

THESE
présentée à
L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LILLE

pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE SPECIALITE
(Mathématiques appliquées)

par
Jacques DENEL

RESOLUTION DE PROBLEMES
D'OPTIMISATION
NON LINEAIRES
PAR LA METHODE
DES CENTRES LINEARISEE



THESE soutenue le 20 juin 1972

devant la Commission d'examen:

Monsieur P. BACCHUS , Président

Monsieur C. CARREZ , Examineur

Monsieur P. HUARD , Rapporteur

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE.

DOYENS HONORAIRES

MM. H.LEFEBVRE, PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUEVELS, DEHORNE, DEHORS, FAUVEL, FLEURY, P.GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, MM. LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKY.

PROFESSEURS TITULAIRES

M. ANGRAND Jean Pierre	Géographie et Aménagement Spatial
M. BACCHUS Pierre	Astronomie et Calcul
M. BEAUFILS Jean Pierre	Chimie Générale
M. BECART Maurice	I.U.T. Lille
M. BLOCH Vincent	Psychophysiologie
M. BIAYS Pierre	Géographie et Aménagement Spatial
M. BONNEMAN Pierre	Chimie Industrielle
M. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CAPET Marcel-Francis	Institut de Préparation aux Affaires
M. CELET Paul	Géologie Générale
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. CORSIN Pierre	Paléobotanique
M. DECUYPER Marcel	Mathématiques
M. DEDECKER Paul	Mathématiques
M. DEFRETIN René	Biologie Animale - Directeur de l'Institut de Biologie Maritime de Wimereux
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale
M. DURCHON Maurice	Biologie Animale
M. FLATRES Pierre	Géographie et Aménagement Spatial
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. GEHU Jean Marie	Institut Agricole
M. GLACET Charles	Chimie Organique
M. GONTIER Gérard	Mécanique des Fluides
M. GUILLAUME Jean	Biologie Végétale
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. MONTREUIL Jean	Chimie Biologique
M. POUZET Pierre	I.U.T. Lille

Mme SCHWARTZ Marie Hélène	Mathématiques
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie Minérale Appliquée
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. VIVIER Emile	Biologie Animale
M. WATERLOT Gérard	Géologie et Minéralogie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique

PROFESSEURS A TITRE PERSONNEL

M. BOUISSET Simon	Physiologie Animale
M. DELHAYE Michel	Chimie Physique et Minérale 1er Cycle
M. LEBRUN André	Electronique
M. LINDER Robert	Biologie Végétale
M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. PRUDHOMME Rémy	Sciences Economiques et Sociales
M. SAVARD Jean	Chimie Générale
M. SCHALLER François	Biologie Animale
M. SCHILTZ René	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique
M. BODARD Marcel	Biologie Végétale
M. BOILLET Pierre	Physique
M. DERCOURT Jean Michel	Géologie et Minéralogie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M. LOMBARD Jacques	Sciences Economiques et Sociales
M ^{le} MARQUET Simone	Mathématiques
M. MONTARIOL Frédéric	Chimie Minérale Appliquée
M. PROUVOST Jean	Géologie et Minéralogie
M. VAILLANT Jean	Mathématiques

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés de fonctions)

M. ADAM Michel	Sciences Economiques et Sociales
M. ANDRE Charles	Sciences Economiques et Sociales
M. AUBIN Thierry	Mathématiques Pures
M. BEGUIN Paul	Mécanique des Fluides
M. BILLARD Jean	Physique
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M. BONNEMAIN Jean Louis	Biologie Végétale
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. BRIDOUX Michel	I.U.T. Béthune
M. BRUYELLE Pierre	Géographie et Aménagement Spatial

M. CCAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CARREZ Christian	Calcul
M. CHOQUET Marcel	I.U.T. Lille
M. CORDONNIER Vincent	Calcul
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COULON Jean Paul	Electrotechnique
M. DEBRABANT Pierre	Sciences Appliquées
M. ESCAIG Bertrand	Physique
Mme EVRARD Micheline	I.U.T. Lille
M. FAIDHERBE Jacques	Biologie Animale
M. FONTAINE Jacques	I.U.T. Lille
M. FROELICH Daniel	Sciences Appliquées
M. GAMBLIN André	Géographie et Aménagement Spatial
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel	Sciences Economiques et Sociales
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GRANELLE	Sciences Economiques et Sociales
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUIBAULT Pierre	Physiologie Animale
M. HERMAN Maurice	Physique
M. HUARD de la MARRE Pierre	Calcul
M. JOLY Robert	Biologie (Amiens)
M. JOURNEL Gérard	Sciences Appliquées
Mle KOSMANN Yvette	Mathématiques
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Générale
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANDAIS Jean	Chimie Organique
M. LAURENT François	Automatique
M. LAVAGNE Pierre	Sciences Economiques et Sociales
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LENTACKER Firmin	Géographie et Aménagement Spatial
M. LEROY Jean Marie	ENSCL
M. LEROY Yves	I.U.T. Lille
M. LHENAFF René	Géographie et Aménagement Spatial
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOUAGE Francis	Sciences Appliquées
M. LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M. MAES Serge	Physique
Mme MAILLET Monique	Sciences Economiques et Sociales
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MALAUSSENA Jean Louis	Sciences Economiques et Sociales
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MIGEON Michel	Sciences Appliquées
M. MONTEL Marc	Physique
M. MONTUELLE Bernard	I.U.T. Lille
M. MUSSCHE Guy	Sciences Economiques et Sociales
M. NICOLE Jacques	E.N.S.C.L.
M. OUZIAUX Roger	Sciences Appliquées
M. PANET Marius	Electrotechnique
M. PAQUET Jacques	Sciences Appliquées
M. PARSY Fernand	Mécanique des Fluides
M. PONSOLLE Louis	Chimie (Valenciennes)
M. POVY Jean Claude	Sciences Appliquées
M. RACZY Ladislas	Radioélectricité
Mme RENVERSEZ Françoise	Sciences Economiques et Sociales
M. ROUSSEAU Jean Paul	Physiologie Animale

M. ROYNETTE Bernard	Mathématiques
M. SALMER Georges	Electronique
M. SEGUIER Guy	I.U.T. Béthune
M. SIMON Michel	Sciences Economiques et Sociales
M. SMET Pierre	Physique
M. SOMME Jean	Géographie et Aménagement Spatial
M. THOMAS Daniel	Chimie Minérale Appliquée
M. TOULOTTE Jean Marc	Sciences Appliquées
M. TREANTON Jean René	Sciences Economiques et Sociales
M. VANDORPE Bernard	Sciences Appliquées
M. VILETTE Michel	I.U.T. Béthune
M. WATERLOT Michel	Géologie Générale
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques.

Monsieur le Professeur BACCHUS a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury ; je le prie de croire à ma profonde gratitude.

Que Monsieur le Professeur HUARD dont les conseils, les suggestions et l'aide constante m'ont été d'un précieux secours, veuille trouver ici l'expression de ma plus vive reconnaissance.

Je remercie Monsieur le Professeur CARREZ qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et le juger.

Je remercie également les membres de l'équipe de Recherche Opérationnelle du Laboratoire de Calcul de l'U.E.R. I.E.E.A. pour les échanges qui ont jalonné ce travail.

Que Mademoiselle DRIESSENS qui, avec gentillesse et rapidité, s'est chargée de la mise en page de cette thèse,

Que Monsieur et Madame DEBOCK qui n'ont ménagé ni leur temps ni leur peine pour en assurer la réalisation matérielle, trouvent ici l'expression de mes plus sincères remerciements.

à mes Parents.

PLAN GENERAL

- Chapitre I : Le problème d'optimisation non-linéaire classique et quelques problèmes équivalents.
- Le principe de linéarisation et bref tour d'horizon des méthodes par linéarisation.
- Chapitre II : Méthode des centres et méthode des centres linéarisée.
- Notion de F-distance et de centre.
- Algorithmes.
- Chapitre III : Variante de la méthode des centres linéarisée.
- Algorithme de centrage et convergence.
- Linéarisation partielle.
- Chapitre IV : Vitesse de convergence de quelques méthodes par linéarisation.
- Chapitre V : Techniques de la méthode des centres linéarisée.
- Méthode duale-simpliciale en variables bornées.
- Optimisation sur un segment de \mathbb{R}^n .
- Chapitre VI : Expériences numériques comparatives.
- Annexe : Listing Algol 60 de la méthode.

NOTATIONS et DEFINITIONS

\mathbb{R}^n espace vectoriel à n dimensions construit sur le corps des réels \mathbb{R} .

A une partie de \mathbb{R}^n ,

$\text{Fr}(A)$ et $\overset{\circ}{A}$ respectivement la frontière et l'intérieur de A .

f, g_i applications continues définies sur \mathbb{R}^n à valeurs réelles

$\nabla f(x), \nabla g_i(x)$ les gradients de f et g_i , supposés différentiables en un point x de \mathbb{R}^n .

$\|x\|$ la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$.

(x,y) le produit scalaire de x et $y \in \mathbb{R}^n$.

$H(f,t)$ le hessien d'une fonction f deux fois différentiable calculé en $t \in \mathbb{R}^n$, c'est une matrice (n,n) ; le terme général est

$$(H(f,t))_{ij} = \frac{\partial^2 f(t)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

f est concave sur $A \subset \mathbb{R}^n$ si et seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in A, \forall \lambda \in [0,1]$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ on a : f est concave et différentiable

$$\iff f(x) \leq f(y) + (\nabla f(y), x-y)$$

f est fortement concave sur $A \subset \mathbb{R}^n$ si et seulement si

$$\exists \gamma > 0, \forall x_1, x_2 \in A$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2) + \gamma \|x_1 - x_2\|^2$$

INTRODUCTION

Nous présentons dans ce travail une méthode générale d'optimisation des programmes mathématiques non-linéaires. Cette méthode est une adaptation de l'algorithme général "méthode des centres", dû à P. HUARD, introduit dans [4] et développé sous forme de variantes dans [17] et [18].

Les performances dans la résolution des programmes linéaires, tant du point de vue de la vitesse que de la précision des calculs, ont été sans cesse améliorées depuis une vingtaine d'années par de nombreuses études sur la méthode simpliciale et ses dérivés. Pour cette raison de nombreux chercheurs tentent de résoudre les problèmes non linéaires par des techniques du linéaire.

De nombreuses méthodes, dont le chapitre I donne un bref aperçu, sont construites sur le principe de l'approximation d'une fonction par son développement de Taylor d'ordre 1 en un point. En remplaçant les contraintes non linéaires d'un problème par ces approximations, le problème engendré peut être totalement différent du problème d'origine si la courbure des contraintes est forte. C'est pourquoi des linéarisations successives sont utiles pour corriger l'approximation et pour assurer l'obtention de la solution cherchée.

La méthode des centres linéarisée, [17], chapitre II, est une variante de la méthode des centres bien adaptée à ce principe de linéarisation. Bien que la convergence théorique soit démontrée, il est apparu que la convergence pratique souffrait bien souvent de la mauvaise approximation du domaine des solutions réalisables par les plans de linéarisation des différentes contraintes.

L'étude des raisons amenant ce ralentissement dans la convergence pratique nous a permis de construire, chapitre III, une amélioration particulièrement intéressante de la méthode des centres linéarisée aussi bien du point de vue de la facilité de mise en oeuvre sur calculateurs, chapitre V, que de la précision et rapidité des calculs.

Des expériences numériques, suivies d'un listing algol de notre méthode, concluent ce travail. Elles portent sur des problèmes tests le plus souvent d'origine concrète et sont reliées aux performances des méthodes d'optimisation non-linéaire classiques.

-00000-

Le PRINCIPE de LINEARISATION

-

TOUR D'HORIZON des METHODES

par LINEARISATION

I.1 - LE PROBLEME GENERAL DE LA PROGRAMMATION MATHEMATIQUE NON-LINEAIREI.1.0) Introduction

Nous étudions tout au long de ce travail le problème d'optimisation non-linéaire (P) suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(x) \\ \text{sous les conditions} \\ x \in A \subset \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

Il s'agit de déterminer un point \hat{x} du domaine des solutions réalisables A vérifiant la condition d'optimalité globale :

$$\forall x \in A, f(x) \leq f(\hat{x}).$$

En général A sera une partie de \mathbb{R}^n définie à l'aide de contraintes $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0 \quad i=1, \dots, m\}.$$

Dans bien des algorithmes, les démonstrations de convergence reposent sur des hypothèses de convexité et de différentiabilité (une ou deux fois) sur la fonction économique et sur les contraintes. A chaque fois que cela sera nécessaire, les hypothèses sur le problème (P) seront énoncées dans le texte.

L'intérêt de ce problème trouve des justifications dans de nombreux exemples concrets ; la modélisation de problèmes d'investissement, de distribution (par exemple : réseau de distribution d'énergie, dispatching économique) à l'aide de fonctions et contraintes non-linéaires se rapproche plus de la réalité concrète et est peut être plus efficace qu'à l'aide de fonctions linéaires, même en augmentant la taille du modèle (variables et contraintes) dans ce dernier cas.

Nous donnons ci-dessous deux formes équivalentes du problème (P) qui seront utiles dans les différents chapitres de ce travail. Nous étudierons ensuite les moyens d'aborder ce problème non-linéaire pour essayer de conserver l'acquis des études sur la programmation linéaire, à savoir la linéarisation. Des méthodes d'optimisation

utilisant ce principe de linéarisation et élaborées depuis ces dix dernières années illustreront dans le paragraphe 1 cette attitude.

I.1.1) Formes équivalentes du problème (P)

* 1ère forme

Le problème (P) peut se ramener à la maximisation d'une fonction linéaire sur un domaine non-linéaire par adjonction d'une variable supplémentaire μ . Le problème (P_1) dans \mathbb{R}^{n+1} de variables (x, μ) s'écrit :

$$(P_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } \mu \\ f(x) \geq \mu \\ x \in A \end{array} \right.$$

Démonstration :

a) Montrons que pour les solutions optimales $(\bar{x}, \bar{\mu})$ de (P_1) on a $f(\bar{x}) = \bar{\mu}$.

Ce résultat est évident en remarquant que si $x \in A$ alors la solution $(x, f(x))$ est réalisable pour le problème (P_1) . En conséquence pour une solution optimale $(\bar{x}, \bar{\mu})$ si $f(\bar{x}) > \bar{\mu}$ il existe une solution meilleure, à savoir $(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

b) Toute solution optimale de (P), \hat{x} , est telle que $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ est optimale pour (P_1) .

\hat{x} optimale de (P) $\implies \forall x \in A \quad f(x) \leq f(\hat{x})$.

Si $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ n'est pas solution optimale de (P_1) alors il existerait $\bar{x} \in A$ tel que $f(\bar{x}) = \bar{\mu} > f(\hat{x})$ ce qui est impossible.

c) Si $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ est solution optimale de (P_1) alors \bar{x} est solution optimale de (P).

Par les mêmes raisonnements, dans le cas contraire $\hat{x} \in A$ et $f(\hat{x}) > f(\bar{x})$ et il existerait une solution strictement meilleure pour (P_1) .

Remarque : Afin d'introduire les algorithmes des chapitres II et III, on considère la fonction f définie comme enveloppe inférieure de fonctions $h_i \quad i=1, \dots, p$.

Le problème (P) est alors équivalent au problème (P_2) suivant, en posant

$$f(x) = \min \{h_i(x) \mid i=1, \dots, p\}$$

$$(P_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } \mu \\ \text{sous les conditions} \\ h_i(x) \geq \mu \quad i=1, \dots, p \\ x \in A. \end{array} \right.$$

Démonstration : Nous montrons que (P_2) est équivalent à (P_1) d'où le résultat. Les fonctions économiques des problèmes (P_2) et (P_1) sont les mêmes ; il suffit de montrer l'identité des domaines dans \mathbb{R}^{n+1} .

Pour le problème (P_1) si (x, μ) est tel que $\min \{h_i(x) \mid i=1, \dots, p\} \geq \mu$ et $x \in A$ alors on a évidemment $x \in A$ et $\mu \leq h_i(x) \quad i=1, \dots, p$ d'où le domaine des solutions réalisables de P_1 est inclus dans le domaine des solutions réalisables de P_2 : la réciproque est, de la même manière, évidente.

* 2ème forme

On suppose ici que le domaine $A = \{x \mid g_i(x) \geq 0 \quad i=1, \dots, m\}$ est inclus dans un compact C et que les fonctions g_i sont continuellement différentiables.

Le problème (P) est alors équivalent au problème (P_3) ayant une infinité de contraintes :

$$(P_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{max } \mu \\ f(y) + (\nabla f(y), x-y) \geq \mu \quad \forall y \in C \\ g_i(y) + (\nabla g_i(y), x-y) \geq 0 \quad i=1, \dots, m \quad \forall y \in C \end{array} \right.$$

Pour ce problème les contraintes sont indicées par y , point d'un ensemble compact. Il est à remarquer qu'il s'agit d'un problème linéaire. C'est sous cette forme que la programmation non linéaire sera envisagée dans le paragraphe suivant par Cheney-Goldstein. La démonstration de l'équivalence repose sur un théorème général de séparation d'un ensemble compact et d'un ensemble fermé qui permet de démontrer dans \mathbb{R}^{n+1} l'équivalence des domaines :

$\{(x, \mu) \mid x \in A, f(x) \geq \mu\}$ et l'ensemble des solutions réalisables de (P_3) .

La méthode de Cheney-Goldstein consistera à choisir des points $y_j \in C$ $j=1, 2, \dots$. Ce sera d'ailleurs l'attitude de nombreuses méthodes "par plans sécants".

I.1.2) Linéarisation d'un programme mathématique non-linéaire

Définition I.1 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable étant donnée, on appellera linéarisation de f une fonction $f' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad f'(x;y) = f(y) + (\nabla f(y), x-y).$$

Si le point y , dit point de linéarisation, est fixé, alors f' est une fonction affine de x et sous réserve que f soit concave on a :

$$f(x) \leq f'(x;y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Définition I.2 Linéarisation d'un domaine $A = \{x \mid g_i(x) \geq 0 \quad i=1, \dots, m\} \subset \mathbb{R}^n$.

Au domaine A , on fera correspondre un polyèdre linéaire par la linéarisation en un point y , de toutes les fonctions définissant A . Ce polyèdre sera représenté par le système de contraintes :

$$g_i(y) + (\nabla g_i(y), x-y) \geq 0 \quad i=1, \dots, m.$$

Propriété I.1 Dans le cas où les fonctions g_i définissant un domaine non linéaire A sont concaves alors le polyèdre de linéarisation contient A .

Démonstration

Elle résulte de la propriété des fonctions concaves :

$$f(x) \leq f(y) + (\nabla f(y), x-y).$$

A l'aide de ces définitions, il nous est possible de définir ce qu'on entend par linéarisation d'un programme mathématique non-linéaire. Ce terme désigne toute méthode d'optimisation utilisant comme algorithme partiel la résolution de programmes linéaires formés à partir des fonctions (économique et/ou contraintes) linéarisées. Ces différentes contraintes pouvant (ou non) être conservées d'étape en étape. Les méthodes utilisant ce procédé sont appelées, dans la littérature, méthodes tangentielle car pour $x=y$ on a l'égalité $f(x) = f'(x;y)$.

Il nous semble indispensable de présenter une objection fondamentale quant à la validité de ce principe. Cette objection est liée à la courbure des surfaces de \mathbb{R}^n . Supposons que la fonction f soit 2 fois différentiable et possède une "courbure

maximum et une courbure minimum". Cette dernière hypothèse se traduit par les deux propriétés du hessien :

$$\text{courbure maximum : } \exists L > 0 \quad ||H(f,t)|| \leq L \quad \forall t \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{courbure minimum : } \exists \ell > 0 \quad \forall y, t \in \mathbb{R}^n \quad |(y, H(f,t)y)| \geq \ell ||y||^2.$$

Ceci nous autorise à écrire, par utilisation du développement de Taylor à l'ordre 2, que l'écart entre les valeurs $f(x)$ et $f'(x;y)$ pour y fixé est :

$$\text{majoré par } \frac{L}{2} ||x-y||^2$$

$$\text{minoré par } \frac{\ell}{2} ||x-y||^2.$$

D'où il est clair que l'approximation tangentielle pourra dans le cas de courbure forte donner de très médiocres résultats pour des points x éloignés de y . C'est pour cette raison que de nombreuses méthodes tentent de limiter les déplacements du point x courant ; c'est d'ailleurs cette attitude qui, parmi d'autres, régit notre algorithme du chapitre III.

Historiquement ce principe de linéarisation remonte au procédé de Newton pour résoudre un système d'équations non-linéaires. Dans le cadre de la programmation mathématique une application brutale de la méthode de Newton ne peut conduire qu'à des algorithmes non convergents comme le montre Huard dans [19].

I.2 - BREF TOUR D'HORIZON DES METHODES PAR LINEARISATION

I.2.0) Introduction

Les méthodes tangentielles, dont nous donnons un bref exposé ci-dessous, peuvent se classer très sommairement en trois groupes, à savoir :

* méthodes à grille où on remplace les fonctions par leur linéarisation en un grand nombre de points y (ce qui revient à utiliser la forme (P_3) du problème).

* méthodes à plans sécants qui sont des méthodes itératives où on conserve les linéarisations précédentes et par conséquent la taille des programmes linéaires augmente à chaque itération.

* méthodes de directions améliorantes et intérieures Il s'agit, dans ce groupe, de méthodes où on détermine par un programme linéaire à chaque itération une direction améliorante pénétrant à l'intérieur du domaine des solutions réalisables. Généralement dans ces méthodes la taille des programmes linéaires reste constante d'étape en étape.

I.2.1) Méthodes à grille

La caractéristique de ces méthodes est d'essayer de minimiser les erreurs de représentation du domaine non-linéaire introduite par la linéarisation des contraintes en disposant une grille de points répartis dans un ensemble compact supposé contenir la partie "intéressante" du domaine. De même la fonction économique est linéarisée en ces points, ce qui revient à assimiler le graphe de f à une surface polyédrique. Il est à remarquer qu'une telle méthode conduit à des problèmes linéaires de taille prohibitive ; en effet si le nombre de variables naturelles reste égal à n , le nombre de contraintes dépend de la finesse de la grille. En supposant que le compact dans lequel les points de linéarisation sont pris est un pavé de bornes $|x_j| \leq D$ (pour $j=1, \dots, n$) et qu'il y a p divisions sur chaque axe, le nombre de contraintes s'élève à p^n .

Sous la forme primale, il est impossible de résoudre ce problème par la méthode simpliciale. Pour cette raison, Hartley et Hocking [15] proposent de passer au problème dual ; sous cette forme ils disposent d'un programme linéaire ayant n contraintes et un très grand nombre de variables. Pour résoudre ce problème, la méthode simpliciale révisée utilisant la forme PFI (product form of the inverse) est utilisée avec le principe de décomposition de Dantzig et Wolfe. La solution du problème primal apparaît, bien entendu, dans les composantes du critère de candidature à l'optimum du problème résolu (ces composantes sont indicées par les variables d'écart du problème dual).

En 1966 Künzi [23] propose d'adopter pour la résolution du problème à grand nombre de contraintes la méthode duoplex proposée par lui-même et H. Tzschach en 1965.

Cette méthode consiste dans un premier temps à se rapprocher le plus possible de la solution optimale. Pour ce faire il faut déterminer les contraintes dont les normales font avec le vecteur gradient de la fonction économique le plus grand angle ; ces contraintes sont appelées "contraintes principales". Le deuxième temps de la

méthode duoplex consistera ensuite à déterminer l'optimum par la résolution du programme linéaire n'ayant comme contraintes que les contraintes principales au moyen de la méthode simpliciale par exemple.

Ces méthodes ne semblent pas avoir été développées. Hartley et Hocking rapprochent leur méthode de la méthode des plans sécants de Kelley que nous allons aborder.

I.2.2) Méthodes de plans sécants

Ces méthodes sont en règle générale des méthodes non réalisables, c'est-à-dire que les différents points engendrés n'appartiennent pas au domaine des solutions réalisables mais convergent vers la solution optimale. On suppose ici prendre la forme (P_1) du problème général ce qui implique que la solution optimale appartient à la frontière du domaine.

Cheney et Goldstein proposent en 1959 [6] une théorie complète de ces méthodes basée sur la méthode de Newton. En notant S_k , à une itération k , un ensemble contenant le domaine des solutions réalisables A , la méthode recherche un point maximisant la fonction sur S_k , soit x_{k+1} ce point. Il s'agit ensuite de séparer ce point de A par un hyperplan en général et de recommencer le processus sur le nouvel ensemble S_{k+1} .

Kelley avec sa méthode des plans sécants [22] apporte des détails pratiques.

Nous donnons ci-dessous des indications précises sur cet algorithme, car au chapitre III nous envisageons une méthode semblable.

Le problème posé est donc :

$$\begin{aligned} &\text{maximiser } cx \\ &x \in A. \end{aligned}$$

On suppose que A est donné par $A = \{x \mid G(x) \leq 0\}$ avec $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et que A est inclus dans un polyèdre $S_0 = \{x \mid S_0 x \geq b\}$ qui peut être en général un pavé suffisamment grand pour contenir la solution optimale du problème. La fonction G est convexe.

Algorithme : $h = 0$

i) choisir $t_h \in S_h - A$ et définir l'hyperplan $p(x;t)$ par
 $p(x;t_h) = G(t_h) + (\nabla G(t_h), x - t_h)$ qui est un hyperplan support au graphe de
 $G(x)$ au point t_h .

On a, bien entendu, (G convexe), $p(x;t_h) \leq G(x) \quad \forall x \in S_h$ et l'hyperplan sépare
 t_h et A .

ii) optimiser la fonction économique sur $S_{h+1} = S_h \cap \{x \mid p(x;t_h) \leq 0\}$.
 Soit t_{h+1} le point obtenu.

Puisque $t_{h+1} \in S_{h+1}$ et $t_h \notin S_{h+1}$ on a $ct_h \geq ct_{h+1}$.

iii) aller en i) avec $h+1$ au lieu de h .

Cet algorithme engendre une suite de points $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$; il est démontré par Kelley la convergence d'une sous-suite vers la solution. Signalons que dans cette méthode le nombre de programmes linéaires à résoudre est théoriquement infini. Pour avoir une bonne approximation de la solution optimale, il est nécessaire de faire la résolution d'un grand nombre de programmes linéaires, chacun étant augmenté d'une contrainte par rapport au précédent. Les techniques de la méthode duale-simpliciale trouvent évidemment une application appropriée dans l'enchaînement des programmes linéaires. Un inconvénient majeur de cette méthode réside dans son principe. En effet on détermine à chaque itération un hyperplan de linéarisation en des points de plus en plus proches. Ce qui revient à construire une matrice avec des lignes presque égales puisque les hyperplans sont presque parallèles. La méthode simpliciale ou ses dérivés réalisant en définitive les mêmes opérations qu'une méthode de Jordan d'inversion matricielle, il est à craindre que le conditionnement très mauvais de la matrice des contraintes conduise à des résultats peu précis, voire fantaisistes, sur la détermination des points t_h .

En définitive cette méthode de Kelley présente deux inconvénients : le second n'a jamais été supprimé. Quant au premier, Topkis en 1970 [32] donne des conditions générales de convergence des algorithmes de plans sécants ne nécessitant par l'usage d'un nombre croissant de contraintes. Sous certaines réserves les contraintes inactives dans un problème linéaire peuvent être abandonnées ce qui permet de conserver un nombre constant de contraintes d'étape en étape.

Kaplan [21] ainsi que Topkis [32] généralisent quelque peu l'algorithme de Kelley en autorisant la linéarisation en des points différents des t_h . En effet considérant un point $\tau \in \overset{\circ}{A}$ ils démontrent que tout point du segment $[\tau, t_h]$ "extérieur" à A , c'est-à-dire $[\tau, t_h] \cap \bar{A}$, peut servir de point de linéarisation. Ce procédé présente un intérêt du fait que si le point choisi est sur la frontière de A , l'hyperplan tangent représentera mieux le domaine A ; de plus la troncature de S_h sera plus "profonde" dans de nombreux cas. Les auteurs précédents ainsi que Poliak et Levitin [25] donnent une vitesse de convergence à ces méthodes sous réserve que la fonction économique soit fortement concave. Cette convergence est arithmétique en $\frac{1}{k}$; dans le cas où la fonction est linéaire on verra au chapitre IV une manière d'aborder le problème de la vitesse de convergence.

I.2.3) Méthodes de directions améliorantes

Nous ne parlerons pas, dans ce groupe, de la méthode des centres linéarisée [17] qui sera exposée dans le chapitre II.

Frank et Wolfe proposent en 1956 [13] une méthode par linéarisation pour l'optimisation des programmes à fonction économique quadratique et à contraintes linéaires. A chaque itération on dispose d'un point x_k et on résoud le problème linéaire

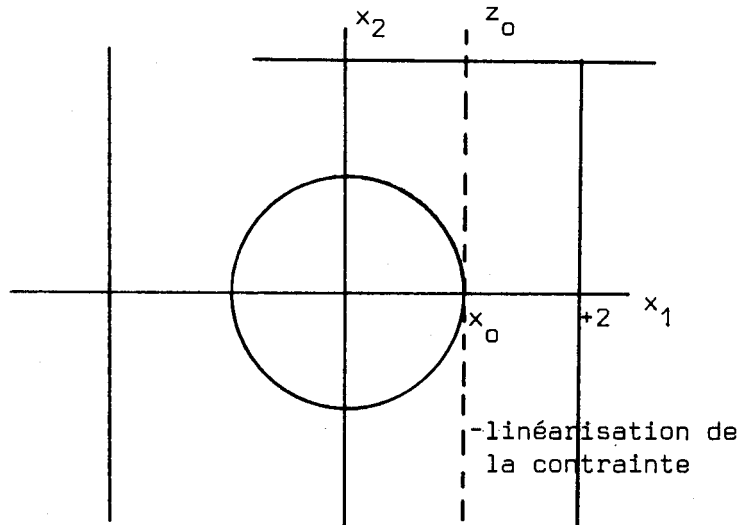
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } \nabla f(x_k) \cdot x \\ \text{sous les contraintes linéaires} \\ Ax \geq a. \end{array} \right.$$

Si z_k est une solution optimale de ce problème, l'itération se termine en déterminant sur le segment $[x_k, z_k]$ un point maximisant la fonction économique f , soit x_{k+1} ce point.

Pour cette construction, l'algorithme converge vers la solution du problème et dans le cas où il n'y a pas de contraintes on retrouve les méthodes de gradient usuelles d'optimisation sans contraintes sur \mathbb{R}^n .

Cette méthode ne se généralise pas aux contraintes non linéaires comme le montre l'exemple suivant tiré de [19] .

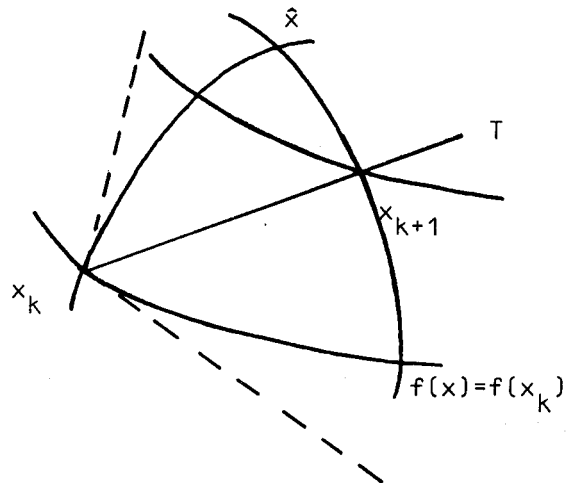
maximiser $x_1 + x_2$
 sous les contraintes
 $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$
 $-2 \leq x_1 \leq 2$
 $-2 \leq x_2 \leq 2$



En prenant $\bar{x}^0 = (1, 0)$ on obtient les points $\bar{x}^0 = \bar{x}^1 = \bar{x}^2 = \dots$ sans atteindre la solution $\hat{x} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ si on remplace le deuxième point de l'algorithme ci-dessus par la maximisation de f sur la partie réalisable du segment $[x_k, z_k]$.

En 1960 Zoutendijk présente une variante de la méthode des directions réalisables [37]. En un point x_k , le domaine des solutions meilleures et réalisables est donné par $A \cap \{x \mid f(x) \geq f(x_k)\}$.

