

# THESE

présentée à

La Faculté des Sciences de l'Université de Lille I

pour obtenir

le titre de DOCTEUR INGENIEUR

par

Christian VASSEUR

Ingénieur IDN

Titre de la Thèse :



## « Contribution à l'étude des systèmes échantillonnés commandés par impulsions multimodulées »

*Soutenue le 12 Juillet 1972 devant la commission d'examen :*

Messieurs :	P. VIDAL	Président
	F. LAURENT	Rapporteur
	A. DANTHINE	Examineur
	R. BOSSUT	Invité

A ma femme,

A ma fille,

A mes Parents et  
beaux Parents.

## Avant - Propos

-----

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au laboratoire d'Automatique de l'Université de Lille I, sous la direction de Monsieur le Professeur VIDAL auquel nous exprimons toute notre gratitude pour l'accueil qu'il nous a réservé et le précieux enseignement qu'il a su nous dispenser.

Nous sommes particulièrement sensible au grand honneur qu'il nous a fait en acceptant de présider notre jury de thèse.

Que Monsieur LAURENT, Maître de Conférences à l'Université de Lille I trouve ici l'expression de notre très profonde gratitude pour avoir dirigé cette thèse avec beaucoup d'intérêt et d'amicale bienveillance. Ses conseils éclairés nous ont été précieux dans bien des domaines.

Nous remercions très vivement Monsieur DANTHINE, Professeur à l'Université de Liège pour le très vif intérêt qu'il a bien voulu porter à nos travaux en acceptant de participer à notre jury de thèse.

Monsieur BOSSUT, Directeur de l'Institut Industriel du Nord nous a permis d'effectuer une partie de nos recherches au Laboratoire d'Automatique de son école et a accepté de faire partie de notre jury de thèse. Nous l'en remercions très sincèrement.

Enfin nous tenons à rendre hommage à l'esprit d'équipe qui règne dans le laboratoire où nous avons travaillé, les chercheurs et le personnel ont toujours répondu avec empressement à nos sollicitations et par leur amicale présence nous ont aidé dans notre travail. Nous adressons à chacun nos remerciements les plus vifs.

## TABLE DES MATIERES

### Introduction générale

### CHAPITRE I : Régulation par impulsions multimodulées

Introduction -----	1.1
I - Description des systèmes étudiés	
1.1. Définition de la classe des système à régler----	1.2
1.2. Mise en équation -----	1.2
II - La commande multimodulée	
2.1. Position du problème -----	1.3
2.2. Mise en oeuvre -----	1.3
2.3. Problème de l'existence de la commande -----	1.4
III - Exemple de commande multimodulée	
3.1. Description de la commande -----	1.5
3.2. Résolution -----	1.5
3.3. Conditions d'existence de la commande -----	1.7
3.4. Définition d'une structure bouclée -----	1.8
IV - Domaine de commandabilité	
4.1. Définition des contraintes -----	1.9
4.2. Domaine de commandabilité -----	1.9
Conclusion -----	1.10

### CHAPITRE II : Propriétés de la commande multimodulée

Introduction -----	2.1
I.- La multimodulation par système associé	
1.1. Principe -----	2.2
1.2. Mise en oeuvre -----	2.2
II - Conditions d'existence de la commande	
2.1. Mise en équation -----	2.3
2.2. Condition d'existence de la commande -----	2.3
2.2.1. Interprétation des matrices Cd et Ob	
2.2.2. Rang de la matrice $L^{-1} [V(p) \quad \bar{V}^T(p)]$	
2.2.3. Enoncé des conditions d'existence de $u_M(t)$	

2.3. Mise en oeuvre -----	2.7
III - Etude d'une conduite optimale	
3.1. Position du problème -----	2.8
3.2. Résolution -----	2.8
3.3. Existence de $\hat{u}(t)$ -----	2.9
3.4. Définition d'une structure bouclée -----	2.10
Conclusion -----	2.11

CHAPITRE III : Simulation sur calculatrice hybride d'un asservissement multimodulé linéaire.

Introduction -----	3.1
I. Description du modèle	
1.1. Mise en équation -----	3.2
1.2. Choix du modulateur -----	3.3
II. Principe de la simulation	
2.1. Détermination des paramètres de réglage -----	3.3
2.2. Réalisation du modulateur -----	3.5
III. Simulation sur calculatrice hybride	
3.1. Réalisation -----	3.6
3.2. Etude de la sensibilité -----	3.11
Conclusion -----	3.13
Annexe I -----	3.14

CHAPITRE IV : Réalisation d'un asservissement multimodulé linéaire sur groupe Ward-Léonard.

Introduction -----	4.1
I. Description du système	
1.1. Le groupe Ward-Léonard -----	4.2
1.2. Matériel nécessaire à la modulation -----	4.2
II. Etude théorique	
2.1. Choix du modèle -----	4.2
2.2. Hypothèse simplificatrice -----	4.4

2.3. Choix du modulateur -----	4.4
2.4. Résolution -----	4.5
III. Réalisation de l'asservissement	
3.1. Réalisation de l'asservissement -----	4.6
3.2. Validité du modèle -----	4.7
Conclusion -----	4.12
 CHAPITRE V : Extension à certaines classes de commandes non linéaires	
Introduction -----	5.1
I. Etude en boucle ouverte	
1.1. Description du système -----	5.2
1.2. Recherche de la commande -----	5.2
II. Définition d'une structure -----	5.3
III. Généralisation	
3.1. Principe -----	5.4
3.2. Mise en oeuvre -----	5.5
IV. Structure optimale	
4.1. Position du problème -----	5.6
4.2. Interprétation -----	5.7
Conclusion -----	5.8
 CHAPITRE VI : Réalisation d'une compensation utilisant un calculateur numérique	
Introduction -----	6.1
I. Définition de la modulation	
1.1. Position du problème -----	6.2
1.2. Résolution -----	6.2
II. Domaine d'atteignabilité	
2.1. Mise en équation -----	6.5
2.2. Domaine de commandabilité -----	6.6
III. Mise en oeuvre sur calculateur	
3.1. Principe de la mise en oeuvre -----	6.8
3.2. Réalisation du programme -----	6.9
3.3. Résultats obtenus -----	6.9
Conclusion -----	6.14
Annexe II -----	6.15

Conclusion générale

Bibliographie

## INTRODUCTION GENERALE

L'amélioration des performances d'un processus constitue une préoccupation essentielle lors de l'étude et de la mise au point d'un asservissement.

Dans ce sens, la mise en oeuvre d'une compensation échantillonnée, pour laquelle les prises d'informations se font à des instants discrets du temps, conduit à des performances particulièrement intéressantes /1/.

En effet, ce mode de régulation permet d'annuler l'effet des conditions initiales en un temps fini et dans le cas d'une commande échantillonnée de type multimodulée /2/, un réglage simple conduit à une réponse sans erreur en une seule période d'échantillonnage.

Après avoir rappelé, les résultats déjà obtenus dans ce sens /2/, nous analysons un type particulier de commande multimodulée ; l'adoption de critères spécifiques de choix conduit alors à la définition de modulateurs optimaux.

CHAPITRE I

REGULATION PAR IMPULSIONS MULTIMODULEES

INTRODUCTION

Les propriétés spécifiques des systèmes échantillonnés ont été précisées dans une étude généralisant la notion de retour tachymétrique /1/. Elles conduisent en particulier à la réalisation d'asservissements caractérisés par une réponse sans erreur en un nombre fini de périodes d'échantillonnage.

Des travaux plus récents /2/ montrent qu'en fait, il est possible d'obtenir une réponse du même type en une seule période d'échantillonnage. Une telle amélioration des performances est rendue possible, d'une part lorsque l'état du système est entièrement connu à chaque instant d'échantillonnage, d'autre part lorsque le signal de commande est modulé par un nombre suffisant de paramètres.

## I - DESCRIPTION DES SYSTEMES ETUDIES

### I.1. Définition de la classe des systèmes à régler

Les systèmes étudiés sont caractérisés par une fonction de transfert  $W(p)$  assimilée à une fraction rationnelle en  $p$ , au sens du symbolisme habituel de Laplace (figure 1).

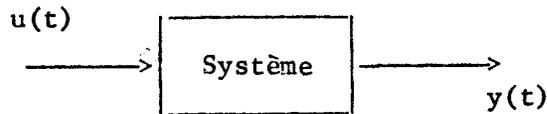


Figure 1

$$(1) \quad W(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Dans cette expression,  $N(p)$  et  $D(p)$  sont des polynômes en  $p$  de degrés respectifs  $r$  et  $q$  :

$$(2) \quad N(p) = b_0 + b_1 p + \dots + b_r p^r$$

$$(3) \quad D(p) = a_0 + a_1 p + \dots + a_q p^q \quad (r < q)$$

Le système est alors considéré comme un opérateur agissant sur la fonction scalaire de commande  $u(t)$  afin d'élaborer le signal de sortie  $y(t)$ .

Nous supposerons en outre le système commandable et dans ce sens,  $N(p)$  et  $D(p)$  ne possèdent pas de zéros communs/3/.

### I.2. Mise en équation

L'évolution d'un tel système peut être décrite par l'ensemble d'équations (4) /4/ :

$$(4) \quad \frac{dZ}{dt} = A Z(t) + B u(t)$$

$$Y(t) = C Z(t)$$

$Z(t)$  : vecteur état de dimension  $q$ .

$A$  : matrice carrée constante d'ordre  $q$ .

$B$  : matrice  $q \times 1$  constante.

$Y(t)$  : vecteur sortie de dimension  $s$ .

$C$  : matrice  $s \times q$  constante.

De cette manière, la condition nécessaire et suffisante de commandabilité du système (4) s'interprète simplement au moyen de la relation (5) /5/ :

$$(5) \quad \det \begin{bmatrix} B, AB, \dots, A^{q-1} B \end{bmatrix} \neq 0$$

## II - LA COMMANDE MULTIMODULEE

### 2.1. Position du problème

Le critère de choix adopté en vue de déterminer la fonction de commande  $u(t)$  peut s'énoncer de la manière suivante :

Les informations concernant le système étant captées à intervalles de temps égaux  $T$ , le vecteur  $Y(nT) = Y_n$  définit la sortie à l'instant  $nT$  ( $n$  entier positif quelconque) ; dans ces conditions, si  $C_n$  est un vecteur de consigne arbitraire de dimension  $s$ , il convient de déterminer une commande  $u_M(t)$  définie sur l'intervalle  $[nT, (n+1)T]$ , de telle manière que soit vérifiée la contrainte :

$$(6) \quad Y_{n+1} = C_n, \text{ à l'instant } (n+1)T.$$

La réitération du processus présenté ci-dessus conduit alors à la définition d'un asservissement caractérisé par l'équation de récurrence (6). Dans ce sens un tel système réalise la recopie parfaite du vecteur d'entrée aux instants d'échantillonnage.

### 2.2. Mise en oeuvre

Le processus défini permet d'envisager, sous réserve d'existence de la commande, la régulation du vecteur de sortie.

En outre, si le système à régler est observable, il est possible de trouver l'état connaissant la sortie ; dans cette hypothèse le problème de régulation de la sortie est équivalent au problème de régulation de l'état /4/ ; c'est dans ce sens que le développement sera poursuivi.

Il convient donc de définir  $u_M(t)$  sur  $[nT, (n+1)T)$  de manière à vérifier la contrainte :

$$(7) \quad Z_{n+1} = E_n \quad ,$$

Dans une telle formulation  $Z_{n+1}$  représente le vecteur état à l'instant  $(n+1)T$  ;  $E_n$  est un vecteur arbitraire de dimension  $q$ , caractérisant la consigne de l'état à l'instant  $nT$  ; notons enfin que la contrainte (7) est équivalente à la contrainte (6), puisque le système à régler est observable.

### 2.3. Problème de l'existence de la commande

Kalman /5/ a montré qu'il existe au moins une fonction  $u_K(t)$  définie sur  $[nT, (n+1)T)$  permettant le passage de  $Z_n$  à  $Z_{n+1} = E_n$ , pourvu que la condition de commandabilité (5) du système soit vérifiée.

Dans cet esprit nous définissons un ensemble  $(M)$  de commandes dites multimodulées de la manière suivante /2/ :

$$(8) \quad u_M(t) \in (M) \iff u_M(t) = u(U_n, t) \quad ,$$

expression dans laquelle le vecteur  $U_n$ , constant, de dimension  $q$  et de composantes  $(u_n^1, u_n^2, \dots, u_n^q)$ , définit la modulation de la fonction de commande entre les instants  $nT$  et  $(n+1)T$ .

Dans ces conditions, il apparait que la conduite par commande multimodulée existe si et seulement si une commande  $u_K(t)$  appartient à  $(M)$ .

$$(9) \quad \exists u_K(t) \in (M).$$

Il convient donc, lors de la mise en oeuvre d'une conduite multimodulée de préciser les conditions d'existence inhérentes à ce type de commande ; dans ce sens, nous définirons, au cours du second chapitre, les conditions d'existence et d'unicité d'une commande multimodulée linéaire par rapport à  $U_n$ .

### III - EXEMPLE DE COMMANDE MULTIMODULEE

Afin de préciser le concept de commande multimodulée nous donnons, dans ce paragraphe, un exemple caractéristique illustrant ce mode de régulation.

#### 3.1. Description de la commande

Nous adoptons en vue d'asservir le système décrit en (4), une commande du type présenté figure 2.

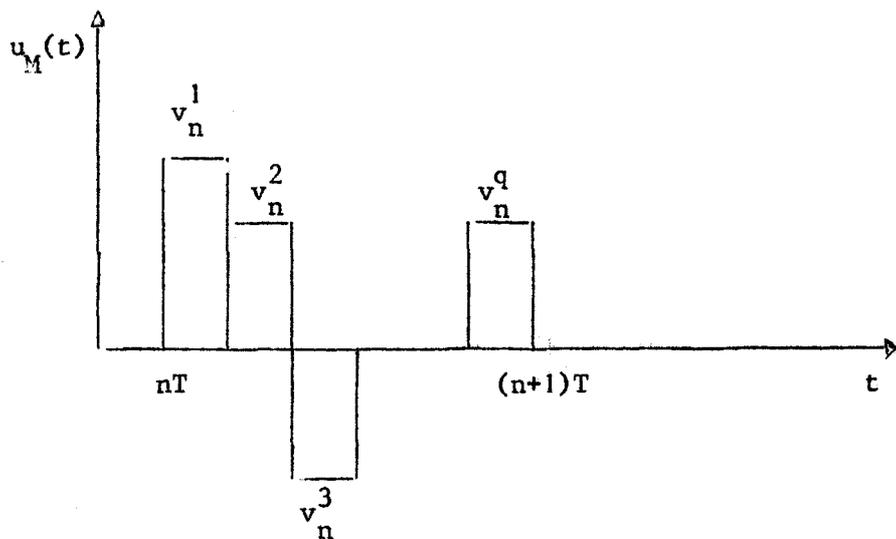


Figure 2

$u_M(t)$  est constituée d'une suite de  $q$  impulsions rectangulaires de largeur  $T/q$  et d'amplitude  $v_n^i$  ( $i=1,q$ ).

#### 3.2. Résolution

Afin de simplifier les calculs nous allons donner une nouvelle définition de la fonction  $u_M(t)$ .

En effet, au lieu de considérer la fonction  $u_M(t)$  comme une suite d'impulsions il est possible de la décomposer en une somme de  $q$  impulsions d'amplitude  $u_n^i$  de largeur  $i \frac{T}{q}$  démarrant à l'instant  $nT$  ; à cet effet, la figure 3 illustre la méthode de décomposition pour un système du troisième ordre.

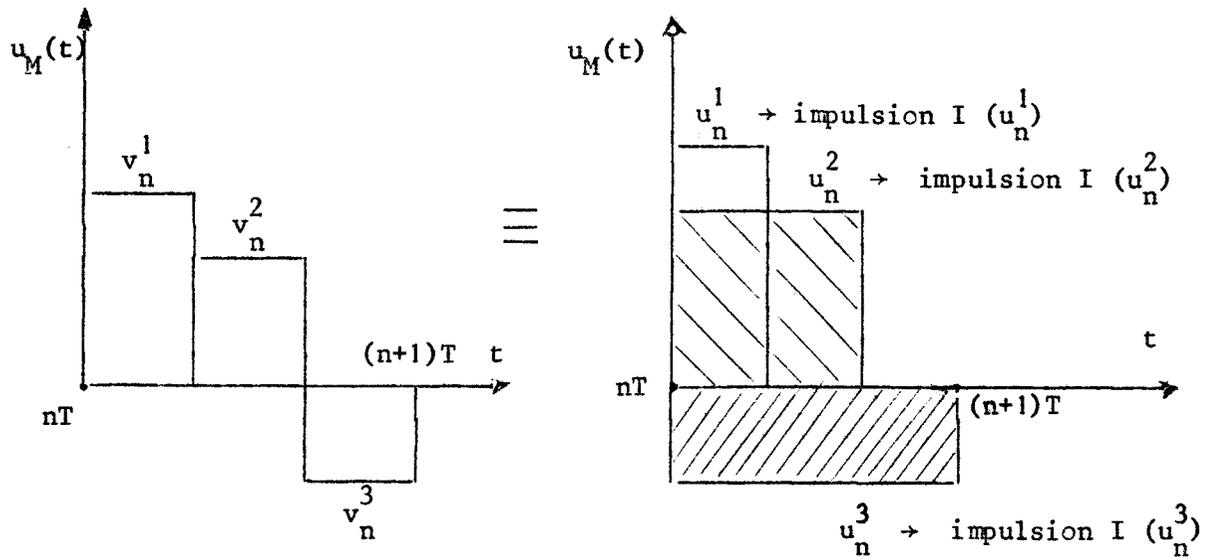


Figure 3

On obtient  $u_M(t) \equiv I(u_n^1) + I(u_n^2) + I(u_n^3)$ , à condition de choisir :

$$(10) \quad \begin{cases} u_n^3 = v_n^3 \\ u_n^3 + u_n^2 = v_n^2 \\ u_n^3 + u_n^2 + u_n^1 = v_n^1 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \\ u_n^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ v_n^3 \end{bmatrix}$$

Il apparait alors que la correspondance entre les  $u_n^i$  et les  $v_n^i$  est réalisable, l'extension à l'ordre  $q$  se faisant sans difficulté.

De cette manière il est possible de résoudre l'équation différentielle de fonctionnement du système en distinguant, d'une part la contribution des conditions initiales  $Z_n$ , d'autre part la contribution de chacune des impulsions  $I(u_n^i)$ , le long de la période d'échantillonnage :

$$(11) \quad Z \left[ (n+1)T \right] = Z_{n+1} = e^{AT} Z_n + e^{AT} \int_0^{T/q} e^{-A\tau} B d\tau \cdot u_n^1 + \dots + e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau} B d\tau \cdot u_n^q,$$

c'est-à-dire :

$$(12) \quad Z_{n+1} = e^{AT} Z_n + e^{AT} \sum_{i=1}^q \left( u_n^i \int_0^{i\frac{T}{q}} e^{-A\tau} B d\tau \right)$$

Désignons par  $P^i$  les vecteurs  $e^{AT} \int_0^{i\frac{T}{q}} e^{-A\tau} B d\tau$ ; dans ces conditions  $Z_{n+1}$  prend la forme :

$$(13) \quad Z_{n+1} = e^{AT} Z_n + (P^1, P^2, \dots, P^q) \cdot U_n,$$

dans laquelle  $U_n$  définit le vecteur de modulation .

$$(14) \quad U_n = \begin{bmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \\ \vdots \\ u_n^q \end{bmatrix}$$

### 3.3. Conditions d'existence de la commande

L'existence de la commande est liée à celle du vecteur  $U_n$ . D'autre part on désire imposer à  $Z_{n+1}$  la valeur de consigne  $E_n$ . Dans ces conditions  $U_n$  existe si et seulement si le système linéaire

$$(15) \quad (P^1, P^2, \dots, P^q)X = E_n - e^{AT} Z_n$$

admet une solution en  $X$ ; une condition nécessaire et suffisante d'existence de cette solution est que la matrice  $q \times q$   $(P^1, P^2, \dots, P^q)$  soit inversible, c'est-à-dire :

$$(16) \quad \det (P^1, P^2, \dots, P^q) \neq 0,$$

alors  $U_n = X$  et  $U_M(t)$  existe /2/.

### 3.4. Définition d'une structure bouclée

Lorsque la condition (16) est satisfaite, la relation (15) conduit à la structure bouclée présentée figure 4.

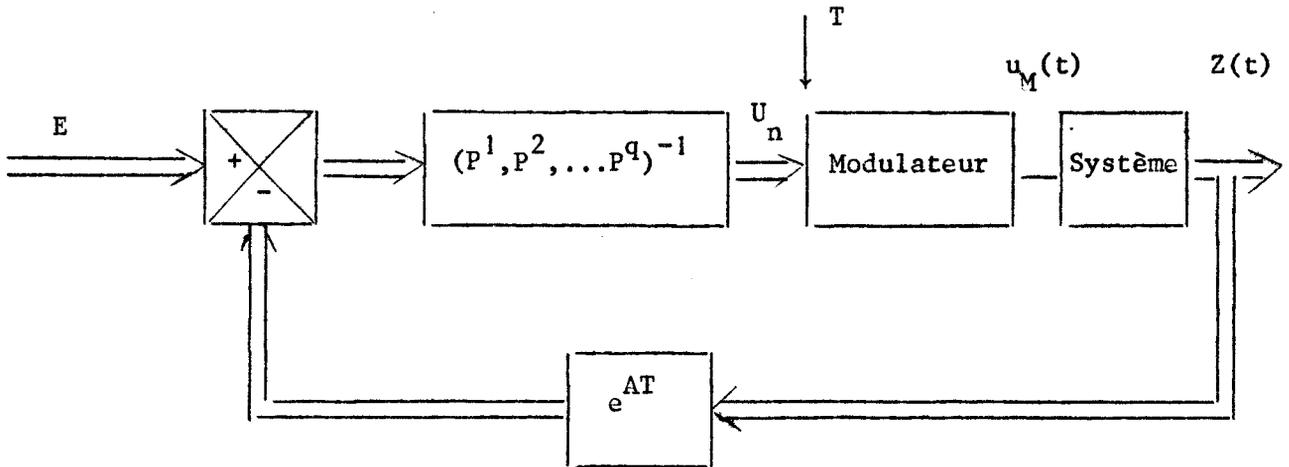


Figure 4

A chaque instant d'échantillonnage  $nT$ , le modulateur capte les  $q$  informations contenues dans le vecteur  $U_n$  et élabore la commande multimodulée  $u_M(U_n, t)$  [  $t \in (nT, (n+1)T)$  ] .

Dans ce sens, un tel système est caractérisé par un fonctionnement de type discret pour lequel le vecteur  $U_n$  représente la prise d'échantillons aux instants  $nT$ .

La structure bouclée conduit alors à une évolution de l'état définie par la récurrence :

$$Z_{n+1} = E_n$$

## IV - DOMAINE DE COMMANDABILITE

Le choix particulier de la modulation définie dans l'exemple précédent conduit à une mise en équation du type linéaire. Il est toutefois possible d'envisager une multimodulation faisant intervenir les paramètres  $u_n^i$  de manière non linéaire ; dans ce cas, l'intégration de l'équation différentielle de fonctionnement du système conduit à une solution de la forme (17) /11/.

$$(17) \quad Z_{n+1} = e^{AT} Z_n + K(U_n)$$

expression dans laquelle le vecteur  $K$  de dimension  $q$  est fonction non linéaire du vecteur de modulation  $U_n$ .

L'existence de la commande  $u_M(t)$  est alors liée à la possibilité de résoudre une équation vectorielle en  $X$  telle que (18) :

$$(18) \quad K(X) = E_n - e^{AT} Z_n$$



#### 4.1. Définition des contraintes

Pratiquement la résolution de l'équation (18) doit s'effectuer en tenant compte des contraintes qui s'exercent sur la commande.

Dans le cas d'une commande scalaire, ces contraintes peuvent s'exprimer par une relation du type (19) :

$$(19) \quad |u(U_n, t)| \leq M$$

qui traduit une difficulté d'ordre technologique : la limitation en tension de la commande d'un moteur électrique par exemple, ou la limitation de la poussée d'un système à propulsion par fusée.

#### 4.2. Domaine de commandabilité

Dans ces conditions, il est possible de définir un domaine de commandabilité (D) de la manière suivante :

Un point  $M$  appartient à (D) si le vecteur  $V$  de dimension  $q$  et d'extrémité  $M$  est tel que l'équation :

$$K(X) = V$$

admet une solution au moins en  $X$ , compte tenu de la contrainte

$$|u(X, t)| \leq M \quad t \in [nT, (n+1)T)$$

De cette manière, il apparaît que l'état de consigne  $E_n$  est atteignable en une période d'échantillonnage à partir de l'état  $Z_n$ , si et seulement si l'extrémité  $M_n$  du vecteur  $E_n - e^{AT} Z_n$  appartient au domaine de commandabilité (D) défini ci-dessus /12/ /13/.

## CONCLUSION

Le mode de régulation décrit dans ce chapitre conduit effectivement à un fonctionnement de type échantillonné.

Dans ce sens, il permet une réponse sans erreur en un temps fini. Toutefois la qualité spécifique de la multimodulation est de permettre la réponse en une seule période d'échantillonnage. Le processus réalise donc la copie parfaite du vecteur d'entrée aux instants d'échantillonnage.

De plus il convient de noter qu'un tel fonctionnement n'impose pas le choix d'un modulateur particulier ; bien au contraire, toute liberté reste acquise pour permettre de guider le choix dans le sens d'un fonctionnement optimal. Une telle démarche nécessite alors la définition d'un critère spécifique adapté au fonctionnement désiré.

