N° d'ordre 147

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR INGENIEUR

Spécialité Electronique

par

Jean-Claude VACHON

Ingénieur I.D.N.

ETUDE THEORIQUE DE L'INFLUENCE D'UN TUBAGE ISOLANT SUR LES MESURES TELELOG

Soutenue le 26 Septembre 1973

Membres du Jury :	MM.	R. GABILLARD	Président
		F. LOUAGE	Examinateur
		G. SALMER	Examinateur
		E. DE GELIS	Invité
		LANCHON	Invité

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. H. LEFEBVRE, PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DEHORS, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENT de l'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. DEFRETIN René	Professeur de Biologie Marine, Directeur de l'Institut de Biologie Maritime et Régionale de Wimereux.

PROFESSEURS TITULAIRES

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Générale
M. BECART Maurice	Physique
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BLOCH Vincent	Psychophysiologie
M. BONNEMAN Pierre	Chimie et Physico-Chimie Industrielle
M. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CAPET Marcel-Francis	Institut de Préparation aux Affaires
M. CELET Paul	Géologie
M. CONSTANT Eugène	Physique Industrielle-Electronique
M. CORSIN Pierre	Paléobotanique
M. DECUYPER Marcel	Mathématiques Générales
M. DEFRETIN René	Biologie Marine
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale
M. DURCHON Maurice	Zoologie Générale et Appliquée
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	Radio-Electricité-Electronique

M. GEHU Jean-Marie	Institut Agricole
M. GLACET Charles	Chimie Organique
M. GONTIER Gérard	Mécanique
M. GUILLAUME Jean	Biologie Végétale
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M. JOLY Robert	Biologie (Amiens)
Me LENOBLE Jacqueline	Physique Expérimentale
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M. MONTREUIL Jean	Chimie Biologique
M. POUZET Pierre	Informatique
Me SCHWARTZ Marie-Hélène	Analyse Supérieure
M. TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VAILLANT Jean	Mathématiques
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. VIVIER Emile	Biologie Animale
M. WERTHEIMER Raymond	Physique
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

PROFESSEURS A TITRE PERSONNEL

M. BOUISSET Simon	Physiologie Animale
M. DELHAYE Michel	Chimie
M. FLATRES Pierre	Géographie
M. LEBRUN André	Electronique
M. LINDER Robert	Botanique
M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. PARREAU Michel	Mathématiques Appliquées
M. PRUDHOMME Rémy	Droit et Sciences Economiques
M. SCHILTZ René	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique
M. BILLARD Jean	Physique
M. BODARD Marcel	Botanique
M. BOILLET Pierre	Physique
M. DERCOURT Jean-Michel	Géologie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LANDAIS Jean	Chimie
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. MAES Serge	Physique
Mle MARQUET Simone	Mathématiques
M. MONTEL Marc	Physique
M. PANET Marius	I.E.E.A.
M. PROUVOST Jean	Minéralogie

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés de fonctions)

M. ADAM Michel	Economie Politique
M. ANDRE Charles	Sciences Economiques
M. ANGRAND Jean-Pierre	Géographie
M. ANTOINE Philippe	Mathématiques
M. AUBIN Thierry	Mathématiques
M. BART André	Biologie
M. BEGUIN Paul	Mécanique des Fluides
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. BOSCQ Denis	Mathématiques
M. BRIDOUX Michel	Chimie
M. BRUYELLE Pierre	Géographie et Aménagement Spatial
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COULON Jean	I.E.E.A.
M. DEBOURSE Jean-Pierre	Sciences Economiques et Sociales
M. DEBRABANT Pierre	Sciences Appliquées
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques et Sociales
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique
M. DRIEUX Baudouin	I.E.E.A.
M. DYMENT Arthur	Mathématiques
M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FONTAINE Jacques	Génie Electrique
M. FROELICH Daniel	Sciences Appliquées
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GUILLAUME Henri	Sciences Economiques et Sociales
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JOURNEL Gérard	Sciences Appliquées
Mle KOSMANN Yvette	Mathématiques
M. KREMBEL Jean	Chimie
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LAURENT François	Automatique
M. LAVAGNE Pierre	Sciences Economiques et Sociales
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LENTACKER Firmin	Géographie et Aménagement Spatial
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOUAGE Francis	Sciences Appliquées
Mme MAILLET Monique	Sciences Economiques
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques et Sociales
M. MERIAUX Emile	Sciences de la Terre
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MIGEON Michel	Chimie (Sciences Appliquées)

M. PAQUET Jacques	Sciences Appliquées
M. PARSY Fernand	Mathématiques
M. PECQUE Marcel	Chimie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie (Valenciennes)
M. POVY Jean-Claude	Sciences Appliquées
M. RACZY Ladislas	Physique - Electronique
Me RENVERSEZ Françoise	Sciences Economiques et Sociales
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SALMER Georges	Radio Electricité Electronique
M. SEGUIER Guy	Electronique
M. SIMON Michel	Psychologie
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SMET Pierre	Physique
M. SOMME Jean	Géographie
Mle SPIK Geneviève	Chimie Biologique
M. TOULOTTE Jean-Marc	Sciences Appliquées
M. TREANTON Jean-René	Sciences Economiques et Sociales
M. VANDORPE Bernard	Chimie Physique
M. VILETTE Michel	Génie Mécanique
M. WATERLOT Michel	Géologie
Me ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques.

A mes parents,

A Colette,

Ce travail a été effectué sous la direction de Monsieur le Professeur GABILLARD dans le cadre du laboratoire de Radiopropagation et Electronique de l'Université des Sciences et Techniques de LILLE.

Qu'il me soit permis d'exprimer à Monsieur le Professeur GABILLARD mes sentiments de profonde gratitude pour ses nombreux conseils et les facilités qu'il m'a accordés pour mener à bien ce travail.

Je remercie Messieurs F. LOUAGE et G. SALMER qui ont bien volu examiner ce travail et me faire l'honneur de participer à mon jury. Je tiens à leur exprimer ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à M. De GELIS qui a accepté d'examiner ce travail et de représenter la S.N.P.A. dans mon Jury.

Monsieur LANCHON, Directeur-Adjoint de FRANALB-Informatique, m'a toujours réservé un excellent accueil dans son Service. Je suis très sensible au fait qu'il ait accepté de faire partie de mon Jury.

Certains résultats expérimentaux que j'ai exploités dans mon calcul ont été obtenus lors de campagnes de mesures menées par l'Institut Français du Pétrole et la Société Nationale des Pétroles d'Aquitaine. Je souhaiterais exprimer mes remerciements à ces deux organismes.

Monsieur J.M. FONTAINE a bien voulu superviser ce travail et me faire part de ses remarques. Je l'en remercie vivement.

Pendant toute la durée de ce travail, j'ai travaillé en étroite collaboration avec Monsieur M. CAUTERMAN. Les nombreux encouragements et conseils précieux qu'il m'a apportés ont été déterminants pour la réalisation de cette étude. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour cette aide amicale et efficace.

J'ai bénéficié aussi de l'aide de nombreux membres du Laboratoire de Calcul de l'U.S.T.L., et notamment de M. BEHAGUE, je les en remercie vivement.

Les autres membres de l'équipe, MM. BASSIOUNI, DEGAUQUE, DEMOULIN, DOCO, DUBUS, GAQUIERE, MANGEZ, SOIRON, VANLOOT m'ont également apporté leur aide sympathique. Que tous soient ici remerciés.

Je ne terminerai pas cet avant-propos sans exprimer mes remerciements à l'ensemble du personnel technique et administratif du laboratoire pour leur collaboration amicale et efficace.

S O M M A I R E

CHAPITRE II

II. DETERMINATION ANALYTIQUE DES COMPOSANTES DU CHAMP ELECTRIQUE SUR L'AXE D'UN TUBAGE DE LONGUEUR INFINIE

oOo

INTRODUCTION

Les études théoriques et analogiques entreprises à l'Université des Sciences et Techniques de Lille par l'équipe de Monsieur le Professeur GABILLARD ont permis la mise au point d'un procédé de prospection des terrains situés autour d'un forage : le Télélog.

Ce procédé, qui a fait l'objet de brevets déposés par l'Institut Français du Pétrole (Brevet I. F. P., P. V. N° 156220, 24 juillet 1968), consiste à mesurer les variations de la résistivité moyenne du terrain provoquées par la présence d'un gisement et à en déduire sa position. La résistivité du terrain est déduite de la mesure de la composante verticale du champ électrique créé dans un forage par un dipôle émetteur placé à la surface du sol à une grande distance de ce forage.

En particulier, il est possible de localiser le bord d'un gisement à partir des mesures "Télélog" effectuées dans un forage central. Le procédé Télélog pourrait donc être utilisé en permanence pour controler l'étendue et l'évolution d'un réservoir naturel de stockage de gaz. Dans de telles conditions d'utilisation, le forage serait nécessairement muni d'un tubage plastique. Les mesures "Télélog" effectuées à l'intérieur seront alors différentes de celles qui auraient été obtenues en trou ouvert.

La simulation du tubage sur cuve analogique n'est pas actuellement réalisable avec les moyens dont nous disposons. En effet, le diamètre minimum du tube que nous sommes contraints d'utiliser est de plusieurs millimètres ; ce qui représenterait sur le terrain, étant donné le rapport de réduction actuel de la cuve analogique, un tubage de plus de 100 mètres de diamètre.

Pour faciliter l'interprétation des mesures "Télélog" effectuées en trou tubé, nous ne pouvons disposer pour l'instant que d'une étude théorique, et c'est la réalisation de cette étude qui nous a été confiée.

Dans une première partie, nous donnons les résultats obtenus au terme de chacune des deux étapes théoriques de notre travail, et nous les comparons aux résultats expérimentaux en notre possession.

Dans une seconde partie, nous explicitons la première étape de notre travail. Nous nous fixons un modèle théorique simple, à savoir un tubage de longueur infinie. Nous pouvons alors, au terme des calculs, aboutir à une expression analytique simple de la composante verticale du champ électrique à l'intérieur du tubage.

Dans une troisième partie, nous prenons comme modèle un tube de longueur quelconque et nous faisons appel, pour le calcul du champ électrique à l'intérieur du forage, à des solutions numériques.

Les résultats fournis dans la première partie nous permettront de décider de la fiabilité des méthodes utilisées et d'effectuer un choix entre les deux.

oOo

CHAPITRE I

I FINALITE DE L'ETUDE ET ANALYSE DES RESULTATS OBTENUS

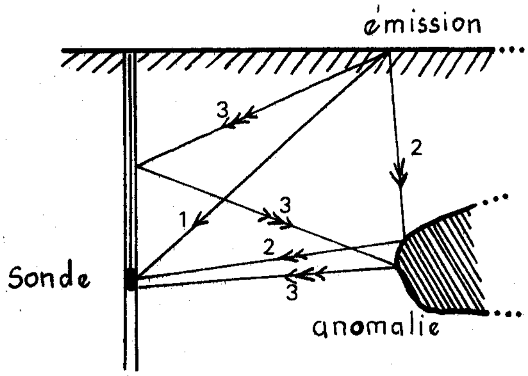
I 1. Généralités

I 1. 1. Finalité de l'étude

Dans le but de définir l'influence d'un tubage plastique sur les mesures Télélog, nous devons chercher à évaluer théoriquement la composante verticale du champ électrique à l'intérieur. L'influence que nous souhaitons mettre en évidence découlera de la comparaison entre les signaux obtenus dans le tubage d'une part, et en l'absence de l'anomalie représentée par ce tubage d'autre part.

Il est évident que les résultats les plus intéressants sont ceux qui concernent des mesures faites à l'intérieur d'un trou tubé dans un terrain renfermant une anomalie de résistivité. Dans le but de simplifier les calculs, nous ne considérons pas la présence de l'anomalie representée par le gisement. Si nous sommes en mesure de déterminer quelle est la perturbation amenée sur un relevé Télélog par la présence du tubage, il sera déjà possible de déterminer au cours d'une campagne de mesures, quelle part doit être faite à la présence du tubage lors du dépouillement et quelle part doit rester à la présence du gisement.

De plus, les déformations lues sur les courbes de résistivité apparente et provoquées par le gisement sont des déformations *locales* ; elles n'affectent pas la totalité du relevé. Elles devront donc se retrouver sur un relevé en trou tubé : le tubage est "vu" de la sonde réceptrice, quelles que soient sa position et celle du récepteur, alors que le gisement n'est "vu" que dans une zone donnée où les courbes de champ sont réellement modifiées.



Enfin, la section du tubage étant très faible vis à vis des autres paramètres géométriques définissant l'anomalie, nous pouvons négliger toute possibilité de réflexion d'une onde suivant le trajet (3) représenté ci-contre, ou, autrement dit, toute interaction due à la présence du tubage.

En conséquence, nous avons considéré dans toute notre étude que le milieu encaissant était homogène.

I 1. 2. Conventions

Nous noterons r la distance émetteur-forage, σ_1 la conductivité du milieu homogène encaissant, σ_3 la conductivité de la boue dans le forage, z la profondeur de la sonde réceptrice .

Nous supposerons les électrodes de réception distantes de 1 mètre de manière à confondre les valeurs numériques de la tension V_z recueillie et du champ $\mathcal{E}_z$ à la profondeur moyenne des 2 électrodes.

I 1. 3. Première méthode:analytique

La première étape théorique de notre travail concerne un tubage de grande longueur ; avec un tel modèle, il est alors possible d'arriver à une formulation analytique du problème (formule 49).

I 1. 4. Deuxième méthode: numérique

Pour améliorer le modèle précédent et prendre un tubage de longueur quelconque, nous avons envisagé une deuxième étude théorique. L'impossibilité de résoudre analytiquement le problème nous a conduits à utiliser une méthode numérique par discrétisation de l'anomalie.

Les deux méthodes théoriques sont développées dans les chapitres II et III, mais nous donnons ci-après les résultats obtenus.

I 2. Etude des courbes obtenues par une méthode de calcul analytique

A l'aide de la formule (49), nous avons pu tracer plusieurs réseaux de courbes. Chaque fois, nous avons pris $\frac{I}{2\Pi\sigma 1} = 1$.

Les courbes donnent soit le champ vertical $\mathcal{E}^{(3)}_{zsM}$ (noté $\mathcal{E}_z$), soit le rapport $\mathcal{E}z/\mathcal{E}z_o$, $\mathcal{E}z_o$ étant le champ électrique qui aurait été mesuré au même endroit s'il n'y avait pas eu de tubage.

I 2. 1. Courbes $V_z = f(z)$, r paramètre (Planche 1)

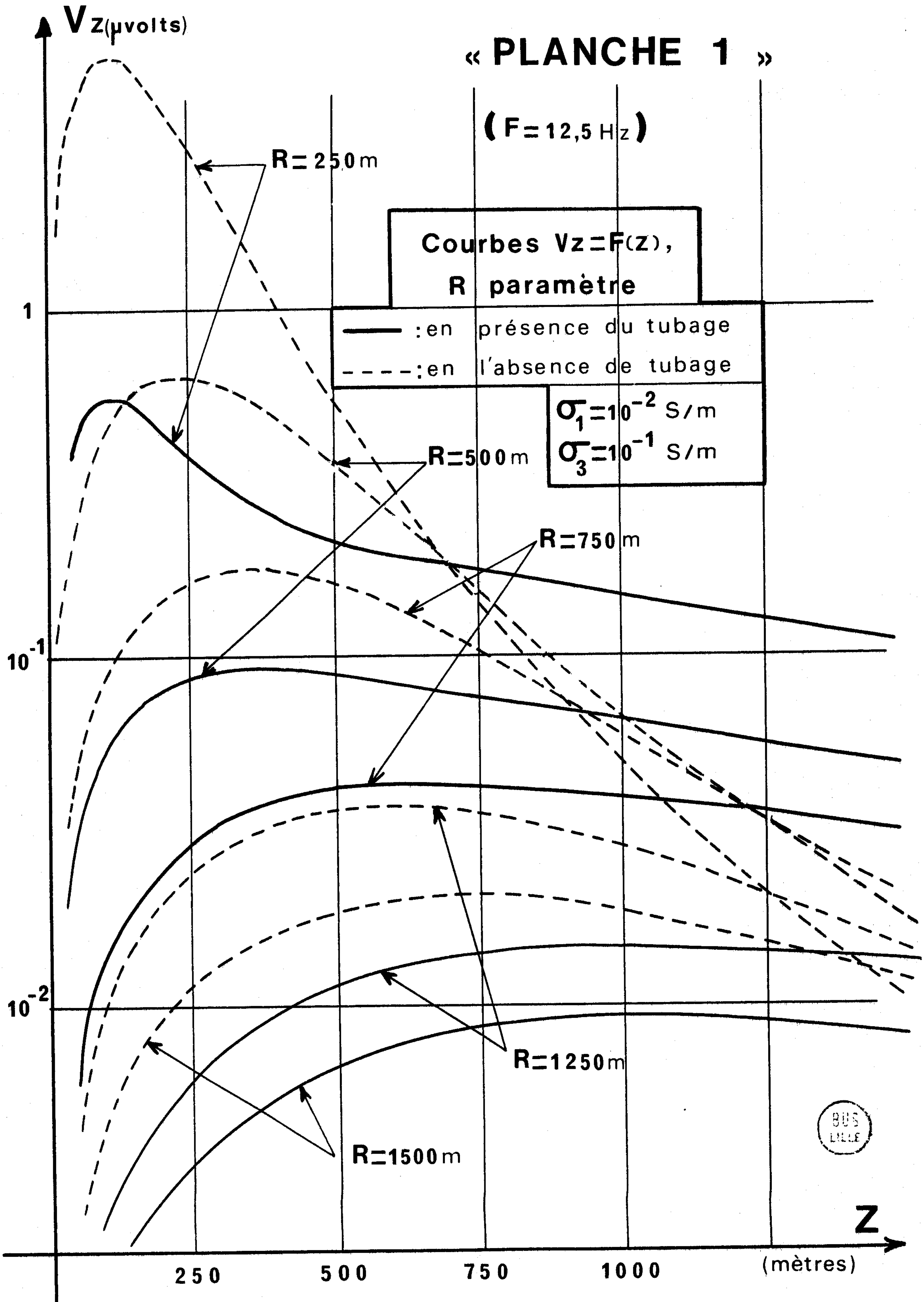
Nous constatons une décroissance moins rapide du champ réel que du champ demi-milieu. Au delà d'une certaine profondeur qui dépend de la distance émetteur-forage, le champ réel devient supérieur ; ce phénomène se produit à des profondeurs d'autant plus faibles que r est faible.

Ceci s'explique dans la mesure où la longueur du tubage est supérieure à la longueur d'onde du signal dans le sol ; le tubage peut alors être considéré comme un guide excité par une antenne placée dans le milieu extérieur ; il y a alors phénomène de propagation à l'intérieur du tubage.

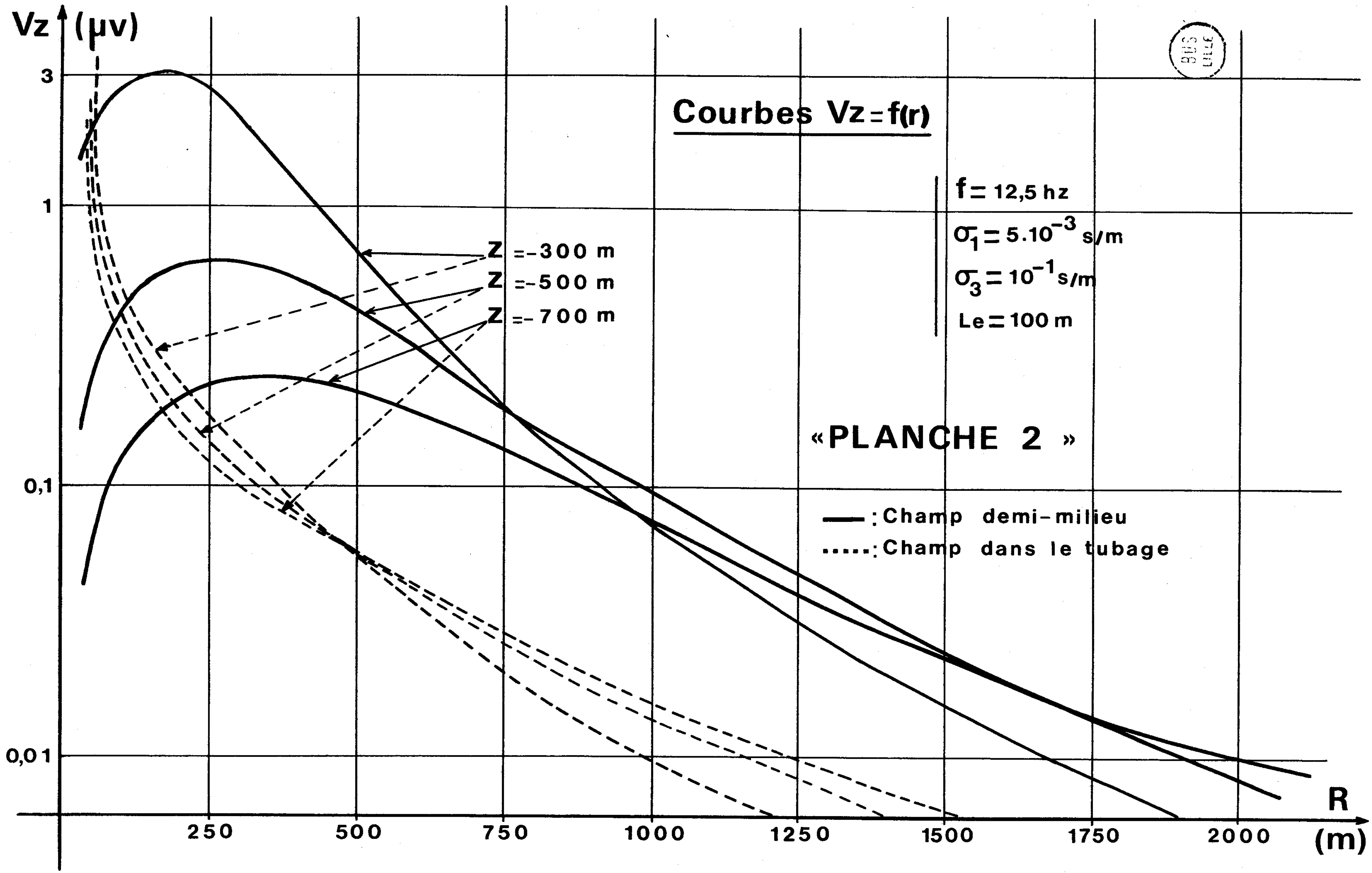
I 2. 2. Courbes $V_z = f(r)$, z paramètre (Planche 2)

Lorsque l'on effectue des mesures sur le terrain, on place la sonde réceptrice à une profondeur z donnée, et on fait ensuite varier la distance émetteur-forage dans un azimut donné. Il est donc intéressant de connaître la variation $V_z = f(r)$.

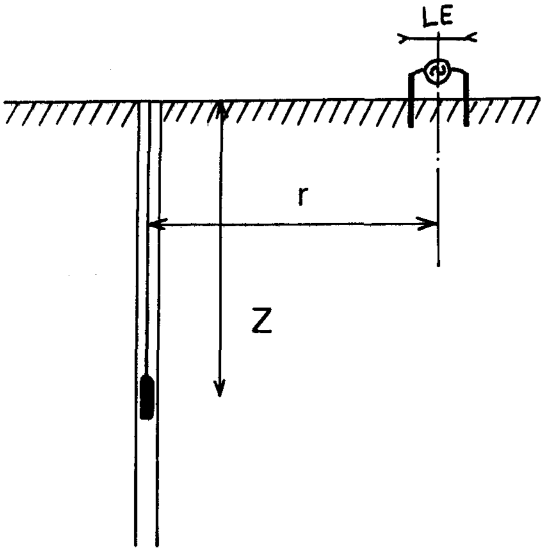
Au delà d'une certaine distance r_o (qui dépend bien sûr des différentes conductivités, mais qui est de l'ordre de 600 mètres avec les valeurs de σ_1 généralement rencontrées), les courbes $E_z = f(r)$ et $z_o = f(r)$ sont sensiblement parallèles. Les champs E_z et E_{z_o} évoluent donc de la même façon. La correction des courbes de résistivité apparente qu'il faudra apporter pour tenir compte du tubage sera donc relativement simple.



Vz(µvolts)
« PLANCHE 1 »
(F=12,5 Hz)
Courbes Vz=F(z),
R paramètre
:en présence du tubage
:en l'absence de tubage
σ1=10^-2 S/m
σ3=10^-1 S/m
R=250m
R=500m
R=750m
R=1250m
R=1500m
1
10^-1
10^-2
Z
250
500
750
1000
(mètres)



Vz (µv)
3
1
0,1
0,01
Courbes Vz = f(r)
f = 12,5 hz
σ1 = 5.10^-3 s/m
σ3 = 10^-1 s/m
Le = 100 m
Z = -300 m
Z = -500 m
Z = -700 m
«PLANCHE 2»
—— : Champ demi-milieu
..... : Champ dans le tubage
250
500
750
1000
1250
1500
1750
2000
R
(m)



C'est pour les distances inférieures à r_o que l'effet du tubage se fait le plus sentir : les courbes $\mathcal{E}_z = f(r)$ et $\mathcal{E}_{z_o} = f(r)$ se recoupent, et les courbes $\mathcal{E}_z = f(r)$ restent monotones.

Au voisinage immédiat du tubage, nous avons $\mathcal{E}_z \gg \mathcal{E}_{z_o}$, mais nous ne pouvons guère en tirer de conclusion pratique, les mesures sur le terrain n'étant pratiquement jamais faites avec une distance r petite.

En effet, r représente la distance entre l'axe du forage et le milieu de l'antenne. Nous n'aurons donc jamais $r<LE/2$, et même $r<LE$.

La partie vraiment intéressante des courbes se situe dans la zone $100 < r < 600$m, zone pour laquelle la correction des courbes de résistivité apparente sera différente en chaque point de mesure.

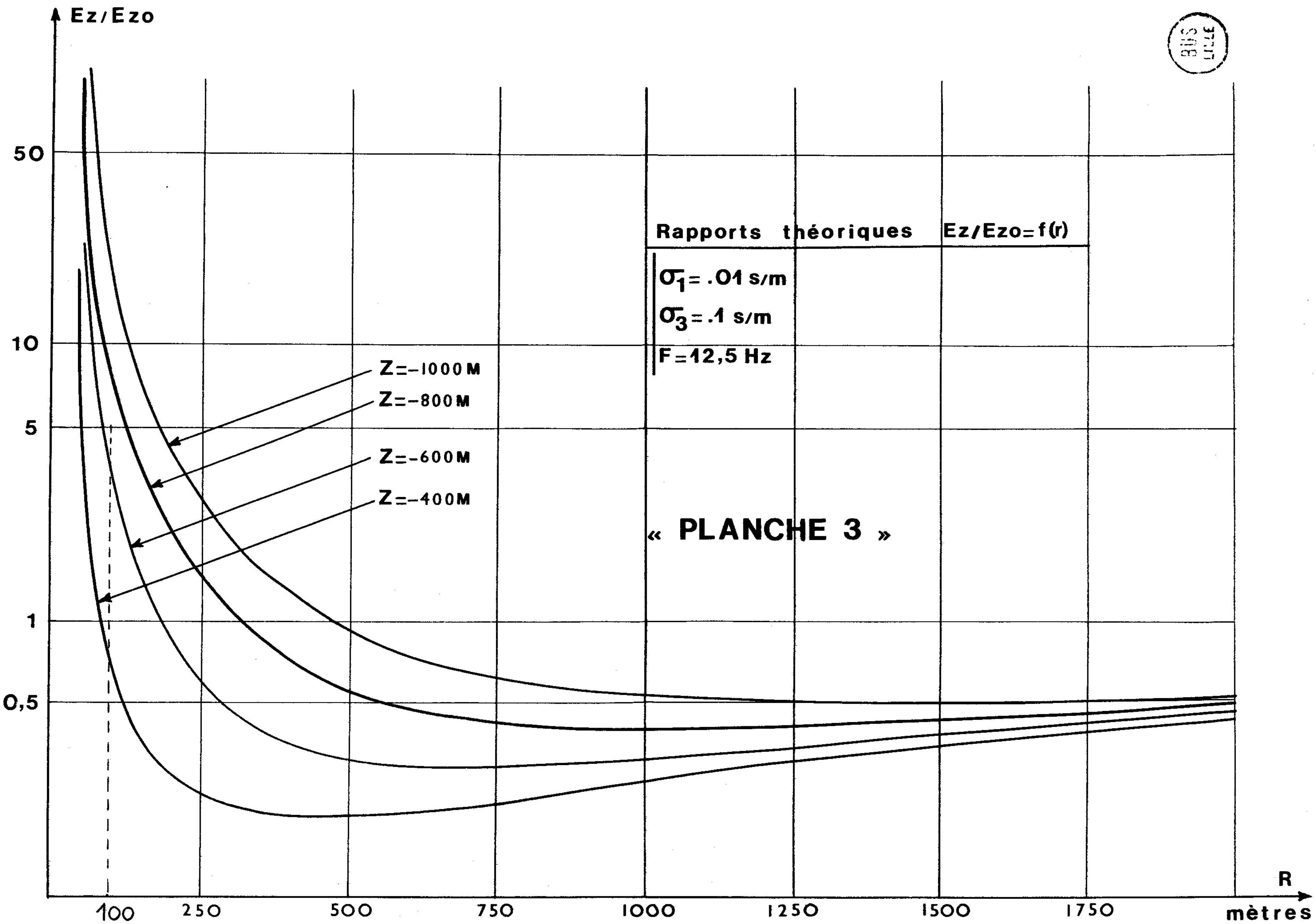
Puisque ce sont les courbes $\mathcal{E}_z$ et $\mathcal{E}_{z_o} = f(r)$ qui sont les plus utiles, nous allons tracer $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o} = f(r)$ pour mieux mettre les écarts en évidence.

I 2. 3. *Courbes $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o} = f(r)$, z paramètre* (Planches 3, 4, 5, 6,7)

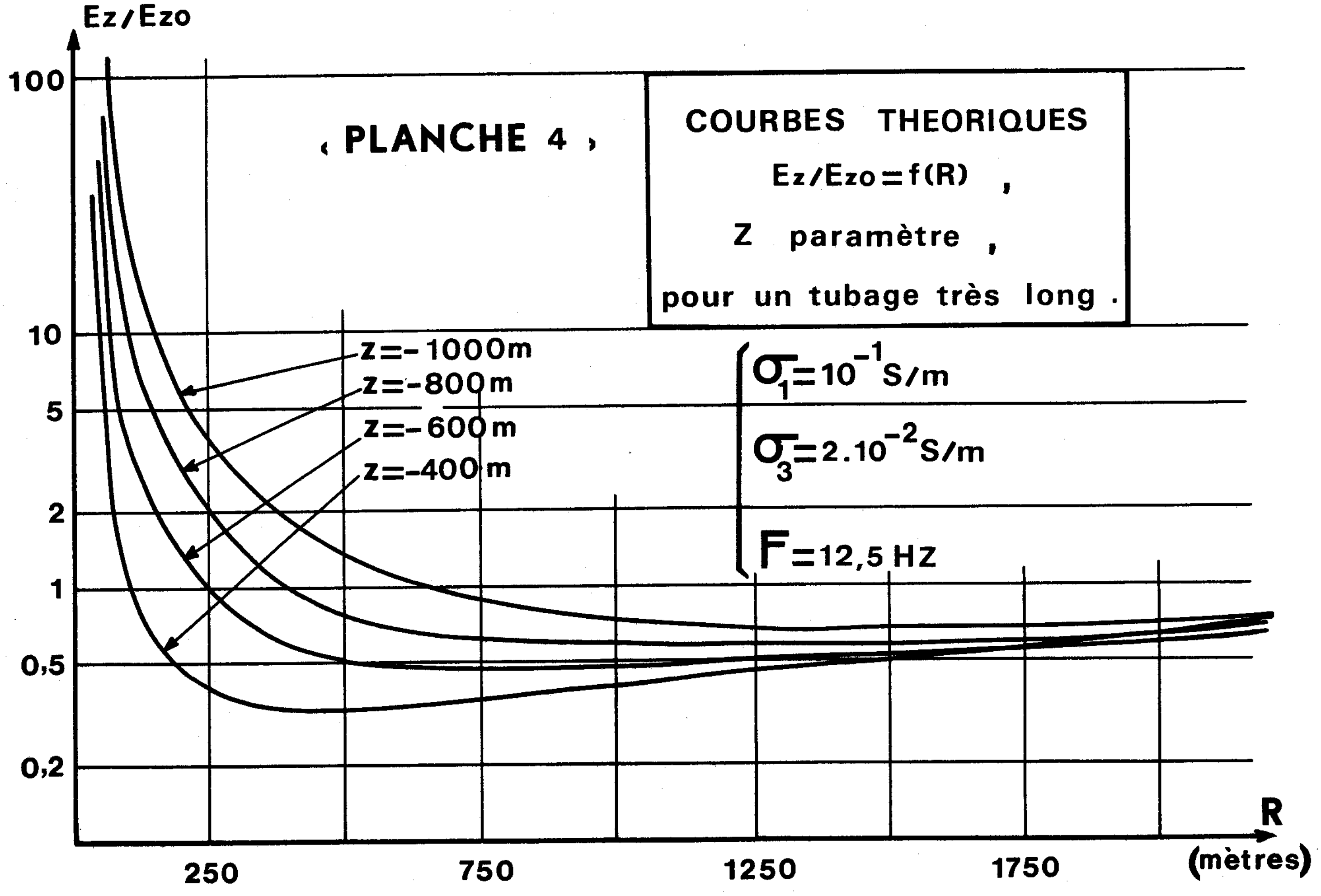
Nous avons tracé 5 réseaux de courbes en faisant varier les conductivités σ_3 et σ_1 de la boue et du terrain.

Quelles que soient les valeurs utilisées pour σ_1 et σ_3, l'allure des courbes est inchangée :

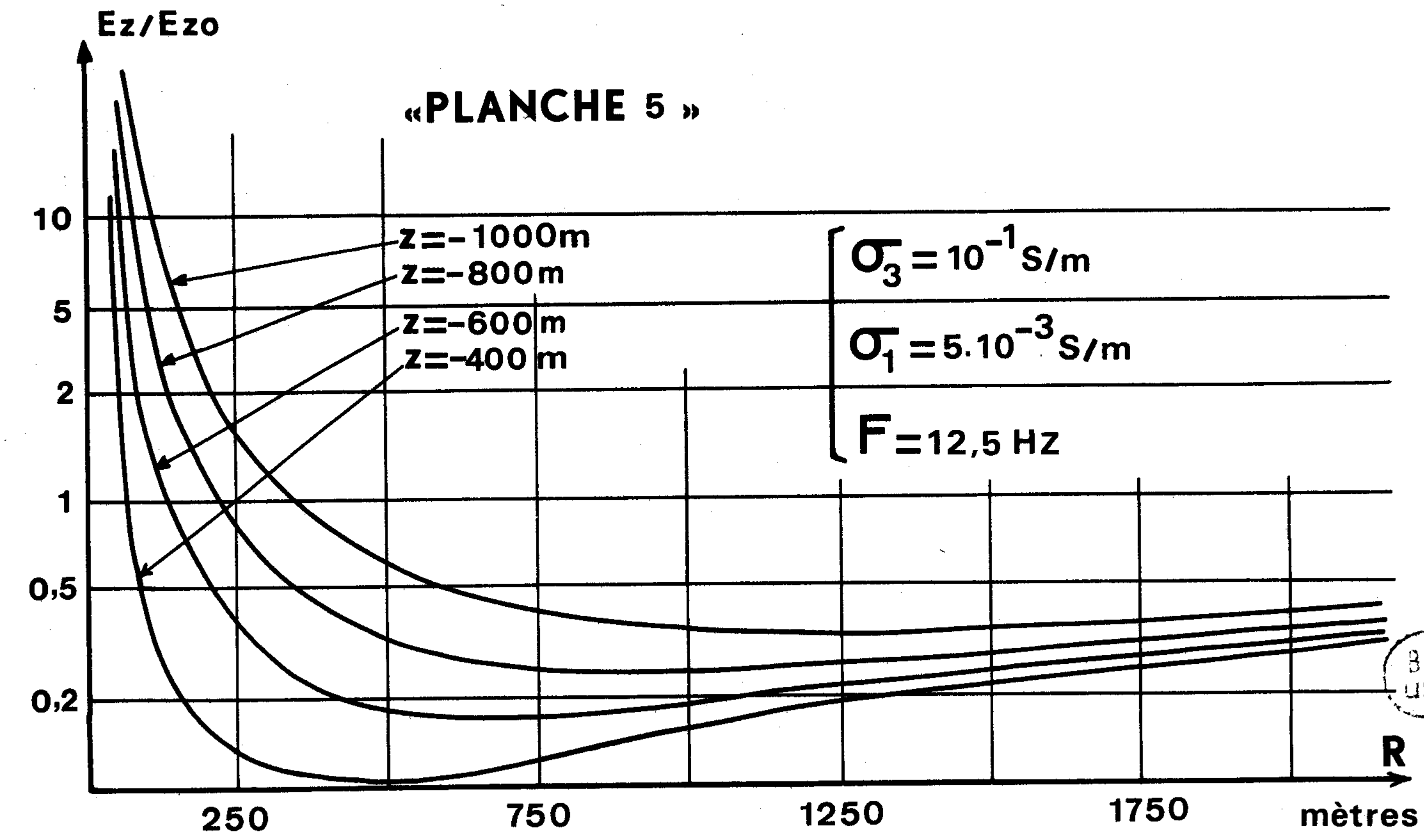
- aux faibles profondeurs, le rapport $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ passe par un minimum assez accusé, et ce pour une distance r égale à z.



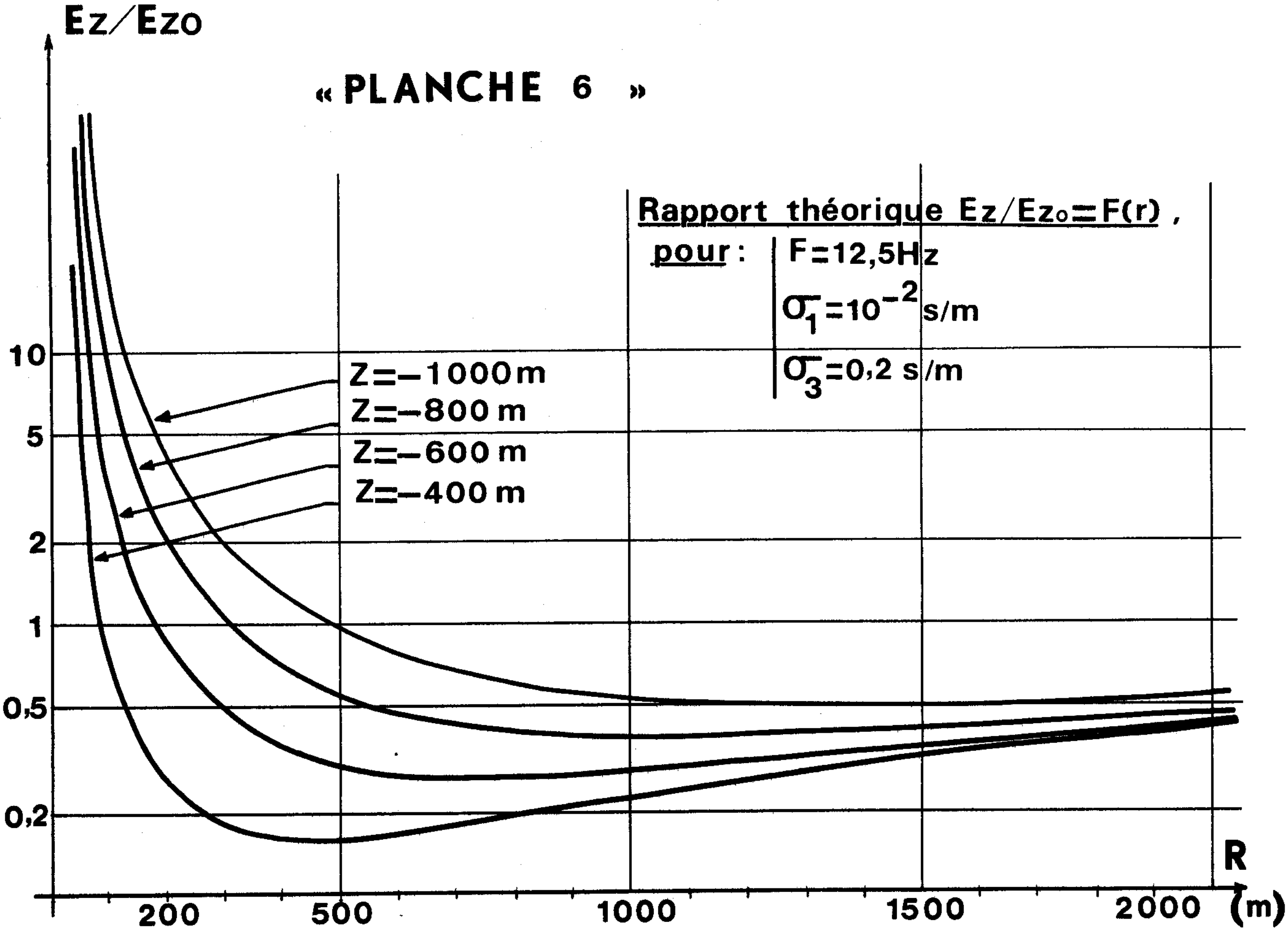
Ez/Ezo
50
10
5
1
0,5
Rapports théoriques Ez/Ezo=f(r)
σ1 = .01 s/m
σ3 = .1 s/m
F = 12,5 Hz
Z=-1000M
Z=-800M
Z=-600M
Z=-400M
« PLANCHE 3 »
100
250
500
750
1000
1250
1500
1750
R
mètres

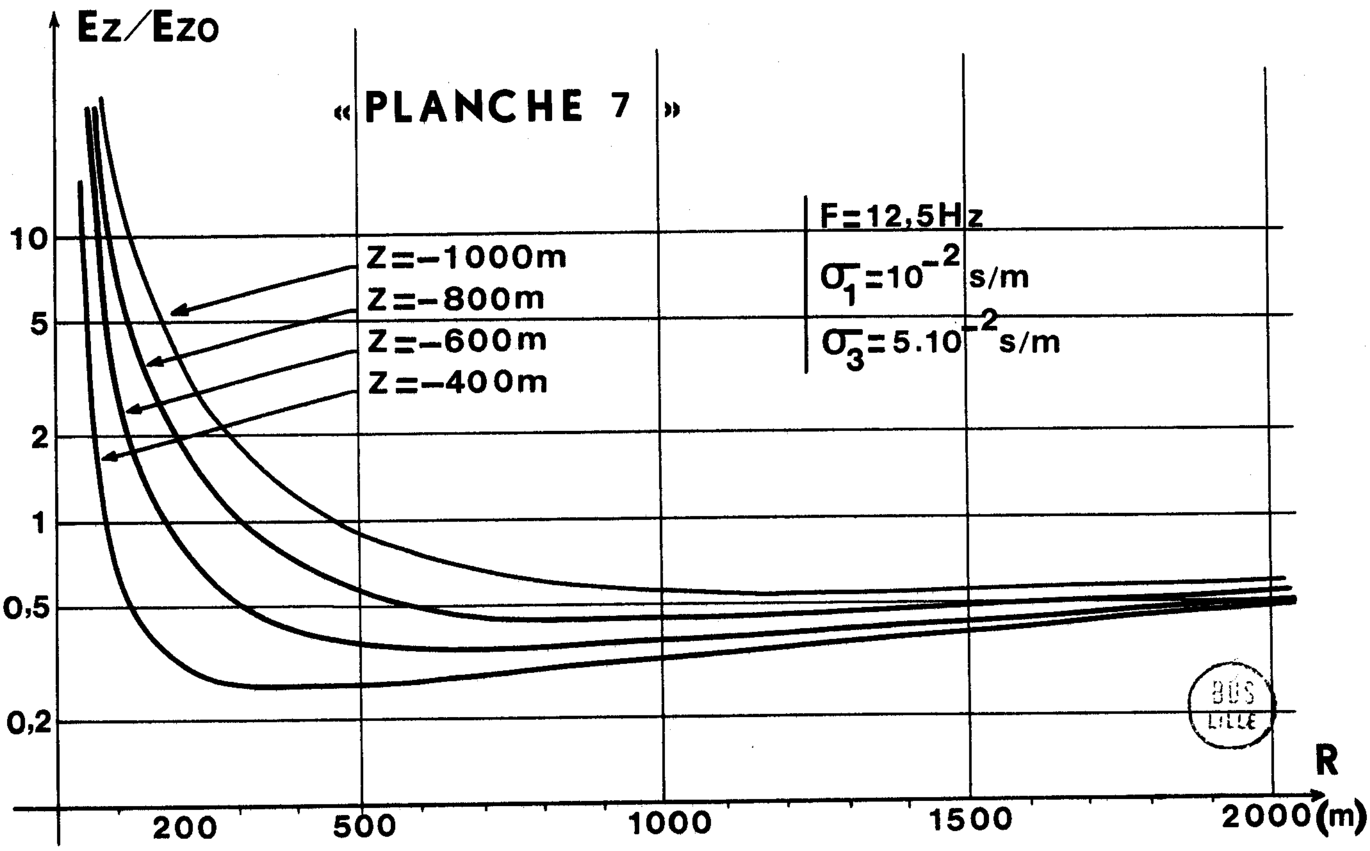


Ez/Ezo
100
10
5
2
1
0,5
0,2
« PLANCHE 4 »
COURBES THEORIQUES
Ez/Ezo = f(R) ,
Z paramètre ,
pour un tubage très long .
z=-1000m
z=-800m
z=-600m
z=-400m
$\sigma_1 = 10^{-1}$ S/m
$\sigma_3 = 2.10^{-2}$ S/m
F = 12,5 HZ
R
250
750
1250
1750
(mètres)



Ez/Ezo
10
5
2
1
0,5
0,2
«PLANCHE 5»
z=-1000m
z=-800m
z=-600m
z=-400m
$\sigma_3 = 10^{-1}$ S/m
$\sigma_1 = 5.10^{-3}$ S/m
F = 12,5 HZ
R
250
750
1250
1750
mètres


Ez/Ezo
« PLANCHE 6 »
Rapport théorique Ez/Ezo = F(r),
pour : F = 12,5 Hz
σ1 = 10^-2 s/m
σ3 = 0,2 s/m
Z = -1000 m
Z = -800 m
Z = -600 m
Z = -400 m
10
5
2
1
0,5
0,2
R
200
500
1000
1500
2000
(m)


Ez/Ezo
« PLANCHE 7 »
F = 12,5 Hz
σ1 = 10^-2 s/m
σ3 = 5.10^-2 s/m
Z = -1000m
Z = -800m
Z = -600m
Z = -400m
10
5
2
1
0,5
0,2
BUS LILLE
R
200
500
1000
1500
2000
(m)

- aux moyennes profondeurs ($|z| > 700$ mètres), le passage par un minimum n'est plus très visible.
- les variations du rapport sont de moins en moins importantes au fur et à mesure que r augmente : à une profondeur de 1 000 m par exemple, le rapport est pratiquement constant pour 1 000 $< r <$ 2 000 mètres.
- l'écart entre les courbes pour un même couple (σ_1, σ_3) diminue lorsque r augmente. Ceci s'explique facilement par le fait que, lorsque r devient grand, $R = r^2 + z^2$ devient équivalent à r, et le rapport $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ tend asymptotiquement vers une valeur fixée par le couple (σ_1, σ_3^o).

