

N° d'ordre : 396

T H E S E

présentée

à la Faculté des Sciences de l'Université de Lille

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

par

Jean-Claude ANGUE

Ingénieur E.N.S.E.E.C.

- o o o -



Titre de la thèse :

" Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires  
décrits par un modèle récurrent "

Soutenu le 11 Juillet 1973 devant la Commission d'examen :

Messieurs : P. VIDAL, Président  
F. LAURENT, Rapporteur  
L. POVY, Examineur  
M. MORIAEZ, Invité

- o o o -

## INTRODUCTION GENERALE

---

Le travail que nous présentons dans ce mémoire concerne l'étude des systèmes échantillonnés non linéaires fonctionnant en régime dynamique. Ceux-ci sont généralement caractérisés par un modèle décrit sous la forme d'une équation de récurrence et la convergence de la solution de cette récurrence permet dans la plupart des cas de garantir la stabilité du processus étudié.

En raison du caractère non linéaire de tels systèmes, il est parfois difficile d'entreprendre une étude directe de la stabilité, dans ce cas, une technique usuelle consiste à déduire la propriété de stabilité du processus initial de celle d'un modèle simplifié, pris en référence.

Les techniques de contraction basées sur ce principe sont pour la plupart une extension des travaux de LJAPUNOV et conduisent à la définition d'un système du premier ordre dont l'évolution majore celle du système étudié.

Dans le premier chapitre, nous définissons la classe des systèmes que nous proposons d'aborder ainsi que les principales représentations utilisées pour décrire leur comportement. Le plus souvent, on adopte une représentation du processus selon un modèle mathématique mis sous la forme d'une équation d'état et utilisant un nombre minimum de paramètres.

La majoration par un système du premier ordre peut alors être directement envisagée pour ce type de représentation. On peut songer à interpréter ce mode d'étude. En effet, cette méthode implique généralement une perte d'informations et impose par conséquent aux paramètres, des contraintes de stabilité parfois trop restrictives; il est donc souhaitable de compenser cette perte d'informations par un artifice particulier.

Dans ce sens, nous proposons de choisir un modèle initial redondant obtenu par l'introduction de variables supplémentaires; cette transformation entraîne une augmentation de l'ordre apparent du modèle et conduit à étudier une nouvelle récurrence, d'ordre supérieur, mais de forme identique.

On peut alors utiliser, pour ce modèle, les méthodes de contraction usuelles et envisager l'effet des redondances sur les conditions de stabilité.

Ainsi, au cours du chapitre II, une telle modification du modèle conduit à l'énoncé de nouvelles conditions de stabilité asymptotique globale. Cette méthode développée pour les systèmes du second ordre permet le tracé d'un abaque facilitant l'interprétation graphique des résultats.

La mise en oeuvre est illustrée au chapitre III sur deux exemples particuliers du second ordre et de structures différentes. Le premier concerne l'étude de la stabilité d'un système non linéaire, à non linéarité séparable et à commande échantillonnée linéaire. Le second est relatif à l'étude de l'asservissement d'un système linéaire à commande non linéaire par modulation de largeur des impulsions.

Il convient de noter que les conditions de stabilité définies à partir du critère de stabilité globale doivent, pour permettre de conclure de façon définitive, être vérifiées à chaque instant. L'application pratique d'un tel critère peut donc s'avérer parfois délicate. Ainsi, au cours du chapitre IV, nous proposons de montrer que par l'association d'un critère de majoration des oscillations limites aux critères de stabilité usuels, il est parfois possible de résoudre ce problème et éventuellement de conclure à la stabilité illimitée du processus étudié.

La simulation sur calculatrice hybride d'un système asservi commandé

par modulation de largeur permet, au cours du chapitre V, d'illustrer ces résultats.

Enfin nous proposons, au cours du dernier chapitre, une technique d'étude du comportement dynamique des systèmes asservis basée sur une majoration d'ordre supérieur à l'unité.

## CHAPITRE I

---

### FORMULATION DES SYSTEMES ECHANTILLONNES NON LINEAIRES

---

#### INTRODUCTION

Les systèmes échantillonnés sont généralement décrits à partir d'un modèle discret par des équations de récurrence, ce mode de représentation conduit à un symbolisme mathématique simple, de type matriciel ou scalaire.

Après une présentation générale des processus de régulation échantillonnés, nous précisons dans ce premier chapitre la classe des systèmes que nous nous proposons d'aborder ainsi que les principaux modèles mathématiques qui permettent d'analyser leur comportement.

### 1.1. DESCRIPTION GENERALE DES SYSTEMES ECHANTILLONNES.

Les systèmes échantillonnés de type courant se ramènent généralement au schéma de la figure 1.1.

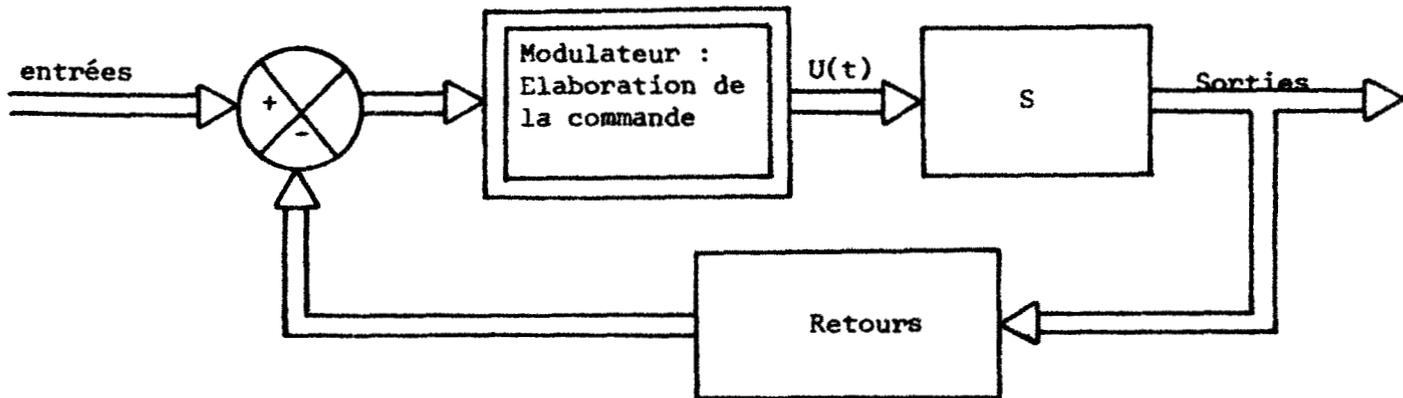


figure 1-1.

Le système multivariable  $S$  à commander est supposé linéaire. Un modulateur de structure non linéaire élabore à partir des signaux d'entrée et des retours le vecteur de commande  $U$ . Si  $t_n$  désigne l'instant du  $n^{\text{ième}}$  échantillonnage, la connaissance des signaux d'entrée pour tout  $t \geq t_n$  ne peut suffire à caractériser l'évolution du système ; il est également nécessaire de disposer de l'état du système à l'instant  $t_n$ . Celui-ci est généralement décrit par les  $q$  variables  $y_n^i$  ( $i=1, \dots, q$ ) qui constituent les composantes du vecteur état  $y_n$ .

La dimension  $q$  de l'espace d'état définit l'ordre du système.

En régime autonome, l'évolution du système linéaire à régler est régie par une équation de la forme :

$$Y' = M \cdot Y \quad (1.1)$$

M : Matrice à coefficients constants.

Une relation liant les états du processus entre les instants successifs  $t_n$  et  $t_{n+1}$  se déduit immédiatement de l'équation (1.1). Par intégration, il vient :

$$Y_{n+1} = e^{(t_{n+1} - t_n) M} \cdot Y_n \quad (1.2)$$

La linéarité de l'organe asservi permet d'obtenir l'équation matricielle régissant le fonctionnement dynamique du système en adjoignant au second membre de l'équation (1.2) un vecteur représentant la contribution de la commande /1/ :

$$Y_{n+1} = e^{(t_{n+1} - t_n) M} Y_n + K(t_{n+1}, t_n) \quad (1.3)$$

$K(t_{n+1}, t_n)$  désigne le vecteur contribution de la régulation à l'état du système à l'instant  $t_{n+1}$ . Ses composantes caractérisent à l'instant  $t_{n+1}$  l'état du système partant de conditions initiales nulles et soumis à la commande  $U(t)$  dans l'intervalle  $t_n, t_{n+1}$ .

Dans le cas le plus général, l'équation (1.3) peut être d'une forme très complexe et d'une exploitation difficile. Elle se simplifie toutefois beaucoup avec la structure de l'asservissement qui, dans de nombreux cas, peut se ramener à un modèle monovarié.

### 1.2. DEFINITION DES SYSTEMES ETUDIES.

Les systèmes que nous proposons d'étudier sont représentés par le schéma - bloc figure (1.2)

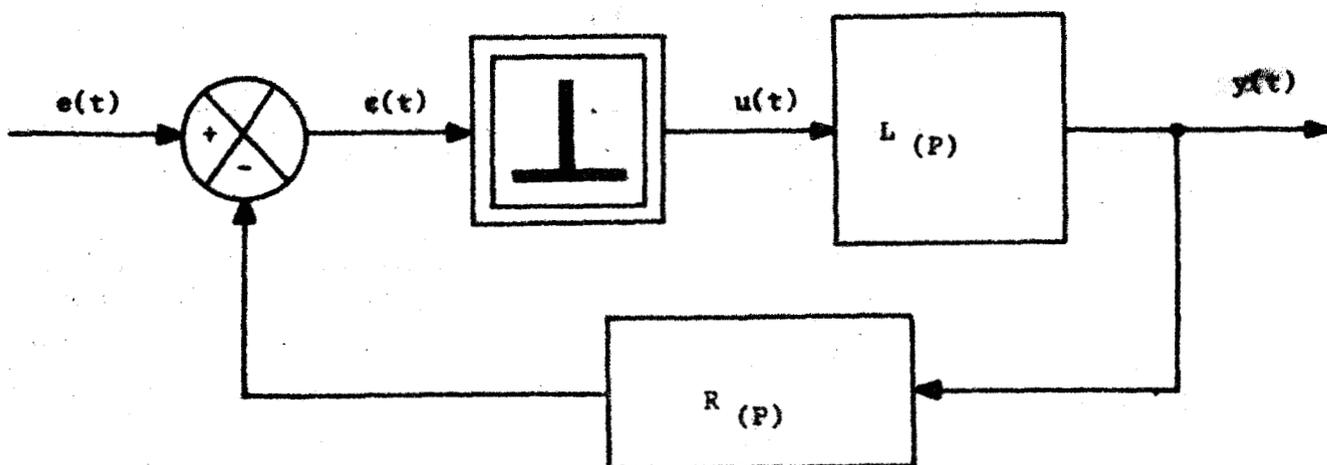


figure 1-2

Les grandeurs d'entrée et de sortie sont notées respectivement  $e(t)$  et  $y(t)$ . Le filtre à régler est défini par une fonction de transfert  $L(p)$  d'ordre  $q$  qui se ramène à une fraction rationnelle en  $p$  de numérateur unité. Il est soumis à un signal de commande  $u(t)$  élaboré par modulation non linéaire du signal d'erreur  $\epsilon(t)$  préalablement échan-

tillonné .  $R_{(p)}$  caractérise le signal de retour défini par une combinaison linéaire des composantes du vecteur état . L'échantillonnage est effectué à période constante  $T$  par un échantillonneur sans mémoire.

L'étude du comportement dynamique d'un tel système peut être abordée différemment selon la formulation mathématique adoptée. Dans ce sens, nous proposons de rappeler deux modèles classiques de représentation des processus échantillonnés.

### 1.3. MISE EN EQUATION

#### 1.3.1 - FORMULATION MATRICIELLE.

La période d'échantillonnage  $T$  est constante, il en résulte un modèle de la forme :

$$Y_{n+1} = A Y_n + K(t_n, t_{n+1}) \quad (1.4)$$

avec

$$A = e^{M(t_{n+1} - t_n)} = e^{MT}$$

A l'équation (1.4), il convient d'adjoindre une relation qui explicite la rétroaction soit :

$$\epsilon_n = e_n - \Lambda^T Y_n \quad (1.5)$$

Le vecteur ligne  $\Lambda^T$  définissant la chaîne de retour de fonction de transfert  $R(p)$ .

L'échantillonneur est supposé sans mémoire, le signal de commande élaboré au cours d'une période ne dépend donc que de la dernière information discrète captée, il en résulte :

$$K(t_n, t_{n+1}) = K(\epsilon_n) \quad (1.6)$$

Le vecteur de commande est souvent représenté lorsque cela a un sens, sous la forme :

$$K(\epsilon_n) = K^*(\epsilon_n) \cdot \epsilon_n$$

Il en résulte pour le processus décrit figure 1.2 un comportement dynamique caractérisé par le système d'équations non linéaires suivant :

$$Y_{n+1} = A Y_n + K^*(\epsilon_n) \cdot \epsilon_n \quad (1.7)$$

$$\epsilon_n = e_n - \Lambda^T Y_n \quad (1.8)$$

### 1.3<sub>2</sub>. FORME SCALAIRE DES EQUATIONS.

-----

#### 1.3<sub>2.1</sub> - Notion de vecteur séquence.

Le vecteur d'état introduit un ensemble de paramètres instantanés dont la connaissance est nécessaire à la détermination de l'évolution d'un système ; au contraire, la notion de séquence est relative aux valeurs successives qui peuvent être observées sur une variable donnée en des instants discrets distincts ; une suite d'observations suffisant à prédéterminer le comportement d'un système, constitue une séquence et peut permettre de conduire à une représentation récurrente scalaire ou vectorielle.

#### 1.3<sub>2.2</sub> - Formulation .

A partir d'une itération sur la relation (1.7), il est possible de définir l'état du filtre à l'instant  $(n+m)T$  :

$$Y_{n+m} = A^m Y_n + \sum_{i=1}^m A^{i-1} K^* (\epsilon_{n+m-i}) \cdot \epsilon_{n+m-i} \quad (1.9)$$

Une somme pondérée par les coefficients  $\alpha_i$  des relations (1.9) lorsque  $i$  varie de 0 à  $q$  : conduit à écrire :

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i Y_{n+q-i} = \sum_{i=0}^q \alpha_i A^{q-i} Y_n + \sum_{J=0}^{q-1} \epsilon_{n+J} \sum_{k=J+1}^q \alpha_{k-J-1} A^{q-k} K^*(\epsilon_{n+J}) \quad (1.10)$$

Un choix des coefficients  $\alpha_i$  correspondant à ceux du polynôme caractéristique de la matrice à coefficients constants A définissant le régime libre du système permet de simplifier cette expression, il vient :

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i Y_{n+q-i} = \sum_{J=0}^{q-1} \epsilon_{n+J} \sum_{k=J+1}^q \alpha_{k-J-1} A^{q-k} K^*(\epsilon_{n+J}) \quad (1.11)$$

Soit en exprimant l'effet du retour défini par la relation (1.8) :

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i \epsilon_{n+q-i} = \sum_{i=0}^q \alpha_i \epsilon_{n+q-i} + \sum_{J=0}^{q-1} \epsilon_{n+J} \sum_{k=J+1}^q \alpha_{k-J-1} \Lambda^T A^{q-k} K^*(\epsilon_{n+J}) \quad (1.12)$$

Ce résultat amène logiquement la relation :

$$f_i(\epsilon_{n+q-i}) = \sum_{k=q-i+1}^q \alpha_{k-q+i-1} \Lambda^T A^{q-k} K^*(\epsilon_{n+q-i}) + \alpha_i \quad (1.13)$$

Il en résulte l'équation de récurrence /2/ définissant l'évolution de l'erreur échantillonnée :

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i \epsilon_{n+q-i} = \alpha_0 \epsilon_{n+q} + \sum_{i=1}^q f_i(\epsilon_{n+q-i}) \cdot \epsilon_{n+q-i} \quad (1.14)$$

Dans le cadre d'une étude de la stabilité du processus, on envisage un fonctionnement en régime autonome c'est à dire pour une évolution à partir de conditions initiales, le signal d'entrée étant nul.

Le système est alors décrit par une relation sans second membre et l'équation (1.14) devient alors :

$$\varepsilon_{n+q} + \sum_{i=1}^q f_i(\varepsilon_{n+q-i}) \cdot \varepsilon_{n+q-i} = 0 \quad (1.15)$$

Lorsque les coefficients  $f_i(\cdot)$  sont bornés, la nullité des  $\varepsilon_{n+q-i}$  sur une séquence permet de garantir que l'état d'équilibre atteint est à l'origine, soit :

$$\varepsilon_n = \dots = \varepsilon_{n+q} = 0$$

Dans le cas le plus général, c'est à dire lorsque l'observabilité de la boucle ouverte est effective pour la période d'échantillonnage considérée, il en résulte la même propriété pour l'asservissement.

## CONCLUSION

La description des systèmes discrets non linéaires peut être envisagée à l'aide d'équations de récurrence scalaires ou vectorielles.

Dans cette hypothèse, l'étude de leur comportement dynamique se ramène le plus souvent à définir l'évolution des solutions de ces équations. Toutefois, la non linéarité des coefficients ne permet générale-

ment pas une étude directe et conduit à mettre en oeuvre des méthodes particulières qui utilisent pour la plupart des notions de contraction.

Ainsi, dans le prochain chapitre, nous proposons la mise en évidence d'une condition de stabilité asymptotique globale à partir d'un modèle mathématique particulier du processus.

## CHAPITRE 11

---

### UTILISATION DE MODELES REDONDANTS A L'ETUDE DE LA STABILITE DES SYSTEMES ECHANTILLONNES NON LINEAIRES

---

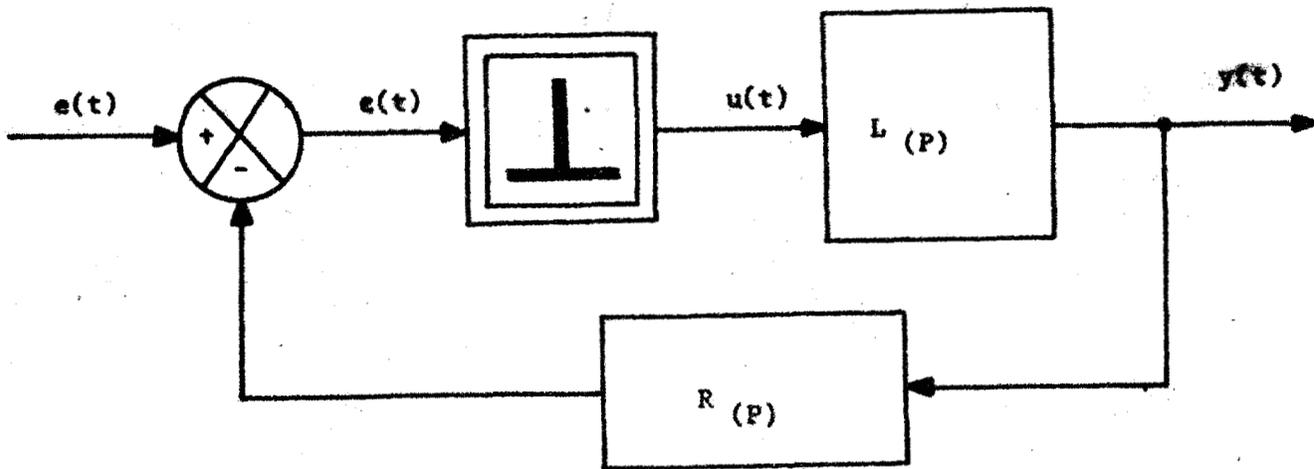
#### INTRODUCTION

De nombreux critères /2/ ont été proposés en vue de l'étude de la stabilité globale des systèmes échantillonnés non linéaires. Les conditions obtenues sont très générales, mais assez dures car elles ne tiennent souvent pas compte de la forme particulière des équations de récurrence mises en oeuvre. De plus, les modèles mathématiques de départ utilisent toujours un vecteur état ou séquence de dimension minimale.

Compte tenu de ces deux remarques, nous proposons dans un premier temps un critère de stabilité asymptotique globale valable pour une classe assez étendue de systèmes usuels. La deuxième partie de ce chapitre envisage l'application de ce résultat à partir d'un modèle d'ordre supérieur à celui du système étudié. La mise en oeuvre de ces deux méthodes conduit dans le cas des asservissements discrets du second ordre à unabaque d'utilisation simple.

II.1. DEFINITION DE LA CLASSE DES SYSTEMES ETUDIES.

