)$. Posons $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E_K$ qui dépend du compact K.

Soit $(\vec{\psi}'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(\vec{\psi}_k)_{k=1,\dots n}$ convergeant vers $\vec{\psi}$ dans $H^{2,D}(\Omega \cap K,H)$ (resp. $H^{2,1}(\Omega \cap K,H)$). L'égalité (V.1.2) reste vraie pour ψ'_k et pour $\tau \in [0,T] - E_K$. En passant à la limite (V.1.2) reste vérifiée pour $\vec{\psi} \in H^{2,D}(\Omega \cap K,H)$ (resp. $\vec{\psi} \in H^{2,1}(\Omega \cap K,H)$ et $t \in [0,T] - E_K$.

Soit alors $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts de $\mathbb{R}^n$ tels que $\bigcup_{p=1}^{\infty} K_p = \mathbb{R}^n$. Pour toute fonction $\vec{\psi} \in H^{2,D}(K_p \cap \Omega,H)$ (resp. $\vec{\psi} \in H^{2,1}(K_p \cap \Omega,H)$) et pour tout $\tau \in [0,T] - E_{K_p}$ $(p=1,\dots)$, (V.1.2) reste encore vraie.

Donc pour toute fonction $\vec{\psi}$ de :

$$\bigcup_{p=1}^{\infty} H^{2,D}(K_p \cap \Omega,H) = H_0^{2,D}(\Omega,H) \text{ (resp. } \bigcup_{p=1}^{\infty} H^{2,1}(K_p \cap \Omega,H) = H_0^{2,1}(\Omega,H))$$

et pour tout $\tau \in [0,T] - E$ où $E = \bigcup_{p=1}^{\infty} E_{K_p}$ est un ensemble de mesure nulle, (V.1.2) est vraie.

Par conséquent pour tout $\tau \in [0,T] - E$, $u_1(\tau)$ est une solution A.E.L.F de (III. 2.3) (resp. III. 2.4) de source

$$\tilde{\rho}(\tau) = \frac{\partial^2 \vec{u}_1(\tau)}{\partial \tau^2} - \mathbb{A}_i \frac{\partial \vec{u}_1(\tau)}{\partial x_i} - (\mathbb{A}+I)\, \vec{u}_1(\tau) - \vec{\rho}_1(\tau) - \vec{g}$$

Donc, d'après, le théorème (III.3.1), $\vec{u}_1(\tau)$ est donc solution stricte A.E.L.F et par suite $\vec{u}_1(\tau) \in H^{2D}_{loc}(\Omega,H)$. (resp. $\vec{u}_1(\tau) \in H^{2,N}_{loc}(\Omega,H)$).

En conséquence

$$L_0\vec{u}_1(\tau) \text{ existe et est égale à } \tilde{\rho}(\tau) \qquad \forall\tau \in [0,T] - E$$

Puisque $\vec{u} \in F^D_{loc}$ (resp. $\vec{u} \in F_{loc}$), on a : $\tilde{\rho}(\tau) \in L^2(K \cap \Omega, H)$ pour toute partie mesurable bornée K de $\mathbb{R}^n$. Donc

$$\vec{u}_1(\tau) \in G(K \cap \Omega) \ , \qquad \forall\tau \in [0,T] - E$$

D'autre part : $L_0\vec{u}_1(\tau) = \vec{\rho}(\tau)$ est logiquement équivalent à

$$\frac{\partial^2\vec{u}(\tau)}{\partial\tau^2} = L\,\vec{u}_1(\tau) + \vec{\rho}_1(\tau) + \vec{g} \qquad \tau \in [0,T] - E$$

De plus

$$\vec{u}_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\vec{u}_1}{\partial\tau}(0) = \vec{u}(0) = \vec{f}$$

d'après les conditions (V.1.0).

Par ailleurs, $\vec{u}_1(\tau) \in H^{2,D}_{loc}(\Omega,H)$, donc

$$\int_\Omega \{\frac{\partial\vec{u}_1(\tau)}{\partial x_i} \cdot \vec{V}_i + \vec{u}_1(\tau) \sum_{i=1}^n \frac{\partial\vec{V}_i}{\partial x_i}\}\, dx = 0 \qquad \forall\, \vec{V}_i \in H^{2,1}_0(\Omega,H) \quad (i=1\ldots n)$$

De $\vec{u}_1(\tau) \in H^{2,N}_{loc}(\Omega,H)$, donc vérifie la forme intégrale de la condition de Neumann pour tout $\tau \in [0,T] - E$. Donc $\vec{u}_1 \in G^D_{loc}$ (resp. $\vec{u}_1 \in G^N_{loc}$) et le lemme (V.1.1) est établi. La deuxième partie de la proposition (V.1.1) en découle immédiatement puisque $(\vec{\rho},\vec{f},\vec{g}) = (0,0,0)$ entraîne $(\vec{\rho}_1+\vec{g},0,\vec{f}) = (0,0,0)$ et donc $\vec{u}_1 = 0$ d'après la première partie.

