N° d'ordre 386

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à

L' UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le Grade de Docteur de 3ème Cycle

par

Christian GUILBART

CONTRIBUTION A L'ESTIMATION DU SUPPORT D'UNE MESURE DE PROBABILITE

Membres du Jury : MM. M. PARREAU, Président
D. BOSQ, Rapporteur
Mle S. MARQUET, Examinateur
M. J. GEFFROY, Invité

Soutenue le 22 juin 1973

A ma femme,

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur PARREAU qui nous a fait l'honneur de présider le Jury, et Mademoiselle le Professeur MARQUET qui a accepté de faire partie de la commission d'examen.

Que Monsieur le Professeur BOSQ, qui a dirigé notre recherche, trouve ici l'expression de notre profonde gratitude pour les encouragements et les conseils si précieux qu'il n'a jamais cessé de nous prodiguer.

Qu'il nous soit permis d'exprimer notre respectueuse reconnaissant à Monsieur le Professeur GEFFROY qui a bien voulu se pencher sur nos résultats et à qui l'on doit l'origine de ce travail.

Nous remercions aussi tous ceux qui ont pu nous aider aussi bien par leurs remarques que par leur sympathie.

Nous remercions enfin Madame Bérat et Madame Lengaigne pour toute la diligence dont elles ont fait preuve quant à la réalisation matérielle de cet ouvrage.

PLAN DU MEMOIRE

I Topologies associées à une tribu à base dénombrable.

II Métriques et topologies usuelles définies sur l'espace des mesures de probabilité.

III Une topologie sur l'ensemble des mesures de probabilité définies sur une tribu borélienne à base dénombrable.

IV Support d'une mesure de probabilité :

A) Convexification du support.

B) Etude de la (η,p,q)-d-continuité.

V Application de la topologie $\mathcal{T}_B$ (Topologie définie dans III).

*

* *

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude de la continuité de l'application qui à une mesure de probabilité fait correspondre le support de cette mesure. Etude dont on peut par la suite espérer pouvoir déduire un estimateur convergent du support.

Problème qui a été soulever à l'origine par Monsieur J. GEFFROY vers 1962.

* Le premier chapitre est consacré à l'étude de quelques propriétés des tribus à base dénombrable. Chapitre qui nous permettra de généraliser les résultats obtenus sur une tribu borélienne à base dénombrable, à toutes les tribus à base dénombrable.

* Dans le chapitre II, nous donnons la définition et quelques propriétés des topologies usuelles définies sur l'espace des mesures de probabilité, de façon à pouvoir les comparer par la suite à d'autres topologies définies sur le même espace.

Nous donnons aussi dans un espace métrique séparable, une expression autre de la distance de PROKOROFF ; expression qui simplifie le problème du calcul effectif de la distance de deux mesures que s'était posé F.R. HAMPEL.

* Le chapitre III est consacré à la définition et à l'étude d'une topologie, plus fine que la topologie faible, définie sur l'espace des mesures de probabilité. Nous donnons notamment deux versions du théorème de GLIVENKO-CANTELLI adapté à cette topologie. (Théorème essentiel quant à l'obtention d'un estimateur convergent du support).

* Le chapitre IV est divisé en deux parties : nous étudions tout d'abord la convexification su support, puis nous étudions l'ensemble des mesures de probabilité dont le support vérifie une certaine condition de régularité notée (η,p,q)-d-continuité.

* Dans le dernier chapitre, on étudie à l'aide des résultats des chapitres III et IV la continuité de l'application qui à toute mesure (η,p,q)-d-continue fait correspondre le support de cette mesure de probabilité.

CHAPITRE I

TOPOLOGIE ASSOCIEE A UNE TRIBU A BASE DENOMBRABLE.

Définition 1.1.- Une classe $\mathcal{B}$ de parties d'un ensemble X est appelée une tribu si elle est telle que :

a) $X \in \mathcal{B}$.

b) $A^C \in \mathcal{B}$ si $A \in \mathcal{B}$.

c) $\bigcup_I A_i \in \mathcal{B}$ pour toute famille dénombrable $(A_i, i \in I)$ dans $\mathcal{B}$.

- Nous noterons $\mathcal{B}(C)$ la tribu engendrée par une classe C de parties de X.

Définition 2.1.- La tribu borélienne d'un espace topologique (X,T) est la tribu engendrée par la classe des ouverts de (X,T). Nous la noterons $\mathcal{B}(T)$.

Définition 3.1.- Une tribu est dite à base dénombrable, s'il existe une famille dénombrable $B = (A_i, i \in I)$ dans $\mathcal{B}$ telle que : $\mathcal{B}(B) = \mathcal{B}$.
On dit alors que B est une base dénombrable de la tribu $\mathcal{B}$.

Proposition 1.1.- Toute tribu $\mathcal{B}$ d'un ensemble dénombrable X est à base dénombrable.

Preuve : Soit $x \in X$ et soit $A_1 \in \mathcal{B} : x \in A_1$.
Alors si $\forall A \in \mathcal{B}$ tel que $x \in A$ on a : $A_1 \subset A$.

$A_1 = \inf(A \in \mathcal{B} : x \in A)$

sinon $\exists A_2 \in \mathcal{B}$ tel que : $x \in A_2$, $A_2 \subset A_1$ et $A_2 \neq A_1$.

(on recommence alors l'opération).

A_1 étant dénombrable, l'opération sera répétée au plus une infinité dénombrable de fois : d'où $A\{x\} = \inf(A \in \mathcal{B} : x \in A)$ peut s'écrire comme une intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{B}$. Autrement dit : $A x = \inf\{A \in \mathcal{B} : x \in A$ appartient à $\mathcal{B}$ pour tout $x \in X$.

Soit $A \in \mathcal{B}$ alors :

$$(x \in A) \Longrightarrow (A\{x\} \subset A).$$

Ce qui implique $\bigcup_{x \in A} A\{x\} \subset A$; de plus $x \in A\{x\}$ d'où $A = \bigcup_{x \in A} A\{x\}$.

La famille $B = \{A\{x\}, x \in X\}$ est alors une base dénombrable de la tribu $\mathcal{B}$

Proposition 2.1.- Toute tribu $\mathcal{B}$ à base dénombrable est borélienne de plus, il existe une topologie à base dénombrable d'ouverts, engendrant $\mathcal{B}$.

Preuve : Soit $B = \{A_i, i \in I\}$ une base dénombrable de la tribu $\mathcal{B}$. Considérons la topologie T engendrée par les ouverts A_i, $i \in I$. Le stabilisé B' de B par intersections finies est alors une base dénombrable de la topologie T. Autrement dit tout ouvert O de T est réunion dénombrable d'éléments de B' qui est incluse dans $\mathcal{B}$. D'où tout ouvert O de T appartient à $\mathcal{B}$. Ce qui implique : $\mathcal{B}(T) \subset \mathcal{B}$

d'où : $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(B) \subset \mathcal{B}(T) \subset \mathcal{B}$.

Proposition 3.1.- Soit $\mathcal{B}$ une tribu à base dénombrable. Alors il existe une topologie T à base dénombrable telle que : $\mathcal{B}(T) = \mathcal{B}$, tout ouvert de T

est un F_σ et tout fermé de T est un G_δ.

Preuve : Soit B une base dénombrable de $\mathcal{B}$. On note B_1 l'algèbre de Boole engendrée par B. L'ensemble des parties finies d'un ensemble dénombrable étant dénombrable, B_1 est dénombrable. Soit T la topologie engendrée par B_2. B_2 est une base dénombrable de T, puisque stable par intersections finies, et l'on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(B_2) \subset \mathcal{B}(T)$.

Posons $B_2 = \{O_i, i \in I\}$, (I dénombrable).

Soit O un ouvert de T.

B_2 étant une base dénombrable de T, on a :

$$\exists\, J \subset I : \bigcup_J O_i = O$$

d'où : $\mathcal{B}(T) \subset \mathcal{B}$

De plus chaque O_i étant à la fois ouvert et fermé O est un F_σ. En passant au complémentaire on montre que tout fermé de T est un G_δ.

Proposition 4.1.- Soit $\mathcal{B}$ une tribu à base dénombrable de X. Il existe alors une topologie T sur X telle que : $\mathcal{B}(T) = \mathcal{B}$ et toute mesure de probabilité définie sur $\mathcal{B}$ est régulière pour la topologie T.

Preuve : Prenons pour topologie T la topologie de proposition 3.1.
Soit $\mu \in M(\mathcal{B}(T))$.
$A \in \mathcal{B}$ est μ-régulier pour la topologie T, si $\forall \varepsilon > 0$.
Il existe un fermé F_ε et un ouvert O_ε de (X,T) tels que :

$$F_\varepsilon \subset A \subset O_\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \mu(O_\varepsilon - F_\varepsilon) < \varepsilon$$

il suffit de passer au complémentaire pour montrer que :

$$(A\ \mu\text{-régulier}/T) \Longrightarrow (A^C\ \mu\text{-régulier}/T).$$

On pose $R = \{A \in \mathcal{B} : A\ \mu\text{-régulier}/T\}$.

Soit F un fermé de (X,T).

On peut alors écrire d'après la proposiiton (3.1.).

Il existe une suite dénombrable d'ouverts (notée (O_n)) telle que :

$$F = \lim_n \downarrow O_n$$

ce qui entraîne $\mu(O_n) \downarrow \mu(F)$

d'où F est μ-régulier/T.

Soit $\{A_n, n \in N\}$ une famille dénombrable de boréliens μ-réguliers/T.

Alors ε étant donné :

$\forall\ A_n$, il existe $F_{\varepsilon n}$ et $O_{\varepsilon n}$: $F_{\varepsilon n} \subset A_n \subset O_{\varepsilon n}$ et $\mu(O_{\varepsilon n} - F_{\varepsilon n}) < \frac{\varepsilon}{3^n}$

$\bigcup_{n=1}^{k(n)} F_{\varepsilon n} \subset \bigcup_N A_n \subset \bigcup_N O_{\varepsilon n}$, où $\bigcup_{n=1}^{k(n)} F_{\varepsilon n}$ est fermé et $\bigcup_N O_{\varepsilon n}$ est ouvert.

On pose $\bigcup_N F_{\varepsilon n} = F_\varepsilon$ et on choisit $k(n)$ tel que :

$$\mu(F_\varepsilon - \bigcup_{n=1}^{k(n)} F_{\varepsilon n}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\mu\Big[\bigcup_N O_{\varepsilon n} - \bigcup_{n=1}^{k(n)} F_{\varepsilon n}\Big] \leq \mu(\bigcup_N O_{\varepsilon n} - F_\varepsilon) + \mu(F_\varepsilon - \bigcup_{n=1}^{k(n)} F_{\varepsilon n})$$

$$< \sum_N \mu(O_{\varepsilon n} - F_{\varepsilon n}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \sum \frac{\varepsilon}{3^n} + \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où $\mu\Big[\bigcup_N O_{\varepsilon n} - \sum_{n=1}^{k(n)} F_{\varepsilon n}\Big] < \varepsilon$

ce qui implique que R contient les fermés, est stable par réunion dénombrable et par complémentation. Autrement dit $R = \mathcal{B}$.

Remarque 1.1.- Une tribu à base dénombrable peut contenir une tribu engendrée par une topologie T non à base dénombrable.

Exemple : Soit R muni de la topologie T engendrée par les fermés F formés d'une réunion fini de point de R. Alors tout fermé contient au plus un nombre fini de points de R. D'où la tribu de Lebesgue contient les fermés de T. $\mathcal{B}(T)$ est donc incluse dans la tribu de Lebesgue, alors que T n'est pas à base dénombrable.

Remarque 1.2.- Une tribu à base dénombrable peut avoir deux bases distinctes. Soit R muni de sa topologie habituelle. L'ensemble des intervalles à extrémité rationnelles est alors une base de la tribu de Lebesgue. Mais l'ensemble des complémentaires d'intervalles à extrémité rationnelles est aussi une base de la tribu de Lebesgue.

Nous terminons ce chapitre en remarquant que tous les résultats que nous allons énoncer par la suite, dans une tribu borélienne engendrée par une topologie à base dénombrable, peuvent être (grâce à la proposition 2.1.) généralisés à toute tribu à base dénombrable.

CHAPITRE II

METRIQUES ET TOPOLOGIES USUELLES DEFINIES SUR L'ESPACE DES MESURES DE PROBABILITES.

Soit (X,d) un espace métrique.

On note : - $\mathcal{U}(X)$ l'ensemble des fonctions réelles, uniformément continues et bornées.

- $\mathcal{C}(X)$, l'ensemble des fonctions réelles, continues et bornées.
- $\mathcal{M}(\mathcal{B}(d))$, l'ensemble des mesures de probabilité définies sur X muni de la tribu borélienne engendrée par la topologie induite par d.
- R^+ l'ensemble des réels strictement positifs.

Définition 1.2.- La topologie faible $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{M}(\mathcal{B}(d))$ est la topologie engendrée par les ouverts $\mathcal{O}$ de la forme suivante :

$$\mathcal{O} = \{\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(d)) : \int_X f_i \, d\nu \in \,]\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}[, \quad i \in \{1\ldots n\}\}$$

où $f_i \in \mathcal{C}(X)$, ε_{i_1} et $\varepsilon_{i_2} \in R$; $\varepsilon_{i_1} \neq \varepsilon_{i_2}$; $i \in \{1\ldots n\}$.

Remarque 1.2.- Il est aisé de montrer que l'intersection de deux ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ de la forme ci-dessus est encore un ouvert de cette forme. Les ouverts $\mathcal{O}$ de la forme ci-dessus forment donc une base de $\mathcal{F}$.

Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(d))$.

Un voisinage basique $\mathcal{O}_\mu$ de μ dans $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(d)),\mathcal{F})$ est alors de la forme suivante :

$$\mathcal{O} = \{\nu \in M(\mathcal{B}(d) : \int_X f_i \, d\nu \in \left] \int_X f_i \, d\mu + \varepsilon_{1i}, \int_X f_i \, d\mu + \varepsilon_{2i} \right[, i \in \{1 \ldots n\}\}$$

où $f_i \in C(X)$, ε_{1i} et $\varepsilon_{2i} \in R^+$; $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Il est alors immédiat que $\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow}} \mu$ si et seulement si :

$$\mu_n(f) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \mu(f) \quad \forall f \in C(X).$$

Nous allons maintenant rappeler un théorème très connu dont nous allons nous servir constamment par la suite :

théorème de Billingsley-Alexandroff

les cinq propositions suivantes sont équivalentes :

a) $\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow}} \mu$.

b) $\int_X g \, d\mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X g \, d\mu \qquad \forall g \in \mathcal{U}(X)$.

c) $\overline{\lim_n} \, \mu_n(F) \leq \mu(F)$ pour tout fermé F de (X,d).

d) $\underline{\lim_n} \, \mu_n(G) \geq \mu(G)$ pour tout ouvert G de (X,d).

e) pour tout borélien A tel que $\mu(A^*) = 0$ on a $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$

- la démonstration de ce théorème se trouve dans [4].

Soit (X,d) un espace métrique séparable.

Soit $\{x_i, i \in I\}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans (X,d), et soit $B = B(x_i, \frac{1}{n})$, $(i,n) \in I \times N$ la base dénombrable de (X,d) ainsi obtenue.

on note B_1 le stabilisé de B par réunion finie et l'on pose :

$$\sigma_{B_1}(\mu_1,\mu_2) = \inf\{\varepsilon > 0 | \mu_1(O) \leq \mu_2(O^{\varepsilon}) + \varepsilon\} \; ; \forall \; O \in B_1$$

$$\sigma_{B_1}(\mu_2,\mu_1) = \inf\{\varepsilon > 0 | \mu_2(O) \leq \mu_1(O^{\varepsilon}) + \varepsilon\} \; ; \forall \; O \in B_1 \; ,$$

où $O^{\varepsilon} = \{x \in X : d(x,O) < \varepsilon$, μ_1 et $\mu_2 \in M(\mathcal{B}(d))$.

Considérons $\rho_{B_1}(\mu_1,\mu_2) = \max(\sigma_{B_1}(\mu_1,\mu_2),\sigma_{B_1}(\mu_2,\mu_1))$.

Proposition 1.2.- $(\rho_{B_1}(\mu_1,\mu_2) = 0) \iff (\mu_1 = \mu_2)$.

Preuve :

Soit $O = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i})$ un élèment de B_1, et supposons $\varepsilon > 0$ donné.

On a $B(x_i, \frac{1}{n_i+m}) \underset{m}{\uparrow} B(x_i, \frac{1}{n_i})$. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$

d'où $\exists N_i : m > N_i \implies |\mu_1(B(x_i, \frac{1}{n_i+m})) - \mu_1(B(x_i, \frac{1}{n_i}))| < \frac{\varepsilon}{2n}$; $i \in \{1,\dots,n\}$

d'où $m > \sup(N_i \; ; i \in \{1\dots n\}) \implies |\mu_1 \bigcup_{i=1}^{n}(B(x_i, \frac{1}{n_i})) - \mu_1(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i+m}))| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

et comme $\rho_{B_1}(\mu_1,\mu_2) = 0$ on a :

$$\mu_1(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i+m})) \leq \mu_2(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i+m}))^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} \quad \text{pour tout } m > 0.$$

Supposons $m > 4\,(\sup(n_i \; ; i \in \{1\dots n\}, N_i \; ; i \in \{1\dots n\}, \frac{1}{2\varepsilon}))$

on a alors $\frac{1}{n_i+m} \leq \frac{1}{n_i} - \frac{1}{m}$

d'où $\mu_1(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i+m})) \leq \mu_2(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i} - \frac{1}{m})^{\frac{1}{m}}) + \frac{1}{m} \leq \mu_2(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i})) + \frac{1}{m}$

ce qui implique :

$$\mu_1(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i+m})) - \mu_1(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i})) + \mu_1(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i})) \leqslant \mu_2(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i})) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

ce qui entraîne avec (1) :

$$\mu_1(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i})) \leqslant \mu_2 \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i}) + \varepsilon.$$

on inverse les rôles de μ_1 et de μ_2 et l'on obtient :

$$|\mu_1(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i}) - \mu_2 \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i})| < \varepsilon.$$

Autrement dit : $(\rho_{B_1}(\mu_1,\mu_2) = 0) \Rightarrow (\mu_1(O) = \mu_2(O) \quad \forall\, O \in B_1)$.