---

CHAPITRE II

PROPRIETES DE LA COMMANDE MULTIMODULEE

INTRODUCTION

Le mode de régulation décrit dans le premier chapitre peut-être mis en oeuvre sans difficulté, lorsque l'existence du vecteur de modulation  $U_n$  est assurée. Dans ce sens, le vecteur  $K(U_n)$ , spécifique de la modulation, caractérise à lui seul le type de commande utilisée.

Au cours de ce chapitre, nous étudions plus particulièrement les propriétés inhérentes à la multimodulation linéaire ; en particulier, le choix du modulateur n'étant nullement imposé, il est intéressant de se fixer des contraintes supplémentaires orientant ce choix dans le sens d'un fonctionnement parfaitement défini.

## I - LA MULTIMODULATION PAR SYSTEME ASSOCIE

### 1.1. Principe

L'utilisation d'un système linéaire d'ordre  $q$  fonctionnant en régime libre permet d'élaborer une commande de type multimodulée ; soit en effet le système décrit par l'ensemble d'équations (1) :

$$(1) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{dU}{dt} = A^* U(t) \\ u(t) = B^{*T} U(t) \end{array} \right.$$

$U(t)$  : vecteur état de dimension  $q$

$A^*$  : matrice carrée constante d'ordre  $q$

$u(t)$  : fonction scalaire de sortie

$B^*$  : matrice  $q \times 1$  constante.

L'intégration du système (1) conduit à la solution (2)

$$(2) \quad \left[ \begin{array}{l} U(t) = e^{A^* t} U_n \\ u(t) = B^{*T} e^{A^* t} U_n \end{array} \right.$$

expression dans laquelle  $U_n$  précise les conditions initiales de l'état  $U(t)$  à l'instant  $nT$ .

De cette manière, la fonction  $u(t)$  prend effectivement la forme d'une commande multimodulée.

$$(3) \quad u(t) = u_M(U_n, t)$$

### 1.2. Mise en oeuvre

Il s'agit d'utiliser la commande définie ci-dessus en vue d'asservir le système décrit en (4)

$$(4) \quad \frac{dZ}{dt} = A Z(t) + B u(t)$$

$$Y(t) = C Z(t)$$

selon, les notations utilisées dans le premier chapitre.

Le système est supposé commandable et observable ; l'étude est alors simplement consacrée à la régulation du vecteur état  $Z(t)$ .

Dans ce sens il convient de déterminer, si possible, le vecteur  $U_n$ , de manière à transférer en une période d'échantillonnage, le système de l'état  $Z_n$  donné à l'état  $Z_{n+1} = E_n$  imposé. Nous supposons en outre qu'aucune contrainte ne s'exerce sur  $u(t)$ .

## II - CONDITIONS D'EXISTENCE DE LA COMMANDE

### 2.1. Mise en équation

Afin de mettre en évidence simplement les conditions d'existence du vecteur  $U_n$ , il est intéressant de déterminer la transformée de Laplace de la solution, soit :

$$(5) \quad \begin{aligned} Z(p) &= (pI-A)^{-1} B u(p) + (pI-A)^{-1} Z_n \\ U(p) &= (pI-A^*)^{-1} U_n \\ u(p) &= B^{*T} (pI-A^*)^{-1} U_n \end{aligned}$$

expressions dans lesquelles  $I$  désigne la matrice unité et  $p$  l'opérateur de Laplace /6/.

Le système d'équations (5) conduit alors à la solution :

$$(6) \quad Z(p) = (pI-A)^{-1} Z_n + (pI-A)^{-1} B B^{*T} (pI-A^*)^{-1} U_n$$

### 2.2. Condition d'existence de la commande

L'équation (6) met en évidence la matrice :

$$(7) \quad M(p) = (pI-A)^{-1} B B^{*T} (pI-A^*)^{-1}$$

Dans ces conditions, l'existence du vecteur  $U_n$  est simplement liée à l'existence de la matrice :

$$(8) \quad \left[ L^{-1} (M(p)) \right]^{-1} = M^{-1}(t) \quad , \quad t=T$$

$L^{-1} (M(p))$  désigne la matrice originale de  $M(p)$ .

Les propriétés spécifiques des matrices permettent d'envisager la définition de la matrice  $(pI-A)^{-1}$  selon une combinaison linéaire des matrices constituantes de  $A$  /14/, soit :

$$(9) \quad (pI-A)^{-1} = \sum_{k=1}^s \left[ \frac{1}{(p-\lambda_k)} C_{k1} + \frac{1!}{(p-\lambda_k)^2} C_{k2} + \dots + \frac{(m_k-1)!}{(p-\lambda_k)^{m_k}} C_{km_k} \right]$$

$\lambda_k$  ( $k=1, s$ ) : valeurs propres de  $A$  (réelles ou complexes)

$m_k$  : ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda_k$  :  $\sum_{k=1}^s m_k = q$

$C_{kj}$  ( $j=1, m_k$ ) : matrices constituantes carrées d'ordre  $q$  associées à la valeur propre  $\lambda_k$  (à coefficients réels ou complexes).

De cette manière, et en adoptant une décomposition analogue pour la matrice  $(pI-A)^{-1}$ , la matrice  $M(p)$  s'écrit :

$$(10) \quad M(p) = \left[ C_{11}^B, C_{12}^B, \dots, C_{sm_s}^B \right] V(p) \cdot \overset{*}{V}^T(p) \begin{bmatrix} \overset{*}{B}^T \overset{*}{C}_{11} \\ \overset{*}{B}^T \overset{*}{C}_{12} \\ \vdots \\ \overset{*}{B}^T \overset{*}{C}_{sm_s}^* \end{bmatrix}$$

$V(p)$  et  $\overset{*}{V}(p)$  sont des vecteurs de dimension  $q$  s'écrivant :

$$(11) \quad V(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{p-\lambda_1} \\ \frac{1!}{(p-\lambda_1)^2} \\ \frac{(m_1-1)!}{(p-\lambda_1)^{m_1}} \\ \vdots \\ \frac{(m_s-1)!}{(p-\lambda_s)^{m_s}} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad V^*(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(p-\lambda_1^*)} \\ \vdots \\ \frac{(\tilde{m}_1-1)!}{(p-\lambda_1^*)^{\tilde{m}_1}} \\ \vdots \\ \frac{(\tilde{m}_s-1)!}{(p-\lambda_s^*)^{\tilde{m}_s}} \end{bmatrix}$$

De plus nous noterons "Cd" la matrice carrée constante de dimension q définie par juxtaposition des q vecteurs  $C_{kj}$ .B.

La matrice obtenue en superposant les q vecteurs lignes  $B^* C_{kj}^*$ , est notée "Ob" (cf équation 10).

### 2.2.1. Interprétation des matrices Cd et Ob

L'ensemble des q matrices  $C_{kj}$  d'une part et l'ensemble des q matrices  $A^i$  ( $i=0, q-1$ ) d'autre part constituent deux systèmes générateurs équivalents de l'espace des fonctions de la matrice A /14/ ; par conséquent, la matrice Cd et la matrice de commandabilité du système, définies respectivement à partir des  $C_{kj}$  et des  $A^i$ , vérifient les mêmes propriétés, en particulier :

$$(12) \quad \det (B, AB, \dots, A^{q-1} B) \neq 0 \iff \det (Cd) \neq 0$$

Un raisonnement en tout point analogue faisant intervenir la matrice d'observabilité du système associé permet d'énoncer :

$$(13) \quad \det (B, A^* B, \dots, A^{*q-1} B) \neq 0 \iff \det (Ob) \neq 0$$

Par conséquent, les matrices Cd et Ob sont inversibles si et seulement si d'une part le système à régler est commandable, si d'autre part le système associé est observable.

2.2.2. Rang de la matrice  $L^{-1} (V(p) \overset{*}{V}(p))$

Lorsque Cd et Ob sont de rang q, la matrice M(t) définie en (8) est inversible si et seulement si la matrice originale de  $V(p) \overset{*}{V}(p)$  est de rang q pour  $t = T$ .

Posons :

$$(14) \quad L^{-1} \begin{bmatrix} V(p) & \overset{*}{V}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1^T(t) \\ W_2^T(t) \\ \vdots \\ W_q^T(t) \end{bmatrix}$$

$W_i(t)$  ( $i=1,q$ ) : vecteurs d'ordre q fonctions de t.

D'autre part supposons  $L^{-1} (V(p) \overset{*}{V}(p))$  de rang inférieur à q ; dans ces conditions, il existe des coefficients constants  $c_i$  ( $i=1,q$ ) non tous nuls tels que :

$$(15) \quad \sum_{i=1}^q c_i W_i(t) = 0 \quad ,$$

soit en définissant la transformée de Laplace de cette expression :

$$(16) \quad \sum_{i=1}^q c_i W_i(p) = 0$$

avec, compte tenu de l'expression de  $V(p) \overset{*}{V}(p)$  :

$$(17) \quad \begin{bmatrix} W_1(p) = \frac{1}{p-\lambda_1} \overset{*}{V}(p) \\ W_2(p) = \frac{1!}{(p-\lambda_1)^2} \overset{*}{V}(p) \\ \vdots \\ W_q(p) = \frac{(m_s-1)!}{(p-\lambda_s)^{m_s}} \overset{*}{V}(p) \end{bmatrix}$$

Il apparait alors que la condition (16) ne peut être réalisée qu'en faisant intervenir  $p$  dans les coefficients  $c_i$ , ce qui est impossible. Par conséquent tous les coefficients  $c_i$  sont nuls et  $L^{-1} [V(p) \mathbb{V}^T(p)]$  est de rang  $q$  donc inversible.

### 2.2.3. Enoncé des conditions d'existence de $u_M(t)$

Lorsque  $Cd$  et  $Ob$  sont inversibles,  $M^{-1}(t)$  existe et  $Z(t)$  s'écrit :

$$(18) \quad Z(t) = e^{At} Z_n + M(t) U_n$$

soit pour  $t = T$  :

$$(19) \quad Z_{n+1} = e^{AT} Z_n + M(T) U_n$$

Afin d'atteindre l'état  $E_n = Z_{n+1}$  il suffit de choisir :

$$(20) \quad U_n = M^{-1}(T) (E_n - e^{AT} Z_n)$$

Dans ces conditions la commande multimodulée existe, de plus elle est unique et s'écrit :

$$(21) \quad u(t) = \mathbb{B}^T e^{\mathbb{A}t} M^{-1}(T) (E_n - e^{AT} Z_n)$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (4) soit commandable au moyen du système associé (1) sont donc que :

- le système à régler soit commandable
- le système associé soit observable.

### 2.3. Mise en oeuvre

La mise en oeuvre d'une telle multimodulation nécessite donc l'initialisation, au début de chaque période d'échantillonnage, du système associé, selon le schéma présente figure 1.

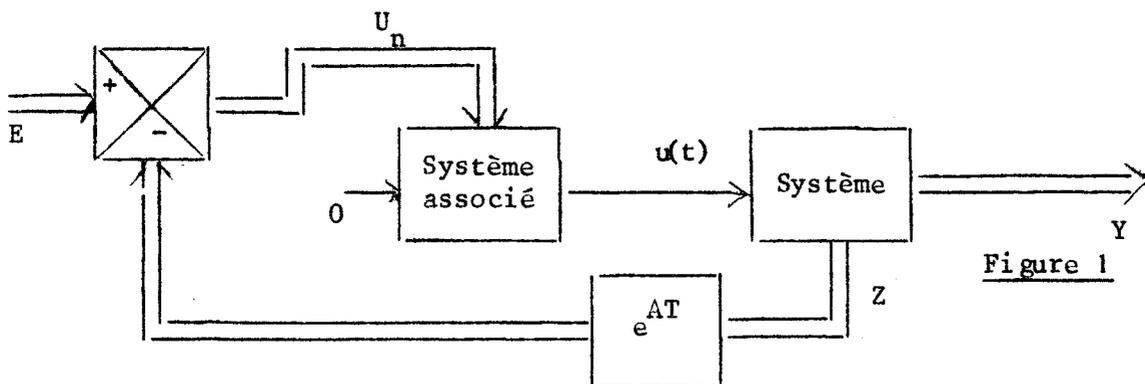


Figure 1

Les bouclages sont réalisés de telle manière que  $U_n$  vérifie la relation :

$$U_n = M^{-1}(T) (E_n - e^{AT} Z_n)$$

### III - ETUDE D'UNE CONDUITE OPTIMALE

#### 3.1. Position du problème

Nous envisageons d'examiner, dans ce paragraphe, s'il existe, parmi tous les systèmes associés appartenant à la classe définie ci-dessus, un système associé particulier permettant de minimiser le long de la période d'échantillonnage, la fonctionnelle :

$$(22) \quad W(u) = \int_{nT}^{(n+1)T} \frac{u^2}{2} dt.$$

Une telle expression donne la valeur de l'énergie fournie au système entre les instants  $nT$  et  $(n+1)T$ .

#### 3.2. Résolution

Le principe du maximum permet de définir une condition nécessaire d'existence de la commande.

A cet effet, la minimisation de  $W$  compte tenu de la contrainte différentielle (4) décrivant le système, est équivalente à la maximisation par rapport à  $u$  de la fonction hamiltonienne définie au moyen de la relation (23) /10/.

$$(23) \quad H(Z, u, \psi) = -\frac{u^2}{2} + \psi^T(t) (A Z + B u)$$

dans laquelle  $\psi(t)$  désigne le vecteur adjoint de dimension  $q$ .

Dans ces conditions, si elle existe, la conduite optimale est solution de l'équation :

$$(24) \quad \frac{\delta H}{\delta u} = 0$$

et s'écrit :

$$(25) \quad \hat{u}(t) = B^T \psi(t)$$

Dans cette expression, le vecteur  $\psi(t)$  est solution de l'équation différentielle (26) /10/.

$$(26) \quad \frac{d\psi}{dt} = -A^T \psi$$

Ces conditions nécessaires mettent alors en évidence un système associé particulier s'identifiant au système adjoint (26) et pour lequel il vient : (cf § I).

$$(27) \quad \begin{aligned} \bar{B} &= B \\ \bar{A} &= -A^T \end{aligned}$$

Par suite  $\hat{u}(t)$  s'écrit :

$$(28) \quad \hat{u}(t) = B^T e^{-A^T t} \psi_n$$

Le vecteur  $\psi_n$  d'ordre  $q$  définit, lorsqu'il existe, le vecteur adjoint à l'instant  $nT$ .

### 3.3. Existence de $\hat{u}(t)$

L'existence de  $\hat{u}(t)$  est simplement liée à l'existence du vecteur  $\psi_n$ .

D'autre part la matrice d'observabilité du système adjoint admet l'expression transposée.

$$(29) \quad \begin{bmatrix} B, & -AB, & A^2B, & -A^3B, & \dots, & (-1)^{q-1} A^{q-1} B \end{bmatrix}$$

Les signes intervenant sur chacune des colonnes de cette matrice n'en modifient pas le rang.

La matrice d'observabilité du système adjoint est donc de même rang que la matrice de commandabilité du système à régler :  $(B, AB, \dots, A^{q-1}B)$

Par suite, si le système à régler est commandable, le système adjoint est observable et, d'après les résultats du paragraphe précédent, la commande optimale existe, de plus elle est unique et s'écrit :

$$(30) \quad \hat{u}(t) = B^T e^{-A^T t} \hat{M}^{-1}(T) (E_n - e^{AT} Z_n)$$

selon les notations du paragraphe précédent.

### 3.4. Définition d'une structure bouclée

Le résultat ainsi obtenu permet d'envisager la réalisation d'un asservissement de type multimodulé pour lequel le système associé s'identifie au système adjoint : (figure 2).

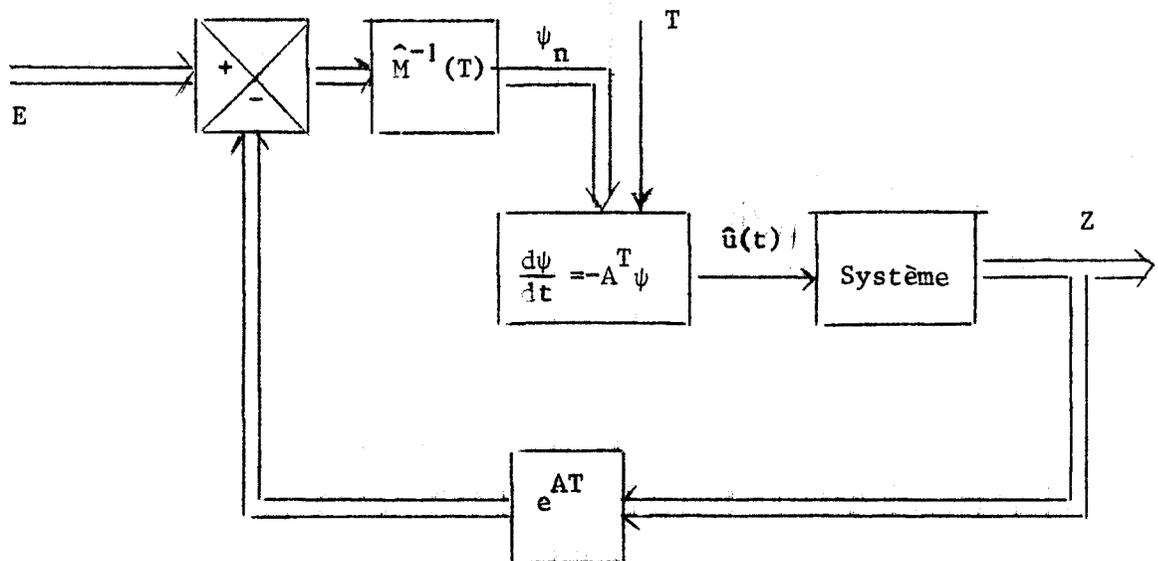


Figure 2

Le système adjoint est alors initialisé par  $\psi_n$  aux instants d'échantillonnage  $nT$ .

Une telle structure conduit à un fonctionnement caractérisé par la récurrence :

$$Z_{n+1} = E_n$$

De plus elle permet de minimiser l'énergie de commande dépensée entre deux instants d'échantillonnage.

## CONCLUSION

La commande présentée au cours de ce chapitre permet la mise en oeuvre d'un asservissement échantillonné de type multimodulé.

Dans ce sens, le fonctionnement défini possède la propriété de réponse sans erreur en un temps fini.

De plus, l'adoption d'une contrainte supplémentaire visant à la minimisation de l'énergie dépensée entre deux instants d'échantillonnage, conduit à une définition précise du modulateur.

Dans ce cas l'existence de la commande optimale ne nécessite aucune autre condition que la condition de commandabilité du système à régler.

CHAPITRE III

SIMULATION SUR CALCULATRICE HYBRIDE D'UN ASSERVISSEMENT  
MULTIMODULE LINEAIRE

INTRODUCTION

Avant de mettre en oeuvre les résultats obtenus en vue d'asservir un système réel tel que le groupe Ward-Leonard, il convient de réaliser, sur calculatrice hybride, la simulation d'un modèle linéaire.

Dans ce sens, nous définissons au cours du présent chapitre une commande élaborée au moyen d'un filtre associé ; le choix particulier de ce filtre permet alors d'envisager un fonctionnement minimisant l'énergie fournie au système.

L'analyse des résultats obtenus est plus particulièrement orientée, vers une étude de sensibilité de la structure, vis à vis des paramètres de réglage.

## I - DESCRIPTION DU MODELE

### 1.1. Mise en équation

L'exemple étudié dans ce chapitre est consacré à l'étude d'un filtre linéaire du troisième ordre, de transmittance :

$$(1) \quad \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{1}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \quad \tau_1 \neq \tau_2$$

Cette représentation mathématique peut notamment caractériser un moteur utilisé en organe de positionnement // ;  $\tau_1$  et  $\tau_2$  représentent alors deux constantes de temps caractéristiques du système étudié.

Dans ces conditions, l'équation différentielle vectorielle décrivant l'évolution du processus admet une expression de la forme (2) :

$$(2) \quad \frac{dY}{dt} = A Y + B u$$

Un choix particulier du vecteur Y permet alors d'écrire :

$$(3) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/\tau_2 & 1/\tau_2 \\ 0 & 0 & -1/\tau_1 \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/\tau_1 \end{bmatrix}$$

avec

$$(5) \quad Y^T = \begin{bmatrix} y, y', y'+\tau_2 y'' \end{bmatrix}$$

### 1.2. Choix du modulateur

La réalisation d'un fonctionnement permettant de minimiser l'énergie fournie au système entre deux instants d'échantillonnage, conduit à élaborer la commande  $u(t)$  à partir du filtre de transmittance :

$$(6) \quad L(p) = \frac{1}{p(1-\tau_1 p)(1-\tau_2 p)}$$

De cette manière les résultats obtenus dans le second chapitre conduisent à la définition de la structure bouclée représentée figure 1.

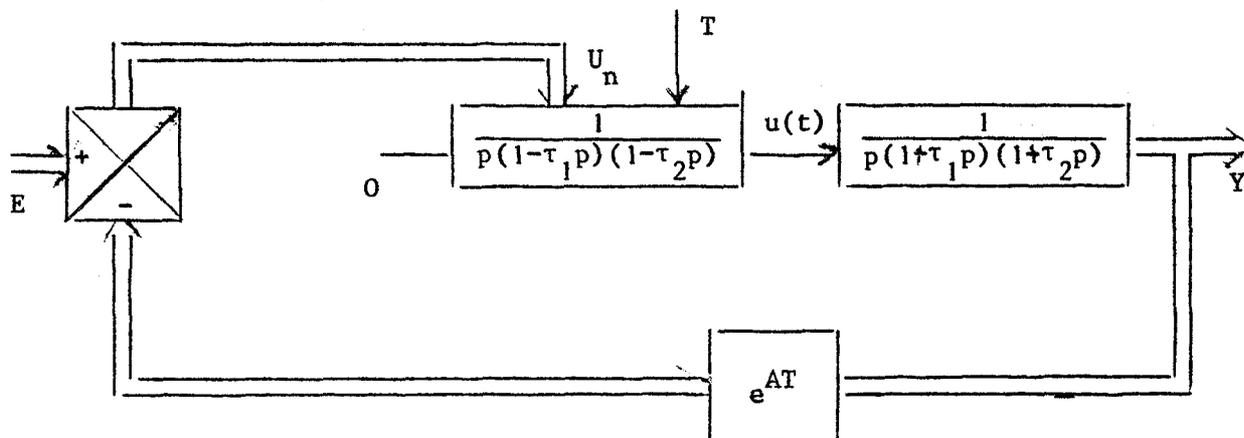


Figure 1

Le filtre de transmittance  $L(p)$ , d'entrée nulle, est initialisé par  $U_n$  au début de chaque période d'échantillonnage, de telle manière que soit vérifiée la contrainte :

$$(7) \quad Y_{n+1} = E_n$$

## II - PRINCIPE DE LA SIMULATION

### 2.1. Détermination des paramètres de réglage

L'intégration de l'équation différentielle (2), entre les instants  $nT$  et  $(n+1)T$ , permet alors de déterminer les paramètres de réglage en vue de satisfaire la contrainte (7).

La forme particulière du modulateur permet d'écrire :

$$(8) \quad U(t) = \alpha e^{t/\tau_1} + \beta e^{t/\tau_2} + \gamma,$$

expression dans laquelle  $\alpha, \beta, \gamma$ , sont des constantes caractéristiques du vecteur de modulation.

Dans ces conditions, l'intégration de (2) conduit à l'équation de récurrence vectorielle (9) :

$$(9) \quad \begin{cases} X \left[ (n+1)T \right] = D X(nT) + P V_n \\ \text{avec } X = R Y \end{cases}$$

$V_n^T$  : vecteur ligne de composantes  $(\alpha, \beta, \gamma)$

$R$  : matrice carrée régulière s'écrivant :

$$(10) \quad R = \begin{bmatrix} 1 & \tau_2 & \tau_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\tau_2}{\tau_1} - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

En outre, les matrices carrées constantes  $D$  et  $P$  sont définies à partir des grandeurs :

$$(11) \quad \begin{cases} D_1 = e^{-T/\tau_1} \\ D_2 = e^{-T/\tau_2} \end{cases}$$

et s'écrivent :

$$(12) \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{bmatrix}$$

$$(13) \quad P = \begin{bmatrix} \tau/D_1 & \tau_2/D_2 & T \\ 1/2D_1 & \frac{\tau_2}{(\tau_1+\tau_2)D_2} & 1 \\ \frac{\tau_2}{(\tau_1+\tau_2)D_1} & \frac{\tau_2}{2\tau_1 D_2} & \frac{\tau_2}{\tau_1} \end{bmatrix}$$

Il est alors possible de satisfaire la contrainte (7), par le choix suivant du vecteur  $V_n$  :

$$V_n = P^{-1} \begin{bmatrix} X_{n+1} - D X_n \end{bmatrix}$$

avec :

$$X_{n+1} = R E_n$$

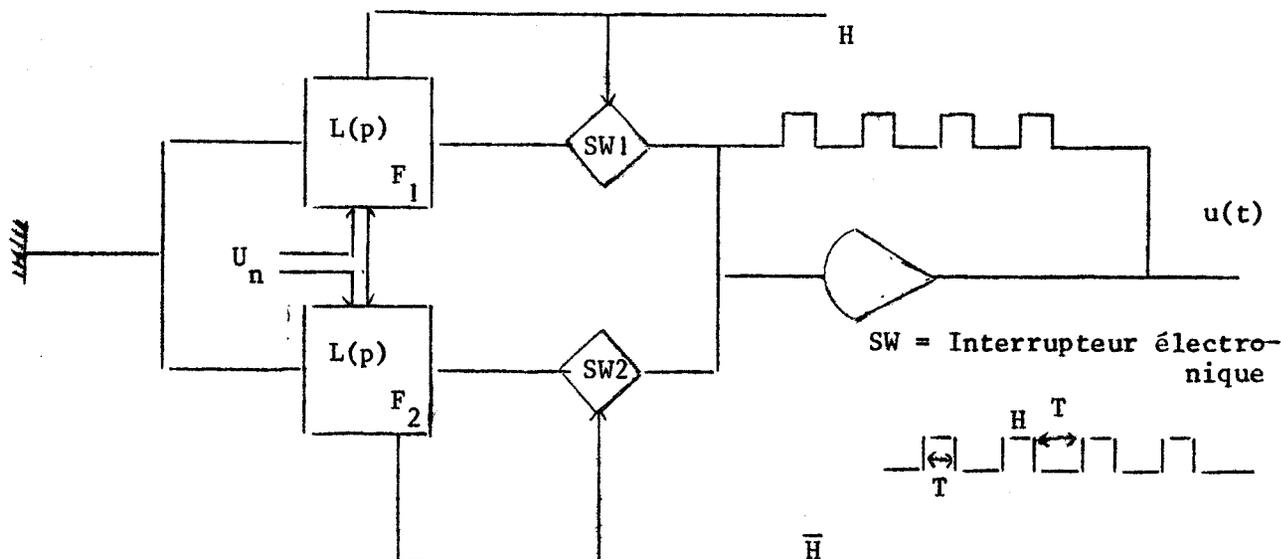
$$X_n = R Y_n$$

Un programme de calcul a été établi pour des valeurs de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  égales à 1 s et 0,5 s respectivement.

