

50376

N° d'ordre: 150

1973  
156

50376

1973

156

# THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR INGENIEUR

par

**Yves RAVALARD**



ETIRAGE DE PROFILES A SECTION CARREE OU  
RECTANGULAIRE A TRAVERS UNE FILIERE SEMI-INFINIE

Soutenue le 29 Novembre 1973 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :	MM.	GONTIER	Président
		PARSY	Rapporteur
		DYMENT	Examineur
		SAVE	Invité

ETIRAGE DE PROFILES A SECTION  
CARREE OU RECTANGULAIRE  
A TRAVERS UNE FILIERE  
SEMI-INFINIE

AVANT-PROPOS.

Le domaine de recherche choisi, la MISE EN FORME DES METAUX, étant encore assez original en France et nécessitant des moyens d'essais importants, ce travail n'a pu être mené à bien que grâce au concours de nombreuses personnes que nous tenons à remercier le plus vivement pour leur compréhension et le soutien qu'elles ont toujours apportées à notre enthousiasme.

Plus particulièrement, nous assurons de notre profonde reconnaissance

- Monsieur DEBEUNNE, Directeur de l'ICAM, dont l'appui nous a permis de dégager temps et crédits indispensables ;
- Monsieur GONTIER, Directeur de l'IMFL, dont les encouragements nous ont toujours été précieux ;
- Monsieur PARSY, Directeur de l'UER de Mathématiques Pures et Appliquées, dont l'intérêt et l'aide nous permirent de résoudre de nombreux problèmes ;
- Monsieur BAQUE, Responsable du Groupe Commun de Recherche sur la Mise en Forme des Matériaux (Ecole des Mines de Paris - Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées), dont l'expérience fut primordiale pour le choix du sujet et dont les conseils nous permirent de dégager les grands axes de notre recherche tant sur le plan scientifique que technique ;
- Madame REMY, du C.I.T.I., pour son aide infatigable lors de difficultés avec l'ordinateur ;
- mes coéquipiers du Département Matériaux Structures Mise en Forme de l'ICAM pour leur aide dans l'étude expérimentale.

Les expériences ont été réalisées intégralement au Département M.S.M. Le "know-how" nécessaire a été acquis au cours d'une expérience d'enseignement et de recherche de MISE EN FORME DES METAUX destinée aux élèves-ingénieurs ICAM et dont les débuts date déjà de deux ans.

Le financement de nos recherches a été assuré sur les fonds propres au Département M.S.M. sans aucune subvention d'organismes de recherche officiels.

SOMMAIRE.

L'étirage des barres (de section carrée ou rectangulaire) à travers des filières planes semi-infinies détermine des écoulements stationnaires en état plan de contraintes ou plus généralement tridimensionnels. Deux grandeurs permettent de les caractériser globalement : l'effort d'étirage et la forme de la surface libre.

Ce problème a été étudié à partir de différentes méthodes (Tranches, Colonnes et Bornes Supérieures), l'objectif fixé étant de tester leur complexité ainsi que leur capacité à prévoir l'écoulement en question.

Le matériau est supposé être rigide parfaitement plastique obéit au Principe du Travail Maximal de HILL et suit le critère de VON MISES. Toute section d'une barre en cours d'étirage est supposée rectangulaire.

La confrontation des résultats théoriques et expérimentaux obtenus est excellente pour l'effort d'étirage, moyenne pour la forme de la surface libre (bonne pour de faibles rapports d'étirage).

Une plus grande précision pourra être obtenue en affinant les champs de vitesse choisis pour les méthodes de Bornes Supérieures ou en faisant appel à de nouvelles méthodes (Lignes de Glissement en Contraintes Planes, méthodes variationnelles).

TABLE DES MATIERES.

Pages

- Première Partie :

GENERALITES

I - <u>Définition de l'Etude.</u>	7
II - <u>Lois de la Plasticité.</u>	12
1 - <i>Comportement plastique.</i>	
2 - <i>Critère d'Écoulement.</i>	
3 - <i>Les Lois d'Écoulement.</i>	
III - <u>Lois du Frottement.</u>	
1 - <i>Frottement de Coulomb.</i>	21
2 - <i>Frottement de couche.</i>	

- Deuxième Partie :

METHODES DE RESOLUTION

I - <u>Méthodes de compression.</u>	25
1 - <i>Généralités.</i>	26
2 - <i>Méthode des TRANCHES.</i>	29
3 - <i>Méthode des COLONNES.</i>	47
II - <u>Méthodes de Borne Supérieure.</u>	84
1 - <i>Généralités.</i>	85
2 - <i>Méthode par champ continu de Vitesse - Généralités.</i>	89
3 - <i>Champ 1.</i>	94
4 - <i>Champ 2.</i>	113
5 - <i>Méthode des Blocs.</i>	133
III - <u>Comparaison des différentes méthodes.</u>	155

- Troisième Partie :

ETUDE EXPERIMENTALE

I - <u>Système Expérimental.</u>	164
1 - <i>Dispositif d'Essai.</i>	165
2 - <i>Processus d'Essai de l'acier.</i>	171
II - <u>Résultats.</u>	172

- Quatrième Partie :

CONCLUSION

Première Partie -

GENERALITES

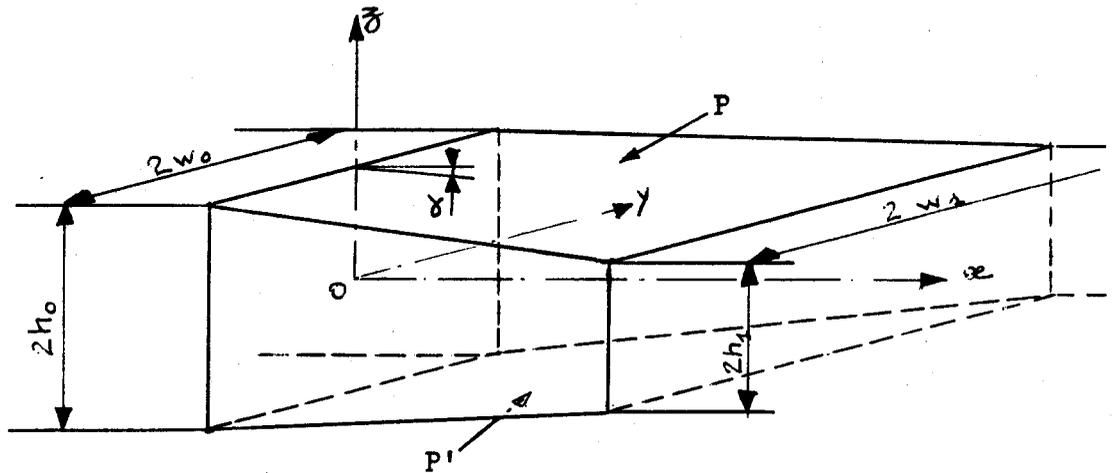
Première Partie -

Titre I -

DEFINITION DE L'ETUDE

11 - DEFINITION DU PROCEDE.

- [fig 11] -



Une barre rectangulaire, de dimensions initiales  $2h_0, 2w_0$ , est tirée à travers une filière composée de 2 plans inclinés agissant sur les faces supérieures P et inférieures P' de la pièce. La section du produit a pour dimensions  $2h_1$  et  $2w_1$  [ $h_1 < h_0$ ]. La largeur du produit dépend essentiellement des conditions de frottement aux interfaces filière-pièce, du rapport et de l'angle d'étirage. Le rapport d'étirage r est défini par :

$$r = \frac{h_0 w_0 - h_1 w_1}{h_0 w_0} = \frac{\Delta S}{S_0} \quad [E 101]$$

Ce rapport n'étant pas connu avant expérimentation ou détermination analytique du procédé, nous utiliserons une expression simplifiée que nous intitulerons rapport d'étirage réduit et désignerons par le repère  $r^*$  :

$$r^* = \frac{h_0 - h_1}{h_0} \quad [E 102].$$

L'angle d'étirage,  $\alpha$ , sera défini par l'angle formé par une des faces de la filière avec l'axe d'étirage.

Suivant la valeur du rapport  $w_0/h_0$  le problème pourra être analysé :

- en déformations planes ( $w_0 \approx w_1$  pour des valeurs de  $\frac{w_0}{h_0} \geq 10$ ) ; ce problème

est déjà résolu, une solution exacte a été obtenue par la méthode des lignes de glissement ;

- en contraintes planes (pour  $\frac{w_0}{h_0} \leq 1$ ) ;

- sans spécifications particulières (pour  $10 \geq \frac{w_0}{h_0} \geq 1$ ).

Ces 2 derniers points sont ceux que nous avons étudiés. Une seule publication a paru sur ce sujet. Dûe à Hill [Réf. 16], la méthode de résolution envisagée conduit à une équation différentielle très complexe qui n'a pas été résolue à notre connaissance, limitant ainsi l'intérêt de la solution proposée.

Les objectifs visés par notre étude sont :

- sur le plan des résultats : calculer la force d'étirage nécessaire et l'élargissement  $w_1$  avec une précision suffisante.

- confronter différentes méthodes de résolution utilisées habituellement en déformations planes ou symétrie cylindrique et définir leurs qualités respectives.

Ce dernier objectif est très important. En effet les recherches actuelles en MISE EN FORME sont orientées vers la prévision d'écoulements à surfaces limites partiellement libres. Dans cette perspective, il est essentiel de caractériser l'aptitude de chacune des méthodes disponibles à prévoir ces écoulements. [Ces problèmes se rencontrent dans l'étude du forgeage ou du laminage en cannelures

par exemple]. Le Procédé choisi a l'avantage d'être simple. Il doit donc permettre de tester correctement les moyens de résolution. Quels sont-ils ?

On peut distinguer quatre grandes classes de méthodes faisant appel à la théorie de la PLASTICITE :

- Les méthodes de compression

METHODE DE L'ENERGIE DE DEFORMATION UNIFORME

METHODE DES TRANCHES

METHODE DES COLONNES

- Les méthodes extrémales

BORNE SUPERIEURE et BORNE INFERIEURE

- Les méthodes variationnelles

METHODE DE HILL

ELEMENTS FINIS

- La METHODE DES LIGNES DE GLISSEMENT

soit en Déformations Planes

soit en Contraintes Planes.

Chacune de ces méthodes permet de solutionner le problème posé. Elles sont cependant de complexité croissante suivant l'ordre défini ci-dessus et nécessitent également des moyens de calcul de plus en plus puissants.

Nous avons donc choisi de n'aborder dans ce travail que les deux premières classes. Elles ont l'avantage d'être simples et de fournir de bonnes approximations des grandeurs inconnues.

En fait nous avons retenu les méthodes suivantes :

1) La méthode des TRANCHES : elle tient compte de l'énergie de déformation uniforme et du frottement, pas du travail redondant. Elle est très simple mais s'adapte mal au problème mixte  $\left[1 \leq \frac{w_0}{h_0} \leq 10\right]$ .

2) La méthode des COLONNES : elle est une amélioration de la précédente surtout dans le cas du problème mixte.

3) La méthode de BORNE SUPERIEURE repose sur le respect des conditions cinématiques et permet d'obtenir une valeur de l'effort d'étirage supérieure à la réalité.

Nous avons construits plusieurs types de champs de vitesse CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLE. Ils se répartissent en deux sous-groupes :

- Les champs de BLOCS pour lesquels l'énergie est dissipée aux interfaces.
- Les champs CONTINUS pour lesquels l'énergie est dissipée dans la totalité du volume.

Première Partie -

Titre II -

LOIS DE LA PLASTICITE

## 1 - LE COMPORTEMENT PLASTIQUE.

### 11. L'essai de traction.

[F 12] représente le résultat d'un essai de traction jusqu'à la ruine d'une éprouvette cylindrique à la température ambiante en vitesse lente.

Selon le point d'arrêt de l'essai, nous avons les comportements suivants :

Point 2 : comportement élastique linéaire [F 13] ;

Point 3 : comportement Elastique-Plastique-Parfait [F 14] ;

Point 4 : comportement Elastique-Plastique-Ecrouissable [F 15] ;

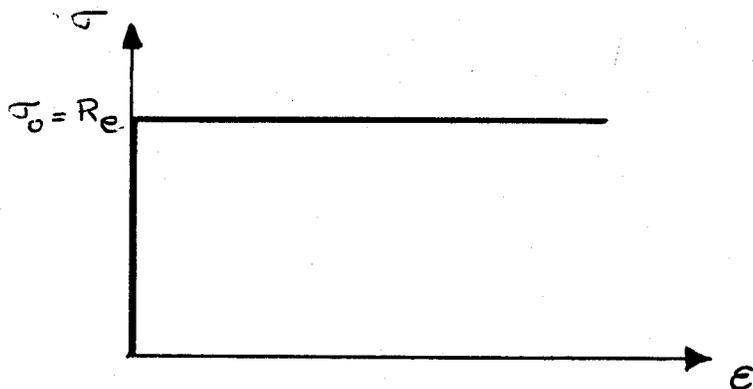
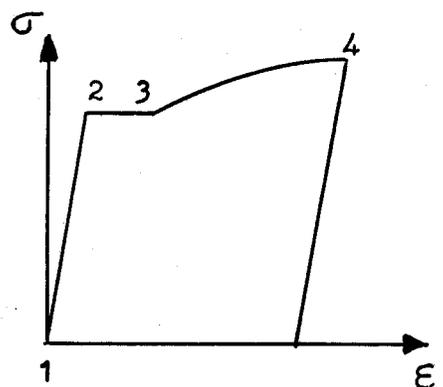
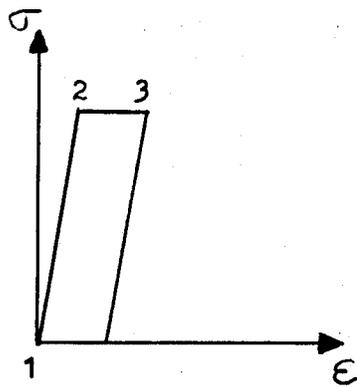
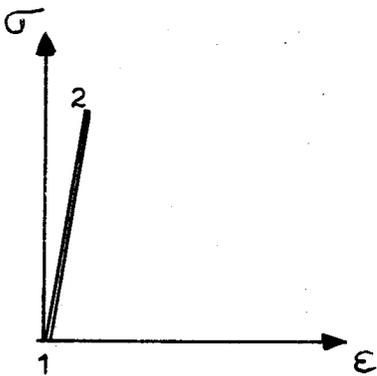
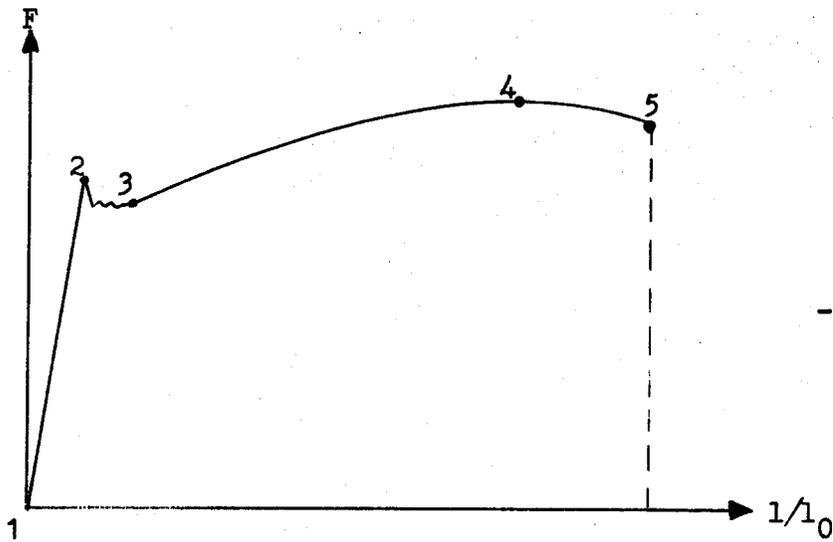
Le point 2 correspond au seuil de plasticité, la contrainte correspondante  $\sigma = R_e$  est la limite d'écoulement.

Dans l'hypothèse d'un matériau écrouissable, la contrainte d'écoulement  $R_e$  varie en fonction de l'histoire du matériau (déformations plastiques préalables).

### 12. Schématisation de la loi de comportement.

Si nous supposons que le matériau ne peut se comporter que suivant [F 14] et si nous négligeons les déformations élastiques, nous obtenons le schéma Rigide Plastique Parfait [F 16]. C'est celui-ci que nous utiliserons par la suite. Les effets de température, de vitesse de déformation, d'écrouissage et l'effet BAUSCHINGER sont négligés.

Ces conditions ne seront pas toujours acceptables, en particulier en ce qui concerne l'écrouissage; nous conserverons cependant le schéma R.P.P., au prix d'une modification de la définition du seuil d'écoulement.



## 2 - LES CRITERES D'ECOULEMENT.

### 21. Forme générale du critère d'écoulement pour le matériau R.P.P.

Au seuil d'écoulement, les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  vérifient la relation suivante :

$$F(\sigma_{ij}) - R_e = 0 \quad [E 103]$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

Nous supposons que le matériau est isotrope, soit :

$$F(\sigma_i) - R_e = 0 \quad [E 104]$$

$$i = 1, 2, 3$$

$\sigma_i$  étant les contraintes principales selon les directions OI, OII et OIII.

En outre, l'écoulement sera supposé peu influencé par la pression hydrostatique :

$$F(s_i) - R_e = 0 \quad [E 105]$$

$$i = 1, 2, 3$$

$s_i$  désignant les composantes principales du déviateur des contraintes.

[E 104] définit la surface d'écoulement  $\Sigma$  dans le système d'axes (OI, OII, OIII). Cette surface admet pour axe de symétrie la trissectrice des axes [F 17]. Elle sera complètement définie par sa trace dans un plan perpendiculaire à  $\Delta$  [F 18]. L'isotropie et l'effet BAUSCHINGER négligé définissent des symétries pour la trace de  $\Sigma$  (par rapport aux axes O1, O2, O3 et à leurs bissectrices). Elle devra donc être à l'intérieur de la surface hachurée [F 18].

22. Critère de MISES.

D'après MISES, l'écoulement se produit lorsque l'énergie de distorsion (ou la contrainte tangentielle octaédrique) atteint une certaine valeur caractéristique du matériau.

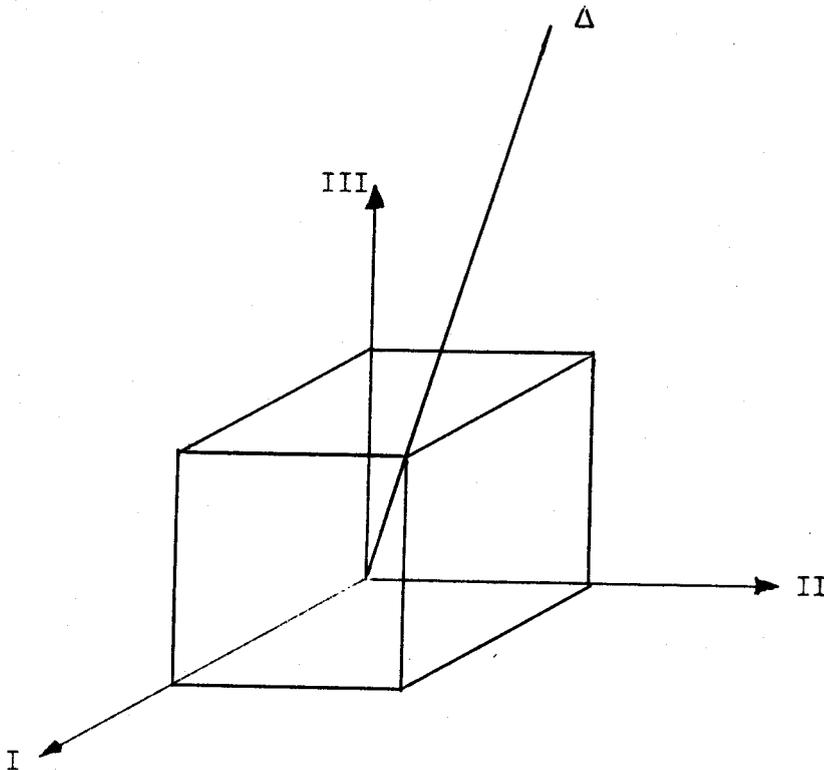
L'expression du critère est :

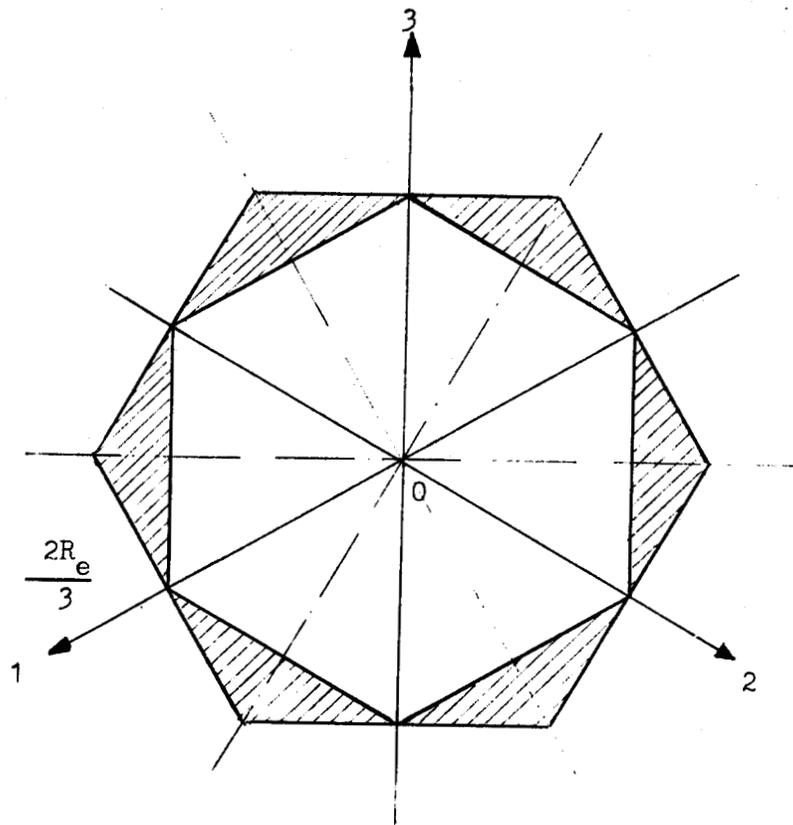
$$\boxed{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2R_e^2 = 0} \quad [E 106]$$

Dans un problème de contraintes planes, il s'écrit :

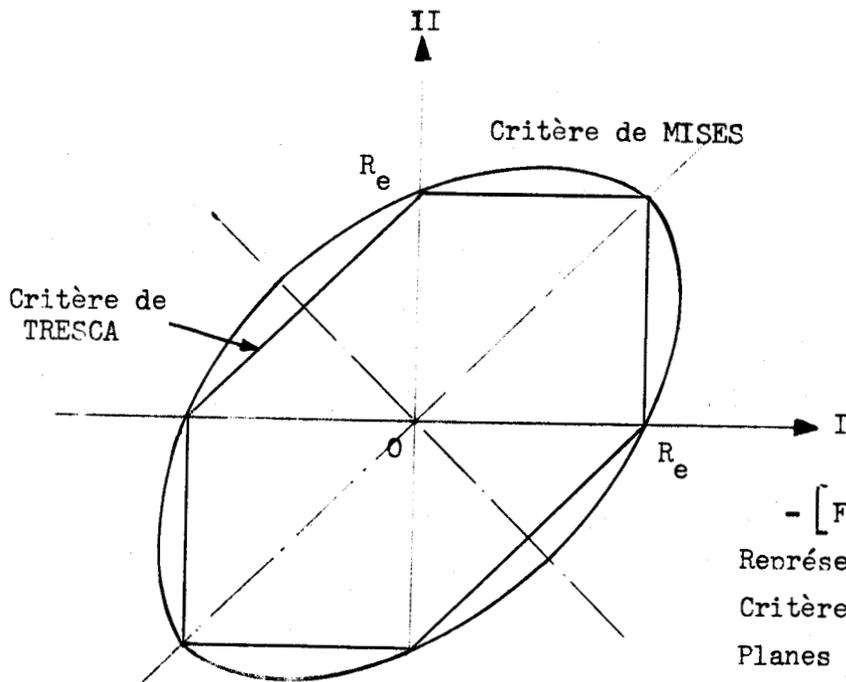
$$\boxed{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - 2R_e^2 = 0} \quad [E 107]$$

Dans le plan (OI, OII), il sera représenté par une ellipse [F 19]





- [ F 18 ] -  
Trace de  $\Sigma$



- [ F 19 ] -  
Représentation des  
Critères en Contraintes  
Planes



### 23. Critère de TRESCA.

Le seuil d'écoulement est atteint lorsque la contrainte tangentielle est égale à une valeur caractéristique du matériau.

Le critère s'écrit :

pour  $\sigma_i \leq \sigma_j \leq \sigma_k$

$$\sigma_k - \sigma_i = R_e = 2k$$

[E 108]

$k$  étant la contrainte tangentielle d'écoulement.

Il est représenté dans [F 18] par l'hexagone intérieur. Lorsque l'une des contraintes est nulle, [E 108] reste inchangée, sa représentation est celle de [F 19].

### 3 - LOIS D'ÉCOULEMENT.

#### 31. Le potentiel plastique.

Après l'écoulement, les déformations ne sont plus réversibles.

A un état de contraintes  $\sigma_{ij}$  correspondent plusieurs états de déformation.

Lorsque l'écoulement se produit, le critère s'écrit :

$$F(\sigma_{ij}) - R_e = 0 \quad \text{et} \quad dF(\sigma_{ij}) = 0$$

[E 109]

l'écrouissage étant négligé.

Soient  $\dot{\epsilon}_{ij}$  les vitesses de déformation. Si l'on représente dans le même repère les contraintes et les vitesses de déformation, le vecteur de composantes  $\dot{\epsilon}_{ij}$  est normal au plan tangent au point  $P(\sigma_{ij})$  à la surface d'écoulement  $\Sigma$ .

En effet :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} d\sigma_3 = 0$$

Il vient :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = d\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad [E 110]$$

[E 110] est la traduction de la loi du potentiel plastique. En tenant compte du critère de MISES, il vient :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = d\lambda \cdot s_{ij} \quad [E 111]$$

### 32. Le travail de déformation plastique.

La puissance dissipée par unité de volume s'écrit :

$$d\dot{w} = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3 = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad [E 112]$$

ou encore, la déformation s'effectuant sans changement de volume :

$$d\dot{w} = s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad [E 113]$$

Si l'on admet le critère de MISES, [E 113] pourra s'écrire :

$$d\dot{w} = \sigma_0 \dot{\epsilon} \quad [E 114]$$

$\dot{\epsilon}$  étant la vitesse de déformation généralisée.

Connaissant un champ de vitesses de déformation, on peut donc calculer la puissance dissipée par celui-ci. A l'inverse, on ne peut pas déterminer le champ de contraintes  $[\sigma]$ .

### 33. Le théorème du travail maximal.

Si l'on admet que la déformation plastique des métaux s'effectue par des glissements entre plans cristallins voisins, on peut démontrer

[Réf : 4 et 6] :

Un élément de matière se déformant  $[\dot{\epsilon}]$ , l'état réel des contraintes est  $[\sigma]$ .

Soit  $[\sigma']$  un autre état de contraintes admissible. Alors :

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

[E 115]

Au cours d'une déformation, le travail des contraintes admissibles est maximal pour l'état réel des contraintes.

Première Partie -

Titre III -

LOIS DE FROTTEMENT

### 1 - GENERALITES.

Le contact entre pièce et filière est source d'un frottement intense. Il est essentiel pour chacune des méthodes de calcul de connaître la valeur de la composante tangentielle du vecteur contrainte en cet interface.

Etant donné la complexité des phénomènes mis en oeuvre, nous nous limiterons à une formulation moyenne, ne tenant pas compte des conditions locales.

### 2 - FROTTEMENT DE COULOMB.

Les composantes normale  $\vec{\sigma}$  et tangentielle  $\vec{\tau}$  du vecteur contrainte  $T$  à l'interface sont reliés par la relation :

$$\tau = \mu\sigma$$

[E 116]

$\vec{\tau}$  est dirigé en sens inverse de la vitesse d'écoulement à l'interface.

Compte-tenu du critère choisi, on tempère souvent le modèle par une référence à la contrainte limite de cisaillement  $k$  :

$$\begin{array}{l} \tau = \mu\sigma \quad \text{si } \tau \leq k \\ \tau = k \quad \text{si } \mu\sigma > k \end{array}$$

[E 117]

$$k = \frac{R}{\sqrt{3}} \quad \text{avec le critère de MISES}$$

$$k = \frac{R}{2} \quad \text{avec le critère de TRESCA.}$$

### 3 - FROTTEMENT DE COUCHE LIMITE.

La composante tangentielle de  $\vec{T}$  a un module constant, qu'on peut écrire :

$$\tau = mk$$

[E 118]

$m$  étant un coefficient compris entre 0 et 1.

On suppose alors qu'il se forme une couche interfaciale de contrainte d'écoulement  $m R_e$ , parfaitement adhérente à l'outil et à la pièce.

Ce modèle correspond assez bien aux phénomènes rencontrés lorsque le mode de fabrication et le lubrifiant utilisés permettent l'apparition d'un film hydrodynamique à l'interface.

Ce ne sera évidemment pas le cas dans nos essais. Néanmoins, nous utiliserons ce modèle car il a l'avantage de permettre une détermination des conditions aux limites sans connaissance de la contrainte normale à l'interface.

Deuxième Partie -

METHODES DE RESOLUTION

Deuxième Partie -

Titre I -

METHODES DE COMPRESSION

I - GENERALITES

1 - Généralités sur les méthodes de compression.

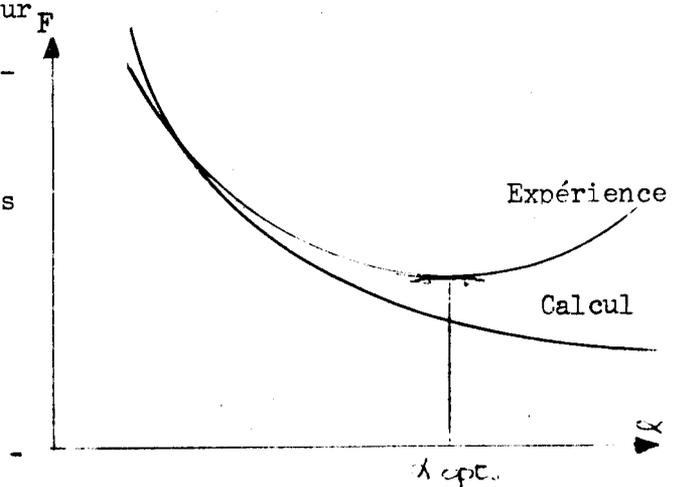
Les 2 méthodes présentées dans ce titre sont du même type. Elles sont basées sur l'étude de l'équilibre d'éléments de volumes définis par l'utilisateur (TRANCHES ou COLONNES).

Les conditions aux limites sont prises en compte (le frottement n'est pas négligé). Les contraintes tangentielles aux surfaces du volume sont considérées comme des efforts extérieurs, ce qui permet de conserver les directions principales suivant les axes géométriques. Les déformations sont supposées homogènes dans le volume élémentaire.

Ces hypothèses définissent les limites de ces méthodes. En effet, elles permettent de tenir compte des énergies de déformation homogène, de frottement mais négligent le travail redondant. Les courbes  $F = f(\alpha)$  qu'on pourra en déduire seront donc continûment décroissantes. [Cf. F 21.1].

Ces méthodes sont excellentes pour des valeurs de  $\alpha$  faibles et surtout inférieures à  $\alpha$  optimum.

Elle sont en général peu estimées pour le calcul des déformations. Cependant leur capacité à prévoir l'élargissement libre  $w$  est inconnue.



2 - Critères de Plasticité.

- [F 21.1] -

Quelle est l'aptitude de chacun des critères (§ 1.2.22 et 23) à prévoir l'élargissement libre  $w_1$  dans un problème de contraintes planes ?

### 21. Critère de TRESCA.

Si  $Ox$  est la direction d'étirage  $Oy$  celle de l'élargissement libre, la contrainte principale  $\sigma_2$  sera nulle :

$$\sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 < 0 \quad \sigma_1 > 0$$

soit :  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0$ .

D'après [E 110]

$$\frac{\dot{\epsilon}_1}{-1} = \frac{\dot{\epsilon}_2}{0} = \frac{\dot{\epsilon}_3}{1} = d\lambda$$

$$\boxed{\dot{\epsilon}_2 = 0}$$

[E 211]

La vitesse de déformation dans la direction de l'élargissement libre est constamment nulle. Nous sommes ramenés au problème de déformations planes.

### 22. Critère de MISES.

Il s'écrira [E 107] :

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2 - 2 R_e^2 = 0$$

La relation de Lévy-MISES [E 111] définit les relations vitesses de déformation contraintes déviatoriques :

$$\frac{\dot{\epsilon}_1}{s_1} = \frac{\dot{\epsilon}_2}{s_2} = \frac{\dot{\epsilon}_3}{s_3}$$

$$\frac{\dot{\epsilon}_1}{2\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\dot{\epsilon}_2}{-\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\dot{\epsilon}_3}{2\sigma_3 - \sigma_1}$$

[E 212]

$\dot{\epsilon}_2$  dépendra donc des valeurs instantanées des contraintes.

L'évolution de celles-ci est schématisée par [F 21.2].

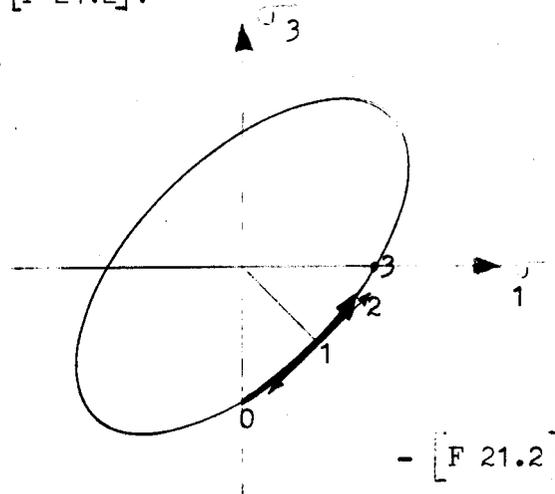
L'état initial est représenté par le point 0.

En progressant à l'intérieur de la filière,

$\sigma_1$  et  $\sigma_3$  augmentent. L'état de sortie de filière est représenté par le point 2.

Celui-ci ne peut dépasser 3, c'est-à-dire

$\sigma_1 \leq \sigma_0$  [tenue de la barre d'amorçage].



- [F 21.2] -

Compte-tenu de l'inclinaison du cylindre d'écoulement et, d'après la loi du potentiel plastique, le vecteur vitesse de déformation est normal au plan tangent à la surface d'écoulement nous pouvons en déduire que :

- de 0 à 1 :  $\dot{\epsilon}_2$  sera positive.
- en 1 :  $\dot{\epsilon}_2$  sera nulle [ $\vec{\epsilon}$  est contenu dans le plan 01, 03].
- de 1 à 3 :  $\dot{\epsilon}_2$  sera négative.

Il s'ensuit que la surface libre présentera un maxima au point où  $|\sigma_1| = |\sigma_3|$ .

Le critère retenu sera donc le critère de MISES.

Ce choix définit la forme de la surface libre.

II - METHODE DES TRANCHES

1 - OBJECTIF.

Cette méthode permet, en tenant compte de l'énergie de déformation uniforme et des frottements qui se produisent dans le sens de l'écoulement principal (ici suivant  $Ox$ ) de calculer une valeur approchée des efforts moteurs, de la répartition des contraintes dans la pièce, et des déformations. Elle néglige cependant le travail redondant.

2 - PRINCIPE.

21. Hypothèses de base.

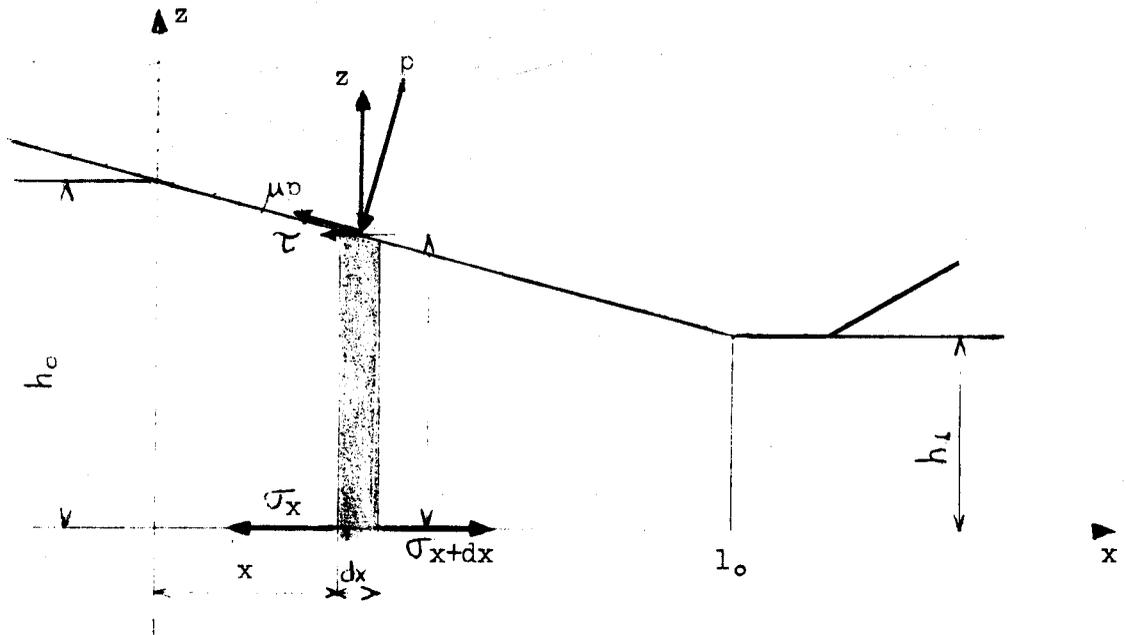
La pièce est découpée en tranches d'épaisseur  $dx$ .

Sur chacune de ces tranches, on fait les hypothèses suivantes :

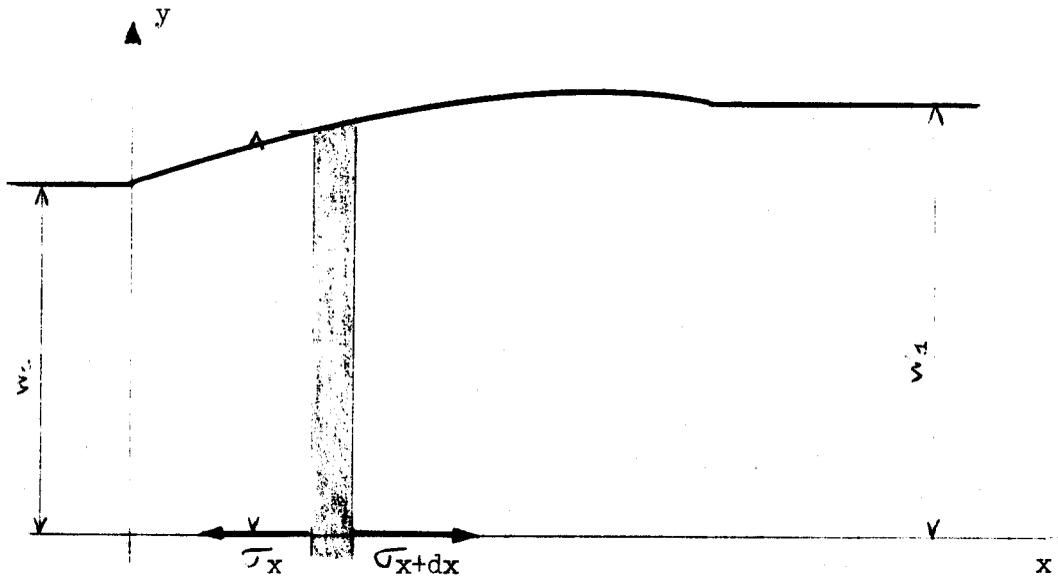
- les directions principales sont confondues avec les axes géométriques de la pièce.
- les contraintes principales sont constantes sur une face d'une tranche.
- le frottement est pris en compte sur l'interface outil-pièce (contrainte  $\tau$  - fig. 213). Il est obligatoirement dirigé suivant l'axe principal d'écoulement ( $\tau$  est constant sur une face).

Le matériau peut être RPP ou RPE, l'écroutissage pouvant être pris en compte.

Le frottement est supposé être du type de Coulomb.



- [ F 21.3 ] - Coupe normale aux filières - Equilibre d'une tranche



- [ F 21.4 ] - Coupe parallèle au plan de sortie des filières  
Equilibre d'une tranche



La contrainte de frottement est donc proportionnelle à la pression exercée par la filière.

Des hypothèses complémentaires doivent être faites pour prévoir les déformations :

- par analogie avec les hypothèses sur les contraintes, les déformations seront supposées homogènes dans chaque tranche :

$$\text{soit } \dot{\epsilon}_i = \frac{dI}{I} \quad i : x, y \text{ ou } z \quad [E 21.3]$$

I : dimension instantanée de la tranche suivant l'axe considéré.

- les génératrices de la tranche restent parallèles aux axes et à l'interface pièce-filière. Cette hypothèse est très importante pour les 2 faces libres (normale y'y), elle élimine toute déformation en tonneau de ces faces.

## 22. Méthode de calcul.

Compte tenu des hypothèses du § 21, il est possible de caractériser l'écoulement plastique par les équations suivantes :

- 3 équations d'équilibre : seules les équations suivant z'z et x'x sont intéressantes, la troisième étant explicitement vérifiée.

$$\sigma_z = f(p, \mu, \alpha)$$

$$\frac{d(\sigma_x h w)}{dx} = f(p, \mu, \alpha) \quad [E 21.4]$$

- Conditions aux limites :

$$\sigma_x = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0$$

$$\sigma_y = 0 \quad \forall x \quad [\text{caractéristique d'un problème de contraintes planes}]$$

- Le critère de plasticité

Les trois inconnues du problème sont  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  et  $p$ .

Elles sont complètement déterminées par le jeu d'équations ci-dessus (2 équations d'équilibre et le critère de plasticité).

Les déformations seront calculées à partir des relations de Lévy-Mises.

3 - ANALYSE DU PROBLEME.

31. Equations d'équilibre.

311 - Equilibre vertical suivant z'z

$$\sigma_z dx + (p \cos \alpha - \mu p \sin \alpha) \frac{dx}{\cos \alpha} = 0 .$$

$$\sigma_z = - p (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)$$

[E 21.5]

312 - Equilibre horizontal suivant x'x

$$- \sigma_x (4 h w) + 4 \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \left( h + \frac{\partial h}{\partial x} dx \right) \left( w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right)$$

$$- 2 \mu p \cos \alpha \frac{dx}{\cos \alpha} \cdot 2 \left( w + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} dx \right)$$

$$- 2 p \sin \alpha \frac{dx}{\cos \alpha} \cdot 2 \left( w + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) = 0$$

Soit, après simplification, en ne retenant que les termes du premier ordre :

$$\sigma_x \cdot h \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dx + \sigma_x \cdot w \cdot \frac{\partial h}{\partial x} dx + h \cdot w \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

$$- p w (\mu + \operatorname{tg} \alpha) \cdot dx = 0 .$$

ou encore :

$$d(\sigma_x h w) = p(\mu + \operatorname{tg} \alpha) w dx$$

[E 21.6]

D'après E 21.5, cette équation pourra s'écrire encore :

$$\frac{d(\sigma_x h w)}{dx} = + \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \mu) \cdot w}{\mu \operatorname{tg} \alpha - 1} \sigma_z \quad [\text{E 21.7}]$$

32. Critère de MISES.

D'après E 10.7 avec  $\sigma_o = R_e$  :

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_z + \sigma_z^2 = \sigma_o^2 \quad [\text{E 21.8}]$$

33. Relations contraintes - Vitesses de déformation.

E 11.1 s'écrira :

$$\frac{\dot{\epsilon}_x}{2 \sigma_x - \sigma_z} = \frac{\dot{\epsilon}_y}{-\sigma_x - \sigma_z} = \frac{\dot{\epsilon}_z}{2 \sigma_z - \sigma_x}$$

Compte tenu de l'hypothèse de déformation homogène :

$$\dot{\epsilon}_y = \frac{dw}{w} \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{dh}{h}$$

Soit :

$$\frac{\frac{dh}{h}}{2 \sigma_z - \sigma_x} = \frac{\frac{dw}{w}}{-\sigma_x - \sigma_z}$$

$$\frac{dw}{w} = \frac{-\sigma_x - \sigma_z}{2 \sigma_z - \sigma_x} \cdot \frac{dh}{h} \quad [\text{E 21.9}]$$

4 - RESOLUTION.

Les équations E 21.5/6/8 et 9 définissent complètement le problème.

E 21.7 pourra s'écrire :

$$\frac{d(\sigma_x h w)}{\sigma_x h w} = \frac{(\mu + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \sigma_z}{\operatorname{tg} \alpha (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) \cdot \sigma_x} \cdot \frac{dh}{h}$$

avec :  $h = h_0 - x \operatorname{tg} \alpha$

$$dh = - \operatorname{tg} \alpha \cdot dx$$

posons  $B = \mu \cdot \cot g \alpha$ ,  $A = \mu \operatorname{tg} \alpha$

$$\frac{d \sigma_x}{\sigma_x} = \frac{1 + B}{1 - A} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_x} \cdot \frac{dh}{h} - \frac{dh}{h} - \frac{dw}{w}$$

$$\frac{d \sigma_x}{\sigma_x} = \left[ \frac{1 + B}{1 - A} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_x} - 1 + \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2 \sigma_z - \sigma_x} \right] \frac{dh}{h}$$

Après simplifications :

$$d \sigma_x = \left[ \frac{2 \sigma_0^2}{2 \sigma_z - \sigma_x} + \frac{A + B}{1 - A} \sigma_z \right] * \frac{dh}{h}$$

[E 21.10]

D'autre part :

$$\boxed{dw = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{\sigma_x - 2\sigma_z} \cdot \frac{dh}{h}} \quad [E 21.9]$$

$$\boxed{\sigma_z = \frac{\sigma_x - \sqrt{4\sigma_o^2 - 3\sigma_x^2}}{2}} \quad [E 21.11]$$

Seule convient cette racine de E 21.7,  $\sigma_z$  étant obligatoirement négative.

Ces équations peuvent être intégrées numériquement simultanément. Elles ont été traitées sur IBM 1130 par la méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4. La précision des intégrations étant suivie d'après les indicateurs préconisés par COLLATZ [réf. 12].

L'effort d'étirage F est immédiat :

$$\boxed{F = \sigma_x(\ell_o) \cdot 4 h_1 w_1} \quad [E 21.12]$$

L'effort transversal T a été obtenu par intégration numérique :

$$dT = \sigma_z \cdot 2 w \cdot dx$$

Soit :

$$T = 2 \int_0^{\ell_o} \sigma_z \cdot w \cdot dx$$

Par une méthode des TRAPEZES nous aurons :

$$\boxed{T = \sum_{n=0}^N \frac{\ell_o}{N} [\sigma_z(n-1) \cdot w(n-1) + \sigma_z(n) \cdot w(n)]} \quad [E 21.13]$$

## 5 - RESULTATS.

Ils sont résumés dans les tableaux T 21.1 à T 21.3 et les graphes G 21.1 à G 21.6.

Les valeurs numériques adoptées permettent de couvrir l'ensemble des cas réels et au-delà. Deux valeurs du rapport d'étirage réduit  $r^*$  ont été retenues : l'une (21 %) est assez faible pour être très en-dessous des limites du matériau, l'autre (42 %) nous permettra de tester les prévisions de casse.

Les résultats sont conformes aux caractéristiques des méthodes de COMPRESSION.

La force d'étirage  $F$  décroît, en présence de frottement, lorsque  $\alpha$  augmente (le travail redondant est ignoré).

L'évolution des contraintes et de l'élargissement  $\Delta w$  au cours de l'étirage reflète très exactement le critère de MISES [G 21.1] (cf. § 21.12). Le taux d'augmentation de l'élargissement est fonction de l'écart entre les valeurs absolues des contraintes  $\sigma_z$  et  $\sigma_x$ . Il est ainsi maximal à l'entrée des filières. L'élargissement  $\Delta w$  est lui maximum lorsque les valeurs absolues des deux contraintes sont égales. Au-delà de ce point, il y a régression de  $\Delta w$ . Celle-ci devient rapidement brutale annonçant sans doute un risque de rupture.

Par ailleurs, G 21.2 et G 21.3 confirment l'intuition : une augmentation du frottement ou une diminution de  $\alpha$  provoquant un accroissement de  $\sigma_x$ , l'élargissement diminue.

Section : Carrée 24 × 24 mm

Epaisseur du Produit : 19 mm

Rapport d'étirage réduit : 21 %

Angle	Coef. de Frot.	Largeur	Force d'étirage	Effort Transv.	$\frac{\sigma_x}{\sigma_0}$
$\alpha$	$\mu$	$w_1$	$F/\sigma_0$	$T/\sigma_0$	
7	0	13,210	119,64	492,46	0,235
	0,1	12,988	204,95	458,04	0,410
	0,2	12,765	277,78	421,89	0,565
10	0	13,210	119,64	342,92	0,235
	0,1	13,052	181,75	325,97	0,362
	0,2	12,890	238,62	307,97	0,481
15	0	13,210	119,64	225,66	0,235
	0,1	13,100	163,28	218,00	0,334
	0,2	12,986	205,72	209,73	0,441
20	0	13,210	119,64	166,13	0,235
	0,1	13,124	154,21	161,71	0,305
	0,2	13,032	189,16	156,85	0,377
30	0	13,210	119,64	104,73	0,235
	0,1	13,144	146,07	102,62	0,289
	0,2	13,071	174,50	100,20	0,347
45	0	13,210	119,64	60,47	0,235
	0,1	13,150	143,65	59,36	0,284
	0,2	13,076	172,28	57,96	0,342

- T 21.1 -

ETIRAGE D'UN PROFIL CARRE

Résultats obtenus par la méthode des TRANCHES



Section : Carrée 24 × 24 mm

Epaisseur du Produit : 14 mm

Rapport d'étirage réduit : ~ 42 %

Angle $\alpha$	Coef. de Frot. $\mu$	Largeur $w_1$	Force d'étirage $F/\sigma_0$	Effort transv. $T/\sigma_0$	$\sigma_x/\sigma_0$
7	0	13,956	223,56	902,78	0,562
	0,1	12,438	324,64	708,83	0,916
	0,2	-	-	-	-
10	0	13,956	223,56	628,64	0,562
	0,1	12,904	303,36	532,34	0,825
	0,2	-	-	-	-
15	0	13,956	223,56	413,69	0,562
	0,1	13,240	282,88	369,88	0,750
	0,2	12,421	325,26	323,94	0,919
20	0	13,956	223,56	304,55	0,562
	0,1	13,396	271,76	279,22	0,712
	0,2	12,762	310,72	251,99	0,854
30	0	13,956	223,56	191,99	0,562
	0,1	13,533	261,22	179,87	0,677
	0,2	13,039	295,68	166,18	0,796
45	0	13,956	223,56	110,85	0,562
	0,1	13,573	258,00	104,50	0,667
	0,2	13,080	293,24	96,57	0,787



Section : carrée 24 x 24 mm

ANGLE FILIERE = 7.0000 COEF. DE FROT = 0.1000

XI		SIGMAX	SIGMAY	TENS	ETIR	WI
0.1175000E	02	0.3850562E-01	-0.9801910E 00	0.6073184E 02	0.2217371E 02	0.1212329E 02
0.1150000E	02	0.7749463E-01	-0.9589981E 00	0.1086941E 03	0.4411722E 02	0.1224288E 02
0.1125000E	02	0.1169881E-01	-0.9363603E 00	0.1559955E 03	0.6578252E 02	0.1235826E 02
0.1100000E	02	0.1570090E-00	-0.9122079E 00	0.2025217E 03	0.8711874E 02	0.1246886E 02
0.1075000E	02	0.1975824E-00	-0.8864604E 00	0.2481514E 03	0.1080718E 03	0.1257404E 02
0.1050000E	02	0.2387363E-00	-0.8590252E 00	0.2927561E 03	0.1285845E 03	0.1267305E 02
0.1025000E	02	0.2805020E-00	-0.8297948E 00	0.3361983E 03	0.1485957E 03	0.1276503E 02
0.1000000E	02	0.3229153E-00	-0.7986435E 00	0.3783320E 03	0.1680401E 03	0.1284899E 02
0.9750000E	01	0.3660175E-00	-0.7654233E 00	0.4190011E 03	0.1868481E 03	0.1292379E 02
0.9500000E	01	0.4098571E-00	-0.7299579E 00	0.4580381E 03	0.2049451E 03	0.1298806E 02
0.9250000E	01	0.4544920E-00	-0.6920350E 00	0.4952632E 03	0.2222508E 03	0.1304024E 02
0.9000000E	01	0.4999929E-00	-0.6513943E 00	0.5304819E 03	0.2386784E 03	0.1307845E 02
0.8750000E	01	0.5464472E-00	-0.6077113E 00	0.5634837E 03	0.2541339E 03	0.1310044E 02
0.8500000E	01	0.5939666E-00	-0.5605729E 00	0.5940380E 03	0.2685145E 03	0.1310348E 02
0.8250000E	01	0.6426970E-00	-0.5094375E 00	0.6218906E 03	0.2817070E 03	0.1308418E 02
0.8000000E	01	0.6928356E-00	-0.4535722E 00	0.6467574E 03	0.2935849E 03	0.1303827E 02
0.7750000E	01	0.7446603E-00	-0.3919412E 00	0.6683143E 03	0.3040047E 03	0.1296019E 02
0.7500000E	01	0.7985830E-00	-0.3229956E 00	0.6861814E 03	0.3127990E 03	0.1284237E 02
0.7250000E	01	0.8552590E-00	-0.2442328E 00	0.6998929E 03	0.3197649E 03	0.1267392E 02
0.7000000E	01	0.9158420E-00	-0.1511150E 00	0.7088339E 03	0.3246399E 03	0.1243759E 02
0.6750000E	01	0.9827377E-00	-0.3367378E -01	0.7120773E 03	0.3270429E 03	0.1210136E 02
0.6500000E	01	0.1063115E-01	0.1412524E 00	0.7077338E 03	0.3262698E 03	0.1158111E 02

