N° d'ordre : 287

THESES

présentées à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur Es Sciences Mathématiques

par

Gérard COQUET

Première Thèse : **Sur les familles de décomposition et leurs applications à la théorie des ensembles convexes.**

Deuxième Thèse : Semi-groupes topologiques et application à la théorie de l'information.

Thèses soutenues le 10 Octobre 1973 devant la Commission d'Examen

MM. J. KAMPE DE FERIET, Président
M. PARREAU, Rapporteur
M. ROGALSKI, Examinateur
R. BANTEGNIE, Invité

A la mémoire de mon Père.

Je tiens à exprimer ma respectueuse reconnaissance à Monsieur le Professeur Kampé de Fériet qui m'a fait l'honneur de présider le Jury et a bien voulu me proposer un deuxième sujet.

Que Monsieur le Professeur Parreau, qui est le rapporteur de cette thèse, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude. Les conseils précieux qu'il n'a jamais cessé de me prodiguer, les nombreuses discussions qu'il m'a si aimablement accordées, en ne ménageant ni sa peine, ni son temps, ont été un constant encouragement et ont contribué à l'élaboration de mes travaux.

Je suis vivement reconnaissant à Monsieur le Professeur Bantegnie de l'Université de Besançon et à Monsieur le Professeur Rogalski d'avoir accepté de faire partie de la Commission d'Examen.

Je remercie mon collègue Jean-Claude Dupin pour sa collaboration amicale au cours de ces recherches.

Je tiens également à remercier le Secrétariat de l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université des Sciences et Techniques de Lille et notamment Mesdames Tatti et Lengaigne qui ont permis la réalisation matérielle diligente de cet ouvrage.

*

* *

PLAN DU MEMOIRE

-:-:-

INTRODUCTION. 1

CHAPITRE I.- PRELIMINAIRES ET NOTION DE CONE D'INFINITUDE.- 3

1.1.- Rappel de quelques notions et notations. 3

1.2.- Cône d'éloignement. Cône d'infinitude. 11

CHAPITRE II.- QUELQUES PROPRIETES DE LA SOMME ET DE L'ENVELOPPE CONVEXE DE LA REUNION D'ENSEMBLES CONVEXES LINEAIREMENT BORNES.- 16

2.1.- Exemples. 16

2.2.- Cône d'infinitude d'un fermé. Application à l'étude du cône d'infinitude de l'enveloppe convexe et de la somme d'un convexe et d'un borné. 20

2.3.- Etude du cône d'infinitude de la somme et de l'enveloppe convexe de deux convexes dont l'un est linéairement borné et de dimension finie. 26

2.4.- Lien entre le cône d'infinitude de la somme et celui de l'enveloppe convexe. 29

2.5.- Cône d'infinitude et somme directe de convexes. 32

CHAPITRE III.- NOTION DE FAMILLE DE DECOMPOSITION ET THEOREMES DE DECOMPOSITION.- 37

3.1.- Définitions. 37

3.2.- Théorèmes fondamentaux. 40

3.3.- Exemples. 45

3.4.- Remarques. 50

CHAPITRE IV.- CARACTERISATION DES COUPLES DE DECOMPOSITION D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION INFINIE.- 57

4.1.- Définitions. 57

4.2.- Cas de la dimension infinie dénombrable. 58

4.3.- Cas de la dimension infinie quelconque. 62

4.4.- Conclusion. 69

4.5.- Remarques. 70

CHAPITRE V.- APPLICATION A LA CARACTERISATION DES ENSEMBLES CONVEXES UBIQUITAIRES.- 73

5.1.- Définition et notation. 74

5.2.- La notion de convexe ubiquitaire basique. 74

5.3.- Problème réciproque et caractérisation. 75

CHAPITRE VI.- APPLICATION A LA CARACTERISATION D'UNE CLASSE DE CONVEXES DENSES DANS UN ESPACE SEMI-NORME. DECOMPOSITION EN SOMME DE CONVEXES DENSES.- 89

6.1.- Caractérisation d'une classe de convexes denses dans un espace vectoriel semi-normé de dimension infinie. 90

6.2.- Décomposition d'un espace vectoriel semi-normé de dimension infinie en somme de convexes denses. 91

6.3.- Partition en cônes convexes denses. 103

CHAPITRE VII.- APPLICATION A L'ETUDE DE LA BORNE INFERIEURE DE DEUX TOPOLOGIES D'ESPACE SEMI-NORME.- 108

7.1.- Notion de noyau linéaire. 109

7.2.- Caractérisation des couples de topologies d'espace semi-normé ayant pour borne inférieure la topologie grossière. 111

7.3.- Etude de la borne inférieure de deux topologies d'espace semi-normé. 116

BIBLIOGRAPHIE 126

INDEX TERMINOLOGIQUE. 129

INTRODUCTION

Cette thèse constitue d'une part le développement de certains résultats publiés à ce jour sous forme de notes aux Comptes-Rendus [8], [9], [10], [11], [12] et généralise d'autre part l'article [7].

La notion de famille de décomposition, introduite au troisième chapitre, est la notion centrale de cet ouvrage, les cinquième, sixième, septième chapitres en constituant des applications en Géométrie et en Topologie.

Le premier chapitre est consacré au rappel de notions connues et à l'introduction de la notion nouvelle de cône d'infinitude.

Dans le deuxième chapitre, nous généralisons les propriétés trouvées dans [7] ; la notion de cône d'infinitude permet, en outre, de formuler les résultats de cet article de façon plus harmonieuse.

Dans les troisième et quatrième chapitres, nous introduisons et étudions la théorie des familles de décomposition qui conduit à un procédé de construction de couples de convexes (même linéairement bornés) de somme égale à l'espace vectoriel tout entier. Une famille importante de tels couples est caractérisée au quatrième chapitre.

Au cinquième chapitre, nous caractérisons les convexes ubiquitaires en tant que sur-ensembles de convexes ubiquitaires particuliers que nous qualifions de basiques ou d'élémentaires. Les convexes ubiquitaires ont été mis en évidence par Klee dans [20] et ont connu, depuis, un grand développement en Analyse Convexe et des applications dans d'autres domaines (en particulier en "utility theory").

Le sixième chapitre est consacré à l'étude du phénomène de densité dans les espaces vectoriels semi-normés de dimension infinie. Nous y étudions la décomposition d'un espace vectoriel semi-normé de dimension infinie en somme de convexes denses (en particulier en somme directe de variétés denses) et nous donnons un théorème relatif à la partition en cônes convexes denses ; ces résultats s'intègrent dans la lignée de travaux classiques (voir, par exemple, [18] et [19]).

Le but du septième chapitre est d'étudier la borne inférieure de deux topologies d'espace semi-normé. En particulier, nous analysons de façon générale le fait que deux topologies d'espace normé peuvent avoir une borne inférieure qui soit une topologie non séparée.

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES ET NOTION DE CÔNE D'INFINITUDE

Ce chapitre est consacré à un rappel de notions souvent élémentaires et connues.

En outre, nous introduisons, dans ce chapitre, la notion de cône d'infinitude qui semble ne pas avoir été explicitée dans les ouvrages classiques. Nous en dégageons des propriétés de base qui serviront ultérieurement, notamment au deuxième chapitre.

1.1.- RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS ET NOTATIONS.-

Soient A et B deux ensembles tels que $B \subset A$; le complémentaire de B dans A sera noté $\complement_A B$ ou encore $A \sim B$.

Dans toute la suite de l'ouvrage, les espaces vectoriels considérés sont réels et toutes les bases envisagées sont des bases algébriques.

Dans le paragraphe 1.1 , nous désignons par E un espace vectoriel.

1.1.1.- *Notions de segment et de demi-droite*

- Soient a et b deux points de E ; nous appelons segment (ou segment fermé) d'extrémités a et b et notons $[a,b]$ l'ensemble

$$\{\lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in [0,1]\}.$$

- Si $a \neq b$, nous appelons segment ouvert (ou intervalle ouvert) d'extrémités a et b et notons $]a,b[$ l'ensemble

$$\{\lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in]0,1[\}.$$

- Si $a \neq b$, nous appelons segment semi-ouvert à gauche (ou intervalle semi-ouvert à gauche) d'extrémités a et b et notons $]a,b]$ l'ensemble

$$\{\lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in [0,1[\}.$$

- Soient a un point de E et t un vecteur non nul de E, on appelle demi-droite ouverte (resp. : fermée) de sommet a (ou d'origine a) et de direction t l'ensemble des points de la forme $a+\lambda t$ avec $\lambda > 0$ (resp. : $\lambda \geq 0$).

1.1.2.- Notions d'ensembles convexe, étoilé, symétrique

A étant un sous-ensemble de E et a un point de E,

- A est convexe si, pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in A$, $[x,y] \subset A$ (l'ensemble vide (noté $\emptyset$) est convexe).
- A est étoilé par rapport à a si, pour tout $x \in A$, $[a,x] \subset A$ (lorsque a est l'origine, on dira simplement que A est étoilé).
- A est symétrique par rapport à a si, pour tout $x \in A$, $2a - x \in A$ (lorsque a est l'origine, on dira simplement que A est symétrique).

1.1.3.- Fermetures spatiale et linéaire. Dimension

A étant un sous-ensemble de E,

- nous appelons fermeture spatiale de A (supposé non vide), notée $S[A]$, l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant A, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel contenant A, c'est-à-dire encore le sous-espace vectoriel engendré par A.

$S[A]$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de points de A.

- nous appelons fermeture linéaire de A, notée $L[A]$, l'intersection de toutes les variétés linéaires contenant A, c'est-à-dire la plus petite variété linéaire contenant A, c'est-à-dire encore la variété linéaire engendrée par A.

A étant non vide, $L[A]$ est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_i \lambda_i x_i$, où $x_i \in A$, $\lambda_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices i et $\sum_i \lambda_i = 1$.

- A étant non vide, nous appelons dimension de A, notée $\dim A$, la dimension de $L[A]$, c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel parallèle à $L[A]$.

1.1.4.- Somme d'ensembles et enveloppe convexe

- Soient n parties $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de E ; nous appelons somme de ces n parties et notons $\sum_{i=1}^{n} A_i$ l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^{n} a_i$ où, pour tout i, $a_i \in A_i$.
- Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide de parties de E contenant toutes l'origine 0, nous appelons somme des A_i et notons $\sum_{i\in I} A_i$ l'ensemble des sommes $\sum_{i\in I} a_i$ où, pour tout $i \in I$, $a_i \in A_i$ et $a_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices i.
- Nous appelons enveloppe convexe (resp. : convexe symétrique) d'une partie A de E et notons $C[A]$ (resp. : $CS[A]$) l'intersection de tous les ensembles convexes (resp. : convexes symétriques) contenant A, c'est-à-dire le plus petit ensemble convexe (resp. : convexe symétrique) contenant A.
- On a les propriétés suivantes (voir par exemple [3]) : $(A_i)_{i\in I}$ étant une famille non vide de parties convexes non vides de E, $C[\bigcup_{i\in I} A_i]$ est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires convexes $\sum_{i\in I} \lambda_i a_i$ où, pour tout $i \in I$, $a_i \in A_i$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\lambda_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices, et $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$.

En particulier A étant une partie non vide de E, $C[A]$ est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires convexes des points de A.

A étant une partie non vide de E, $CS[A]$ est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_i \lambda_i a_i$ où, pour tout $i \in I$, $a_i \in A$, $\lambda_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices, et $\sum_i |\lambda_i| \leq 1$. $CS[A] = C[A \cup (-A)]$.

Proposition 1.1.-

Soient n *parties* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *de l'espace vectoriel* E

1) Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *désignent* n *nombres réels* ≥ 0 *tels que* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, *on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \subset C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i].$$

2) Si tous les A_i *sont convexes et contiennent l'origine, on a :*

$$C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] \subset \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Démonstration

Elle est triviale.

1.1.5.- Ensemble linéairement borné

- Une partie A de E est dite linéairement bornée si son intersection avec toute droite est bornée (cette droite étant munie de la topologie naturelle).
- Ainsi un convexe est linéairement borné si et seulement s'il ne contient aucune demi-droite.
- Signalons que dans $\mathbb{R}^n$ (muni de la topologie naturelle), il y a équivalence pour un convexe fermé entre le fait d'être borné et le fait d'être linéairement borné (voir [25], théorèmes 8.3 et 8.4) . Cette propriété avait été remarquée, pour un convexe fermé de $\mathbb{R}^3$, par Stoker [26]. Nous verrons au chapitre 2 que l'hypothèse de fermeture n'est pas nécessaire.

1.1.6.- Point interne. Point interne relatif

- Un point x est point interne (resp. : interne relatif) d'une partie A de E si , pour toute droite D passant par x (resp. : passant par x et contenue dans $L[A]$), $D \cap A$ contient un segment ouvert auquel appartient x.

- L'ensemble des points internes (resp. : internes relatifs) de A est appelé internat (resp. : internat relatif) de A et noté $i[A]$ (resp. : $ir[A]$).
- Si 0 est point interne de A, A est dit absorbant.
- Rappelons maintenant quelques propriétés :

Proposition 1.2.-

Soit A une partie de l'espace vectoriel E.

1) $i[A] \subset ir[A] \subset A$.

2) si A est convexe, $i[A]$ et $ir[A]$ le sont aussi.

3) si E est un espace vectoriel topologique et si A est convexe, $\overset{\circ}{A}$ l'est aussi ($\overset{\circ}{A}$ désignant l'intérieur de A).

4) si E est un espace vectoriel topologique, alors :

$$\overset{\circ}{A} \subset i[A].$$

Si, de plus, E est séparé et si A est un corps convexe (c'est-à-dire un convexe d'intérieur non vide), alors :

$$\overset{\circ}{A} = i[A].$$

5) si $E = \mathbb{R}^n$ muni de la topologie naturelle, tout convexe A tel que $L[A] = E$ est un corps convexe.

Démonstration

Pour la démonstration des quatre premières parties voir [27] et pour la démonstration de la cinquième voir [13] ou [6].

Proposition 1.3.-

Soit, dans un espace vectoriel E, un convexe C symétrique par rapport à un point c, alors c est point interne relatif de C.

Démonstration

Il est clair qu'on peut se ramener au cas où c est l'origine de E ; ainsi $L[C] = S[C]$.

Si C est réduit au seul point 0, la proposition est évidemment vraie.

Supposons C non réduit au seul point 0.

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de $S[C]$ telle que, pour tout $i \in I$, $e_i \in C$. Soient D une droite passant par 0 et contenue dans $S[C]$, et un point $x \in D$ tel que $x \neq 0$.

On a $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ où $x_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. Puisque C est convexe et symétrique, on constate que $D \cap C$ contient le segment $[-\lambda x, \lambda x]$, λ étant tel que $\lambda \sum_{i\in I} |x_i| = 1$.

1.1.7.- *Notion de lin*

- A étant une partie de E, un point x est linéairement accessible de A (voir [20]) ou encore attenant à A (voir par exemple [5]) s'il existe $a \in A$, $a \neq x$ tel que $[a,x] \subset A$.

- L'ensemble des points linéairement accessibles de A sera appelé lina de A ou encore attenance de A et sera noté lina A.

- L'ensemble $A \cup$ lina A sera appelé lin de A ou encore enveloppe algébrique de A et sera noté lin A.

- A est dit algébriquement fermé si lin $A = A$.

- Notons que pour un ensemble convexe contenant plus d'un point, lin A = lina A.

- Rappelons maintenant quelques propriétés :

Proposition 1.4.-

Soit A *une partie de l'espace vectoriel* E.

1) *si* A *est convexe,* lin A *l'est aussi.*

2) *si* E *est un espace vectoriel topologique et si* A *est convexe,* $\bar{A}$ *est convexe (* $\bar{A}$ *désignant l'adhérence de* A).

3) si E *est un espace vectoriel topologique, alors :*

$$\text{lin } A \subset \bar{A}.$$

Si, de plus, A *est un corps convexe, alors :*

$$\bar{A} = \bar{\mathring{A}} \quad \text{et} \quad \mathring{A} = \mathring{\bar{A}}.$$

Si E *est séparé et si* A *est un corps convexe, alors :*

$$\text{lin } A = \bar{A}.$$

4) si A *est convexe, si* $x \in \text{ir}[A]$ *(resp. :* $\text{i}[A]$*), si* $y \in \text{lin } A$*, alors* $[x,y[\subset \text{ir}[A]$ *(resp. :* $\text{i}[A]$*).*

5) si E *est un espace vectoriel topologique, si* A *est convexe, si* $x \in \mathring{A}$*, si* $y \in \bar{A}$*, alors* $[x,y[\subset \mathring{A}$.

<u>Démonstration</u>

Voir [20], [27] et [14].

<u>Proposition</u> 1.5.-

Soit, dans un espace vectoriel E*, un convexe* C *et soit* $x \in \text{ir}[C]$ *(resp. :* $\text{i}[C]$ *;* $\mathring{C}$ *si* E *est un espace vectoriel topologique). Si* C *contient une demi-droite* Δ *(ouverte ou fermée), alors la demi-droite fermée de sommet* x *parallèle à* Δ *et de même sens que* Δ *est contenue dans* $\text{ir}[C]$ *(resp. :* $\text{i}[C]$ *;* $\mathring{C}$ *si* E *est un espace vectoriel topologique).*

<u>Démonstration</u>

Désignons par a un point de Δ avec $a \neq x$. Puisque $x \in \text{ir}[C]$ (resp. : $\text{i}[C]$; $\mathring{C}$ si E est un espace vectoriel topologique), il existe (d'après la proposition 1.4) y tel que $x \in]y,a[$ et tel que $y \in \text{ir}[C]$ (resp. : $\text{i}[C]$; $\mathring{C}$ si E est un espace vectoriel topologique). Il suffit alors de considérer l'homothétie de centre y qui à a associe x et d'appliquer la proposition 1.4.

1.1.8.- *Ensemble ubiquitaire*

- Une partie A de E est dite ubiquitaire (resp. : proprement ubiquitaire) si lin A = E (resp. : lin A = E et $A \neq E$).
- Dans [20], Klee a montré qu'un espace vectoriel E est de dimension infinie si et seulement s'il existe dans E un convexe proprement ubiquitaire ; le convexe proprement ubiquitaire mis en évidence dans cet article est non linéairement borné. Dans [22], Klee a donné un exemple de convexe proprement ubiquitaire et linéairement borné.

Proposition 1.6.-

Soit C *un convexe proprement ubiquitaire de l'espace vectoriel* E *(de dimension infinie). Alors* i[C] *et* ir[C] *sont vides ; ainsi, pour tout* $c \in C$, C *n'est pas symétrique par rapport à* c.

Démonstration

Il est clair que L[C] = E ; ainsi i[C] = ir[C].

Puisque $C \neq E$, il existe $x \in E \sim C$. Si ir[C] est non vide, le théorème de Hahn-Banach montre qu'on peut séparer $\{x\}$ et C, et alors C est contenu dans un demi-espace de E, ce qui est absurde.

La proposition 1.3 montre alors que, pour tout $c \in C$, C n'est pas symétrique par rapport à c.

1.1.9.- *Cône*

- Soient $A \subset E$ et $s \in E$; A est appelé cône de sommet s si, pour tout $x \in A$ avec $x \neq s$ et pour tout $\lambda > 0$, $s + \lambda(x-s) \in A$ (lorsque s est l'origine, on dira simplement que A est un cône).
- Le cône A de sommet s est dit pointé (resp. : épointé) si $s \in A$ (resp. : $s \notin A$).

1.1.10.- *Hypercône*

- V désignant une variété linéaire de E différente de E et du vide, nous appellerons hypercône D d'arête V, tout convexe maximal de E ne contenant pas V (lorsque V est réduite à un seul point, nous dirons aussi hypercône de sommet V).
- On rappelle que D est un cône convexe épointé dont tout point de V est un sommet.
- L'ensemble $E \sim D$ est un cône convexe pointé dont tout point de V est un sommet ; il sera appelé cohypercône d'arête V associé à D (lorsque V est réduite à un seul point, nous dirons aussi cohypercône de sommet V).
- On rappelle aussi que, s étant un élément quelconque de V, si on désigne par D' l'ensemble symétrique de D par rapport à s (c'est-à-dire $\{2s\}-D$), D' est indépendant du choix de s dans V et D' est un hypercône d'arête V. On a aussi :

$$E \sim D = V \cup D'.$$

- Rappelons (voir [23], théorème 2.2) que, s étant un point de E, un convexe A est un hypercône de sommet s si et seulement si, A' désignant l'ensemble symétrique de A par rapport à s, on a $A \cup A' = E \sim \{s\}$.
- Historiquement, la notion d'hypercône de sommet s a été introduite par Hammer dans [15] sous le nom de "semispace", la terminologie "hypercône" ayant été introduite par Köthe dans [24]. Cette notion a été développée dans [16]. Puis Hammer a introduit, dans [17], la notion d'hypercône d'arête V sous le nom de "demispace at V". Dans [23], Klee a étudié la structure des hypercônes.

1.2.- CÔNE D'ELOIGNEMENT. CÔNE D'INFINITUDE.-

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel et A une partie non vide de E.

1.2.1.- Définition 1.1.-

- Soit $a \in A$. *On appelle cône d'éloignement de* A *en* a, *noté* $\mathcal{E}_a[A]$, *le plus grand cône pointé de sommet* 0 *tel que* $\{a\} + \mathcal{E}_a[A]$ *soit contenu dans* A. *On a :*

$$\mathcal{E}_a[A] = \bigcap_{\lambda>0} \lambda(A - \{a\}).$$

- On appelle cône d'éloignement de A, *noté* $\mathcal{E}[A]$, *l'ensemble*

$$\mathcal{E}[A] = \bigcap_{a\in A} \mathcal{E}_a[A].$$

- On appelle cône d'infinitude de A, *noté* $\mathcal{J}[A]$, *l'ensemble*

$$\mathcal{J}[A] = \bigcup_{a\in A} \mathcal{E}_a[A].$$

- Dans le cas où A *est vide, nous poserons* $\mathcal{E}[A] = \mathcal{J}[A] = \{0\}$.

1.2.2.- Remarques

- Dans le cas où A est convexe (non vide) et vérifie l'une des propriétés suivantes :

1) $\text{ir}[A] = A$ (ce qui est vrai en particulier si E est un espace vectoriel topologique et si A est ouvert)

2) $\text{lin}\, A = A$ (ce qui est vrai en particulier si E est un espace vectoriel topologique et si A est fermé)

alors, pour tout $a \in A$, on a :

$$\mathcal{E}_a[A] = \mathcal{E}[A] = \mathcal{J}[A].$$

- La notion de cône d'éloignement est une notion connue (voir [25] page 61 ; ce cône est appelé "recession cone"). Bourbaki (voir [3], page 125, exercice n°14) introduit, dans un espace vectoriel topologique séparé, la notion de cône asymptote pour un convexe fermé non vide ; en fait, dans ce cas, le cône d'éloignement de A en a est indépendant du choix de a dans A et il y a donc coïncidence entre les notions de cône asymptote, de cône d'éloignement et de cône d'infinitude.

- Bair étudie, dans [1], la notion de cône d'infinitude du lin d'une partie A non vide de E (qu'il appelle cône asymptote de A).

- Cependant, l'étude du cône d'infinitude d'un convexe quelconque n'apparaît pas, à notre connaissance, dans les ouvrages classiques. Cette notion semble pourtant être un outil intéressant dans l'étude des convexes linéairement bornés ainsi que le montrent la proposition 1.7 et les chapitres 2 et 3.

1.2.3.- <u>Proposition</u> 1.7. -

Soit, dans un espace vectoriel E, *un convexe* A *non vide.*

1) $\mathfrak{I}[A]$ *est convexe.*

2) A *est linéairement borné si et seulement si* $\mathfrak{I}[A]$ *est réduit à* $\{0\}$.

3) Si A *possède un point interne relatif et si* $\mathfrak{I}[A] = E$, *alors* $A = E$.

<u>Démonstration</u>

1) Soient $\Delta_1 = \{\lambda\, e_1 \mid \lambda \geq 0\}$ et $\Delta_2 = \{\lambda\, e_2 \mid \lambda \geq 0\}$ deux demi-droites fermées d'origine 0 (e_1 et $e_2 \neq 0$, $e_1 + e_2 \neq 0$) contenues dans $\mathfrak{I}[A]$.

Il suffit de montrer que la demi-droite $\Delta = \{\lambda(e_1+e_2) \mid \lambda \geq 0\}$ est contenue dans $\mathfrak{I}[A]$.

D'après la définition de $\mathfrak{I}[A]$, il existe a_1 et $a_2 \in A$ tels que $\{a_1\} + \Delta_1$ et $\{a_2\} + \Delta_2$ soient contenues dans A. Puisque A est convexe, il est clair que A contient la demi-droite $\{\frac{1}{2}(a_1+a_2)\} + \Delta$, d'où le résultat.

2) évident.

3) Si E est réduit à l'origine, la propriété est évidente. Supposons E non réduit à l'origine. Il est clair que $L[A] = E$ sinon $\mathfrak{I}[A] \neq E$.

Ainsi A possède un point interne. Si $A \neq E$, il existe $x \in E \sim A$. Le théorème de Hahn-Banach montre qu'on peut séparer $\{x\}$ et A, et alors A est contenu dans un demi-espace de E, ce qui est absurde car $\mathfrak{I}[A] = E$. Ainsi, on a $A = E$.

1.2.4.- Remarque

Si A est convexe et si $\mathfrak{I}[A] = E$, on n'a pas nécessairement $A = E$. La proposition suivante le montre (puisque, dans tout espace vectoriel de dimension infinie, il existe des cônes convexes proprement ubiquitaires).

Proposition 1.8.-

Soit, dans un espace vectoriel E *(non réduit à l'origine), un cône* K*, pointé ou épointé, de sommet quelconque. Alors* K *est ubiquitaire si et seulement si* $\mathfrak{I}[K] = E$.

Démonstration

On peut supposer que le sommet de K est en 0 (car une translation quelconque ne change pas $\mathfrak{I}[K]$ et n'affecte pas le caractère ubiquitaire de K).

Supposons K ubiquitaire et montrons que $\mathfrak{I}[K] = E$.

Soit Δ une demi-droite fermée d'origine 0. Montrons que $\Delta \subset \mathfrak{I}[K]$.

S'il existe un point de Δ différent de l'origine et contenu dans K, on a évidemment $\Delta \subset \mathfrak{I}[K]$.

Sinon, soit $x \in \Delta$ avec $x \neq 0$. Puisque $x \notin K$ et que $x \in \text{lin } K$, il existe un point $k \in K$ tel que $[k,x[\subset K$ et tel que k n'appartienne pas à la droite D support de Δ. Puisque K est un cône, on constate que tout point de $[k,x[$ est sommet d'une demi-droite fermée parallèle à Δ et de même sens, qui est contenue dans K. Ainsi, on a $\mathfrak{I}[K] = E$.
Réciproquement, supposons que $\mathfrak{I}[K] = E$ et montrons que K est ubiquitaire. Puisque K est un cône non vide, $0 \in \text{lin } K$. Soient $x \neq 0$ et Δ la demi-

droite fermée de sommet O et passant par x. Puisque $\mathcal{J}[K] = E$, il existe une demi-droite fermée Δ' parallèle à Δ et de même sens qui est contenue dans K. Puisque K est un cône, K contient le cône (épointé) de sommet O engendré par Δ'. Il est alors clair que $x \in \text{lin}\, K$. Ainsi K est ubiquitaire.

Remarques

1) Avec les notations précédentes, l'énoncé de la proposition 1.5 s'écrit :

$$i[C] + \mathcal{J}[C] = i[C] \ ,$$

$$ir[C] + \mathcal{J}[C] = ir[C] \ .$$

2) La proposition 1.8 permet de donner une nouvelle démonstration de la proposition 1.6, ne faisant pas appel au théorème de Hahn-Banach (donc à l'axiome du choix).

En effet, si C est ubiquitaire et ne contient pas un point (qu'on peut toujours supposer être l'origine), le cône épointé K engendré par C ne contient pas O et par conséquent est différent de E. Or, si C contient un point interne, il en est de même à fortiori de K ; d'autre part K est ubiquitaire, donc $\mathcal{J}[K] = E$; on en déduit que $K \supset i[K] + \mathcal{J}[K] = E$.

CHAPITRE II

QUELQUES PROPRIETES DE LA SOMME ET DE L'ENVELOPPE CONVEXE DE LA REUNION D'ENSEMBLES CONVEXES LINEAIREMENT BORNES

Ce chapitre développe et généralise les résultats de l'article [7] : En particulier, le lemme 2.2 et le paragraphe 2.4 ne figurent pas dans l'article précité, les théorèmes 2.1 et 2.3 généralisent respectivement les théorèmes 2 et 4 de cet article. Les résultats s'expriment de façon harmonieuse à l'aide de la notion de cône d'infinitude introduite au chapitre précédent.

Nous donnons, dans le paragraphe 2.1, deux exemples de couples (A,B) de convexes linéairement bornés tels que $C[A \cup B]$ et $A+B$ ne soient pas linéairement bornés ; le premier a un caractère général et conduit à la proposition 2.1.

Dans les paragraphes suivants, nous étudions le cône d'infinitude de la somme et de l'enveloppe convexe de convexes et établissons des conditions suffisantes permettant d'affirmer que ce cône d'infinitude est réduit à l'origine.