Les résultats obtenus pour une période d'échantillonnage T égale à 1,5 s sont consignés en annexe I.

### 2.2. Réalisation du modulateur

Le modulateur est réalisé au moyen d'éléments empruntés au calcul hybride, selon le principe général illustré figure 2



La modulation étant fondée sur la mise en conditions initiales instantanée du filtre  $L(p)$ , des perturbations sont apportées, lors d'une réalisation utilisant des éléments intégrateurs de calculatrice hybride ; ceux-ci ne peuvent pas, en effet, dans un fonctionnement normal, prendre leurs conditions initiales instantanément.

Pour pallier cet inconvénient, il convient de réaliser deux modulateurs identiques ; l'un d'entre eux est en résolution, pendant que l'autre suit le vecteur  $U_n$  définissant les conditions initiales.

De cette manière, le filtre suiveur se trouve constamment en état de fonctionner à partir de conditions initiales convenables aux instants d'échantillonnage.

Un dispositif d'interrupteurs électroniques permet alors d'isoler le système suiveur de l'entrée du système à asservir.

Le fonctionnement est régi par le signal H, selon le tableau logique suivant :

H	F <sub>1</sub>	SW <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	SW <sub>2</sub>
0	IC	Ouvert	OP	Fermé
1	OP	Fermé	IC	Ouvert

### III - SIMULATION SUR CALCULATRICE HYBRIDE

#### 3.1. Réalisation

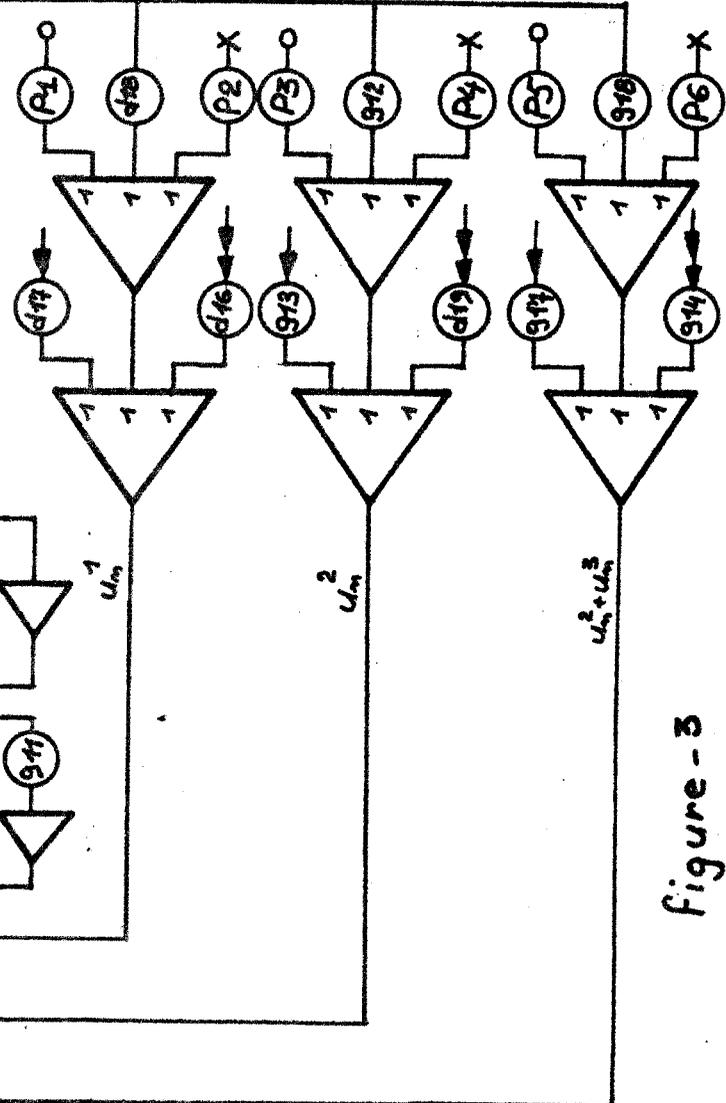
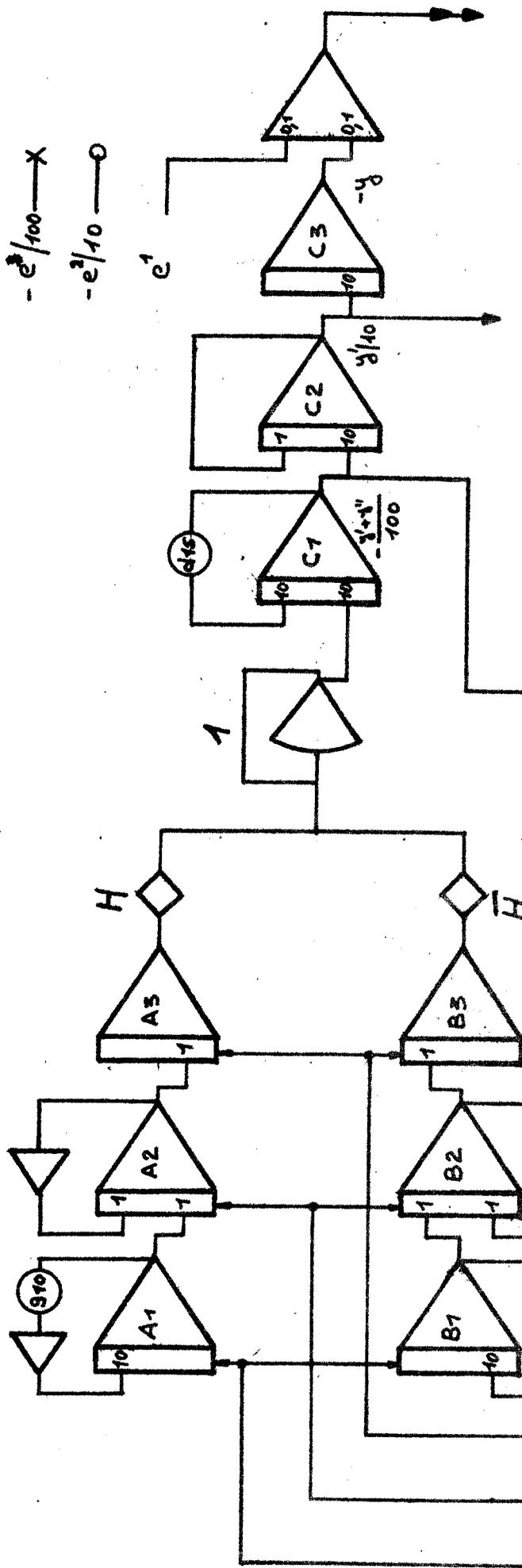
Le schéma de simulation représenté figure 3 a été réalisé sur calculatrice hybride EAI 580.

Les amplificateurs  $A_1, A_2, A_3$  d'une part,  $B_1, B_2, B_3$  d'autre part réalisent les deux modulateurs  $F_1$  et  $F_2$  définis précédemment.

Les amplificateurs  $C_1, C_2$  et  $C_3$  constituent le filtre à asservir ; dans ce sens ils sont constamment commandés en résolution lors de la simulation.

Une bascule bistable délivrant le signal d'horloge H permet d'élaborer la commande logique de  $F_1$  et  $F_2$ .

Les résultats obtenus pour divers types d'entrée sont présentés figures 4-5 et 6.



g10 : 0,2000	d17 : 0,1200
g11 : 0,2000	d18 : 0,3311
g12 : 0,4759	d19 : 0,3623
g13 : 0,1864	P1 : 0,1119
g14 : 0,1902	P2 : 0,1900
g17 : 0,1026	P3 : 0,2627
g18 : 0,2449	P4 : 0,5494
d15 : 0,2000	P5 : 0,1582
d16 : 0,1921	P6 : 0,4431

Figure - 3

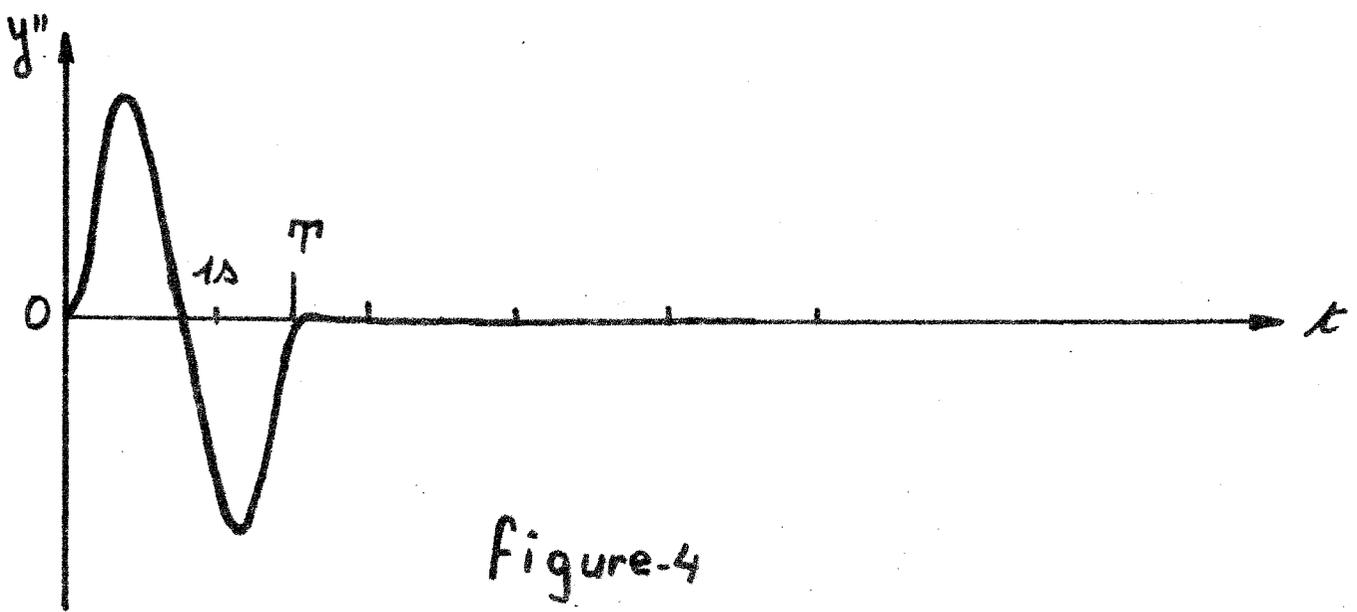
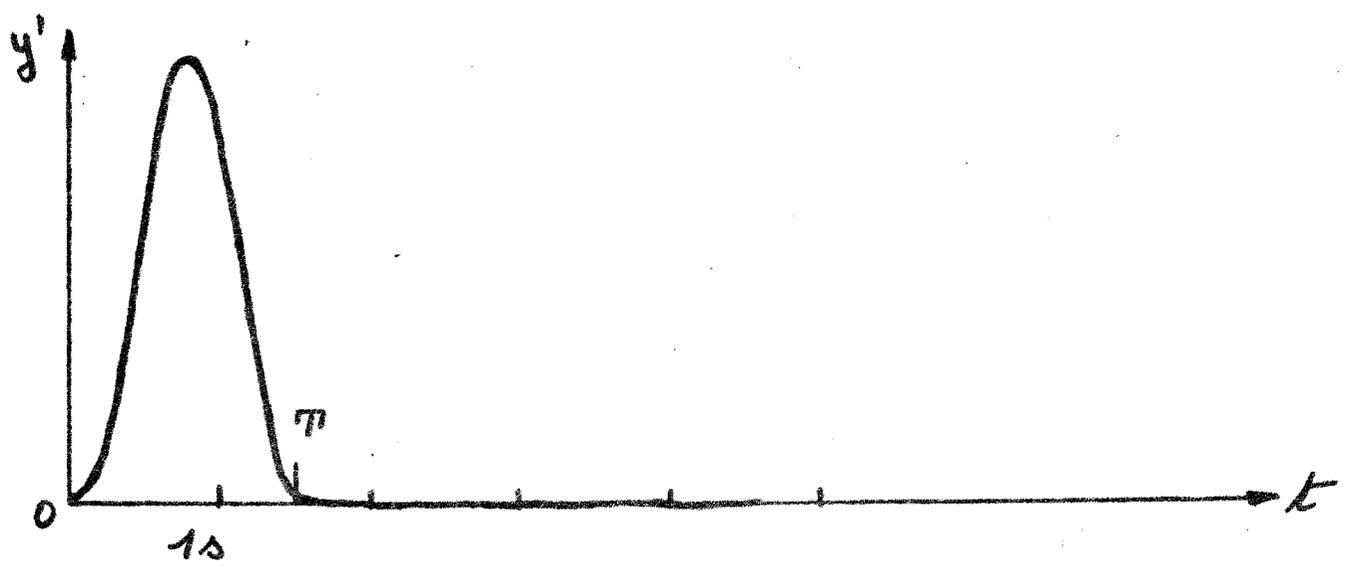
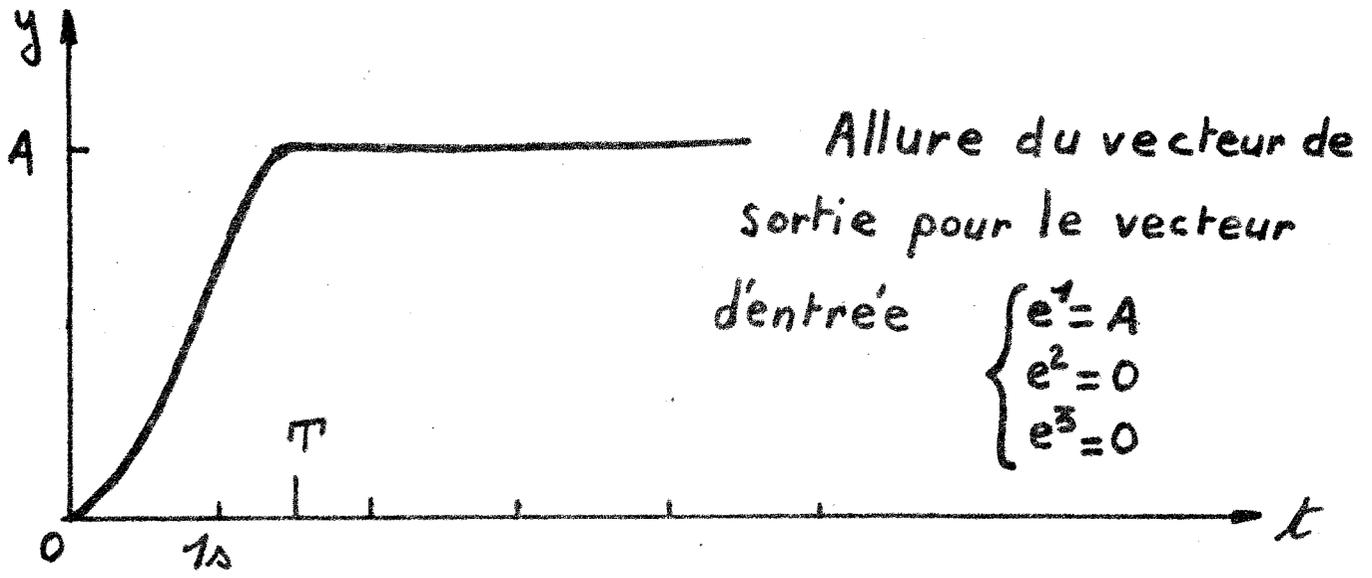
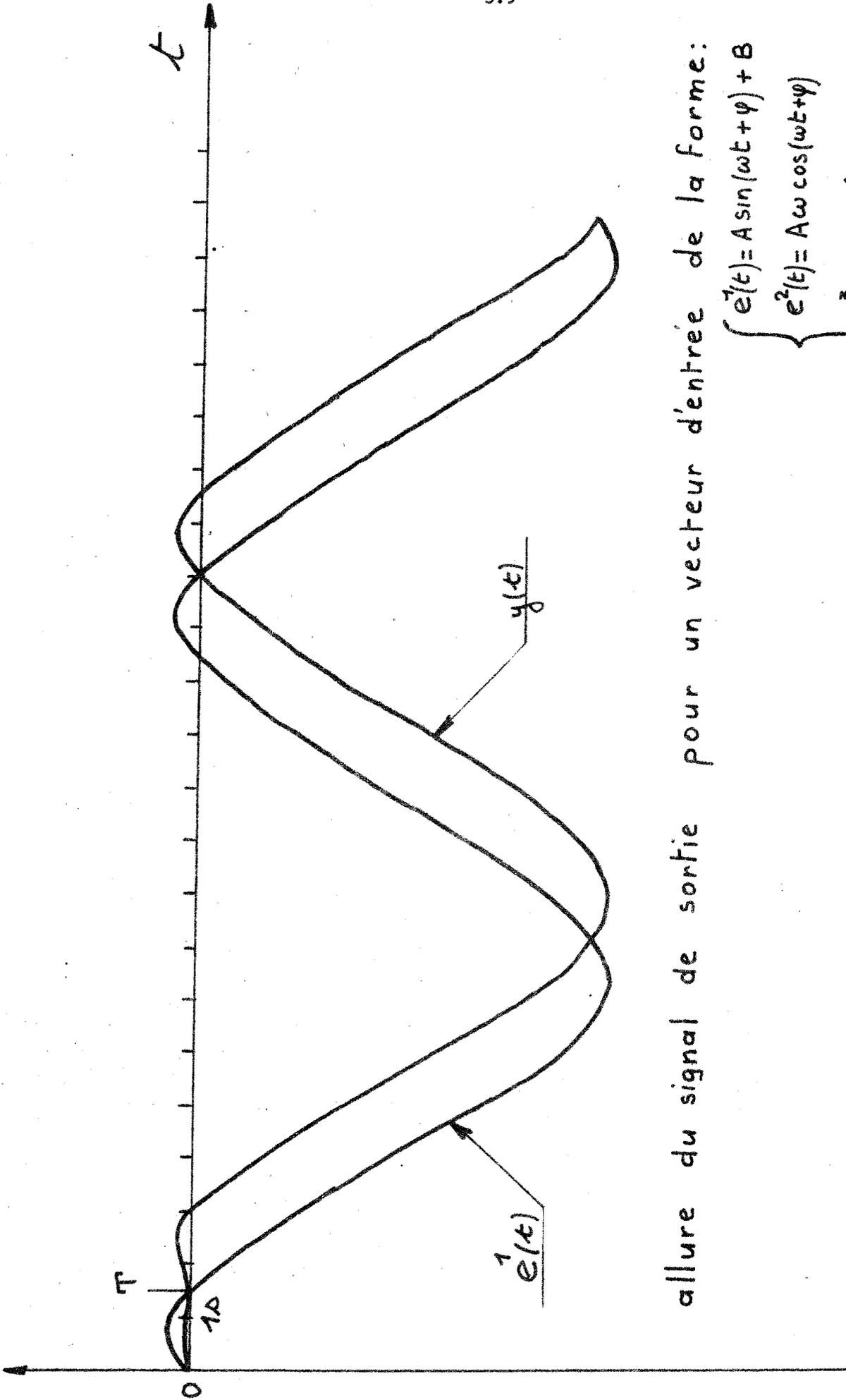


Figure-4



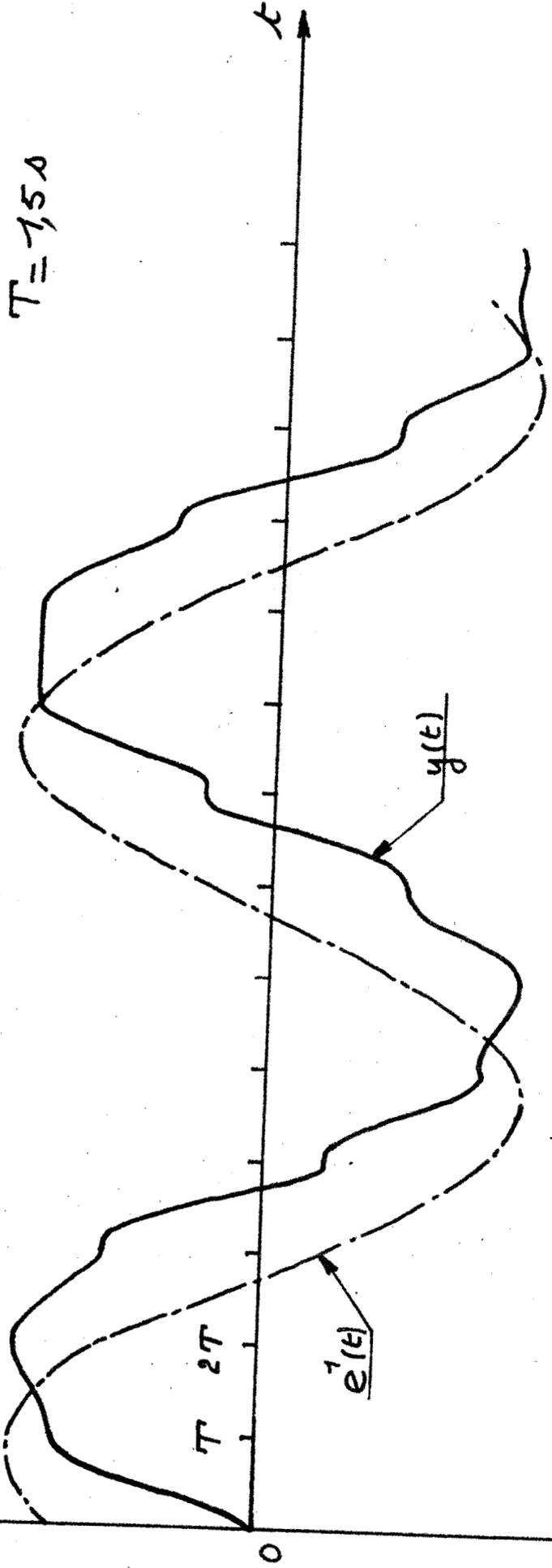
allure du signal de sortie pour un vecteur d'entrée de la forme:

$$\begin{cases} e^1(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + B \\ e^2(t) = A \omega \cos(\omega t + \varphi) \\ e^3(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\omega = 0,465 \text{ s}^{-1}$$

Figure-5

$$T = 1,5 \Delta$$



allure du signal de sortie pour un vecteur d'entrée de la forme:

$$\begin{cases} e^1(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \\ e^2(t) = 0 \\ e^3(t) = 0 \end{cases} \quad \omega = 0,545 \Delta^{-1}$$

Figure-6

### 3.2. Etude de sensibilité

La figure 7 représente la réponse du système à un échelon, obtenue après modification des paramètres de réglages.

Cette réponse met en évidence une oscillation sensible de la sortie autour de la valeur de consigne.

Plus précisément, un dérèglement des paramètres dans des proportions n'excédant pas 5 % de la valeur nominale, conduit à une erreur relative de l'ordre de 10 % sur la réponse du système.

La structure ainsi définie présente donc une sensibilité non négligeable vis à vis des paramètres de réglage.

Ce problème de la sensibilité est en fait spécifique des difficultés technologiques rencontrées lors de la réalisation de structures optimales /8/. En effet, la mise en oeuvre du modulateur nécessite l'utilisation de boucles instables d'amplificateurs et dans ces conditions, toute erreur sur le vecteur de modulation  $U_n$  se trouve propagée avec amplification, le long de la période d'échantillonnage.

Toutefois, le modulateur étant réinitialisé au début de chaque période d'échantillonnage, l'effet de compensation demeure et conduit, dans le cas d'un dérèglement, à la génération d'oscillations autour de la valeur de consigne.