Soit O un ouvert de (X,d) : $O = \lim\limits_{n} \uparrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i})$

on a alors : $\mu_1(O) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_1(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i})) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_2(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i})) = \mu_2(O)$.

X étant métrique μ_1 et μ_2 sont donc régulières, de plus elles concordent sur les ouverts de X. Elles sont donc égales.

Si $\mu_1 = \mu_2$ il est immédiat que $\rho_{B_1}(\mu_1,\mu_2) = 0$ ∎

Proposition 2.2.- Soit (X,d) un espace métrique séparable.

Soit $\{x_i, x\in I\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de X.

et soit $B = \{B(x_i, \frac{1}{n}), (i,n) \in I \times N\}$ la base dénombrable d'ouverts de (X,d) ainsi obtenu. On note B_1 le stabilisé de B par réunion finie.

Soient μ_1 et $\mu_2 \in \mathcal{MB}(d)$ et $\rho_{B_1}(\mu_1,\mu_2)$ défini comme précédemment :

c'est-à-dire $\rho_{B_1}(\mu_1,\mu_2) = \max(\sigma_{B_1}(\mu_1,\mu_2), \sigma_{B_1}(\mu_2,\mu_1))$

où $\sigma_{B_1}(\mu_1,\mu_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mu_1(O) \leq \mu_2(O^\varepsilon) + \varepsilon, \quad \forall\, O \in B_1\}$,

Dans ces conditions, on peut aussi écrire : $\rho_{B_1}(\mu_1,\mu_2) = \max(\sigma_1(\mu_1,\mu_2),\sigma_1(\mu_2,\mu_1))$

où $\sigma_1(\mu_1,\mu_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mu_1(O) \leq \mu_2(O^\varepsilon) + \varepsilon \quad \forall\, O$ ouvert de (X,d).

Preuve : Nous allons tout d'abord démontrer un lemme indispensable à la démonstration.

Lemme 1.2.- Si $A = \lim\limits_n \uparrow A_n$ on a $A^a = \lim\limits_n \uparrow A_n^a$ pour tout $a > 0$.

Preuve : Soit $x \in A^a$.

Il existe alors $y \in A$ tel que : $d(x,y) < a$.

Sinon $d(x,y) \geq a \quad \forall\, y \in A$; ce qui implique $d(x,A) \geq a$.

Ce qui entraîne $x \notin A^a$ (contraire à l'hypothèse).

Et comme $A = \lim\limits_n \uparrow A_n$, il existe $N(y)$ tel que $n \geq N(y)$ implique : $y \in A_n$.

D'où $d(x,A_n) < a$ pour tout $n \geq N(y)$.

La démonstration de ce lemme est alors terminée.

Supposons $\varepsilon > 0$ donné et que $\rho_{B_1}(\mu_1,\mu_2) = b$.

Soit $a > b$ et soit O un ouvert de (X,d).

On a : $O = \lim\limits_n \uparrow O_n$, $O_n \in B_1$.

d'où $\exists N_1(\varepsilon) : n > N_1(\varepsilon) \Rightarrow |\mu_1(O) - \mu_1(O_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

et d'après le lemme 1.2. $O^a = \lim\limits_n \uparrow O_n^a$

d'où $\exists N_2(\varepsilon) : n > N_2(\varepsilon) \Rightarrow |\mu_2(O^a) - \mu_2(O_n^a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2).

Posons $N_3(\varepsilon) = \sup(N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon))$.

Soit n fixé ; $n > N_3(\varepsilon)$. On a $\mu_1(O_n) \leq \mu_2(O_n^a) + a$

ce qui implique avec (1) et (2) :

$$\mu_1(O) < \mu_2(O^a) + a + \varepsilon.$$

a, ε et O ayant été choisi arbitrairement, on a donc :

$$\sigma_1(\mu_1,\mu_2) \leqslant b$$

en échangeant les rôles de μ_1 et de μ_2 on montre que :

$$\sigma_1(\mu_1,\mu_2) \leqslant b$$

et comme B_1 est inclus dans la classe des ouverts de (X,d) on a :

$$\max(\sigma_1(\mu_1,\mu_2),\sigma_1(\mu_2,\mu_1)) \geqslant \max(\sigma_{B_1}(\mu_1,\mu_2),\sigma_{B_1}(\mu_2,\mu_1)).$$

ce qui termine la démonstration. ∎

Proposition 3.2.- ρ_{B_1} est une métrique de $M(B(d))$.

Preuve : Soient μ_1, μ_2 et $\mu_3 \in M(B(d))$.
On a : $\rho_{B_1}(\mu_1,\mu_2) = 0$ ssi $\mu_1 = \mu_2$ (proposition 1.2.)
Supposons $\rho_{B_1}(\mu_1,\mu_2) = b_1$ $\rho_{B_1}(\mu_2,\mu_3) = b_2$.
Soient $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$ et O un ouvert de (X,d)
alors d'après la proposition 2.2. on a :

$$\mu_1(O) \leqslant \mu_2(O^{a_1}) + a_1.$$

de plus O^{a_1} est ouvert et $(O^{a_1})^{a_2} \subset O^{a_1+a_2}$. Ce qui implique :
$\mu_2(O^{a_1}) \leqslant \mu_3(O^{a_1+a_2}) + a_2$.

a_1 et a_2 ayant été choisi arbitrairement respectivement plus grand que b_1 et b_2, en échangeant les rôles de μ_1 et de μ_3 on obtient :

$$\rho_{B_1}(\mu_1,\mu_3) \leqslant \rho_{B_1}(\mu_1,\mu_2) + \rho_{B_2}(\mu_2,\mu_3). \quad ∎$$

Soient (X,d) un espace métrique, μ_1 et $\mu_2 \in M(B(d))$.

On pose : $\sigma(\mu_1,\mu_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mu_1(F) \leq \mu_2(F^\varepsilon) + \varepsilon \quad \forall F \text{ fermé de } (X,d)\}$

$\sigma(\mu_2,\mu_1) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mu_2(F) \leq \mu_1(F^\varepsilon) + \varepsilon \quad \forall F \text{ fermé de } (X,d)\}$.

La distance de Prokorov est alors la distance ρ de $M(\mathcal{B}(d))$ défini ci-dessous.

$$\rho(\mu_1,\mu_2) = \max(\sigma(\mu_1,\mu_2),\sigma(\mu_2,\mu_1)).$$

__*Proposition*__ *4.2.*- Soient (X,d) un espace métrique séparable, μ_1 et $\mu_2 \in M(\mathcal{B}(d))$.

Soit $\{x_i, i \in I\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de X et soit $B = \{B(x_i, \frac{1}{n}), (i,n) \in I \times N\}$ la base dénombrable d'ouverts ainsi obtenue. On note B_1 le stabilisé de B par réunion finie et ρ la distance de Prokorov.

Alors : $(\rho(\mu_1,\mu_2) = b) \Rightarrow (\rho_{B_1}(\mu_1,\mu_2) \leq b)$.

__*Preuve*__ : Soit O un élément de B_1. O est un ouvert de (X,d) d'où : $O = \lim\limits_n \uparrow F_n$ (les F_n étant des fermés de (X,d)),

d'où d'après le lemme (1.2.) : $O^a = \lim\limits_n \uparrow F_n^a$.

D'où $\forall\varepsilon$, $\exists N(\varepsilon) : n > N\varepsilon \Rightarrow |\mu_1(O) - \mu_1(F_n)| < \varepsilon$ et $|\mu_2(O^a) - \mu_2(F_n^a)| < \varepsilon$,

et l'on montre comme dans la proposition 2.2. que :

$\mu_1(O) \leq \mu_2(O^a) + a$ pour tout $a > b$.

$\mu_2(O) \leq \mu_1(O^a) + a$ pour tout $a > b$.

O étant un ouvert quelconque de (X,d) on a donc $\rho_{B_1}(\mu_1,\mu_2) \leq b$.

__*Remarque*__ *2.2.*- Supposons nous placé dans les mêmes conditions que dans la proposition ci-dessus, et soient $\mu_{n \atop n\in N}$ et $\mu \in M(\mathcal{B}(d))$.

Alors : $(\rho(\mu_n,\mu) \underset{n\to\infty}{\to} 0) \Rightarrow (\rho_{B_1}(\mu,\mu_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0)$ (d'après la proposition 4.2.).

Proposition 5.2.- Soient (X,d) un espace métrique séparable, $\{x_i, i \in I\}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans (X,d), $\mu_{n \atop n\in N}$ et $\mu \in M(\mathcal{B}(d))$ et soit $B = \{B(x_i, \frac{1}{n}), (i,n) \in I \times N\}$ la base dénombrable d'ouverts de (X,d) ainsi obtenue. On note B_1 le stabilisé de B par réunion finie.

Alors $(\rho_{B_1}(\mu_n,\mu) \underset{n\to\infty}{\to} 0) \Rightarrow (\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{F}{\Longrightarrow}} \mu)$.

Preuve : Soit O un ouvert de (X,d) et supposons ε donné.

On a $O = \lim_n \uparrow \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{n_i})$

d'où $\exists N : \mu(O - (\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i})) < \frac{\varepsilon}{4}$, (1)

et pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$ on a : $B(x_i, \frac{1}{n_i+m}) \uparrow_m B(x_i, \frac{1}{n_i})$

d'où $\exists N_i : m > N_i \Rightarrow |\mu B(x_i, \frac{1}{n_i}) - \mu B(x_i, \frac{1}{n_i+m})| < \frac{\varepsilon}{4N}$,

d'où pour $m > \sup\{N_i, i \in \{1,\dots,n\}$ on a :

$$|\mu(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i})) - \mu(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i+m}))| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

et pour $m > 4\,(\sup\{n_i, i \in \{1\dots N\}\})$ on a $\frac{1}{n_i+m} \leqslant \frac{1}{n_i} - \frac{1}{m}$ $\forall\, i \in \{1\dots N\}$.

Fixons m : $m > \sup(\sup\{4N_i, i \in 1\dots N\}, 4\sup\{n_i, i \in \{1\dots N\}, \frac{4}{\varepsilon})$

alors puisque $\rho_{B_1}(\mu_n,\mu) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $\exists K : k > K \Rightarrow \rho_{B_1}(\mu_k,\mu) < \frac{1}{m}$,

d'où pour $k > K$ on a :

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i+m})) \leqslant \mu_k(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i+m}))^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} \leqslant \mu_k(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i+m})^{\frac{1}{m}}) + \frac{1}{m}$$

$$\leqslant \mu_k(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i})) + \frac{1}{m} \;;$$

d'où l'on a :

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i+m})) - \mu(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i})) + \mu(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i}) \leq \mu_k(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i})) + \frac{1}{m} .$$

ce qui implique : $\mu(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i}) \leq \mu_k(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i})) + \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{4}$.

$$\leq \mu_k(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i})) + \frac{\varepsilon}{2} ,$$

d'où d'après (1) $\mu(0) - \mu(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i})) + \mu(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i})) \leq \mu_k(\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{1}{n_i})) + \varepsilon.$

ce qui entraîne : $\mu(0) \leq \mu_k(0) + \varepsilon \qquad \forall\, k > K.$

0 et ε ayant été arbitrairement choisis on a donc :

$$\underline{\lim}\, \mu_k(0) \geq \mu(0) \qquad \forall\, 0 \text{ ouvert de } (X,d)$$

et d'après le théorème de Billingsley Alexandroff on a :

$$\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{F}{\Longrightarrow}} \mu.$$

Proposition 6.2.- Soit (X,d) un espace métrique séparable, où d vérifie la condition H ci-dessous :

(H) : $\overline{F^a} = \{x \in X : d(x,F) \leq a\}$ pour tout fermé F de (X,d). (F^a étant le dilaté de F d'ordre a pour la métrique d.

et soient μ_1 et $\mu_2 \in \mathcal{MB}(d)$

dans ces conditions : $(\rho_{B1}(\mu_1,\mu_2) = b) \Rightarrow (\rho(\mu_1,\mu_2) \leq b)$.

Preuve : Dans la proposition 2.2., nous avons vu que $\rho_{B1}(\mu_1,\mu_2)$ était aussi égal à $\max(\sigma_1(\mu_1,\mu_2), \sigma_1(\mu_2,\mu_1))$ où :

$\sigma_1(\mu_1,\mu_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mu_1(O) \leq \mu_2(O^\varepsilon) + \varepsilon \quad \forall\, O \text{ ouvert de } (X,d)\}$.

Soient F un fermé de (X,d) et $a > b$.

Alors $\exists\, a_1$, $a < a_1 < b$ tel que $\mu_2(F^{a_1})^* = 0$.

Lemme 2.2.- Soit (X,d) un espace métrique où d vérifie la condition (H)

si $A = \lim_n \downarrow A^{\frac{1}{n}}$, ($A$ fermé de (X,d)) et si $\mu(A^a)^* = 0$ on a :

$A^a = \lim_n \downarrow (A^{\frac{1}{n}})^a$ μ-presque surement.

Preuve : $A^a \subset (A^{\frac{1}{n}})^a \quad \forall\, n \in N$

d'où $A^a \subset \bigcap_{n\in N} (A^{\frac{1}{n}})^a$.

Autrement dit $A^a \subset \lim \downarrow (A^{\frac{1}{n}})^a$.

Soit $x \in (\overline{A^a})^C$ alors $d(x,A) > a$ (condition (H))

d'où $d(x,A) = a + \eta \quad \eta > 0$

$\exists N : n > N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{\eta}{4}$.

Alors $n > N \Rightarrow d(x,A^{\frac{1}{n}}) > a$

sinon $\exists\, y \in A^{\frac{1}{n}} : d(x,y) < a + \frac{\eta}{4}$ et $\exists z \in A : d(y,z) < \frac{1}{n} + \frac{\eta}{4}$

ce qui impliquerait $d(x,A) < a + \frac{3}{4}\eta$ (contraire à l'hypothèse)

d'où $n > N \Rightarrow x \notin A^{\frac{1}{n}}$

ce qui implique : $x \notin \lim_n \downarrow (A^{\frac{1}{n}})^a$

la démonstration de ce lemme est alors terminée.

F étant un fermé de (X,d) on a : $F = \lim\limits_{n} \downarrow F^{\frac{1}{n}}$.

On applique le lemme 2.2. et l'on a alors :

$$F^{a_1} = \lim_{n} \downarrow (F^{\frac{1}{n}})^{a_1} \quad \mu_2\text{-presque surement}$$

d'où $\exists N_1(\varepsilon) : n > N_1(\varepsilon) \Rightarrow |\mu_2(F^{a_1}) - \mu_2((F^{\frac{1}{n}})^{a_1})| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

et $\exists N_2(\varepsilon) : n > N_2(\varepsilon) \Rightarrow |\mu_1(F) - \mu_1(F^{\frac{1}{n}})| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

Posons $N(\varepsilon) = \sup(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$.

Supposons n fixé ; $(n > N(\varepsilon))$.

On a alors : $\mu_1(F^{\frac{1}{n}}) \leq \mu_2((F^{\frac{1}{n}})^{a_1}) + a_1$ (puisque $a_1 > b$ et $F^{\frac{1}{n}}$ est ouvert)

d'où d'après (1) et (2) : $\mu_1(F) \leq \mu_2(F)^{a_1} + a_1 + \varepsilon$.

ε ayant été choisi arbitrairement la démonstration de cette proposition est terminée. ∎

<u>*Remarque*</u> *3.2.*- Lorsque d vérifie la condition (H) ρ_{B1} et ρ sont alors identiques. Ceci d'après la proposition 4.2. et la proposition 6.2.

<u>*Proposition*</u> *7.2.*- Soit (X,d) un espace métrique séparable.

Soit ρ la distance de prokoroff et soient μ_n et $\mu \in M(\mathcal{B}(d))$.

Alors : $(\mu_n \overset{F}{\Longrightarrow} \mu) \Rightarrow (\rho(\mu_n, \mu) \to 0)$.

<u>*Remarque*</u> *4.2.*- Cette proposition est connue dans un polonais.

<u>*Preuve*</u> : Nous allons tout d'abord démontrer le lemme connu suivant.

Lemme 3.2.- Soient (X,d) un espace métrique, f une application mesurable de X dans X et $\mu \in M(\mathcal{B}(d))$.

Et soit $E_\eta = \{x \mid d(f(x),x) < \eta\}$.

Alors : $(\mu(E_\eta) > 1 - \varepsilon, \varepsilon > 0) \Rightarrow (\rho(\mu,\mu^f) < \max(\eta,\varepsilon)$.

Preuve : Soit $A \in \mathcal{B}(d)$

alors : $\mu(A) - \mu(A \cap E_\eta) < \varepsilon$ (1)

soit $x \in A \cap E_\eta$. On a : $x \in A$ et $d(x,f(x)) < \eta$

ce qui implique $f(x) \in A^\eta$.

D'où $A \cap E_\eta \subset f^{-1}(A^\eta)$

ce qui entraîne : $\mu(A \cap E_\eta) \leq \mu(f^{-1}(A^\eta)) = \mu^f(A^\eta)$

on a donc avec (1) : $\mu(A) \leq \mu^f(A^\eta) + \varepsilon$,

et comme $\rho(\mu_1,\mu_2) = \sigma(\mu_1,\mu_2) = \sigma(\mu_2,\mu_1)$

la démonstration de ce lemme est terminée ∎

Soit $\{x_i, i \in I\}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans (X,d).

η étant donné, $(\eta > 0)$, $\exists\, \lambda \in \left]0, \frac{\eta}{2}\right]$ tel que

$\mu(B(x_i,\lambda)^*) = 0, \forall\, i \in I$ ($*$ désignant la frontière)

$\{x_i, i \in I\}$ étant dense dans X on a : $\bigcup_{i\in I} B(x_i,\lambda) = X$.