2.1.- EXEMPLES.-

2.1.1.- Lemme 2.1.-

Dans un espace vectoriel E, *l'enveloppe convexe symétrique d'une famille libre est linéairement bornée.*

Démonstration

Soit $(e_i)_{i\varepsilon I}$ une famille libre de E. On peut toujours supposer que cette famille libre constitue une base de E, quitte à se placer dans le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille. Soit

$C = CS[\bigcup_{i\varepsilon I} \{e_i\}]$. D'après la proposition 1.3, l'origine 0 est point interne de C. Ainsi il suffit de montrer que C ne contient aucune demi-droite issue de 0 puisque, si C contenait une demi-droite, C contiendrait une demi-droite parallèle et de même sens, issue de 0 (voir proposition 1.5).

Soit $x \varepsilon C$ avec $x \neq 0$. On a $x = \sum_{i\varepsilon I} x_i\, e_i$ où $x_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices et où $0 < \sum_{i\varepsilon I} |x_i| \leq 1$. Puisque $(e_i)_{i\varepsilon I}$ est une base de E, la seule représentation possible de αx $(\alpha \varepsilon \mathbb{R})$ dans la base $(e_i)_{i\varepsilon I}$ est $\sum_{i\varepsilon I} \alpha\, x_i\, e_i$. Ainsi $\alpha x \notin C$ dès que α est tel que $|\alpha| \sum_{i\varepsilon I} |x_i| > 1$, ce qui achève la démonstration.

Premier exemple

Soient E un espace vectoriel de dimension infinie et $\mathcal{B} = (e_i)_{i\varepsilon I}$ une base de E. Considérons une famille infinie dénombrable extraite de $\mathcal{B}$ et notée abusivement $(e_n)_{n\varepsilon \mathbb{N}^*}$. Posons, pour tout $i \varepsilon \mathbb{N}^*$, $f_i = e_i + (i-1)e_1$ et, pour tout $i \notin \mathbb{N}^*$, posons par exemple $f_i = e_i$. Alors les convexes $C_1 = CS[\bigcup_{i\varepsilon I} \{e_i\}]$ et $C_2 = CS[\bigcup_{i\varepsilon I} \{f_i\}]$ sont linéairement bornés alors que $C_1 + C_2$ et $C[C_1 \cup C_2]$ ne le sont pas.

Démonstration

C_1 et C_2 sont linéairement bornés d'après le lemme 2.1. D'autre part, pour tout $n \varepsilon \mathbb{N}^*$, $(n-1)e_1 = f_n - e_n \varepsilon C_1 + C_2$. Puisque C_1+C_2 est un convexe symétrique, il en résulte que la droite $\Delta_1 = \{\lambda e_1 \mid \lambda \varepsilon \mathbb{R}\}$ est contenue dans C_1+C_2 et par suite C_1+C_2 n'est pas linéairement borné.
D'après la proposition 1.1, $C[C_1 \cup C_2]$ n'est pas linéairement borné. On peut de façon plus précise, montrer que C_1+C_2 et $C[C_1 \cup C_2]$ ne contiennent aucune demi-droite non parallèle à Δ_1, c'est-à-dire que
$\mathfrak{J}[C_1+C_2] = \mathfrak{J}[C[C_1 \cup C_2]] = \Delta_1$.

Proposition 2.1. -

Dans un espace vectoriel topologique E *de dimension infinie, non muni de la topologie grossière, il existe une infinité de convexes symétriques,* *absorbants, linéairement bornés et non bornés. De façon plus précise, à toute base de E, on peut associer une base de E telle que l'enveloppe convexe symétrique de ses éléments soit un convexe absorbant, linéairement borné et non borné.*

Démonstration

Reprenons les notations de l'exemple précédent. Puisque E n'est pas muni de la topologie grossière, il existe un voisinage V de l'origine O dans E et un élément e_i de $\mathcal{B}$ tels que la droite $\Delta_i = \{\lambda e_i \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ne soit pas contenue dans V. On peut supposer que $e_i = e_1$. Puisque Δ_1 est contenue dans C_1+C_2 et non contenue dans V, C_1+C_2 est non borné car non absorbé par V. On en déduit que l'un au moins des deux convexes C_1 et C_2 n'est pas borné (car, dans tout espace vectoriel topologique, la somme de deux bornés est bornée).

Remarque

Soit maintenant, dans un espace vectoriel E de dimension infinie un convexe C proprement ubiquitaire et linéairement borné (Klee a montré l'existence d'un tel convexe ; voir [22], page 107, théorème 2.1). Si E est muni d'une structure d'espace vectoriel topologique, alors $\bar{C} = E$ (d'après la proposition 1.4). Ainsi, si la topologie de E n'est pas la topologie grossière, C n'est pas borné. Toutefois, $i[C]$ est vide (d'après la proposition 1.6), contrairement au convexe de la proposition 2.1.

2.1.2.- Autre exemple.

Nous donnons maintenant un autre exemple dans un espace vectoriel de dimension infinie car la démonstration est techniquement intéressante : Soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $[0,1]$ et combinaisons linéaires finies des fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}_+$ (on obtient les mêmes résultats en supposant $\alpha \in \mathbb{R}_+$). Soient p_1 et p_2 les normes définies sur E par :

$$\begin{cases} p_1(f) = \sup\limits_{\alpha\in\mathbb{Q}_+} |\lambda_\alpha|, \text{ si } f(x) = \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{Q}_+} \lambda_\alpha x^\alpha \\ p_2(f) = \int_0^1 |f(x)|dx. \end{cases}$$

Soient B_1 et B_2 les boules unités fermées respectivement associées à ces normes. Les convexes B_1 et B_2 sont évidemment symétriques et linéairement bornés, alors que les convexes B_1+B_2 et $C[B_1 \cup B_2]$ sont, non seulement, non linéairement bornés, mais sont l'espace E tout entier.

Démonstration

Il suffit de montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}_+$ et pour tout entier $n \geq 2$, $nx^\alpha \in B_1+B_2$, car B_1+B_2 est un convexe symétrique et car on a :

$$B_1+B_2 \subset 2C[B_1 \cup B_2]$$

(voir proposition 1.1).

Soit $\beta \in \mathbb{Q}_+$. On peut écrire :

$$nx^\alpha = b_1(\beta) + b_2(\beta),$$

avec $b_1(\beta) = x^\alpha + x^{\alpha+\beta} + \ldots + x^{\alpha+(n-1)\beta}$

et $b_2(\beta) = (n-1)x^\alpha - x^{\alpha+\beta} - \ldots\ldots - x^{\alpha+(n-1)\beta}$.

Il est clair que $b_1(\beta) \in B_1$ pour tout $\beta \in \mathbb{Q}_+^*$.

D'autre part, $b_2(\beta) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi, on a :

$$p_2(b_2(\beta)) = \int_0^1 (n-1)x^\alpha\, dx - \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^1 x^{\alpha+p\beta}\, dx$$

$$= \frac{n-1}{\alpha+1} - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha+p\beta+1}.$$

Posons, pour tout t réel ≥ 0,

$$\varphi(t) = \frac{n-1}{\alpha+1} - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha+pt+1}.$$

La fonction numérique ψ est continue, est telle que $\psi(0) = 0$ et $\psi(t) > 0$ si $t > 0$. On est donc sûr qu'il existe $\beta_o \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $\psi(\beta_o) \leqslant 1$ et alors $b_2(\beta_o) \in B_2$.

Remarque

L'exemple précédent montre que, désignant par $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ les topologies d'espace normé sur E respectivement associées aux deux normes p_1 et p_2, la topologie $\mathcal{T}$ borne inférieure de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ dans l'ensemble des topologies localement convexes sur E peut être non seulement une topologie non séparée mais être la topologie grossière. Une étude détaillée sera faite au chapitre 7.

L'étude des couples de convexes (linéairement bornés ou non) dont la somme est E sera faite aux chapitres 3 et 4.

2.2.- CÔNE D'INFINITUDE D'UN FERME. APPLICATION A L'ETUDE DU CÔNE D'INFINITUDE DE L'ENVELOPPE CONVEXE ET DE LA SOMME D'UN CONVEXE ET D'UN BORNE.-

Dans ce paragraphe, nous donnons une première condition suffisante permettant d'affirmer que la somme et l'enveloppe convexe de la réunion de deux ensembles linéairement bornés sont linéairement bornés. Cette condition a un caractère topologique.

Le théorème 2.1 et ses corollaires constituent une généralisation des résultats de [7] (voir théorème 2 et ses corollaires). Les résultats de [7] ont été établis dans le cadre des espaces vectoriels topologiques c-réguliers (Un espace vectoriel topologique est dit c-régulier (voir [22], page 106) si, pour tout convexe fermé C et pour tout point $p \notin C$, il existe un convexe ouvert K avec $p \in K$ et $C \cap K = \emptyset$; ainsi on peut séparer C et $\{p\}$ par un hyperplan fermé. En particulier, un espace vectoriel topologique localement convexe est c-régulier) ; les démonstrations reposaient sur le fait que, dans un espace vectoriel topologique c-régulier, tout convexe fermé est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

Dans ce paragraphe, nous nous affranchissons des hypothèses de c-régularité et nous nous plaçons simplement dans le cadre général d'un espace vectoriel topologique. Il est à noter que la notion de cône d'infinitude permet d'énoncer les résultats sous une forme plus précise et plus harmonieuse.
Pour la démonstration du théorème 2.1, nous avons besoin du lemme suivant.

2.2.1.- Lemme 2.2.-

Soit, dans un espace vectoriel topologique E, *un convexe* A *et soit* $\mathcal{V}$ *l'ensemble des voisinages de l'origine. On a alors :*

$$\mathcal{E}[\bar{A}] = \mathcal{I}[\bar{A}] = \bigcap_{V\in\mathcal{V}} \mathcal{I}[A+V].$$

Démonstration

$\bar{A}$ étant fermé, on a, d'après le paragraphe 1.2.2,

$$\mathcal{E}[\bar{A}] = \mathcal{I}[\bar{A}].$$

Puisque $\bar{A} = \bigcap_{V\in\mathcal{V}} (A+V)$, on a, pour tout $V \in \mathcal{V}$, $\bar{A} \subset A+V$, donc $\mathcal{I}[\bar{A}] \subset \mathcal{I}[A+V]$.

Montrons réciproquement que :

$$\bigcap_{V\in\mathcal{V}} \mathcal{I}[A+V] \subset \mathcal{I}[\bar{A}].$$

Posons $K = \bigcap_{V\in\mathcal{V}} \mathcal{I}[A+V]$. Si $K = \{0\}$, c'est réglé.

Sinon, soit Δ une demi-droite fermée d'origine 0 contenue dans K et soit $x \in \bar{A}$. Puisque $\bar{A} = \bigcap_{V\in\mathcal{V}} (A+V)$, il suffit de montrer que, pour tout $V \in \mathcal{V}$, $\{x\} + \Delta \subset A+V$.

Soit donc $V \in \mathcal{V}$. Il existe un voisinage étoilé de l'origine W tel que :

$$W + W + W \subset V.$$

Puisque $\Delta \subset K$, $\Delta \subset \mathcal{I}[A+V]$. Ainsi il existe une demi-droite fermée Δ' parallèle à Δ et de même sens qui est contenue dans $A+W$.

Montrons que $C[\{x\} \cup \Delta'] \subset A + W + W$.

Soit $z \in C[\{x\} \cup \Delta']$. Alors il existe $\lambda \in [0,1]$ et $y \in \Delta'$ tels que

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y.$$

Puisque $\bar{A} \subset A+W$, $x \in A+W$. Ainsi, il existe $a \in A$ et $w \in W$ tels que $x = a+w$. Puisque $y \in \Delta' \subset A+W$, il existe $a' \in A$ et $w' \in W$ tels que $y = a'+w'$.

On a alors :

$$z = \lambda(a+w) + (1-\lambda)(a'+w') = (\lambda a+(1-\lambda)a') + (\lambda w+(1-\lambda)w').$$

A étant convexe et W étant étoilé, $z \in A + W + W$.

Puisque $C[\{x\} \cup \Delta'] \subset A + W + W$, on en déduit que :

$$\{x\} + \Delta \subset \text{lin}(A+W+W).$$

La proposition 1.4 montre alors que

$$\{x\} + \Delta \subset \overline{A+W+W}.$$

On en déduit que $\{x\} + \Delta \subset A + W + W + W$, donc que :

$$\{x\} + \Delta \subset A + V.$$

2.2.2.- Théorème 2.1.-

Soient, dans un espace vectoriel topologique E, *un convexe* A *et un borné* B.

1) On a alors :

$$\mathcal{J}[A+B] \subset \mathcal{J}[\bar{A}] = \mathcal{E}[\bar{A}].$$

2) Si, de plus, $\mathring{A}$ *et* B *sont non vides, on a alors :*

$$\mathcal{J}[A+B] = \mathcal{J}[\mathring{A}] = \mathcal{E}[\mathring{A}] = \mathcal{J}[\bar{A}] = \mathcal{E}[\bar{A}] = \mathcal{J}[A].$$

Démonstration

1) D'après le paragraphe 1.2.2, on a $\mathcal{J}[\bar{A}] = \mathcal{E}[\bar{A}]$. Si A est vide,

la propriété est évidemment vraie. Supposons A non vide. Remarquons qu'une translation ne changeant pas le cône d'infinitude d'un ensemble, on peut supposer que l'origine appartient à A.

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des voisinages de l'origine et soit $V \in \mathcal{V}$. Puisque B est borné, il existe $\lambda \in]0,1]$ tel que $\lambda B \subset V$.

Ainsi, on a :

$$\mathcal{I}[A+B] = \mathcal{I}[\lambda(A+B)] = \mathcal{I}[\lambda A+\lambda B] \subset \mathcal{I}[A+V].$$

Le lemme 2.2 montre alors que :

$$\mathcal{I}[A+B] \subset \bigcap_{V\in\mathcal{V}} \mathcal{I}[A+V] = \mathcal{I}[\overline{A}].$$

2) D'après le paragraphe 1.2.2, on a :

$$\mathcal{I}[\overline{A}] = \mathcal{C}[\overline{A}] \quad \text{et} \quad \mathcal{I}[\mathring{A}] = \mathcal{C}[\mathring{A}].$$

Pour montrer la suite d'égalités, il suffit de montrer que :

$$\mathcal{I}[A+B] \supset \mathcal{I}[\mathring{A}] \quad \text{et} \quad \mathcal{I}[\overline{A}] \subset \mathcal{I}[\mathring{A}].$$

Puisque $A+B$ contient un translaté de A donc de $\mathring{A}$ (B étant non vide), on a :

$$\mathcal{I}[A+B] \supset \mathcal{I}[\mathring{A}].$$

Montrons maintenant que $\mathcal{I}[\overline{A}] \subset \mathcal{I}[\mathring{A}]$.

Soient Δ une demi-droite fermée contenue dans $\overline{A}$ et un point $x \in \mathring{A}$. La proposition 1.5 montre que la demi-droite fermée Δ' parallèle à Δ, de même sens que Δ et de sommet x est contenue dans $\mathring{\overline{A}}$. Puisque $\mathring{\overline{A}} = \mathring{A}$ (voir proposition 1.4), on a $\Delta' \subset \mathring{A}$, d'où le résultat.

<u>*Corollaire 2.1.-*</u>

Soient, dans un espace vectoriel topologique E, *un convexe* A *non vide et un convexe* B *borné.*

1) On a alors :

$$\mathcal{T}[C[A \cup B]] \subset \mathcal{T}[\bar{A}] = \mathcal{E}[\bar{A}].$$

2) Si, de plus, $\mathring{A}$ est non vide, on a alors :

$$\mathcal{T}[C[A \cup B]] = \mathcal{T}[\bar{\mathring{A}}] = \mathcal{E}[\bar{\mathring{A}}] = \mathcal{T}[\bar{A}] = \mathcal{E}[\bar{A}] = \mathcal{T}[A].$$

Démonstration

1) Supposons B non vide (lorsque B est vide, la propriété est évidente).

On vérifie aisément, en posant $A_1 = A - \{x_o\}$ et $B_1 = B - \{x_o\}$ où $x_o \in E$, que :

$$C[A_1 \cup B_1] = C[A \cup B] - \{x_o\}.$$

Ainsi une translation sur E ne change pas le cône d'infinitude de $C[A \cup B]$.
D'autre part, une translation sur E ne change pas le cône d'infinitude et le cône d'éloignement de $\bar{A}$.
On peut donc supposer que $0 \in A$. Posons $B' = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda B$.
B' est convexe car $B' = C[\{0\} \cup B]$.
Montrons que B' est borné. Soit V un voisinage de l'origine. V contient un voisinage étoilé W de l'origine. Puisque B est borné, il existe $k > 0$ tel que $kB \subset W$. Il en résulte que $kB' \subset W \subset V$. Ainsi B' est borné.
La proposition 1.1 montre que l'on a :

$$C[A \cup B] \subset C[A \cup B'] \subset A + B'. \qquad (1)$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.1.

2) Supposons B non vide. On a alors, d'après (1) :

$$\mathcal{T}[C[A \cup B]] \subset \mathcal{T}[A+B'].$$

Or, on a : $\mathcal{T}[C[A \cup B]] \supset \mathcal{T}[A]$.

Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.1.

Si B est vide, on applique le résultat de la deuxième partie du théorème 2.1.

Remarques

1) Lorsque A et B sont vides, la première partie du corollaire 2.1 est évidemment vraie.

Si on suppose que l'espace vectoriel topologique E est localement convexe séparé, alors, lorsque A est vide et que B est convexe borné non vide, la première partie du corollaire 2.1 est encore vraie.

2) Notons que, contrairement au théorème 2.1, l'hypothèse de convexité de B est nécessaire dans le corollaire 2.1.

En effet, il existe des espaces vectoriels topologiques séparés contenant des bornés dont l'enveloppe convexe est E tout entier (voir [4], page 12, exercice n°8). Il suffit alors de choisir pour borné B l'un des bornés précédents, et pour A un ensemble réduit à un point.

Corollaire 2.2.-

Soient, dans un espace vectoriel topologique séparé E, *un convexe* A *linéairement borné et une partie* B *bornée (resp. : bornée et convexe). Alors* $A+B$ *(resp. :* $C[A \cup B]$*) est linéairement borné dans chacune des deux hypothèses suivantes :*

(h_1) : A *est fermé.*

(h_2) : A *est non vide.*

Démonstration

On applique le théorème 2.1 et le corollaire 2.1.

Il est à noter que cette propriété n'a d'intérêt que si E est séparé, sinon on ne peut remplir aucune des deux hypothèses (h_1) et (h_2), et affirmer simultanément que A est linéairement borné.

2.3.- ETUDE DU CÔNE D'INFINITUDE DE LA SOMME ET DE L'ENVELOPPE CONVEXE DE DEUX CONVEXES DONT L'UN EST LINEAIREMENT BORNE ET DE DIMENSION FINIE.-

Les corollaires 2.3 et 2.4 fournissent deux nouvelles conditions suffisantes qui n'ont plus un caractère topologique.

Pour démontrer le théorème 2.2, nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

2.3.1.- Lemme 2.3.-

Soit, dans $\mathbb{R}^n$ *muni de la topologie naturelle, un convexe* A.

1) On a alors :

$$\mathcal{E}[\bar{A}] = \mathcal{J}[\bar{A}] = \mathcal{J}[A] = \mathcal{J}[\mathrm{ir}[A]] = \mathcal{E}[\mathrm{ir}[A]].$$

2) A *est linéairement borné si et seulement si* A *est borné.*

Démonstration

1) On peut supposer, lorsque A est non vide, que $0 \in A$, ainsi $S[A] = L[A]$. Munissons $S[A]$ de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^n$. L'adhérence de A dans $\mathbb{R}^n$ coïncide manifestement avec l'adhérence de A dans $S[A]$. D'autre part, la proposition 1.2 montre que $\mathrm{ir}[A]$ n'est autre que l'intérieur de A dans $S[A]$ et que cet intérieur est non vide. Il suffit alors d'appliquer le résultat de la deuxième partie du théorème 2.1.

2) Cette deuxième partie est une conséquence de la première partie de ce lemme et du paragraphe 1.1.5.

Lemme 2.4.-

Soient, dans un espace vectoriel E *de dimension finie, deux convexes* A *et* B, B *étant linéairement borné. Alors, on a :*

$$\mathcal{J}[C[A \cup B]] = \mathcal{J}[A].$$

Si, de plus, B *est non vide, on a :*

$$\mathcal{J}[A+B] = \mathcal{J}[A].$$

Démonstration

Supposons B non vide et munissons E de la topologie euclidienne.

Puisque, dans $\mathbb{R}^n$, il y a équivalence pour un convexe entre le fait d'être linéairement borné et le fait d'être borné (voir lemme 2.3), le théorème 2.1 et le corollaire 2.1 montrent que :

$$\mathfrak{I}[A+B] \subset \mathfrak{I}[\bar{A}]$$

et

$$\mathfrak{I}[C[A \cup B]] \subset \mathfrak{I}[\bar{A}].$$

Or, on a :

$$\mathfrak{I}[A+B] \supset \mathfrak{I}[A]$$

et

$$\mathfrak{I}[C[A \cup B]] \supset \mathfrak{I}[A],$$

car $A+B$ et $C[A \cup B]$ contiennent chacun un translaté de A.
Puisque $\mathfrak{I}[A] = \mathfrak{I}[\bar{A}]$ (voir lemme 2.3), on en déduit que :

$$\mathfrak{I}[A+B] = \mathfrak{I}[A] = \mathfrak{I}[C[A \cup B]].$$

2.3.2.- Théorème 2.2.-

Soient, dans un espace vectoriel E *de dimension quelconque, deux convexes* A *et* B, B *étant linéairement borné non vide et de dimension finie. Alors, on a :*

$$\mathfrak{I}[C[A \cup B]] = \mathfrak{I}[A+B] = \mathfrak{I}[A].$$

Démonstration

On peut montrer que, pour tout sous-espace vectoriel S de E contenant B, on a les deux égalités suivantes :

$$(A+B) \cap S = (A \cap S) + B,$$

$$C[A \cup B] \cap S = C[(A \cap S) \cup B].$$

Soit Δ une demi-droite fermée contenue dans $A+B$ (resp. : $C[A \cup B]$).
Désignons par S le sous-espace vectoriel engendré par B et Δ ; S est de dimension finie.
Le lemme 2.4 montre alors que $A \cap S$ (donc A) contient une demi-droite fermée parallèle à Δ et de même sens que Δ.
Ainsi, on a :

$$\mathfrak{I}[A+B] \subset \mathfrak{I}[A] \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}[C[A \cup B]] \subset \mathfrak{I}[A].$$

On en déduit que :

$$\mathfrak{I}[A] = \mathfrak{I}[A+B] = \mathfrak{I}[C[A \cup B]],$$

car $A+B$ et $C[A \cup B]$ contiennent chacun un translaté de A.

Corollaire 2.3.-

Soient, dans un espace vectoriel E, *deux convexes* A *et* B *linéairement bornés dont l'un est de dimension finie (cette dernière hypothèse est évidemment remplie lorsque* E *est de dimension finie).*
Alors $A+B$ *et* $C[A \cup B]$ *sont linéairement bornés.*

Démonstration

Elle résulte immédiatement du théorème 2.2.

Corollaire 2.4.-

Soient, dans un espace vectoriel topologique séparé E, *un convexe linéairement borné* A *et un borné* B *de dimension finie.*
Alors $A+B$ *et* $C[A \cup B]$ *sont linéairement bornés.*

Démonstration

Montrons que $C[B]$ est linéairement borné.
Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et contenant B.
Munissons F de la topologie induite par celle de E. B est alors un borné de F et, puisque la topologie de F est la topologie euclidienne, $C[B]$

est borné dans F. Ainsi, d'après le lemme 2.3, $C[B]$ est linéairement borné. Puisque $C[B]$ est un convexe linéairement borné de dimension finie et contient B, il suffit alors d'appliquer le corollaire 2.3.

2.4.- LIEN ENTRE LE CÔNE D'INFINITUDE DE LA SOMME ET CELUI DE L'ENVELOPPE CONVEXE.-

Les paragraphes précédents nous invitent à voir dans quelle condition on peut affirmer que, A et B étant deux convexes donnés, les ensembles $A+B$ et $C[A \cup B]$ sont simultanément linéairement bornés. Pour cela, nous étudierons les cônes d'infinitude.

Lemme 2.5.-

Soient, dans un espace vectoriel E, n *parties* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *et* n *points* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Posons, pour* $1 \leq i \leq n$, $A_i' = A_i - \{x_i\}$. *Alors, on a :*

$$\mathfrak{I}[C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i]] = \mathfrak{I}[C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i']].$$

Démonstration

Il est clair que l'on peut supposer toutes les parties A_i non vides.

Montrons d'abord l'inclusion suivante :

$$C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] \subset C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i'] + C[\bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}]. \qquad (1)$$

Soit $x \in C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i]$. Alors x s'écrit sous la forme $x = \sum_{j \in J} \lambda_j a_j$, où, pour tout $j \in J$, $a_j \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\lambda_j \geq 0$, $\lambda_j = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices, et $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$.

Pour tout $j \in J$, désignons par i_j un entier tel que $a_j \in A_{i_j}$ et posons $a_j' = a_j - x_{i_j}$; ainsi, pour tout $j \in J$, $a_j' \in A_{i_j}' \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i'$. On a alors :

$$x = \sum_{j \in J} \lambda_j (a_j' + x_{i_j}) = \sum_{j \in J} \lambda_j a_j' + \sum_{j \in J} \lambda_j x_{i_j} ,$$

et l'inclusion (1) est vérifiée.

L'ensemble $C[\bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}]$ étant linéairement borné (voir corollaire 2.3) non vide et de dimension finie, le théorème 2.2 montre que :

$$\mathfrak{J}[C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i]] \subset \mathfrak{J}[C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i']].$$

L'égalité résulte du fait que l'on a, de la même manière, l'inclusion dans l'autre sens.

Remarque

On n'a pas de propriété analogue au lemme 2.5 pour les cônes d'éloignement, même si les ensembles A_i sont convexes.

En effet, soient, dans un espace vectoriel E, une demi-droite fermée Δ de sommet 0 et un point $x \notin \Delta$. Posons $A_1 = \Delta$, $A_2 = \{0\}$, $A_2' = \{x\}$.

On a alors :

$$\mathcal{E}[C[A_1 \cup A_2]] = A_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}[C[A_1 \cup A_2']] = \{0\}.$$

Proposition 2.2.-

Soient, dans un espace vectoriel, n *parties* $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

1) On a alors :

$$\mathfrak{J}[\sum_{i=1}^{n} A_i] \subset \mathfrak{J}[C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i]].$$

2) Si, de plus, tous les A_i *sont convexes non vides, on a alors :*

$$\mathfrak{J}[\sum_{i=1}^{n} A_i] = \mathfrak{J}[C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i]].$$

Démonstration

1) On a, d'après la proposition 1.1 :

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \subset n\, C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] ,$$

d'où le résultat.

2) D'après le lemme 2.5 et d'après le fait qu'appliquer une trans-

lation sur chaque A_i revient à appliquer une seule translation sur leur somme, on peut supposer que l'origine appartient à tous les A_i. La propriété résulte alors des inclusions suivantes (voir proposition 1.1) :

$$C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] \subset \sum_{i=1}^{n} A_i \subset n\, C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i].$$

Remarque

On n'a pas de propriété analogue à la proposition 2.2 pour les cônes d'éloignement. En effet, en reprenant les notations de la remarque précédente, on constate que :

$$\mathcal{E}[A_1+A_2'] = A_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}[C[A_1 \cup A_2']] = \{0\}.$$

Corollaire 2.5.-

Soient, dans un espace vectoriel, n *parties* $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

1) Si $C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i]$ *est linéairement borné, alors il en est de même pour* $\sum_{i=1}^{n} A_i$.

2) Si, de plus, tous les A_i *sont convexes non vides, alors* $C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i]$ *est linéairement borné si et seulement si* $\sum_{i=1}^{n} A_i$ *l'est.*

Démonstration

Elle résulte immédiatement de la proposition 2.2.

Proposition 2.3.-

Soient, dans un espace vectoriel, n *parties* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *respectivement étoilées par rapport aux points* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *et soient* n *nombres réels* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *tous* > 0. *Alors, on a :*

$$\mathcal{J}[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i] = \mathcal{J}[\sum_{i=1}^{n} A_i].$$

Démonstration

Si un des A_i est vide, c'est vrai. Supposons les A_i tous non vides. Posons, pour $1 \leq i \leq n$, $A_i' = A_i - \{x_i\}$; A_i' est étoilé par rapport à l'origine. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i^! + \{\sum_{i=1}^{n} x_i\}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i^! + \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\}$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\mathfrak{J}[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i^!] = \mathfrak{J}[\sum_{i=1}^{n} A_i^!].$$

Soient λ et μ deux nombres réels > 0 tels que :

$$\lambda \geq \sup\{\lambda_i \mid 1 \leq i \leq n\} \quad \text{et} \quad \mu \leq \inf\{\lambda_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

On a alors :

$$\mathfrak{J}[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i^!] = \mathfrak{J}[\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i^!] = \mathfrak{J}[\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} A_i^!] \subset \mathfrak{J}[\sum_{i=1}^{n} A_i^!],$$

$$\mathfrak{J}[\sum_{i=1}^{n} A_i^!] = \mathfrak{J}[\mu \sum_{i=1}^{n} A_i^!] = \mathfrak{J}[\sum_{i=1}^{n} \mu A_i^!] \subset \mathfrak{J}[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i^!],$$

d'où le résultat.

2.5.- CÔNE D'INFINITUDE ET SOMME DIRECTE DE CONVEXES.-

Le corollaire 2.6 constitue une généralisation du lemme 2.1.

