

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le Grade de Docteur de 3ème Cycle

par

Pierre JACOB

CONVERGENCE FAIBLE UNIFORME
DE PROBABILITES

Membres du Jury : MM. M. PARREAU, Président
D. BOSQ, Rapporteur
Mle S. MARQUET, Examineur
M. J. GEFFROY, Invité

Soutenue le 22 Juin 1973

A mes Parents,

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur PARREAU, qui nous a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, et Mademoiselle le Professeur MARQUET, qui a bien voulu faire partie de la commission d'examen.

Nous tenons également à dire tout ce que nous devons à Monsieur le Professeur GEFFROY, qui nous a permis d'utiliser largement certains de ses résultats nouveaux et inédits, et à lui exprimer notre vive gratitude pour l'intérêt qu'il a bien voulu manifester à notre travail.

Nous remercions tout particulièrement Monsieur le Professeur BOSQ qui nous a proposé le sujet de cette thèse, et qui, surtout, a su nous initier et nous donner goût à la recherche, en nous accordant sans compter des discussions enrichissantes et encourageantes.

Enfin, nous remercions Madame TATTI pour la diligence dont elle a fait preuve quant à la réalisation matérielle de cet ouvrage.

*

*

*

RESUME

L'objet de ce travail est l'étude de la convergence faible uniforme de Probabilités. Dans la première partie, nous nous préoccupons de théorèmes généraux sur cette convergence, et en particulier nous essayons d'établir les liens qu'elle a avec la convergence uniforme de probabilités pour la distance de Prokhorov. Nous exposons également un résultat de M.J. Geffroy concernant les classes P - uniformes, et en déduisons une généralisation du théorème de Topsoe.

Dans la seconde partie, nous étudions les propriétés de convergence de la fonction de concentration de P. Levy vis-à-vis de la convergence faible uniforme.

Dans la troisième partie, nous appliquons les résultats obtenus à la recherche d'une condition suffisante pour que la probabilités empirique associée à un échantillon indexé converge faiblement uniformément.

Enfin, dans l'appendice, nous présentons une généralisation d'un des Théorèmes de représentation de M.J. Geffroy.

PRELIMINAIRES

Nous citons dans cette introduction quelques théorèmes concernant la convergence faible de probabilités.

Nous ne donnons pas en général les démonstrations de ces théorèmes, sauf si elles n'ont pas encore été publiées par leur auteur, ou si elles utilisent des procédés que nous emploierons dans la suite de notre travail.

Précisons tout d'abord les notations :

E désigne un espace métrique séparable, $\mathcal{B}_E$ sa tribu borélienne, et $M(E)$, l'ensemble des probabilités sur $(E, \mathcal{B}_E)$. $C(E)$, (respectivement : $U(E)$), est l'ensemble des fonctions numériques bornées continues, (respectivement : uniformément continues) définies sur E . On désigne par d la distance définie sur $E \times E$, et par $\beta(x, \delta)$ la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon δ . On note : ∂A la frontière de tout ensemble A et A^ϵ le dilaté d'ordre ϵ de A , autrement dit : $\{x : d(x, A) < \epsilon\}$. La ϵ -frontière, que l'on ne doit pas confondre avec le dilaté d'ordre ϵ de ∂A , est l'ensemble :

$$\partial_\epsilon A = \{x : d(x, A) < \epsilon \text{ et } d(x, A^c) < \epsilon\}.$$

1) La Topologie Faible.-

On munit $U(E)$ de la topologie faible, dans laquelle une probabilité P admet pour base de voisinages ;

$$V_{(P, \epsilon, f_1, \dots, f_k)} = \{Q \in U(E) : \left| \int f_i dP - \int f_i dQ \right| < \epsilon ; \forall i = 1 \dots k\}$$

$$\forall \epsilon > 0 ; \forall k \in \mathbb{N}^* ; \forall f_i \in C(E) \quad (i = 1 \dots k)$$

la convergence d'une suite de probabilités (P_n) vers P est la convergence faible, définie par :

$$P_n \Rightarrow P \Leftrightarrow \int f dP_n \longrightarrow \int f dP, \quad \forall f \in C(E).$$

Il existe un certain nombre de définitions équivalentes, dont l'énoncé

constitue "le théorème du Porte manteau"

- 1) $\int f dP_n \longrightarrow \int f dP$, $\forall f \in C(E)$
- 2) $\int f dP_n \longrightarrow \int f dP$, $\forall f \in U(E)$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(F) \leq P(F)$, $\forall F$ fermé
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(G) \leq P(G)$, $\forall G$ ouvert
- 5) $P_n(A) \longrightarrow P(A)$, $\forall A$ borélien de frontière P-nulle
(i.e. $P(\partial A) = 0$).

2) La distance de Prokhorov.-

a) la topologie faible est métrisable, et l'on a pu préciser différentes métriques. La plus utilisée est celle introduite par Yu. Prokhorov⁽¹⁾ en 1956, que nous noterons ρ . Soient P et $A \in M(E)$, on pose

$$\sigma(P, Q) = \inf\{\varepsilon > 0 : P(F) < Q(F^\varepsilon) + \varepsilon, \forall F \text{ fermé de } E\}$$

Alors, par définition, $\rho(P, Q) = \min(\sigma(P, Q) ; \sigma(Q, P))$.

En 1965, V. Strassen⁽²⁾ a fait observer que $\sigma(P, Q) = \sigma(Q, P) = \rho(P, Q)$, ce qui rend cette métrique un peu plus maniable.

Théorème : $P_n \Rightarrow P \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(P_n, P) = 0$

b) V. Strassen⁽²⁾, en 1965, a démontré un théorème très utile et assez spectaculaire, que R. Dudley⁽³⁾ a généralisé en 1968.

Théorème : La distance de Prokhorov entre deux probabilités P et Q est la borne inférieure des distances en probabilité de variables aléatoires X et Y distribuées suivant P et Q .

Autrement dit, si on suppose que X et Y sont des variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, A, P_r) , on a :

$$\rho(P, Q) = \inf_{X, Y} [\inf\{\varepsilon > 0 : P_r\{d(X, Y) \geq \varepsilon\} < \varepsilon\}]$$

3) Les sous-ensembles relativement compacts de $U(E)$ (cf. (7) p. 48-49)

3) Les sous-ensembles relativement compacts de $M(E)$ (cf. (7) p. 48-49)

Théorème : Soit E un espace polonais et $\Gamma \subseteq M(E)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que Γ soit relativement compact est que Γ soit équitendu, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K_\varepsilon \text{ compact tel que } \mu(K_\varepsilon) > 1-\varepsilon, \quad \forall \mu \in \Gamma$$

Voici la démonstration de la condition nécessaire de ce théorème, dont nous utiliserons souvent la première partie dans la suite.

a) supposons pour l'instant que E est simplement séparable et que Γ est compact. $n \in \mathbb{N}$ étant fixé, il existe une infinité dénombrable de boules ouvertes $B(x_j, \frac{1}{n}) = B_{j,n}$ telles que $E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{j,n}$ nous allons montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et $\forall \eta > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^K B_{j,n}\right) > 1-\eta, \quad \forall \mu \in \Gamma$$

si ce n'est pas vrai, il existe une suite $(\mu_1, \mu_2, \dots)$; $\eta_0 > 0$; et une suite d'entiers $(m_1 > m_2 > \dots)$ tels que

$$\mu_k\left(\bigcup_{j=1}^{m_k} B_{j,n}\right) \leq 1-\eta_0 \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots$$

Comme Γ est compact, on peut supposer que $\mu_k \Rightarrow \mu$ or, pour ℓ fixé, on a : $\forall k > \ell$

$$\bigcup_{j=1}^{m_\ell} B_{j,n} \subset \bigcup_{j=1}^{m_k} B_{j,n}$$

$$\Rightarrow \mu_k\left(\bigcup_{j=1}^{m_\ell} B_{j,n}\right) \leq 1-\eta_0$$

et, d'après la condition n^0_4 du théorème du porte manteau :

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m_\ell} B_{j,n}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_k\left(\bigcup_{j=1}^{m_\ell} B_{j,n}\right) \leq 1-\eta_0$$

en faisant tendre ℓ vers l'infini, on obtient :

$$\mu(E) \leq 1-\eta_0$$

ce qui est une contradiction, puisque E est une probabilité.

b) on suppose en plus que E est complet. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit k_n un entier tel que $\mu(\bigcup_{j=1}^{k_n} B_{j,n}) > 1 - \epsilon/2^n$, $\forall \mu \in \Gamma$. Posons

$$F_n = \bigcup_{j=1}^{k_n} \overline{B_{j,n}} \quad \text{et} \quad K_\epsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

Comme $\mu(F_n) > 1 - \epsilon/2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mu \in \Gamma$, on a :

$$\mu(K_\epsilon) > 1 - \epsilon, \quad \forall \mu \in \Gamma$$

de plus, comme E est complet, et que K_ϵ peut être recouvert par un nombre fini de boules fermées de rayon arbitrairement fixé, K_ϵ est compact.

4) Existence de mesures non atomiques (p. (7) p. 53-55)

Théorème : Soit E un espace polonais de puissance supérieure ou dénombrable. Il existe une probabilité de $M(E)$ non atomique.

Théorème : Soit E un espace polonais dense dans lui-même. L'ensemble des mesures de probabilités non atomiques est un G_δ de $M(E)$, partout dense dans $M(E)$.

5) Convergence faible de la probabilité empirique (cf (7) p. 53)

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ des variables aléatoires indépendantes et équi-distribuées, définies sur un espace (Ω, A, P) et à valeurs dans $(E, \mathcal{B}_E, \mu)$; à tout point $\omega \in \Omega$, on associe la mesure $\mu_n^{(\omega)}$ qui a la masse $\frac{1}{n}$ en chacun des points $X_1(\omega) ; X_2(\omega) ; \dots ; X_n(\omega)$. Nous allons montrer que $P\{\omega : \mu_n^{(\omega)} \Rightarrow \mu\} = 1$

a) pour tout $g \in C(E)$, on a : $\int g d\mu_n^{(\omega)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g \circ X_i(\omega)$ les v.a.r.

$(g \circ X_1, \dots, g \circ X_n, \dots)$ sont indépendantes, équi-distribuées, et bornées. D'après la loi forte des grands nombres, on a :

$$\int g d\mu_n^{(\omega)} \rightarrow \int g d\mu \quad \text{pour presque tout } \omega \in \Omega$$

b) on peut munir E d'une métrique équivalente pour laquelle E est totalement borné. Alors $U_{(E)}$ est un espace de Banach séparable pour la norme de la convergence uniforme.

Soit $G = \{g_1, g_2, \dots, g_r, \dots\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de $U_{(E)}$. Soit (v_n) une suite de probabilités. On montre que si :

$$\int g_r dv_n \rightarrow \int g_r dv, \quad \forall r \in \mathbb{N}^*, \text{ alors}$$

$$v_n \Rightarrow v$$

c) Posons $N_r = \{\omega : \int g_r dv_n \not\rightarrow \int g_r dv\}, \forall r \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$P\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} N_r\right) \leq \sum_{r=1}^{\infty} P(N_r) = 0 \Rightarrow P\{\mu_n^\omega \Rightarrow \mu\} = 1$$

6) Le théorème de représentation.-

La question a été étudiée par A.V. Skorokhod⁽¹²⁾ et R. Dudley⁽³⁾.

Théorème : Soit E un espace métrique séparable, (P_n) une suite de probabilités de $M(E)$ telle que : $P_n \Rightarrow P$.

Alors, il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et des variables aléatoires à valeurs dans E : X_n de loi P_n
 X de loi P

telles que $X_n \xrightarrow[p.s.]{} X$

M. J. Geffroy⁽¹³⁾ a démontré une version plus précise de ce théorème, dans laquelle l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est l'intervalle unité muni de la probabilité uniforme.

Théorème : Soit E un espace métrique polonais, (P_n) une suite de probabilités de $M(E)$ telle que $P_n \Rightarrow P$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ l'intervalle $[0, 1]$, muni de sa tribu borelienne et de la probabilité uniforme. Il existe des v.a. à valeurs dans E : X_n de loi P_n telles que $X_n \xrightarrow[p.s.]{} X$.

X de loi P

(En fait, M. J. Geffroy a étalement démontré une version plus fine du

théorème précédent, où E est un espace simplement métrique séparable. Cependant, nous préférons citer ce théorème, parce qu'il repose sur un lemme essentiel que nous utiliserons dans l'Appendice).

Lemme : Soit E un espace polonais et $\mu \in M(E)$. Il existe une v.a. X de loi μ :

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{B}_E)$$

Démonstration :

Tout espace polonais E est homéomorphe à un espace F polonais éparpillé, c'est-à-dire à un espace polonais dont tout point admet un système fondamental de voisinages ouverts et fermés. Appelons ψ cet homéomorphisme. ψ établit une isomorphie entre la tribu borelienne de F et celle de E .

a) on considère une suite de partitions de F :

$$(\mathcal{D}_m)_{m \in \mathbb{N}^*} = (\{D_{m,k} : k \in \mathbb{N}^*\})_{m \in \mathbb{N}^*}$$

où les ensembles $D_{m,k}$ sont des ouverts fermés de diamètre inférieur à $\frac{1}{m}$. On peut supposer que $(\mathcal{D}_{m+1})$ est un raffinement de $\mathcal{D}_m$. En effet, chaque $D_{m,k}$ est lui-même un espace polonais éparpillé.