I étant dénombrable ; il existe $J \subset I$ tel que card(I) soit fini et tel que

$\mu(\bigcup_{i\in J} B(x_i,\lambda) - X) < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

card(J) étant fini on a : $(\bigcup_{i\in J} B(x_i,\lambda))^* \subset \bigcup_{i\in J} B(x_i,\lambda)^*$

on a donc d'après le théorème de Billingsley-Alexandroff :

$$\exists N(\varepsilon) : n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\mu_n(\bigcup_{i\in J} B(x_i,\lambda)) - \mu(\bigcup_{i\in J} B(x_i,\lambda))\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc d'après (1) :

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\mu_n(\bigcup_{i\in J} B(x_i,\lambda) - \mu(X)\right| < \varepsilon.$$

autrement dit $\mu_n(\bigcup_J B(x_i, \lambda)) > 1 - \varepsilon$ pour $n > N(\varepsilon)$

Card(J) étant fini nous allons poser $J = \{1,\dots,\ell\}$.

On pose aussi

$$E_1 = B(x_1,\lambda)$$

$$E_2 = B(x_2,\lambda) - B(x_1,\lambda)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$E_n = B(x_\ell,\lambda) - \bigcup_{i<\ell} B(x_j,\lambda).$$

On prend $y_i \in E_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,\ell\}$ tel que $E_i \neq \emptyset$.

On note $\{1,\dots,\rho\} = \{i \in \{1,\dots,\rho\} : E_i \neq \emptyset$ et l'on pose $\mu'_n(y_i) = \mu_n(E_i)$.

$\forall\, i \in \{1,\dots,\rho\}\}$.

On a : $\mu(E_1^*) = \mu B(x_1,\lambda)^* = 0$

$$\mu(E_2^*) \leqslant \mu(B(x_2,\lambda)^* + \mu B(x_1,\lambda)^* = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\mu(E_n^*) = 0.$$

Montrons que $\rho(\mu'_n,\mu') \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mu'_n(y_i) - \mu'(y_i)| = \sum_{i=1}^{n} |\mu_n(E_i) - \mu(E_i)|$

Soit $A \in \mathcal{B}(d)$:

on a : $|\mu'_n(A) - \mu'(A)| = |\sum_{i\in L} (\mu'_n\{y_i\} - \mu'\{y_i\}|$ où $L = \{i \in \{1\dots\rho\} : y_i \in A\}$,

et $|\sum_{i\in L} (\mu'_n\{y_i\} - \mu'\{y_i\})| \leqslant \sum_{i\in\{1\dots\rho\}} |\mu'_n\{y_i\} - \mu'\{y_i\}|$

d'où $\mu'_n(A) \leqslant \mu'(A) + \sum_{i=1}^{\rho} |\mu'_n\{y_i\} - \mu'\{y_i\}$

$$\leqslant \mu'(A^{\sum_{i=1}^{\rho} |\mu'_n\{y_i\} - \mu'\{y_i\}}) + \sum_{i=1}^{\rho} |\mu'_n\, y_i\} - \mu'\{y_i\}$$

d'où $\rho(\mu'_n,\mu') \leq \sum_{i=1}^{n} |\mu_n(E_i) - \mu(E_i)|$.

Les E_i étant de Frontière μ-nulle on a donc d'après le théorème de Billingsley-Alexandroff :

$$\rho(\mu'_n,\mu') \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{on pose} \quad \rho(\mu'_n,\mu') = \alpha_n(\lambda,\varepsilon).$$

on applique alors le lemme 3.2. avec $f(x) = y_i \ \forall x \in E_i$, $i \in \{1,\dots,p\}$.
Alors $E_\eta = \{x : d(x,f(x)) < \eta\} \supset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$

d'où $\mu_n(E_\eta) > 1 - \varepsilon$ pour $n > N$
on applique le lemme 3.2. et l'on a :

$n > N$ entraîne : $\rho(\mu_n,\mu_n^f) < \mathrm{Max}(2^\lambda,\varepsilon)$

et $\rho(\mu,\mu^f) < \mathrm{Max}(2^\lambda,\varepsilon)$

ce qui implique $\rho(\mu,\mu_n) \leq 2\,\mathrm{Max}(2\lambda,\varepsilon) + \alpha_n(\lambda,\varepsilon)$
la démonstration de cette proposition est alors terminée.

Remarque 4.2.- Soit (X,d) métrique séparable alors :
la proposition 7.2., la remarque (2.2.) et la proposition 5.2. nous permettent d'énoncer :

$$(\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{F}{\Longrightarrow}} \mu) \iff (\rho_{B1}(\mu_n,\mu) \to 0).$$

Dans le cas où d vérifie (H) : la proposition 6.2. et la proposition 4.2. nous permettent d'énoncer :

$$\rho(\mu_1,\mu_2) = \rho_{B1}(\mu_1,\mu_2) \quad \text{pour tout} \quad (\mu_1,\mu_2) \in MB(d) \times MB(d).$$

où $\rho_{B1}(\mu_1,\mu_2)$ est aussi égal d'après la proposition (2.2.) à

$$\rho_1(\mu_1,\mu_2) = \max(\sigma_1(\mu_1,\mu_2)\sigma_1(\mu_2,\mu_1))$$

avec $\sigma_1(\mu_1,\mu_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mu_1(O) \leqslant \mu_2(O^\varepsilon) + \varepsilon \ \forall\, O \in B_1\}$.

Remarque 5.2.- Lorsque d vérifie H l'expression de ρ sous la forme de ρ_{B1} est très intéressante pour le calcul effectif de $\rho(\mu_1,\mu_2)$. (Problème que s'était posé FRANK R. HAMPEL) dans [6]).

Nous allons maintenant donner la définition de deux topologies connues sur l'ensemble des mesures de probabilité définies sur un espace mesuré. Nous les comparerons par la suite à d'autres topologies.

Définition 2.2.- Soient $(X,\mathcal{B})$ un espace mesuré et $M(\mathcal{B})$ l'ensemble des mesures de probabilité définies sur la tribu $\mathcal{B}$.

On appelle topologie de la convergence simple sur $\mathcal{B}$ (que l'on note L) la topologie de $M(\mathcal{B})$ engendrée par les ouverts $\mathcal{O}$ de la forme suivante :

$$\mathcal{O} = \{\nu \in M(\mathcal{B}) : \nu(A_i) \in \,]\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2}[,\ i \in \{1,\dots,n\}\}$$

où $A_i \in \mathcal{B}$, $\varepsilon_{i1} \neq \varepsilon_{i2}$, $\varepsilon_{i1} \in \,]-\infty,1[$, $\varepsilon_{i2} \in \,]0,\infty[$; $i \in \{1,\dots,n\}$.

On vérifie sans difficulté que l'intersection de deux ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ de la forme ci-dessous est encore un ouvert de cette forme. Les ouverts $\mathcal{O}$ forment donc une base de la topologie L. Soit $\mu \in M(\mathcal{B})$; un voisinage basique de $\mathcal{O}_\mu$ de μ est alors de la forme :

$$\mathcal{O}_\mu = \{\nu \in M(\mathcal{B}) : \nu(A_i) \in \,]\mu(A_i) - \varepsilon_{i1},\ \mu(A_i) + \varepsilon_{i2}|,\ i \in \{1,\dots,p\}\}.$$

Il est alors immédiat que $\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{L}{\Longrightarrow}} \mu$ ssi $\mu_n(A) \underset{n\to\infty}{\to} \mu(A) \quad \forall\ A \in \mathcal{B}$.

Remarque 6.2.- On peut se restreindre à prendre dans la définition de $\mathcal{O}$ des ε_{i1} et ε_{i2} appartenant à Q. Les ouverts $\mathcal{O}'$ ainsi obtenu forment encore une base de L.

un voisinage basique $\mathcal{O}'_\mu$ de μ s'écrivant alors :

$$\mathcal{O}'_\mu = \{\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}) : \nu(A_i) \in \,]\mu(A_i) - \varepsilon_{i1}, \mu(A_i) + \varepsilon_{i2}[, \ i \in \{1,\ldots,p\}\},$$

où $\varepsilon_{i1} > 0$, $\varepsilon_{i2} > 0$, $\mu(A_i) - \varepsilon_{i1} \in Q$, $\mu(A_i) + \varepsilon_{i1} \in Q$; $i \in \{1,\ldots,p\}$.

Ainsi lorsque $\mathcal{B}$ a au plus un nombre dénombrable d'éléments, $\mathcal{F}$ est à base dénombrable.

Définition 3.2.- Soient $(X,\mathcal{B})$ un espace mesuré et $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ défini comme ci-dessus. On appelle topologie de la norme, la topologie $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ induite par la métrique θ définie ci-dessous :

$$\theta(\mu_1,\mu_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : |\mu_1(A) - \mu_2(A)| < \varepsilon, \forall A \in \mathcal{B}\}.$$

on a alors $\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{N}}{\Longrightarrow}} \mu$ ssi $\forall\varepsilon$, $\exists N(\varepsilon)$: $|\mu_n(A) - \mu(A)| < \varepsilon \quad \forall A \in \mathcal{B}$

CHAPITRE III

UNE TOPOLOGIE SUR L'ENSEMBLE DES MESURES DE PROBABILITE DEFINIES SUR UNE TRIBU BORELIENNE A BASE DENOMBRABLE.

-=-=-=-=-=-

Notations.- comme dans le paragraphe précédent on notera

- F la topologie faible
- L la topologie de la convergence simple sur B.
- N la topologie de la norme.

Définition 1.3.- Soient (X,T) un espace topologique à base dénombrable d'ouverts, $B(T)$ la tribu engendrée par T et $M(B(T))$, l'ensemble des mesures de probabilité définies sur $B(T)$.

Soit $B = \{O_i, i \in I\}$ une base dénombrable d'ouverts de (X,T).

La topologie T_B de $M(B(T))$ est dite "engendrée" par la base B, si T_B est la topologie engendrée par les ouverts O de la forme suivante :

$$O = \{\nu \in M(B(T)) : \nu(O_j) \in]\varepsilon'_j, \varepsilon_j[\text{ , } j \in J \text{ (sous-ensemble fini de } I)\}$$

où $\varepsilon'_j \in Q \cap]-\infty, 1[$, $\varepsilon_j \in Q \cap]0, \infty[$; $j \in J$.

Soit C l'ensemble des O de la forme ci-dessus.

Proposition 1.3.- C est une base dénombrable de la topologie T_B.

<u>*Preuve*</u>.- I et Q sont dénombrables. De plus l'ensemble des parties finies d'un ensemble dénombrable est dénombrable et toute réunion dénombrable d'ensemble dénombrable est dénombrable.

$\mathcal{C}$ est donc dénombrable.

Reste à montrer que :

$$\mathcal{O}_1 \in \mathcal{C},\ \mathcal{O}_2 \in \mathcal{C} \text{ entraîne } \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathcal{C}.$$

$$\{\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(T)) : \nu(O_j) \in]\varepsilon'_{1j}, \varepsilon_{1j}[,\ j \in J_1\} \cap \{\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(T)) : \nu(O_j) \in]\varepsilon'_{2j}, \varepsilon_{2j}[,\ j \in J_2\}$$

$$= \{\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(T)) : \nu(O_j) \in]\varepsilon'_{3j}, \varepsilon_{3j}[,\ j \in J_1 \cup J_2 \text{ (sous-ensemble fini de I)}\}$$

où : $\varepsilon'_{3j} = \sup(\varepsilon'_{2j}, \varepsilon'_{1j})$ pour $j \in J_1 \cap J_2$

$\varepsilon'_{3j} = \varepsilon'_{2j}$ pour $j \in J_2 - J_1$

$\varepsilon'_{3j} = \varepsilon'_{1j}$ pour $j \in J_1 - J_2$

$\varepsilon_{3j} = \inf(\varepsilon_{2j}, \varepsilon_{1j})$ pour $j \in J_1 \cap J_2$

$\varepsilon_{3j} = \varepsilon_{2j}$ pour $j \in J_2 - J_1$

$\varepsilon_{3j} = \varepsilon_{1j}$ pour $j \in J_1 - J_2$.

un voisinage basique $\mathcal{O}_\mu$ de μ dans $(\mathcal{M}\ \mathcal{B}(T), \mathcal{T}_B)$ est alors de la forme suivante :

$$\mathcal{O}_\mu = \{\nu \in \mathcal{M}\ \mathcal{B}(T) : \nu(O_j) \in]\mu(O_j) - \varepsilon_{1j}, \mu(O_j) + \varepsilon_{2j}[,\ j \in J\}$$

où J est un sous-ensemble fini de I

$$\varepsilon_{1j} \text{ et } \varepsilon_{2j} \in R^+$$

$$\mu(O_j) - \varepsilon_{1j} \in Q$$

$$\mu(O_j) + \varepsilon_{2j} \in Q$$

Proposition 2.3.- Soit V_μ le voisinage de μ défini ci-dessous :

$$V_\mu = \{\nu \in \mathcal{M}\,\mathcal{B}(T) : \nu(O_j) \in]\mu(O_j) - \varepsilon_j, \mu(O_j) + \varepsilon_j[, \ j \in J \text{ (sous-ensemble fini de } I)\}$$

où $\varepsilon_j \in R^+$; $j \in J$.

Alors V_μ est ouvert dans $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(T)), \mathcal{T}_B)$.

Preuve.- On a : $V_\mu = \bigcap_J V_{\mu j}$

où $V_{\mu j} = \{\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(T)) : \nu(O_j) \in]\mu(O_j) - \varepsilon_j, \mu(O_j) + \varepsilon_j[\}$.
Q étant dense dans R : il existe donc une suite (a_{jn}) : $a_{jn} \in Q, \forall n \in N$ telle que : $\lim_{n\to\infty} \downarrow (a_{jn}) = \mu(O_j) - \varepsilon_j$;

Posons $$\varepsilon_{jn} = \mu(O_j) - a_{jn} .$$

on a alors $\mu(O_j) - \varepsilon_{jn} = a_{jn}$ d'où $\mu(O_j) - \varepsilon_j = \lim_n \downarrow \mu(O_j) - \varepsilon_{jn}$ où $\mu(O_j) - \varepsilon_{jn} \in Q$; $n \in N$, de même on construit une suite $(\mu(O_j) + \varepsilon'_{jn})$ telle que : $\mu(O_j) + \varepsilon'_{jn} \in Q$; $n \in N$ et $\mu(O_j) + \varepsilon_j = \lim_n \uparrow \mu(O_j) + \varepsilon'_j$
on a alors :

$$V_{\mu j} = \bigcup_{N} \{\nu \in \mathcal{M}\,\mathcal{B}(T) : \nu(O_j) \in \,]\mu(O_j) - \varepsilon_{jn},\ \mu(O_j) + \varepsilon'_{jn}[\,\}$$

où $\{\nu \in \mathcal{M}\,\mathcal{B}(T) : \nu(O_j) \in \,]\mu(O_j) - \varepsilon_{jn},\ \mu(O_j) + \varepsilon'_{jn}[\,\}$ sont des voisinages basiques de μ. ∎

Proposition 3.3.- $\mu_n \overset{\mathcal{T}_B}{\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}} \mu$ ssi $\mu_n(O_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(O_i)$ pour tout $i \in I$

Preuve.- Supposons $\mu_n \overset{\mathcal{T}_B}{\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}} \mu$ et ε_1 donné.

Soit O_i un ouvert de la base B.

Considérons alors le voisinage suivant de μ :

$$V_\mu = \{\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(T)) : \nu(O_i) \in \,]\mu(O_i) - \varepsilon_1,\ \mu(O_i) + \varepsilon_1[\,\}$$

V_μ est ouvert dans $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(T)), \mathcal{T}_B)$ (proposition 2.2.).

puisque $\mu_n \overset{\mathcal{T}_B}{\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}} \mu$; $\exists\ N : n > N \Longrightarrow \mu_n(O_i) \in V_\mu$ ce qui entraîne $|\mu_n(O_i) - \mu(O_i)| < \varepsilon_1$.

Réciproque : Soit $\mathcal{O}_\mu$ un voisinage basique de μ.

$$\mathcal{O}_\mu = \{\nu : \nu(O_j) \in \,]\mu(O_j) - \varepsilon_{1j},\ \mu(O_j) + \varepsilon_{2j}[,\ j \in J \text{ sous-ensemble fini de } I\}.$$

puisque $\mu_n(O_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(O_i)$ pour tout $i \in I$,

$$\exists\ N_j,\ j \in J : n > N_j \Longrightarrow \mu_n(O_j) \in \,]\mu(O_j) - \varepsilon_{1j},\ \mu(O_j) + \varepsilon_{2j}[$$

posons $\qquad N = \sup(N_j,\ j \in J)$

alors $n > N \Longrightarrow \mu_n \in \mathcal{O}_\mu$ ∎

Proposition 4.3.- Soit (X,T) un espace topologique à base dénombrable. Soit B une base dénombrable d'ouverts de (X,T).

on note $B_1 = \{O_i, i \in I\}$ le stabilisé de B par réunion finie.

$B_2 = \{O_j, j \in J\}$ le stabilisé de B par intersection finie.

Alors si $\mu_n \xRightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}_{B_1}} \mu$ resp. $(\mu_n \xRightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}_{B_2}} \mu)$ on a :

$$\underline{\lim}_n \mu_n(O) \geq \mu(O) \text{ pour tout ouvert } O \text{ de } (X,T).$$

Preuve.- Nous allons tout d'abord démontrer le lemme suivant.

Lemme 1.3.- Soit O un ouvert de (X,T)

Alors si $\mu_n \xRightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}_{B_1}} \mu$ resp. $(\mu_n \xRightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}_{B_2}} \mu)$, il existe une sous-suite (μ_{n_k}) de (μ_n) et une suite O_k d'ouverts de (X,T) telles que :

$$O = \lim_k \uparrow O_k \quad \text{et} \quad \mu_{n_k}(O_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(O) .$$

Preuve.- Supposons que $\mu_n \xRightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}_{B_1}} \mu$

B_1 étant une base dénombrable d'ouverts de (X,T) stable par réunion finie ; on peut écrire :

$$O = \lim_m \uparrow O_m \quad \text{où} \quad O_m \in B_1 \quad \forall\, m \in \mathbb{N} .$$

comme $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(T))$ on a :

(1) $$\mu(O_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \mu(O)$$

et d'après la proposition 3.3. on a :

(2) $$\mu_n(O_m) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(O_m) \qquad \forall\, m \in N$$

construction de la suite $\mu_{n_k}(O_k)$:

pour premier terme prenons $\mu_1(O_1)$.