Sur les planches 4 et 5, nous avons pris la même conductivité pour la boue, et nous avons fait varier celle du sol. Sur les planches 6 et 7, c'est au contraire la conductivité de la boue que nous avons fait varier. Nous constatons une différence beaucoup plus importante entre les courbes des planches 4 et 5 qu'entre celles des planches 6 et 7 ; il suffit de considérer, par exemple, la dynamique sur les valeurs de r pour lesquelles le rapport $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ est égal à 1.

Nous pouvons en conclure que le rapport $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ est beaucoup plus sensible aux variations de σ_1 qu'à celles de σ_3 ; ou encore que la conductivité de la boue de forage n'est pas le paramètre dominant.

I 2. 4. <u>Courbes de résistivité apparente</u> (Planche 8)

A partir des courbes $\mathcal{E}_z = f(r)$, nous pouvons tracer les courbes de résistivité apparente $\rho_a = f(r)$ en présence du tubage. Nous l'avons fait dans le cas $z = -500$ m, $\sigma_1 = 2.10^{-1}$ s/m, $\sigma_3 = 2$ s/m.

Ces variations de la résistivité apparente sont d'une grande importance pour le dépouillement des résultats d'une campagne de mesures sur le terrain, les courbes $\rho_a = f(r)$ servant à détecter la position de l'anomalie.

La courbe $\rho_a = f(r)$ a la même allure que la courbe $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o} = f(r)$: ρ_a est très élevée près du tubage, décroit ensuite rapidement jusqu'à 500 m, puis augmente lentement au fur et à mesure que r croît.

I 2. 5. Conclusion

L'effet du tubage est d'autant plus sensible que la distance émetteur-forage est faible.

Au delà d'une certaine distance r_c, le rapport $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ varie peu. *Ceci veut dire que, si l'émetteur est suffisamment loin de l'axe du forage, l'effet du tubage ne doit pas masquer celui du gisement.*

I 3. Résultats expérimentaux obtenus sur le forage LUG 39

Pour définir l'influence du tubage sur les mesures Télélog, nous avons donné dans le paragraphe précédent les résultats de l'étude théorique menée par voie analytique. Ces résultats concernent un tubage isolant de grande longueur, ce qui limite a priori leur domaine d'utilisation. Néammoins, il est intéressant de comparer ces résultats avec ceux qui sont en notre possession et qui proviennent d'une campagne de mesure.

Nous disposons en effet [2] des mesures Télélog effectuées dans le forage LUG 39 de LUSSAGNET (40) appartenant à la S. N. P. A. Les mesures ont été effectuées sur le même forage dans des conditions différentes, i. e. avant et après qu'il ait été tubé, soit respectivement en octobre 1971 et octobre 1972.[3],[4].

I 3. 1. Conditions expérimentales

Le tubage plastique de LUG 39, d'une longueur de 540m, est muni de 4 paires de colliers métalliques à 400, 450, 484 et 517 mètres de profondeur. Les mesures ont été faites avec la sonde située en face des deux dernières paires de colliers.

Les paramètres intervenant au cours de la mesure avaient les valeurs suivantes :

f = fréquence d'émission = 12,5 Hz

I = courant d'émission = 1A (les courbes expérimentales ont été normalisées à 1A).

LE = longueur de la base d'émission = 100m

LR = distance entre les électrodes de réception = 1m

σ_1 = conductivité du terrain encaissant = 2.10^{-2} s/m

σ_3 = conductivité de la boue dans le tubage = 2.10^{-1} s/m

a = rayon intérieur du tubage = 67mm

b = rayon extérieur du tubage = 75mm

I 3. 2. Résultats

Nous appelons $\mathcal{E}_{z_o}$ le champ mesuré lors de la première campagne de mesures ; il est représenté par une courbe demi-milieu déformée par les discontinuités de résistivité rencontrées.

Nous appelons $\mathcal{E}_z$ le champ mesuré dans le tubage, dans les mêmes conditions d'expérience.

- Planche (12) : Elle donne le signal Télélog reçu sur le profil 3
- Planche (11) : elle montre l'évolution du rapport expérimental $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ pour les profils 2, 3, 4, la sonde étant immobilisée dans le tubage à 517m. La courbe en pointillé est la courbe moyenne des valeurs obtenues sur les 3 profils.
- Planche (10) : nous avons reporté les différents paramètres expérimentaux dans la formule (49) et tracé la courbe $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ théorique dans les conditions de l'expérience.
- Planche (9) : elle donne les variations de la résistivité apparente en fonction de la distance émetteur-forage dans le cas d'un forage tubé. La courbe proposée est celle qui a été obtenue expérimentalement sur le profil 3. Les courbes relevées sur les profils 2 et 4 sont données en Annexe.
- Planche (8) : elle a été tracée à partir de la courbe théorique $\mathcal{E}_z = f(r)$ dans les conditions de l'expérience et donne les variations de la résistivité apparente théorique.

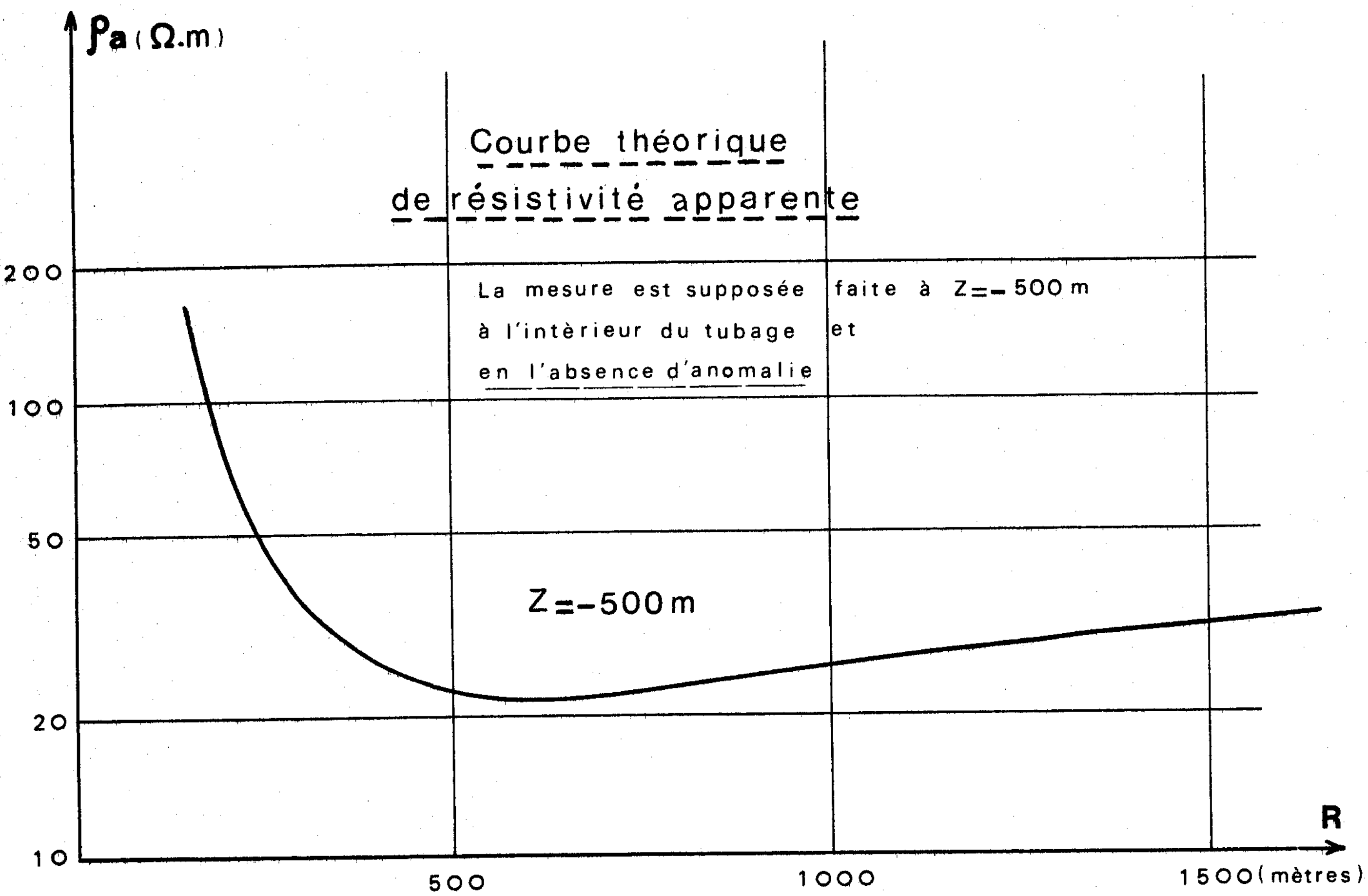


PLANCHE 8

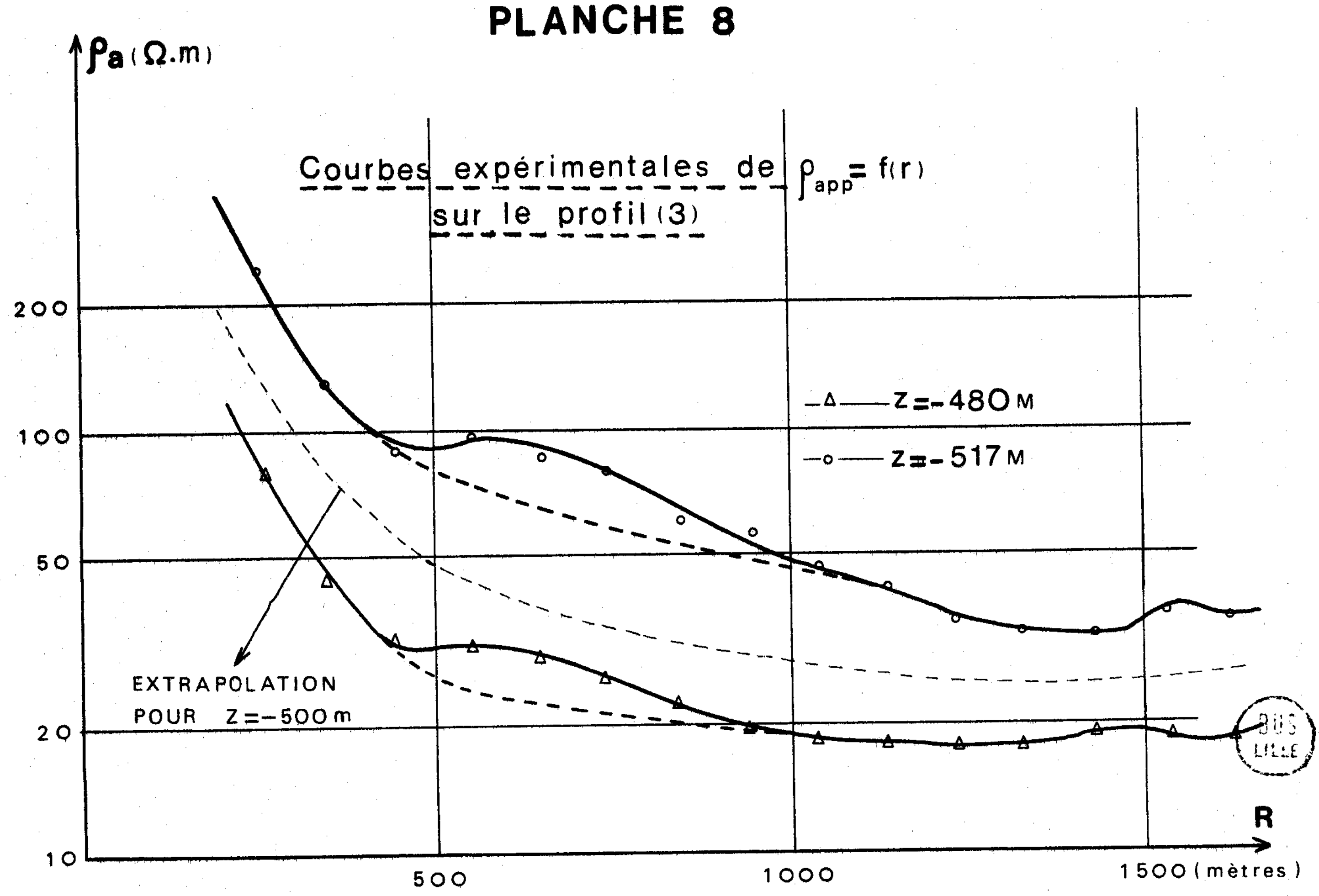
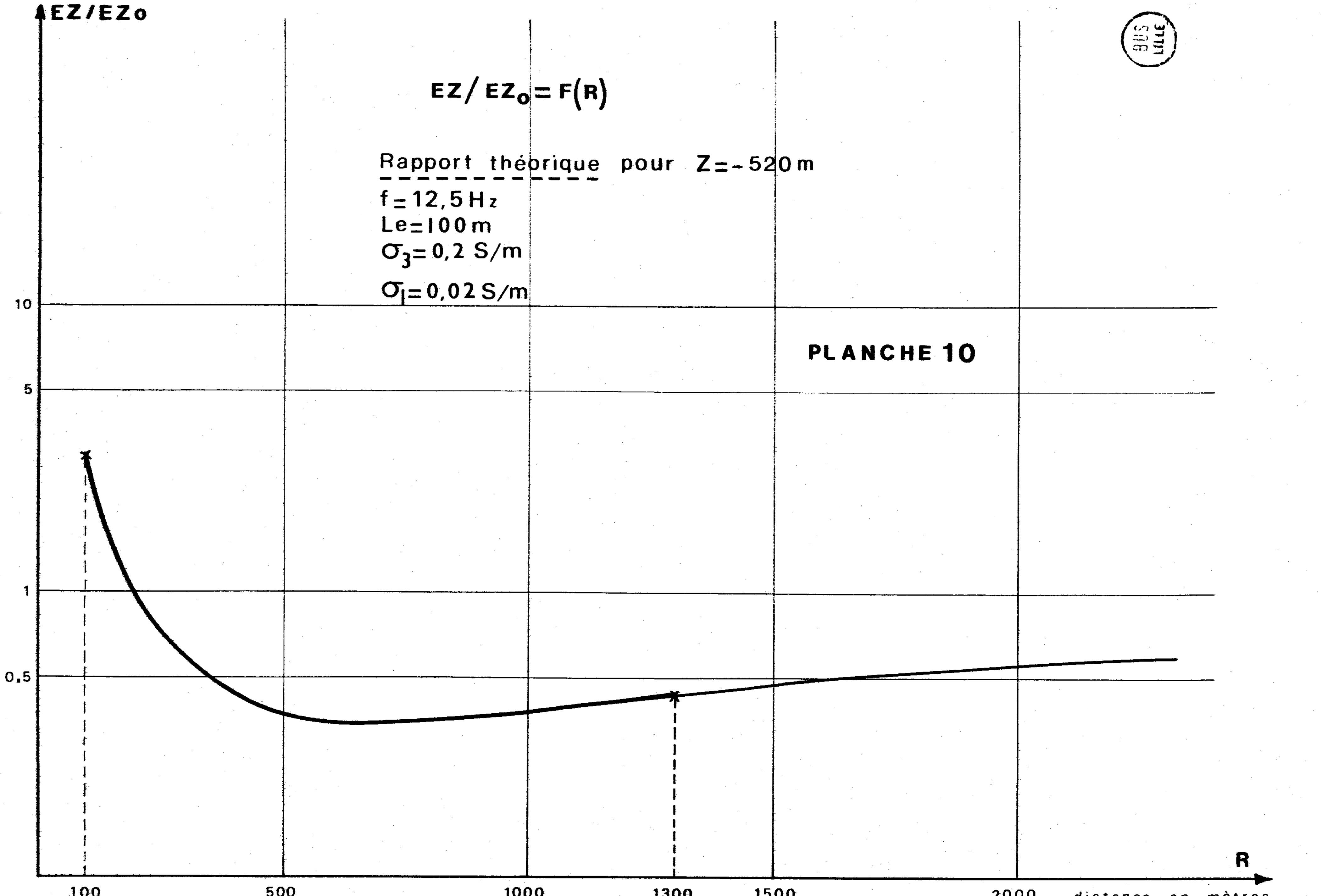


PLANCHE 9


EZ/EZo
EZ/ EZ_o = F(R)
Rapport théorique pour Z = - 520 m
f = 12,5 Hz
Le = 100 m
σ_3 = 0,2 S/m
σ_1 = 0,02 S/m
PLANCHE 10
10
5
1
0,5
R
100
500
1000
1300
1500
2000
distance en mètres

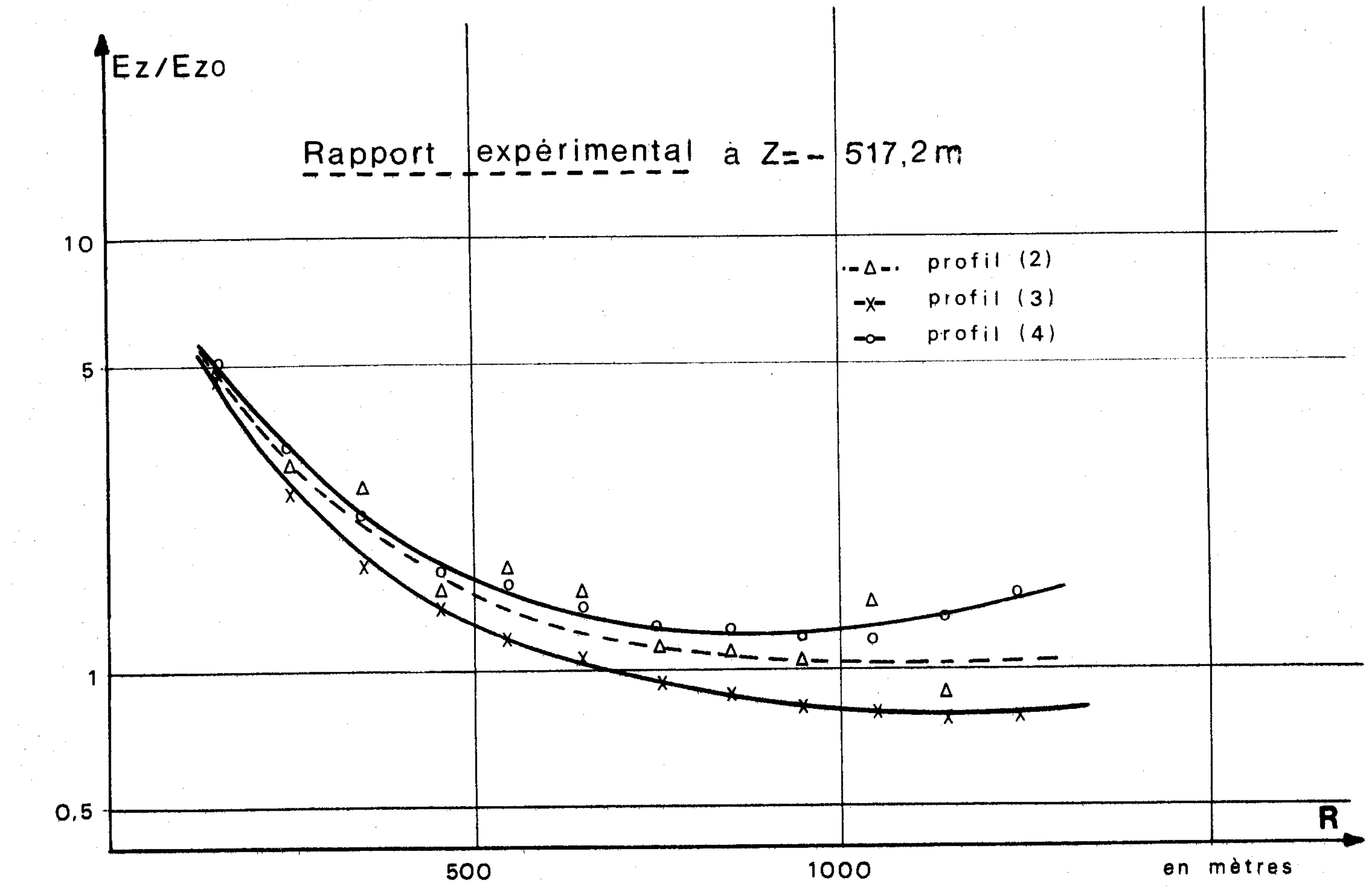


PLANCHE 11

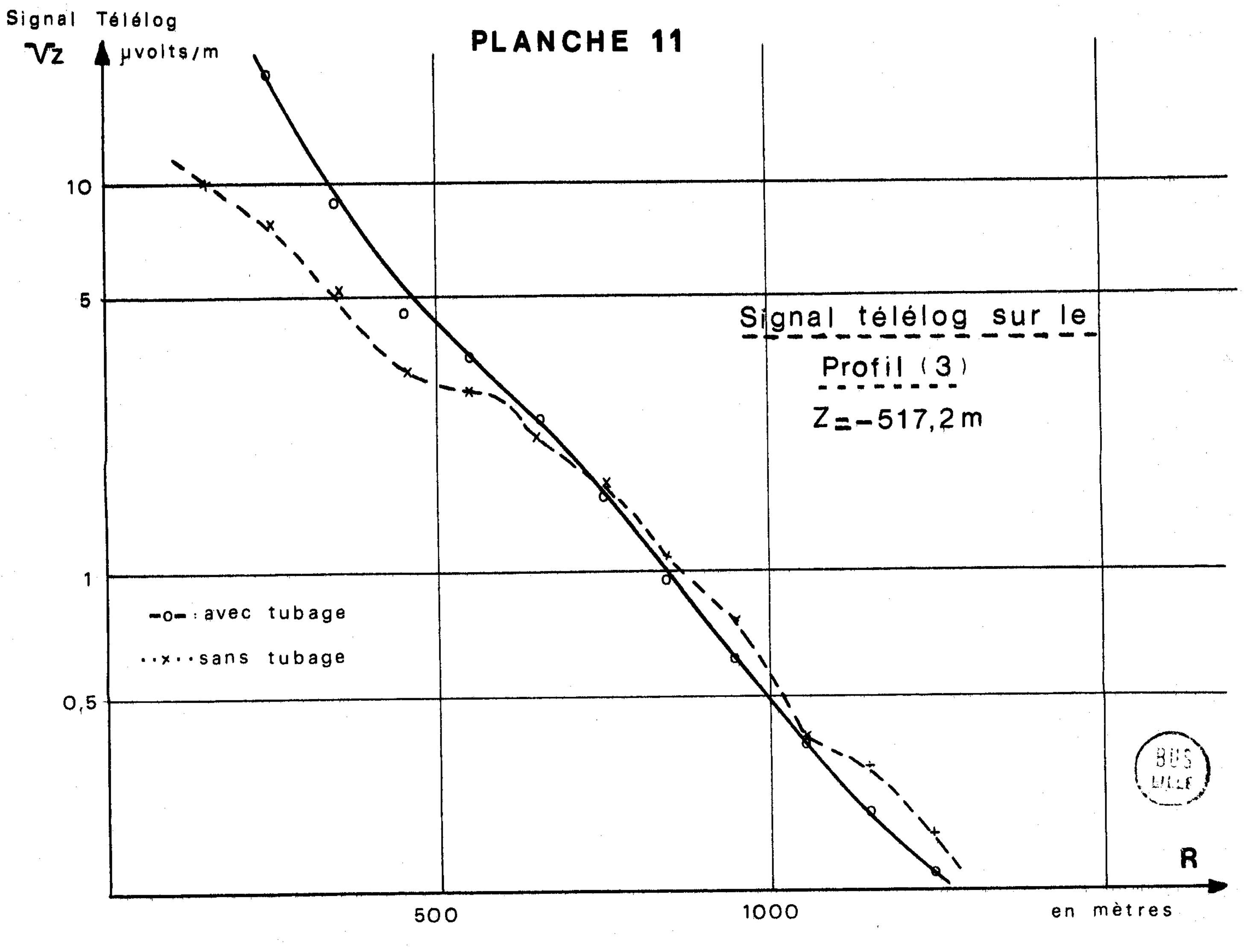


PLANCHE 12

I 4. Comparaison entre les courbes expérimentales et les courbes obtenues à l'aide du calcul analytique

Sur la planche (10) nous avons passé en trait fort la partie intéressante de la courbe $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o} = f(r)$ correspondant aux valeurs expérimentales de r.

Nous ne nous permettons pas de tirer de conclusion quantitative d'un modèle théorique qui approche seulement le modèle expérimental. L'étude théorique,présentée dans le chapitre suivant, étant faite pour un tubage très long, et les courbes expérimentales étant obtenues dans un tubage de longueur finie et muni de colliers métalliques, nous ne pouvons effectuer de comparaison quantitative. Mais, qualitativement, nous pouvons rapprocher les planches (8) et (9) ainsi que (10) et (11). Les résultats théoriques et expérimentaux montrent tous les deux que l'effet du tubage est d'autant plus important que la distance émetteur-forage décroît. Nous obtenons bien des allures identiques pour les deux courbes.

Au delà de la distance r_c qui apparait sur les courbes théoriques, le rapport $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ varie très lentement ; son logarithme sera donc pratiquement constant en fonction de r ; les courbes $\log \mathcal{E}_z = f(r)$ et $\log \mathcal{E}_{z_o} = f(r)$ seront alors décalées d'une quantité lentement variable. *Pour $r > r_c$, l'allure du log n'est pratiquement pas modifiée.*

Cette remarque se trouve confirmée par la comparaison des courbes de résistivité apparente: pour $r > r_c$ et même $r > \frac{4r_c}{5}$ les courbes de résistivité apparente ne présentent pas de variations capables de masquer le gisement.

I 5. Etude des courbes obtenues à l'aide d'une méthode de calcul numérique

I 5. 1. Conditions d'obtention

Pour obtenir les courbes présentées dans ce paragraphe, nous avons utilisé une méthode de calcul numérique nécessitant la discrétisation de l'anomalie représentée par le tubage. Nous avons fait un découpage en z nous conduisant à considérer l'anomalie comme la juxtaposition verticale de n cylindres élémentaires.

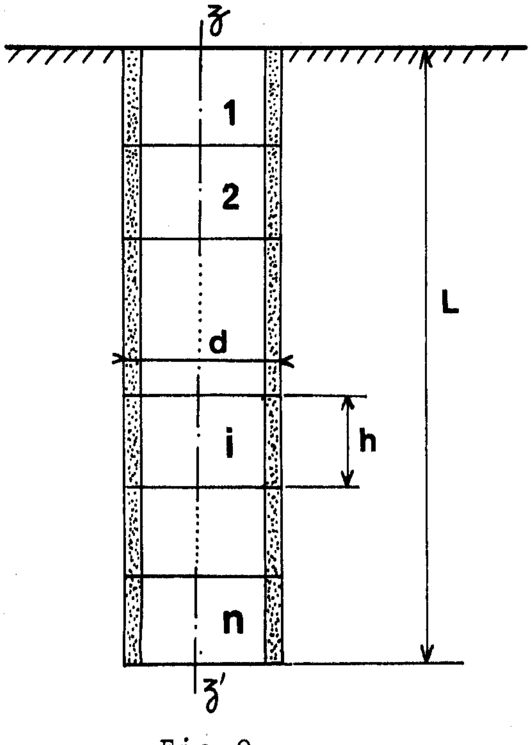


Fig.O.

Le choix du nombre n dépend naturellement de la longueur du tubage, mais il dépend également de son diamètre. L'analyse des résultats obtenus a en effet montré que les cylindres élémentaires devaient avoir une section sensiblement carrée (voir Fig.O.).

Pour h >> d, la matrice à traiter devient à diagonale principale prépondérante, ce qui est une commodité du point de vue traitement numérique, mais qui ne permet pas de tirer de conclusion pratique par suite d'un manque de définition.

Pour h << d, cette même matrice devient délicate à traiter ; les valeurs numériques prises par les coefficients voisins de la diagonale principale sont alors telles que les procédures de calcul sont mises en défaut, d'où généralement un incident en cours d'exécution du calcul sur ordinateur.

Le respect de la condition $h \simeq d$ nous impose $\frac{L}{n} \simeq d$, soit $n \simeq \frac{L}{d}$ si nous faisons un découpage régulier.

Si le découpage est irrégulier (plus fin en fond de tubage, généralement), nous aurons un nombre d'éléments à peu près équivalent puisque nous ne pouvons pas nous permettre un découpage trop large en milieu de tubage, ni trop fin aux extrémités.

I 5. 2. Limitation du modèle

Prenons un tubage de 500 mètres de longueur et de 12 cm de rayon. La condition $n \simeq \frac{L}{d}$ implique $n \simeq 2\ 000$. Un tel découpage est absolument impensable, même en utilisant les mémoires auxiliaires lentes d'un Control Data 7 600.

Pour rester dans des limites raisonnables, nous pouvons donc :

- soit diminuer L en conservant d
- soit augmenter d en conservant L
- soit modifier simultanément les 2 paramètres.

Nous éliminons la dernière solution qui est un compromis peu utilisable et envisageons les deux cas extrêmes.

. Diminuons L et conservons d : ce sera le cas d'un tubage de 10 cm de rayon et 50 m de long. Cette longueur est trop faible vis à vis de la profondeur de pénétration à 12,5 Hz. Elle est du domaine de la géophysique de surface. Aussi prendrons-nous une fréquence d'émission de l'ordre du KHz, fréquence généralement utilisée à ces profondeurs.

. Augmentons d et conservons L. Pour vérifier que cette hypothèse était plausible, nous avons programmé les expressions (33) et (49) en prenant des tubages plus larges que ceux généralement utilisés. Nous n'avons constaté aucune différence sensible des résultats pour des rayons allant de 10 cm à 1 m. Par conséquent, il nous sera possible d'effectuer une comparaison entre les courbes obtenues par les 2 méthodes théoriques, celles obtenues par la première méthode demeurant inchangées dans les hypothèses de la seconde.

. Sachant que la profondeur de pénétration varie comme l'inverse de la racine carrée de la fréquence d'émission, nous obtiendrons des allures de courbes identiques dans les 2 cas suivants

- $L = 50$ m, $d = 20$ cm, $f = 1250$ Hz, $\sigma_1 = 10^{-2}$ s/m
- $L = 500$m, $d = 2$ m , $f = 12,5$ Hz, $\sigma_1 = 10^{-2}$ s/m

Toutes les raisons précédemment exposées font que nous avons opté pour le second cas et que les courbes présentées sont obtenues pour des paramètres ayant ces ordres de grandeur.

I 5. 3. Courbes $V_z = f(z)$, r paramètre (Planche 13)

Nous constatons sur cette planche que les courbes V_z = f(z) sont sensiblement parallèles aux courbes V_{z_o} = f(z). Ce n'est que dans le fond du tubage que l'on constate un effet de bord assez important : la tension recueillie subit alors de brusques variations pour une petite variation de la profondeur de la sonde.

Cet effet de bord est sensible quelle que soit la distance émetteur-forage. Pour les faibles valeurs de r, on constate une légère remontée de V_z près de la surface du sol, mais elle n'est pas très significative.

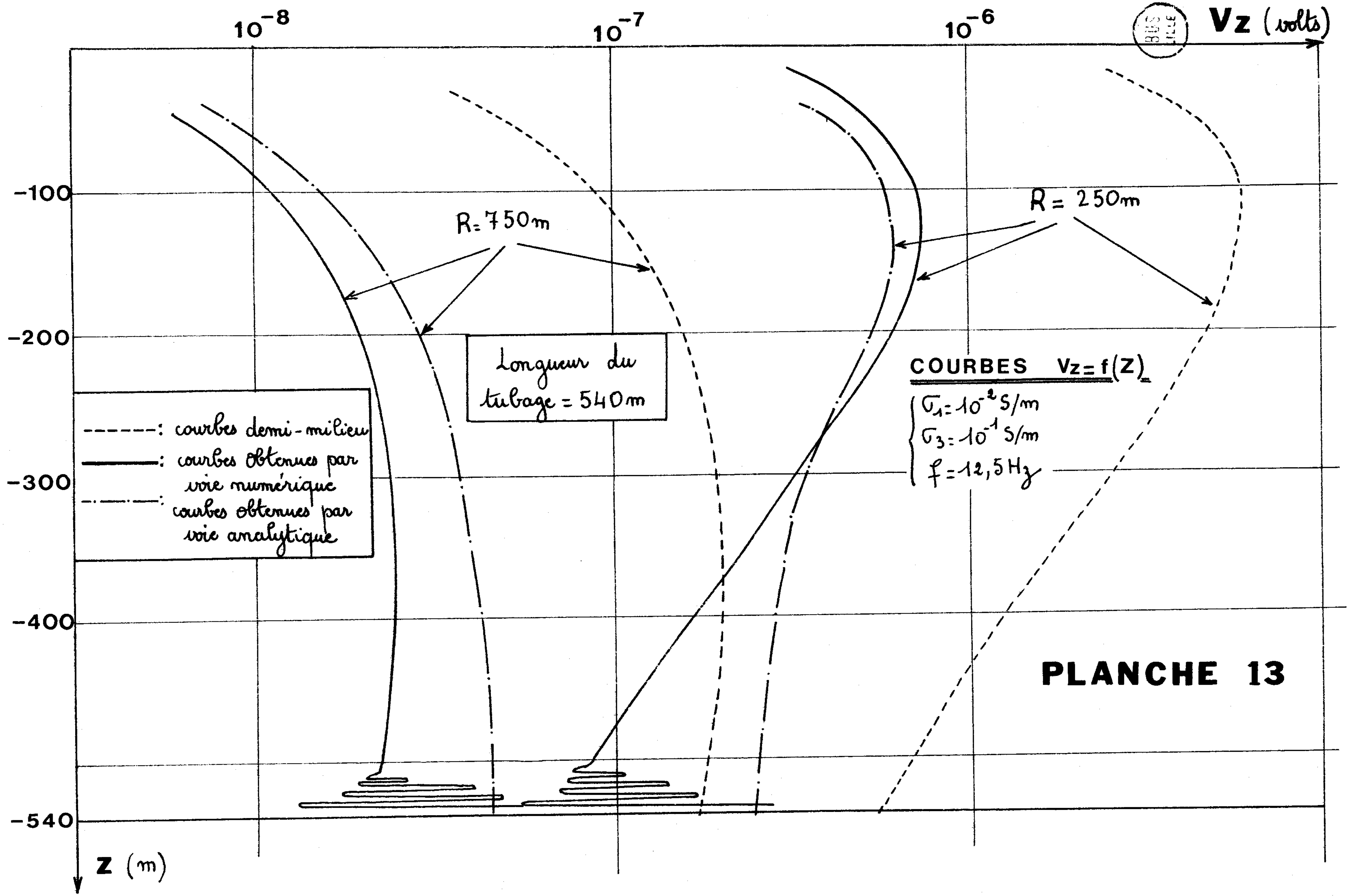
Nous avons bien entendu arrêté les courbes à la profondeur z = -L puisque nous sommes censés ne pas descendre la sonde en dessous du sabot. Il est néammoins facile, par le calcul numérique, de déterminer la tension recueillie juste en dessous du sabot de façon à faire le raccord avec les courbes proposées et mettre en évidence les effets de bord, mais nous avons limité notre étude à $|z| < L$.

I 5. 4. Courbes $V_z = f(r)$, z paramètre (Planche 14)

Sur cette planche, nous voyons que les courbes V_z = f(z) sont parallèles aux courbes demi-milieu. Il est intéressant de constater que ceci se produit même lorsque la sonde arrive dans le fond du tubage.

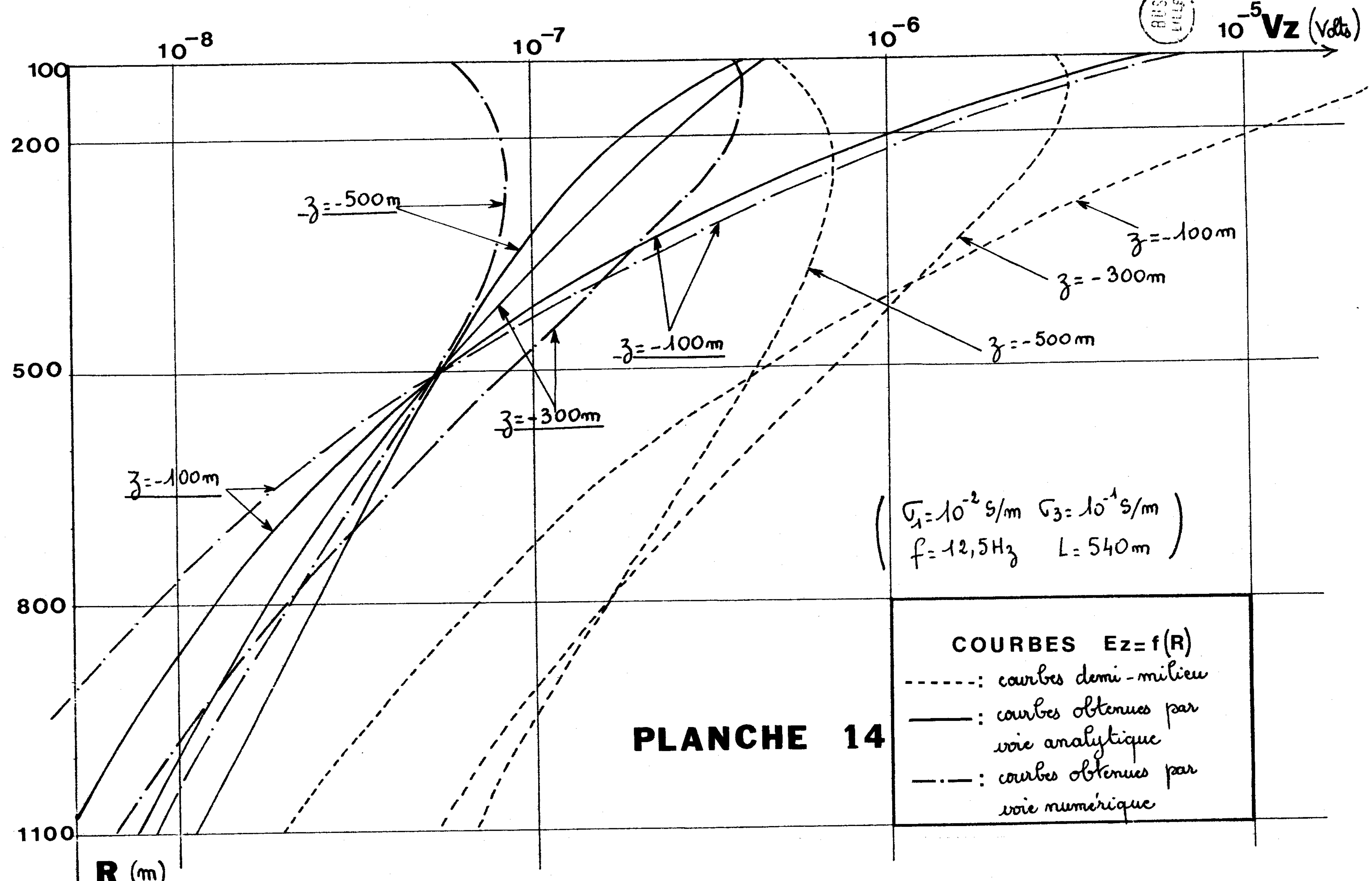
Nous avons vu en effet, sur la Planche 13, que le signal subissait d'imporantes fluctuations aux abords de l'extrémité : si le signal a tendance à remonter à mesure que z décroit, il le fait en fluctuant autour d'une valeur moyenne. L'examen de la Planche 14 montre que ces fluctuations dépendent uniquement de la profondeur de la sonde : la sonde étant calée à une profondeur, le signal ne subit pas de variations brusques lorsque l'on change la distance émetteur-forage.

