

50376
1973
195
N° d'ordre : 419

50376
1973
195

THESE

présentée

A L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le titre de Docteur de spécialité
(Mathématiques appliquées)

par

Gilles COULOMB

Ingénieur I.D.N.



**UN MODELE DE DÉCISION MULTICRITERE :
SOPHOCLE**

Soutenue le 16 novembre 1973 devant la Commission d'examen

Membres du Jury : Monsieur P. POUZET *Président*
Mademoiselle S. MARQUET *Examineurs*
Monsieur P. HUARD
Monsieur G. NISSEN *Rapporteur*

SCD LILLE 1



D 030 304178 9

50376
1973
195

N° d'ordre : 419

50376
1973
195

THESE

présentée

A L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le titre de Docteur de spécialité
(Mathématiques appliquées)

par

Gilles COULOMB

Ingénieur I.D.N.

**UN MODELE DE DÉCISION MULTICRITERE :
SOPHOCLE**



Soutenue le 16 novembre 1973 devant la Commission d'examen

Membres du Jury :	Monsieur P. POUZET	<i>Président</i>
	Mademoiselle S. MARQUET	<i>Examineurs</i>
	Monsieur P. HUARD	
	Monsieur G. NISSEN	<i>Rapporteur</i>

DOYENS HONORAIRES De l'Ancienne Faculté des Sciences

M. H. LEFEBVRE, PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit et
Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BEGHIN, BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DEHORS, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, LAMPE DE FERIET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PARISELLE, PASCAL, PAUTHENIER, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, SQUELLE, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENT de l'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

. DEFRETIN René

Professeur de Biologie Marine,
Directeur de l'Institut de
Biologie Maritime et Régionale de
Wimereux

PROFESSEURS TITULAIRES

. BACCHUS Pierre	Astronomie
. BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Générale
. BECART Maurice	Physique
. BIAYS Pierre	Géographie
. BLOCH Vincent	Psychophysiologie
. BONNEMAN Pierre	Chimie et Physico-Chimie Industrielle
. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
. BOUGHON Pierre	Mathématiques'
. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
. CAPET Marcel-Francis	Institut de Préparation aux Affaires
. CELET Paul	Géologie
. CONSTANT Eugène	Physique Industrielle-Electronique
. CORSIN Pierre	Paléobotanique
. DECUYPER Marcel	Mathématiques Générales
. DEFRETIN René	Biologie Marine
. DELATTRE Charles	Géologie Générale
. DURCHON Maurice	Zoologie Générale et Appliquée
. FAURE Robert	Mécanique
. FOURET René	Physique
. GABILLARD Robert	Radio-Electricité-Electronique
. GEHU Jean-Marie	Institut Agricole
. GLACET Charles	Chimie Organique
. GONTIER Gérard	Mécanique
. GUILLAUME Jean	Biologie Végétale
. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
. JOLY Robert	Biologie (Amiens)
. LENOBLE Jacqueline	Physique Expérimentale
. LOMBARD Jacques	Sociologie

PROFESSEURS TITULAIRES (suite)

M. MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M. MONTRFUIL Jean	Chimie Biologique
M. POUZET Pierre	Informatique
Mme SCHWARTZ Marie-Hélène	Analyse Supérieure
M. TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M. TRÉDOT Gabriel	Chimie
M. VAILLANT Jean	Mathématiques
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. VIVIER Emile	Biologie Animale
M. WERTHEIMER Raymond	Physique
M. ZEYTOUNTAN Racyadour	Mathématiques

PROFESSEURS A TITRE PERSONNEL

M. BOUISSET Simon	Physiologie Animale
M. DELHAYE Michel	Chimie
M. FLATRES Pierre	Géographie
M. LEBRUN André	Electronique
M. LINDER Robert	Botanique
M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. PARREAU Michel	Mathématiques Appliquées
M. PRUDHOMME Rémy	Droit et Sciences Economiques
M. SCHILTZ René	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique
M. BILLARD Jean	Physique
M. BODARD Marcel	Botanique
M. BOILLET Pierre	Physique
M. DERCOURT Jean-Michel	Géologie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LANDAIS Jean	Chimie
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. MAES Serge	Physique
Mle MARQUET Simone	Mathématiques
M. MONTEL Marc	Physique
M. MONTUELLE Bernard	I.E.T. Lille
M. PANET Marius	I.E.E.A.
M. PROUVOST Jean	Minéralogie

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés de fonctions)

M. ADAM Michel	Economie Politique
M. ANDRE Charles	Sciences Economiques
M. ANGRAND Jean-Pierre	Géographie
M. ANTOINE Philippe	Mathématiques
M. AUBIN Thierry	Mathématiques
M. BART André	Biologie

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés de fonctions) suite

M. BEGUIN Paul	Mécanique des Fluides
M. BKUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. BOSCOQ Denis	Mathématiques
M. BRIDOUX Michel	Chimie
M. BRUYELLE Pierre	Géographie et Aménagement Spatial
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COULON Jean	I.E.E.A.
M. DEBOURSE Jean-Pierre	Sciences Economiques et Sociales
M. DEBRABANT Pierre	Sciences Appliquées
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques et Sociales
M. DEPREZ Gilbert	Physique (I.U.T.)
M. DERIEUX Jean-Claude	Biologie (I.U.T.)
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique
M. DRIEUX Baudouin	I.E.E.A.
M. DYMENT Arthur	Mathématiques
M. ESCAIG Bertrand	Physique
Mme EVRARD Micheline	Chimie (I.U.T.)
M. FONTAINE Jacques André	Génie Electrique
M. FONTAINE Jacques Marie	I.U.T. Lille
M. FOURNET Bernard	I.U.T. Lille
M. FROELICH Daniel	Sciences Appliquées
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GUILLAUME Henri	Sciences Economiques et Sociales
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JOURNEL Gérard	Sciences Appliquées
Mlle KOSMANN Yvette	Mathématiques
M. KREMBEL Jean	Chimie
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LAURENT François	Automatique
M. LAVAGNE Pierre	Sciences Economiques et Sociales
Mlle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mlle LEGRAND Solange	Mathématiques
M. LENTACKER Firmin	Géographie et Aménagement Spatial
M. LEROY Jean-Marie	E.N.S.C.L.
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOUAGE Francis	Sciences Appliquées
M. LOUCHET Pierre	C.U.E.E.P.
M. MAHIEU Jean-Marie	Physique (I.U.T.)
Mme MAILLET Monique	Sciences Economiques
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques et Sociales
M. MERIAUX Emile	Sciences de la Terre
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MIGEON Michel	Chimie (Sciences Appliquées)
M. NICOLE Jacques	Chimie (E.N.S.C.L.)
M. PAQUET Jacques	Sciences Appliquées
M. PARSY Fernand	Mathématiques
M. PECQUE Marcel	Chimie
M. PERROT Pierre	Chimie

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés de fonctions) suite

M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie (Valenciennes)
M. POVY Jean-Claude	Sciences Appliquées
M. RACZY Ladislas	Physique
Mme RENVERSEZ Françoise	Sciences Economiques et Sociales
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SALMER Georges	Radio Electricité Electronique
M. SEGUIER Guy	Electronique
M. SIMON Michel	Psychologie
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SMET Pierre	Physique
M. SOMME Jean	Géographie
Mle SPIK Geneviève	Chimie Biologique
M. THERY Pierre	Calais
M. TOULOTTE Jean-Marc	Sciences Appliquées
M. TREANTON Jean-René	Sciences Economiques et Sociales
M. VANDORPE Bernard	Chimie Physique
M. VILETTE Michel	Génie Mécanique
M. WERNER Georges	Informatique (I.U.T.)
M. WATERLOT Michel	Géologie
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur POUZET qui a constamment suivi l'évolution de mon travail, en me donnant conseils et encouragements.

Je remercie Monsieur le Professeur DAVAL du support et des réflexions qu'il m'a offerts ainsi que Monsieur NISSEN pour toutes les appréciations et l'aide qu'il m'a portées dans mon travail.

Je remercie Monsieur BENCI de m'avoir accueilli à l'I.R.I.A. et d'avoir orienté le début de mes recherches.

Je tiens aussi à remercier Monsieur le Professeur HUARD et Mademoiselle le Professeur MARQUET qui se sont intéressés à mon travail et ont bien voulu accepter de faire partie du jury.

Que Mademoiselle BOYER et Monsieur MALLET, qui ont permis la réalisation matérielle de cette thèse, trouvent ici tous mes remerciements.

+-----+

+-----+

INTRODUCTION

Le processus de prise de décision	0.3
Les modèles de décision multi-critère	0.4
Un modèle d'agrégation dynamique : SOPHOCLE .	0.5

PREMIER MODULE

I - Le choix multi-critère : approche initiale	2
II - Matrices de classements	3
III - Poids des critères de performances	4
IV - Indice de tendance dominante	13
V - Pouvoirs de décision des critères.	13

SECOND MODULE

VI - Décision multi-critère et théorie des jeux	19
VII - Simulation de la négociation	20
VIII - Formulation du problème	22
IX - Gain des coalitions	24
X - Gain d'une coalition : phase t de négociation	32

TROISIEME MODULE

XI - Formation des coalitions en phase t	36
XII - Définition de C_t pour $M_{t-1} = 2$	40
XIII - Définition de C_t pour $M_{t-1} = 3$: algorithme de choix A_3	41
XIV - Définition de C_t pour $M_{t-1} = 4$: algorithme de choix A_4	44
XV - Algorithme "step and stair" pour $M_{t-1} = 4$	49
XVI - Détermination de la solution optimale	59
XVII - Algorithme de choix A_4	60
XVIII - Définition de C_t pour $M_{t-1} = 5$: algorithme de choix A_5	63
XIX - Algorithme "step and stair" pour $M_{t-1} = 5$	67
XX - Détermination de la solution optimale	101
XXI - Algorithme de choix \mathcal{P}_5	102

SYNTHESE ET CONCLUSIONS

XXII - Modèle SOPHOCLE : synthèse	104
-----------------------------------	-----

ANNEXES

Annexe 1 : Programme	I-2
Annexe 2 . Exemple d'application numérique	I-5

BIBLIOGRAPHIE

II-1

UN MODELE DE DECISION

MULTICRITERE :

S O P H O C L E

-o-o-o-o-

INTRODUCTION

I - Le processus de prise de décision.

I-1 Définition

L'entreprise est un ensemble de centres des décisions et d'actions en inter-relations.

La Gestion scientifique ou le contrôle optimal de ce système nécessite l'analyse du processus de prise de décision. Ce dernier concept est aujourd'hui devenu fondamental.

Sur la base d'une analyse d'informations, le processus de décision consiste pour le décideur ayant généré et évalué des possibilités d'actions, à sélectionner la plus "satisfaisante" grâce à certains critères, cette opportunité satisfaisante lui permettant de réaliser un objectif donné par une action compatible avec ses moyens. {21.a }

De nombreux auteurs ont traité le sujet :

FISHBURN, P.C. { 28 } , OFSTAD, H. { 50 } , CHURCH-MAN, C.W. { 16 } , EILON, S { 27 } , DRUCKER, P { 25 } , ou SIMON, H.A. { 63 } entre autres. Une analyse complète du processus décisionnel est présentée en { 21.a }.

I-2 La prise de décision avec critères multiples.

L'évaluation des possibilités d'actions et la sélection de la meilleure opportunité peuvent s'opérer à partir de plusieurs critères: c'est la décision multi-critère.

L'élaboration d'une politique générale ou financière, le choix et le financement des investissements pour une firme, la planification sont des domaines désormais classiques où s'applique le choix multi-critère. Quel que soit le domaine touché, la synthèse de points de vue multiples, souvent 'complexes et hétérogènes' {56.c } ,

pose des problèmes considérables et délicats. { 21.a}.

Aucune méthode n'a permis jusqu'ici de résoudre de façon satisfaisante le problème de l'agrégation multi-critère {18.b}. Dans tous les cas, une part arbitraire doit être introduite. La seule approche réaliste consiste alors à préciser cette "part d'arbitraire" introduite" en démultipliant le nombre d'hypothèses. Il reste ensuite à tester les hypothèses posées.

II - LES MODELES DE DECISION MULTICRITERE

II-1 Rappels

Divers ouvrages ont tenté de faire une synthèse des méthodes de décision multicritère . {8 ou 56.c}.

Nous nous contenterons de rappeler les travaux de A. CHARNES et W.W.Cooper {14} ou ceux de R.J. Niehaus et A. Stedry {15}. Leurs modèles de "goal-programming" peuvent être utilisés en décision multi-critère {56.c} et certaines de leurs analyses présentent un intérêt vis à vis de SOPHOCLE.

II-2 Analyse critique des méthodes.

Certains modèles utilisent une fonction "d'utilité" agrégeant les critères de décision en un critère unique. De nombreuses critiques ont été faites sur cette approche. {42, 53, 56} . En fait, l'utilisation d'une fonction unique amène un décideur à appréhender et traiter simultanément plusieurs points de vue hétérogènes. Cela n'est pas réaliste, car cette tâche devient très complexe au delà de trois critères et ne peut traduire les procédures réelles utilisées par le décideur.

Aussi, les modèles de type itératif semblent préférables : une définition progressive des préférences est effectuée par une série

d'agrégations partielles.

Ce type d'approche procédant par agrégations partielles, met bien en évidence le problème clé de l'analyse multi-critère, qui est d'unir, finalement, deux critères et deux seulement. Ce rappel devrait permettre d'éviter toute sophistication dans l'élaboration de modèles.

Deux principes par ailleurs restent toujours valables. Il semble important de ne pas masquer les hypothèses de travail sur lesquelles sont basées les algorithmes. Il apparaît comme essentiel de ne pas supposer le problème résolu à une étape intermédiaire quelconque du processus d'agrégation.

III - UN MODELE D'AGREGATION DYNAMIQUE : SOPHOCLE.

III-1 Approche théorique.

Lors d'une décision multi-critère, chacun des critères donne un classement des opportunités, rangeant celles-ci par préférence (hypothèse initiale).

Les classements n'étant pas identiques, le décideur se trouve face à une situation bloquée au moment du choix. Les divergences qui apparaissent entre les classements peuvent être interprétés comme des conflits d'opinions entre les critères de jugement. Pour qu'il y ait décision, il est nécessaire que le décideur use d'un compromis entre les jugements : c'est à cette condition qu'il peut faire évoluer le contexte du choix conflictuel vers un accord entre les critères.

Le processus de prise de décision multi-critère doit donc être appréhendé comme une négociation compétitive entre les critères menée par le décideur. Cette négociation permet d'aboutir à la synthèse des divers classements et au choix final.

Nous aborderons ce processus d'agrégation multi-critère par la simulation d'une négociation entre Mo négociateurs représentant les Mo critères.

Cette approche du processus de prise de décision multi-critère en termes de négociation n'est pas en désaccord avec les travaux les plus récents sur le comportement {63.a.}

III-2 Remarques sur ce mode d'approche.

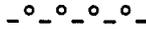
Ce type d'analyse conduit à distinguer trois grands modules dans le traitement du processus d'agrégation.

Le premier aboutit à la détermination des "poids" et des "pouvoirs de décision" de chaque critère. Ce module se situe dans le cadre de la théorie de la décision.

Le second définit le "pouvoir de décision" de plusieurs critères ayant été agrégés par le décideur. Ce module de transition se situe entre la théorie de la décision et la théorie des jeux.

Le troisième permet de savoir quels critères seront agrégés et comment grâce à des algorithmes de simulations modélisant des négociations entre joueurs. La théorie des jeux sert de cadre d'étude à ce module

S O P H O C L E



PREMIER MODULE



Algorithmes préliminaires

Chapitre I à V.

I - LE CHOIX MULTI-CRITERE : APPROCHE INITIALE.

I-1 Définition du problème.

Soit A un ensemble de N_0 actions réalisables a_j ou opportunités.
($j = 1, N_0$).

Soit C un ensemble de M_0 critères C_i ou point de vue .
($i = 1, M_0$).

Un critère sur un ensemble A établit une relation quelconque entre les éléments a_j de cet ensemble. { 8 }.

Soit \mathcal{C} l'ensemble des critères utilisables sur A. On a $C \subset \mathcal{C}$.

Muni de M_0 critères d'appréciation, comment choisir l'opportunité a_j la plus satisfaisante ? Ce choix implique une agrégation des critères :

La décision multicritère est une application de \mathcal{C}^{M_0} dans \mathcal{C} .

I-2 Matrice de performances.

Supposons que chaque critère C_i permette de définir une application de A dans \mathbb{R} .

L'échelle de mesure attachée à C_i établit sur A une structure cardinale S_i .

Chaque critère C_i évalue les N_0 éléments a_j ; son ensemble d'appréciations est donc :

$$X_i = (X_i^1, X_i^2, \dots, X_i^j, \dots, X_i^{N_0}),$$

$X_i^j \in \mathbb{R}$ est appelé le score de a_j pour le critère C_i .

Chaque élément a_j est évalué selon les M_0 critères ; son ensemble

de scores est donc :

$$X^j = (X_1^j, X_2^j, \dots, X_i^j, \dots, X_{M_0}^j)$$

L'évaluation des N_0 opportunités selon les M_0 critères fournit une matrice de scores ou performances $X (M_0, N_0)$.

II - MATRICE DE CLASSEMENTS

II-1 Définition du problème.

A partir de chaque structure cardinale S_i , il est possible d'établir une structure ordinale S'_i .

Pour cela, il suffit de définir pour chaque critère C_i une relation de préférence R_i qui permet d'ordonner les " N_0 " opportunités a_j à partir de leurs scores respectifs :

$$X_i^j \quad (j = 1, N_0).$$

La matrice de performances $X (M_0, N_0)$ mène à la construction d'une matrice de classements :

$$Y (M_0, N_0).$$

Déterminons cet ordre de préférence pour le critère C_i . Nous disposons de N_0 scores :

$$X_i^1, X_i^2, \dots, X_i^j, \dots, X_i^{N_0}.$$

La préférence que le décideur attache à chaque score X_i^j dépend de la distance que ce dernier établit entre la performance X_i^j et une performance idéale X_i^* , valeur optimale pour le critère C_i . Soit $d_i (X_i^j, X_i^*)$ cette distance.

Les préférences du décideur selon le critère C_i seront définies par la relation :

$$a_j \mathcal{R}_i a_k \iff d_i (X_i^j, X_i^*) \leq d_i (X_i^k, X_i^*) \quad (1)$$

ce qui signifie a_j préféré ou équivalent à a_k selon le critère C_i .

II-2 Choix d'une distance d_i et relation de préférence.

Quel type de fonction retenir ?

Les critères de décision C_i utilisés seront tels que les scores qui y sont afférents ont pour valeur optimale leur borne supérieure:

$$X_i^* = \sup_j [X_i^j] \quad (2)$$

Dans ces conditions, nous choisirons des fonctions d_i strictement monotones, fonctions décroissantes de X_i^j .

Presque tous les auteurs choisissent des distances ayant cette propriété de monotonie stricte.

Ainsi il vient :

$$\forall j, k, \quad d_i(X_i^j, X_i^*) \leq d_i(X_i^k, X_i^*) \iff X_i^j \geq X_i^k \quad (3)$$

d'où

$$a^j \mathcal{R}_i a^k \iff X_i^j \geq X_i^k$$

Ce qui signifie a^j préféré ou équivalent à a^k selon le critère C_i .

Ce choix est justifié par une adaptation des travaux de A. Charnes et W.W. Cooper [14], de B.P. Collomb [19] sur le "goal-programming" [40].

Le "goal-programming" consiste en effet à minimiser, sous certaines contraintes, la distance qui existe entre un vecteur d'objectifs G et un vecteur de performances X . Les types de distance proposés par Charnes et Cooper intéressent la décision multicritère, à condition de remplacer G par l'ensemble des valeurs :

$$X_i^*, (i = 1, M_0). \quad [56.c]$$

II-3 Définition et interprétation d'un classement.

Un classement est une application de A dans \mathbb{N}^+ . Plusieurs modes de classement sont possibles [39, 56.c, 57, 8]. Celui que nous retiendrons dans SOPHOCLE est le classement "inverse".

Soit $a^j \in A$ et X_i^j , son score selon C_i .

Soit J l'ensemble des éléments $a^k \in A$.

vérifiant :

$$X_i^k < X_i^j$$

On note $|J|$ le cardinal de l'ensemble J .

Le rang de classement de a^j selon C_i sera donné par Y_i^j , tel que :

$$\forall j, a^j \Leftrightarrow X_i^j \Rightarrow Y_i^j = |J| + 1 \quad \textcircled{5}$$

Ce qui signifie qu'on préfère strictement a^j à $|J|$ éléments de A .

Cette application de A dans \mathbb{N}^+ définit un préordre complet sur A :

$$(\forall a^j \in A), (\forall a^k \in A), (a^j R_i a^k \Leftrightarrow Y_i^j \geq Y_i^k) \quad \textcircled{6}$$

Exemple

Scores	X_i^1	X_i^2	X_i^3	X_i^4	X_i^5	X_i^6	X_i^7	X_i^8	X_i^9	X_i^{10}
X_i	0.75	0.66	0.60	0.71	0.50	0.78	0.75	0.30	0.65	0.52
Y_i	8	6	4	7	2	10	8	1	5	3
Classement	Y_i^1	Y_i^2	Y_i^3	Y_i^4	Y_i^5	Y_i^6	Y_i^7	Y_i^8	Y_i^9	Y_i^{10}

Fig. 1

Le sens de variation de ces rangs de classement "inverse" est ainsi le même que celui des performances. Il sera identique aussi au sens de variation des poids des critères.

III - POIDS DES CRITERES DE PERFORMANCES.

III-1 Définitions.

Les poids traduisent l'importance relative que le décideur accorde aux critères.

On retrouve dans ces poids deux types de pondérations bien distincts.

Pour chaque critère C_i , on peut définir un poids intrinsèque PO_i qui traduit l'importance relative du critère C_i par rapport aux autres critères. Cette attribution est indépendante des scores X_i^j relatifs à ce critère C_i et donne un poids d'autant plus élevé que le critère est important.

Exemple.

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
3	2	1	3	5

Fig. 2

Le décideur estime ici que les critères C_1 et C_4 ont la même importance et que C_2 est moins important que C_1 ou C_4 .

Le second type de pondération permet de définir un poids extrinsèque PO_i^j qui dépend des scores X_i^j observés. Ce poids tient compte de l'importance variable que le décideur accorde au critère suivant le score qu'il considère.

III-2 Poids extrinsèques : calcul.

a) Apports du "goal-programming"

Pour établir des préférences et classer différentes possibilités d'actions, le "goal-programming" définit des distances d_i entre les performances X_i des actions possibles et les objectifs souhaités :

$$X_i^* . \quad [\text{cf. chapitre II-2}]$$

Les types de déviations d_i introduits par B. Collomb [19], dans sa formulation du "goal interval programming" montrent que la distance d'une performance X_i à une valeur optimale X_i^* , n'est pas directement proportionnelle à l'écart brut $|X_i - X_i^*|$. Il y a lieu de pondérer cet écart par des coefficients de déviations d'une part, que l'approche soit linéaire ou non, par des exposants d'autre part, dans l'approche non linéaire.

Dans ces conditions, il vient :

$$\text{Si } X_i^1 < X_i^2 < X_i^3 < X_i^4 < X_i^*$$

$$\text{et } (X_i^1 - X_i^2) = (X_i^3 - X_i^4)$$

Alors :

$$d_i(X_i^1, X_i^*) - d_i(X_i^2, X_i^*) \geq d_i(X_i^3, X_i^*) - d_i(X_i^4, X_i^*)$$

A l'écart brut $X_{i,j} - X_i^*$, on substitue une notion de distance subjective. Plus précisément, pour établir ses préférences à partir de cette distance, le décideur surévalue l'écart brut dans les zones extrêmes de l'échelle de performances.

En d'autres termes, cela signifie que le décideur n'accorde pas dans son évaluation des préférences une importance constante au critère qu'il considère : cette importance dépend de la zone où se trouve la performance jugée.

L'interprétation de la concavité des fonctions d_i présente un intérêt pour la détermination des poids extrinsèques des différents critères utilisés.

b) Nature des $PO_{i,j}$

Définissons les poids extrinsèques $PO_{i,j}$ en adaptant les conclusions précédentes.

La forme générale de la courbe traduisant l'importance d'un critère en fonction des scores est :

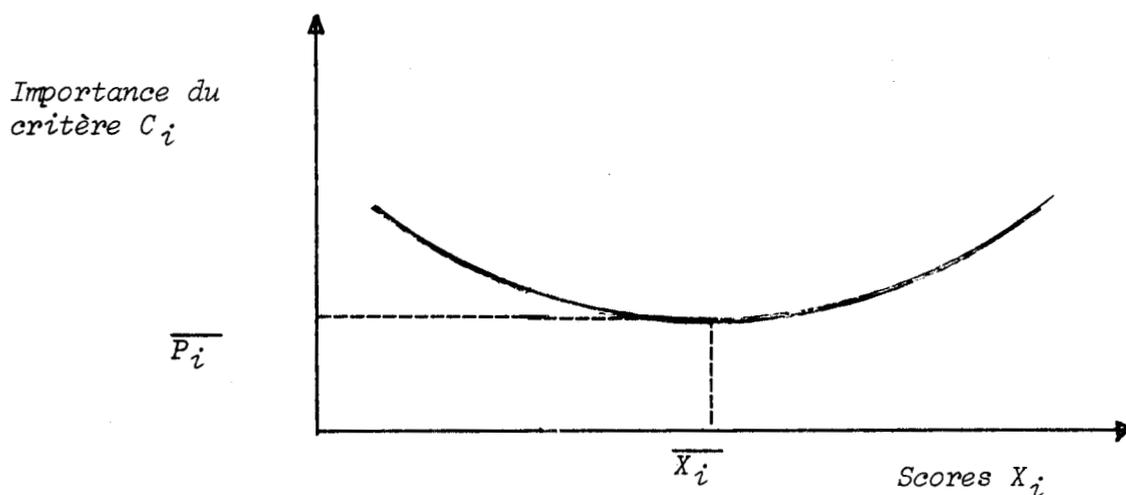


Fig. 3

Les valeurs de \bar{X}_i et \bar{P}_i sont à choisir simultanément : \bar{X}_i est la valeur à partir de laquelle l'importance du critère C_i varie suivant le score considéré.

Nous poserons $\bar{P}_i = PO_i$

\bar{X}_i est la valeur pour laquelle le critère a son poids intrinsèque PO_i

Précisons \bar{X}_i .

Le goal-programming suggère $\bar{X}_i = \bar{X}_i^*$. Nous ne prendrons pas cette valeur, car dans sa définition des préférences, le décideur use plus d'une comparaison entre les No scores que d'une référence à une valeur optimale X_i^* .

C'est donc plus à partir d'une valeur moyenne des No scores considérés que le décideur fait varier le poids du critère C_i .

\bar{X}_i sera un indice de tendance centrale.

Deux indices sont possibles : moyenne arithmétique et médian.

Le médian est le terme qui, dans une série établie par ordre de grandeurs, occupe la position centrale. Ce dernier peut sembler plus rationnel pour l'attribution d'un seuil, car il traduit mieux une tendance centrale simplement ordinale.

Reconsidérons la courbe précédente. [Fig. 3]. Cette courbe a été tracée par analogie avec les courbes d_i données par A. Charnes et W. Cooper 19. Mais ces derniers tenaient compte de l'écart absolu $|X_i^j - X_i^*|$ par rapport à X_i^* qui est un optimal.

Or, nous voulons tenir compte de l'écart algébrique $(\bar{X}_i^j - \bar{X}_i)$ par rapport à \bar{X}_i qui est une moyenne.

Pour $X_i^j > \bar{X}_i$, l'importance du critère croît avec X_i et les préférences correspondantes du décideur aussi : les valeurs du poids extrinsèque seront donc croissantes.

Pour $X_i^j < \bar{X}_i$, l'importance du critère croît quand X_i^j s'éloigne de \bar{X}_i ; mais les préférences correspondantes décroissent dans les mêmes conditions. Les mesures des préférences étant décroissantes,

les valeurs du poids extrinsèque seront dans ce cas décroissantes.
Le poids extrinsèque sera une fonction croissante de X_i^j .
La détermination des indices de préférences abordée au chapitre IV
finira de justifier les sens de variation des courbes de poids.

c) Calcul.

Soit C_i un critère de poids intrinsèque PO_i .

Soient N_0 scores X_i^j ($j = 1, N_0$) mesurés par ce critère.

Soit $MEDX_i$ un indice de tendance centrale de ces N_0 scores (médian
ou moyenne).

Soient SUP_i et INF_i les valeurs maximales et minimales que puissent
prendre les scores X_i^j .

Soient $A_i = (SUP_i - MEDX_i)$, $A_i \in \mathbb{R}$

$B_i = (MEDX_i - INF_i)$, $B_i \in \mathbb{R}$

$D_i = SUP_i \{A_i, B_i\}$, $D_i \in \mathbb{R}$

Q_i et e_i deux constantes, $Q_i \in \mathbb{R}^+$ et $e_i \in \mathbb{N}^+$

Dans ces conditions, on définit PO_i^j comme suit :

$\alpha)$ si e_i est impair :

$$PO_i^j = PO_i \times Q_i \left[\frac{X_i^j - MEDX_i}{D_i} \right]^{e_i} \quad (7)$$

$\beta)$ si e_i est pair :

- pour $X_i^j > MEDX_i \longrightarrow m = 2$

- pour $X_i^j < MEDX_i \longrightarrow m = 1$

$$PO_i^j = PO_i \times (-1)^m Q_i \left[\frac{X_i^j - MEDX_i}{D_i} \right]^{e_i} \quad (8)$$

Dans ces deux cas (α, β), le coefficient D_i a été choisi de façon à "normer" le second facteur de PO_i^j . En effet, dans ces conditions :

$$\frac{X_i^j - MEDX_i}{D_i} \leq 1, \forall X_i^j$$

III-3 Synthèse.

Les poids d'un critère, $P1_i^j$, sont fonction de PO_i et PO_i^j .

Par définition, on prendra :

-Si e_i est impair :

$$P1_i^j = PO_i + PO_i^j = PO_i \left[1 + Q_i \left(\frac{X_i^j - MEDX_i}{D_i} \right)^{e_i} \right] \quad (9)$$

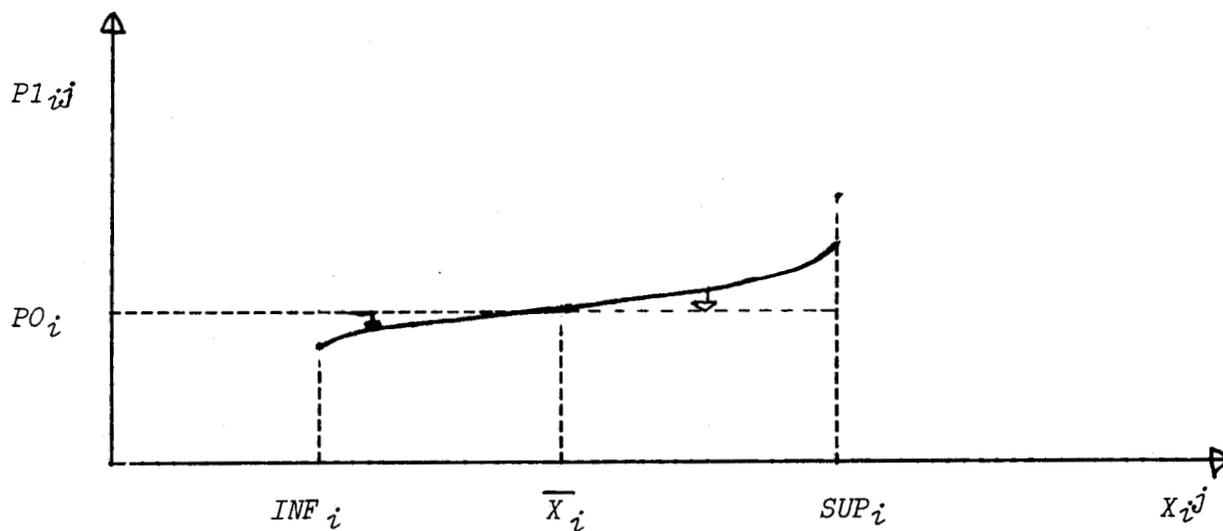


Fig. 4

- si e_i est pair :

$$P1_i^j = PO_i + PO_i^j = PO_i \left[1 + (-1)^m Q_i \left(\frac{X_i^j - MEDX_i}{D_i} \right)^{e_i} \right]$$

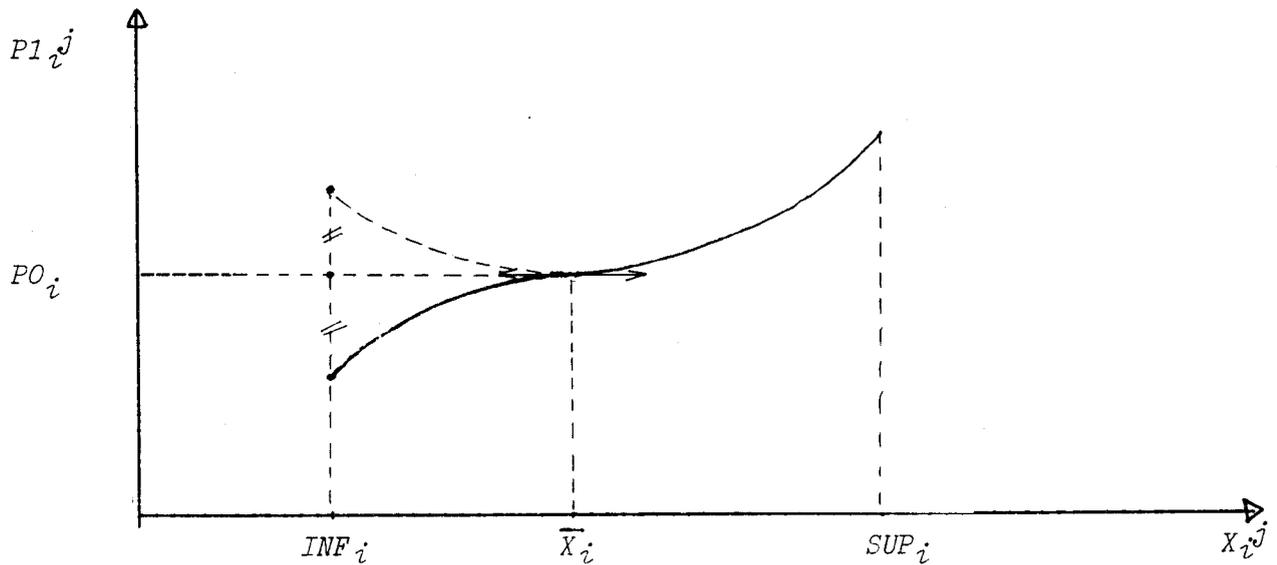


Fig. 5

III-4 Détermination de Q_i et e_i

Le choix de Q_i et e_i permet au décideur de travailler avec une infinité de jeux de poids $P1_i^j$.

