N° d'ordre 288

# T H E S E S

présentées à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur Es Sciences Mathématiques

par

Jean-Claude DE PARIS

Première Thèse : DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES
APPLICATION A L'ETUDE DE PROBLEMES DE CAUCHY
AVEC DES DONNEES SINGULIERES.

Deuxième Thèse : SPECTRE D'UNE VARIETE RIEMANNIENNE.



Thèses soutenues le 14 Décembre 1973 devant la Commission d'Examen

MM. M. PARREAU, Président
J. VAILLANT, Rapporteur
T. AUBIN, Examinateur
J. LERAY, Invité

*A ma femme,*

*à Eric, Marc et Sylvie.*

Ma thèse est constituée par les articles suivants :

- "Ondes asymptotiques et problème de Cauchy caractéristique local pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples" publié sous forme d'une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (t. 270, série A, 1970, p. 1509-1511).

Un fascicule intitulé "Problème de Cauchy analytique caractéristique local et problème de Goursat" détaille les calculs relatifs à la seconde partie de cette note

- "Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples : lien avec l'hyperbolicité" publié au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (t. 51, 1972, p. 231-256).

- "Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur différentiel bien décomposable" publié au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (t. 51, 1972, p. 465-488).

Je suis profondément reconnaissant à Monsieur J. Vaillant pour la bienveillance dont il a toujours fait preuve à mon égard, et pour l'aide qu'il m'a constamment apportée ; c'est grâce à lui que j'ai pu entreprendre ce travail, et ce sont ses nombreux conseils qui m'ont permis de le mener à bien.

Monsieur J. Leray m'a permis de faire deux conférences à son séminaire. Qu'il trouve ici l'expression de ma plus profonde gratitude pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à mon travail.

Je remercie également Madame Y. Choquet-Bruhat pour ses encouragements et ses conseils.

Monsieur C. Goulaouic et Monsieur L. Schwartz ont bien voulu, durant leur séminaire 1972-1973, écouter l'exposé d'une partie des résultats de mes recherches, et je les prie de trouver ici mes remerciements.

Monsieur M. Parreau, Président de l'Université des Sciences et Techniques de Lille I, a bien voulu accepter de présider le jury de ma thèse ; qu'il trouve ici l'expression de ma plus vive reconnaissance.

Monsieur T. Aubin m'a posé, pour ma seconde thèse, un problème sur les valeurs propres du Laplacien d'une variété riemannienne compacte, et ses conseils m'ont été fort précieux. Qu'il en soit ici remercié.

Je remercie enfin tous ceux qui ont contribué, par leur aide matérielle, à l'élaboration de cette thèse.

DEUXIEME THESE

PROPOSITIONS DONNEES PAR L'UNIVERSITE :

SPECTRE D'UNE VARIETE RIEMANNIENNE.

Rédaction détaillée d'une note publiée

Aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.



# PROBLEME DE CAUCHY ANALYTIQUE CARACTERISTIQUE LOCAL

# ET PROBLEMES DE GOURSAT.

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-



par

Jean-Claude DE PARIS

## 0 - INTRODUCTION.-

Les techniques de calcul d'ondes asymptotiques mises au point dans [3] permettent l'étude locale de problèmes de Cauchy caractéristiques analytiques ; c'est d'ailleurs l'étude de tels problèmes, pour répondre à une question que m'avait posée J. Vaillant, qui a été à l'origine de mes recherches.

$E$ désigne une variété analytique (réelle ou complexe) et $h$ un opérateur différentiel analytique sur $E$ ; $S$ est une sous-variété de codimension 1 de $E$, $V$ un voisinage d'un point $a \in S$, tel que $S$ soit caractéristique en tout point de $V \cap S$. Si $f$ est une fonction analytique au voisinage de $a$, on cherche les solutions (analytiques) de $h(y) = f$ si $y$ est astreint à satisfaire certaines conditions initiales qu'on précisera dans la suite.

On résoud d'abord le problème formel (travail dont les résultats ont été publiés dans [2]) puis on étudie des cas où il y a une solution analytique.

## I - RESOLUTION DU PROBLEME FORMEL.-

On note $H$ le symbole principal de $h$. Si $\Omega$ est un voisinage ouvert connexe de $a$, contenu dans $V$, la restriction de $H$ à $T^*(\Omega)$ est un élément de l'anneau factoriel des applications polynomiales sur l'anneau des fonctions analytiques dans le domaine $\Omega$ : il existe donc $H_1,\dots,H_\sigma$, éléments irréductibles de cet anneau, et $\alpha_1,\dots,\alpha_\sigma$ dans $N^*$ tels que

$$H = \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{\alpha_s}$$

Si $\psi(x) = 0$ est une équation locale de $S$, il existe un facteur $H_s$ au moins tel que

$$\forall\, x \in \Omega \cap S : H_s(x\ ;\ \text{grad}\ \psi(x)) = 0$$

Si $S$ est une hypersurface régulière [11], c'est-à-dire si le vecteur $\overrightarrow{P(a)}$ de coordonnées locales

$$p_\alpha(a) = \frac{\partial H_s}{\partial q_\alpha} \;(a, \text{grad } \psi(a))$$

n'est pas nul, il existe (Courant-Hilbert p. 558 [1]) une fonction $\varphi$, définie et analytique au voisinage de $a$, telle que

$$x \in \Omega \cap S \Longrightarrow \varphi(x) = 0$$

$$\forall\, x \in \Omega : H_s(x \;;\; \text{grad } \varphi(x)) = 0$$

$$\text{grad } \varphi(a) = \text{grad } \psi(a)$$

(quitte à diminuer un peu $\Omega$).

On choisit des coordonnées locales telles que $a = 0$, et que $\varphi(x) = x^o$, et on cherche $y$ sous la forme

$$y(x^o,x') = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x^o)^j}{j\,!} Y^j(x') \qquad (x' = (x^1,\dots,x^n))$$

Si on pose $f_j(\xi) = \frac{\xi^j}{j!}$ pour $j \geq 0$ et $f_j(\xi) = 0$ pour $j < 0$, on a $y = \sum_{j\in Z} Y^j \times (f_j \circ \varphi)$ (les $Y^j$ ne dépendant que de $x'$).

On a donc [3]

$$h(y) = \sum_{j\in Z} \{ \sum_{r=0}^{t} H^r(\varphi) \; [Y^{j+t-r}] \} \,.\, (f_j \circ \varphi)$$

$H^r(\varphi)$ est un opérateur différentiel de degré $\leq r$, et $\varphi$ étant caractéristique, on a $H^o(\varphi) = 0$. Par analogie avec [3], on note $m(\varphi)$ le plus petit entier $r$ tel que $\mathcal{H}^r(\psi) \neq 0$ (on dit que $m(\psi)$ est la multiplicité de la caractéristique $S$).

On note $\tilde{\mathcal{H}}_p$ l'opérateur différentiel obtenu à partir de $\mathcal{H}$ en remplaçant un coefficient par sa dérivée $p$-ième par rapport à $x^o$ sur $x^o = 0$, et en supprimant les coefficients pour lesquels il y a des dérivations par rapport à $x^o$.

Avec ces notations, l'identification des développements en série de $h(y)$ et de $f$ donne, pour $j \geq 0$

$$(1) \qquad \sum_{r=0}^{t} \sum_{p=0}^{j} C_j^p \, \tilde{\mathcal{H}}_{j-p}^{t-r}(\psi) \, [Y^{p+r}] = F^j .$$

(on sait de plus que $\mathcal{H}^r(\psi) = 0$ pour $r = 0 , \ldots, m(\psi) - 1$)

Si $\tilde{\mathcal{H}}_j^r(\psi) = 0$ pour tout $j < J$ et pour $r = 0 , \ldots, t$ , alors pour tout $y$, la valuation en $x^o$ de $h(y)$ est égale au moins à $J$. En prenant pour $y$ des monômes convenables, on voit alors que la valuation en $x^o$ de chacun des coefficients de l'opérateur différentiel est supérieure ou égale à $J$. Supposons $J(\psi)$ et $K(\psi)$ définis par

$$j < J(\psi) \Longrightarrow \forall\, r = 0 , \ldots, t \quad \tilde{\mathcal{H}}_j^r(\psi) = 0$$

Les $\tilde{\mathcal{H}}_{J(\psi)}^r(\psi)$ ne sont pas tous nuls et $K(\psi)$ est le plus petit $r$ tel que $\tilde{\mathcal{H}}_{J(\psi)}^r(\psi) \neq 0$ . (On a évidemment $K(\psi) \geq m(\psi)$).

Une condition nécessaire pour qu'on puisse trouver une solution formelle est que la valuation de $f$ soit supérieure ou égale à $J(\psi)$. Cette condition étant supposée réalisée, on simplifie les 2 membres de l'équation $h(y) = f$ par $(x^o)^{J(\psi)}$ et on est ramené à un nouveau problème avec $J(\psi) = 0$ , ce qu'on supposera désormais. On note encore $K(\psi)$ le plus petit $r$ tel que $\tilde{\mathcal{H}}_o^r(\psi) \neq 0$.

La première équation correspondant à $j = 0$ donne

$$\sum_{r=0}^{t-K(\varphi)} \tilde{H}_o^{t-r}(\varphi)\,[Y^r] = F^o$$

Si on suppose $Y^o,\dots,Y^{t-K(\varphi)-1}$ donnés, $Y^{t-K(\varphi)}$ est déterminé par l'équation aux dérivées partielles

$$\tilde{H}_o^{K(\varphi)}(\varphi)\,[Y^{t-K(\varphi)}] = F^o - \sum_{r=0}^{t-K(\varphi)-1} \tilde{H}_o^{t-r}(\varphi)\,[Y^r] \tag{2}$$

Le problème est donc de trouver une hypersurface de $S$, non caractéristique en $a$, pour $\tilde{H}_o^{K(\varphi)}(\varphi)$ ; mais comme les raisonnements qu'on veut faire doivent être intrinsèques, on va procéder de la manière suivante. On suppose qu'il existe $\psi$, analytique au voisinage de $a$, telle que $\psi(a) = 0$, que $\operatorname{grad}\varphi(a)$ et $\operatorname{grad}\psi(a)$ soient 2 vecteurs linéairement indépendants de $T_a^*$, et que, si $H^{m(\varphi)}(\varphi)$ est de degré $\mu(\varphi)$ on ait le coefficient de $(i\omega_o)^{t-m(\varphi)}\,(i\omega_1)^{\mu(\varphi)}$ dans $h(e^{i(\omega_o\varphi+\omega_1\psi)})$ qui soit différent de zéro au voisinage de $a$. (On verra que ce coefficient n'est autre que la valeur en $\operatorname{grad}\psi(x)$ du polynôme caractéristique de $H^{m(\varphi)}(\varphi)$).

$\operatorname{grad}\varphi(a)$ et $\operatorname{grad}\psi(a)$ étant linéairement indépendants, on prend les coordonnées locales au voisinage de $a$, de telle sorte que $\varphi(x) = x^o$ et $\psi(x) = x^1$ ; on a alors $\tilde{H}_o^{m(\varphi)}(\varphi)$ qui est de degré $\mu(\varphi)$ et $x^1 = x^o = 0$ (sous variété de codimension 1 de $S$ définie intrinsèquement par $\varphi(x) = \psi(x) = 0$) n'est pas caractéristique pour cet opérateur.

En effet, on a

$$h(y[e^{i(\omega_o\varphi+\omega_1\psi)}]) = \sum_{r=m(\varphi)}^{t} H^r(\varphi)\,[y\,e^{i\omega_1\psi}]\,(i\omega_o)^{t-r}\,e^{i\omega_o\varphi}$$

En notant $\nu_r$ l'ordre de $\mathcal{H}^r(\varphi)$ (on a donc $\nu_{m(\varphi)} = \mu(\varphi)$) on trouve (avec des notations évidentes)

$$(3)\quad h(y\, e^{i(\omega_o\varphi+\omega_1\psi)}) = \sum_{r=m(\varphi)}^{t} \sum_{s=0}^{\nu_r} \mathcal{H}^{r,s}(\varphi,\psi)\, [y]\, (i\omega_o)^{t-r} (i\omega_1)^{\nu_r - s}\, e^{i(\omega_o\varphi+\omega_1\psi)}$$

Si on note $\mathcal{K}^{m(\varphi)}(x,q)$ le symbole principal de $\mathcal{H}^{m(\varphi)}(\varphi)$ et $\tilde{\mathcal{K}}_o^{m(\varphi)}(x',q')$ celui de $\tilde{\mathcal{H}}_o^{m(\varphi)}$, on a de manière évidente (puisque grad $\psi(x) = (0,1,0,\ldots,0)$)

$$\mathcal{K}^{m(\varphi)}(0,x';0,1,0,\ldots,0) = \tilde{\mathcal{K}}_o^{m(\varphi)}(x';1,0,\ldots,0)$$

Or le premier membre de cette égalité est $\neq 0$ au voisinage de $x' = 0$ (c'est le coefficient de $(i\omega_o)^{t-m(\varphi)}(i\omega_1)^{\mu(\varphi)}$ dans (3)). On en déduit (si $S^*$ est l'hypersurface de $E$ d'équation locale $\psi(x) = 0$) que $T = S \cap S^*$ n'est pas caractéristique en a pour $\tilde{\mathcal{H}}_o^{m(\varphi)}$ (donc $K(\varphi) = m(\varphi)$).

Si on se donne $\partial_{(1)k}\, Y^{t-m(\varphi)}(0,x")$ $(x" = (x^2,\ldots,x^n))$ pour $k = 0,\ldots,\mu(\varphi) - 1$, la relation (2) détermine entièrement $Y^{t-m(\varphi)}$. Il est immédiat de constater, par récurrence, que la donnée pour tout $j \geq t - m(\varphi)$ et tout $k = 0,\ldots,\mu(\varphi) - 1$ de $\partial_{(1)k}\, Y^j(0,x")$, détermine tous les $Y^j$ d'une manière et d'une seule, donc détermine $y$.

On trouve finalement le théorème d'existence et d'unicité formel suivant.

*Théorème 1*.- Si $S$ est une hypersurface caractéristique régulière de multiplicité $m(\varphi)$ pour $h$ et $S^*$ une hypersurface non caractéristique pour $\mathcal{H}^{m(\varphi)}(\varphi)$ ($\varphi(x) = 0$ étant une équation convenable de $S$), $S$ et $S^*$ n'étant pas tangentes en a, il existe une solution formelle et une seule de $h(y) = f$ si on a $t - m(\varphi)$ données formelles sur $S$ et $\mu(\varphi)$ données formelles sur $S^*$, compatibles sur $T = S \cap S^*$.

En fait le résultat correspondant, énoncé dans [2] était plus faible puisqu'il s'appliquait quand les $Y^j$ se calculaient par l'intégration d'équations différentielles ordinaires le long des bicaractéristiques de $S$ (résultat qui serait surtout intéressant dans un cas non analytique en $x'$ car dans le cas analytique Cauchy-Kowalewski s'applique systématiquement). Il est cependant intéressant de comparer les deux cas, afin de préciser $m(\varphi)$.

On considère une décomposition de $h$ par rapport à $H_s$ (un $H_s$ pour lequel $S$ est caractéristique).

$$h = \ell_o\, k^{\nu_o} + \ell_1\, k^{\nu_1} + \dots + \ell_t\, k^{\nu_t}$$

(on note $H_s = K$ et $k$ un opérateur différentiel de symbole principal $K$).

On définit $m = \min\{\nu_r + r \mid 0 \leq r \leq t\}$ , et on suppose que $m = m(\varphi)$ (On a toujours $m \leq m(\varphi)$ [4]). On a alors, si $R = \{r \in [0,\dots,t] \mid \nu_r + r = m\}$

$$H^{m(\varphi)}(\varphi) = \sum_{r \in R} L_r^o(x)\ [K^1(\varphi)]^{m-r}$$

On suppose alors l'existence de $r_o(\varphi)$ tel que

$$\begin{cases} r \in R,\ r < r_o(\varphi) \implies L_r^o(x) = 0 \text{ au voisinage de } a \\ L^o_{r_o(\varphi)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

Si $\vec{P}(x)$ est le vecteur de coordonnées locales $p^\alpha(x) = \frac{\partial K}{\partial q_\alpha}(x, \text{grad}\, \varphi(x))$ et si on choisit au voisinage de $a$ les coordonnées de manière à ce que $\vec{P}(x) = (0,1,0,\dots,0)$ (théorème de Frobenius), $H^{m(\varphi)}(\varphi)$ s'écrit sous la forme

$$\sum_{r \leq m-r_o(\psi)} A_r(x) \frac{\partial^r}{\partial x_1^r}$$

et $$\mathcal{H}_o^{m(\psi)} = \sum_{r \leq m-r_o(\psi)} A_r(0,x') \frac{\partial^r}{\partial x_1^r}$$

avec $$A_{m-r_o(\psi)}(0) \neq 0$$

Donc dans ce cas les $Y^j$ se calculent par l'intégration d'équations différentielles ordinaires le long des bicaractéristiques de S.(C'est d'ailleurs toujours la même équation, au second membre près).

L'hypothèse d'existence de $r_o(\psi)$ équivaut à " $x^1 = 0$ n'est pas caractéristique pour $\mathcal{H}^{m(\psi)}(\psi)$ ".

On a finalement le

*Corollaire*.- Si, dans les hypothèses du théorème 1, on a une décomposition de h telle que $m = m(\psi)$, alors les $Y^j$ se calculent par l'intégration d'équations différentielles ordinaires d'ordre $\mu(\psi) = m - r_o(\psi)$ le long des bicaractéristiques de S.

II - SOLUTIONS ANALYTIQUES QUAND $\mu(\psi) = m(\psi)$.-

Il serait facile d'utiliser la méthode des majorantes pour prouver la convergence du développement formel obtenu dans le § II, quand $\mu(\psi) = m(\psi)$. En fait, on va montrer que ce cas est justifiable de l'application d'un théorème de Darboux-Goursat-Beudon classique (Hormander p. 118 [5]).

On montre d'abord un lemme :

*Lemme*.- Si $S$ est une hypersurface caractéristique régulière, de multiplicité $m(\vartheta)$, pour $h$, et $S^*$ une hypersurface non caractéristique pour $H^{m(\vartheta)}(\vartheta)$ (de degré $\mu(\vartheta)$) , $S$ et $S^*$ n'étant pas tangentes en a, l'expression de $h$ dans une carte locale telle que $S$ ait pour équation $x^o = 0$ , et $S^*$ $x^1 = 0$ , est telle que l'ordre de dérivation le plus élevé en $x^o$ est $t - m(\vartheta)$, et que parmi les termes où l'ordre de dérivation en $x^o$ est $t - m(\vartheta)$, il y en a un où l'ordre de dérivation en $x^1$ est $\mu(\vartheta)$, et pour tous les autres cet ordre est $< \mu(\vartheta)$.

Il résulte des hypothèses et de (3) que le polynôme $h(e^{i(\omega_o x_o + \omega_1 x_1)})$ est de degré $t - m(\vartheta)$ en $(i\omega_o)$ et que le polynôme en $i\omega_1$, facteur de $(i\omega_o)^{t-m(\vartheta)}$ est de degré $\mu(\vartheta)$. D'autre part le coefficient de $(i\omega_o)^{\alpha_o}(i\omega_1)^{\alpha_1}$ dans $h(e^{i(\omega_o x_o + \omega_1 x_1)})$ n'est autre que le coefficient de $D_o^{\alpha_o} D_1^{\alpha_1}$ dans l'expression de $h$, d'où le lemme.

Si $\mu(\vartheta) = m(\vartheta)$, alors on pose $\beta = (t - m(\vartheta), m(\vartheta), 0,\dots,0)$ et on écrit l'équation sous la forme

$$D^\beta y(x) = \sum_{|\alpha| \leq t} a_\alpha(x) D^\alpha y(x) + f(x)$$

avec $a_\alpha \neq 0 \Longrightarrow \alpha_o < t - m(\vartheta)$ ou $\alpha_o = t - m(\vartheta)$ et $\alpha_1 < m(\vartheta)$ .

$\beta$ n'appartient pas à l'enveloppe convexe de l'ensemble des $\alpha$ tels que $a_\alpha \neq 0$ et le théorème 5.1.1' de Hormander ([5], p. 118) assure l'existence d'une solution analytique et d'une seule de $h(y) = f$ , avec $t - m(\vartheta)$ données sur $S$ et $m(\vartheta)$ données sur $S^*$, compatibles sur $S \cap S^*$.

Si $\mu(\vartheta) < m(\vartheta)$ il s'agit d'un problème où le nombre de données $(t - m(\vartheta) + \mu(\vartheta))$ est strictement inférieur à $t$. Il serait déraisonnable d'espérer montrer la convergence de la solution formelle sans hypothèses supplémentaires sur les données. L'exemple bien connu de l'équation de Fourier (cas où $m(\vartheta) = 1$ et $\mu(\vartheta) = 0$)

$$\begin{cases} D_o\, y - D_1^2\, y = 0 \\ y(0,x^1) = Y^o(x^1) \end{cases}$$

pour lequel $Y^o$ doit être une fonction entière telle que

$$\forall\, k \quad |D_1^k\, Y^o(0)| \leq M\, \rho^k\, \Gamma(\frac{k}{2} + 1)$$

($\Gamma$ désignant la fonction d'Euler) si on veut que $y$ soit analytique, confirme bien cette remarque.

Le cas des coefficients variables donne des résultats encore moins satisfaisants, et on a l'exemple dû à Riquier [10] de l'équation :

$$\begin{cases} D_o\, y = D_1^3\, y + (1 + x^1 + (x^1)^2)\, y + 1 \\ y(0,x^1) = 0 \end{cases}$$

qui ne possède pas de solution analytique.

Des travaux récents de Persson ([6], [7], [8], [9]) donnent une voie fort intéressante, utilisant le théorème d'Osjannikov, pour étudier ces problèmes ; mais les coefficients de l'opérateur sont polynomiaux en $x'$ , et on voit mal, encore, comment lever cette restriction.

---

## *BIBLIOGRAPHIE.*

-=-=-=-

[1] COURANT-HILBERT. - *Methods of Mathematical Physics*, II. Interscience publishers, New-York 1965.

[2] DE PARIS. - *Ondes asymptotiques et problème de Cauchy caractéristique local pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples* (C.R. Acad. Sc., t. 270, série A, 1970, p. 1509-1511).

[3] DE PARIS. - *Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples ; lien avec l'hyperbolicité,* (J. Math. Pures et Appl., t. 51, 1972, p. 231 - 256).

[4] DE PARIS. - Séminaire Goulaoüic-Schwartz, 1972-1973 exposé n° XX.

[5] HORMANDER. - *Linear partial differential operators,* Springer Verlag, Berlin 1964.