Théorème 2.3.-

Soient, dans un espace vectoriel E, *une somme directe* $F = \bigoplus_{i \in I} E_i$ *de sous-espaces vectoriels* E_i *de* E *et, pour tout* $i \in I$, *un convexe* A_i *de* E_i. *Alors on a :*

1) $\mathfrak{J}[C[\bigcup_{i \in I} A_i]] = C[\bigcup_{i \in I} \mathfrak{J}[A_i]]$.

2) Si chaque A_i *contient l'origine ou si* I *est fini avec*

A_i *non vide pour tout* $i \in I$, *alors* :

$$\mathcal{J}[c[\bigcup_{i\in I} A_i]] = c[\bigcup_{i\in I} \mathcal{J}[A_i]] = \sum_{i\in I} \mathcal{J}[A_i] = \mathcal{J}[\sum_{i\in I} A_i].$$

3) *Si chaque* A_i *contient l'origine, alors, on a, pour tout* $j \in I$:

$$c[\bigcup_{i\in I} A_i] \cap E_j = (\sum_{i\in I} A_i) \cap E_j = A_j.$$

Si, pour tout $i \in I$, A_i *est non vide et ne contient pas l'origine, alors, on a, pour tout* $j \in I$:

$$c[\bigcup_{i\in I} A_i] \cap E_j = A_j.$$

<u>Démonstration</u>

1) Posons, pour tout $i \in I$, $A_i' = c[\{0\} \cup A_i]$, $A = c[\bigcup_{i\in I} A_i]$ et $A' = c[\bigcup_{i\in I} A_i']$. On a : $A' = c[\{0\} \cup A]$.

Le théorème 2.2 montre que $\mathcal{J}[A'] = \mathcal{J}[A]$ et que, pour tout $i \in I$, $\mathcal{J}[A_i'] = \mathcal{J}[A_i]$. Ainsi, on peut supposer que chaque A_i contient l'origine.

Pour tout $i \in I$, $A \supset A_i$, ainsi $\mathcal{J}[A] \supset \mathcal{J}[A_i]$. Puisque le cône d'infinitude d'un convexe est convexe (voir proposition 1.7), on en déduit que :

$$\mathcal{J}[A] \supset c[\bigcup_{i\in I} \mathcal{J}[A_i]].$$

Montrons réciproquement que :

$$\mathcal{J}[A] \subset c[\bigcup_{i\in I} \mathcal{J}[A_i]].$$

Soit $x = \sum_{i\in I} x_i$ un point de F ($x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$ et $x_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices). Montrons que, si $x \in A$, alors, pour tout $i \in I$, $x_i \in A_i$.

Puisque $x \in A$, $x = \sum_{i\in I} \lambda_i a_i$ avec, pour tout $i \in I$, $a_i \in A_i$, $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices et $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$. Comme $0 \in A_i$,

$\lambda_i\, a_i \in A_i$. D'après l'unicité de l'écriture de x, il est alors clair que : $x_i = \lambda_i\, a_i \in A_i$.

Soit maintenant Δ une demi-droite fermée de sommet 0 et contenue dans $\mathcal{J}[A]$. Posons $\Delta = \{\lambda e \mid \lambda \geq 0\}$ avec $e \neq 0$. On a $e = \sum_{i\in I} e_i$ avec, pour tout $i \in I$, $e_i \in E_i$ et $e_i = 0$ sauf pour une partie finie J de I.

Posons, pour tout $i \in J$, $\Delta_i = \{\lambda e_i \mid \lambda \geq 0\}$.

Puisque $\Delta \subset \mathcal{J}[A]$, il existe $y \in A$ tel que $\{y\} + \Delta \subset A$; donc, pour tout $\lambda \geq 0$, on a $\sum_{i\in I}(y_i + \lambda e_i) \in A$ et par suite, pour tout $i \in J$, $y_i + \lambda e_i \in A_i$, c'est-à-dire $\{y_i\} + \Delta_i \subset A_i$.

Ainsi, pour tout $i \in J$, $\Delta_i \subset \mathcal{J}[A_i]$. Il en résulte que :

$$\Delta \subset \sum_{i\in J} \Delta_i = c[\bigcup_{i\in J} \Delta_i] \subset c[\bigcup_{i\in J} \mathcal{J}[A_i]] \subset c[\bigcup_{i\in I} \mathcal{J}[A_i]].$$

2) Le cas où I est fini et A_i non vide pour tout $i \in I$ se ramène au cas où chaque A_i contient l'origine. En effet, effectuer une translation sur chaque A_i revient à effectuer une translation sur $\sum_{i\in I} A_i$. Ainsi, si on effectue une translation sur chaque A_i, on ne modifie pas $\mathcal{J}[A_i]$, $\mathcal{J}[\sum_{i\in I} A_i]$ et, d'après le lemme 2.5, on ne modifie pas non plus $\mathcal{J}[c[\bigcup_{i\in I} A_i]]$.

On peut donc démontrer la suite d'égalités dans le cas où chaque A_i contient l'origine, I étant fini ou non. On sait déjà que :

$$\mathcal{J}[c[\bigcup_{i\in I} A_i]] = c[\bigcup_{i\in I} \mathcal{J}[A_i]].$$

Montrons maintenant que :

$$\mathcal{J}[\sum_{i\in I} A_i] = \sum_{i\in I} \mathcal{J}[A_i].$$

Pour tout $i \in I$, $\sum_{i\in I} A_i \supset A_i$, ainsi $\mathcal{J}[\sum_{i\in I} A_i] \supset \mathcal{J}[A_i]$.

Puisque le cône d'infinitude d'un convexe est un cône convexe pointé (de sommet 0), on en déduit que :

$$\mathcal{J}\,[\sum_{i\varepsilon I} A_i] \supset \sum_{i\varepsilon I} \mathcal{J}\,[A_i].$$

Par un raisonnement analogue à celui de la première partie, on montre que :

$$\mathcal{J}\,[\sum_{i\varepsilon I} A_i] \subset \sum_{i\varepsilon I} \mathcal{J}\,[A_i].$$

On en déduit l'égalité.

Il reste à montrer que :

$$\sum_{i\varepsilon I} \mathcal{J}\,[A_i] = C[\bigcup_{i\varepsilon I} \mathcal{J}\,[A_i]].$$

Cette propriété résulte du fait que le cône d'infinitude d'un convexe est un cône convexe pointé de sommet 0.

3) Plaçons nous dans le cas où chaque A_i contient l'origine.

On a évidemment, pour tout $j \varepsilon I$,

$$A_j \subset C[\bigcup_{i\varepsilon I} A_i] \cap E_j \subset (\sum_{i\varepsilon I} A_i) \cap E_j .$$

L'inclusion

$$C[\bigcup_{i\varepsilon I} A_i] \cap E_j \subset A_j$$

résulte du fait (voir démonstration de la première partie) que si $x = \sum_{i\varepsilon I} x_i \;\varepsilon\; C[\bigcup_{i\varepsilon I} A_i]$ ($x_i \;\varepsilon\; E_i$ pour tout $i \varepsilon I$ et $x_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices), alors, pour tout $i \varepsilon I$, $x_i \;\varepsilon\; A_i$.

L'inclusion

$$(\sum_{i\varepsilon I} A_i) \cap E_j \subset A_j$$

se démontre d'une manière analogue.

Plaçons nous dans le cas où chaque A_i est non vide et ne contient pas l'origine.

Il est clair que, pour tout $j \varepsilon I$:

$$A_j \subset C[\bigcup_{i\varepsilon I} A_i] \cap E_j.$$

Montrons réciproquement que, pour tout $j \in I$:

$$C[\bigcup_{i \in I} A_i] \cap E_j \subset A_j .$$

Si $x \in C[\bigcup_{i \in I} A_i]$, alors $x = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$ avec, pour tout $i \in I$, $a_i \in A_i$, $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices et $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$. Si $x \in E_j$, on a, pour tout $i \in I$ avec $i \neq j$, $\lambda_i a_i = 0$ donc $\lambda_i = 0$; il en résulte que $x = a_j$, donc que $x \in A_j$.

Corollaire 2.6.-

Soient, dans un espace vectoriel E, *une somme directe* $F = \bigoplus_{i \in I} E_i$ *de sous-espaces vectoriels* E_i *de* E *et, pour tout* $i \in I$, *un convexe linéairement borné* A_i *de* E_i. *Posons, pour tout* $i \in I$, $B_i = C[\{0\} \cup A_i]$. *Alors les convexes* $C[\bigcup_{i \in I} A_i]$, $C[\bigcup_{i \in I} B_i]$ *et* $\sum_{i \in I} B_i$ *sont linéairement bornés.*

Démonstration

C'est une conséquence du théorème 2.3 et du corollaire 2.3.

CHAPITRE III

NOTION DE FAMILLE DE DECOMPOSITION ET THEOREMES DE DECOMPOSITION

Ce chapitre constitue le développement de la note [8]. Nous introduisons, dans le paragraphe 3.1, la notion de famille de décomposition ainsi que d'autres notions liées à celle-ci. Dans le paragraphe 3.2, nous démontrons les deux théorèmes fondamentaux de décomposition ; ces théorèmes fournissent un mode de construction, dans un espace vectoriel E de dimension infinie, de couples de convexes linéairement bornés et de somme égale à E. Dans le paragraphe 3.3, nous donnons des exemples de famille de décomposition dans des espaces vectoriels de dimension infinie dénombrable et démontrons une propriété fournissant un procédé de construction de familles de décomposition dans le cas où l'espace vectoriel est de dimension infinie quelconque. Nous faisons, dans le paragraphe 3.4, quelques remarques concernant la notion de famille de décomposition (la proposition 3.1 n'a pas été mentionnée dans [8]).

3.1.- DEFINITIONS.-

Soient E un espace vectoriel de dimension infinie et $(e_i)_{i\varepsilon I}$ une base bien ordonnée de E (c'est-à-dire que l'on suppose -ce qui est toujours possible- l'ensemble I bien ordonné).

Considérons une famille (resp. : une base) $(f_j)_{j\varepsilon J}$ de vecteurs de E avec $f_j = \sum_{i\varepsilon I} a_{j,i}\, e_i$. Soit $r = (r_i)_{i\varepsilon I}$ un élément fixé de $(\mathbb{R}_+^*)^I$.

Posons, pour tout $i \varepsilon I$,

$$P_i(r) = \{j \mid j \varepsilon J,\ \sum_{k>i} |a_{j,k}| \geq r_i\},$$

$$Q_i(r) = \{v_{j,i} \mid j \in P_i(r),\ v_{j,i} = \frac{a_{j,i}}{\sum\limits_{k>i} |a_{j,k}|}\}$$

Définition 3.1.-

Si, pour tout $i \in I$, $Q_i(r)$ *n'est pas borné dans* $\mathbb{R}$, *on dira que* $(f_j)_{j\in J}$ *est une r-famille (resp. : r-base) de décomposition de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$.

Définition 3.1. *bis.-*

Si, pour tout $i \in I$, $Q_i(r)$ *n'est ni majoré ni minoré dans* $\mathbb{R}$, *on dira que* $(f_j)_{j\in J}$ *est une r-famille (resp. : r-base) de décomposition forte de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$.

Définition 3.2.-

Si, pour tout $r \in (\mathbb{R}_+^*)^I$, $(f_j)_{j\in J}$ *est une r-famille (resp. : r-base) de décomposition de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$, *on dira que* $(f_j)_{j\in J}$ *est une famille (resp. : base) de décomposition de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$.

Définition 3.2. *bis.-*

Si, pour tout $r \in (\mathbb{R}_+^*)^I$, $(f_j)_{j\in J}$ *est une r-famille (resp. : r-base) de décomposition forte de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$, *on dira que* $(f_j)_{j\in J}$ *est une famille (resp. : base) de décomposition forte de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$.

Remarques

1) Si, pour tout $i \in I$, $P_i(r) \neq \emptyset$, alors l'ensemble I ne peut avoir de plus grand élément.

2) $Q_i(r)$ non borné $\Longrightarrow P_i(r) \neq \emptyset$ et J infini.

3) Si, pour un indice $i \in I$, $Q_i(r)$ est non borné, alors la famille $(a_{j,i})_{j \in P_i(r)}$ est non bornée donc auusi la famille $(a_{j,i})_{j\in J}$. Ceci implique en particulier que $P_{i'}(r) \neq \emptyset$ pour tout $i' \in I$ tel que $i' \leqslant i$.

4) Soit $(f_j)_{j\in J}$ une r-famille de décomposition de E. Soient s et $t \in (\mathbb{R}_+^*)^I$ tels que, pour tout $i \in I$, $s_i \leq r_i \leq t_i$ avec au moins un indice i pour lequel on ait $r_i < t_i$. Alors $(f_j)_{j\in J}$ est une s-famille de décomposition de E, mais il se peut qu'elle ne soit pas une t-famille de décomposition de E (voir 3.4.4).

5) Dans le cas où J = I et où $(f_j)_{j\in J}$ est une r-base de décomposition de E associée à la base $(e_i)_{i\in I}$, alors, quel que soit $s \in (\mathbb{R}_+^*)^I$ et quelle que soit la relation de bon ordre sur I, $(e_i)_{i\in I}$ n'est pas nécessairement une s-base de décomposition de E associée à la famille $(f_j)_{j\in J}$ (voir 3.4.1).

6) Il est clair qu'en complétant algébriquement une r-famille libre de décomposition (resp. : décomposition forte) en une base, on obtient une r-base de décomposition (resp. : décomposition forte).

7) L'exemple suivant montre qu'on ne peut pas toujours extraire d'une famille de décomposition une famille libre de décomposition.

Exemple

Soient E un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de E.

Posons, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$,

$$f_{(n,p)} = n^2 e_p + n\, e_{p+1}.$$

Vérifions que la famille $(f_{(n,p)})_{(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est une famille de décomposition de E associée à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Soient $r \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$ et $i \in \mathbb{N}^*$. Avec les notations précédentes, on voit que :

$$P_i(r) = P_i^1(r) \cup P_i^2(r)$$

avec

$$P_i^1(r) = \{(n,i) \mid n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq r_i\}$$

et

$$P_i^2(r) = \{(n,p) \mid (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ p > i,\ n^2 + n \geq r_i\}.$$

Pour tout $(n,i) \in P_i^1(r)$, on a $v_{(n,i),i} = n$. Ainsi, $Q_i(r)$ est non borné et on a bien le résultat annoncé.

Il est à noter que, pour tout $(n,p) \in P_i^2(r)$, $v_{(n,p)i} = 0$. Montrons maintenant que l'on ne peut extraire de cette famille une famille libre de décomposition.

Soit $(f_j)_{j\in J}$ unefamille (non vide) extraite de la famille précédente : $J \subset \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Supposons que cette famille soit libre. Soit $(n,i) \in J$. L'ensemble $P_i(r)$ associé à la famille $(f_j)_{j\in J}$ contient au plus deux éléments de l'ensemble $P_i^1(r)$ précédemment défini. Il en résulte que l'ensemble $Q_i(r)$ associé à la famille $(f_j)_{j\in J}$ est borné.

3.2.- THEOREMES FONDAMENTAUX.-

Théorème 3.1.-

Soient E *un espace vectoriel de dimension infinie,* $(e_i)_{i\in I}$ *une base bien ordonnée de* E, r *un élément quelconque de* $(\mathbb{R}_+^*)^I$ *et* $(f_j)_{j\in J}$ *une* r-*famille de décomposition de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$. *Alors,*

$$CS[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}] + CS[\bigcup_{j\in J} \{f_j\}] = E.$$

Démonstration

Posons $A = CS[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}]$ et $B = CS[\bigcup_{j\in J} \{f_j\}]$.

Désignons par Δ_i la droite $\{\lambda e_i \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Puisque $A+B$ est convexe, il suffit de montrer que, pour tout $i \in I$, $\Delta_i \subset A+B$. Montrons cette propriété par récurrence transfinie.

Soit i_o le plus petit élément de I. Montrons que $\Delta_{i_o} \subset A+B$. Deux cas sont à distinguer :

a) $r_{i_o} \geq 1$.

Puisque A est un convexe symétrique, pour tout $j \in P_{i_o}(r)$, A comprend le point $\frac{-1}{\sum_{k>i_o} |a_{j,k}|} \sum_{k>i_o} a_{j,k} e_k$. Puisque $r_{i_o} \geq 1$, on a donc $\sum_{k>i_o} |a_{j,k}| \geq 1$.

L'origine appartenant à B, il en résulte que, pour tout $j \in P_{i_o}(r)$, B comprend le point $\frac{1}{\sum_{k>i_o} |a_{j,k}|} f_j$.

Ainsi, pour tout $j \in P_{i_o}(r)$, $A+B$ comprend le point

$$\frac{1}{\sum_{k>i_o} |a_{j,k}|} f_j - \frac{1}{\sum_{k>i_o} |a_{j,k}|} \sum_{k>i_o} a_{j,k} e_k = v_{j,i_o} e_{i_o}.$$

$A+B$ étant symétrique et convexe, l'ensemble $Q_{i_o}(r)$ étant non borné dans $\mathbb{R}$, il en résulte que $A+B$ contient Δ_{i_o}.

b) $r_{i_o} < 1$.

Pour tout $j \in P_{i_o}(r)$, A comprend le point $\frac{-r_{i_o}}{\sum_{k>i_o} |a_{j,k}|} \sum_{k>i_o} a_{j,k} e_k$ et B comprend le point $\frac{r_{i_o}}{\sum_{k>i_o} |a_{j,k}|} f_j$, donc $A+B$ comprend le point

$$\frac{r_{i_o}}{\sum_{k>i_o} |a_{j,k}|} f_j - \frac{r_{i_o}}{\sum_{k>i_o} |a_{j,k}|} \sum_{k>i_o} a_{j,k} e_k = r_{i_o} v_{j,i_o} e_{i_o}.$$

Ainsi $A+B$ contient Δ_{i_o}.

Soit maintenant $\ell \in I$. Supposons que $A+B$ contienne les droites Δ_m pour $m < \ell$. Montrons que $A+B$ contient Δ_ℓ. $A+B$ contient le sous-espace vectoriel de E engendré par les droites Δ_m pour $m < \ell$ car $A+B$ est convexe. Ainsi $A+B$ comprend le point $\sum_{m<\ell} -a_{j,m} e_m$ pour tout $j \in J$.

D'autre part, B comprend les points f_j.

On en déduit que A+B comprend les points g_j avec

$$g_j = \frac{1}{2} f_j + \frac{1}{2} \sum_{m<\ell} -a_{j,m} e_m = \frac{1}{2} a_{j,\ell} e_\ell + \frac{1}{2} \sum_{i>\ell} a_{j,i} e_i .$$

Deux cas sont encore à distinguer :

a) $r_\ell \geq 1$.

Pour tout $j \in P_\ell(r)$, A comprend le point $\frac{-1}{2 \sum_{i>\ell} |a_{j,i}|} \sum_{i>\ell} a_{j,i} e_i$ et A+B comprend le point $\frac{1}{\sum_{i>\ell} |a_{j,i}|} g_j$.

Puisque $A \subset A+B$ (l'origine étant élément de B), on en déduit que, pour tout $j \in P_\ell(r)$, A+B comprend le point

$$\frac{1}{2 \sum_{i>\ell} |a_{j,i}|} g_j + \frac{1}{2} \frac{-1}{2 \sum_{i>\ell} |a_{j,i}|} \sum_{i>\ell} a_{j,i} e_i = \frac{1}{4} v_{j,\ell} e_\ell .$$

Ainsi A+B contient Δ_ℓ.

b) $r_\ell < 1$.

Pour tout $j \in P_\ell(r)$, A comprend le point $\frac{-r_\ell}{2 \sum_{i>\ell} |a_{j,i}|} \sum_{i>\ell} a_{j,i} e_i$ et A+B comprend le point $\frac{r_\ell}{\sum_{i>\ell} |a_{j,i}|} g_j$, donc A+B comprend le point

$$\frac{r_\ell}{2 \sum_{i>\ell} |a_{j,i}|} g_j + \frac{1}{2} \frac{-r_\ell}{2 \sum_{i>\ell} |a_{j,i}|} \sum_{i>\ell} a_{j,i} e_i = \frac{r_\ell}{4} v_{j,\ell} e_\ell .$$

Ainsi A+B contient Δ_ℓ.

<u>*Théorème*</u> *3.1 bis.-*

Soient E *un espace vectoriel de dimension infinie,* $(e_i)_{i \in I}$ *une*

base bien ordonnée de E, r *un élément quelconque de* $(\mathbb{R}_+^*)^I$ *et* $(f_j)_{j\varepsilon J}$ *une r-famille de décomposition forte de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\varepsilon I}$.
Alors,

$$CS\Big[\bigcup_{i\varepsilon I} \{e_i\}\Big] + C\Big[\bigcup_{j\varepsilon J} \{f_j\}\Big] = E.$$

Démonstration

Posons $A = CS\big[\bigcup_{i\varepsilon I} \{e_i\}\big]$, $B' = C\big[\bigcup_{j\varepsilon J}\{f_j\}\big]$ et $B = C\big[\{0\} \cup B'\big]$.
Par une démonstration rigoureusement identique à celle du théorème 3.1, on montre que $A+B = E$ (on perd la propriété de symétrie de $A+B$; toutefois l'hypothèse "$Q_i(r)$ non borné dans $\mathbb{R}$" est remplacée par l'hypothèse plus forte "$Q_i(r)$ ni majoré ni minoré dans $\mathbb{R}$", ce qui permet d'affirmer encore, dans la démonstration, que la droite Δ_{i_o} puis la droite Δ_ℓ sont contenues dans $A+B$).
Montrons maintenant que $A+B' = E$. Soit b' un élément quelconque de B'.
Posons $C' = C\big[(A+B') \cup \{-b'\}\big]$. C' contient $A + \{b'\}$ et $-b'$, donc $\frac{1}{2} A$; de plus C' contient B' et 0 donc B et aussi $\frac{1}{2} B$. Ainsi C' contient $\frac{1}{4}(A+B)$, d'où $C' = E$. On en déduit que $A+B' = E$ d'après le théorème 2.2 et la proposition 1.7.

Remarques

1) Si la famille $(f_j)_{j\varepsilon J}$ est libre, alors les convexes $CS\big[\bigcup_{j\varepsilon J} \{f_j\}\big]$ et $C\big[\bigcup_{j\varepsilon J} \{f_j\}\big]$ des théorèmes 3.1 et 3.1 bis sont linéairement bornés d'après le lemme 2.1.
Les théorèmes 3.1 et 3.1 bis montrent qu'à tout convexe absorbant (même linéairement borné) C_1 de E, on peut associer un convexe C_2 linéairement borné tel que $C_1 + C_2 = E$ (voir la remarque qui suit le théorème 3.2).
Ce résultat généralise la situation évoquée au paragraphe 2.1 et dans l'exercice n°12 page 135 de [3].

2) La notion de cône d'infinitude permet d'apporter 2 variantes (resp. : 3 variantes) à la démonstration du théorème 3.1 (resp. : 3.1 bis).

Première variante aux démonstrations des théorèmes 3.1 et 3.1 bis.

On peut ramener le cas "$r_\ell < 1$" au cas "$r_\ell \geq 1$" en utilisant le fait que, si λ est un nombre réel > 0, $\mathfrak{J}[A+\lambda B] = \mathfrak{J}[A+B]$ (voir proposition 2.3) et en remarquant que, si $\mathfrak{J}[A+\lambda B]$ contient une droite passant par 0, cette droite est également contenue dans $A+\lambda B$ (voir proposition 1.5).

Deuxième variante à la démonstration du théorème 3.1.

Reprenons cette démonstration au niveau suivant :

"Supposons que $A+B$ contienne les droites Δ_m pour $m < \ell$ et montrons que $A+B$ contient Δ_ℓ".

Pour tout $j \in P_\ell(r)$, on a l'égalité (1) suivante :

$$(1) \quad v_{j,\ell} e_\ell = \frac{1}{\sum\limits_{i>\ell} |a_{j,i}|} f_j - \frac{1}{\sum\limits_{i>\ell} |a_{j,i}|} \sum_{i<\ell} a_{j,i} e_i - \frac{1}{\sum\limits_{i>\ell} |a_{j,i}|} \sum_{i>\ell} a_{j,i} e_i .$$

Il résulte de (1), de la symétrie de A et B et de l'hypothèse de récurrence que :

$$\Delta_\ell \subset A + B + A + B.$$

Or, d'après la proposition 2.2, on a :

$$\mathfrak{J}[A+B+A+B] = \mathfrak{J}[A+B].$$

Il en résulte que $\Delta_\ell \subset A+B$.

Deuxième variante de la démonstration du théorème 3.1 bis.

Reprenons la démonstration de ce théorème au même niveau que précédemment.

Pour tout $m < \ell$, on a $\Delta_m \subset A+B$ (par hypothèse), donc aussi $\Delta_m \subset -(A+B)$ et par suite $\Delta_m \subset A-B$ (puisque A est symétrique).

L'égalité (1), encore valable, montre alors que :

$$\Delta_\ell \subset B - (A-B) - A = A + B + A + B.$$

On raisonne alors comme précédemment.

Troisième variante à la démonstration du théorème 3.1 bis.

Reprenons la démonstration du théorème 3.1 bis en supposant que l'on a montré que $A + B = E$ et montrons que $A + B' = E$.
D'après la proposition 2.2 et le théorème 2.2, on a :

$$\mathfrak{J}\,[A+B'] = \mathfrak{J}\,[C[A \cup B']] = \mathfrak{J}\,[C[(A \cup B') \cup \{0\}]]$$

$$= \mathfrak{J}\,[C[A \cup B]] = \mathfrak{J}\,[A+B] = E.$$

Puisque $A+B'$ contient un point interne, la proposition 1.7 montre que $A + B' = E$.

3.3.- EXEMPLES.-

3.3.1.- Voici un exemple assez général qui nous servira ultérieurement.
Soient E un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de E. Considérons une suite d'entiers $(m(n))_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante et telle que $m(0) = 0$.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n = a_{n,1}\, e_1 + a_{n,2}\, e_2 + \dots + a_{n,m(n)},$$

les $a_{n,i}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les relations $H_1(n)$, $H_2(n)$, $H_3(n)$ suivantes (qu'il est possible de réaliser) :

$H_1(n)$: $|a_{n,i}| \geq n$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq m(n-1)$.
$H_2(n)$: Il existe i avec $m(n-1) < i \leq m(n)$ tel que $a_{n,i} \neq 0$.

$$H_3(n) : \frac{|a_{n,i}|}{|a_{n,i+1}|+|a_{n,i+2}|+\dots+|a_{n,m(n)}|} \geq n \text{ pour tout } i \text{ tel que}$$

$1 \leq i \leq m(n-1)$.
On vérifie que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre de décomposition de E associée à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: En effet, elle est libre à cause des

relations $H_2(n)$. D'autre part, avec les notations du paragraphe 3.1, on a :

$$P_i(r) \supset P_i'(r)$$

avec $P_i'(r) = \{j \mid j \in \mathbb{N}^*, \ j \geq \sup(r_i, i+2)\}$.
En effet, si $j \in P_i'(r)$, il existe au moins un entier q tel que $i < q \leq m(j-1)$ (car on a $i+1 \leq j-1 \leq m(j-1)$) et alors les relations $H_1(n)$ montrent que :

$$\sum_{k>i} |a_{j,k}| \geq j.(m(j-1)-i) \geq j \geq r_i .$$

Maintenant, si $j \in P_i'(r)$, on a $1 \leq i < m(j-1)$.
Les relations $H_3(n)$ montrent que $|v_{j,i}| \geq j$. Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien une famille libre de décomposition de E.
Dans le cas où l'on alterne les signes des coefficients $a_{n,i}$ c'est-à-dire en supposant que les $a_{n,i}$ vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les relations $H_4(n)$ suivantes :

$H_4(n)$: $a_{n,i}$ est du signe de $(-1)^{n+i}$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq m(n-1)$,

alors la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre de décomposition forte.
Dans le cas où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m(n) = n$, cette famille est une base.
Sinon, on voit facilement que l'on peut compléter la famille libre de décomposition $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en une base triangulaire de décomposition $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en ajoutant des e_i de façon convenable à la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (de façon naturelle, la base $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dite triangulaire relativement à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si, pour tout n, $f'_n = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} b_{n,i}\, e_i$ avec $b_{n,n} \neq 0$ et $b_{n,i} = 0$ pour $i > n$).

3.3.2.- Voici un autre exemple.

Soient E un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de E.

Soit Φ l'ensemble des applications φ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\varphi(n)|}{\sum_{k=1}^{n-1} |\varphi(k)|} = +\infty .$$

Soit φ un élément de Φ. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n = \sum_{p=1}^{n} \varphi(n-p+1)e_p .$$

On vérifie que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de décomposition de E associée à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: En effet, avec les notations du paragraphe 3.1, on voit que $P_i(r)$ contient l'ensemble des $j \in \mathbb{N}^*$ tels que $|\varphi(j-i)| > r_i$, donc contient une section finissante de $\mathbb{N}^*$ puisque la suite $(|\varphi(n)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$; on a d'autre part $v_{j,i} = \dfrac{\varphi(j-i+1)}{\sum_{\ell=1}^{j-i} |\varphi(\ell)|}$.

On peut d'ailleurs caractériser Φ de la façon suivante :

Posons $\Psi = \{\psi \mid \psi \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}^*},\ \lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{\psi(n)}{\psi(n-1)}\right| = +\infty\}$.

Désignons par s la suite telle que $s(1) = 1$ et $s(n) = 2^{n-2}$ pour $n \geq 2$ (c'est-à-dire une suite vérifiant la relation de récurrence $s(n) = \sum_{k=1}^{n-1} s(k)$).