Autrement dit, les courbes de résistivité apparente déduites des courbes V_z = f(r) ne subiront pas de variation brutale ; s'il y a de telles variations, elles peuvent être imputées à la



Vz (volts)
10^{-8}
10^{-7}
10^{-6}
-100
-200
-300
-400
-540
Z (m)
R = 750m
R = 250m
Longueur du tubage = 540m
------: courbes demi-milieu
——: courbes obtenues par voie numérique
-·-·-: courbes obtenues par voie analytique
COURBES Vz = f(Z)
$\sigma_1 = 10^{-2}$ S/m
$\sigma_3 = 10^{-1}$ S/m
f = 12,5 Hz

PLANCHE 13



10^{-8}
10^{-7}
10^{-6}
10^{-5} Vz (Volts)
100
200
500
800
1100
R (m)
$z = -500m$
$z = -300m$
$z = -100m$
$z = -100m$
$z = -300m$
$z = -500m$
$z = -100m$
$\left(\sigma_1 = 10^{-2}\ S/m \quad \sigma_3 = 10^{-1}\ S/m \quad f = 12{,}5\ Hz \quad L = 540m \right)$
COURBES $Ez = f(R)$
- - - - - : courbes demi-milieu
——— : courbes obtenues par voie analytique
—·—·— : courbes obtenues par voie numérique

PLANCHE 14

présence d'une anomalie sans confusion possible.

I 5. 5. *Courbes* $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ *= f(z), r paramètre* (Planches 15 et 16)

Les courbes $V_z = f(z)$ présentant des fluctuations aux extrémités du tubage, nous pouvons les mettre en évidence de façon plus nette en traçant les variations du rapport $\frac{V_z}{V_{z_o}} = \frac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{E}_{z_o}}$.

Au niveau de l'extrémité supérieure du tubage, les fluctuations autour de la valeur moyenne sont faibles : quelques pour cent. De plus, c'est une zone où aucune mesure n'est effectuée. Ces petites variations ne présentent donc aucun intérêt.

Au niveau de l'extrémité inférieure, les variations du rapport $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ sont beaucoup plus appréciables puisqu'elles font plus de 300%. La zone touchée est à 20 - 25 m de l'extrémité pour un tubage de 500 mètres. *Il semble prudent d'éviter de caler la sonde dans cette zone, une faible variation de sa profondeur pouvant amener des écarts appréciables. Il est en tout cas hors de question d'effectuer un log en z et de tenir compte des résultats obtenus dans cette zone ; le gisement risque d'être complètement masqué.*

Nous remarquons également que les variations sont d'autant plus nettes que le contraste est grand entre la conductivité de la boue et celle du terrain. Ceci est tout à fait normal puisqu'il doit y avoir raccord entre les courbes $\mathcal{E}_z = f(z)$ et $\mathcal{E}_{z_o} = f(z$ en dessous du sabot.

I 5. 6. *Courbes* $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ *= f(r), z paramètre* (Planche 17)

Les variations du rapport $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ sont beaucoup moins visibles que sur les deux planches précédentes.

Aux faibles profondeurs, ce rapport diminue légèrement quand r croît.

Aux moyennes profondeurs, il diminue d'abord, puis augmente quand r croît, mais les variations sont si peu importantes qu'elles passeront inaperçues au niveau de la mesure.

PLANCHE 15

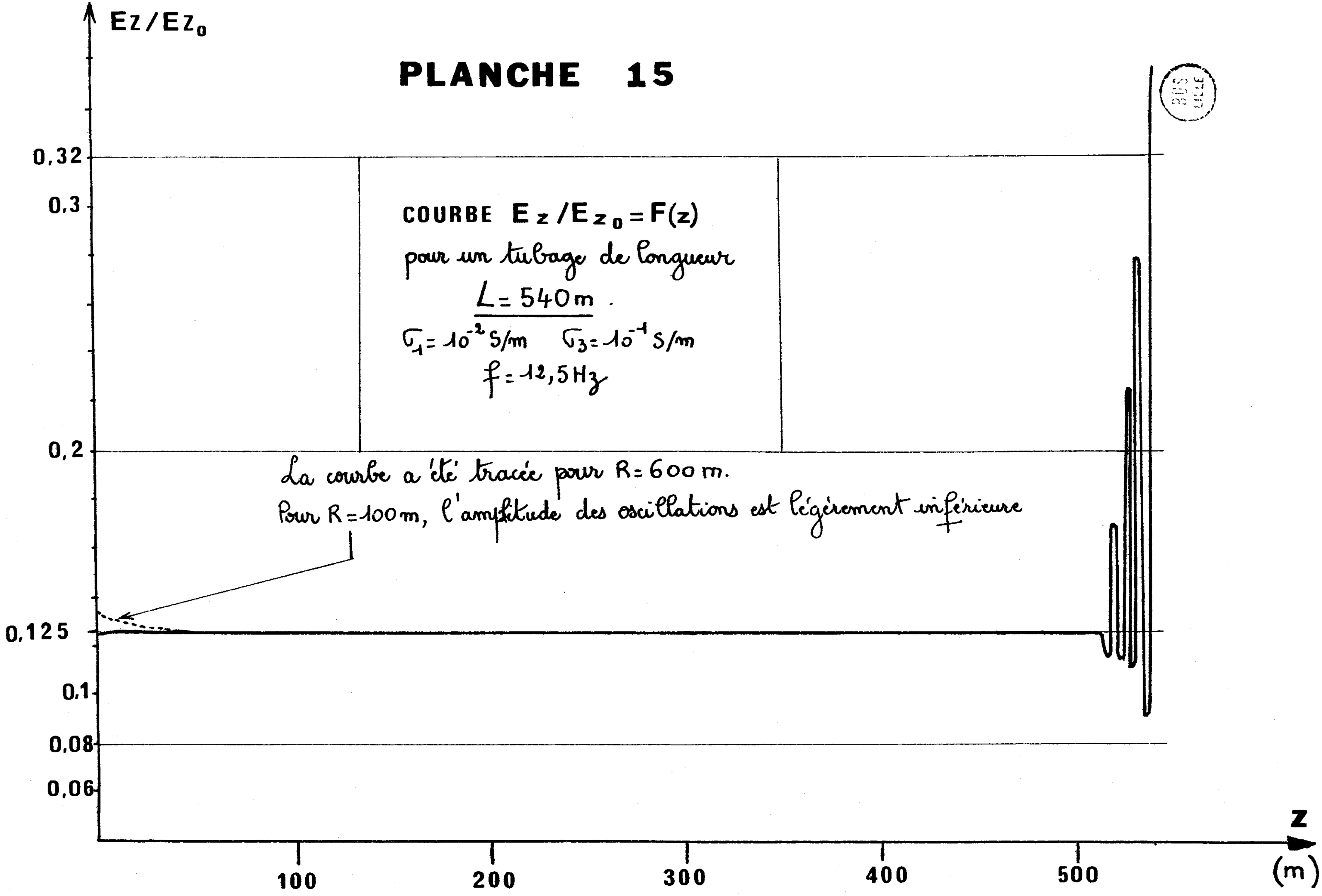
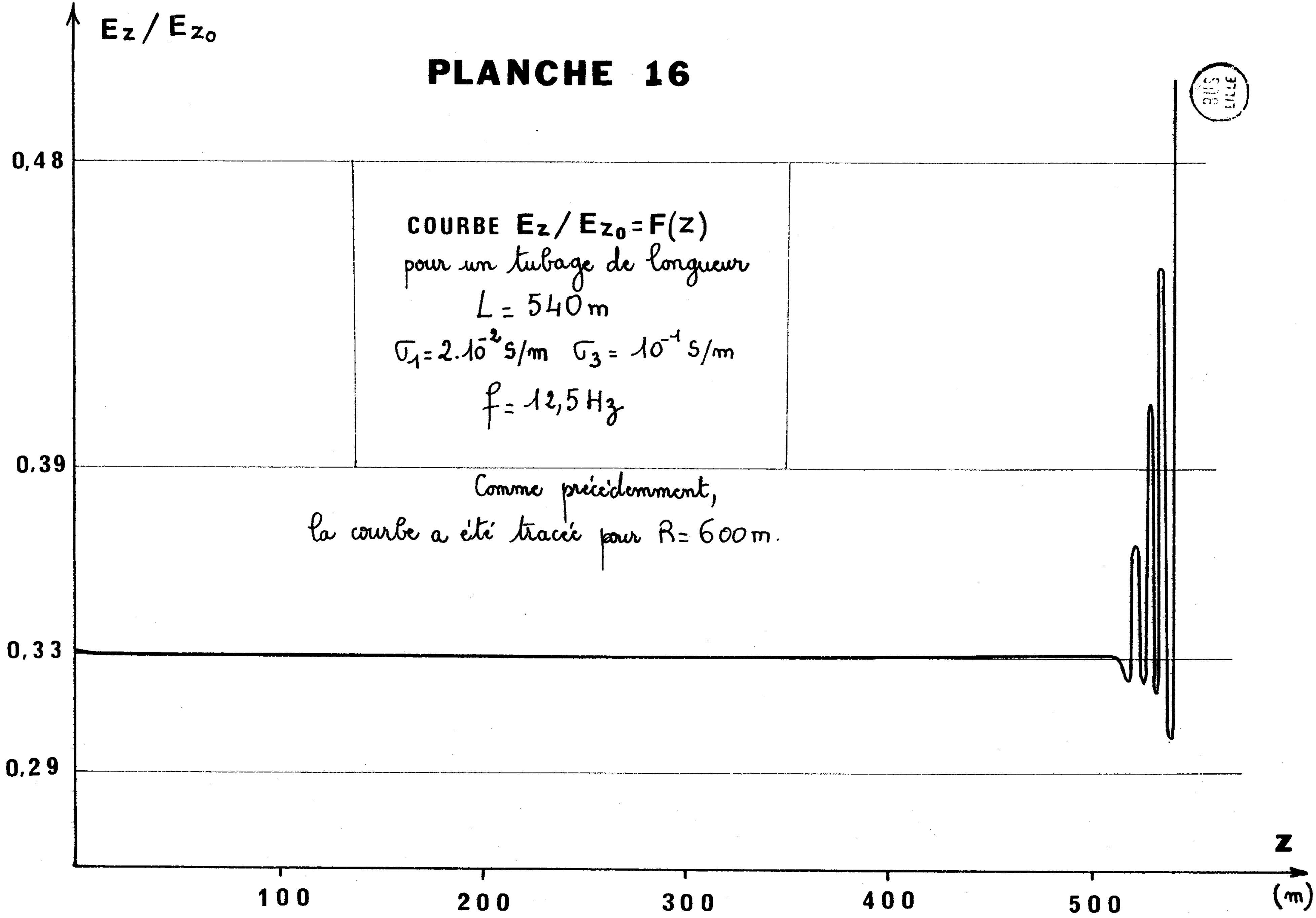
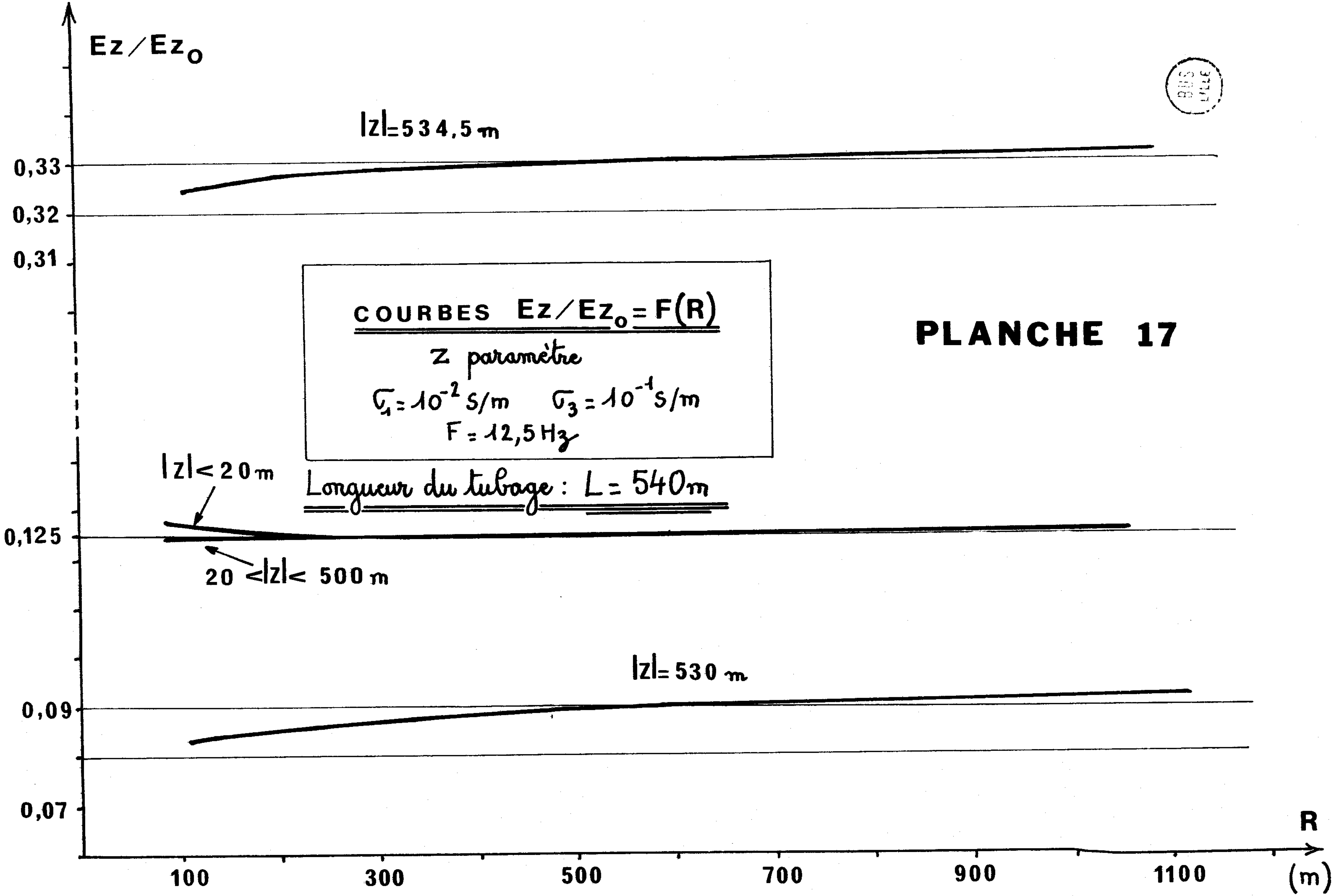

Ez/Ez$_0$
COURBE $E_z / E_{z_0} = F(z)$
pour un tubage de longueur
L = 540 m.
$\sigma_1 = 10^{-2}$ S/m $\sigma_3 = 10^{-1}$ S/m
f = 12,5 Hz
La courbe a été tracée pour R = 600 m.
Pour R = 100 m, l'amplitude des oscillations est légèrement inférieure
0,32
0,3
0,2
0,125
0,1
0,08
0,06
100
200
300
400
500
z
(m)

PLANCHE 16



Ez / Ez0
COURBE Ez / Ez0 = F(z)
pour un tubage de longueur
L = 540 m
σ1 = 2.10⁻² S/m σ3 = 10⁻¹ S/m
f = 12,5 Hz
Comme précédemment,
la courbe a été tracée pour R = 600 m.
0,48
0,39
0,33
0,29
100
200
300
400
500
z
(m)



Ez / Ez₀
|z|=534,5 m
0,33
0,32
0,31
COURBES Ez/Ez₀ = F(R)
z paramètre
σ₁ = 10⁻² S/m   σ₃ = 10⁻¹ S/m
F = 12,5 Hz
PLANCHE 17
|z|< 20 m
Longueur du tubage : L = 540 m
0,125
20 < |z| < 500 m
|z|= 530 m
0,09
0,07
R
100
300
500
700
900
1100
(m)

Enfin, plus l'on s'approche de l'extrémité inférieure du tubage, plus le rapport a tendance à augmenter avec r. Mais cette augmentation ne dépasse jamais quelques pour cent, et elle ne modifiera pas de façon sensible les courbes de résistivité apparente.

La particularité dans ce dernier cas est que le rapport $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ est sensiblement constant et que la constante dépend de z. Cela se traduira donc par un décalage des logs, suivant la profondeur d'immobilisation de la sonde, mais ne provoquera pas de modification dans la forme des courbes $\rho_a = f(r)$

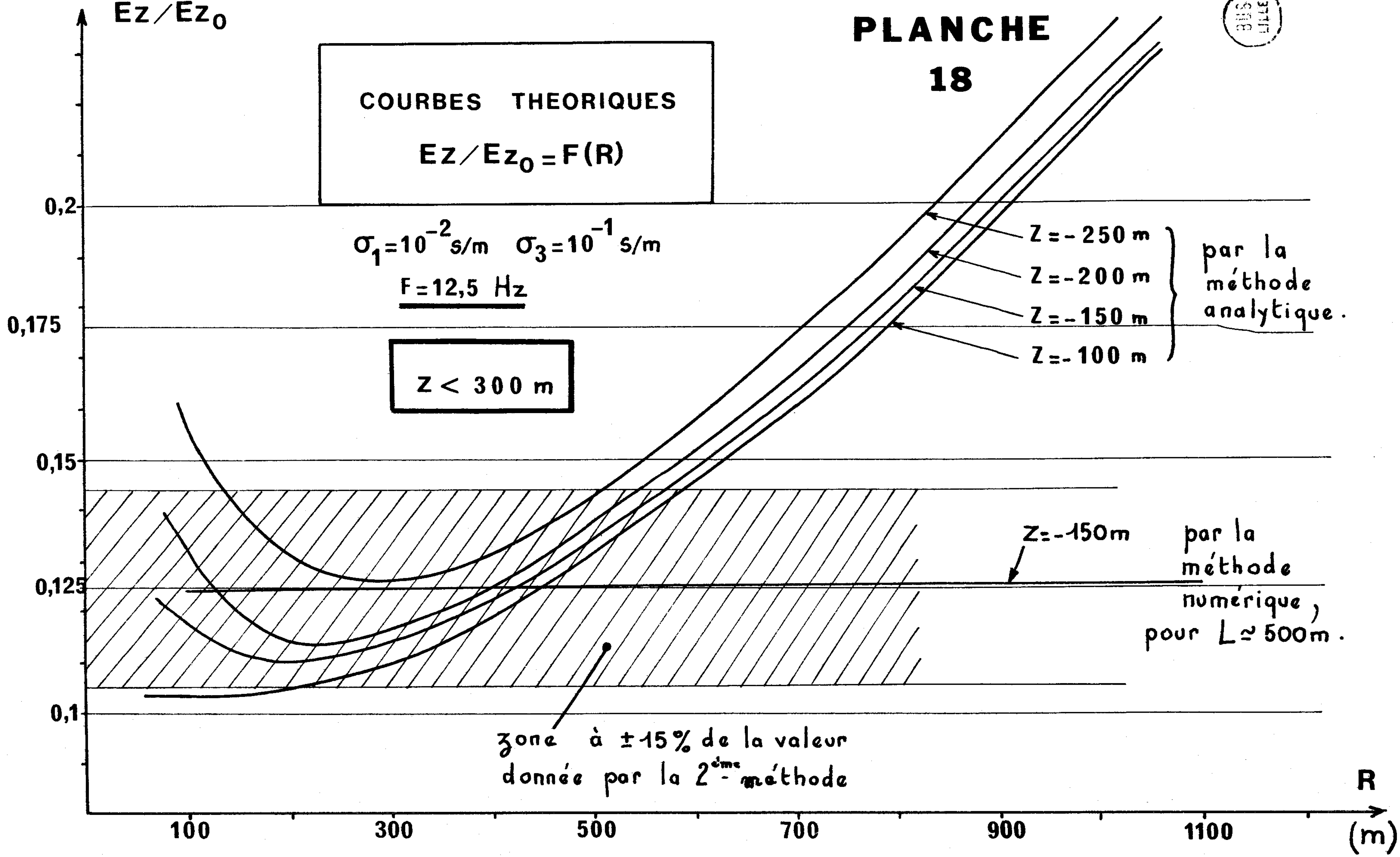
I 6. Comparaison entre les résultats obtenus par les différentes méthodes (Planches 13 et 14)

Sur les Planches 13 et 14, nous avons porté les résultats obtenus par les deux méthodes de calcul. Il est bien évident que les variations du signal reçu dans le fond d'un tubage de longueur finie ne peuvent se retrouver dans l'hypothèse d'un tubage de grande longueur où l'on n'observera pas d'effet de bord (Planche 13).

Nous aurions souhaité retrouver sur les courbes de la Planche 14 une remontée du signal pour les faibles valeurs de r et pour des profondeurs importantes dans le cas des courbes obtenues par une méthode numérique. Nous avons trouvé une légère remontée du signal à mesure que r croît, et cela dans les deux cas (Planches 3 et 17).

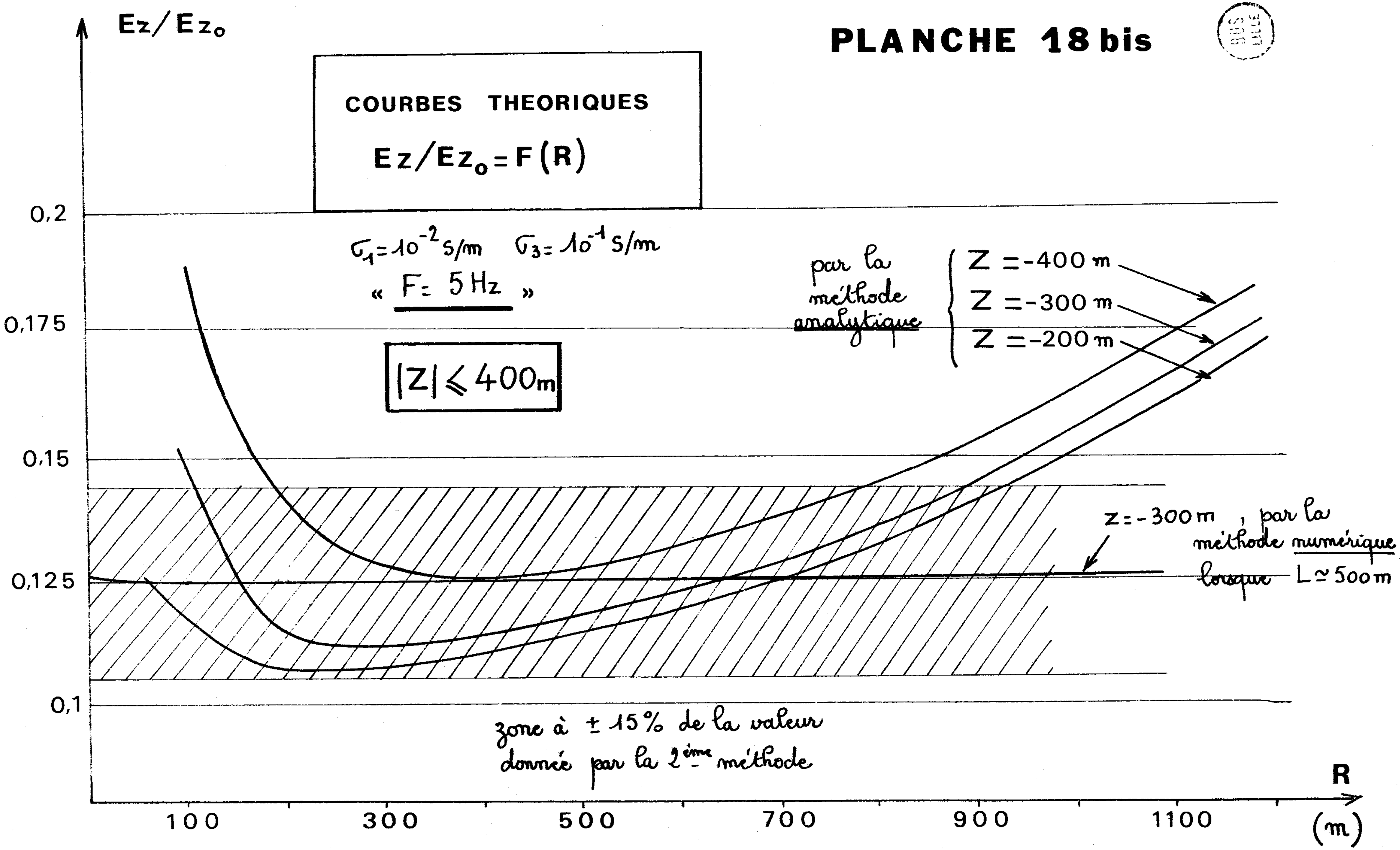
En règle générale, les courbes obtenues à l'aide de la méthode numérique sont peu sensibles aux variations de r. Cela tient d'une part à la forme de l'anomalie constituée par le tubage, et d'autre part à la méthode utilisée. Nous verrons plus loin (chap. III) que le calcul de $\mathcal{E}_z$ passe par la résolution d'un système matriciel A.X = B. B est la matrice colonne des champs demi-milieu au centre des volumes élémentaires définissant l'anomalie (dans notre cas, de petits cylindres empilés verticalement). A est la matrice des influences du $j^{ième}$ élément de volume au centre du $i^{ième}$.

PLANCHE 18



COURBES THEORIQUES
$Ez/Ez_0 = F(R)$
$\sigma_1 = 10^{-2}$ s/m $\sigma_3 = 10^{-1}$ s/m
F = 12,5 Hz
Z < 300 m
Ez/Ez_0
0,2
0,175
0,15
0,125
0,1
R
(m)
100
300
500
700
900
1100
Z = -250 m
Z = -200 m
Z = -150 m
Z = -100 m
par la méthode analytique.
Z = -150m
par la méthode numérique, pour L ≃ 500m.
zone à ±15% de la valeur donnée par la 2ème méthode

PLANCHE 18 bis



Si l'anomalie est quasi-filiforme et dirigée suivant l'axe des z, on voit que les matrices A et B vont être essentiellement sensibles à la coordonnée z.

On note d'autre part une beaucoup plus grande sensibilité au contraste σ_1/σ_3 pour les résultats obtenus par la méthode numérique : le rapport $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ oscille autour de la valeur $\frac{\sigma_1}{\sigma_3-2\sigma_1}$ pour tous les couples (σ_1, σ_3) que nous avons utilisés et qui ne figurent pas ici. Dans le cas de la méthode analytique, le rapport $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ varie entre 0,05 et 0,8, avec une valeur moyenne à 0,5, mais nous ne pouvons pas donner une valeur aussi rigoureuse que dans le cas de la méthode numérique, les paramètres r et z influant beaucoup plus sur ces variations.

I 7. Cas des profondeurs inférieures à 300 mètres (Planche 18)

Sur les planches 2 à 7, nous n'avons pas tracé de courbes correspondant aux profondeurs inférieures à 300 m de façon à avoir des échelles lisibles. Les courbes $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o} = f(r)$ sont donc reportées dans ce cas sur la Planche 18 ; nous avons reporté également sur cette planche les courbes $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o} = f(r)$ obtenues par la méthode numérique.

L'examen de cette planche permet de constater que les courbes obtenues par les deux méthodes sont très voisines ; les ordres de grandeur sont les mêmes, et cela d'autant plus que z diminue. Le rapprochement s'estompe au fur et à mesure que r croît et dépasse 500 à 600 mètres.

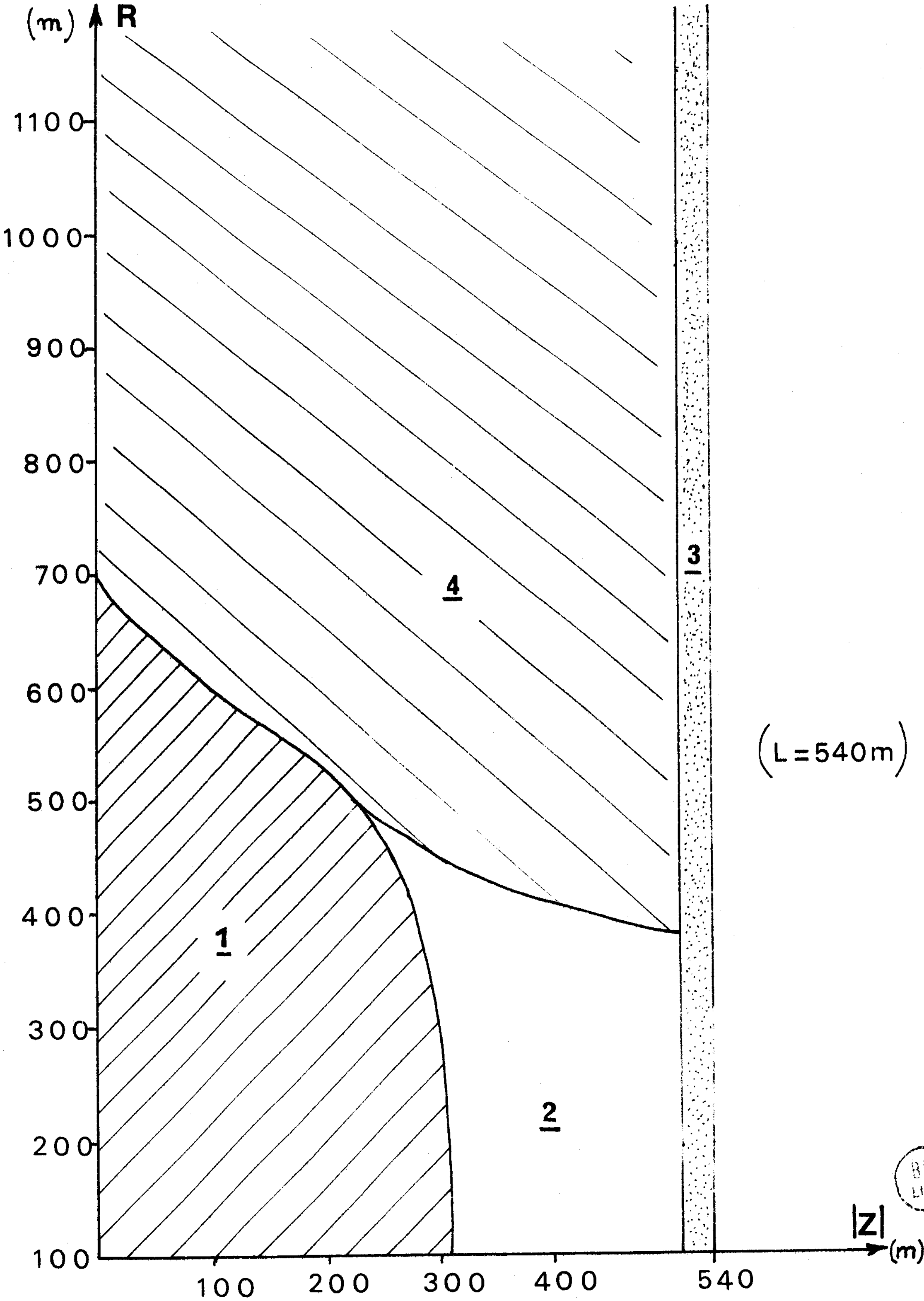
Il existe donc une zone de recoupement des résultats obtenus par les deux méthodes théoriques où le rapport $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_{z_o}$ se stabilise autour de la valeur $\frac{\sigma_1}{\sigma_3-2\sigma_1}$. Cela nous permet de conclure à la fiabilité de ces méthodes.

I 8. Conclusion

Nous résumons l'étude des courbes présentées par le diagramme de la page suivante. Ce diagramme se divise en 4 zones.

- *zone 1 : c'est la zone de recoupement des résultats théoriques : nous avons toléré, pour délimiter cette zone, une variation rela-*

Tableau récapitulatif



tive de 15% entre les résultats des deux méthodes. Aucune mesure expérimentale n'a été faite dans cette zone.

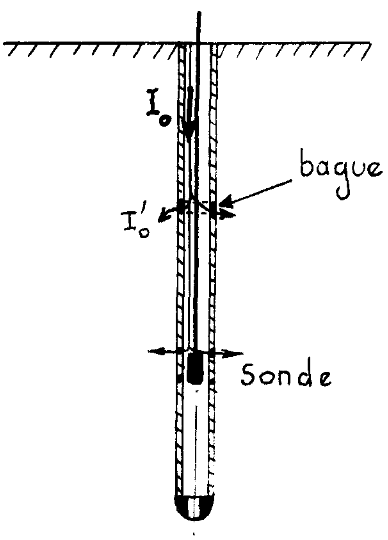
- zone 2 : L'étude analytique met en évidence une remontée du signal lorsque la distance émetteur-forage diminue et ce phénomène est confirmé par l'expérience.

- zone 3 : Elle correspond à la région perturbée du tubage. L'étude numérique a montré de telles variations qu'il est impératif de ne pas faire bouger la sonde dans ce secteur où les effets de bord sont très importants.

- zone 4 : Les études analytique et numérique ont montré une augmentation relative du signal en fonction de r, augmentation plus importante dans le cas de la première. Néammoins, les courbes de champ ne sont pas trop modifiées, et l'effet du tubage ne masquera pas celui du gisement.

I 9. Remarque

Au cours des expériences sur LUG 39 en Octobre 1972, il s'est produit un phénomène de saturation de la sonde. Nous pensons que la présence du tubage explique ce phénomène.



Supposons que la sonde recueille un signal de 10^{-6} volts à 12,5 Hz ; dans une colonne de boue de conductivité 0,1 s/m environ et de 10 cm de rayon, et pour des électrodes distantes de 1 m, cela représente un courant compris entre 10^{-7} et 10^{-8} A. Si un courant parasite I_o vient de la surface du sol (guidé par le câble notamment), il sera canalisé par les parois isolantes du tubage et parviendra jusqu'à la sonde. On voit qu'un courant parasite de 1µA est suffisant pour provoquer une saturation dans ces conditions.

L'élimination des courants parasites sera favorisée par la présence des colliers métalliques qui pourront les guider vers l'extérieur. C'est,à notre avis, le principal avantage des bagues métalliques : les résultats obtenus en négligeant leur présence montrent bien la possibilité de capter quand même un signal dans le tubage.

CHAPITRE II

II DETERMINATION ANALYTIQUE DES COMPOSANTES DU CHAMP ELECTRIQUE SUR L'AXE D'UN TUBAGE DE LONGUEUR INFINIE SITUE DANS LE SOL

II 1. Position du problème

II 1. 1. Hypothèses de départ

La figure .1. montre le modèle mathématique à considérer. Le sol est assimilé à un demi-milieu conducteur renfermant une hétérogénéité cylindrique et surmonté d'un diélectrique : l'atmosphère. Ces milieux seront caractérisés par leurs constantes électromagnétiques.

Un tubage de conductivité σ_2 et de permittivité ε_2 est placé dans un sol homogène de conductivité σ_1. Il est rempli d'une boue de forage de conductivité σ_3. Son axe est perpendiculaire à l'interface air-sol.

L'émission de courant est effectuée par un dipôle électrique horizontal (D. E. H.) placé à une profondeur h_o par rapport à l'interface air-sol et à une distance r_o de l'axe du forage. Sa fréquence sera supposée basse. [4]

La réception du champ électrique est effectuée à l'intérieur de la boue de forage, donc dans un cylindre circulaire de faible rayon a.

II 1. 2. Ordre de grandeur des différents paramètres

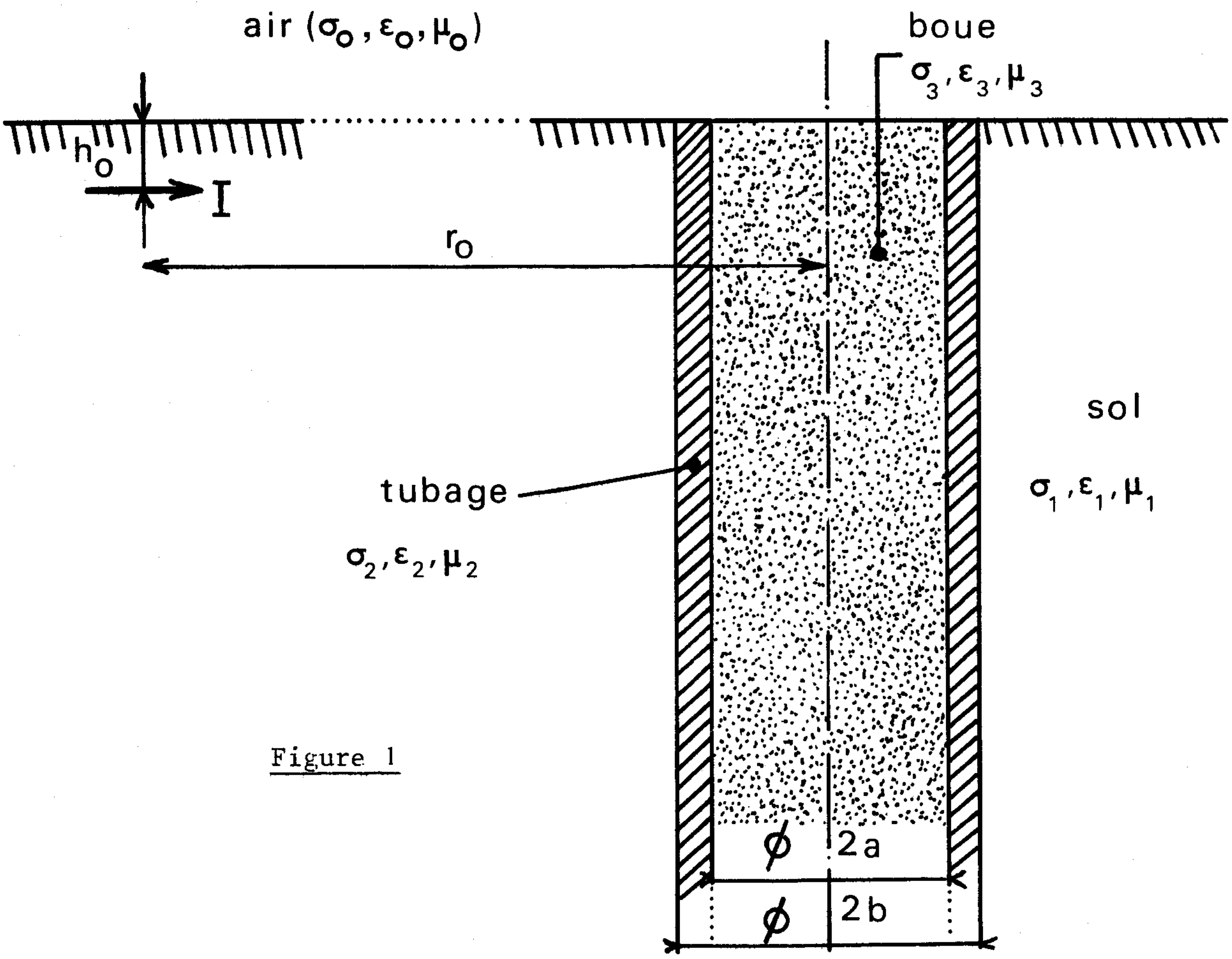


Figure 1

- σ_o : pratiquement nulle
- σ_1 : de 2.10^{-1} à 2.10^{-3} s/m
- σ_2 : de 10^{-6} à 10^{-8} pour un tubage isolant.
  de 10^{+6} à 10^{+7} pour un tubage conducteur.
- σ_3 : de 6.10^{-1} à 10^{-2} s/m
- f : fréquence d'émission : de 5 à 312,5 Hz ; généralement 12,5 Hz
- 2a : Ø intérieur du tubage de 15 à 40 cm.
- 2b : Ø extérieur du tubage : de 16 à 43 cm.
- r_o : de 50 à 2 000 m pour une fréquence de 12,5 Hz.
- h_o : sera posé égal à 0 à la fin du calcul analytique.
- ε_1, ε_3 : nous les supposerons égaux à ε_o. En fait, leur choix importe peu, puisqu'aux fréquences considérées nous avons toujours :

$$\sigma_1 \text{ et } \sigma_3 \gg \omega\varepsilon_o$$

- ε_2 : nous le supposerons voisin de ε_o. Le choix de σ_2 montre que nous n'avons pas pris un isolant parfait, mais un isolant suffisamment mauvais pour avoir toujours $\sigma_2 \gg \omega\varepsilon_2$.

- μ_1, μ_2, μ_3 : nous supposerons des milieux non magnétiques, donc

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_o$$

II 1. 3. Hypothèses simplificatrices

Pour rendre plus simple l'étude théorique de ce modèle, il est très intéressant d'utiliser la théorie des images valable en très basse fréquence. Le demi-milieu conducteur sera alors représenté par un milieu homogène infini dans lequel on considèrera les images du tubage et du dipôle émetteur (Fig.2.).[5]

L'application de la théorie des images suppose que l'on néglige l'effet de propagation, ce qui est vérifié parfaitement tant que l'on considère des distances nettement inférieures à la longueur d'onde du signal reçu. A titre d'exemple, la longueur d'onde d'un signal de fréquence 12,5 Hz émis dans un sol de conductivité $\sigma_1 = 10^{-2}$s/m est de 4,44 km, ce qui est nettement supérieur à la plus grande des distances émetteur-récepteur que nous aurons à considérer.