Soit $B(\mu(O), \frac{1}{2})$ la boule ouverte de R de centre $\mu(O)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

d'après (1), $\exists\, N_2 : m \geq N_2 \Longrightarrow \mu(O_m) \in B(\mu(O), \frac{1}{2})$

d'après (2), pour $m \geq N_2$, $\exists\, P_2(m) : n \geq P_2(m) \Longrightarrow \mu_n(O_m) \in B(\mu(O), \frac{1}{2})$

on pose alors $$\mu_{n_2}(O_2) = \mu_{N_2}(O_{P_2(N_2)})$$

supposons la suite construite jusqu'à l'ordre $k-1$.

On a alors $\mu_{n_{k-1}}(O_{k-1}) \in B(\mu(O), \frac{1}{k-1})$ (Boule ouverte de R muni de sa métrique habituelle), construisons le rang k.

Soit $B(\mu(O), \frac{1}{k})$.

d'après (1), $\exists\, N_k : m \geq N_k \Longrightarrow \mu(O_m) \in B(\mu(O), \frac{1}{k})$

d'après (2), pour $m \geq N_k$ $\exists\, P_k(m) : n \geq P_k(m) \Longrightarrow \mu_n(O_m) \in B(\mu(O), \frac{1}{k})$

on prend alors $\mu_{n_k}(O_k) = \mu_{\sup(N_k,\, n_{k-1}+1)}\ O\ \sup(p_k(N_k),\, m_{k-1}+1)$. Par réitération on obtient ainsi la suite annoncée.

Supposons $\mu_n \xRightarrow[n\to\infty]{B_2} \mu$

B étant une base dénombrable de (X,T) ; on peut écrire

$$O = \lim_m \uparrow \left(\bigcup_{j=1}^{m} O_j\right) \quad \text{où} \quad O_j \in B \ ; \ \forall\, j \in N .$$

comme $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(T))$ on a :

(1)
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} O_j\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} \mu(O)$$

et d'après la proposition 3.3. on a :

$$\mu_n(O_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(O_j) \qquad \forall\, j \in N$$

B_2 étant stable par intersection finie on a aussi :

$$\mu_n(O_j \cap O_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(O_j \cap O_k) \quad \text{pour tout } O_j \text{ et tout } O_k \text{ de } B.$$

alors sachant que

$$\left|\mu_n\left(\bigcup_{j=1}^{m} O_j\right) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} O_j\right)\right| \leqslant \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,m\}^2} \left|\mu_n(O_i \cap O_j)\ \mu(O_i \cap O_j)\right|$$

on obtient :

(2)
$$\mu_n\left(\bigcup_{j=1}^{m} O_j\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} O_j\right)$$

la suite de la démonstration de ce lemme est alors identique à la démonstration ci-dessus.

On peut alors démontrer la proposition.

Soit (μ_{n_p}) une sous-suite de (μ_n) telle que

$$\mu_{n_p}(0) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \underline{\lim_n}\, \mu_n(0)$$

on a alors $\mu_{n_p} \underset{p\to\infty}{\overset{T_{B_1}}{\Longrightarrow}} \mu$

d'où d'après le lemme ci-dessus, il existe une suite $(\mu_{n_{p_k}}(0_k))$ telle que : $0 = \lim_k \uparrow 0_k$ et $\mu_{n_{p_k}}(0_k) \longrightarrow \mu(0)$.

or $\mu_{n_{p_k}}(0) \underset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} \underline{\lim_n}\, \mu_n(0)$ et $0_k \subset 0$; $\forall k \in N$,

ce qui implique : $\underline{\lim_n}\, \mu_n(0) \geqslant \mu(0)$.

la fin de cette démonstration étant identique pour B_1 et B_2 ; la démonstration de cette proposition est terminée. ∎

Proposition 5.3.- Soit (X,d) un espace métrique séparable.

Soit $B = \{0_i,\ i \in I\}$ une base dénombrable d'ouverts de (X,d).

Soit T_B la topologie de $M(B(T))$ "engendrée" par la base B, alors s'il existe $0_i \in B$ et une suite (x_n) ; $x_n \in 0_i$, $\forall n \in N$ où $\lim_{n\to\infty} x_n = x$; $x \notin 0_i$ on a :

T_B est différente de F.

<u>*Preuve*</u>.- Puisque $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ on a : $\delta x_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{F}} \delta x$ (x étant la mesure de Dirac au point x).

Alors que : $\delta x_n(O_i) = 1$ pour tout $n \in N$ et $\delta x(O_i) = 0$ autrement dit : $\delta x_n(O_i) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} \delta x(O_i)$ ce qui d'après la proposition 3.3. entraîne :

$$\delta x_n \underset{n\to\infty}{\overset{T_B}{\Longrightarrow}} \delta x \qquad \blacksquare$$

nous allons maintenant donner un exemple où la "topologie T_B" est différente de la topologie L.

- Soit R muni de la topologie usuelle

- Notons B l'ensemble des intervalles ouverts d'extrémités rationnelles.

- Soit T_B la topologie engendrée par la base B.

et soit $x \in R - Q$.

Q étant dense dans R ; il existe une suite (x_n) de Q telle que : $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Soit $]p,q[$ un ouvert de la base B.

de deux choses l'une : $x \in]p,q[$ ou $x \notin]p,q[$.

Si $x \in]p,q[$, $\exists\ N : n \geqslant N \Longrightarrow x_n \in]p,q[$

d'où $\delta x_n]p,q[\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta x]p,q[$. (δx : mesure de Dirac au point x).

Si $x \notin]p,q[$; x n'appartenant pas à Q on a donc :

$$x \neq p \text{ et } x \neq q .$$

d'où il existe $\varepsilon'(x) \in Q$ et $\varepsilon(x) \in Q$: $x \in \left]\varepsilon'(x), \varepsilon(x)\right[$ et

$\left]\varepsilon'(x)\, \varepsilon(x)\right[\cap \left]p,q\right[= \phi$ puisque $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, il existe N_1 tel que : $n \geq N_1$

entraîne $x_n \in \left]\varepsilon'(x), \varepsilon(x)\right[$, autrement dit : $n \geq N_1 \Longrightarrow x_n \notin \left]p,q\right[$

d'où $\delta x_n \left]p,q\right[\xrightarrow[n\to\infty]{} \delta x \left]p,q\right[$

p et q ayant été choisi arbitrairement on a donc d'après la proposition (3.3.) :

(1) $$\delta(x_n) \xRightarrow[n\to\infty]{T_B} \delta(x)$$

Considérons maintenant l'évènement $A = \{x\}$.

On a alors $\delta x_n(A) = 0$ pour tout $n \in N$ (puisque $x_n \in Q$; $n \in N$ et $x \in R - Q$) et $\delta x(A) = 1$.

d'où $$\delta x_n(A) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} \delta(A)$$

ce qui implique $$\delta x_n \xRightarrow[n\to\infty]{L} \delta x \qquad (2).$$

on a donc d'après (1) et (2) $T_B \neq L$.

Nous allons maintenant rappeler un lemme connu dont nous allons nous servir par la suite.

<u>*Lemme de "Durezewski"*</u>.- Soient (X,T) et (Y,T_1) deux espaces topologiques.

Soit $x_0 \in E$, x_0 possédant une base dénombrable de voisinages.

Soit f une application de X dans Y.

Dans ces conditions ; si $(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{T} x_0) \Longrightarrow (f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{T_1} f(x_0))$

f est continue.

Preuve.- On note $V_1,\dots,V_n,\dots$ la base de voisinages de x_0 et on pose : $U_1 = V_1$, $U_2 = U_1 \cap V_2$, ..., $U_n = U_{n-1} \cap V_n$, ...

Supposons f non continue en x_0.

on peut alors écrire :

$\exists$ W voisinage de $f(x)$ dans (Y,T_1) tel que :

$\forall$ V voisinage de x_0 : $f(V) \not\subset W$

ce qui implique $f(U_n) \not\subset W$; $\forall\, n \in N$,

d'où pour tout $n \in N$, $\exists\, x_n \in U_n$ tel que $f(x_n) \notin W$

ce qui entraîne $f(x_n) \overset{T_1}{\not\longrightarrow} f(x)$.

Soit U un voisinage de x_0, $\{Vn, n \in N\}$ étant une base de voisinage de x_0 ; il existe n tel que $V_n \subset U$.

or $U_n \subset V_n$ de plus $\forall\, m > n$ on a : $U_m \subset U_n$,

ce qui implique : $x_m \in U$, pour tout $m > n$,

autrement dit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, ce qui est contraire à l'hypothèse. ∎

Forts de ce lemme nous allons maintenant étudier les propriétés de la "topologie $\mathcal{T}_B$" .

Proposition 6.3.- Soit (X,T) un espace topologique à base dénombrable d'ouverts.

Soit $B = \{O_i, i \in I\}$ une base dénombrable d'ouverts de (X,T), stable pour réunions finies, par intersections finies, et contenant X et soit $\mathcal{T}_B$ la topologie de $\mathcal{M}(\mathcal{B}(T))$ "engendrée" par la base B.

Alors $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(T), \mathcal{T}_B))$ est métrisable séparable.

Preuve.- Considérons l'application T_1 définie ci-dessous :

$$T_1 : \mathcal{M}(\mathcal{B}(T)) \longrightarrow [0,1]^I$$

$$\mu \longrightarrow (\mu(O_i), i \in I) .$$

1°) T_1 est injective :

$(T_1(\mu) = T_1(\nu)) \Longrightarrow (\nu(O_i) = \mu(O_i)$ pour tout O_i de la base $B)$.

Notons B_3 l'algèbre de Boole engendrée par B.

Nous allons montrer que μ et ν coïncident sur B_3.

Lemme 2.3.- Soit B une classe arbitraire de parties d'un ensemble X. Formons successivement :

1°) la classe B_1 constituée par ϕ, X et $A \subset X$ tels que A ou $A^C \in B$.

2°) la classe B_2 des intersections finies, de parties de X dans B_1.

3°) la classe B_3 des sommes finies de parties de B_2 deux à deux disjointes.

Alors B_3 n'est autre que l'algèbre de Boole engendrée par B.

La démonstration de ce lemme se trouve pages 7 et 8 [2] .

Lemme 3.3.- Si dans le lemme 2.3. B est la base de la proposition, autrement dit si $B = \{O_i, i \in I\}$; B stable par réunions finies, et par intersections finies et contenant X,

tout élément de B_2 peut s'écrire de la forme ci-dessous :

$$O_i \cap O_j^C \quad \text{où} \quad O_i \quad \text{et} \quad O_j \in B.$$

Preuve.- Quand on a fait les trois remarques suivantes :

1°) l'intersection est une opération commutative.

2°) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^C$ pour toute famille finie A_i, $i \in \{1...n\}$) de $P(X)$.

3°) B est stable par réunions finies, par intersections finies et contient X.

La démonstration de ce lemme est terminée.

Alors, d'après le lemme 2.3. pour montrer que μ et ν coïncident sur B_3, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur B_2.

Soient O_i et O_j deux éléments quelconque de B.

on a :

$$\mu(O_i) = \mu(O_i \cap O_j^C) + \mu(O_i \cap O_j)$$

$$\nu(O_i) = \nu(O_i \cap O_j^C) + \nu(O_i \cap O_j)$$

or $\mu(O_i) = \nu(O_i)$ et $\mu(O_i \cap O_j) = \nu(O_i \cap O_j)$. (puisque O_i et $O_i \cap O_j$ appartiennent à B).

ce qui implique : $\mu(O_i \cap O_j^C) = \nu(O_i \cap O_j^C)$,

d'où μ et ν coïncident sur B_2 (lemme 3.3), elles coïncident donc sur B_3 . (B_3 étant la classe des sommes finies de parties de B_2 disjointes deux à deux).

On a donc $\mu = \nu$; d'après l'unicité du prolongement d'une probabilité définie sur une algèbre de Boole A à la σ-algèbre de Boole engendrée par A. ∎

2°) T_1 est bicontinue.

$\mathcal{M}(\mathcal{B}(T), \mathcal{T}_B)$ et $[0,1]^I$ étant des espaces topologiques à bases dénombrables, on peut, grâce au lemme de Durezewski, dans ce qui suit se limiter à des suites.

a) Supposons $\mu_n \overset{\mathcal{T}_B}{\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}} \mu$. D'après la proposition 3.3. on a :

$$(\mu_n \overset{\mathcal{T}_B}{\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}} \mu) \Longrightarrow (\mu_n(O_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(O_i) \ ; \ i \in I)$$

d'où $T(\mu_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(\mu)$.

b) Supposons $T(\mu_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(\mu)$ comme :

$(T_{\mu_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T\mu) \Longrightarrow (\mu_n(O_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(O_i) \ ; \ i \in I)$ on a d'après la proposition 3.3.

$\mu_n \overset{\mathcal{T}_B}{\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}} \mu$.

De plus: I est dénombrable

d'où T est un homéomorphisme de $\mathcal{M}(\mathcal{B}(T))$ sur une partie de $[0,1]^I$ d'où $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(T), \mathcal{T}_B)$ est métrisable séparable. ∎

<u>*Corollaire*</u> *1.3.*- Soit (X,T) un espace topologique à base dénombrable d'ouverts.

Soit B_1 une base dénombrable d'ouverts de (X,T) contenant X.

Soit B_2 le stabilisé de B_1 par réunions et intersections finies. Alors B_2 est dénombrable et $\mathcal{B}(B_2) = \mathcal{B}(T)$, de plus $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(T)), \mathcal{T}_{B_2})$ est métrisable séparable.

<u>*Preuve*</u>.- Quand on a remarqué que l'ensemble des parties finies d'un ensemble dénombrable est dénombrable, il est immédiat que B_2 est dénombrable de plus $\mathcal{B}(B_2) \subset \mathcal{B}(T)$ (puisque tout élément de B_2 appartient à $\mathcal{B}(T)$), et $\mathcal{B}(T) \subset \mathcal{B}(B_1) \subset \mathcal{B}(B_2)$. ∎

Proposition 7.3.- Soit (X,d) un espace métrique séparable.

Soit B une base dénombrable d'ouverts de (X,d).

Notons $B_1 = \{O_i, i \in I\}$ le stabilisé de B par réunions finies

$B_2 = \{O_j, j \in J\}$ le stabilisé de B par intersections finies.

alors $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(d)), \mathcal{T}_{B_1})$ resp. $((\mathcal{M}(\mathcal{B}(d)), \mathcal{T}_{B_2}))$ est métrisable séparable.

Preuve.- Considérons l'application T_1 resp. (l'application T_2) définie ci-dessous.

$$T_1 : \mathcal{M}(\mathcal{B}(d)) \longrightarrow [0,1]^I$$

$$\mu \longrightarrow (\mu(O_i), i \in I)$$

$$T_2 : \mathcal{M}(\mathcal{B}(d)) \longrightarrow [0,1]^J$$

$$\mu \longrightarrow (\mu(O_j), j \in J)$$

1°) T_1 est injective :

$$(T_1(\mu) = T_1(\nu)) \Longrightarrow (\mu(O_i) = \nu(O_i) \ ; \ i \in I).$$

Soit O un ouvert de (X,d) ; B_1 étant stable par réunions finies on peut écrire :

$$O = \lim_n \uparrow O_n \quad \text{où} \quad O_n \in B_1 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

d'où :

$$\nu(O) = \lim_n \uparrow \nu(O_n) = \lim_n \uparrow \mu(O_n) = \mu(O)$$

O ayant été choisi arbitrairement on a donc :

$$\nu(O) = \mu(O) \text{ pour tout ouvert } O \text{ de } (X,d)$$

et X étant métrique μ et ν sont régulières,

d'où $$\mu = \nu .$$

2°) T_2 est injective

Soit O un ouvert de (X,d) et supposons $T_2(\nu) = T_2(\mu)$.

B étant une base dénombrable d'ouverts de (X,d) et $B \subset B_2$

on peut écrire : $O = \lim_n \uparrow \bigcup_{j=1}^{n} O_j$ où $O_j \in B_2$; $j \in \{1...n\}$

et l'on a : B_2 stable par intersection finie (1)

$$\left|\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} O_j\right) - \nu\left(\bigcup_{j=1}^{n} O_j\right)\right| \leq \sum_{(i,j)\in\{1,...,n\}^2} |\mu(O_i \cap O_j) - \nu(O_i \cap O_j)| \qquad (2)$$

$$(T_2(\mu) = T_2(\nu)) \Longrightarrow (\mu(O_j) = \nu(O_j) \ ; \ j \in J) \qquad (3)$$

d'où d'après 1), 2) et 3) : $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} O_j\right) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^{n} O_j\right)$ on montre alors comme pour T_1 que $\mu = \nu$.

La suite de la démonstration est identique pour T_1 comme pour T_2 à la démonstration de la proposition 6.3. ∎

<u>*Proposition*</u> 8.3.- Soit (X,d) un espace métrique séparable. Soit B une base dénombrable d'ouverts de (X,d).

On note $B_1 = \{O_i, i \in I\}$ le stabilisé de B par réunions finies

$B_2 = \{O_i, i \in I\}$ le stabilisé de B par intersections finies,

et soit $\mathcal{T}_{B_1}$ resp. $(\mathcal{T}_{B_1})$ la topologie de $\mathcal{M}(\mathcal{B}(d))$ "engendrée" par B_1 resp. B_2 dans ces conditions :

la topologie $\mathcal{T}_{B_1}$ resp. (la topologie $\mathcal{T}_{B_2}$) est plus fine que la topologie faible.

<u>*Preuve*</u>.- En utilisant la proposition 4.3. et le théorème de Billingsley-Alexandroff on montre que :

$$(\mu_n \xRightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}_{B_1}} \mu) \text{ , resp. } (\mu_n \xRightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}_{B_2}} \mu) \text{ implique } (\mu_n \xRightarrow[n\to\infty]{\mathcal{F}} \mu)$$

et comme $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(d)), \mathcal{T}_{B_1})$, resp. $((\mathcal{M}(\mathcal{B}(d), \mathcal{T}_{B_2}))$ et $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(d), \mathcal{F})$ sont métrisables séparables, la démonstration de cette proposition est terminée.