Montrons que $\Phi = s\,\Psi = \{s\,\psi \mid \psi \in \Psi\}$.

Soit $\psi \in \Psi$. Posons $\varphi = s\,\psi$ et montrons que $\varphi \in \Phi$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{\psi(n)}{\psi(n-1)}\right| = +\infty$, il existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_o$, on ait $|\psi(k)| \leq |\psi(n-1)|$ pour $1 \leq k \leq n-1$. On a alors, pour tout $n \geq n_o$:

$$\frac{|\varphi(n)|}{\sum_{k=1}^{n-1} |\varphi(k)|} = \frac{2^{n-2}|\psi(n)|}{|\psi(1)| + \sum_{k=2}^{n-1} 2^{k-2}|\psi(k)|} \geq \frac{2^{n-2}|\psi(n)|}{(1+\sum_{k=2}^{n-1} 2^{k-2})|\psi(n-1)|} = \left|\frac{\psi(n)}{\psi(n-1)}\right| .$$

Il en résulte que $\varphi \in \Phi$.

Réciproquement, soit $\varphi \in \Phi$ et soit ψ l'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ telle que $\varphi = s\,\psi$; montrons que $\psi \in \Psi$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\varphi(n)|}{\sum\limits_{k=1}^{n-1} |\varphi(k)|} = +\infty$, on en déduit, a fortiori, que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\varphi(n)|}{|\varphi(n-1)|} = +\infty.$$

On a alors, pour tout $n \geq 3$:

$$\left|\frac{\psi(n)}{\psi(n-1)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)}\right| ,$$

d'où il résulte que $\psi \in \Psi$.

3.3.3.- Le théorème suivant donne un résultat dans le cas où l'ensemble I est un ensemble produit.

<u>*Théorème*</u> *3.2.-*

Soient S *et* T *deux ensembles bien ordonnés, l'ensemble* S *étant non vide, l'ensemble* T *étant infini, et* I *l'ensemble produit* $S \times T$ *supposé bien ordonné par la relation d'ordre lexicographique. Soit* E *un espace vectoriel somme directe* $\bigoplus_{s\in S} E_s$ *où, pour tout* $s \in S$, E_s *est un espace vectoriel ayant pour base* $(e^s_t)_{t\in T}$.

Considérons, pour tout $s \in S$, *un élément donné* $r^s = (r^s_t)_{t\in T}$ *de* $(\mathbb{R}^*_+)^T$ *et désignons par* $r = (r_i)_{i\in I}$ *l'élément de* $(\mathbb{R}^*_+)^I$ *tel que, pour tout* $i = (s,t) \in I$, *on ait* $r_i = r^s_t$.
Si, pour tout $s \in S$, *la famille* $(f^s_u)_{u\in U}$ *de vecteurs de* E_s *est une* r^s*-famille (resp. :* r^s*-base) de décomposition (forte) de* E_s *associée à la base* $(e^s_t)_{t\in T}$, *alors la famille* $(f^s_u)_{(s,u)\,\in\, S\times U}$ *est une* r*-famille (resp. :* r*-base) de décomposition (forte) de* E *associée à la base* $(e^s_t)_{(s,t)\,\in\, S\times T}$.

Démonstration

Prenons des notations analogues à celles du paragraphe 3.1.

Posons $J = S \times U$ et posons, pour tout $(s,u) \in S \times U$,

$$f_u^s = \sum_{(s',t) \in S \times T} a_{(s,u),(s',t)}\, e_t^{s'} = \sum_{t\in T} A_{u,t}^s\, e_t^s$$

avec

$$\begin{cases} a_{(s,u),(s',t)} = 0 & \text{si } s' \neq s \\ a_{(s,u),(s',t)} = A_{u,t}^s & \text{si } s' = s. \end{cases}$$

Soit $i = (s,t)$ un indice fixé dans I.

Posons $P_t^s(r^s) = \{u \mid u \in U, \sum_{k>t} |A_{u,k}^s| \geq r_t^s\}$

$$Q_t^s(r^s) = \{V_{u,t}^s \mid u \in P_t^s(r^s),\ V_{u,t}^s = \frac{A_{u,t}^s}{\sum_{k>t} |A_{u,k}^s|}\}.$$

Il est clair que $P_t^s(r^s)$ est non vide et que $Q_t^s(r^s)$ est non borné dans $\mathbb{R}$ puisque la famille $(f_u^s)_{u\in U}$ est une r^s-famille de décomposition de E_s.

Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que $P_i(r) \neq \emptyset$ et que $Q_i(r)$ est non borné dans $\mathbb{R}$.

Montrons d'abord que :

$$P_i(r) \supset \{(s,u) \mid u \in P_t^s(r^s)\} \quad ;$$

on sera alors assuré que $P_i(r) \neq \emptyset$.

Soit (s,u) avec u fixé dans $P_t^s(r^s)$. On a $\sum_{k>t} |A_{u,k}^s| \geq r_t^s$ ou encore $\sum_{(s,k)>(s,t)} |a_{(s,u),(s,k)}| \geq r_t^s$ donc a fortiori

$$\sum_{(s',k)>(s,t)} |a_{(s,u),(s',k)}| \geq r_t^s.$$

Ainsi $(s,u) \in P_i(r)$.

Montrons maintenant que $Q_i(r) \supset Q_t^s(r^s)$; on sera alors assuré que $Q_i(r)$ est non borné dans $\mathbb{R}$.

Soit u fixé dans $P_t^s(r^s)$. On est alors sûr que $j = (s,u) \in P_i(r)$ et on a :

$$V_{u,t}^s = \frac{A_{u,t}^s}{\sum\limits_{k>t} |A_{u,k}^s|} = \frac{a_{(s,u),(s,t)}}{\sum\limits_{(s,k)>(s,t)} |a_{(s,u),(s,k)}|}$$

$$= \frac{a_{(s,u),(s,t)}}{\sum\limits_{(s',k)>(s,t)} |a_{(s,u),(s',k)}|} = v_{j,i} .$$

Ainsi $Q_t^s(r^s) \subset Q_i(r)$.

Précisons d'ailleurs que les éléments de $Q_i(r)$ ne figurant éventuellement pas dans $Q_t^s(r^s)$ sont des réels nuls.

Précisons aussi que la démonstration qui précède s'adapte de façon évidente au cas où la décomposition est forte.

Remarque

Le théorème précédent fournit, d'après les exemples que l'on vient de donner, un procédé de construction de r-familles de décomposition dans tout espace vectoriel de dimension infinie puisqu'il est toujours possible d'écrire une base de E sous la forme $(e_{i,n})_{(i,n) \in I \times \mathbb{N}^*}$ où I est un ensemble bien ordonné.

Nous utiliserons ce théorème au chapitre suivant.

3.4.- REMARQUES.-

3.4.1.- L'exemple suivant illustre ce qui a été affirmé à la cinquième remarque du paragraphe 3.1.

Exemple

Soient E un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de E, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une autre base définie par

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{2}(e_1+e_2) \\ f_2 = \frac{1}{2}(e_1-e_2) \\ \text{et pour } n \geq 1, \\ f_{2n+1} = \sum_{p=0}^{n} \varphi(n+1-p)\; e_{2p+1} \\ f_{2n+1} = \sum_{p=1}^{n+1} \varphi(n+2-p)\; e_{2p}, \end{cases}$$

où $\varphi \in \Phi$ (voir 3.3.2).

Par un raisonnement analogue à celui fait au paragraphe 3.3.2, on montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de décomposition de E associée à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Par contre, pour tout $r \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une r-base de décomposition de E associée à $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: En effet, on peut montrer que, dans l'expression de e_n en fonction des f_i, les composantes relatives à f_1 et f_2 ont même valeur absolue (plus précisément elles sont les mêmes dans le cas où n est impair et sont opposées dans le cas où n est pair).

Prenons des notations analogues à celles du paragraphe 3.1 et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$e_n = \sum_{p\in\mathbb{N}^*} A_{n,p}\; f_p .$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|A_{n,1}| = |A_{n,2}|$ et par suite

$$|V_{n,1}| = \frac{|A_{n,1}|}{\sum_{p>1} |A_{n,p}|} \leq 1$$

Ceci montre que, pour tout $r \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$, l'ensemble $Q_1(r)$ est borné dans $\mathbb{R}$.

3.4.2.- Revenons aux notations du paragraphe 3.1 en supposant en outre que $J = I$ et que $(f_j)_{j\in I}$ est une base de E. L'exemple suivant montre que l'on peut avoir

$$CS\Big[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}\Big] + C\Big[\bigcup_{j\in I} \{f_j\}\Big] = E$$

sans qu'il existe pour autant $r \in (\mathbb{R}_+^*)^I$ tel que $(f_j)_{j\in I}$ soit une r-base de décomposition associée à $(e_i)_{i\in I}$ ou $s \in (\mathbb{R}_+^*)^I$ tel que $(e_i)_{i\in I}$ soit une s-base de décomposition associée à $(f_j)_{j\in I}$, et ceci quelle que soit la relation de bon ordre sur I.

Exemple

Soient E un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de E, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une autre base définie par

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = e_2 \\ \text{et pour } n \geq 1, \\ (-1)^n f_{2n+1} = \varphi(n+1)(e_1+e_2) + \sum_{p=1}^{n} \varphi(n+1-p)\, e_{2p+1} \\ (-1)^n f_{2n+2} = \varphi(n+1)(e_1-e_2) + \sum_{p=2}^{n+1} \varphi(n+2-p)\, e_{2p}, \end{cases}$$

où $\varphi \in \Phi$ et est à valeurs > 0.

On remarque que la base $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de décomposition forte de E associée à la base $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $e'_1 = \frac{1}{2}(e_1+e_2)$, $e'_2 = \frac{1}{2}(e_1-e_2)$, et pour $n \geq 3$, $e'_n = e_n$.

Le théorème 3.1 bis montre que :

$$CS\Big[\bigcup_{n\in N^*} \{e'_n\}\Big] + C\Big[\bigcup_{n\in N^*} \{f_n\}\Big] = E.$$

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e'_n \in CS\Big[\bigcup_{n\in N^*} \{e_n\}\Big]$, on en déduit que l'on a, a fortiori,

$$CS\Big[\bigcup_{n\in N^*} \{e_n\}\Big] + C\Big[\bigcup_{n\in N^*} \{f_n\}\Big] = E.$$

De plus, on peut montrer que, dans l'expression des f_n en fonction des e_i (resp. : des e_n en fonction des f_i), les composantes relatives à e_1 et e_2 (resp. : f_1 et f_2) ont même valeur absolue (plus précisément elles sont les mêmes dans le cas où n est impair et ≥ 3 et sont opposées dans le cas où n est pair et ≥ 4). Il suffit alors de raisonner comme à la fin du paragraphe 3.4.1.

3.4.3.- L'exemple suivant met en évidence la "finesse" de la condition suffisante donnée au théorème 3.1.

Exemple

Soient E un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de E, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une autre base définie par

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = \varphi(1)(e_1+e_2) \\ \text{et pour } n \geq 3, \\ f_n = \varphi(n-1)(e_1+e_2) + \sum\limits_{p=3}^{n} \varphi(n+1-p)\, e_p, \end{cases}$$

où $\varphi \in \Phi$.

Désignons par H l'hyperplan engendré par e_1+e_2 et par les e_n pour $n \geq 3$. Il est clair que

$$cs\Big[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{e_n\}\Big] \subset [-e_1,e_1] + [-e_2,e_2] + H$$

et

$$cs\Big[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{f_n\}\Big] \subset [-e_1,e_1] + H.$$

Ainsi on a :

$$cs\Big[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{e_n\}\Big] + cs\Big[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{f_n\}\Big] \subset [-2e_1,2e_1] + [-e_2,e_2] + H$$

On voit donc (voir théorème 2.2) que :

$$cs\Big[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{e_n\}\Big] + cs\Big[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{f_n\}\Big] \neq E.$$

Cependant, pour tout $r \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$, on constate que $Q_n(r)$ est non borné sauf pour $n = 1$.

Remarques

1) Reprenons les notations du paragraphe 3.1 et posons

$$R_i = \{a_{j,i} \mid j \in J\}.$$

Une condition nécessaire pour que

$$CS[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}] + CS[\bigcup_{J\in J} f_j] = E$$

est que, pour tout $i \in I$, R_i soit non borné dans $\mathbb{R}$.

Montrons cette propriété par l'absurde. Supposons qu'il existe $k \in I$ tel que R_k soit borné et posons

$$m = \sup\{|a_{j,k}| \mid j \in J\}.$$

Soient $x \in CS[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}]$, $y \in CS[\bigcup_{j\in J} \{f_j\}]$ et $z = x+y$.

On a $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{j\in J} \mu_j f_j$, où $\lambda_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices i, $\mu_j = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices j, $\sum_{i\in I} |\lambda_i| \leq 1$, $\sum_{j\in J} |\mu_j| \leq 1$.

Désignons par z_k la composante relative à e_k dans la base $(e_i)_{i\in I}$.

On a $z_k = \lambda_k + \sum_{j\in J} \mu_j a_{j,k}$.

Il en résulte que $|z_k| \leq 1+m$ et donc que

$$CS[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}] + CS[\bigcup_{j\in J} \{f_j\}] \neq E.$$

2) L'exemple précédent montre que cette condition nécessaire n'est pas suffisante.

3.4.4.- L'exemple suivant illustre ce qui a été affirmé à la quatrième remarque du paragraphe 3.1.

Exemple

Soients E un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de E, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une autre base de E définie par

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ \text{et pour } n \geq 1 , \\ f_{2n} = \sum\limits_{p=2}^{2n} \varphi(2n+1-p)\, e_p \\ f_{2n+1} = n\, e_1 + e_{2n+1}, \end{cases}$$

où $\varphi \in \Phi$.

Soient r et $t \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$ avec $r_1 \leq 1$ et $t_1 > 1$.

On voit facilement que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une r-base de décomposition de E associée à $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et n'est pas une t-base de décomposition de E associée à $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (En effet, l'ensemble $P_1(t)$ ne comprenant que des entiers pairs, l'ensemble $Q_1(t)$ est formé de réels tous nuls).

3.4.5.- Voici maintenant quelques remarques concernant la dimension du sous-espace vectoriel engendré par une famille de décomposition.

<u>*Proposition*</u> *3.1.*-

Soient E *un espace vectoriel de dimension infinie,* $(e_i)_{i\in I}$ *une base bien ordonnée de* E*,* r *un élément de* $(\mathbb{R}_+^*)^I$ *et* $(f_j)_{j\in J}$ *une* r-*famille de décomposition de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$*. Alors le sous-espace vectoriel de* E *engendré par la famille* $(f_j)_{j\in J}$ *a même dimension que* E.

<u>Démonstration</u>

Posons $F = S[\bigcup\limits_{j\in J} \{f_j\}]$ et désignons par $\mathcal{B}$ la base $(e_i)_{i\in I}$ de E.

On a évidemment $\dim F \leq \dim E$.

Montrons par l'absurde que $\dim F = \dim E$. Supposons $\dim F < \dim E$.

Soit $(g_k)_{k\in K}$ une base de F. Chaque g_k est une combinaison linéaire des e_i à coefficients tous nuls sauf pour un nombre fini. Ainsi, désignant par L l'ensemble des e_i nécessaires à l'écriture de tous les g_k (c'est-à-dire ceux intervenant avec un coefficient non nul dans l'écriture d'au moins un des g_k dans $\mathcal{B}$), on a $\text{card } L = \dim F$.

Si $\dim F < \dim E$, on a $\text{card } L < \dim E$. Ainsi il existe au moins un élément e_i de la base $\mathcal{B}$ qui intervient avec un coefficient nul dans l'écriture de tous les g_k dans $\mathcal{B}$, donc avec un coefficient nul dans l'écriture de tous les f_j dans $\mathcal{B}$. Ceci est en contradiction avec la définition 3.1.

Remarque

L'exemple suivant montre que la codimension du sous-espace vectoriel engendré par une famille de décomposition peut être égale à la dimension de l'espace.

Exemple

Soient E un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de E. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n = \sum_{p=1}^{2n-1} \varphi(2n-p)\, e_p ,$$

où $\varphi \in \Phi$.

On vérifie que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre de décomposition de E associée à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Tout point $x \neq 0$ de E qui s'écrit sous la forme $x = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda_n e_{2n}$ ne peut appartenir à $S[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{f_n\}]$.

Ainsi, on a :

$$S[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{e_{2n}\}] \cap S[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{f_n\}] = \{0\}.$$

CHAPITRE IV

CARACTERISATION DES COUPLES DE DECOMPOSITION D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION INFINIE

Ce chapitre constitue le développement de la note [9].
Nous nous proposons de caractériser, dans un espace vectoriel E de dimension infinie, les couples de convexes (C_1, C_2) tels que C_1 soit symétrique absorbant, C_2 soit de dimension infinie et de codimension dénombrable (couples du type (T)) et tels que $C_1+C_2 = E$.
Nous introduisons, dans le paragraphe 4.1, les notions nécessaires pour cette caractérisation : couple de décomposition, couple principal de décomposition forte ou non.
Le paragraphe 4.2 règle le cas où la dimension de E est infinie dénombrable.
Dans le paragraphe 4.3, nous introduisons la notion de sous-espace vectoriel $\aleph_0$-décomposable relativement à un couple de parties de E. Le lemme 4.1 et la proposition 4.2 permettent alors de passer au cas où la dimension est infinie quelconque.
Le paragraphe 4.4 donne les résultats fondamentaux.
Dans le paragraphe 4.5 nous montrons, sur des exemples, la nécessité des hypothèses mises en jeu.

4.1.- DEFINITIONS.-

Dans ce paragraphe, E est un espace vectoriel de dimension infinie et le couple (C_1, C_2) est un couple de convexes de E.

Définition 4.1.-

Si $C_1+C_2 = E$, *on dit que le couple* (C_1, C_2) *est un couple de décomposition de* E.

Définition 4.2.-

Si $C_1 = CS[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}]$ *et* $C_2 = CS[\bigcup_{j\in J} \{f_j\}]$ *où* $(f_j)_{j\in J}$ *est une famille libre de décomposition de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$ *de* E *supposée bien ordonnée, on dit que le couple* (C_1,C_2) *est un couple principal de décomposition de* E.

Définition 4.2 *bis*.-

Si $C_1 = CS[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}]$ *et* $C_2 = C[\bigcup_{j\in J} \{f_j\}]$ *où* $(f_j)_{j\in J}$ *est une famille libre de décomposition forte de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$ *de* E *supposée bien ordonnée, on dit que le couple* (C_1,C_2) *est un couple principal de décomposition forte de* E.

Remarque

Le théorème 3.1 (resp. : théorème 3.1 bis) montre qu'un couple principal de décomposition (resp. : décomposition forte) est bien un couple de décomposition de E.

Définition 4.3.-

Si C_1 *est symétrique et absorbant et si* C_2 *est de dimension infinie et de codimension débombrable, on dit que le couple* (C_1,C_2) *est du type* (T).

Définition 4.4.-

Soient A,A', B,B' *des parties de* E. *Si* $A \supset A'$ *et si* $B \supset B'$, *on dira que le couple* (A,B) *contient le couple* (A',B') *et on écrira*

$$(A,B) \supset (A',B').$$

4.2.- CAS DE LA DIMENSION INFINIE DENOMBRABLE.-

Ce cas est réglé par la proposition suivante.

Proposition 4.1.-

Soient, dans un espace vectoriel E *de dimension infinie dénombra-*

ble, un convexe absorbant C_1 *et un convexe* C_2 *de dimension infinie. Si* $C_1+C_2 = E$, *il existe dans* C_1 *une base* $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *et dans* C_2 *une famille libre* $(f_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *de décomposition forte de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

Démonstration

Nous distinguerons deux cas suivant que l'origine O appartient ou non à C_2.

1) Premier cas : $O \in C_2$.

Le convexe C_1 étant absorbant, le convexe C_2 étant de dimension infinie et contenant l'origine, on peut trouver une base $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de E satisfaisant aux deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}^* \ , \quad g_i \in C_1 \cap (-C_1) \\ \forall i \text{ impair}, \quad g_i \in C_2. \end{cases}$$

Construisons, par récurrence sur l'entier n, une suite $(m(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante d'entiers > 0, une base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et une suite libre $(f_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs de E, ces deux trois familles étant liées à l'entier n par les propriétés suivantes $R_1(n)$, $R_2(n)$, $R_3(n)$, $R_4(n)$ avec :

$R_1(n)$: $e_{m(n-1)+1}, e_{m(n-1)+2}, \dots , e_{m(n)} \in C_1$.

$R_2(n)$: $S[\{e_1,e_2,\dots,e_{m(n)}\}] = S[\{g_1,g_2,\dots,g_{m(n)}\}]$.

$R_3(n)$: $f_n \in C_2$.

$R_4(n)$: $f_n = a_{n,1}\, e_1 + a_{n,2}\, e_2 + \dots + a_{n,m(n)}\, e_{m(n)}$,

les $a_{n,i}$ vérifiant les propriétés $H_1(n)$, $H_2(n)$, $H_3(n)$ et $H_4(n)$ du paragraphe 3.3.1.

On pose $m(1) = 1$ et $f_1 = e_1 = g_1$.

Supposons la construction faite jusqu'au rang n et construisons $m(n+1)$, $e_{m(n)+1}, e_{m(n)+2}, \dots , e_{m(n+1)}$ et f_{n+1}.

Désignons par B_n l'ensemble des $m(n)$-uples $(b_1,b_2,\dots,b_{m(n)})$ formés de réels (tous non nuls) vérifiant les conditions $H_3'(n)$, $H_4'(n)$ suivantes :

$$H_3'(n) \;:\; \frac{|b_{m(n)}|}{2} \geq n+1, \quad \frac{|b_{m(n)-1}|}{2+|b_{m(n)}|} \geq n+1, \;\ldots\;,$$

$$\frac{|b_1|}{2+|b_2|+|b_3|+\ldots+|b_{m(n)}|} \geq n+1.$$

$H_4'(n)$: b_i est du signe de $(-1)^{n+1+i}$.

Soit W_n l'ensemble des vecteurs $w = \sum_{i=1}^{m(n)} b_i\, e_i$ où $(b_1,b_2,\ldots,b_{m(n)}) \in B_n$.

Posons $S[\{g_1,g_2,\ldots,g_{m(n)}\}] = S_n$, $C_1' = C_1 \cap S_n$, $C_2' = C_2 \cap S_n$.

a) Supposons que $W_n \cap (C_1'+C_2') \neq \emptyset$.

Soit $w = \sum_{i=1}^{m(n)} b_i\, e_i \in W_n \cap (C_1'+C_2')$. Il existe $c_1' \in C_1'$ et $c_2' \in C_2'$ tels que $w = c_1'+c_2'$ soit encore $c_2' = w-c_1'$.

Distinguons deux cas :

a.1) $m(n)$ est pair.

On a :

$$\frac{1}{2}(c_2' + g_{m(n)+1}) = \frac{1}{2}\,w - \frac{1}{2}(c_1' - g_{m(n)+1}). \qquad (1)$$

On pose alors :

$$\begin{cases} m(n+1) = m(n) + 1 & (2) \\ e_{m(n+1)} = \frac{1}{2}(c_1' - g_{m(n)+1}) & (3) \\ f_{n+1} = \frac{1}{2}(c_2' + g_{m(n)+1}), & (4) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a_{n+1,m(n+1)} = -1 & (5) \\ a_{n+1,i} = \frac{1}{2}\, b_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq m(n). & (6) \end{cases}$$

Dans ce cas, la récurrence est achevée : En effet, $R_1(n+1)$ et $R_2(n+1)$ sont vérifiées à cause de (1), (2) et (3) ; $R_3(n+1)$ est vérifiée à cause de (4) ; $R_4(n+1)$ est vérifiée à cause de (5), (6), $H_3'(n)$ et $H_4'(n)$.

a.2) $m(n)$ est impair.

On a :

$$\frac{1}{2}(c'_2 + g_{m(n)+2}) = \frac{1}{2} w - \frac{1}{2}(c'_1 - g_{m(n)+2}) \tag{7}$$

On pose alors :

$$\begin{cases} m(n+1) = m(n)+2 & (8) \\ e_{m(n)+1} = g_{m(n)+1} & (9) \\ e_{m(n+1)} = \frac{1}{2}(c'_1 - g_{m(n)+2}) & (10) \\ f_{n+1} = \frac{1}{2}(c'_2 + g_{m(n)+2}), & (11) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a_{n+1,m(n)+1} = 0 & \\ a_{n+1,m(n+1)} = -1 & (12) \\ a_{n+1,i} = \frac{1}{2} b_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m(n). & (13) \end{cases}$$

Dans ce cas, la récurrence est achevée : En effet, $R_1(n+1)$ et $R_2(n+1)$ sont vérifiées à cause de (7), (8), (9) et (10) ; $R_3(n+1)$ est vérifiée à cause de (11) ; $R_4(n+1)$ est vérifiée à cause de (12), (13), $H'_3(n)$ et $H'_4(n)$.

b) Supposons que $W_n \cap (C'_1 + C'_2) = \emptyset$.

Soit $w = \sum_{i=1}^{m(n)} b_i e_i \in W_n$. Puisque $C_1 + C_2 = E$, il existe $c_1 \in C_1$ et $c_2 \in C_2$ tels que $w = c_1+c_2$ soit encore $c_2 = w-c_1$.

Soit k le plus petit entier $\geqslant 0$ tel que

$$S[\{e_1,e_2, \dots ,e_{m(n)},c_1\}] \subset S[\{g_1,g_2, \dots ,g_{m(n)}, \dots g_{m(n)+k}\}]. \tag{14}$$

Puisque $w \notin C'_1+C'_2$, $c_1 \notin S_n$, donc k est > 0.

On pose alors :

$$\begin{cases} m(n+1) = m(n) + k & (15) \\ e_{m(n)+1} = c_1 & (16) \\ e_{m(n)+i} = g_{m(n)+i-1} \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant i \leqslant k & (17) \\ f_{n+1} = w - c_1, & (18) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a_{n+1,m(n)+1} = -1 & (19) \\ a_{n+1,m(n)+i} = 0 \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant i \leqslant k & \\ a_{n+1,i} = b_i \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m(n). & (20) \end{cases}$$

Dans ce cas, la récurrence est achevée : En effet, $R_1(n+1)$ est vérifiée à cause de (15), (16) et (17) ; $R_2(n+1)$ est vérifiée à cause de (14), (15), (16) et (17) ; $R_3(n+1)$ est vérifiée à cause de (18) ; $R_4(n+1)$ est vérifiée à cause de (19), (20), $H_3'(n)$ et $H_4'(n)$.

Ainsi, dans tous les cas la récurrence est achevée. En outre, d'après le paragraphe 3.3.1, la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien une famille libre de décomposition forte de E associée à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2) <u>Deuxième cas</u> : $0 \notin C_2$.

Posons $\Gamma_2 = C[\{0\} \cup C_2]$. Puisque $C_1+\Gamma_2 = E$, on peut, d'après le premier cas, trouver dans C_1 une base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et dans Γ_2 une famille libre $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de décomposition forte de E associée à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $\lambda_n \geqslant 1$ tel que $\lambda_n f'_n \in C_2$. Posons $f_n = \lambda_n f'_n$. Il est alors aisé de vérifier que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien une famille libre de décomposition forte de E associée à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4.3.- <u>*CAS DE LA DIMENSION INFINIE QUELCONQUE*</u>.-

4.3.1.- <u>*Définition*</u> *4.5.-*

Soit F *un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel* E *et* *soient* A *et* B *deux parties de* E. *S'il existe une famille* $(F_j)_{j\in J}$ *de sous-espaces vectoriels de* F *tels que :*

$$\begin{cases} \forall j \in J \quad , \quad \dim F_j = \aleph_0 \\ \forall j \in J \quad , \quad \dim(A \cap F_j) = \dim(B \cap F_j) = \aleph_0 \\ \forall j \in J \quad , \quad (A \cap F_j) + (B \cap F_j) = F_j \\ F = \bigoplus\limits_{j\in J} F_j , \end{cases}$$

alors on dit que F *est* $\aleph_0$*-décomposable relativement au couple* (A,B).

<u>*Lemme*</u> *4.1.-*

Soient (C_1,C_2) *un couple (de convexes) de décomposition d'un espace vectoriel* E *et* F *un sous-espace vectoriel de codimension dénombrable. Si* F *est* $\aleph_0$*-décomposable relativement au couple* (C_1,C_2)*, alors* E *l'est aussi.*

<u>Démonstration</u>

Supposons $F \neq E$. Soient G un sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans E et $(e_k)_{k\in K}$ une base de G $(K \subset \mathbb{N}^*)$.

Puisque $C_1+C_2 = E$, pour tout couple $(k,n) \in K \times \mathbb{Z}$, il existe $c_1(k,n) \in C_1$ et $c_2(k,n) \in C_2$ tels que

$$n\, e_k = c_1(k,n) + c_2(k,n).$$

Considérons $L = S[\bigcup\limits_{(k,n)} \{c_1(k,n), c_2(k,n)\}]$ et posons $F' = F \cap L$.

On a $\dim L \leqslant \aleph_0$ et $\dim F' \leqslant \aleph_0$.

Montrons l'inclusion (1) :

$$G \subset [C_1 \cap (F' \oplus G)] + [C_2 \cap (F' \oplus G)]. \qquad (1)$$

Montrons d'abord que $L = F' \oplus G$ (la somme $F'+G$ est directe car la somme $F+G$ l'est aussi).

