N° d'ordre 262

THÈSES

présentées

A L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHEMATIQUES

par

COLETTE ANDRIEU (épouse BUI)

Première Thèse

QUELQUES PROBLEMES DE CONVERGENCE RELATIFS AUX PROCESSUS STOCHASTIQUES

Deuxième Thèse

Propositions données par l'Université :
(Théorème de Peetre sur les opérateurs différentiels)

Soutenues le 6 Janvier 1973 devant la Commission d'examen

M. J. KAMPE DE FERIET, Président d'Honneur

M. J. VAILLANT, Président

Melle S. MARQUET, Examinateur

M. R. THEODORESCU) (Rapporteurs

M. M. IOSIFESCU)

INTRODUCTION

La présente thèse rassemble les sept notes et articles [1], [2], [3] , [4] , [5] , [6] , [7] parus ou en cours de parution, que j'ai écrits individuellement ou en collaboration.

Ces publications se groupent en deux sortes:

Il y a celles portant sur le comportement asymptotique de systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes,à temps discret. Avec cette notion,qui englobe comme cas particuliers les systèmes aléatoires à liaisons complètes (donc les processus à liaisons complètes,donc des processus de Markov),nous étudions les conditions nécessaires et suffisantes d'ergodicité faible, celles d'ergodicité forte,et les liens qui relient ces deux modes d'ergodicité.

Mais il y a d'abord et surtout,les publications d'aspect statistique qui portent sur la convergence presque-sûre d'estimateurs relatifs aux processus de Markov à temps continu et du type de sauts. Il s'agit d'estimateurs fournis par les méthodes du quasi-maximum de vraisemblance,du ψ^2 quasi-minimum et du χ^2 quasi-minimum que nous définissons dans le cas de ces processus de Markov. Mais on ne peut parler de convergence de ces estimateurs sans être assuré qu'ils existent.C'est pourquoi, nous avons aussi étudié le problème de leur existence qui a nécessité de notre part, l'utilisation de théorèmes de sélection pour des fonctions mesurables (car les méthodes d'estimation proposées conduisent en fait à des fonctions multivoques dont les estimateurs sont des sélecteurs).

Comme indiqué plus haut,nos résultats ayant fait l'objet de publications,je me contente de les reprendre ici dans un exposé global et succint.

Je voudrais exprimer ici ma vive reconnaissance à:

Monsieur le Professeur J.Kampé de Fériet,de l'Institut, et
Monsieur le Professeur J.Vaillant,
d'avoir bien voulu accepter (respectivement) la Présidence d'Honneur et la Présidence du Jury,

Mademoiselle le Professeur S.Marquet,
pour l'intérêt qu'elle porte à ce travail et pour le soutien qu'elle m'a toujours apporté,

Monsieur le Professeur R.Theodorescu,de l'Université Laval du Canada,
pour l'aide qu'il m'a accordée. A lui,ainsi qu'à
Monsieur le Professeur M.Iosifescu,du Centre de Statistique Mathématique de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie, je voudrais réitérer mes remerciements les plus vifs pour l'opinion favorable qu'ils ont exprimée sur ma thèse,et pour leur acceptation d'en être les Rapporteurs.

Je tiens également à remercier Monsieur C.Langrand pour sa collaboration sympathique et fructueuse, et Monsieur R.Flavigny pour l'étude faite en commun sur les systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes.

PREMIERE PARTIE

Comme déjà indiqué dans l'introduction, nous présentons dans cette première partie, les résultats que nous avons obtenus concernant l'existence et la convergence des estimateurs fournis par les méthodes du quasi-maximum de vraisemblance, du ψ^2-quasi-minimum et du χ^2-quasi-minimum, pour des processus de Markov.

Mais nous voudrions tout d'abord situer le cadre de notre étude:

On trouve: dans [8] et [11] des études sur la méthode du maximum de vraisemblance, puis toujours dans [11], une introduction aux méthodes du ψ^2-minimum et du χ^2-minimum concernant des processus de Markov à temps discret, puis à temps continu, mais sous l'hypothèse de dérivabilité par rapport à θ (avec un espace de paramètre $\Theta \subset \mathbb{R}^n$) ; dans [20] une introduction à la méthode du quasi-maximum de vraisemblance pour des processus de Markov à temps discret, sous la non-dérivabilité par rapport au paramètre (la convergence presque-sûre des estimateurs y est démontrée, mais pas leur existence); dans [13], des résulats sur l'existence et sur la convergence presque-sûre des estimateurs fournis par les méthodes du ψ^2-quasi-minimum, du χ^2-quasi-minimum et du quasi-maximum de vraisemblance, sous la non-dérivabilité par rapport au paramètre, mais concernant des processus de Markov à temps discret.

Ici, nous traitons les trois méthodes d'estimation (quasi-maximum de vraisemblance, ψ^2-quasi-minimum et χ^2-quasi-minimum) pour des processus de Markov stationnaires <u>à temps continu</u>

et du type de sauts. L'espace de paramètre est, suivant les cas examinés, métrique séparable, lusinien ou métrique compact. Avec ces espaces fonctionnels, cette étude pourrait donc entrer dans le cadre de la statistique non paramétrique, tout comme pouvant faire partie de la statistique paramétrique.

Chapitre I

SELECTION ET SOLUTIONS MESURABLES D'INEQUATIONS FONCTIONNELLES

Ce chapitre est une préparation au chapitre suivant, pour la résolution du problème de l'existence d'estimateurs fournis par les méthodes d'estimation.

I.1.- Rappelons tout d'abord quelques notions. Soient Ω et Θ deux ensembles non vides. Une application multivoque (ou "correspondance") F de Ω dans Θ est une application F de Ω dans $\mathcal{P}(\Theta)\setminus\{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\Theta)\setminus\{\emptyset\}$ désignant l'ensemble des parties non vides de Θ. Pour $B \in \mathcal{P}(\Theta)\setminus\{\emptyset\}$, nous noterons l'ensemble $\{\omega \in \Omega : F(\omega) \cap B \neq \emptyset\}$ par $F^{-1}(B)$. Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Theta, \mathcal{C})$ deux espaces mesurables, l'application multivoque F de Ω dans Θ est dite $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-mesurable si quel que soit $B \in \mathcal{C}$, $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Lorsque Θ est un espace métrique et $\mathcal{C}$ sa tribu borélienne, alors suivant la terminologie employée par Himmelberg et Van Vleck dans [15], l'application multivoque F est dite "point-fermé" (resp. "point-complet") si pour tout $\omega \in \Omega$, l'ensemble $F(\omega)$ est fermé (resp. complet) dans Θ.

I.2.- Nous allons maintenant citer quelques théorèmes de sélection (appelés ainsi car l'application multivoque $F: \omega \longrightarrow F(\omega)$ étant donnée, on peut "sélectionner" une application $f: \omega \longrightarrow f(\omega) \in F(\omega)$ où f vérifie certaines propriétés auxquelles on s'intéresse). Plus précisément, soit F une application multivoque de Ω dans Θ. On appelle "sélecteur" pour F, une application f de Ω dans Θ telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $f(\omega) \in F(\omega)$. C'est à la propriété de mesurabilité de f que nous nous intéressons ici,et les théorèmes de sélection pour des fonctions mesurables auxquels nous nous référons sont ceux de Kuratowski-Ryll Nardzewski [17] et de Himmelberg-Van Vleck [15].

Le théorème de Kuratowski-Ryll Nardzewski,aux notations près,s'énonce comme suit:

Soit Ω un ensemble non vide,soit $\mathcal{C}$ un clan unitaire de parties Ω .Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de parties de Ω engendrée par $\mathcal{C}$,et stable pour la réunion dénombrable (c'est à dire $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\sigma$).Soit Θ un espace métrique,séparable,complet (c'est à dire polonais). Soit F une application multivoque "point-fermé" de Ω dans Θ telle que, quel que soit le sous-ensemble ouvert G de Θ , $F^{-1}(G) \in \mathcal{S}$. Alors,il existe une application f de Ω dans Θ ,sélecteur pour F ,telle que,quel que soit le sous- ensemble ouvert G de Θ , $f^{-1}(G) \in \mathcal{S}$.

On en déduit que:

Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable,si Θ est un espace métrique séparable complet et $\mathcal{T}$ sa tribu borélienne,et si l'application multivoque F de Ω dans Θ est "point-fermé" et $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-mesurable,alors il existe au moins un sélecteur f pour F, $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-mesurable.

I.3.- Généralisant la version de Kuratowski-Ryll Nardzewski, [17] Himmelberg et Van Vleck,dans [15] ,énoncent deux autres théorèmes de sélection pour des fonctions mesurables.

Le premier théorème de Himmelberg-Van Vleck concerne le cas où l'espace Θ est un espace lusinien (un espace lusinien est,par définition,un espace métrisable,image d'un espace polonais par une application continue bijective);aux notations près, il s'énonce comme suit:

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, soit Θ un espace lusinien muni de sa tribu borélienne $\mathcal{T}$, et soit F une application multivoque "point-fermé" de Ω dans Θ, $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-mesurable. Alors, il existe un sélecteur f pour F, $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-mesurable.

Le deuxième théorème de Himmelberg-Van Vleck concerne le cas où l'espace Θ est un espace métrique séparable et s'énonce comme suit:

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, soit Θ un espace métrique séparable, et soit F une ~~correspondance~~ application multivoque "point-complet" de Ω dans Θ telle que, quel que soit le sous-ensemble fermé K de Θ, $F^{-1}(K) \in \mathcal{A}$. Alors, il existe un sélecteur f pour F, qui est tel que, quel que soit le sous-ensemble fermé K de Θ, $f^{-1}(K) \in \mathcal{A}$.

Il nous est alors aisé d'en déduire le corollaire suivant:

Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, si Θ est un espace métrique séparable et $\mathcal{T}$ sa tribu borélienne, et si l'application multivoque F de Ω dans Θ est "point-complet" et $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-mesurable, alors il existe un sélecteur f pour F, $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-mesurable.

I.4.- L'utilisation des théorèmes de Himmelberg-Van Vleck se présentera sous la forme de résolution d'inéquations fonctionnelles: les méthodes d'estimation proposées au Chapitre II conduisent à des inégalités auxquelles les estimateurs, considérées comme fonctions mesurables de la variable ω, doivent satisfaire. Les énoncés dont nous aurons besoin sont les suivants:

I.5.PROPOSITION.- <u>Soit</u> $(\Omega, \mathcal{A}, Pr)$ <u>un espace probabilisé</u>. <u>Soit</u> $(\Theta, \mathcal{T})$ <u>un espace mesurable composé d'un espace lusinien</u> (<u>resp. espace métrique séparable</u>) Θ <u>et de sa tribu borélienne</u> $\mathcal{T}$. <u>Soit</u> φ

une fonction numérique définie sur $\Omega \times \Theta$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, l'ensemble $\{\theta \in \Theta : \varphi(\omega,\theta) \geqslant 0\}$, que nous notons $F(\omega)$, ne soit pas vide. Si l'application multivoque F de Ω dans Θ qui, à ω fait correspondre $F(\omega)$, est $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-mesurable et "point-fermé" (resp. "point-complet"), alors il existe une application θ^* de Ω dans Θ, $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-mesurable, et telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $\varphi(\omega, \theta^*(\omega)) \geqslant 0$.

Cet énoncé, qui exprime ainsi l'existence d'au moins une solution mesurable de l'inéquation fonctionnelle $\varphi(.,\theta^*(.)) \geqslant 0$, n'est autre qu'une adaptation du premier théorème de Himmelberg-Van Vleck (resp. du corollaire du deuxième théorème de Himmelberg-VanVleck).

La proposition I.5 permet d'énoncer un autre résultat intéressant, mais qui suppose que l'espace $(\Omega,\mathcal{A},Pr)$ est complet (complet dans le sens "tout ensemble Pr-négligeable est $\mathcal{A}$-mesurable").

I.6.PROPOSITION.- Soit $(\Omega,\mathcal{A},Pr)$ un espace probabilisé complet. Soit $(\Theta,\mathcal{T})$ un espace mesurable composé d'un espace métrique compact Θ et de sa tribu borélienne $\mathcal{T}$. Soit h une fonction numérique sur $\Omega \times \Theta$, $\mathcal{A}\otimes\mathcal{T}$-mesurable, telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $h(\omega,.)$ soit semi-continue supérieurement (resp. semi-continue inférieurement) sur Θ. Il existe une application θ^* de Ω dans Θ, $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-mesurable, telle que pour tout $\omega \in \Omega$,

$$h(\omega, \theta^*(\omega)) \geqslant \sup_{s \in \Theta} h(\omega,s) - \varepsilon$$

où ε est un nombre $\geqslant 0$

$$(\text{ resp. } h(\omega, \theta^*(\omega)) \leqslant c \inf_{s \in \Theta} h(\omega,s)$$

où c est un nombre $\geqslant 1$).

La preuve de cette proposition repose sur un certain nombre de raisonnements, dont les suivants:

. On écrit

$$\varphi(\omega,\theta) = h(\omega,\theta) - \sup_{s\in\Theta} h(\omega,s) + \varepsilon \geqslant 0$$

$$(\text{resp. } \varphi(\omega,\theta) = -h(\omega,\theta) + c \inf_{s\in\Theta} h(\omega,s) \geqslant 0)$$

pour avoir une application multivoque

$$F : \omega \longrightarrow F(\omega) = \{\theta\in\Theta : \varphi(\omega,\theta) \geqslant 0\}$$

de Ω dans Θ. En effet, la semi-continuité supérieure (resp. semi-continuité inférieure) de $h(\omega,.)$ sur le compact Θ assure que $F(\omega)$ n'est pas vide.

. Cette hypothèse de semi-continuité supérieure (resp. semi-continuité inférieure) de $h(\omega,.)$, pour tout $\omega\in\Omega$, permet d'autre part d'affirmer que l'application multivoque F est "point-fermé".

. On montre, en outre, que l'application multivoque F est $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-mesurable, en s'appuyant sur le fait que l'ensemble

$$\{(\omega,\theta)\in\Omega\times\Theta : \theta\in F(\omega)\}$$

appartient à la tribu $\mathcal{A}\otimes\mathcal{T}$. Cette dernière propriété s'appuie elle-même sur une version d'un théorème sur la projection de tribu produit : Si $(\Omega,\mathcal{A},Pr)$ est un espace probabilisé complet, si l'espace mesurable $(\Theta,\mathcal{T})$ est composé d'un espace métrique compact Θ et de sa tribu borélienne $\mathcal{T}$, alors la projection sur Ω d'un ensemble appartenant à la tribu produit $\mathcal{A}\otimes\mathcal{T}$ est un ensemble appartenant à la tribu $\mathcal{A}$.

. On peut alors appliquer à F le corollaire du théorème de Kuratowski-Ryll Nardzewski (ou le premier théorème de Himmelberg-Van Vleck) car l'espace Θ, métrique compact, est polonais (donc lusinien).

Chapitre II

EXISTENCE DES ESTIMATEURS DU QUASI-MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE, DU ψ^2 QUASI-MINIMUM ET DU χ^2 QUASI-MINIMUM POUR DES PROCESSUS DE MARKOV À TEMPS CONTINU .

Nous nous proposons d'exposer,dans ce chapitre, successivement les méthodes du quasi-maximum de vraisemblance, du ψ^2 quasi-minimum et du χ^2 quasi-minimum pour des processus de Markov à temps continu et du type de sauts , et de nous servir du chapitre I pour montrer l'existence d'estimateurs fournis par ces méthodes.

A. PRELIMINAIRES.

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble borélien de $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}$ désignant l'ensemble des nombres réels), et soit $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathcal{X}$. Soit un processus de Markov homogène, à temps continu ($t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+$ désignant l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls),dont l'espace des états est $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ et dont la famille des probabilités de transition est $(P_t)_{t\in \mathbb{R}_+}$.

Supposons que ces probabilités de transition P_t , $t \in \mathbb{R}_+$, dépendent d'un paramètre θ , $\theta \in \Theta$, dont la "vraie valeur" est $\theta_0 \in \Theta$. Θ est ici un ensemble dont nous préciserons la nature plus loin,et que nous munirons d'une tribu $\mathcal{T}$ .Nous noterons donc $P_t(.,.;\theta)$ lorsque la "valeur" du paramètre est θ.

Nous supposons que le processus vérifie la condition suivante:

(C) Quel que soit $\theta \in \Theta$, $\lim_{t \to 0} P_t(x,\{x\};\theta) = 1$,uniformément en x .

Nous savons que,sous (C),quel que soit $\theta \in \Theta$,

a/ $\lim_{t\to 0} \dfrac{1 - P_t(x,\{x\};\theta)}{t} = Q(x;\theta) \leqslant M_\theta < \infty$;

cette limite est atteinte uniformément en x .

b/ Si $x \notin B$, $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} P_t(x,B;\theta) = Q(x,B;\theta) \leqslant Q(x;\theta)$;

cette limite est atteinte uniformément en $B \subset \mathcal{X} \setminus \{x\}$ .De plus, quel que soit $x \in \mathcal{X}$, $Q(x,.;\theta)$ est une mesure positive bornée sur $\mathcal{B} \cap (\mathcal{X}\setminus\{x\})$, $\mathcal{B} \cap (\mathcal{X}\setminus\{x\})$ désignant la tribu trace de la tribu borélienne $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{X}\setminus\{x\}$.

c/ $Q(x,\mathcal{X}\setminus\{x\};\theta) = Q(x;\theta)$.

Pour des raisons de commodité d'écriture,nous posons:

$\forall \theta \in \Theta, \forall x \in \mathcal{X}$, $Q(x,\{x\};\theta) = 0$,

ce qui nous permet par la suite d'écrire (d'après c/) que

$\forall \theta \in \Theta, \forall x \in \mathcal{X}$, $Q(x,\mathcal{X};\theta) = Q(x;\theta)$,

et de dire que,quel que soit $\theta \in \Theta$,et quel que soit $x \in \mathcal{X}$, $Q(x,.;\theta)$ est une mesure positive bornée définie sur $\mathcal{B}$.