La connaissance de l'ordonnée $P1_i^j$ (SUP_i) et de la dérivée $dP1_i^j(SUP_i)/dX_i^j$, ou $P1_i^j$ (INF_i) et $dP1_i^j(INF_i)/dX_i^j$, suffisent à la détermination de Q_i et e_i .

$$\text{Soit : } f(X_i^j) = Q_i \left(\frac{X_i^j - MEDX_i}{D_i} \right)^{e_i}$$

Si $D_i = (SUP_i - MEDX_i)$ par exemple, on a bien :

$f(SUP_i) = Q_i$ qu'on choisit et

$$\frac{df(SUP_i)}{dX_i^j} = \frac{Q_i \times e_i}{D_i} \quad \text{d'où} \quad e_i = \frac{D_i}{Q_i} \times \frac{df(SUP_i)}{dX_i^j}$$

IV - INDICE DE TENDANCE DOMINANTE

Suivant les notations habituelles, soient :

$$X_i = \{X_i^1, X_i^2, \dots, X_i^j, \dots, X_i^{No}\}$$

$$Y_i = \{Y_i^1, Y_i^2, \dots, Y_i^j, \dots, Y_i^{No}\}$$

des scores et les rangs de classements correspondants selon C_i

Soient $P_{1i} = \{P_{1i}^1, \dots, P_{1i}^j, \dots, P_{1i}^{No}\}$ les poids de C_i respectivement à chaque X_i^j .

$$\text{Soit } PY_{i^j} = P_{1i}^j \times Y_i^j \quad (11)$$

Pour chaque opportunité a^j , on définit :

$$S^j = \sum_{i=1}^{M_0} PY_{i^j} = \sum_{i=1}^{M_0} P_{1i}^j \times Y_i^j \quad (12)$$

On pose :

$$S = (S^1, S^2, \dots, S^j, \dots, S^{No}) \quad (13)$$

appelé vecteur "indice de tendance dominante".

D'autres types d'indices peuvent être définis pour servir d'indicateurs de préférence globale. [8] Nous retiendrons ce vecteur S , provenant d'une procédure appelée "pseudo-scrutin irlandais. [39]

V - POUVOIRS DE DECISION DES CRITERES

Nous définissons une nouvelle variable : le pouvoir de décision des critères. Ce pouvoir de décision traduit l'importance relative du rôle joué par chaque critère dans l'obtention de la solution finale : c'est un indicateur discriminant la contribution ou la participation de chaque critère dans l'agrégation.

Diverses formes de pouvoirs P_{2i} sont possibles pour C_i .

V-1 Pouvoir de contribution ou de corrélation.

C'est une première forme possible pour l'expression de PZ_i

a) Taux de contribution ou de corrélation.

En premier lieu, établissons dans quelle mesure exacte le critère C_i contribue à définir la tendance dominante $S = (S^1, \dots, S_j, \dots, S^{No})$ (13). Son taux de contribution est précisé par la corrélation R_i qui existe entre son classement de préférence global PY_i (11) et la tendance dominante S . (13).

Plusieurs types de coefficients permettent de mesurer la "proximité" de ces deux jugements.

Nous retiendrons pour cela des coefficients de corrélation. Leurs expressions et les tests de signification correspondant dans le cas aléatoire, sont présentés par S. Siegle [61] : coefficient de Bravais-Pearson, R , coefficient de corrélation par rang de Spearman, r_s , et de Kendall, τ .

Ces indices de corrélation sont habituellement utilisés pour mesurer des dépendances statistiques entre deux vecteurs X et Y .

Dans SOPHOCLE, nous n'utiliserons pas ces coefficients dans un test de signification. Nous précisons seulement et comparons, grâce à eux, les liaisons et proximités relatives qui existent entre les vecteurs $X = PY_i$ et $Y = S$.

L'expression la plus générale de ces coefficients de corrélation est donnée par le coefficient de Pearson dans M.G. Kendall par exemple [38 a].

$$\text{Soient : } \overline{PY_i} = \frac{1}{No} \sum_{j=1}^{No} P1_i^j \times Y_i^j = \frac{1}{No} \sum_{j=1}^{No} PY_i^j$$

$$\text{et : } \overline{S} = \frac{1}{No} \sum_{j=1}^{No} S_j$$

Alors le coefficient de corrélation R_i liant les préférences du critère C_i aux indices de tendance dominante S^j est donné par :

$$R_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_0} (P_{i^j} \times Y_{i^j} - \bar{P}_{Y_i}) (S^j - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_0} (P_{i^j} \times Y_{i^j} - \bar{P}_{Y_i})^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{N_0} (S^j - \bar{S})^2}} \quad (14)$$

Nous choisissons ce coefficient de corrélation car il est le plus significatif. Il s'exprime en effet à partir d'un produit scalaire et représente le cosinus des deux vecteurs "écarts à la moyenne" de composantes $(P_{i^j} \times Y_{i^j} - \bar{P}_{Y_i})$ et $(S^j - \bar{S})$.

Une simplification de l'expression (14) permet d'aboutir à :

$$R_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_0} P_{i^j} \times S^j - N_0 \times \bar{P}_{Y_i} \times \bar{S}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_0} P_{i^j}^2 - N_0 \times \bar{P}_{Y_i}^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{N_0} S^j^2 - N_0 \times \bar{S}^2}} \quad (15)$$

Le coefficient de corrélation par rangs de Spearman, ρ , et celui de Kendall, τ , qui lui est préférable, peuvent être utilisés quand les vecteurs X et Y sont des vecteurs de classements et d'indices de position, ou qu'ils sont interprétés comme tels.

On trouvera leurs définitions, usages et calculs dans :

[38 b, 52, 51, 61].

b) Pouvoir de contribution

Le poids spécifique d'un critère PO_i ne joue dans une décision multicritère que dans la mesure exacte où il contribue à définir une tendance dominante. Cette mesure contribue à définir le "poids réel" du critère.

Ainsi, nous définissons le "pouvoir de décision" $P2_i$ de chaque critère C_i par l'expression :

$$P2_i = PO_i \times R_i \quad i = 1, 2, \dots, Mo \quad (16)$$

V-2 Pouvoir de participation ou de concordance.

Cette deuxième forme du pouvoir de décision $P2_i$ indique la participation de chaque critère C_i dans la définition de la cohérence des classements Y_j .

Considérons la matrice des classements $\{ Y_{i,j} \}$

a) Taux de concordance de Kendall.

Le degré de cohésion qui existe entre les Mo jugements Y_i ($i=1, Mo$) peut être précisé par le coefficient de concordance W de Kendall [38a, 61, 71] .

$$W = \frac{s}{1/12 \times Mo^2 \times (No^3 - No)} \quad (17)$$

ou :

$$s_j = \sum_{i=1}^{Mo} Y_{i,j} \quad (j=1, No)$$

$$s = \sum_{j=1}^{No} \left(s_j - \frac{\sum s_j}{No} \right)^2$$

Mo = nombre de critères

No = nombre d'opportunités

$1/12 M_0^2 (N_0^3 - N_0)$ = somme sm maximale possible des déviations élevées au carré,

cad. = somme s obtenue dans le cas d'un accord parfait.

Cette formule doit être modifiée s'il existe des exaequos [61] .

b) Pouvoir de participation.

Soit W_i le coefficient de concordance précisant le degré de cohésion qui existerait entre les (M_0-1) jugements restant si le critère C_i n'existait pas.

On peut définir un pouvoir de décision du critère C_i comme suit :

$$P2_i = PO_i \times (W - W_i) \quad (18)$$

Ce pouvoir peut traduire le poids réel du critère C_i , compte-tenu de sa participation dans la définition de la cohérence des classements Y_i .

Le calcul d'un coefficient de concordance à partir de la matrice des classements pondérés PY est possible. Cette adaptation offrirait une nouvelle forme pour $P2_i$.

V-3 Choix d'une expression de $P2_i$.

On pourrait définir un pouvoir de décision sans faire appel à des indices de tendance dominante, en utilisant par exemple, les "coefficients de corrélation partielle par rang" [61.]

Toute définition de $P2_i$ est possible et ce choix est le problème de l'utilisateur de SOPHOCLE. L'important est de dégager avec précision la signification qu'on peut attacher à l'expression formelle du pouvoir $P2_i$.

S O P H O C L E

- ° - ° -

SECOND MODULE

Algorithmes de Transition

Chapitres VI et X.

VI - DECISION MULTICRITERE ET THEORIE DES JEUX.

VI-1 Transition.

Le processus de décision multicritère retenu est défini par la simulation d'une négociation compétitive entre M_0 négociateurs représentant les M_0 critères. [chap .III]

L'agrégation des M_0 critères correspond alors à des formations de coalitions entre négociateurs.

VI-2 Caractérisation des négociateurs.

Le poids d'un critère devient le nombre de voix dont un négociateur peut disposer dans la négociation pour faire prévaloir son classement de préférence : il traduit le poids d'un négociateur. Le classement de préférence Y_i^j représente l'opinion du négociateur C_i . Le négociateur C_i , ayant $P_{1_i}^j$ voix à propos du score X_i^j qu'il classe au rang Y_i^j , le nombre :

$$PY_i^j = P_{1_i}^j \times Y_i^j$$

indique le nombre total d'éléments auxquels le score X_i^j est préféré par C_i .

VI-3 Utilisation de l'indice de tendance dominante.

L'indice S précise la tendance dominante du groupe des négociateurs. Cet indice permet au négociateur C_i de situer son opinion PY_i par rapport à l'ensemble des points de vue du groupe.

Remarque :

La tendance dominante "établit entre les opportunités a^j , une préférence représentée par l'ordre croissant de ces totaux S^j " [39]

S n'est utilisé que comme indicateur, car il n'y a aucune raison pour que les négociateurs acceptent une application brutale de ce mode de formation de coalition.

VI-4 Utilisation des pouvoirs de décision.

Les pouvoirs de décision des critères correspondent aux gains des négociateurs. Chaque négociateur, cherche à marchander ses gains pour réussir à se coaliser avec d'autres négociateurs.

VI-5 Table de correspondance entre concepts.

Décision multicritère	Négociation compétitive
Critères C_i	Négociateurs C_i
Agrégation de critères	Formation de coalitions
Poids du critère C_i	Poids du négociateur C_i (nbre de voix).
Classement Y_i du critère C_i	Opinion du négociateur C_i
Pouvoir de décision P_{2i} de C_i	Gain P_{2i} du négociateur C_i

VII - SIMULATION DE LA NEGOCIATION.

VII-1 Approche du problème.

Toute procédure de négociation doit être définie par des hypothèses acceptées par le décideur.

Les hypothèses de travail que nous introduirons sont en majorité des constatations faites dans des expériences réelles sur les jeux à M personnes. Ces expériences ont été faites par KALISH, NASH,

MILNOR et LERING. Le bilan de leurs travaux est exposé par R. DAVAL [23a]

Ces expériences visaient à éclairer la théorie des jeux à N personnes et de vérifier si les traités théoriques de Von Neuman et Morgenstern [68] correspondent à des attitudes pratiques qui se rencontrent dans l'expérience. Ces expérimentations permirent d'étudier les négociations, le marchandage et la formation de coalitions.

Les conclusions de cette étude nous ont servi à formaliser une procédure de négociation entre joueurs.

VII- 2 Hypothèses de base

Une coalition est un groupe de joueurs "adoptant une manière de jouer concertée entre eux" [23a] .

Cette coalition défend dans la négociation la même opinion.

a) Objectif des négociateurs.

Si l'objectif du négociateur est "maximiser son gain certain", on constate que les coalitions formées sont celles à très fort gain, même si un négociateur qui en fait partie y trouve moins d'avantages personnels que dans une autre coalition qui aurait un gain plus faible".

Le critère de décision réel est donc :

"Maximiser le gain de la coalition à laquelle on peut appartenir".

Sous l'empire de cette motivation unique, chaque négociateur cherche à optimiser, sous certaines contraintes, les formations possibles de coalitions.

b) Les contraintes des négociateurs.

b-1) Le mode de calcul du gain de chaque négociateur et de chaque coalition est imposé au départ par le décideur.

b-2) Les coalitions formées unissent deux négociateurs exactement.

Le partage du gain se fait équitablement entre deux négociateurs.

b-3) Par la suite, il n'y a pas (ou très peu) de marchandage entre un négociateur et un groupe coalisé déjà formé.

Une coalition peut aussi exiger davantage des négociateurs qui veulent y adhérer (partage non équitable).

VIII - FORMULATION DU PROBLEME

VIII-1 Gain des coalitions formées.

Lorsque deux négociateurs C_k et C_l décident de se coaliser, la coalition qu'ils forment acquiert un certain gain. Ce gain est défini par une "fonction caractéristique" à partir du poids que possèdent les deux négociateurs réunis et de l'opinion commune qu'ils adoptent.

Le gain de C_k et C_l coalisés dépend aussi de la position que les négociateurs adverses prennent dans la négociation et plus précisément des coalitions formées dans le sous-ensemble complément de $(C_k \cup C_l)$ par rapport à C , soit $\overline{C_{k1}}$.

La négociation est marquée par plusieurs phases t qui chacune voient au moins la formation d'une coalition. Son processus peut être formalisé suivant un modèle dynamique traduisant l'évolution du système de négociation. [37,65].

VIII-2 Processus

Soit C_t l'ensemble des M_t négociateurs en présence, en fin de phase t ou en début de phase $(t + 1)$ (ces négociateurs sont soit des négociateurs isolés, soit des groupes de négociateurs précédemment coalisés.

A $t = 0$, il n'y a que des négociateurs isolés.

Soit : $P1_t$ la matrice représentant les poids des M_t négociateurs en fin de phase t (ou en début de $t + 1$).

$$P1_t = \left\{ P1_t (I,J) \right\} \text{ avec } I = 1, M_t \text{ et } J = 1, N_0 \quad (19)$$

Soit Y_t la matrice des classements ou opinions des M_t négociateurs en fin de phase t (ou en début de $t + 1$).

$$Y_t = \{Y_t (I,J)\} \text{ avec } I = 1, M_t \text{ et } J = 1, N_0 \quad (20)$$

Soit $P2_t$ le vecteur des gains des M_t négociateurs en présence en fin de phase t (ou début de phase $t + 1$).

$$P2_t = \{P2_t (I)\} \text{ avec } I = 1, M_t \quad (21)$$

Une fonction caractéristique \mathcal{E}_t a défini les gains $P2_t$, à partir des données (19) et (20) :

$$P2_t = \mathcal{E}_t (P1_t, Y_t) \quad (22)$$

ou en utilisant les relations (15) et (16) :

$$\forall t, \forall I \in [1, M_t], P2_t (I) = \mathcal{E}_t (P1 (I)_t, Y (I)_t, S_t) \quad (23)$$

La phase $(t + 1)$ voit au moins une coalition se former. Toutes les coalitions possibles de deux personnes sont envisagées.

Si une coalition $(C_k \cup C_l)$ ou (KL) quelconque se forme, elle modifie la matrice des poids $P1_t$ et celle des classements Y_t .

Les équations de transformation sont :

$$\forall t, \forall KL \begin{cases} P1 (KL)_{t+1} = f_{KL_t} [P1 (K)_t, P1 (L)_t] \\ Y (KL)_{t+1} = g_{KL_t} [Y (K)_t, Y (L)_t] \end{cases} \quad (24)$$

La forme des fonctions f_t et g_t peut dépendre de la nature des coalitions KL formées :

coalitions de négociateurs restés isolés ou de groupes de négociateurs précédemment isolés.

De nouvelles matrices $P1_{t+1}$ et Y_{t+1} sont définies, de dimensions nécessairement inférieures à celles de $P1_t$ et Y_t . Il y a autant de matrices $P1_{t+1}$ et Y_{t+1} que de groupes de coalitions possibles.

Les gains de toutes les coalitions possibles sont calculés :

$$\forall t, \forall (KL), P_{2t+1}(KL) = \mathcal{C}_{t+1} [P_{1t+1}(KL), Y_{t+1}(KL), S_{t+1}] \quad (23)$$

Parmi toutes les coalitions possibles, certaines seulement se forment, en fonction de règles précises : les coalitions à gain maximum. [c.f. troisième module] . Un nouvel état de négociateurs est défini par $[P_{1t+1}, Y_{t+1}]$ tenant compte des coalitions effectivement formées.

Le processus de négociation itératif se poursuit ($t \rightarrow t+1$) jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un parti négociateur à la suite de coalitions successives ($t=T$)

SOPHOCLE est un exemple de modélisation précisant les fonctions f_t , g_t et \mathcal{C}_t .

IX - GAIN DES COALITIONS :

Première phase de négociation :

La première phase de la négociation permet d'aboutir à la formation de m_1 coalitions.

Soit $M_1 = E(M_0/2)$ la partie entière de $M_0/2$.

Il y a au plus M_1 coalitions de 2 personnes qui peuvent se former à partir de M_0 négociateurs. Le nombre possible de coalitions formées vérifie :

$$1 \leq m_1 \leq M_1$$

Les cas $m_1 = 1, m_1 = 2, \dots, m_1 = M_1$ sont donc à envisager.

Supposons m_1 fixe :

Nous pouvons aboutir à différents groupes de coalitions suivant la composition même des m_1 coalitions.

Soit m_2 le nombre total de combinaisons représentant des groupes de m_1 coalitions différents. Ce nombre vérifie :

$$m_2 = C_{M_0}^2 \times C_{M_0-2}^2 \times \dots \times C_{M_0-2m_1+2}^2 / m_1 !$$

Le tableau suivant précise les valeurs de M_2 en fonction des valeurs de M_0 et de M_1 pour $M_0 \leq 6$.

		m 1		
M_0		1	2	3
2	$C_2^2=1$			
3	$C_3^2=3$			
4	$C_4^2=6$		$C_4^2 \times C_2^2/2 = 3$	
5	$C_5^2=10$		$C_5^2 \times C_3^2/2 = 15$	
6	$C_6^2=15$		$C_6^2 \times C_4^2/2 = 45$	$C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2/3 = 30$

Fig. 7

IX-1 Gain d'une coalition dans l'hypothèse $m_1 = 1$

a) L'état initial des négociateurs est :

$$\forall I \in [1, M_0] , (P_1(I)_0 , Y(I)_0)$$

b) Supposons qu'une coalition quelconque $KL = C_k \cup C_l$ se forme.

L'état final de la première phase est :

$$\forall I \in [1, M_0] , I \neq K, L \quad \begin{cases} P_1(I)_1 = P_1(I)_0 \\ Y(I)_1 = Y(I)_0 \end{cases}$$

(25)

Soit $P_1(KL)_1$ le poids de la coalition KL .

Nous supposons ce poids donné par :

$$P_1(KL)_1 = a(K)_0 \times P_1(K)_0 + a(L)_0 \times P_1(L)_0 \quad (26)$$

avec :

$$P_1(KL)_1 = [P_1(KL,1)_1, P_1(KL,2)_1, \dots, P_1(KL,J)_1, \dots, P_1(KL, N_0)_1]$$

Le choix des $a(K)_0$ et $a(L)_0$ est laissé à l'utilisateur de SOPHOCLE, qui peut en particulier normer ou non ces coefficients.

$$[a(K)_0 + a(L)_0 = 1]$$

$A(K)_0 = a(L)_0 = 1$ semble toutefois raisonnable en phase 1.

Soit $Y(KL)_1$ l'opinion de la coalition KL .

Nous supposons cette opinion donnée par :

$$(27) \quad Y(KL)_1 = b(K)_0 \times Y(K)_0 + b(L)_0 \times Y(L)$$

avec :

$$Y(KL)_1 = [Y(KL,1)_1, Y(KL,2)_1, \dots, Y(KL,J)_1, \dots, Y(KL, N_0)_1]$$

Le choix des $b(K)_0$ et $b(L)_0$ est laissé à l'utilisateur de SOPHOCLE.

Dans l'hypothèse $m_1 = 1$, les équations (25), (26) et (27) définissent les fonctions f_0 et g_0 .

c) Pour toute coalition formée (KL) une nouvelle tendance dominante $S(KL)_1$ peut être définie :

$$S(KL)_1 = [S(1,KL)_1, \dots, S(J,KL)_1, \dots, S(N_0,KL)_1]$$

avec $\forall KL, \forall J$:

$$(28) \quad S(J,KL)_1 = S(J)_0 - [PY(K,J)_0 + PY(L,J)_0] + P_1(KL,J)_1 \times Y(KL,J)_1$$

d) Le gain de la coalition (KL) formée peut être calculé par les relations (15) et (16) et cela quel que soit (KL). Ainsi :

$$(29) \quad \forall (KL), P_2(KL)_1 = \mathcal{E}_1(P_1(KL)_1, Y(KL)_1, S(KL)_1)$$

Il y a $m_2 = C_{M_0}^2$ gains $P_2(KL)_1$ à calculer.

Remarque

On prendra dans (16) :

$$(29a) \quad PO(KL)_1 = a(K)_0 \times PO(K) + a(L)_0 \times PO(L)$$

IX-2 Gain d'une coalition dans l'hypothèse $m_1 = 2$

a) L'état initial des négociateurs est :

$$\forall I \in [1, M_0], [P_1(I)_0, Y(I)_0]$$

b) Deux coalitions se forment :

$$KL = C_k \cup C_l$$

$$MN = C_m \cup C_n$$

$$K \neq L \neq M \neq N$$

A la fin de la première phase, l'état des négociateurs est précisé par les équations suivantes :

$$\forall I \in [1, M_0], I \neq K, L, M, N :$$

$$(30) \quad \begin{cases} P_1(I)_1 = P_1(I)_0 \\ Y(I)_1 = Y(I)_0 \end{cases}$$

De plus, les relations (26) et (27) où toutes les coalitions (KL) possibles ont été envisagées, donnent : $\forall KL, K \neq L,$

$$(31) \quad \begin{cases} P_1(KL)_1 = a(K)_0 \times P_1(K)_0 + a(L)_0 \times P_1(L)_0 \\ Y(KL)_1 = b(K)_0 \times Y(K)_0 + b(L)_0 \times Y(L)_0 \end{cases}$$

$$\forall MN, M \neq N, M \neq K, L, N \neq K, L,$$

$$(32) \begin{cases} P1 (MN)_1 = a(M)_0 \times P1(M)_0 + a(N)_0 \times P1(N)_0 \\ Y (MN)_1 = b(M)_0 \times Y(N)_0 + b(N)_0 \times Y (N)_0 \end{cases}$$

c) Pour toute paire de coalition, faite de (KL) et (MN), et notée (KL,MN) ou MN, KL), une tendance dominante $S(KL, MN)_1$ peut être définie :

$$\forall J \in [1, N_0]$$

$$(33) \quad S(J, KL, MN)_1 = S(J)_0 - [PY(K, J)_0 + PY(L, J)_0] - [PY(M, J)_0 + PY(N, J)_0] + \dots \\ \dots + PY(KL, J)_1 + PY(MN, J)_1$$

La relation (33) est une expression symétrique en (KL) et (MN). On a :

$$\forall J \in [1, N_0] , S(KL, MN, J)_1 = S(MN, KL, J)_1$$

D'où encore les deux relations :

$$S(J, KL, MN)_1 = S(J, KL)_1 - [PY(M, J)_0 + PY(N, J)_0] + PY (MN, J)_1$$

et

$$S(J, KL, MN)_1 = S(J, MN)_1 - [PY(K, J)_0 + PY(L, J)_0] + PY(KL, J)_1$$

où $S(J, KL)_1$ et $S(J, MN)_1$ ont été calculés par (28).

d) Les gains des coalitions (KL) et (MN) formées peuvent être calculés par les relations (15), (16) et (29a) :

Ainsi, quels que soient (KL) et (MN) :

$$P2 (KL, MN)_1 = \mathcal{L}_1 [P1(KL)_1, Y(KL)_1, S(KL, MN)_1] \quad (34)$$

gain de (KL) lorsque l'autre coalition formée est (MN).

$$P2(MN, KL)_1 = \mathcal{L}_1 [P1(MN)_1, Y(MN)_1, S (MN, KL)_1]$$

gain de (MN) lorsque l'autre coalition formée est (KL).

Remarque : gain conditionnel

Quand $m_1 = 2$, pour (KL) donnée, la tendance dominante $S(KL, MN)_1$, dépend de la coalition (MN), qu'il est possible de former dans $\overline{C}_{(KL)}$. Par rapport à une coalition (KL) donnée, les coalitions (MN) possibles seront appelées "conjonctures".

Les gains $P2(KL, MN)_1$ sont donc des gains conditionnels : $P2(KL, MN)_1$ est le gain de la coalition (KL) dans la conjoncture (MN).

Il y a $m_3 = C_{M_0}^2 \times C_{M_0-2}^2$ gains conditionnels à calculer, grâce aux relations (15) et (16).

IX-3 Gain d'une coalition: m_1 quelconque.

Une extension des cas précédents est simple.

a) L'état initial des négociateurs est :

$$\forall I \in [1, M_0], \quad [P1(I)_0, Y(I)_0]$$

b) m_1 coalitions se forment, KL, MN, ..., XY, ... , UV :

$$KL = C_k \cup C_l$$

$$MN = C_m \cup C_n$$

$$XY = C_x \cup C_y$$

$$UV = C_u \cup C_v$$

L'état final des négociateurs est :

$$\forall I, I \neq K, L, \dots, X, Y, \dots, U, V :$$

$$P1(I)_1 = P1(I)_0$$

$$Y(I)_1 = Y(I)_0$$

$\forall (X, Y) \in \{KL, \dots, UV\}, X \neq Y$, les relations (26) et (27) donnent :

$$P1(XY)_1, Y(XY)_1$$

Ces valeurs ont été calculées pour $m_1=1$ [chap. IX-1.]

c) Il y a m_2 groupes distincts possibles de m_1 coalitions (KL, MN, ..., XY, ... , UV). Pour tout groupe de m_1 coalitions, une tendance dominante

$S_1(KL, MN, \dots, XY, UV)$ est définie:

$$\forall J, \quad S(J, KL, MN, \dots, XY, \dots, UV)_1 = S(J)_0 - \sum_{xy} [PY(X, J)_0 + PY(Y, J)_0] + \sum_{xy} PY(XY, J)_1$$

Cette expression est symétrique en $KL, MN, \dots, XY, \dots, UV$.

d) Les gains de chaque coalition formée (XY) sont calculés par les relations (15), (16) et (29a). Ainsi :

$\forall (XY),$

$$P_2(XY, KL, MN, \dots, UV)_1 = \mathcal{E}_1 \left[P_1(XY)_1, Y(XY)_1, S(XY, KL, MN, \dots, UV)_1 \right]$$

gain de (XY) lorsque les (m_1-1) autres coalitions formées sont (KL, MN, \dots, UV) .

Remarque : gains conditionnels composés.

Pour m_1 quelconque, pour (XY) donné, la tendance dominante $S(XY, KL, MN, \dots, UV)_1$ dépend des (m_1-1) coalitions KL, MN, \dots, UV , qu'il est possible de former dans $\overline{C_{XY}}$.

Le gain $P_2(XY, KL, MN, \dots, UV)$ est un gain conditionnel "composé" : c'est le gain de la coalition (XY) dans la conjoncture (KL, MN, \dots, UV) .

Pour m_1 quelconque, la conjoncture est composée de plusieurs coalitions.

Il y a m_3 gains conditionnels à calculer, par les relations (15) et (16) :

$$m_3 = C_{M_0}^2 \times C_{M_0-2}^2 \times \dots \times C_{M_0-2m_1+2}^2 / (m_1 - 1) !$$

a) L'état initial des négociateurs est :

$$\forall I \in [1, M_{t-1}], (P1(I)_{t-1}, Y(I)_{t-1})$$

b) En phase t, m_1 coalitions se forment :

$$KL, MN, \dots, XY, \dots UV.$$

L'état final des négociateurs est :

$$\forall I, I \neq K, L, \dots, X, Y, \dots, U, V :$$

$$P1(I)_t = P1(I)_{t-1}$$

$$Y(I)_t = Y(I)_{t-1}$$

$$\forall (XY) \in (KL, \dots, UV), X \neq Y, (P1(XY)_t, Y(XY)_t)$$

peuvent être calculés dans trois cas :

1er cas : $T_{XY} = 1$

X et Y sont deux négociateurs restés isolés.

Les relations (26) et (27) donnent $P1(XY)_t$ et $Y(XY)_t$, avec respectivement comme coefficients :

$$(26) \implies a(X)_{t-1} \text{ et } a(Y)_{t-1}$$

$$(27) \implies b(X)_{t-1} \text{ et } b(Y)_{t-1}$$

2ème cas : $T_{XY} = 2$

X et Y sont deux coalitions précédemment formées : le partage des poids et des classements ou opinions n'est pas identique au premier cas.

Les relations (26) et (27) donnent $P1(XY)_t$ et $Y(XY)_t$ avec respectivement comme coefficients :

$$(26) \implies a(X)_{t-1} \text{ et } a(Y)_{t-1}$$

$$(27) \implies b(X)_{t-1} \text{ et } b(Y)_{t-1}$$

Nous prendrons les mêmes coefficients qu'au premier cas.

3ème cas : $T_{XY} = 3$.

X est une coalition précédemment formée

Y est un négociateur resté isolé.

Les coefficients des relations (26) et (27) sont nécessairement modifiés car la coalition X exige davantage de Y, pour son adhésion, que dans les 2 cas précédents.

Les relations (26) et (27) donnent $P1(XY)_t$ et $Y(XY)_t$ avec respectivement comme coefficients :

$$(26) \implies a'(X)_{t-1} \text{ et } a'(Y)_{t-1} \quad \text{où } a'(Y)_{t-1} \leq a'(X)_{t-1}, \forall t.$$

$$(27) \implies b'(X)_{t-1} \text{ et } b'(Y)_{t-1} \quad \text{où } b'(Y)_{t-1} \leq b'(X)_{t-1}, \forall t.$$

c) Il y a m_2 groupes distincts de m_1 coalitions qui peuvent se former en phase t.

Pour chaque groupe, une tendance dominante $St(KL, \dots, XY, \dots, UV)$ est définie :

$\forall J$,

$$S(J, KL, MN, \dots, XY, \dots, UV)_t =$$

$$S(J)_{t-1} - \sum_{XY} [PY(X, J)_{t-1} + PY(Y, J)_{t-1}] + \sum_{XY} PY(XY)_t$$

Cette expression est symétrique en KL, MN, ...UV.

d) Les gains de chaque coalition formée (XY) sont calculés par les relations (15), (16) et (29a). Ainsi :

$\forall (XY)$,

$$P2(XY, KL, MN, \dots, UV)_t = \mathcal{E}_t [P1(XY)_t, Y(XY)_t, S(XY, KL, MN, \dots, UV)_t]$$

gain de (XY) lorsque les $(m_1 - 1)$ autres coalitions formées sont (KL, MN, ..., UV).

Ce gain est un gain conditionnel composé [cf. remarque chap. IX-3]

S O P H O C L E

TROISIEME MODULE

Algorithmes de négociations

Chapitres XI à XVII.

XI - FORMATION DES COALITIONS EN PHASE t.

XI-1 Données initiales : matrice des gains.