Les asservissements discrets non linéaires que nous proposons d'analyser correspondent au schéma-bloc de la figure 2.1 :



- figure 2 - 1 -

La boucle ouverte de ces systèmes monovariabiles comporte successivement un échantillonneur non linéaire sans mémoire de période constante T et un organe à commander, d'ordre q , de transmittance L(p) . La chaîne de retour est caractérisée par une fonction de transfert R(p).

Si nous convenons de noter  $\epsilon_n$  le signal d'erreur aux instants d'échantillonnage, l'équation de récurrence qui régit ces systèmes en régime autonome,  $e(t) = 0$  , est de la forme :

$$\epsilon_{n+q} + \sum_{i=1}^q f_i (\epsilon_{n+q-i}) \cdot \epsilon_{n+q-i} = 0 \quad (2.1)$$

Les  $f_i(\varepsilon_{n+q-i})$  étant des fonctions scalaires réelles qui dépendent de l'échantillonneur et du filtre  $L(p)$

## II.2. CRITERE DE STABILITE GLOBALE

### ENONCE :

Toute solution de l'équation de récurrence (2.1) tend asymptotiquement, quelles que soient les conditions initiales, vers la position d'équilibre stable

$$\varepsilon_n = 0 \quad (2.2)$$

quand est satisfaite la contrainte :

$$\sum_{i=1}^q |f_i(\alpha)| \leq 1 - \delta \quad (2.3)$$

quel que soit le paramètre réel  $\alpha$ ,  $\delta$  étant fixé et tel que :

$$0 < \delta \leq 1$$

### DEMONSTRATION :

Considérons le système d'ordre  $q$  :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{n+1} &= -f_1(\epsilon_n) \cdot \epsilon_n + y_n^2 \\
 y_{n+1}^2 &= -f_2(\epsilon_n) \cdot \epsilon_n + y_n^3 \\
 y_{n+1}^3 &= -f_3(\epsilon_n) \cdot \epsilon_n + y_n^4 \\
 &\vdots \\
 y_{n+1}^{q-1} &= -f_{q-1}(\epsilon_n) \cdot \epsilon_n + y_n^{q-1} \\
 y_{n+1}^q &= -f_q(\epsilon_n) \cdot \epsilon_n
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

ce modèle mathématique est un équivalent de l'équation (2.1) que l'on retrouve par simple élimination des variables réelles annexes  $y_{n(i=1, \dots, q)}^i$ .

Soit la suite  $W_n$  telle que :

$$W_n = |\epsilon_n| + \sum_{i=2}^q |y_n^i|
 \tag{2.5}$$

Il vient, compte tenu du système (2.4)

$$W_{n+1} \leq \left[ \sum_{i=1}^q |f_i(\epsilon_n)| \right] \cdot |\epsilon_n| + \sum_{i=2}^q y_n^i
 \tag{2.6}$$

D'où par association de la contrainte (2.3) imposée aux coefficients

$f_i$  :

$$W_{n+1} \leq W_n - \delta |\epsilon_n|
 \tag{2.7}$$

La suite positive non croissante  $W_n$  tend vers une limite d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\epsilon_n| = 0$$

Ce qui démontre le résultat déjà énoncé.

### UTILISATION DU CRITERE /3/

La condition de stabilité globale (2.3), valable pour les systèmes régis par une équation de récurrence de la forme (2.1) est moins restrictive, dans ce cas particulier, que le critère plus général de WEGRZYN et VIDAL /2/. En effet, ces auteurs analysent une équation de la forme :

$$\epsilon_{n+q} + \sum_{i=1}^q f_i (\epsilon_{n+q-i}) \cdot \epsilon_{n+q-i} = 0 \quad (2.8)$$

aucune hypothèse n'étant faite sur les coefficients non constants  $f_i$ , ils proposent la condition de convergence :

$$\sum_{i=1}^q |f_i (\epsilon_{n+q-i})| \leq 1 - \delta \quad (2.9)$$

Toutefois, la mise en oeuvre de cette condition peut parfois s'avérer délicate.

Le résultat que nous proposons conduit à généraliser la notion de courbe caractéristique d'un système échantillonné non linéaire intro-

duite par POVY à propos des asservissements commandés par modulation de largeur /4/.

Dans l'espace des coefficients  $f_i$  qui apparaissent dans la relation (2.8) , définissons la courbe d'équation paramétrique :

$$f_i = f_i (\alpha) \quad (i=1, \dots, q) \quad (2.10)$$

Le critère proposé est alors d'utilisation simple ; en effet, la stabilité globale est assurée si la courbe caractéristique définie en (2.10) reste pour  $\alpha$  quelconque dans un domaine tel que :

$$\sum_{i=1}^q |f_i (\alpha)| \leq 1 - \delta \quad (2.11)$$

L'exploitation de ce résultat est particulièrement facile dans le cas des systèmes du second ordre pour lesquels les interprétations graphiques apportent une aide non négligeable.

### III - EXTENSION DE LA CONDITION DE STABILITE GLOBALE :

Le domaine de stabilité défini dans l'espace des coefficients par la condition (2.11) est assez restreint par rapport aux résultats obtenus dans l'hypothèse linéaire. Diverses méthodes qui utilisent souvent la notion de contraction permettent d'introduire d'autres contraintes suffisantes pour assurer la convergence des solutions de l'équation (2.1) /5/.

Nous proposons ici d'opérer d'une manière différente en introduisant un vecteur séquence redondant puis en appliquant au nouveau système d'ordre plus élevé le critère proposé plus haut.

### DEFINITIONS ET PROPRIETES DU SYSTEME REDONDANT.

Effectuons une combinaison linéaire des deux expressions obtenues en écrivant la relation de fonctionnement (2.1) aux ordres (n+1) et n , il vient :

$$\left[ \epsilon_{n+q+1} + \sum_{i=1}^q f_i (\epsilon_{n+q-i+1}) \cdot \epsilon_{n+q-i+1} \right] + a \left[ \epsilon_{n+q} + \sum_{i=1}^q f_i (\epsilon_{n+q-i}) \cdot \epsilon_{n+q-i} \right] = 0 \quad (2.12)$$

a étant un paramètre réel et constant.

Nous remarquons deux propriétés essentielles :

- Les solutions de l'équation (2.1) constituent un cas particulier de celles qui satisfont à la relation de récurrence (2.12), en effet, ces dernières sont obligatoirement solution de :

$$\epsilon_{n+q} + \sum_{i=1}^q f_i (\epsilon_{n+q-i}) \cdot \epsilon_{n+q-i} = A (-a)^n \quad (2.13)$$

A étant une constante arbitraire, nous retrouvons l'équation initiale (2.1) en faisant :

$$A = 0$$

Par conséquent, la stabilité globale des solutions de (2.12) implique la même propriété relativement à la relation (2.1) caractéristique du système étudié.

- L'équation (2.12) est d'une structure qui permet l'application du critère de stabilité globale (2.3); en effet, elle peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+q+1} + [f_1(\epsilon_{n+q}) + a] \cdot \epsilon_{n+q} + \sum_{i=1}^{q-1} [f_{i+1}(\epsilon_{n+q-i}) + a f_i(\epsilon_{n+q-i})] \cdot \epsilon_{n+q-i} \\ + a f_q(\epsilon_n) \cdot \epsilon_n = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

#### CONDITIONS DE STABILITE DEDUITES DU SYSTEME REDONDANT.

Compte tenu des propriétés que nous avons signalées à propos du système redondant, il vient immédiatement pour le modèle étudié (2.1) la condition de stabilité globale :

$$|f_1(\alpha) + a| + \sum_{i=1}^{q-1} |f_{i+1}(\alpha) + a f_i(\alpha)| + |a f_q(\alpha)| \leq 1 - \delta \quad (2.15)$$

$\alpha$  étant fixé, cette contrainte doit évidemment être satisfaite pour toute valeur du paramètre réel  $\alpha$

Ainsi, la condition (2.15) permet pour une valeur donnée de  $a$  de définir dans l'espace des coefficients  $f_i$  ( $i=1, \dots, q$ ) un domaine de stabilité globale  $D_a$ .

Si la courbe caractéristique du système (2.1) étudié définie par les équations paramétriques (2.10) reste à l'intérieur de  $D_a$  pour toute valeur réelle du paramètre  $\alpha$ , la stabilité globale en résulte pour les solutions de l'équation de récurrence correspondante (2.1).

### APPLICATION AUX SYSTEMES D'ORDRE 2.

Le problème de la mise en oeuvre de la condition de stabilité n'est pas totalement résolu pour des systèmes d'ordre quelconque ; en effet, le choix de  $q$  demeure à priori arbitraire. Il est toutefois indispensable d'imposer :

$$|a| < 1$$



Dans le cas contraire et comme l'indique la relation (2.13), la stabilité du système redondant ne serait pas assurée et la contrainte (2.15) ne permettrait en aucun cas de conclure.

Dans le cas des systèmes du second ordre, l'exploitation peut être facilitée par une représentation graphique.

L'équation de fonctionnement (2.1) devient alors :

$$\varepsilon_{n+2} + f_1(\varepsilon_{n+1}) \cdot \varepsilon_{n+1} + f_2(\varepsilon_n) \cdot \varepsilon_n = 0 \quad (2.16)$$

Un domaine suffisant de stabilité globale  $D_a$  est alors précisé par l'inégalité :

$$|f_1 + a| + |f_2 + a f_1| + |a f_2| < 1 \quad (2.17)$$

La contrainte relative au paramètre  $\delta$  introduit dans la définition du domaine relatif aux systèmes d'ordre  $q$  (2.15) implique en fait la suppression de la frontière de  $D_a$ .

L'étude de la relation (2.17) conduit à diviser le plan  $f_1, f_2$  en huit zones distinctes selon la forme prise par l'inégalité.

Nous supposons dans un premier temps que le paramètre  $a$  est compris entre 0 et 1 :

$$0 \leq a \leq 1$$

Il est alors possible de distinguer dans le plan  $f_1, f_2$  les zones suivantes :

Zone 1

$$\left. \begin{array}{l} f_1 > -a \\ f_2 > -a f_1 \\ f_2 > 0 \end{array} \right\} f_2 < -f_1 + \frac{1-a}{1+a} \quad (2-17-1)$$

Zone 2

$$\left. \begin{array}{l} f_1 < -a \\ f_2 > -a f_1 \\ f_2 > 0 \end{array} \right\} f_2 < f_1 \frac{1-a}{1+a} + 1 \quad (2-17-2)$$

Zone 3

$$\left. \begin{array}{l} f_1 > -a \\ f_2 < -a f_1 \\ f_2 > 0 \end{array} \right\} f_2 > -1 + f_1 \quad (2-17-3)$$

Zone 4

$$\left. \begin{array}{l} f_1 > -a \\ f_2 > -a f_1 \\ f_2 < 0 \end{array} \right\} f_2 < -f_1 \frac{1+a}{1-a} + 1 \quad (2-17-4)$$

Zone 5

$$\left. \begin{array}{l} f_1 < -a \\ f_2 < -a f_1 \\ f_2 > 0 \end{array} \right\} f_2 > -\frac{1+a}{1-a} f_1 - \frac{1+a}{1-a} \quad (2-17-5)$$

Zone 6

$$\left. \begin{array}{l} f_1 > -a \\ f_2 < -a f_1 \\ f_2 < 0 \end{array} \right\} f_2 > f_1 \frac{1-a}{1+a} - \frac{1-a}{1+a} \quad (2-17-6)$$

Zone 7

$$f_1 < -a$$

$$f_2 > -a f_1$$

$$f_2 < 0$$

$$f_2 < f_1 + \frac{1+a}{1-a} \quad (2-17-7)$$

Zone 8

$$f_1 < -a$$

$$f_2 < -a f_1$$

$$f_2 < 0$$

$$f_2 < -f_1 - 1 \quad (2-17-8)$$

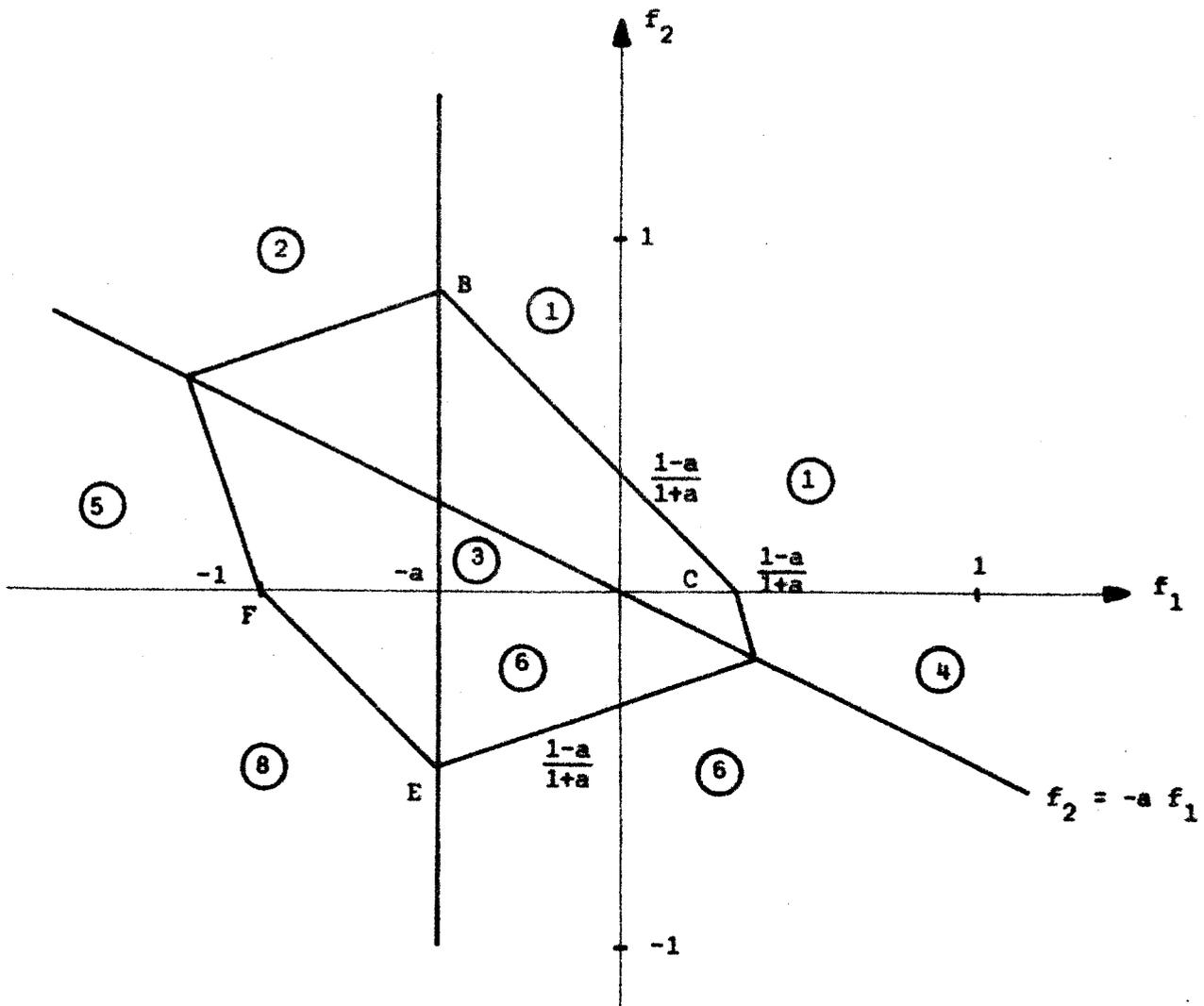


figure 2-2

L'interprétation graphique de ces divers résultats dans le plan  $f_1, f_2$  permet de définir figure 2-2 un hexagone A,B,C,D,E,F à l'intérieur duquel il est possible de conclure à la stabilité asymptotique globale des solutions de l'équation (2-16).

Ce domaine est tracé pour une valeur particulière du paramètre  $a = 0,5$

Il convient maintenant de préciser l'évolution de ce domaine lorsque  $a$  varie, c'est-à-dire définir les lieux respectifs des A,B,C,D,E,F.

Afin d'alléger l'exposé, nous n'envisagerons pas le cas où  $a$  est négatif compris entre 0 et -1; en effet, une analyse parallèle à la précédente montre que le changement du signe de  $a$  revient à tracer un hexagone A' B' C' D' E' F' symétrique du précédent par rapport à l'axe vertical d'équation  $f_1 = 0$ .

L'examen des inéquations précédentes nous permet de définir une équation paramétrique pour chaque sommet. C'est ainsi que nous avons :

- Lieu de A (courbe (1) )

$$f_2 = f_1 \frac{1-a}{1+a} + 1$$

$$f_2 = -a f_1$$

$$\left(f_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(f_2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{avec } f_1 \leq -1$$

- Lieu de B (courbe 2)

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= -a \\ f_2 &= f_1 \frac{1-a}{1+a} + 1 \end{aligned} \right\} f_2 = \frac{1+f_1^2}{1-f_1} \text{ avec } 2(\sqrt{2}-1) \leq f_2 \leq 1$$

- Lieu de C (courbe 3)

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= 0 \\ f_1 &= \frac{1-a}{1+a} \end{aligned} \right\} \text{ avec } 0 \leq f_1 \leq 1$$

- Lieu de D (Courbe 4)

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= -a f_1 \\ f_2 &= f_1 \frac{1-a}{1+a} - \frac{1-a}{1+a} \end{aligned} \right\} \left( f_1 - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( f_2 - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

avec  $f_2 \leq 0$

- Lieu de E (courbe 5)

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= -f_1 - 1 \\ f_1 &= -a \end{aligned} \right\} \Rightarrow -1 \leq a \leq 0$$

Lieu de F

F est un point fixe de coordonnées

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= -1 \\ f_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Nous avons tracé figure 2-3 les courbes (1), (2) (3), (4) (5) ainsi que leurs symétriques correspondant aux valeurs négatives du paramètre a. Il en résulte un abaque gradué en valeurs de a qui englobe tous les cas susceptibles de se présenter.

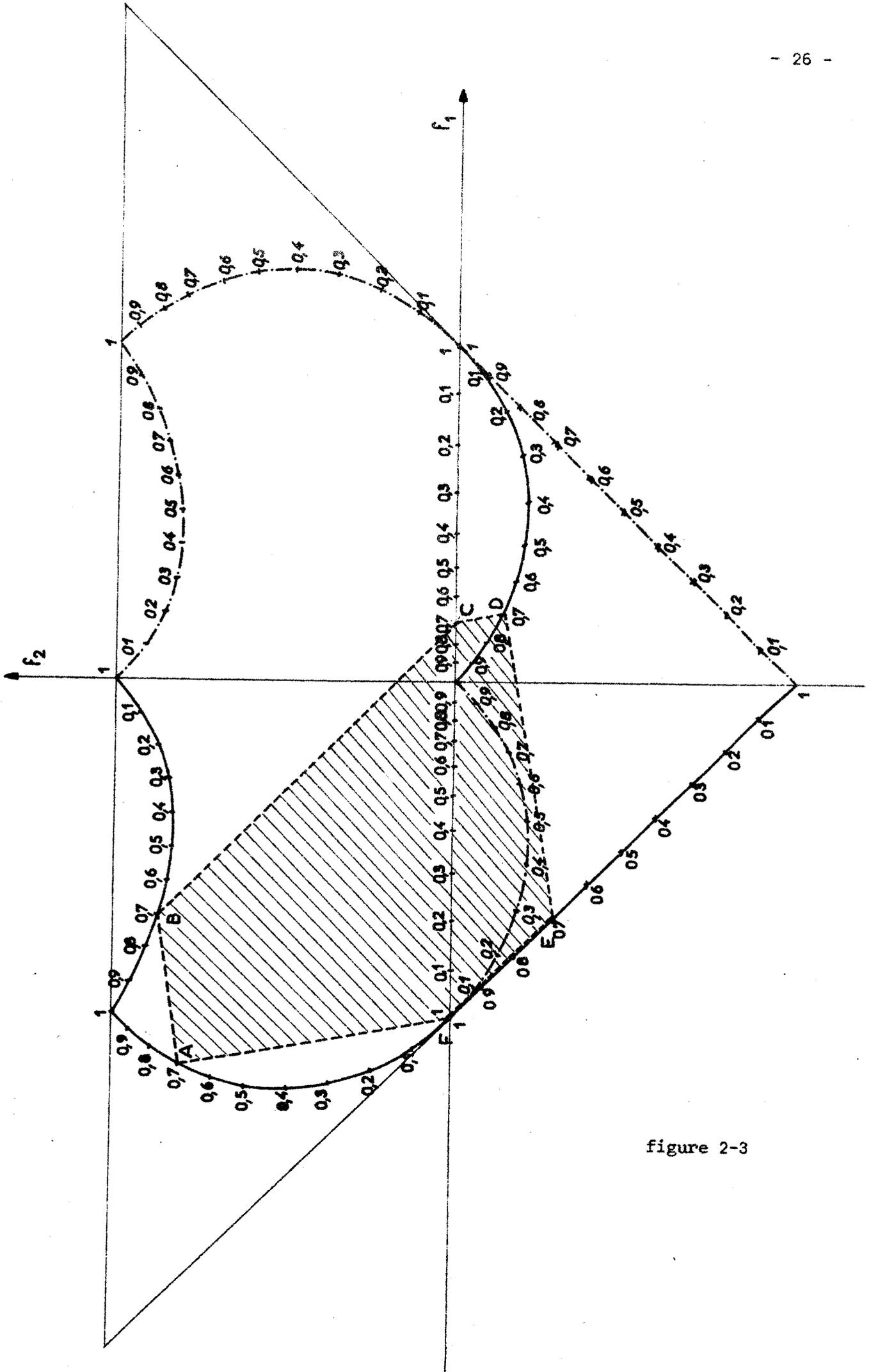


figure 2-3

Compte tenu de l'analyse précédente, nous concluons à la stabilité des solutions de l'équation (2-17) s'il existe dans le plan  $(f_1, f_2)$  un domaine  $D_a$  qui contienne entièrement la courbe définie par les équations paramétriques :

$$f_1 = f_1 (\alpha)$$

$$f_2 = f_2 (\alpha)$$

#### CONCLUSION .

La mise en oeuvre d'une technique de contraction sur un modèle redondant d'un processus donné permet de définir un ensemble de conditions particulières de stabilité. L'interprétation graphique de ces conditions fournit un critère simplifié de stabilité asymptotique globale pour les récurrences du second ordre.