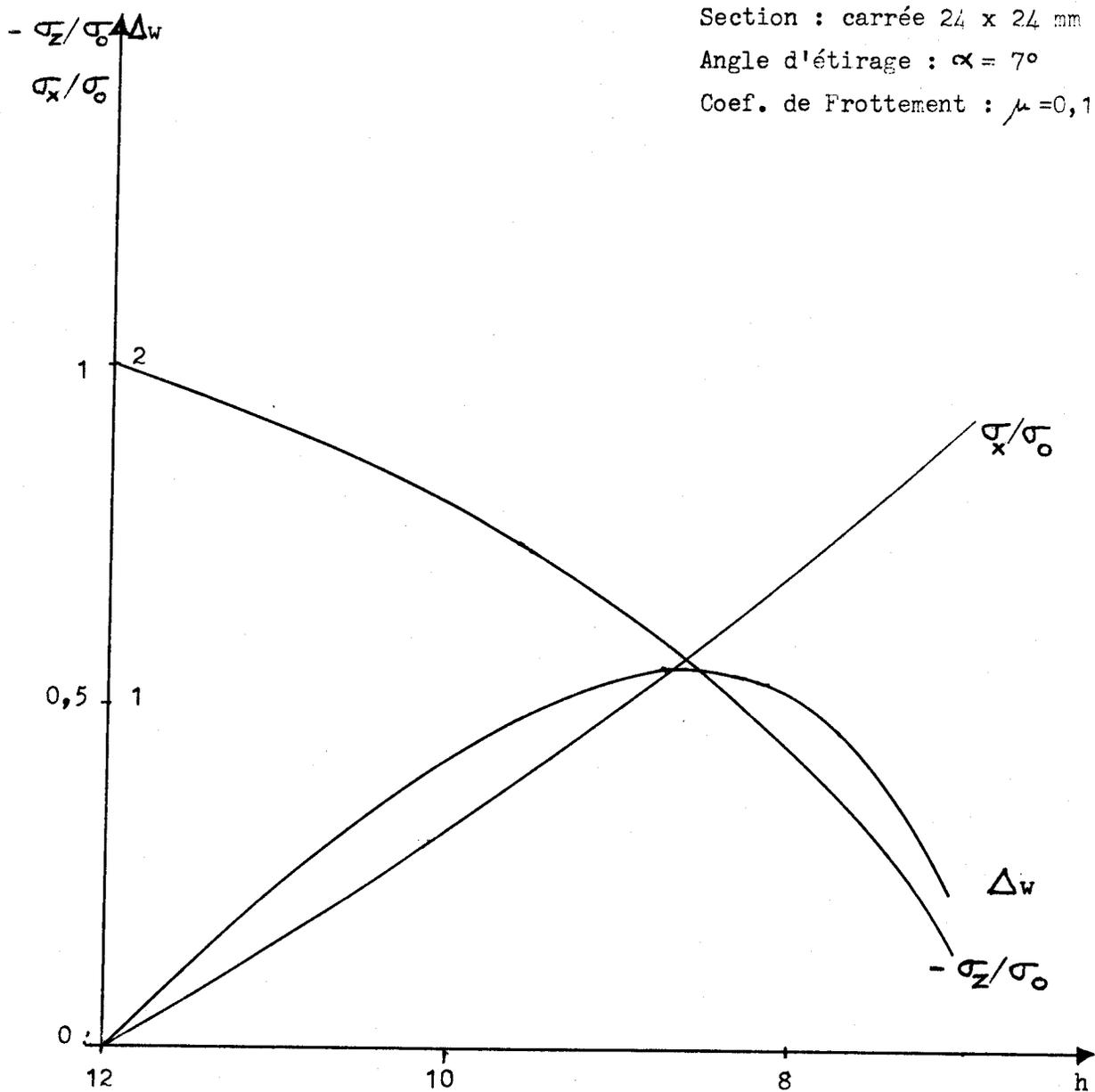
- [T 21.3] -

ETIRAGE D'UN PROFIL CARRE

Exemple de Listing obtenu à partir de la méthode des TRANCHES



- 10 -



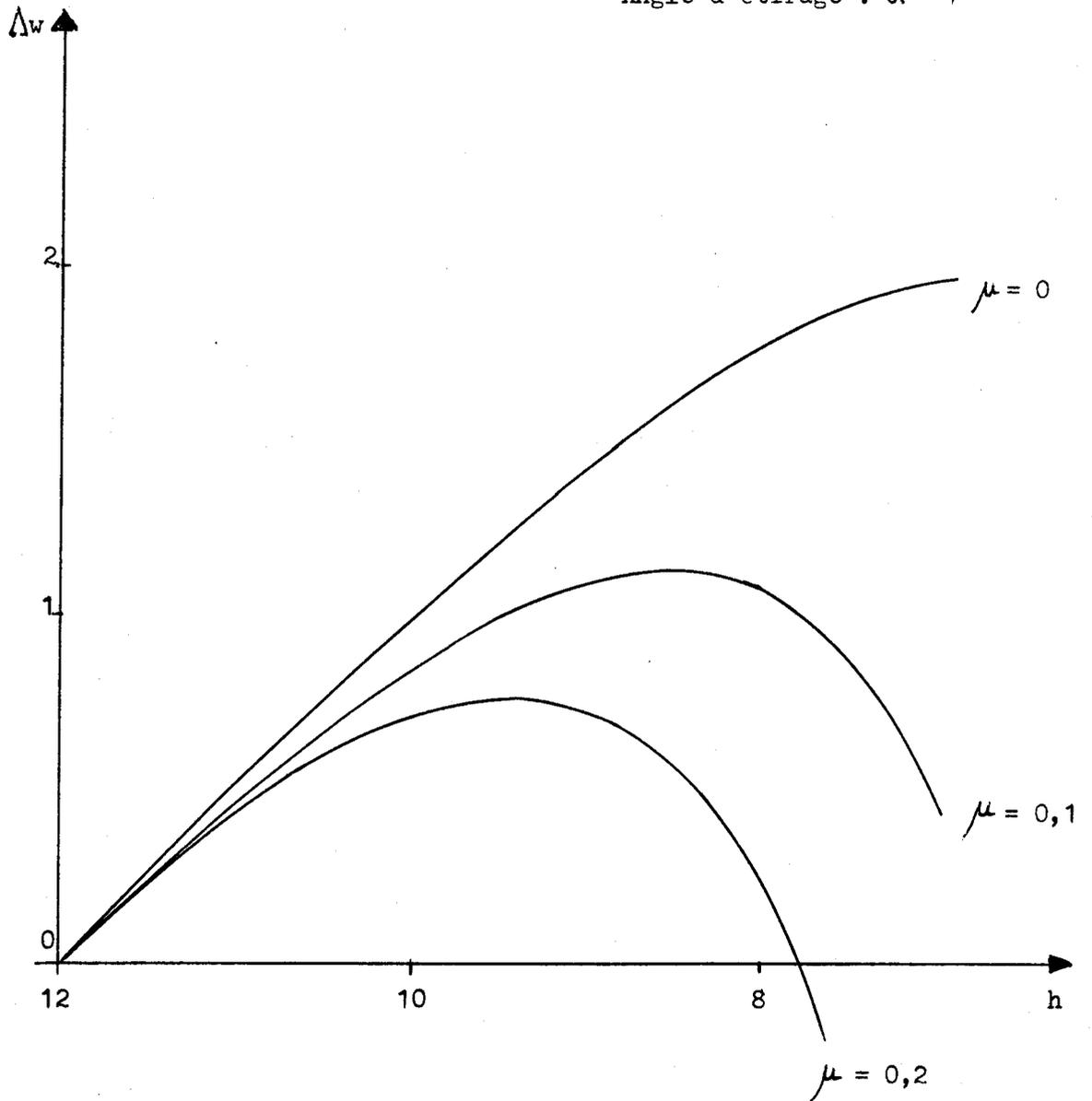
- [G 21.1] -

— ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS —

Evolution de l'élargissement et des contraintes



Section : carrée 27 x 24 mm  
Angle d'étirage :  $\alpha = 7^\circ$

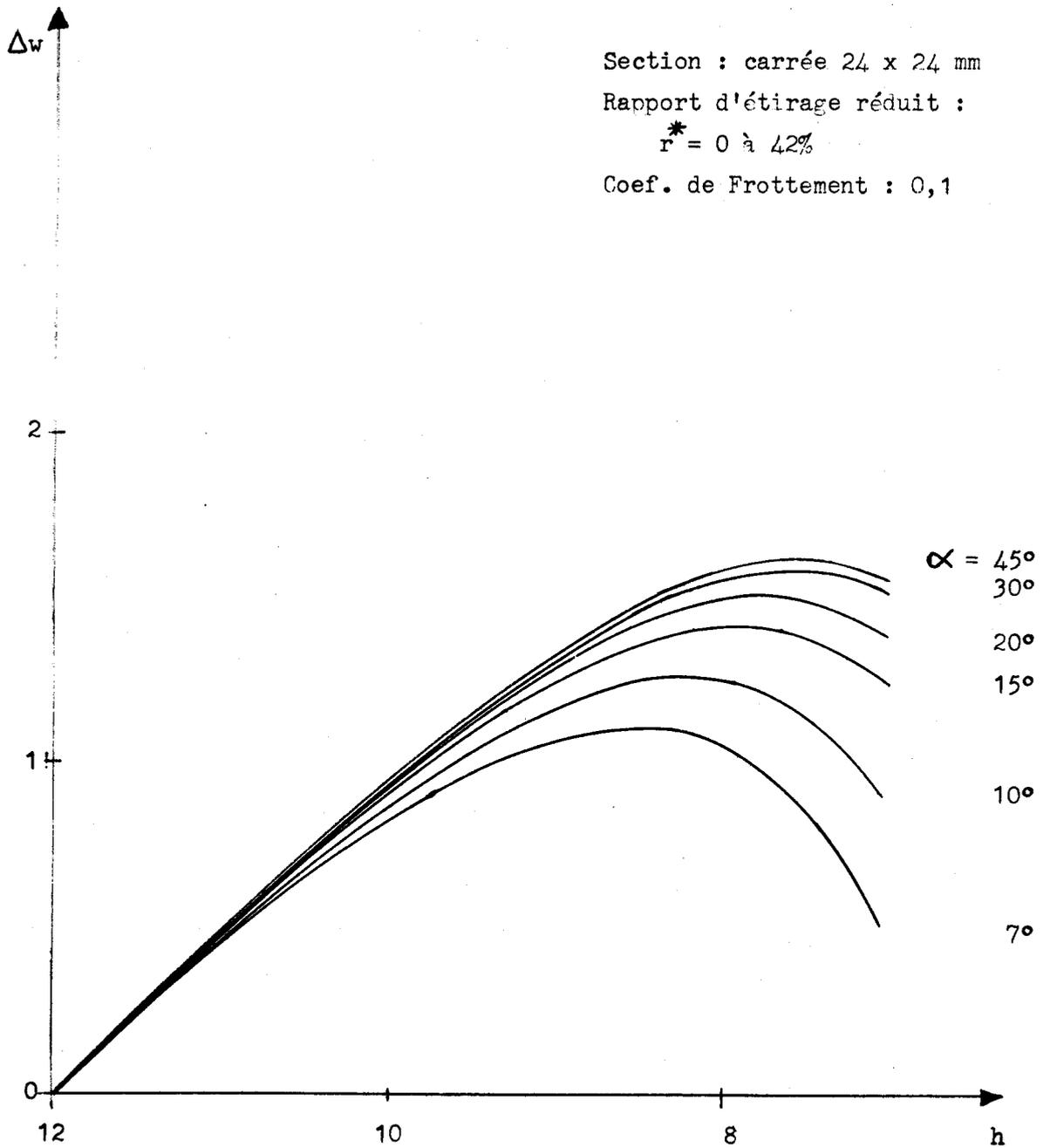


- [G 21.2] -

— ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS —

Influence du Frottement sur l'élargissement



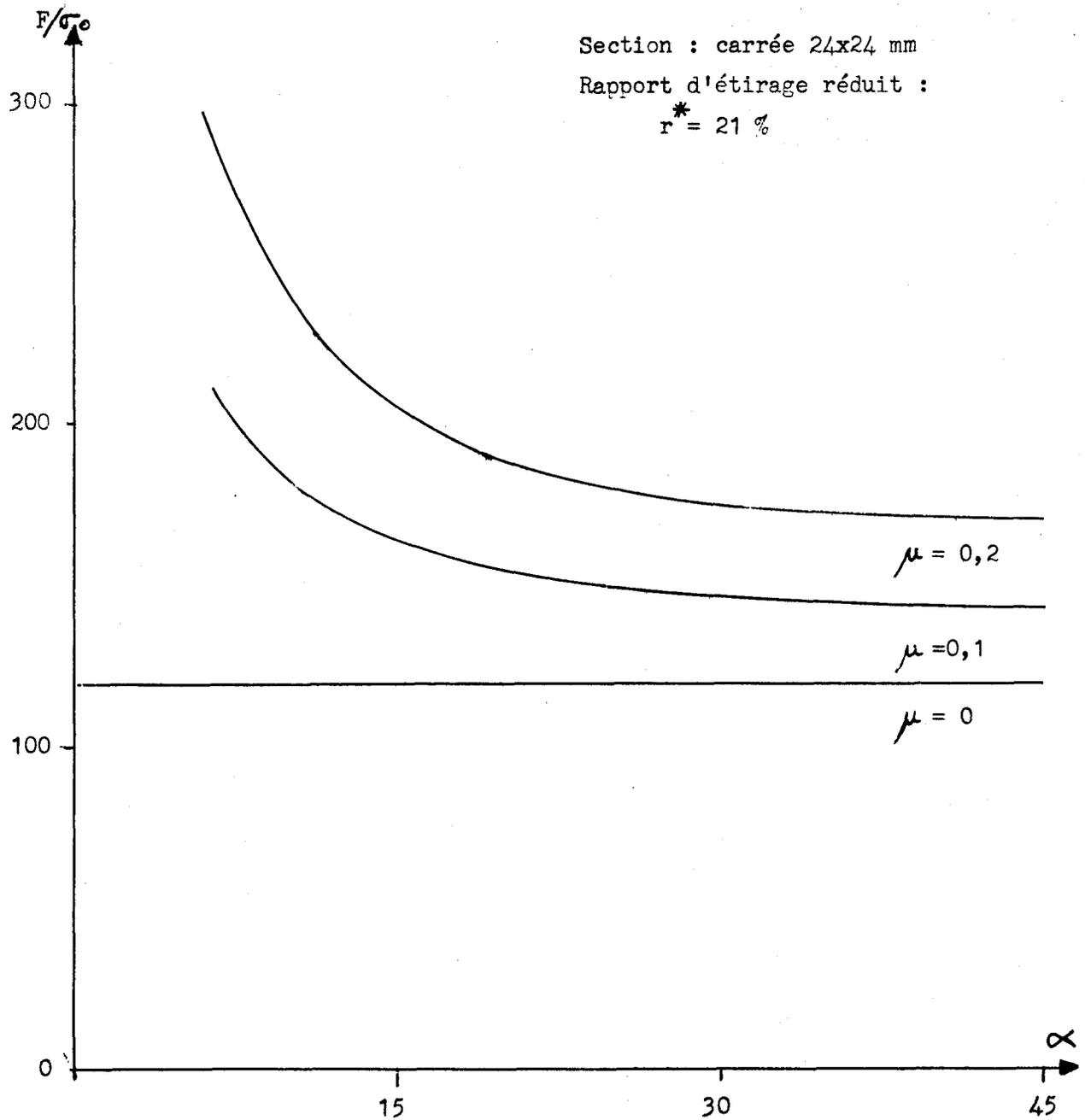


— [G 21.3] —

— ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS —

Influence de l'angle d'étirage sur l'élargissement



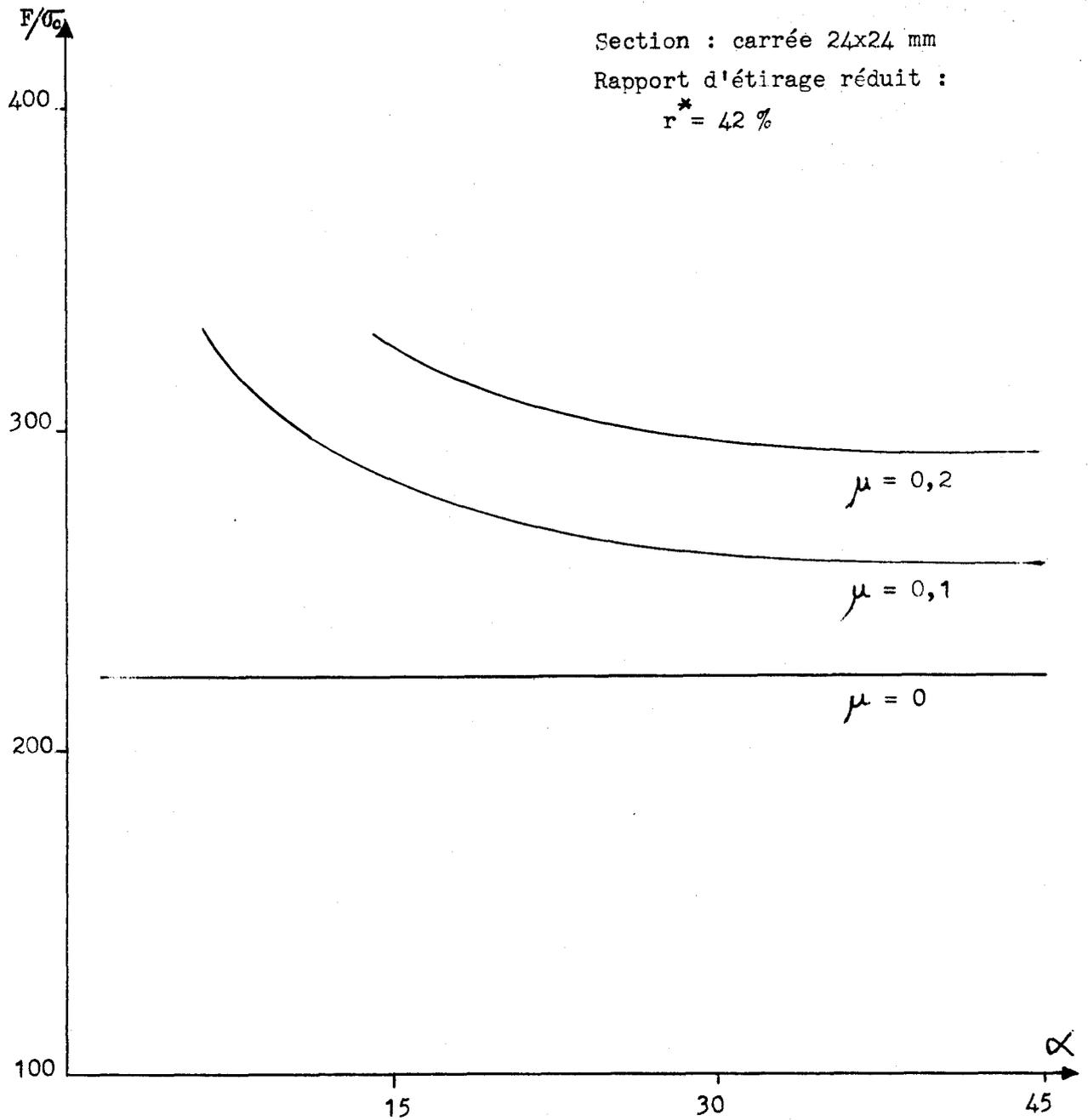


- [G 21.4] -

- ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS -

Influence de l'angle  $\alpha$  et du frottement  $\mu$  sur l'effort F





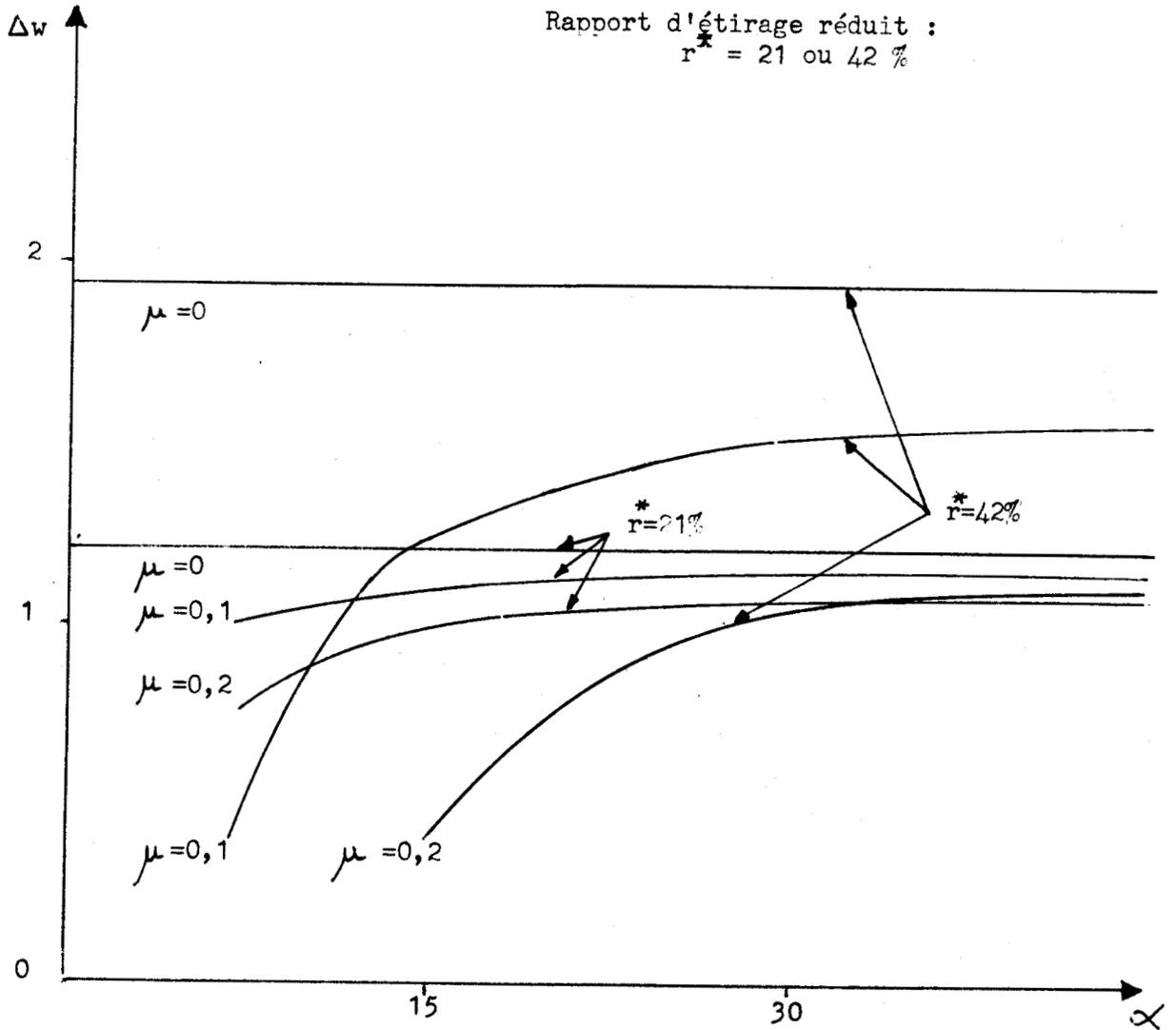
— [G 21.5] —

— ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS —

Influence de l'angle  $\alpha$  et du frottement  $\mu$  sur F



Section : carrée 24x24 mm  
Rapport d'étirage réduit :  
 $r^* = 21$  ou  $42 \%$



- [G 21.6] -

- ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS -

Influence de  $\alpha, \mu$  et  $r^*$  sur l'élargissement  $w$



III - METHODE DES COLONNES

1 - OBJECTIF.

Extension de la méthode des TRANCHES, elle doit permettre :

- dans le problème de contraintes planes, une meilleure définition du champ de contrainte de frottement (composante suivant  $y$ ), donc une plus grande précision ;
- dans le problème tridimensionnel complet, d'étudier l'influence de  $\sigma_y$  en s'affranchissant de la condition  $\sigma_y = 0$ .

Cette amélioration des résultats ne pourra être obtenue que par une plus grande complexité des calculs. D'autre part, les limites des méthodes de COMPRESSION restent inchangées. Les résultats obtenus seront d'autant meilleurs que l'angle d'étirage sera inférieur à l'angle optimum.

2 - PRINCIPE.

21. Hypothèses de base.

Elles sont identiques à celles formulées en 2.1.2.21 mais sont applicables à des colonnes de section  $dx dy$ . [Cf. F 21.30].

22. Définition du frottement.

Pour connaître la direction de  $\vec{u}_p$ , il faut choisir un champ de vitesse à l'interface pièce-filière.

Supposons que pour  $x = X$ , nous ayons résolu le problème et calculé la largeur  $w$ .

Le calcul au pas suivant  $x = X + \Delta X$  sera conduit en supposant :

- qu'entre deux pas de calculs l'élargissement est linéaire
- que le champ de vitesse se déduit par affinité de la frontière d'écoulement.

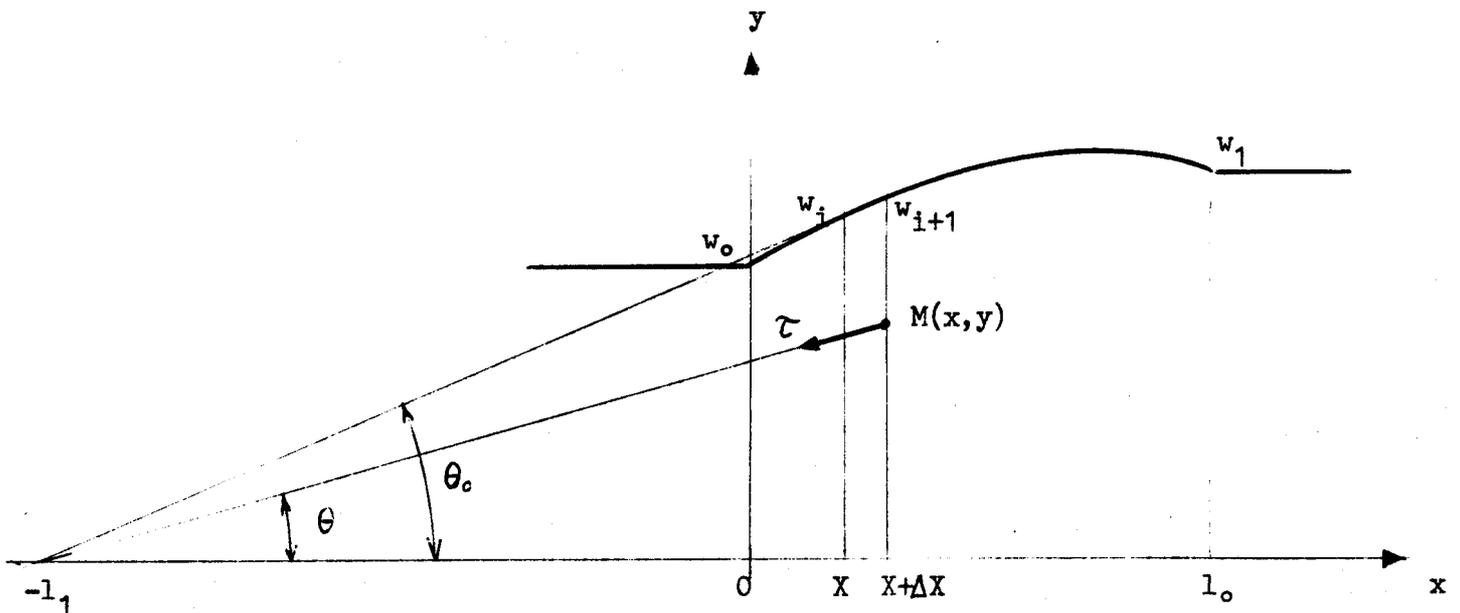
cf. [F 21.31]. Il aura alors pour centre  $\Omega(-l_1, 0)$  :

$$l_1 = \frac{w_i \cdot \Delta X - \Delta w \cdot X}{\Delta w} \quad [E 21.30]$$

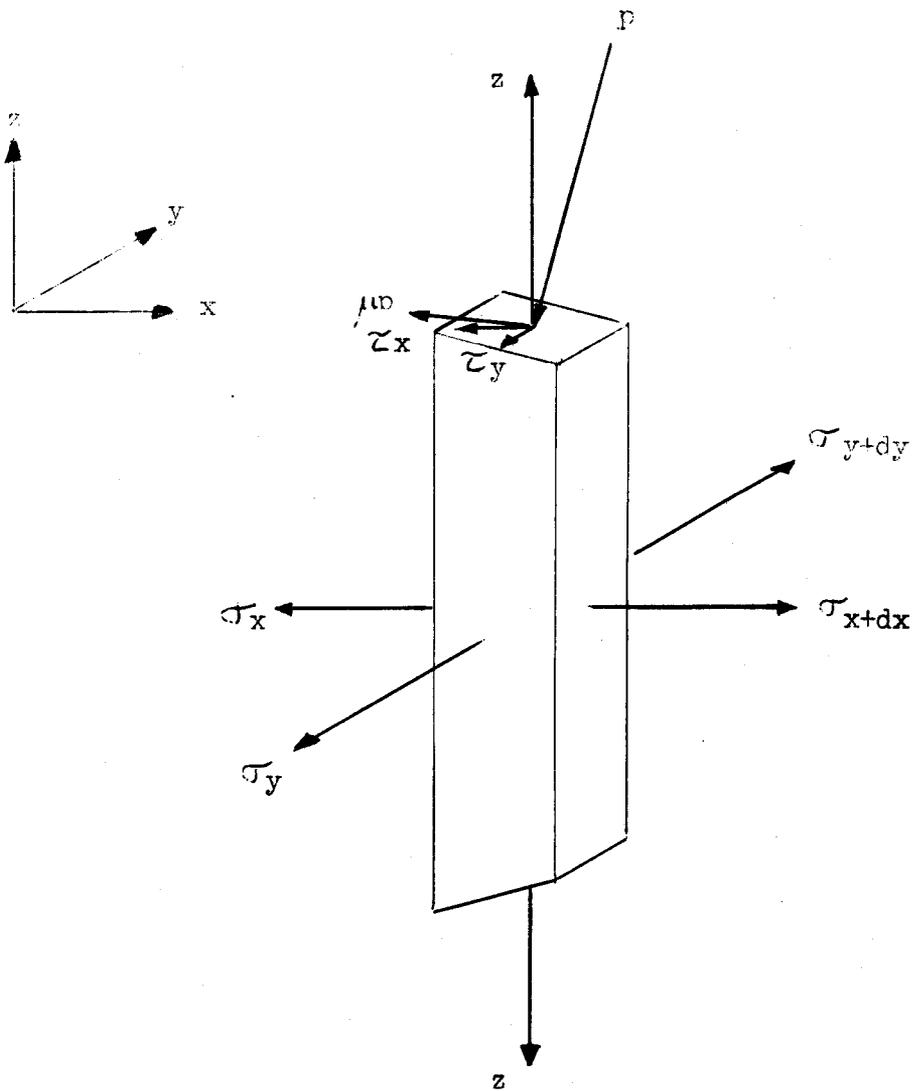
avec  $\Delta w = w_{i+1} - w_i$ .

La direction de  $\tau$  sera défini par  $\theta$  :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{l_1 + x} = \frac{y \cdot \Delta w}{w_{i+1} \cdot \Delta X} \quad [E 21.31]$$



- [F 21.31] - Définition du Frottement

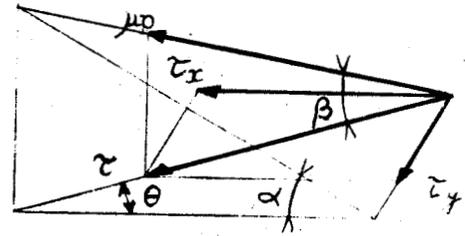


- [F 21.30] - Equilibre d'une Colonne



L'angle  $\beta$  formé par la direction de  $\mu p$  et sa projection dans le plan horizontal [F 21.32] est définie par :

$$\boxed{\text{tg } \beta = \text{tg } \alpha \cdot \cos \theta}$$



[F 21.32]

- Définition des composantes du frottement -

[E 21.32]

Les composantes  $\tau_x$  et  $\tau_y$  du frottement auront pour valeur :

$$\boxed{\tau_x = \mu p \cdot \cos \beta \cdot \cos \theta}$$

[E 21.33]

$$\boxed{\tau_y = \mu p \cdot \cos \beta \cdot \sin \theta}$$

[E 21.34]

### 23. Méthode de résolution.

Pour résoudre le problème nous disposerons des 3 équations d'équilibre, du critère de MISES, des conditions aux limites ainsi que des relations de Lévy-MISES :

$$\sigma_z = f(x, y, p, w)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = f(x, y, \sigma_z, w)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = f(x, y, \sigma_z, w)$$

pour  $x = 0, \forall y : \sigma_x = 0$

pour  $y = w, \forall x : \sigma_y = 0$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 = 2 \sigma_0^2.$$

Ces équations seront d'abord résolues sur le plan  $x = 0$  qui fournira les valeurs initiales nécessaires à l'amorçage des processus d'intégration.

Puis, en progressant pas par pas, à partir d'un élargissement hypothétique  $w_{i+1}^*$  :

- la surface libre  $y = w$  permettra de déterminer la valeur externe de  $\sigma_x$  et  $\sigma_z$  ;
- il sera alors possible de déterminer le champ de contraintes à l'intérieur du volume, le champ de vitesses de déformation, l'élargissement calculé  $w_{i+1}$ .

La confrontation de  $w_{i+1}$  et  $w_{i+1}^*$  permettra d'optimiser [cf. F. 21.33].

Détermination de  $\sigma_y(0,y)$  et  $\sigma_z(0,y)$

$w_1^* = w_0$

Détermination du champ  $\tau$

Calcul de  $\sigma_x(x,w)$  et  $\sigma_z(x,w)$

Calcul de  $\sigma_x(x,y), \sigma_y(x,y), \sigma_z(x,y)$   
pour  $x = X + \Delta X$

[ $\sigma$ ]

[ $\dot{\epsilon}$ ] et [ $\epsilon$ ]

$w_{i+1}$

$w_{i+1}^*$

non  $w_{i+1} = w_{i+1}^*$

LIST

$w_{i+1}^* = w_i + (w_i - w_{i-1})$



[F 21.33]

3 - ANALYSE DU PROBLEME DES CONTRAINTES.

31. Equations d'équilibre.

311. Equilibre vertical.

$$\sigma_z \cdot dx \, dy + (p \cdot \cos \alpha - \mu p \cdot \sin \beta) \cdot \frac{dx \cdot dy}{\cos \alpha} = 0$$

soit :

$$\sigma_z = -p \left( 1 - \frac{\mu \sin \beta}{\cos \alpha} \right)$$

[E 21.35]

312. Equilibre horizontal.

$$-\sigma_x \cdot 2h \cdot dy + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) (2h + 2 \frac{\partial h}{\partial x} dx) \cdot dy$$

$$- 2(p \cdot \sin \alpha + \mu p \cdot \cos \beta \cdot \cos \theta) \cdot \frac{dx \cdot dy}{\cos \alpha} = 0$$

$$\sigma_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + h \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = p \left[ \operatorname{tg} \alpha + \frac{\mu \cdot \cos \beta \cdot \cos \theta}{\cos \alpha} \right]$$

[E 21.36]

313. Equilibre transversal.

$$-\sigma_y \cdot 2h \cdot dx + \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) 2h \cdot dx - 2 \mu p \cdot \cos \beta \cdot \sin \theta \cdot \frac{dx \cdot dy}{\cos \alpha} = 0$$

$$h \cdot \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \mu p \cdot \frac{\cos \beta \sin \theta}{\cos \alpha}$$

[E 21.37]

32. Critère de MISES.

D'après E 106 :

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 = 2\sigma_o^2.$$

Si nous cherchons à exprimer  $\sigma_z$ , cette équation aura pour solution :

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y - \sqrt{4\sigma_o^2 - 3(\sigma_x - \sigma_y)^2}}{2} \quad [E 21.38]$$

Seule convient cette solution  $\sigma_z$  étant négative ou nulle.

En remplaçant  $\sigma_z$  par sa valeur dans E 21.35, nous obtiendrons successivement :

$$[E 21.36] \rightarrow \frac{\partial(h \sigma_x)}{\partial x} = \frac{\sin \alpha + \mu \cdot \cos \beta \cdot \cos \theta}{\mu \cdot \sin \beta - \cos \alpha} \cdot \sigma_z$$

ou, avec  $h = h_o - x \operatorname{tg} \alpha$  :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\sin \alpha + \mu \cdot \cos \beta \cdot \cos \theta}{h(\mu \cdot \sin \beta - \cos \alpha)} \cdot \sigma_z + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{h} \cdot \sigma_x \quad [E 21.39]$$

[E 21.37]

$$\downarrow \rightarrow \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{\mu \cdot \cos \beta \cdot \sin \theta}{h(\mu \sin \beta - \cos \alpha)} \cdot \sigma_z \quad [E 21.40]$$

4 - FORMULATION AUX SURFACES LIMITES.

41. Plan d'entrée  $x = 0$ .

Sur cette surface  $\sigma_x$  est nulle :

E 21.38 devient :

$$\sigma_z = \frac{\sigma_y - \sqrt{4\sigma_o^2 - 3\sigma_y^2}}{2} \quad [E 21.41]$$

E 21.40 devient :

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{\mu \cdot \cos \beta \cdot \sin \theta}{h_o (\mu \sin \beta - \cos \alpha)} \cdot \frac{\sigma_y - \sqrt{4\sigma_o^2 - 3\sigma_y^2}}{2} \quad [E 21.42]$$

Si l'on admet qu'il y a continuité avec l'écoulement rigide, c'est-à-dire que  $\theta = 0$  pour  $x = 0$  ces équations se simplifient :

$$E 21.42 \longrightarrow \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \longrightarrow \boxed{\sigma_y = 0}$$

donc

$$\boxed{\sigma_z = -\sigma_o}$$

42. Surface libre  $y = w^*$ .

La contrainte  $\sigma_y$  y est nulle, d'où :

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x - \sqrt{4\sigma_o^2 - 3\sigma_x^2}}{2} \quad [E 21.43]$$

E 21.39 s'écrira :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\sin \alpha + \mu \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha}{h(\mu \cdot \sin \beta - \cos \alpha)} \cdot \frac{\sigma_x - \sqrt{4 \sigma_0^2 - 3 \sigma_x^2}}{2} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{h} \sigma_x$$

[E 21.44]

En  $M(x, w^*)$ ,  $\sigma_x$  sera définie par la résolution de cette équation différentielle.  $\sigma_z$  sera déduit par E 21.43. La méthode employée est la même que précédemment.

5 - CONTRAINTES A L'INTERIEUR DU PROFIL.

51. Méthode d'intégration pas à pas.

511. Discretisation du volume.

La section plane du volume sera discrétisée par  $nn$  pas de calcul suivant  $x$  et  $mm$  suivant  $y$ .

Soit :

$$\delta = \frac{l_0}{nn}$$

[E 21.45]

$$\omega = \frac{w}{mm}$$

[E 21.46]

$\delta$  et  $\omega$  étant les pas choisis suivant  $x$  et  $y$ .

Suivant l'état d'avancement des calculs  $\omega$  s'exprime en fonction soit de  $w$ , soit de  $w^*$ .

Chaque point  $M(x,y)$  pourra s'exprimer en fonction de  $n$  et  $m$  :

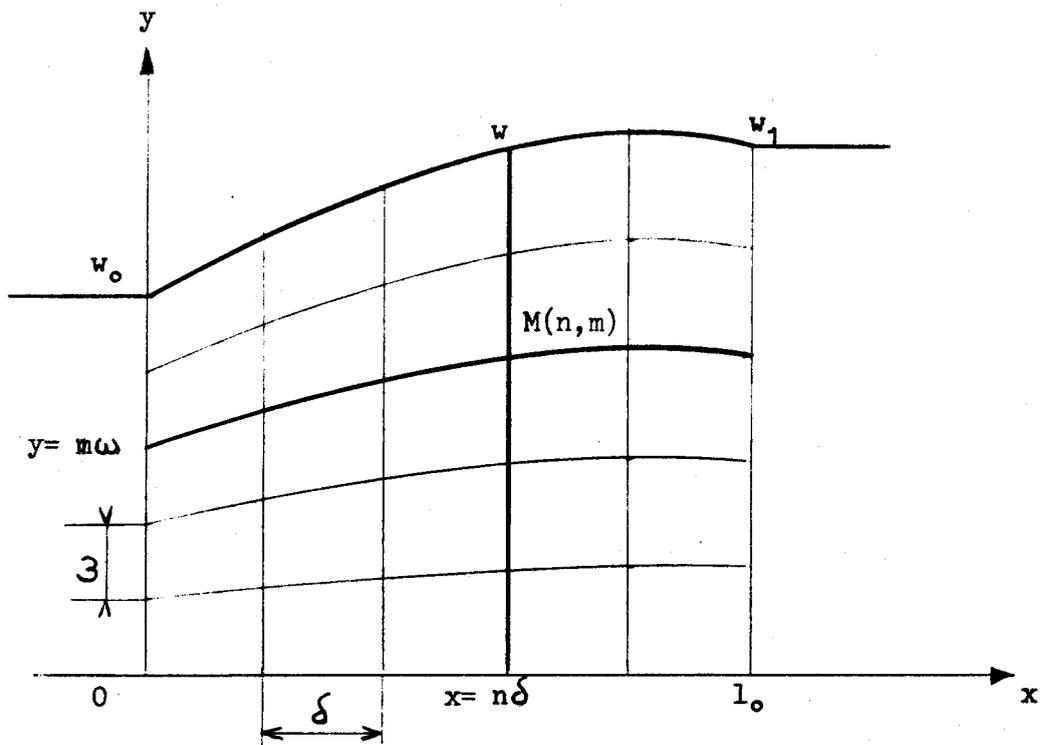
$$x = n \delta \quad \text{et} \quad y = m \omega$$

[E 21.47]

L'ensemble des points  $M(n,m)$  pour  $m$  constant sera une courbe affine de la génératrice limite. [Cf. F 21.34].

512. Déroulement des calculs.

Le problème ayant été résolu pour tous les points  $M(n-1,m)$ ,  $w^*$  sera choisi arbitrairement [F 21.33]. L'état des contraintes en  $M(n,mm)$  sera calculé. Pour les points  $M(n,m)$ , nous procéderons comme suit :



- [F 21.34] - Discrétisation du Volume



E 21.39 et 40 seront intégrées,  $\sigma_x(n,m)$  et  $\sigma_y(n,m)$  étant exprimés en fonction de  $\sigma_z(n,m)$ . Le critère de MISES permettra alors de calculer l'état des contraintes en  $M(n,m)$ .

52. Expression de  $\sigma_x$  en fonction de  $\sigma_z$ .

Nous allons résoudre [E 21.39].

Posons :

$$\lambda = \frac{\sin \alpha + \mu \cdot \cos \beta \cdot \cos \theta}{(\mu * \sin \beta - \cos \alpha)} \quad [E 21.48]$$

$\lambda$  est donc une fonction de  $x, y$  et  $w$ .

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{1}{h} (\operatorname{tg} \alpha \cdot \sigma_x + \lambda \sigma_z)$$

$$h \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \operatorname{tg} \alpha \sigma_x = \lambda \sigma_z.$$

Cette équation peut être résolue par une méthode de variation de la constante.

521. Solution de l'équation sans second membre.

$$h \cdot \sigma_x' - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sigma_x = 0.$$

Dont la solution est :

$$\sigma_x = k \cdot e^{-F(x)} \quad \text{avec} \quad F(x) = \int \frac{-\operatorname{tg} \alpha}{h} dx \quad [E 21.49]$$

$$F(x) = \int \frac{dh}{h} = L(h).$$

D'où : 
$$\sigma_x = k e^{-L(h)} = \frac{k}{h} \quad [E 21.50]$$

522. Equation avec second membre.

Sa solution est :

$$\sigma_x = \frac{k(x)}{h} \quad \text{avec} \quad k(x) = \int_0^{n\delta} \frac{\lambda \sigma_z \cdot e^{Lh}}{h} dx$$

soit :  $k(x) = \int_0^{n\delta} \lambda \sigma_z dx.$

D'où :

$$\sigma_x = \frac{1}{h} \int_0^{n\delta} \lambda \sigma_z \cdot dx \quad [E 21.51]$$

523. Développement.

Pour pouvoir expliciter E 21.51 dans le critère de MISES, il est indispensable de sortir  $\sigma_z$  de l'intégrale. Or, pour toute valeur de  $y$ , il existe  $\psi (n \leq \psi \leq n+1)$  :

$$\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \sigma_z(n,m) dx = \sigma_z(\psi,m)$$

$\sigma_z$  étant une fonction continûment croissante, nous aurons une bonne précision en prenant :

$$\sigma_z(\psi,m) = \frac{\sigma_z(n,m) + \sigma_z(n+1,m)}{2}$$

L'intégration restante sera effectuée par la méthode de SIMPSON :

$$R_i - R_{i-1} = \frac{\delta}{6} \left[ \lambda_{i-1} + 4\lambda_{i-\frac{1}{2}} + \lambda_i \right] = \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} \lambda dx \quad [E 21.52]$$

Par suite  $\sigma_x(n,m)$  étant calculée après détermination de  $\sigma_x(0,m)$  à  $\sigma_x(n-1,m)$ , elle pourra s'écrire :

$$\sigma_x(n,m) = \frac{\delta}{2h} \left[ \sum_i + \sigma_z(n,m) \cdot \Delta R \right] \quad [E 21.53]$$

avec :

$$\sum_i = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ (\sigma_z(i-1,m) + \sigma_z(i,m)) \cdot (R_i - R_{i-1}) \right] + \sigma_z(n-1,m) \cdot \Delta R$$

$$\Delta R = R_n - R_{n-1}$$

53. Expression de  $\sigma_y$  en fonction de  $\sigma_z$ .

$$\text{avec } \eta = \frac{\mu \cdot \cos \beta \cdot \sin \theta}{\mu \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha} = f(x,y,w)$$

E 21.40 s'écrira :

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{\eta}{h} \sigma_z$$

dont la solution est immédiate :

$$\sigma_y = \frac{1}{h} \int_0^{m\omega} \eta \sigma_z dy \quad [E 21.54]$$

En procédant de la même façon que pour [E 21.51], nous définirons :

$$\forall x, \exists \psi \quad (m \leq \psi \leq m+1) :$$

$$\int_{m\omega}^{(m+1)\omega} \eta \sigma_z dy = \sigma_z(n,\psi) \int_{m\omega}^{(m+1)\omega} \eta dy$$

$$\text{avec : } \sigma_z(n,\psi) = \frac{\sigma_z(n,m) + \sigma_z(n,m+1)}{2}$$

soit :

$$\sigma_y(n,m) = \frac{1}{2h} * \sum_{j=1}^m \left[ (\sigma_z(n,j-1) + \sigma_z(n,j)) * (Q_j - Q_{j-1}) \right]$$

et :

$$Q_j - Q_{j-1} = \int_{(j-1)\omega}^{j\omega} n dy = \frac{\omega}{6} \left[ n_{j-1} + 4n_{j-\frac{1}{2}} + n_j \right] .$$

Par suite du processus itératif des calculs :

$$\sigma_y(n,m) = \frac{1}{2h} \left[ \sum_j + \sigma_z(n,m) \cdot \Delta Q \right] \quad (E. 21.55)$$

avec :  $\sum_j = \sum_{j=1}^{n-1} \left[ (\sigma_z(n,j-1) + \sigma_z(n,j)) * (Q_j - Q_{j-1}) \right] + \sigma_z(n,m-1) * \Delta Q$

$$\Delta Q = Q_m - Q_{m-1} .$$

54. Calcul de  $\sigma_z(n,m)$ .

Le critère de VON MISES peut s'écrire :

$$\sigma_z^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_z + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y = \sigma_0^2 .$$

Remplaçons  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  par leurs valeurs (E 21.53 et 55) :

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 - \frac{\sigma_z}{2h} (\sum_i + \sigma_z \Delta R + \sum_j + \sigma_z \cdot \Delta Q) + \frac{1}{4h^2} [(\sum_i + \sigma_z \cdot \Delta R)^2 + (\sum_j + \sigma_z \cdot \Delta Q)^2 \\ - (\sum_i + \sigma_z \cdot \Delta R)(\sum_j + \sigma_z \cdot \Delta Q)] - \sigma_0^2 = 0 . \end{aligned}$$

Après développement :

$$\begin{aligned} \left[ 1 - \frac{\Delta R + \Delta Q}{2h} + \frac{(\Delta R - \Delta Q)^2 + \Delta R \cdot \Delta Q}{4h^2} \right] \sigma_z^2 \\ + \frac{\sum_i [2\Delta R - \Delta Q - 2h] + \sum_j [2\Delta Q - \Delta R - 2h]}{4h^2} \sigma_z \\ + \frac{(\sum_i - \sum_j)^2 + \sum_i \sum_j}{4h^2} - \sigma_0^2 = 0 \end{aligned}$$

[E 21.56]

Cette équation est de la forme :

$$PP \cdot \sigma_z^2 + QQ \cdot \sigma_z + SS = 0 .$$

Dont les solutions sont :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{z1} \\ \sigma_{z2} \end{array} \right\} = \frac{-QQ \pm \sqrt{QQ^2 - 4 PP.SS}}{2.PP}$$

Les solutions seront discriminées par la condition  $\sigma_z(n,m) \leq 0$ .

6 - ETUDE DES DEFORMATIONS.

D'après LEVY-MISES :

$$\frac{\dot{\epsilon}_y}{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z} = \frac{\dot{\epsilon}_z}{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}$$

L'hypothèse des DEFORMATIONS HOMOGENES fournit  $\dot{\epsilon}_z : \dot{\epsilon}_z = \frac{dh}{h}$ .

D'où :

$$\dot{\epsilon}_y = \frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y} \cdot \frac{dh}{h}$$

Soit :

$$\epsilon_y = \int_0^{n\delta} \frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y} \cdot \frac{(-tg \alpha) dx}{h} \quad [E 21.57]$$

Nous pourrions alors relier  $\epsilon_y$ , déformation logarithmique ou naturelle avec  $e_y$ , déformation arithmétique :

$$e_y = \frac{dw - dw_0}{dw_0}$$

$$\epsilon_y = L(1 + e_y)$$

soit :  $dw = dw_0 e^{\epsilon_y}$

$dw_0$  étant la largeur initiale de la colonne.

La largeur  $w$  du produit sera donc :

$$w(n) = w_0 * \sum_n e^{\epsilon_y^{(n,m)}} \quad [E 21.58]$$

Cette valeur pourra être confrontée avec  $w^*(n)$ .

7 - CALCUL DES EFFORTS.

71. Force transversale.

Cette force, normale à l'axe d'étirage, est exercée par le produit sur chaque filière.

$$dT = \sigma_y \cdot dx \cdot dy.$$

Soit, avec la discrétisation adoptée :

$$T = 2 \sum_n \sum_m \frac{\delta \cdot \omega}{4} [\sigma_y(n-1,m-1) + \sigma_y(n-1,m) + \sigma_y(n,m-1) + \sigma_y(n,m)]$$

[E 21.59]

72. Force d'étirage.

$$dF = \sigma_x \cdot 2h_1 \cdot dy$$

$$F = 4h_1 \int_{-\omega_1}^0 \sigma_x \cdot dy .$$

Une intégration numérique par une METHODE DES TRAPEZES fournira la solution :

$$F = 4h_1 \sum_m \frac{\omega}{2} [\sigma_x(nn,m-1) + \sigma_x(nn,m)]$$

[E 21.60]

## 8 - RESULTATS.

### 81. Etude des Profils carrés.

La comparaison de T 21.3 et T 21.4 donnant respectivement les résultats obtenus par les méthodes des TRANCHES et des COLONNES sur un étirage de profil carré, avec angle  $\alpha$  de  $7^\circ$  et coefficient de frottement de 0,1, met en valeur de légères différences sur l'élargissement  $\Delta w$  (en cours ou en fin d'étirage) et les différentes valeurs de contraintes ou d'efforts.

La valeur absolue du nouveau terme calculé, soit  $\sigma_y$ , est inférieure à  $3^\circ/100$  de  $\sigma_0$ .

Par ailleurs, la précision des calculs a été légèrement sacrifiée à leur simplicité (méthode des TRAPEZES fréquemment employée, au lieu de méthode de SIMPSON).

Il n'est donc pas possible de tirer des conclusions sur ces chiffres. La méthode des COLONNES n'est pas en cause, une rédaction du programme de calcul plus exigeante quant à la précision devra permettre d'étudier ces profils.

### 82. Etude des Profils rectangulaires.

Nous avons préféré porter notre effort sur les profils rectangulaires pour lesquels l'hypothèse de contraintes planes n'est plus acceptable.

Les résultats obtenus sont rassemblés dans les tableaux T 21.5 à T 21.8 et les graphiques G 21.7 à G 21.12.

Globalement, ils sont assez semblables à ceux obtenus par la méthode des TRANCHES.

Cependant, l'évolution de l'élargissement suivant l'angle d'étirage est assez complexe et notablement différente de celle représentée en G 21.3.

Pour analyser ce comportement, il faut revenir sur les généralités des méthodes de compression (§ 21.12).

La figure F 21.2 représente l'évolution des contraintes dans une pièce étirée en contraintes planes. Lorsque le problème ne peut plus se poser avec cette hypothèse, il faut procéder à une interprétation tridimensionnelle [F 21.35]. Le trajet ACE correspond à l'état de contraintes d'un élément situé sur la face libre. BCD, par contre, représente l'état de contraintes d'un élément situé au centre de la pièce.

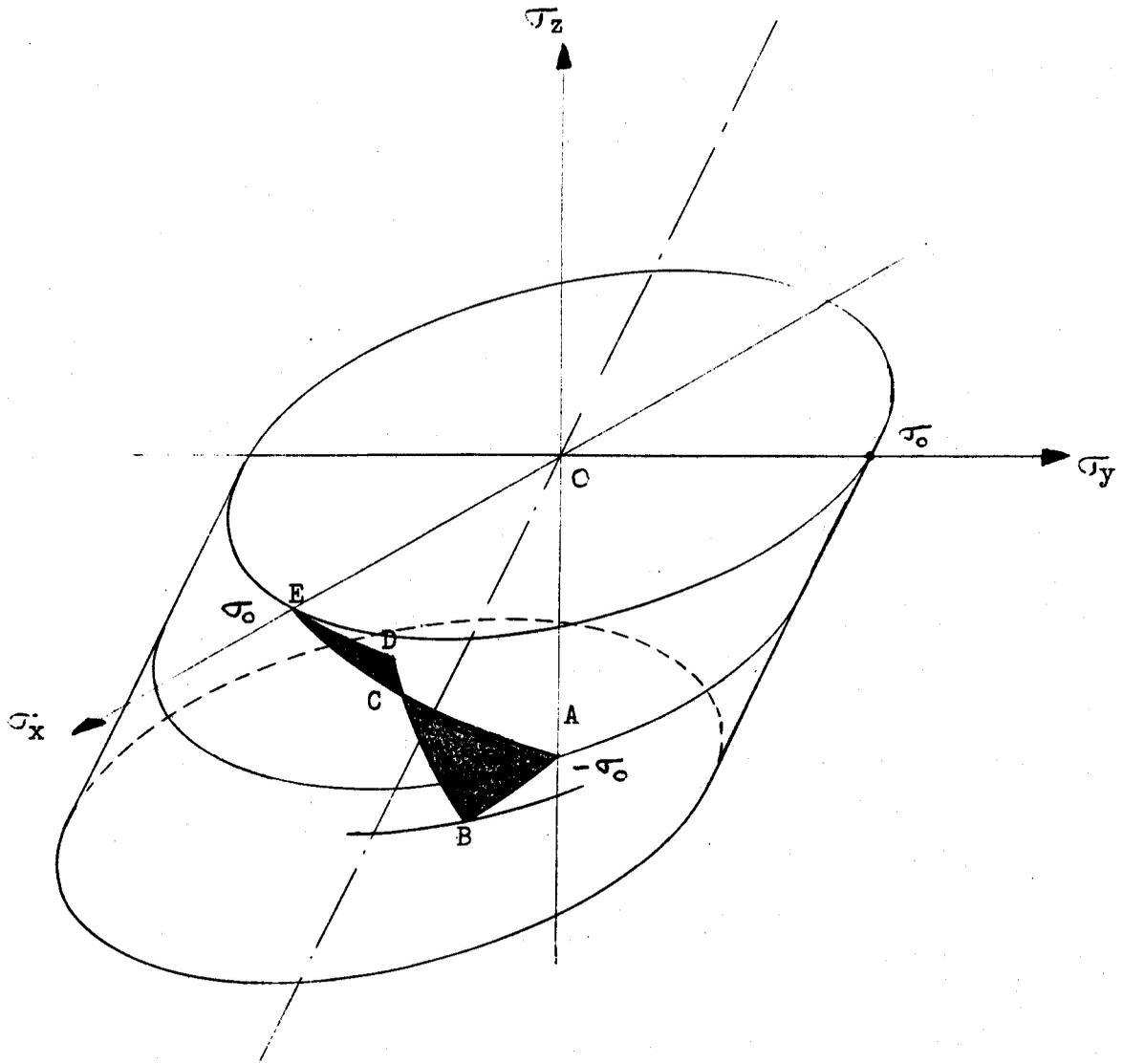
Toute ligne partant d'un point situé entre A et B passant par C pour aboutir entre D et E trace l'histoire des contraintes d'un élément de la pièce.

En C le cylindre de MISES a pour particularité d'avoir une normale parallèle au plan Oxz. La vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_y$  est donc nulle. Les points C [F 21.35] et 1 [F 21.2] sont identiques.

De fait, dans les graphes G 21.7 et G 21.8, sur une même verticale les contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_z$  sont en valeur absolue égale,  $\sigma_y$  est nulle, l'élargissement est maximum.

Lorsque l'angle d'étirage augmente, nous savons que les efforts mis en oeuvre diminuant, le point C donc le maxima de l'élargissement ne sera atteint que pour un rapport d'étirage plus élevé.

Par ailleurs, les résultats numériques montrent que la contrainte  $\sigma_y$  augmente notablement, le point B s'éloigne donc de A. La vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_y$  étant d'autant plus faible que B s'éloigne de A, l'élargissement sera moins important. Cette diminution n'étant pas toujours compensée par l'effet précédent, les maxima ne croissent que jusqu'à 15° environ (G 21.10).



- [ F 21.35 ] -

Représentation sur le cylindre de MISES  
de l'évolution des contraintes



HO	WO	H1	ALPHA	MU	SIGMO	LO
12.00000	12.00000	7.00000	0.12217	0.10000	1.00000	0.4072275E 02

X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.4072275E 01	0.1224203E 02	0.7819903E-01	0.0000000E 00	-0.9586046E 00
0.4072275E 01	0.9793631E 01	0.7825522E-01	-0.1081087E-02	-0.9590497E 00
0.4072275E 01	0.7345223E 01	0.7829908E-01	-0.1927100E-02	-0.9593974E 00
0.4072275E 01	0.4896815E 01	0.7833061E-01	-0.2537451E-02	-0.9596480E 00
0.4072275E 01	0.2448407E 01	0.7834979E-01	-0.2911717E-02	-0.9598016E 00
0.4072275E 01	0.0000000E 0	0.7835662E-01	-0.3049639E-02	-0.9598582E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.1150000E 02	0.1224204E 02	0.4510280E 02	0.4409533E 02	-0.1084706E 03

X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.8144551E 01	0.1246640E 02	0.1597923E 00	0.0000000E 00	-0.9104824E 00
0.8144551E 01	0.9973121E 01	0.1598983E 00	-0.1017836E-02	-0.9108018E 00
0.8144551E 01	0.7479840E 01	0.1599811E 00	-0.1814215E-02	-0.9110512E 00
0.8144551E 01	0.4986560E 01	0.1600406E 00	-0.2388683E-02	-0.9112308E 00
0.8144551E 01	0.2493280E 01	0.1600768E 00	-0.2740915E-02	-0.9113410E 00
0.8144551E 01	0.0000000E 00	0.1600897E 00	-0.2870711E-02	-0.9113818E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.1100000E 02	0.1246640E 02	0.9215389E 02	0.8775765E 02	-0.2022511E 03

- [T 21.4] -

ETIRAGE D'UN PROFIL CARRE

Listing obtenu à partir de la méthode des COLONNES.



X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.1221682E 02	0.1266760E 02	0.2446574E 00	0.0000000E 00	-0.8549670E 00
0.1221682E 02	0.1013408E 02	0.2447958E 00	-0.8975785E-03	-0.8551516E 00
0.1221682E 02	0.7600561E 01	0.2449039E 00	-0.1599707E-02	-0.8552956E 00
0.1221682E 02	0.5067040E 01	0.2449815E 00	-0.2106104E-02	-0.8553993E 00
0.1221682E 02	0.2533520E 01	0.2450288E 00	-0.2416563E-02	-0.8554630E 00
0.1221682E 02	0.0000000E 00	0.2450458E 00	-0.2530960E-02	-0.8554868E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.1050000E 02	0.1266760E 02	0.1410708E 03	0.1303042E 03	-0.2921972E 03

X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.1628910E 02	0.1283847E 02	0.3325734E 00	0.0000000E 00	-0.7913385E 00
0.1628910E 02	0.1027078E 02	0.3327244E 00	-0.7295470E-03	-0.7913981E 00
0.1628910E 02	0.7703087E 01	0.3328422E 00	-0.1300097E-02	-0.7914444E 00
0.1628910E 02	0.5135391E 01	0.3329269E 00	-0.1711520E-02	-0.7914778E 00
0.1628910E 02	0.2567695E 01	0.3329786E 00	-0.1963723E-02	-0.7914983E 00
0.1628910E 02	0.0000000E 00	0.3329972E 00	-0.2056648E-02	-0.7915062E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.1000000E 02	0.1283847E 02	0.1917239E 03	0.1709336E 03	-0.3771295E 03

X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.2036137E 02	0.1296971E 02	0.4231961E 00	0.0000000E 00	-0.7188205E 00
0.2036137E 02	0.1037576E 02	0.4233399E 00	-0.5093661E-03	-0.7187802E 00
0.2036137E 02	0.7781826E 01	0.4234522E 00	-0.9076287E-03	-0.7187487E 00
0.2036137E 02	0.5187884E 01	0.4235329E 00	-0.1194765E-02	-0.7187259E 00
0.2036137E 02	0.2593942E 01	0.4235822E 00	-0.1370758E-02	-0.7187120E 00
0.2036137E 02	0.0000000E 00	0.4236002E 00	-0.1435599E-02	-0.7187071E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.9500000E 01	0.1296971E 02	0.2439150E 03	0.2087036E 03	-0.4557461E 03



X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.2443365E 02	0.1304900E 02	0.5160086E 00	0.0000000E 00	-0.6365913E 00
0.2443365E 02	0.1043920E 02	0.5161325E 00	-0.2378697E-03	-0.6364917E 00
0.2443365E 02	0.7829401E 01	0.5162292E 00	-0.4238204E-03	-0.6364139E 00
0.2443365E 02	0.5219600E 01	0.5162988E 00	-0.5578671E-03	-0.6363578E 00
0.2443365E 02	0.2609800E 01	0.5163415E 00	-0.6400202E-03	-0.6363234E 00
0.2443365E 02	0.0000000E 01	0.5163572E 00	-0.6702862E-03	-0.6363107E 00
H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.9000000E 01	0.1304901E 02	0.2973537E 03	0.2425106E 03	-0.5266327E 03

X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.2850593E 02	0.1305985E 02	0.6102522E 00	0.0000000E 00	-0.5438109E 00
0.2850593E 02	0.1044788E 02	0.6103641E 00	0.7331591E-04	-0.5436975E 00
0.2850593E 02	0.7835911E 01	0.6104514E 00	0.1306252E-03	-0.5436090E 00
0.2850593E 02	0.5223940E 01	0.6105143E 00	0.1719355E-03	-0.5435453E 00
0.2850593E 02	0.2611970E 01	0.6105529E 00	0.1972524E-03	-0.5435062E 00
0.2850593E 02	0.0000000E 00	0.6105672E 00	0.2065792E-03	-0.5434917E 00
H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.8500000E 01	0.1305986E 02	0.3516252E 03	0.2710657E 03	-0.5882862E 03

X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.3257820E 02	0.1297960E 02	0.7048201E 00	0.0000000E 00	-0.4396892E 00
0.3257820E 02	0.1038368E 02	0.7049754E 00	0.3919584E-03	-0.4395735E 00
0.3257820E 02	0.7787763E 01	0.7050965E 00	0.6983705E-03	-0.4394833E 00
0.3257820E 02	0.5191842E 01	0.7051836E 00	0.9192572E-03	-0.4394186E 00
0.3257820E 02	0.2595921E 01	0.7052366E 00	0.1054633E-02	-0.4393792E 00
0.3257820E 02	0.0000000E 00	0.7052557E 00	0.1104507E-02	-0.4393653E 00
H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.8000000E 01	0.1297963E 02	0.4061426E 03	0.2928650E 03	-0.6391605E 03



X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.3665048E 02	0.1277620E 02	0.7980861E 00	0.0000000E 00	0.3236559E 00
0.3665048E 02	0.1022096E 02	0.7984398E 00	0.6484242E-03	-0.3233988E 00
0.3665048E 02	0.7665725E 01	0.7987157E 00	0.1155347E-02	-0.3231986E 00
0.3665048E 02	0.5110483E 01	0.7989136E 00	0.1520790E-02	-0.3230555E 00
0.3665048E 02	0.2555241E 01	0.7990332E 00	0.1744767E-02	-0.3229700E 00
0.3665048E 02	0.0000000E 00	0.7990746E 00	0.1827285E-02	-0.3229421E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.7500000E 01	0.1277626E 02	0.4600757E 03	0.3061470E 03	-0.6777484E 03

X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.4072275E 02	0.1240232E 02	0.8876072E 00	0.0000000E 00	-0.1958173E 00
0.4072275E 02	0.9921861E 01	0.8885147E 00	0.7085258E-03	-0.1948022E 00
0.4072275E 02	0.7441396E 01	0.8892246E 00	0.1260992E-02	-0.1940070E 00
0.4072275E 02	0.4960930E 01	0.8897343E 00	0.1658480E-02	-0.1934365E 00
0.4072275E 02	0.2480465E 01	0.8900420E 00	0.1901775E-02	-0.1930939E 00
0.4072275E 02	0.0000000E 00	0.8901464E 00	0.1991351E-02	-0.1929814E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.7000000E 01	0.1240243E 02	0.5122334E 03	0.3088208E 03	-0.7027248E 03



Profil : Rectangulaire  $\left(\frac{w_0}{h_0} = 5\right) 24 \times 120 \text{ mm}$

Epaisseur du Produit : 19 mm

Rapport d'étirage réduit 21 %

Angle	Coef. de Frot.	Largeur	Force d'étirage	Effort transv.	$\sigma_x/\sigma_0$
$\alpha$	$\mu$	$w_1$	$F/\sigma_0$	$T/\sigma_0$	
7	0	66,00	617,01	2454,0	0,246
	0,1	64,39	1047,1	2296,3	0,422-0,431
	0,2	63,07	1400,0	2109,7	0,577-0,587
10	0	66,00	617,0	1708,8	0,246
	0,1	64,50	933,4	1642,6	0,372-0,385
	0,2	63,32	1213,7	1549,6	0,494-0,509
15	0	66,00	617,0	1124,4	0,246
	0,1	64,42	842,3	1106,0	0,332-0,350
	0,2	63,26	1054,1	1064,0	0,423-0,445
20	0	66,00	617,0	827,8	0,246
	0,1	64,25	797,2	824,6	0,312-0,333
	0,2	63,04	971,8	799,9	0,387-0,413
30	0	66,00	617,0	521,9	0,246
	0,1	63,83	756,4	526,9	0,294-0,320
	0,2	62,50	896,3	513,3	0,356-0,385
45	0	66,00	617,0	301,3	0,246
	0,1	63,10	742,9	306,4	0,289-0,319
	0,2				

- T 21.5

ETIRAGE D'UN PROFIL RECTANGULAIRE

Résultats obtenus par la méthode des COLONNES.