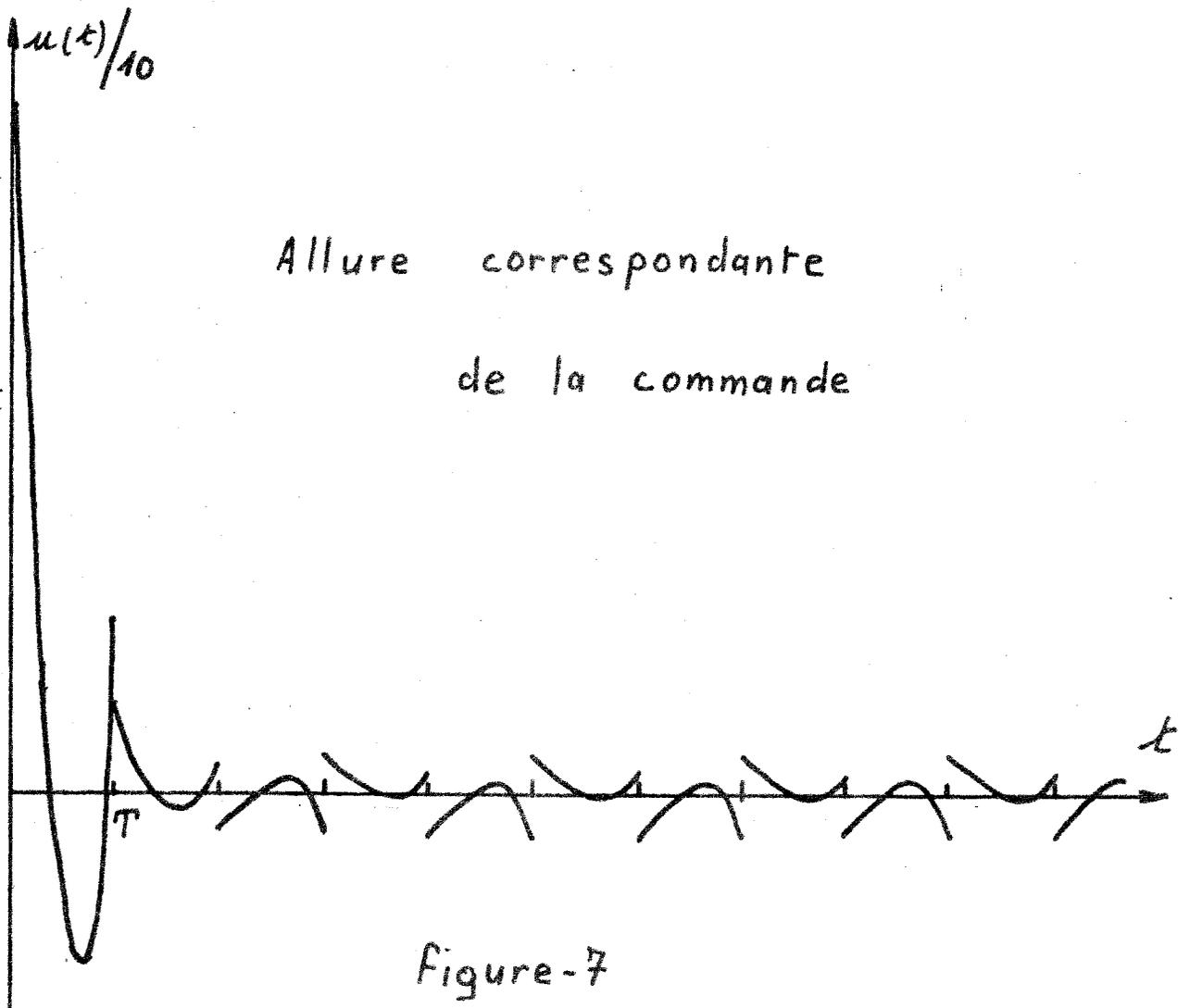
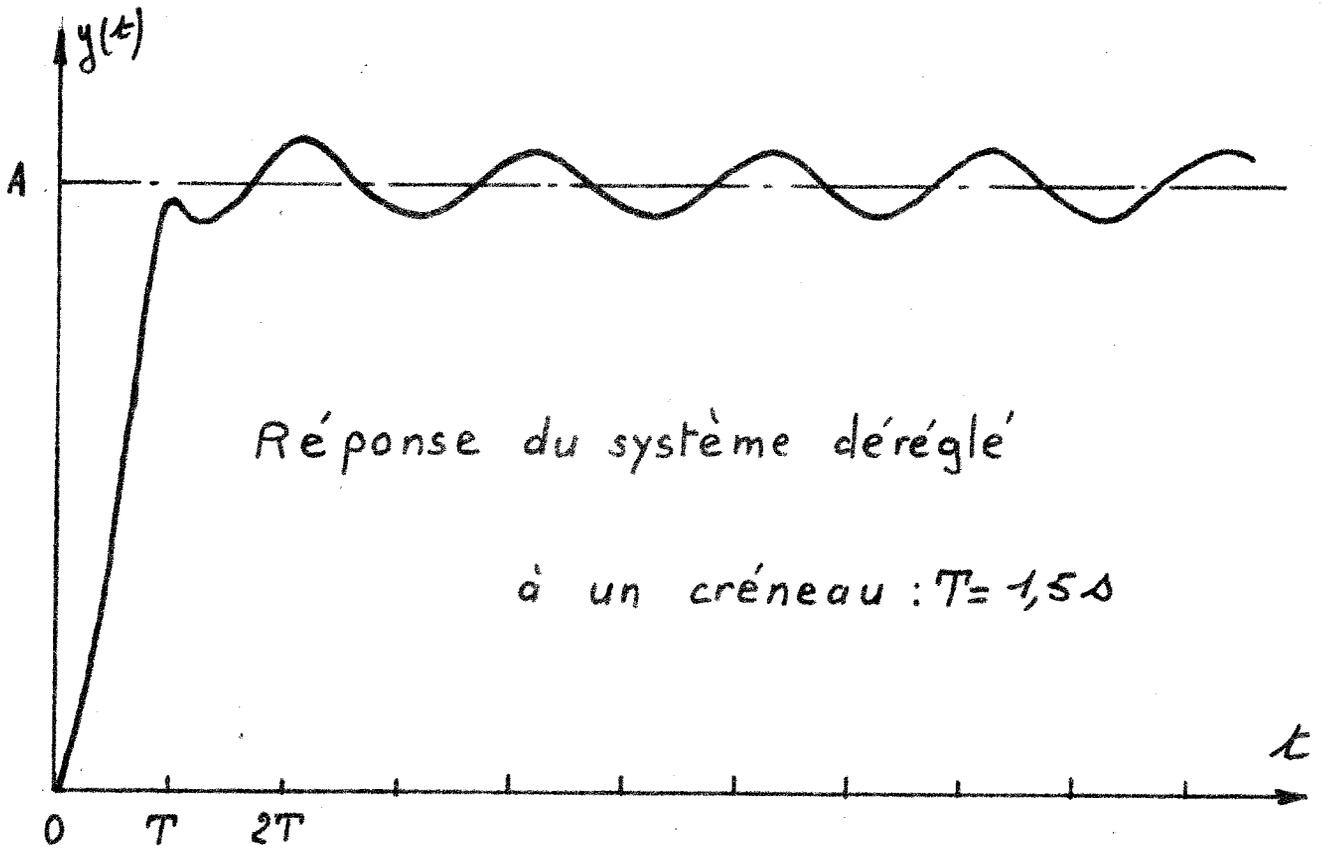


Figure-7

## CONCLUSION

La technique de réalisation d'asservissements multimodulés linéaires, conduit à une mise en oeuvre systématique, par le jeu du "filtre associé".

Un choix particulier de ce filtre permet d'élaborer une commande visant à minimiser l'énergie fournie au système. La structure ainsi obtenue nécessite un réglage délicat ; dans ce sens, une étude qualitative simple permet de mettre en évidence le dilemme optimalité-sensibilité.

Il convient donc, lors de réalisations pratiques, de définir les structures sous optimales présentant une moins grande sensibilité vis à vis des paramètres de réglage.

ANNEXE I

- Programme de calcul des coefficients de réglage du système étudié au chapitre III.
  
- Résultats numériques pour  $T = 1,5 \text{ s}$   
 $\tau_1 = 1 \text{ s}$   
 $\tau_2 = 0,5 \text{ s}$

## LISTING

```
0010 DIM P(3,3),Q(3,3),L(3,3),B(3,3),C(3,3),S(3,3)
0020 DIM R(3,3),A(3,3),M(3,3),N(3,3),U(3,3)
0030 PRINT"V(N+1)=DV(N) + BH(N)"
0035 PRINT"Y(N)=MV(N) , U(N)=MH(N)"
0040 PRINT"Y(N+1)=AY(N) +PU(N)"
0050 MAT P=ZER(3,3)
0060 MAT Q=ZER(3,3)
0070 MAT L=IDN(3,3)
0080 MAT B=ZER(3,3)
0090 MAT C=ZER(3,3)
0100 MAT S=ZER(3,3)
0105 MAT R=ZER(3,3)
0110 MAT A=ZER(3,3)
0120 MAT U=ZER(3,3)
0130 MAT M=ZER(3,3)
0140 MAT N=ZER(3,3)
0142 MAT READ M,N
0144 PRINT"VALEUR DE T"
0150 INPUT T
0160 LET D=EXP(T)
0170 LET L(2,2)=1/D
0180 LET L(3,3)=L(2,2)+2
0190 LET B(1,1)=T
0200 LET B(1,2)=(D-1)
0210 LET B(1,3)=0.5*(D+2-1)
0220 LET B(2,3)=2*(1-D+3)/D/3
0230 LET B(2,2)=(1-D+2)/D
0240 LET B(2,1)=2*(1-D)/D
0250 LET B(3,3)=(D+4-1)/D/D/4
0260 LET B(3,2)=(D+3-1)/D/D/3
0270 LET B(3,1)=0.5*(D+2-1)/D/D
0280 MAT C=INV(B)
0290 PRINT"MATRICE B ET SON INVERSE"
0300 MAT PRINT B,C
0310 MAT R=M*L
0320 MAT A=R*N
0325 MAT S=M*B
0330 MAT P=S*N
0340 PRINT"MATRICES A ET P"
0350 MAT PRINT A,P
0360 MAT Q=INV(P)
0370 MAT U=Q*A
0380 PRINT"MATRICES INV(P) ET INV(P)*A"
0390 MAT PRINT Q,U
0400 STOP
0410 END
5000 1,1,1,0,-1,-2,0,1,4,1,1.5,0.5,0,-2,-1,0,0.5,0.5
```

GØ AHEAD

WAIT

$V(N+1) = DV(N) + BH(N)$

$Y(N) = MV(N)$  ,  $U(N) = MH(N)$

$Y(N+1) = AY(N) + PU(N)$

VALEUR DE T

1.5

MATRICE B ET SON INVERSE

.150000E 01	.348169E 01	.954277E 01
-.155374E 01	-.425856E 01	-.132416E 02
.475106E 00	.147730E 01	.500894E 01
.309173E 02	.584086E 02	.955068E 02
-.260655E 02	-.520741E 02	-.880043E 02
.475500E 01	.981821E 01	.170960E 02

MATRICES A ET P

1	.107863E 01	.301763E 00
0	.396473E 00	.173343E 00
0	-.346686E 00	-.123556E 00
.421367E 00	-.113761E 00	.165303E 00
.603527E 00	-.907602E-01	.609671E 00
.346686E 00	.615814E 00	.191977E 01

MATRICES INV(P) ET INV(P)A

.960682E 01	-.559598E 01	.949939E 00
.165554E 02	-.131361E 02	.274616E 01
-.704544E 01	.522428E 01	-.531552E 00
.960682E 01	.781424E 01	.181159E 01
.165554E 02	.116971E 02	.237947E 01
-.704544E 01	-.534387E 01	-.115478E 01

STOP AT LINE 0400

GO AHEAD

CHAPITRE IV

REALISATION D'UN ASSERVISSEMENT MULTIMODULE  
LINEAIRE SUR GROUPE WARD-LEONARD

INTRODUCTION

Avant d'aborder, au cours des derniers chapitres, l'étude de la modulation non linéaire, il convient d'illustrer les résultats obtenus dans le cadre de l'hypothèse linéaire.

Pour cela, nous définissons, au cours du présent chapitre, une commande réalisée au moyen d'un filtre associé ; cette commande, sous-optimale, conduit alors à un compromis acceptable du double point de vue de l'optimalité et de la sensibilité.

Le signal élaboré est utilisé en vue d'asservir un groupe Ward-Léonard en position. Dans cet esprit, l'utilisation d'une calculatrice hybride semble particulièrement adaptée à l'élaboration d'une commande de ce type.

## I - DESCRIPTION DU SYSTEME

### 1.1. Le groupe Ward-Leonard (figure 1)

Le groupe étudié est un organe de moyenne puissance constitué de quatre éléments essentiels :

- un moteur triphasé asynchrone tournant à vitesse constante ; cet élément constitue une source d'énergie.
- une génératrice à courant continu entraînée par le moteur asynchrone au moyen d'un accouplement mécanique ; la tension d'inducteur de cette génératrice s'identifie au signal de commande du groupe.
- la tension délivrée par la génératrice alimente alors l'induit d'un moteur à courant continu dont l'inducteur est soumis à une tension constante.
- enfin, une génératrice à courant continu, entraînée par ce moteur débite sur un rhéostat de charge.

Une dynamo tachymétrique est montée directement sur l'arbre du moteur à courant continu ; cet élément constitue alors un capteur délivrant, dans un fonctionnement normal, une tension proportionnelle à la vitesse de rotation de l'arbre.

De plus la génératrice de commande est munie d'un dispositif antirémanent assurant un affaiblissement sensible du phénomène d'hystérésis.

### 1.2. Matériel nécessaire à la modulation

Le dispositif de modulation est réalisé au moyen d'éléments empruntés au calcul hybride (calculatrice AD 32).

Le signal multimodulé ainsi élaboré correspond à des tensions de 100 Volts maximum pour des intensités n'excédant pas quelques milliampères. L'utilisation d'un amplificateur est donc indispensable, ceci de manière à fournir à la génératrice du groupe la puissance suffisante.

## II - ETUDE THEORIQUE

### 2.1. Choix du modèle

L'identification du groupe Ward-Léonard conduit à une représentation mathématique simple ; dans l'hypothèse linéaire, un tel système peut, en effet, être assimilé à une transmittance  $L(p)$  s'écrivant // :

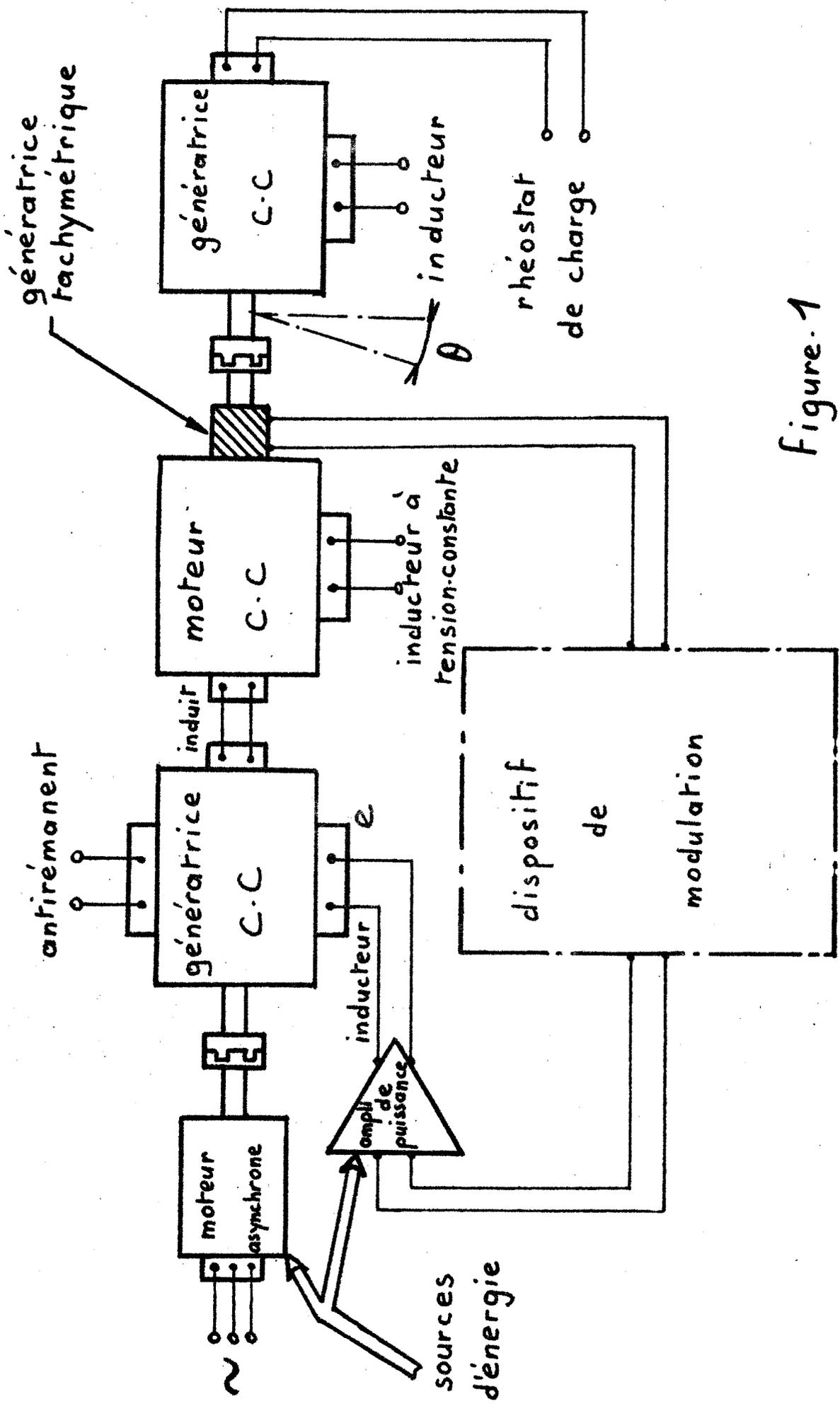


Figure.1

$$(1) \quad L(p) = \frac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} = \frac{\theta}{e}$$

expression dans laquelle  $\theta$  représente la position de l'arbre du moteur à asservir.

Le scalaire  $e$  définit la tension de commande relative à l'inducteur de la génératrice (figure 1).

En outre, les constantes de temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$  ainsi que le gain  $K$  constituent des paramètres spécifiques dépendant des caractéristiques mécaniques et électromagnétiques du groupe.

### 2.2. Hypothèse simplificatrice

Dans le cadre d'une régulation échantillonnée, il est possible d'assimiler le système étudié à un système d'ordre inférieur /9/. Dans ces conditions, pour un choix convenable de la période d'échantillonnage, nous pouvons représenter le groupe par une transmittance du second ordre.

$$(2) \quad L(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)} = \frac{\theta}{e}$$

De cette manière, un vecteur état du système s'écrit :

$$(3) \quad Y = \begin{bmatrix} \theta \\ \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix}$$

### 2.3. Choix du modulateur

Nous envisageons ici la réalisation d'une structure sous optimale au sens de l'énergie.

Dans cet esprit, avant de définir le filtre nécessaire à l'élaboration de la commande, il convient d'analyser les propriétés spécifiques de la conduite optimale correspondante.

Dans le présent exemple, la conduite optimale est élaborée au moyen du filtre de transmittance  $\frac{1}{p(1-\tau p)}$  et s'écrit :

$$(4) \quad \hat{u}(t) = v_n + v'_n (e^{t/\tau} - 1)$$

expression dans laquelle  $v_n$  et  $v'_n$  caractérisent le vecteur de modulation.

Il apparait alors que la fonction  $\hat{u}(t)$  possède la propriété spécifique d'être monotone le long d'une période d'échantillonnage.

Cette propriété se retrouve lorsqu'on donne à la commande  $u(t)$  la forme (5) :

$$(5) \quad u(t) = u_n + u'_n t$$

Il semble donc intéressant d'adopter la fonction définie en (5) comme signal de commande sous optimale.

Le signal  $u(t)$  peut être élaboré au moyen du filtre de transmittance  $\frac{1}{2}$  ; de plus la réalisation du modulateur ne nécessite plus la définition de boucles instables dans un montage utilisant le calcul hybride.

#### 2.4. Résolution

L'équation différentielle régissant le fonctionnement du moteur admet alors l'expression (6).

$$(6) \quad Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/\tau \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\tau \end{bmatrix} u(t)$$

Une telle formule implique :

$$(7) \quad u(t) = K e(t)$$

L'intégration de l'équation (6) entre les instants  $nT$  et  $(n+1)T$ , compte tenu de l'expression de  $u(t)$  donnée en (5) conduit alors à la solution :

$$(8) \quad Y_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} Y_n + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} U_n$$

$U_n^T$  = vecteur ligne de composantes  $u_n$  et  $u'_n$ , avec en posant  $D = e^{-T/\tau}$  :

$$a_{11} = 1 \qquad b_{11} = b_{22} = T - \tau(1-D)$$

$$a_{12} = \tau(1-D) \qquad b_{12} = \frac{T^2}{2} - \tau T + \tau^2(1-D)$$

$$a_{21} = 0 \qquad b_{21} = 1 - D$$

$$a_{22} = D$$

Une vérification simple indique la possibilité d'inverser la matrice de coefficients  $b_{ij}$  pour toute valeur de  $T$ .

Dans ces conditions, il est possible d'envisager un fonctionnement vérifiant la contrainte :

$$(9) \qquad Y_{n+1} = E_n$$

Pour cela il suffit de choisir  $U_n$  tel que :

$$(10) \qquad U_n = P^{-1} (E_n - e^{AT} Y_n)$$

$e^{AT}$  : matrice de coefficients  $a_{ij}$

$P$  : matrice de coefficients  $b_{ij}$

### III - REALISATION DE L'ASSERVISSEMENT

Le modulateur est réalisé selon le principe général défini dans le chapitre précédent.

#### 3.1. Réalisation de l'asservissement

Dans le cas particulier qui nous intéresse, une étude expérimentale préalable conduit à une valeur de  $\tau$  égale à une seconde.

De plus nous adoptons une valeur de  $T$  égale à 2 s.

Dans ces conditions,  $U_n$  est donné par la relation :

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,09 & -1,59 \\ -1,59 & 2,09 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_n \\ e'_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2,09 & 1,60 \\ -1,59 & -1,09 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ y'_n \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } y_n = \theta_n$$

$$y'_n = \theta'_n$$

Le schéma de réalisation est alors indiqué figure - 2 ,

L'intégrateur utilisé à l'élaboration de la fonction  $-\theta$ , reste constamment en résolution.

En outre la valeur du potentiomètre  $k$  est ajustée en fonction du gain  $K$  et du gain en tension de l'amplificateur de puissance. Les valeurs adoptées pour les potentiomètres  $P_i$  sont consignées dans le tableau ci-dessous :

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$
0,159	0,209	0,209	0,159	0,109	0,160	0,159	0,209

Les figures 4, 5,6 représentent les courbes de réponses obtenues pour différents types d'entrées.

### 3.2. Validité du modèle

Il convient de noter que l'assimilation du groupe Ward Leonard, processus non linéaire, à un modèle linéaire d'ordre deux, n'affecte pas de manière sensible l'allure des réponses obtenues. De tels résultats justifient donc convenablement les hypothèses de linéarisation et d'assimilation.

De plus, il n'apparaît pas nécessaire de chercher à compenser parfaitement les non linéarités du groupe. En effet, des essais ont été effectués en déconnectant l'enroulement d'anti-rémanence ; les courbes de réponses obtenues dans ce cas ne sont pas sensiblement modifiées.