Nous proposons au prochain chapitre la mise en oeuvre de ce critère en vue d'une étude de la stabilité de certains processus non linéaires du second ordre.

### CHAPITRE III

#### APPLICATION PRATIQUE DU CRITERE DE STABILITE A DEUX SYSTEMES PARTICULIERS DU SECOND ORDRE

---

##### INTRODUCTION

La mise en oeuvre du critère de stabilité présenté au cours du précédent chapitre conduit pour les systèmes du second ordre à tracer dans le plan des coefficients  $f_1$  et  $f_2$  la courbe caractéristique de fonctionnement du système étudié. Il convient alors de choisir un domaine de stabilité qui contienne la plus grande partie de cette courbe.

Le premier exemple que nous proposons afin d'illustrer cette étude est relatif à un système du second ordre à non linéarité séparable. La commande est élaborée à partir du signal d'erreur au moyen d'un échantillonneur linéaire de période constante  $T$  suivi d'un bloqueur d'ordre zéro.

Dans un second exemple, nous envisageons une structure à échantillonneur non linéaire, le système à asservir est un moteur commandé par modulation de largeur des impulsions.

### III.1. SYSTEME DU SECOND ORDRE

Le système à commander comporte une non linéarité  $\beta(\epsilon_n)$  précédant un organe linéaire caractérisé par une fonction de transfert du second ordre de constantes de temps réelles et distinctes,  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ . L'erreur est échantillonnée et bloquée à période constante T. Le retour est unitaire. Figure 3.1.

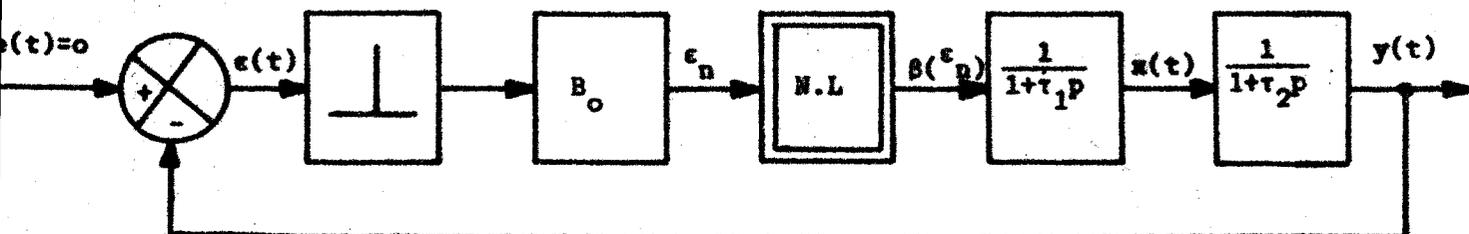


Figure 3.1.

La partie linéaire est donc constituée de deux filtres du premier ordre en série, dont les grandeurs de sortie respectives  $y(t)$  et  $x(t)$  sont choisies comme composantes du vecteur état  $Y(t)$ .

Le fonctionnement du système de la figure 3.1. est décrit par l'équation matricielle :

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2 & \frac{\zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2} (D_1 - D_2) \\ 0 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ x_n \end{bmatrix} + \beta(\epsilon_n) \begin{bmatrix} 1 - D_2 - \frac{\zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2} (D_1 - D_2) \\ 1 - D_1 \end{bmatrix}$$

avec  $D_1 = e^{-T/\zeta_1}$       $D_2 = e^{-T/\zeta_2}$

Lorsque la quantité  $\frac{\beta(\epsilon_n)}{\epsilon_n}$  est à variation bornée. Notons :

$$\beta^* = \frac{\beta(\epsilon_n)}{\epsilon_n}$$

Il vient pour l'équation récurrente de l'erreur échantillonnée

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+2} - (D_1 + D_2) \epsilon_{n+1} + D_1 D_2 \epsilon_n + \beta^{**} \cdot \epsilon_{n+1} \left[ 1 - D_2 - \frac{\zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2} (D_1 - D_2) \right] \\ + \beta^{**} \cdot \epsilon_n \left[ -D_1 + D_1 D_2 + \frac{\zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2} (D_1 - D_2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3-2)$$

Soit ( $\Gamma$ ) le lieu caractéristique de l'évolution du système d'expression paramétrique :

$$f_1 = - (D_1 + D_2) + \beta^{**} \left[ 1 - D_2 - \frac{\zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2} (D_1 - D_2) \right]$$

3-3

$$f_2 = D_1 D_2 + \beta^{**} \left[ -D_1 + D_1 D_2 + \frac{\zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2} (D_1 - D_2) \right]$$

Dans ce cas particulier, l'échantillonneur étant linéaire, la courbe ( $\Gamma$ ) se réduit à une droite.

L'exemple a été traité pour :

$$T = 1 \quad \zeta_1 = 2 \quad \zeta_2 = 1,5$$

L'étude graphique (figure 3-2) met en évidence le choix de la valeur  $a = 0,35$  permettant de construire un domaine adapté au problème.

Il en résulte la contrainte suivante sur  $\beta^{**}$

$$0 < \beta^{**} < 6,72$$

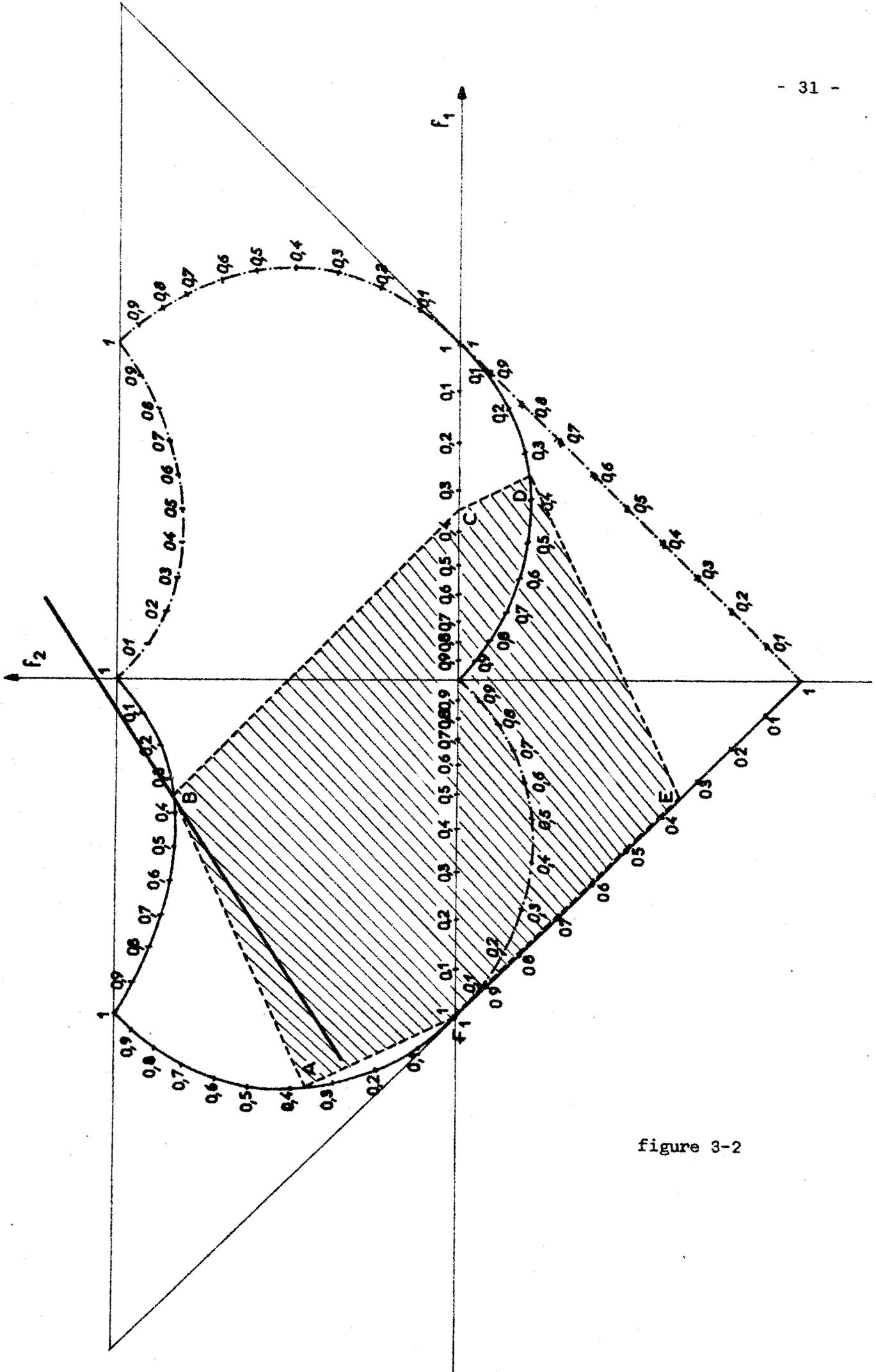
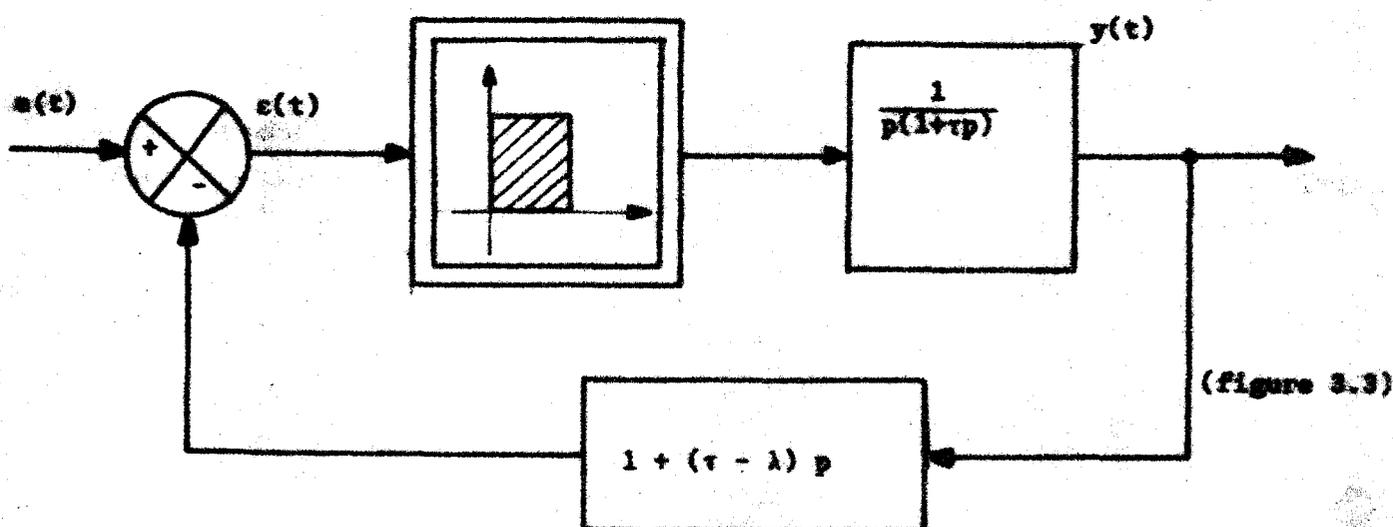


figure 3-2

Dans le cas d'un système linéaire du même type, le gain maximal admissible serait  $\beta_{\max} = 8,9$

### III.3. EXEMPLE II

Nous envisageons dans un second exemple, l'étude d'un moteur commandé par modulation de largeur à partir d'un retour tachymétrique (figure 3.3.).



Les impulsions de commande sont rectangulaires, d'amplitude constante  $A$  et du signe du signal d'erreur défini aux instants d'échantillonnage

$T$  désigne la période d'échantillonnage.

$T_{in} = k|\epsilon_n|$  la durée de l'impulsion en régime non saturé et

$\tau$  la constante de temps du moteur.

$\lambda_1$  caractérise l'effet de retour.

#### III.3.1 - MISE EN EQUATION

En régime non saturé : ( $|\epsilon_n| < \frac{T}{k}$ )

Le fonctionnement du système est décrit par l'équation matricielle (3-4)

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau(1-D) \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ y'_n \end{bmatrix} + A \text{ signe } \epsilon_n \begin{bmatrix} T_{in} + \tau D (1 - D_{in}^{-1}) \\ D (D_{in}^{-1} - 1) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

avec  $D_{in} = e^{-T_{in}/\tau}$

et  $\epsilon_n = - \left[ y_n + (\tau - \lambda) y'_n \right]$  (3.5)

Un changement de représentation défini par la matrice de passage P

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \tau - \lambda \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

conduit à l'équation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} -\epsilon_{n+1} \\ -y'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda(1-D) \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\epsilon_n \\ -y'_n \end{bmatrix} + A \text{ signe } \epsilon_n \begin{bmatrix} T_{in} + \lambda D (1 - D_{in}^{-1}) \\ D (1 - D_{in}^{-1}) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Une élimination de  $y'_n$ , permet d'écrire l'équation de récurrence de l'erreur échantillonné sous la forme :

$$\epsilon_{n+2} - \epsilon_{n+1} \left[ 1 + D - kA - \frac{\lambda AD}{|\epsilon_{n+1}|} \left( 1 - e^{-k \frac{|\epsilon_{n+1}|}{\tau}} \right) \right] + \epsilon_n \left[ D - kAD - \frac{AD\lambda}{|\epsilon_n|} \left( 1 - e^{-k \frac{|\epsilon_n|}{\tau}} \right) \right] = 0 \quad (3.7)$$

Dans cette expression les deux paramètres, amplitude et largeur de la modulation apparaissent distinctement ; l'étude de la stabilité du système décrit pour cette forme conduirait à définir des couples de valeurs  $K$ , et  $A$  vérifiant certaines conditions. Toutefois, il est possible // de se limiter à un seul paramètre noté  $B_0$  égal au produit du coefficient de proportionnalité  $k$  par l'amplitude constante  $A$  :

$$B_0 = kA$$

Dans ce sens, notons

$$x_n = k \frac{\varepsilon_n}{\tau}$$

L'expression 3.7 s'écrit alors

$$x_{n+2} - x_{n+1} \left[ 1 + D - B_0 \left( 1 + D \frac{\lambda}{\tau} \frac{1 - e^{-\frac{|x_{n+1}|}{T}}}{\frac{|x_{n+1}|}{T}} \right) \right] + x_n \left[ D - B_0 \left( D + D \frac{\lambda}{\tau} \frac{1 - e^{-\frac{|x_n|}{T}}}{\frac{|x_n|}{T}} \right) \right] = 0 \quad (3.8)$$

L'équation de la courbe ( $\Gamma'$ ) caractéristique de ce système pour le régime non saturé ( $|x_n| < T/\tau$ ) s'en déduit directement. Il vient :

$$f_1 = - (1 + D) + B_0 \left( 1 + D \frac{\lambda}{\tau} \frac{1 - e^{-\frac{|x_n|}{T}}}{\frac{|x_n|}{T}} \right) \quad (3.9)$$

$$f_2 = D - B_0 \left( D + D \frac{\lambda}{\tau} \frac{1 - e^{-\frac{|x_n|}{T}}}{\frac{|x_n|}{T}} \right)$$

Soit la droite d'équation :

$$f_2 + f_1 = - 1 + B_0 (1 - D) \quad (3.10)$$

- En régime saturé ( $|\epsilon_n| > \frac{T}{K}$  ou  $|x_n| > T/\tau$ )

Une étude tout à fait similaire peut être menée pour le cas où la largeur des impulsions correspond à la période d'échantillonnage. Le fonctionnement du modulateur s'apparente alors à celui d'un bloqueur d'ordre zéro suivi d'une non linéarité du type "tout ou rien".

L'équation matricielle (3.4) s'écrit alors

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau(1-D) \\ 0 & D \end{bmatrix} + A \text{ signe } \epsilon_n \begin{bmatrix} T - \tau + \tau D \\ 1 - D \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Le changement de base défini par la matrice de passage P exploitée précédemment conduit à l'expression :

$$\begin{bmatrix} -\epsilon_{n+1} \\ -y'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda(1-D) \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\epsilon_n \\ -y'_n \end{bmatrix} + A \text{ signe } \epsilon_n \begin{bmatrix} T - \lambda(1-D) \\ D - 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

et l'élimination de  $y'_n$  entre les deux équations extraites de la forme matricielle permet d'écrire :

$$\epsilon_{n+2} - \epsilon_{n+1} \left[ 1 + D - \frac{A}{|\epsilon_{n+1}|} (T - \lambda(1-D)) \right] + \epsilon_n \left[ D - \frac{A}{|\epsilon_n|} (DT - \lambda(1-D)) \right] = D \quad (3.13)$$

En notant :

$$x_n = k \frac{\epsilon_n}{\tau}$$

et  $kA = Bo$ , on obtient

$$x_{n+2} - x_{n+1} \left[ 1 + D - \frac{Bo}{\tau |x_{n+1}|} (T - \lambda(1 - D)) \right] + x_n \left[ D - \frac{Bo}{\tau |x_n|} (DT - \lambda(1 - D)) \right] = 0 \quad (3.14)$$

Il vient ici encore l'équation paramétrique d'une droite ( $\Gamma''$ ) :

$$f_1 = - (1 + D) + \frac{Bo}{\tau |x_n|} [T - \lambda(1 - D)] \quad (3.15)$$

$$f_2 = D - \frac{Bo}{\tau |x_n|} (DT - \lambda(1 - D))$$

Soit :

$$\frac{f_1 + 1 + D}{T + \lambda(D - 1)} = \frac{f_2 - D}{\lambda(1 - D) - TD}$$

En définitive, la courbe ( $\Gamma$ ) caractéristique de ce système à modulation de largeur est constituée de deux segments des droites  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$  graduées en fonction du signal d'erreur  $\epsilon_n$  (ou  $x_n$ ). L'intersection de ces deux droites correspond à la valeur limite de  $\epsilon_n = \frac{T}{k}$  pour laquelle il y a commutation du régime non saturé au régime saturé.

III.3.2 - STABILITE GLOBALE - METHODE GRAPHIQUE

---

L'exemple est traité pour :

$$T = \tau = B_0 = k = A = 1$$

$$\lambda = 0,25$$

Les courbes  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$  tracées dans le plan des coefficients  $f_1$  et  $f_2$  caractérisent le comportement du système.