Profil : Rectangulaire 24 × 120 mm

Epaisseur du produit : 14 mm

Rapport d'étirage réduit : 42 %.

Angle $\alpha$	Coef. de Frot. $\mu$	Largeur $w_1$	Force d'étirage $F/\sigma_0$	Effort transv. $T/\sigma_0$	$\sigma_x/\sigma_0$
7	0	69,27	1150,3	4446,0	0,593
	0,1	61,92	1532,6	3525,5	0,858-0,898
	0,2	-	-	-	-
10	0	69,27	1150,3	3095,9	0,593
	0,1	63,56	1461,2	2629,0	0,799-0,832
	0,2	59,38	1580,6	2222,2	0,882-0,991
15	0	69,27	1150,3	2037,2	0,593
	0,1	64,50	1381,8	1820,8	0,746-0,775
	0,2	61,44	1522,0	1614,3	0,831-0,914
20	0	69,27	1150,3	1499,8	0,593
	0,1	64,70	1334,2	1372,8	0,718-0,746
	0,2	62,08	1468,4	1243,4	0,799-0,869
30	0	69,27	1150,3	945,5	0,593
	0,1	64,48	1283,4	882,6	0,691-0,720
	0,2	62,15	1403,2	812,1	0,767-0,824
45	0	69,27	1150,3	545,9	0,593
	0,1	63,60	1256,3	510,3	0,683-0,715
	0,2				

ETIRAGE D'UN PROFIL RECTANGULAIRE

Résultats obtenus par la méthode des COLONNES.



HO WO H1 ALPHA MU SIGMO LO  
 12.00000 60.00000 7.00000 0.12217 0.10000 1.00000 0.4072275E 02

X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.4072275E 01	0.6113031E 02	0.7707615E-01	0.0000000E 00	-0.9592316E 00
0.4072275E 01	0.4890424E 02	0.7827942E-01	-0.2468666E-01	-0.9692199E 00
0.4072275E 01	0.3667818E 02	0.7922363E-01	-0.4438020E-01	-0.9768325E 00
0.4072275E 01	0.2445212E 02	0.7990442E-01	-0.5879499E-01	-0.9822050E 00
0.4072275E 01	0.1222606E 02	0.8031922E-01	-0.6772074E-01	-0.9854482E 00
0.4072275E 01	0.0000000E 00	0.8046679E-01	-0.7102670E-01	-0.9866362E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.1150000E 02	0.6113055E 02	0.2284422E 03	0.2230479E 03	-0.5518033E 03

X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.8144551E 01	0.6215718E 02	0.1579509E 00	0.0000000E 00	-0.9116246E 00
0.8144551E 01	0.4972574E 02	0.1601922E 00	-0.2270075E-01	-0.9186308E 00
0.8144551E 01	0.3729431E 02	0.1619362E 00	-0.4073219E-01	-0.9238745E 00
0.8144551E 01	0.2486287E 02	0.1631856E 00	-0.5388666E-01	-0.9275214E 00
0.8144551E 01	0.1243143E 02	0.1639438E 00	-0.6201351E-01	-0.9297016E 00
0.8144551E 01	0.0000000E 00	0.1642139E 00	-0.6501999E-01	-0.9304993E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.1100000E 02	0.6215750E 02	0.4668669E 03	0.4433479E 03	-0.1027238E 04

- [T 21.7] -

ETIRAGE D'UN PROFIL RECTANGULAIRE.

Listing obtenu à partir de la méthode des COLONNES.



X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.1221682E 02	0.6306573E 02	0.2426086E 00	0.0000000E 00	-0.8563744E 00
0.1221682E 02	0.5045258E 02	0.2455300E 00	-0.1978899E-01	-0.8603736E 00
0.1221682E 02	0.3783943E 02	0.2477823E 00	-0.3543176E-01	-0.8632793E 00
0.1221682E 02	0.2522629E 02	0.2493843E 00	-0.4680170E-01	-0.8652516E 00
0.1221682E 02	0.1261314E 02	0.2503525E 00	-0.5380853E-01	-0.8664116E 00
0.1221682E 02	0.0000000E 00	0.2506980E 00	-0.5639729E-01	-0.8668357E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.1050000E 02	0.6306617E 02	0.7142138E 03	0.6568686E 03	-0.1480433E 04

X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.1628910E 02	0.6382454E 02	0.3308891E 00	0.0000000E 00	-0.7926182E 00
0.1628910E 02	0.5105963E 02	0.3340781E 00	-0.1583621E-01	-0.7938585E 00
0.1628910E 02	0.3829472E 02	0.3365118E 00	-0.2829091E-01	-0.7946725E 00
0.1628910E 02	0.2552981E 02	0.3382296E 00	-0.3730911E-01	-0.7951760E 00
0.1628910E 02	0.1276490E 02	0.3392631E 00	-0.4285240E-01	-0.7954528E 00
0.1628910E 02	0.0000000E 00	0.3396333E 00	-0.4489771E-01	-0.7955541E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.1000000E 02	0.6382517E 02	0.9697652E 03	0.8596504E 03	-0.1905509E 04

X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.2036137E 02	0.6439410E 02	0.4223762E 00	0.0000000E 00	-0.7195098E 00
0.2036137E 02	0.5151528E 02	0.4254317E 00	-0.1078497E-01	-0.7185741E 00
0.2036137E 02	0.3863646E 02	0.4277387E 00	-0.1922630E-01	-0.7177886E 00
0.2036137E 02	0.2575764E 02	0.4293540E 00	-0.2531676E-01	-0.7171961E 00
0.2036137E 02	0.1287882E 02	0.4303219E 00	-0.2905156E-01	-0.7168243E 00
0.2036137E 02	0.0000000E 00	0.4306710E 00	-0.3042791E-01	-0.7166885E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.9500000E 01	0.6439499E 02	0.1232430E 04	0.1047127E 04	-0.1905509E 04



X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.2443365E 02	0.6472516E 02	0.5161951E 00	0.0000000E 00	-0.6364173E 00
0.2443365E 02	0.5178013E 02	0.5188703E 00	-0.4726360E-02	-0.6342707E 00
0.2443365E 02	0.3883509E 02	0.5208706E 00	-0.8412088E-02	-0.6325310E 00
0.2443365E 02	0.2589006E 02	0.5222610E 00	-0.1106425E-01	-0.6313475E 00
0.2443365E 02	0.1294503E 02	0.5230917E 00	-0.1268775E-01	-0.6306339E 00
0.2443365E 02	0.0000000E 00	0.5233944E 00	-0.1328751E-01	-0.6303725E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.9000000E 01	0.6472506E 02	0.1500550E 04	0.1214042E 04	-0.2646413E 04

X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.2850593E 02	0.6475009E 02	0.6106743E 00	0.0000000E 00	-0.5433721E 00
0.2850593E 02	0.5180007E 02	0.6131426E 00	0.2012332E-02	-0.5408857E 00
0.2850593E 02	0.3885005E 02	0.6149832E 00	0.3579502E-02	-0.5390340E 00
0.2850593E 02	0.2590003E 02	0.6162603E 00	0.4706145E-02	-0.5377508E 00
0.2850593E 02	0.1295001E 02	0.6170226E 00	0.5395396E-02	0.5369855E 00
0.2850593E 02	0.0000000E 00	0.6173014E 00	0.5649092E-02	-0.5367057E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.8500000E 01	0.6474992E 02	0.1771552E 04	0.1354194E-04	-0.2949663E 04

X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.3257802E 02	0.6438159E 02	0.7027905E 00	0.0000000E 00	-0.4420555E 00
0.3257802E 02	0.5150527E 02	0.7060851E 00	0.8665577E-02	-0.4396218E 00
0.3257802E 02	0.3862895E 02	0.7085826E 00	0.1542674E-01	-0.4377772E 00
0.3257802E 02	0.2575263E 02	0.7103363E 00	0.2029409E-01	-0.4364835E 00
0.3257802E 02	0.1287631E 02	0.7113872E 00	0.2327459E-01	-0.4357106E 00
0.3257802E 02	0.0000000E 00	0.7117617E 00	0.2437219E-01	-0.4354389E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.8000000E 01	0.6438128E 02	0.2041317E 04	0.1460258E 04	-0.3200224E 04



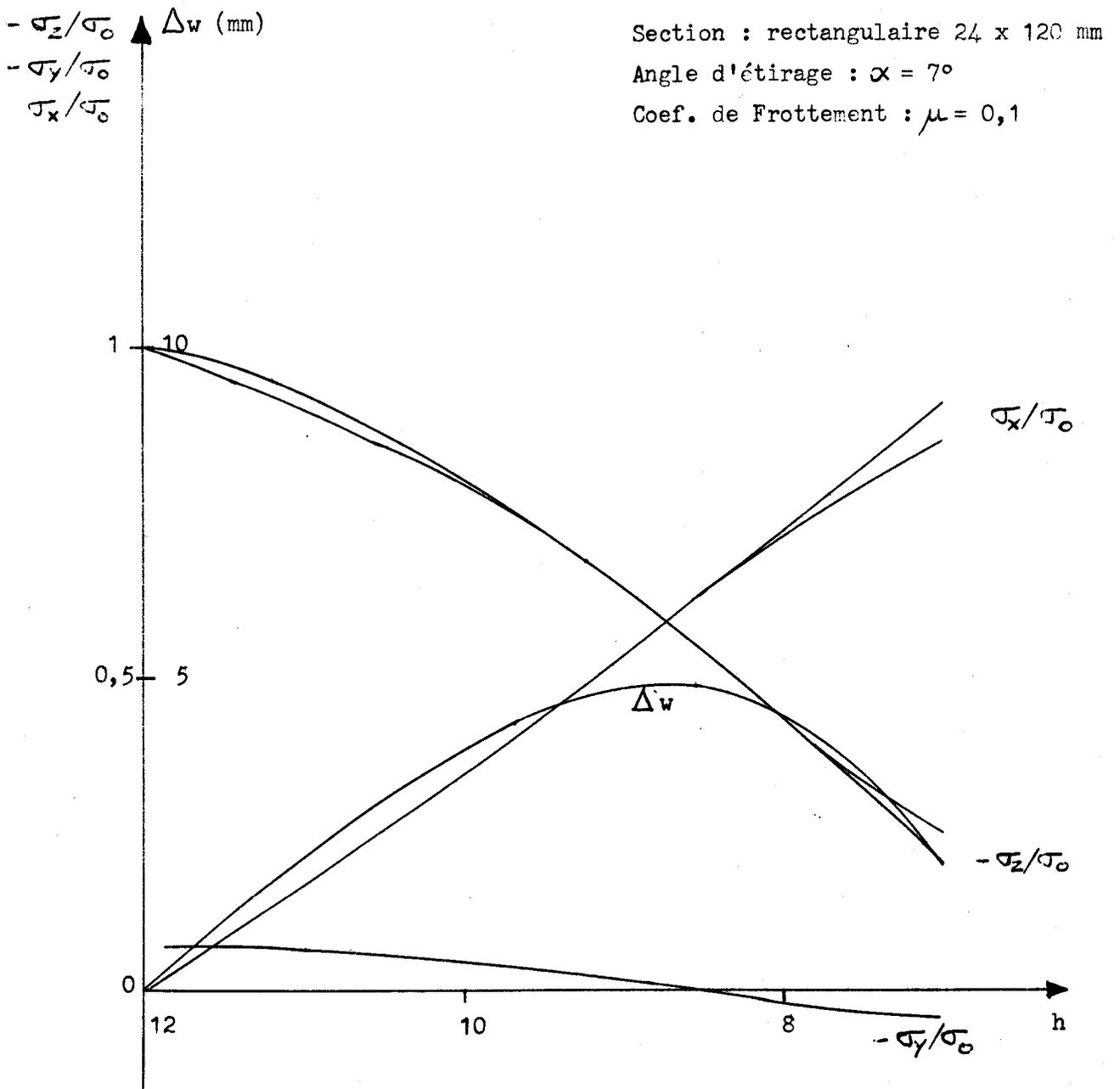
X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.3665048E 02	0.6349725E 02	0.7874993E 00	0.0000000E 00	-0.3376076E 00
0.3665048E 02	0.5079780E 02	0.7940283E 00	0.1395610E-01	-0.3333106E 00
0.3665048E 02	0.3809835E 02	0.7991599E 00	0.2486607E-01	-0.3298439E 00
0.3665048E 02	0.2539890E 02	0.8028619E 00	0.3272970E-01	-0.3273030E 00
0.3665048E 02	0.1269945E 02	0.8051100E 00	0.3754862E-01	-0.3257564E 00
0.3665048E 02	0.0000000E 00	0.8058896E 00	0.3932405E-01	-0.3252453E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.7500000E 01	0.6349660E 02	0.2303087E 04	0.1523330E 04	-0.3393229E 04

X	Y	SIGMAX	SIGMAY	SIGMAZ
0.4072275E 02	0.6192012E 02	0.8576199E 00	0.0000000E 00	-0.2407914E 00
0.4072275E 02	0.4953609E 02	0.8711591E 00	0.1641826E-01	-0.2285680E 00
0.4072275E 02	0.3715207E 02	0.8824591E 00	0.2900273E-01	-0.2178483E 00
0.4072275E 02	0.2476804E 02	0.8910120E 00	0.3789877E-01	-0.2094498E 00
0.4072275E 02	0.1238402E 02	0.8963711E 00	0.4326581E-01	-0.2040942E 00
0.4072275E 02	0.0000000E 00	0.3982280E 00	0.4522625E-01	-0.2022839E 00

H	W	PUIS	ETIR	TRANS
0.7000000E 01	0.6192043E 02	0.2545951E 04	0.1532665E 04	-0.3525519E 04





— [G 21.7] —

— ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES —

Evolution des contraintes et de l'élargissement

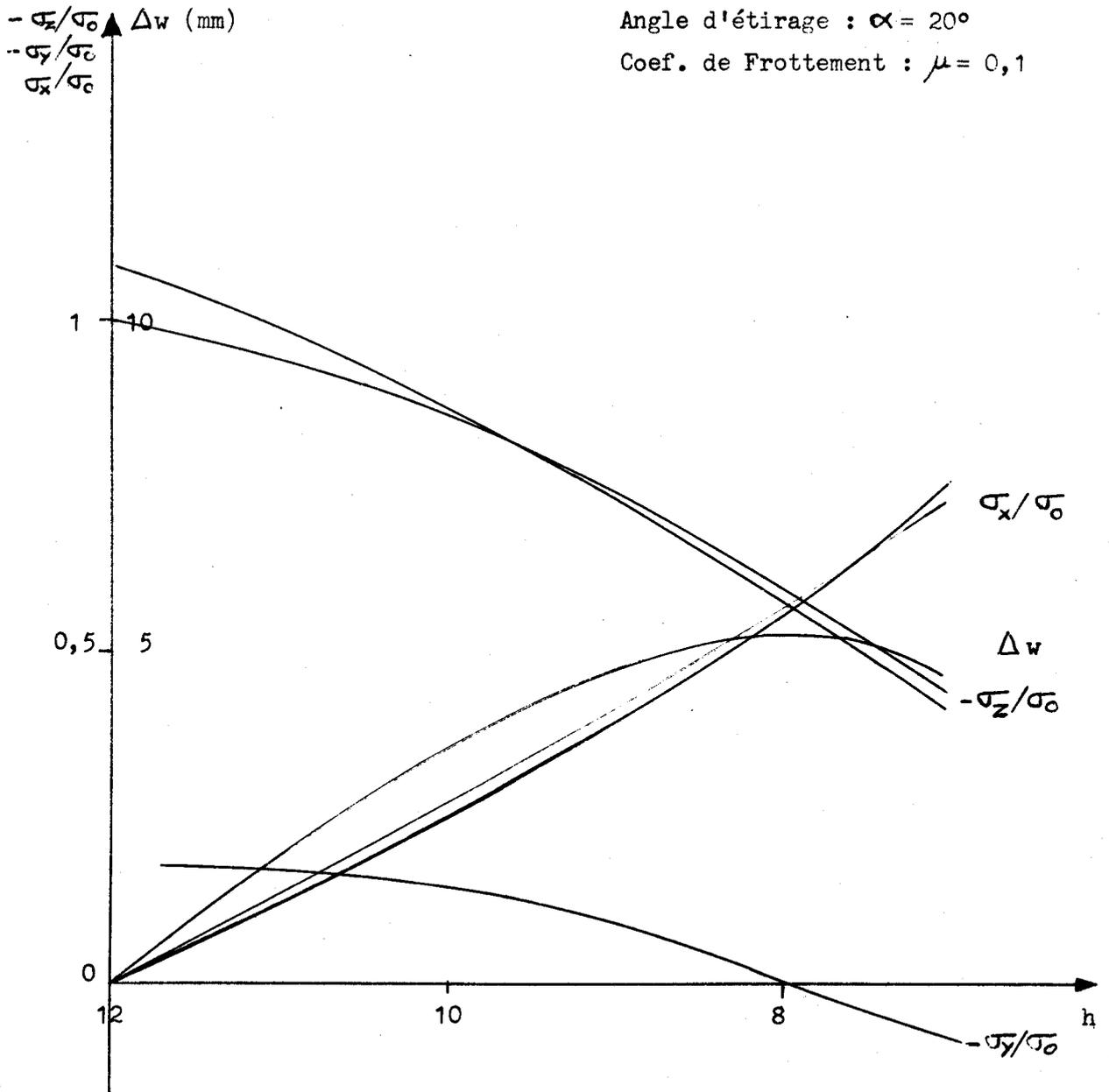
N.B. Les courbes des contraintes correspondent à leurs valeurs à coeur et en peau de la pièce .



Section : rectangulaire 24 x 120 mm

Angle d'étirage :  $\alpha = 20^\circ$

Coef. de Frottement :  $\mu = 0,1$



- [G 21.8] -

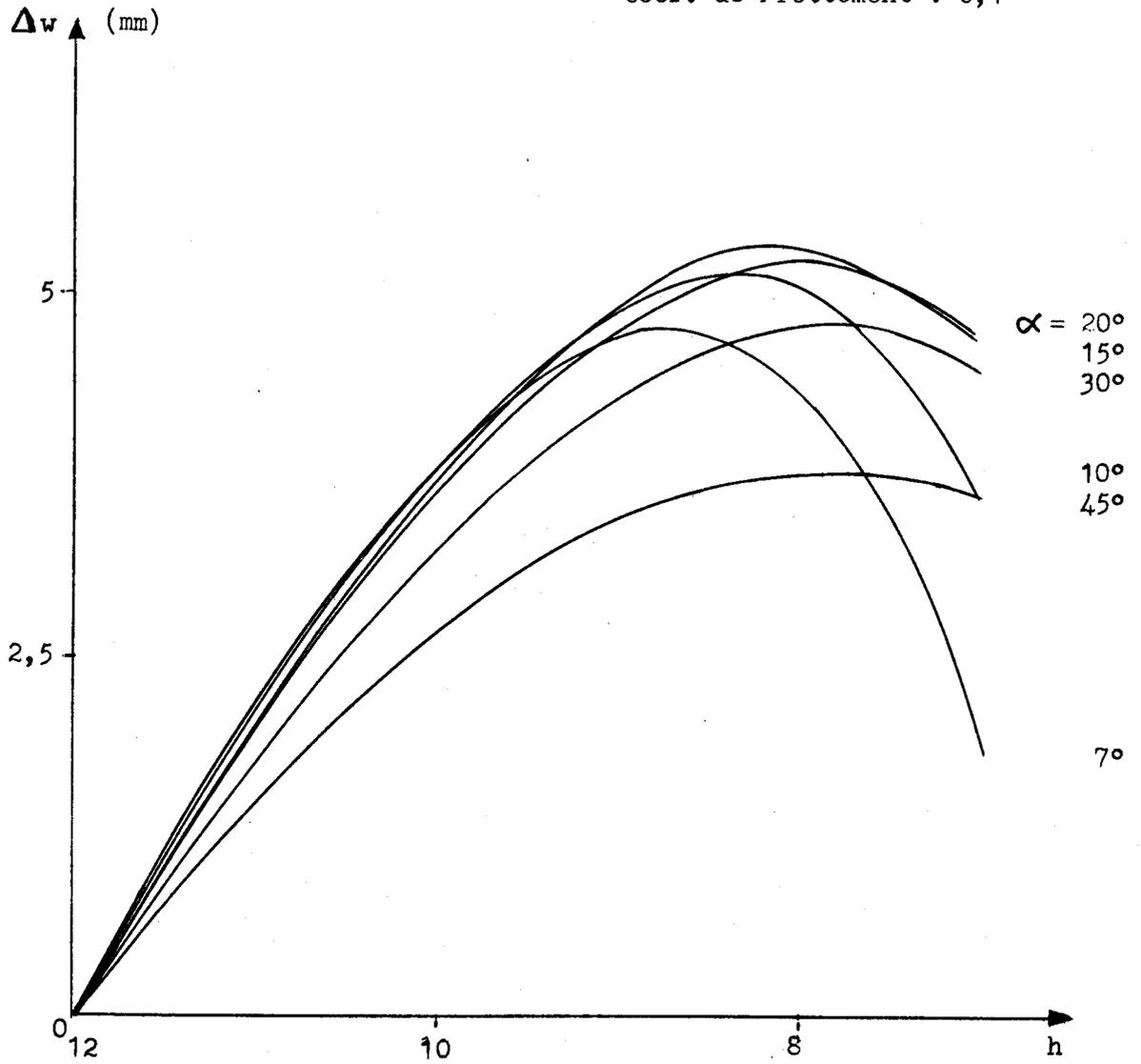
— ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES —

Evolution des contraintes et de l'élargissement



Section : rectangulaire 24 x 120 mm

Coef. de Frottement : 0,1



- [G 21.9] -

- ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES -

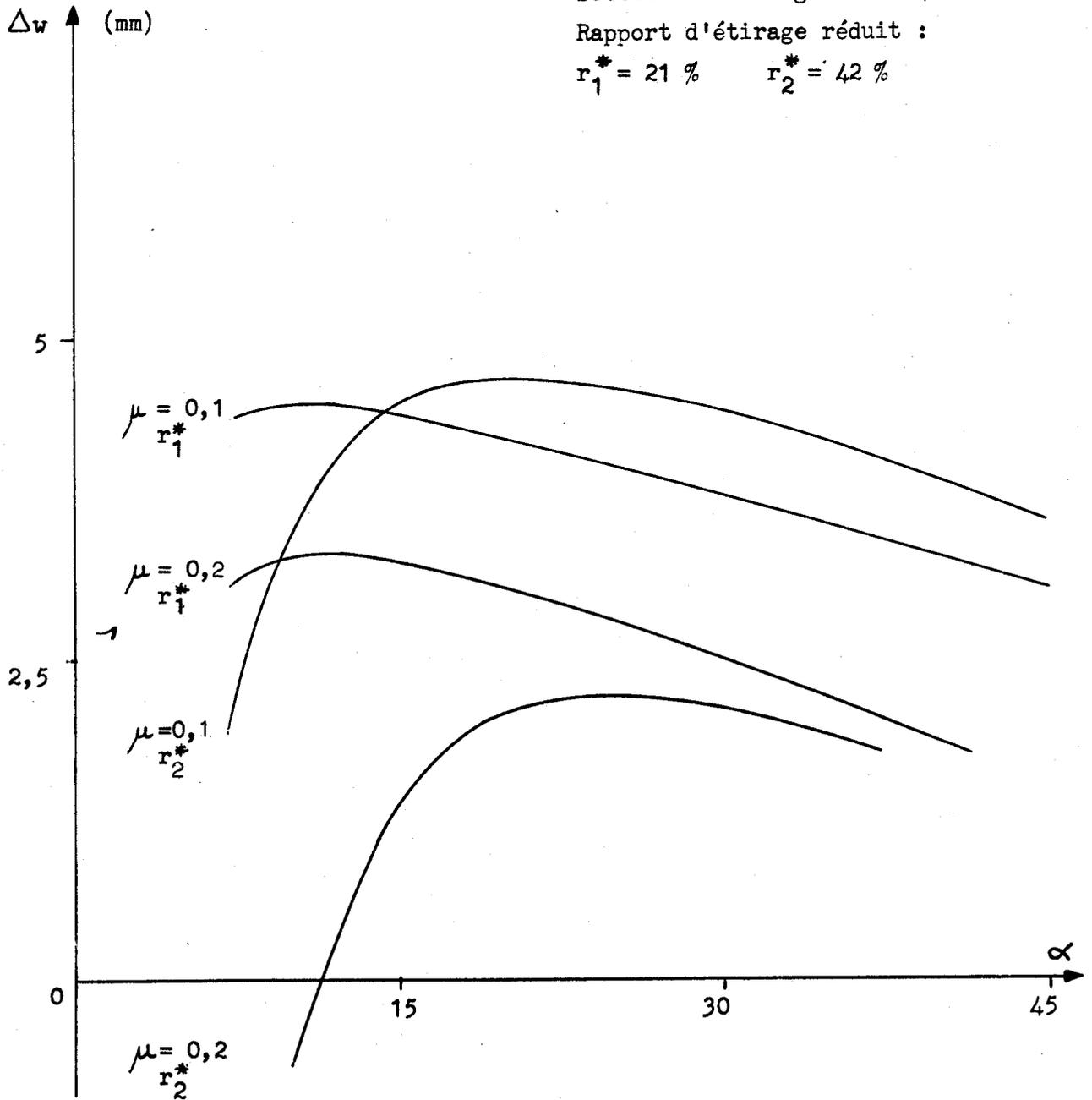
Influence de l'angle d'étirage sur l'élargissement



Section : rectangulaire 24 x 120 mm

Rapport d'étirage réduit :

$r_1^* = 21\%$        $r_2^* = 42\%$

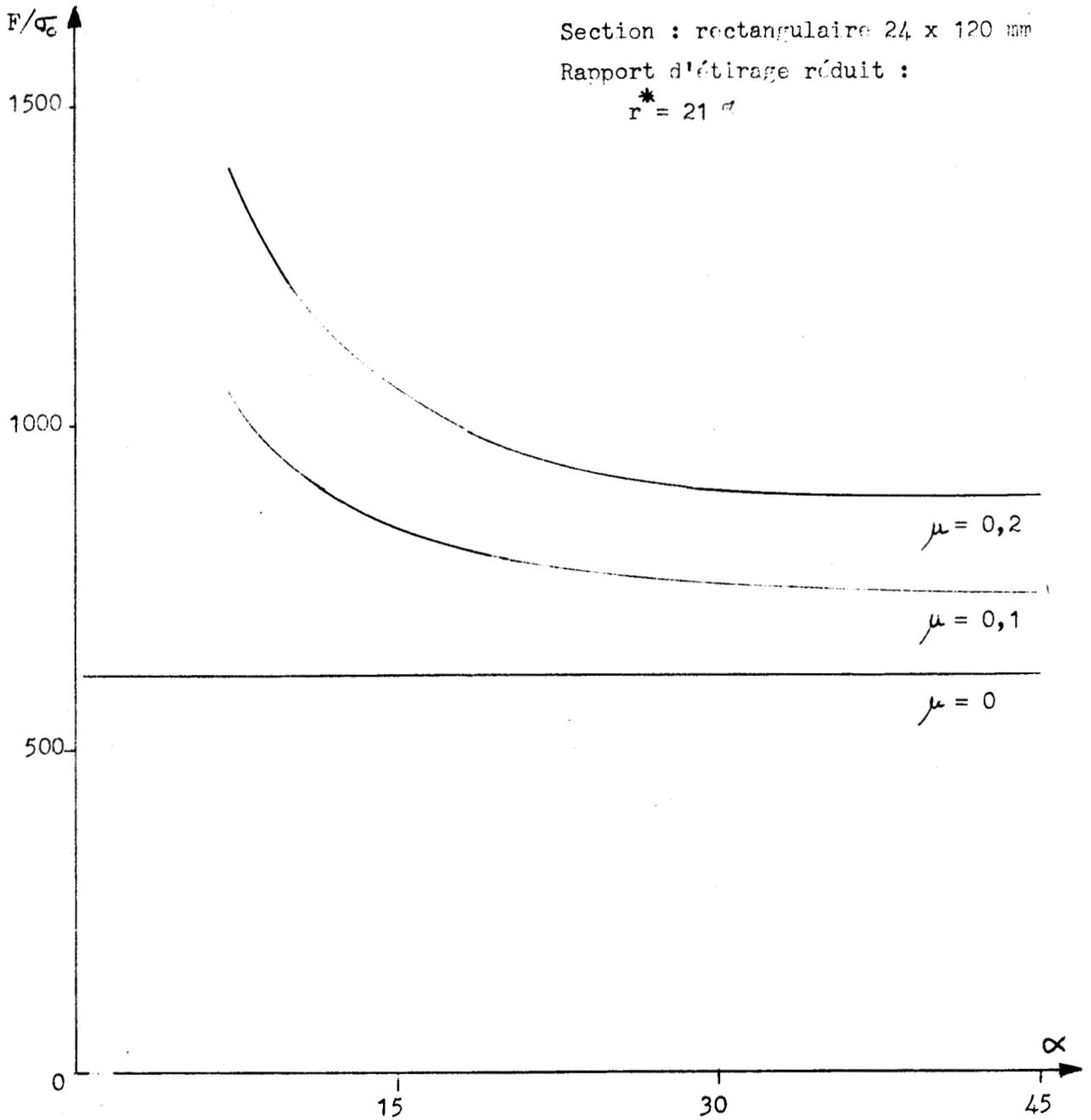


— [G 21.10] —

— ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES —

Influence de l'angle  $\alpha$  sur l'élargissement



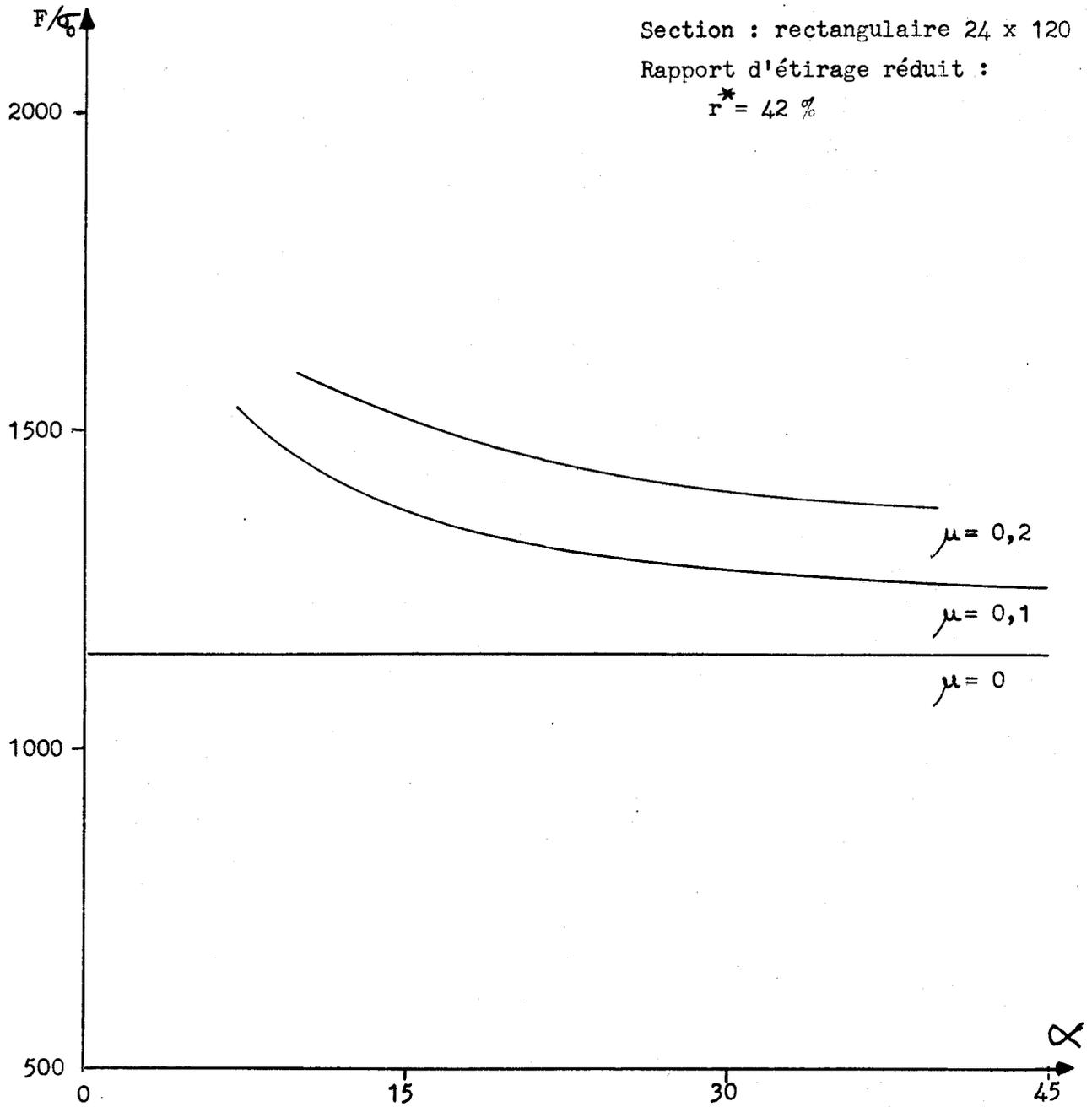


— [G 21.11] —

— ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES —

Influence de l'angle  $\alpha$  et du frottement  $\mu$  sur l'effort F





- [G 21.12] -

- ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES -

Influence de l'angle  $\alpha$  et du frottement  $\mu$  sur l'effort F



- Deuxième Partie -

Titre II -

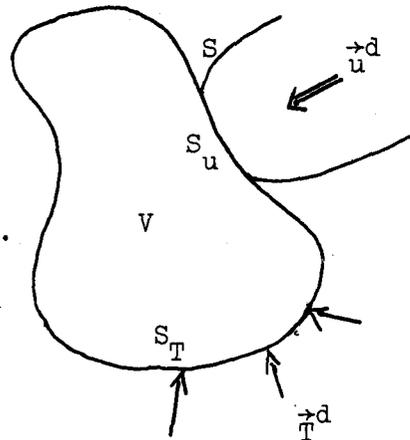
METHODES DE BORNE SUPERIEURE

I - GENERALITES.

1 - THEOREME DE LA BORNE SUPERIEURE.

11. Hypothèses.

Soit un corps R.P.P. isotrope de volume  $V$ , délimité par une surface  $S$  (Figure 22.1). Les contraintes  $T^d$  ou les vitesses  $u^d$  sont définies sur  $S_T$  ou  $S_u$  (conditions aux limites compatibles et cohérentes).



[F 22.1]

12. Formulation.

Soit  $u^*$  un champ de vitesses incompressible, compatible avec les conditions aux limites sur les vitesses,  $\dot{\epsilon}^*$  la vitesse de déformation généralisée correspondant à ce champ :

La quantité  $G(u^*)$  :

$$G(u^*) = \iiint_V \sigma_o \dot{\epsilon}^* dV - \iint_S \vec{T}^d \cdot \vec{u}^* \cdot dS$$

[E 22.1]

est minimale pour un champ de vitesses  $\vec{u}$  solution du problème.

13. Démonstration.

Elle repose sur le théorème des Travaux Virtuels.

Pour les grandeurs solutions :

$$\int_V [\sigma] [\dot{\epsilon}] dV = \int_{S_T} T^d \cdot u \cdot dS + \int_{S_u} T \cdot u^d \cdot dS . \quad [E 22.2]$$

Pour l'écoulement fictif :

$$\int_V [\sigma] [\dot{\epsilon}] dV = \int_{S_T} T^d \cdot u^* \cdot dS + \int_{S_u} T \cdot u^d \cdot dS . \quad [E 22.3]$$

Soit :

$$\int_S T \cdot u^d \cdot dS = \int_V [\sigma] [\dot{\epsilon}^*] dV - \int_S T^d \cdot u^* \cdot dS$$

D'après le théorème du travail maximum, en appelant  $[\sigma^*]$  le champ de contraintes défini à partir  $[\dot{\epsilon}^*]$  :

$$\int_S T \cdot u^d \cdot dS \leq \int_V [\sigma^*] [\dot{\epsilon}^*] dV - \int_S T^d \cdot u^* \cdot dS \quad [E 22.4]$$

#### 14. Applications.

Ce théorème permet d'étudier n'importe quel comportement plastique obéissant au théorème du travail maximal lorsque les conditions aux limites sont complètement formulées.

Nous nous situons strictement dans ce cadre.

En effet :

- l'interface outil-pièce :

la contrainte normale est inconnue, la composante normale de la vitesse  $\vec{u}$  est imposée par la géométrie de l'outil ; la contrainte tangentielle, dépendant du frottement, est choisie a priori ;

- dans le plan d'entrée :

la contrainte normale  $\sigma_x$  est nulle et la contrainte tangentielle est égale à  $k$  (interface bloc rigide - bloc plastique) ;

- dans le plan de sortie :

la contrainte tangentielle est égale à  $k$  ; il est possible de choisir arbitrairement la vitesse d'écoulement à la sortie des filières : nous adopterons

$$\vec{u}_1 = 1.$$

## 2 - CHOIX DU CHAMP DE VITESSE FICTIF.

L'utilisation du théorème de la BORNE SUPERIEURE est conditionnée par le choix d'un champ de vitesse fictif devant respecter les impératifs suivants :

- incompressibilité,
- compatibilité avec les conditions aux limites.

La qualité des résultats obtenus dépend de la plus ou moins bonne adaptation du champ  $\vec{u}^*$  choisi au problème. A la limite, une solution exacte peut être trouvée.

Deux méthodes permettent de définir ce champ :

### 21. Méthode des BLOCS.

Le corps étudiée, soumis à une déformation plastique, est arbitrairement décomposé en blocs rigides dont les vitesses sont compatibles avec les conditions aux limites et vérifient l'incompressibilité.

Toute la puissance de mise en oeuvre est alors dissipée aux interfaces des blocs et des outils.

### 22. Méthode du CHAMP CONTINU.

On imagine à l'intérieur du corps étudié un écoulement fictif. Moyennant certaines conditions, cet écoulement permettra de définir un champ de vitesses admissible [§ 22.I.12].

II -

METHODE PAR CHAMP CONTINU  
DE VITESSES

GENERALITES

### 1 - PRINCIPE.

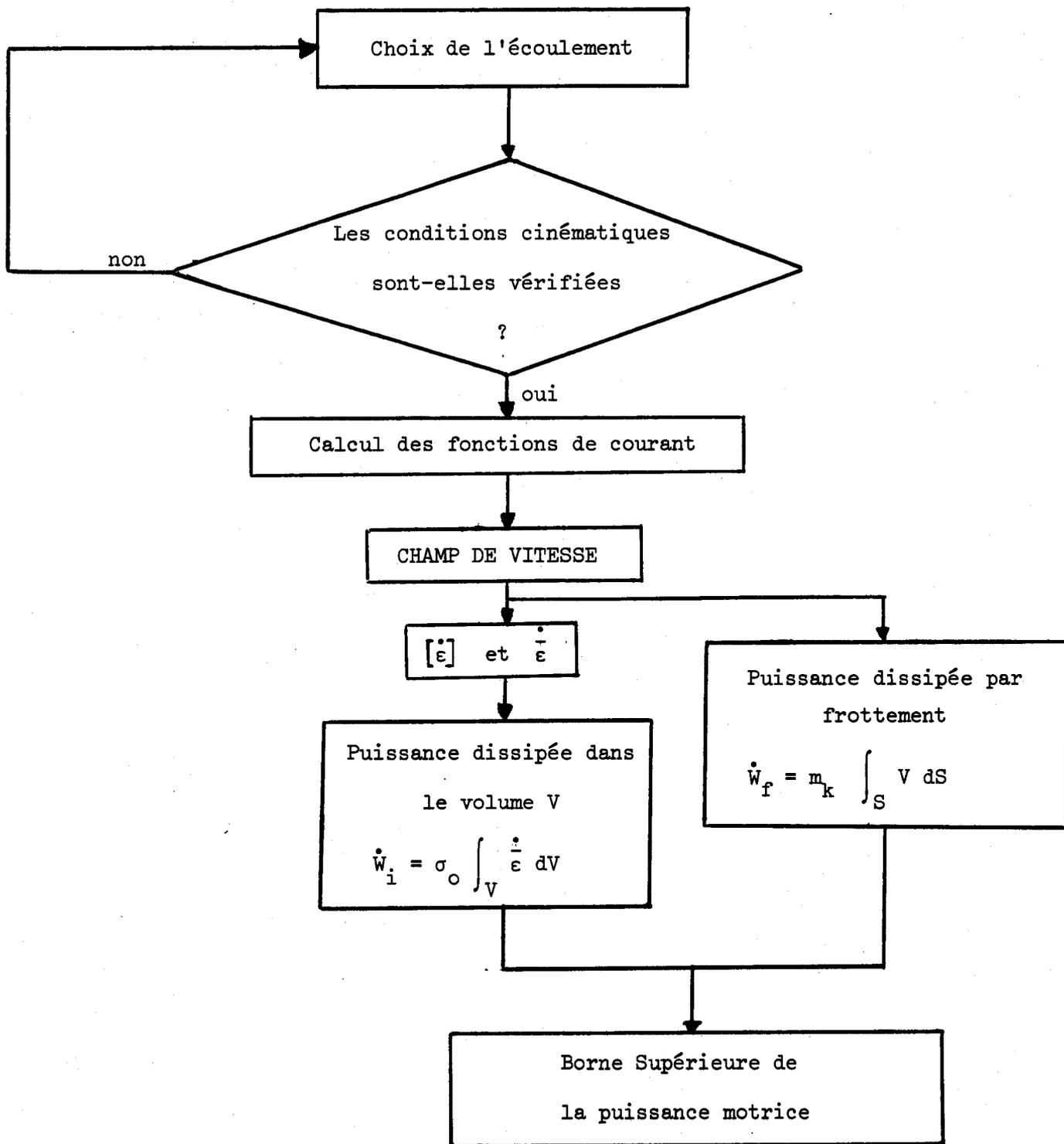
S'appuyant sur le théorème de Borne Supérieure, cette méthode permet, à partir d'un champ d'écoulement hypothétique respectant les conditions cinématiques du problème et l'incompressibilité, de déterminer une solution par excès de la puissance motrice nécessaire pour déformer le solide étudié.

Le processus de calcul est schématisé par F 22.02.

A partir de la définition mathématique de l'écoulement, il est possible de calculer le champ de vitesses, le tenseur des vitesses de déformation et la vitesse de déformation quadratique  $\dot{\epsilon}$ .

Ces éléments sont suffisants pour déterminer les puissances dissipées à l'intérieur du volume  $\dot{W}_i$  et à l'interface  $\dot{W}_f$ . Nous obtiendrons alors une borne supérieure de la puissance motrice.

Ce résultat dépendant d'un paramètre (largeur de sortie  $w_1$ ), nous optimiserons en recherchant le minimum de la puissance motrice ce qui fixera également  $w_1$ .



[F 22.02]



2 - RELATIONS ENTRE FONCTION D'ECOULEMENT ET CHAMP DE VITESSE.

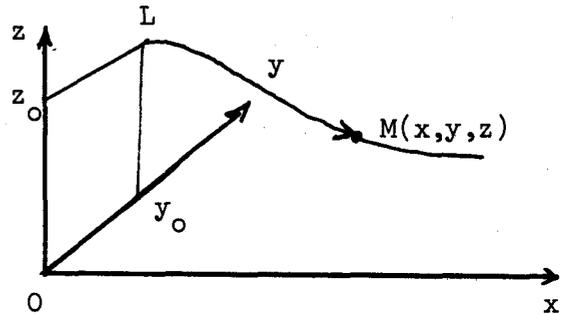
Dans un problème tridimensionnel, une ligne de courant L sera définie par ses coordonnées dans le plan xoy ou tout plan parallèle, soit :

$$y_0 \text{ et } z_0 .$$

La ligne L est l'intersection de 2 surfaces

$$\phi(x,y) = y_0$$

$$\psi(x,z) = z_0$$



[F 22.03]

La vitesse est perpendiculaire au gradient de chacune des surfaces.

$$\vec{u} = F \cdot \text{grad } \phi \wedge \text{grad } \psi$$

[E 22.5]

L'incompressibilité doit être vérifiée pour le champ  $\vec{u}$  :

$$\text{div } \vec{u} = 0$$

$$\text{div } \vec{u} = F \cdot \text{div} [\text{grad } \phi \wedge \text{grad } \psi] + \text{grad } F (\text{grad } \phi \wedge \text{grad } \psi)$$

or :

$$\text{div} [\text{grad } \phi \wedge \text{grad } \psi] = \text{grad } \psi \cdot \text{rot}(\text{grad } \phi) - \text{grad } \phi \cdot \text{rot}(\text{grad } \psi) = 0.$$

Il suffit donc de prendre dans [E 22.5] :

$$\text{grad } F = 0$$

soit  $F = V_0$

[E 22.6]

$$\vec{u} = V_0 \cdot \text{grad } \phi \wedge \text{grad } \psi$$

[E 22.7]

3 - METHODE DE CALCUL.

La fonction d'écoulement ayant été choisie, le champ  $\vec{u}$  sera déduit par [E 22.7].

Il vérifie l'incompressibilité mais il doit être admissible [conditions aux limites].

Le champ des vitesses de déformation en sera déduit :

$$\begin{aligned}
 u_x &= + v_0 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \\
 u_y &= - v_0 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \\
 u_z &= - v_0 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}
 \end{aligned}
 \quad [E 22.8]$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = v_0 \cdot \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right] \\
 \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -v_0 \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \\
 \dot{\epsilon}_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = -v_0 \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right] \\
 \dot{\epsilon}_{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] = \frac{v_0}{2} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right] \\
 \dot{\epsilon}_{xz} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] = \frac{v_0}{2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] \\
 \dot{\epsilon}_{yz} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right] = -\frac{v_0}{2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]
 \end{aligned}$$

[E 22.9]

On en déduit la vitesse de déformation généralisée  $\dot{\epsilon}$ . Ces éléments sont suffisants pour calculer les termes de gauche de E. 22.4 soit :

$$G(u^*) \leq \sigma_0 \int_V \dot{\epsilon} dV + mk \int_S u \cdot dS \quad [E 22.10]$$

Les contraintes imposées sur la surface  $S_T$  (surface de contact outil-pièce) sont une contrainte normale à l'interface  $p$  et une contrainte tangentielle due au frottement, soit d'après un modèle de couche,  $mk$ . La vitesse  $\vec{u}$  étant tangente à la face de l'outil seule intervient  $mk$ .

III - METHODE DES CHAMPS CONTINUS  
- CHAMP 1 -

1 - DEFINITION DU CHAMP 1.

La principale difficulté de cette méthode, définie en 22.III, étant l'intégration triple d'expressions mathématiques plus ou moins complexes, il est a priori intéressant de simplifier la formulation de  $\dot{\epsilon}$  en particulier. Ceci est obtenu en considérant un tenseur de vitesses de déformation déduit d'un état plan de contraintes. Cette hypothèse simplifie le tenseur des vitesses de déformation mais pose quelques conditions sur les fonctions de courant  $\phi$  et  $\psi$ . Parmi la famille de solutions possibles, nous déterminerons alors une solution cinématiquement admissible.

11. Recherche des fonctions de courant caractérisant un état de CONTRAINTES PLANES.

Dans le cas d'un corps de MISES :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \Rightarrow [\dot{\epsilon}] = \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_z & 0 & 3\sigma_{xz} \\ 0 & -\sigma_x - \sigma_z & 0 \\ 3\sigma_{zx} & 0 & 2\sigma_z - \sigma_x \end{bmatrix}$$

La condition à poser est donc :

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yz} = 0 \quad [E 22.11]$$

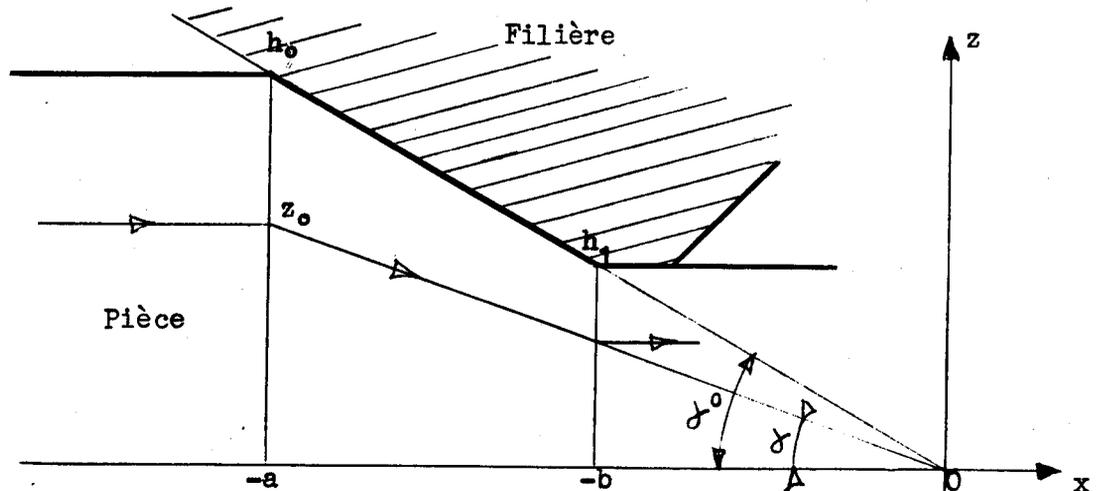
D'après E 22.9 :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}$$

[E 22.12]

12. Choix de  $\psi$ .



- [F 22.04] -

L'écoulement en surface étant imposé par l'interface outil-pièce, nous supposons que les lignes d'écoulement à l'intérieur du corps s'en déduisent par affinité.

Soit :

$$\text{tg } \alpha = \frac{z}{x} = - \frac{z_0}{a}$$

$$\psi = - \frac{a \cdot z}{x} = z_0$$

[E 22.13]

13. Solutions pour  $\phi$ .

D'après E 21.13, E 21.12 s'écrit :

$$+ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot \frac{a}{x} = + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \frac{a}{x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{a}{x^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot \frac{az}{x^2} = 0.$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0.$$

Ce système d'équations différentielles définit une famille de solutions :

$$\boxed{\phi = (a_1 y + b_1) x^2 + a_2 y + b_2} \quad [E 22.14]$$

#### 14. Choix de $\phi$ .

D'après la géométrie du problème et en conservant l'hypothèse d'une affinité entre écoulement superficiel et à l'intérieur du corps :

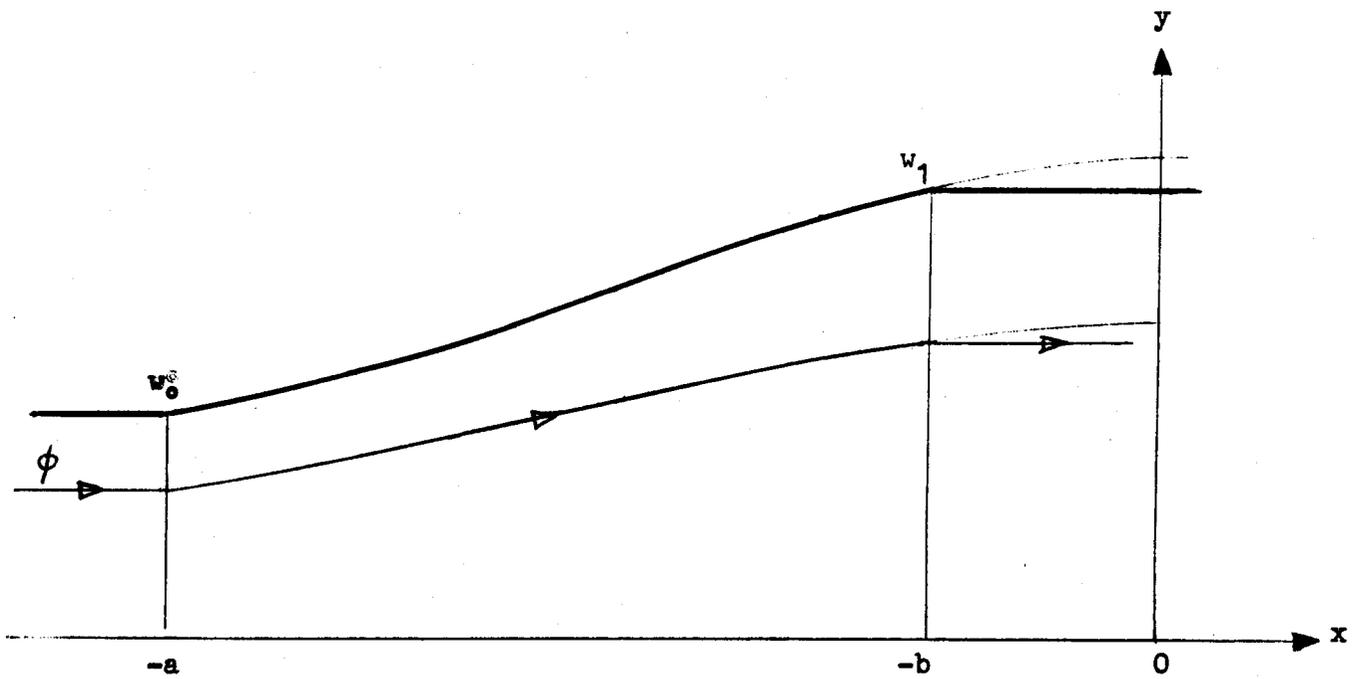
$$a_1 = \frac{w_1 - w_0}{w_1(a^2 - b^2)} \quad a_2 = \frac{a^2 w_0 - b^2 w_1}{w_1(a^2 - b^2)} \quad [E 22.15]$$

$$b_1 = b_2 = 0.$$

Soit :

$$\boxed{\phi = y(a_1 x^2 + a_2)} \quad [E 22.16]$$

Ce choix définit donc la forme de la paroi latérale du corps [F 22.05].



- [ F 22.05 ] -

- Allure d'une ligne d'écoulement - Champ 1 -



2 - CALCUL DE  $G(u^*)$ .

21. Champ de vitesses.

$$u_x = -V_o \cdot (a_1 x^2 + a_2) \cdot \frac{a}{x}$$

$$u_y = +V_o \cdot y \cdot 2 a_1 x \cdot \frac{a}{x} = V_o \cdot 2 a_1 a \cdot y$$

$$u_z = -V_o \cdot (a_1 x^2 + a_2) \cdot \frac{az}{x^2}$$

[E 22.17]

L'incompressibilité et les conditions aux limites sur l'outillage sont vérifiées. De plus la composante  $u_x$  doit être constante dans les plans d'entrée et de sortie (conditions de continuité). Ceci est immédiatement vérifié puisque  $u_x$  est indépendante de  $y$  ou  $z$ . Nous obtenons :

pour  $x = -a$  :  $u_o = V_o$

pour  $x = -b$  :  $u_1 = V_o \cdot \frac{h_o w_o}{h_1 w_1} = 1$ . (§ 22.1.14)

Soit :  $V_o = \frac{h_1 w_1}{h_o w_o}$

[E 22.18]

22. Champ de vitesses de déformation.

D'après E 22.9 :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= -V_0 \left( a_1 - \frac{a_2}{x^2} \right) a \\ \dot{\epsilon}_y &= 2 a_1 a V_0 \\ \dot{\epsilon}_z &= -V_0 \left( a_1 + \frac{a_2}{x^2} \right) a \\ \dot{\epsilon}_{xz} &= \frac{a_2 a \cdot z}{x^3} \cdot V_0 ; \dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yz} = 0 \end{aligned}$$

[E 22.18]

23. Vitesse de déformation généralisée.

$$\dot{\epsilon}^2 = \frac{4}{9} \left[ \frac{1}{2} \left[ (\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 \right] + 3(\dot{\epsilon}_{xy}^2 + \dot{\epsilon}_{yz}^2 + \dot{\epsilon}_{zx}^2) \right]$$

Compte tenu des simplifications :

$$\dot{\epsilon}^2 = \frac{4}{9} \left[ \dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_y^2 + \dot{\epsilon}_z^2 - (\dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_y \dot{\epsilon}_z + \dot{\epsilon}_z \dot{\epsilon}_x) + 3 \dot{\epsilon}_{xz}^2 \right]$$



$$\dot{\epsilon} = 2 a V_0 \sqrt{a_1^2 + \frac{a_2^2}{3x^4} \left( 1 + \frac{z^2}{x^2} \right)}$$

[E 22.20]

24. Puissance dissipée à l'intérieur du volume V.

$$\dot{W}_1 = \sigma_0 \int_V \dot{\epsilon} \, dV$$

$$\dot{W}_1 = 2 a V_0 \sigma_0 \int_V \sqrt{a_1^2 + \frac{a_2^2}{3x^4} \left( 1 + \frac{z^2}{x^2} \right)} \, dV .$$

Effectuons le changement de variable suivant :  $\psi = -\frac{z}{a}$   
 $\frac{z}{a} = x$

soit :  $x \cdot d\psi = -a \cdot dz$

$$\dot{w}_1 = -8 V_0 \sigma_0 \int_{-a}^{-b} dx \int_0^{h_0} d\psi \int_0^{\frac{w_0}{a_1 x^2 + a_2}} x \sqrt{a_1^2 + \frac{a_2^2}{3x^4} \left(1 + \frac{\psi^2}{a^2}\right)} dy.$$

Intégrons successivement par rapport à  $y$  et  $\psi$

$$\dot{w}_1 = -8 V_0 \sigma_0 \int_{-a}^{-b} dx \int_0^{h_0} \frac{w_0 x}{a_1 x^2 + a_2} \sqrt{a_1^2 + \frac{a_2^2}{3x^4} \left(1 + \frac{\psi^2}{a^2}\right)} d\psi$$

$$\dot{w}_1 = -8 V_0 \sigma_0 \int_{-a}^{-b} \frac{w_0 x}{a_1 x^2 + a_2} \left\{ \frac{h_0}{2} \sqrt{a_1^2 + \frac{a_2^2}{3x^4} \left(1 + \frac{h_0^2}{a^2}\right)} + \frac{a_1^2 + \frac{a_2^2}{3x^4}}{\frac{2a_2}{ax^2\sqrt{3}}} \cdot \text{Log} \left[ \frac{\sqrt{a_1^2 + \frac{a_2^2}{3x^4} \left(1 + \frac{h_0^2}{a^2}\right)} + \frac{h_0}{a} \cdot \frac{a_2}{x^2\sqrt{3}}}{\sqrt{a_1^2 + \frac{a_2^2}{3x^4}}} \right] \right\} dx.$$

[E 22.21]

Cette intégrale est calculable numériquement par une méthode de SIMPSON.

