N° d'ordre : 271

THESES

présentées à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur Es Sciences Mathématiques

par

Claude LANGRAND

Première Thèse : **Information généralisée. Estimation et sélection.**

Deuxième Thèse : Structure des ensembles convexes ubiquitaires de V. KLEE

Thèses soutenues le 7 Mars 1973, devant la Commission d'Examen

MM. J. KAMPE DE FERIET, Président d'Honneur
M. PARREAU, Président
P. BENVENUTI, Examinateur
D. BOSQ, Examinateur
BUI-TRONG-LIEU, Invité

Rapporteurs : MM. J. KAMPE DE FERIET
R. THEODORESCU

A ma femme,

à Franck et à Stéphane.

Je remercie vivement, Monsieur le Professeur Parreau qui m'a fait l'honneur de présider le jury et a bien voulu me proposer un deuxième sujet, et Messieurs les Professeurs Benvenuti, Bosq, Bui-Trong-Lieu et Kampé de Fériet qui ont accepté de faire partie de la commission d'Examen.

Je tiens également à remercier Mesdames Bérat et Lengaigne qui ont permis la réalisation matérielle de cette thèse et se sont particulièrement attachées à lui donner une présentation agréable.

* * *

Je remercie C. Andrieu et Nguyen-Trung Hung pour leur collaboration amicale au cours de ces recherches.

Monsieur le Professeur Benvenuti de l'Université de Perugia, et Monsieur le Professeur Théodorescu de l'Université Laval du Canada, qui a bien voulu être le rapporteur de la deuxième partie de cette thèse, m'ont accordé en 1972, pendant leur séjour en France, de nombreuses conversations qui m'ont été extrêmement utiles et je les en remercie.

Que Monsieur le Professeur Bui-Trong-Lieu, de l'Université René Descartes de Paris, qui m'a initié à la recherche, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour les encouragements qu'il n'a jamais cessé de me manifester. Les nombreuses discussions et l'aide efficace, qu'il m'a si gentiment accordées, ont contribué à l'élaboration de mes travaux en théorie des Probabilités et en Statistique Mathématique et notamment de la deuxième partie de cette thèse.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma respectueuse reconnaissance à Monsieur le Professeur Kampé de Fériet, pour l'honneur qu'il m'a fait de diriger mes recherches en théorie de l'Information et pour les conseils si précieux qu'il m'a toujours largement prodigués. Ses multiples remarques et suggestions m'ont conduit à de nombres améliorations tant sur le fond que sur la présentation de la première partie de cette thèse.

PLAN DU MEMOIRE

-:-:-:-:-:-

Cette thèse comprend deux parties distinctes, intitulées "Information généralisée" et "Estimation et Sélection".

PREMIERE PARTIE

La première partie de cette thèse traite de l'Information généralisée selon la théorie que J. Kampé de Fériet et B. Forte [3] ont proposée en 1967.

Seuls, certains des résultats qui suivent, ont été publiés à ce jour sous forme de notes aux Comptes Rendus [12], [13], [14]. Nous apportons donc ici, en même temps qu'un développement des notes ci-dessus, une étude nouvelle de certains problèmes, notamment de ceux liés à la construction ou au prolongement de mesures d'information.

Dans le chapitre I nous présentons la théorie de l'Information. Ce résumé tient compte, dans son élaboration des principaux résultats connus.

Le chapitre II est consacré à la définition et à l'étude de fonctions d'ensemble que nous appelons précapacités fortes. Celles-ci s'introduisent, de façon naturelle, dans les problèmes qui ont trait à la composabilité des mesures d'informations de type Infimum. La notion d'idéal, dont l'importance a été mise en relief en théorie de l'Information, joue ici un rôle essentiel.

En utilisant les propriétés des précapacités fortes, ou des capacités, nous obtenons, dans le chapitre III, des théorèmes généraux de construction et d'extension de mesures d'information de type Infimum.

Dans le chapitre IV, nous définissons les mesures extérieures d'information et nous en précisons les propriétés dans le cas d'une opération de composition régulière quelconque.

Chapitre I

RAPPELS SUR LA THEORIE DE L'INFORMATION

Soient Ω un ensemble non vide, ω un élément de Ω, $\mathcal{C}$ une classe non vide de parties de Ω appelée classe des évènements.

Le problème de la mesure de l'information, tel qu'il peut se présenter par exemple en mécanique statistique, se pose de la manière suivante :

Comment mesurer l'apport de caractérisation, d'un élément ω de Ω, dû à la réalisation d'un évènement A, c'est-à-dire à la connaissance de l'appartenance de ω à A ?

En 1967, J. Kampé de Fériet et B. Forte [3] ont proposé une théorie de la mesure de l'information qui, par sa généralité, peut être développée indépendamment de la notion de probabilité.

Dans ce qui suit, nous en rappelons brièvement l'axiomatique de base et les résultats qui en dérivent.

I 1 - DEFINITION [3] :

Soient Ω *un ensemble non vide et* $\mathcal{C}$ *une classe non vide de parties de* Ω. *Une mesure d'information* J *sur* $\mathcal{C}$ *est une fonction d'ensemble qui vérifie les axiomes 1 et 2 ci-dessous :*

Axiome 1 : J *est une application de* $\mathcal{C}$ *dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$.

Axiome 2 : J *est décroissante sur* $\mathcal{C}$ $(B \subset A \Rightarrow J(B) \geq J(A))$.

Si $\emptyset \in \mathcal{C}$ et $\Omega \in \mathcal{C}$ on obtient donc :

$$0 \leqslant J(\Omega) \leqslant \inf_{A \in \mathcal{C}} J(A) \leqslant \sup_{A \in \mathcal{C}} J(A) \leqslant J(\emptyset) \leqslant +\infty$$

Or, si on veut que les valeurs de $J(\Omega)$ et de $J(\emptyset)$ soient valables quels que soient Ω, J et la classe $\mathcal{C}$ contenant Ω et $\emptyset$, on doit leur donner les valeurs universelles :

$$J(\Omega) = 0 \quad , \quad J(\emptyset) = +\infty \, .$$

On supposera par la suite qu'on a choisi ces valeurs; elles correspondent à l'idée qu'on se fait intuitivement de l'information fournie par ces évènements.

Lorsque $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ est un espace de probabilité, la mesure d'information sur $\mathcal{S}$ définie [1] par

(1) $$\forall A \in \mathcal{S} , \qquad J(A) = c \operatorname{Log} \frac{1}{P(A)}$$

où c est une constante, a été considérée brièvement par Wiener [22] dans un cas particulier. Elle conduit à la théorie de l'information de Shannon [21] ; on l'appelle mesure d'information de Wiener-Shannon.

I 2 - REMARQUES :

Si nous cherchons à calculer l'information fournie par la réalisation de l'évènement $A \cup B$, connaissant les informations respectivement fournies par la réalisation de l'évènement A et de l'évènement B, l'axiome 2 permet d'affirmer que

$$J(A \cup B) \leqslant \inf \left[J(A), J(B) \right]$$

---

[1] si $P(A) = 0$, on pose $J(A) = +\infty$

En général, on ne peut donc calculer $J(A \cup B)$, connaissant $J(A)$ et $J(B)$.

Cependant, dans le cas de la mesure d'information de Wiener-Shannon (1), de l'additivité de la probabilité P sur $\mathcal{S}$, on déduit que

$$\forall (A,B) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, \quad A \cap B = \emptyset$$

$$J(A \cup B) = \sup\left[0, - c \operatorname{Log}\left(e^{-\frac{J(A)}{c}} + e^{-\frac{J(B)}{c}}\right)\right]$$

et même puisque P est σ-additive sur $\mathcal{S}$, on a pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments deux à disjoints de $\mathcal{S}$

$$J\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \sup\left[0, - c \operatorname{Log}\left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-\frac{J(A_n)}{c}}\right)\right]$$

Certaines mesures d'information ont donc la propriété d'être telles que la connaissance de l'information de chacun de deux ensembles disjoints permette de calculer l'information de leur réunion. Nous préciserons ce point au paragraphe I 5 après avoir défini, avec J. Kampé de Fériet et P. Benvenuti [9], la notion d'opération de composition régulière.

I 3.1 - DEFINITION [9] :

Une opération de composition F *est régulière si elle satisfait :*

(C_1) $F : \bar{\mathbb{R}}_+ \times \bar{\mathbb{R}}_+ \to \bar{\mathbb{R}}_+$

(C_2) $F \in C\,[\bar{\mathbb{R}}_+ \times \bar{\mathbb{R}}_+]$

(C_3) $F(x,y) = F(y,x)$

(C_4) $F[x,F(y,z)] = F[F(x,y),z]$

(C_5) $F(x, +\infty) = x$

(C_6) $x' < x'' \Rightarrow F(x',y) \leq F(x'',y)$

ce qui implique

(C_7) $F(x,y) \leq \operatorname{Inf}(x,y)$

Toute opération de composition régulière définissant sur $\bar{\mathbb{R}}_+$ un semi-groupe topologique, l'utilisation des résultats généraux de P.S. Mostert et A.L. Shields [17] a permis à J. Kampé de Fériet, B. Forte et P. Benvenuti [5] de donner la forme générale de l'opération de composition continue d'une information:

Etant donné un ensemble fermé $\Lambda \subset \bar{\mathbb{R}}_+$ tel que $\Lambda \supset \{0, +\infty\}$, soit $\complement\Lambda = \bigcup_{i \in L}]a_i, b_i[$ (L est un ensemble d'indices vide, fini ou dénombrable).

A chaque $i \in L$ associons un nombre $\bar{\mu}_i$, une fonction θ_i et une fonction φ_i satisfaisant :

a) $0 < \bar{\mu}_i \leqslant +\infty$

b) θ_i est une application continue de $[0, \bar{\mu}_i]$ dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, strictement décroissante et telle que

$$\theta_i(0) = b_i \qquad \theta_i(\bar{\mu}_i) = a_i$$

c) $\varphi_i(x) = \theta_i(x)$ si $x \in [0, \bar{\mu}_i]$

$\varphi_i(x) = a_i$ si $x \in [\bar{\mu}_i, +\infty]$

Si on écrit $\Delta_i = \{(x,y) : a_i \leqslant x \leqslant b_i, a_i \leqslant y \leqslant b_i\}$

et $\Delta = \bigcup_{i \in L} \Delta_i$

on obtient

I 3.2 - PROPOSITION [5] :

Quels que soient Λ, $\bar{\mu}_i$, θ_i, *on définit une opération de composition régulière* F *en posant* :

$$\begin{cases} F(x,y) = \operatorname{Inf}(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in \complement \Delta \\ F(x,y) = \varphi_i\left[\theta_i^{-1}(x) + \theta_i^{-1}(y)\right] & \text{si} \quad (x,y) \in \Delta_i \end{cases}$$

et l'ensemble $\Lambda(F) = \{x \in \bar{\mathbb{R}}_+ : F(x,x) = x\}$ *des idempotents de* F *est l'ensemble* Λ.

- En prenant $\Lambda = \{0, +\infty\}$, $\bar{\mu} = 1$, $\theta(x) = c \operatorname{Log} \frac{1}{x}$, on obtient l'opération de composition régulière

$$F(x,y) = \sup\left[0, - c \operatorname{Log}(e^{-\frac{x}{c}} + e^{-\frac{y}{c}})\right]$$

correspondant à l'information de Wiener-Shannon.

- En prenant $\Lambda = \{0, +\infty\}$, $\bar{\mu} = +\infty$, $\theta(x) = \frac{1}{x}$, on obtient l'opération de composition régulière

$$F(x,y) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

qui définit sur $\bar{\mathbb{R}}_+$ le semi-groupe hyperbolique.

- En prenant $\Lambda = \bar{\mathbb{R}}_+$, l'opération de composition régulière est

$$F(x,y) = \operatorname{Inf}(x,y).$$

I 4 - **A** partir d'une opération de composition régulière, J. Kampé de Fériet et P. Benvenuti [9] construisent une suite d'applications F_n de $\bar{\mathbb{R}}_+^n$ dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ définies par

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \bar{\mathbb{R}}_+^n \ , \quad F_1(x_1) = x_1$$

et $$F_n[x_1,\dots,x_n] = F[F_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}),x_n].$$

I 4.1 - PROPOSITION [9] :

Les (C_i) *de la définition I 3.1 impliquent les propriétés suivantes :*

(C_1^n) $F_n : \bar{\mathbb{R}}_+^n \to \bar{\mathbb{R}}_+$

(C_2^n) $F_n \in C[\bar{\mathbb{R}}_+^n]$

(C_3^n) $F_n[x_{i_1},\dots,x_{i_n}] = F_n(x_1,\dots,x_n)$ *quelle que soit la permutation* $(i_1,\dots,i_n)$ *de* $(1,\dots,n)$

(C_4^n) $F_{n+k}(x_1,\dots,x_{n+k}) = F[F_n(x_1,\dots,x_n)\ ,\ F_k(x_{n+1},\dots,x_{n+k})]$

(C_5^n) $F_{n+1}(x_1,\dots,x_n,+\infty) = F_n(x_1,\dots,x_n)$

(C_6^n) $x_1' < x_1'' \Longrightarrow F_n(x_1',x_2,\dots,x_n) \leqslant F_n(x_1'',x_2,\dots,x_n)$

(C_7^n) $F_n(x_1,\dots,x_n) \leqslant \mathrm{Inf}(x_1,\dots,x_n)$

I 4.2 - PROPOSITION [9] :

Pour toute opération de composition régulière, la limite lorsque n *tend vers l'infini de* $F_n[x_1,\dots,x_n]$ *existe :*

$$\forall\, x = (x_1,\dots,x_n,\dots) \in \bar{\mathbb{R}}_+^{\mathbb{N}^*}\ ,$$

$$F_n(x_1,\dots,x_n) \downarrow F_\infty(x_1,\dots,x_n,\dots) = F_\infty(x)$$

De plus, on a :

(C_1^∞) $F_\infty : \bar{\mathbb{R}}_+^{\mathbb{N}^*} \to \bar{\mathbb{R}}_+$

(C_2^∞) F_∞ *est semi-continue supérieurement sur* $\bar{\mathbb{R}}_+^{\mathbb{N}^*}$ *(topologie produit)*

(C_3^∞) $F_\infty(x_{i_1},\dots,x_{i_n},\dots) = F_\infty[x_1,\dots,x_n,\dots]$ *quelle que soit la permutation* $(i_1,\dots,i_n,\dots)$ *de* $\mathbb{N}^*$

(C_4^∞) $N_1 \cup N_2 = N\ ,\ N_1 \cap N_2 = \emptyset$

si $y = (x_n,\ n \in N_1)\ ,\ z = (x_n,\ n \in N_2)$, *on a*

$$F_\infty(x) = F[F_\infty(y), F_\infty(z)]$$

(C_5^∞) $y_1 = +\infty, \quad y_{n+1} = x_n \quad n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_\infty(y) = F_\infty(x)$$

(C_6^∞) $x'_1 < x''_1 \ , \ x'_n = x''_n \quad n \geqslant 2 \Rightarrow F_\infty(x') \leqslant F_\infty(x'')$

(C_7^∞) $F_\infty(x) \leqslant \operatorname{Inf}_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$

Les définitions qui suivent correspondent aux axiomes 4 et 5 de [3].

I 5.1 - DEFINITION :

F étant une opération de composition régulière, et $\mathcal{C}$ une classe de parties d'un ensemble Ω, on dit qu'une mesure d'information J est composable de type F sur $\mathcal{C}$, si pour toute famille finie $(A_i)_{i=1}^n$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{C}$ telle que $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C}$, on a

$$J(\bigcup_{i=1}^n A_i) = F_n[J(A_1),\dots,J(A_n)] .$$

I 5.2 - DEFINITION :

F étant une opération de composition régulière et $\mathcal{C}$ une classe de parties d'un ensemble Ω, on dit qu'une mesure d'information J est composable de type F - σ sur $\mathcal{C}$, si pour toute suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{C}$ telle que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i \in \mathcal{C}$, on a

$$J(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i) = F_\infty[J(A_1),\dots,J(A_n),\dots] .$$

Pour une mesure d'information J de type Wiener-Shannon, on déduit donc, de la σ-additivité de P, la σ-composabilité de J.

Dans le cas particulier où l'opération de composition régulière est Inf(x,y), on a défini des notions de composabilité plus fortes :

I 5.3 - DEFINITION :

Si l'opération de composition est Inf(x,y), *on dit que la mesure d'information* J *est du type* Inf, Inf-σ, Inf-m, *ou* Inf-c *suivant que*

$$J(\bigcup_{i\in L} A_i) = \inf_{i\in L} J(A_i)$$

a lieu pour toute famille $(A_i)_{i\in L}$ *d'éléments de* $\mathcal{C}$*, deux à deux disjoints telle que* $\bigcup_{i\in L} A_i \in \mathcal{C}$*, le cardinal de* L *étant respectivement fini, dénombrable, égal au nombre transfini* m *ou à* card Ω.

Signalons enfin, que pour les mesures d'information de type Inf, on a le résultat suivant :

I 5.4 - PROPOSITION [6] :

La mesure d'information J *étant définie sur un anneau* $\mathcal{R}$*, si*

$$J(A \cup B) = \mathrm{Inf}[J(A), J(B)]$$

est satisfaite pour tous les couples disjoints $(A,B) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$*, elle est nécessairement vérifiée pour tous les couples de l'anneau ; l'opération de composition* Inf(x,y) *est la seule qui possède cette propriété.*

I 6 - TERMINOLOGIE :

Pour abréger le langage, nous avons, par la suite, adopté la terminologie de Meyer [15] .

C'est ainsi qu'un pavage sur un ensemble Ω est une classe de parties de Ω qui contient $\emptyset$; un ensemble pavé est le couple formé d'un ensemble Ω et d'un pavage sur Ω.

De même, nous utiliserons l'écriture "compacte" : l'ensemble $\mathcal{F}$ de parties de Ω est stable pour les opérations $(\cup f, \cap d)$ ou bien $\mathcal{F}$ est stable pour l'opération $(\cap q)$, pour dire que $\mathcal{F}$ est respectivement stable pour les opérations de réunion finie et d'intersection dénombrable ou d'intersection quelconque. L'ensemble stabilisé de $\mathcal{F}$ pour l'opération $(\cup d)$ est noté $\mathcal{F}_\sigma$ et pour l'opération $(\cap d)$, $\mathcal{F}_\delta$.

Nous donnerons enfin la définition suivante :

Une famille $(A_i)_{i\in L}$ *de sous-ensembles de* Ω *est* m-*indexée si* card $L \leq m$, m *étant un nombre transfini. Quand* $m = \aleph_0$ *ou* m = card Ω *on dira* σ-*indexée ou* c-*indexée.*

Chapitre II

PRECAPACITES FORTES

Milisci [16] a établi que la σ-composabilité des mesures d'information dont l'opération de composition régulière est définie par

$$F(x,y) = \varphi[\theta^{-1}(x) + \theta^{-1}(y)]$$

implique l'existence d'une mesure μ telle que

$$J(A) = \varphi(\mu(A)) \ .$$

Ce résultat a permis d'utiliser, pour l'étude de telles informations, certaines propriétés des mesures.

J. Kampé de Fériet et P. Benvenuti [4], d'autre part, ont mis en évidence un lien entre les capacités de Choquet et une classe de mesures d'information de type Inf-c dans un espace topologique séparé. Il était donc tentant d'essayer de préciser ce lien afin de pouvoir faire profiter chacune des théories, de l'information ou du potentiel, des méthodes et des résultats exposés pour l'une d'elles.

Remarquons cependant que ces deux théories semblent assez fondamentalement différentes ; alors que la capacité d'un ensemble est évaluée "par l'intérieur", en théorie de l'information l'approche se fait "par l'extérieur" : chaque fois qu'on mesure une grandeur, la valeur de l'information fournie par cette mesure est une fonction croissante de la précision de cette mesure ; ainsi, par exemple, lors du calcul numérique du nombre π, la technique habituelle de calcul nous apprend d'abord que $\pi \in [3,4[$, puisqu'il appartient à $[\frac{31}{10},\frac{32}{10}[$,....

II 1.1 - DEFINITION (Choquet) :

Soit Ω *un espace topologique séparé. Une capacité (positive) sur* Ω *est une fonction d'ensemble* I *définie sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *, à valeur dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$ *et satisfaisant les conditions suivantes :*

1) I *est croissante* $(A \subset B \Rightarrow I(A) \leq I(B))$;

2) *pour toute suite croissante* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de parties de* Ω, *on a*

$$I(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} I(A_n) \quad ;$$

3) *pour toute suite décroissante* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de compacts, on a*

$$I(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} I(K_n) .$$

La généralisation au cas abstrait est de Meyer [15].

II 1.2 - DEFINITION [15] :

Soit Ω *un ensemble muni d'un pavage* $\mathcal{F}$ *stable pour les opérations* ($\cup$ f, $\cap$ f). *On appelle* $\mathcal{F}$*-capacité (positive) sur* Ω, *une fonction d'ensemble* I *définie sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *, à valeur dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$ *, possédant les propriétés suivantes :*

1) I *est croissante ;*

2) *pour toute suite croissante* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de parties de* Ω

$$I(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} I(A_n) \quad ;$$

3) *pour toute suite décroissante* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{F}$

$$I(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} I(K_n) \quad .$$

Un sous-ensemble A de Ω est *capacitable* si on a l'égalité :

$$I(A) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{F}_\delta \\ K \subset A}} I(K) .$$

II 1.3 - REMARQUE :

La composabilité d'une mesure d'information J définie sur une classe $\mathcal{C}$ fait intervenir directement le comportement de J pour des familles d'éléments de $\mathcal{C}$ dont la réunion appartient à $\mathcal{C}$. Il en résulte que l'inverse d'une mesure d'information J de type Inf σ sur l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties d'un ensemble Ω, qui est une application croissante puisque J est décroissante, vérifie une propriété plus forte que la continuité séquentielle ascendante imposée à une capacité. Ceci a conduit Nguyen-Trung Hung à poser la définition suivante.

II 1.4 - DEFINITION [19] :

m *étant un nombre transfini, on appelle* $\mathcal{F}$-*capacité forte de type* m, *toute* $\mathcal{F}$-*capacité (positive) telle que*

$$I(\bigcup_{i \in L} A_i) = \sup_{i \in L} I(A_i)$$

pour toute famille m-*indexée d'éléments de* $\mathcal{P}(\Omega)$.

En particulier, une $\mathcal{F}$-capacité forte de type σ [1] est une $\mathcal{F}$-capacité telle que dans la définition II 1.2 2) l'égalité ait lieu, non seulement pour toute suite croissante d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ mais pour toute suite *quelconque*.

([1]) On dira de type σ plutôt que de type $\aleph_0$. De même, on dira de type c où c signifie "complet" quand m = card Ω

Notons que nous avons modifié la terminologie de [19], l'adjectif "fort" précisant *dorénavant* qu'on impose à des familles quelconques d'ensembles une condition qui n'était précédemment requise que pour des familles croissantes.

II 2 - L'inverse d'une mesure d'information de type Inf - σ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ n'est une $\mathcal{F}$-capacité forte de type σ que si la mesure d'information appartient à la classe particulière de celles pour lesquelles on a, pour toute suite décroissante $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$,

$$J(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} J(K_n) .$$

Nous avons donc été conduits à séparer les deux notions de continuité séquentielle associées dans la définition d'une $\mathcal{F}$-capacité forte. Ceci nous a amenés à introduire dans [12] et [13] des fonctions d'ensemble, appelées précapacités fortes, dont l'étude est l'objet de ce chapitre.

II 2.1 - DEFINITION :

Soit Ω *un ensemble,* $\mathcal{F}$ *une classe de parties de* Ω, m *un nombre transfini tel que* $m \leq \text{card}\ \Omega$.

Nous appelons précapacité forte de type m *sur* $\mathcal{F}$*, une fonction d'ensemble* I*, définie sur* $\mathcal{F}$*, à valeur dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$ *, telle que*

1) I *soit croissante* $(A \subset B \Rightarrow I(A) \leq I(B))$,

2) *pour toute famille* m*-indexée* $(K_i)_{i\in L}$ *d'éléments de* $\mathcal{F}$ *telle que* $\bigcup_{i\in L} K_i \in \mathcal{F}$, *on ait*

(1) $$I(\bigcup_{i\in L} K_i) = \sup_{i\in L} I(K_i) .$$

Dans le cas où $\mathcal{F}^c = \mathcal{P}(\Omega)$ on dira, plus brièvement, précapacité forte de type m.

Lorsque, dans la définition ci-dessus, on n'est assuré d'avoir l'égalité (1) que pour toute suite *croissante* d'éléments de $\mathcal{F}^c$, nous appelons I, précapacité de type σ sur $\mathcal{F}^c$ de sorte que, pour $\mathcal{F}^c = \mathcal{P}(\Omega)$, notre définition correspond à la définition de précapacité (positive) de C. Dellacherie [2].

II 2.2 - REMARQUE :

L'inverse I d'une mesure d'information J de type Inf - m sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une précapacité forte de type m telle que $I(\emptyset) = 0$ et $I(\Omega) = +\infty$.

Pour l'étude des précapacités fortes nous devons donc profiter des résultats connus en théorie de l'information. C'est ainsi que le rôle essentiel joué par les idéaux dans l'étude des mesures d'information de type Inf, remarqué d'abord par J. Kampé de Fériet [6], puis développé par J. Kampé de Fériet et P. Benvenuti [7], apparaît naturellement dans notre travail.

Mais réciproquement, les résultats que nous obtenons ici pour les précapacités fortes, en particulier les méthodes de prolongement ou de construction, nous conduiront au chapitre III à énoncer, pour les mesures d'information, un certain nombre de propositions nouvelles.