Corollaire V.1.1.-

Si $\vec{u}$ est une solution A.E.F., alors $\vec{u}_1$ définie par (V.1.0) est solution stricte A.E.F.

La démonstration est identique à celle du lemme (V.1.1), il suffit d'omettre les restrictions de "locale intégrabilité" et de "support borné".

L'unicité de la solution est ainsi établie.

V.2.- *Théorèmes d'existence de la solution de (III.1).-*

Nous avons montré que (preuve du théorème (III.3.2)) les espaces $\mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H)$ et $\mathcal{H}^{2,I}(\Omega,H)$ muni de la norme associée à la forme q sont hilbertiens. Désignons ces espaces respectivement par H^D et H^N et posons :

$$\begin{cases} W^D = L^2(Q) \times H^D \times L^2(\Omega) \\ W^N = L^2(Q) \times H^N \times L^2(\Omega) \end{cases}$$

Considérons les opérateurs différentiels :

1) ∂_D défini sur G^D et à valeurs dans W^D par :

$$\vec{\psi} \mapsto \partial_D(\vec{\psi}) = (\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} - L\,\vec{\psi}\ ,\ \vec{\psi}(0)\ ,\ \frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t}(0))$$

et tel que $\mathrm{Dom}(\partial_D) = G^N$ ($\mathrm{Dom}(\partial_D)$ = domaine de définition de ∂_D).

2) ∂_N défini sur G^N et à valeurs dans W^N par :

$$\vec{\psi} \mapsto \partial_N(\vec{\psi}) = (\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} - L\,\vec{\psi}\ ,\ \vec{\psi}(0)\ ,\ \frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t}(0)$$

On a alors la

Proposition V.2.0.-

$\overline{Im(\partial_D)} = W^D$ (resp. $\overline{Im(\partial_N)} = W^N$) où la fermeture est prise au sens de la norme produit de W^D (resp. W^N).

Preuve.-

Montrons que si $(\vec{\rho},\vec{f},\vec{g})$ est orthogonal à $Im(\partial_D)$ dans W^D (resp. $Im(\partial_N)$ dans W^N) alors $(\vec{\rho},\vec{f},\vec{g}) = (0,0,0)$.

Soit donc :

$$\int_Q \vec{\rho}\left(\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} - L\,\vec{\psi}\right) dx\,dt + \int_\Omega \{\mathbb{A}_{ij}\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\frac{\partial\vec{\psi}(0)}{\partial x_j} + \vec{f}\,\vec{\psi}(0)\}\,dx + \int_\Omega \vec{g}\,\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t}(0) = 0$$

$\forall\vec{\psi}\ \varepsilon\ G^D$ (resp. $\vec{\psi}\ \varepsilon\ G^N$). (V.2.0).

Si $\vec{\psi}(0) = \frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t}(0) = 0$, alors (V.2.0) implique

$$\int_Q \vec{\rho}\left(\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} - L\,\vec{\psi}\right) dx\,dt = 0 \qquad \forall\vec{\psi}\ \varepsilon\ G^D \qquad (\text{resp. } \varepsilon\ G^N) \qquad (V.2.1)$$

Posons

$$\vec{\psi}(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ \frac{1}{2}(t-\tau)^2\vec{\psi}(x) & \tau \leq t \leq T \end{cases}$$

où $\vec{\psi}\ \varepsilon\ H^{2,D}(L_0;\Omega,H)$ (resp. $\vec{\psi}\ \varepsilon\ H^{2,N}(L_0;\Omega,H)$.