25. Puissance dissipée à l'interface outil-pièce.

$$\dot{W}_2 = mk \int_S u \cdot dS$$

ou avec  $k = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}}$

$$\dot{W}_2 = \frac{m\sigma_o}{\sqrt{3}} \int_S u \cdot dS$$

Sur le plan de l'outillage  $z = \pm \frac{h_o}{a} x :$

$$u = V_o \sqrt{(a^2 + h_o^2) \left( a_1^2 x^2 + \frac{a_2^2}{x^2} + 2 a_1 a_2 \right) + 4 a_1^2 a^2 y^2}$$

$$u = V_o \sqrt{(a^2 + h_o^2) \left( a_1 x + \frac{a_2}{x} \right)^2 + 4 a_1^2 a^2 y^2}$$

[E 22.22]

L'énergie dissipée s'écrira donc :

$$\dot{W}_2 = \frac{m \sigma_o V_o}{\sqrt{3} \cos \alpha} \iint \sqrt{(a^2 + h_o^2) \left( a_1 x + \frac{a_2}{x} \right)^2 + 4 a_1^2 a^2 y^2} \, dx \, dy$$

En intégrant par rapport à  $y :$

$$\dot{W}_2 = \frac{4 m \sigma_o V_o}{\sqrt{3} \cos \alpha} \int_{-a}^{-b} dx \int_0^{\frac{w_o}{a_1 x^2 + a_2}} \sqrt{(a^2 + h_o^2) \left( a_1 x + \frac{a_2}{x} \right)^2 + 4 a_1^2 a^2 y^2} \, dy$$

$$\dot{W}_2 = \frac{4m\sigma_o V_o}{\sqrt{3}\cos\alpha} \int_{-a}^{-b} \left\{ \frac{w_o}{2(a_1x^2+a_2)} \sqrt{(a^2+h_o^2)(a_1x^2+a_2)^2 \frac{1}{x^2} + 4a_1^2a^2} \cdot \frac{w_o^2}{(a_1x^2+a_2)^2} + \frac{(a^2+h_o^2)(a_1x^2+a_2)^2}{4x^2 \cdot a_1a} \right.$$

$$\cdot \text{Log} \left[ \frac{\sqrt{(a^2+h_o^2)(a_1x^2+a_2)^2 \frac{1}{x^2} + \frac{4a_1^2a^2w_o^2}{(a_1x^2+a_2)^2} + \frac{w_o}{(a_1x^2+a_2)} \sqrt{4a_1^2a^2}}{\frac{a_1x^2+a_2}{x} \sqrt{a^2+h_o^2}} \right] dx$$

ou, après simplifications

$$\dot{W}_2 = \frac{4m\sigma_o V_o}{\sqrt{3}\cos\alpha} \int_{-a}^{-b} \left\{ \frac{w_o}{2} \sqrt{\frac{a^2+h_o^2}{x^2} + \frac{4a_1^2a^2w_o^2}{(a_1x^2+a_2)^4} + \frac{(a^2+h_o^2)(a_1x^2+a_2)^2}{4a_1ax^2}} \cdot \text{Log} \left[ \frac{\sqrt{\frac{a^2+h_o^2}{x^2} + \frac{4a_1^2a^2w_o^2}{(a_1x^2+a_2)^4} + \frac{(a^2+h_o^2)(a_1x^2+a_2)^2}{4a_1ax^2}}}{\sqrt{\frac{a^2+h_o^2}{x^2}}} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{2a_1aw_o}{(a_1x^2+a_2)^2} \right] \right\} dx$$

[E 22.23]

Cette intégrale est calculable numériquement par une méthode de SIMPSON.

26. Puissance dissipée à l'interface d'entrée.

$$\dot{W}_{11} = \int_S k \cdot \Delta \vec{u}_e \cdot dS \quad [E 22.231]$$

$\Delta \vec{u}_e$  désignant la discontinuité de vitesse tangentielle à l'interface du bloc rigide d'entrée et du bloc plastique.

$$\Delta \vec{u}_e = V_o \sqrt{u_y^2 + u_z^2}$$

soit :

$$\dot{W}_{11} = \frac{4 \sigma_o V_o}{\sqrt{3}} \int_0^{w_o} dy \int_0^{h_o} \sqrt{4 a_1^2 a^2 y^2 + \frac{z^2}{a^2}} dz$$

[E 22.232]

En intégrant par rapport à z :

$$\dot{W}_{11} = \frac{4 \sigma_o V_o}{\sqrt{3}} \int_0^{w_o} \left[ \frac{h_o}{2} \sqrt{4 a_1^2 a^2 y^2 + \frac{h_o^2}{a^2}} + 2 a_1 a^3 y^2 \times \ln \left( \frac{\sqrt{4 a_1^2 a^2 y^2 + \frac{h_o^2}{a^2}} + \frac{h_o}{a}}{2 a_1 a y} \right) \right] dy$$

[E 22.233]

Cette intégrale sera résolue par la méthode de SIMPSON.

27. Puissance dissipée à l'interface de sortie.

$$\dot{W}_{12} = \int_S k \cdot \Delta \vec{u}_s \, dS \quad [E 22.234]$$

$\Delta \vec{u}_s$  désignant la discontinuité de vitesse tangentielle à l'interface du bloc rigide de sortie et du bloc plastique.

$$\Delta \vec{u}_s = v_o \sqrt{u_y^2 + u_z^2}$$

soit :

$$\dot{W}_{12} = \frac{4 \sigma_o v_o a}{\sqrt{3}} \int_0^{w_1} \int_0^{h_1} \sqrt{4a^2 y^2 + \frac{w_o^2 z^2}{w_1^2 b^4}} \, dz.$$

[E 22.235]

En intégrant par rapport à z :

$$\dot{W}_{12} = \frac{4a\sigma_o v_o}{\sqrt{3}} \int_0^{w_1} \left[ \frac{h_1}{2} \sqrt{4a^2 y^2 + \frac{w_o^2 h_1^2}{w_1^2 b^4}} + \frac{2a^2 y^2 w_1 b^2}{w_o} \cdot \text{Ln} \left( \frac{\sqrt{4a^2 y^2 + \frac{w_o^2 h_1^2}{w_1^2 b^4}} + \frac{w_o h_1}{w_1 b^2}}{2a_1 y} \right) \right] dy$$

[E 22.236]

Cette intégrale est calculable numériquement par une méthode de SIMPSON.

Cette intégrale est calculable numériquement par une méthode de SIMPSON.

### 3 - EXPLOITATION DE $G(u^*)$ .

$$G(u^*) = f(w_1).$$

La valeur minimale de  $G$  sera la meilleure approximation de la valeur réelle dans le type de champs défini.

$$\frac{dG(u^*)}{dw_1} = 0$$

[E 22.24]

Cette équation nous permettra de calculer  $G(u^*)$  opt. et  $w_1$  opt.

La solution numérique de ce champ a été conduite sur l'ordinateur M 40 du CITI.

### 4 - RESULTATS.

Les tableaux T 22.1 à 2 bis et les graphes G 22.1 à 3 rassemblent les différents résultats numériques obtenus. Les courbes de variation de l'effort d'étirage présentent des minimas variant suivant le coefficient de frottement entre 7 et 15° - Le travail redondant semble très important -

Il est à noter également que les prévisions faites pour les formats carrés et rectangulaires différent très peu (à un coefficient cinq près correspondant au rapport des largeurs initiales). Il y a malgré tout une très légère augmentation de l'effort d'étirage.

Pour les profils carrés, cette méthode se caractérise particulièrement par le très faible élargissement obtenu pour le premier rapport d'étirage et la forte diminution de largeur pour le second. Dans ce dernier cas, l'optimisation

n'est possible que lorsque le frottement est nul ou l'angle important. Il est évident que ces résultats sont les signes précurseurs de la rupture du produit. La limite d'étirage théorique se situe vers 35 % ( $h_1 \approx 8$  mm) lorsque le frottement est nul.

Pour les profils rectangulaires, le peu d'élargissement calculé dans quasiment tous les cas est assez proche d'un comportement en déformations planes, ce qui peut paraître étonnant compte tenu des hypothèses faites dans le choix des lignes d'écoulement. Cette contradiction n'est que apparente : les hypothèses sont cinématiques et uniquement cinématiques bien qu'elles reposent sur une restriction issue du domaine statique.

H0	H1	W0	CFR0	ALPHA	WF	PRECISION	FORCE-D-ETIRAGE
12.00	9.50	12.00	.00	7.00	12.432	.001	157.641 -
12.00	9.50	12.00	.10	7.00	12.073	.001	250.197
12.00	9.50	12.00	.20	7.00	11.734	.001	340.277
12.00	9.50	12.00	.00	10.00	12.302	.001	172.959 -
12.00	9.50	12.00	.10	10.00	12.093	.001	238.144
12.00	9.50	12.00	.20	10.00	11.931	.001	302.343
12.00	9.50	12.00	.00	15.00	12.161	.001	198.828 -
12.00	9.50	12.00	.10	15.00	12.058	.001	243.100
12.00	9.50	12.00	.20	15.00	11.985	.001	287.045
12.00	9.50	12.00	.00	20.00	12.078	.001	225.876
12.00	9.50	12.00	.10	20.00	12.024	.001	260.145
12.00	9.50	12.00	.20	20.00	11.983	.001	294.282
12.00	9.50	12.00	.00	30.00	12.002	.001	286.653
12.00	9.50	12.00	.10	30.00	11.983	.001	311.968
12.00	9.50	12.00	.20	30.00	11.956	.001	337.235
12.00	9.50	12.00	.00	45.00	11.946	.001	410.647
12.00	9.50	12.00	.10	45.00	11.929	.001	432.470
12.00	9.50	12.00	.20	45.00	11.912	.001	454.264

- [ T 22 ] -

ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS

Résultats obtenus par M.B.S. avec Champ Continu 1.

805  
LIVE

HO	H1	WO	CFRO	ALPHA	WF	PRECISION	FORCE D'ETIRAGE
12.00	7.00	12.00	.00	7.00	11.340	.001	238.166
12.00	7.00	12.00	.00	10.00	11.260	.001	248.834
12.00	7.00	12.00	.00	15.00	11.152	.001	267.501
12.00	7.00	12.00	.00	20.00	11.067	.001	287.619
12.00	7.00	12.00	.00	30.00	10.927	.001	334.263
12.00	7.00	12.00	.10	30.00	10.171	.001	372.224
12.00	7.00	12.00	.00	45.00	10.757	.001	433.328
12.00	7.00	12.00	.10	45.00	10.332	.001	466.229
12.00	7.00	12.00	.20	45.00	9.736	.001	497.756

- [T 22.1 bis] -  
 ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS  
 Résultats obtenus par MBS avec champ continu 1.



HC	HI	MO	CFR0	ALPHA	WF	PRECISION	FORCE-D-ETIRAGE
12.00	9.50	60.00	.00	7.00	60.136	.001	797.329
12.00	9.50	60.00	.10	7.00	60.019	.001	1251.302
12.00	9.50	60.00	.20	7.00	59.935	.001	1704.581
12.00	9.50	60.00	.00	10.00	60.074	.001	870.368
12.00	9.50	60.00	.10	10.00	60.023	.001	1191.334
12.00	9.50	60.00	.20	10.00	59.986	.001	1512.072
12.00	9.50	60.00	.00	15.00	60.034	.001	996.391
12.00	9.50	60.00	.10	15.00	60.012	.001	1215.856
12.00	9.50	60.00	.20	15.00	60.001	.001	1435.259
12.00	9.50	60.00	.00	20.00	60.015	.001	1130.124
12.00	9.50	60.00	.10	20.00	60.004	.001	1300.803
12.00	9.50	60.00	.20	20.00	59.997	.001	1471.459
12.00	9.50	60.00	.00	30.00	60.001	.001	1433.267
12.00	9.50	60.00	.10	30.00	59.997	.001	1559.928
12.00	9.50	60.00	.20	30.00	59.993	.001	1686.582
12.00	9.50	60.00	.00	45.00	59.993	.001	2054.228
12.00	9.50	60.00	.10	45.00	59.990	.001	2163.905
12.00	9.50	60.00	.20	45.00	59.990	.001	2273.579



- [T 22.2] -

ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES

Résultats obtenus par MBS avec chsmg continu 1.

H <sub>0</sub>	H <sub>1</sub>	W <sub>0</sub>	CFR <sub>0</sub>	ALPHA	WF	PRECISION	FORCE-D-ETIRAGE
12.00	7.00	60.00	.00	7.00	59.792	.001	1195.037
12.00	7.00	60.00	.10	7.00	57.371	.001	1948.233
12.00	7.00	60.00	.00	10.00	59.818	.001	1250.208
12.00	7.00	60.00	.10	10.00	59.019	.001	1788.498
12.00	7.00	60.00	.20	10.00	57.529	.001	2317.039
12.00	7.00	60.00	.00	15.00	59.836	.001	1346.907
12.00	7.00	60.00	.10	15.00	59.547	.001	1716.588
12.00	7.00	60.00	.20	15.00	59.166	.001	2084.242
12.00	7.00	60.00	.00	20.00	59.847	.001	1451.264
12.00	7.00	60.00	.10	20.00	59.693	.001	1739.177
12.00	7.00	60.00	.20	20.00	59.517	.001	2026.317
12.00	7.00	60.00	.00	30.00	59.854	.001	1693.440
12.00	7.00	60.00	.10	30.00	59.792	.001	1907.321
12.00	7.00	60.00	.20	30.00	59.719	.001	2120.970
12.00	7.00	60.00	.00	45.00	59.861	.001	2208.004
12.00	7.00	60.00	.10	45.00	59.832	.001	2393.309
12.00	7.00	60.00	.20	45.00	59.799	.001	2578.523

- 108 bis -

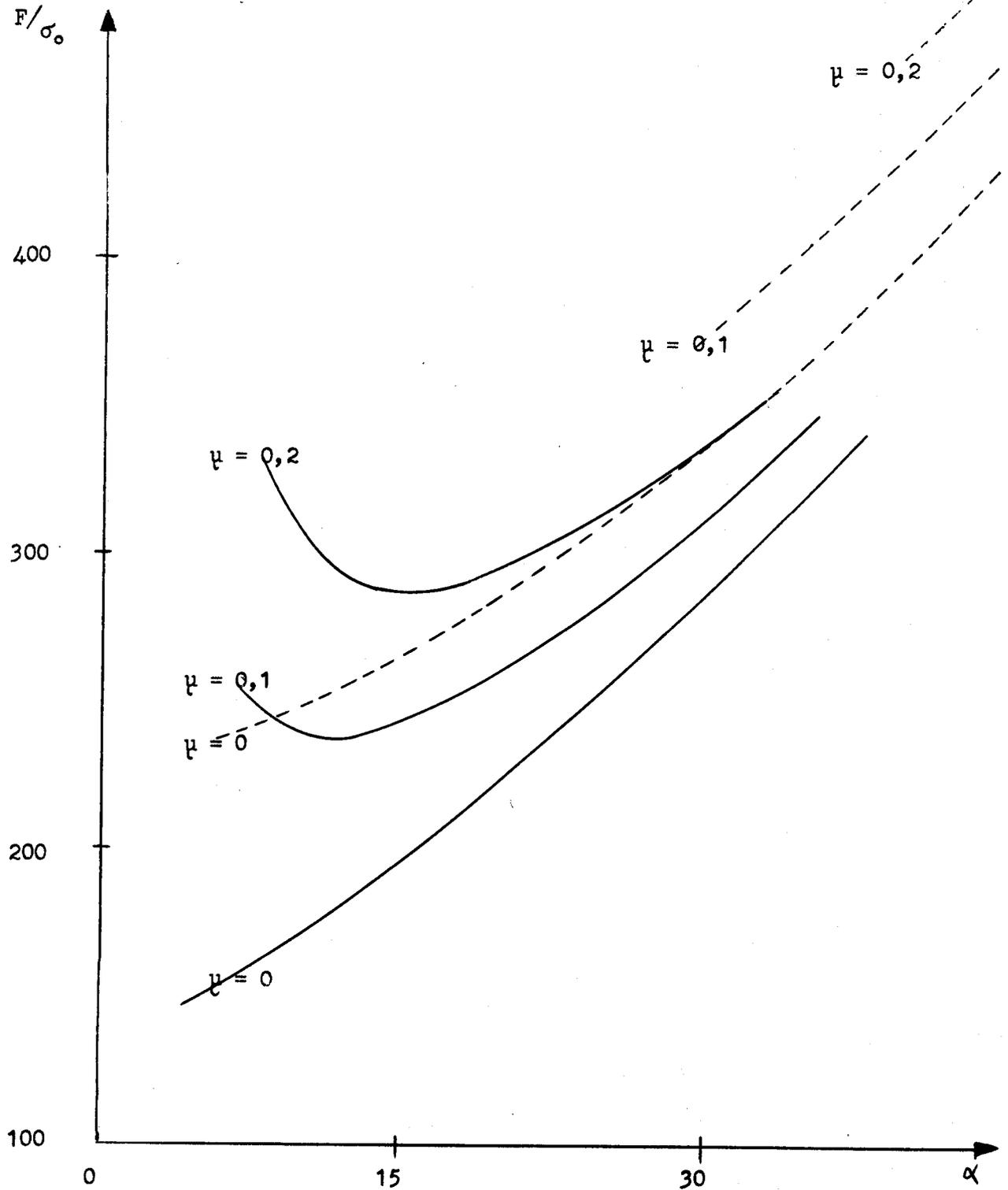


- [T. 22. 2 bis] -  
 ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES  
 Résultats obtenus par MBS avec champ continu 1

Section carrée : 24x24 mm

Rapport d'étirage réduit : 21 % —

42 % -



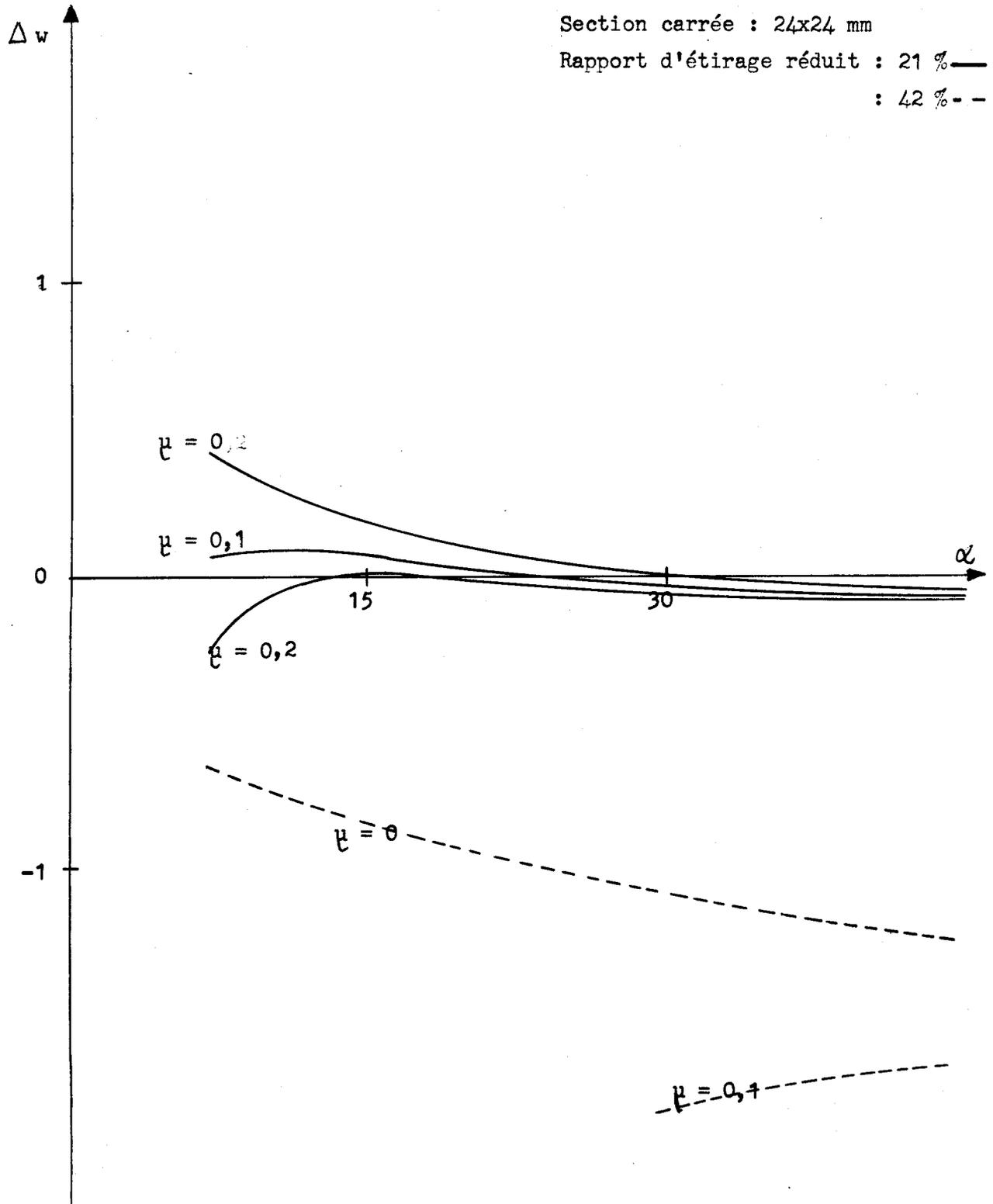
- [G 22.1] -

ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS

Evolution de l'effort d'étirage

- Champ N° 1 -





Section carrée : 24x24 mm  
Rapport d'étirage réduit : 21 % —  
: 42 % --

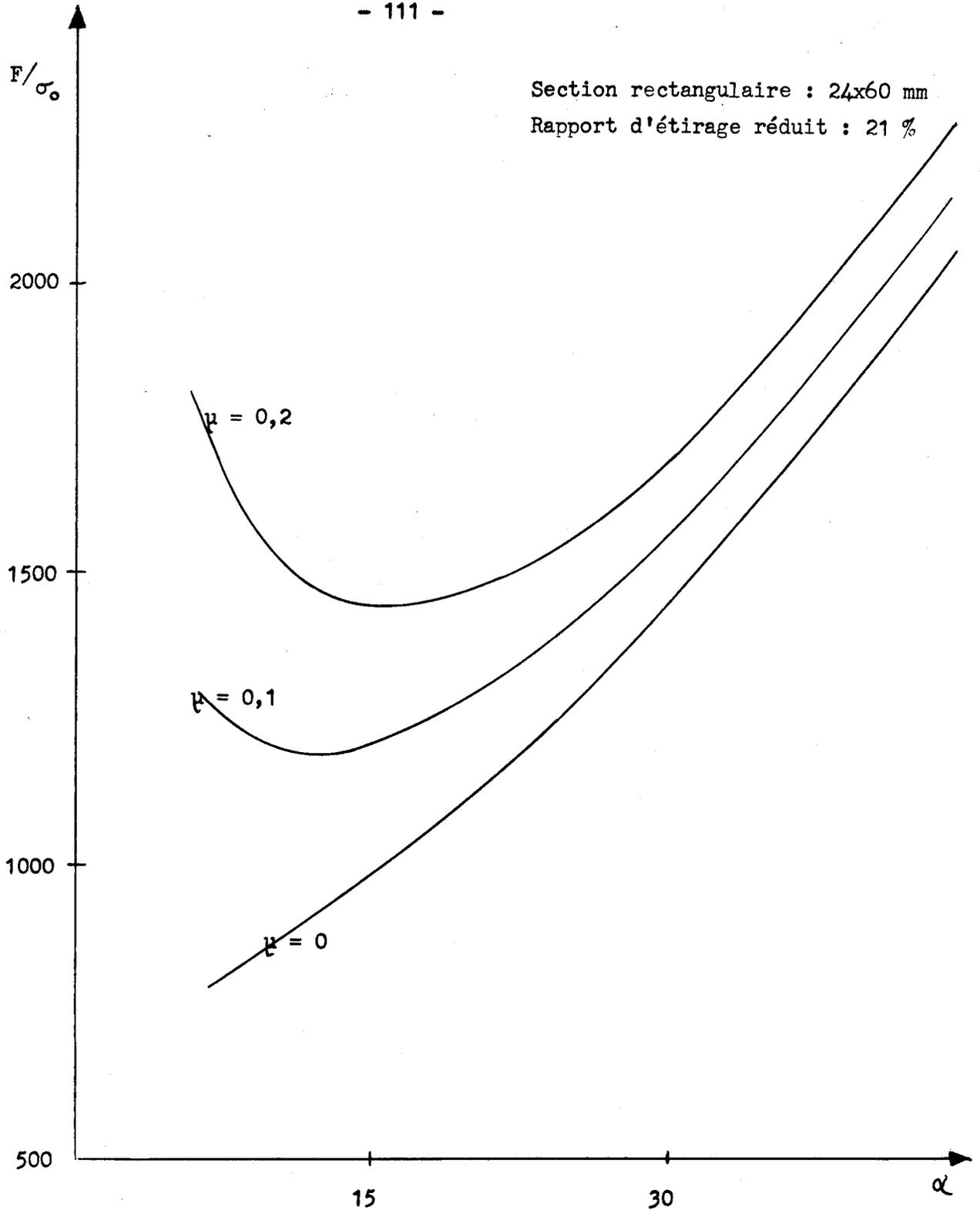
- [G 22.2] -

ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS

Etude théorique de l'élargissement

- Champ N° 1 -





- [G 22.3] -

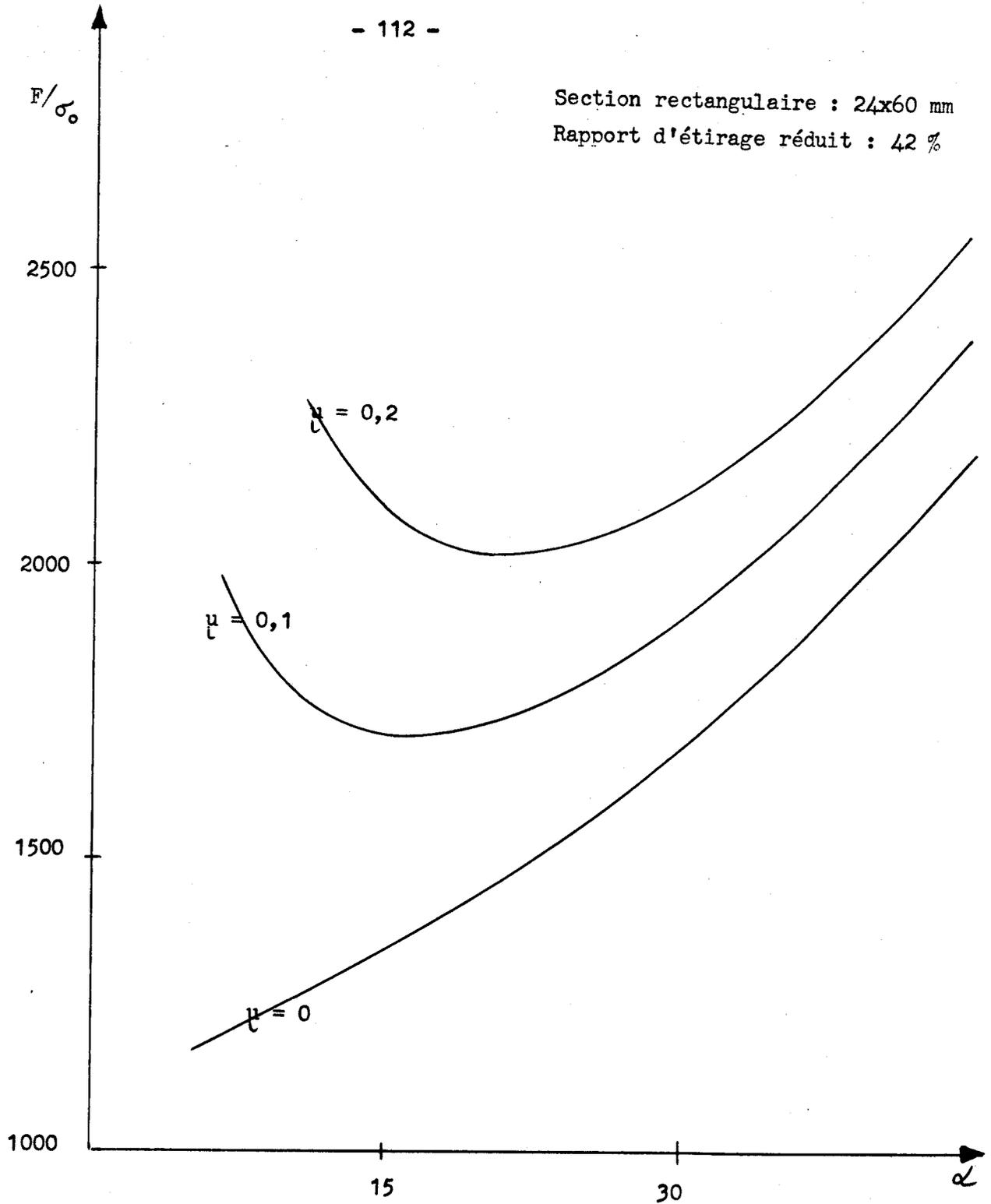
ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES

Evolution de l'effort d'étirage

- Champ N° 1 -



Section rectangulaire : 24x60 mm  
Rapport d'étirage réduit : 42 %



- [G 22.4] -

ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES

Evolution de l'effort d'étirage

Champ N° 1



IV -

METHODE DES CHAMPÉS CONTINUS

- CHAMP 2 -

1 - DEFINITION DU CHAMP 2.

La fonction  $\psi$  est identique à celle choisie pour le champ 1 (cf. § 22.3.12).

Soit :

$$\psi = - \frac{az}{x} = z_0$$

[E 22.25]

La fonction  $\phi$  est prise dans sa plus simple définition possible : l'hypothèse d'un écoulement quasi-linéaire dans le plan  $xy$ , est reproduit à l'intérieur du corps par affinité. Cette hypothèse est très correcte pour les rapports d'étirage faibles. Elle conduira cependant à des solutions de moins bonne qualité lorsque ceux-ci dépasseront environ 25 %.

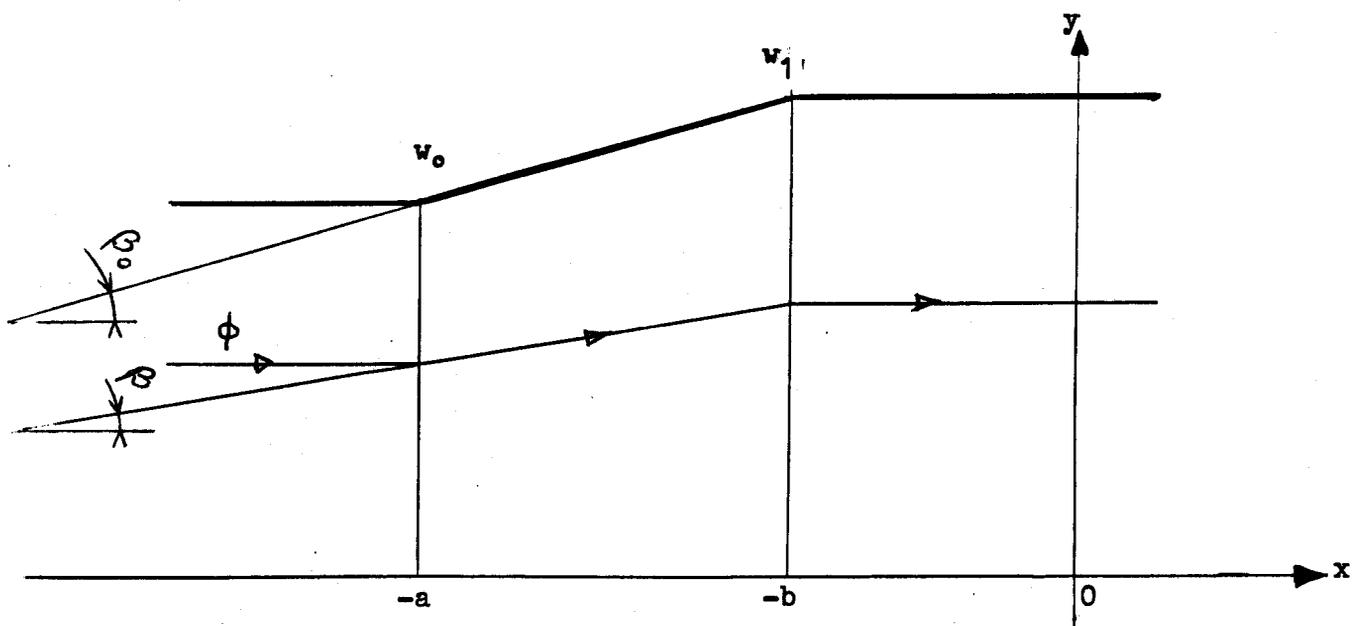
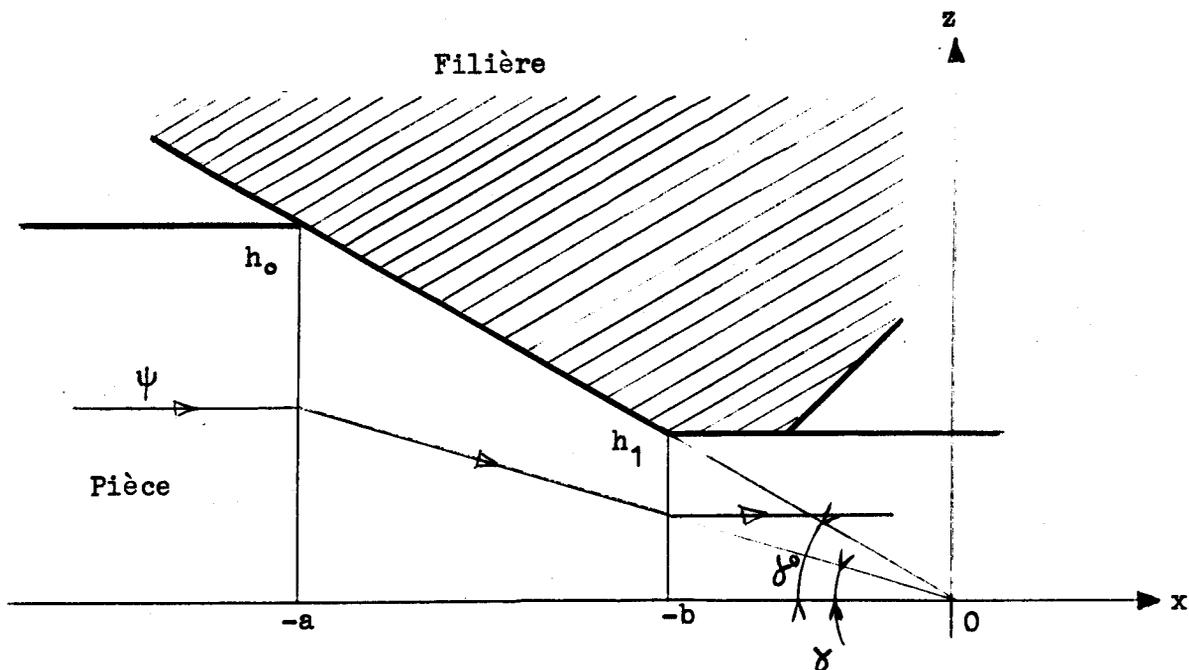
Soit A l'abscisse du centre  $\Omega$  :

$$\frac{w_1 - w_0}{a - b} = \frac{w_1}{-b-A} = \text{tg } \beta_0.$$

$$A = \frac{w_0 b - w_1 a}{w_1 - w_0}$$

$$\phi = y_0 = \frac{y(-a-A)}{x - A}$$

[E 22.26]



- [F 22.06] -

- Choix des fonctions de courant  $\phi$  et  $\psi$  - Champ 2 -



2 - CALCUL DE  $G(u^*)$ .

21. Champ de vitesses.

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{+a V_0 (a+A)}{x(x-A)} \\
 u_y &= \frac{+ay V_0 (a+A)}{x(x-A)^2} \\
 u_z &= \frac{+az V_0 (a+A)}{x^2(x-A)}
 \end{aligned}$$

[E 22.27]

L'incompressibilité et les conditions sur l'outillage sont vérifiées. La composante  $u_x$  doit par ailleurs être constante dans les plans d'entrée et de sortie (conditions de continuité), ce qui est immédiatement vérifié puisque  $u_x = f(x)$ .

Nous obtenons :

pour  $x = -a$  
$$u_0 = \frac{+a V_0 (a+A)}{a(a+A)} = V_0$$

pour  $x = -b$  
$$u_1 = \frac{+a V_0 (a+A)}{a(b+A)} = 1$$

soit : 
$$V_0 = \frac{b(b+A)}{a(a+A)}$$

En développant A :

$$V_0 = \frac{b w_1}{a w_0} = \frac{h_1 w_1}{h_0 w_0}$$

[E 22.28]

Pour simplifier les calculs, nous poserons

$$K = a(a+A) \cdot V_0$$

[E 22.23]

22 Champ de vitesses de déformation.

D'après [E 22.9]

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{K(2x-A)}{x^2(x-A)^2} & \dot{\epsilon}_{xy} &= \frac{Ky(3x-A)}{2x^2(x-A)^3} \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{K}{x(x-A)^2} & \dot{\epsilon}_{yz} &= 0 \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{K}{x^2(x-A)^2} & \dot{\epsilon}_{zx} &= \frac{Kz(3x-2A)}{2x^3(x-A)^2} \end{aligned}$$

[E 22.30]

23 - Vitesse de déformation généralisée.

$$\bar{\dot{\epsilon}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_i - \dot{\epsilon}_j)^2 + 3 \dot{\epsilon}_{ij}^2}$$

Après simplifications :

$$\bar{\dot{\epsilon}} = \frac{K}{3x^2(x-A)^2} \sqrt{2A^2 + (3x-A)^2 \left(2 + \frac{3\phi^2}{(a+A)^2}\right) + (3x-2A)^2 \left(2 + 3 \frac{\psi^2}{a^2}\right)}$$

[E 22.31]

24. Puissance dissipée à l'intérieur du volume V.

$$\dot{W}_1 = \sigma_0 \int_V \dot{\epsilon} \, dV$$

$$\dot{W}_1 = K \sigma_0 \int_V \frac{\sqrt{2A^2 + (3x-A)^2 \left(2 + \frac{3\phi^2}{(a+A)^2}\right) + (3x-2A)^2 \left(2 + 3 \frac{\psi^2}{a^2}\right)}}{3x^2(x-A)^2} \, dV$$

or :  $\psi = -\frac{az}{x}$

$$x \, d\psi = -a \, dz$$

$$\phi = \frac{-y(a+A)}{x-A}$$

$$\frac{(x-A)}{a+A} \, d\phi = - \, dy$$

D'où :

$$\frac{\dot{W}_1}{\sigma_0} = + 4K \int_{-a}^{-b} dx \int_0^{w_0} d\phi \int_0^{h_0} \frac{\sqrt{2A^2 + (3x-A)^2 \left(2 + \frac{3\phi^2}{(a+A)^2}\right) + (3x-2A)^2 \left(2 + 3 \frac{\psi^2}{a^2}\right)}}{3a(a+A) x (x-A)} \, d\psi$$

[22.32]

Cette intégrale triple sera résolue numériquement par une méthode de ROMBERG.

25. Puissance dissipée à l'interface outil-pièce.

$$\dot{W}_2 = mk \int_S u \, dS.$$

Sur le plan de l'outillage d'équation  $z = \pm \frac{h_0}{a} x$ , la vitesse aura pour module :

$$u = \frac{K}{x(x-A)} \sqrt{\frac{z^2}{x^2} + \frac{y^2}{(x-A)^2} + 1}$$

ou encore :

$$u = \frac{K}{x(x-A)} \sqrt{\frac{\psi^2}{a^2} + \frac{\phi^2}{(a+A)^2} + 1}$$

[22.33]

$$\frac{\dot{W}_2}{\sigma_0} = + \frac{4K.m}{\sqrt{3} \cos \alpha} \int_{-a}^{-b} dx \int_0^{w_0 \frac{(x-A)}{(a+A)}} \frac{\sqrt{\frac{\psi^2}{a^2} + \frac{\phi^2}{(a+A)^2} + 1}}{x(x-A)} dy$$

or  $\frac{(x-A)d\phi}{a+A} = - dy$

$$\frac{\dot{W}_2}{\sigma_0} = - \frac{4K.m}{\sqrt{3} \cos \alpha} \int_{-a}^{-b} dx \int_0^{w_0} \frac{\sqrt{\frac{\psi^2}{a^2} + \frac{\phi^2}{(a+A)^2} + 1}}{x(a+A)} d\phi$$

[E 22.34]

Intégrons par rapport à  $\phi$  et  $x$  :

$$\frac{\dot{W}_2}{\sigma_0} = - \frac{2K.m}{\sqrt{3} \cos \alpha} \int_{-a}^{-b} \frac{w_0 \sqrt{1 + t\alpha_0^2 + t\beta_0^2} + (1 + t\alpha_0^2)(a+A) \text{Log} \left[ \frac{\sqrt{1 + t\alpha_0^2 + t\beta_0^2} - t\beta_0}{\sqrt{1 + t\alpha_0^2}} \right]}{x(a+A)} dx$$

$$\frac{\dot{W}_2}{\sigma_0} = - \frac{2K.m}{\sqrt{3} \cos \alpha} \cdot L \frac{b}{a} \cdot \left\{ -\operatorname{tg} \beta_0 \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_0 \tan^2 \beta_0} + (1 + \tan^2 \alpha_0) \cdot \operatorname{Log} \left[ \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_0 \tan^2 \beta_0} - \tan \beta_0}{1 + \tan^2 \alpha_0} \right] \right\}$$

[E 22.35]

26. Puissance dissipée à l'interface d'entrée.

$$\dot{W}_{11} = \int_S k \Delta \vec{u}_e \, dS \quad [E 22.351]$$

$\Delta \vec{u}_e$  désignant la discontinuité de vitesse tangentielle à l'interface du bloc-rigide d'entrée et du bloc plastique.

$$\Delta u_e = v_0 \sqrt{\frac{y^2}{(a+A)^2} + \frac{z^2}{a^2}}$$

soit :

$$\dot{W}_{11} = \frac{4 \sigma_0 v_0}{\sqrt{3}} \int_0^{h_0} dz \int_0^{w_0} \sqrt{\frac{y^2}{(a+A)^2} + \frac{z^2}{a^2}} \, dy.$$

Intégrons par rapport à  $z$  :

$$\dot{W}_{11} = \frac{4 \sigma_0 v_0}{\sqrt{3}} \int_0^{w_0} \left[ \frac{h_0}{2} \sqrt{\frac{y^2}{(a+A)^2} + \frac{h_0^2}{a^2}} + \frac{ay^2}{2(a+A)^2} \cdot \operatorname{Ln} \left( \frac{\sqrt{\frac{y^2}{(a+A)^2} + \frac{h_0^2}{a^2}} + \frac{h_0}{a}}{\frac{y}{a+A}} \right) \right] dy$$

[E 22.352]

27. Puissance dissipée à l'interface de sortie.

$$\dot{W}_{12} = \int_S k \cdot \Delta \vec{u}_s \, dS \quad [E 22.353]$$

$\Delta \vec{u}_s$  désignant la discontinuité de vitesse tangentielle à l'interface du bloc rigide de sortie et du bloc plastique.

$$\Delta \vec{u}_s = \sqrt{\frac{y^2}{(b+A)^2} + \frac{z^2}{b^2}}$$

Soit :

$$\dot{W}_{12} = \frac{4 \sigma_0}{\sqrt{3}} \int_0^{w_1} dy \int_0^{h_1} \sqrt{\frac{y^2}{(b+A)^2} + \frac{z^2}{b^2}} \, dy \, dz.$$

En intégrant par rapport à  $z$  :

$$\dot{W}_{12} = \frac{4 \sigma_0}{\sqrt{3}} \int_0^{w_1} \left[ \frac{h_1}{2} \sqrt{\frac{y^2}{(b+A)^2} + \frac{h_1^2}{b^2}} + \frac{by^2}{2(b+A)^2} \cdot \ln \left( \frac{\sqrt{\frac{y^2}{(b+A)^2} + \frac{h_1^2}{b^2}} + \frac{h_1}{b}}{\frac{y}{b+A}} \right) \right] dy$$

[E 22.354]

### 3 - EXPLOITATION DE $G(u^*)$ .

De même que pour le champ 1,  $G(u^*) = \Sigma \dot{W}$  est une borne supérieure de la puissance motrice cherchée. Elle sera optimisée par la solution de :

$$\frac{dG}{dw_1} = 0.$$

La solution numérique de ce champ s'appuie sur une intégration numérique de ROMBERG et une recherche par DICHOTOMIE du minima de  $G(u^*)$ . Le programme de calcul a été rédigé en ALGOL et l'exploitation a été conduite sur la M 40 du CITI d'Annappes.

### 4 - RESULTATS.

Les résultats diffèrent très peu de ceux obtenus par le champ 1. Leur interprétation est identique.

Dans l'ensemble, les résultats sur l'effort d'étirage sont légèrement plus faibles pour le champ 2. Il est donc, à ce point de vue, meilleur. Par contre, l'élargissement  $y$  est aussi plus faible, ce qui est probablement un facteur négatif vis-à-vis des résultats réels. Ceci apparaît plus nettement dans les profils carrés pour un rapport d'étirage de 42 % sans frottement. Cette méthode prévoit donc une rupture du produit légèrement plus tôt que le champ précédent (en effet, il n'y a plus de solutions lorsque le frottement n'est pas nul).

Il est important de remarquer qu'une légère modification des lignes d'écoulement n'amène pas de différences significatives sur les résultats. On pourra donc avec profit favoriser l'emploi d'écoulements à traduction mathématique simple. Ce qui n'implique pas qu'un champ cinématique introduisant

de nouvelles propriétés (présence d'un maxima, déformation des génératrices verticales de la surface libre...) ne conduirait pas à des résultats plus précis.

HO	HI	WO	CFRO	ALPHA	WF	PRECISION	FORCE-D-ETIRAGE
12.00	9.50	12.00	.00	7.00	12.418	.001	154.132
12.00	9.50	12.00	.10	7.00	12.064	.001	243.932
12.00	9.50	12.00	.20	7.00	11.715	.001	331.323
12.00	9.50	12.00	.00	10.00	12.288	.001	169.405
12.00	9.50	12.00	.10	10.00	12.082	.001	232.644
12.00	9.50	12.00	.20	10.00	11.921	.001	294.944
12.00	9.50	12.00	.00	15.00	12.150	.001	195.199
12.00	9.50	12.00	.10	15.00	12.051	.001	238.155
12.00	9.50	12.00	.20	15.00	11.978	.001	280.806
12.00	9.50	12.00	.00	20.00	12.068	.001	222.175
12.00	9.50	12.00	.10	20.00	12.016	.001	255.429
12.00	9.50	12.00	.20	20.00	11.976	.001	288.561
12.00	9.50	12.00	.00	30.00	11.998	.001	282.806
12.00	9.50	12.00	.10	30.00	11.976	.001	307.380
12.00	9.50	12.00	.20	30.00	11.950	.001	331.904
12.00	9.50	12.00	.00	45.00	11.939	.001	406.413
12.00	9.50	12.00	.10	45.00	11.923	.001	427.597
12.00	9.50	12.00	.20	45.00	11.908	.001	448.753

- T 22.3 -

ETIRAGE DE PROFILS CARRES

Résultats obtenus par M.B.S. avec champ continu 2.



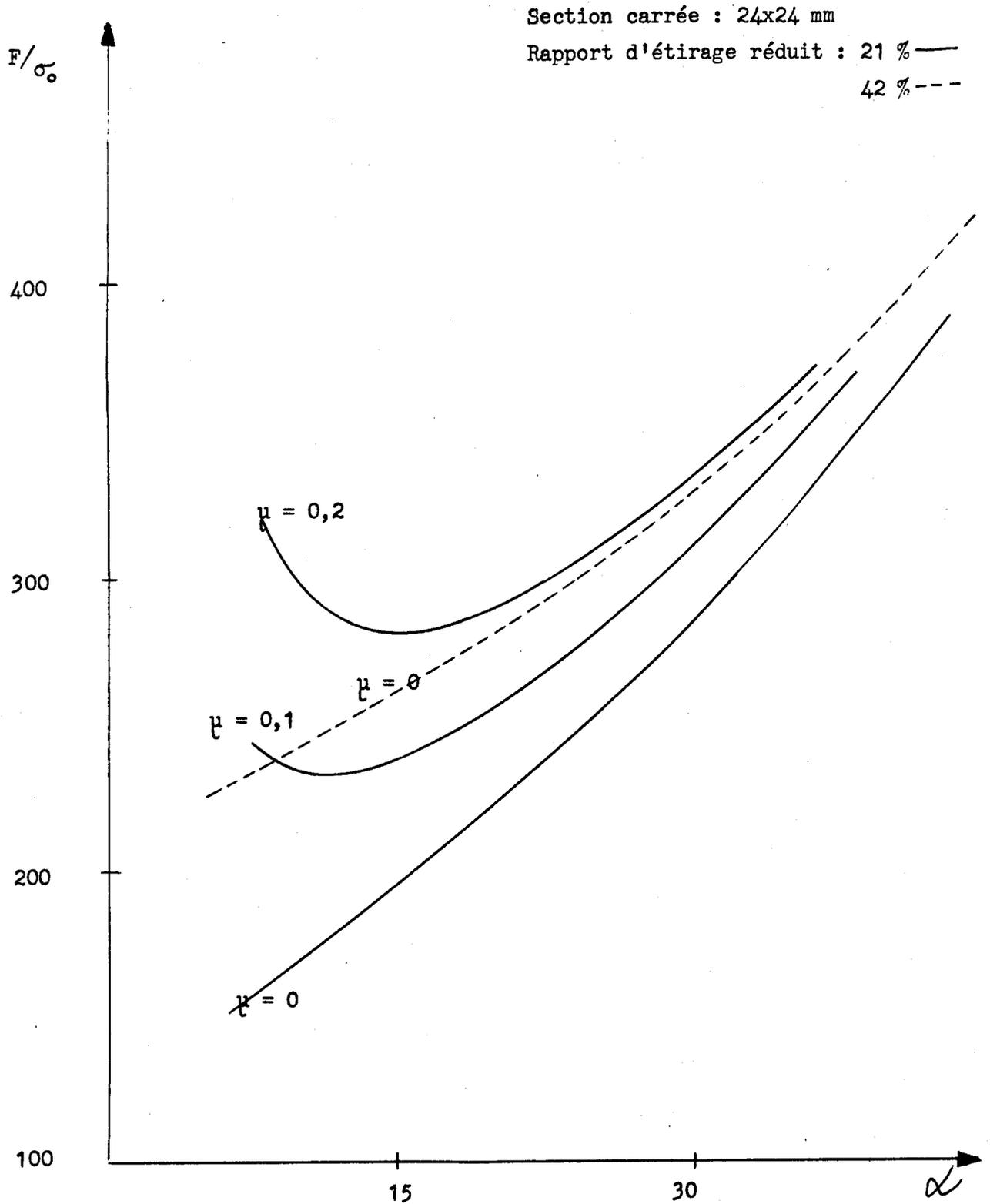
HO	H1	WO	CFRO	ALPHA	WF	PRECISION	FORCE D'ETIRAGE
12.00	7.00	12.00	.0	7.00	11.060	.001	232.366
12.00	7.00	12.00	.0	10.00	10.952	.001	242.918
12.00	7.00	12.00	.0	15.00	10.809	.001	261.378
12.00	7.00	12.00	.0	20.00	10.697	.001	281.273
12.00	7.00	12.00	.0	30.00	10.539	.001	327.421
12.00	7.00	12.00	.0	45.00	10.436	.001	425.615

- [T 22.4] -

ETIRAGE DE PROFILS CARRES

Résultats obtenus par MBS avec champ continu 2.





- G 22.5 -

ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS  
Evolution de l'effort d'étirage

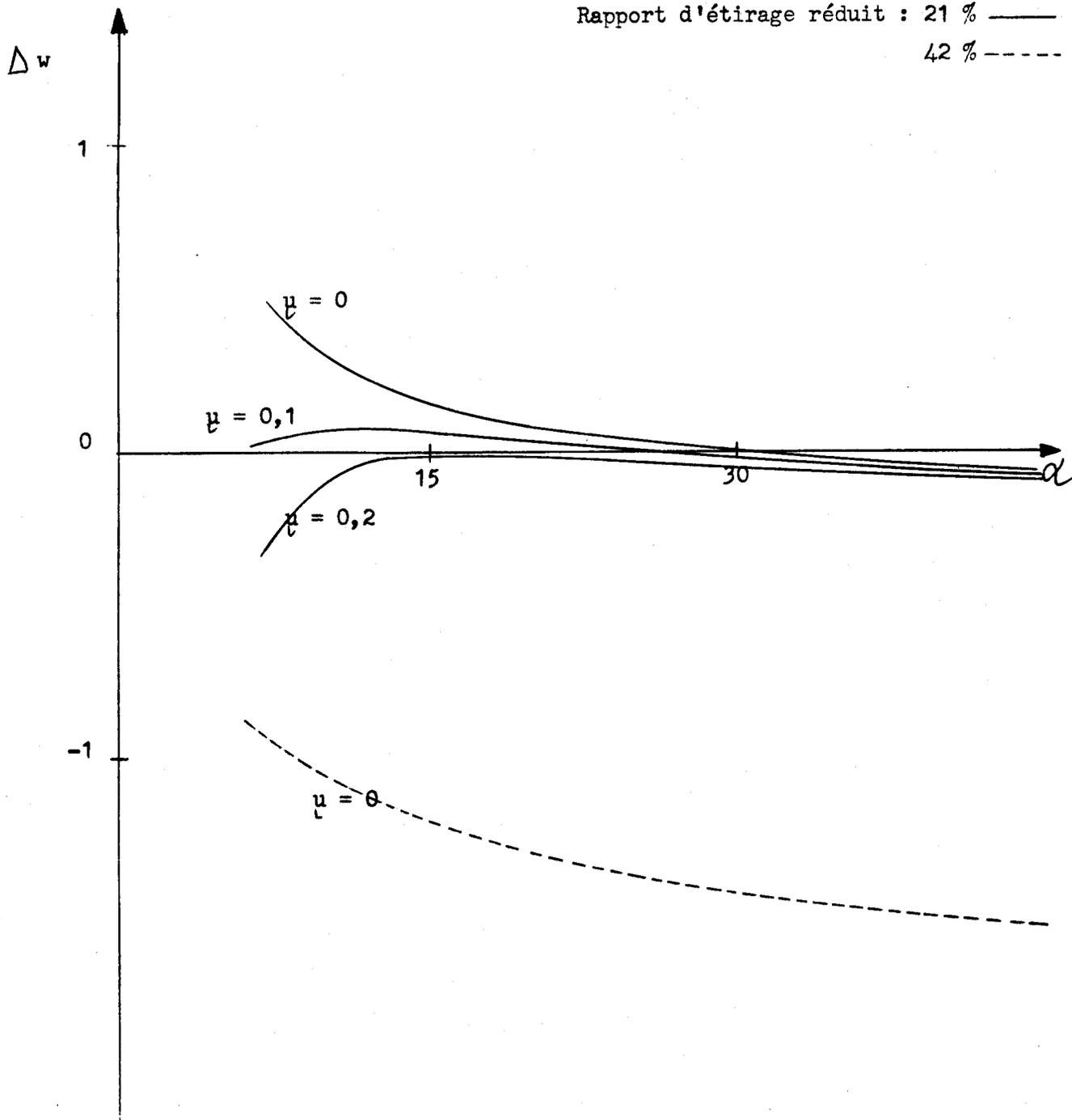
- Champ N° 2 -



Section carrée : 24x24 mm

Rapport d'étirage réduit : 21 % ———

42 % - - - - -



- G 22.6 -

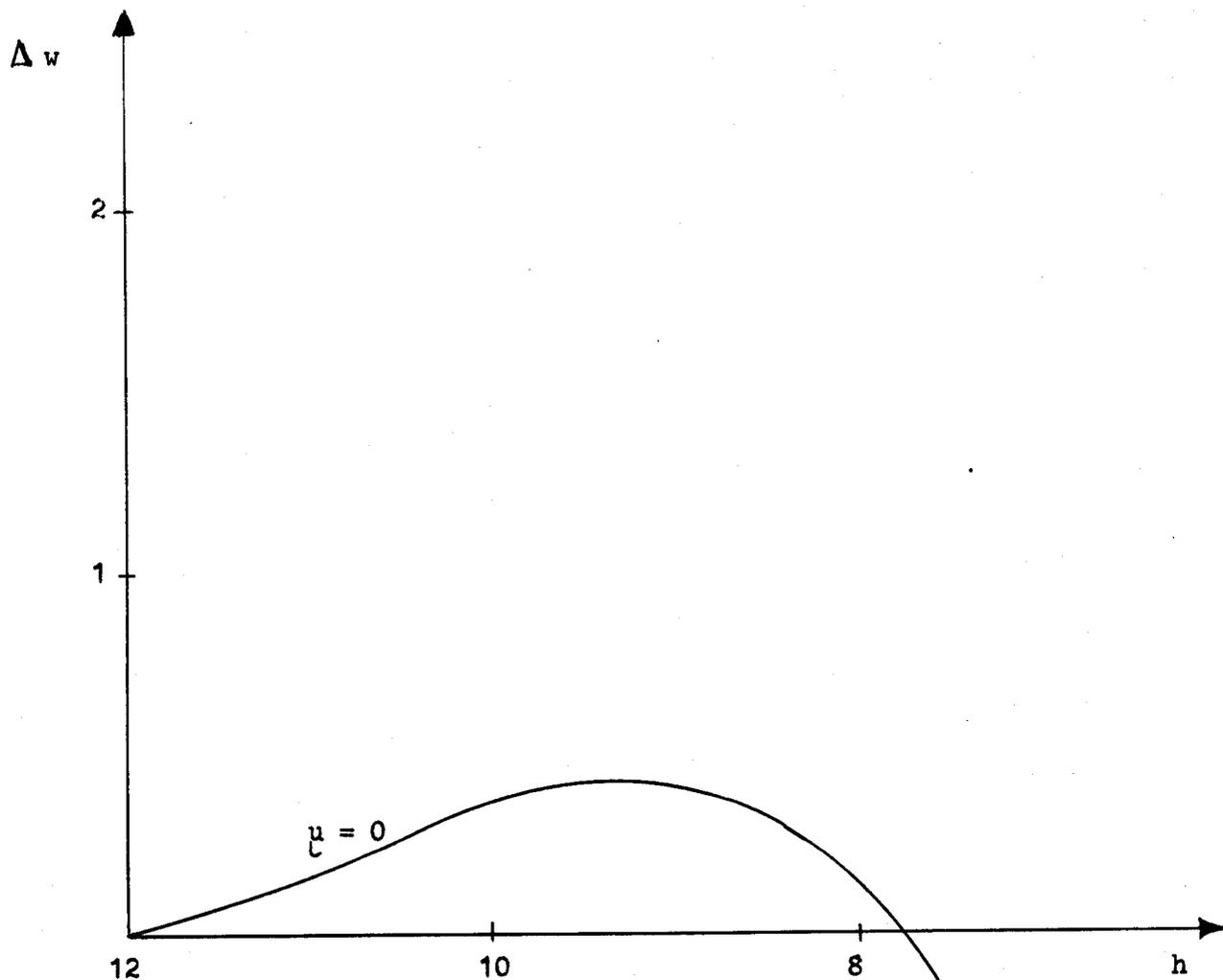
ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS  
Etude théorique de l'élargissement

- Champ N° 2 -



Section carrée : 24x24 mm

Angle d'étirage : 7°



- G 22.7 -

ETIRAGE DE PROFILS CARRES

Evolution de l'élargissement avec le rapport d'étirage

— Champ N° 2 —



HO	H1	WO	CFRO	ALPHA	WF	PRECISION	FORCE D'ETIRAGE
12.00	9.50	60.00	0.00	7.00	60.129	.001	779.062
12.00	9.50	60.00	0.10	7.00	60.019	.001	1219.894
12.00	9.50	60.00	0.20	7.00	59.931	.001	1660.076
12.00	9.50	60.00	0.00	10.00	60.070	.001	852.024
12.00	9.50	60.00	0.10	10.00	60.019	.001	1163.700
12.00	9.50	60.00	0.20	10.00	59.986	.001	1475.166
12.00	9.50	60.00	0.00	15.00	60.030	.001	977.910
12.00	9.50	60.00	0.10	15.00	60.012	.001	1191.030
12.00	9.50	60.00	0.20	15.00	59.997	.001	1404.092
12.00	9.50	60.00	0.00	20.00	60.015	.001	1111.452
12.00	9.50	60.00	0.10	20.00	60.004	.001	1277.183
12.00	9.50	60.00	0.20	20.00	59.997	.001	1442.893
12.00	9.50	60.00	0.00	30.00	60.001	.001	1414.036
12.00	9.50	60.00	0.10	30.00	59.997	.001	1537.038
12.00	9.50	60.00	0.20	30.00	59.993	.001	1660.031
12.00	9.50	60.00	0.00	45.00	59.993	.001	2033.232
12.00	9.50	60.00	0.10	45.00	59.990	.001	2139.742
12.00	9.50	60.00	0.20	45.00	59.990	.001	2246.248

- [T 22.5] -

ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES

Résultats obtenus par MBS avec champ continu 2.