- En régime non saturé, le point caractéristique de l'évolution du système appartient au segment porté par la droite  $\Gamma'$  d'équation (3.10) limité par les points :

$$x_n = 0 \left\{ \begin{array}{l} f_1 = -\frac{5}{4} D = -0,46 \\ f_2 = \frac{1}{4} D = 0,09 \end{array} \right. \quad \text{et } x_n = 1 \left\{ \begin{array}{l} f_1 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} D = -0,52 \\ f_2 = -\frac{1}{4} D + \frac{1}{4} = 0,16 \end{array} \right.$$

- En régime saturé, on obtient un segment de la droite  $\Gamma''$  d'équation (3.16) limité par les points :

$$x_n = 1 \quad \begin{array}{l} f_1 = -0,52 \\ f_2 = 0,16 \end{array} \quad x_n \rightarrow \infty \quad \begin{array}{l} f_1 = -(1 + D) = -1,37 \\ f_2 = D = 0,37 \end{array}$$

Le paramètre a choisi pour l'application du critère doit être tel que le domaine de stabilité correspondant contienne la plus grande partie de cette courbe.

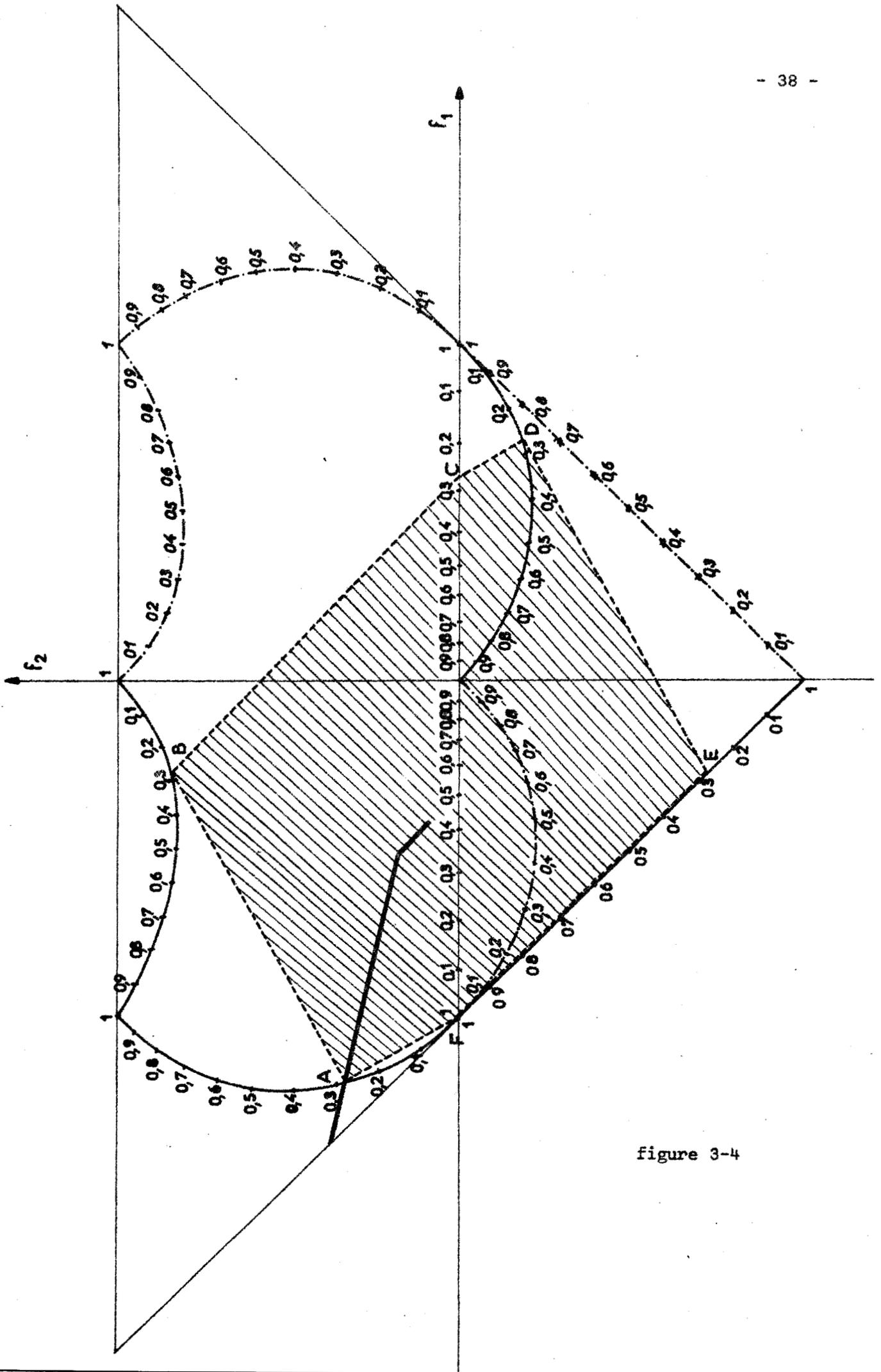


figure 3-4

Ce résultat est obtenu (figure 3.4) pour  $a = 0,28$ , toutefois, la courbe  $\Gamma$  n'est pas incluse totalement et son intersection avec la limite du domaine de stabilité indique la valeur maximum admissible pour  $x_n$  soit :

$$M_{ax} |x_n| < 4,6$$

ou encore :

$$M_{ax} |\epsilon_n| < 4,6$$

Il convient en ce point de formuler une remarque importante.

En effet, la condition précédente ne peut constituer une condition suffisante de stabilité asymptotique globale que si, dans l'évolution du processus, la valeur du signal d'erreur  $\epsilon_n$  reste effectivement inférieure à 4,6.

Il convient donc d'associer à ce critère une condition supplémentaire assurant cette propriété.

D'autre part, la méthode de construction de la courbe caractéristique de ce système conduit à quelques remarques qui peuvent permettre de contribuer à une meilleure connaissance de ce type de régulation.

En effet, quelles que soient les valeurs des paramètres de régulation (commande , retour), la droite caractéristique de fonctionnement en régime saturé passe par un point fixe de coordonnées :

$$f_1 = -(1 + D)$$

$$f_2 = D$$

Le point de fonctionnement tend vers cette position lorsque la valeur du signal d'erreur tend vers l'infini.

Pour un filtre donné, les paramètres de la boucle de retour définissent la pente de cette droite.

De la même façon, on remarque que la pente de la droite caractéristique du régime non saturé est constante et égale à  $-1$ , la position du point défini par  $\epsilon_n = 0$  variant selon les valeurs de  $B_0$  et  $\lambda$ .

Il apparaît que le choix des paramètres de commande et de retour permet d'ajuster la courbe caractéristique du système en vue d'obtenir un mode de fonctionnement particulier.

### III.3.3 - CAS PARTICULIERS

---

#### III.3.3:1 - $\lambda = 0$

---

L'examen des équations caractéristiques montre immédiatement que ce choix du retour linéarise le fonctionnement du système en régime non saturé, en effet, les coefficients  $f_1$  et  $f_2$  sont alors des constantes et la courbe  $\Gamma'$  est réduite à un point dont la position est fixée par la commande  $Bo$  :

$$f_1 = - (1 + D) + Bo$$

$$f_2 = D (1 - Bo)$$

Le point se déplace donc sur la droite

$$f_2 = - D f_1 + D^2$$

qui se trouve être la courbe  $\Gamma''$  caractéristique du fonctionnement en régime saturé.

Plaçons-nous dans le cas limite du domaine de stabilité linéaire soit  $Bo$  tel que :

$$- D f_1 + D^2 = f_1 - 1$$

Il vient

$$Bo = 1 + D + \frac{D^2 + 1}{1 + D}$$

L'application du critère (figure 3.5) pour la valeur 0 du paramètre  $a$  permet de conclure à la stabilité si la valeur du signal d'erreur reste inférieure

à la limite correspondant à l'intersection du domaine de stabilité avec la droite de fonctionnement :

$$\text{Pour } T = \tau = k = 1$$

Compte tenu des conditions

$$\lambda = 0$$

$$Bo = 1 + D + \frac{D^2 + 1}{1 + D} = 2,2$$

La lecture du graphique donne

$$f_2 < 0,17$$

Soit en remplaçant dans (3.15), il vient

$$\text{Max } |x_n| < 4$$

$$\text{III.3.3.2} \quad \lambda = \tau D, \quad Bo = \frac{1}{1 - D}$$

La stabilité du point d'équilibre sera particulièrement forte si l'annulation des coefficients  $f_1$  et  $f_2$  se produit en ce point. Dans ce cas, les coefficients  $f_1$  et  $f_2$  tendent à s'annuler en même temps que le signal d'erreur  $\epsilon_n$ .

Il semble donc intéressant de déterminer  $\lambda$  et  $Bo$  en vue de vérifier ces conditions.

Il vient :

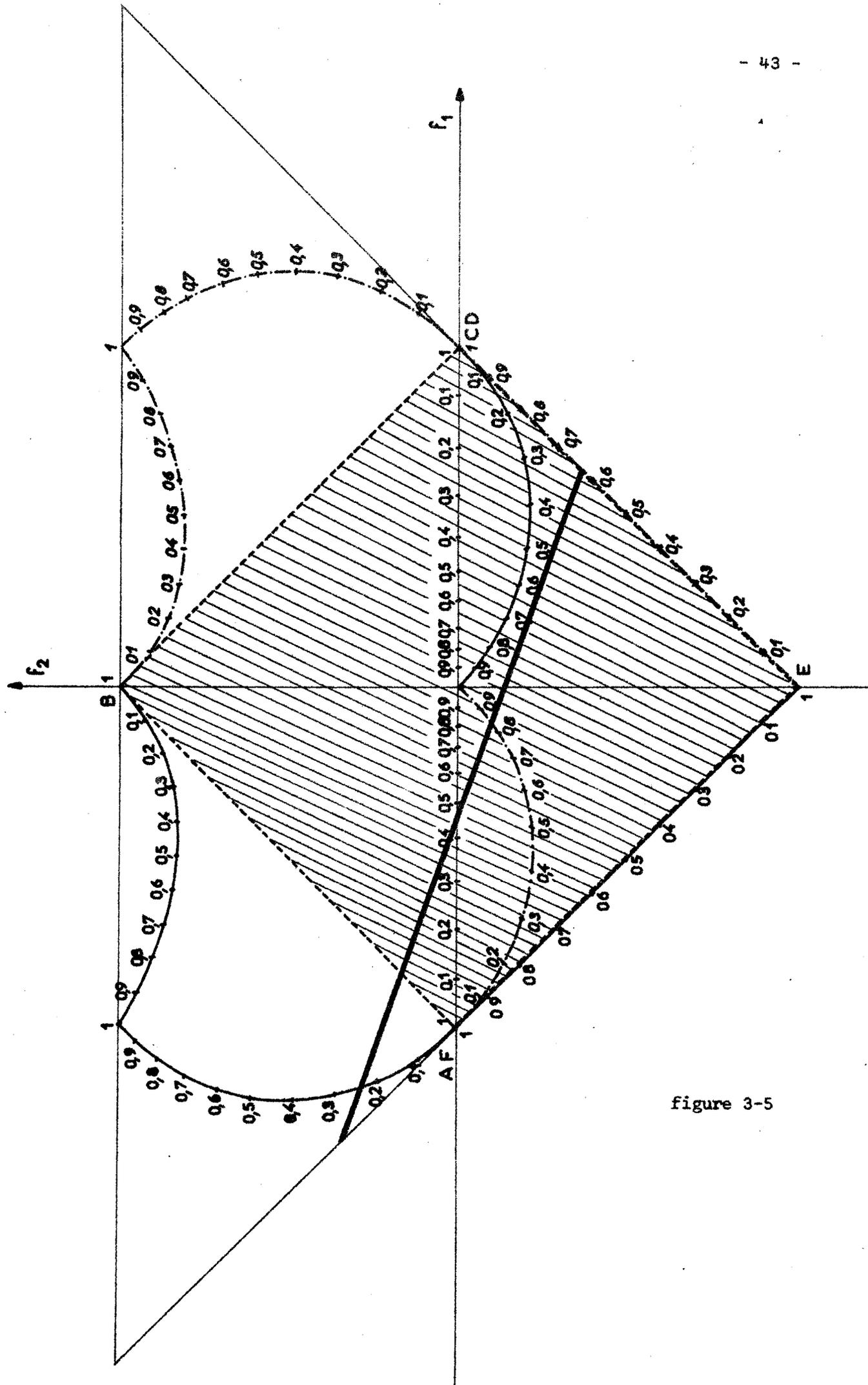


figure 3-5

$$Bo = \frac{1}{1 - D}$$

$$\lambda = \tau D$$

En supposant

$$T = \tau = k = 0,8$$

$$\text{On a } Bo = \frac{1}{1 - D} = 1,58$$

$$A = \frac{Bo}{k} = 1,97$$

$$\lambda = \tau D = 0,29$$

L'application du critère de stabilité (figure 3.6) pour  $a = 0,3$  conduit à imposer au signal d'erreur la limitation suivante :

$$\text{Max } |x_n| = \text{Max } |e_n| < 6,8$$

Il convient encore de noter que cette contrainte doit rester vérifiée pour permettre de conclure à la stabilité du processus.

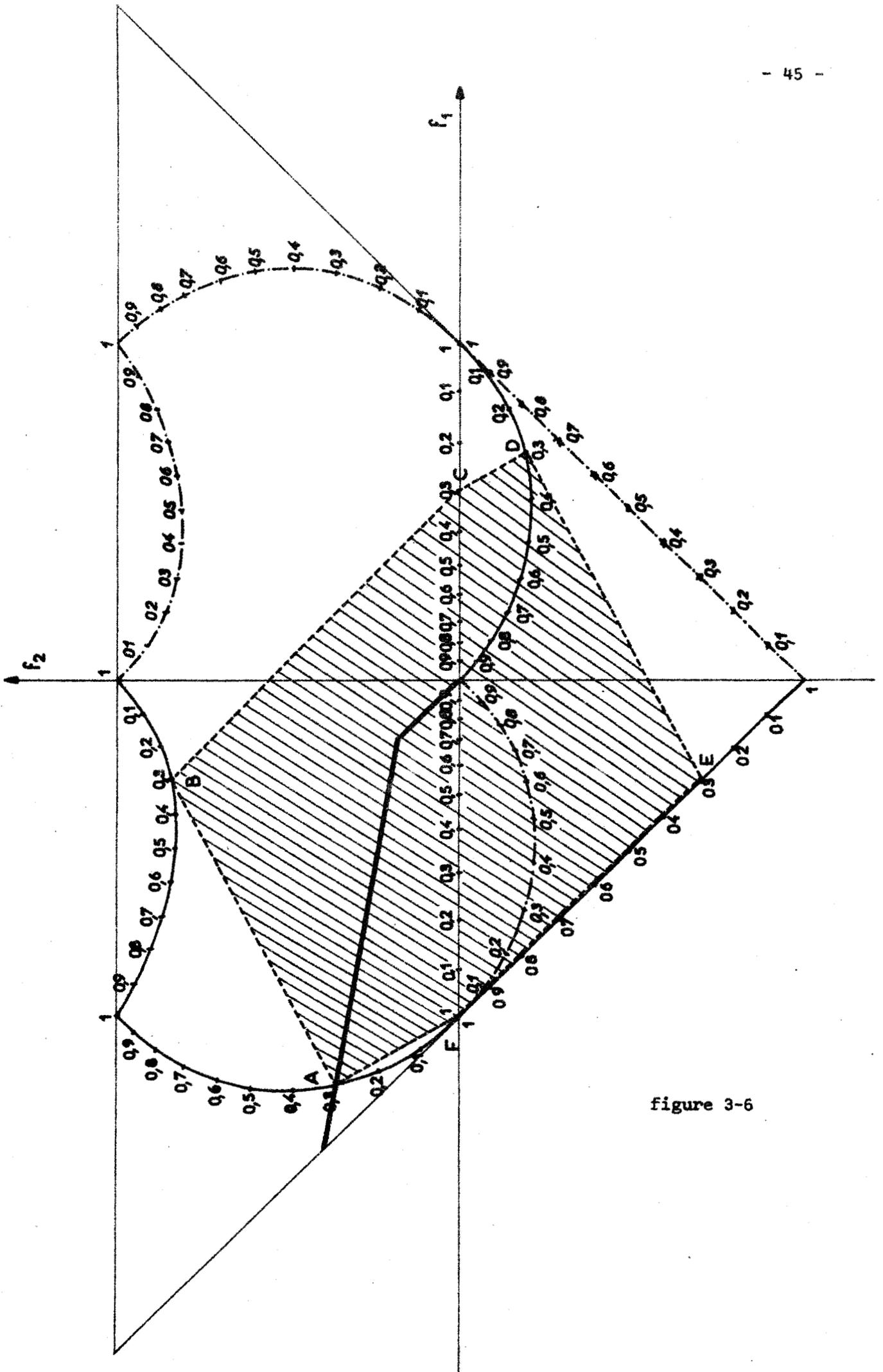


figure 3-6

## CONCLUSION

La mise en oeuvre de conditions de stabilité asymptotique globale pour un système du second ordre est facilitée par l'utilisation d'un abaque gradué permettant un choix immédiat d'un domaine adapté à un problème particulier. En effet, pour les systèmes étudiés, le fonctionnement du processus est caractérisé par une courbe paramétrique tracée dans le plan  $f_1, f_2$ . Il suffit alors de choisir un domaine contenant la plus grande partie de cette courbe. L'utilisation de cette technique permet d'obtenir simplement des conditions de stabilité. Toutefois, celles-ci doivent être vérifiées à tout instant. Or, pour un système dont on ne connaît que les conditions initiales, il n'est pas possible de prévoir le régime transitoire sans expliciter les solutions de son modèle.

Dans ce sens, nous proposons dans le chapitre suivant de compléter cette étude de façon à garantir une vérification permanente de telles conditions.

## CHAPITRE IV

### STABILITE VIS A VIS DES VARIABLES - STABILITE ILLIMITEE.

---

#### INTRODUCTION.

La stricte application des critères de stabilité globale fournit généralement un ensemble de contraintes sur les paramètres décrivant le comportement du processus. Lorsque l'évolution de ces paramètres au cours du temps reste strictement indépendante de l'état du système, il s'agit de conditions de stabilité ne limitant pas le domaine d'évolution des variables. Dans le cas contraire, il convient de préciser, à partir de la condition de stabilité asymptotique globale, un domaine de variation des variables assurant la stabilité asymptotique du processus. Généralement, une telle étude est déduite des travaux de et conduit à la recherche d'équipotentiels particulières / 6 /. Toutefois, cette méthode est d'une mise en oeuvre délicate lorsque la description du processus est redondante.

Dans ce sens, nous proposons d'aborder ce problème par une technique différente en associant à une condition de stabilité globale une majoration de l'amplitude des oscillations limites du processus étudié.

IV. APPLICATION DES TECHNIQUES DE MAJORATION DES OSCILLATIONS LIMITEES à L'ETUDE  
DE LA STABILITE ILLIMITEE.

Soit  $D$  le domaine déduit de l'application au système étudié de la condition de stabilité asymptotique globale définie au précédent chapitre.

L'Association de cette condition et d'une condition de majoration des oscillations limites peut permettre de conclure à la stabilité illimitée d'un processus. En effet, l'application d'un tel critère conduit à la définition d'un Domaine  $D^*$  limitant l'amplitude des oscillations possibles du vecteur  $X$   
figure 4-1.