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \text{ on pose } N_m^* = \{k : \mu(D_{m,k}) > 0\} \text{ et } D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in N_m^*} D_{m,k}$$

$$\text{on a : } D = \bigcup_{k \in N_1^*} D_{1,k} \Rightarrow D^c = \bigcup_{k \in N_1^*} D_{1,k}^c$$

D est ouvert et fermé, dans un polonais éparpillé. D est donc un polonais éparpillé.

b) sur $[0,1]$, on considère les intervalles $A_{m,k}$ tels que $\lambda(A_{m,k}) = \mu(D_{m,k}) \quad \forall k \in N_m^*$.

On peut prendre ces intervalles de façon que $A_{m,k} = \bigcap_j A_{m+1,j}$
 $\forall m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in N_m^*$.

Soit $\alpha_{m,k}$ un point de $D_{m,k}$, $\forall m \in \mathbb{N}$ et $k \in N_m^*$. On pose :

$$Y_m(s) = \alpha_m^k, \quad \forall s \in A_{m,k}$$

Alors, $\mu(D_{m,k}) = \lambda(A_{m,k}) = \lambda[Y_m^{-1}(D_{m,k})]$.

c) La suite $[Y_m(x)]_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge quand $m \rightarrow \infty$; en effet, soit $s \in [0,1[\cap A_{m,k(s)}$ tel que $s \in A_{m,k(s)}$ et $Y_m(s) \in D_{m,k(s)}$. La suite $[D_{m,k(s)}]_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fermés emboîtés dans un complet, dont les diamètres tendent vers 0. Par conséquent, il existe $u \in D$ tel que $u = \bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} D_{m,k(s)}$. On pose par définition : $u = Y(s)$, et on a :

$$Y_m(s) \rightarrow Y(s) \text{ quand } m \rightarrow \infty.$$

d) pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, tout $k \in \mathbb{N}_m^*$ et tout $s \in [0,1]$, on a, parce que $D_{m,k}$ est fermé :

$$Y_m(s) \in D_{m,k} \Leftrightarrow Y_\ell(s) \in D_{m,k}, \quad \forall \ell \geq m \Rightarrow Y(s) \in D_{m,k}$$

Comme $D_{m,k}$ est aussi ouvert, pour ℓ assez grand, on a : $Y_\ell(s) \in D_{m,k}$. on en déduit que $\lambda[Y(s) \in D_{m,k}] = \lambda[Y_m(s) \in D_{m,k}] = \mu(D_{m,k})$. la loi de Y coïncide donc avec μ sur les $D_{m,k}$ qui forment une base de la topologie de D . Par conséquent, la loi de Y coïncide avec μ .

Soit i l'injection canonique de D dans F , il suffit de poser $X = \psi \circ i \circ Y$ pour obtenir la v.a. de loi μ annoncée

$$[0,1] \xrightarrow{Y} D \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\psi} E$$

X

7) Les classes P-uniformes.

Les principaux résultats concernant cette question sont contenus dans un article de P. Billingsley et F. Topsoe paru en 1967⁽⁴⁾, et dans un article de F. Topsoe paru également en 1967⁽⁵⁾.

Soit F une classe de fonctions numériques mesurables et bornées définies sur E . F est dite P-uniforme si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in F} \left| \int f dP_n - \int f dP \right| = 0$$

pour toute suite de probabilités (P_n) telle que $P_n \Rightarrow P$.

Théorème : une condition nécessaire et suffisante pour que F soit P -uniforme est que :

$$1) \quad \omega_F(E) = \sup\{|f(x)-f(y)| : f \in F \text{ et } x, y \in E\} < +\infty$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{f \in F} P\{x : \omega_f \beta(x, \delta) > \varepsilon\} = 0$$

où $\omega_f \beta(x, \delta)$ est l'oscillation de f sur la boule ouverte $\beta(x, \delta)$.

Théorème : une condition nécessaire et suffisante pour que F soit P -uniforme est que :

$$1) \quad \omega_F(E) < +\infty$$

2) $\forall \varepsilon > 0$; $\forall (f_n)$, suite de fonctions de F ; $\forall (\delta_n)$ suite de nombres positifs qui tend vers 0,

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \omega_{f_n} \beta(x, \delta_n) > \varepsilon \}\right) = 0$$

Remarque : M.J. Geffroy a démontré une généralisation du premier de ces théorèmes on en trouvera l'exposé dans la première partie.

PREMIERE PARTIE

Définition 1.- Soit P_{Θ} un sous-ensemble de $M(E)$ indicé par Θ . On dit que la famille de suites de probabilités $(P_{n,\theta})_{\theta \in \Theta}$ converge vers $(P_{\theta})_{\theta \in \Theta}$ faiblement, uniformément par rapport à Θ , si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \int f dP_{n,\theta} - \int f dP_{\theta} \right| = 0, \quad \forall f \in C(E)$$

notation : $P_{n,\theta} \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif } | \Theta$

Nous allons tout d'abord nous préoccuper de savoir si la définition 5) du théorème du porte manteau peut se généraliser à la convergence uniforme. C'est en effet la définition la plus souvent utilisée en convergence simple. Intuitivement, on pressent que cette définition ne sera pas généralisable, pour la raison encore vague qu'il n'y a pas toujours "assez" de boreliens de frontière P_{Θ} -nulle pour assurer la convergence faible uniforme. Cependant,

Théorème 1.- si P_{Θ} est un sous-ensemble compact de $M(E)$

$$P_{n,\theta} \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif } | \Theta \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} |P_{n,\theta}(A) - P_{\theta}(A)| = 0$$

pour tout borelien A de frontière P_{Θ} -nulle. (i.e : $P_{\theta}(\partial A) = 0, \forall \theta \in \Theta$)

Lemme : supposons $A \neq \emptyset$ et posons $A_k = \bar{A}^{\frac{1}{k}}, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} P_{\theta}(A_k - A) = 0$$

démonstration du lemme : si $\sup_{\theta \in \Theta} P_{\theta}(A_k - A)$ ne converge pas vers 0, il existe $\eta > 0$, et une suite (A'_k) extraite de (A_k) telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists \theta'_k \in \Theta$ tel que $P_{\theta'_k}(A'_k - A) > \eta$. P_{Θ} étant compact, on peut extraire de $(P_{\theta'_k})$ une suite $(P_{\theta''_k})$ qui converge faiblement vers une probabilité $P \in P_{\Theta}$. Appelons (A''_k) la suite correspondante extraite de (A'_k) . $\forall k \in \mathbb{N}, \exists m(k) \in]k; k+1[$ t. $A_{m(k)} = \{x, d(x, \bar{A}) < \frac{1}{m(k)}\}$ ait une frontière P -nulle.

Fixons k . Alors, pour tout entier $\ell > k$, on a :

$$P_{\theta_\ell}(A_{m(k)} - A) \geq P_{\theta_\ell}(A_{k+1}'' - A) \geq P_{\theta_\ell}(A_\ell'' - A) > \eta$$

Par construction, $(A_{m(k)} - A)$ est de frontière P -nulle, donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \lim_{\ell \rightarrow \infty} P_{\theta_\ell}(A_{m(k)} - A) = P(A_{m(k)} - A) \text{ donc } P(A_{m(k)} - A) > \eta$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$. Cela contredit le fait que $\bar{A} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_{m(k)}$. En effet, les $A_{m(k)}$ étant emboîtées, $P(A) = P(\bar{A}) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(A_{m(k)})$.

Démonstration du théorème.-

Fixons $\varepsilon > 0$. D'après le lemme, il existe un ouvert A_k contenant A tel que $\sup_{\theta \in \Theta} P_\theta(A_k - A) < \varepsilon/2$. On sait d'autre part qu'il existe une fonction uniformément continue f_k , égale à 1 sur $\bar{A}$ et à 0 sur $E - A_k$. Comme $P_{n,\theta} \Rightarrow P_\theta$ unif $|\Theta$,

$$\begin{aligned} \exists N_{(\varepsilon)} \text{ et } \forall n > N_{(\varepsilon)}, \forall \theta \in \Theta, P_{n,\theta}(\bar{A}) &\leq \int f_k dP_{n,\theta} \leq \int f_k dP_\theta + \varepsilon/2 \\ &\leq P_\theta(A_k) + \varepsilon/2 \end{aligned}$$

donc, pour tout $\theta \in \Theta$, on a :

$$\begin{aligned} P_{n,\theta}(A) - P_\theta(A) &\leq P_{n,\theta}(\bar{A}) - P_\theta(A) = P_{n,\theta}(\bar{A}) - P(A_k) + P(A_k) - P(A) \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

de même, on montre que : $\exists M(\varepsilon)$ tq $\forall n > M(\varepsilon), P_\theta(A) - P_{n,\theta}(A) < \varepsilon, \forall \theta \in \Theta$

et on en déduit : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} |P_{n,\theta}(A) - P_\theta(A)| = 0$.

Remarques.- a) la réciproque est fausse. Posons $E = [0,1]$; on sait qu'alors, $M(E)$ est compact. Prenons pour ensemble P_Θ l'ensemble des probabilités de Dirac sur $[0,1]$. C'est un fermé de $M(E)$, donc un compact.

Les seuls boréliens de frontière P_Θ -nulle sont $[0,1]$ et $\emptyset$, puisque ce sont les seuls dont la frontière soit vide. Pour ces deux boréliens, la condition : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} |P_{n,\theta}(A) - P_\theta(A)|$ est toujours vraie.

b) Cependant, la réciproque peut être démontrée, si au lieu de supposer P_{Θ} compact, on prend une famille P_{Θ} dominée par une probabilité σ .

Démonstration : (cf. (7) p. 41-42)

Soit $g \in C(E)$. g étant bornée, $g(E)$ est inclus dans un intervalle $]a, b[$. On fixe $\varepsilon > 0$, et on réalise un découpage de $]a, b[$ en sous intervalles $]t_{i-1} ; t_i[$ ($i = 1, \dots, n$), de façon que $t_0 = a ; t_n = b$

$$(t_{i+1} - t_i) < \varepsilon$$

$$\sigma(g^{-1}\{t_i\}) = 0, \forall i = 1 \dots n.$$

Les ensembles $A_i = \{g^{-1}[t_{i-1} ; t_i]\}$, $i = 1 \dots n$, forment une partition mesurable de E .

De plus, pour tout $i = 1 \dots n$, $\partial A_i \subset g^{-1}(\{t_i\} \cup \{t_{i-1}\})$; donc, $\sigma(\partial A_i) = 0$, $\forall i = 1 \dots n$.

Posons $g^* = \sum_{i=1}^n t_i \chi_{A_i}$ on a : $\sup_{x \in E} |g(x) - g^*(x)| < \varepsilon$, et par conséquent, $\forall \theta \in \Theta$

$$\left| \int g dP_{n,\theta} - \int g dP_{\theta} \right| \leq 2\varepsilon + \left| \int g^* dP_{n,\theta} - \int g^* dP_{\theta} \right| \leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^n |t_i| \cdot |P_{n,\theta}(A_i) - P_{\theta}(A_i)|$$

$$\Rightarrow \sup_{\theta \in \Theta} \left| \int g dP_{n,\theta} - \int g dP_{\theta} \right| \leq 2\varepsilon + \sup_{\theta \in \Theta} \sum_{i=1}^n |t_i| \cdot |P_{n,\theta}(A_i) - P_{\theta}(A_i)|$$

$$\leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^n |t_i| \cdot \sup_{\theta \in \Theta} |P_{n,\theta}(A_i) - P_{\theta}(A_i)|$$

comme $\sigma(A_i) = 0$, $\forall i = 1 \dots n$, on a $P_{\theta}(\partial A_i) = 0$, $\forall \theta \in \Theta$ et $i = 1 \dots n$.

Par conséquent, $0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \int g dP_{n,\theta} - \int g dP_{\theta} \right| \leq 2\varepsilon$ comme ε est arbitraire, $P_{n,\theta} \Rightarrow P_{\theta}$ unif Θ .

Théorème 2. - Soit E un espace métrique séparable, et P_{Θ} un sous-ensemble compact de $M(E)$

$$P_{n,\theta} \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif } \Theta \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \rho(P_{n,\theta} ; P_{\theta}) = 0$$

Démonstration :

a) P_{Θ} est compact. Par conséquent, $\varepsilon > 0$ étant fixé, il existe un nombre fini de boules ouvertes $\beta(x_i, \varepsilon^2/4)$ ($i = 1 \dots k(\varepsilon)$) telles que

$$P_{\theta} \left[\bigcup_{i=1}^{k(\epsilon)} \beta(x_i, \epsilon^2/4) \right] > 1 - \epsilon/2, \quad \forall \theta \in \Theta$$

Soit F_{ϵ} le fermé : $\bigcup_{i=1}^{k(\epsilon)} \overline{\beta(x_i, \epsilon^2/4)}$ et $F'_{\epsilon} = F_{\epsilon}^c$. Il existe une fonction f uniformément continue égale à 1 sur F'_{ϵ} et à 0 sur F_{ϵ} . Par hypothèse : $\exists N_1(\epsilon)$ tq $\forall n > N_1(\epsilon)$ et $\forall \theta \in \Theta$:

$$P_{n,\theta}(F'_{\epsilon}) < \int f dP_{n,\theta} < \int f dP_{\theta} + \epsilon/2 < P_{\theta}(F'_{\epsilon}) + \epsilon/2 < \epsilon$$

b) Posons $B_i = \beta(x_i, \epsilon^2/4)$, $\forall i = 1 \dots n$. $F'_{\epsilon} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k(\epsilon)} B_i$. On considère la famille F_{ϵ} de fonctions continues sur E :

$$F_{\epsilon} = \{f_T : f_T(x) = \min(\chi_{T^{\epsilon}}(x) ; \frac{d(x, T^{\epsilon})}{\epsilon}), \quad \forall T \text{ fermé } \subset E\}$$

où $\chi_{T^{\epsilon}}$ est la fonction indicatrice de T^{ϵ} .