<u>*Proposition*</u> 9.3.- Soit (X,d) un espace métrique séparable. Soit $B = \{O_i, i \in I\}$ une base dénombrable d'ouverts de (X,d), stable par réunion finie resp. (stable par intersection finie), s'il existe $O_i \in B$ et une suite (x_n) de O_i telle que $\lim x_n = x$; $x \in X - O_i$ $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(d)), \mathcal{T}_B)$ ne peut être compact.

<u>*Preuve*</u>.- Supposons $\mathcal{M}(\mathcal{B}(d))$ compact pour la topologie $\mathcal{T}_B$.

Considérons le sous-ensemble dénombrable $\{\delta(x_n), n \in N\}$ de $\mathcal{M}\ \mathcal{B}(d)$, il existe alors une sous-suite $(\delta(x_{n_k}))$ de $(\delta(x_n))$ et $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(d))$

telles que :

$$\delta x_{n_k} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{T}_B}{\Longrightarrow}} \mu$$

et d'après la proposition 8.3. :

$$(\delta(x_{n_k}) \underset{(k\to\infty)}{\overset{\mathcal{T}_B}{\Longrightarrow}} \mu) \Longrightarrow (\delta(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\overset{F}{\Longrightarrow}} \mu)$$

de plus : $x_{n_{k(k\to\infty)}} \longrightarrow x$ ce qui entraîne $\delta(x_{n_{k(k\to\infty)}}) \overset{F}{\Longrightarrow} \delta(x)$

et comme la topologie faible est séparé on a : $\mu = \delta(x)$ ce qui est impossible puisque : $\delta(x_{n_k})(O_i) = 1$, $\forall$ k ϵ N et $\delta(x) = 0$ implique d'après la proposition 3.3.

$$\delta(x_{n_k}) \overset{\mathcal{T}_B}{\not\Longrightarrow} \delta x \quad \blacksquare$$

Proposition 10.3.- Soit (X,d) un espace métrique séparable.

Soit $B = \{O_i, i \in I\}$ une base dénombrable stable par réunions finies, resp. (stable par intersections finies) de (X,d).

Si l'on note $D = \{\delta(x), x \in X\}$ où $\delta(x)$ (est la mesure de Dirac au point x) D est fermé pour la topologie $\mathcal{T}_B$.

Preuve.- Supposons $\delta(x_n) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{T}_B}{\Longrightarrow}} \mu$ alors d'après la proposition 8.3. :

$$\delta(x_n) \underset{n\to\infty}{\overset{F}{\Longrightarrow}} \mu \quad \text{d'où} \quad \mu = \delta(x) . \quad \blacksquare$$

Proposition 11.3.- Soit (X,T) un espace topologique à base dénombrable.

Soit B une base dénombrable d'ouverts de (X,T).

Soit $\mathcal{T}_B$ la topologie de $M(\mathcal{B}(T))$ "engendrée" par la base B.

On note Θ l'ensemble des mesures de probabilités définies sur $\mathcal{B}(T)$ et ne chargeant qu'un nombre fini de point.

Autrement dit :

$$\Theta = \{\mu \in M(\mathcal{B}(d)) : \mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \delta(x_i) \; ; \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \; , \; \alpha_i \geq 0 \text{ et } x_i \in X\}$$

Alors : Θ est dense dans $(M(\mathcal{B}(T), \mathcal{T}_B)$.

Preuve.- Soient $\mu \in M(\mathcal{B}(d))$ et $\mathcal{O}_\mu$ un voisinage basique de μ. $\mathcal{O}_\mu$ est alors de la forme ci-dessous :

$$\mathcal{O}_\mu = \{\nu \in M(\mathcal{B}(T)) : \nu(O_i) \in \,]\mu(O_i - \varepsilon_{1i}, \mu(O_i) + \varepsilon_{2i}[\; , \; i \in \{1,\dots,n\}\}$$

où $O_i \in B$, $i \in \{1,\dots,n\}$

$\varepsilon_{1i} > 0$ et $\varepsilon_{2i} > 0$; $i \in \{1\dots n\}$

$\mu(O_i) - \varepsilon_{1i}$ et $\mu(O_i) + \varepsilon_{1i} \in Q$; $i \in \{1,\dots,n\}$.

on prend un point $x_1 \in \bigcup_{i=1}^{n} O_i$ et l'on note J_1 le sous-ensemble de $\{1,\dots,n\}$ tel que : $i \in J_1 \Longrightarrow x_1 \in O_i$ et $i \in \{1,\dots,n\} - J_1 \Longrightarrow x_1 \notin O_i$ et l'on note $A_1 = \bigcap_{J_1} O_i$.

Si $\bigcap_{J_1} O_i \neq \bigcup_{i=1}^{n} O_i$, on prend $x_2 \in \bigcup_{i=1}^{n} O_i - A_1$ et l'on note J_2 le sous-ensemble de $\{1,\dots,n\}$, tel que $i \in J_2 \Longrightarrow x_2 \in O_i$ et $i \in \{1,\dots,n\} - J_2 \Longrightarrow x_2 \notin O_i$ et l'on continue l'opération qui aura bien entendu moins de 2^n étapes.

On obtient ainsi une partition finie $(A_1,\dots,A_\ell)$ de $\bigcup_{i=1}^{n} O_i$; où les A_i ; $i \in \{1,\dots,\ell\}$ appartiennent à $\mathcal{B}(T)$.

Posons $\alpha_i = \mu(A_i)$; $i \in \{1,\dots,\ell\}$

et considérons la mesure de probabilité ν définie ci-dessous :

$$\nu = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \, \delta(x_i) + (1 - \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i) \, \delta x .$$

où $x_i \in A_i$; $i \in \{1,\dots,\ell\}$ et $x \in (\bigcup_{i=1}^{n} O_i)^C$ si $X - \bigcup_{i=1}^{n} O_i \neq \phi$, x quelconque sinon.

On a alors $\nu \in \mathcal{O}_\mu$. ∎

Proposition 11.3.- Soit (X,T) un espace topologique à base dénombrable d'ouverts.

Soit $B = \{O_i, i \in I\}$ une base dénombrable d'ouverts de (X,T).

On note $\delta : X \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{B}(T))$

$x \longrightarrow \delta(x)$ (mesure de Dirac au point x).

L'application δ de l'espace mesuré $(X, \mathcal{B}(T))$ dans l'espace mesuré $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(T)), \mathcal{B}(T_B))$ est mesurable.

Preuve.- Appelons $\mathcal{C}$ l'ensemble des éléments $\mathcal{O}$ de la forme suivante :

$$\mathcal{O} = \{\nu \in \mathcal{M}\ \mathcal{B}(T) : \nu(O_i) \in \,]\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}[\, , i \in J \subset I : \text{card}(J) \text{ est fini}\}$$

où $\varepsilon_{1i} \in \mathbb{Q} \cap]-\infty, 1[$, $\varepsilon_{2i} \in \mathbb{Q} \cap]0, \infty[$.

$\mathcal{C}$ étant une base dénombrable d'ouverts de $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(T), \mathcal{T}_B)$, pour montrer que δ est mesurable, il suffit de prouver que l'image inverse par δ de tout élément de $\mathcal{C}$ est un élément de $\mathcal{B}(T)$, étant bien entendu que les seuls éléments intéressant de la base $\mathcal{C}$ sont les éléments $\mathcal{O}'$ de la forme suivante :

$$\mathcal{O}' = \{\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(T)) : \nu(O_i) \in [0, \varepsilon_{j1}[, \ j_1 \in J_1 \subset I, \ \nu(O_{j2}) \in]\varepsilon_{j2}, 1], \ j_2 \in J_2 \subset I$$
$$\mathrm{card}(J_1) \text{ et } \mathrm{card}(J_2) \text{ étant finis})\}$$

(les autres éléments de la base $\mathcal{C}$ ayant pour image inverse l'ensemble vide).

et l'on a : $$\delta^{-1}(\mathcal{O}') = (\bigcap_{J1})(O^C_{j1})) \cap (\bigcap_{J2} O_{j2}) .$$

la démonstration de cette proposition est alors terminée.

Proposition 12.3.- (*théorème de Glivenko - Cantelli*) Soient (X,d) un espace métrique séparable, ξn des variables aléatoires à valeurs dans X, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de loi μ, B une base dénombrable d'ouverts de (X,d), $\mathcal{T}_B$ la topologie de $\mathcal{M}(\mathcal{B}(d))$ "engendrée" par la base B.

Si l'on note μ_n^w la mesure empirique au point w on a :

$$P[\mu_n^w \xrightarrow{\mathcal{T}_B} \mu] = 1.$$

Preuve.- Posons $B = \{O_i, i \in I\}$ (I étant un ensemble dénombrable), pour tout O_i de la base B ; les $I_{O_i} \circ \xi n$ sont pour tout n des variables aléatoires réelles, bornées, indépendantes et équi-distribuées (I_{O_i} est la fonction indicatrice de O_i), d'où d'après la loi des grands nombres :

$$\mu_n^w(O_i) = \frac{1}{n}\,(I_{O_i}(\xi_1(w)) + \ldots + I_{O_i}(\xi_n(w))) \xrightarrow[ps]{} \mu(O_i)$$

d'où $\forall\, i \in I, \exists\, \delta_{O_i} : p(\delta_{O_i}) = 0$ et $\mu_n^w(O_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(O_i)$, $\forall\, w \in X - \delta_{O_i}$.

Notons
$$\delta = \bigcup_I \delta_{O_i} .$$

$$p(\delta) = 0$$

et l'on a sur $X - \delta$: $\mu_n^w(O_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(O_i)$ pour tout O_i de la base B.

ce qui d'après la proposition 3.3. entraîne :

$$\mu_n^w \underset{n\to\infty}{\overset{T_B}{\Longrightarrow}} \mu \qquad \forall\, w \in X - \delta .$$

Proposition 13.3.- Soient (X,d) un espace métrique séparable, $B = \{O_i, i \in I\}$ une base dénombrable d'ouverts de (X,d) et X_j la $j^{\text{ème}}$ projection de X^∞ dans X, et soit

$$V_\mu = \{\nu \in M(\mathcal{B}(d))\ |\nu(O_j) \in\,]\,\mu(O_j) - \varepsilon, \mu(O_j) + \varepsilon[, j \in J \text{ (sous-ensemble fini de } I)\} ,$$

un voisinage de μ dans $(M(\mathcal{B}(d)), T_B)$ relatif aux O_j , $j \in J$ et à $\varepsilon > 0$; on note μ_n^w le mesure empirique au point $w \in X^\infty$ (i.e) : $\mu_n^w = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta(X_i(w))$.

Dans ces conditions on a l'inégalité suivante :

$$\mu^\infty[w : \mu_n^w \in V\mu, \forall\, n \geqslant N] \geqslant 1 - \frac{C}{N} , \quad \forall\, \mu \in M\, \mathcal{B}(d) .$$

où C est une constante positive qui ne dépend que $\mathrm{Card}(J)$ et de ε.

Preuve.- L'application $\delta : X \longrightarrow M(\mathcal{B}(d))$ étant mesurable

(proposition 11.3), $\quad x \longrightarrow \delta(x)$

L'application de X^∞ dans $M(\mathcal{B}(d))$, qui à tout w de X^∞ fait correspondre la mesure de probabilité $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta(X_i(w))$, est donc mesurable, de plus $V\mu$ est ouvert dans $(M(\mathcal{B}(d)), \mathcal{T}_B)$, (proposition 2.3), ce qui implique : $\{w \in X^\infty : \mu_n^w \in V\mu\}$ est une partie mesurable de X^∞, pour tout $n \in N$, d'où $\bigcap_{n \geq N} \{w \in X^\infty : \mu_n^w \in V\mu\}$ est aussi une partie mesurable de X^∞. On montre alors comme dans [1] p. 24-25 à l'aide de l'inégalité de Kolmogoroff que :

$$\mu^\infty\left[w_h : \underset{2^h \leq n \leq 2^{h+1}}{\mathrm{Max}} |\mu_n^w(O_j) - \mu(O_j)| > \varepsilon\right] \leq \frac{2^{h+1}}{2^h \varepsilon^2}, \ j \in J$$

d'où

$$\mu^\infty\left[w : \underset{\geq}{\mathrm{Max}} |\mu_n^w(O_j) - \mu(O_j)| > \varepsilon\right] \leq \frac{1}{2^{h-2}\varepsilon^2}, \ j \in J$$

et quand on a remarqué que :

$$(\exists\, j \in J : |\mu_n(O_j) - \mu(O_j)| > \varepsilon) \iff (\mu_n \notin V\mu),$$

le résultat s'en déduit aisément en posant $C = \frac{8 \operatorname{Card}(J)}{2\varepsilon^2}$ et en choisissant h tel que $2^h \leq N \leq 2^{h+1}$ ∎

Proposition 14.3.- Soit R muni de sa topologie usuelle.

Soit B la base dénombrable d'ouverts de R formée par les intervalles ouverts, d'extrémités rationnelles.

On note E_R l'ensemble des fonctions, de R dans R, bornées et continues sauf en un nombre fini de points appartenant à Q.

On a alors : $\quad (\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}_B} \mu) \iff (\mu_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(f), \forall f \in E_R)$.

Preuve.- Supposons que $(\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}_B} \mu)$

Soient x_1 et $x_2 \in Q$; $x_1 < x_2$

alors : $(\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}_B} \mu) \Longrightarrow (\mu_n(I_{]x_1,x_2[}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(I_{]x_1,x_2[})$ (proposition 3.3).

d'où pour toute fonction étagée $g : R \to R$ dont les sauts appartiennent à Q on a :

$$(\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}_B} \mu) \Longrightarrow (\mu_n(g) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(g))$$

de plus R étant métrisable séparable et B étant stable par intersections finies on a donc d'après la proposition 8.3

$$(\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}_B} \mu) \Longrightarrow (\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{F} \mu)$$

d'où si h est une fonction continue de R dans R on a :

$$(\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}_B} \mu) \Longrightarrow (\mu_n(h) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(h))$$

et comme tout $f \in E_R$ est de la forme $h + g$, la démonstration est terminée.

Réciproque : Supposons : $\mu_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(f)$, $\forall f \in E_R$.

et soient p et $q \in Q$.

alors $\qquad I_{]p,q[} \in E_R$.

d'où
$$\mu_n(I_{]p,q[}) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \mu(I_{]p,q[})$$

p et q ayant été choisis arbitrairement on a donc d'après la proposition 3.3.

$$\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{T}_B}{\Longrightarrow}} \mu$$

ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 1.3.- Soient R muni de sa topologie usuelle, B l'ensemble des intervalles ouverts d'extrémités rationnelles et f une fonction continue bornée de R dans R sauf au point x de R - Q. Alors si $\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{T}_B}{\Longrightarrow}} \mu$, on ne peut affirmer que $\mu_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(f)$.

Preuve.- On peut écrire f sous la forme suivante :

$$f = h + \lambda I_{]-\infty,x[} + k\, I_{]x,+\infty[}$$

où h est une fonction continue bornée de R dans R et où λ et k sont des réels non nuls simultanément. Supposons $\lambda \neq 0$, Q étant dense dans R, il existe une suite (x_n) de Q telle que : $x = \lim_n \uparrow x_n$. On a alors vu (exemple ou $\mathcal{T}_B \neq \mathcal{L}$) que dans ce cas

$$\delta x_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{T}_B}{\Longrightarrow}} x$$

d'où $\delta(x_n)(h) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta(x)(h)$ (1)

alors que $\delta(x_n)\,(\lambda\, I_{]-\infty,x[} + k\, I_{]x,+\infty[}) = \lambda$ et $\delta(x)(\lambda\, I_{]-\infty,x[} + k\, I_{]x,+\infty[}) = 0$

ce qui entraîne d'après (1) $\delta(x_n)(f) \not\to \delta(x)(f)$. ∎

Dans la proposition 8.3. : nous avons montré que si (X,d) est un espace métrique séparable et B une base dénombrable d'ouverts de (X,d) stable par réunions finies resp. (stable par intersection finie), on a :

$$(\mu_n \xrightarrow{\mathcal{T}_B} \mu) \Longrightarrow (\mu_n \xrightarrow{\mathcal{F}} \mu) .$$

cette remarque va nous permettre de citer quelques propositions.

<u>*Proposition*</u> *15.3.-* Soit (X,P) un espace polonais.

Soit $B = \{O_i, i \in I\}$ une base dénombrable d'ouverts de (X,P) stable par réunions finies resp. (stable par intersections finies).

Et soit $\mathcal{T}_B$ la topologie de $\mathcal{M}(\mathcal{B}(P))$ "engendrée" par la base B.

on a alors :

1) $(\mu_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{T}_B}} \mu) \Longrightarrow (\{\mu_n, n \in N\}$ est équitendue)

2) Soit $([0,1] , \mathcal{B}\, P)$ où P est la mesure uniforme sur $[0,1]$ et $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par la topologie usuelle de $[0,1]$.

Si $\mu_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{T}_B}} \mu$, il existe des variables aléatoires ξ_n définies sur $[0,1]$, à valeurs dans X telles que la loi de ξ_n soit μ_n et il existe une variable aléatoire ξ définie sur $[0,1]$ à valeur dans X de loi μ , et l'on a :

$$\xi_n \underset{ps/P}{\longrightarrow} \xi .$$

3) $(\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{T_B}{\Longrightarrow}} \mu) \Longrightarrow (\limsup_n \sup_{f\in A_0} \left| \int_X f\, d_n - \int_X f\, d\mu \right| = 0$

pour toute famille A_0 équicontinue uniformément bornée).

4) (Γ relativement compact pour T_B) $\Longrightarrow$ (Γ équitendu).

Proposition 16.3.- Soit (X,N) un hilbert réflexif, séparable. Supposons (μ_n) relativement compact pour T_B. (où B est une base dénombrable d'ouverts de (X,N), stable par réunions finies resp. (stable par intersections finies)).

On note $\psi_{\mu_n}(t)$ la fonction caractéristique de μ_n au point t.

Alors si $\psi_{\mu_n}(t) \longrightarrow \psi(t)$ $\forall\, t \in X$; il existe $\mu \in M(B(N))$ telle que ψ soit la fonction caractéristique de μ et l'on a : $\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{F}{\Longrightarrow}} \mu$.