Soit $(X_t)_{t\in \mathbb{R}_+}$ une fonction aléatoire Markovienne,séparable, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ et attachée au processus de Markov précité.On sait que sous l'hypothèse (C),presque toutes les trajectoires sont des fonctions de sauts.D'après [8] ,on supposera que:chaque trajectoire est une fonction de sauts continue à droite (ce qui n'est pas une restriction); quel que soit $\theta \in \Theta$,

$\inf_{x \in \mathcal{X}} Q(x;\theta) > 0$; quel que soit $\theta \in \Theta$ et quel que soit $t \in \mathbb{R}_+$,

$P_t(x,\{x\};\theta)$ est $\mathcal{B}$-mesurable .

Puisque $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ a ses trajectoires qui sont des fonctions de sauts continues à droite, si on désigne par $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ les états successifs $(z_k \neq z_{k+1})$ pris par la trajectoire $(X_t(\omega))_{t \in \mathbb{R}_+}$ et par $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ les durées respectives de la trajectoire dans ces états, on a

$X_t(\omega) = z_1$, si $0 \leqslant t < r_1$,

$X_t(\omega) = z_n$, si $r_1 + \ldots + r_{n-1} \leqslant t < r_1 + \ldots + r_{n-1} + r_n$, $n > 1$.

Ces r_n , $n \in \mathbb{N}^*$, sont tous finis, car nous avons supposé que quel que soit $\theta \in \Theta$, $\inf_{x \in \mathcal{X}} Q(x;\theta) > 0$, (il n'y a donc pas d'état absorbant).

On peut dire qu'il existe 2 suites de variables aléatoires $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telles que

$X_t(\omega) = Z_1(\omega)$, pour $0 \leqslant t < \rho_1(\omega)$,

$X_t(\omega) = Z_n(\omega)$, pour $\rho_1(\omega) + \ldots + \rho_{n-1}(\omega) \leqslant t < \rho_1(\omega) + \ldots + \rho_{n-1}(\omega) + \rho_n(\omega)$, $n > 1$,

$\rho_n(\omega)$ représente ici la durée de séjour de $X_t(\omega)$ dans l'état $Z_n(\omega)$ après le (n-1)-ème saut.

Désignons par ν_t le nombre (aléatoire) de sauts pendant l'intervalle de temps $[0,t]$, nous avons

$$X_t(\omega) = Z_{\nu_t(\omega)+1}(\omega) .$$

$(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une fonction aléatoire de Markov, à temps discret, dont l'espace des états est $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ et dont la probabilité de transition est $\dfrac{Q(*,\cdot;\theta)}{Q(*;\theta)}$ lorsque la "valeur" du paramètre est θ.

On démontre d'ailleurs que : pour $\alpha \geqslant 0$,

$$\Pr\left[\rho_{n+1} > \alpha \,\middle|\, \rho_1, \ldots, \rho_n, Z_1, \ldots, Z_{n+1}; \theta\right] = e^{-Q(Z_{n+1};\theta)\alpha} \quad \text{p.s.},$$

et pour $A \in \mathcal{B}$,

$$\Pr\left[Z_{n+1}\in A \,\middle|\, \rho_1,\dots,\rho_n,Z_1,\dots,Z_n;\theta\right] = \Pr\left[Z_{n+1}\in A \,\middle|\, Z_n;\theta\right]$$
$$= \frac{Q(Z_n,A;\theta)}{Q(Z_n;\theta)} \quad , \text{ p.s.}$$

Ces deux égalités montrent que la fonction aléatoire $((Z_n,\rho_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont l'espace des états est $\mathcal{X}\times\mathbb{R}_+$,est de Markov.Sa probabilité de transition $\tilde{F}$ est définie par: quel que soit $(x,a)\in\mathcal{X}\times\mathbb{R}_+$ et quel que soit $A\times B\in\mathcal{B}\times(\mathbb{R}_+\cap\mathcal{R})$, (où $\mathcal{R}$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}$)

$$\tilde{F}((x,a),A\times B;\theta) = \Pr\left[(Z_{n+1},\rho_{n+1})\in A\times B \,\middle|\, (Z_n,\rho_n)=(x,a)\ ;\ \theta\right]$$
$$= \int_A \frac{Q(x,dy;\theta)}{Q(x;\theta)} \int_B Q(y;\theta)\, e^{-Q(y;\theta)\beta}\, d\beta \ .$$

Dans [8] ,on énonce le résultat suivant:

-- Si quel que soit $\theta\in\Theta$,il existe une probabilité absolue stationnaire unique $\hat{\pi}(.;\theta)$ pour $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et qui est telle que quel que soit $x\in\mathcal{X}$,

$$\frac{Q(x,.;\theta)}{Q(x;\theta)} \ll \hat{\pi}(.;\theta) \quad ,$$

alors,la fonction aléatoire $((Z_n,\rho_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une probabilité absolue stationnaire unique $\mu(.;\theta)$ qui domine ses probabilités de transition (probabilités de transition de $((Z_n,\rho_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$).

-- Soit $\tilde{\varphi}$ une application mesurable de $\mathcal{X}^2\times\mathbb{R}_+^2$ dans $\mathbb{R}$, alors quelle que soit la loi initiale de $((Z_n,\rho_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ (cette loi peut être différente de μ),si

$$m = \int_{\mathcal{X}^2\times\mathbb{R}_+^2} \tilde{\varphi}(z_1,z_2,\alpha,\beta)\ \mu(dz_1\times d\alpha\ ;\theta_0)\ \tilde{F}\left[(z_1,\alpha),dz_2\times d\beta\ ;\ \theta_0\right]$$

existe et est finie, alors quand $T\to\infty$,

$$\frac{1}{T}\nu_T \xrightarrow{\text{p.s.}} \frac{1}{\displaystyle\int_{\mathcal{X}} \frac{\hat{\pi}(dx;\theta_0)}{Q(x;\theta_0)}}$$

et

$$\frac{1}{\nu_T} \sum_{k=1}^{\nu_T} \tilde{\varphi}(Z_k, Z_{k+1}, \rho_k, \rho_{k+1}) \xrightarrow{p.s.} m \ .$$

D'autre part, suivant l'exposé de [11], pour $A \in \mathcal{B}$ et $B \in \mathcal{B}$, désignons par $\tau_T(A;\omega)$ la durée totale de séjour de $X_t(\omega)$ dans A pour $t \in [0,T]$, et par $N_T(A \times B;\omega)$ le nombre de sauts de $X_t(\omega)$ de A dans B, pour $t \in [0,T]$. Pour tout $\omega \in \Omega$, $\tau_T(.;\omega)$ est une mesure finie positive sur $\mathcal{B}$ et $N_T(.;\omega)$ est une mesure à valeur entière positive sur $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$, tandis que pour tout $A \in \mathcal{B}$ et pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\tau_T(A;.)$ et $N_T(A \times B;.)$ sont deux variables aléatoires réelles (que nous noterons, pour simplifier, respectivement $\tau_T(A)$ et $N_T(A \times B)$). $N_T(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ n'est autre que ν_T notée précédemment, lors de l'introduction de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Supposons que, quel que soit $x \in \mathcal{X}$, quel que soit $A \in \mathcal{B}$, quel que soit $\theta \in \Theta$, $\lim_{t \to \infty} P_t(x,A;\theta) = \pi(A;\theta)$. Alors, $\pi(.;\theta_0)$ est une probabilité absolue stationnaire unique pour $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. L'emploi de cette probabilité $\pi(.;\theta)$ est très commode pour les calculs que nous effectuerons ci-dessous. Rappelons à ce propos, que, quand $T \to \infty$,

$$\frac{1}{T} N_T(A \times B) \xrightarrow{p.s.} \int_A \pi(dx;\theta_0)\, Q(x,B;\theta_0) \qquad \text{et}$$

$$\frac{1}{T} \tau_T(A) \xrightarrow{p.s.} \pi(A;\theta_0) \ .$$

B. LA METHODE DU QUASI-MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE.

Supposons qu'il existe une mesure positive σ-finie λ sur $\mathcal{B}$, indépendante de θ, telle que quel que soit $x \in \mathcal{X}$ et quel que soit $\theta \in \Theta$, $Q(x,.;\theta)$ soit absolument continue par rapport à λ. Notons $q(x,.;\theta)$ une version $\overset{2}{\otimes}\mathcal{B}$-mesurable de la dérivée de Radon-Nikodym de $Q(x,.;\theta)$ par rapport à λ. Et posons

(1) $$L_T(\theta;\omega) = -\int_{\mathcal{X}} Q(x;\theta)\, d\tau_T(x;\omega) + \int_{\mathcal{X}^2} \mathrm{Log}\ q(x,y;\theta)\, dN_T(x,y;\omega).$$

La vraisemblance elle-même n'est pas définie pour le cas des processus de Markov à temps continu. Mais comme mentionné dans [11], l'introduction de $L_T(\theta;\omega)$ est motivée par le fait que dans [11] , avec $\theta \in \mathbb{R}$,l'équation dite de vraisemblance,à un terme asymptotiquement négligeable près,s'écrit:

$$-\frac{1}{T}\int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial\theta}Q(x;\theta)\, d\tau_T(x;\omega) + \frac{1}{T}\int_{\mathcal{X}^2} \frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Log}\ q(x,y;\theta)\, dN_T(x,y;\omega) = 0 \quad ,$$

c'est à dire

$$\frac{\partial}{\partial\theta} L_T(\theta;\omega) = 0 .$$

Exprimée à l'aide de $((Z_n,\rho_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, $L_T(\theta;\omega)$ peut s'écrire:

(2) $$\begin{aligned} L_T(\theta;\omega) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\nu_T(\omega)} \Big[\mathrm{Log}\ f(Z_k(\omega),Z_{k+1}(\omega);\theta) + \mathrm{Log}Q(Z_k(\omega);\theta) - \rho_k(\omega)Q(Z_k(\omega);\theta)\Big] + \\ &+ \Big[T - \sum_{k=1}^{\nu_T(\omega)+1} \rho_k(\omega)\Big]\ Q(\ Z_{\nu_T(\omega)+1}(\omega);\ \theta\ ) \end{aligned}$$

où $f(x,y;\theta) = \dfrac{q(x,y;\theta)}{Q(x;\theta)}$.

C'est donc une expression qui,asymptotiquement,est la même que celle présentée par Billingsley dans [8] .

II.1. DEFINITION.- <u>Soit</u> $(\varepsilon_T)_{T\in\mathbb{R}_+}$ <u>une famille de nombres positifs bornés,indicés par</u> T. <u>Nous disons qu'un estimateur</u> θ_T^* <u>de</u> θ_o <u>est un estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de coefficient</u> ε_T <u>s'il est une variable aléatoire définie sur l'espace mesurable</u> $(\Omega,\mathcal{A})$, <u>à valeur dans l'espace mesurable</u> $(\Theta,\mathcal{T})$, <u>et telle que, quel que soit</u> $\omega\in\Omega$,

$$L_T\left(\theta_T^*(\omega);\omega\right) \geqslant \sup_{\theta\in\Theta} L_T(\theta;\omega) - \varepsilon_T .$$

Nous choisissons de préférence $\mathcal{E}_T$ petit ,et la famille $(\mathcal{E}_T)_{T\in\mathbb{R}_+}$ décroissante en fonction de T . Lorsque pour tout $\omega\in\Omega$ et pour tout $T\in\mathbb{R}_+$,le supremum $\sup\limits_{\theta\in\Theta} L_T(\theta;\omega)$ est atteint, nous pouvons prendre $\mathcal{E}_T = 0$, sans pour cela en faire une règle absolue car $\mathcal{E}_T > 0$ peut présenter des avantages,par exemple lors d'un recours à des procédés de calcul numérique.

Les trois propositions énoncées ci-dessous fournissent des solutions au problème de l'existence d'estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance.

II.2.PROPOSITION.- Si $\mathcal{E}_T$ est strictement positif, si Θ est un espace lusinien,si $\mathcal{T}$ est sa tribu borélienne,et si l'application multivoque F_T de Ω dans Θ ,définie par

$$F_T(\omega) = \left\{\theta\in\Theta : L_T(\theta;\omega) \geqslant \sup_{s\in\Theta} L_T(s;\omega) - \mathcal{E}_T\right\}$$

est $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-mesurable et "point-fermé", alors il existe au moins un estimateur θ_T^* du quasi-maximum de vraisemblance de coefficient $\mathcal{E}_T$ de θ_o .

En posant

$$\varphi_T(\theta,\omega) = L_T(\theta;\omega) - \sup_{s\in\Theta} L_T(s;\omega) + \mathcal{E}_T \quad ,$$

nous nous trouvons dans les conditions de I.5,et la preuve de la proposition II.2 s'en découle immédiatement,avec l'indice T en plus.

II.3.PROPOSITION.- Si $\mathcal{E}_T$ est strictement positif,si Θ est un espace métrique séparable,si $\mathcal{T}$ est sa tribu borélienne, et si l'application multivoque F_T définie dans II.2 est $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-mesurable et "point-complet", alors il existe au moins un estimateur θ_T^* du quasi-maximum de vraisemblance de coefficient $\mathcal{E}_T$,de θ_o .

Même constatation que précédemment sur l'utilisation de I.5.

II.4.PROPOSITION.- Si l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\Pr)$ est complet, si Θ est un espace métrique compact, si $\mathcal{C}$ est sa tribu borélienne, si quel que soit $\omega\in\Omega$, $L_T(.;\omega)$ est continue sur Θ, alors il existe au moins un estimateur θ_T^* du quasi-maximum de vraisemblance de coefficient ε_T, $(\varepsilon_T \geqslant 0)$, de θ_o.

Ici, nous nous servons de I.6 en faisant jouer à L_T le rôle de h décrit dans I.6.

C. LES METHODES DU Ψ^2 QUASI-MINIMUM ET DU χ^2 QUASI-MINIMUM.

Posons

$$\Psi_T^2(\theta;\omega) = \sum_{j\in I} \frac{\left[\tau_T(A_j,\omega) - T\,\pi(A_j;\theta)\right]^2}{T\,\pi(A_j,\theta)} + \sum_{(j,k)\in I\times I} \frac{\left[N_T(A_j\times A_k,\omega) - T\int_{A_j}\pi(dx;\theta)\,Q(x,A_k;\theta)\right]^2}{T\int_{A_j}\pi(dx;\theta)\,Q(x,A_k;\theta)}$$

(resp.

$$\chi_T^2(\theta,\omega) = \sum_{(j,k)\in I\times I} \frac{\left[N_T(A_j\times A_k,\omega) - \int_{A_j}\tau_T(dx,\omega)\,Q(x,A_k;\theta)\right]^2}{\int_{A_j}\tau_T(dx,\omega)\,Q(x,A_k;\theta)}$$)

où $(A_j)_{j\in I}$ désigne une partition finie $\mathcal{B}$-mesurable de $\mathcal{X}$ telle que les quantités qui figurent aux dénominateurs de la première (resp. seconde) expression soient strictement positives.

II.5.DEFINITION.- Soit $(c_T)_{T\in\mathbb{R}_+}$ une famille de nombres positifs bornés, plus grands ou égaux à 1, indicés par T. Nous disons qu'un estimateur θ_T^* de θ_o est un estimateur du Ψ^2 quasi-minimum (resp. χ^2 quasi-minimum) de coefficient c_T, s'il est une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{A})$ et à valeur dans $(\Theta,\mathcal{C})$, telle que, pour tout $\omega\in\Omega$,

$$\Psi_T^2(\theta_T^*(\omega);\omega) \leqslant c_T \inf_{\theta\in\Theta} \Psi_T^2(\theta;\omega)$$

$$\left(\text{resp.} \quad \chi^2_T(\theta^*_T(\omega);\omega) \leqslant c_T \inf_{\theta\in\Theta} \chi^2_T(\theta;\omega) \right) .$$

Nous choisissons de préférence les c_T voisins de 1, et la famille $(c_T)_{T\in\mathbb{R}_+}$ décroissante à partir d'un certain rang et convergeant vers 1 quand $T\to\infty$ (par exemple, $c_T = 1 + \frac{1}{T}$ pour T assez grand). On peut aussi considérer le cas particulier où,pour tout $T\in\mathbb{R}_+$, $c_T = c$,~~comme nous l'avons fait dans [6]~~. Lorsque, pour tout $\omega\in\Omega$, $\inf_{\theta\in\Theta} \psi^2_T(\theta;\omega)$ $\left(\text{resp. } \inf_{\theta\in\Theta} \chi^2_T(\theta;\omega)\right)$ est atteint,on peut prendre $c_T = 1$,sans pour cela en faire une règle absolue, car $c_T > 1$ peut présenter des avantages,par exemple lors d'un recours à des procédés de calcul numérique.

Abordons maintenant le problème de l'existence d'estimateurs fournis par ces deux méthodes.