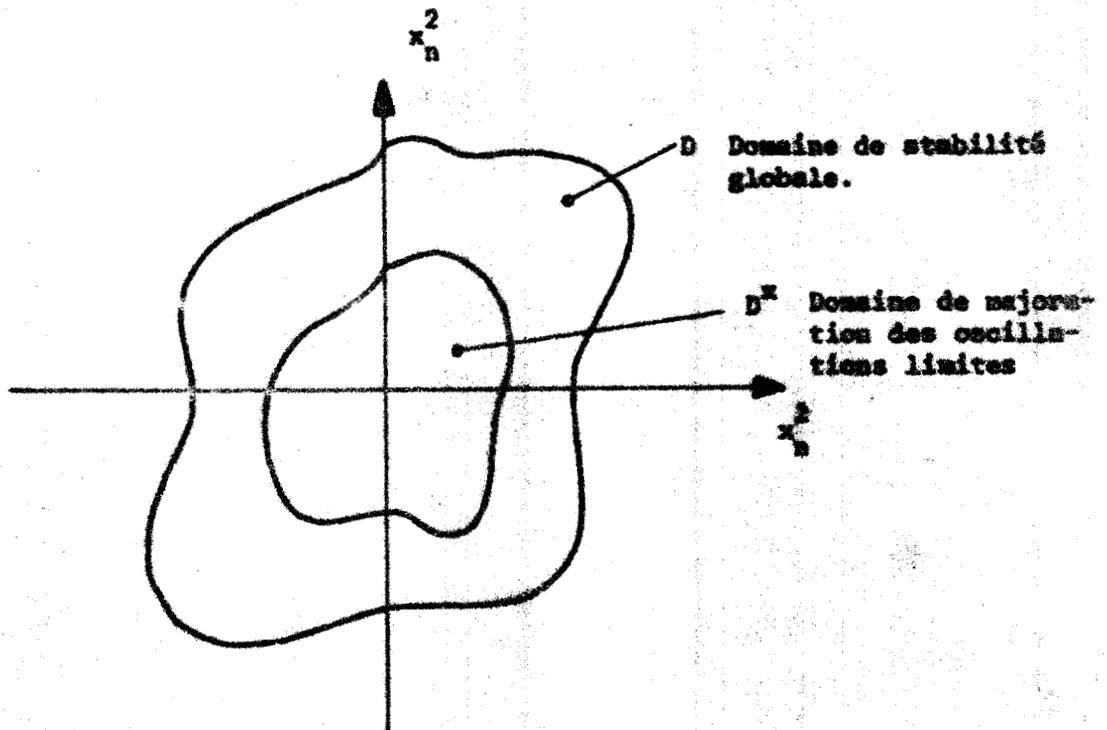


fig. 4-1

Ainsi, quel que soit l'état initial  $X_0$  du processus, au bout d'un temps suffisamment long, il lui correspondra nécessairement un point de fonctionnement intérieur au domaine de majoration  $D^*$ .

Dans ce cas, si  $D^*$  est inclus dans  $D$ , les conditions de stabilité asymptotique globale sont nécessairement vérifiées. Il est alors possible de conclure à la stabilité illimitée du processus.

IV<sub>2</sub> MAJORATION DES OSCILLATIONS LIMITES.-

-----

Nous utilisons une extension à la forme matricielle d'une méthode élaborée pour les équations de récurrence scalaires /7/ /8/.

Le fonctionnement du système étudié est décrit par le système d'équations non linéaires :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= A X_n + K(\epsilon_n) \\ \epsilon_n &= -\Lambda^T \cdot X_n \end{aligned} \quad (4-1)$$

Notons :

$\phi(X_n)$  une norme du vecteur  $X_n$ .

$S_{\phi\phi}(A)$  la norme correspondante de la matrice  $A$ .

Il vient :

$$\phi(X_{n+1}) \leq S_{\phi\phi}(A) \cdot \phi(X_n) + \text{Max} \phi[K(\epsilon)_n]$$

Une majorante  $\phi$  des oscillations limites du processus (4-1) est définie par la relation :

$$\phi \leq \overbrace{\text{Max} [S_{\phi\phi}(A) \cdot \phi(X_n)]}^{(1)} + \overbrace{\text{Max} \phi [K(\epsilon_n)]}^{(2)} = F(\phi)$$

$$\phi(X_n) < \phi \qquad \qquad \phi(X_n) < \phi$$

Il apparaît intéressant d'effectuer cette étude graphiquement en traçant séparément les courbes représentatives de deux fonctions du paramètre  $\phi$  mises en évidence ci-dessus. L'intersection de la courbe somme avec la première bissectrice définit alors une majorante de l'amplitude maximum des oscillations possibles.

Nous proposons de mettre en oeuvre cette technique de majoration pour les exemples traités au chapitre III. L'Association des résultats ainsi obtenus avec les conditions de stabilité globale déjà définies permet dans certains cas de conclure à la stabilité illimitée du processus étudié.

IV<sub>3</sub> APPLICATION AU SYSTEME A MODULATION DE LARGEUR

---

IV<sub>3.1</sub>. - MAJORATION DES OSCILLATIONS LIMITEES.

---

Nous avons choisi d'aborder l'étude d'un système commandé par modulation de largeur des impulsions dans le cas particulier du régime saturé. En effet, si le critère permet de définir une majorante d'éventuelles oscillations pour ce type de fonctionnement, le problème est à fortiori résolu pour le régime non saturé.

Reprenons la représentation matricielle décrite en 3-17

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau(1-D) \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ y'_n \end{bmatrix} + A \text{ signe } \epsilon_n \begin{bmatrix} T - \tau + \tau D \\ 1 - D \end{bmatrix} \quad 4-2$$

et effectuons un changement de base qui permette la diagonalisation de la matrice caractéristique du régime libre du filtre. Soit M la matrice de passage :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'équation (4-2) devient :

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} + \tau y'_{n+1} \\ -y'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n + \tau y'_n \\ -y'_n \end{bmatrix} + A \text{ signe } \epsilon_n \begin{bmatrix} T \\ D - 1 \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

Les nouvelles composantes du vecteur d'état sont :

$$z_n = y_n + \tau y'_n \quad (4-4)$$

$$u_n = -y'_n$$

Soit pour le signal d'erreur :

$$\epsilon_n = z_n - \lambda u_n \quad (4-5)$$

D'où, en introduisant un paramètre  $h$  indépendant du système :

$$\begin{bmatrix} z_{n+1} \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-h & 0 & z_n \\ 0 & D & u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} TA \text{ signe } \epsilon_n - h \epsilon_n - h \lambda u_n \\ (D-1) A \text{ signe } \epsilon_n \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

Notons  $\phi(X_n) = M_{ax}(|z_n|, |u_n|)$  une norme du vecteur d'état, il vient :

$$\phi(X_{n+1}) \leq M_{ax}(|1-h|, D) \phi(X_n) + M_{ax}(|TA \text{ signe } \epsilon_n - h \epsilon_n - h \lambda u_n|, A(1-D)) \quad (4-7)$$

Par une nouvelle majoration, on obtient :

$$\phi(X_{n+1}) \leq M_{ax}(|1-h|, D) \phi(X_n) + M_{ax}(|TA \text{ signe } \epsilon_n - h \epsilon_n| + |h \lambda u_n|, A(1-D)) \quad (4-8)$$

Compte tenu de la relation (4-6), la définition de la norme utilisée permet d'écrire :

$$\begin{aligned} |\epsilon_n| &\leq (1 + \lambda) \phi \\ \lambda &> 0 \end{aligned} \quad (4-9)$$

$$\phi \leq M_{ax}(|1-h|, D) \alpha + M_{ax} \left[ |TA - h(1+\lambda) \beta| + |h \lambda \gamma|, A(1-D) \right] \quad (4-10)$$

$$0 < \alpha < \phi \quad 0 < \beta, \gamma < \phi$$

IV<sub>3-2</sub> APPLICATION A L'ETUDE DE LA STABILITE ILLIMITEE DANS LE CAS DES

-----  
 DIVERS REGLAGES ENVISAGLS AU CHAPITRE PRECEDENT.  
 -----

Exemple I

Dans ce cas, les valeurs caractéristiques du système sont :

$$T = \tau = k = A = B_0 = 1$$

$$\lambda = 0,25$$

et une condition de stabilité globale étendue aux valeurs des variables est définie par la contrainte :

$$M_{ax} |\epsilon_n| < 4,6 \quad (4-11)$$

Cette condition caractérise un domaine D<sub>1</sub> dans le plan des variables; La technique proposée consiste à rechercher maintenant un domaine de majoration d'éventuelles oscillations du système étudié.

Compte tenu des valeurs numériques, il vient :

$$\phi \leq M_{ax} \left( \overset{\textcircled{1}}{|1-h|}, 0,37 \right) \alpha + M_{ax} \left[ \overset{\textcircled{2}}{|1-h \cdot \frac{5}{4} \beta| + |\frac{1}{4} h \gamma|}, 0,63 \right] \quad (4-12)$$

$0 < \alpha < \phi$

Il convient de noter que cette relation (4-12) n'a de sens, par définition, que pour le régime saturé, c'est-à-dire pour des valeurs supérieures à la limite de commutation soit lorsque la contrainte suivante reste vérifiée

$$|\epsilon_n| > 1 \quad (4-13)$$

Il en résulte pour  $\phi$  la limitation suivante déduite de (4-5) :

$$\phi > \frac{1}{|1-\lambda|} = \frac{4}{3} \quad (4-14)$$

Dans ces conditions la construction graphique représentée figure 4-2 conduit pour le choix de

$$h = 1 - D$$

à définir une majorante  $\phi M_{ax}$  :

$$\phi M_{ax} = 2,1 \quad (4-15)$$

La relation (4-5) implique alors

$$M_{ax} |\varepsilon_n| < (1 + \lambda) \phi = 2,6 \quad (4-16)$$

Cette dernière relation (4-16) caractérise un domaine  $D_2$  du plan des variables.

Il est ainsi possible d'affirmer que, quelles que soient les conditions initiales, au bout d'un temps suffisamment long, le point représentatif du système devient et reste inclus dans le domaine  $D_2$ .

Or, nous avons démontré que si ce point est inclus dans  $D_1$ , la stabilité est garantie.

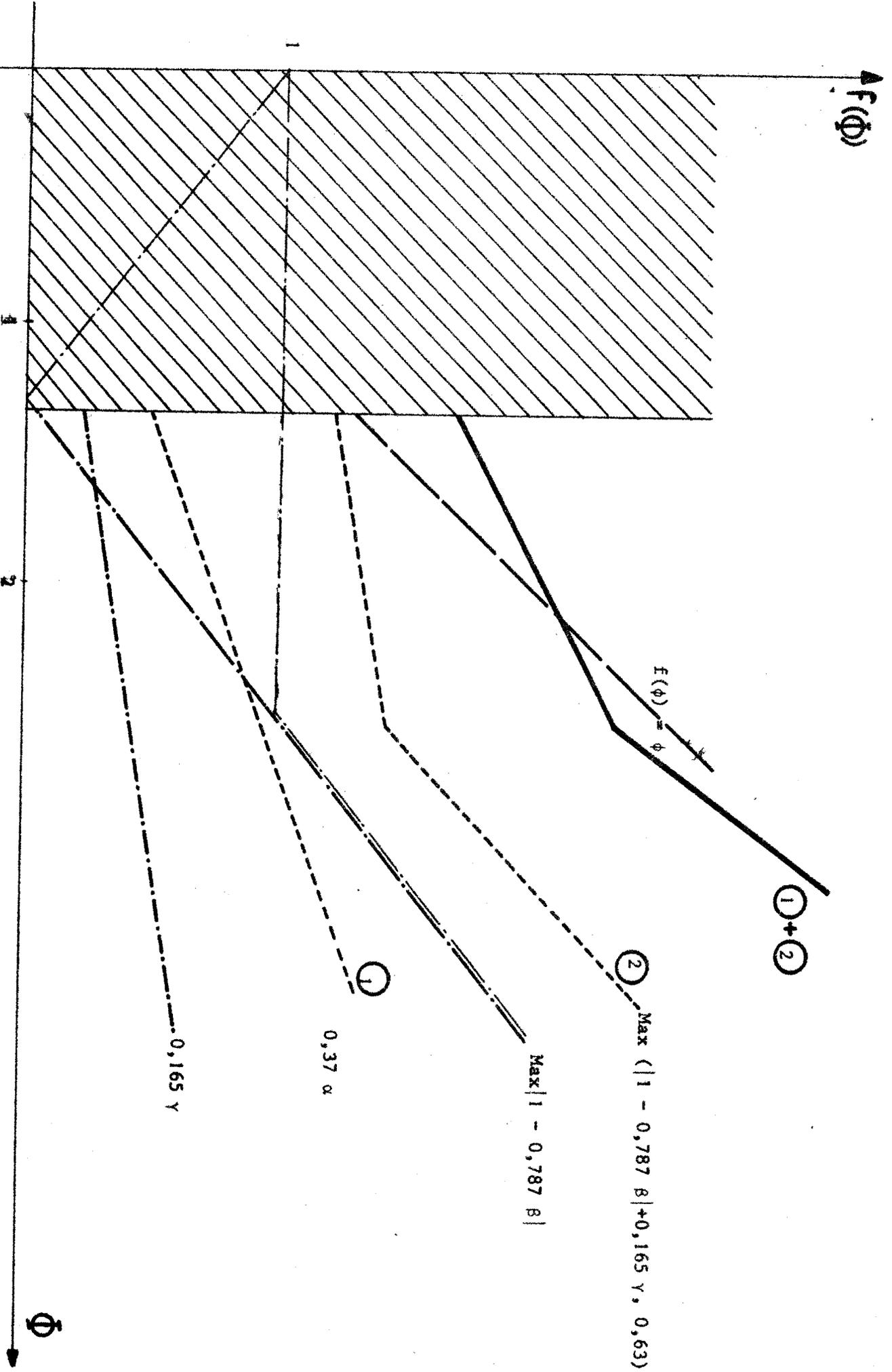


FIGURE 4-2

Compte tenu du fait que  $D_2$  est entièrement contenu dans  $D_1$ , (fig.4-3) l'association de ces deux résultats permet de conclure à la stabilité illimitée du système étudié.

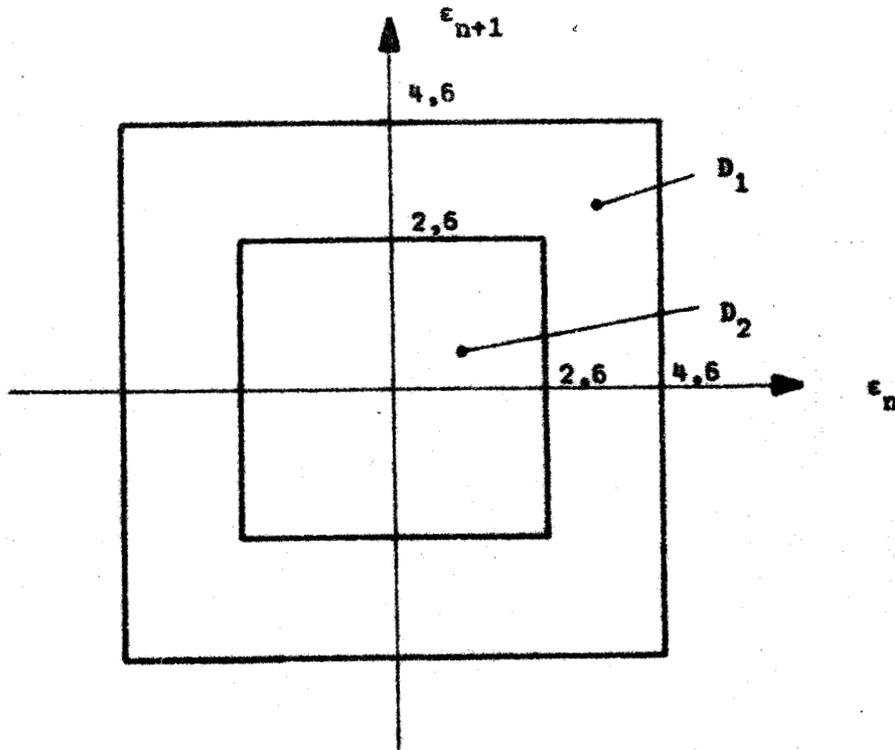


figure 4-3

Exemple II

Nous avons vu au précédent chapitre que le choix de la valeur nulle pour le paramètre  $\lambda$  conduit à un mode de fonctionnement particulier. Les paramètres sont alors :

$$T = \tau = k = 1$$

$$\lambda = 0$$

et la commande est définie par

$$B_0 = 2,2$$

valeur qui correspond à un point de repos placé sur la frontière du domaine de stabilité linéaire dans le plan des coefficients  $f_1, f_2$ .

Une condition de stabilité globale est définie par la contrainte

$$M_{ax} |\epsilon_n| < 4$$

La mise en oeuvre de la technique de majoration des oscillations limites permet alors de définir la majorante suivante :

$$M_{ax} |\epsilon_n| < \frac{TA(1+\lambda)}{(1-D)(1-\lambda)}$$

Compte tenu des valeurs numériques, il vient

$$M_{ax} |\epsilon_n| < 3,5$$

Un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent conduit à conclure à la stabilité illimitée du système étudié.

### Exemple III

De la même façon dans le troisième exemple où nous avons

$$T = \tau = k = 0,8$$

soit

$$B = \frac{1}{1-D} = 1,58 \quad A = \frac{B \cdot Q}{k} = 1,97$$

$$\lambda = \tau D = 0,29$$

L'application du critère de stabilité conduit à imposer au signal d'erreur la contrainte suivante :

$$M_{ax} |\epsilon_n| < 6,8$$

La méthode de majoration des oscillations limites définit la limite :

$$M_{ax} |\epsilon_n| < 4,5$$

Il en résulte que pour ce type de structure, calculée de façon à améliorer la stabilité autour du point de repos, il est possible de conclure également à la stabilité illimitée.

CONCLUSION.

L'utilisation d'un critère de stabilité globale conduit, pour un processus donné, à définir un ensemble de conditions suffisantes qui doivent rester vérifiées lors de l'évolution des paramètres. L'association d'un critère de majoration des oscillations limites peut permettre d'assurer la vérification de telles contraintes et dans cette hypothèse, la stabilité illimitée du processus étudié est garantie sous réserve d'une propriété particulière d'inclusion des domaines mis en oeuvre.

L'emploi de cette méthode dans l'étude de la stabilité d'un système moteur commandé par un modulateur non linéaire du type "Modulation de largeur des impulsions" a été envisagé pour divers réglages particuliers.

Nous proposons maintenant de vérifier les résultats ci-dessus obtenus, en simulant sur calculatrice hybride quelques uns des modes de fonctionnement envisagés pour le système à modulation de largeur.

## Chapitre V

Simulation sur calculatrice analogique d'un système moteur  
commandé par modulation de largeur des impulsions de commande -

### Introduction -

L'analyse mathématique d'un système moteur commandé par  
modulation non linéaire de l'erreur préalablement échantillonnée  
nous a permis de définir des conditions suffisantes de stabilité -

L'objet essentiel de ce chapitre est de comparer les conditions de  
stabilité analytiquement obtenues aux conditions réelles mises en  
évidence par une simulation du système sur calculatrice analogique -

## T<sub>1</sub> Description du système -

Le schéma - bloc équivalent au système étudié est indiqué figure 5-1

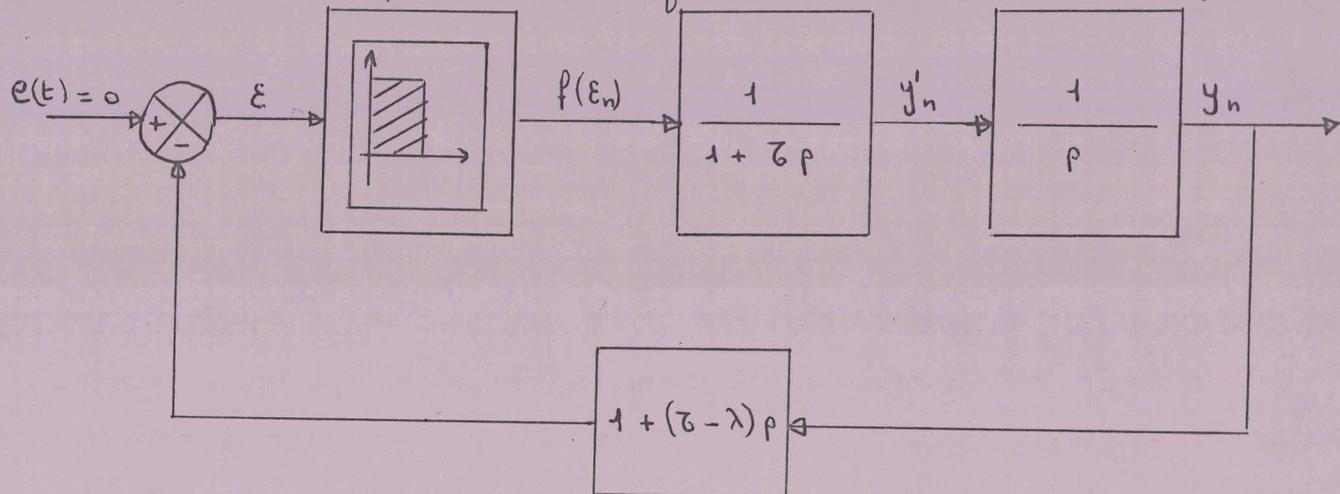


figure 5-1

La largeur des impulsions de commande est reliée à la fonction d'erreur par une relation de la forme :

$$T_{in} = k |\epsilon_n| \quad \text{pour } |\epsilon_n| \leq \frac{T}{k}$$

$$T_{in} = T \quad \text{pour } |\epsilon_n| \geq \frac{T}{k}$$

Cette fonction représentée figure 5-2 traduit l'existence de deux types de fonctionnement du modulateur selon qu'il est saturé ou non - En régime

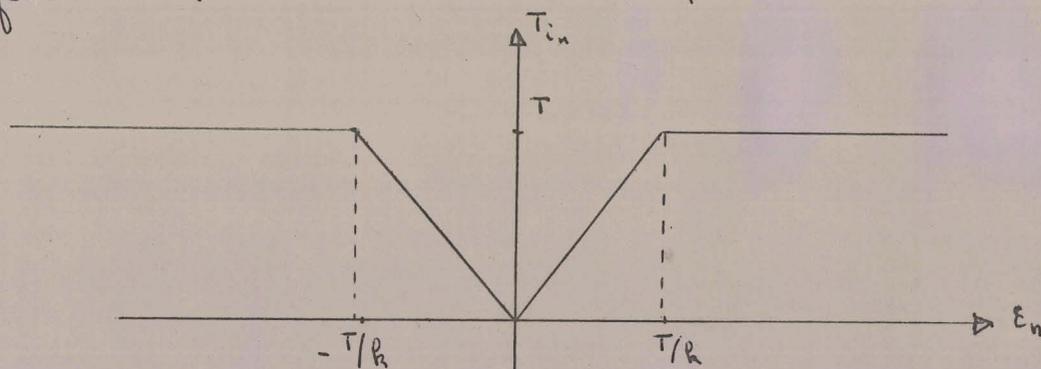


figure 5-2

saturé, la commande est du type "plus ou moins" et la durée des impulsions, d'amplitude constante A et du pic de l'échantillon  $\epsilon_n$ , est égale à la période d'échantillonnage -

## II. Montage -

Un montage simulant un système à modulation de largeur des impulsions et à partie continue linéaire du deuxième ordre est représenté figure 5.3.