G.T = génératrice tachymétrique

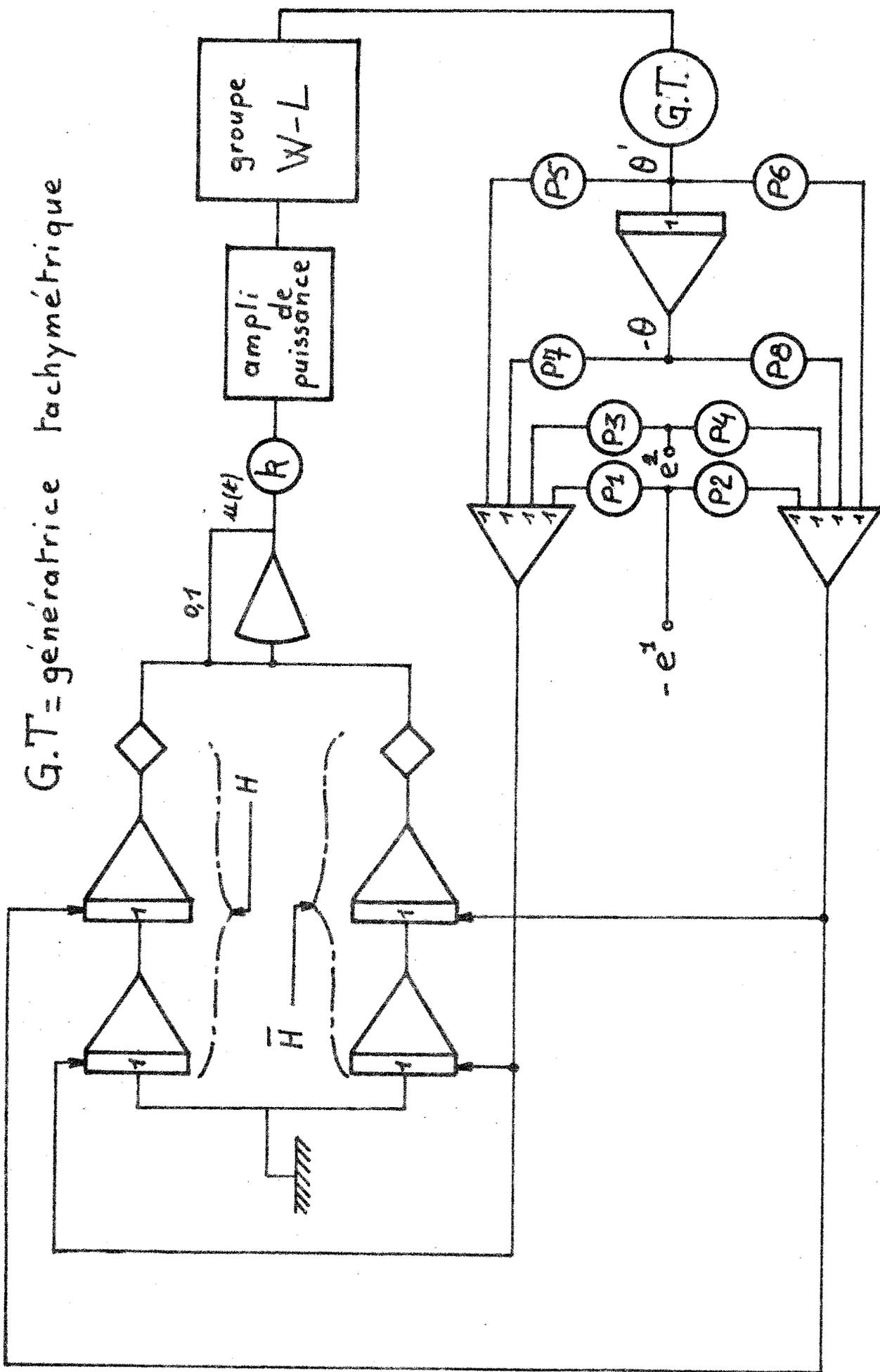


Figure-2

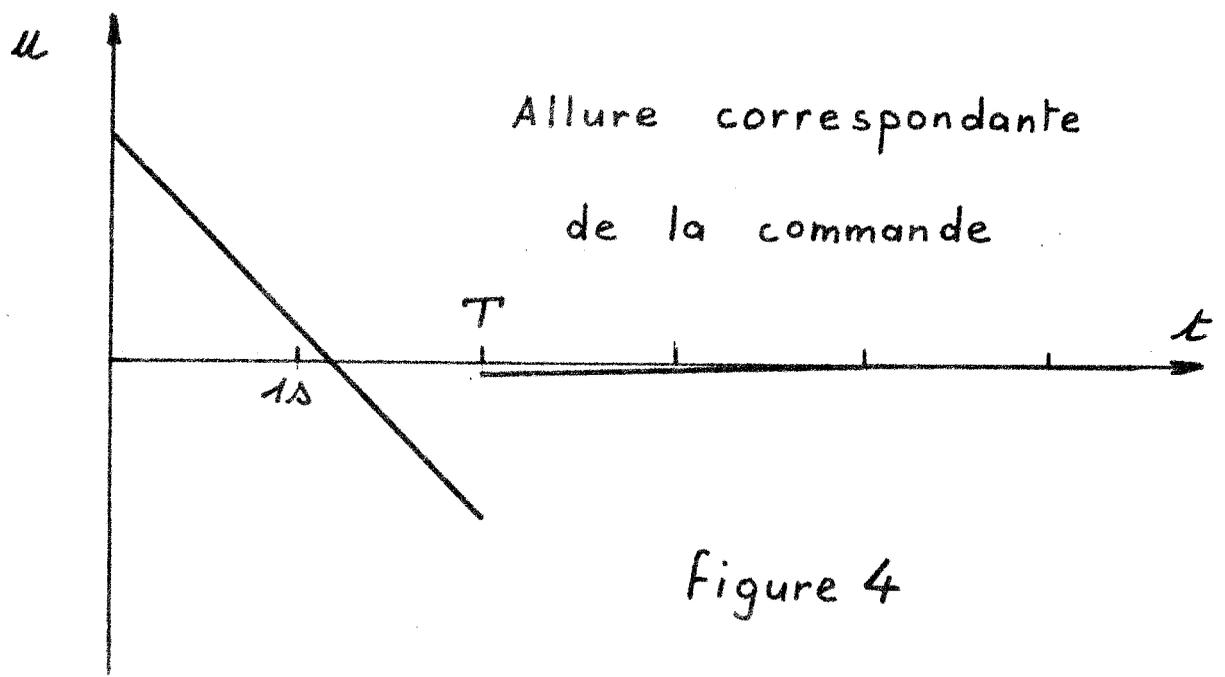
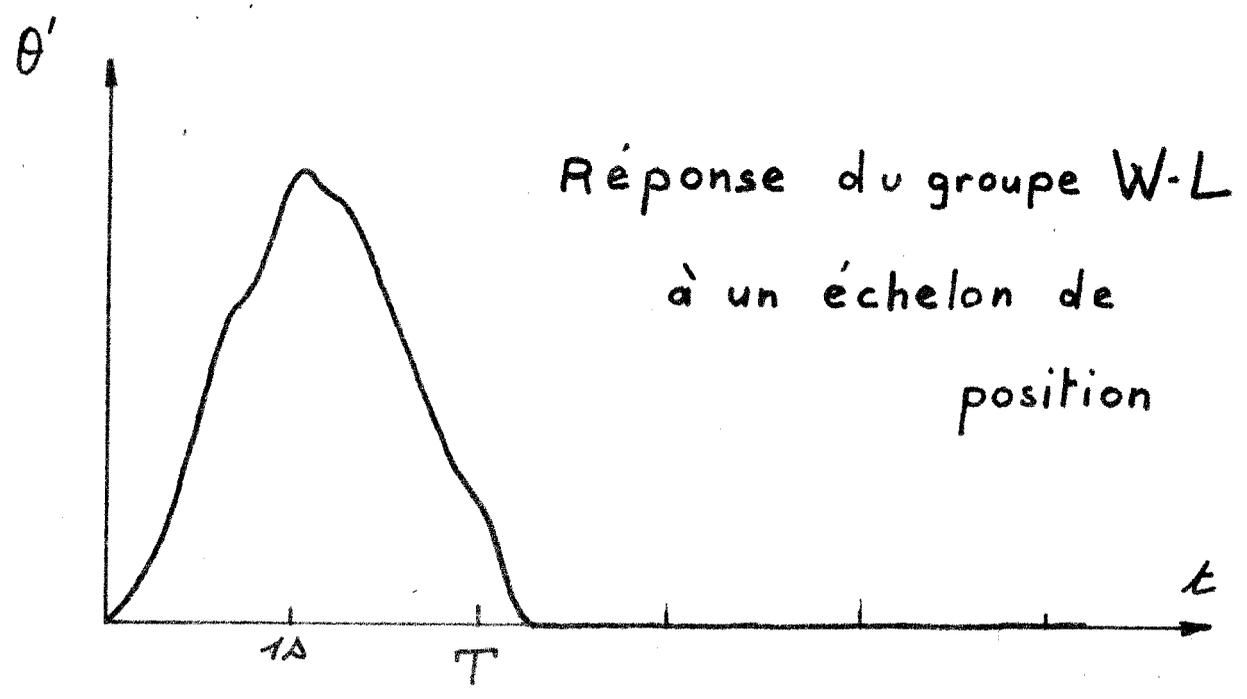
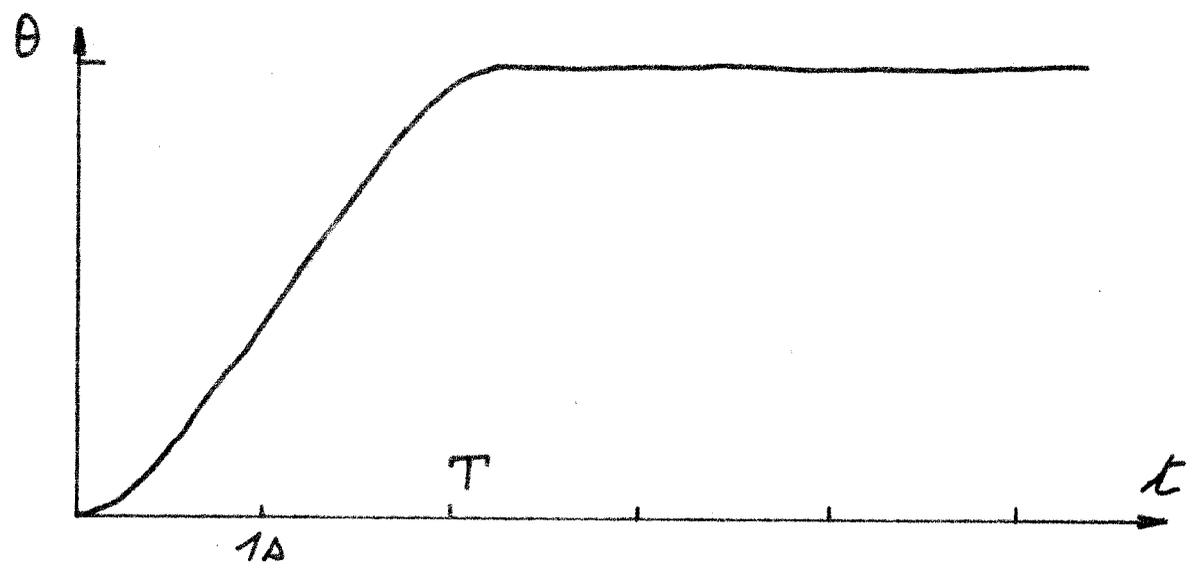


Figure 4

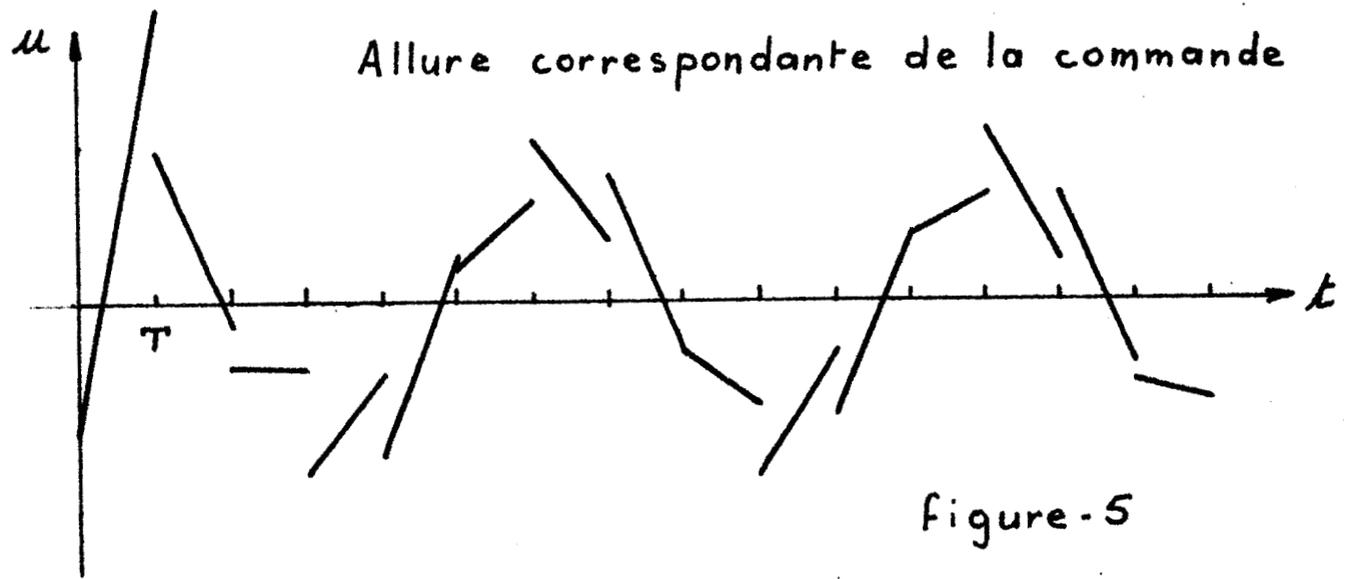
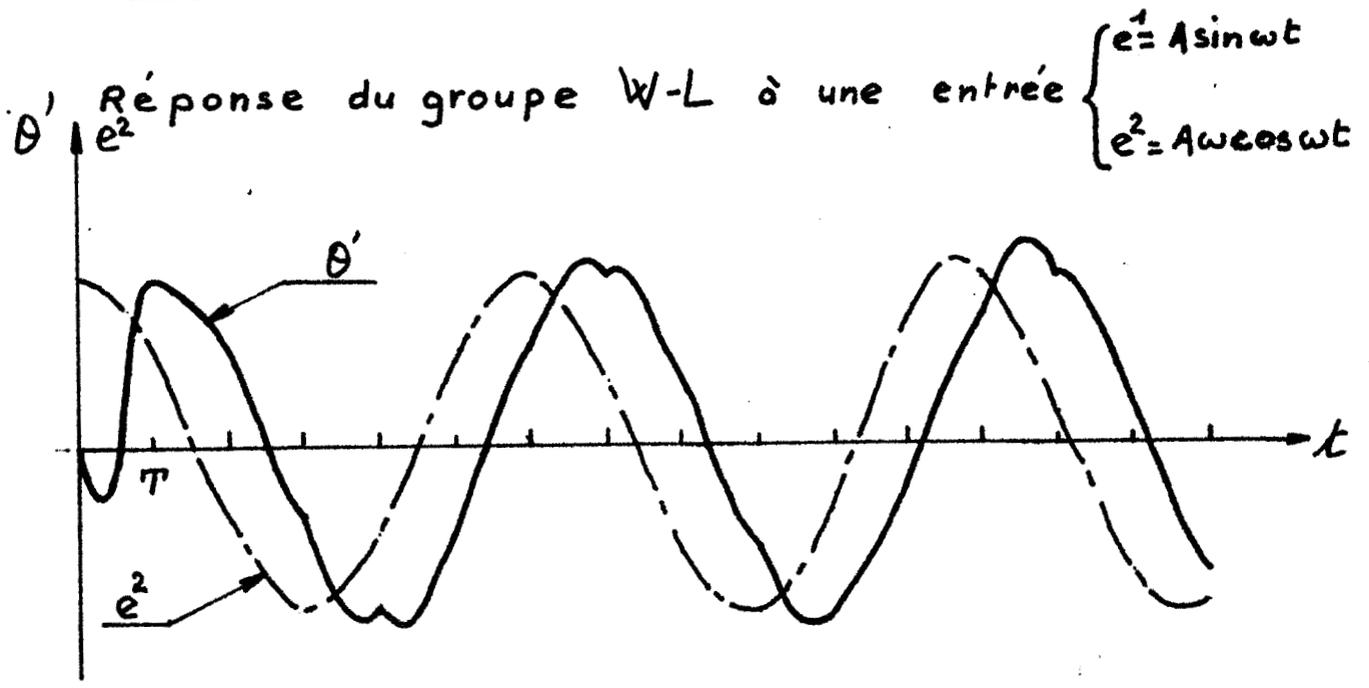
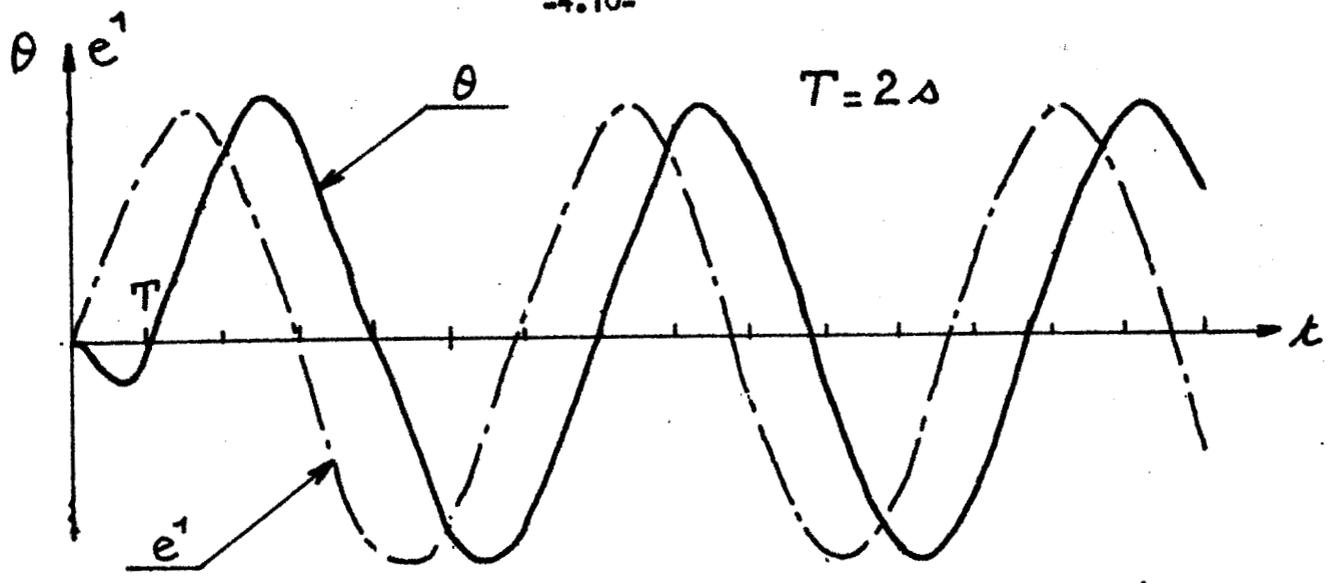


Figure-5

Réponse du groupe W-L à une dent de scie :  $T = 2\Delta$

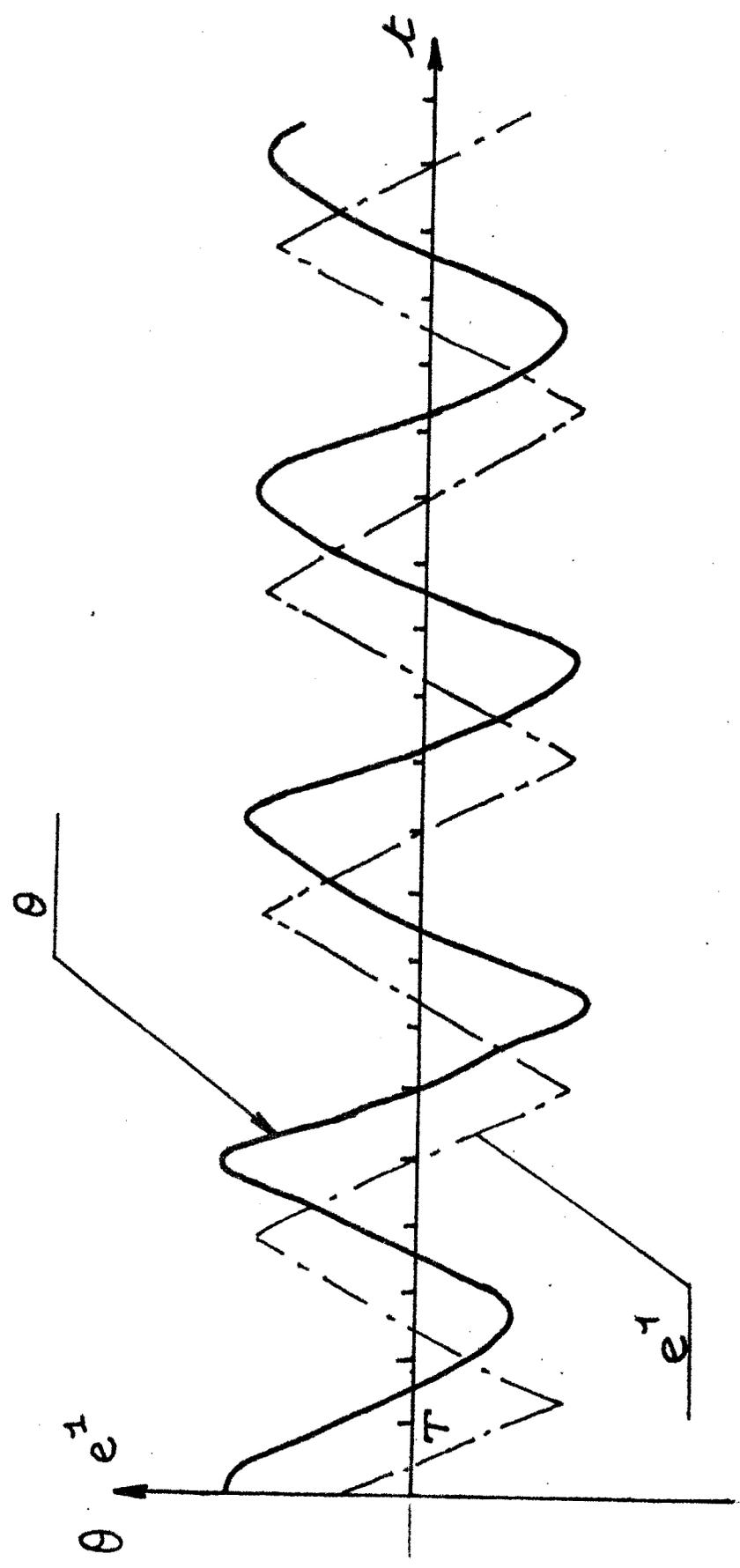


figure - 6

## CONCLUSION

L'ensemble des résultats précédents montre que pour un système non linéaire tel que le groupe Ward Leonard, l'assimilation à une transmittance d'ordre peu élevé n'affecte en rien la qualité des performances réalisées.

De plus la technique de réalisation du modulateur utilisant un filtre associé permet de définir sans difficulté une structure sous optimale.

Une telle structure permet alors la recopie parfaite du vecteur d'entrée aux instants d'échantillonnage, tout en assurant une dissipation d'énergie presque minimale.

---

CHAPITRE V

EXTENSION A CERTAINES CLASSES DE COMMANDES  
NON LINEAIRES.

INTRODUCTION

L'extension des résultats présentés dans les chapitres précédents, à une classe définie de systèmes non linéaires conduit à la synthèse d'un mode précis de commande multimodulée.

L'application de la théorie de l'optimalité permet, dans une première partie, de définir les conditions requises pour la minimisation d'une fonctionnelle donnée du signal de commande.

Il apparaît alors que la présence de certaines non linéarités de type séparable ne modifie pas sensiblement le mode de commande proposé précédemment.

Une seconde partie concerne la définition d'une structure échantillonnée minimisant une fonctionnelle de la commande et de l'état du système.

## I - ETUDE EN BOUCLE OUVERTE

### 1.1. Description du système

Le système étudié est représenté figure 1.

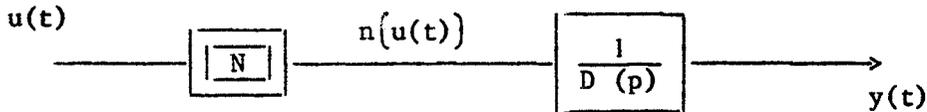


Figure 1

La non linéarité  $N$ , associée au filtre de transmittance  $\frac{1}{D(p)}$  contribue, par le jeu de la commande  $u(t)$ , à l'élaboration du signal  $n(u(t))$ .

Dans ces conditions, il est possible de décrire l'évolution du processus au moyen de l'équation différentielle vectorielle d'ordre  $q$  :

$$(1) \quad \frac{dY}{dt} = A Y(t) + B n(u(t))$$

Dans cette formulation les notations  $Y, A, B$  correspondent à celles des chapitres précédents.

La fonctionnelle à minimiser est définie au moyen de la relation (2) :

$$(2) \quad W = \int_{nT}^{(n+1)T} f(u) dt ,$$

expression dans laquelle  $f$  est une fonction définie continue de la variable  $u$  /10/ ;  $T$  représente la période d'échantillonnage.

### 1.2. Recherche de la commande

Il convient de déterminer la commande  $u(t)$  minimisant la fonctionnelle (2) et permettant de passer en une période d'échantillonnage d'un état défini par le vecteur  $Y(nT) = Y_n$  à l'état  $Y_{n+1}$  imposé.

Dans ce sens désignons par  $\Omega$  le domaine des commandes admissibles ; nous le supposons défini au moyen de la contrainte :

$$(3) \quad |u| \leq M \quad M \text{ constante positive}$$

Dans ces conditions, l'hamiltonien est défini par l'expression (4)

$$(4) \quad H \left[ \begin{array}{c} \bar{Y} \\ \bar{u} \\ \bar{P} \end{array} \right] = -f(u) + P^T(t) \left[ \begin{array}{c} \bar{A} Y(t) + B n(u(t)) \end{array} \right]$$

dans laquelle  $P^T(t)$  est un vecteur ligne de dimension  $q$ , fonction du temps, non encore spécifié.

La commande optimale  $\hat{u}(t)$  est alors définie par la relation :

$$(5) \quad H \left[ \begin{array}{c} \bar{Y} \\ \hat{u} \\ \bar{P} \end{array} \right] = \sup_{u \in \Omega} H \left[ \begin{array}{c} \bar{Y} \\ u \\ \bar{P} \end{array} \right],$$

pour laquelle  $P$  est solution de l'équation différentielle vectorielle (6) :

$$(6) \quad \frac{dP}{dt} = - \frac{\delta H}{\delta Y} = - A^T P$$

Par suite, pour des conditions initiales telles que  $P_n$ , il vient :

$$(7) \quad P(t) = e^{-A^T t} P_n.$$

De cette manière, la structure de l'hamiltonien (4), permet de définir la solution, sous les réserves habituelles d'existence et d'unicité, selon l'expression (8) :

$$(8) \quad \begin{aligned} \hat{u}(t) &= g(v(t)) \\ v(t) &= B^T P(t) \end{aligned}$$

## II - DEFINITION D'UNE STRUCTURE

Les équations de résolution (6) et (8) mettent en évidence une fonction du temps telle que :

$$(9) \quad v(t) = B^T e^{-A^T t} P_n$$

Il découle alors des résultats du chapitre II, la possibilité d'élaborer le signal  $v(t)$  au moyen d'un filtre d'entrée nulle et de transmittance  $\frac{1}{D(p)}$ , convenablement initialisé.

Dans ces conditions, la modulation utilisant le filtre de transmittance  $\frac{1}{D(p)}$ , peut être envisagée, à condition de faire suivre le modulateur d'une non linéarité réalisant la fonction  $g$  définie en (8).

On en déduit la structure du système asservi représenté figure 2.