On a $F' \oplus G \subset L$ car $F' \subset L$ et car $G \subset L$ (pour tout $k \in K$, $e_k \in L$).

Réciproquement, on a $L \subset F' \oplus G$.

En effet soit $\ell \in L$. Puisque $F \oplus G = E$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $\ell = f+g$. On a donc $f = \ell - g$; ainsi $f \in L$ car $g \in G \subset L$. On en déduit que $f \in F \cap L = F'$, ainsi $\ell \in F' \oplus G$.

Ainsi pour montrer (1), il suffit de montrer que :

$$G \subset (C_1 \cap L) + (C_2 \cap L).$$

Ceci résulte du fait que $(C_1 \cap L) + (C_2 \cap L)$ est un convexe qui contient $n\, e_k$ pour tout $(k,n) \in K \times \mathbb{Z}$.

Soit maintenant $(F_j)_{j\in J_1}$ une sous-famille dénombrable non vide de la famille $(F_j)_{j\in J}$ (on reprend les notations de la définition 4.5 avec $A = C_1$ et $B = C_2$) telle que :

$$\bigoplus_{j\in J_1} F_j \supset F'.$$

Posons $V = G \oplus (\bigoplus_{j\in J_1} F_j)$. On a $\dim V = \aleph_0$.

Il est clair que :

$$E = (\bigoplus_{j\in J\smallsetminus J_1} F_j) \oplus V. \tag{2}$$

Montrons que :

$$(V \cap C_1) + (V \cap C_2) = V. \tag{3}$$

L'inclusion dans un sens est évidente. Montrons l'autre inclusion.

Puisque, pour tout $j \in J$, on a

$$(F_j \cap C_1) + (F_j \cap C_2) = F_j,$$

on en déduit que, pour tout $j \in J_1$

$$F_j \subset [(\bigoplus_{j\in J_1} F_j) \cap C_1] + [(\bigoplus_{j\in J_1} F_j) \cap C_2]$$

et ensuite que

$$\bigoplus_{j\in J_1} F_j \subset (V\cap C_1) + (V\cap C_2)$$

car $\bigoplus_{j\in J_1} F_j = C[\bigcup_{j\in J_1} F_j]$.

D'autre part, on déduit de (1) que :

$$G \subset (V\cap C_1) + (V\cap C_2).$$

Ainsi l'égalité (3) est bien vérifiée.

Puisque, pour tout $j \in J_1$, on a par hypothèse

$$\dim(C_1\cap F_j) = \dim(C_2\cap F_j) = \aleph_o,$$

on en déduit que :

$$\dim(C_1\cap V) = \dim(C_2\cap V) = \aleph_o . \qquad (4)$$

Les relations (2), (3) et (4) permettent alors de conclure.

4.3.2.- *Proposition 4.2.-*

Soient, dans un espace vectoriel E *de dimension infinie, un convexe* C_1 *absorbant, symétrique et un convexe* C_2 *de dimension infinie et de codimension dénombrable. Si* $C_1+C_2 = E$, *il existe une famille* $(E_j)_{j\in J}$ *de sous-espaces vectoriels de dimension infinie dénombrable vérifiant :*

1) $E = \bigoplus_{j\in J} E_j$.

2) Il existe dans $C_1\cap E_j$ *une base de* E_j *et dans* $C_2\cap E_j$ *une famille libre de décomposition forte de* E_j *associée à la base précédente.*

Démonstration

Nous distinguerons plusieurs cas.

1) Premier cas : $0 \in C_2$ et $S[C_2] = E$.

Supposons la proposition 4.2 fausse.

Soit $(g_i)_{i \in I}$ une base bien ordonnée de E, i_o désignant le plus petit élément de I. On peut **supposer** en outre que, pour tout $i \in I$, $g_i \in C_1 \cap (-C_1) \cap C_2$ (ceci est possible car C_1 est absorbant et car C_2 est un convexe contenant l'origine et tel que $S[C_2] = E$).

Montrons par récurrence transfinie qu'à chaque $\ell \in I$, on peut associer un sous-espace vectoriel E_ℓ de E tel que l'on ait (h_1) et (h_2) avec :

(h_1) : - ou bien $E_\ell = \{0\}$

- ou bien $\dim E_\ell = \aleph_o$ et il existe dans $C_1 \cap E_\ell$ une base de E et dans $C_2 \cap E_\ell$ une base de décomposition forte de E_ℓ associée à la base précédente.

(h_2) : la somme $\sum\limits_{i \leq \ell} E_i$ est directe et contient g_ℓ.

La suite de la démonstration montrera que la propriété précédente est vraie pour $\ell = i_o$.

Soit maintenant $\ell \in I$. Supposons les propriétés (h_1) et (h_2) vraies pour tous les $i < \ell$ et montrons qu'elles sont vraies pour ℓ.

Si $g_\ell \in \bigoplus\limits_{i<\ell} E_i$, on choisit $E_\ell = \{0\}$ et les propriétés (h_1) et (h_2) sont évidemment vérifiées.

Sinon, posons $F_\ell = \bigoplus\limits_{i<\ell} E_i$.

Si F_ℓ est de codimension dénombrable, le théorème 3.1 bis, le lemme 4.1 et la proposition 4.2 montrent (quitte à ôter, dans $\bigoplus\limits_{i<\ell} E_i$, les E_i éventuellement réduits à $\{0\}$) que la proposition 4.2 est vraie, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Supposons que F_ℓ soit de codimension $> \aleph_o$ et construisons, par récurrence sur l'entier n, une suite libre $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de vecteurs de E et une suite libre $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de vecteurs de E satisfaisant aux propriétés $R_1(n), R_2(n)$,

$R_3(n)$, $R_4(n)$ suivantes avec :

$R_1(n)$: $e_n \in C_1$.

$R_2(n)$: $e_n \notin F_\ell \oplus S[\{e_1,e_2,\dots,e_{n-1}\}]$.

$R_3(n)$: $f_n \in C_2$.

$R_4(n)$: $f_n = a_{n,1}\, e_1 + a_{n,2}\, e_2 + \dots + a_{n,n-1}\, e_{n-1} - e_n$,

les $a_{n,i}$ vérifiant les propriétés $H_1(n)$, $H_2(n)$, $H_3(n)$, $H_4(n)$ du paragraphe 3.3.1 (en posant $m(n) = n$ et $a_{n,n} = -1$).

On pose $f_1 = -e_1 = g_\ell$.

Supposons $e_1,e_2, \dots ,e_n$, $f_1,f_2, \dots ,f_n$ construits.

Désignons par B_n l'ensemble des n-uples $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ formés de réels (tous non nuls) vérifiant les conditions $H_3'(n)$ et $H_4'(n)$ suivantes :

$$H_3'(n) : \quad \frac{|b_n|}{2} \geq n+1, \quad \frac{|b_{n-1}|}{2+|b_n|} \geq n+1, \quad \dots , \quad \frac{|b_1|}{2+|b_2|+|b_3|+ \dots |b_n|} \geq n+1.$$

$H_4'(n)$: b_i est du signe de $(-1)^{n+1+i}$.

Soit W_n l'ensemble des vecteurs $w = \sum_{i=1}^{n} b_i\, e_i$ où $(b_1,b_2,\dots,b_n) \in B_n$.

Posons $S_n = S[\{e_1,e_2,\dots,e_n\}]$, $C_1' = C_1 \cap (S_n \oplus F_\ell)$, $C_2' = C_2 \cap (S_n \oplus F_\ell)$.

Distinguons deux cas :

a) $W_n \cap (C_1'+C_2') = \emptyset$.

Soit $w \in W_n$. Puisque $C_1+C_2 = E$, il existe $c_1 \in C_1$ et $c_2 \in C_2$ tels que $w = c_1+c_2$ soit encore $c_2 = w-c_1$. Puisque $W_n \cap (C_1'+C_2') = \emptyset$, $c_1 \notin S_n \oplus F_\ell$.

On pose :

$$\begin{cases} e_{n+1} = c_1 & (1) \\ f_{n+1} = c_2 = w-e_{n+1}, & (2) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$a_{n+1,i} = b_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n. \qquad (3)$$

Dans ce cas, la récurrence est achevée : En effet, $R_1(n+1)$ et $R_2(n+1)$ sont vérifiées à cause de (1) ; $R_3(n+1)$ est vérifiée à cause de (2) ; $R_4(n+1)$ est vérifiée à cause de (3), $H'_3(n)$ et $H'_4(n)$.

b) $W_n \cap (C'_1+C'_2) \neq \emptyset$.

Soit $w \in W_n \cap (C'_1+C'_2)$. Il existe $c'_1 \in C'_1$ et $c'_2 \in C'_2$ tels que $w = c'_1+c'_2$ soit encore $c'_2 = w-c'_1$.

Puisque F_ℓ est de codimension infinie, donc aussi $S_n \oplus F_\ell$, il existe un vecteur $g_{\ell'}$ de la base précédemment définie et n'appartenant pas à $S_n \oplus F_\ell$.

On pose :

$$\begin{cases} e_{n+1} = \frac{1}{2}\, c'_1 - \frac{1}{2}\, g_{\ell'} & (1) \\[2ex] f_{n+1} = \frac{1}{2}\, w - e_{n+1} = \frac{1}{2}\, c'_2 + \frac{1}{2}\, g_{\ell'}, & (2) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$a_{n+1,i} = \frac{1}{2}\, b_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n. \qquad (3)$$

Dans ce cas, la récurrence est achevée : En effet, $R_1(n+1)$ et $R_2(n+1)$ sont vérifiées à cause de (1) ; $R_3(n+1)$ est vérifiée à cause de (2) ; $R_4(n+1)$ est vérifiée à cause de (3), $H'_3(n)$ et $H'_4(n)$.

Dans les deux cas la récurrence est achevée.

Posons $E_\ell = S\left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{e_n\}\right]$. D'après le mode de construction des e_n, la somme $\sum_{i \leq \ell} E_i$ est bien directe, ainsi (h_2) est vérifiée ; le paragraphe 3.3.1 montre que (h_1) est vérifiée.

Notons que pour amorcer la récurrence transfinie, on procède comme précédemment en partant de $F_\ell = \{0\}$.

Soit maintenant $(E_j)_{j \in J}$ la sous-famille de la famille $(E_i)_{i \in I}$ composée des $E_i \neq \{0\}$. Cette famille satisfait à la proposition 4.2, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Dans tous les cas, l'hypothèse de la fausseté de la proposition 4.2 est donc contradictoire, ce qui démontre cette proposition.

2) Deuxième cas : $0 \in C_2$ et $S[C_2] \neq E$.

Posons $S[C_2] = E'$ et montrons que :

$$(C_1 \cap E') + C_2 = E'.$$

L'inclusion dans un sens est évidente. Montrons l'autre inclusion.

Soit $x \in E'$. Puisque $C_1+C_2 = E$, il existe $c_1 \in C_1$ et $c_2 \in C_2$ tels que $x = c_1+c_2$. Puisque $c_2 \in E'$ (car $S[C_2] = E'$), il en résulte que $c_1 \in E'$. Ainsi, on a :

$$E' \subset (C_1 \cap E') + C_2.$$

Le résultat obtenu dans le premier cas montre que E' est $\aleph_0$-décomposable relativement au couple $(C_1 \cap E', C_2)$ donc, a fortiori, E' est $\aleph_0$-décomposable relativement au couple (C_1, C_2). Le lemme 4.1 montre alors que E est $\aleph_0$-décomposable relativement au couple (C_1, C_2) car E' est de codimension dénombrable dans E. La proposition 4.1 permet alors de conclure.

3) Troisième cas : $0 \notin C_2$.

On raisonne sur chaque E_j comme dans le deuxième cas de la démonstration de la proposition 4.1.

Corollaire 4.1.-

Soit (C_1, C_2) un couple de décomposition du type (T) d'un espace vectoriel E. Alors E est $\aleph_0$-décomposable relativement au couple (c_1, c_2).

Démonstration

Ce résultat est une conséquence immédiate de la proposition 4.2 et du théorème 3.1 bis.

4.4.- CONCLUSION.-

Théorème 4.1.-

Soit, dans un espace vectoriel E de dimension infinie, un couple de convexes (C_1, C_2) du type (T). Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) : (C_1,C_2) *est un couple de décomposition de* E.

(ii) : *Le couple* (C_1,C_2) *contient un couple principal de décomposition forte de* E.

Démonstration

Ce résultat est une conséquence du théorème 3.1 bis, de la proposition 4.2, de la proposition 4.1 et du théorème 3.2 (appliqué à l'ensemble $J \times \mathbb{N}^*$ muni du bon ordre lexicographique obtenu à partir d'un bon ordre sur l'ensemble J, l'ensemble J étant obtenu à la proposition 4.2).

Corollaire 4.2.-

Soit, dans un espace vectoriel E *de dimension infinie, un couple de convexes* (C_1,C_2) *du type* (T), C_2 *étant en outre symétrique. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) : (C_1,C_2) *est un couple de décomposition de* E.

(ii) : *Le couple* (C_1,C_2) *contient un couple principal de décomposition de* E.

Démonstration

Ce résultat est une conséquence du théorème 3.1 et du théorème 4.1.

4.5.- REMARQUES.-

4.5.1.- Une précision relative au théorème 4.1

Si (C_1,C_2) est un couple de décomposition de E avec $C_1 = CS[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}]$ et $C_2 = C[\bigcup_{i\in I} \{f_i\}]$ ($(e_i)_{i\in I}$ et $(f_i)_{i\in I}$ étant deux bases bien ordonnées de E), on ne peut pas affirmer que le couple (C_1,C_2) est un couple principal de décomposition forte de E (ceci d'ailleurs quel que soit le bon ordre envisagé sur I). Il suffit pour s'en convaincre de reprendre l'exemple du paragraphe 3.4.2.

4.5.2.- L'exemple suivant montre que l'on ne peut abandonner l'hypothèse de symétrie pour C_1 dans le théorème 4.1.

Exemple

Soient E un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de E et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la base de E définie par :

$$f_n = \sum_{p=1}^{n} \psi(n-p+1)\ e_p,$$

où $\psi \in \Phi$ (voir 3.3.2) et est à valeurs > 0.

Posons $C_1 = C[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{e_n,-e_n,f_n\}]$ et $C_2 = -C_1$.

On constate que C_1+C_2 contient $2CS[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{e_n\}]$ et $CS[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{f_n\}]$. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de décomposition de E associée à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, le théorème 3.1 montre que $C_1+C_2 = E$. Ainsi le couple (C_1,C_2) est un couple de décomposition de E.

On remarque que :

$$[C_1 \cap (-C_1)] + C_2 \subset -2C_1$$

et que

$$[C_2 \cap (-C_2)] + C_1 \subset 2C_1.$$

Or C_1 est différent de E (par exemple, $-2e_1 \notin C_1$). Ainsi les couples (C_1,C_2) et (C_2,C_1) ne contiennent pas de couple principal de décomposition forte de E.

4.5.3.- L'exemple précédent montre que l'on ne peut abandonner l'hypothèse "forte" dans le théorème 3.1 bis.

En effet, C_1 est différent de E et l'on a :

$$2C_1 \supset CS[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{e_n\}] + C[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{f_n\}].$$

4.5.4.- L'exemple suivant montre que l'on ne peut abandonner les hypothèses de symétrie pour C_1 et C_2 dans le corollaire du théorème 4.1.

Exemple

Soient E un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de E et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la base de E définie par :

$$f_n = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{n+p}\ \psi(n-p+1)\ e_p,$$

où $\psi \varepsilon \Phi$ et est à valeurs > 0.

Posons $C_1 = CS[\bigcup_{n\varepsilon\mathbb{N}^*} \{e_n\}]$ et $C_2 = C[\bigcup_{n\varepsilon\mathbb{N}^*} \{f_n\}]$.

Le théorème 3.1 bis montre que (C_1,C_2) est un couple de décomposition de E car $(f_n)_{n\varepsilon\mathbb{N}^*}$ est une base de décomposition forte de E associée à la base $(e_n)_{n\varepsilon\mathbb{N}^*}$.

D'autre part, on voit facilement, en tenant compte du fait que $(f_n)_{n\varepsilon\mathbb{N}^*}$ est une base de E, que $C_2 \cap (-C_2) = \emptyset$; ainsi le couple (C_1,C_2) ne peut contenir de couple principal de décomposition de E.

CHAPITRE V

APPLICATION A LA CARACTERISATION DES ENSEMBLES CONVEXES UBIQUITAIRES

Ce chapitre constitue le développement de la note [10].

Dans [20], Klee a introduit la notion de convexe ubiquitaire et a donné un exemple de convexe proprement ubiquitaire non linéairement borné. Dans [22], Klee fournit un exemple de convexe ubiquitaire linéairement borné.

La notion de convexe proprement ubiquitaire est intéressante car l'existence d'un tel convexe dans un espace vectoriel E est caractéristique de la dimension infinie de E, et car un tel convexe est dense dans toute topologie de E respectant la topologie de la droite.

Nous nous proposons ici de donner une caractérisation de ces convexes en tant que sur-ensembles de convexes particuliers que nous appelons convexes ubiquitaires basiques.

Dans le paragraphe 5.2, nous introduisons les notions de convexe élémentaire, de convexe ubiquitaire élémentaire, de convexe basique, (cette notion n'a rien à voir avec la notion de "semispace basique" introduite par Klee dans [23]), de convexe ubiquitaire basique et nous montrons au théorème 5.1 que tout convexe ubiquitaire basique est bien ubiquitaire. Nous obtenons ainsi un procédé général de construction de convexes ubiquitaires.

Le paragraphe 5.3 est consacré au problème réciproque.

Dans ce paragraphe la proposition 5.1 montre que, dans tout espace vectoriel de dimension infinie, tout convexe ubiquitaire contenant l'origine contient un convexe basique (le lemme 5.4 réglant le cas de la dimension infinie dénombrable). Le théorème 5.2 fournit la caractérisation annoncée.

5.1.- DEFINITION ET NOTATION.-

5.1.1.- Définition 5.1.-

Soient E *un espace vectoriel,* $(e_i)_{i\varepsilon I}$ *et* $(f_i)_{i\varepsilon I}$ *deux bases bien ordonnées de* E. *On dira que* $(f_i)_{i\varepsilon I}$ *est une base triangulaire de* E *relativement à la base* $(e_i)_{i\varepsilon I}$ *si, pour tout* $j \varepsilon I$,

$$f_j = \sum_{i\varepsilon I} a_{j,i}\, e_i,$$

avec $\begin{cases} a_{j,i} = 0 & \textit{pour tout } i > j, \\ a_{j,j} \neq 0. \end{cases}$

5.1.2.- Nous désignons, dans toute la suite, par Φ' l'ensemble des applications ϕ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\phi(n)}{\sum\limits_{k=1}^{n-1} \phi(k)} = +\infty.$$

Φ' est un sous-ensemble de l'ensemble Φ considéré au paragraphe 3.3.2.

5.2.- LA NOTION DE CONVEXE UBIQUITAIRE BASIQUE.-

5.2.1.- Définitions

Soient E un espace vectoriel de dimension infinie rapporté à une base bien ordonnée $(e_i)_{i\varepsilon I}$, $(f_j)_{j\varepsilon J}$ une famille de décomposition forte de E associée à la base $(e_i)_{i\varepsilon I}$ telle que, pour tout $j \varepsilon J$, la dernière composante non nulle de f_j dans la base $(e_i)_{i\varepsilon I}$ soit < 0.

Posons $\Gamma_1 = C\big[(\bigcup_{i\varepsilon I} \{-e_i\}) \cup (\bigcup_{j\varepsilon J} \{f_j\})\big]$.

Soit $(c_i)_{i\varepsilon I}$ une famille de points de Γ_1 tous distincts de l'origine 0 tels que, pour tout $i \varepsilon I$, la dernière composante non nulle de c_i dans la base $(e_i)_{i\varepsilon I}$ ait un indice $> i$ (une telle famille existe car l'existence d'une famille de décomposition de E associée à la base $(e_i)_{i\varepsilon I}$ montre (voir les deux premières remarques du paragraphe 3.1) que I est sans plus grand élément).

Posons $\Gamma_2 = C[\Gamma_1 \cup (\bigcup_{i\in I} \{e_i + t\, c_i \mid t \in]0,1]\})]$.

Définition 5.2.-

Avec les notations précédentes, tout convexe du type Γ_1 *sera appelé convexe élémentaire et tout convexe du type* Γ_2 *sera appelé convexe ubiquitaire élémentaire.*

Définition 5.3.-

Avec les notations précédentes, si, en outre, $(f_j)_{j\in J}$ *est une base triangulaire de* E *relativement à la base* $(e_i)_{i\in I}$ *(on suppose donc* J = I*), tout convexe du type* Γ_1 *sera appelé convexe basique et tout convexe du type* Γ_2 *sera appelé convexe ubiquitaire basique.*

5.2.2.- *Théorème* 5.1.-

Tout convexe ubiquitaire élémentaire (donc tout convexe ubiquitaire basique) est bien ubiquitaire ; il est même proprement ubiquitaire.

Démonstration

D'après le mode de construction de Γ_2, Γ_2 est différent de E car tout point de Γ_2 distinct de l'origine 0 a une dernière composante non nulle < 0.

D'autre part, lin Γ_2 contient, pour tout $i \in I$ et pour tout $j \in J$, e_i, $-e_i$, f_j ; Γ_2 étant convexe, lin Γ_2 est convexe et ainsi on a :

$$\text{lin } \Gamma_2 \supset \frac{1}{2} (CS[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}] + C[\bigcup_{j\in J} \{f_j\}]).$$

Le théorème 3.1 bis montre alors que lin Γ_2 = E.

5.3.- *PROBLEME RECIPROQUE ET CARACTERISATION.*-

Plusieurs lemmes sont nécessaires avant d'aboutir à la caractérisation.

5.3.1.- *Lemme* 5.1.-

Soit, dans un espace vectoriel E, *un convexe ubiquitaire* C *contenant l'origine. Si* $y \in E$, *il existe* $x \in C$ *tel que, pour tout* $t \in]0,1]$, $y+tx \in C$.

Démonstration

Soit $y \in E$; $2y \in \text{lin } C$. Ainsi il existe $x' \in C$ tel que, pour tout $\alpha \in]0,1]$, on ait :

$$(1-\alpha)\ 2y + \alpha\ x' = 2y + \alpha(x'-2y) = z(\alpha) \in C.$$

On en déduit que, pour $\alpha \in]0,\frac{1}{2}]$,

$$y + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ \frac{x'}{2} = \frac{1}{2(1-\alpha)}\ z(\alpha) \in C,$$

car C contient l'origine.

On pose alors $x = \frac{x'}{2}$ et $t = \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Il est clair que, lorsque α décrit l'intervalle $]0,\frac{1}{2}]$, t décrit l'intervalle $]0,1]$.

Remarque

Dans le cas où C est un convexe dont le lin est un cône de sommet O, le lemme 5.1 reste vrai pour tout point $y \in \text{lin } C$.

5.3.2.- *Lemme* 5.2.-

Soient E *un espace vectoriel de dimension infinie,* $(e_i)_{i\in I}$ *une base bien ordonnée de* E ,$(f_j)_{j\in J}$ *une famille de décomposition (resp. : décomposition forte) de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$, $(x_j)_{j\in J}$ *une famille de vecteurs de* E. *Posons, pour tout* $j \in J$, $f'_j = f_j+\alpha_j\ x_j$ *avec* $\alpha_j \in \mathbb{R}$. *Alors il existe, pour tout* $j \in J$, *un réel* $\beta_j > 0$ *tel que, si pour tout* $j \in J$, $|\alpha_j| < \beta_j$, *la famille* $(f'_j)_{j\in J}$ *soit une famille de décomposition (resp. : décomposition forte) de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$.

Démonstration

Posons, pour tout $j \in J$,

$$f_j = \sum_{i \in I} a_{j,i}\, e_i \quad \text{et} \quad x_j = \sum_{i \in I} x_{j,i}\, e_i \ .$$

On a :

$$f'_j = \sum_{i \in I} (a_{j,i} + \alpha_j\, x_{j,i}) e_i = \sum_{i \in I} b_{j,i}(\alpha_j) e_i \ ,$$

avec $b_{j,i}(\alpha_j) = a_{j,i} + \alpha_j\, x_{j,i}$.

Le lemme 5.2 résulte alors de la définition des familles de décomposition (resp. : décomposition forte) (voir paragraphe 3.1) et de la continuité en 0 des applications :

$$\alpha_j \longmapsto \sum_{k>i} |b_{j,k}(\alpha_j)|$$

$$\text{et} \quad \alpha_j \longmapsto v_{j,i}(\alpha_j) = \frac{b_{j,i}(\alpha_j)}{\sum_{k>i} |b_{j,k}(\alpha_j)|} \quad (\text{si} \ \sum_{k>i} |a_{j,k}| \neq 0) \ ,$$

et du fait que, pour j fixé et i décrivant l'ensemble I_j des indices $i \in I$ pour lesquels l'un au moins des deux nombres $a_{j,i}$ et $x_{j,i}$ soit non nul, les applications précédentes sont en nombre fini.

5.3.3.- Lemme 5.3.-

Soient E *un espace vectoriel de dimension infinie,* U *un convexe ubiquitaire contenant l'origine,* F *un sous-espace vectoriel de* E *de codimension dénombrable tel que* $F = \bigoplus_{j \in J} F_j$ *où* J *est un ensemble infini et où, pour tout* $j \in J$, F_j *est un sous-espace vectoriel de* E *de dimension infinie dénombrable. Si, pour tout* $j \in J$, $U \cap F_j$ *contient un convexe basique de* F_j*, alors* U *contient un convexe basique.*

Démonstration

On suppose que J est bien ordonné sans plus grand élément et que $J \times \mathbb{N}^*$ est muni du bon ordre lexicographique.

Supposons $F \neq E$.

Désignons par α le plus petit élément de J. Comme U engendre E, il existe dans E un sous-espace vectoriel supplémentaire de F admettant une base $(e_m)_{m\varepsilon M}$ (avec card $M \leqslant \aleph_o$) telle que, pour tout $m \varepsilon M$, $-e_m \varepsilon U$.

Posons $G = F_\alpha \oplus S[\bigcup_{m\varepsilon M} \{e_m\}]$.

Soit, pour tout $j > \alpha$, une base $(e_{(j,n)})_{n\varepsilon\mathbb{N}^*}$ de F_j telle que, pour tout $n \varepsilon \mathbb{N}^*$, $-e_{(j,n)} \varepsilon U$, et soit, pour tout $j > \alpha$, une base triangulaire de décomposition forte $(f_{(j,n)})_{n\varepsilon\mathbb{N}^*}$ de F_j associée à la base $(e_{(j,n)})_{n\varepsilon\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \varepsilon \mathbb{N}^*$,

$$f_{(j,n)} \varepsilon U$$

et

$$f_{(j,n)} = \sum_{i=1}^{n} a^i_{(j,n)} e_{(j,i)} \quad \text{avec} \quad a^n_{(j,n)} < 0.$$

Soit $(e_{(\alpha,n)})_{n\varepsilon\mathbb{N}^*}$ une base de G telle que $-e_{(\alpha,n)} \varepsilon U$ pour tout $n \varepsilon \mathbb{N}^*$ (d'après la construction de G , une telle base existe) et soit $(f'_{(\alpha,n)})_{n\varepsilon\mathbb{N}^*}$ une base de décomposition forte de G associée à la base $(e_{(\alpha,n)})_{n\varepsilon\mathbb{N}^*}$.

Puisque U est un convexe ubiquitaire de E contenant l'origine, il existe, d'après le lemme 5.1, $x_n \varepsilon U$ tel que :

$$2f'_{(\alpha,n)} + t_n x_n \varepsilon U \text{ pour tout } t_n \varepsilon]0,1].$$

L'ensemble J étant un ensemble infini totalement ordonné et sans plus grand élément, on peut construire par récurrence sur l'entier n une suite strictement croissante d'indices $(j_n,1) \varepsilon J \times \mathbb{N}^*$ telle que :

1) $(j_1,1)$ soit un indice strictement supérieur aux indices des dernières composantes non nulles de $f'_{(\alpha,1)}$ et de x_1 (relatives à la base $(e_{(j,n)})_{(j,n) \varepsilon J \times \mathbb{N}^*}$ de E).

2) $(j_n,1)$ soit un indice strictement supérieur aux indices $(j_1,1), (j_2,1), \ldots , (j_{n-1},1)$ et aux indices des dernières composantes non nulles de $f'_{(\alpha,n)}$ et de x_n.

Soit $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{j_n\}$.

Considérons la famille $(f'_{(j,n)})_{(j,n) \in J \times \mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $j > \alpha$, on ait :

$$\begin{cases} f'_{(j,n)} = f_{(j,n)} & \text{si} \quad j \notin K, \\ f'_{(j,n)} = f_{(j,n+1)} & \text{si} \quad j \in K \end{cases}$$

(les $f'_{(\alpha,n)}$ ont été définis ci-dessus).

Puisque $E = G \oplus (\bigoplus_{j>\alpha} F_j)$, d'après le théorème 3.2, la famille $(f'_{(j,n)})_{(j,n) \in J \times \mathbb{N}^*}$ est une famille libre de décomposition forte de E associée à la base $(e_{(j,n)})_{(j,n) \in J \times \mathbb{N}^*}$.