- d'intégrateur discret associé au comparateur (1) délivre une tension en dent de scie dont la période, réglable par la pente  $a_1$  et le seuil  $a_0$  détermine la période d'échantillonnage figure 5.4

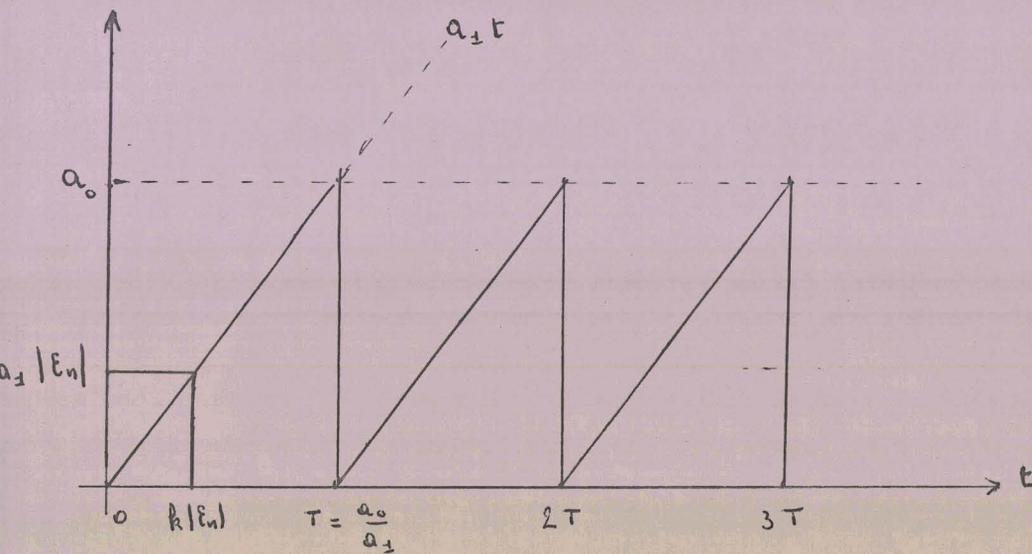


figure 5.4

- cette tension est utilisée pour commander le comparateur (2) qui permet l'échantillonnage - blocage du signal d'erreur  $\varepsilon$

- la modulation de largeur des impulsions est réalisée par le comparateur (4) qui régule la commande du filtre figure 5.5

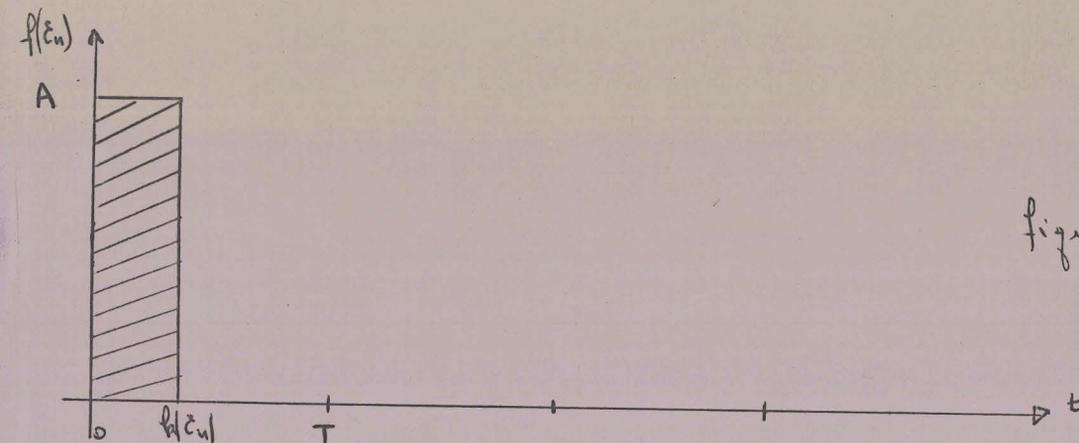


figure 5.5

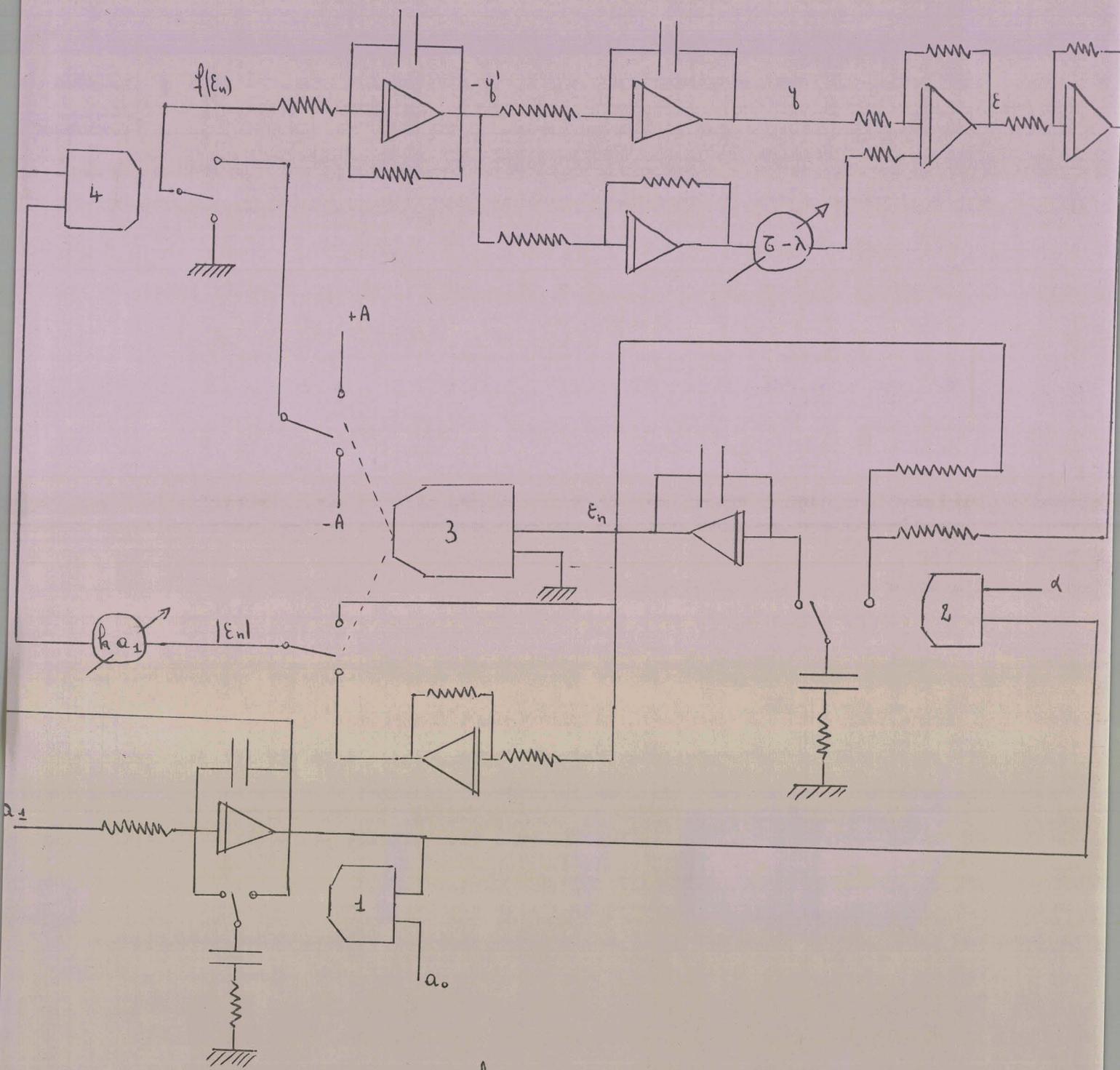


figure 5.3

## II<sub>2</sub> Résultats Expérimentaux -

Dans un premier temps, notre expérience consiste à déterminer les valeurs limites des paramètres de commande  $A$ ,  $h$ ,  $\lambda$ ,

- $A$  amplitude constante des impulsions de commande
- $h$  coefficient définissant la largeur de ces impulsions
- $\lambda$  caractéristique de la boucle de retour

pour lesquelles il est possible de conclure à la stabilité illimitée du système -

Cette étude est effectuée pour deux valeurs du paramètre réduit  $T/\tau$ :

$$T/\tau = 1 \quad \text{et} \quad T/\tau = \frac{1}{5}$$

Nous proposons ensuite de comparer, pour un ensemble particulier des paramètres de commande, l'amplitude des oscillations limites du système réel avec la majorante définie analytiquement -

## II<sub>31</sub> Stabilité Illimitée -

Le processus expérimental que nous avons adopté est le suivant : pour une valeur donnée du paramètre  $\lambda$ , nous augmentons la commande  $B_0 = hA$  jusqu'à l'obtention d'une instabilité - Ce procédé met en évidence l'existence d'une plage de variation de  $B_0$  pour laquelle le système passe successivement d'un fonctionnement stable à un premier fonctionnement intermédiaire où il se stabilise en un point très proche mais différent de l'origine puis à un fonctionnement oscillatoire d'amplitude très faible et enfin à un régime oscillant -

Dans ce sens, pour toute valeur de  $\lambda$ , nous avons noté deux valeurs de  $B_0$  :

- la première correspond à une évolution finale dont l'écart avec l'origine est inférieur ou égal à 5% de l'amplitude  $A$  des impulsions de commande
- la deuxième correspond à un fonctionnement instable -

d'ensemble de ces résultats est représentée figure 5-6 -

Le diagramme permet une vérification immédiate des conditions de stabilité pour les trois exemples étudiés analytiquement :

$$\tau/\tau = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} B_0 = 1 \quad \lambda = 0,25 \\ B_0 = 2,2 \quad \lambda = 0 \\ B_0 = 1,58 \quad \lambda = 0,29 \end{array} \right.$$

pour lesquels nous avons enregistré un fonctionnement stable -  
l'évolution du point représentatif du système dans le plan  $y_u, y'_u$   
illustre figure 5-7 le premier exemple -

Les enregistrements figure 5-8 et figure 5-9 sont destinés à montrer  
la similitude de comportement lorsqu'on fait varier  $h$  et  $A$  à produit  
constant -

La figure 5-9 montre un exemple de comportement instable pour

$$B_0 = 2,5$$

$$\lambda = 0$$

On peut noter que la condition suffisante de stabilité relative à cet  
ensemble de paramètres est définie par