Un estimateur de θ_o,de par sa définition,est une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{A})$ et à valeur dans $(\Theta,\mathcal{T})$.Prouver l'existence d'estimateurs fournis par la méthode du ψ^2 quasi-minimum (resp. χ^2 quasi-minimum),c'est prouver l'existence d'applications θ^*_T de Ω dans Θ , $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-mesurables,vérifiant pour tout $\omega\in\Omega$,

$$\psi^2_T(\theta^*_T(\omega);\omega) \leqslant c_T \inf_{\theta\in\Theta} \psi^2_T(\theta;\omega)$$

$$\left(\text{resp.} \quad \chi^2_T(\theta^*_T(\omega);\omega) \leqslant c_T \inf_{\theta\in\Theta} \chi^2_T(\theta;\omega) \right) .$$

II.6.PROPOSITION.- <u>Supposons que</u> Θ <u>soit un espace lusinien,que</u> $\mathcal{T}$ <u>soit sa tribu borélienne,que pour tout</u> $T\in\mathbb{R}_+$, $c_T>1$, <u>que l'application multivoque</u> F_T (resp. $\widetilde{F}_T$) <u>de</u> Ω <u>dans</u> Θ <u>définie par</u>

$$F_T(\omega) = \left\{\theta\in\Theta : \psi^2_T(\theta;\omega) \leqslant c_T \inf_{s\in\Theta} \psi^2_T(s;\omega)\right\}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \widetilde{F}_T(\omega) = \left\{\theta\in\Theta : \chi^2_T(\theta;\omega) \leqslant c_T \inf_{s\in\Theta} \chi^2_T(s;\omega)\right\}\right)$$

soit $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-mesurable et "point-fermé". Alors, il existe au moins un estimateur θ_T^* du ψ^2 quasi-minimum (resp. χ^2 quasi-minimum) de coefficient c_T, de θ_o.

Comme cela a été pour II.2, nous nous servons ici de I.5, avec la fonction numérique φ_T (resp. $\widetilde{\varphi}_T$) définie par

$$\varphi_T(\theta,\omega) = -\psi_T^2(\theta;\omega) + c_T \inf_{s\in\Theta} \psi_T^2(s;\omega)$$

$$\left(\text{resp. } \widetilde{\varphi}_T(\theta,\omega) = -\chi_T^2(\theta;\omega) + c_T \inf_{s\in\Theta} \chi_T^2(s;\omega)\right.$$

à la place de φ, et F_T (resp. $\widetilde{F}_T$) à la place de F.

L'utilisation de I.5 nous fournit également la preuve de la proposition suivante

II.7. PROPOSITION.- Supposons que Θ soit un espace métrique séparable, que $\mathcal{C}$ soit sa tribu borélienne, que pour tout $T\in \mathbb{R}_+$, $c_T > 1$, et que l'application multivoque F_T (resp. $\widetilde{F}_T$) de Ω dans Θ définie par

$$F_T(\omega) = \left\{\theta\in\Theta : \psi_T^2(\theta;\omega) \leqslant c_T \inf_{s\in\Theta} \psi_T^2(s;\omega)\right.$$

$$\left(\text{resp. } \widetilde{F}_T(\omega) = \left\{\theta\in\Theta : \chi_T^2(\theta;\omega) \leqslant c_T \inf_{s\in\Theta} \chi_T^2(s;\omega)\right.\right)$$

soit $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-mesurable et "point-complet". Alors, il existe au moins un estimateur θ_T^* du ψ^2 quasi-minimum (resp. χ^2 quasi-minimum) de coefficient c_T, de θ_o.

Enfin, la proposition I.6, avec ψ_T^2 (resp. χ_T^2) au lieu de h, et c_T au lieu de c, nous fournit la preuve de la proposition suivante:

II.8. PROPOSITION.- Supposons que l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ soit complet, que $(\Theta, \mathcal{C})$ soit formé d'un espace métrique compact Θ et de sa tribu borélienne $\mathcal{C}$, que pour tout $T\in\mathbb{R}_+$, $\psi_T^2(.;.)$ $\left(\text{resp. } \chi_T^2(.;.)\right)$ soit $\mathcal{C}\otimes\mathcal{A}$-mesurable, et que de plus, pour tout $\omega\in\Omega$, $\psi_T^2(.;\omega)$ $\left(\text{resp. } \chi_T^2(.;\omega)\right)$ soit semi-continue inférieurement sur Θ . Alors, il existe un estimateur θ_T^* du ψ^2 quasi-minimum (resp. χ^2 quasi-minimum) de coefficient c_T ($c_T \geqslant 1$) de θ_o .

D. REMARQUES SUR LE CAS PARTICULIER D'UN NOMBRE FINI D'ETATS.

Dans le cas particulier d'un processus de Markov à un nombre fini d'états $\mathcal{X} = \{1,2,..,r\}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$ où $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ désigne l'ensemble des parties de $\mathcal{X}$,nous avons

$\pi_j(\theta)$ à la place de $\pi(B;\theta)$,

$q_{jk}(\theta)$ et $q_j(\theta)$ à la place de $Q(x,B;\theta)$ et $Q(x;\theta)$,

$N_T(jk;\omega)$ et $\tau_T(j;\omega)$ à la place de $N_T(A\times B;\omega)$ et $\tau_T(A;\omega)$.

Les expressions $L_T(\theta;\omega)$, $\psi_T^2(\theta;\omega)$ et $\chi_T^2(\theta;\omega)$ s'écrivent alors:

$$L_T(\theta;\omega) = -\sum_{j\in\mathcal{X}} q_j(\theta)\,\tau_T(j;\omega) + \sum_{(j,k)\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}} \mathrm{Log}\, q_{jk}(\theta).N_T(jk;\omega) ,$$

$$\psi_T^2(\theta;\omega) = \sum_{j\in\mathcal{X}} \frac{\left[\tau_T(j;\omega) - T\,\pi_j(\theta)\right]^2}{T\,\pi_j(\theta)} + $$

$$+ \sum_{(j,k)\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}} \frac{\left[N_T(jk;\omega) - T\,\pi_j(\theta)\,q_{jk}(\theta)\right]^2}{T\,\pi_j(\theta)\,q_{jk}(\theta)}$$

et

$$\chi_T^2(\theta;\omega) = \sum_{(j,k)\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}} \frac{\left[N_T(jk;\omega) - q_{jk}(\theta)\,\tau_T(j;\omega)\right]^2}{q_{jk}(\theta)\,\tau_T(j;\omega)} .$$

Supposons que les π_j et les q_{jk} soient inconnus. Les résultats suivants constituent un exemple d'illustration pour les méthodes décrites précédemment.

II.9. $\dfrac{N_T(jk;.)}{\tau_T(j;.)}$ est à la fois un estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de coefficient ε_T de q_{jk} ,pour tout $\varepsilon_T \geqslant 0$, et un estimateur du χ^2 quasi-minimum de coefficient c_T de q_{jk} , pour tout $c_T \geqslant 1$.

II.10. $\left(\frac{1}{T}\tau_T(j;.)\ ,\ \frac{N_T(jk;.)}{\tau_T(j;.)}\right)$ est un estimateur du ψ^2 quasi-minimum de coefficient c_T du couple (π_j, q_{jk}) ,pour tout $c_T \geqslant 1$.

Ces estimateurs sont convergents au sens presque-sûr.

Ces énoncés sont prévisibles,d'après les résultats de [11] sur les méthodes du maximum de vraisemblance, du χ^2 minimum et du ψ^2 minimum.

Plus précisément,en considérant q_{jk} comme la vraie valeur θ_o d'un paramètre réel θ,nous avons:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} L_T(\theta;\omega)\Bigg|_{\theta=\frac{N_T(jk;\omega)}{\tau_T(j;\omega)}} = -\tau_T(j;\omega) + \frac{1}{\theta} N_T(jk;\omega)\Bigg|_{\theta=\frac{N_T(jk;\omega)}{\tau_T(j;\omega)}}$$

$$= 0 \quad ,$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} L_T(\theta;\omega)\Bigg|_{\theta=\frac{N_T(jk;\omega)}{\tau_T(j;\omega)}} = -\frac{1}{\theta^2} N_T(jk;\omega)\Bigg|_{\theta=\frac{N_T(jk;\omega)}{\tau_T(j;\omega)}}$$

$$= -\frac{\left[\tau_T(j;\omega)\right]^2}{N_T(jk;\omega)} < 0 \ .$$

Ce qui montre que

$\frac{N_T(jk;\omega)}{\tau_T(j;\omega)}$ correspond au maximum de la fonction $L_T(.;\omega)$,et par conséquent,quel que soit $\varepsilon_T \geqslant 0$,

$$L_T\left(\frac{N_T(jk;\omega)}{\tau_T(j;\omega)}\ ;\omega\right) \geqslant \sup_{s\in\Theta} L_T(s;\omega) - \varepsilon_T \ .$$

D'autre part, pour tout $c_T \geqslant 1$,

$$\chi_T^2\left(\frac{N_T(jk;.)}{\tau_T(j;\omega)};\omega\right) = \sum_{\substack{(u,v)\in\mathfrak{X}^2:\\(u,v)\neq(j,k)}} \frac{\left[N_T(uv;\omega) - q_{uv}\,\tau_T(u;\omega)\right]^2}{q_{uv}\;\tau_T(u;\omega)}$$

$$\leqslant c_T \inf_{s\in\Theta} \chi_T^2(s;\omega) \quad .$$

Enfin,en considérant (π_j , q_{jk}) comme la vraie valeur θ_o d'un paramètre θ, nous avons

$$\psi_T^2\left(\left(\frac{\tau_T(j;\omega)}{T},\frac{N_T(jk;\omega)}{\tau_T(j;\omega)}\right);\omega\right) = \sum_{\substack{u\in\mathfrak{X}:\\u\neq j}} \frac{\left[\tau_T(u;\omega) - T\,\pi_u\right]^2}{T\,\pi_u} +$$

$$+ \sum_{\substack{(u,v)\in\mathfrak{X}^2:\\(u,v)\neq(j,k)}} \frac{\left[N_T(jk;\omega) - T\,\pi_j\,q_{jk}\right]^2}{T\,\pi_j\,q_{jk}}$$

$$\leqslant c_T \inf_{s\in\Theta} \psi_T^2(s;\omega) \quad .$$

Quant à la convergence presque-sûre des estimateurs, elle est assurée par les résultats de [11],selon lesquels $\frac{1}{T}\tau_T(j;.)$ converge presque-sûrement vers π_j et $\frac{1}{T}N_T(jk;.)$ converge presque-sûrement vers $\pi_j\,q_{jk}$ quand $T\to\infty$.

Chapitre III

CONVERGENCE DES ESTIMATEURS DU QUASI-MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE, DU ψ^2 QUASI-MINIMUM ET DU χ^2 QUASI-MINIMUM POUR DES PROCESSUS DE MARKOV À TEMPS CONTINU .

Dans ce Chapitre,nous démontrons la convergence presque-sûre des estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance, du ψ^2 quasi-minimum et du χ^2 quasi-minimum.

Si le raisonnement employé pour la méthode du ψ^2 quasi-minimum présente quelques analogies avec celui employé pour la méthode du χ^2 quasi-minimum,celui utilisé pour la méthode du quasi-maximum de vraisemblance est différent.Les conditions imposées par cette méthode sont aussi plus restrictives.

Dans ce qui suit,lorsque nous nous référons aux conditions préliminaires,il s'agira de celles décrites dans le paragraphe A du chapitre II.

A.CONVERGENCE DES ESTIMATEURS DU QUASI-MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE.

Supposons que

$$D = \left\{(x,y) \in \mathfrak{X}^2 : q(x,y;\theta) > 0 \right\}$$

est indépendant de θ. Par cette hypothèse,nous voulons que les intégrales écrites ci-dessous aient un sens (elles peuvent toutefois être infinies).C'est par exemple le cas de l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{X}^2} \text{Log}\, \frac{q(x,y;\theta_0)}{q(x,y;\theta)}\; \pi(dx;\theta_0)\; Q(x,dy;\theta_0) \; .$$

Par la suite,nous travaillerons sur D quoique nous ne l'écrivions pas explicitement.

Un certain nombre de résultats auxiliaires étant nécessaires à la démonstration de la convergence presque-sûre des estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance, nous procédons donc par étapes.

III.1.PROPOSITION.- Si

(i) Quel que soit $\theta_1 \in \Theta$ et quel que soit $\theta_2 \in \Theta$ tels que $\theta_1 \neq \theta_2$,

$$\int_{\mathfrak{X}^2} \left| q(x,y;\theta_1) - q(x,y;\theta_2) \right| \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,dy;\theta_o) > 0 ,$$

alors

(ii) Quel que soit $\theta \in \Theta$ tel que $\theta \neq \theta_o$,

$$\int_{\mathfrak{X}} \left[Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o) \right] \pi(dx;\theta_o) +$$

$$+ \int_{\mathfrak{X}^2} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)}\, \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,dy;\theta_o) > 0 .$$

Démonstration.

On sait que, quel que soit le nombre réel z,

$$e^z \geqslant 1 + z ,$$

et que l'égalité $e^z = 1 + z$ a lieu si et seulement si $z = 0$.

Soit $\theta \neq \theta_o$. Si on remplace z par $\operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)}$, on a

$$\frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)} \geqslant 1 + \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)} , \tag{1}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si

$$q(x,y;\theta) = q(x,y;\theta_o).$$

Puisque

$$\int_{\mathfrak{X}^2} \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)}\, \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,dy;\theta_o) = \int_{\mathfrak{X}} \pi(dx;\theta_o) \int_{\mathfrak{X}} \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)}\, Q(x,dy;\theta_o)$$

on a

$$\int_{\mathfrak{X}^2} \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)}\, \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,dy;\theta_o) = \int_{\mathfrak{X}} \pi(dx;\theta_o) \int_{\mathfrak{X}} \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)}\, q(x,y;\theta_o)\, d\lambda(y)$$

$$= \int_{\mathfrak{X}} Q(x;\theta)\, \pi(dx;\theta_o) .$$

et puisque

$$\int_{\mathfrak{X}^2} 1.\ \pi(dx;\theta_o)\ Q(x,dy;\theta_o) = \int_{\mathfrak{X}} Q(x;\theta_o)\,\pi(dx;\theta_o)\ ,$$

l'inégalité (1) nous donne

$$\int_{\mathfrak{X}} Q(x;\theta)\ \pi(dx;\theta_o) \geqslant \int_{\mathfrak{X}} Q(x;\theta_o)\ \pi(dx;\theta_o) \ +$$

$$+ \int_{\mathfrak{X}^2} \mathrm{Log}\ \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)}\ \pi(dx;\theta_o)\ Q(x,dy;\theta_o)\ .$$

Par conséquent, si nous posons

$$H(\theta) = \int_{\mathfrak{X}} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)]\ \pi(dx;\theta_o) \ +$$

$$+ \int_{\mathfrak{X}^2} \mathrm{Log}\ \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)}\ \pi(dx;\theta_o)\ Q(x,dy;\theta_o)\ ,$$

nous avons

$$H(\theta) \geqslant 0\ .$$

Posons maintenant

$$A = \{(x,y) \in \mathfrak{X}^2 \ :\ q(x,y;\theta_o) - q(x,y;\theta) \neq 0\}\ .$$

L'énoncé (i) implique que l'ensemble A est de mesure $\pi(dx;\theta_o)\ Q(x,dy;\theta_o) > 0$ (c'est à dire que $\int_A \pi(dx;\theta_o)\ Q(x,dy;\theta_o) > 0$). Cela entraîne que $H(\theta) > 0$, car sinon, avec $H(\theta) = 0$, nous aurions

$$0 = \int_{\mathfrak{X}} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)]\ \pi(dx;\theta_o) \ +$$

$$+ \int_A \mathrm{Log}\ \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)}\ \pi(dx;\theta_o)\ Q(x,dy;\theta_o)$$

$$> \int_{\mathfrak{X}} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)]\,\pi(dx;\theta_o) \ +$$

$$+ \int_A \left[1 - \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)}\right]\ \pi(dx;\theta_o)\ Q(x,dy;\theta_o)$$

(car sur A, nous avons $\mathrm{Log}\ \dfrac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} > 1 - \dfrac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)}$)

$$= \int_{\mathcal{X}} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)] \, \pi(dx;\theta_o) \; +$$

$$+ \int_{\mathcal{X}^2} \left[1 - \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)}\right] \pi(dx;\theta_o) \; Q(x,dy;\theta_o)$$

(car sur $\complement A$, nous avons $1 - \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)} = 0$)

$$= \int_{\mathcal{X}} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)] \, \pi(dx;\theta_o) \; + \int_{\mathcal{X}} Q(x;\theta_o) \, \pi(dx;\theta_o)$$

$$- \int_{\mathcal{X}} Q(x;\theta) \, \pi(dx;\theta_o)$$

$$= 0 \; .$$

D'où contradiction.

Par conséquent,on doit avoir $H(\theta) > 0$,c'est à dire (ii) .

III.2.CONDITIONS.- Supposons que

1º/ Θ soit un espace métrisable compact,

2º/ Quel que soit $(x,y) \in \mathcal{X}^2$,$q(x,y;.)$ soit continue sur Θ ,

3°/ Quel que soit $\theta \in \Theta$, il existe un voisinage W_θ de θ , tel que pour chaque ouvert V contenant θ et contenu dans W_θ, $\sup_{u \in V} q(.,.;u)$ soit $\overset{2}{\otimes} \mathcal{B}$ -mesurable, et que $\inf_{u \in V} Q(.;u)$ soit $\mathcal{B}$ -mesurable.

4°/ Quel que soit $x \in \mathcal{X}$, quel que soit $\theta \in \Theta$, il existe un voisinage $U_x(\theta)$ de θ et une fonction numérique $g(x,.) \geq 0$, définie sur $\mathcal{X}$, λ-intégrable, et telle que $q(x,y;u) \leq g(x,y)$ pour tout $y \in \mathcal{X}$ et tout $u \in U_x(\theta)$.

