

50376
1973
90

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur de 3ème Cycle

en

MECANIQUE DES FLUIDES



Maurice LOFFICIAL

SUR LES ECOULEMENTS AVEC SURFACE LIBRE
D'UN FLUIDE BAROTROPE PESANT

Membres du Jury : MM. G. GONTIER, Président
A. DYMENT, Rapporteur
F. PARSY, Examineur
A. MARTINOT - LAGARDE, Invité

A mes Parents,

A ma Femme,

A Xavier.

AVANT-PROPOS

Nous rendons hommage à Monsieur le Professeur A. MARTINOT-LAGARDE qui nous a enseigné la Mécanique des Fluides et qui s'est intéressé à notre travail.

Notre reconnaissance va à Monsieur le Professeur G. GONTIER qui a bien voulu présider le jury et à Monsieur F. PARSY, Chargé d'Enseignement, qui n'a cessé de nous encourager.

A Monsieur A. DYMENT, Maître de Conférences, qui nous a fait découvrir ses travaux et nous a constamment aidé lors de cette étude.

Nous remercions tous ceux qui ont contribué à la réalisation matérielle de cet ouvrage, particulièrement Mesdames R. BÉRAT et A. LENGAINNE qui en ont assuré la frappe dactylographiée.

*

*

*

INTRODUCTION

Le présent travail est consacré à l'étude des écoulements d'un fluide barotrope, pesant, avec surface libre dans un canal cylindrique et horizontal.

Dans le premier chapitre on applique la méthode d'étude des écoulements presque à une dimension en définissant des quantités dites normalisées qui sont à la fois sans dimension et de l'ordre de grandeur de 1 ; on fait ainsi apparaître un paramètre ϵ petit devant 1. Quand on néglige dans les équations les termes d'ordre ϵ on a un écoulement par tranches. L'altitude de la surface libre et la vitesse longitudinale s'obtiennent, en première approximation, par résolution d'un système hyperbolique et homogène. En ce qui concerne les écoulements par ondes simples, on retrouve la possibilité de phénomènes exceptionnels signalés par DYMENT [D] dans le cas d'un liquide : ainsi, pour certaines formes de canaux, un train d'ondes de surpression peut s'étaler alors qu'usuellement il se resserre. Un exemple d'un tel canal est donné dans le cas d'un gaz polytropique.

Pour obtenir une meilleure approximation que celle donnée par l'écoulement par tranches on utilise la méthode des perturbations. Au chapitre 2, on calcule la seconde approximation lorsque l'écoulement est uniforme en première approximation. Le calcul de l'altitude de la surface libre se ramène à l'intégration de l'équation des ondes ; ainsi un train d'ondes simples se propage sans se déformer. Mais cette propriété est en défaut si l'on tient compte des termes d'ordre supérieur.

La recherche des ondes simples dépourvues de déformation conduit aux ondes cnoïdales et, en particulier, à l'onde solitaire déjà envisagée par RAMAN [R] dans le cas particulier d'une loi polytropique et seulement lorsqu'il s'agit d'une surpression. Ici nous obtenons un résultat nouveau : il peut exister des ondes solitaires de dépression. La condition à remplir pour réaliser de telles ondes est la même que celle pour laquelle apparaissent les phénomènes exceptionnels décrits au chapitre 1.

Au chapitre 3, on reprend le problème précédent pour deux gaz polytropiques superposés en supposant, pour simplifier, que les deux fluides ne sont pas miscibles et que le mouvement est plan. Il est montré l'existence d'ondes cnoïdales et d'ondes solitaires pour les deux fluides et il est établi que les ondes solitaires peuvent être des dépressions.

CHAPITRE 1

ÉCOULEMENT PRESQUE À UNE DIMENSION DANS
UN CANAL CYLINDRIQUE ET HORIZONTAL.

1.1. Écoulement presque à une dimension.

Soit un fluide barotrope, pesant, non visqueux en mouvement relativement à un repère OXYZ trirectangle, direct, galiléen, avec OX horizontal et OZ vertical ascendant.

On désigne par U, V, W les composantes du vecteur vitesse, par P la pression, par ρ la masse volumique, par T le temps et par g l'accélération de la pesanteur.

L'équation de conservation de la masse, les équations de la dynamique et la loi de barotropie s'écrivent :

$$(1.1.) \quad \rho_T + (\rho U)_X + (\rho V)_Y + (\rho W)_Z = 0,$$

$$(1.2.) \quad \rho(U_T + U U_X + V U_Y + W U_Z) + P_X = 0,$$

$$(1.3.) \quad \rho(V_T + U V_X + V V_Y + W V_Z) + P_Y = 0,$$

$$(1.4.) \quad \rho(W_T + U W_X + V W_Y + W W_Z) + P_Z + \rho g = 0,$$

$$(1.5.) \quad P = B(\rho),$$

l'indice symbolisant une dérivation.

Soient $Z = K(Y)$ l'équation du canal et $Z = S(X, Y, T)$ celle de la surface libre où la pression sera considérée comme nulle. La condition de glissement sur le fond du canal, les conditions cinématique et dynamique à la surface libre s'écrivent :

$$(1.6.) \quad W = V K_Y \quad \text{pour } Z = K(Y),$$

$$(1.7.) \quad S_T + U S_X + V S_Y = W$$

$$(1.8.) \quad P = 0$$

} pour $Z = S(X, Y, T)$.

Nous supposerons de plus que l'écoulement est irrotationnel. On a :

$$(1.9.) \quad V_Z = W_Y, \quad W_X = U_Z, \quad U_Y = V_X.$$

Lorsque la section du canal varie lentement en fonction de X et (ou) de T on a :

$$(1.10.) \quad V, W \ll U,$$

$$(1.11.) \quad U_Y, U_Z, P_Y, P_Z \approx 0.$$

On dit que l'écoulement est presque à une dimension.

1.2. Normalisation.

Nous introduisons des quantités dites normalisées qui sont à la fois sans dimension et de l'ordre de grandeur de 1, suivant la présentation décrite par DYMENT [D]. Ces quantités seront représentées par des lettres minuscules.

Soient L et H deux longueurs de référence, la première longitudinale, la seconde transversale, T une durée de référence, U une vitesse longitudinale de référence, τU une vitesse transversale de référence, P et R une pression et une masse volumique de référence. D'après (1.10.) le paramètre τ est petit devant 1. Toutes les grandeurs de référence sont supposées bornées et définies à une constante multiplicative près. Posons :

$$x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{H}, \quad z = \frac{Z}{H}, \quad t = \frac{T}{T},$$

(1.12.)

$$u = \frac{U}{U}, \quad v = \frac{V}{\tau U}, \quad w = \frac{W}{\tau U}, \quad p = \frac{P}{P}, \quad r = \frac{\rho}{R},$$

de manière que x, y, z, t, u, v, w, p et r soient d'ordre 1.

Substituons dans (1.1.), (1.2.), (1.3.), (1.4.), (1.5.), (1.6.) et (1.11.), il vient :

$$(1.13.) \quad \frac{H}{L} \left[\frac{L}{\tau U} r_t + (ru)_x \right] + \tau \left[(rv)_y + (rw)_z \right] = 0,$$

$$(1.14.) \quad \frac{L}{\tau U} r \left[u_t + u u_x + \tau \frac{L}{H} (v u_y + w u_z) \right] + \frac{P}{R U^2} p_x = 0,$$

$$(1.15.) \quad \tau \frac{U^2}{L} r \left[\frac{L}{\tau U} u_t + u v_x + \tau \frac{L}{H} (v v_y + w v_z) \right] + \frac{P}{RH} p_y = 0,$$

$$(1.16.) \quad \tau \frac{U^2}{Lg} r \left[\frac{L}{\tau U} w_t + u w_x + \tau \frac{L}{H} (v w_y + w w_z) \right] + \frac{P}{RgH} p_z + r = 0,$$

$$(1.17.) \quad p = \frac{1}{P} B(rR),$$

$$(1.18.) \quad u_y, u_z, p_y, p_z \approx 0.$$

Pour envisager l'écoulement presque à une dimension le plus général, on doit supposer que toutes les dérivées $r_t, r_x, u_x, v_y, w_z, u_t, p_x \dots$ sont d'ordre 1. Il vient alors :

$$(1.19.) \quad \frac{H}{L} = \tau, \quad L = UT, \quad U^2 = gH, \quad P = RgH.$$

L'équation (1.9.) s'écrit :

$$(1.20.) \quad v_z = w_y, \quad \frac{H}{L} \tau v_x = w_y, \quad \frac{H}{L} \tau w_x = u_z.$$

Posons $\tau^2 = \epsilon$. La normalisation s'écrit alors :

$$(1.21.) \quad x = \frac{X\sqrt{\epsilon}}{H}, \quad y = \frac{Y}{H}, \quad z = \frac{Z}{H}, \quad t = T\sqrt{\frac{g\epsilon}{H}},$$

$$u = \frac{U}{\sqrt{gH}}, \quad v = \frac{V}{\sqrt{gH\epsilon}}, \quad w = \frac{W}{\sqrt{gH\epsilon}}, \quad p = \frac{P}{RgH}, \quad r = \frac{\rho}{R}.$$

Nous posons de plus $k = \frac{K}{H}$, $s = \frac{S}{H}$ et nous supposons que la loi de barotropie peut se mettre sous la forme $p = \beta(r)$. On remarque que parmi les grandeurs de référence introduites trois demeurent arbitraires (ici nous avons retenu H, R et ϵ) et que toutes les autres sont définies à partir de celles-ci par les relations (1.19.).