La suite du paragraphe II 2 est consacrée à l'étude des premières conséquences de la définition II 2.1 et à la présentation d'exemples.

II 2.3 - Pour les précapacités fortes de type c, nous avons le résultat suivant, qui est le dual de celui obtenu dans [6] pour les mesures d'information de type Inf c.

PROPOSITION :

Pour qu'une fonction d'ensemble I *définie sur* $\mathcal{P}(\Omega)$, *à valeur dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$, *soit une précapacité forte de type* c *nulle pour l'ensemble vide, il faut et il suffit qu'il existe une application* f *de* Ω *dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$ *telle que*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad , \quad I(A) = \sup_{\omega \in A} f(\omega) .$$

Par convention, puisque f est à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, on pose $I(\emptyset) = 0$ et c'est à cause de cette convention [1] que le résultat n'est énoncé que pour des précapacités fortes de type c nulles pour l'ensemble vide.

Une précapacité forte de type c, I, telle que $I(\emptyset) = a$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ sera obtenue avec une application f de Ω dans $[a, +\infty]$, la convention conduisant alors à poser $I(\emptyset) = a$.

II 2.4 - DEFINITION :

Une classe $\mathcal{N}$ *de parties d'un ensemble* Ω *est un* m-*idéal de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *si*

1) $\emptyset \in \mathcal{N}$,

2) $\mathcal{N}$ *est héréditaire* $(A \in \mathcal{N},\ B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{N})$,

3) *pour toute famille* m-*indexée* $(A_i)_{i \in L}$ *d'éléments de* $\mathcal{N}$, *on a* $\bigcup_{i \in L} A_i \in \mathcal{N}$.

Soit $\mathcal{N}$ un m-idéal de $\mathcal{P}(\Omega)$ et f une application de Ω dans $\bar{\mathbb{R}}_+$. Les fonctions d'ensemble I et I' définies sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par si $A \in \mathcal{N}$, $I(A) = \sup_{\omega \in A} f(\omega)$, $I'(A) = 0$

si $A \notin \mathcal{N}$, $I(A) = +\infty$, $I'(A) = \sup_{\omega \in A} f(\omega)$

sont toutes deux des précapacités fortes de type m.

On obtient donc facilement des exemples de telles fonctions d'ensembles.

II 2.5 - Pour les précapacités fortes de type σ, citons un exemple, puis 2 remarques importantes.

a) *Si Ω est un espace métrique, la dimension de Hausdorff est une précapacité forte de type σ :*

pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$\mathrm{Dim}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Dim}(A_n).$$

b) *Toute précapacité forte de type σ, nulle pour l'ensemble $\emptyset$ est une mesure extérieure.* On peut d'ailleurs remarquer qu'en utilisant II 2.4 on obtient sans difficultés des exemples de mesures extérieures.

c) *Toute précapacité forte de type σ sur un pavage $\mathcal{F}$ stable pour les opérations $(\cup f, \cap f)$ est fortement sous-additive* c'est-à-dire est telle que

$$\forall K \in \mathcal{F}, \ \forall K' \in \mathcal{F},$$

$$I(K \cup K') + I(K \cap K') \leq I(K) + I(K').$$

II 3 - La dimension de Hausdorff est un exemple de précapacité forte de type σ définie, d'emblée, sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Plus souvent, on ne disposera que d'une précapacité forte de type σ sur un pavage $\mathcal{F}$ et on cherchera à la prolonger à $\mathcal{P}(\Omega)$ par une précapacité forte de type σ.

Une méthode générale de construction de $\mathcal{F}$-capacité, où $\mathcal{F}$ est un pavage stable pour les opérations $(\cup f, \cap f)$, consiste [15] d'abord à prolonger à $\mathcal{P}(\Omega)$ une précapacité sur $\mathcal{F}$, I, fortement sous-additive en une précapacité I^* (qui est encore fortement sous-additive).

En renforçant la structure de $\mathcal{F}$ nous obtiendrons, dans la proposition suivante, une précapacité forte de type σ comme prolongement d'une précapacité forte de type σ sur $\mathcal{F}$.

De façon précise, considérons sur un ensemble Ω, un pavage $\mathcal{A}$ stable pour les opérations $(\cup d, \cap f)$ et prenons pour pavage $\mathcal{F}$ un idéal $\mathcal{N}$ de $\mathcal{A}$ (on a donc

1) $\emptyset \in \mathcal{N}$

2) $\mathcal{N}$ est stable pour l'opération $(\cup f)$

3) $A \in \mathcal{A}$, $A \subset N$, $N \in \mathcal{N} \Rightarrow A \in \mathcal{N}$).

Notons $\mathcal{N}_\sigma$ le σ-idéal de $\mathcal{A}$ obtenu en stabilisant $\mathcal{N}$ pour l'opération $(\cup d)$

II 3.1 - PROPOSITION :

Soit I *une précapacité forte de type* σ *sur* $\mathcal{N}$.
Posons pour tout $A \in \mathcal{N}_\sigma$

$$I^*(A) = \sup_{\substack{B \in \mathcal{N} \\ B \subset A}} I(B)$$

puis posons pour tout $C \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$I^*(C) = \inf_{\substack{A \in \mathcal{N}_\sigma \\ A \supset C}} I^*(A) \quad ,$$

Alors I^* *est une précapacité forte de type* σ *qui coïncide avec* I *sur* $\mathcal{N}$.

Par convention, on posera $I^*(C) = +\infty$ quand il n'existe pas $A \in \mathcal{N}_\sigma$ tel que $A \supset C$.

<u>DEMONSTRATION</u> :

1) Puisque d'après II 2.5 c I est une précapacité fortement sous-additive sur $\mathcal{N}$, il est clair [15] que I^* est une précapacité (de type σ sur $\mathcal{P}(\Omega)$).

2) Montrons d'abord que I^* est une précapacité forte de type σ sur $\mathcal{N}_\sigma$.

Soient A_1 et A_2 des éléments de $\mathcal{N}_\sigma$.

Soit $B \in \mathcal{N}$ tel que $B \subset A_1 \cup A_2$.

On a
$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$$

et
$$B \cap A_1 \in \mathcal{N} \quad , \quad B \cap A_2 \in \mathcal{N}$$

d'où
$$I(B) = \sup[I(B \cap A_1) , I(B \cap A_2)] \ .$$

Comme $B \cap A_i \in \mathcal{N}$ et $B \cap A_i \subset A_i$ $(i = 1,2)$

$$I(B \cap A_i) \leq I^*(A_i) \qquad (i = 1,2)$$

donc
$$I(B) \leq \sup[I^*(A_1), I^*(A_2)]$$

et comme cette inégalité a lieu quel que soit $B \in \mathcal{N}$ tel que $B \subset A_1 \cup A_2$ on a

$$I^*(A_1 \cup A_2) \leq \sup[I^*(A_1), I^*(A_2)].$$

On en déduit, grâce à la croissance de I^*, que

$\forall A_1 \in \mathcal{N}_\sigma$, $\forall A_2 \in \mathcal{N}_\sigma$

$$I^*(A_1 \cup A_2) = \sup[I^*(A_1), I^*(A_2)].$$

Mais comme I^* est une précapacité sur $\mathcal{N}_\sigma$, ceci implique que c'est une précapacité forte de type σ sur $\mathcal{N}_\sigma$.

3) Montrons maintenant que I^* est une précapacité forte de type σ sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Il suffit de montrer que

$\forall C_1 \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall C_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$I^*(C_1 \cup C_2) \leq \sup(I^*(C_1), I^*(C_2))$$

dans le cas où $\sup(I^*(C_1), I^*(C_2)) < +\infty$.

Or $$I^*(C_i) = \inf_{\substack{A \in \mathcal{N}_\sigma \\ A \supset C_i}} I^*(A) \qquad (i = 1,2)$$

donc $\forall h > 0$, $\exists A_i \in \mathcal{N}_\sigma$, $A_i \supset C_i$ $(i = 1,2)$ tel que

$$I^*(A_i) \leq I^*(C_i) + h \qquad (i = 1,2)$$

Comme $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{N}_\sigma$ et $A_1 \cup A_2 \supset C_1 \cup C_2$, et puisque I^* est une précapacité forte de type σ sur $\mathcal{N}_\sigma$ et est croissante sur $\mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$I^*(C_1 \cup C_2) \leq I^*(A_1 \cup A_2) = \sup[I^*(A_1), I^*(A_2)]$$
$$\leq \sup[I^*(C_1), I^*(C_2)] + h$$

D'où le résultat.

II 3.2 - REMARQUES :

1) Soit $\mathcal{J} = \{C \subset \Omega : \exists\, A \in \mathcal{N}_\sigma, A \supset C\}$.

Il est clair que $\mathcal{J}$ est un σ-idéal de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Supposons le pavage $\mathcal{A}$ stable pour les opérations $(\cup\, d, \cap\, d)$.

On a $\qquad I^*(C) = +\infty \quad$ si $C \notin \mathcal{J}$

et $\qquad I^*(C) = I^*(A_c)$ si $C \in \mathcal{J}$

A_c étant un élément de $\mathcal{N}_\sigma$ contenant C, tel que

$$I^*(A_c) = \inf_{\substack{A \in \mathcal{N}_\sigma \\ A \supset C}} I^*(A) \quad .$$

2) Si $I^*(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} I(A_n)$ pour toute suite décroissante d'éléments de $\mathcal{N}$, I^* est une $\mathcal{N}$-capacité forte de type σ .

II 3.3 - Lorsqu'on dispose d'une précapacité forte de type σ sur un σ-idéal $\mathcal{N}$ de $\mathcal{A}$, on peut aussi la prolonger à $\mathcal{P}(\Omega)$ "par l'intérieur".

PROPOSITION :

Soit I *une précapacité forte de type* σ *sur un* σ*-idéal* $\mathcal{N}$ *de* $\mathcal{A}$. *Soit* I_* *la fonction d'ensemble définie sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *par*

$$\forall C \in \mathcal{P}(\Omega) \ , \quad I_*(C) = \sup_{\substack{A \subset C \\ A \in \mathcal{N}}} I(A) \ .$$

Alors la resctriction $I_*|_{\mathcal{A}}$ *de* I_* *à* $\mathcal{A}$ *est une précapacité forte de type* σ *sur* $\mathcal{A}$.

DEMONSTRATION :

De la croissance de I_* sur $\mathcal{P}(\Omega)$, on déduit que, pour toute suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$I_*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} I_*(C_n)$$

et donc, si $\sup_{n \in \mathbb{N}} I_*(C_n) = +\infty$ ou si $I_*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n) = 0$,

$$I_*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} I_*(C_n) \ .$$

Si $I_*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n) > 0$, soit h un nombre positif tel que

$$I_*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n) > h \ .$$

D'après la définition de I_*, il existe $A \in \mathcal{N}$ tel que

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \quad \text{et} \quad I(A) > h \ .$$

Supposons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n \in \mathcal{A} ;$$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $A \cap C_n \in \mathcal{A}$ et donc puisque $A \in \mathcal{N}$

$$A \cap C_n \in \mathcal{N}$$

et comme $A \cap C_n \subset C_n$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_*(C_n) \geq I(A \cap C_n) .$$

D'où $$\sup_{n \in \mathbb{N}} I_*(C_n) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} I(A \cap C_n) .$$

Or, I est une précapacité forte de type σ sur $\mathcal{N}$:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} I(A \cap C_n) = I(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap C_n)) = I(A)$$

donc quel que soit $h > 0$ tel que $I_*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n) > h$ on a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} I_*(C_n) > h$$

Il en résulte que $I_*|_{\mathcal{A}}$ est une précapacité forte de type σ sur $\mathcal{A}$.

II 3.4 - REMARQUES :

1) On peut prendre pour $\mathcal{A}$ une σ-algèbre de parties de Ω. Dans le cas où $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, on obtient un prolongement à $\mathcal{P}(\Omega)$.

2) Si I est une précapacité forte de type m sur un m-idéal $\mathcal{N}$ d'une m-algèbre $\mathcal{S}$, $I_*|_{\mathcal{S}}$ est une précapacité forte de type m sur $\mathcal{S}$.

La démonstration se conduit de la même manière que dans la proposition II 3.3.

II 4 - Le problème de prolongement de précapacité forte de type σ sur un pavage a montré le rôle particulier joué par les pavages qui sont des idéaux. Dans ce paragraphe nous allons préciser ce lien.

II 4.1 - DEFINITION :

Nous appelons capacitance forte de type σ, *une classe* $\mathcal{C}$ *de parties de* Ω *vérifiant les propriétés suivantes :*

1) $A \in \mathcal{C}$ *et* $B \supset A \Rightarrow B \in \mathcal{C}$,
2) *pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$, *telle que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$, *il existe un entier* k *tel que* $A_k \in \mathcal{C}$.

L'ensemble des parties non dénombrables de $\mathbb{R}$ est une capacitance forte de type σ.

Dans le cas où la propriété 2) n'a lieu que pour toute suite croissante, nous obtenons la définition de capacitance de Dellacherie [2].

Or, dans [2], on montre que toute capacitance permet de construire une précapacité I et, en appelant encore capacitance un ensemble vide de parties de Ω, on associe à toute précapacité la famille de capacitances

$$\left(\{A \in \mathcal{P}(\Omega) : I(A) > t\}\right)_{t\in\mathbb{R}_+} .$$

Pour les précapacités fortes de type σ, nous avons un résultat semblable à l'aide des capacitances fortes de type σ. De plus, en remarquant que le complémentaire dans $\mathcal{P}(\Omega)$ d'une capacitance forte de type σ distincte de $\mathcal{P}(\Omega)$ est un σ-idéal de $\mathcal{P}(\Omega)$, nous précisons, dans la proposition suivante, comment sont associés σ-idéaux et précapacités fortes de type σ, nulles pour l'ensemble vide.

II 4.2 - PROPOSITION :

1) *Si* I *est une précapacité forte de type* σ *telle que* $I(\emptyset) = 0$, *la famille* $(\mathcal{N}_t)_{t\in\bar{\mathbb{R}}_+}$, *où*

$$\forall\, t \in \bar{\mathbb{R}}_+ \;,\; \mathcal{N}_t = \{M \in \mathcal{P}(\Omega) \;:\; I(M) \leq t\},$$

est une famille croissante de σ-*idéaux de* $\mathcal{P}(\Omega)$.

2) *Si* $(\mathcal{J}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est une famille croissante de* σ-*idéaux de* $\mathcal{P}(\Omega)$, *la fonction d'ensemble, définie sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *par*

$$\forall\, M \in \mathcal{P}(\Omega) \;,\; I(M) = \inf\{t \geq 0 \;:\; M \in \mathcal{J}_t\},$$

est une précapacité forte de type σ.

<u>DEMONSTRATION</u> :

1) - On a $\emptyset \in \mathcal{N}_t$ puisque $I(\emptyset) = 0$.

- $M \subset N \;,\; N \in \mathcal{N}_t \Rightarrow M \in \mathcal{N}_t$ puisque I est croissante.

- si $\forall\, n \in \mathbb{N},\; M_n \in \mathcal{N}_t$, on a

$$I(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} I(M_n) \leq t.$$

Donc $\forall\, t \in \bar{\mathbb{R}}_+ \;,\; \mathcal{N}_t$ est un σ-idéal de $\mathcal{P}(\Omega)$.

2) Soit $(\mathcal{J}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une famille croissante de σ-idéaux de $\mathcal{P}(\Omega)$; soit I la fonction d'ensemble définie par

$$\forall\, M \in \mathcal{P}(\Omega) \;,\; I(M) = \inf\{t \geq 0 \;:\; M \in \mathcal{J}_t\}.$$

Il est clair que I est croissante (et que $I(\emptyset) = 0$).

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$. On a

$$I(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} I(M_n) .$$

Montrons que, si $\sup_{n\in\mathbb{N}} I(M_n) < +\infty$, on a

$$I(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} I(M_n) .$$

Soit $h \in \mathbb{R}_+$ tel que $\sup_{n\in\mathbb{N}} I(M_n) < h$; on a

$$I(M_n) < h \quad , \forall\, n \in \mathbb{N}$$

donc $M_n \in \mathfrak{J}_h$,$\forall\, n \in \mathbb{N}$

et comme $\mathfrak{J}_h$ est un σ-idéal de $\mathcal{P}(\Omega)$,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \in \mathfrak{J}_h .$$

D'où $$I(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n) \leq h .$$

La démonstration est semblable à celle proposée par J. Kampé de Fériet et P. Benvenuti [7]. Les hypothèses, cependant, sont plus faibles.

II 4.3 - DEFINITION :

Soit $(\mathfrak{J}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *une famille croissante de* σ*-idéaux de* $\mathcal{P}(\Omega)$.

Nous posons

$$\mathfrak{J}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathfrak{J}_s .$$

Quel que soit $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{J}_{t^+}$ *est un* σ*-idéal de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *et la famille* $(\mathcal{J}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est continue à droite si*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+ \,,\ \mathcal{J}_t = \mathcal{J}_{t^+} .$$

La famille $(\mathcal{J}_{t^+})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continue à droite.

II 4.4 - REMARQUES :

1) La démonstration de II 4.2 peut s'appliquer avec peu de modifications dans le cas où I est une précapacité forte de type m sur une m-algèbre $\mathcal{S}$.

Les familles $(\mathcal{N}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ et $(\mathcal{J}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont alors des familles de m-idéaux de la m-algèbre $\mathcal{S}$.

2) Si, suivant la proposition II 4.2, on construit une précapacité forte de type σ à l'aide d'une famille croissante $(\mathcal{J}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de σ-idéaux de $\mathcal{P}(\Omega)$ et si $(\mathcal{N}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ est la famille de σ-idéaux de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui lui est associée suivant cette même proposition, on a :

a) $\forall\, t \in \mathbb{R}_+ \,,\ \mathcal{N}_t = \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{J}_s = \mathcal{J}_{t^+}$;

b) les familles de σ-idéaux $(\mathcal{N}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(\mathcal{J}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ coïncident si, et seulement si, la famille $(\mathcal{J}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continue à droite.

En effet, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathcal{N}_t = \{M \in \mathcal{P}(\Omega) : I(M) \leq t\} = \left\{M \in \mathcal{P}(\Omega) : \inf\{s \geq 0 : M \in \mathcal{J}_s\} \leq t\right\} .$$

Si $M \in \mathcal{J}_{t^+}$ on a

$$\inf\{s \geq 0 : M \in \mathcal{J}_s\} \leq t$$

donc $M \in \mathcal{N}_t$.

Inversement, si $M \in \mathcal{N}_t$,

$$\inf\{s \geq 0 : M \in \mathcal{J}_s\} \leq t$$

donc $M \in \mathcal{J}_{t^+}$.

On en déduit donc que *les précapacités fortes de type* σ *construites à partir de la famille* $(\mathcal{J}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *ou de la famille* $(\mathcal{J}_{t^+})_{t\in\mathbb{R}_+}$ *sont égales.*

II 4.5 - EXEMPLE :

Soit $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ un espace mesuré ; soit f une application de Ω dans $\mathbb{R}_+$. Notons $\mathcal{N}_\mu$ le σ-idéal de $\mathcal{S}$ des ensembles de mesure μ nulle. On construit une famille $(\mathcal{J}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de σ-idéaux de $\mathcal{S}$ en posant

$$\mathcal{J}_t = \{A \in \mathcal{S} : A \cap \{\omega : f(\omega) > t\} \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

La précapacité forte de type σ sur $\mathcal{S}$ définie par

$$I(A) = \inf\{t \geq 0 : A \in \mathcal{J}_t\}$$

n'est autre que $\text{ess. sup}(1_A f)$.

II 4.6 - PROPOSITION :

Soit $(I_i)_{i\in L}$ *une famille quelconque de précapacités fortes de type* σ. *La fonction d'ensemble définie par*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) , \quad I(A) = \sup_{i\in L} I_i(A)$$

est une précapacité forte de type σ.

$$\forall i \in L \,, \forall t \in \bar{\mathbb{R}}_+ \,, \text{ soit } \mathcal{N}_{i,t} = \{M \in \mathcal{P}(\Omega) \,:\, I_i(M) \leqslant t\} \,.$$

On a

$$I(A) \leqslant t \iff \forall i \in L \,, I_i(A) \leqslant t$$

$$\forall i \in L, \; I_i(A) \leqslant t \iff \forall i \in L, \; A \in \mathcal{N}_{i,t}$$

$$\forall i \in L, \; A \in \mathcal{N}_{i,t} \iff A \in \mathcal{N}_t = \bigcap_{i \in L} \mathcal{N}_{i,t} \,.$$

Or, $\mathcal{N}_t$ est un σ-idéal de $\mathcal{P}(\Omega)$. D'où le résultat d'après II 4.2 2).

II 5 - Alors que les procédés de construction de précapacités fortes, exposés dans le paragraphe II 3, demandaient la connaissance d'une précapacité forte sur une classe de parties de Ω, les résultats du paragraphe II 4 permettent de répondre à ce problème par la recherche de familles d'idéaux.

Nous allons maintenant donner une méthode de construction générale de précapacité forte de type m à partir d'une fonction d'ensemble définie sur une classe $\mathcal{C}$ de parties de Ω.

II 5.1 - PROPOSITION :

Soient $\mathcal{C}$ *une classe de parties de* Ω, H *une fonction d'ensemble définie sur* $\mathcal{C}$ *à valeur dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$ *et* m *un nombre transfini. La fonction d'ensemble définie sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *par*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \,, \quad I(A) = \inf_{\substack{C_i \in \mathcal{C} \\ \bigcup_{i \in L} C_i \supset A}} \; \sup_{i \in L} H(C_i) \,,$$

où l'infimum est pris pour tous les recouvrements m-*indexés de* A *par des éléments de* $\mathcal{C}$ *, est une précapacité forte de type* m.

On pose $I(A) = +\infty$ quand il n'existe pas de recouvrement m-indexé de A par des éléments de $\mathcal{C}$.

<u>DEMONSTRATION</u> :

1) I est croissante :

Supposons $A_1 \subset A_2$; tout recouvrement m-indexé de A_2 est un recouvrement m-indexé de A_1, donc

$$I(A_1) \leq I(A_2) \quad .$$

2) Montrons que si $(A_i)_{i\in\Lambda}$ est une famille m-indexée d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ on a

$$(1) \qquad I(\bigcup_{i\in\Lambda} A_i) = \sup_{i\in\Lambda} I(A_i) \; .$$

En vertu de la croissance de I on a

$$(2) \qquad I(\bigcup_{i\in\Lambda} A_i) \geq \sup_{i\in\Lambda} I(A_i)$$

donc si $\sup_{i\in\Lambda} I(A_i) = +\infty$, (2) entraîne (1).

Supposons donc $\sup_{i\in\Lambda} I(A_i) < +\infty$.

Quel que soit $\varepsilon > 0$, quel que soit $i \in \Lambda$, on peut trouver, d'après la définition de $I(A_i)$, une famille m-indexée $(C_j^{(i)})_{j\in L_i}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que

$$A_i \subset \bigcup_{j \in L_i} C_j^{(i)}$$

et
$$\sup_{j \in L_i} H(C_j^{(i)}) \leqslant I(A_i) + \varepsilon \quad .$$

Soit $(D_k)_{k \in K}$ la famille dont les éléments sont les $C_j^{(i)}$ pour $j \in L_i$ et $i \in \Lambda$.

On a

$$\bigcup_{i \in \Lambda} A_i \subset \bigcup_{k \in K} D_k \quad \text{et} \quad D_k \in \mathcal{C} \quad \text{quel que soit} \quad k \in K.$$

Montrons que la famille D_k est m-indexée.

D'après, [1], si m est un cardinal transfini et $(m_i)_{i \in \Lambda}$ une famille de cardinaux inférieurs ou égaux à m dont l'ensemble d'indices Λ a un cardinal inférieur ou égal à m, on a

$$\sum_{i \in \Lambda} m_i \leqslant m \quad .$$

De plus, pour toute famille $(L_i)_{i \in \Lambda}$ d'ensembles, le cardinal de la réunion $\bigcup_{i \in \Lambda} L_i$ est au plus égal à $\sum_{i \in \Lambda} \text{card } L_i$.

On a donc ici

$$K = \bigcup_{i \in \Lambda} L_i \text{ d'où } \quad \text{card } K \leqslant \sum_{i \in \Lambda} \text{card } L_i \ .$$

Or, $\text{card } L_i \leqslant m$ et $\text{card } \Lambda \leqslant m$ entraînent que

$$\sum_{i \in \Lambda} \text{card } L_i \leqslant m \quad .$$

D'où
$$\text{card } K \leqslant m \quad .$$

On a mis en évidence une famille m-indexée $(D_k)_{k\in K}$ telle que

$$\forall\, k \in K \;,\; D_k \in \mathcal{C} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i\in\Lambda} A_i \subset \bigcup_{k\in K} D_k .$$

D'après la définition de $I(\bigcup_{i\in\Lambda} A_i)$ on a

$$I(\bigcup_{i\in\Lambda} A_i) \leq \sup_{k\in K} H(D_k).$$

Or, $\sup_{k\in K} H(D_k) = \sup_{i\in\Lambda} (\sup_{j\in L_i} H(C_j^{(i)})) \leq \sup_{i\in\Lambda} (I(A_i) + \varepsilon)$,

d'où

$$(3) \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \qquad I(\bigcup_{i\in\Lambda} A_i) \leq \sup_{i\in\Lambda} I(A_i) + \varepsilon .$$

(2) et (3) assurent alors le résultat (1).