Alors (V.2.1) s'écrit :

$$\int_\tau^T\int_\Omega \vec{\rho}(x,t)\ \left[\vec{\psi}(x) - \frac{1}{2}(t-\tau)^2\ L\,\vec{\psi}\right] dx\,dt = 0.$$

En différentiant par rapport à τ, il vient :

$$-\int_\Omega \vec{\rho}(x,\tau)\ \psi(x)\ dx + \int_\tau^T\int_\Omega (t-\tau)\ \vec{\rho}(x,t)\ L\,\vec{\psi}(x)\ dx\,dt = 0$$

i.e.

$$\int_\Omega \vec{\rho}(x,\tau)\ \vec{\psi}(x)\ dx - \int_\tau^T\int_\Omega (t-\tau)\ \vec{\rho}(x,t)\ L\,\vec{\psi}\ dx\,dt = 0 \qquad (V.2.2)$$

Pour presque tout $\tau\ \varepsilon\ [0,T]$ et pour toute fonction $\psi\ \varepsilon\ H^{2,D}(L_0;\Omega,H)$ (resp. $\vec{\psi}\ \varepsilon\ H^{2,N}(L_0;\Omega,H)$.

Même si éventuellement l'ensemble négligeable sur lequel l'identité n'est pas vraie dépendait de $\vec{\psi}$, on peut toujours se ramener au cas général par une construction analogue à celle faite dans le lemme (V.1.1).

Puisque $\vec{\rho} \in L^2(Q) = L^2(I,L^2(\Omega,H))$.

On peut poser :

$$\begin{cases} \vec{\rho}_1(\tau) = \displaystyle\int_\tau^T \vec{\rho}(x,t)\, dt. \\ \vec{\rho}_2 = \displaystyle\int_\tau^T \vec{\rho}_1(t)\, dt = \int_\tau^T (t-\tau)\, \vec{\rho}(x,t)\, dt \end{cases}$$

Par suite :

$$\vec{\rho}_1 \in H^{2,1}(I,L^2(\Omega,H))$$

et

$$\vec{\rho}_2 \in H^{2,2}(I,L^2(\Omega,H)).$$

(V.2.2) s'écrit encore alors :

Pour $\tau_0 \in [0,T] - N_\rho$, $\vec{\rho}(\tau_0) \in L^2(\Omega,H)$ où N_ρ est négligeable.

Soit $\vec{\xi}(\tau_0)$ la solution stricte A.E.F. du problème de Cauchy associé à L_0 avec les conditions de Dirichlet (resp. Neumann) de source $\vec{\rho}(\tau_0)$. On a

$$\vec{\xi}(\tau_0) \in H^{2,D}(L_0;\Omega,H) \qquad (\text{resp. } \vec{\xi}(\tau_0) \in H^{2,N}(L_0;\Omega,H))$$

et $L_0(\vec{\xi}(\tau_0)) = \vec{\rho}(\tau_0)$. Pour $\tau \in [0,T] - N_\rho$,on sait que $\vec{\xi}(\tau_0)$ existe et

$$q(\vec{\xi}(\tau_0),\vec{\psi}) = -\, (\vec{\rho}(\tau_0),\vec{\psi})_{L^2(\Omega,H)}. \qquad \forall\vec{\psi} \in H^D$$

(resp. $\vec{\psi} \in H^N$). Il s'ensuit

$$\vec{\xi} \in L^2(I,H^{2,D}(L_0;\Omega,H) \qquad (\text{resp. } \vec{\xi} \in L^2(I,H^{2,N}(L_0;\Omega,H))$$

De plus si

$$\vec{\psi}(\tau_0) = -\int_{\tau_0}^T \vec{\xi}(\tau)\, d\tau \quad , \text{ alors } \vec{\psi} \in H^{2,1}(I,H^{2,D}(L_0;\Omega,H)).$$

resp ($\vec{\psi} \in H^{2,1}(I,H^{2,N}(L_0;\Omega,H))$ et $\vec{\psi}(\tau_0)$ est la solution stricte A.E.F de

(III.2.3) (resp. de (III.2.4)).

Posons $\vec{\psi}(\tau_0) = \vec{\psi}$. Il vient

$$(\rho_2(\tau),\ L\ \psi(\tau_0))_{L^2(\Omega,H)} = (\vec{\rho}(\tau),\ \vec{\psi}(\tau_0))_{L^2(\Omega,H)}$$

$$= q(\vec{\xi}(\tau),\ \psi(\tau_0)) \text{ p.p. dans } [0,T]$$

En particulier :

$$< \rho_2(\tau),\ L\ \vec{\psi}(\tau) >_{L^2} + q(\vec{\xi}(\tau),\ \vec{\psi}(\tau)) = 0$$

pour $\tau \in [0,T] - (E \cup N_\rho)$.