[6] PERSSON. - *New proofs and generalizations of two theorems by Lednev for Goursat problems,* (Math. Annalen 178, p. 184 - 208, 1968).

[7] PERSSON. - *Exponential majorization and global Goursat problems,* (Math. Annalen. 178, p. 271 - 276, 1968).

[8] PERSSON. - *Some results on classical solutions of the equation* $D_t^m u = x^q D_x^n u$ , $m < n$ , Boll. U. M. I. n° 3, p. 426 - 440, 1970).

[9] PERSSON. - *Linear characteristic Cauchy problems for partial differential equations with variable not only time dependent coefficients,* Boll. U. M. I. n° 4, p. 91 - 102, 1971).

[10] RIQUIER. - *Sur l'application de la méthode des fonctions majorantes à certains systèmes différentiels,* C.R. Acad. Sc. Série A, 75, 1897 p. 1018 - 1019.

[11] VAILLANT - *Données de Cauchy portées par une caractéristique double, dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles. Rôle des bicaractéristiques,* (J. Math. Pures et Appl. t. 47, 1968, p 1 - 40).

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, p. 1509-1511 (8 juin 1970). Série A



ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — *Ondes asymptotiques et problème de Cauchy caractéristique local pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples. Rôle des bicaractéristiques.* Note (*) de M. **Jean-Claude De Paris**, présentée par M. Jean Leray.

On construit d'abord une onde asymptotique, pour un opérateur différentiel $C^\infty$, au voisinage d'un point d'une hypersurface caractéristique de multiplicité constante. Par des calculs analogues, on montre ensuite l'unicité de la solution analytique du problème de Cauchy caractéristique local analytique, pour des données « bien réparties », et on donne enfin un cas où il y a existence et unicité. On constate alors que les conditions pour être dans ce cas sont en général réalisées quand $h$ est hyperbolique si les coefficients sont constants ou si le nombre des variables est 2.

1. Soit E une variété réelle $C^\infty$ de dimension $n+1$, $h$ un opérateur différentiel $C^\infty$ d'ordre $\leqq t$, $a$ un point de E où $h$ est d'ordre $t$, et $H(x, q)$ le polynôme caractéristique de $h$. On suppose qu'il existe des polynômes $K_1, \ldots, K_p$ à coefficients $C^\infty$ sur un même voisinage V de $a$, tels que pour tout $x \in V$ on ait

$$H(x, q) = \prod_{i=1}^{p} [K_i(x, q)]^{\alpha_i} \qquad (\alpha_i \text{ est la multiplicité de } K_i). \tag{1}$$

Si les $f_j$ sont des applications de **R** dans **C** telles que pour tout $j \in \mathbf{Z}$, $f'_j = f_{j-1}$, et $\Phi$ une fonction $C^\infty$, il existe [(1), (4)] des opérateurs différentiels $\mathcal{H}^r(\Phi)$ d'ordre $\leqq r$, indépendants des $f_j$, tels que pour tout Y, $C^\infty$ sur E, on ait

$$h[Y \times (f_j \circ \Phi)] = \sum_{r=0}^{t} \mathcal{H}^{t-r}(\Phi)\,[Y]\,(f_{j-r} \circ \Phi). \tag{2}$$

Si $y = \sum_{j=0}^{+\infty} Y_j \times (f_j \circ \varphi)$ est une onde asymptotique (7) pour $h$, $\varphi$ et les $Y_j$ doivent vérifier, pour $j \geqq -t$ :

$$\sum_{r=0}^{\min(t, t+j)} \mathcal{H}^r(\varphi)\,[Y_{t+j-r}] = 0. \tag{3}$$

En particulier, puisque $\mathcal{H}^0(\varphi)(x) = H(x, \operatorname{grad}\varphi(x))$, $\varphi$ doit être solution de l'équation caractéristique.

Si l'un des facteurs, qu'on notera K, de (1) possède un zéro réel simple $q^0 \neq 0$, il existe un ouvert de coordonnées locales $\Omega$, et une fonction $\varphi$ $C^\infty$ sur $\Omega$ (5) tels que pour tout $x \in \Omega$, on ait

$$\left\{\begin{array}{l} H(x, q) = [K(x, q)]^{\nu_0} L_0(x, q) \ [\nu_0 \text{ est l'exposant de K dans (1)}], \\ \qquad K(x, \operatorname{grad}\varphi(x)) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{grad}\varphi(a) = q^0, \\ \vec{P}(x) \text{ de coordonnées locales } p^\alpha(x) = \dfrac{\partial K}{\partial q^\alpha}(x, \operatorname{grad}\varphi(x)) \text{ est } \neq \vec{0}. \end{array}\right. \tag{4}$$

Sur la sous-variété ouverte $\Omega$ de E, on définit des opérateurs $k$ et $l_0$ de polynôme caractéristique K et $L_0$, et on forme $h_1 = h - l_0(k)^{\nu_0}$. On suppose que $h_1$ est d'ordre constant $\sigma_1$ sur $\Omega$. Si $\sigma_1 = t - 1$, des hypothèses pour $h_1$ analogues à celles faites sur $h$ permettent de définir un opérateur $l_1$ et un nombre $\nu_1$ tels que $h_2 = h_1 - l_1(k)^{\nu_1}$ soit d'ordre $\sigma_2 \leqq t - 2$. Si $\sigma_1 \leqq t - 2$, on convient que $l_1 = 0$ et $\nu_1 = +\infty$. On obtient finalement

$$h = l_0(k)^{\nu_0} + l_1(k)^{\nu_1} + \ldots + l_t(k)^{\nu_t}, \tag{5}$$

où les $l_j$ sont des opérateurs différentiels d'ordre $(t - j - s\nu_j)$ (si $s$ est le degré de K), de polynôme caractéristique $L_j$.

Soit $m = \min\{\nu_\rho + \rho \mid 0 \leqq \rho \leqq t\}$. On montre en utilisant (4) et (5) que

$$\mathcal{H}^r(\varphi) = 0 \quad (0 \leqq r \leqq m - 1), \qquad \mathcal{H}^m(\varphi) = \sum_{j \in J} a_j [\mathcal{K}^1(\varphi)]^{m-j}, \tag{6}$$

où $J = \{j \mid \nu_j + j = m\}$, $a_j(x) = L_j(x, \operatorname{grad}\varphi(x))$, et $\mathcal{K}^1(\varphi) = p^\alpha \partial_\alpha + p^\star$ [avec $p^\star$ coefficient de $(i\omega)^{s-1}$ dans $e^{-i\omega\varphi} k(e^{i\varphi\omega})$ ([9])].

Si il existe $r_0 \in J$ tel que $a_j = 0$ si $j \in J$, $j < r_0$, et $a_{r_0}(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Omega$, $\mathcal{H}^m(\varphi)$ est d'ordre $m - r_0$, et on a :

Théorème 1. — *Si $h$ est un opérateur différentiel $C^\infty$, à caractéristiques multiples, mais de multiplicité constante, et si $q^0$ est un zéro simple réel non nul d'un facteur* [redacted] *de la décomposition de* $H(a, q)$, *on peut construire une onde asymptotique pour $h$, de phase $\varphi$ telle que* $\operatorname{grad}(\varphi(a)) = q^0$. *Le calcul des coefficients se ramène à l'intégration d'équations différentielles linéaires d'ordre $m - r_0$ le long des bicaractéristiques* ([8]).

2. Soit E une variété analytique réelle et $h$ un opérateur différentiel analytique sur E. Soit S une hypersurface analytique de E, et $a \in S$, possédant un voisinage V tel que S soit caractéristique en tout point de $V \cap S$. L'anneau des séries entières convergentes étant factoriel, on a une décomposition de $H(x, q)$ analogue à (1), et un facteur K de (1) tel que $K(x, \operatorname{grad}\psi(x)) = 0$ si $x \in V' \cap S$ [V' est un voisinage de $a$ et $\psi(x) = 0$ une équation locale de S].

Avec des notations analogues à (4) on dira que S est caractéristique régulière si $\vec{P}(a) \neq 0$. Il existe alors [([3]), ([5])] $\varphi$ telle que au voisinage de $a$ $K(x, \operatorname{grad}\varphi(x)) = 0$, $\operatorname{grad}\varphi(a) = \operatorname{grad}\psi(a)$, et $\varphi(x) = 0$ si $x \in S$.

On choisit dans $\Omega$ des coordonnées locales telles que $\varphi(x) = x^0$, et on note $\overline{\partial_{(0)p}\mathcal{H}}$ l'opérateur obtenu à partir d'un opérateur $\mathcal{H}$ en dérivant $p$ fois par rapport à $x^0$ les coefficients de $\mathcal{H}$, puis en faisant $x^0 = 0$ dans ces coefficients.

Si

$$y = \sum_{j=0}^{+\infty} Y_j \times \frac{(x^0)^j}{j!}, \qquad f = \sum_{j=0}^{+\infty} F_j \times \frac{(x^0)^j}{j!} \qquad \text{et} \qquad h(y) = f$$

des calculs analogues à ceux de 1 donnent [avec $f_j(\xi) = \xi^j/j\,!$],

$$\sum_{r=0}^{t-m} \sum_{p=0}^{j} \overline{\partial_{(0)p} \mathcal{H}^{t-r}(\varphi)}\,[Y_{j-p+r}] = F_j. \tag{7}$$

Si $Y_0, \ldots, Y_{t-m-1}$ sont donnés, on obtient alors $Y_{t-m}, Y_{t-m+1}, \ldots, Y_{t-m+k}, \ldots$

THÉORÈME 2. — *Si* S *est une hypersurface caractéristique multiple régulière il y a au plus une solution analytique à* $h(y) = f$, *si on a des données de Cauchy d'ordre* $(t - m)$ *sur* S, *et d'ordre* $m - r_0$ *sur* $S^*$ (*hypersurface transverse aux bicaractéristiques de* S) *compatibles sur* $S \cap S^*$. *Les coefficients du développement en série de* $y$ *par rapport à* $x^0$ (S *d'équation* $x^0 = 0$) *s'obtiennent par l'intégration d'équations différentielles linéaires d'ordre* $m - r_0$ *le long des bicaractéristiques.*

On ne pourra évidemment pas prouver la convergence de la série obtenue sans imposer des conditions supplémentaires aux données (cas de l'équation parabolique par exemple). Cependant, si $L_0(a, \operatorname{grad}\varphi(a)) \neq 0$ il résulte d'un théorème de [5] que $h(y) = f$ a une solution analytique unique pour des données compatibles d'ordre $t - \nu_0$ sur S et $\nu_0$ sur $S^*$.

THÉORÈME 3. — *Dans les hypothèses du théorème* 2, *si* $r_0 = 0$, $h(y) = f$ *a une solution analytique unique. Les coefficients du développement en série de* $y$ *par rapport à* $x^0$ *s'obtiennent par intégration d'équations différentielles linéaires d'ordre* $\nu_0$, *le long des bicaractéristiques.*

3. Dans le cas des coefficients constants, si on note $\zeta^0$ le zéro de K correspondant à S et si $L_r(\zeta^0) \neq 0$ pour tout $r$, l'hyperbolicité de $h$ entraîne [2] $\nu_r \geq \nu_0 - r$ pour tout $r$, donc $r_0 = 0$.

Si $n = 1$, la condition $\nu_r \geq \nu_0 - r$ pour tout $r$ est nécessaire pour que le problème de Cauchy soit bien posé, et est suffisante si elle est vérifiée pour chaque facteur irréductible de (1) [6].

Si $E = \mathbf{R}^{n+1}$, et $h$ homogène, on retrouve les résultats de [10].

4. $\nu_1 \geq \nu_0 - 1$ ne dépend pas du choix de $k$ et $l_0$ et équivaut à supposer le polynôme sous-caractéristique [4] de $h$ divisible par $(K)^{\nu_0 - 1}$. Pour $\nu_0 = 2$, on retrouve alors le cas II.$b$ de J. Vaillant [8].

Si $k_1, \ldots, k_{\nu_0}$ sont des opérateurs différentiels de polynôme caractéristique K, on obtient les mêmes résultats en prenant, au lieu de $l_0(k)^{\nu_0}$, l'opérateur $k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_{j-1} \times l_0 \times k_j \times \ldots \times k_{\nu_0}$.

(*) Séance du 1er juin 1970.

(1) BERGER, *Formes harmoniques*, Séminaire Lichnerowicz-Avez-Berger, Collège de France.
(2) CHAILLOU, *Thèse* (à paraître).
(3) COURANT et HILBERT, *Meth. of Math. Phys.*, II, Interscience Publishers, New-York, 1965.
(4) GARDING, KOTAKE et LERAY, *Bull. Soc. math. Fr.*, 92, 1964, p. 263-361.
(5) HORMANDER, *Linear part. diff. op.*, Springer Verlag, Berlin, 1964.
(6) A. LAX, *Comm. pure and appl. math.*, 9, 1956, p. 135-169.
(7) LUDWIG, *Comm. pure and appl. math.*, 13, 1960, p. 473-508.
(8) VAILLANT, *J. Math. pures et appl.*, 47, 1960, p. 1-40.
(9) VAILLANT, *Comptes rendus*, 268, série A, 1969, p. 547.
(10) VAILLANT, *Comptes rendus*, 261, 1965, p. 2146.

(151, *rue Jean-Jaurès,*
59-*Halluin, Nord.*)

PROBLEME DE CAUCHY OSCILLATOIRE POUR UN OPERATEUR DIFFERENTIEL

A CARACTERISTIQUES MULTIPLES ; LIEN AVEC L'HYPERBOLICITE



par

J.C. DE PARIS

*J. Math. pures et appl.*,
51, 1972, p. 231 à 256.

# PROBLÈME DE CAUCHY OSCILLATOIRE POUR UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL A CARACTÉRISTIQUES MULTIPLES : LIEN AVEC L'HYPERBOLICITÉ

PAR JEAN-CLAUDE **DE PARIS**

0. INTRODUCTION. — On se propose, dans cet article, de donner une construction d'une onde asymptotique pour un opérateur différentiel $h$, à coefficients $C^\infty$ sur une variété $C^\infty$, E, puis d'étudier le problème de Cauchy oscillatoire pour $h$. Dans le cas d'un opérateur matriciel du premier ordre, P. Lax [12] a étudié un tel problème, puis D. Ludwig ([15], [16]) généralisant la notion d'onde asymptotique introduite par P. Lax, étudie le cas d'un opérateur matriciel d'ordre quelconque; dans le cas d'un opérateur scalaire, qui est celui auquel on va s'intéresser, il obtient des résultats quand toutes les caractéristiques sont simples.

J. Leray [13], puis L. Garding, T. Kotake et J. Leray [8] généralisent encore la notion d'onde asymptotique et construisent, pour un opérateur matriciel d'ordre quelconque, des ondes asymptotiques, dans le cas où la phase $\varphi$ correspond à une caractéristique simple du système.

Mme Y. Choquet-Bruhat [4], étudie un problème analogue, mais pour un opérateur matriciel quasi linéaire du premier ordre, à caractéristiques multiples, en utilisant la classification des systèmes à caractéristiques multiples de J. Vaillant [21].

J. Vaillant [22] montre, en reprenant les ondes asymptotiques au sens de Lax, que le problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur matriciel fortement hyperbolique possède une solution.

La plupart de ces études (sauf celles de D. Ludwig [16], J. Vaillant [21] et Mme Y. Choquet-Bruhat [4]) se font en considérant uniquement les termes principaux des opérateurs scalaires, composantes de l'opérateur matriciel (cas fortement hyperbolique). Dans D. Ludwig [16], J. Vaillant [21] et Mme Y. Choquet-Bruhat [4] sont étudiés des cas non fortement hyperboliques, à caractéristiques doubles.

Le but de cet article est de déterminer, en faisant des hypothèses plus faibles sur le terme principal de l'opérateur scalaire $h$, quelles conditions il faut imposer aux termes non principaux de $h$, pour avoir une solution et une seule au problème de Cauchy oscillatoire (au sens de Ludwig [15]). Les conditions obtenues, pour E de dimension quelconque, et les caractéristiques de multiplicité quelconque, coïncident avec celles trouvées par E. Levi [14] et Mme A. Lax [11] (quand E est de dimension 2), et par Mizohata et Ohya [18] (quand les caractéristiques sont au plus doubles) dans leur étude de la nature bien posée du problème de Cauchy.

Dans le cas des coefficients constants, nous comparons nos conditions à celles obtenues par J. Chaillou [3] dans son étude sur l'hyperbolicité.

Je remercie vivement J. Vaillant de ses encouragements qui m'ont été très précieux.

1. Notations et résultats. — Soient E une variété réelle $C^\infty$ de dimension $(n+1)$ et $h$ un opérateur différentiel $C^\infty$ sur E, d'ordre $l$ au voisinage d'un point $a$ de E et de symbole principal $H(x; q)$.

Pour $x$ donné dans E, $H(x; q)$ est une application polynomiale de $T_x^*$ (espace cotangent en $x$ à E) dans $\mathbf{R}$, et se décompose en un produit de facteurs premiers deux à deux mais il n'y a pas, en général, de lien entre les décompositions en deux points voisins. On fait l'*hypothèse* qu'il existe un voisinage V de $a$, et des applications $H_s$ $(1 \leq s \leq \sigma)$ telles que

$$(1) \qquad \forall\, x \in V, \quad \forall\, q \in T_x^* : \quad H(x; q) = \prod_{s=1}^{\sigma} [H_s(x; q)]^{\alpha_s}.$$

Pour $x$ donné dans V, les $H_s$ sont des applications polynomiales premières deux à deux de $T_x^*$ dans $\mathbf{R}$, homogènes de degré $\tau_s$, à coefficients $C^\infty$ en $x$ sur V. Les $H_s$ sont deux à deux différents et $\alpha_s$ est un entier non nul appelé multiplicité du facteur $H_s$. Pour cette raison l'hypothèse (1) est appelée hypothèse de multiplicité constante en $x$ au voisinage de $a$.

Définition 1. — *On dit que deux opérateurs différentiels sont congrus modulo $p$ si leur différence est d'ordre strictement inférieur à $p$.*

On note cette relation $\underset{p}{\sim}$.

Quand on s'intéressera à des propriétés relatives à un seul facteur de la décomposition (1), on notera K ce facteur et $\nu$ sa multiplicité.

On démontre la proposition 1.

**Proposition 1.** — *Il existe une sous-variété ouverte* $\Omega$ *de* E, *contenant* $a$, *des opérateurs* $l_r$ $(0 \leq r \leq t)$ *et* $k$ (*de symbole principal* K) *sur* $\Omega$, *et des nombres* $\nu^r$ *tels que*

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} & h = \sum_{r=0}^{t} l_r \times (k)^{\nu_r} \qquad (\textit{avec } \nu^0 = \nu), \\ & h_{t-r} = \sum_{\rho=0}^{r} l_\rho \times (k)^{\nu_\rho} \quad \textit{pour tout } 0 \leq r \leq t. \end{aligned}\right.$$

**Définition 2.** — *On dit que* (2) *est une décomposition de* $h$ *par rapport à* K.

Si les $f_j$ sont des applications de **R** dans **C** telles que pour tout $j \in \mathbf{Z}$ (ou pour $j \geq j_0$), on ait $f'_j = f_{j-1}$, une onde asymptotique [15] pour $h$ au voisinage de $a$ est un développement formel :

$$(3)\qquad y = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{Y}^j \times (f_j \circ \varphi)$$

tel que si on calcule formellement $h(y)$ :

$$h(y) = \sum_{j=-t}^{\infty} \mathrm{F}^j \times (f_j \circ \varphi)$$

tous les $\mathrm{F}^j$ soient nuls sur un même voisinage de $a$.

Les $\mathrm{Y}^j$ sont des fonctions $C^\infty$ sur un même voisinage de $a$, appelés coefficients de distorsion, et $\varphi$ est une fonction $C^\infty$ appelée la phase.

Le théorème 1 assure l'existence d'une telle onde pour un opérateur $h$, à caractéristiques multiples, mais suffisamment régulier au voisinage de $a$.

**Théorème 1.** — *Si l'un des facteurs* K *de* (1), *est tel que l'équation* $\mathrm{K}(a; q) = 0$ *a un zéro réel simple non nul* $q^0$, *il existe* (¹) *une onde asymptotique pour* $h$.

*La phase de l'onde est solution de*

$$\mathrm{K}(x; \operatorname{grad} \varphi(x)) = 0$$

*et vérifie*

$$\operatorname{grad} \varphi(a) = q^0.$$

(¹) Avec une hypothèse supplémentaire de régularité pour $\varphi$.

*Les coefficients* $Y^j$ *s'obtiennent par l'intégration de la même équation différentielle (au second membre près) le long des bicaractéristiques des des hypersurfaces d'équations* $\varphi(x) = \mathrm{Cte}$.

Ce résultat était annoncé dans [7].

*Remarque.* — Si les coefficients de $h$ sont à valeurs complexes et les $f_j$ définies sur $\mathbf{C}$, on obtient un résultat identique en prenant pour $q^0$ un zéro complexe simple non nul de l'équation $K(a; q) = 0$.

Définition 3. — *On dit qu'une décomposition de* $h$ *par rapport à* K *est une bonne décomposition si pour tout* $r$ $(0 \leqq r \leqq t)$, *on a*

$$\nu_r \geqq \nu_0 - r.$$

On montre l'existence de solutions nulles au voisinage d'une hypersurface caractéristique multiple, mais régulière, en reprenant et en simplifiant un raisonnement fait dans [17] pour une caractéristique simple.

Proposition 2. — *Si* E *et* $h$ *sont analytiques et si* S *est une hypersurface caractéristique pour* $h$ *au voisinage de* $a$ *d'équation locale* $\Phi(x) = 0$.

*Si* grad $\Phi(a)$ *est un zéro réel simple non nul de* $\prod_{s=1}^{\sigma} H_s(a; q) = 0$.

*Si la décomposition de* $h$ *par rapport au facteur* $H_s$ *dont* grad $\Phi(a)$ *est zéro est une bonne décomposition, il existe une solution* $\mathbf{Y}$ *de* $h(\mathbf{Y}) = 0$, *non identiquement nulle, analytique de chaque côté de* S, *nulle d'un côté de* S, *et de classe* $C^{t+\rho}$ $(\rho \geqq 0)$.

Avec des hypothèses analogues à celles de [22] où un problème d'un même type est étudié pour les systèmes, on montre que :

Théorème 2. — *Si* Q *est une hypersurface passant par* $a$, *dont la forme tangente en* $a$ *est une direction d'hyperbolicité stricte pour* $P(a; q) = \prod_{s=1}^{\sigma} H_s(a; q)$, *alors il existe* (2) *un nombre* $t' \leqq t$ *tel que le problème de Cauchy oscillatoire avec* $t$ *données sur* Q *possède une solution et une seule quelles que soient les* $t'$ *premières données, à condition que les* $(t - t')$ *dernières aient une valeur imposée. Il y a une solution et une seule quelles que soient les données de Cauchy si et seulement si* $h$ *possède une bonne décomposition par rapport à chaque* $H_s$ (3).