II 5.2 - REMARQUE :

On peut rapprocher le résultat précèdent de la méthode proposée par Munroe [18] pour construire des mesures extérieures :

H étant une fonction d'ensemble définie sur un pavage $\mathcal{F}$ et telle que $H(\emptyset) = 0$, il montre que la fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par

$$\forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega) \;,\; \mu^*(A) = \inf_{\substack{C_n \in \mathcal{F} \\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \supset A}} \sum_{n\in\mathbb{N}} H(C_n)$$

où l'infimum est pris pour tous les recouvrements σ-indexés de A par des éléments de $\mathcal{F}$, est une mesure extérieure.

II 5.3 CAS PARTICULIER :

Dans le cas où la fonction d'ensemble I, définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ comme dans la proposition II 5.1, est telle que l'infimum soit pris pour tous les recouvrements c-indexés par des éléments de $\mathcal{C}$, nous construisons une précapacité forte de type c.

Puisqu'alors

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad , \quad I(A) = \sup_{\omega \in A} I(\{\omega\}),$$

il suffit de connaître $I(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$, pour déterminer I sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Or, $$I(\{\omega\}) = \inf_{\substack{C_i \in \mathcal{C} \\ \bigcup_{i \in L} C_i \supset \{\omega\}}} \sup_{i \in L} H(C_i) \quad \text{avec} \quad \text{card } L \leq \text{card } \Omega$$

- ou bien il n'existe pas $C \in \mathcal{C}$ tel que $C \supset \{\omega\}$ et alors

$$I(\{\omega\}) = + \infty \qquad \text{par convention}$$

- ou bien il existe $C \in \mathcal{C}$ tel $C \supset \{\omega\}$ et

$$I(\{\omega\}) = \inf_{\substack{C \in \mathcal{C} \\ C \supset \{\omega\}}} H(C) \quad . \tag{1}$$

En effet, on a

$$I(\{\omega\}) = \inf_{\substack{C_i \in \mathcal{C} \\ \bigcup_{i \in L} C_i \supset \{\omega\}}} \sup_{i \in L} H(C_i) \leq \inf_{\substack{C \in \mathcal{C} \\ C \supset \{\omega\}}} H(C)$$

et donc l'égalité (1) si $I(\{\omega\}) = +\infty$. Sinon, quel que soit $h > 0$ tel que

$$\inf_{\substack{C_i \in \mathcal{C} \\ \bigcup_{i \in L} C_i \supset \{\omega\}}} \sup_{i \in L} H(C_i) < h,$$

Il existe une famille $(C_i^*)_{i \in L}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que

$$\bigcup_{i \in L} C_i^* \supset \{\omega\} \quad \text{et} \quad \sup_{i \in L} H(C_i^*) < h.$$

Donc, il existe $i_o \in L$ tel que $C_{i_o}^* \in \mathcal{C}$, $C_{i_o}^* \supset \{\omega\}$ et

$$H(C_{i_o}^*) < h,$$

d'où

$$\inf_{\substack{C \in \mathcal{C} \\ C \supset \{\omega\}}} H(C) < h.$$

Donc

$$I(\{\omega\}) = \inf_{\substack{C \in \mathcal{C} \\ C \supset \{\omega\}}} H(C).$$

II 6 - Il est intéressant de chercher à quelles conditions sur $\mathcal{C}$ et sur H, la fonction d'ensemble I, définie à la proposition II 5.1, est un prolongement de H à $\mathcal{P}(\Omega)$.

II 6.1 - PROPOSITION :

Une condition nécessaire et suffisante pour que la précapacité forte de type m, I, *construite à partir de la fonction d'ensemble* H *définie sur une classe* $\mathcal{C}$ *de parties de* Ω, *soit un prolongement de* H *à* $\mathcal{P}(\Omega)$ *est que, pour toute famille* m-*indexée* $(C_i)_{i \in L}$ *d'éléments de* $\mathcal{C}$ *qui recouvre un élément* C *de* $\mathcal{C}$, *on ait*

$$H(C) \leq \sup_{i \in L} H(C_i).$$

DEMONSTRATION :

1) Si I est un prolongement de H à $\mathcal{P}(\Omega)$ on a, puisque I est croissante,

$$\forall C \in \mathcal{C} \quad , \quad H(C) = I(C) \leq I(\bigcup_{i \in L} C_i)$$

pour toute famille m-indexée $(C_i)_{i \in L}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ qui recouvre C ; donc comme

$$I(\bigcup_{i \in L} C_i) = \sup_{i \in L} I(C_i) = \sup_{i \in L} H(C_i)$$

la condition est nécessaire.

2) La condition est suffisante : en effet on a

$$\forall C \in \mathcal{C} \quad , \quad I(C) \leq H(C)$$

puisque C est un recouvrement de lui-même.

Or, si pour tout recouvrement m-indexé de C par des éléments de $\mathcal{C}$ on a :

$$H(C) \leq \sup_{i \in L} H(C_i),$$

l'infimum pour tous les recouvrements m-indexés de C par des éléments de $\mathcal{C}$ est atteint et on a

$$\forall C \in \mathcal{C}, \qquad I(C) = H(C) \ .$$

II 6.2 - COROLLAIRE :

Si H *est une précapacité forte de type* m *sur une classe* $\mathcal{C}$ *de parties de* Ω *stable pour l'opération* $(\cap f)$, *il existe une extension* I *de* H *à* $\mathcal{P}(\Omega)$ *qui est encore une précapacité forte de type* m *et on peut la construire à l'aide de la proposition II 5.1.*

Définissons I par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \ , \quad I(A) = \inf_{\substack{C_i \in \mathcal{C} \\ \bigcup_{i \in L} C_i \supset A}} \ \sup_{i \in L} H(C_i)$$

et montrons que I est une extension de H à $\mathcal{P}(\Omega)$.

Pour tout élément C de $\mathcal{C}$ et toute famille $(C_i)_{i \in L}$ m-indexée d'éléments de $\mathcal{C}$ qui recouvre C, on a

$$C = \bigcup_{i \in L} (C \cap C_i),$$

et pour tout $i \in L$, $C \cap C_i \in \mathcal{C}$ par hypothèse.

Donc, puisque H est une précapacité forte de type m sur $\mathcal{C}$,

$$\forall C \in \mathcal{C} \ , \quad H(C) = \sup_{i \in L} H(C \cap C_i) \leq \sup_{i \in L} H(C_i) \ .$$

On applique ensuite la proposition II 6.1.

II 6.3 - REMARQUES :

1) C'est le corollaire précédent qui nous donne le théorème d'extension le plus puissant obtenu dans ce chapitre, puisque la seule condition imposée à $\mathcal{C}$ est d'être stable pour l'opération $(\cap f)$.

2) Si quel que soit $C \in \mathcal{C}$, il n'existe pas de recouvrement de C par une famille m-indexée $(C_i)_{i\in L}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ distincts de C, toute fonction d'ensemble H, définie sur $\mathcal{C}$, à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, peut être prolongée à $\mathcal{P}(\Omega)$ par une précapacité forte de type m à l'aide de la proposition II 6.1.

Exemple 1 :

$\mathcal{C} = (\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$; f une application de Ω dans $\bar{\mathbb{R}}_+$; H définie sur $\mathcal{C}$ par

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad H(\{\omega\}) = f(\omega)\ .$$

On prolonge H à $\mathcal{P}(\Omega)$ par une précapacité forte de type c. D'après II 5.3,

$$I(\{\omega\}) = H(\{\omega\}).$$

Donc $$\forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega),\quad I(A) = \sup_{\omega\in A} f(\omega),$$
et I une précapacité forte de type c.

Exemple 2 :

$$\Omega = \mathbb{R}\ ; \qquad = \left\{ (\{\omega\})_{\omega\in\mathbb{R}}\ , \mathbb{R} \right\}\ ; \qquad H \text{ définie par}$$

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ H\{\omega\} = 1\ ; \text{et}\ \ H(\mathbb{R}) = +\infty\ .$$

La condition de la proposition II 6.1 est vérifiée pour $m = \aleph_0$ mais ne l'est pas pour $m = \aleph_1$.

Donc I, définie par II 5.1 à l'aide de H et $\mathcal{C}$, est une précapacité forte de type σ. Remarquons que

$I(A) = 1$ si $A \in \mathcal{N}_o$ (σ idéal des parties de $\mathbb{R}$ de cardinal $\leq \aleph_o$)

$I(A) = +\infty$ si $A \notin \mathcal{N}_o$.

Chapitre III

CONSTRUCTIONS ET PROLONGEMENTS DE MESURES D'INFORMATION DE TYPE Inf-m

Dans ce chapitre, nous étudions essentiellement des méthodes de construction ou de prolongement de mesures d'information de type Inf-m.

L'exposé précédent sur les précapacités fortes de type m nous permet d'apporter des solutions nouvelles à ces problèmes en utilisant seulement les propriétés de m-composabilité.

Dans le cas où les mesures d'information possèdent, de plus, la continuité séquentielle descendante sur une certaine classe d'ensembles, nous montrons comment obtenir d'autres méthodes de prolongement à partir de résultats connus sur les capacités.

III 1 - A la méthode générale de construction de précapacités fortes de type m proposée au paragraphe II 5.1, correspond une méthode générale de construction de mesure d'information de type Inf-m sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Le choix des valeurs universelles,

$$J(\emptyset) = +\infty \quad \text{et} \quad J(\Omega) = 0,$$

nous conduit à renforcer quelque peu les hypothèses dans le cas des mesures d'information.

III 1.1 - PROPOSITION :

Soient $\mathcal{C}$ *une classe de parties de* Ω, m *un nombre transfini et* H *une fonction d'ensemble définie sur* $\mathcal{C}$ *à valeur dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$ *telle que*

1) $\sup_{C \in \mathcal{C}} H(C) = +\infty$,

2) *pour tout recouvrement* m-*indexé* $(C_i)_{i \in L}$ *de* Ω *par des éléments de* $\mathcal{C}$, *on ait* $\inf_{i \in L} H(C_i) = 0$.

La fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ *par*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \ , \ J(A) = \sup_{\substack{C_i \in \mathcal{C} \\ \bigcup_{i \in L} C_i \supset A}} \ \inf_{i \in L} H(C_i) \ ,$$

où le supremum est pris pour tous les recouvrements m-*indexés de* A *par des éléments de* $\mathcal{C}$, *est une mesure d'information de type* Inf-m *sur* $\mathcal{P}(\Omega)$.

III 1.2 - REMARQUES :

1) La condition 1 est remplie si $\mathcal{C}$ est un pavage et si $H(\emptyset) = +\infty$.

La condition 2 disparaît s'il n'y a pas de recouvrement m-indexé de Ω par des éléments de $\mathcal{C}$: dans ce cas on a $J(\Omega) = 0$ grâce à la convention habituelle qui consiste à poser $J(A) = 0$ s'il n'existe pas de recouvrement m-indexé de A par des éléments de $\mathcal{C}$.

Lorsque $\Omega \in \mathcal{C}$, la condition implique que H doit être nul pour l'ensemble Ω.

2) Dans le cas où on considère une mesure d'information de type Inf-c sur $\mathcal{P}(\Omega)$, la connaissance de la fonction génératrice Φ permet de calculer l'information de tout ensemble non vide,

$$J(A) = \inf_{\omega \in A} \Phi(\omega)$$

et c'est par convention, parce que Φ est à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, qu'on a posé $J(\emptyset) = +\infty$.

Si nous voulons obtenir J à l'aide de III 1.1, nous sommes conduits à prendre pour $\mathcal{C}$ la classe des sous-ensembles $\{\omega\}$ à un seul élément et l'ensemble $\emptyset$.

Définissant alors H par

$$\forall \omega \in \Omega \ , \quad H(\{\omega\}) = \Phi(\omega) \quad \text{et} \quad H(\emptyset) = +\infty \ ,$$

la condition 1 est vérifiée ; la condition 2 résulte de la définition d'une fonction génératrice :

$$\inf_{\omega \in \Omega} \Phi(\omega) = 0 \ ,$$

et la méthode de construction donne

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \ , \quad J(A) = \inf_{\omega \in A} \Phi(\omega) \ .$$

III 1.3 - PROPOSITION :

Une condition nécessaire et suffisante, pour qu'une mesure d'information J *de type* Inf-m, *construite à l'aide de III 1.1 à partir d'une fonction d'ensemble* H *définie sur une classe* $\mathcal{C}$ *de parties de* Ω, *soit un prolongement de* H *à* $\mathcal{P}(\Omega)$, *est que*

1) $\sup_{C \in \mathcal{C}} H(C) = +\infty$,

2) *pour tout recouvrement* m-*indexé* $(C_i)_{i\in L}$ *d'un élément* $C \in \mathcal{C}$ *(resp. de* Ω *) on ait*

$$\inf_{i\in L} H(C_i) \leq H(C) \qquad (\text{resp. } \inf_{i\in L} H(C_i) = 0).$$

Les deux conditions supplémentaires imposées à H par rapport à la proposition II 6.1 correspondent aux valeurs universelles imposées à J.

III 1.4 - COROLLAIRE :

Si J *est une mesure d'information de type* Inf-m *définie sur un pavage* $\mathcal{F}$ *stable pour l'opération* $(\cap f)$ *et contenant* Ω *, on peut construire une extension de* J *à* $\mathcal{P}(\Omega)$ *qui est encore une mesure d'information de type* Inf-m.

En effet $J(\emptyset) = +\infty$, $J(\Omega) = 0$, et la démonstration est semblable à celle de II 6.2.

En fait, lorsque $\emptyset \notin \mathcal{F}$, on peut encore énoncer un théorème d'extension en utilisant la remarque suivante :

soient J une mesure d'information de type Inf-m sur $\mathcal{F}$ et J' la mesure d'information de type Inf-m sur $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{F}, \qquad J(A) = J'(A)$$

et

$$J'(\emptyset) = +\infty.$$

D'après le corollaire III 1.4 ci-dessus, J' possède une extension J_1 à $\mathcal{P}(\Omega)$ qui est du type Inf-m. Or

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad J_1(A) = J'(A) = J(A).$$

III 1.5 - COROLLAIRE :

Si J *est une mesure d'information de type* Inf-m *sur une classe* $\mathcal{F}$ *de parties de* Ω *qui contient* Ω *et qui est stable pour l'opération* $(\cap f)$, *on peut construire une extension de* J *à* $\mathcal{P}(\Omega)$ *qui est une mesure d'information de type* Inf-m.

La stabilité de $\mathcal{F}$ pour l'opération $(\cap f)$ n'est pas nécessaire ; il suffit d'avoir :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}, \quad A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}.$$

Ce corollaire a déjà été énoncé, dans le cas de mesures d'informations de type Inf-c, par J. Kampé de Fériet et P. Benvenuti dans [4].

III 1.6 - REMARQUE :

Il n'y a pas de contradiction avec la condition nécessaire et suffisante énoncée au paragraphe III 1.3, puisque le prolongement obtenu pour J dans le corollaire III 1.5 ne correspond pas à celui qu'on obtiendrait par III 1.1 avec J et $\mathcal{F}$, mais à celui construit à partir de J' et $\mathcal{F}'$:

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$$

$$\forall A \in \mathcal{F}, \qquad J(A) = J'(A) \qquad \text{et} \qquad J'(\emptyset) = +\infty.$$

Il se trouve que la restriction à $\mathcal{F}$ du prolongement de J' de $\mathcal{F}'$ à $\mathcal{P}(\Omega)$ coïncide avec J et c'est ce qui nous permet d'énoncer le corollaire III 1.5.

III 2 - Soit J une mesure d'information définie sur une classe $\mathcal{C}$ de parties de Ω.

III 2 1 - DEFINITION :

Dans [12] nous définissons la mesure intérieure d'information J_* *sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *par*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \ , \ J_*(A) = \inf_{\substack{K \in \mathcal{C} \\ K \subset A}} J(K) .$$

Par convention nous posons $J_*(A) = +\infty$, s'il n'existe pas $K \in \mathcal{C}$ tel que $K \subset A$.

De plus, pour obtenir la valeur universelle $J_*(\Omega) = 0$, nous imposons à J la condition :

(1) $$\inf_{K \in \mathcal{C}} J(K) = 0$$

ce qui exclut la classe $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$. Si $\mathcal{C}$ contient Ω, (1) est toujours vérifiée.

III 2.2 - PROPOSITION :

Si J *est une mesure d'information de type* Inf-m *sur un* m-*idéal* $\mathcal{N}$ *différent de* $\{\emptyset\}$ *d'une* m-*algèbre* $\mathcal{S}$ *, alors, si*

$$\inf_{K \in \mathcal{N}} J(K) = 0 \ ,$$

la restriction $J_*\big|_{\mathcal{S}}$ *de* J_* *à* $\mathcal{S}$ *est aussi une mesure d'information de type* Inf-m.

Il suffit de remarquer que la fonction d'ensemble $I = \frac{1}{J}$ est une précapacité forte de type m sur $\mathcal{N}$. D'après II 3.4 (remarque 2), la restriction à $\mathcal{S}$ du prolongement I_* de I à $\mathcal{P}(\Omega)$ est une précapacité forte de type m sur $\mathcal{S}$. De plus $I_*(\emptyset) = 0$ puisque $I(\emptyset) = 0$ et $I_*(\Omega) = +\infty$ d'après la condition imposée à J.

Puisque $J_*\big|_{\mathcal{S}} = \dfrac{1}{I_*\big|_{\mathcal{S}}}$, on a le résultat proposé.

III 2.3 - REMARQUES :

1) Si $\mathcal{N}$ est un m-idéal de $\mathcal{P}(\Omega)$, on obtient ainsi un prolongement à $\mathcal{P}(\Omega)$.

2) Pour toute mesure d'information J' sur $\mathcal{S}$, qui prolonge la mesure d'information J de type Inf-m sur $\mathcal{N}$, on a

$$\forall A \in \mathcal{S}, \qquad J_*(A) \geq J'(A) .$$

En effet $\forall A \in \mathcal{S}$, $J_*(A) = \inf\limits_{\substack{K \in \mathcal{N} \\ K \subset A}} J'(K),$

et puisque J' est une mesure d'information sur $\mathcal{S}$,

$$\forall A \in \mathcal{S}, \qquad J'(A) \leq \inf_{\substack{K \in \mathcal{S} \\ K \subset A}} J'(K)$$

donc $\forall A \in \mathcal{S}$, $J'(A) \leq J_*(A)$.

III 3 - Soit J une mesure d'information définie sur une classe $\mathcal{C}$ de parties de Ω.

III 3.1 - DEFINITION :

Nous définissons la mesure extérieure d'information J^* *sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *par*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \;,\quad J^*(A) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{C} \\ K \supset A}} J(K).$$

Par convention nous poserons $J^*(A) = 0$ s'il n'existe pas $K \in \mathcal{C}$, $K \supset A$. Pour obtenir la valeur universelle $J^*(\emptyset) = +\infty$, nous imposons à J la condition

$$\sup_{K \in \mathcal{C}} J(K) = +\infty,$$

ce qui exclut le cas $\mathcal{C} = \{\Omega\}$. Si $\mathcal{C}$ est un pavage, cette condition est automatiquement vérifiée.

III 3.2 - PROPOSITION :

Si J *est une mesure d'information de type* Inf-m *sur un* m-*idéal* $\mathcal{N}$ *d'une* m-*algèbre* $\mathcal{S}$, *la mesure extérieure d'information* J^* *est une mesure d'information de type* Inf-m *sur* $\mathcal{P}(\Omega)$.

<u>DEMONSTRATION</u> :

1) Soit $\mathfrak{J}$ le m-idéal de $\mathcal{P}(\Omega)$ engendré par $\mathcal{N}$ et soit

$$\mathfrak{J}_o = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \;:\; \text{il existe } N \in \mathcal{N} \;,\; N \supset A\} \;;$$

$\mathfrak{J}_o$ est un m-idéal de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui contient $\mathcal{N}$, donc $\mathfrak{J}$. Mais, si $A \in \mathfrak{J}_o$, il existe $N \in \mathcal{N}$ tel que $A \subset N$ et comme $\mathfrak{J}$ est un m-idéal de $\mathcal{P}(\Omega)$ (le plus petit) qui contient $\mathcal{N}$,

$$N \in \mathfrak{J} \quad \Rightarrow \quad A \in \mathfrak{J}.$$

Donc $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_o$.

La convention adoptée pour J^* entraîne donc que

$$\forall A \notin \mathfrak{J} \quad , \quad J^*(A) = 0.$$

2) Il est clair que J^* est à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, décroissante et telle que $J^*(\emptyset) = +\infty$, $J^*(\Omega) = 0$.

Soit $(E_i)_{i\in L}$ une famille m-indexée d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$; on a

$$J^*(\bigcup_{i\in L} E_i) \leqslant \inf_{i\in L} J^*(E_i)$$

et donc l'égalité si $\inf\limits_{i\in L} J^*(E_i) = 0$.

Supposons donc $\inf\limits_{i\in L} J^*(E_i) > 0$, ce qui entraîne que pour tout $i \in L$, $E_i \in \mathfrak{J}$.

Soit h un nombre réel > 0 tel que

$$h < \inf_{i\in L} J^*(E_i).$$

On a $\forall i \in L$, $\exists K_i \in \mathcal{N}$, $K_i \supset E_i$ tel que $h < J(K_i)$.

Or $\bigcup\limits_{i\in L} K_i \in \mathcal{N}$, puisque $\mathcal{N}$ est un m-idéal, et $\bigcup\limits_{i\in L} K_i \supset \bigcup\limits_{i\in L} E_i$;

d'où $$J^*(\bigcup_{i\in L} E_i) \geqslant J(\bigcup_{i\in L} K_i)$$

et comme J est du type Inf-m sur $\mathcal{N}$

$$J^*(\bigcup_{i\in L} E_i) \geqslant \inf_{i\in L} J(K_i) \geqslant h.$$

Donc J^* est une mesure d'information de type Inf-m sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

III 3.3 - REMARQUES :

1) Le cas $m = \aleph_0$ peut être considéré comme corollaire de la proposition II 3.1.

2) si J' est une mesure d'information définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, telle que J' et J coïncident sur $\mathcal{N}$, on a

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad , \quad J^*(A) \leqslant J'(A).$$

En effet $J^*(A) = \sup_{\substack{K\in\mathcal{N}\\ K\supset A}} J'(K)$ puisque J et J' coïncident sur $\mathcal{N}$, et comme J' est décroissante sur $\mathcal{P}(\Omega)$

$$J'(A) \geqslant \sup_{\substack{K\in\mathcal{P}(\Omega)\\ K\supset A}} J'(K) \geqslant J^*(A).$$

3) une m-algèbre est un m-idéal d'elle-même (m-idéal impropre). On obtient, à l'aide de la proposition précédente, le résultat suivant :

III 3.4 - COROLLAIRE :

Si J *est une mesure d'information de type* Inf-m *sur une* m-*algèbre* $\mathcal{S}$, *la mesure extérieure* J^* *est une mesure d'information de type* Inf-m *sur* $\mathcal{P}(\Omega)$.

III 4 - Les résultats, obtenus jusqu'ici sur les mesures d'information de type Inf, étaient des conséquences des propositions établies, dans le chapitre II, pour les précapacités fortes.

Ceux, qui suivent (III 4 et III 5), correspondent à l'utilisation de propriétés des capacités.

Soit J une mesure d'information de type Inf-σ sur un idéal $\mathcal{N}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$. Posons $I = \frac{1}{J}$; I est une précapacité forte de type σ sur $\mathcal{N}$; c'est donc une précapacité sur $\mathcal{N}$ telle qu'on peut définir, comme le fait Meyer [15], la capacité extérieure I^* associée à I. Notons $\hat{J} = J_{*|\mathcal{A}(\mathcal{N})}$ la restriction de la mesure intérieure d'information à l'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ des parties $\mathcal{N}$-analytiques de Ω .

III 4.1 - PROPOSITION :

Si J *est une mesure d'information de type* Inf σ *sur un idéal* (1) $\mathcal{N}$ *de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *telle que*

1) $\inf\limits_{K \in \mathcal{N}} J(K) = 0$,

2) I^* *soit une* $\mathcal{N}$ *-capacité,*

alors le prolongement $\hat{J}$ *de* J *à* $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ *est aussi du type* Inf σ.

<u>DEMONSTRATION</u> :

Si I^* est une $\mathcal{N}$-capacité, on a pour tout ensemble capacitable A

$$I^*(A) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{N}_\delta \\ K \subset A}} I^*(K) ,$$

---

(1) $\mathcal{N}$ est un idéal mais n'est pas un σ-idéal; car, s'il l'était, la seule condition 1) entraînerait l'~~existence d'un prolongement~~ à $\mathcal{P}(\Omega)$ du type Inf-σ d'après la proposition III 2.2.

donc puisque $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\delta$ et $I^*(K) = I(K)$ pour tout $K \in \mathcal{N}$,

$$I^*(A) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{N} \\ K \subset A}} I^*(K) .$$

Par suite $$J_*(A) = \frac{1}{I^*(A)} .$$

D'après le théorème de capacitabilité des ensembles analytiques de Choquet, il est clair que $\hat{J}$ coïncide avec $\frac{1}{I^*}$ sur $\mathcal{A}(\mathcal{N})$.

Il en résulte que $\hat{J}$ possède la continuité séquentielle ascendante sur $\mathcal{A}(\mathcal{N})$: pour toute suite croissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ on a

$$\hat{J}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \hat{J}(A_n).$$

D'autre part, on démontre, comme dans la proposition III 2.2, que $\hat{J}$ est du type Inf (fini). Donc $\hat{J}$ est du type Inf-σ, puisque $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ est stable pour l'opération $(\cup d)$.

III 4.2 - COROLLAIRE :

Si la mesure d'information J *définie sur l'idéal* $\mathcal{N}$ *de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *est du type* Inf-σ *et possède de plus la continuité séquentielle descendante sur* $\mathcal{N}$, *alors* $\hat{J}$ *est une mesure d'information de type* Inf-σ *sur* $\mathcal{A}(\mathcal{N})$.