HO	H1	WO	CFRO	ALPHA	WF	PRECISION	FORCE D'ETIRAGE
12.00	7.00	60.00	.20	7.00	59.755	.001	1167.957
12.00	7.00	60.00	.00	10.00	59.792	.001	1223.056
12.00	7.00	60.00	.10	10.00	58.946	.001	1747.404
12.00	7.00	60.00	.20	10.00	57.313	.001	2261.575
12.00	7.00	60.00	.00	15.00	59.818	.001	1319.583
12.00	7.00	60.00	.10	15.00	59.817	.001	1679.826
12.00	7.00	60.00	.20	15.00	59.122	.001	2038.026
12.00	7.00	60.00	.00	20.00	59.832	.001	1423.677
12.00	7.00	60.00	.10	20.00	59.675	.001	1704.271
12.00	7.00	60.00	.20	20.00	59.492	.001	1984.092
12.00	7.00	60.00	.00	30.00	59.843	.001	1665.015
12.00	7.00	60.00	.10	30.00	59.777	.001	1873.483
12.00	7.00	60.00	.20	30.00	59.708	.001	2081.721
12.00	7.00	60.00	.00	45.00	59.854	.001	2176.999
12.00	7.00	60.00	.10	45.00	59.825	.001	2357.628
12.00	7.00	60.00	.20	45.00	29.792	.001	2538.171

- [T 22.6] -  
 ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES  
 Résultats obtenus par MBS avec champ continu 2.



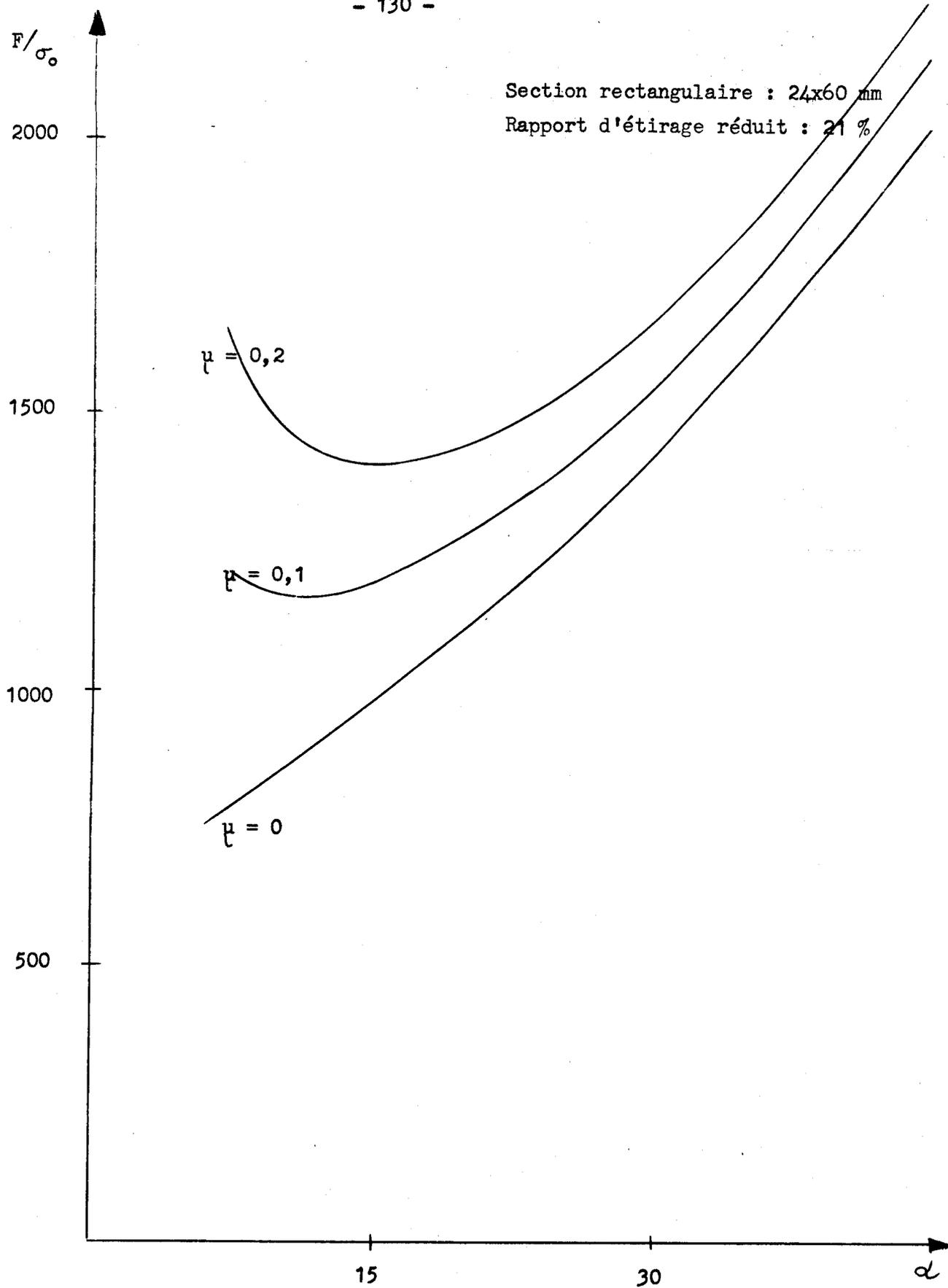
HO	H1	WO	CFRO	ALPHA	WF	PRECISION	FORCE D'ETIRAGE
12.00	7.00	60.00	.20	7.00	59.755	.001	1167.957
12.00	7.00	60.00	.00	10.00	59.792	.001	1223.056
12.00	7.00	60.00	.10	10.00	58.946	.001	1747.404
12.00	7.00	60.00	.20	10.00	57.313	.001	2261.575
12.00	7.00	60.00	.00	15.00	59.818	.001	1319.583
12.00	7.00	60.00	.10	15.00	59.817	.001	1679.826
12.00	7.00	60.00	.20	15.00	59.122	.001	2038.026
12.00	7.00	60.00	.00	20.00	59.832	.001	1423.677
12.00	7.00	60.00	.10	20.00	59.675	.001	1704.271
12.00	7.00	60.00	.20	20.00	59.492	.001	1984.092
12.00	7.00	60.00	.00	30.00	59.843	.001	1665.015
12.00	7.00	60.00	.10	30.00	59.777	.001	1873.483
12.00	7.00	60.00	.20	30.00	59.708	.001	2081.721
12.00	7.00	60.00	.00	45.00	59.854	.001	2176.999
12.00	7.00	60.00	.10	45.00	59.825	.001	2357.628
12.00	7.00	60.00	.20	45.00	29.792	.001	2538.171

- [T 22.6] -

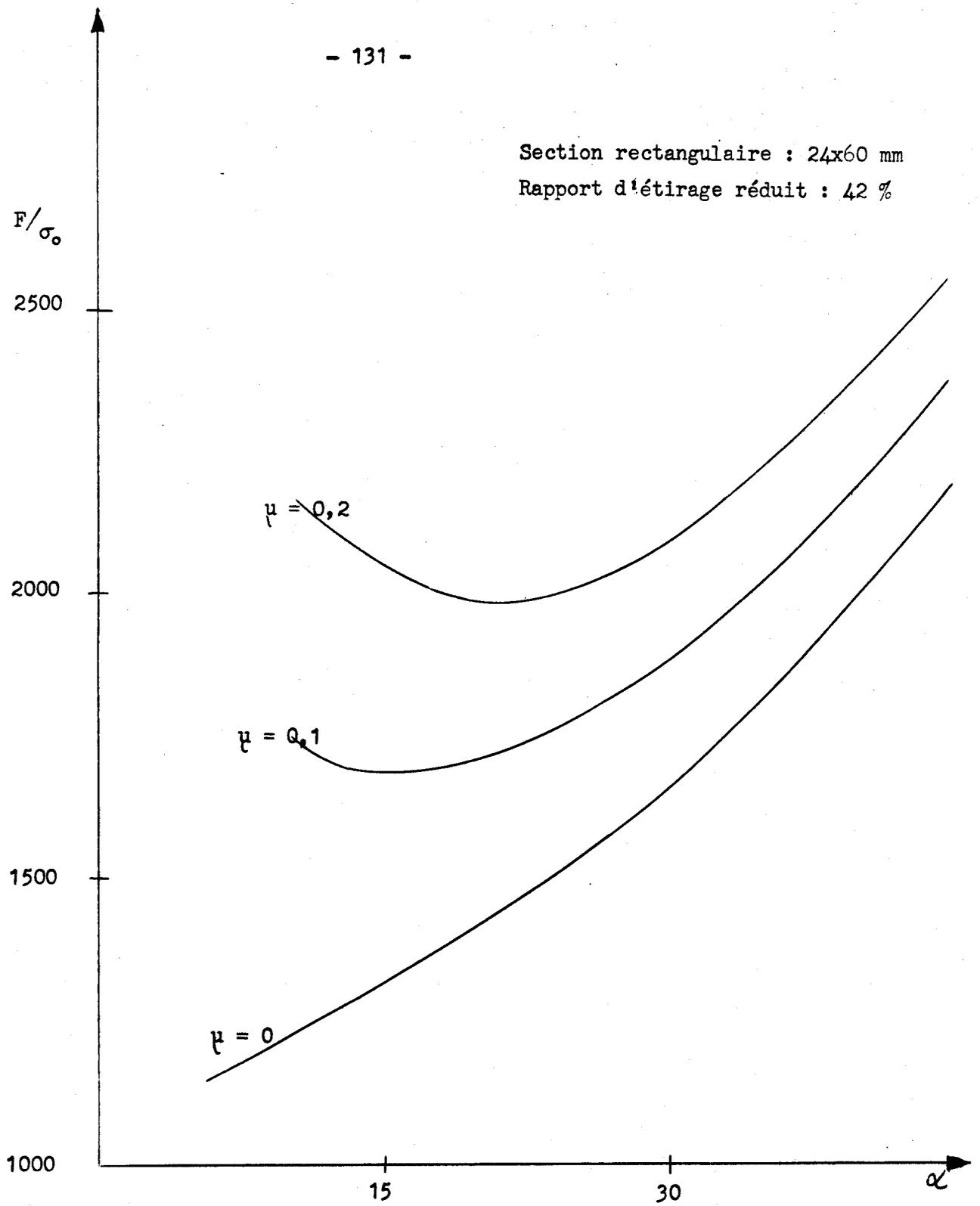
ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES

Résultats obtenus par MBS avec champ continu 2.





Section rectangulaire : 24x60 mm  
Rapport d'étirage réduit : 42 %



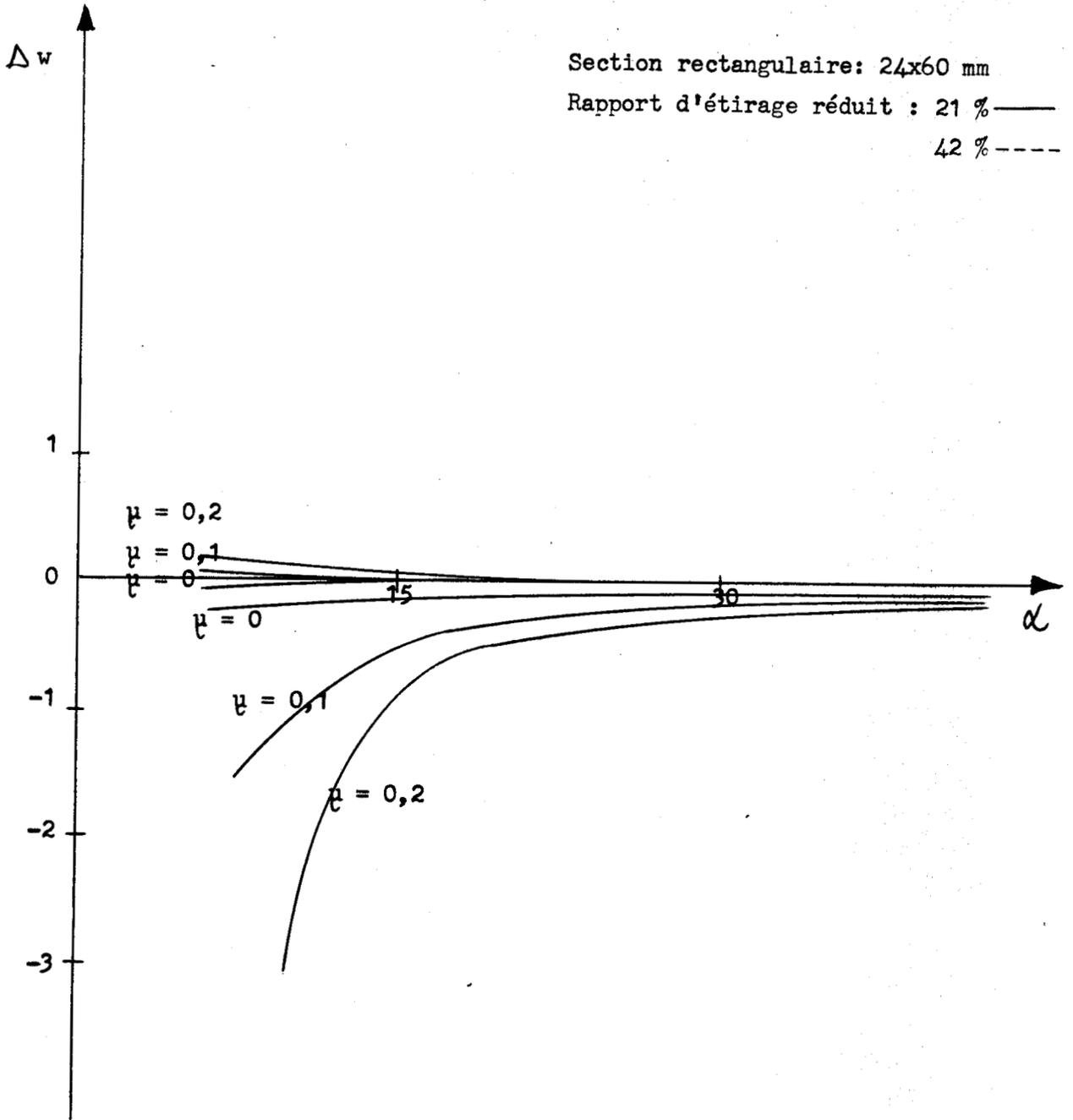
- G 22.9 -

ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES

Evolution de l'effort d'étirage

- Champ N° 2 -





- G 22.10 -

ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES

Etude théorique de l'élargissement

— Champ N° 2 —



V - METHODE DES BLOCS

1 - Introduction.

La méthode des blocs est une application du théorème de la Borne Supérieure [E 22.1].

Elle a pour particularité par rapport à la méthode des champs continus de faire appel à une "discrétisation" (au sens anglo-saxon du terme) des zones de déformation plastique. En effet, le volume est divisé en zones rigides. La puissance dissipée cherchée sera donc calculée en effectuant la somme des puissances dissipées à l'interface de 2 blocs rigides et à l'interface outil-pièce.

Le champ cinématique choisi devra être admissible et les conditions de continuité entre deux blocs vérifiées.

2 - Description du champ.

Considérons la figure [F 22.07].

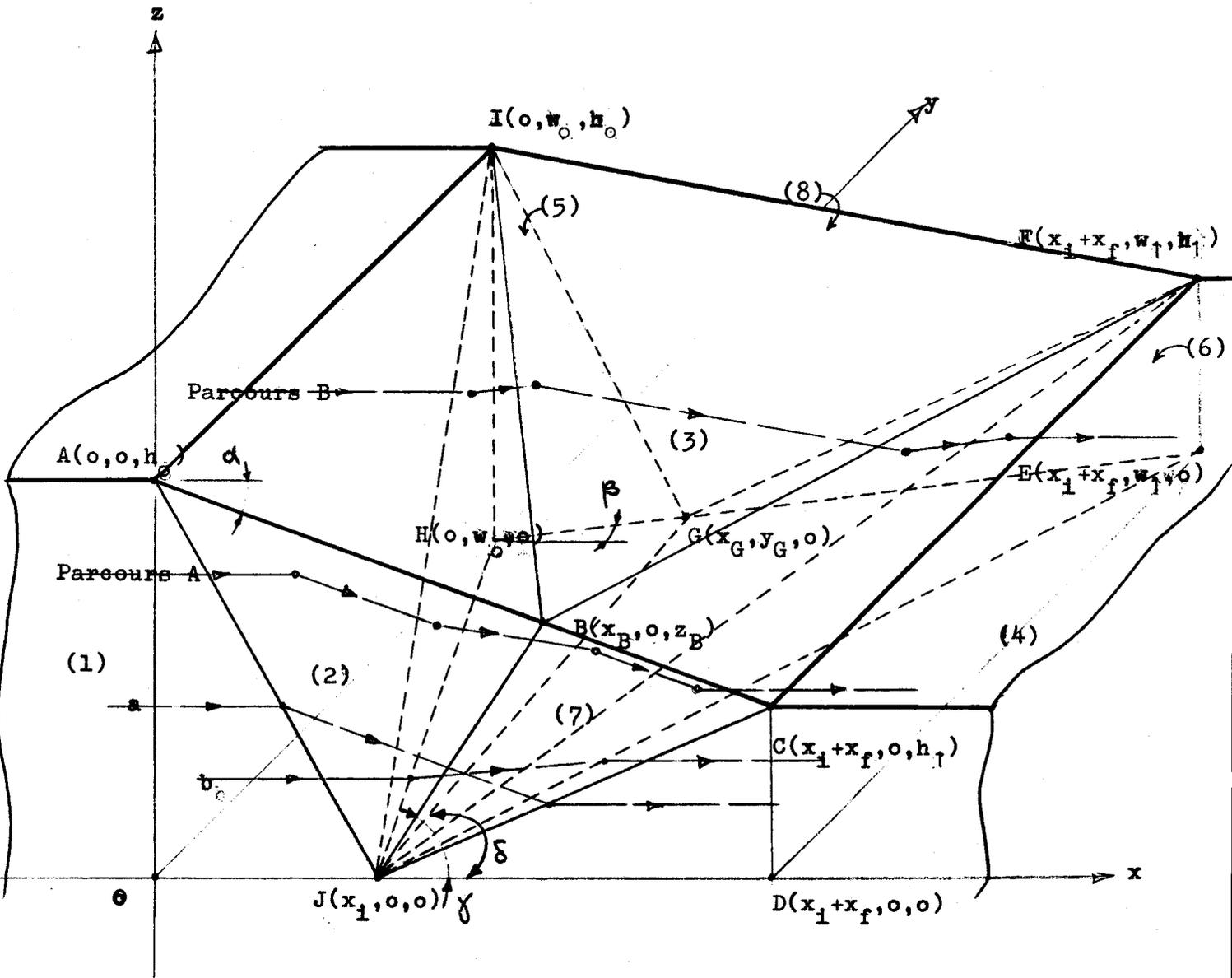
Elle représente un quart de la pièce étirée ; les plans  $xOy$  et  $xOz$  sont des plans de symétrie dans la déformation.

La section d'entrée dans la filière est le rectangle AIMO et la section de sortie le rectangle CFED.

L'interface outil-pièce est représenté par la surface ACFI. Le schéma de BLOCS utilisé s'inspire de ceux utilisés en filage en déformations planes [Réf. 09]. Nous avons repris le schéma triangulaire classique dans les plans  $xOy$  et  $xOz$ . Nous distinguerons un parcours A pour les blocs voisins du plan  $xOz$  et un parcours B pour les blocs voisins du plan  $xOy$ .

Dans ces conditions, nous trouvons :

- Le bloc d'entrée commun [1] limité à l'entrée de la filière par les surfaces AJI et IJM ; la vitesse  $\langle 01 \rangle$  de ce bloc est parallèle à l'axe  $x$ .



- F 22.07 -

Champ cinématiquement admissible  
par BLOCS.



- Le Parcours A

- bloc [2] limité par les surfaces AJI et BJI ; la vitesse <02> de ce bloc est nécessairement parallèle à AB (conditions aux limites et de symétrie).
- bloc [3] limité par les surfaces BJI et BJF ; la vitesse <03> est parallèle à la limite IF ;
- bloc [7] limité par les surfaces BJF et CFJ ; la vitesse <07> est parallèle à la limite BC.

- Le Parcours B

- bloc [5] limité par IJH et IJG ; sa vitesse <05> est parallèle à HG ;
- bloc [8] limité par IJG et GJF ; sa vitesse <08> est parallèle à IF ;
- bloc [6] limité par GJF et JFE ; sa vitesse <06> est parallèle à GE ;
- Le bloc de sortie commun [4] limité par CJF et FJE ; sa vitesse <04> est parallèle à Ox.

Les vitesses définies en direction vérifient ainsi les conditions aux limites.

### 3 - CONDITIONS DE CONTINUITÉ.

La vitesse normale à un interface doit être continue.

31. Frontière AJI.

311. Frontière AJI.

Les composantes de  $\langle \vec{01} \rangle$  sont :

$$\langle \vec{01} \rangle \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad [\text{E } 22.36]$$

Celles de la normale à AJI sont :

$$\vec{n}(\text{AJI}) \begin{cases} h_0 \\ 0 \\ x_i \end{cases}$$

Or :

$$\langle \vec{01} \rangle \cdot \vec{n}(\text{AJI}) = \frac{h_0}{|\vec{n}(\text{AJI})|} \quad [\text{E } 22.37]$$

De même pour  $\langle 02 \rangle$  :

$$\langle \vec{02} \rangle \cdot \begin{cases} k_2 \cos \alpha \\ 0 \\ -k_2 \sin \alpha \end{cases}$$
$$\langle \vec{02} \rangle \cdot \vec{n}(\text{AJI}) = \frac{k_2 (h_0 \cos \alpha - x_i \sin \alpha)}{|\vec{n}(\text{AJI})|} \quad [\text{E } 22.38]$$

Pour vérifier la continuité, on doit avoir :

$$\langle \vec{01} \rangle \cdot \vec{n}(\text{AJI}) = \langle \vec{02} \rangle \cdot \vec{n}(\text{AJI}).$$

D'après E 22.37 et E 22.38, il vient :

$$k_2 = \frac{h_o}{h_o \cos \alpha - x_i \sin \alpha} .$$

Soit :

$$\vec{<02>} \left\{ \begin{array}{l} \frac{h_o \cos \alpha}{h_o \cos \alpha - x_i \sin \alpha} \\ -\frac{h_o \sin \alpha}{h_o \cos \alpha - x_i \sin \alpha} \end{array} \right.$$

[E 22.39]

312. Frontière BJI.

Les composantes de la normale à BJI sont :

$$\vec{n}(\text{BJI}) \left\{ \begin{array}{l} \sin \gamma \\ \frac{x_i \sin \gamma + h_o \cos \gamma}{w_o} \\ -\cos \gamma . \end{array} \right.$$

D'après [E 22.39], la composante normale à BJI de  $\vec{<02>}$  est :

$$\vec{<02>} \cdot \vec{n}(\text{BJI}) = \frac{h_o (\cos \alpha \cdot \sin \gamma + \sin \alpha \cdot \cos \gamma)}{(h_o \cos \alpha - x_i \sin \alpha) \cdot |\vec{n}(\text{BJI})|} \quad [\text{E 22.40}]$$

Les composantes de  $<03>$  sont :

$$\vec{<03>} \left\{ \begin{array}{l} k_3 \cos \alpha \\ k_3 \sin \beta \\ -k_3 \sin \alpha . \end{array} \right.$$

Il vient :

$$\langle \vec{O3} \rangle \cdot \vec{n}(\text{BJI}) = \frac{k_3}{|\vec{n}(\text{BJI})|} \left[ \cos \alpha \cdot \sin \gamma + \sin \alpha \cdot \cos \gamma + \frac{\sin \beta}{w_0} (x_i \sin \gamma + h_0 \cos \gamma) \right]$$

[E 22.41]

E 22.40 et E 22.41 définissent  $k_3$ . Soit, avec :

$$A = (h_0 \cos \alpha - x_i \sin \alpha) \left[ 1 + \frac{(x_i \sin \gamma + h_0 \cos \gamma) \sin \beta}{(\cos \alpha \cdot \sin \gamma + \sin \alpha \cdot \cos \gamma) w_0} \right]$$

[E 22.42]

$$\langle \vec{O3} \rangle \begin{cases} \frac{h_0}{A} \cos \alpha. \\ \frac{h_0}{A} \sin \beta. \\ -\frac{h_0}{A} \sin \alpha. \end{cases}$$

[E 22.43]

### 313. Frontière BJF.

La composante normale de  $\langle O3 \rangle$  s'écrit :

$$\langle \vec{O3} \rangle \cdot \vec{n}(\text{BJF}) = \frac{h_0}{A |\vec{n}(\text{BJF})|} (\cos \alpha \cdot \sin \gamma + \sin \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \frac{h_1 \cos \gamma - x_F \sin \gamma}{w_1})$$

[E 22.44]

De même pour  $\langle O7 \rangle$  :

$$\langle \vec{O7} \rangle \begin{cases} k_7 \cos \alpha \\ 0 \\ -k_7 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\langle \vec{07} \rangle \cdot \vec{n}(\text{BJF}) = \frac{k_7}{|\vec{n}(\text{BJF})|} (\cos \alpha \cdot \sin \gamma + \sin \alpha \cdot \cos \gamma) \quad [\text{E 22.45}]$$

En posant :

$$B = 1 + \frac{(h_1 \cos \gamma - x_f \sin \gamma) \sin \beta}{(\cos \alpha \cdot \sin \gamma + \sin \alpha \cdot \cos \gamma) \cdot w_1}$$

$$\langle \vec{07} \rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{h_o}{A} B \cos \alpha \\ 0 \\ -\frac{h_o}{A} B \sin \alpha \end{array} \right. \quad [\text{E 22.46}]$$

314. Frontière FJC.

Il vient :

$$\langle \vec{07} \rangle \cdot \vec{n}(\text{FJC}) = \frac{h_o B}{A |\vec{n}(\text{FJC})|} (h_1 \cos \alpha + x_f \sin \alpha) \quad [\text{E 22.47}]$$

Avec :

$$\langle \vec{04} \rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{h_o w_o}{h_1 w_1} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\langle \vec{04} \rangle \cdot \vec{n}(\text{FJC}) = \frac{h_o w_o}{w_1 |\vec{n}(\text{FJC})|} \quad [\text{E 22.48}]$$

D'après [E 22.47] et [E 22.48], la condition de continuité s'écrit :

$$\frac{w_o}{w_1} = \frac{B}{A} (h_1 \cos \alpha + x_f \sin \alpha) \quad [\text{E 22.49}]$$

32. Parcours B.

321. Frontière IJM.

D'après [E 22.36] :

$$\langle \vec{01} \rangle \cdot \vec{n}(IJH) = \frac{w_0}{|\vec{n}(IJH)|} \quad [E 22.50]$$

$$\langle \vec{05} \rangle \begin{cases} k_5 \cos \beta \\ k_5 \sin \beta \\ 0 \end{cases}$$

$$\langle \vec{05} \rangle \cdot \vec{n}(IJH) = \frac{k_5}{|\vec{n}(IJH)|} (w_0 \cos \beta + x_i \sin \beta) \quad [E 22.51]$$

Soit :

$$\langle \vec{05} \rangle \begin{cases} \frac{w_0}{w_0 \cos \beta + x_i \sin \beta} \cos \beta \\ \frac{w_0 \sin \beta}{w_0 \cos \beta + x_i \sin \beta} \\ 0 \end{cases} \quad [E 22.52]$$

322. Frontière IJG.

Il vient :

$$\langle \vec{05} \rangle \cdot \vec{n}(IJG) = \frac{w_0 (\cos \beta \cdot \sin \delta - \sin \beta \cdot \cos \delta)}{(w_0 \cos \beta + x_i \sin \beta) |\vec{n}(IJG)|} \quad [E 22.53]$$

Avec, d'autre part :

$$\overrightarrow{<O8>} \begin{cases} k_8 \cos \alpha. \\ k_8 \sin \beta. \\ -k_8 \sin \alpha. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{<O8>} \cdot \vec{n}(IJG) = k_8 \left[ \cos \alpha \sin \delta - \sin \beta \cos \delta - \frac{\sin \alpha}{h_0} (x_i \sin \delta + w_0 \cos \delta) \right]$$

[E 22.54]

Posons C :

$$C = \frac{(w_1 \cos \beta + x_i \sin \beta)(\cos \alpha \sin \delta - \sin \beta \cos \delta - \frac{\sin \alpha}{h_0} (x_i \sin \delta + w_0 \cos \delta))}{(\cos \beta \sin \delta - \sin \beta \cos \delta)}$$

[E 22.55]

Soit :

$$\overrightarrow{<O8>} \begin{cases} \frac{w_0}{C} \cos \alpha. \\ \frac{w_0}{C} \sin \beta. \\ -\frac{w_0}{C} \sin \alpha. \end{cases}$$

[E 22.56]

### 323. Frontière JGF.

Nous avons :

$$\overrightarrow{<O8>} \cdot \vec{n}(JGF) = \frac{w_0}{C |\vec{n}(JGF)|} \cdot (\sin \delta \cos \alpha - \cos \delta \sin \beta + \sin \alpha \cdot \frac{x_f \sin \delta - w_1 \cos \delta}{h_1})$$

[E 22.57]

et :

$$\langle \vec{O6} \rangle \begin{cases} k_6 \cos \beta \\ k_6 \sin \beta \\ 0 \end{cases}$$

$$\langle \vec{O6} \rangle \cdot \vec{n}(JGF) = k_6 (\cos \beta \sin \delta + \sin \beta \cdot \cos \delta) \quad [E 22.58]$$

Posons D :

$$D = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \delta - \sin \beta \cdot \cos \delta + \sin \alpha \cdot \frac{x_f \sin \delta - w_1 \cos \delta}{h_1}}{\cos \beta \cdot \sin \delta - \sin \beta \cdot \cos \delta}$$

$$\langle \vec{O6} \rangle \begin{cases} \frac{w_o}{C} D \cdot \cos \beta \\ \frac{w_o}{C} D \cdot \sin \beta \\ 0 \end{cases}$$

[E 22.59]

### 324. Frontière JFE.

Il vient :

$$\langle \vec{O6} \rangle \cdot \vec{n}(JFE) = \frac{w_o \cdot D}{C |\vec{n}(JFE)|} (w_1 \cos \beta - x_f \sin \beta) \quad [E 22.60]$$

$$\langle \vec{O4} \rangle \cdot \vec{n}(JFE) = \frac{h_o w_o}{h_1 |\vec{n}(JFE)|} \quad [E 22.61]$$

La continuité sera alors vérifiée si et seulement si :

$$\frac{h_o}{h_f} = \frac{D}{C} (w_1 \cos \beta - x_f \sin \beta) \quad [E 22.62]$$

### 33. Relations de Continuité.

Compte tenu des relations suivantes :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta h}{x_i + x_f}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta w}{x_i + x_f}$$

Les relations [E 22.49] et [E 22.62] s'écrivent :

$$\frac{(\cos \alpha \cdot \sin \gamma + \sin \alpha \cdot \cos \gamma) w_1 + (h_1 \cos \gamma - x_f \sin \gamma) \sin \beta}{(\cos \alpha \cdot \sin \gamma + \sin \alpha \cdot \cos \gamma) w_o + (x_i \sin \gamma + h_o \cos \gamma) \sin \beta} = 1$$

[E 22.63]

à condition que :

$$\cos \alpha \cdot \sin \delta - \sin \alpha \cdot \cos \gamma \neq 0.$$

et :

$$\frac{(\cos \alpha \cdot \sin \delta - \sin \beta \cdot \cos \delta) h_1 + (x_f \sin \delta - w_1 \cos \delta) \sin \alpha}{(\cos \alpha \cdot \sin \delta - \sin \beta \cdot \cos \delta) h_o - (x_i \sin \delta + w_o \cos \delta) \sin \alpha} = 1$$

[E 22.64]

à condition que :

$$\cos \alpha \cdot \sin \delta - \sin \beta \cdot \cos \delta \neq 0.$$

De l'expression [E 22.64], il vient :

$$(h_0 - h_1)(\cos \alpha \cdot \sin \delta - \sin \beta \cdot \cos \delta) = \sin \alpha \left[ (x_f \sin \delta - w_1 \cos \delta) + (x_i \sin \delta + w_0 \cos \delta) \right]$$

$$\sin \beta = \operatorname{tg} \delta \cos \alpha - \sin \alpha \left[ \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{w_0 - w_1}{h_0 - h_1} \right]$$

soit :  $\cos \beta = \cos \alpha$ .

$$\alpha = \beta$$

L'élargissement est égal à la différence d'épaisseur

$$w_1 - w_0 = h_0 - h_1 \quad [E 22.65]$$

La condition [E 22.63] est alors vérifiée.

#### 4 - PUISSANCE DISSIPÉE.

Pour chaque interface, la puissance dissipée est le produit de :

- la vitesse de discontinuité relative
- la surface de l'interface
- la contrainte limite de cisaillement  $k$  pour les interfaces entre blocs,  $mk$  pour l'interface outil-pièce (§ 13.3).

#### 41. Parcours A.

##### 411. Interface AJI.

La discontinuité de vitesse relative entre les blocs [1] et [2], notée  $\langle 12 \rangle$ , d'après [E 22.36] et [E 22.37] a pour composantes :

$$\langle \vec{12} \rangle \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{h_o \cdot \cos \alpha}{h_o \cos \alpha - x_i \sin \alpha} \\ 0 \\ \frac{h_o \cdot \sin \alpha}{h_o \cos \alpha - x_i \sin \alpha} \end{array} \right. \quad [E 22.66]$$

L'aire AJI est :

$$S_{AJI} = \frac{1}{2} \sqrt{h_o^2 w_o^2 + x_i^2 w_o^2} .$$

412. Interface BJI.

D'après [E 22.39] et [E 22.43] :

$$\langle \vec{23} \rangle \left\{ \begin{array}{l} \frac{h_o \cdot \cos \alpha}{h_o \cos \alpha - x_i \sin \alpha} - \frac{h_o}{A} \cos \alpha . \\ - \frac{h_o}{A} \sin \beta \\ - \frac{h_o \cdot \sin \alpha}{h_o \cos \alpha - x_i \sin \alpha} + \frac{h_o \sin \alpha}{A} \end{array} \right. \quad [E 22.67]$$

$$S_{BJI} = \frac{1}{2} \sqrt{[x_i z_B + h_o (x_B - x_i)]^2 + w_o^2 [(x_B - x_i)^2 + z_B^2]}$$

avec  $x_B = \frac{x_i + \frac{h_o}{\operatorname{tg} \beta}}{1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma}}$  et  $z_B = - \frac{x_i + \frac{h_o}{\operatorname{tg} \gamma}}{1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma}} \operatorname{tg} \alpha + h_o .$

413. Interface BJF.

D'après [E 22.43] et [E 22.46] :

$$\langle \vec{37} \rangle \left\{ \begin{array}{l} \frac{h_0}{A} (1-B) \cos \alpha. \\ \frac{h_0}{A} \sin \alpha. \\ \frac{h_0}{A} (B-1) \sin \alpha. \end{array} \right. \quad [E 22.68]$$

$$S_{BJF} = \frac{1}{2} \sqrt{[x_f z_B - h_1 (x_B - x_i)]^2 + w_1^2 [(x_B - x_i)^2 + z_B^2]}.$$

414. Interface FJC.

D'après [E 22.46] et [E 22.48] :

$$\langle \vec{74} \rangle \left\{ \begin{array}{l} \frac{h_0}{A} B \cos \alpha - \frac{h_0 w_0}{h_1 w_1} \\ 0 \\ - \frac{h_0}{A} B \sin \alpha \end{array} \right. \quad [E 22.69]$$

$$S_{FJC} = \frac{1}{2} \sqrt{w_1^2 (h_1^2 + x_f^2)}.$$

42. Parcours B.

421. Interface IJH.

D'après [E 22.36] et [E 22.52] :

$$\langle \vec{15} \rangle \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{w_0 \cos \beta}{w_0 \cos \beta + x_i \sin \beta} \\ - \frac{w_0 \sin \beta}{w_0 \cos \beta + x_i \sin \beta} \\ 0 \end{array} \right. \quad [E 22.70]$$

$$S_{IJH} = \frac{1}{2} \sqrt{h_0^2 (x_i^2 + w_0^2)}$$

422. Interface IJG.

D'après [E 22.52] et [E 22.56] :

$$\langle \vec{58} \rangle \left\{ \begin{array}{l} \frac{w_0 \cos \beta}{w_0 \cos \beta + x_i \sin \beta} - \frac{w_0 \cos \alpha}{C} \\ w_0 \sin \beta \left( \frac{1}{w_0 \cos \beta + x_i \sin \beta} - \frac{1}{C} \right) \\ \frac{w_0 \sin \alpha}{C} \end{array} \right. \quad [E 22.71]$$

$$S_{IJG} = \frac{1}{2} \sqrt{h_0^2 [(x_G - x_i)^2 + y_G^2] + [w_0 (x_G - x_i) + x_i y_G]^2}$$

avec  $x_G = \frac{x_i + \frac{w_0}{\operatorname{tg} \delta}}{1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \delta}}$  et  $y_G = \frac{x_i + \frac{w_0}{\operatorname{tg} \beta}}{1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \delta}} \operatorname{tg} \beta + w_0$ .

423. Interface JGF.

D'après E 22.56 et E 22.53 :

$$\langle \vec{86} \rangle \left\{ \begin{array}{l} \frac{w_0}{C} (1 - D) \cdot \cos \beta \\ \frac{w_0}{C} (1 - D) \sin \beta \\ - \frac{w_0}{C} \sin \alpha \end{array} \right. \quad [E 22.72]$$

et :

$$S_{JGF} = \frac{1}{2} \sqrt{h_1^2 [y_G^2 + (x_G - x_i)^2] + [x_f y_G - w_1 (x_G - x_i)]^2}$$

424. Interface JFE.

D'après [E 22.59] et [E 22.48] :

$$\langle \vec{64} \rangle \left\{ \begin{array}{l} \frac{w_0}{C} D \cdot \cos \beta - \frac{h_0 w_0}{h_1 w_1} \\ \frac{w_0}{C} D \cdot \sin \beta \\ 0 \end{array} \right. \quad [E 22.73]$$

$$S_{JFE} = \frac{1}{2} h_1 \sqrt{x_f^2 + w_1^2}$$

43. Interface IJF entre les parcours A et B.

D'après [E 22.43] et [E 22.56] :

$$\langle \vec{38} \rangle \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{h_o}{A} - \frac{w_o}{C} \right) \cos \alpha. \\ \left( \frac{h_o}{A} - \frac{w_o}{C} \right) \sin \alpha. \\ - \left( \frac{h_o}{A} - \frac{w_o}{C} \right) \cos \alpha. \end{array} \right. \quad [E 22.74]$$

$$S_{IJF} = \frac{1}{2} \sqrt{(h_o w_1 - h_1 w_o)^2 + (w_o x_f + w_1 x_i)^2 + (h_1 x_i + h_o x_f)^2}$$

44. Interface outil-pièce.

441. Interface ABI.

La vitesse  $\langle \vec{02} \rangle$  est donnée dans [E 22.39]

$$S_{ABI} = \frac{1}{2} \sqrt{w_o^2 [x_B^2 + (z_B - h_o)^2]} \quad [E 22.75]$$

442. Interface BIF.

$\langle \vec{03} \rangle$  est définie dans [E 22.43]

$$S_{BIF} = \frac{1}{2} \sqrt{[w_o(z_B - h_1) - w_1(z_B - h_o)]^2 - [w_1 x_B - w_o(x_B - x_i - x_f)]^2 + [x_B(z_B - h_1) - (z_B - h_o)(x_B - x_i - x_f)]^2}$$

[E 22.76]

443. Interface BFC.

$\langle \vec{O7} \rangle$  est définie dans [E 22.46]

$$S_{BFC} = \frac{1}{2} \sqrt{w_1^2 [(z_B - h_1)^2 + (x_B - x_i - x_f)^2]} \quad [E 22.77]$$

45. Expression finale de la puissance dissipée.

La puissance dissipée entre les blocs et l'outillage pour l'ensemble du procédé est :

$$\dot{W}_1 = 4k [S_i \Delta V_i + m S_j \Delta V_j] .$$

Les surfaces  $S_i$  et les discontinuités de vitesse relative  $\Delta V_i$  sont définies de [E 22.66] à [E 22.74].

De même, les  $S_j$  et  $\Delta V_j$  sont définis de [E 22.75] à [E 22.77].

5 - RESULTATS.

Les valeurs obtenues pour la puissance dissipée confirment celles calculées par les méthodes précédentes. Par contre, les résultats sur l'élargissement  $\Delta W$  sont trop grossiers pour que ce champ puisse être intéressant. Ce n'est qu'en le compliquant notablement qu'il sera possible de lever la condition  $\Delta h = \Delta W$ .

La complexité de la figure spatiale obtenue détruira alors largement l'avantage de simplicité mathématique de cette méthode.

Elle semble donc mal adaptée aux problèmes dont l'état de Déformation n'est pas plan.

Profil : carré 24 × 24 mm.

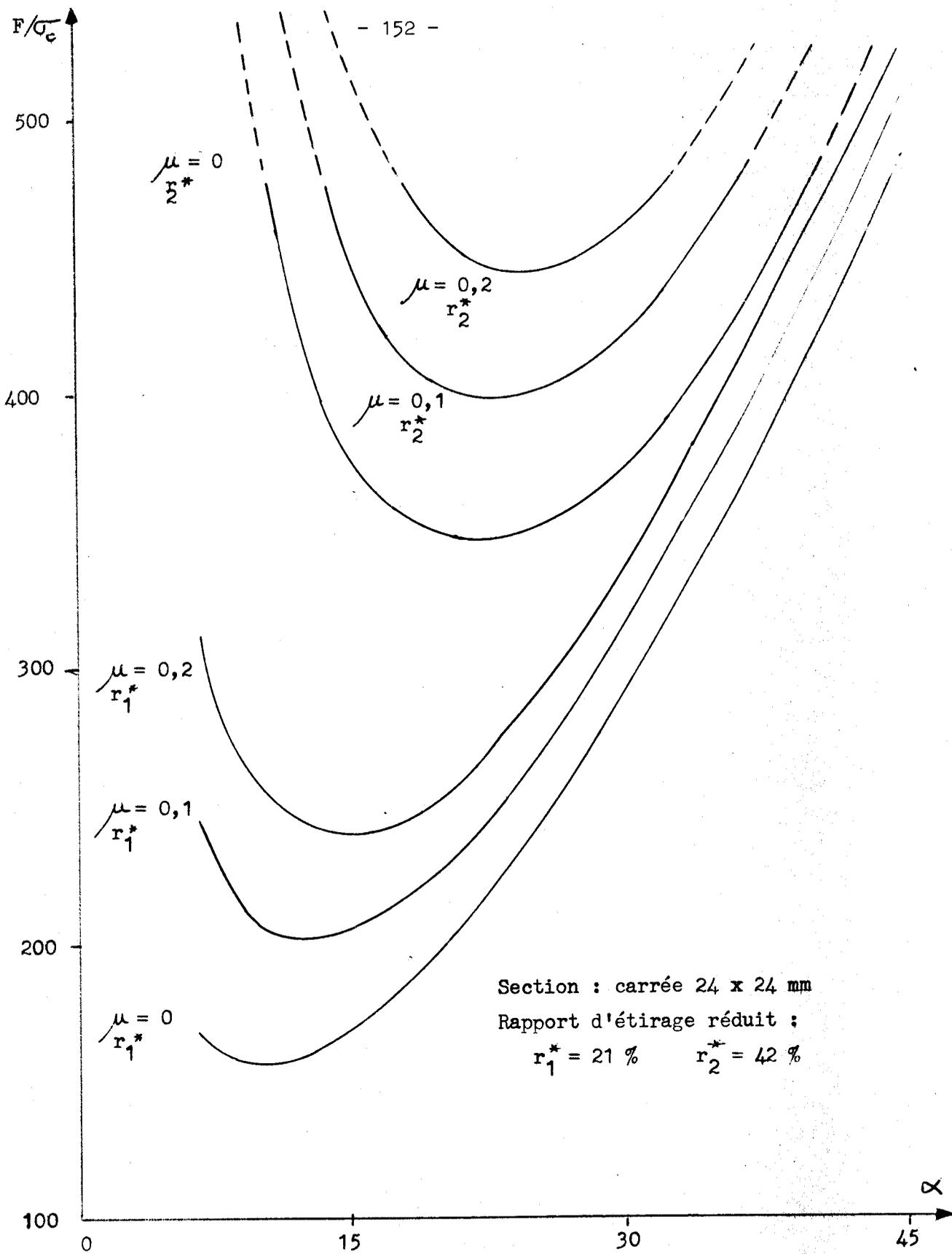
Angle $\alpha$	Coef. de Frot. $\mu = \frac{m}{\sqrt{3}}$	$F_{9,5}$	$F_7$
7	0	170,06	651,96 *
	0,1	240,47	792,80 *
	0,2	310,89	933,60 *
10	0	156,40	483,01 *
	0,1	206,39	583,00 *
	0,2	256,39	682,99 *
15	0	171,54	372,84
	0,1	206,05	441,85
	0,2	240,55	510,86 *
20	0	204,38	342,97
	0,1	231,54	397,30
	0,2	258,71	451,62
30	0	294,22	376,54
	0,1	315,0	418,11
	0,2	335,79	459,69
45	0	488,22	544,97
	0,1	507,19	582,92
	0,2	526,16	620,87

- [T 22.7] -

ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS

Résultats obtenus par MBS avec champ par BLOCS.





— G 22.11 —

— ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS —

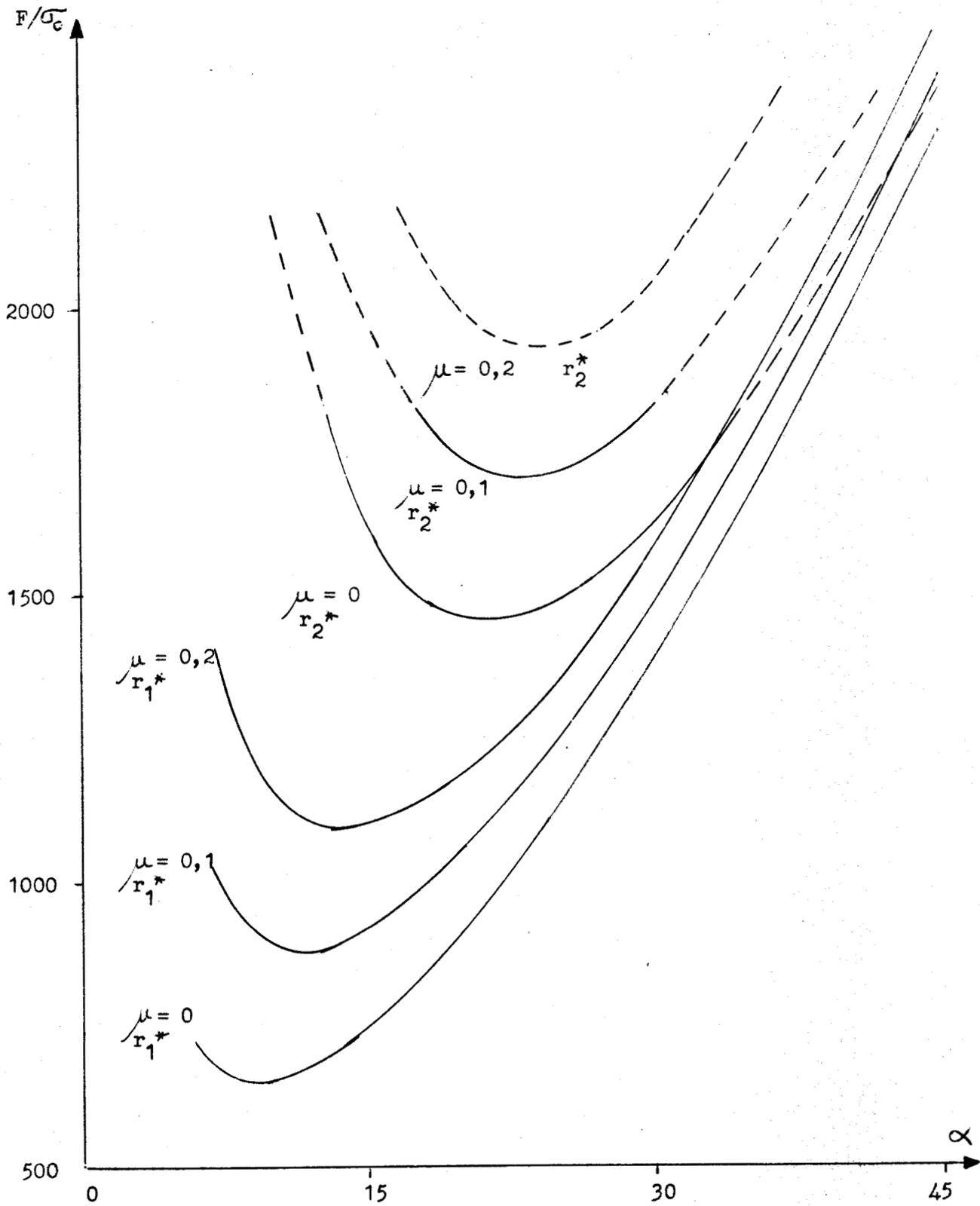
Evolution de l'effort d'étréage F



Profil ; rectangulaire 24 x 120 mm

Angle $\alpha$	Coef.de Frot. $\mu = \frac{m}{\sqrt{3}}$	Effort d'Etirage $F_{9,5}$	Effort d'Etirage $F_7$	
7	0	693,3	2960,1	*
	0,1	1045,3	3664,3	*
	0,2	1397,4	4368,4	*
10	0	649,0	2157,8	*
	0,1	899,0	2657,7	*
	0,2	1148,9	3157,6	*
15	0	745,3	1620,1	
	0,1	917,8	1965,1	*
	0,2	1090,4	2310,1	*
20	0	917,7	1464,7	
	0,1	1053,6	1736,4	
	0,2	1189,4	2008,0	*
30	0	1363,9	1609,0	
	0,1	1467,8	1816,9	
	0,2	1571,8	2024,7	*
45	0	2300,8	2380,3	*
	0,1	2395,7	2570,1	*
	0,2	2490,6	2759,8	*





— [G 22.12] —

— ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS —

Evolution de l'effort d'étirage F



Deuxième Partie -

Titre III -

COMPARAISON DES DIFFERENTES METHODES

Les différentes courbes de variation de l'effort d'étirage ainsi que de l'élargissement sont rassemblées dans les graphiques G 23.1 à G 23.6.

## 1 - ETUDE DE L'EFFORT D'ETIRAGE.

### 11. Profils carrés.

Dans presque tous nos résultats, ceux de la méthode des TRANCHES sont inférieurs à ceux des bornes supérieures. Pour les angles inférieurs à  $15^\circ$ , la différence varie entre 0 et 20 %. Au delà, la part du travail redondant devient primordiale, les résultats varient du simple au double et plus. Ceci confirme ce que nous avons signalé en 21.11.

Par ailleurs, les bornes supérieures par champ continu présentent les mêmes variations, le champ 2 étant toujours une borne légèrement inférieure au champ 1. Celui-ci n'a donc pas été représenté.

Des graphiques G 23.1 et 2, il apparaît clairement que malgré sa simplicité formelle (pas d'optimisation réelle) la méthode des BLOCS fournit, entre  $10^\circ$  et  $30^\circ$ , de meilleurs résultats que la méthode des champs continus pour un rapport d'étirage moyen. Cette conclusion s'inverse dans le cas du rapport d'étirage de 42 %. Ceci confirme la qualité du schéma par bloc triangulaire simple [déjà apprécié dans les problèmes de déformations planes] pour idéaliser les écoulements plastiques lors de rapports d'étirage moyens.

### 12. Profils rectangulaires.

Les écarts entre "colonnes" et bornes supérieures sont ici très faibles (de 0 à 10 %) pour les angles inférieurs à  $15^\circ$ . Au delà le travail redondant est toujours prépondérant.

La comparaison des bornes supérieures est par ailleurs identique à celle formulée plus haut. La méthode des blocs améliore considérablement ses performances, ce qui s'explique par la condition  $\Delta h = \Delta w$  très éloignée des déformations réelles dans le cas d'un profil carré.

## 2 - ETUDE DE L'ELARGISSEMENT.

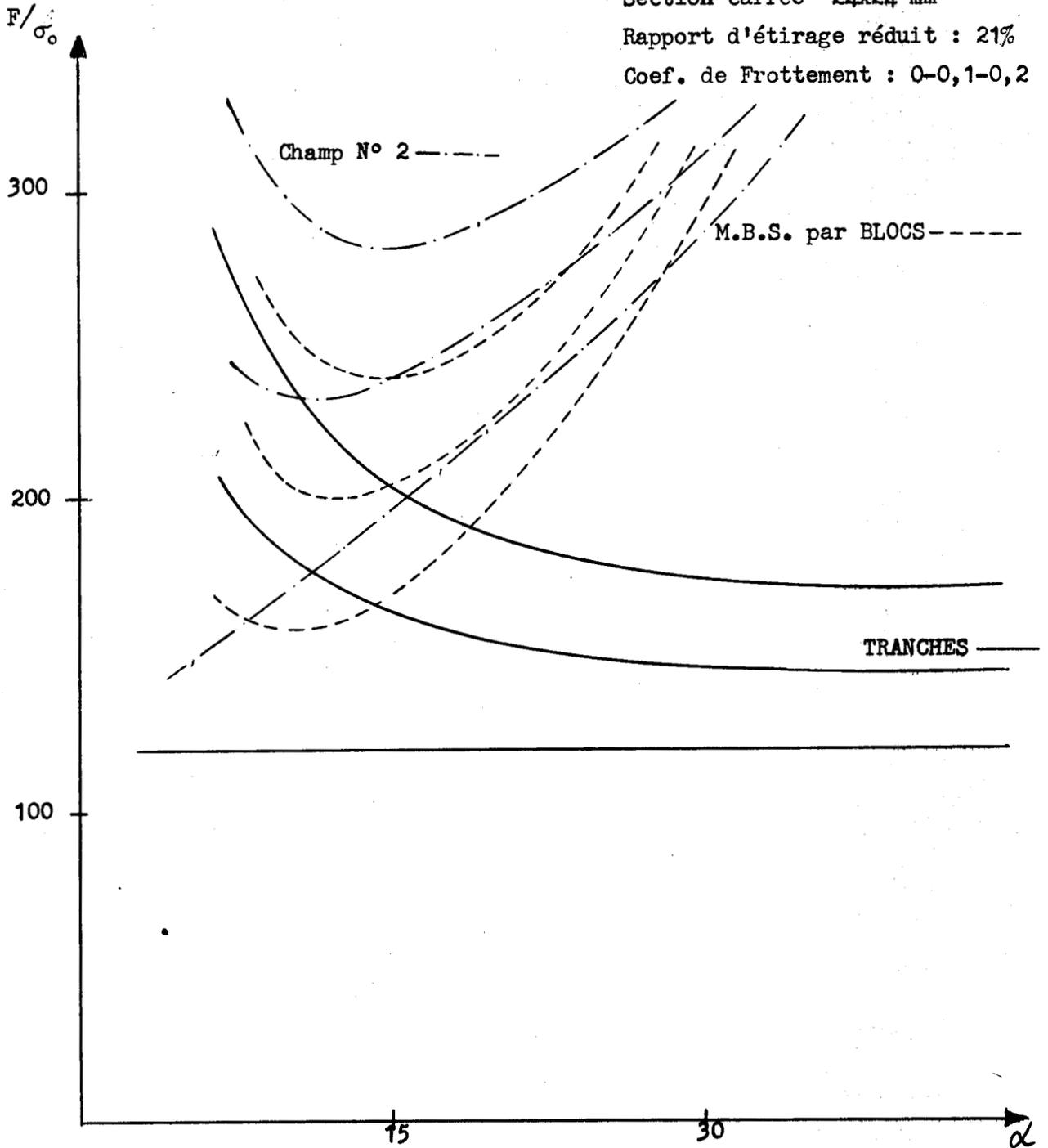
Des conclusions sont beaucoup plus difficiles à formuler sur ce problème les résultats variant de façon considérable. En général, il apparaît cependant que :

- les méthodes de compression (FRANCHES ou COLONNES) définissent des élargissements très importants (10 à 15 % de la largeur initiale).
- les M.B.S. par champs continus (d'après nos 2 champs) ont tendance à sous-estimer l'élargissement.
- la M.B.S. par BLOCS est liée à la condition  $\Delta h = \Delta w$ . Ses prévisions sont sans intérêt.