Or $L\ \vec{\psi}(\tau) = L_0\ \vec{\psi}(\tau) + A_i \dfrac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} + (A+I)\ \vec{\psi}(\tau)$ et $\rho_1 = \dfrac{\partial}{\partial \tau} \rho_2$; $\xi = \dfrac{\partial \vec{\psi}}{\partial \tau}$.

Donc

$$(\vec{\rho}_2(\tau),\ \frac{\partial \vec{\rho}_2(\tau)}{\partial \tau})_{L^2(\Omega)} + q(\vec{\psi}(\tau),\ \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \tau}(\tau)) = (\vec{\rho}_2(\tau),\ A_i \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} + B\ \vec{\psi}(\tau))_{L^2(\Omega)}$$

pour presque tout $\tau \in [0,T]$ avec $B = A+I$.

Posons :

$$H(\tau) = ||\vec{\rho}_2(\tau)||^2_{L^2(\Omega)} + q(\vec{\psi}(\xi),\vec{\psi}(\tau))$$

Alors

$$H'(\tau) = 2(\vec{\rho}_2(\tau),\ A_i \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \tau}(\tau) + B\ \vec{\psi}(\tau))_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant 2||\rho_2(\tau)||_{L^2(\Omega)} ||A_i \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} + B\ \vec{\psi}(\tau)||_{L^2} \quad \text{p.p. dans } [0,T]$$

$$||A_i \frac{\partial \vec{\psi}(\tau)}{\partial x_i} + B\ \vec{\psi}(\tau)||_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (A_i \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} + B\ \vec{\psi}(\tau))^2 dx$$

$$\leqslant \int_\Omega (\sum_{i=1}^n |A_i|^2 + |B|^2)(\sum_{i=1}^n (\frac{\partial \vec{\psi}(\tau)}{\partial x_i})^2 + \vec{\psi}^2(\tau))\ dx$$

$$\leq M \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{\psi}(\tau)}{\partial x_i} + \vec{\psi}^2(\tau)\Big)\, dx$$

$$\leq \frac{M}{m^2} \int_\Omega A_{ij} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j}\, dx + M \int_\Omega \vec{\psi}^2\, dx.$$

$$\leq M \int_\Omega \Big(A_{ij} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + \vec{\psi}^2\Big)\, dx = M_1\, q(\vec{\psi}(\tau),\vec{\psi}(\tau)).$$

avec $M_1 = \max(\frac{M}{m^2}, M)$.

D'où

$$H'(\tau) \leq 2\sqrt{M_1}\, ||\vec{\rho}_2(\tau)||_{L^2}\, q(\vec{\psi}(\tau),\vec{\psi}(\tau))^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sqrt{M_1}(||\vec{\rho}_2(\tau)||^2_{L^2\Omega} + \{\vec{\psi}(\tau),\vec{\psi}(\tau)\}) = \sqrt{M_1}\, H(\tau) \quad \text{p.p. sur} \quad [0,T]$$

D'où

$$\frac{H'(\tau)}{H(\tau)} \leq \sqrt{M_1}$$

$$\text{Log } H(t) \leq \sqrt{M_1}\, t$$

$1 \leq e^{\sqrt{M_1}\, t} H(t)$.

$$[1]_\tau^T \leq e[e^{\sqrt{M_1 t}} H(t)]_\tau^T = -\, e^{\sqrt{M_1 \tau}} H(\tau)$$

puisque $H(T) = 0$.

Donc $0 \leq -\, e^{\sqrt{M_1}\,\tau} H(\tau)$. D'où $H(\tau) = 0$.

Par suite $\vec{\rho}_2(\tau) = 0$ sur $[0,T]$ et par conséquent $\rho_2'(\tau) = \vec{\rho}_1(\tau) = 0$ sur $[0,T]$ et $\vec{\rho} = 0$ p.p. sur $[0,T]$.

Si $\vec{\rho} = 0$, il vient

$$\int_\Omega \{A_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_j} + \vec{f}\, \vec{\Phi}(0)\}\, dx + \int \vec{g}\, \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t}\, (0)\, dx = 0.$$

Posons : $\vec{\Phi}(x,t) = \vec{\psi}(x)$, $0 \leq t \leq T$, $\vec{\psi} \in H^{2,D}(L_0;\Omega,H)$ (resp. $\vec{\psi} \in H^{2,N}(L_0,\Omega,H)$

On a alors

$$\int_\Omega (\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + \vec{f}\,\vec{\psi})\,dx = 0.$$

Si $\vec{\psi}$ est solution stricte A.E.F de (III.2.3) (resp. III.2.4) de source $\vec{f}$.