Si y et z appartiennent à la même boule B_i , on a :

$$|f_T(y) - f_T(z)| < \left| \frac{d(y, T^{\epsilon})}{\epsilon} - \frac{d(z, T^{\epsilon})}{\epsilon} \right| < \frac{d(y, z)}{\epsilon} < \frac{\epsilon^2}{\epsilon} = \epsilon$$

c) On extrait de F_{ϵ} une famille finie de fonctions, A_{ϵ} , telle que

$$\forall f_T \in F_{\epsilon}, \exists f \in A_{\epsilon}, \text{ tq } \forall x \in F'_{\epsilon}, |f_T(x) - f(x)| < 2\epsilon.$$

Construction : On peut supposer que $\epsilon < 1$.

Alors, soit t le plus grand entier tel que $\epsilon \cdot t < 1$ pour tout

$i = 1 \dots k$ et pour tout $j = 0, 1, \dots, t$, posons :

$$B_{i,0} = B_i \times [0; 2\epsilon[; \dots ; B_{i,j} = B_i \times [j\epsilon; (j+2)\epsilon[; \dots ; B_{i,t-1} = B_i \times [\epsilon(t-1); 1[$$

$$B_{i,t} = B_i \times [\epsilon \cdot t; 1[\text{ et } B = (E - \bigcup_{i=1}^{k(\epsilon)} B_i) \times [0, 1]$$

Pour tout $f_T \in F_{\epsilon}$, posons $E \times f_T(E) = \{(x, f_T(x)) | x \in E\}$, pour tout $i = 1 \dots k$, soit $j(i, T)$ le plus petit indice tel que

$$E \times f_T(E) \subset B \cup \left[\bigcup_{i=1}^{k(\epsilon)} B_{i,j(i,T)} \right]$$

de cette façon à toute fonction f_T , on associe une suite finie $[j(i, T)]$

$i = 1 \dots k$ et une seule.

Or, il n'y a qu'un nombre fini de telles suites. On dira que deux fonctions f_T et $f_{T'}$ sont équivalentes, si on leur associe la même suite, c'est-à-dire si : $[j(i,T)] = [j(i,T')]$, $\forall i = 1 \dots k$. On partage ainsi F_ϵ en un nombre fini de classe d'équivalences. Il suffit alors de prendre pour A_ϵ une famille quelconque de représentants de ces classes. En effet :

soit $f_T \in F_\epsilon$. Soit f le représentant choisi de sa classe d'équivalence. Soit $x \in F'_\epsilon$; x appartient à l'un des B_i , soit B_{i_0} . Alors, $[x, f_T(x)]$ et $[x, f(x)]$ appartiennent au même $B_{i_0, j}$. C'est-à-dire que :

$$f_T(x) \in [j.\epsilon ; (j+2)\epsilon[\text{ et } f(x) \in [j.\epsilon ; (j+2)\epsilon[$$

$$\text{donc : } |f_T(x) - f(x)| < 2\epsilon$$

d) Comme A_ϵ est une famille finie de fonctions continues,

$$P_{n,\theta} \Rightarrow P_\theta \text{ unif} | \Theta \Rightarrow \exists N_2(\epsilon) \text{ tq } \forall n > N_2(\epsilon), \left| \int f dP_{n,\theta} - \int f dP_\theta \right| < \epsilon,$$

$\forall \theta \in \Theta$ et $\forall f \in A_\epsilon$, d'autre part, pour toute fonction $f_T \in F_\epsilon$, soit f le représentant de la classe d'équivalence de f_T . On a :

$$\left| \int (f_T - f) dP_\theta \right| < \int_{F'_\epsilon} |f_T - f| dP_\theta + \int_{F''_\epsilon} |f_T - f| dP_\theta < 3\epsilon, \forall \theta \in \Theta$$

$$\text{de même, } \left| \int (f_T - f) dP_{\theta,n} \right| < 3\epsilon, \quad \forall \theta \in \Theta, \quad \forall n > N_1(\epsilon).$$

On en déduit que pour $n > \text{Max}(N_1(\epsilon) ; N_2(\epsilon))$

$$\sup_{\substack{\theta \in \Theta \\ f_T \in F_\epsilon}} \left| \int f_T dP_{n,\theta} - \int f_T dP_\theta \right| < 7\epsilon$$

en remarquant que : $f_T \leq \chi_T \epsilon$ et $f_T \geq \chi_T$, on obtient :

$$P_{n,\theta}(T) \leq \int f_T dP_{n,\theta} \leq 7\epsilon + \int f_T dP_\theta \leq 7\epsilon + P_\theta(T^\epsilon) \leq 7\epsilon + P_\theta(T^{7\epsilon})$$

$$\text{de même, } P_\theta(T) \leq P_{n,\theta}(T^{7\epsilon}) + 7\epsilon, \quad \forall T \text{ fermé } \subset E.$$

$$\text{Conclusion : } \sup_{\theta \in \Theta} \rho(P_\theta ; P_{n,\theta}) \leq 7\epsilon$$

Nous démontrerons la réciproque du théorème 2 plus tard, car cette réciproque apparaîtra comme un corollaire d'un théorème beaucoup plus général.

Pour l'instant, nous donnons des formes légèrement différentes du théorème 2.

Corollaire I-1. - Soit E un espace métrique totalement borné et P_{Θ} un sous-ensemble quelconque de $M(E)$.

$$P_{n,\theta} \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif} | \Theta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} (P_{n,\theta}; P_{\theta}) = 0$$

Démonstration

On peut recouvrir E par un nombre fini de boules ouvertes $B_i = B(x_i, \varepsilon^2/2)$. Il suffit alors de reprendre les parties b), c), d) de la démonstration précédente.

Corollaire I-2. - Soit E un espace métrique quelconque et P un ensemble de probabilités équitendu.

$$P_{n,\theta} \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif} | \Theta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} (P_{n,\theta}; P_{\theta}) = 0$$

Démonstration

$\varepsilon > 0$ étant fixé, il existe K_{ε} compact tel que $\sup_{\theta \in \Theta} P_{\theta}(K_{\varepsilon}^c) < \varepsilon/2$ on peut recouvrir K_{ε} par un nombre fini de boules ouvertes : $B(x_i, \varepsilon^2/4)$. Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 2.

On étudie à présent des généralisations des théorèmes d'uniformité de P. Billingsley et de F. Topsoe⁽⁴⁾. Le théorème principal est dû à Mr. Geffroy (1972)⁽⁸⁾.

Définition II. - Une classe F de fonctions numériques mesurables et bornées est dite P_{Θ} -uniforme si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\theta \in \Theta \\ f \in F}} \left| \int f dP_{n,\theta} - \int f dP_{\theta} \right| = 0$$

pour toute famille de suites de probabilités $(P_{n,\theta})_{\theta \in \Theta}$ telle que

$$P_{n,\theta} \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif} | \Theta$$

Définition III. - La famille F sera dite P_{Θ}^* -uniforme, si on a la même

propriété quand $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \rho(P_{n,\theta} ; P_\theta) = 0$.

Théorème III. - (Mr. Geffroy)

F est P_Θ^* -uniforme si et seulement si :

$$1) \omega_F(E) < +\infty$$

$$2) \forall \varepsilon > 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\theta \in \Theta} P_\theta \{x : \omega_F \beta(x, \delta) > \varepsilon\} = 0$$

Démonstration

Pour tout θ , X_θ et $X_{n,\theta}$ désignent des variables aléatoires de lois P_θ et $P_{n,\theta}$, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Pour tout $f \in F$ posons : $I_{f,n,\theta} = \int f dP_\theta - \int f dP_{n,\theta} = \int f \circ X_\theta d\mu - \int f \circ X_{n,\theta} d\mu$

$$H_{f,\delta} = \{x : \omega_F \beta(x, \delta) \leq \varepsilon/3\}$$

$$H_{f,\delta,\theta} = X_\theta^{-1}(\{H_{f,\delta}\})$$

on prend $\delta < \frac{\varepsilon}{3\omega_F(E)}$ et assez petit pour que : $\sup_{\theta \in \Theta} [1 - P_\theta(H_{f,\delta})] < \frac{\varepsilon}{3\omega_F(E)}$. Alors

$$\left| \int_{\Omega - H_{f,\delta,\theta}} (f \circ X_\theta - f \circ X_{n,\theta}) d\mu \right| \leq \omega_F(E) \cdot \mu(\Omega - H_{f,\delta,\theta}) = \omega_F(E) \cdot [1 - P_\theta(H_{f,\delta})] < \varepsilon/3$$

D'autre part, d'après un résultat de Strassen et Dudley cité dans les Préliminaires,

$$\rho(P_{n,\theta} ; P_\theta) = \inf_{(X_\theta; X_{n,\theta})} [\inf\{\varepsilon > 0 : \mu\{d(X_{n,\theta} ; X_\theta) < \varepsilon\} > 1 - \varepsilon\}]$$

il existe N tq $n > N \Rightarrow \rho(P_{n,\theta} ; P_\theta) < \delta$. On peut alors choisir X_θ et $X_{n,\theta}$ tels que $d(X_{n,\theta} ; X_\theta) < \delta$ sauf sur un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \delta$
 $\Rightarrow$ si $t \in (H_{f,\delta,\theta} - A)$, $|f \circ X_\theta(t) - f \circ X_{n,\theta}(t)| \leq \varepsilon/3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \int_{H_{f,\delta,\theta}} (f \circ X_\theta - f \circ X_{n,\theta}) d\mu \right| &\leq \int_{(H_{f,\delta,\theta} - A)} |f \circ X_\theta - f \circ X_{n,\theta}| d\mu + \\ &+ \int |f \circ X_\theta - f \circ X_{n,\theta}| d\mu \leq \varepsilon/3 + \omega_F(E) \cdot \delta \leq 2\varepsilon/3 \end{aligned}$$

On en déduit : $|I_{f,n,\theta}| < \varepsilon$, et cela, indépendamment de θ et de f .

Les conditions 1) et 2) sont donc suffisantes. D'après le théorème de Billingsley et Topsøe, elles sont aussi nécessaires, dans le cas où P_Θ est réduite à une

seule probabilité P . A fortiori, elles le sont ici.

Le théorème suivant est une généralisation d'un théorème de Topsoe⁽⁵⁾, cité également dans les préliminaires.

Théorème IV. - Soit $P_{\odot}$ un sous-ensemble compact de $M(E)$, F est une classe $P_{\odot}^*$ -uniforme si et seulement si

$$1) \omega_F(E) < +\infty$$

$$2) \forall \varepsilon > 0 ; \forall (\delta_n), \text{ suite de nombres positifs qui tend vers } 0 ;$$

$$\forall (f_n) \text{ suite de fonctions de } F ; \forall \theta \in \odot$$

$$P_{\odot} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : \omega_{f_n} \beta(x, \delta_n) > \varepsilon\} \right) = 0$$

Démonstration.

a) Préliminaires

Cette démonstration sera plus claire si nous adoptons les notations de Topsoe⁽⁵⁾ pour simplifier l'écriture. Pour cela, remarquons d'abord que :

$$\forall \delta_1 > 0 \quad \text{et} \quad \delta_2 > 0$$

$$\{x : \omega_F \beta(x, \delta_1) > \varepsilon\}^{\delta_2} \subset \{x : \omega_F \beta(x, \delta_1 + \delta_2) > \varepsilon\} \quad (1)$$

(en effet, si x' appartient au premier ensemble, il existe $x'' \in \{x : \omega_F \beta(x, \delta_1) > \varepsilon\}$ et $d(x', x'') < \delta_2$. De plus, $\exists y$ et $z \in \beta(x'', \delta_1)$ tels que $|f(y) - f(z)| > \varepsilon$.

$$\text{Or } d(x', y) \leq d(x', x'') + d(x'', y) \leq \delta_1 + \delta_2 \quad \text{et de même, } d(x', z) \leq \delta_1 + \delta_2$$

$$\Rightarrow \omega_F \beta(x', \delta_1 + \delta_2) > \varepsilon).$$

A et E étant deux classes de boreliens de E , on écrit $A < E$ si tout ensemble de A est sous-ensemble d'un ensemble de E . On note E^{δ} l'ensemble $\{B^{\delta} : B \in E\}$

Soit E_{δ} une famille de boreliens indicée par δ , telle que pour tous $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$, on ait : $(E_{\delta_1})^{\delta_2} < E_{(\delta_1 + \delta_2)}$.

Il est clair qu'il s'agit ici de la condition (1). Nous allons démontrer l'équivalence :

$$A_1 : \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\substack{\theta \in \Theta \\ E \in E_\delta}} P_\theta(E) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$A_2 : P_\theta\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0 ; \forall \theta \in \Theta, \forall \text{ la suite d'ensembles } \{E_n\} \text{ avec } E_n \in E_{\delta_n} \text{ et } \delta_n \rightarrow 0.$$

C'est-à-dire que nous allons montrer que le 2) du Théorème III équivaut au 2) du théorème IV.

b) Démonstration

Il est clair que la condition A_1 implique la condition A_2 .