On a par hypothèse pour toute suite décroissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{N}$

$$J(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} J(A_n) .$$

Donc I^* est une $\mathcal{N}$-capacité puisque

$$I^*(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = I(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} I(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} I^*(A_n).$$

III 5 - Le résultat suivant, utilisé dans la proposition III 4.3, présente un intérêt propre comme méthode de construction de mesures d'information sur l'ensemble des parties d'un ensemble à partir d'une mesure d'information sur l'ensemble des parties d'un autre ensemble.

III 5.1 - PROPOSITION :

Soit f *une application définie sur un ensemble* Ω, *à valeur dans un ensemble* Ω'.

Si J' *est une mesure d'information de type* Inf-m *sur* $\mathcal{P}(\Omega')$, *la fonction d'ensemble* J *définie sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *par*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \ , \quad J(A) = J'(f(A)) = J'(\{f(\omega) \in \Omega' : \omega \in A\}) \ ,$$

est une mesure d'information de type Inf-m *sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *si* $J'(f(\Omega)) = 0$.

Notons que, si f est surjective, on a $J'(f(\Omega)) = 0$ pour toute mesure d'information J' sur $\mathcal{P}(\Omega')$.

Le résultat repose sur les propriétés suivantes :

1) $A \subset B \subset \Omega \implies f(A) \subset f(B) \subset \Omega'$

2) $f(\bigcup_{i\in L} A_i) = \bigcup_{i\in L} f(A_i)$ pour toute famille $(A_i)_{i\in L}$ d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$.

III 5.2 - REMARQUE :

Si $\Omega' = \bar{\mathbb{R}}_+$, la fonction d'ensemble définie par

$$\forall A' \in \mathcal{P}(\bar{\mathbb{R}}_+) \quad , \quad J'(A') = \inf A'$$

est une mesure d'information de type Inf-c sur $\mathcal{P}(\bar{\mathbb{R}}_+)$.

Donc, si f est une application de Ω dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ telle que $J'(f(\Omega)) = 0$, la fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad , \quad J(A) = J'(f(A)) = \inf_{\omega \in A} f(\omega),$$

est une mesure d'information de type Inf-c sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Notons que la condition $J'(f(\Omega)) = 0$ s'exprime

$$\inf_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 0 \ ;$$

c'est donc celle imposée pour les fonctions génératrices.

III 5.3 - PROPOSITION :

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* $(\Omega', \mathcal{F}')$ *deux ensembles pavés,* f *une application de* Ω *dans* Ω'. *Soit* J' *une mesure d'information de type* Inf-σ *sur* $\mathcal{P}(\Omega')$ *possédant la continuité séquentielle descendante sur* $\mathcal{F}'$ *et* J *définie sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *par* $J = J' \circ f$.

Si on a

1) $J'(f(\Omega)) = 0$,

2) $\mathcal{F}' \supset \{f(K) \in \mathcal{P}(\Omega') : K \in \mathcal{F}\}$,

3) *le pavage constitué par les ensembles* $f^{-1}\{\omega'\} \cap K$, *pour* $K \in \mathcal{F}c$, *semi-compact* (1),

alors J *est une mesure d'information de type* Inf-σ *sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *qui possède la continuité séquentielle descendante sur* $\mathcal{F}c$.

DEMONSTRATION :

D'après la proposition III 4.1, J est une mesure d'information de type Inf-σ sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Il suffit donc de montrer que, pour toute suite décroissante $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}c$, on a

$$J(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} J(K_n).$$

Or J' possédant la continuité séquentielle descendante sur $\mathcal{F}c'$, il suffit de vérifier que

$$f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(K_n),$$

l'hypothèse 2) et la définition de J permettant de conclure.

Or on a évidemment

$$f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(K_n).$$

---

(1) Soit E un ensemble et $\mathcal{E}$ un pavage sur E. Le pavage $\mathcal{E}$ est semi-compact [10], si toute famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{E}$, qui possède la propriété de l'intersection finie, a une intersection non vide.

Soit $\omega' \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(K_n)$, montrons qu'il existe $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ tel que $f(\omega) = \omega'$.

$$\omega' \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(K_n) \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} \,,\ \exists\, \omega_n \in K_n \,,\ f(\omega_n) = \omega' .$$

Donc pour toute partie finie $N_o \subset \mathbb{N}$ on a, en posant $n_o = \sup N_o$,

$$\bigcap_{n\in N_o} (f^{-1}(\{\omega'\}) \cap K_n) = f^{-1}(\{\omega'\}) \cap K_{n_o} \neq \emptyset.$$

Comme le pavage est semi-compact d'après l'hypothèse 3),

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (f^{-1}(\{\omega'\}) \cap K_n) \neq \emptyset ,$$

et il suffit de prendre ω dans l'intersection.

III 5.5 - COROLLAIRE :

Soient Ω *et* Ω' *deux espaces topologiques séparés,* $\mathcal{F}^c$ (resp. $\mathcal{F}^{c\,\prime}$) *le pavage sur* Ω (resp. Ω') *constitué par les parties compactes de* Ω (resp. Ω'). *Soit* f *une application continue de* Ω *dans* Ω'.

Si J' *est une mesure d'information de type* Inf-σ *sur* $\mathcal{P}(\Omega)$, *qui est l'inverse d'une capacité de Choquet, et si* $J'(f(\Omega)) = 0$, *alors* $J = J' \circ f$ *définit sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *une mesure d'information de type* Inf-σ, *qui est l'inverse d'une capacité de Choquet.*

CHAPITRE IV

MESURES EXTERIEURES D'INFORMATION

Pour les mesures d'information, l'intérêt s'est porté surtout sur celles qui sont σ-composables. Rappelons (I.4 ; I.5) que, F étant une opération de composition régulière et $\mathcal{S}$ une σ-algèbre de parties d'un ensemble Ω, on dit qu'une mesure d'information J est composable de type F-σ sur $\mathcal{S}$, si, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{S}$, on a

$$(1) \qquad J\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = F_\infty\left[J(A_1),\ldots, J(A_n),\ldots\right] ,$$

l'égalité (1) étant alors assurée pour toute suite d'éléments de $\mathcal{S}$ dans le cas où l'opération de composition régulière est définie sur $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \bar{\mathbb{R}}_+$ par $F(x,y) = \mathrm{Inf}(x,y)$.

Si l'opération de composition régulière F est du type hyperbolique,

$$F(x,y) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} ,$$

une mesure d'information J composable de type F-σ sur $\mathcal{S}$ est l'inverse d'une mesure σ-additive sur $\mathcal{S}$ telle que $\mu(\Omega) = +\infty$ et réciproquement, la σ-composabilité de J et la σ-additivité de μ exprimant la même propriété.

Or si μ^* est une mesure extérieure, c'est-à-dire une fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, croissante, sous σ-additive et telle que $\mu^*(\emptyset) = 0$, la restriction de μ^* à la σ-algèbre des ensembles

μ^*-mesurables est une mesure σ-additive sur $\mathcal{S}$ (voir par ex. [20]).

Si $\mu^*(\Omega) = +\infty$, la fonction d'ensemble $J^* = \frac{1}{\mu^*}$ définit sur $\mathcal{P}(\Omega)$ une mesure d'information et sa restriction à $\mathcal{S}$ est donc composable de type F-σ avec pour F l'opération de composition régulière du type hyperbolique. Ainsi il est naturel d'appeler J^* mesure extérieure d'information.

Nous en précisons ci-dessous les propriétés pour une opération de composition régulière *quelconque*.

IV 1.1 - DEFINITION :

Soient Ω *un ensemble non vide,* F *une opération de composition régulière ; nous dirons qu'une fonction d'ensemble* J^* *définie sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *est une* F-*mesure extérieure d'information de type* σ *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1) J^* *est à valeur dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$;

2) $J^*(\emptyset) = +\infty$, $J^*(\Omega) = 0$;

3) J^* *est décroissante :* $A \subset B \Rightarrow J^*(A) \geq J^*(B)$;

4) *pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *d'éléments de* $\mathcal{P}(\Omega)$, *on a*

(1) $$J^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big) \geq F_\infty\big[J^*(A_1),\ldots, J^*(A_n),\ldots\big].$$

On permet aux éléments de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ne pas être tous distincts ; pour toute famille finie $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ on obtient donc, en associant la suite $(A_1,\ldots,A_n, \emptyset, \emptyset,\ldots)$,

$$J^*\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \geq F_n\big[J(A_1),\ldots, J(A_n)\big].$$

IV 1.2 - CONSEQUENCES :

1) Toute mesure d'information de type Inf-σ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une F-mesure extérieure d'information de type σ et ceci quelle que soit l'opération de composition régulière F :

il suffit en effet de remarquer que

$$\forall (x_1,\ldots,x_n,\ldots) \in \bar{\mathbb{R}}_+^{\mathbb{N}^*} \ , \quad F_\infty[x_1,\ldots,x_n,\ldots] \leq \inf_{n\in \mathbb{N}^*} x_n \ .$$

2) Il y a identité entre les mesures d'information de type Inf-σ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est les Inf-mesures extérieures d'information de type σ.

IV 2.1 - DEFINITION :

Un ensemble $E \subset \Omega$ *est* J^*-F-*mesurable si on a*

$$\forall A \subset E \ , \quad \forall B \subset \complement E \ , \quad J^*(A \cup B) = F[J^*(A), J^*(B)] \ .$$

IV 2.2 - REMARQUES :

1) Dans le cas où F est l'opération de composition régulière de type hyperbolique, cette définition conduit pour $\mu^* = \frac{1}{J^*}$ à la définition de Rogers [20] des ensembles μ^*-mesurables qui est une variante de celle de Carathéodory. Cette remarque nous permettra, par la suite, d'utiliser certaines techniques de démonstration de [20].

2) Pour une mesure d'information de type Inf-σ sur $\mathcal{P}(\Omega)$, tout élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ est mesurable.

3) Il faut toujours préciser l'opération de composition régulière F quand on parle d'ensembles mesurables comme le montre l'exemple suivant.

Exemple :

Soit Ω un ensemble de cardinal $\aleph_2$. On pose pour tout $E \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$J^*(E) = +\infty \quad \text{si} \quad \text{card } E \leq \aleph_0$$

$$J^*(E) = 1 \quad \text{si} \quad \aleph_0 < \text{card } E \leq \aleph_1$$

$$J^*(E) = 0 \quad \text{si} \quad \aleph_1 < \text{card } E$$

J^* est une mesure d'information de type Inf-σ sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Donc tout sous-ensemble de Ω est J^*-Inf-mesurable.

Soit F l'opération de composition régulière du type hyperbolique. D'après IV 1.2, J^* est une F-mesure extérieure d'information de type σ.

Soit E tel que card E = $\aleph_1$, E n'est pas J^*-F-mesurable puisqu'il existe $B \subset \complement E$ tel que card B = $\aleph_1$,

$$J^*(E \cup B) = 1$$

et

$$\frac{1}{\frac{1}{J^*(E)} + \frac{1}{J^*(B)}} = \frac{1}{2} .$$

IV 2.3 - PROPOSITION :

Soit J^* *une* F-*mesure extérieure d'information de type* σ ; *un ensemble* E *est* J^*-F-*mesurable si, pour tout* $A \subset E$, *tout* $B \subset \complement E$, *tels que* $J^*(A) \notin \Lambda(F)$ *et* $J^*(B) \notin \Lambda(F)$, $\Lambda(F)$ *étant l'ensemble des idempotents de* F , *on a*

$$J^*(A \cup B) \leq F[J^*(A), J^*(B)] .$$

DEMONSTRATION :

On a $J^*(A \cup B) \geq F[J^*(A), J^*(B)]$ comme conséquence de la définition IV 1.1.

Si $J^*(A)$ ou $J^*(B) \in \Lambda(F)$, on a d'après les propriétés d'une opération de composition régulière

$$F[J^*(A), J^*(B)] = \mathrm{Inf}[J^*(A), J^*(B)].$$

Supposons que $J^*(A) = \mathrm{Inf}[J^*(A), J^*(B)]$, alors

$$F[J^*(A), J^*(B)] = J^*(A)$$

et comme $A \subset A \cup B$ on a

$$J^*(A \cup B) \leq J^*(A)$$

d'où $$J^*(A \cup B) = F[J^*(A), J^*(B)].$$

IV 2.4 - COROLLAIRE :

Si $\Gamma_1(J^*) : \{x \in \bar{\mathbb{R}}_+ : \exists\, A \in \mathcal{P}(\Omega) , J^*(A) = x\}$ *est inclus dans* $\Lambda(F)$, *tous les sous-ensembles de* Ω *sont* J^*-*F*-*mesurables*.

En particulier si $\Gamma_1(J^*) = \{0, + \infty\}$, tous les sous-ensembles de Ω sont J^*-F-mesurables pour toute opération de composition régulière F.

IV 2.5 - PROPOSITION :

Soit J^* *une* F-*mesure extérieure d'information de type* σ. *Alors*

1) les ensembles mesurables forment une σ-*algèbre* $\mathcal{S}^*$ *de parties de* Ω *qui contient les ensembles de mesure extérieure d'information infinie.*

2) si $(E_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite d'ensembles de* $\mathcal{S}^*$ *deux à deux disjoints, on a*

$$J^*(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} E_i) = F_\infty[J^*(E_1),\dots,J^*(E_i),\dots] .$$

DEMONSTRATION :

1) Soit $N \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $J^*(N) = +\infty$.

$\forall A \subset N$, $\forall B \subset \complement N$,

$$J^*(B) \geqslant J^*(A \cup B) \geqslant F[J^*(A), J^*(B)] = J^*(B)$$

puisque $J^*(A) \geqslant J^*(N)$ et que $F[+\infty, J^*(B)] = J^*(B)$.

On a donc $$J^*(A \cup B) = F[J^*(A), J^*(B)]$$

et N est mesurable.

Donc $\emptyset$ est mesurable d'après la propriété 2) de la définition IV 1.1.

2) Si E est mesurable, $\complement E$ est mesurable d'après la symétrie de la définition IV 2.1.

3) Soient E_1 et E_2 deux ensembles mesurables.

Soient $A \subset E_1 \cup E_2$ et $B \subset \complement(E_1 \cup E_2)$,

$$A \cup B = (A \cap E_1) \cup [(A \cup B) \cap \complement E_1].$$

E_1 mesurable entraîne donc que

$$J^*(A \cup B) = F[J^*(A \cap E_1), J^*((A \cup B) \cap \complement E_1)] \quad ;$$

or $(A \cup B) \cap \complement E_1 = (A \cap \complement E_1) \cup B$ et

E_2 mesurable entraîne que

$$J^*((A \cup B) \cap \complement E_1) = F[J^*(A \cap \complement E_1), J^*(B)] .$$

Mais puisque E_1 est mesurable

$$J^*(A) = F[J^*(A \cap E_1), J^*(A \cap \complement E_1)] .$$

Donc $$J^*(A \cup B) = F_3[J^*(A \cap E_1), J^*(A \cap \complement E_1), J^*(B)]$$

$$= F[J^*(A), J^*(B)].$$

On a donc $E_1 \cup E_2$ mesurable.

4) Soit $(E_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints.

Soient $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ et $B \subset \complement \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

D'après le 3), $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ est mesurable pour tout entier $n > 0$. D'où

puisque $J^*(A \cup B) \leq J^*[(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) \cup B]$

et $$J^*[(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) \cup B] = F[J^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) , J^*(B)]$$

on a $$J^*(A \cup B) \leqslant F[J^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)), J^*(B)] .$$

Or les ensembles E_i étant disjoints et mesurables on a

$$J^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) = J^*([A \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)] \cup (A \cap E_n))$$
$$= F[J^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)), J^*(A \cap E_n)] ,$$

d'où $$J^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) = F_n[J^*(A \cap E_1),\dots, J^*(A \cap E_n)] ,$$

et $$J^*(A \cup B) \leqslant F_{n+1}[J^*(A \cap E_1),\dots, J^*(A \cap E_n), J^*(B)] ;$$

d'où, puisque l'inégalité ci-dessus a lieu quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

(1) $$J^*(A \cup B) \leqslant F_\infty[J^*(A \cap E_1),\dots, J^*(A \cap E_n),\dots, J^*(B)];$$

or le membre de droite de l'inégalité ci-dessus vaut

(2) $$F[F_\infty[J^*(A \cap E_1),\dots, J^*(A \cap E_n),\dots] , J^*(B)],$$

et d'après la définition de J^*, comme $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$,

(3) $$J^*(A) = J^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)) \geqslant F_\infty[J^*(A \cap E_1),\dots, J^*(A \cap E_n),\dots]$$

d'où

(4) $$J^*(A \cup B) \leqslant F[J^*(A), J^*(B)] ,$$

et on conclut à la mesurabilité de $\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} E_i$. 1),2),3),4) assurent la première partie de la proposition.

5) Démontrons la 2ème partie de la proposition ; soit $(E_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints.

D'après les inégalités 1),2),3),4), on a

$$J^*(A \cup B) \leqslant F[F_\infty[J^*(A \cap E_1),\ldots, J^*(A \cap E_n),\ldots] , J^*(B)] \leqslant F[J^*(A), J^*(B)] .$$

Or puisque $\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} E_i$ est un ensemble mesurable d'après le 4) on a

$$J^*(A \cup B) = F[F_\infty[J^*(A \cap E_1),\ldots,J^*(A \cap E_n),\ldots],J^*(B)] .$$

Prenons $B = \emptyset$; on obtient, puisque $J^*(B) = +\infty$,

$$J^*(A) = F_\infty[J^*(A \cap E_1),\ldots, J^*(A \cap E_n),\ldots] .$$

Prenons maintenant $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} E_i$; on obtient

$$J^*(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} E_i) = F_\infty[J^*(E_1),\ldots,J^*(E_n),\ldots] ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

IV 2.6 - CONSEQUENCE :

La restriction, à la σ-algèbre des ensembles mesurables, d'une F-mesure extérieure d'information de type σ est une mesure d'information de type F-σ.

IV 3 - Dans la proposition qui suit, nous allons montrer comment construire des F-mesures extérieures d'information de type σ. Nous utiliserons deux lemmes :

IV 3.1 - LEMME :

Soit F *une opération de composition régulière ;*
si $(x_1,\ldots,x_n,\ldots) \in \bar{\mathbb{R}}_+^{\mathbb{N}^*}$ *et* $(y_1,\ldots,y_n,\ldots) \in \bar{\mathbb{R}}_+^{\mathbb{N}^*}$, *on a*

$$F[F_\infty(x_1,\ldots,x_n,\ldots),F_\infty(y_1,\ldots,y_n,\ldots)] = F_\infty[F(x_1,y_1),\ldots,F(x_n,y_n),\ldots] .$$

En effet, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$F_n[F(x_1,y_1),\ldots,F(x_n,y_n)] = F_{2n}[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n] = F[F_n(x_1,\ldots,x_n),F_n(y_1,\ldots,y_n)],$$

d'où le résultat par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini.

IV 3.2 - LEMME :

Si F *est une opération de composition régulière, on peut construire pour tout* $\eta \in]0, +\infty[$, *une suite* $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *d'éléments de* $]0, +\infty[$ *telle que*

$$F_\infty[\eta_1,\ldots, \eta_i,\ldots] \geq \eta .$$

Remarquons que, si l'opération F est l'opération Inf, le résultat est trivial : on peut prendre $\eta_i = \eta$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit f l'application de $\bar{\mathbb{R}}_+$ dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ définie par $f(x) = F(x,x)$; f est continue et $f(0) = 0$, $f(+\infty) = +\infty$. Donc $f(\bar{\mathbb{R}}_+) = \bar{\mathbb{R}}_+$ et on a

$$\forall \eta \in]0, +\infty[\ , \ \exists \ \eta_1 \in]0, +\infty[\ , \ f(\eta_1) = F(\eta_1, \eta_1) = \eta \ .$$

Notons $\Lambda(F) = \{x \in \bar{\mathbb{R}}_+ : F(x,x) = x\}$.

- si $\eta \in \Lambda(F)$, $F(\eta, \eta) = \eta$ et la suite constante de terme général $\eta', \eta' \geq \eta$ répond aux conditions de l'énoncé.

- si $\eta \notin \Lambda(F)$, soit $\lambda_o = \sup\limits_{\substack{\lambda \in \Lambda(F) \\ \lambda < \eta}} \lambda$ et $\lambda_\infty = \inf\limits_{\substack{\lambda \in \Lambda(F) \\ \lambda > \eta}} \lambda$.

  Comme $\Lambda(F)$ est fermé, $\lambda_o \in \Lambda(F)$ et $\lambda_\infty \in \Lambda(F)$.

  Des propriétés des I-semi groupes [17], on peut déduire que $[\lambda_o, \lambda_\infty]$ est un I-semi-groupe (qui n'a pas d'autre idempotent que λ_o et λ_∞) et que

$$\forall \nu \in [\lambda_o, \lambda_\infty] \ , \ F(\lambda_o, \nu) = \lambda_o \ , \ F(\lambda_\infty, \nu) = \nu \ .$$

  On a donc $f([\lambda_o, \lambda_\infty]) = [\lambda_o, \lambda_\infty]$ et

$$\forall \eta \in]\lambda_o, \lambda_\infty[\ , \exists \ \eta_1 \in]\lambda_o, \lambda_\infty[\ , \ F(\eta_1, \eta_1) = \eta \ .$$

  Or F est simplifiable sur $[\lambda_o, \lambda_\infty]$, c'est-à-dire que

$$F(\nu, \gamma) = F(\nu, \gamma') \neq \lambda_o \Longrightarrow \gamma = \gamma' \ .$$

  D'où

$$\forall \eta \in]\lambda_o, \lambda_\infty[\ , \ \exists \ \eta_1 \in]\eta, \lambda_\infty[\ , \ F(\eta_1, \eta_1) = \eta$$

et η_1 est unique car si $\eta'_1 \in]\lambda_o,\lambda_\infty[$ et $F(\eta'_1,\eta'_1) = \eta$,
on aurait si $\eta'_1 < \eta_1$, (resp. si $\eta'_1 > \eta_1$)

$$F(\eta'_1,\eta'_1) \leqslant F(\eta'_1,\eta_1) \leqslant F(\eta_1,\eta_1)$$

$$(\text{resp.} \quad F(\eta'_1,\eta'_1) \geqslant F(\eta'_1,\eta_1) \geqslant F(\eta_1,\eta_1))$$

d'où $F(\eta'_1,\eta_1) = F(\eta_1,\eta_1)$ et donc $\eta'_1 = \eta_1$.

On peut donc construire une suite strictement croissante $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ telle que si $\eta \in]\lambda_o,\lambda_\infty[$, on ait quel que soit $i \in \mathbb{N}^*$, $\eta_i \in]\lambda_o,\lambda_\infty[$.

2) Montrons dans le cas où $\eta \notin \Lambda(F)$ que

$$F_\infty[\eta_1,\ldots, \eta_i,\ldots] \geqslant \eta \ .$$

En posant $\eta = \eta_o$, on a

$$\forall\, i \in \mathbb{N} \ , \qquad \eta_i = F(\eta_{i+1}, \eta_{i+1}) < F_1(\eta_{i+1}) = \eta_{i+1}$$

et

$$\eta_i < F(\eta_{i+1}, \eta_{i+2}) < F_1(\eta_{i+1}),$$

les inégalités étant strictes puisque F est simplifiable sur $[\lambda_o,\lambda_\infty]$ et que la suite $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $]\lambda_o,\lambda_\infty[$ est strictement croissante.

Supposons que pour n entier, $n > 3$, on ait quel que soit $i \in \mathbb{N}$,

$$\eta_i < F_{n-1}(\eta_{i+1},\ldots, \eta_{i+n-1}) < F_{n-2}(\eta_{i+1},\ldots, \eta_{i+n-2}) <\ldots < F_1(\eta_{i+1}).$$

On a quel que soit $i \in \mathbb{N}$,

$$F_n(\eta_{i+1},\ldots, \eta_{i+n}) = F[F_{n-1}(\eta_{i+1},\ldots,\eta_{i+n-1}), \eta_{i+n}]$$

d'où

$$\forall\, i \in \mathbb{N} \;,\; F_n(\eta_{i+1},\ldots, \eta_{i+n}) < F_{n-1}(\eta_{i+1},\ldots, \eta_{i+n-1})$$

puisque si on avait l'égalité, on aurait $\eta_{i+n} = \lambda_\infty$.

D'autre part, quel que soit $i \in \mathbb{N}$,

$$F_n(\eta_{i+1},\ldots, \eta_{i+n}) = F[\eta_{i+1}, F_{n-1}(\eta_{i+2},\ldots, \eta_{i+n})]$$

et comme, par hypothèse,

$$F_{n-1}(\eta_{i+2},\ldots, \eta_{i+n}) > \eta_{i+1},$$

on a, l'inégalité étant stricte,

$$F_n(\eta_{i+1},\ldots, \eta_{i+n}) > F(\eta_{i+1}, \eta_{i+1}) = \eta_i \;.$$

Donc

$$\forall\, i \in \mathbb{N} \;,\; \eta_i < F_n(\eta_{i+1},\ldots, \eta_{i+n}) < F_{n-1}(\eta_{i+1},\ldots, \eta_{i+n-1}) < \ldots < F_1(\eta_{i+1}) \;.$$

La suite $(F_n(\eta_1,\ldots, \eta_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante ; elle est bornée inférieurement par η , donc

$$F_\infty(\eta_1,\ldots, \eta_n,\ldots) = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} F_n(\eta_1,\ldots, \eta_n) \geq \eta \;.$$

IV 3.3 - PROPOSITION :

Soient $\mathcal{C}$ *une classe de parties de* Ω, H *une fonction d'ensemble définie sur* $\mathcal{C}$ *à valeurs dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$ *et* F *une opération de composition régulière telles que*

1) $\emptyset \in \mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ *est un pavage sur* Ω),

2) $H(\emptyset) = +\infty$,

3) *pour tout recouvrement* σ-*indexé de* Ω *par des éléments* C_i *de* $\mathcal{C}$, *on ait* $F_\infty[H(C_1),\ldots, H(C_i),\ldots] = 0$.