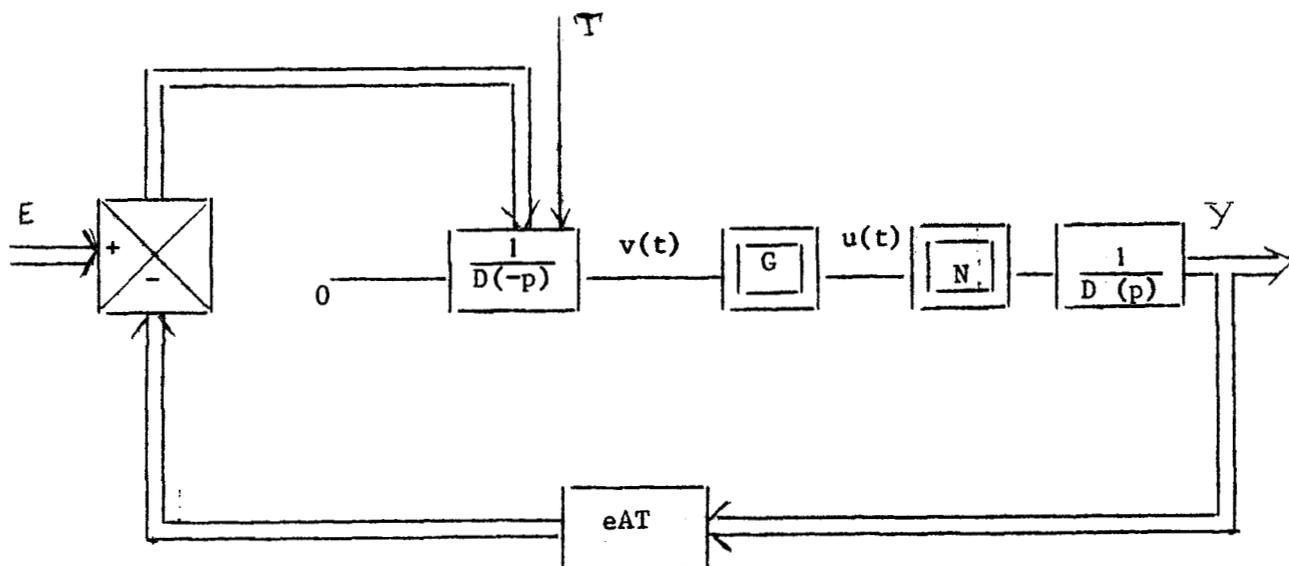


Figure 2

La non linéarité  $G$  élabore, à partir de  $v(t)$ , le signal de commande  $u(t)$ .

Un choix convenable du vecteur  $U_n$ , élaboré à partir des grandeurs de consigne  $E_n$  et des informations concernant l'état du système permet d'imposer la contrainte :

$$(10) \quad Y_{n+1} = E_n$$

### III - GENERALISATION

#### 3.1. Principe

L'extension des résultats obtenus précédemment peut être envisagée lorsque l'entrée, non nulle, du filtre définissant le modulateur est élaborée à partir des différentes grandeurs caractérisant d'une part l'état du système d'autre part l'état du modulateur.

Pour cela, si  $U(t)$  est un vecteur spécifique de l'état du modulateur, l'évolution du processus est décrite par le système d'équations (11).

$$\begin{aligned} (11a) \quad & \frac{dY}{dt} = A Y + B u \\ (11b) \quad & \frac{dU}{dt} = C U + D e \\ (11c) \quad & u = k(Y, U) \\ (11d) \quad & e = h(Y, U) \end{aligned}$$

Les relations (11a) et (11b) définissent respectivement les équations de fonctionnement du filtre à régler et du filtre spécifiant le modulateur.

En outre, les entrées sont déterminées en (11c) et (11d) au moyen des fonctions scalaires  $k(Y, U)$  et  $h(Y, U)$ .

### 3.2. Mise en oeuvre

L'intégration du système précédent, entre les instants d'échantillonnage  $nT$  et  $(n+1)T$  permet alors de déterminer  $Y(t)$ . Il vient :

$$(12) \quad \left[ \begin{array}{l} Y(t) = \phi(Y_n, U_n, t) \\ \text{avec } \phi(Y_n, U_n, 0) = Y_n \end{array} \right.$$

Dans cette formulation,  $Y_n$  et  $U_n$  représentent les conditions initiales, prises à l'instant  $nT$ , des vecteurs  $Y(t)$  et  $U(t)$ .

Il est alors possible d'envisager l'asservissement de la sortie du filtre à un vecteur d'entrée  $E$  de dimension  $q$  ; un tel fonctionnement impose la détermination, à chaque instant d'échantillonnage, du vecteur  $U_n$  satisfaisant la relation :

$$(13) \quad E_n = \phi \left[ \begin{array}{l} Y_n, U_n, T \end{array} \right]$$

L'existence d'une solution à cette équation permet la réalisation d'un asservissement fonctionnant, aux instants d'échantillonnage, en organe de copie du vecteur de consigne.

L'ensemble des relations (11), (12) et (13) définit la structure bouclée représentée ci-dessous (figure 3) :

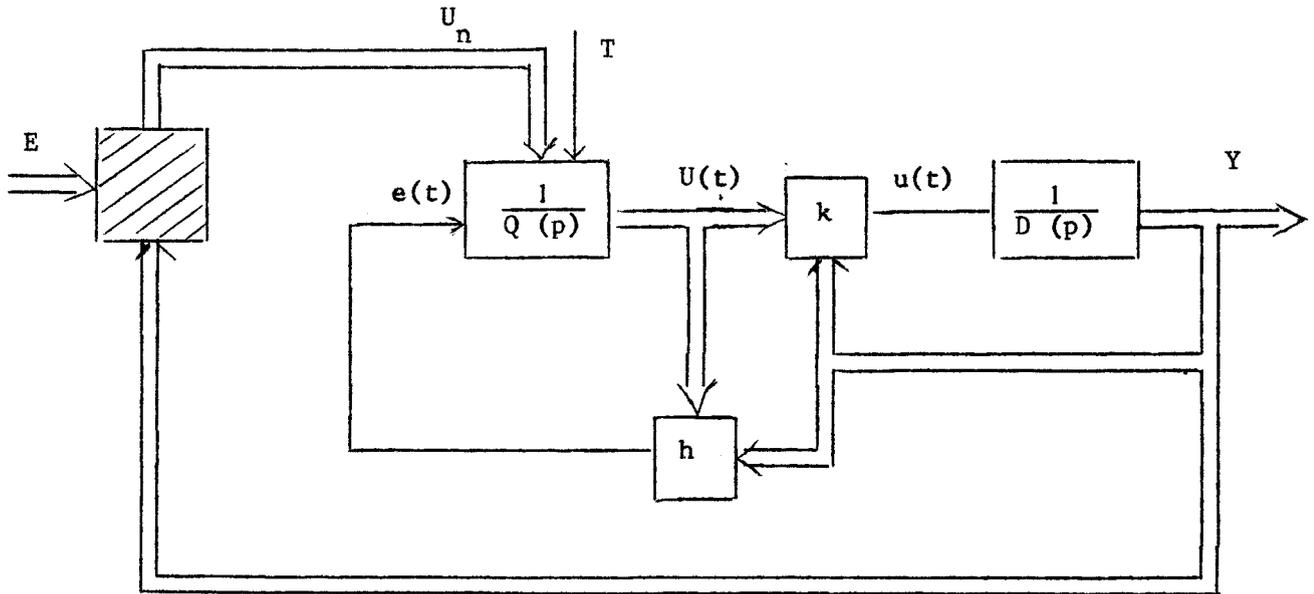


Figure 3

Le filtre de transmittance  $\frac{1}{Q(p)}$  est convenablement initialisé au début de chaque période d'échantillonnage, de manière à satisfaire la contrainte :  $Y_{n+1} = E_n$ .

#### IV - STRUCTURE OPTIMALE

##### 4.1. Position du problème

Nous envisageons maintenant une adaptation de la structure précédente au problème de minimisation d'une fonctionnelle de l'état et de la commande du système .

$$(14) \quad W = \int_{nT}^{(n+1)T} \left[ f_1(u) + f_2(Y) \right] dt$$

Dans cette formulation, les fonctions scalaires  $f_1$  et  $f_2$  sont définies continues par rapport aux variables  $u$  et  $Y$  ; en outre,  $f_2$  est supposée dérivable par rapport à  $Y$ .

Dans ces conditions, la fonction hamiltonienne prend la forme (15) :

$$(15) \quad H \left[ \overline{Y, u, P} \right] = - f_1(u) - f_2(Y) + P^T(t) \left[ \overline{AY + Bu(t)} \right]$$

La commande optimale  $\hat{u}(t)$  et le vecteur adjoint  $P(t)$  vérifient alors les relations (16) :

$$(16) \quad \begin{cases} (16a) & \hat{u}(t) = g \left( v(t) \right) \\ (16b) & v(t) = B^T P(t) \\ (16c) & \frac{dP}{dt} = - \frac{\delta H}{\delta Y} = - A^T P + \frac{\delta f_2}{\delta Y} \end{cases}$$

#### 4.2. Interprétation

Désignons par  $F_2(p)$  la transformée de Laplace, lorsqu'elle existe, de l'expression  $\frac{\delta f_2}{\delta Y}$  définie en (16c).

La transformée de la fonction  $v(t)$  définie en (16b) s'écrit :

$$(17) \quad v(p) = B^T (pI + A^T)^{-1} P_n + B^T (pI + A^T)^{-1} F_2(p) ,$$

c'est-à-dire :

$$(18) \quad v(p) = \frac{1}{D(-p)} V^T(p) P_n + \frac{1}{D(-p)} V^T(p) F_2(p)$$

Dans cette expression, le vecteur  $V^T(p)$ , de dimension  $q$ , admet pour composantes :  $(-1, p, -p^2, \dots, (-1)^q p^{q-1})$ .

La fonction  $v(p)$  s'interprète alors comme la transformée de la sortie du filtre de transmittance  $\frac{1}{D(-p)}$ , initialisé par  $P_n$  et soumis à l'entrée :

$$(19) \quad e(p) = V^T(p) F_2(p) .$$

L'existence de la transformée  $e(p)$  exige donc la dérivabilité de la  $i^{\text{ème}}$  composante  $\frac{\delta f_2}{\delta Y}$  jusqu'à l'ordre  $i-1$  ; dans ces conditions, l'étude précédente conduit à une structure voisine de celle présentée figure 3.

En particulier le signal  $e(t)$  ne peut être élaboré qu'à partir d'une connaissance complète de l'état du système et du filtre associé.

## CONCLUSION

L'utilisation, en tant que modulateur, d'un filtre d'entrée nulle, convenablement initialisé au début de chaque période d'échantillonnage conduit à la réalisation de structures multimodulées parfaitement définies. Ce mode de régulation permet en outre, pour un choix approprié du filtre associé, un fonctionnement spécifique caractérisé par la minimisation, entre les instants d'échantillonnage, d'une fonctionnelle dépendant uniquement de la commande.

Il convient de noter que le fait d'imposer une entrée non nulle au filtre associé ne modifie pas sensiblement les caractéristiques de l'asservissement ; dans ce cas, en effet, il est possible, sous réserve de disposer des informations nécessaires, d'assurer une réponse sans erreur en un temps fini. Un choix particulier du modulateur conduit alors à une structure optimale assurant la minimisation d'une fonctionnelle de l'état et de la commande, entre deux échantillonnages.

CHAPITRE VI

REALISATION D'UNE COMPENSATION  
UTILISANT UN CALCULATEUR NUMERIQUE

INTRODUCTION

La réalisation d'une modulation linéaire conduit à une mise en oeuvre simple sur calculatrice hybride ; en particulier, la détermination et le réglage des paramètres de modulation s'effectue uniquement par le jeu de bouclages analogiques.

Toutefois, diverses contraintes imposent, dans certains cas, l'adoption d'une modulation non linéaire plutôt que linéaire.

Dans ce cas, la mise en oeuvre d'un calculateur numérique de processus devient souvent indispensable.

Afin d'illustrer cet aspect, nous présentons, dans ce chapitre, un exemple utilisant les techniques du calcul en temps réel.

## I - DEFINITION DE LA MODULATION

### I.1. Position du problème

Il s'agit d'asservir, en position, un moteur représenté par une transmittance  $L(p)$ , du second ordre:

$$(1) \quad L(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)}$$

Nous envisageons d'imposer une commande minimisant la consommation entre les instants d'échantillonnage (2).

$$(2) \quad W = \int_{nT}^{(n+1)T} |u| dt$$

Cette expression définit la fonctionnelle à minimiser sur une période d'échantillonnage. Le domaine  $\Omega$  des commandes admissibles est défini par la contrainte (3) :

$$(3) \quad |u| \leq M$$

### I.2. Résolution (cf chapitre V)

L'hamiltonien admet alors l'expression :

$$(4) \quad H = -|u| + P^T (AY + Bu)$$

Dans une telle formulation,  $P^T B$  est une fonction scalaire s'écrivant (cf chapitre IV § 2.3).

$$(5) \quad P^T B = v_n + v'_n (e^{t/\tau} - 1)$$

La maximisation de l'hamiltonien conduit alors à la solution optimale  $\hat{u}(t)$  donnée par la relation (6)

$$(6) \quad -|\hat{u}| + P^T B \hat{u} \geq -|u| + P^T B u \quad \forall u \in \Omega$$

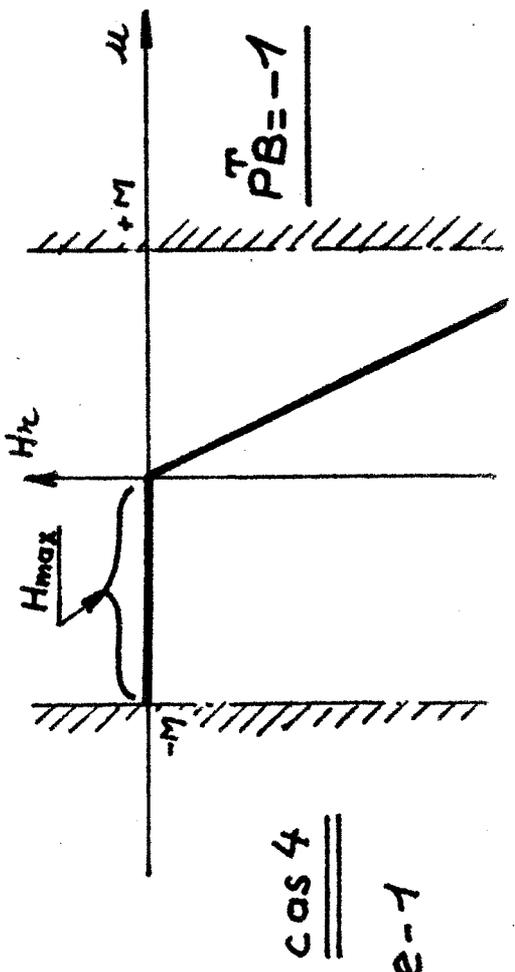
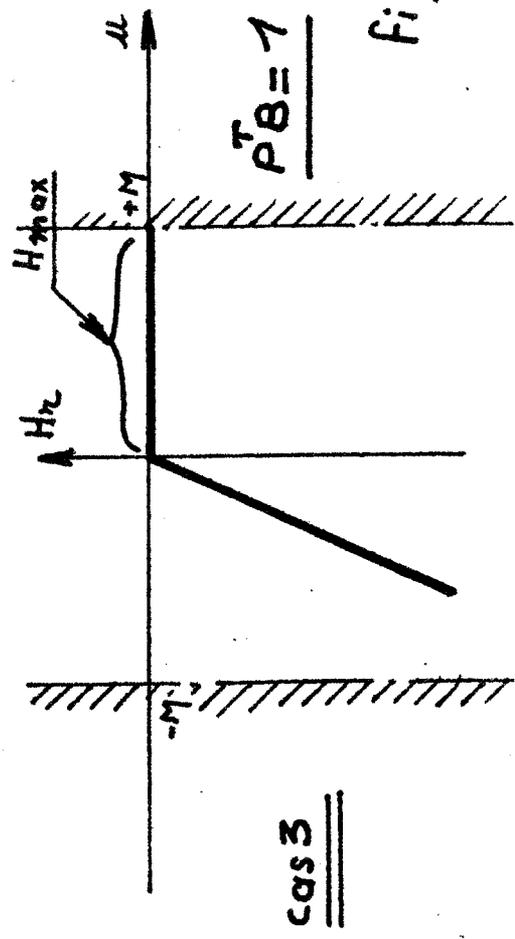
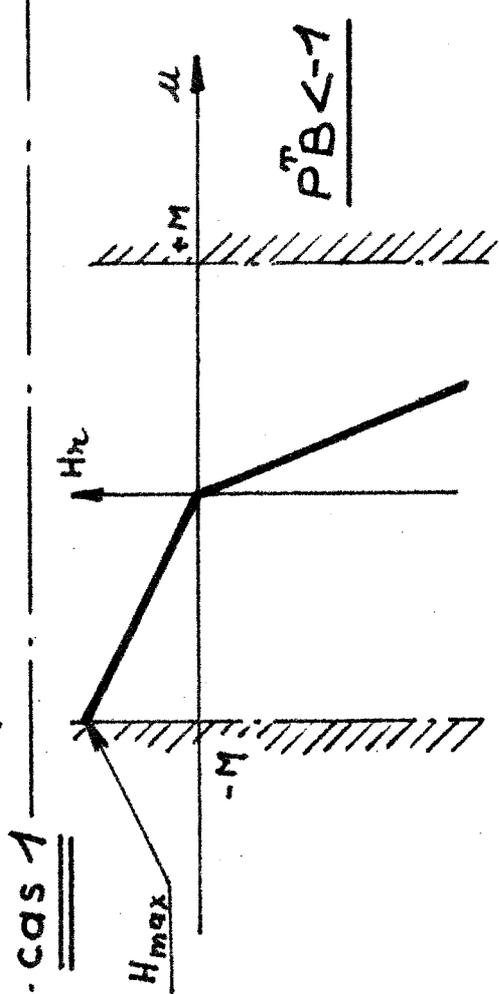
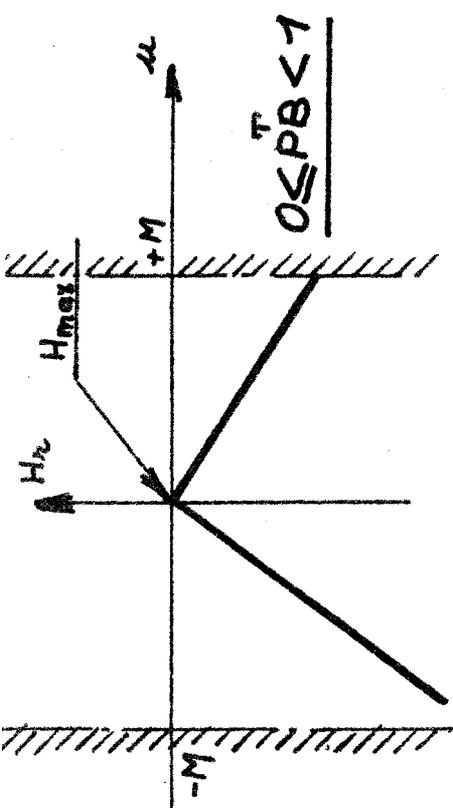
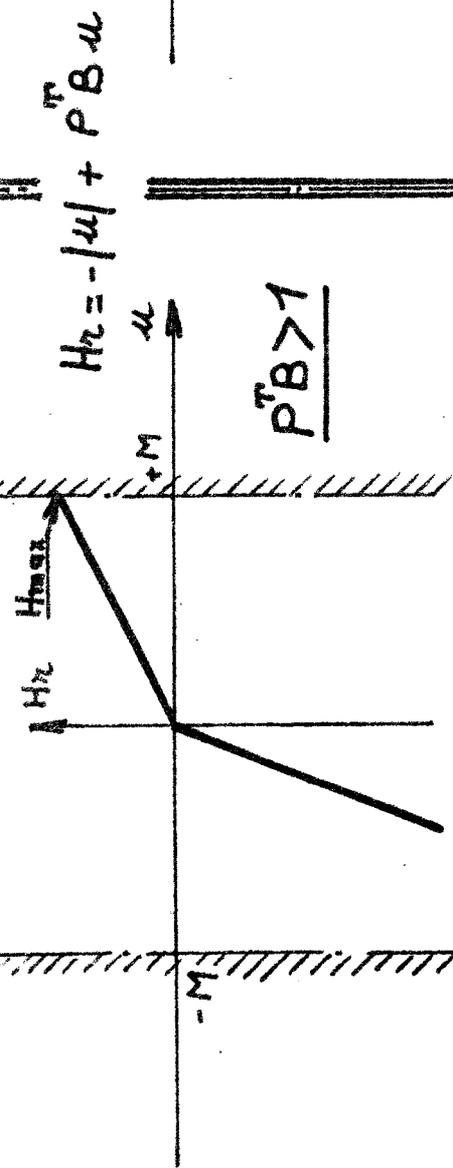


figure-1

Dans ce sens, la figure 1 donne l'interprétation géométrique de cette solution ; il convient de distinguer quatre cas :

1<sup>er</sup> cas :  $|P^T B| > 1$ ,

La valeur maximale de H est obtenue pour  $\hat{u} = M \text{ signe } (P^T B)$

2<sup>ème</sup> cas :  $|P^T B| < 1$

$\hat{u}(t)$  est nulle dans ce cas.

3<sup>ème</sup> cas :  $P^T B = 1$

Toute valeur de  $u(t)$  positive et inférieure à M convient .

4<sup>ème</sup> cas :  $P^T B = -1$

Toute valeur de  $u(t)$  négative et vérifiant la contrainte (3) est solution de l'équation (6).

Il est alors possible de définir l'allure de la commande optimale à l'intérieur d'une période d'échantillonnage ; en effet  $\hat{u}(t)$  est caractérisée par une suite d'impulsions de niveau + ou - M et de durée variable, éventuellement séparées par des intervalles de temps tels que  $[t_1, t_2]$  à commande nulle, (fig. 2).

Plus précisément la fonction  $P^T B$  étant monotone, la commande ne peut changer de signe qu'une seule fois au cours d'une période d'échantillonnage, elle est donc constituée de deux impulsions au maximum, comme le montre la figure ci-dessous (figure 2).

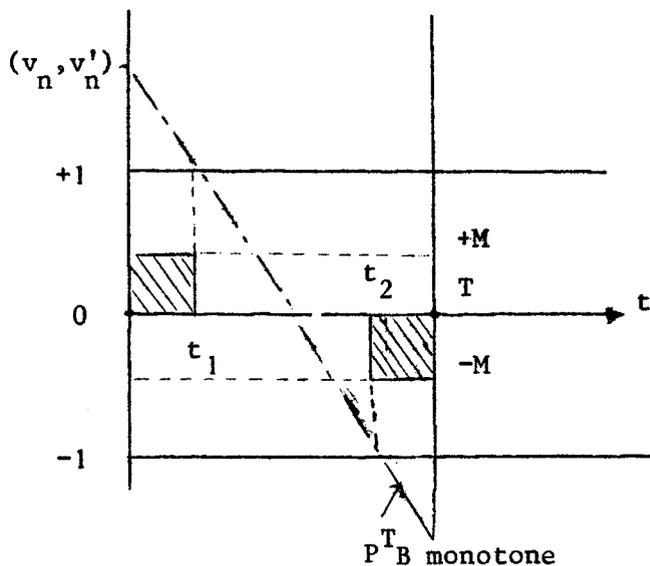


Figure 2

Il convient alors de remarquer que dans les cas 3 et 4 pour lesquels  $|P^T B| = 1$ , il est possible de faire correspondre une commande du même type, caractérisée toutefois par une suite d'impulsions de même signe.

De cette manière, la commande s'annule sur le segment  $[t_1, t_2]$  quels que soient  $t_1$  et  $t_2$  tels que  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ .

## II - DOMAINE D'ATTEIGNABILITE

### 2.1. Mise en équation

Le domaine d'atteignabilité en une période d'échantillonnage est la région de l'espace d'état à l'intérieur de laquelle doit se trouver l'extrémité du vecteur  $E_n - e^{AT} Y_n$  pour qu'il soit possible d'atteindre l'état  $Y_{n+1} = E_n$  au bout du temps  $T$  (cf chapitre I) à partir de  $Y_n$ .

Dans ce sens, le système étant linéaire, il revient au même de définir l'ensemble des états accessibles en une période d'échantillonnage à partir de conditions initiales nulles.

Afin de simplifier les calculs nous prendrons pour variables d'état :

$$y + \tau y' = C_1 \quad \text{et} \quad y' = C_2 \quad ;$$

dans ces expressions  $y$  et  $y'$  représentent respectivement la sortie du filtre et sa dérivée.

De cette manière, si  $C_1(0)$  et  $C_2(0)$  sont nuls,  $C_1(T)$  et  $C_2(T)$  sont définis par les relations suivantes.

$$(7) \quad C_1(T) = \left[ \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 (T-t_2) \right] M$$

$$(8) \quad C_2(T) = \left[ \varepsilon_1 e^{-(T-t_1)/\tau} (1 - e^{-t_1/\tau}) + \varepsilon_2 (1 - e^{-(T-t_2)/\tau}) \right] M$$

Dans ces formulations  $t_1$  et  $t_2$  représentent les instants indiqués figure 2. En outre  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  admettent les expressions définies ci-dessous :

$$(9) \quad \varepsilon_1 = \text{signe}(\hat{u}) \quad \text{sur} \quad (0, t_1)$$

$$(10) \quad \varepsilon_2 = \text{signe}(\hat{u}) \quad \text{sur} \quad (t_2, T)$$

2.2. Domaine de commandabilité

Le domaine de commandabilité est représenté figure 3 dans le plan des variables réduites  $(\frac{C_1}{M\tau}, \frac{C_2}{M})$  ; la valeur de  $\frac{T}{\tau}$  adoptée dans l'exemple est égale à deux.