Pour des distances supérieures, l'atténuation du signal est telle qu'il importe peu que l'on tienne compte ou non de l'effet de propagation.

Compte tenu de cette dernière remarque, et afin de permettre une formulation analytique du problème, nous supposerons la longueur du tubage semi-infinie, ou tout au moins grande devant la longueur d'onde dans le sol du signal émis. Cette hypothèse ne s'oppose pas à l'application de la théorie des images. Elle a l'avantage de faire des parois latérales du tubage des surfaces de coordonnées.

En définitive, le modèle se ramène à un tubage de longueur infinie en présence de deux dipôles électriques.

II 1.4. Système de coordonnées

Nous utiliserons un système de coordonnées cylindriques. L'axe $r = o$ sera confondu avec l'axe du tubage pour faire de ses parois des surfaces de coordonnées. La cote z sera comptée algébriquement ; son zéro sera pris à la surface du sol, donc à mi-distance entre les deux dipôles dans le cas du modèle qui nous intéresse.

Enfin, la direction des dipôles passant par l'axe du tubage (ce qui est le cas lors des mesures sur le terrain), nous compterons l'azimut ϕ à partir de cet axe.

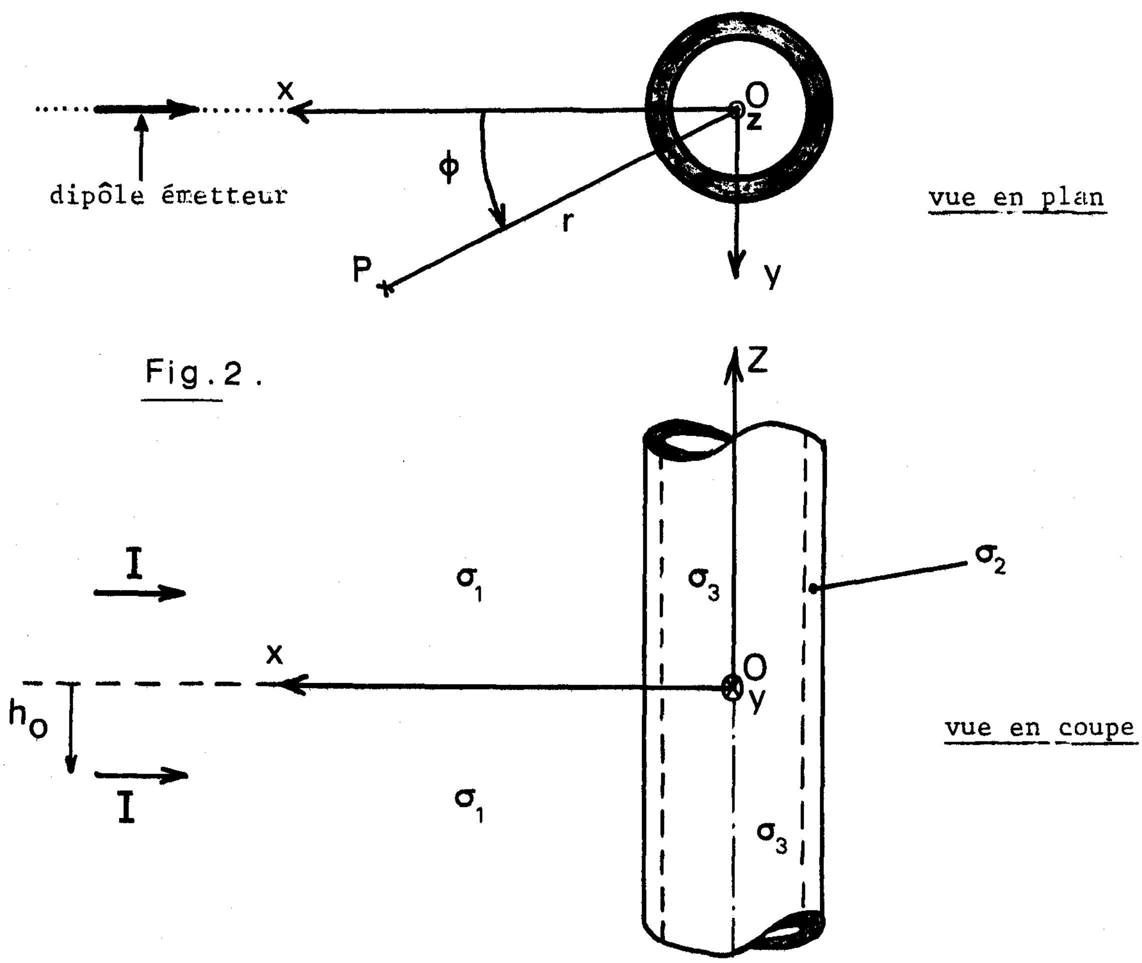


Fig.2.

I 1. 5. *Méthode de calcul utilisée*

Nous utiliserons la méthode classique de séparation des variables dans un système de coordonnées cylindriques, puisque les surfaces $r = a = c^{te}$ et $r = b = c^{te}$ séparant les milieux de caractéristiques électriques différentes sont alors des surfaces de coordonnées.[6]

D'autre part, nous savons que les champs électromagnétiques dérivent d'un potentiel qui est dans le cas général une solution de l'équation : $(\Delta + k^2)\vec{\Pi} = \vec{o}$ où k est la constante de propagation définie par :

$$k^2 = - j\ \omega\mu\ (\sigma + j\omega\varepsilon)$$

σ, μ, ε étant les caractéristiques électromagnétiques du milieu, ω étant la pulsation du courant injecté dans le sol.

Cette solution satisfait aux conditions aux limites des champs électromagnétiques sur les surfaces séparant les milieux de caractéristiques électriques et magnétiques différentes.

La solution analytique directe de l'équation d'onde vectorielle n'est aisément réalisable que dans le système de coordonnées cartésiennes, car dans un autre système il n'est en général pas possible de trouver une solution vectorielle dont les composantes sont orthogonales.

Nous chercherons donc à nous ramener à la résolution d'équations d'onde scalaires dont nous connaissons la solution générale en coordonnées cylindriques. Pour cela, nous écrirons qu'une onde cylindrique peut être considérée comme la superposition d'une onde transverse électrique (TE) et d'une onde transverse magnétique (TM), chacune dérivant d'un potentiel qui vérifie l'équation d'onde scalaire $(\Delta + k^2)\Pi_i = 0$.[7],[8]

II 2. Calcul du potentiel primaire

II 2. 1. Expression du potentiel primaire dans le repère O'XYZ

Dans le repère O'XYZ, le potentiel de Hertz primaire créé au point P par un dipôle de longueur dl est (cf. fig. 3) :

$$\vec{\Pi} = \frac{I\,\vec{d}l}{4\Pi\sigma_1} \cdot \frac{e^{-jk_1R_1}}{R_1} \qquad \text{où} \begin{cases} R_1 = d\ (P,\ \text{dipôle}) \\ \vec{d}l = dl.\vec{x} \end{cases}$$

Pour le second dipôle, nous avons de même

$$\vec{\Pi} = \frac{I\,\vec{d}l}{4\Pi\sigma_1} \cdot \frac{e^{-jk_1R_2}}{R_2} \qquad \text{avec} \begin{cases} R_1^2 = \rho^2 + (z - h_o)^2 \\ R_2^2 = \rho^2 + (z + h_o)^4 \end{cases}$$

Le potentiel primaire $\vec{\Pi} = \frac{I\,\vec{d}l}{4\Pi\sigma_1} \cdot \left(\frac{e^{-jk_1R_1}}{R_1} + \frac{e^{-jk_1R_2}}{R_2}\right)$ doit être

maintenant exprimé en fonction des coordonnées ρ, z du repère O'XYZ.

Or nous disposons de l'identité [9]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jhz} . H_o^{(2)}(\beta_1\rho) . dh = 2j \cdot \frac{e^{-jk_1\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \qquad (1)$$

où $\beta_1 = \sqrt{k_1^2 - h^2}$ et où $H_o^{(2)}$ représente la fonction de Hankel d'ordre 2.

Nous avons $\beta_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{-h^2 + \sqrt{h^4 - k_1^4}} - j \cdot \frac{|k_1^2|}{\sqrt{-h^2 + \sqrt{h^4 - k_1^4}}}\right]$ et nous

choisirons le signe +. Ce choix est important, puisque dans le cas contraire nous aurions l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jhz} . H_o^{(1)}(\beta_1\rho) . dh = -2j \cdot \frac{e^{-jk_1\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

Nous pourrons donc écrire le potentiel primaire :

$$\vec{\Pi} = \frac{I . dl . \vec{x}}{4\Pi\sigma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{j}{2} . \left(e^{jh(z-h_o)} + e^{jh(z+h_o)}\right) . H_o^{(2)}(\beta_1\rho) . dh \qquad (2)$$

dans le repère O'XYZ

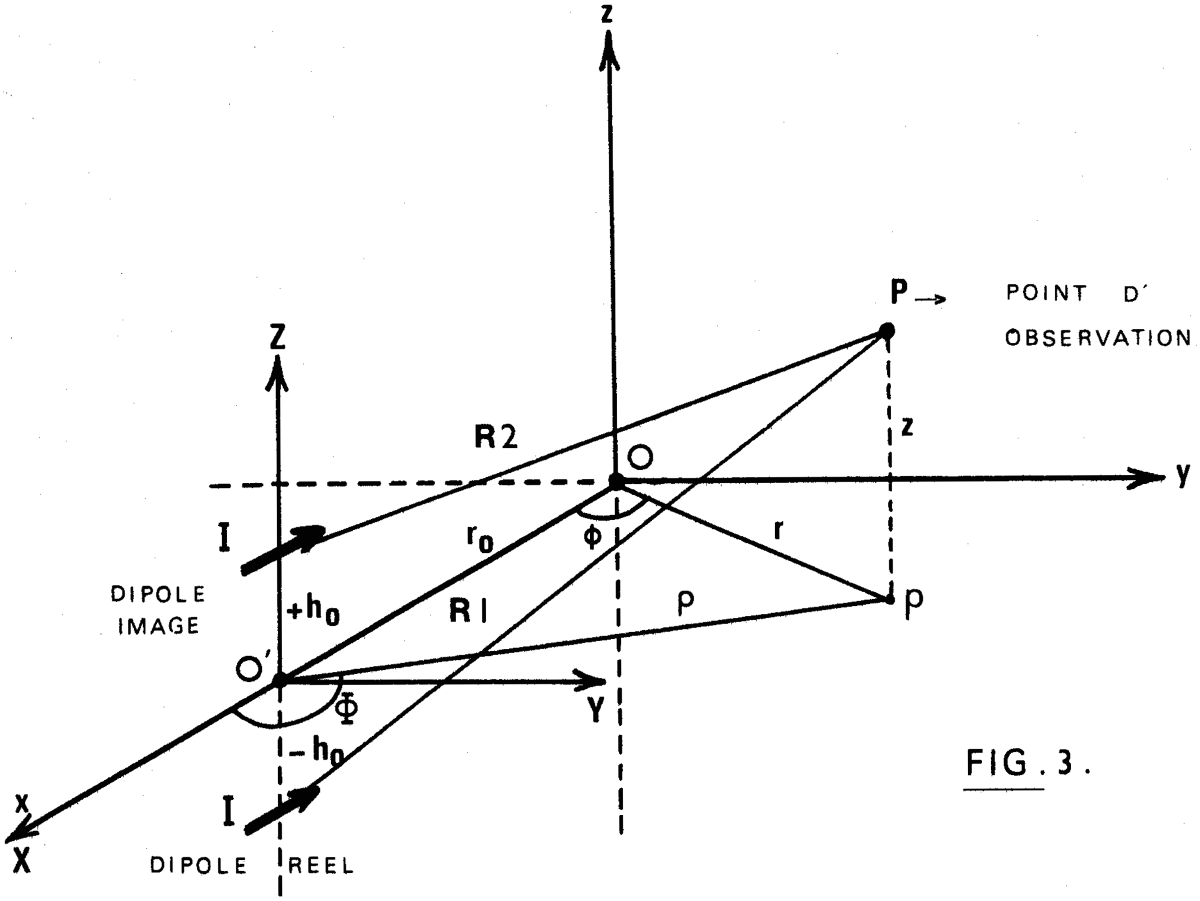


FIG. 3.

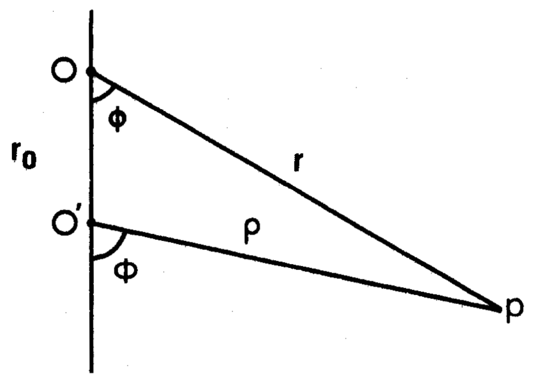


FIG. 4.

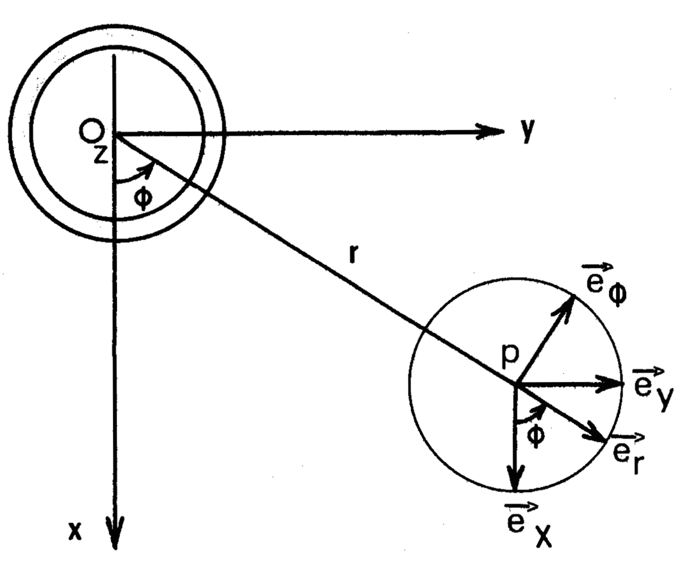


FIG. 5.

II 2. 2. Expression du potentiel primaire dans le repère (O, r, Φ, z)

Pour effectuer la transformation, nous utiliserons les théorèmes d'addition sur les fonctions de Hankel en reprenant les notations de la figure 4 :

$$H_\nu^{(2)}(\beta\rho)\, e^{+j\nu\phi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{\nu+n}^{(2)}(\beta r_0)\, J_n(\beta r)\, e^{+jn\varphi} \qquad [10]$$

Cette égalité est vraie pour $|r.\, e^{-j\Phi}| < r_0$. Lorsqu'elle n'est pas réalisée, il faut permuter les rôles de r et r_0, et écrire :

$$H_\nu^{(2)}(\beta\rho)\, e^{j\nu\phi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{\nu+n}^{(2)}(\beta r)\, J_n(\beta r_0)\, e^{+jn\varphi}$$

Dans notre problème, il y a symétrie par rapport à O_x ; les $e^{jn\Phi}$ s'écriront simplement $\cos(n\Phi)$.

Nous pouvons donc écrire le potentiel primaire sous la forme :

$$\boxed{\begin{aligned} &(r<r_0) \quad \vec{\Pi}_p = p_1 \cdot \vec{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{j}{2}\left(e^{jh(z-h_0)} + e^{jh(z+h_0)}\right) H_n^{(2)}(\beta r_0)\, J_n(\beta r)\, dh \\ &(r>r_0) \quad \vec{\Pi}_p = p_1 \cdot \vec{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{j}{2}\left(e^{jh(z-h_0)} + e^{jh(z+h_0)}\right) H_n^{(2)}(\beta r_0)\, J_n(\beta r)\, dh \end{aligned}}$$

II 3. Décomposition du potentiel primaire en potentiel primaire électrique et potentiel primaire magnétique

II 3. 1. Décomposition d'une onde cylindrique en ondes TE et TM

Les calculs sont détaillés dans l'Annexe 1. Si nous appelons Π_E et Π_M les potentiels scalaires électrique et magnétique vérifiant l'équation d'onde $(\Delta + k_1^2)\, \Pi_i = 0$, les composantes des champs électromagnétiques dérivant des potentiels Π_E et Π_M peuvent s'écrire :

(5) Pour une onde TE $(\Delta + k_1^2)\Pi_E = 0$

$$
\left|
\begin{array}{ll}
E_r = -\dfrac{j\omega\mu_0}{r}\cdot\dfrac{\partial \Pi_E}{\partial \varphi} & H_r = \dfrac{\partial^2 \Pi_E}{\partial r\,\partial z} \\[2ex]
E_\varphi = j\omega\mu_0 \cdot \dfrac{\partial \Pi_E}{\partial r} & H_\varphi = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial^2 \Pi_E}{\partial z\,\partial \varphi} \\[2ex]
E_z = 0 & H_z = \dfrac{\partial^2 \Pi_E}{\partial z^2} + k^2 . \Pi_E
\end{array}
\right.
$$

(6) Pour une onde TM $(\Delta + k_1^2)\Pi_M = 0$

$$
\left|
\begin{array}{ll}
E_r = \dfrac{\partial^2 \Pi_M}{\partial r\,\partial z} & H_r = \dfrac{\sigma_1 + j\omega\varepsilon_0}{r}\cdot\dfrac{\partial \Pi_M}{\partial \varphi} \\[2ex]
E_\varphi = \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial^2 \Pi_M}{\partial z\,\partial \varphi} & H_\varphi = (\sigma_1 + j\omega\varepsilon_0)\cdot\dfrac{\partial \Pi_M}{\partial r} \\[2ex]
E_z = \dfrac{\partial^2 \Pi_M}{\partial z^2} + k^2 . \Pi_M & H_z = 0
\end{array}
\right.
$$

II 3. 2. Application aux champs primaires

Nous avons vu que le potentiel primaire pouvait s'écrire d'après les relations (3) et (4) :

$\vec{\Pi}_p = \Pi_p . \vec{x} = \Pi_{p_r} . \vec{e}_r + \Pi_{p\Phi}\, \vec{e}_\Phi + 0 . \vec{e}_z$ (voir fig.5)

si $(\vec{e}_r, \vec{e}_\Phi, \vec{e}_z)$ est la base du système de coordonnées $(0, r, \Phi, z)$ et si $(\Pi_{p_r}, \Pi_{p\Phi}, 0)$ sont les composantes de $\vec{\Pi}_p$ suivant cette base.

Nous avons: $\Pi_{p_r} = \cos(\Phi) . \Pi_p$ et $\Pi_{p\Phi} = -\sin(\Phi) . \Pi_p$

Supposons maintenant que Π_{pE} et Π_{pM} soient les potentiels primaires électrique et magnétique dont dérivent les ondes TE et TM. La composante E_z du champ électrique primaire ne peut provenir que de la seule onde TM, alors que H_z ne peut provenir que de l'onde TE. Nous pouvons donc écrire :

$$E_z\ \text{primaire} = \frac{\partial^2 \Pi_{pM}}{\partial z^2} + k_1^2 . \Pi_{pM} \quad \text{et} \quad H_z\ \text{primaire} = \frac{\partial^2 \Pi_{pE}}{\partial z^2} + k_1^2 . \Pi_{pE}$$

Comme d'autre part nous savons évaluer les composantes E_z et H_z en partant directement du secteur potentiel $\vec{\Pi}_p$ par les relations

$$E_z = \left| \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{\Pi_p}\right)\right|_z \quad \text{et} \quad H_z = (\sigma_1 + j\omega\varepsilon_0) . \left|\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{\Pi_p}\right|_z$$

nous pouvons définir les potentiels Π_{pE} et Π_{pM} par les identités

$$\frac{\partial^2 \Pi_{pM}}{\partial z^2} + k_1^2 . \Pi_{pM} = \left| \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{\Pi_p}\right)\right|_z \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_{pE}}{\partial z^2} + k_1^2 . \Pi_{pE} = (\sigma_1 + j\omega\varepsilon_0) . \left|\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{\Pi_p}\right|_z$$

et $$\frac{\partial^2 \Pi_{pE}}{\partial z^2} + k_1^2 \Pi_{pE} = (\sigma_1 + j\omega\varepsilon_0) \left| \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{\Pi_p} \right|_z$$

D'où, compte tenu des composantes ($\Pi_p \cos(\phi)$, $-\Pi_p \sin(\phi)$, 0) du vecteur $\vec{\Pi}_p$,

$$\boxed{\begin{aligned} &(7) \quad \frac{\partial^2 \Pi_{pE}}{\partial z^2} + k_1^2 . \Pi_{pE} = (\sigma_1 + j\omega\varepsilon_0) . \frac{1}{r} . \left(-\cos\varphi . \frac{\partial \Pi_p}{\partial \varphi} - r \sin\varphi . \frac{\partial \Pi_p}{\partial r} \right) \\ &(8) \quad \frac{\partial^2 \Pi_{pM}}{\partial z^2} + k_1^2 . \Pi_{pM} = \frac{1}{r} . \left(r \cos\varphi . \frac{\partial^2 \Pi_p}{\partial r \partial z} - \sin\varphi . \frac{\partial^2 \Pi_p}{\partial z^2} \right) \end{aligned}}$$

Puisque nous savons évaluer les seconds membres des relations (7) et (8), nous allons écrire a priori l'expression de Π_{pE} et Π_{pM}, l'identification avec les seconds membres nous donnant les coefficients inconnus. Les expressions de Π_{pE} et Π_{pM} nous sont données par la solution générale de l'équation d'onde scalaire en coordonnées cylindriques.

Remarque : Nous avons deux expressions possibles pour le vecteur $\vec{\Pi}_p$ suivant la valeur du rapport $(\frac{r}{ro})$. En fait, nous cherchons à évaluer les composantes des champs électromagnétiques à l'intérieur du tubage ; pour cela, nous écrirons les conditions aux limites sur les deux faces interne et externe du tubage. Nous ne considèrerons donc par la suite que des valeurs de r nettement inférieures à r_o. Par conséquent Π_p sera défini par (3).

II 3. 3. Solution générale des équations d'onde scalaires en coordonnées cylindriques pour les ondes TE et TM [11]

Soit à déterminer la solution de $(\Delta + k_1^2)\Pi = 0$ (9)

En coordonnées cylindriques, (9) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k_1^2 \Pi = 0$$

S'il existe une solution de la forme $\Pi = R(r).\phi(\varphi).Z(z)$, nous aurons :

$$(10) \quad \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\phi} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{d z^2} + k_1^2 = 0$$

Les deux premiers termes de (10) sont indépendants de z, et nous pouvons écrire $\frac{1}{Z} . \frac{d^2 Z}{dz^2} = \pm q^2$

Nous choisirons le signe -, ce qui nous donnera une solution de la forme $Z = A.e^{jqz} + B.e^{-jqz}$. Le choix du signe - nous est imposé par le développement que nous avons choisi pour Π_p dans (2).

Il reste donc $\frac{1}{R} \cdot \left| \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} \right| + \frac{1}{\emptyset} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2\emptyset}{d\Phi^2} + (k_1^2 - q^2) = 0$

Nous prendrons ensuite $\frac{1}{\emptyset} \cdot \frac{d^2\emptyset}{d\Phi^2} = -\nu^2$, avec ν entier, de façon à obtenir une fonction périodique en Φ

Nous avons donc $\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} + \left| (k_1^2 - q^2) - \frac{\nu^2}{r^2} \right| . R = 0$ (11)

C'est une équation différentielle du type BESSEL, donc admettant pour solution :

$$R = E\,J_\nu\,(\beta_1 r) + F\,H_\nu^{(1),\,(2)}\,(\beta_1 r) \qquad \text{où } \beta_1^2 = k_1^2 - q^2$$

Nous retiendrons pour β_1 la solution d'argument compris entre $(-\Pi)$ et 0.

La solution générale s'écrit donc :

$$\Pi = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(C.e^{j\nu\varphi} + D.e^{-j\nu\varphi} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A.e^{jqz} + B.e^{-jqz} \right) . \left(E.J_\nu(\beta_1 r) + F.H_\nu^{(1),(2)}(\beta_1 r) \right) dq$$

Dans notre problème, il existe deux symétries : l'une en Φ, l'autre en z $\Rightarrow$ C = D et A = B. De plus, nous prendrons la fonction de Hankel d'ordre deux. Pour avoir les mêmes variables que dans l'expression (3), posons $\nu = n$ et $q = h$; nous en déduisons la forme de la solution générale de l'équation d'onde scalaire dans le cas particulier qui nous intéresse.

(12) $$\boxed{\Pi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A . J_n(\beta_1 r) + B . H_n^{(2)}(\beta_1 r) \right] . \cos(hz) . dh}$$

II 3. 4. Détermination du potentiel primaire électrique Π_{pE}

Sachant que

$$\Pi_p = p_1 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{j}{2}\, \psi(z,h) \cdot H_n^{(2)}(\beta_1 r_0) \cdot J_n(\beta_1 r) \cdot dh ,$$

avec $\psi(z, h) = e^{jh(z - h_0)} + e^{jh(z + h_0)}$, le second membre de la relation (7) s'écrit, après simplifications :

$$-\frac{j p_1}{2} \cdot (\sigma_1 + j\omega\varepsilon_0) \cdot \frac{1}{r_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot \sin(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot H_n^{(2)}(\beta_1 r_0) \cdot J_n(\beta_1 r) \cdot dh$$

En donnant à Π_{pE} la forme trouvée en (12), et après identification des deux membres de (7), nous obtenons

(13) $$\boxed{\Pi_{pE} = -j p_1 \cdot \frac{(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_0)}{2 r_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot \sin(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{H_n^{(2)}(\beta_1 r_0)}{\beta_1^2} J_n(\beta_1 r) \cdot dh}$$

p_1 et ϕ étant les expressions définies antérieurement.

II 3. 5. Détermination du potentiel primaire magnétique Π_{pM}

Plutôt que de suivre la même méthode que celle utilisée pour le calcul de Π_{pE}, ce qui conduirait à des calculs assez conséquents compte tenu de la complexité de la simplification du second membre de (8), nous écrirons que

$$H_\phi \text{ total} = H_{\phi M} + H_{\phi E}, \text{ ou encore}$$

$$H_\varphi = (\sigma_1 + j\omega\varepsilon_0) \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\partial \Pi_p}{\partial z} = -(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_0) \cdot \frac{\partial \Pi_{pM}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Pi_{pE}}{\partial z \, \partial \varphi} \qquad (14)$$

$H_{\phi M}$ et $H_{\phi E}$ dérivant respectivement des potentiels Π_{pM} et Π_{pE}.

La relation nous donne, en posant $\gamma_1 = \sigma_1 + j w \varepsilon_0$:

$$\frac{\partial \Pi_{pM}}{\partial r} = \frac{1}{\gamma_1 r} \cdot \frac{\partial^2 \Pi_{pE}}{\partial z \, \partial \varphi} - \cos\varphi \cdot \frac{\partial \Pi_p}{\partial z}$$ ce qui s'écrit, compte tenu des expressions (3) et (13)

$$\frac{\partial \Pi_{pM}}{\partial r} = -\frac{p_1}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{\partial}{\partial r_0}\left[H_n^{(2)}(\beta_1 r_0)\right] \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[J_n(\beta_1 r)\right] \frac{h}{\beta_1^2} \cdot dh$$

D'où

(15) $$\Pi_{pM} = \frac{-p_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{\partial}{\partial r_0}\left[H_n^{(2)}(\beta_1 r_0)\right] \cdot J_n(\beta_1 r) \cdot \frac{h}{\beta_1^2} \cdot dh + f(z,\varphi)$$

Il reste à évaluer $f(z, \varphi)$. Pour cela, nous devons utiliser une expression faisant intervenir $\frac{\partial \Pi_{pM}}{\partial z}$ et $\frac{\partial \Pi_{pM}}{\partial \varphi}$. La plus simple est : H_r total $= H_{rM} + H_{rE}$ (16)

qui s'écrit encore :

$$\gamma_1 \sin\varphi \cdot \frac{\partial \Pi_p}{\partial z} = \frac{\gamma_1}{r} \frac{\partial \Pi_{pM}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2(\ ) \Pi_{pE}}{\partial r \, \partial z} \qquad (17)$$

De (17) nous tirons, au terme des calculs : $\frac{\gamma_1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \equiv 0$; la fonction f n'est donc pas fonction de ϕ.

Comme Π_{pM} est solution de l'équation d'onde $(\Delta + k_1^2)\,\Pi = 0$, et comme

$$-\frac{p_1}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{\partial}{\partial r_0} \left[H_n^{(2)}(\beta_1 r_0) \right] J_n(\beta_1 r) \frac{h}{\beta_1^2} \, dh \text{ est}$$

sous forme canonique, il faut nécessairement que f(z) vérifie l'équation d'onde scalaire en coordonnées cylindriques, donc que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k_1^2 f = 0 \Rightarrow f = A \cdot e^{\pm j k_1 z}$$

Le fait que le second membre de la relation (8) ne compte pas de termes en $e^{j \cdot k_1 z}$ nous impose fatalement $A = 0$.

D'où l'expression du potentiel primaire magnétique :

$$\boxed{\Pi_{pM} = -\frac{p_1}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{\partial}{\partial r_0} \left[H_n^{(2)}(\beta_1 r_0) \right] \cdot J_n(\beta_1 r) \cdot \frac{h}{\beta_1^2} \, dh} \quad (18)$$

II 3. 6. Expression des composantes des champs primaires électrique et magnétique

A l'aide des relations (5), (6), (13), (18), nous pouvons calculer les composantes en r, ϕ, et z des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ dérivant des potentiels Π_{pE} et Π_{pM}. Les résultats, dont certains seront utilisés pour l'écriture des conditions aux limites, sont donnés en Annexe 2.

II 4. Détermination des composantes tangentielles des champs secondaires

II 4. 1. Remarque :

La détection, par le procédé "Télélog", des bords d'un gisement nécessite la mesure de la composante verticale du champ électrique à l'intérieur du forage. C'est donc une composante privilégiée sur la détermination de laquelle nous orientons notre travail.

Comme cette composante E_z ne dépend que d'un potentiel scalaire magnétique, *nous ne travaillerons, dans ce paragraphe et dans le suivant, que sur des potentiels primaire et secondaire magnétiques.*

L'utilisation des potentiels primaire et secondaire électriques ne sera nécessaire que dans le calcul de composantes autres que E_z comme nous le verrons ultérieurement.

II 4. 2. Expressions générales du potentiel secondaire magnétique dans les différents milieux.

Nous écrirons maintenant l'expression générale que doit avoir le potentiel secondaire magnétique dans les milieux de caractéristiques électromagnétiques différentes.

Ce potentiel secondaire sera de la forme :

$$\Pi_S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) . F(r) . dh$$ de façon à être

sous la même forme que le potentiel primaire. C'est la fonction F(r) qui distinguera les différents milieux. Π_s étant une solution de l'équation d'onde $(\Delta + k^2)\,\Pi_s = 0$, F(r) est nécessairement une combinaison linéaire d'une fonction de Bessel et d'une fonction de Hankel.

$$F(r) = F_1 \times J_n(\beta r) + F_2 \times H_n^{(2)}(\beta r).$$

. Le milieu 1, c'est à dire le sol, s'étend jusqu'aux valeurs infinies de r ; nous aurons donc $F_1 = 0$, puisque la fonction de Bessel d'argument complexe diverge à l'infini.

. Le milieu 2, c'est à dire le tubage, est borné ; il correspond à a <r< b. Nous aurons donc bien une combinaison des deux fonctions.

. Le milieu 3, c'est à dire la boue, correspond à r < a. Il faut donc prendre $F_2 = 0$ pour éliminer la discontinuité en r = 0.

Nous prendrons donc :

(19) milieu(1) $$\Pi_s^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) . A_n . H_n^{(2)}(\beta_1 r) . dh$$

(20) milieu(2) $$\Pi_s^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) . \left[B_n J_n(\beta_2 r) + C_n . H_n^{(2)}(\beta_2 r)\right] dh$$

(21) milieu (3) $$\Pi_s^{(3)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) . D_n . J_n(\beta_3 r) . dh$$

C'est le coefficient D_n que nous cherchons en priorité.

Maintenant que nous disposons des potentiels ci-dessus, nous devons calculer les composantes des champs secondaires sur lesquelles nous appliquerons les conditions aux limites. Elles dérivent des potentiels $\Pi_s^{(i)}$ par les formules (5) et (6).

II 4. 3. Composantes tangentielles des champs secondaires

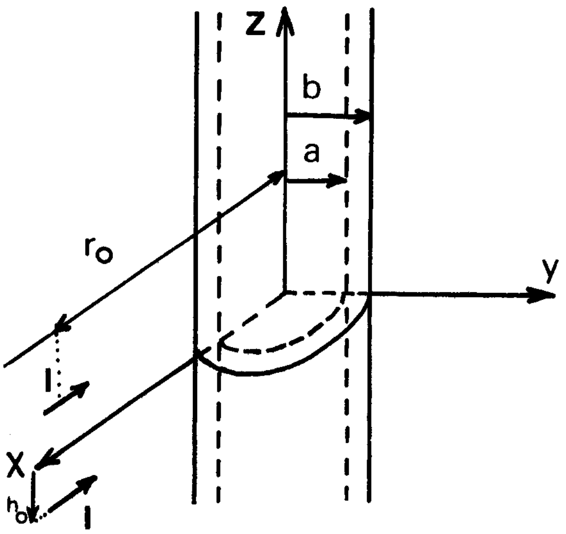


Fig. 6.

Les parois du tubage sont les surfaces de coordonnées r = a et r = b C'est sur elles que nous allons appliquer les conditions aux limites à savoir la continuité des composantes tangentielles du champ électrique et du champ magnétique.

On voit que les composantes tangentielles à considérer sont : E_z, E_ϕ, H_z et H_ϕ.

Comme nous considérons uniquement des ondes TM, la composante H_z est nulle. Nous utiliserons donc E_z, E_ϕ, et H_ϕ. Ces composantes dérivent des potentiels $\Pi_s^{(i)}$ par les formules (5) et (6), et leur expression dans chacun des 3 milieux est fournie dans l'Annexe 3.

II 5. Conditions aux limites et calcul des coefficients des $\Pi_s^{(i)}$

II 5. 1. Conditions aux limites

Nous avons 4 coefficients inconnus : A_n, B_n, C_n, et D_n. Nous avons deux surfaces de coordonnées : r = a et r = b.
Il suffit donc en principe d'écrire la continuité des composantes tangentielles E_z et E_ϕ ou E_z et H_ϕ. Nous l'écrirons cependant pour les 3 composantes, leur combinaison permettant d'alléger un peu l'écriture.

Nous pouvons écrire :

$$\left|\begin{array}{l} E^{(2)}_{zsM} = E^{(1)}_{zsM} + E^{(1)}_{zpM} \\ E^{(2)}_{\phi sM} = E^{(1)}_{\phi sM} \quad E^{(1)}_{\phi pM} \\ H^{(2)}_{\phi sM} = H^{(1)}_{\phi sM} \quad H^{(1)}_{\phi pM} \end{array}\right. \quad \text{en } r = b, \text{ et} \quad \left|\begin{array}{l} E^{(3)}_{zsM} = E^{(2)}_{zsM} \\ E^{(3)}_{\phi sM} = E^{(2)}_{\phi sM} \\ H^{(3)}_{\phi sM} = H^{(2)}_{\phi sM} \end{array}\right. \quad \text{en } r = a$$

(22) (23)

La notation est la suivante : $E^{(2)}_{zsM}$ signifie que l'on considère la composante verticale du champ électrique dérivant du potentiel secondaire magnétique dans le milieu 2.

Les composantes intervenant dans les formules (22) et (23) sont définies dans les Annexes 2 et 3.

II 5. 2. Convention de dérivation

Dans le calcul des coefficients, nous rencontrerons fréquemment des termes du type $\left(\frac{\partial}{\partial r}\left[J_n(\beta r)\right]\right) r = a$.

Pour alléger l'écriture, ces termes seront notés: J'_n (βa).
De même, $H'^{(2)}_n$ $(\beta_2 b)$ signifiera $\left(\frac{\partial}{\partial r}\left[H^{(2)}_n(\beta_2 r)\right]\right)$ en $r = b$.

Il n'y a pas d'équivoque possible, puisque nous n'aurons jamais à effectuer de dérivation par rapport à l'argument (βr) complet.

II 5. 3. Conditions en r = a

Après simplification, les équations (23) deviennent :

(24) en E_z : $\beta_3^2 . D_n . J_n\ (\beta_3 a) = \left[B_n . J_n\ (\beta_2 a) + C_n . H^{(2)}_n\ (\beta_2 a)\right] . \beta_2^2$

(25) en E_ϕ : $D_n . J_n\ (\beta_3 a) = B_n . J_n\ (\beta_2 a) + C_n . H^{(2)}_n\ (\beta_2 a)$

(26) en H_ϕ : $\gamma_3 . D_n . J'_n\ (\beta_3 a) = \left[B_n . J'_n\ (\beta_2 a) + C_n . H'^{(2)}_n\ (\beta_2 a)\right] . \gamma_2$

Or $\beta^2 = k^2 - h^2$; (24) devient donc :

$$k_3^2 . D_n . J_n\ (\beta_3 a) - h^2 . D_n . J_n\ (\beta_3 a) = k_2^2 . \left[B_n . J_n\ (\beta_2 a) + C_n . H_n^{(2)}\ (\beta_2 a) \right]$$
$$-h^2 . \left[B_n . J_n\ (\beta_2 a) + C_n . H_n^{(2)}\ (\beta_2 a) \right]$$

ce qui, compte tenu de (25) nous donne une seule équation pour la combinaison (24), (26).

Les conditions en r = a sont donc :

$$\boxed{\begin{aligned} k_3^2 . D_n . J_n(\beta_3 a) &= \left[B_n . J_n(\beta_2 a) + C_n . H_n^{(2)}(\beta_2 a) \right] . k_2^2 \qquad (27) \\ \gamma_3 . D_n . J_n'(\beta_3 a) &= \left[B_n . J_n'(\beta_2 a) + C_n . H_n'^{(2)}(\beta_2 a) \right] . \gamma_2 \qquad (28) \end{aligned}}$$

II 5. 4. Conditions en r = b

Elles s'écrivent :

$$\beta_1^2 . A_n . H_n^{(2)}(\beta_1 b) = \beta_2^2 . \left[B_n . J_n(\beta_2 b) + C_n . H_n^{(2)}(\beta_2 b) \right] + \frac{p_1}{2} . \frac{\partial}{\partial r_0} \left(H_n^{(2)}(\beta_1 r_0) \right) . J_n(\beta_1 b) . h$$

$$. \quad A_n . H_n^{(2)}(\beta_1 b) = \left[B_n . J_n(\beta_2 b) + C_n . H_n^{(2)}(\beta_2 b) \right] + \frac{p_1}{2} . \frac{\partial}{\partial r_0} \left(H_n^{(2)}(\beta_1 r_0) \right) . J_n(\beta_1 b) . \frac{h}{\beta_1^2}$$

$$\beta_1^2 . A_n . \gamma_1 . H_n'^{(2)}(\beta_1 b) = \beta_1^2 . \left[B_n . J_n'(\beta_2 b) + C_n . H_n'^{(2)}(\beta_2 b) \right] . \gamma_2 + \frac{p_1 \gamma_1}{2} . \frac{\partial}{\partial r_0} \left(H_n^{(2)}(\beta_1 r_0) \right) . J_n'(\beta_1 b) . h$$

En remarquant, comme au paragraphe précédent, que $\beta^2 = k^2 - h^2$, nous obtenons :

$$\boxed{\begin{aligned} (29) \quad & k_1^2 . A_n . H_n^{(2)}(\beta_1 b) = k_2^2 . \left[B_n . J_n(\beta_2 b) + C_n . H_n^{(2)}(\beta_2 b) \right] + \phi . J_n(\beta_1 b) . \frac{k_1^2}{\beta_1^2} \\ (30) \quad & \gamma_1 . A_n . H_n'^{(2)}(\beta_1 b) = \gamma_2 . \left[B_n . J_n'(\beta_2 b) + C_n . H_n'^{(2)}(\beta_2 b) \right] + \phi . J_n'(\beta_1 b) . \frac{\gamma_1}{\beta_1^2} \\ & \text{avec} \quad \phi = \frac{p_1}{2} . \frac{\partial}{\partial r_0} \left(H_n^{(2)}(\beta_1 r_0) \right) . h \end{aligned}}$$

II 5. 5. Calcul de D_n

Comme nous l'avons dit antérieurement, c'est le coefficient D_n qui nous intéresse le plus, puisque c'est lui qui définit le potentiel secondaire magnétique dans la boue, donc dans le milieu où doit s'effectuer la mesure.

Les équations (27), (28), (29) et (30) définissent les coefficients A_n, B_n, C_n et D_n. La résolution de ce système donne :

$$D_n = \frac{4\phi\gamma_1}{\Pi^2 ab\,\gamma_3} \cdot \frac{1}{\beta_1^2} \cdot \frac{1}{\Delta_n} = \frac{2p_1}{\Pi^2 ab} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_3} \cdot \frac{\partial}{\partial r_0}\left(H_n^{(2)}(\beta_1 r_0)\right) \cdot \frac{h}{\beta_1^2} \cdot \frac{1}{\Delta_n}$$

où Δ_n est une expression définie par :

$$\begin{aligned}\Delta_n = {} & H_n'^{(2)}(\beta_1 b) \cdot J_n(\beta_3 a) \cdot \left[H_n'^{(2)}(\beta_2 a) \cdot J_n(\beta_2 b) - J_n'(\beta_2 a) \cdot H_n^{(2)}(\beta_2 b)\right] \\ & - H_n^{(2)}(\beta_1 b) \cdot J_n(\beta_3 a) \cdot \left[H_n'^{(2)}(\beta_2 a) \cdot J_n'(\beta_2 b) - J_n'(\beta_2 a) \cdot H_n'^{(2)}(\beta_2 b)\right] \\ & + H_n'^{(2)}(\beta_1 b) \cdot J_n'(\beta_3 a) \cdot \left[J_n(\beta_2 a) \cdot H_n^{(2)}(\beta_2 b) - H_n^{(2)}(\beta_2 a) \cdot J_n(\beta_2 b)\right] \\ & - H_n^{(2)}(\beta_1 b) \cdot J_n'(\beta_3 a) \cdot \left[J_n(\beta_2 a) \cdot H_n'^{(2)}(\beta_2 b) - H_n^{(2)}(\beta_2 a) \cdot J_n'(\beta_2 b)\right]\end{aligned} \tag{31}$$

II 5. 6. *Expression de $E_{zsM}^{(3)}$*

$$E_{zsM}^{(3)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(z,h) \cdot D_n \cdot J_n(\beta_3 r) \cdot \beta_3^2 \cdot dh$$

Or, nous cherchons la composante E_z à l'intérieur de la boue, donc au voisinage et sur l'axe lui-même du tubage. La réception se fait donc en des points pour lesquels r est très faible ou même nul.