La fonction d'ensemble, définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ *par*

$$\forall E \in \mathcal{P}(\Omega) \quad , \quad J^*(E) = \sup_{\substack{C_i \in \mathcal{C} \\ \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} C_i \supset E}} F_\infty[H(C_1),\ldots, H(C_i),\ldots]$$

où le supremum est pris pour tous les recouvrements σ-*indexés de* E *par des éléments de* $\mathcal{C}$, *est une* F-*mesure extérieure d'information de type* σ.

Par convention on pose $J^*(E) = 0$ s'il n'existe pas de recouvrement σ-indexé de E par des éléments de $\mathcal{C}$.

DEMONSTRATION :

1) J^* est à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ puisqu'il en est ainsi de F_∞.

$J^*(\emptyset) \geq F_\infty[H(\emptyset), \ldots, H(\emptyset), \ldots]$ donc $J^*(\emptyset) = +\infty$,

$J^*(\Omega) = 0$ soit d'après l'hypothèse 3), soit d'après la convention.

2) J^* est décroissante ;

$E_1 \subset E_2$, les recouvrements σ-indexés de E_2 sont des recouvrements σ-indexés de E_1, donc $J^*(E_1) \geq J^*(E_2)$.

3) Montrons que pour toute suite $(E_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ on a

$$J^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq F_\infty[J^*(E_1),\ldots, J^*(E_i),\ldots].$$

⊢ si $F_\infty[J^*(E_1),\ldots, J^*(E_i) \ldots] = 0$ le résultat est évident d'après le 1).

⊢ supposons donc $F_\infty[J^*(E_1),\ldots,J^*(E_i),\ldots] > 0$. On a

$$\operatorname*{Inf}_{i \in \mathbb{N}^*} J^*(E_i) > 0.$$

- si $F_\infty[J^*(E_1),\ldots, J^*(E_i),\ldots] < +\infty$, de la continuité de F au point $(F_\infty[J^*(E_1),\ldots,J^*(E_i),\ldots] , +\infty)$ on déduit que quel que soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

(1) $$F[F_\infty(J^*(E_1),\ldots, J^*(E_i),\ldots),\eta] \geq F_\infty[J^*(E_1),\ldots,J^*(E_i),\ldots] - \varepsilon.$$

- si $F_\infty[J^*(E_1),\ldots, J^*(E_i),\ldots] = +\infty$, puisque, quel que soit $x \in \bar{R}_+$, on a $F(x, +\infty) = x$,
quel que soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

(2) $$F[F_\infty(J^*(E_1),\ldots, J^*(E_i),\ldots), \eta] \geq \varepsilon.$$

Maintenant, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ étant donné, soit $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, suivant la valeur de $F_\infty[J^*(E_1),\ldots, J^*(E_i),\ldots]$, (1) ou (2) soit vérifié.

Associons à η, suivant le lemme IV 3.2, la suite $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$; si $\eta \in \Lambda(F)$ on prendra pour $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite constante dont le terme général est différent de $J^*(E_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(C_j^{(i)})_{j\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} C_j^{(i)} \supset E_i$ et

$$F_\infty[H(C_1^{(i)}),\dots, H(C_j^{(i)}),\dots] \geq F[J^*(E_i), \eta_i].$$

Donc, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} (\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} C_j^{(i)})$ est un recouvrement σ-indexé de $\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} E_i$ par des éléments de $\mathcal{C}$; d'où

$$J^*(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} E_i) \geq F_\infty[H(C_1^{(1)}),\dots, H(C_j^{(1)}),\dots, H(C_1^{(i)}),\dots, H(C_j^{(i)}),\dots]$$

$$\geq F_\infty[F[J^*(E_1), \eta_1], \dots, F[J^*(E_i), \eta_i],\dots]$$

et en utilisant le lemme IV 3.1,

$$J^*(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} E_i) \geq F(F_\infty[J^*(E_1),\dots, J^*(E_i),\dots] , F_\infty[\eta_1,\dots, \eta_i,\dots]),$$

et d'après la définition des η_i

- si $F_\infty[J^*(E_1),\dots, J^*(E_i),\dots] < +\infty$ on a

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad J^*(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} E_i) \geq F_\infty[J^*(E_1),\dots, J^*(E_i),\dots] - \varepsilon$$

- et si $F_\infty[J^*(E_1),\dots, J^*(E_i),\dots] = +\infty$

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad J^*(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} E_i) \geq \varepsilon$$

d'où le résultat.

IV 3.4 - REMARQUES :

1) La condition imposée à $\mathcal{C}$ d'être un pavage et à H d'être telle que $H(\emptyset) = +\infty$ n'a pour but que d'obtenir la valeur $J^*(\emptyset) = +\infty$.

Si la classe $\mathcal{C}$ de parties de Ω ne contient pas l'ensemble $\emptyset$ on imposera alors la condition :

quel que soit $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une suite $(C_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{C}$, telle que

$$F_\infty[H(C_1),\ldots, H(C_i)\ \ldots] \geq \eta.$$

2) Toute F-mesure extérieure d'information J^* de type σ peut être obtenue par la méthode de la proposition IV 3.3 Il suffit de prendre $\mathcal{C} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $H = J^*$.

IV 3.5 - PROPOSITION :

Soit J *une mesure d'information composable de type* F-σ *définie sur une* σ*-algèbre* $\mathcal{S}$. *Soit* J^* *la* F*-mesure extérieure d'information de type* σ *obtenue à l'aide de* $\mathcal{S}$, J *et* F. *Si* $\mathcal{S}^*$ *est la* σ*-algèbre des ensembles* J^*-F*-mesurables, la restriction* $J^*_{|\mathcal{S}^*}$ *de* J^* *à* $\mathcal{S}^*$ *est une extension de* J.

<u>DEMONSTRATION</u> :

1) Les hypothèses de la proposition IV 3.3 étant vérifiées, J^* est une F-mesure extérieure d'information de type σ.

2) Soient $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que

$$E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i .$$

Notons $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i$ et quel que soit $i \in \mathbb{N}^*$, $B_i = A_i - \bigcup_{j<i} A_j$.

On a $B_i \in \mathcal{S}$ et $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Donc

$$F_\infty[J(A_1),\ldots, J(A_i),\ldots] \leq F_\infty[J(B_1),\ldots, J(B_i),\ldots] = J(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} B_i) = J(A)$$

d'où $$J^*(E) = \sup_{\substack{C_i\in\mathcal{S} \\ \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} C_i \supset E}} F_\infty[J(C_1),\ldots, J(C_i),\ldots] \leq \sup_{\substack{A\in\mathcal{S} \\ A\supset E}} J(A) .$$

Prenons d'autre part la suite $(A, \emptyset, \emptyset,\ldots)$ où $A \in \mathcal{S}$, $A \supset E$; on a

$$J^*(E) \geq \sup_{\substack{A\in\mathcal{S} \\ A\supset E}} J(A) .$$

(1) D'où $$J^*(E) = \sup_{\substack{A\in\mathcal{S} \\ A\supset E}} J(A) .$$

3) Puisque $\mathcal{S}$ est stable pour l'opération $(\cap\, d)$ le supremum dans (1) est atteint ; en effet si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que $A_i \supset E$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et telle que $J(A_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} J^*(E)$, on a, puisque

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} A_i \supset E, \quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} A_i \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad J(\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} A_i) \geq \sup_{i\in\mathbb{N}^*} J(A_i) ,$$

$$J(\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} A_i) = J^*(E) .$$

4) Soit $A \in \mathcal{S}$. Montrons que $A \in \mathcal{S}^*$.

Soient $C \subset A$ et $D \subset \complement A$.

D'après le 3), il existe $B \in \mathcal{S}$ tel que

(2) $$C \cup D \subset B \quad \text{et} \quad J^*(C \cup D) = J(B).$$

Comme $C \subset A \cap B$ et $D \subset \complement A \cap B$, on a

(3) $$F[J^*(C), J^*(D)] \geq F[J(A \cap B), J(\complement A \cap B)] \; ;$$

or

(4) $$F[J(A \cap B), J(\complement A \cap B)] = J(B)$$

d'où à l'aide de (2), (3) et (4)

$$F[J^*(C), J^*(D)] \geq J^*(C \cup D)$$

et $A \in \mathcal{S}^*$.

IV 3.6 - DEFINITION :

Une F-mesure extérieure d'information J^* de type σ est régulière si quel que soit $E \in \mathcal{P}(\Omega)$, il existe un ensemble J^*-F-mesurable A tel que

$$E \subset A \quad \text{et} \quad J^*(E) = J^*(A) .$$

IV 3.7 - CONSEQUENCES :

1) Toute F-mesure extérieure d'information J^* de type σ construite comme dans la proposition IV 3.5 à partir d'une mesure d'information J de type

F-σ sur une σ-algèbre $\mathcal{S}$ est régulière.

En effet

$$\forall E \in \mathcal{P}(\Omega), \qquad J^*(E) = \sup_{\substack{A \in \mathcal{S} \\ A \supset E}} J(A)$$

et le supremum est atteint d'après la proposition IV 3.5 3).

2) Nous avions défini au paragraphe III 3.1 la mesure extérieure d'information J^* sur $\mathcal{P}(\Omega)$, connaissant une mesure d'information J définie sur une classe $\mathcal{C}$ de parties de Ω, par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad , \quad J^*(A) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{C} \\ K \supset A}} J(K) .$$

Dans le cas où J est une mesure d'information de type F-σ sur une σ-algèbre $\mathcal{S}$, cette définition coïncide donc avec celle de F-mesure extérieure d'information construite à partir de $\mathcal{S}$, J et F.

IV 4.1 - PROPOSITION :

Soit L *un ensemble quelconque d'indices. On suppose que, quel que soit* $i \in L$, J_i^* *est une* F-*mesure extérieure d'information de type* σ.

Alors, si on définit J^* *par*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) , \quad J^*(A) = \inf_{i \in L} J_i^*(A) ,$$

J^* *est une* F-*mesure extérieure d'information de type* σ.

DEMONSTRATION :

Il est clair que J^* est à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, $J^*(\emptyset) = +\infty$; $J^*(\Omega) = 0$. De plus J^* est décroissante.

Soit $(A_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$; on a

$$\forall i \in L , \qquad J_i^*(\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} A_j) \geq F_\infty[J_i^*(A_1),\ldots, J_i^*(A_j),\ldots] ,$$

et comme

$$\forall i \in L , \quad \forall j \in \mathbb{N}^* , \quad J^*(A_j) \leq J_i^*(A_j) ,$$

on déduit que

$$J_i^*(\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} A_j) \geq F_\infty[J^*(A_1),\ldots, J^*(A_j),\ldots] ,$$

d'où
$$J^*(\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} A_j) \geq F_\infty[J^*(A_1),\ldots, J^*(A_j),\ldots]$$

d'après la définition de J^* .

Remarquons que si $F(x,y) = \mathrm{Inf}(x,y)$, cette proposition peut être considérée comme corollaire de II 4.6.

IV 4.2 - PROPOSITION :

Soit $(J_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *une famille décroissante de* F_t*-mesures extérieures d'information de type* σ.

La fonction d'ensemble définie par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad , \quad J^*(A) = \sup \{t \in \mathbb{R}_+ : J_t^*(A) = +\infty\}$$

est une mesure d'information de type Inf σ.

DEMONSTRATION :

Quel que soit $t \in \mathbb{R}_+$, soit $\mathcal{J}_t = \{B \in \mathcal{P}(\Omega) : J_t^*(B) = +\infty\}$; $\mathcal{J}_t$ est un σ-idéal de $\mathcal{P}(\Omega)$ puisque

1) $J_t^*(\emptyset) = +\infty \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{J}_t$

2) $A \subset B$, $B \in \mathcal{J}_t \Rightarrow J_t^*(A) = +\infty$, puisque J_t^* est décroissante, donc $A \in \mathcal{J}_t$

3) $A_n \in \mathcal{J}_t$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{J}_t$ puisque

$$J_t^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \geq F_\infty[\infty, \ldots, \infty, \ldots] = \infty .$$

La famille de σ-idéaux $(\mathcal{J}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est décroissante : $A \in \mathcal{J}_t \Leftrightarrow J_t^*(A) = +\infty$,

$$J_t^*(A) = +\infty \Rightarrow J_s^*(A) = +\infty \text{ pour } 0 \leq s < t$$

donc $A \in \mathcal{J}_t \Rightarrow A \in \mathcal{J}_s$, $0 \leq s < t$.

Montrons que J^* est une mesure d'information.

1) J^* est à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}_+$; $J^*(\emptyset) = +\infty$, puisque $J_t^*(\emptyset) = +\infty$ quel que soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$J^*(\Omega) = \sup\{t \in \mathbb{R}_+ : J_t^*(\Omega) = +\infty\} = \sup \emptyset = 0.$$

2) J^* est décroissante, puisque J_t^* est décroissante quel que soit $t \in \mathbb{R}_+$.

3) On peut écrire

$$J^*(A) = \sup \{t \in \mathbb{R}_+ : A \in \mathcal{J}_t\}$$

donc
$$J^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup \{t \in \mathbb{R}_+ : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{J}_t\} \ ;$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{J}_t \Longleftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} \ , A_n \in \mathcal{J}_t$$

$$J^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} J^*(A_n).$$

Donc J^* est une mesure d'information de type Inf-σ sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

REMARQUE :

On ne peut pas appliquer directement la méthode de construction de mesures d'information de type Inf-σ de [7] puisqu'on n'a pas $\mathcal{J}_o = \mathcal{P}(\Omega)$.

IV 5 - Nous terminons ce chapitre et cette première partie en signalant que les mesures extérieures d'information semblent apporter un certain nombre de possibilités nouvelles en théorie de l'information .

D'une version plus générale de la proposition IV 4.2 et de résultats annexes, J. Kampé de Fériet et Nguyen-Trung Hung [11] déduisent une interprétation, par la théorie de l'information, de la dimension de Hausdorff.

D'autre part, nous utiliserons dans un travail prochain, la construction de mesure extérieure étudiée au paragraphe IV.3 pour obtenir des solutions au problème de convergence de familles de mesures d'information de type F_t-σ vers une mesure d'information de type Inf-σ. Pour le cas de mesures d'information de

Wiener-Shannon

$$F_t(x,y) = \sup(0, - c_t \operatorname{Log}(e^{-\frac{x}{c_t}} + e^{-\frac{y}{c_t}})$$

nous n'avons jusqu'alors, par d'autres procédés, que peu de résultats ; voir cependant [8] ou notre exemple publié dans [10].

BIBLIOGRAPHIE (PREMIERE PARTIE)

[1] N. BOURBAKI.- *Théorie des ensembles,* Chapitre 3, Hermann, Paris, 1956.

[2] C. DELLACHERIE.- *Capacités et processus stochastiques,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1972.

[3] J. KAMPE DE FERIET et B. FORTE.- *Information et probabilité,* Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 265, série A, 1967, p. 110-114 ; p. 142-146 ; p. 350-353.

[4] J. KAMPE DE FERIET et P. BENVENUTI.- *Sur une classe d'informations,* Comptes rendus Acad. Sciences, Paris 269, série A, 1969, p. 97-101.

[5] J. KAMPE DE FERIET, B. FORTE et P. BENVENUTI.- *Forme générale de l'opération de composition continue d'une information,* Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 269, série A, 1969, p. 529-534.

[6] J. KAMPE DE FERIET.- *Mesure de l'information fournie par un évènement,* Colloques internationaux du C.N.R.S. n° 186, 1969, C.N.R.S., Paris, 1970, p. 191-221.

[7] J. KAMPE DE FERIET et P. BENVENUTI.- *Idéaux caractéristiques d'une information,* Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 272, série A, 1971, p. 1467-1470.

[8] J. KAMPE DE FERIET.- *Mesure de l'information fournie par un évènement,* Séminaire sur les questionnaires, Structures de l'Information, 1971, Institut Henri Poincaré, Paris.

[9] J. KAMPE DE FERIET et P. BENVENUTI.- *Opération de composition régulière et ensembles de valeurs d'une information,* Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 274, série A, 1972, p. 655-659.

[10] J. KAMPE DE FERIET.- *Note di teoria dell'informazione* (redacte da G. Maschio) Istituto di Matematica applicata dell'universita di Roma, 1972.

[11] J. KAMPE DE FERIET et NGUYEN-TRUNG HUNG.- *Mesure de l'information, temps d'entrée et dimension de Hausdorff.*
Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 276, série A, 1973 (sous presse).

[12] C. LANGRAND et NGUYEN-TRUNG HUNG.- *Sur les mesures intérieures de l'information et les σ-précapacités,*
Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 275, série A, 1972, p. 927-930.

[13] C. LANGRAND.- *Constructions de* m-*précapacités,*
Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 275, série A, 1972, p. 1243-1246.

[14] C. LANGRAND.- *Mesures extérieures d'information,*
Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 276, série A, 1973, p. 703-706.

[15] P.A. MEYER.- *Probabilités et Potentiel,* Hermann, Paris, 1966.

[16] V. MILISCI.- *Un teorema di rapresentazione delle informazioni* M-*compositive.*
Rendiconti di Matematica, 5, série VII, 1972, p. 271-281.

[17] P.S. MOSTERT et A.L. SHIELDS.- *On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary,*
Ann. of Math, 65, 1957, p. 117-143.

[18] M.E. MUNROE.- *Introduction to measure and integration,*
Addison-Wesley, Reading, Mass, U.S.A., 1953.

[19] NGUYEN-TRUNG HUNG.- *Mesures d'information, capacités positives et sous-mesures,*
Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 275, série A, 1972, p. 441-443.

[20] C.A. ROGERS.- *Hausdorff measures,* Cambridge Univ. Press, 1970.

[21] C. SHANNON.- *The mathematical theory of communication,*
Univ. of Illinois Press, Urbana, 1948.

[22] N. WIENER.- *Cybernetics,* Hermann, Act. Sc. 1053, Paris, 1948.

DEUXIEME PARTIE

Dans cette partie nous reprenons dans un exposé global des résultats que nous avons publiés dans [8], [9], [10] et [11].

Nous définissons trois méthodes d'estimation : la méthode du quasi-maximum de vraisemblance, celle du Ψ^2 quasi-minimum et celle du χ^2 quasi-minimum, dans le cas de processus de Markov homogènes à temps continu.

On trouve dans [1] et [4] la méthode du maximum de vraisemblance, dans [4] les méthodes du Ψ^2 minimum et du χ^2 minimum, dans le cas de processus de Markov à temps discret, puis à temps continu, avec un espace de paramètre $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ et sous des hypothèses de dérivabilité par rapport au paramètre. Dans [12], on introduit la méthode du quasi-maximum de vraisemblance pour des processus de Markov à temps discret, sans l'hypothèse de dérivabilité par rapport au paramètre. La convergence presque-sûre des estimateurs est démontrée, mais on suppose leur existence. Dans [5], on étudie les méthodes du Ψ^2 minimum et du χ^2 minimum pour des processus de Markov à temps discret sans l'hypothèse de dérivabilité et les théorèmes d'existence de ces estimateurs sont prouvés à l'aide d'une version de nos résultats [8] sur l'application des théorèmes de sélection en théorie de l'estimation.

Notre étude porte sur les trois méthodes d'estimation dans le cas de processus de Markov homogènes à temps continu et du type de sauts. L'espace de paramètre Θ est, suivant les cas, un espace lusinien, un espace métrique séparable, pour les théorèmes d'existence des estimateurs ; un espace métrique compact ou un espace topologique séparé pour les théorèmes de convergence de ces estimateurs.

Chapitre V

THEOREMES DE SELECTION ET PRELIMINAIRES SUR L'ESTIMATION DANS DES PROCESSUS DE MARKOV A TEMPS CONTINU

Dans ce chapitre, nous introduisons d'abord les notions utilisées pour les trois méthodes d'estimation de paramètre que nous étudions dans cette deuxième partie.

Après avoir précisé la terminologie sur les applications multivoques et les sélecteurs, nous rappelons les théorèmes de sélection de KURATOWSKI-RYLL NARDZEWSKI [7] et de HIMMELBERG-VAN VLECK [6] et nous en citons des versions utilisables pour les problèmes d'estimation.

Nous donnons ensuite, dans un bref exposé, les conditions imposées aux processus de Markov à temps continu pour lesquels nous définissons aux chapitres VI et VII des méthodes d'estimation.

V 1 - Soient Ω et Θ deux ensembles non vides.

Une *application multivoque* Γ de Ω dans Θ est une application définie sur Ω, à valeur dans l'ensemble $\mathcal{P}(\Theta) - \{\emptyset\}$ des parties non vides de Θ.

Soit $B \in \mathcal{P}(\Theta) - \{\emptyset\}$, on pose

$$\Gamma^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : \Gamma(\omega) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Si $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Theta, \mathcal{T})$ sont deux espaces mesurables, une application multivoque Γ de Ω dans Θ est dite $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-*mesurable* si, quel que soit $B \in \mathcal{T}$, on a $\Gamma^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Lorsque $(\text{Ⓗ}, \mathcal{C})$ est l'espace mesurable formé de l'espace métrique Ⓗ et de sa tribu [1] borélienne $\mathcal{C}$, nous adoptons la terminologie de Himmelberg-Van Vleck dans [6] pour dire que l'application multivoque Γ est "*point-fermé*" (resp. "*point-complet*") lorsque pour tout $\omega \in \Omega$, l'ensemble $\Gamma(\omega)$ est fermé (resp. complet) dans Ⓗ.

V 2 - Etant donnés deux ensembles non vides Ω et Ⓗ, soit Γ une application multivoque de Ω dans Ⓗ.

Les éléments du produit cartésien $\prod_{\omega\in\Omega} \Gamma(\omega)$, c'est-à-dire les applications f, définies sur Ω, à valeur dans Ⓗ, telles que

$$\forall\, \omega \in \Omega \ , \ f(\omega) \in \Gamma(\omega)$$

sont appelés *sélecteurs* de Γ [7].

Les théorèmes de sélection consistent à montrer, sous certaines hypothèses faites sur l'application multivoque Γ, l'existence d'un sélecteur ayant certaines "bonnes" propriétés.

V 3 - Pour l'estimation nous ne demanderons à un sélecteur que des propriétés de mesurabilité. Les théorèmes de sélection qui nous seront utiles sont ceux de Kuratowski-Ryll Nardzewski [7] et de Himmelberg-Van Vleck [6].

On peut énoncer le théorème de Kuratowski-Ryll Nardzewski de la manière suivante :

Soient Ω *un ensemble non vide et* $\mathcal{C}$ *une algèbre de sous-ensembles de* Ω.

Soit Ⓗ *un espace métrique complet séparable.*

---

(1) Dans cette partie nous dirons, comme c'est souvent l'habitude en théorie des probabilités, tribu plutôt que σ-algèbre.

Si Γ *est une application multivoque "point-fermé" de* Ω *dans* Ⓗ *telle que, quel que soit le sous-ensemble ouvert* G *de* Ⓗ, $\Gamma^{-1}(G) \in \mathcal{C}_\sigma$, *alors il existe une application* f *de* Ω *dans* Ⓗ, *qui est un sélecteur pour* Γ *et qui est telle que* $f^{-1}(G) \in \mathcal{C}_\sigma$ *quel que soit le sous-ensemble ouvert* G *de* Ⓗ.

On déduit de ce théorème la proposition suivante :

Si $(\Omega, \mathcal{A})$ *est un espace mesurable,* Ⓗ *un espace métrique complet séparable et* $\mathcal{T}$ *sa tribu borélienne, et si l'application multivoque* Γ *de* Ω *dans* Ⓗ *est "point-fermé" et* $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$*-mesurable, alors il existe pour* Γ *un sélecteur* f *qui est* $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$*-mesurable.*

Utilisant la version du théorème de sélection de [7] que nous avons rappelée, Himmelberg et Van Vleck donnent dans [6] deux versions nouvelles conduisant à des théorèmes de sélection dans le cas où l'espace Ⓗ est métrique séparable ou lorsqu'il est lusinien [1].

Le premier théorème s'énonce comme suit :

Soit Ω *un ensemble non vide et* $\mathcal{A}$ *une tribu de parties de* Ω ; *soient* Ⓗ *un espace métrique séparable et* Γ *une application multivoque "point-complet" de* Ω *dans* Ⓗ *telle que, quel que soit le sous-ensemble fermé* K *de* Ⓗ, $\Gamma^{-1}(K) \in \mathcal{A}$. *Alors il existe un sélecteur pour* Γ *qui est tel que, quel que soit le sous-ensemble fermé* K *de* Ⓗ, $f^{-1}(K) \in \mathcal{A}$.