Section carrée 24x24 mm

Rapport d'étirage réduit : 21%

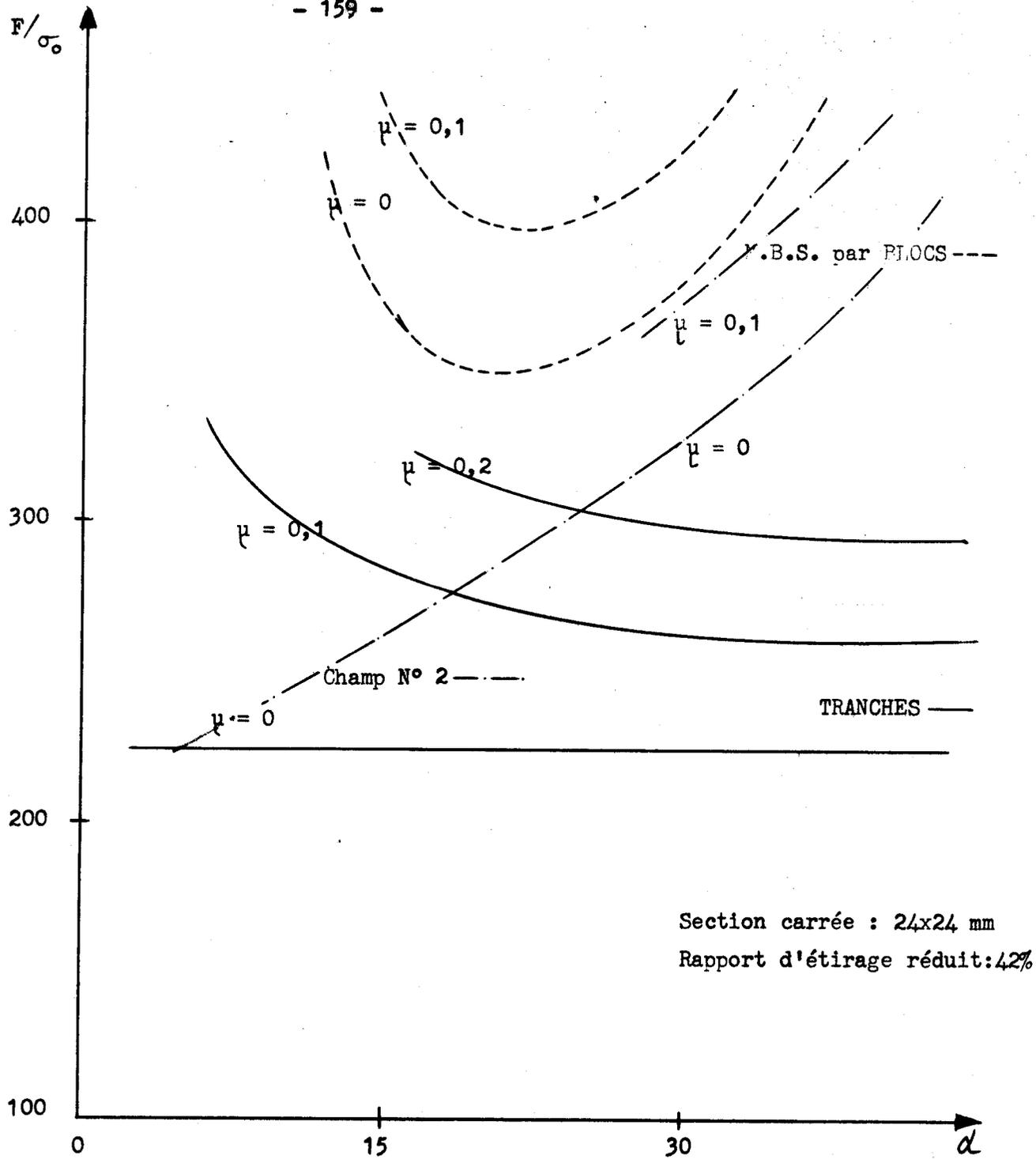
Coef. de Frottement : 0-0,1-0,2



ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS

Comparaison des résultats théoriques sur l'effort d'étirage





ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS

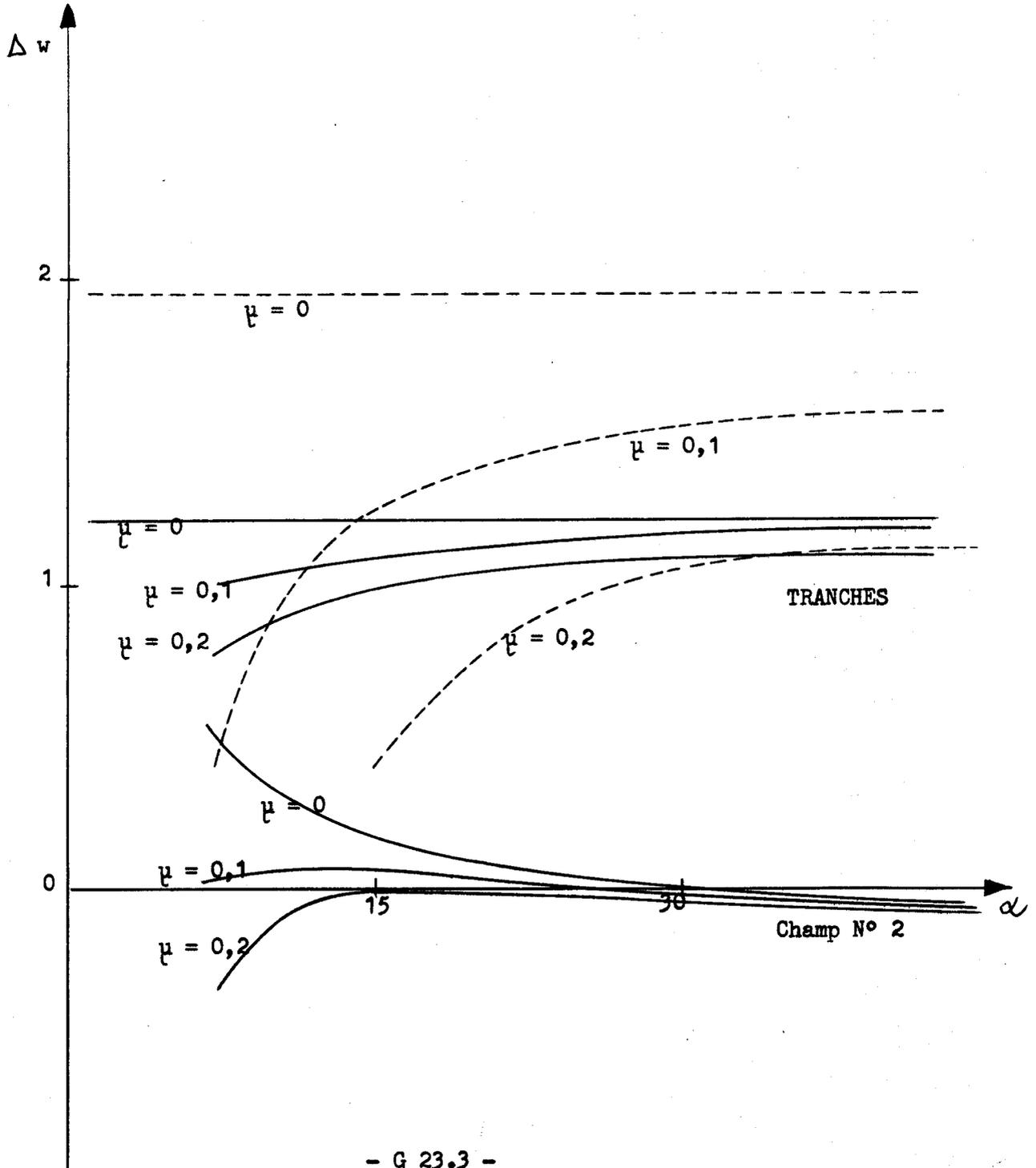
Comparaison des résultats théoriques sur l'effort d'étirage



Section carrée : 24x24 mm

Rapport d'étréage réduit : 21 % ———

42 % - - - -



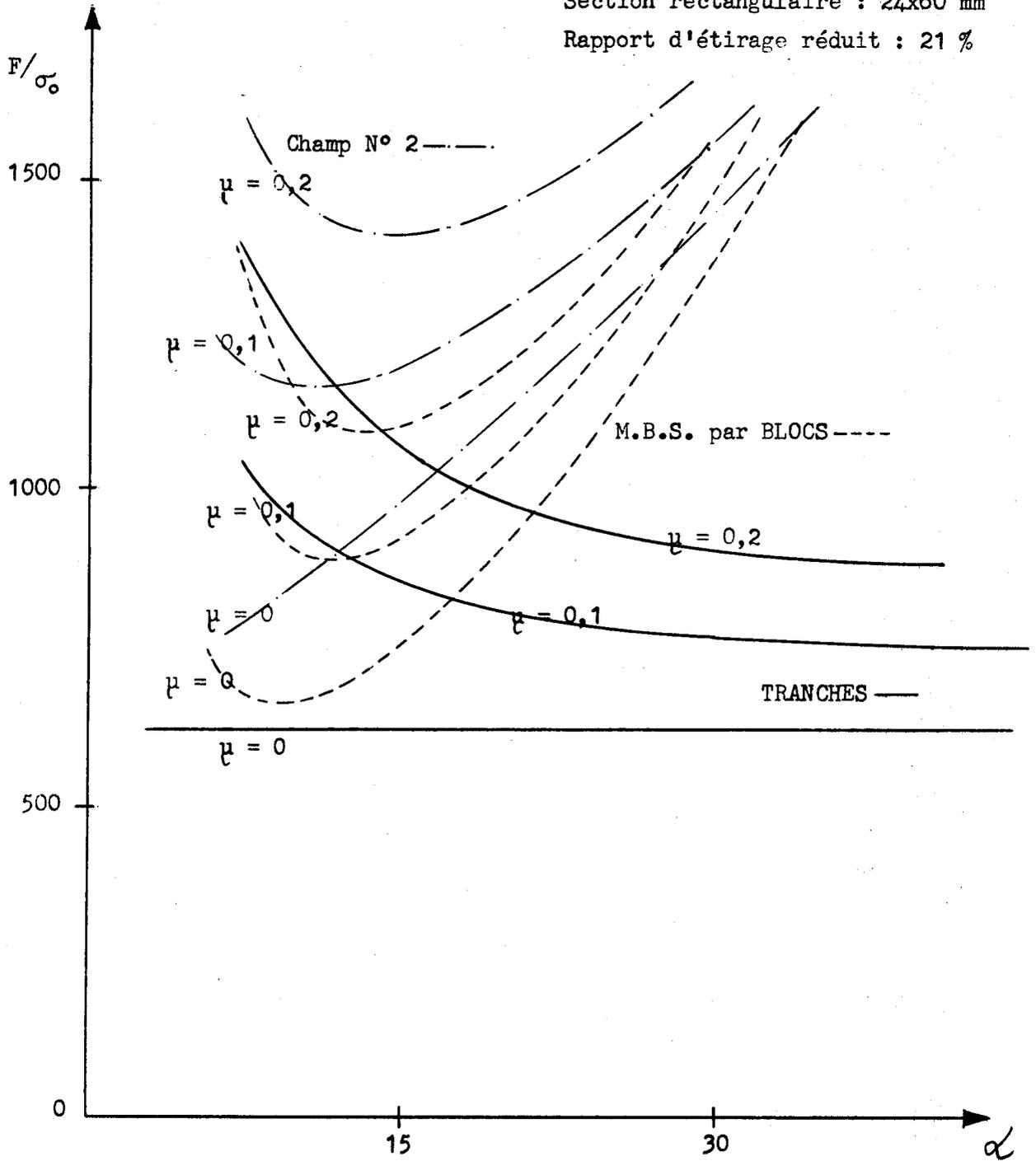
- G 23.3 -

ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS

Comparaison des résultats théoriques sur l'élargissement



Section rectangulaire : 24x60 mm  
Rapport d'étirage réduit : 21 %



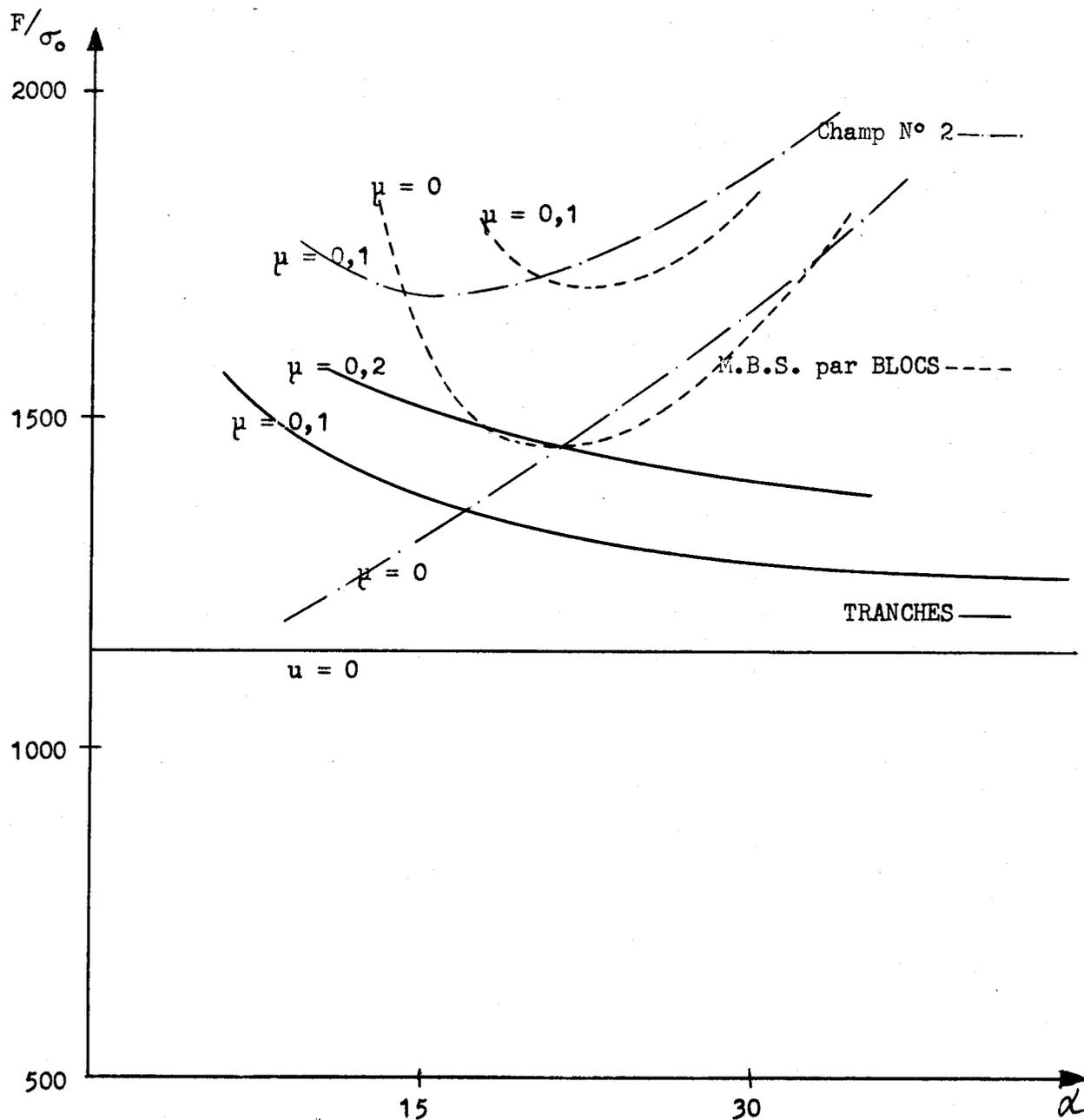
ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES

Comparaison des résultats théoriques sur l'effort d'étirage



Section rectangulaire : 24x60 mm

Rapport d'étirage réduit : 42 %



ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES

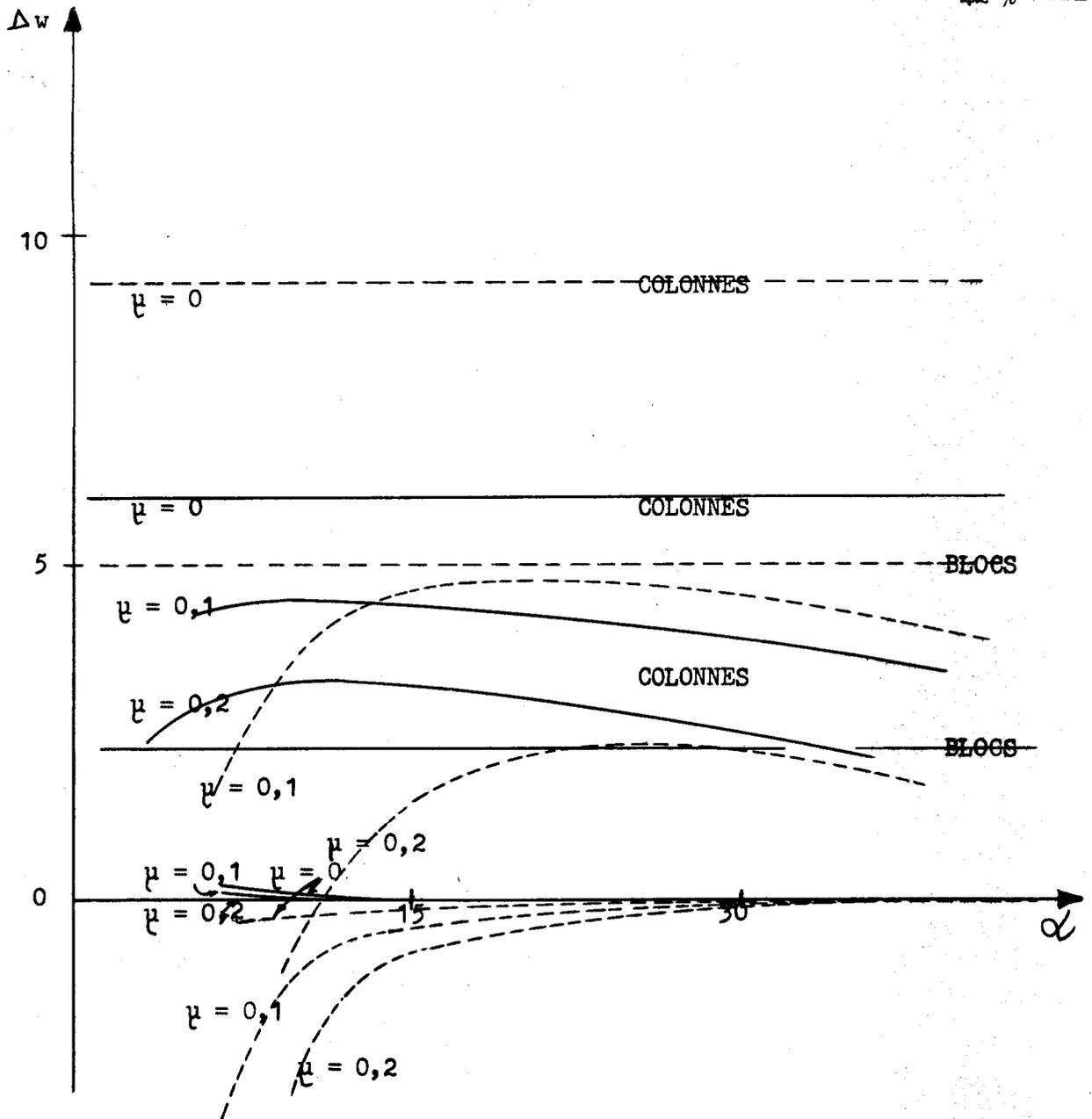
Comparaison des résultats théoriques sur l'effort d'étirage



Section rectangulaire : 24x60 mm

Rapport d'étirage réduit : 21 % ———

42 % - - - -



- G 23.6 -

### ETIRAGE DE PROFILS RECTANGULAIRES

Comparaison des résultats théoriques sur l'élargissement



Troisième Partie -

ETUDE EXPERIMENTALE

Troisième Partie -

Titre I -

SYSTEME EXPERIMENTAL

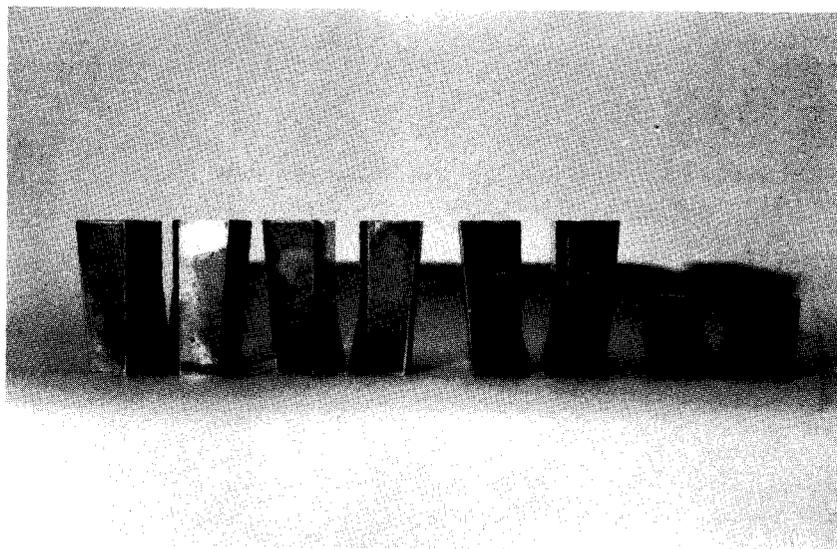
## 1 - LE DISPOSITIF D'ESSAI.

Il est composé de 4 sous-ensembles principaux : la machine, l'outillage, l'appareillage de mesure et les éprouvettes.

### 11. L'outillage.

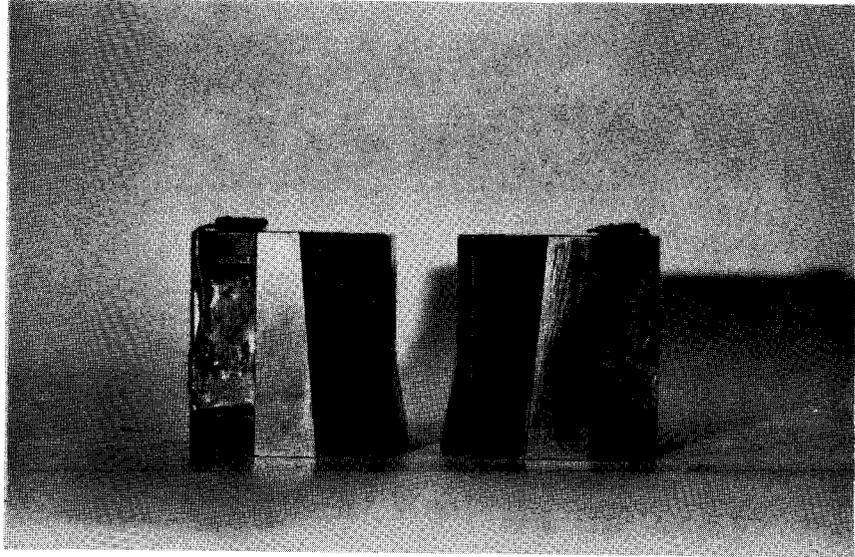
Il comporte essentiellement 4 jeux de 2 filières planes dont les demi-angles d'étirage ont pour valeur 7, 10, 15, et 30° [F 31.1]. Elles sont en acier Z 200 C 13 trempé puis rectifié et rôdé.

Chaque filière s'appuie, par une face légèrement inclinée afin de faciliter le dégagement d'une pièce partiellement étirée, sur une cale de réglage dont la dimension définit l'épaisseur du produit. Cette cale transmet les efforts subis par la filière à une cellule de mesure équipée de jauges de contrainte montées en pont complet [F 31.2].



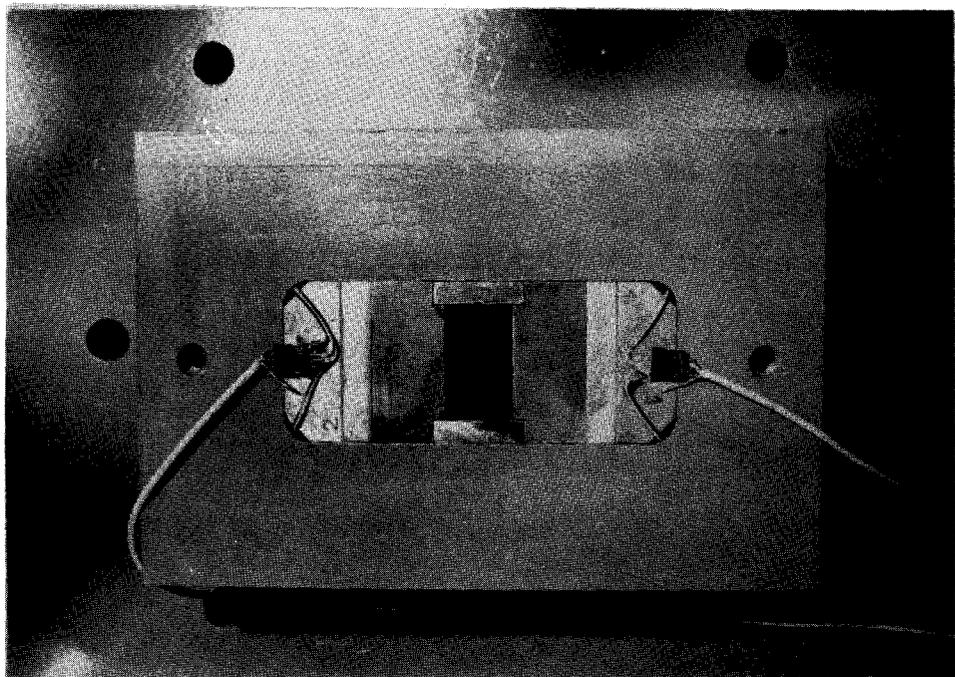
[F 31.1]

Filières d'Etirage



[F 31.2]

Vue de l'outillage démonté

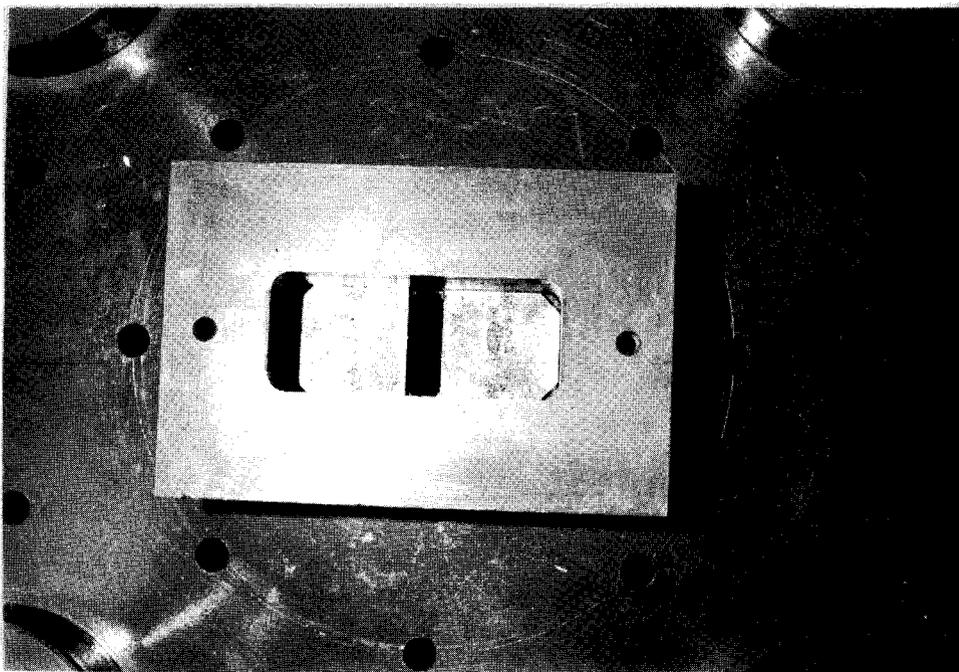


[F 31.3]

Ensemble frette et Outillage vu de dessus.

BUS  
LILLE

L'ensemble est contenu dans une frette [F 31.3] et s'appuie sur une table renforcée sous l'outillage par des plaques planes en Z 200 C 13 trempé [F 31.4]

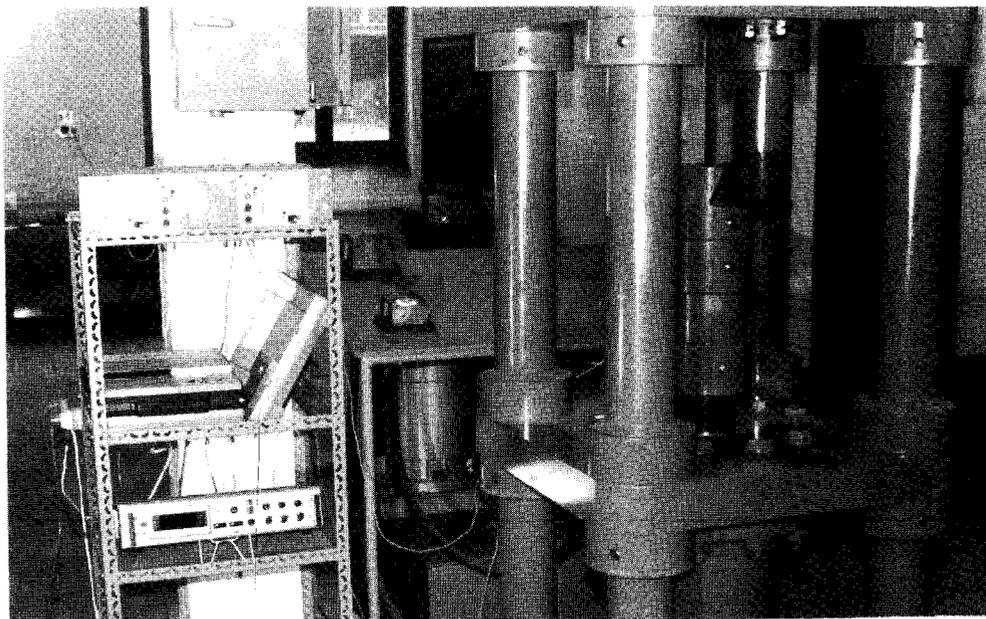


[F 31.4]  
Table d'appui.

La totalité de ce matériel a été réalisé au Département M.S.M. Le plus grand soin a été apporté au contrôle dimensionnel ainsi qu'aux états de surface des différentes pièces. Il est évident que sous les efforts imposés par l'étirage, tout défaut pourrait être cause de détérioration de l'outillage.

## 12. La machine.

L'outillage est monté sur une table de travail de la Presse M.F. du Département (capacité 50 T en traction, course 300 mm) animée par un groupe hydraulique PORTER (vitesse d'étirage de 0 à 600 mm/mn) [F 31.5].



Vue d'ensemble de la Presse MF  
en cours d'étirage

### 13. Les appareils de mesure.

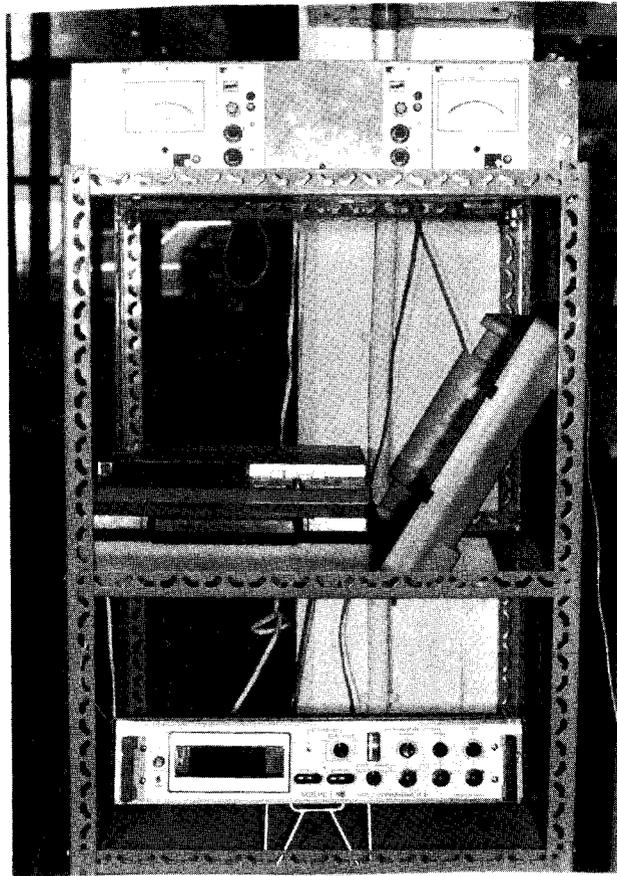
Deux paramètres sont mesurés lors des essais :

- la force d'étirage : un capteur d'effort axial à jauges est monté sur le nez du vérin. La déviation du pont de jauges est lue sur un pont de mesure SEDEM à affichage numérique.

- l'effort transversal sur chaque filière est transmis au capteur cité plus haut.

Un double pont HBM KWS permet de mesurer ces efforts.

De plus, les valeurs instantanées sont enregistrées sur enregistreur U.V. SCHLUMBERGER [F 31.6].

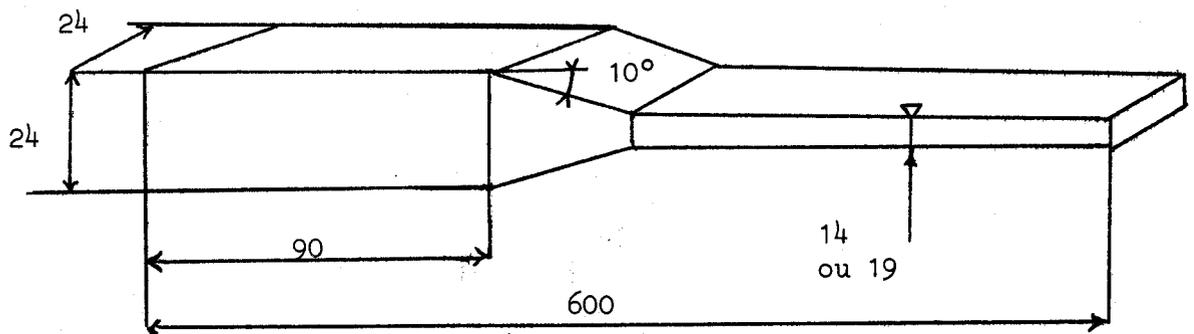


[F 31.6]

Vue d'ensemble du matériel de mesure.

#### 14. Les éprouvettes.

Les éprouvettes ont été usinées suivant [F 31.7] dans les barres d'acier doux laminées (matériau usuel en étirage).



[F 31.7]

Définition des éprouvettes.



## 2 - PROCESSUS D'ESSAI DE L'ACIER.

### 31. Préparation des éprouvettes.

L'acier doux utilisé "collant" facilement aux filières, les pièces ont été préparées avant étirage.

Le traitement, choisi pour sa simplicité ainsi que son efficacité, est le suivant :

- attaque dans solution d'acide sulfurique à 1/10, température 75°, durée 15 min. ;
- immersion dans bain de paraffine + 5 % huile de lin.

### 32. Propriétés du matériau.

Une éprouvette de traction est prélevée dans chaque série de 5 pièces.

La courbe rationnelle est obtenue par essai sur machine WOLPERT avec mesure des déformations par capteur d'allongement HBM.

### 33. Séquence d'étirage.

L'étirage est conduit normalement, sans graissage supplémentaire.

Les plus grandes précautions doivent être prises dans l'entretien des filières et le positionnement de la pièce par rapport au vérin.

Troisième Partie -

Titre II -

RESULTATS

## 1 - DETERMINATION DE LA CONTRAINTE LIMITE.

L'acier doux étant un matériau écrouissable ( $n \approx 0,23$ ) il serait sans signification d'adopter pour contrainte limite  $\sigma_0$  la contrainte limite d'élasticité  $R_e$  (de l'ordre de 30 daN/mm<sup>2</sup> pour nos aciers).

Il est donc indispensable de définir une méthode d'estimation de la contrainte limite  $\sigma_0$  d'un matériau R.P.P. dont le comportement serait globalement équivalent à celui de l'acier pour une déformation plastique particulière. Cette méthode doit tenir compte des déformations maximales subies par le matériau écrouissable (ici, l'acier) ou mieux de l'histoire des contraintes et des déformations.

La méthode adoptée est celle préconisée par ROWE [Réf. 08]. Elle peut se définir par l'équation suivante :

$$\sigma_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma \, d\varepsilon \quad [E 32.01]$$

$\sigma_0$  : contrainte limite du matériau R.P.P. équivalent.

$\sigma$  : contrainte limite pour une déformation  $\varepsilon$  du matériau R.P.E.

$\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  : bornes de la déformation plastique.

La contrainte limite  $\sigma_0$  ainsi définie est une bonne estimation du comportement réel du matériau R.P.E.

Deux lots d'une même qualité d'acier ont été utilisés.

Leurs contraintes limites équivalentes,  $\sigma_0 = R_e^*$ , sont :

- pour  $r^* = 21 \%$  ( $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 0,19$ )

Lot 1 :  $R_e^* = 46,7$  daN/mm<sup>2</sup>

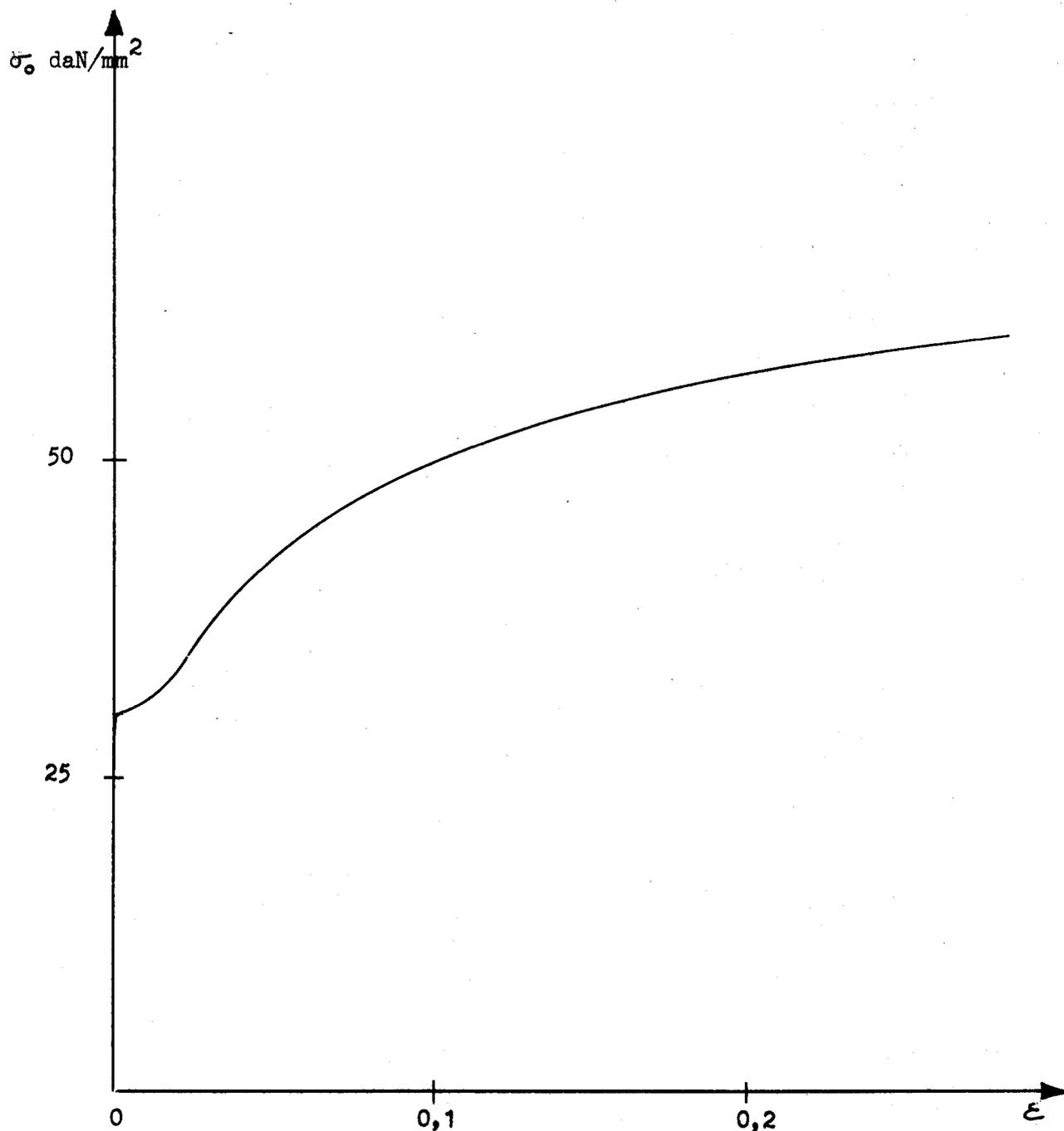
Lot 2 :  $R_e^* = 44$  daN/mm<sup>2</sup>.

- pour  $r^* = 42 \%$

$$\text{Lot 1 : } R_e^* = 54,5 \text{ daN/mm}^2$$

$$\text{Lot 2 : } R_e^* = 52,6 \text{ daN/mm}^2$$

Voir les figures 32.1 et 32.2.

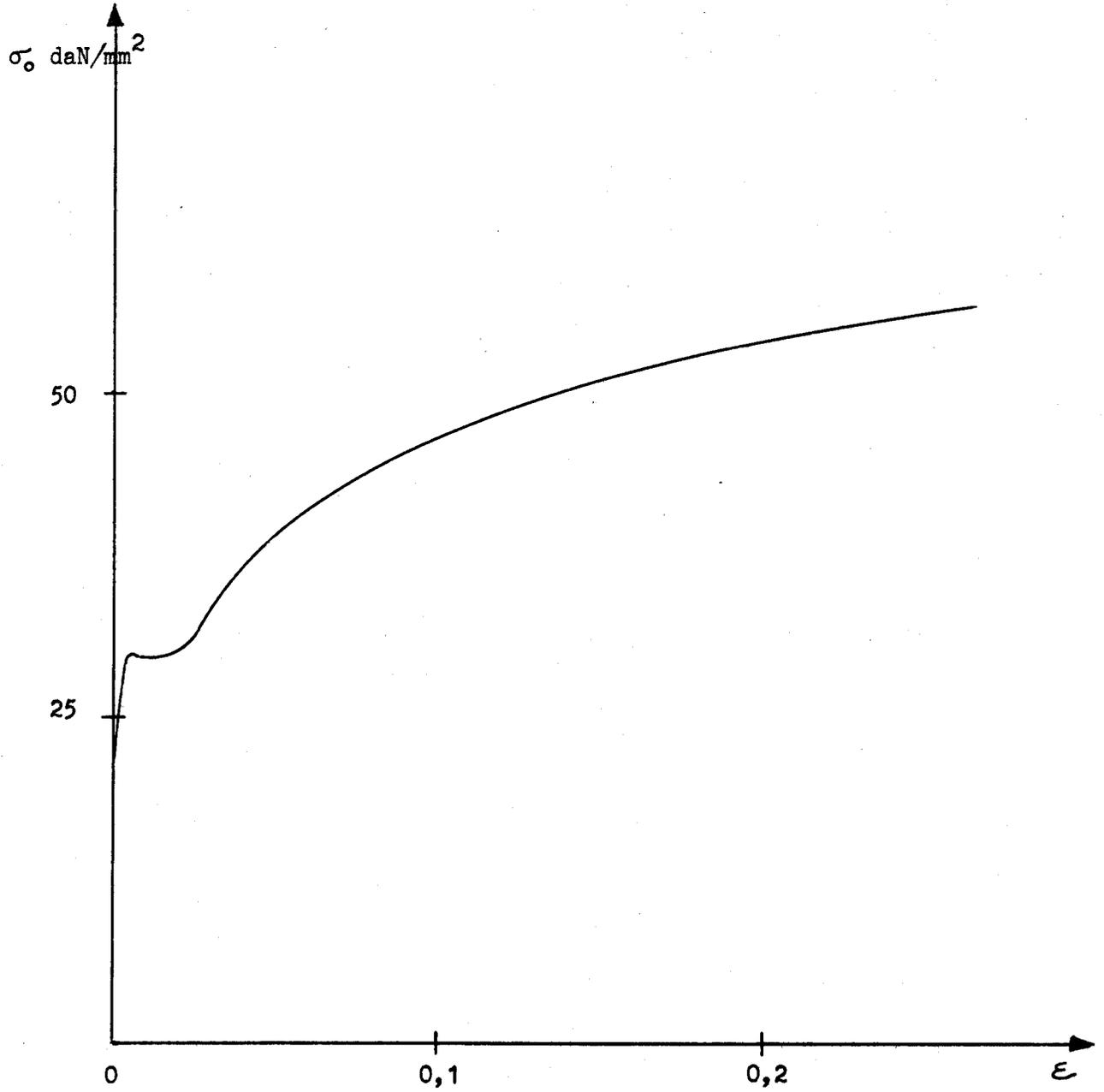


- F 32.1 -

COURBE RATIONNELLE DE TRACTION

Acier doux Lot N° 1





- F 32.2 -

COURBE RATIONNELLE DE TRACTION  
Acier doux Lot N° 2



## 2 - RESULTATS.

Les pages suivantes rassemblent les résultats obtenus sur 24 pièces.

### 21. Repérage des pièces.

Exemple type : A/14/7/1.1.

Ce repère désigne une barre en acier (A), d'épaisseur de sortie  $h_1 = 14$  mm, étirée dans un jeu de filières dont l'angle est de  $7^\circ$  (angle d'étrépage  $\alpha = 14^\circ$ ), repérée par son numéro dans la série (1) et prélevée dans le lot d'acier 1.

### 22. Efforts et Frottement.

Les efforts F (axial) et T (transversal sur une filière) ont été mesurés au cours de l'essai. Pour éliminer des dispersions inutiles, le point de mesure correspond au maxima enregistré. Ce maxima correspond toujours au début de l'écoulement permanent. Le coefficient de frottement est déduit par décomposition de ces efforts.

### 23. Elargissement $\Delta w$ .

#### 231. Elargissement moyen final.

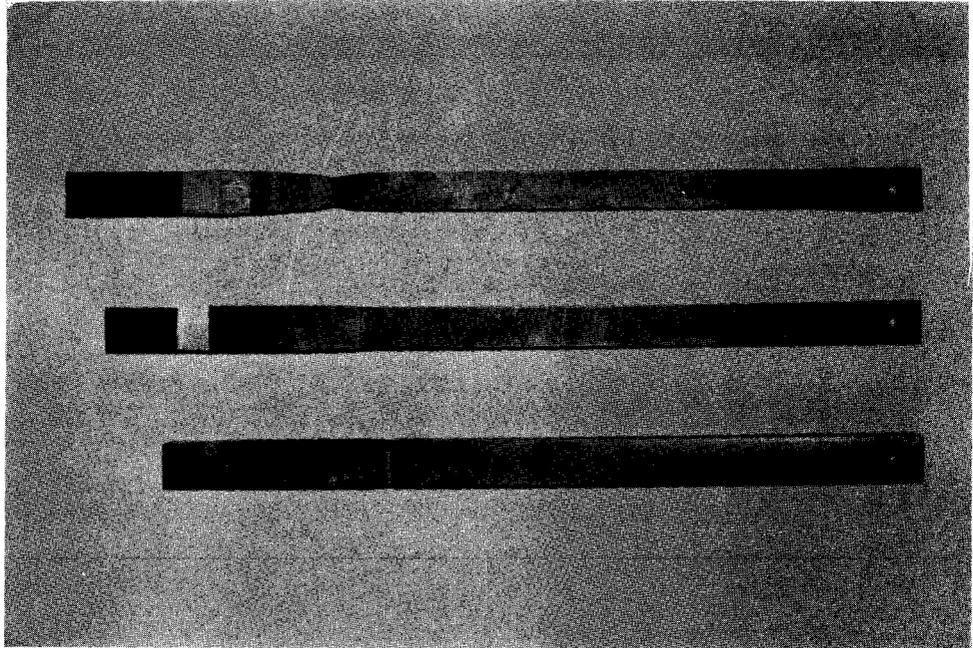
Pour assurer l'homogénéité des résultats, il est déterminé dans la section correspondant aux mesures des efforts.

D'autre part la forme latérale des pièces (voir Profil) n'est pas strictement conforme à l'hypothèse des sections rectangulaires. La forme d'une section a été mesurée au projecteur de profil, ce qui a permis de déterminer un élargissement moyen pour une section rectangulaire équivalente.

232. Zone de Transition.

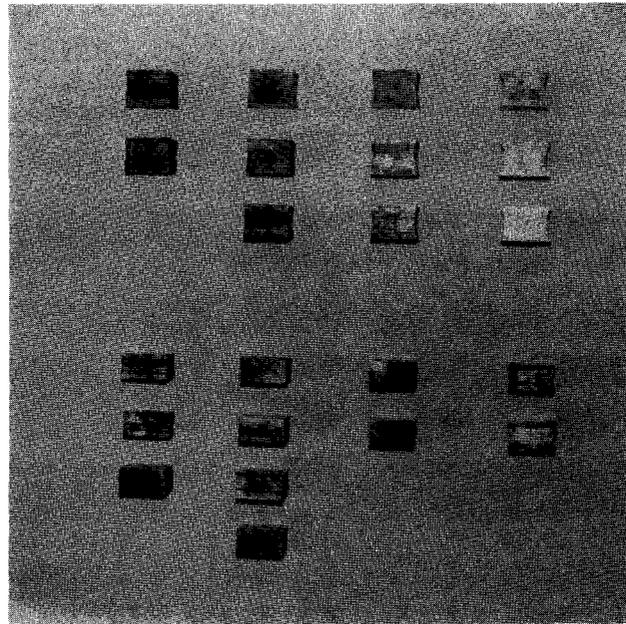
La forme de la zone de transition a été déterminée par la mesure des élargissements moyens des sections en cours d'étirage.

Seules les pièces étirées dans les filières de 7° et 10° ont pu être analysées. La zone d'étirage est trop courte pour les autres pièces.



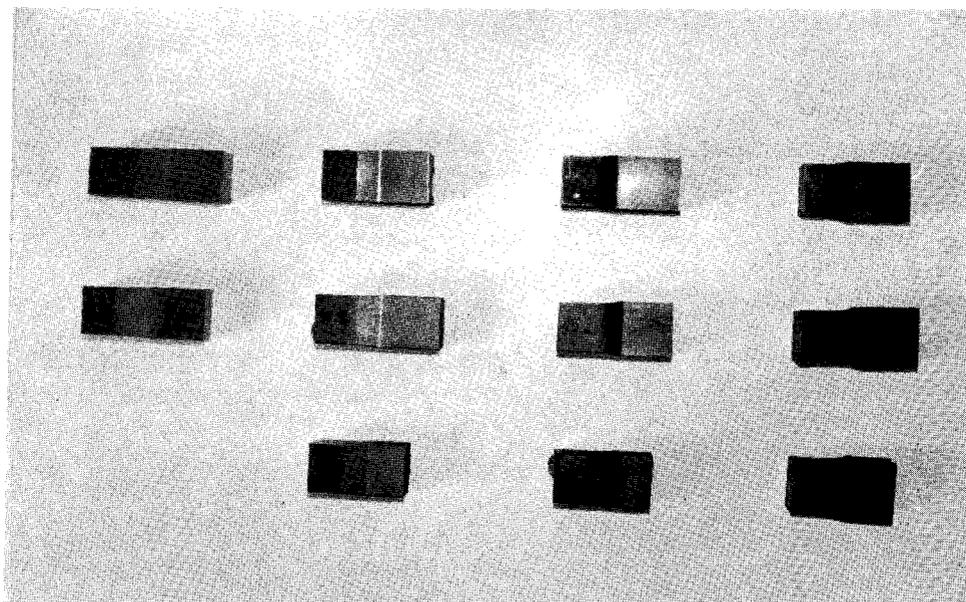
[F 32.3]

- Barres d'essai étirées -



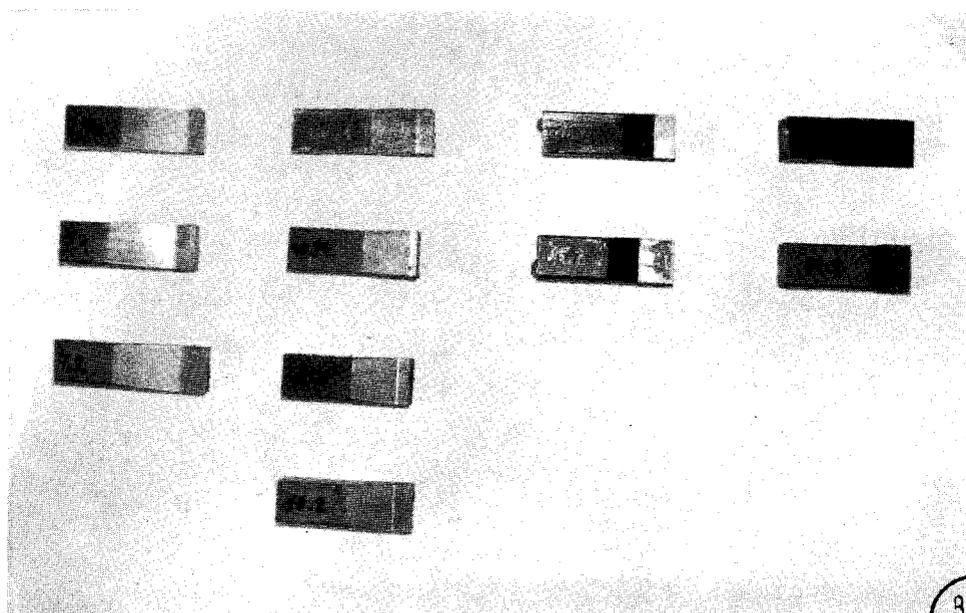
[F 32.4]

- Aspects des différentes sections des zones étirées -



[F 32.5]

- Zones de transition pour les barres étirées à 21 % -



BUS  
LILLE

[F 32.6]

- Zones de transition pour les barres étirées à 42 % -

$\alpha = 7^\circ$

$R_e = 54,5 \text{ daN/mm}^2$

EFFORTS :

F = 14800 daN

T = 76325 daN

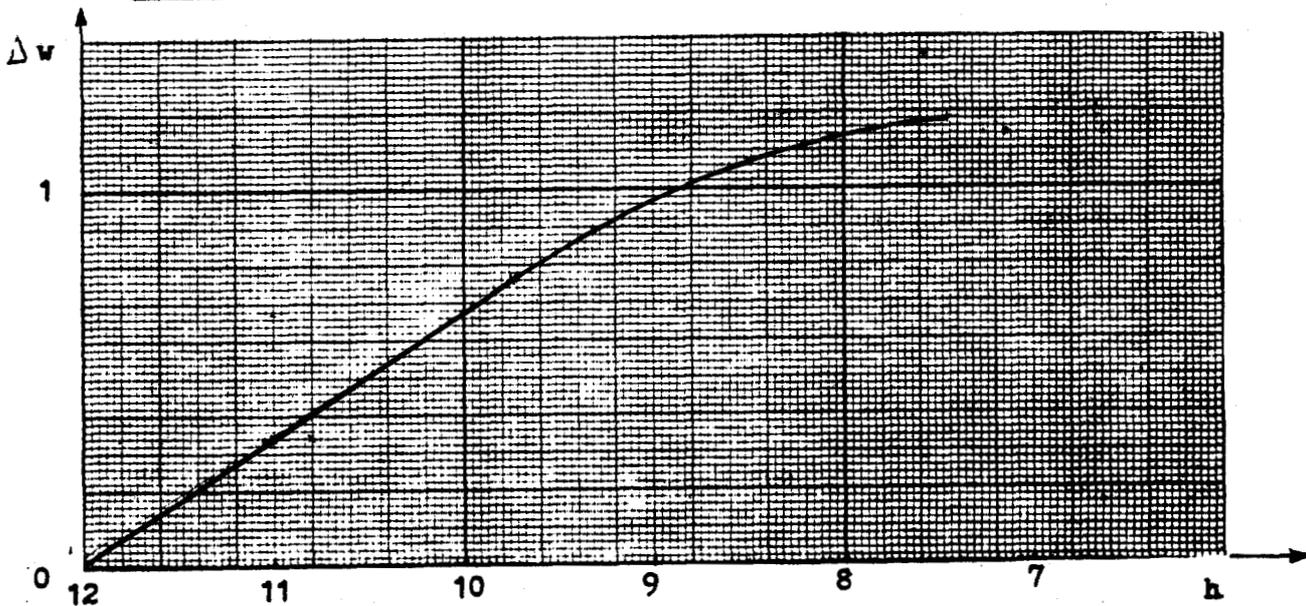
FROTTEMENT :

$\mu = 0,0255$

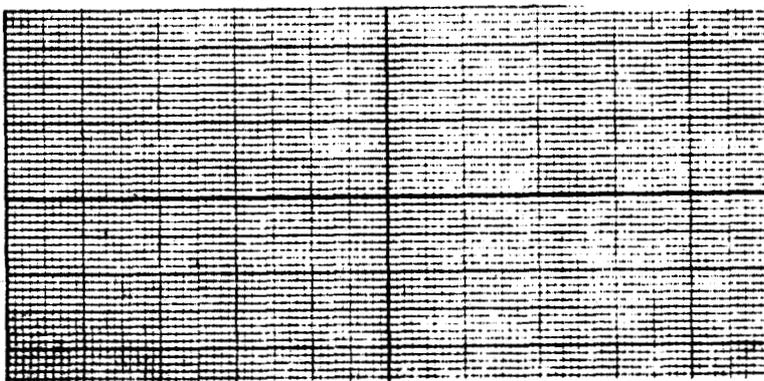
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	14,45	Epaisseur	24	22,1	19,57	17	14,49
Largeur	26,63	Largeur	24,03	24,70	25,52	26,13	26,37
	26,35		24,03	24,68	25,57	26,19	26,36
	26,60		24,03	24,62	25,52	26,12	26,37
Largeur moy	26,45	Largeur moy	24,03	24,675	25,536	26,146	26,36

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



REMARQUES : Marques en relief laissées par arêtes de l'éprouvette sur les filières.



Echelle 5

$\alpha = 7^\circ$   $R_e^* = 54,5 \text{ daN/mm}^2$

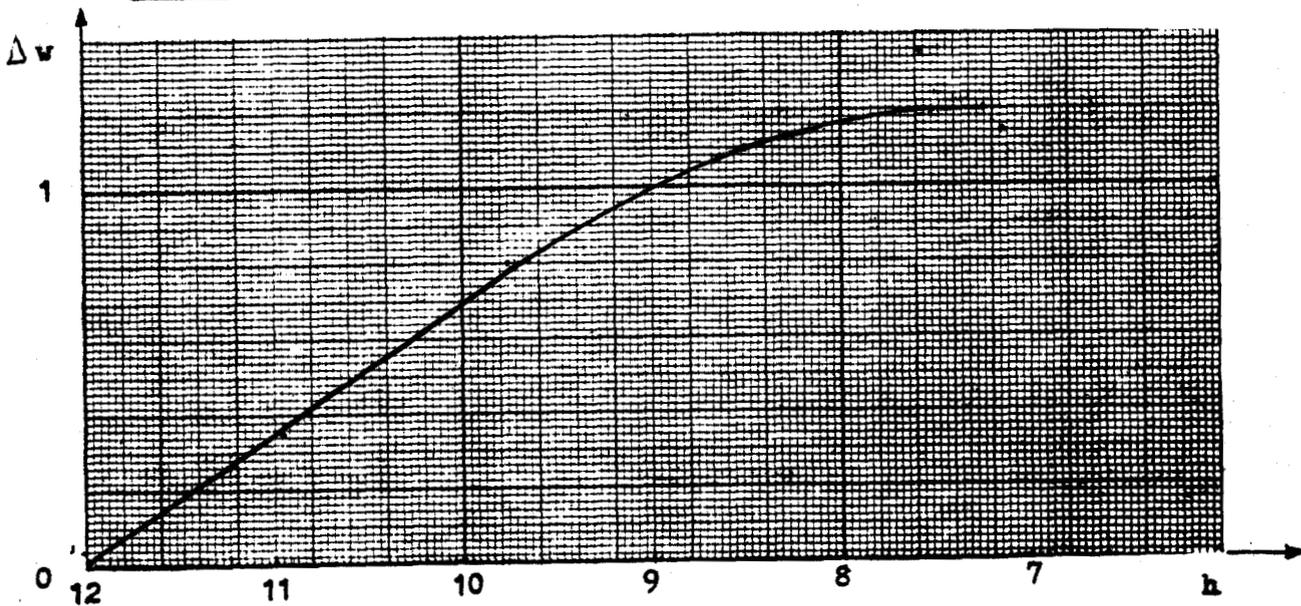
EFFORTS :  $F = 15300 \text{ daN}$   $T = 76000 \text{ daN}$

FROTTEMENT :  $\mu = 0,0219$

ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	14,50	Epaisseur	23,97	21,9	19,44	17	14,50
Largeur	26,65	Largeur	24,03	24,67	25,59	26,16	26,41
	26,44		24,06	24,80	25,63	26,30	26,42
	26,65		24,03	24,70	25,58	26,19	26,42
Largeur moy	26,52	Largeur moy	24,04	24,71	25,595	26,21	26,415

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



REMARQUES : Traces en relief laissées par les arêtes de l'éprouvette sur les filières.