La méthode consiste à déterminer les contraintes "presque" actives au point x_k (y compris l'équipotentielle économique) et à les linéariser en x_k , ceci afin de déterminer une direction (x_k, T) pénétrant à l'intérieur du domaine. Le "presque" actif se détermine en calculant les contraintes en x_k et en comparant ces valeurs avec un nombre ϵ positif donné. Les contraintes sélectionnées sont ramenées parallèlement à elle-même en x_k .



Le deuxième point de la méthode consiste à déterminer sur la partie réalisable de la direction (x_k, T) un point maximisant la fonction économique, soit x_{k+1} .

Des procédés d'anti zig-zag doivent être introduits dans l'algorithme pour éviter des oscillations importantes sur les points x_k , ce qui ralentirait la convergence. En réalité ces phénomènes d'oscillations ont été rencontrés dans nos premières expériences sur la méthode des centres linéarisée. En fait ces deux méthodes ont été réunies dans un cadre général "méthode des centres par majoration" par Huard dans [18].

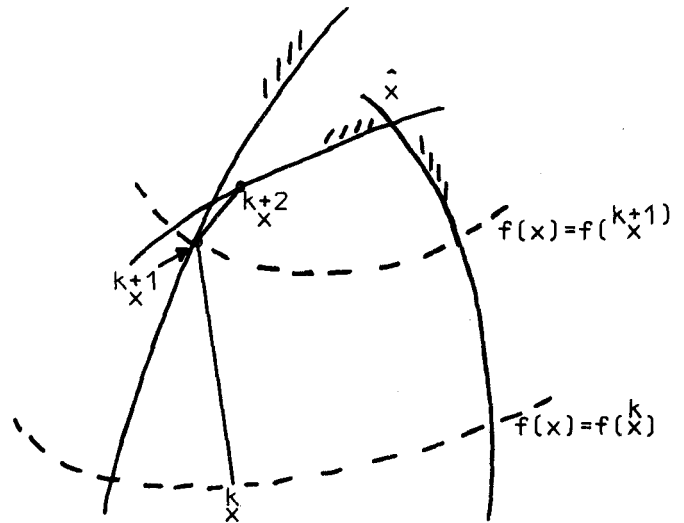
METHODE des CENTRES

et

METHODE des CENTRES LINEARISEE

II.0 - INTRODUCTION

Dans un problème d'optimisation avec contraintes de nombreuses méthodes par points réalisables voient leur efficacité diminuée par un phénomène de "blocage" sur les contraintes. Prenons, pour illustrer ce phénomène, une méthode de gradient c'est-à-dire qu'une itération revient à chercher sur la direction du gradient de la fonction économique un point réalisable qui maximise cette dernière. Il est à remarquer que ces méthodes ne tiennent compte, dans la construction d'une itération, d'aucuns renseignements sur la forme du domaine non linéaire limité par les contraintes mais se bornent au renseignement local qu'est le gradient en un point. La figure ci-contre montre les inconvénients qu'apporte cette sélection. Loin de l'optimum, le maximum de la fonction économique sur la direction du gradient au point $\overset{k}{x}$ sera le point d'intersection de la demi-droite $(\overset{k}{x}, \nabla f(\overset{k}{x}))$ avec la première contrainte rencontrée. Dans l'hypothèse où d'autres contraintes passent au voisinage de $\overset{k+1}{x}$ il est possible que le segment $[\overset{k+1}{x}, \overset{k+2}{x}]$ soit très petit et en conséquence l'amélioration réalisée sera faible (rappelons que pour une fonction concave la différence $f(\overset{k+2}{x}) - f(\overset{k+1}{x})$ est majorée par $(\nabla f(\overset{k+1}{x}), \overset{k+2}{x} - \overset{k+1}{x})$).



Ce phénomène de blocage sur les contraintes pourrait d'ailleurs être rapproché de la stagnation des valeurs économiques dans un problème linéaire qui comporte de nombreuses contraintes donnant des points extrêmes voisins que la méthode simpliciale explore les uns après les autres.

D'autre part, dans ces méthodes qui risquent de bloquer sur les contraintes, des procédés de projection ou de rentrée dans le domaine non linéaire sont à trouver pour préserver la convergence (gradient projeté, gradient réduit, gradient réduit généralisé...).

Un algorithme général d'optimisation non linéaire a été proposé par Huard sous le nom de "méthode des centres" [4].

Cette méthode construit une suite de points réalisables tels que chacun d'eux soit "éloigné le plus possible" de chaque contrainte ou encore soit un centre géométrique du domaine non linéaire. Ceci justifie le mot centre et répond aux remarques faites ci-dessus quant au blocage sur les contraintes. Cet éloignement par rapport aux contraintes, on pourrait de manière intuitive parler de distance aux contraintes, se mesure par une classe de fonctions introduites dans [4], appelées fonctions f-distance ; ces fonctions prennent en compte tout le domaine non linéaire donc des renseignements globaux sur son allure.

Nous reprenons ci-dessous l'exposé de la méthode des centres afin d'introduire toutes les notations utiles à la compréhension de la méthode des centres linéarisée. Nous insistons sur la notion de "presque-centre", appelée ϵ -centre, qui autorise la programmation sur calculateurs. Des résultats récents sur la vitesse de convergence de la méthode sont également résumés dans le paragraphe 3. Le paragraphe 4 nous permettra d'aborder la méthode des centres linéarisée, variante de la méthode des centres.

II.1 - HYPOTHESES GENERALES SUR LA METHODE DES CENTRES

II.1.1) Le problème général d'optimisation s'énonce de la manière suivante :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f(x) \\ \text{sous les conditions} \\ x \in A \cap B. \end{array} \right.$$

avec les hypothèses :

- A et B sont deux parties de \mathbb{R}^n telles que

$$\bar{A} \neq \emptyset, \quad A \cap B \text{ fermé}$$

$$(H) \quad \forall O \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n : \overset{\circ}{A} \cap B \cap O = \emptyset \implies A \cap B \cap O = \emptyset$$

- la fonction économique f est supposée continue et atteindre son maximum sur $A \cap B$ en un point \hat{x} .

On suppose de plus que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda < f(\hat{x})$ on a

$$\text{Fr } \{x \mid f(x) \geq \lambda\} = \{x \mid f(x) = \lambda\}.$$

II.1.2) Particularisation du problème (P)

On envisagera généralement un ensemble de contraintes A défini par des fonctions continues et concaves $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad i=1, \dots, m$.

Le domaine A sera alors l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0 \quad i=1, \dots, m\}$ qui de par la continuité des fonctions g_i est fermé et convexe en raison de la concavité des g_i .

On utilisera en général un ensemble B fermé et convexe de \mathbb{R}^n qui par la suite sera borné dans la méthode des centres linéarisée.

Sous ces hypothèses on démontre comme dans [4] la propriété suivante :

Propriété II.1

L'hypothèse (H) : $\forall \emptyset$ ouvert de \mathbb{R}^n , $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \cap \emptyset = \emptyset \implies A \cap B \cap \emptyset = \emptyset$ est vérifiée sous réserve que $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \neq \emptyset$.

Démonstration :

$A \cap B$ étant convexe, il vérifie la relation (1) : $\overline{\overline{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}}} = \overline{A \cap B}$. Ceci permet d'écrire en utilisant l'identité $\overset{\circ}{A} = \overline{\overline{A}}$

$$\text{Fr}(\overline{\overline{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}}}) = \overline{A \cap B} \cap \overline{\overline{A \cap B}} = \text{Fr}(A \cap B).$$

Ce résultat acquis, supposons que $A \cap B \cap \emptyset \neq \emptyset$.

$$x \in A \cap B \cap \emptyset \implies x \in A \cap B \quad \text{et} \quad x \in \emptyset$$

deux éventualités se présentent :

$$* \text{ ou bien } x \notin \text{Fr}(A \cap B) = \text{Fr}(\overline{\overline{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}}})$$

$$\text{ceci donne } x \in \overline{\overline{A \cap B}} \cap \overline{\overline{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}}} = \overline{\overline{A \cap B}} \cup \overline{\overline{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}}}$$

comme $x \in A \cap B$ nous en déduisons $x \in \overline{\overline{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ d'où $x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \cap \emptyset$;

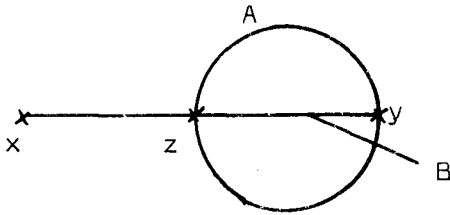
$$* \text{ ou bien } x \in \text{Fr}(A \cap B) = \text{Fr}(\overline{\overline{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}}}) = \overline{\overline{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}}} \cap \overline{\overline{A \cap B}}$$

en particulier x est un point adhérent à $\overline{\overline{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}}}$; or $\emptyset \ni x$ est un voisinage de x qui a en conséquence une intersection non vide avec $\overline{\overline{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ ce qui signifie que $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \cap \emptyset \neq \emptyset$.

En définitive, de par ces deux cas, l'hypothèse (H) est vérifiée.

Remarque : En n'exigeant pas la convexité de A, celle de $A \cap B$ étant assurée, il est nécessaire que B soit d'intérieur non vide.

Considérons le contre-exemple dans \mathbb{R}^2 suivant



$$B = [x, y]$$

$A \cap B \subset B$ convexe puisque B est un segment

$$\overset{\circ}{A} \neq \emptyset ; \overset{\circ}{A} \cap B \neq \emptyset$$

A n'est pas convexe, car union d'un disque et du segment $[x, z]$.

pour le point x l'hypothèse (H) est bien entendu non vérifiée.

On verra au chapitre III que la convexité de A ainsi que de $A \cap B$ est nécessaire.

II.1.3) Présence de contraintes en égalité dans le problème (P)

Ces contraintes de la forme $h(x) = 0$ peuvent apparaître dans l'énoncé d'un programme mathématique. Les hypothèses de la méthode des centres interdisant dans la définition de A ce genre de contraintes puisqu'alors $\overset{\circ}{A} \cap B = \emptyset$ elles seront rejetées dans l'ensemble B.

Nous verrons que dans le cas où h est une forme linéaire, sa présence dans B n'est pas gênante pour la méthode des centres linéarisée. Dans le cas où h est une fonction non linéaire, il est intéressant de pouvoir se ramener à une contrainte en inégalité. On trouvera dans [11] un algorithme itératif permettant de choisir le sens de l'inégalité pour que le problème demeure équivalent en valeurs optimales. Cet algorithme repose sur le fait qu'une égalité peut être remplacée par deux inégalités de sens opposé. A l'optimum ces deux contraintes $h(x) \geq 0$ et $h(x) \leq 0$ seront saturées, c'est-à-dire vérifiées en égalité mais une seule sera active (remarquons que le mot actif est défini par un multiplicateur de Lagrange à l'optimum non nul). A l'aide de cet algorithme qui nécessite à chaque itération la détermination de l'intersection d'un segment avec une contrainte non linéaire, les égalités pourront être fixées avec un sens d'inégalité arbitraire au départ. Ce procédé nous permettra de résoudre les problèmes avec des égalités non linéaires par la méthode des centres et d'éviter ainsi les algorithmes à dents de scie qui posent des problèmes de retour sur le domaine non linéaire (remarques de II.1.0).

II.1.4) La notion de f-distance, de centre, d' ϵ -centre

Pour le problème (P) de II.1.1 définissons un ensemble de parties de \mathbb{R}^n par Λ .

Définition II.1

On appellera fonction distance toute application $d : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les axiomes suivants :

- 1) $\forall E \in \Lambda, \forall x \in \text{Fr}(E) \quad d(x, E) = 0$
- 2) $\forall E \in \Lambda, \forall x \in \overset{\circ}{E} \quad d(x, E) > 0$
- 3) $\forall E, E' \in \Lambda, \quad E \subset E' \quad \forall x \in E \quad \exists \rho(x) \in \mathbb{R}^+$
 $d(x, E) \leq \rho(x) d(x, E')$

Définition II.2

On dira qu'une fonction distance définie sur $\mathbb{R}^n \times \Lambda$ est régulière si pour toute suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de points de \mathbb{R}^n et toute suite d'éléments de $\Lambda \quad (E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que

$$E \subset E_{k+1} \subset E_k \subset \dots \subset E_0 \quad \text{avec } E \neq \emptyset$$

$$\forall k, x_k \in E_k \quad \text{et} \quad x_k \notin \overset{\circ}{E}_{k+1}$$

alors $d(x_k, E_k) \rightarrow 0$ si $k \rightarrow +\infty$.

Définition II.3 Etant donnés E un élément de Λ et une f-distance d sur $\mathbb{R}^n \times \Lambda$ on appelle centre de E relativement à la f-distance d un point tel que

$$c \in \overset{\circ}{E} \quad \text{et} \quad d(c, E) = \sup \{d(x, E) \mid x \in E\}$$

Définition II.4 Sous les mêmes données que dans la définition précédente, on définit un ϵ -centre de E relativement à la f -distance d par :

si $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tel que $0 \leq \epsilon < \sup \{d(x,E) \mid x \in E\}$

alors c est ϵ -centre si

$$d(c,E) \geq \sup \{d(x,E) \mid x \in E\} - \epsilon.$$

Remarque : Utilité de cette notion d' ϵ -centre. La fonction distance d étant connue, la recherche du centre de $E \in \Lambda$ est un problème d'optimisation. En général on connaît, on le verra par la suite, un point de départ $x_0 \in \text{Fr}(E)$ pour résoudre le problème ; d'après les axiomes 1 et 2 de la définition II.1, $d(x_0, E) = 0$ et la maximisation de d sur E va chercher à obtenir des points $x_1 \in E$ afin d'augmenter la fonction, ce qui montre qu'en général ce problème de maximisation ne comporte plus les contraintes $x \in E$ qui ne seront certainement pas actives à l'optimum. Ceci permettra d'utiliser, par exemple comme dans la méthode des centres à troncatures variables [34], des méthodes de gradient sans contraintes pour mener la recherche du maximum de d , c'est-à-dire d'un centre de E .

La notion d' ϵ -centre permet tout simplement de n'avoir pas à poursuivre la maximisation de d sur E trop longtemps.

II.1.5) Construction d'une f -distance pour le problème de II.1.1 et II.1.2

Définissons $K \subset \mathbb{R}$ par

$$K =] \min \{f(x) \mid x \in A \cap B\}, \max \{f(x) \mid x \in A \cap B\}[$$

Nous allons construire un ensemble de parties de \mathbb{R}^n en faisant des troncatures de A par la fonction économique. Considérons pour cela une valeur λ de K et associons λ l'ensemble $E(\lambda)$ défini par

$$E(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in A \text{ et } f(x) \geq \lambda\}$$

remarquons qu'à λ on fait correspondre une seule partie de \mathbb{R}^n .

Définissons alors sur $\mathbb{R}^n \times \Lambda$ une fonction d par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall E \in \Lambda, \exists \lambda \text{ unique tel que } E(\lambda) = E$$

$$\text{et } d(x, E) = d(x, E(\lambda)) = \min \{f(x) - \lambda, g_i(x) \mid i=1, \dots, m\}.$$

Les fonctions g_i définissant l'ensemble A .

Propriété II.2 La fonction d est une f -distance régulière sur $\mathbb{R}^n \times \Lambda$.

Démonstration :

Rappelons les hypothèses fondamentales sur f et sur A .

- $\text{Fr} \{x \mid f(x) \geq \lambda\} = \{x \mid f(x) = \lambda\}$ valable sur $\forall \lambda \in K$.
- A convexe (g_i concaves) $\implies \text{Fr}(A) = \text{Fr}(\overset{\circ}{A})$ d'après II.1.2.

Montrons tout d'abord deux résultats :

$$\text{a) } \text{Fr}(A) \subset \{x \in A \mid \exists i_0 \quad i_0=1, \dots, m ; g_{i_0}(x) = 0\}$$

$$\text{b) } \overset{\circ}{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) > 0 \quad \forall i=1, \dots, m\}$$

Pour le premier si $x \in \text{Fr}(A) \implies x \in \bar{\overset{\circ}{A}}$ et $x \in \overline{\overset{\circ}{A}}$ d'où x adhèrent à $\overset{\circ}{A}$. Montrons que $x \in A$: en utilisant la propriété $\bar{\overset{\circ}{A}} = \bar{A}$ pour les convexes on a $x \in \bar{A} \implies x$ adhèrent à $\overset{\circ}{A}$ donc il existe une suite de points (x_n) de $\overset{\circ}{A}$ telle que $g_i(x_n) \geq 0$ (car $\overset{\circ}{A} \subset A$) et $x_n \rightarrow x \quad n \rightarrow +\infty$. Comme les fonctions g_i sont toutes continues $\implies g_i(x) \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, m$.

Puisque $x \in A$ supposons que $\forall i \quad i=1, \dots, m \quad g_i(x) > 0$. Pour chaque indice i , g_i est continue, il existe donc un ouvert O_i contenant x tel que $O_i \subset \{x \mid g_i(x) \geq 0\}$.

Si $O = \bigcap_{i=1}^m O_i$ alors O est un ouvert contenant x tel que $O \subset A$ ce qui signifie que

$x \in \overset{\circ}{A}$ d'où $x \in \overset{\circ}{A} = \overline{\overset{\circ}{A}}$ ce qui est impossible.

cqfd.

Montrons le résultat b :

Il est évident que $\{x \mid g_i(x) > 0 \quad i=1, \dots, m\} \subset \overset{\circ}{A}$ puisque les g_i sont continues et $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A .

Il reste à montrer que $\overset{\circ}{A} \subset \{x \mid g_i(x) > 0 \quad i=1, \dots, m\}$.

Si $x \in \overset{\circ}{A} \implies x \notin \text{Fr}(A) = \bar{A} - \overset{\circ}{A} \subset \{x \in A \mid \exists i_0 g_{i_0}(x) = 0\}$ d'après a. Comme $x \in A$ cela entraîne que $\forall i \quad g_i(x) > 0$.

cqfd.

remarques : A l'aide de ce résultat b il est évident que $\text{Fr}(A) = \{x \in A \mid \exists i_0 g_{i_0}(x) = 0\}$ on montrerait de même que l'hypothèse

$$\text{Fr}\{x \mid f(x) \geq \lambda\} = \{x \mid f(x) = \lambda\} \text{ pour } f \text{ continue}$$

entraîne $\overline{\{x \mid f(x) \geq \lambda\}} = \{x \mid f(x) > \lambda\}$.

Ces deux résultats acquis vérifions les axiomes de la définition 11.1, et de la définition 11.2.

1) $\forall x \in \text{Fr}\{E(\lambda)\}$ on a, ou bien $f(x) = \lambda$ ou bien $x \in \text{Fr}(A)$. En effet $E(\lambda) = A \cap \{x \mid f(x) \geq \lambda\}$ et d'après la relation sur les frontières $\text{Fr}(E(\lambda)) = \overline{E(\lambda)} \cap \{\text{Fr}(A) \cup \text{Fr}\{x \mid f(x) \geq \lambda\}\}$, dans chacun des deux cas, de par l'hypothèse de 11.1.1 ou le résultat a), on a

$$d(x, E(\lambda)) = 0$$

$$2) \forall x \in \overset{\circ}{E}(\lambda) = \overline{A \cap \{x \mid f(x) \geq \lambda\}} = \overset{\circ}{A} \cap \{x \mid f(x) > \lambda\}$$

on a $f(x) > \lambda$ et $\forall i \quad i=1, \dots, m \quad g_i(x) > 0$ (résultat b) d'où

$$d(x, E(\lambda)) > 0$$

3) Soient $E(\lambda) \subset E(\lambda')$ et $x \in E(\lambda)$

$$E(\lambda) \subset E(\lambda') \implies \lambda \geq \lambda' \implies f(x) - \lambda \leq f(x) - \lambda'$$

ceci suffit pour prouver que $d(x, E(\lambda)) \leq \rho(x) d(x, E(\lambda'))$ avec $\rho(x) \equiv 1$.

4) Régularité de cette fonction-distance

Considérons une suite infinie de parties de Λ associées à une suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec

$$\forall k \quad \lambda_k \in K, \lambda_k \leq \bar{\lambda} \quad \lambda_k \leq \lambda_{k'}, \quad \forall k' \geq k \text{ et } \bar{\lambda} \in K$$

et associons une suite de points (x_k) telle que $x_k \in E_k$ et $x_k \notin \overset{\circ}{E}_{k+1}$, $\forall k$.

Ces définitions entraînent

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f(x_k) - \lambda_{k+1} \leq 0 \leq f(x_k) - \lambda_k.$$

La suite (λ_k) est bornée supérieurement d'où $\lambda_k \rightarrow \lambda^* \leq \bar{\lambda}$ si $k \rightarrow +\infty$ d'où

$$f(x_k) - \lambda_k \leq \lambda_{k+1} - \lambda_k \implies \lim_{k \rightarrow +\infty} (f(x_k) - \lambda_k) \leq 0$$

or $f(x_k) - \lambda_k \geq 0, \forall k \implies \lim_{k \rightarrow +\infty} (f(x_k) - \lambda_k) = 0$

mais comme $\forall i \quad i=1, \dots, m \quad g_i(x_k) \geq 0$ nous avons

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d(x, E(\lambda_k)) = 0.$$

II.1.6) Autres exemples de f-distances

On trouve dans [4], [34] d'autres expressions de f-distance pour le problème (P).

Citons en particulier

$$d(x, E(\lambda)) = \left(\prod_{i=1}^m g_i(x) \right) \times (f(x) - \lambda)$$

$$d(x, E(\lambda)) = \left(\prod_{i=1}^m g_i(x) \right) \times (f(x) - \lambda)^p \quad \text{avec } p > 0.$$

Désormais, par abus de langage, on écrira la f-distance $d(x, E(\lambda)) = d(x, \lambda)$ en assimilant cette fonction de $\mathbb{R}^n \times \Lambda$ à une fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (en réalité $\mathbb{R}^n \times K$).

II.2 - ALGORITHME DE LA METHODE DES CENTRES [4]

Pour le problème (P) l'algorithme de la méthode des centres se résume à trouver une suite de domaines $E(\lambda_k)$ diminuant par inclusion et telle qu'à la limite on ait $E(\lambda^*) \cap B = \emptyset$ avec $\lambda^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k$.

Organigramme : Considérons une suite décroissante de scalaires positifs $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 et une f-distance régulière d.

A l'itération k on dispose d'un point $\overset{k}{x} \in A \cap B$

1) former le domaine $E(\lambda_k) = A \cap \{x \mid f(x) \geq \lambda_k\}$ avec $\lambda_k = f(\overset{k}{x})$
 si $E(\lambda_k) \cap B = \emptyset$ alors l'optimum est atteint sinon

2) maximiser la f -distance régulière à ϵ_k près sur $E(\lambda_k) \cap B$
 c'est-à-dire trouver un point $\overset{k+1}{x} \in E(\lambda_k) \cap B$ tel que

$$d(\overset{k+1}{x}, \lambda_k) \geq \max \{d(x, \lambda_k) \mid x \in E(\lambda_k) \cap B\} - \epsilon_k$$

avec la condition $0 \leq \epsilon_k < \max \{d(x, \lambda_k) \mid x \in E(\lambda_k) \cap B\}$

3) aller en 1 avec $k = k+1$.

Convergence : Il est démontré dans [4] la convergence de cet algorithme.

Remarques : L'hypothèse (H) énoncée en II.1.1 permet de démontrer l'optimalité de la solution $\overset{k}{x}$ lorsqu'à une itération $E(\lambda_k) \cap B = \emptyset$ et également l'optimalité d'un point d'accumulation de la suite engendrée par l'algorithme.

Rappelons également une manière de définir les ϵ_k .

Pour $\rho \in]0, 1]$ constant et indépendant de k imposons aux ϵ_k de vérifier la relation

$$\epsilon_k = (1 - \rho) \max \{d(x, \lambda_k) \mid x \in E(\lambda_k) \cap B\}$$

Les tronçons $E(\lambda_k) \cap B$ diminuant par inclusion et à la limite $d(\overset{k+1}{x}, \lambda_k) \rightarrow 0$ la suite des ϵ_k sera bien décroissante et convergente vers 0.

Ce choix permettra de définir un critère pour affirmer qu'un point $\overset{k+1}{x}$ est un ϵ -centre "convenable" pour la convergence de la méthode.

Ce critère est : $\overset{k+1}{x}$ doit vérifier $d(\overset{k+1}{x}, \lambda_k) \geq \rho \max \{d(x, \lambda_k) \mid x \in E(\lambda_k) \cap B\}$

Nous pourrions, pour la méthode des centres linéarisée, l'explicitier davantage.

II.3 - VITESSE DE CONVERGENCE DE LA METHODE DES CENTRESII.3.0) Introduction :

Nous résumons dans ce paragraphe des résultats récents [29,30] sur la vitesse de convergence de la méthode des centres dans le cas des fonctions-distance définies en II.1.5 et II.1.6. Ils sont la généralisation de quelques résultats obtenus dans [34].

Définition II.5 Convergence linéaire d'une suite de valeurs.

Etant donnée une suite de valeurs non décroissante $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ convergeant vers \hat{f} on dira que la convergence de cette suite est :

au moins linéaire si $\exists \beta \in [0,1[\forall i \in \mathbb{N} : \hat{f} - f_{i+1} \leq \beta(\hat{f} - f_i)$

au plus linéaire si $\exists \gamma \in [0,1[\forall i \in \mathbb{N} : \hat{f} - f_{i+1} \geq \gamma(\hat{f} - f_i)$.

II.3.1) Fonction distance : $d(x, \lambda) = \min \{f(x) - \lambda, g_i(x)\}$ [30,31], Pironneau et Polak

Le problème (P) est particularisé par les hypothèses suivantes :

f et g_i $i=1, \dots, m$ sont des fonctions concaves et continuellement différentiables. La fonction f est strictement concave.

Dans ce cas, les points \bar{x}^k étant des 0-centres des différents tronçons $E(\lambda_k)$ on a :

1er résultat : \hat{x} étant une solution optimale de (P) l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange λ_f à l'optimum \hat{x} de la fonction économique f est tel que

$$\bar{\lambda}_f = \min \{\lambda_f\} > 0$$

on rappelle que les multiplicateurs sont non tous nuls ce qui permet de les normaliser.

2ème résultat : Convergence au moins linéaire de la suite $(f(\bar{x}^k))_{k \in \mathbb{N}}$.

On démontre qu'à partir d'un certain rang $i_0(\alpha)$ dépendant de $\alpha \in [0,1[$ donné

$$0 \leq f(\hat{x}) - f(\bar{x}^{k+1}) \leq [1 - \bar{\lambda}_f(1-\alpha)] (f(\hat{x}) - f(\bar{x}^k)).$$

Remarquons que le coefficient de convergence linéaire peut être très proche de 1 et que d'autre part, il s'agit d'un résultat de convergence asymptotique c'est-à-dire valable à la limite.

3ème résultat : Convergence au plus linéaire.

Sous les mêmes hypothèses à partir d'un rang i_1 nous avons :

$$f(\hat{x}) - f(x^{k+1}) \geq (1 - \bar{\lambda}_f)(f(\hat{x}) - f(x^k)) \quad \bar{\lambda}_f < 1.$$

Ces deux résultats montrent le comportement asymptotique de la méthode des centres lorsque $\bar{\lambda}_f \neq 1$ et que les points trouvés sont de vrais centres. Montrons la validité du 2ème résultat lorsqu'on recherche des ϵ -centres.

Propriété II.3 Cas des ϵ -centres satisfaisant à la propriété de II.2.

Si la maximisation de la f -distance $\min \{f(x) - \lambda, g_1(x)\}$ sur $E(\lambda_k) \cap B$ est conduite à ϵ_k près avec ϵ_k vérifiant

$$\epsilon_k = (1-\rho) \max \{d(x, \lambda_k) \mid x \in E(\lambda_k) \cap B\} \quad \rho \in]0,1[$$

la convergence au moins linéaire est préservée pour $k \geq i_0(\alpha)$.

Démonstration : Notons c^{k+1} un 0-centre du tronçon $E(\lambda_k) \cap B$. Dans [30] on trouve la relation suivante

$$d(c^{k+1}, \lambda_k) = f(c^{k+1}) - f(x^k) \geq \bar{\lambda}_f(1-\alpha)(f(\hat{x}) - f(x^k)) \quad \text{pour } k \geq i_0(\alpha).$$

Le point choisi par l'algorithme est tel que

$$d(x^{k+1}, \lambda_k) \geq \rho d(c^{k+1}, \lambda_k)$$

d'où la convergence au moins linéaire est encore vraie car

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) \geq d(x^{k+1}, \lambda_k) \geq \rho \bar{\lambda}_f(1-\alpha)(f(\hat{x}) - f(x^k))$$

donc

$$f(\hat{x}) - f(x^{k+1}) \leq [1 - \rho \bar{\lambda}_f(1-\alpha)] (f(\hat{x}) - f(x^k)).$$

Notons que moins la recherche de l' ϵ -centre est poussée, c'est-à-dire ρ voisin de 0 et plus le coefficient de convergence linéaire est proche de 1.

II.3.2) Fonction distance $d(x, \lambda) = \prod_{i=1}^m g_i(x) \times (f(x) - \lambda)^p \quad p > 0.$ [29], Mifflin

Hypothèses et notations valables pour les résultats ci-dessous :

$$- \beta = \frac{1}{p};$$

- q^* nombre de contraintes strictement positives en une solution optimale

p^* nombre de composantes strictement positives des multiplicateurs de Lagrange à l'optimum

solution optimale non dégénérée $\iff p^* + q^* = m$

- les fonctions f et $g_i \quad i=1, \dots, m$ sont supposées concaves et continuellement différentiables

- le domaine des contraintes A est tel que $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$: soit $\overset{\circ}{x} \in \overset{\circ}{A}$ et

$$E(f(x_0)) = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq f(\overset{\circ}{x})\}$$

- $E(f(x_0))$ est supposé borné avec un diamètre égal à

$$\gamma = \sup \{ \|x-y\| \mid x \text{ et } y \in E(f(x_0))\}$$

- la fonction distance, par construction, est continue et différentiable.

On suppose que la recherche d'un centre du tronçon à chaque étape est faite à ϵ près, ϵ fixé à l'avance, tel que

$$\|\nabla D(\overset{k+1}{x}, \lambda_k)\| \leq \epsilon$$

en prenant $D(x, \lambda) = \text{Log} (d(x, \lambda))$ pour $x \in \overset{\circ}{E}(\lambda)$.

Ce qui donne

$$\nabla D(x, \lambda) = \frac{\nabla f(x)}{f(x) - \lambda} + \beta \sum_{i=1}^m \frac{\nabla g_i(x)}{g_i(x)}$$

Remarque : Ces différentes hypothèses correspondent à l'algorithme exposé en II.2.

Le choix des ϵ -centres est bien tel que $\epsilon_k \rightarrow 0 \quad k \rightarrow +\infty$. On suppose de plus que l'algorithme ne converge pas en un nombre fini d'étapes.

Résultat 1

La suite des valeurs $\frac{f(\hat{x}) - f(\overset{k}{x})}{\beta(f(\overset{k}{x}) - f(\overset{k-1}{x}))}$ a ses points d'accumulation dans

l'intervalle $[p^*, m-q^*]$.

Résultat 2

Si $\nabla f(x) \neq 0$ pour tout $x \in E(f(x_0))$ alors $\exists \tilde{p}$ strictement positif tel que

$$0 < \tilde{p} \leq \frac{f(\hat{x}) - f(\overset{k}{x})}{\beta(f(\overset{k}{x}) - f(\overset{k-1}{x}))} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Résultat 3 Convergence au moins linéaire

$$\forall k \quad \frac{f(\hat{x}) - f(x^k)}{f(\hat{x}) - f(x^{k-1})} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta m + \epsilon \gamma}}$$

Remarque : Dans le cas $\epsilon=0$ (obtention de 0-centres) on retrouve un résultat de [34] établi sous des hypothèses plus restrictives (au moins une fonction est strictement concave et $m=n$ =dimension de l'espace).

Résultat 4 Convergence au plus linéaire.

Sous réserve que $\nabla f(x) \neq 0 \quad \forall x \in E(f(x_0))$ alors

$$\forall k \quad 0 < \frac{\beta \tilde{p}}{1 + \beta \tilde{p}} \leq \frac{f(\hat{x}) - f(x^k)}{f(\hat{x}) - f(x^{k-1})}$$

Résultat 5 Cas d'une solution optimale non dégénérée

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(\hat{x}) - f(x^k)}{f(\hat{x}) - f(x^{k-1})} \right) = \frac{\beta p^*}{1 + \beta p^*} = \frac{\beta(m-q^*)}{1 + \beta(m-q^*)}$$

Dans le cas où il n'y a pas de contraintes actives à l'optimum, la convergence des valeurs économiques est super-linéaire.