5°/ Quel que soit $\theta \in \Theta$, il existe un ouvert $V(\theta)$ contenant θ , avec $V(\theta) \subset W_\theta$, et une fonction numérique $h(.,.)$ qui dépend de $V(\theta)$ et telle que

$$h(x,y) \leq \inf_{u \in V(\theta)} \text{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\, u)}$$

et que

$$\left| \int_{\mathcal{X}^2} h(x,y) \pi(dx;\theta_o) \; Q(x,dy;\theta_o) \right| < \infty \; .$$

6°/ Quel que soit $\theta_1 \in \Theta$ et quel que soit $\theta_2 \in \Theta$ tels que $\theta_1 \neq \theta_2$,

$$\int_{\mathfrak{X}^2} |q(x,y;\theta_1) - q(x,y;\theta_2)| \, \pi(dx;\theta_o) \, Q(x,dy;\theta_o) > 0 .$$

III.3. PROPOSITION.- Sous les conditions préliminaires et III.2 , on peut trouver, pour chaque voisinage $U = U(\theta_o)$ de θ_o un nombre $\delta = \delta(U) > 0$ tel que

$$\liminf_{T\to\infty} \left[\inf_{\theta \in \complement U} \left(\frac{1}{T}\int_{\mathfrak{X}} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)] \, d\,\tau_T(x;.) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{T}\int_{\mathfrak{X}^2} \mathrm{Log}\,\frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} \, dN_T(x,y;.) \right) \right] > \delta \qquad \text{p.s.}$$

Démonstration.

Soit d une distance sur Θ compatible avec sa topologie.

Soit $s \in \complement U$; notons par

$$V_k(s) = \left\{\theta \in \Theta : d(\theta,s) < \frac{1}{k} \right\}.$$

Il est clair que la suite

$$\left(\inf_{\theta\in V_k(s)} \mathrm{Log}\,\frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} \right)_{k\in \mathbb{N}^*}$$

est une suite non décroissante.

D'après l'hypothèse de continuité en θ de $q(x,y;.)$, quel que soit $\alpha>0$,il existe un voisinage V de s,tel que quel que soit $\theta\in V$,

$$\mathrm{Log}\,\frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;s)} - \mathrm{Log}\,\frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} < \alpha .$$

Il en résulte que,lorsque $k\to\infty$,

$$\inf_{\theta\in V_k(s)} \mathrm{Log}\,\frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} \uparrow \mathrm{Log}\,\frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;s)} .$$

Or,d'après III.2.3º/ , $\sup_{\theta\in V_k(s)} q(.,.;\theta)$ est $\overset{2}{\otimes}\mathcal{B}$-mesurable pour k assez grand. D'où

$$\inf_{\theta\in V_k(s)} \mathrm{Log}\,\frac{q(.,.;\theta_o)}{q(.,.;\theta)} =$$

$$= \mathrm{Log}\, q(.,.;\theta_o) - \sup_{\theta\in V_k(s)} \mathrm{Log}\, q(.,.;\theta)$$

est $\overset{2}{\otimes}\mathcal{B}$-mesurable pour k assez grand.

Nous pouvons alors appliquer le théorème de Beppo-Levi, ce qui montre que, lorsque $k \to \infty$,

$$\text{(a)} \quad \int_{\mathfrak{X}^2} \inf_{\theta \in V_k(s)} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} \, \pi(dx;\theta_o) \, Q(x,dy;\theta_o)$$

$$\uparrow \int_{\mathfrak{X}^2} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;s)} \, \pi(dx;\theta_o) \, Q(x,dy;\theta_o) \; .$$

D' autre part, la suite

$$\left(\inf_{\theta \in V_k(s)} \left[Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o) \right] \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$$

est, elle aussi, un suite non décroissante.

D'autre part, la fonction $q(x,.;\theta)$ étant λ-intégrable, les conditions III.2.2°/ et III.2.4°/ assurent la continuité de la fonction $Q(x,.)$ sur Θ, (cf. par exemple [10], corollaire 1, p. 144). Donc, quel que soit $\alpha > 0$, il existe un voisinage V de s tel que, quel que soit $\theta \in V$,

$$Q(x;s) - Q(x;\theta) < \alpha \; .$$

Il en résulte que, lorsque $k \to \infty$,

$$\inf_{\theta \in V_k(s)} Q(x;\theta) \uparrow Q(x;s) \; .$$

Or, d'après III.2.3°/, $\inf_{\theta \in V_k(s)} Q(.;\theta)$ est $\mathcal{B}$-mesurable pour k assez grand.

D'où, nous pouvons appliquer le théorème de Beppo-Levi, ce qui donne, lorsque $k \to \infty$,

$$\text{(b)} \quad \int_{\mathfrak{X}} \inf_{\theta \in V_k(s)} \left[Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o) \right] \pi(dx;\theta_o)$$

$$\uparrow \int_{\mathfrak{X}} \left[Q(x;s) - Q(x;\theta_o) \right] \pi(dx;\theta_o).$$

Donc, d'après (a) et (b),

$$\int_{\mathfrak{X}} \inf_{\theta\in V_k(s)} \left[Q(x;\theta) - Q(x;\theta_0)\right] \pi(dx;\theta_0) + $$
$$+ \int_{\mathfrak{X}^2} \inf_{\theta\in V_k(s)} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_0)}{q(x,y;\theta)} \pi(dx;\theta_0)\, Q(x,dy;\theta_0)$$
$$\uparrow H(s) \quad ,$$

avec $H(s) > 0$ (à cause de III.2.5º/ et III.1).

Il en résulte que, quel que soit $s \in \complement U$, il existe un ouvert $V_k(s)$ contenant s et un entier positif $n_0(s)$ tel que $k > n_0(s)$ entraîne que

$$\int_{\mathfrak{X}} \inf_{\theta\in V_k(s)} \left[Q(x;\theta) - Q(x;\theta_0)\right] \pi(dx;\theta_0) + $$
$$+ \int_{\mathfrak{X}^2} \inf_{\theta\in V_k(s)} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_0)}{q(x,y;\theta)} \pi(dx;\theta_0)\, Q(x,dy;\theta_0)$$
$$\geqslant \frac{1}{2} H(s) \;.$$

Prenons alors U ouvert, $\complement U$ est donc compact. On peut recouvrir $\complement U$ par un nombre fini d'ensembles ouverts $V_k(s_i)$, ($i = 1,2,\ldots,m$) .

Si $n_1 = \max_{i=1,2,..,m} n_0(s_i)$, alors pour $k > n_1$, on a, quel que soit $i \in \{1,2,..,m\}$,

$$\int_{\mathfrak{X}} \inf_{\theta\in V_k(s_i)} \left[Q(x;\theta) - Q(x;\theta_0)\right] \pi(dx;\theta_0) + $$
$$+ \int_{\mathfrak{X}^2} \inf_{\theta\in V_k(s_i)} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_0)}{q(x,y;\theta)} \pi(dx;\theta_0)\, Q(x,dy;\theta_0)$$
$$\geqslant \delta > 0 \quad ,$$

où $\delta = \min_{i=1,2,..,m} \frac{1}{2} H(s_i)$.

Or, quel que soit $\theta \in \complement U$, il existe $i \in \{1,2,..,m\}$ tel que $V_k(s_i) \ni \theta$, et on a

$$\inf_{\theta' \in V_k(s_i)} \left[Q(x;\theta')-Q(x;\theta_o)\right] \leqslant \left[Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)\right]$$

et

$$\inf_{\theta' \in V_k(s_i)} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta')} \leqslant \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} \quad .$$

D'où

$$\lim_{T\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} \frac{1}{T} \inf_{\theta' \in V_k(s_i)} \left[Q(x;\theta') - Q(x;\theta_o)\right] d\tau_T(x;.) \quad +$$

$$+ \lim_{T\to\infty} \int_{\mathfrak{X}^2} \frac{1}{T} \inf_{\theta' \in V_k(s_i)} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta')} \, dN_T(x,y;.)$$

$$\overset{\text{p.s.}}{=} \int_{\mathfrak{X}} \inf_{\theta' \in V_k(s_i)} \left[Q(x;\theta') - Q(x;\theta_o)\right] \pi(dx;\theta_o) \quad +$$

$$+ \int_{\mathfrak{X}^2} \inf_{\theta' \in V_k(s_i)} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta')} \, \pi(dx;\theta_o) \, Q(x,dy;\theta_o)$$

$$\geqslant \frac{1}{2} H(s_i) \; .$$

Par conséquent,

$$\liminf_{T\to\infty} \left[\min_{i=1,2,..,m} \left(\int_{\mathfrak{X}} \frac{1}{T} \inf_{\theta \in V_k(s_i)} \left[Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)\right] d\tau_T(x;.) \right. \right. +$$

$$\left. \left. + \frac{1}{T} \int_{\mathfrak{X}^2} \inf_{\theta \in V_k(s_i)} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} \, dN_T(x,y;.) \right) \right]$$

$$\geqslant \delta \; , \quad \text{p.s.}$$

Ce qui donne finalement,

$$\liminf_{T\to\infty} \left[\inf_{\theta \in \complement U} \left(\frac{1}{T} \int_{\mathfrak{X}} -\left[Q(x;\theta_o) - Q(x;\theta)\right] d\tau_T(x;.) \right. \right. +$$

$$\left. \left. + \frac{1}{T} \int_{\mathfrak{X}^2} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} \, dN_T(x,y;.) \right) \right]$$

$$\geqslant \liminf_{T\to\infty}\left[\min_{i=1,\dots,m}\left(\frac{1}{T}\int_{\mathcal{X}}\inf_{\theta\in V_k(s_i)} - [Q(x;\theta_o)-Q(x;\theta)]\, d\tau_T(x;.) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{T}\int_{\mathcal{X}^2}\inf_{\theta\in V_k(s_i)} \operatorname{Log}\frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)}\, dN_T(x,y;.)\right)\right]$$

$\geqslant \delta > 0$,p.s.

III.4. <u>PROPOSITION.-</u> <u>Pour tout estimateur</u> θ_T^* <u>du quasi-maximum de vraisemblance de coefficient</u> ε_T $(\varepsilon_T \geqslant 0)$, <u>on a</u>

$$\limsup_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{\mathcal{X}}\left[Q(x;\theta_T^*) - Q(x;\theta_o)\right] d\tau_T(x;.) \quad + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{T}\int_{\mathcal{X}^2} \operatorname{Log}\frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta_T^*)}\, dN_T(x,y;.)\right]$$

$\leqslant 0$,p.s.

<u>Démonstration.</u>

En effet, quel que soit $\theta\in\Theta$, d'après la définition de θ_T^* , on a : quel que soit $\omega\in\Omega$,

$$-\int_{\mathcal{X}} Q(x;\theta)\, d\tau_T(x;\omega) + \int_{\mathcal{X}^2} \operatorname{Log} q(x,y;\theta)\, dN_T(x,y;\omega) \leqslant$$

$$\leqslant -\int_{\mathcal{X}} Q(x,\theta_T^*(\omega))\, d\tau_T(x;\omega) + \int_{\mathcal{X}^2} \operatorname{Log} q(x,y;\theta_T^*(\omega)) dN_T(x,y;\omega) + \varepsilon_T ,$$

inégalité qui est vraie en particulier pour $\theta = \theta_o$. Donc

$$\frac{1}{T}\int_{\mathcal{X}}\left[Q(x;\theta_T^*) - Q(x;\theta_o)\right] d\tau_T(x;.) \quad +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_{\mathcal{X}^2} \operatorname{Log}\frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta_T^*)}\, dN_T(x,y;.) - \frac{\varepsilon_T}{T}$$

$\leqslant 0$, p.s.

et par conséquent,en prenant la limite supérieure pour les deux membres,on obtient le résultat indiqué dans l'énoncé.

III.5. PROPOSITION.- <u>Sous les conditions préliminaires et</u> III.2, <u>tout estimateur</u> θ_T^* <u>du quasi-maximum de vraisemblance de coefficient</u> ε_T $(\varepsilon_T \geqslant 0)$ <u>converge presque-sûrement vers</u> θ_o ,<u>quand</u> $T \to \infty$.

<u>Démonstration</u>.

En effet, quel que soit le voisinage U de θ_o , si $\theta_T^*(\omega) \in \complement U$, on aura, d'après III.3 :

$$\liminf_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{\mathfrak{X}} \left[Q(x;\theta_T^*(\omega)) - Q(x;\theta_o) \right] d\tau_T(x;\omega) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{T} \int_{\mathfrak{X}^2} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta_T^*(\omega))} dN_T(x,y;\omega) \right) \geqslant \delta ,$$

sauf peut être pour des ω appartenant à un ensemble de probabilité Pr nulle. Ce qui est en contradiction avec III.4. Donc, pour T grand, on doit avoir $\theta_T^*(\omega) \in U$. D'où convergence presque sûre de θ_T^* vers θ_o .

B. CONVERGENCE DES ESTIMATEURS DU ψ^2 QUASI-MINIMUM ET DU χ^2 QUASI-MINIMUM.

Dans ce paragraphe, nous préciserons les conditions relatives au "paramètre" θ ,qui ne sont d'ailleurs pas exactement les mêmes pour la méthode du ψ^2 quasi-minimum et pour la méthode du χ^2 quasi-minimum.

II.6 .PROPOSITION.- Si Θ est un espace topologique séparé et s'il existe une partition finie $\mathcal{B}$-mesurable $(A_j)_{j\in I}$ de $\mathcal{X}$ telle que :

a) Quel que soit $\theta \in \Theta$, quel que soit $j \in I$ et quel que soit $k \in I$,

$$\int_{A_j} \pi(dx,\theta)\ Q(x,A_k,\theta) > 0 \ ,$$

b) Quel que soit $\theta \in \Theta$ et quel que soit $\theta' \in \Theta$, avec $\theta \neq \theta'$,

$$\max_{j\in I} \left| \pi(A_j,\theta) - \pi(A_j,\theta') \right| = \gamma_{\theta,\theta'} \neq 0 \ ,$$

c) Quel que soit $\theta \in \Theta$ et quel que soit $\theta' \in \Theta$, avec $\theta \neq \theta'$,

$$\max_{(j,k)\in I\times I} \left| \int_{A_j} \pi(dx,\theta)\ Q(x,A_k,\theta) - \int_{A_j} \pi(dx,\theta')\ Q(x,A_k,\theta') \right| = \delta_{\theta,\theta'} \neq 0 \ .$$

Alors, tout estimateur θ_T^* du Ψ^2 quasi-minimum de coefficient c_T converge presque-sûrement vers θ_o, quand $T \to \infty$.

Démonstration.

1º/ Par définition même de l'estimateur du Ψ^2 quasi-minimum de coefficient c_T, nous avons: quel que soit $T > 0$ et quel que soit $\omega \in \Omega$,

$$\Psi_T^2(\theta_T^*(\omega),\omega) \leqslant c_T\, \Psi_T^2(\theta_o,\omega) \ .$$

2º/ Quel que soit $j \in I$, quel que soit $\omega \in \Omega$, et quel que soit $\theta \in \Theta$,

$$\left| \frac{1}{T}\tau_T(A_j,\omega) - \pi(A_j,\theta) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{T}\tau_T(A_j,\omega) - \pi(A_j,\theta_o) + \pi(A_j,\theta_o) - \pi(A_j,\theta) \right|$$

$$\geqslant \left| \left| \pi(A_j,\theta_o) - \pi(A_j,\theta) \right| - \left| \frac{1}{T}\tau_T(A_j,\omega) - \pi(A_j,\theta_o) \right| \right| .$$

Or, nous savons que, quel que soit $j \in I$,

$$\frac{1}{T}\tau_T(A_j) \xrightarrow{p.s.} \pi(A_j,\theta_o)$$

quand $T \to \infty$. D'où, il existe un $\Omega_o' \in \mathcal{A}$ avec $Pr(\complement\Omega_o') = 1$, tel que : quel que soit $j \in I$ (rappelons que I est fini), quel que soit $\omega \in \complement\Omega_o'$, quel que soit $\eta' > 0$, il existe un nombre positif $T_o'(\eta',\omega)$ pour lequel $T > T_o'$ entraîne que

$$\left| \frac{1}{T}\tau_T(A_j,\omega) - \pi(A_j,\theta_o) \right| < \eta' \ ,$$

inégalité qui est vraie en particulier pour $0 < \eta' < \gamma_{\theta,\theta_o}$, où $\theta \neq \theta_o$.

Soit U un voisinage quelconque de θ_o . Pour $\theta \in \complement U$,à cause de l'hypothèse b) et de ce qui précède,nous voyons qu'il existe un indice $j_o \in I$ tel que,pour $\omega \in \complement \Omega'_o$ et pour $T \geqslant T'_o$,

$$\left| \frac{1}{T} \tau_T(A_{j_o},\omega) - \pi(A_{j_o},\theta) \right|$$

$$\geqslant \max_{j\in I} \left|\pi(A_j,\theta_o) - \pi(A_j,\theta)\right| - \left|\frac{1}{T} \tau_T(A_{j_o},\omega) - \pi(A_{j_o},\theta_o)\right|$$

$$> \gamma_{\theta,\theta_o} - \eta' > 0 \quad ,$$

(l'indice j_o est précisément un qui réalise le maximum

$\max_{j\in I} \left|\pi(A_j,\theta_o) - \pi(A_j,\theta)\right|$) .

Comme $\pi(A_{j_o},\theta) < 1$,on a donc ,pour $\omega \in \complement \Omega'_o$, pour $T \geqslant T'_o(\eta',\omega)$ et pour $\theta \in \complement U$,

$$\sum_{j\in I} \frac{\left[\tau_T(A_j,\omega) - T\,\pi(A_j,\theta)\right]^2}{T^2\pi(A_j,\theta)} > (\gamma_{\theta,\theta_o} - \eta')^2 .$$

3º/ Quel que soit $j \in I$,quel que soit $k \in I$,quel que soit $\omega \in \Omega$ et quel que soit $\theta \in \Theta$,

$$\left|\frac{1}{T} N_T(A_j\times A_k,\omega) - \int_{A_j} \pi(dx,\theta)\; Q(x,A_k,\theta)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{T} N_T(A_j\times A_k,\omega) - \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\; Q(x,A_k,\theta_o) + \right.$$

$$\left. + \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\; Q(x,A_k,\theta_o) - \int_{A_j}\pi(dx,\theta)\; Q(x,A_k,\theta)\right|$$

$$\geqslant \Bigg|\, \left|\int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\; Q(x,A_k,\theta_o) - \int_{A_j} \pi(dx,\theta)\; Q(x,A_k,\theta)\right|$$

$$- \left|\frac{1}{T} N_T(A_j\times A_k,\omega) - \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\; Q(x,A_k,\theta_o)\right| \,\Bigg| .$$

Or,nous savons que,quel que soit $j \in I$ et quel que soit $k \in I$,

$$\frac{1}{T} N_T(A_j\times A_k) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\; Q(x,A_k,\theta_o)$$

quand $T \to \infty$. D'où,il existe un $\Omega''_o \in \mathcal{A}$ avec $\Pr(\complement \Omega''_o) = 1$, tel que: quel que soit $\omega \in \complement \Omega''_o$,quel que soit $\eta'' > 0$,il existe un nombre positif $T_0''(\eta'',\omega)$ pour lequel $T \geqslant T_0''$ entraîne que

$$\left|\frac{1}{T} N_T(A_j\times A_k,\omega) - \int_{A_j} \pi(dx,\theta_0)\ Q(x,A_k,\theta_0)\right| < \eta'' ,$$

inégalité qui est vraie en particulier pour $0<\eta''<\delta_{\theta,\theta_0}$,où $\theta \neq \theta_0$.