Nous posons alors :

$$\gamma_1 = \frac{C_1}{M\tau} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{C_2}{M}$$

Seule la moitié du domaine de commandabilité représenté figure 3 a été déterminée par le calcul (courbes 1, 1', 2 et 3) ; l'autre moitié s'en déduit aisément par une transformation de  $\hat{u}(t)$  en  $-\hat{u}(t)$ .

Dans ces conditions, les courbes 1, 1', 2 et 3 définissent deux sous domaines I et II dont les caractéristiques sont consignées dans les tableaux suivants :

Courbes	Equations	Allure de la commande	
1	$\gamma_2 = 1 - e^{-\gamma_1}$	0 , +M	$t_1 = 0, t_2 \in (0, T)$
1'	$\gamma_2 = e^{\gamma_1} - 1$	0 , -M	$t_1 = 0, t_2 \in (0, T)$
2	$\gamma_2 = e^{-T/\tau} (e^{\gamma_1} - 1)$	+M , 0	$t_1 \in (0, T) , t_2 = T$
3	$\gamma_2 = 2 e^{\gamma_1/2} e^{-T/2} - 1 - e^{-T/\tau}$	+M , -M	$t_1 = t_2 \quad t_1 \in (0, T)$

Tableau (a)

Domaines	Allure de la commande
I	+ M , 0 , - M $t_1$ et $t_2$ à déterminer
II	+ M , 0 , - M $t_1$ et $t_2$ à déterminer

Tableau (b)

Une première analyse permet de déterminer l'allure de la commande permettant d'atteindre, à partir de conditions initiales nulles, un point donné du domaine de commandabilité.

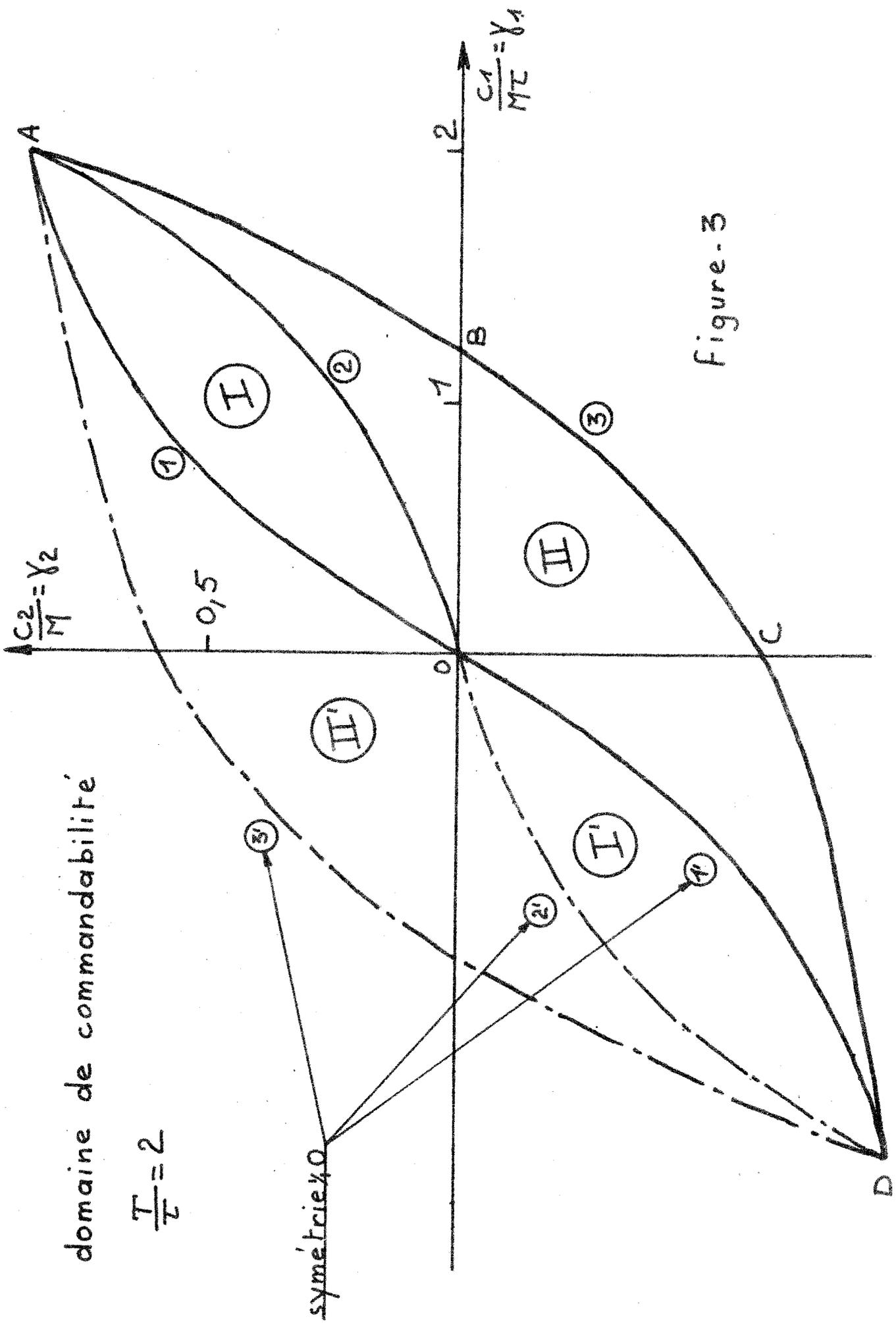


Figure-3

domaine de commandabilité

$$\frac{T}{T} = 2$$

symétrie 4.0

Il reste alors à déterminer avec précision les instants de commutation  $t_1$  et  $t_2$ .

Dans ces conditions il existe une correspondance biunivoque entre tout couple  $(\gamma_1, \gamma_2)$  et le couple  $(t_1, t_2)$  associé.

### III - MISE EN OEUVRE SUR CALCULATEUR

#### 3.1. Principe de la mise en oeuvre

Il s'agit de déterminer les instants de commutation  $t_1$  et  $t_2$  ainsi que le signe de la commande ; pour cela, le calculateur reçoit au début de chaque période d'échantillonnage les informations nécessaires sous forme analogique (figure 4).

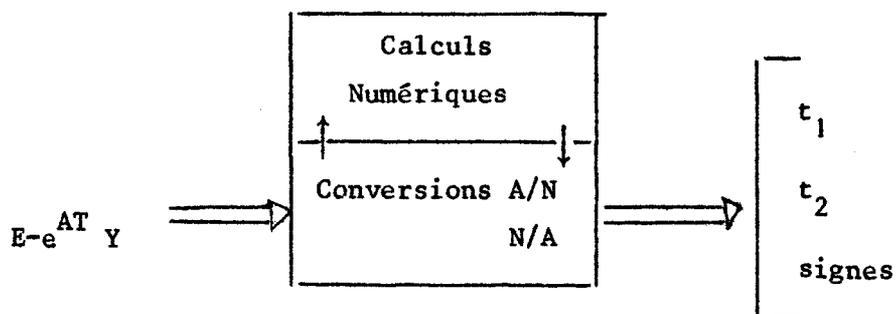


Figure 4

Il convient alors d'envisager deux types de fonctionnement :

- un fonctionnement normal correspondant au cas où l'extrémité du vecteur  $E_n - e^{AT} Y_n$  se trouve à l'intérieur du domaine d'atteignabilité (D).
- un fonctionnement en régime saturé lorsque l'extrémité de  $E_n - e^{AT} Y_n$  se trouve à l'extérieur de (D) ; dans ce cas nous définissons un vecteur  $G_n$  dont l'extrémité appartient à la frontière de (D) et tel que :

$$(11) \quad ||E_n - e^{AT} Y_n - G_n|| < ||E_n - e^{AT} Y_n||$$

De cette manière il est possible de déterminer l'instant  $t_1^* = t_2^*$  correspondant à  $G_n$ , en régime saturé.

### 3.2. Réalisation du programme

Le programme est réalisé selon l'organigramme présenté figure 5.

Le vecteur des données,  $E_n - e^{AT} Y_n$ , est rentré sous la forme réduite des variables  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  définies précédemment.

Les précalculs sont effectués hors ligne et n'interviennent donc pas dans le décompte des opérations effectuées en "temps réel".

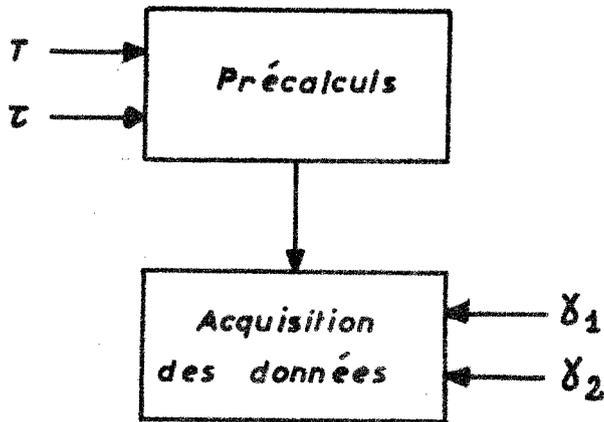
Le listing correspondant à l'organigramme de la figure 5 est présenté en annexe II ; le langage utilisé est propre au calculateur T 1000 de la TELEMECANIQUE, employé pour le présent exemple.

### 3.3. Résultats obtenus

Le décompte des opérations élémentaires intervenant dans le programme indique alors un temps de calcul n'excédant pas 50 ms dans les cas les plus défavorables.

Il convient donc de n'utiliser ce programme que pour des valeurs T et  $\tau$  compatibles avec le temps de calcul indiqué ci-dessus.

En particulier, dans l'exemple qui nous intéresse, les valeurs  $T = 2$  s et  $\tau = 1$  s ont été retenues pour tester le programme ; quelques résultats sont alors indiqués figure 6 et suivantes.



① ①' ② ③

désignent les courbes représentées figure 3 (domaine de commandabilité)

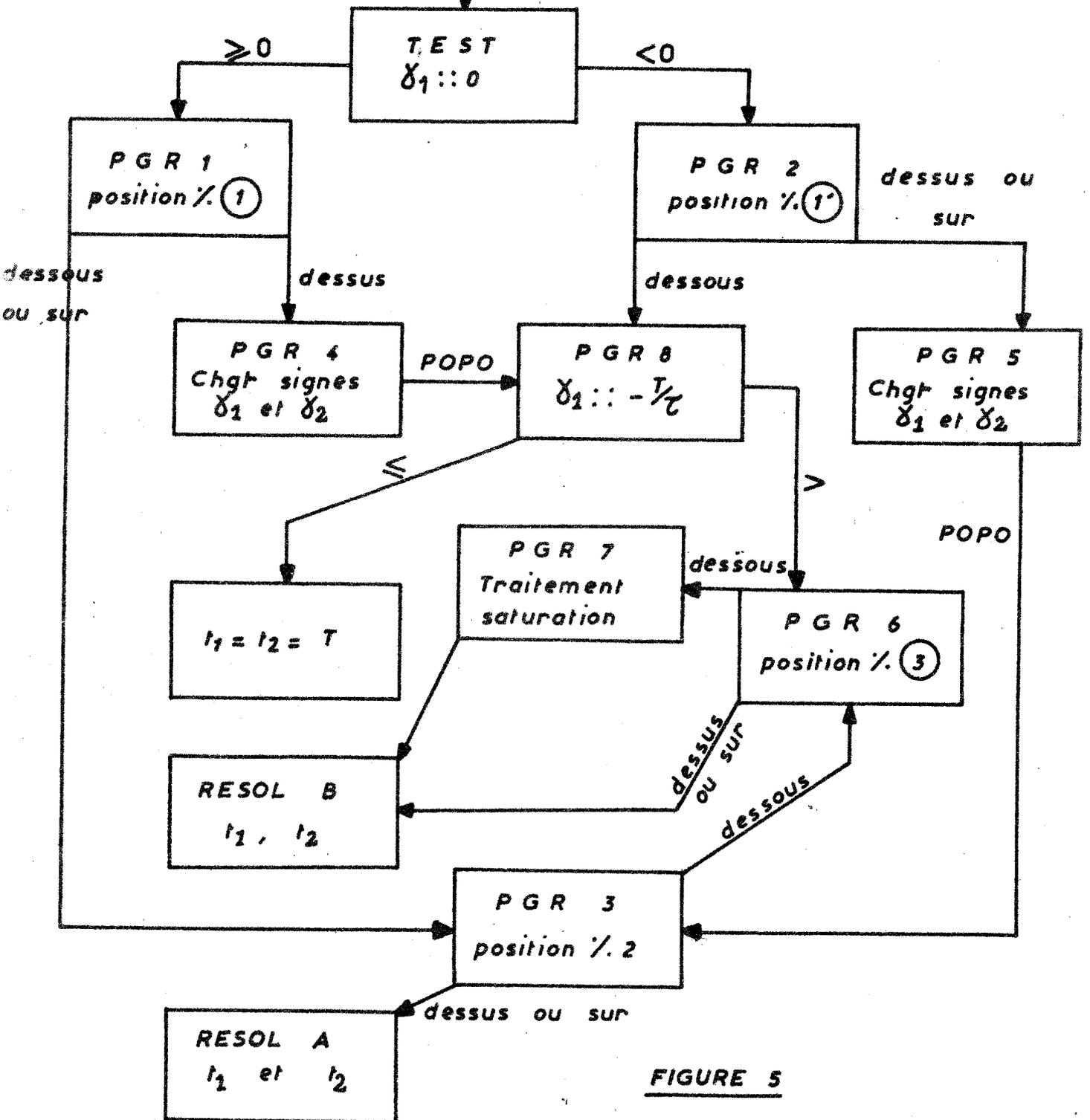


FIGURE 5

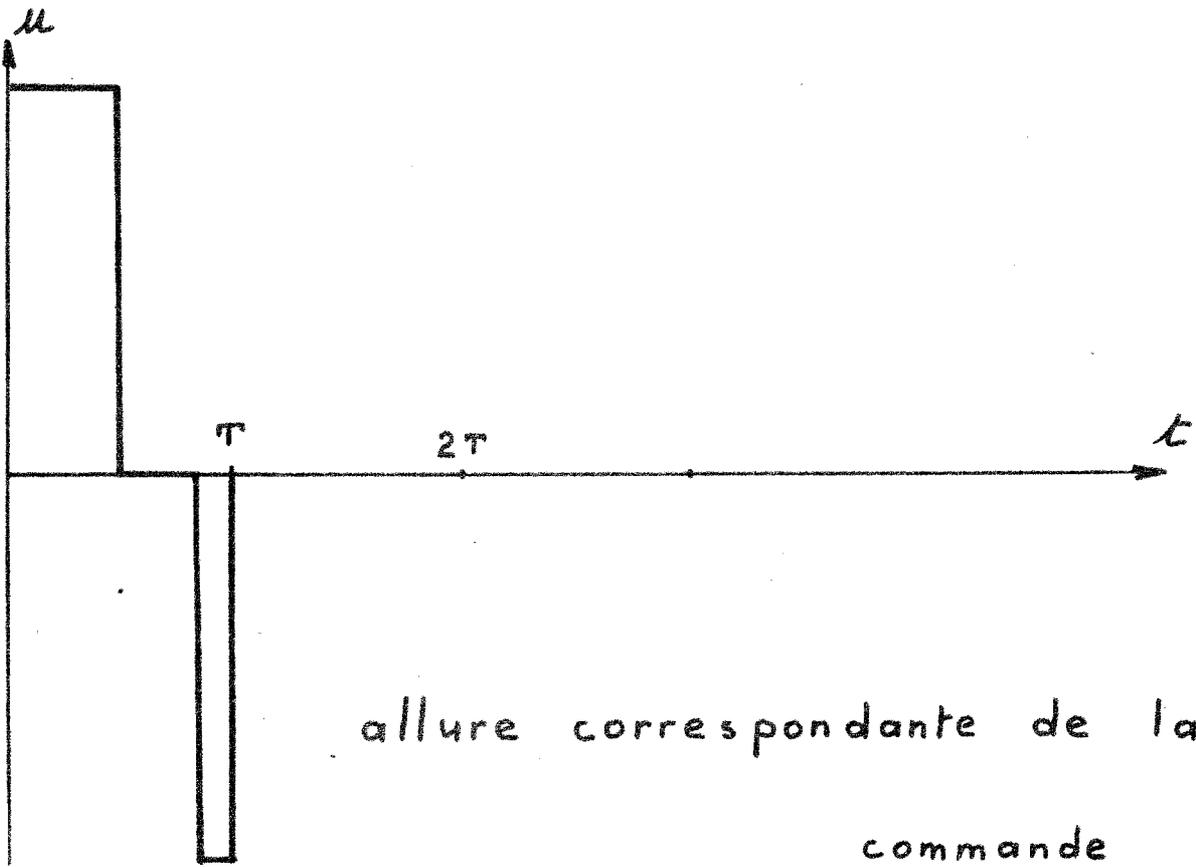
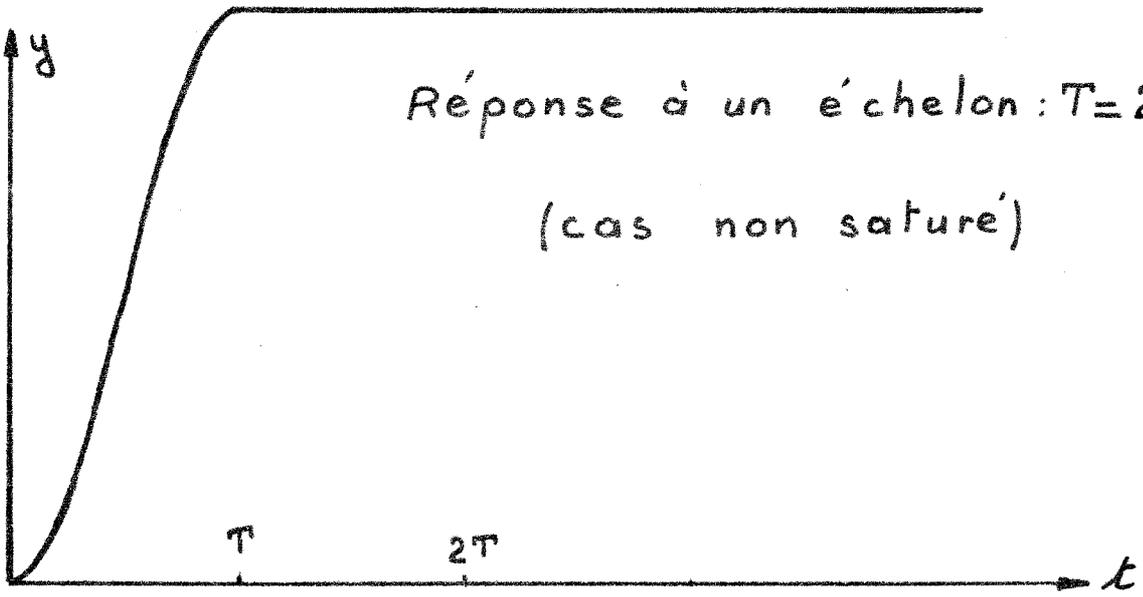


Figure 6

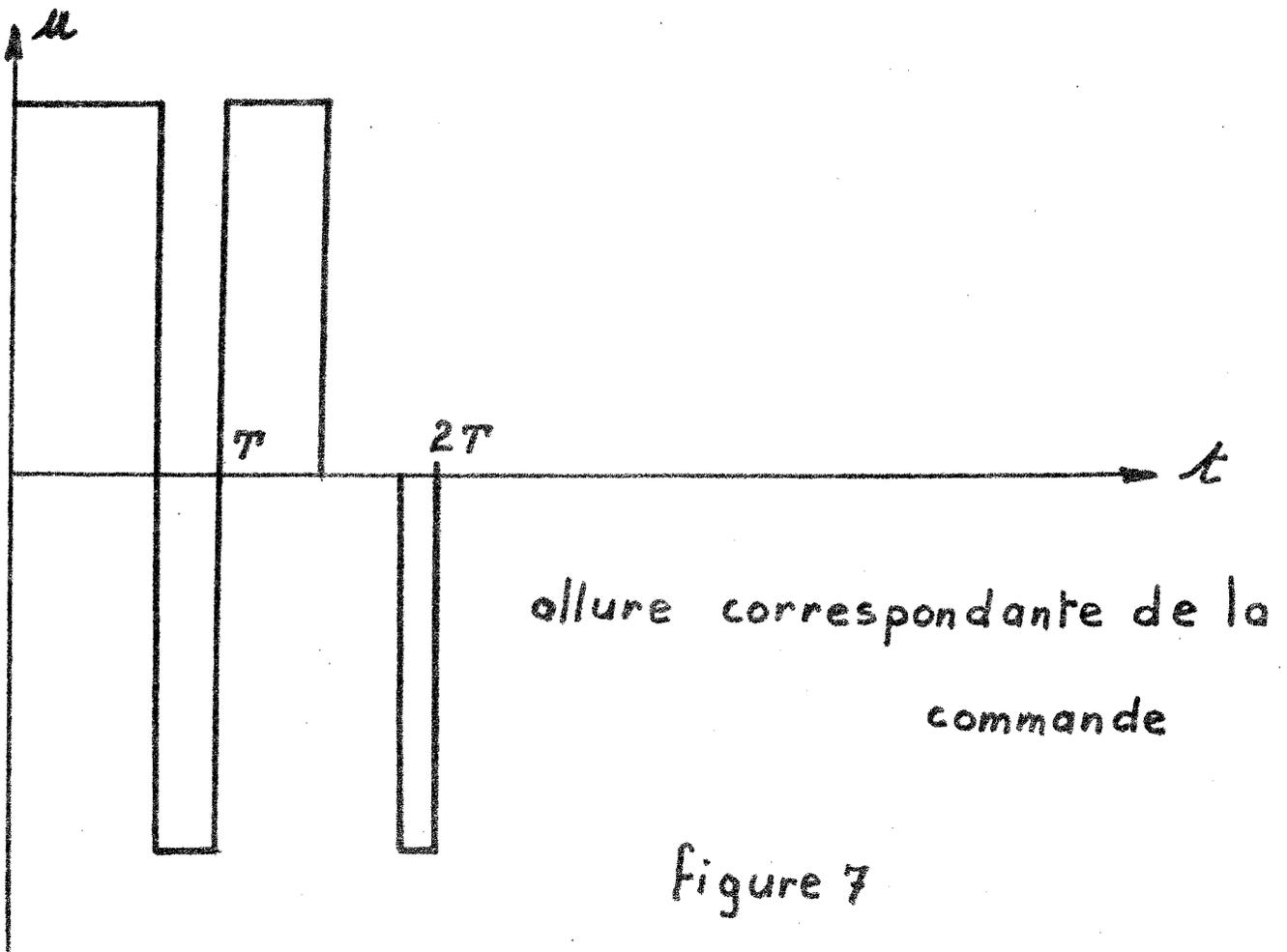
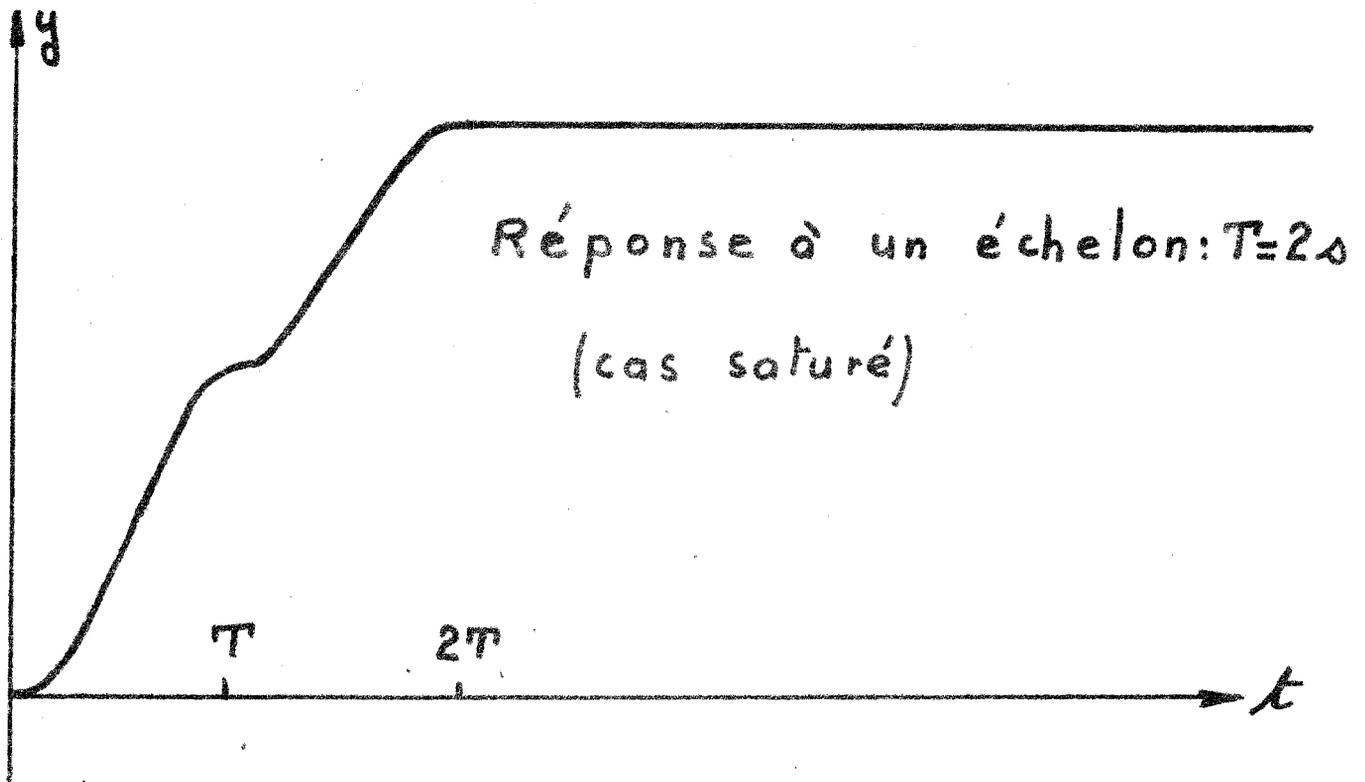
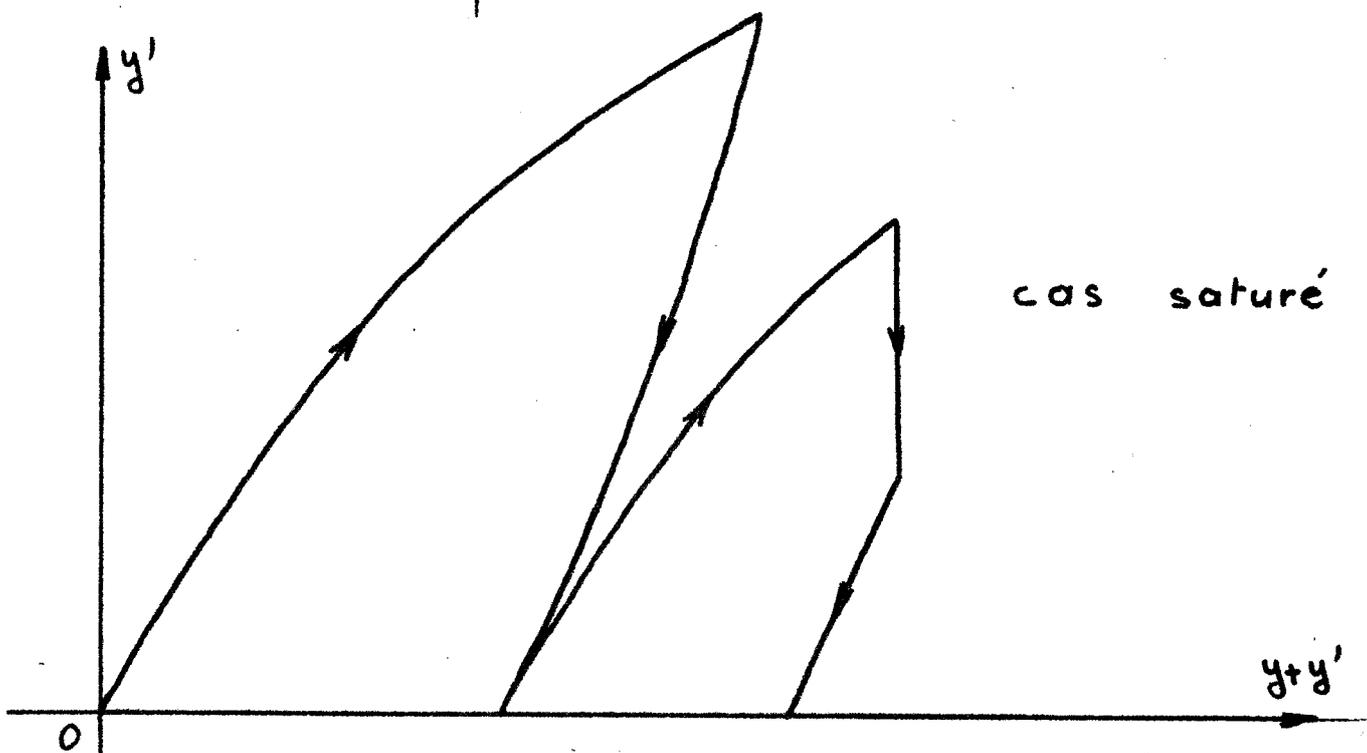
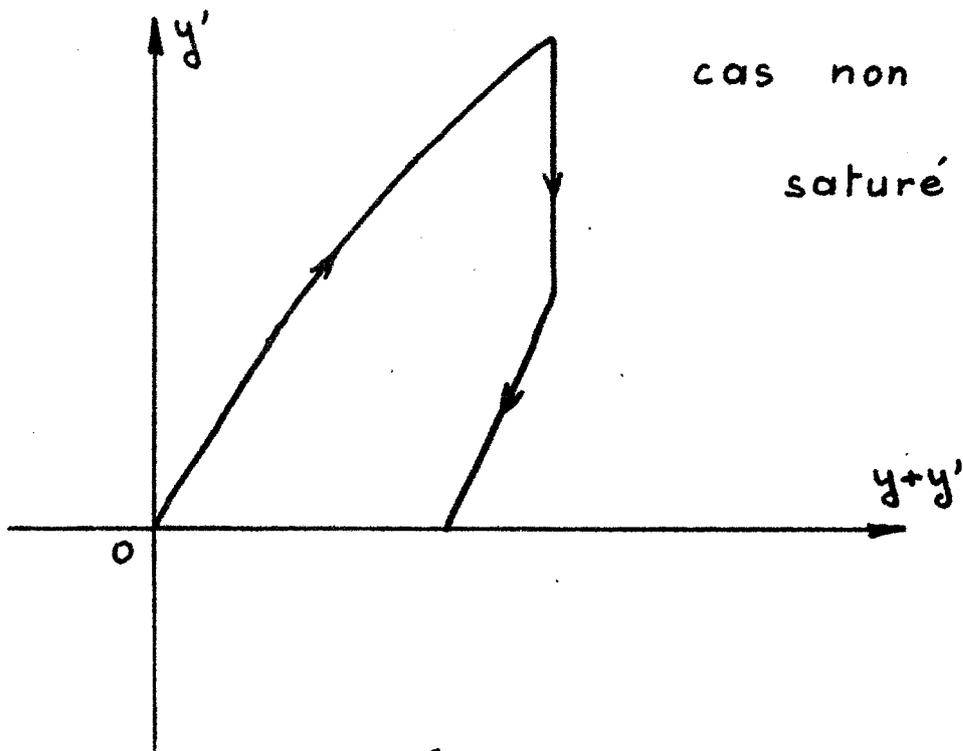