Comme nous savons que tous les $J_n(x)$ sont nuls pour x = 0, sauf J_0 qui vaut 1, le fait de chercher E_z en des points pour lesquels r = 0 limite la sommation sous n au seul indice 0 $\Rightarrow$

$$E_{zsM}^{(3)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(z,h) \cdot D_0 \cdot \beta_3^2 \cdot dh$$

d'où

$$E_{zsM}^{(3)} = \frac{2p_1}{\Pi^2 ab} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_3} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(z,h) \cdot \frac{\partial}{\partial r_0}\left[H_0^{(2)}(\beta_1 r_0)\right] \cdot \frac{\beta_3^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{1}{\Delta_0} \cdot h \cdot dh \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\text{avec } \Delta_0 = {} & \beta_1 \beta_2 \cdot H_1^{(2)}(\beta_1 b) \cdot J_0(\beta_3 a) \cdot \left[H_1^{(2)}(\beta_2 a) \cdot J_0(\beta_2 b) - J_1(\beta_2 a) \cdot H_0^{(2)}(\beta_2 b)\right] \\ & - \beta_2^2 \cdot H_0^{(2)}(\beta_1 b) \cdot J_0(\beta_3 a) \cdot \left[H_1^{(2)}(\beta_2 a) \cdot J_1(\beta_2 b) - J_1(\beta_2 a) \cdot H_1^{(1)}(\beta_2 b)\right] \\ & + \beta_1 \beta_3 \cdot H_1^{(2)}(\beta_1 b) \cdot J_1(\beta_3 a) \cdot \left[H_0^{(2)}(\beta_2 b) \cdot J_0(\beta_2 a) - H_0^{(2)}(\beta_2 a) \cdot J_0(\beta_2 b)\right] \\ & - \beta_2 \beta_3 \cdot H_0^{(2)}(\beta_1 b) \cdot J_1(\beta_3 a) \cdot \left[H_1^{(2)}(\beta_2 b) \cdot J_0(\beta_2 a) - H_0^{(2)}(\beta_2 a) \cdot J_1(\beta_2 b)\right]\end{aligned} \tag{33}$$

Cette expression n'est pas exploitable directement, et nous allons la remanier dans le cas d'hypothèses bien précises.

II 6. Cas d'un tubage isolant

C'est le cas qui retiendra le plus notre attention. Nous allons supposer $\sigma_2 << \sigma_1$ et σ_3, et cette hypothèse, comme nous l'espérions, va simplifier le calcul au point de rendre calculable analytiquement l'intégrale définissant E_z dans (32).

II 6. 1. Simplification de Δ_o dans le cas de petits arguments

Dans le cas où les $(\beta_i a)$ et $(\beta_i b)$ sont en module inférieurs à 1/2, nous pouvons prendre un développement limité des fonctions de Bessel et de Hankel intervenant dans Δ_o.

$$\sigma_2 << \sigma_1 < \sigma_3 \Rightarrow \left|k_2^2\right| << \left|k_1^2\right| < \left|k_3^2\right| \Rightarrow \left|\beta_2^2\right| < \left|\beta_1^2\right| < \left|\beta_3^2\right|$$

De plus, $a < b$. Nous pouvons donc supposer $\left|\beta_1 b\right|$ et $\left|\beta_3 a\right| < 1/2$, ce qui rendra tous les autres arguments inférieurs à 1/2.

Nous prendrons alors les développements suivants :[12]

$|z| < \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} Y_o(z) = \frac{2}{\Pi} \cdot \left|C + \text{Log}\left(\frac{z}{2}\right)\right| \cdot J_o(z) + \frac{z}{2\Pi} & \text{(erreur relative} < 10^{-3}) \\ Y_1(z) = \frac{2}{\Pi} \cdot \left|C + \text{Log}\left(\frac{z}{2}\right)\right| \cdot J_1(z) - \frac{2}{\Pi_z} - \frac{z}{2\Pi} & \text{(erreur relative} < 10^{-3}) \\ J_o(z) = 1 - \frac{z^2}{4} & \text{(erreur relative} < 10^{-3}) \\ J_1(z) = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{16} & \text{(erreur relative} < 10^{-3}) \end{cases}$$

C est la constante d'Euler.

Nous reportons ces valeurs dans l'expression (33) de Δ_o. Nous ne détaillerons pas les calculs qui sont particulièrement fastidieux. Après simplifications, nous aboutissons à l'expression :

(34) $$\Delta_o \# \frac{-4}{\Pi^2 ab}\left(1 - \eta^2\left(\frac{C}{2} + j\frac{\Pi}{4}\right) + \frac{j\Pi}{4}(\beta_1 b)^2 - \frac{\eta^2}{2}\cdot\text{Log}\left(\frac{\beta_1 b}{2}\right)\right)$$

(35) $$\text{où } \eta^2 = b^2\left(k_1^2 - k_2^2\right) - a^2\left(k_3^2 - k_2^2\right) \# b^2 \cdot k_1^2 - a^2 \cdot k_3^2$$

(36) $$\boxed{\Delta_o \# \frac{-4}{\Pi^2 ab}\cdot(1-\alpha) \quad \text{avec } \alpha = \frac{h^2}{2}\cdot\left[C + j\frac{\Pi}{2} + \log\frac{\beta_1 b}{2}\right] + j\frac{\Pi}{4}(\beta_1 b)^2}$$

Compte tenu des valeurs de a, b, et des σ_i, $\alpha << 1$.

II 6. 2. Simplification de Δ_o dans le cas de grands arguments

Nous appelons "grands arguments" les βa et βb dont le module est supérieur à 10.

Nous pouvons dans ce cas utiliser les développements asymptotiques des fonctions de Bessel et de Hankel ; nous prendrons les développements les plus simples:

$$J_0(\beta a) \sim \sqrt{\frac{2}{\Pi\beta a}}\cos\left(\beta a - \frac{\Pi}{4}\right) \; ; \; J_1(\beta a) \sim \sqrt{\frac{2}{\Pi\beta a}}\cos\left(\beta a - \frac{3\Pi}{4}\right)$$

$$H_0^{(2)}(\beta a) \sim \sqrt{\frac{2}{\Pi\beta a}}\cdot e^{-j\left(\beta a - \frac{\Pi}{4}\right)} \; ; \; H_1^{(2)}(\beta a) \sim \sqrt{\frac{2}{\Pi\beta a}}\cdot e^{-j\left(\beta a - \frac{3\Pi}{4}\right)}$$

Nous reportons dans (   ) et, tous calculs faits, nous obtenons :

$$\Delta_o \,/\!/ \, -\left[\frac{2}{\Pi a} - \frac{k_3^2 - k_2^2}{j\Pi\beta_2}\right]\cdot\left[\frac{2}{\Pi b} + \frac{k_1^2 - k_2^2}{j\Pi\beta_2}\right]$$

a et b étant de l'ordre de 10 cm, écrire "$|\beta a|$ et $|\beta b| > 10$" revient à écrire "$|\beta| > 100$". Nous pouvons donc écrire avec une excellente approximation :

$$\boxed{\Delta_o \# \frac{-4}{\Pi^2 ab}}$$

II 6. 3. Simplification de Δ_o pour les arguments intermédiaires

Pour les arguments compris entre 1/2 et 10, nous ne pouvons utiliser les méthodes précédentes.

Remarquons que $\frac{1}{2} < |\beta_a| < 10 \Rightarrow 5 < |\beta| < 100$. Comme $\beta^2 = k^2 - h^2$, nous avons sensiblement $\beta^2 = -h^2$, donc $|\beta_1| \simeq |\beta_2| \simeq |\beta_3|$.

Nous allons par conséquent développer les fonctions $J_n(\beta_3 a)$ et $H_n(\beta_1 b)$ au voisinage des points d'affixe $\beta_2 a$ et $\beta_2 b$.

Nous écrirons $J_o(z + \varepsilon) = J_o(z) + \varepsilon . \left| \frac{\partial}{\partial z} J_o(z) \right|$,

la dérivation étant faite en : $z = \zeta$; $\zeta \in |z, z + \varepsilon|$.

ε étant faible devant z, nous pouvons prendre $\zeta = z$.
Les relations utilisées seront donc :

$$(37)\quad J_o(\beta_3 a) = J_o(\beta_2 a) - \varepsilon_3 a\, J_1(\beta_2 a) \qquad \text{où } \varepsilon_3 = \beta_3 - \beta_2$$

$$(38)\quad \beta_3 J_1(\beta_3 a) = \beta_2 J_1(\beta_2 a) + \varepsilon_3 a \beta_2 J_o(\beta_2 a)$$

$$(39)\quad H_o^{(2)}(\beta_1 b) = H_o^{(2)}(\beta_2 b) - \varepsilon_1 b\, H_1^{(2)}(\beta_2 b) \qquad \text{où } \varepsilon_1 = \beta_1 - \beta_2$$

$$(40)\quad \beta_1 H_1^{(2)}(\beta_1 b) = \beta_2 H_1^{(2)}(\beta_2 b) + \varepsilon_1 b \beta_2\, H_1^{(2)}(\beta_2 b)$$

Les relations (38) et (40) sont obtenues en dérivant respectivement (37) et (39) par rapport à a et b.
En reportant ces relations dans (33), et après un calcul prudent au niveau des simplifications, nous obtenons :

$$\boxed{\Delta_o = \frac{-4}{\Pi^2 ab} . \left(1 - j . \frac{\Pi}{4} . \eta^2\right)}$$

η^2 étant la quantité définie en (35).

Nous voyons que, dans tous les cas, le dénominateur Δ_o peut être considéré comme constant. Il existe un léger facteur correctif qui s'estompe au fur et à mesure que la variable h augmente, mais ce facteur est toujours très nettement inférieur à 1.

II 6. 4. Vérification sur ordinateur

Nous avons programmé l'expression (33) donnant Δ_o, et les valeurs numériques recueillies (environ 150) ont confirmé les résultats du calcul analytique.

Nous avons obtenu, en faisant varier h de 0 à 1 000 :

$$\Delta_o = \frac{-4}{\Pi^2 ab} \cdot \left| R + j.I \right| \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} 0,998 < R < 1,003 \\ I < 4.10^{-4} \end{array}$$

Pour la suite du calcul, nous poserons donc :

$$\boxed{\Delta_o = c^{te} = \frac{-4}{\Pi^2 ab} \cdot (1-\alpha) \qquad , \quad \alpha = \frac{h^2}{2}\left[j \cdot \frac{\Pi}{2} + \log \frac{k_1 b}{2} \right]}$$

II 6. 5. Nouvelle expression de la composante E_z

En reportant l'expression de Δ_o dans (32), nous obtenons :

$$(41) \qquad E^{(3)}_{z\,sM} = K \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{\partial}{\partial r_o}\left(H_o^{(2)}(\beta_1 r_o)\right) \cdot \frac{\beta_3^2}{\beta_1^2} \cdot h \cdot dh$$

où $\quad K = \frac{p_1}{2} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_3} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \# \frac{p_1}{2} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \# \frac{p_1}{2} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \cdot (1+\alpha)$

On peut montrer facilement que la fonction qui est sous le signe $\int$ est absolument convergente ; les dérivations par rapport à r_o ou z peuvent donc être déplacées de part et d'autre du signe $\int$, les variables r_o, z et h étant indépendantes.

$$E^{(3)}_{z\,sM} = K \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{\partial}{\partial r_o}\left(H_o^{(2)}(\beta_1 r_o)\right) \cdot \frac{\beta_3^2 - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot h\, dh - K \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h)\, H_1^{(2)}(\beta_1 r_o)\beta_1 h\, dh$$

$$E^{(3)}_{z\,sM} = K \cdot (k_3^2 - k_1^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{\partial}{\partial r_o}\left(H_o^{(2)}(\beta_1 r_o)\right) \cdot \frac{h}{\beta_1^2} \cdot dh - j K \cdot \frac{\partial^2}{\partial r_o \partial z} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h)\, H_o^{(2)}(\beta_1 r_o)\, dh$$

puisque $\quad j h \cdot \psi(z,h) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\psi(z,h)\right)$

$$(42)\quad E^{(3)}_{z\,sM} = -j K \cdot \frac{\partial^2}{\partial r_o \partial z} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot H_o^{(2)}(\beta_1 r_o)\, dh + j K (k_3^2 - k_1^2) \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{H_1^{(2)}(\beta_1 r_o)}{\beta_1}\, dh$$

• La première intégrale figurant dans (42) est celle qui a servi à la formulation du potentiel primaire. Sa valeur est donnée par (2) :

$$\frac{-j}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{jh(z-h_o)} + e^{jh(z+h_o)} \right] \cdot H_o^{(2)}(\beta_1 r_o) \cdot dh = \frac{e^{-jk_1 R_1}}{R_1} + \frac{e^{-jk_1 R_2}}{R_2}$$

avec $R_1 = \sqrt{(z-h_o)^2 + r_o^2}$ et $R_2 = \sqrt{(z+h_o)^2 + r_o^2}$

. L'évaluation de la seconde intégrale nécessite une transformation préalable.

$$\frac{\partial}{\partial r_o}\left(H_1^{(2)}(\beta_1 r_o)\right) = -\frac{1}{r_o}\cdot H_1^{(2)}(\beta_1 r_o) + \beta_1 \cdot H_o^{(2)}(\beta_1 r_o) \Rightarrow$$

$$\frac{H_1^{(2)}(\beta_1 r_o)}{\beta_1} = r_o . H_o^{(2)}(\beta_1 r_o) - \frac{r_o}{\beta_1}\cdot\frac{\partial}{\partial r_o}\left(H_1^{(2)}(\beta_1 r_o)\right) \Rightarrow$$

$$\left(1 + r_o\frac{\partial}{\partial r_o}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(z,h)\cdot\frac{H_1^{(2)}(\beta_1 r_o)}{\beta_1}\,dh = r_o\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(z,h)\cdot H_o^{(2)}(\beta_1 r_o)\,dh$$

La seconde intégrale figurant dans (42) est solution de l'équation différentielle

$$y + r_o\frac{\partial y}{\partial r_o} = r_o\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(z,h)\cdot H_o^{(2)}(\beta_1 r_o)\,dh = 2jr_o\cdot\left[\frac{e^{-jk_1R_1}}{R_1} + \frac{e^{-jk_1R_2}}{R_2}\right] \tag{43}$$

Nous la résolvons de façon classique, ce qui nous donne :

$$y = \frac{-2}{k_1 r_o}\cdot\left[e^{-jk_1R_1} + e^{-jk_1R_2}\right] + \frac{1}{r_o}\cdot C(z)$$

C(z) étant une fonction à déterminer.

Nous avons donc : $E_{z\,sM}^{(3)} = 2K\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial r_o}\left[\dfrac{e^{-jk_1R_1}}{R_1} + \dfrac{e^{-jk_1R_2}}{R_2}\right]$

$$-2jK\cdot\frac{k_3^2-k_1^2}{k_1 r_o}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[e^{-jk_1R_1} + e^{-jk_1R_2}\right] + jK\cdot\frac{k_3^2-k_1^2}{r_o}\cdot\frac{\partial C(z)}{\partial z}$$

ce qui peut encore s'écrire, en faisant $h_o = o$, donc $R_1 = R_2 = R$

$$\boxed{\begin{aligned} E_{z\,sM}^{(3)} &= \frac{-2p_1}{1-\alpha}\cdot\frac{k_1^2}{k_3^2}\cdot\frac{r_o z}{R^3}\cdot\left[\frac{3}{R^2} + \frac{3jk_1}{R} - k_1^2\right]\cdot e^{-jk_1R} \\ &+ \frac{2p_1}{1-\alpha}\cdot\frac{k_1^2}{k_3^2}\cdot(k_3^2-k_1^2)\cdot\frac{z}{r_o R}\cdot e^{-jk_1R} - \frac{jp_1}{1-\alpha}\cdot\frac{k_1^2(k_3^2-k_1^2)}{k_3^2\, r_o}\cdot\frac{\partial C(z)}{\partial z}\end{aligned}} \tag{44}$$

En faisant $h_o = o$ après avoir effectué les dernières dérivations, nous nous sommes placés dans le cas des mesures faites sur le terrain, c'est à dire avec le dipôle à la surface du sol. Dans notre théorie, nous n'avons plus alors un dipôle et son image, mais un seul dipôle parcouru par un courant 2I et situé sur l'axe ($z = 0$, $\phi = 0$).

II 6. 6. Détermination de la fonction C(z)

Nous savons qu'elle n'est fonction que de z ; nous pouvons donc nous fixer r_o. Nous allons simplement supposer que $|k_1 r_o| \geqslant 16$. Dans ces conditions, nous aurons $16 \leqslant |k_1 r_o| \leqslant |\beta_1 r_o|$ et nous pouvons écrire avec une excellente approximation :

$$H_1^{(2)}(\beta_1 r_o) = \frac{2}{\Pi \beta_1 r_o} . e^{-j\beta_1 r_o + j.\frac{3\Pi}{4}}$$

En reportant cette valeur de $H_1^{(2)}(\beta_1 r_o)$ dans (41), nous obtenons

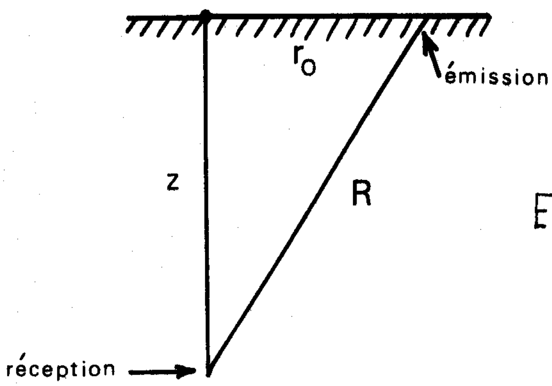
$$E^{(3)}_{zsM} = K \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \sqrt{\frac{2}{\Pi \beta_1 r_o}} . e^{-j\left(\beta_1 r_o - \frac{3\Pi}{4}\right)} . \frac{\beta_3^2}{\beta_1^2} . h\, dh$$

Supposons maintenant que le dipôle soit à la surface du sol, de manière à pouvoir comparer ultérieurement l'expression obtenue avec (44).

$$h_o = o \Rightarrow E^{(3)}_{zsM} = 2.K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jhz} . e^{-j\left(\beta_1 r_o - \frac{3\Pi}{4}\right)} . \sqrt{\frac{2}{\Pi \beta_1 r_o}} . \frac{\beta_3^2}{\beta_1^2} . h . dh$$

soit encore $$E^{(3)}_{zsM} = K \sqrt{\frac{-8j}{\Pi r_o}} . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jhz - j\beta_1 r_o} . \beta_3^2 . \beta_1^{-3/2} . h\, dh \qquad (45)$$

Nous calculons l'intégrale définie en (   ) par la *méthode de la plus grande pente* (voir l'Annexe.4.) [13].



Posons $\left.\begin{aligned} z &= -R\cos\theta \\ r_o &= R\sin\theta \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$

$$E^{(3)}_{zsM} = K \sqrt{\frac{-8j}{\Pi r_o}} . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jR(h\cos\theta + \beta_1 \sin\theta)} . \beta_3^2 . \beta_1^{-3/2} . h\, dh$$

(46)

Passons maintenant dans le plan complexe (cf. Annexe) en posant $h = k_1 \cos\alpha$, ce qui implique $\beta_1 = k_1 \sin\alpha$.

(46) devient :

$$E^{(3)}_{zsM} = -K \sqrt{\frac{-8j}{\Pi r_o}} \int_C e^{-jk_1 R\cos(\alpha-\theta)} . \frac{\beta_3^2(\alpha)}{\beta_1^{3/2}(\alpha)} . k_1^2 \sin\alpha \cos\alpha\, d\alpha$$

Le col est en $\theta + \alpha = 0$; l'intégrale étant proportionnelle à sa valeur prise au col, nous avons :

$$E^{(3)}_{z\Delta M} = -K \cdot \sqrt{\frac{-8j}{\Pi r_0}} \cdot e^{-jk_1R} \cdot \frac{\beta_3^2(\theta)}{\beta_1^{3/2}(\theta)} \cdot k_1^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \sqrt{\frac{2\Pi}{jk_1R}}$$

$$E^{(3)}_{z\Delta M} = -K \cdot \sqrt{\frac{-8j}{\Pi r_0}} \cdot e^{-jk_1R} \cdot (k_3^2 - k_1^2\cos^2\theta) \cdot \cos\theta \sqrt{\frac{k_1}{\sin\theta}} \sqrt{\frac{2\Pi}{jk_1R}} \quad (47)$$

Comme $\cos\theta = \frac{-z}{R}$ et $\sin\theta = \frac{r_o}{R}$, nous avons, en reportant dans (47) :

$$E^{(3)}_{z\Delta M} = 4K \cdot (k_3^2 - k_1^2) \cdot \frac{z}{r_0} \cdot \frac{e^{-jk_1R}}{R} + 4K \cdot \frac{r_0 z}{R^3} \cdot k_1^2 \cdot e^{-jk_1R} \quad (48).$$

Cette expression est à rapprocher de la formule (44). Si nous faisons l'hypothèse, dans (44), que r_o est grand, nous voyons que :

$$\frac{3}{R^2} + \frac{3jk_1}{R} - k_1^2 \# -k_1^2 \quad \Longrightarrow$$

il nous restera

$$E^{(3)}_{z\Delta M} = \frac{2p_1}{1-\alpha} \cdot \frac{k_1^2}{k_3^2} \cdot \frac{r_0 z}{R^3} \cdot k_1^2 \cdot e^{-jk_1R} + \frac{2p_1}{1-\alpha} \cdot \frac{k_1^2}{k_3^2} \cdot (k_3^2 - k_1^2) \frac{z}{r_0} \cdot \frac{e^{-jk_1R}}{R}$$

$$- \frac{jp_1}{1-\alpha} \cdot \frac{k_1^2 \cdot (k_3^2 - k_1^2)}{k_3^2} \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \frac{\partial C(z)}{\partial z}$$

La comparaison avec (47) nous donne clairement $\frac{\partial C}{\partial z} = 0$.

Le champ électrique vertical est donc donné par

$$\boxed{E^{(3)}_{z\Delta M} = \frac{-2p_1}{1-\alpha} \cdot \frac{k_1^2}{k_3^2} \cdot e^{-jk_1R} \cdot \left[\frac{r_0 z}{R^3} \left(\frac{3}{R^2} + \frac{3jk_1}{R} - k_1^2 \right) - (k_3^2 - k_1^2) \frac{z}{r_0 R} \right]} \quad (49)$$

II 6. 7. Cas de l'émission par une antenne longue

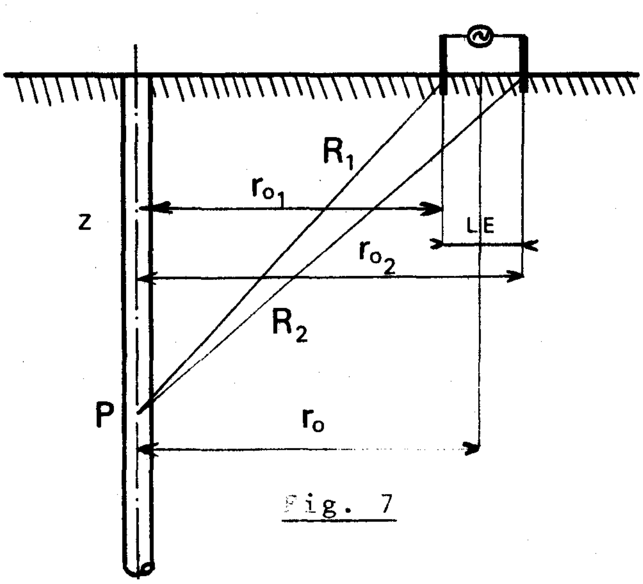


Fig. 7

Le calcul précédent a été effectué dans l'hypothèse où l'émetteur était un dipôle horizontal. En fait, sur le terrain, l'émission se fait au moyen de deux piquets séparés par une distance LE et entre lesquels est placé l'émetteur.

Nous devons donc considérer que tout se passe comme s'il y avait une multitude de dipôles élémentaires placés entre les deux piquets qui sont situés à des distances r_{01} et r_{02} de l'axe $r = 0$.

Le pouvoir émissif p_1 d'un dipôle élémentaire s'écrit $p_1 = \frac{I\,dl}{4\Pi\sigma_1}$. Nous pouvons l'écrire $p_1 = \frac{I\,d\vec{l}}{4\Pi\sigma_1} = \frac{I\,dr_0}{4\Pi\sigma_1}$ puisque l'émission se fait suivant un rayon ($\vec{dl}$ et $\vec{e}_r$ sont alignés).

Le champ reçu au point P sera donc la somme des champs élémentaires :

$$\mathcal{E}^{(3)}_{z\Delta M} = \frac{-2I}{4\Pi\sigma_1}\cdot\frac{k_1^2}{k_3^2}\cdot\frac{1}{1-\alpha}\int_{r_{01}}^{r_{02}}\left[\frac{r_0 z}{R^3}\left(\frac{3}{R^2}+\frac{3jk_1}{R}-k_1^2\right)-\left(k_3^2-k_1^2\right)\frac{z}{r_0 R}\right]e^{-jk_1R}\,dr_0$$

D'où

(50)

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{E}_z = \dfrac{I}{2\Pi\sigma_1}\cdot z\cdot\dfrac{k_1^2}{k_3^2(1-\alpha)}\cdot\left[\mathcal{E}_0 + \left(k_3^2-k_1^2\right)\displaystyle\int_{r_{01}}^{r_{02}}\frac{e^{-jk_1R}}{R\cdot r}\,dr\right], \\ \text{où}\quad \mathcal{E}_0 = \dfrac{e^{-jk_1R_2}}{R_2^3}\left(1+jk_1R_2\right) - \dfrac{e^{-jk_1R_1}}{R_1^3}\left(1+jk_1R_1\right),\ \text{et}\ R^2 = r^2+z^2 \\ R_1^2 = z^2+r_{01}^2 = z^2+\left(r_0-\frac{LE}{2}\right)^2,\quad R_2^2 = z^2+r_{02}^2 = z^2+\left(r_0+\frac{LE}{2}\right)^2 \end{array}}$$

Une telle formule est aisément exploitable sur ordinateur, et nous avons pu ainsi tracer les planches ( ) à ( ) jointes à cet exposé.

II 6. 8. Tension reçue au niveau des électrodes de mesure

La réception du signal à l'intérieur du forage est effectuée au moyen de deux électrodes placées sur la sonde de mesure et distantes d'une quantité LR. Nous supposerons que le champ électrique ne subit pas de variations entre les deux électrodes, et le signal capté sera une tension directement proportionnelle au champ : $V_z = \mathcal{E}_z \times LR$.

Dans les applications numériques, nous supposerons LR = 1 mètre, condition qui est fréquemment réalisée sur le terrain.

II 7. Cas du tubage conducteur

II 7. 1. Simplification de Δ_o

Dans l'hypothèse $\sigma_2 >> \sigma_3 > \sigma_1$, nous pouvons simplifier l'écriture de Δ_o donnée en (33) et écrire :

$\Delta_o = \Delta_1 + \Delta_2 \cdot H_1^{(2)}(\beta_1 b)$ où Δ_1 et Δ_2 sont les expressions

définies ci-dessous et qui peuvent être considérées comme constantes moyennant une erreur inférieure à 1%.

$$\Delta_1 = \frac{2jk_2}{\pi b} \cdot \left[H_1^{(2)}(k_2 a) \cdot J_o(k_2 b) - J_1(k_2 a) H_o^{(2)}(k_2 b) \right]$$

$$\Delta_2 = -j \cdot k_2^2 \cdot \left[H_1^{(2)}(k_2 a) \cdot J_1(k_2 b) - J_1(k_2 a) \cdot H_1^{(2)}(k_2 b) \right]$$

et

$$\boxed{E_{zsM}^{(3)} = \frac{-2p_1}{\pi^2 ab} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_3} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,k) \cdot \frac{H_1^{(2)}(\beta_1 r_o) \cdot \beta_3^2 \cdot k}{\beta_1 \cdot \left[\Delta_1 + \Delta_2 \cdot H_1^{(2)}(\beta_1 b) \right]} \cdot dk}$$

I 7. 2. Résultats

La simplification de Δ_o ne permet pas, comme dans le cas du tubage isolant, d'effectuer un calcul analytique de l'intégrale définissant $E_{zsM}^{(3)}$.

Une intégration numérique est nécessaire, et un programme de calcul a été effectué en Algol 60.

Nous n'avons cependant pas exploité ce programme, car il nécessite un temps de calcul important et ne correspond pas au cas des tubages isolants auxquels nous nous intéressons en priorité.

Les résultats donnés par ce programme nous ont cependant montré une forte atténuation du signal lors de la traversée de la paroi métallique, ce qui est tout à fait normal. Nous n'avons donc pas poussé l'exploitation à un stade ultérieur.

ANNEXE I

Décomposition d'une onde cylindrique en ondes TE et TM

Lorsque la fréquence du signal émis est nettement inférieure à la fréquence de coupure, nous pouvons écrire :
div $\vec{E}$ = o, soit encore, en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r\, Er) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial Ez}{\partial z} = o.$$ De même, div $\vec{H}$ = o.

1° *Si l'onde reçue est une onde TE,* nous aurons Ez = o, d'où

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\, Er) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E\phi}{\partial \phi} = o \qquad (a)$$

Posons $\frac{rEr}{j\omega\mu} = -\frac{\partial \Pi E}{\partial \phi}$ et $\frac{E\phi}{j\omega\mu} = \frac{\partial \Pi E}{\partial r}$

$Er = -\frac{j\omega\mu}{r} \cdot \frac{\partial \Pi E}{\partial \phi}$ et $E\phi = j\omega\mu \cdot \frac{\partial \Pi E}{\partial r}$ vérifient bien (a)

De plus, si nous appelons $\vec{F}$ le vecteur (o, o, $j\omega\mu\Pi E$), nous avons $\vec{E} = -\text{rot}\, \vec{F}$.

Posons $\vec{H} = -(\sigma + j\omega\varepsilon)\, \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}}\, U$

Les composantes $H\phi$, Hr s'expriment uniquement en fonction de U :

(b) $Hr = -\frac{\partial U}{\partial r}$ et $H\phi = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \phi}$ (c)

Or, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, rot $\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$.

d'où : $$.-j\omega\mu Hr = -\frac{\partial E\phi}{\partial z} = -j\omega\mu \cdot \frac{\partial^2 \Pi E}{\partial r \partial z} \qquad (d)$$

$$.-j\omega\mu H\phi = \frac{\partial Er}{\partial z} = -\frac{j\omega\mu}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Pi E}{\partial z \partial \phi} \qquad (e)$$

(f) $$.-j\omega\mu Hz = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rE\phi) - \frac{\partial Er}{\partial \phi}\right) = \frac{j\omega\mu}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Pi E}{\partial r}\right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Pi E}{\partial \phi^2}\right]$$

(b), (c), (d), (e) impliquent :

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial^2 \Pi E}{\partial r \partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial \phi} = -\frac{\partial^2 \Pi E}{\partial z \partial \phi}, \text{ donc } U = -\frac{\partial \Pi E}{\partial z} + C^{te}$$

En reportant $\vec{F}$ et U dans $\vec{H} = -(\sigma + j\omega\varepsilon)\,\vec{F} - \vec{\text{grad}}\, U$, nous obtenons la composante Hz en fonction de ΠE .

$$Hz = \frac{\partial^2 \Pi E}{\partial z^2} + k^2 . \Pi E$$

Remarque : Nous pouvons également écrire que ΠE vérifie la relation : $(\Delta + k^2)\Pi E = o$.

Ceci s'écrit $\frac{1}{r} . \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial \Pi E}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} . \frac{\partial^2 \Pi E}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Pi E}{\partial z^2} + k^2 \Pi E = o$, soit

encore : $- Hz + \frac{\partial^2 \Pi E}{\partial z^2} + k^2 \Pi E = o$ d'après (f).

En définitive, les composantes des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ dérivant d'une onde TE s'expriment en fonction d'un potentiel scalaire ΠE vérifiant : $(\Delta + k_1^2)\ \Pi E = o$ au moyen des relations suivantes :

$$\boxed{\left|\begin{array}{l} E_r = \frac{-j\omega\mu}{r} . \frac{\partial \Pi_E}{\partial r} \\ E_\varphi = j\omega\mu . \frac{\partial \Pi_E}{\partial r} \\ E_z = 0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} H_r = \frac{\partial^2 \Pi_E}{\partial r \partial z} \\ H_\varphi = \frac{1}{r} . \frac{\partial^2 \Pi_E}{\partial z \partial \varphi} \\ H_z = \frac{\partial^2 \Pi_E}{\partial z^2} + k^2 \Pi_E \end{array}\right.}$$

2° Si l'onde est transverse magnétique (TM), nous aurons Hz = o Nous partirons de div $\vec{H} = o$, et poserons $\vec{H} = -\text{rot}\,\vec{G}$, où G est le vecteur $(o, o, (\sigma + j\omega\varepsilon)\ \Pi_M)$.

Nous poserons ensuite $\vec{E} = -j\omega\mu\vec{G} - \vec{\text{grad}}\ V$, et montrerons comme dans le paragraphe précédent que :

$$V = -\frac{\partial \Pi_M}{\partial z} + c^{te}$$

Les composantes des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ dérivant d'une onde TM (telle que Hz = o) s'expriment alors en fonction d'un potentiel scalaire Π_M vérifiant $(\Delta + k^2)\ \Pi_M = o$ au moyen des relations suivantes :

$$E_r = \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial z \partial r} \qquad H_r = \frac{\sigma + j\omega\varepsilon}{r} \cdot \frac{\partial \Pi_M}{\partial \varphi}$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial z \partial \varphi} \qquad H_\varphi = -(\sigma + j\omega\varepsilon) \cdot \frac{\partial \Pi_M}{\partial r}$$

$$E_z = \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial z^2} + k^2 \Pi_M \qquad H_z = 0$$

ANNEXE II

Composantes des champs primaires dérivés des ondes TE et TM

$\vec{E}_{pE}$ ......

$$\left[\begin{aligned}
E_{rpE} &= -p_1 \cdot \frac{\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}{2r \cdot r_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 \cdot \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{H_n^{(2)}(\beta r_0)}{\beta^2} \cdot J_n(\beta r) \, dh \\
E_{\varphi pE} &= +p_1 \cdot \frac{\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}{2r_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot \sin(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{H_n^{(2)}(\beta r_0)}{\beta^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[J_n(\beta r)\right] dh \\
E_{zpE} &= 0
\end{aligned}\right.$$

$\vec{E}_{pM}$ ......

$$\left[\begin{aligned}
E_{rpM} &= \frac{-j p_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{\partial}{\partial r_0}\left[H_n^{(2)}(\beta_1 r_0)\right] \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[J_n(\beta r)\right] \cdot \frac{h^2}{\beta^2} \cdot dh \\
E_{\varphi pM} &= \frac{+j p_1}{2r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot \sin(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{\partial}{\partial r_0}\left[H_n^{(2)}(\beta r_0)\right] \cdot J_n(\beta r) \cdot \frac{h^2}{\beta^2} \cdot dh \\
E_{zpM} &= -\frac{p_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{\partial}{\partial r_0}\left[H_n^{(2)}(\beta r_0)\right] \cdot J_n(\beta r) \cdot h \cdot dh
\end{aligned}\right.$$

$\vec{H}_{pE}$ ......

$$\left[\begin{aligned}
H_{rpE} &= \frac{p_1 \cdot (\sigma + j\omega\varepsilon)}{2r_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot \sin(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot H_n^{(2)}(\beta r_0) \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[J_n(\beta r)\right] \cdot \frac{h}{\beta^2} \cdot dh \\
H_{\varphi pE} &= \frac{p_1 \cdot (\sigma + j\omega\varepsilon)}{2 r r_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 \cdot \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot H_n^{(2)}(\beta r_0) \cdot J_n(\beta r) \cdot \frac{h}{\beta^2} \cdot dh \\
H_{zpE} &= \frac{-j p_1 \cdot (\sigma + j\omega\varepsilon)}{2r_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot \sin(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot H_n^{(2)}(\beta r_0) \cdot J_n(\beta r) \cdot dh
\end{aligned}\right.$$

$\vec{H}_{pM}$ ......

$$\left[\begin{aligned}
H_{rpM} &= \frac{+p_1 \cdot (\sigma + j\omega\varepsilon)}{2r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot \sin(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{\partial}{\partial r_0}\left[H_n^{(2)}(\beta r_0)\right] \cdot J_n(\beta r) \cdot \frac{h}{\beta^2} \cdot dh \\
H_{\varphi pM} &= \frac{p_1 \cdot (\sigma + j\omega\varepsilon)}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{\partial}{\partial r_0}\left[H_n^{(2)}(\beta r_0)\right] \frac{\partial}{\partial r}\left[J_n(\beta r)\right] \frac{h}{\beta^2} \, dh \\
H_{zpM} &= 0
\end{aligned}\right.$$

ANNEXE III

Composantes tangentielles des champs secondaires dérivés de l'onde TM

– Dans le milieu 1

$$E^{(1)}_{zsM} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot A_n \cdot H^{(2)}_n(\beta_1 r) \cdot \beta_1^2 \cdot dh$$

$$E^{(1)}_{\varphi sM} = -\frac{\dot{\gamma}}{r} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot \sin(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot A^{(1)}_n \cdot H^{(2)}_n(\beta_1 r) \cdot h \cdot dh$$

$$H^{(1)}_{\varphi sM} = -(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_0) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot A_n \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[H^{(2)}_n(\beta_1 r)\right] \cdot dh$$

– Dans le milieu 2

$$E^{(2)}_{zsM} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \left[B_n \cdot J_n(\beta_2 r) + C_n \cdot H^{(2)}_n(\beta_2 r)\right] \cdot \beta_2^2 \cdot dh$$

$$E^{(2)}_{\varphi sM} = -\frac{\dot{\gamma}}{r} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot \sin(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \left[B_n \cdot J_n(\beta_2 r) + C_n \cdot H^{(2)}_n(\beta_2 r)\right] \cdot h \cdot dh$$

$$H^{(3)}_{\varphi sM} = -(\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[B_n \cdot J_n(\beta_2 r) + C_n \cdot H^{(2)}_n(\beta_2 r)\right] dh$$

– Dans le milieu 3

$$E^{(3)}_{zsM} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot D_n \cdot J_n(\beta_3 r) \cdot \beta_3^2 \cdot dh$$

$$E^{(3)}_{\varphi sM} = -\frac{\gamma}{r} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot \sin(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot D_n \cdot J_n(\beta_3 r) \cdot h \cdot dh$$

$$H^{(3)}_{\varphi sM} = -(\sigma_3 + j\omega\varepsilon_0) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z,h) \cdot D_n \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[J_n(\beta_3 r)\right] \cdot dh$$

A N N E X E IV

CALCUL DE LA FONCTION C(z) PAR LA METHODE DU COL

1° Méthode utilisée :

Considérons une intégrale du type $\int_C e^{sg(z)}.f(z).dz$, où C est un contour dans le plan complexe des z. Quand $|s|$ est grand, cette intégrale peut être avaluée asymptotiquement par la méthode des plus grandes pentes qui a été introduite par RIEMANN et développée par DEBYE. f et g sont supposées indépendantes de s et suffisamment régulières.

Si $z = x + jy$, posons $g(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ où u et v sont réelles. Quand s est grand, une petite variation de v produira une oscillation rapide des termes sinusoïdaux dans e^{sg}. En général, la contribution de n'importe quelle partie du chemin d'intégration sera sensiblement la même que celle de n'importe quelle autre partie.Cependant, si on choisit un chemin sur lequel v est constant, l'oscillation rapide disparaîtra. Alors la partie de l'intégrant qui variera le plus rapidement sera e^{su}, et il est évident que la contribution majeure sera celle du voisinage du ou des points en lesquels u est maximum. Le principe de la méthode, par conséquent, consiste à déformer le contour (dans la mesure du possible) en une courbe $v = c^{te}$ passant par les points où u est maximum.

En fait, un autre avantage découle de ce choix du parcours. En effet, de tous les parcours passant par un point $z = z_o$, ceux sur lesquels $v = c^{te}$ sont ceux où u change le plus rapidement (application des conditions de Cauchy-Riemann).

Considérons maintenant dans l'espace la surface $u = u(x, y)$, l'axe des u étant perpendiculaire au plan des z. Cette surface n'a pas de vrais extrema. En effet, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)^2 = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)^2$ est strictement négatif, puisque $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = o$ d'après les conditions de Cauchy-Riemann; ce qui est contraire à une des conditions nécessaires d'obtention d'un vrai extremum.

Par conséquent, tous les points stationnaires sont des "cols" qui relient les "vallées" et les "crêtes" sur la surface. Les courbes v = c^{te} partant d'un col soit monteront vers une crête, soit descendront vers une vallée, étant attendu que ce sont les directions de plus grand changement. Celles qui nous intéressent le plus sont celles qui descendent dans une vallée, *les chemins de plus grande pente*, parcequ'alors seul le voisinage du col apporte une réelle contribution :

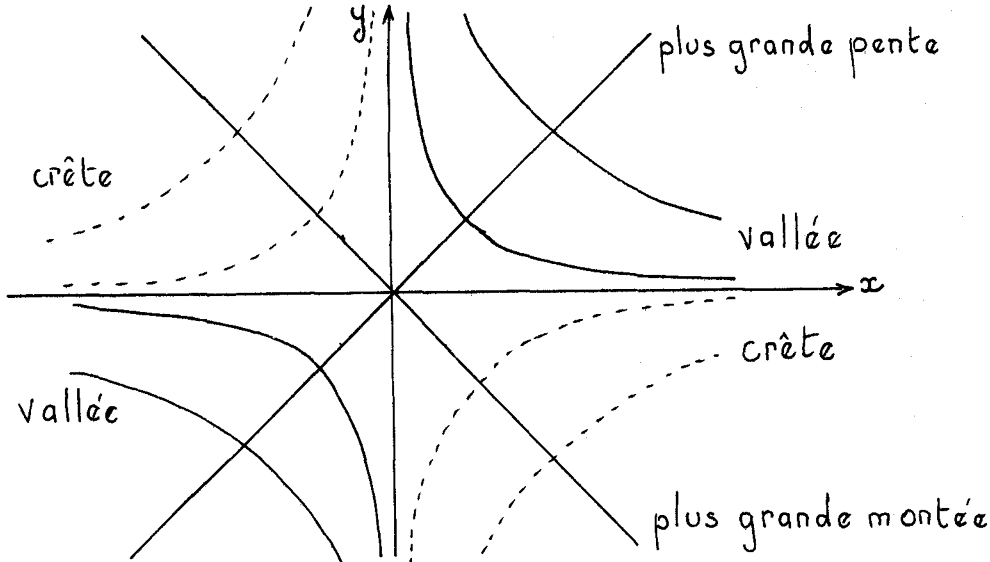


Fig.(a) : Contours u = c^{te} et chemins de plus grande pente.