II.3.3) Conclusion

En définitive ces résultats complets sur la vitesse de convergence de la méthode des centres montrent que cette vitesse est au moins linéaire sous des hypothèses très larges. Les bornes inférieures des rapports trouvées indiquent qu'en général on ne pourra avoir mieux qu'une convergence linéaire.

Cependant les résultats correspondant à la fonction distance produit, s'ils dépendent du nombre de contraintes actives à l'optimum, sont plus maniables de par le coefficient β que l'on peut ajuster pour avoir le rapport de convergence souhaité voisin de 1/2 par exemple. En revanche la quantité $\bar{\lambda}_f$ de II.3.1 n'est guère abordable.

Les multiplicateurs de Lagrange $(\lambda_f, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ satisfont au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_f, \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_f + \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1 \\ \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\hat{x}) = 0 \\ \lambda_f \nabla f(\hat{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(\hat{x}) = 0 \end{array} \right. \quad \text{pour } \hat{x} \text{ solution optimale}$$

Sans connaître la solution \hat{x} on ne peut guère espérer, du fait de l'homogénéité de ces relations en (λ_f, λ_j) , augmenter à coup sûr la valeur $\bar{\lambda}_f$ par une modification (par une constante multiplicative) de l'expression analytique des fonctions du problème.

II.4 - METHODE DES CENTRES LINEARISEE

II.4.0) Introduction. Principe. Hypothèses

Dans la méthode des centres l'essentiel des calculs à chaque itération est la maximisation sans contraintes de la f -distance sur le tronçon $E(\lambda_k) \cap B$.

Le principe de la méthode des centres linéarisée est de résoudre ce problème par une suite infinie de programmes linéaires ayant tous le même nombre de contraintes. Cette suite de programmes permettant de définir une suite de points réalisables $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(d(y_i, \lambda_k))_{i \in \mathbb{N}}$ soit monotone non décroissante convergente vers la valeur $d(c_{k+1}, \lambda_k)$ maximum de la f -distance sur $E(\lambda_k) \cap B$.

En fait, à cause de la notion d' ϵ -centre, à chaque tronçon il ne sera utile de faire la résolution que d'un nombre fini de programmes linéaires. On démontre que le premier point y_1 obtenu après un programme est un ϵ_k -centre avec $\epsilon_k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. Seulement si on désire que les ϵ_k vérifient le critère donné en II.2 (remarques), il est possible que le nombre de programmes linéaires à résoudre augmente de plus en plus lorsque k augmente. C'est, en définitive, le même problème que lors de la maximisation de la f -distance de la méthode des centres : celle-ci doit être poussée suffisamment loin d'où un nombre croissant d'itérations d'une méthode de gradient ou de gradient conjugué.

On supposera :

- $f, g_i \quad i=1, \dots, m$ concaves, continuellement différentiables
- A est convexe fermé d'intérieur non vide
- B est un polyèdre linéaire fermé, borné de \mathbb{R}^n donc convexe
- $d(x, \lambda) = \min \{f(x) - \lambda, g_i(x) \mid i=1 \dots m\}$ f -distance régulière.

II.4.1) Recherche d'un ϵ -centre du tronçon $E(\lambda) \cap B$

Définition II.6 On appellera fonction distance linéarisée l'application $d' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$d'(x, \lambda; y) = \min \{f'(x; y) - \lambda, g_i'(x; y) \mid i=1, \dots, m\}$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad f'(x; y) - \lambda &= f(y) - \lambda + (\nabla f(y), x-y) \\ g_i'(x; y) &= g_i(y) + (\nabla g_i(y), x-y) \quad i=1 \dots m \end{aligned}$$

(en réalité le paramètre λ devrait être pris dans l'ensemble K de II.1.5).

Propriété II.4 La fonction distance linéarisée est une fonction, pour y fixé, linéaire par morceaux, continue, concave; de plus la relation suivante est vérifiée :

$$d(x, \lambda) \leq d'(x, \lambda; y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Démonstration :

De par sa définition, les fonctions f' et g_i' étant affines, la f -distance linéarisée est évidemment linéaire par morceaux et continue. La concavité résulte de la relation générale : $\min (\lambda f + \mu g) \geq \lambda \min (f) + \mu \min (g)$. La dernière relation résulte des propriétés des fonctions concaves :

$$f(x) - \lambda \leq f(y) - \lambda + (\nabla f(y), x-y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Notations : On appellera $A(\lambda, y)$ le programme mathématique suivant

$$A(\lambda, y) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } d'(x, \lambda; y) \\ \text{sous les conditions} \\ x \in B \end{array} \right.$$

Nous avons vu au chapitre I que ce programme $A(\lambda, y)$ était équivalent à un programme linéaire noté $PL(\lambda, y)$ dont les variables sont x et μ :

$$PL(\lambda, y) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } \mu \\ f'(x; y) - \lambda \geq \mu \\ g'_i(x; y) \geq \mu \\ x \in B \\ (\mu) \end{array} \right.$$

dans ce programme linéaire λ et y sont fixés.

Ces définitions étant données, considérons l'algorithme partiel

- 1) choisir $\overset{\circ}{y} \in B$ et faire $h = 0$
- 2) résoudre $PL(\lambda, \overset{h}{y})$: soit $\overset{h}{Z}$ une solution optimale
- 3) déterminer $\overset{h+1}{y}$ par : $d(\overset{h+1}{y}, \lambda) = \max \{d(x, \lambda) \mid x \in [\overset{h}{y}, \overset{h}{Z}]\}$
- 4) aller en 2) avec $h+1$ au lieu de h .

On construit dans cet algorithme une suite infinie de programmes linéaires qui génère une suite de points $(\overset{h}{y})$ avec $(d(\overset{h}{y}, \lambda))_h$ monotone non décroissante. Remarquons que le point de départ $\overset{\circ}{y}$ est choisi quelconque dans B et pas obligatoirement réalisable pour le domaine non-linéaire ce qui justifie la remarque faite au chapitre V sur le démarrage de la méthode des centres linéarisée.

Théorème II.1 Convergence de l'algorithme partiel.

La démonstration de la convergence vers le 0-centre du tronçon $E(\lambda_k) \cap B$ de la suite $(\overset{h}{y})$ est donnée par Huard dans [17].

Elle réside dans le fait que les suites $(\overset{h}{y})_h$ et $(\overset{h}{Z})_h$ appartenant à un compact, il est possible d'en extraire deux sous-suites convergentes. Si \bar{y} et \bar{z} sont les limites la relation $d(\bar{y}, \lambda) = d'(\bar{z}, \lambda; \bar{y})$ permet de montrer que \bar{y} maximise la f -distance sur $E(\lambda) \cap B$.

Remarques à propos de la convergence de l'algorithme partiel.

- 1) La concavité des fonctions f et g_i n'est requise que pour assurer que \bar{y} est un maximum global de la f -distance d sur $E(\lambda) \cap B$. Dans le cas où la concavité est

abandonnée, il est démontré que \bar{y} est un point stationnaire pour la maximisation de $d(x, \lambda)$ sur B.

2) Maximisation approchée sur les segments $[\bar{y}^h, \bar{z}^h]$.

Le calcul sur ordinateurs du maximum de la f-distance ne peut se faire que de manière approchée, la localisation du maximum de cette fonction concave s'effectuant par des procédés de dichotomie ou autres qui réduisent la longueur de l'intervalle de localisation.

En fait le point 3) de l'algorithme partiel peut tenir compte de ces exigences en le remplaçant par le point 3').

Déterminer \bar{y}^{h+1} tel que

$$d(\bar{y}^{h+1}, \lambda) \geq d(\bar{y}^h, \lambda) + \rho' [\max \{d(x, \lambda) \mid x \in [\bar{y}^h, \bar{z}^h]\} - d(\bar{y}^h, \lambda)].$$

3) Reconnaissance d'un ϵ -centre

Nous avons vu que dans le cas où on se fixe ϵ_k vérifiant la relation de II.2 avec $\rho \in]0, 1]$ indépendant du tronçon, un ϵ_k centre \bar{x}^{k+1} vérifiait la relation

$$d(\bar{x}^{k+1}, \lambda_k) \geq \rho d(\bar{y}, \lambda_k) \quad \bar{y} \text{ 0-centre.}$$

Nous pouvons déterminer un rang \bar{h} dans la suite $(\bar{y}^h)_h$ tel qu'à partir de \bar{h} la relation ci-dessus soit vérifiée.

En effet la suite des valeurs $d(\bar{y}^h, \lambda_k)$ convergeant vers $d(\bar{y}, \lambda_k)$ l'existence de \bar{h} fini est évidente. De plus les points \bar{z}^h de l'algorithme partiel vérifie :

$$d(\bar{y}, \lambda_k) \leq d(\bar{z}^h, \lambda_k; \bar{y}) \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

(propriété II.4).

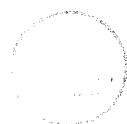
Le rang \bar{h} sera donc déterminé lorsqu'on obtiendra des valeurs $d(\bar{y}^h, \lambda_k)$ vérifiant :

$$d(\bar{y}^h, \lambda_k) \geq \rho d(\bar{z}^h, \lambda_k; \bar{y}^h).$$

Ceci permet d'obtenir facilement un critère d'arrêt par l'algorithme partiel. Malheureusement il est possible que \bar{h} tende vers l'infini avec k ce qui implique que si les résultats de II.3.1 et la propriété II.3 permettent d'affirmer que la suite des valeurs $(f(\bar{x}^k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge alors linéairement, le fait qu'un nombre de plus en plus grand de linéarisations soit nécessaire à chaque tronçon supprime l'avantage de cette convergence linéaire.

AMELIORATION de la METHODE

des CENTRES LINEARISEE



III.0 - INTRODUCTION

Nous présentons ci-dessous quelques exemples simples à deux variables sur lesquels la méthode des centres linéarisée, rappelée au chapitre II, converge lentement. Ces exemples sont des illustrations simples d'ennuis rencontrés, lors de l'exploitation de la méthode sur des problèmes tests, dans la convergence pratique et nous ont permis d'envisager dans le paragraphe 2 une amélioration importante de l'algorithme partiel de recherche d'un ϵ -centre.

Ce nouvel algorithme partiel, dit de centrage, est en définitive fondé sur les mêmes principes que certaines méthodes de linéarisation exposées dans le chapitre I. Mais au contraire de celles-ci, notre algorithme de centrage n'est jamais poussé suffisamment loin pour qu'apparaissent tous les ennuis inhérents au mauvais conditionnement des matrices définissant les programmes linéaires.

Enfin au paragraphe 3 nous introduisons quelques propriétés permettant une diminution du volume des programmes linéaires. Cette simplification est essentiellement vue du point de vue linéarisation partielle des contraintes non linéaires ; on s'est en effet aperçu qu'au cours des résolutions successives des programmes linéaires, les bases optimales restaient les mêmes ou différaient de seulement quelques indices (généralement d'un seul).

III.1 - EXEMPLES DE RALENTISSEMENT DE LA CONVERGENCE PRATIQUEIII.1.1) Influence de la normalisation des contraintes

Dans la méthode des centres, un domaine $E(\lambda)$ pour une troncature donnée est déterminé par les contraintes $g_1(x) \geq 0$ et l'équipotentielle économique $f(x) \geq \lambda$. L'un des avantages de la méthode étant de générer des points "bien à l'intérieur" du domaine réalisable, il est gênant de n'avoir pas une certaine homogénéité dans les valeurs calculées des fonctions définissant la fonction-distance.

En d'autres termes, il est fort possible qu'une des contraintes ait un fort gradient, c'est-à-dire que la fonction varie très vite à partir de la contrainte $g_1(x) = 0$; à l'opposé une autre contrainte peut avoir un faible gradient.

Ces deux hypothèses étant réunies, il est évident que la maximisation de la f-distance donnera des points voisins de la 1ère contrainte détruisant ainsi la symétrie.

Lorsque ce phénomène apparaît pour la fonction économique, la détermination d'un 0-centre peut donner un point très voisin de l'équipotentielle $f(x) = \lambda$ d'où en définitive une très faible amélioration à chaque troncature. On verra à ce propos quelques résultats des problèmes 1, 2, 8 du chapitre VI.

A titre d'illustration de ce qui précède, considérons le programme mathématique totalement linéaire à 2 variables suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } \alpha x_1 + \beta x_2 \\ - b x_1 - a x_2 \geq -1 \\ b x_1 - a x_2 \geq -1 \\ (x_1, x_2) \end{array} \right. \quad (\text{voir figure page suivante})$$

avec l'hypothèse que le point $(0, \frac{1}{a})$ est l'optimum unique. La linéarité de ce problème entraîne que la méthode des centres linéarisée donne, pour une troncature, un 0-centre dès la première étape de l'algorithme partiel.

La symétrie du problème avec l'hypothèse faite entraîne que pour une troncature $\alpha x_1 + \beta x_2 \geq \lambda_0 = \alpha \overset{0}{x}_1 + \beta \overset{0}{x}_2$ le 0-centre $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ vérifie les conditions suivantes : (nous verrons au chapitre IV, le cas général)

$$\left\{ \begin{array}{l} - b \overset{1}{x}_1 - a \overset{1}{x}_2 + 1 = \mu_1 \\ b \overset{1}{x}_1 - a \overset{1}{x}_2 + 1 = \mu_1 \\ \alpha \overset{1}{x}_1 + \beta \overset{1}{x}_2 - \lambda_0 = \mu_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{on notera } c \text{ le vecteur } (\alpha, \beta) \\ \text{A la matrice } \begin{pmatrix} -b & -a \\ b & -a \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi la nouvelle valeur économique est liée à l'ancienne par

$$\lambda_1 = p + \frac{\alpha}{1+\alpha} \lambda_0 \quad \text{avec} \quad p = \frac{\hat{\lambda}}{1+\alpha} \quad \text{et} \quad \alpha = -cA^{-1}e$$

d'où en définitive

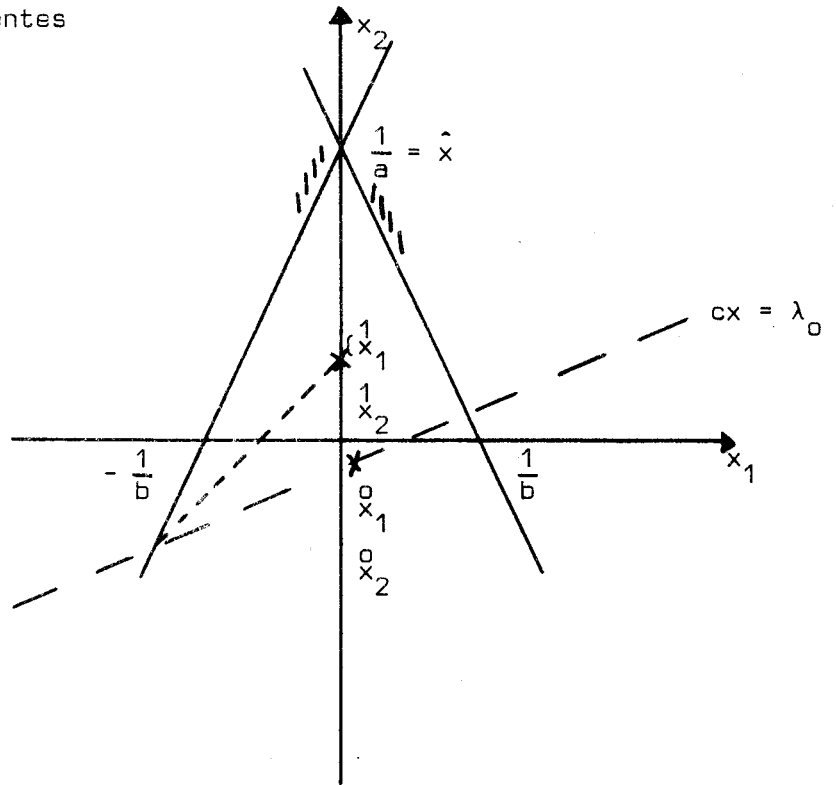
$$\frac{\hat{\lambda} - \lambda_{k+1}}{\hat{\lambda} - \lambda_k} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

Remarquons que les relations précédentes entraînent :

si $a^2 + b^2 = 1$

$\alpha^2 + \beta^2 = 1$

le 0-centre (x_1^1, x_2^1) est le centre du cercle inscrit dans le triangle limité par les contraintes et l'équipotentielle.



En supposant au contraire que la fonction économique est pondérée par un coefficient multiplicatif k , ce qui revient à écrire la fonction $k(\alpha x_1 + \beta x_2)$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, le 0-centre ne se trouvera plus à

l'intersection des "vraies bissectrices" du triangle mais sera rejeté :

- si k est grand : vers l'équipotentielle $cx = \lambda_0$
- si k est petit : vers l'optimum \hat{x} du problème initial.

Avec cette pondération le rapport de deux écarts successifs devient égal à

$$\frac{\hat{\lambda} - \lambda_{k+1}}{\hat{\lambda} - \lambda_k} = \frac{k\alpha}{1 + k\alpha}$$

la convergence reste, bien entendu, linéaire mais si k augmente le coefficient de convergence linéaire approche 1. D'autre part dans l'exemple ci-dessus les contraintes ont des gradients de même norme. Il est possible que ceci ne soit pas vérifié et dans ce cas les centres seraient rejetés vers une contrainte. Dans le cas linéaire, ce n'est pas, du point de vue numérique, gênant ; lorsque les contraintes sont non linéaires, ce fait peut entraîner des difficultés pour poursuivre la progression économique. C'est pourquoi dans le paragraphe suivant nous envisagerons une normalisation des contraintes pour réaliser la condition suivante :

en un point de linéarisation y on a

$$\|\nabla f(y)\| = \|\nabla g_i(y)\| = 1 \quad i=1, \dots, m$$

III.1.2) Mauvaise direction de recherche d'un ϵ -centre : $[x, z]$

Nous savons, d'après les rappels du chapitre précédent, que pour une troncature le premier point donné par l'algorithme partiel est un ϵ -centre. Par ailleurs si nous voulons assurer une convergence linéaire à la suite des troncatures la suite des ϵ doit satisfaire un critère donné en II.2 remarques.

L'exemple suivant montre pour quelles raisons cette dernière condition n'est pas satisfaite pour de nombreux problèmes.

Problème :

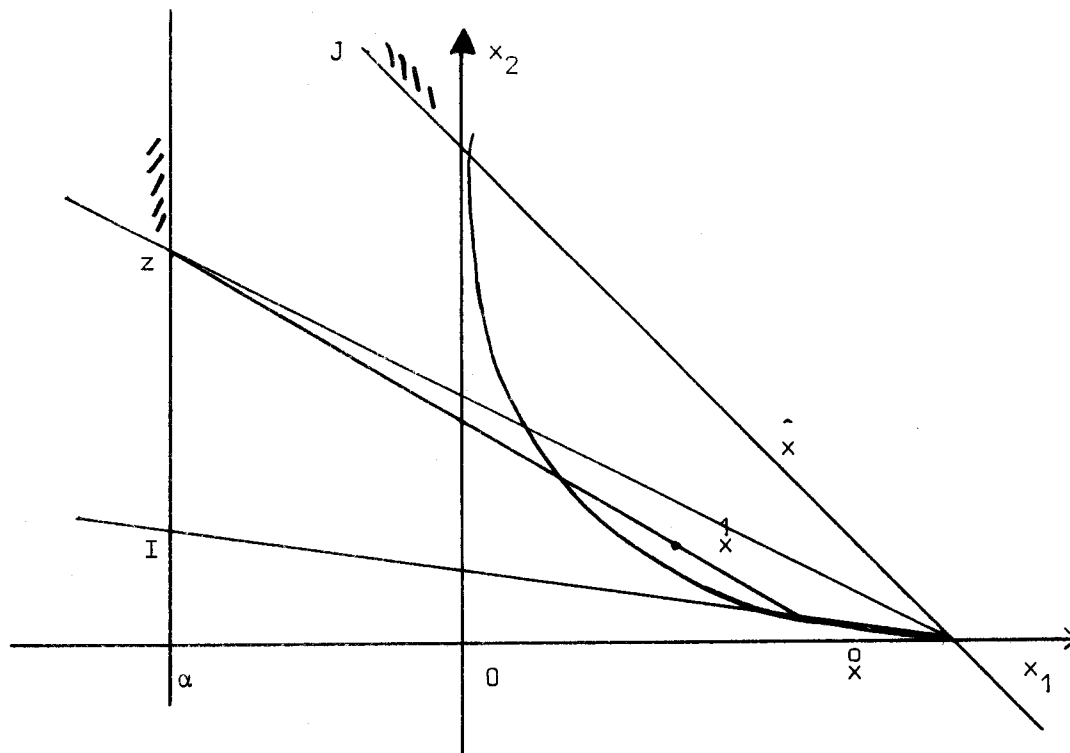
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } x_1 x_2 \\ \text{sous } x_1 + x_2 \leq 1 \\ \alpha \leq x_1 \leq 1 \quad \text{avec } \alpha < 0 \\ 0 \leq x_2 \leq \beta \quad \quad \beta > 0 \end{array} \right.$$

La fonction économique est une fonction concave dans la région qui nous intéresse (1er orthant) puisque les équipotentielles sont une branche d'hyperboles.

Nous considérons la troncature $x_1 x_2 \geq \overset{0}{x}_1 \overset{0}{x}_2$ et la figure ci-contre à la première étape de l'algorithme partiel :

z optimum du programme linéaire

$\overset{1}{x}$ maximum de la f-distance sur $[\overset{0}{x}, z]$



La contrainte linéaire $x_1 + x_2 \leq 1$ est introduite dans la f-distance qui a pour expression $d(x, \lambda) = \min \{x_1 x_2 - \overset{0}{x}_1 \overset{0}{x}_2, -x_1 - x_2 + 1\}$

On a supposé que dans la recherche du point z les contraintes ont été normalisées : donc, en supposant β assez grand, l'optimum de la distance linéarisée est sur la bissectrice de l'angle $(\overset{0}{x}I, \overset{0}{x}J)$ avec pour composantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \alpha \\ z_2 = \frac{2 \lambda_0}{1+x_0} + \frac{1-y_0 \alpha}{1+x_0} \end{array} \right.$$

La recherche du maximum de la f-distance sur le segment $[\overset{0}{x}, z]$ conduit à trouver un point $\overset{1}{x}$ où l'hyperbole $x_1 x_2 = \overset{1}{x}_1 \overset{1}{x}_2$ est tangente à $[\overset{0}{x}, z]$.

On voit, et de plus amples calculs le montreraient, que plus α est grand en valeur absolue et plus le point $\overset{1}{x}$ est proche de l'équipotentielle $x_1 x_2 = \overset{0}{x}_1 \overset{0}{x}_2$. A la limite en supposant que la borne supérieure sur x_2 est infinie et que la borne inférieure sur x_1 est égal à $-\infty$, la recherche du point z par programme linéaire donnerait une direction d'infinitude $(\overset{0}{x}, I)$ et alors le maximum de la f-distance sur cette direction serait obtenu en $\overset{0}{x}$.

L'exemple ci-dessus montre que dans la méthode des centres linéarisée, l'ensemble B doit être effectivement borné pour assurer la convergence sans autres hypothèses que celles données. De plus, il est à remarquer que dans l'exemple précédent la faible amélioration de la fonction provient du fait que le point z est peu représentatif du centre du domaine non-linéaire. En réalité on peut dire que le polyèdre linéarisé est dans cet exemple une très mauvaise approximation de $E(\lambda)$, le tronçon non linéaire. Cela entraîne que la direction $[x, z]$ pénètre "très peu" dans le tronçon.

L'idée directrice de notre travail a donc été de représenter plus efficacement le domaine non linéaire. L'exemple ci-dessus nous indique un moyen simple pour limiter l'éloignement du point z optimum de la distance linéarisée : c'est la réduction du pavé de bornes dans le programme linéaire et on peut rapprocher ce procédé de celui employé par Griffith et Stewart dans [14].

En réalité le contrôle de cette réduction est difficile et de plus on ne peut espérer de cette manière représenter correctement des contraintes non linéaires. L'algorithme de centrage utilisera des hyperplans de linéarisation tangentielle.

III.2 - ALGORITHME DE CENTRAGE. VARIANTE DE LA METHODE DES CENTRES LINEARISEE

L'algorithme défini ci-dessous fait intervenir les remarques du paragraphe 1 concernant la normalisation des contraintes à chaque linéarisation et l'approximation du domaine non-linéaire.

Tenir compte de la normalisation nous conduit à abandonner l'usage d'une f-distance régulière au profit d'une fonction majorant cette f-distance. En cela nous nous rapprochons d'une variante de la méthode des centres, la méthode des centres par majoration introduite dans [18].

III.2.0) Hypothèses

- f, g_i ($i=1, \dots, m$) fonctions concaves continuellement différentiables.
- B un polyèdre linéaire fermé borné dont l'intérieur peut être vide (cas de contraintes en égalité).
- $A = \{x \mid g_i(x) \geq 0, i=1, \dots, m\}$ tel que $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ et $\overset{\circ}{A} \cap B \neq \emptyset$
 A est convexe, fermé et $\overset{\circ}{A} = \{x \mid g_i(x) > 0\}$ d'après propriété II.2.
- $K =]\inf \{f(x) \mid x \in A \cap B\}, \sup \{f(x) \mid x \in A \cap B\}[\subset \mathbb{R}$.
- $E(\lambda) = \{x \mid x \in A, f(x) \geq \lambda\}$ $\lambda \in K$
on a bien $\text{Fr} \{x \mid f(x) \geq \lambda\} = \{x \mid f(x) = \lambda\}$.
- On suppose de plus que

$$\text{Hypothèse N } \left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tels que } 0 < \alpha \leq \beta \text{ et} \\ \forall x \in B \text{ on a } \alpha \leq \|\nabla f(x)\| \leq \beta \text{ et} \\ \alpha \leq \|\nabla g_i(x)\| \leq \beta. \end{array} \right.$$

Remarque : Sous les hypothèses précédentes, l'hypothèse (H) de la méthode des centres est vérifiée ($\overset{\circ}{A} \cap B \cap \emptyset = \emptyset \implies A \cap B \cap \emptyset = \emptyset$ pour tout ouvert \emptyset de \mathbb{R}^n). On notera sur le contre-exemple ci-dessous que si l'intérieur de B peut être vide la convexité de $A \cap B$ est nécessaire ; cette hypothèse a pour but d'exclure la possibilité de points isolés pour $A \cap B$.

Contre-exemple dans \mathbb{R}

$$A = [0, 1], \overset{\circ}{A} =]0, 1[\text{ non vide, } A \text{ convexe}$$

$$B = [0, \frac{1}{2}] \cup \{1\}; B \text{ est fermé, } \overset{\circ}{A} \cap B \neq \emptyset \text{ et } B \text{ non convexe.}$$

En prenant pour ouvert O le segment ouvert $] \frac{3}{4}, \frac{1}{4} [$ nous avons bien $A \cap B \cap O = \emptyset$ mais $A \cap B \cap O = \{1\}$.

Ceci montre que l'on peut, pour rester dans le cadre de la théorie, envisager des contraintes linéaires en égalité dans B mais non des contraintes non-linéaires en égalité.

III.2.1) Choix d'une f-distance régulière. Choix d'une majorante

Propriété III.1 Si k est une constante strictement positive et d une f-distance régulière définie sur $\mathbb{R}^n \times \Lambda$ alors $d_1 = kd$ fonction de $\mathbb{R}^n \times \Lambda$ dans \mathbb{R} est encore une f-distance régulière.

Ce résultat est immédiat par application des axiomes d'une f-distance régulière.

Avec le même abus d'écriture que dans le chapitre II nous choisirons pour f-distance régulière la fonction d définie sur $\mathbb{R}^n \times K$ par

$$d(x, \lambda) = \frac{1}{\beta} \min \{ f(x) - \lambda, g_i(x) \mid i=1, \dots, m \}$$

avec β donné par l'hypothèse (N).

Définition III.1 Fonction majorante d'une f-distance régulière.

On appelle fonction majorante d'une f-distance une fonction d' définie sur $\mathbb{R}^n \times B \times K$ à valeurs dans \mathbb{R} telle que d' soit continue et

$$\left. \begin{array}{l} 1) d'(x, y, \lambda) \geq d(x, \lambda) \\ 2) d'(x, x, f(x)) = 0 \end{array} \right\} \forall x \in A \cap B, \forall y \in B, \forall \lambda \in K$$

3) $\forall a, b \in B$ fixés on a

$$d(x, f(a)) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b] \implies d'(x, a, f(a)) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Nous noterons D et d' les applications suivantes :

$$D : \mathbb{R}^n \times B \times K \rightarrow \mathbb{R} ; D(x,y,\lambda) = \min \left\{ \frac{f(x) - \lambda}{\|\nabla f(y)\|} , \frac{g_i(x)}{\|\nabla g_i(y)\|} \mid i=1, \dots, m \right\}$$

$$d' : \mathbb{R}^n \times B \times K \rightarrow \mathbb{R} ; d'(x,y,\lambda) = \min \left\{ \frac{f'(x,y) - \lambda}{\|\nabla f(y)\|} , \frac{g'_i(x,y)}{\|\nabla g_i(y)\|} \mid i=1, \dots, m \right\}$$

où f' et g'_i ont la même définition qu'en II.4.1.

Propriété III.2 Les fonctions D et d' sont des majorantes de la f-distance régulière choisie ci-dessus.

Démonstration :

La continuité et les axiomes 1 et 2 sont vérifiés de par les hypothèses de continuité, de gradient continu, de l'hypothèse (N) et de la concavité des fonctions f et g_i .

L'axiome 3 est vérifié de manière triviale par la fonction D. Montrons sa vérification pour la fonction d'.

Soient a et b fixés de B et $\forall x \in [a,b] \quad d(x, f(a)) \leq 0$.

Cette hypothèse entraîne

$(\nabla f(a), b-a) \leq 0$ et/ou $(\nabla g_{i_j}(a), b-a) \leq 0$ pour un indice au moins.

En effet, considérons les p fonctions qui donnent la valeur $d(a, f(a)) = 0$ au point a (on a certainement $p \geq 1$ puisque $f(a) - f(a) = 0$), soient

$$\frac{1}{\beta} (f(x) - \lambda) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\beta} g_{i_j}(x) \quad j=1, \dots, p-1$$

ces p fonctions.

Du fait de la continuité de d on peut assurer l'existence d'un intervalle $[a, a+\epsilon[$ avec $\epsilon > 0$ sur lequel la valeur de $d(x, f(a))$ est donnée par l'une quelconque des fonctions f et $g_{i_j} \quad j=1, \dots, p-1$.

Notons h la fonction f ou g_{i_j} pour laquelle le produit scalaire

$$\frac{1}{\beta} (\nabla f(a), b-a) \text{ où } \frac{1}{\beta} (\nabla g_{i_j}(a), b-a) \text{ est minimum.}$$

Si ce minimum $(\nabla h(a), b-a)$ est strictement positif, cela entraîne que les p fonctions considérées comme fonction d'une variable sur $[a,b]$ ont toutes au point a une dérivée positive strictement. Donc il existerait sur $[a, a+\epsilon[$ des points x tels que $d(x, f(a)) > 0$ ce qui est impossible.

La démonstration est achevée en notant que la fonction h est telle que $h(a) = 0$ et comme $x = a+t(b-a)$ $t \in [0,1]$

on a
$$d'(x, a, f(a)) \leq \frac{h(a) + (\nabla h(a), x-a)}{\|\nabla h(a)\|} = t \frac{(\nabla h(a), b-a)}{\|\nabla h(a)\|} \leq 0.$$

III.2.2) Algorithme général

A l'itération k on dispose de

$$\bar{x}^k \in A \cap B, \lambda_k = f(\bar{x}^k), E_k = E(\lambda_k) = A \cap \{x \mid f(x) \geq f(\bar{x}^k)\}$$

i) Maximiser $d'(x, \bar{x}^k, \lambda_k)$ sur le polyèdre $(E_k \cap B)$ construit à partir des contraintes de B et des linéarisations en \bar{x}^k de f et g_i .

Soit \bar{z}^k ce point maximisant d' .

ii) Maximiser $D(x, \bar{x}^k, \lambda_k)$ sur $[\bar{x}^k, \bar{z}^k]$.

Soit \bar{y}^{k+1} le point obtenu.