A chaque phase t, toutes les coalitions possibles étant envisagées, les gains de toutes ces coalitions possibles seront représentés dans une matrice de gains $\mathcal{P}2_t$. [Fig. 8]

Cette matrice a pour éléments :

$\mathcal{P}2_t(KL, MN, \dots, XY, \dots, UV)$, gain de la coalition (KL) dans la conjoncture $(MN, \dots, XY, \dots, UV)$.

Les lignes sont indicées par (KL) , $\forall(KL)$.

Les colonnes sont indicées par $(MN, \dots, XY, \dots, UV)$, $\forall(MN, \dots, XY, \dots, UV)$ conjonctures possibles.

Soit C_{t-1} l'ensemble des M_{t-1} négociateurs en début de phase t.

La matrice comporte donc $C_{M_{t-1}}^2$ lignes.

Elle comprend M_1 blocs, chacun précisant les gains conditionnels de (KL) pour un nombre m_1 donné, c'est-à-dire pour des conjonctures de (m_1-1) coalitions. Toutes les cellules de la matrice ne sont pas remplies.

Si $(K \cup L) \in (M, N, \dots, X, Y, \dots, U, V)$ la cellule comprend un "blanc".

Si $K \neq L \neq M \neq N \neq \dots \neq X \neq Y \neq \dots \neq U \neq V$, il y a un élément significatif

$\mathcal{P}2_t(KL, MN, \dots, XY, \dots, UV)$ en place.



$C_{M_t-1}^2$
lignes

	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$...	m_1	M_1
	\emptyset	IJ	...	KL	..	ZT	MN, ..., XY, ..., UV	
IJ							$m_1 \times m_2$ éléments	
								
KL						
								
ZT									

$$C_{M_t-1}^2 \times C_{M_t-1}^2 - 2 \times \dots \times C_{M_t-1-2m_1}^2 + 4 / (m_1 - 1) ; \text{ colonnes}$$

MATRICE DES GAINS DES COALITIONS POSSIBLES : Pz_t (KL, MN, ..., XY, ... UV)

Fig. 8

XI-2 Choix des coalitions formées.

Il reste à préciser suivant quelle règle des coalitions KL se forment effectivement à chaque phase t de la négociation.

Les négociateurs cherchent à maximiser le gain de la coalition à laquelle ils appartiennent et non le leur [chap.VII-2] : cette remarque amène à retenir des règles de formation qui ne tiennent compte que du gain global des coalitions éventuelles et non des gains individuels des négociateurs qui peuvent les constituer.

Les coalitions formées devront donc avoir un "gain maximum".

a) objectifs formels des négociateurs.

Deux cas sont à envisager, suivant que les gains soient conditionnels ou non.

a.1) Pour $1 < M_{t-1} < 4$, les gains ne sont pas conditionnels. La solution retenue est donnée par :

$$\forall t, \text{Max } P_{2t} \text{ (KL)} \quad (35)$$

Seule une règle d'optimalité est prise en compte.

a.2) Pour $M_{t-1} \geq 4$, les gains sont conditionnels.

Toute coalition possible KL cherche à maximiser son gain de négociation. Ce gain dépend de $\overline{C}_{(KL)}$.

KL cherche en effet la conjoncture qui lui assure un gain maximum. Il y a plusieurs possibilités de conjonctures différentes pour KL, qui correspondent à des structures différentes de $\overline{C}_{(KL)}$. Elles sont au nombre de :

$$1 + \sum_{m_1=2}^{M_1} \left[C_{(M_{t-1}-2)}^2 \times C_{(M_{t-1}-2)-2}^2 \times \dots \times C_{(M_{t-1}-2)-2(m_1-1)+2}^2 / (m_1-1)! \right]$$

$$\text{soit } 1 + \sum_{m_1=2}^{M_1} \left[C_{M_{t-1}-2}^2 \times C_{M_{t-1}-4}^2 \times \dots \times C_{M_{t-1}-2m_1+2}^2 / (m_1-1)! \right]$$

L'ensemble de ces conjonctures est $\overline{C}_{(KL)}$

La conjoncture optimale pour KL correspond à une structure particulière de $\overline{C}_{(KL)} : \overline{C}_{(KL)}^*$

Chaque coalition possible KL a ainsi pour objectif :

$$\forall t, \text{Max}_{MN \in \overline{C}_{(KL)}} P2_t (KL, MN) \quad (36)$$

Toutes les coalitions possibles de $\overline{C}_{(KL)}$ ont le même objectif. L'ensemble des coalitions possibles sur C_{t-1} a donc le système d'objectifs suivant :

$$\forall t, \forall (K,L) \in C_{t-1}, \text{Max}_{MN \in \overline{C}_{(KL)}} P2_t (KL, MN) \quad (37)$$

b) Règles de choix.

Deux questions se posent à propos de ce système d'objectifs : un problème de compatibilité et un problème d'optimalité.

b.1) Problème de compatibilité.

Les objectifs des coalitions possibles (KL) sont-ils compatibles entre eux ?

Ils le sont si quelle que soit une coalition (KL) possible, cette coalition a son gain maximum avec une conjoncture MN et si la coalition (MN) a son gain maximum pour la conjoncture (KL).

Si un ensemble de coalitions peuvent se former à partir de C_{t-1} , chaque coalition réalisant son gain maximum maximum, ces coalitions fournissent des "solutions compatibles évidentes".

En général, les objectifs des coalitions possibles sont incompatibles. Un processus de négociation compétitive précisant une ou plusieurs règles de compatibilité, sera défini : des solutions compatibles seront élaborées par négociation.

b.2 Problème d'optimalité.

Il reste à choisir entre les solutions compatibles, "évidentes" ou non, un ensemble optimal de coalitions, c'est-à-dire la structure optimale de C_{t-1} .

Ce choix sera opéré à l'aide d'une règle d'optimalité et indiquera quelles coalitions se formeront effectivement en fin de phase t .

On aboutit ainsi à C_t .

XII - DEFINITION DE C_t POUR $M_{t-1} = 2$.

Ce cas trivial ne peut se rencontrer qu'en phase initiale ($t=0$) ou finale ($t=T$) dans la négociation.

Soient $M_{t-1} = 2$

$$C_{t-1} = \{C_1, C_2\} = C_{T-1}$$

$$C_1 = 1, C_2 = 2$$

$$m_1 = m_2 = 1$$

Une seule coalition est possible : elle se forme :

$$\text{Soit } C_T = \{C_1 \cup C_2\}$$

Il n'y a donc pas lieu de déterminer la matrice de gains $\mathcal{P}2_T$:

	$m_1 = 1$
	\emptyset
12	$\mathcal{P}2_T (12)$

Le classement final est donné par la relation (27).

XIII - DEFINITION DE C_t POUR $M_{t-1} = 3$: ALGORITHME DE CHOIX A_3

Soient $M_{t-1} = 3$

$$C_{t-1} = \{C_1, C_2, C_3\}$$

$$C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 3$$

$$\begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 3 \end{cases}$$

Les données initiales sont données par $\mathcal{P}2_t$:

	MN
	m ₁ =1
	∅
KL	12 P2 _t (12)
	13 P2 _t (13)
	23 P2 _t (23)

La coalition qui se forme est donnée par :

$$\underset{KL}{\text{Max}} \quad P2_t(KL) \quad (38)$$

Ce critère d'optimalité pour la décision D_t permet d'aboutir à un ensemble C_{t-1} de deux négociateurs.

Exemple

	$m_1 = 1$	
	\emptyset	
KL	12	8
	13	11
	23	7

$$\text{Max}_{\text{KL}} P2_t(\text{KL}) = P2_t(13) = 11$$

KL

La coalition $(C_1 \cup C_3)$ se forme.



TROISIEME MODULE (suite)

Négociation de 4 négociateurs.

Chapitres XIV à XVII.

XIV - DEFINITION DE C_t POUR $M_{t-1} = 4$: ALGORITHME DE CHOIX A_4

Soient $M_{t-1} = 4$

$$C_{t-1} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$$

$$C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 3, C_4 = 4$$

$$\begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = 5 \end{cases}$$

Les données initiales sont représentées par $\mathbb{P}2_t$:

		MN					
	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$					
	\emptyset	12	13	14	23	24	34
KL	12						
	13						
	14						
	23						
	24						
	34						

Fig. 11

Avec $M_{t-1} = 4$ apparaissent les gains conditionnels.

L'ensemble des coalitions possibles sur C_{t-1} a pour objectif :

$$\forall (C \text{ k } \cup C_1) \in C_{t-1}, \quad \text{Max}_{MN} \quad \mathbb{P}2_t (KL, MN)$$

XIV - 1 Détermination des solutions compatibles :

Principe de la négociation

Pour $M_{t-1} \gg 4$, toute coalition possible KL joue deux rôles [Fig.12.]

D'après le système d'objectifs (39), KL cherche la conjoncture MN^* qui lui assure un gain maximum $P2_t(KL, MN^*)$.

Le gain de MN^* avec KL pour conjoncture, $P2_t(MN^*, KL)$ n'est pas nécessairement optimal.

KL peut être lui même la conjoncture KL^* qui assure à une coalition IJ son gain maximal. Le gain de KL^* avec IJ comme conjoncture n'est pas nécessairement optimal.

Si IJ fait un appel d'offre à sa conjoncture optimale KL^* , le gain éventuel de KL^* , $P2_t(KL^*, IJ)$ est certain. Lorsque KL fait un appel d'offre à MN^* , son gain éventuel, $P2_t(KL, MN^*)$, est conditionnel : KL réalisera son gain optimal à la condition que MN ne trouve pas de meilleure conjoncture que KL.

Le but de la coalition KL est d'obtenir dans la négociation de la phase t le "meilleur compromis entre ces deux gains" :

$$P2_t(KL^*, IJ) \text{ et } P2_t(KL, MN^*)$$

Apparaît ici la dynamique du processus de négociation compétitive. [Fig.12]

La phase t est marquée par des "étapes de calculs" ou "rangs".

- Rang R : La coalition IJ cherche sa conjoncture optimale KL^* [objectif (39)]
Recherche et calcul de $P2_t(IJ, KL^*)$.

Par définition le rang R est impair : étape "stair"

Passage du rang R au rang (R+1) : Appel d'offre de IJ à KL^* .

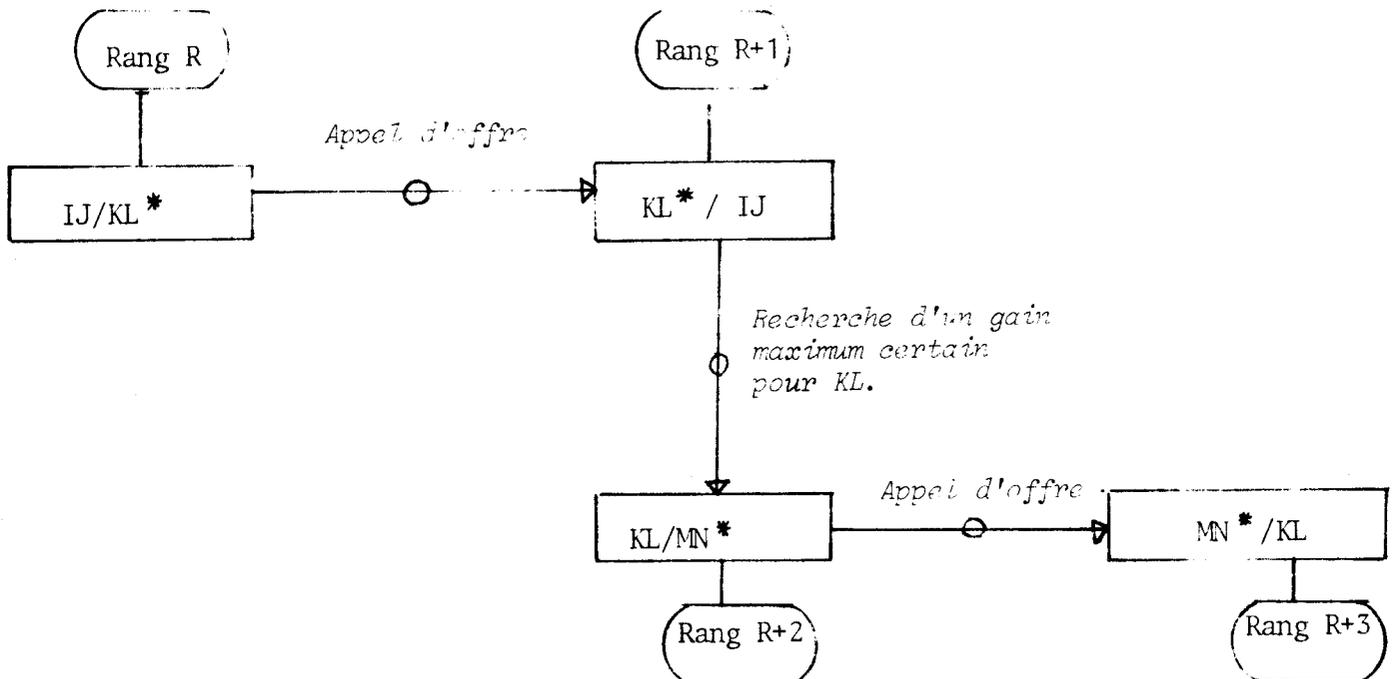
- Rang (R+1) : La coalition KL^* examine l'offre de IJ.
Calcul de $P2_t(KL^*, IJ)$

Le rang (R+1) est pair : étape "step".

- Rang (R+2) : La coalition KL cherche sa conjoncture optimale MN^* [objectif (39)]
Recherche et calcul de $P2_t(KL, MN^*)$

Le rang (R+2) est impair : étape "stair".

Ce schéma est le principe directeur de tout processus de négociation compétitive pour $M_{t-1} \geq 4$. [Fig.12]



- Figure 12 -

XIV-2 Application du principe

Son application pour $M_{t-1} = 4$ reste très simple.

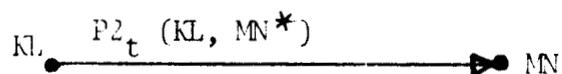
Considérons la matrice $P2_t$ et le système d'objectifs :

$$\forall KL, \text{Max}_{MN} P2_t(KL, MN)$$

Soit :

$$\text{Max}_{MN} P2_t(KL, MN) = P2_t(KL, MN^*)$$

Cette information peut être représentée par un graphe de préférences [36]. Chaque sommet est une coalition possible. Tout arc reliant KL à MN signifie que MN est la conjoncture optimale MN^* pour KL. A cet arc est attaché la valeur $P2_t(KL, MN^*)$.



La figure suivante, Fig. 13, représente le graphe de préférences correspondant à cet exemple de données :

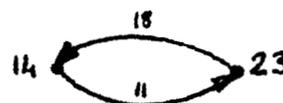
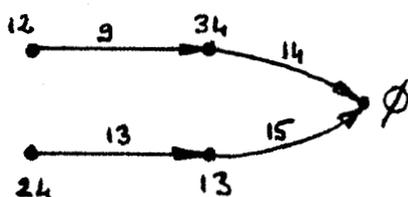
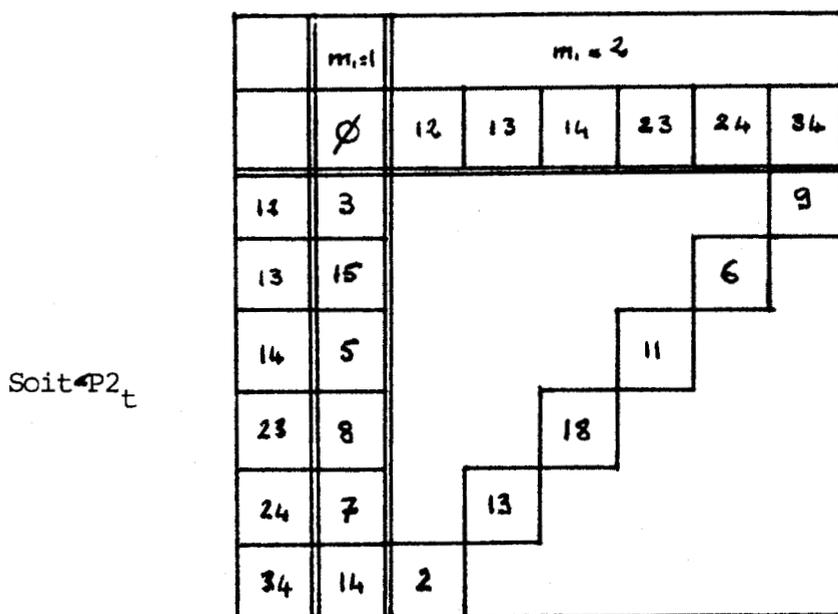


Fig. 13 Représentation sajitale de la matrice $P2_t$.

Un tel graphe visualise bien les problèmes d'incompatibilité.

La conjoncture 34 optimale pour 12 a son gain maximum pour $m_1 = 1$. Il en va de même pour la conjoncture 13 et la coalition 24.

Les coalitions 14 et 23 sont en revanche compatibles.

Les solutions compatibles évidentes apparaissent de deux façons dans cette représentation.

Les sommets adjacents au sommet \emptyset en définissent une partie. L'autre est précisée par les "circuits élémentaires simples" de deux sommets (ou deux arcs) [36.]

L'algorithme "step and stair" fournit simultanément les "solutions compatibles évidentes" et "négoiciées".

XIV-5 Algorithme "step and stair" : Notations.

Soit $\mathcal{P}2_t = G$ avec

$$\mathcal{P}2_t(KL, MN) = G(I, J)$$

$$I = 1, \dots, k \quad J = 0, \dots, k$$

Pour $M_{t-1} = 4$, $I = 1 \text{ à } 6$, $J = 0 \text{ à } 6$.

	MN	\emptyset	12	13	14	23	24	34
KL	I \ J	0	1	2	3	4	5	6
12	1							
13	2							
14	3							
23	4							
24	5							
34	6							

Fig. 14

Soient

$$\text{MAX } (I) = \text{Max}_{\text{MN}} P2_t (KL, MN) = \text{Max}_J G(I, J) = G(I, J^*)$$

et

$$\text{JMAX } (I) = J^*$$

J^* sera supposé unique, $\forall I$.

Soient $X(R)$ l'indice de ligne définissant la coalition I de l'étape de calcul ou rang R .

$Y(R)$ l'indice de colonne définissant la conjoncture J du rang R .

La coalition $[X(R), Y(R)]$ est une solution "possible".

XV - ALGORITHME " STEP AND STAIR " POUR $M_{t-1} = 4$.

XV-1 Hypothèses fondamentales.

a) Aucune coalition n'a la possibilité de s'imposer. Si une coalition se forme, c'est par un consensus entre les négociateurs en présence fondé sur le système d'objectifs. (37)

b) Chaque coalition ne tient compte que des appels d'offres où elle est directement concernée.

Autrement dit, les négociateurs composites n'intègrent dans leurs stratégies que les résultats des rangs où ils sont présents.

Cette hypothèse, interdit aux coalitions d'utiliser le modèle de comportements de l'algorithme pour adopter une "stratégie mixte" au second degré. Seules, les "stratégies pures" sont utilisées [23a].

c) Soit le système d'objectifs :

$$\forall KL, \text{Max}_{\text{MN}} P2_t (KL, MN) \\ \overline{\text{MNEC}}_{(KL)}$$

Rien ne permet à priori de présumer l'existence de solutions compatibles satisfaisant globalement à ce système [chap.XI.2.b]

Ce dernier doit donc être décomposé.

Chaque coalition possible $I = KL$ entame un processus de négociation pour chercher à réaliser sa conjoncture optimale.

Ce processus fournit éventuellement une solution à l'objectif :

$$\text{Max}_{MN \in \overline{C}_{(KL)}} P2_t(KL, MN)$$

sous les contraintes :

$$\forall MN \in \overline{C}_{(KL)}, \text{Max}_{OP \in \overline{C}_{(MN)}} P2_t(MN, OP)$$

Il a autant de processus de négociation engagé que de coalitions $I = KL$ possibles.

$$\forall KL, \left\{ \begin{array}{l} R=1 \\ KL/MN^* \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} R=2 \\ MN^*/KL \end{array} \right\}$$

↓

La solution compatible éventuelle de chaque processus entamé par KL est fournie par KL et sa conjoncture optimale $MN^* : \{KL, MN^*\}$

A chaque processus, seule la formation effective des deux coalitions des rangs R=1 et R=2 est possible. Les autres formations pouvant apparaître en cours du processus sont virtuelles.

XV-2 Déroulement.

a) Algorithme préliminaire

Des calculs préliminaires sont nécessaires pour préparer les données d'entrée de l'algorithme. [Fig.15.]

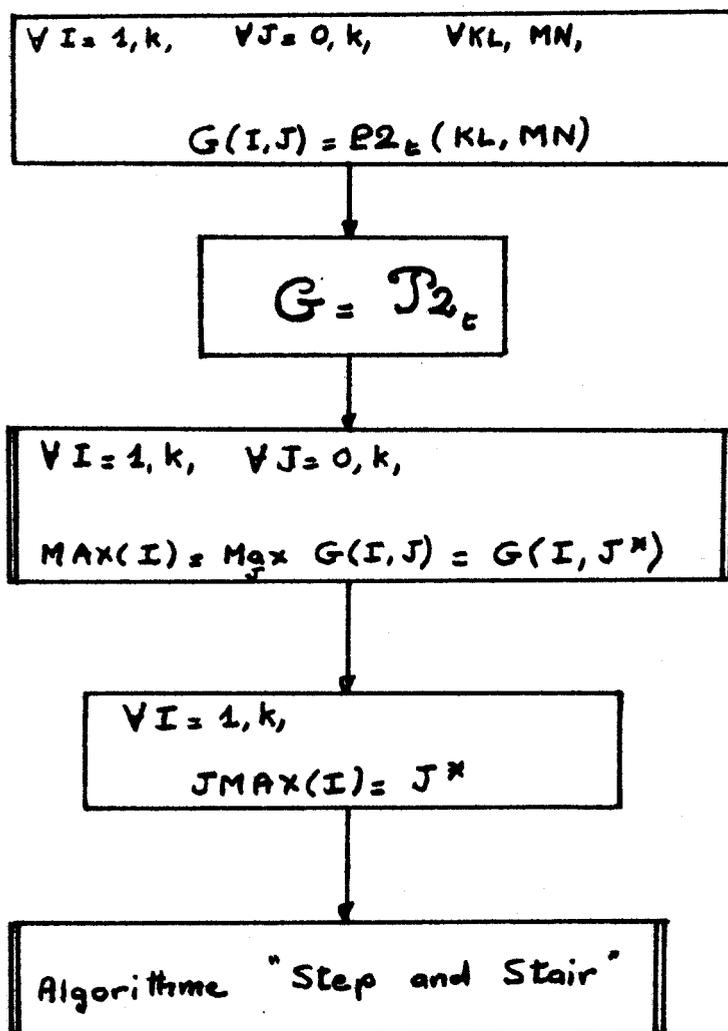


Fig. 15



L'algorithme comprend plusieurs types de procédures numériques.

b) Séquence principale.

Des blocs de calculs [Fig. 16] assurent la progression de l'algorithme par rangs, suivant le principe directeur précédemment énoncé. [Chap. XIV.1 fig.12]

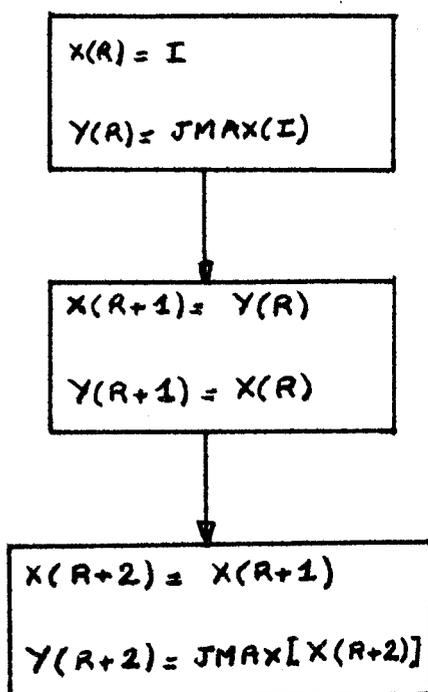


Fig. 16

Rang R, impair : la coalition d'indice I cherche sa conjoncture optimale d'indice $JMAX(I)$.

Rang (R+1), pair : la coalition d'indice $JMAX(I)$ examine l'offre de la coalition I.

Rang (R+2), impair : la coalition d'indice $JMAX(I)$ recherche à son tour la conjoncture optimale $\{JMAX [JMAX (I)]\}$.

A partir de la coalition $X(R) = I$, l'avancement de la négociation s'opère ainsi

Fig.17 :

Soient $I, J, K \in \{0, 1, \dots, k\}$

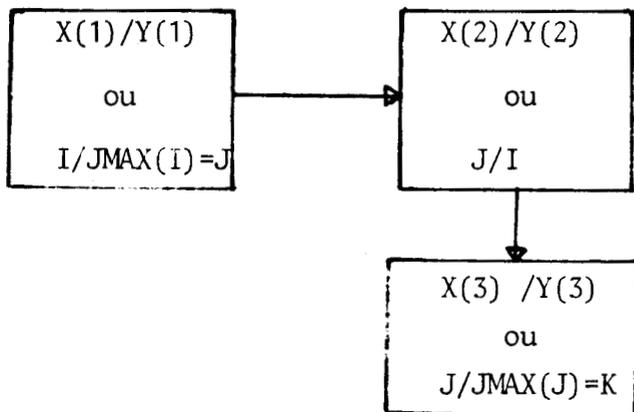


Fig. 17

Des tests sont chargés d'assurer les arrêts éventuels de l'algorithme.

c) Séquence d'arrêt définitif (A.D.)

La négociation permet à chaque coalition, $I = 1$ à k , de chercher sa conjoncture optimale. L'algorithme cesse définitivement sa progression lorsque toutes les coalitions ont mené cette recherche. La séquence suivante [Fig.18] contient un test d'arrêt définitif :

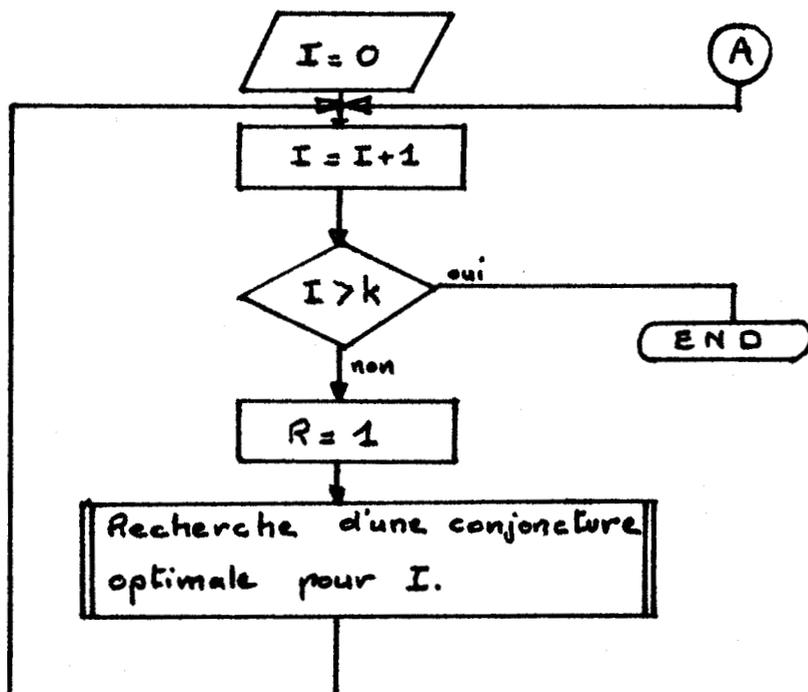


Fig. 18 Test : A.D.

d) Séquence des "maxima réciproques" (M.R)

Un premier test d'arrêt partiel peut stopper la progression par rangs de l'algorithme = le test des "maxima réciproques".

Soit $R=1$. Considérons les rangs $R, (R+1), (R+2)$ et la progression Fig.19 .

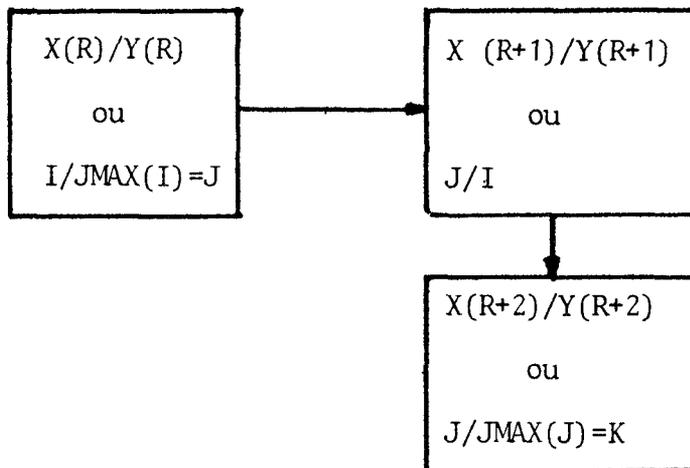


Fig. 19

La coalition I a pour conjoncture optimale la coalition J. Si la coalition J a pour conjoncture optimale la conjoncture I, c'est-à-dire $K = I$, alors les coalitions I et J satisfont au "test des maxima réciproques " [Fig.20] .

On a $Y [R+2] = Y (R+1)$, soit :

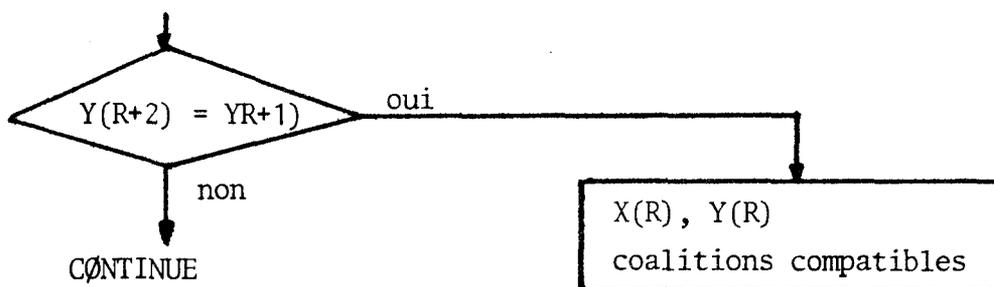


Fig. 20 Test M.R.

e) Séquence de la "conjoncture vide" (C.V.)

Un test doit préciser si une coalition $X(R)$ a son gain maximum quand $m_1=1$, ce qui arrête momentanément la progression de l'algorithme. [Fig.21]

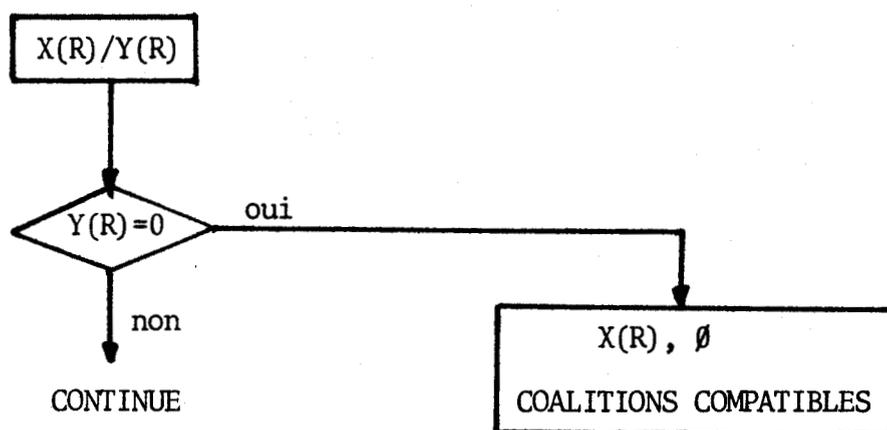


Fig. 21 Test C.V.

Ce test est nécessaire au rang R. Il est inutile au rang (R+2) où il ferait double emploi avec le test des maxima réciproques.

f) Séquence de sortie.

Les résultats du processus de négociation entamé par la coalition I sont précisés dans cette séquence.

Ils peuvent être :

$$\begin{cases} X(1) \\ \text{COALITION IMPOSSIBLE} \end{cases}$$

ou $\begin{cases} X(1), \emptyset \\ \text{COALITIONS COMPATIBLES} \end{cases}$ (chap. XV.2.e)

ou $\begin{cases} X(1), Y(1) \\ \text{COALITIONS COMPATIBLES} \end{cases}$ (chap. XV.2.d)

On remarque que, si les résultats "X(1), Y(1), coalitions compatibles" et "Y(1), X(1), coalitions compatibles" sortent, alors la solution $\{X(1), Y(1)\}$ est une solution compatible évidente.

Par ailleurs, toute solution "X(1), \emptyset , coalitions compatibles" est évidente.

Pour $M_{t-1} = 4$, l'ensemble des solutions compatibles ne peut être vide : certaines coalitions peuvent effectivement réaliser leur gain maximum maximorum.

XV-3 Organigramme.