Supposons à présent que A_1 ne soit pas vérifiée. Alors il existe $\eta > 0$, une suite (ρ_n) de nombres qui tendent vers 0, une suite (θ_n) , une suite (A_n) , telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in E_{\rho_n}$, tels que

$$P_{\theta_n}(A_n) \geq \eta, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

les mesures de probabilités sur un espace métrique étant régulières, il existe F_n , fermé inclus dans A_n , tel que $P_{\theta_n}(F_n) \geq \eta/2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_Θ étant compact, on extrait de (P_{θ_n}) une suite $(P_{\theta'_n}) \Rightarrow P \in P_\Theta$, soit F'_n la suite de fermés correspondante. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass⁽¹⁴⁾ pour la convergence topologique fermée dans un espace métrique séparable, il existe une sous suite (F''_n) de (F'_n) , qui converge vers un ensemble F . En tant que limite topologique fermée supérieure, F s'écrit :

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} F''_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup F''_n = \bigcap_{i \geq 1} \overline{\bigcup_{j \geq i} F''_j}$$

Alors, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\lim_k P_{\theta''_k}(\overline{\bigcup_{j \geq i} F''_j}) \geq \eta/2$. En effet, $\forall k > i$, $\overline{\bigcup_{j \geq i} F''_j}$ contient F''_k

et $P_{\theta''_k}(F''_k) \geq \eta/2$ or $\lim_k P_{\theta''_k}(\overline{\bigcup_{j \geq i} F''_j}) \leq P(\overline{\bigcup_{j \geq i} F''_j})$ (condition n°2) du théorème

du porte manteau). Donc, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $P(\overline{\bigcup_{j \geq i} F''_j}) \geq \eta/2$, et

$$P(F) = P\left(\bigcap_{i \geq 1} \overline{\bigcup_{j \geq i} F''_j}\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P\left(\overline{\bigcup_{j \geq i} F''_j}\right) \geq \eta/2$$

Soit un fermé F_0 , totalement borné, inclus dans F , tel que $P(F_0) > 0$

Fixons $\delta > 0$. $\exists x_1 \dots x_v$ dans F_0 tels que $F_0 \subset \bigcup \{B(x_t, \delta) : t = 1 \dots v\}$
 F , en tant que limite topologique fermée inférieure des (F_k) , est l'ensemble des
points de E tels que tout voisinage de ces points rencontre les F_k pour k
assez grand. Par conséquent, $x_t \in F_k^\delta$ pour tous les $t = 1, \dots, v$ et pour tout
 k assez grand.

$$\Rightarrow \exists K > 0 \text{ tq } \rho_K < \delta \text{ et } x_t \in F_K^\delta, \quad \forall t = 1 \dots v$$

$$\Rightarrow F_0 \subset (F_K)^{2\delta} \subset (A_K)^{2\delta} \subset (A_K)^{(3\delta - \rho_K)}$$

or $A_K \in E_{\rho_K}$ et $(E_{\rho_K})^{(3\delta - \rho_K)} \subset E_{3\delta}$ par hypothèse F_0 est donc inclus dans un
ensemble $E \in E_{3\delta}$, et ceci, $\forall \delta > 0$ soit (δ_n) une suite de nombres positifs
qui tend vers 0, on peut lui associer une suite (E_n) , avec $E_n \in E_{\delta_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
et on a : $F_0 \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Comme $P(F_0) > 0$, cela contredit l'hypothèse.

Ces deux théorèmes très puissants étant établis, nous étudions la réci-
proque du théorème II.

Théorème V. - Soit P_{Θ} un sous-ensemble de $M(E)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \rho(P_{n,\theta} ; P_{\theta}) = 0 \not\Rightarrow P_{n,\theta} \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif} | \Theta$$

Démonstration

Soit f une fonction continue, mais pas uniformément continue.

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \text{ et } y_n \in E \text{ tq } d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

Par conséquent, les ensembles $G_n = \{x : \omega_f B(x, \frac{1}{n})\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, sont non vides.

Prenons pour famille P_{Θ} une famille $\mathcal{D}$ de mesures de Dirac obtenues en pla-
çant un atome de masse 1 dans chacun des G_n .

$$\text{Alors, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sup_{\partial \in \mathcal{D}} \rho\{x : \omega_f B(x, \frac{1}{n}) > \varepsilon\} = 1$$

$\Rightarrow$ la classe réduite à la seule fonction f n'est pas $\mathcal{D}^*$ -uniforme, c'est-à-dire
qu'il existe des suites de probabilités $(P_{j,n})$ telles que :

$$\sup_{\partial \in \mathcal{D}} \rho(P_{j,n} ; \partial) \rightarrow 0 \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\partial \in \mathcal{D}} \left| \int f dP_{j,n} - \int f dP_j \right| \neq 0$$

Théorème VI. - Soit P_{Θ} un sous-ensemble compact de $M(E)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \rho(P_{n,\theta} ; P_{\theta}) = 0 \Rightarrow P_{n,\theta} \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif} | \Theta$$

Démonstration

Soit (δ_n) une suite de nombres positifs qui tend vers 0. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit f une fonction continue. Les ensembles $G_n = \{x : \omega_f(x, \delta_n) > \varepsilon\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ sont une suite d'ouverts emboîtés d'intersection vide. En effet si $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} G_n$, il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, deux points x_n et z_n de $\beta(y, \delta_n)$ tels que $|f(x_n) - f(z_n)| > \varepsilon$. Comme $(x_n) \rightarrow y$ et $(z_n) \rightarrow y$, cela contredit la continuité de f . Pour tout $\theta \in \Theta$, on a donc $P_{\theta}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} G_n) = P_{\theta}(\emptyset) = 0$ d'après le théorème IV, pour toute famille de suites $(P_{n,\theta})_{\theta \in \Theta}$ telles que

$$\sup_{\theta \in \Theta} (P_{n,\theta} ; P_{\theta}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{on a :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \int f dP_{n,\theta} - \int f dP_{\theta} \right| = 0 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Les corollaires énoncés à la suite découlent d'un ou plusieurs théorèmes précédents.

Corollaire : Soit P_{Θ} un sous-ensemble compact de $M(E)$. Il y a identité entre les classes P_{Θ} -uniformes et les classes P_{Θ}^* -uniformes.

Corollaire : Soit P_{Θ} un sous-ensemble compact de $M(E)$

$$P_{n,\theta} \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif} | \Theta \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \int f dP_{n,\theta} - \int f dP_{\theta} \right| = 0 \quad \forall f \in U(E)$$

Théorème VII. - Soit P_{Θ} un sous-ensemble de $M(E)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \rho(P_{n,\theta} ; P_{\theta}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{f \in F \\ \theta \in \Theta}} \left| \int f dP_{n,\theta} - \int f dP_{\theta} \right| = 0 \quad (A \Leftrightarrow B)$$

pour toute famille F également continue⁽¹⁵⁾ et uniformément bornée.

Démonstration :

$A \Rightarrow B$ découle immédiatement du théorème III

$B \Rightarrow A$: Posons $F_{\varepsilon} = \{f_T : f_T(x) = \min(\chi_{T^c} ; \frac{d(x, T^c)}{\varepsilon}) \mid T \text{ fermée } \subset E\}$

$\forall \varepsilon > 0$. On a vu, dans la démonstration du théorème 2, que F_{ε} est une famille

de fonctions lipschitziennes, majorée par 1. Elle satisfait donc l'hypothèse B.

Fixons $\varepsilon > 0$. Alors, $\exists N_{(\varepsilon)}$ tq $\forall n > N_{(\varepsilon)}, \forall \theta \in \Theta, \forall T$ fermé de E ,

$$P_{n,\theta}(T) \leq \int_T f_T dP_{n,\theta} \leq \varepsilon + \int_T f_T dP_\theta \leq \varepsilon + P_\theta(T^\varepsilon) \quad \text{ou}$$

$$P_\theta(T) \leq \int_T f_T dP_\theta \leq \varepsilon + \int_T f_T dP_{n,\theta} \leq \varepsilon + P_{n,\theta}(T^\varepsilon)$$

d'après Strassen⁽²⁾, on a donc : $\sup_{\theta \in \Theta} \rho(P_\theta, P_{\theta,n}) < \varepsilon$.

DEUXIEME PARTIE

A titre d'application des théorèmes IV et V, nous étudions à présent certaines propriétés de la fonction de concentration de P. Levy vis-à-vis de la convergence faible uniforme. Nous supposons une fois pour toutes que $P_{\odot}$ est un sous-ensemble compact de $M(E)$.

Définition IV.- Une classe A de boréliens de E est dite $P_{\odot}$ -uniforme si et seulement si la classe $F_A = \{\chi_A : A \in A\}$ est $P_{\odot}$ -uniforme.

Dans ces conditions, le théorème IV devient :

Théorème IV'.- Une classe A de boreliens de E est $P_{\odot}$ -uniforme si et seulement si $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\substack{\theta \in \odot \\ A \in A}} P_{\theta}(\partial_{\delta} A) = 0$ [cf(4)]

Remarque.- $\partial_{\delta} A$ est, rappelons le, la δ -frontière de A :

$$\{x : d(x, A) < \delta \text{ et } d(x, A^c) < \delta\}$$

Cette δ -frontière est d'un usage peu maniable. Cependant, si E est un espace métrique dont toute boule ouverte est connexe, on a la propriété :

$$\partial_{\delta} A = (\partial A)^{\delta}$$

en effet, si $x \in \partial_{\delta} A$, la boule de centre x et de rayon δ rencontre A et A^c . Comme cette boule est connexe, elle rencontre aussi ∂A . Par conséquent, il existe $y \in \partial A$ tel que $d(x, y) \leq \delta$; alors, $x \in (\partial A)^{\delta}$; l'autre inclusion est vraie sur un espace métrique quelconque

Théorème IV''.- Si E est un espace métrique séparable dont toute boule est connexe, une classe de boreliens, A , est $P_{\odot}$ -uniforme si et seulement si

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\substack{\theta \in \Theta \\ A \in \mathcal{A}}} P_{\theta}[(\partial A)^{\delta}] = 0 \quad (\text{cf. (4)})$$

Voyons à présent comment lier la fonction de concentration de P. Levy aux classes P_{Θ} -uniformes. Soit $\bar{B}(x,t)$ la boule fermée de centre x et de rayon t , $\forall x \in E$ et $t \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, posons $Q_{\theta}(t) = \sup_{x \in E} P_{\theta}[\bar{B}(x,t)]$, de même, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, posons $Q_{n,\theta}(t) = \sup_{x \in E} P_{n,\theta}[\bar{B}(x,t)]$ on a :

$$|Q_{n,\theta}(t) - Q_{\theta}(t)| \leq \sup_{x \in E} |P_{n,\theta}[\bar{B}(x,t)] - P_{\theta}[\bar{B}(x,t)]|$$

il s'ensuit que si $B_{(t)}$, classe des boules fermées de rayon t , est P -uniforme, on a le théorème :

$$P_{n,\theta} \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif} | \Theta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} |Q_{n,\theta}(t) - Q_{\theta}(t)| = 0$$

le théorème IV" est encore d'un usage difficile ; c'est pourquoi nous allons généraliser un théorème de Billingsley et Topsoe, qui ramène l'étude de la P_{Θ} -uniformité à un procédé plus topologique. Appelons S l'ensemble des fermés bornés non vides de E . On peut définir une métrique sur $S \times S$ la métrique de Hausdorff. Δ . $\forall M_1$ et $M_2 \in S$, $\Delta(M_1, M_2) = \inf\{\delta : \delta > 0, M_1 \subset M_2^{\delta} ; M_2 \subset M_1^{\delta}\}$. On sait que S est compact pour la topologie induite par cette métrique, lorsque E est compact. D'autre part, si S_0 est un sous-ensemble fermé de S , constitué de sous-ensembles d'un compact fixé de E , S_0 est compact. Si E est complet, alors S est complet. Ces résultats peuvent être trouvés dans (9) ou (16).

Théorème VIII. - Soit E un espace métrique séparable dont toute boule ouverte est connexe. Soit $\mathcal{A}$ une classe de boreliens de E , de frontières P_{Θ} -nulles. Une condition suffisante pour que $\mathcal{A}$ soit P_{Θ} -uniforme est que

$$\partial \mathcal{A} = \{\partial_A : A \in \mathcal{A}\} \quad (\text{cf. (4)})$$

soit un sous-ensemble compact de S .

Démonstration.

Soit $\eta > 0$ fixé. D'après le lemme du théorème I, pour tout ensemble M de ∂A , il existe $\delta_M > 0$ tel que

$$\sup_{\theta \in \Theta} P(M^{2\delta_M - M}) < \eta$$

Comme $P_\theta(M) = 0$, $\forall \theta \in \Theta$ et $M \in \partial A$, on a :

$$\sup_{\theta \in \Theta} P_\theta(M^{2\delta_M}) < \eta$$

Comme ∂A est compact, il existe $M_1, \dots, M_i, \dots, M_v \in \partial A$, tels que $\forall M \in \partial A$, $\exists i = 1, \dots, v$ tq $\Delta(M, M_i) < \delta_{M_i} = \delta_i$. Posons $\delta = \min(\delta_i)$ alors,

$$M \subset M_i^{\delta_i} \Rightarrow M^\delta \subset M_i^{\delta_i + \delta} \subset M_i^{2\delta_i}$$

$$\Rightarrow \sup_{\substack{\theta \in \Theta \\ M \in \partial A}} P_\theta(M^\delta) < \eta$$

d'après le théorème IV", A est donc une classe P_Θ -uniforme.

Remarque.