Soit U un voisinage quelconque de θ_0 .Pour $\theta\in \complement U$,à cause de l'hypothèse c) et de ce qui précède,nous voyons qu'il existe un couple d'indices $(j_0,k_0)\in I\times I$ tel que,pour $\omega\in \complement\Omega_0''$ et pour $T\geqslant T_0''$,

$$\left|\frac{1}{T} N_T(A_{j_0}\times A_{k_0},\omega) - \int_{A_{j_0}} \pi(dx,\theta)\ Q(x,A_{k_0},\theta)\right|$$

$$\geqslant \max_{(j,k)\in I\times I} \left|\int_{A_j} \pi(dx,\theta_0)\ Q(x,A_k,\theta_0) - \int_{A_j}\pi(dx,\theta)\ Q(x,A_k,\theta)\right|$$

$$- \left|\frac{1}{T} N_T(A_{j_0}\times A_{k_0},\omega) - \int_{A_{j_0}} \pi(dx,\theta_0)\ Q(x,A_{k_0},\theta_0)\right|$$

$$> \delta_{\theta,\theta_0} - \eta'' > 0 ,$$

(le couple (j_0,k_0) est précisément un qui réalise le maximum

$$\max_{(j,k)\in I\times I} \left|\int_{A_j}\pi(dx,\theta_0)\ Q(x,A_k,\theta_0) - \int_{A_j}\pi(dx,\theta)\ Q(x,A_k,\theta)\right| \quad).$$

Comme $\int_{A_{j_0}} \pi(dx,\theta)\ Q(x,A_{k_0},\theta) < 1$, on a donc ,pour $\omega\in\complement\Omega_0''$, pour $T \geqslant T_0''(\eta'',\omega)$ et pour $\theta\in\complement U$,

$$\sum_{(j,k)\in I\times I} \frac{\left[N_T(A_j\times A_k,\omega) - T\int_{A_j}\pi(dx,\theta)\ Q(x,A_k,\theta)\right]^2}{T^2\int_{A_j}\pi(dx,\theta)\ Q(x,A_k,\theta)} > (\delta_{\theta,\theta_0} - \eta'')^2 .$$

4º/ Ainsi,nous voyons que,pour $\theta\in\complement U$, il existe un $\Omega_0\in\mathcal{A}$ (c'est $\Omega_0'\cup\Omega_0''$) avec $Pr(\complement\Omega_0) = 1$ tel que: quel que soit $\omega\in\complement\Omega_0$, quel que soit $\eta > 0$ (en particulier $0<\eta<\min(\gamma_{\theta,\theta_0},\delta_{\theta,\theta_0})$), il existe un nombre positif $T_0(\omega,\eta)$ (c'est $\sup(T_0',T_0'')$) pour lequel $T\geqslant T_0''$ ~~xxxxx~~ entraîne que

$$\frac{1}{T}\Psi_T^2(\theta,\omega) > (\gamma_{\theta,\theta_0} - \eta)^2 + (\delta_{\theta,\theta_0} - \eta)^2$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{T}\left[\psi_T^2(\theta,\omega) - c_T \psi_T^2(\theta_o,\omega)\right]$$

$$> (\gamma_{\theta,\theta_o} - \eta)^2 + (\delta_{\theta,\theta_o} - \eta)^2 - c_T \alpha^2 \eta^2 - c_T \beta^2 \eta^2 ,$$

où

$$\alpha^2 = \mathrm{Card}(I) . \frac{1}{\min\limits_{j \in I} \pi(A_j,\theta_o)}$$

et

$$\beta^2 = \mathrm{Card}(I \times I) . \frac{1}{\min\limits_{(j,k)\in I\times I} \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\ Q(x,A_k,\theta_o)}$$

c'est à dire

$$\frac{1}{T}\left[\psi_T^2(\theta,\omega) - c_T \psi_T^2(\theta_o,\omega)\right] > (1 - c_T a^2)\eta^2 - 2\, b_{\theta,\theta_o}\eta + c_{\theta,\theta_o}^2$$

où

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$b_{\theta,\theta_o} = \gamma_{\theta,\theta_o} + \delta_{\theta,\theta_o}$$

$$c_{\theta,\theta_o}^2 = \gamma_{\theta,\theta_o}^2 + \delta_{\theta,\theta_o}^2 .$$

5º/ Nous pouvons choisir η de sorte que le deuxième membre soit strictement positif. En effet, considérons le trinôme

$$(1 - c_T a^2)\eta^2 - 2\, b_{\theta,\theta_o}\eta + c_{\theta,\theta_o}^2 .$$

Si $1 - c_T a^2 \geqslant 0$, il suffit de prendre

$$\eta < \frac{c_{\theta,\theta_o}^2}{2\, b_{\theta,\theta_o}} .$$

Si $1 - c_T a^2 < 0$, nous remarquerons que le trinôme en η a deux zéros de signes contraires; il suffit de prendre

$$0 < \eta < \eta_{\theta,\theta_o}^{(1)}$$

où $\eta_{\theta,\theta_o}^{(1)}$ désigne le plus grand des deux zéros.

Donc, quel que soit le signe de $1 - c_T a^2$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $0 < \eta < \eta_1$ entraîne que le trinôme est strictement positif. Il en résulte que, quel que soit $\omega \in \complement\Omega_o$, quel que soit $\theta \in \complement U$ et quel que soit $\eta \in]0, \eta_1[$, il existe un nombre positif $T_o(\eta, \omega)$ tel que $T \geq T_o$ entraîne que

$$\frac{1}{T}\left[\psi_T^2(\theta,\omega) - c_T\,\psi_T^2(\theta_o,\omega)\right] > 0 .$$

6º/ Nous avons vu que pour tout ω et pour $T > 0$,

$$\frac{1}{T}\left[\psi_T^2(\theta_T^*(\omega),\omega) - c_T\,\psi_T^2(\theta_o,\omega)\right] \leq 0$$

par définition de l'estimateur du ψ^2 quasi-minimum. Mais d'autre part, quel que soit $\omega \in \complement\Omega_o$, pour $T \geq T_o$, si $\theta_T^*(\omega) \in \complement U$, alors

$$\frac{1}{T}\left[\psi_T^2(\theta_T^*(\omega),\omega) - c_T\,\psi_T^2(\theta_o,\omega)\right] > 0 .$$

On voit donc qu'il y a contradiction, et par conséquent, $\theta_T^*(\omega) \in U$.

Ainsi, il y a convergence presque-sûre de θ_T^* vers θ_o.

II 7. PROPOSITION.- <u>Si</u> Θ <u>est un espace topologique séparé, et s'il existe une partition finie</u> $\mathcal{B}$<u>-mesurable</u> $(A_j)_{j\in I}$ <u>de</u> $\mathcal{X}$ <u>telle que</u> :

a) <u>Quel que soit</u> $\theta \in \Theta$, <u>quel que soit</u> $j \in I$ <u>et quel que soit</u> $k \in I$,

$$\int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\, Q(x,A_k,\theta) > 0 ,$$

b) <u>Quel que soit</u> $\theta \in \Theta$ <u>et quel que soit</u> $\theta' \in \Theta$, <u>avec</u> $\theta \neq \theta'$,

$$\max_{(j,k)\in I\times I} \left| \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\left[Q(x,A_k,\theta) - Q(x,A_k,\theta')\right] \right| = \lambda_{\theta,\theta'} \neq 0 .$$

<u>Alors, tout estimateur</u> θ_T^* <u>du</u> χ^2 <u>quasi-minimum de coefficient</u> c_T <u>converge presque-sûrement vers</u> θ_o <u>quand</u> $T \to \infty$.

<u>Démonstration</u>.

1º/ Nous remarquons tout d'abord que nous avons l'inégalité suivante: quel que soit $T > 0$, et quel que soit $\omega \in \Omega$,

$$\chi_T^2(\theta_T^*(\omega),\omega) \leq c_T\,\chi_T^2(\theta_o,\omega) ,$$

d'après la définition de l'estimateur du χ^2 quasi-minimum de coefficient c_T.

2º/ Quel que soit $(j,k) \in I \times I$, quel que soit $\omega \in \Omega$, et quel que soit $\theta \in \Theta$, nous avons

$$\left| \frac{1}{T} \left[N_T(A_j \times A_k, \omega) - \int_{A_j} \tau_T(dx,\omega)\ Q(x,A_k,\theta) \right] \right|$$

$$= \left| \frac{1}{T} N_T(A_j \times A_k,\omega) - \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\ Q(x,A_k,\theta_o) \right.$$

$$+ \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\ Q(x,A_k,\theta_o) - \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\ Q(x,A_k,\theta)$$

$$\left. + \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\ Q(x,A_k,\theta) - \frac{1}{T} \int_{A_j} \tau_T(dx,\omega)\ Q(x,A_k,\theta) \right|$$

$$\geqslant \left| \left| \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o) \left[Q(x,A_k,\theta_o) - Q(x,A_k,\theta) \right] \right| \right.$$

$$- \left| \left[\int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\ Q(x,A_k,\theta_o) - \frac{1}{T} N_T(A_j \times A_k,\omega) \right] \right.$$

$$\left. \left. + \left[\frac{1}{T} \int_{A_j} \tau_T(dx,\omega)\ Q(x,A_k,\theta) - \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\ Q(x,A_k,\theta) \right] \right| \right| .$$

Ceci étant, nous savons que, quel que soit $(j,k) \in I \times I$,

$$(1) \qquad \frac{1}{T} N_T(A_j \times A_k) \xrightarrow{p.s.} \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\ Q(x,A_k,\theta_o)$$

quand $T \to \infty$, et que quel que soit $(j,k) \in I \times I$ et quel que soit $\theta \in \Theta$,

$$(2) \qquad \frac{1}{T} \int_{A_j} \tau_T(dx)\ Q(x,A_k,\theta) \xrightarrow{p.s.} \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\ Q(x,A_k,\theta)$$

quand $T \to \infty$.

Soit $\theta \in \Theta$, nous pouvons écrire: Il existe $\Omega_o \in \mathcal{A}$, avec $Pr(\complement \Omega_o) = 1$ tel que, quel que soit $\omega \in \complement \Omega_o$ et quel que soit $\eta > 0$, il existe un nombre positif $T_o(\eta,\omega,\theta)$ pour lequel $T \geqslant T_o$ entraîne que

$$\left| \left[\int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\ Q(x,A_k,\theta_o) - \frac{1}{T} N_T(A_j\times A_k,\omega) \right] + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{1}{T} \int_{A_j} \tau_T(dx,\omega)\ Q(x,A_k,\theta) - \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\ Q(x,A_k,\theta) \right] \right|$$
$$< \eta$$

inégalité qui reste vraie en particulier pour $0 < \eta < \lambda_{\theta,\theta_o}$,où $\theta \neq \theta_o$.

Soit U un voisinage quelconque de θ_o . Pour $\theta \in \complement U$,à cause de b) et de ce qui précède,nous voyons qu'il existe un couple $(j_o,k_o) \in I \times I$ tel que,pour $\omega \in \complement \Omega_o$ et pour $T \geqslant T_o$,

(3) $$\left| \frac{1}{T} \left[N_T(A_{j_o} \times A_{k_o}, \omega) - \int_{A_{j_o}} \tau_T(dx,\omega)\ Q(x,A_{k_o},\theta) \right] \right|$$
$$\geqslant \max_{(j,k)\in I\times I} \left| \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o) \left[Q(x,A_k,\theta_o) - Q(x,A_k,\theta) \right] \right| - \eta$$
$$\geqslant \lambda_{\theta,\theta_o} - \eta > 0 .$$

Comme
$$\sum_{(j,k)\in I\times I} \int_{A_j} \pi(dx,\theta_o)\ \frac{Q(x,A_k,\theta)}{Q(x,\theta)} = 1 ,$$
nous avons donc d'après a),
$$\int_{A_{j_o}} \pi(dx,\theta_o)\ \frac{Q(x,A_{k_o},\theta)}{Q(x,\theta)} < 1 .$$

D'où
$$\int_{A_{j_o}} \pi(dx,\theta_o)\ Q(x,A_{k_o},\theta) < \sup_{x\in\mathfrak{X}} Q(x,\theta) < M_\theta .$$

De ce fait,et d'après (2),nous pouvons écrire: quel que soit $\theta \in \Theta$, quel que soit $\omega \in \complement \Omega_o$,il existe $T_1(\omega,\theta)$ tel que $T > T_1$ entraîne que
$$\frac{1}{T} \int_{A_{j_o}} \tau_T(dx,\omega)\ Q(x,A_{k_o},\theta) < M_\theta .$$

Pour $\theta \in \complement U$,il résulte de ce qui précède,de la définition de $\chi^2_T(\theta,\omega)$ et de (3) que : quel que soit $\theta \in \Theta$,quel que soit $\omega \in \complement \Omega_o$, et quel que soit $\eta > 0$ assez petit, il existe un nombre positif $T_2(\omega,\theta,\eta)$ (c'est $\sup(T_o,T_1)$) tel que $T \geqslant T_2$ entraîne que

(4) $$\frac{1}{T} \chi_T^2(\theta,\omega) > \frac{1}{M_\theta} (\lambda_{\theta,\theta_o} - \eta)^2 > 0 .$$

D'autre part, si on se reporte à (1) et (2), on voit que, quand $T \to \infty$,

$$\frac{1}{T} \chi_T^2(\theta_o,.) \xrightarrow{p.s.} 0 .$$

Ce qui peut s'écrire: quel que soit $\theta \in \Theta$, quel que soit $\omega \in \complement \Omega_o$, et quel que soit $\eta > 0$ assez petit, il existe $T_3(\omega,\eta)$ tel que $T \geqslant T_3$ entraîne que

$$\frac{1}{T} c_T \chi_T^2(\theta_o,\omega) < \frac{\eta^2}{M_\theta} .$$

Ce résultat, associé à (4), donne : Pour $\theta \in \complement U$, quel que soit $\eta > 0$ assez petit, quel que soit $\omega \in \complement \Omega_o$, il existe ~~xxxxxxx~~ un nombre positif $T_4(\omega,\eta,\theta)$ (c'est $\sup(T_3,T_2)$) tel que $T \geqslant T_4$ entraîne que

$$\frac{1}{T} \left[\chi_T^2(\theta,\omega) - c_T \chi_T^2(\theta_o,\omega)\right] > \frac{1}{M_\theta} \left[(\lambda_{\theta,\theta_o} - \eta)^2 - \eta^2 \right] .$$

Nous pouvons prendre $\eta = \frac{1}{3} \lambda_{\theta,\theta_o}$ et nous voyons alors que:

Quel que soit le voisinage U de θ_o, quel que soit $\theta \in \complement U$, il existe $\Omega_o \in \mathcal{A}$ avec $\Pr(\complement \Omega_o) = 1$, tel que quel que soit $\omega \in \complement \Omega_o$, il existe un nombre positif $T_5(\theta,\omega)$ pour lequel $T \geqslant T_5$ entraîne que

$$\frac{1}{T} \left[\chi_T^2(\theta,\omega) - c_T \chi_T^2(\theta_o,\omega)\right] > 0 .$$

3º/ Nous avons vu que, quel que soit $\omega \in \Omega$ et quel que soit $T > 0$

$$\frac{1}{T} \left[\chi_T^2(\theta_T^*(\omega), \omega) - c_T \chi_T^2(\theta_o,\omega)\right] \leqslant 0$$

et que d'autre part, quel que soit $\omega \in \Omega_o$, pour $T \geqslant T_5$, si $\theta_T^*(\omega) \in \complement U$, alors

$$\frac{1}{T} \left[\chi_T^2(\theta_T^*(\omega), \omega) - c_T \chi_T^2(\theta_o,\omega)\right] > 0$$

Par conséquent, nous devons avoir $\theta_T^*(\omega) \in U$. Ce qui démontre la convergence presque-sûre de θ_T^* vers θ_o.

DEUXIEME PARTIE

C'est dans l'article [18] de LeCalvé et Theodorescu que la notion de systèmes aléatoires généralisés à liasions complètes a été introduite.

Sa définition est la suivante:

On appelle système aléatoire généralisé à liaisons complètes une suite $((W_t, \mathcal{W}_t), (\mathcal{X}_{t+1}, \mathcal{B}_{t+1}), {}^t\pi, {}^tP)_{t\in\mathbb{T}}$, ($\mathbb{T}$ désignant soit $\mathbb{N}$ soit $\mathbb{Z}$), telle que pour tout $t \in \mathbb{T}$,

a/ $(W_t, \mathcal{W}_t)$ soit un espace mesurable ,

b/ $(\mathcal{X}_{t+1}, \mathcal{B}_{t+1})$ soit un espace mesurable appelé "espace des états" à l'instant t+1 ,

c/ ${}^t\pi$ soit une probabilité de transition de l'espace mesurable $(W_t \times \mathcal{X}_{t+1}, \mathcal{W}_t \otimes \mathcal{B}_{t+1})$ dans l'espace mesurable $(W_{t+1}, \mathcal{W}_{t+1})$,

d/ ${}^tP$ soit une probabilité de transition de l'espace mesurable $(W_t, \mathcal{W}_t)$ dans l'espace des états $(\mathcal{X}_{t+1}, \mathcal{B}_{t+1})$.