On a donc

$$D(\bar{y}^{k+1}, \bar{x}^k, \lambda_k) = \sup \{D(x, \bar{x}^k, \lambda_k) \mid x \in [\bar{x}^k, \bar{z}^k]\} > 0.$$

iii) Choisir \bar{x}^{k+1} dans $E'_{k+1} \cap B$ avec

$$E'_{k+1} = \{x \in A \mid f(x) \geq f(\bar{y}^{k+1})\}$$

voir algorithme partiel en III.2.4.

iii) aller en i) avec $k+1$ au lieu de k .

Remarques

1) Cet algorithme se différencie de celui de la méthode des centres linéarisée par les points i) ii) car les fonctions que l'on maximise changent à chaque itération. La fonction D du point ii) vérifie les inégalités

$$\forall x \in A \cap B, \forall y \in B, \forall \lambda \in K$$

$$d(x, \lambda) \leq D(x, y, \lambda) \leq \frac{\beta}{\alpha} d(x, \lambda).$$

2) Si dans l'algorithme on a à une étape k ,

$$D(y^{k+1}, x^k, \lambda_k) = 0$$

alors une solution optimale est atteinte en x^k . Dans le cas contraire, tant que $D(y^{k+1}, x^k, \lambda_k) > 0$ le point y^{k+1} est meilleur strictement que x^k pour la fonction économique.

III.2.3) Convergence de l'algorithme

Nous nous inspirons de la démonstration de convergence de la méthode des centres par majoration [18] qui au point ii) près réalise les mêmes séquences.

Propriété III.3 La suite des points $(y^{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ représente des ϵ_k -centres des $E(\lambda_k) \cap B$ avec $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de valeurs convergeant vers 0 lorsque $k \rightarrow +\infty$.

Ce résultat permet de replacer notre algorithme dans le cadre de la méthode des centres (version [18]) et donc d'assurer la convergence de la suite (λ_k) vers la valeur optimale du programme mathématique (P).

Démonstration :

Montrons que $\epsilon_k = \sup \{d(x, \lambda_k) \mid x \in E_k \cap B\} - d(y^{k+1}, \lambda_k) \rightarrow 0$ lorsque k tend vers $+\infty$.

a) $d(y^{k+1}, \lambda_k) \rightarrow 0 \quad k \rightarrow +\infty.$

Par construction

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{k+1} \in E_k \implies f(x^k) < f(y^{k+1}) \text{ d'après la remarque 2 ci-dessus.} \\ x^{k+1} \in E_{k+1} \implies f(y^{k+1}) \leq f(x^{k+1}) = \lambda_{k+1} \\ (\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ suite croissante majorée par } f(\hat{x}) \end{array} \right.$$

d'où

$f(x^{k+1}) \rightarrow \lambda^*$ en notant λ^* la limite de la suite (λ_k)

ce qui entraîne $f(y^{k+1}) - \lambda_k \rightarrow 0 \quad k \rightarrow +\infty$.

Par ailleurs on a $E(\lambda^*) \subset \dots \subset E_{k+1} \subset E_k$

et $y^{k+1} \in E_k$ et $y^{k+1} \notin E_{k+1}$

avec d f -distance régulière (définition II.2) nous avons donc

$$d(y^{k+1}, \lambda_k) \rightarrow 0 \text{ si } k \rightarrow +\infty.$$

b) Il existe une sous-suite telle que $d'(z^k, x^k, \lambda_k) \rightarrow 0 \quad k \rightarrow +\infty$.

Le couple (z^k, x^k) appartenant au compact $B \times A \cap B$ il existe une partie S de \mathbb{N} telle que

$$\left. \begin{array}{l} x^k \rightarrow x^* \in A \cap B \\ z^k \rightarrow z^* \in B \end{array} \right\} \quad k \rightarrow +\infty \quad k \in S$$

Par ailleurs $\forall \theta \in [0,1], \forall k \in \mathbb{N}$ par définition de y^{k+1} et parce que $D(x^k, x^k, \lambda_k)$ est concave en x , on a

$$D(x^k + \theta(z^k - x^k), x^k, \lambda_k) \leq D(y^{k+1}, x^k, \lambda_k).$$

Cette relation avec les suivantes :

$$- D(y^{k+1}, x^k, \lambda_k) \leq \frac{\beta}{\alpha} d(y^{k+1}, \lambda_k)$$

- résultat a)

- continuité de D et d

entraîne $D(x^* + \theta(z^* - x^*), x^*, \lambda^*) \leq 0 \quad \forall \theta \in [0,1]$.

En utilisant le 3ème axiome des majorantes des f -distances et

$$d(x^* + \theta(z^* - x^*), \lambda^*) \leq D(x^* + \theta(z^* - x^*), x^*, \lambda^*)$$

nous montrons que

$$d'(x^* + \theta(z^* - x^*), x^*, \lambda^*) \leq 0 \quad \forall \theta \in [0,1]$$

en particulier pour $\theta=1$ et en raison de la continuité de d' au point z^*, x^*, λ^* nous avons

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in S}} d'(\overset{k}{z}, \overset{k}{x}, \lambda_k) \leq 0$$

remarque : Dans cette démonstration la fonction d' n'a besoin d'être que semi-continue supérieurement en z^*, x^*, λ^* . En effet pour une telle fonction on aura bien le dernier résultat c'est-à-dire

$$d'(z^*, x^*, \lambda^*) \geq \lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ k \in S}} d(\overset{k}{z}, \overset{k}{x}, \lambda_k).$$

Ceci sera utilisé dans le paragraphe III.3.

c) $\epsilon_k \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow +\infty \quad k \in S$.

Notons c_k un 0-centre du tronçon $E_k \cap B$, donc

$$\epsilon_k = d(c_k, \lambda_k) - d(\overset{k+1}{y}, \lambda_k) \geq 0$$

puisque $c_k \in A \cap B$ nous avons la relation, de par l'axiome 2 de la définition III.1 :

$$0 \leq d(c_k, \lambda_k) \leq d'(\overset{k}{z}, \overset{k}{x}, \lambda_k)$$

et donc par la construction du point i) de l'algorithme

$$0 \leq d(c_k, \lambda_k) \leq d'(\overset{k}{z}, \overset{k}{x}, \lambda_k)$$

ce qui entraîne $\lim_{\substack{k \in S \\ k \rightarrow +\infty}} d(c_k, \lambda_k) = 0$.

Par ailleurs le résultat a) ci-dessus indique que $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(\overset{k+1}{y}, \lambda_k) = 0$.

cqfd.

III.2.4) Algorithme partiel de centrage

La recherche du point $\overset{k+1}{x}$ de $E_{k+1} \cap B$ utilise la construction de contraintes additionnelles obtenues par la linéarisation d'une contrainte ou de l'équipotentielle économique en des points sur la frontière ou éventuellement à l'extérieur du tronçon.

Nous donnons ci-dessous une formulation permettant le rapprochement de notre algorithme de centrage avec les méthodes de plans secants. Pour une écriture pratique du centrage on se reportera au chapitre V.

Posons S_0 le polyèdre constitué des contraintes de linéarisation du domaine non linéaire et des contraintes de B dans l'espace des $(x, \mu) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Poser $h=0$ et $t_h = \begin{matrix} k+1 \\ y \end{matrix}$, $u_h = \begin{matrix} h \\ z \end{matrix}$

i) prendre ω_h un point de $[t_h, u_h]$ tel que $\omega_h \in E_k \cap B$ si ω_h n'existe pas aller en iii) ;

linéariser au point ω_h la ou les contraintes qui donne à la f-distance la valeur $d(\omega_h, \lambda_k)$: soit ℓ cette contrainte ,

définir $S_{h+1} = S_h \cap \{x \mid \ell(\omega_h) + (\nabla \ell(\omega_h), x - \omega_h) \geq \mu\}$

ii) trouver u_{h+1} optimum du programme linéaire

$$\max \mu \text{ sous } (x, \mu) \in S_{h+1}$$

et maximiser D sur $[t_h, u_{h+1}]$; t_{h+1} l'optimum

iii) aller en i avec $h+1$

iiii) choisir pour point $\begin{matrix} k+1 \\ x \end{matrix}$ celui qui donne, parmi $\begin{matrix} k+1 \\ y \end{matrix}$ ou t_h , la meilleure valeur de la fonction économique.

Remarques :

1) Le point iii) réalise le choix de $\begin{matrix} k+1 \\ x \end{matrix}$ pour rester dans le cadre de l'organigramme général. En fait l'algorithme de centrage a, dans nos expériences, toujours donné des points t_h meilleurs que $\begin{matrix} k+1 \\ y \end{matrix}$ en valeur économique. Cela provient du fait qu'en général la fonction distance est définie par la fonction économique aux différents points de maximisation de D.

2) En règle générale on choisira le point ω_h voisin de la frontière de $E_k \cap B$. Dans tous les cas, il est facile de voir que le point u_h est, après un nombre fini d'itérations, intérieur au domaine non linéaire $E_k \cap B$. En modifiant le point i) ci-dessus par le point i') suivant :

i') prendre $\omega_h = u_h$ si $u_h \in E_k \cap B$

notre algorithme de centrage s'identifie à la méthode des plans sécants de Kelley [22] utilisé pour résoudre le problème

(C) maximiser $d(x, \lambda_k)$ sous $x \in E_k \cap B$.

En effet, en notant S le domaine $\{(x, \mu) \mid f(x) - \lambda_k \geq \mu, g_i(x) \geq \mu\} \cap B'$ avec B' le cylindre polyédrique $\{(x, \mu) \mid x \in B\}$, la méthode de Kelley construit les mêmes ensembles S_h . Il est démontré [22] que la suite des points (u_h, μ_h) optimums des programmes linéaires, admet comme valeur d'accumulation une solution optimale du problème (C) d'où l'obtention d'un 0-centre du tronçon.

En réalité, poursuivre la résolution par une suite infinie de plans sécants nous amène à construire des contraintes de linéarisation en des points u_h très voisins; les contraintes des programmes linéaires deviennent donc à la limite parallèles, ce qui interdit une résolution numérique des programmes linéaires précise.

L'algorithme de centrage utilisé dans la méthode des centres linéarisée évite ces ennuis car seulement un petit nombre de plans sécants est nécessaire pour l'obtention d'un "bon" ϵ -centre donné par les points t_h .

III.3 - LINEARISATION PARTIELLE DES CONTRAINTES NON LINEAIRES

Nous avons remarqué lors de la démonstration de la convergence de l'algorithme général III.2.2 qu'il suffisait que la fonction d' majorant la f -distance soit semi-continue supérieurement au point (z^*, x^*, λ^*) c'est-à-dire en règle générale à la limite des suites construites par l'algorithme.

Cette remarque nous permet de modifier l'expression de la fonction d' . Fixons-nous une valeur ϵ strictement positive constante au cours des itérations et notons $J_\epsilon^k(\bar{x})$ le sous-ensemble de $\{1, \dots, m\}$ tel que

$$j \in J_\epsilon^k(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{\iff} g_j^k(\bar{x}) < \epsilon.$$

Nous définirons alors à chaque itération k une fonction $D' : \mathbb{R}^n \times B \times K \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{par } D'(x, \bar{x}, \lambda_k) = \min \left\{ \frac{f'(x; \bar{x}) - \lambda}{\|\nabla f(\bar{x})\|}, \frac{g_j^k(x; \bar{x})}{\|\nabla g_j^k(\bar{x})\|} \mid j \in J_\epsilon^k(\bar{x}) \right\}.$$

Cette fonction D' est encore une fonction majorant la f -distance mais en général elle n'est pas continue puisque l'ensemble $J_\epsilon^k(\bar{x})$ peut se modifier à chaque troncature.

Mais en remarquant que les fonctions g_1 sont continues en x^* on peut assurer l'existence d'un voisinage de x^* dans lequel les ensembles $J_\epsilon(y)$ sont inclus dans $J_\epsilon(x^*)$. Ceci n'est évidemment vrai que si ϵ est strictement positif et les ensembles J_ϵ définis par l'inégalité stricte. Dans ces conditions on peut remplacer le point i) de l'algorithme III.2.2 par la maximisation de la fonction D' et la convergence est assurée par la même démonstration puisque D' est alors semi-continue supérieurement.

En pratique les remarques précédentes montrent qu'il suffira de linéariser les contraintes actives à l'optimum des programmes mathématiques. Ceci permet évidemment d'envisager des programmes linéaires de taille réduite. Ce principe a été adopté pour certaines expériences numériques du chapitre VI, notamment avec succès sur le problème 9. En règle générale pour un problème dont on ne connaît pas les contraintes actives, il faut choisir au départ ϵ assez grand. Dans bien des cas nous avons attendu d'être assez proche de l'optimum pour appliquer cette linéarisation partielle.

Remarques

1) La fonction D doit tenir compte de toutes les contraintes non linéaires.

2) Au cours des expériences numériques nous avons remarqué que les bases optimales des programmes linéaires étaient à peu près constantes quant aux indices les composant. On pourrait donc se borner à linéariser les contraintes correspondant aux indices communs à ces bases et se contenter de vérifier, une fois la résolution terminée, que les contraintes omises sont vérifiées.

Ceci est à rapprocher de la linéarisation partielle et permet d'éviter le choix du ϵ . De plus cette méthode a l'avantage de diminuer la taille des programmes linéaires. En ce qui concerne nos expériences numériques, le problème "place" n'a jamais été crucial. Par ailleurs les contraintes non actives à l'optimum, c'est-à-dire celles qui ne sont pas introduites dans le programme, ne donnent, dans la programmation de la méthode simpliciale que nous avons adoptée, naissance qu'à peu de calculs dans le cas où les variables d'écart de ces contraintes restent de base. C'est pourquoi nous n'avons pas étudié plus précisément ce phénomène.

VITESSE de CONVERGENCE
de la
METHODE des CENTRES LINEARISEE

IV.0 - INTRODUCTION

La méthode des centres linéarisée telle qu'elle fut définie à l'origine dans [17] est une méthode dont la vitesse de convergence peut ne pas être linéaire. Un exemple à deux variables présenté dans [30] possède une convergence à caractère logarithmique lorsqu'on ne fait qu'une linéarisation par troncature ; des calculs plus compliqués montreraient qu'un nombre fini de linéarisations par troncature n'apporterait pas de changement.

Pironneau et Polak dans [30] et [31] ont essayé de définir une variante de la méthode des centres possédant une convergence à caractère linéaire. Ils emploient le procédé de linéarisation utilisé jusqu'ici mais leur méthode se différencie de la méthode des centres linéarisée par la recherche de l' ϵ -centre qui se limite à une seule linéarisation par troncature. Ils remplacent dans cette recherche la maximisation de la f -distance linéarisée sur le polyèdre B par la maximisation d'une fonction quadratique ; en d'autres termes on peut formuler ce point par :

trouver (z, μ) maximisant $\mu - \frac{1}{2} \|z - \bar{x}\|^2$ sur le polyèdre

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(z; \bar{x}) - \lambda_k \geq \mu \\ g_i'(z; \bar{x}) \geq \mu \quad i=1, \dots, m. \end{array} \right.$$

Sous des hypothèses de "courbure maximum" et de forte concavité des fonctions ils montrent que cet algorithme de recherche suivi de la maximisation de la f -distance $d(x, \lambda_k)$ sur le segment $[\bar{x}, z]$ conduit à l'obtention d'un ϵ -centre vérifiant :

$$d(\bar{x}^{k+1}, \lambda_k) \geq \rho d(\bar{c}^k, \lambda_k) \quad \text{avec} \quad \rho \text{ indépendant de } k \\ \bar{c}^k \text{ 0-centre du tronçon.}$$

Ce qui prouve, par des résultats des mêmes auteurs rappelés en II.3.1, la convergence linéaire de cette méthode.

Cette variante répond à un souci déjà expliqué dans les chapitres précédents : celui d'éviter l'éloignement du point z optimum de la f -distance linéarisée sur le polyèdre B .

La maximisation de $\mu - \frac{1}{2} \|z - \bar{x}^k\|^2$ au lieu de μ revient à effectuer une pénalisation sur l'éloignement du point z sans préjuger de la direction que doit prendre ce point. Ce procédé est à rapprocher de celui de Griffith et Stewart [14] (hypercube de largeur ρ autour du point \bar{x}^k) mais au contraire de ce dernier l'ajustement de la limitation est rendue automatique.

Les contraintes additionnelles de notre algorithme de centrage peuvent être interprétées de la même manière mais ici la direction que doit prendre le point z est à chaque fois rectifiée pour que le segment $[\bar{x}^k, z]$ "pénètre bien" à l'intérieur du tronçon.

A la charge de la méthode de Pironneau et Polak, remarquons que les avantages de la linéarisation sont en partie perdus lors de la résolution numérique puisque les programmes linéaires sont remplacés par des programmes quadratiques.

Nous abordons ci-dessous le problème de la vitesse de convergence de la méthode des centres et centres linéarisée. Dans le paragraphe 1 nous donnons une nouvelle démonstration des résultats de II.3.1 concernant la méthode des centres utilisant la f -distance $d(x, \lambda) = \min \{f(x) - \lambda, g_i(x) \mid i=1, \dots, m\}$ dans les mêmes hypothèses que celles utilisées par Faure et Tremolières [34] pour la f -distance produit, c'est-à-dire que nous abandonnons l'hypothèse de forte-concavité (qui exclut le cas linéaire).

Enfin au paragraphe 2 nous présentons une manière d'aborder le problème de la vitesse de convergence de la méthode des centres linéarisée avec centrage. Ne pouvant pas apporter de conclusions générales nous considérerons l'application au problème sans contraintes.

IV.1 - VITESSE DE CONVERGENCE DE LA METHODE DES CENTRES - NORMALISATION

Le problème étudié est

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f(x) \\ \text{sous} \\ g_i(x) \geq 0 \quad i=1, \dots, n \end{array} \right.$$

satisfait aux hypothèses suivantes :

- f, g_i concaves et continuellement différentiables.
- les n contraintes sont actives à l'optimum.

- Le Jacobien des contraintes g_i est supposé régulier dans un voisinage de l'optimum \hat{x} . (On rappelle que le jacobien des n contraintes est une matrice de terme général $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)$ $i, j = 1, \dots, n$). Ce jacobien est noté $J(x)$.

- On dispose d'une troncature $f(x) \geq \lambda_k$ et on cherche un 0-centre du tronçon ; celui-ci est un optimum du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } \mu \\ f(x) - \mu \geq \lambda_k \\ g_i(x) - \mu \geq 0 \quad i=1, \dots, n \\ (x, \mu) \end{array} \right.$$

à l'optimum (\hat{x}^{k+1}, μ_k) les conditions de Kuhn et Tucker permettent d'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} uJ(\hat{x}^{k+1}) + v\nabla f(\hat{x}^{k+1}) = 0 \\ u_i(g_i(\hat{x}^{k+1}) - \mu_k) = 0 \quad i=1, \dots, n \\ v(f(\hat{x}^{k+1}) - \mu_k - \lambda_k) = 0 \end{array} \right. \quad \text{avec } \begin{array}{l} u \in \mathbb{R}^n \quad u \geq 0 \\ v \in \mathbb{R} \quad v \geq 0 \end{array}$$

Les hypothèses entraînent que le 0-centre vérifie, en notant g l'application de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui a pour composantes les g_i ,

$$g(\hat{x}^{k+1}) = \mu_k e, \quad f(\hat{x}^{k+1}) - \lambda_k = \mu_k : e \in \mathbb{R}^n \text{ de composantes } 1.$$

or

$$\begin{aligned} g(\hat{x}^{k+1}) &= g(\hat{x}) + J(\xi) \cdot (\hat{x}^{k+1} - \hat{x}), \quad \xi \in [\hat{x}^{k+1}, \hat{x}] \text{ et } g(\hat{x}) = 0 \\ f(\hat{x}^{k+1}) &= f(\hat{x}) + (\nabla f(\xi'), \hat{x}^{k+1} - \hat{x}), \quad \xi' \in [\hat{x}^{k+1}, \hat{x}] \end{aligned}$$

d'où en définitive :

$$\frac{\hat{\lambda} - \lambda_{k+1}}{\hat{\lambda} - \lambda_k} = \frac{\alpha(\xi, \xi')}{1 + \alpha(\xi, \xi')} \quad \text{en posant } \alpha(\xi, \xi') = -(\nabla f(\xi'), J^{-1}(\xi)e)$$

ceci n'étant valable, bien entendu, que dans un voisinage de \hat{x} d'où la propriété :

Propriété IV.1 Vitesse de convergence de la méthode des centres.

Sous les hypothèses précédentes, la méthode des centres utilisant la fonction f-distance minimum converge linéairement à partir d'un certain rang.

Démonstration :

D'après ce qui précède, il s'agit de montrer que $\alpha(\xi, \xi')$ ne tend pas vers $+\infty$ lorsque $k \rightarrow +\infty$; ceci est évident car les gradients sont continus et le jacobien est régulier dans un voisinage de \hat{x} , donc à partir d'un certain rang k_0 .

Remarques : Application au problème totalement linéaire.

La propriété IV.1 est évidemment applicable pour un problème linéaire $\max c \cdot x$ sous les contraintes $Ax \geq b$ (avec A matrice (n, n) régulière) dont l'optimum unique \hat{x} est $A^{-1}b$; on a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$$\frac{\hat{\lambda} - \lambda_{k+1}}{\hat{\lambda} - \lambda_k} = \frac{\alpha}{1+\alpha} \quad \alpha = -cA^{-1}e.$$

Pour la méthode des centres à troncature variable de rapport ρ utilisant la f -distance produit [34] le résultat précédent s'écrit :

$$\frac{\hat{\lambda} - \lambda_{k+1}}{\hat{\lambda} - \lambda_k} = \frac{n+1-\rho}{n+1}.$$

Dans notre cas, le résultat ne dépend pas de la dimension de l'espace mais uniquement des multiplicateurs de Lagrange à l'optimum du problème initial ; en effet pour ce dernier les multiplicateurs vérifient en particulier :

$$\bar{u} \geq 0 \quad \text{et} \quad \bar{u}A + c = 0 \quad \implies \quad \bar{u} = -cA^{-1}$$

$$\text{d'où} \quad \alpha = -cA^{-1}e = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i.$$

Supposons que l'on pondère la fonction économique par un coefficient k ; les mêmes calculs appliqués à la f -distance $\min \{k(cx - \lambda), A_i x - b_i\}$ entraînent que le coefficient de convergence linéaire devient égal à $\frac{k\alpha}{1+k\alpha}$.

Pour la méthode des centres à troncature variable de rapport ρ avec la f -distance $d(x, \lambda) = (cx - \lambda)^p \prod_{i=1}^n (A_i x - b_i)$ qui réalise de par le coefficient p une pondération de la fonction économique, ce résultat s'écrit $\frac{n+p(1-\rho)}{n+p}$.

Par ces résultats on voit que la pondération par k peut accélérer la convergence. L'exemple numérique à deux variables ci-dessous montre que la normalisation des contraintes peut, pour une même pondération de la fonction économique, diminuer la vitesse de convergence

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } x_1 + 3x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \geq -5 \\ 4x_1 - 4x_2 \geq -4. \end{array} \right.$$

Dans la normalisation des contraintes, on normalise les lignes de la matrice A des contraintes par la norme euclidienne et dans ce cas la quantité $-cA^{-1}e$ devient égale à 3.46 alors que sans normalisation $-cA^{-1}e$ est égal à 1.42. Ces valeurs montrent qu'il faudrait, dans le cas de la normalisation, pondérer la fonction économique par un coefficient trois fois plus faible pour avoir la même vitesse de convergence que dans le cas non normalisé. Sur des problèmes de plus grosse taille ce phénomène peut être accru. En tout état de cause la normalisation réalise une certaine homogénéité dans les problèmes vis à vis de la pondération par k .

IV.2 - VITESSE DE CONVERGENCE DU PROBLEME GENERAL (P) - APPLICATION

Hypothèses : La fonction économique et les contraintes g_i sont fortement concaves ; de plus leur hessien est majoré en norme c'est-à-dire

$$\exists L > 0 : \forall t \in \mathbb{R}^n \quad ||H(f,t)|| \leq L \quad \text{et} \quad ||H(g_i,t)|| \leq L.$$

ρ_i représente l'erreur à la troncature i , c'est-à-dire $f(\hat{x}) - \lambda_i$ en notant \hat{x} l'optimum du problème (P)

γ représente le minimum des constantes de forte concavité de f et des g_i

μ_k valeur de la f -distance linéarisée après k contraintes de centrage.

Propriété IV.1

On suppose que pour un tronçon $E(\lambda_i)$ l'algorithme de centrage fournit à l'itération h un optimum de la f -distance linéarisée calculée compte tenu des contraintes additionnelles, réalisable pour le tronçon non linéaire. Sous ces hypothèses on a

$$\rho_i - \rho_{i+1} \geq \frac{2\gamma}{L} (\rho_{i+1} + \mu_h - (f(\hat{x}) - \lambda_i))$$

Démonstration :

z_i^h optimum de la f-distance linéarisée après h itérations de centrage est réalisable

$$\text{d'où } \begin{cases} f(z_i^h) - \lambda_i \geq 0 \\ g_j(z_i^h) \geq 0 \quad j=1 \dots m. \end{cases}$$

* 1er résultat

On pose x_{i+1} tel que $d(x_{i+1}, \lambda_i) = \max \{d(x, \lambda_i) \mid x \in [x_i, z_i^h]\}$ et donc par construction :

$$d(x_{i+1}, \lambda_i) \geq d\left(\frac{x_i + z_i^h}{2}, \lambda_i\right) = \begin{cases} \text{a) } f\left(\frac{x_i + z_i^h}{2}\right) - \lambda_i \\ \text{ou} \\ \text{b) } g_{j_0}\left(\frac{x_i + z_i^h}{2}\right) \quad j_0 \in \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

dans le cas a) la forte concavité de f entraîne :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_i + z_i^h}{2}\right) - \lambda_i &\geq \frac{f(x_i) - \lambda_i}{2} + \frac{f(z_i^h) - \lambda_i}{2} + \gamma \left\|x_i - z_i^h\right\|^2 \\ &\geq \gamma \left\|x_i - z_i^h\right\|^2 \text{ puisque } z_i^h \text{ réalisable et } f(x_i) = \lambda_i \end{aligned}$$

dans le cas b) de même

$$\begin{aligned} g_{j_0}\left(\frac{x_i + z_i^h}{2}\right) &\geq \frac{g_{j_0}(x_i)}{2} + \frac{g_{j_0}(z_i^h)}{2} + \gamma \left\|x_i - z_i^h\right\|^2 \\ &\geq \gamma \left\|x_i - z_i^h\right\|^2 \end{aligned}$$

d'où dans les deux cas

$$d(x_{i+1}, \lambda_i) \geq \gamma \left\|x_i - z_i^h\right\|^2$$

or $f(x_{i+1}) - f(x_i) \geq d(x_{i+1}, \lambda_i) = \min \{f(x_{i+1}) - f(x_i), g_j(x_{i+1}) \mid j=1 \dots m\}$

d'où

$$\left\| \left\| f(x_{i+1}) - f(x_i) = \rho_i - \rho_{i+1} \geq \gamma \left\|x_i - z_i^h\right\|^2 \right. \right.$$

* 2ème résultat

$$f(x_{i+1}) - \lambda_i \geq d(x_{i+1}, \lambda_i) \geq d(z_i^h, \lambda_i) = \begin{cases} \text{a) } f(z_i^h) - \lambda_i \\ \text{ou} \\ \text{b) } g_{j_0}(z_i^h) \end{cases}$$

dans le cas a), du fait de la courbure maximum de la fonction f :

$$\begin{aligned} f(z_i^h) - \lambda_i &= (\nabla f(x_i), z_i^h - x_i) + \frac{1}{2} (z_i^h - x_i, H(\xi)(z_i^h - x_i)), \xi \in]x_i, z_i^h[\\ &\geq (\nabla f(x_i), z_i^h - x_i) - \frac{L}{2} \|z_i^h - x_i\|^2 \end{aligned}$$

or (z_i^h, μ_h) est réalisable pour chacune des contraintes du polyèdre permettant de calculer le maximum de la f -distance linéarisée, donc $(\nabla f(x_i), z_i^h - x_i) \geq \mu_h$ ce qui entraîne

$$f(z_i^h) - \lambda_i \geq \mu_h - \frac{L}{2} \|z_i^h - x_i\|^2$$

dans le cas b) de même

$$\begin{aligned} g_{j_0}(z_i^h) &\geq g_{j_0}(x_i) + (\nabla g_{j_0}(x_i), z_i^h - x_i) - \frac{L}{2} \|z_i^h - x_i\|^2 \\ &\geq \mu_h - \frac{L}{2} \|z_i^h - x_i\|^2 \end{aligned}$$

dans les deux cas il vient

$$\| \quad \frac{L}{2} \|z_i^h - x_i\|^2 \geq \mu_h + \lambda_i - f(x_{i+1}) = \rho_{i+1} + \mu_h - (f(\bar{x}) - \lambda_i)$$

* 3ème résultat

Par application des 2 précédents nous avons la relation :

$$\| \quad \rho_i - \rho_{i+1} \geq \frac{2\gamma}{L} \rho_{i+1} + \frac{2\gamma}{L} (\mu_h - (f(\bar{x}) - \lambda_i)).$$

Propriété IV.2

Dans le cas où le problème (P) est un problème d'optimisation sans contraintes alors dans les hypothèses de la propriété IV.1 la convergence de la méthode des centres linéarisée avec centrage est linéaire.

Démonstration :

Pour un problème sans contraintes l'optimum \hat{x} est confondu avec le centre c_i de chaque tronçon $E(\lambda_i)$. Dans ces conditions puisque on a toujours la relation $d(x, \lambda_i) \leq \mu_h \forall x \in E(\lambda_i)$ on déduit que :

$$f(\hat{x}) - \lambda_i = f(c_i) - \lambda_i = d(c_i, \lambda_i) \leq \mu_h$$

et le résultat 3 de la propriété IV.1 permet de conclure puisque dans ce cas

$$\rho_i - \rho_{i+1} \geq \frac{2\gamma}{L} \rho_{i+1} \implies$$

$$\rho_{i+1} \leq \frac{1}{1 + \frac{2\gamma}{L}} \rho_i.$$

Dans le cas général il ne nous est pas possible de conclure. Remarquons également que les résultats précédents ne sont valables que si pour toute troncature on arrive à trouver le point $\frac{h}{z}_i$ dans le tronçon $E(\lambda_i)$ avant un nombre N constant de contraintes additionnelles.

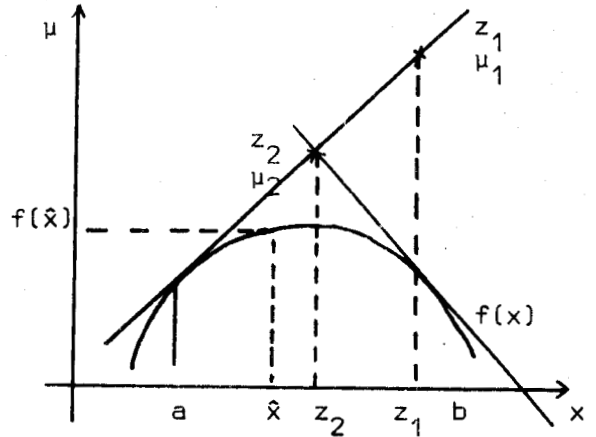
Dans les expériences numériques du chapitre III nous avons trouvé deux problèmes sur lesquels le point z_i se trouvait au bout de quelques itérations de centrage réalisable (problèmes 3 et 4). Dans le problème 4 où le centrage était nécessaire, les contraintes additionnelles formaient dans \mathbb{R}^4 un cône d'appui au domaine non linéaire, ce qui fait qu'au bout de 5 contraintes de centrage, le point $\frac{h}{z}_i$ était réalisable. Le problème de la vitesse de convergence de la méthode des centres linéarisée avec centrage n'est pas résolu. Il est à remarquer que la méthode appliquée à un problème d'optimisation à une variable converge linéairement comme le montre la démonstration suivante :

linéarisation en a : $f(a) + (\nabla f(a), t-a)$:

maximum de la fonction distance linéarisée
obtenu en (z_1, μ_1) :

$$\begin{aligned} \text{on a } f(\hat{x}) - f(z_1) &\leq f(a) + (\nabla f(a), z_1 - a) - f(z_1) \\ &\leq -\frac{1}{2} (z_1 - a, H(f, \xi)(z_1 - a)) \end{aligned}$$

$$\implies |f(\hat{x}) - f(z_1)| \leq \frac{L}{2} \|z_1 - a\|^2$$



Ajoutons une linéarisation en z_1 , le nouveau maximum est en (z_2, μ_2)
et l'on a de manière évidente les 2 relations suivantes

$$|f(\hat{x}) - f(z_2)| \leq \frac{L}{2} \|z_2 - z_1\|^2$$

$$|f(\hat{x}) - f(z_2)| \leq \frac{L}{2} \|z_2 - a\|^2$$

Puisque les points z_2, z_1 et a sont alignés, on conclut que

$$|f(\hat{x}) - f(z_2)| \leq \frac{L}{2} \frac{\|z - a\|^2}{4}$$

et si Δ_i est l'erreur maximum à une étape ($\Delta_i = \frac{L}{2} \|z_{i+1} - z_i\|^2$) on a

$$\Delta_{i+1} \leq \frac{\Delta_i}{4}$$

ce qui donne la convergence linéaire.