Les équations générales et les conditions aux frontières s'écrivent avec les variables normalisées :

$$(1.22.) \quad r_t + (ru)_x + (rv)_y + (rw)_z = 0,$$

$$(1.23.) \quad r(u_t + u u_x + v u_y + w u_z) + p_x = 0,$$

$$(1.24.) \quad \varepsilon r(v_t + u v_x + v v_y + w v_z) + p_y = 0,$$

$$(1.25.) \quad \varepsilon r(w_t + u w_x + v w_y + w w_z) + p_z + r = 0,$$

$$(1.26.) \quad p = \beta(r),$$

$$(1.27.) \quad v_z = w_y, \quad u_y = \varepsilon v_x, \quad u_z = \varepsilon w_x,$$

$$(1.28.) \quad w = v k_y \quad \text{pour} \quad z = k(y),$$

$$\left. \begin{array}{l} (1.29.) \quad w = s_t + u s_x + v s_y \\ (1.30.) \quad p = 0 \end{array} \right\} \quad \text{pour} \quad z = s(x, y, t).$$

Nous allons utiliser la méthode classique des perturbations qui consiste à poser pour chacune des inconnues (u, v, w, p, r, s) un développement de la forme :

$$(1.31.) \quad u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots + \varepsilon^i u_i + \dots,$$

où les u_i sont indépendants de ε ; $[u_i, v_i, w_i, p_i, r_i, s_i]$ sera appelé approximation d'ordre i .

1.3. Approximation d'ordre zéro.

Les équations s'écrivent à l'ordre zéro :

$$(1.32.) \quad r_{ot} + (r_o u_o)_x + (r_o v_o)_y + (r_o w_o)_z = 0,$$

$$(1.33.) \quad r_o(u_{ot} + u_o u_{ox}) + p_{ox} = 0,$$

$$(1.34.) \quad p_{oy} = 0,$$

$$(1.35.) \quad p_{oz} + r_o = 0,$$

$$(1.36.) \quad p_o = \beta(r_o),$$

$$(1.37.) \quad v_{oz} = w_{oy}, \quad u_{oy} = 0, \quad u_{oz} = 0,$$

$$(1.38.) \quad w_o = v_o k_y \quad \text{pour } z = k(y),$$

$$(1.39.) \quad \left. \begin{aligned} w_o &= s_{ot} + u_o s_{ox} + v_o s_{oy} \\ p_o &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } z = s_o(x,y,t).$$

$$(1.40.)$$

1.3.1. Les équations (1.35.) et (1.36.) permettent de calculer r_o .

Il vient :

$$(1.41.) \quad s_o - z = \int_0^{r_o} \frac{\beta'(\alpha)}{\alpha} d\alpha,$$

donc r_o ne dépend pas de y . La fonction $\beta(r)$ doit être telle que :

$$a) \quad \beta(0) = 0,$$

$$b) \quad \beta' = \frac{d\beta}{dr} \geq 0,$$

c) $\int_0^{r_0} \frac{\beta'(\alpha)}{\alpha} d\alpha$ ait un sens. Il faut donc que, quand $\alpha \rightarrow 0$,

$\frac{\beta'(\alpha)}{\alpha}$ se comporte comme α^{-n} avec $n < 1$. Par exemple, pour la loi polytropique $p = r^\gamma$ il faut $\gamma > 1$.

1.3.2. Intégrons (1.32.) sur Δ_0 section droite du canal jusqu'à la côte $z = s_0$. On a compte-tenu de

$$(1.42.) \quad r_{0t} = \frac{r_0}{\beta'(r_0)} s_{0t}, \quad r_{0x} = \frac{r_0}{\beta'(r_0)} s_{0x}, \quad r_{0y} = 0, \quad r_{0z} = -\frac{r_0}{\beta'(r_0)},$$

$$\iint_{\Delta_0} [(s_{0t} + u_0 s_{0x}) \frac{r_0}{\beta'(r_0)} + r_0 u_{0x}] dy dz + \iint_{\Delta_0} [(r_0 v_0)_y + r_0 w_{0z}] dy dz = 0.$$

Désignons par C_0 le contour de Δ_0 et par Γ_0 la partie C_0 appartenant au fond.

Sur Γ_0 , $w_0 = v_0 k_y$,

sur $(C_0 - \Gamma_0)$, $r_0 = 0$.

Il vient donc :

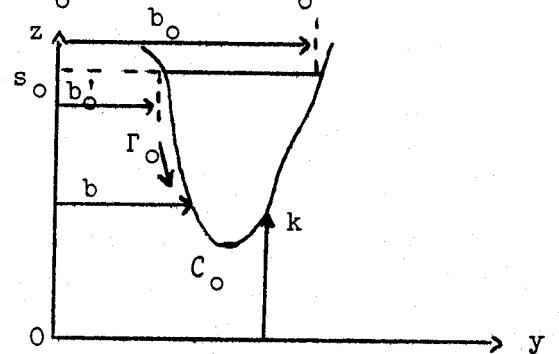


figure 1.1.

$$(s_{0t} + u_0 s_{0x}) \iint_{\Delta_0} \frac{r_0}{\beta'(r_0)} dy dz + u_{0x} \iint_{\Delta_0} r_0 dy dz = 0.$$

Soit :

$$(1.43.) \quad s_{0t} + u_0 s_{0x} + c_0^2 u_{0x} = 0,$$

avec

$$(1.44.) \quad c_0^2 = \sigma_0 \frac{ds_0}{d\sigma_0};$$

σ_0 étant défini par

$$(1.45.) \quad \sigma_0 = \iint_{\Delta_0} r_0 \, dy \, dz .$$

D'autre part (1.33.) s'écrit :

$$(1.46.) \quad u_{0t} + u_0 u_{0x} + s_{0x} = 0 .$$

Le système hyperbolique, homogène, quasi-linéaire (1.43.), (1.46.) permet de calculer u_0 et s_0 , fonction de x et de t . Pour obtenir la solution on utilise la méthode des caractéristiques. Pour cela, posons :

$$(1.47.) \quad ds_0 = c_0 \, d\theta_0 ,$$

alors (1.43.) et (1.46.) s'écrivent :

$$(1.48.) \quad \theta_{0t} + u_0 \theta_{0x} + c_0 u_{0x} = 0 ,$$

$$(1.49.) \quad u_{0t} + u_0 u_{0x} + c_0 \theta_{0x} = 0 .$$

Les caractéristiques du plan (x,t) ont pour équation $dx = (u_0 \pm c_0)dt$. En un point du plan (x,t) passent deux caractéristiques, l'une notée C^+ de pente $\frac{dx}{dt} = u_0 + c_0$, l'autre notée C^- de pente $\frac{dx}{dt} = u_0 - c_0$. A la caractéristique C^+ correspond dans le plan (θ_0, u_0) une caractéristique D^- rectiligne d'équation $\theta_0 + u_0 = \text{cte}$; de même à la caractéristique C^- correspond une D^+ rectiligne d'équation $\theta_0 - u_0 = \text{cte}$.

Considérées comme fonction de θ_0 et u_0 , x et t sont solution d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre linéaires. Lorsque le Jacobien $\frac{\partial(\theta_0, u_0)}{\partial(x, t)}$ est nul en tout point du domaine plan (x, t) , θ_0

et u_0 ne sont pas indépendants et au domaine considéré correspond une courbe du plan (θ_0, u_0) . De tels écoulements sont appelés "écoulements par ondes simples". On appelle écoulement par "ondes simples descendantes" (resp. "ondes simples montantes"), l'écoulement dans un domaine du plan (x, t) où $\theta_0 - u_0 = \text{cte}$ (resp. $\theta_0 + u_0 = \text{cte}$). Alors les caractéristiques C^+ (resp. C^-) sont rectilignes. Considérons par exemple un écoulement par ondes simples descendantes (resp. par ondes simples montantes), la pente des caractéristiques C^+ (resp. C^-) rectilignes est :

$$(1.50.) \quad \frac{dx}{dt} = u_0 + c_0 \quad (\text{resp.} \quad \frac{dx}{dt} = u_0 - c_0).$$

$$\text{Or} \quad \frac{d(u_0 + c_0)}{du_0} = 1 + \frac{dc_0}{d\theta_0} \quad (\text{resp.} \quad \frac{d(u_0 - c_0)}{du_0} = 1 + \frac{dc_0}{d\theta_0})$$

Donc, dans les deux cas, la fonction

$$(1.51.) \quad \Psi(s_0) = 1 + \frac{dc_0}{d\theta_0} = 1 + \frac{dc_0^2}{2 ds_0}$$

permet d'étudier la pente des caractéristiques rectilignes du plan (x, t) .

- Si $\Psi > 0$, la pente des caractéristiques varie dans le même sens que s_0 . De deux points où s_0 a des valeurs différentes, c'est celui où s_0 est le plus grand qui se propage le plus vite. C'est le cas par exemple des canaux de section rectangulaire ou des canaux de section puissance (définis par $y = nz^\alpha$).

- Si $\Psi < 0$ on a les conclusions opposées. En fin de chapitre nous étudions le cas de la loi polytropique et nous donnons un exemple de canal pour lequel le coefficient Ψ peut être négatif.

