

50376
1974
100

N° d'ordre : 299

50376
1974
100

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

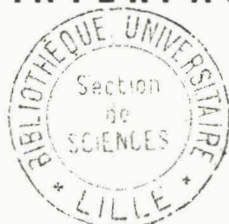
pour obtenir le grade de
DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Pierre DEGAUQUE

Ingénieur I.S.E.N.

**THÉORIE DU RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE
BICONIQUE MINCE DISPOSÉE VERTICALEMENT
PRÈS DE L'INTERFACE AIR-SOL**



Soutenu le 5 Mars 1974, devant la COMMISSION D'EXAMEN

Membres du Jury :	MM. R. GABILLARD	Président
	G. LANSRAUX	Examineur
	G. SALMER	Examineur
	M. PONTE	Invité
	J. FONTAINE	Invité

DOYENS HONORAIRES DE L'ancienne Faculté des Sciences

MM. H. LEFEBVRE, R. DEFRETIN

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit et
Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CAU, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORNE, DEHORS, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOURGANOFF, LAMOTTE, LELONG, Mme LELONG, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE

DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. PARREAU Professeur

PROFESSEURS TITULAIRES

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Générale
M. BEZART Maurice	Physique
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BONNEMAN Pierre	Chimie et Physico-Chimie Industrielle
M. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CELET Paul	Géologie
M. CONSTANT Eugène	Physique Industrielle-Electronique
M. CORSIN Pierre	Paléobotanique
M. DECUYPER Marcel	Mathématiques Générales
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale
M. DURCHON Maurice	Zoologie Générale et Appliquée
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	Radio-Electricité-Electronique
M. GLACET Charles	Chimie Organique
M. GONTIER Gérard	Mécanique
M. GUILLAUME Jean	Biologie Végétale
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M. LANSRAUX Guy	Physique
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique Expérimentale
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. MAILLET Pierre	Sciences Economiques et Sociales
M. MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M. MONTREUIL Jean	Chimie Biologique
M. POUZET Pierre	Informatique (Lille)
M. PROUVOST Jean	Géologie Minéralogie
Mme SCHWARTZ Marie-Hélène	Analyse Supérieure
M. TILLIEU Jacques	Physique Théorique

PROFESSEURS TITULAIRES (suite)

M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VAILLANT Jean	Mathématiques
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. VIVIER Emile	Biologie Animale
M. WERTHEIMER Raymond	Physique
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

PROFESSEURS A TITRE PERSONNEL

M. BOUISSET Simon	Physiologie Animale
M. DELHAYE Michel	Chimie
M. DERCOURT Jean-Michel	Sciences de la Terre
M. LEBRUN André	Electronique (Lille)
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
M. LINDER Robert	Botanique
M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. PARREAU Michel	Mathématiques Appliquées
M. SCHILTZ René	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique
M. BILLARD Jean	Physique
M. BODARD Marcel	Botanique
M. BOILLET Pierre	Physique
M. BONNOT Ernest	Biologie
M. BRIDOUX Michel	I.U.T. Béthune
M. CAPURON Alfred	Chimie Minérale
M. DEPREZ Gilbert	I.U.T. Lille
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LANDAIS Jean	Chimie
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LOUCHÈUX Claude	Chimie
M. MAES Serge	Physique
Mle MARQUET Simone	Mathématiques
M. MONTEL Marc	Physique
M. MONTUELLE Bernard	I.U.T. Lille
M. PANET Marius	I.E.E.A.
M. SALMER Georges	I.E.E.A.
M. SEGUIER Guy	I.U.T. Béthune

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés de fonctions)

M. ADAM Michel	Economie Politique
M. ANDRE Charles	Sciences Economiques
M. ANGRAND Jean-Pierre	Géographie
M. ANTOINE Philippe	Mathématiques
M. AUBIN Thierry	Mathématiques
M. BART André	Biologie