Malheureusement ce résultat ne se généralise pas à \mathbb{R}^n .

CHAPITRE V

TECHNIQUES de la METHODE

des CENTRES LINEARISEE

V.0 - INTRODUCTION

Ce chapitre est une introduction à l'utilisation numérique de la méthode des centres linéarisée et permet le passage de la formulation théorique de l'algorithme du chapitre III à la réalisation d'un code exploitable sur ordinateur.

Après avoir dressé un organigramme de principe, nous aborderons la résolution des programmes linéaires et leur enchaînement après l'introduction de contraintes additionnelles. A ce propos et afin de pouvoir prendre en compte de manière simple les variables bornées lors de l'introduction d'une nouvelle contrainte dans un programme linéaire déjà optimisé, nous établissons de manière directe avec les notations de [20] un résultat de H.M. WAGNER [35] concernant l'introduction de contraintes de bornes dans la méthode duale-simpliciale.

Enfin nous étudierons le procédé retenu dans notre code pour la recherche du maximum d'une fonction concave sur une direction.

V.1 - ORGANIGRAMME DE PRINCIPEV.1.1) Notations

Soit y un point de \mathbb{R}^n : la linéarisation en ce point de l'équipotentielle économique $f(x) - \lambda \geq 0$ et des m contraintes non linéaires ($g_i(x) \geq 0 \quad i=1, \dots, m$) du problème général (P) donne naissance aux contraintes linéaires :

$$\begin{aligned} f(y) - \lambda + (\nabla f(y), x-y) &\geq 0 \\ g_i(y) + (\nabla g_i(y), x-y) &\geq 0 \quad i=1, \dots, m. \end{aligned}$$

On notera $A(y)$ la matrice $(m+1, n)$ dont les vecteurs lignes sont les gradients au point y de la fonction et des contraintes g_i .

La représentation matricielle du polyèdre linéaire de linéarisation sera

$$A(y) x \geq a(y, \lambda) \quad \text{avec} \quad a(y, \lambda) \in \mathbb{R}^{m+1},$$

le second membre des contraintes (par exemple $a_1(y, \lambda) = (\nabla f(y), y) - f(y) + \lambda$).

Une partie essentielle des calculs lors d'une linéarisation est la recherche du maximum de la f-distance linéarisée $d'(x;y,\lambda) = \min \{f'(x;y) - \lambda, g'_1(x;y)\}$; nous savons que cette recherche peut se faire au moyen d'un programme linéaire par introduction d'une variable supplémentaire, μ ; notons $PL(y,\lambda,o)$ ce programme

$$\begin{array}{l}
 PL(y,\lambda,o) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \text{maximiser } \mu \text{ sous les contraintes} \\
 A(y) x - \mu \geq a(y,\lambda) \\
 Bx \geq b \\
 \underline{x} \leq x \leq \overline{x} \\
 (\mu)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

où le système de contraintes $Bx \geq b$ représente le polyèdre linéaire B . De même nous noterons $PL(y,\lambda,h)$ le programme linéaire précédent augmenté de h contraintes de linéarisation (qui correspondent aux contraintes additionnelles de l'algorithme de centrage).

Les quantités c_m et ℓ_m représentent respectivement le nombre de contraintes additionnelles dans le centrage et le nombre de linéarisations entre deux troncatures successives.

V.1.2) Organigramme

- 0) On dispose d'un point $\overset{k}{x}$, de la troncature économique $f(x) \geq f(\overset{k}{x}) = \lambda_k$
poser $h=0$ et $\overset{h}{y} = \overset{k}{x}$.
- 1) Former la matrice $A(\overset{h}{y})$, le vecteur $a(\overset{h}{y}, \lambda_k)$,
normer les lignes du système de contraintes $A(\overset{h}{y})x \geq a(\overset{h}{y}, \lambda_k)$ par la norme euclidienne,
poser $\ell = 1$ et $u_0 = \overset{h}{y}$.
- 2) Résoudre $PL(\overset{h}{y}, \lambda_k, o)$ soit $\overset{h}{z}_\ell$ l'optimum
- 3) Trouver u_ℓ et v_ℓ points de \mathbb{R}^n tels que

$$d(u_\ell, \lambda_k) = \max \{d(x, \lambda_k) \mid x \in [u_{\ell-1}, \overset{h}{z}_\ell]\}$$

$v_\ell \in [u_{\ell-1}, \overset{h}{z}_\ell]$ vérifiant au moins l'une des deux conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } f(v_\ell) = \lambda_k \\ \text{b) } g_{i_0}(v_\ell) = 0 \text{ pour un indice } i \in \{1, \dots, m\} \end{array} \right.$$

si v_ℓ n'existe pas aller en 5).

4) Former le programme PL $(\bar{y}, \lambda_k, \ell)$ en ajoutant à PL $(\bar{y}, \lambda_k, \ell-1)$:

dans le cas 3.a) $(\nabla f(v_\ell), x - v_\ell) \geq \mu$

dans le cas 3.b) $(\nabla g_{i_0}(v_\ell), x - v_\ell) \geq \mu$

si $\ell < c_m$ aller en 2) avec $\ell+1$ au lieu de ℓ .

5) Si $h < \ell_m$, poser ${}^{h+1}y = u_\ell$ et aller en 1) avec $h+1$ au lieu de h .

6) Poser ${}^{k+1}x = \bar{y}$ et aller en 0) pour une nouvelle troncature.

Les points 2, 3, 4 de cet organigramme correspondent à une linéarisation avec centrage.

V.1.3) Démarrage de la méthode

Deux cas sont possibles : ou bien on connaît un point de départ réalisable fourni avec le problème ou relevant de considérations concrètes, ou bien on ne dispose d'aucun renseignement.

Le démarrage de la méthode dans le premier de ces cas est trivial, dans le second on fixe les variables à leur borne inférieure et on tronque le domaine non linéaire par l'équipotentielle $f(x) \geq f(\bar{x})$. Par des linéarisations successives, on cherche un point réalisable. Au cours de ces itérations on peut remarquer que les points u_ℓ et \bar{z}_ℓ de l'organigramme de principe sont non réalisables (sinon un point réalisable est trouvé). En conséquence, il sera impossible de trouver le point v_ℓ de la partie 3) de l'organigramme ci-dessus et donc de déterminer une contrainte additionnelle dans la partie 4).

Pour ces raisons, on évitera, dans la recherche d'un point réalisable, la partie centrage de la méthode. D'autre part, on sait, chapitre II, que des linéarisations successives, en gardant la même troncature, engendrent une suite de points convergents vers le centre du domaine non linéaire.

V.1.4) Choix du point v_ℓ du point 3) de l'organigramme

Ce point v_ℓ , tel que nous le choisissons dans le programme, est en définitive un point de la frontière du domaine non linéaire. Au chapitre III, la démonstration de la convergence de l'algorithme de centrage prouve que ce point est à choisir sur le segment $[u_{\ell-1}, \frac{h}{2}]$ hors du domaine non linéaire.

Ceci indique que la détermination de ce point doit rester grossière dans notre méthode.

V.2 - RESOLUTION DES PROGRAMMES LINEAIRESV.2.0) Méthode utilisée

Les programmes linéaires $PL(y, \lambda_k, 0)$ sont à variables bornées. La méthode simpliciale en variables bornées exposée dans [20] est donc tout à fait indiquée. Nous avons préféré à la méthode manuelle qui calcule à chaque étape le tableau simplicial et son second membre la méthode de l'inverse explicite (transformation de l'inverse $(A^I)^{-1}$ à chaque étape) dans laquelle la connaissance de $(A^I)^{-1}$ permet de calculer les éléments du tableau simplicial et du critère de candidature nécessaires à la détermination des variables candidates à entrer dans la base et de la variable sortante x_r .

Notation : I est une base, \bar{I} l'hors base associée.

On notera B^+ et B^- une partition de \bar{I} et

$x(I, B^+, B^-)$ le point de base I tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } j \in B^+ & x_j(I, B^+, B^-) = 1 \\ \text{si } j \in B^- & x_j(I, B^+, B^-) = 0 \\ \text{si } j \in I & x_j(I, B^+, B^-) = t(I) - T^{B^+} x_{B^+} - T^{B^-} x_{B^-} \end{array} \right.$$

A chaque itération, on détermine, sous réserve d'existence, une variable de B^+ et une variable de B^- candidates à entrer dans la base. Pour chacune de ces variables, la variable à éliminer de la base est déterminée et on choisit parmi ces deux possibilités celle qui donne la meilleure amélioration à la fonction économique.

V.2.1) Organisation des calculs

Nous dressons ci-dessous le décompte des opérations nécessaires au déroulement de la méthode simpliciale avec l'hypothèse de travail suivante :

au départ la matrice de base I_0 est unité

nous supposons qu'au cours des m premières itérations

(m = nombre de contraintes du problème linéaire) une variable de la base initiale sort de la base sans y rentrer jusqu'à l'itération m .

Les formules de transformation de l'inverse $(A^I)^{-1}$ lorsqu'on passe de la base I à la base voisine $I' = I-r+s$ sont données ci-dessous en fonction de la colonne candidate $T^S(I)$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A^{I'})_j^{-1} i = (A^I)_j^{-1} i - \frac{T_j^S(I)}{T_r^S(I)} (A^I)_r^{-1} i \quad \begin{array}{l} j \in I-r = I'-s \\ i = 1, \dots, m \end{array} \\ (A^{I'})_s^{-1} i = (A^I)_r^{-1} i \frac{1}{T_r^S(I)} \end{array} \right.$$

On évite dans le calcul ci-dessus de transformer les colonnes i telles que $(A^I)_r^{-1} i = 0$ ce qui correspond dans notre hypothèse de travail à :

m-1 colonnes à la 1ère itération
 m-2 - 2ème -
 ⋮
 1 - (m-1)^e itération.

Pour le calcul du critère de candidature la forme particulièrement simple de la fonction économique des PL $(\bar{y}, \lambda_k, 0)$ permet d'écrire

$$d^{\bar{I}}(I) = (A^I)_\ell^{-1} A^{\bar{I}} \quad \text{si } \ell \text{ est le rang de la variable } \mu \text{ dans la base}$$

(notons que, une fois μ introduite dans la base, ℓ restera constant).

En conséquence, pour transformer l'inverse de base au cours des m premières itérations, il faut de l'ordre de $\frac{m^3}{2}$ multiplications et additions sans tenir bien entendu compte du creux du problème qui peut être très important pour les grosses

tailles. Par itération supplémentaire, il faut de l'ordre de m^2 multiplications et additions.

A titre d'indication un calcul sommaire de ce même nombre d'opérations dans la méthode où l'on explicite le tableau simplicial à chaque itération montre qu'il faudrait pour les m premières itérations de l'ordre de $m^2 n$ multiplications et additions (or n est en général sur nos problèmes très nettement supérieur à m).

V.2.2) Enchaînement des programmes linéaires dans l'algorithme de centrage

Le problème est d'introduire dans le programme linéaire $PL(\bar{y}, \lambda_k, \ell)$ dont on connaît une base I de p indices ($p=m+1+\ell$) une nouvelle contrainte de la forme $cz \geq d$ avec $z = \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix}$. Une variable d'écart y permet de se ramener à la forme canonique $cz + y = d$. En notant t l'indice de cette variable d'écart, nous allons construire pour le problème augmenté une base I_1 égale à $I + \{t\}$.

Il s'agit de déterminer la matrice inverse de base $(A^{I_1})^{-1}$ à partir de la matrice $(A^I)^{-1}$

$$A^{I_1} \text{ a la forme suivante } \begin{pmatrix} A^I & 0 \\ C^I & 1 \end{pmatrix}$$

cherchons $(A^{I_1})^{-1}$ en utilisant le même partitionnement : $(A^{I_1})^{-1} = \begin{pmatrix} X & u \\ v & 1 \end{pmatrix}$

Le produit bloc par bloc donne : $X = (A^I)^{-1}$, $u=0$, $v = -C^I(A^I)^{-1}$.

Ceci ne représente qu'une combinaison linéaire (par le vecteur c) des lignes de la matrice $(A^I)^{-1}$.

Dans le centrage, lorsque cette matrice est déterminée, la méthode duale-simpliciale en variables bornées est appelée pour optimiser ce programme augmenté.

V.3 - METHODE DUALE-SIMPLICIALE EN VARIABLES BORNEES

V.3.0) Introduction

L'algorithme envisagé ci-dessous est une adaptation de la méthode duale-simpliciale exposée dans [24]. Il permet de tenir compte d'une ou plusieurs contraintes supplémentaires introduites dans un programme linéaire en variables bornées déjà optimisé.

En d'autres termes, au contraire de la méthode simpliciale qui construit une suite de solutions réalisables par un cheminement sur les arêtes (facettes de dimension 1) du polyèdre, la méthode duale-simpliciale en variables bornées réalise la construction d'une suite de solutions optimales non réalisables, les critères de cette construction prenant en compte implicitement les contraintes de bornes.

L'intérêt d'une telle méthode, pour l'algorithme de centrage, réside dans le fait que connaissant une solution optimale réalisable d'un problème $PL(\bar{y}, \lambda_k, \ell-1)$ l'obtention d'une solution optimale réalisable du problème $PL(\bar{y}, \lambda_k, \ell)$ où une seule contrainte est ajoutée se fera au moindre coût de calculs à l'aide de quelques changements de base (voire même de un seul).

Pour établir les propriétés qui suivent, par souci d'écriture, nous considérons le problème (P) général

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } f \cdot x \\ Ax = a \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} f, x \in \mathbb{R}^n \\ \text{avec } A \text{ matrice } (m, n) \quad m < n \end{array}$$

I désignera une base de (P) c'est-à-dire A^I est régulière.

I' sera une base de (P) voisine de I : $I' = I - r + s$.

$T(I) = (A^I)^{-1} A$, $t(I) = (A^I)^{-1} a$, $d(I) = f - f^I T(I)$ seront respectivement le tableau simplicial et son second membre, le critère de candidature; $B^+, B^-, x(I, B^+, B^-)$ auront les mêmes définitions qu'en V.2 ci-dessus

$$V \text{ sera } \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = a\}, \quad C = \{x \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$$

V.3.1) Lemmes préliminaires

* Lemme 1 Si I est une base optimale de P alors, pour tout point x de $V \cap C$ on a $fx(I, B^+, B^-) \geq f.x$

En effet :

$$x(I, B^+, B^-) \in V \implies A^I x_I(I, B^+, B^-) + A^{\bar{I}} x_{\bar{I}}(I, B^+, B^-) = a \quad \text{d'où}$$

$$(1) \quad x_I(I, B^+, B^-) = t(I) - T^{B^+}(I) x_{B^+} - T^{B^-}(I) x_{B^-}$$

$$(2) \quad fx(I, B^+, B^-) = f^I t(I) + d^{B^+}(I) x_{B^+} + d^{B^-}(I) x_{B^-}$$

D'autre part, tout point x réalisable pour le programme P appartient à $V \cap C$, on peut donc écrire en utilisant le même partitionnement en I, \bar{I}

$$(3) \quad x_I = t(I) - T^{B^+} x_{B^+} - T^{B^-} x_{B^-}$$

$$(4) \quad fx = f^I t + d^{B^+} x_{B^+} + d^{B^-} x_{B^-}$$

(2) et (4) entraînent

$$(5) \quad fx(I, B^+, B^-) - fx = d^{B^+}(x_{B^+} - x_{B^+}) + d^{B^-}(x_{B^-} - x_{B^-})$$

$$\text{Or} \quad \begin{cases} x \in C \implies x_{B^+} - x_{B^+} \geq 0 \quad \text{et} \quad x_{B^-} - x_{B^-} \leq 0 \\ I \text{ optimale} \implies d^{B^+} \geq 0 \quad \text{et} \quad d^{B^-} \leq 0 \end{cases}$$

Ces deux propriétés avec (5) permettent de conclure.

Remarque : En notant \hat{x} un optimum réalisable du programme P , \hat{x} est tel que $fx(I, B^+, B^-) \geq f\hat{x}$.

Cette remarque sera utilisée dans la construction de l'algorithme en V.3.2)

* Lemme 2 L'accroissement de la fonction économique lorsqu'on passe d'un point de base $x(I, B^+, B^-)$ au point $x(I', B^{+'}, B^{-'})$ est égal à :

$$\Delta fx(I, B^+, B^-) = fx(I', B^{+'}, B^{-'}) - fx(I, B^+, B^-) = \frac{d^S(I)}{T_r^S(I)} (x_r - \bar{x}_r)$$

en notant \bar{x}_r la valeur $\overset{1}{x}_r$ si $r \in B^+$, $\overset{0}{x}_r$ sinon.

Démonstration :

Posons $I_0 = I - r$, $\bar{I}_0 = \bar{I} - s$, $\bar{x}_s = \overset{1}{x}_s$ si $s \in B^+$, $\overset{0}{x}_s$ sinon

$$I' = I_0 + s, \bar{I}' = \bar{I}_0 + r.$$

A l'aide de ces partitions, il est aisé de calculer les valeurs de la fonction économique aux deux points :

$$fx(I, B^+, B^-) = f^{I_0} t_{I_0}(I) + f^r t_r + d^{I_0} x_{\bar{I}_0} + d^s \bar{x}_s$$

$$fx(I', B^{+'}, B^{-'}) = f^{I_0} t_{I_0}(I') + f^s t_s(I') + d^{I_0}(I') x_{\bar{I}_0} + d^r(I') \bar{x}_r$$

Connaissant les formules de changement de base, cette dernière expression s'écrit

$$fx(I', B^{+'}, B^{-'}) = fx(I, B^+, B^-) + \frac{d^s(I)}{T_r^s(I)} (x_r - \bar{x}_r).$$

Notons que l'accroissement de la fonction économique sera nul si $d^s(I) = 0$; ceci correspond à plusieurs solutions optimales et c'est un cas de dégénérescence que nous n'étudierons pas.

Ces deux lemmes nous permettent de jeter les bases d'une itération de la méthode duale-simpliciale en variables bornées ; connaissant une base I optimale non réalisable, nous déterminons une variable de base, d'indice r , qui ne vérifie pas les conditions sur ses bornes et à l'aide des lemmes 1 et 2 nous choisirons une variable, d'indice s hors base, à faire entrer dans la nouvelle base I' de manière à faire diminuer la fonction et à conserver l'optimalité.

Dans la suite nous n'écrirons I' que pour les quantités (T, t, d) qui sont calculées pour la nouvelle base.

V.3.2) Choix de la variable x_r , candidate à sortir de la base

Ce choix est guidé par la condition $\Delta fx(I, B^+, B^-) \leq 0$; ceci implique que l'indice r est à prendre parmi les indices de base tels que

$$x_i < \overset{0}{x}_i \quad \text{ou} \quad x_i > \overset{1}{x}_i$$

En effet si r est tel que $x_r^0 \leq x_r \leq x_r^1$, on peut avoir, puisque $r \in \bar{I}'$, soit $r \in B^+(I')$ soit $r \in B^-(I')$.

Dans ces deux cas la base I' étant optimale (par construction) et $d^r(I') = d^r(I) - \frac{d^s(I)}{T_r^s(I)} = - \frac{d^s(I)}{T_r^s(I)}$ on a

$$\left. \begin{array}{l} I' \text{ optimale} \\ r \in B^+(I') \end{array} \right\} \implies \frac{d^s}{T_r^s} \leq 0 \quad \text{et} \quad x_r - x_r^1 \leq 0 \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} I' \text{ optimale} \\ r \in B^-(I') \end{array} \right\} \implies \frac{d^s}{T_r^s} \geq 0 \quad \text{et} \quad x_r - x_r^0 \geq 0 \quad (7)$$

Le lemme 2 avec les conclusions (6) ou (7) entraîne $\Delta f_x(I, B^+, B^-) \geq 0$.

Théorème V.1 L'indice r étant choisi parmi l'ensemble des variables de base non réalisables, alors

$$1) \quad x_r(I, B^+, B^-) < x_r^0 \implies r \in B^-(I')$$

$$2) \quad x_r(I, B^+, B^-) > x_r^1 \implies r \in B^+(I')$$

En d'autres termes, ceci signifie que la variable r ne peut "sauter" une de ses bornes.

Démontrons le résultat du cas 1 (le cas 2 conduisant à un raisonnement analogue) si $r \in B^+(I')$ et I' optimale on doit avoir $d^r(I') \geq 0$ c'est-à-dire $\frac{d^s(I)}{T_r^s(I)} \leq 0$; ceci entraîne $\Delta f_x(I, B^+, B^-) \geq 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite.

Remarque : Le théorème ci-dessus permet, dès que la variable r est choisie, de connaître le signe de la quantité $\frac{d^s}{T_r^s}$ (détermination analogue à la détermination du signe du pivot dans la méthode duale-simpliciale). En effet puisque I' doit être optimale, $d^r(I')$ doit avoir un signe déterminé et on aura les relations :

$$\text{si } x_r(I, B^+, B^-) < \bar{x}_r \implies \frac{d^s}{T_r^s} \geq 0 \quad (8)$$

$$\text{si } x_r(I, B^+, B^-) > \bar{x}_r \implies \frac{d^s}{T_r^s} \leq 0 \quad (9)$$

V.3.3.) Choix de la variable x_s candidate à entrer dans la base

Les deux cas qui suivent jouent un rôle analogue aux cas $s \in B^-$ et $s \in B^+$ de la méthode simpliciale en variables bornées lors de la recherche de l'indice r .

Nous cherchons un indice hors base s tel que I' soit une base optimale.

Ceci implique les trois conditions :

$$1/ T_r^s \neq 0 \quad \text{afin que la matrice } A^{I'} \text{ soit inversible}$$

$$2/ d^j(I') \geq 0 \quad \forall j \in B^+(I') \quad (10)$$

$$3/ d^j(I') \leq 0 \quad \forall j \in B^-(I') \quad (11)$$

1er cas $x_r(I, B^+, B^-) < \bar{x}_r$.

$$(8) \implies \frac{d^s}{T_r^s} \geq 0$$

$$(10) \implies d^j - \frac{d^s}{T_r^s} T_r^j \geq 0 \quad \forall j \in B^+ \quad (\text{utilisation des formules de changement de bases}).$$

Or si $j \in B^+$ et $T_r^j \leq 0$ la relation (8) montre que (10) est vérifiée.

On obtient donc une première condition pour le choix de s :

$$\frac{d^s}{T_r^s} \leq \frac{d^j}{T_r^j} \quad \forall j \in B^+ \text{ tel que } T_r^j > 0.$$

De la même manière la relation (11) sera vérifiée si la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{d^s}{T_r^s} \leq \frac{d^j}{T_r^j} \quad \forall j \in B^- \text{ tel que } T_r^j < 0.$$

notons :

$$\alpha = \min \left\{ \frac{d^j}{T_r^j} ; j \in B^+, T_r^j > 0 \right\} \quad \alpha \geq 0$$

$$\beta = \min \left\{ \frac{d^j}{T_r^j} ; j \in B^-, T_r^j < 0 \right\} \quad \beta \geq 0$$

Les deux conditions déterminées plus haut peuvent se résumer par :

$$\left\| \left\| \begin{array}{l} \text{S sera choisi tel que } \frac{d^s}{T_r^s} = \min(\alpha, \beta) \geq 0 \end{array} \right. \right.$$

Ce choix prouve que $d^{B^+(I')}(I') \geq 0$ et $d^{B^-(I')}(I') \leq 0$; de plus la diminution de la fonction économique est, pour le choix de r , la plus faible possible.

En effet, s'il existait un indice s_1 tel que pour $I_1 = I - r + s_1$
 $f_x(I_1, B_1^+, B_1^-) > f_x(I', B^+, B^-)$ on aurait en utilisant le lemme 2

$$0 \leq \frac{d^{s_1}}{T_r^{s_1}} < \frac{d^s}{T_r^s}$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $\frac{d^s}{T_r^s} = \min(\alpha, \beta)$.

2ème cas $x_r(I, B^+, B^-) > \frac{1}{x_r}$

Un raisonnement analogue à celui du cas 1 donne deux conditions pour le choix de s (utilisation des relations (9), (10), (11)).

En posant :

$$\alpha' = \max \left\{ \frac{d^j}{T_r^j} ; j \in B^+, T_r^j < 0 \right\} \quad \alpha' \leq 0$$

$$\beta' = \max \left\{ \frac{d^j}{T_r^j} ; j \in B^-, T_r^j > 0 \right\} \quad \beta' \leq 0$$

le choix de s se traduit par la condition :

$$\left\| \left\| \frac{d^s}{T_r^s} = \max(\alpha', \beta') \leq 0 \right. \right.$$

et ce choix, comme dans le cas 1, donne la plus faible diminution de la fonction économique pour l'indice r choisi.

V.3.4) Cas d'arrêts de l'algorithme

a) Il est impossible, pour une base I optimale, de trouver un indice r vérifiant les conditions de V.3.2.

Dans ce cas, l'optimum du programme (P) est atteint puisque la solution $x(I, B^+, B^-)$ est réalisable et la base I optimale.

b) Il est impossible, r étant déterminé, de trouver un indice hors-base s vérifiant les conditions de V.3.3. Montrons que dans ce cas le polyèdre des solutions réalisables de (P) est vide.

1er cas La non-existence de $s \in \bar{I}$ entraîne (si $x_r(I, B^+, B^-) < \frac{0}{x_r}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} j \in B^+ \implies T_r^j \leq 0 \\ j \in B^- \implies T_r^j \geq 0 \end{array} \right.$$

Supposons qu'il existe un point réalisable x . Ce point de $V \cap C$ peut se mettre sous la forme

$$x_I = t - T_r^{B^+} x_{B^+} - T_r^{B^-} x_{B^-}$$

avec $\frac{0}{x_{B^+}} \leq x_{B^+} \leq \frac{1}{x_{B^+}}$

$$\frac{0}{x_{B^-}} \leq x_{B^-} \leq \frac{1}{x_{B^-}}$$

Ces différentes relations entraînent

$$T_r^{B^+} x_{B^+} + T_r^{B^-} x_{B^-} \geq T_r^{B^+} \frac{1}{x_{B^+}} + T_r^{B^-} \frac{0}{x_{B^-}} = t_r(I) - x_r(I, B^+, B^-)$$

d'où en définitive

$$x_r \leq x_r(I, B^+, B^-) < \frac{0}{x_r}$$

ce qui est impossible par l'hypothèse $x \in V \cap C$.

2ème cas Une démonstration analogue montrerait que, dans le cas où $x_r(I, B^+, B^-) > \frac{1}{x_r}$, la non-existence d'un indice $s \in \bar{I}$ implique que le problème (P) n'a pas de solution réalisable.

V.3.5) Convergence de l'algorithme

Sous l'hypothèse de non-dégénérescence ($d^s \neq 0$ à chaque itération) la convergence de cet algorithme est assurée par les mêmes remarques que pour la méthode simpliciale. L'ensemble d'indices $\{1, 2, \dots, n\}$ des variables ne peut être partitionné qu'en un nombre fini d'ensembles I, B^+, B^- . La fonction économique décroît strictement à chaque itération ($d^s \neq 0$) de cette manière on est assuré de ne plus revenir sur les partitions déjà explorées.

V.4 - OPTIMISATION D'UNE FONCTION CONCAVE SUR UNE DIRECTION

V.4.0) Position du problème

La première partie du point (3) de l'organigramme de principe présenté en V.1.2 consiste à rechercher sur un segment de \mathbb{R}^n le maximum d'une fonction concave f . En notant $[t_0, t_1]$ le segment et $t = t_0 + \theta(t_1 - t_0)$ ($\theta \in [0, 1]$) un point courant, le problème posé est à une variable réelle :

$$\text{trouver } \bar{\theta} \in [0, 1] \text{ tel que } h(\bar{\theta}) = f(t_0 + \bar{\theta}(t_1 - t_0)) = \max_{0 \leq \theta \leq 1} \{h(\theta) = f(t_0 + \theta(t_1 - t_0))\}$$

La littérature présente de nombreuses méthodes pour résoudre un tel problème. Les principales sont itératives et fondées sur la réduction du segment de localisation à chaque étape et assurent la convergence vers la solution sous réserve que la fonction soit unimodale c'est-à-dire, $\bar{\theta}$ étant la solution :

$$\forall \theta_1, \theta_2 \quad \theta_1 \leq \theta_2 \leq \bar{\theta} \implies h(\theta_1) \leq h(\theta_2) \leq h(\bar{\theta})$$

$$\forall \theta_1, \theta_2 \quad \bar{\theta} \leq \theta_1 \leq \theta_2 \implies h(\bar{\theta}) \leq h(\theta_1) \leq h(\theta_2)$$

Notons qu'une fonction concave satisfait à ces hypothèses (et non réciproquement) ; en effet pour la première si $\theta_1, \theta_2, \bar{\theta}$ sont dans l'ordre indiqué, on a

$$\theta_2 = \lambda \theta_1 + (1-\lambda) \bar{\theta} \quad \text{avec } \lambda \in [0, 1] \quad \text{et}$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ concave} \\ \bar{\theta} \text{ solution} \end{array} \right\} \longrightarrow f(\bar{\theta}) \geq f(\theta_2) \geq \lambda f(\theta_1) + (1-\lambda) f(\bar{\theta}) \geq f(\theta_1)$$

Nous avons abordé dans notre travail ce groupe de méthodes et notamment : la dichotomie, la réduction à partir du nombre d'or (section dorée) et la réduction au moyen d'une approximation polynomiale de la fonction h (approximation quadratique).

Dans la méthode des centres linéarisée, la fonction h est la f -distance $d(x, \lambda) = \min \{f(x) - \lambda, g_i(x) \text{ } i=1, \dots, m\}$. Cette fonction est, de par les hypothèses du chapitre 0, concave et continue mais non-différentiable. Il s'est révélé que cette particularité entraînait de très médiocres résultats pour l'approximation quadratique quant au temps utilisé ; de plus la diversité des fonctions que nous traitons (sur chaque segment du point (3) la fonction h est différente) entraîne un ajustement très délicat des paramètres de programmation.

Nous avons préféré une méthode systématique qui ne tient pas compte de l'allure des fonctions, à savoir la dichotomie (la section dorée ne se révélant, sur nos problèmes, pas plus avantageuse du point de vue précision et durée des calculs).

V.4.1) La dichotomie, les tests d'arrêt

La longueur de l'intervalle de localisation du maximum est, à chaque étape, divisée par 2. A chaque réduction le nombre d'appels de la fonction h est d'au maximum 2. Pour l'organigramme ci-dessous on suppose que le maximum est localisé dans un segment $[\theta_i^0, \theta_i^1]$; au départ $\theta_0^0 = 0, \theta_0^1 = 1$.

(1) Calculer $h(\theta_i^0), h(\theta_i^1)$,

(2) Calculer $\theta_c = \frac{\theta_i^0 + \theta_i^1}{2}$ et $h(\theta_c)$

si $h(\theta_c) < h(\theta_i^0)$ prendre $\theta_{i+1}^0 = \theta_c$ et aller en (2) avec $i+1$

si $h(\theta_c) < h(\theta_i^1)$ prendre $\theta_{i+1}^1 = \theta_c$ et aller en (2) avec $i+1$

(3) Calculer $\theta_d = \frac{\theta_i^0 + \theta_c}{2}$ et $h(\theta_d)$

si $h(\theta_c) < h(\theta_d)$ prendre $\theta_{i+1}^0 = \theta_c, \theta_c = \theta_d$ et aller en (3) avec $i+1$

(4) Calculer $\theta_e = \frac{\theta_i + \theta_c}{2}$ et $h(\theta_e)$

si $h(\theta_c) < h(\theta_e)$ prendre $\theta_{i+1}^0 = \theta_c$, $\theta_c = \theta_e$ et aller en (3) avec $i+1$

(5) Prendre $\theta_{i+1}^0 = \theta_d$, $\theta_{i+1}^1 = \theta_e$ et aller en (3) avec $i+1$ au lieu de i .