1.3.3. Pour déterminer v_o et w_o on introduit la fonction χ_o définie par :

$$(1.52.) \quad v_o = u_{ox} \chi_{oy}, \quad w_o = u_{ox} \chi_{oz},$$

de manière à satisfaire la relation (1.37.). L'équation (1.32.) donne :

$$(1.53.) \quad \beta'(r_o) [1 + \chi_{oyy} + \chi_{ozz}] - c_o^2 - \chi_{oz} = 0,$$

et les conditions (1.38.), (1.39.) s'écrivent :

$$(1.54.) \quad \chi_{oz} = \chi_{oy} k_y \quad \text{pour } z = k(y),$$

$$(1.55.) \quad \chi_{oz} = -c_o^2 \quad \text{pour } z = s_o.$$

On obtient la fonction $\chi_o(y, z)$ par intégration de l'équation (1.53.) avec les conditions aux frontières (1.54.) et (1.55.).

1.4. Cas de la loi polytrophique.

Nous étudions plus particulièrement le cas de la loi polytrophique $p = r^\gamma$, $\gamma > 1$, car cette loi fournit un schéma acceptable de l'atmosphère. Nous calculons la solution de l'approximation d'ordre zéro pour certaines formes de canaux et construisons une section pour laquelle le coefficient Ψ est négatif.

La masse volumique est donnée par :

$$(1.56.) \quad r_o^{\gamma-1} = \frac{\gamma-1}{\gamma} (s_o - z).$$

Pour un canal de section rectangulaire on a :

$$(1.57.) \quad c_o^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma} s_o, \quad \psi = \frac{3\gamma-1}{2\gamma},$$

$$(1.58.) \quad v_o = 0, \quad w_o = - \frac{\gamma-1}{\gamma} u_{ox} z.$$

Pour la famille de canaux "puissance" admettant $x O z$ pour plan de symétrie et d'équation $y = n z^\alpha$ pour $y > 0$, n et α constantes positives, on a :

$$(1.59.) \quad c_o^2 = \frac{s_o}{\alpha + \frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \psi = 1 + \frac{1}{2(\alpha + \frac{\gamma}{\gamma-1})},$$

$$(1.60.) \quad x_o = - \frac{c_o^2}{2s_o} (\alpha y^2 + z^2),$$

$$(1.61.) \quad v_o = - \frac{c_o^2}{s_o} \alpha u_{ox} y, \quad w_o = - \frac{c_o^2}{s_o} u_{ox} z.$$

On remarque que pour ces deux types de canaux le coefficient ψ est toujours positif.

En suivant le raisonnement de DYMENT [D], considérons un triangle de pente n relativement à Oz prolongé par un rectangle de dimensions h et ah suivant Oz et Oy (fig. 1.2).

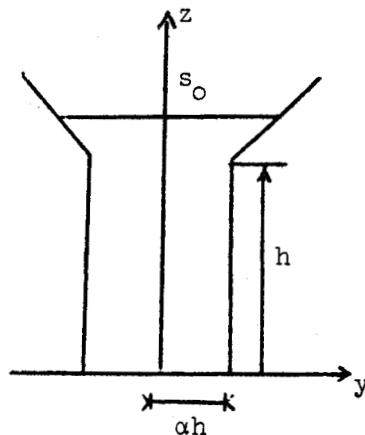


figure 1.2.

On a

$$(1.62.) \quad c_o^2 = \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma} \alpha h s_o^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma(2\gamma-1)} n(s_o-h)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}}}{\alpha h s_o^{\frac{1}{\gamma-1}} + \frac{\gamma-1}{\gamma} n(s_o-h)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

Ψ est alors du signe de

$$(1.63.) \quad \frac{(5\gamma-3)(\gamma-1)^2}{\gamma^2(2\gamma-1)} \lambda^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} n^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma} (1+\lambda)^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} \lambda^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[\frac{2(5\gamma-3)}{2\gamma-1} \lambda^2 + 4\lambda - 1 \right] \alpha n \\ + \frac{3\gamma-1}{\gamma} (1+\lambda)^{\frac{2}{\gamma-1}} \alpha^2,$$

où l'on a posé

$$(1.64.) \quad \lambda = \frac{s_o - h}{h}.$$

Supposons α fixé ; l'expression (1.63.) est un polynôme du second degré en n .

Pour que Ψ puisse être négatif il faut que (1.63.) possède deux zéros $(n_1, n_2; n_1 \geq n_2)$ (condition 1) dont un au moins est positif (condition 2).

- la condition 1 s'écrit :

$$1 - 8\lambda - \frac{48\gamma^2 - 16\gamma - 3}{\gamma(2\gamma-1)} \lambda^2 - \frac{8(5\gamma-1)(5\gamma-3)}{\gamma(2\gamma-1)} \lambda^3 - \frac{4(5\gamma-3)(\gamma-1)^2}{\gamma(2\gamma-1)} \lambda^4 \geq 0.$$

- la condition 2 s'écrit

$$\lambda < \frac{2\gamma-1}{2(5\gamma-3)} \left[-2 + \sqrt{\frac{18\gamma-10}{2\gamma-1}} \right].$$

Pour λ suffisamment petit ces deux conditions sont vérifiées. Il suffira de choisir $n_2 < n < n_1$ pour être sur que dans un certain intervalle de λ le coefficient Ψ est négatif.

CHAPITRE 2

ÉCOULEMENTS PRESQUE UNIFORMES.

2.1. Écoulements presque uniformes.

D'après (1.43.) et (1.46.) l'écoulement est uniforme à l'ordre zéro s'il est permanent : on dira que l'écoulement est presque uniforme. On a

$$(2.1.) \quad u_0 = \text{cte}, s_0 = \text{cte}, v_0 = w_0 = 0.$$

Nous allons calculer les approximations d'ordre un et deux dans ce cas.

2.1.1. Les équations d'ordre un s'écrivent :

$$(2.2.) \quad r_{1t} + r_0 u_{1x} + u_0 r_{1x} + r_0 v_{1y} + (r_0 w_1)_z = 0,$$

$$(2.3.) \quad r_0 (u_{1t} + u_0 u_{1x}) + p_{1x} = 0,$$

$$(2.4.) \quad p_{1y} = 0,$$

$$(2.5.) \quad p_{1z} - \frac{r_1}{r_0} p_{0z} = 0,$$

$$(2.6.) \quad p_1 = r_1 \beta'(r_0),$$

$$(2.7.) \quad v_{1z} = w_{1y}, u_{1y} = 0, u_{1z} = 0,$$

$$(2.8.) \quad w_1 = v_1 k_y \text{ pour } z = k(y).$$

Pour écrire les conditions à la surface libre, utilisons un développement de Taylor ; on a, compte tenu de $u_0 = \text{cte}$,

$$(2.9.) \quad s_{1t} + u_0 s_{1x} + \varepsilon(s_{2t} + u_0 s_{2x} + u_1 s_{1x} + v_1 s_{1y}) + \dots =$$

$$w_1 + \varepsilon(w_1 + s_1 w_{1z}) + \dots \text{ pour } z = s_0,$$

$$(2.10.) \quad p_1 + s_1 p_{0z} + \varepsilon(p_2 + s_1 p_{1z} + \frac{s_1^2}{2} p_{0zz} + s_2 p_{0z}) + \dots = 0 \text{ pour } z = s_0.$$

Les conditions cinématique et dynamique à la surface libre s'écrivent donc à l'ordre un :

$$\left. \begin{array}{l} (2.11.) \quad s_{1t} + u_0 s_{1x} = w_1 \\ (2.12.) \quad p_1 = 0 \end{array} \right\} \text{ pour } z = s_0.$$

A partir de (2.4.), (2.5.) et (2.6.) nous calculons r_1 et p_1 . Il vient :

$$(2.13.) \quad p_1 = \beta'(r_0) r_1 = s_1 r_0.$$

Pour calculer u_1 et s_1 nous procédons comme pour l'approximation d'ordre zéro ; on intègre (2.2.) sur la section droite du canal limitée à la côte $z = s_0$. Il vient :

$$(2.14.) \quad s_{1t} + u_0 s_{1x} + c_0^2 u_{1x} = 0.$$

L'équation de la dynamique, en projection sur Ox , s'écrit :

$$(2.15.) \quad u_{1t} + u_0 u_{1x} + s_{1x} = 0 .$$

Le système (2.14.), (2.15.) est un système d'équations aux dérivées de type hyperbolique à coefficients constants. Les caractéristiques (x,t) ont pour équation

$$(2.16.) \quad dx = (u_0 \pm c_0) dt .$$

Ce résultat suggère d'effectuer le changement de variables :

$$(2.17.) \quad \xi = x - (u_0 - c_0) t , \quad \eta = x - (u_0 + c_0) t .$$

Il vient :

$$(2.18.) \quad \begin{cases} s_1 = \psi(\eta) + f(\xi) \\ c_0 u_1 = \psi(\eta) - f(\xi) \end{cases}$$

les fonctions ψ et f étant déterminées par les conditions aux frontières.