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés de fonctions) suite

M. BEGUIN Paul	Mécanique des Fluides
M. BKUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M. BOSCOQ Denis	Mathématiques
M. BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M. BRUYELLE Pierre	Géographie et Aménagement Spatial
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COQUERY Jean-Louis	Biologie
M. COULON Jean	I.E.E.A.
Mlle DACCHARI Monique	Géographie et Aménagement Spatial
M. DEBOURSE Jean-Pierre	Sciences Economiques et Sociales
M. DEBRABANT Pierre	Sciences Appliquées
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques et Sociales
M. DERIEUX Jean-Claude	Biologie (I.U.T.)
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique
M. DRIEUX Baudouin	I.E.E.A.
M. DUEE Gérard	Sciences de la Terre
M. DYMENT Arthur	Mathématiques
M. ESCAIG Bertrand	Physique
Mme EVRARD Micheline	Chimie (I.U.T.)
M. FONTAINE Jacques-Marie	I.U.T. Lille
M. FOURNET Bernard	I.U.T. Lille
M. FROELICH Daniel	Sciences Appliquées
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GUILLAUME Henri	Sciences Economiques et Sociales
M. HECTOR Joseph	S.E.N. Chais
M. HERMAN Maurice	Physique
M. HUARD DE LA MARRE Pierre	I.E.E.A.
M. JOURNEL Gérard	Sciences Appliquées
Mlle KOSMANN Yvette	Mathématiques
M. KREMBEL Jean	Chimie
M. LAURENT François	Automatique
Mlle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mlle LEGRAND Solange	Mathématiques
M. LENTACKER Firmin	Géographie et Aménagement Spatial
M. LEROY Jean-Marie	E.N.S.C.L.
M. LEROY Yves	Electronique (Lille)
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOUAGE Francis	Sciences Appliquées
M. MAHIEU Jean-Marie	Physique (I.U.T. Lille)
Mme MAILLET Monique	Sciences Economiques et Sociales
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques et Sociales
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MIGEON Michel	Chimie (Sciences Appliquées)
M. MOTZKIN Joseph	Mathématiques
M. MONTUELLE Bernard	I.U.T. Lille
M. NICOLE Jacques	Chimie (E.N.S.C.L.)
M. PAQUET Jacques	Sciences Appliquées
M. PARSY Fernand	Mathématiques
M. PECQUE Marcel	Chimie (Béthune)
M. PERROT Pierre	Chimie

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés de fonctions) suite

M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie (Valenciennes)
M. POVY Jean-Claude	Sciences Appliquées
M. RACZY Ladislas	Physique
M. ROGALSKI Marc	Mathématiques
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M. ROY Jean-Claude	Biologie
Mme N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie et Aménagement Spatial
M. SIMON Michel	Psychologie
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SMET Pierre	Physique
M. SOMME Jean	Géographie
Mle SPIK Geneviève	Chimie Biologique
M. THERY Pierre	Calais
M. TOULOTTE Jean-Marc	Sciences Appliquées
M. TREANTON Jean-René	Sciences Economiques et Sociales
M. VANDORPE Bernard	Chimie Physique
M. VILETTE Michel	Génie Mécanique (Béthune)
M. WERNER Georges	Informatique (I.U.T. Lille)
M. WATERLOT Michel	Géologie
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

A mes parents,

A ma fiancée,

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Radiopropagation et Electronique de l'Université des Sciences et Techniques de LILLE, sous la direction de Monsieur le Professeur GABILLARD.

Qu'il me soit permis de lui exprimer mes sentiments de profonde gratitude pour l'aide précieuse et les conseils judicieux qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail.

Je remercie Monsieur Maurice PONTE, Membre de l'Institut, de m'avoir fait l'honneur de participer à mon Jury. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma déférente gratitude.

Messieurs les Professeurs LANSRAUX et SALMER ont bien voulu examiner mon travail. Je leur en suis vivement reconnaissant et les en remercie.

Je remercie particulièrement Monsieur le Professeur FONTAINE pour l'aide amicale et les conseils avisés qu'il m'a généreusement apportés pendant la durée de cette étude.

Je tiens à remercier les membres de l'équipe de Radiopropagation et Electronique ainsi que Monsieur WACRENIER pour leur aide sympathique et leur collaboration amicale.

Je remercie enfin tous les membres du personnel technique et administratif du laboratoire pour l'aide efficace qu'ils m'ont apportée.

S O M M A I R E

INTRODUCTION

CHAPITRE. I.

GENERALITES SUR LA PROPAGATION EN HAUTE FREQUENCE DES ONDES EN MILIEU CONDUCTEUR. RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE CYLINDRIQUE.