Alors :

$$\int_\Omega (\mathbb{A}_{ij} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_j} + \vec{\psi}\,\vec{\varphi})dx = - \int_\Omega \vec{f}\,\vec{\varphi} \qquad \forall \vec{\varphi} \in H^D \qquad (\text{resp.} \quad \vec{\varphi} \in H^N)$$

En faisant $\vec{\varphi} = \vec{f}$, on a :

$$\int_\Omega f^2 dx = 0. \qquad \text{D'où } \vec{f} = 0.$$

Posons $\vec{\rho} = \vec{f} = 0$ et $\vec{\varphi}(x,t) = t\,\vec{\psi}(x)$ $\quad 0 \leqslant t \leqslant T$ avec $\vec{\psi} \in \mathcal{H}^{2,D}(L_0;\Omega,H)$ (resp. $\mathcal{H}^{2,N}(L_0;\Omega,H)$

$$\int_\Omega g\,\psi = 0 = \langle \vec{g}\,\vec{\psi} \rangle_{L^2(\Omega,H)} \qquad \text{D'où } \vec{g} = 0.$$

<u>*Proposition*</u> *V.2.1.-*

Le théorème d'existence équivaut alors :

Le problème aux limites associé à L avec les conditions de Dirichlet (resp. de Neumann) admet une solution A.E.F pour tout triplet $(\vec{\rho},\vec{f},\vec{g}) \in W_D$ (resp. W_N).

<u>*Preuve*</u>.-

En effet pour chaque triplet $(\vec{\rho},\vec{f},\vec{g})$ de W_D (resp. W_N) il existe une suite (u_k) de solutions strictes A.E.F i.e. $\vec{u}_k \in G^D$ (resp. $\vec{u}_k \in G^N$) telle que

$$\vec{\rho}_k = \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} - L\,\vec{u}_k \to \vec{\rho} \quad \text{dans} \quad L^2(Q)$$

$$\vec{f}_k = \vec{u}_k(x,0) \to \vec{f} \quad \text{dans} \quad H^D = \mathcal{H}^{2,D}(\Omega,H)(\quad (\text{resp.} \quad \mathcal{H}^{2,1}(\Omega,H)$$

$$g_k = \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t}(x,0) \to \vec{g} \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) .$$

En appliquant l'inégalité de l'énergie à $\vec{u}_k - \vec{u}_\rho$, on voit que : $(\vec{u}_k(t))$ est une suite de Cauchy dans $H^{2,D}(\Omega,H)$ $(H^{2,1}(\Omega,H)$ et $\frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t}(t)$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ uniformément par rapport à $t \in [0,T]$. Comme $H^{2,D}(\Omega,H)$, $H^{2,1}(\Omega,H)$ et $L^2(\Omega)$ sont complets, les suites sont convergentes et

$$\lim_{\infty} \vec{u}_k(t) = \vec{u}(t) \quad \text{existe dans} \quad H^{2,D}(\Omega,H) \quad (H^{2,1}(\Omega,H))$$

$$\lim_{\infty} \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t}(t) = \vec{v}(t) \quad \text{existe dans} \quad L^2(\Omega).$$

uniformément sur $[0,T]$.

Montrons que $\vec{u}(t)$ est une solution A.E.F caractérisée par $(\vec{\rho},\vec{f},\vec{g})$.

Remarquons que $\vec{u} \in C([0,T], E^D(\Omega))$ (resp. $\vec{u} \in C([0,T], H^{2,1}(\Omega))$ $\vec{v} \in C([0,T], L^2(\Omega))$ puisque $\vec{u}_k$ et $\vec{v}_k$ sont continues et la convergence est uniforme. De plus

$$\vec{u}(t) = \int_0^t \vec{v}(\tau)d\tau \qquad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \qquad \forall t \in [0,T]$$

En particulier $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{v}$ et $\vec{u}(0) = \vec{f}$.