L'hypothèse qui demande que les boréliens soient de frontière P_Θ -nulle n'est pas excessive. En effet, si A est une classe P_Θ -uniforme, les boréliens de A ont leurs frontières P_Θ -nulles. (Cela découle du théorème IV')

Théorème IX.- Soit E un espace métrique compact tel que $\forall x \in E, \forall \delta > 0$

$$\bar{\beta}(x, \delta) = \overline{\beta(x, \delta)} \quad \text{et} \quad \overline{\bar{\beta}(x, \delta)} = \beta(x, \delta)$$

Soit P_Θ un sous-ensemble fermé de $M(E)$, tel que, pour tout $\theta \in \Theta$, la frontière de toute boule $\bar{\beta}(x, \delta)$ soit P_Θ -nulle. Alors

$$P_{n, \theta} \Rightarrow P_\theta \text{ unif} | \Theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^+ \\ \theta \in \Theta}} |Q_{n, \theta}(t) - Q_\theta(t)| = 0$$

Remarque. - Supposer E compact est une hypothèse assez forte. Il faut cependant noter que dans ce cas, la convergence de la fonction de concentration est uniforme par rapport à t . Dans le théorème XI, nous affaiblirons l'hypothèse, en perdant cette uniformité par rapport à t .

Démonstration.

La frontière de toute boule $\bar{B}(x, \delta)$ est, moyennant les hypothèses faites : $\{z : d(x, z) = \delta\}$. D'autre part, comme E est compact, et que la fermeture de toute boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon, toute boule ouverte est connexe. Comme E est compact, $M(E)$ est compact, donc $P_{\odot}$ est compact.

De même, S est compact. On va montrer que l'ensemble des frontières des boules fermées de E est un fermé de S , et le théorème IX sera démontré, par l'intermédiaire du théorème VIII.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, soit $F_n = \{z : d(x_n, z) = t_n\}$ la frontière d'une boule $\bar{B}(x_n, t_n)$ supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$, et montrons que F est la frontière d'une boule fermée.

1) de la suite (x_n) on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers $x \in E$

2) la suite des rayons, (t_n) converge vers un nombre t .

En effet, si ce n'est pas une suite de Cauchy

$$\exists E_0 \text{ tq } \forall n_0, \exists m_1 \text{ et } n_1 > n_0 \text{ tq } |t_{m_1} - t_{n_1}| > E_0$$

donc $t_{m_1} > t_{n_1} + E_0$ (par exemple)

Alors $F_{m_1} \not\subset F_{n_1}^{E_0}$ mais d'autre part,

$$\Delta(F_n, F) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 : \Rightarrow \exists n_0 \text{ et } \forall n, m > n_0,$$

$$\Delta(F_n, F_m) < E_0 \Rightarrow F_m \subset F_n^{E_0}.$$

Il y a donc contradiction.

3) Soit $F_{(x,t)}$ la frontière de la boule $\beta(x,t)$. On va montrer que $F = F_{(x,t)}$. Soit F_k la frontière de $\beta(x_{n_k}, t_{n_k})$ et $F_{x,k}$ celle de $\beta(x, t_{n_k})$

fixons $\varepsilon > 0$: $\exists n_0$ tq $\forall n_k > n_0$, $\Delta(F, F_k) < \varepsilon$

$$\Rightarrow F \subset F_k^\varepsilon \text{ et } F_k \subset F^\varepsilon$$

soit $y \in F_k$. $\exists n_1$ tq $n_k > n_1 \Rightarrow d(x, x_{n_k}) < \varepsilon \Rightarrow$

$$d(x, y) < d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < t_{n_k} + \varepsilon.$$

De même, $d(x, y) > t_{n_k} - \varepsilon \Rightarrow y \in F_{x,k}^\varepsilon$

$$\Rightarrow F_k \subset F_{x,k}^\varepsilon$$

Enfin, $\exists n_2$ tq $n_k > n_2 \Rightarrow |t - t_{n_k}| < \varepsilon \Rightarrow$

$$F_{x,k} \subset F_{(x,t)}^\varepsilon$$

donc, pour $n_k > \max(n_0, n_1, n_2)$, $F \subset F_k^\varepsilon \subset F_{x,k}^{2\varepsilon} \subset F_{(x,t)}^{3\varepsilon}$ de même, on montre que $F_{(x,t)} \subset F^{3\varepsilon}$, donc : $\Delta(F, F_{(x,t)}) < 3\varepsilon$, et comme ε est arbitraire

$$F = F_{(x,t)}$$

Théorème X. - Soit E un espace métrique séparable dont toute boule ouverte est connexe. Soit A une classe de Boréliens de E , de frontières $P_{\odot}$ -nulles ; une condition suffisante pour que A soit $P_{\odot}$ uniforme est que :

$\exists (B_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, suite de fermés bornés de frontières $P_{\odot}$ -nulles, tels que $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{\theta \in \odot} P_\theta(B_k) = 1$ et tels que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, la classe $B_k \cap \partial A = \{B_k \cap \partial A : A \in A\}$ est un sous-ensemble compact de S . (cf. (4))

Démonstration.

$\eta > 0$ étant donné, on choisit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_\theta(B_k) > 1 - \eta$, $\forall \theta \in \odot$.

Comme $\partial A \subset (B_k \cap \partial A) \cup (E - B_k)$, on a :

$$(\partial A)^\delta \subset (B_k \cap \partial A)^\delta \cup (E - B_k)^\delta, \text{ et donc :}$$

$$\forall \theta \in \Theta, P_{\theta}(\partial A)^{\delta} < P_{\theta}(B_k \cap \partial A)^{\delta} + P_{\theta}(E-B_k)^{\delta}$$

d'après un argument contenu dans la démonstration du théorème VIII, pour δ assez petit, on a :

$$\sup_{\substack{\theta \in \Theta \\ A \in A}} P_{\theta}(B_k \cap \partial A)^{\delta} < \eta.$$

La frontière de B_k étant P_{Θ} -nulle, pour δ assez petit, on a également, d'après le lemme du théorème I

$$\sup_{\theta \in \Theta} P_{\theta}[(E-B_k)^{\delta} - \overline{(E-B_k)}] < \eta$$

$$\Rightarrow \sup_{\theta \in \Theta} P_{\theta}(E-B_k)^{\delta} < \sup_{\theta \in \Theta} P_{\theta}(\overline{E-B_k}) + \eta < \sup_{\theta \in \Theta} P_{\theta}(E-\overset{o}{B_k}) + \eta < 2\eta$$

$$\text{Conclusion : } \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\substack{\theta \in \Theta \\ A \in A}} P_{\theta}[(\partial A)^{\delta}] = 0$$

Théorème XI.- Soit E un espace métrique séparable dont les boules présentent les propriétés suivantes : $\forall x \in E, \forall \delta > 0$

- a) : $\beta(x, \delta)$ est connexe
- b) : $\overline{\beta(x, \delta)}$ est compact
- c) : $\bar{\beta}(x, \delta)$ a pour frontière $\{z : d(x, z) = \delta\}$
- d) : $P_{\theta}\{z : d(x, z) = \delta\} = 0, \forall \theta \in \Theta$

$$\text{Alors } \forall t_0 \in \mathbb{R}, P_{n, \theta} \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif} | \Theta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\theta \in \Theta \\ 0 \leq t \leq t_0}} |Q_{n, \theta}(t) - Q_{\theta}(t)| = 0$$

Remarque.- E est donc en particulier un espace localement connexe et localement compact.

Démonstration.

Fixons $\eta > 0$.

Comme P_{Θ} est compact, il existe un nombre fini $k(\eta)$ de boules ouvertes de rayon t_0 tel que

$$P_{\theta} \left[\bigcup_{i=1}^{k(\eta)} \beta(x_i, t_0) \right] > 1-\eta, \quad \forall \theta \in \Theta$$

Posons $B_k = \bigcup_{i=1}^k \overline{\beta(x_i, t_0)}$; on a : $\bigcup_{i=1}^{k(\eta)} \beta(x_i, t_0) \subseteq \overset{o}{B}_k \subseteq B_k$.

Ainsi, nous sommes placés dans les conditions du théorème X.

Posons $A = \{\bar{\beta}(x, t) : t \in [0, t_0]\}$. Il nous suffit de montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, B_k \cap \partial A$ est un sous-ensemble compact de S .

Fixons k , et prenons une suite $(A_n \cap B_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'ensembles de $B_k \cap \partial A$. La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de frontières de boules entièrement contenue dans le compact $\bigcup_{i=1}^k \overline{\beta(x_i, 3t_0)}$; la suite des centres, (x_n) , contient une sous-suite (x'_n) qui converge vers un point $x \in E$.

Soit (t'_n) la suite correspondante extraite de (t_n) , suite des rayons. Comme, $\forall n \in \mathbb{N}^*, t'_n \in [0, t_0]$, il existe une suite (t''_n) extraite de (t'_n) telle que $(t''_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t \in [0, t_0]$. Posons $A = \partial[\bar{\beta}(x, t)]$. De la même façon que dans le théorème IX, on montre que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(A''_n, A) = 0$$

Reste à prouver que l'on peut extraire de (A''_n) une suite (A'''_n) telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A'''_n \cap B_k, A \cap B_k) = 0$$

Comme il s'agit ici de sous-ensembles du compact $\bigcup_{i=1}^k \overline{\beta(x_i, t_0)}$, la convergence au sens de la topologie de Hausdorff coïncide avec la convergence au sens de la limite topologique fermée⁽⁹⁾. Comme E est séparable, on peut extraire de la suite $(A''_n \cap B_k)$ une sous-suite $(A'''_n \cap B_k)$ qui admet une limite topologique fermée F . En tant que limite topologique supérieure,

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (A'''_n \cap B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (A'''_n) \cap \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (B_k) = A \cap B_k$$

$B_k \cap \partial A$ est donc un compact de S .

TROISIEME PARTIE

Cette dernière partie traite de la convergence faible uniforme presque sûre de probabilités aléatoires. Il s'agit en fait de donner quelques éléments de réponse au problème d'estimation suivant : soit P_{θ_0} une probabilité dont on sait seulement qu'elle appartient à un sous-ensemble P_{Θ} de $M(E)$.

On souhaite, puisque P_{θ_0} est inconnue, que la convergence de l'estimateur possède une qualité "intrinsèque", c'est-à-dire, qui ne dépende pas de P_{θ_0} . C'est pourquoi on cherche sous quelles conditions il existe une convergence de l'estimation de P_{θ} qui soit uniforme par rapport à Θ .

La première question qui se pose est celle du choix d'un schéma d'estimation. On pourrait dire, en exagérant un peu, qu'en statistique chacun a son schéma, le meilleur étant sans doute celui qui "colle" le plus à la réalité, tout en étant un outil mathématique maniable. Nous allons voir d'abord pourquoi deux schémas très usuels sont d'un usage malaisé pour la question qui nous préoccupe.

1er exemple. - Soit P une probabilité sur $(E, \mathcal{B}_E)$. Posons $\Omega, A, \mu = (E, \mathcal{B}_E, P)^N$; à toute suite $\omega = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$, dont chaque terme est "tiré" suivant P dans $(E, \mathcal{B}_E)$ et à tout $n \in N$, on associe, par l'intermédiaire des projections Pr_k de Ω, A, μ dans $(E, \mathcal{B}_E)$, un échantillon de taille n :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (Pr_1(\omega) ; Pr_2(\omega) ; \dots ; Pr_n(\omega))$$

la probabilité empirique est alors : $P_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta x_i$ où δx_i est la mesure de Dirac au point $x_i \in E, \forall i = 1 \dots n$.

On sait que : $\mu\{P_n(\omega) \Rightarrow P\} = 1$.

Ce schéma a l'avantage d'être simple, mais peut avoir l'inconvénient d'éluder la façon dont est "tiré" l'échantillon. En particulier, dans le problème

qui nous concerne, pour chaque $\theta \in \Theta$, on a un échantillon indexé par $\theta : (x_1^\theta, x_2^\theta, \dots, x_k^\theta, \dots)$, et on ne peut pas savoir quelles sont les propriétés de ces échantillons vis à vis de θ . D'autre part, on ne voit pas très bien quelle probabilité mettre sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

2ème exemple. - Un schéma également courant, mais plus abstrait, consiste à prendre un espace de Probabilité quelconque $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et des v.a. indépendantes de loi $P : X_1 \dots X_n, \dots$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et à valeurs $(E, \mathcal{B}_E)$. Pour notre sujet, ce schéma aurait l'avantage de supprimer le problème de la probabilité à définir sur $(\Omega, \mathcal{A})$: une fois pour toutes, il y aurait une probabilité quelconque μ et une famille de suites de v.a. de loi $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$:

$$(X_1^\theta, X_2^\theta, \dots, X_n^\theta, \dots)_{\theta \in \Theta}$$

à tout $\omega \in \Omega$ et à tout $n \in \mathbb{N}$, on associe $P_{n,\theta}(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i^\theta(\omega)}$.

Ce schéma est parfaitement légitime, pourtant il a tendance à faire oublier que pratiquement, à l'origine d'un échantillon, il y a presque toujours une manipulation du statisticien, qui a pour but d'assurer l'indépendance des réalisations $X_1^\theta(\omega), X_2^\theta(\omega), \dots, X_n^\theta(\omega)$. Je veux dire que la suite de v.a. $(X_1^\theta, X_2^\theta, \dots, X_n^\theta, \dots)$ n'existe pas dans la nature. Il y a en fait une variable X_θ dont on veut estimer la loi P_θ ; par une méthode quelconque, mais qui ne dépend pas de P_θ , le statisticien prélève un échantillon au hasard $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ et ce sont les réalisations $(X_\theta(\omega_1), X_\theta(\omega_2), \dots, X_\theta(\omega_n))$ qui sont indépendantes. En général, il n'y a pas lieu de compliquer ainsi les choses, mais, pour nous cela a l'avantage de faire figurer explicitement la variable X_θ dans le schéma. En effet, les propriétés de l'échantillon $(x_1^\theta, x_2^\theta, \dots, x_n^\theta)_{\theta \in \Theta}$, vis à vis de θ , dépendent de cette variable X_θ que les deux schémas précédents dissimulent.