Nous avons envisagé trois tests d'arrêt :

* $\theta_i^1 - \theta_i^0 < \epsilon$ ce qui signifie que la longueur de l'intervalle initial a été divisée par $\frac{1}{\epsilon}$ (en général $\epsilon = 10^{-4}$)

* $h(\theta_d) < h(\theta_i^0)$ dans le point (3)

* $h(\theta_e) < h(\theta_i^1)$ dans le point (4).

Ces deux derniers tests, lorsqu'ils sont vérifiés, montrent que la précision des calculs est insuffisante puisque les valeurs calculées de la fonction indiquent l'existence d'un minimum local, ce qui est impossible pour une fonction unimodale. Dans la suite la réduction de l'intervalle $\frac{1}{\epsilon}$ sera notée dic.

CHAPITRE VI

EXPERIENCES NUMERIQUES

VI.1 - PRESENTATION DES EXPERIENCES

La méthode exposée au chapitre III a été programmée en Algol 60 sous deux versions : la première prend en compte toutes les options c'est-à-dire la fonction économique et les contraintes non linéaires ou linéaires ainsi que l'ensemble des contraintes du polyèdre linéaire B non vide, la seconde est une simplification de la précédente et ne traite que des problèmes totalement non linéaires (éventuellement les contraintes en inégalité du polyèdre B peuvent être considérées comme non linéaires; les contraintes linéaires en égalité ne sont donc pas permises dans cette version).

Ces deux codes ont été testés sur un ensemble de dix problèmes, pour quelques uns d'entre eux d'origine concrète, allant du problème de taille modeste (2 variables) à des problèmes de 50 variables et une centaine de contraintes.

Les problèmes 1 à 7 ont fait l'objet d'une étude dans le rapport IBM de COLVILLE [7] qui, dès 1967, a établi une comparaison des différentes méthodes "non-linéaires", comparaison ne prenant en compte que les temps d'exécution et non pas la précision. Dans la suite nous ne retiendrons, pour nos comparaisons, que les méthodes ayant donné des valeurs proches de la valeur optimale. Chaque méthode utilisant un ordinateur différent, COLVILLE a imaginé un temps standard de la manière suivante :

le temps d'exécution sur un ordinateur d'un problème est T ;

le temps d'exécution sur ce même ordinateur d'un programme de référence fourni par COLVILLE est Δ (il s'agit d'une inversion de matrice (40,40) répétée 10 fois) ;

le temps standard d'exécution du problème sera $\frac{T}{\Delta}$.

Les problèmes 8 et 10 sont issus de problèmes de dispatching alors que le problème 9 n'a pas d'origine concrète.

Chacun des dix problèmes sera présenté de la manière suivante :

- énoncé des caractéristiques (nombre de variables, de contraintes)
- écriture de la fonction économique et des contraintes (y compris les bornes)
- rappel des meilleurs résultats consignés dans le rapport de

VI.2

- meilleur résultat de la méthode des centres linéarisée avec centrage suivi des valeurs des paramètres de programmation (ce résultat correspond à l'obtention d'au moins 3 décimales dans la valeur économique : précision adoptée dans le rapport COLVILLE)

- des résultats numériques choisis parmi les plus caractéristiques et montrant le comportement numérique de la méthode au fil des itérations.

Pour ces expériences numériques, les deux programmes ont été exploités sur l'ordinateur BGE Gamma M 40 du Laboratoire de Calcul de l'Université de Lille I. Sur cet ordinateur, le temps d'exécution du programme de référence, Δ , est égal à 608 secondes (à titre d'indication, sur un CDC 6600 ce temps est de 20,5 secondes). L'encombrement du programme correspondant à la version totalement non linéaire est d'environ 4000 mots sur l'ordinateur cité ci-dessus. A ce nombre il faut ajouter, outre les identificateurs simples, les variables indicées dont le nombre est, pour un problème à m contraintes et n variables, $m(m+n+2) + 5n+2m$. A l'encombrement du programme il faut ajouter l'encombrement du sous-programme permettant le calcul des contraintes, de la fonction économique et de leur gradient.

PROBLEME n°1 [7]

fonction économique du 3ème degré, contraintes linéaires
 nombre de variables 5
 nombre de contraintes non linéaires 0
 nombre de contraintes linéaires 20 (dont 10 de bornes)

$$\text{minimiser } \sum_{j=1}^5 e_j y_j + \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^5 c_{ij} y_i y_j + \sum_{j=1}^5 d_j y_j^3$$

sous les contraintes

$$\sum_{j=1}^5 a_{ij} y_j \geq b_i \quad i=1,2,\dots, 10$$

$$0 \leq y_j \leq 20 \quad j=1,\dots,5$$

données communes aux problèmes 1 et 2 sur page VI.8

point de départ réalisable (0,0,0,0,1).

Bilan du rapport COLVILLE (juin 1970)

méthode		optimum	temps standard
Variable metric Proj	(Murtagh)	- 32.348	0.0058
Revised Red Grad	(Ribière)	- 32.348	0.0060
Grad. Proj. Corrigé	(Kalfon)	- 32.349	0.0066
Red. Gradient	(Huard)	- 32.349	0.0068
GRG. Guigou	(Abadie)	- 32.348	0.0077
Solver	(Wilson)	- 32.349	0.0118

Méthode des centres linéarisée - 32.349 0.0065

résultat obtenu à la 4ème troncature avec les paramètres de programmation

k = 0.001 lin = 1 dic = 10000

centrage à partir de la 2ème troncature.

VI.4

Nous présentons dans les tableaux suivants différents essais numériques sur ce problème. Une procédure d'extrapolation, introduite dans le programme, est destinée à rechercher le maximum de la fonction économique sur une direction connaissant une extrémité. Cette recherche s'effectue en deux temps : le premier consiste à progresser par pas sur la direction en cherchant, à chaque étape, à vérifier que le point courant est à la fois réalisable et meilleur que le précédent. Dès qu'on trouve un point réalisable et moins "bon" pour la fonction économique, on est assuré, cette dernière étant concave, d'avoir un intervalle de confiance où se situe le maximum cherché. Dans le cas où le point courant devient non réalisable des retours en arrière avec division du pas sont nécessaires. Le deuxième temps consiste à affiner, par un moyen de dichotomie par exemple, la localisation du maximum dans l'intervalle de confiance.

On trouvera dans le tableau 0 la succession des valeurs économiques lorsqu'on envisage de une à trois linéarisations entre deux troncatures successives, avec ou sans extrapolation sur la ligne des deux derniers centres.

Dans les tableaux 1,2,3 (respectivement 1 bis, 2 bis, 3 bis) sont donnés les optimums atteints ainsi que la valeur des contraintes actives à la solution théorique du problème dans les temps standards indiqués lorsqu'une à trois linéarisations sont faites (respectivement une extrapolation en plus).

Le tableau 4 montre l'influence de la pondération de la fonction économique (coefficient k).

Meilleure solution atteinte :

$$\hat{f} = - 32.348\ 678\ 96$$

$$\hat{x} = (.3, .333468, .4, .428310, .223965)$$

TABLEAU 0

n° centre	f : 1 lin.	f : 2 lin.	f : 3 lin.	f : 1 lin + 1Ext	f : 2 lin + Ext	f : 3 lin + ext
0	+ 20	+ 20	+ 20	+ 20	+ 20	+ 20
1	- 0.72	- 31.375	- 31.375	- 0.72	- 32.019	- 31.375
2	- 31.691	- 32.329 (*)	- 32.328	- 32.053	- 32.343	- 32.348673 (*)
3	- 32.335	- 32.348299 (*)	- 32.348273 (*)	- 32.346	- 32.348650	- 32.34867886 (*)
4	- 32.348421	- 32.348671 (*)	- 32.348670 (*)	- 32.348650	- 32.34867855 (*)	- 32.34867896 (*)
5	- 32.348674	- 32.34867882	- 32.34867880 (*)	- 32.34867870	- 32.348678958	- 32.3486789650
6	- 32.34867886 (*)	- 32.34867896 (*)	- 32.34867896 (*)	- 32.34867895 (*)	- 32.3486789659	- 32.3486789656
7	- 32.34867895 (*)	- 32.3486789656	- 32.3486789656	- 32.34867896		
8	- 32.34867896 (*)		- 32.3486789659			
9	- 32.3486789656					

* arrondi par excès.

	\hat{f}	g_3	g_5	g_6	g_9	Temps standard	
tableaux 1	- 32.3486789540	$8 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-10}$	$9 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-10}$	0.0139	
	" 9609	$2 \cdot 10^{-11}$	$9 \cdot 10^{-11}$	10^{-11}	10^{-10}	0.0156	
	" 9656	$5 \cdot 10^{-12}$	$6 \cdot 10^{-11}$	0	0	0.0197	
2	" 9656	$5 \cdot 10^{-11}$	$6 \cdot 10^{-11}$	$6 \cdot 10^{-11}$	10^{-10}	0.028	
	" 9658	$4 \cdot 10^{-11}$	$3 \cdot 10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-11}$	$12 \cdot 10^{-10}$	0.033	
3	" 9624	*				0.030	
	" 9656					0.034	
	" 9659	$5 \cdot 10^{-12}$	0	0	$6 \cdot 10^{-11}$	0.042	
Expériences avec Extrapolation	1 bis	- 32.3486789601	$4 \cdot 10^{-11}$	$9 \cdot 10^{-11}$	$4 \cdot 10^{-11}$	10^{-10}	0.0198
		" 9648	$5 \cdot 10^{-12}$	$6 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-12}$	$8 \cdot 10^{-12}$	0.0212
	2 bis	" 9647	0	0	$7 \cdot 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-11}$	0.029
		" 9659	0	0	$7 \cdot 10^{-12}$	0	0.034
	3 bis	" 9627					0.024
		" 9650					0.031
		" 9656	10^{-11}	$3 \cdot 10^{-11}$	$7 \cdot 10^{-12}$	0	0.037

Les résultats des 3 derniers tableaux montrent qu'en définitive l'extrapolation sur la ligne des deux derniers centres n'apporte pas d'amélioration compte tenu du temps requis par la méthode sans extrapolation. De plus la programmation en est difficile quant à l'ajustement des différents paramètres afin de ne pas sortir du domaine réalisable. Ces considérations nous ont conduits à abandonner l'extrapolation.

* Les cases vides représentent des expériences sur lesquelles la valeur des contraintes actives n'a pas été relevée.

VI.7

Influence de la pondération de la fonction économique, par k, sur le problème n°1

n° centre \ k	1	0.1	0.01	0.001
1	4.59	- 23.34	- 22.84	- 24.33
2	- 4.08	- 27.58	- 29.85	- 30.09
3	- 11.12	- 29.25	- 30.97	- 31.15
4	- 17.67	- 30.29	- 31.48	- 31.66
5	- 22.48	- 30.88	- 31.75	- 31.85
6	- 24.24	- 31.21	- 31.89	- 31.95
7	- 25.02	- 31.43	- 31.97	- 32.01
8	- 26.20	- 31.57	- 32.03	- 32.06
9	- 26.82	- 31.68	- 32.07	- 32.10
10	- 28.19	- 31.76	- 32.10	- 32.13
11	- 28.82	- 31.83	- 32.12	- 32.14
12	- 28.96	- 31.87	- 32.15	- 32.14
13	- 29.71	- 31.92	- 32.16	- 32.14
14	- 29.94	- 31.95	- 32.18	- 32.15
15				
⋮				
25	- 30.8	- 32.13	- 32.25	- 32.17

VI.8

Tableau donnant les valeurs des coefficients c_{ij} , a_{ij} , b_i , e_j , d_j des problèmes 1 et 2

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	b_i
e_j	- 15	- 27	- 36	- 18	- 12	
d_j	4	8	10	6	2	
c_{ij} $i=1$	30	- 20	- 10	32	- 10	
2	- 20	39	- 6	- 31	32	
3	- 10	- 6	10	- 6	- 10	
4	32	- 31	- 6	39	- 20	
5	- 10	32	- 10	- 20	30	
a_{ij} $i=1$	- 16	2	0	1	0	- 40
2	0	- 2	0	4	2	- 2
3	- 35	0	2	0	0	- 25
4	0	- 2	0	- 4	- 1	- 4
5	0	- 9	- 2	1	- 28	- 4
6	2	0	- 4	0	0	- 1
7	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 40
8	- 1	- 2	- 3	- 2	- 1	- 60
9	1	2	3	4	5	5
10	1	1	1	1	1	1

PROBLEME n°2 [7]

problème dual du problème 1
 fonction économique du 3^e degré, contraintes quadratiques
 nombre de variables 15
 nombre de contraintes non linéaires 5
 nombre de contraintes linéaires 30 (bornes)

$$\text{maximiser } \sum_{i=1}^{10} b_i x_i - \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 c_{ij} y_i y_j - 2 \sum_{j=1}^5 d_j y_j^3$$

sous les contraintes

$$e_j + 2 \sum_{i=1}^5 c_{ij} y_i + 3 d_j y_j^2 - \sum_{i=1}^{10} a_{ij} x_i \geq 0$$

$$0 \leq y_j \leq 20 \quad j=1,2,\dots,5$$

$$0 \leq x_i \leq 20 \quad i=1,2,\dots,10$$

point de départ réalisable $x_i = 0.0001 \quad i=1,\dots, 10 \text{ et } i \neq 7$
 $x_7 = 60$
 $y_j = 0.0001 \quad j=1,\dots, 5$

Bilan du rapport COLVILLE (juin 1970)

méthode		optimum	temps standard
GRG. Guigou	(Abadie)	- 32.348	0.0840
Gen. Red. Gradient	(Abadie)	- 32.349	0.1349
Seq. Unc. Min. Tech.	(Mc Cormick)	- 32.349	0.1511
Grad. Proj. Corrigé	(Kalfon)	- 32.349	0.2228

Méthode des centres linéarisée - 32.349 0.1220

résultat obtenu à la 9ème troncature avec les paramètres

k = 0,001 dic = 10000 lin = 2

centrage à partir de la 4ème troncature

Les résultats numériques consignés ci-dessous permettent d'observer deux phénomènes :

tableau 0 : influence de la pondération de la fonction économique

tableau 1 : amélioration de la valeur de la fonction distance après chaque contrainte additionnelle de l'algorithme de centrage.

n° centre \ k=	1	0.1	0.01	0.001
1	- 2329	- 436	- 117	- 69
2	- 1559	- 117	- 58	- 39.7
3	- 1027	- 56	- 39.5	- 38.8
4	- 688	- 49.9	- 38.9	- 35.8
5	- 471	- 41.8	- 37.4	- 35.6
6	- 329	- 41.6	- 36.0	- 34.5
7	- 237	- 39.8	- 35.7	- 34.2
8	- 179	- 38.1	- 35.3	- 33.9
9	- 143	- 37.2	- 34.8	- 33.8
10	- 128	- 36.2	- 34.4	- 33.7
15	- 66.5	- 34.4	- 33.6	- 33.24
20	- 58.7	- 33.8	- 33.3	- 33.0
25	- 52.3	- 33.4	- 33.0	- 32.92
30	- 49.27	- 33.1	- 32.9	- 32.85

TABLEAU 1

Valeur de la f-distance après n contraintes additionnelles

truncat. n°	f	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
4	- 41.2	$4.9 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$2.6 \cdot 10^{-5}$	$3.6 \cdot 10^{-5}$	$6.7 \cdot 10^{-5}$	$6.7 \cdot 10^{-5}$
5	- 33.1	$2.8 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$4.2 \cdot 10^{-6}$	$4.3 \cdot 10^{-6}$	$4.3 \cdot 10^{-6}$
6	- 32.47	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$4.2 \cdot 10^{-7}$	$5.8 \cdot 10^{-7}$	$6.4 \cdot 10^{-7}$	$7.2 \cdot 10^{-7}$	$7.3 \cdot 10^{-7}$
7	- 32.361	$3 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-8}$	$6.0 \cdot 10^{-8}$	$6.2 \cdot 10^{-8}$	$6.7 \cdot 10^{-8}$	$9.7 \cdot 10^{-8}$
8	- 32.3498	$4.8 \cdot 10^{-9}$	$5.8 \cdot 10^{-9}$	$6.2 \cdot 10^{-9}$	$6.3 \cdot 10^{-9}$	$7.4 \cdot 10^{-9}$	$7.6 \cdot 10^{-9}$
9	- 32.348815	$3 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-10}$	$5.9 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-10}$	9.10^{-10}	$1.2 \cdot 10^{-9}$
10	- 32.348696	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$3.8 \cdot 10^{-11}$	$7.9 \cdot 10^{-11}$

meilleur résultat obtenu : $\hat{f} = - 32.3486797$

PROBLEME n°3 (W. Charles Mylander) [7]

fonction économique et contraintes quadratiques
 nombre de variables 5
 nombre de contraintes non linéaires 6
 nombre de contraintes linéaires 10 (bornes)

minimiser $5.3578547 x_3^2 + .8356891 x_1 x_5 + 37.293239 x_1 - 40792.141$

sous les contraintes

$$0 \leq 85.334407 + .0056858 x_2 x_5 + .0006262 x_1 x_4 - .0022053 x_3 x_5 \leq 92$$

$$90 \leq 80.51249 + .0071317 x_2 x_5 + .0029555 x_1 x_2 + .0021813 x_3^2 \leq 110$$

$$20 \leq 9.300961 + .0047026 x_3 x_5 + .0012547 x_1 x_3 + .0019085 x_3 x_4 \leq 25$$

$$78 \leq x_1 \leq 102, 33 \leq x_2 \leq 45, 27 \leq x_3 \leq 45, 27 \leq x_4 \leq 45, 27 \leq x_5 \leq 45$$

point de départ réalisable (78.62, 33.44, 31.07, 44.18, 35.22)

Bilan du rapport COLVILLE (juin 1970)

méthode		optimum	temps standard
Grad. Proj. Corrigé	(Kalfon)	- 30665.503	0.0051
Variable Met. Proj.	(Murtagh)	- 30665.543	0.0060
GRG. Guigou	(Abadie)	- 30665.539	0.0061
Gen. Red. Grad	(Abadie)	- 30665.503	0.0095
Solver	(Wilson)	- 30665.503	0.0108
Davidon with CRST	(Davies)	- 30665.503	0.0154

Méthode des centres linéarisée - 30665.539 0.0023

résultat obtenu à la 5ème troncature avec les paramètres

k = 0.001 lin = 2 dic = 100 ; pas de centrage

Dans ce problème, le centrage ne s'est pas révélé nécessaire ; les différents optimums des programmes linéaires de linéarisation à chaque troncature, étant à l'intérieur du domaine non-linéaire, correspondent à une assez bonne représentation du centre du tronçon. Ce phénomène est prouvé par le tableau suivant qui présente les valeurs de la fonction économique suivant la troncature avec le paramètre de réduction de la dichotomie égal à 10^{-2} et 10^{-4} . Le peu de différences entre les deux séries de résultats prouvent que les directions $[x,z]$ "pénètrent bien" à l'intérieur du domaine non-linéaire.

tronc	f dic=100	f dic=1000
0	- 30373. ...	- 30373. ...
1	- 30653. ...	- 30654. ...
2	- 30665.132	- 30664. ...
3	" .536	- 30665.529
4	" .5386	" .5386
5	" .5387	" .5387

valeur de la solution optimale atteinte

$$\hat{f} = - 30.665.538671$$

$$\hat{x} = (78.0, 33.0, 29.99525, 45.0, 36.77581)$$

valeur des contraintes actives à l'optimum

$$g_2(\hat{x}) = 0$$

$$g_5(\hat{x}) = 0$$

PROBLEME n°4 (C.F. Wood) [7]

nombre de variables	4	
nombre de contraintes non linéaires	0	
nombre de contraintes linéaires	8	(bornes)

$$\text{minimiser } 100 (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90 (x_4 - x_3^2)^2 + (1 - x_3)^2 +$$

$$10.1 \{(x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2\} + 19.8 (x_2 - 1)(x_4 - 1)$$

sous les contraintes

$$- 10 \leq x_i \leq 10 \quad i=1, \dots, 4.$$

Ce problème, dont les contraintes ne seront pas actives à l'optimum, possède deux optimums, l'un local (valeur de la fonction -7.8...) l'autre global (f=0). Le point de départ fourni par Wood ($x_1 = x_3 = -3$, $x_2 = x_4 = -1$) est tel que notre méthode, ainsi que nombre d'autres, converge vers l'optimum local. Nous avons choisi le point de départ $x = (x_i=3 \quad i=1, \dots, 4)$ pour atteindre l'optimum global.

Bilan du rapport de COLVILLE (juin 1970)

méthode		optimum	temps standard
Klingman + Himmelblau	(Grace)	0.000	0.0020
Courant	(Ballot)	0.000	0.0043
Davidon with CRST	(Davies)	"	0.0062
Grad. Proj. corrigé	(Kalfon)	"	0.0063
GRG. Guigou	(Abadie)	"	0.0064

Méthode des centres linéarisée	0.000	0.0056
--------------------------------	-------	--------

résultat obtenu avec les paramètres de programmation

$k = 1$ (pas de contraintes dans la f-distance), $lin = 3$, $dic = 10^7$

centrage à partir de la 3ème troncature

On trouvera, dans le tableau ci-dessous, l'évolution de la valeur économique au cours des itérations. Il est à remarquer l'importance de la précision sur la dichotomie, le phénomène d'oscillations à partir de la 11ème troncature apparaît beaucoup plus vite si dic est fixé à 10000 par exemple. L'explication vient de la remarque suivante : le point z , optimum des programmes linéaires, est un sommet du cube formé par les contraintes ; la longueur euclidienne du segment $[x, z]$ est donc de l'ordre de $20 \left(\sqrt{\sum_{i=1}^4 (x_i - z_i)^2} \right)$ lorsque x est voisin de l'optimum ($x_i = 1 \quad i=1, \dots, 4$). Si dic est fixé à 10000, la longueur de l'intervalle final est alors de $2 \cdot 10^{-3}$ d'où une erreur absolue sur chaque composante du point qui est choisi comme maximum de la f -distance sur $[x, z]$ d'au plus 2×10^{-3} . Compte tenu du fait que $[x, z]$ a, avec le domaine non linéaire, une intersection "très petite", cette erreur est suffisante pour choisir, parfois, le centre du domaine hors de ce dernier, d'où les oscillations signalées.

line	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f	- 7008	- 990	- 953	- 405	- 2.38	- 1.76	- 1.27	- 10^{-4}	- .9310 ⁻⁶
lin	9	10	11	12	13	14	15	16	17
f	- .2310 ⁻⁷	- .1110 ⁻¹⁰	- .2510 ⁻⁹	- .2510 ⁻¹⁰	- .6810 ⁻⁹	- .5610 ⁻⁹	- .710 ⁻⁸	- .510 ⁻¹¹	- .210 ⁻⁹

Le résultat retenu est celui de la 7ème linéarisation correspondant à la précision du rapport COLVILLE.

Meilleure solution atteinte $\hat{f} = - 5 \cdot 10^{-12}$

$\hat{x} : x_i = 1$ avec une erreur absolue de 10^{-7}

PROBLEME n°5 (Huard) [7]

fonction économique linéaire par morceaux et continue
 nombre de variables 6
 nombre de contraintes non linéaires 4
 nombre de contraintes linéaires 12 (bornes)

$$\min f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

sous les contraintes

$$C - \frac{x_3 x_4}{B} \cos(b-x_6) + x_3^2 \frac{A}{B} \cos(b-a) - x_1 = 0 \quad (1)$$

$$- \frac{x_3 x_4}{B} \cos(b+x_6) + x_4^2 \frac{A}{B} \cos(b-a) - x_2 = 0 \quad (2)$$

$$D - \frac{x_3 x_4}{B} \sin(b-x_6) + x_3^2 \frac{A}{B} \sin(b-a) = 0 \quad (3)$$

$$- \frac{x_3 x_4}{B} \sin(b+x_6) + x_4^2 \frac{A}{B} \sin(b-a) - x_5 = 0 \quad (4)$$

$$0 \leq x_1 \leq 400, 0 \leq x_2 \leq 1000, 340 \leq x_3 \leq 420$$

$$340 \leq x_4 \leq 420, -1000 \leq x_5 \leq 1000, 0 \leq x_6 \leq 0.5236$$

avec $A = 0.90798, B = 131.078, C = 300$
 $a = 0.00889, b = 1.48477, D = 200$

$$\text{et } \frac{df_1}{dx_1} = \begin{cases} 30 & \text{si } 0 \leq x_1 < 300 \\ 31 & \text{si } 300 \leq x_1 \leq 400 \end{cases}$$

$$\frac{df_2}{dx_2} = \begin{cases} 28 & \text{si } 0 \leq x_2 < 100 \\ 29 & \text{si } 100 \leq x_2 < 200 \\ 30 & \text{si } 200 \leq x_2 \leq 1000 \end{cases}$$

point de départ non réalisable

$$x(390.0, 1000.0, 419.6, 340.5, 191.175, 0.50)$$

L'écriture de ce problème amène deux considérations pour son traitement numérique :

* il n'y a que 3 variables indépendantes, les variables x_1, x_2, x_5 s'expriment aisément par rapport à x_3, x_4, x_6

* présence de contraintes non linéaires en égalité ; or nous avons vu que notre méthode nécessitait un domaine de solutions réalisables ayant un intérieur non vide.

En ne gardant comme variables du problème que x_3 x_4 x_6 et en utilisant les contraintes de bornes sur x_1 , x_2 , x_5 on transforme les trois contraintes (1) (2) (4) en 6 contraintes non-linéaires. La contrainte n°4 restant en égalité, nous avons été obligé de lui donner un sens d'inégalité. (A priori on ne sait, sans considérations sur la nature physique de la contrainte, rien sur le sens à donner. En réalité nous avons affecté à cette contrainte le sens \leq sachant qu'à l'optimum du problème cette dernière devait être active ce qui permet une vérification sur le sens fixé à priori)

d'où l'énoncé du problème traité (3 variables, 13 contraintes)

$$\min f_1(x_1(x_3, x_4, x_6)) + f_2(x_2(x_3, x_4, x_6))$$

sous les contraintes

$$0 \leq C - \frac{x_3 x_4}{B} \cos(b - x_6) + x_3^2 \frac{A}{B} \cos(b - a) \leq 400$$

$$0 \leq -\frac{x_3 x_4}{B} \cos(b - x_6) + x_4^2 \frac{A}{B} \cos(b - a) \leq 1000$$

$$-1000 \leq -\frac{x_3 x_4}{B} \sin(b + x_6) + x_4^2 \frac{A}{B} \sin(b - a) \leq 1000$$

$$D - \frac{x_3 x_4}{B} \sin(b - x_6) + x_3^2 \frac{A}{B} \sin(b - a) \leq 0$$

$$340 \leq x_3 \leq 420, 340 \leq x_4 \leq 420, 0 \leq x_6 \leq 0.5236$$

point de départ (419.6, 340.5, 0.50)

La fonction économique n'est plus linéaire mais elle reste non différentiable pour certaines valeurs des variables.

Après le bilan comparatif nous donnons l'évolution de la valeur économique au cours des itérations.

Bilan du rapport COLVILLE (juin 1970)

méthode		optimum	temps standard
GRG. Guigou	(Abadie)	8827.599	0.0077
Gen. Grand. Search	(Kephart)	8827.599	0.0390
Gen. Red. Gradient	(Abadie)	8827.597	0.0492
Courant	(Ballot)	8827.576	0.0715

Méthode des centres linéarisée 8827.598 0.0677

résultat obtenu à la 25ème troncature avec les paramètres

$k = 0.01$, $lin = 1$, $dic = 10000$

centrage à partir de la 5ème troncature

troncat. n°	f. économique	troncat. n°	f
0	9519	10	8827.918
1	8856	12	8827.760
2	8842.4	14	" .680
3	8841.2	16	" .626
4	8840.65	18	" .606
5	8838.	20	" .600
6	8832.	22	" .5988
7	8829.9	24	" .59813
8	8828.87	25	" .59796
9	8828.24	29	" .59794

Meilleure solution atteinte :

$$\hat{f} = 8827.597938$$

$$\hat{x} = (x_3 = 373.83106, x_4 = 419.99983, x_6 = .1532879)$$

valeur de la contrainte active $3.8 \cdot 10^{-7}$

PROBLEME n°6 (J.M. Gauthier) [7]

nombre de variables	16	
nombre de contraintes non linéaires	0	
nombre de contraintes linéaires	40	(dont 32 de bornes)

$$\text{maximiser} - \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^{16} A_{ij} (x_i^2 + x_i + 1)(x_j^2 + x_j + 1)$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} &.22x_1 + .20x_2 + .19x_3 + .25x_4 + .15x_5 + .11x_6 + .12x_7 + .13x_8 + x_9 = 2.5 \\ &- 1.46x_1 - 1.3x_3 + 1.82x_4 - 1.15x_5 + .8x_7 + x_{10} = 1.1 \\ &1.29x_1 - .89x_2 - 1.16x_5 - .96x_6 - .49x_8 + x_{11} = -3.1 \\ &- 1.10x_1 - 1.06x_2 + .95x_3 - .54x_4 - 1.78x_6 - .41x_7 + x_{12} = -3.5 \\ &- 1.43x_4 + 1.51x_5 + .59x_6 - .33x_7 - .43x_8 + x_{13} = 1.3 \\ &- 1.72x_2 - .33x_3 + 1.62x_5 + 1.24x_6 + .21x_7 - .26x_8 + x_{14} = 2.1 \\ &1.12x_1 + .31x_4 + 1.12x_7 - .36x_9 + x_{15} = 2.3 \\ &0.45x_2 + .26x_3 - 1.1x_4 + .58x_5 - 1.03x_7 + .1x_8 + x_{16} = -1.5 \\ &0 \leq x_i \leq 5 \quad i = 1, \dots, 16 \end{aligned}$$

Point de départ : il est calculé automatiquement par programme : c'est un sommet du polyèdre défini par les contraintes linéaires.

Valeurs des coefficients A_{ij} $i, j = 1, \dots, 16$. Ces coefficients ne prenant que les valeurs 0 ou 1, nous donnons uniquement les couples d'indices (i, j) des A_{ij} non nuls.

(1,1), (1,4), (1,7), (1,8), (1,16), (2,2), (2,3), (2,7), (2,10), (3,3), (3,7), (3,9), (3,10), (3,14), (4,4), (4,7), (4,11), (4,15), (5,5), (5,6), (5,10), (5,12), (5,16), (6,6), (6,8), (6,15), (7,7), (7,11), (7,13), (8,8), (8,10), (8,15), (9,9), (9,12), (9,16), (10,10), (10,14), (11,11), (11,13), (12,12), (12,14), (13,13), (13,14), (14,14), (15,15), (16,16).

Bilan du rapport COLVILLE (juin 1970)

méthode		optimum	temps standard
GRG. Guigou	(Abadie)	- 244.899	0.0176
Revised Red.Grad.	(Ribièrè)	- 244.899	0.0290
Reduced Gradient	(Huard)	- 244.899	0.0396
Conjugate Gradient	(Goldfarb)	- 244.900	0.0502
Variable Metric Proj	(Murtagh)	- 244.900	0.0618

Méthode des centres linéarisée	-	244.900	0.0270
--------------------------------	---	---------	--------

résultat obtenu * à la 7ème troncature avec les paramètres

k = 1, lin = 1, dic = 10000

centrage à partir de la 5ème troncature

Meilleure solution atteinte $\hat{f} = - 244.8996975.$

* il s'agit de la version linéaire/non linéaire du programme.

PROBLEME n°7 (A.R. Colville) [7]

nombre de variables	3	(notées x_i)
nombre de contraintes non linéaires	14	
nombre de contraintes linéaires	6	(bornes)

$$\text{maximiser } .063 y_2 y_5 - 5.04 x_1 - 3.36 y_3 - .035 x_2 - 10 x_3$$

sous les contraintes

$$0 \leq y_2 \leq 5000, 0 \leq y_3 \leq 2000, 85 \leq y_4 \leq 93, 90 \leq y_5 \leq 95$$

$$3 \leq y_6 \leq 12, .01 \leq y_7 \leq 4, 145 \leq y_8 \leq 162$$

$$0 \leq x_1 \leq 2000, 0 \leq x_2 \leq 16000, 0 \leq x_3 \leq 120$$

Les quantités y_2 et y_4 se calculent au moyen d'un programme fortran (cf. [7]) mais en définitive ces valeurs sont racines d'équations du second degré dont la résolution apporte une plus grande précision que la méthode itérative proposée, de plus le temps de calcul des fonctions du problème est considérablement réduit. Les autres valeurs s'obtiennent directement à partir de y_2 et y_4 .

$$y_2 \text{ est la plus grande racine de } h_1(t) = 0$$

$$h_1(t) = .994163 t^2 + (82.309512 x_1 + 1.626748 x_2) t + (.6667 x_2^2 - 98.1663 x_1^2 - 14.5004 x_1 x_2)$$

$$y_3 = 1.22 y_2 - x_1, y_6 = (x_2 + y_3)/x_1.$$

$$y_4 \text{ plus petite racine de } h_2(t) = 0$$

$$h_2(t) = .21645 y_2 t^2 + ((27.10095 - .731268 y_6 + .25308 y_6^2) + 1000 x_3) t + 98000 x_3 = 0$$

$$y_5 = 86.35 + 1.098 y_6 - .038 y_6^2 + .325 (y_4 - 89)$$

$$y_8 = -133 + 3 y_5, y_7 = 35.82 - .222 y_8.$$

Point de départ réalisable (1745, 12000, 110).