Considérons maintenant la famille $(g_{(j,n)})_{(j,n) \in J \times \mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} g_{(\alpha,n)} = \frac{1}{2}(2\, f'_{(\alpha,n)} + t_n\, x_n) - \frac{1}{2} t_n\, e_{(j_n,1)}, \\ g_{(j,n)} = f'_{(j,n)} \quad \text{pour} \quad j > \alpha . \end{cases}$$

D'après le lemme 5.2, si chaque t_n est assez petit, cette famille est une famille de décomposition forte de E associée à la base $(e_{(j,n)})_{(j,n) \in J \times \mathbb{N}^*}$.

D'autre part, elle est libre d'après le mode de construction des $f'_{(j,n)}$ et de K (car deux vecteurs distincts de cette famille ont des dernières composantes non nulles d'indices distincts).

Il est clair aussi que tout vecteur de la famille appartient à U et a une dernière composante non nulle < 0.

En outre, on peut compléter cette famille libre de décomposition forte en une base de décomposition forte de E en lui adjoignant la famille $(-e_{(\alpha,n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ (tout vecteur de cette famille appartient à U). En effet, posons :

1) $g'_{(\alpha,n)} = -e_{(\alpha,n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) si $j \notin K$ et si $j \neq \alpha$,

$g'_{(j,n)} = g_{(j,n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) si $j = j_n \in K$,

$$\begin{cases} g'_{(j_n,1)} = g_{(\alpha,n)}, \\ g'_{(j_n,k)} = g_{(j_n,k-1)} \quad \text{pour tout } k > 1. \end{cases}$$

La famille $(g'_{(j,n)})_{(j,n) \in J \times \mathbb{N}^*}$ est bien une base triangulaire de décomposition forte de E associée à la base $(e_{(j,n)})_{(j,n) \in J \times \mathbb{N}^*}$.

Ainsi U contient un convexe basique.

Il est à noter que, si $F = E$, le théorème 3.2 donne le résultat immédiatement.

5.3.4.- <u>Lemme</u> 5.4.-

Soit, dans un espace vectoriel E *de dimension infinie dénombrable, un convexe ubiquitaire* U *contenant l'origine. Alors* U *contient un convexe basique.*

<u>Démonstration</u>

Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de E telle que $-e_n \in U$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de décomposition forte de E associée à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Puisque U est un convexe ubiquitaire contenant l'origine, il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in U$ tel que $2f_n + t_n x_n \in U$ pour tout $t_n \in]0,1]$ (d'après le lemme 5.1).

Définissons par récurrence sur l'entier n, une suite d'entiers $(m(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante telle que :

1) $m(1)$ soit un entier strictement supérieur aux indices des dernières composantes non nulles de f_1 et x_1.

2) $m(n)$ soit un entier strictement supérieur aux indices des

dernières composantes non nulles de f_n et x_n et aux entiers $m(1)$, $m(2), \ldots, m(n-1)$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f'_{m(n)} = \frac{1}{2}(2f_n + t_n x_n) - \frac{1}{2} t_n e_{m(n)}.$$

Il est clair que $f'_{m(n)} \in U$ et qu'en choisissant chaque t_n assez petit, la famille $(f'_{m(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre de décomposition forte de E associée à la base $(e_n)_{n\in N^*}$ (d'après le lemme 5.2).

Pour conclure, il suffit d'envisager la famille $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$f'_k = -e_k \quad \text{si} \quad k \notin \{m(n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}.$$

U contient donc le convexe basique :

$$\Gamma_1 = C[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{-e_n, f'_n\}].$$

5.3.5.- <u>*Proposition*</u> 5.1.-

Soit, dans un espace vectoriel E *de dimension infinie, un convexe ubiquitaire* U *contenant l'origine. Alors* U *contient un convexe basique.*

<u>Démonstration</u>

D'après le lemme 5.4, il suffit de démontrer cette proposition dans le cas où E est de dimension non dénombrable.

Supposons la proposition 5.1 fausse.

Soit $(g_i)_{i\in I}$ une base bien ordonnée de E, i_o désignant le plus petit élément de I. On peut supposer que, pour tout $i \in I$, $g_i \in U$ (ceci est possible car $S[U] = E$).

Montrons par récurrence transfinie qu'à chaque $\ell \in I$, on peut associer un sous-espace vectoriel E_ℓ de E tel que l'on ait (h_1) et (h_2) avec :

(h_1) : - ou bien $E_\ell = \{0\}$

- ou bien E_ℓ est de dimension infinie dénombrable et $U \cap E_\ell$

contient un convexe basique de E_ℓ du type $\Gamma_1^\ell = C[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{-e_{(\ell,n)},f_{(\ell,n)}\}]$ où $(e_{(\ell,n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de E_ℓ, $-e_{(\ell,n)}$ appartenant à U pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(f_{(\ell,n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant une base triangulaire de décomposition forte de E_ℓ associée à la base précédente, la dernière composante non nulle de $f_{(\ell,n)}$ étant < 0.

(h_2) : la somme $\sum\limits_{i\leq\ell} E_i$ est directe et contient g_ℓ.

La suite de la démonstration montrera que la propriété précédente est vraie pour $\ell = i_o$.

Soit $\ell \in I$. Supposons les propriétés (h_1) et (h_2) vraies pour tous les $i < \ell$ et montrons qu'elles sont vraies pour ℓ.

Posons $F_\ell = \bigoplus\limits_{i<\ell} E_i$.

Si $g_\ell \in F_\ell$, on choisit $E_\ell = \{0\}$ et les propriétés (h_1) et (h_2) sont évidemment vérifiées.

Montrons que F_ℓ ne peut être de codimension finie : En effet, si F_ℓ est de codimension finie, F_ℓ n'étant pas de dimension dénombrable (E est de dimension non dénombrable), l'ensemble des $i < \ell$ tels que $E_i \neq \{0\}$ est infini, le lemme 5.3 montre alors que la proposition 5.1 est vraie (ce qui contredit l'hypothèse de départ).

On peut donc supposer que F_ℓ a une codimension infinie.

Construisons par récurrence sur l'entier n, une suite libre $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs de E et une suite libre $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs de E satisfaisant aux propriétés $R_1(n)$, $R_2(n)$, $R_3(n)$, $R_4(n)$ suivantes avec :

$R_1(n)$: $-e_n \in U$.

$R_2(n)$: $e_n \notin F_\ell + S[\{e_1,e_2,\dots,e_{n-1}\}]$.

$R_3(n)$: $f_n \in U$.

$R_4(n)$: $f_n = a_{n,1}\, e_1 + a_{n,2}\, e_2 + \dots + a_{n,n-1}\, e_{n-1} - e_n$,
les $a_{n,i}$ vérifiant les propriétés $H_1(n)$, $H_2(n)$, $H_3(n)$,

$H_4(n)$ du paragraphe 3.3.1 (en posant $m(n) = n$ et $a_{n,n} = -1$).

On pose $f_1 = -e_1 = g_\ell$.

Supposons $e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n$ construits.

Considérons un vecteur $w = \sum_{i=1}^{n} b_i\ e_i$, les coefficients b_i vérifiant les propriétés suivantes :

$$H_3'(n) : \quad \frac{|b_n|}{2} \geq n+1, \quad \frac{|b_{n-1}|}{2+|b_n|} \geq n+1, \quad \dots \quad , \frac{|b_1|}{2+|b_2|+|b_3|+\dots+|b_n|} \geq n+1.$$

$$H_4'(n) : \quad b_i \text{ est du signe de } (-1)^{n+1+i}.$$

Puisque U est un convexe ubiquitaire contenant l'origine, il existe, (d'après le lemme 5.1) $x \in U$ tel que $w + x \in U$.

Posons $S_n = S[\{e_1, e_2, \dots, e_n\}]$.

Puisque $S_n \oplus F_\ell$ est de codimension infinie (car F_ℓ l'est), il existe un vecteur $g_{\ell'}$ de la base de départ n'appartenant pas à $S_n \oplus F_\ell$.

Puisque U est un convexe ubiquitaire contenant l'origine il existe $x' \in U$ tel que $(-x+g_{\ell'}) + tx' \in U$ pour tout $t \in]0,1]$.

On a donc :

$$\frac{1}{2}(w+x) + \frac{1}{2}[(-x+g_{\ell'})+tx'] = \frac{1}{2} w + \frac{1}{2}(g_{\ell'}+tx') \in U.$$

Choisissons t de façon que $\frac{1}{2}(g_{\ell'}+tx') \notin S_n \oplus F_\ell$ (ceci est possible puisque $g_{\ell'} \notin S_n \oplus F_\ell$).

On pose alors :

$$\begin{cases} e_{n+1} = -\frac{1}{2}(g_{\ell'}+tx') & (1) \\ f_{n+1} = \frac{1}{2} w - e_{n+1}, & (2) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$a_{n+1,i} = \frac{1}{2} b_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n. \qquad (3)$$

Il est alors clair que e_{n+1} et f_{n+1} satisfont à l'hypothèse de récurrence : En effet, $R_1(n+1)$ et $R_2(n+1)$ sont vérifiées à cause de (1) ; $R_3(n+1)$ est vérifiée à cause de (2) ; $R_4(n+1)$ est vérifiée à cause de (2), (3), $H_3'(n)$ et $H_4'(n)$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_{(\ell,n)} = e_n$ et $f_{(\ell,n)} = f_n$, et posons :

$$E_\ell = S[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{e_{(\ell,n)}\}],$$

$$\Gamma_1^\ell = C[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{-e_{(\ell,n)}, f_{(\ell,n)}\}].$$

Le paragraphe 3.3.1 et la définition 5.3 montrent que Γ_1^ℓ est un convexe basique de E contenu dans $U \cap E_\ell$.

Ainsi (h_1) et (h_2) sont bien vérifiées.

Notons que, pour amorcer la récurrence transfinie, on procède comme précédemment en partant de $F_\ell = \{0\}$.

La récurrence transfinie est achevée.

Soit maintenant $(E_j)_{j\in J}$ la sous-famille des $(E_i)_{i\in I}$ composée des $E_i \neq \{0\}$. On a $E = \bigoplus_{j\in J} E_j$.

Posons :

$$\Gamma_1 = C[\bigcup_{j\in J} \Gamma_1^j] = C[\bigcup_{(j,n)\in J\times\mathbb{N}^*} \{-e_{(j,n)}, f_{(j,n)}\}],$$

munissons J d'un bon ordre et $J \times \mathbb{N}^*$ du bon ordre lexicographique.

Le théorème 3.2 et la définition 5.3 montrent que Γ_1 est un convexe basique de E. En outre Γ_1 est contenu dans U. L'hypothèse de départ étant mise en défaut, la proposition 5.1 est vraie.

5.3.6.- Avant de démontrer le théorème de caractérisation, nous montrons le lemme préliminaire suivant :

<u>*Lemme*</u> 5.5.-

Soient, dans un espace vectoriel E, n *convexes* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *tels que* $C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] = E$, *et* $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ *des translatés respectifs de*

$A_1, A_2, \dots, A_n$ *dans des translations* $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$. *Alors, on a :*

$$C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i'] = E.$$

Démonstration

Posons $B = C[\bigcup_{i=2}^{n} A_i]$. On a $C[A_1 \cup B] = C[\bigcup_{i=1}^{n} A_i]$ et

$C[A_1' \cup B] = C[A_1' \cup (\bigcup_{i=2}^{n} A_i)]$.

Si on montre que $C[A_1' \cup B] = E$, alors, en itérant le résultat, on aboutit à la conclusion désirée.

Montrons donc que $C[A_1' \cup B] = E$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $C[A_1' \cup B] \neq E$. Soit x_o tel que $A_1' = A_1 + \{x_o\}$. On a donc $x_o \neq 0$.

Puisque $C[A_1' \cup B] \neq E$ et que $C[A_1' \cup B]$ est convexe, il existe une demi-droite Δ de direction x_o contenue dans $E \sim C[A_1' \cup B]$. Or on montre facilement que :

$$C[A_1 \cup B] \subset [-x_o, 0] + C[A_1' \cup B].$$

Il en résulte que Δ ne peut être toute entière contenue dans $C[A_1 \cup B]$, ce qui est absurde. Ainsi, on a $C[A_1' \cup B] = E$.

Théorème 5.2.-

Dans un espace vectoriel E *de dimension infinie, un convexe contenant l'origine est ubiquitaire si et seulement s'il contient un convexe ubiquitaire basique.*

Démonstration

La condition est suffisante d'après le théorème 5.1.

Montrons que la condition est nécessaire.

Soit U un convexe ubiquitaire contenant l'origine. D'après la proposition 5.1, U contient un convexe basique $\Gamma_1 = C[\bigcup_{i \in I} \{-e_i, f_i\}]$.

D'après le lemme 5.1, il existe, pour tout $i \in I$, $x_i \in U$ tel que :

$$4e_i + tx_i = u_i(t) \in U \quad \text{pour tout} \quad t \in]0,1]. \tag{1}$$

Posons $A = C[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}]$ et montrons que $2\Gamma_1 + A = E$.

Soit k un indice fixé dans I. Posons :

$$\Gamma_1' = \Gamma_1 + \{e_k\} \quad \text{et} \quad A' = A - \{e_k\}.$$

On a :

$$2\Gamma_1 + A + \{e_k\} = 2\Gamma_1' + A'.$$

Montrons que $C[\Gamma_1 \cup A] = E$.

En effet, $C[\Gamma_1 \cup A]$ contient $CS[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}]$ et $C[\bigcup_{i\in I} \{f_i\}]$.

Ainsi, on a :

$$C[\Gamma_1 \cup A] \supset \frac{1}{2} (CS[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}] + C[\bigcup_{i\in I} \{f_i\}]).$$

Le théorème 3.1 bis montre alors que :

$$C[\Gamma_1 \cup A] = E.$$

Le lemme 5.5 montre que

$$C[\Gamma_1' \cup A'] = E.$$

Puisque $0 \in \Gamma_1' \cap A'$, on en déduit successivement que $C[2\Gamma_1' \cup A'] = E$ et que $2\Gamma_1' + A' = E$.

Il en résulte que $2\Gamma_1 + A = E$.

Puisque $2\Gamma_1 + A = E$, il existe, pour tout $i \in I$, $c_i' \in \Gamma_1$ et $y_i \in A$ tels que :

$$x_i = 2c_i' + y_i. \tag{2}$$

On déduit de (1) et (2) que :

$$2e_i + tc'_i = \frac{1}{2}(u_i(t)-ty_i) \in U.$$

Soit, pour tout $i \in I$, j_i un élément de I strictement supérieur à i et à l'indice de la dernière composante non nulle de c'_i dans la base $(e_i)_{i\in I}$ (j_i existe car, d'après les deux premières remarques du paragraphe 3.1, I est sans plus grand élément).

Posons $c_i = \frac{1}{2}(c'_i - e_{j_i})$.

Il est clair que $c_i \in \Gamma_1$ et que $e_i + tc_i \in U$ pour tout $t \in]0,1]$.

Ainsi U contient le convexe Γ_2 suivant :

$$\Gamma_2 = C[\Gamma_1 \cup (\bigcup_{i\in I} \{e_i+tc_i \mid t \in]0,1]\})].$$

La définition 5.3 montre que Γ_2 est un convexe ubiquitaire basique.

5.3.7.- *Remarques*

1) On peut montrer, par une démonstration n'utilisant que les lemmes 5.1, 5.2 et 5.5, et en partant d'une famille de décomposition forte quelconque associée à une base $(e_i)_{i\in I}$ de E telle que, pour tout $i \in I$, $-e_i \in U$, le théorème 5.3 suivant qui est évidemment moins précis que le théorème 5.2.

Théorème 5.3.-

Dans un espace vectoriel E *de dimension infinie un convexe* U *contenant l'origine est ubiquitaire si et seulement s'il contient un convexe ubiquitaire élémentaire.*

Démonstration

La condition est suffisante d'après le théorème 5.1.

Montrons que la condition est nécessaire.

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base bien ordonnée de E sans plus grand élément telle que, pour tout $i \in I$, $-e_i \in U$.

Soit $(f_j)_{j\in J}$ une famille de décomposition forte de E associée à la base $(e_i)_{i\in I}$.

Puisque U est un convexe ubiquitaire contenant l'origine, le lemme 5.1 montre qu'il existe, pour tout $j \in J$, $x_j \in U$ tel que :

$$2f_j + t_j x_j \in U \quad , \text{ pour tout } t_j \in]0,1].$$

Soit i_j un élément de I strictement supérieur aux indices des dernières composantes non nulles de f_j et x_j dans la base $(e_i)_{i\in I}$. Posons, pour tout $j \in J$,

$$f'_j = \frac{1}{2}(2f_j+t_jx_j) - \frac{1}{2}t_j e_{i_j} = f_j + \frac{1}{2}t_j(x_j-e_{i_j}).$$

Puisque $0 \in U$, il est clair que, pour tout $j \in J$, $f'_j \in U$. D'après le lemme 5.2, en choisissant chaque t_j assez petit, la famille $(f'_j)_{j\in J}$ est une famille de décomposition forte de E associée à la base $(e_i)_{i\in I}$. Ainsi U contient le convexe élémentaire Γ_1 suivant :

$$\Gamma_1 = C[(\bigcup_{i\in I}\{-e_i\}) \cup (\bigcup_{j\in J}\{f'_j\})].$$

On raisonne ensuite comme au théorème 5.2.

2) Le procédé précédent ne semble pas permettre d'affirmer le caractère basique du convexe élémentaire Γ_1 car il n'est pas sûr que la famille $(f'_j)_{j\in J}$ trouvée à la démonstration du théorème 5.3 soit une base triangulaire de décomposition forte de E associée à la base $(e_i)_{i\in I}$.

CHAPITRE VI

APPLICATION A LA CARACTERISATION D'UNE CLASSE DE CONVEXES DENSES DANS UN ESPACE SEMI-NORME. DECOMPOSITION EN SOMME DE CONVEXES DENSES.

Ce chapitre constitue le développement de la note [11] et apporte une généralisation au théorème 4 de cette note.

Dans le paragraphe 6.1, nous caractérisons, à l'aide des notions de couple principal de décomposition et de couple principal de décomposition forte (voir paragraphe 4.1), une classe de convexes denses dans un espace vectoriel semi-normé de dimension infinie, à savoir ceux qui sont de dimension infinie et de codimension dénombrable (dans le cas où l'espace est de dimension infinie dénombrable, cette classe est formée de tous les convexes denses).

Dans le paragraphe 6.2, nous montrons (théorème 6.3) que tout espace vectoriel semi-normé E de dimension infinie α est somme directe de β sous-espaces vectoriels denses dans E, chacun d'eux étant somme de deux convexes denses dans E, linéairement bornés, disjoints, symétriques l'un de l'autre, et non ubiquitaires dans leur fermeture spatiale, β étant un cardinal tel que $2 \leq \beta \leq \alpha$.

A partir d'un résultat du paragraphe 6.2 (lemme 6.6), nous donnons, au paragraphe 6.3, un résultat concernant la partition d'un espace vectoriel semi-normé de dimension infinie en cônes convexes denses, résultat analogue à ceux trouvés par Klee dans [18] et [19].

La technique utilisée repose sur la notion d'hypercône.

6.1.- CARACTERISATION D'UNE CLASSE DE CONVEXES DENSES DANS UN ESPACE VECTORIEL SEMI-NORME DE DIMENSION INFINIE.-

Avant d'aborder les théorèmes de caractérisation, nous avons besoin du lemme suivant :

6.1.1.- Lemme 6.1.-

Soient E *un espace vectoriel semi-normé,* B *sa semi-boule unité ouverte (ou fermée),* A *une partie de* E *étoilée par rapport à un de ses points. Une condition nécessaire et suffisante pour que* A *soit dense dans* E *est que* A+B = E.

Démonstration

Désignons par $\mathcal{V}$ l'ensemble des voisinages de l'origine.

La condition est nécessaire : En effet, si A est dense dans E,

$\bar{A} = \bigcap\limits_{V \in \mathcal{V}} (A+V) = E$, ainsi $A+B = E$.

Montrons que la condition est suffisante.

On peut supposer que A est étoilé par rapport à l'origine car la topologie de E est invariante par translation.

Soit $V \in \mathcal{V}$. Il existe un réel λ, avec $0 < \lambda < 1$, tel que $\lambda B \subset V$.

Puisque $A+B = E$, on a $\lambda(A+B) = E$. Puisque $\lambda A \subset A$ et que $\lambda B \subset V$, il en résulte que $A+V = E$. Ainsi $\bar{A} = E$.

6.1.2.- Théorème 6.1.-

Soient E *un espace vectoriel semi-normé de dimension infinie,* B *sa semi-boule unité ouverte (ou fermée) et* A *un convexe de* E. *Si le couple* (B,A) *contient un couple principal de décomposition (forte ou non) de* E, *alors* A *est dense dans* E.

Démonstration

Elle résulte des définitions 4.2, 4.2 bis et 4.4, des théorèmes 3.1 et 3.1 bis et du lemme 6.1.

Théorème 6.2.-

Soient E *un espace vectoriel semi-normé de dimension infinie,* B *sa semi-boule ouverte (ou fermée) et* A *un convexe de dimension infinie et de codimension dénombrable.*

1) A *est dense si et seulement si le couple* (B,A) *contient un couple principal de décomposition forte de* E.

2) Si de plus A *est symétrique, alors* A *est dense si et seulement si le couple* (B,A) *contient un couple principal de décomposition de* E.

Démonstration

Elle résulte du théorème 4.1 et du corollaire 4.2 de ce théorème.

Corollaire 6.1.-

Soient E *un espace vectoriel semi-normé de dimension infinie dénombrable,* B *sa semi-boule unité ouverte (ou fermée) et* A *un convexe de dimension infinie de* E. *Alors les conclusions 1 et 2 du théorème 6.2 sont vraies.*

Démonstration

Elle résulte immédiatement du théorème précédent.

6.1.3.- Remarque

Dans le corollaire précédent, l'hypothèse "A de dimension infinie" est superflue lorsque E est normé (puisque, dans un tel espace, toute variété linéaire de dimension finie est fermée).

6.2.- DECOMPOSITION D'UN ESPACE VECTORIEL SEMI-NORME DE DIMENSION INFINIE EN SOMME DE CONVEXES DENSES.-

Avant de donner le théorème de décomposition (théorème 6.3), nous avons besoin des lemmes suivants :

6.2.1.- Lemme 6.2.-

Soient E *un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, et* G *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension et codimension infinies. Alors, pour toute base* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de* E *telle que* $(e_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *soit une base de* G *, il existe une famille libre* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de décomposition (forte ou non) de* E *associée à la base* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et qui est telle que :*

$$S[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{f_n\}] + G = E,$$

cette somme étant directe.

Démonstration

Soit φ un élément de l'ensemble Φ' défini au paragraphe 5.1.2.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n = \varphi(2n-1)e_1 + \varphi(2n-2)e_2 + \dots + \varphi(1)e_{2n-1}$$

et

$$f'_n = (-1)^n f_n.$$

On vérifie, d'une manière analogue à celle du paragraphe 3.3.2, que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (resp. : $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) est une famille de décomposition (resp. : décomposition forte) de E associée à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Il est clair que les familles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont libres car $\varphi(1) \neq 0$.

On vérifie aisément que les familles

$$(f_1,e_2,f_2,e_4, \dots ,f_n,e_{2n}, \dots)$$

et

$$(f'_1,e_2,f'_2,e_4, \dots ,f'_n,e_{2n}, \dots)$$

sont des bases de E.

Lemme 6.3.-

Soient E *un espace vectoriel de dimension infinie* α *et* G *un sous-espace vectoriel de dimension et codimension égales à* α. *Alors, pour toute base* $(e_i)_{i \in J \times \mathbb{N}^*}$ *de* E *où* J *est un ensemble bien ordonné* (card $J = \alpha$) *et* $J \times \mathbb{N}^*$ *bien ordonné par la relation d'ordre lexicographique, et telle que* $(e_i)_{i \in J \times 2\mathbb{N}^*}$ *soit une base de* G, *il existe une famille libre* $(f_i)_{i \in J \times \mathbb{N}^*}$ *de décomposition (forte ou non) de* E *associée à la base précédente et vérifiant :*

$$S[\bigcup_{i \in J \times \mathbb{N}^*} \{f_i\}] + G = E,$$

cette somme étant directe.

<u>Démonstration</u>

Soient, pour tout $j \in J$, E_j le sous-espace vectoriel de E ayant pour base $(e_{(j,n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et G_j le sous-espace vectoriel de E_j ayant pour base $(e_{(j,2n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Le lemme précédent montre que, pour tout $j \in J$, il existe une famille libre $(f_{(j,n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ de décomposition (forte ou non) de E_j associée à la base $(e_{(j,n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$S[\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{f_{(j,n)}\}] \oplus G_j = E_j.$$

Le théorème 3.2 montre que la famille $(f_{(j,n)})_{(j,n) \in J \times \mathbb{N}^*}$ est une famille libre de décomposition (forte si, pour tout $j \in J$, $(f_{(j,n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ l'est) de E associée à la base $(e_i)_{i \in J \times \mathbb{N}^*}$. On vérifie facilement que

$$S[\bigcup_{i \in J \times \mathbb{N}^*} \{f_i\}] + G = E$$

et que cette somme est directe.

<u>*Lemme*</u> *6.4.-*

Soient E *un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable,* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *une base de* E, $\psi \in \Phi'$ (voir 5.1.2).

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n = (-1)^{n+1}\,\varphi(n)\,e_1 + (-1)^n\,\varphi(n-1)\,e_2 + \dots + \varphi(1)\,e_n.$$

Les convexes $C = C[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{e_n,f_n\}]$ *et* $-C$ *sont linéairement bornés, disjoints, non ubiquitaires et tels que* $C-C = E$.

Démonstration

Montrons que C est linéairement borné.

Soit $x \in C$ avec $x \neq 0$. Puisque $x \in E$, x s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^{k} x_i\, e_i$ avec $x_k \neq 0$.

Puisque $x \in C$, x s'écrit sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\, e_i + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\, f_i,$$

avec $\sum_{i=1}^{N} (\lambda_i+\mu_i) = 1$, λ_i et $\mu_i \geq 0$ pour $1 \leq i \leq N$.

Il est clair que $N \geq k$.

Montrons que l'on peut supposer que $N = k$.

Puisque la décomposition de x suivant la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est unique, on en déduit que :

$$\left\{\begin{array}{lr}
x_1 = \lambda_1 + \mu_1\varphi(1) - \mu_2\varphi(2) + \dots + (-1)^{N+1}\,\mu_N\,\varphi(N). & (1)\\
x_2 = \lambda_2 + \mu_2\varphi(1) - \mu_3\varphi(2) + \dots + (-1)^{N}\,\mu_N\varphi(N-1). & (2)\\
\vdots & \\
x_k = \lambda_k + \mu_k\varphi(1) - \mu_{k+1}\varphi(2) + \dots + (-1)^{N-k+2}\,\mu_N\varphi(N-k+1). & (k)\\
0 = \lambda_{k+1} + \mu_k\varphi(1) - \mu_{k+1}\varphi(2) + \dots + (-1)^{N-k+1}\,\mu_N\varphi(N-k). & (k+1)\\
\vdots & \\
0 = \lambda_{N-1} + \mu_{N-1}\,\varphi(1) - \mu_N\varphi(2). & (N-1)\\
0 = \lambda_N + \mu_N\varphi(1). & (N)
\end{array}\right.$$

Puisque, pour $1 \leq i \leq N$, on a $\lambda_i \geq 0$ et $\mu_i \geq 0$, et puisque $\varphi(1) > 0$, les égalités (N), $(N-1)$, ... , $(k+1)$ entraînent successivement :

$$\lambda_N = \mu_N = 0,\ \lambda_{N-1} = \mu_{N-1} = 0,\ \dots\ ,\lambda_{k+1} = \mu_{k+1} = 0.$$

Ainsi, on peut supposer que $N = k$. Les égalités (1), (2), ... (k) montrent que :

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} |x_i| < 1 + \varphi(1) + \varphi(2) + \dots \varphi(k) & \text{pour} \quad 1 \leq i \leq k-1. \\ 0 < x_k < 1 + \varphi(1). \end{cases}$$

Soient maintenant $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i \in C$ et Δ la demi-droite :

$$\Delta = \{\rho\, z \mid \rho \geq 0\}$$

avec $z \neq 0$ et $z = \sum_{i=1}^{n} z_i\, e_i$.

Soit m un entier tel que $z_i = y_i = 0$ pour tout $i > m$.

Si $\{y\} + \Delta \subset C$, il résulte des inégalités (I) et de la définition de m que l'on a, pour tout $\rho \geq 0$ et pour $1 \leq i \leq m$,

$$|y_i + \rho z_i| < 1 + \varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(m).$$

Ceci montre que $z_m = z_{m-1} = \dots = z_1 = 0$, ce qui est absurde ; C est donc linéairement borné.

De plus la dernière inégalité de (I) montre que $C \cap (-C)$ contient au plus l'origine.

Montrons que $0 \notin C$, ou plus précisément que $0 \notin \operatorname{lin} C$, ce qui montrera que C n'est pas ubiquitaire et que C et $-C$ sont disjoints.

Soit $x \in C$ avec $x \neq 0$. Montrons, par l'absurde, que l'on ne peut avoir $tx \in C$ pour tout $t \in \,]0,1]$.

Soit x_k la dernière composante non nulle de x.

D'après ce qui a été dit plus haut,

$$tx = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t)\, e_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i(t)\, f_i,$$

avec $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i(t) + \mu_i(t)) = 1$, $\lambda_i(t)$ et $\mu_i(t) \geq 0$ pour $1 \leq i \leq k$.

Désignons par tx_i la $i^{\text{ème}}$ composante de tx.