I. Expressions générales des équations de propagation

II. Variations des constantes électriques du milieu en fonction de la fréquence

II.1. Phénomènes de relaxation

II.2. Résultats de mesure

III. Rayonnement d'un dipôle électrique au sein d'un milieu infini

IV. Etude théorique du rayonnement d'une antenne cylindrique en milieu infini

CHAPITRE. II.

RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE BICONIQUE MINCE PLACEE DANS UNE CAVITE SPHERIQUE, AU SEIN D'UN MILIEU HOMOGENE ET INFINI

I. Hypothèse de départ. Système de coordonnées

II. Expression des champs électromagnétiques

III. Calcul de l'impédance terminale

IV. Cas d'une antenne immergée dans un milieu conducteur en l'absence d'une cavité sphérique

IV.1. Variation de l'impédance d'entrée

IV.2. Répartition du courant

IV.3. Comparaison avec l'antenne cylindrique

V. Antenne biconique dont les extrémités sont en contact avec la cavité sphérique

V.1. Variation de l'impédance d'entrée et du champ rayonné en fonction de la fréquence

V.2. Répartition du courant

V.3. Influence des constantes électriques de la cavité

V.4. Influence des constantes électriques du sol

VI. Influence des dimensions de la cavité sur le rayonnement de l'antenne

CHAPITRE. III.

CARACTERISTIQUES ELECTRIQUES D'UNE ANTENNE BICONIQUE MINCE, PLACÉE VERTICALEMENT PRES DE L'INTERFACE AIR-SOL

III.1. Hypothèse de départ. Systèmes de coordonnées

III.2. Relations entre les coefficients d'après les conditions aux limites

III.2.1. Conditions aux limites entre le milieu de l'antenne et le milieu environnant

III.2.2. Conditions aux limites sur l'interface air-sol

III.3. Expression intégrale de la fonction $L_m(r, \theta)$

III.4. Relations permettant de calculer les coefficients

III.4.1. Cas où les trois milieux sont différents

III.4.2. Antenne placée directement dans un demi-milieu

III.4.3. Antenne placée dans l'air au-dessus d'un conducteur parfait

III.5. Résultats numériques

III.5.1. Variation des impédances Z_{in} et Z_v

III.5.2. Répartition du courant

III.5.3. Conclusion

CHAPITRE. IV.

CHAMP RAYONNE EN HAUTE FREQUENCE PAR L'ANTENNE VERTICALE

IV.1. Expression du potentiel de Hertz pour un D.E.V.

IV.2. Principe de calcul de l'intégrale V_i

IV.3. Calcul du champ rayonné près de l'interface

IV.4. Calcul du champ rayonné dans l'air

IV.5. Applications numériques : rayonnement d'une antenne longue

IV.5.1. Cas d'une antenne dans l'air

IV.5.2. Cas d'une antenne enterrée

CONCLUSION

Bibliographie

Annexes

I N T R O D U C T I O N

L'étude du rayonnement électromagnétique des antennes est un des problèmes de télécommunications radioélectriques qui a été le plus étudié et il est presque impossible de citer tous les auteurs qui s'y sont consacrés. Ces travaux successifs tendent à approximer le mieux possible la réalité physique des dispositifs émetteurs en tenant compte notamment de leur dimension et de l'environnement dans lequel ils se situent.

Tout d'abord, l'antenne cylindrique a été le sujet d'un grand intérêt depuis les premiers temps de la technologie des antennes. De nombreuses méthodes telles que les procédures itératives^[1], les méthodes variationnelles^[2], les développements en série de Fourier^[3] et, plus récemment, la méthode des moments^[4], ont été développées pour résoudre l'équation intégrale permettant de déterminer les caractéristiques électriques de l'antenne. Suivant la longueur de celle-ci et la nature du milieu environnant, l'un ou l'autre de ces procédés est plus particulièrement adapté.