Nous en déduisons facilement le corollaire suivant :

Si $(\Omega, \mathcal{A})$ *est un espace mesurable, si* Ⓗ *est un espace métrique séparable et* $\mathcal{T}$ *sa tribu borélienne, et si l'application multivoque* Γ *de* Ω

---

(1) Un espace topologique est lusinien [2], s'il est métrisable et s'il est l'image d'un espace polonais par une application continue bijective.

dans Θ *est "point-complet" et* $\mathcal{A}$*-*$\mathcal{T}$*-mesurable, alors il existe un sélecteur* f *pour* Γ, $\mathcal{A}$*-*$\mathcal{T}$*-mesurable.*

Si Θ est un espace lusinien, le théorème de Himmelberg-Van Vleck s'énonce :

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace mesurable, soit* Θ *un espace lusinien muni de sa tribu borélienne* $\mathcal{T}$ *et soit* Γ *une application multivoque "point-fermé" de* Ω *dans* Θ, $\mathcal{A}$*-*$\mathcal{T}$*-mesurable ; alors il existe un sélecteur* f *pour* Γ, *qui est* $\mathcal{A}$*-*$\mathcal{T}$*-mesurable.*

V 4 - Les méthodes d'estimation proposées aux chapitres suivants conduisent à des inégalités auxquelles les estimateurs, considérés comme fonctions mesurables de la variable ω, doivent satisfaire. L'existence de ces estimateurs sera prouvée à l'aide de la proposition V 4.1 ou de la proposition V 4.2.

V 4.1 - PROPOSITION :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé. Soit* $(\Theta, \mathcal{T})$ *un espace mesurable composé d'un espace métrique séparable* (resp. *espace lusinien*) Θ *et de sa tribu borélienne* $\mathcal{T}$.

Soit φ *une fonction numérique définie sur* $\Omega \times \Theta$ *telle que, pour tout* $\omega \in \Omega$ *l'ensemble* $\{\theta \in \Theta : \varphi(\omega,\theta) \geq 0\}$, *que nous notons* $\Gamma(\omega)$, *ne soit pas vide. Si l'application multivoque* Γ *de* Ω *dans* Θ *qui, à* $\omega \in \Omega$ *fait correspondre* $\Gamma(\omega) \in \mathcal{P}(\Theta) - \{\emptyset\}$ *est* $\mathcal{A}$*-*$\mathcal{T}$*-mesurable et "point-complet"* (resp. *"point-fermé"*), *alors il existe une application* θ^* *de* Ω *dans* Θ, $\mathcal{A}$*-*$\mathcal{T}$*-mesurable, et telle que pour tout* $\omega \in \Omega$, $\varphi(\omega, \theta^*(\omega)) \geq 0$.

Dans le cas où l'espace Θ est métrique séparable (resp. lusinien) cet énoncé est une adaption du corollaire du premier théorème de Himmelberg-Van Vleck (resp. du second théorème de Himmelberg-Van Vleck).

Une autre version des théorèmes de sélection, utilisée en théorie de l'estimation s'appuiera sur un théorème de projection de tribu produit :

Appelons *hypothèse* (H) l'hypothèse suivante :

Un espace mesurable $(\Theta, \mathcal{T})$ est dit vérifier l'hypothèse (H), s'il est tel que

1) la tribu $\mathcal{T}$ soit la tribu $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ engendrée par un pavage semi-compact [1] $\mathcal{F}$ sur Θ ;

2) quel que soit A élément de $\mathcal{F}$, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles de $\mathcal{F}$ telle que $\complement A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Le théorème de projection de tribu produit s'énonce ainsi :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé complet* [2]. *Soit* $(\Theta, \mathcal{T})$ *un espace mesurable vérifiant l'hypothèse* (H).

Alors

$$\mathrm{proj}_{\Omega}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{T}) = \mathcal{A}.$$

La démonstration utilise des propriétés des ensembles analytiques et des capacités. L'hypothèse de complétude de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ permet de montrer que l'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{A})$ des parties analytiques de $\mathcal{A}$ est égal à $\mathcal{A}$.

V 4.2 - PROPOSITION :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé complet. Soit* $(\Theta, \mathcal{T})$ *un espace mesurable composé d'un espace métrique compact* Θ *et de sa tribu borélienne* $\mathcal{T}$. *Soit* h *une fonction numérique définie sur* $\Omega \times \Theta$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{T}$ *-mesurable, telle que, pour tout* $\omega \in \Omega$, $h(\omega, .)$ *soit semi-continue supérieure-*

---

[1] pour la définition, voir page 53.

[2] dans le sens : tout ensemble P-négligeable est $\mathcal{A}$-mesurable.

ment (resp. . *semi-continue inférieurement*) *sur* Θ.

$\varepsilon \geq 0$ *étant donné* (resp. $c \geq 1$ *étant donné*), *il existe une application* θ^* *de* Ω *dans* Θ, $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-*mesurable telle que, pour tout* $\omega \in \Omega$

$$h(\omega,\theta^*(\omega)) \geq \sup_{s\in\Theta} h(\omega,s) - \varepsilon$$

$$(\text{resp. } h(\omega,\theta^*(\omega)) \leq c \inf_{s\in\Theta} h(\omega,s) .$$

La démonstration se fait en plusieurs étapes :

1) nous posons

$$\varphi(\omega,\theta) = h(\omega,\theta) - \sup_{s\in\Theta} h(\omega,s) + \varepsilon$$

$$(\text{resp. } \varphi(\omega,\theta) = c \inf_{s\in\Theta} h(\omega,s) - h(\omega,\theta))$$

puis nous définissons l'application qui, à $\omega \in \Omega$ associe

$$\Gamma(\omega) = \{\theta \in \Theta : \varphi(\omega,\theta) \geq 0\}.$$

Γ est une application multivoque de Ω dans Θ puisque la semi-continuité supérieure (resp. semi-continuité inférieure) de $h(\omega,.)$ sur le compact Θ assure que $\Gamma(\omega)$ est à valeur dans $\mathcal{P}(\Theta) - \{\emptyset\}$.

2) l'application multivoque Γ est "point-fermé".

C'est encore une conséquence de l'hypothèse de semi-continuité supérieure (resp. semi-continuité inférieure) de $h(\omega,.)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

3) l'application multivoque Γ est $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-mesurable :

$$\{\omega \in \Omega : \sup_{s\in\Theta} h(\omega,s) \geq a\} = \mathrm{proj}_{\Omega}\{(\omega,\theta) \in \Omega \times \Theta : h(\omega,\theta) \geq a\}$$

quel que soit $a \in \mathbb{R}$.

(resp. $\{\omega \in \Omega : \inf h(\omega,s) \leq a = \mathrm{proj}_{\Omega}\{(\omega,\theta) \in \Omega \times \Theta : h(\omega,\theta) \leq a\}$

quel que soit $a \in \mathbb{R}$).

Du théorème de projection de tribu produit, applicable pour l'espace mesurable $(\Theta,\mathcal{C})$ qui vérifie l'hypothèse (H) avec le pavage formé par les parties fermées de Θ, on déduit que l'application

$$\sup_{s\in\Theta} h(.s) \quad (\text{resp. } \inf_{s\in\Theta} h(.,s))$$

est $\mathcal{A}$-mesurable.

Puisque $h(.,.)$ est $\mathcal{A}\otimes\mathcal{C}$-mesurable, on en déduit que $\varphi(.,.)$ est $\mathcal{A}\otimes\mathcal{C}$-mesurable et donc que le graphe de Γ

$$Gr(\Gamma) = \{(\omega,\theta) \in \Omega \times \Theta : \theta \in \Gamma(\omega)\} \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{C}$$

d'après la définition de Γ.

D'où, d'après le théorème de projection de tribu produit, la $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-mesurabilité de l'application multivoque Γ.

En effet,

$$\forall\, B\in\mathcal{C}, \quad \Gamma^{-1}(B) = \mathrm{proj}_{\Omega}[Gr(\Gamma) \cap (\Omega\times B)] \in \mathcal{A}\,.$$

4) on peut alors appliquer à Γ le corollaire du théorème de Kuratowski-Ryll Nardzewski (ou le second théorème de Himmelberg - Van Vleck).

V 5 - Comme nous l'annonçons au début de ce chapitre, nous avons rassemblé dans ce paragraphe les conditions imposées aux processus de Markov à temps continu pour lesquels nous allons définir des méthodes d'estimation.

Soit $\mathcal{X}$ un borélien de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathcal{X}$. Soit un processus de Markov homogène, à temps continu, dont l'espace des états est $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ et dont la famille des probabilités de transition est $(P_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Supposons que ces probabilités de transition P_t, $t \in \mathbb{R}_+$, dépendent d'un paramètre θ, $\theta \in \Theta$, dont la "vraie valeur" est θ_o ($\theta_o \in \Theta$). Θ est ici un ensemble, dont nous préciserons la nature plus loin, et que nous munirons d'une tribu $\mathcal{C}$. Nous noterons donc $P_t(.,.;\theta)$ lorsque la "valeur" du paramètre est θ.

Nous supposons que le processus vérifie la condition suivante :

(C) Quel que soit $\theta \in \Theta$, $\lim\limits_{t\to 0} P_t(x,\{x\};\theta) = 1$, uniformément en x.

Nous savons que, sous (C), quel que soit $\theta \in \Theta$,

a) $$\lim_{t\to 0} \frac{1 - P_t(x,\{x\};\theta)}{t} = Q(x;\theta) \leq M_\theta < \infty \ ;$$

cette limite est atteinte uniformément en x.

b) Si $x \notin B$, $B \in \mathcal{B}$, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} P_t(x,B;\theta) = Q(x,B;\theta) \leq Q(x;\theta)$;

cette limite est atteinte uniformément en $B \subset \mathcal{X} \cap \complement\{x\}$. De plus, quel que soit $x \in \mathcal{X}$, $Q(x,.;\theta)$ est une mesure positive bornée sur $\mathcal{B} \cap (\mathcal{X} \cap \complement\{x\})$, $\mathcal{B} \cap (\mathcal{X} \cap \complement\{x\})$ désignant la tribu trace de la tribu borélienne $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{X} \cap \complement\{x\}$.

c) $Q(x,\mathcal{X} \cap \complement\{x\};\theta) = Q(x;\theta)$.

Pour des raisons de commodité d'écriture, nous posons :

$$\forall\, \theta \in \Theta, \ \forall\, x \in \mathcal{X}, \quad Q(x,\{x\};\theta) = 0 ,$$

ce qui nous permet par la suite d'écrire (d'après c/) que

$$\forall\, \theta \in \Theta, \ \forall\, x \in \mathcal{X}, \quad Q(x,\mathcal{X};\theta) = Q(x;\theta) ,$$

et de dire que, quel que soit $\theta \in \Theta$, et quel que soit $x \in \mathcal{X}$, $Q(x,.;\theta)$ est une mesure positive bornée définie sur $\mathcal{B}$.

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une fonction aléatoire Markovienne, séparable, définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et attachée au processus de Markov précité. On sait que sous l'hypothèse (C), presque toutes les trajectoires sont des fonctions de sauts. D'après [1], on supposera que : chaque trajectoire est une fonction de sauts continue à droite (ce qui n'est pas une restriction) ; quel que soit $\theta \in \Theta$, $\inf_{x\in\mathcal{X}} Q(x;\theta) > 0$; quel que soit $\theta \in \Theta$ et quel que soit $t \in \mathbb{R}_+$, $P_t(x,\{x\};\theta)$ est $\mathcal{B}$-mesurable.

Puisque $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ a ses trajectoires qui sont des fonctions de sauts continues à droite, si on désigne par $z_1,z_2,\dots,z_n,\dots$ les états successifs $(z_k \neq z_{k+1})$ pris par la trajectoire $(X_t(\omega))_{t\in\mathbb{R}_+}$ et par $r_1,r_2,\dots,r_n,\dots$ les durées respectives de la trajectoire dans ces états, on a

$$X_t(\omega) = z_1, \quad \text{si} \quad 0 \leq t < r_1,$$
$$X_t(\omega) = z_n, \quad \text{si} \quad r_1 + \dots + r_{n-1} \leq t < r_1 + \dots + r_{n-1} + r_n \ , \quad n > 1.$$

Ces r_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont tous finis, car nous avons supposé que quel que soit $\theta \in \Theta$, $\inf_{x\in\mathcal{X}} Q(x;\theta) > 0$, (il n'y a donc pas d'état absorbant).

On peut dire qu'il existe 2 suites de variables aléatoires $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telles que

$$X_t(\omega) = Z_1(\omega), \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < \rho_1(\omega),$$
$$X_t(\omega) = Z_n(\omega), \quad \text{pour}$$

$$\rho_1(\omega) + \dots + \rho_{n-1}(\omega) \leq t < \rho_1(\omega) + \dots + \rho_{n-1}(\omega) + \rho_n(\omega), \quad n \geq 1 ;$$

$\rho_n(\omega)$ représente ici la durée de séjour de $X_t(\omega)$ dans l'état $Z_n(\omega)$ après le (n-1)-ième saut.

Désignons par ν_t le nombre (aléatoire) de sauts pendant l'intervalle de temps $[0,t]$, nous avons

$$X_t(\omega) = Z_{\nu_t(\omega)+1}(\omega).$$

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une fonction aléatoire de Markov, à temps discret, dont l'espace des états est $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ et dont la probabilité de transition est $\frac{Q(*,\cdot;\theta)}{Q(*;\theta)}$ lorsque la "valeur" du paramètre est θ.

On démontre d'ailleurs que : pour $\alpha \geq 0$,

$$P\left[\rho_{n+1} > \alpha \middle| \rho_1,\dots,\rho_n,Z_1,\dots,Z_{n+1};\theta\right] = e^{-Q(Z_{n+1};\theta)\alpha} \qquad \text{p.s.},$$

et pour $A\in\mathcal{B}$,

$$P\left[Z_{n+1}\in A \middle| \rho_1,\dots,\rho_n,Z_1,\dots,Z_n;\theta\right] = P\left[Z_{n+1}\in A \middle| Z_n;\theta\right]$$

$$= \frac{Q(Z_n,A;\theta)}{Q(Z_n;\theta)}, \text{ p.s..}$$

Ces deux égalités montrent que la fonction aléatoire $((Z_n,\rho_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont l'espace des états est $\mathcal{X}\times\mathbb{R}_+^*$, est de Markov. Sa probabilité de transition $\tilde{F}$ est définie par : quel que soit $(x,a)\in\mathcal{X}\times\mathbb{R}_+$ et quel que soit $A\times B\in\mathcal{B}\times(\mathbb{R}_+^*\cap\mathcal{R})$, (où $\mathcal{R}$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}$)

$$\tilde{F}((x,a),A\times B;\theta) = P\left[(Z_{n+1},\rho_{n+1})\in A\times B \middle| (Z_n,\rho_n) = (x,a);\theta\right]$$

$$= \int_A \frac{Q(x,dy;\theta)}{Q(x;\theta)} \int_B Q(y;\theta)\, e^{-Q(y;\theta)\beta}\, d\beta.$$

Dans [1], on énonce le résultat suivant :

-- Si quel que soit $\theta \in \Theta$, il existe une probabilité absolue stationnaire unique $\hat{\pi}(.;\theta)$ pour $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et qui est telle que quel que soit $x \in \mathcal{X}$,

$$\frac{Q(x,.;\theta)}{Q(x;\theta)} \ll \hat{\pi}(.;\theta) \quad ,$$

alors, la fonction aléatoire $((Z_n,\rho_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une probabilité absolue stationnaire unique $\mu(.;\theta)$ qui domine ses probabilités de transition (probabilités de transition de $((Z_n,\rho_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$).

-- Soit $\tilde{\varphi}$ une application mesurable de $\mathcal{X}^2 \times \mathbb{R}_+^2$ dans $\mathbb{R}$, alors, quelle que soit la loi initiale de $((Z_n,\rho_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ (cette loi peut être différente de μ), si

$$m = \int_{\mathcal{X}^2\times\mathbb{R}_+^2} \tilde{\varphi}(z_1,z_2,\alpha,\beta)\mu(dz_1 \times d\alpha;\theta_o)\ \tilde{F}[(z_1,\alpha),dz_2 \times d\beta;\theta_o]$$

existe et est finie, on a quand $T \to \infty$,

$$\frac{1}{T}\,\nu_T \xrightarrow{\text{p.s.}} \frac{1}{\displaystyle\int_{\mathcal{X}} \frac{\hat{\pi}(dx;\theta_o)}{Q(x;\theta_o)}}$$

et

$$\frac{1}{\nu_T}\sum_{k=1}^{\nu_T} \tilde{\varphi}(Z_k,Z_{k+1},\rho_k,\rho_{k+1}) \xrightarrow{\text{p.s.}} m.$$

D'autre part, suivant l'exposé de [4], pour $A \in \mathcal{B}$ et $B \in \mathcal{B}$, désignons par $\tau_T(A;\omega)$ la durée totale de séjour de $X_t(\omega)$ dans A pour $t \in [0,T]$, et par $N_T(A\times B;\omega)$ le nombre de sauts de $X_t(\omega)$ de A dans B, pour $t \in [0,T]$. Pour tout $\omega \in \Omega$, $\tau_T(.;\theta)$ est une mesure finie positive sur $\mathcal{B}$ et $N_T(.;\omega)$ est une mesure à valeur entière positive sur $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$, tandis que, pour tout $A \in \mathcal{B}$ et pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\tau_T(A;.)$ et $N_T(A\times B;.)$ sont deux variables aléatoires réelles (que nous noterons, pour simplifier, respectivement $\tau_T(A)$ et $N_T(A\times B)$). $N_T(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ n'est autre que ν_T notée précédemment, lors de l'introduction de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Supposons que, quel que soit $x \in \mathcal{X}$, quel que soit $A \in \mathcal{B}$, quel que soit $\theta \in \Theta$, $\lim\limits_{t\to\infty} P_t(x,A;\theta) = \pi(A;\theta)$. Alors, $\pi(A;\theta_o)$ est une probabilité absolue stationnaire unique pour $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. L'emploi de cette probabilité $\pi(.;\theta)$ est très commode pour les calculs que nous effectuerons ci-dessous. Rappelons à ce propos et pour terminer, que, quand $T \to \infty$,

$$\frac{1}{T} N_T(A \times B) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int_A \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,B;\theta_o)$$

et

$$\frac{1}{T} \tau_T(A) \xrightarrow{\text{p.s.}} \pi(A;\theta_o).$$

CHAPITRE VI

METHODE DU QUASI-MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE POUR DES PROCESSUS DE MARKOV A TEMPS CONTINU

Billingsley [1] et Bui Trong Lieu [4] ont étudié la méthode du maximum de vraisemblance dans le cas de processus de Markov à temps discret, puis à temps continu, sous l'hypothèse de dérivabilité par rapport au paramètre, avec un espace de paramètre $\Theta \subset \mathbb{R}^n$. Dans [12] Roussas introduit la méthode du quasi-maximum de vraisemblance pour des processus de Markov à temps discret, sans l'hypothèse de dérivabilité par rapport au paramètre. Il démontre la convergence presque sûre des estimateurs, mais pas leur existence.

Nous traitons ici la méthode du quasi-maximum de vraisemblance pour des processus de Markov stationnaires à temps continu et du type de sauts. L'espace de paramètre est un espace lusinien ou un espace métrique séparable dans l'étude de l'existence des estimateurs ; il est métrique compact dans les théorèmes de convergence de ces estimateurs.

Ce chapitre comporte trois paragraphes : dans le premier nous définissons la méthode ; dans le second nous énonçons, en utilisant les versions des théorèmes de sélection que nous avons données en V 4, les résultats concernant l'existence des estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance ; quant au troisième paragraphe, il est consacré aux théorèmes de convergence de ces estimateurs.

VI 1 - Soit un processus de Markov dont l'espace des états est $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ dont les probabilités de transition sont P_t, $t \in \mathbb{R}_+$, et qui vérifie les conditions préliminaires du paragraphe V 5.

Supposons qu'il existe une mesure positive σ-finie λ sur $\mathcal{B}$, indépendante de θ, telle que, quel que soit $x \in \mathcal{X}$ et quel que soit $\theta \in (H)$, $Q(x,.;\theta)$ soit absolument continue par rapport à λ ;

Notons $q(x,.;\theta)$ une version $\overset{2}{\otimes}\mathcal{B}$-mesurable de la dérivée de Radon-Nikodym de $Q(x,.;\theta)$ par rapport à λ. Et posons

$$(1) \qquad L_T(\theta;\omega) = -\int_{\mathcal{X}} Q(x;\theta)d\tau_T(x;\omega) + \int_{\mathcal{X}^2} \text{Log } q(x,y;\theta)dN_T(x,y;\omega) \quad .$$

Comme c'est mentionné dans [4], l'introduction de $L_T(\theta;\omega)$ est motivée par le fait que dans [4], avec $\theta \in \mathbb{R}$, l'équation dite de vraisemblance, à un terme asymptotiquement négligeable près, s'écrit :

$$-\frac{1}{T}\int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial\theta} Q(x;\theta)d\tau_T(x;\omega) + \frac{1}{T}\int_{\mathcal{X}^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \text{Log } q(x,y;\theta)dN_T(x,y;\omega) = 0.$$

Exprimée à l'aide de $((Z_n,\rho_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, $L_T(\theta;\omega)$ peut s'écrire :

$$(2) \qquad L_T(\theta;\omega) = \sum_{k=1}^{\nu_T(\omega)} \left[\text{Log } f(Z_k(\omega),Z_{k+1}(\omega);\theta) + \text{Log } Q(Z_k(\omega);\theta) - \rho_k(\omega)Q(Z_k(\omega);\theta)\right]$$
$$+ \left[T - \sum_{k=1}^{\nu_T(\omega)} \rho_k(\omega)\right] Q(Z_{\nu_T(\omega)+1}(\omega);\theta)$$

où $f(x,y;\theta) = \dfrac{q(x,y;\theta)}{Q(x;\theta)}$.

C'est donc l'expression qui, asymptotiquement, est la même que celle présentée par Billingsley dans [1].

DEFINITION :

Soit $(\varepsilon_T)_{T\in\mathbb{R}_+}$ *une famille de nombres bornés positifs ou nuls. Nous disons qu'un estimateur* θ_T^* *de* θ_o *est un estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de coefficient* ε_T *s'il est une variable aléatoire définie sur* *l'espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{A})$, *à valeur dans l'espace mesurable* $(\Theta, \mathcal{T})$, *et telle que, quel que soit* $\omega \in \Omega$,

$$L_T(\theta_T^*(\omega);\omega) \geq \sup_{\theta \in \Theta} L_T(\theta;\omega) - \varepsilon_T .$$

Nous choisissons de préférence ε_T petit, et la famille $(\varepsilon_T)_{T \in \mathbb{R}_+}$ décroissante en fonction de T. Lorsque pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $T \in \mathbb{R}_+$, le supremum $\sup_{\theta \in \Theta} L_T(\theta;\omega)$ est atteint, nous pouvons prendre $\varepsilon_T = 0$, sans pour cela en faire une règle absolue, car $\varepsilon_T > 0$ peut présenter des avantages, par exemple lors d'un recours à des procédés de calcul numérique.

VI 2 - Les trois propositions énoncées ci-dessous assurent l'existence d'estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance.

VI 2.1 - PROPOSITION :

Si ε_T *est strictement positif, si* Θ *est un espace lusinien, si* $\mathcal{T}$ *est sa tribu borélienne, et si l'application multivoque* Γ_T *de* Ω *dans* Θ, *définie par*

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \Gamma_T(\omega) = \{\theta \in \Theta : L_T(\theta;\omega) \geq \sup_{s \in \Theta} L_T(s;\omega) - \varepsilon_T\}$$

est $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$*-mesurable et "point-fermé", alors il existe au moins un estimateur* θ_T^* *du quasi-maximum de vraisemblance de coefficient* ε_T *de* θ_0.

On obtient cette proposition comme corollaire de V 4.1 en posant

$$\varphi_T(\theta;\omega) = L_T(\theta;\omega) - \sup_{s \in \Theta} L_T(s;\omega) + \varepsilon_T .$$

VI 2.2 - PROPOSITION :

Si ε_T *est strictement positif, si* Θ *est un espace métrique séparable, si* $\mathcal{T}$ *est sa tribu borélienne, et si l'application multivoque* Γ_T *définie dans* VI 2.1 *est* $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$*-mesurable et "point-complet", alors il existe au moins un estimateur* θ_T^* *du quasi-maximum de vraisemblance de coefficient* ε_T, *de* θ_o.

Nous nous trouvons encore dans les conditions d'application de la proposition V 4.1.

VI 2.3 - PROPOSITION :

Si l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *est complet, si* Θ *est un espace métrique compact et* $\mathcal{T}$ *sa tribu borélienne, si quel que soit* $\omega \in \Omega$, $L_T(.;\omega)$ *est* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{T}$*-mesurable et semi-continue supérieurement* Θ, *alors il existe au moins un estimateur* θ_T^* *du quasi-maximum de vraisemblance de coefficient* ε_T , $(\varepsilon_T \geq 0)$, *de* θ_o.

Nous utilisons ici la proposition V 4.2.

VI 3 Dans ce paragraphe nous démontrons la convergence presque sûre des estimateurs fournis par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance.

Supposons que

$$D = \{(x,y) \in \mathcal{X}^2 : q(x,y;\theta) > 0\}$$

est indépendant de θ. Par cette hypothèse, nous voulons que les intégrales écrites ci-dessous aient un sens. C'est par exemple le cas pour

$$\int_{\mathcal{X}^2} \text{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} \pi(dx;\theta_o)Q(x,dy;\theta_o).$$

Par la suite, nous travaillerons sur D, mais nous ne l'écrirons pas explicitement.

Un certain nombre de résultats auxiliaires étant nécessaires à la démonstration de la convergence presque sûre des estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance, nous procédons donc par étapes.