On a, pour $1 \leq i \leq k$:

$$tx_i = \lambda_i(t) + \mu_i(t)\varphi(1) - \mu_{i+1}(t)\ \varphi(2) + \ldots + (-1)^{k+2-i}\ \mu_k(t)\ \varphi(k+1-i).$$

Posons $M = \sup\{\varphi(1), \varphi(2), \ldots , \varphi(k)\}$.

Soit $\varepsilon > 0$; choisissons t suffisamment petit pour réaliser $|tx_i| < \varepsilon$ pour $1 \leq i \leq k$.

Montrons, par récurrence finie sur $k-i$, que, pour $1 \leq i \leq k$:

$$\lambda_i(t) + \mu_i(t)\ \varphi(1) < \varepsilon\ (1 + \frac{M}{\varphi(1)}\ )^{k-i}.$$

Pour $k-i = 0$, on a :

$$\lambda_k(t) + \mu_k(t)\ \varphi(1) = tx_k,$$

donc

$$\lambda_k(t) + \mu_k(t)\ \varphi(1) < \varepsilon.$$

Supposons que, pour $0 \leq k-i \leq p-1$, on ait :

$$\lambda_i(t) + \mu_i(t)\ \varphi(1) < \varepsilon\ (1 + \frac{M}{\varphi(1)})^{k-i},$$

et montrons que :

$$\lambda_{k-p}(t) + \mu_{k-p}(t)\ \varphi(1) < \varepsilon\ (1 + \frac{M}{\varphi(1)})^{p}.$$

On a :

$$\lambda_{k-p}(t) + \mu_{k-p}(t)\ \varphi(1) = tx_{k-p} + (-1)^{p+1}\ \mu_k(t)\ \varphi(p+1) + (-1)^p\ \mu_{k-1}(t)\ \varphi(p) + \ldots + \mu_{k-p+1}(t)\ \varphi(2).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a, pour $0 \leq k-i \leq p-1$:

$$\mu_i(t) < \frac{\varepsilon}{\varphi(1)}\ (1 + \frac{M}{\varphi(1)})^{k-i}.$$

On en déduit que :

$$\lambda_{k-p}(t) + \mu_{k-p}(t)\ \psi(1) < \varepsilon + \varepsilon\ \frac{\psi(p+1)}{\psi(1)} + \varepsilon\ \frac{\psi(p)}{\psi(1)}\ (1 + \frac{M}{\psi(1)}) + \dots$$

$$\dots + \varepsilon\ \frac{\psi(2)}{\psi(1)}\ (1 + \frac{M}{\psi(1)})^{p-1},$$

donc que :

$$\lambda_{k-p}(t) + \mu_{k-p}(t)\ \psi(1) < \varepsilon + \varepsilon\ \frac{M}{\psi(1)}\ [1 + (1 + \frac{M}{\psi(1)}) + \dots + (1 + \frac{M}{\psi(1)})^{p-1}],$$

donc que :

$$\lambda_{k-p}(t) + \mu_{k-p}(t)\ \psi(1) < \varepsilon\ (1 + \frac{M}{\psi(1)})^{p}.$$

Ainsi la récurrence est achevée.

Des inégalités précédentes, on déduit que, pour $1 \leqslant i \leqslant k$:

$$\lambda_i(t) < \varepsilon\ (1 + \frac{M}{\psi(1)})^{k-i} \quad \text{et} \quad \mu_i(t) < \frac{\varepsilon}{\psi(1)}\ (1 + \frac{M}{\psi(1)})^{k-i}.$$

Ainsi, on a :

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i(t)+\mu_i(t)) < \varepsilon\ \frac{1+\psi(1)}{M}\ (1 + \frac{M}{\psi(1)})^{k}.$$

L'inégalité précédente contredit l'égalité

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i(t)+\mu_i(t)) = 1,$$

ainsi C n'est pas ubiquitaire et $C \cap (-C) = \emptyset$.

Montrons enfin que $C - C = E$.

Posons $C' = C - \{e_1\}$. Puisque $C' - C' = C - C$, il suffit de montrer que $C' - C' = E$.

Le convexe $C[C \cup (-C)]$ contient $CS[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{e_n\}]$ et $CS[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{f_n\}]$. On a donc, d'après la proposition 1.1 :

$$C[C \cup (-C)] \supset \frac{1}{2}(CS[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{e_n\}] + CS[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{f_n\}]).$$

Ainsi, d'après le théorème 3.1, on a

$$C[C \cup (-C)] = E.$$

On en déduit, d'après le lemme 5.5, que :

$$C[C' \cup (-C')] = E.$$

C' étant un convexe contenant l'origine, on a alors, d'après la proposition 1.1, $C' - C' = E$.

<u>Lemme</u> 6.5.-

Soient E *un espace vectoriel de dimension infinie et* $(e_i)_{i\varepsilon I}$ *une base de* E *avec* $I = J \times \mathbb{N}^*$ *(*J *étant bien ordonné et* I *étant bien ordonné par l'ordre lexicographique). Il existe une base* $(f_i)_{i\varepsilon I}$ *de décomposition forte de* E *associée à la base précédente et telle que les convexes* $C = C[\bigcup_{i\varepsilon I} \{e_i, f_i\}]$ *et* $-C$ *soient linéairement bornés, disjoints, non ubiquitaires et vérifient* $C - C = E$.

<u>Démonstration</u>

Soient, pour tout $j \varepsilon J$, E_j le sous-espace vectoriel de E ayant pour base $(e_{(j,n)})_{n\varepsilon\mathbb{N}^*}$ et $\varphi_j \varepsilon \Phi'$.

Posons, pour tout $n \varepsilon \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \varepsilon J$,

$$f_{(j,n)} = (-1)^{n+1} \varphi_j(n)\, e_{(j,1)} + (-1)^n \varphi_j(n-1)\, e_{(j,2)} + \ldots + \varphi_j(1)\, e_{(j,n)}.$$

Posons, pour tout $j \varepsilon J$,

$$C_j = C[\bigcup_{n\varepsilon\mathbb{N}^*} \{e_{(j,n)}, f_{(j,n)}\}].$$

D'après le lemme 6.4, les convexes C_j et $-C_j$ sont linéairement bornés, disjoints, non ubiquitaires et tels que $C_j - C_j = E_j$.

Posons

$$C = C[\bigcup_{j\varepsilon J} C_j] = C[\bigcup_{i\varepsilon I} \{e_i, f_i\}].$$

Les convexes C et $-C$ sont linéairement bornés d'après le corollaire 2.6 car $E = \bigoplus_{j\varepsilon J} E_j$.

Les convexes C et $-C$ sont disjoints : En effet, s'il existe $x \varepsilon C \cap (-C)$, alors $0 \in C$, ce qui est absurde d'après la troisième partie du théorème 2.3.

Les convexes C et $-C$ ont une somme égale à E car $C - C$ est un convexe qui contient tous les E_j.

Il est à noter que $(f_i)_{i\in I}$ est bien une base (triangulaire) de décomposition forte de E associée à la base $(e_i)_{i\in I}$ (d'après le théorème 3.2).

Il reste à montrer que C n'est pas ubiquitaire. Pour cela, montrons que $0 \notin \text{lin}\, C$.

Si 0 appartenait à $\text{lin}\, C$, il existerait $x \in C$ $(x \neq 0)$ tel que, pour tout $t \in \,]0,1]$, $tx \in C$.

Puisque $E = \bigoplus_{j\in J} E_j$, il existe un sous-ensemble fini unique K de J tel que $x = \sum_{k\in K} x_k$ avec $x_k \in E_k$ et $x_k \neq 0$ pour tout $k \in K$.

Puisque, pour tout $t \in \,]0,1]$, $tx \in C$ et que la somme des E_j est directe, on a :

$$tx = \sum_{k\in K} \lambda_k(t)\, c_k(t),$$

avec, pour tout $k \in K$, $c_k(t) \in C_k$ $(c_k(t) \neq 0)$, $\lambda_k(t) > 0$, $\sum_{k\in K} \lambda_k(t) = 1$ et $tx_k = \lambda_k(t)\, c_k(t)$.

Ainsi, pour tout $k \in K$, $c_k(t)$ s'écrit sous la forme

$$c_k(t) = \alpha_k(t)\, x_k,$$

avec $\alpha_k(t) = \dfrac{t}{\lambda_k(t)} > 0$.

Puisque $0 \notin \text{lin}\, C_k$ (voir démonstration du lemme 6.4), il existe $m_k > 0$ indépendant de t tel que $\alpha_k(t) > m_k$.

On en déduit que, pour tout $k \in K$,

$$t = \alpha_k(t)\, \lambda_k(t) > m_k\, \lambda_k(t).$$

Posons $m = \inf_{k\in K}\{m_k\}$; on a $m > 0$.

Posons card K = n. On a alors :

$$n\, t > \sum_{k\varepsilon K} m_k \lambda_k(t) \geq m,$$

ce qui est absurde. Ainsi $0 \notin \text{lin } C$.

<u>*Lemme*</u> *6.6.-*

Tout espace vectoriel E *semi-normé de dimension infinie* α *est somme directe de* α *sous-espaces vectoriels de dimension* α *et denses dans* E.

<u>Démonstration</u>

Il est possoble d'écrire E sous la forme :

$$E = \bigoplus_{j\varepsilon J} E_j,$$

où J est un ensemble bien ordonné sans plus grand élément avec card J = α, chacun des sous-espaces vectoriels E_j de E ayant aussi la dimension α. Montrons, par récurrence transfinie, qu'à chaque $\ell \varepsilon J$, on peut associer un sous-espace vectoriel F_ℓ de E dense dans E, ayant pour dimension α et tel que E s'écrive sous la forme :

$$E = (\bigoplus_{j\leq \ell} F_j) \oplus (\bigoplus_{j>\ell} E_j).$$

Soit j_o le plus petit élément de J. Montrons que la propriété est vraie pour j_o.

Posons $G = \bigoplus_{j>j_o} E_j$.

On peut supposer que l'on choisit une base $(e_i)_{i\varepsilon K\times\mathbb{N}^*}$ de E (card K = α, K bien ordonné et $K \times \mathbb{N}^*$ bien ordonné par l'ordre lexicographique) telle que, pour tout $i \varepsilon K \times \mathbb{N}^*$, $e_i \varepsilon B$, où B désigne la boule unité de E et telle que $(e_i)_{i\varepsilon K\times 2\mathbb{N}^*}$ soit une base de G . Le lemme 6.3 montre qu'il existe une famille libre $(f_i)_{i\varepsilon K\times\mathbb{N}^*}$ de décomposition de E associée à la base $(e_i)_{i\varepsilon K\times\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$S[\bigcup_{i\varepsilon K\times\mathbb{N}^*}\{f_i\}] \oplus G = E.$$

Posons $F_{j_o} = S[\bigcup_{i\varepsilon K\times\mathbb{N}^*}\{f_i\}]$.

On a donc :

$$E = F_{j_o} \oplus (\bigoplus_{j>j_o} E_j).$$

D'autre part le couple (B,F_{j_o}) contient le couple $(CS[\bigcup_{i\varepsilon K\times\mathbb{N}^*}\{e_i\}],$ $CS[\bigcup_{i\varepsilon K\times\mathbb{N}^*}\{f_i\}])$ qui est un couple principal de décomposition de E ; ainsi, d'après le théorème 6.1, F_{j_o} est dense dans E.

Supposons la propriété vraie pour tous les indices $j < \ell$ et montrons qu'elle est vraie pour ℓ.

Montrons d'abord que la somme

$$\sum_{j<\ell} F_j + \sum_{j\geq\ell} E_j$$

est directe.

Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout sous-ensemble J' fini de l'ensemble des $j < \ell$ et pour tout sous-ensemble J'' fini de l'ensemble des $j \geq \ell$, la somme

$$\sum_{j\varepsilon J'} F_j + \sum_{j\varepsilon J''} E_j$$

est directe.

Si $J' = \emptyset$, c'est évident.

Sinon, posons

$$k = \sup\{j \mid j \varepsilon J'\}.$$

On a $k < \ell$; de plus d'après l'hypothèse de récurrence,

$$E = (\bigoplus_{j>k} F_j) \oplus (\bigoplus_{j>k} E_j),$$

ce qui montre que la somme précédente est bien directe.

Posons alors :

$$G = (\bigoplus_{j<\ell} F_j) \oplus (\bigoplus_{j>\ell} E_j).$$

On a $G \cap E_\ell = \{0\}$, donc G est de codimension α.
En raisonnant comme au début de la récurrence (c'est-à-dire en appliquant à G le lemme 6.3 et le théorème 6.1), on trouve un sous-espace vectoriel F_ℓ dense dans E et tel que :

$$E = (\bigoplus_{j\leq\ell} F_j) \oplus (\bigoplus_{j>\ell} E_j).$$

Ceci achève la récurrence.
Envisageons maintenant le sous-espace vectoriel $\bigoplus_{j\in J} F_j$ de E (on vérifie aisément que la somme $\sum_{j\in J} F_j$ est directe).

Deux cas sont a priori possibles :

1) $\bigoplus_{j\in J} F_j = E.$

2) $\bigoplus_{j\in J} F_j \neq E.$

Dans le premier cas, le lemme est démontré.
Dans le second, en considérant un sous-espace vectoriel F' supplémentaire dans E de $\bigoplus_{j\in J} F_j$ et en posant

$$F'_{j_o} = F_{j_o} \oplus F',$$

on aboutit aussi à la conclusion désirée.

6.2.2.- <u>Théorème</u> 6.3.-

Soit E *un espace vectoriel semi-normé de dimension infinie* α.

1) E *est somme de deux convexes denses dans* E*, linéairement bornés, disjoints, symétriques l'un de l'autre, et non ubiquitaires.*

2) Si β *est un cardinal tel que* $2 \leq \beta \leq \alpha$, E *est somme directe de* β *sous-espaces vectoriels de dimension* α*, denses dans* E*, chacun d'eux étant somme de deux convexes denses dans* E*, linéairement bornés, disjoints,* *symétriques l'un de l'autre, et non ubiquitaires dans leur fermeture spatiale.*

Démonstration

2) Le lemme 6.6 montre que l'on peut écrire E sous la forme

$$E = \bigoplus_{j \varepsilon J} E_j,$$

avec card $J = \beta$, chaque sous-espace vectoriel E_j étant de dimension α et dense dans E.

Le lemme 6.5 montre en choisissant, dans chaque E_j, une base ayant tous ses éléments dans la boule unité l'existence, dans chqque E_j, de deux convexes C_j et $-C_j$ denses (d'après le lemme 6.1) dans E_j (donc dans E), linéairement bornés, disjoints, non ubiquitaires dans E_j, et de somme égale à E_j.

1) Pour démontrer la première partie, on raisonne (comme précédemment) en utilisant le lemme 6.5 et le lemme 6.1.

6.3.- PARTITION EN CONES CONVEXES DENSES.-

Théorème 6.4.-

Soit E *un espace vectoriel semi-normé de dimension infinie* α *et soit* β *un cardinal tel que* $2 \leqslant \beta \leqslant \alpha$. *Alors* E *est réunion de* β *cônes convexex denses, de dimension* α, *ayant un point interne relatif et deux à deux disjoints.*

Démonstration

Nous distinguerons plusieurs cas.

1) Premier cas : $\aleph_0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$.

Le lemme 6.6 montre que l'on peut écrire E sous la forme :

$$E = \bigoplus_{j \varepsilon J} E_j,$$

avec card $J = \beta$, chaque sous-espace vectoriel E_j étant de dimension α et dense dans E.

On peut supposer que l'ensemble J est bien ordonné sans plus grand élément. Désignons par p le plus petit élément de J.

Soit, pour tout $j \in J$, un hypercône S_j de sommet O de E_j contenant un point interne relatif (un tel hypercône existe : En effet, soient H_j un hyperplan de E_j passant par l'origine, D_j l'un des demi-espaces ouverts (algébriquement) de E_j ayant pour frontière (algébrique) H_j, et S'_j un hypercône de sommet O de H_j. Posons $S_j = S'_j \cup D_j$. S_j est un hypercône de sommet O de E_j (voir paragraphe 1.1.10) car S_j est convexe et car on a :

$$S_j \cup (-S_j) = E \sim \{0\}.$$

En outre S_j contient un point interne relatif car $S_j \supset D_j$).

Posons, pour tout $j \in J$ avec $j > p$:

$$K_j = S_j + (\bigoplus_{i>j} E_i),$$

$$K'_j = -K_j,$$

et posons :

$$K_p = \{0\} \cup (S_p + (\bigoplus_{i>p} E_i)),$$

$$K'_p = -(S_p + (\bigoplus_{i>p} E_i)).$$

Pour tout $j \in J$, K_j et K'_j sont des cônes convexes (comme somme de cônes convexes).

Ils sont tous denses et de dimension α car, pour tout $j \in J$, $\bigoplus_{i>J} E_i$ est dense dans E et de dimension α.

Pour tout $j \in J$, K_j contient un point interne relatif : Ceci résulte du fait que S_j contient un point interne relatif et du mode de construction des K_j.

Les cônes précédents sont deux à deux disjoints : En effet, on a d'une part, pour tout $j \in J$,

$$K_j \cap K'_j = \emptyset$$

(sinon, puisque K_j et K'_j sont convexes, 0 appartiendrait à $K_j \cap K'_j$, ce qui est absurde).

D'autre part, si j et $\ell \in J$, avec $j \neq \ell$, on a :

$$K_j \cap K_\ell = K'_j \cap K_\ell = K_j \cap K'_\ell = K'_j \cap K'_\ell = \emptyset.$$

En effet, supposons, par exemple, $j < \ell$.

Soient $x = \sum_{k\in J} x_k$ et $y = \sum_{k\in J} y_k$ deux points de E tels que, pour tout $k \in J$, x_k et $y_k \in E_k$.

Puisque $E = \bigoplus_{k\in J} E_k$, on voit que, si x appartient à K_j ou K'_j, x étant $\neq 0$, et si y appartient à K_ℓ ou K'_ℓ, on a $x_j \neq 0$ et $y_j = 0$ donc $x \neq y$.

En outre, 0 appartient à K_p, n'appartient pas à K_j pour $j > p$ et n'appartient pas à K'_j pour tout $j \in J$.

Ainsi les cônes précédents sont deux à deux disjoints.

Il reste à montrer que :

$$E = \bigcup_{j\in J} (K_j \cup K'_j).$$

Soit $x \in E$. Si $x = 0$, alors $x \in K_p$.

Sinon, puisque $E = \bigoplus_{j\in J} E_j$, posons $x = \sum_{j\in J} x_j$ avec, pour tout $j \in J$, $x_j \in E_j$. Désignons par i le plus petit élément de J tel que $x_i \neq 0$.

Puisque S_i est un hypercône de sommet 0 de E_i, x_i appartient soit à S_i, soit à $-S_i$; si $x_i \in S_i$, alors $x \in K_i$, et si $x_i \in -S_i$, alors $x \in K'_i$.

2) Deuxième cas : β entier impair.

Posons $\beta = 2n+1$ où n est un entier ≥ 1.

Le lemme 6.6 montre que l'on peut écrire E sous la forme :

$$E = \bigoplus_{1 \leq j \leq n+1} E_j ,$$

chaque sous-espace vectoriel E_j étant de dimension α et dense dans E. Soit, pour $1 \leq j \leq n$, un hypercône S_j de sommet 0 de E_j contenant un point interne relatif.

Posons, pour $1 \leq j \leq n$,

$$K_j = S_j + (\bigoplus_{i>j} E_i),$$

$$K'_j = -K_j .$$

On vérifie, en utilisant des arguments analogues à ceux utilisés dans le premier cas, que la famille constituée par $K_1, K_2, \ldots, K_n, K'_1, K'_2, \ldots, K'_n$ et E_{n+1} réalise la partition désirée.

3) Troisième cas : β entier pair.

Posons $\beta = 2n$ où n est un entier ≥ 2.

Le lemme 6.6 montre que l'on peut écrire E sous la forme :

$$E = \bigoplus_{1 \leq j \leq n} E_j ,$$

chaque sous-espace vectoriel E_j égant de dimension α et dense dans E. Soit, pour $1 \leq j \leq n-1$, un hypercône S_j de sommet 0 de E_j contenant un point interne relatif, et soit S_n un hypercône de sommet 0 de E_n, contenant un point interne relatif et dense dans E_n, donc dans E (un tel hypercône existe : En effet, soient H_n un hyperplan de E_n, dense dans E_n et passant par l'origine, D_n l'un des demi-espaces ouverts (algébriquement) de E_n ayant pour frontière (algébrique) H_n, et S'_n un hypercône de sommet 0 de H_n. Il suffit de poser $S_n = S'_n \cup D_n$).

Posons, pour $1 \leq j \leq n-1$

$$K_j = S_j + (\bigoplus_{i>j} E_i),$$

$$K'_j = -K_j ,$$

et posons

$$K_n = \{0\} \cup S_n ,$$

$$K'_n = -S_n .$$

On vérifie, en utilisant des arguments analogues à ceux utilisés dans le premier cas que la famille constituée par $K_1, K_2, \ldots, K_n, K'_1, K'_2, \ldots, K'_n$ réalise la partition désirée.

Dans le cas où $\beta = 2$, on peut écrire :

$$E = K \cup K',$$

avec

$$K = \{0\} \cup S,$$

$$K' = -S,$$

où S est un hypercône de sommet 0 de E, contenant un point interne relatif et dense dans E.

Remarques

1) On pourrait, dans le premier cas de la démonstration du théorème 6.4, obtenir une autre partition en supposant J bien ordonné avec un plus grand élément et en raisonnant comme dans le deuxième cas.

2) Klee a donné un résultat analogue au théorème 6.4 dans [19] au moyen, toutefois, de cônes convexes ubiquitaires. Dans [18], Klee a aussi donné, dans un cadre plus général, un résultat du même type que celui que nous trouvons (sans utiliser la notion de convexe ubiquitaire) ; cependant, dans certains cas, la partition est réalisée au moyen de convexes qui ne sont pas des cônes.

CHAPITRE VII

APPLICATION A L'ETUDE DE LA BORNE INFERIEURE DE DEUX TOPOLOGIES D'ESPACE SEMI-NORME

Ce chapitre constitue le développement de la note [12].
Dans le paragraphe 7.1, nous introduisons, pour toute partie (d'un espace vectoriel) contenant l'origine, la notion de noyau linéaire et démontrons deux propriétés (lemmes 7.1 et 7.2) indispensables pour la suite.
Dans le paragraphe 7.2, nous caractérisons (théorème 7.1), sur un espace vectoriel E de dimension infinie, les couples de topologies semi-normées dont la borne inférieure dans l'ensemble des topologies d'espace vectoriel topologique sur E est la topologie grossière.
Dans le paragraphe 7.3, nous étudions la borne inférieure de deux topologies d'espace semi-normé. D'une façon plus précise, nous montrons, au théorème 7.2 qu'étant donnés deux convexes absorbants C_1 et K avec $C_1 \subset K$ et K symétrique, on peut trouver sous certaines hypothèses un convexe C_2 absorbant, symétrique, tel que les internats de $C[C_1 \cup C_2]$ et de K coïncident. Les corollaires 7.2 et 7.3 sont des conséquences topologiques de ce théorème et donnent des résultats concernant la borne inférieure de deux topologies d'espace semi-normé. Nous montrons en particulier, au corollaire 7.2, que si p_1 et p sont deux semi-normes sur un espace vectoriel E de dimension infinie telles que $p \leq p_1$, et si N_2 est un sous-espace vectoriel de E contenu dans $\mathrm{Ker}(p)$ et de codimension infinie dans E, alors, en désignant par $\mathcal{P}_{N_2}$ l'ensemble des semi-normes sur E ayant N_2 pour noyau, l'équation :

$$p_2 \in \mathcal{P}_{N_2} \quad , \quad \inf(p_1,p_2) = p$$

a une solution.
Enfin la proposition 7.2 généralise un résultat de Bourbaki (voir [3], page 135, exercice n°12).

7.1.- NOTION DE NOYAU LINEAIRE.-

E étant un espace vectoriel, A une partie de E, M un sous-espace vectoriel de E, nous noterons, dans toute la suite, par $i_M[A]$ l'internat de $A \cap M$ dans l'espace vectoriel M (en particulier, on a $i_E[A] = i[A]$).

7.1.1.- *Définition 7.1.-*

Soit, dans un espace vectoriel E, *une partie* A *contenant l'origine* 0, *nous appelons noyau linéaire de* A *et notons* $N[A]$ *le plus grand sous-espace vectoriel de* E *contenu dans* A.

On vérifie facilement que, A étant une partie de E contenant l'origine, on a :

$$N[A] = \mathcal{E}_o[A] \cap \mathcal{E}_o[-A].$$

7.1.2.- *Lemme 7.1.-*

Soient, dans un espace vectoriel E, *un convexe absorbant* A *et* M *un sous-espace vectoriel supplémentaire de* $N[A]$.

Alors, on a :

$$i[A] = i_M[A] + N[A].$$

Démonstration

Posons $B = i_M[A] + N[A]$.

Puisque A est absorbant, $i_M[A]$ est non vide (l'origine appartenant à ce dernier ensemble).

Montrons que $B \subset i[A]$.

Soit $x \in B$; montrons d'abord que $x \in A$. Puisque $x \in B$, x s'écrit de la forme :

$$x = a+n,$$

avec $a \in i_M[A]$ et $n \in N[A]$. Puisque $a \in i_M[A]$, la proposition 1.4 montre qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $\alpha a \in i_M[A]$.

On peut alors écrire x sous la forme :

$$x = \frac{1}{\alpha}(\ a) + \frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\ n\right).$$

Cette égalité montre que $x \in C[A \cup N[A]] = A$.

Montrons maintenant que $x \in i[A]$.

Soit e un vecteur quelconque non nul de E. e s'écrit sous la forme :

$$e = m+n',$$

avec $m \in M$ et $n' \in N[A]$.

Puisque $a \in i_M[A]$ il existe $\lambda_o > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in [0,\lambda_o]$, $a + \lambda m \in i_M[A]$. Ainsi, pour $\lambda \in [0,\lambda_o]$,

$$x + \lambda e = (a+\lambda m) + (n+\lambda n') \in B \subset A.$$

Montrons maintenant que $i[A] \subset B$. Soit $y \in i[A]$. y s'écrit sous la forme :

$$y = m'' + n'',$$

avec $m'' \in M$ et $n'' \in N[A]$.

Puisque $I[A] + N[A] = i[A]$ (voir proposition 1.5),

$$y - n'' = m'' \in i[A].$$

On en déduit que $m'' \in i[A] \cap M$, donc que $m'' \in i_M[A]$. Ainsi, $y \in B$.

<u>Lemme</u> 7.2.-

Soient, dans un espace vectoriel E, *deux sous-espaces vectoriels supplémentaires* E_1 *et* E_2, *et deux convexes* C_1 *et* C_2 *contenant l'origine et respectivement contenus dans* E_1 *et* E_2. *Alors, on a :*

$$N[C_1+C_2] = N[C_1] + N[C_2].$$

<u>Démonstration</u>

Il est clair que $N[C_1] + N[C_2] \subset N[C_1+C_2]$ car $N[C_1] + N[C_2]$ est un sous-espace vectoriel contenu dans C_1+C_2.

Montrons maintenant que $N[C_1+C_2] \subset N[C_1] + N[C_2]$.

Il suffit de montrer que, si Δ est une droite passant par 0 et contenue dans $N[C_1+C_2]$ alors Δ est contenue dans $N[C_1] + N[C_2]$.

Il existe $e \in E$ avec $e \neq 0$ tel que $\Delta = \{\lambda e \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

e s'écrit sous la forme :

$$e = e_1 + e_2,$$

avec $e_1 \in E_1$ et $e_2 \in E_2$.

Puisque $\Delta \subset N[C_1+C_2] \subset C_1 + C_2$ et que $E = E_1 \oplus E_2$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda e_1 \in C_1$ et $\lambda e_2 \in C_2$. Ainsi, on a :

$$\Delta \subset N[C_1] + N[C_2].$$

7.2.- CARACTERISATION DES COUPLES DE TOPOLOGIES D'ESPACE SEMI-NORME AYANT POUR BORNE INFERIEURE LA TOPOLOGIE GROSSIERE.-

7.2.1.- Montrons d'abord un résultat concernant les bornes inférieures de topologies qui semble ne pas avoir été explicité auparavant.

Lemme 7.3.-

Soient E *un espace vectoriel,* $\mathcal{E}$ *l'ensemble des topologies compatibles avec la structure d'espace vectoriel de* E, $\mathcal{C}$ *le sous-ensemble de* $\mathcal{E}$ *formé des topologies localement convexes. Soit* $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ *une sous-famille finie non vide de* $\mathcal{C}$ *et désignons, pour tout* $i \in I$, *par* $\mathcal{V}_i$ *le système fondamental formé des voisinages convexes symétriques de l'origine pour* $\mathcal{T}_i$. *Alors la famille* $\mathcal{B}$ *des ensembles* $\sum_{i\in I} V_i$, *où pour tout* $i \in I$, $V_i \in \mathcal{V}_i$ *est un système fondamental de voisinages de l'origine pour une topologie* $\mathcal{T}$ *de* $\mathcal{C}$. $\mathcal{T}$ *est borne inférieure de la famille* $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ *dans* $\mathcal{C}$ (*c'est-à-dire la plus fine des topologies de* $\mathcal{C}$ *qui sont moins fines que toutes les* $\mathcal{T}_i$) *et est borne inférieure de la famille* $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ *dans* $\mathcal{E}$. *En particulier, si chaque* $\mathcal{T}_i$ *est une topologie d'espace semi-normé admettant* B_i *pour boule unité,* $\mathcal{T}$ *est aussi une topologie d'espace semi-normé admettant* $C[\bigcup_{i\in I} B_i]$ *pour boule unité.*

Démonstration

Montrons d'abord que $\mathcal{B}$ est un système fondamental de voisinages de l'origine pour une topologie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{E}$. Il est clair que $\mathcal{B}$ est une base de filtre sur E et que, pour tout $V \in \mathcal{B}$, V est convexe (donc étoilé), symétrique et absorbant. D'autre part, pour tout $V \in \mathcal{B}$, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $W + W \subset V$. En effet, soit $V \in \mathcal{B}$; V s'écrit sous la forme :

$$V = \sum_{i \in I} V_i ,$$

où pour tout $i \in I$, $V_i \in \mathcal{V}_i$.