Les vitesses transversales se calculent comme à l'ordre zéro. Posons :

$$(2.19.) \quad v_1 = u_{1x} x_{1y}, \quad w_1 = u_{1x} x_{1z} .$$

Les équations (2.2.), (2.8.) et (2.11.) s'écrivent :

$$(2.20.) \quad \beta'(r_0) [1 + x_{1yy} + x_{1zz}] - c_0^2 x_{1z} = 0 ,$$

$$(2.21.) \quad x_{1z} = x_{1y} k_y \quad \text{pour} \quad z = k(y) ,$$

$$(2.22.) \quad \chi_{1z} = -c_0^2 \text{ pour } z = s_0.$$

2.2. Approximation d'ordre deux.

On fait de la forme simple des résultats de l'approximation d'ordre un on peut poursuivre le calcul jusqu'à l'ordre deux. Les équations d'ordre deux s'écrivent en tenant compte des résultats précédents :

$$(2.23.) \quad r_{2t} + r_0 u_{2x} + (r_1 u_1)_x + u_0 r_{2x} + r_0 v_{2y} + (r_1 v_1)_y + (r_0 w_2)_z + (r_1 w_1)_z = 0,$$

$$(2.24.) \quad r_0 (u_{2t} + u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x}) + (p_{2x} - \frac{r_1}{r_0} p_{1x}) = 0,$$

$$(2.25.) \quad r_0 (v_{1t} + u_0 v_{1x}) + p_{1y} = 0,$$

$$(2.26.) \quad r_0 (w_{1t} + u_0 w_{1x}) + \left[p_{2z} - \frac{r_1}{r_0} p_{1z} + \left(\frac{r_1^2}{r_0^2} - \frac{r_2}{r_0} \right) p_{0z} \right] = 0,$$

$$(2.27.) \quad p_2 = r_2 \beta'(r_0) + \frac{r_1^2}{2} \beta''(r_0),$$

$$(2.28.) \quad v_{2z} = w_{2y}, u_{2y} = v_{1x}, u_{2z} = w_{1x},$$

$$(2.29.) \quad w_2 = v_2 k_y \text{ pour } z = k(y),$$

$$(2.30.) \quad \left. \begin{aligned} s_{2t} + u_0 s_{2x} + u_1 s_{1x} &= w_2 + s_1 w_{1z} \\ p_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pour } z = s_0.$$

$$(2.31.)$$

2.2.1. Nous calculons u_2 à partir de (2.28.). Il vient :

$$(2.32.) \quad u_2 = u_{1xx} \chi_1 + \ell(x, t),$$

ℓ étant une fonction arbitraire de x et de t .

Et, compte tenu de (2.26.) et (2.27.) :

$$(2.33.) \quad r_2 = \frac{r_0}{\beta'(r_0)} s_{1xx} x_1 + \frac{r_0}{2} \left[\frac{1}{\beta'^2(r_0)} - r_0 \frac{\beta''(r_0)}{\beta'^3(r_0)} \right] s_1^2 + \frac{r_0}{\beta'(r_0)} m(x,t) ,$$

m étant une fonction arbitraire de x et de t .

2.2.2. Intégrons l'équation de conservation de la masse sur l'aire de la section droite. On a :

$$(2.34.) \quad \iint_{\Delta_0} [r_0 v_{2y} + (r_1 v_1)_y + (r_0 w_2)_z + (r_1 w_1)_z] dy dz = \int_{T_0} (r_0 v_2) dz + \int_{r_0} (r_1 v_1) dz - \int_{b'_0}^{b_0} r_0 w_2(y, s_0) dy - \int_{b'_0}^{b_0} r_1 w_1(y, s_0) dy = 0 .$$

Soit :

$$(2.35.) \quad \iint_{\Delta_0} [r_{2t} + r_0 u_{2x} + (r_1 u_1)_x + r_0 u_{2x}] dy dz = 0 ,$$

Or :

$$\begin{aligned} & r_{2t} + r_0 u_{2x} + (r_1 u_1)_x + u_0 r_{2x} \\ &= r_0 x_1 \left[1 - \frac{c_0^2}{\beta'(r_0)} \right] u_{1xxx} - r_0 \left[\frac{1}{\beta'^2(r_0)} - r_0 \frac{\beta''(r_0)}{\beta'^3(r_0)} \right] c_0^2 s_1 u_{1x} \\ &+ \frac{r_0}{\beta'(r_0)} (m_t + u_0 m_x) + r_0 \ell_x + \frac{r_0}{\beta'(r_0)} (s_1 u_1)_x . \end{aligned}$$

L'équation (2.23.) donne donc :

$$(2.36.) \quad m_t + u_o m_x + c_o^2 \ell_x = A s_1 u_{1x} - B u_{1xxx} - (s_1 u_1)_x ,$$

avec

$$(2.37.) \quad A = c_o^2 \frac{\iint_{\Delta_o} r_o \left[\frac{1}{\beta'^2(r_o)} - r_o \frac{\beta''(r_o)}{\beta'^3(r_o)} \right] dy dz}{\iint_{\Delta_o} \frac{r_o}{\beta'(r_o)} dy dz} ,$$

$$(2.38) \quad B = \frac{\iint_{\Delta_o} r_o x_1 \left[1 - \frac{c_o^2}{\beta'(r_o)} \right] dy dz}{\iint_{\Delta_o} \frac{r_o}{\beta'(r_o)} dy dz}$$

On peut écrire le numérateur N_1 de A sous la forme :

$$N_1 = c_o^2 \iint_{\Delta_o} \frac{r_o}{\beta'(r_o)} \frac{d}{dr_o} \left[\frac{r_o}{\beta'(r_o)} \right] dy dz = c_o^2 \iint_{\Delta_o} \frac{d}{ds_o} \left[\frac{r_o}{\beta'(r_o)} \right] dy dz$$

donc

$$(2.39.) \quad A = c_o^2 \frac{d}{ds_o} \left(\text{Log} \frac{\sigma_o}{c_o^2} \right) = \frac{c_o^2}{\sigma_o} \frac{d\sigma_o}{ds_o} - 2 c_o \frac{dc_o}{ds_o} = 1 - \frac{dc_o^2}{ds_o} = 3 - 2 \Psi$$

Remplaçons dans le numérateur (N_2) de B , c_o^2 par

$$\beta'(r_o) [1 + x_{1yy} + x_{1zz}] - x_{1z}$$

$$\begin{aligned}
 N_2 &= \iint_{\Delta_0} [r_{0z} x_1 x_{1z} - r_0 x_1 (x_{1yy} + x_{1zz})] dy dz \\
 &= - \iint_{\Delta_0} [x_1 (r_0 x_{1z})_z + r_0 x_1 x_{1y}] dy dz \\
 &= - \iint_{\Delta_0} [(r_0 x_1 x_{1z})_z + (r_0 x_1 x_{1y})_y] dy dz + \iint_{\Delta_0} r_0 (x_{1y}^2 + x_{1z}^2) dy dz \\
 &= - \int_{\Gamma_0} r_0 x_1 (x_{1y} dz - x_{1z} dy) + \iint_{\Delta_0} r_0 (x_{1y}^2 + x_{1z}^2) dy dz .
 \end{aligned}$$

D'où :

$$(2.40.) \quad B = \frac{c_0^2}{\sigma_0} \iint_{\Delta_0} r_0 (x_{1y}^2 + x_{1z}^2) dy dz .$$

Les deux fonctions $\ell(x,t)$ et $m(x,t)$ vérifient le système obtenu en portant (2.39.) dans (2.36.), (2.32.) et (2.33.) dans (2.24.).

$$(2.41.) \quad m_t + u_0 m_x + c_0^2 \ell_x = (3 - 2 \psi) s_1 u_{1x} - (s_1 u_1)_x - B u_{1xxx} ,$$

$$(2.42.) \quad \ell_t + u_0 \ell_x + m_x = - u_1 u_{1x} .$$

Ce système est linéaire et à coefficients constants. Les caractéristiques du plan (x,t) sont les mêmes qu'à l'ordre un de sorte qu'on obtient la solution analytique à l'aide du changement de variables (2.17.).

Compte tenu de (2.18.), il vient :

$$\begin{aligned}
 (2.43.) \quad c_0^2 (m_\xi - m_\eta) + c_0^3 (\ell_\xi + \ell_\eta) &= B(f'''' - \psi''') + (3 - 2 \psi) (f \psi' - \psi f') \\
 &+ (2 \psi - 1) (ff' - \psi \psi')
 \end{aligned}$$

$$(2.44.) \quad c_0^3(\ell_\xi - \ell_\eta) + c_0^2(m_\xi + m_\eta) = -ff' - \psi\psi' + \psi f' + \psi' f$$

Ajoutons membre à membre et intégrons ; on obtient :

$$2 c_0^2(m + c_0 \ell) = B f'' + 2(\psi - 1)\left(\frac{f^2}{2} + \psi f\right) - \xi [B \psi''' + 2 \psi \psi\psi'] \\ + 2(2 - \psi) \psi' \int_{\bar{\xi}}^{\xi} f d\xi + \psi_2(\eta) ,$$

où $\bar{\xi}$ est une constante et ψ_2 une fonction arbitraire de η .

Soustrayons membre à membre et intégrons ; on obtient :

$$2 c_0^2(m - c_0 \ell) = B \psi'' + 2(\psi - 1)\left(\frac{\psi^2}{2} + \psi f\right) - \eta (B f''' + 2 \psi f f') \\ + 2(2 - \psi) f' \int_{\bar{\eta}}^{\eta} \psi d\eta + f_2(\xi) ,$$

où $\bar{\eta}$ est une constante et f_2 une fonction arbitraire de ξ .