Bilan du rapport COLVILLE (juin 1970)

méthode		optimum	temps standard
GRG. Guigou	(Abadie)	1162.170	0.0216
Davidon with CRST	(Davies)	1162.000	0.0224
Variable metric Proj.	(Murtagh)	1162.036	0.0249
Courant	(Ballot)	1162.040	0.0355
Pop II/7094	(Grisby)	1161.960	0.0357
Deflected Ascent	(Miller)	1162.090	0.0409

Méthode des centres linéarisée	1162.047	0.0294
--------------------------------	----------	--------

résultat obtenu à la 10ème troncature avec les paramètres

$k = 0.001$, $lin = 1$, $dic = 10\ 000$

centrage à partir de la 1ère troncature

Meilleure solution atteinte :

$$\hat{f} = 1162.04663$$

$$\hat{x} = (1728.37144, 16000, 98.1361554).$$

Valeur de la contrainte active ($y_3 \geq 0$) $2.9 \cdot 10^{-7}$

PROBLEME n°8 (dispatching économique) [3]

nombre de variables 2
 nombre de contraintes non linéaires 5
 nombre de contraintes linéaires 6 (dont 4 de bornes)

$$\text{minimiser } 3v_1 + 10^{-6} v_1^3 + 2v_2 + \frac{2}{3} 10^{-6} v_2^3$$

sous les contraintes

$$0 \leq v_1 \leq 1200, 0 \leq v_2 \leq 1200$$

$$1000 \sin(x_2 - .25) + 1000 \sin(x_2 - x_1 - .25) + 1294.8 \leq 0$$

$$.55 - x_1 + x_2 \geq 0$$

$$.55 - x_1 - x_2 \geq 0$$

$$\text{avec } v_1 = -1000 \sin(x_1 + .25) - 1000 \sin(x_2 + .25) + 894.8$$

$$v_2 = 1000 \sin(x_1 - .25) + 1000 \sin(x_1 - x_2 - .25) + 894.8$$

Quelques résultats comparatifs sur l'efficacité de l'algorithme de centrage

tronc.	fonct. écon. sans centrage $k=10^{-2}$	fonct. écon. avec centrage $k=10^{-2}$
0	7596.	7596.
2	5166.	5141.6
4	5161.	5129.9
6	5157.	5127.1
8	5153.	5126.4
10	5150.	5126.25
12	5147.	5126.212
14	5144.	5126.203
16	5142.5	5126.201
18	5141.8	5126.2004
20	5140.7	5126.20036

Solution optimale atteinte : $\hat{f} = 5126.200358$

$$\hat{x} = (0.119000, -0.396175)$$

PROBLEME n°9 (Abadie) [1]

nombre de variables	50
nombre de contraintes non linéaires	50
nombre de contraintes linéaires	100 (bornes)

Ce problème a été construit à partir d'une table de nombres entiers au hasard compris entre 0 et 9 ; il est donné sous la forme

$$\begin{aligned} & \text{maximiser} \quad \sum_{i=1}^{50} q_{ii}^{(0)} x_i^2 + \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=i+1}^{50} 2q_{ij}^{(0)} x_i x_j + \sum_{i=1}^{50} p_i^{(0)} x_i \\ & \text{sous les contraintes} \\ & \sum_{i=1}^{50} q_{ii}^{(k)} x_i^2 + \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=i+1}^{50} 2q_{ij}^{(k)} x_i x_j + \sum_{i=1}^{50} p_i^{(k)} x_i^{(k)} \leq b^{(k)} \quad k=1, \dots, 50 \\ & -5 \leq x_i \leq 5 \quad i=1, \dots, 50 \\ & \text{point de départ fourni par l'Auteur et réalisable} \quad x_i=0 \quad i=1, \dots, 50. \end{aligned}$$

Le stockage des données de ce problème réclame théoriquement 130 100 mémoires. Les éléments différents de zéro de la table ayant tous la même probabilité, zéro ayant une probabilité supérieure, le nombre d'éléments différents de zéro à stocker (pour un $q_{ij}^{(k)} \neq 0$, on stocke $i, j, q_{ij}^{(k)}$) est à peu près 8700 ; ceci revient à dire que le creux de ce problème est de l'ordre de 95%.

La fonction économique et les contraintes sont des fonctions quadratiques déterminées pour que le domaine du problème soit convexe et la fonction économique concave. De plus, par construction, la solution optimale, unique, est exactement connue et égale à 77364 pour la solution ($\hat{x}_i=1$). A l'optimum de ce problème il y a exactement 25 contraintes actives.

La structure particulière de ce problème a permis d'utiliser avec une très grande réussite la linéarisation partielle des contraintes (voir le résultat numéro 2).

Résultats du problème n°9

	optimum	temps standard
1/	77363.9998	1.93
2/	77363.99999	0.557

A titre indicatif la méthode GRG. Guigou (Abadie) a obtenu, sur ce problème, pour un temps standard de 22 une valeur de la fonction $\geq 77363,9$; cependant les nouvelles versions de la méthode GRG devraient diviser ce temps par au moins 2.

Meilleure solution atteinte (sans utilisation de la linéarisation partielle)

$$\hat{f} = 77363,99979$$

$$\hat{x} \quad x_i = 1 \quad \text{avec une erreur absolue maximum de } 3 \cdot 10^{-5}.$$

PROBLEME n°10 (Dispatching, réseau à 10 noeuds de la Cigré) [3]

fonction économique linéaire

nombre de variables 50

nombre de contraintes non linéaires 20

nombre de contraintes linéaires 100 (bornes)

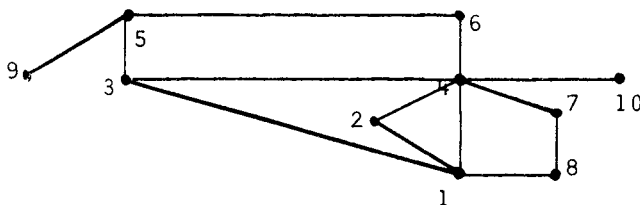
$$\begin{aligned} \text{minimiser } & (1.87 P_{1,1} + 1.92 P_{1,2} + 2.3 P_{1,3} + 2.61 P_{1,4} + 1.85 P_{2,1} + \\ & 1.88 P_{2,2} + 1.89 P_{4,1} + 1.90 P_{4,2} + 2.27 P_{4,3} + 2.28 P_{4,4} + 2.36 P_{6,1} + \\ & 2.38 P_{6,2} + 2.51 P_{6,3} + 2.54 P_{6,4} + 2.56 P_{6,5} + 1.68 P_{8,1} + 2.33 P_{8,2} + \\ & 2.43 P_{8,3} + 1.96 P_{9,1} + 2.18 P_{9,2} + 1.77 P_{10,1} + 2.25 P_{10,2} + 2.31 P_{10,3} + \\ & 2.62 P_{10,4}) \end{aligned}$$

sous les contraintes $i=1, \dots, 10$

$$- \sum_j \frac{u_i u_j}{B_{ij}} \cos(\theta_i - \theta_j + \beta_{ij}) + \sum_j u_i^2 \frac{A_{ij}}{B_{ij}} \cos(\beta_{ij} - \alpha_{ij}) + C_i = P_i$$

$$- \sum_j \frac{u_i u_j}{B_{ij}} \sin(\theta_i - \theta_j + \beta_{ij}) + \sum_j u_i^2 \frac{A_{ij}}{B_{ij}} \sin(\beta_{ij} - \alpha_{ij}) + D_i = Q_i$$

en notant $P_i = \sum_{\alpha} P_{i,\alpha}$ et $j \in J_i =$ ensemble des noeuds reliés à i selon le schéma ci-dessous



Bornes sur les variables

$80 \leq P_{1,1} \leq 240$

$80 \leq P_{1,2} \leq 240$

$40 \leq P_{1,3} \leq 120$

$20 \leq P_{1,4} \leq 50$

$40 \leq P_{6,1} \leq 120$

$40 \leq P_{6,2} \leq 120$

$20 \leq P_{6,3} \leq 50$

$20 \leq P_{6,4} \leq 50$

$80 \leq P_{2,1} \leq 240$

$80 \leq P_{2,2} \leq 240$

$80 \leq P_{8,1} \leq 240$

$40 \leq P_{8,2} \leq 120$

$40 \leq P_{8,3} \leq 120$

$20 \leq P_{6,5} \leq 50$

$40 \leq P_{9,1} \leq 120$

$30 \leq P_{9,2} \leq 80$

$80 \leq P_{4,1} \leq 240$

$80 \leq P_{4,2} \leq 240$

$40 \leq P_{4,3} \leq 120$

$40 \leq P_{4,4} \leq 120$

$80 \leq P_{10,1} \leq 240$

$40 \leq P_{10,2} \leq 120$

$20 \leq P_{10,3} \leq 50$

$20 \leq P_{10,4} \leq 50$

VI.27

$$P_3 = P_5 = P_7 = 0 \quad , \quad Q_3 = Q_5 = Q_7 = 0$$

$$\begin{aligned} - 113 \leq Q_1 \leq 335 & & - 54 \leq Q_8 \leq 270 \\ - 48 \leq Q_2 \leq 240 & & - 23 \leq Q_9 \leq 115 \\ - 78 \leq Q_4 \leq 390 & & - 49 \leq Q_{10} \leq 235 \\ - 45 \leq Q_6 \leq 210 & & \end{aligned}$$

$$205 \leq u_i \leq 240 \quad i = 1, \dots, 10$$

$$- 0.5 \leq \theta_i \leq 0.5 \quad i = 1, \dots, 9 \quad \theta_{10} = 0$$

Valeurs des constantes du problème

i	C_i	D_i	i	C_i	D_i
1	0	0	6	100	35
2	0	0	7	100	50
3	250	160	8	250	150
4	1000	630	9	100	30
5	150	75	10	0	0

sommets reliés i j		A_{ij}	$1/B_{ij}$	$10^4 \times \alpha_{ij}$	β_{ij}
1	2	.9951	.0401	10	1.3698
1	3	.9944	.0350	12	1.3686
1	4	.9882	.0251	18	1.4207
1	8	.9875	.0151	46	1.2230
2	4	.9976	.0400	5	1.3696
3	4	.9806	.0100	50	1.3243
3	5	.9807	.0101	50	1.3231
4	6	.9975	.0400	4	1.4205
4	7	.9901	.0295	25	1.3266
4	10	.9980	.0981	4	1.3735
5	6	.9936	.0302	19	1.2811
5	9	.9882	.0251	18	1.4207
7	8	.9903	.0301	25	1.3216

Les contraintes en égalité sont mises en ξ . Le point de départ non réalisable est obtenu en mettant toutes les variables à leur borne inférieure.

Quelques résultats* numériques sur ce problème axés sur deux thèmes :

- influence de la pondération de la fonction économique (tableau 1)
- influence du nombre de contraintes additionnelles dans le centrage (tableau 2)

TABLEAU 1 (le centrage n'est pas utilisé)

iter.	$k = 10^{-2}$	$k = 10^{-4}$	$k = 10^{-6}$
3	4546.	3354.	2297.
4	4521.	2479.	2211.
5	4500.	2136.	2163.
6	4472.	1993.	2129.
8	4423.	1796.	1702.
10	4383.	1648.	1636.
12	4339.	1578.	1561.
16	4252.	1532.	1558.
20	4167.	1514.	1556.
25	4067.	1507.	1554.
30		1502.	1553.
35		1501.18	1551.
40		1500.32	1550.
45		1499.92	1548.8
50		1499.76	1547.5
55		1499.66	1546.

* La mise en forme du problème de la Cigré, notamment la transformation permettant d'obtenir une fonction économique linéaire, ainsi que nombre de résultats numériques sont dus à J. Beuneu [3].

TABLEAU 2

départ d'un point proche de l'optimum

centre	4 contraintes	8 contraintes	12 contraintes
2	1499.88	1499.776	1499.652
3	1499.768	" .390	" .392
4	" .681	" .337	" .264
5	" .575	" .263	" .241
6	" .550	" .254	" .237
7	" .520		

Meilleure solution atteinte :

$$\hat{f} = 1499.235830 \quad \text{temps standard } 4.6$$

avec les paramètres $k = 10^{-5}$, $\text{dic} = 10^9$, $\text{lin} = 1$,
12 contraintes additionnelles dans le centrage.

Remarques à propos de ces derniers résultats :

a) Le tableau 1 montre un phénomène souvent observé, c'est-à-dire qu'une trop forte pondération de la fonction (c'est-à-dire k trop faible) ne convient pas ; ceci s'explique par le fait que dans ce cas les différents centres sont rejetés vers les contraintes et ne correspondent plus à des "centres géométriques". Dans ces conditions il peut être difficile de se dégager des contraintes.

b) Les résultats du tableau 2 prouvent qu'augmenter le nombre de contraintes additionnelles accélère la convergence ; ceci s'explique en notant que les ε -centres trouvés sont meilleurs. Par ailleurs en admettant comme valeur optimale de la fonction 1499.235, les écarts $\hat{f} - f_i$ (f_i valeur au i^{e} centre) sont approximativement divisés par 2 à chaque troncature (caractère d'une convergence linéaire).

VI.2 - CONCLUSIONS SUR LA RESOLUTION NUMERIQUE

Nous n'avons cité que les premiers problèmes traités par la méthode des centres linéarisée utilisant l'algorithme de centrage ; d'autres problèmes concrets, de taille plus importante, sont en cours d'étude.

Le bilan comparatif dressé sur ces problèmes révèle des résultats très intéressants par rapport aux méthodes de programmation non linéaire déjà existantes. Il est certain que du point de vue performance, le programme Algol de notre méthode pourrait être amélioré dans les détails afin d'accroître la vitesse de résolution sur calculateurs.

Il est non moins évident, par ailleurs, que sans changer la théorie de la méthode, la conduite des différents calculs (programmes linéaires, recherche du maximum d'une fonction sur un segment) peut être aménagée et améliorée pour la résolution de problèmes de grosse taille.

Quoiqu'il en soit l'intérêt de cette méthode est, à notre avis, le caractère de la convergence observé sur tous les problèmes traités ; bien qu'aucune expression de cette vitesse ne soit à présent trouvée, la convergence a une allure linéaire.

De plus, peu de paramètres délicats à ajuster sont nécessaires pour son application. Le premier de ces paramètres, la pondération de la fonction économique, doit être ni trop fort ni trop faible sous peine de stagner loin de la valeur optimale [problèmes 1,2,10] ; son ajustement s'est toujours fait à un facteur 10 près (en général 10^{-3} a donné des résultats satisfaisants). La précision de la dichotomie est le second paramètre. L'utilisateur de la méthode se rend très vite compte d'un manque de précision de par les oscillations qui apparaissent sur les valeurs de la fonction économique. Sans vouloir atteindre le temps d'exécution minimum un choix assez grand de ϵ éliminera ces ennuis. Dans la dernière version du programme, l'ajustement de ϵ a été rendu automatique à l'intérieur de la procédure dichotomie.

Les autres paramètres de programmation ont un rôle beaucoup moins sensible pour la convergence vers l'optimum de la méthode.

Nous ne parlerons pas des différents seuils des méthodes duale-simpliciale et simpliciale qui représentent en réalité le zéro machine et qui, pour toutes nos expériences, ont été fixés à 10^{-11} .

Le nombre de linéarisations entre deux troncatures successives peut être réduit à l'unité pourvu que l'algorithme partiel de centrage soit poursuivi assez loin (on reverra à ce propos le chapitre IV "vitesse de convergence").

Le nombre de contraintes additionnelles a toujours été fixé à quelques unités. Etant donné qu'on conserve toujours le meilleur point (relativement à la f-distance) et que la théorie nous indique que ce point est un ϵ -centre, ce nombre peut être fixé arbitrairement ; trop de contraintes additionnelles augmentent le temps d'exécution de la méthode mais assurent une meilleure vitesse de convergence.

Dans toutes nos expériences l'ajustement de ces paramètres s'est réalisé par essais successifs pour rechercher le meilleur temps d'exécution sur les différents problèmes ; en fait il serait intéressant de trouver des critères permettant le choix à priori des deux paramètres : pondération de la fonction économique et nombre de contraintes additionnelles.

A N N E X E

Listing ALGOL 60

de la méthode des centres linéarisée

(variante linéaire / non linéaire avec algorithme de centrage)

```

000 'BEGIN' 'INTEGER' NN,MM,NP,NG,NA,N,M,M1,M2,M3,MNL,MNLI,ML,P,Q,I,J,L,L
000 I,R,S,SM,SP,RP,ITER,ITMAX,ILIN,ILINMA,ICEN,IP,IN,IM,TE1,TE2,TE3,L
000 O,ACB,NT,ILINI,IJKL,MMI,MM2,TE4,TE11,TE21,TE31,TE41,PP,TE5,TE51,ICEN
000 I,TET;
001 'REAL' AA,V,W,U,UI,T,TI,UM,UP,URM,URP,ALP,EPI,EP2,EP3,EP4,FCT1,FCT2,F
001 CT,FDIST,KKK,FCT3,DIC,TEX,RE1,RE2,UPUI,PREC;
002 'BOOLEAN' BOOL1,BOOL2,BOOL3,PH,BOOL;
003 'ARRAY' FTAB[1:16,1:16];
004 'INTEGER' 'PROCEDURE' TIME;
005 'CODE';
006 BOOL2:=DATA=1;
007 KKK:=DATA;
008 UPUI:=2*255;
009 PP:=1;
010 PREC:=DATA;
011 TEXT("PRECISION\");
012 EDIT("I8,I2\,PREC);
013 PRINT(2);
014 DIC:=DATA;
015 TEX:=DATA;
016 TE5:=TE51:=0;
017 ACB:=1;
018 TE1:=TE2:=TE3:=TE4:=TE11:=TE21:=TE31:=TE41:=0;
019 FCT1:=2*250;
020 N:=DATA;
021 ML:=DATA;
022 M1:=DATA;
023 M2:=DATA;
024 M3:=DATA;
025 MNL:=DATA;
026 ICEN1:=0;
027 ITMAX:=DATA;
028 ILINMA:=DATA;
029 EPI:=DATA;
030 EP2:=DATA;
031 EP3:=DATA;
032 EP4:=DATA;
033 TEXT("ML,MNL\");
034 EDIT("F5.0\,ML);
035 EDIT("F5.0\,MNL);
036 PRINT(2);
037 TEXT("DIC,TEX,EPI,K\");
038 EDIT("L I8,I2\,DIC);
039 SPACE(5);
040 EDIT("L I8,I2\,TEX);
041 EDIT("L I8,I2\,EPI);
042 SPACE(5);
043 EDIT("L I8,I2\,KKK);
044 PRINT(2);
045 EDIT("F12.6\,ITMAX);
046 EDIT("F12.6\,ILINMA);
047 PRINT(2);
048 MNLI:=MNL+1;
049 L:=M2+M3;
050 MM:=ML+MNL;
051 NN:=N+1;
052 P:=N+L;

```

```

0053 NP:=P+MNL+1;
0054 LI:=MNL+L;
0055 NQ:=NN+1;
0056 Q:=N+1;
0057 M:=ML+1;
0058 MM2:=MM;
0059 'BEGIN' 'INTEGER' 'ARRAY' B[1:MM+N], BB[1:ML+1];
0060 'ARRAY' A[1:MM+N, 1:NQ], K[1:MM+N, 1:MM+N], KK[1:ML+1, 1:ML+1], X, XX[1:MM+N
0060 ], XXX[1:MM+N, 1:2], XC, X2, X3, YD, YP[1:N], XO, XJ, Z[1:NN], VCONT[1:MNL], NO
0060 R[1:MNL];
0061 'ARRAY' XFAG, XDAG, POND[1:N], SOL[1:MM+N], DBAR[1:NP+N], X4[1:N];
0062 'INTEGER' 'ARRAY' VAR[1:NN];
0063 'BOOLEAN' 'ARRAY' BP, BM[1:NP+N], BBP, BBM[1:P+1], BS[1:MM+N], BBS[1:ML+1],
0063 C[1:LI+N];
0064 'PROCEDURE' CONT(P, FDIST, A, XC, VCONT);
0065 'VALUE' P;
0066 'INTEGER' P;
0067 'REAL' FDIST;
0068 'ARRAY' A, XC, VCONT;
0069 'BEGIN' 'COMMENT' PROBLEME?TEST?NUMERO?SEPT;
0069 'REAL' V1, V2, V3, V4, V5, V6, V7, V8, V9, V10, V11, V12, V13, V14, V15, V16;
0070 'REAL' D;
0071 'ARRAY' FTX[1:16];
0072 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 16 'DO' FTX[I]:=XC[I]*(XC[I]+1)+1;
0073 V1:=FTX[1]+FTX[4]+FTX[7]+FTX[8]+FTX[16];
0074 V2:=FTX[2]+FTX[3]+FTX[7]+FTX[10];
0075 V3:=FTX[3]+FTX[7]+FTX[9]+FTX[10]+FTX[14];
0076 V4:=FTX[4]+FTX[7]+FTX[11]+FTX[15];
0077 V5:=FTX[5]+FTX[6]+FTX[10]+FTX[12]+FTX[16];
0078 V6:=FTX[8]+FTX[6]+FTX[15];
0079 V7:=FTX[7]+FTX[11]+FTX[13];
0080 V8:=FTX[8]+FTX[10]+FTX[15];
0081 V9:=FTX[9]+FTX[12]+FTX[16];
0082 V10:=FTX[10]+FTX[14];
0083 V11:=FTX[11]+FTX[13];
0084 V12:=FTX[12]+FTX[14];
0085 V13:=FTX[13]+FTX[14];
0086 VCONT[1]:=V1*FTX[1]+V2*FTX[2]+V3*FTX[3]+V4*FTX[4]+V5*FTX[5]+V6*FTX[6
0086 ]+V7*FTX[7]+V8*FTX[8]+V9*FTX[9]+V10*FTX[10]+V11*FTX[11]+V12*FTX[12]+
0086 V13*FTX[13]+FTX[14]*FTX[14]+FTX[15]*FTX[15]+FTX[16]*FTX[16];
0087 VCONT[1]:=-VCONT[1];
0088 'IF' P=3 'THEN' 'BEGIN' FDIST:=VCONT[1];
0089 'GOTO' E12;
0090 'END';
0091 'IF' P=1 'THEN' 'BEGIN' VCONT[1]:=VCONT[1]-FCT;
0092 VCONT[1]:=K*VCONT[1];
0093 FDIST:=VCONT[1]/NOR[1];
0094 'END';
0095 'IF' P=2 'THEN' 'BEGIN' A[M, 1]:=(V1+FTX[1])*(2*XC[1]+1);
0096 A[M, 2]:=(V2+FTX[2])*(2*XC[2]+1);
0097 A[M, 3]:=(V3+FTX[3]+FTX[2])*(2*XC[3]+1);
0098 A[M, 4]:=(V4+FTX[4]+FTX[1])*(2*XC[4]+1);
0099 A[M, 5]:=(V5+FTX[5])*(2*XC[5]+1);
100 A[M, 6]:=(V6+FTX[6]+FTX[5])*(2*XC[6]+1);
101 A[M, 7]:=(V7+FTX[1]+FTX[2]+FTX[3]+FTX[4]+FTX[7])*(2*XC[7]+1);
102 A[M, 8]:=(V8+FTX[8]+FTX[6]+FTX[1])*(2*XC[8]+1);
103 A[M, 9]:=(V9+FTX[9]+FTX[3])*(2*XC[9]+1);
104 A[M, 10]:=(V10+FTX[10]+FTX[8]+FTX[5]+FTX[3]+FTX[2])*(2*XC[10]+1);

```



```

1105 A[M,11]:=(V11+FTX[11]+FTX[7]+FTX[4])*(2*XC[11]+1);
1106 A[M,12]:=(V12+FTX[12]+FTX[9]+FTX[5])*(2*XC[12]+1);
1107 A[M,13]:=(V13+FTX[13]+FTX[11]+FTX[7])*(2*XC[13]+1);
1108 A[M,14]:=(2*FTX[14]+FTX[13]+FTX[12]+FTX[10]+FTX[3])*(2*XC[14]+1);
1109 A[M,15]:=(2*FTX[15]+FTX[8]+FTX[6]+FTX[4])*(2*XC[15]+1);
1110 A[M,16]:=(2*FTX[16]+FTX[9]+FTX[5]+FTX[1])*(2*XC[16]+1);
1111 *END*;
1112 E12:'END'?OF?CONT?SEPT;
1113 *PROCEDURE'SIMPB(M,N,NP,NG,IMP);
1114 *INTEGER'M,N,NP,NG;
1115 *LABEL'IMP;
1116 *BEGIN''INTEGER'LI;
1117 ITER:=0;
1118 DEB:ITER:=ITER+1;
1119 *IF'ITER>250'THEN''GOTO'IMP;
1120 SP:=SM:=0;
1121 UM:=EPI;
1122 UP:=-EP2;
1123 *IF'PH'THEN''BEGIN''FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO''BEGIN''IF'BS[I]'THEN
1123 *X[I]:='IF'B[I]>NP'THEN'1'ELSE'0'ELSE''BEGIN'U:=0;
1124 *FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO''IF'B[J]>NP'THEN'U:=U+K[J,I];
1125 X[I]:=U'END''END''END''ELSE''FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO'X[J]:=-K[L0,
1125 J];
1126 *FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'NP'DO''IF'BM[I]'OR'BP[I]'THEN''BEGIN'U:=0;
1127 *IF'I<=N'THEN''BEGIN''FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO'U:=U+X[J]*A[J,I]'EN
1127 D''ELSE'U:=X[I-N+M];
1128 *IF'BM[I]'THEN''BEGIN''IF'U>UM'THEN''BEGIN'SM:=1;
1129 UM:=U;
1130 *END''END''ELSE''IF'U<UP'THEN''BEGIN'SP:=1;
1131 UP:=U'END''END'';
1132 *IF'SP=0'AND'SM=0'THEN''BEGIN''IF'PH'THEN''BEGIN''IF'NA=0'THEN''BEGI
1132 N'TEXT("FIN?PH\");
1133 PRINT(2);
1134 PH:='FALSE';
1135 *GOTO'FIN'END''ELSE''BEGIN'TEXT("VAR?ART\");
1136 PRINT(2);
1137 *GOTO'IMP'END''END''ELSE''GOTO'FIN'END'';
1138 BOOL:='FALSE';
1139 S:=SP;
1140 LI:=1;
1141 RM:=RP:=IP:=IM:=0;
1142 EI:=R:=IN:=0;
1143 *IF'S#0'THEN''BEGIN'IN:=3;
1144 U:='IF'S<=N'THEN'X[I][S]-X0[S]'ELSE'UPI;
1145 *FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO''BEGIN'T:=0;
1146 *IF'S<=N'THEN''BEGIN''FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO''IF'K[I,J]#0'AND'A(
1146 J,S)#0'THEN'T:=T+K[I,J]*A[J,S]'END''ELSE'T:=K[I,S-N+M];
1147 XXX[I,LI]:=T;
1148 *IF'BOOL'THEN'T:=-T;
1149 J:=B[I];
1150 *IF'T<-EP3'THEN''BEGIN''IF'J<=N'THEN'UI:=X0[J]+SOL[I]'ELSE''IF''NOT'
1150 C[J-N]'THEN'UI:=SOL[I]'ELSE''GOTO'E2;
1151 UI:=UI/T;
1152 *IF'U>UI'THEN''BEGIN'U:=UI;
1153 R:=1;
1154 IN:=1'END''END''ELSE''IF'T>EP4'THEN''BEGIN''IF'J<=N'THEN'UI:=X[I][J]+S
1154 OL[I]'ELSE''IF'C[J-N]'THEN'UI:=SOL[I]'ELSE''GOTO'E2;
1155 UI:=UI/T;

```

```

156 'IF'U>UI'THEN''BEGIN'U:=UI;
157 R:=I;
158 IN:=2;
159 'END''END';
160 E2:'END''END';
161 'IF'BOOL'THEN''BEGIN'RM:=R;
162 URM:=U;
163 IM:=IN'END''ELSE''BEGIN'RP:=R;
164 IP:=IN;
165 URP:=U;
166 'IF'SM#0'THEN''BEGIN'LI:=2;
167 S:=SM;
168 BOOL:= 'TRUE';
169 'GOTO'E1'END''END';
170 'IF'SP=0'OR'SM=0'THEN''BEGIN''IF'IN=3'THEN''GOTO'E3'ELSE''GOTO'E4'EN
170 D';
171 U:=-UP*URP;
172 UI:=UM*URM;
173 'IF'U>=UI'THEN''BEGIN'R:=RP;
174 S:=SP;
175 LI:=I;
176 IN:=IP'END';
177 'IF'IN#3'THEN''GOTO'E4;
178 E3:BOOL:=BP[S];
179 U:='IF'BOOL'THEN'XO[S]-XI[S]'ELSE'XI[S]-XO[S];
180 'FOR'I:=I'STEP'I'UNTIL'M'DO'SOL[I]:=SOL[I]+XXX[I,LI]*U;
181 BP[S]:='NOT'BOOL;
182 BM[S]:=BOOL;
183 'GOTO'DEB;
184 E4:CHBASE(LI,M,N,NP,NQ);
185 'GOTO'DEB;
186 FIN:NA:=0;
87 UM:=0;
88 BOOLI:= 'FALSE';
89 'FOR'I:=I'STEP'I'UNTIL'N'DO''BEGIN''IF'BP[I]'THEN''BEGIN'Z[I]:=XI[I]
89 ;
90 NA:=NA+I;
91 S:=I'END''ELSE''IF'BM[I]'THEN''BEGIN'Z[I]:=XO[I];
92 NA:=NA+I;
93 S:=I'END''END';
94 'FOR'I:=I'STEP'I'UNTIL'M'DO''BEGIN'R:=B[I];
95 UM:=UM+K[LO,I]*A[I,S];
96 'IF'R<=N'THEN''BEGIN'VAR[R]:=I;
97 Z[R]:=-SOL[I]'END''END';
98 'END'SIMPB;
99 'PROCEDURE'CHBASE(LI,M,N,NP,NQ);
00 'INTEGER'LI,M,N,NP,NQ;
01 'BEGIN'J:=B[R];
02 U:=0;
03 'IF'J<=N'THEN'U:='IF'IN=2'THEN'XI[J]'ELSE'XO[J];
04 UI:=-I/XXX[R,LI];
05 U:=UI*(SOL[R]+U);
06 'FOR'I:=I'STEP'I'UNTIL'M'DO''BEGIN'SOL[I]:=SOL[I]+XXX[I,LI]*U;
07 XXX[I,LI]:=XXX[I,LI]*UI'END';
08 XXX[R,LI]:=-UI;
09 UP:=0;
10 'IF'S<=N'THEN'UP:='IF'BP[S]'THEN'XI[S]'ELSE'XO[S];
11 SOL[R]:=-UP-U;