L'émission à partir d'autres formes d'antennes a été également envisagée au fur et à mesure des progrès technologiques. L'antenne biconique a fait ainsi l'objet de nombreux travaux théoriques depuis la première publication de Schelkunoff en 1941^[5]. La détermination de l'impédance d'entrée et de la répartition du courant se fait souvent par la théorie des modes, c'est-à-dire en décomposant l'onde qui se propage le long de l'antenne en la somme d'une onde T.E.M. et d'une série d'ondes T.M. complémentaires. Toutes ces études ont été faites en supposant que le milieu entourant l'antenne biconique est infini ou tout au moins que ce milieu possède une symétrie de révolution. Cependant l'antenne d'émission doit opérer bien souvent près d'un interface et notamment près de la surface du sol.

Certaines applications civiles et militaires de télécommunications nécessitent l'utilisation d'antennes enterrées. Leur profondeur est souvent faible pour éviter un affaiblissement trop important des ondes. Par exemple, la densité du trafic prévu sur le réseau routier

montre la nécessité d'accroître les techniques de détection, de surveillance et de communication avec les véhicules. Des essais ont été faits aux Etats-Unis en utilisant des antennes enterrées sous les voies d'autoroutes ^[6]. L'établissement de liaisons électromagnétiques entre terminaux souterrains a imposé également le développement de telles antennes. L'hypothèse d'un milieu infini ne peut donc s'appliquer à ces configurations.

L'influence de l'interface air-sol a été mise en évidence sur les caractéristiques électriques des antennes cylindriques aériennes, mais il existe de nombreuses complications théoriques si l'antenne est enterrée à faible profondeur. Certains auteurs, notamment Miller ^[7] étudient actuellement ce problème par la théorie des moments.

L'antenne biconique mince, c'est-à-dire d'angle d'ouverture θ_0 faible, offre l'avantage de donner une solution plus simple, tout au moins dans le cas d'un demi-milieu homogène et infini, permettant de faire de nombreuses applications numériques.

Dans ce travail nous étudions donc le rayonnement d'une telle antenne située près de l'interface, dans l'air ou dans le sol. Dans ce dernier cas, l'antenne pourra être placée dans une capsule sphérique de diélectrique. De plus, la gamme haute fréquence que nous envisageons ne nous permet pas de négliger le courant de déplacement dans le sol vis-à-vis du courant de conduction.

Nous mettons tout d'abord en évidence l'influence des caractéristiques électriques du sol et de la cavité diélectrique, sur l'impédance d'entrée et la répartition du courant d'une antenne biconique mince enterrée en milieu infini. Ceci permettra d'optimiser les différentes grandeurs géométriques telles que la longueur d'antenne et le rayon de la cavité, pour assurer un rayonnement maximum. Nous montrons ensuite l'influence de l'interface air-sol pour une antenne placée verticalement soit dans l'air, soit dans le sol. Ayant ainsi déterminé la répartition du courant, nous traçons les diagrammes de rayonnement de telles antennes.

Dans un premier chapitre, nous faisons un rappel des généralités sur la propagation en haute fréquence des ondes électromagnétiques en milieu conducteur. Nous utilisons ces résultats comme point de départ de notre travail. Nous donnons tout d'abord les expressions générales des équations de propagation des ondes haute fréquence en milieu conducteur.

Les constantes électriques d'un milieu étant fonction de la fréquence envisagée, nous donnons les résultats des mesures que nous avons faites sur des échantillons de roches et nous complétons ces résultats par ceux obtenus par d'autres auteurs. La théorie du dipôle élémentaire en milieu absorbant a été souvent développée pour des domaines d'applications se situant dans la gamme des fréquences d'émission relativement basses ($f < 100\text{kHz}$). Cependant certains auteurs se sont intéressés à l'utilisation des ondes hautes fréquences. Il y a une dizaine d'années, Gabillard^[8] a notamment montré que, pour une liaison donnée, l'amplitude du champ rayonné par un dipôle augmente en fonction de la fréquence si celle-ci est supérieure à une certaine fréquence caractéristique du milieu. Mais cette étude suppose que le moment électrique du dipôle ne varie pas dans toute la bande envisagée. L'intérêt de l'utilisation des ondes haute fréquence en milieu conducteur peut donc être remis en cause par une augmentation de la puissance d'alimentation nécessaire à maintenir le courant constant. Par conséquent, il faut déterminer comment varie la résistance d'entrée du dipôle en fonction de la fréquence et, de plus, tenir compte de la dimension finie de l'antenne. Nous envisageons tout d'abord le cas d'une antenne cylindrique. Dans ce cas, les caractéristiques électriques de l'antenne et notamment, la répartition du courant, sont données par une équation intégrale. La résolution de cette équation est très compliquée lorsque l'antenne est placée en milieu conducteur sauf dans certains cas particuliers tels que : milieu peu conducteur, antenne électriquement courte ou demi-onde. Par contre l'antenne biconique mince donne une solution plus simple permettant de nombreuses applications numériques.