A un col, $\frac{\partial u}{\partial x} = o$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = o$ d'où $\frac{\partial v}{\partial x} = o$, $\frac{\partial v}{\partial y} = o$. Par conséquent, $g'(z) = o$ au col, et là seulement. Supposons que $g''(z_o) = A.e^{j\alpha} \neq o$, où A est réel positif. Près de z_o, nous avons $z = z_o + re^{j\phi}$, et $g(z) = g(z_o) + \frac{1}{2} A.r^2.e^{j\alpha}.e^{2j\phi}$ $\Longrightarrow$
$u - u_o = \frac{1}{2} A.r^2.\cos(2\phi + \alpha)$, $v - v_o = \frac{1}{2} Ar^2 \sin(2\phi + \alpha)$.

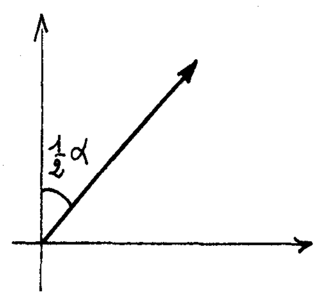
Une idée des contours et des chemins dans le voisinage est donnée sur la Fig.(a) dans le cas $\alpha = \frac{\Pi}{2}$. Si $g''(z_o) = o$, la figure se complique, car trois vallées ou plus se rencontrent au col.

Supposons maintenant que le contour d'intégration commence et finisse à l'infini, et puisse être déformé en un contour qui finisse et commence dans des vallées. Cela est nécessaire pour la convergence. Le contour est déformé dans la mesure du possible en chemins de plus grande pente parcourant le fond des vallées et passant par un col pour aller d'une vallée à l'autre.

Evaluons la contribution d'un tel chemin dans l'hypothèse $g''(z_o) \neq o$. Nous avons alors $g(z) = g(z_o) - (z - z_o)^2.h(z)$, où $h(z_o) \neq o$.

Les chemins de plus grande pente sont donnés par $(z - z_o)^2.h(z) = t^2$
$(z - z_o)\, h^{1/2} = \pm t$, où $h^{1/2}$ est la valeur principale. Cette équation a une solution qui s'annule en $t = o$ et qui est régulière dans le voisinage. On peut l'écrire $z = z_o \pm \sqrt{2}.A^{-1/2}.e^{-1/2j(\alpha+\Pi)}t + \dots$, où $h(z_o) = -\frac{1}{2}\, Ae^{j\alpha}$. Les deux signes correspondent aux deux chemins de plus grande pente issus du col, t étant positif sur les deux. Dans le cas de la Fig. (a), le signe + se rapporte au chemin du 3e quadrant, le signe - à celui du 1er quadrant.

Considérons le chemin correspondant au signe + représenté Fig. (b). Il nous conduit à l'intégrale :



$$e^{sg(z_0)} \cdot \int_0^\infty e^{-st^2} \cdot f(z_1) \cdot \frac{dz_1}{dt} dt$$

où

$$z_1 = z_0 + \sqrt{2}.A^{-\frac{1}{2}}.e^{-\frac{1}{2}j(\alpha+\Pi)}t + \dots$$

De même, l'autre chemin nous conduit à $e^{sg(z_0)} \cdot \int_0^\infty e^{-st^2} \cdot f(z_2) \cdot \frac{dz_2}{dt} \cdot dt$

où $z_2 = z_0 - \sqrt{2}.A^{-\frac{1}{2}}.e^{-\frac{1}{2}j(\alpha+\Pi)}t + \dots$

z_1 et z_2 s'exprimant en fonction de t (par une inversion de Lagrange), l'intégrant tout entier peut être écrit en fonction de t. Une substitution $t^2 = u$ donne alors des intégrales évaluables asymptotiquement par le lemme de Watson.

Nouq obtenons alors une série assez complexe, et nous nous contentons d'en extraire le premier terme. D'où :

$$\int_c e^{sg(z)} \cdot f(z) \cdot dz \sim e^{sg(z_0)} \left\{ \int_0^\infty e^{-st^2} \cdot f(z_0).\sqrt{2}.A^{-\frac{1}{2}}.e^{-\frac{j}{2}\cdot(\Pi-\alpha)} \cdot dt - \int_0^\infty e^{-st^2} \cdot f(z_0).\sqrt{2}.A^{-\frac{1}{2}}.e^{-\frac{j}{2}(\Pi+\alpha)} \cdot dt \right\}$$

$$\sim \left(\frac{2\Pi}{sAe^{j\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{j\frac{\Pi}{2}+sg(z_0)} \cdot f(z_0)$$

$$\sim \left(\frac{2\Pi}{sg''(z_0)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot f(z_0) \cdot e^{sg(z_0)+j\frac{\Pi}{2}}$$

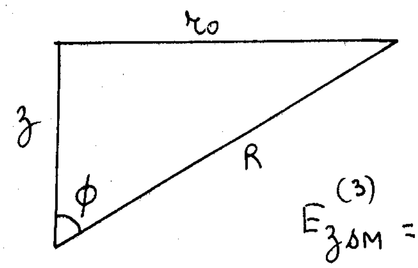
Le fait de n'extraire que le premier terme est suffisant lorsque $|s|$ est grand.

2° Application au calcul de C(z)

Nous devons évaluer l'intégrale

$$E_{zsM}^{(3)} = K \cdot \sqrt{\frac{-8j}{\Pi r_o}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jhz - j\beta_1 r_o} \cdot \beta_3^2 \cdot \beta_1^{-\frac{3}{2}} \cdot h \cdot dh$$

dans l'hypothèse où $|k_1 x \; r_o| > 16$, donc $r_o >>$.



Nous posons d'abord $\begin{cases} z = -R\cos\emptyset, \text{ d'où} \\ r_o = R\sin\emptyset \end{cases}$

$$E_{zsM}^{(3)} = K\sqrt{\frac{-8j}{\Pi r_o}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jR(h\cos\theta + \beta_1 \sin\theta)} \cdot \beta_3^2 \cdot \beta_1^{-\frac{3}{2}} \cdot h \cdot dh$$

Nous passons dans le plan complexe en posant $h = k_1 \cos\alpha$. Cette transformation est une *transformation conforme*.

$$h = k_1\cos\alpha \Rightarrow \beta_1 = k_1 \sin\alpha \Rightarrow E_{zsM}^{(3)} = -\frac{K}{2}\sqrt{\frac{-8j}{\Pi r_o}} \cdot \int_C e^{-jk_1 R\cos(\alpha-\theta)} \cdot \frac{\beta_3^2(\alpha)}{\beta_1^{3/2}(\alpha)} \cdot k_1^2 \cdot \sin 2\alpha \, d\alpha$$

Pour reprendre les notations précedentes, nous aurons :

$\alpha = x + jy$, $g(\alpha) = -jk_1\cos(\alpha-\emptyset)$, $s = R = \sqrt{r_o^2 + z^2} > r_o$

et $f(\alpha) = -K\sqrt{\frac{-8j}{\Pi r_o}} \cdot \frac{\beta_3^2(\alpha)}{\beta_1^{3/2}(\alpha)} \cdot k_1^2 \sin\alpha\cos\alpha$

$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = jk_1 \sin(\alpha-\emptyset) = o$ si $\alpha = \emptyset$

On a bien $g(\;) = jk_1(\cos(x-\emptyset).\mathrm{ch}y + j.\sin(x-\emptyset).\mathrm{sh}y) = u(x, y) + jv(x, y)$

et $\frac{\partial u}{\partial x} = jk_1 \cdot \sin(x-\phi) \cdot \mathrm{ch}y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -jk_1 \cdot \mathrm{sh}y \cdot \cos(x-\phi)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -jk_1 \cos(x-\phi) \cdot \mathrm{sh}y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -jk_1 \sin(x-\phi) \cdot \mathrm{ch}y$

On a bien $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \iff x = \phi, y = 0 \iff \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\alpha = x+jy = \emptyset$ est donc bien un col.

Comme nous avons $g''(\alpha) = +jk_1\cos(\alpha-\emptyset) = +jk_1 \neq o$ en $\alpha = \emptyset$, nous pouvons écrire :

$$\int_C e^{sg(\alpha)} f(\alpha)\, d\alpha \sim \left[\frac{2\Pi}{s\, g''(\phi)}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot f(\phi) \cdot e^{sg(\phi) + j\frac{\Pi}{2}}$$ soit

$$E^{(3)}_{zsM} \sim -K\sqrt{\frac{-8j}{\Pi r_o}} \cdot \left(\frac{2\Pi}{jk_1R}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\beta_3^2(\phi)}{\beta_1^{3/2}(\phi)} \cdot k_1^2 \cdot \sin\phi \cdot \cos\phi \cdot e^{-jk_1R + j\frac{\Pi}{2}}$$

$$E^{(3)}_{zsM} \sim -K\sqrt{\frac{-8j}{\Pi r_o}} \cdot \left(\frac{2\Pi}{jk_1R}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{k_3^2 - k_1^2\cos^2\phi}{(k_1 \sin\phi)^{3/2}} \cdot k_1^2 \sin\phi \cdot \cos\phi \cdot e^{-jk_1R + j\frac{\Pi}{2}}$$

$$E^{(3)}_{zsM} \sim -jK\left(\frac{-16}{k_1 r_o R}\right)^{\frac{1}{2}} \left[k_3^2 - k_1^2 + k_1^2\sin^2\phi\right]\left(\frac{k_1}{\sin\phi}\right)^{1/2} \cdot \cos\phi \cdot e^{-jk_1R}$$

Ensuite, nous remplaçons cos$\emptyset$ et sin$\emptyset$ par $\frac{z}{R}$ et $\frac{r_o}{R}$, et obtenons

$$E^{(3)}_{zsM} \sim 4K\left(k_3^2 - k_1^2\right) \cdot \frac{z}{r_o} \cdot \frac{e^{-jk_1R}}{R} + 4K \cdot \frac{r_o z}{R^3} \cdot k_1^2 \cdot e^{-jk_1R}$$

CHAPITRE III

III DETERMINATION DE LA COMPOSANTE VERTICALE DU CHAMP ELECTRIQUE SUR L'AXE D'UN TUBAGE DE LONGUEUR FINIE PAR UNE METHODE NUMERIQUE.

III 1. Position du problème

III 1. 1. Limitation de l'étude précédente

L'étude menée au chapitre précédent suppose que nous sommes en présence d'un tubage de grande longueur. L'atténuation du signal au niveau de l'extrémité du tubage est alors suffisante pour considérer que cette extrémité est rejetée à l'infini et permettre de nous dispenser de l'écriture de conditions aux limites à ce niveau. Mais, avec une telle hypothèse, l'effet de conduction est masqué par l'effet de propagation.

Dans la pratique, la longueur du tubage est nettement inférieure à la profondeur de pénétration. Il est alors préférable de raisonner en termes de "courants", plutôt qu'en termes de "champs", les phénomènes de conduction étant prioritaires.

Mais, l'hypothèse d'une longueur L inférieure à la profondeur de pénétration nous impose l'écriture de conditions aux limites sur l'interface $z = -L$; cette surface n'étant pas une surface de coordonnées puisque la coordonnée r est bornée, le calcul analytique est alors impossible. Il faut donc trouver une nouvelle méthode pour laquelle le fait que la surface de discontinuité soit ou non une surface de coordonnées ne pose pas de difficulté majeure.

III 1. 2. *Développement des méthodes numériques dans le traitement des problèmes d'électromagnétisme*

La recherche d'un système de coordonnées dans lequel on peut résoudre l'équation d'onde $(\Delta + k^2)\vec{\Pi} = \vec{0}$ par séparation de variables laisse apparaître une quinzaine de solutions ; certaines de ces solutions offrent la possibilité d'écrire les conditions aux limites sur des surfaces assez complexes, mais aucune ne satisfait à notre problème. Nous devons donc éliminer toute tentative de résolution analytique.

Nous trouvons dans la littérature de nombreux exemples de résolution numérique de problèmes d'électromagnétisme. C'est essentiellement dans l'étude des antennes qu'est proposé ce type de solution ; que ce soit dans l'étude du comportement des antennes de faible section et de forme arbitraire, ou dans l'étude des diagrammes de rayonnement d'une antenne placée à proximité d'un corps conducteur de forme compliquée (cas d'une antenne placée sur un avion, un sous-marin ou un satellite). Les premiers articles à ce sujet remontent à 1963.[14],[15],[16].

Par contre, cette méthode de résolution semble jusqu'ici peu utilisée en géopropagation, mais son développement dans les années à venir ne fait aucun doute en raison de sa souplesse d'utilisation et du développement des ordinateurs à hautes performances.

III 1. 3. *Application de ce type d'étude dans le cadre du "Modèle Mathématique du Télélog."*

Il a été décidé, en accord avec l'A.R.T.E.P., que l'équipe du Professeur GABILLARD étudierait la faisabilité d'un modèle mathématique du Télélog dans le but d'élargir le domaine d'application de la méthode "Télélog" en se dispensant d'une étude analogique sur cuve et en permettant de modifier facilement la forme de l'anomalie étudiée ainsi que sa conductivité ; les problèmes inhérents à la technologie des modèles analogiques sont alors écartés.

L'étude numérique que nous allons présenter a donc été réalisée dans le cadre du "Modèle Mathématique du Télélog". Le tubage peut en effet être considéré comme une anomalie de résistivité, et nous aurons à évaluer le champ électrique à l'intérieur de cette anomalie. Pour mener à bien cette étude, il nous a fallu mettre au point des procédures de calcul qui pourront être reprises sans modifications pour des problèmes similaires, et nous aurons ainsi contribué à l'avancement des recherches dans le cadre du projet de "Modèle Mathématique du Télélog".

III 2. Mise en équations du problème général

III 2. 1. Formalisme utilisé

Considérons un milieu infini d'indice 1 contenant un dipôle électrique D et une anomalie appelée milieu 2.
Du point de vue électrique, nous pouvons considérer ces milieux comme un ensemble de charges et de courants électriques répartis dans le vide de caractéristiques ε_o et μ_o.

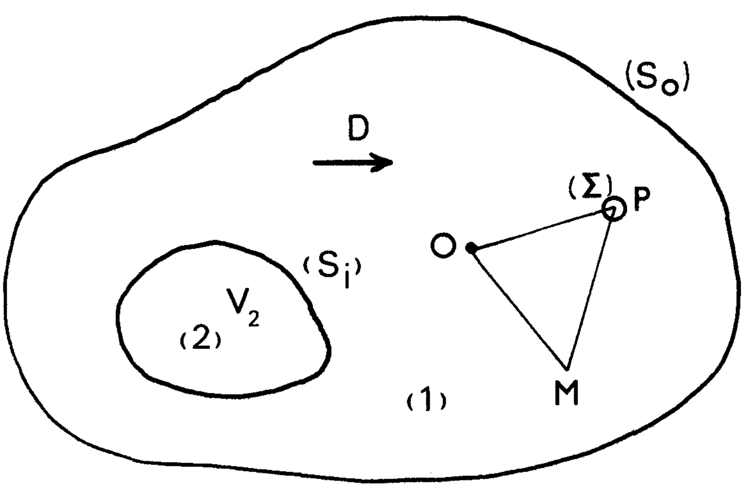


Fig. 8.

Soit Δ le domaine limité par la surface S_o. (Fig. 8.).
Si nous voulons prendre un domaine infini, nous considérerons S_o comme étant la sphère du centre O et de rayon infini, à supposer que l'on ait défini une origine O.

Les champs électromagnétiques $\vec{B}$ et $\vec{E}$, en tout point de Δ, dérivent de deux potentiels $\emptyset$ et $\vec{A}$. Nous pouvons écrire les relations :

(51) $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ \emptyset - j w \vec{A}$ (52) $\Delta \vec{A} + k_o^2\ \vec{A}_2 = -\mu_o . \vec{\rho}_{mv}$

(53) $\operatorname{div} \vec{A} - \frac{k_o^2}{jw} \cdot \emptyset = 0$ (54) $\vec{B} = \vec{rot}(\vec{A})$

(55) $\Delta\emptyset + k_o^2\emptyset = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$

Dans ces relations, $k_o^2 = -\omega^2\mu_o\varepsilon_o$; ρ et $\vec{\rho}_{mv}$ sont définis par :

$$\vec{\rho}_{mv} = \vec{J} + j\omega\vec{P} + \vec{rot}(\vec{M}) \qquad (56)$$

$$\rho = \rho_{lib} - \operatorname{div} \vec{P} \qquad (57)$$

Dans les relations (52) et (55), $\vec{\rho}_{mv}$ est la densité de charges mobiles ; ρ est la densité de charges ; $\vec{J}$ est la densité de courant de conduction ; $\vec{P}$ est la polarisation ; $\vec{M}$ est la densité de moment magnétique ; ρ_{lib} est la densité de charges libres.

Ce formalisme est celui utilisé par R. W. P. KING [17]

III 2. 2. Cas du demi-milieu

Considérons deux demi-milieux homogènes et infinis d'indices respectifs 0 et 1. Le demi-milieu 1 est limité par le plan (P) d'équation z = 0 et la demi-sphère inférieure de rayon infini centrée en O (voir Fig.9.). Il contient un dipôle électrique dirigé suivant l'axe de coordonnées $O\vec{X}$ et situé sur l'axe $O\vec{Z}$ à une profondeur h, ainsi qu'une anomalie électrique d'indice 2 de forme quelconque. Le demi-milieu d'indice 0 est limité par le plan P et la demi-sphère supérieure de rayon infini.

En nous plaçant dans le milieu (1), nous pouvons écrire les formules (51) à (57). Nous allons chercher à évaluer les potentiels $\emptyset$ et $\vec{A}$ en fonction des différentes densités de charges et de courants.

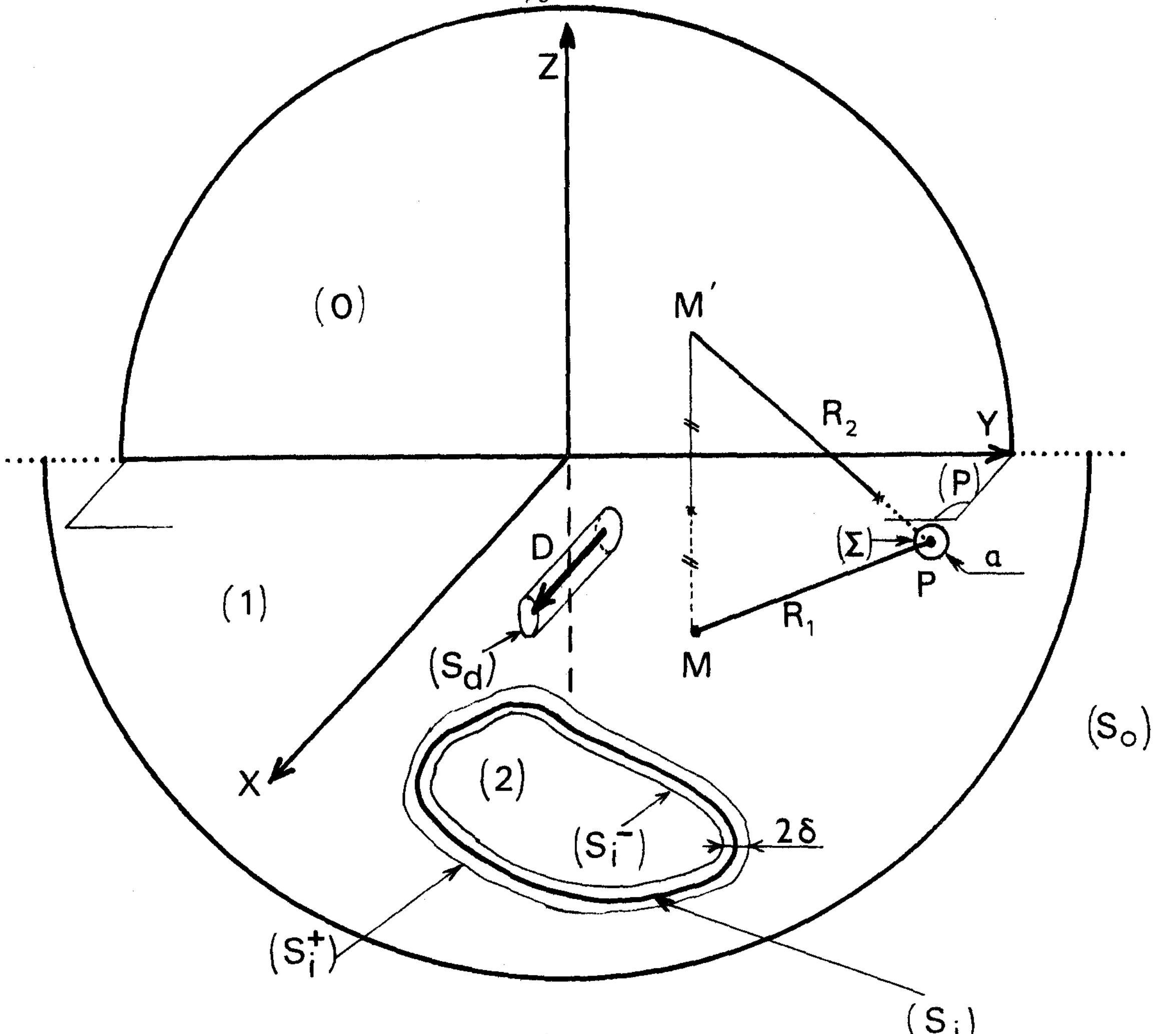


Fig. 9.

III 2. 3. Application du théorème de Green

Soit une fonction scalaire définie dans tout l'espace par l'équation de Helmoltz $\Delta\Psi + k_o^2\Psi = o$. Si nous supposons que Ψ n'est fonction que de la distance entre le point d'observation et un point courant, nous pouvons prendre comme solution particulière de l'équation ci-dessus :

$$\Psi = \frac{e^{-jk_oR_1}}{R_1} - \frac{e^{-jk_oR_2}}{R_2}$$

R_1 est la distance entre le point d'observation P et le point courant M. R_2 est la distance entre P et le symétrique M' de M par rapport au plan (P).

Appliquons le théorème de Green à la fonction scalaire Ψ et au potentiel $\emptyset$, sous réserve que ces fonctions soient continues et dérivables dans tout le domaine Δ ainsi que leurs dérivées première et seconde :

$$\int_{\Delta}(\psi\Delta\phi-\phi\Delta\psi)\,dv=\int_{S}\left(\psi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS \qquad (58),$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ signifie $\vec{n}.\vec{grad}$, $\vec{n}$ étant dirigé vers l'extérieur de S.

On élimine les discontinuités de $\emptyset$ et Ψ en entourant ces zones de surfaces limitant des volumes infiniment petits. Ces discontinuités se traduiront alors par des intégrales de surface.

- on élimine la discontinuité de Ψ en $\frac{1}{R}$ en entourant P d'une sphère $\Sigma(P,a)$.
- on élimine la discontinuité de la dérivée normale de $\emptyset$ au niveau de l'interface (2), (1) en entourant S_i de deux surfaces S_i^+ et S_i^- parallèles à S_i et situées de part et d'autre à une distance δ.
- on élimine la discontinuité de $\frac{\partial\emptyset}{\partial n}$ au niveau du dipôle en entourant D d'un petit cylindre, parallèle et situé à une distance δ', noté S_d.

Ces différentes surfaces sont représentées sur la Fig. ( ) s'écrira alors:

$$\int_{v}(\psi\Delta\phi-\phi\Delta\psi)\,dv=\int_{S_o}+\int_{P}+\int_{\Sigma}+\int_{S_i^-}+\int_{S_i^+}+\int_{S_d}\left(\psi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS$$

Nous savons évaluer le premier membre de la relation ci-dessus :

$$\int_{v}(\psi\Delta\phi-\phi\Delta\psi)\,dv=\int_{v}(\Delta\phi+k_o^2\phi)\cdot\psi\cdot dv=-\frac{1}{\varepsilon_o}\int_{v}\bar{\rho}\cdot\psi(R_1,R_2)\cdot dv$$

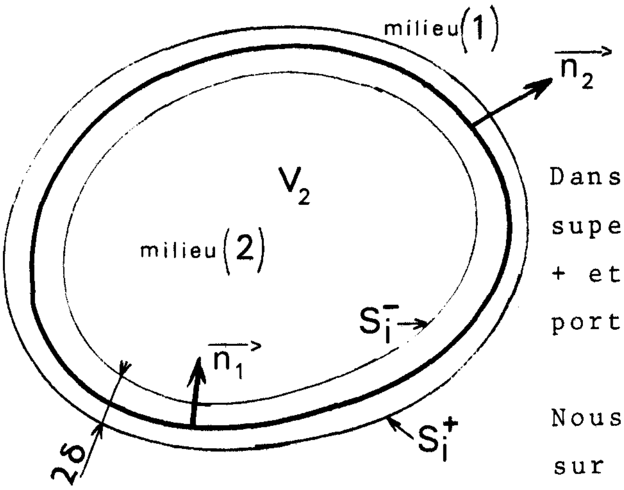
compte-tenu de l'équation de Helmotz et de (55).

Pour évaluer le second membre, nous appliquerons au niveau de S_i les conditions suivantes : $\vec{E}_1.\vec{n}_1+\vec{E}_2.\vec{n}_2=-\frac{\bar{\eta}}{\varepsilon_o}$, ou encore :

$$\frac{\partial\emptyset+}{\partial n_1}+\frac{\partial\emptyset-}{\partial n_2}=\frac{\bar{\eta}}{\varepsilon_o} \quad (59), \text{ ainsi que } \quad \vec{A}+=\vec{A}- \quad (60)$$

$$\emptyset+=\emptyset- \quad (61)$$

où $\bar{\eta}=\eta_{lib}-\vec{n}.\vec{P}$



Dans ces relations, $\bar{\eta}$ désigne la densité superficielle de charges, et les notations + et - des relations (60) et (61) se rapportent aux surfaces S_i^+ et S_i^-.

Nous appellerons η_A la densité superficielle sur l'antenne.

Dans ces conditions, une fois les calculs effectués sur les différentes surfaces nous obtenons : [18]

(62)
$$\boxed{\begin{aligned}\phi_{milieu\,1} = {} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \bar{\rho}\cdot\Psi(R_1,R_2)\,dv + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_i}\bar{\eta}\cdot\Psi(R_1,R_2)\,dS \\ & + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{Sd}\eta_A\cdot\Psi(R_1,R_2)\,dS + \frac{1}{4\pi}\int_P \phi_1\cdot\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\Psi(R_1,R_2)\right)\right]_{z'=0} dS\end{aligned}}$$

Nous obtenons une relation analogue, mais vectorielle, pour $\vec{A}_1$. Le demi-milieu inférieur a été remplacé par un milieu homogène et infini tel que les distributions de courants et de charges en deux points symétriques par rapport à l'interface soient opposés (similitude avec la théorie des images).

III 2. 4. Cas des milieux isotropes, linéaires, homogènes et conducteurs imparfaits.

Si les milieux (1) et (2) sont des milieux I.H.L. et mauvais conducteurs, il est possible [18] de poser $\bar{\rho}=\rho_{lib}=o$ et $\vec{P} = \vec{o}$, et de faire intervenir les caractéristiques ε_1, ε_2, μ_1, μ_2, dans les fonctions de Green.

Nous obtenons, pour les potentiels $\emptyset$ et $\vec{A}$ dans le milieu (1) :

(63)
$$\boxed{\begin{aligned}\phi_1 = {} & \frac{j\omega}{4\pi\sigma_1}\int_{S_i}\bar{\eta}\cdot\left(\frac{e^{-jk_1R_1}}{R_1} - \frac{e^{-jk_1R_2}}{R_2}\right)dS + \frac{1}{4\pi\sigma_1}\int_{S\,dipole}\vec{J_o}\cdot\vec{n}\cdot\frac{e^{-jk_1R_1}}{R_1}\,dS \\ & + \frac{1}{4\pi}\int_P \phi_1\cdot\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{e^{-jk_1R_1}}{R_1} - \frac{e^{-jk_1R_2}}{R_2}\right)\right]_{z'=0} dS + \frac{1}{4\pi\sigma_1}\int_{S\,dipole\ image}\vec{J_o}\cdot\vec{n}\cdot\frac{e^{-jk_1R_2}}{R_2}\,dS\end{aligned}}$$

$$(64)\qquad \boxed{\begin{aligned}\vec{A}_1 = {} & \frac{\mu_1}{4\pi}\cdot\frac{\mu_2\sigma_2-\mu_1\sigma_1}{\mu_1}\cdot\int_{v_2}\vec{E}_2\cdot\left(\frac{e^{-jk_1R_1}}{R_1}-\frac{e^{-jk_1R_2}}{R_2}\right)dv + \frac{\mu_1}{4\pi}\oint_{S\ \text{dipole}}\vec{J_0}\cdot\frac{e^{-jk_1R_1}}{R_1}\,dx \\ & -\frac{\mu_1}{4\pi}\,\vec{J_0}\cdot\oint_{\text{dipole image}}\frac{e^{-jk_1R_2}}{R_2}\,dx + \frac{1}{4\pi}\int_P\vec{A}_1\cdot\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{e^{-jk_1R_1}}{R_1}-\frac{e^{-jk_1R_2}}{R_2}\right)\right]_{z'=0} dS\end{aligned}}$$

Les potentiels inconnus sont donc solutions d'équations intégrales complètes dans le second membre desquelles apparaissent :

- une distribution $\bar{\eta}$ inconnue ......pour $\emptyset$
- le champ $\vec{E}_2$ à l'intérieur de l'anomalie ......pour $\vec{A}$.

III 2. 5. Transformation des équations donnant $\emptyset$ et $\vec{A}$

Nous donnons dans ce paragraphe un aperçu du traitement utilisé pour transformer l'expression de $\emptyset$ afin de la mettre sous une forme exploitable numériquement. Le même type de transformations est fait sur $\vec{A}_1$.

. Cas de l'intégrale sur le dipôle : Fig. 10.

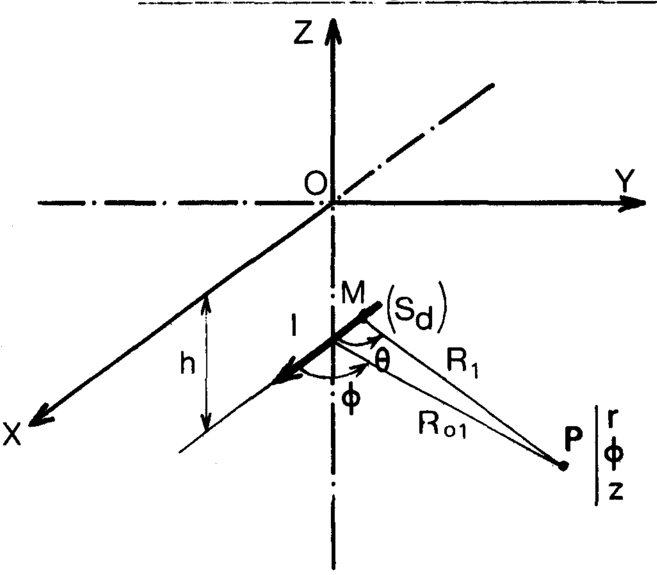


Fig. 10.

Soit M le point courant sur le dipôle.
Soit R_{01} la distance entre le point P d'observation et le milieu du dipôle.
Nous supposerons que la longueur l du dipôle est faible vis à vis de R_{01}.
L'intégrale $I_1 = \dfrac{1}{4\pi\sigma_1}\displaystyle\int_{S_d}\vec{J_0}\cdot\vec{n}\cdot\frac{e^{-jk_1R_1}}{R_1}\cdot dS$

peut alors s'écrire :

$$I_1 \# \frac{J_0\cdot\ell}{4\pi\sigma_1}\cdot\cos\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-jk_1R_{01}}}{R_{01}}\right)$$

, ou encore, en utilisant la transformation de Fourier-Bessel :

$$I_1 \# \frac{J_0\cdot\ell}{4\pi\sigma_1}\cdot\cos\varphi\int_0^\infty\frac{\lambda^2}{u_1}\cdot e^{-u_1|z+h|}\cdot J_1(\lambda r)\cdot d\lambda$$

. Cas de l'intégrale sur l'anomalie : Fig. 11.

Dans le système Oxyz de référence, M a pour coordonnées R, Z, $\emptyset$

P a pour coordonnées r, z, ϕ.

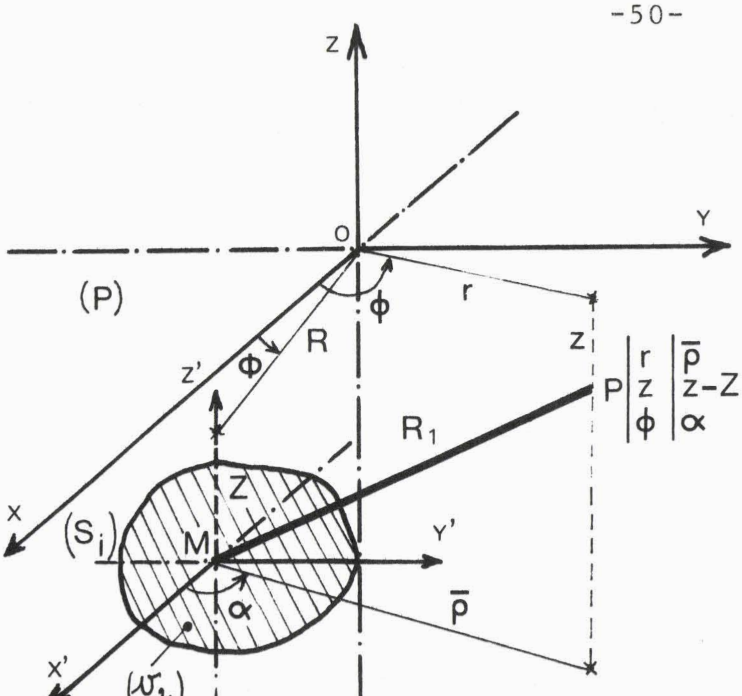


Fig. 11.

Dans le système Mx'y'z' lié au point courant M dans l'anomalie, P a pour coordonnées $\bar{\rho}$, z - Z, α

Nous allons transformer l'intégrale $I_2 = \frac{j\omega}{4\pi\sigma_1} \cdot \int_{S_i} \bar{\eta} \cdot \frac{e^{-jk_1R_1}}{R_1} \cdot dS$

Le calcul sera le même pour le symétrique de M / (P). (I'_2)

[19]

Nous avons $\frac{j\omega}{4\pi\sigma_1} \cdot \int_{S_i} \bar{\eta} \cdot \psi(R_1,R_2) \cdot dS = \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1} \cdot \int_{v_2} \vec{E_2} \cdot \overrightarrow{grad}_M \left(\psi(R_1,R_2)\right) \cdot dv$

D'où $I_2 + I'_2 = \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1} \cdot \int_{v_2} \vec{E_2} \cdot \overrightarrow{grad}_M \left[\int_0^\infty \frac{\lambda}{u_1} \cdot \left(e^{-u_1|z-Z|} - e^{u_1(z+Z)} \right) \cdot J_0(\lambda\bar{\rho}) \cdot d\lambda \right]$.

Nous remplaçons ensuite $J_0(\lambda\bar{\rho})$ par son développement en fonction de r, R, ϕ, $\varnothing$:

$$J_0(\lambda\bar{\rho}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (2-\delta_0^\nu)\, J_\nu(\lambda r)\, J_\nu(\lambda R) \left(\cos\nu\varphi \cdot \cos\nu\phi - \sin\nu\varphi \cdot \sin\nu\phi \right)$$

et nous explicitons le gradient au point M

. <u>Cas de l'intégrale sur le plan</u>. Nous pouvons écrire :

$$I_3 = \frac{1}{4\pi} \int_P \phi_1(M) \left[\frac{\partial}{\partial z'} \left(\psi(R_1,R_2) \right) \right]_{z'=0} \cdot dS = \frac{1}{4\pi} \int_P \phi_1(M) \int_0^\infty 2\lambda \cdot e^{u_1 z} \cdot J_0(\lambda\rho_1) \cdot d\lambda ,$$

ρ_1 étant la mesure de la projection horizontale de $\vec{MP}$, M décrivant le plan P. Comme précédemment, nous appliquons les théorèmes d'addition à $J_0(\lambda\rho_1)$. Ensuite, nous développons la fonction inconnue $\varnothing_1$ en série de FOURIER :

$$\phi_1(r,\varphi,z) = \phi_0(z,r) + \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(r,z) \cdot \cos(n\varphi) + \sum_{n=1}^{+\infty} \phi'_n(r,z) \cdot \sin(n\varphi)$$

Il est alors possible, en reportant dans l'expression de I_3, de mettre en évidence des coefficients qui sont les transformées de Hankel des $\varnothing_n$ et ϕ'_n. [19]

Les seconds membres de (63) et (64) seront alors connus lorsque ces coefficients seront déterminés.

Nous déterminons de la même façon les expressions des potentiels scalaire et vecteur dans le milieu (0), et nous appliquons les conditions aux limites sur l'interface (0) /(1) ;
pour z = 0, nous écrivons : $k_1^2 E_{z_1} = k_0^2 E_{z_0}$, $\vec{A_1} = \vec{A_0}$, $\phi_1 = \phi_0$,

$$\frac{\partial}{\partial z}(A_x^1) = \frac{\partial}{\partial z}(A_x^0) \, , \quad \frac{\partial}{\partial z}(A_y^1) = \frac{\partial}{\partial z}(A_y^0) \, , \quad \frac{1}{k_1^2} \cdot \operatorname{div} \vec{A_1} = \frac{1}{k_0^2} \operatorname{div} \vec{A_0}$$

Nous faisons ensuite l'approximation $U_o \# \lambda$ et $k_o \# o$, ce qui donne, pour le potentiel scalaire dans le milieu (1), tous calculs faits :

(65)
$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_1 = {} & \frac{I\ell}{4\pi\sigma_1} \cdot \cos\varphi \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_1} \left(e^{-u_1|z+h|} + e^{u_1(z-h)} \cdot \frac{2u_1-\lambda}{\lambda} \right) \cdot J_1(\lambda r) \cdot \lambda \, d\lambda \\ & + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1} \int_{v_2} \left(E_{2x} \cdot \cos\alpha + E_{2y} \cdot \sin\alpha \right) \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_1} \left(e^{-u_1|z-Z|} + e^{u_1(z+Z)} \cdot \frac{2u_1-\lambda}{\lambda} \right) J_1(\lambda\bar{\rho}) \lambda \, d\lambda \, dv \\ & + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1} \int_{v_2} E_{2z} \int_0^\infty \left(\varepsilon \, e^{-u_1|z+Z|} + e^{u_1(z+Z)} \right) J_0(\lambda\bar{\rho}) \, \lambda \, d\lambda \, dv\end{aligned}}$$

E_{2x}, E_{2y}, et E_{2z} sont les composantes cartésiennes de $\vec{E}$ à l'intérieur de l'anomalie; $\varepsilon = +1$ si $|Z| > |z|$.

Les composantes cartésiennes du vecteur $\vec{A}$ sont déterminées par des calculs analogues ; leur calcul est mené de front avec celui de ϕ.

Nous trouvons dans le milieu 1 :

(66)
$$\boxed{\begin{aligned}A_x^1 = {} & \frac{\mu_0 I\ell}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{u_1} \cdot \left[e^{-u_1|z+h|} + e^{u_1(z-h)} \cdot \frac{u_1-\lambda}{u_1+\lambda} \right] \cdot J_0(\lambda r) \cdot \lambda \cdot d\lambda \\ & + \mu_0 \cdot \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi} \int_{v_2} E_{2x} \int_0^\infty \frac{1}{u_1} \cdot \left[e^{-u_1|z-Z|} + e^{u_1(z+Z)} \cdot \frac{u_1-\lambda}{u_1+\lambda} \right] J_0(\lambda\bar{\rho}) \cdot \lambda \cdot d\lambda \cdot dv \\ A_z^1 = {} & \frac{-\mu_0 I\ell}{4\pi} \cos\varphi \int_0^\infty \frac{2}{\lambda+u_1} \cdot e^{u_1(z-h)} \cdot J_1(\lambda r) \cdot \lambda \cdot d\lambda \\ & - \mu_0 \cdot \frac{(\sigma_2-\sigma_1)}{4\pi} \int_{v_2} \left(E_{2x} \cos\alpha + E_{2y} \sin\alpha \right) \int_0^\infty \frac{2}{\lambda+u_1} \cdot e^{u_1(z+Z)} \cdot J_1(\lambda\bar{\rho}) \cdot \lambda \cdot d\lambda \cdot dv \\ & + \mu_0 \cdot \frac{(\sigma_2-\sigma_1)}{4\pi} \int_{v_2} E_{2z} \int_0^\infty \frac{1}{u_1} \cdot \left[e^{-u_1|z-Z|} - e^{u_1(z+Z)} \right] \cdot J_0(\lambda\bar{\rho}) \cdot \lambda \cdot d\lambda \cdot dv\end{aligned}}$$

$$A_y^1 = \frac{\mu_0(\sigma_2-\sigma_1)}{4\pi} \int_{v_2} E_{2y} \int_0^\infty \frac{1}{\mu_1} \left[e^{-\mu_1|z-Z|} + e^{\mu_1(z+Z)} \cdot \frac{\mu_1-\lambda}{\mu_1+\lambda} \right] J_0(\lambda\bar{\rho}) \cdot \lambda \cdot d\lambda \cdot dv \tag{66}$$

Dans l'établissement de ces formules, *nous avons supposé les milieux non magnétiques,* donc $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.

III 2. 6. Calcul de E_z dans le milieu 1

Nous partons de l'équation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, \varnothing_1 - j\omega \vec{A_1}$, ce qui nous donne $E_z = -\frac{\partial \varnothing_1}{\partial z} - j\omega A_z^1$. Une fois les calculs effectués, nous obtenons :

$$\begin{aligned} E_z^1 = & \frac{-I\ell}{4\pi\sigma_1} \cdot \cos\varphi \cdot \int_0^\infty 2\lambda \cdot e^{\mu_1 z} \cdot J_1(\lambda r) \cdot \lambda \cdot d\lambda \\ & + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1} \cdot \int_{v_2} (E_{2x} \cdot \cos\alpha + E_{2y} \cdot \sin\alpha) \int_0^\infty \lambda \left[\varepsilon \cdot e^{-\mu_1|z-Z|} - e^{\mu_1(z+Z)} \right] J_1(\lambda\bar{\rho}) \cdot \lambda \cdot d\lambda \cdot dv \\ & + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1} \cdot \int_{v_2} E_{2z} \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{\mu_1} \left[e^{-\mu_1|z-Z|} - e^{\mu_1(z+Z)} \right] \cdot J_0(\lambda\bar{\rho}) \cdot \lambda \cdot d\lambda \cdot dv \end{aligned} \tag{67}$$

Pour établir cette formule, *nous avons supposé que le dipôle était placé à la surface du sol,* donc que nous avions h = o.