Figure 7



trajectoires d'état :  $T=2\Delta$   $\tau=1\Delta$

Figure - 8

## CONCLUSION

*L'utilisation d'un calculateur numérique de processus, permet d'envisager sans difficulté l'asservissement d'un moteur assimilé à une fonction de transfert du second ordre.*

*En particulier, la minimisation d'une fonctionnelle de type consommation conduit à la définition d'une forme simple de commande, caractérisée par une suite d'impulsions d'amplitude constante et de durée variable. La mise en oeuvre d'un tel mode de commande s'avère alors parfaitement compatible avec le calcul en temps réel.*

ANNEXE II

---

- Programme de détermination de la commande définie au chapitre VI
- Résultats du test numérique pour  $T = 2 \text{ s}$   
 $\tau = 1 \text{ s}$

SEC VASEUR;

CRO EM\*;  
 GBL FLOTI;  
 CEV 2000;  
 CAV 6440;  
 SA 2000;  
 IRV \*\* -1;  
 IRV EXIT;  
 TOL: CXV -2;  
 CA X TAUX+2;  
 IRV EXOTE;  
 AXV +1;  
 IRV TOL+1;  
 IRV ENTE;  
 IRV FCRO;  
 TO BO\*;  
 IRV FCNO;  
 NTO BO\*;  
 IRV MPFC;  
 DEUX BO\*;  
 IRV FCRO;  
 DETO BO\*;  
 IRV FCHO;  
 FCUNE BO\*;  
 IRV DVFC;  
 TO BO \*;  
 IRV FCHO;  
 INTO BO\*;  
 IRV FCNO;  
 NINTO BO\*;  
 IRV MPFC;  
 DEU BO\*;  
 IRV FCRO;  
 DINTO BO\*;  
 IRV EXIT;  
 TEMPS: CXV -3;  
 CA X TEMPE+3;  
 IRV EXOTE;  
 AXV +1;  
 IRV TEMPS+1;  
 IRV ENTE;  
 IRV FCRO;  
 TE BO\*;  
 IRV MPFC;  
 DEU BO\*;  
 IRV FCNO;  
 TETE BO\*;  
 CALI: IRV FCHO;  
 TE BO\*;  
 IRV MPFC;  
 NINTO BO\*;  
 IRV FCNO;  
 TETO BO\*;  
 IRV EXPFC;  
 IRV FCRO;  
 AI BO\*;  
 IRV ADFC;

FCUNE BO\*;  
IRV FCRO;  
A2 BO\*;  
IRV STFC;  
FCUNE BO\*;  
IRV MPFC;  
DEUX BO\*;  
IRV FCRO;  
A11 BO\*;  
IRV FCGO;  
A1 BO\*;  
IRV ADFC;  
FCUNE BO\*;  
IRV FCHO;  
AA1 BO\*;  
IRV FCHO;  
A2 BO\*;  
IRV MPFC;  
DEU BO\*;  
IRV LOGFC;  
IRV MPFC;  
DETO BO\*;  
IRV FCRO;  
AA2 BO\*;  
IRV ADFC;  
TE BO\*;  
IRV FCRO;  
AA3 BO\*;  
IRV MPFC;  
AA1 BO\*;  
IRV FCRO;  
AA4 BO\*;  
IRV FCGO;  
TE BO\*;  
IRV MPFC;  
DINTO BO\*;  
IRV EXPFC;  
IRV MPFC;  
DEUX BO\*;  
IRV FCRO;  
A5 BO\*;  
IRV STFC;  
A2 BO\*;  
IRV FCRO;  
AA6 BO\*;  
IRV MPFC;  
AA3 BO\*;  
IRV FCRO;  
AA7 BO\*;  
IRV FCHO;  
A5 BO\*;  
IRV MPFC;  
DEU BO\*;  
IRV STFC;  
FCUNE BO\*;  
IRV FCRO;  
A6 BO\*;  
IRV FCHO;  
A5 BO\*;

IRV STFC;  
A11 BO\*;  
IRV DVFC;  
TE BO\*;  
IRV FCRO;  
AA8 BO\*;  
IRV EXIT;  
DON1: CXV -2;  
CA X CEL1+2;  
IRV EXOTE;  
AXV +1;  
IRV DON1+1;  
IRV ENTE;  
IRV FCRO;  
C1 BO\*;  
IRV EXIT;  
DON2: CXV -2;  
CA X CEL2+2;  
IRV EXOTE;  
AXV +1;  
IRV DON2+1;  
IRV ENTE;  
IRV FCRO;  
C2 BO\*;  
RZ POPO;  
IRV FCGO;  
C1 BO\*;  
CA FCMO;  
PRV PGR2;  
PGR1: IRV EXPFC;  
IRV STFC;  
FCUNE BO\*;  
IRV ADFC;  
C2 BO\*;  
CA FCMO;  
PRV PGR4;  
IRV PGR3;  
PGR2: IRV FCHO;  
C1 BO\*;  
IRV EXPFC;  
IRV STFC;  
FCUNE BO\*;  
IRV STFC;  
C2 BO\*;  
CA FCMO;  
PRV PGR8;  
PGR5: IRV FCHO;  
C1 BO\*;  
IRV FCNO;  
C1 BO\*;  
IRV FCHO;  
C2 BO\*;  
IRV FCNO;  
C2 BO\*;  
IC POPO;  
PGR3: IRV FCHO;  
C1 BO\*;  
IRV EXPFC;  
IRV STFC;

FCUNE BO\*;  
IRV MPFC;  
A1 BO\*;  
IRV STFC;  
C2 BO\*;  
CA FCM0;  
PRV PGR6;  
RESOLA: IRV FCG0;  
C1 BO\*;  
IRV EXPFC;  
IRV STFC;  
A1 BO\*;  
IRV FCN0;  
A3 BO\*;  
IRV FCH0;  
C2 BO\*;  
IRV STFC;  
AA1 BO\*;  
IRV DVFC;  
A3 BO\*;  
IRV LOGFC;  
IRV MPFC;  
TO BO\*;  
IRV FCRO;  
T1 BO\*;  
IRV ADFC;  
TE BO\*;  
IRV FCN0;  
T2 BO\*;  
IRV FCH0;  
C1 BO\*;  
IRV MPFC;  
TO BO\*;  
IRV ADFC;  
T2 BO\*;  
IRV FCN0;  
T2 BO\*;  
CA POP0;  
ZRV SUI1;  
SUI2: CAV 0550;  
RA MEM1;  
RA MEM2;  
IRV SORT1;  
SUI1: CAV 0530;  
RA MEM1;  
RA MEM2;  
IRV SORT1;  
PGR4: IRV FCH0;  
C1 BO\*;  
IRV FCN0;  
C1 BO\*;  
IRV FCH0;  
C2 BO\*;  
IRV FCN0;  
C2 BO\*;  
IC POP0;  
PGR8: IRV FCH0;  
C1 BO\*;  
IRV ADFC;  
TETO BO\*;

CA FCM0;  
PRV PGR6;  
IRV FCH0;  
TE RO\*;  
IRV FCRO;  
T1 BO\*;  
IRV FCRO;  
T2 BO\*;  
CA POPO;  
ZRV SUIT2;  
IRV SUIT1;  
PGR6: IRV FCH0;  
C1 RO\*;  
IRV MPFC;  
DEU RO\*;  
IRV EXPFC;  
IRV MPFC;  
A5 RO\*;  
IRV STFC;  
A2 BO\*;  
IRV FCRO;  
A7 RO\*;  
IRV STFC;  
C2 RO\*;  
CA FCM0;  
PRV PGR7;  
RESOLB: IRV FCH0;  
C1 RO\*;  
IRV EXPFC;  
IRV MPFC;  
A1 BO\*;  
IRV MPFC;  
GUA BO\*;  
IRV FCNO;  
D1 RO\*;  
IRV FCH0;  
C2 BO\*;  
IRV ADFC;  
A2 BO\*;  
IRV FCRO;  
B1 BO\*;  
IRV MPFC;  
B1 BO\*;  
IRV ADFC;  
D1 BO\*;  
IRV FCRO;  
D2 BO\*;  
CA FCM0;  
NRV SORTI 1;  
IRV RACFC;  
IRV FCRO;  
RD2 RO\*;  
IRV ADFC;  
B1 BO\*;  
IRV DVFC;  
A11 BO\*;  
IRV LOGFC;  
IRV MPFC;  
T0 RO\*;

IRV FCRO;  
 T2 BO\*;  
 IRV STFC;  
 TE BO\*;  
 IRV FCNO;  
 T1 BO\*;  
 IRV FCHO;  
 C1 BO\*;  
 IRV MPFC;  
 TO BO\*;  
 IRV ADFC;  
 T1 BO\*;  
 IRV FCRO;  
 T1 BO\*;  
 CA POP0;  
 ZRV SUIT3;  
 SUIT4: CAV 0550;  
 RA MEM1;  
 CAV 0530;  
 RA MEM2;  
 IRV SORT1;  
 SUIT3: CAV 0530;  
 RA MEM1;  
 CAV 0550;  
 RA MEM2;  
 IRV SORT1;  
 PGR7: IRV FCHO;  
 C2 BO\*;  
 IRV STFC;  
 AA1 BO\*;  
 CA FCM0;  
 NRV PROG1;  
 PROG2: IRV FCHO;  
 TE BO\*;  
 IRV FCRO;  
 T1 BO\*;  
 IRV FCRO;  
 T2 BO\*;  
 CA POP0;  
 ZRV SUIT1;  
 IRV SUIT2;  
 PROG1: IRV FCHO;  
 C2 BO\*;  
 CA FCM0;  
 NRV PROG3;  
 PROG4: IRV ADFC;  
 A2 BO\*;  
 IRV MPFC;  
 DEU BO\*;  
 IRV LOGFC;  
 IRV MPFC;  
 DEUX BO\*;  
 IRV ADFC;  
 TETO BO\*;  
 IRV FCRO;  
 C1 BO\*;  
 IRV RESOLEB;  
 PROG3: IRV FCHO;  
 C1 BO\*;  
 CA FCM0;  
 NRV PROG5;  
 PROG6: IRV FCHO;

C1 BO\*;  
IRV MPFC;  
AA6 BO\*;  
IRV MPFC;  
TO BO\*;  
IRV FCRO;  
AA5 BO\*;  
IRV FCHO;  
C2 BO\*;  
IRV MPFC;  
AA3 BO\*;  
IRV ADFC;  
AA5 BO\*;  
IRV FCRO;  
AA5 BO\*;  
IRV FCHO;  
AA7 BO\*;  
IRV DVFC;  
AA5 BO\*;  
IRV FCRO;  
AA5 BO\*;  
IRV MPFC;  
C1 BO\*;  
IRV FCRO;  
C1 BO\*;  
IRV FCHO;  
AA5 BO\*;  
IRV MPFC;  
C2 BO\*;  
IRV FCRO;  
C2 BO\*;  
IRV RESOLB;  
PROG5: IRV FCHO;  
C1 BO\*;  
IRV MPFC;  
DEU BO\*;  
IRV EXPFC;  
IRV MPFC;  
A5 BO\*;  
IRV STFC;  
A2 BO\*;  
IRV FCRO;  
C2 BO\*;  
IRV RESOLB;  
SORTI1: IRV FCHO;  
C1 BO\*;  
IRV MPFC;  
TO BO\*;  
IRV ADFC;  
TE BO\*;  
IRV MPFC;  
DEU BO\*;  
IRV FCRO;  
T1 BO\*;  
IRV FCRO;  
T2 BO\*;  
IRV SUIT4-2;  
SORTI: IRV EXIT;  
CXV -2;  
CA X TEL1+2;  
IRV EXOTE;

```

    AXV +1;
    IRV SORT1+2;
    IRV FCH0;
    T1 BO*;
    IRV FC210;
    IRV FORMA;
SORT1: CXV -2;
    CA X TEL2+2;
    IRV EXOTE;
    AXV +1;
    IRV SORT1+1;
    IRV FCH0;
    T2 BO*;
    IRV FC210;
    IRV FORMA;
SORT2: CXV -5;
    CAV 2400;
    IRV EXOT;
    AXV +1;
    IRV SORT2+1;
    CA MEM1;
    IRV EXOT;
    CAV 2610;
    IRV EXOT;
    CXV -2;
    CAV 2400;
    IRV EXOT;
    AXV +1;
    IRV ** -2;
    CA MEM2;
    IRV EXOT;
    CAV 2610;
    IRV EXOT;
    IRV EXIT;
    IRV DON1;
EXAT: RT RETOU1;
    CAV 6440;
    SA 2000;
    IRV ** -1;
    EA 0000;
    IRV** -1;
    IR RETOU1;
EXIT: RT RETOU1;
    CAV 2150;
    IRV EXOT;
    CAV 0120;
    IRV EXOT;
    IR RETOU1;
EXOT: RT RETOU2;
    SA 3000;
    IRV ** -1;
    IR RETOU2;
EXATE: RT RETOU3;
    IRV EXAT;
    GLS +5;
    DLS +8;
    IR RETOU3;
EXOTE: RT RETOU4;
    IRV EXOT;
    GLS +9;
    IRV EXOT;
    IR RETOU4;

```

ENTE: RT RETOU5;  
CXV -11;  
IRV EXAT;  
RA X DECIM+11;  
DJV 1370;  
ZRV ENTE+1;  
AXV +1;  
IRV ENTE+2;  
IRV FC102;  
IR RETOU5;  
DELT: "DE";  
"LT";  
"A ";  
"<0";  
TAUX: "T0";  
"= ";  
TEMPE: "TE";  
"MP";  
"S ";  
CEL1: "C1";  
"= ";  
CEL2: "C2";  
"= ";  
TEL1: "T1";  
"= ";  
TEL2: "T2";  
"= ";  
RETOU1;;  
RETOU2;;  
RETOU3;;  
RETOU4;;  
RETOU5;;  
T0: ;  
;  
TE: ;  
;  
A1: ;  
;  
A2: ;  
;  
C1: ;  
;  
C2: ;  
;  
NTO: ;  
;  
DETO: ;  
;  
DEUX: 2000;  
+2;  
A11: ;  
;  
DEU: 2000;  
+0;  
A3: ;  
;  
T1: ;  
;  
T2: ;  
;  
MEM1: ;

MEM2: ;  
INT0: ;  
; ;  
NINT0: ;  
; ;  
B1: ;  
; ;  
QUA: 2000;  
+3;  
D1: ;  
; ;  
D2: ;  
; ;  
RD2: ;  
; ;  
DINT0: ;  
; ;  
POFO: ;  
A7: ;  
; ;  
AA1: ;  
; ;  
AA2: ;  
; ;  
AA3: ;  
; ;  
AA4: ;  
; ;  
AA5: ;  
; ;  
AA6: ;  
; ;  
AA7: ;  
; ;  
A5: ;  
; ;  
A6: ;  
; ;  
TETE: ;  
; ;  
AA8: ;  
; ;  
TETO: ;  
; ;  
FIN;  
DJV

T0= +.10000\*\*+01  
TEMPS +.20000\*\*+01

C1= +.10000\*\*+01  
C2= +.50000\*\*+00  
T1= +.44990\*\*+00  
T2= +.14499\*\*+01  
+1 +1

C1= -.10000\*\*+01  
C2= -.50000\*\*+00  
T1= +.44990\*\*+00  
T2= +.14499\*\*+01  
-1 -1

C1= +.50000\*\*+00  
C2= -.25000\*\*+00  
T1= +.99068\*\*+00  
T2= +.14252\*\*+01  
+1 -1

C1= -.50000\*\*+00  
C2= +.25000\*\*+00  
T1= +.99068\*\*+00  
T2= +.14252\*\*+01  
-1 +1

C1= +.40000\*\*+01  
C2= +.50000\*\*+00  
T1= +.17946\*\*+01  
T2= +.18027\*\*+01  
+1 -1

C1= -.40000\*\*+01  
C2= -.50000\*\*+00  
T1= +.17946\*\*+01  
T2= +.18027\*\*+01  
-1 +1

C1= +.20000\*\*+01  
C2= -.10000\*\*+01  
T1= +.99068\*\*+00  
T2= +.14252\*\*+01  
+1 -1

C1= -.20000\*\*+01  
C2= +.10000\*\*+01  
T1= +.99068\*\*+00  
T2= +.14252\*\*+01  
-1 +1

C1= -.10000\*\*+01  
C2= -.10000\*\*+01  
T1= +.50000\*\*+00  
T2= +.50000\*\*+00  
+1 -1

C1= +.10000\*\*+01  
C2= +.10000\*\*+01  
T1= +.50000\*\*+00  
T2= +.50000\*\*+00  
-1 +1

Résultats numériques de test

## CONCLUSION GENERALE

La commande par impulsions multimodulées d'un système réel présente de multiples avantages.

Elle permet, en premier lieu, la recopie parfaite du vecteur d'entrée aux instants d'échantillonnage. Dans ce sens, les expériences réalisées sur un groupe Ward-Léonard montrent que la représentation d'un tel système par une transmittance d'ordre peu élevé conduit à la définition d'un modèle simple et précis d'asservissement.

La technique de réalisation du modulateur utilisant un système associé permet, de plus, une mise en oeuvre systématique sur calculatrice hybride.

Enfin, les contraintes usuelles relatives à l'énergie ou à la consommation conduisent à orienter le choix du modulateur dans le sens d'un fonctionnement optimal.

L'ensemble des résultats obtenus illustre les caractéristiques de la commande multimodulée par système associé. C'est dans cette voie que nous envisageons de poursuivre nos travaux et plus précisément dans le sens d'une analyse des systèmes non stationnaires.

BIBLIOGRAPHIE

---

## REFERENCES

- /1/ F. LAURENT - J.M. TOULOTTE - P. VIDAL  
"Régulation par échantillonnage et correction tachymétrique"  
International Pulse symposium, Budapest, Avril 1968.
- /2/ F. LAURENT  
"Sur la commande d'un filtre linéaire par des impulsions modulées"  
C.R. Acad. Sc. Paris - t. 270 - p. 288-289 - 26/1/70
- /3/ F. LAURENT - P. BORNE - J.C. GENTINA - M. STAROSWIECKI  
"Commandabilité et observabilité "Tome I
- /4/ M. ATHANS - P. FALB  
"Optimal control" Chapitre V - Mc Graw Hill Book Company
- /5/ R. KALMAN - P. FALB - M. ARBIB  
"Topics in mathematical system theory" Chapitre I  
Mc Graw Hill Book Company
- /6/ A. DANTHINE  
"Théorie des systèmes linéaires" (2<sup>e</sup> Partie)
- /7/ J.C. GILLE - M. PELEGRIN - P. DECAULNE  
"Théorie et technique des asservissements"  
Dunod 1956
- /8/ BOUDAREL - DELMAS - GUICHET  
"Commande optimale des processus " Tome II  
Dunod 1968
- /9/ J.C. GENTINA  
"Contribution à la commande optimale des systèmes échantillonnés non linéaires"  
Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille I -  
30 Juin 1970.
- /10/ PONTRYAGIN - BOLTYANSKII, GAMKRELIDZE, MISHCHENKO  
"The mathematical theory of optimal processes" Chapitre I  
Interscience Publishers - John Wiley and Sons, Inc

/11/ P. VIDAL

"Systèmes échantillonnés non linéaires"

Gordon and Breach - 1968

/12/ F. LAURENT

"Sur la commande d'un filtre linéaire par des impulsions multimodulées"

C.R. Acad. Sc. Paris - t. 270 - p. 686-688 - 9/3/70.

/13/ F. LAURENT, J.C. GENTINA, M. STAROSWIECKI, P. BORNE

"Sur l'optimisation du temps de réponse d'un système échantillonné incomplètement observable au moyen d'une commande multiple"

2<sup>ème</sup> I.F.A.C Symposium on multivariable systems - Düsseldorf 1971.

/14/ GANTMACHER

"Théorie des matrices "

Tome I - Chapitre V - Dunod 1966.