Toutes ces considérations nous ont amenés à introduire le schéma d'estimation suivant : $\forall \theta \in \Theta$, soit X_θ la variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $(E, \mathcal{B}_E)$, dont on veut estimer

la loi P_θ . Le statisticien prélève un échantillon au hasard :

$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots) \in \Omega^{\mathbb{N}^*}$. On peut représenter cet acte physique par le schéma de l'exemple 1).

Posons $(\Omega^*, A^*, \mu) = (\Omega, A, P)^{\mathbb{N}^*}$, et, soit Pr_k la projection d'ordre k :

$$\begin{aligned} (\Omega^*, A^*, \mu) &\xrightarrow{Pr_k} (\Omega, A, P) \\ \omega^* = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} &\longrightarrow \omega_k \end{aligned}$$

Pour tout $\theta \in \Theta$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à ω^* correspond une suite de réalisations indépendantes : $(X_\theta(\omega_1), \dots, X_\theta(\omega_n)) = (x_1^\theta, x_2^\theta, \dots, x_n^\theta)$ et on pose

$$P_{n,\theta}(\omega^*) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i^\theta}$$

Théorème XII. - Soit P_Θ un sous-ensemble compact de $M(E)$. Supposons que la famille de variables aléatoires $(X_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ait la propriété suivante :

$\forall P_{\theta_0} \in P_\Theta, \forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0, \exists V_{\theta_0}$, voisinage de P_{θ_0} , et $\exists A \in \mathcal{A}$ tq $P(A^c) < \varepsilon'$, tq :

$$\forall P_\theta \in V_{\theta_0} \text{ et } \forall \omega \in A, d(X_\theta(\omega); X_{\theta_0}(\omega)) < \varepsilon$$

Alors l'ensemble $\{P_{n,\theta}(\omega^*) \Rightarrow P_\theta \text{ unif} \mid \theta \in \Theta\}$ contient un évènement $D \in \mathcal{A}^*$ de probabilité unité : $\mu(D) = 1$.

Note : La démonstration de ce théorème est basée, pour l'essentiel, sur celle donnée par M.J. Chevalier⁽¹⁰⁾ dans sa généralisation de la loi forte des grands nombres. Cependant, les points de vues sont différents, et nous préférons donner une démonstration intégrale du théorème.

Lemme. - [cf. (6) ou (7)]. Soit P_Θ un sous-ensemble compact de $M(E)$. Il existe une famille dénombrable $\{g_1, g_2, \dots, g_j, \dots\}$ de fonctions uniformément continues bornées telles que pour toutes suites $(v_{n,\theta})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_\Theta$ de probabilités, $v_{n,\theta} \Rightarrow v_\theta \text{ unif} \mid \theta \in \Theta$ si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \int g_j dv_\theta - \int g_j dv_{n,\theta} \right| = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$$

Démonstration.

Il existe une métrique équivalente à celle de E , qui rende E totalement borné. Alors, l'ensemble $U(E)$ des fonctions uniformément continues bornées est un espace de Banach séparable pour la norme de la convergence uniforme.

Soit $\{g_1, g_2, \dots, g_j, \dots\}$ un sous-ensemble partout dense de $U(E)$.

Soit $g \in U(E)$. Pour toute fonction $g_r \in \{g_1, g_i, g_j, \dots\}$, on a :

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \int g dv_{n,\theta} - \int g dv_\theta \right| &\leq \sup_{\theta \in \Theta} \left| \int g dv_{n,\theta} - \int g_r dv_{n,\theta} \right| + \sup_{\theta \in \Theta} \left| \int g_r dv_{n,\theta} - \int g_r dv_\theta \right| + \\ &+ \sup_{\theta \in \Theta} \left| \int g_r dv_\theta - \int g dv_\theta \right| \leq 2 \|g - g_r\| + \sup_{\theta \in \Theta} \left| \int g_r dv_{n,\theta} - \int g_r dv_\theta \right| \end{aligned}$$

Comme $\{g_1, g_2, \dots, g_j, \dots\}$ est dense dans $U(E)$, et par hypothèse, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \int g dv_{n,\theta} - \int g dv_\theta \right| = 0, \quad \forall g \in U(E)$$

Démonstration du théorème.-

a) soit f une fonction de $U(E)$. Posons $\psi_\theta = f \circ X_\theta$ et $\psi_{k,\theta} = f \circ X_\theta \circ \text{Pr}_k$. D'après l'hypothèse, $\forall P_{\theta_0} \in \mathcal{P}_\Theta$, $\forall m_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall m_2 \in \mathbb{N}^*$, $\exists V_{\theta_0}$ voisinage de P_{θ_0} et $\exists A(m_1, m_2)$ tel que $P(A^c_{(m_1, m_2)}) < \frac{1}{m_1}$ tels que $\forall P_\theta \in V_{\theta_0}$ et $\forall \omega \in A(m_1, m_2)$

$$|\psi_\theta(\omega) - \psi_{\theta_0}(\omega)| < \frac{1}{m_2}$$

b) Posons $K_{(m_1, m_2)} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{A^c(m_1, m_2)} [\omega_k] = P[A^c(m_1, m_2)] \right\}$

$$\text{et } H_\theta = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_{k,\theta}(\omega^*) - E(\psi_\theta) = 0 \right\}$$

Soit $\mathcal{P}'_\Theta$ un sous-ensemble dénombrable partout dense de $\mathcal{P}_\Theta$. On pose :

$$D = \left(\bigcap_{\theta \in \mathcal{P}'_\Theta} H_\theta \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^+ \\ m_2 \in \mathbb{N}^+}} K_{(m_1, m_2)} \right)$$

d'après la loi forte des grands nombres, $\mu(D) = 1$.

c) Fixons $\varepsilon > 0$.

La topologie faible est la plus faible qui rende continue l'application :

$$P \rightarrow \int f dP, \quad \forall f \in C(E).$$

Par conséquent, $\forall \theta \in \Theta$, $\exists W_{\theta_0}$ voisinage de P_{θ_0} tel que, $\forall P_{\theta} \in W_{\theta_0}$,

$$\left| \int f dP_{\theta} - \int f dP_{\theta_0} \right| = |E(\psi_{\theta}) - E(\psi_{\theta_0})| < \varepsilon/3$$

(on aurait pu aussi déduire ce qui précède de l'hypothèse faite sur la famille de variables aléatoires $(X_{\theta})_{\Theta}$)

d) Prenons $\omega^* \in D$ et $\theta_0 \in \Theta - \Theta'$.

$\forall \theta \in \Theta$, on a :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_{k, \theta_0}(\omega^*) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_{k, \theta}(\omega^*) \right| \leq$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f \circ X_{\theta_0} \circ P_{r_k}(\omega^*) - f \circ X_{\theta} \circ P_{r_k}(\omega^*)| \leq$$

$$\frac{1}{n} \sum_{\omega_k \in A(m_1, m_2)} |f \circ X_{\theta_0}(\omega_k) - f \circ X_{\theta}(\omega_k)| +$$

$$\frac{1}{n} \sum_{\omega_k \notin A(m_1, m_2)} |f \circ X_{\theta_0}(\omega_k) - f \circ X_{\theta}(\omega_k)| = A_{(\theta)} + B_{(\theta)}$$

prenons m_2 de façon que $\frac{1}{m_2} < \varepsilon/6$ et soit K une majorant de la fonction f .

Prenons m_1 de façon que :

$$\frac{1}{m_1} < \frac{\varepsilon}{24K}$$

d'après a), il existe un voisinage V_{θ_0} de P_{θ_0} tel que $\forall P_{\theta} \in V_{\theta_0}$, on ait :

$$A_{(\theta)} < \varepsilon/6$$

d'autre part, $B(\theta) \leq \frac{1}{n} \sum_{\omega_k \in A^c(m_1, m_2)} |f \circ X_\theta(\omega_k)| + \frac{1}{n} \sum_{\omega_k \in A^c(m_1, m_2)} |f \circ X_{\theta_0}(\omega_k)|$

comme f est majorée par un nombre K , $B(\theta) \leq \frac{2K}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{A^c(m_1, m_2)}[(\omega_k)]$, de plus,

on a pris : $\omega^* \in D. \Rightarrow$

$$\exists N_1(\epsilon) \text{ tq } \forall n > N_1(\epsilon) \quad B(\theta) \leq 2K P[A^c_{(m_1, m_2)}] + \epsilon/12$$

enfin, comme $P[A^c_{(m_1, m_2)}] < \frac{1}{m_1} < \frac{\epsilon}{24K}$, on a :

$$B(\theta) < \epsilon/6.$$

En résumé, il existe $N_1(\epsilon)$ et un voisinage V_{θ_0} de P_{θ_0} tels que $\forall n > N_1(\epsilon)$ et $\forall P_\theta \in V_{\theta_0}$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_{k, \theta_0}(\omega^*) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_{k, \theta}(\omega^*) \right| < \epsilon/3$$

e) prenons toujours $\omega^* \in D$ et $\theta_0 \in \Theta - \Theta'$

Alors, $\forall \theta \in \Theta$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_{k, \theta_0}(\omega^*) - E(\psi_{\theta_0}) \right| \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_{k, \theta_0}(\omega^*) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_{k, \theta}(\omega^*) \right| +$$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_{k, \theta}(\omega^*) - E(\psi_\theta) \right| +$$

$$|E(\psi_\theta) - E(\psi_{\theta_0})|.$$

Prenons plus particulièrement $\theta \in \Theta'$. Alors, comme $\omega^* \in D$,

$$\exists N_2(\epsilon) \text{ tq } n > N_2(\epsilon) \Rightarrow \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_{k, \theta}(\omega^*) - E(\psi_\theta) \right| < \epsilon/3$$

en définitive, en prenant $n > \text{Max}(N_1(\epsilon); N_2(\epsilon))$ et $P_\theta \in V_{\theta_0} \cap W_{\theta_0} \cap P_{\Theta'}$, on

obtient : $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_{k, \theta_0}(\omega^*) - E(\psi_{\theta_0}) \right| < \epsilon$.

f) Conclusion : pour tout θ de Θ , D est donc contenu dans H_θ .

g) On en déduit que : $\forall \omega^* \in D, \forall \theta_0 \in \Theta, \forall \epsilon > 0, \exists U_{\theta_0}$, voisinage

de P_{θ_0} , et $M(\epsilon)$ tq $\forall n > M(\epsilon)$, $\forall P_{\theta} \in U_{\theta_0}$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_{k,\theta}(\omega^*) - E(\psi_{\theta}) \right| < \epsilon$$

on utilise pour cela les résultats obtenus en b) c) d), et l'inégalité :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_{k,\theta}(\omega^*) - E(\psi_{\theta}) \right| &\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_{k,\theta}(\omega^*) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_{k,\theta_0}(\omega^*) \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{n} \sum_{k,\theta_0}^n \psi_{k,\theta_0}(\omega^*) - E(\psi_{\theta_0}) \right| + |E(\psi_{\theta_0}) - E(\psi_{\theta})| \end{aligned}$$

h) Comme P_{Θ} est compact, du recouvrement par les voisinages U_{θ_0} , on peut extraire un recouvrement fini $U_1, U_2, \dots, U_i, \dots, U_e$ et les nombres correspondants $M_1(\epsilon), M_2(\epsilon), \dots, M_i(\epsilon), \dots, M_e(\epsilon)$. Posons $M(\epsilon) = \max_i (M_i(\epsilon))$. Alors : $\forall \omega^* \in D$ et $\forall n > M(\epsilon)$

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_{k,\theta}(\omega^*) - E(\psi_{\theta}) \right| < \epsilon.$$

Autrement dit,

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| \int f dP_{n,\theta}(\omega^*) - \int f dP_{\theta} \right| < \epsilon$$

i) enfin, prenons $f \in \{g_1 ; g_2 ; \dots g_i ; \dots\}$, la famille dénombrable définie par le lemme ; pour tout g_r , il existe un ensemble D_r tel que $\mu(D_r) = 1$ et $\forall \omega^* \in D_r$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \int g_r dP_{n,\theta}(\omega^*) - \int g_r dP_{\theta} \right| = 0$, posons $D = \bigcap_{r=1}^{\infty} D_r$; on a encore $\mu(D) = 1$ et $\forall \omega^* \in D$

$$P_{n,\theta}(\omega^*) \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif} | \Theta$$

C.Q.F.D.

Corollaire. - Comme P_{Θ} est compact, $\forall \omega^* \in D$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \rho(P_{n,\theta}(\omega^*) ; P_{\theta}) = 0$$

Note : Cette propriété étant démontrée, il est inutile de s'embarasser plus longtemps de la notation un peu lourde nécessitée par notre schéma d'estimation. Dorénavant, nous noterons $P_{n,\theta}(\omega)$ la probabilité $P_{n,\theta}(\omega^*)$ et nous la considérerons

comme une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$.

Nous allons maintenant étudier d'autres probabilités aléatoires que la probabilité empirique, et essayer d'appliquer les résultats obtenus à l'étude de la $P_{\odot}$ -uniformité. En fait, ce que nous avons en vue est une notion légèrement différente :

La C.N.S. de Mr. J. Geffroy pour qu'une classe F de fonctions mesurables bornées soit $P_{\odot}$ -uniforme dépend uniquement des probabilités $P_{\odot}$. Cependant, en statistique, ce qui nous importe, c'est que la condition :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\theta \in \odot \\ f \in F}} \left| \int f dP_{n,\theta}(\omega) - \int f dP_{\theta} \right| = 0$$

soit vérifiée précisément pour la famille d'estimateurs $(P_{n,\theta}(\omega))_{\odot}$. On peut donc espérer que cette condition soit vérifiée sous des hypothèses plus faibles que celles du théorème IV.