Proposition 17.3.- Soient (X,d) un espace métrique séparable, $B = \{O_i,\ i \in I\}$ une base dénombrable d'ouverts de (X,d), stable par réunions finies, resp. (stable par intersections finies), et T_B la topologie de $M(B(d))$ "engendrée" par la base B.

Si l'on note $M'(B(d)) = \{\mu \in M\, B(d) : \mu(O_i^*) = 0\ \ \forall\, i \in I\}$

on a : la restriction de T_B et de F à $M'\, B(d)$ sont équivalentes.

La preuve de ces démonstrations se trouve dans la remarque précédente.

Soient (X,d) un espace métrique séparable, $B = \{O_i,\ i \in I\}$ une base dénombrable d'ouverts de (X,d), stable par réunions finies, resp. (par intersections finies). On note Θ l'application de $M(B(d)) \times M(B(d))$ dans $[0,\infty[$ qui à $(\mu_1,\mu_2) \in M(B(d)) \times M(B(d))$, fait correspondre :

$$\Theta(\mu_1,\mu_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : |\mu_1(O_i) - \mu_2(O_i)| < \varepsilon, \forall\, i \in I\}$$

Proposition 18.3.- Θ est une métrique de $M(\mathcal{B}(d))$.

Preuve.- Supposons $\Theta(\mu_1,\mu_2) = 0$. Alors $\forall\, \varepsilon > 0$. On a $|\mu_1(O_i) - \mu_2(O_i)| < \varepsilon$ pour tout $i \in I$. Autrement dit $\mu_1(O_i) = \mu_2(O_i)$ pour tout O_i de la base B. On montre alors de la même façon que dans la proposition 7.3 que $\mu_1 = \mu_2$. La réciproque est évidente.

Soient μ_1, μ_2 et $\mu_3 \in M(\mathcal{B}(d))$.

Supposons $\Theta(\mu_1,\mu_2) = \varepsilon_1$, $\Theta(\mu_2,\mu_3) = \varepsilon_2$ et soient $\varepsilon_1' > \varepsilon_1$, $\varepsilon_2' > \varepsilon_2$.

on a alors :
$$|\mu_1(O_i) - \mu_2(O_i)| < \varepsilon_1' \quad \forall\, O_i \in B$$
$$|\mu_2(O_i) - \mu_3(O_i)| < \varepsilon_2' \quad \forall\, O_i \in B$$

et comme : $|\mu_1(O_i) - \mu_3(O_i)| \leq |\mu_1(O_i) - \mu_2(O_i)| + |\mu_2(O_i) - \mu_3(O_i)|$,
pour tout O_i de B on a :

$$|\mu_1(O_i) - \mu_3(O_i)| < \varepsilon_1' + \varepsilon_2'$$

d'où
$$|\mu_1(O_i) - \mu_3(O_i)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \; .$$

La démonstration de cette proposition est alors terminée. ∎

Proposition 19.3.- Soit (X,d) un espace métrique séparable.

Soit $B = \{O_i, i \in I\}$ une base dénombrable d'ouverts de (X,d) stable par réunions finies.

Et soit Θ_B la métrique de $M(\mathcal{B}(d))$ définie comme dans la proposition ci-dessus.

on a alors : $(\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\Theta_B} \mu) \Longrightarrow (\mu_n(A) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A), \ \forall A \in \mathcal{B}(d))$.

Preuve.- ε étant donné ;

$$\exists N(\varepsilon) : n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |\mu_n(O_i) - \mu(O_i)| < \frac{\varepsilon}{6}, \ \forall i \in I.$$

Supposons n fixé ; $n > N(\varepsilon)$.

(X,d) étant métrique toute probabilité définie sur $(X, \mathcal{B}(d))$ est régulière.

D'où si $A \in \mathcal{B}(d)$, $\exists O_\varepsilon$ ouvert de X tel que :

$$A \subset O^\varepsilon$$

$$|\mu(O_\varepsilon) - \mu(A)| < \frac{\varepsilon}{6}$$

$$|\mu_n(O_\varepsilon) - \mu_n(A)| < \frac{\varepsilon}{6}$$

et B étant une base dénombrable d'ouverts de (X,d) stable par réunions finies il existe $O_{i(\varepsilon)} \in B$ tel que :

$$O_{i(\varepsilon)} \subset O_\varepsilon$$

$$|\mu(O_{i(\varepsilon)}) - \mu(O_\varepsilon)| < \frac{\varepsilon}{6}$$

$$|\mu_n(O_{i(\varepsilon)}) - \mu_n(O_\varepsilon)| < \frac{\varepsilon}{6}$$

et l'on a :

$$|\mu_n(A) - \mu(A)| \leq |\mu_n(A) - \mu_n(O_\varepsilon)| + |\mu_n(O_\varepsilon) - |\mu_n(O_{i(\varepsilon)})| + |\mu_n(O_{i(\varepsilon)}) - \mu(O_{i(\varepsilon)})|$$

$$+ |\mu(O_{i(\varepsilon)}) - \mu(O_\varepsilon)| + |\mu(O_\varepsilon) - \mu(A)|$$

d'où $$|\mu_n(A) - \mu(A)| < \varepsilon .$$

n ayant été choisi arbitrairement plus grand que $N(\varepsilon)$ on a donc :

$n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |\mu_n(A) - \mu(A)| < \varepsilon$, ce qui termine la démonstration. ∎

Remarque 2.3.- Soit (X,d) un espace métrique séparable et soit B une base dénombrable stable par réunions finies.

on a alors :

1) $\mathcal{T}_B$ est plus fine que la topologie faible (proposition 8.3)

2) $\mathcal{L}$ est plus fine que $\mathcal{T}_B$ (voir définitions de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{T}_B$)

3) $(\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\Theta_B} \mu) \Longrightarrow (\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mu)$ (proposition 19.3)

4) $\mathcal{N}$ est plus fine que Θ_B (voir définitions de $\mathcal{N}$ et de Θ_B).

CHAPITRE IV

SUPPORT D'UNE MESURE DE PROBABILITE.

Ⓐ *Convexification du support*.- Soient (X,T) un espace topologique, $\mathcal{B}(T)$ la tribu borélienne engendrée par la classe des ouverts de (X,T) et $\mathcal{M}(\mathcal{B}(T))$ l'ensemble des mesures de probabilité définies sur $\mathcal{B}(T)$.

Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(T))$.

On pose $$\mathcal{U}_\mu = \{O \text{ ouverts de } (X,d) : \mu(O) = 0\}$$

et l'on note $O_\mu = \bigcup\limits_{\mathcal{U}_\mu} O$

Définition 1.4.- Le support de la mesure de probabilité μ que l'on note S_μ est alors le complémentaire de O_μ dans X.

Proposition 1.4.- S_μ est fermé.

Preuve : Une réunion quelconque d'ouverts de (X,T) étant encore un ouvert de (X,T), S_μ est fermé. ■

Proposition 2.4.- Si (X,T) est à base dénombrable d'ouverts on a :

$\mu(S_\mu) = 1$ et tout fermé F de μ-mesure égal à un contient S_μ.

Preuve : Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(T))$

Soit $B = \{O_i, i \in I\}$ une base dénombrable d'ouverts de (X,d).

on note J_μ le sous-ensemble de I tel que :

$$i \in J \Longrightarrow \mu(O_i) = 0 \quad \text{et} \quad i \in I - J_\mu \Longrightarrow \mu(O_i) > 0$$

Soit O un ouvert de (X,d) de μ-mesure nulle : on peut écrire $O = \bigcup_{J(O)} O_i$ où $J(O) \subset I$ (puisque B est une base dénombrable d'ouverts de (X,d))

et $$(\mu(O) = 0) \Longrightarrow (\mu(O_i) = 0 \quad \forall\, i \in J(O))$$

d'où $J(O) \subset J_\mu$

d'où $\bigcup_{J_\mu}(O_i) = O_\mu$.

J_μ étant dénombrable on a :

$$\mu(\mathcal{U}_\mu) \leq \sum_{J_\mu} \mu(O_i) = 0$$

ce qui équivaut à $\mu(S_\mu) = 1$.

Soit F un fermé de μ-mesure égale à 1 : on a :

$$(\mu(F^C) = 0) \Longrightarrow (F^C \subset O_\mu) \quad \text{(puisque } F^C \text{ est ouvert)}$$

ce qui implique $S_\mu = (O_\mu)^C \subset F$.

Nous allons maintenant essayer d'effectuer la convexification du support d'une mesure de probabilité définie sur une tribu borélienne d'un espace vectoriel topologique à base dénombrable.

Proposition 3.4.- Soit (E,T) un espace vectoriel topologique à base dénombrable d'ouverts.

Soit $\mu \in \mathcal{M}\,\mathcal{B}(T)$. On note S_{μ_T} le support de μ défini pour la topologie T.

Soit C un convexe fermé de (E,T), contenant S_{μ_T} et soit H une classe d'ouverts de (E,T), stable par intersections finies et telle que pour tout élément O de H on ait : $O \cap S_{\mu_T} \neq \phi$ si l'on note T_1 la topologie engendrée par la classe d'ouverts $H \cup \{O \in (E,T) : O \subset E - C$ on a :

$$S_{\mu_{T_1}} = C$$

Preuve :

Lemme 1.4.- Soit (X,T) un espace topologique à base dénombrable.

Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(T))$ et soit O un ouvert de (X,T).

Alors $(O \cap S_{\mu_T} \neq \phi)$ implique $(\mu(O) > 0)$.

Preuve.- Supposons $\mu(O) = 0$.

Alors $O \subset X - S_\mu$ (ce qui est contraire à l'hypothèse). La démonstration de ce lemme est alors terminée.

Soit O un ouvert de (X,T_1) tel que $O \cap C \neq \phi$.

Supposons $O \cap S_{\mu_T} = \phi$

Posons alors $\mathcal{C} = \{O$ ouverts de (E,T): $O \subset E - C\}$.

$\mathcal{C}$ et H sont stables par intersections finies, de plus : $O_C \in H$ et $O_\mu \in H$ implique $O_C \cap O_\mu \in \mathcal{C}$, d'où tout ouvert O de (X,T_1) s'écrit :
$O = (\bigcup_{K_1} O_{K_1}) \cup (\bigcup_{K} O_K)$ où K_1 et K sont des ensembles quelconques.

$\mathcal{C}$ étant stable par réunions quelconques on peut écrire :

$$O = O_1 \cup (\bigcup_{k \in K} O_k) \quad \text{où} \quad O_1 \subset E\text{-}C \quad \text{et} \quad O_k \in H \ , \forall\, k \in K$$

Alors $(O \cap S_{\mu_T} = \phi) \Longrightarrow (K = \phi) \Longrightarrow (O \subset E - C)$

ce qui est contraire à $O \cap C \neq \phi$.

d'où d'après le lemme 1.4. : $(O \cap C \neq \phi) \Longrightarrow (\mu(O) > 0)$

d'où $S_{\mu_{T_1}} \subset C$

et comme $S_{\mu_T} \subset C$ et que $E - C$ est un ouvert de (X,T)

on a : $\mu(E - C) = 0$ (proposition 2.4.).

ce qui implique $S_{\mu_{T_1}} = C$ (car $E - C$ est un ouvert de (X,T_1)). ■

Soit (E,T) un espace vectoriel topologique à base dénombrable.

Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(T))$. Supposons S_{μ_T} non convexe.

On note C_{μ_T} le plus petit convexe fermé de (E,T) contenant S_{μ_T}.
(C_{μ_T} existe puisqu'une intersection quelconque de convexes est convexe et qu'une intersection quelconque de fermés est fermée).

On dira que H est une classe maximale par rapport à (μ,T), si ① H est une classe d'ouverts de (E,T), stable par intersections finies et telle que pour tout élément O de H on ait $O \cap S_{\mu_T} \neq \phi$ ② pour tout ouvert O de (E,T) n'appartenant pas à $T(H)$ (topologie engendrée par H), et vérifiant $O \cap S_{\mu_T} \neq \phi$, il existe $O_{H_O} \in H$ tel que :

$$C_{\mu_T} \cap O_{H_O} \cap O \neq \phi \quad \text{et} \quad O_{H_O} \cap O \cap S_{\mu_T} = \phi.$$

Proposition 4.4.- Soient (E,T) un espace vectoriel topologique à base dénombrable d'ouverts et $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(T))$ telle que S_{μ_T} ne soit pas convexe et soit H une classe maximale par rapport à (μ,T).

On note T_1 la topologie engendrée par la classe : $H \cup \{O$ ouverts de $(X,T) : O \subset E - C_{\mu_T}\}$. Alors si T_2 est une topologie vérifiant

① T_2 strictement plus fine que T_1

② T_2 moins fine que T

$S_{\mu_{T_2}}$ ne peut être convexe ; autrement dit T_1 est la plus fine des topologies T moins fine que T_2 telles que S_{μ_T} soient convexes.

Preuve.- Puisque T_2 est strictement plus fine que T_1 et moins fine que T, il existe $O \in T_2 : O \notin T_1$ et $O \in T$; $O \neq \phi$ ce qui implique $O \not\subset X - C_{\mu_T}$. Autrement dit $O \cap C_{\mu_T} \neq \phi$ (a)

1°) si $O \cap S_{\mu_T} = \phi$

on a :
$$S_{\mu_{T_2}} \subset C_{\mu_T} \cap O^C$$

et $C_{\mu_T} \cap O^C \neq C_{\mu_T}$ (d'après (a)), de plus $S_{\mu_T} \subset S_{\mu_{T_2}}$, et comme C_{μ_T} est le plus petit convexe fermé contenant $S_{\mu_{T_2}}$, $S_{\mu_{T_2}}$ ne peut être convexe.

2°) si $O \cap S_{\mu_T} \neq \phi$

on a alors : $O \notin T_1$, $O \cap S_{\mu_T}$ et H maximale par rapport à (μ,T), d'où $\exists\, O_{H_O} \in H : O_{H_O} \cap O \cap C_{\mu_T} \neq$ et $O_{H_O} \cap O \cap S_{\mu_T} = \phi$, ce qui implique $S_{\mu_{T_2}} \subset C_{\mu_T} - O_{H_O} \cap O$ (puisque $\mu(O_{H_O} \cap O) = 0$), et comme $O_{H_O} \cap O \neq \phi$ on a : $S_{\mu_{T_2}} \neq C_{\mu_T}$ de plus $S_{\mu_{T_2}} \supset S_{\mu_T}$ et C_{μ_T} est le plus petit convexe contenant S_{μ_T}. Ce qui termine la démonstration de cette proposition. ∎

Proposition 5.4.- Soit (E,T) un espace vectoriel topologique.

Soient $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(T))$ et H une classe d'ouverts de T, stable par intersections finies et telle que : $(O \in H) \Longrightarrow (O \cap S_{\mu_T} \neq \phi)$.

Soit T_1 la topologie engendrée par la classe d'ouverts $H \cup \{O : O \subset X - C,\ O \in T\}$ où C est un convexe contenant S_{μ_T}.

Alors si $\bigcup\limits_H O$ ne contient pas C. On a : $S_{\mu_{T_1}}$ est convexe compact.

Preuve.- On a vu dans la proposition 3.4. que $S_{\mu_{T_1}} = C$, d'où $S_{\mu_{T_1}}$ est convexe.

De plus les seuls recouvrements possibles de C par des ouverts de T_1, contiennent E. Il existe donc toujours un sous-recouvrement fini de $S_{\mu_{T_1}}$. ∎

Proposition 6.4.- Soit R^n muni de sa topologie usuelle (notée T_n).

Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(T_n)$ telle que $S_{\mu_{T_n}}$ soit compact et soit H une classe d'ouverts de R^n stable par intersections finies et telle que $(O \in H)$ implique $(O \cap S_{\mu_{T_n}} \neq \phi)$. On note : $C_{\mu_{T_n}}$ le plus petit convexe fermé de (R^n,T_n) contenant $S_{\mu_{T_n}}$ et T_{1n} la topologie engendrée par la classe d'ouverts : $H \cup \{O \in T_n : O \subset X - C_{\mu_{T_n}}\}$. dans ces conditions $S_{\mu_{T_{1n}}}$ est convexe compact.

Preuve.- On a alors : $S_{\mu_{T_{1n}}} = C_{\mu_{T_n}}$ (proposition 3.4.), de plus $S_{\mu_{T_n}}$ étant compact dans (R_n, T_n), son enveloppe convexe est compact dans (R_n, T_n) donc dans (R_n, T_{1n}) puisque T_n est plus fine que T_{1n}. ∎

Ⓑ *La* (η, p, q) d-*continuité*.- Soient (X,d) un espace métrique séparable, $\mathcal{B}(d)$ la tribu borélienne engendrée par la topologie induite par la métrique d et $M(\mathcal{B}(d))$ l'ensemble des mesures de probabilité définies sur X muni de la tribu $\mathcal{B}(d)$.

Définition 2.4.- Soit $\mu \in M(\mathcal{B}(d))$ et soient η, p et q trois réels strictement positifs. μ est dite (η,p,q) d-continue si pour tout ε ; $0 < \varepsilon < \eta$ et pour tout fermé F de (X,d) tel que $\mu(F) > 1 - \varepsilon^p$ on a :

$$S_\mu \subset \overline{F^{q\varepsilon}} \quad \text{où} \quad F^{q\varepsilon} = \{x \in X : d(x,F) < q^\varepsilon\} .$$

Exemple 1.4.- Soient $X_i \in (X,d)$ et $\alpha_i \geq 0$; $i \in \{1,\dots,n\}$; les α_i vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. On note $\delta(x_i)$ la mesure de Dirac au point x_i.

La mesure de probabilité $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \delta(x_i)$ est (η,p,q) - d-continue pour tout η tel que : $\eta < \inf(\alpha_i, i \in \{1,\dots,n\})$.

Exemple 2.4.- La probabilité uniforme P sur $[0,1]^2$ est $(1,2,2)$ d-continue où d est la métrique usuelle de $[0,1]^2$.