(2) Avec des hypothèses de régularité supplémentaires sur les phases.
(3) Les hypothèses de régularité sur les phases étant cette fois inutiles.

Ceci généralise un résultat de [15] obtenu quand toutes les caractéristiques sont simples.

Ce théorème montre que le cas « régulier » est celui où $h$ possède une bonne décomposition par rapport à chaque $H_s$. Un opérateur $g$ peut être décomposé de plusieurs manières; la proposition 3 assure l'invariance de la notion de bonne décomposition.

PROPOSITION 3. — *Si $h$ possède une bonne décomposition par rapport à l'un des facteurs $H_s$ de (1), toute décomposition de $h$ par rapport à $H_s$ est une bonne décomposition.*

DÉFINITION 3. — *On dit que $h$ est bien décomposable s'il possède une bonne décomposition par rapport à chaque facteur $H_s$ de (1).*

Le théorème 3 donne une caractérisation des opérateurs bien décomposables qui correspond en deux variables aux conditions de [14] et de [11].

THÉORÈME 3. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que $h$ soit bien décomposable est qu'il existe des opérateurs différentiels $l_r$ $(0 \leqq r \leqq t)$ et $h_s$ $(1 \leqq s \leqq \sigma)$ tels que*

$$h = \sum_{r=0}^{t} l_r \, h_1^{[\alpha_1 - r]_+} \times \ldots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma - r]_+}$$

*avec pour tout $r \leqq t$,*

$$h \underset{t-r}{\simeq} \sum_{\rho=0}^{r} l_\rho \, h_1^{[\alpha_1 - \rho]_+} \times \ldots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma - \rho]_+}.$$

(Avec $[p]_+ = p$ si $p \geqq 0$ et $[p]_+ = 0$ si $p \leqq 0$.)

Plusieurs auteurs ([14], [11], [18], [20], etc.) ont étudié la nature bien posée du problème de Cauchy pour des opérateurs bien décomposables. On espère que les théorèmes 2 et 3 permettront de progresser davantage dans cette étude.

Si $h$ est à coefficients constants (sur $E = \mathbf{R}^{n+1}$), le lien entre les opérateurs hyperboliques et les opérateurs bien décomposables est précisé par le

THÉORÈME 4. — *$h$ bien décomposable et $P(q) = \prod_{s=1}^{\sigma} H_s(q)$ strictement hyperbolique équivaut à $h$ hyperbolique et la multiplicité de $H$ sur $V(P)^*$ est localement constante.*

On utilise, pour démontrer ce théorème, une caractérisation donnée dans [3] des opérateurs différentiels hyperboliques à « multiplicité localement constante ».

*Remarque.* — Il résulte du théorème 2 et du théorème 4 que si H est hyperbolique et est à multiplicité localement constante sur V (P)*, $h$ hyperbolique par rapport à une direction N équivaut à ce que le problème de Cauchy oscillatoire possède une solution et une seule quelles que soient les données de Cauchy sur une hypersurface dont la forme tangente en $a$ est N. On obtient donc une caractérisation de l'hyperbolicité uniquement par la considération de solutions formelles.

2. Existence d'une onde asymptotique non nulle. — Soit un développement formel

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{Y}^j \times (f_j \circ \varphi).$$

Pour calculer formellement $h(y)$ on montre d'abord :

Lemme 1. — *Si $\varphi$ est une fonction $C^\infty$ sur E, il existe des opérateurs différentiels $\mathcal{H}^r(\varphi)$, d'ordre inférieur ou égal à $r$, tels que quelle que soit* Y, *de classe $C^\infty$ sur* E, *et quel que soit $j \in \mathbf{Z}$,*

$$h(\mathrm{Y} \times (f_j \circ \varphi)) = \sum_{r=0}^{l} \mathcal{H}^r(\varphi)[\mathrm{Y}] \times (f_{j-l+r} \circ \varphi). \tag{4}$$

*Preuve.* — Si Y et $\varphi$ sont de classe $C^\infty$ sur E, on a ([1], [9]) :

$$e^{-i\omega\varphi} h(\mathrm{Y}\, e^{i\omega\varphi}) = \sum_{r=0}^{l} \mathrm{P}_r(\varphi, \mathrm{Y})\,(i\,\omega)^{l-r}$$

avec $\mathrm{P}_r(\varphi, \mathrm{Y})$ de classe $C^\infty$ sur E.

Si on pose, pour $j \in \mathbf{Z}$,

$$f_j(\xi) = \frac{e^{i\omega\xi}}{(i\,\omega)^j},$$

on a

$$h(\mathrm{Y} \times (f_j \circ \varphi)) = \sum_{r=0}^{l} \mathrm{P}_r(\varphi, \mathrm{Y}) \times (f_{j-l+r} \circ \varphi).$$

En fait, la seule propriété utilisée pour trouver ce résultat est que $f'_j = f_{j-1}$, et la formule précédente vaut pour une suite $(f_j)$ quelconque vérifiant cette condition.

Il reste à prouver que pour $\varphi$ donnée, l'application $\mathbf{Y} \rightsquigarrow \mathrm{P}_r(\varphi, \mathrm{Y})$, qu'on notera $\mathcal{H}^r(\varphi)$, est un opérateur différentiel d'ordre $\leq r$. Les $\mathrm{P}_r(\varphi, \mathrm{Y})$ étant des invariants, il suffit de montrer que dans toute carte locale

$\mathcal{H}^r(\varphi)$ s'exprime comme un opérateur différentiel d'ordre $\leqq r$ et ce résultat est bien connu ([8], [17]).

*Remarque.* — Si on prend $\mathrm{Y} = 1$ dans (4), on voit que $\mathcal{H}^0(\varphi)$ est la multiplication par la fonction $\mathrm{H}(x; \operatorname{grad} \varphi(x))$.

On calcule $h(y)$ en utilisant (4) :

$$h(y) = \sum_{j=-t}^{+\infty} \mathrm{F}^j \times (f_j \circ \varphi),$$

avec

$$\mathrm{F}^j = \sum_{r=0}^{\min(t,\, t+j)} \mathcal{H}^r(\varphi)\,[\mathrm{Y}^{t+j-r}].$$

Les équations définissant l'onde asymptotique sont donc :

$$\text{pour } j \geqq -t : \quad \mathrm{F}^j = 0.$$

On montre maintenant la proposition 1 qui assure qu'un opérateur « suffisamment régulier » possède des décompositions.

On suppose l'hypothèse (1) réalisée, et soit K l'un des facteurs de (1), $\nu_0$ sa multiplicité; on a $\mathrm{H} = \mathrm{L}_0\,(\mathrm{K})^{\nu_0}$. Soit $\Omega$ contenant $a$, un ouvert de coordonnées locales sur lequel (1) est vraie. On définit sur la sous-variété ouverte $\Omega$ de E des opérateurs différentiels $k$ et $l_0$ de symbole principal respectif K et $\mathrm{L}_0$ : on a $h \underset{t}{\sim} l_0\,(k)^{\nu_0}$.

Soit $\lambda_1 = h - l_0\,(k)^{\nu_0}$ d'ordre $0(\lambda_1)$ au voisinage de $a$. Si $0(\lambda_1) = t - 1$, on appelle $\nu_1$ la multiplicité de K dans le symbole principal $\Lambda_1$ de $\lambda_1$; on a donc $\Lambda_1 = (\mathrm{K})^{\nu_1} \times \mathrm{L}_1$ (avec $\nu_1 = 0$ éventuellement). Si $l_1$ est un opérateur différentiel de symbole principal $\mathrm{L}_1$, on a

$$h \underset{t-1}{\simeq} l_0\,(k)^{\nu_0} + l_1\,(k)^{\nu_1}.$$

Si $0(\lambda_1)$ est $\leqq t - 2$, on prend $l_1 = 0$ et $\nu_1 = t$ et la formule précédente est encore vraie. Après un nombre fini de telles opérations on peut écrire

$$h = \sum_{r=0}^{t} l_r\,(k)^{\nu_r},$$

avec pour tout $r \leqq t$ :

$$h \underset{t-r}{\simeq} \sum_{\rho=0}^{r} l_\rho\,(k)^{\nu_\rho}.$$

Le lemme 2 donne l'expression des $\mathcal{H}^\alpha(\varphi)$ pour un opérateur qui possède une décomposition.

LEMME 2. — *Soit une décomposition de* $h$ *par rapport à* K; *on a, pour* $\alpha \leqq t$ [*en notant* $0(l_r)$ *l'ordre de* $l_r$, *et* $0(k)$ *celui de* $k$] :

$$\mathcal{H}^{\alpha}(\varphi) = \sum_{r=0}^{\alpha} \sum_{\substack{0 \leq \beta_0 \leq 0(l_r) \\ 0 \leq \beta_i \leq 0(k) \\ \beta_0 + \sum_{i=1}^{\nu_r} \beta_i = \alpha - r}} \mathcal{L}_r^{\beta_0}(\varphi) \times \mathcal{K}^{\beta_1}(\varphi) \times \ldots \times \mathcal{K}^{\beta_{\nu_r}}(\varphi). \tag{5}$$

*Preuve.* — Si $b = k_1 \times \ldots \times k_p$ avec $0(k_1) = \gamma_i$, on a, si $\alpha \leqq \gamma$ $\left(\gamma = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i\right)$, et avec des notations évidentes :

$$\mathcal{B}^{\alpha}(\varphi) = \sum_{\substack{0 \leq \alpha_i \leq \gamma_i \\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \alpha}} \mathcal{K}_1^{\alpha_1}(\varphi) \times \ldots \times \mathcal{K}_p^{\alpha_p}(\varphi). \tag{5)'$$

On démontre ce résultat par récurrence sur $p$; pour $p = 1$ il est évident, pour $p = 2$, on utilise le lemme 1.

Soit $b = k_1 k_2$ :

$$\begin{aligned} k_1 k_2 (\mathrm{Y} e^{i\omega\varphi}) &= k_1 \left( \sum_{\alpha_2=0}^{\gamma_2} \mathcal{K}_2^{\alpha_2}(\varphi)[\mathrm{Y}] \times (i\omega)^{\gamma_2 - \alpha_2} e^{i\omega\varphi} \right) \\ &= \sum_{\alpha_1=0}^{\gamma_1} \sum_{\alpha_2=0}^{\gamma_2} \mathcal{K}_1^{\alpha_1}(\varphi)\, \mathcal{K}_2^{\alpha_2}(\varphi)[\mathrm{Y}] \times (i\omega)^{\gamma_1+\gamma_2-(\alpha_1+\alpha_2)} e^{i\omega\varphi} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\gamma_1+\gamma_2} \mathcal{B}^{\alpha}(\varphi)[\mathrm{Y}] \times (i\omega)^{\gamma-\alpha} e^{i\omega\varphi}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Si (5)' est vrai pour $1, \ldots, p-1$, on le démontre pour $p$ en utilisant la formule qui vient d'être établie.

Si

$$h = \sum_{r=0}^{t} h_r, \qquad \text{avec} \quad 0(h_r) = t - r,$$

on a

$$\mathcal{H}^{\alpha}(\varphi) = \sum_{r=0}^{\alpha} \mathcal{H}_r^{\alpha-r}(\varphi).$$

L'utilisation de ces deux résultats donne le lemme 2.

$$\mathrm{F}^{-t} = 0 \qquad \text{équivaut à} \quad \mathrm{H}(x;\ \mathrm{grad}\,\varphi(x)) \times \mathrm{Y}^0(x) = 0.$$

Si $H(x;\, \mathrm{grad}\, \varphi(x)) = 0$ au voisinage de $a$, on peut satisfaire cette équation sans prendre $Y^0$ nulle. (En fait choisir $\varphi$ de cette manière n'est nécessaire que si E et $h$ sont analytiques.)

On suppose que l'un des facteurs, qu'on notera K, de la décomposition (1) possède un zéro réel simple non nul $q^0$ (pour $x = a$).

Un théorème de [10] assure alors l'existence d'une fonction $\varphi$, $C^\infty$ au voisinage de $a$, et solution de $K(x;\, \mathrm{grad}\, \varphi(x)) = 0$, avec $\mathrm{grad}\, \varphi(a) = q^0$.

Avec ce choix de $\varphi$, la première équation est vérifiée sans hypothèse sur $Y^0$.

Lemme 3. — *Soit* $m = \min \{ \nu_r + r \mid 0 \leqq r \leqq t \}$. *On a* $\mathcal{H}^\alpha(\varphi) = 0$ *si* $\alpha \leqq m - 1$, *et, si* $\mathcal{R} = \{ r \mid \nu_r + r = m \}$, *on a*

$$\mathcal{H}^m(\varphi) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \mathcal{E}_r^0(\varphi)\, [\mathcal{H}^1(\varphi)]^{m-r}.$$

*Preuve.* — Si $\alpha < m$, en reprenant l'expression de $\mathcal{H}^\alpha(\varphi)$ donnée par le lemme 2, on voit que dans chacun des termes de la somme définissant $\mathcal{H}^\alpha(\varphi)$, on a

$$\beta_0 + \sum_{i=1}^{\nu_r} \beta_i = \alpha - r.$$

Si aucun des $\beta_i$ $(1 \leqq i \leqq \nu_r)$ n'était nul, on aurait $\nu_r \leqq \alpha - r$, ce qui est impossible si $\alpha < m$. D'après le choix de $\varphi$, $\mathcal{H}^0(\varphi)$ est nul. Ceci démontre la première partie du lemme.

Si $\alpha = m$, le même raisonnement montre que les seuls termes non nuls de la somme sont ceux pour lesquels :

$$m = \nu_r + r, \qquad \text{avec } \beta_0 = 0, \qquad \beta_1 = \ldots = \beta_{\nu_r} = 1.$$

Soit $\vec{P}(x)$ le vecteur de coordonnées locales :

$$p^\alpha(x) = \frac{\partial K}{\partial q_\alpha}(x;\, \mathrm{grad}\, \varphi(x)),$$

$\mathrm{grad}\, \varphi(a)$ étant un zéro simple de $K(a;\, q) = 0$, le vecteur $\vec{P}(a)$ est $\neq 0$, donc il reste non nul sur un voisinage de $a$ (qu'on notera encore $\Omega$). Le théorème de Frobénius [5] permet de choisir les coordonnées locales dans $\Omega$ de façon à ce que $\vec{P}(x) = (1, 0, \ldots, 0)$, et l'expression de $\mathcal{H}^1(\varphi)$ dans cette carte locale est

$$\mathcal{H}^1(\varphi) = \frac{\partial}{\partial x^0} + \beta.$$

En général, si $r_0$ est le plus petit élément de $\mathcal{R}$, on a $L_{r_0}(a ; \operatorname{grad} \varphi(a)) \neq 0$ et

$$\mathcal{H}^m(\varphi) = \sum_{j=0}^{m-r_0} \delta_j(x) \times \frac{\partial^j}{(\partial x^0)^j},$$

avec $\delta_{m-r_0}(x)$ non nul sur un voisinage de $a$ (qu'on notera encore $\Omega$).

Cependant il peut se produire, pour certaines $\varphi$, que $L_{r_0}(a ; \operatorname{grad} \varphi(a)) = 0$. On fait alors une hypothèse de régularité supplémentaire pour $\varphi$ : on suppose qu'il existe $r_0(\varphi) \in \mathcal{R}$ tel que si $r \in \mathcal{R}$ et $r < r_0(\varphi)$, on a

$$L_r(x ; \operatorname{grad} \varphi(x)) = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

et

$$L_{r_0(\varphi)}(x ; \operatorname{grad} \varphi(x)) \neq 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

$\mathcal{H}^m(\varphi)$ est alors un opérateur différentiel d'ordre $\mu(\varphi) = m - r_0(\varphi)$ [1].

Le premier $F^j$ non identiquement nul est $F^{-l+m}$ et, en tenant compte du lemme 3 :

$$F^{-l+m}(x) = \mathcal{H}^m(\varphi)[Y^0](x),$$

$Y^0$ est donc déterminé par l'intégration d'une équation différentielle linéaire ordinaire, d'ordre $\mu(\varphi)$ le long des bicaractéristiques des hypersurfaces caractéristiques d'équation $\varphi(x) = \text{Cte}$. Si on suppose $\mathbf{Y}^0, \ldots, \mathbf{Y}^{j-1}$ connus et de classe $C^\infty$ sur $\Omega$, on détermine $\mathbf{Y}^j$ en intégrant la même équation différentielle, au second membre près, qui est cette fois une fonction connue et $C^\infty$ sur $\Omega$, mais pas nécessairement nulle.

*Remarque.* — Si les coefficients de $h$ sont à valeurs complexes et les $f_j$ définies sur $\mathbf{C}$, on obtient le même résultat en prenant pour $q^0$ un zéro complexe simple non nul de $K(a ; q) = 0$.

Ceci termine la démonstration du théorème 1. On va dans la suite appliquer ce théorème à la construction de solutions nulles de $h(y) = 0$, et à la résolution du problème de Cauchy oscillatoire pour $h$.

Soit E une variété analytique réelle et $h$ un opérateur différentiel analytique sur E. Soit S une hypersurface analytique de E et $a \in S$, possédant un voisinage V tel que S soit caractéristique en tout point de $V \cap S$. L'anneau des séries entières convergentes étant factoriel, on a une décomposition de $H(x ; q)$ analogue à (1) et un facteur K de (1) tel que $K(x ; \operatorname{grad} \psi(x)) = 0$ si $x \in V' \cap S$ [V' est un voisinage de $a$ et $\psi(x) = 0$ une équation locale de S].

---

[1] Remarquons que si $\mu(\varphi) = 0$ (équation parabolique par exemple) la seule onde asymptotique est l'onde nulle.

S est dite caractéristique régulière [21] si le vecteur $\overrightarrow{P}(x)$ de coordonnées locales

$$p^\alpha(x) = \frac{\partial K}{\partial q_\alpha}(x;\, \operatorname{grad} \psi(x))$$

est différent de 0 pour $x = a$. Il existe alors ([6], [10]) une fonction $\varphi$ analytique au voisinage de $a$ telle que

$$\begin{aligned} &K(x;\, \operatorname{grad} \varphi(x)) = 0 \quad \text{au voisinage de } a,\\ &\operatorname{grad} \varphi(a) = \operatorname{grad} \psi(a),\\ &\varphi(x) = 0 \qquad \text{si} \quad x \in S. \end{aligned}$$

Le théorème 1 assure l'existence d'une onde asymptotique pour $h$, définie au voisinage de $a$, de phase $\varphi$, et dont les coefficients de distorsion $Y^j$ sont cette fois analytiques sur un même voisinage de $a$. On montre, avec une condition supplémentaire sur $h$, que cette onde asymptotique permet de construire des solutions nulles pour $h$; le résultat est bien connu quand S est caractéristique simple pour $h$ ([10], [19], [17]). C'est la méthode de [17] que nous allons reprendre pour une caractéristique multiple.

On suppose que $h$ possède une bonne décomposition par rapport à K ($\nu_0 = \min \{ \nu_r + r \mid 0 \leqq r \leqq t \}$) et que $L_0(a;\, \operatorname{grad} \varphi(a)) \neq 0$. On a alors $m = \nu_0$ et $r_0 = 0$, et les $Y^j$ sont des fonctions analytiques, déterminées par l'intégration d'équations différentielles d'ordre $\nu_0$ le long des bicaractéristiques des hypersurfaces caractéristiques d'équations $x^0 = \text{Cte}$. [Si les coordonnées locales sont telles que $\varphi(x) = x^0$.]

Soit $g$ la série formelle à $(n + 2)$ variables $(x^0, x^1, \ldots, x^n, z)$ :

$$g(x, z) = \sum_{j=0}^{\infty} Y^j(x) \times \frac{z^{j+t-\nu_0}}{(j + t - \nu_0)!}$$

et $\tilde{h}$ l'opérateur différentiel de $(n + 2)$ variables :

$$\tilde{h}\left(x, z; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \sum_{r=0}^{t} \mathcal{H}^r(\varphi)\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \times \frac{\partial^{t-r}}{\partial z^{t-r}} = \sum_{r=\nu_0}^{t} \mathcal{H}^r(\varphi)\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \times \frac{\partial^{t-r}}{\partial z^{t-r}}.$$

Un théorème de [10] assure l'existence et l'unicité de la solution analytique de l'équation $\tilde{h}(Y) = 0$, avec $\nu_0$ données de Cauchy sur $x^0 = 0$, $g_u(x', z)$ $(0 \leqq u < \nu_0)$, et $t - \nu_0$ données de Cauchy sur $z = 0$ (qu'on prend nulles), quand les données sont compatibles sur $x^0 = z = 0$ ([5]).

([5]) L'unicité de la solution série formelle a été montrée dans [7].

On prend

$$g_u(x', z) = \sum_{j=0}^{\infty} g_u^j(x') \times \frac{z^{j+t-\nu_0}}{(j+t-\nu_0)!},$$

ce qui assure la compatibilité sur $x^0 = z = 0$. Si les $Y^j$ sont telles que

$$\frac{\partial^u}{(\partial x^0)^u} Y^j(0, x') = g_u^j(x') \quad \text{pour tout } j \geq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq u < \nu_0.$$

$\Big($On peut imposer ces conditions de Cauchy puisque $Y^j$ est déterminé par l'intégration d'une équation différentielle d'ordre $\nu_0$ en $\frac{\partial}{\partial x^0}\Big)$, alors $g$ est une solution formelle du problème précédent; elle est donc analytique au voisinage de l'origine.

Si on prend les fonctions $f_j$ définies dans [17] :

$$f_j(\xi) = \frac{\xi^{j+t+\rho}}{(t+j+\rho)!} \quad \text{pour } \xi > 0 \qquad \text{et} \qquad f_j(\xi) = 0 \quad \text{si } \xi \leq 0$$

(avec $\rho$, nombre entier donné, strictement positif), l'onde asymptotique

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} Y^j \times (f_j \circ \varphi)$$

définit une fonction $Y(x)$, avec

$$Y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} Y^j(x) \times \frac{(x^0)^{t+j+\rho}}{(t+j+\rho)!} \qquad \text{pour} \quad x^0 \geq 0$$

et

$$Y(x) = 0 \qquad \text{pour} \quad x^0 \leq 0.$$

Il résulte de l'étude précédente que $Y$ est analytique pour $x^1 > 0$, pour $x^1 < 0$, et que sur le voisinage de l'origine où elle est définie, elle est de classe $C^{t+\rho-1}$.

Ceci assure bien l'existence d'une solution nulle, et termine la démonstration de la proposition 2.