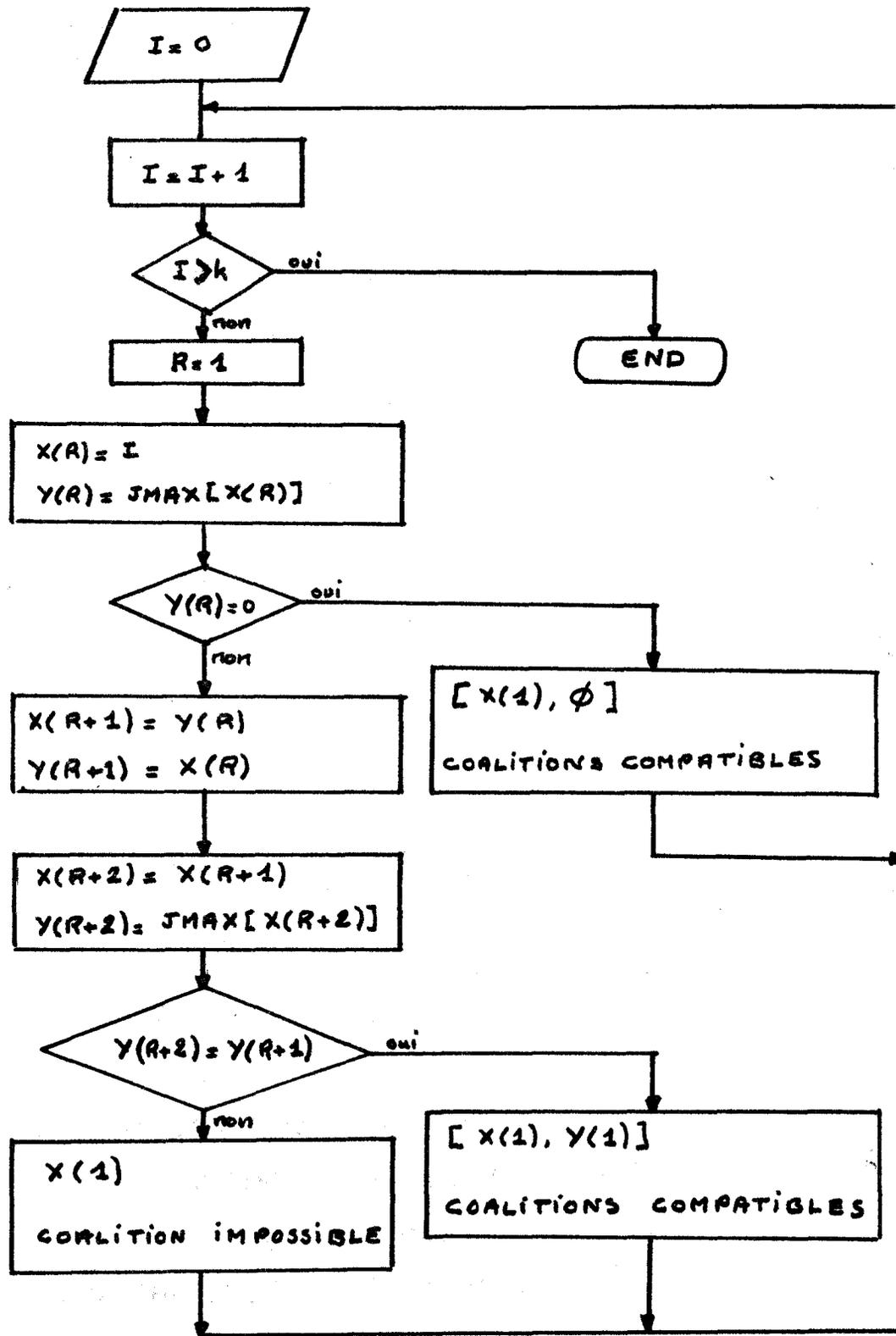


Fig. 22

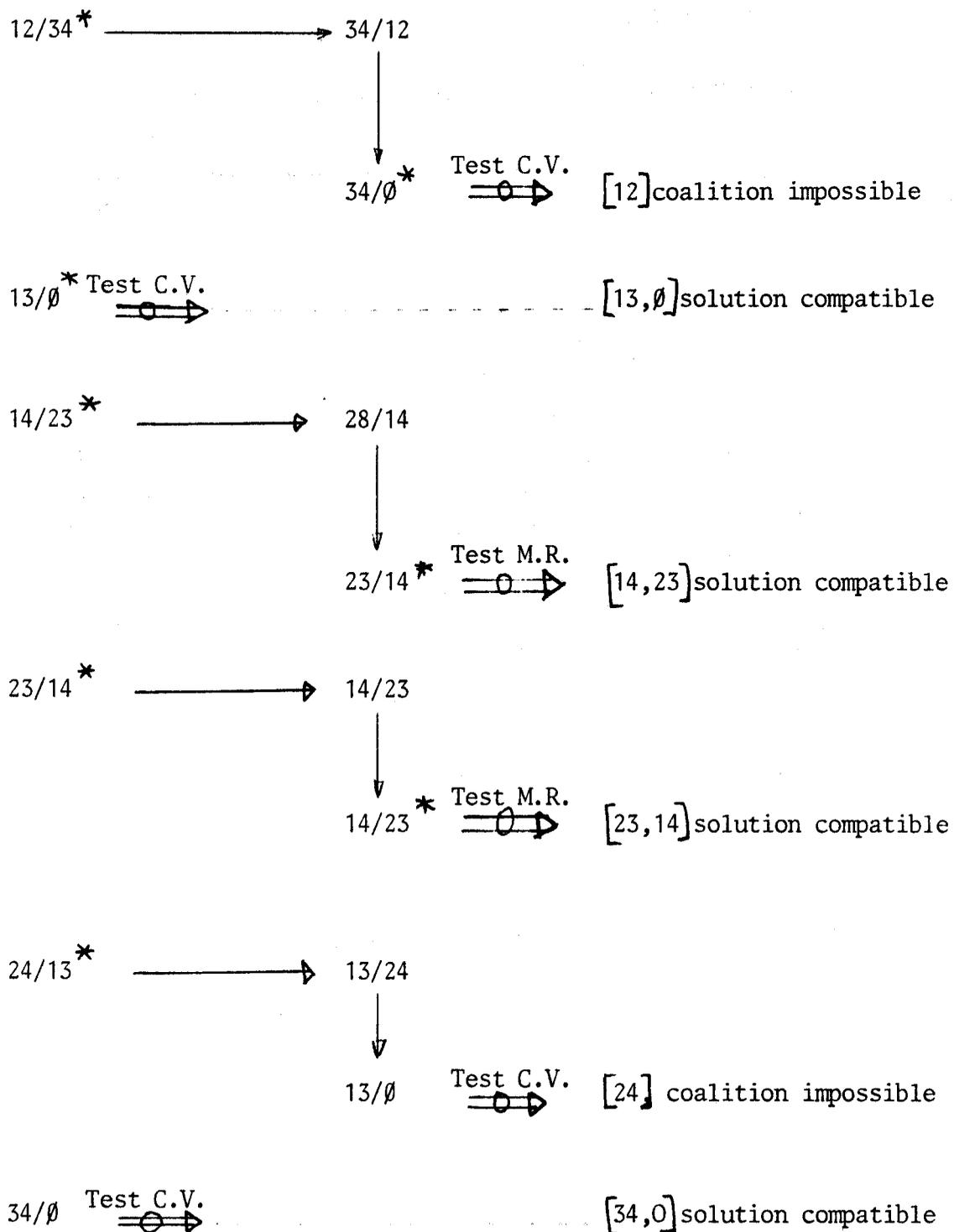


Fig. 23



L'ensemble des solutions compatibles est donc $\{[13, \emptyset], [34, \emptyset], [14, 23]\}$

Il reste à choisir sur ce domaine réalisable une solution optimale.

XVI - DETERMINATION DE LA SOLUTION OPTIMALE.

Sur l'ensemble des solutions compatibles une "fonction économique" G est définie.

$$\forall (KL, MN), G [P2_t (KL, MN), P2_t (MN, KL)]$$

La solution optimale est fournie par le critère :

$$\text{MAX}_{(KL, MN)} G [P2_t (KL, MN), P2_t (MN, KL)]$$

Les critères utilisés dérivent des critères de choix classiques en avenir incertain et peuvent relever de la théorie des jeux.

XVI-1 Le critère du gain maximum.

La fonction économique utilisée est :

$$\forall (KL, MN), \text{coalitions compatibles.}$$

$$G [P2_t (KL, MN), P2_t (MN, KL)] = \text{SUP} [P2_t (KL, MN), P2_t (MN, KL)]$$

avec

$$P2_t (KL, \emptyset) = P2_t (\emptyset, KL) = P2_t (KL)$$

La solution optimale est donnée par :

$$\text{Max}_{(KL, MN)} \left\{ \text{SUP} [P2_t (KL, MN), P2_t (MN, KL)] \right\}$$

Dans l'exemple numérique précédent [chap.XV.4.] ce critère retient la solution [14, 23] comme optimale : $C_t = \{C_1 \cup C_4, C_2 \cup C_3\}$

XVI.2 Le critère de la moyenne

Soit la fonction économique :

$$\forall (KL, MN) \text{ coalitions compatibles}$$

$$G[P2_t(KL, MN), P2_t(MN, KL)] = P2_t(KL, MN) + P2_t(MN, KL)$$

avec :

$$P2_t(KL, \emptyset) = P2_t(\emptyset, KL) = P2_t(KL)$$

La solution optimale est donnée par :

$$\text{Max}_{(KL, MN)} [P2_t(KL, MN) + P2_t(MN, KL)]$$

Dans l'exemple numérique précédent [chap. XV.4] , la solution $[13, \emptyset]$ devient optimale : $C_t = \{C_1 \cup C_3, C_2, C_4\}$

Ce critère de la moyenne peut aussi être utilisé pour départager les éventuels ex-aequos que fournirait le critère du gain maximum.

XVI.3 Remarque

Les données initiales sont portées dans Φ_2 .

La nature de cette matrice de gains (coalitions-conjonctures) suggère l'emploi de critères de choix en avenir incertain : critères de HURWICZ , LAPLACE, WALD ou SAVAGE. [59,69].

Néanmoins, ces critères ne peuvent être utilisés que si tous les évènements qui peuvent arriver ont la même vraisemblance d'apparition pour le décideur. Or, dans SOPHOCLE, ce n'est pas le cas. Chaque coalition en effet, est capable de voir si une conjoncture est plus vraisemblable qu'une autre.

Pour la coalition (KL), la conjoncture (MN) est plus vraisemblable que la conjoncture (OP) si :

$$P2_t(MN, KL) > P2_t(OP, KL)$$

Pour cette raison, il n'est pas possible d'utiliser directement les critères de choix classiques en avenir incertain. Cependant, une adaptation est possible. Ainsi par exemple, peut-on voir dans le critère du gain maximum une analogie avec le critère de HURWICZ et dans celui de la moyenne une adaptation du critère de LAPLACE.

XVII- ALGORITHME DE CHOIX A₄

L'organigramme suivant, [Fig. 24] réunit :

- Recherche des solutions compatibles
- Détermination des solutions optimales.

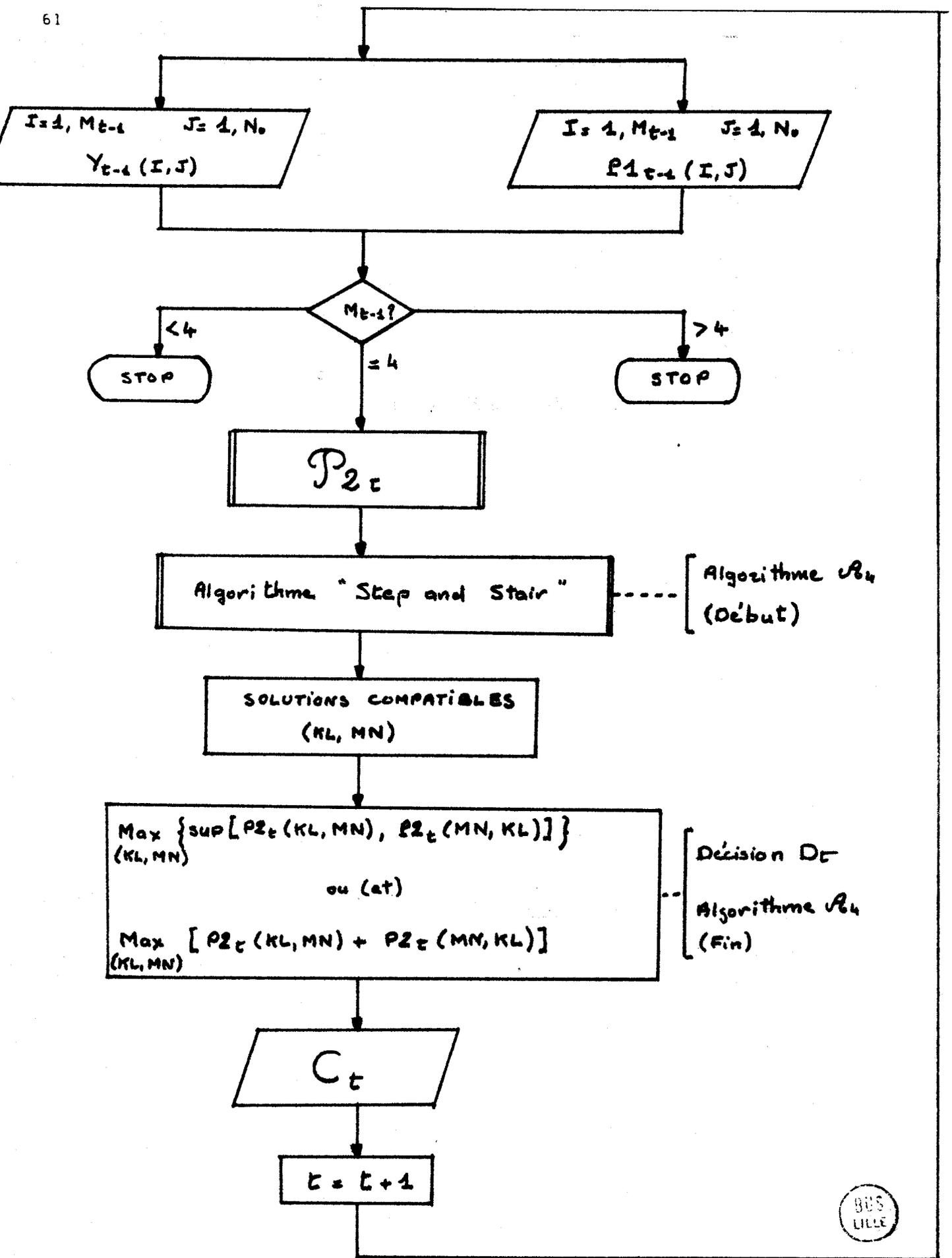


Fig. 24

TROISIEME MODULE (suite)

Négociation de 5 négociateurs.

Chapitres XVIII à XXI.

XVIII - DEFINITION DE C_t POUR $M_{t-1} = 5$: ALGORITHME DE CHOIX A_5

Soient : $M_{t-1} = 5$

$$C_{t-1} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$$

$$C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 3, C_4 = 4, C_5 = 5$$

$$\begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = 15 \end{cases}$$

Les données initiales sont représentées par $\mathcal{P}2_t$:

	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$									
	\emptyset	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45
12											
13											
14											
15											
23											
24											
25											
34											
35											
45											

Fig. 25

L'ensemble des coalitions possibles sur C_{t-1} a pour objectif :

$$\forall t, \forall (C_k \cup C_l) \in C_{t-1}, \text{Max}_{MN} P2_t (KL, MN) \quad (40)$$

XVIII.1 Détermination des solutions compatibles :

Principe de la négociation. Applications.

Le principe directeur du processus de négociation compétitive pour $M_{t-1} = 5$ reste celui du cas précédent [chap. XIV.1, fig. 12]

Considérons la matrice $P2_t$ et le graphe de préférences associé à cette matrice en fonction du système d'objectifs [chap. XIV.2]

La figure suivante, [Fig. 26] en donne l'exemple.

	$m_1=1$	$m_1=2$									
	\emptyset	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45
12	8								13	6	9
13	10						17	5			11
14	9					3	14	14		10	
15	11					22	12		7		
23	10			15	8						20
24	7		12	13	6					19	
25	9		21	13					4		
34	16	18			20			2			
35	14	11		21			15				
45	15	6	17			19					

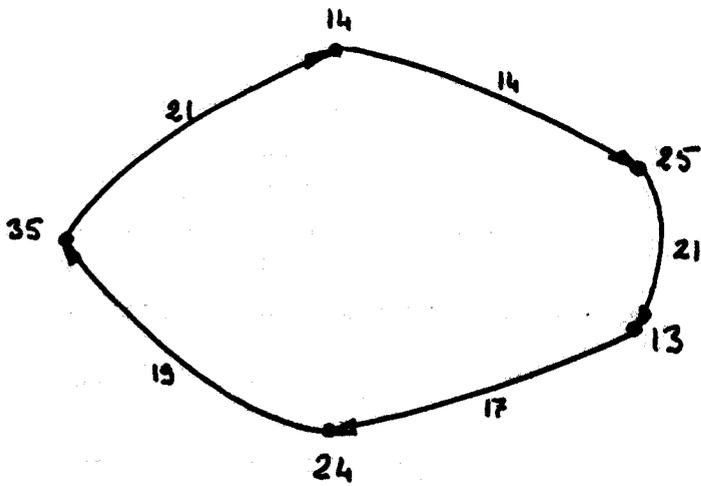
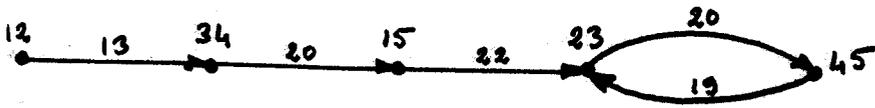


Fig. 26

Représentation sagittale de la matrice \mathcal{P}_{2t} .



Cet exemple présente une "solution compatible évidente" avec le circuit élémentaire simple : (23,45).

L'existence de telles solutions est absolument fortuite. Le graphe précédent le montre bien.

Supposons en effet que l'arc $(\bullet^{45} \longrightarrow \bullet^{23})$ n'existe pas et soit remplacé par un arc (45,12). Le graphe serait alors constitué de deux circuits élémentaires simples : (12,34, 15, 23, 45) et (14, 25,13,24, 35)

Une telle situation, "bloquée", amène et justifie la définition d'un processus de négociation compétitive nécessaire pour lever les incompatibilités (algorithme "step and stair").

XVIII.2 Algorithme "step and stair" : notations

Soit $\mathcal{P}_t = G$ avec

$\mathcal{P}_t (KL,MN) = G(I,J)$

$I = 1, \dots, k \quad J = 0, \dots, k$

Pour $M_{t-1} = 5, I = 1 \text{ à } 10, J = 0 \text{ à } 10.$

	MN	\emptyset	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45
KL	I \ J	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	1											
13	2											
14	3											
15	4											
23	5											
24	6											
25	7											
34	8											
35	9											
45	10											

Fig. 27

Soient $MAX1(I) = \max_{MN} P2_t(KL, MN) = \max_J G(I, J) = G(I, J^*)$ $JMAX1(I) = J^*$

Soient $MAX2(I) = \max_{J \neq J^*} G(I, J) = G(I, J^{**})$ $JMAX2(I) = J^{**}$

Soient $MAX3(I) = \max_{J \neq J^*, J^{**}} G(I, J) = G(I, J^{***})$ $JMAX3(I) = J^{***}$

VI, on supposera J^*, J^{**} et J^{***} uniques.

Soient $X(R)$ l'indice de ligne définissant la coalition I au rang R .

$Y(R)$ l'indice de colonne définissant la conjoncture J au rang R .

Les coalitions $X(R), Y(R)$ sont une solution possible.

XIX - ALGORITHME "STEP ANS STAIR" POUR $M_{t-1} = 5$.

XIX.1 Hypothèses fondamentales.

Pour $M_{t-1} = 5$, les hypothèses fondamentales du chap. XIV.1 ($M_{t-1}=4$) restent valables. Mais il y a lieu d'ajouter certaines hypothèses nouvelles.

- Aucune coalition n'a la possibilité de s'imposer [chap.XV.1a]
- Chaque coalition ne tient compte que des appels d'offres où elle est directement concernée [chap. XV.1b]
- Chaque coalition $I = KL$ entame un processus de négociation pour chercher à réaliser son gain maximum [chap.XV.1.c]

A chaque processus, seule la formation effective des deux coalitions des rangs $R=1$ et $R=2$ est possible. Les autres formations pouvant apparaître au cours du processus sont virtuelles.

- Hypothèse de 'non-loyauté' des négociateurs. Pour $M_{t-1}=5$, un cas nouveau apparaît : si $m_1=2$, il y a quatre conjonctures possibles MN pour chaque coalition KL .

Considérons en effet le schéma du principe directeur de la négociation [Fig.28]

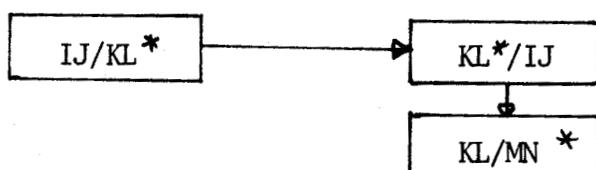


Fig.28

Quelles sont les possibilités pour MN^* ?

$MN^* = \emptyset$ et $MN^* = IJ$ sont possibles, comme dans le cas $M_{t-1} = 4$.

Il reste deux cas possibles, tels que certainement :

$(I \in MN^* \text{ et } J \notin MN^*)$

ou

$(J \in MN^* \text{ et } I \notin MN^*)$

Peut-on envisager ces deux possibilités ? Lorsque la coalition IJ fait un appel d'offre à (KL) , la coalition (KL) peut-elle envisager à son tour une conjoncture comprenant I ou J ?

Cette hypothèse sera retenue dans l'algorithme : elle est en accord avec les hypothèses b) et c), et le système d'objectifs des coalitions . Donc : Quel que soit le rang R impair de la négociation, toute coalition possède quatre conjonctures possibles.

XIX.2 Déroulement

a) Algorithme préliminaire.

L'organigramme suivant correspond à la préparation des données [Fig.29]

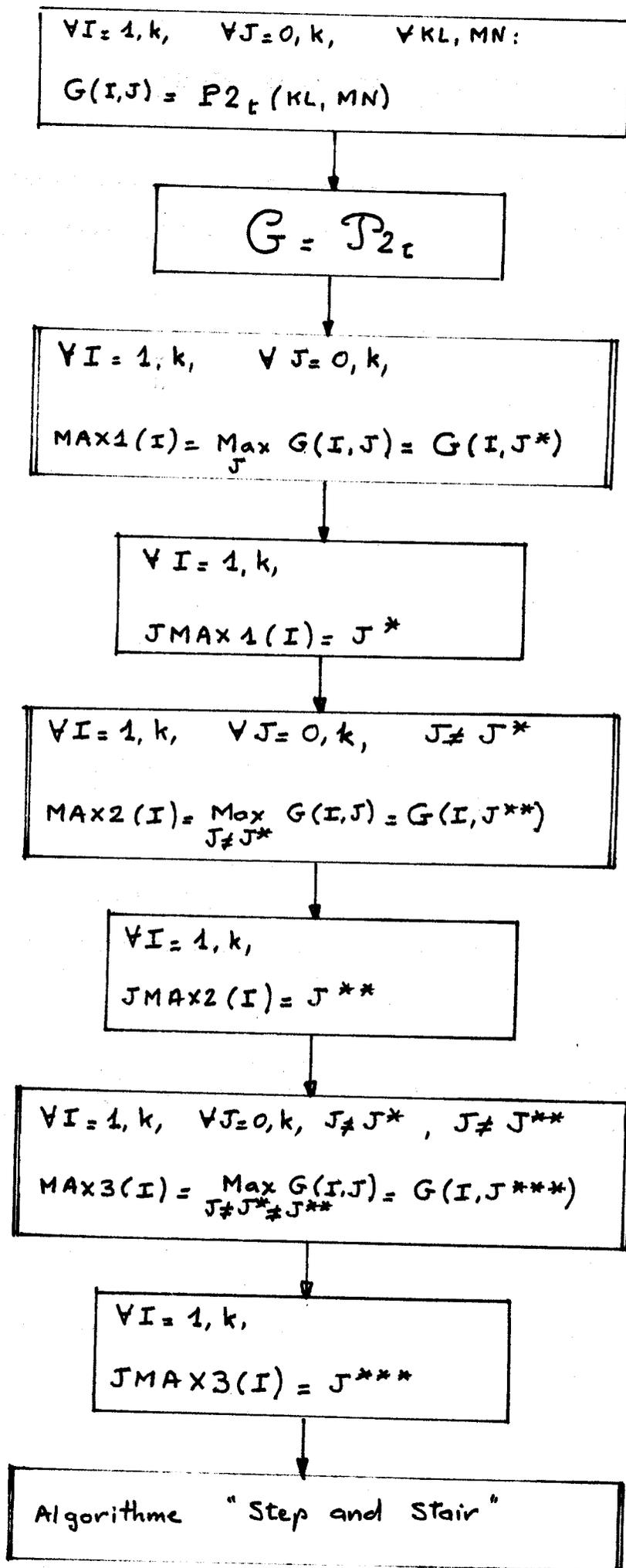


Fig. 29



L'algorithme comporte sept séquences de calculs.

b) Séquence principale

Le principe directeur de la négociation est toujours formalisé en trois blocs de calculs principaux qui assurent la progression de l'algorithme (Fig. 30).

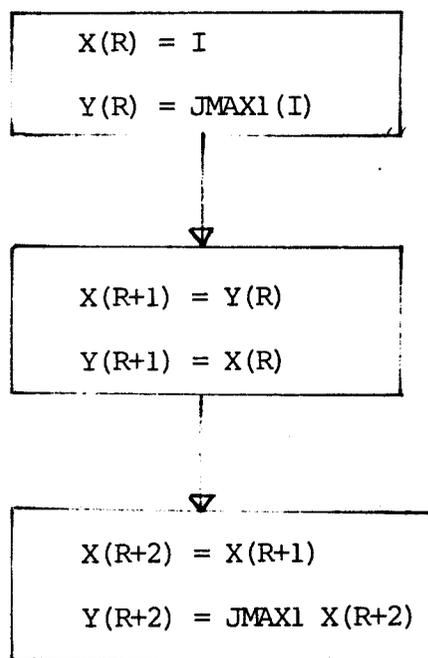


Figure 30 Séquence principale

A partir de la coalition $X(R) = I$, l'avancement de la négociation se déroule comme suit (Fig.31).

Soit $I, J, K, L, \dots, X, Y, Z, \dots \in \{0, 1, \dots, k\}$

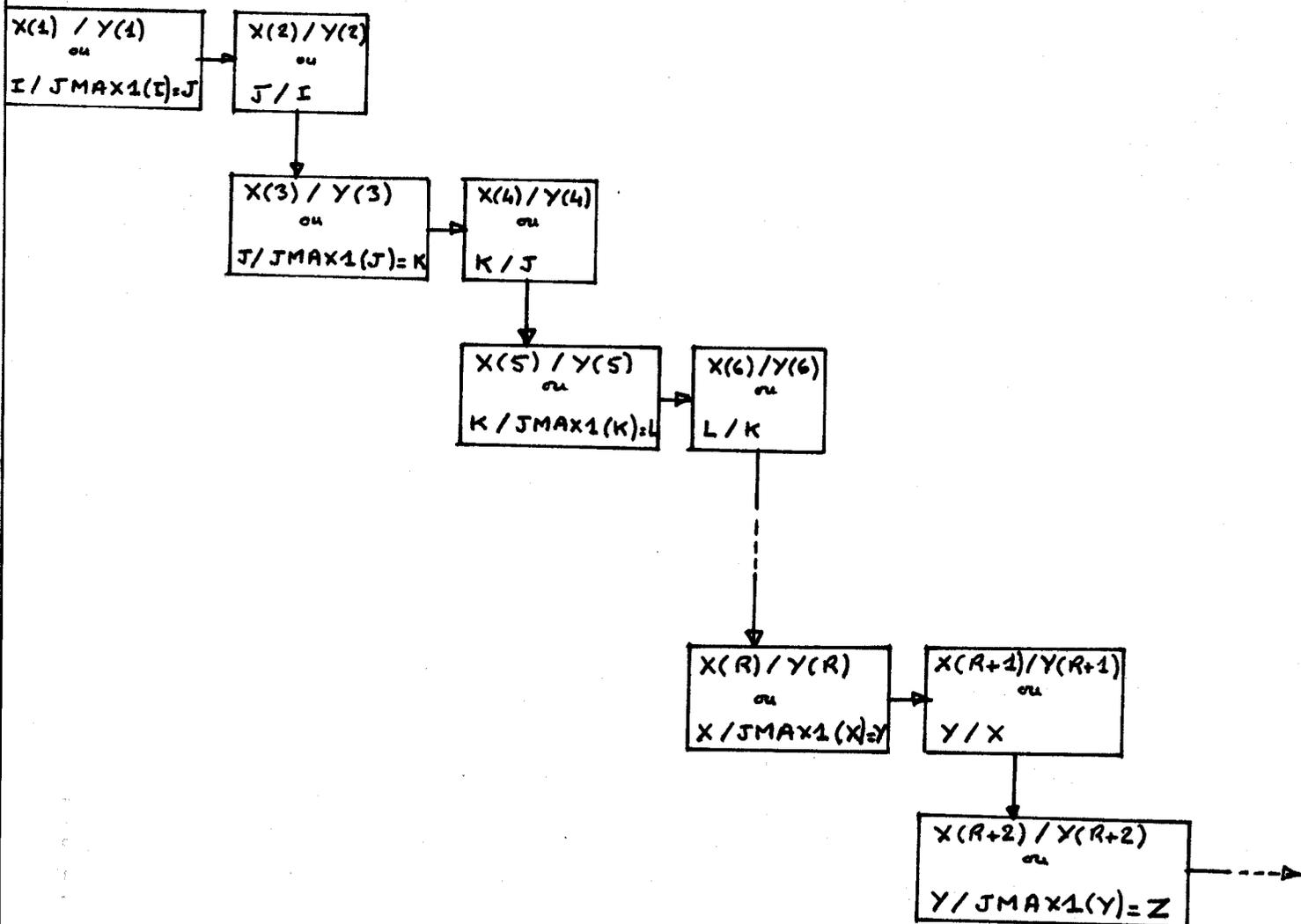


Fig. 30



c) Séquence d'arrêt définitif (A.D.)

Pour $M_{t-1} = 5$, cette séquence est identique à celle du cas $M_{t-1}=4$ [fig.18]

d) Séquence des "maxima réciproques" (M.R)

Pour $M_{t-1} = 5$, cette séquence est identique à celle du cas $M_{t-1}=4$ [fig.20]

Mais elle a lieu, quel que soit le rang R impair.

e) Séquence de la conjoncture vide (C.V.)

Pour $M_{t-1} = 5$, cette séquence est identique à celle du cas $M_{t-1}=4$ [fig.21]

Mais elle a lieu quel que soit le rang R impair.

Proposition 1

Soient $X(1) \neq 0$
 R un rang impair
 Si $Y(r) \neq 0$ pour $r = 1, 3, 5, \dots, R-2$,
 Si aucun test n'arrête l'algorithme au rang R, alors :
 $Y(R+1) \neq 0$

La séquence principale justifie cette proposition.

Quel que soit le rang R impair, auquel l'algorithme parvienne, $Y(R+1)$ ne peut prendre que trois valeurs, toutes différentes de 0.

Comme $Y(R+1) = X(R)$, cela implique $X(R) \neq 0$

Un corollaire de cette proposition montre que les tests M.R. et C.V. ne peuvent avoir une réponse positive simultanée au rang R.

f) Séquence de relance.

La progression par rangs de la séquence principale peut être interrompue pour diverses raisons. Les tests d'arrêts partiels, lorsqu'ils sont positifs au rang R, signifient qu'une coalition $X(R-q)$ d'un rang $(R-q)$ précédent R ne réalisera pas le gain maximum qu'elle recherchait ($q \in \mathbf{N}^+$)

Exemple 1: Test des maxima réciproques (M.R.)

Soit R un rang impair quelconque $R > 3$.