Preuve.- Soit $0 < \varepsilon \leq 1$, et soit F un fermé de $[0,1]^2$ tel que : $P(F) > 1-\varepsilon^2$. Supposons $[0,1]^2 \not\subset \overline{F^{2\varepsilon}}$. Il existe alors $x \in [0,1]^2$ tel que : $d(x,F) \geq 2\varepsilon$, ce qui implique $B(x,2\varepsilon) \cap F = \phi$. Il existe alors un carré C de côté ε inclus dans cette boule et l'on a : $C \subset F^C$ et $P(C) = \varepsilon^2$, ce qui est en contradiction avec $P(F) > 1 - \varepsilon^2$ la démonstration est alors terminée. ∎

Remarque 1.4.- Toute mesure de probabilité (η, p, q) d-continue est (η', p', q') d-continue si $\eta' \leq \eta$,$p' \geq p$, $q' \geq q$

Notation.- Soit (X,d) un espace métrique séparable.

alors : $\mathcal{M}_{(\eta,p,q)}\,\mathcal{B}(d) = \{\mu \in \mathcal{M}\,\mathcal{B}(d) : \mu$ est (η,p,q) d-continue$\}$.

Proposition 5.4.- Si μ est (η,p,q) d-continue, S_μ est borné pour la métrique d.

Preuve.- Soit $x \in X$ et $\varepsilon < \eta$ on a alors $X = \lim\limits_{n}\uparrow B(x,n)$ d'où $\exists\, N(\varepsilon) : n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \mu(B(x,n)) > 1 - \varepsilon^p$, ce qui entraîne $S_\mu \subset B(x,N(\varepsilon))^{q\varepsilon} \subset B(x,N(\varepsilon) + q)$ ∎

Proposition 6.4.- Soient (X,d) un espace métrique séparable, $\mu \in \mathcal{M}_{(\eta,p,q)}\,\mathcal{B}(d)$ et $\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(d))$ vérifiant :

1°) $S_\nu \subset S_\mu$

2°) $\exists\, b > 0 : \nu(0) \geq b\,\mu(0)$ pour tout ouvert 0 de ν-mesure non nulle. Alors ν est $(\eta(b)^{\frac{1}{p}}, p , \frac{q}{b^{\frac{1}{p}}})$ d-continue.

Preuve.- Soit ε donné ; $0 < \varepsilon < \eta(b)^{\frac{1}{p}}$, et soit F un fermé de (X,d) tel que $\nu(F) > 1 - \varepsilon^p$ alors $\nu(F^C) < \varepsilon^p$ (si $\nu(F^C) = 0$ la démonstration est terminée), ce qui avec 2°) permet d'écrire :

$$\mu(F^C) < \frac{\varepsilon^p}{b}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\mu(F) > 1 - \frac{\varepsilon^p}{b}$$

posons $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{(b)^{\frac{1}{p}}}$

on a alors $0 < \varepsilon' < \eta$ et $\mu(F) > 1 - \varepsilon'$

et comme $\mu \in M_{(\eta,p,q)}\, M(d)$ on a : si l'on pose $\frac{q}{b^{\frac{1}{p}}} = q'$

$$S_\mu \subset F^{q'\varepsilon}$$

d'où d'après 1°)

$$S_\nu \subset F^{q'\varepsilon}$$

la démonstration de cette proposition est alors terminée.

Proposition 7.4.- Soit (X,d) un espace métrique séparable, soit d_1 une métrique telle que $a\, d_1(x,y) \leq d(x,y)$, $\forall (x,y) \in X^2$ (où $a > 0$) et telle que $T(d_1) = T(d)$. Alors si μ est (η,p,q) d-continue : μ est $(\eta,p,\frac{q}{a})$ d_1-continue.

La preuve de cette proposition est immédiate.

Proposition 8.4.- Si (X,d) est un espace métrique totalement borné, $M_{(\eta,p,q)}\, B(d)$ est fermé dans $(M(B(d)), F)$.

Preuve.- Soit $\{x_i,\ i \in I\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de X. Soient $\mu_n \in M_{(\eta,p,q)}\, B(d)$; $n \in N$ telles que :

$$\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{F}{\Longrightarrow}} \mu .$$

Soit ε donné ; $0 < \varepsilon < \eta$, et soit F un fermé de (X,d) tel que : $\mu(F) > 1 - \varepsilon^p$, il existe alors N tel que :

$$\frac{1}{N} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \mu(F) > 1 - \left[(\varepsilon - \frac{1}{N})^p - \frac{1}{N}\right]$$

I étant dénombrable, $\exists\ r \in \left]0, \frac{q}{4N}\right]$ tel que : $\mu(B(x_i,r)^*) = 0 \quad \forall\ i \in I$.

X étant totalement borné et $\{x_i, i\in I\}$ étant dense dans X on peut recouvrir F par un nombre fini de boules de rayon r, d'intersection non vide avec S_μ et de centre appartenant à $\{x_i,\ i \in I\}$.

On note $B(x_1,r), \ldots\ldots, B(x_m,r)$ ce recouvrement et comme $(\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r))^* \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r)^*$, on a d'après le théorème de Billingsley-Alexandroff :

$$\mu_n(\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r)) \longrightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r))$$

autrement dit : $\exists\ M : n > M \Longrightarrow (\mu_n(\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r)) - \mu(\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r)) < \frac{1}{N}$

soit n fixé ; $n > M$.

on a : $\mu_n(\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r)) > \mu(F) - \frac{1}{N}$ (puisque $F \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r)$)

d'où $\mu_n(\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r)) > 1 - \left[(\varepsilon - \frac{1}{N})^p - \frac{1}{N}\right] - \frac{1}{N}$

ainsi $\mu_n(\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r)) > 1 - (\varepsilon - \frac{1}{N})^p$ (où $0 < \varepsilon - \frac{1}{N} < \eta$)

et comme μ_n est (η,p,q) d-continue on a :

$$S_{\mu_n} \subset (\bigcup_{i=1}^{m} \overline{B(x_i,r)})^{q(\varepsilon - \frac{1}{N})}$$

et comme $\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r)$ est un recouvrement de F tel que : $B(x_i,r) \cap F \neq \phi$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ et $r \leqslant \frac{q}{4N}$ on a :

$$\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r) \subset F^{\frac{q}{2N}}$$

ce qui implique : $S_{\mu_n} \subset (F^{\frac{q}{2N}})^{(q\varepsilon - \frac{q}{N})} \subset \overline{F^{q\varepsilon}}$ (1)

puisque l'on a pris n arbitrairement supérieur à M on a pour tout $n > M$ l'inclusion (1).

Supposons alors $S_\mu \not\subset \overline{F^{q\varepsilon}}$

alors $\exists\, x : x \in S_\mu$ et $x \in X - \overline{F^{q\varepsilon}}$ d'où $\exists\, p(x) : B(x,p(x)) \subset X - \overline{F^{q\varepsilon}}$

ce qui d'après le lemme (1.2.2) implique $\mu(B(x,a) > 0$ pour tout $0 < a < p(x)$,

et soit $a' \in \,]0, p(x)]$ tel que $\mu(B(x,a')^*) = 0$ on a alors :

$$\mu\ (B(x,a')^*) = 0$$

$$\mu\ B(x,a') > 0$$

$$\mu_n\ B(x,a') = 0 \quad \forall\, n > M$$

ce qui est en contradiction avec $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{F} \mu$, d'après le théorème de Billingsley-Alexandroff d'où $S_\mu \subset \overline{F^{q\varepsilon}}$. La démonstration de cette proposition est alors terminée. ∎

<u>Définition</u> 2.4.- Soit (X,d) un espace métrique séparable et soit $\mu \in M(\mathcal{B}(d))$. μ est dite $C_o(\eta,p,q)$ d-continue si pour tout $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < \eta$ et pour tout connexe fermé C de (X,d) tel que $\mu(C) > 1 - \varepsilon^p$ on a : $S_\mu \subset \overline{C^{q\varepsilon}}$.

<u>Définition</u> 3.4.- Soit (E,d) un espace métrique séparable et soit $\mu \in M(\mathcal{B}(d))$. μ est dite $C(\eta,p,q)$ d-continue si pour tout $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < \eta$ et pour tout convexe fermé C de (X,d) tel que $\mu(C) > 1 - \varepsilon^p$ on a : $S_\mu \subset \overline{C^{q\varepsilon}}$.

Remarque 2.4.- Soit (E,d) un espace vectoriel métrique séparable et soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(d))$.

Alors si μ est (n,p,q) d-continue, μ est $C_o(n,p,q)$ d-continue et si μ est $C_o(n,p,q)$ d-continue, μ est $C(n,p,q)$ d-continue.

Notations.- On note :

$$\mathcal{M}_{C_o(n,p,q)}\, \mathcal{B}(d) = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(d)) : \mu \text{ est } C_o(n,p,q) \text{ d-continue}\}$$

$$\mathcal{M}_{C(n,p,q)}\, \mathcal{B}(d) = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(d)) : \mu \text{ est } C(n,p,q) \text{ d-continue}\}$$

Remarque 3.4.- Dans les propositions (5.4), (6.4), (7.4) on peut remplacer $\mathcal{M}_{(n,p,q)}\, \mathcal{B}(d)$ par $\mathcal{M}_{C_o(n,p,q)}\, \mathcal{B}(d)$ et par $\mathcal{M}_{C(n,p,q)}\, \mathcal{B}(d)$.

Proposition 9.4.- Si (X,d) est un espace métrique totalement borné et si toute boule fermée est connexe dans (X,d), $\mathcal{M}_{C_o(n,p,q)}\, \mathcal{B}(d)$ est fermé dans $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(d)), \mathcal{F})$.

Proposition 10.4.- Si (E,N) est un espace vectoriel normé, totalement borné, $\mathcal{M}_{C(n,p,q)}\, \mathcal{B}(d)$ est fermé dans $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(d),\mathcal{F})$

La preuve de ces deux propositions est analogue à la preuve de la proposition 8.4.

Remarque 4.4.- Les propositions (8.4), (10.4), (9.4) sont aussi vraies dans $(\mathcal{M}(\mathcal{B}(d)), \mathcal{T}_B)$ (où $B = \{B(x_i, \frac{1}{n}), (i,n) \in I \times \mathbb{N}\}$ et où $\{x_i, i \in I\}$ est un ensemble dénombrable dense).

CHAPITRE V

APPLICATION DE LA TOPOLOGIE T_B.

Métrique de Hausdorff.

Soit (X,d) un espace métrique. Nous désignerons par le symbole 2^X la famille de tous les ensembles fermés, bornés et non vides, situés dans l'espace métrique (X,d).

Et soit H_d l'application de $2^X \times 2^X$ dans $[0,\infty[$ définie ci-dessous.

$H_d(A,B) = \inf\{\lambda > 0 : A \subset B^\lambda$ et $B \subseteq A^\lambda\}$ pour tout couple $(A,B) \in 2^X \times 2^X$ où $B^\lambda = \{x \in X : d(x,B) < \lambda\}$.

H_d est une métrique de 2^X.

Supposons $H_d(A,B) = 0$

Soit $x \in A$ et supposons $x \notin B$.

$X-B$ étant ouvert, $\exists r(x) : B(x,r(x)) \subset X-B$.

Ce qui implique $d(x,B) > \dfrac{r(x)}{2}$

puisque $H_d(A,B) = 0$ on a : $A \subset B^{\frac{r(x)}{4}}$

ce qui entraîne $d(x,B) < \dfrac{rx}{4}$. Il y a alors contradiction d'où $A \subset B$,

on montrerait de même que $B \subset A$

ainsi $(H_d(A,B) = 0) \Rightarrow A = B$

on a aussi : $(A = B) \Rightarrow (H_d(A,B) = 0)$.

Soient $A, B, C \in 2^X$.

Supposons $H_d(A,B) = \lambda_1$, $H_d(B,C) = \lambda_2$, et soient $\lambda_1' > \lambda_1$ et $\lambda_2' > \lambda_2$.

il existe alors deux réels α_1 et α_2 tels que :

$$\lambda_1' > \alpha_1 > \lambda_1 \quad \text{et} \quad \lambda_2' > \alpha_2 > \lambda_2$$

et l'on a : (puisque $\lambda_1' > \lambda_1$ et $\lambda_2' > \lambda_2$)

$$A \subset B^{\alpha_1} \quad \text{et} \quad B \subset C^{\alpha_2}$$

ce qui implique ; sachant que $(C^{\alpha_2})^{\alpha_1} \subset C^{\alpha_2+\alpha_1}$

$$A \subset C^{\alpha_1+\alpha_2} \qquad (1)$$

on a aussi

$$B \subset A^{\alpha_1} \quad \text{et} \quad C \subset B^{\alpha_2}$$

ce qui entraîne :

$$C \subset A^{\alpha_1+\alpha_2} \qquad (2)$$

d'où d'après (1) et (2)

$$H_d(A,C) \leq \alpha_1 + \alpha_2 < \lambda_1' + \lambda_2'$$

λ_1' et λ_2' ayant été choisis respectivement arbitrairement plus grand que λ_1 et λ_2 ; on a donc :

$$H_d(A,C) \leq H_d(A,B) + H_d(B,C)$$

Définition 1.5.- H_d est la métrique de Hausdorff induite par d. Par la suite, lorsque nous utiliserons la métrique de Hausdorff sur 2^X, (X,d) sera totalement borné. C'est pourquoi nous allons énoncer, à titre de renseignement la proposition connue suivante :

Proposition 1.5.- Si (X,d) est totalement borné, $(2^X,H_d)$ l'est également.

Preuve : Supposons ε donné, $\varepsilon > 0$.

(X,d) étant totalement borné, il existe un sous-ensemble fini F_ε de X tel que : $d(x,F\ ) < \varepsilon \quad \forall\, x \in X$.

On note $H_{1,\varepsilon},\ldots,H_{k,\varepsilon}$ le système de tous les sous-ensembles de F_ε. A chaque fermé A de (X,d) on fait correspondre l'ensemble $H_{i,\varepsilon}$ des points y de F tels que $d(y,F) < \varepsilon$.

On a alors : $H_{i,\varepsilon} \subset A^\varepsilon$ et $A \subset H_{i,\varepsilon}$ (d'après la définition même de $H_{i,\varepsilon}$).

Nous allons maintenant donner la définition d'une topologie définie sur l'ensemble des fermés non vide d'un espace topologique quelconque. Cette topologie nous permettra d'énoncer des propositions dans un espace topologique non forcément métrisable.

Soit (X,T) un espace topologique.

Et soient $0_1,\ldots,0_n$ des ouverts de (X,T)

On note $<0_1,\ldots,0_n> = \{E \in 2^X : E \subset \bigcup_{i=1}^{n} 0_i$ et $E \cap 0_i \neq \emptyset, \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}\}$.

Définition 2.5.- Si (X,T) est un espace topologique, on appelle topologie exponentielle (notée 2^T) sur 2^X, la topologie engendrée par la classe d'ouverts de la forme $<0_1,\ldots,0_n>$; (où $0_1,\ldots,0_n$ sont des ouverts de (X,T)).

Proposition 2.5.- La classe des éléments de la forme $<0_1,\ldots,0_n>$ forment une base pour la topologie exponentielle sur 2^X.

Preuve :

a) $2^X = <X>$

b) Soient $\mathcal{O}_1 = <0_{11},\ldots,0_{1n}>$ et $\mathcal{O}_2 = <0_{21},\ldots,0_{2m}>$.

Posons : $U = \bigcup_{i=1}^{n} 0_{1i}$ et $V = \bigcup_{i=1}^{m} 0_{2i}$

Il est alors aisé de montrer que :

$$\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \langle O_{11} \cap V, \ldots, O_{1n} \cap V,\ O_{21} \cap U, \ldots, O_{2m} \cap U \rangle$$

cette topologie est étudiée dans [3].

Remarque 1.5.- H_d et 2^d sont identiques lorsque (X,d) est compact.

Soit (X,T) un espace topologique. On note $\emptyset$ l'application définie ci-dessous.

$$\emptyset : (\ (T)) \longrightarrow 2^X$$
$$\mu \longrightarrow S\mu.$$

le problème que nous nous posons est de trouver une topologie de $M(\mathcal{B}(T))$ vérifiant une version du théorème de Glivenko-Cantelli et une topologie sur 2^X telle que l'application $\emptyset$ (ou une restriction assez faible de l'application $\emptyset$).

Remarque 2.5.- Soit (X,d) un espace métrique séparable.

E soit K_d la pseudo-métrique de $M(\mathcal{B}(d))$ définie ci-dessous :

$$K_d(\mu_1,\mu_2) = H_d(S\mu_1,S\mu_2) \qquad \forall(\mu_1,\mu_2) \in (M(\mathcal{B}(d))^2$$

l'application $\emptyset : (M(\mathcal{B}(d)),K_d) \longrightarrow (2^X,H_d)$ est alors continue.

$$\mu \longrightarrow S_\mu$$

mais la topologie induite par K_d n'est pas intéressante quant à l'estimation du support, car elle ne vérifie pas même la version la plus faible du théorème de Glivenko-Cantelli.

On se place dans un espace métrique séparable (X,d).

Soit $\{x_i, i \in I\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de (X,d).

On note $B = \{B(x_i, \frac{1}{n}),\ (i,n) \in I \times N\}$ la base dénombrable d'ouverts de (X,d) ainsi obtenue.

on munit $\mathcal{M}(\mathcal{B}(d))$ de la topologie $\mathcal{T}_B$ (voir paragraphe III) et 2^X de la métrique H_d.

Alors comme le montre l'exemple contraire suivant l'application

$$\emptyset : (\mathcal{M}(\mathcal{B}(d)),\mathcal{T}_B) \longrightarrow (2^X,H_d) \quad \text{ne peut en général être continue}$$
$$\mu \longrightarrow S\mu$$

<u>*Exemple*</u> *1.5.*- Soit (X,d) un espace métrique séparable possédant au moins deux points x et y distincts.

On pose $\mu_n = \frac{1}{n}\,\delta(y) + (1 - \frac{1}{n})\,\delta(x) \qquad n \in N$

et $\mu = \delta(x)$.

Soit O un ouvert de (X,d) on a alors :

$$|\mu_n(O) - \mu(O)| < \frac{2}{n}$$

d'où d'après la proposition (3.3.) : quelque soit la base B dénombrable d'ouverts de (X,d) on a :

$$\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}_B} \mu.$$

alors que : $S\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{H_d \,/} S\mu$

en effet, considérons $B_{H_d}(S\mu, \frac{\alpha}{4})$, où $\alpha = d(x,y) > 0$.