3. Problème de Cauchy oscillatoire. — Soit $Q$ une hypersurface contenant le point $a$, d'équation locale $x^0 = 0$, au voisinage de $a$, $\Psi$ une fonction $C^\infty$ de restriction $\psi$ à $Q$; on suppose grad $\psi(a) \neq 0$. On se donne $t$ développements formels :

$$0 \leq \alpha < t: \quad g_\alpha(x') = \sum_{j=0}^{\infty} b_\alpha^j(x') \times f_{j-\alpha}(\psi(x')).$$

Résoudre le problème de Cauchy oscillatoire, c'est trouver un développement formel $y$, somme d'ondes asymptotiques pour $h$, tel que chaque phase soit caractéristique et vérifie $\varphi(0, x') = \psi(x')$, et tel que

$$\partial_{(0)\alpha}\, y\,(0, x') = g_\alpha(x') \qquad \text{pour} \quad \alpha < t.$$

On suppose que la forme tangente en $a$ à Q est une direction d'hyperbolicité stricte pour

$$P(a; q) = \prod_{s=1}^{\sigma} H_s(a; q).$$

Si $\tau_s$ est le degré de $H_s$ et $\tau$ celui de P, l'équation $P(a; p_0, \operatorname{grad} \psi(a))$ possède $\tau$ racines réelles distinctes $p_0^l(a)$. On construit comme dans [22], $\tau$ fonctions $\varphi^l$ $(1 \leq l \leq \tau)$ telles que pour chaque $l$, il existe un $s$ unique pour lequel

$$H_s(x; \operatorname{grad} \varphi^l(x)) = 0.$$

On a de plus

$$\varphi^l(0, x') = \psi(x') \qquad \text{et} \qquad \operatorname{grad} \varphi^l(a) = (p_0^l(a), \operatorname{grad} \psi(a)).$$

On a de cette façon toutes les fonctions caractéristiques $\varphi$ telles que

$$\varphi(0, x') = \psi(x').$$

Si chaque $\varphi^l$ vérifie la condition de régularité mise en évidence dans le paragraphe 2, le théorème 1 assure pour chaque $l$ l'existence d'une onde asymptotique

$$y_l = \sum_{j=-t}^{\infty} Y_l^j \times (f_j \circ \varphi^l).$$

Les $Y_l^j$ sont déterminés par l'intégration d'équations différentielles linéaires d'ordre $\mu_l$ le long des bicaractéristiques des hypersurfaces d'équations $\varphi^l(x) = \text{Cte}$.

Q n'est pas caractéristique en $a$ pour $\mathcal{H}^{m_l}(\varphi^l)$, donc si on se donne pour tout $j \geq -t$ :

$$\partial_{(0)u}\, Y_l^j(0, x') \qquad \text{pour} \quad 0 \leq u < \mu_l,$$

l'onde asymptotique $y_l$ est déterminée de façon unique.

On cherche la solution du problème de Cauchy oscillatoire sous la forme

$$y = \sum_{l=1}^{\tau} \sum_{j=-t}^{+\infty} Y_l^j \times (f_j \circ \varphi^l).$$

Il ne reste donc plus qu'à étudier de quelle manière la donnée des $g_\alpha(x')$ détermine les $\partial_{(0)u} Y_l^j(0, x')$. Pour cela on va calculer formellement les $\partial_{(0)\alpha}\, y(0, x')$ et les identifier aux $g_\alpha(x')$.

LEMME 4. — *Si* $Y = \sum_{j\in Z} Y^j \times (f_j \circ \varphi)$, *on a*

$$\partial_{(0)\alpha}\, Y = \sum_{j\in Z} F_\alpha^j \times (f_{j-\alpha} \circ \varphi),$$

*avec*

$$F_\alpha^j = \sum_{k=0}^{\alpha} C_\alpha^k (\partial_0 \varphi)^{\alpha-k}\, \partial_{(0)k}\, Y^{j-k} + \sum_{0\leq u<k\leq\alpha} \Gamma_\alpha^{u,k}\, \partial_{(0)u}\, Y^{j-k}$$

*où les* $\Gamma_\alpha^{u,k}$ *sont des fonctions connues, indépendantes de* $j$.

On montre ce lemme par récurrence sur $\alpha$. Pour $\alpha = 0$, il est évident. Si on le suppose vrai pour $0, \ldots, \alpha$, on a

$$\partial_{(0)\alpha}\, Y = \sum_{j\in Z} F_\alpha^j \times (f_{j-\alpha} \circ \varphi).$$

En dérivant par rapport à $x^0$, on trouve

$$F_{\alpha+1}^j = (\partial_0 \varphi) \times F_\alpha^j + \partial_0 F_\alpha^{j-1}.$$

On montre alors en utilisant l'hypothèse de récurrence que $F_{\alpha+1}^j$ a la forme annoncée dans le lemme 4.

L'identification des $\partial_{(0)\alpha}\, y(0, x')$ avec les $g_\alpha(x')$ donne, avec des notations évidentes, pour $j \geq -t$, et $0 \leq \alpha < t$ :

$$\sum_{l=1}^{\tau} F_{\alpha,l}^j (0, x') = b_\alpha^j (x')$$

(en convenant que $b_\alpha^j = 0$ si $j < 0$).

On note $A_\alpha^j$ cette équation et $\mathcal{A}^j$ le système des $t$ équations $A_\alpha^j$ pour $\alpha = 0, \ldots, t-1$. On se propose de résoudre successivement les différents systèmes $\mathcal{A}^j$.

La valeur de $F_{\alpha,l}^j$ et l'ordre des équations qui déterminent les $Y_l^j$ nous incitent à prendre comme inconnues pour le système $\mathcal{A}^j$, les fonctions

$$\partial_{(0)u}\, Y_l^{j-u} (0, x') \qquad \text{pour} \quad 0 \leq u < \mu_l \qquad \text{et} \quad 1 \leq l \leq \tau.$$

On note $\mathcal{I}^j$ l'ensemble de ces inconnues.

*Notations :*

$$C_\alpha^k = 0 \quad \text{si } k > \alpha \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=p}^{q} \delta_k = 0 \quad \text{si } p > q;$$

$$\lambda^l(x') = \partial_0 \varphi^l(0, x') \qquad \text{et} \qquad \bar{f}(x') = f(0, x').$$

Avec ces conventions $A_\alpha^j$ s'écrit :

$$\sum_{l=1}^{\tau} \sum_{k=0}^{\mu_l - 1} C_\alpha^k (\lambda^l)^{\alpha-k}\, \overline{\partial_{(0)k} Y_l^{j-k}} = d_\alpha^j.$$

avec

$$d_\alpha^j = b_\alpha^j - \sum_{l=1}^{\tau} \left\{ \sum_{k=\mu_l}^{\alpha} C_\alpha^k (\lambda^l)^{\alpha-k}\, \overline{\partial_{(0)k} Y_l^{j-k}} + \sum_{0 \leq u < k \leq \alpha} \overline{\Gamma_\alpha^{u,k}}\, \overline{\partial_{(0)u} Y_l^{j-k}} \right\}.$$

Si on suppose les inconnues de $\mathfrak{J}^{j-t}, \ldots, \mathfrak{J}^{j-1}$ déterminées, on montre que les $d_\alpha^j$ sont des fonctions connues.

En effet, une fonction $\overline{\partial_{(0)u} Y_l^{j-k}}$ pour $0 \leq u < k \leq t - 1$ est une inconnue du système $\mathfrak{A}^{j-(k-u)}$ et on a $k - u \geq 1$. Si $k \geq \mu_l$, chaque $\overline{\partial_{(0)u} Y_l^{j-k}}$ pour $u < \mu_l$ est connue pour la même raison $(k - u \geq 1)$, donc on a pu intégrer l'équation qui détermine $Y_l^{j-k}$ et cette fonction est connue, ainsi que toutes ses dérivées.

Le lemme suivant précise le nombre d'éléments de $\mathfrak{J}^j$.

Lemme 5. — *Le nombre $t'$ des inconnues est inférieur ou égal à $t$; on a $t' = t$ si et seulement si $h$ possède une bonne décomposition par rapport à chaque* $H_s$.

A chaque $H_s$ sont associées $\tau_s$ fonction $\varphi^l$ et pour chacun de ces $l$, on a

$$\mu_l \leq \alpha_s,$$

donc

$$t' = \sum_{l=1}^{\tau} \mu_l \leq \sum_{s=1}^{\sigma} \tau_s \alpha_s = t.$$

On a $t = t'$ si et seulement si pour tout $l$, $\mu_l = \alpha_s$, c'est-à-dire si $h$ possède une bonne décomposition par rapport à chaque $H_s$ et si $r_0(\varphi^l) = 0$ pour tout $l$. Cette dernière condition est nécessairement vérifiée si $P(a; q)$ est strictement hyperbolique car grad $\varphi^l(a)$ est, pour tout $l$, zéro simple de $P(a; q) = 0$.

On a donc $t = t'$ si et seulement si $h$ possède une bonne décomposition par rapport à chaque $H_s$.

Le système $\mathfrak{A}^j$ est donc rectangulaire et le nombre des inconnues est inférieur ou égal au nombre des équations.

Lemme 6. — *Le déterminant des $t'$ premières équations est différent de* 0 *au voisinage de $a$.*

On suppose les $l$ ordonnés de façon à ce que $\mu_l$ soit une fonction décroissante de $l$, et on note $\tau'$ ($\tau' \leqq \tau$) le nombre de $\mu_l \neq 0$. Le déterminant est formé de $\tau'$ tranches verticales de même nature. La $l^{\text{ième}}$ tranche se compose de $\mu_l$ colonnes $C_l^0, \ldots, C_l^{\mu_l-1}$ et le terme de rang $(\alpha+1)$ $(0 \leqq \alpha \leqq t'-1)$ de la $k^{\text{ième}}$ colonne de la $l^{\text{ième}}$ tranche est $C_\alpha^k (\lambda^l)^{\alpha-k}$.

$$D = \underbrace{\left| \begin{array}{c:c:c} \ldots C_\alpha^k (\lambda^1)^{\alpha-k} \ldots & \ldots C_\alpha^k (\lambda^l)^{\alpha-k} \ldots & \ldots C_\alpha^k (\lambda^{\tau'})^{\alpha-k} \ldots \\ 0 \leqq k < \mu_1 & 0 \leqq k < \mu_l & 0 \leqq k < \mu_{\tau'} \end{array} \right|}_{1 \leqq l \leqq \tau'.} \quad 0 \leqq \alpha \leqq t'-1$$

On note $D(\lambda^1, \ldots, \lambda^{\tau'}; \mu_1, \ldots, \mu_{\tau'})$, ce déterminant. On va montrer par récurrence sur $\tau'$ que ce déterminant est différent de zéro. Si $\tau' = 1$ (¹), la matrice associée est triangulaire inférieure, et tous les termes de la diagonale principale valent 1, donc ce déterminant vaut 1.

On montre maintenant que

$$D(\lambda^1, \ldots, \lambda^{\tau'}; \mu_1, \ldots, \mu_{\tau'}) = \prod_{l=2}^{\tau'} (\lambda^l - \lambda^1)^{\mu_1 \mu_l} \times D(\lambda^2, \ldots, \lambda^{\tau'}; \mu_2, \ldots, \mu_{\tau'}).$$

Les $\lambda^l$ étant deux à deux différents en $a$, donc au voisinage de $a$, D sera bien différent de zéro au voisinage de $a$.

On retranche de chaque ligne (sauf de la première), la ligne précédente multipliée par $\lambda^1$ (en commençant par la dernière). Le terme de rang $(\alpha+1)$ de la $k^{\text{ième}}$ tranche de la $l^{\text{ième}}$ colonne du déterminant ainsi transformé est (pour $\alpha \geqq 1$) :

$$(\lambda^l)^{\alpha-k-1} (C_\alpha^k \lambda^l - C_{\alpha-1}^k \lambda^1).$$

En particulier la première colonne du déterminant a tous ses termes nuls sauf le premier qui vaut 1. On développe D par rapport à la première colonne, on obtient alors un déterminant à $(t'-1)$ lignes et $(t'-1)$ colonnes, égal à D. On va montrer qu'à un facteur multiplicatif non nul

(¹) $\tau' = 0$ correspond au cas ou toutes les ondes asymptotiques sont nulles, et dans ce cas il n'y a pas de solution sauf si tous les $g_\alpha$ sont nuls.

près, on peut le mettre sous une forme semblable à celle de D.

$$\mathrm{D} = \underbrace{\left| \underbrace{\ldots \mathrm{C}_{\alpha-1}^{k-1} (\lambda^1)^{\alpha-k} \ldots}_{1 \leq k < \mu_1} \qquad \underbrace{\ldots (\mathrm{C}_\alpha^k \lambda^l - \mathrm{C}_{\alpha-1}^k \lambda^1) (\lambda^l)^{\alpha-k-1} \ldots}_{0 \leq k < \mu_l} \right|}_{1 \leq l \leq \tau'.} \left.\vphantom{\Bigg|}\right\} 1 \leq \alpha \leq l' - 1$$

On remarque que $\mathrm{C}_\alpha^k = \mathrm{C}_{\alpha-1}^k + \mathrm{C}_{\alpha-1}^{k-1}$ (même si $k \geq \alpha$), donc dans la première tranche ($l = 1$), on a

$$(\mathrm{C}_\alpha^k - \mathrm{C}_{\alpha-1}^k) (\lambda^1)^{\alpha-k} = \mathrm{C}_{\alpha-1}^{k-1} (\lambda^1)^{\alpha-k}.$$

Considérons maintenant la $l^{\text{ième}}$ ($l \geq 2$) tranche. On peut mettre $(\lambda^l - \lambda^1)$ en facteur dans la première colonne puisque le terme général de cette colonne est $(\lambda^l - \lambda^1)(\lambda^l)^{\alpha-1}$. Après cette mise en facteur, on retranche la première colonne de la seconde dont le terme général devient

$$\mathrm{C}_{\alpha-1}^1 (\lambda^l - \lambda^1) (\lambda^l)^{\alpha-2} \ldots.$$

Après un nombre fini de telles opérations, dans chaque tranche, on trouve

$$\mathrm{D}(\lambda^1, \ldots, \lambda^{\tau'}; \mu_1, \ldots, \mu_{\tau'}) = \prod_{l=2}^{\tau'} (\lambda^l - \lambda^1)^{\mu_l} \, \mathrm{D}(\lambda^1, \ldots, \lambda^{\tau'}; \mu_1 - 1, \ldots, \mu_{\tau'})$$

et après $\mu_1$ transformations de cette sorte, on a

$$\mathrm{D}(\lambda^1, \ldots, \lambda^{\tau'}; \mu_1, \ldots, \mu_{\tau'}) = \prod_{l=2}^{\tau'} (\lambda^l - \lambda^1)^{\mu_1 \mu_l} \, \mathrm{D}(\lambda^2, \ldots, \lambda^{\tau'}; \mu_2, \ldots, \mu_{\tau'})$$

et finalement

$$\mathrm{D}(\lambda^1, \ldots, \lambda^{\tau'}; \mu_1, \ldots, \mu_{\tau'}) = \prod_{1 \leq l < j \leq \tau'} (\lambda^j - \lambda^l)^{\mu_l \mu_j},$$

D est donc différent de zéro au voisinage de $a$.

Le système $\mathfrak{A}^j$ possède donc une solution et une seule si les $d_\alpha^j$ (et par conséquent les $b_\alpha^j$) ont une valeur imposée pour $t' \leq \alpha < t$.

Il reste à résoudre $\mathfrak{A}'$ pour amorcer la récurrence. Les $\mathrm{Y}_l^j$ pour $j < -t$, sont nuls par hypothèse, et les $b_\alpha^{-t}$ sont nuls, donc la seule solution c'est $\mathrm{Y}^{-t}(0, x') = 0$.

Les premières inconnues non nulles s'obtiennent en résolvant le système $\mathfrak{A}^0$. Le premier $Y_l^j$ non nul est donc $Y_l^{-\mu_l+1}$, et

$$y = \sum_{l=1}^{\tau} \sum_{j=-\mu_l+1}^{\infty} Y_l^j \times (f_j \circ \varphi^l).$$

Il résulte du lemme 5 et du calcul précédent qu'on a une solution et une seule quelles que soient les données si et seulement si $h$ possède une bonne décomposition par rapport à chaque $H_\alpha$. Ceci termine bien la démonstration du théorème 2.

*Remarque* 1. — Si on suppose seulement $h$ décomposable par rapport à chaque $H_\alpha$ et si on n'admet pour solution au problème de Cauchy oscillatoire qu'une somme d'ondes asymptotiques pouvant être obtenues par le théorème 1, et associées à des phases $\varphi^l$ telles que les grad $\varphi^l(a)$ soient des zéros réels, *distincts*, non nuls de $P(a; q) = 0$, on constate qu'une C. N. S. pour qu'on ait une solution et une seule quelles que soient les données de Cauchy sur Q, est que la forme tangente en $a$ à Q soit une direction d'hyperbolicité stricte pour $P(a; q)$ et que $h$ possède une bonne décomposition par rapport à chaque $H_\alpha$.

*Remarque* 2. — Si les $f_j$ sont définies sur $\mathbf{C}$ et si les coefficients de $h$ sont à valeurs complexes, pour résoudre le problème de Cauchy oscillatoire avec des données sur Q d'équation locale $x^0 = 0$, quelles que soient les $b_\alpha^j$, mais pour $\psi$ donnée, il suffit de supposer que l'équation en $p_0$, $P(a; p_0, \text{grad}\, \psi(a)) = 0$ possède $\tau$ racines complexes non nulles, distinctes, et que $h$ possède une bonne décomposition par rapport à chaque $H_\alpha$.

4. Opérateur bien décomposable. — Le théorème 2 met en évidence la notion de bonne décomposition; un opérateur peut être décomposé de plusieurs manières. La proposition 3 assure l'invariance de la notion de bonne décomposition.

Supposons que $h$ possède une bonne décomposition par rapport à un facteur de K (1) : on peut écrire

$$h = l_0(k)^{\nu_0} + l_1(k)^{\nu_1} + \ldots + l_t(k)^{\nu_t},$$

avec pour tout $r$, $\nu_r \geqq \nu_0 - r$.

En modifiant éventuellement les $l_r$, on a

$$h = l_0(k)^{\nu_0} + l_1(k)^{\nu_0-1} + \ldots + l_r(k)^{\nu_0-r} + \ldots + l_{\nu_0}.$$

Soit $h = \sum_{r=0}^{t} \tilde{l}_r (\tilde{k})^{\tilde{\nu}_r}$ une seconde décomposition de $h$ : on va montrer que pour tout $r \leqq t$, $\tilde{\nu}_r \geqq \tilde{\nu}_0 - r = \nu_0 - r$.

On a $\tilde{\nu}_0 = \nu_0$ car c'est la multiplicité de K dans la décomposition (1), donc pour $r = 0$, le résultat est vrai. Supposons-le vrai pour $0, \ldots, r-1$ et démontrons-le pour $r$. (Si $r \geqq \nu_0$, c'est évident.) En modifiant éventuellement les $\tilde{l}_j$, l'hypothèse de récurrence permet d'écrire

$$h \underset{t-r}{\simeq} \tilde{l}_0 (\tilde{k})^{\nu_0} + \ldots + \tilde{l}_{r-1} (\tilde{k})^{\nu_0 - r + 1} + \tilde{l}_r (\tilde{k})^{\tilde{\nu}_r}.$$

On a donc

$$\tilde{l}_r (\tilde{k})^{\tilde{\nu}_r} \underset{t-r}{\simeq} g_r = \left( \sum_{\rho=0}^{r} l_\rho (k)^{\nu_0 - \rho} \right) - \left( \sum_{\rho=0}^{r-1} \tilde{l}_\rho (\tilde{k})^{\nu_0 - \rho} \right),$$

$g_r$ est un opérateur différentiel d'ordre $(t - r)$. On va prouver qu'il existe un opérateur $\gamma_r$ tel que $g_r \underset{t-r}{\sim} \gamma_r (\tilde{k})^{\nu_0 - r}$ : on aura bien $\tilde{\nu}_r \geqq \nu_0 - r$.

Lemme 7. — *Soit* $\theta(k)$ *l'ordre de* $k$ *et* $n_\beta^\alpha = \alpha\theta(k) - (\alpha - \beta)$. *Si* $\beta \leqq \alpha$, *il existe un opérateur différentiel* $\lambda_\beta^\alpha$ *tel que*

$$k^\alpha \underset{n_\beta^\alpha}{\sim} \lambda_\beta^\alpha \tilde{k}^\beta.$$

*Preuve :*

$$k^\alpha = (k - \tilde{k} + \tilde{k})^\alpha = \sum_{p=0}^{\alpha} \sum_{i \in I_p} \Pi_i (\tilde{k}, k - \tilde{k}),$$

$I_p$ est un ensemble connu d'indices et $\Pi_i (\tilde{k}, k - \tilde{k})$ un produit, dans un ordre quelconque de $p$ opérateurs $\tilde{k}$ et de $(\alpha - p)$ opérateurs $k - \tilde{k}$,

$$\theta(\Pi_i) \leqq p\,\theta(k) + (\alpha - p)(\theta(k) - 1) = \alpha\,\theta(k) - (\alpha - p)$$

[car $k - \tilde{k}$ est d'ordre inférieur ou égal à $\theta(k) - 1$].

Si $p < \beta$ et $i \in I_p$, on a

$$\Pi_i (\tilde{k}, k - \tilde{k}) \underset{n_\beta^\alpha}{\sim} 0.$$

Si $p \geqq \beta$ et $i \in I_p$, il existe un opérateur différentiel $m_i$ tel que

$$\Pi_i (\tilde{k}, k - \tilde{k}) \underset{n_\beta^\alpha}{\sim} m_i \times \tilde{k}^\beta.$$

On a, en effet,

$$\Pi_i = \mu \times (\tilde{k})^{\beta'} \quad \text{avec} \quad 0 \leqq \beta' \leqq p.$$

Si $\beta' \geqq \beta$, c'est terminé, sinon, on écrit $\mu = a \tilde{k} b$ avec $b$ ne contenant plus de facteur $\tilde{k}$. On note $[\tilde{k}, b] = \tilde{k}b - b\tilde{k}$ (crochet des deux opérateurs), et on a

$$\Pi_i = ab (\tilde{k})^{\beta'+1} + a[\tilde{k}, b] \times (\tilde{k})^{\beta'}.$$

Si $\beta' + 1 < \beta$, on recommence la même opération avec $ab\,(\tilde{k})^{\beta'+1}$. On écrit finalement

$$\Pi_i = \mu^*\,(\tilde{k})^{\beta} + \sum_{j \in J} \mu_j^{**}\,(\tilde{k})^{\beta_j} \qquad (\beta' \leqq \beta_j < \beta),$$

$\mu_j^{**}\,(\tilde{k})^{\beta_j}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\alpha\,\theta\,(k) - (\alpha - p) - 1$ contenant $(p-1)$ facteurs $\tilde{k}$, dont $\beta_j \geqq \beta'$ en facteur à droite. Si $p \geqq (\beta + 1)$, on recommence la même transformation avec chaque $\mu_j^{**}\,(\tilde{k})^{\beta_j}$. Après un nombre fini de telles opérations on obtient bien le résultat annoncé pour $\Pi_i$, d'où le lemme 7.