Posons $W = \sum_{i \in I} \frac{1}{2} V_i$.

Alors $W \in \mathcal{B}$ et on a $W = \frac{1}{2} V$.

Il en résulte, d'après la proposition 1.1, que :

$$W + W = \frac{1}{2} V + \frac{1}{2} V \subset C[V] = V.$$

Ainsi $\mathcal{T} \in \mathcal{E}$ et il est alors clair que $\mathcal{T} \in \mathcal{C}$.

Il reste à montrer que, $\mathcal{T}'$ étant une topologie de $\mathcal{E}$ moins fine que toutes les $\mathcal{T}_i$, $\mathcal{T}'$ est moins fine que $\mathcal{T}$.

Désignons par $\mathcal{V}'$ l'ensemble des voisinages de l'origine pour $\mathcal{T}'$. Il suffit de montrer que, pour tout $V' \in \mathcal{V}'$, il existe $V \in \mathcal{B}$ tel que $V' \supset V$.

Soit $V' \in \mathcal{V}'$. Posons card I = n. Il existe $W' \in \mathcal{V}'$ tel que :

$$W' + W' + \dots + W' \subset V' \qquad (W' \text{ est écrit } n \text{ fois}).$$

Puisque $W' \in \mathcal{V}'$ et que $\mathcal{T}'$ est moins fine que toutes les $\mathcal{T}_i$, il existe pour tout $i \in I$, $V_i \in \mathcal{V}_i$ tel que $W' \supset V_i$. On a donc $\sum_{i \in I} V_i \subset V'$.

Il suffit alors de poser $V = \sum_{i \in I} V_i$.

La dernière assertion du lemme 7.3 se démontre aisément.

7.2.2.- Proposition 7.1.-

Soit, dans un espace vectoriel E *de dimension infinie dénombrable un convexe* C_1 *absorbant. Il existe une famille infinie* $\mathcal{F}$ *de convexes* C_2

symétriques, absorbants, linéairement bornés, ne s'absorbant pas mutuellement tels que $C[C_1 \cup C_2] = E$.

Démonstration

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, e_n et $-e_n$ appartiennent à C_1.

Considérons une application $\varphi \in \Phi$ (voir paragraphe 3.3.2) et désignons par k une application croissante de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} k(n) = +\infty$.

Il est clair que $k\varphi \in \Phi$.

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n = \varphi(n)e_1 + \varphi(n-1)e_2 + \dots + \varphi(1)e_n$$

$$g_n = k(n)\ \varphi(n)e_1 + k(n-1)\ \varphi(n-1)e_2 + \dots + k(1)\ \varphi(1)e_n,$$

et posons

$$C_2 = CS[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{f_n\}] \quad \text{et} \quad C_2' = CS[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{g_n\}].$$

Les convexes C_2 et C_2' sont linéairement bornés d'après le lemme 2.1.

La proposition 1.1 et le théorème 3.1 montrent que :

$$C[C_1 \cup C_2] = C[C_1 \cup C_2'] = E.$$

Montrons que C_2 et C_2' ne s'absorbent pas.

Pour cela, montrons d'abord que, s'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\lambda C_2' \subset C_2$, alors $\lambda = 0$.

En effet, si on a :

$$\lambda g_n = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p f_p,$$

avec $\sum\limits_{p=1}^{m} |\alpha_p| \leq 1$, on en déduit que $m = n$ et que :

$$\lambda k(n)\ \varphi(n) = \alpha_1\varphi(1) + \alpha_2\varphi(2) + \dots + \alpha_n\varphi(n),$$

d'où

$$\lambda k(n) \leq \frac{\sum_{p=1}^{n} |\varphi(p)|}{|\varphi(n)|} \leq 2$$

pour n assez grand (par définition de l'ensemble Φ).

Il en résulte que $\lambda = 0$.

Montrons maintenant que , s'il existe $\mu \geq 0$ tel que $\mu C_2 \subset C_2'$, alors $\mu = 0$.

En effet, si on a :

$$\mu\, f_n = \sum_{p=1}^{m} \beta_p\, g_p,$$

avec $\sum_{p=1}^{m} |\beta_p| \leq 1$, on en déduit que $m = n$ et que :

$$\mu = \beta_n\, k(1)$$

et

$$\mu\, \varphi(n) = \beta_1\, k(1)\, \varphi(1) + \beta_2\, k(2)\, \varphi(2) + \ldots + \beta_n\, k(n)\, \varphi(n),$$

d'où

$$\beta_n \varphi(n)[k(1)-k(n)] = \beta_1\, k(1)\varphi(1) + \beta_2 k(2)\varphi(2) + \ldots + \beta_{n-1}\, k(n-1)\varphi(n-1).$$

Ainsi, on a, pour n assez grand :

$$\frac{\mu}{k(1)} = \beta_n \leq \frac{k(n-1)}{k(n)-k(1)} \cdot \frac{\sum_{p=1}^{n-1} |\varphi(p)|}{|\varphi(n)|},$$

ce qui montre que $\mu = 0$.

On peut prendre, par exemple, pour famille $\mathcal{F}$ la famille des convexes associés aux fonctions $k^r\, \varphi$ où $r \in \mathbb{R}_+$.

Corollaire 7.1.-

La proposition 7.1 est encore vraie lorsque E *est un espace vectoriel de dimension infinie quelconque.*

Démonstration

On peut écrire la base de E sous la forme $(e_i)_{i\varepsilon J\times\mathbb{N}^*}$ où J est un ensemble non vide, et supposer que, pour tout $i \varepsilon J \times \mathbb{N}^*$, e_i et $-e_i$ appartiennent à C_1. Supposons que J contienne plus d'un élément et soit j_o un élément fixé de J.

k, ψ et r ayant les mêmes propriétés qu'à la proposition 7.1, posons :

$$C_2(j_o,r) = CS[\bigcup_{n\varepsilon\mathbb{N}^*} \{g_{(n,r)}\}]$$

avec, pour tout $n \varepsilon \mathbb{N}^*$,

$$g_{(n,r)} = \sum_{p=1}^{n} k^r(n-p+1)\ \psi(n-p+1)\ e_{(j_o,p)},$$

et posons, pour tout $j \varepsilon J \sim \{j_o\}$:

$$C_2(j) = CS[\bigcup_{n\varepsilon\mathbb{N}^*} \{g_{(j,n)}\}]$$

avec, pour tout $n \varepsilon \mathbb{N}^*$,

$$g_{(j,n)} = \sum_{p=1}^{n} \psi(n-p+1)\ e_{(j,p)}.$$

Posons

$$C_2(r) = C[C_2(j_o,r) \cup (\bigcup_{j\varepsilon J\sim\{j_o\}} C_2(j))].$$

On constate, en appliquant la proposition 7.1 et le lemme 2.1, que l'on peut prendre pour famille $\mathfrak{F}$ la famille $(C_2(r))_{r\varepsilon\mathbb{R}_+}$.

7.2.2.- Théorème 7.1.-

1) Soient p_1 et p_2 deux semi-normes sur un espace vectoriel E de dimension infinie, $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ les topologies associées, B_1 et B_2 les semi-boules unités ouvertes ou fermées respectives. Une condition nécessaire et suffisante pour que la topologie borne inférieure de $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ dans l'ensemble des topologies d'espace vectoriel topologique sur E

soit la topologie grossière est que le couple (B_1,B_2) *contienne un couple principal de décomposition de* E.

2) $\mathcal{T}_1$ *étant une topologie d'espace semi-normé sur* E, *il existe une infinité de topologies d'espace normé* $\mathcal{T}_2$ *sur* E *deux à deux non comparables et telles que la borne inférieure de* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$ *dans l'ensemble des topologies d'espace vectoriel topologique sur* E *soit la topologie grossière.*

Démonstration

1) Montrons que la condition est suffisante.

Si le couple (B_1,B_2) contient un couple principal de décomposition de E, on a $B_1 + B_2 = E$ (voir définition 4.1). On en déduit que, pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $\mu > 0$, $\lambda B_1 + \mu B_2 = E$.

Il en résulte, d'après le lemme 7.3 que la seule topologie d'espace vectoriel topologique moins fine que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ est la topologie grossière.

Montrons que la condition est nécessaire.

Si la borne inférieure de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ dans l'ensemble des topologies compatibles avec la structure d'espace vectoriel de E est la topologie grossière, on a, d'après le lemme 7.3, $B_1 + B_2 = E$.

On en déduit, d'après le corollaire 4.2, que le couple (B_1,B_2) contient un couple principal de décomposition de E.

2) Cette partie est une conséquence du corollaire 7.1.

7.3.- ETUDE DE LA BORNE INFERIEURE DE DEUX TOPOLOGIES D'ESPACE SEMI-NORME.-

7.3.1.- Théorème 7.2.-

Soient, dans un espace vectoriel E *de dimension infinie, un convexe symétrique absorbant* K *et un convexe absorbant* C_1 *contenu dans* K.

1) A tout sous-espace vectoriel N_2 *de* E, *de codimension infinie dans* E, *et contenu dans* $N[K]$, *on peut associer un convexe* C_2 *possédant les propriétés suivantes :*

(a) : C_2 *est symétrique, absorbant et* $N[C_2] = N_2$.

(b) : $i[C[C_1 \cup C_2]] = i[K]$; *en conséquence*

$$N[C[C_1 \cup C_2]] = N[K].$$

2) Si, de plus, N_2 *est de codimension infinie dans* $N[K]$, *il existe une infinité de convexes* C_2 *satisfaisant aux propriétés (a) et (b) et ne s'absorbant pas mutuellement.*

Démonstration

Dans toute la suite N désigne un supplémentaire de N_2 dans $N[K]$.

Distinguons deux cas :

1) N est de dimension finie.

Soit M un supplémentaire de $N[K]$ dans E. D'après l'hypothèse faite sur la codimension de N_2 dans E, $F = M \oplus N$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension infinie (on a $E = F \oplus N_2$).

Soit C_1' un convexe symétrique contenu dans $C_1 \cap F$ et absorbant dans F. Supposons F muni de la topologie $\mathcal{T}$ d'espace semi-normé dont la semi-boule unité (ouverte) est $i_F[C_1']$. Soit V un sous-espace vectoriel de F dense dans F et supplémentaire de N dans F : V existe car N est de dimension finie et car un espace semi-normé de dimension infinie est somme directe d'une infinité de sous-espaces vectoriels denses (voir lemme 6.6).

Soit B un convexe symétrique absorbant linéairement borné dans N.

Posons $K' = i_V[K \cap V]$ et $C_2' = K' + B$.

Montrons que :

$$i_F[K \cap F] = K' + N. \tag{1}$$

On a d'abord :

$$N[K \cap F] = N[K] \cap F.$$

En effet, il est clair que $N[K \cap F] \subset N[K] \cap F$; réciproquement, $N[K] \cap F \subset K \cap F$ donc $N[K] \cap F \subset N[K \cap F]$.

Il en résulte que :

$$N[K \cap F] = N[K] \cap F = (N_2 \oplus N) \cap (M \oplus N) = N,$$

car $N_2 \cap M = \{0\}$.

Puisque $F = V \oplus N$, le lemme 7.1 montre que :

$$i_F[K \cap F] = i_V[(K \cap F) \cap V] + N = K' + N.$$

Montrons maintenant que :

$$i_F[K \cap F] = i_F[C[C_1' \cup C_2']]. \qquad (2)$$

On a :

$$K \cap F \supset K' + N \supset K' + B = C_2'$$

et

$$K \cap F \supset C_1 \cap F \supset C_1'.$$

Ainsi, puisque $K \cap F$ est convexe, on a :

$$K \cap F \supset C[C_1' \cup C_2'],$$

donc

$$i_F[K \cap F] \supset i_F[C[C_1' \cup C_2']]. \qquad (3)$$

Montrons, réciproquement, que :

$$i_F[K \cap F] = K' + N \subset i_F[C[C_1' \cup C_2']]. \qquad (4)$$

Puisque $K' + B = C_2'$ et que $K' = i_V[K \cap V]$, on voit que :

$$K' \subset i_F[C_2']. \qquad (5)$$

De plus, on a :

$$N \subset i_F[C[C_1' \cup C_2']]. \qquad (6)$$

En effet, soit $n \in N$. Puisque V est dense dans F, $2n+V$ l'est aussi et rencontre donc $i_F[C_1']$. Ainsi, il existe $v \in V$ et $c_1' \in i_F[C_1']$ tels que $2n+v = c_1'$.

Puisque $c_1' \in i_F[C_1'] \subset i_F[K \cap F] = K' + N$, que $F = V \oplus N$ et que $K' \subset V$, on en déduit que $v \in K'$.

Ainsi, $n = \frac{1}{2}(c_1'-v) \in C[i_F[C_1'] \cup K']$.

Puisque l'on a :

$$C[i_F[C_1'] \cup K'] \subset C[i_F[C_1'] \cup i_F[C_2']] \subset i_F[C[C_1' \cup C_2']],$$

on en déduit que :

$$n \in i_F[C[C_1' \cup C_2']].$$

Ainsi l'inclusion (6) est vérifiée.

Montrons que :

$$K' + N = C[K' \cup N]. \tag{7}$$

D'après la proposition 1.1, on a : $C[K' \cup N] \subset K' + N$.

Montrons l'autre inclusion. Soit $x \in K' + N$. Il existe $k \in K'$ et $n \in N$ tel que $x = k+n$. Puisque $i_V[K'] = K'$, il existe $\alpha > 1$ tel que $\alpha k \in K'$.

On a alors :

$$x = \frac{1}{\alpha}(\alpha k) + \frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}n\right),$$

ainsi $x \in C[K' \cup N]$.

D'après (5), (6) et (7) on a (4) ; d'après (3) et (4), on a (2).

Posons maintenant $C_2 = C_2' + N_2$.

C_2 est un convexe symétrique absorbant dans E. Montrons que $N[C_2] = N_2$.

En effet, d'après le lemme 7.2, on a :

$$N[C_2] = N_2 + N[C_2'] = N_2 + N[K'] + N[B].$$

Or, on a $N[B] = \{0\}$ car B est linéairement borné et on a $N[K'] = \{0\}$

car $V \cap N[K] = \{0\}$. Ainsi, $N[C_2] = N_2$.

Il reste à montrer que :

$$i[C[C_1 \cup C_2]] = i[K].$$

L'inclusion

$$i[C[C_1 \cup C_2]] \subset i[K]$$

résulte du fait que $C_1 \subset K$ et du fait que $C_2 \subset K$

($C_2 = K'+B+N_2 \subset K'+N+N_2 = K'+N[K] = i[K]$, d'après le lemme 7.1).

Montrons que :

$$i[K] \subset i[C[C_1 \cup C_2]].$$

D'après (1) et (2), on a l'égalité (8) :

$$i[K] = K'+N[K] = K'+N+N_2 = i_F[K \cap F] + N_2 = i_F[C[C_1' \cup C_2']] + N_2.$$

On montre alors (par une démonstration analogue à celle de l'égalité $K' + N = C[K' \cup N]$) que :

$$i_F[C[C_1' \cup C_2']] + N_2 = C[i_F[C[C_1' \cup C_2']] \cup N_2].$$

Or on a :

$$i_F[C[C_1' \cup C_2']] \subset C[C_1 \cup C_2] \quad \text{et} \quad N_2 \subset C_2,$$

donc on a, compte tenu de (8) :

$$i[K] \subset C[C_1 \cup C_2],$$

et par suite

$$i[K] \subset i[C[C_1 \cup C_2]].$$

L'égalité

$$N[K] = N[C[C_1 \cup C_2]]$$

résulte du fait (voir proposition 1.4) que si une droite passant par l'origine est contenue dans un convexe absorbant, elle est aussi contenue dans l'internat de ce convexe.

2) N <u>est de dimension infinie.</u>

Soit M un supplémentaire de $N[K]$ dans E.

Posons $K'' = i_M[K \cap M]$.

D'après le lemme 7.1, on a :

$$i[K] = K'' + N[K].$$

Posons $B_1 = C_1 \cap N$. D'après le corollaire 7.1, il existe, dans N, une famille infinie $\mathcal{B}_2$ de convexes B_2 symétriques, absorbants, linéairement bornés, ne s'absorbant pas mutuellement et tels que

$$c[B_1 \cup B_2] = N.$$

Posons, pour tout $B_2 \in \mathcal{B}_2$, $C_2 = c[B_2 \cup K'' \cup N_2]$.

Les convexes C_2 sont symétriques, absorbants dans E.

Ils ne s'absorbent pas mutuellement car $C_2 \cap N = B_2$ (voir théorème 2.3).

Puisque $c[B_2 \cup K'' \cup N_2] \subset B_2 + K'' + N_2$, on déduit du lemme 7.2 que $N[C_2] = N_2$.

Il reste à montrer que, pour tout C_2,

$$i[c[C_1 \cup C_2]] = i[K].$$

Pour cela, il suffit de montrer que :

$$i[K] \subset c[C_1 \cup C_2] \subset K.$$

On a d'abord : $K \supset c[C_1 \cup C_2]$, car $K \supset C_1$ et car

$$K \supset K'' + N[K] = K'' + N + N_2 \supset K'' + B_2 + N_2 \supset c[B_2 \cup K'' \cup N_2] = C_2.$$

Montrons maintenant que $i[K] \subset c[C_1 \cup C_2]$.

On a :

$$i[K] = K'' + N[K] = c[K'' \cup N[K]],$$

or $K'' \subset C_2$ et

$$N[K] = N_2 \oplus N = c[N_2 \cup N] \subset c[C_2 \cup c[B_1 \cup B_2]] \subset c[C_1 \cup C_2].$$

Ainsi, on a :

$$i[K] \subset c[C_1 \cup C_2].$$

Remarque

Lorsque N_2 n'est pas de codimension infinie dans E, le théorème précédent peut être mis en défaut comme le montre l'exemple suivant :

Exemple

Soient E un espace vectoriel de dimension infinie, C_1 un convexe symétrique absorbant linéairement borné dans E. Supposons E muni de la topologie $\mathcal{T}$ d'espace normé dont la boule unité est $i[C_1]$. Prenons pour sous-espace vectoriel N_2 un hyperplan de E fermé pour $\mathcal{T}$ et posons $K = E$. Alors on ne peut pas trouver un convexe C_2 satisfaisant aux propriétés (a) et (b) du théorème 7.2.
En effet, d'après le lemme 7.1, D désignant une droite passant par l'origine et supplémentaire de N_2, on a :

$$i[C_2] = i_D[C_2 \cap D] + N_2.$$

Puisque N_2 est fermé et que $\overline{i_D[C_2 \cap D]}$ est compact ($i_D[C_2 \cap D]$ étant linéairement borné), on en déduit que $\overline{i_D[C_2 \cap D]} + N_2$ est un fermé, d'où

$$\bar{C}_2 = \overline{i[C_2]} = \overline{i_D[C_2 \cap D]} + N_2.$$

Ainsi C_2 n'est pas dense, ce qui contredit le fait que $c[C_1 \cup C_2] = C_1 + C_2 = E$ (voir lemme 6.1).

7.3.2.- *Corollaire 7.2.-*

Soient, sur un espace vectoriel E *de dimension infinie, deux semi-normes* p_1 *et* p *telles que* $p \leq p_1$. *Soit* N_2 *un sous-espace vectoriel de* E *contenu dans* $Ker(p)$ *et de codimension infinie dans* E. *Soit* $\mathcal{P}_{N_2}$ *l'ensemble des semi-normes sur* E *admettant* N_2 *pour noyau* N_2 *(c'est-à-dire les semi-normes pour lesquelles l'adhérence de l'origine pour la topologie associée est* N_2*).*

1) L'équation :

$$p_2 \in \mathcal{P}_{N_2} \quad , \inf(p_1,p_2) = p$$

a une solution .

2) Si, de plus, N_2 *est de codimension infinie dans* $Ker(p)$, *alors il existe une infinité de semi-normes* p_2 *qui sont des solutions de l'équation précédente et qui sont deux à deux "fortement non équivalentes" (*p_2' *et* p_2'' *sont dites fortement non équivalentes s'il n'existe pas* $\lambda > 0$ *tel que* $p_2' \leq \lambda p_2''$ *et s'il n'existe pas* $\mu > 0$ *tel que* $p_2'' \leq \mu\, p_2'$*).*

Démonstration

Elle résulte immédiatement du théorème 7.2.

Corollaire 7.3.-

Soient, sur un espace vectoriel E *de dimension infinie, deux topologies d'espace semi-normé* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$ *étant plus fine que* $\mathcal{T}$. *Pour tout sous-espace vectoriel* N_2 *contenue dans l'adhérence de l'origine* N *relative à* $\mathcal{T}$ *et de codimension infinie dans* E, *il existe une topologie d'espace semi-normé* $\mathcal{T}_2$ *ayant* N_2 *pour adhérence de l'origine et telle que* $\mathcal{T}$ *soit la borne inférieure de* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$ *dans l'ensemble des topologies compatibles avec la structure d'espace vectoriel de* E.

Si, de plus, N_2 *est de codimension infinie dans* N, *il existe une infinité de topologies deux à deux non comparables du type* $\mathcal{T}_2$.

Démonstration

Elle résulte directement du théorème 7.2 et du lemme 7.3.

7.3.3.- *Proposition* 7.2.-

Soient E *un espace vectoriel de dimension infinie,* $\mathcal{T}_1$ *une topologie d'espace normé sur* E, N *un sous-espace vectoriel fermé de* E. *Il existe une topologie d'espace normé* $\mathcal{T}_2$ *sur* E *telle que la borne inférieure des topologies* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$ *dans l'ensemble des topologies compatibles avec la structure d'espace vectoriel de* E *admette* N *pour adhérence de l'origine.*

Démonstration

Le théorème 7.1 montre que l'on peut supposer $N \neq E$.

Désignons par C_1 la boule unité ouverte de $\mathcal{T}_1$ et montrons que $N[C[C_1 \cup N]] = N$.

On a, puisque N est fermé :

$$N = \bar{N} = \bigcap_{\lambda > 0} (N + \lambda C_1).$$

Soit $x \notin N$, alors il existe $\lambda > 0$ tel que $x \notin N + \lambda C_1$.

On en déduit que :

$$\frac{1}{\lambda} x \notin C_1 + N,$$

donc que :

$$\frac{1}{\lambda} x \notin C[C_1 \cup N],$$

car $C[C_1 \cup N] \subset C_1 + N$.

Pour conclure, on applique le corollaire 7.3 au cas où $\mathcal{T}$ est la topologie d'espace semi-normé dont la boule unité est $C[C_1 \cup N]$ et où $N_2 = \{0\}$.

Remarque

Dans le cas où N n'est pas fermé, la proposition précédente est mise en défaut. En effet, soit C_2 un convexe tel que $C[C_1 \cup C_2]$ contienne N. On a alors :

$$\bar{N} = \bigcap_{\lambda>0} (N+\lambda C_1) \subset N + \frac{1}{2} C_1 = \frac{1}{2} (N+C_1) \subset C[C_1 \cup N] \subset C[C_1 \cup C_2].$$

Ainsi $C[C_1 \cup C_2]$ contient $\bar{N}$ qui est un sous-espace vectoriel fermé contenant strictement N.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BAIR. - *Cônes asymptotes et cônes caractéristiques,*
Bull. Soc. Roy. des Sciences de Liège, 9-10, 1971, p. 428-437.

[2] N. BOURBAKI. - *Topologie générale,* chapitres 1 et 2,
Actualités Scientifiques et Industrielles n°1142, Hermann,
Paris ,1965.

[3] N. BOURBAKI. - *Espaces vectoriels topologiques,* chapitres 1 et 2,
Actualités Scientifiques et Industrielles n°1189,
Hermann, Paris, 1966.

[4] N. BOURBAKI. - *Espaces vectoriels topologiques,* chapitres 1 et 2,
Actualités Scientifiques et Industrielles n°1229,
Hermann, Paris ,1964.

[5] L. BRAGARD. - *Cônes étoilés et cônes asymptotes,*
Bull. Soc. Roy. des Sciences de Liège, 1-2, 1972, p. 20-23.

[6] G. COQUET. - *Ensembles convexes de* $\mathbb{R}^n$,
Publication n°12 du Laboratoire de Calcul de l'Université de Lille,
1968.

[7] G. COQUET et J.C. DUPIN. - *Quelques propriété des ensembles convexes linéairement bornés et des ensembles insérables,*
Bull. Classe des Sciences Acad. Roy. de Belgique, 3, 1971,
p. 287-295.

[8] G. COQUET et J.C. DUPIN. - *Décomposition d'un espace vectoriel de dimension infinie en une somme de deux convexes,*
Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 274, série A, 1972,
p. 899-902.

[9] G. COQUET et J.C. DUPIN. - *Décomposition d'un espace vectoriel de dimension infinie en une somme de deux convexes,*
Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 274, série A, 1972,
p. 969-971.

[10] G. COQUET et J.C. DUPIN. - *Une caractérisation des convexes ubiquitaires,*
Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 274, série A, 1972, p. 1167-1169.

[11] G. COQUET et J.C. DUPIN. - *Caractérisation d'une classe de convexes denses dans un espace semi-normé,*
Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 274, série A, 1972, p. 1232-1234.

[12] G. COQUET et J.C. DUPIN. - *Quelques propriétés de la borne inférieure de deux topologies d'espace semi-normé,*
Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 274, série A, 1972, p. 1550-1552.

[13] H.G. EGGLESTON. - *Convexity,*
Cambridge University Press, 1958.

[14] J. GARSOUX. - *Espaces vectoriels topologiques et distributions,*
Collection Universitaire de Mathématiques, Dunod, Paris, 1963.

[15] P.C. HAMMER. - *Maximal convex sets,*
Duke Math. J., 22, 1955, p. 103-106.

[16] P.C. HAMMER. - *Semispaces and the topology of convexity,*
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol 7, p. 305-316, American Mathematical Society, 1963.

[17] P.C. HAMMER. - *Isotonic spaces in convexity,*
Proceedings of the Colloquium on Convexity, p. 132-141, Københavns Universitets Matematiske Institut, 1967.

[18] V.L. KLEE. - *Dense convex sets,*
Duke Math. J., 16, 1949, p. 351-354.

[19] V.L. KLEE. - *Decomposition of an infinite-dimensional linear system into ubiquitous convex sets,*
Amer. Math. Monthly, 57, 1950, p. 540- 541.

[20] V.L. KLEE. - *Convex sets in linear spaces,*
Duke Math. J., 18, 1951, p. 443-466.

[21] V.L. KLEE. - *Convex sets in linear spaces.* II,
Duke Math. J., 18, 1951, p. 875-883.

[22] V.L. KLEE. - *Convex sets in linear spaces.* III,
Duke Math. J., 20, 1953, p. 105-112.

[23] V.L. KLEE. - *The structure of semispaces,*
Math. Scand. 4, 1956, p. 54-64.

[24] G. KÖTHE. - *Topological vector spaces* I,
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1969.

[25] R.T. ROCKAFELLAR. - *Convex Analysis,*
Princeton University Press, 1970.

[26] J.J. STOKER. - *Unbounded convex point sets,*
Amer. J. Math., 62, 1940, p. 165-179.

[27] F.A. VALENTINE. - *Convex sets,*
Mc Graw-Hill, New-York, 1964.

* *

*

INDEX TERMINOLOGIQUE

Absorbant 7
Base de décomposition (forte). r-base de décomposition (forte) 38
Base triangulaire 74
Combinaison linéaire 4
Combinaison linéaire convexe 5
Cône 10
Cône d'éloignement ($\mathcal{E}[\ ]$). Cône d'éloignement en un point a ($\mathcal{E}_a[\ ]$) 12
Cône d'infinitude ($\mathcal{J}[\ ]$) 12
Convexe 4
Convexe basique. Convexe élémentaire. Convexe ubiquitaire basique.
Convexe ubiquitaire élémentaire 75
Couple de décomposition 57
Couple du type (T) 58
Couple principal de décomposition (forte) 58
$\aleph_0$- décomposable 63
Demi-droite 4
Dimension 5
Enveloppe convexe (C[ ]). Enveloppe convexe symétrique (CS[ ]) 5
Etoilé 4
Famille de décomposition (forte). r-famille de décomposition (forte) 38
Fermeture linéaire (L[ ]). Fermeture spatiale (S[ ]) 4
Hypercône 11
Internat (i[ ]). Internat relatif (ir[ ]) 7
Lin. Lina 8
Linéairement borné 6
Noyau linéaire (N[ ]) 109
Point interne (relatif) 6
Segment (ouvert, fermé, semi-ouvert) 3
Somme d'ensembles 5
Symétrique 4
Ubiquitaire. Proprement ubiquitaire 10

* *

*

DEUXIEME THESE

PROPOSITIONS DONNEES PAR L'UNIVERSITE :

SEMI-GROUPES TOPOLOGIQUES

ET

APPLICATION A LA THEORIE DE L'INFORMATION.

-:-:-:-:-:-