VI 3.1 PROPOSITION :

Si

(i) *Quel que soit* $\theta_1 \in \Theta$ *et quel que soit* $\theta_2 \in \Theta$, *tels que* $\theta_1 \neq \theta_2$,

$$\int_{\mathfrak{X}^2} |q(x,y;\theta_1) - q(x,y;\theta_2)| \pi(dx;\theta_0)\, Q(x,dy;\theta_0) > 0 ,$$

alors

(ii) *Quel que soit* $\theta \in \Theta$ *tel que* $\theta \neq \theta_0$,

$$\int_{\mathfrak{X}} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_0)] \pi(dx;\theta_0) +$$

$$+ \int_{\mathfrak{X}^2} \mathrm{Log}\, \frac{q(x,y;\theta_0)}{q(x,y;\theta)} \pi(dx;\theta_0)\, Q(x,dy;\theta_0) > 0.$$

<u>DEMONSTRATION</u> :

On sait que, quel que soit le nombre réel z,

$$e^z \geq 1 + z,$$

et que l'égalité $e^z = 1 + z$ a lieu si et seulement si $z = 0$.

Soit $\theta \neq \theta_0$. Si on remplace z par $\mathrm{Log}\, \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_0)}$, on a

$$(1) \qquad \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)} \geq 1 + \mathrm{Log}\, \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si

$$q(x,y;\theta) = q(x,y;\theta_o) \; .$$

Puisque

$$\int_{\mathfrak{X}^2} \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)} \pi(dx;\theta_o)\; Q(x,dy;\theta_o) = \int_{\mathfrak{X}} \pi(dx;\theta_o) \int_{\mathfrak{X}} \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)}\; Q(x,dy;\theta_o)$$

on a

$$\int_{\mathfrak{X}^2} \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)} \pi(dx;\theta_o)\; Q(x,dy;\theta_o) = \int_{\mathfrak{X}} \pi(dx;\theta_o) \int_{\mathfrak{X}} \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)}\; q(x,y;\theta_o)\; d\lambda(y)$$

$$= \int_{\mathfrak{X}} Q(x;\theta)\; \pi(dx;\theta_o) \; ;$$

et puisque

$$\int_{\mathfrak{X}^2} 1.\pi(dx;\theta_o)\; Q(x,dy;\theta_o) = \int_{\mathfrak{X}} Q(x;\theta_o)\; \pi(dx;\theta_o) \; ,$$

l'inégalité (1) nous donne

$$\int_{\mathfrak{X}} Q(x;\theta)\; \pi(dx;\theta_o) \geq \int_{\mathfrak{X}} Q(x;\theta_o)\; \pi(dx;\theta_o) +$$

$$+ \int_{\mathfrak{X}^2} \mathrm{Log}\, \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)}\; \pi(dx;\theta_o)\; Q(x,dy;\theta_o) \; ,$$

Par conséquent, si nous posons

$$H(\theta) = \int_{\mathfrak{X}} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)]\pi(dx;\theta_o) +$$

$$+ \int_{\mathfrak{X}^2} \text{Log} \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)} \pi(dx;\theta_o)\ Q(x,dy;\theta_o)\ .$$

nous avons

$$H(\theta) \geq 0\ .$$

Posons maintenant

$$A = \{(x,y) \in \mathfrak{X}^2 : q(x,y;\theta_o) - q(x,y;\theta) \neq 0\}.$$

L'énoncé (i) implique que l'ensemble A est de mesure $\pi(dx;\theta_o)\ Q(x,dy;\theta_o) > 0$ (c'est-à-dire que $\int_A \pi(dx;\theta_o)\ Q(x,dy;\theta_o) > 0$). Cela entraîne que $H(\theta) > 0$, car sinon, avec $H(\theta) = 0$, nous aurions

$$0 = \int_{\mathfrak{X}} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)]\pi(dx;\theta_o) + \int_A \text{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} \pi(dx;\theta_o)\ Q(x,dy;\theta_o)\ ;$$

$$> \int_{\mathfrak{X}} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)]\pi(dx;\theta_o) + \int_A \left[1 - \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)}\right]\pi(dx;\theta_o)\ Q(x,dy;\theta_o)$$

(car sur A, nous avons $\text{Log} \dfrac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} > 1 - \dfrac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)}$)

$$= \int_{\mathfrak{X}} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)]\pi(dx;\theta_o) + \int_{\mathfrak{X}^2} \left[1 - \frac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)}\right]\pi(dx;\theta_o)\ Q(x,dy;\theta_o)$$

(car sur $\complement A$, nous avons $1 - \dfrac{q(x,y;\theta)}{q(x,y;\theta_o)} = 0$)

$$= \int_{\mathfrak{X}} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)]\pi(dx;\theta_o) + \int_{\mathfrak{X}} Q(x;\theta_o)\pi(dx;\theta_o) - \int_{\mathfrak{X}} Q(x;\theta)\pi(dx;\theta_o) = 0.$$

D'où la contradiction.

Par conséquent, on doit avoir $H(\theta) > 0$, c'est-à-dire (ii).

VI 3.2 - CONDITIONS :

Supposons que

1°) Θ soit un espace métrique compact,

2°) Quel que soit $(x,y) \in \mathcal{X}^2$, $q(x,y;.)$ soit continue sur Θ,

3°) Quel que soit $\theta \in \Theta$, il existe un voisinage W_θ de θ, tel que, pour chaque ouvert V contenant θ et contenu dans W_θ, $\sup_{u \in V} q(.,.;u)$ soit $\overset{2}{\otimes} \mathcal{B}$-mesurable, et que $\inf_{u \in V} Q(.;u)$ soit $\mathcal{B}$-mesurable.

4°) Quel que soit $x \in \mathcal{X}$, quel que soit $\theta \in \Theta$, il existe un voisinage $U_x(\theta)$ de θ et une fonction numérique $g(x,.) \geq 0$, définie sur $\mathcal{X}$, λ intégrable, et telle que pour tout $y \in \mathcal{X}$ et tout $u \in U_x(\theta)$ on ait $q(x,y;u) \leq g(x,y)$.

5°) Quel que soit $\theta \in \Theta$, il existe un ouvert $V(\theta)$ contenant θ, avec $V(\theta) \subset W_\theta$, et une fonction numérique $h(.,.)$ qui dépend de $V(\theta)$ et telle que

$$h(x,y) \leq \inf_{u \in V(\theta)} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;u)}$$

et que

$$\left| \int_{\mathcal{X}^2} h(x,y) \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,dy;\theta_o) \right| < \infty .$$

6°) Quel que soit $\theta_1 \in \Theta$ et quel que soit $\theta_2 \in \Theta$ tels que $\theta_1 \neq \theta_2$,

$$\int_{\mathfrak{X}^2} |q(x,y;\theta_1) - q(x,y;\theta_2)| \pi(dx;\theta_o)\ Q(x,dy;\theta_o) > 0.$$

VI 3.3 - PROPOSITION :

Sous les conditions préliminaires et VI 3.2 , *on peut trouver, pour chaque voisinage* $U = U(\theta_o)$ *de* θ_o *un nombre* $\delta = \delta(U) > 0$ *tel que*

$$\liminf_{T\to\infty} \left[\inf_{\theta \in \complement U} \left(\frac{1}{T} \int_{\mathfrak{X}} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)]\, d\tau_T(x;.) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{T} \int_{\mathfrak{X}^2} \mathrm{Log}\, \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)}\, dN_T(x,y;.) \right)\right] > \delta \qquad \text{p.s.}$$

<u>DEMONSTRATION</u> :

Soit d la distance sur Θ.

Soit $s \in \complement U$; notons

$$V_k(s) = \{\theta \in \Theta : d(\theta,s) < \frac{1}{k}\}.$$

Il est clair que la suite

$$\left(\inf_{\theta \in V_k(s)} \mathrm{Log}\, \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} \right)_{k\in\mathbb{N}^*}$$

est une suite non décroissante.

D'après l'hypothèse de continuité en θ de $q(x,y;.)$, quel que soit $\alpha > 0$, il existe un voisinage V de s, tel que, quel que soit $\theta \in V$,

$$\text{Log}\,\frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;s)} - \text{Log}\,\frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} < \alpha.$$

Il en résulte que, lorsque $k \to \infty$,

$$\inf_{\theta \in V_k(s)} \text{Log}\,\frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} \uparrow \text{Log}\,\frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;s)}\,.$$

Or, d'après VI 3.2 3°), $\sup\limits_{\theta \in V_k(s)} q(.,.;\theta)$ est $\overset{2}{\otimes}\mathcal{B}$-mesurable pour k assez grand. D'où

$$\inf_{\theta \in V_k(s)} \text{Log}\,\frac{q(.,.;\theta_o)}{q(.,.;\theta)} = \text{Log}\,q(.,.;\theta_o) - \sup_{\theta \in V_k(s)} \text{Log}(q.,.;\theta)$$

est $\overset{2}{\otimes}\mathcal{B}$-mesurable pour k assez grand.

Nous pouvons alors appliquer le théorème de Beppo-Levi, ce qui montre que, lorsque $k \to \infty$,

(a)
$$\int_{\mathcal{X}^2} \inf_{\theta \in V_k(s)} \text{Log}\,\frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)}\,\pi(dx;\theta_o)\,Q(x,dy;\theta_o)$$

$$\uparrow \int_{\mathcal{X}^2} \text{Log}\,\frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;s)}\,\pi(dx;\theta_o)\,Q(x,dy;\theta_o)\,.$$

La suite $\left(\inf\limits_{\theta \in V_k(s)} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)]\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$

est, elle aussi, une suite non décroissante.

D'autre part, la fonction $q(x,.;\theta)$ étant λ-intégrable, les conditions VI 3.2 2°) et VI 3.2 4°) assurent la continuité de la fonction $Q(x;.)$ sur Θ, ([3], corollaire 1, p. 144).

Donc, quel que soit $\alpha > 0$, il existe un voisinage V de s, tel que quel que soit $\theta \in V$,

$$Q(x;s) - Q(x;\theta) < \alpha .$$

Il en résulte que, lorsque $k \to \infty$,

$$\inf_{\theta \in V_k(s)} Q(x;\theta) \uparrow Q(x;s) .$$

Or, d'après VI 3.2 3°), $\inf_{\theta \in V_k(s)} Q(.;\theta)$ est $\mathcal{B}$-mesurable pour k assez grand.

D'où, nous pouvons appliquer le théorème de Beppo-Levi, ce qui donne, lorsque $k \to \infty$,

(b)
$$\int_{\mathfrak{X}} \inf_{\theta \in V_k(s)} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)]\pi(dx;\theta_o)$$
$$\uparrow \int_{\mathfrak{X}} [Q(x;s) - Q(x;\theta_o)]\pi(dx;\theta_o) .$$

Donc, d'après (a) et (b),

$$\int_{\mathfrak{X}} \inf_{\theta \in V_k(s)} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)]\pi(dx;\theta_o) +$$
$$+ \int_{\mathfrak{X}^2} \inf_{\theta \in V_k(s)} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,dy;\theta_o) \uparrow H(s) ,$$

avec $H(s) > 0$ (à cause de VI 3.2 5°) et VI 3.1).

Il en résulte que, quel que soit $s \in \complement U$, il existe un ouvert $V_k(s)$ contenant s et un entier positif $n_o(s)$ tel que $k > n_o(s)$ entraîne que

$$\int_{\mathfrak{X}} \inf_{\theta \in V_k(s)} \left[Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)\right] \pi(dx;\theta_o) +$$

$$+ \int_{\mathfrak{X}^2} \inf_{\theta \in V_k(s)} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,dy;\theta_o) \geq \frac{1}{2} H(s).$$

Prenons alors U ouvert, $\complement U$ est donc compact. On peut recouvrir $\complement U$ par un nombre fini d'ensembles ouverts $V_k(s_i)$, $(i = 1,2,\ldots,m)$.

Si $n_1 = \max_{i=1,2,\ldots,m} n_o(s_i)$, alors pour $k > n_1$, on a, quel que soit $i \in \{1,2,\ldots,m\}$,

$$\int_{\mathfrak{X}} \inf_{\theta \in V_k(s_i)} \left[Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)\right] \pi(dx;\theta_o) +$$

$$+ \int_{\mathfrak{X}^2} \inf_{\theta \in V_k(s_i)} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,dy;\theta_o) \geq \delta > 0,$$

où $\delta = \min_{i=1,2,\ldots,m} \frac{1}{2} H(s_i)$.

Or, quel que soit $\theta \in \complement U$, il existe $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ tel que $V_k(s_i) \ni \theta$, et on a

$$\inf_{\theta' \in V_k(s_i)} \left[Q(x;\theta') - Q(x;\theta_o)\right] \leq \left[Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)\right]$$

et

$$\inf_{\theta' \in V_k(s_i)} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta')} \leq \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)} .$$

D'où

$$\lim_{T\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} \frac{1}{T} \inf_{\theta' \in V_k(s_i)} \left[Q(x;\theta') - Q(x;\theta_o)\right] d\tau_T(x;.) +$$

$$+ \lim_{T\to\infty} \int_{\mathcal{X}^2} \frac{1}{T} \inf_{\theta'\in V_k(s_i)} \mathrm{Log}\, \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta')}\, dN_T(x,y;.)$$

$$\underline{\underline{p.s.}} \int_{\mathcal{X}} \inf_{\theta'\in V_k(s_i)} [Q(x;\theta') - Q(x;\theta_o)]\, \pi(dx;\theta_o) +$$

$$+ \int_{\mathcal{X}^2} \inf_{\theta'\in V_k(s_i)} \mathrm{Log}\, \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta')}\, \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,dy;\theta_o) \geq \frac{1}{2} H(s_i) .$$

Par conséquent,

$$\liminf_{T\to\infty} \left[\min_{i=1,2,\ldots,m} \left(\int_{\mathcal{X}} \frac{1}{T} \inf_{\theta\in V_k(s_i)} [Q(x;\theta) - Q(x;\theta_o)]\, d\tau_T(x;.) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}^2} \inf_{\theta\in V_k(s_i)} \mathrm{Log}\, \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)}\, dN_T(x,y;.) \right) \right] \geq \delta, \quad p.s.$$

Ce qui donne finalement,

$$\liminf_{T\to\infty} \left[\inf_{\theta\in \complement \bigcup} \left(\frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}} - [Q(x;\theta_o) - Q(x;\theta)]\, d\tau_T(x;.) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}^2} \mathrm{Log}\, \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)}\, dN_T(x,y;.) \right) \right] \geq$$

$$\geq \liminf_{T\to\infty} \left[\min_{i=1,\ldots,m} \left(\frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}} \inf_{\theta\in V_k(s_i)} -[Q(x;\theta_o) - Q(x;\theta)]\, d\tau_T(x;.) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{T} \int_{\mathcal{X}^2} \inf_{\theta\in V_k(s_i)} \mathrm{Log}\, \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta)}\, dN_T(x,y;.) \right) \right] \geq \delta > 0, \quad p.s.$$

VI 3.4 - PROPOSITION :

Pour tout estimateur θ_T^* *du quasi-maximum de vraisemblance de coefficient* $\varepsilon_T(\varepsilon_T \geq 0)$, *on a*

$$\limsup_{T\to\infty} \left[\frac{1}{T}\int_{\mathfrak{X}} [Q(x;\theta_T^*) - Q(x;\theta_o)]\, d\tau_T(x;.) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{T}\int_{\mathfrak{X}^2} \mathrm{Log}\, \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta_T^*)}\, dN_T(x,y;.)\right] \leq 0, \text{ p.s.}$$

DEMONSTRATION :

En effet, quel que soit $\theta \in \Theta$, d'après la définition de θ_T^*, on a : quel que soit $\omega \in \Omega$,

$$- \int_{\mathfrak{X}} Q(x;\theta)d\tau_T(x;\omega) + \int_{\mathfrak{X}^2} \mathrm{Log}\, q(x,y;\theta)\, dN_T(x,y;\omega) \leq$$

$$\leq - \int_{\mathfrak{X}} Q(x;\theta_T^*(\omega))d\tau_T(x;\omega) + \int_{\mathfrak{X}^2} \mathrm{Log}\, q(x,y;\theta_T^*(\omega))\, dN_T(x,y;\omega) + \varepsilon_T,$$

inégalité qui est vraie en particulier pour $\theta = \theta_o$. Donc

$$\frac{1}{T}\int_{\mathfrak{X}} [Q(x;\theta_T^*) - Q(x;\theta_o)]\, d\tau_T(x;.) +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_{\mathfrak{X}^2} \mathrm{Log}\, \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta_T^*)}\, dN_T(x,y;.) - \frac{\varepsilon_T}{T} \leq 0, \quad \text{p.s.}$$

et par conséquent, en prenant la limite supérieure pour les deux membres, on obtient le résultat indiqué dans l'énoncé.

VI 3.5 - PROPOSITION :

Sous les conditions préliminaires et VI 3.2 , *tout estimateur* θ_T^* *du quasi-maximum de vraisemblance de coefficient* $\varepsilon_T (\varepsilon_T \geq 0)$ *converge presque sûrement vers* θ_o, *quand* $T \to \infty$.

DEMONSTRATION :

En effet, quel que soit le voisinage U de θ_o, si $\theta_T^*(\omega) \in \complement U$, on aura, d'après VI 3.3 :

$$\liminf_{T\to\infty} \left[\frac{1}{T}\int_{\mathfrak{X}} \left[Q(x;\theta_T^*(\omega)) - Q(x;\theta_o)\right] d\tau_T(x;\omega) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{T}\int_{\mathfrak{X}^2} \operatorname{Log} \frac{q(x,y;\theta_o)}{q(x,y;\theta_T^*(\omega))} \, dN_T(x,y;\omega)\right] \geq \delta,$$

sauf peut-être pour des ω appartenant à un ensemble de probabilité P nulle. Ce qui est en contradiction avec VI 3.4. Donc, pour T grand, on doit avoir $\theta_T^*(\omega) \in U$. D'où convergence presque sûre de θ_T^* vers θ_o quand $T \to \infty$.

CHAPITRE VII

METHODES DU Ψ^2 QUASI-MINIMUM ET DU χ^2 QUASI-MINIMUM POUR DES PROCESSUS DE MARKOV A TEMPS CONTINU

BUI-TRONG-LIEU introduit dans [4] les méthodes du Ψ^2-minimum et du χ^2-minimum pour des processus de Markov à temps discret, puis à temps continu, dans le cas où l'espace de paramètre $\Theta \subset \mathbb{R}^n$. Il utilise l'hypothèse de dérivabilité par rapport au paramètre.

Dans [5], BUI-TRONG-LIEU et PHAN-THANH-LONG étudient ces deux méthodes sans l'hypothèse de dérivabilité mais dans le cas de processus de Markov à temps discret.

C'est dans la note [8] que nous définissons, avec BUI-TRONG-LIEU, les méthodes du Ψ^2-minimum et du χ^2-minimum pour des processus de Markov à temps continu sans l'hypothèse de dérivabilité par rapport au paramètre. Nous y montrons aussi, pour la première fois, comment les théorèmes de sélection de Kuratowski-Ryll Nardzewski ou de Himmelberg-Van Vleck peuvent être utilisés en théorie de l'estimation.

Dans ce chapitre nous reprenons l'article [9] qui développe et généralise [8]. Après avoir donné la définition des méthodes, nous prouvons les théorèmes d'existence des estimateurs, puis nous démontrons la convergence presque sûre de ces estimateurs vers la vraie valeur θ_o du paramètre.

VII 1 - Posons

$$\Psi_T^2(\theta;\omega) = \sum_{j\in I} \frac{\left[\tau_T(A_j;\omega) - T\pi(A_j;\theta)\right]^2}{T\pi(A_j;\theta)} +$$

$$+ \sum_{(j,k)\in I\times I} \frac{\left[N_T(A_j\times A_k;\omega) - T\int_{A_j} \pi(dx;\theta)\, Q(x,A_k;\theta)\right]^2}{T\int_{A_j} \pi(dx;\theta)\, Q(x,A_k;\theta)} .$$

(resp.

$$\chi_T^2(\theta;\omega) = \sum_{(j,k)\in I\times I} \frac{\left[N_T(A_j\times A_k;\omega) - \int_{A_j} \tau_T(dx;\omega)\, Q(x,A_k;\theta)\right]^2}{\int_{A_j} \tau_T(dx;\omega)\, Q(x,A_k;\theta)} \Bigg).$$

où $(A_j)_{j\in I}$ désigne une partition finie $\mathcal{B}$-mesurable de $\mathcal{X}$ telle que les quantités qui figurent aux dénominateurs de la première (resp. seconde) expression soient strictement positives.

DEFINITION :

Soit $(c_T)_{T\in\mathbb{R}_+}$ *une famille de nombres positifs bornés, plus grands ou égaux à 1, indicés par* T. *Nous disons qu'un estimateur* θ_T^* *de* θ_o *est un estimateur du* Ψ^2 *quasi-minimum* (resp. χ^2 *quasi-minimum*) *de coefficient* c_T, *s'il est une variable aléatoire définie sur* $(\Omega,\mathcal{A})$ *et à valeur dans* $(\Theta,\mathcal{T})$, *telle que, pour tout* $\omega\in\Omega$,

$$\Psi_T^2(\theta_T^*(\omega);\omega) \leq c_T \inf_{\theta\in \Theta} \Psi_T^2(\theta;\omega)$$

$$\left(\text{resp. } \chi_T^2(\theta_T^*(\omega);\omega) \leq c_T \inf_{\theta\in \Theta} \chi_T^2(\theta;\omega)\right).$$

Nous choisissons de préférence les c_T voisins de 1, et la famille $(c_T)_{T\in \mathbb{R}_+}$ décroissante à partir d'un certain rang et convergeant vers 1 quand $T \to \infty$ (par exemple, $c_T = 1 + \frac{1}{T}$ pour T assez grand). On peut aussi considérer le cas particulier où, pour tout $T \in \mathbb{R}_+$, $c_T = c$, comme nous l'avons fait dans [8]. Lorsque, pour tout $\omega \in \Omega$, $\inf_{\theta\in \Theta} \Psi_T^2(\theta;\omega)$ (resp. $\inf_{\theta\in \Theta} \chi_T^2(\theta;\omega)$) est atteint, on peut prendre $c_T = 1$, sans pour cela en faire une règle absolue, car $c_T > 1$ peut présenter des avantages, par exemple lors d'un recours à des procédés de calcul numérique.

VII 2 - Abordons maintenant le problème de l'existence d'estimateurs fournis par ces deux méthodes.

Un estimateur de θ_o, de par sa définition, est une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{A})$ et à valeur dans $(\Theta,\mathcal{T})$. Prouver l'existence d'estimateurs fournis par la méthode du Ψ^2 quasi-minimum (resp. χ^2 quasi-minimum), c'est prouver l'existence d'applications θ_T^* de Ω dans Θ, *$\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-mesurables*, vérifiant pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\Psi_T^2(\theta_T^*(\omega);\omega) \leq c_T \inf_{\theta\in \Theta} \Psi_T^2(\theta;\omega)$$

$$\left(\text{resp. } \chi_T^2(\theta_T^*(\omega);\omega) \leq c_T \inf_{\theta\in \Theta} \chi_T^2(\theta;\omega)\right).$$

VII 2.1 - PROPOSITION :

Supposons que Θ soit un espace lusinien, que $\mathcal{T}$ soit sa tribu boré-

lienne, que pour tout $T \in \mathbb{R}_+$, $c_T > 1$, *que l'application multivoque* Γ_T (resp. $\tilde{\Gamma}_T$) *de* Ω *dans* Ⓗ *définie par*

$$\Gamma_T(\omega) = \{\theta \in Ⓗ : \Psi_T^2(\theta;\omega) \leq c_T \inf_{s \in Ⓗ} \Psi_T^2(s;\omega)\}$$

$$\left(\text{resp. } \tilde{\Gamma}_T(\omega) = \{\theta \in Ⓗ : \chi_T^2(\theta;\omega) \leq c_T \inf_{s \in Ⓗ} \chi_T^2(s;\omega)\}\right).$$

soit $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$-*mesurable et "point-fermé". Alors, il existe au moins un estimateur* θ_T^* *du* Ψ^2 *quasi-minimum* (resp. χ^2 *quasi-minimum*) *de coefficient* c_T, *de* θ_o.

Il suffit d'appliquer V 4.1 en posant

$$\varphi_T(\theta,\omega) = -\Psi_T^2(\theta;\omega) + c_T \inf_{s \in Ⓗ} \Psi_T^2(s;\omega)$$

$$\left(\text{resp. } \tilde{\varphi}_T(\theta,\omega) = -\chi_T^2(\theta;\omega) + c_T \inf_{s \in Ⓗ} \chi_T^2(s;\omega)\right).$$

On obtient aussi à l'aide de V 4.1 la preuve de l'énoncé suivant :

VII 2.2 - PROPOSITION :

Supposons que Ⓗ *soit un espace métrique séparable, que* $\mathcal{T}$ *soit sa tribu borélienne, que pour tout* $T \in \mathbb{R}_+$, $c_T > 1$, *et que l'application multivoque* Γ_T (resp. $\tilde{\Gamma}_T$) *de* Ω *dans* Ⓗ *définie par*

$$\Gamma_T(\omega) = \{\theta \in Ⓗ : \Psi_T^2(\theta;\omega) \leq c_T \inf_{s \in Ⓗ} \Psi_T^2(s;\omega)\}$$

$$\left(\text{resp. } \tilde{\Gamma}_T(\omega) = \{\theta \in Ⓗ : \chi_T^2(\theta;\omega) \leq c_T \inf_{s \in Ⓗ} \chi_T^2(s;\omega)\}\right).$$

soit $\mathcal{A}$-$\mathcal{T}$*-mesurable et "point-complet". Alors, il existe au moins un estimateur* θ_T^* *du* Ψ^2 *quasi-minimum* (resp. χ^2 *quasi-minimum) de coefficient* c_T, *de* θ_o.