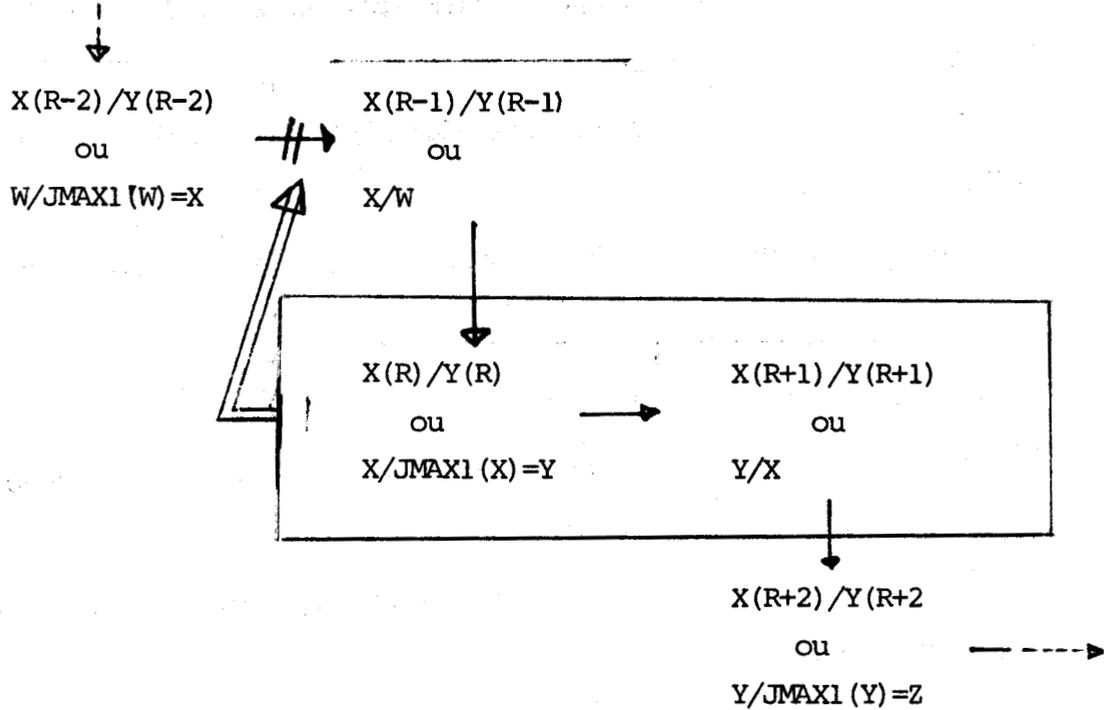


Figure 32

Si $Y(R+2) = Y(R+1) \Rightarrow \{X(R), Y(R)\}$ compatibles.

$\{X(R), Y(R)\}$ compatibles \Rightarrow Si $X(R-2)$ fait un appel d'offres à $Y(R-2)$, l'appel d'offres est refusé.

La coalition W , ne pouvant réaliser $MAX1(W)$, tentera successivement d'obtenir $MAX2(W)$ puis $MAX3(W)$.

Exemple 2 : Test de la conjoncture vide (C.V.)

Soit R un rang impair $R > 3$.

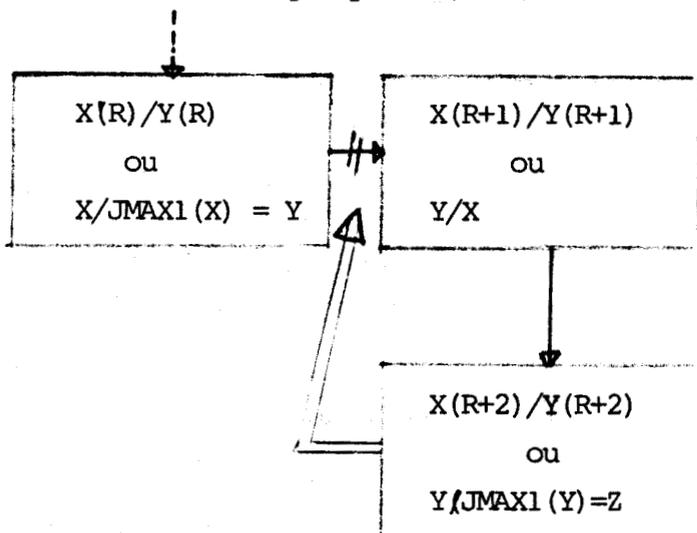


Figure 33.

Si $Y(R+2) = 0 \Rightarrow \{X(R+2), \emptyset\}$ coalitions compatibles
 $\{X(R+2), \emptyset\}$ compatibles \Rightarrow si $X(R)$ fait un appel d'offre à $Y(R)$,
 l'appel d'offre est refusé.

La coalition X ne pouvant réaliser $MAX1(X)$ tentera successivement d'obtenir
 $MAX2(X)$ et $MAX3(X)$.

Il existe d'autres tests d'arrêt partiel conduisant aux mêmes conclusions
 [chap.XIX.2.g]

Soit R un rang impair $R > 3$

En raison d'un test quelconque, supposons que la coalition $X(R-2)$ ne puisse
 réaliser le gain qu'elle recherchait.

L'algorithme progresse à nouveau depuis le rang $(R-2)$ d'après la procédure
 suivante. [Fig.34]

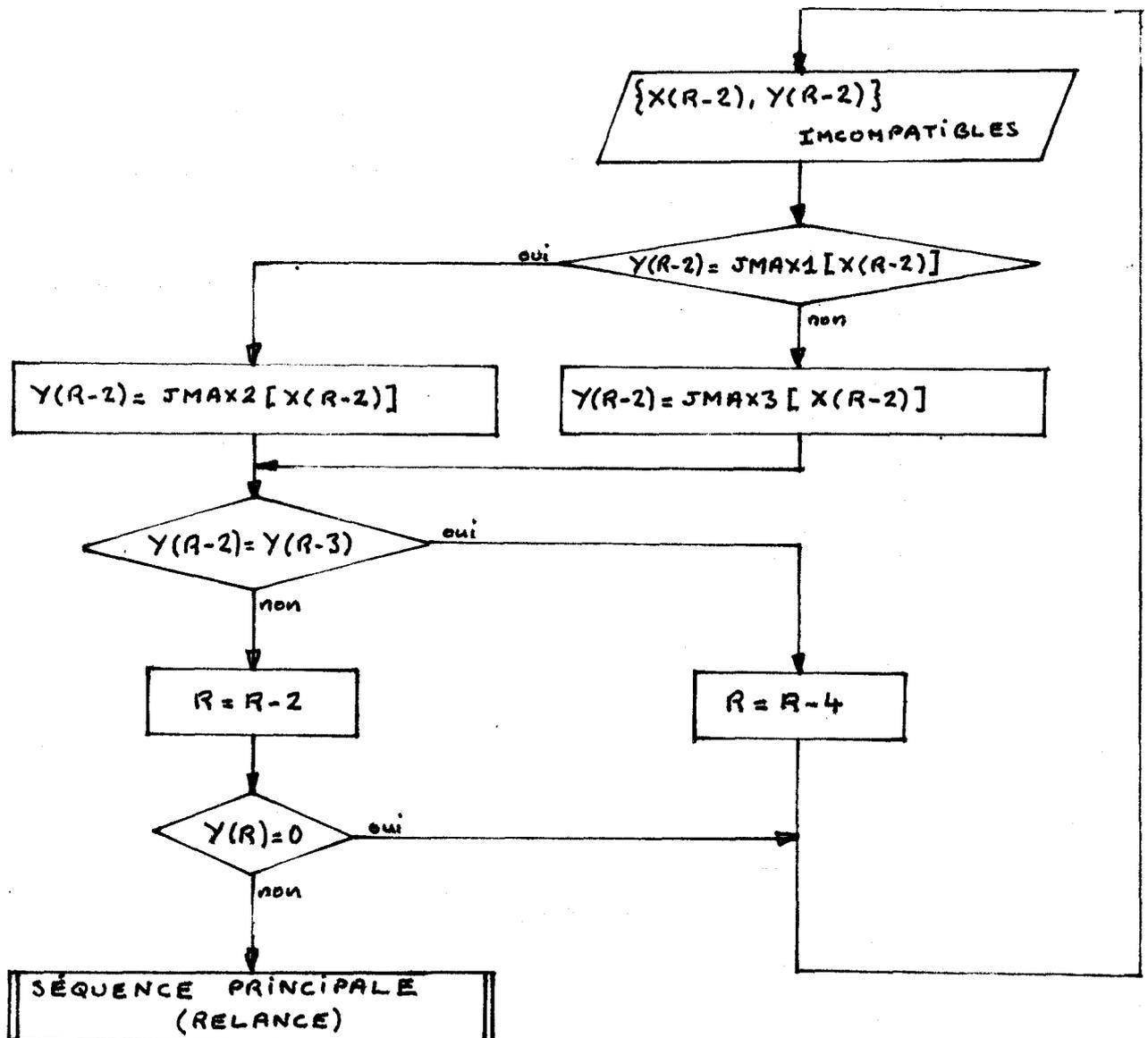


Fig. 34

Proposition 2

Quel que soit le rang R impair auquel l'algorithme parvienne, $R > 3$, $X(R)$ ne peut être égal qu'à $JMAX1 [X(R-2)]$ ou $JMAX2 [X(R-2)]$, avec $X(R) \neq 0$

DEMONSTRATION

D'après la séquence principale :

$$X(R) = X(R-1) = Y(R-2)$$

En premier lieu, montrons que $Y(R-2)=0$ est impossible.

En effet, si $Y(R-2)=0$, le test de la conjoncture vide arrête l'algorithme au rang $(R-2)$:

$\{X(R-2), \emptyset\}$ "coalitions compatibles".

En second lieu montrons que :

$$\begin{cases} Y(R-2) = JMAX3 [X(R-2)] \text{ est impossible} \\ Y(R-2) \neq 0 \end{cases}$$

Supposons $Y(R-2) = JMAX3 [X(R-2)] \neq 0$,

l'algorithme étant parvenu au rang R .

Ceci implique nécessairement, d'après la séquence de relance :

$$JMAX1 [X(R-2)] \neq 0$$

et

$$JMAX2 [X(R-2)] \neq 0$$

puisque l'algorithme s'est poursuivi jusqu'au rang R . Sous notre hypothèse,

il reste

$$JMAX4 [X(R-2)] = 0$$

On a aussi :

$$Y(R-3) \neq JMAX1 [X(R-2)]$$

et

$$Y(R-3) \neq JMAX2 [X(R-2)]$$

puisque l'algorithme s'est poursuivi jusqu'au rang R .

De plus $Y(R-3) \neq 0$ d'après la proposition 1 :

Cela impose :

$$Y(R-3) = JMAX3 [X(R-2)]$$

Donc si $Y(R-2) = JMAX3 [X(R-2)] \neq 0$, alors :

$$Y(R-2) = Y(R-3)$$

Le test des maxima réciproques arrête l'algorithme au rang (R-2) :

$\{X(R-2), Y(R-2)\}$ coalitions compatibles.

En conséquence, quand $Y(R-2) = 0$ ou quand $Y(R-2) = JMAX3 \{X(R-2)\}$, l'algorithme cesse au rang (R-2) : $X(R-2)$ a sûrement une conjoncture compatible à ce niveau de gain.

A fortiori, on ne peut donc avoir :

$$Y(R-2) = JMAX4 [X(R-2)]$$

Un corollaire accompagne cette proposition. Il concerne la sortie négative du premier test de la séquence de relance [Fig. 34]

$$Y(R-2) \stackrel{?}{=} JMAX1 \{X(R-2)\}$$

Corollaire 2

Quel que soit le rang R impair auquel l'algorithme parvienne, $R \geq 3$, si $X(R-2), Y(R-2)$ sont incompatibles, alors :

$$Y(R-2) \neq JMAX1 \{X(R-2)\} \Rightarrow Y(R-2) = JMAX2 \{X(R-2)\}$$

Dans les conditions $Y(R-2) \neq JMAX1 [X(R-2)]$, $Y(R-2)$ doit prendre comme nouvelle valeur $JMAX3 [X(R-2)]$ et cette valeur est sûrement compatible avec $X(R-2)$.

Dans ce cas, lorsque l'algorithme remonte au rang (R-2), le test de la conjoncture vide et celui des maxima réciproques font double emploi :

En remplaçant $Y(R-2)$ par $JMAX3 [X(R-2)]$, il vient en effet :

$$\text{soit } Y(R-2) = Y(R-3) \Rightarrow Y(R-2) \neq 0$$

$$\text{soit } Y(R-2) \neq Y(R-3) \Rightarrow Y(R-2) = 0$$

g) Séquence de cyclage (C.)

Le nombre de coalitions possibles est fini.

L'algorithme ne peut donc progresser de façon illimitée sans qu'un cycle n'apparaisse dans la séquence principale .

Proposition 3

Soit R un rang impair quelconque.

Si $\forall r$ impair, $r > R$, les tests M.R. et C.V. sont négatifs, il existe nécessairement $k \in \mathbb{N}^+$, pair, tel que :

$$X(R) = X(R + k)$$

Ce lemme permet d'introduire le troisième et dernier test d'arrêt partiel concernant le déroulement de la séquence principale: le test des circuits. L'avancement de l'algorithme est en effet arrêté quand

$$X(R) = X(R + k).$$

Cela signifie qu'un circuit apparaît dans le graphe des préférences et que l'algorithme cycle sur lui-même suivant le circuit :

$$\{ X(R), X(R + 1), \dots, X(R + k) \}$$

Proposition 4

Quel que soit le rang R impair auquel l'algorithme parvienne, $R > 3$, on a :

$$X(R) \neq X(R - 2) \text{ et } X(R) \neq X(R - 4)$$

Démonstration

En effet $X(R) = X(R - 2)$ est impossible car $\forall R, X(R - 2) \neq Y(R - 2)$

Ensuite si l'on avait $X(R) = X(R - 4)$, le test des M.R. aurait stoppé l'algorithme au rang $(R - 2)$.

Quel que soit $R \geq 5$, impair, le test suivant est donc nécessaire Fig. 35 :

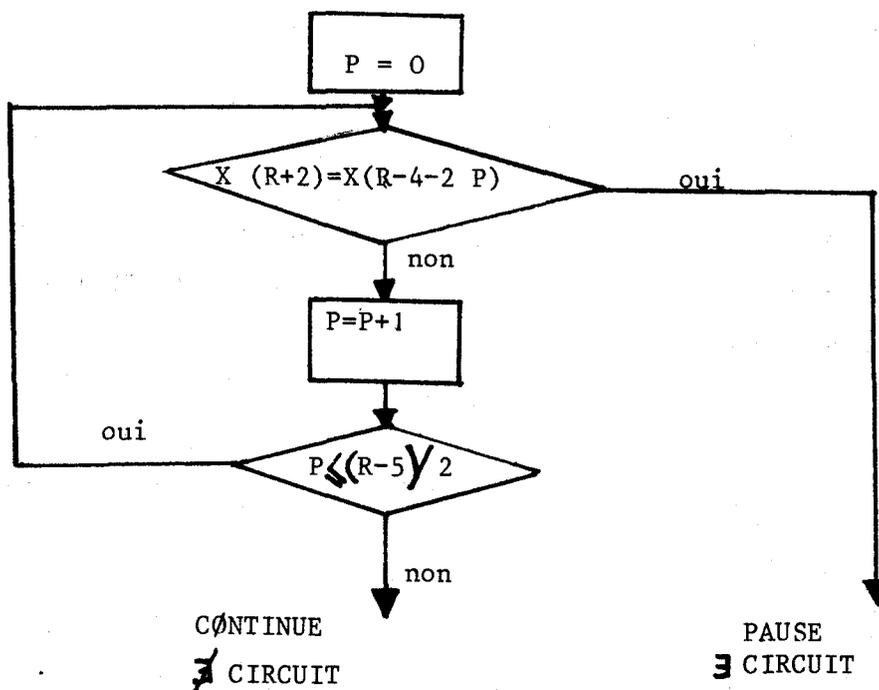


Fig. 35 Test C.

S'il n'existe pas de circuit, la séquence principale est relancée.

Si la réponse au test des circuits est positive, l'algorithme est stoppé. Supposons qu'il existe un circuit. Quelles sont les situations possibles sous cette hypothèse ?

L'algorithme est parvenu au rang R impair, avec $R > 5$, d'après les propositions 3 et 4. Nous supposons qu'il existe $k > 4$, pair, tel que :

$$X(R) = X(R-k)$$

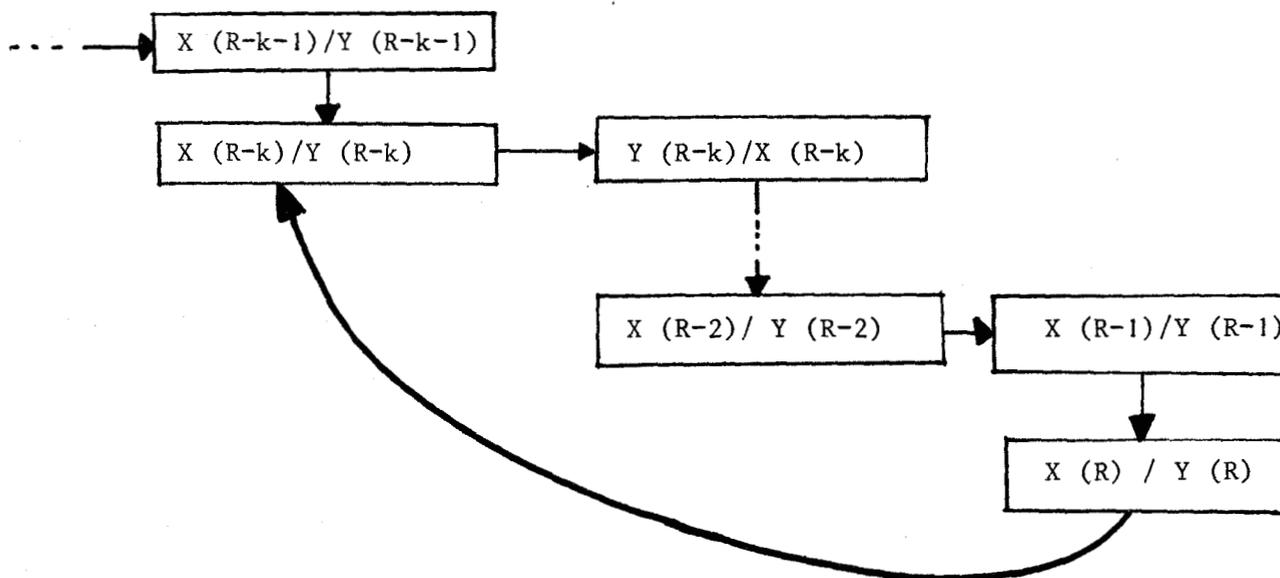


Fig. 36

Certaines propositions doivent préciser les différentes possibilités de circuits que l'on peut rencontrer et celles qui ne peuvent avoir lieu.

Les propositions 5 et 6 démontrent que le test des circuits et les tests C.V. et M.R. sont indépendants.

Les propositions 7, 8 et 9 démontrent que tout circuit amorcé entre $X(R)$ et $X(R-k)$ ne peut cycliser que sur la préférence optimale de $X(R) = X(R-k)$, c'est à dire :

$$\text{MAX } I [X(R)] = \text{MAX } I [X(R-k)]$$

Démontrons en premier lieu l'indépendance du test C. et des tests C.V. et M.R.

Proposition 5

Quel que soit le rang R impair auquel l'algorithme parvienne, $R > 5$, s'il existe $k > 4$, pair tel que :

$$X(R) = X(R - k)$$

alors :

$$Y(R) \neq 0$$

Démonstration

Soit en effet $\begin{cases} X(R) = X(R - k) \\ Y(R) = 0 \end{cases}$

D'après la séquence principale, $Y(R) = J \text{MAX } 1 [X(R)]$. L'algorithme eut été stoppé au rang $(R - k)$ par le test C.V. lorsque $Y(R - k)$ prit la valeur $J \text{MAX } 1 [X(R - k)] = J \text{MAX } 1 [X(R)]$.

Cette proposition montre que les tests C.V. et C. ne peuvent avoir une réponse positive simultanée au rang R .

Proposition 6

Quel que soit le rang R impair auquel l'algorithme parvienne, $R > 5$, s'il existe $k > 4$, pair, tel que :

$$\begin{cases} X(R) = X(R - k) \\ Y(R) = Y(R - k) = J \text{MAX } 1 [X(R)] \end{cases}$$

alors

$$Y(R) \neq Y(R - 1)$$

Démonstration

Soit en effet $\begin{cases} X(R) = X(R - k) \\ Y(R) = Y(R - k) = J \text{MAX } 1 [X(R)] \\ Y(R) = Y(R - 1) \end{cases}$

D'après la séquence principale, il vient :

$$\begin{cases} X(R - k + 1) = Y(R - k) \\ Y(R - k + 1) = X(R - k) \end{cases} \quad \text{ainsi que :}$$

$$X(R - k + 2) = X(R - k + 1)$$

Il vient aussi :

$$X(R - 1) = X(R) \text{ et}$$

$$\begin{cases} X(R - 2) = Y(R - 1) \\ Y(R - 2) = X(R - 1) \end{cases}$$

D'après la proposition 2, on dispose de :

$$\text{soit : } Y(R - 2) = JMAX1 [X(R - 2)] \neq$$

$$\text{soit : } Y(R - 2) = JMAX2 [X(R - 2)] \neq$$

Or $Y(R - 2) = JMAX1 [X(R - 2)]$ est impossible.

En effet $X(R - 2) = X(R - k + 1)$

puisque :

$$X(R - 2) = Y(R - 1) = Y(R) = Y(R - k) = X(R - k + 1)$$

$$\text{et } Y(R - 2) = Y(R - k + 1)$$

puisque

$$Y(R - 2) = X(R - 1) = X(R) = X(R - k) = Y(R - k + 1)$$

$$\text{Donc } \begin{cases} X(R - 2) = X(R - k + 1) \\ Y(R - 2) = Y(R - k + 1) \end{cases}$$

$$\text{Si } Y(R - 2) = JMAX1 [X(R - 2)]$$

$$\text{alors } Y(R - k + 1) = JMAX1 [X(R - k + 1)]$$

L'algorithme aurait été stoppé au rang $(R - k + 2)$ par le test M.R., ce qui n'a pas été. Donc $Y(R - 2) \neq JMAX1 [X(R - 2)]$

Il reste :

$$Y(R - 2) = JMAX2 [X(R - 2)]$$

$$\text{ou } Y(R - k + 1) = JMAX2 [X(R - k + 1)]$$

Ceci implique :

$$Y(R - k + 2) = JMAX1 [X(R - k + 2)]$$

Le circuit est donc ainsi : (Fig. 37).

.../...

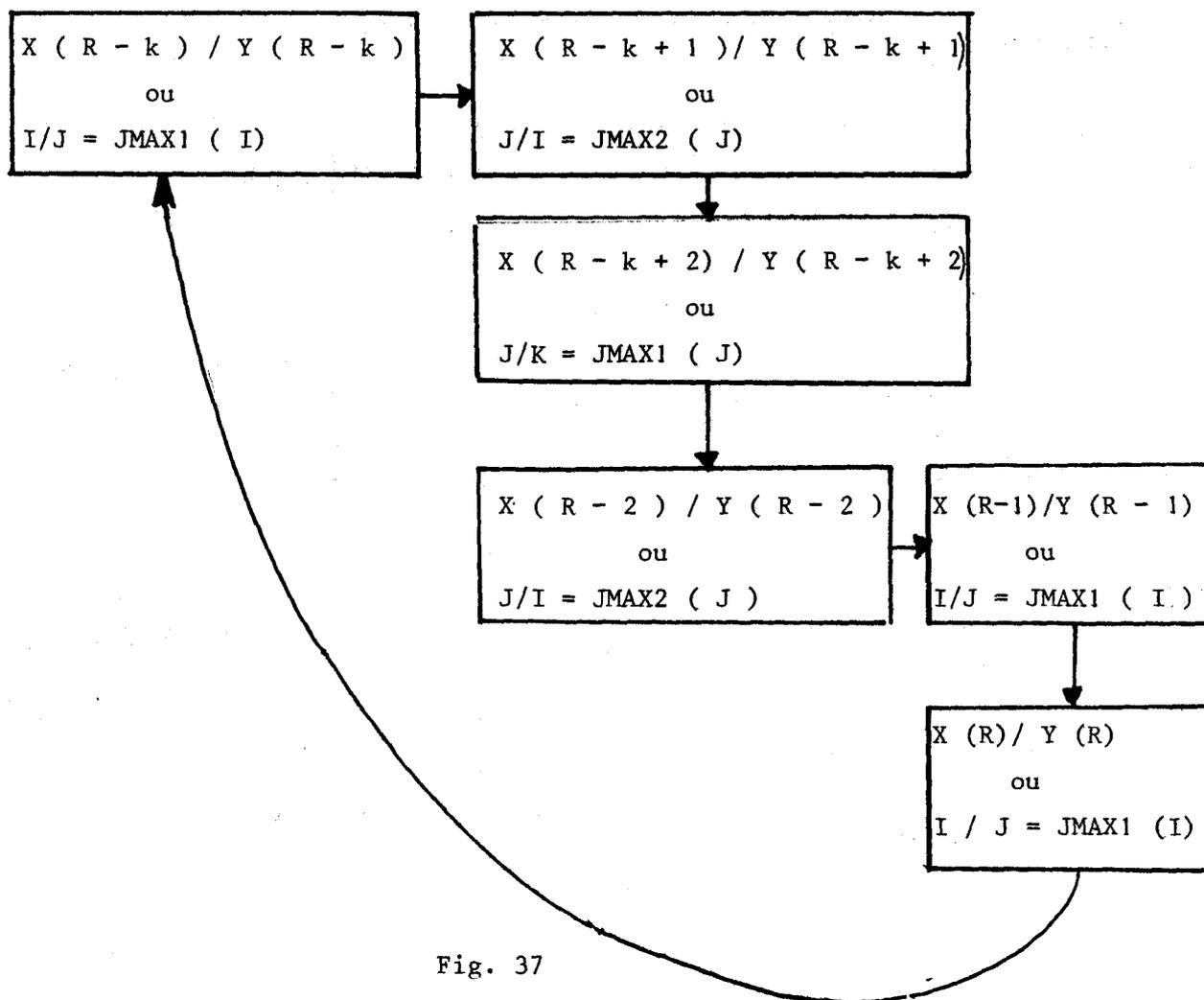


Fig. 37

Deux cas sont à distinguer.

a) $k < 10$

Nous avons abouti à :

$$X (R - 2) = X (R - k + 2)$$

Ceci est impossible en fonction de la proposition 4.

En effet si $k < 10$, alors :

$$(R - 2) - (R - k + 2) < 6$$

b) $k \geq 10$

Dans ces conditions, $X (R - 2) = X (R - k + 1)$ est possible. Mais cela prouve l'existence d'un circuit au rang $(R - 2)$ et le test C. aurait arrêté l'algorithme à ce rang.

En conséquence

$$\text{si } \begin{cases} X(R) = X(R - k) \\ Y(R) = Y(R - k) = JMAX1 [X(R)] \end{cases}$$

on ne peut avoir $Y(R) = Y(R - 1)$

Cette proposition montre que les tests C. et M.R. ne peuvent avoir une réponse simultanée positive au rang R.

Elle introduit par ailleurs un corollaire.

Reprenons les hypothèses de la proposition 6 :

Quel que soit le rang R impair auquel l'algorithme parvienne, $R > 5$, supposons qu'il existe $k > 4$, pair, tel que :

$$\begin{cases} X(R) = X(R - k) \\ Y(R) = Y(R - k) = JMAX1 [X(R)] \end{cases}$$

D'après la proposition 6 :

$$Y(R - 1) \neq JMAX1 [X(R)]$$

D'après la proposition 5 :

$$Y(R) \neq 0 \text{ d'où } JMAX1 [X(R)] \neq 0$$

D'après la proposition 1 :

$$Y(R - 1) \neq 0$$

Dès lors, il reste deux valeurs possibles pour $Y(R - 1)$: ce sont les deux valeurs non nulles prises parmi :

$$JMAX2 [X(R)], JMAX3 [X(R)], JMAX4 [X(R)].$$

soient $JMIN 1 [X(R)]$ et $JMIN 2 [X(R)]$ ces deux valeurs positives telles que :

$$\{JMIN 1 [X(R)], JMIN 2 [X(R)] \cup \{0\} = \{JMAX2 [X(R)], JMAX3 [X(R)], JMAX4 [X(R)]\}$$

$$\text{et } G(X(R), JMIN 1 [X(R)]) > G(X(R), JMIN 2 [X(R)])$$

Corollaire 6

Quel que soit le rang R impair auquel l'algorithme parvienne, $R > 5$, s'il existe $k > 4$, pair tel que :

$$\begin{cases} X(R) = X(R - k) \\ Y(R) = Y(R - k) = J_{\text{MAX } 1} [X(R)] \end{cases}$$

Alors soit $Y(R - 1) = J_{\text{MIN } 1} [X(R)]$
 soit $Y(R - 1) = J_{\text{MIN } 2} [X(R)]$

Proposition 7

Quel que soit le rang R impair auquel l'algorithme parvienne, $R > 7$, s'il existe k , pair, $4 < k \leq (R - 3)$, tel que :

$$\begin{cases} X(R) = X(R - k) \\ Y(R) = Y(R - k) = J_{\text{MAX } 1} [X(R)] \end{cases}$$

Alors on a : soit $Y(R - 1) = J_{\text{MIN } 1} [X(R)]$
 soit $Y(R - k - 1) = J_{\text{MIN } 2} [X(R)]$

Fig.38

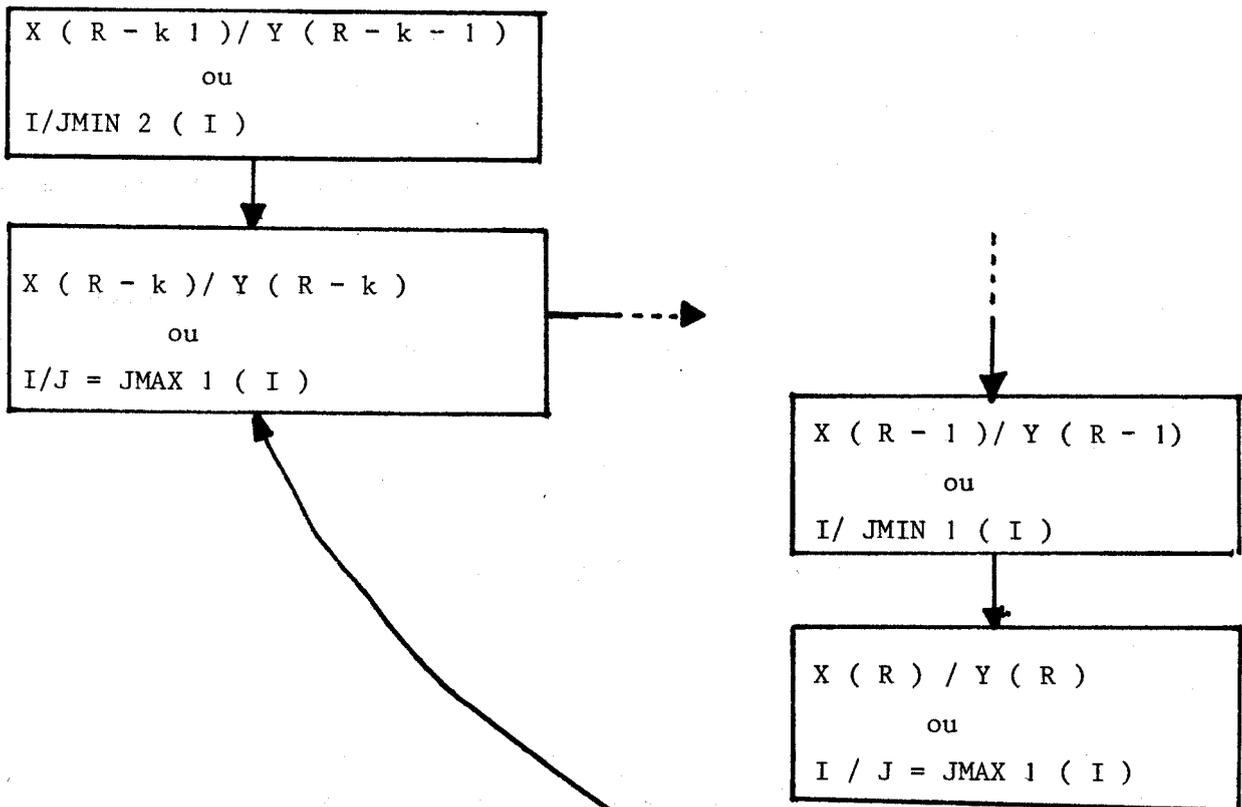


Fig. 38

soit $\begin{cases} Y(R-1) = JMIN 2 [X(R)] \\ Y(R-k-1) = JMIN 1 [X(R)] \end{cases}$
 Fig.39

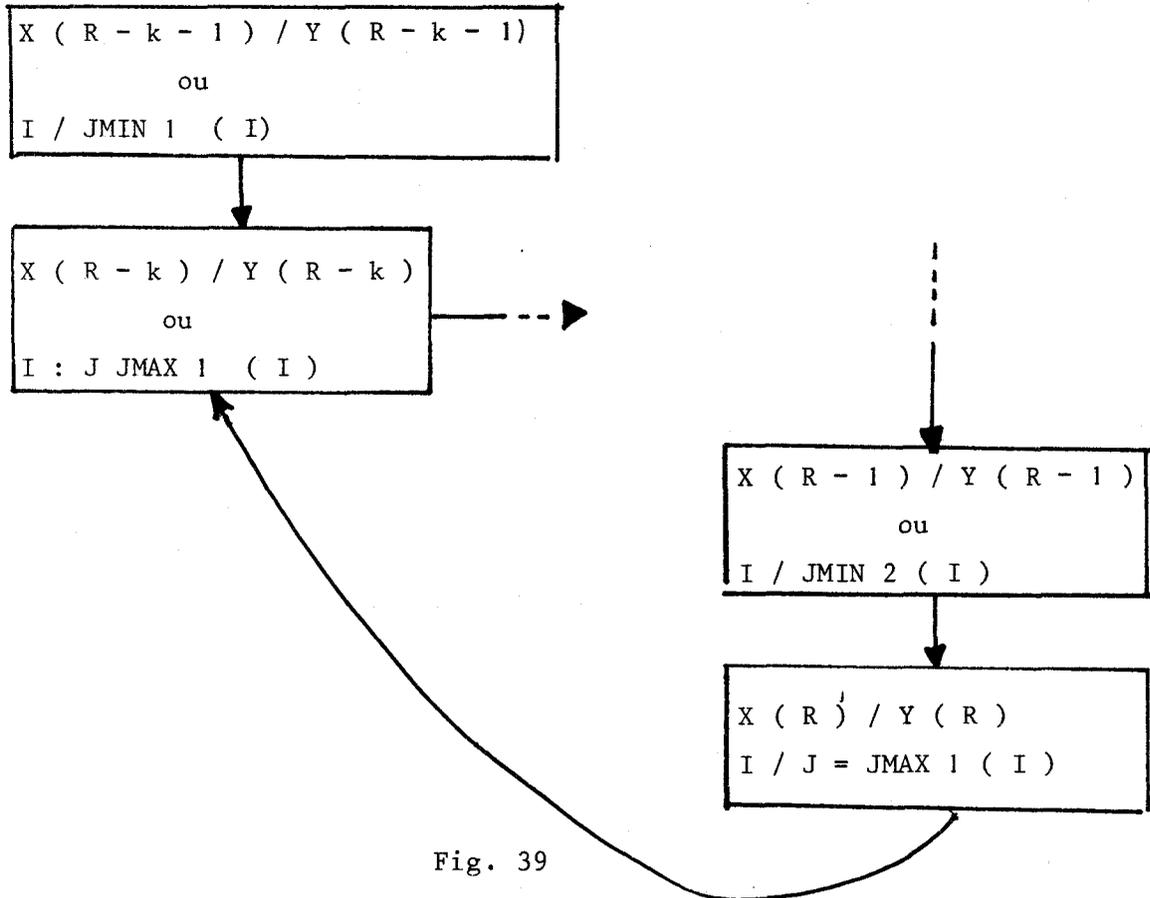


Fig. 39

Démonstration

D'après le corollaire 6 précédent, $Y(R-1)$ ne peut prendre que ces deux valeurs.