$\alpha = 7^\circ$

$R_e^* = 52,6 \text{ daN/mm}^2$

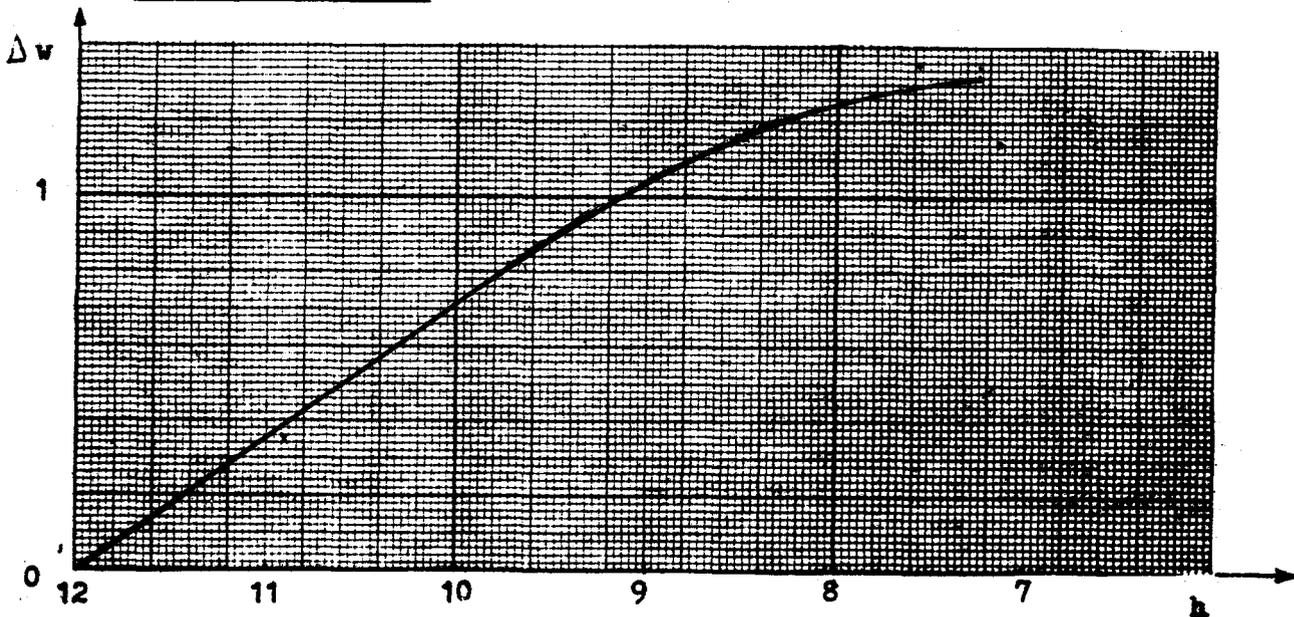
EFFORTS :  $F = 13270 \text{ daN}$   $T = 68600 \text{ daN}$

FROTTEMENT :  $\mu = 0,0258$

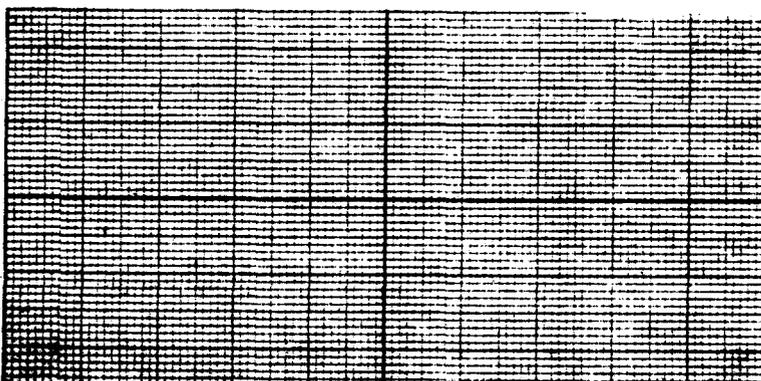
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	14,50	Epaisseur	23,97	21,8	19,37	16,93	14,50
Largeur	26,96	Largeur	24	24,71	25,74	26,44	26,76
	26,46		24,02	24,66	25,52	26,14	26,40
	26,96		23,99	24,70	25,68	26,39	26,77
Largeur moy	26,66	Largeur moy	24,005	24,69	25,65	26,32	26,64

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



REMARQUES : Légères traces en relief laissées par arêtes de l'éprouvette sur les filières.



$\alpha = 7^\circ$

$R_e^* = 52,6 \text{ daN/mm}^2$

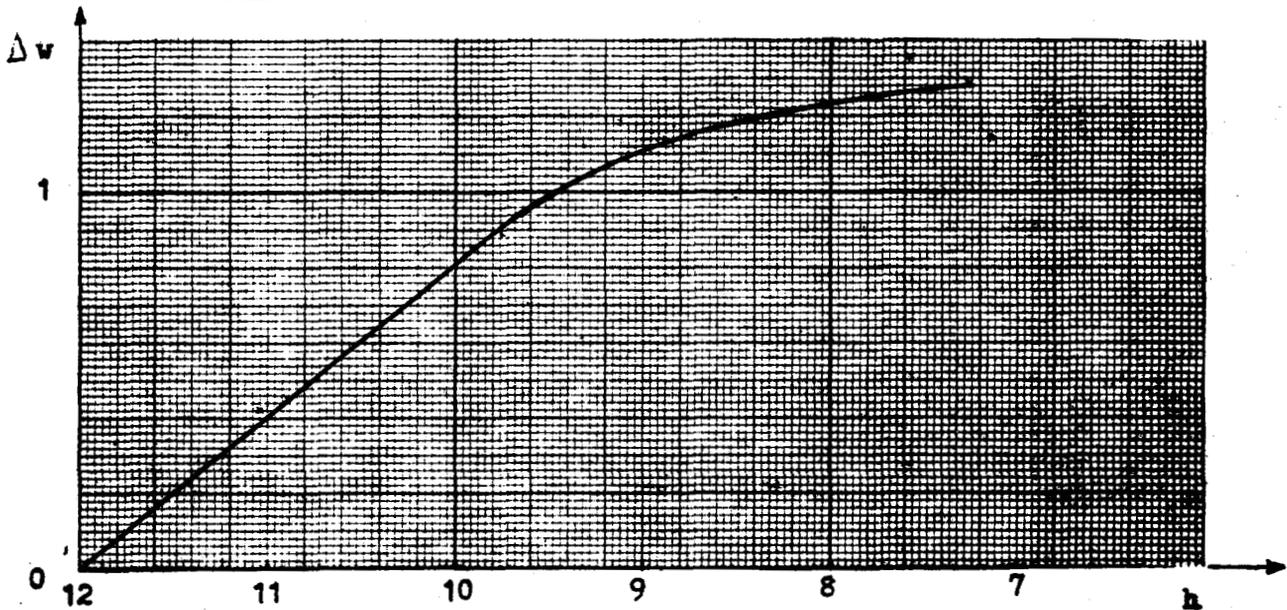
EFFORTS :  $F = 13100 \text{ daN}$   $T = 65000 \text{ daN}$

FROTTEMENT :  $\mu = 0,0217$

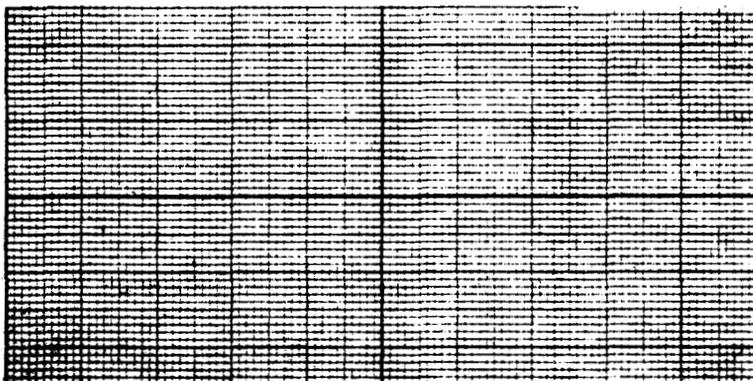
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	14,50	Epaisseur	23,96	22,1	19,57	17	14,5
Largeur	26,90	Largeur	24	24,89	25,90	26,46	26,72
	26,32		24	24,81	25,66	26,16	26,32
	26,70		24	24,86	25,80	26,49	26,56
Largeur moy	26,51	Largeur moy	24	24,85	25,78	26,37	26,57

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



Echelle 5

REMARQUES : Marques en relief laissées par arêtes de l'éprouvette sur les filières.  
Eprouvette abîmée à la sortie des filières.



$\alpha = 7^\circ$

$R_e^* = 46,7 \text{ daN/mm}^2$

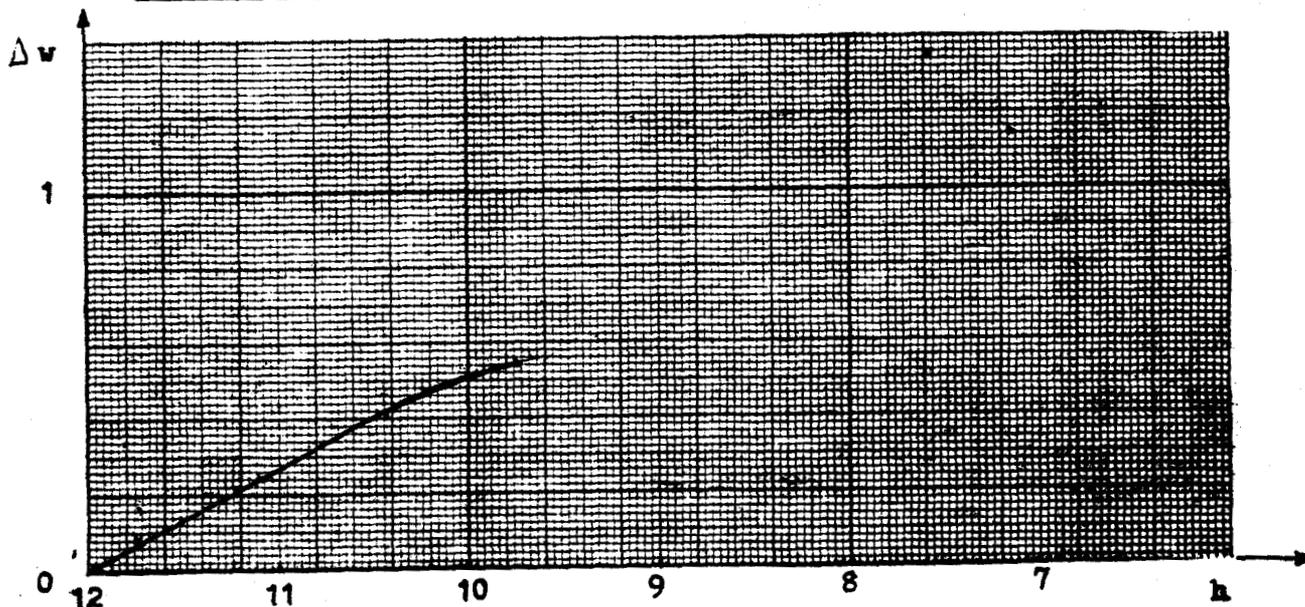
EFFORTS :  $F = 7700 \text{ daN}$        $T = 35750 \text{ daN}$

FROTTEMENT :  $\mu = 0,0149$

ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

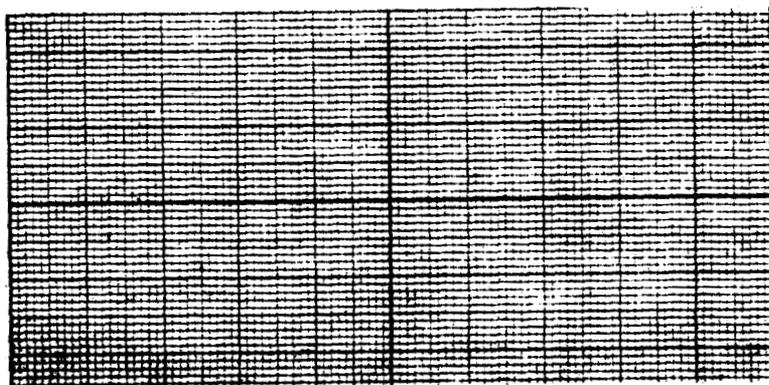
Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	19,55	Epaisseur	24,02	23,48	22,2	20,86	19,55
Largeur	25,50	Largeur	23,99	24,16	24,43	24,80	25,16
	24,98		24,03	24,21	24,65	24,89	24,96
	25,45		23,98	24,14	24,40	24,78	25,15
Largeur moy	25,18	Largeur moy	24	24,17	24,49	24,82	25,09

ZONE DE TRANSITION



PROFIL

REMARQUES : Marques pratiquement inexistantes sur les filières.



Echelle 5



$\alpha = 7^\circ$

$R_e^* = 44$

daN/mm<sup>2</sup>

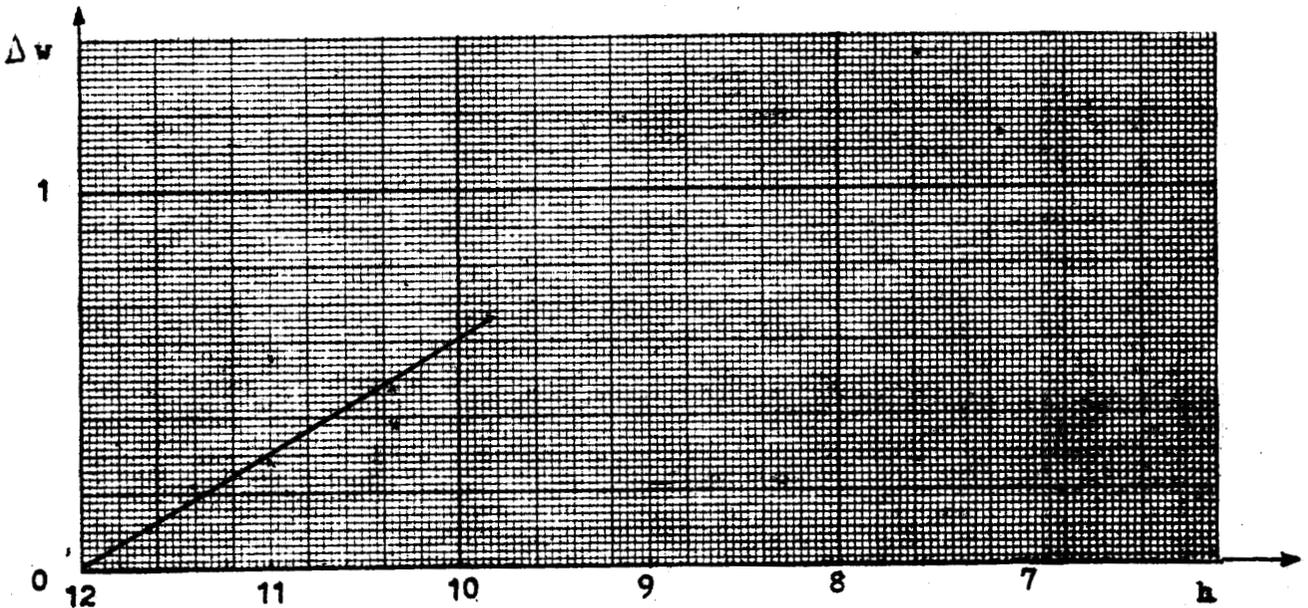
EFFORTS :                    F = 6600      daN                    T = 30500      daN

FROTTEMENT :                     $\mu = 0,0144$

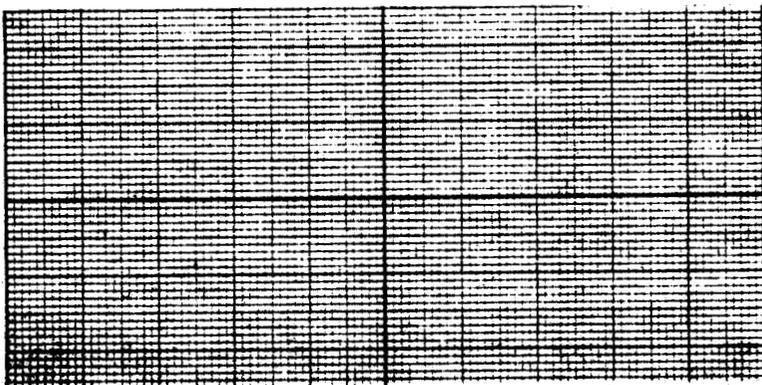
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	19,50	Epaisseur	23,98	23,25	22	20,75	19,50
Largeur	25,67	Largeur	24,01	24,25	24,55	25,12	25,56
	24,96		24,04	24,18	24,65	24,83	24,95
	25,69		24,02	24,24	24,50	24,95	25,45
Largeur moy	25,24	Largeur moy	24,02	24,22	24,56	24,96	25,32

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



REMARQUES : Très légères traces pratiquement insensibles au toucher laissées par les arêtes de l'éprouvette sur les filières.



$\alpha = 7^\circ$

$R_e^* = 46,7 \text{ daN/mm}^2$

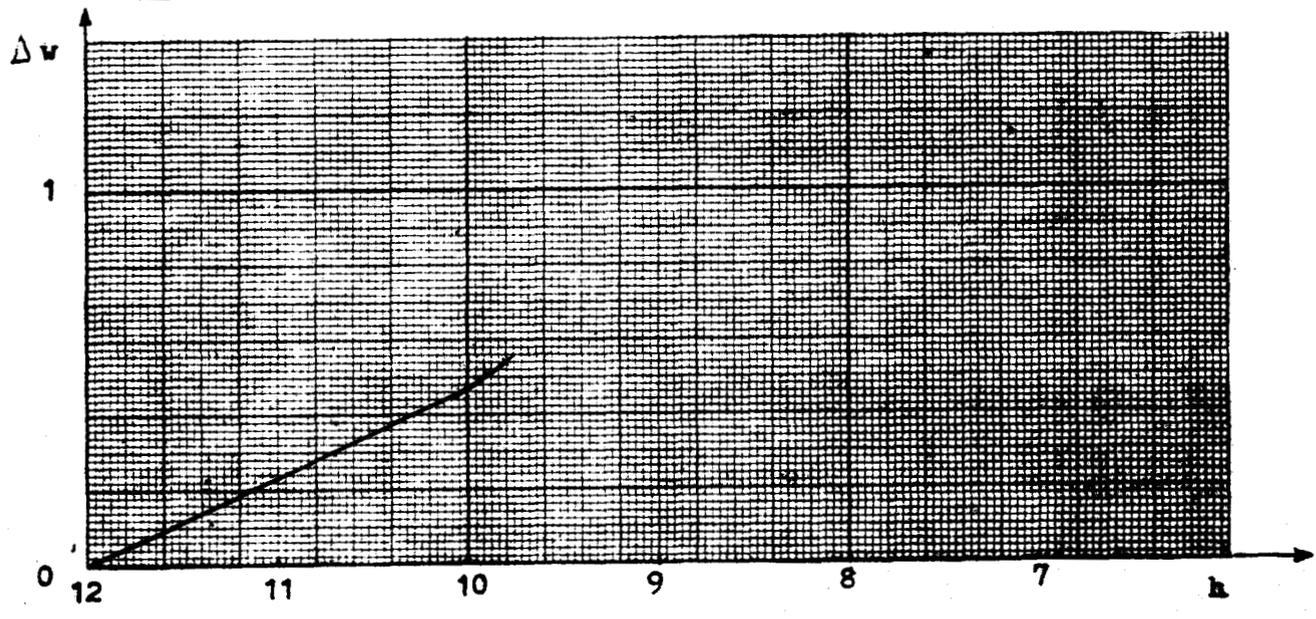
EFFORTS :  $F = 7300 \text{ daN}$   $T = 33500 \text{ daN}$

FROTTEMENT :  $\mu = 0,0136$

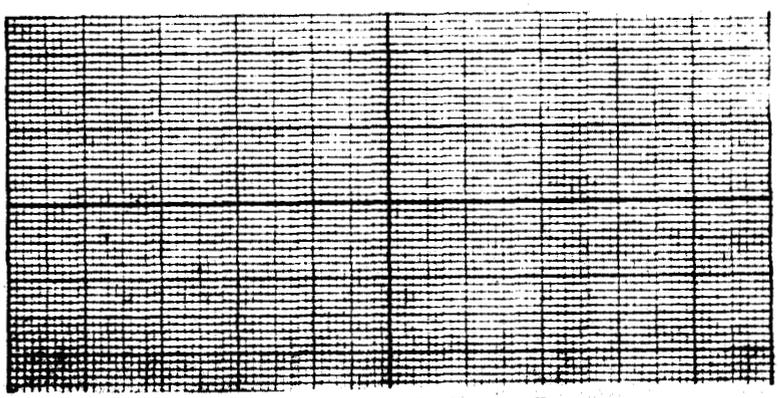
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	19,58	Epaisseur	24	22,7	21,4	20,1	19,58
Largeur	25,46	Largeur	23,96	24,19	24,52	24,87	25,08
	25,05		24,01	24,31	24,65	24,86	24,98
	25,48		24	24,20	24,56	24,96	25,20
Largeur moy	25,35	Largeur moy	23,99	24,23	24,58	24,89	25,09

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



REMARQUES : Très légères traces insensibles au toucher laissées par les éprouvettes sur les filières.



$\alpha = 10^\circ$

$R_b^* = 54,5 \text{ daN/mm}^2$

EFFORTS :

F = 15750 daN

T = 54500 daN

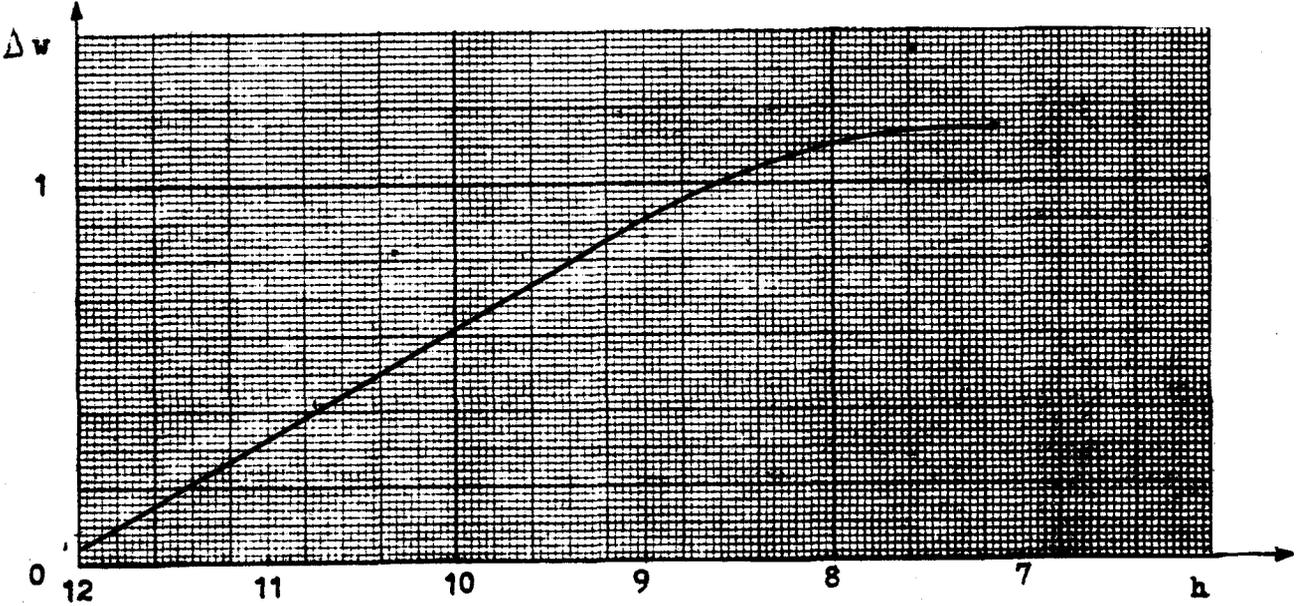
FROTTEMENT :

$\mu = 0,031$

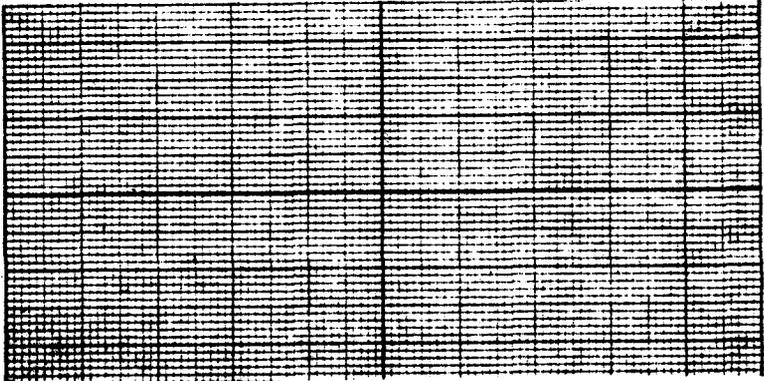
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition				
Epaisseur	14,45	Epaisseur	24	21,5	18	14,45
Largeur	26,21	Largeur	24,04	24,84	25,67	25,97
	26,20		24,10	24,75	25,91	26,12
	26,33		24,09	24,82	25,73	26,04
Largeur moy	26,23	Largeur moy	24,08	24,82	25,73	26,04

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



REMARQUES : Marques laissées sur les filières par toute la face étirée mais pratiquement sans relief au toucher.



$\alpha = 10^\circ$

$R_e^* = 52,6 \text{ daN/mm}^2$

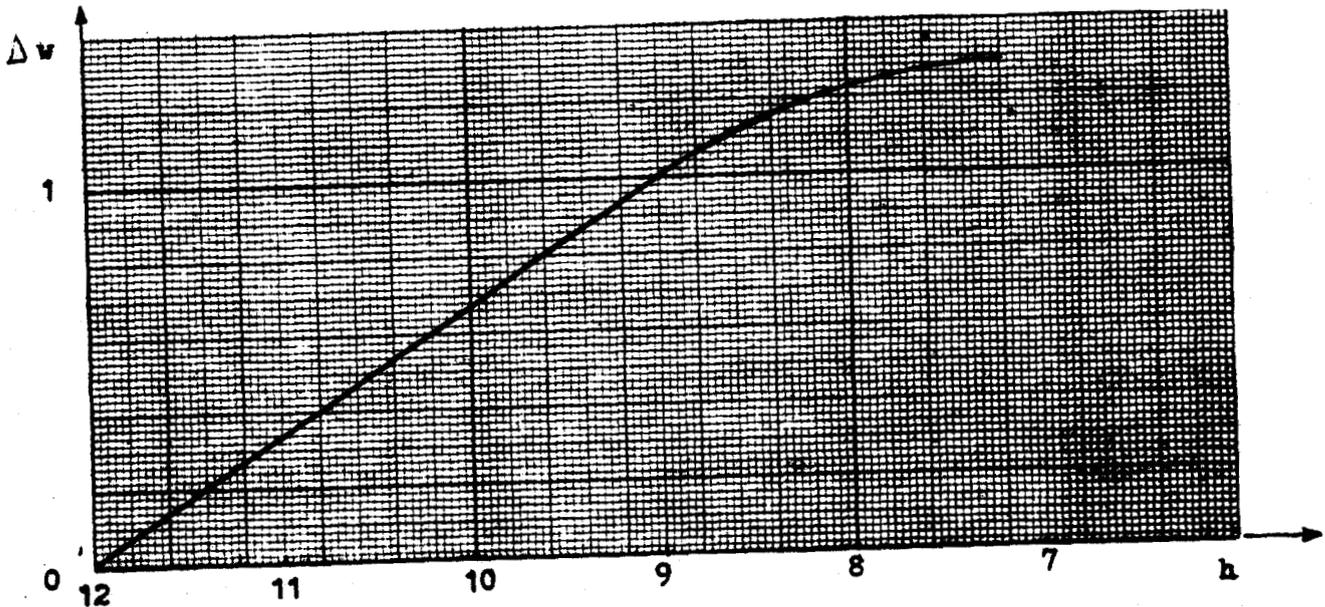
EFFORTS :  $F = 13100 \text{ daN}$   $T = 54500 \text{ daN}$

FROTTEMENT :  $\mu = 0,055$

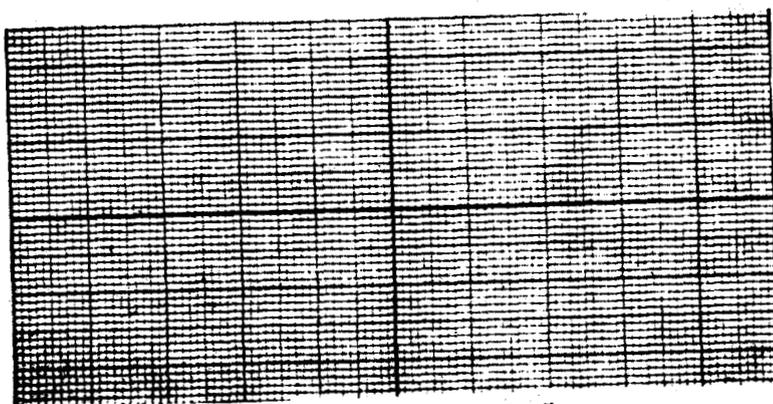
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	14,40	Epaisseur	24	21,5	18	14,40	
Largeur	26,73	Largeur	24,02	24,9	26,01	26,72	
	26,34		24,02	24,67	25,93	26,36	
	26,79		24,01	24,93	26,05	26,73	
Largeur moy	26,51	Largeur moy	24,01	24,83	26	26,60	

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



REMARQUES : Traces en relief laissées par les arêtes de la pièce sur les filières.



$\alpha = 10^\circ$

$R_e^* = 54,5 \text{ daN/mm}^2$

EFFORTS :

F = 15100 daN

T = 50000 daN

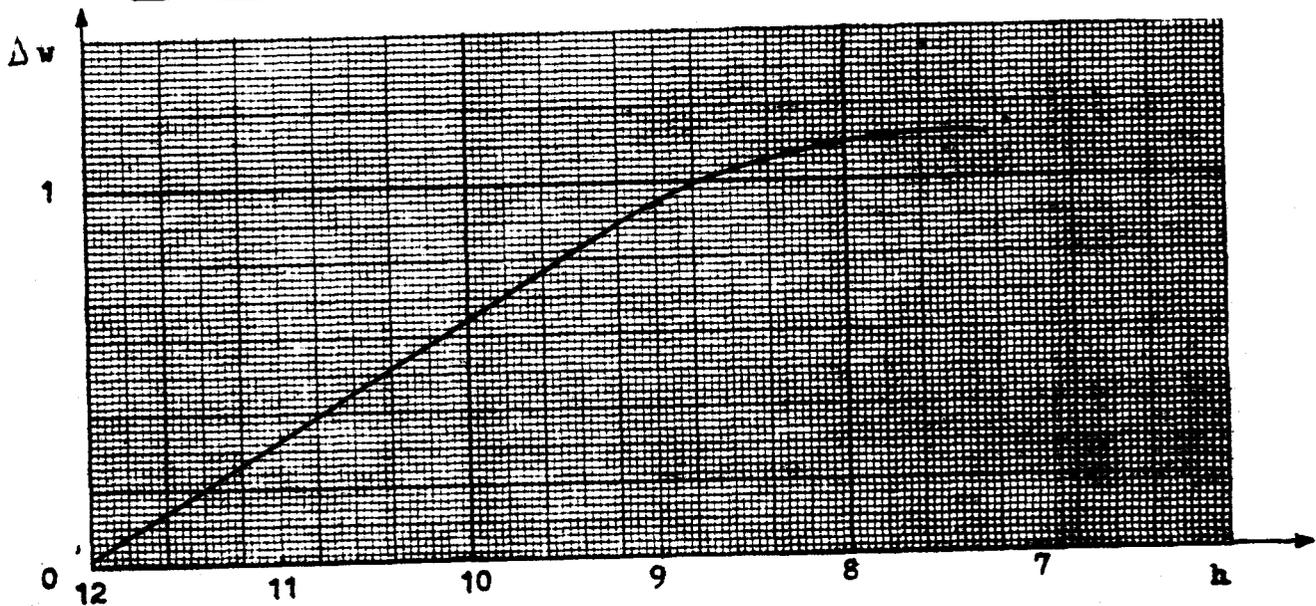
FROTTEMENT :

$\mu = 0,0247$

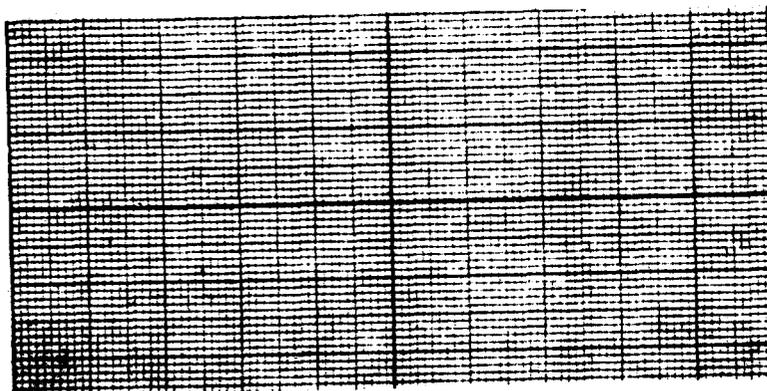
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition				
Epaisseur	14,50	Epaisseur	23,99	21,7	18,1	14,50
Largeur	26,41	Largeur	24,07	24,82	25,80	26,15
	26,36		24,07	24,76	26,05	26,33
	26,46		24,02	24,75	25,77	26,33
Largeur moy	26,39	Largeur moy	24,05	24,77	25,87	26,24

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



REMARQUES : Traces en relief laissées

par les arêtes de l'éprouvette sur les filières.



$\alpha = 10^\circ$

$R_p = 52,6 \text{ daN/mm}^2$

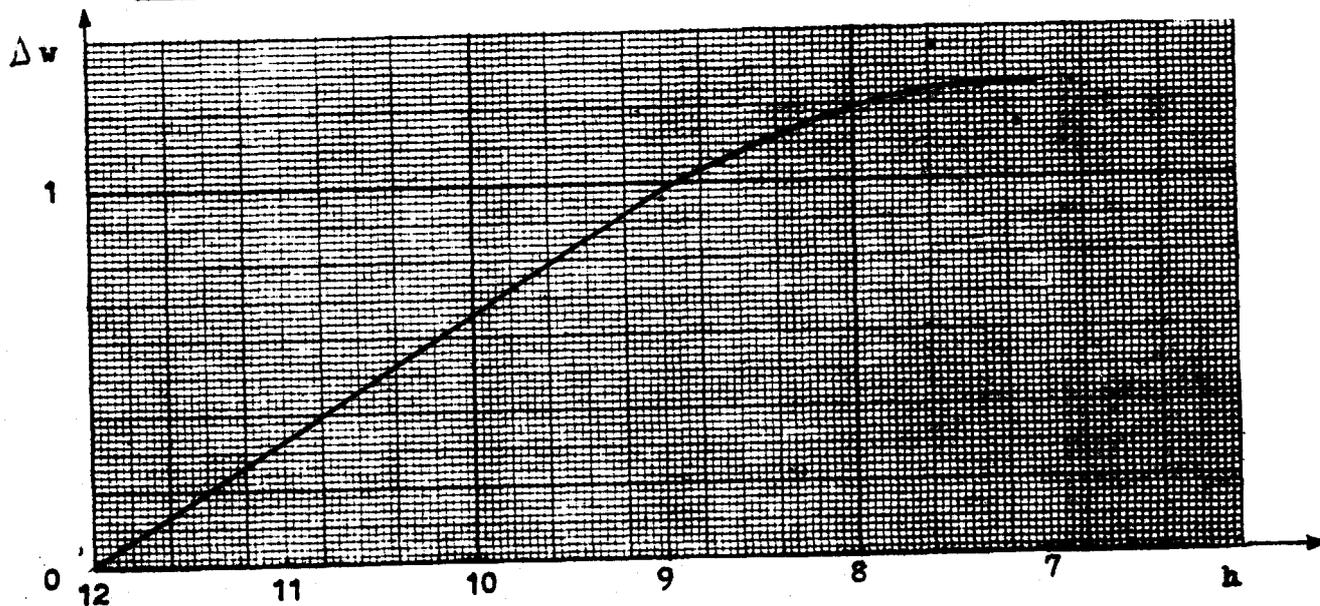
EFFORTS :  $F = 12850 \text{ daN}$   $T = 47500 \text{ daN}$

FROTTEMENT :  $\mu = 0,040$

ÉLARGISSEMENT :  $\Delta w$

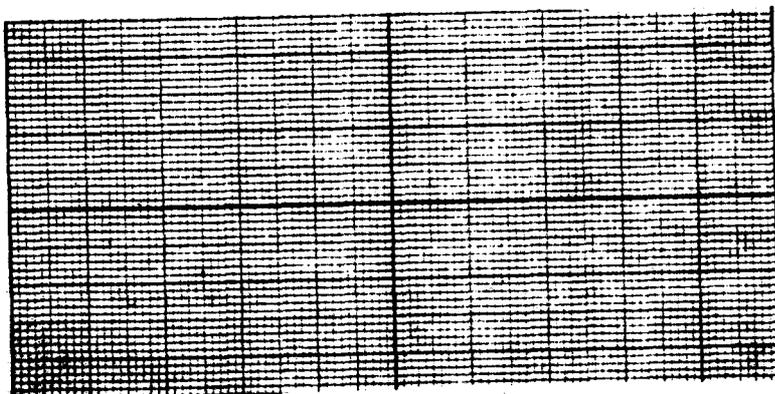
Zone étirée		Zone de transition					
Épaisseur	14,45	Épaisseur	23,98	21,5	19,75	18	14,45
Largeur	26,61	Largeur	23,99	24,82	25,55	25,99	26,57
	26,31		24,03	24,62	25,29	25,86	26,36
	26,67		23,98	24,91	25,54	25,93	26,54
Largeur moy	26,44	Largeur moy	24	24,78	25,46	25,92	26,49

ZONE DE TRANSITION



PROFIL

REMARQUES : Marques en relief laissées par l'éprouvette sur les filières.



$\alpha = 10^\circ$

$R_e^* = 54,5 \text{ daN/mm}^2$

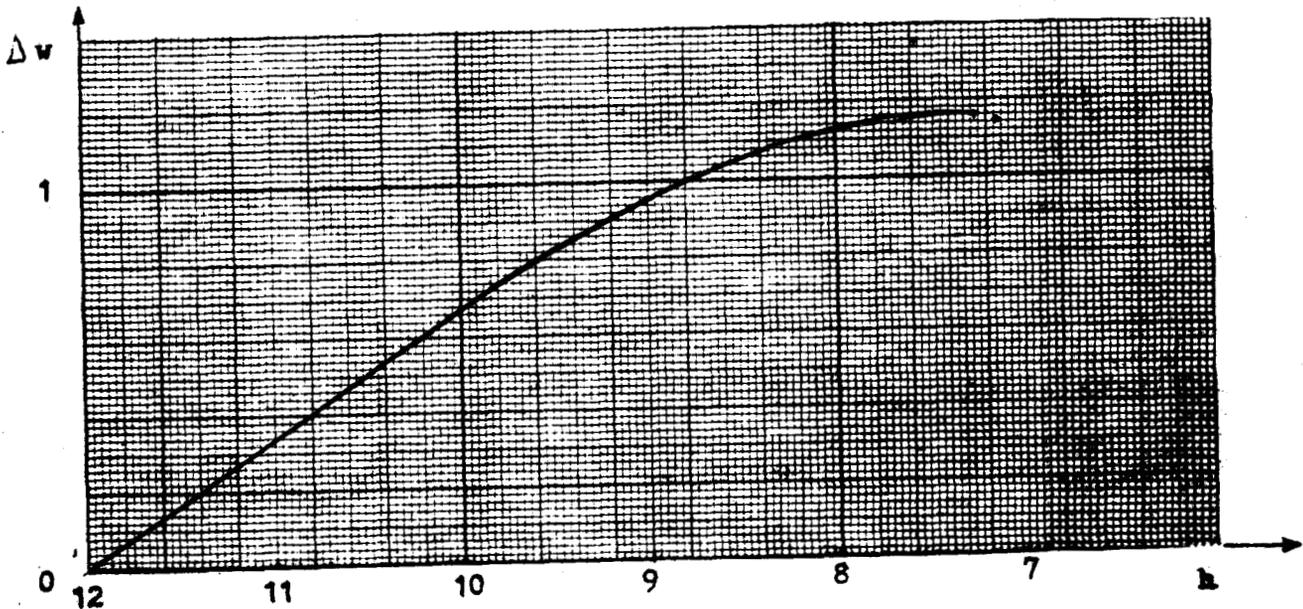
EFFORTS :  $F = 15000 \text{ daN}$   $T = 51000 \text{ daN}$

FROTTEMENT :  $\mu = 0,0285$

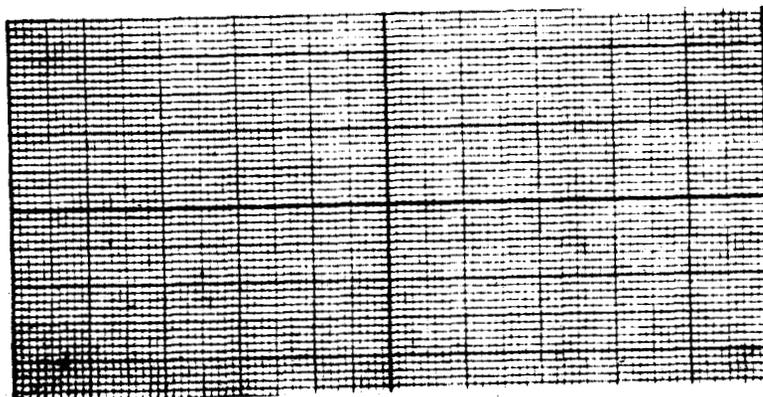
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition				
Epaisseur	14,50	Epaisseur	24	20,35	16,7	14,50
Largeur	26,43	Largeur	24,05	25,20	26	26,28
	26,35		24,08	25,36	26,32	26,41
	26,43		24,05	25,20	26,15	26,33
Largeur moy	26,38	Largeur moy	24,06	25,25	26,16	26,33

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



REMARQUES : Marques en relief laissées par les arêtes de l'éprouvette sur les filières.



$\alpha = 10^\circ$

$R_e^* = 46,7 \text{ daN/mm}^2$

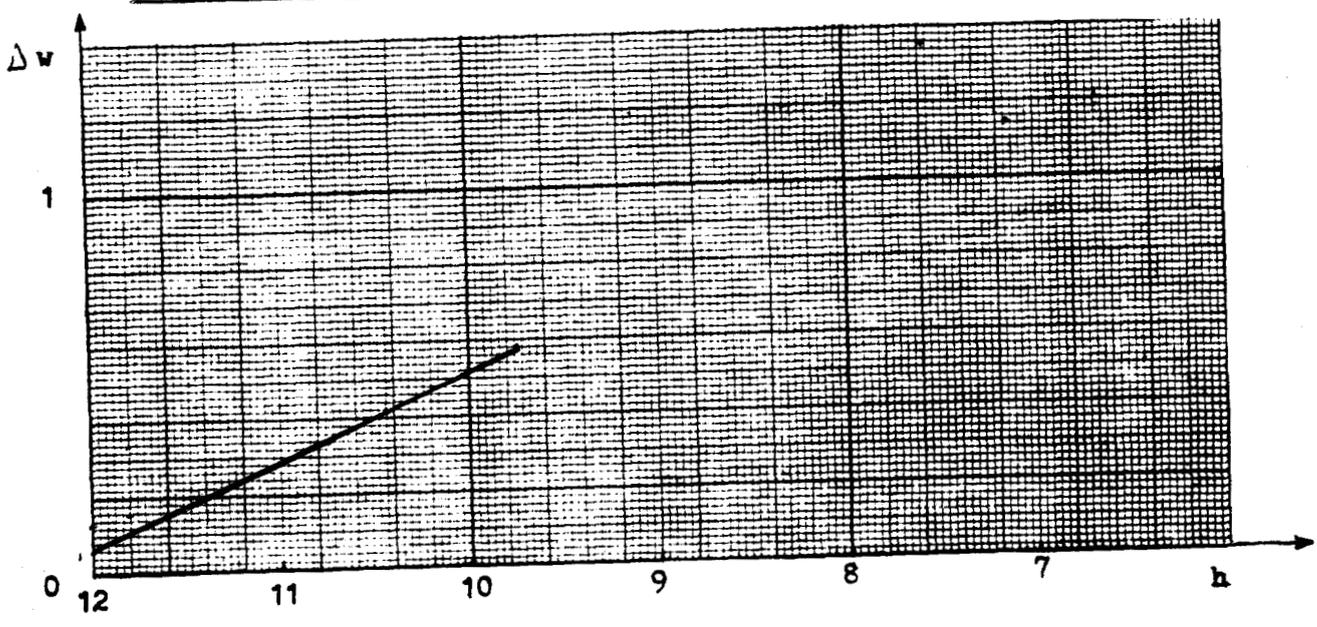
EFFORTS :  $F = 7700 \text{ daN}$        $T = 26750 \text{ daN}$

FROTTEMENT :  $\mu = 0,032$

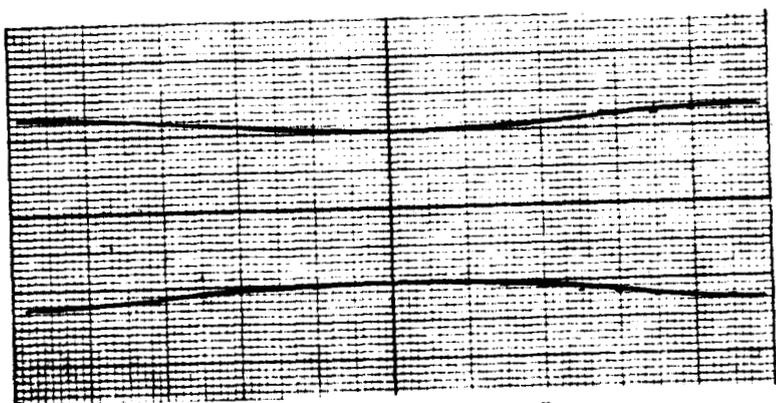
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	19,50	Epaisseur	24,01	23,59	21,55	19,50	
Largeur	25,61	Largeur	24,11	24,26	24,83	25,42	
	24,87		24,17	24,28	24,57	24,78	
	25,50		24,12	24,27	24,80	25,32	
Largeur moy	25,09		Largeur moy	24,13	24,27	24,67	25,17

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



Echelle 5

REMARQUES : Marques pratiquement invisibles et insensibles au toucher laissées par les arêtes de l'éprouvette sur les filières.



$\alpha = 10^\circ$

$R_e^* = 44$

daN/mm<sup>2</sup>

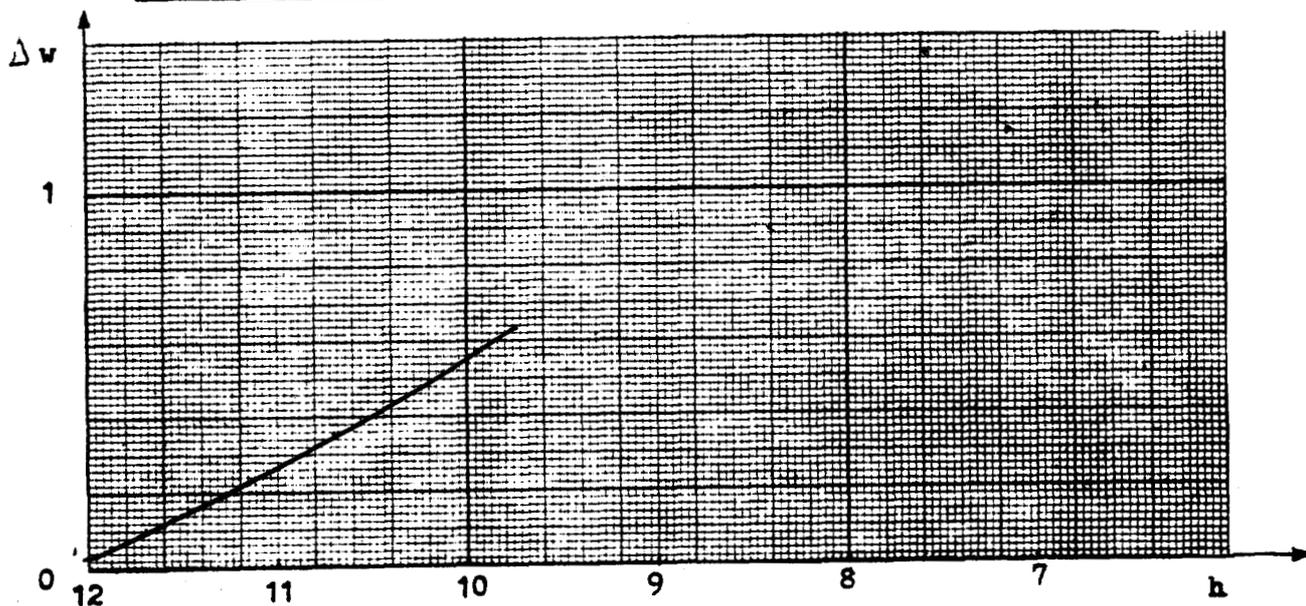
EFFORTS :                    F = 6900    daN                    T = 23500    daN

FROTTEMENT :                     $\mu = 0,029$

ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	19,50	Epaisseur	23,97	23,40	21,45	19,50	
Largeur	25,73	Largeur	24,08	24,20	24,82	25,61	
	24,76		24,04	24,12	24,42	24,67	
	25,72		24,02	24,24	24,87	25,50	
Largeur moy	25,08	Largeur moy	24,03	24,19	24,70	25,26	

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



Echelle 5

REMARQUES : Marques pratiquement

invisibles laissées par les arêtes de l'éprouvette sur les filières.



$\alpha = 15^\circ$

$R_e^* = 54,5 \text{ daN/mm}^2$

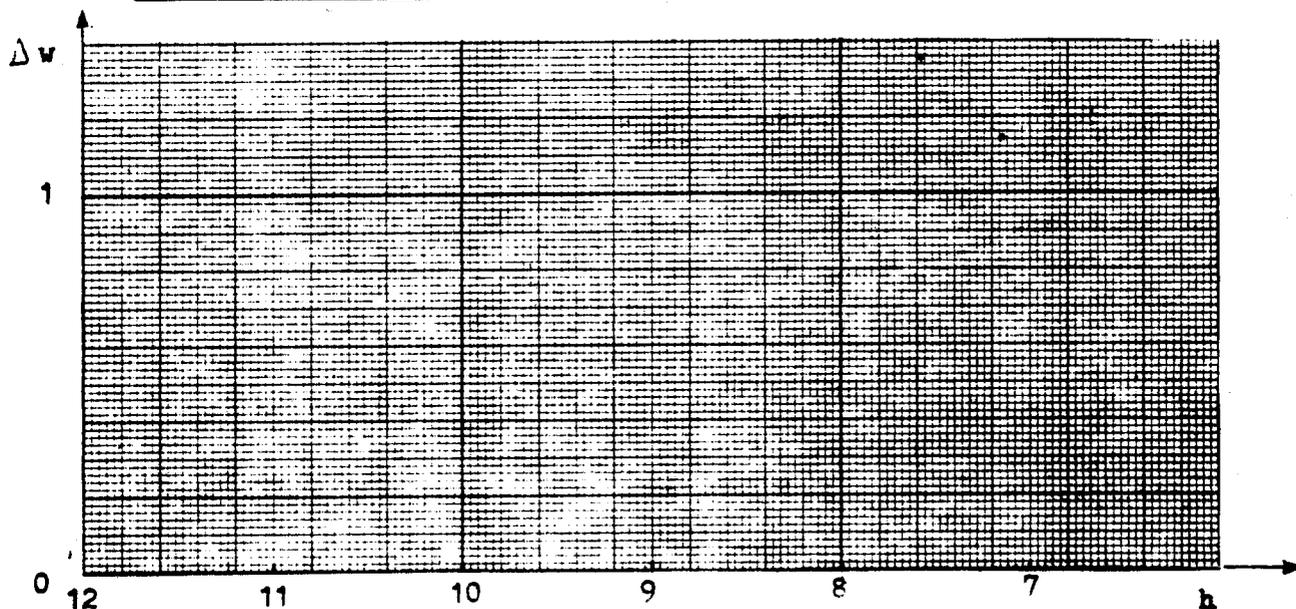
EFFORTS : F = 14500 daN T = 35000 daN

FROTTEMENT :  $\mu = 0,0576$

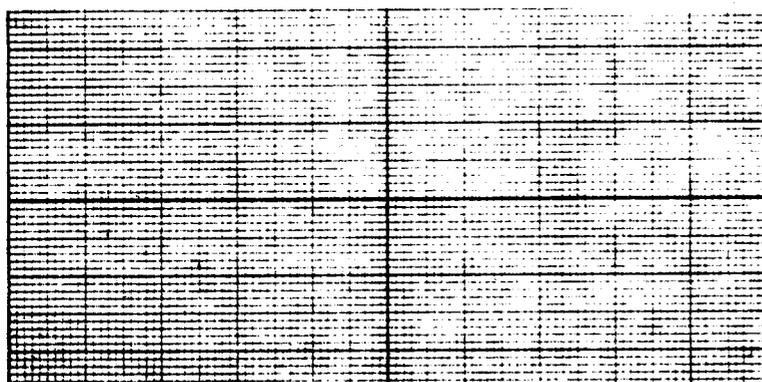
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	14,50	Epaisseur					
Largeur	25,62	Largeur					
	25,74						
	25,58						
Largeur moy	25,68	Largeur moy					

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



REMARQUES : Très légères marques en relief laissées par les arêtes de l'éprouvette sur les filières.



$\alpha = 15^\circ$

$R_e^* = 52,6 \text{ daN/mm}^2$

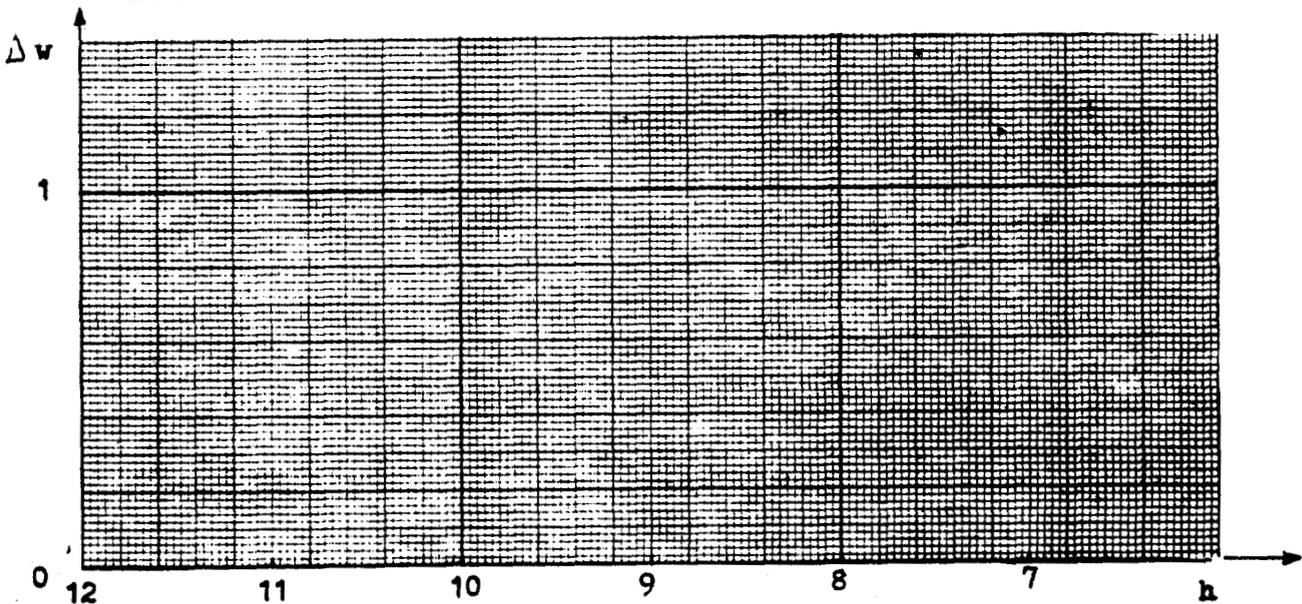
EFFORTS : F = 12600 daN T = 31000 daN

FROTTEMENT :  $\mu = 0,0614$

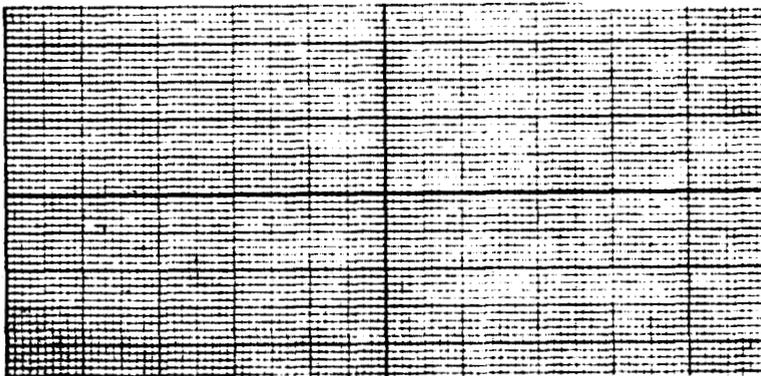
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition				
Epaisseur	14,43	Epaisseur				
Largeur	25,93	Largeur				
	25,61					
	26,03					
Largeur moy	25,56	Largeur moy				

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



REMARQUES : Légères traces en relief laissées par les arêtes de l'éprouvette sur les filières.