Finalement ;

$$(2.45.) \quad 4 c_0^2 m = B(f'' + \psi'') + (\psi - 1)(f^2 + \psi^2 + 4 \psi f) - \xi [B \psi''' + 2 \psi \psi\psi'] \\ - \eta [B f''' + 2 \psi f f'] + 2(2 - \psi) \left[\psi' \int_{\bar{\xi}}^{\xi} f d\xi + f' \int_{\bar{\eta}}^{\eta} \psi d\eta \right] \\ + f_2(\xi) + \psi_2(\eta) ,$$

$$(2.46.) \quad 4 c_0^3 \ell = B(f'' - \psi'') + (\psi - 1)(f^2 - \psi^2) - \xi [B \psi''' + 2 \psi \psi\psi'] \\ + \eta [B f''' + 2 \psi f f'] + 2(2 - \psi) \left[\psi' \int_{\bar{\xi}}^{\xi} f d\xi - f' \int_{\bar{\eta}}^{\eta} \psi d\eta \right] \\ - f_2(\xi) + \psi_2(\eta) .$$

A l'ordre un un train d'ondes simples défini par $\psi = \text{cte}$ (ondes montantes) ou par $f = \text{cte}$ (ondes descendantes) se propage sans déformation. A l'ordre deux cette propriété cesse d'être vraie ; dans les expressions de $m(x,t)$ et de $\ell(x,t)$ figurent des termes non bornés même lorsque ψ et f sont des fonctions périodiques ; de la, pour la pression et la vitesse, une déformation qui s'amplifie à mesure que les ondes se propagent.

2.3. Ondes simples indéformables à l'ordre deux.

2.3.1. Nous allons montrer qu'il existe des ondes simples périodiques telles que les termes de déformation qui apparaissent dans la solution de l'approximation d'ordre deux soient identiquement nuls. La conditions à remplir pour un train d'ondes simples montantes par exemple, est :

$$(2.47.) \quad B f''' + 2 \psi f f' - 2(2 - \psi) \psi f' = 0 .$$

Pour des ondes simples descendantes, on obtient la même équation (en remplaçant f par ψ).

Il vient en intégrant et en laissant de côté la solution banale $f = \text{cte}$:

$$(2.48.) \quad B f'^2 = -\frac{2}{3} \psi f^3 + 2(2 - \psi) \psi f^2 + \delta_1 f + \delta_2 ,$$

où δ_1 et δ_2 sont des constantes.

Soient $q_1 \leq q_2 \leq q_3$ les racines supposées réelles du second membre. Dans la solution que nous cherchons à construire f doit être borné et f' doit être réel et continu. Comme B est positif, f'^2 est du signe de ψ ,

pour $f < q_1$ et pour $q_2 < f < q_3$ (fig. 2.1.). On fera varier f entre q_2 et q_3 si $\Psi > 0$ et entre q_1 et q_2 si $\Psi < 0$.

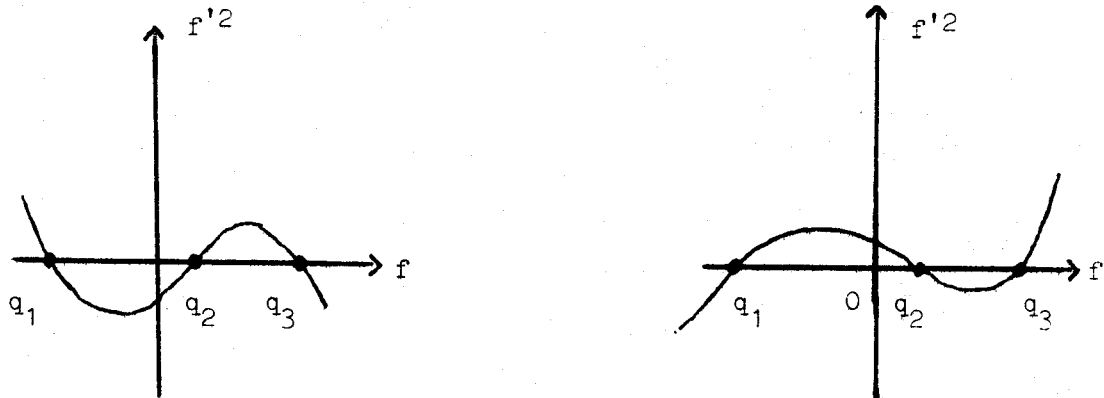


figure 2.1.

cas a) : $\Psi > 0$.

cas b) : $\Psi < 0$.

2.3.2. Supposons $\Psi > 0$. Posons

$$(2.49.) \quad f = q_2 + (q_3 - q_2) \cos^2 \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

L'intégration donne :

$$(2.50.) \quad f = q_2 + (q_3 - q_2) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a},$$

avec a constante positive définie par :

$$(2.51.) \quad a^2 = \frac{6B}{\Psi(q_3 - q_1)},$$

la constante d'intégration ayant été choisie pour que f soit égal à q_3 pour $\xi = 0$.

Nous avons pour l'altitude de la surface libre, à l'approximation d'ordre un :

$$(2.52.) \quad s = s_o + \varepsilon[(\vartheta + q_2) + (q_3 - q_2) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a}] .$$

Le maximum et le minimum de s sont donnés par :

$$(2.53.) \quad s_M = s_o + \varepsilon(q_3 + \vartheta), \quad s_m = s_o + \varepsilon(q_2 + \vartheta) .$$

De là :

$$(2.54.) \quad s = s_m + (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a} ,$$

$$(2.55.) \quad c_o(u - u_o) = s_o - s_m + 2 \varepsilon \vartheta - (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a} ,$$

$$(2.56.) \quad \frac{c_o v}{x_{1y}} = \frac{c_o w}{x_{1z}} = 2 \frac{s_M - s_m}{a} \operatorname{cn} \frac{\xi}{a} \operatorname{sn} \frac{\xi}{a} \operatorname{dn} \frac{\xi}{a} .$$

Appelons p_f la pression et r_f la masse volumique sur le fond du canal à une côte donnée. On a à l'ordre un :

$$p_f = B(r_{of}) + r_{of} \varepsilon s_1 = \beta(r_{of}) + r_{of}[(s_M - s_o) + (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a}] ,$$

Les extrêmes de p_f sont :

$$p_{fM} = \beta(r_{of}) + r_{of}(s_M - s_o) ,$$

$$p_{fm} = \beta(r_{of}) + r_{of}(s_m - s_o) ,$$

d'où

$$(2.57.) \quad p_f = p_{fm} + (p_{fM} - p_{fm}) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a}.$$

Ces ondes indéformables sont appelées ondes cnoïdales. D'après les propriétés des fonctions elliptiques, leur longueur d'onde λ est

$$(2.58.) \quad \lambda = 2 a K\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

K désignant l'intégrale elliptique complète de première espèce de module

$$(2.59.) \quad k = \sqrt{\frac{q_3 - q_2}{q_3 - q_1}}.$$

Pour $k = 1$, la longueur d'onde devient infinie, ce qui définit une onde unique appelée onde solitaire. Alors :

$$(2.60.) \quad s = s_m + (s_M - s_m) \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{a},$$

$$(2.61.) \quad c_o(u - u_o) = s_o - s_m + 2 \varepsilon \psi - (s_M - s_m) \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{a},$$

$$(2.62.) \quad \frac{c_o v}{\chi_{1y}} = \frac{c_o w}{\chi_{1z}} = 2 \frac{s_M - s_m}{a} \operatorname{th} \frac{\xi}{a} \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{a},$$

$$(2.63.) \quad p_f = p_{fm} + (p_{fM} - p_{fm}) \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{a}.$$

On voit que l'onde solitaire ne peut être qu'une onde de surpression (fig 2.2.a.)

2.3.3. Supposons $\Psi < 0$. Dans ce cas le changement de variable a effectué est :

$$(2.64.) \quad f = q_2 - (q_2 - q_1) \cos^2 \theta \quad 0, \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

L'intégration donne

$$(2.65.) \quad f = q_2 - (q_2 - q_1) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a},$$

a, constante positive étant définie par

$$(2.66.) \quad a^2 = \frac{6 B}{\Psi(q_1 - q_3)}$$

Puis

$$(2.67.) \quad s = s_M - (s_M - s_m) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a},$$

$$(2.68.) \quad p_f = p_{fM} - (p_{fM} - p_{fm}) \operatorname{cn}^2 \frac{\xi}{a}.$$

La longueur d'onde λ de ces ondes cnoïdales est

$$(2.69.) \quad \lambda = 2 a K\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

où

$$(2.70.) \quad k = \sqrt{\frac{q_1 - q_2}{q_1 - q_3}}.$$

Pour $k = 1$, la longueur d'onde devient infinie. On a une onde solitaire. Il vient :

$$(2.71.) \quad s = s_M - (s_M - s_m) \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{a},$$