```

```

212 BM[S]:=BP[S]:='FALSE';
213 'IF'J<=NP'THEN'BEGIN'BP[J]:=IN=2;
214 BM[J]:=IN=1'END';
215 'IF'PH'THEN'BEGIN''IF'J>NP'THEN'NA:=NA-1'END';
216 B[R]:=S;
217 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO''IF''NOT'BS[I]'THEN'BEGIN''FOR'J:=1'STE
217 P'1'UNTIL'M'DO''IF'J#R'THEN'K[J,I]:=K[J,I]+XXX[J,LI]*K[R,I];
218 K[R,I]:=K[R,I]*XXX[R,LI]'END';
219 'IF'BS[R]'THEN''FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO'K[I,R]:=XXX[I,LI];
220 BS[R]:='FALSE';
221 'END'CHBASE;
222 'PROCEDURE'DICHO(N,CONT,YH,ZH,XM,DELTA);
223 'VALUE'N,DELTA;
224 'INTEGER'N;
225 'REAL'DELTA;
226 'ARRAY'YH,ZH,XM;
227 'PROCEDURE'CONT;
228 'BEGIN''REAL'A1,B,C,D,E,FA,FB,FC,FD,FE,VMIN,FAA,FBB;
229 'BOOLEAN'BI;
230 'ARRAY'XC,T[1:N];
231 AA:=0;
232 VMIN:=0;
233 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO''BEGIN'B:=ZH[I]-YH[I];
234 T[I]:=B;
235 VMIN:=VMIN+B*B;
236 'END';
237 VMIN:=SQRT(VMIN);
238 A1:=0;
239 B:=VMIN;
240 'IF'VMIN<EPI/10'THEN''BEGIN'C:=0;
241 'GOTO'FINI'END';
242 C:=1/VMIN;
243 RE1:=B;
244 RE2:=0;
245 D:=B;
246 FAA:=Z[NN];
247 FA:=FAA;
248 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'T[I]:=T[I]*C;
249 VMIN:=VMIN/DELTA;
250 CONT(PP,FA,A,YH,VCONT);
251 CONT(PP,FB,A,ZH,VCONT);
252 'IF'FA>=EPI'THEN'RE1:=0;
253 TE2:=TE2+1;
254 RET:'IF'B-A1<VMIN'THEN''BEGIN'C:=(A1+B)*.5;
255 'GOTO'FINI;
256 'END';
257 C:=(A1+B)*.5;
258 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'XC[I]:=YH[I]+C*T[I];
259 CONT(PP,FC,A,XC,VCONT);
260 'IF'FC<=-EPI'THEN'RE2:=C'ELSE''IF'C<RE1'THEN'RE1:=C;
261 'IF'FC<FB'THEN''BEGIN'A1:=C;
262 FA:=FC;
263 'GOTO'RET;
264 'END''ELSE''BEGIN''IF'FC<FA'THEN''BEGIN'B:=C;
265 FB:=FC;
266 'GOTO'RET;
267 'END';
268 'END';

```

```

269 RETI: 'IF' B-AI >= VMIN THEN 'BEGIN' D := (AI+C)*.5;
270 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N'DO' XC[I] := YH[I]+D*T[I];
271 CONT(PP,FD,A,XC,VCONT);
272 'IF' FD <= -EPI THEN RE2 := D ELSE 'IF' D < REI THEN REI := D;
273 'IF' FD >= FA THEN 'BEGIN' 'IF' FD >= FC THEN 'BEGIN' B := C;
274 FB := FC;
275 C := D;
276 FC := FD;
277 'END' ELSE 'BEGIN' E := (B+C)*.5;
278 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N'DO' XC[I] := YH[I]+E*T[I];
279 CONT(PP,FE,A,XC,VCONT);
280 'IF' FE > FC THEN 'BEGIN' AI := C;
281 FA := FC;
282 FC := FE;
283 C := E 'END' ELSE 'IF' FE < FB THEN 'GOTO' FINI ELSE 'BEGIN' AI := D;
284 B := E;
285 FA := FD;
286 FB := FE;
287 'END';
288 'END';
289 'GOTO' RETI;
290 'END';
291 'END';
292 FINI: Z[NN] := FC;
293 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N'DO' XM[I] := YH[I]+C*T[I];
294 EDIT("L18.12\,Z[NN]);
295 PRINT(2);
296 R := 0;
297 EII: E := (REI+RE2)*.5;
298 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N'DO' XC[I] := YH[I]+E*T[I];
299 CONT(I,FE,A,XC,VCONT);
300 'IF' FE <= -EPI THEN RE2 := E ELSE REI := E;
301 R := R+1;
302 'IF' R < 30 THEN 'GOTO' EII;
303 ;
304 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N'DO' X4[I] := YH[I]+E*T[I];
305 EIII: 'END' DICH0;
306 'PROCEDURE' DEP;
307 'BEGIN' MM2 := MM;
308 EIO: 'IF' NA = 1 THEN 'BEGIN' BOOL1 := BM[S];
309 'IF' BOOL3 THEN 'GOTO' EII;
310 U := UM;
311 UM := X1[S]-X0[S];
312 UP := Z[NN]/U;
313 'IF' BOOL1 THEN 'BEGIN' 'IF' U > 0 THEN 'BEGIN' 'IF' UM > UP THEN UM := UP 'END'
313 'END' ELSE 'IF' U < 0 THEN 'BEGIN' 'IF' UM > -UP THEN 'BEGIN' UM := -UP 'END' 'E
313 ND';
314 X4[S] := 'IF' BOOL1 THEN X0[S]+UM ELSE X1[S]-UM;
315 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N'DO' 'IF' I # S THEN 'BEGIN' NA := VAR[I];
316 U := 0;
317 'FOR' J := 1 'STEP' 1 'UNTIL' MM2'DO' U := U+K[NA,J]*A[J,S];
318 'IF' BOOL1 THEN X4[I] := Z[I]-U*UM ELSE X4[I] := Z[I]+U*UM;
319 'END';
320 BOOL1 := 'TRUE';
321 DICH0(N,CONT,X4,Z,XC,DIC);
322 BOOL1 := Z[NN] < 0;
323 'IF' NOT BOOL1 THEN 'BEGIN' 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N'DO' YD[I] := XC[I];
324 'GOTO' ETTT;

```

```

0325 'END';
0326 'END';
0327 E11:'BEGIN' 'ARRAY' AAA[M:MM, I:N];
0328 BOOL3:='FALSE';
0329 DICH0(N,CONT,Z,YD,XC,DIC);
0330 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' YD[I]:=XC[I];
0331 'IF' MM2=MM+13 'THEN' 'GOTO' ETTT;
0332 'FOR' I:=M 'STEP' 1 'UNTIL' MM 'DO' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' AAA[I, J]:=0
0332 ;
0333 CONT(1,AA,AAA,X4,VCONT);
0334 U:=UPU1;
0335 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' MNL1 'DO' 'BEGIN' UI:=ABS(VCONT[I]);
0336 'IF' U1<U 'THEN' 'BEGIN' U:=U1;
0337 S:=I 'END';
0338 'END';
0339 CONT(2,AA,AAA,X4,VCONT);
0340 U:=UPU1;
0341 S:=S+ML;
0342 U:=AA:=U1:=0;
0343 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' 'BEGIN' UI:=U1+A[M, I]*XC[I];
0344 U:=U+AAA[S, I]*XC[I];
0345 AA:=AA+AAA[S, I]*X4[I];
0346 'END';
0347 UI:=ABS(U1-A[M, NQ]);
0348 AA:='IF' S=M 'THEN' AA+VCONT[I]-FCTI 'ELSE' AA+VCONT[S-ML];
0349 U:=ABS(U-AA);
0350 UI:=U1/U;
0351 MM2:=MM2+1;
0352 A[MM2, NQ]:='IF' AA<0 'THEN' -AA*UI 'ELSE' AA*UI;
0353 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' 'BEGIN' 'IF' AA<0 'THEN' A[MM2, I]:=-AAA[S, I]
0353 *UI 'ELSE' A[MM2, I]:=AAA[S, I]*UI;
0354 'END';
0355 A[MM2, NN]:='IF' AA<0 'THEN' -1 'ELSE' 1;
0356 C[MM2-MI]:=AA<0;
0357 IN:=NN+L;
0358 'FOR' I:=M 'STEP' 1 'UNTIL' MM2 'DO' 'BEGIN' BS[I]:='TRUE';
0359 IN:=IN+1;
0360 B[I]:=IN;
0361 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' MM2 'DO' K[I, J]:=K[J, I]:=0;
0362 K[I, I]:=1;
0363 'END';
0364 SP:=IN;
0365 IJKL:=SP;
0366 'IF' ML#0 'THEN' 'BEGIN' 'FOR' I:=P+2 'STEP' 1 'UNTIL' SP 'DO' BP[I]:=BM[I]:='F
0366 ALSE';
0367 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ML 'DO' 'BEGIN' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ML 'DO' K[I
0367 , J]:=KK[I, J];
0368 SOL[I]:=KK[I, M];
0369 B[I]:=BB[I];
0370 BS[I]:=BBS[I];
0371 'END';
0372 R:=NN+L;
0373 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO' 'BEGIN' BM[I]:=BBM[I];
0374 BP[I]:=BBP[I];
0375 'END';
0376 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ML 'DO' 'BEGIN' R:=B[I];
0377 'IF' R<=N 'THEN' 'BEGIN' 'FOR' NA:=M 'STEP' 1 'UNTIL' MM2 'DO' 'FOR' J:=1 'STEP' 1
0377 'UNTIL' ML 'DO' K[NA, J]:=-A[NA, R]*K[I, J]+K[NA, J];

```

```

0378 'END';
0379 'END';
0380 'END' 'ELSE' 'BEGIN' 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' SP 'DO' 'BEGIN' BP[I]:='FALSE'
0380 ;
0381 BM[I]:=I<=N;
0382 'END';
0383 'END';
0384 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' MM2 'DO' 'BEGIN' U:=0;
0385 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' 'BEGIN' 'IF' BP[J] 'THEN' U:=U+A[I,J]*X1[J]
0385 ELSE 'IF' BM[J] 'THEN' U:=U+A[I,J]*XO[J] 'END';
0386 XX[I]:=-A[I,NQ]+U 'END';
0387 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' MM2 'DO' 'BEGIN' U:=0;
0388 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ML 'DO' U:=U+K[I,J]*XX[J];
0389 'IF' I>=M 'THEN' SOL[I]:=U+XX[I] 'ELSE' SOL[I]:=U;
0390 'END';
0391 U:=UPUI;
0392 'FOR' I:=M 'STEP' 1 'UNTIL' MM2 'DO' 'BEGIN' UI:='IF' C[I-M] 'THEN' SOL[I] 'ELS
0392 E' -SOL[I];
0393 'IF' U>UI 'THEN' 'BEGIN' U:=UI;
0394 R:=I;
0395 'END';
0396 'END';
0397 LO:=R;
0398 J:=B[R];
0399 BP[J]:=C[J-NN];
0400 BM[J]:='NOT' BP[J];
0401 BOOL:=BP[J];
0402 U:='IF' C[R-M] 'THEN' -SOL[R] 'ELSE' SOL[R];
0403 'FOR' I:=M 'STEP' 1 'UNTIL' MM2 'DO' 'BEGIN' UI:='IF' C[I-M] 'THEN' U 'ELSE' -U;
0404 SOL[I]:=SOL[I]+UI 'END';
0405 SOL[R]:=U;
0406 'FOR' I:=M 'STEP' 1 'UNTIL' MM2 'DO' K[I,R]:='IF' BOOL 'THEN' A[I,NN] 'ELSE' -A[
0406 I,NN];
0407 K[R,R]:='IF' BOOL 'THEN' -1 'ELSE' +1;
0408 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ML 'DO' 'BEGIN' 'IF' 'NOT' BS[I] 'THEN' 'BEGIN' 'FOR'
0408 J:=M 'STEP' 1 'UNTIL' MM2 'DO' 'IF' J#R 'THEN' K[J,I]:=K[J,I]+K[R,I]*K[J,R];
0409 K[R,I]:=K[R,I]*K[R,R];
0410 'END';
0411 'END';
0412 BS[R]:='FALSE';
0413 B[R]:=NN;
0414 SIMPB(MM2,NN,IJKL,NQ,IMP);
0415 'IF' NA>1 'THEN' 'GOTO' E11 'ELSE' 'IF' NA=1 'THEN' 'GOTO' E10;
0416 'END';
0417 E12:DICHO(N,CONT,Z,YD,XC,DIC);
0418 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' YD[I]:=XC[I];
0419 ETTT:'END'?OF?DEP;
0420 'PROCEDURE' EXTRAP(N,CONT,DICHO,X1,X2,XM,TETA);
0421 'VALUE' N,TETA;
0422 'INTEGER' N;
0423 'REAL' TETA;
0424 'ARRAY' X1,X2,XM;
0425 'PROCEDURE' CONT,DICHO;
0426 'BEGIN' 'ARRAY' XD,XF,T[1:N];
0427 'INTEGER' I,J;
0428 'REAL' U,VMIN,V1,V2,V3,F1,F2,F3;
0429 VMIN:=0;
0430 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' 'BEGIN' T[I]:=X2[I]-X1[I];

```

```

431 VM[N]:=VMIN+T[I]*T[I];
432 'END';
433 VM[N]:=SQRT(VMIN);
434 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' T[I]:=T[I]/VMIN;
435 V1:=V2:=0;
436 V3:=TETA;
437 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' X1[I]:=X2[I];
438 CONT(3,FDIST,A,X1,VCONT);
439 F2:=F1:=VCONT[I];
440 TEXT("EXTRAP\");
441 PRINT(2);
442 TOUNE:'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' XF[I]:=X1[I]+V3*T[I];
443 'IF' ABS(V3-V2)<TETA/100 'THEN' 'GOTO' SOR;
444 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ML 'DO' 'BEGIN' U:=0;
445 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' U:=U+A[I,J]*XF[J];
446 U:=U-A[I,NQ];
447 'IF' (C[I]'AND'U<-@-9)'OR'('NOT'C[I]'AND'U>@-9)'THEN' 'BEGIN' V3:=V2+(V
447 3-V2)/2;
448 'GOTO' TOUNE 'END';
449 'END';
450 CONT(3,FDIST,A,XF,VCONT);
451 F3:=VCONT[I];
452 'FOR' I:=2 'STEP' 1 'UNTIL' MNL 'DO' 'IF' VCONT[I]<-@-9 'THEN' 'BEGIN' V3:=(V
452 +V3)*.5;
453 'GOTO' TOUNE 'END';
454 'IF' F3>F2 'THEN' 'BEGIN' V1:=V2;
455 F1:=F2;
456 V2:=V3;
457 F2:=F3;
458 V3:=2*V3;
459 'GOTO' TOUNE 'END';
460 SOR:'IF' V1=0 'THEN' 'BEGIN' 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' XM[I]:=X2[I];
461 'GOTO' E11 'END';
462 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' XD[I]:=X1[I]+V1*T[I];
463 PP:=3;
464 DICO(N,CONT,XD,XF,XM,D[C/10]);
465 PP:=1;
466 E11:'END' EXTRAP;
467 'IF' ML#0 'THEN' 'BEGIN' IN:=P+M;
468 R:=0;
469 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ML 'DO' 'BEGIN' AA:=0;
470 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' 'BEGIN' A[I,J]:=DATA;
471 AA:=AA+A[I,J]*A[I,J];
472 'END';
473 A[I,Q]:=DATA;
474 AA:=SQRT(AA);
475 A[I,Q]:=A[I,Q]/AA;
476 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' A[I,J]:=A[I,J]/AA;
477 BS[I]:='TRUE';
478 S:=DATA;
479 'IF' S=0 'THEN' B[I]:=P+I 'ELSE' 'BEGIN' R:=R+1;
480 'IF' S=1 'THEN' 'BEGIN' IN:=IN+1;
481 B[I]:=IN;
482 C[R]:='TRUE';
483 'END' 'ELSE' 'BEGIN' B[I]:=N+R;
484 C[R]:='FALSE';
485 'END';
486 'END';

```

```

0487 'FOR'J:=I+1'STEP'1'UNTIL'ML'DO'K[I,J]:=K[J,I]:=0;
0488 K[I,I]:=1;
0489 'END';
0490 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'P'DO''BEGIN''IF'I<=N'THEN''BEGIN'XO[I]:=DATA;
0491 XI[I]:=DATA;
0492 BM[I]:='TRUE';
0493 BP[I]:='FALSE';
0494 'END''ELSE''BEGIN'BM[I]:='FALSE';
0495 BP[I]:=C[I-N];
0496 'END';
0497 'END';
0498 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'ML'DO''BEGIN'U:=0;
0499 'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'U:=U+A[I,J]*XO[J];
0500 SOL[I]:=-A[I,Q]+U;
0501 'END';
0502 'IF'M'+M3#0'THEN''BEGIN'NA:=ML-M2;
0503 PH:='TRUE';
0504 SIMPB(ML,N,P,Q,IMP);
0505 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'YD[I]:=Z[I];
0506 'END''ELSE''FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'YD[I]:=XO[I];
0507 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'ML'DO''BEGIN'KK[I,M]:=SOL[I];
0508 BBS[I]:=BS[I];
0509 R:=B[I];
0510 BB[I]:='IF'R>N'THEN'R+1'ELSE'R;
0511 'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'ML'DO'KK[I,J]:=K[I,J];
0512 'END';
0513 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'P'DO''BEGIN''IF'I<=N'THEN''BEGIN'BBP[I]:=BP[I]
0513 ];
0514 BBM[I]:=BM[I];
0515 'END''ELSE''BEGIN'BBP[I+1]:=BP[I];
0516 BBM[I+1]:=BM[I];
0517 'END';
0518 'END';
0519 'END''ELSE''BEGIN'PH:='FALSE';
0520 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO''BEGIN'XO[I]:=DATA;
0521 XI[I]:=DATA;
0522 YD[I]:=DATA;
0523 'END';
0524 'END';
0525 XI[NN]:=@5;
0526 XO[NN]:=-@5;
0527 ICEN:=0;
0528 'IF'ML#0'THEN''FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'ML'DO''BEGIN'A[I,NQ]:=A[I,NN];
0529 A[I,NN]:=0;
0530 'END';
0531 TET:=TIME;
0532 BBM[NN]:=BBP[NN]:='FALSE';
0533 RET:ICEN:=ICEN+1;
0534 ILIN:=0;
0535 ICENI:=ICENI+1;
0536 ILINI:=0;
0537 'IF'ICEN>ITMAX'THEN''BEGIN'TEXT("CET?MAX?\");
0538 PRINT(4);
0539 'GOTO'FNI;
0540 'END';
0541 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO''BEGIN'YP[I]:=X2[I]:=YD[I];
0542 'END';
0543 PRINT(I);

```



```

0544 TEXT("SOLUTION\");
0545 PRINT(2);
0546 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO''BEGIN'X2[I]:=YD[I];
0547 EDIT("F18.14\,X2[I])'END';
0548 PRINT(2);
0549 'IF'ICENI=1'THEN''BEGIN''FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'X3[I]:=X2[I]'END
0549 ''ELSE''IF'ICENI=2'THEN''BEGIN'ICENI:=0;
0550 EXTRAP(N,CONT,DICHO,X3,X2,XC,TEX);
0551 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'YP[I]:=YD[I]:=X2[I]:=XC[I];
0552 ICEN:=ICEN-1;
0553 'GOTO'RET'END';
0554 RETI:ILIN:=ILIN+1;
0555 BP[NN]:=BM[NN]:'FALSE';
0556 'FOR'I:=M'STEP'1'UNTIL'MM'DO''BEGIN''FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'MM'DO'K[I
0556 ,J]:=K[J,I]:=0;
0557 K[I,I]:=1;
0558 BS[I]:'TRUE';
0559 'END';
0560 CONT(2,FD1ST,A,YD,VCONT);
0561 'IF'ILIN=1'THEN''BEGIN'FCT3:=FCT1;
0562 FCT1:=VCONT[I];
0563 'IF'ABS(FCT3-FCT1)<PREC'THEN''GOTO'FNI;
0564 'END';
0565 FCT2:=VCONT[I];
0566 EDIT("F8.3\,48*(TIME-TET)/548);
0567 TEXT("FCT2??\");
0568 EDIT("L18.12\,FCT2);
0569 PRINT(2);
0570 IP:=L;
0571 IN:=NN+L;
0572 'FOR'I:=M'STEP'1'UNTIL'MM'DO''BEGIN'IP:=IP+1;
0573 IN:=IN+1;
0574 U:=AA:=0;
0575 'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO''BEGIN'UI:=A[I,J];
0576 U:=U+UI*YD[J];
0577 AA:=AA+UI*UI;
0578 'END';
0579 AA:=SQRT(AA);
0580 NOR[I-ML]:=AA;
0581 'IF'I=M'THEN'U:=U+VCONT[I]-FCT1'ELSE'U:=U+VCONT[I-ML];
0582 B[I]:=IN;
0583 C[IP]:=U<0;
0584 A[I,NQ]:=U;
0585 'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'NQ'DO''BEGIN''IF'U<0'THEN'A[I,J]:=-A[I,J]/AA'
0585 ELSE'A[I,J]:=A[I,J]/AA;
0586 'END';
0587 A[I,NN]:'IF'U<0'THEN'-1'ELSE'+1;
0588 'END';
0589 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'A[M,I]:=KKK*A[M,I];
0590 A[M,NQ]:=A[M,NQ]*KKK;
0591 'IF'ML#0'THEN''BEGIN''FOR'I:=P+2'STEP'1'UNTIL'NP'DO'BP[I]:=BM[I]:'F
0591 ALSE';
0592 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'ML'DO''BEGIN''FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'ML'DO'K[I
0592 ,J]:=KK[I,J];
0593 SOL[I]:=KK[I,M];
0594 B[I]:=BB[I];
0595 BS[I]:=BBS[I];
0596 'END';

```

```

0597 R:=NN+L;
0598 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'R'DO''BEGIN'BM[I]:=BBM[I];
0599 BP[I]:=BBP[I];
0600 'END';
0601 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'ML'DO''BEGIN'R:=B[I];
0602 'IF'R<=N'THEN''BEGIN''FOR'NA:=M'STEP'1'UNTIL'MM'DO''FOR'J:=1'STEP'1'
0602 UNTIL'ML'DO'K[NA,J]:=-A[NA,R]*K[I,J]+K[NA,J];
0603 'END';
0604 'END';
0605 'END''ELSE''BEGIN''FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'NP'DO''BEGIN'BP[I]:='FALSE'
0605 ;
0606 BM[I]:=I<=N;
0607 'END';
0608 'END';
0609 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'MM'DO''BEGIN'U:=0;
0610 'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO''BEGIN''IF'BP[J]'THEN'U:=U+A[I,J]*X[I,J]'
0610 ELSE''IF'BM[J]'THEN'U:=U+A[I,J]*XO[J]'END';
0611 XX[I]:=-A[I,NQ]+U'END';
0612 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'MM'DO''BEGIN'U:=0;
0613 'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'ML'DO'U:=U+K[I,J]*XX[J];
0614 'IF'I>=M'THEN'SOL[I]:=U+XX[I]'ELSE'SOL[I]:=U;
0615 'END';
0616 U:=UPU;
0617 'FOR'I:=M'STEP'1'UNTIL'MM'DO''BEGIN'UI:='IF'C[I-M]'THEN'SOL[I]'ELSE
0617 '-SOL[I];
0618 'IF'U>UI'THEN''BEGIN'U:=UI;
0619 R:=I;
0620 'END';
0621 'END';
0622 LO:=R;
0623 J:=B[R];
0624 BP[J]:=C[J-NN];
0625 BM[J]:='NOT'BP[J];
0626 BOOL:=BP[J];
0627 U:='IF'C[R-M]'THEN'-SOL[R]'ELSE'SOL[R];
0628 'FOR'I:=M'STEP'1'UNTIL'MM'DO''BEGIN'UI:='IF'C[I-M]'THEN'U'ELSE'-U;
0629 SOL[I]:=SOL[I]+UI'END';
0630 SOL[R]:=U;
0631 'FOR'I:=M'STEP'1'UNTIL'MM'DO'K[I,R]:='IF'BOOL'THEN'A[I,NN]'ELSE'-A[I
0631 ,NN];
0632 K[R,R]:='IF'BOOL'THEN'-1'ELSE'+1;
0633 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'ML'DO''BEGIN''IF''NOT'BS[I]'THEN''BEGIN''FOR'
0633 J:=M'STEP'1'UNTIL'MM'DO''IF'J#R'THEN'K[J,I]:=K[J,I]+K[R,I]*K[J,R];
0634 K[R,I]:=K[R,I]*K[R,R];
0635 'END';
0636 'END';
0637 BS[R]:='FALSE';
0638 B[R]:=NN;
0639 NT:=TIME;
0640 SIMPB(MM,NN,NP,NQ,IMP);
0641 NT:=TIME-NT;
0642 TE1:=TE1+NT;
0643 NT:=TIME;
0644 BOOL3:='TRUE';
0645 DEP;
0646 NT:=TIME-NT;
0647 TE3:=TE3+NT;
0648 'IF'ILIN<ILINMA'THEN''GOTO'RET1'ELSE''GOTO'RET;

```

```

0649 FNI:TEXT("VALEUR?FONCT?ECON\");
0650 TET:=TIME-TET;
0651 PRINT(2);
0652 EDIT("F12.6\,FCT1);
0653 PRINT(2);
0654 TEXT("CENTRE\");
0655 PRINT(2);
0656 'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO''BEGIN'EDIT("F12.6\,X2[I]);
0657 PRINT(2)'END';
0658 TEXT("VCONT\");
0659 PRINT(2);
0660 'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'MNLI'DO'EDIT("L18.12\,VCONT[J]);
0661 PRINT(1);
0662 TEXT("TSIMP\");
0663 PRINT(2);
0664 EDIT("F8.4\,48*TE1/514);
0665 PRINT(2);
0666 TEXT("TDICH\");
0667 PRINT(2);
0668 EDIT("F8.4\,48*TE2/514);
0669 PRINT(2);
0670 TEXT("TCENT\");
0671 PRINT(2);
0672 EDIT("F8.4\,48*TE3/514);
0673 PRINT(2);
0674 TEXT("TEXTR\");
0675 PRINT(2);
0676 EDIT("F8.4\,48*TE4/514);
0677 PRINT(2);
0678 TEXT("TSECD0\");
0679 PRINT(2);
0680 EDIT("F10.4\,48*TE5/514);
0681 PRINT(2);
0682 TEXT("NBSIM\");
0683 EDIT("F5.0\,TE11);
0684 PRINT(2);
0685 TEXT("NBDIC\");
0686 EDIT("F5.0\,TE21);
0687 PRINT(2);
0688 TEXT("NBCEN\");
0689 EDIT("F5.0\,TE31);
0690 PRINT(2);
0691 TEXT("NBEXT\");
0692 EDIT("F5.0\,TE41);
0693 PRINT(2);
0694 TEXT("TTOTA\");
0695 PRINT(2);
0696 EDIT("F8.4\,48*TET/514);
0697 PRINT(2);
0698 IMP:'END';
0699 'END'

```

IN DE COMPILATION

B I B L I O G R A P H I E e t R E F E R E N C E S

- [1] ABADIE (J) *Four optimization problems with quadratic constraints and objective function.*
E.D.F. Service Informatique et Mathématiques Appliquées : note 314/o.
- [2] BAUMOL (W.J) et BUSHNELL (R.C)
 Error produced by linearization in mathematical programming.
Econometrica, 35 (3), 1967, pages 447-471.
- [3] BEUNEU (J) Thèse de Doctorat de 3^o cycle : Université des Sciences et
Techniques de Lille (France). Laboratoire de Calcul.
(en préparation).
- [4] BUI TRONG LIEU et HUARD (P)
 La méthode des centres dans un espace topologique.
Numerische Mathematik, 8, 1966, pages 56-67.
- [5] CEA (J) *Optimisation : Théorie et Algorithmes.*
Collection méthodes mathématiques de l'informatique. Dunod 1971.
- [6] CHENEY (E.W) et GOLDSTEIN (A.A)
 Newton's Method for convex programming and Tchebycheff Approximation.
Numerische Mathematik, 1, 1959, pages 253-268.
- [7] COLVILLE (A.R) *A comparative study on non-linear programming codes.*
IBN New York Scientific Center ; Technical Report n° 320-2949
juin 1968.
- [8] DANTZIG (G.B) *Linear programming and extensions.*
Princeton University Press - Princeton 1963.

- [9] DEM'YANOV (V.F) et RIBINOV (A.M)
The minimization of a smooth convex functional on a convex set.
Journal SIAM Control, 5 (2), 1967, pages 280-294.
- [10] DENEL (J) *Méthode des centres linéarisée (variante).*
Publication n° 31 du Laboratoire de Calcul de l'Université des
Sciences et Techniques de Lille (France) juin 1971.
- [11] DENEL (J) et HUARD (P)
Programmation non linéaire et linéarisation.
Compte rendu du congrès Otan "Applications of optimization methods
for large scale resource-allocation problems". Elsinore Denmark -
juillet 1971.
- [12] DESCLOUX (J) *Note on convex programming.*
J. Soc. Indust. Appl. Math. II(3), 1963, pages 737-747.
- [13] FRANCK (M) et WOLFE (P)
An algorithm for quadratic programming.
Naval Research Logist Quaterly, 3, 1956, pages 95-120.
- [14] GRIFFITH (R.E) et STEWART (R.A)
*A non linear programming technique for the optimization of
continuous processing systems.*
Management Science, 7 (4), 1961, pages 379-392.
- [15] HARTLEY (H.O) et HOCKING (R.R)
Convex programming by tangential approximation.
Managment Sc, 9 (4), 1963, pages 600-612.
- [16] HELLERMAN et RARICK
Reinversion with the preassigned pivot procedure.
Congrès de Programmation Mathématique - La Haye Septembre 1971.
- [17] HUARD (P) *Programmation mathématique convexe.*
Bulletin de la direction des Etudes et Recherches. EDF Série C
1, 1968, pages 61-74.

- [18] HUARD (P) *Méthode des centres et méthode des centres par majorations.*
Bulletin de la direction des Etudes et Recherches EDF Série C
2, 1970, pages 33-52.
- [19] - *Tour d'horizon en programmation mathématique non linéaire.*
RIRO, R1, Mars-Avril 1971, pages 3-48.
- [20] - *Mathématiques des programmes économiques - Variables bornées.*
Monographie de Recherche Opérationnelle AFIRO n°1, 1964.
- [21] KAPLAN (A.A) *Determination of the extremum of a linear function on a convex set.*
Dokl. Akad. Nauk. SSSR, tome 178, n°6, 1968, pages 269-271.
- [22] KELLEY (J.E) *The cutting-plane method for solving convex programs.*
J. Soc. Indust. Appl. Math., 8 (4), 1960, pages 703-712.
- [23] KUNZI (H.P) *The duoplex method in non linear programming.*
J. Siam Control, 4 (1), 1966, pages 130-138.
- [24] LEMKE (C.E) *The dual method of solving the linear programming problem.*
Nav. Res. Log. Quarterly 1 (36), 1954, pages 36-47.
- [25] LEVITIN (E.S) et POLIAK (B.T)
Constrained minimization methods.
USSR Comp. Math. and Math Phy. Octobre 1968, pages 1-39.
- [26] LOOSTMA (F.A) *Extrapolation in logarithmic programming.*
Philips Res. Reports 23, 1968, pages 108-116.
- [27] MANGASARIAN (O.L)
Non linear programming.
Mac-Graw-Hill Series in Syst. Science. Mc Graw Hill Book Compagny,
1969.
- [28] MEYER (R) *The validity of a family of optimization methods.*
J. Siam Control, 8 (1), Février 1970, pages 41-54.
- [29] MIFFLIN (R.B) *Convergence Rates for a method of centers algorithm.*
Operations Research Center, University of California, Berkeley
Report n° ORC 71-10, mai 1971.

- [30] PIRONNEAU (O) *Rate of convergence of methods of feasible directions and applications to optimal control problems.*
Octobre 1971. Ph.D. dissertation, University of California - Berkeley (USA).
- [31] PIRONNEAU (O) et POLAK (E)
On the rate of convergence of certain methods of centers.
Dep. of Elect. Engineering and Computer Sciences and the Elect. research Laboratory. University of California, Berkeley, mars 1971.
- [32] TOPKIS (D.M) *Cutting-plane methods without nested constraint sets.*
Ops. Research, 18 (3), 1970, pages 404-413.
- [33] TOPKIS (D.M) et VEINOTT (A.F)
On the convergence of some feasible direction algorithms for non linear programming.
J. Siam Control, 5 (2), 1967, pages 268-279.
- [34] TREMOLIERES (R)
La méthode des centres à troncature variable.
Thèse de Doctorat de 3^o cycle, mathématiques appliquées, Faculté des Sciences de Paris, 11 juin 1968.
- [35] WAGNER (H.M) *The dual simplex algorithm for bounded variables.*
Operations Research, 1958, pages 257-261.
- [36] ZANGWILL (W.I) *Non linear programming : a unified approach.*
Prentice Hall intern. series in managment. Printice Hall Inc, 1969.
- [37] ZOUTENDIJK (G) *Methods of feasible directions.*
Elevier Publ. Comp. Amsterdam 1960.