Si $0 \leqq \rho \leqq r$, on a

$$k^{\nu_0 - \rho} \underset{n^{\nu_0 - \rho}_{\nu_0 - r}}{\simeq} \lambda^{\nu_0 - \rho}_{\nu_0 - r}\,(\tilde{k})^{\nu_0 - r}$$

et par conséquent

$$l_\rho\,k^{\nu_0 - \rho} \underset{t-r}{\simeq} l_\rho\,\lambda^{\nu_0 - \rho}_{\nu_0 - r}\,(\tilde{k})^{\nu_0 - r}$$

et

$$g_r \underset{t-r}{\simeq} \left( \sum_{\rho=0}^{r} l_\rho\,\lambda^{\nu_0 - \rho}_{\nu_0 - r} - \sum_{\rho=0}^{r-1} \tilde{l}_\rho\,(\tilde{k})^{r-\rho} \right) (\tilde{k})^{\nu_0 - r}.$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 3.

On démontre maintenant le théorème 3 qui caractérise les opérateurs possédant une bonne décomposition par rapport à chaque $H_s$. (On dit qu'un tel opérateur est bien décomposable.)

Si $h$ est bien décomposable, on a

$$h = \sum_{r=0}^{t} l_r\,h_1^{[\alpha_1 - r]+} \times \ldots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma - r]+}$$

avec, pour $r \leqq t$,

$$h \underset{t-r}{\simeq} \sum_{\rho=0}^{r} l_\rho\,h_1^{[\alpha_1 - \rho]+} \times \ldots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma - \rho]+}.$$

On montre ce résultat par récurrence sur $r$.

Pour $r = 0$, on prend $l_0 = 1$ et $h_s$ un opérateur différentiel de symbole principal $H_s$ ; on a

$$h \underset{t}{\sim} h_1^{\alpha_1} \times \ldots \times h_s^{\alpha_s}.$$

Si on suppose le résultat vrai pour $0, \ldots, r-1$, il existe des opérateurs $l_0, \ldots, l_{r-1}$ tels que

$$h \underset{t-r+1}{\simeq} \sum_{\rho=0}^{r-1} l_\rho\,h_1^{[\alpha_1 - \rho]+} \times \ldots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma - \rho]+}.$$

Soit $\lambda_r = h - \sum_{\rho=0}^{r-1} l_\rho \, h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times \ldots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]+}$, c'est un opérateur différentiel d'ordre $t - r$. On va montrer que son symbole principal est divisible par $H_1^{[\alpha_1-r]+} \times \ldots \times H_\sigma^{[\alpha_\sigma-r]+}$; pour $x$ donné les $H_s(x; q)$ étant premiers entre eux, il suffira que $\Lambda_r$ soit divisible par $H_s^{[\alpha_s-r]+}$ pour tout $s$.

Si $r \geqq \alpha_s$, c'est évident, sinon, soit

$$h_\rho = l_\rho \, h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times \ldots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]+}.$$

On pose

$$b = h_{s+1}^{[\alpha_{s+1}-\rho]+} \times \ldots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]+} \qquad (b = 1 \text{ si } s = \sigma).$$

On a

$$h_s^{(\alpha_s-\rho)} \times b = \sum_{p=0}^{\alpha_s-\rho} C_{\alpha_s-\rho}^p \, b_p \, (h_s)^{(\alpha_s-\rho-p)},$$

avec $b_0 = b, \ldots, b_p = [h_s, b_{p-1}], \ldots$

On a donc

$$h_\rho = \sum_{p=0}^{\alpha_s-\rho} C_{\alpha_s-\rho}^p \, h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times \ldots \times h_{s-1}^{[\alpha_{s-1}-\rho]+} \, b_p \times h_s^{(\alpha_s-\rho-p)},$$

$h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times \ldots \times h_{s-1}^{[\alpha_{s-1}-\rho]+} \times b_p \times h_s^{(\alpha_s-\rho-p)}$ est d'ordre $t - \rho - p$ et par conséquent :

$$h_\rho \underset{t-r}{\simeq} \sum_{p=0}^{r-\rho} C_{\alpha_s-\rho}^p \, h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times \ldots \times h_{s-1}^{[\alpha_{s-1}-\rho]+} \times b_p \, h_s^{(\alpha_s-\rho-p)}.$$

On a donc un opérateur différentiel $\mu$ tel que

$$\sum_{\rho=0}^{r-1} l_\rho \, h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times \ldots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]+} \underset{t-r}{\simeq} \mu \times h_s^{(\alpha_s-r)}.$$

Par hypothèse $h$ possède une bonne décomposition par rapport à $H_s$; il existe donc un opérateur $\tilde{\mu}$ tel que

$$h \underset{t-r}{\simeq} \tilde{\mu} \, h_s^{(\alpha_s-r)},$$

et par conséquent

$$\lambda_r \underset{t-r}{\simeq} (\tilde{\mu} - \mu) \, h_s^{(\alpha_s-r)}.$$

$\Lambda_r$ est donc divisible par $H_s^{\alpha_s-r}$; ce résultat étant vrai pour tout $s$, on a

$$\Lambda_r = L_r \, H_1^{[\alpha_1-r]+} \times \ldots \times H_\sigma^{[\alpha_\sigma-r]+}.$$

Si $l_r$ est un opérateur différentiel de symbole principal $L_r$ (7), on a

$$h \underset{t-r}{\simeq} \sum_{\rho=0}^{r} l_\rho \, h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times \ldots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]+}.$$

Réciproquement des calculs analogues à ceux qui viennent d'être faits montrent que si

$$h = \sum_{r=0}^{t} l_r \, h_1^{[\alpha_1-r]+} \times \ldots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-r]+},$$

avec pour tout $r \leq t$,

$$h \underset{t-r}{\simeq} \sum_{\rho=0}^{r} l_\rho \, h_1^{[\alpha_1-\rho]+} \times \ldots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]+},$$

alors $h$ possède une bonne décomposition par rapport à chaque $H_s$, ce qui termine la démonstration du théorème 3.

*Remarque* 1. — En coefficients constants, le théorème 3 est banal à cause de la commutativité de la composition des opérateurs.

*Remarque* 2. — Il résulte de la proposition 3 qu'on peut choisir les $l_r$ et les $h_s$ arbitrairement (à condition qu'ils aient un symbole principal imposé).

*Remarque* 3. — En deux variables, un opérateur bien décomposable vérifie les conditions dites de Levi-Lax ([14], [11]). Ceci sera précisé davantage à la fin du paragraphe 5.

5. Lien avec l'hyperbolicité dans le cas des coefficients constants. — Si $h$ est un opérateur différentiel à coefficients constants sur $E = \mathbf{R}^{n+1}$, on démontre en utilisant des résultats de [3] que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(A) $h$ est bien décomposable et $P(q) = \prod_{s=1}^{\sigma} H_s(q)$ est strictement hyperbolique.

(C) $h$ est hyperbolique et la multiplicité de $H$ sur $V(P)^*$ est localement constante.

---

(7) $L_r(x; q)$ est $C^\infty$ en $x$, puisque $P(x; q) = \prod_{s=1}^{\sigma} H_s(x; q)$ n'est le polynôme nul en aucun point $x$ d'un voisinage donné de $a$.

Si A est un polynôme de $(n+1)$ variables, à coefficients réels, on note V (A) l'ensemble des zéros réels de A, et $r_A$ la fonction multiplicité qui a $\xi \in \mathbf{R}^{n+1}$ associe le nombre entier $r_A(\xi)$, ordre de multiplicité de $\xi$ pour le polynôme A $[r_A(\xi) = 0$ si $\xi \notin V(A)]$.

On note

$$V(A)^* = V(A) - \{0\}.$$

On dit [3] que la multiplicité de H sur V (P)* est localement constante si pour tout $\xi^0 \in V(P)^*$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\xi^0$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ tel que $r_H$ soit constante sur $\mathcal{V} \cap V(P)^*$.

On démontre dans [3] que la proposition (C) équivaut à

(B) 1° H est hyperbolique et la multiplicité de H sur V(P)* est localement constante;

2° tout point $\xi \in \mathbf{R}^{n+1}$ de multiplicité $r_H(\xi)$ sur H est de multiplicité $r_k(\xi) \geqq [r_H(\xi) - k]_+$ sur $H^{(*)(k)}$. (On note $H^{(*)|k}$ la partie homogène d'ordre $t-k$ de $h$.)

Il suffira donc de prouver que (A) et (B) sont équivalentes.

On démontre d'abord que (A) entraîne (B).

L'hyperbolicité stricte de P implique évidemment l'hyperbolicité de H. D'autre part, si $\xi^0 \in V(P)^*$, il est zéro simple d'un seul polynôme $H_s$ et il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\xi^0$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ tel que $r_H(\xi) = r_{H_s}(\xi^0) = \alpha_s$ pour tout $\xi \in \mathcal{V} \cap V(P)^*$. Il reste à prouver B (2°).

Par hypothèse $h$ est bien décomposable; on utilise alors le théorème 3 en prenant les opérateurs $l_r$ et $h_s$ homogènes, ce qui est possible puisqu'on est en coefficients constants.

On a donc

$$H^{(*)(k)} = L_k H_1^{[\alpha_1 - k]_+} \times \ldots \times H_\sigma^{[\alpha_\sigma - k]_+}.$$

Si $\xi^0 \in V(H)^*$, il est zéro simple d'un seul $H_s$ donc $r_H(\xi^0) = \alpha_s$.

On a donc

$$r_k(\xi^0) \geqq [\alpha_s - k]_+ = [r_H(\xi^0) - k]_+.$$

Si $\xi^0 = 0$, le résultat est banal car $H^{(*)(k)}$ est homogène de degré $t-k$.

Montrons que (B) $\Rightarrow$ (A).

L'hyperbolicité de H entraîne celle de P. Montrons que l'hypothèse de multiplicité localement constante de H sur V (P)* entraîne l'hyperbolicité stricte de P.

On montre ([22], p. 36) que si $(\Pi_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ est tel que l'équation en $p_0$, $P(p_0, \Pi_i) = 0$, possède une racine double, dans tout voisinage de $(\Pi_i)$ (dans $\mathbf{R}^n$), il existe $(p_i)$ tel que l'équation en $p_0$, $P(p_0, p_i) = 0$, ne possède que des racines simples. L'hyperbolicité de P par rapport à la direction $(1, 0, \ldots, 0)$, et la continuité par rapport à $(p_i)$ des racines $p_0^l(p_i)$ de $P(p_0, p_i) = 0$ entraîne que l'ensemble des zéros simples de P est dense dans $V(P)^*$ (muni de la topologie induite par $\mathbf{R}^{n+1}$). Si la multiplicité de H sur $V(P)^*$ est localement constante, tout zéro réel non nul de P a pour multiplicité 1 : en effet, s'il existait $\xi^0 \in V(P)^*$ tel que $r_P(\xi^0) \geqq 2$, dans tout voisinage de $\xi^0$, on pourrait trouver $\xi$ tel que $r_P(\xi) = 1$ et la multiplicité de H sur $V(P)^*$ ne serait pas localement constante.

On sait [3] que si P est hyperbolique par rapport à la direction $(1, 0, \ldots, 0)$, la multiplicité d'un zéro $\xi^0$ de P est égale à la multiplicité de $\xi_0^0$ en tant que racine que l'équation en $p_0$, $P(p_0, \xi_i^0) = 0$. P est donc strictement hyperbolique par rapport à $(1, 0, \ldots, 0)$.

Montrons pour terminer que $h$ est bien décomposable. Il suffira pour cela que chaque $H^{(*)k}$ soit divisible par $H_s^{[\alpha_s-k]+}$ pour tout $s$. Si $k \geqq \alpha_s$, c'est évident; supposons $k < \alpha_s$.

On considère $H_s$ et $H^{(*)(k)}$ comme des polynômes en $p_0$, à coefficients dans l'anneau des polynômes à $n$ variables $\mathbf{R}[p_1, \ldots, p_n]$. L'hyperbolicité de $H_s$ par rapport à la direction $(1, 0, \ldots, 0)$ entraîne que $H_s$ est de degré $\tau_s$ en $p_0$ et le coefficient de $(p_0)^{\tau_s}$ est un nombre réel non nul $(H_s(1, 0, \ldots, 0))$ donc un élément inversible de $\mathbf{R}[p_1, \ldots, p_n]$. On peut donc [23] faire la division euclidienne (dans $\mathbf{R}[p_1, \ldots, p_n][p_0]$) de $H^{(*)(k)}$ par $H_s$ :

$$H^{(*)k}(p_0, p_i) = Q(p_0, p_i) \times H_s(p_0, p_i) + R(p_0, p_i),$$

avec $Q(p_0, p_i)$ et $R(p_0, p_i)$ appartenant à $\mathbf{R}[p_0, p_i]$.

B (2°) et $k < \alpha_s$ entraîne que tout zéro réel de $H_s$ est un zéro de $H^{(*)k}$. Si $(p_i) \in \mathbf{R}^n - \{0\}$, l'hyperbolicité stricte de $H_s$ entraîne que l'équation en $p_0$, $H_s(p_0, p_i) = 0$ possède $\tau_s$ racines réelles distinctes $p_0^l(p_i)$ $(1 \leqq l \leqq \tau_s)$. On a donc $R[p_0^l(p_i), (p_i)] = 0$ pour $1 \leqq l \leqq \tau_s$, et $R(p_0, p_i)$ est de degré strictement inférieur à $\tau_s$ en $p_0$. Ceci implique $R(p_0, p_i) = 0$, le résultat s'étend par continuité pour $(p_i) = 0$, et par conséquent $H_s$ divise $H^{(*)k}$. On a donc $H^{(*)k} = M_k^s \times (H_s)^{\alpha_k^s}$ (avec $M_k^s$ non divisible par $H_s$). Si $\alpha_k^s$ était strictement inférieur à $(\alpha_s - k)$, le raisonnement précédent entraînerait $M_k^s$ divisible par $H_s$, ce qui est faux, donc $\alpha_k^s \geqq \alpha_s - k$.

Les $H_s$ étant premiers entre eux deux à deux, $H^{(*)k}$ est divisible par $H_1^{[\alpha_1-k]+} \times \ldots \times H_\sigma^{[\alpha_\sigma-k]+}$, et par conséquent l'opérateur $h$ est bien décomposable.

*Remarque* 1. — Si E est une variété différentiable $C^\infty$ de dimension 2, on montre dans [11], [14] qu'une condition nécessaire et suffisante (8) pour

(8) On suppose la condition (1) du multiplicité constante en $x$ vérifiée.

que le problème de Cauchy soit bien posé par rapport à une hypersurface Q passant par $a$ est que H $(a; q)$ soit hyperbolique par rapport à la forme tangente en $a$ à Q, et que $h$ soit bien décomposable. En deux variables H $(a; q)$ hyperbolique équivaut à P $(a; q)$ strictement hyperbolique [l'hypothèse de multiplicité localement constante de H sur V (P)* est nécessairement vérifiée]. On a l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

1° H $(a; q)$ hyperbolique par rapport à la forme tangente en $a$ à Q et $h$ bien décomposable.

2° Le problème de Cauchy avec données sur Q est bien posé.

3° Le problème de Cauchy oscillatoire avec données sur Q possède une solution et une seule quelles que soient les données.

Il résulte du théorème 4 que si les coefficients sont constants ($E = \mathbf{R}^2$), ces trois propositions sont encore équivalentes à

4° $h$ est hyperbolique par rapport à la forme tangente en $a$ à Q.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] Berger, *Formes harmoniques* (*Séminaire Lichnerowicz-Avez-Berger*, Collège de France).

[3] Chaillou, *Sur les ensembles bornés $\mathcal{A}$ de distributions polynômes inversibles dans $\mathcal{D}'(\Gamma)$ et d'inverse $\mathcal{A}^{-1}$ borné, et sur les hypersurfaces ${}_0\Gamma$-hyperbolique* (Thèse) (à paraître).

[4] Y. Choquet-Bruhat, *Ondes asymptotiques et approchées pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires* (*J. Math. pures et appl.*, t. 48, 1969, p. 117-158).

[5] Y. Choquet-Bruhat, *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*, Dunod, Paris, 1968.

[6] Courant-Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, II, Interscience Publishers, New-York, 1965.

[7] De Paris, *Ondes asymptotiques et problème de Cauchy caractéristique local pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 270, série A, 1970, p. 1509-1511).

[8] Gårding, Kotaké et Leray, *Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes; analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 92, 1964, p. 263-361).

[9] Hörmander, *Pseudo-Differential Operators* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 18, 1965, p. 501-517).

[10] Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, Berlin, 1964.

[11] A. Lax, *On Cauchy's problem for partial differential equation with multiple characteristics* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 9, 1956, p. 135-169).

[12] P. D. Lax, *Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems* (*Duke Math. J.*, vol. 24, 1957, p. 627-646).

[13] Leray, *Particules et Singularités des ondes* (*Cahiers de Physique*, n° 133, 1961).

[14] Levi, *Caratteristiche multiple e problema di Cauchy* (*Ann. mathematiça*, série III-FA, t. 16, 1909, p. 161-201).

[15] Ludwig, *Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 13, 1960, p. 473-508).

[16] LUDWIG, *Singularities of the Riemann function* (No. 40, Report No. 9351, Courant Institute of Math. Sc., A. E. C. Computing and Applied Math. Center, 1961).

[17] MIZOHATA, *Solutions nulles et solutions non analytiques* (*J. Math. Kyoto. Univ.*, t. 1-2, 1962, p. 271-302).

[18] MIZOHATA et OHYA, *Sur la condition de E. E. Levi concernant les équations hyperboliques* (*R. I. M. S. Kyoto Univ.*, série A, vol. 4, nº 2, 1968).

[19] PETROWSKY, *Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles* (*Rec. Math.*, vol. 2, 1939, p. 3-70).

[20] STRANG, *On multiple characteristics and the Levi-Lax conditions for hyperbolicity* (*Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. 33, 1969, p. 358-373).

[21] VAILLANT, *Données de Cauchy portées par une caractéristique double, dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles. Rôle des bicaractéristiques* (*J. Math. pures et appl.*, t. 47, 1968, p. 1-40).

[22] VAILLANT, *Remarques sur les systèmes fortement hyperboliques* (*J. Math. pures et appl.*, 50, 1971, p. 25-51).

[23] VAN DER WAERDEN, *Modern algebra*, Frederick Ungar Publications, New-York, 1948.

(Manuscrit reçu le 20 janvier 1971.)

J. CL. DE PARIS,
Université des Sciences et Techniques de Lille-I,
151, rue Jean-Jaurès,
59-Halluin.

PROBLEME DE CAUCHY ANALYTIQUE A DONNEES SINGULIERES

POUR UN OPERATEUR DIFFERENTIEL BIEN DECOMPOSABLE



par

J.C. DE PARIS

*J. Math. pures et appl.,*
51, 1972, p. 465 à 488.

# PROBLÈME DE CAUCHY ANALYTIQUE A DONNÉES SINGULIÈRES POUR UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL BIEN DÉCOMPOSABLE

**PAR J.-C. DE PARIS**

---

1. INTRODUCTION. — Soit E une variété analytique réelle ou complexe de dimension $(n+1)$, $h$ un opérateur différentiel sur E d'ordre $t$ à coefficients analytiques, et $a$ un point de E où $h$ est d'ordre $t$.

Soient $\Phi$ et $\Psi$ deux fonctions analytiques au voisinage de $a$, nulles en $a$ et telles que grad $\Phi(a)$ et grad $\Psi(a)$ soient deux vecteurs linéairement indépendants de $T^*_a$. (On note $T^*_x$ l'espace cotangent en $x$ à E.) On note Q (respectivement S) l'hypersurface d'équation locale $\Phi(x) = 0$ [respectivement $\Psi(x) = 0$] et $T = Q \cap S$. On note $S^l$ $(1 \leq l \leq \tau)$ les hypersurfaces caractéristiques issues de T.

On étudie le problème de Cauchy analytique, non caractéristique, au voisinage de $a$. Le second membre est « régulier » sauf sur $\bigcup_{l=1}^{\tau} S^l$ où il possède des singularités de type donné (qui dépendent de la forme d'onde [9] choisie); les données de Cauchy sont « régulières » sur Q — T et présentent sur T des singularités analogues à celles du second membre : on montre alors, si $h$ est bien décomposable ([3], [4]), qu'il existe une solution et une seule, « régulière » sauf sur $\bigcup_{l=1}^{\tau} S_l$ où elle présente des singularités du même type que celles des données.

On vérifie bien, dans ce cas particulier, le principe général énoncé par J. Leray dans [7] : « *Les singularités de la solution appartiennent aux caractéristiques issues des singularités des données* ».

Cette étude se fait classiquement en deux temps ([9], [5], [6], [15]) : d'abord la construction d'une solution formelle utilisant la technique des développements asymptotiques ([17], [9], [8], [1], [10]), puis la démonstration de la convergence des développements obtenus.

On a montré dans [3] et [4] l'existence d'une solution formelle au problème posé; il reste donc à prouver la convergence.

Dans [9], D. Ludwig étudie un même problème pour un système de type (H), qu'on sait [10] être fortement hyperbolique. (ce qui, dans le cas d'un opérateur scalaire, implique que toutes les caractéristiques soient simples), et montre la convergence (quand le système est du premier ordre) en se ramenant à un problème de Cauchy caractéristique, et en utilisant la méthode des majorantes. Dans [5], Y. Hamada étudie un problème analogue pour un opérateur scalaire à caractéristiques simples, et dans [6] il prolonge ses résultats au cas où les caractéristiques sont au plus doubles, pour un opérateur bien décomposable [3]. Sa démonstration de l'existence d'une solution formelle, pour des caractéristiques au plus doubles, est un cas particulier de [2], [3], [4] où on envisage le cas des caractéristiques de multiplicités quelconques (mais constantes). Il montre la convergence en utilisant des techniques de calcul dues à S. Mizohata. Dans [12], [14], [15], C. Wagschal étudie un problème du même type, avec des singularités de forme plus générale, pour un système dont toutes les caractéristiques sont simples; il montre la convergence en utilisant la méthode classique des majorantes, améliorée par « *l'introduction de nouvelles fonctions majorantes particulièrement commodes pour ce type de problème* » [15].

Notre étude se fait dans le cas d'un opérateur scalaire, à caractéristiques de multiplicités quelconques, mais bien décomposable. (On suppose toujours les multiplicités constantes.) On montre la convergence des développements obtenus dans [3] et [4] en adaptant les calculs de [12], [15] au cas des caractéristiques multiples. On généralise ainsi un théorème de [9], et on étend aux caractéristiques de multiplicités quelconques les résultats de [5], [6] et [15].