Lorsque,pour tout $(w,x) \in W_t \times \mathcal{X}_{t+1}$,la probabilité de transition ${}^t\pi[(w,x),.]$ est la probabilité de Dirac $\delta_{u_t(w,x)}(.)$ dont la masse est concentrée au point $u_t(w,x)$,(où u_t est une application mesurable de $(W_t \times \mathcal{X}_{t+1}, \mathcal{W}_t \otimes \mathcal{B}_{t+1})$ dans $(W_{t+1}, \mathcal{W}_{t+1})$), on retrouve la notion de systèmes aléatoires à liaisons complètes étudiée depuis longtemps par divers auteurs roumains...

Comme déjà indiqué dans l'introduction,notre contribution porte sur l'ergodicité faible, sur l'ergodicité forte et sur les liens qui les relient.

L'étude du comportement asymptotique des systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes nécessite l'utilisation des probabilités de transition ${}^{t}P^{n}_{h}$,dont nous résumons ici la définition:

. On commence par définir la probabilité de transition ${}^{t}P_{h}$ de $(\mathcal{W}_t, \mathcal{W}_t)$ dans $(\prod_{j=1}^{h} \mathcal{X}_{t+j}, \bigotimes_{j=1}^{h} \mathcal{B}_{t+j})$ par ${}^{t}P_{h}(w,A) = {}^{t}P(w,A)$ si $h = 1$,

et $${}^{t}P_{h}(w,A) = \int_{\mathcal{X}_{t+1}} {}^{t}P(w,dx_{t+1}) \int_{\mathcal{X}_{t+2}} \left[{}^{t}\Gamma_{x_{t+1}} {}^{t+1}P(.,dx_{t+2})\right](w) \ldots$$

$$\ldots \int_{\mathcal{X}_{t+h}} \left[{}^{t}\Gamma_{(x_{t+1},\ldots,x_{t+h-1})} {}^{t+h-1}P(.,dx_{t+h})\right](w).1_{A}(x_{t+1},\ldots,x_{t+h})$$ si $h > 1$,

où

$$\left[{}^{t}\Gamma_{(x_{t+1},\ldots,x_{t+j})} {}^{t+j}P(.,B)\right](w) =$$

$$= \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x_{t+1}),dw_{t+1}\right] \int_{W_{t+2}} {}^{t+1}\pi\left[(w_{t+1},x_{t+2}),dw_{t+2}\right] \ldots$$

$$\ldots \int_{W_{t+j}} {}^{t+j-1}\pi\left[(w_{t+h-1},x_{t+j}),dw_{t+j}\right] {}^{t+j}P(w_{t+j},B) ,$$

pour $(x_{t+1},\ldots,x_{t+j}) \in \mathcal{X}_{t+1} \times \ldots \times \mathcal{X}_{t+j}$, $B \in \mathcal{B}_{t+j+1}$ et $w \in W_t$.

. On définit ensuite la probabilité de transition ${}^{t}P^{n}_{h}$ de $(W_t, \mathcal{W}_t)$ dans $(\prod_{j=n}^{n+h-1} \mathcal{X}_{t+j}, \bigotimes_{j=n}^{n+h-1} \mathcal{B}_{t+j})$ par ${}^{t}P^{n}_{h}(w,A) = {}^{t}P_{h}(w,A)$ si $n = 1$,

et par $${}^{t}P^{n}_{h}(w,A) = {}^{t}P_{h+n-1}\left(w, \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{X}_{t+j} \times A\right) \quad \text{si } n > 1,$$

pour tout $w \in W_t$ et tout $A \in \bigotimes_{j=n}^{n+h-1} \mathcal{B}_{t+j}$.

Signalons enfin la relation ,valable pour $n > 1$:

$$(R) \qquad {}^{t}P^{n}_{h}(w,B) = \int_{\mathcal{X}_{t+1}} {}^{t}P(w,dx) \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] {}^{t+1}P^{n-1}_{h}(w_1,B)$$

que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

Afin de conserver l'aspect succint de l'exposé, nous éviterons l'examen de tous les cas particuliers. Les deux seuls cas auxquels nous ferons appel pour illustrer certains résultats énoncés plus loin sont les suivants :

-- <u>Les chaînes à liaisons complètes</u> (avec temps initial). Elles correspondent à

$$\mathbb{T} = \mathbb{N}$$

$$(W_t, \mathcal{W}_t^c) = \left(\prod_{k=o}^{t} \mathcal{X}_k \ , \ \bigotimes_{k=o}^{t} \mathcal{B}_k \right) \qquad (^1)$$

${}^t\pi(.,.) = \delta_{u_t(.)}(.)$,où u_t est l'application qui,à $(x_o,\ldots,x_t) \in W_t$ et à $x_{t+1} \in \mathcal{X}_{t+1}$ fait correspondre $(x_o,\ldots,x_t,x_{t+1}) \in W_{t+1}$.

Avec elles,pour tout $t \in \mathbb{T}$,tout $(x_o,\ldots,x_t) \in W_t$, tout $(x_{t+1},\ldots,x_{t+j}) \in \prod_{k=1}^{j} \mathcal{X}_{t+k}$,tout $A \in \mathcal{B}_{t+j}$ et tout $B \in \bigotimes_{j=n}^{n+h-1} \mathcal{B}_{t+j}$,

$$\left[{}^t\Gamma_{(x_{t+1},\ldots,x_{t+j})} \ {}^{t+j}P(.,A) \right](x_o,\ldots,x_t) =$$

$$= {}^{t+j}P\left[(x_o,\ldots,x_t,x_{t+1},\ldots,x_{t+j}), \ A\right]$$

et

${}^tP_h^n\left[(x_o,\ldots,x_t),B\right] =$

$(^1)$ $(\mathcal{X}_o, \mathcal{B}_o)$ n'étant pas défini dans le cas général d'un système aléatoire généralisé à liaisons complètes,nous posons ici,par convention,

$$(\mathcal{X}_o, \mathcal{B}_o) = (W_o, \mathcal{W}_o^c) .$$

$$= \int_{\mathcal{X}_{t+1}} {}^{t}P\left[(x_o,\ldots,x_t),dx_{t+1}\right] \int_{\mathcal{X}_{t+2}} {}^{t+1}P\left[(x_o,\ldots,x_{t+1}),dx_{t+2}\right]\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\int_{\mathcal{X}_{t+n+h-1}} {}^{t+n+h-2}P\left[(x_o,\ldots,x_{t+n+h-2}),dx_{t+n+h-1}\right]$$

$$\mathbf{1}_{\left(\prod_{k=1}^{n-1}\mathcal{X}_{t+k}\right)\times B}\left[(x_{t+1},\ldots,x_{t+n+h-1})\right] .$$

-- <u>Les chaînes de Markov</u> (avec temps initial). Elles correspondent à

$$\mathbb{T} = \mathbb{N}$$

$$(W_t,\mathcal{W}_t) = (\mathcal{X}_t,\mathcal{B}_t) \qquad (^1)$$

${}^{t}\pi(.,.) = \delta_{u_t(.)}(.)$ où u_t est l'application qui,à $x_t \in W_t$ et à $x_{t+1} \in \mathcal{X}_{t+1}$ fait correspondre $x_{t+1} \in \mathcal{X}_{t+1}$.

Avec elles,pour tout $t \in \mathbb{T}$,tout $x_t \in W_t$,
tout $(x_{t+1},\ldots,x_{t+j}) \in \prod_{k=1}^{j}\mathcal{X}_{t+k}$,tout $A \in \mathcal{B}_{t+j}$ et tout $B \in \bigotimes_{j=n}^{n+h-1}\mathcal{B}_{t+j}$

$$\left[{}^{t}\Gamma_{(x_{t+1},\ldots,x_{t+j})}\ {}^{t+j}P(.,A)\right](x_t) =$$

$$= {}^{t+j}P(x_{t+j},A) \qquad (^2)$$

et

$${}^{t}P_h^n(x_t\ ,\ B) =$$

---

(1) Comme le cas précédent,nous définissons

$$(\mathcal{X}_o,\mathcal{B}_o) = (W_o,\mathcal{W}_o) .$$

(2) Cette dernière quantité ${}^{t+1}P(x_{t+j},A)$ est souvent connue dans la théorie des chaînes de Markov (non homogènes) sous la notation $P_{t+j,t+j+1}(x_{t+j},A)$.

$$= \int_{\mathcal{X}_{t+n}} P_{t,t+n}(x_t, dx_{t+n}) \int_{\mathcal{X}_{t+n+1}} {}^{t+n}P(x_{t+n}, dx_{t+n+1}) \cdots\cdots$$

$$\cdots \int_{\mathcal{X}_{t+n+h-1}} {}^{t+n+h-2}P(x_{t+n+h-2}, dx_{t+n+h-1}).1_B(x_{t+n},..,x_{t+n+h-1}) \qquad (^3)$$

En particulier, avec $h = 1$,

$${}^tP^n(x_t, B) = P_{t,t+n}(x_t, B)$$

suivant la notation indiquée en (2) de la page précédente.

---

(3) Notation courante pour les chaînes de Markov non homogènes:

$$P_{t,t+n}(x_t, dx_{t+n}) = \int_{\mathcal{X}_{t+1}} {}^tP(x_t, dx_{t+1}) \int_{\mathcal{X}_{t+2}} {}^{t+1}P(x_{t+1}, dx_{t+2}) \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \int_{\mathcal{X}_{t+n-1}} {}^{t+n-2}P(x_{t+n-2}, dx_{t+n-1}) \; {}^{t+n-1}P(x_{t+n-1}, dx_{t+n}) .$$

Chapitre IV

CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES POUR L'ERGODICITE FAIBLE DE SYSTEMES ALEATOIRES GENERALISES A LIAISONS COMPLETES

Les conditions nécessaires et suffisantes exposées ci-dessous contribuent à une meilleure compréhension de la notion d'ergodicité faible. Nous nous intéressons, dans ce chapitre, aux systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes tels que, quel que soit $t \in \mathbb{T}$, $\mathcal{X}_t = \mathcal{X}$ et que la tribu $\bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{B}_{t+1}$ ne soit pas réduite à la tribu chaotique $\{\emptyset, \mathcal{X}\}$.

IV.1.DEFINITIONS.- Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{B}_{t+1}$, soit h un entier > 0 . Nous disons qu'un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $((W_t, \mathcal{W}_t), (\mathcal{X}, \mathcal{B}_{t+1}), {}^t\pi, {}^tP)_{t \in \mathbb{T}}$ est:

1º/ faiblement ergodique de puissance h, relativement à la tribu $\mathcal{B}$, si pour tout $t \in \mathbb{T}$, tout $B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$, tout $w' \in W_t$ et tout $w'' \in W_t$,

$$\lim_{n \to \infty} \left[{}^tP_h^n(w', B) - {}^tP_h^n(w'', B) \right] = 0 ,$$

2º/ faiblement et uniformément ergodique de puissance h, relativement à la tribu $\mathcal{B}$, si la limite

$$\lim_{n \to \infty} \left[{}^tP_h^n(w', B) - {}^tP_h^n(w'', B) \right] = 0$$

a lieu uniformément en t, B, w' et w",

3º/ faiblement ergodique, relativement à la tribu $\mathcal{B}$, s'il est faiblement ergodique de puissance h, relativement à la tribu $\mathcal{B}$, quel que soit $h \in \mathbb{N}^*$.

4º/ <u>faiblement et uniformément ergodique, relativement à la tribu $\mathcal{B}$, s'il est faiblement et uniformément ergodique de puissance h relativement à la tribu $\mathcal{B}$, quel que soit</u> $h \in \mathbb{N}^*$.

IV.2. Nous vérifions aisément que les propriétés suivantes sont vraies:

1º/ N'importe quel système aléatoire généralisé à liaisons complètes $((W_t, \mathcal{W}_t), (\mathcal{X}, \mathcal{B}_{t+1}), {}^t\pi, {}^tP)_{t \in \mathbb{T}}$ est faiblement ergodique, relativement à la tribu chaotique $\{\emptyset, \mathcal{X}\}$.

C'est la raison pour laquelle nous avons supposé $\bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{B}_{t+1}$ non réduite à la tribu $\{\emptyset, \mathcal{X}\}$, faute de quoi, l'objet de ce chapitre n'aura plus de sens.

2º/ Si un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $((W_t, \mathcal{W}_t), (\mathcal{X}, \mathcal{B}_{t+1}), {}^t\pi, {}^tP)_{t \in \mathbb{T}}$ est faiblement ergodique de puissance h, relativement à une tribu $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B} \subset \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{B}_{t+1}$), il est aussi faiblement ergodique de puissance h, relativement à une sous-tribu $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$. Ainsi, s'il est faiblement ergodique de puissance h, relativement à la fois à une tribu $\mathcal{B}_1$ et à une tribu $\mathcal{B}_2$ ($\mathcal{B}_1 \subset \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{B}_{t+1}$ et $\mathcal{B}_2 \subset \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{B}_{t+1}$), alors il est aussi faiblement ergodique de puissance h, relativement à la tribu $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$.

3º/ Si un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $((W_t, \mathcal{W}_t), (\mathcal{X}, \mathcal{B}_{t+1}), {}^t\pi, {}^tP)_{t \in \mathbb{T}}$ est faiblement ergodique de puissance h relativement à une tribu $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B} \subset \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{B}_{t+1}$), il est faiblement ergodique de puissance h' relativement à la même tribu $\mathcal{B}$, quel que soit $h' \in \mathbb{N}^*$ tel que $h' \leqslant h$.

IV.3.PROPOSITION.- <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système aléatoire généralisé à liaisons complètes</u> $((W_t, \mathcal{W}_t), (\mathcal{X}, \mathcal{B}_{t+1}), {}^t\pi, {}^tP)_{t\in\mathbb{T}}$ <u>soit faiblement ergodique de puissance</u> h <u>relativement à une sous-tribu non chaotique</u> $\mathcal{B}$ <u>de</u> $\bigcap_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{B}_{t+1}$ <u>est que, pour tout</u> $t\in\mathbb{T}$ <u>, il existe une suite de probabilités</u> $({}^t\nu_h^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>définies sur</u> $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, <u>telles que pour tout</u> $w\in W_t$ <u>et tout</u> $B\in\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left[{}^tP_h^n(w,B) - {}^t\nu_h^n(B)\right] = 0 \qquad (*)$$

<u>Démonstration.</u>

Condition nécessaire: Supposons que le système aléatoire généralisé à liaisons complètes soit faiblement ergodique. Pour chaque t fixé $\in\mathbb{T}$, considérons une probabilité ν_t sur $\mathcal{W}_t$, et posons, pour $B\in\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$,

$${}^t\nu_h^n(B) = \int_{W_t} \nu_t(dw_1)\ {}^tP_h^n(w_1,B) .$$

Nous avons ainsi construit une suite de probabilités $({}^t\nu_h^n)$ sur $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$. Pour tout $t\in\mathbb{T}$, tout $w\in W_t$ et tout $B\in\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, nous avons:

$$\lim_{n\to\infty}\left[{}^tP_h^n(w,B) - {}^t\nu_h^n(B)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[{}^tP_h^n(w,B) - \int_{W_t}\nu_t(dw_1)\ {}^tP_h^n(w_1,B)\right]$$

(*) A chaque étape n, nous avons un ${}^t\nu_h^n(B)$ différent, qui peut "osciller" avec ${}^tP_h^n(w,B)$. Donc, l'indépendance de ${}^t\nu_h^n(B)$ vis-à-vis de w et l'existence de la limite $\lim_{n\to\infty} {}^tP_h^n(w,B)$ (que nous ne supposons pas ici) ne sont pas liées.

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{W_t} \left[{}^tP_h^n(w,B) - {}^tP_h^n(w_1,B)\right] \nu_t(dw_1)$$

$$= \int_{W_t} \lim_{n\to\infty} \left[{}^tP_h^n(w,B) - {}^tP_h^n(w_1,B)\right] \nu_t(dw_1)$$

(d'après le théorème de Fatou-Lebesgue)

$$= \quad 0$$

(d'après l'hypothèse d'ergodicité faible).

Condition suffisante: Supposons que, pour tout $t \in \mathbb{T}$, il existe une suite de probabilités $({}^t\nu_h^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $w \in W_t$ et tout $B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left[{}^tP_h^n(w,B) - {}^t\nu_h^n(B)\right] = 0 .$$

Pour tout $B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, tout $w \in W_t$ (resp. tout $w' \in W_t$) et tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1(\varepsilon,B,w) \in \mathbb{N}^*$ (resp. $n_2(\varepsilon,B,w') \in \mathbb{N}^*$) tel que $n > n_1$ (resp. $n > n_2$) entraîne que

$$\left| {}^tP_h^n(w,B) - {}^t\nu_h^n(B) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left(\text{resp. } \left| {}^tP_h^n(w',B) - {}^t\nu_h^n(B) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Par conséquent, $n > \max(n_1,n_2)$ entraîne que

$$\left| {}^tP_h^n(w,B) - {}^tP_h^n(w',B) \right| < \varepsilon .$$

IV.4.PROPOSITION.- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $((W_t,\mathcal{W}_t),(\mathcal{X},\mathcal{B}_{t+1}),{}^t\pi,{}^tP)_{t\in\mathbb{T}}$ soit faiblement ergodique de puissance h, relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathcal{B}$ de $\bigcap_{t\in\mathbb{T}}\mathcal{B}_{t+1}$ est que, pour tout $t \in \mathbb{T}$, tout $w \in W_t$, il existe une probabilité ${}^t\nu_w$ définie sur $\mathcal{W}_t$, telle que pour tout $B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, tout $w' \in W_t$, tout $w'' \in W_t$,

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[{}^tP_h^n(w',B) - \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\ {}^tP_h^n(w_1,B)\right] = 0$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{W_t}\left[{}^t\nu_{w'}(dw_1) - {}^t\nu_{w''}(dw_1)\right] {}^tP_h^n(w_1,B) = 0$.