VII 2.3 - PROPOSITION :

Supposons que l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *soit complet, que* $(\Theta, \mathcal{T})$ *soit formé d'un espace métrique compact* Θ *et de sa tribu borélienne* $\mathcal{T}$, *que pour tout* $T \in \mathbb{R}_+$, $\Psi_T^2(.;.)$ (resp. $\chi_T^2(.;.)$) *soit* $\mathcal{T} \otimes \mathcal{A}$*-mesurable, et que de plus, pour tout* $\omega \in \Omega$, $\Psi_T^2(.;\omega)$ (resp. $\chi_T^2(.;\omega)$) *soit semi-continue inférieurement sur* Θ. *Alors, il existe un estimateur* θ_T^* *du* Ψ^2 *quasi-minimum* (resp. χ^2 *quasi-minimum) de coefficient* c_T $(c_T \geq 1)$ *de* θ_o.

La preuve est donnée par V 4.2 avec $h = \Psi_T^2$ (resp. χ_T^2) et $c_T = c$.

VII 3 - Nous allons maintenant procéder à l'étude de la convergence des estimateurs.

Précisons que les conditions relatives au paramètre θ ne sont pas exactement les mêmes pour la méthode du Ψ^2 quasi-minimum et pour la méthode du χ^2 quasi-minimum.

VII 3.1 - PROPOSITION :

Si Θ *est un espace topologique séparé et s'il existe une partition finie* $\mathcal{B}$*-mesurable* $(A_j)_{j \in I}$ *de* $\mathcal{X}$ *telle que :*

a) *quel que soit* $\theta \in \Theta$, *quel que soit* $j \in I$ *et quel que soit* $k \in I$,

$$\int_{A_j} \pi(dx;\theta)\, Q(x, A_k;\theta) > 0 \ ,$$

b) *quel que soit* $\theta \in \Theta$ *et quel que soit* $\theta' \in \Theta$, *avec* $\theta \neq \theta'$,

$$\max_{j\in I} |\pi(A_j;\theta) - \pi(A_j;\theta')| = \gamma_{\theta,\theta'} \neq 0,$$

c) *quel que soit* $\theta \in \Theta$ *et quel que soit* $\theta' \in \Theta$, *avec* $\theta \neq \theta'$,

$$\max_{(j,k)\in I\times I} \left| \int_{A_j} \pi(dx;\theta)\, Q(x,A_k;\theta) - \int_{A_j} \pi(dx;\theta')\, Q(x,A_k;\theta')\right| = \delta_{\theta,\theta'} \neq 0.$$

Alors, tout estimateur θ_T^* *du* Ψ^2 *quasi-minimum de coefficient* c_T *converge presque sûrement vers* θ_o, *quand* $T \to \infty$.

DEMONSTRATION :

1°) Par définition même de l'estimateur du Ψ^2 quasi-minimum de coefficient c_T, nous avons, quel que soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ et quel que soit $\omega \in \Omega$,

$$\Psi_T^2(\theta_T^*(\omega);\omega) \leq c_T\ \Psi_T^2(\theta_o;\omega) .$$

2°) Quel que soit $j \in I$, quel que soit $\omega \in \Omega$, et quel que soit $\theta \in \Theta$,

$$\left|\frac{1}{T}\ \tau_T(A_j;\omega) - \pi(A_j;\theta)\right| = \left|\frac{1}{T}\ \tau_T(A_j;\omega) - \pi(A_j;\theta_o) + \pi(A_j;\theta_o) - \pi(A_j;\theta)\right| \geq$$

$$\geq \left|\, |\pi(A_j;\theta_o) - \pi(A_j;\theta)| - \left|\frac{1}{T}\ \tau_T(A_j;\omega) - \pi(A_j;\theta_o)\right| \,\right| .$$

Or, nous savons que, quel que soit $j \in I$,

$$\frac{1}{T}\ \tau_T(A_j) \xrightarrow{\text{p.s.}} \pi(A_j;\theta_o)$$

quand $T \to \infty$. D'où, il existe un $\Omega'_o \in \mathcal{A}$ avec $P(\complement\Omega'_o) = 1$, tel que : quel que soit $j \in I$ (rappelons que I est fini), quel que soit $\omega \in \complement\Omega'_o$, quel que soit $\eta' > 0$, il existe un nombre positif $T'_o(\eta',\omega)$ pour lequel

$T > T'_o$ entraîne que

$$\left|\frac{1}{T}\,\tau_T(A_j;\omega) - \pi(A_j;\theta_o)\right| < \eta' ,$$

inégalité qui est vraie en particulier pour $0 < \eta' < \gamma_{\theta,\theta_o}$, où $\theta \neq \theta_o$.

Soit U un voisinage quelconque de θ_o. Pour $\theta \in \complement U$, à cause de l'hypothèse b) et de ce qui précède, nous voyons qu'il existe un indice $j_o \in I$ tel que, pour $\omega \in \complement \Omega'_o$ et pour $T \geq T'_o$,

$$\left|\frac{1}{T}\,\tau_T(A_{j_o};\omega) - \pi(A_{j_o};\theta)\right| \geq \max_{j\in I}\left|\pi(A_j;\theta_o) - \pi(A_j;\theta)\right| - \left|\frac{1}{T}\,\tau_T(A_{j_o};\omega) - \pi(A_{j_o};\theta_o)\right| >$$

$$> \gamma_{\theta,\theta_o} - \eta' > 0 ,$$

(l'indice j_o est précisément un qui réalise le maximum $\max\limits_{j\in I}|\pi(A_j;\theta_o) - \pi(A_j;\theta)|$).

Comme $\pi(A_{j_o};\theta) < 1$, on a donc, pour $\omega \in \complement \Omega'_o$, pour $T \geq T'_o(\eta',\omega)$ et pour $\theta \in \complement U$,

$$\sum_{j\in I} \frac{[\tau_T(A_j;\omega) - T\pi(A_j;\theta)]^2}{T^2\pi(A_j;\theta)} > (\gamma_{\theta,\theta_o} - \eta')^2 .$$

3°) Quel que soit $j \in I$, quel que soit $k \in I$, quel que soit $\omega \in \Omega$ et quel que soit $\theta \in \Theta$,

$$\left|\frac{1}{T}\,N_T(A_j \times A_k;\omega) - \int_{A_j} \pi(dx;\theta)\; Q(x,A_k;\theta)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{T} N_T(A_j \times A_k;\omega) - \int_{A_j} \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,A_k;\theta_o) + \right.$$

$$\left. + \int_{A_j} \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,A_k;\theta_o) - \int_{A_j} \pi(dx;\theta)\, Q(x,A_k;\theta)\right|$$

$$\geq \left|\left|\int_{A_j} \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,A_k;\theta_o) - \int_{A_j} \pi(dx;\theta)\, Q(x,A_k;\theta)\right|\right.$$

$$\left. - \left|\frac{1}{T} N_T(A_j \times A_k;\omega) - \int_{A_j} \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,A_k;\theta_o)\right|\right| .$$

Or, nous savons que, quel que soit $j \in I$ et quel que soit $k \in I$,

$$\frac{1}{T} N_T(A_j \times A_k) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int_{A_j} \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,A_k;\theta_o)$$

quand $T \to \infty$. D'où, il existe un $\Omega''_o \in \mathcal{A}$ avec $P(\complement\Omega''_o) = 1$, tel que : quel que soit $\omega \in \complement\Omega''_o$, quel que soit $\eta'' > 0$, il existe un nombre positif $T''_o(\eta'',\omega)$ pour lequel $T \geq T''_o$ entraîne que

$$\left|\frac{1}{T} N_T(A_j \times A_k;\omega) - \int_{A_j} \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,A_k;\theta_o)\right| < \eta'',$$

inégalité qui est vraie en particulier pour $0 < \eta'' < \delta_{\theta,\theta_o}$, où $\theta \neq \theta_o$. Soit U un voisinage quelconque de θ_o. Pour $\theta \in \complement U$, à cause de l'hypothèse c) et de ce qui précède, nous voyons qu'il existe un couple d'indices $(j_o,k_o) \in I \times I$ tel que, pour $\omega \in \complement\Omega''_o$ et pour $T \geq T''_o$,

$$\left|\frac{1}{T} N_T(A_{j_o} \times A_{k_o};\omega) - \int_{A_{j_o}} \pi(dx;\theta)\, Q(x,A_{k_o};\theta)\right| \geq$$

$$\geq \max_{(j,k)\in I\times I} \left|\int_{A_j} \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,A_k;\theta_o) - \int_{A_j} \pi(dx;\theta)\, Q(x,A_k;\theta)\right|$$

$$- \left|\frac{1}{T} N_T(A_{j_o} \times A_{k_o};\omega) - \int_{A_{j_o}} \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,A_{k_o};\theta_o)\right|$$

$$> \delta_{\theta,\theta_o} - \eta'' > 0,$$

(le couple (j_o,k_o) est précisément un qui réalise le maximum

$$\max_{(j,k)\in I\times I} \left|\int_{A_j} \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,A_k;\theta_o) - \int_{A_j} \pi(dx;\theta)\, Q(x,A_k;\theta)\right|\Big) .$$

Comme $\int_{A_{j_o}} \pi(dx;\theta)\, Q(x,A_{k_o};\theta) < 1$, on a donc, pour $\omega \in \complement\Omega''_o$,

pour $T \geq T''_o(\eta'',\omega)$ et pour $\theta \in \complement U$,

$$\sum_{(j,k)\in I\times I} \frac{\left[N_T(A_j\times A_k;\omega) - T\int_{A_j} \pi(dx;\theta)\, Q(x,A_k;\theta)\right]^2}{T^2\int_{A_j} \pi(dx;\theta)\, Q(x,A_k;\theta)} > (\delta_{\theta,\theta_o} - \eta'')^2 .$$

4°) Ainsi, nous voyons que, pour $\theta \in \complement U$, il existe un $\Omega_o \in \mathcal{A}$ (c'est $\Omega'_o \cup \Omega''_o$) avec $P(\complement\Omega_o) = 1$ tel que : quel que soit $\omega \in \complement\Omega_o$, quel que soit $\eta > 0$ (en particulier $0 < \eta < \min(\gamma_{\theta,\theta_o},\delta_{\theta,\theta_o})$), il existe un nombre positif $T_o(\omega,\eta)$ (c'est $\sup(T'_o,T''_o)$) pour lequel $T \geq T''_o$ entraîne que

$$\frac{1}{T}\ \Psi_T^2(\theta;\omega) > (\gamma_{\theta,\theta_o} - \eta)^2 + (\delta_{\theta,\theta_o} - \eta)^2 .$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{T}\left[\Psi_T^2(\theta;\omega) - c_T\ \Psi_T^2(\theta_o;\omega)\right] > (\gamma_{\theta,\theta_o} - \eta)^2 + (\delta_{\theta,\theta_o} - \eta)^2 - c_T\alpha^2\eta^2 - c_T\beta^2\eta^2 ,$$

où

$$\alpha^2 = \mathrm{Card}(I)\ .\ \frac{1}{\min\limits_{j\in I}\ \pi(A_j;\theta_o)}$$

et

$$\beta^2 = \mathrm{Card}(I\times I)\ .\ \frac{1}{\min\limits_{(j,k)\in I\times I}\ \int_{A_j}\pi(dx;\theta_o)\ Q(x,A_k;\theta_o)}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{T}\left[\Psi_T^2(\theta;\omega) - c_T\ \Psi_T^2(\theta_o;\omega)\right] > (2 - c_T\ a^2)\eta^2 - 2\ b_{\theta,\theta_o}\eta + c^2_{\theta,\theta_o}$$

où

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$b_{\theta,\theta_o} = \gamma_{\theta,\theta_o} + \delta_{\theta,\theta_o}$$

$$c^2_{\theta,\theta_o} = \delta^2_{\theta,\theta_o} + \delta^2_{\theta,\theta_o} .$$

5°) Nous pouvons choisir η de sorte que le deuxième membre soit strictement positif. En effet, considérons le trinôme

$$(2 - c_T\, a^2)\eta^2 - 2\, b_{\theta,\theta_o}\eta + c^2_{\theta,\theta_o} .$$

Si $2 - c_T\, a^2 \geq 0$, il suffit de prendre

$$\eta < \frac{c^2_{\theta,\theta_o}}{2\, b_{\theta,\theta_o}} .$$

Si $2 - c_T\, a^2 < 0$, nous remarquons que le trinôme en η a deux zéros de signes contraires ; il suffit de prendre

$$0 < \eta < \eta^{(1)}_{\theta,\theta_o}$$

où $\eta^{(1)}_{\theta,\theta_o}$ désigne le plus grand des deux zéros.

Donc, quel que soit le signe de $2 - c_T\, a^2$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $0 < \eta < \eta_1$ entraîne que le trinôme est strictement positif. Il en résulte que, quel que soit $\omega \in \complement\Omega_o$, quel que soit $\theta \in \complement U$ et quel que soit $\eta \in]0,\eta_1[$, il existe un nombre positif $T_o(\eta,\omega)$ tel que $T \geq T_o$ entraîne que

$$\frac{1}{T}\left[\Psi^2_T(\theta;\omega) - c_T\, \Psi^2_T(\theta_o;\omega)\right] > 0 .$$

6°) Nous avons vu que pour tout ω et pour $T > 0$,

$$\frac{1}{T}\left[\Psi^2_T(\theta^*_T(\omega);\omega) - c_T\, \Psi^2_T(\theta_o;\omega)\right] \leq 0$$

par définition de l'estimateur du Ψ^2 quasi-minimum. Mais d'autre part, quel que soit $\omega \in \complement\Omega_o$, pour $T \geq T_o$, si $\theta^*_T(\omega) \in \complement U$, alors

$$\frac{1}{T}\left[\Psi^2_T(\theta^*_T(\omega);\omega) - c_T\, \Psi^2_T(\theta_o;\omega)\right] > 0 .$$

On voit donc qu'il y a contradiction, et par conséquent, $\theta_T^*(\omega) \in U$. Ainsi, il y a convergence presque sûre de θ_T^* vers θ_o.

VII 3.2 - PROPOSITION :

Si Θ *est un espace topologique séparé, et s'il existe une partition finie* $\mathcal{B}$*-mesurable* $(A_j)_{j\in I}$ *de* $\mathcal{X}$ *telle que :*

a) *quel que soit* $\theta \in \Theta$, *quel que soit* $j \in I$ *et quel que soit* $k \in I$,

$$\int_{A_j} \pi(dx;\theta_o)\ Q(x,A_k;\theta) > 0 \ ,$$

b) *quel que soit* $\theta \in \Theta$ *et quel que soit* $\theta' \in \Theta$, *avec* $\theta \neq \theta'$,

$$\max_{(j,k)\in I\times I} \left| \int_{A_j} \pi(dx;\theta_o)\ \left[Q(x,A_k;\theta) - Q(x,A_k;\theta')\right] \right| = \lambda_{\theta,\theta'} \neq 0 \ .$$

Alors, tout estimateur θ_T^* *du* χ^2 *quasi-minimum de coefficient* c_T *converge presque sûrement vers* θ_o *quand* $T \to \infty$.

DEMONSTRATION :

1°) Nous remarquons tout d'abord que nous avons l'inégalité suivante : quel que soit $T \in R_+^*$ et quel que soit $\omega \in \Omega$,

$$\chi_T^2(\theta_T^*(\omega);\omega) \leq c_T\ \chi_T^2(\theta_o;\omega) \ ,$$

d'après la définition de l'estimateur du χ^2 quasi-minimum de coefficient c_T.

2°) Quel que soit $(j,k) \in I \times I$, quel que soit $\omega \in \Omega$, et quel que soit $\theta \in \Theta$, nous avons

$$\left|\frac{1}{T}\left[N_T(A_j\times A_k;\omega) - \int_{A_j}\tau_T(dx;\omega)\;Q(x,A_k;\theta)\right]\right|$$

$$= \left|\frac{1}{T}\,N_T(A_j\times A_k;\omega) - \int_{A_j}\pi(dx;\theta_o)\;Q(x,A_k;\theta_o)\right.$$

$$+ \int_{A_j}\pi(dx;\theta_o)\;Q(x,A_k;\theta_o) - \int_{A_j}\pi(dx;\theta_o)\;Q(x,A_k;\theta)$$

$$\left. + \int_{A_j}\pi(dx;\theta_o)\;Q(x,A_k;\theta) - \frac{1}{T}\int_{A_j}\tau_T(dx;\omega)\;Q(x,A_k;\theta)\right|$$

$$\geq \left|\left|\int_{A_j}\pi(dx;\theta_o)\;\left[Q(x,A_k;\theta_o) - Q(x,A_k;\theta)\right]\right|\right.$$

$$- \left|\left[\int_{A_j}\pi(dx;\theta_o)\;Q(x,A_k;\theta_o) - \frac{1}{T}\,N_T(A_j\times A_k;\omega)\right]\right.$$

$$\left.\left. + \left[\frac{1}{T}\int_{A_j}\tau_T(dx;\omega)\;Q(x,A_k;\theta) - \int_{A_j}\pi(dx;\theta_o)\;Q(x,A_k;\theta)\right]\right|\right|.$$

Ceci étant, nous savons que, quel que soit $(j,k)\in I\times I$,

(1) $$\frac{1}{T}\,N_T(A_j\times A_k) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int_{A_j}\pi(dx;\theta_o)\;Q(x,A_k;\theta_o)$$

quand $T\to\infty$, et que quel que soit $(j,k)\in I\times I$ et quel que soit $\theta\in\Theta$

(2) $$\frac{1}{T}\int_{A_j}\tau_T(dx)\;Q(x,A_k;\theta) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int_{A_j}\pi(dx;\theta_o)\;Q(x,A_k;\theta)$$

quand $T\to\infty$.

Soit $\theta \in \Theta$, nous pouvons écrire : il existe $\Omega_o \in \mathcal{A}$, avec $P(\complement\Omega_o) = 1$ tel que, quel que soit $\omega \in \complement\Omega_o$ et quel que soit $\eta > 0$, il existe un nombre positif $T_o(\eta,\omega,\theta)$ pour lequel $T \geq T_o$ entraîne que

$$\left|\left[\int_{A_j} \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,A_k;\theta_o) - \frac{1}{T} N_T(A_j\times A_k;\omega)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{T}\int_{A_j} \tau_T(dx;\omega)\, Q(x,A_k;\theta) - \int_{A_j} \pi(dx;\theta_o)\, Q(x,A_k;\theta)\right]\right| < \eta$$

inégalité qui reste vraie en particulier pour $0 < \eta < \lambda_{\theta,\theta_o}$, où $\theta \neq \theta_o$.

Soit U un voisinage quelconque de θ_o. Pour $\theta \in \complement U$, à cause de b) et de ce qui précède, nous voyons qu'il existe un couple $(j_o,k_o) \in I \times I$ tel que, pour $\omega \in \complement\Omega_o$ et pour $T \geq T_o$,

(3) $$\left|\frac{1}{T}\left[N_T(A_{j_o}\times A_{k_o};\omega) - \int_{A_{j_o}} \tau_T(dx;\omega)\, Q(x,A_{k_o};\theta)\right]\right|$$

$$\geq \max_{(j,k)\in I\times I}\left|\int_{A_j} \pi(dx;\theta_o)\left[Q(x,A_k;\theta_o) - Q(x,A_k;\theta)\right]\right| - \eta$$

$$\geq \lambda_{\theta,\theta_o} - \eta > 0.$$

Comme

$$\sum_{(j,k)\in I\times I} \int_{A_j} \pi(dx;\theta_o)\, \frac{Q(x,A_k;\theta)}{Q(x;\theta)} = 1,$$

nous avons donc d'après a),

$$\int_{A_{j_o}} \pi(dx;\theta_o) \frac{Q(x,A_{k_o};\theta)}{Q(x;\theta)} < 1.$$

D'où

$$\int_{A_{j_o}} \pi(dx;\theta_o)\ Q(x,A_{k_o};\theta) < \sup_{x\in\mathfrak{X}} Q(x;\theta) < M_\theta .$$

De ce fait, et d'après (2), nous pouvons écrire : quel que soit $\theta \in \Theta$, quel que soit $\omega \in \complement\Omega_o$, il existe $T_1(\omega,\theta)$ tel que $T > T_1$ entraîne que

$$\frac{1}{T} \int_{A_{j_o}} \tau_T(dx;\omega)\ Q(x,A_{k_o};\theta) < M_\theta .$$

Pour $\theta \in \complement U$, il résulte de ce qui précède, de la définition de $\chi^2_T(\theta,\omega)$ et de (3) que : quel que soit $\theta \in \Theta$, quel que soit $\omega \in \complement\Omega_o$, et quel que soit $\eta > 0$ assez petit, il existe un nombre positif $T_2(\omega,\theta,\eta)$ (c'est $\sup(T_o,T_1)$) tel que $T \geq T_2$ entraîne que

(4)
$$\frac{1}{T} \chi^2_T(\theta;\omega) > \frac{1}{M_\theta} (\lambda_{\theta,\theta_o} - \eta)^2 > 0 .$$

D'autre part, si on se reporte à (1) et (2), on voit que, quand $T \to \infty$,

$$\frac{1}{T} \chi^2_T(\theta_o;.) \xrightarrow{\text{p.s.}} 0 .$$

Ce qui peut s'écrire : quel que soit $\theta \in \Theta$, quel que soit $\omega \in \complement\Omega_o$, et quel que soit $\eta > 0$ assez petit, il existe $T_3(\omega,\eta)$ tel que $T \geq T_3$ entraîne que

$$\frac{1}{T} c_T\ \chi^2_T(\theta_o;\omega) < \frac{\eta^2}{M_\theta} .$$

Ce résultat, associé à (4), donne : pour $\theta \in \complement U$, quel que soit $\eta > 0$ assez petit, quel que soit $\omega \in \complement \Omega_o$, il existe un nombre positif $T_4(\omega,\eta,\theta)$ (c'est $\sup(T_3,T_2)$) tel que $T \geq T_4$ entraîne que

$$\frac{1}{T}\left[\chi_T^2(\theta;\omega) - c_T\, \chi_T^2(\theta_o;\omega)\right] > \frac{1}{M_\theta}\left[(\lambda_{\theta,\theta_o} - \eta)^2 - \eta^2\right] .$$

Nous pouvons prendre $\eta = \frac{1}{3}\lambda_{\theta,\theta_o}$ et nous voyons alors que :

Quel que soit le voisinage U de θ_o, quel que soit $\theta \in \complement U$, il existe $\Omega_o \in \mathcal{A}$ avec $P(\complement \Omega_o) = 1$, tel que quel que soit $\omega \in \complement \Omega_o$, il existe un nombre positif $T_5(\theta,\omega)$ pour lequel $T \geq T_5$ entraîne que

$$\frac{1}{T}\left[\chi_T^2(\theta;\omega) - c_T\, \chi_T^2(\theta_o;\omega)\right] > 0 .$$

3°) Nous avons vu que, quel que soit $\omega \in \Omega$ et quel que soit $T > 0$

$$\frac{1}{T}\left[\chi_T^2(\theta_T^*(\omega);\omega) - c_T\, \chi_T^2(\theta_o;\omega)\right] \leq 0$$

et que, d'autre part, quel que soit $\omega \in \Omega_o$, pour $T \geq T_5$, si $\theta_T^*(\omega) \in \complement U$, alors

$$\frac{1}{T}\left[\chi_T^2(\theta_T^*(\omega);\omega) - c_T\, \chi_T^2(\theta_o;\omega)\right] > 0 .$$

Par conséquent, nous devons avoir $\theta_T^*(\omega) \in U$. Ce qui démontre la convergence presque sûre de θ_T^* vers θ_o.

BIBLIOGRAPHIE (DEUXIEME PARTIE)

[1] P. BILLINGSLEY. - *Statistical Inference for Markov processes*, The University of Chicago Press, 1961.

[2] N. BOURBAKI.- *Topologie Générale*, Chapitre 9, Hermann, 1955.

[3] N. BOURBAKI.- *Intégration*, Chapitres 1 à 4, Hermann, 1965.

[4] BUI-TRONG-LIEU.- *Estimations pour des processus de Markov*, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, XI, 1962, p. 73-188.

[5] BUI-TRONG-LIEU et PHAN-THANH-LONG.- *Sur l'existence et sur la convergence d'estimateurs concernant des processus de Markov*, Acta Scientiarum Vietnamicarum, VI, 1970, p. 67-84.

[6] C.J. HIMMELBERG et F.S. VAN VLECK.- *Some selection theorems for measurable functions*, Canadian J. of Math, 1969, p. 394-399.

[7] K. KURATOWSKI et C. RYLL NARDZEWSKI.- *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Pol. Sciences, série Math, XIII, 1965, p. 397-403.

[8] C. LANGRAND et BUI-TRONG-LIEU.- *Deux méthodes d'estimation pour des processus de Markov à temps continu*, Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 270, série A, 1970, p. 722-724.

[9] C. LANGRAND, C. ANDRIEU et BUI-TRONG-LIEU.- *Sélecteurs et estimateurs du* Ψ^2 *quasi-minimum et du* χ^2 *quasi-minimum pour des processus de Markov à temps continu*, Revue Roum. de Math. Pures et Appliquées, XVII, n° 10, 1972, p. 1497-1511.

[10] C. LANGRAND, C. ANDRIEU et BUI-TRONG-LIEU.- *Sélection et estimation pour des processus de Markov à temps continu*, Proceedings of the European Meeeting of statisticians, Budapest, Sept.1972.

[11] C. LANGRAND et C. ANDRIEU.- *Estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance pour des processus de Markov à temps continu,*
Revue Roum. de Math. Pures et Appliquées (à paraître, 1973).

[12] G.G. ROUSSAS.- *Extension to Markov processes of a result of A. Wald about consistency of the maximum likelihood estimate,*
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 4, 1965, p. 69-73.

DEUXIEME THESE

PROPOSITIONS DONNEES PAR L'UNIVERSITE :

STRUCTURES DES ENSEMBLES CONVEXES UBIQUITAIRES DE V.L. KLEE.

-=-=-=-=-=-