Dans un deuxième chapitre, nous étudions le rayonnement d'une antenne biconique pouvant être placée dans une cavité sphérique au sein d'un milieu homogène et infini. Après avoir exprimé les champs électromagnétiques dans chacun des milieux, les conditions aux limites permettent de déterminer les caractéristiques électriques de l'antenne comme l'impédance d'entrée et la répartition du courant. Nous envisageons successivement le cas d'une antenne immergée dans un milieu conducteur ou placée dans une cavité sphérique dont le diamètre est égal ou supérieur à la longueur de l'antenne. Dans chaque configuration, nous mettons en évidence l'influence des constantes électriques des milieux, des dimensions géométriques et de la fréquence, sur le rayonnement de l'antenne. Cette étude permet d'optimiser les différents paramètres du dispositif d'émission afin d'assurer le meilleur rayonnement de l'antenne.

Dans un troisième chapitre, nous supposons que l'antenne biconique est placée verticalement dans l'air ou dans le sol et nous étudions l'influence de l'interface sur ses caractéristiques électriques. Comme dans le chapitre précédent, les conditions aux limites sur les différents milieux permettent de déterminer l'impédance d'entrée et la répartition du courant. Cependant le système d'équations obtenu par ces conditions est plus difficile à résoudre étant donné la configuration géométrique du problème. En effet, les limites sont formées par un interface plan et par des surfaces possédant une symétrie sphérique. La solution est obtenue sous la forme de séries mais qui convergent suffisamment rapidement pour permettre des calculs numériques. Nous mettons en évidence sur des exemples les fluctuations des caractéristiques de l'antenne placée dans l'air ou dans le sol en fonction de sa hauteur ou de sa profondeur et des valeurs des constantes électriques des milieux. Connaissant la répartition du courant le long de l'antenne, le diagramme de rayonnement pourra être déterminé en assimilant l'antenne à une succession de petits dipôles.

Dans le chapitre.IV., nous étudions plus particulièrement le rayonnement dans l'espace du dipôle vertical, situé dans l'air ou dans le sol, près de l'interface. Certains auteurs, Wait^[9], Tamir^[10]... ont abordé le cas où le courant de déplacement dans le sol n'est plus négligeable vis-à-vis du courant de conduction ($\sigma \approx \omega \epsilon$), afin notamment de trouver un angle optimum d'inclinaison de l'antenne enterrée pour exciter le mieux possible l'onde de surface. Nous avons cependant jugé intéressant de reprendre l'étude faite par Banos^[11] et développée par Fontaine^[12] pour $\sigma \gg \omega \epsilon$ et de l'adapter à notre cas. Elle présente en effet l'avantage de donner une formulation restant valable pour des distances émetteur-récepteur relativement faibles, de l'ordre de quelques longueurs d'onde dans l'air. Connaissant les expressions des champs électromagnétiques dans tout l'espace et la répartition du courant le long de l'antenne, nous traçons des diagrammes de rayonnement d'antennes aériennes et enterrées. Nous voyons enfin l'influence de la conductivité du sol sur la forme de ces diagrammes. Cette étude des caractéristiques électriques de l'antenne et de l'amplitude des champs rayonnés permet de prévoir le dispositif d'émission nécessaire à l'établissement d'une liaison électromagnétique donnée.

CHAPITRE. I.

GENERALITES SUR LA PROPAGATION EN HAUTE FREQUENCE
DES ONDES EN MILIEU CONDUCTEUR. RAYONNEMENT D'UNE
ANTENNE CYLINDRIQUE.

CHAPITRE . I .

GENERALITES SUR LA PROPAGATION EN HAUTE FREQUENCE DES ONDES EN MILIEU CONDUCTEUR. RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE CYLINDRIQUE

Nous étudions dans ce chapitre la propagation des ondes électromagnétiques en haute fréquence à travers un milieu absorbant, homogène et infini. Nous introduisons tout d'abord les différentes quantités physiques nécessaires à caractériser l'"état électromagnétique" d'un milieu.