Définition V. - Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $M(E)$. On dit que F est une classe $(\mathcal{D}, P_{\odot})$ -uniforme si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{f \in F \\ \theta \in \odot}} \left| \int f dP_{n,\theta} - \int f dP_{\theta} \right| = 0 \text{ pour toute famille de}$$

suites $(P_{n,\theta})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall \theta \in \odot$, $P_{n,\theta} \in \mathcal{D}$ et $P_{n,\theta} \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif} | \odot$

Théorème XII. - Soit $P_{\odot}$ un sous-ensemble compact de $M(E)$ et $\mathcal{D}$ un sous-ensemble $M(E)$; une condition suffisante pour que F soit $(\mathcal{D}, P_{\odot})$ -uniforme est que

- 1) $\omega_F(E) < +\infty$
- 2) $\forall \varepsilon > 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\substack{P \in \mathcal{D} \\ f \in F}} P\{x : \omega_f \beta(x, \delta) > \varepsilon\} = 0$

Ce théorème se démontre comme le théorème III. Il ne présente un avantage que si $\mathcal{D} \subset P_{\odot}$, d'autant plus si $\mathcal{D}$ a la puissance du dénombrable ; nous allons montrer l'existence d'un estimateur $(P_{n,\theta}^*(\omega))_{\odot}$ dont toutes les probabilités appartiennent à un sous-ensemble partout dense de $P_{\odot}$. En particulier, comme $P_{\odot}$ est compact, on pourra prendre un sous-ensemble $\mathcal{D}$ dénombrable.

Théorème XIII. - Soit P_{Θ} un sous-ensemble compact de $M(E)$ et $\mathcal{D}$ un sous-ensemble partout dense de P_{Θ} . Il existe un ensemble $D \in \mathcal{A}$ tq $\lambda(D) = 1$ et une famille d'estimateurs $(P_{n,\theta}^*(\omega))_{\Theta}$ tels que :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \theta \in \Theta, P_{n,\theta}^*(\omega) \in \mathcal{D}$
- 2) $\forall \omega \in D, \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \rho(P_{n,\theta}^*(\omega) ; P_{\theta}) = 0$

Démonstration.

On utilise une construction due à M. D.Bosq⁽¹¹⁾.

Soit $(P_{n,\theta}(\omega))_{\Theta}$ la famille de probabilités empiriques définies au théorème XI. Posons $P_{n,\theta}(\Omega) = \{P_{n,\theta}(\omega) | \omega \in \Omega\} \subset M(E)$. $M(E)$ est séparable, on peut donc recouvrir $P_{n,\theta}(\Omega)$ par une infinité dénombrable de boules de rayon r_n et on peut supposer que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

Appelons $(B_{i,n}^{\theta})_{i \in \mathbb{N}}$ cette suite de boules, et posons

$$d_{i,n}^{\theta} = \rho[B_{i,n}^{\theta} \cap P_{n,\theta}(\Omega) ; \mathcal{D}] \quad (a)$$

Soit (γ_n) une suite de nombres positifs tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$, et $P_{i,n}^{\theta}$ une suite double d'éléments de $\mathcal{D}$ tels que :

$$\rho[B_{i,n}^{\theta} \cap P_{n,\theta}(\Omega) ; P_{i,n}^{\theta}] < d_{i,n}^{\theta} + \gamma_n, \forall i, n \in \mathbb{N}. \quad (b)$$

On définit $P_{n,\theta}^*$ de la façon suivante : soit $\omega \in \Omega \quad \exists i \in \mathbb{N}$ tel que $P_{n,\theta}(\omega) \in B_{i,n}^{\theta}$. parmi tous les $B_{i,n}^{\theta}$ qui contiennent $P_{n,\theta}$ soit $B_{j,n}^{\theta}$ celui qui a le plus petit indice. On pose : $P_{n,\theta}^*(\omega) = P_{j,n}^{\theta}$.

Nous allons montrer que l'ensemble $\{P_{n,\theta}^* \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif} | \Theta\}$ contient l'évènement D tel que $\lambda(D) = 1$, défini au théorème XI.

D'après (b), il existe $Q_{j,n}^{\theta} \in B_{j,n}^{\theta} \cap P_{n,\theta}(\Omega)$ telle que

$$\rho(Q_{j,n}^{\theta} ; P_{j,n}^{\theta}) < d_{j,n}^{\theta} + \gamma_n, \quad \forall j, n \in \mathbb{N}$$

de plus, $\bar{\mathcal{D}} = P_{\theta} \Rightarrow \forall \theta \in \Theta, \rho(P_{\theta}, \mathcal{D}) = 0$ comme $P_{n,\theta} \in B_{j,n}^{\theta}$ et $P_{\theta} \in P_{\Theta}$, on a, d'après (a),

$$d_{j,n}^{\theta} \leq \rho(P_{n,\theta} ; \mathcal{D}) \leq \rho(P_{n,\theta} ; P_{\theta})$$

$$\text{Or, } \rho(P_{j,n}^{\theta} ; P_{\theta}) \leq \rho(P_{j,n}^{\theta} ; Q_{j,n}^{\theta}) + \rho(Q_{j,n}^{\theta} ; P_{n,\theta}) + \rho(P_{n,\theta} ; P_{\theta})$$

$$\Rightarrow \rho(P_{j,n}^{\theta} ; P_{\theta}) \leq d_{j,n}^{\theta} + \gamma_n + 2r_n + \rho(P_{n,\theta} ; P_{\theta})$$

$$\Rightarrow \sup_{\theta \in \Theta} \rho(P_{n,\theta}^* ; P_{\theta}) \leq \gamma_n + 2r_n + 2 \sup_{\theta \in \Theta} \rho(P_{n,\theta} ; P_{\theta})$$

$$\Rightarrow \{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \rho(P_{n,\theta}^* ; P_{\theta}) = 0\} \supset \{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \rho(P_{n,\theta} ; P_{\theta}) = 0\} \supset D$$

Corollaire. - L'ensemble $\{P_{n,\theta}^* \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif} | \Theta\}$ contient un évènement D tel que $\lambda(D) = 1$.

Théorème XIV. - Soit E un espace métrique séparable et complet partout dense dans lui-même ; Soit P_{Θ} un sous-ensemble compact de $M(E)$, tel que $P_{\Theta} = \overline{P_{\Theta}^0}$. Il existe une famille $[P_{n,\theta}^{**}(\omega)]_{\Theta}$ d'estimateurs à valeurs non atomiques tels que l'ensemble $\{P_{n,\theta}^{**}(\omega) \Rightarrow P_{\theta} \text{ unif} | \Theta\}$ contienne l'évènement D de probabilité $\lambda(D) = 1$.

Démonstration.

L'ensemble des mesures non atomiques, A , est un G_{δ} de $M(E)$, partout dense dans $M(E)^{(7)}$. Il suffit alors de poser $A \cap \overline{P_{\Theta}^0} = \mathcal{D}$, et d'appliquer le théorème précédent.

Ce dernier théorème présente un estimateur pour lequel, intuitivement, la condition de $(\mathcal{D} - P_{\Theta})$ -uniformité doit être plus facilement remplie.

APPENDICE

Une objection que l'on peut faire aux hypothèses du théorème XII est la suivante : peut-il exister une famille de v.a. X_{Θ} ayant les propriétés requises ? Nous répondons à cette question dans le théorème XV. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ l'intervalle unité muni de la probabilité uniforme.

Théorème XV. - Soit E un espace Polonais et P_{Θ} un sous-ensemble relativement compact de $M(E)$. Il existe une famille de v.a. $X_{\Theta} = \{X_{\theta} : \theta \in \Theta\}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ telles que

$$1) \forall \theta \in \Theta, X_{\theta} \text{ est de loi } P_{\theta}$$

$$2) \forall \theta_0 \in \Theta, \forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0$$

$$\exists V_{\theta_0}, \text{ voisinage de } P_{\theta_0},$$

$$\exists A \in \mathcal{A} \text{ tel que } \lambda(A^c) < \varepsilon' \text{ et } \forall P_{\theta} \in V_{\theta_0}, \forall \omega \in A,$$

$$d(X_{\theta}(\omega); X_{\theta_0}(\omega)) < \varepsilon.$$

Remarque. - Il s'agit d'une généralisation du théorème de représentation. En effet, on peut en déduire que la v.a. X_{Θ} est presque sûrement continue sur P_{Θ} .

Démonstration.

L'ensemble des trajectoires continues en un point quelconque $\theta_0 \in \Theta$ peut s'écrire, si on utilise pour base de voisinages dans P_{Θ} les boules ouvertes de centre θ_0 , pour la distance de Prokhorov :

$$\{\lim_{s \rightarrow 0} \sup_{\theta: \rho(\theta, \theta_0) < s} d(X_{\theta}(\omega); X_{\theta_0}(\omega)) = 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{\lim_{s \rightarrow 0} \sup_{\theta: \rho(\theta, \theta_0) < s} d(X_{\theta}(\omega); X_{\theta_0}(\omega)) < \frac{1}{n}\}$$

il suffit donc de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists A_n$ tq $\lambda(A_n) = 1$ et

$$A_n \subset \{\lim_{s \rightarrow \infty} \sup_{\theta: \rho(\theta, \theta_0) < s} d(X_{\theta}(\omega); X_{\theta_0}(\omega)) < \frac{1}{n}\}$$

$$\text{Or } s' < s'' \Rightarrow \left\{ \sup_{\theta: \rho(\theta, \theta_0) < s''} d(X_\theta(\omega); X_{\theta_0}(\omega)) < \frac{1}{n} \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ \sup_{\theta: \rho(\theta, \theta_0) < s'} d(X_\theta(\omega); X_{\theta_0}(\omega)) < \frac{1}{n} \right\}$$

il suffit donc de montrer que $\forall s, \exists A_{n,s} \subset \left\{ \sup_{\theta: \rho(\theta, \theta_0) < s'} d(X_\theta(\omega); X_{\theta_0}(\omega)) < \frac{1}{n} \right\}$

$$\text{et } \lim_{s \rightarrow 0} \lambda(A_{n,s}) = 1.$$

En résumé, il suffit de montrer que : $\forall \theta_0 \in \Theta, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon' > 0,$

$$\exists s > 0 \text{ et } A_{n,s} \in \mathcal{A} \text{ tq } \lambda(A_{n,s}^c) < \varepsilon' \text{ et } A_{n,s} \subset \left\{ \sup_{\theta: \rho(\theta, \theta_0) < s} d(X_\theta(\omega); X_{\theta_0}(\omega)) < \frac{1}{n} \right\}$$

ce qui découle immédiatement du théorème XV.

Démonstration du théorème XV.

On utilise le lemme de M. J. Geffroy démontré dans les Préliminaires 7), en gardant les mêmes notations.

1) on fixe $\theta_0 \in \Theta, \varepsilon > 0, \varepsilon' > 0.$

On considère la suite de partitions de $F : (\mathcal{D}_m)_{m \in \mathbb{N}^*} = (\{D_{m,k} : k \in \mathbb{N}^*\})$ comme $\overline{P_\Theta}$ est compact, et que les $D_{m,k}$ sont ouverts, pour tout $m \in \mathbb{N}^*,$

$$\exists k(m) \text{ tq } : \inf_{\theta \in \Theta} P_\theta \left(\bigcup_{k=1}^{k(m)} D_{m,k} \right) > 1 - \frac{\varepsilon'}{2^{m+1}}$$

on pose $D_m = \bigcup_{k=1}^{k(m)} D_{m,k}$ et $K_{\varepsilon'} = \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$, on a $\inf_{\theta \in \Theta} P_\theta(K_{\varepsilon'}) > 1 - \frac{\varepsilon'}{2}$; de plus, comme F est complet, et que, $\forall m \in \mathbb{N}^*,$ on peut recouvrir $K_{\varepsilon'}$ par un nombre fini d'ensembles fermés de diamètre inférieur à $\frac{1}{m}$, $K_{\varepsilon'}$ est compact.

Alors, ψ étant continue, est uniformément continue "autour de" $K_{\varepsilon'}$, en ce sens que : $\forall \varepsilon > 0, \exists a(\varepsilon) \text{ tq } \forall x \in K_{\varepsilon'},$ l'oscillation de ψ sur la boule de centre x et de rayon $a(\varepsilon)$ est inférieure à $\varepsilon.$

2) On choisit alors m de façon que $\frac{1}{m} < a(\varepsilon),$ et on considère la partition $\{D_{m,k} : k \in \mathbb{N}^*\}.$ On pose $M = \{1, 2, \dots, k(m)\}$ et M_1 le sous-ensemble de

M. constitué par les indices k tels que $D_{m,k} \cap K_\varepsilon \neq \emptyset$. On appelle M_2 le sous-ensemble de M constitué par les indices k tels que $P_{\theta_0}(D_{m,k}) > 0$ et $M_3 = M_2 \cap M_1$. On a :

$$P_{\theta_0} \left[\bigcup_{k \in M_3} D_{m,k} \right] > P_{\theta_0} [K_\varepsilon] > 1 - \varepsilon'/2$$

$\forall k \in M_2$, on associe à $D_{m,k}$ un intervalle $A_{m,k}^{\theta_0} = [a_{k-1}^{\theta_0}; a_k^{\theta_0}]$, selon la construction de Mr. J. Geffroy. On suppose que ces intervalles sont mis bout à bout, dans l'ordre des k croissants, et que la borne inférieure du premier est 0.