Il en va de même pour $Y(R-k-1)$ qui est nécessairement différent de 0 et de $JMAX 1 [X(R-k)]$. Il reste à montrer que $Y(R-1)$ est différent de $Y[R-k-1]$.

Sous les hypothèses de la proposition 7, supposons :

$$Y(R-1) = Y(R-k-1)$$

D'après la séquence principale :

$$X(R-2) = Y(R-1)$$

$$\text{et } X(R-k-2) = Y(R-k-1)$$

$$\text{d'où } X(R-2) = X(R-k-2).$$

.../...

Le test des circuits aurait stoppé l'algorithme au rang $(R - 2)$. Donc $Y(R - 1) = Y(R - k - 1)$ est impossible ce qui démontre la proposition 7.

Nous supposons toujours qu'il existe un circuit, c'est-à-dire :

$$\exists R \text{ impair, } R > 5$$

$$\exists k \text{ pair, } k > 4$$

tels que $X(R) = X(R - k)$

Nous allons démontrer que dans ces conditions, on a nécessairement :

$$Y(R) = Y(R - k) = JMAX 1 [X(R)]$$

C'est le but des propositions 8 et 9.

Proposition 8

$$\left. \begin{array}{l} \text{Soit } R \text{ impair, } R > 5 \\ \quad k \text{ pair, } k > 4 \\ \text{Si } \begin{cases} X(R) = X(R - k) \\ Y(R) = JMAX 1 [X(R)] \end{cases} \\ \text{Alors } Y(R - k) = JMAX 1 [X(R)] \end{array} \right\}$$

Démonstration

D'après la proposition 2, on dispose de :

$$\text{Soit } Y(R - k) = JMAX 1 [X(R - k)] > 0$$

$$\text{Soit } Y(R - k) = JMAX 2 [X(R - k)] > 0$$

Il reste à montrer que $Y(R - k) = JMAX 2 [X(R - k)]$ est impossible.

Si $(R - k) = 1$, alors $Y(R - k) = JMAX 1 [X(R - k)]$, par définition de la séquence principale. Dans ce cas, la proposition est démontrée.

Soit donc $(R - k) > 1$, avec :

$$R \text{ impair, } R > 5$$

$$k \text{ pair, } k > 4$$

Posons notre hypothèse principale :

$$Y(R - k) = JMAX 2 [X(R - k)]$$

Cela implique évidemment :

$$\begin{cases} Y (R - k - 1) \neq JMAX 1 [X (R - k)] \\ Y (R - k - 1) \neq JMAX 2 [X (R - k)] \end{cases}$$

Par ailleurs $Y (R - k - 1) \neq 0$ d'après la proposition 1.

Comme nécessairement, on a :

$$\begin{aligned} JMAX 1 [X (R - k)] &\neq 0 \\ JMAX 2 [X (R - k)] &\neq 0 \end{aligned}$$

puisque l'algorithme s'est poursuivi jusqu'au rang R, il reste :

$$\begin{aligned} JMAX 2 [X (R - k)] &= JMIN 1 [X (R - k)] \\ \text{et} \quad Y (R - k - 1) &= JMIN 2 [X (R - k)] \end{aligned}$$

D'après la séquence principale, il vient aussi :

$$X (R - k - 2) = Y (R - k - 1) = JMIN 2 [X (R - k)] = JMIN 2 X (R)$$

et

$$\begin{cases} Y (R - k - 2) = X (R - k - 1) = X (R - k) = X (R) \\ Y (R - 2) = X (R - 1) = X (R) \end{cases}$$

d'où $Y (R - 2) = Y (R - k - 2)$

Ici, deux cas sont à distinguer. On sait en effet que l'on a :

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad Y (R - 1) &= JMIN 1 [X (R)] \\ \text{soit} \quad Y (R - 1) &= JMIN 2 [X (R)] \end{aligned}$$

a) Supposons

$$\begin{aligned} Y (R - 1) &= JMIN 2 [X (R)] \\ \text{Alors} \quad X (R - 2) &= Y (R - 1) = JMIN 2 [X (R)] \\ \text{d'où} \quad X (R - 2) &= X (R - k - 2) \end{aligned}$$

Ainsi, on aurait (Fig. 40) :

$$\begin{cases} X (R - 2) = X (R - k - 2) \\ Y (R - 2) = Y (R - k - 2) \end{cases}$$

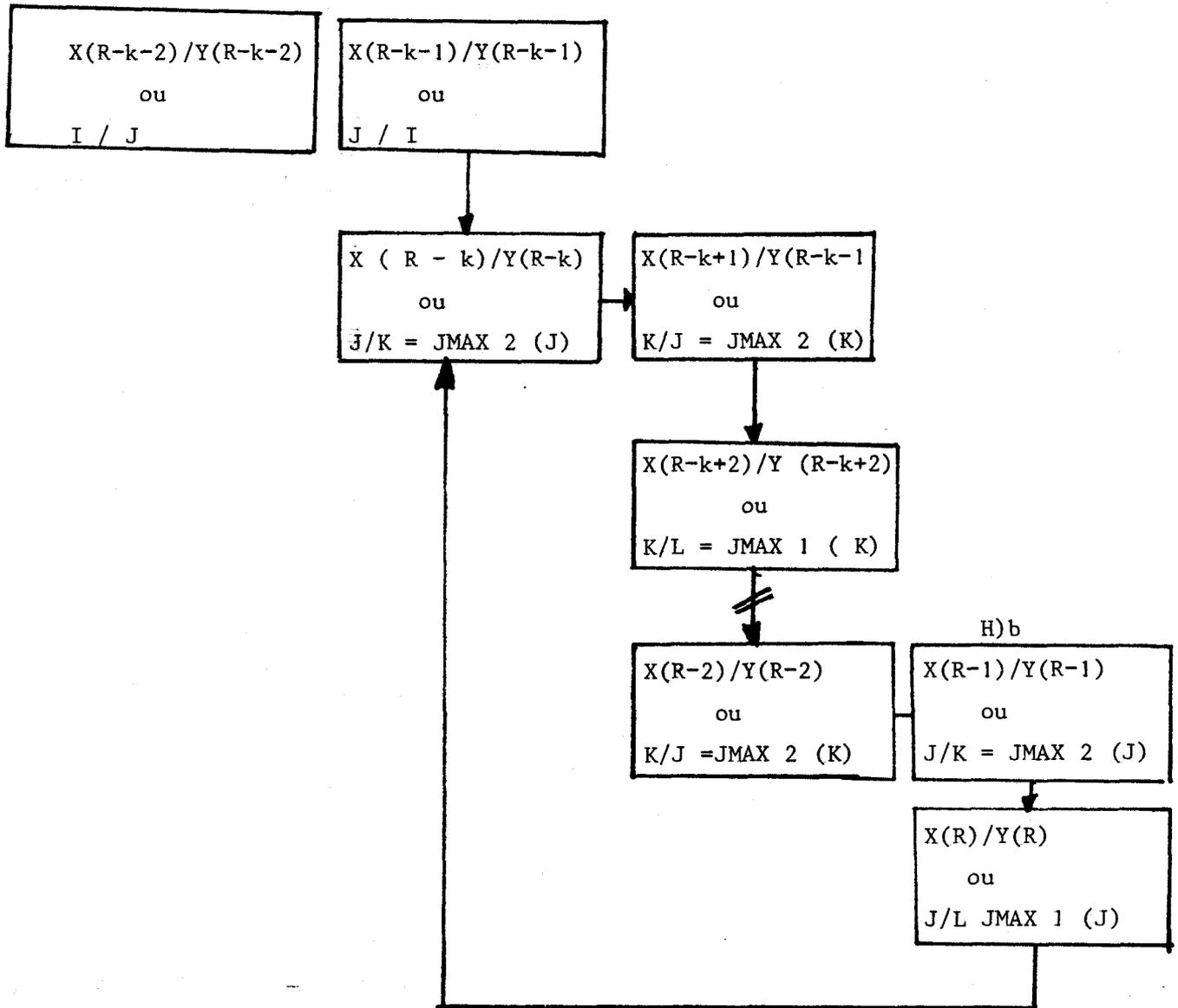


Fig.41

Remarque :

Précisons la configuration du cycle qui aurait eu lieu au rang $(R - 2)$, avec

$$X(R - 2) = X(R - k + 2)$$

D'après la proposition 2, on a :

$$\text{soit } Y(R - 2) = JMAX 1 [X(R - 2)] > 0$$

$$\text{soit } Y(R - 2) = JMAX 2 [X(R - 2)] > 0$$

D'après la séquence principale, on a :

$$Y(R - k + 1) = X(R - k) = X(R) = Y(R - 2)$$

Donc, on a :

$$\text{soit } Y(R-k+1) = JMAX 1 [X(R-2)] > 0$$

$$\text{soit } Y(R-k+1) = JMAX 2 [X(R-2)] > 0$$

Or $Y(R-k+1) = JMAX 1 [X(R-2)]$ n'est pas envisageable puisque le test M.R. n'a pas été positif au rang $(R-k+2)$. Donc :

$$Y(R-k+1) = JMAX 2 [X(R-k)]$$

et par suite $Y(R-k+2) = JMAX 1 [X(R-2)]$

Il reste ainsi :

$$\begin{cases} X(R-2) = X(R-k+2) \\ Y(R-2) = JMAX 2 [X(R-2)] \\ Y(R-k+2) = JMAX 1 [X(R-2)] \end{cases}$$

Avant de donner cette configuration, l'algorithme aurait fourni :

$$\begin{cases} X(R-2) = X(R-k+2) \\ Y(R-2) = JMAX 1 [X(R-2)] \\ Y(R-k+2) = JMAX 1 [X(R-2)] \end{cases}$$

et le circuit aurait eu lieu sur ces valeurs.

La proposition 8 est ainsi démontré. Quand avec R impair, $R > 5$ et k pair, $k > 4$, on a :

$$\begin{cases} X(R) = X(R-k) \\ Y(R) = JMAX 1 [X(R)] \end{cases}$$

on peut avoir $Y(R-k) = JMAX 2 [X(R)]$

Ceci amène la conséquence suivante :

Corollaire 8

Soit R impair, $R > 5$

k pair, $k > 4$

Si $X(R) = X(R-k)$

$$\text{alors } \begin{cases} Y(R) \neq JMAX 2 [X(R)] \\ Y(R-k) \neq JMAX 2 [X(R)] \end{cases}$$

Cela découle immédiatement de la proposition 8.

La configuration :

$$\begin{cases} Y(R) = JMAX 2 [X(R)] \\ Y(R-k) = JMAX 2 [X(R)] \end{cases}$$

a nécessairement été précédée de :

$$\begin{cases} Y(R) = JMAX 1 [X(R)] \\ Y(R-k) = JMAX 2 [X(R)] \end{cases}$$

qui est impossible d'après la proposition 8.

On démontre pour des raisons analogues la proposition suivante :

Proposition 9

Soit R impair, $R > 5$

k pair, $k > 4$

Si $\begin{cases} X(R) = X(R-k) \\ Y(R-k) = JMAX 1 [X(R-k)] \end{cases}$

Alors $Y(R) \neq JMAX 2 [X(R)]$

En effet, la configuration :

$$\begin{cases} Y(R-k) = JMAX 1 [X(R-k)] \\ Y(R) = JMAX 2 [X(R)] \end{cases}$$

a nécessairement été précédée de :

$$Y(R-k) = Y(R) = JMAX 1 [X(R)]$$

qui arrête l'algorithme.

Des propositions 8 et 9, se déduit la proposition suivante :

Proposition 10

Quel que soit le rang R impair auquel l'algorithme parvienne, $R \geq 5$, s'il existe $k \geq 4$, pair, tel que :

$$X(R) = X(R - k)$$

Alors $Y(R) = Y(R - k) = \text{JMAX } 1 [X(R)]$

C'est sur la base de cette proposition que la sortie positive du test des circuits est élaborée dans l'algorithme.

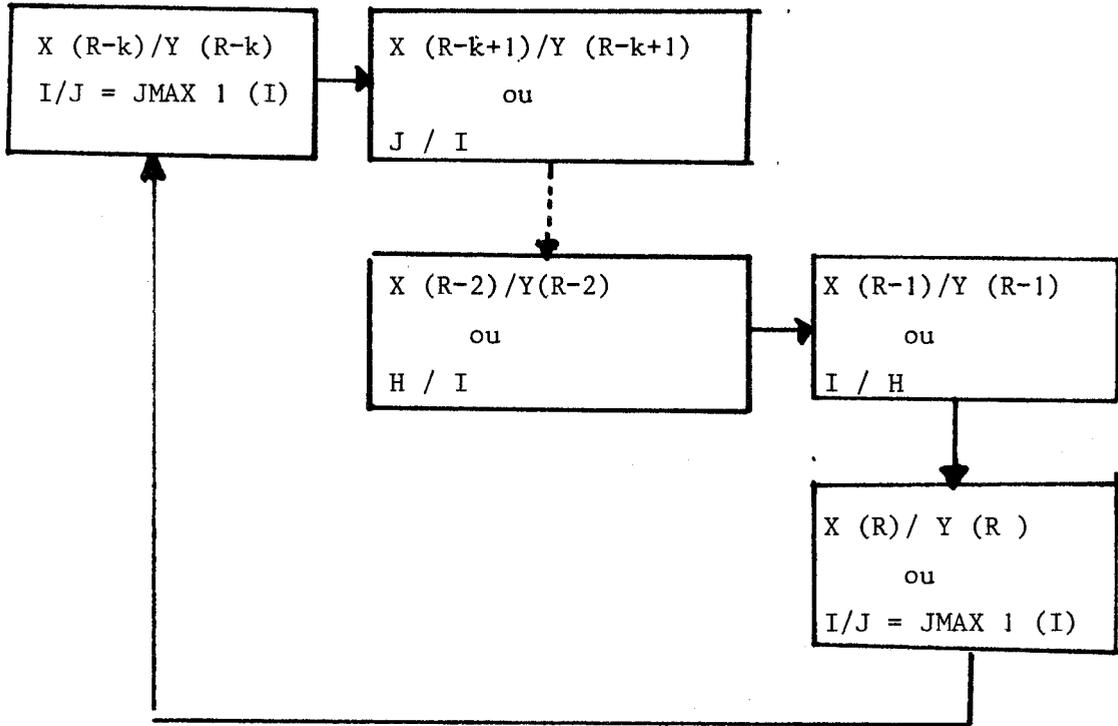


Fig. 42

Lorsqu'il existe un circuit ayant cyclé entre $X(R)$ et $X(R-k)$, Fig 42, on a :

Soit $(R - k) = 1$

Soit $(R - k) > 1$

a) Soit $(R - k) = 1$ par hypothèse.

$X(R - k) = X(R) = X(1)$ cherche à réaliser $\text{MAX } 1 [X(1)]$

D'après la proposition 6, on a :

$$G[X(R), X(R - 2)] < \text{MAX } 1 [X(R)]$$

Dans ce cycle, seul $X(R)$ peut choisir entre deux conjonctures. $X(R)$ peut ne pas accepter le gain $G[X(R), X(R - 2)]$. $X(R - 2)$ ne réalisera pas son gain espéré $G[X(R - 2), X(R)]$.

b) Soit $(R - k) > 1$ par hypothèse.

Dans le cycle qui apparaît, $X(R - k) = X(R)$ a seul le choix entre deux gains :

$$G[X(R-k), Y(R-k)] \text{ et } G[X(R), Y(R)] .$$

Ces deux valeurs sont différentes d'après la proposition 7.

$$\text{Si } Y(R-1) = JMIN 1[X(R)] = JMAX 2[X(R)]$$

$$\text{Alors } Y(R - k - 1) = JMIN 2[X(R)]$$

$$\text{Et } G[X(R), X(R-2)] > G[X(R), X(R-k-2)].$$

$X(R)$ ne peut donc accepter le gain $G[X(R), X(R-k-2)]$. $X(R-k-2)$ ne réalisera pas son gain espéré $G[X(R-k-2), X(R)]$.

$$\text{Si } Y(R-1) \neq JMAX 2[X(R)]$$

$$\text{Alors } Y(R-1) = JMIN 2[X(R)]$$

$$\text{Et } Y(R-k-1) = JMIN 1[X(R)]$$

$$\text{On a } G[X(R), X(R-2)] < G[X(R), X(R-k-2)].$$

dans ces conditions $X(R)$ acceptera le gain $G[X(R), X(R-k-2)]$ et c'est $X(R-2)$ qui ne réalisera pas son gain espéré $G[X(R-2), X(R)]$.

h) Séquence de sortie

La négociation entamée par la coalition I peut avoir un premier type de résultat quand $Y(1) = 0$

$X(1), \emptyset$
 "COALITIONS COMPATIBLES"

Si $\{X(3), Y(3)\}$ est une coalition incompatible, le résultat est :

$X(1), Y(1),$
 "COALITIONS COMPATIBLES"

Si $\{X(3), Y(3)\}$ est compatible, le résultat devient :

$X(1),$
 "COALITION IMPOSSIBLE"

Les deux remarques du chapitre [XV.2. f] restent valables :

Si $\{X(1), Y(1)\}$ coalitions compatibles et $\{Y(1), X(1)\}$ coalitions compatibles, alors $\{X(1), Y(1)\}$ est solution évidente.
 Toute solution compatible $\{X(1), \emptyset\}$ est évidente.

Pour $M_{t-1} = 5$, l'ensemble des solutions compatibles ne peut être vide : certaines coalitions peuvent effectivement réaliser leur gain maximum maximorum.

XIX. 3 . Organigramme

(se reporter au chapitre XXII.2)

XIX. 4 Exemple

Les données initiales sont celles de la figure 44.

		$m_1 = 1$	$m_1 = 2$										
		MN	∅	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45
KL	I \ J	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12	1	8								13	6	9	
13	2	10						17	5				11
14	3	9					3		14			10	
15	4	11					22	12		7			
23	5	10			15	8							20
24	6	7		12		6							19
25	7	9		21	13						4		
34	8	16	18			20				2			
35	9	14	11		21				15				
45	10	15	6	17				19					

Soit G =

Fig. 44

La préparation des données est fournie par l'algorithme préliminaire.



JMAX1 =

8
6
7
5
10
9
2
4
3
5

JMAX2 =

10
10
9
6
3
2
3
1
6
2

JMAX3 =

0
0
0
0
0
0
0
0
0
0

L'algorithme "Step and Stair" mène à différents schémas dont nous donnons quelques exemples caractéristiques.

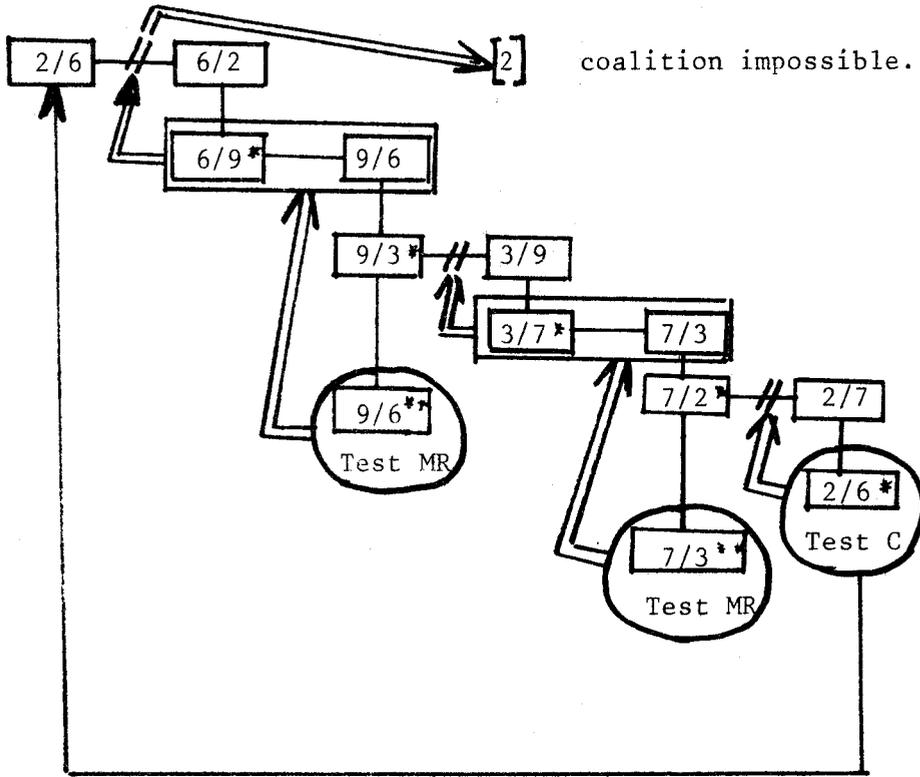


Fig.46



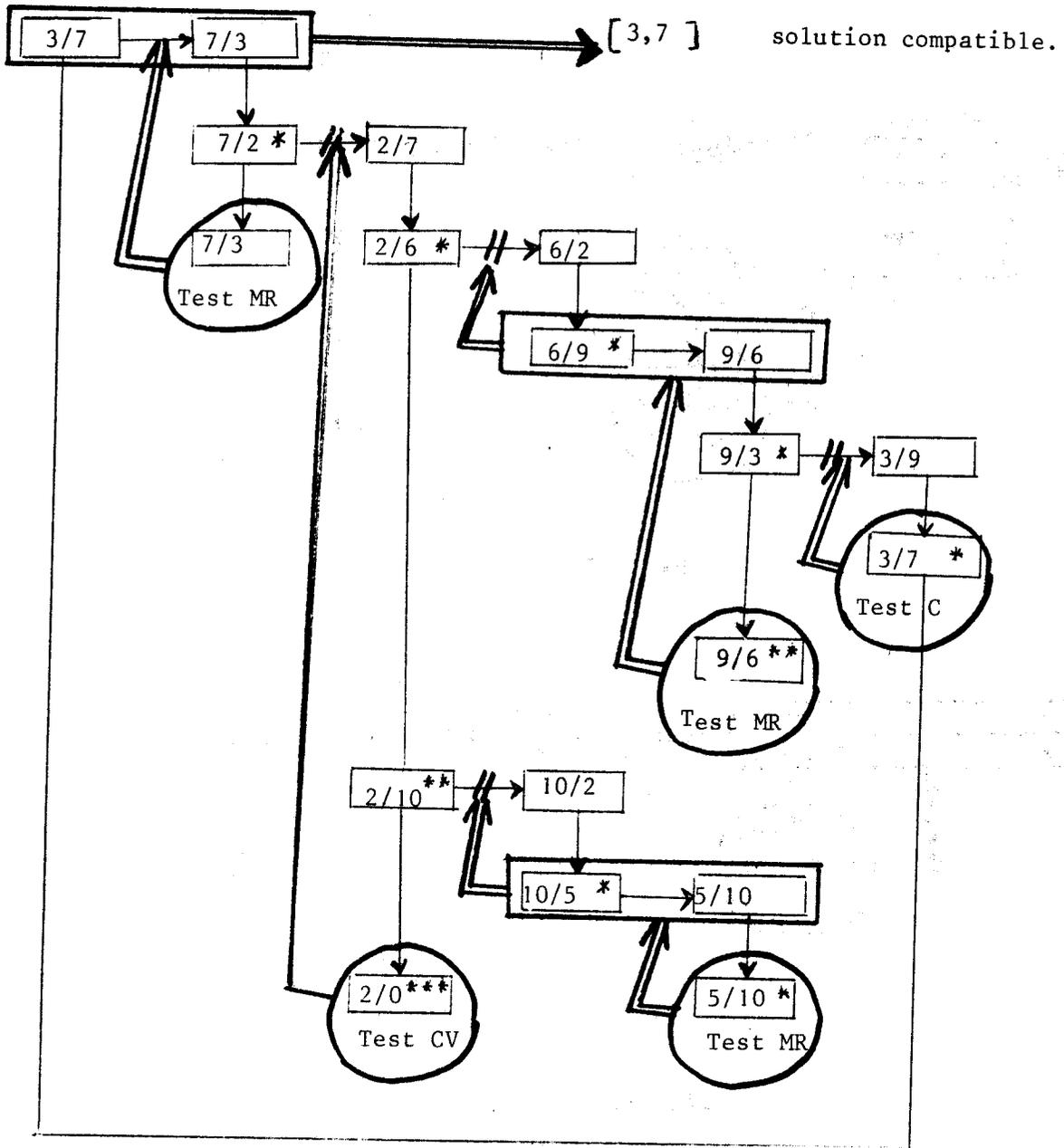


Fig.47

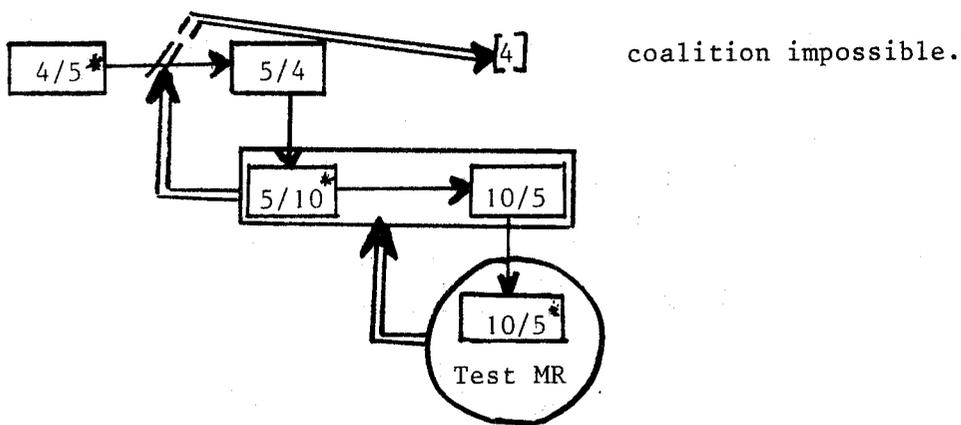


Fig. 47

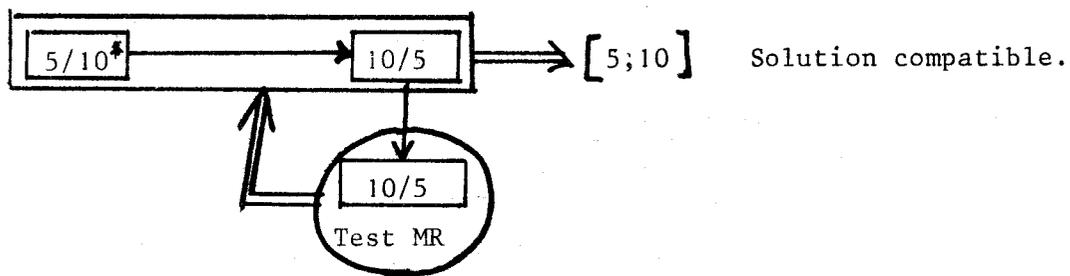


Fig. 48



L'ensemble des solutions compatibles est finalement :

$$\{[1,8] , [3,7] , [5, 10] , [6, 9] , [10, 5]\}$$

La coalition (5, 10) est une solution évidente.

XX Détermination de la solution optimale

Sur l'ensemble des solutions compatibles, les fonctions économiques précédemment utilisées [Chap. XVI] demeurent.

La solution optimale est fournie par l'un des couples suivants :

$$\text{Soit } \begin{cases} P2_t [12, 34] = G [1,8] = 13 \\ P2_t [34, 12] = G [8,1] = 18 \end{cases}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} P2_t [14,25] = G [3,7] = 14 \\ P2_t [25,14] = G [7,3] = 13 \end{cases}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} P2_t [23,45] = G [5,10] = 20 \\ P2_t [45,23] = G [10,5] = 19 \end{cases}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} P2_t [24,35] = G [6,9] = 19 \\ P2_t [35,24] = G [9,6] = 15 \end{cases}$$

XX. 1 Le critère du gain maximum

La solution optimale est donnée par :

$$C_t = \{C_1, C_2 \cup C_3, C_4 \cup C_5\}$$

XX. 2 Le critère de la moyenne

La solution optimale est donnée par :

$$C_t = \{C_1, C_2 \cup C_3, C_4 \cup C_5\}$$

Les éventuels ex-aequo fournis par le critère du gain maximum sont départagés dans l'algorithme par ce critère de la moyenne.

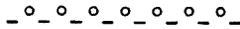
XXI Algorithme de choix \mathcal{A}_5

L'organigramme est bâti sur le même principe que dans le cas $M_t - 1 = 4$.

[cf Fig.24]. Il réunit :

- 1) Recherche des solutions compatibles.
- 2) Détermination des solutions optimales.

S O P H O C L E

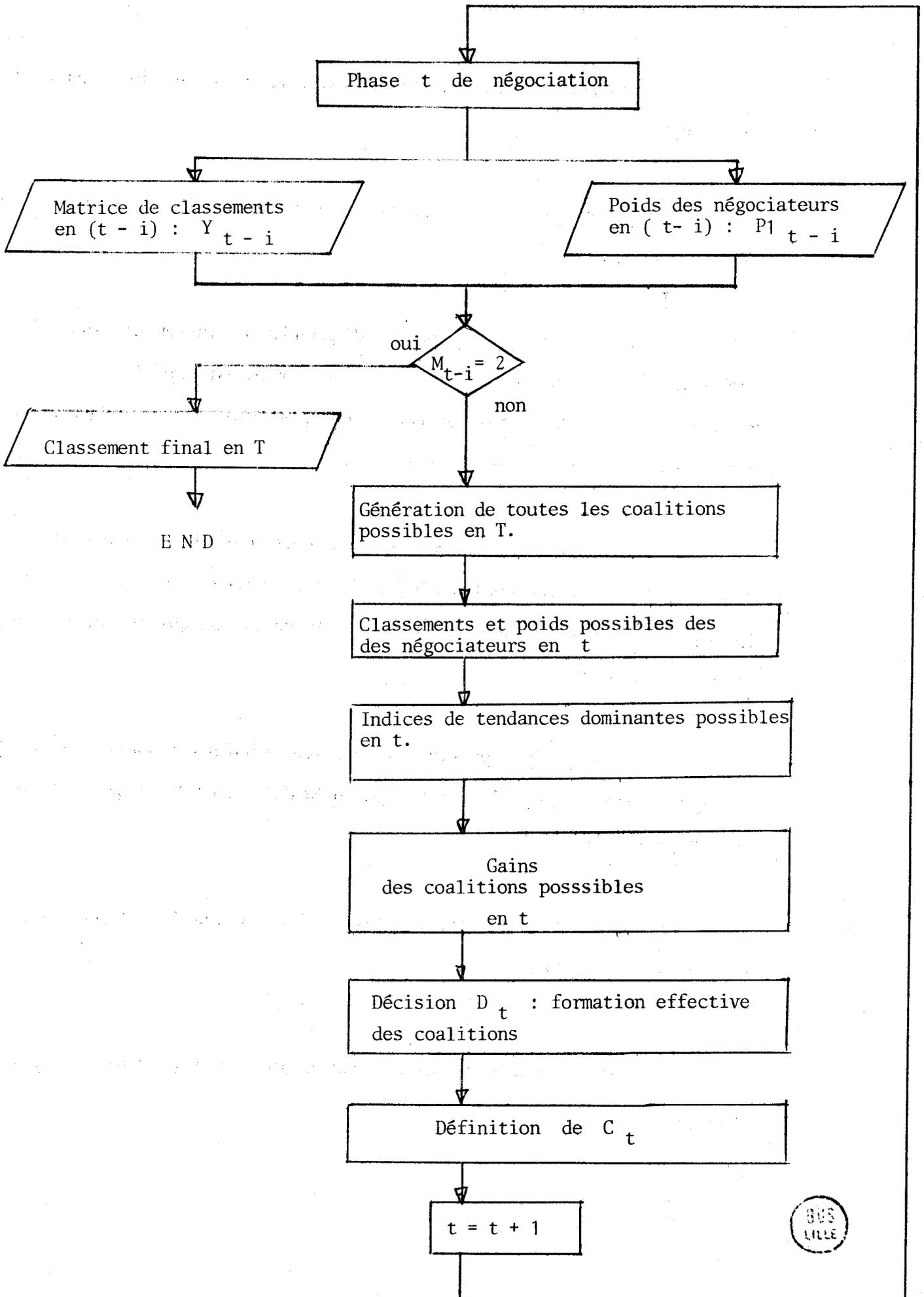


Synthèse

XXII Modèle SOPHOCOLE : Synthèse

XXII 1. Organigramme général

Le modèle de négociation "SOPHOCOLE" est décrit par le processus itératif suivant :



BUS
LILLE

Fig. 49

L'algorithme qui en résulte est composé de plusieurs parties.