$$B_0 < 2,2$$

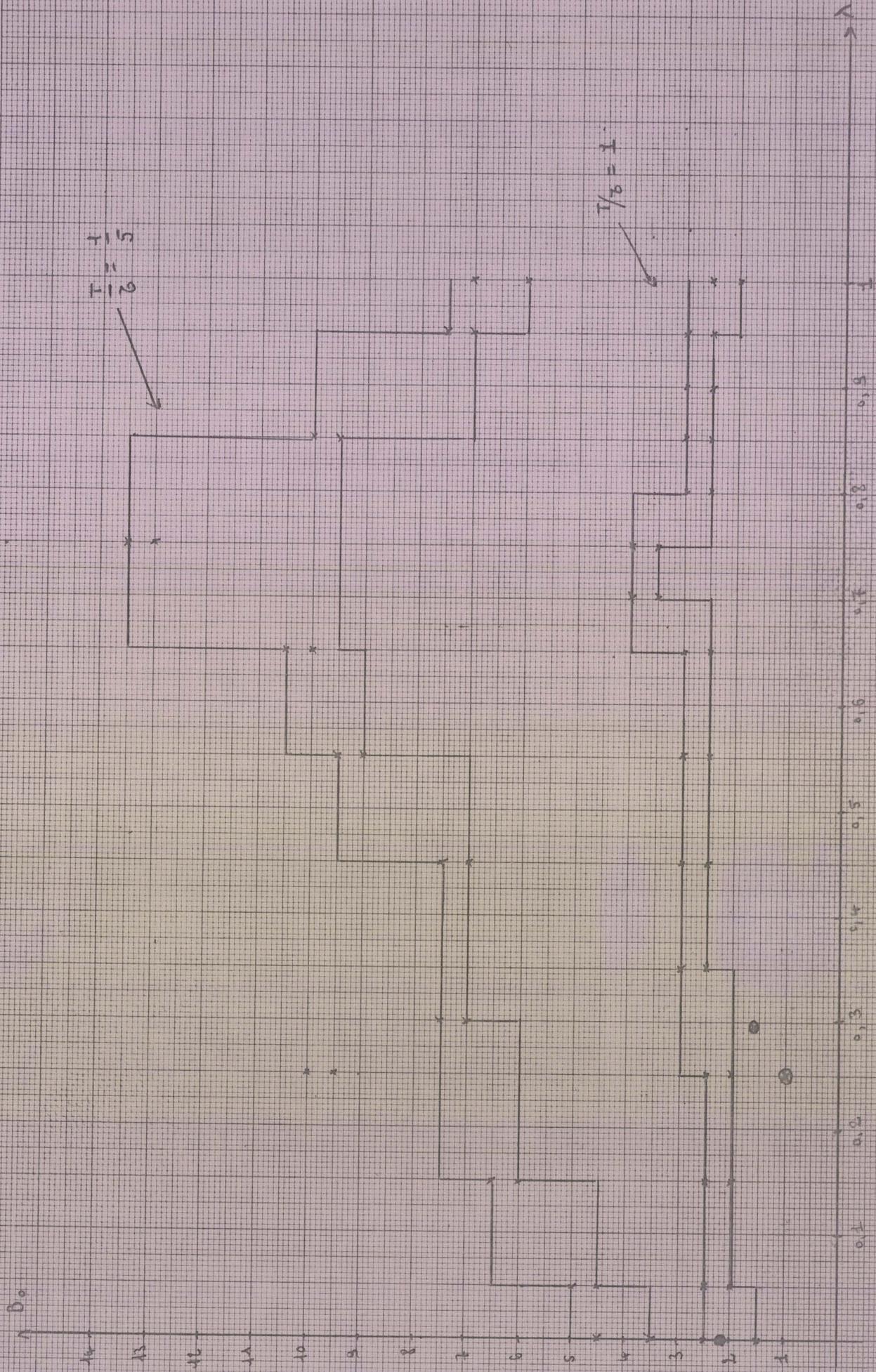


figure 5-6

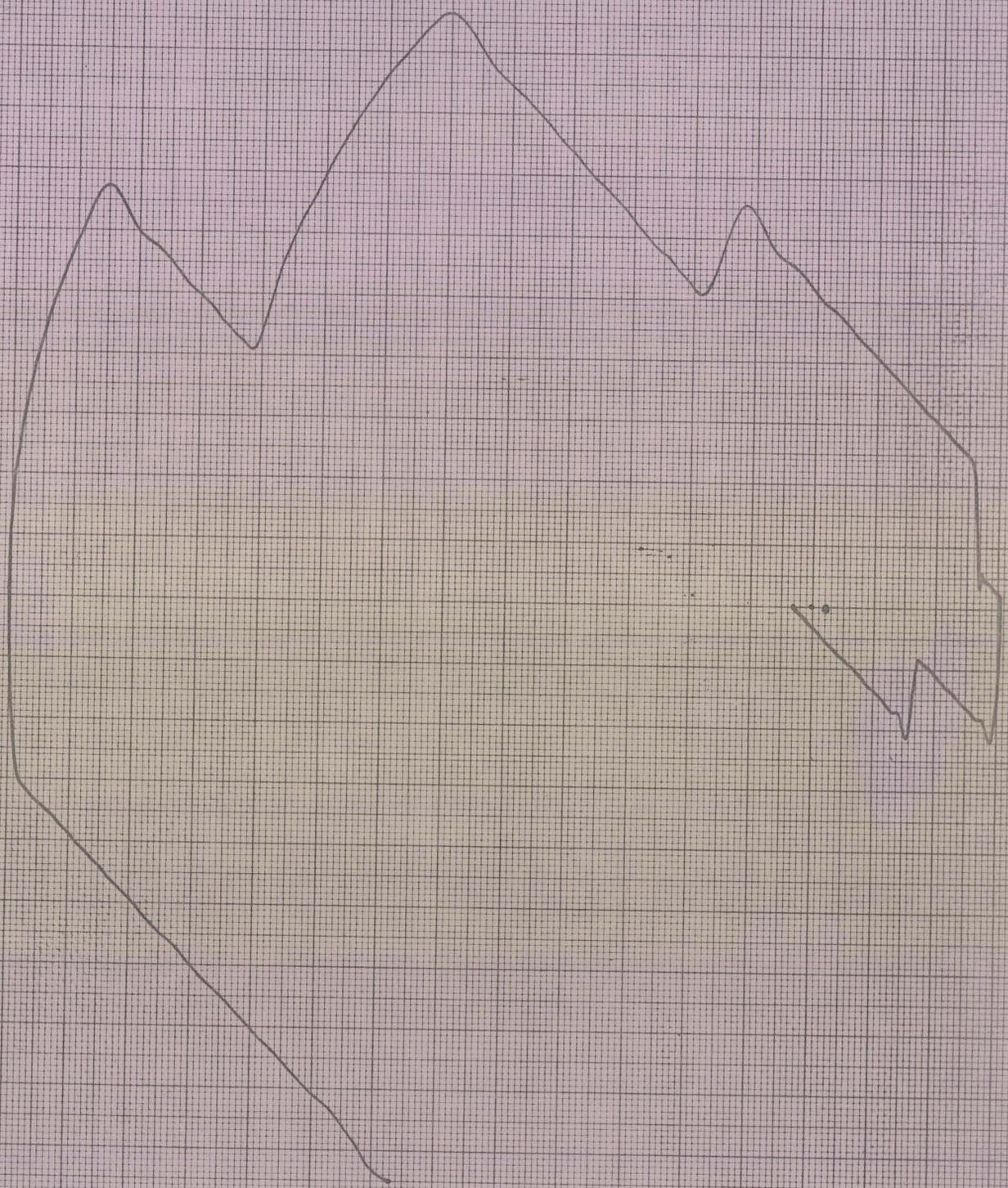
1-2-3-4

A = d

P = d

$\lambda = 0.65$

14.82



1-600  
A.D.  
B.E.A.  
X 50

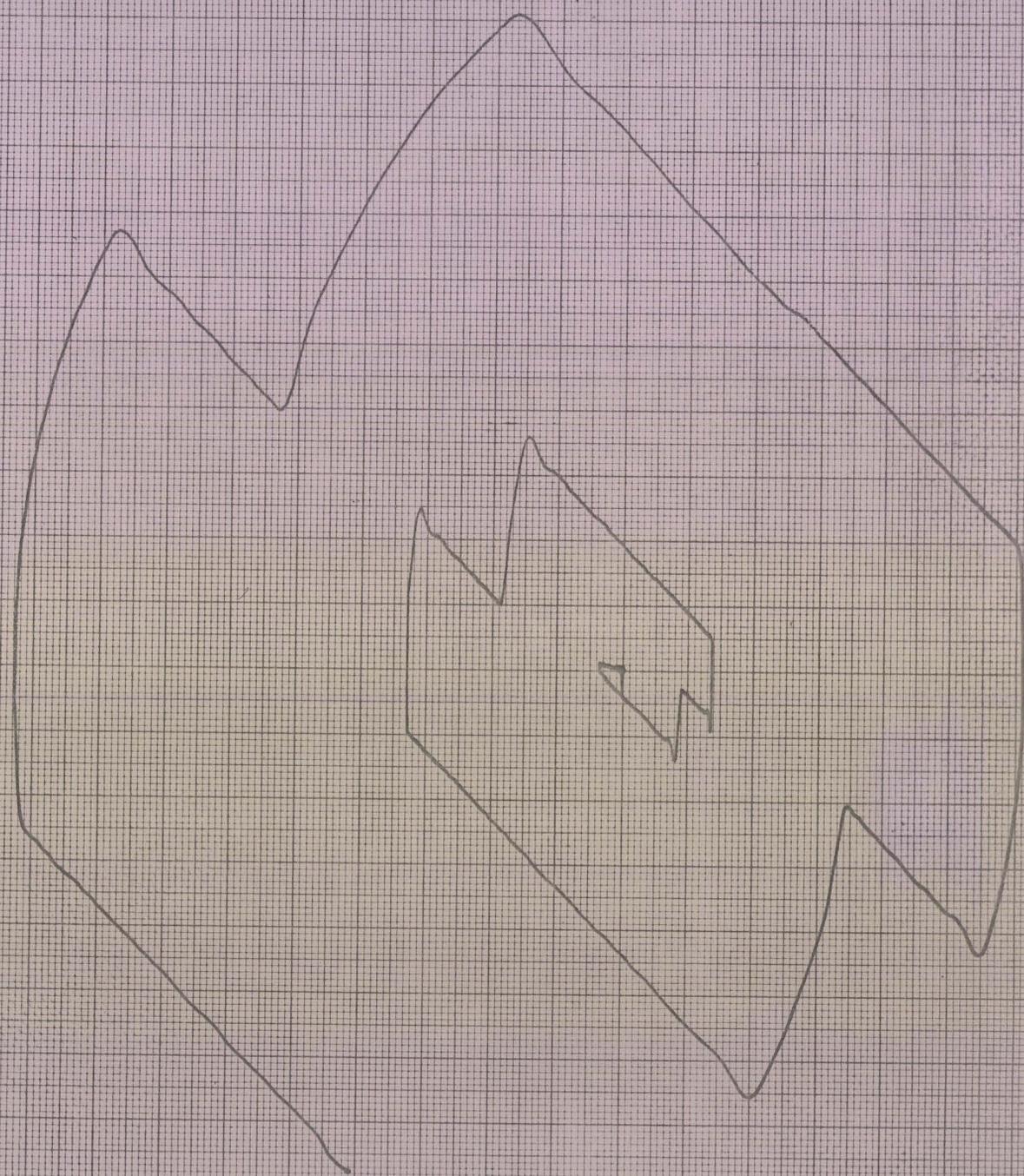


Figure 5.9

1955  
A. 0. 32  
 $\lambda = 0$   
Skafle

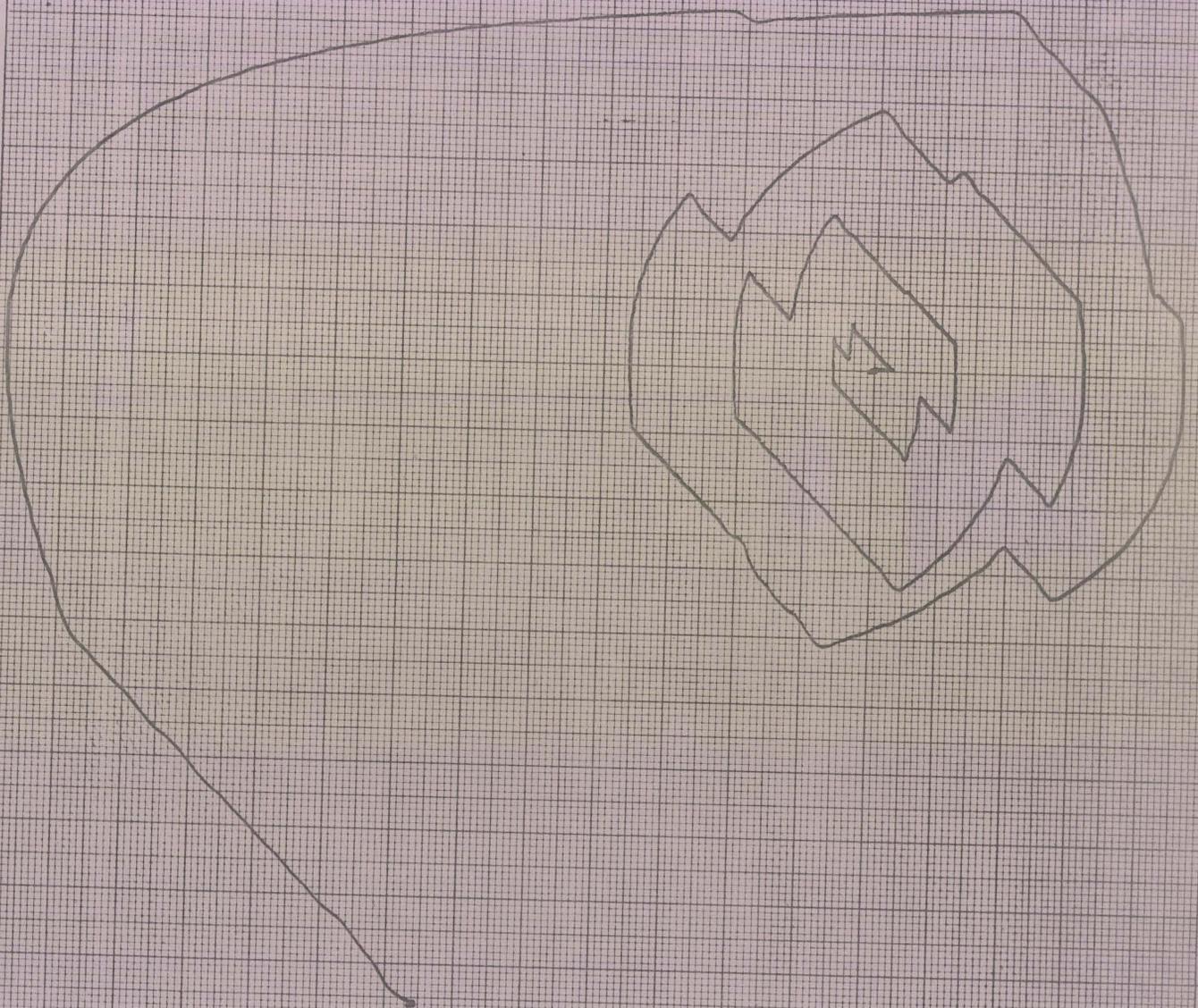


Figure 5.9

T=2-1

$k=5$   
 $A=0.5$   
 $\lambda=1$

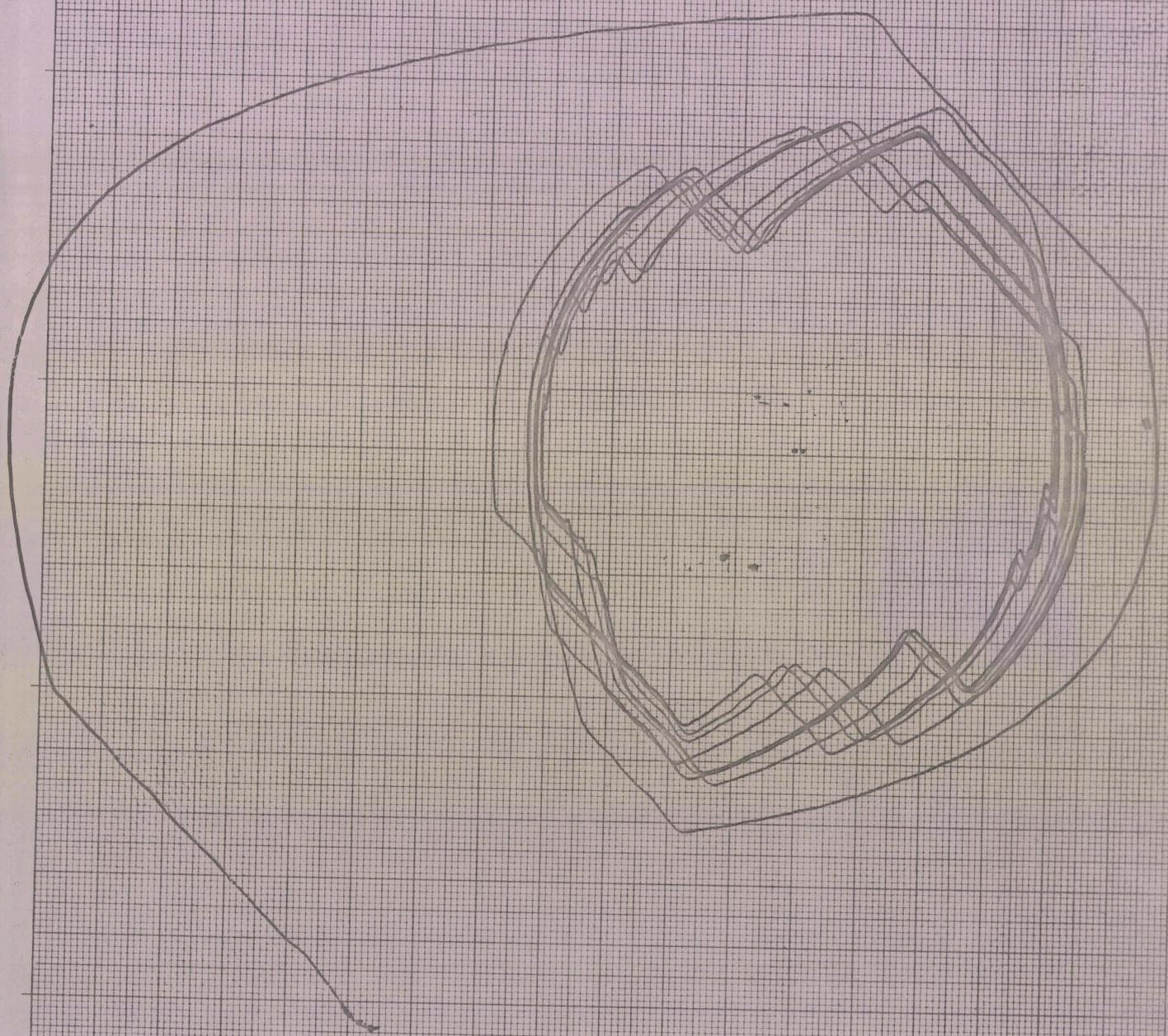


Figure 5-10

## V<sub>32</sub> Oscillations limites.

Notre but est de comparer par un exemple l'amplitude réelle des oscillations limites obtenues et la majorante définie par le critère de majoration -

d'exemple traité est relatif aux valeurs

$$B_0 = 2.2$$

$$\lambda = 0$$

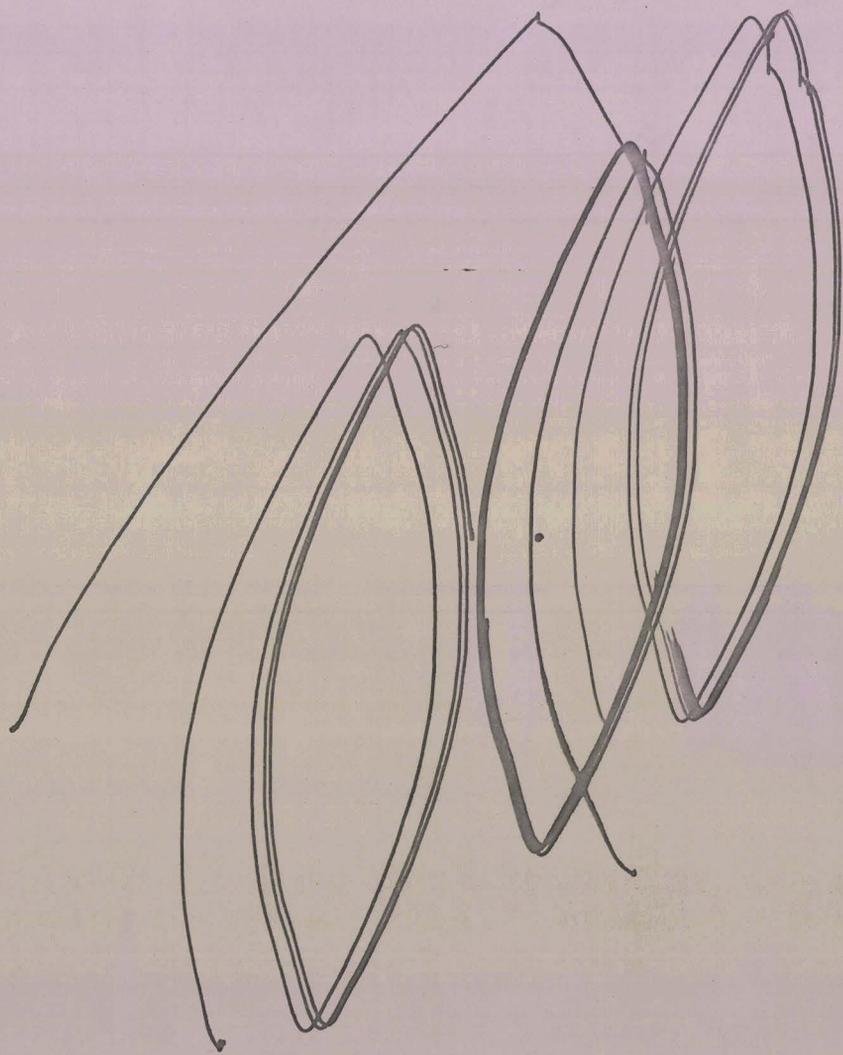
pour lequel nous avons défini, en régime permanent, une majorante de l'amplitude des oscillations pour

$$\varphi(x_n) < 3,5$$

La simulation de ce système conduit à remplacer la modulation de largeur par une commande "plus ou moins" -

Dans ce cas, selon les conditions initiales, nous obtenons trois types d'oscillations limites dont l'amplitude maximale figure 5.10 est

$$x_n = 1.54$$



## Conclusion. —

La simulation sur calculatrice analogique nous a permis de définir rapidement les conditions suffisantes de stabilité définies analytiquement pour quelques exemples particuliers. La comparaison de l'amplitude réelle de oscillations limites obtenues en régime stationnaire et de la majorante définie dans les mêmes conditions par le critère de majoration met en évidence un écart non négligeable. Toutefois, il convient de noter que dans le cas de l'association du critère de majoration avec un critère de stabilité, il suffit que la précision soit suffisante pour pouvoir permettre de conclure si la stabilité est limitée et dans cette hypothèse, une meilleure précision n'apporte rien de plus.

L'ensemble des méthodes que nous avons proposées au cours de ces premiers chapitres permet de définir des conditions suffisantes pour garantir un mode de fonctionnement donné au bout d'un temps suffisamment long. Pour une meilleure connaissance des phénomènes, il convient maintenant de préciser l'évolution du système étudié durant sa période transitoire.

Dans ce sens, le prochain chapitre a pour but de définir des conditions suffisantes pour garantir un temps de réponse donné.

## CHAPITRE VI

### ETUDE DU TEMPS DE REPONSE PAR MAJORATION D'ORDRE $\alpha$ .

#### INTRODUCTION

La méthode de contraction directe au premier ordre simplifie considérablement l'analyse de l'évolution d'un processus. Elle permet ainsi, par majoration, de garantir un temps de réponse donné /2/. Toutefois, les conditions imposées aux paramètres du système sont généralement plus restrictives que si le système majorant est d'ordre supérieur à l'unité /9/.

Dans ce sens, nous proposons dans ce dernier chapitre une technique d'étude du comportement dynamique des systèmes asservis basée sur une majoration d'ordre  $\alpha$ ,  $\alpha$  supérieur ou égal à l'unité.

## VI. 1. DEFINITION DU SYSTEME MAJORANT

L'étude de l'évolution d'un processus échantillonné par contraction au premier ordre, conduit le plus souvent à définir une fonction des variables d'état caractérisant à chaque période d'échantillonnage l'écart du système à sa position d'équilibre. On peut songer à interpréter cette méthode en vue d'une majoration par un modèle d'ordre  $\alpha / 10'$ . Une telle étude peut être réalisée en introduisant une suite récurrente dont les termes se succèdent toutes les  $k$  périodes d'échantillonnage.

Nous supposons à priori que l'ordre  $q$  du système réel est alors un multiple de l'ordre  $\alpha$  du système majorant :

$$q = \alpha k$$

En effet, lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, il suffit d'utiliser un modèle redondant / 3 / d'ordre  $q' > q$  et tel que l'on ait :

$$q' = \alpha' k$$

Dans ce sens, nous serons amenés à noter  $V_N$  le terme d'une suite récurrente, associé à l'indice  $n$  et dépendant d'une séquence d'ordre  $k$ . Il est alors permis d'aborder l'étude du temps de réponse du processus initialement décrit par une récurrence scalaire d'ordre  $q$ , à partir de la vitesse de convergence d'une récurrence de la forme (6.1) :

$$V_{n+1} = \frac{1}{r} V_n \quad (6.1)$$

$r$  constante supérieure à l'unité.

## VI.2. CHOIX DE LA SUITE MAJORANTE

Le système étudié est décrit par l'équation de récurrence scalaire suivante :

$$\epsilon_{n+q} + \sum_{i=1}^q f_i \epsilon_{n+q-i} = 0 \quad (6.2)$$

Dans cette équation,  $\epsilon_n$  représente le signal d'erreur à l'instant d'échantillonnage  $nT$  ; les coefficients  $f_i$  sont des fonctions non linéaires des  $\epsilon_{n+j}$  ( $j = 0, \dots, q-1$ ) et de  $n$  ; une telle représentation suppose un fonctionnement en régime autonome à partir de conditions initiales données.

$$\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{q-1}$$

Le modèle choisi d'ordre  $q$  vérifie la relation

$$q = \alpha k$$

expression dans laquelle  $\alpha$  désigne l'ordre du système majorant.

Il vient par majoration :

$$|\epsilon_{n+q}| \leq |f_1| |\epsilon_{n+q-1}| + \dots + |f_q| |\epsilon_n| \quad (6.3)$$

Soit, en groupant les termes par facteurs de  $k$  éléments :

$$|\epsilon_{n+q}| < r \left[ |f_1| + \dots + |f_k| \right] \cdot \frac{\text{Max} (|\epsilon_{n+q-1}|, \dots, |\epsilon_{n+q-k}|)}{r} + \dots +$$

$$r^\alpha \left[ |f_{q-(k-1)}| + \dots + |f_q| \right] \frac{\text{Max} (|\epsilon_{n+k-1}|, \dots, |\epsilon_n|)}{r^\alpha} \quad (6.4)$$

Cette relation s'écrit encore plus simplement sous la forme :

$$|\epsilon_{n+q}| < \sum_{i=1}^{\alpha} r^i \left[ |f_{ki-(k-1)}| + \dots + |f_{ki}| \right] .$$

$$\frac{\text{Max} (|\epsilon_{n+q} - [ki - (k-1)]|, \dots, |\epsilon_{n+q} - ki|)}{r^i} \quad (6.5)$$

Par une nouvelle majoration, nous sommes conduits à l'expression :

$$|\epsilon_{n+q}| < \left\{ \sum_{i=1}^{\alpha} r^i \left[ |f_{ki-(k-1)}| + \dots + |f_{ki}| \right] \right\} \cdot \text{Max}_i \left[ \frac{\text{Max} (|\epsilon_{n+q} - [ki - (k-1)]|, \dots, |\epsilon_{n+q} - ki|)}{r^i} \right] \quad (6.6)$$

Supposons vérifiée la contrainte suivante :

$$\sum_{i=1}^{\alpha} r^i \left[ |f_{ki-(k-1)}| + \dots + |f_{ki}| \right] < 1 \quad (6.7)$$

Dans ce cas, l'inégalité (6.6) se ramène à la forme :

$$|\epsilon_{n+q}| < \text{Max}_i \left[ \frac{\text{Max} (|\epsilon_{n+q} - [ki - (k-1)]|, \dots, |\epsilon_{n+q} - ki|)}{r^i} \right] \quad (6.8)$$

$i = 1, \dots, \alpha$

Par définition, chacun des éléments constitutifs de la suite  $M_N$  doit majorer le groupe correspondant de k composantes du vecteur séquence.