$\alpha = 15^\circ$

$R_e^* = 52,6 \text{ daN/mm}^2$

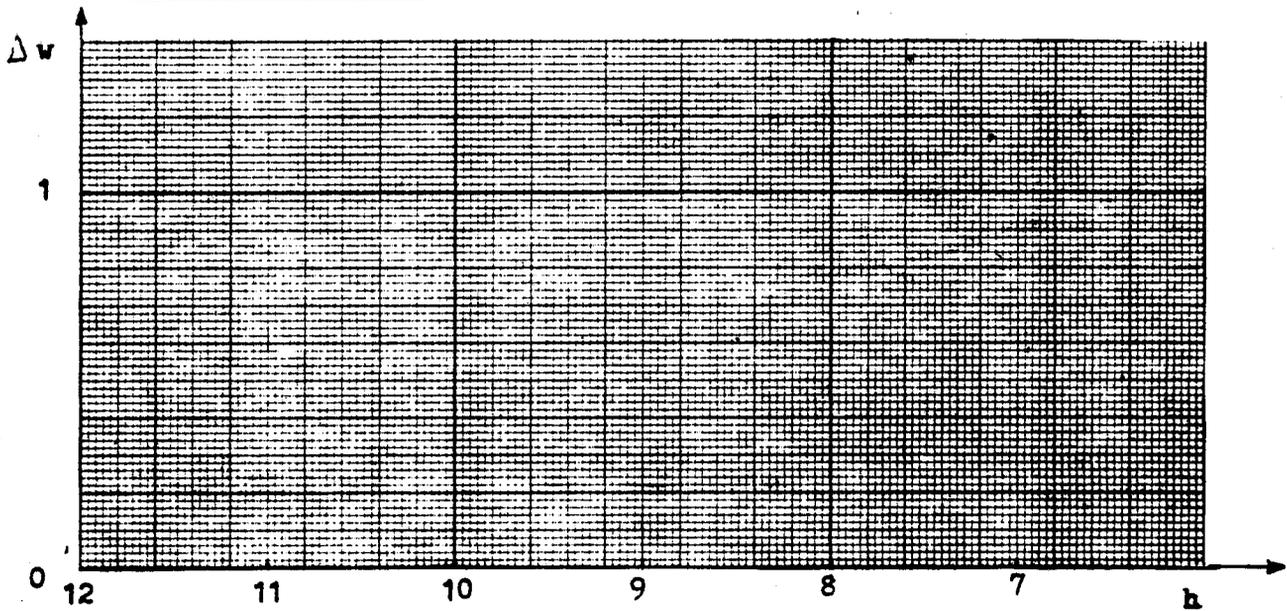
EFFORTS :  $F = 12250 \text{ daN}$   $T = 32000 \text{ daN}$

FROTTEMENT :  $\mu = 0,073$

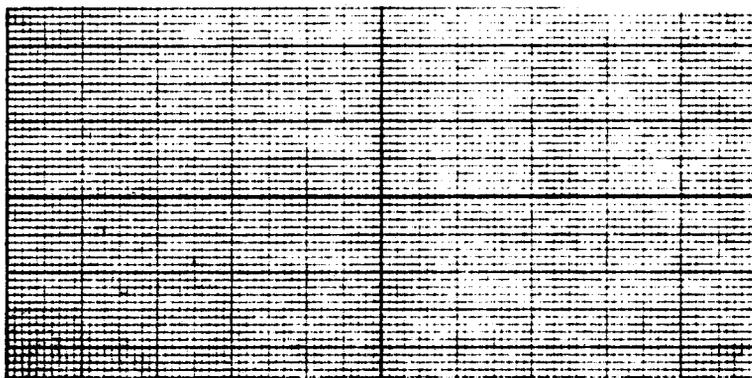
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	14,45	Epaisseur					
Largeur	26,01	Largeur					
	25,62						
	26,12						
Largeur moy	25,80	Largeur moy					

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



REMARQUES : Traces en relief laissées par les arêtes de l'éprouvette sur les filières.



$\alpha = 15^\circ$

$R_e^* = 46,7 \text{ daN/mm}^2$

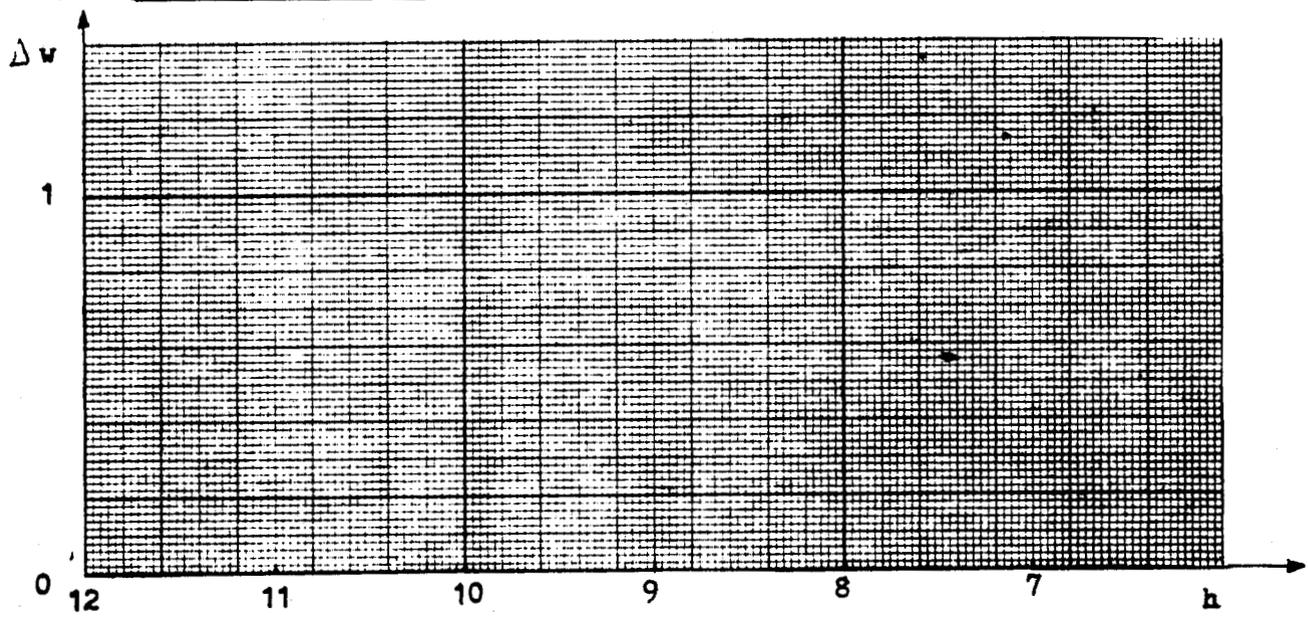
EFFORTS :                     $F = 8850 \text{ daN}$                      $T = 19750 \text{ daN}$

FROTTEMENT :                     $\mu = 0,041$

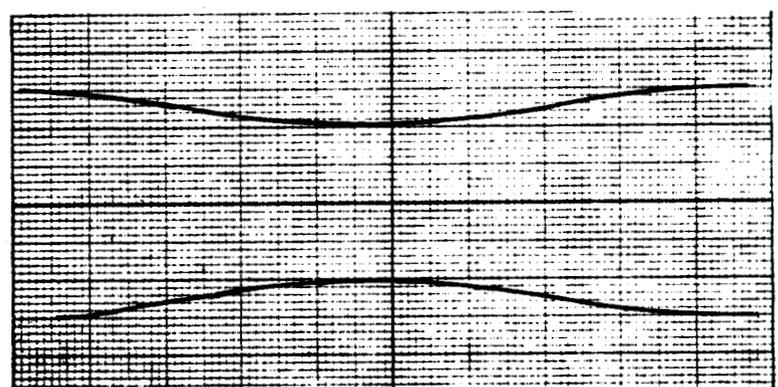
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition				
Epaisseur	19,45	Epaisseur				
Largeur	26,01	Largeur				
	24,57					
	26					
Largeur moy	25,10	Largeur moy				

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



REMARQUES : Marques légèrement visibles mais insensibles au toucher laissées par les arêtes de l'éprouvette sur les filières.



Echelle 5

$\alpha = 15^\circ$

$R_e^* = 44$

daN/mm<sup>2</sup>

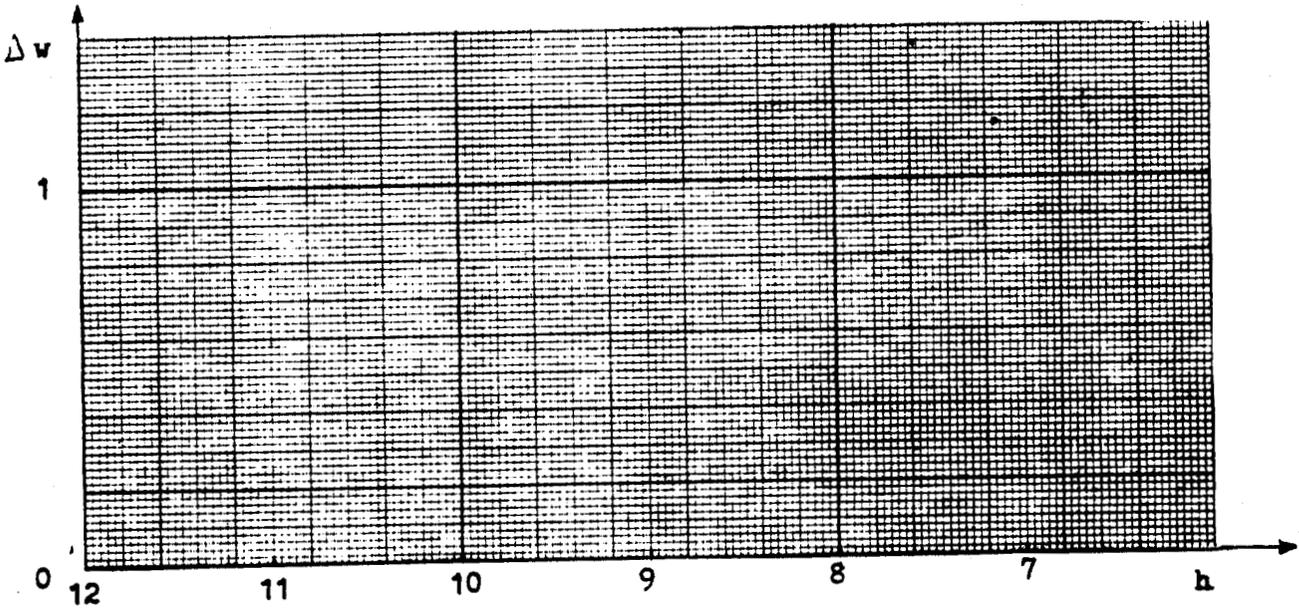
EFFORTS : F = 8000 daN T = 17500 daN

FROTTEMENT :  $\mu = 0,037$

ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

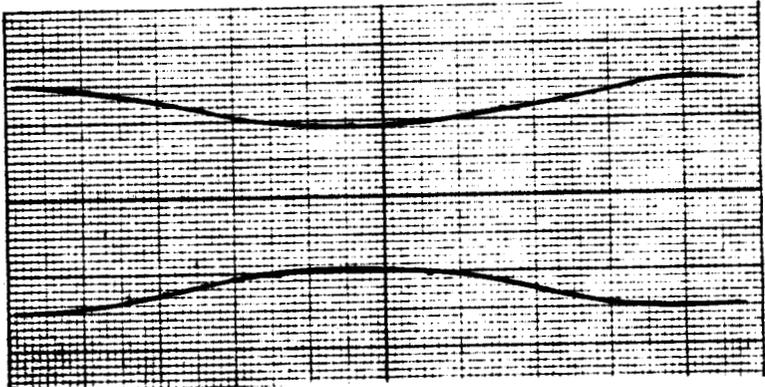
Zone étirée		Zone de transition				
Epaisseur	19,42	Epaisseur				
Largeur	26,20	Largeur				
	24,52					
	26,29					
Largeur moy	25,21	Largeur moy				

ZONE DE TRANSITION



PROFIL

REMARQUES : Marques pratiquement inexistantes.



Echelle 5

$\alpha = 30^\circ$

$R_e^* = 54,5 \text{ daN/mm}^2$

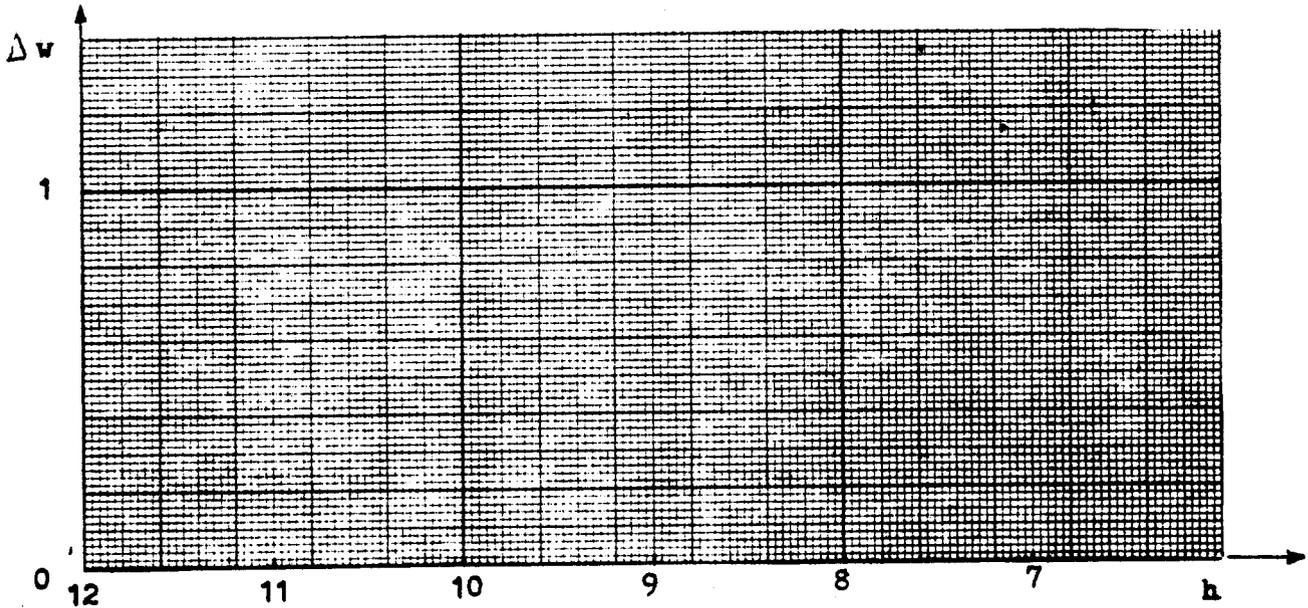
EFFORTS :  $F = 16100 \text{ daN}$   $T = \text{daN}$

FROTTEMENT :  $\mu =$

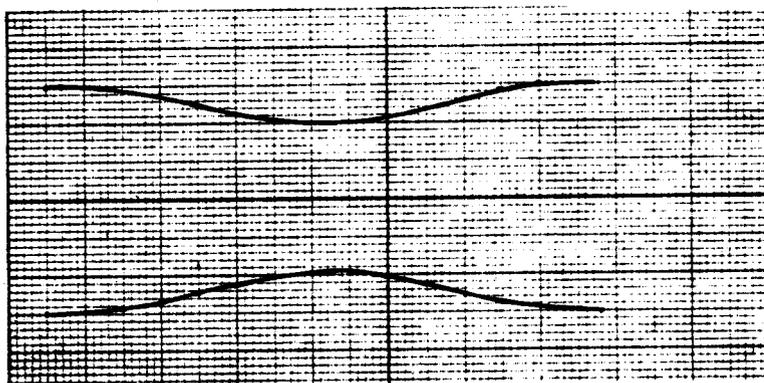
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	14,63	Epaisseur					
Largeur	26,14	Largeur					
	26,13						
Largeur moy	25,01	Largeur moy					

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



REMARQUES : Légères marques en relief laissées par les arêtes de l'éprouvette sur les filières.



Echelle 5

$\alpha = 30^\circ$

$R_e^* = 52,6 \text{ daN/mm}^2$

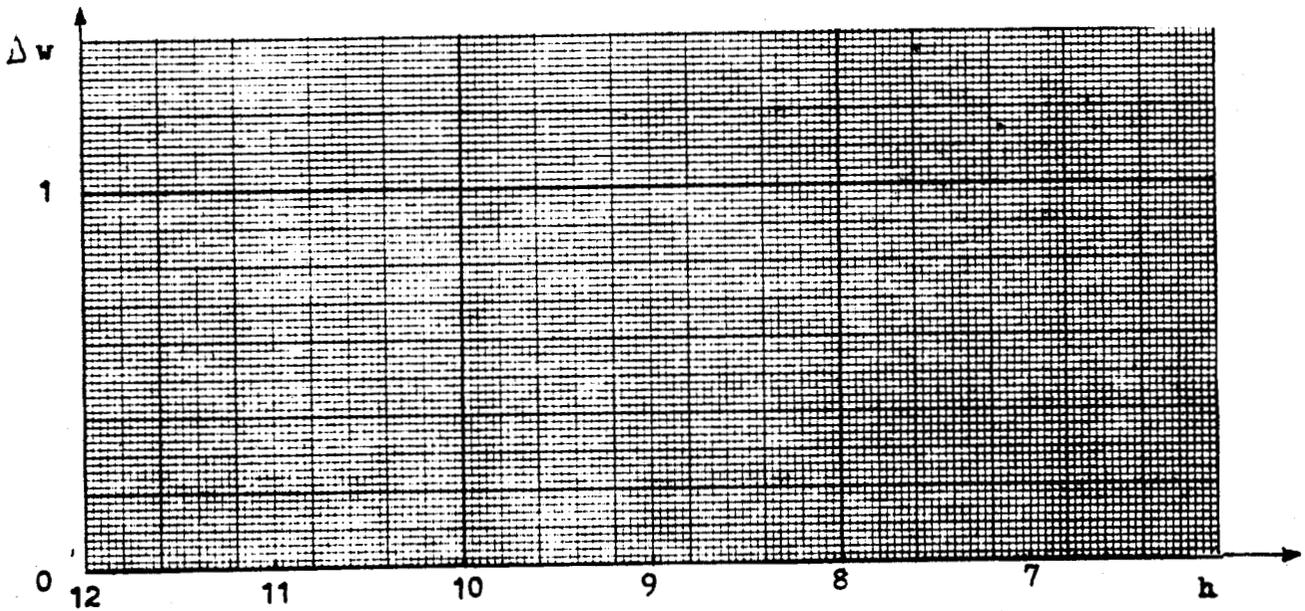
EFFORTS :  $F = 15000 \text{ daN}$   $T = \text{ daN}$

FROTTEMENT :  $\mu =$

ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

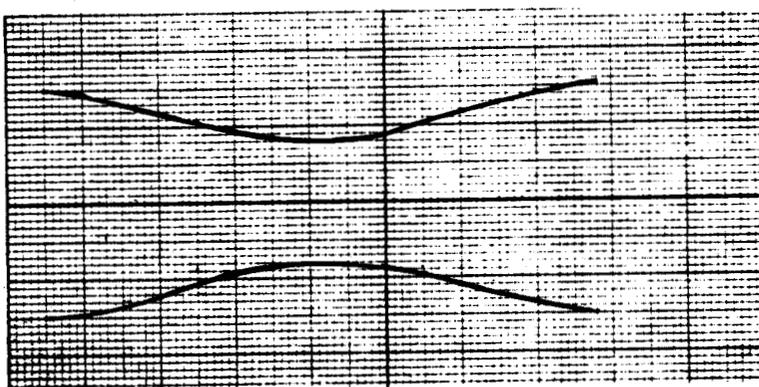
Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	14,60	Epaisseur					
Largeur		Largeur					
Largeur moy	25,08	Largeur moy					

ZONE DE TRANSITION



PROFIL

REMARQUES : Marques inexistantes sur les filières.



Echelle 5



$\alpha = 30^\circ$

$R_e^* = 46,7 \text{ daN/mm}^2$

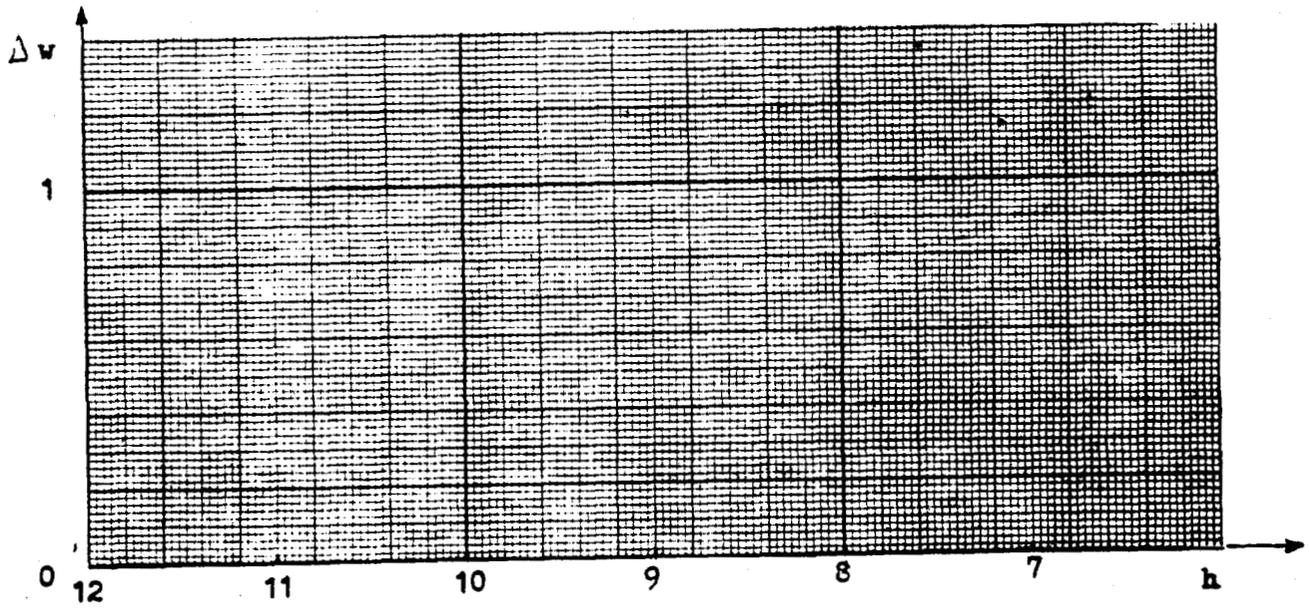
EFFORTS :  $F = 12800 \text{ daN}$   $T = \text{ daN}$

FROTTEMENT :  $\mu =$

ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

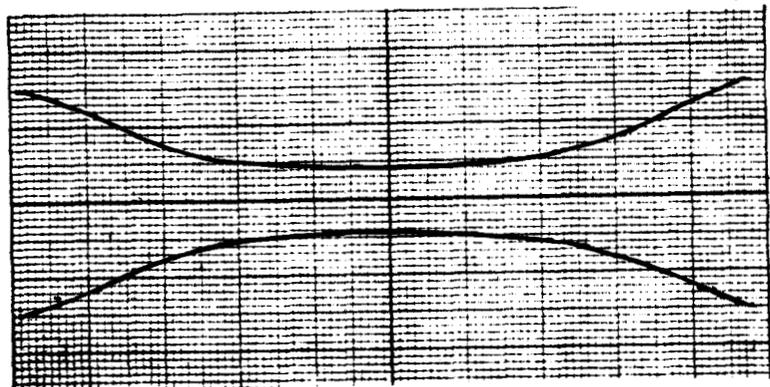
Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	19,57	Epaisseur					
Largeur		Largeur					
Largeur moy	24,87	Largeur moy					

ZONE DE TRANSITION



PROFIL

REMARQUES : Marques inexistantes sur les filières.



Echelle 5



$\alpha = 30^\circ$

$R_e^* = 44$

daN/mm<sup>2</sup>

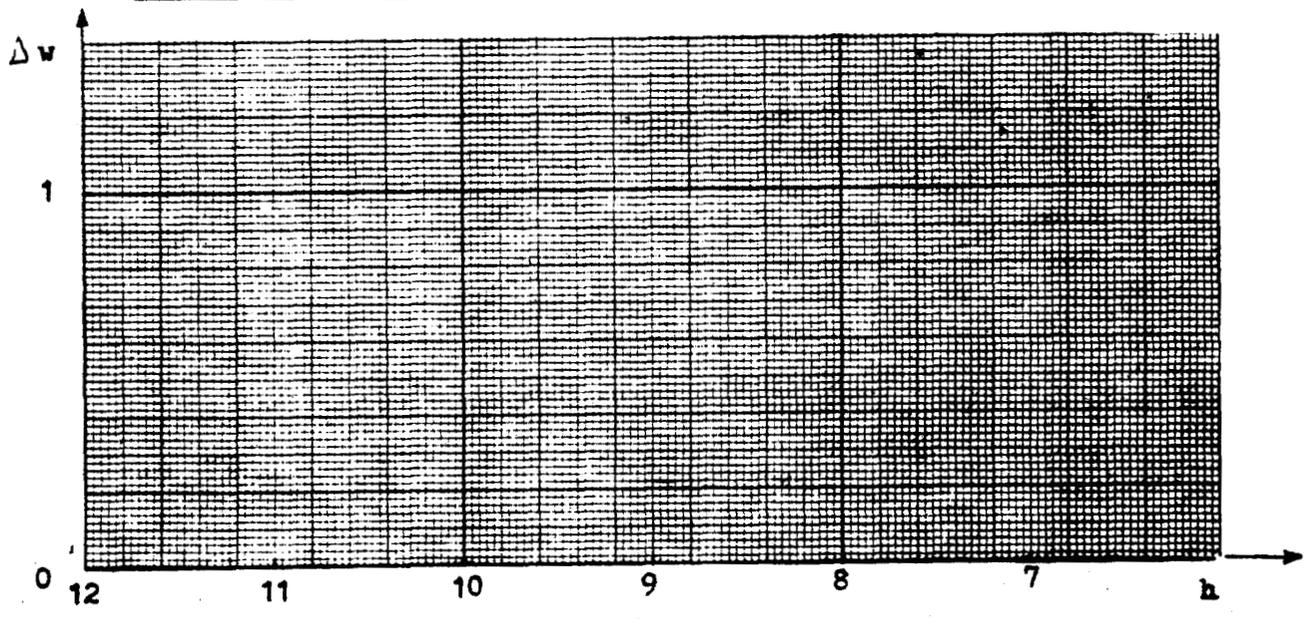
EFFORTS : F = 12400 daN T = daN

FROTTEMENT :  $\mu =$

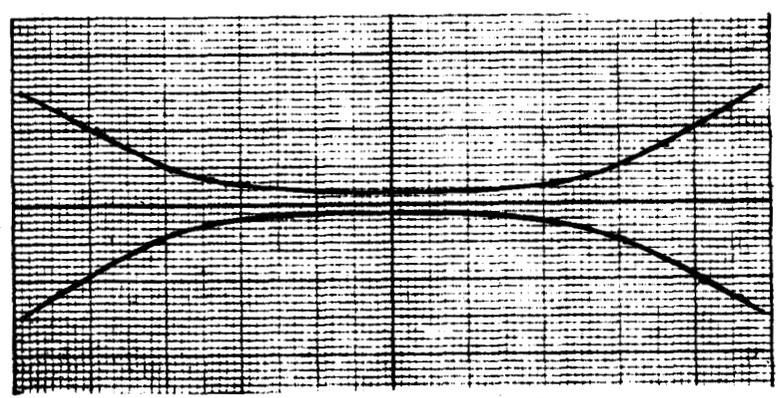
ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	19,60	Epaisseur					
Largeur		Largeur					
Largeur moy	24,42	Largeur moy					

ZONE DE TRANSITION



PROFIL



REMARQUES : Très légères marques en relief sur l'angle des filières.



Echelle 5

$\alpha = 30^\circ$

$R_e^* = 44 \text{ daN/mm}^2$

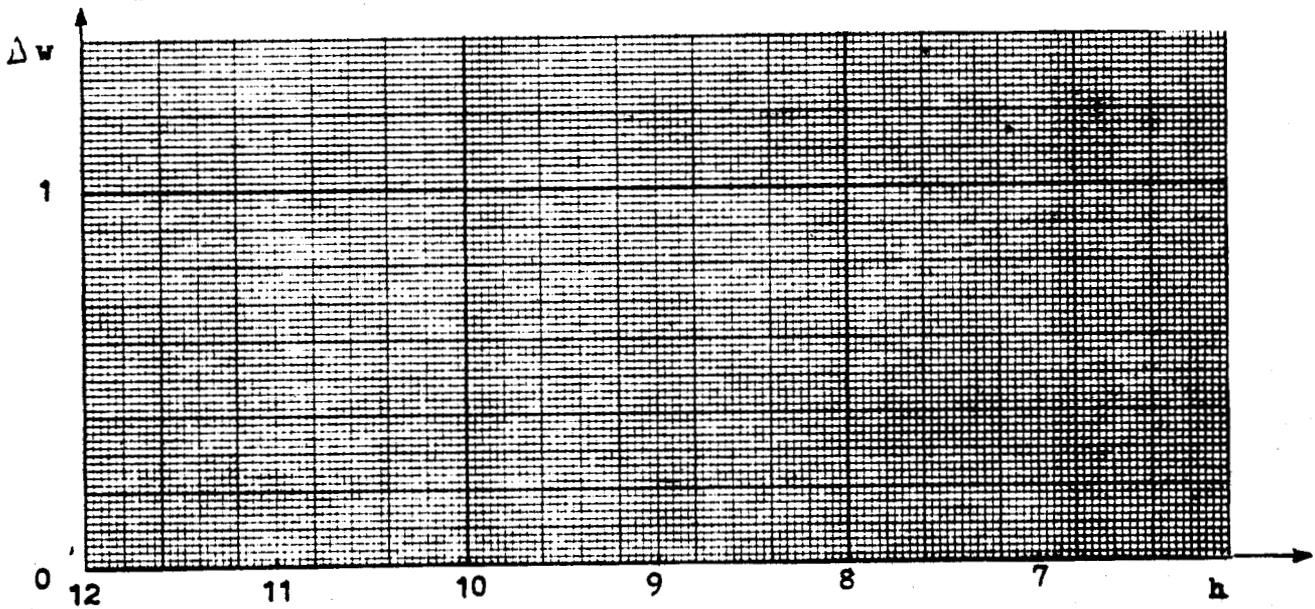
EFFORTS :  $F = 12400 \text{ daN}$   $T = \text{ daN}$

FROTTEMENT :  $\mu =$

ELARGISSEMENT :  $\Delta w$

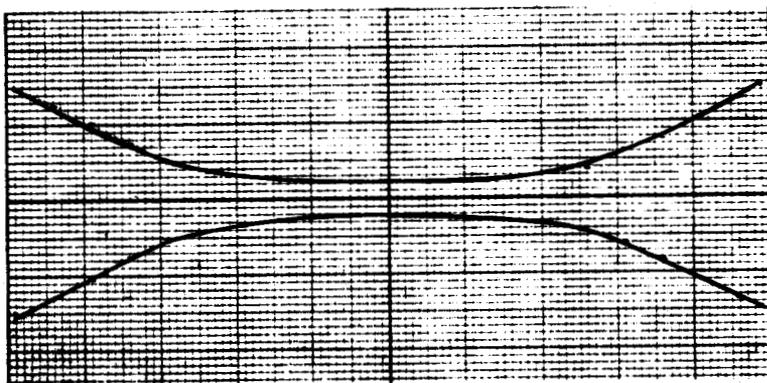
Zone étirée		Zone de transition					
Epaisseur	19,65	Epaisseur					
Largeur		Largeur					
Largeur moy	23,02	Largeur moy					

ZONE DE TRANSITION



PROFIL

REMARQUES : Pas de trace sur les filières.



Echelle 5



### 3 - COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX.

#### 31. Effort d'étirage.

##### 311. Rapport d'étirage réduit $r^* = 21 \%$ .

La figure 32.8 rassemble tous les résultats obtenus dans ce cas.

Nous pouvons noter immédiatement que :

- de 7 à 10°, la méthode des Tranches prévoit des valeurs de l'effort très légèrement inférieure aux résultats expérimentaux ; la borne supérieure composée par les différents résultats obtenus leur est légèrement supérieure. Ces deux résultats théoriques encadrent correctement les résultats expérimentaux dans une fourchette de 15 %, correspondant à la dispersion des résultats.
- au-delà de 10°, la borne supérieure est la seule estimation possible des efforts qu'elle surestime de 0 à 10 %. Là aussi, on ne peut espérer une meilleure précision compte tenu de la dispersion des résultats (entre 10 et 15 % de la valeur de l'effort) due aux variations de la contrainte limite du matériau et aux variations locales des conditions de frottement.

Globalement, nous pensons pouvoir affirmer que les résultats expérimentaux sont très correctement prévus par la borne supérieure calculée.

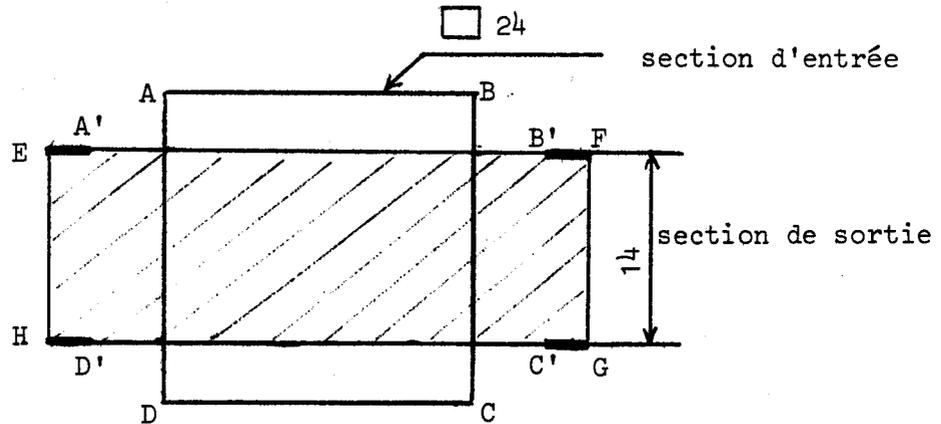
Il peut sembler remarquable que la vérification plus que médiocre de l'hypothèse de rectangularité des sections en cours d'étirage ne se traduise pas par des résultats erratiques. En fait, le principe de la borne supérieure reste inviolé quelle que soit la forme de la surface libre.

##### 312. Rapport d'étirage réduit $r^* = 42 \%$ .

La figure 32.9., rassemble tous les résultats obtenus.

Les résultats expérimentaux sont nettement plus dispersés que dans le cas précédent. Ceci s'explique par les conditions de frottement à l'interface pièce-filière. En effet, la pression de contact est beaucoup plus forte dans le cas présent. L'adhé-

rence de la couche protectrice est certainement moins bonne dans ces conditions. Par ailleurs, la déformation étant beaucoup plus importante, il apparaît sur les bords des faces supérieures et inférieures du produit (figure 32.7 - zones EA', B'F, GC', D'H) des lignes d'adhérence du matériau aux surfaces des filières.



[F 32.7]

Schéma global de déformation des sections.

Ces lignes sont dues à la destruction totale de la couche protectrice lors du déplacement de l'angle vif (de A vers E, par exemple). L'adhérence au filière étant aléatoire (phénomène de grippage, bien connu en tribologie) elle est la cause d'une dispersion importante dans les résultats sur les efforts. Comme précédemment, de 7 à 15°, les efforts sont bien estimés par les méthodes de Tranches ou de Bornes supérieures. La première fournit cependant une valeur moyenne de l'effort d'étirage.

Au delà de 15°, les deux méthodes encadrent les résultats expérimentaux. Le travail redondant réel est inférieur à celui prévu par la borne supérieure. L'erreur est de l'ordre de 15 % par excès.

La fourchette utile étant située de 7 à 15°, nous pouvons estimer avoir prévu correctement les résultats réels.

### 32. Elargissement.

Les figures 32.10 à 12 rassemblent tous les résultats. La dispersion est ici considérable. L'examen de la figure 32.12 permet d'affirmer cependant que cette dispersion apparaît surtout pour des épaisseurs du produit inférieures à 20 mm.

Il apparaît que :

- La méthode des Tranches surestime notablement, les déformations latérales. Or, il a été prouvé que le critère de MISES conduit en général à cette conclusion. La déformation prévue dépendant uniquement du critère choisi, nos résultats ne font que confirmer cette appréciation.

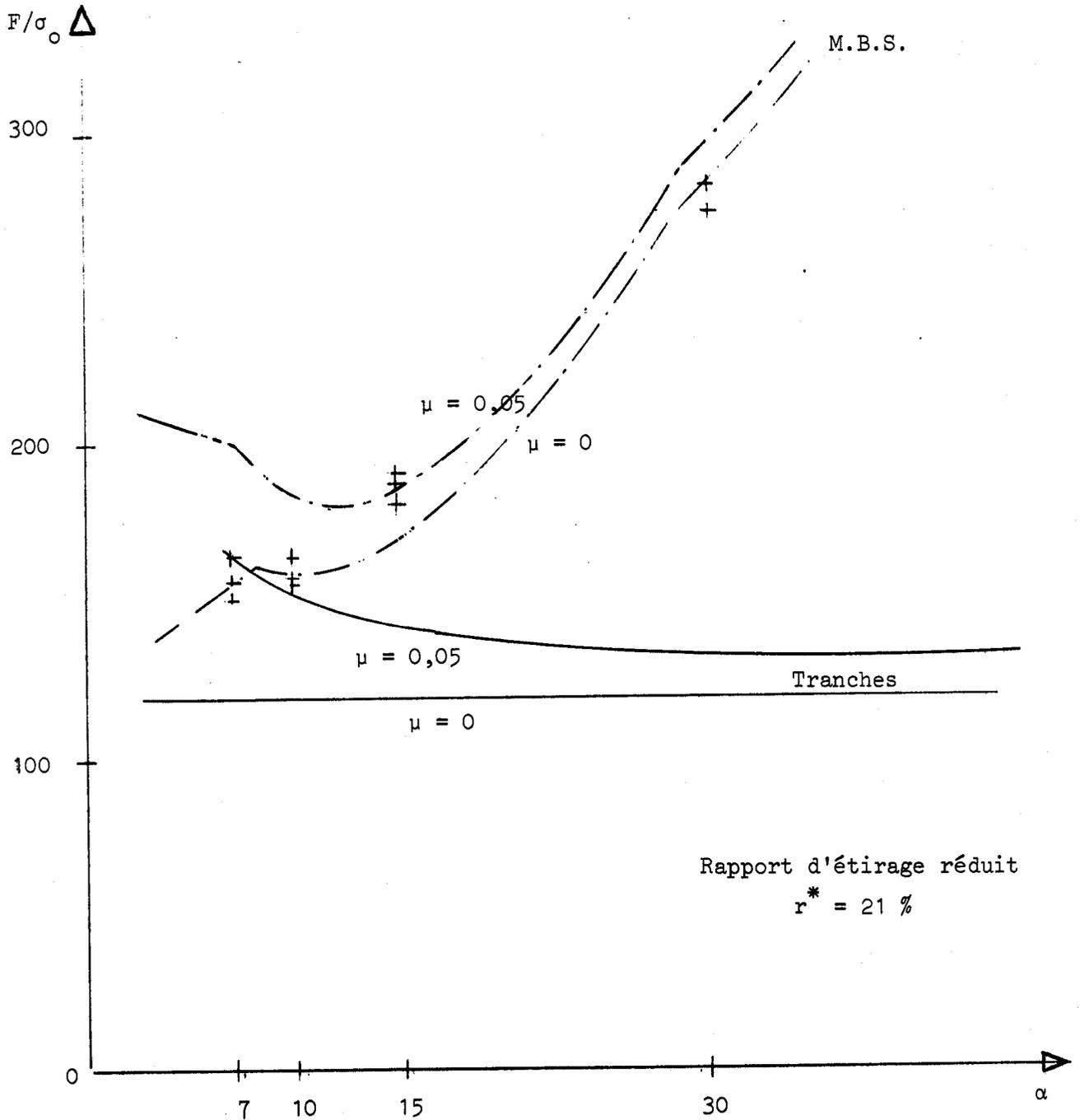
- Les méthodes de Bornes supérieures conduisent aussi bien à des résultats excessifs (champ par blocs) qu'insuffisants (champs continus 1 et 2) Ceci est conforme à l'intuition, l'élargissement (optimisé en fonction d'un critère énergétique sur des fonctions à minima très plats) dépend considérablement du champ choisi. Il est également vraisemblable que les champs continus (sans discontinuité de vitesse) limitent les variations de direction de l'écoulement alors que les champs par blocs (à discontinuité de vitesse) surestiment ces variations.

La recherche d'un champ plus judicieux dans un cas comme dans l'autre devrait permettre de rapprocher ces prévisions autour de l'écoulement réel.

La figure 32.12 fait apparaître dans les essais une différence d'élargissement entre les rapports d'étirage réduit de 21 % et 42 %. Ceci peut s'expliquer par une réaction de la zone étirée dans le premier cas (contrainte d'étirage seulement, plus de pression sur les faces supérieure et inférieure du produit, déformation latérale réduite au retour élastique) ou en cours d'étirage (pour  $h < 9,5$  mm) dans le second (forte pression à l'interface et déformation latérale importante).

33. Loi de comportement du matériau.

Nous avons supposé que le matériau était Rigide-Parfaitement-Plastique, or les figures 32.1 et 32.2 montrent que l'acier doux peut-être schématisée par un comportement Rigide-Plastique-Ecrouissable (coefficient d'écrouissage de l'ordre de 0,2). Nous avons évité ce handicap en calculant une contrainte limite équivalente (§ 32.1) permettant de calculer globalement des efforts représentatifs des efforts réels. Cette méthode ne nous permet cependant pas de déduire des déformations conformes au comportement réel. Ceci est sans doute une source d'erreur sur nos prévisions d'élargissement.

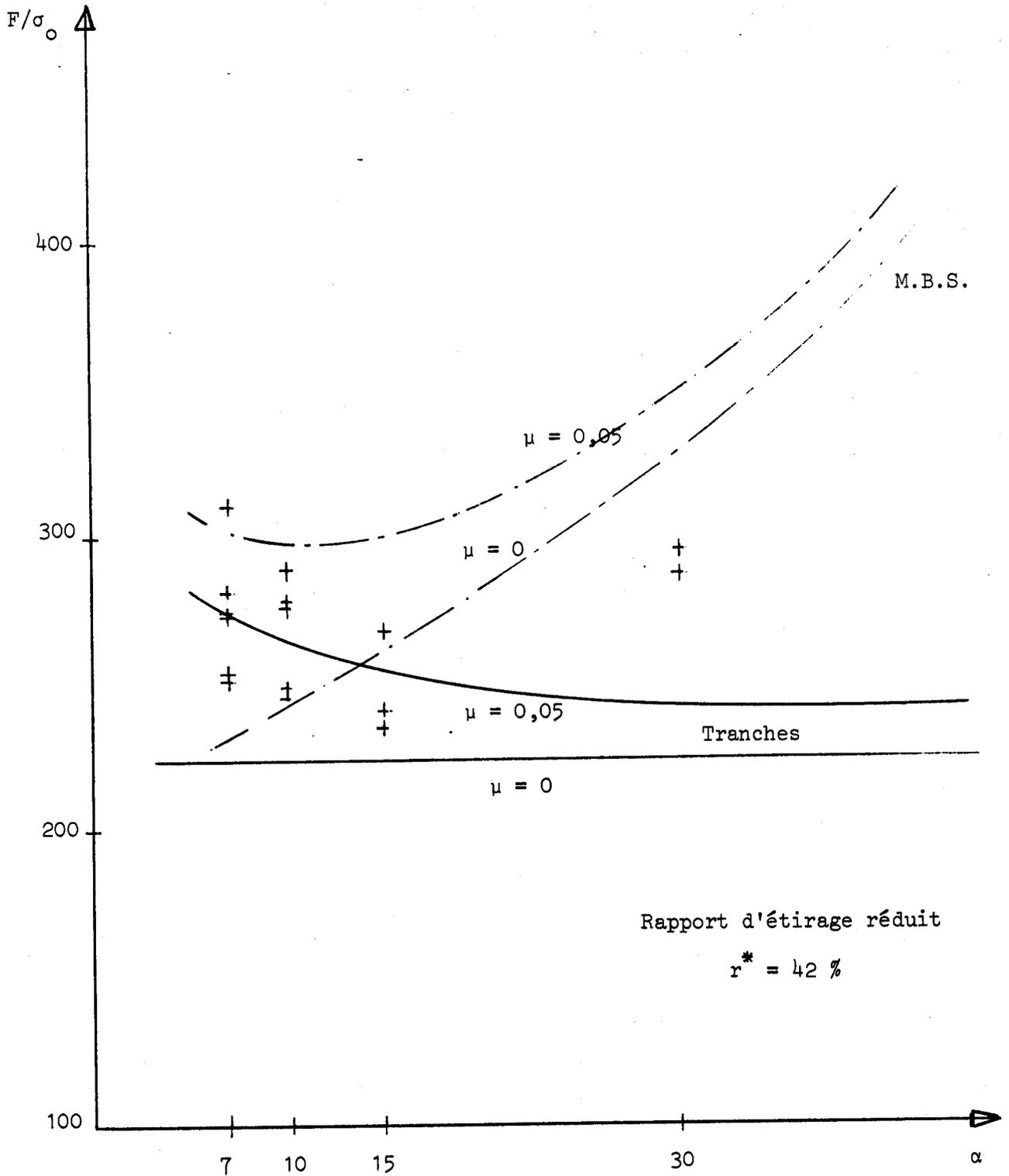


[F 32.8]

ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS

Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux.





[F 32.9]

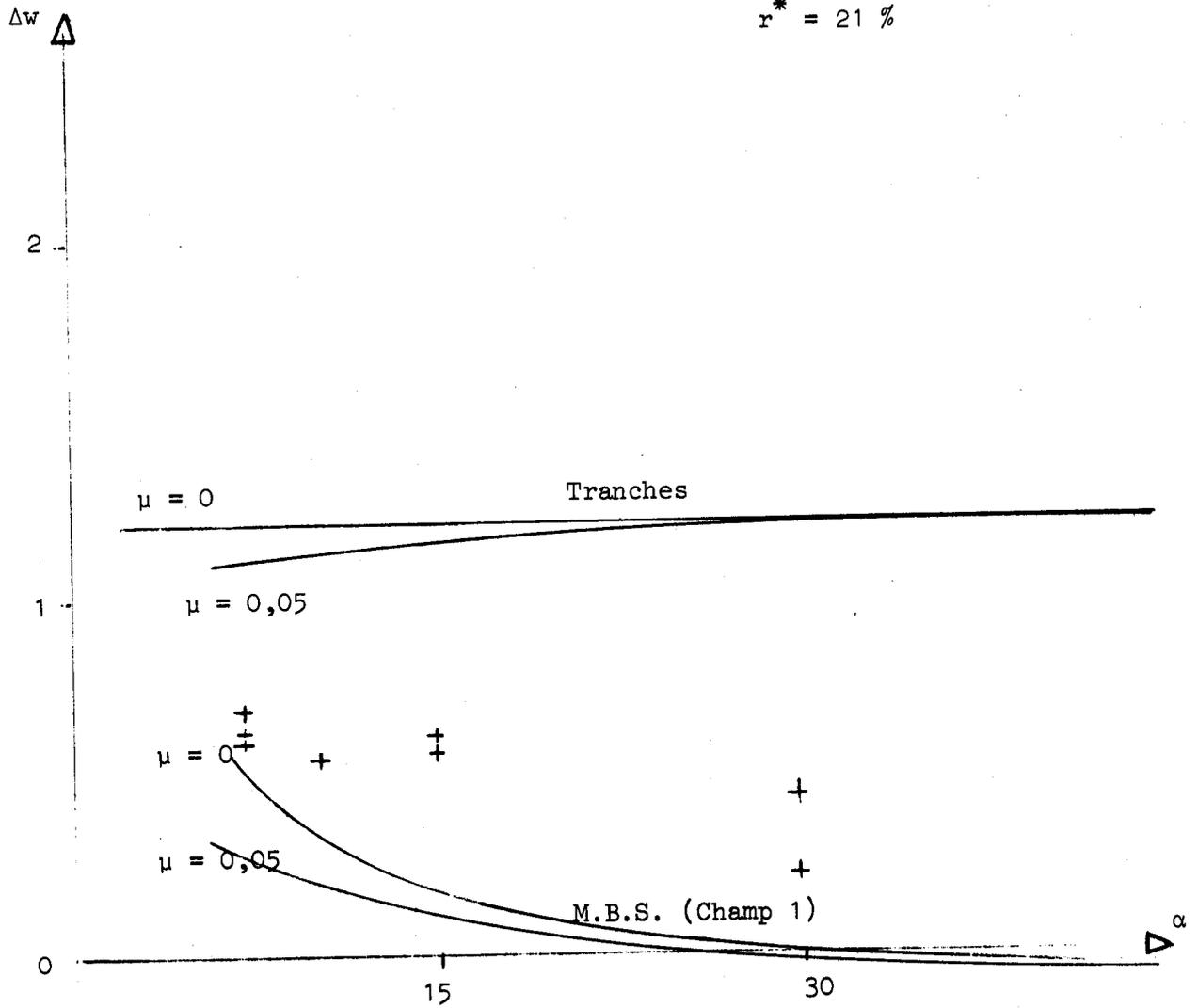
ETIRAGE DE PROFILS CARRES

Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux.



Rapport d'étirage réduit :

$$r^* = 21 \%$$



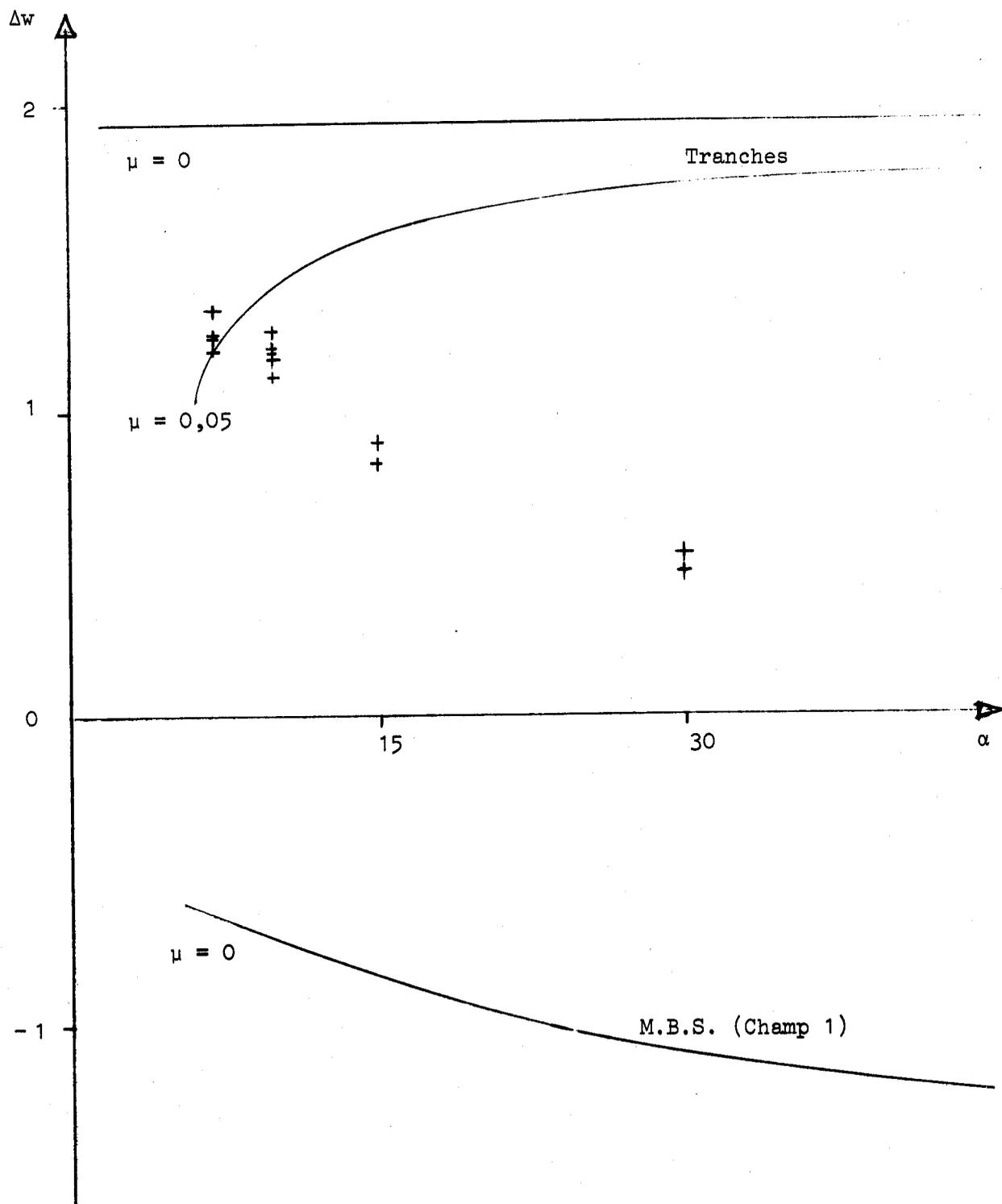
[F 32.10]

ETIRAGE DE PROFILS CARRES

Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux.



Rapport d'étirage réduit :  
 $r^* = 42\%$



[F 32.11]

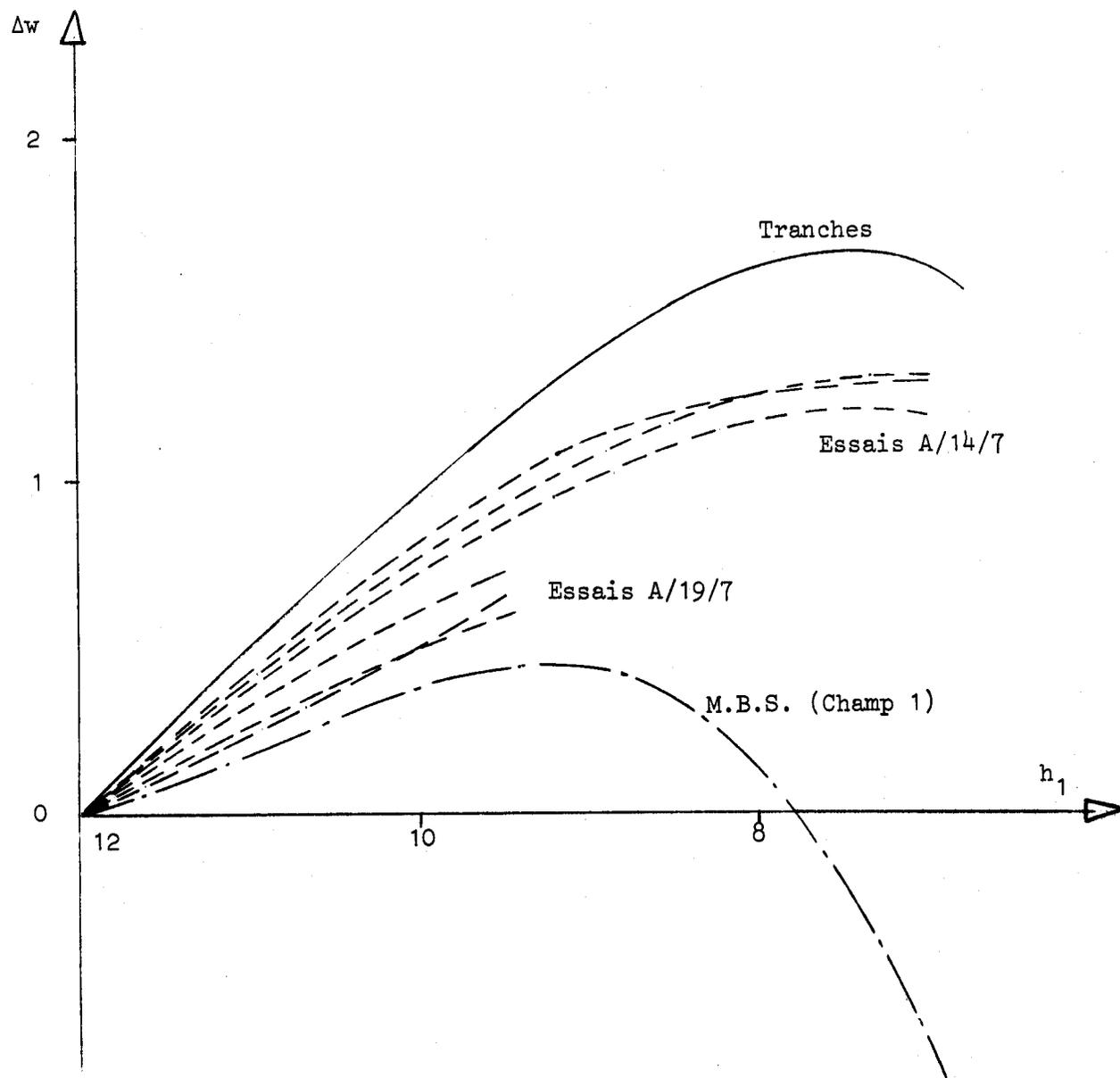
ETIRAGE DE PROFILS CARRES

Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux.



Angle d'étirage :  $\alpha = 7^\circ$

Coef. de Frot.  $\mu \approx 0,02$



[F 32.12]

ETIRAGE DE PROFILS CARRÉS

Evolution de la largeur du produit.



Quatrième Partie -

CONCLUSION

Nous avons fixé plusieurs objectifs pour ce travail : prévision de l'effort d'étirage et de l'élargissement, test dans un problème tridimensionnel simple de méthodes classiques en déformation plane ou symétrie cylindrique.

La confrontation de nos résultats théoriques et expérimentaux nous a permis d'estimer que l'effort d'étirage est défini, dans les cas usuels, c'est-à-dire pour  $\alpha$  variant de 7 à 15°, avec une précision supérieure à la dispersion expérimentale par les méthodes de compression ou de bornes supérieures. Ces dernières ont l'avantage de fournir une solution par excès ce qui est du plus haut intérêt pour le praticien. Elles seront donc préférées aux méthodes de compression pour le critère des efforts à mettre en oeuvre.

Par contre, nous n'avons pas obtenu de fourchette assez serrée pour l'élargissement. Si le rapport d'étirage est inférieur à 20 %, nos champs continus définissent une solution par défaut (de 10 à 25 % suivant dispersion) acceptable. Au delà, le recours à des champs cinématiquement admissibles plus complexes s'impose. Le champ par blocs ne donne pas de résultats significatifs, sa géométrie externe étant imposée par les conditions cinématiques.

Cependant, il n'est pas exclu que le recours systématique à une méthode par champ continu et une méthode par blocs permettent d'encadrer l'élargissement réel entre des bornes inférieures et supérieures. Ce point nécessite une étude mathématique complexe. Son développement pourrait être du plus haut intérêt pour l'étude de tous les problèmes à surface libre.

BIBLIOGRAPHIE

-----

1 - OUVRAGES SCIENTIFIQUES.

- [01] CALLADINE C.R.  
Engineering Plasticity.
- [02] BAQUE P., D'ESCATHA Y., FELDER F., HYAFIL J.  
Mise en Forme des métaux.  
Publication de l'ENSTA, 1973.
- [03] FREUDENTHAL A., GEIRINGER H.  
The mathematical theory of inelastic continuum.  
Handbuch der Physik, Vol. 5, 1958.
- [04] HILL R.  
The mathematical theory of plasticity.  
Oxford Clarendon Press, 1950.
- [05] JOHNSON W., MELLOR P.B.  
Plasticity for Mechanical Engineers.  
Van Nostrand Co, 1962.
- [06] MANDEL J.  
Cours de mécanique des solides.  
Ecole Polytechnique, 1966.
- [07] PRAGER W., HODGE Ph.  
Theory of Perfectly Plastic Solids.  
John Willey, 1951.
- [08] ROWE G.W.  
Principles of Metalworking.  
Arnold Ltd, 1965.

- [09] THOMSEN E., YANG C., KOBAYASCHI S.  
Mechanics of plastic deformation in metal processing.  
Mac Millan Co, 1965.

2 - OUVRAGES TECHNIQUES.

- [10] BONZEL M.  
Le Tréfilage de l'acier.  
Dunod, 1957.
- [11] C.N.R.S.  
Procédures ALGOL en Analyse Numérique.  
C.N.R.S., 1967.
- [12] RALSTON A., WILF H.S.  
Méthodes Mathématiques pour calculateurs arithmétiques.  
Dunod, 1965.
- [13] SCHEY J.A.  
Metal Deformation Processes : Friction and Lubrication.  
Edité par J.A. Schey, Macel Dekker Inc., 1970.

3 - AUTRES PUBLICATIONS.

- [14] BAQUE P.  
La Méthode Générale d'approximation de HILL pour les Procédés de mise  
en forme des matériaux.  
Communication privée, 1971.
- [15] BENGT PERSON.  
Compression of rectangular specimens.  
Communication privée, 1966.
- [16] HILL R.  
A General Method of analysis for metal-working Processes.  
J.M.P.S., 1963, Vol. 11, p. 305 et suivantes.