D'où

$$\vec{u} \in L^2([0,T], H^{2,D}(\Omega)) \cap H^{2,1}(I,L^2(\Omega)) = F_D(\vec{u} \in F)$$

Par ailleurs $\vec{u}_k$ étant solution stricte A.E.F, on a

$$(*) \quad \int_Q (\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - A_{ij} \cdot \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + A_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \vec{\psi} + A\, \vec{u}_k\, \vec{\psi} + \rho_k \psi)\, dx\, dt$$

$$+ \int_\Omega \vec{g}_k(x)\vec{\psi}(x,0)\, dx = 0 \qquad \forall \vec{\psi} \in F_D \ (\vec{\psi} \in F).$$

De plus
$$\frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} \to \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \vec{u}_k}{\partial x_i} \to \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}$$
$$\vec{u}_k \to \vec{u} \qquad \text{dans} \quad L^2(Q)$$

Donc par passage à la limite, * donne l'identité cherchée.

Conséquence.-

Par passage à la limite, on montre aisément que les solutions A.E.F. vérifie l'inégalité du domaine de dépendance et les inégalités de l'énergie.

V.3.1. - *Existence de solution A.E.L.F.-*

Proposition V.3.1.-

Pour tout triplet $(\vec{\rho},\vec{f},\vec{g})$ de $L^2_{loc}(Q) \times H^{2,D}_{loc}(\Omega) \times L^2_{loc}(\Omega)$ (ou $L^2_{loc}(Q) \times H^{2,1}_{loc}(\Omega) \times L^2_{loc}(\Omega)$), il existe une solution A.E.L.F. du problème (III.1.).

Preuve.-

Soit (χ_p) une partition C^∞ de l'unité définie sur $\mathbb{R}^n$. Notons K_p le support de $\chi_p (K_p)$ est une suite de compacts de $\mathbb{R}^n$ qu'on prendra pour des sphères concentriques ou des cubes.

Posons :

$$\vec{\rho}_k = \rho\ X_k \ ;\ f_k = f\ X_k \ ;\ g_k = g\ X_k$$

Il s'ensuit alors que :

$$(\vec{\rho}_k,\vec{f}_k,\vec{g}_k) \in L^2_{loc}(Q) \times H^{2,D}(\Omega,H) \times L^2_{loc}(\Omega)$$

$$(\text{resp.} \ \in L^2_{loc}(Q) \times H^{2,1}_{loc}(\Omega) \times L^2_{loc}(\Omega))$$

Soit $\vec{u}_k$ la solution A.E.F. correspondant à $(\vec{\rho}_k,\vec{f}_k,\vec{g}_k)$. Puisque $\vec{\rho}_k = 0$ sur le complémentaire ${}^C(K_k \times I)$ de $(K_k \times I)$ $\vec{f}_k = \vec{g}_k = 0$ sur le complémentaire ${}^C K_k$, d'après l'inagalité du domaine de dépendance

$$\vec{u}_k(x,t) = 0 \quad \text{hors de} \quad K'_k \times I$$

avec

$$K' = \bigcup_{x_0 \in K_k} S_{MT(x_0)} \ .$$

De plus, on peut supposer que $x \in \mathbb{R}^n$ appartient à un nombre fini de compacts K'_k. Donc la série

$$\vec{u}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{u}_k(x,t)$$

qui ne compte qu'un nombre fini de termes non nuls pour tout couple $(x,t) \in Q$ définit une fonction $\vec{u} \in F_0^D$ $(\vec{u} \in F_0)$ puisque $\vec{u}_k \in F^D$ $(\vec{u}_k \in F)$.

La fonction $\vec{u}$ est la solution A.E.L.F caractérisée par $(\vec{\rho},\vec{f},\vec{g})$.

En effet : $\vec{u}(0) = \vec{f}'$ puisque $\vec{u}_k(0) = f_k$ et

$$\int_Q \{\frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - A_{ij} \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + A_i \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial x_i} \vec{\psi} + A \vec{u} \vec{\psi} + \vec{\rho}_k \vec{\psi}\} \, dx$$

$$+ \int_\Omega \vec{g}_k(x) \, \vec{\psi}(x,0) \, dx = 0$$

implique

$$\int_Q \{(\sum_k \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t}) \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - A_{ij}(\sum_{k=1}^{P} \frac{\partial \vec{u}_n}{\partial x_i}) \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + A_i(\sum \frac{\partial \vec{u}_n}{\partial x_i})\vec{\psi} + A(\sum_k \vec{u}_n)\vec{\psi}$$

$$+ \int_Q (\textstyle\sum_k \rho_k \vec{\psi}) \, dx \, dt + \int_\Omega (\sum \vec{g}_k) \, \vec{\psi}(x,0) \, dx = 0$$

pour tout $\vec{\psi} \in F_0^D$ $(\psi \in F_0)$.