(Fig. 50).

La première partie détermine les données d'entrée de la première phase de négociation.

La seconde partie permet d'aboutir au classement final si le nombre de négociateurs est égal à 2. Si ce nombre est supérieur à 2, il calcule les gains de toutes les coalitions possibles de deux négociateurs, dans l'hypothèse d'une conjoncture vide.

Les gains de toutes les coalitions possibles de deux négociateurs dans l'hypothèse d'une conjoncture non-vide, sont calculés par la troisième partie. Cette dernière sélectionne aussi la coalition qui se forme lorsque le nombre de joueurs est égal à 3.

La quatrième partie exécute les calculs préliminaires nécessaire aux algorithmes de négociation "Step and Stair", dans les hypothèses de 4 ou 5 négociateurs.

L'algorithme "Step and Stair" dans le cas de 4 négociateurs constitut la cinquième partie.

S'il y a 5 négociateurs, cet algorithme représente la sixième partie.

La septième partie enfin sélectionne la solution optimale, dans les hypothèses de 4 ou 5 négociateurs. Si détermine la matrice de classements et le poids des négociateurs en phase t, à partir des coalitions effectivement formées.

XXII 2 . Algorithmes "SOPHOCLE"

Les organigrammes suivants traduisent module par module les différentes phases de traitement du modèle.

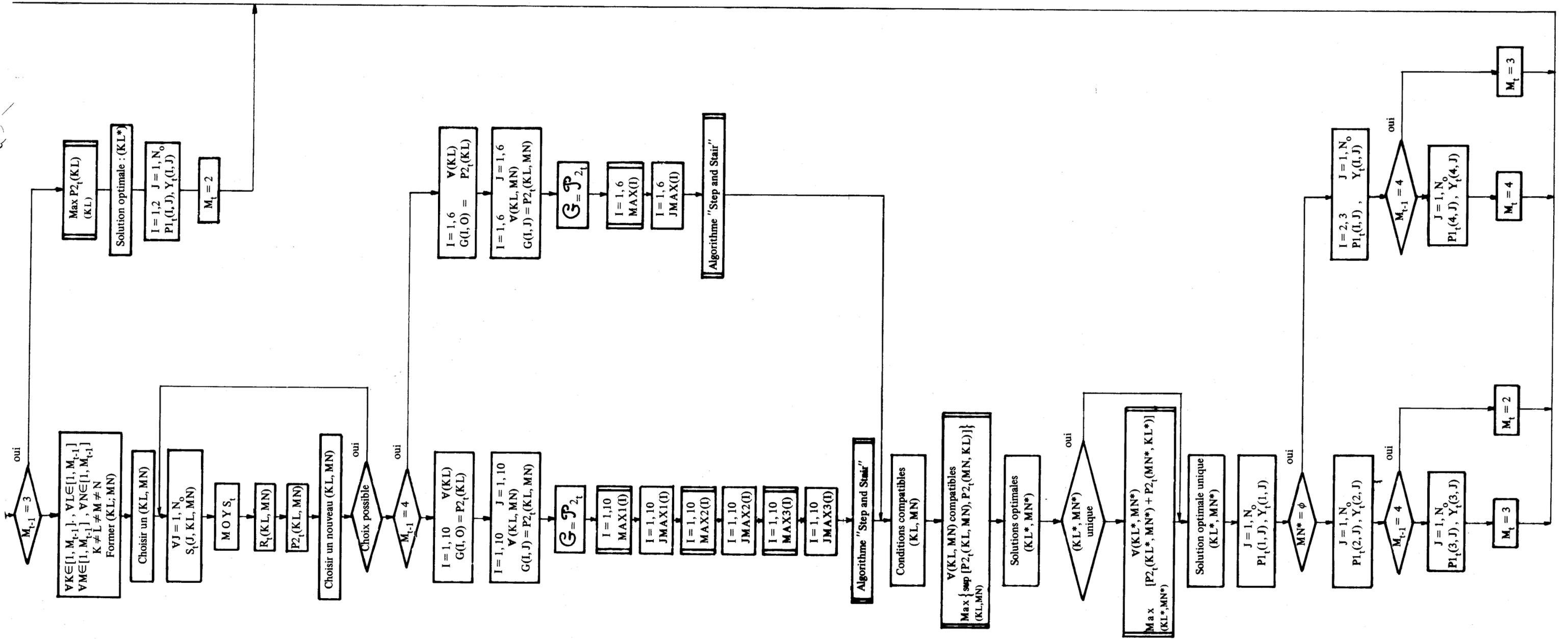


Tableau 2 : algorithme SOPHOCLE



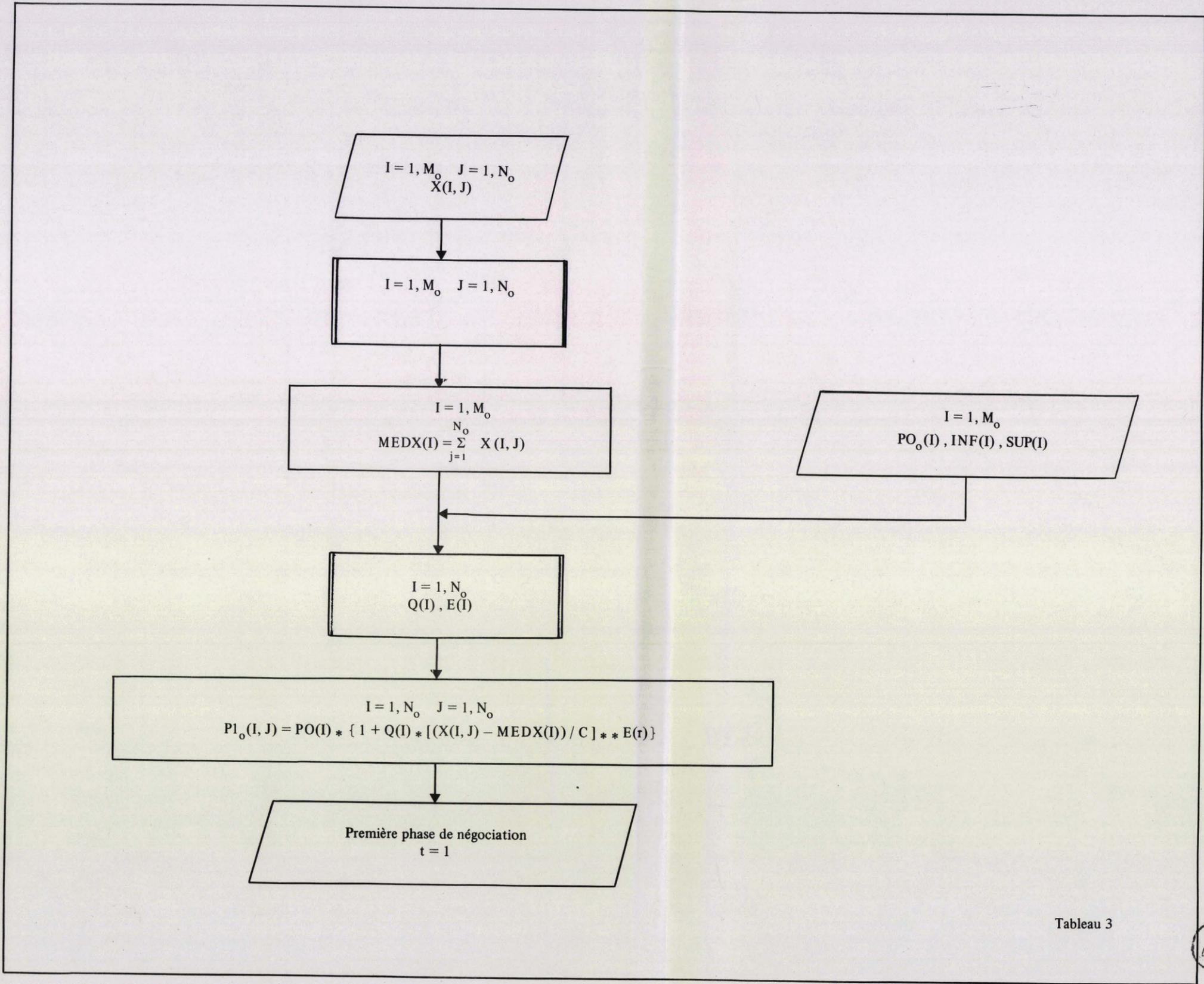
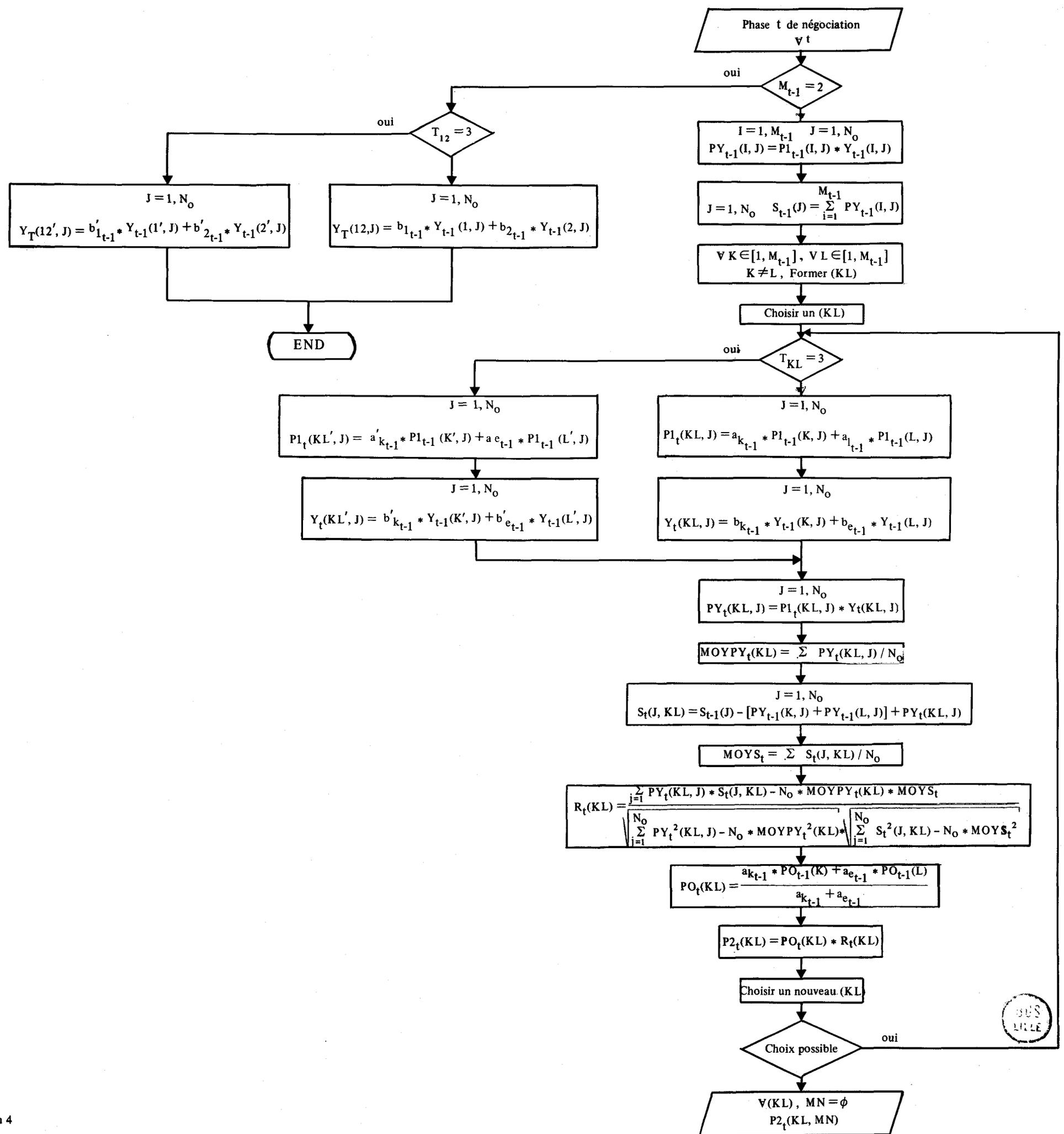
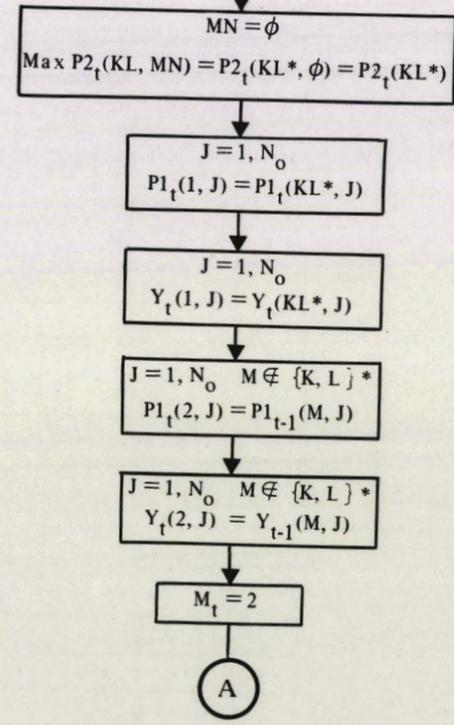
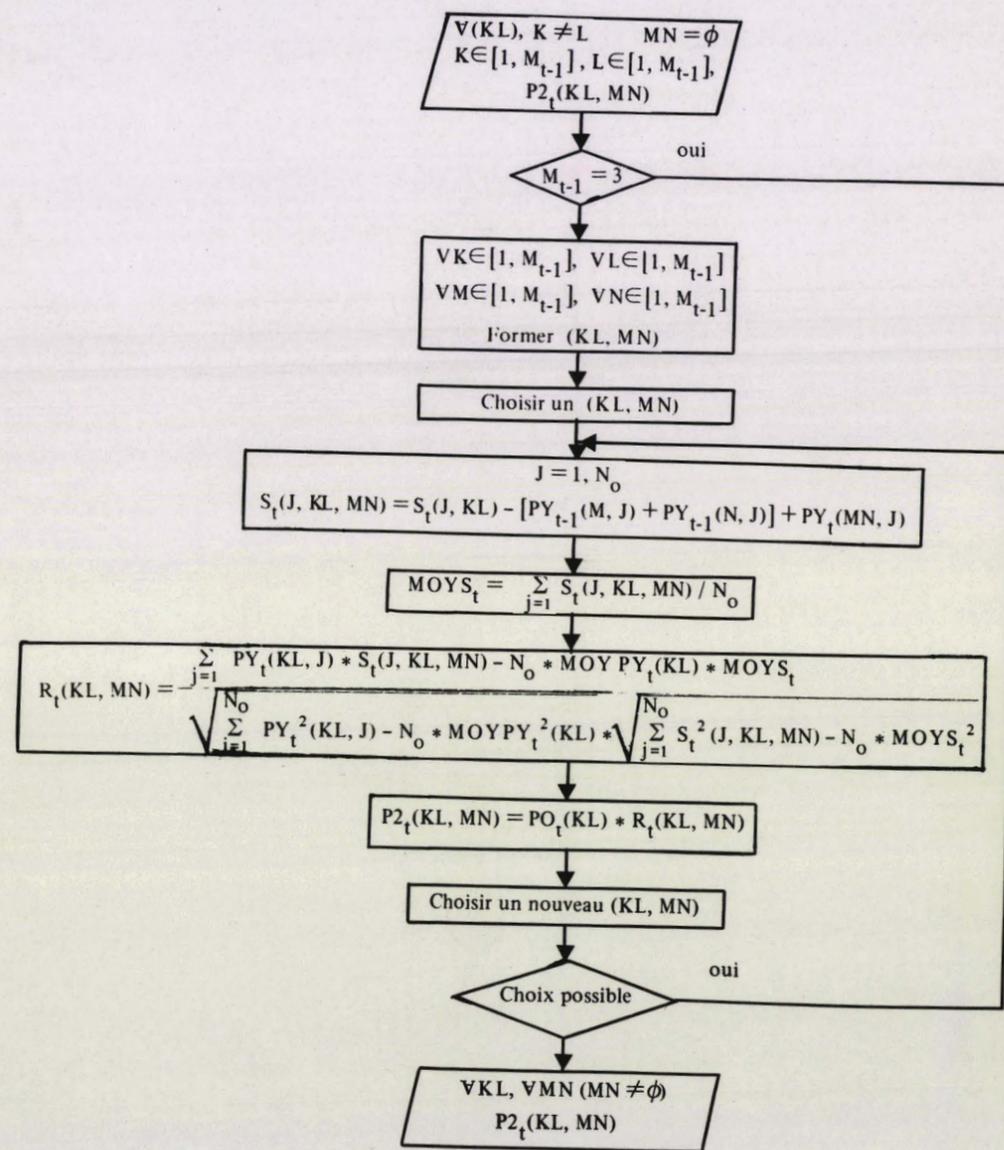


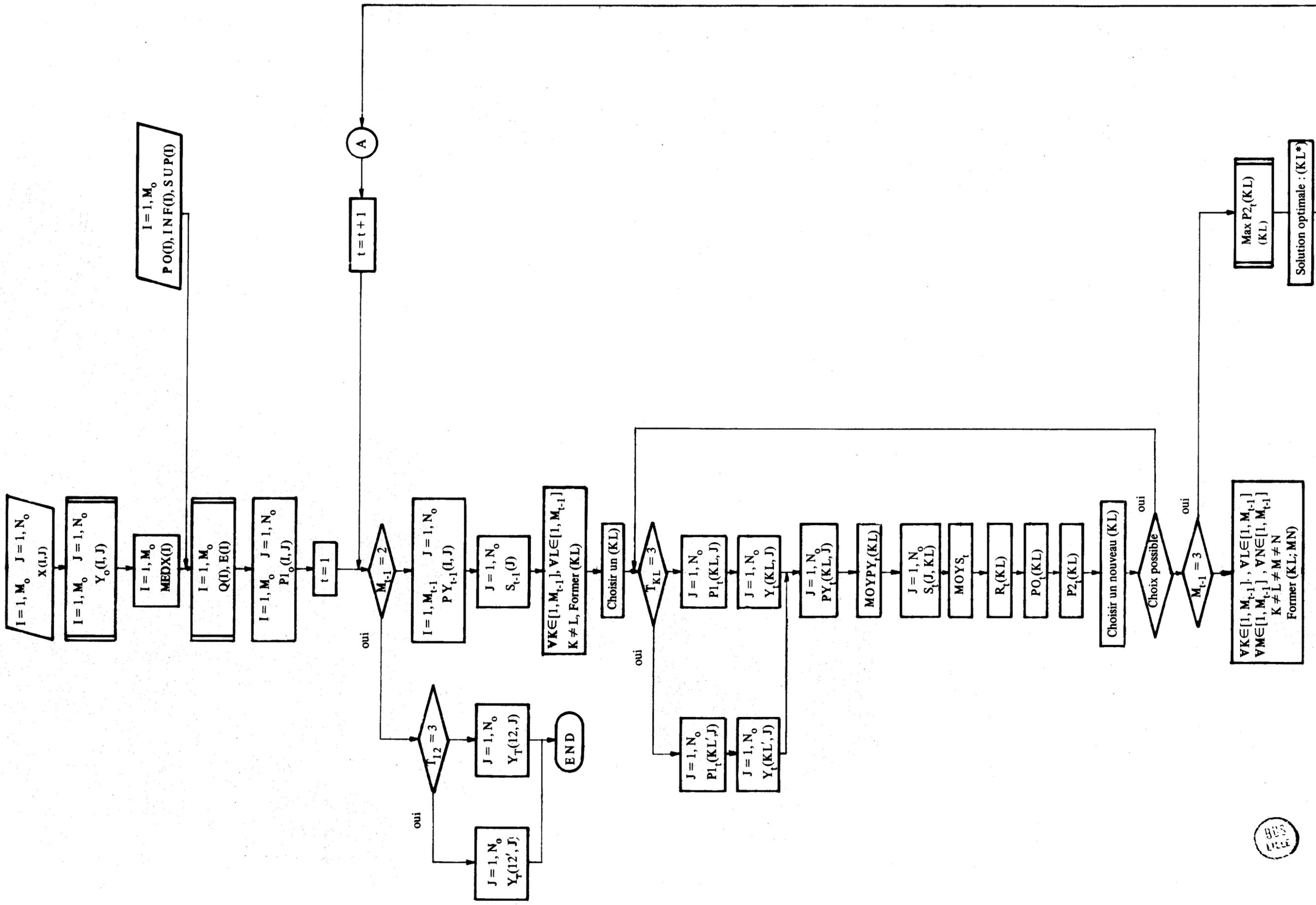
Tableau 3





SUS
 LIRE





BUS
FILE

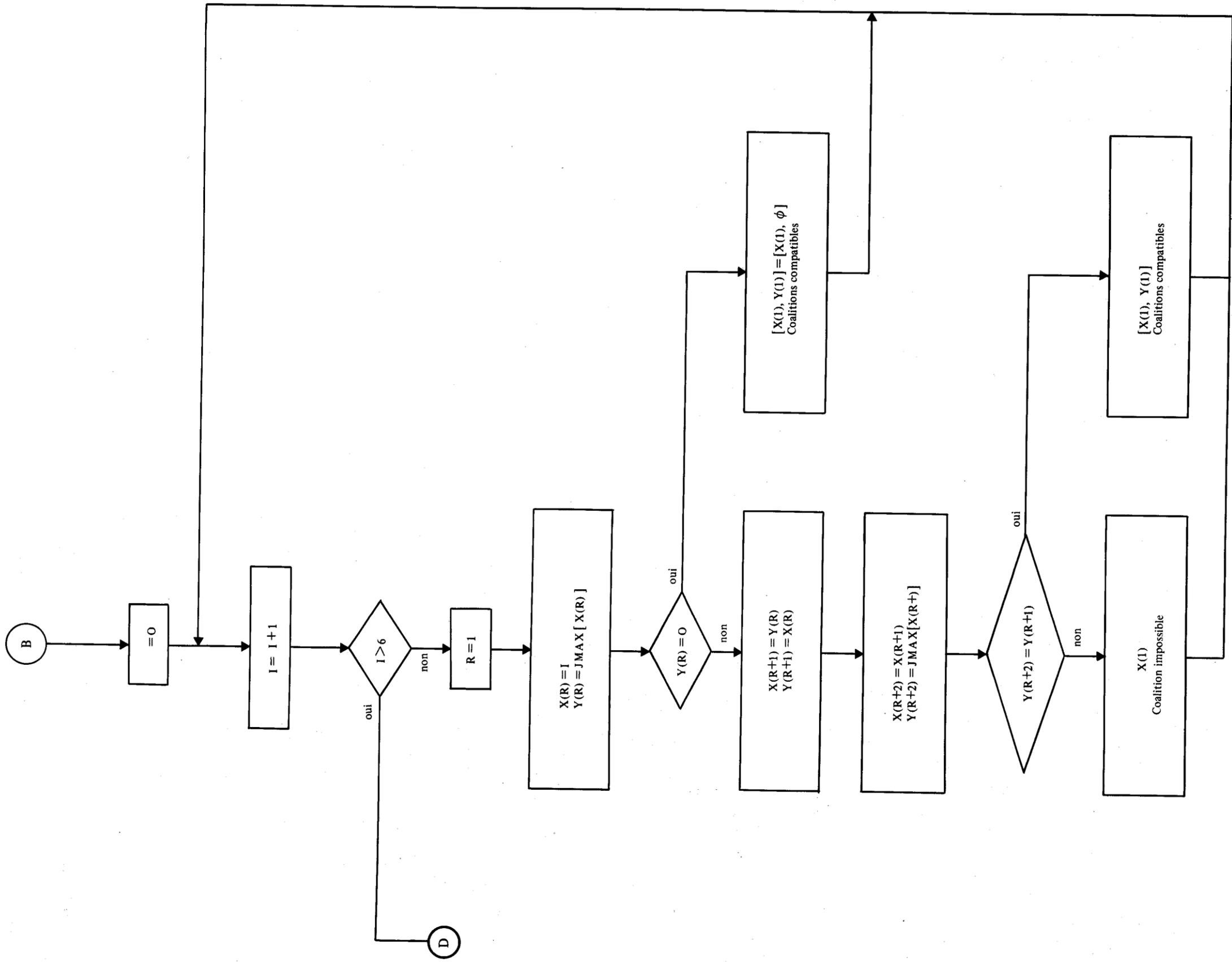


Tableau 7



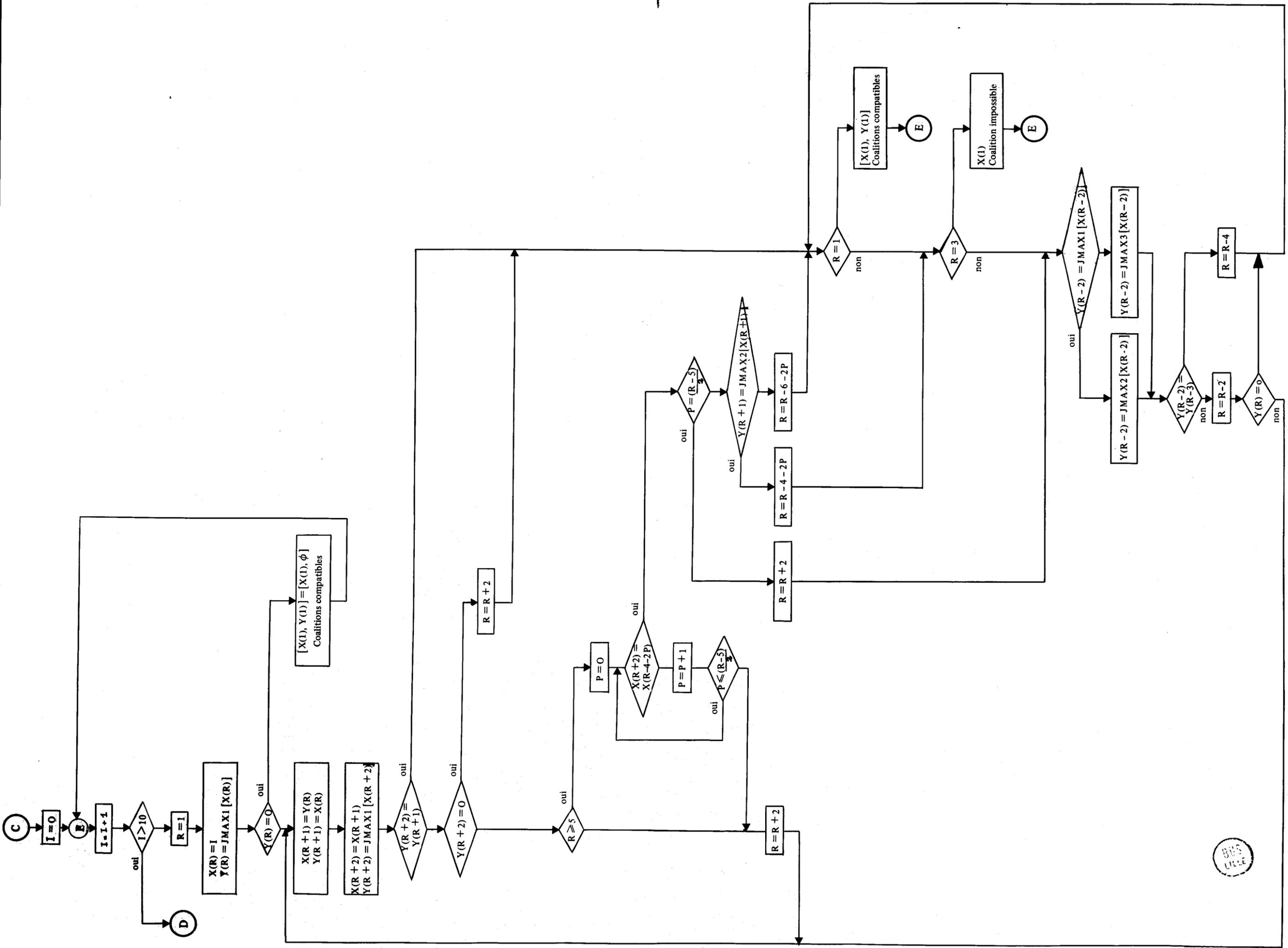


Tableau 8



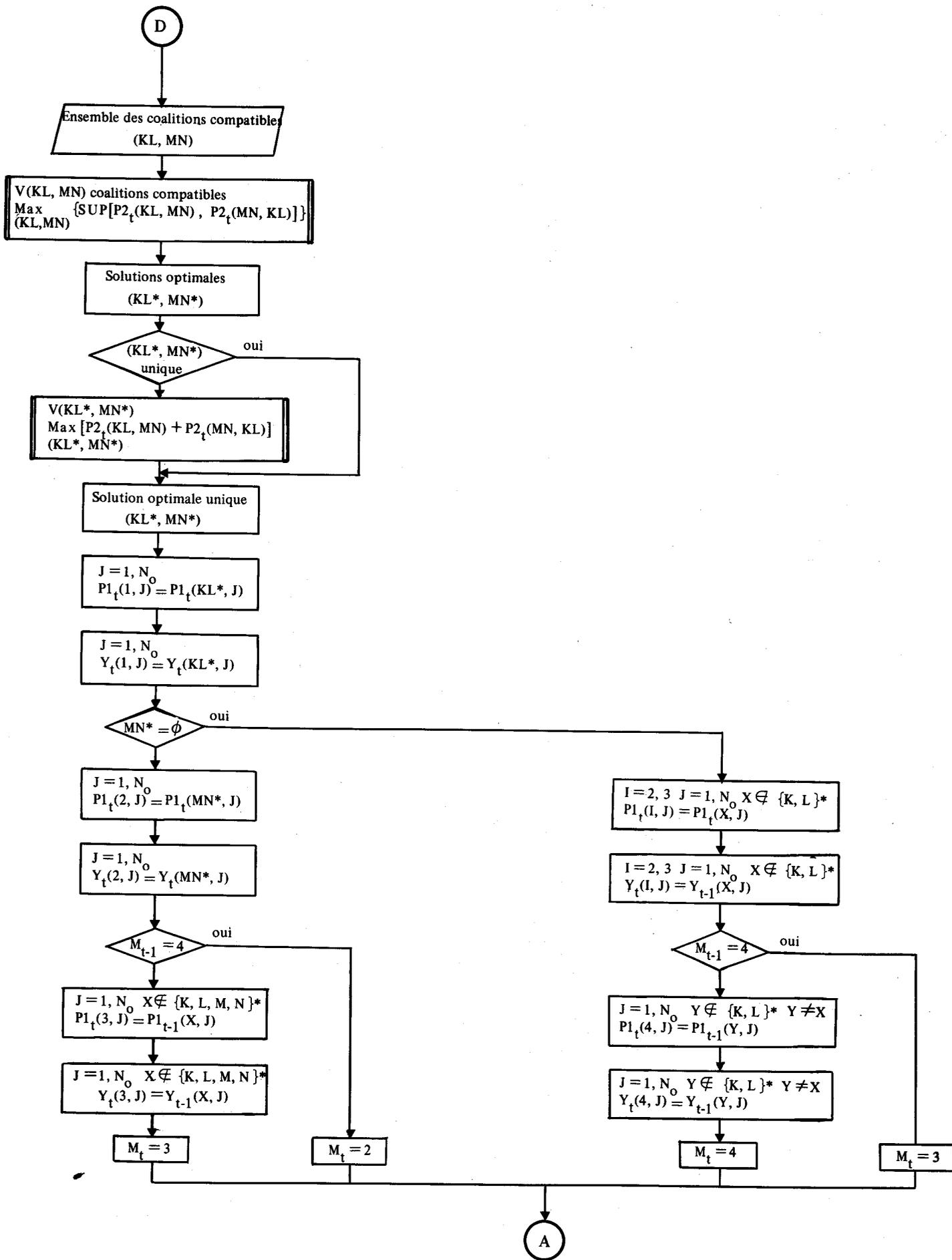


Tableau 9



XXII. 3 Conclusion

En introduction, nous avons mentionné différents objectifs importants que devraient atteindre les modèles de décisions multicritères. (Chap. VI, VII et VIII)

SOPHOCLE a cherché à apporter :

- une démultiplication des hypothèses de travail.
- une formalisation de phénomènes "réalistes".
- le respect de la dynamique de l'agrégation et des ordres de préférences : définition progressive des préférences par agrégations partielles prenant en compte le facteur "temps".