Pour que cette hypothèse soit vérifiée, il suffit de choisir  $M_N$  selon la forme :

$$M_N = \max_i \left[ \frac{\max (|\epsilon_{n+q} - [ki - (k-1)]|, \dots, |\epsilon_{n+q} - ki|)}{r^{i-1}} \right]_{i=1, \dots, \alpha} \quad (6.9)$$

### VI.3. ENONCE DU CRITERE - DEMONSTRATION

#### VI.3.1. - ENONCE

Soit le système échantillonné régi par une équation récurrente de la forme :

$$e_{n+q} - \sum_{i=1}^q f_i (\epsilon_{n+q-i}) \cdot \epsilon_{n+q-i} = 0 \quad (6.10)$$

La vérification de la contrainte (6.11)

$$\sum_{i=1}^{\alpha} r^i \left[ |f_{ki} - (k-1)| + \dots + |f_{ki}| \right] < 1 \quad (6.11)$$

assure un amortissement de l'ensemble des composantes successives du vecteur séquence caractérisé par un coefficient d'atténuation égal à 1/r selon la relation :

$$v_{n+k} \leq \frac{1}{r} v_n \quad (6.12)$$

$$\text{avec } v_n = \max_i (|\epsilon_{n+i}|) \quad (i=0, \dots, k-1)$$

### VI.3.2. - DEMONSTRATION

-----

La loi de formation proposée pour la suite  $M_N$  définit sans ambiguïté chacun de ses termes ; ainsi pour le terme  $M_{N+1}$ , il vient :

$$M_{N+1} = \max_i \left[ \frac{\max (|\epsilon_{n+q} - [ki - (2k-1)]|, \dots, |\epsilon_{n+q} - ki + k|)}{r^{i-1}} \right] \quad (6.13)$$

$i = 1, \dots, \alpha$

Il convient maintenant de préciser la valeur relative des expressions de  $M_N$  et  $M_{N+1}$  dans le but de définir une relation entre ces éléments.

La comparaison des relations (6.9) et (6.13) met en évidence le rôle prépondérant des  $k$  termes suivants

$$|\epsilon_{n+q}|, \dots, |\epsilon_{n+q+k-1}|$$

En effet, tous les termes communs aux deux expressions apparaissent avec un coefficient de pondération  $1/r$  dans la définition de  $M_{N+1}$ .

Dans ce cas, par association des relations (6.8) et (6.9), il vient :

$$|\epsilon_{n+q}| < \frac{1}{r} M_n \quad (6.14)$$

L'incrémentation d'une unité des indices de la relation (6.8) conduit à écrire :

$$|\epsilon_{n+q+1}| < \max_i \left[ \frac{|\epsilon_{n+q - (ki - k)}|, \dots, |\epsilon_{n+q - ki+1}|}{r^i} \right]_{i=1, \dots, \alpha} \quad (6.15)$$

Cette relation implique par conséquent

$$|\epsilon_{n+q+1}| \leq |\epsilon_{n+q}| < \frac{1}{r} M_n \quad (6.16)$$

Par itération, il vient :

$$|\epsilon_{n+q}| < \frac{1}{r} M_n$$

$$|\epsilon_{n+q+1}| < \frac{1}{r} M_n \quad (6.17)$$

$$|\epsilon_{n+q+k-1}| < \frac{1}{r} M_n$$



Compte tenu des définitions de  $M_N$  et de  $M_{N+1}$ , il en résulte une majoration de la forme

$$M_{N+1} \leq \frac{1}{r} M_N \quad (6.18)$$

Soit alors  $V_N$  une suite majorante de la suite  $M_N$  définie par la récurrence

$$V_{N+1} = \frac{1}{r} V_N \quad (6.19)$$

avec la condition initiale

$$V_0 = M_0$$

Dans cette hypothèse, la suite  $V_N$  dont les termes se succèdent toutes les  $k$  périodes avec un affaiblissement constant  $1/r$  majore les  $\epsilon_J$  successifs à partir de  $\epsilon_q$  avec la condition initiale :

$$V_0 = \text{Max} \left( \frac{|\epsilon_{q-1}|}{1}, \dots, \frac{|\epsilon_{q-k}|}{1}, \dots, \frac{|\epsilon_{q-[ki-(k-1)]}|, \dots, |\epsilon_{q-ki}|}{r^{i-1}}, \dots, \frac{|\epsilon_{k-1}|}{r^{\alpha-1}}, \dots, \frac{|\epsilon_0|}{r^{\alpha-1}} \right)$$

(6.20)

Q . E . D .

#### VI.4. INTERPRETATION GRAPHIQUE

Le critère proposé se prête à une interprétation graphique simple ; en effet, nous devons définir la réponse du système d'ordre  $\alpha$  de coefficient d'atténuation  $1/r$  qui, pour la plus petite condition initiale, majore aux  $q$  premiers instants d'échantillonnage l'erreur  $\epsilon_n$ .

Nous avons traité quatre exemples destinés à illustrer cette étude. L'application pratique, différente selon que l'ordre  $q$  du processus est ou non multiple de  $\alpha$  est précisée dans les deux premiers exemples. Les deux autres relatifs aux valeurs extrêmes  $\alpha = 1$  et  $\alpha = q$ , permettent de définir l'évolution des conditions imposées au système selon l'ordre choisi pour la majorante.

VI.4.1. - PREMIER EXEMPLE :  $q = \alpha k$

---

Soit le système asservi régi par l'équation récurrente :

$$\epsilon_{n+6} + \sum_{i=1}^6 f_i \epsilon_{n+6-i} = 0 \quad (6.21)$$

évoluant à partir de conditions initiales

$$\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_5$$

Nous proposons de définir un système d'ordre 3, majorant du précédent, qui converge avec un coefficient d'atténuation 1/2.

En supposant vérifiée la condition :

$$\sum_{i=1}^3 2^i \left[ |f_{2i-1}| + |f_{2i}| \right] < 1 \quad (6.22)$$

Le critère proposé permet d'énoncer que le système étudié est majoré par un système d'ordre 3, de coefficient d'atténuation 1/2 et de condition initiale :

$$\max_i 2^i \left[ \max (|\epsilon_{2i}|, |\epsilon_{2i+1}|) \right] \quad i=0,1,2 \quad (6.23)$$

Ce résultat est représenté figure 6.1.

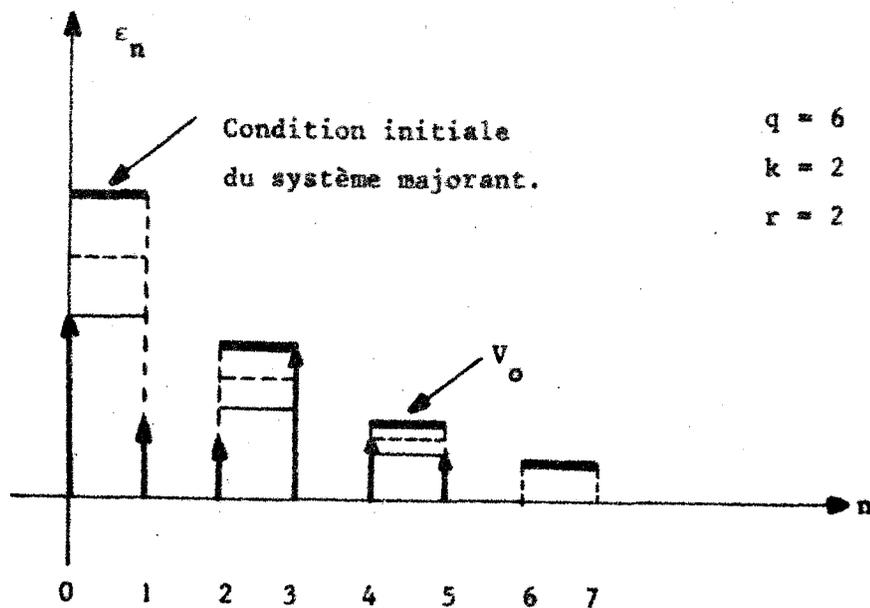


Figure 6-1

VI.4.2. - DEUXIEME EXEMPLE :  $q' = \alpha' k$

Afin de montrer les diverses possibilités d'application de cette méthode, nous proposons un groupement des termes par 4 permettant de définir un système d'ordre 2 particulier, majorant du système précédent et convergeant avec le coefficient d'atténuation 1/2.

Il convient dans ce cas d'utiliser un modèle redondant dont l'ordre soit multiple de celui choisi pour le système majorant. Compte tenu de ces conditions ; l'application du critère conduit au résultat représenté figure (6.2)

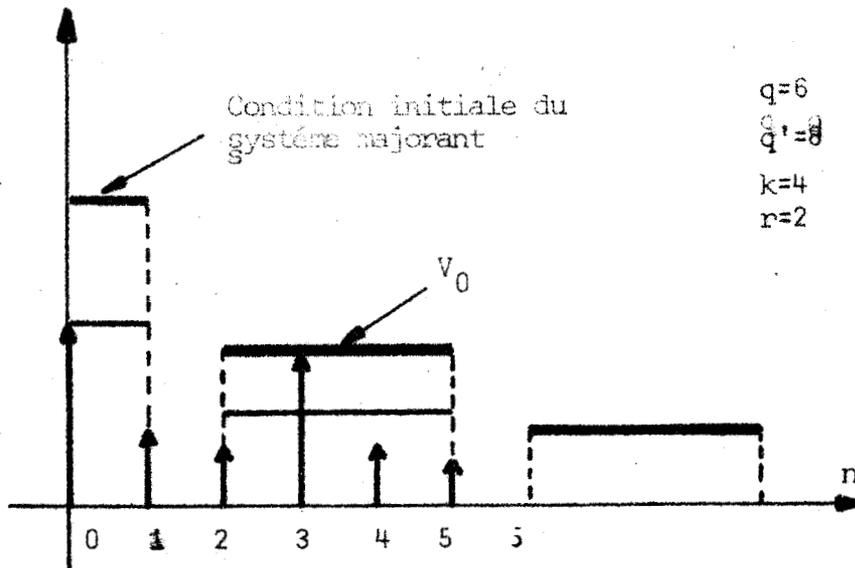


Figure 5+2

La différence fondamentale entre ces deux applications est due au rôle respectif de chaque paramètre ; en effet, les pondérations apparaissant lors de l'application du critère dépendent de l'ordre de la majoration par l'introduction de  $\alpha$  coefficients différents affectés aux coefficients  $f_i$ . Il en est de même pour les conditions initiales.

### VI.4.3. - TROISIEME EXEMPLE : $\alpha = q$

Envisageons le cas particulier où  $\alpha = q$ , c'est à dire une majoration par un système d'ordre  $q$ . Nous retrouvons alors un critère énoncé antérieurement par P. VIDAL / /

Supposons vérifiée la condition

$$\sum_{i=1}^q r^i |f_i| < 1$$

$r$  constante réelle supérieure à l'unité.

Le système proposé est majoré par un système d'ordre  $q$ , de coefficient d'atténuation  $1/2$  et de condition initiale.

$$\text{Max}_i \left| r^i |\epsilon_i| \right| \quad i = 0, \dots, q-1$$

L'illustration graphique de ce résultat est représentée figure (6.3) et figure (6.4)

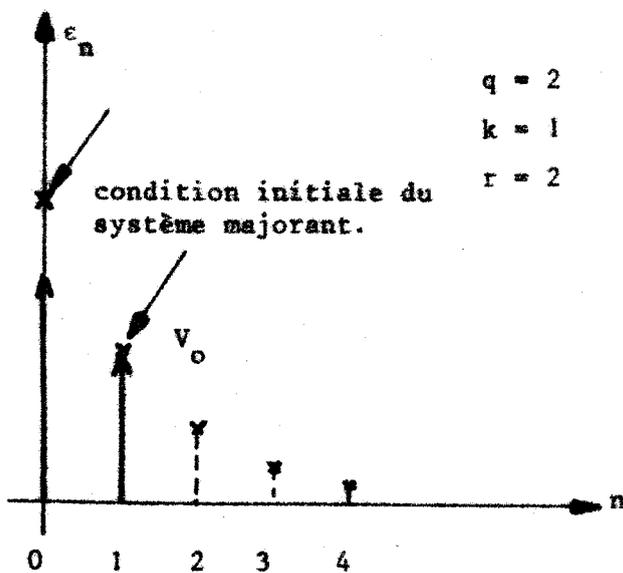


Figure 6-3

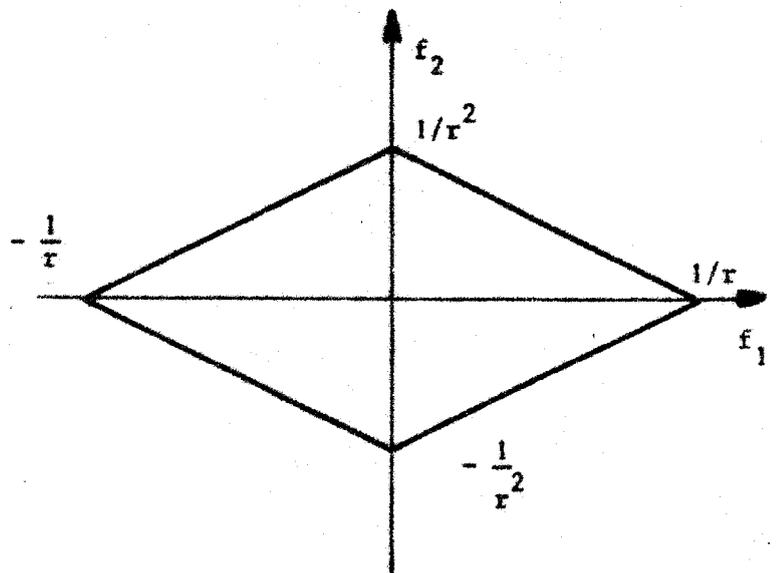


Figure 6-4

Nous remarquons la nature dissymétrique du domaine caractérisant les contraintes imposées aux coefficients  $f_i$  ; elle résulte de la pondération qui consiste à affecter à chaque  $f_i$  un coefficient différent. Il en est de même pour les conditions initiales dont l'ordre d'apparition revêt alors une grande importance. Toutefois, la vitesse de convergence garantie est ici maximale pour un coefficient d'atténuation donné puisque celui-ci intervient à chaque période.

VI.4.4. - QUATRIEME EXEMPLE :  $\alpha = 1$

En choisissant  $\alpha = 1$ , le système majorant est alors du premier ordre ; il en résulte des particularités mises en évidence par les figure (6.5) et figure (6.6) qui illustrent le critère suivant :

Supposons vérifiée la relation :

$$\sum_{i=1}^q r |f_i| < 1$$

Soit

$$\sum_{i=1}^q |f_i| < \frac{1}{r}$$

Le système proposé est majoré par un système du premier ordre de coefficient d'atténuation  $1/r$  et de condition initiale.

$$\text{Max}_i |x_i| \quad i = 0, \dots, q-1$$

La condition initiale du système majorant est définie ici par comparaison directe, sans pondération arbitraire, des  $q$  conditions initiales ; ainsi, chaque valeur intervient de la même façon ; il en est de même pour les coefficients non linéaires  $f_i$  pour lesquels la condition de convergence se traduit par un domaine symétrique qui trouve ici sa dimension maximale vis à vis des valeurs de  $\alpha$ .

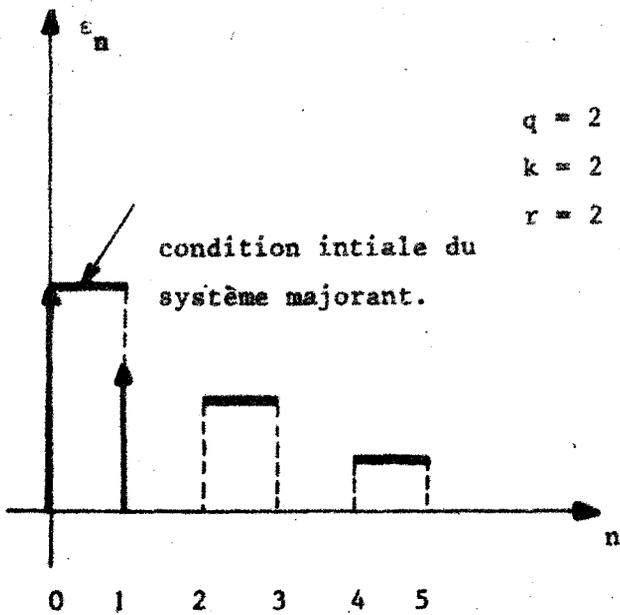


Figure 6-5

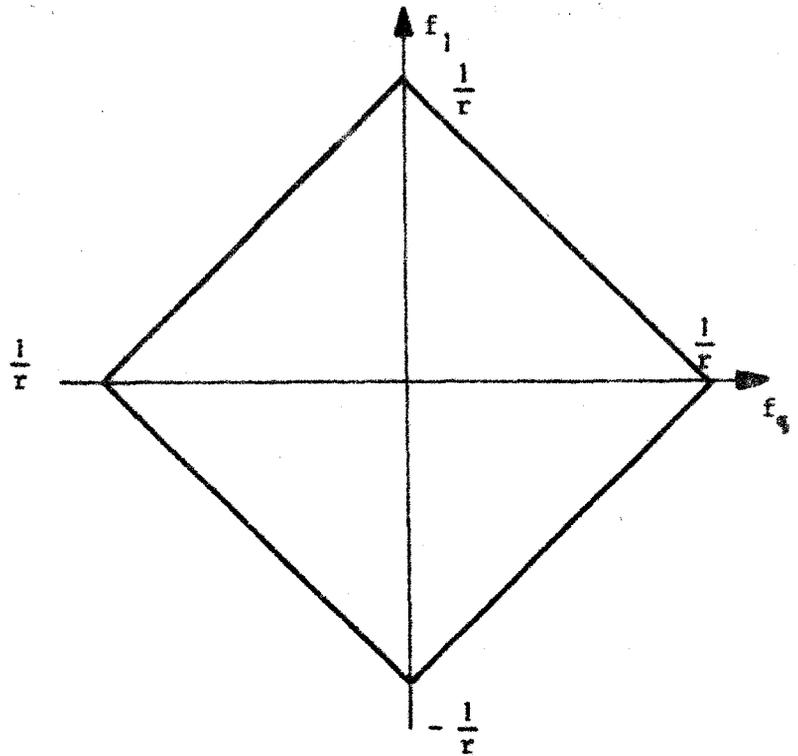


Figure 6-6

Notons cependant que la vitesse de convergence garantie au système correspond à un amortissement de  $1/r$  toutes les  $q$  périodes c'est à dire que, relativement au cas précédent, elle est considérablement réduite.

### CONCLUSION

L'écart d'un système avec sa position d'équilibre peut être caractérisé par une fonction de ses variables d'état. L'étude de cette fonction permet, par majoration, de définir un ensemble de contraintes suffisantes pour garantir une vitesse de convergence donnée.

La simplicité de l'interprétation graphique permet une comparaison rapide des résultats obtenus par diverses majorations et facilite ainsi un choix adapté à un problème particulier.

## Conclusion Générale -

Nous avons envisagé dans ce mémoire l'étude d'une classe importante de systèmes discrets non linéaires décrits par un modèle récurrent. L'introduction de paramètres supplémentaires dans le modèle initial conduit à un modèle redondant dont l'utilisation nous a permis d'obtenir une plus grande souplesse dans la mise en oeuvre des critères usuels de stabilité. Ainsi, pour les processus du second ordre, un abaque gradué facilite l'interprétation des résultats obtenus.

Nous avons ensuite proposé une méthode générale d'étude de la stabilité illimitée qui consiste à associer un critère de majoration des oscillations limitées aux critères généraux de stabilité globale. Cette méthode peut parfois permettre de conclure alors que la mise en oeuvre de méthodes plus classiques est susceptible de prêter délicatesse.

La dernière partie de notre travail est une étude du temps de réponse par introduction d'un modèle majorant dont l'ordre peut être choisi supérieur à l'unité.

A notre sens, il semble que l'utilisation de modèles redondants pour la description des processus puisse être développée avec profit mais une telle extension nécessite au préalable la définition d'un outil mathématique susceptible de traduire les propriétés de ces modèles et c'est dans cette voie que nous envisageons de poursuivre nos travaux.