En conséquence

$$\int_Q \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - A_{ij} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_j} + A_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \vec{\psi} + A \vec{u} \vec{\psi} + \vec{\rho} \, \vec{\psi} + \int_\Omega \vec{g} \, \vec{\psi} = 0$$

Sur $C_r(x_0) \cap Q$, seul un nombre fini de solutions u_k sont non nulles. Donc comme $\vec{u}$ est une solution A.E.F $\vec{u}$ coïncide avec une solution A.E.F sur $C_r(x_0) \cap Q$.

Corollaire V.3.1.-

De cette démonstration on déduit celle du corollaire puisque $\vec{u}_k$ est une solution A.E.F et seul un nombre fini des $\vec{u}_k$ sont non nulles sur $K \cap \Omega$.

V.4.1.- Existence de solution stricte.-

Soit $\tilde{\vec{u}}(t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \Longleftrightarrow \vec{u}(t) = \vec{u}_1(t) = \int_0^t \tilde{\vec{u}}(t)\, d\tau$.

Si $\vec{u}$ est une solution au problème (I) par rapport à $(\vec{\rho},\vec{f},\vec{g})$, alors $\tilde{\vec{u}}$ est solution par rapport à $\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}$, $\vec{g}$, $L\vec{f} + \vec{\rho}(0))$.

L'existence d'une solution stricte A.E.L.F se déduit de la construction de $\tilde{\vec{u}}$ comme solution A.E.L.F par rapport à $(\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}, \vec{g}, L\vec{f} + \vec{\rho}(0))$.

Il suffit alors d'identifier $\vec{u}$ avec $f + \tilde{u}_1$ et d'utiliser la proposition 5.2.

D'après les hypothèses sur $(\vec{\rho},\vec{f},\vec{g})$, on a :

$$\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t} \in L^2_{loc}(Q) \ , \ \vec{g} \in H_0^{2,D}(\Omega,H) \ (g \in H_0^{2,1}(\Omega,H)$$

$$L\vec{f} \in L^2_{loc}(\Omega) \quad \text{et} \quad \vec{\rho}(0) \in L^2_{loc}(\Omega)$$

Soit $\tilde{\vec{u}}$ la solution A.E.L.F caractérisée par

$$(\tilde{\vec{\rho}},\tilde{\vec{f}},\tilde{\vec{g}}) = (\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}, \vec{g}, L\vec{f} + \vec{\rho}(0))$$

qui existe.

Alors $\tilde{\vec{u}}_1$ est une solution stricte A.E.L.F avec la source

$$\tilde{\vec{\rho}}_1(x,t) + \tilde{\vec{g}}(x) = \vec{\rho}(x,t) - \vec{\rho}(x,0) + L\vec{f}(x) + \vec{\rho}(x,0).$$

et avec les valeurs initiales :

$$\tilde{\vec{u}}_1(x,0) = 0 \ , \ \frac{\partial \tilde{\vec{u}}_1(x,0)}{\partial t} = \tilde{\vec{f}} = \vec{g}$$

Donc $\vec{u}(x,t) = \vec{f}(x) + \tilde{u}_1(x,t)$ est une solution stricte A.E.L.F de source

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - L\,\vec{u} = - L\vec{f} + (\vec{\rho} + L\vec{f}) = \vec{\rho}$$

$$\vec{u}(0) = \vec{f} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t}(0) = \vec{g}$$

Par suite une solution stricte A.E.L.F existe bien pour $(\tilde{\vec{\rho}},\tilde{\vec{f}},\tilde{\vec{g}})$ donné.

B I B L I O G R A P H I E.

[1] R.S. PALAIS - *Differential operators on vector bundles.* Annal of Mathematical Studies n° 57 Seminar on Atiyah Singer theorem Princeton (1965).

[2] G.F.D. DUFF - *Partial differential equations* Toronto : University of Toronto Press (1956).

[3] H. GOLDSCHMIDT - *Existence theorems for analytic linear partial differential equations.* Annals of Mathematics. Vol 86, n° 2 Septembre (1967) Japan.