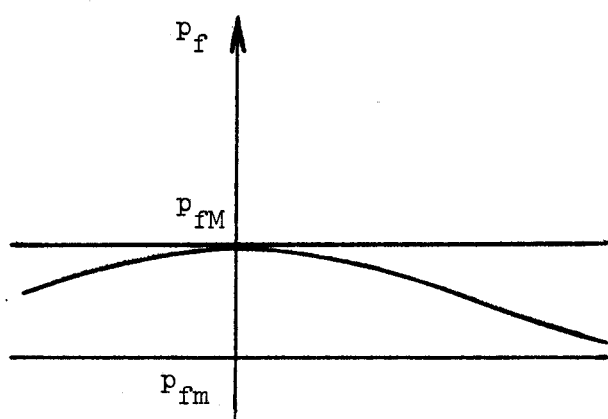
$$(2.72.) \quad p_f = p_{fM} - (p_{fM} - p_{fm}) \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{a},$$

$$(2.73.) \quad c_0(u - u_0) = s_0 - s_M + 2 \varepsilon \psi + (s_M - s_m) \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{a},$$

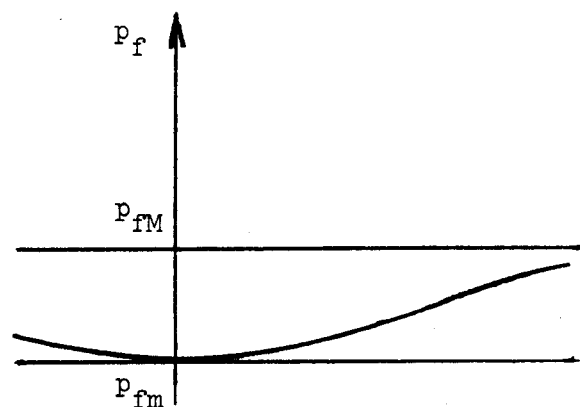
$$(2.74.) \quad \frac{c_0 v}{\chi_{1y}} = \frac{c_0 w}{\chi_{1z}} = -2 \frac{s_M - s_m}{a} \operatorname{th} \frac{\xi}{a} \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{a}.$$

On voit que l'onde solitaire ne peut être qu'une onde de dépression (fig. 2.2.b.).

On remarque que la condition à remplir pour avoir des ondes solitaires de dépression ($\psi < 0$) est la même que celle pour laquelle un train d'onde calculé à l'approximation d'ordre zéro, s'étale au lieu de se resserrer.



cas a) : $\psi > 0$.



cas b) : $\psi < 0$.

figure 2.2.

CHAPITRE III

ÉCOULEMENTS PRESQUE UNIFORMES DE DEUX FLUIDES
NON MISCIBLES.

On considère deux fluides non miscibles en évolution polytropique. On se limite à l'étude du mouvement plan sur fond horizontal. La normalisation est celle adoptée au chapitre 1, avec, de plus,

$$(3.1.) \quad u' = \frac{U'}{\sqrt{gH}}, \quad w = \frac{W'}{\sqrt{gH\varepsilon}}, \quad p' = \frac{P'}{R'gH}, \quad r' = \frac{\rho'}{R'}, \quad s' = \frac{S'}{H},$$

les symboles accentués se rapportant au fluide léger.

Pour cette normalisation les lois de barotropie s'écrivent :

$$(3.2.) \quad \frac{p}{r^\gamma} = \frac{P_a}{RgH} \frac{R^\gamma}{\rho_a^\gamma}, \quad \frac{p'}{r'^\delta} = \frac{P'_a}{R'gH} \frac{R'^\delta}{\rho_a'^\delta},$$

où (P_a, ρ_a) et (P'_a, ρ'_a) désignant des états possibles respectivement du fluide lourd et du fluide léger.

Le choix de R et R' étant arbitraire, nous prendrons par exemple

$$(3.3.) \quad R = \rho_a, \quad R' = \rho'_a, \quad P_a = \rho_a gH, \quad P'_a = \rho'_a gH,$$

alors

$$(3.4.) \quad p = r^\gamma, \quad p' = r'^\delta.$$

La condition dynamique à la surface de séparation est :

$$(3.5.) \quad p = dp',$$

où l'on a posé

$$(3.6.) \quad d = \frac{\rho'_a}{\rho_a}, \quad d < 1.$$

Les équations générales s'écrivent :

$$(3.7.) \quad r_t + (ru)_x + (rw)_z = 0,$$

$$(3.8.) \quad r(u_t + uu_x + wu_z) + p_x = 0,$$

$$(3.9.) \quad \epsilon r(w_t + uw_x + ww_z) + p_z + r = 0,$$

$$(3.10.) \quad p = r^\gamma,$$

$$(3.11.) \quad u_z = \epsilon w_x$$

pour le fluide lourd,

$$(3.12.) \quad r'_t + (r'u')_x + (r'w')_z = 0,$$

$$(3.13.) \quad r'(u'_t + u'u'_x + w'u'_z) + p'_x = 0,$$

$$(3.14.) \quad \epsilon r'(w'_t + u'w'_x + w'w'_z) + p'_z + r' = 0,$$

$$(3.15.) \quad p' = r'^\delta,$$

$$(3.16.) \quad u'_z = \epsilon w'_x$$

pour le fluide léger.

La condition cinématique sur le fond est

$$(3.17.) \quad w = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0.$$

Les conditions cinématiques et dynamique sont

$$\left. \begin{aligned} (3.18.) \quad s_t + us_x &= w \\ (3.19.) \quad s'_t + u's'_x &= w' \\ (3.20.) \quad p &= dp' \end{aligned} \right\} \quad \text{pour} \quad z = s(x,t)$$

à la surface de séparation,

et

$$\left. \begin{aligned} (3.21.) \quad s'_t + u's'_x &= w' \\ (3.22.) \quad p' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{pour} \quad z = s'(x,t)$$

à la surface libre.

3.1. Approximation d'ordre zéro et un.

3.1.1.- Comme nous nous intéressons à la recherche des ondes indéformables à l'ordre deux, on supposera :

- l'écoulement permanent jusqu'à cet ordre.
- le fluide lourd au repos à l'ordre zéro, ceci pour simplifier les calculs suivants (mais le calcul est possible avec u_0 différent de zéro).

Les équations d'ordre zéro s'écrivent alors :

$$(3.23.) \quad (r_o w_o)_z = 0,$$

$$(3.24.) \quad p_{ox} = 0,$$

$$(3.25.) \quad p_{oz} + r_o = 0,$$

$$(3.26.) \quad p_o = r_o^\gamma,$$

$$(3.27.) \quad (r_o' u_o')_x + (r_o' w_o')_z = 0,$$

$$(3.28.) \quad p_{ox}' = 0,$$

$$(3.29.) \quad p_{oz}' + r_o' = 0,$$

$$(3.30.) \quad p_o' = r_o'^\delta,$$

$$(3.31.) \quad u_{oz}' = 0,$$

$$(3.32.) \quad w_o = 0 \quad \text{pour } z = 0$$

$$(3.33.) \quad w_o = 0$$

$$(3.34.) \quad u_o' s_{ox} = w_o'$$

$$(3.35.) \quad p_o = d p_o'$$

} pour $z = s_o$;

$$(3.36.) \quad u_o' s_{ox}' = w_o'$$

$$(3.37.) \quad p_o' = 0$$

} pour $z = s_o'$.

Il vient :

$$(3.38.) \quad r_o^{\gamma-1} = \frac{\gamma-1}{\gamma} (s_o - z) + r_{o1}^{\gamma-1},$$

$$(3.39.) \quad r_o'^{\delta-1} = \frac{\delta-1}{\delta} (s_o' - z),$$

$$(3.40.) \quad r_{o1}^\gamma = d r_{o1}'^\delta,$$

où r_{o1} et r_{o1}' désignent les valeurs de r_o et de r_o' à la surface de séparation.

$$(3.41.) \quad w_o = w_o' = 0,$$

$$(3.42.) \quad u_o' = \text{cte}, \quad s_o = \text{cte}, \quad h_o = s_o' - s_o = \text{cte}.$$

3.1.2.- Les équations d'ordre 1 sont

$$(3.43.) \quad r_o u_{1x} + (r_o w_1)_z = 0,$$

$$(3.44.) \quad p_{1x} = 0,$$

$$(3.45.) \quad p_{1z} - \frac{r_1}{r_o} p_{oz} = 0,$$

$$(3.46.) \quad p_1 = \gamma r_1 r_o^{\gamma-1},$$

$$(3.47.) \quad u_{1z} = 0,$$

$$(3.48.) \quad r_o' u_{1x}' + u_o' r_{1x}' + (r_o' w_1')_z = 0,$$

$$(3.49.) \quad u_o' u_{1x}' + \frac{1}{r_o'} p_{1x}' = 0,$$

$$(3.50.) \quad p_{1z}' - \frac{r_1'}{r_o'} p_{1x}' = 0,$$

$$(3.51.) \quad p_1' = \delta r_1' r_o'^{\delta-1},$$

$$(3.52.) \quad u'_{1z} = 0,$$

$$(3.53.) \quad w_1 = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0 ;$$

$$(3.54.) \quad w_1 = 0,$$

$$(3.55.) \quad u'_{01x} s_1 = w'_1 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (3.54.) \\ (3.55.) \end{matrix}} \right\} \quad \text{pour} \quad z = s_0 ;$$

$$(3.56.) \quad p_1 - s_1 r_0 = d(p'_1 - s_1 r'_0)$$

$$(3.57.) \quad u'_{01x} s'_1 = w'_1 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (3.54.) \\ (3.55.) \end{matrix}} \right\} \quad \text{pour} \quad z = s'_0.$$