Soit $A_{m,i}^{\theta_0}$ le plus petit de ces intervalles. On choisit e' assez

petit pour que $a_{i-1}^{\theta_0} - k(m) \cdot e' < a_{i-1}^{\theta_0} + k(m) \cdot e'$. (En particulier, cela implique que $\forall k \in M_2, P_{\theta_0}(D_{m,k}) > 2e'$). On pose enfin $e'' = \frac{\varepsilon'}{4k(m)^2}$ et

$$e = \min(e', e'').$$

3) les $D_{m,k}$ étant à la fois ouverts et fermés sont de frontière vide, donc $\overline{P_{\oplus}}$ -nulle. De plus, $\overline{P_{\oplus}}$ est compact. D'après le lemme du théorème 1, pour tout $k \in M$,

$$\exists \eta(k) \text{ tq : } \sup_{\theta \in \oplus} P_{\theta}(D_{m,k}^{\eta(k)} - D_{m,k}) < e/2$$

on pose $\eta = \min_{k=1 \dots k(m)} \eta(k)$ et $h = \min(e/2; \eta)$.

Alors, $\forall \theta \in \oplus$ et $\forall k \in M$, on a :

$$P_{\theta}(D_{m,k}^h) < P_{\theta}(D_{m,k}) + e/2$$

4) On considère la boule de centre P_{θ_0} et de rayon h :

$B_{\theta_0, h} = \{P_{\theta} : \rho(P_{\theta}; P_{\theta_0}) < h\}$. $\forall P_{\theta} \in B_{\theta_0, h}$ et $\forall k \in M$, on a :

$$P_{\theta}(D_{m,k}) < P_{\theta_0}(D_{m,k}^h) + h < P_{\theta_0}(D_{m,k}) + e/2 + h < P_{\theta_0}(D_{m,k}) + e$$

et de même : $P_{\theta_0}(D_{m,k}) < P_{\theta}(D_{m,k}) + e$

* si $k \in M - M_2$, $P_{\theta_0}(D_{m,k}) = 0 \Rightarrow P_{\theta}(D_{m,k}) < e$

* si $k \in M_2$, $P_{\theta_0}(D_{m,k}) > 0$, et d'après 2),

$$P_{\theta_0}(D_{m,k}) > 2e' > 2e$$

$\Rightarrow \forall P_{\theta} \in B_{\theta_0, h}$, on a : $P_{\theta}(D_{m,k}) > P_{\theta_0}(D_{m,k}) - e > 2e - e = e > 0$

Par conséquent, à $D_{m,k}$ correspond aussi, dans la construction de M.J. Geffroy, un intervalle $A_{m,k}^{\theta} = [a_{m,k-1}^{\theta}, a_{m,k}^{\theta}[$ tel que $\lambda(A_{m,k}^{\theta}) = P_{\theta}(D_{m,k})$.

5) On pose $A = \bigcup_{k \in M_3} \bigcap_{P_{\theta} \in B_{\theta_0, h}} (A_{m,k}^{\theta_0} \cap A_{m,k}^{\theta}) = \bigcup_{k \in M_3} A_k$. Les A_k

étant disjoints, on a : $\lambda(A) = \sum_{k \in M_3} \lambda(A_k)$. D'autre part, $\forall P_{\theta} \in B_{\theta_0, h}$,

$$A_{m,k}^{\theta_0} \cap A_{m,k}^{\theta} \supset [a_{m,k-1}^{\theta_0} + k(m)e ; a_{m,k}^{\theta_0} - k(m) \cdot e]$$

en effet, comme les intervalles $A_{m,k}^{\theta_0}$ (et $A_{m,k}^{\theta}$) sont par construction mis bout à bout, et que la borne inférieure du premier est 0, on a :

$$a_{m,k-1}^{\theta_0} = \sum_{\substack{j \in M_2 \\ j < k}} \lambda(A_{m,j}^{\theta_0}) = \sum_{\substack{j \in M \\ j < k}} P_{\theta_0}(D_{m,j})$$

et
$$a_{m,k-1}^{\theta} = \sum_{\substack{j: P_{\theta}(D_{m,j}) > 0 \\ j < k}} \lambda(A_{m,j}^{\theta}) = \sum_{\substack{j \in M \\ j < k}} P_{\theta}(D_{m,j})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{m,k-1}^{\theta} &= \sum_{j=1}^{k-1} P_{\theta}(D_{m,j}) \leq \sum_{j=1}^{k-1} [P_{\theta_0}(D_{m,j}) + e] = a_{m,k-1}^{\theta_0} + (k-1)e \\ &\leq a_{m,k-1}^{\theta_0} + k(m) \cdot e \end{aligned}$$

de même, on montre que $a_{m,k}^{\theta} > a_{m,k}^{\theta_0} - k(m) \cdot e$

Par conséquent, $A_k = \bigcap_{P_{\theta} \in B_{\theta_0, h}} (A_{m,k}^{\theta_0} \cap A_{m,k}^{\theta}) \supset [a_{m,k-1}^{\theta_0} + k(m).e ; a_{m,k}^{\theta_0} - k(m).e]$

$$\Rightarrow \lambda(A_k) > \lambda(A_{m,k}^{\theta_0}) - 2k(m).e, \quad \forall k \in M_2$$

$$\Rightarrow \lambda(A) = \sum_{k \in M_3} \lambda(A_k) > \sum_{k \in M_3} \lambda(A_{m,k}^{\theta_0}) - 2.k^2(m).e$$

$$= \sum_{k \in M_3} P_{\theta_0}(D_{m,k}) - 2.k(m)^2.e = P_{\theta_0} \left[\bigcup_{k \in M_3} D_{m,k} \right] - 2.k(m)^2.e$$

$$\geq 1 - \frac{\varepsilon'}{2} - 2.k(m)^2.e''$$

$$\geq 1 - \varepsilon'$$

6) Enfin, posons $V_{\theta_0} = B_{\theta_0, h}$. Si $\omega \in A$ et $P_{\theta} \in V_{\theta_0}$, $\exists k \in M_3$ tel que $\omega \in A_{m,k}^{\theta_0}$ et $\omega \in A_{m,k}^{\theta}$. Par construction, on a donc :

$$Y_m^{\theta_0}(\omega) \in D_{m,k} \quad \text{et} \quad Y_m^{\theta}(\omega) \in D_{m,k}$$

Comme les $(D_{m,k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des suites de partitions dont chacune est un raffinement de la précédente, $\forall \varepsilon > m$, on a :

$$Y_{\ell}^{\theta_0}(\omega) \in D_{m,k} \quad \text{et} \quad Y_{\ell}^{\theta}(\omega) \in D_{m,k}$$

les ensembles $D_{m,k}$ étant fermés, on en déduit que

$$Y_{\theta_0}(\omega) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} Y_{\ell}^{\theta_0}(\omega) \in D_{m,k}$$

$$Y_{\theta}(\omega) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} Y_{\ell}^{\theta}(\omega) \in D_{m,k}$$

Comme $k \in M_3 \subset M_1$, $D_{m,k} \cap K'_\varepsilon \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in K'_\varepsilon$ tel que $D_{m,k}$ soit inclus dans la boule de centre y et de rayon $\frac{1}{m}$.

$$\text{Comme } \frac{1}{m} < a(\varepsilon), \text{ on a : } d[\psi(Y_{\theta_0}(\omega)) ; \psi(Y_{\theta}(\omega))] < \varepsilon$$

$$\text{donc : } d(X_{\theta_0}(\omega) ; X_{\theta}(\omega)) < \varepsilon$$

Corollaire I. - Si on suppose que P_{Θ} est compact, on peut en déduire une propriété plus forte pour X_{Θ} : $\forall \varepsilon, \varepsilon' > 0 \exists h > 0$ et $A \in \mathcal{A}$ tq $\lambda(A^c) < \varepsilon'$ et $\forall P_{\Theta'}, P_{\Theta''} \in P_{\Theta}$ tq $\rho(P_{\Theta'}, P_{\Theta''}) < h, \forall \omega \in A, d(X_{\Theta'}(\omega); X_{\Theta''}(\omega)) < \varepsilon$

Démonstration. $\varepsilon, \varepsilon'$ fixés

Soit $(P_{\Theta_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite partout dense de P_{Θ} .

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists B_{\Theta_n, h_n}$ et $A_n \in \mathcal{A}$ tq $\lambda(A_n^c) < \frac{\varepsilon'}{2^n}$ et tq $\forall P_{\Theta} \in B_{\Theta_n, h_n}, \forall \omega \in A_n$

$$d(X_{\Theta}(\omega); X_{\Theta_n}(\omega)) < \varepsilon/2$$

$\Rightarrow P_{\Theta},$ et $P_{\Theta''} \in B_{\Theta_n, h_n}, d(X_{\Theta}(\omega); X_{\Theta''}(\omega)) < \varepsilon$

les boules ouvertes $B_{\Theta_n, \frac{h_n}{2}}$ recouvrent le compact P_{Θ} . Par conséquent, il existe

$h > 0$ tq $\forall P_{\Theta} \in P_{\Theta}, B_{\Theta, h}$ soit contenu dans au moins une boule $B_{\Theta_n, \frac{h_n}{2}}$.

$\Rightarrow$ Si $\omega \in A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ et si $\rho(P_{\Theta'}, P_{\Theta''}) < h$, on a :

$$d(X_{\Theta'}(\omega); X_{\Theta''}(\omega)) < \varepsilon \text{ et } \lambda(A^c) = \lambda(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n^c) < \varepsilon'$$

Corollaire II. - X_{Θ} est une fonction aléatoire à trajectoires presque sûrement uniformément continues sur le compact P_{Θ} .

Démonstration.

L'ensemble des trajectoires continues est, puisque P_{Θ} est compact, l'ensemble des trajectoires uniformément continues :

$$\{\lim_{s \rightarrow 0} \sup_{\substack{\Theta', \Theta'' \\ \rho(\Theta', \Theta'') < s}} d(X_{\Theta'}; X_{\Theta''}) = 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{\lim_{s \rightarrow 0} \sup_{\rho(\Theta', \Theta'') < s} d(X_{\Theta'}; X_{\Theta''}) < \frac{1}{n}\}$$

il suffit donc de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists A_n$ tq $\lambda(A_n) = 1$ et

$$A_n \subset \left\{ \lim_{s \rightarrow 0} \sup_{\rho(\theta', \theta'') < s} d(X_{\theta'} ; X_{\theta''}) < \frac{1}{n} \right\}$$

$$\text{or, } s' < s'' \Rightarrow \left\{ \sup_{\rho(\theta', \theta'') < s''} d(X_{\theta'} ; X_{\theta''}) < \frac{1}{n} \right\} \subset \left\{ \sup_{\rho(\theta', \theta'') < s'} d(X_{\theta'} ; X_{\theta''}) < \frac{1}{n} \right\}$$

il suffit donc de montrer que :

$$\forall s, \exists A_{n,s} \subset \left\{ \sup_{\rho(\theta', \theta'') < s} d(X_{\theta'} ; X_{\theta''}) < \frac{1}{n} \right\}, \text{ et } \lim_{s \rightarrow 0} \lambda(A_{n,s}) = 1$$

En résumé, on doit montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon' > 0, \exists s > 0 \text{ et } A_{n,s} \text{ tel que } \lambda(A_{n,s}^c) < \varepsilon' \text{ et}$$

$$A_{n,s} \subset \left\{ \sup_{\rho(\theta', \theta'') < s} d(X_{\theta'} ; X_{\theta''}) < \frac{1}{n} \right\}$$

ce qui découle immédiatement du corollaire I.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) PROKHOROV : Yu, V. (1956). Convergence of random processes and limit theorems in probability theory.
THEOR. PROB. APPLI. 1. 157-214.
- (2) STRASSEN V. : (1965). The existence of probability measures with given marginals. ANN. MATH. STAT. 36. 423-439.
- (3) DUDLEY R.M. : (1968). Distances of probability measures and Random variables. ANN. MATH. STAT. 39. 1563-1572.
- (4) BILLINGSLEY P. and FOPSOE F. : (1967). Uniformity in weak convergence
Z. WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE UND WERW. GEBIETE.
7. (1967) pp. 1-16.
- (5) TOPSOE F. : (1967). On the connection between P-continuity and P-uniformity in weak convergence.
THEOR. PROB. APPL. 2-XII.
- (6) VARADARAJAN V.S. : (1958). Weak convergence of measures on separable metric spaces. SANKYĀ 19. 15-22.
- (7) PARTHASARATHY K.R. : Probability measures on metric spaces.
Academic Press, 1967.
- (8) GEFFROY J. : (1972) à paraître
- (9) HAUSDORFF F. : MENGENLEHRE, 2 Aufl. Berlin-Leipzig (1927).
- (10) CHEVALIER J. : Propriétés d'uniformité de la convergence presque sûre de la moyenne d'un échantillon indexé.
C.R. Ac. Sc. Paris. t. 274.
- (11) BOSQ D. : Contribution à la théorie de l'estimation fonctionnelle. Publications de l'institut de Statistique de l'Université de Paris.
- (12) SKOROKHOD A.V. : (1956) Limit theorems for stochastic Processes
Theor. Prob. Appl. 1. 261-290.
- (13) GEFFROY J. : (1969) à paraître
- (14) KURATOWSKI : Topologie - Vol 1. p. 340.
- (15) CHOQUET : Topologie (Masson). p. 92.
- (16) ALEXANDROV P. et HOPF H. : Topologie. Berlin - 1935.