[4] B. MALGRANGE - *Théorie analytique des équations différentielles* Séminaire Bourbaki (1966) (1967) n° 329.

[5] S. SMOKE - *Invariant differential operators* Annals of American Mathematical Society n° 127 (1967).

[6] D.C. SPENCER - *Overdeter mineted systems of linear Partial differential Equations.* Journal of American Mathematical Society (Mars 1969).

[7] C.H. WILCOX - *Initial boundary value problems for linear Partial differential equations of the second order.* Archive for rational Mechanics and analysis Vol. 10, n° 1.

[8] N. BOURBAKI - 1 - *Intégration* : chapitre IV - Hermann (1965)
2 - *Espaces vectoriels topologiques* :
Tome II : chapitre V - Hermann (1966).

[9] R.J. CRITTENDEN and R.L. BISHOP - *Geometry of Manifolds* Academic Press - New-York (1964).

[10] J. DIEUDONNE - *Elements d'analyse*
- Tome II (pp. 95-189) 1968
- Tome III Gauthier Villars - Paris - (1970).

[11] H.G. GARNIR, M. de WILDE J. SCHMETS - *Analyse fonctionnelle*
- Tome I - Birkhauser (1968).

[12] I.M. GELFAND et G.E. ŠILOV - *Les distributions*
- Tome 2 - Espaces fondamentaux
- Tome 3 - Théorie des équations differentielles
Dunod (1965).

[13] T.H. HILDEBRANDT - *Introduction to the theory of integration* Academic Press - New-York and London (1963).

[14] L. HÖRMANDER - *Linear Partial differential operators* Springer - Verlag - Berlin New-York (1969).

[15] O.A. LADYZHENSKAYA et N.N. URAL' TSE VA - *Linear and quasi lineai elliptic equations* Academic Press - New-York and London (1968).

[16] S. LANG - *Introduction aux variétés différentiables* Dunod - Paris (1967)

[17] P.D. LAS and R.S. PHILLIPS. *Scattering theory* (pp. 177-197) Academic Press - New-York and London (1967).

[18] J.L. LIONS - 1 - *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles* - Université de Montréal Département de Mathématiques - Octobre (1962).
2 - *Equations différentielles, opérationnelles et problèmes aux limites* pp.(178-194) Springer - Verlag - Berlin (1961).

[19] J.L. LIONS et E. MAGENES - *Problèmes aux limites non homogènes et applications*
Tome 1 - ch. I (pp. 4-95) ch. II (pp. 120-187)
Tome 2 - ch. IV (pp. 3-34)
Dunod - Paris (1968).

[20] R. NARASIMHAN - *Analysis on real and complex manifolds.* Masson et Cie - Paris (1968).

[21] J. PEETRE - *Introduction to Hilbert space methods in partial differential equations* (pp. 1-78). Universidade de Brasilia Instituto Central de Mathematica (1965).

[22] F. RIESZ et B. SZ - NAGY - *Leçon d'analyse fonctionnelle* Budapest (1952).

[23] L. SCHWARTZ - 1 - *Théorie des distributions* - Hermann Paris - (1966).
2 - *Méthode mathématiques pour les sciences physiques* (pp. 88-102). Hermann Paris (1966).

[24] K. YOSIDA - *Functional Analysis* (ch. I) Springer - Verlag Berlin - New-York (1966).

*

* *

CONCLUSION

Le problème que nous venons d'exposer et de résoudre est susceptible de plusieurs extensions dans d'autres directions.

Trois orientations possibles nous paraissent immédiates :

La première consisterait à prendre une variété X munie d'une métrique riemannienne et distincte d'un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Il faudrait alors s'assurer que les coefficients $\mathbb{A}_{ij}$, $\mathbb{A}_i$ et $\mathbb{A}$ conservent les mêmes propriétés par changement de cartes locales (sans que le problème se ramène à un problème à coefficients constants !).

Une deuxième généralisation est possible avec des matrices coefficients de L dépendant non seulement de x, mais aussi du paramètre t.

Enfin, on peut encore envisager de trouver au problème posé des "solutions généralisées".

A cause des prolongements que nous venons d'indiquer il ne semble pas possible de formuler une conclusion définitive à notre travail. Nous avons conscience de n'avoir apporté qu'une contribution modeste aux travaux de C.H. Wilcox mais toutefois sans nous être contenté de reproduire ce qui existait déjà, le "dire (du mathématicien" n'étant "jamais tout à fait du déjà dit".