Les résultats démontrés ici ont été annoncés dans [13].

Les notations utilisées sont celles de [3] et [4].

Je remercie vivement J. Vaillant de ses encouragements qui m'ont été très précieux.

2. Rappels et compléments sur l'existence de la solution formelle. — Soit H $(x; q)$ le symbole principal de $h$; pour $x$ donné dans E, c'est une application polynomiale homogène de degré $t$, ou nulle. $h$ étant d'ordre $t$ en $a$, H $(x; q)$ est de degré $t$ au voisinage de $a$, et ses coefficients

sont des séries entières convergentes au voisinage de $a$. L'anneau des séries entières convergentes est un anneau factoriel, et un anneau de polynômes sur un anneau factoriel est factoriel, il existe donc un voisinage V de $a$, et des applications irréductibles $H_s(x; q)$ $(1 \leqq s \leqq \sigma)$, polynomiales en $q$, homogènes de degré $\tau_s$, pour $x$ donné dans V, à coefficients analytiques en $x$ sur V, et des entiers $\alpha_s > 0$ tels que pour tout $x \in V$ et tout $q \in T^*_x$, on ait

$$(1) \qquad H(x; q) = \prod_{s=1}^{\sigma} [H_s(x; q)]^{\alpha_s}.$$

On sait [11] que les $H_s$ sont des invariants.

L'analycité des données implique que $h$ possède une décomposition [4] par rapport à chaque $H_s$.

On suppose en fait que $h$ est bien décomposable, c'est-à-dire qu'il existe des opérateurs différentiels $h_s$ $(1 \leqq s \leqq \sigma)$ de symbole principal $H_s(x; q)$, et des opérateurs $l_r$ $(1 \leqq r \leqq t)$ (avec $l_0 = 1$) définis sur une sous-variété ouverte $\Omega$ de E, contenant $a$, tels que

$$(2) \qquad \begin{cases} h = \displaystyle\sum_{r=0}^{t} l_r \times h_1^{[\alpha_1 - r]_+} \times \ldots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma - r]_+} \\ ([\alpha]_+ = \alpha \text{ si } \alpha \geqq 0 \text{ et } 0 \text{ si } \alpha \leqq 0), \end{cases}$$

avec pour tout $r$,

$$h - \sum_{\rho=0}^{r} l_\rho \times h_1^{[\alpha_1 - \rho]_+} \times \ldots \times h_\sigma^{[\alpha_\sigma - \rho]_+}$$

d'ordre $t - r - 1$ au plus.

On suppose que l'équation en $\lambda$,

$$(3) \qquad \prod_{s=1}^{\sigma} H_s(a; \lambda \operatorname{grad} \Phi(a) + \operatorname{grad} \Psi(a)) = 0$$

possède $\tau = \sum_{s=1}^{\sigma} \tau_s$ racines distinctes (on impose à ces racines d'être réelles quand E est réelle. Dans le cas réel et quand toutes les multiplicités valent 1, on dit dans [16], si la condition précédente est réalisée, que $h$ est « régulièrement hyperbolique par rapport à Q et S ».

L'hypothèse (3) permet de construire, comme dans [10], $\tau$ fonctions caractéristiques $\varphi^l$ telles que $\varphi^l(x) = \Psi(x)$ si $x \in Q$. Si on note $\lambda^l$ $(1 \leqq l \leqq \tau)$ les racines de l'équation (3), $\varphi^l$ est caractérisée par

$$\operatorname{grad} \varphi^l(a) = \lambda^l \operatorname{grad} \Phi(a) + \operatorname{grad} \Psi(a).$$

On a ainsi toutes les solutions de l'équation caractéristique qui coïncident avec $\Psi$ sur Q, et on peut remarquer que la condition précédente implique que Q n'est pas caractéristique en $a$. Les hypersurfaces $S^l$, d'équations locales $\varphi^l(x) = 0$, sont les caractéristiques issues de T.

Proposition I. — *Soit* E *une variété analytique réelle (respectivement complexe) de dimension* $(n+1)$, $h$ *un opérateur différentiel réel (respectivement complexe) d'ordre* $t$, *à coefficients analytiques, et* $a$ *un point de* E *où* $h$ *est d'ordre* $t$.

*Soient* $\Phi$ *et* $\Psi$ *deux fonctions analytiques, nulles en* $a$, *et telles que* grad $\Phi(a)$ *et* grad $\Psi(a)$ *soient linéairement indépendants dans* $T^*_a$.

*Soit* $f_j$ *une suite telle que pour tout* $j \in Z$, $f'_j = f_{j-1}$.

*Si on suppose que* $h$ *est bien décomposable, et que l'équation en* $\lambda$,

$$\prod_{s=1}^{\sigma} H_s(a; \lambda \operatorname{grad} \Phi(a) + \operatorname{grad} \Psi(a)) = 0$$

*possède* $\tau$ *racines réelles (respectivement complexes) distinctes, alors il existe une solution formelle unique*

$$y = \sum_{l=1}^{\tau} \sum_{j=1-\mu_l}^{\infty} Y^j_l \times (f_j \circ \varphi^l)$$

*de*

$$h(y) = v = \sum_{l=1}^{\tau} v_l, \qquad \textit{avec} \quad v_l = \sum_{j=1}^{\infty} v^j_l \times (f_{j-t} \circ \varphi^l)$$

*telle que de plus [si les coordonnées locales sont telles que* $\Phi(x) = x^0$, *et que* $a = (0, \ldots, 0)$] *on ait, pour* $0 \leq \alpha < t$,

$$\partial_{(0)\alpha}\, y(0, x') = \sum_{j=0}^{\infty} b^j_\alpha(x') \times (f_{j-\alpha} \circ \psi)(x').$$

*On note* $x' = (x^1, \ldots, x^n)$, $\psi$ *la restriction de* $\Psi$ *à* Q; $\mu_l$ *est égal à l'un des nombres* $\alpha_s$ [*avec* $s$, *tel que* $H_s(a; \operatorname{grad} \varphi^l(a)) = 0$].

*Les* $v^j_l$ *sont analytiques sur un même voisinage de* $a$, *et les* $b^j_\alpha$ *sur un même voisinage de* $a$ *dans* Q.

On cherche d'abord une solution de $h(y_l) = v_l$. Avec le choix qu'on a fait pour $v_l$, ceci conduit à des calculs identiques à ceux de [3] et [4]. On cherche $y_l$ sous la forme

$$y_l = \sum_{j=1-\mu_l}^{\infty} Y^j_l \times (f_j \circ \varphi^l).$$

On a

$$h(y_l) = \sum_{j=1-\mu_l}^{\infty} h(Y_l^j \times (f_j \circ \varphi^l)) = \sum_{j=1-\mu_l}^{\infty} \sum_{r=0}^{l} \mathcal{H}^r(\varphi^l)[Y_l^j] \times (f_{j-l+r} \circ \varphi^l),$$

$\varphi^l$ est telle que

$$\mathcal{H}^0(\varphi^l) = \mathcal{H}^1(\varphi^l) = \ldots = \mathcal{H}^{\mu_l - 1}(\varphi^l) = 0.$$

$\mathcal{H}^{\mu_l}(\varphi^l)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\mu_l$ pour lequel Q n'est pas caractéristique en $a$. (On a démontré ces résultats dans [4].)

Par conséquent :

$$h(y_l) = \sum_{j=1-\mu_l}^{\infty} \sum_{r=\mu_l}^{l} \mathcal{H}^r(\varphi^l)[Y_l^j] \times (f_{j-l+r} \circ \varphi^l).$$

Si on pose $k = j + r$, on trouve.

$$h(y_l) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{j+r=k \\ j \geq 1-\mu_l \\ \mu_l \leq r \leq l}} \mathcal{H}^r(\varphi^l)[Y_l^j] \right\} \times (f_{k-l} \circ \varphi^l).$$

Ceci justifie *a posteriori* le choix fait pour $v_l$ afin que l'identification soit possible.

On doit donc avoir, pour $k \geq 1$,

$$(4)_k \qquad \sum_{\substack{j+r=k \\ j \geq 1-\mu_l \\ \mu_l \leq r \leq l}} \mathcal{H}^r(\varphi^l)[Y_l^j] = v_l^k.$$

On sait [2] que la détermination des $Y_l^j$ se ramène à l'intégration d'équations différentielles linéaires d'ordre $\mu_l$ le long des bicaractéristiques des hypersurfaces caractéristiques d'équations $\varphi^l(x) = \text{Cte}$. On sait aussi ([2], [3]) que pour déterminer entièrement $Y_l^j$ il faut que les $\partial_{(0)u} Y_l^j(0, x')$ soient connues pour $0 \leq u < \mu_l$. La détermination de ces fonctions à partir des $b_\alpha^j$ se fait de manière unique ([3], [4]), en utilisant les relations

$$(5)_j \qquad \text{pour } 0 \leq \alpha < t: \quad \sum_{l=1}^{\tau} \sum_{k=0}^{\mu_l - 1} C_\alpha^k (\Lambda^l)^{\alpha-k} \overline{\partial_{(0)k} Y_l^{j-k}} = d_\alpha^j,$$

avec

$$d_\alpha^j = b_\alpha^j - \sum_{l=1}^{\tau} \left\{ \sum_{k=\mu_l}^{\alpha} C_\alpha^k (\Lambda^l)^{\alpha-k} \overline{\partial_{(0)k} Y_l^{j-k}} + \sum_{0 \leq u < k \leq \alpha} \Gamma_{\alpha,k}^{u,l} \overline{\partial_{(0)u} Y_l^{j-k}} \right\};$$

en posant $\Lambda^l(x') = \partial_0 \varphi^l(0, x')$, et en notant $\overline{f}$ la restriction à Q d'une fonction $f$ définie au voisinage de $a$. On convient que $C_\alpha^k = 0$ si $k > \alpha$ et que $\sum_{k=p}^{m} v_k = 0$ si $p > m$.

$(5)_j$ est un système de $t$ équations linéaires à $t$ inconnues, de déterminant non nul au voisinage de $a$ [4]. On notera $(A_\beta^\alpha)_{\substack{0 \leq \alpha < t \\ 0 \leq \beta < t}}$ la matrice inverse; ses coefficients sont analytiques au voisinage de $a$ et ne dépendent que de l'opérateur et des $\varphi^l$. De même, les coefficients $\Gamma_{\alpha,k}^{u,l}$ sont analytiques sur un voisinage de $a$ dans Q, et ne dépendent que de $h$ et des fonctions $\varphi^l$.

On met maintenant les équations $(4)_j$ et $(5)_j$ sous une forme qui sera plus commode pour la rédaction du paragraphe suivant où on étudie la convergence des développements obtenus.

En convenant que $Y_l^j = 0$ si $j < 1 - \mu_l$ l'équation $(4)_j$ devient pour $j \geqq 1$ :

$$\sum_{r=\mu_l}^{t} \mathcal{H}^r(\varphi^l)[Y_l^{j-r}] = v_l^j.$$

$\mathcal{H}^{\mu_l}(\varphi^l)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\mu_l$ et les hypersurfaces $x^0 = c$ ne sont pas caractéristiques pour cet opérateur (pour $c$ assez petit). En divisant chaque opérateur $\mathcal{H}^r(\varphi^l)$ par le coefficient de $\partial_{(0)\mu_l}$ dans $\mathcal{H}^{\mu_l}(\varphi^l)$ [on note encore $\mathcal{H}^r(\varphi^l)$ l'opérateur obtenu], et en posant $\mathcal{H}^{\mu_l}(\varphi^l) = \partial_{(0)\mu_l} - c_l$, avec $c_l$ opérateur différentiel d'ordre au plus $\mu_l$ contenant au plus $(\mu_l - 1)$ dérivations par rapport à $x^0$, on peut écrire, pour $j \geqq 0$ (on pose $v_l^0 = 0$) :

$$(6)_j \qquad \left\{ \begin{array}{l} \partial_{(0)\mu_l} Y_l^{j-\mu_l} = c_l(Y_l^{j-\mu_l}) + w_l^j, \\ \text{avec} \quad w_l^j = v_l^j - \displaystyle\sum_{r=\mu_l+1}^{t} \mathcal{H}^r(\varphi^l)[Y_l^{j-r}]. \end{array} \right.$$

En résolvant le système $(5)_j$ on trouve, pour $j \geqq 0$, $1 \leqq l \leqq \tau$, $0 \leqq u < \mu_l$ :

$$\overline{\partial_{(0)u} Y_l^{j-u}} = \sum_{\alpha=0}^{t-1} A_\beta^\alpha d_\alpha^j \qquad (\beta \text{ dépendant de } l \text{ et de } u).$$

(Rappelons que $\overline{\partial_{(0)u} Y_l^{j-u}} = 0$ pour $j < 0$.)

En remplaçant $d_\alpha^j$ par sa valeur, cette relation s'écrit

$$\overline{\partial_{(0)u} Y_l^{j-u}} = \sum_{\alpha=0}^{t-1} A_\beta^\alpha b_\alpha^j - \sum_{m=1}^{\tau} \left\{ \sum_{\alpha=\mu_m}^{t-1} \sum_{k=\mu_m}^{\alpha} A_\beta^\alpha C_\alpha^k (\Lambda^m)^{\alpha-k} \overline{\partial_{(0)k} Y_m^{j-k}} \right\}$$
$$- \sum_{m=1}^{\tau} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{t-1} \sum_{0 \leqq v < k \leqq \alpha} A_\beta^\alpha \Gamma_{\alpha,k}^{v,m} \overline{\partial_{(0)v} Y_m^{j-k}} \right\}.$$

On pose

$$g_\beta^j = \sum_{\alpha=0}^{t-1} A_\beta^\alpha b_\alpha^j,$$

$$\gamma_{\beta,m}^k = -\sum_{\alpha=k}^{t-1} A_\beta^\alpha C_\alpha^k (\Lambda^m)^{\alpha-k},$$

$$\mathfrak{M}_{\beta,k}^m = -\sum_{v=0}^{k}\left(\sum_{\alpha=k}^{t-2} \Gamma_{\alpha+1,k+1}^{v,m}\right)\partial_{(0)v},$$

$\mathfrak{M}_{\beta,k}^m$ est un opérateur différentiel d'ordre $k$, à coefficients indépendants de $x^0$, et dans lequel il n'y a de dérivations que par rapport à $x^0$.

Avec ces nouvelles notations $(5)_j$ s'écrit, pour $j \geqq 0$ :

$$(7)_j \qquad \left\{\begin{array}{l} \text{pour } 1 \leqq l \leqq \tau \text{ et } 0 \leqq u < \mu_l : \\ \overline{\partial_{(0)u} Y_l^{j-u}} = g_\beta^j + \displaystyle\sum_{m=1}^{\tau}\left\{\sum_{k=\mu_m}^{t-1} \gamma_{\beta,m}^k \overline{\partial_{(0)k} Y_m^{j-k}} + \sum_{k=0}^{t-2} \overline{\mathfrak{M}_{\beta,k}^m (Y_m^{j-k-1})}\right\}. \end{array}\right.$$

3. Convergence de la solution formelle. — Les coordonnées locales étant toujours telles que $\Phi(x) = x^0$ et que $a$ soit l'origine de $\mathbf{K}^{n+1}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), on démontre le théorème suivant :

Théorème I. — *Si on suppose*

$$B_\alpha(x', \zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} b_\alpha^j(x') \times \frac{\zeta^j}{j!} \qquad (0 \leqq \alpha < t)$$

*analytique au voisinage de l'origine de* $\mathbf{K}^{n+1}$, *et*

$$V_l(x, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} v_l^j(x) \frac{\zeta^j}{j!} \qquad (1 \leqq l \leqq \tau)$$

*analytique au voisinage de l'origine dans* $\mathbf{K}^{n+2}$, *alors les fonctions*

$$Y_l(x, \zeta) = \sum_{j=1-\mu_l}^{\infty} Y_l^j(x) \times \frac{\zeta^{j+\mu_l-1}}{(j+\mu_l-1)!} \qquad (1 \leqq l \leqq \tau)$$

*sont analytiques au voisinage de l'origine dans* $\mathbf{K}^{n+2}$.

*a. Rappels sur les majorantes.* — On utilise la notation classique $a \ll b$ pour écrire que la série formelle de $(n+1)$ variables $b$ est une majorante de la série formelle à $(n+1)$ variables $a$ [1]. Cette relation est antisymé-

[1] Dans la suite on identifiera, par abus d'écriture, une fonction analytique au voisinage de l'origine et son développement en série entière sur ce voisinage.

trique et transitive, elle est compatible avec l'addition et la multiplication par des séries formelles positives (majorant la série formelle 0), et elle est stable pour la dérivation. De plus, si $a \ll b$, $c \gg 0$ et $c(0) = 0$, alors $a \circ c \ll b \circ c$, et si $a \ll b$, $a(0) = b(0) = 0$ et $c \gg 0$, alors $c \circ a \ll c \circ b$. Enfin, si $f$ est analytique au voisinage de 0 dans $\mathbf{K}^{n+1}$, il existe $M > 0$ et $R > 0$ tels que, si $x \in \Delta_R = \left\{ x \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} |x^i| < R \right\}$, alors

$$f(x) \ll \frac{M}{R - \sum_{i=0}^{n} x^i}.$$

*b. Fonctions majorantes de* [15]. — Soit $D_R = \{ \xi \mid \xi \in \mathbf{K} \text{ et } |\xi| < R \}$ et $\theta_0(R, \xi) = \frac{1}{R - \xi}$ analytique sur $D_R$; on pose

$$\theta_j(R, \xi) = \frac{d^j}{d\xi^j} \theta_0(R, \xi) = \frac{j\,!}{(R - \xi)^{j+1}}.$$

Les fonctions $\theta_j$ vérifient les propriétés suivantes :

1° $\theta_j(R; \xi) \ll R\, \theta_{j+1}(R; \xi)$.

On a en effet :

$$1 \ll \frac{R}{R - \xi} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R - \xi} \gg 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{R - \xi} \ll \frac{R}{(R - \xi)^2}.$$

En dérivant $j$ fois par rapport à $\xi$, on trouve le résultat annoncé.

2° Si $r < R$, on a pour $\xi \in D_r$ :

$$\frac{1}{R - \xi} \theta_j(r; \xi) \ll \frac{1}{R - r} \theta_j(r; \xi).$$

On a

$$\frac{1}{R - r} \theta_j(r; \xi) - \frac{1}{R - \xi} \theta_j(r, \xi) = \frac{1}{(R - r)(R - \xi)} \frac{j\,!}{(r - \xi)^j} \gg 0$$

et

$$\frac{1}{R - \xi} \theta_j(r; \xi) \gg 0,$$

d'où le résultat.

3° Si $r \leqq R$, on a pour $\xi \in D_r$ :

$$\theta_j(R, \xi) \ll \theta_j(r; \xi), \qquad \frac{1}{r - \xi} - \frac{1}{R - \xi} = \frac{(R - r)}{(r - \xi)(R - \xi)} \gg 0$$

et

$$\frac{1}{R-\xi} \gg 0 \Rightarrow \frac{1}{R-\xi} \ll \frac{1}{r-\xi}.$$

En dérivant $j$ fois par rapport à $\xi$, on obtient le résultat cherché.

*Notations :*

$$\Delta_R = \left\{ x \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} |x^i| < R \right\},$$

$$\Delta_{\rho,r} = \left\{ x \,\middle|\, \rho\,|x^0| + \sum_{i=1}^{n} |x^i| < R \right\},$$

$$\Psi_j(R; x) = \theta_j\left(R, \sum_{i=0}^{n} x^i\right) \quad \text{et} \quad \Phi_j(\rho, r; x) = \theta_j\left(r; \rho\, x^0 + \sum_{i=1}^{n} x^i\right).$$

Une conséquence du 1° et des rappels du ($a$) est que :

Lemme I. — *Pour* $x \in \Delta_R$, *on a*

$$\Psi_j(R; x) \ll R\, \Psi_{j+1}(R; x);$$

*pour* $x \in \Delta_{\rho,r}$, *on a*

$$\Phi_j(\rho, r; x) \ll r\, \Phi_{j+1}(\rho, r; x).$$

De plus on a, si $r \leqq R$,

$$\Psi_j(R, x) \ll \Psi_j(r, x) \quad \text{(d'après 3°)}$$

et si $\rho \geqq 1$,

$$\sum_{i=0}^{n} x^i \ll \rho\, x^0 + \sum_{i=1}^{n} x^i,$$

ce qui implique, d'après les rappels du ($a$), que

$$\Psi_j(r; x) \ll \Phi_j(\rho, r; x).$$

On a donc :

Lemme II. — *Si* $r \leqq R$ *et* $\rho \geqq 1$, *pour* $x \in \Delta_{\rho,r}$ :

$$\Psi_j(R; x) \ll \Phi_j(\rho, r; x).$$

Enfin on rappelle [15], le résultat suivant :

Lemme III. — *Si $c$ est un opérateur différentiel à coefficients analytiques au voisinage de l'origine [ses coefficients admettent alors une majorante commune* $M \times \Psi_0(R; x)$ *sur un* $\Delta_R$ *convenable].*

*Si pour* $x \in \Delta_{\rho,r}$ ($r \leqq \mathrm{KR}$ *avec* K *donné*, $\mathrm{K} < 1$, *et* $\rho \geqq 1$), *on a*

$$y(x) \ll \Phi_j(\rho, r; x).$$

*Alors il existe une constante* $\gamma$ *dépendant seulement de l'opérateur et de* K, *telle que, pour* $x \in \Delta_{\rho,r}$, *on ait*

$$c(y)(x) \ll \gamma \times \rho^p \times \Phi_{j+m}(\rho, r; x),$$

*où* $m$ *est l'ordre de l'opérateur et* $p$ *l'ordre de dérivation par rapport à* $x^0$.