Si le mode d'approche de SOPHOCLE permet ces apports, il introduit en revanche une difficulté. Le mode d'agrégation retenu a un processus qui dépend du nombre de critères : les algorithmes "Step and Stair" sont fonction du nombre M_0 de négociateurs, et leur complexité augmente très vite avec M_0 .

Mais cette complexité est le propre de tout modèle itératif, ces derniers semblant les seuls, avec les modèles graphiques, à pouvoir actuellement satisfaire les décideurs.

Il est de toutes façons possible de développer l'élaboration d'algorithmes "Step and Stair" pour plus de 5 critères. Néanmoins nous pensons que l'utilisation de 5 points de vues différents est amplement suffisante dans la majorité des décisions multicritères réelles.

ANNEXES

—○—○—○—○—○—○—

ANNEXE 1

I INTRODUCTION

Le programme suivant a été écrit en FORTRAN IV et passé sur 10 070 CII.

Il permet une résolution informatique de l'algorithme "Step and Stair" pour $M_{t-1} = 5$, algorithme simulant une négociation compétitive entre 5 négociateurs.

II PROGRAMME

```

1:      DIMENSION JMAX1(10),JMAX2(10),JMAX3(10),JX(200),JY(200)
2:      JN=10
3:      READ (105,102) (JMAX1(I),I=1,JN)
4:      READ (105,102) (JMAX2(I),I=1,JN)
5:      READ (105,102) (JMAX3(I),I=1,JN)
6:      102 FORMAT(10I3)
7:      JI=0
8:      1 JI=JI+1
9:      IF (JI.GT.JN) GO TO 99
10:     JR=1
11:     JX(JR)=JI
12:     JY(JR)=JMAX1(JI)
13:     IF (JY(JR).EQ.0) GO TO 16
14:     2 CONTINUE
15:     JX(JR+1)=JY(JR)
16:     JY(JR+1)=JX(JR)
17:     JX(JR+2)=JX(JR+1)
18:     JX(JR+2)
19:     JY(JR+2)=JMAX1(JI)
20:     IF (JY(JR+2).EQ.JY(JR+1)) GO TO 3
21:     IF (JY(JR+2).EQ.0) GO TO 17
22:     IF (JR.EQ.5) GO TO 4
23:     7 CONTINUE
24:     JR=JR+2
25:     GO TO 2
26:     4 JI=0
27:     5 CONTINUE

```

```

28:      JW=JR-4-2*JP
29:      IF(JX(JR+2).EQ.JX(JW)) GOTO 5
30:      JP=JP+1
31:      IF(JP.LE.(JR-5)/2) GOTO 6
32:      GOTO 7
33:      17 JR=JR+2
34:      3  IF(JR.EQ.1) GOTO 8
35:      14 CONTINUE
36:      IF(JR.EQ.3) GOTO 9
37:      15 CONTINUE
38:      JW=JX(JR-2)
39:      IF(JY(JR-2).EQ.JMAX1(JW)) GOTO 10
40:      JY(JR-2)=JMAX3(JW)
41:      GOTO 11
42:      10 JY(JR-2)=JMAX2(JW)
43:      11 CONTINUE
44:      IF(JY(JR-2).EQ.JY(JR-3)) GOTO 18
45:      JR=JR-2
46:      IF (JY(JR).EQ.0) GOTO 3
47:      GOTO 2
48:      18 JR=JR-4
49:      GOTO 3
50:      5  IF(JP.EQ.(JR-5)/2) GOTO 12
51:      JW=JX(JR+1)
52:      IF(JY(JR+1).EQ.JMAX2(JW)) GOTO 13
53:      JR=JR-6-2*JP
54:      GOTO 3
55:      13 JR=JR-4-2*JP
56:      GOTO 14
57:      12 JR=JR+2
58:      GOTO 15
59:      8  WRITE(108,100) JX(1),JY(1)

60:      100 FORMAT(1X,'COALITIONS',I3,I3,' SOLUTION COMPATIBLE')
61:      GOTO 1
62:      9  WRITE(108,101) JX(1)
63:      101 FORMAT(1X,'COALITION',I3,' IMPOSSIBLE')
64:      GOTO 1
65:      16 WRITE (108,103) JX(1)
66:      103 FORMAT (1X,'COALITION',I3,'ET 0, SOLUTION COMPATIBLE')
67:      GOTO 1
68:      99 END

```

III EXEMPLES

III. 1. Exemple 1

a) données

JMAX1 = (8, 6, 7, 5, 10, 9, 2, 4, 3, 5)

JMAX2 = (10, 10, 9, 6, 3, 2, 3, 1, 6, 2)

JMAX3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)



b) Résultats

```

RUN
COALITIONS 1 8 SOLUTION COMPATIBLE
COALITION 2 IMPOSSIBLE
COALITIONS 3 7 SOLUTION COMPATIBLE
COALITION 4 IMPOSSIBLE
COALITIONS 5 10 SOLUTION COMPATIBLE
COALITIONS 6 9 SOLUTION COMPATIBLE
COALITION 7 IMPOSSIBLE
COALITION 8 IMPOSSIBLE
COALITION 9 IMPOSSIBLE
COALITIONS 10 5 SOLUTION COMPATIBLE
*STOP* 0

```

III. 2. Exemple 2a) données

JMAX1 = (8, 7, 0, 6, 4, 2, 0, 4, 3, 5)

JMAX2 = (0, 10, 5, 8, 3, 0, 2, 7, 1, 2)

JMAX3 = (9, 0, 9, 5, 10, 4, 3, 1, 6, 1)

b) résultats

```

.....
RUN
COALITION 1 IMPOSSIBLE
COALITION 2 IMPOSSIBLE
COALITIONS 3 8 SOLUTION COMPATIBLE
COALITION 4 IMPOSSIBLE
COALITION 5 IMPOSSIBLE
COALITION 6 IMPOSSIBLE
COALITION 7 10 SOLUTION COMPATIBLE
COALITIONS 8 4 SOLUTION COMPATIBLE
COALITION 9 IMPOSSIBLE
COALITIONS 10 5 SOLUTION COMPATIBLE
*STOP* 0

```

ANNEXE 2

Modèle SOPHOCLE : Exemple d'application numérique.

I INTRODUCTION

Cet exemple concerne la préparation de la politique générale et financière d'une firme par l'appréciation de résultats financiers.

Soient deux indicateurs d'efficience économique :

- Bénéfices nets (ou après impôts) : ρ_1
- Ratio de rendement d'exploitation : ρ_2

$$\rho_2 = \frac{\text{Bénéfices nets}}{\text{Chiffre d'affaires (H.T.)}}$$

Soient trois indicateurs de risque financier :

- Ratio du financement des immobilisations : ρ_3

$$\rho_3 = \frac{\text{Capitaux permanents}}{\text{Immobilisations}} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{Ressources}}{\text{Actif indisponible}}$$

- Ratio de trésorerie relative :

$$\rho_4 = \frac{\text{Valeurs réalisables et disponibles à C.T.}}{\text{Dettes à C.T.}}$$

- Ratio de rotation des stocks : P_5

$$P_5 = \frac{\text{Chiffre d'affaires}}{\text{Stocks au prix de vente}}$$

Une définition partielle de l'état financier d'une firme est possible à partir de ces cinq indicateurs.

Nous nous proposons de faire une évaluation comparative des résultats obtenus annuellement par une Société sur une période de huit ans.

II Données cardinales

$$X(I, J) = \underset{I}{O} \text{ pour l'année } A_j$$

	Années J							
Résultats performances)	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈
X (1, J)	13, 01	18, 38	10, 35	33, 13	15, 51	24, 78	20, 69	31, 91
X (2, J)	0, 0721	0, 0708	0, 0699	0, 0652	0, 0684	0, 0507	0, 0699	0, 0696
X (3, J)	0, 968	1, 018	0, 985	0, 977	0, 907	0, 869	0, 878	0, 898
X (4, J)	0, 81	0, 88	0, 85	0, 86	0, 71	0, 78	0, 75	0, 66
X (5, J)	10, 9	11, 0	10, 5	11, 8	11, 1	11, 5	11, 3	11, 2

III Données ordinales

Résultats	Années J							
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈
Y (1, J)	2	4	1	8	3	6	5	7
Y (2, J)	8	7	5	2	3	1	5	4
Y (3, J)	5-	8	7	6	4	1	2	3
Y (4, J)	5-	8	6	7	2	4	3	1
Y (5, J)	2	3	1	8	4	7	6	5

IV Poids des critères

IV. 1 Poids intrinsèques

P O (1)	P O (2)	P O (3)	P O (4)	P O (5)
4	2	3	3	1

IV. 2 Poids extrinsèques (Formules ⑨ et ⑩)

Soit $Q(I) = 0, \forall I \in [1, 5]$

Donc $P_{1_0}(I, J) = P_{0_0}(I) \quad \forall I \in [1, 5], \quad \forall J \in [1, 6]$

V Indice de tendance dominante (Formules ⑪ et ⑫)



	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	ΣPY_{\circ}^J
PY _o (1)	8	16	4	32	12	24	20	28	144
PY _o (2)	16	14	10	4	6	2	10	8	70
PY _o (3)	15	24	21	18	12	3	6	9	108
PY _o (4)	15	24	18	21	6	12	9	3	108
PY _o (5)	2	3	1	8	4	7	6	5	36
S _o (J)	56	81	54	83	40	48	51	53	466

S _o (1)	S _o (2)	S _o (3)	S _o (4)	S _o (5)	S _o (6)	S _o (7)	S _o (8)
56	81	54	83	40	48	51	53

IV. Première phase de négociation

VI. 1 Gain d'une coalition dans l'hypothèse $m_1 = 1$.

Il se forme une seule coalition (KL.)

$$\forall K, \forall L, a_{k_{\circ}} = a_{l_{\circ}} = b_{k_{\circ}} = b_{l_{\circ}} = 1$$

a) Poids des coalitions (Formule 26)

P1 (12) 1	P1 (13) 1	P1 (14) 1	P1 (15) 1	P1 (23) 1	P1 (24) 1	P1 (25) 1	P1 (34) 1	P1 (35) 1	P1 (45) 1
6	7	7	5	5	5	3	6	4	4

b) Classements des coalitions (Formule (27))

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈
Y ₁ (12,J)	10	11	6	10	6	7	10	11
Y ₁ (13,J)	7	12	8	14	7	7	7	10
Y ₁ (14,J)	7	12	7	15	5	10	8	8
Y ₁ (15,J)	4	7	2	16	7	13	11	12
Y ₁ (23,J)	13	15	12	8	7	2	7	7
Y ₁ (24,J)	13	15	11	9	5	5	8	5
Y ₁ (25,J)	10	10	6	10	7	8	11	9
Y ₁ (34,J)	10	16	13	13	6	5	5	4
Y ₁ (35,J)	7	11	8	14	8	8	8	8
Y ₁ (45,J)	7	11	7	15	6	11	9	6

c) Classements pondérés des coalitions (Formule (11))

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	PY ₁ (KL)
PY ₁ (12,J)	60	66	36	60	36	42	60	66	426
PY ₁ (13,J)	49	84	56	98	49	49	49	70	504
PY ₁ (14,J)	49	84	49	105	35	70	56	56	504
PY ₁ (15,J)	20	35	10	80	35	65	55	60	360
PY ₁ (23,J)	65	75	60	40	35	10	35	35	355
PY ₁ (24,J)	65	75	55	45	25	25	40	25	355
PY ₁ (25,J)	30	30	18	30	21	24	33	27	213
PY ₁ (34,J)	60	96	78	78	36	30	30	24	432
PY ₁ (35,J)	28	44	32	56	32	32	32	32	288
PY ₁ (45,J)	28	44	28	60	24	44	36	24	288

Moyennes

\overline{PY}_{12}	\overline{PY}_{13}	\overline{PY}_{14}	\overline{PY}_{15}	\overline{PY}_{23}	\overline{PY}_{24}	\overline{PY}_{25}	\overline{PY}_{34}	\overline{PY}_{35}	\overline{PY}_{45}
53,25	63,00	63,00	45,00	44,37	26,62	54,00	36,00	36,00	36,00

d) Indices de tendances dominantes (Formule 12)

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	$\sum_J S_1(J, KL)$	$\sum_J S_1(J, KL) / 8$
S ₁ (J, 12)	92	117	76	107	58	64	81	83	678	84,75
S ₁ (J, 13)	82	125	85	131	65	70	74	86	718	89,50
S ₁ (J, 14)	82	125	81	135	57	82	78	78	718	89,50
S ₁ (J, 15)	66	97	59	123	59	82	80	80	646	80,75
S ₁ (J, 23)	90	118	83	101	57	53	70	71	643	80,37
S ₁ (J, 24)	90	118	81	103	53	59	72	67	643	80,37
S ₁ (J, 25)	68	84	61	101	51	63	68	67	563	70,37
S ₁ (J, 34)	86	129	93	122	58	63	66	65	682	85,25
S ₁ (J, 35)	67	98	64	113	56	70	71	71	610	76,25
S ₁ (J, 45)	67	98	63	114	54	73	72	69	610	76,25

e) Indices de corrélation (Formule 15)

(12)	R ₁ (13)	R ₁ (14)	R ₁ (15)	R ₁ (23)	R ₁ (24)	R ₁ (25)	R ₁ (34)	R ₁ (35)	R ₁ (45)
520	0,654	0,974	0,744	0,815	0,865	0,601	0,937	0,927	0,907



f) Gains des coalitions (Formule (16))

$P2_1(12)$	$P2_1(13)$	$P2_1(14)$	$P2_1(15)$	$P2_1(23)$	$P2_1(24)$	$P2_1(25)$	$P2_1(34)$	$P2_1(35)$	$P2_1(45)$
3, 120	4, 578	6, 818	3, 720	4, 075	4, 325	1, 803	5, 622	3, 704	3, 628

VI. 2 Gain d'une coalition dans l'hypothèse $m_1 = 2$.

A) Indices de tendances dominantes (Formule (12))

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	$\sum S_1(J, KL, MN)$	MOYS ₁
$S_1(J, 12, 34)$	122	165	115	146	76	79	96	95	894	111, 75
$S_1(J, 12, 35)$	103	134	86	137	74	86	101	101	822	102, 75
$S_1(J, 12, 45)$	103	134	85	138	72	89	102	99	822	102, 75
$S_1(J, 13, 24)$	116	162	112	151	78	81	95	100	895	111, 87
$S_1(J, 13, 25)$	94	138	92	149	76	85	91	100	825	103, 12
$S_1(J, 13, 45)$	93	142	28	256	79	95	95	102	890	111, 25
$S_1(J, 14, 23)$	116	162	110	153	74	87	97	96	895	111, 87
$S_1(J, 14, 25)$	94	138	88	153	68	97	95	92	825	103, 12
$S_1(J, 14, 35)$	93	142	91	165	73	104	98	96	862	107, 75
$S_1(J, 15, 23)$	100	134	88	141	76	87	99	98	823	102, 87
$S_1(J, 15, 24)$	100	134	86	143	72	93	101	94	823	102, 87
$S_1(J, 15, 34)$	96	145	98	162	77	97	95	92	862	107, 75
$S_1(J, 23, 45)$	101	135	92	132	71	78	91	87	787	98, 37
$S_1(J, 24, 35)$	101	135	91	133	69	81	92	85	787	98, 37
$S_1(J, 25, 34)$	98	142	100	140	69	78	83	79	789	98, 62

b) Indices de corrélation (Formule 15)

R ₁ (KL, MN)		M N									
		12	13	14	15	23	24	25	34	35	45
KL	12								0,373	0,518	0,510
	13						0,553	0,633			0,552
	14					0,699		0,965		0,981	
	15					0,380	0,429		0,385		
	23			0,639	0,410						0,599
	24		0,771		0,528					0,716	
	25		0,488	0,537					0,380		
	34	0,902			0,732			0,891			
	35	0,815		0,935			0,810				
	45	0,758	0,834			0,689					

VI. 3 Résolution

a) Tableau des gains des coalitions (Formule 16)

		$m_1 = 1$	$m_1 = 2$									
	M N	\emptyset	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45
K L	I J	O	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	1	3,120								2,238	3,108	3,060
13	2	4,578						3,871	4,431			3,864
14	3	6,818					5,523		6,755		6,867	
15	4	3,720					1,900	2,145		1,925		
23	5	4,075			3,195	2,050						2,995
24	6	4,325		3,855		2,640						3,580
25	7	1,803		1,464	1,611					1,140		
34	8	5,622	5,412			4,392				5,346		
35	9	3,704	3,260		3,740			3,240				
45	10	3,628	3,032	3,336			2,756					

b) Négociations : Algorithme "Step and Stair"

b 1. Données initiales

I	JMAX1	JMAX2	JMAX3
1	0	9	10
2	0	7	6
3	9	0	7
4	0	6	8
5	0	3	10
6	0	2	9
7	0	3	2
8	0	1	4
9	3	0	1
10	0	2	1

b 2. Résultats

```

RUN
COALITION 1ET 0,SOLUTION COMPATIBLE
COALITION 2ET 0,SOLUTION COMPATIBLE
COALITIONS 3 9 SOLUTION COMPATIBLE
COALITION 4ET 0,SOLUTION COMPATIBLE
COALITION 5ET 0,SOLUTION COMPATIBLE
COALITION 6ET 0,SOLUTION COMPATIBLE
COALITION 7ET 0,SOLUTION COMPATIBLE
COALITION 8ET 0,SOLUTION COMPATIBLE
COALITIONS 9 3 SOLUTION COMPATIBLE
COALITION 10ET 0,SOLUTION COMPATIBLE
*STOP* 0

```



Le critère du gain maximum indique { coalitions 3 et 9 }
comme solutions optimales.

VII Deuxième phase de la négociation

Il reste trois négociateurs en place :

- une coalition a réuni les joueurs 1 et 4.
- le joueur 2 reste seul.
- une coalition a réuni les joueurs 3 et 5.

VII 1. Données initiales de la phase 2

a) données ordinales

Résultats	Années							
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈
Y ₁ (1)	7	12	7	15	5	10	8	8
Y ₁ (2)	8	7	5	2	3	1	5	4
Y ₁ (3)	7	11	8	14	8	8	8	8

b) Poids des coalitions

$P 1_1 (1)$	$P 1_1 (2)$	$P 1_1 (3)$
7	2	4

c) Classements pondérés (Formule II)

Résultats	Années							
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
$P Y_1 (1)$	49	84	49	105	35	70	56	56
$P Y_1 (2)$	16	14	10	4	6	2	10	8
$P Y_1 (3)$	28	44	32	56	32	32	32	32

VII 2. Calcul des gains

Il ne peut se former qu'une seule coalition. Nous conserverons les valeurs suivantes, pour simplifier :

$$\forall K, \forall L, \quad a_{k_1} = a_{l_1} = b_{k_1} = b_{l_1} = 1$$

a) Poids des coalitions (Formule (26))

$P 1_2 (12)$	$P 1_2 (13)$	$P 1_2 (23)$
9	11	6



b) Classement des coalitions (Formule 27)

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈
Y ₂ (12,J)	15	19	12	17	8	11	13	12
Y ₂ (13,J)	14	23	15	29	13	18	16	16
Y ₂ (23,J)	15	18	13	16	11	9	13	12

c) Classements pondérés des coalitions (Formule II)

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈
P Y ₂ (12,J)	135	171	108	153	72	99	117	108
P Y ₂ (13,J)	154	253	165	319	143	198	176	176
P Y ₂ (23,J)	90	108	78	96	66	54	78	72

$$\sum_J P Y_2 (12,J) = 963$$

$$\sum_J P Y_2 (13,J) = 1584$$

$$\sum_J P Y_2 (23,J) = 642$$

d) Indices de tendances dominantes (Formule 12)

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈
S ₂ (J, 12)	163	215	140	209	104	131	149	140
S ₂ (J, 13)	170	267	175	323	149	200	186	184
S ₂ (J, 23)	139	192	127	201	101	124	134	128

$$\sum_J S_2 (J, 12) = 1\ 251$$

$$\sum_J S_2 (J, 13) = 1\ 654$$

$$\sum_J S_2 (J, 23) = 1\ 146$$

e) Indices de corrélation (Formule 15)

R ₂ (12)	R ₃ (13)	R ₂ (23)
0, 98	0, 99	0, 83

f) Gains des coalitions (Formule 16)

P ₂ (12)	P ₂ (13)	P ₂ (23)
6,86	1,98	3,32

VII. 3 Résolution

Le critère du gain maximum indique :
coalitions 1 et 2 comme optimales

VIII Dernière phase de la négociation

Il reste deux négociateurs composites en place :
- une coalition regroupant les joueurs 1, 4 et 2.
- une coalition regroupant les joueurs 3 et 5.

VIII. 1 Données initiales de la phase 3

Seules les données ordinales nous intéressent :

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈
Y ₃ (1)	15	19	12	17	8	11	13	12
Y ₃ (2)	7	11	8	14	8	8	8	8

VIII. 2 Résolution (Formule 27)

On prendra des coefficients différents pour signifier
l'importance plus grande de la première coalition : 0,6 et 0,4

$$Y_T(J) = 0,6 \times Y_3(1, J) + 0,4 \times Y_3(2, J)$$

Doù le résultat final :

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈
Y _T (J)	11,8	15,8	10,4	15,8	8,0	9,8	11,0	10,4

Ce qui donne, avec un classement inverse de pas 1 les préférences suivantes :

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈
Y _T (J)	6	7	3	7	1	2	5	3

IX Conclusion

L'appréciation comparative des résultats financiers sur une période de huit ans est possible.

Le classement final ordonne les résultats annuels avec les préférences décroissantes suivantes :

- 1°) Années 2 et 4
- 2°) Année 1
- 3°) Année 7
- 4°) Années 3 et 8
- 5°) Année 6
- 6°) Année 5



B I B L I O G R A P H I E

- (1) AGARD J.

Les Méthodes de simulation.
AFIRO - Dunod - Paris (1968).
- (2) ANSOFF H.I.

Corporate Strategy .
Mc Graw Hill C. N.Y. (1965).
- (3) ARROW K.J.

Social choices and individual values.
J. Wiley and Sons. N.Y. (1963).
- (4) BARTEE F.M.

Problem solving with ordinal measurement.
Management Science. Vol 17 N° 10 (Juin 1971).
- (5) BENAYOUN R, ROY B, et SUSSMANN B.

Electre.
a) Note de travail N° 49. Direction Scientifique de la SEMA (Juin 1966).
b) Manuel de référence du programme Electre.
Note de synthèse et formation N° 25. Direction Scientifique de la
SEMA (Juin 1966).
- (6) BENAYOUN R. et TERGNY J.

Critères multiples en programmation mathématique : une solution dans
le cas linéaire.
RIRO. 3ème année V2 (1969).
- (7) BENCI E., COULOMB G.P., TREHONDART L. et TUOT R.

Modèles d'aide à la décision financière d'Entreprise
Publications IRIA (1971).

- (8) BERNARD G. et BESSON ML.

Douze méthodes d'analyse multicritère. RIRO 5ème année V3 (1971).

- (9) BIZE P.R., GOGUELIN P. et CARPENTIER R.

Le penser efficace (Termes 1 et 2).
SEDES - Paris (1967).

- (10) BLUMENTHAL S.C.

Management information systems.
Prentice Hall, Inc.
Englewood Cliffs. N.J. (1969).

- (11) BOLDUR G.

Linear programming problems with complex decision conditions.
7ème Symposium de programmation Mathématique - La Haye (Sept. 1970).

- (12) BONINI C.P.

Simulation of information and decision systems in the firm.
Prentice Hall, Inc.
Englewood Cliffs, N.J. (1963).

- (13) BRESSON F. et MATALON B.

Thème pour une famille de modèles de décisions réelles. dans 18

- (14) CHARNES A. et COOPER W.W.

Management Models and industrial applications of linear programming (Vol. 1 et 2) J. Wiley and Sons N.Y. (1961).

- (15) CHARNES A., COOPER W.W., NIEHAUS R.J. et STEDRY A.

Static and dynamic assignment Models with multiple objective and some remarks on organisation design.

Management science. Vol 15. N° 8 (Avril 1969).

(16) CHURCHMAN C.W.

Challenge to reason.
Mc Graw Hill C. N.Y. (1968).

(17) CLARKSON G.P.E.

Managerial economics.
Penguin books (1968).

(18) C.N.R.S. (Colloques).

a) La décision (I)
Editions du C.N.R.S. (1961).

b) La décision (II)
Agrégation et dynamique des ordres de préférences.
Editions du C.N.R.S. (1969).

(19) COLLOMB B.

Goal interval approaches to intertemporal analysis and décentrali-
sation in management.
Thèse. Université du Texas (1971).

(20) CONSO P.

La gestion financière de l'Entreprise.
Dunod . Paris (1967).

(21) COULOMB G.P.

a) Analyse du processus décisionnel au niveau stratégique des
organisations. [dans 7] .
b) Stratégie et organisations. Rapport du stage FASSA.
Fondation Royaumont. Paris (1970).

(22) CYERT R.M. et MARCH J.G.

A behavioral theory of the firm.
Prentice Hall. Inc. Englewood Cliffs N.J. (1963).

(23) DAVAL R.

a) Psychologie sociale et théorie des jeux.

Cours de psychologie sociale. Sorbonne. Paris PUF.

b) Traité de psychologie sociale.

(Tomes 1 et 2).

PUF. Paris (1964).

c) Les sciences humaines et l'Entreprise.

(DAVAL R. et KATÇHOURINE A.).

Management France (Juillet 1970).

(24) DEBREU G.

Topological methods in cardinal utility theory.

Mathematical methods in the social sciences. Stanford. University press. (1969).

(25) DRUCKER P.

La pratique de la direction des Entreprises. Bibliothèque du Management. Editions d'organisations. Paris.

(26) EDWARDS W. et TVERSKY A.

Decision making.

Penguin Books (1967). (importante bibliographie).

(27) EILON S.

What is a decision ?

Management science. Vol 16 N° 4 (Déc. 1969).

(28) FISHBURN P.C.

a) Decision and value theory.

J. Wiley and Sons N.Y. (1964).

b) Utility theory for decision working

J. Wiley and Sons (1970).

- (29) FORRESTER J.W.

Industrial dynamics.
Cambridge (Mass.) MIT Press (1968).
- (30) GEOFFRION A.M.

Vector maximal decomposition programming.
7ème symposium de programmation mathématique. La Haye (Sept. 1970).
- (31) GROLLEAU J.L. et TERGNY J.

Manuel de référence du programme Electre II.
Direction scientifique. Document technique N° 24. SEMA (Déc. 1971).
- (32) HOTELLING H. et PABST M.

Rank correlation and tests of significance involving no assumption
of normality.
Ann. Math. Stat. 7 (229.43) (1936).
- (33) IJIRI Y.

Management goals and accounting for control.
North Holland Publishing Company. Amsterdam (1965).
- (34) JACQUET-LAGREZE E.

L'agrégation des opinions individuelles.
Informatique en Sciences Humaines N° 4. (Nov. 1969).
- (35) JOHNSEN E.

Studies in multiobjective decision models. Suden Litteratur. (1968).
- (36) KAUFMANN A.

Introduction à la combinatoire en vue des applications.
Dunod. Paris (1968).

- (37) KAUFMANN A. et CRUON R.

La programmation dynamique. Dunod. Paris (1965).

- (38) KENDALL M.G.

a) Rank correlation method.

Griffin. Londres (1948).

b) the advanced theory of statistics (Vol 1) Griffin. Londres (1948).

- (39) KREWERAS G.

Représentation polyédrique des préordres complets finis et applications à l'agrégation des préférences dans 18

- (40) LANE M.N.

Goal programming and satisficing models in economic analysis.
Un published dissertation. Université du Texas (1970).

- (41) LUCE R.O., BUSH R.R., et GALANTER E.

Handbook of Mathematical psychology (Vol I et II).
J. Wiley and Sons. N.Y. (1967).

- (42) LUCE R.O., et RAÏFFA.

Games and decisions.

J. Wiley and Sons. N.Y. (1958).

- (43) MARCH J.G. et SIMON H.A.

Les organisations. Dunod. Paris (1969).

- (44) MASSE P.

Le choix des investissements. Dunod. Paris (1964).

- (45) MILLER JR.

The assessment of worth : a systematic procedure and its experimental validation MIT (Juin 1966).
- (46) MILNOR J.L.

Decision processes.
J. Wiley and Sons. N.Y. (1954).
- (47) MORRIS W.T.

The analysis of management decisions.
Irwin, Inc. (1964).
- (48) MUNN N.L.

Traité de psychologie.
Payot. Paris (1968).
- (49) NISSEN G. et POTTIER O.

Analyse et contrôle des systèmes économiques.
Note scientifique N° 3. IRIA. Rocquencourt (Avril 1971).
- (50) OFSTAD H.

An inquiry into the freedom of decision Allen and Urwin (1961).
- (51) OLOS E.G.

The 5 % significance levels for sums of squares of rank differences and a correction.
Ann. Math. Stat. 20 (117.118) (1949).
- (52) QUIRIN G.D.

The capital expenditure decision. Irwin, Inc. (1967).

- (53) RAÏFFA H.
- Preferences for multi-attributed alternatives. The Rand corporation memorandum.
RM. 5868. DOT. RC. (Avril 1969).
- (54) RICHARDS MD. et GREENLAN PS.
- Management decision making, Irwin, Inc. (1966).
(Bibliographie importante).
- (55) ROUX M.
- Sur un algorithme de classification automatique.
Thèse. Faculté des Sciences de Paris.
- (56) ROY B.
- a) Algèbre moderne et théorie des graphes ; Applications aux Sciences économiques et sociales. Dunod. Paris (1969).
- b) Classements et choix en présence des points de vue multiples
RIRO. 2ème année N° 8 (1968).
- c) Décisions avec critères multiples : problèmes et méthodes.
Revue Metra. Vol. XI N° 1 (1972).
(importante bibliographie).
- d) Pourquoi des approches multicritères et comment ?
Note de travail N° 108 (Nov. 1969). Direction scientifique SEMA.
- (57) ROY B. et BERTIER P.
- La méthode Electre II.
Note de travail N° 142.
Direction scientifique. Groupe METRA (Avril 1971)
- (58) SASKA J.
- Linear multiprogramming.
Economimiko Matematiky obzor. 4. (1968).

- (59) SAVAGE L.

Foundation's of statistics.
J. Wiley and Sons N.Y. (1954).
- (60) SHACKLE G.L.S.
Expectations in economics.
Cambridge Univ. Press (1949).
- (61) SIEGEL S.
Non parametric statistics for the behavioral sciences.
Mc Graw Hill Book C. Inc. (1959).
- (62) SIEGEL A.I. et WOLF J.J.

Man-machine simulation models
J. Wiley and Sons N.Y. (1969).
- (63) SIMON H.A.

a) On the concept of organisational goal.
Administrative Science quaterly (Juin 1964).

b) Models of management.
J. Wiley and Sons N.Y. (1957).
- (64) Société Française de Chréïologie

Journées françaises de Vaucresson. Sept. 1968.
Informations UFOD. N° Spécial 1968.1969.
- (65) SPIRE O.

Programmation dynamique discrète et décisions de gestion.
Université Paris IX. Dauphine (Juin 1971). (A paraître).
(Importante bibliographie).

(66) TERRY H.

Comparative evaluation of performances using multiple criteria.
Management science. Vol.9 N° 3 (Avril 1963).

(67) VAN HORNE J.C.

Financial management and Policy.
Prentice Hall, Inc.
Englewood Cliffs N.J. (1968)

(68) VON NEUMAN J. et MORGENSTERN O.

Theory of games and economic behavior.
Princeton Univ. Press.
Princeton N.J. (1953).

(69) WALD A.

Statistical decision functions.
J. Wiley and Sons N.Y. (1950).

(70) WASSERMAN P. et SILANDER FS.

Decision making : and annotated bibliography.

(71) WILLERMAN B.

The adaptation and use of Kendall's coefficient of concordance W
to sociometric-type rankings.
Psychol. Bull. 52 (1955).