$$(3.58.) \quad r_1 + s'_1 r'_{0z} = 0$$

u_1 et u'_1 ne sont fonctions que de x et de t . Les équations (3.38.), (3.39.), (3.40.), (3.44.), (3.45.), (3.46.), (3.50.) et (3.51.) donnent :

$$(3.59.) \quad r'_1 = \frac{1}{\delta} r_0^{2-\delta} s'_1,$$

$$(3.60.) \quad r_1 = \frac{1}{\gamma} r_0^{2-\gamma} A,$$

où l'on a posé

$$(3.61.) \quad A = d h_1 \frac{r'_{01}}{r_{01}},$$

avec

$$(3.62.) \quad h_1 = s'_1 - s_1.$$

u_1 , w_1 et w'_1 s'obtiennent à l'aide de (3.43.), (3.48.), (3.53.) et (3.54.) :

$$(3.63.) \quad u_1 = \text{cte},$$

$$(3.64.) \quad w_1 = 0,$$

$$(3.65.) \quad w_1' = r_{o1}'^{\delta-1} u_{1x}' + u_{o1}' s_{1x}'.$$

Portons (3. 59.), (3.60.), (3.63.), (3.64.) et (3.65.) dans (3.44.), (3.49.) et (3.57.) il vient :

$$(3.66.) \quad d \frac{r_{o1}'}{r_{o1}'} h_{1x} + s_{1x} = 0,$$

$$(3.67.) \quad u_o' u_{1x}' + h_{1x} + s_{1x} = 0,$$

$$(3.68.) \quad r_{o1}'^{\delta-1} u_{1x}' + u_o' h_{1x} = 0.$$

Le mouvement est permanent à l'ordre 1 si le système (3.66.), (3.67.), (3.68.) à une solution. Ecartons la solution banale $s_{1x} = h_{1x} = u_{1x}'$, il vient la condition

$$(3.69.) \quad u_o'^2 = r_{o1}'^{\delta-1} - r_{o1}'^{\gamma-1}.$$

Exprimons alors h_{1x} , s_{1x}' et u_{1x}' en fonction de s_{1x} ; il vient :

$$(3.70.) \quad h_{1x} = - \frac{r_{o1}'}{dr_{o1}'} s_{1x}, \quad s_{1x}' = (1 - \frac{r_{o1}'}{dr_{o1}'}) s_{1x}, \quad u_{1x}' = \frac{u_o'}{r_{o1}'^{\gamma-1}} s_{1x}.$$

3.2. Ondes indéformables à l'ordre deux.

3.2.1.- Les équations d'ordre 2 s'écrivent en tenant compte des résultats précédents

$$(3.71.) \quad r_o u_{2x} + (r_1 u_1)_x + (r_o w_2)_z = 0,$$

$$(3.72.) \quad p_{2x} - \frac{r_1}{r_o} p_{1x} = 0,$$

$$(3.73.) \quad p_{2z} - \frac{r_1}{r_o} p_{1z} + \left(\frac{r_1^2}{r_o^2} - \frac{r_2}{r_o} \right) p_{oz} = 0,$$

$$(3.74.) \quad p_2 = \gamma r_2 r_o^{\gamma-1} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} r_1^2 r_o^{\gamma-2},$$

$$(3.75.) \quad u_{2z} = 0,$$

$$(3.76.) \quad r_o' u_{2x}' + (r_1' u_1')_x + u_o' r_{2x}' + (r_o' w_2')_z + (r_1' w_1')_z = 0,$$

$$(3.77.) \quad u_o' u_{2x}' + u_1' u_{1x}' + \frac{1}{r_o'} (p_{2x}' - \frac{r_1'}{r_o'} p_{1x}') = 0,$$

$$(3.78.) \quad u_o' w_{1x}' + \frac{1}{r_o'} [p_{2z}' - \frac{r_1'}{r_o'} p_{1z}' + \left(\frac{r_1'^2}{r_o'^2} - \frac{r_2'}{r_o'} \right) p_{2z}'] = 0,$$

$$(3.79.) \quad p_2' = \delta r_2' r_o'^{\delta-1} + \frac{\delta(\delta-1)}{2} r_1'^2 r_o'^{\delta-2},$$

$$(3.80.) \quad u_{2z}' = w_{1x}',$$

$$(3.81.) \quad w_z = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0 ;$$

$$(3.82.) \quad u_1 s_{1x} = w_2$$

$$(3.83.) \quad u_o' s_{2x} + u_1' s_{1x} = w_2' + s_1 w_{1z}' \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (3.82.) \\ (3.83.) \end{matrix}} \right\} \text{pour } z = s_o,$$

$$(3.84.) \quad p_2 + s_1 p_{1z} + s_2 p_{oz} + \frac{s_1^2}{2} p_{ozz} = d(p_2' + s_1 p_{1z}' + s_2 p_{oz}' + \frac{s_1^2}{2} p_{ozz}') \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (3.82.) \\ (3.83.) \end{matrix}} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 (3.85.) \quad u'_0 s'_{2x} + u'_1 s'_{1x} &= w'_2 + s'_1 w'_{1z} \\
 (3.86.) \quad p'_2 + s'_1 p'_{1z} + s'_2 p'_{0z} + \frac{s'^2_1}{2} p'_{0zz} &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{ pour } z = s'_0.$$

Il vient par des calculs analogues à ceux effectués à l'ordre 1 :

$$(3.87.) \quad r_2 = \frac{2-\gamma}{2\gamma^2} A^2 r_o^{3-2\gamma} + \frac{1}{\gamma} m(x) r_o^{2-\gamma},$$

$$(3.88.) \quad r'_2 = \frac{2-\delta}{2\delta^2} s'^2_1 r_o^{3-2\delta} + \frac{1}{2(\delta-1)} u'_0 u'_{1xx} r_o^\delta + \frac{1}{\delta-1} u'_0 s'_{1xx} r_o + \frac{1}{\delta} m'(x) r_o^{2-\delta},$$

$$(3.89.) \quad u_2 = \ell(x),$$

$$(3.90.) \quad u'_2 = -\frac{\delta}{2(\delta-1)} u'_{1xx} r_o^{2(\delta-1)} - \frac{\delta}{\delta-1} u'_0 s'_{1xx} r_o^{\delta-1} + \ell'(x),$$

où m, m', ℓ et ℓ' sont des fonctions arbitraires de x .

On tire w_2 et w'_2 de (3.71.), (3.81.) et (3.77.) :

$$(3.91.) \quad w_2 = (r_o^{\gamma-1} - \frac{r_{oo}^\gamma}{r_o}) \ell_x + (1 - \frac{r_{oo}}{r_o}) u_1 A_x,$$

$$\begin{aligned}
 (3.92.) \quad w'_2 &= (s'_1 u'_1)_x - \frac{1}{\delta} s'_1 u'_{1x} + u'_0 m'_x + (\ell'_x - \frac{1}{\delta-1} u'^4_0 u'_{1xxx}) r_o^{\delta-1} \\
 &+ \frac{\delta(2\delta+1)}{2(\delta-1)(2\delta-1)} u'^2_0 u'_{1xxx} r_o^{2(\delta-1)} - \frac{\delta^2}{2(\delta-1)(3\delta-2)} u'_{1xxx} r_o^{3(\delta-1)}.
 \end{aligned}$$

où r_{oo} désigne la masse volumique au fond du canal à l'ordre zéro.

De (3.84.) nous tirons :

$$\begin{aligned}
 (d r'_{o1} - r_{o1}) s_2 &= \frac{\delta d}{2(\delta-1)} u'_o u'_{1xx} r'^{2\delta-1}_{o1} + \frac{\delta d}{\delta-1} u'^2_o s'_{1xx} r'^{\delta}_{o1} \\
 &+ \frac{d}{2\delta} h_1^2 r'^{2-\delta}_{o1} + d m'(x) r'_{o1} - \frac{1}{2\gamma} (A-s_1)^2 r'^{2-\gamma}_{o1} \\
 &- m(x) r_{o1}.
 \end{aligned}$$

On porte ces résultats dans (3.72.), (3.77.), (3.82.) et (3.83.) ;
il vient le système d'équations :

$$(3.93.) \quad m'_x = 0,$$

$$(3.94.) \quad (r'^{\gamma-1}_{o1} - \frac{r_{oo}}{r_{o1}}) \ell'_x = u_1 s_{1x} - (1 - \frac{r_{oo}}{r_{o1}}) u_1 A_x,$$

$$(3.95.) \quad u'_o \ell'_x + m'_x = - u'_1 u'_{1x},$$

$$\begin{aligned}
 (3.96.) \quad u'_o \frac{r_{o1}}{dr'_{o1} - r_{o1}} m'_x - r'^{\delta-1}_{o1} \ell'_x &= - u'_1 s_{1x} - \frac{\delta-1}{\delta} s_1 u'_{1x} \\
 &+ (s'_1 u'_1)_x - \frac{1}{\delta} s'_1 u'_{1x} - \frac{1}{\delta-1} u'^4_o u'_{1xxx} r'^{\delta-1}_{o1} \\
 &+ \frac{\delta(2\delta+1)}{2(\delta-1)(2\delta-1)} u'^2_o u'_{1xxx} r'^{2(\delta-1)}_{o1} - \frac{\delta^2}{2(\delta-1)(3\delta-2)} u'_{1xxx} r'^{3(\delta-1)}_{o1} \\
 &- \frac{u'_o}{dr'_{o1} - r_{o1}} \left[\frac{\delta d}{2(\delta-1)} u'_o u'_{1xxx} r'^{2\delta-1}_{o1} + \frac{\delta d}{\delta-1} u'^2_o s'_{1xxx} r'^{\delta}_{o1} \right. \\
 &\left. + \frac{d}{\delta} h_1 h_{1x} r'^{2-\delta}_{o1} - \frac{1}{\gamma} (A-s_1)(A-s_1)_x r'^{2-\gamma}_{o1} \right].
 \end{aligned}$$

Le mouvement est permanent à l'ordre deux si le système (3.95.), (3.96.) a une solution. Or le déterminant principal est le même que celui du système correspondant à l'ordre un : il est donc nul. Pour qu'il y ait une solution il faut qu'un des déterminants formé en remplaçant une des colonnes par la colonne des seconds membres soit nul ; cette condition s'écrit :

$$(3.97.) \quad u'_0 \alpha_2 + r'_{01}{}^{\delta-1} \alpha_1 = 0,$$

où α_1 et α_2 sont les seconds membres de (3.95.) et de (3.96.).