Soit $\alpha = (\alpha_0, \alpha')$ $[\alpha_0 \in \mathbf{N}$ et $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, avec $\alpha_0 \leqq p$ et $|\alpha| \leqq m]$. On a $\left(\text{on note } \mathrm{D}^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x^0)^{\alpha_0} \ldots (\partial x^n)^{\alpha_n}}\right)$:

$$\mathrm{D}^\alpha y(x) \ll \mathrm{D}^\alpha \Phi_j(\rho, r; x) = \rho^{\alpha_0} \times \Phi_{j+|\alpha|}(\rho, r; x) \ll \rho^p \times \mathrm{R}^{m-|\alpha|} \Phi_{j+m}(\rho, r; x),$$

donc

$$a_\alpha(x) \mathrm{D}^\alpha y(x) \ll \rho^p \times \mathrm{R}^{m-|\alpha|} \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R} - \sum_{i=0}^{n} x^i} \times \Phi_{j+m}(\rho, r; x)$$

$$\ll \rho^p \times \mathrm{R}^{m-|\alpha|} \times \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R} - r} \times \Phi_{j+m}(\rho, r; x) \ll \rho^p \times \frac{\mathrm{M} \times \mathrm{R}^{m-|\alpha|}}{\mathrm{R}(1-\mathrm{K})} \times \Phi_{j+m}(\rho, r; x).$$

Si $c(y) = \sum_{\substack{|\alpha| \leqq m \\ \alpha_0 \leqq p}} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha y$, on pose

$$\gamma = \sum_{|\alpha| \leqq m} \frac{\mathrm{M} \times \mathrm{R}^{m-|\alpha|}}{\mathrm{R}(1-\mathrm{K})},$$

ce qui donne

$$c(y)(x) \ll \gamma \times \rho^p \times \Phi_{j+m}(\rho, r; x).$$

$\gamma$ ne dépend que de M, K, R et $m$, donc ne dépend que de l'opérateur et de K.

On montre enfin un résultat qui justifie, *a posteriori*, l'introduction des fonctions $\Phi_j$, et permet de voir pourquoi « elles sont d'un emploi particulièrement commode » [12].

Lemme IV. — $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \dfrac{\zeta^j}{j!}$ *analytique au voisinage de l'origine équivaut à l'existence de nombres positifs*, M, $r$, $\rho$ *et* $c$ *tels que, pour* $x \in \Delta_{\rho,r}$, *on ait*

$$a_j(x) \ll \mathrm{M} \times \mathrm{C}^{j+1} \times \Phi_j(\rho, r; x).$$

Si $A(x, \zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \frac{\zeta^j}{j!}$ est analytique au voisinage de 0, il existe M et R tels que, pour $|\zeta| + \sum_{i=0}^{n} |x^i| < R$, on ait

$$A(x, \zeta) \ll \frac{M}{R - \zeta - \sum_{i=0}^{n} x^i}.$$

En dérivant $j$ fois par rapport à $\zeta$, puis en faisant $\zeta = 0$, on trouve si $\sum_{i=0}^{n} |x^i| < R$ :

$$a^j(x) \ll \frac{M \times j!}{\left(R - \sum_{i=0}^{n} x^i\right)^{j+1}} = M \times \Psi_j(R; x)$$

qui a bien la forme voulue, si on prend $r = R$, $\rho = 1$, $C = 1$.

Réciproquement, si $a_j(x) \ll M \times C^{j+1} \times \Phi_j(\rho, r; x)$, pour $x \in \Delta_{\rho,r}$, on aura

$$|a(x)| \frac{|\zeta|^j}{j!} \leq \frac{M \times C \times j!}{\left(r - \rho|x^0| - \sum_{i=1}^{n} |x^i|\right)^{j+1}} \times \frac{|\zeta|^j}{j!}$$

$$= \frac{M \times C}{r - \rho|x^0| - \sum_{i=1}^{n} |x^i|} \times \left[\frac{C|\zeta|}{r - \rho|x^0| - \sum_{i=1}^{n} |x^i|}\right]^j,$$

donc $A(x, \zeta)$ sera analytique pour $C|\zeta| + \rho|x^0| + \sum_{i=1}^{n} |x^i| < r$.

*c. Démonstration de la convergence.* — Soit

$$\Phi_l^j(\rho, r, C; x) = \left(\frac{\rho}{C}\right)^{-\mu_l} \times C^{j+1} \times \Phi_j(\rho, r; x)$$

[le fait que les différentes caractéristiques n'ont pas la même multiplicité, comme c'était le cas pour des caractéristiques toutes simples, impose l'introduction d'un coefficient multiplicatif $\left(\frac{\rho}{C}\right)^{-\mu_l}$ qui permet, en quelque sorte, de rendre « homogènes » les calculs qui suivent].

On va démontrer par récurrence la proposition $\mathfrak{T}_j \ (j \geqq 0)$ :

$$\mathfrak{T}_j \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}^j : \ 1 \leqq l \leqq \tau, \\ \qquad \mathrm{Y}_l^{j-\mu_l}(x) \ll \Phi_l^{j-\mu_l+t}(\rho, r, \mathrm{C}; x); \\ \mathcal{B}^j : \ 1 \leqq l \leqq \tau, \quad 0 \leqq u < \mu_l, \\ \overline{\partial_{(0)u} \mathrm{Y}_l^{j-1-u}}(x') \ll \overline{\partial_{(0)u} \Phi_l^{j-1-u+t}}(\rho, r, \mathrm{C}; x') \end{array} \right.$$

pour un choix convenable des constantes $\rho$, $r$ et C.

*Pour* $j = 0$, le résultat est évident car $\mathrm{Y}_l^{-\mu_l} = 0$, ainsi que $\overline{\partial_{(0)u} \mathrm{Y}_l^{-1-u}}$. Supposons démontrés $\mathfrak{T}_0, \ldots, \mathfrak{T}_{j-1}$ et démontrons $\mathfrak{T}_j$.

Les équations qui déterminent les inconnues sont :

$$(6)_j \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leqq l \leqq \tau : \quad \partial_{(0)\mu_l} \mathrm{Y}_l^{j-\mu_l} = c_l(\mathrm{Y}_l^{j-\mu_l}) + w_l^j, \\ \quad \text{avec} \quad w_l^j = v_l^j - \displaystyle\sum_{r=\mu_l+1}^{t} \mathcal{H}^r(\varphi^l)(\mathrm{Y}_l^{j-r}); \end{array} \right.$$

$$(7)_{(j-1)} \left\{ \begin{array}{l} 1 \leqq l \leqq \tau, \quad 0 \leqq u < \mu_l : \\ \overline{\partial_{(0)u} \mathrm{Y}_l^{j-1-u}} = g_\beta^{j-1} + \displaystyle\sum_{m=1}^{\tau} \left\{ \sum_{k=\mu_m}^{t-1} \gamma_{\beta,m}^k \, \overline{\partial_{(0)k} \mathrm{Y}_m^{j-1-k}} + \sum_{k=0}^{t-2} \overline{\mathfrak{M}_{\beta,k}^m(\mathrm{Y}_m^{j-k-2})} \right\}. \end{array} \right.$$

Il résulte des hypothèses du théorème I, et du lemme IV, qu'il existe des constantes M et R telles que pour $1 \leqq l \leqq \tau$, $j \geqq 0$ (en convenant que $v_l^0 = 0$), et $x \in \Delta_\mathrm{R}$, on a

$$v_l^j(x) \ll \frac{\mathrm{M} \times j\,!}{\left(\mathrm{R} - \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{n} x^\alpha\right)^{j+1}} = \mathrm{M} \times \Psi_j(\mathrm{R}; x).$$

De même, si $0 \leqq \alpha < t$ et $j \geqq 0$, on a pour $x' \in \Delta_\mathrm{R} \cap \mathrm{Q}$,

$$b_\alpha^j(x') \ll \frac{\mathrm{M} \times j\,!}{\left(\mathrm{R} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^i\right)^{j+1}} = \mathrm{M} \times \overline{\Psi}_j(\mathrm{R}; x').$$

Enfin, les fonctions $\mathrm{A}_\alpha^\beta$, $\gamma_{\beta,m}^k$, et les coefficients des opérateurs $\mathfrak{M}_{\beta,k}^m$ sont des fonctions analytiques de $x'$, en nombre fini : on peut donc supposer que pour $x' \in \Delta_\mathrm{R} \cap \mathrm{Q}$, elle admettent une majorante commune $\mathrm{M} \times \overline{\Psi}_0(\mathrm{R}; x')$. Les coefficients des $c_l$ et des $\mathcal{H}^r(\varphi^l)$ étant en nombre fini et analytiques au voisinage de 0, on peut supposer qu'ils admettent sur $\Delta_\mathrm{R}$ la même fonction majorante $\mathrm{M} \times \Psi_0(\mathrm{R}; x)$.

On cherche d'abord pour quelles conditions sur $\rho$, $r$ et C, $\mathcal{B}^j$ est vérifié :

$$b_\alpha^{j-1}(x') \ll \mathrm{M}\times\overline{\Psi}_{j-1}(\mathrm{R}, x') \ll \mathrm{M}\times\mathrm{R}^t\,\overline{\Phi}_{j-1+t}(\rho, r; x') \qquad (\text{si } \rho \geqq 1 \text{ et } r \leqq \mathrm{R}),$$
$$\mathrm{A}_\beta^\alpha(x') \ll \mathrm{M}\times\overline{\Psi}_0(\mathrm{R}, x').$$

On en déduit :

$$g_\beta^{j-1}(x') = \sum_{\alpha=0}^{t-1} \mathrm{A}_\beta^\alpha(x')\, b_\alpha^{j-1}(x') \ll \frac{t\times\mathrm{M}^2\times\mathrm{R}^t}{\mathrm{R}-r}\times\overline{\Phi}_{j-1+t}(\rho, r; x').$$

Si on impose $r \leqq \mathrm{K.R}$, avec K nombre donné, $\mathrm{K} < 1$, on trouve

$$(8)_j \qquad g_\alpha^{j-1}(x') \ll \mathrm{M}_1\times\overline{\Phi}_{j-1+t}(\rho, r; x') \qquad \left(\mathrm{M}_1 = \frac{t\times\mathrm{M}\times\mathrm{R}^t}{\mathrm{R}(1-\mathrm{K})}\right).$$

Pour $k \geqq \mu_m$, on a, d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{A}^{j-(1+k-\mu_m)}$ :

$$\mathrm{Y}_m^{j-1-k} \ll \Phi_m^{j-1-k+t}, \qquad \text{d'où} \qquad \partial_{(0)k}\,\mathrm{Y}_m^{j-1-k} \ll \partial_{(0)k}\,\Phi_m^{j-1-k+t}.$$

(Remarquons que pour $j$ donné, $j \geqq 0$, on ne peut appliquer l'hypothèse de récurrence que si $j \geqq 1 + k - \mu_m$, c'est-à-dire si $k \leqq j - 1 + \mu_m$. Comme $k$ reste $\leqq t - 1$, ceci est vérifié dès que $j$ est assez grand. Pour les premiers indices $j$, il existe des $k \leqq t - 1$ tels que $k > j - 1 + \mu_m$, mais on a alors $\mathrm{Y}_m^{j-1-k} = 0 \ll \Phi_m^{j-1-k+t}$.)

On a donc :

$$\partial_{(0)k}\,\mathrm{Y}_m^{j-1-k}(x) \ll \partial_{(0)k}\,\Phi_m^{j-1-k+t}(\rho, r, \mathrm{C}; x) = \left(\frac{\rho}{\mathrm{C}}\right)^{k-\mu_m}\times\mathrm{C}^{j+t}\times\Phi_{j-1+t}(\rho, r; x).$$

D'autre part :

$$\gamma_{\beta,m}^k(x') \ll \mathrm{M}\times\overline{\Psi}_0(\mathrm{R}; x').$$

On en déduit, si $\rho \geqq 1$, $r \leqq \mathrm{K.R}$ $(\mathrm{K} < 1)$ et $\frac{\rho}{\mathrm{C}} \leqq 1$ pour $k \geqq \mu_m$,

$$\gamma_{\beta,m}^k(x')\times\overline{\partial_{(0)k}\,\mathrm{Y}_m^{j-1-k}}(x') \ll \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}(1-\mathrm{K})}\times\mathrm{C}^{j+t}\times\overline{\Phi}_{j-1+t}(\rho, r; x').$$

Si on pose $\mathrm{M}_2 = \dfrac{t\times\tau\times\mathrm{M}}{\mathrm{R}(1-\mathrm{K})}$, on trouve

$$(9)_j \qquad \sum_{m=1}^{\tau}\sum_{k=\mu_m}^{t-1} \gamma_{\beta,m}^k(x')\,\overline{\partial_{(0)k}\,\mathrm{Y}_m^{j-1-k}}(x') \ll \mathrm{M}_2\times\mathrm{C}^{j+t}\times\overline{\Phi}_{j-1+t}(\rho, r; x').$$

Si $j - 2 - (k - v) \geqq 0$, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{B}^{j-1-(k-v)}$ (on a $k - v \geqq 0$) donne, si $v < \mu_m$ :

$$\partial_{(0)v}\,\mathrm{Y}_m^{j-k-2}(0, x') \ll \overline{\partial_{(0)v}\,\Phi_m^{j-k-2+t}}(\rho, r, \mathrm{C}; x').$$

Si $j-1-(k-\nu)<0$, on a $\partial_{(0)v}\, Y_m^{j-k-2}(0,x')=0$, et dans ce cas la majoration précédente reste vraie.

Si $v \geqq \mu_m$, on a $k \geqq v \geqq \mu_m$, donc $Y_m^{j-k-2} \ll \Phi_m^{j-k-2+t}$ (d'après $\mathcal{A}^{j-(2+k-\mu_m)}$ si $j \geqq 2+k-\mu_m$ ou parce que $Y_m^{j-k-2}=0$ si $j<1+k-\mu_m$).

On a $\mathfrak{M}_{\beta,k}^{m,v}(x') \ll M \times \overline{\Psi}_0(R,x')$ et par conséquent (en supposant encore $\rho \geqq 1$ et $r \leqq K.R$) :

$$\mathfrak{M}_{\beta,k}^{m,v}(x')\times \partial_{(0)v}\, Y_m^{j-k-2}(0,x') \ll \frac{M}{R(1-K)} \times \overline{\partial_{(0)v}\, \Phi_m^{j-k-2+t}}(\rho, r, C; x'),$$

$$\partial_{(0)v}\, \Phi_m^{j-2-k+t} = \left(\frac{\rho}{C}\right)^{v} \times \Phi_m^{j-2-k+v+t} = \left(\frac{\rho}{C}\right)^{v-\mu_m} C^{j-1-k+v+t} \times \Phi_{j-2-k+v+t}$$

puisque $k-v \geqq 0$ et $r \leqq K.R < R$, on aura

$$\begin{aligned}
\partial_{(0)v}\, \Phi_m^{j-2-k+t} &\ll \left(\frac{\rho}{C}\right)^{v-\mu_m} \times C^{j-1-k+v+t} \times R^{k-v+1} \times \Phi_{j-1+t}\\
&= \frac{1}{\rho^{k-v}} \times \left(\frac{\rho}{C}\right)^{k-\mu_m} \times C^{j-1+t} \times R^{k-v+1} \times \Phi_{j-1+t}\\
&\ll \left(\frac{\rho}{C}\right)^{k-\mu_m} \times C^{j-1+t} \times R^{k-v+1} \times \Phi_{j-1+t} \qquad \text{(puisque } k-v \geqq 0 \text{ et } \rho \geqq 1).
\end{aligned}$$

Si on pose

$$F\left(\frac{\rho}{C}\right) = \sum_{m=1}^{\tau} \sum_{k=0}^{l-2} \sum_{v=0}^{k} \left(\frac{\rho}{C}\right)^{k-\mu_m} \times \frac{M \times R^{k-v}}{(1-K)},$$

on trouve

$$(10)_j \qquad \sum_{m=1}^{\tau} \sum_{k=0}^{l-2} \overline{\mathfrak{M}_{\beta,k}^{m}(Y_m^{j-k-2})}(x') \ll C^{j-1+t} \times F\left(\frac{\rho}{C}\right) \times \overline{\Phi}_{j-1+t}(\rho, r; x').$$

En additionnant $(8)_j$, $(9)_j$ et $(10)_j$, on trouve

$$\overline{\partial_{(0)u}\, Y_l^{j-u-1}}(x') \ll \left(M_1 + M_2 \times C^{j+t} + F\left(\frac{\rho}{C}\right) \times C^{j+t-1}\right) \times \overline{\Phi}_{j-1+t}(\rho, r; x').$$

Si on veut que $\overline{\partial_{(0)u}\, Y_l^{j-1-u}} \ll \overline{\partial_{(0)u}\, \Phi_l^{j-1-u+t}}$, il suffit que

$$\left(M_1 + M_2 \times C^{j+t} + C^{j+t-1} \times F\left(\frac{\rho}{C}\right)\right) \overline{\Phi}_{j-1+t} \ll \overline{\partial_{(0)u} \Phi_l^{j-1-u+t}}.$$

Or

$$\partial_{(0)u}\, \Phi_l^{j-1-u+t} = \left(\frac{\rho}{C}\right)^{u} \times \Phi_l^{j-1+t} = \left(\frac{\rho}{C}\right)^{u-\mu_l} \times C^{j+t} \times \Phi_{j-1+t}.$$

Si on veut assurer le résultat pour tout $u < \mu_l$, puisque $\frac{\rho}{c} \leqq 1$, il suffit que

$$\left(M_1 + M_2 \times C^{j+t} + C^{j+t-1} \times F\left(\frac{\rho}{C}\right)\right) \leqq \left(\frac{\rho}{C}\right)^{-1} \times C^{j+t}.$$

Si on suppose $C \geqq 1$, il suffira pour cela que

$$\frac{\rho}{C}(M_1 + M_2) + \frac{1}{C} \times F\left(\frac{\rho}{C}\right) \leqq 1. \tag{11}$$

Si on suppose $\rho$, $r$ et C choisis de manière à ce que

$$\begin{cases} \rho \geqq 1, \quad r \leqq K.R \quad (K < 1), \quad \frac{\rho}{C} \leqq 1; \\ \frac{\rho}{C}(M_1 + M_2) + \frac{1}{C} F\left(\frac{\rho}{C}\right) \leqq 1, \end{cases}$$

alors $\mathcal{B}^j$ est vérifiée. (On verra plus loin qu'un tel choix est possible.)

Pour démontrer $\mathcal{A}^j$ on utilise le résultat fondamental de la méthode des majorantes qu'on rappelle ici.

Lemme V. — *Si $c$ est un opérateur différentiel d'ordre au plus $(\mu - 1)$ par rapport à $x^0$, ayant pour coefficients des séries entières formelles de $x = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$, et $\mathcal{C}$ un opérateur différentiel majorant $c$. (Chaque coefficient de $c$ est majoré par le coefficient correspondant de $\mathcal{C}$.)*

*Si $f$ est une série entière formelle de $x$, et F une série majorante de $f$. Si $z_u$ $(0 \leqq u < \mu - 1)$ sont des séries entières formelles de $x' = (x^1, \ldots, x^n)$, alors il y a une solution série formelle et une seule au problème de Cauchy formel :*

$$\begin{cases} \partial_{(0)\mu}\, y = c\,(y) + f; \\ 0 \leqq u < \mu : \quad \partial_{(0)u}\, y\,(0, x') = z_u\,(x'). \end{cases}$$

*Si, de plus, Y est une série entière formelle telle que*

$$\begin{cases} \partial_{(0)u}\, Y \gg \mathcal{C}\,(Y) + F; \\ 0 \leqq u < \mu : \quad \partial_{(0)u}\, Y\,(0, x') \gg z_u\,(x'); \end{cases}$$

*alors on a $y \ll Y$.*

L'existence et l'unicité de la série formelle solution sont évidentes. On montre la seconde partie du lemme en prouvant que pour tout $u \geqq 0$,

$$\partial_{(0)u}\, y\,(0, x') \ll \partial_{(0)u}\, Y\,(0, x').$$

Pour $0 \leqq u < \mu$, c'est l'hypothèse sur les données de Cauchy.

Pour $u = \mu$, on a

$$\partial_{(0)\mu}\, y\,(0, x') = c\,(y)\,(0, x') + f\,(0, x') \ll \mathcal{C}\,(Y)\,(0, x') + F\,(0, x') \ll \partial_{(0)\mu}\, Y\,(0, x').$$

En dérivant les deux membres de l'équation, on en déduit le résultat pour $u = \mu + 1, \ldots, u = \mu + 2, \ldots,$ d'où le lemme.

Pour montrer $\mathcal{A}^j$, c'est-à-dire $Y_l^{j-\mu_l} \ll \Phi_l^{j-\mu_l+t}$, il suffira donc de prouver que

$$(12)_j \qquad \partial_{(0)\mu_l} \Phi_l^{j-\mu_l+t} \gg \mathcal{C}_l (\Phi_l^{j-\mu_l+t}) + W_l^j,$$

avec $\mathcal{C}_l$ opérateur différentiel « majorant » $c_l$ et $W_l^j$ majorante de $w_l^j$, puisqu'on sait que :

$$\partial_{(0)\mu_l-1} Y_l^{j-\mu_l}(0, x') \ll \overline{\partial_{(0)\mu_l-1} \Phi_l^{j-\mu_l+t}} (\rho, r, C; x') \quad (\text{d'après } \mathcal{B}^j),$$

$$\partial_{(0)\mu_l-2} Y_l^{j-\mu_l}(0, x') \ll \overline{\partial_{(0)\mu_l-2} \Phi_l^{j-\mu_l+t}} (\rho, r, C; x') \quad (\text{d'après } \mathcal{B}^{j-1}),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\partial_{(0)\mu_l-1-k} Y_l^{j-\mu_l}(0, x') \ll \overline{\partial_{(0)\mu_l-1-k} \Phi_l^{j-\mu_l+t}} (\rho, r, C; x') \quad (\text{d'après } \mathcal{B}^{j-k}),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$Y_l^{j-\mu_l}(0, x') \ll \overline{\Phi_l^{j-\mu_l+t}} (\rho, r, C; x') \quad (\text{d'après } \mathcal{B}^{j-\mu_l+1}).$$

Remarquons que si $j - \mu_l + 1 < 0$, les hypothèses de récurrence ne donnent les résultats annoncés que pour $k \leq j$; si $j < k \leq (\mu_l - 1)$, alors $\partial_{(0)\mu_l-1-k} Y_l^{j-\mu_l}(0, x') = 0$, donc la majoration reste vraie.

Pour montrer $(12)_j$, il faut d'abord trouver une fonction majorante $W_l^j$ de

$$w_l^j = v_l^j - \sum_{r=\mu_l+1}^{t} \mathcal{H}^r (\varphi^l) [Y_l^{j-r}].$$

Pour $\mu_l + 1 \leq r \leq t$, on a $Y_l^{j-r} \ll \Phi_l^{j-r+t}$, d'après les hypothèses de récurrence $\mathcal{A}^{j-1}, \ldots, \mathcal{A}^{j-(t-\mu_l)}$, ou éventuellement, si $j - (t - \mu_l) < 0$, parce que les premières inconnues sont nulles.