<u>Démonstration</u>.

Condition nécessaire: Supposons que le système aléatoire généralisé à liaisons complètes soit faiblement ergodique de puissance h relativement à la tribu $\mathcal{B}$. Suivant le raisonnement déjà utilisé dans la condition nécessaire de la proposition IV.3, pour $B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, formons la différence

$${}^tP_h^n(w',B) - \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\ {}^tP_h^n(w_1,B) \quad .$$

Nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\left[{}^tP_h^n(w',B) - \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\ {}^tP_h^n(w_1,B)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\left[{}^tP_h^n(w',B) - {}^tP_h^n(w_1,B)\right]$$

$$= \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\lim_{n\to\infty}\left[{}^tP_h^n(w',B) - {}^tP_h^n(w_1,B)\right]$$

(d'après le théorème de Fatou-Lebesgue)

$$= \quad 0$$

(d'après l'ergodicité faible de puissance h relativement à $\mathcal{B}$) .

Ce qui montre que (i) est vraie.

D'autre part, puisque

$${}^tP_h^n(w',B) - {}^tP_h^n(w'',B) =$$

$$= {}^tP_h^n(w',B) - \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\,{}^tP_h^n(w_1,B) \quad +$$

$$+ \int_{W_t} \left[{}^t\nu_{w'}(dw_1) - {}^t\nu_{w''}(dw_1) \right] {}^tP_h^n(w_1,B)$$

$$+ \int_{W_t} {}^t\nu_{w''}(dw_1)\ {}^tP_h^n(w_1,B) - {}^tP_h^n(w'',B) \quad ,$$

nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_{W_t} \left[{}^t\nu_{w'}(dw_1) - {}^t\nu_{w''}(dw_1) \right] {}^tP_h^n(w_1,B) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[{}^tP_h^n(w',B) - {}^tP_h^n(w'',B) \right]$$

$$- \lim_{n\to\infty} \left[{}^tP_h^n(w',B) - \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\ {}^tP_h^n(w_1,B) \right]$$

$$- \lim_{n\to\infty} \left[\int_{W_t} {}^t\nu_{w''}(dw_1)\ {}^tP_h^n(w_1,B) - {}^tP_h^n(w'',B) \right]$$

$$= 0 \quad ,$$

d'après l'ergodicité faible de puissance h,relativement à la tribu $\mathcal{B}$,et d'après (i) démontrée ci-dessus. Ce qui montre que la propriété (ii) est vraie.

Condition suffisante: Pour tout $t \in \mathbb{T}$, tout $n \in \mathbb{N}^*$,tout $B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, tout $w' \in W_t$ et tout $w'' \in W_t$,nous avons

$${}^tP_h^n(w',B) - {}^tP_h^n(w'',B) =$$

$$= {}^tP_h^n(w',B) - \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\ {}^tP_h^n(w_1,B)$$

$$+ \int_{W_t} \left[{}^t\nu_{w'}(dw_1) - {}^t\nu_{w''}(dw_1) \right] {}^tP_h^n(w_1,B)$$

$$+ \int_{W_t} {}^t\nu_{w''}(dw_1)\ {}^tP_h^n(w_1,B) - {}^tP_h^n(w'',B) \quad .$$

Or, d'après (i),

$$\lim_{n\to\infty} \left[{}^tP_h^n(w',B) - \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\ {}^tP_h^n(w_1,B) \right] = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{W_t} {}^t\nu_{w''}(dw_1)\ {}^tP_h^n(w_1,B) - {}^tP_h^n(w'',B)\right] = 0 .$$

Et, d'après (ii),

$$\lim_{n\to\infty}\int_{W_t}\left[{}^t\nu_{w'}(dw_1) - {}^t\nu_{w''}(dw_1)\right]\ {}^tP_h^n(w_1,B) = 0 .$$

Ce qui montre que

$$\lim_{n\to\infty}\left[{}^tP_h^n(w',B) - {}^tP_h^n(w'',B)\right] = 0 ,$$

c'est à dire que le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est faiblement ergodique de puissance h relativement à la tribu $\mathcal{B}$.

Le résultat suivant, vrai dans le cas où, de plus, $(W_t, \mathcal{W}_t)$ est indépendant de t, est un corollaire de la proposition IV.4 précédente:

IV.5. PROPOSITION.- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $((W,\mathcal{W}),(\mathcal{X},\mathcal{B}_{t+1}),{}^t\pi,{}^tP)_{t\in\mathbb{T}}$ soit faiblement ergodique de puissance h, relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathcal{B}$ de $\bigcap_{t\in\mathbb{T}}\mathcal{B}_{t+1}$ est qu'il existe $x_o\in\mathcal{X}$ tel que, pour tout $t\in\mathbb{T}$, tout $B\in\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, tout $w'\in W$ et tout $w''\in W$,

(i) $\lim_{n\to\infty}\left({}^tP_h^n(w',B) - \left[{}^t\Gamma_{x_o}\ {}^tP_h^n(.,B)\right](w')\right) = 0$,

(ii) $\lim_{n\to\infty}\left(\left[{}^t\Gamma_{x_o}\ {}^tP_h^n(.,B)\right](w') - \left[{}^t\Gamma_{x_o}\ {}^tP_h^n(.,B)\right](w'')\right) = 0$.

Démonstration.

Puisque

$$\left[{}^t\Gamma_{x_o}\ {}^tP_h^n(.,B)\right](w) = \int_W {}^t\pi\left[(w,x_o),dw_1\right]\ {}^tP_h^n(w_1,B) ,$$

il suffit d'appliquer la proposition IV.4 à ${}^t\nu_w(.) = {}^t\pi\left[(w,x_o),.\right]$

pour obtenir le résultat énoncé.

IV.6.PROPOSITION.- Soit $((W_t,\mathcal{W}_t),(\mathcal{X},\mathcal{B}_{t+1}),{}^t\pi\ ,{}^tP\ )_{t\in\mathbb{T}}$ un système aléatoire généralisé à liaisons complètes, et soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu non chaotique de la tribu $\bigcap_{t\in\mathbb{T}}\mathcal{B}_{t+1}$. Les trois énoncés suivants sont équivalents:

(i) Le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est faiblement ergodique de puissance h, relativement à $\mathcal{B}$.

(ii) Pour tout $t\in\mathbb{T}$ et tout $B\in\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, chaque fois qu'une suite croissante d'indices entiers positifs $(n_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est telle que, quand $j\to\infty$,

$$\int_{W_{t+1}}{}^t\pi\left[(w,x),dw_1\right]\ {}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B)$$

converge pour un couple $(w,x)\in W_t\times\mathcal{X}$, alors cette même suite d'indices $(n_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est telle que, pour tout couple $(w',x')\in W_t\times\mathcal{X}$

$$\int_{W_{t+1}}{}^t\pi\left[(w',x'),dw_1\right]\ {}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B)$$

converge aussi, et la limite est indépendante de (w',x').

(iii) Pour tout $t\in\mathbb{T}$, tout $B\in\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, tout $(w,x)\in W_t\times\mathcal{X}$ et tout $(w',x')\in W_t\times\mathcal{X}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{W_{t+1}}{}^t\pi\left[(w,x),dw_1\right]\ {}^{t+1}P_h^{n}(w_1,B)\right.$$
$$\left.-\int_{W_{t+1}}{}^t\pi\left[(w',x'),dw_1\right]\ {}^{t+1}P_h^{n}(w_1,B)\right] = 0 .$$

Démonstration.

$\boxed{(i)\Longrightarrow(ii)}$: Pour tout $t\in\mathbb{T}$ et tout $B\in\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, soit une suite croissante d'indices entiers positifs $(n_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ telle que quand $j \to \infty$,

$$\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] \; {}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B)$$

converge pour un couple $(w,x) \in W_t \times \mathcal{X}$. Une telle suite $(n_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ existe (car les nombres

$$\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] \; {}^{t+1}P_h^{n}(w_1,B)$$

sont des éléments de l'intervalle compact $[0,1]$) et dépend de t et de B ; l'énoncé (ii) indique qu'elle ne dépend pas de (w,x),et qu'il en est de même de

$$\lim_{j\to\infty} \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] \; {}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B) \; .$$

En effet:

Par hypothèse,le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est faiblement ergodique de puissance h,relativement à la tribu $\mathcal{B}$ .La condition nécessaire de la proposition IV.3 permet d'affirmer que,pour tout $t \in \mathbb{T}$,il existe une suite de probabilités $({}^{t}\nu_h^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur la tribu $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$,telle que pour tout $w'' \in W_t$ et $B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left[{}^{t+1}P_h^n(w'',B) - {}^{t+1}\nu_h^n(B)\right] = 0 \; .$$

Donc,pour la suite $(n_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ en particulier,nous avons aussi

$$\lim_{n\to\infty} \left[{}^{t+1}P_h^{n_j}(w'',B) - {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)\right] = 0 \; .$$

Par conséquent, pour le couple $(w,x) \in W_t \times \mathcal{X}$,nous avons

$$\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] \lim_{j\to\infty} \left[{}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B) - {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)\right] =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \left(\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] \; {}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B) - {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)\right)$$

$$= \lim_{j\to\infty}\left[\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right]\, {}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B) - \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right]\, {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)\right]$$

$$= \ 0 \ .$$

Or, pour le couple (w,x) , la limite

$$\lim_{j\to\infty} \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right]\, {}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B)$$

existe. Nous avons donc

$$\lim_{j\to\infty} \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right]\, {}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,\ B\ ) \ =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right]\, {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)$$

$$= \lim_{j\to\infty} {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B) \ .$$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{j\to\infty} {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)$ existe .

Avec cette même suite d'indices $(n_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$, quel que soit $(w',x')\in W_t\times\mathfrak{X}$, nous avons encore

$$\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w',x'),dw_1\right] \lim_{j\to\infty}\left[{}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B) - {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)\right] \ = \ 0 \ ,$$

c'est à dire, comme précédemment,

$$\lim_{j\to\infty}\left[\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w',x'),dw_1\right]\, {}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B) - \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right]\, {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)\right] \ = \ 0 \ ,$$

c'est à dire

$$\lim_{j\to\infty}\left(\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w',x'),dw_1\right]\, {}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B) \ - \ {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)\right) \ = \ 0 \ .$$

Comme la limite $\lim\limits_{j\to\infty} {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)$ existe, nous avons donc

$$\lim_{j\to\infty} \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w',x'),dw_1\right]\, {}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B) \ = \ \lim_{j\to\infty} {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B) \ ,$$

indépendante de (w',x').Ce qui montre que (i) $\Longrightarrow$ (ii).

$\boxed{(ii) \Longrightarrow (iii)}$: Supposons que,pour tout $t \in \mathbb{T}$ et tout $B \in \overset{h}{\bigotimes}\mathcal{B}$, chaque fois qu'une suite d'indices entiers positifs $(n_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est telle que,quand $j \to \infty$,

$$\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] \; {}^{t+1}P_h^{n_j}(w,B)$$

converge pour un couple $(w,x) \in W_t \times \mathcal{X}$,alors avec cette même suite d'indices $(n_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$,pour tout couple $(w',x') \in W_t \times \mathcal{X}$,

$$\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w',x'),dw_1\right] {}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B)$$

converge aussi,et la limite est indépendante de (w',x').

Pour une telle suite $(n_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$,

$$\lim_{j \to \infty} \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] \; {}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B) =$$

$$= \lim_{j \to \infty} \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w',x'),dw_1\right] \; {}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B) .$$

Considérons maintenant la suite

$$\left(\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] \; {}^{t+1}P_h^{n}(w_1,B) - \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w',x'),dw_1\right] {}^{t+1}P_h^{n}(w_1,B)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

qui est une suite de nombres de l'intervalle compact $[-1,+1]$.

Nous pouvons donc en extraire une sous-suite convergente

$$\left(\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] {}^{t+1}P_h^{n_k}(w_1,B) - \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w',x'),dw_1\right] {}^{t+1}P_h^{n_k}(w_1,B)\right)_{k \in \mathbb{N}^*} .$$

Mais de la suite

$$\left(\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] \; {}^{t+1}P_h^{n_k}(w_1,B)\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$$

qui est une suite de nombres de l'intervalle compact $[0,1]$, nous pouvons aussi extraire une sous-suite convergente

$$\left(\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] \, {}^{t+1}P_h^{n_{k_m}}(w_1,B) \right)_{m \in \mathbb{N}^*} .$$

(ii) assure que

$$\lim_{m\to\infty} \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] \, {}^{t+1}P_h^{n_{k_m}}(w_1,B) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w',x'),dw_1\right] \, {}^{t+1}P_h^{n_{k_m}}(w_1,B)$$

c'est à dire que

$$\lim_{m\to\infty} \left[\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] \, {}^{t+1}P_h^{n_{k_m}}(w_1,B) - \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w',x'),dw_1\right] \, {}^{t+1}P_h^{n_{k_m}}(w_1,B) \right] = 0$$

Par conséquent,

$$\lim_{k\to\infty} \left[\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] \, {}^{t+1}P_h^{n_k}(w_1,B) - \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w',x'),dw_1\right] \, {}^{t+1}P_h^{n_k}(w_1,B) \right] =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] \, {}^{t+1}P_h^{n_{k_m}}(w_1,B) - \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w',x'),dw_1\right] \, {}^{t+1}P_h^{n_{k_m}}(w_1,B) \right)$$

$$= 0 .$$

Ainsi, toute sous-suite convergente extraite de la suite

$$\left(\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] \, {}^{t+1}P_h^{n}(w_1,B) - \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w',x'),dw_1\right] \, {}^{t+1}P_h^{n}(w_1,B) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

converge vers 0 . D'où

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi[(w,x),dw_1]\ {}^{t+1}P_h^n(w_1,B) - \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi[(w',x'),dw_1]\ {}^{t+1}P_h^n(w_1,B)\right) = 0 .$$

c'est à dire (iii).

$\boxed{(iii) \Longrightarrow (i)}$: En intégrant les 2 membres de l'égalité de (iii) par rapport à ${}^{t}P(w,dx)$,nous avons

$$\int_{\mathcal{X}} {}^{t}P(w,dx) \lim_{n\to\infty}\left(\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi[(w,x),dw_1]\ {}^{t+1}P_h^n(w_1,B) - \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi[(w',x'),dw_1]\,{}^{t+1}P_h^n(w_1,B)\right) = 0 ,$$

c'est à dire encore

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{X}} {}^{t}P(w,dx)\left(\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi[(w,x),dw_1]\ {}^{t+1}P_h^n(w_1,B) - \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi[(w',x'),dw_1]\,{}^{t+1}P_h^n(w_1,B)\right) = 0 ,$$

c'est à dire,d'après la relation (R) citée à la page 42 , (*)

$$\lim_{n\to\infty}\left({}^{t}P_h^{n+1}(w,B) - \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi[(w',x'),dw_1]\ {}^{t+1}P_h^n(w_1,B)\right) = 0 .$$

Puis,en intégrant cette fois-ci par rapport à ${}^{t}P(w',dx')$,nous obtenons:

$$\int_{\mathcal{X}} {}^{t}P(w',dx') \lim_{n\to\infty}\left[{}^{t}P_h^{n+1}(w,B) - \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi[(w',x'),dw_1]\,{}^{t+1}P_h^n(w_1,B)\right] = 0 ,$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{X}} {}^{t}P(w',dx')\left[{}^{t}P_h^{n+1}(w,B) - \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi[(w',x'),dw_1]\,{}^{t+1}P_h^n(w_1,B)\right] = 0 ,$$

(*) $${}^{t}P_h^n(w,B) = \int_{\mathcal{X}} {}^{t}P(w,dx)\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi[(w,x),dw_1]\,{}^{t+1}P_h^{n-1}(w_1,B) .$$

c'est à dire, toujours d'après la relation (R) citée à la page 48,

$$\lim_{n \to \infty} \left[{}^{t}P_h^{n+1}(w,B) - {}^{t}P_h^{n+1}(w',B) \right] = 0 .$$

Le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est donc faiblement ergodique de puissance h relativement à la tribu $\mathcal{B}$.

IV.7.- Jusqu'à présent, les résultats énoncés ne concernent que l'ergodicité faible de puissance h relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathcal{B}$ de la tribu $\bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{B}_{t+1}$ des systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes $((W_t, \mathcal{W}_t), (\mathcal{X}, \mathcal{B}_{t+1}), {}^{t}\pi, {}^{t}P)_{t \in \mathbb{T}}$.

Il est clair, cependant, que les propositions IV.3, IV.4, IV.5, et IV.6 restent valables lorsque nous substituons à l'expression "faiblement ergodique de puissance h ", l'expression "faiblement ergodique", à la condition de préciser que ces énoncés sont vrais, quel que soit $h \in \mathbb{N}^*$.

De même, nous avons des résultats analogues concernant l'ergodicité faible et uniforme de puissance h (resp. l'ergodicité faible et uniforme): les énoncés précédents restent valables lorsque nous substituons à l'expression "faiblement ergodique de puissance h ", l'expression "faiblement et uniformément ergodique de puissance h " (resp. l'expression "faiblement et uniformément ergodique") à la condition de substituer à l'expression "pour tout..., $\lim_{n \to \infty}$ ...." , l'expression " $\lim_{n \to \infty}$ ....., uniformément en .... " (resp. "$\lim_{n \to \infty}$ ..., uniformément en ..." à la condition de préciser que les énoncés sont vrais quel que soit $h \in \mathbb{N}^*$).