La condition (3.97.) s'exprime par une équation linéaire entre s_{1xxx} , $s_1 s_{1x}$ et s_{1x} grâce aux relations (3.70.). On obtient :

$$(3.98.) \quad r'_{01}{}^{3\delta-3} \left[\frac{2(\delta-1)^2}{(3\delta-2)(2\delta-1)} - \frac{2(\delta-1)}{2\delta-1} \frac{dr'_{01}}{r_{01}} + \frac{d^2 r'_{01}}{r_{01}^2} \right] s_{1xxx} \\ + \frac{r_{01}}{dr'_{01}} \left[- \left(3 - \frac{1}{\delta} \right) + \left(3 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{dr'_{01}}{r_{01}} \right] s_1 s_{1x} + \mu s_{1x} = 0,$$

où μ est une constante.

Cette équation est à rapprocher de l'équation (2.47.). On obtient par intégration des ondes cnoïdales et en particulier des ondes solitaires. Pour savoir si les ondes solitaires sont des ondes de surpression ou de dépression, examinons les signes des coefficients de s_{1xxx} et $s_1 s_{1x}$,

- le coefficient de s_{1xxx} est toujours positif.
- le coefficient de $s_1 s_{1x}$ est du signe

$$(3.99.) \quad P = \left(3 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{dr'_{01}}{r_{01}} - \left(3 - \frac{1}{\delta} \right).$$

Or, d'après (3.39.) et (3.40.)

$$(3.100.) \quad \frac{dr'_{01}}{r_{01}} = 1 - F^2$$

où

$$(3.101.) \quad F = \frac{u'_0}{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}} h_0},$$

on remarque de F est nécessairement inférieur à 1.

Donc :

$$(3.102.) \quad P(F) = - \frac{3\gamma-1}{\gamma} F^2 + \frac{\gamma-\delta}{\gamma\delta}.$$

On a :

$$P(1) = \frac{1-3\delta}{\delta} < 0,$$

$$P(0) = \frac{\gamma-\delta}{\gamma\delta},$$

donc

$$P(0) \geq 0 \quad \text{si} \quad \gamma \geq \delta,$$

$$P(0) < 0 \quad \text{si} \quad \gamma < \delta.$$

Par conséquent :

- Si $\gamma < \delta$ $P(F)$ est négatif. Les coefficients de s_{1xxx} et de $s_1 s_{1x}$ sont de signe opposé : d'après les résultats du chapitre 2 les ondes obtenues dans le fluide lourd correspondent au cas de la figure (2.2.b).

- Si $\gamma > \delta$ $P(F)$ a un zéro dans l'intervalle $(0,1)$;

désignons par $F^* = \sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\delta(3\gamma - 1)}}$ cette racine. Le coefficient de $s_1 s_{1x}$ est positif pour $0 < F < F^*$, négatif pour $F > F^*$. Ainsi pour $F < F^*$ les ondes solitaires obtenues dans le fluide lourd correspondent au cas de la figure (2.2.a) ; par contre pour $F > F^*$ on est dans le cas de la figure (2.2.b).

En ce qui concerne le fluide léger, comme $s'_{1x} = -\frac{F^2}{1-F^2} s_{1x}$ (d'après 3.70.), à une surpression dans un des fluides correspond une dépression dans l'autre.

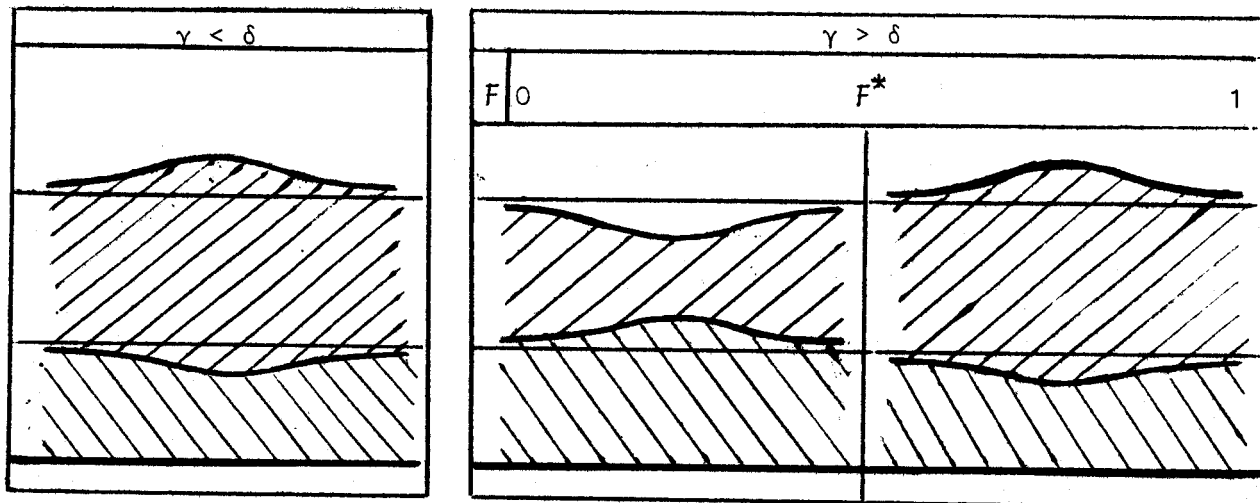


figure 3.1.

On a vu au chapitre 2 que pour un seul fluide en mouvement plan, l'onde solitaire est une surpression ; ici, pour deux fluides superposés il peut exister une onde solitaire de dépression tant dans le fluide supérieur que dans le fluide inférieur. Si l'atmosphère réelle (troposphère et stratosphère) correspond au schéma donné ci-dessus, on est dans le cas où $\gamma > \delta$; une onde solitaire de dépression peut se propager à la surface de séparation.

B I B L I O G R A P H I E

- [A] ABDULLAH : *"A note on the atmospheric solitary wave"*.
J. Meteorol. 13, 381 (1956).
- [D] DYMENT : *"Sur quelques phénomènes exceptionnels de propagation d'ondes dans un canal"*.
Thèse - Lille, 1970.
- [F] FRIEDRICHS : *"On the derivation of the shallow water theory"*.
Comm. Pure Appl. Math. 1948.
- [L] LOFFICIAL et DYMENT : *"Sur les ondes indéformables dans une atmosphère barotrope"*.
Comptes-Rendus Ac. Sces, 275, Série A, p. 801, 1972.
- [P₁] PETERS : *"Rotational and Irrotational solitary waves in a channel of arbitrary cross-section"*.
Comm. Pure and Applied Math, vol 19, n° 4, 1966.
- [P₂] PETERS et STOKER : *"Solitary waves in a liquid having non constant density"*.
Com. Pure and Applied Math, 13, 115 (1960).
- [S] STOKER : *"Water waves"*.
Interscience Publ, New-York, 1957.
- [R] RAMAN : *"Solitary waves in a barotropic fluid in an open channel of arbitrary cross-section"*.
Revue Roumaine des Sciences Techniques (Mécanique appliquée),
14, n° 6, 1960, p. 1273-1286.
- [S] SHEN : *"Solitary waves in a atmosphere with arbitrary wind and density profiles"*.
The Physics of Fluids, vol. 9, number 10, Oct. 1966.

TABLE DES MATIERES

	Pages
Avant-propos.	
Introduction.	
CHAPITRE 1 - ECOULEMENT PRESQUE A UNE DIMENSION DANS UN CANAL CYLINDRIQUE ET HORIZONTAL.	
1.1. Ecoulement presque à une dimension.	1
1.2. Normalisation.	2
1.3. Approximation d'ordre zéro.	5
1.4. Cas de la loi polytropique.	10
CHAPITRE 2 - ECOULEMENTS PRESQUE UNIFORMES.	
2.1. Ecoulements presque uniformes.	14
2.2. Approximation d'ordre deux.	17
2.3. Ondes indéformables à l'ordre deux.	22
CHAPITRE 3 - ECOULEMENTS PRESQUE UNIFORMES DE DEUX FLUIDES NON MISCIBLES.	
3.1. Approximations d'ordre zéro et un.	30
3.2. Ondes indéformables à l'ordre deux.	34
BIBLIOGRAPHIE	41
TABLE DES MATIERES	42