III 3. Traitement numérique général

III 3. 1. La méthode des moments [20],[21].

Le nom de "méthode des moments" a été donné à la procédure mathématique qui permet de passer de l'équation fonctionnelle de départ à une équation matricielle. Parfois, cette procédure est rangée dans la catégorie des techniques d'approximation, mais c'est en fait une appellation erronée lorsque la solution converge à la limite.

Partons d'une équation non homogène L(f) = g, où L est un opérateur linéaire, g est l'excitation (fonction connue), et f est la réponse (fonction inconnue à déterminer).

Nous définissons successivement :

. le produit intérieur $<f, g>$, qui est un scalaire satisfaisant

à $<f, g> \quad <g, f>$ (68)

$<\alpha f + \beta g, h> = \alpha<f, h> + \beta<g, h>$ (69)

$<f^*, f> > o$ si $f \neq o$ et $<f^*, f> = o$ si $f = o$ (70)

où α et β sont des scalaires, et où * désigne le conjugué complexe.

. la norme $||f|| = \sqrt{<f, f^*>}$

. la métrique $d(f, g) = ||f-g||$

Les propriétés de la solution $L(f) = g$ (71) dépendent des propriétés de l'opérateur L.

Supposons que f puisse être développée en série de fonctions f_1, f_2, f_3..... appartenant au domaine d'application de L :

$$f = \sum_n \alpha_n \cdot f_n \qquad (72)$$

où les α_n sont des constantes. Les f_n sont appelées fonctions de base. Pour obtenir des solutions exactes, (72) est généralement une somme infinie, et les f_n forment un ensemble complet de fonctions de base. Pour des solutions approchées, (72) est généralement une somme finie.

En reportant (72) dans (71), et en utilisant la linéarité de L, nous obtenons :

$$\sum_n \alpha_n \; L(f_n) = g \qquad (73)$$

Supposons qu'un produit intérieur $<f, g>$ ait été défini de façon adéquate pour un problème donné. Définissons un ensemble de "fonctions poids" W_1, W_2, ...W_n dans le domaine de L, et prenons le produit intérieur de (73) avec chaque W_m. Le résultat est :

$$\sum_n \alpha_n \; <W_m, L(f_n)> = <W_m, g> \qquad \text{pour } m = 1, 2, 3...$$

Cet ensemble d'équations peut s'écrire sous forme matricielle :

$$|l_{mn}| \cdot |\alpha_n| = |g_m| \qquad \text{avec}$$

$$|l_{mn}| = \begin{vmatrix} \langle W_1, L(f_1)\rangle & \langle W_1, L(f_2)\rangle \ldots\ldots \\ \langle W_2, L(f_1)\rangle & \langle W_2, L(f_2)\rangle \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} ,$$

$$|\alpha_n| = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad |g_m| = \begin{vmatrix} \langle W_1, g\rangle \\ \langle W_2, g\rangle \\ \cdot \\ \cdot \end{vmatrix}$$

Si la matrice $|l|$ n'est pas singulière, $|l^{-1}|$ existe, et nous avons :

$$|\alpha_n| = |l^{-1}_{nm}| \cdot |g_m|$$

La solution f est alors donnée par (72).

Pour une expression plus concise du résultat, définissons la matrice des fonctions $|\tilde{f}_n| = |f_1 \; f_2 \; f_3 \; \ldots|$ et écrivons :

$$\boxed{|f| = |\tilde{f}_n| \cdot |\alpha_n| = |\tilde{f}_n| \cdot |l^{-1}_{mn}| \cdot |g_m|}$$

Cette solution peut être exacte ou approchée selon le choix des f_n et des W_n. Si la matrice $|l|$ est d'ordre infini, elle peut être inversée dans certains cas précis, par exemple si elle est diagonale. La méthode classique de développement de f sous forme de fonctions propres conduit à une matrice diagonale et peut être alors considérée comme un cas particulier de la méthode des moments.

La principale difficulté, pour un problème donné, est évidemment le choix des fonctions f_n et W_n. Les f_n doivent être linéairement indépendantes, ainsi que les W_n. Leur choix sera de plus fonction :

- de la précision souhaitée,
- de la commodité de calcul des $\langle W_m, L(f_n)\rangle$,
- de la taille de la matrice à inverser.

III 3. 2. "Point Matching Method" et "Subsectional bases"

En général, l'évaluation des termes $l_{mn} = \langle W_m, L(f_n) \rangle$ nécessite une intégration qui se révèle délicate dans les problèmes pratiques. Une manière simple d'obtenir des solutions approchées est de supposer que la relation (73) est satisfaite en des points discrets de l'espace sur lequel porte l'intégration. Cette procédure est appelée "Point Matching Method". Elle revient à utiliser des fonctions de Dirac $\delta(x-x_m)\ \delta(y-y_m)\ \delta(z-z_m)$ comme fonctions-poids W_m.

Une autre approximation utilisée dans les problèmes pratiques est la méthode des "Subsectional bases". Elle implique l'utilisation de fonctions de base f_n telles que chacune d'entre elles n'existe que sur une fraction du domaine d'application de f. Chaque α_n intervenant dans l'expression (72) n'affecte alors l'approximation de f que sur une fraction de la région qui nous intéresse. Cette procédure simplifie souvent l'évaluation et (ou) la forme de la matrice $|l|$. Nous pouvons donc écrire, en divisant le volume V qui nous intéresse en N volumes élémentaires ΔV_n :

$$f_n = \left| \begin{array}{l} 1 \quad \text{dans } \Delta V_n \\ \\ 0 \quad \text{dans } \Delta V_i,\ i \neq n \end{array} \right.$$

Il est parfois judicieux d'utiliser simultanément les deux méthodes décrites dans ce paragraphe.

III 3. 3. Transformation de l'équation intégrale définissant E_z

Nous avons vu que E_z était donné par l'équation intégrale :

$$\mathcal{E}_z = \frac{-I.\ell}{4\pi\sigma_1} \cdot \cos\varphi \cdot \int_0^\infty 2\lambda . e^{u_1 z} . J_1(\lambda r).\lambda.d\lambda$$

$$+ \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1} \cdot \int_{v_2} (E_{2x} \cos\alpha + E_{2y} \sin\alpha) \int_0^\infty \lambda . \left[\varepsilon' . e^{-u_1|z-Z|} - e^{u_1(z+Z)} \right] \cdot J_1(\lambda\bar{\rho}).\lambda d\lambda dv_2$$

$$+ \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1} \cdot \int_{v_2} E_{2z} \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{u_1} \cdot \left[e^{-u_1|z-Z|} - e^{u_1(z+Z)} \right] . J_0(\lambda\bar{\rho}).\lambda.d\lambda.dv_2$$

soit encore :

$$E_z = E_{zo} + \int_{v_2} (E_{2x} \cos\alpha + E_{2y} \sin\alpha)\ G''(z, Z, \rho)\ dv_2$$

Cette équation n'est évidemment pas dissociable des deux autres équations intégrales similaires définissant E_x et E_y.

Pour utiliser les méthodes définies précédemment, divisons le volume v_2 en n volumes élémentaires Δv_i. Supposons également que, en tout point de Δv_i, nous ayons $E_{2x} = c^{te}$, $E_{2y} = c^{te}$, $E_{2z} = c^{te}$. La constante variera évidemment avec l'indice i. Ceci revient à supposer que, dans chaque volume élémentaire, les grandeurs physiques ne subissent pas de variation.

Si nous appelons M le point d'observation, et M'i le centre de chaque volume élémentaire Δv_i, nous avons :

$$E_z(M) = E_{z_0}(M) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Delta v_i} \left(E_{2x}(M'_i) . \cos\alpha + E_{2y}(M'_i) \sin\alpha \right) G''(M, M'_i)\, dv_{2i}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{\Delta v_i} E_{2z}(M'_i) . G'(M, M'_i) . dv_{2i}$$

soit encore, puisque E_{2x}, E_{2y} et E_{2z} sont constants dans Δv_i :

$$E_z(M) = E_{z_0}(M) + \sum_{i=1}^{n} E_{2x}(M'_i) \int_{\Delta v_i} \cos\alpha . G''(M, M'_i)\, dv_{2i}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} E_{2y}(M'_i) \int_{\Delta v_i} \sin\alpha . G''(M, M'_i) . dv_{2i} + \sum_{i=1}^{n} E_{2z}(M'_i) \int_{\Delta v_i} G'(M, M'_i)\, dv_{2i}$$

soit encore : $$z = z_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(x'_i . A_{oi} + y'_i . B_{oi} + z'_i . C_{oi} \right) \qquad (74)$$

si nous posons

$$\int_{\Delta v_i} \cos\alpha . G''(M, M'_i)\, dv_{2i} = A_{oi}, \quad \int_{\Delta v_i} \sin\alpha . G''(M, M'_i)\, dv_{2i} = B_{oi}, \quad \int_{\Delta v_i} G'(M, M'_i)\, dv_{2i} = C_{oi}$$

et $E_z(M) = z$, $E_{2x}(M'_i) = x'_i$, $E_{2y}(M'_i) = y'_i$, $E_{2z}(M'_i) = z'_i$.

Les équations intégrales définissant E_x et E_y nous donneront de la même façon, en utilisant les mêmes notations :

$$x = x_o + \sum_{i=1}^{n} (x'_i . A''_{oi} + y'_i . B''_{oi} + z'_i . C''_{oi}) \qquad (75)$$

$$y = y_o + \sum_{i=1}^{n} (x'_i . A'_{oi} + y'_i . B'_{oi} + z'_i . C'_{oi}) \qquad (76)$$

Nous savons calculer les coefficients A_{oi}, B_{oi}, C_{oi},...etc qui sont les intégrales, sur des volumes Δv_i connus, de fonctions analytiquement connues.

Il faut maintenant calculer les termes x'_i, y'_i, et z'_i. Pour cela, remarquons que les équations intégrales (65) et (66) sont valables en tout point du demi-milieu. Elles sont en particulier valables à l'intérieur de l'anomalie. Nous allons donc reprendre les formules (74), (75) et (76), et les appliquer au cas où le point M se trouve à l'intérieur de l'un quelconque des volumes élémentaires Δv_i.

Nous aurons ainsi :

$$E_z(M'_i) = E_{z_o}(M'_i) + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Delta v_j} \left(E_{2x}(M'_j)\cos\alpha + E_{2y}(M'_j)\sin\alpha\right) G'(M'_i, M'_j)\,dv_2$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{\Delta v_j} E_{2z}(M'_j) \times G(M'_i, M'_j) \,.\, dv_{2j} \,,$$

soit : $z'_i = z'_{oi} + \sum_{j=1}^{n} (x'_j \,.\, A_{ij} + y'_j \,.\, B_{ij} + z'_j \,.\, C_{ij})$ (77)

avec :

$z'_j = E_{2z}(M'_j) = c^{te}$ dans Δv_j, $A_{ij} = \int_{\Delta v_j} \cos\alpha \,.\, G''(M'_i, M'_j) \,.\, dv_{2j}$...etc

Remarquons maintenant que la sommation sous j passe fatalement par j = i. Nous retrouvons donc, dans le second membre de (77), le premier membre z'_i. (77) peut donc s'écrire :

$$-z'_{oi} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \,.\, A_{ij} + y'_j \,.\, B_{ij} + z'_j \,.\, (C_{ij} - \delta_i^j) \qquad (78)$$

où δ_i^j est le symbole de Kroenecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Les équations ( ) et ( ) relatives à E_x et E_y se transforment de la même façon, et nous arrivons à :

$$\text{si } M = M'_i \quad \left| \begin{array}{l} -x'_{oi} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \,.\, (A''_{ij} - \delta_{ij}) + y'_j \,.\, B''_{ij} + z'_j \,.\, C''_{ij} \\ -y'_{oi} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \,.\, A'_{ij} + y'_j \,.\, (B'_{ij} - \delta_{ij}) + z'_j \,.\, C'_{ij} \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$\text{si } M=M'_i \quad \Big| -z'_{oi} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \cdot A_{ij} + y'_j \cdot B_{ij} + z'_j \cdot \left(C_{ij} - \delta_{ij}\right)$$

En faisant varier l'indice i de 1 à n, nous obtenons finalement un système de 3n équations à 3n inconnues qui peut s'écrire matriciellement :

9)

$$\begin{pmatrix} -||x'_o|| \\ -||y'_o|| \\ -||z'_o|| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||A''_{ij}-\delta_{ij}|| & ||B''_{ij}|| & ||C''_{ij}|| \\ ||A'_{ij}|| & ||B'_{ij}-\delta_{ij}|| & ||C'_{ij}|| \\ ||A_{ij}|| & ||B_{ij}|| & ||C_{ij}-\delta_{ij}|| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ||x'_i|| \\ ||y'_i|| \\ ||z'_i|| \end{pmatrix}$$

les matrices $||A_{ij}||$, $||B_{ij}||$ et $||C_{ij}||$ étant des matrices nxn.

Nous savons évaluer $||x'_o||$: c'est le vecteur représentant la composante en x du champ demi-milieu au centre des éléments Δv_i, $i\in[1,n]$. Nous savons également évaluer $||A''_{ij}||$: c'est l'influence du $j^{\text{ème}}$ élément sur le $i^{\text{ème}}$, les 2 indices i et j variant de 1 à n.

Nous pouvons donc résoudre le système (79) et déterminer les matrices $||x'_i||$, $||y'_i||$ et $||z'_i||$. Nous pouvons alors les reporter dans les équations (74), (75) et (76) qui s'écrivent :

$$\left|\begin{array}{l} x = x_o + ||A''_{oi}||\cdot||x'_i||+||B''_{oi}||\cdot||y'_i||+||C''_{oi}||\cdot||z'_i|| \\ y = y_o + ||A'_{oi}||\cdot||x'_i||+||B'_{oi}||\cdot||y'_i||+||C'_{oi}||\cdot||z'_i|| \\ z = z_o + ||A_{oi}||\cdot||x'_i||+||B_{oi}||\cdot||y'_i||+||C_{oi}||\cdot||z'_i|| \end{array}\right.$$

et évaluer ainsi les 3 composantes du champ électrique en tout point M intérieur au demi-milieu.

<u>**NB**</u> : Si nous cherchons les composantes du champ à l'intérieur de l'anomalie, nous n'aurons qu'à résoudre le système (79), les réponses étant fournies par les matrices $||x'_i||$, $||y'_i||$ et $||z'_i||$. Nous obtiendrons une courbe en créneaux qu'il ne nous restera plus qu'à lisser, puisque nous avons supposé les grandeurs physiques x, y et z constantes à l'intérieur d'un volume élémentaire Δv_i.

III 4. Traitement numérique dans le cas du tubage

III 4. 1. *Hypothèse simplificatrice dans le cas d'une anomalie de faible section*

Reprenons l'équation (67) :

$$E_z = \frac{-I\ell}{4\pi\sigma_1}\cdot\cos\varphi\cdot\int_0^\infty 2\lambda\cdot e^{u_1 z}\cdot J_1(\lambda r)\cdot\lambda\cdot d\lambda$$

$$+\frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1}\cdot\int_{v_2}(E_{2x}\cos\alpha+E_{2y}\sin\alpha)\int_0^\infty\lambda\cdot\left[\varepsilon'\cdot e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right]\cdot J_1(\lambda\bar\rho)\cdot\lambda\cdot d\lambda\cdot dv_2$$

$$+\frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1}\cdot\int_{v_2}E_{2z}\int_0^\infty\frac{\lambda^2}{u_1}\cdot\left[e^{-u_1\cdot|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right]\cdot J_0(\lambda\bar\rho)\cdot\lambda\cdot d\lambda\cdot dv_2$$

Soit

$$I_1=\int_0^\infty\lambda\cdot\left[\varepsilon'\cdot e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right]\cdot J_1(\lambda\bar\rho)\cdot\lambda\cdot d\lambda$$

$$I_2=\int_0^\infty\frac{\lambda^2}{u_1}\cdot\left[e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right]J_0(\lambda\bar\rho)\cdot\lambda\cdot d\lambda$$

. En première approximation, nous avons $\left|\frac{\lambda}{u_1}\right| \simeq 1$ dès que λ est supérieur à une certaine valeur λ_o.

. Nous savons d'autre part que nous aurons une bonne approximation de ces intégrales en arrêtant la sommation à $\lambda=\lambda_1$. Pour tout $\lambda>\lambda_1$, le terme exponentiel est alors assez petit pour que $\int_{\lambda_1}^\infty$ soit négligeable devant $\int_0^\lambda 1$. Nous aurons donc :

$$I_1 \# \int_0^{\lambda_1}\lambda\cdot\left[\varepsilon' e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right]\cdot J_1(\lambda\bar\rho)\cdot\lambda\cdot d\lambda$$

$$I_2 \# \int_0^{\lambda_1}\frac{\lambda^2}{u_1}\cdot\left[e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right]\cdot J_0(\lambda\bar\rho)\cdot\lambda\cdot d\lambda$$

λ_1 désignant la valeur de λ pour laquelle <u>les deux</u> intégrales peuvent être tronquées moyennant une erreur inférieure à un nombre donné.

Nous avons : $I_1=\int_0^{\lambda_0}+\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}$ et $I_2=\int_0^{\lambda_0}+\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}$.

. Pour $\lambda\in[o,\lambda_o]$, nous avons $J_1(\lambda\bar\rho) \ll J_o(\lambda\bar\rho) \Longrightarrow$

$\lambda J_1(\lambda\bar\rho) \sim \lambda^2\bar\rho \ll \frac{\lambda^2}{u_1}\cdot J_o(\lambda\bar\rho) \sim \frac{\lambda^2}{u_1}$, soit $\bar\rho \ll \frac{1}{u_1}$.

Cette inégalité provient du fait que le tubage a une faible section. En effet, nous cherchons le champ E_z à l'intérieur du tubage en un point M. Le point M' d'intégration se déplaçant à l'intérieur du tubage, la distance $\bar{\rho}$ n'excèdera jamais b (cf. Fig. 12.) puisque c'est la projection sur le plan (xOy) de la distance MM'.

. Pour $\lambda << \lambda_o$, u_1 est petit, et nous aurons donc toujours $\bar{\rho} << \frac{1}{u_1}$.

. Pour $\lambda \in |\lambda_o, \lambda_1|$, nous pouvons poser $\frac{\lambda}{u_1} \# 1 \Longrightarrow$ si $I'_2 = \int_{\lambda_o}^{\lambda_1}$,

$I'_2 \# \int_{\lambda_o}^{\lambda_1} \lambda . \left[e^{-u_1|z-Z|} - e^{u_1(z+Z)} \right] . J_o(\lambda\bar{\rho}) . \lambda . d\lambda$. De plus,

$\left| \varepsilon' e^{-u_1|z-Z|} - e^{u_1(z+Z)} \right| \# \left| e^{-u_1|z-Z|} - e^{u_1(z+Z)} \right|$ puisque

$$e^{u_1(z+Z)} << e^{-u_1|z-Z|} .$$

I_1 et I_2 ne diffèrent donc sensiblement que par les fonctions J_o et J_1. Comme λ_1 n'est jamais très grand, nous pourrons poser $J_1(\lambda\bar{\rho}) << J_o(\lambda\bar{\rho})$.

En effet $J_1(\lambda\bar{\rho}) = \lambda\bar{\rho} - \frac{(\lambda\bar{\rho})^3}{16}$ et $J_o(\lambda\bar{\rho}) = 1 - \frac{(\lambda\bar{\rho})^2}{2}$ à 10^{-3} près si $\lambda\bar{\rho} << \frac{1}{2}$.

Si nous prenons $\bar{\rho} = .2$, $\lambda\bar{\rho} << \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda < 10$. Comme nous aurons toujours $\lambda_1 < 10$, nous voyons qu'il est légitime de poser $J_1(\lambda\bar{\rho})$ beaucoup plus petit que $J_o(\lambda\bar{\rho})$.

En conséquence, l'intégrant qui apparait dans I_1 est nettement inférieur à celui qui apparait dans I_2, et, compte tenu des valeurs de λ intervenant réellement dans la sommation, nous poserons $|I_1| << |I_2|$.

Enfin, les valeurs prises par E_{2x} et E_{2y} dans le volume v_2 défini par le tubage ne seront jamais vraiment supérieures à E_{2z}. Nous pouvons écrire :

$|(E_{2x}.\cos\alpha + E_{2y}.\sin\alpha).I_1| << |E_{2z}.I_2|$, et l'expression de E_z se simplifie alors notablement :

$$
(80)\quad \boxed{\begin{aligned} E_z = {} & \frac{-I\ell}{4\pi\sigma_1}\cdot \cos\varphi \int_0^\infty 2\lambda\cdot e^{u_1 z}\cdot J_1(\lambda r)\cdot\lambda\cdot d\lambda \\ & + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1}\cdot\int_{v_2} E_{2z}\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{u_1}\cdot\left[e^{-u_1|z-Z|} - e^{u_1(z+Z)}\right] J_0(\lambda\bar\rho)\cdot\lambda\cdot d\lambda\cdot dv \end{aligned}}
$$

La simplification apportée est extrèmement appréciable au niveau du traitement numérique : nous n'avons plus qu'une seule équation intégrale pour définir E_z, alors qu'il en fallait 3 au préalable. Nous n'aurons donc qu'un système de n équations à n inconnues à résoudre. L'inversion d'une matrice d'ordre n étant proportionnelle à n^3 sur n'importe quel ordinateur, on voit un rapport <u>27</u> en temps calcul entre les formules (67) et (80).

III 4. 2. Expression simplifiée des fonctions de Green

D'après la formule (80), nous voyons intervenir un $\cos\phi$ dans l'expression de E_z. En raisonnant sur la Fig.12, nous voyons que :

$$
\cos\varphi \geqslant 1 - \frac{b^2}{2r^2}\ ;\ \text{en effet,}\quad \cos\varphi \geqslant \frac{r}{\sqrt{b^2+r^2}}\ ,\ \text{donc } \cos\varphi \geqslant \left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}
$$

Il est légitime de poser $\cos\phi = 1$ puisque la section du tubage est très faible. E_z s'écrira alors :

$$
E_z = \frac{-I\ell}{4\pi\sigma_1}\cdot\int_0^\infty 2\lambda\cdot e^{u_1 z}\cdot J_1(\lambda r)\,\lambda\, d\lambda + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1}\cdot\int_{v_2} E_{2z}\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{u_1}\left[e^{-u_1|z-Z|} - e^{u_1(z+Z)}\right] J_0(\lambda\bar\rho)\,\lambda\, d\lambda\, dv
$$

Or : $-\lambda J_1(\lambda r) = \frac{\partial}{\partial r}\left(J_0(\lambda r)\right)$ et $u_1\cdot e^{u_1 z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{u_1 z}\right)$

Nous pouvons donc écrire $\lambda^2\cdot e^{u_1 z}\cdot J_1(\lambda r) = \frac{u_1}{u_1}\cdot e^{u_1 z}\cdot \lambda^2 J_1(\lambda r)$

$$
= \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{u_1 z}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(J_0(\lambda r)\right)\cdot\frac{\lambda}{u_1} = \frac{\lambda}{u_1}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\left(e^{u_1 z}\cdot J_0(\lambda r)\right)
$$

et, l'intégrale étant absolument convergente : $\int^\infty 2\lambda e^{u_1 z} J_1(\lambda r)\lambda\, d\lambda =$

$$
\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\left(\frac{2\lambda}{u_1}\cdot e^{u_1 z}\cdot J_0(\lambda r)\right) d\lambda = \frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\int_0^\infty \frac{2\lambda}{u_1}\cdot e^{u_1^0 z}\cdot J_0(\lambda r)\, d\lambda
$$

ce qui s'écrit encore $2\cdot\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\left(\frac{e^{-j k_1 R}}{R}\right)$, avec $R = \sqrt{r^2+z^2}$

. De la même façon, nous transformons la seconde intégrale en remarquant que

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right]=\frac{\partial}{\partial z}\left[e^{-u_1|z-Z|}\times -u_1\varepsilon' - u_1 . e^{u_1(z+Z)}\right]$$

$$= u_1^2 . \left[e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right]$$

et que $\lambda^2 = \lambda^2 - k_1^2 + k_1^2 = u_1^2 + k_1^2$, donc que $\frac{\lambda^2}{u_1} = u_1 + \frac{k_1^2}{u_1}$,

nous avons $\frac{\lambda^2}{u_1} . \left[e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right] . J_0(\lambda\bar{\rho}) . \lambda$

$$= \left(\frac{u_1^2}{u_1} . \left[e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right] + \frac{k_1^2}{u_1} . \left[e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right]\right) J_0(\lambda\bar{\rho}) . \lambda$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_1^2\right)\left(e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right)\frac{1}{u_1} J_0(\lambda\bar{\rho}) . \lambda \text{ ; donc}$$

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{u_1} . \left[e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right] J_0(\lambda\bar{\rho})\lambda . d\lambda = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_1^2\right)\int_0^\infty \frac{\lambda}{u_1} . \left[e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right] . J_0(\lambda\bar{\rho})d\lambda$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_1^2\right)\left(\frac{e^{-jk_1R'}}{R'}-\frac{e^{-jk_1R''}}{R''}\right) \qquad (81)$$

avec $R' = (z-Z)^2 + \bar{\rho}^2$ et $R'' = (z+Z)^2 + \bar{\rho}^2$

. Nous remarquerons enfin que

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right) = u_1^2\left(e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right) = \frac{\partial^2}{\partial Z^2}\left(e^{-u_1|z-Z|}-e^{u_1(z+Z)}\right)$$

et que nous pouvons également écrire l'expression (81) sous la forme :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial Z^2}+k_1^2\right)\left(\frac{e^{-jk_1R'}}{R'}-\frac{e^{-jk_1R''}}{R''}\right)$$

Nous arrivons donc à l'expression suivante de E_z, beaucoup plus exploitable puisque nous avons remplacé des sommes infinies par des fonctions analytiquement connues:

$$\boxed{E_z = \frac{I\ell}{2\pi\sigma_1} . \frac{\partial^2}{\partial z \partial r}\left(\frac{e^{-jk_1R}}{R}\right) + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1}\int_{v_2} E_{2z} . \left(\frac{\partial^2}{\partial Z^2}+k_1^2\right)\left(\frac{e^{-jk_1R'}}{R'}-\frac{e^{-jk_1R''}}{R''}\right)dv} \qquad (82)$$

Le premier terme du second membre n'est autre que la composante en z du champ demi-milieu dû à un D.E.H.

III 4. 3. Vérification de l'hypothèse faite au § 1.

Dans le paragraphe III 4. 1., nous avons supposé que l'intégrale $I_1 = \int_0^\infty \lambda\cdot\left(\varepsilon' e^{-u_1|z-Z|} - e^{u_1(z+Z)}\right) . J_1(\lambda\bar{\rho})\lambda d\lambda$ était négligeable devant :

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{u_1} . \left(e^{-u_1|z-Z|} - e^{u_1(z+Z)}\right) . J_o(\lambda\bar{\rho})\lambda d\lambda.$$

Nous connaissons l'expression analytique de I_2. Aussi allons-nous chercher celle de I_1 pour vérifier notre hypothèse.

(83) $\left(\varepsilon' e^{-u_1|z-Z|} - e^{u_1(z+Z)}\right) = \frac{1}{u_1} . \frac{\partial}{\partial_Z} \left(e^{-u_1|z-Z|} - e^{u_1(z+Z)}\right)$ $(\varepsilon'=+1$ si $z-Z>0)$

(84) $\lambda J_1(\lambda\bar{\rho}) = -\frac{\partial}{\partial\bar{\rho}} (J_o(\lambda\bar{\rho}))$ (83) et (84) impliquent :

$$I_1 = -\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{\rho}} \left[\int_0^\infty \frac{\lambda}{u_1} . e^{-u_1|z-Z|} - e^{u_1(z+Z)} \quad J_o(\lambda\bar{\rho})\ d\lambda\right],$$ soit

$$I_1 = -\frac{\partial}{\partial z\,\partial\bar{\rho}} \left[\frac{e^{-jk_1R'}}{R'} - \frac{e^{-jk_1R''}}{R''}\right]$$. Nous effectuons les dérivations d'où :

$$I_1 = -\left[\frac{(z-Z)}{R'^3} . \bar{\rho} .\left(\frac{3}{R'^2} + \frac{3jk_1}{R'} - k_1^2\right). e^{-jk_1R'} - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots \frac{(z+Z)}{R''^3} . \bar{\rho} .\left(\frac{3}{R''^2} + \frac{3jk_1}{R''} - k_1^2\right). e^{-jk_1R''}\right]$$

$$I_2 = \left[\frac{2(z-Z)^2 - \bar{\rho}^2}{R'^2} (1 + jk_1R') + k_1^2\bar{\rho}^2\right]\cdot\frac{e^{-jk_1R'}}{R'^3} - \ldots$$

$$\ldots \left[\frac{2(z+Z)^2 - \bar{\rho}^2}{R''^2} (1+jk_1R'') + k_1^2\bar{\rho}^2\right]\cdot\frac{e^{-jk_1R''}}{R''^3}$$

Nous aurons presque toujours $\bar{\rho} \ll |z-Z| \ll |(z+Z)|$, d'où $R' \# |z-Z| \ll R'' \# |z+Z|$. Ce qui nous donne :

$$I_1 \# -\frac{\bar{\rho}}{R'^2}\cdot\left(\frac{3}{R'^2} + \frac{3jk_1}{R'} - k_1^2\right)\cdot e^{-jk_1R'}$$ et $$I_2 \neq \frac{2}{R'^3}\cdot(1+k_1jR').e^{-jk_1R'}$$

ce qui peut encore s'écrire $I_1 \# -\frac{\bar{\rho}}{R'} \cdot \frac{3}{2} \cdot I_2 + \frac{k_1^2 \cdot \bar{\rho}}{R'^2} \quad e^{-jk_1R'}$

$$\text{d'où :} \quad \frac{I_1}{I_2} \# -\frac{\bar{\rho}}{R'} \times \frac{3}{2} - \frac{jk_1\bar{\rho}}{2} = -\frac{\bar{\rho}}{2R'} \cdot \left[3 + \frac{(jk_1R')^2}{1+jk_1R'} \right]$$

$\bar{\rho}$ étant toujours inférieur ou égal à b, nous voyons que l'approximation $I_1 \ll I_2$ était parfaitement justifiée. Cette approximation n'est mise en défaut que lorsque $R' \# |z-Z|$ devient très faible. Nous sommes dans ce cas lorsque le point d'observation M_i et le point d'intégration M_j sont dans le même volume élémentaire M_i étant au centre de l'élément, nous aurons alors :

$$|z-Z| = |z_{M_i} - z_{M_j}| < \delta \qquad \text{(cf. Fig. 13.)}$$

Dans ce cas,

$$\frac{z-Z}{R'^3} \cdot \bar{\rho} \cdot \left(\frac{3}{R'^2} + \frac{3jk_1}{R'} - k_1^2 \right) \cdot e^{-jk_1R'} \sim \frac{3.(z-Z)\bar{\rho}}{R'^5} \cdot e^{-jk_1R'}$$

$$\text{et} \left[\frac{2(z-Z)^2 - \bar{\rho}^2}{R'^2} \quad (1+jk_1R') + k_1^2 \ \bar{\rho}^2 \right] \cdot \frac{e^{-jk_1R'}}{R'^3} \sim \frac{2(z-Z)^2-\bar{\rho}^2}{R'^5} \cdot e^{-jk_1R'}$$

ce qui nous donne : $\frac{I_1}{I_2} \sim \frac{3(z-Z).\bar{\rho}}{2(z-Z)^2-\bar{\rho}^2}$. Ce rapport tend vers 0 lorsque (z-Z) devient très faible.

Il est donc légitime de conserver l'approximation

$$|I_1| < |I_2|$$

III 4. 4. Choix de la méthode de résolution du système linéaire

Compte tenu de l'hypothèse précédente, nous sommes amenés à résoudre numériquement l'équation intégrale (82) :

$$E_z = \frac{I1}{2\Pi\sigma_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} \left(\frac{e^{-jk_1R}}{R} \right) + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\Pi\sigma_1} \int_{v_2} E_{2z} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2 \right) \ldots$$

$$\ldots \left(\frac{e^{-jk_1R'}}{R'} - \frac{e^{-jk_1R''}}{R''} \right) \cdot dv_2$$

L'application simultanée des deux méthodes décrites en 3.2. nous conduit à écrire :

$$E_z(M_i) = E_{zo}(M_i) + \sum_{j=1}^{j=n} E_z(M_j) \int_{\Delta v_j} G'(M_i, M_j)\, dv_{2j}$$

où M_i désigne le centre de l'élément de volume Δv_i et où M_j est supposé : - être au centre de Δv_j lorsqu'on écrit $E_z(M_j)$

- être variable à l'intérieur de Δv_j

lorsqu'il intervient dans la fonction de Green qui est étendue à tout le volume Δv_j.

L'indice i variant de 1 à n, nous pouvons écrire matriciellement la relation (82) :

$$\boxed{\left\| \int_{\Delta v_j} G'(M_i, M_j)\, dv_{2j} \quad - \delta_i^j \right\| \cdot \left\| E_z \right\| = \left\| E_{z_0} \right\|} \qquad (83)$$

ou plus simplement A.X = B.

La résolution de ce système dépend des propriétés de la matrice A et des limites de variation du second membre B.

La matrice A :

. est pleine (nous n'aurons pas de termes $A_{ij} \equiv 0$)

. n'est pas symétrique $\int_{\Delta v_j} G'(M_i, M_j)dv_2 \neq \int_{\Delta v_i} G'(M_j, M_i)dv_2$ puisque nous n'avons pas de symétrie en z).

. est généralement à diagonale principale dominante (l'influence d'un élément de volume Δv_i sur son propre centre M_i est évidemment supérieure à celle d'un élément Δv_j), mais pas assez pour permettre des approximations dans tous les cas de figure.

Nous éliminerons donc les solutions par triangularisation ou diagonalisation qui s'appliquent aux matrices symétriques ou aux matrices à diagonale principale dominante. [22]

La matrice B, de son côté, représente le champ demi-milieu au centre des différents volumes élémentaires. Elle dépend donc directement de la position de l'émetteur, alors que la matrice A n'en dépend pas. Comme nous ferons toujours des mesures pour différentes positions de l'émetteur, la matrice B est susceptible de variations. Mais ce domaine de variations n'est pas restreint : l'émetteur peut se trouver à une distance r d'un forage aussi bien qu'à une distance 10r. Nous éliminerons donc les solutions par perturbation qui consistent à résoudre le système $A.X = B_o$ et à en déduire celles du système $A.X = B_o + \Delta B$, avec $\Delta B/B_o$ petit.

En conclusion, les données du problème sont telles que nous ne pouvons appliquer aucune des méthodes de résolution originales. Il nous a semblé plus sûr d'utiliser la méthode classique, i.e. :

- de calculer A^{-1} une fois pour toutes pour une géométrie donnée.
- de faire les produits $A^{-1}.B_p$, B_p désignant la matrice des champs demi-milieu pour la $p_{ième}$ position de l'émetteur.

III 4. 5. Limitations apportées par l'ordinateur de l'U.S.T.L.

Nous devons résoudre le système linéaire $AX = B$ par la méthode classique en inversant la matrice A. Il se pose alors un problème au niveau du traitement des données: c'est celui de la taille de la matrice A.

En effet, toutes les grandeurs intervenant dans l'expression $AX = B$ sont des grandeurs complexes. Toutes seront donc caractérisées par leur partie réelle et leur partie imaginaire :

$A = RA + jIA$, $B = RB + jIB$, $X = RX + jIX$, et le système de départ s'écrit $(RA + jIA) . (RX + jIX) = (RB + jIB)$, soit :

$$\left|\begin{array}{l} RA.RX - IA.IX = RB \\ IA.RX + RA.IX = IB \end{array}\right. , \text{ ou } \begin{pmatrix} RA & -IA \\ IA & RA \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} RX \\ IX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RB \\ IB \end{pmatrix}$$

Les matrices RA et IA étant d'ordre n, nous voyons que la recherche de $X = RX + jIX$ nous impose la résolution d'un système linéaire d'ordre 2n, donc l'inversion d'une matrice d'ordre 2 n puisque la matrice $\begin{pmatrix} RA & -IA \\ IA & RA \end{pmatrix}$ ne bénéficie d'aucune propriété remarquable.

Nous devons donc utiliser :

. $2n^2$ réels pour déterminer les matrices RA et IA, donc $\begin{pmatrix} RA & -IA \\ IA & RA \end{pmatrix}$

. $4n^2$ réels pour ranger les termes de $\begin{pmatrix} RA & -IA \\ IA & RA \end{pmatrix}^{-1}$

. 4n réels pour déterminer RB et IB et ranger RX et IX, soit au total $(6n^2 + 4n)$ réels.

Remarque : L'estimation ci-dessus est assez grossière, mais elle reflète les ordres de grandeurs. Il est possible d'utiliser, parmi les $4n^2$ réels ayant été définis pour ranger l'inverse de $\begin{pmatrix} RA & -IA \\ IA & RA \end{pmatrix}$, les $2n^2$ réels utilisés pour déterminer RA et IA. la destruction, en cours de calcul, des matrices de départ RA et IA, ne nous impose alors a priori que l'utilisation de $4n^2$ réels ; mais il faut alors définir une matrice dite "de manoeuvre" utilisant n^2 réels. Ce qui fait $5n^2$ réels.

A ceux-ci doivent s'ajouter 4n réels qui seront utilisés au moment de l'inversion (et qui sont imposés par la procédure), ainsi que 2n réels pour stocker différents produits intermédiaires comme $RA^{-1}.RB$, $RA^{-1}.IB$, etc... Nous arriverons donc à un minimum de $(5n^2 + 10n)$ réels.

Sachant que l'ordinateur de l'U.S.T.L. ne laisse disponible en mémoire centrale, après compilation et implantation, qu'un maximum de 18 000 mots-mémoire (soit 9 000 réels) pour un programme un peu élaboré, nous arrivons à un n maximum égal à

. 42 dans le cas de $(5n^2 + 10n)$ réels

. 38 dans le cas de $(6n^2 + 4n)$ réels

Nous voyons qu'il est inutile d'essayer de faire une version très recherchée du programme de calcul, le gain sur le n maximum se révélant médiocre.

Un programme de calcul opérant uniquement en mémoire centrale nous impose un découpage maximum en 38 éléments, ce qui se révèle généralement insuffisant.

Le choix d'un découpage plus fin nous oblige donc à utiliser les mémoires auxiliaires, ce qui modifie et complique notablement le programme de calcul.

III 4. 6. Algorithme utilisé

Il n'existe pas à notre connaissance, au Laboratoire de Calcul de l'U.S.T.L., de programme standard permettant la résolution d'un système linéaire trop volumineux pour être traité directement en mémoire centrale. Nous avons donc dû en créer un, et nous donnons ci-après un résumé de la méthode utilisée.

Cette méthode est celle de Froebenius. [22]
Si le système A.X = B est de dimension trop importante, il faut découper la matrice A en autant de sous-matrices que nécessaire, les calculs devenant de plus en plus complexes au fur et à mesure que le nombre de sous-matrices augmente. On ne traite alors en mémoire centrale qu'un petit nombre de sous-matrices que l'on range ensuite dans les mémoires auxiliaires et que l'on recherche par la suite en cas de nécessité.

Nous avons vu que résoudre le système complexe A.X = B revenait à résoudre le système réel $\begin{pmatrix} RA & -IA \\ IA & RA \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} RX \\ IX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RB \\ IB \end{pmatrix}$.

Divisons maintenant les matrices RA et IA de la façon suivante :

$$RA = \begin{pmatrix} RA_1 & RA_2 \\ RA_3 & RA_4 \end{pmatrix} \qquad IA = \begin{pmatrix} IA_1 & IA_2 \\ IA_3 & IA_4 \end{pmatrix}$$

Nous poserons également $RX = \begin{pmatrix} RX_1 \\ RX_2 \end{pmatrix}$, $IX = \begin{pmatrix} IX_1 \\ IX_2 \end{pmatrix}$, $RB = \begin{pmatrix} RB_1 \\ RB_2 \end{pmatrix}$, $IB = \begin{pmatrix} IB_1 \\ IB_2 \end{pmatrix}$

Le système s'écrira alors :

$$\begin{pmatrix} RA_1 & RA_2 & -IA_1 & -IA_2 \\ RA_3 & RA_4 & -IA_3 & -IA_4 \\ IA_1 & IA_2 & RA_1 & RA_2 \\ IA_3 & IA_4 & RA_3 & RA_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} RX_1 \\ RX_2 \\ IX_1 \\ IX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RB_1 \\ RB_2 \\ IB_1 \\ IB_2 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons un système de 4 équations à 4 inconnues, les 4 inconnues étant des matrices colonnes à $\frac{n}{2}$ lignes. Si nous résolvons ce système "à la main" par la méthode de substitution, nous obtenons les matrices RX_1, RX_2 IX_1 et IX_2 en fonction des RA_i, IA_i, RB_i et IB_i. Nous ne détaillerons pas les calculs qui sont assez fastidieux ; disons simplement que l'obtention du résultat passe par la définition et le calcul de 55 matrices intermédiaires ; par exemple, nous calculons successivement : $M_1 = (RA_1)^{-1}$, $M_2 = RA_3.(RA_1)^{-1}$, $M_3 = M_2.RA_2$, etc..

Dans ces conditions, nous travaillons avec des matrices d'ordre $\frac{n}{2}$; chacune des matrices est traitée séparément en mémoire centrale, toutes celles qui avaient été calculées précédemment étant rangées dans les mémoires auxiliaires. Tout ce traitement s'effectue en utilisant 3 matrices de manoeuvre, donc en utilisant 3 x $\frac{n^2}{4}$ réels.

Ce programme, après compilation et implantation, laisse disponibles en mémoire centrale 16 000 mots-mémoire, soit 8 000 réels. Nous aurons donc un n maximum défini par

$$\frac{3n^2}{4} = 8\ 000, \text{ d'où } n \neq 103 \quad .$$

Nous pouvons donc, à l'aide de ce programme, résoudre un système linéaire d'ordre 200. Ce chiffre peut peut paraître élevé; il l'est pour la plupart des problèmes physiques où l'on aboutit rarement à des matrices d'un tel ordre. Mais une méthode par discrétisation impose un découpage plus ou moins élevé, et on arrive très rapidement à des chiffres importants.