Soit $n \in N$

On a alors $y \in S\mu_n$ et $d(y,S\mu) = \alpha$.

ce qui implique $S\mu_n \notin B_{H_d}(S\mu, \frac{\alpha}{4})$

On montre de la même façon que $S\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{2^d \,/} S\mu$.

Nous allons donc devoir prendre une restriction de $\emptyset$.

Proposition 3.5.- Soit (X,d) un espace métrique séparable.
Soit $\{x_i, i \in I\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de (X,d).
Soit d_1 une métrique telle que (X,d_1) soit totalement borné et $T(d_1) = T(d)$ (où $T(d)$ est la topologie induite par d) on note $B = \{B_{d_1}(x_i, \frac{1}{n}), (i,n) \in I \times N\}$ la base dénombrable d'ouverts de (X,d_1) resp. (de (X,d)) ainsi obtenue. Soit B_1 resp. (B_2) le stabilisé de B par réunions finies resp : (par intersections finies).
Alors l'application

$$\emptyset_1 : (M_{(n,p,q)}\mathcal{B}(d_1), T_{B_1}/M_{(n,p,q)}\mathcal{B}(d_1)) \longrightarrow (2^X, H_{d_1})$$

$$\mu \longrightarrow S\mu$$

resp : $(\emptyset_2 : (M_{(n,p,q)}\mathcal{B}(d_1), T_{B_2}/M_{(n,p,q)}\mathcal{B}(d_1)) \longrightarrow (2^X, H_{d_1}))$

$$\mu \longrightarrow S\mu$$

est continue.

Preuve : Nous allons d'abord montrer que $\emptyset_1$ est continue.
Soient $\mu \in M_{(n,p,q)}\mathcal{B}(d_1)$ et $\varepsilon > 0$ donné, et considérons la boule ouverte $B_{H_{d_1}}(S\mu, \varepsilon)$.

(X,d_1) étant totalement borné et $\{x_i, i \in I\}$ étant dense dans (X,d_1), on peut recouvrir S_μ par un nombre fini de boules de la base B_1, de rayon $\frac{1}{m}$ (où $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{8}$).

On note $B(x_1, \frac{1}{m}), \ldots, B(x_n, \frac{1}{m})$ ce recouvrement (de $S\mu$) qui a été effectué de façon telle que : $B(x_i, \frac{1}{m}) \cap S\mu \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1 \ldots n\}$.

or $(B(x_i, \frac{1}{m}) \cap S\mu \neq \emptyset) \Rightarrow (\mu(B(x_i, \frac{1}{m})) > 0, \quad i \in \{1 \ldots n\})$ (lemme (1.4.))

considérons alors le voisinage ouvert (proposition 2.3.) $V_1\mu$ de μ dans $(M_{(n,p,q)}(B(d_1)), T_B/M_{(n,p,q)}(B(d_1)))$, défini ci-dessous :

$$V_1\mu = \{\nu \in M_{(n,p,q)}(B(d_1)) : \nu(B(x_i, \tfrac{1}{m})) \in \,]\mu(B(x_i, \tfrac{1}{m})) - \varepsilon_1, \mu(B(x_i, \tfrac{1}{m})[,$$

$$i \in \{1 \ldots n\} \quad \text{et} \quad \nu(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \tfrac{1}{m})) \in \,]1 - \varepsilon_2^p, 1]\}$$

où $0 < \varepsilon_1 < \inf\{\mu(B(x_i, \frac{1}{m})), i \in \{1, \ldots, n\}\}$ et où $\varepsilon_2 = \inf\{\frac{\varepsilon}{4q}, \frac{\eta}{2}\}$

supposons que $\nu \in V_1\mu$.

On a alors $\nu(B(x_i, \frac{1}{m})) > 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}$.

Ce qui implique $S_\nu \cap B(x_i, \frac{1}{m}) \neq \emptyset \quad i \in \{1, \ldots, n\}$

d'où $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{m}) \subset S_\nu^{\frac{4}{m}} \subset S_\nu^\varepsilon$, (où $S_\nu^\varepsilon = \{x \in X : d_1(x, S_\nu) < \varepsilon)$

or $S\mu \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{m})$

ce qui entraîne : $S\mu \subset S_\nu^\varepsilon$. (1)

par construction on a : $S_\mu \cap B(x_i, \frac{1}{m}) \neq \emptyset, \quad i \in \{1 \ldots n\}$

ce qui implique : $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(x_i, \frac{1}{m})} \subset S^{4m}$ (2)

de plus $\nu(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(x_i, \frac{1}{m})}) > 1 - \varepsilon_2^p$ (où $\varepsilon_2 < \eta$) et ν est $(n,p,q) - d_1$ continue.

ce qui entraîne $S \subset \overline{(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(x_i, \frac{1}{m})})^{q\varepsilon_2}} \subset (\bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(x_i, \frac{1}{m})})^{\frac{\varepsilon}{2}}$

d'où d'après (2) : $S_\nu \subset S_\mu^\varepsilon$.

ce qui termine la démonstration de cette proposition pour l'application $\emptyset_1$. La démonstration de la continuité de l'application de $\emptyset_2$ est identique à celle de $\emptyset_1$ à l'exeption près du choix du voisinage de μ.

- On considère le voisinage ouvert $V_2\mu$ de μ dans $(M_{(n,p,q)}{}^{\mathcal{B}(d_1)}, \mu_B(M_{(n,p,q)}{}^{\mathcal{B}(d_1}$ défini ci-dessous :

$$V_2\mu = \{\nu \in M_{(n,p,q)}(\mathcal{B}(d_1)) : \nu(B(x_i, \frac{1}{m})) \in]\mu(B(x_i, \frac{1}{m})) - \alpha_1, \mu(B(x_i, \frac{1}{m}) + \alpha_1[,$$

$i \in \{1...n\}\}$

où $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_1 < \inf\{\inf\{\mu(B(x_i, \frac{1}{m})), i \in \{1...n\}, (\frac{\varepsilon}{4q})^p \times \frac{1}{2^n}, \frac{n}{2}\}$.

On a alors :

$$|\nu(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{m}) - \mu(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{m}))| \leq \sum_{(i,j) \in \{1...n\}^2} |\mu(B(x_i, \frac{1}{m}) \cap B(x_i, \frac{1}{m}) - \nu(B(x_i, \frac{1}{m}) \cap B(x_i, \frac{1}{m}))|$$

ce qui implique : $\nu \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{m}) \in]1 - (\frac{\varepsilon}{4q})^p, 1]$.

$V_2\mu$ a les mêmes propriétés que $V_1\mu$. On continue alors la démonstration de la même façon qu'avec $V_1\mu$.

Proposition 4.5.- Soit (X,d) un espace métrique séparable tel que l'on puisse recouvrir tout borné par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon > 0$, pour tout ε étant donné arbitrairement.

Soit $\{x_i, i \in I\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de X et soit $B = \{B(x_i, \frac{1}{n})\ (i,n) \in I \times N\}$ la base dénombrable d'ouverts de (X,d) ainsi obtenue.

On note B_1 le stabilisé de B par réunions finies

B_2 le stabilisé de B par intersections finies.

Alors les applications :

$$\emptyset_1 : (M_{(\eta,p,q)}^{\mathcal{B}(d)}, \mathcal{T}_{B1}/M_{(\eta,p,q)}^{\mathcal{B}(d)})) \longrightarrow (2^X, H_d)$$

$$\mu \longrightarrow S\mu$$

et $$\emptyset_2 : (M_{(\eta,p,q)}^{\mathcal{B}(d)}, \mathcal{T}_{B2}/M_{(\eta,p,q)}^{\mathcal{B}(d)}) \longrightarrow (2^X, H_d)$$

$$\mu \longrightarrow S\mu$$

sont continues.

Preuve :

Quand on a remarqué que μ est (η,p,q)-d continue, implique S est borné (proposition 5.4), la démonstration de cette proposition est identique à la démonstration de la proposition précédente.

Corollaire 1.5.- Soit (X,d) un espace métrique séparable tel que tout fermé borné de (X,d) soit totalement borné.

Soit $\{x_i, i \in I\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de (X,d) et soit $B = \{B(x_i, \frac{1}{n}), (i,n) \times I \in N\}$ la base ainsi obtenue.

On note B_1 resp. (B_2) le stabilisé de B par réunions finies (resp. par intersections finies).

Alors l'application :

$$\emptyset_1 : (M_{Co(\eta,p,q)}^{\mathcal{B}(d)}, \mathcal{T}_{B1}/M_{Co(\eta,p,q)}^{\mathcal{B}(d)}) \longrightarrow (2^X, H_d)$$

$$\mu \longrightarrow S\mu$$

resp : $$(\emptyset_2 : (M_{Co(\eta,p,q)}^{\mathcal{B}(d)}, \mathcal{T}_{B2}/M_{Co(\eta,p,q)}^{\mathcal{B}(d)}) \longrightarrow (2^X, H_d))$$

$$\mu \longrightarrow S\mu$$

est continue en tout point μ tel que $S_\mu^{\frac{1}{n}}$ soit connexe pour tout $n \in N$.

Preuve : Le passage de la proposition 4.5. à ce lemme est sans difficultés.

Corollaire 2.5.- Si l'on ajoute aux hypothèses du corollaire 1.5. : tout élément de B_1 (resp. de B_2) est connexe on a :

$\emptyset_1$ (resp. $\emptyset_2$) est continue.

Preuve : Soient $\mu \in M_{Co(n,p,q)}{}^{\mathcal{B}(d)}$ et $\varepsilon > 0$ donné.

Considérons la boule ouverte $B_{H_d}(S\mu,\varepsilon)$.

$S\mu$ étant borné (proposition 5.4.), on peut donc le recouvrir par un nombre fini de boules de la base B_1, de rayon $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{16}$ (où $m = 2m'$).

On note $B(x_1, \frac{1}{m}), \ldots, B(x_n, \frac{1}{m})$ ce recouvrement effectué de façon telle que $B(x_i, \frac{1}{m}) \cap S\mu \neq \emptyset$.

On a alors :

$$(\overline{B(x_1, \frac{1}{m})} \cap S\mu) \cup (S\mu \cap (\bigcup_{i=2}^{n} \overline{B(x_i, \frac{1}{m})})) = S\mu.$$

comme $S\mu$ est connexe et que $\overline{B(x_1, \frac{1}{m})} \cap S\mu$ et $\bigcup\limits_{i=2}^{n} \overline{B(x_i, \frac{1}{m})} \cap S\mu$ sont fermés.

on a : $\overline{B(x_1, \frac{1}{m})} \cap (\bigcup\limits_{i=2}^{n} \overline{B(x_i, \frac{1}{m})}) \neq \emptyset$

d'où $\exists i_1$ que l'on prendra égal à 2 tel que :

$$\overline{B(x_1, \frac{1}{m})} \cap \overline{B(x_2, \frac{1}{m})} \neq \emptyset.$$

on montre de la même façon que :

$$(\overline{B(x_1, \frac{1}{m})} \cup \overline{B(x_2, \frac{1}{m})}) \cap (\bigcup_{i=3}^{n} \overline{B(x_i, \frac{1}{m})}) \neq \emptyset.$$

d'où $\exists i_2$ que l'on prendra égal à 3 tel que :

$$((\overline{B(x_1, \frac{1}{m})} \cup \overline{B(x_2, \frac{1}{m})}) \cap \overline{B(x_3, \frac{1}{m})} \neq \emptyset.$$

En continue de la même façon et l'on obtient :

$$(\bigcup_{i=1}^{k} \overline{B(x_i, \frac{1}{m})}) \cap \overline{B(x_{k+1}, \frac{1}{m})} \neq \emptyset \quad \text{où} \quad k < n.$$

Considérons alors les boules $B(x_1, \frac{2}{m}), \ldots, B(x_n, \frac{2}{m})$.

Ces boules appartiennent à B_1 puisque $m = 2m'$ et l'on a :

$$\begin{array}{l} B(x_1, \frac{2}{m}) \cap B(x_2, \frac{2}{m}) \neq \emptyset \\ \vdots \\ \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \frac{2}{m}) \cap B(x_{k+1}, \frac{2}{m}) \neq \emptyset \\ \vdots \\ \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \frac{2}{m}) \cap B(x_n, \frac{2}{m}) \neq \emptyset. \end{array}$$

Lemme 1.5.- La somme de deux ensembles connexes ayant des points communs est un ensemble connexe :

* la preuve de ce lemme se trouve page 83 (volume II) de [5].

On a donc d'après ce lemme :

$$\begin{array}{l} B(x_1, \frac{2}{m}) \cup B(x_2, \frac{2}{m}) \quad \text{est connexe.} \\ \vdots \\ \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \frac{2}{m}) \cup B(x_{k+1}, \frac{2}{m}) \neq \emptyset \quad \text{est connexe.} \\ \vdots \\ \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{2}{m}) \quad \text{est connexe.} \end{array}$$

la suite de la démonstration est alors analogue à la démonstration de la proposition 4.5.

Corollaire 3.5.- Soit (E,d) un espace vectoriel métrique séparable tel que tout fermé borné de (E,d) soit totalement borné.

Soit $\{x_i, i \in I\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de (X,d)

et soit $B = B(x_i, \frac{1}{n}), (i,n) \in I \times N$ la base ainsi obtenue.

On note B_1 resp. (B_2) le stabilisé de B par réunions finies (resp. par intersections finies).

Alors l'application :

$$\emptyset_1 : (M_{C(n,p,q)}\mathcal{B}(d), \mathcal{T}_{B_1}/M_{C(n,p,q)}\mathcal{B}(d)) \longrightarrow (2^X, H_d)$$

$$\mu \longrightarrow S\mu$$

resp. $$\emptyset_2 : (M_{C(n,p,q)}(\mathcal{B}(d)), \mathcal{T}_B/M_{C(n,p,q)}\mathcal{B}(d)) \longrightarrow (2^X, H_d))$$

$$\mu \longrightarrow S\mu$$

est continue en tout μ telle que $(S\mu)^{\frac{1}{n}}$ soit convexe $\forall n \in N$.

Preuve : Analogue à celle de la proposition 4.5.

Proposition 5.5.- Soit (X,T) un espace topologique à base dénombrable d'ouverts.

Soit B une base dénombrable d'ouverts de (X,T)

et soient μ_n et $\mu \in M(\mathcal{B}(T))$.
$n \in N$

Alors si $\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{T_B}{\Longrightarrow}} \mu$ avec $S\mu_n \subset S\mu$ pour tout $n \in N$

on a : $S\mu_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{2^T}} S\mu$

<u>*Preuve*</u> :

Soit $<O_1,\dots,O_m>$ un voisinage basique de $S\mu$ dans $(2^X,2^T)$.

Puisque $S\mu \in <O_1,\dots,O_m>$ on a :

a) $S\mu \subset \bigcup_{i=1}^{m} O_i$

ce qui implique $S\mu_n \subset \bigcup_{i=1}^{m} O_i$ pour tout $n \in N$ (1)

b) $S\mu \cap O_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in \{1\dots m\}$.

Ce qui entraîne $\mu(O_i) > 0$ pour tout $i \in \{1,\dots,m\}$ (lemme 1.4.)

B étant une base dénombrable d'ouverts de (X,d), tout O_i, $i \in \{1\dots m\}$ peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'ouverts de la base B, et comme $\mu(O_i) > 0$, $\exists O'_i \in B : O'_i \subset O_i$ et $\mu(O'_i) > 0$, ceci pour tout $O_i \in \{1,\dots,m\}$.

Posons $\mu(O'_i) = \varepsilon_i : i \in \{1,\dots,m\}$,

puisque $O'_i \in B$ et que $\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{T_B}{\Longrightarrow}} \mu$:

$\forall\, i \in \{1,\dots,m\}$, $\exists N_i : n > N_i \Rightarrow \mu_n(O'_i) > \dfrac{\varepsilon_i}{2}$.

Posons $N = \sup\{N_i,\ i \in \{1\dots m\}\}$

alors $n > N \Rightarrow \mu_n(O'_i) > 0$, $\forall\, i \in \{1\dots m\}$.

Ce qui implique : $S\mu_n \cap O'_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in \{1\dots m\}$

et comme $O'_i \subset O_i$; $i \in \{1,\dots,m\}$ on a :

$n > N \Rightarrow S\mu_n \cap O'_i \neq \emptyset, \quad i \in \{1,\ldots,m\}$

ce qui avec (1) termine la démonstration de cette proposition

Proposition 6.5.-

Soit (X,d) un espace métrique séparable.

Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable d'ouverts de (X,d)

et soient μ_n, $n \in \mathbb{N}$ et $\mu \in M(B(d))$.

Alors si $\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{T_B}{\Longrightarrow}} \mu$ avec $S\mu_n \subset S\mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

on a : $S\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{H_d} \mu$.

Preuve : La preuve de cette proposition est analogue à la preuve de la proposition précédente.

Remarque 3.5.-

La condition $S\mu_n \subset S\mu$ est plus faible que μ_n absolument continue par rapport à μ.

Nous comptons par la suite prolonger l'étude de la continuité de l'application ϕ, en munissant l'ensemble des fermés de topologies autre que la métrique de Hausdorff. Nous comptons aussi appliquer ces résultats à l'étude de l'estimation du support.

BIBLIOGRAPHIE

----

[1] BOSQ D. - 1970 - *Contribution à la théorie de l'estimation fonctionnelle.* Inst. de Stat. de l'Université de Paris, p. 24-25.

[6] HAMPEL F.R. - 1971 - *A general qualitative definition of robustness.* Annales Math. stat.vol.42 N° 6 p. 1887-1896.

[2] NEVEU J. - 1970 - *Bases mathématiques du calcul des probabilités.* Masson et Cie p. 7-8.

[3] MICHAEL E. - 1951 - *Topologie on spaces of subsets.* Trans. Amer. Math. Soc. p. 152-153.

[4] PARTHASARATHY K.R. - 1967 - *Probability measures on metric spaces.* Academic press. p. 40-41.

[5] KURATOWSKI C. - 1958 - *Topologie.*
Panstwowe wydawnictwo naukowe.
volume (I) p. 106-107, volume II p. 20-27 et 84.

****