Il y a un nombre fini d'opérateurs $\mathcal{H}^r(\varphi^l)$ et $c_l$, donc on peut, quand on applique le lemme III, prendre le même coefficient $\gamma$. On a donc pour $r \geq (\mu_l + 1)$,

$$\mathcal{H}^r (\varphi^l) [Y_l^{j-r}] \ll \gamma \times \rho^r \times \left(\frac{\rho}{C}\right)^{-\mu_l} \times C^{j+1-r+t} \times \Phi_{j+t} = \gamma \times \left(\frac{\rho}{C}\right)^{r-\mu_l} \times C^{j+1+t} \times \Phi_{j+t},$$

donc

$$- \sum_{r=\mu_l+1}^{t} \mathcal{H}^r (\varphi^l) [Y_l^{j-r}] \ll t \times \gamma \times \left(\frac{\rho}{C}\right) \times C^{j+1+t} \times \Phi_{j+t}$$

$\left(\text{puisque } \frac{\rho}{C} \leq 1 \text{ et } r - \mu_l \geq 1\right)$.

D'autre part :

$$v_l^j (x) \ll M \times \Psi_j (R; x) \ll M \times R^t \times \Phi_{j+t} (\rho, r; x).$$

On a donc :

$$w_l^j(x) \ll \left(\mathrm{MR}^t + t\gamma \times \frac{\rho}{\mathrm{C}} \times \mathrm{C}^{j+1+t}\right) \Phi_{j+t}(\rho, r; x) = \mathrm{W}_l^j(x),$$

$$\mathcal{C}_l(\Phi_l^{j-\mu_l}) + \mathrm{W}_l^j \ll \gamma \times \rho^{\mu_l - 1} \times \left(\frac{\rho}{\mathrm{C}}\right)^{-\mu_l} \times \mathrm{C}^{j+1-\mu_l+t}\, \Phi_{j+t} + \mathrm{W}_l^j$$

$$= \left(\frac{\gamma}{\rho} \times \mathrm{C}^{j+1+t} + \mathrm{MR}^t + t\gamma \times \frac{\rho}{\mathrm{C}} \times \mathrm{C}^{j+1+t}\right) \Phi_{j+t}.$$

D'autre part :

$$\partial_{(0)\mu_l} \Phi_l^{j-\mu_l} = \left(\frac{\rho}{\mathrm{C}}\right)^{-\mu_l} \times \left(\frac{\rho}{\mathrm{C}}\right)^{\mu_l} \times \mathrm{C}^{j+1+t} \times \Phi_{j+t}.$$

On aura donc $(12)_j$ si

$$\mathrm{C}^{j+1+t} \geqq \frac{\gamma}{\rho} \times \mathrm{C}^{j+1+t} + \mathrm{MR}^t + t\gamma \times \frac{\rho}{\mathrm{C}} \times \mathrm{C}^{j+1+t},$$

donc *a fortiori* (puisque $\mathrm{C} \geqq 1$) si

$$\frac{\gamma}{\rho} + (t\gamma) \times \frac{\rho}{\mathrm{C}} + \frac{\mathrm{MR}^t}{\mathrm{C}} \leqq 1. \tag{13}$$

Il n'y a plus qu'à montrer maintenant que toutes ces conditions sont compatibles entre elles, et qu'on peut choisir $r$, $\rho$ et C de manière à ce qu'elles soient simultanément vérifiées.

Les conditions sont :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho \geqq 1, \quad r \leqq \mathrm{K.R} \quad (\text{avec } \mathrm{K} < 1), \quad \frac{\rho}{\mathrm{C}} \leqq 1, \quad \mathrm{C} \geqq 1; \\ \frac{\rho}{\mathrm{C}}(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2) + \frac{1}{\mathrm{C}} \mathrm{F}\left(\frac{\rho}{\mathrm{C}}\right) \leqq 1; \\ \frac{\gamma}{\rho} + (t\gamma) \times \frac{\rho}{\mathrm{C}} + \frac{\mathrm{MR}^t}{\mathrm{C}} \leqq 1. \end{array}\right.$$

Soit $\varepsilon \leqq \min\left(1, \frac{1}{2(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2)}, \frac{1}{3t\gamma}\right)$. On impose à $\frac{\rho}{\mathrm{C}}$ d'être égal à $\varepsilon$, tout en laissant à $\rho$ et à C la possibilité de varier. $\mathrm{F}\left(\frac{\rho}{\mathrm{C}}\right)$ a une valeur fixée égale à $\mathrm{F}(\varepsilon)$.

On choisit

$$\mathrm{C} \geqq \mathrm{C}_0 = \max(3\,\mathrm{MR}^t, \ 2\,\mathrm{F}(\varepsilon), \ 1),$$
$$\rho \geqq \rho_0 = \max(3\gamma, \ 1).$$

On prend $\rho$ et C tels que $\mathrm{C} \geqq \mathrm{C}_0$, $\rho \geqq \rho_0$ et $\frac{\rho}{\mathrm{C}} = \varepsilon$. Quant à $r$, il suffit qu'il vérifie $r \leqq \mathrm{K.R}$ (avec $\mathrm{K} < 1$). On voit d'ailleurs qu'on peut prendre $r$ aussi voisin qu'on veut de R, puisque K peut prendre des valeurs aussi proches de 1 qu'on veut (mais une modification de K change $\rho_0$ et $\mathrm{C}_0$).

Pour ce choix de $\rho$, $r$ et C, on a bien, pour tout $j \geqq 1 - \mu_l$,

$$Y_l^j(x) \ll \Phi_l^{j+l}(\rho, r, C; x) = \left(\frac{\rho}{C}\right)^{-\mu_l} \times C^{j+1+l} \times \Phi_{j+l}(\rho, r; x).$$

Il résulte alors du lemme IV que chacune des séries

$$Y_l(x, \zeta) = \sum_{j=1-\mu_l}^{\infty} Y_l^j(x) \times \frac{\zeta^{j+\mu_l+1}}{(j+\mu_l-1)!}$$

définit une fonction analytique au voisinage de l'origine dans $\mathbf{K}^{n+2}$, ce qui termine la démonstration du théorème 1.

4. Application, dans le cas réel, au problème de Cauchy analytique avec données singulières. Support singulier de la solution. — On suppose que E est une variété réelle, et $h$ un opérateur différentiel sur E dont les coefficients sont des fonctions analytiques à valeurs réelles.

Soit $f_0$ une distribution définie sur un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}$. Il existe une fonction continue $g$, définie sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[ \subset V$, telle que $g^{(m)} = f_0$. (On dérive au sens des distributions.)

On pose

$$f_m = g, \quad f_{m-1} = g', \quad \ldots, \quad f_0 = g^{(m)}, \quad f_{-1} = g^{(m+1)}, \quad \ldots$$

et pour $x \in ]-\alpha, \alpha[$,

$$f_{m+1}(x) = \int_0^x g(t)\,dt,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_{m+j+1}(x) = \int_0^x f_{m+j}(t)\,dt,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On construit ainsi une suite $(f_j)$ de distributions de $\mathcal{D}'(]-\alpha, \alpha[)$, telle que pour tout $j \in Z$, on ait $f'_j = f_{j-1}$ (pour $j \geqq m$, $f_j$ est une fonction de classe $C^{j-m}$).

Si $\varphi$ est une fonction indéfiniment différentiable sur un ouvert, telle que grad $\varphi$ ne s'annule pas, et $f$ une distribution, on sait définir sur cet ouvert la distribution $f \circ \varphi$, par exemple en prenant un système de coordonnées dont la première soit $\varphi$. De même, on peut définir $f \circ \varphi(0, x') = f \circ \bar{\varphi}(x')$.

On suppose les hypothèses de la proposition I et théorème I vérifiées, et on étudie le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} h(y) = \displaystyle\sum_{l=1}^{\tau} \sum_{j=1}^{\infty} v_l^j \times (f_{j-l} \circ \varphi^l); \\ 0 \leqq \alpha < t : \quad \partial_{(0)\alpha}\, y(0, x') = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} b_\alpha^j(x') \times (f_{j-\alpha} \circ \psi)(x'). \end{cases}$$

On trouve donc une solution formelle

$$y = \sum_{l=1}^{\tau} \sum_{j=1-\mu_l}^{\infty} Y_l^j \times (f_j \circ \varphi^l)$$

telle que les séries entières $Y_l(x, \zeta)$ $(1 \leq l \leq \tau)$ convergent sur un même voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^{n+2}$.

On écrit $y = u + Y$, avec

$$u = \sum_{l=1}^{\tau} \sum_{j=-\mu_l+1}^{m+t-1} Y_l^j \times (f_j \circ \varphi^l),$$

$$Y = \sum_{l=1}^{\tau} \sum_{j=m+t}^{\infty} Y_l^j \times (f_j \circ \varphi^l),$$

$u$ est une distribution définie sur un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^{n+2}$, et on montre facilement que Y est de classe $C^t$ au voisinage de l'origine.

En effet, pour $j \geq (m+t)$, $f_j$ est de classe $C^t$ au moins, $\varphi^l$ et $Y_l^j$ sont analytiques sur un même voisinage de l'origine et $\varphi^l(0) = 0$, donc si $\delta$ est un nombre positif donné, il existe un voisinage V de l'origine tel que pour $x \in V$ on ait $|\varphi^l(x)| < \delta$.

De plus, d'après la définition de $f_j$, on a pour $j \geq m$,

$$|f_j(\xi)| \leq A \times \frac{|\xi|^{j-m}}{(j-m)!} \qquad \text{(A, constante donnée).}$$

Donc, pour $x \in V$ et $j \geq m$, on a

$$|f_j(\varphi^l(x)) \leq A \times \frac{\delta^{j-m}}{(j-m)!}.$$

De plus, pour $j \geq 1 - \mu_l$, on a

$$Y_l^j(x) \ll \left(\frac{\rho}{C}\right)^{-\mu_l} \times C^{j+1+t} \times \frac{(j+t)!}{\left(r - \rho x^0 - \sum_{i=1}^{n} x^i\right)^{j+1+t}}.$$

Si on impose $\rho |x^0| + \sum_{i=1}^{n} |x^i| \leq \frac{r}{2}$, on aura

$$|Y_l^j(x)| \leq \left(\frac{\rho}{C}\right)^{-\mu_l} \times C^{j+1+t} \times \frac{(j+t)!}{\left(\frac{r}{2}\right)^{j+1+t}}$$

et par conséquent, pour $x$ appartenant à un certain voisinage de l'origine :

$$|Y_l^j(x) \times (f_j \circ \varphi^l)(x)| \leq \frac{A}{\delta^{m+1}} \times \left(\frac{\rho}{C}\right)^{-\mu_l} \times \left(\frac{2C}{r}\right)^t \times \left(\frac{2\delta C}{r}\right)^{j+1} \times \frac{(j+t)!}{(j-m)!}.$$

Si $2\delta C < r$, ce qu'on réalise, $r$ et C étant fixés, pour $\delta$ assez petit, ceci est le terme général d'une série convergente indépendante de $x$ : Y est donc continue. Le même raisonnement montre qu'elle est de classe $C^t$. En effet :

$$\begin{aligned} D^\alpha (Y_l^j \times f_j \circ \varphi^l) &= \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta} Y_l^j \times D^\beta (f_j \circ \varphi^l) \\ &= \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \sum_{r \leq |\beta|} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta} Y_l^j \times \gamma_r^\beta \times (f_{j+r} \circ \varphi^l), \end{aligned}$$

où $\gamma_r^\beta$ est une fonction connue qui dépend de $\varphi^l$, mais pas de $j$, et qui est analytique, donc bornée sur un voisinage de l'origine.

On voit donc que $y = u + Y$ où $u$ est une distribution et Y de classe $C^t$. Si les singularités des données sont d'une certaine forme, on a pu préciser la partie singulière de la solution. L'unicité de la solution résulte du théorème de Cauchy-Kowalewski.

Ce résultat a été démontré dans [9] pour des systèmes dits de type (H), qui sont en fait des systèmes fortement hyperboliques [11]. Dans le cas d'un opérateur scalaire ceci imposait à toutes les caractéristiques d'être simples. On obtient ici le résultat pour des caractéristiques de multiplicités quelconques (mais constantes) et sans hypothèse d'hyperbolicité (puisque la fonction $\Psi$ est fixée), quand $h$ est bien décomposable.

On peut même préciser davantage dans le cas particulier où le support singulier de $f_0$ est l'origine. On montre alors, en reprenant le raisonnement précédent, que $y$ est de classe $C^\infty$ sauf pour les $x$ tels que $\varphi^l(x) = 0$, c'est-à-dire sur $\bigcup_{l=1}^{\tau} S^l$ et le support singulier de la solution est contenu dans le support singulier des données.

5. Application, dans le cas complexe, au problème de Cauchy analytique avec des données possédant des singularités polaires ou logarithmiques. — Il est bien évident que le théorème I permet de généraliser au cas des caractéristiques de multiplicités quelconques (mais pour un opérateur scalaire bien décomposable seulement) les résultats de [15]. On reprend les notations de cet article.

Soit $f_0$ définie sur $\mathbf{C}$ et appartenant à $h(p, q)$ [15] ($p \in \mathbf{C}$ et $q \in \mathbf{N}$), c'est-à-dire

$$f_0(\zeta) = \zeta^p \times P_q(\log \zeta) \qquad (P_q \text{ polynôme de degré} \leq q)$$

si $p$ n'est pas un entier $< 0$,

$$f_0(\zeta) = \zeta^p \, P_{q-1}(\log \zeta) \qquad \text{si} \quad p < 0 \quad \text{et} \quad q \geqq 1;$$
$$f_0(\zeta) = 0 \qquad \text{si} \quad p < 0 \quad \text{et} \quad q = 0.$$

On sait [15] qu'on peut construire une suite $(f_j)$ (pour $j \in Z$), avec $f_j \in h(p + j, q)$, telle que pour tout $j \in Z$ on ait $f'_j = f_{j-1}$.

Les caractéristiques n'ayant pas toutes le même ordre de multiplicité, il faut étendre la définition de $H(p, q)$.

Définition. — *Soit $y$ une fonction holomorphe sur le revêtement simplement connexe du complémentaire par rapport à un voisinage de $a$ dans E de $\bigcup_{l=1}^{\tau} S^l$.*

*On dit que $y \in H(p_1, \ldots, p_\tau; q)$ [avec $(p_1, \ldots. p_\tau, q) \in \mathbf{C}^\tau \times \mathbf{N}$] si elle est de la forme*

$$y(x) = \sum_{l=1}^{\tau} [\varphi^l(x)]^{p_l} \times P_q^l(x; \log \varphi^l(x))$$
$$+ \sum_{l=\tau_1+1}^{\tau} [\varphi^l(x)]^{p_l} \times P_{q-1}^l[x, \log \varphi^l(x)] + \sum_{l=\tau_1+1}^{\tau} P_q(x; \log \varphi^l(x)).$$

*Les $\tau_1$ premiers $p_l$ ne sont pas des entiers négatifs, les $\tau - \tau_1$ derniers sont des entiers négatifs* $\left[\right.$*et $q \geqq 1$, sinon les deux derniers termes de la somme sont remplacés par* $\left.\sum_{l=\tau_1+1}^{\tau} P_0^l(x)\right]$ *$P_q(x; \zeta)$ désigne un polynôme en $\zeta$ de degré $\leqq q$, à coefficients analytiques en $x$.*

Proposition II. — *Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} h(y) = v, \\ \partial_{(0)\alpha}\, y(0, x') = b_\alpha(x') \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq \alpha < t \end{cases}$$

*tel que*

$$v \in H(p - t + 1, \ldots, p - t + 1; q)$$

*et pour $0 \leqq \alpha < t$, $b_\alpha \in H(p - \alpha; q)$ possède une solution et une seule*

$$y \in H(p - \mu_1 + 1, \ldots, p - \mu_\tau + 1; q)$$

*si $h$ est bien décomposable et si l'équation en $\lambda$,*

$$\prod_{s=1}^{\sigma} \mathrm{H}_s\,(0;\lambda,\operatorname{grad}\psi\,(0)) = 0$$

*possède $\tau$ racines complexes distinctes.*

*Remarque* 1. — Si toutes les caractéristiques sont simples, tous les $\mu_l$ valent 1, et on retrouve le résultat de [15] (dans le cas particulier d'un opérateur scalaire).

*Remarque* 2. — Si les caractéristiques sont au plus doubles, on trouve un résultat qui généralise [ ] (les singularités sont de forme plus générale).

Toutes les démonstrations qui suivent sont exposées en détail dans [15]; j'en donnerai donc seulement un bref résumé.

Lemme VI. — *Si la série* $\sum_{j=0}^{\infty} a^j\,(x) \times \frac{\zeta^j}{j\,!}$ *converge au voisinage de l'origine, et si $f_0 \in h\,(p,q)$, alors*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a^j\,(x) \times (f_{j-\mu} \circ \varphi)\,(x) \quad \textit{appartient à } \mathrm{H}\,(p-\mu, q).$$

On a en effet :

$$f_j\,(\zeta) = \zeta^{p+j} \times \mathrm{P}_q^j\,(\log \zeta) = \zeta^{p+j} \times \sum_{r=0}^{q} p_r^j \times (\log \zeta)^r,$$

donc formellement :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} a^j\,(x) \times (f_{j-\mu} \circ \varphi)\,(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} a^j\,(x) \sum_{r=0}^{q} (\varphi\,(x))^{p+j-\mu} \times p_r^{j-\mu}\,[\log \varphi\,(x)]^r \\ &= \sum_{r=0}^{q} [\varphi\,(x)]^{p-\mu} \times \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a^j\,(x) \times p_r^{j-\mu} \times [\varphi\,(x)^j] \right\} \times [\log \varphi\,(x)]^r.\end{aligned}$$

On montre comme dans [15] que la série $\sum_{j=0}^{+\infty} p_r^{j-\mu} \times [\varphi\,(x)]^j \times a^j\,(x)$ converge sur un voisinage de l'origine, et par conséquent, on a

$$\sum_{j=0}^{\infty} a^j\,(x) \times (f_{j-\mu} \circ \varphi)\,(x) = [\varphi\,(x)]^{p-\mu} \times \mathrm{P}_q\,(x; \log \varphi\,(x)) \in \mathrm{H}\,(p-\mu, q).$$

Soit maintenant $v \in \mathrm{H}\,(p-t+1, \ldots, p-t+1; q)$. [Supposons par exemple que $(p-t+1)$ ne soit pas un entier négatif; on aurait une étude analogue dans ce cas.]

On a

$$v(x) = \sum_{l=1}^{\tau} \left\{ \sum_{r=0}^{q} \mathrm{V}_{r,l}(x) [\log \varphi^l(x)]^r \right\} \times [\varphi^l(x)]^{p-t+1}.$$

On pose $f_{-t+1}(\zeta) = \zeta^{p-t+1} \times (\log \zeta)^r$, et à partir de $f_{-t+1}$ on construit une suite $(f_j)$. On aura $f_0 \in h(p, q)$ (puisque $r \leqq q$).

On résoud le problème de Cauchy $h(y) = v_r$ avec pour $0 \leqq \alpha < t$, $\partial_{(0)\alpha}\, y(0, x') = 0$. D'après le théorème I et le lemme VI, il y a une solution $y_r \in \mathrm{H}(p - \mu_1 + 1, \ldots, p - \mu_\tau + 1; q)$.

Soit $\tilde{y} = \sum_{r=0}^{q} y_r$; $\tilde{y}$ est solution de $h(\tilde{y}) = v$, avec des données de Cauchy nulles sur $x^0 = 0$, et

$$\tilde{y} \in \mathrm{H}(p - \mu_1 + 1, \ldots, p - \mu_\tau + 1; q).$$

De même :

$$b_\alpha(x') = [\psi(x')]^{p-\alpha} \times \sum_{r=0}^{q} \mathrm{B}_{\alpha,r}(x') \times [\log \psi(x')]^r.$$

On pose $b_{\alpha,r} = (\psi)^{p-\alpha} \times \mathrm{B}_{\alpha,r} \times (\log \psi)^r$ et on résoud le problème de Cauchy :

$$h(y) = 0,$$
$$\partial_{(0)u}\, y(0, x') = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqq u < t \quad \text{et} \quad u \neq \alpha,$$
$$\partial_{(0)\alpha}\, y(0, x') = b_{\alpha,r}(x').$$

Il y a une solution dans $\mathrm{H}(p - \mu_1 + 1, \ldots, p - \mu_\tau + 1; q)$.

On refait le même raisonnement pour chaque $b_{\alpha,r}$ $(0 \leqq \alpha < t$ et $0 \leqq r < q)$, et on additionne les solutions obtenues et $\tilde{y}$. Le $y$ trouvé est une solution du problème posé. Il résulte du théorème de Cauchy-Kowalewski que c'est la seule, ce qui termine la démonstration de la proposition II.

L'énoncé des résultats démontrés ici a été publié dans [13].

## BIBLIOGRAPHIE

[1] Mme Y. Choquet-Bruhat, *Ondes asymptotiques et approchées pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires* (*J. Math. pures et appl.*, t. 48, 1969, p. 117-158).

[2] De Paris, *Ondes asymptotiques et problème de Cauchy caractéristique local pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 270, série A, 1970, p. 1509-1511).

[3] De Paris, *Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples; lien avec l'hyperbolicité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 272, série A, 1971, p. 478-481).

[4] De Paris, *Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples; lien avec l'hyperbolicité* (*J. Math. pures et appl.*, t. 51, 1972, p. 231-256).

[5] Hamada, *The singularities of the solutions of the Cauchy problem* (*R. I. M. S. Kyoto Univ.*, vol. 3, 1969, p. 21-40).

[6] Hamada, *On the propagation of singularities of the solution of the Cauchy problem* (*R. I. M. S. Kyoto Univ.*, vol. 6, 1970, p. 357-384).

[7] Leray, *Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 85, 1957, p. 389-429).

[8] Leray, Gårding et Kotake, *Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes; analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 92, 1964, p. 263-361).

[9] Ludwig, *Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 13, 1960, p. 473-508).

[10] Vaillant, *Remarques sur les systèmes fortement hyperboliques* (*J. Math. pures et appl.*, t. 50, 1971, p. 25-51).

[11] Vaillant, *Données de Cauchy portées par une caractéristique double, dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles. Rôle des bicaractéristiques* (*J. Math. pures et appl.*, t. 47, 1968, p. 1-40).

[12] Wagschal, *Problème de Cauchy analytique à données méromorphes* (*Séminaire sur les équations aux dérivées partielles*, Collège de France, 1969-1970).

[13] De Paris, *Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 272, série A, 1971, p. 1723-1726).

[14] Wagschal, *Problème de Cauchy analytique à données méromorphes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 272, série A, 1971, p. 1719-1722).

[15] Wagschal, *Problème de Cauchy analytique à données méromorphes* (*J. Math. pures et appl.*) (à paraître).

[16] Duff, *Mixed problems for linear systems of first order* (*Can. J. Math.*, 1957, p. 195-221).

[17] P. D. Lax, *Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems* (*Duke Math. J.*, vol. 24, 1957, p. 627-646).

J.-Cl. De Paris,
Université des Sciences et Techniques de Lille I,
rue Nouvelle,
59-830 Bouvines-Cysoing.