Prenons le cas d'une anomalie parallélipédique ayant 20m de hauteur, 100m de longueur et de largeur. Si nous supposons que le champ électrique reste constant dans tout le volume défini par un cube élémentaire de 20m d'arête, nous obtenons un découpage de 25 éléments. Si maintenant nous estimons que le cube élémentaire est trop gros pour que notre hypothèse soit vraie, et si nous décidons de ramener l'arête à 10m, nous obtenons un découpage en 200 éléments.

Ce qui fait, dans le cas le plus général, un système linéaire complexe d'ordre 600.

Nous ne pensons pas que résoudre un système d'ordre 200 soit un cas extrême. Tout le problème vient de la taille (ou plutôt de la capacité) de la mémoire centrale de l'ordinateur utilisé. Avec un ordinateur ayant une capacité 4 fois supérieure, nous pouvons résoudre un système linéaire d'ordre 400 avec le même programme.

Nous n'avons pas essayé de découper les matrices RA et IA en plus de 4 sous-matrices, puisque nous devons déjà calculer 55 matrices intermédiaires avant d'arriver au résultat, et faire environ 120 transferts mémoire centrale $\Leftrightarrow$ mémoires auxiliaires. Un nouveau découpage des matrices RA et IA en 9 au lieu de 4 permettrait un découpage de l'anomalie en 150 éléments, mais il nécessiterait le calcul d'un très grand nombre de matrices intermédiaires et sa mise au point serait assez longue.

Le programme permettant la résolution d'un système complexe d'ordre 100 a été mis au point sous 2 versions:
- l'une utilisant les mémoires auxiliaires sur disques ; c'est la plus rapide mais la moins fiable en raison de problèmes technologiques inhérents aux disques du Gamma M40.
- l'autre utilisant 4 dérouleurs de bandes magnétiques ; elle est moins rapide, mais ne nous a pas posé de problèmes technologiques. C'est cette version que nous avons utilisée.

Ce programme est général et pourra être repris pour des applications similaires aux nôtres, notamment dans le cadre du "Modèle mathématique" du "Télélog".

III 5. Calcul de la composante E_z dans la boue de forage.

III 5. 1. Hypothèses de départ

Pour commencer l'application des méthodes énumérées précédemment à notre problème, nous supposerons que nous sommes en présence d'une colonne cylindrique de boue, ayant une conductivité σ_3, placée dans un demi-milieu de conductivité σ_1 perpendiculairement à l'interface air-sol. (Fig.12.). Nous ne tiendrons pas compte pour l'instant de l'armature isolante que constitue le tubage.

Ce n'est qu'une fois ce cas étudié que nous passerons à l'étude d'un modèle présentant 3 résistivités différentes.

L'excitation sera fournie par une antenne longue placée à la surface du sol et dont la direction passera par l'origine des coordonnées, donc l'axe du tubage.

Le diamètre de la colonne de boue sera bien entendu supposé petit. Cette hypothèse pourra être conservée quelle que soit la longueur L du tubage.

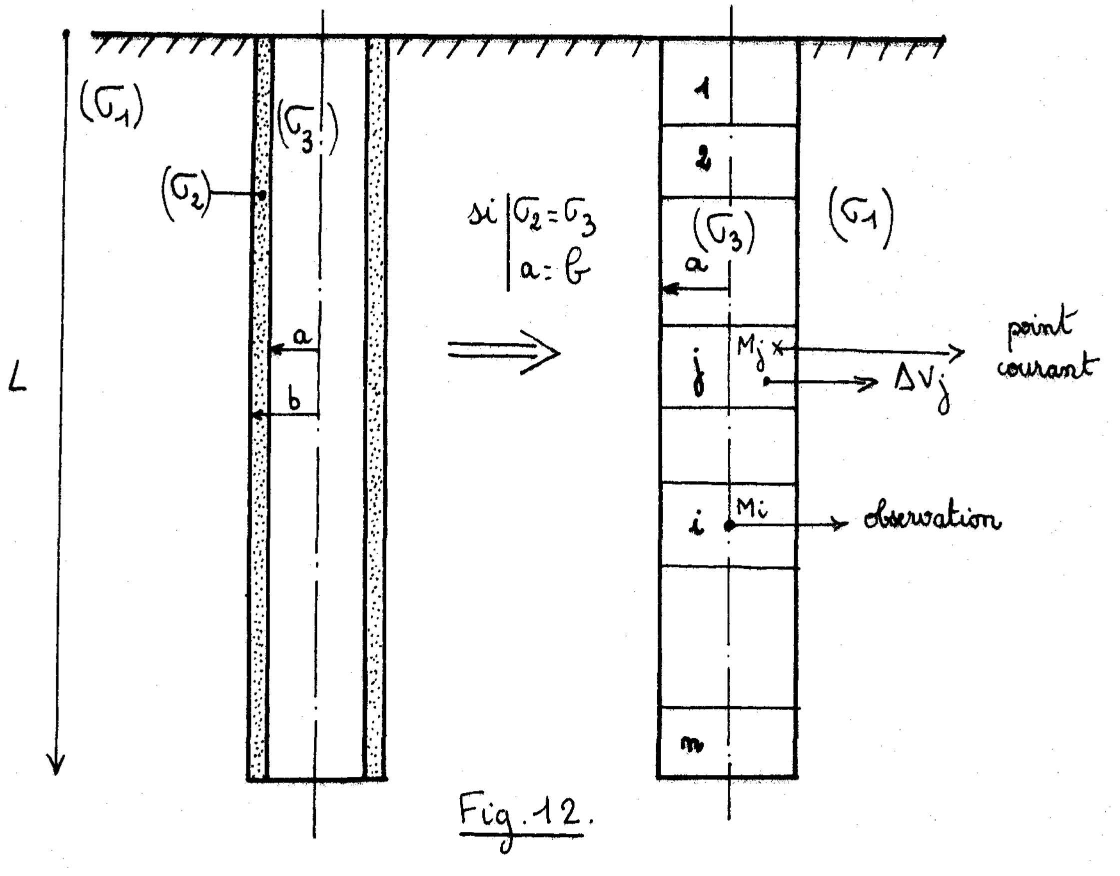


Fig.12.

III 5. 2. Expression définissant E_z dans le cas d'une antenne longue.

Nous avons vu précédemment que E_z était solution de l'équation définie en (82) :

$$E_z = \frac{I\ell}{2\pi\sigma_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial r}\left(\frac{e^{-jk_1R}}{R}\right) + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{4\pi\sigma_1} \cdot \int_{v_2} E_{2z}\left(\frac{\partial^2}{\partial Z^2} + k_1^2\right)\left(\frac{e^{-jk_1R'}}{R'} - \frac{e^{-jk_1R''}}{R''}\right) dv$$

où $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, $R' = \sqrt{(Z-z)^2 + \bar{\rho}^2}$, $R'' = \sqrt{(Z+z)^2 + \bar{\rho}^2}$

les différentes grandeurs r, z, Z, $\bar{\rho}$ étant définies sur la Fig.

Ceci s'écrit encore :

(84) $E_z = E_{z_0} + \int_{v_2} E_z . G'(M, M')\, dv_2$, E_{z_0} étant le champ dû à un D. E. H.

Le fait de modifier l'excitation ne va modifier que le terme E_{z_0} ; en effet, (84) s'écrira sous forme matricielle A.X = B, où : . A ne dépend que de la géométrie de l'anomalie.

. B ne dépend que de l'excitation, chaque ligne de cette matrice correspondant à une profondeur différente du point d'observation.

Nous n'aurons donc pas à modifier la matrice A ; nous procéderons comme en I.6.7. : puisque la direction de l'antenne passe par l'origine des coordonnées, nous pouvons écrire l = dr pour signifier qu'il s'agit d'un dipôle, et nous dirons que :

$$E_{z_0} = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial r}\left(\frac{e^{-jk_1R}}{R}\right) dr$$ ce qui veut dire

que l'émission équivaut à la juxtaposition de dipôles élémentaires de longueur dr.

Nous obtenons $E_{z_0} = \left(-\frac{z}{R^3} \cdot (1 + jk_1R) \cdot e^{-jk_1R}\right)\Big|_{r_1}^{r_2}$, et nous nous contenterons ultérieurement de l'appeler E_{z_0} sans spécifier sa valeur.

III 5. 3. Calcul de l'intégrale de la fonction de Green : remarque préliminaire

Conformément à (79), nous sommes amenés à calculer, pour résoudre (84), les coefficients de la matrice :

$$\left\| \int_{\Delta_{vj}} G'(M_i, M_j)\,dv_{2j} - \delta_i^j \right\|$$

Nous supposerons avoir découpé notre anomalie cylindrique en n volumes élémentaires, chacun étant un cylindre Δ_{vj} ; ce découpage pourra être :

. régulier, ce qui nous donnera des cylindres de même hauteur L/n

. irrégulier, ce qui nous permettra de mieux explorer une région particulière en la découpant plus finement.

Nous nous contenterons d'un découpage en z puisque l'anomalie est de section suffisamment faible pour négliger toute variation transversale du champ et rendre inutile tout découpage supplémentaire en secteurs circulaires, ce qui ne ferait qu'augmenter considérablement le nombre de volumes élémentaires.

Nous raisonnerons donc sur le schéma suivant (Fig.13)

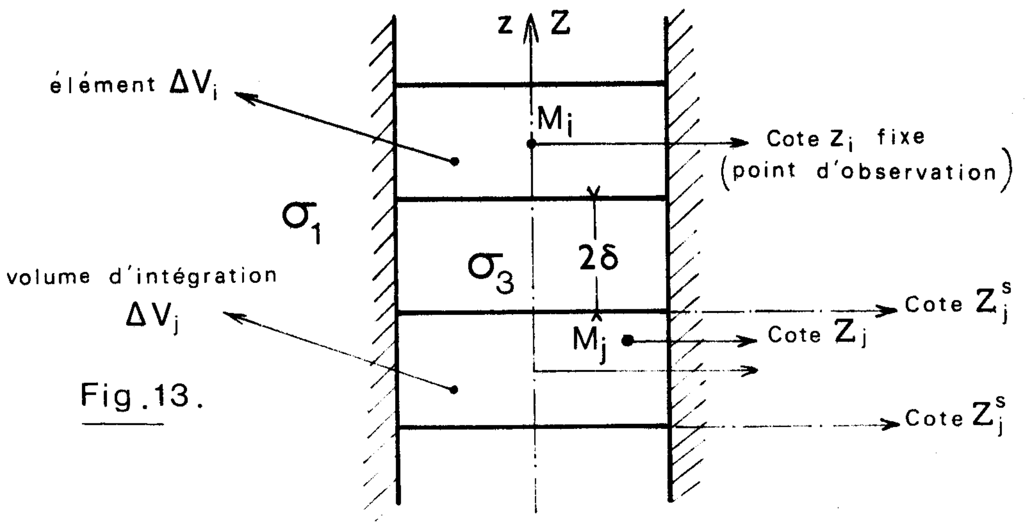


Fig.13.

Nous désignons par Z_j^s la cote de la base supérieure de l'élément de volume Δ_{vj}, et par Z_j^i la cote de la base inférieure.

Nous devons calculer des coefficients de la forme :

(85) $$A_{ij} = \int_{\Delta v_{2j}} G'(M_i, M_j)\, dv_{2j} = \int_{\Delta v_{2j}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2\right)\left(\frac{e^{-jk_1R'}}{R'} - \frac{e^{-jk_1R''}}{R''}\right) dv_{2j}$$

Nous allons exprimer la fonction de Green sous une forme légèrement différente de façon à simplifier le calcul et éliminer la discontinuité en R' = o.

Remarquons que :

• $$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2\right)\frac{e^{-jk_1R'}}{R'} = \left[\frac{2(z-\zeta)^2 - \bar\rho^2}{R'^2}\cdot(1+jk_1R') + k_1^2\cdot\bar\rho^2\right]\cdot\frac{e^{-jk_1R'}}{R'^3}$$

• $$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2\right) e^{-jk_1R'} = -jk_1 \cdot \frac{\bar\rho^2}{R'^3}\cdot(1+jk_1R')\cdot e^{-jk_1R'}$$

• $$\frac{\partial}{\partial\bar\rho}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2\right) e^{-jk_1R'}\right] = -jk_1\bar\rho\cdot\left[\left(2 - \frac{3\bar\rho^2}{R'^2}\right)(1+jk_1R') + k_1^2\bar\rho^2\right]\cdot\frac{e^{-jk_1R'}}{R'^3}$$

Par conséquent, nous avons l'identité :

(86) $$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2\right)\left(e^{-jk_1\sqrt{(z-\zeta)^2+\bar\rho^2}}\right)\right] = -jk_1\bar\rho\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2\right)\left(\frac{e^{-jk_1\sqrt{(z-\zeta)^2+\bar\rho^2}}}{\sqrt{(z-\zeta)^2+\bar\rho^2}}\right)$$

et nous pouvons écrire nos coefficients A_{ij} sous la forme :

$$\boxed{A_{ij} = \int_{\Delta v_{2j}} \frac{1}{-jk_1\bar\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar\rho}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2\right)\cdot\left(e^{-jk_1R'} - e^{-jk_1R''}\right)\right]\cdot dv_{2j}}$$

puisque la relation (86) est valable également si on change le signe de z.

III 5. 4. Expression de A_{ij}

Dans le calcul de A_{ij}, nous voyons apparaître une symétrie de révolution autour de l'axe des z : le point M_j se déplace dans un petit cylindre centré sur l'axe où se trouve le point d'observation M_i. Nous aurons donc :

$$A_{ij} = 2\pi \int_{\Delta S_j} -\frac{1}{jk_1\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2 \right) \left(e^{-jk_1R'} - e^{-jk_1R''} \right) \right] \cdot \rho \cdot \rho \cdot dz$$

Nous avons mis comme élément différentiel $\rho.d\rho.dz$ pour signifier que ρ et Z représentent les coordonnées du point M_j se déplaçant sur la surface ΔS_j qui est un rectangle de côtés 2δ et 2a. En fait, nous avons $\rho = \bar{\rho}$ puisque le point M_i est situé sur l'axe $\rho = o$.

Donc : $$A_{ij} = \frac{2\pi}{-jk_1} \int_{\Delta S_j} \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2 \right) \left(e^{-jk_1R'} - e^{-jk_1R''} \right) \right] \cdot d\bar{\rho} \cdot dz \quad (87)$$

$\int_{\Delta S_j} d\rho\, dz$ peut s'écrire $\int_{z_j^i}^{z_j^s} \int_o^a d\bar{\rho}\, dz$, d'où :

$$A_{ij} = \frac{2\pi}{-jk_1} \int_{z_j^i}^{z_j^s} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2 \right) \left(e^{-jk_1R'} - e^{-jk_1R''} \right) \Big[\Big]_o^a dz$$

$$A_{ij} = \frac{2\pi}{-jk_1} \cdot \int_{z_j^i}^{z_j^s} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2 \right) \left(e^{-jk_1\sqrt{a^2+(z_j-z_i)^2}} - e^{-jk_1\sqrt{a^2+(z_j-z_i)^2}} \right) dz$$

puisque $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2 \right) \left(e^{-jk_1R'} - e^{-jk_1R''} \right) = 0$ en $\bar{\rho} = 0$

Nous obtenons après intégration :

$$A_{ij} = 2\pi \cdot \left[\frac{(z_j^s - z_i)}{\sqrt{a^2 + (z_j^s - z_i)^2}} \cdot e^{-jk_1\sqrt{a^2+(z_j^s-z_i)^2}} - \frac{(z_j^i - z_i)}{\sqrt{a^2+(z_j^i-z_i)^2}} \cdot e^{-jk_1\sqrt{a^2+(z_j^i-z_i)^2}} \right]$$

(88) $$- 2\pi \cdot \left[\frac{(z_j^s + z_i)}{\sqrt{a^2 + (z_j^s+z_i)^2}} \cdot e^{-jk_1\sqrt{a^2+(z_j^s+z_i)^2}} - \frac{(z_j^i + z_i)}{\sqrt{a^2+(z_j^i+z_i)^2}} \cdot e^{-jk_1\sqrt{a^2+(z_j^i+z_i)^2}} \right]$$

$$+ 2\pi \cdot jk_1 \cdot \int_{z_j^i}^{z_j^s} \left(e^{-jk_1\sqrt{a^2+(z-z_i)^2}} - e^{-jk_1\sqrt{a^2+(z+z_i)^2}} \right) dz$$

La dernière intégrale n'étant pas calculable analytiquement, nous la calculerons numériquement en lui appliquant une quadrature de Gauss-Legendre en 8 points. [23].

III 5. 5. *Remarque sur les coefficients A_{ii}.*

Le calcul effectué au paragraphe précédent est aussi valable lorsque i = j, puisqu'il n'y a pas d'indétermination dans la formule (87) si i = j. Nous pourrons calculer les termes diagonaux à l'aide de (88).

Il existe cependant une particularité qu'il nous parait intéressant de signaler. Reprenons la formule (85) définissant A_{ij} avant qu'elle n'ait subi des modifications. Cette intégrale n'est pas définie si R' = o (nous ne pouvons jamais avoir R" = o), donc si M_j vient en M_i : c'est bien ce qui se passe dans le calcul de A_{ii}. Il semble alors normal d'entourer le point de discontinuité M_i par un volume infiniment petit dont les dimensions tendront vers zéro.

Le terme en k_1^2 ne pose pas de problème ; il conduit à une intégrale convergente. C'est le terme

$$\iiint_{\Delta v_i} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{-jk_1 R'}}{R'}\right) dv \text{ qui est intéressant.}$$

L'intégrant devenant infini en R' = o, entourons le point M_i d'un petit volume v, et étendons l'intégration au volume $\Delta v'_i = \Delta v_i - v$. La particularité est que l'intégrale résultante ne converge pas : la limite dépend de la forme du volume v exclu. Nous allons le montrer sur un exemple. [24].

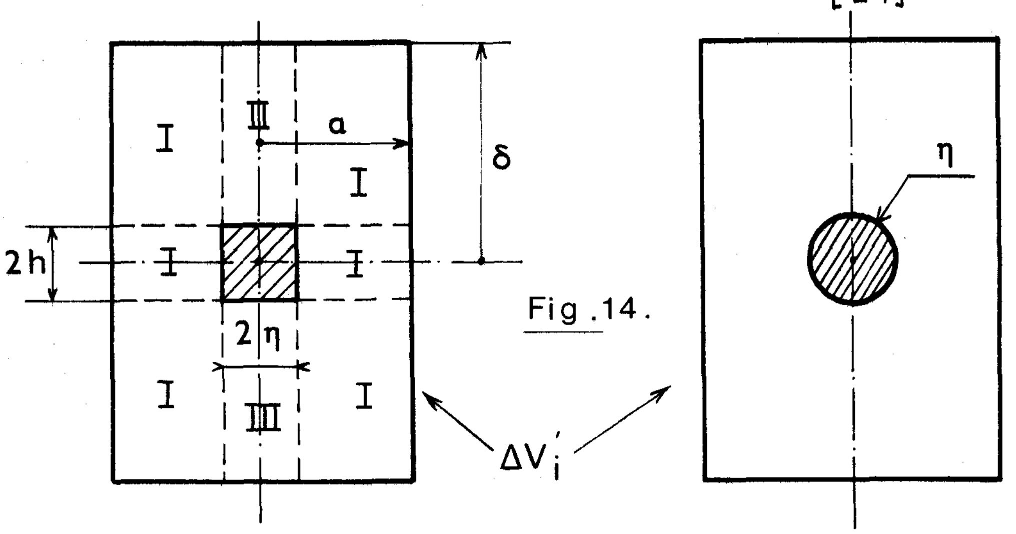


Fig.14.

. Prenons comme volume v un cylindre circulaire de rayon η et de hauteur 2h.

Pour ce volume : $I' = \iiint_{v_i' = v_i - v} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2\right) \frac{e^{-jk_1 R'}}{R'} dv$. Considérons

$$I = \iiint_{v_i' = v_i - v} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{-jk_1 R'}}{R'}\right) dv = 2\pi \iint_{I+II+III} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{-jk_1 R'}}{R'}\right) \bar{\rho}\, d\bar{\rho}\, dz$$

d'où $I = 4\pi \cdot \left[1 - e^{-jk_1\delta} + \frac{\delta}{\sqrt{a^2+\delta^2}} e^{-jk_1\sqrt{a^2+\delta^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\eta^2}{h^2}}}\right] = f\left(\frac{\eta}{h}\right)$

. Prenons comme volume v une sphère de rayon η. Nous obtenons :

$$I = 4\pi . \left[\frac{\delta}{\sqrt{a^2+\delta^2}} . e^{-jk_1\sqrt{a^2+\delta^2}} - e^{-jk_1\delta} + \frac{e^{-jk_1\eta}}{3} + \frac{1}{3} . jk_1\eta . e^{-jk_1\eta}\right]$$

La seconde intégrale tend bien vers une limite I_o, où

$$I_o = 4\pi \left[\frac{1}{3} - e^{-jk_1\delta} + \frac{\delta}{\sqrt{a^2+\delta^2}} . e^{-jk_1\sqrt{a^2+\delta^2}}\right]$$

alors que la limite de la première dépend du choix du rapport $\frac{\eta}{h}$.

Nous avons donc a priori le choix, pour le calcul de A_{ii}, entre
- prendre la formule (88)
- prendre la formule (85), éliminer le point M_i par une sphère et utiliser le résultat ci-dessus.
- prendre la formule (85) et éliminer M_i par un petit cylindre.

Nous éliminons la dernière solution : un cylindre n'est pas un volume analytiquement simple comme la sphère, puisqu'il présente une discontinuité de la normale au niveau des arêtes ; il présente, comme le montre le calcul précédent, une infinité de façons de tendre vers zéro suivant le rapport $\frac{\eta}{h}$. Cette singularité est davantage d'ordre mathématique que physique, et nous ne conserverons pas de volume à arêtes.

Le fait de prendre la formule (85) et d'entourer le point M_i par une sphère nous donne une valeur principale de l'intégrale définie par (85). Mais nous avons déjà éliminé la discontinuité qui apparait lorsque le point d'observation et le point courant sont confondus : cela a été fait en

II 2. 3. lors de l'application du Théorème de Green. Cette valeur principale, due à la discontinuité de $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{-jk_1R}}{R}\right)$ en R = o ne nous parait pas satisfaisante non plus sur le plan mathématique puisqu'elle peut être éliminée en utilisant une autre expression de $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2\right) \frac{e^{-jk_1R}}{R}$

En définitive, nous conserverons l'expression définie en (88).

III 5. 6. Résultats obtenus

Nous avons donc résolu le système $||KA_{ij} - \delta_i^j|| \cdot ||E_z|| = ||E_{z_o}||$ en calculant les termes A_{ij} par la formule (88). ($K = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{4\Pi\sigma_1}$)

Nous avons choisi un découpage régulier en n éléments, avec n < 96 pour utiliser l'algorithme de Froebenius mis au point sur le Gamma 40 de l'U.S.T.L. Nous avons obtenu un rapport E_z/E_{z_o} sensiblement constant tout au long du tubage et égal à $\frac{1}{K-2}$, où K est le contraste de conductivité entre le terrain et la colonne de boue.

A titre de vérification, nous avons programmé la formule (32) dans laquelle nous avons fait a = b et $\sigma_2 = \sigma_3$. Nous avons fait une intégration numérique directe en utilisant successivement l'algorithme de SIMPSON puis une quadrature de GAUSS d'ordre 8. De façon à rendre plausible la comparaison, nous nous sommes limités à des profondeurs inférieures à 400 m.

Dans ces conditions, les deux méthodes théoriques donnent sensiblement les mêmes résultats ; la méthode analytique donne un rapport voisin de $\frac{1}{K-1}$ pour E_z/E_{z_o} , ce qui est un résultat encourageant, les différences enregistrées sur les résultats des deux méthodes dépassant rarement 20%.

Nous avons donc estimé que la méthode numérique pouvait être appliquée au cas d'un modèle plus élaboré, i. e. comportant 3 résistivités différentes.

III 6. Calcul de la composante E_z à l'intérieur du tubage

III 6. 1. Modèle considéré

Nous prendrons un tubage de longueur L, de rayons extérieur et intérieur b et a, de conductivité σ_2, placé dans un demi-milieu de conductivité σ_1 et rempli d'une boue de forage de conductivité σ_3. Par rapport au cas précédent nous avons donc rajouté le tube de conductivité σ_2.

Nous ferons cette fois aussi un découpage vertical de l'anomalie. Les dimensions radiales du tubage sont en effet assez faibles pour considérer que la composante E_z ne subit pas de variations à l'intérieur d'un cylindre élémentaire de rayon b. Dans le calcul du paragraphe précédent, nous avions fait cette hypothèse pour un cylindre de rayon a. Le fait de mettre une paroi isolante d'épaisseur (b-a) ne modifiera pas la validité de cette hypothèse. Le problème serait différent pour un tubage conducteur, car le champ vertical serait alors nettement atténué à la hauteur de la paroi.

Notre volume élémentaire Δv_j^* sera donc composé par la juxtaposition de deux cylindres coaxiaux admettant pour bases :

- un cercle de rayon a (Δv_j^1)
- une couronne circulaire de rayons a et b (Δv_j^2).

Pour dissocier ces deux volumes, nous n'aurons que la conductivité : σ_3 pour le premier, et σ_2 pour le second. En conséquence, nous ferons de σ une fonction de point en r (Fig. 16).

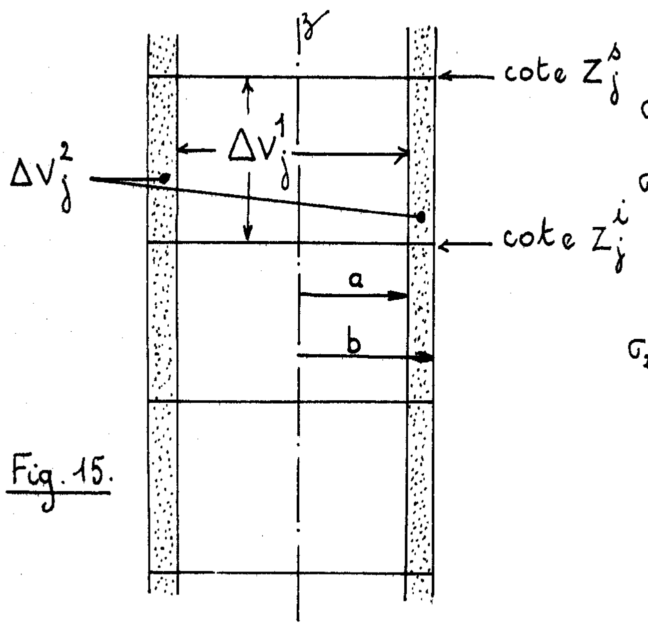


Fig. 15.

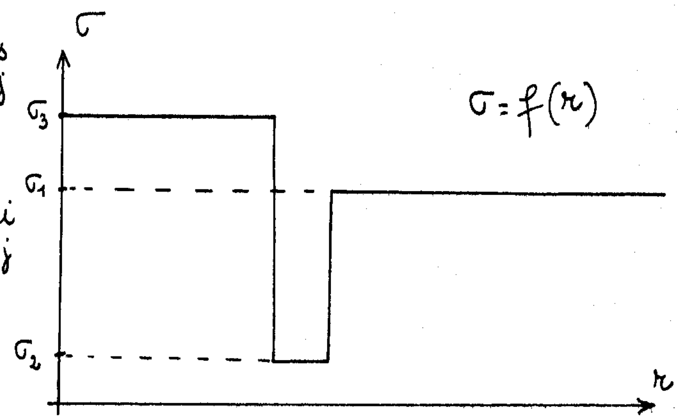


Fig. 16.

$\sigma = \sigma_3$ si $r < a$
$\sigma = \sigma_2$ si $a < r < b$
$\sigma = \sigma_1$ si $r > b$

III 6. 2. Expression des nouveaux coefficients A_{ij}^*

Nous devons résoudre le système $||A_{ij}^* - \delta_i^j|| \cdot ||E_z|| = ||E_{z_o}||$, donc commencer par calculer A_{ij}^*.

Par rapport aux calculs du paragraphe précédent, c'est le volume Δv_j qui a changé ; le fonction de Green $G'(M_i, M_j)$ est restée la même.

$$A^*_{ij} = \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1}\int_{\Delta v_j^*} G'(M_i,M_j)\,dv_j \qquad \text{soit, d'après (87)}$$

$$A^*_{ij} = \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1}\int_{\Delta v_j^*} \frac{-1}{jk_1\bar\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar\rho}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_1^2\right)\left(e^{-jk_1R'}-e^{-jk_1R''}\right)\right]dv_j$$

Pour montrer que σ_2, qui est la conductivité du milieu se trouvant à l'intérieur de Δv_j^*, est une fonction de r, faisons rentrer l'expression sous le signe $\int$

$$A^*_{ij} = \int_{\Delta v_j^*}\frac{\sigma(r)-\sigma_1}{4\pi\sigma_1}\cdot\frac{-1}{jk_1\bar\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar\rho}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_1^2\right)\left(e^{-jk_1R'}-e^{-jk_1R''}\right)\right]dv_j \qquad (89)$$

La fonction $\sigma(r)$ valant d'avord σ_3, puis σ_2 dans Δv_j^*, écrivons

$$A^*_{ij} = \int_{\Delta v_j^1}\frac{\sigma_3-\sigma_1}{4\pi\sigma_1}(\ldots)\,dv_j + \int_{\Delta v_j^2}\frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1}(\ldots)\,dv_j \Rightarrow$$

$$A^*_{ij} = \frac{\sigma_3-\sigma_1}{4\pi\sigma_1}\int_{\Delta v_j^1}(\ldots)\,dv_j + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1}\int_{\Delta v_j^2}(\ldots)\,dv_j \qquad (90)$$

où Δv_j^1 correspond à $r < a$ et Δv_j^2 à $a < r < b$.

Le premier terme du second membre de (90) n'est autre (au coefficient près) que le terme calculé en (88). Evaluons donc le second terme.

$$A^2_{ij} = \int_{\Delta v_j^2}\frac{-1}{jk_1\bar\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar\rho}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_1^2\right)\left(e^{-jk_1R'}-e^{-jk_1R''}\right)\right]\cdot dv_j \times \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1}$$

$$= \int_{\Delta S_j^2}\frac{-2\pi}{jk_1\bar\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar\rho}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_1^2\right)\left(e^{-jk_1R'}-e^{-jk_1R''}\right)\right]\cdot d\bar\rho\cdot dz \times \frac{\sigma_2-\sigma_1}{4\pi\sigma_1}$$

d'après la remarque qui a été faite en III 5. 4.

Donc $A_{ij}^2 = \int_{Z_j^i}^{Z_j^s} \int_a^b = \int_{Z_j^i}^{Z_j^s} \left[\int_0^b - \int_0^a \right]$ (91)

Nous reconnaissons en $\int_{Z_j^i}^{Z_j^s} \int_0^a$ l'expression calculée en (88). Nous pouvons donc écrire :

$A_{ij}^2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\pi\sigma_1} \cdot \left[F(b) - F(a) \right]$, si F(a) désigne l'expression (88).

F(b) est obtenu en remplaçant a par b dans cette formule.

Par conséquent, nous aurons :

$$A_{ij}^* = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{4\pi\sigma_1} \cdot F(a) + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\pi\sigma_1} \cdot \left[F(b) - F(a) \right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_{ij}^* &= \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{4\pi\sigma_1} \cdot F(a) + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\pi\sigma_1} \cdot F(b) \\ \text{avec } F(x) &= 2\pi \left[\frac{Z_j^s - z_i}{\sqrt{x^2 + (Z_j^s - z_i)^2}} \cdot e^{-jk_1\sqrt{x^2 + (Z_j^s - z_i)^2}} - \frac{Z_j^i - z_i}{\sqrt{x^2 + (Z_j^i - z_i)^2}} \cdot e^{-jk_1\sqrt{x^2 + (Z_j^i - z_i)^2}} \right] \\ &- 2\pi \left[\frac{Z_j^s + z_i}{\sqrt{x^2 + (Z_j^s + z_i)^2}} \cdot e^{-jk_1\sqrt{x^2 + (Z_j^s + z_i)^2}} - \frac{Z_j^i + z_i}{\sqrt{x^2 + (Z_j^i + z_i)^2}} \cdot e^{-jk_1\sqrt{x^2 + (Z_j^i + z_i)^2}} \right] \\ &+ 2\pi \cdot jk_1 \int_{Z_j^i}^{Z_j^s} \left(e^{-jk_1\sqrt{x^2 + (Z - z_i)^2}} - e^{-jk_1\sqrt{x^2 + (Z + z_i)^2}} \right) dZ \end{aligned}}$$

III 6. 3. Choix du découpage et limitation du modèle

Nous sommes en mesure maintenant de résoudre le système (92) : $||A_{ij}^* - \delta_i^j|| \cdot ||E_z|| = ||E_{z_0}||$. Par rapport au cas précédent, il faut un temps calcul plus important : le terme général A_{ij}^* nécessite le calcul de F(b) et de F(a), alors qu'il fallait seulement F(a) précédemment dans III 5.

La résolution du système A.X = B passe par 2 étapes :

- le chargement des matrices A et B
- la résolution proprement dite.

C'est le chargement de A qui prend le plus de temps calcul (environ les 4/5 du temps total) à cause de la présence, dans F(x), d'une intégrale non calculeable analytiquement. S'il fallait un temps t pour la résolution de (83), il faudra un temps $\frac{9t}{5}$ pour la résolution de (92) ; ce qui représente près de 8 heures, pour un découpage en 100 volumes élémentaires, sur la GAMMA 40 de l'U.S.T.L.

D'autre part, nous nous sommes aperçus, en résolvant numériquement (83), qu'un découpage en 100 éléments était insuffisant. Il nous fallait n = 200 pour avoir un découpage correct. Les raisons de ce choix ont déjà été indiquées en I. 5. 2. : les volumes élémentaires doivent être de section sensiblement carrée, et il est possible de le faire en prenant n = 200 et en augmentant la largeur du tubage. Nous avons vérifié au préalable que la méthode analytique du chapitre II nous donnait bien les mêmes résultats lorsque l'on augmentait la section du tubage tout en la gardant dans des limites raisonnables. Cette vérification faite, nous avons décidé de travailler sur des tubages plus larges dans les conditions suivantes :

$L \simeq 500m$, $a \simeq 1,2m$, $b \simeq 1,4m$, $f = 12,5$ Hz, $\sigma_1 \simeq 10^{-2}$ s/m,
sachant que le calcul analytique nous don nait les mêmes résultats pour a = 1,2m que pour a = 0,12m. C'était, à notre opinion, la seule hypothèse permettant d'aboutir à un résultat plausible.

III 6. 4. Passage sur CONTROL DATA 7 600

Le temps calcul nécessité par la résolution de (83) avec un découpage en n éléments est 8 fois moindre que celui nécessité par la résolution de (92) avec un découpage en 2 n.

Sachant que, dans le premier cas, nous avions des problèmes avec le GAMMA 40 (programmes trop longs, manque de capacité...), il n'était pas envisageable d'aborder le second cas sur le même ordinateur.

Nous avons bénéficié de l'aide de l'Institut Français du Pétrole qui nous a autorisés à venir utiliser son ordinateur, un CONTROL DATA 7 600, dans le cadre du contrat sur le "Modèle Mathématique du Télélog".

Sur un tel ordinateur, en utilisant les mémoires auxiliaires rapides, le chargement des matrices définies par (92) et la résolution du systeme pour n = 200 nécessitent moins de 3 mn ; pour n = 100, il faut 28 secondes.

L'utilisation du C.D.C. a largement contribué à l'obtention des résultats de ce paragraphe.

III 6. 5. Résultats obtenus

Nous avons donné dans le chapitre I les planches 13 à 18 obtenues à l'aide de la méthode numérique exposée jusqu'ici.

Pour les applications numériques, nous avons pris $\sigma_2 \simeq \omega\varepsilon_0\varepsilon_r$. En effet, nous avons négligé, dans l'écriture de σ_1 et σ_3, le terme en $j\omega\varepsilon_0$. Mais, lorsque le milieu à considérer est isolant, nous pouvons lui attribuer une permittivité relative ε_r ; dans ces conditions, c'est la conductivité σ_2 qui devient inférieure au produit $\varepsilon_0\varepsilon_r\omega$.

Nous avons donc pris

$\sigma_1 + j\omega\varepsilon_0 \simeq \sigma_1$, $\sigma_3 + j\omega\varepsilon_0 \simeq \sigma_3$ et $\sigma_2 + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r \simeq j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r$. Les calculs ont été faits avec $\varepsilon_r \simeq 100$.

Nous remarquerons cependant que, aux basses fréquences considérées, $\omega\varepsilon_0\varepsilon_r < \sigma$ et σ_3 . Dans l'expression de A_{ij} donnée en III 6. 2., nous pouvons faire σ_2 (en fait $j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r$) $< \sigma_1$ et σ_3 . Il reste alors :

$$A_{ij}^{*} \simeq \frac{\sigma_3}{4\pi\sigma_1} F(a) - \frac{1}{4\pi} F(b)$$

Dans la mesure où (b-a) est faible, l'expression de A_{ij} est alors à rapprocher de $\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{4\pi\sigma_1} F(a)$, résultat obtenu en ne tenant pas compte de la paroi isolante.

Les résultats exposés au Chapitre I ont été obtenus dans le cas d'un découpage irrégulier se resserrant au fur et à mesure que l'on approchait des extremités du tubage de façon à bien mettre en évidence les effets de bords.

C'est l'obtention des effets de bord à l'extrémité inférieure du tubage qui constitue la contribution la plus intéressante de cette étude numérique, mis à part le fait qu'elle confirmait la possibilité d'effectuer un Télélog dans le tubage.

CONCLUSION

A l'issue de l'étude présentée, nous pouvons dire qu'effectuer un Télélog dans le tubage est une opération possible. Le signal reçu est d'un ordre de grandeur permettant d'effectuer des mesures dans les mêmes conditions qu'en trou ouvert.

Nous avons présenté une étude analytique rigoureuse d'un problème approchant la réalité. Cette étude nous a permis de constater une remontée relative du signal au fur et à mesure que l'émetteur se rapproche de l'axe du forage, et ce phénomène a été confirmé par l'expérience.

Dans une seconde étape, nous avons présenté une méthode numérique qui correspond à l'état actuel des recherches effectuées à l'U. S. T. L. Cette méthode, pour les valeurs de z inférieures à 300 mètres, nous a donné des résultats comparables à ceux de la première, ce qui laisse augurer de sa fiabilité. En fait, le tubage n'est pas un "bon" modèle, car sa faible section oblige à considérer un grand nombre de petits volumes élémentaires. Ces volumes sont, à notre avis, trop petits (de meilleurs résultats seraient très certainement obtenus dans le cas de forts contrastes de conductivité, les études en cours montrant une relation entre le contraste de conductivité et la dimension optimum des volumes élémentaires) pour que des variations soient assez nettes en fonction des divers paramètres.

Nous pensons avoir apporté une contribution dans l'analyse des résultats obtenus en trou tubé, et il semble que les problèmes susceptibles de se poser ne soient que d'ordre technique, la faisabilité nous paraissant acquise.

oOo

REFERENCES

(1) R. GABILLARD, F. LOUAGE, Z. BASSIOUNI, R. DESBRANDES
Télédiagraphie, une méthode directionnelle à grande distance d'un sondage.
Colloque B. R. G. M., Orléans, Novembre 1971.

(2) Z. BASSIOUNI, R. GABILLARD
Détermination de la distance du bord du gisement de gaz de LUSSAGNET (S. N. P. A.) à l'axe du puits LUG 39 par des mesures de Télédiagraphie.
Rapport I. F. P., réf. 19849, Décembre 1971.

(3) E. DE GELIS Télédiagraphie sur LUG 39
Rapport interne S.N.P.A. (D.E.P.), PAU, 10 novembre 1971, (R.G. n°71-350)

(4) Z. BASSIOUNI, J. C. VACHON
Télélog en trou tubé ; rapport interne, novembre 1972.

(5) R. GABILLARD Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs.
Rapport I.R.E.L. 67-110, Tome 1, LILLE.

(6) J. STRATON, Théorie de l'électromagnétisme , DUNOD, 1961

(7) P. DEBYE Annalen des Physik
Volume 30, 1909, page 57.

(8) G. N. TSANDOULAS Scattering of a dipole field by finetely conducting and dielectric circular cylinders.
I. E. E. E. Trans. AP-16 - Nb3 - Mai 1968 - p. 324.

(9) GRADSHTEYN et AYZHIK Tables of integrals, series and products
Academic Press, N.Y. 1965 ; page 710, formule n°4.

(10) G. N. WATSON Theory of Bessel functions
Second edition, Cambridge, 1944 ; page 360.

(11) A. ANGOT Compléments de mathématiques, Ed. du C.N.E.T., 1961

(12) N.W. Mc LACHLAN Bessel Functions
Second Edition, Oxford, 1961 ; pages 191-197.

(13) R. JONES International Series on Monographs for Pure and Applied Mathematics - Vol.47 - PERGAMON Press 1964-p.492-99

(14) K.K. MEI et J. G. VAN GLADEL
Scattering by perfectly conducting rectangular cylinders.
IEEE Trans. AP-11 - Nb 2 - p. 185-192 - March 1963.

(15) M. G. ANDREASEN Scattering from parallel metallic cylinders with arbitrary cross-sections.
IEEE Trans. AP-12 - Nb 6 - p. 746 - Nov. 1964.

(16) C.R. MULLIN et R. SANDBURG
A numerical technique for the determination of scattering cross-section.
IEEE Trans. AP-13 - Nb 1 - p. 141 - Jan. 1965.

(17) R.W.P. KING Electromagnatic engineering
Mc GRAW-HILL Book Company, Vol. I, 1945.

(18) M. CAUTERMAN Rapport d'avancement sur le modèle mathématique - Avril 1973.

(19) M. CAUTERMAN Thèse de Doctorat d'Etat - LILLE - à paraître.

(20) R.F. HARRINGTON Matrix methods for field problems
Proc IEEE, Vol. 55, Nb 2, Fév. 1967, pages 136 à 149.

(21) R.F. HARRINGTON Field computation by moment methods.
Mc MILLAN Company, N.Y., 1968, pages 5 à 19.

(22) E. DURAND Solutions numériques des équations algébriques, Masson, Tome 2, 1961 ; pages 52 à 78 et 145 à 147.

(23) F.B. HILDEBRAND Introduction to numerical analysis Mc GRAW-HILL Book company, 1956 ; page 323.

(24) J. VAN BLADEL Some remarks on Green's Dyadic for infinite space - IRE Trans. AP, Nov. 1961, pages 563 à 566

oOo