IV.8.- Dans le cas particulier des chaînes à liaisons complètes (avec temps initial), l'énoncé (iii) de IV.6 devient:

" Pour tout $t \in \mathbb{T}$, tout $B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$, tout $(x_o, \ldots, x_t, x) \in W_t \times \mathcal{X}$, et tout $(x'_o, \ldots, x'_t, x') \in W_t \times \mathcal{X}$,

$$\lim_{n \to \infty} \left({}^{t+1}P_h^n[(x_o, \ldots, x_t, x), B] - {}^{t+1}P_h^n[(x'_o, \ldots, x'_t, x'), B] \right) = 0 \text{ "}$$

C'est exactement la définition IV.1 de l'ergodicité faible de puissance h relativement à la tribu $\mathcal{B}$, exprimée pour ces chaînes.

IV.9.- Dans le cas particulier des chaînes de Markov (avec temps initial), la condition nécessaire et suffisante exprimée dans la proposition IV.5 devient:

" .... il existe $x_o \in \mathcal{X}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{T}$, tout $B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$, tout $x' \in \mathcal{X}$,

$$\lim_{n \to \infty} \left[{}^{t}P_h^n(x', B) - {}^{t}P_h^n(x_o, B) \right] = 0 \text{ "}$$

Elle est évidemmment équivalente à la définition IV.1, qui s'énonce:

" .....pour tout $t \in \mathbb{T}$, tout $B \in \overset{h}{\otimes} \mathcal{B}$, tout $x' \in \mathcal{X}$ et tout $x'' \in \mathcal{X}$,

$$\lim_{n \to \infty} \left[{}^{t}P_h^n(x', B) - {}^{t}P_h^n(x'', B) \right] = 0 \text{ "}$$

Chapitre V

RELATIONS ENTRE L' ERGODICITE FORTE ET L' ERGODICITE FAIBLE DE SYSTEMES ALEATOIRES GENERALISES A LIAISONS COMPLETES

Dans ce chapite, après avoir donné des définitions équivalentes de l'ergodicité forte, nous examinerons les liens reliant l'ergodicité forte et l'ergodicité faible de systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes non homogènes.

V.1. DEFINITIONS.- Un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $((W_t,\mathcal{W}_t),(\mathcal{X},\mathcal{B}_{t+1}),{}^t\pi,{}^tP)_{t\in\mathbb{T}}$ est dit fortement ergodique de puissance h, relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathcal{B}$ de la tribu $\bigcap_{t\in\mathbb{T}}\mathcal{B}_{t+1}$ si pour tout $t\in\mathbb{T}$, tout $B\in\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$ et tout $w\in W_t$,

$$\lim_{n\to\infty} {}^tP_h^n(w,B) = \rho_h(B) ,$$

où ρ_h est une probabilité sur $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, indépendante de t et de w.

Le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est dit fortement ergodique relativement à la tribu $\mathcal{B}$ s'il est fortement ergodique de puissance h relativement à $\mathcal{B}$, quel que soit $h\in\mathbb{N}^*$.

Cette définition n'est, en fait, pas très "économique", car la non-dépendance de ρ_h vis-à-vis de t est une conséquence de l'existence de la limite $\lim_{n\to\infty} {}^tP_h^n(w,B)$ et de la non-dépendance de w de cette limite. Aussi, nous parait-il intéressant et utile d'énoncer la <u>définition équivalente</u> suivante:

V.2.PROPOSITION.- <u>Un système aléatoire généralisé à liaisons complètes</u> $((W_t, \mathcal{W}_t), (\mathcal{X}, \mathcal{B}_{t+1}), {}^t\pi, {}^tP)_{t\in\mathbb{T}}$ <u>est fortement ergodique de puissance</u> h <u>relativement à une sous-tribu non chaotique</u> $\mathcal{B}$ <u>de la tribu</u> $\bigcap_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{B}_{t+1}$ <u>si et seulement si pour tout</u> $t\in\mathbb{T}$, <u>tout</u> $B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$ <u>et tout</u> $w \in W_t$,

$$\lim_{n\to\infty} {}^tP_h^n(w,B) = {}^t\rho_h(B) \quad ,$$

<u>où</u> ${}^t\rho_h$ <u>est une probabilité sur</u> $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, <u>indépendante de</u> w.

<u>Démonstration.</u>

La condition suffisante, seule, est à démontrer. Pour cela, supposons que le système aléatoire généralisé à liaisons complètes $((W_t, \mathcal{W}_t), (\mathcal{X}, \mathcal{B}_{t+1}), {}^t\pi, {}^tP)_{t\in\mathbb{T}}$ soit tel que, pour tout $t\in\mathbb{T}$, tout $B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, et tout $w\in W_t$,

$$\lim_{n\to\infty} {}^tP_h^n(w,B) = {}^t\rho_h(B)$$

où ${}^t\rho_h$ est une probabilité sur $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$ indépendante de w seul.

Nous utilisons la relation (R) déjà citée page 42 :

$${}^tP_h^n(w,B) = \int_{\mathcal{X}} {}^tP(w,dx) \int_{W_{t+1}} {}^t\pi[(w,x),dx_1]\, {}^{t+1}P_h^n(w_1,B)$$

pour avoir

$$\begin{aligned}
{}^{t+1}\rho_h(B) &= \int_{\mathcal{X}} {}^tP(w,dx) \int_{W_{t+1}} {}^t\pi[(w,x),dw_1]\ {}^{t+1}\rho_h(B) \\
&= \int_{\mathcal{X}} {}^tP(w,dx) \int_{W_{t+1}} {}^t\pi[(w,x),dw_1] \lim_{n\to\infty} {}^{t+1}P_h^n(w_1,B) \\
&= \int_{\mathcal{X}} {}^tP(w,dx) \lim_{n\to\infty} \int_{W_{t+1}} {}^t\pi[(w,x),dw_1]\ {}^{t+1}P_h^n(w_1,B)
\end{aligned}$$

(d'après le théorème de Fatou-Lebesgue)

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} {}^{t}P(w,dx) \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi[(w,x),dw_1]\ {}^{t+1}P_h^n(w_1,B)$$

(encore d'après le théorème de Fatou-Lebesgue)

$$= \lim_{n\to\infty} {}^{t}P_h^n(w,B)$$

$$= \quad {}^{t}\rho_h(B) \quad .$$

Ainsi, ${}^{t}\rho_h = {}^{t+1}\rho_h$,quel que soit $t \in \mathbb{T}$.

Ce qui montre que ${}^{t}\rho_h$ est indépendante de $t \in \mathbb{T}$.

Une autre définition équivalente s'avère également intéressante.Elle s'énonce comme suit:

V.3.PROPOSITION.- Un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $((W_t, \mathcal{W}_t),(\mathcal{X},\mathcal{B}_{t+1}),{}^{t}\pi\ ,{}^{t}P\ )_{t\in\mathbb{T}}$ est fortement ergodique de puissance h ,relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathcal{B}$ de la tribu $\bigcap_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{B}_{t+1}$ si et seulement si,pour tout $t \in \mathbb{T}$ et tout $B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, la suite

$$\left(\int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi[(w,x),dw_1]^{t+1}P_h^n(w_1,B) \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

est convergente et sa limite est indépendante de (w,x).

Démonstration.

Condition nécessaire: D'après V.1 et le théorème de Fatou-Lebesgue,pour tout $t \in \mathbb{T}$,tout $w \in W_t$ et tout $x \in \mathcal{X}_{t+1}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi[(w,x),dw_1]^{t+1}P_h^n(w_1,B) =$$

$$= \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi[(w,x),dw_1] \lim_{n\to\infty} {}^{t+1}P_h^n(w_1,B)$$

$$= \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi[(w,x),dw_1]\ {}^{t+1}\rho_h(B) = {}^{t+1}\rho_h(B) \ .$$

Condition suffisante: Pour tout $t \in \mathbb{T}$,tout $w \in W_t$,tout $x \in \mathcal{X}$

et tout $B \in \overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$,par hypothèse,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] {}^{t+1}P_h^n(w_1,B) = {}^{t+1}\rho_h(B) .$$

Le théorème Vitali-Hahn-Saks (cf.par exemple[19]) montre que ${}^{t+1}\rho_h$ est une probabilité sur $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$. Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} {}^{t}P(w,dx) \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] {}^{t+1}P_h^n(w_1,B)$$

existe aussi,et on a

$$\lim_{n\to\infty} {}^{t}P_h^n(w,B) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} {}^{t}P(w,dx) \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] {}^{t+1}P_h^{n-1}(w_1,B)$$

$$= \int_{\mathcal{X}} {}^{t}P(w,dx) \lim_{n\to\infty} \int_{W_{t+1}} {}^{t}\pi\left[(w,x),dw_1\right] {}^{t+1}P_h^{n-1}(w_1,B)$$

$$= \int_{\mathcal{X}} {}^{t}P(w,dx)\; {}^{t+1}\rho_h(B)$$

$$= {}^{t+1}\rho_h(B) ,$$

où ${}^{t+1}\rho_h$ est une probabilité sur $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$,indépendante de w. Le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est donc fortement ergodique de puissance h relativement à la tribu $\mathcal{B}$,d'après V.2.

V.4.- Il est clair que <u>l'ergodicité forte</u> de puissance h relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathcal{B}$ de la tribu $\bigcap_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{B}_{t+1}$ d'un sytème aléatoire généralisé à liaisons complètes non-homogène $((W_t,\mathcal{W}_t),(\mathcal{X},\mathcal{B}_{t+1}),{}^{t}\pi ,{}^{t}P)_{t\in\mathbb{T}}$ <u>implique l'ergodicité faible</u> de même puissance,relativement à la même tribu $\mathcal{B}$,de ce sytème aléatoire généralisé à liaisons complètes,alors que la réciproque n'est pas vraie.

Le résultat suivant permet de préciser l'hypothèse qui fait défaut à un système aléatoire généralisé à liaisons complètes faiblement ergodique de puissance h relativement à une sous-tribu non chaotique, pour être fortement ergodique de même puissance relativement à la même tribu:

V.5.PROPOSITION.- <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système aléatoire généralisé à liaisons complètes</u> $((W_t,\mathcal{W}_t),(\mathcal{X},\mathcal{B}_{t+1}),{}^t\pi,{}^tP)_{t\in\mathbb{T}}$ <u>soit fortement ergodique de puissance</u> h , <u>relativement à une sous-tribu non chaotique</u> $\mathcal{B}$ <u>de la tribu</u> $\bigcap_{t\in\mathbb{T}}\mathcal{B}_{t+1}$, <u>est que</u>:

(i) <u>il soit faiblement ergodique de même puissance, relativement à la même tribu</u> $\mathcal{B}$,

(ii) <u>pour tout</u> $t\in\mathbb{T}$, <u>tout</u> $w\in W_t$, <u>tout</u> $x\in\mathcal{X}$ <u>et tout</u> $B\in\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$, <u>la suite</u>

$$\left(\int_{W_{t+1}} {}^t\pi\left[(w,x),dw_1\right]\,{}^{t+1}P_h^n(w_1,B)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

<u>soit convergente</u>.

<u>Démonstration.</u>

Condition nécessaire: la condition nécessaire découle de V.4 (qui implique (i)) et des propositions IV.6 et V.3 (qui impliquent (ii)).

Condition suffisante: l'unique (d'après l'hypothèse (ii)) valeur d'adhérence de la suite

$$\left(\int_{W_{t+1}} {}^t\pi\left[(w,x),dw_1\right]\,{}^{t+1}P_h^n(w_1,B)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

est indépendante de (w,x) (d'après la proposition IV.6.(ii) et par l'intermédiaire de (i)).Donc,le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est fortement ergodique de puissance h relativement à la tribu $\mathcal{B}$,d'après la proposition V.3.

V.6.- La remarque faite en IV.7 sur l'ergodicité faible est encore vraie pour l'ergodicité forte.

Les propositions V.2,V.3,V.4 et V.5 restent valables lorsque nous substituons à l'expression "fortement ergodique de puissance h ",l'expression "fortement ergodique" en précisant que ces énoncés sont vrais,quel que soit $h \in \mathbb{N}^*$.

V.7.- Nous avons donné dans V.1 la définition de l'ergodicité forte de puissance h (resp.l'ergodicité forte).

Nous disons qu'un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $((W_t, \mathcal{W}_t),(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{t+1}), {}^t\pi, {}^tP)_{t\in \mathbb{T}}$ est fortement et uniformément ergodique de puissance h relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathcal{B}$ de $\bigcap_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{B}_{t+1}$ si

$$\lim_{n\to\infty} {}^tP_h^n(w,B) = \rho_h(B)$$

uniformément en t,B,w ;où ρ_h est une probabilité sur $\overset{h}{\otimes}\mathcal{B}$ indépendante de t et de w.

Nous disons qu'il est fortement et uniformément ergodique s'il est fortement et uniformément ergodique de puissance h , quel que soit $h\in\mathbb{N}^*$.

Et nous remarquons que,dans le cas <u>homogène</u>,c'est à dire celui où $(W_t,\mathcal{W}_t),(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{t+1})$, ${}^t\pi$ et ${}^tP$ sont tous indépendants de t, nous pouvons dire que: "le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est fortement et uniformément ergodique si et seulement si $\alpha(P_h^n) \longrightarrow 1$ quand $n\to\infty$" .

[$\alpha(P_h^n)$ désigne le coefficient ergodique de la probabilité de transition P_h^n :

$$\alpha(P_h^n) = 1 - \sup_{\substack{(w,w')\in W_h^2 \\ B\in\otimes\mathcal{B}}} \left| P_h^n(w,B) - P_h^n(w',B) \right|$$

car (dans le cas homogène), l'ergodicité forte et uniforme est équivalente à l'ergodicité faible et uniforme (voir [18], et dans ce cas particulier des chaînes de Markov, voir [12]).

V.8.- Signalons pour terminer que l'on peut faire pour l'ergodicité forte des systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes, des remarques analogues à celles énoncées en IV.2 pour l'ergodicité faible.

B I B L I O G R A P H I E

[1] C.ANDRIEU.- La méthode du quasi-maximum de vraisemblance concernant des processus de Markov à temps continu, Comptes Rendus Acad.Sciences,Paris,t.272,1971,série A, p.334-336.

[2] C.ANDRIEU.- Existence et convergence des estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance pour des processus de Markov finis à temps continu, Revue Roum.de Math.Pures et Appli. XVII,Nº2, 1972, p.169-182.

[3] C.ANDRIEU et C.LANGRAND.- Estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance pour des processus de Markov à temps continu, Revue Roum.de Math.Pures et Appli. (à paraître)

[4] C.ANDRIEU,BUI T.L. et C.LANGRAND.- Sélecteurs,et estimateurs du ψ^2 quasi-minimum et du χ^2 quasi-minimum pour des processus de Markov à temps continu, Revue Roum.de Math.Pures et Appli.XVII,Nº10,1972,P.1497-1511.

[5] C.ANDRIEU,BUI T.L. et C.LANGRAND.- Sélection et estimation pour des processus de Markov à temps continu, Proceedings of the European meetings of statisticians, Budapest,September 1972.

[6] C.ANDRIEU,BUI T.L.,R.FLAVIGNY et C.LANGRAND.- Sur les systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes, Comptes Rendus Acad.Sciences,Paris,tL 274,1972,série A, p.1560-1562.

[7] C.ANDRIEU,BUI T.L.,R.FLAVIGNY et C.LANGRAND.- Sur le comportement asymptotique de systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes,
<u>Studia Mathematica</u> (à paraître).

[8] P.BILLINGSLEY.- <u>Statistical Inference for Markov processes</u>,
The University of Chicago Press,1961.

[9] N.BOURBAKI.- <u>Topologie Générale</u>,Chapitre 9 (Utilisation des nombres réels en Topologie),
Hermann,1955.

[10] N.BOURBAKI.- <u>Intégration</u>, Chapitres 1 à 4,
Hermann,1965.

[11] BUI-TRONG-LIEU.- Estimations pour des processus de Markov,
<u>Publ.Inst.Stat.Univ.Paris</u> XI,1962,p.73-188.

[12] BUI-TRONG-LIEU et M.DOREL.- Sur le comportement asymptotique de processus de Markov non homogènes,
<u>Studia Mathematica</u> XXVIII,1967,p.253-274.

[13] BUI-TRONG-LIEU et PHAN-THANH-LONG.- Sur l'existence et sur la convergence d'estimateurs concernant des processus de Markov,
<u>Acta Scientiarum Vietnamicarum</u> VI,1970,p.67-84.

[14] J.L.DOOB .- <u>Stochastic Processes</u>,
Wiley,1953.

[15] C.J.HIMMELBERG et F.S.VAN VLECK.- Some selection theorems for measurable functions,
<u>Canadian J.of Math.</u> XXI,1969,394-399.

[16] M.IOSIFESCU et R.THEODORESCU.- Random processes and learning, Springer-Verlag,1969.

[17] K.KURATOWSKI et C.RYLL-NARDZEWSKI.- A general theorem on selectors, Bull.Acad.Pol.Sciences,série Math.,XIII,1965,p.397-403.

[18] G.LECALVE et R.THEODORESCU.- Systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes, Z.Wahrscheinlichkeitstheorie, 19,1971,p.19-28.

[19] J.NEVEU.- Bases mathématiques du Calcul des Probabilités, Masson et Cie,1964.

[20] G.G.ROUSSAS.- Extension to Markov processes of a result of A.Wald about consistency of the maximum likelihood estimate, Z.Wahrscheinlichkeitstheorie, 4,1965,p.69-73.

D E U X I E M E   T H E S E

Propositions données par l'Université:

" THEOREME DE PEETRE SUR LES OPERATEURS DIFFERENTIELS "