L'antenne d'émission étant assimilée à un dipôle, nous montrons qu'en haute fréquence, et sous certaines conditions, l'amplitude du champ rayonné au sein du milieu peut augmenter avec la fréquence. Afin de tenir compte des dimensions réelles de l'antenne, nous mettons en équation le rayonnement d'une antenne cylindrique mince.

I.1. Expressions générales des équations de propagation

Dans la suite de l'exposé, nous adoptons le formalisme introduit et développé par King^[13].

I.1.1. Présentation générale

Les propriétés électriques d'un corps sont tout d'abord caractérisées par le nombre de charges libres ρ par unité de volume. D'un point de vue mathématique, ρ est donné par la relation :

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_j \frac{e_j}{\Delta\tau} \quad (1.1.)$$

e_j représentant les charges élémentaires contenues dans le volume $\Delta\tau$. Malheureusement, la fonction construite de cette façon est discontinue puisque les charges à l'échelle microscopique sont associées à des points discrets. Afin d'obtenir des fonctions qui représenteront la distribution moyenne des charges à l'échelle macroscopique dans un petit élément de volume, il est nécessaire de diviser une région en éléments, chacun d'eux ne pouvant pas tendre mathématiquement vers zéro. Chaque volume doit donc être suffisamment grand pour contenir un nombre de charges tel que les conditions de statistique soient encore vérifiées, mais aussi très petit par rapport aux grandeurs physiques mesurables. La fonction ρ devient une fonction continue par l'interpolation des valeurs discrètes ρ_j , ce qui implique des variations relativement lentes d'un volume élémentaire à l'autre.

Cette condition n'est plus vérifiée près des surfaces de discontinuité. Dans ce cas il faut choisir des éléments de volume ayant des épaisseurs très petites vis-à-vis de la dimension de leur face longitudinale, parallèle à cette discontinuité. Une nouvelle fonction η qui est la densité superficielle de charges, peut être définie.

Cependant la discontinuité que représente une surface provoque également une distorsion et une orientation de tous les atomes dans la région concernée et dont le terme ρ ne tient pas compte. D'un point de vue physique du modèle atomique, l'hypothèse d'un feuillet mince superficiel n'est donc pas tout à fait approprié. Plutôt que de changer le mode de subdivision, il est plus intéressant d'introduire une nouvelle quantité traduisant les effets d'orientation et de distorsion des molécules à l'intérieur du volume. C'est la polarisation P qui est une fonction vectorielle associée à la densité moyenne et à la direction des dipôles. On peut définir de la même façon une densité volumique de courant : j et une densité superficielle j_s . Pour un matériau magnétique, il existe également une densité volumique de magnétisation M .

Cependant, on peut montrer (King^[13]) que ces différentes quantités, caractéristiques du milieu, ne sont pas indépendantes les unes des autres et que de plus, elles peuvent varier en fonction du mode de division du volume à étudier. On préfère souvent introduire d'autres fonctions caractéristiques qui sont indépendantes et données par les relations suivantes :

$$\overline{\rho} = \rho - \text{div } P \quad (1.2.) \quad \overline{\rho_m v} = j + \text{rot } M + \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.3.)$$

$$\overline{\eta} = \eta + \vec{n} \cdot \vec{P} \quad (1.4.) \quad \overline{\eta_m v} = j_s - \vec{n} \wedge \vec{M} \quad (1.5.)$$

\vec{n} est le vecteur normal à la surface de discontinuité et dirigé vers l'extérieur du volume considéré.

$\overline{\rho}$ et $\overline{\eta}$ représentent respectivement les densités "principales" de charges volumique et superficielle, $\overline{\rho_m v}$ et $\overline{\eta_m v}$ étant associées aux charges en mouvement.

I.1.2. Limite d'application de l'équation $\text{div } E = 0$

Supposons maintenant qu'un champ électromagnétique règne dans le milieu. Les vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont définis en fonction des densités $\overline{\rho}$ et $\overline{\rho_m v}$ qui sont elles mêmes des valeurs moyennes. Les expressions de E et B données par les équations de Maxwell ne définissent donc pas un champ microscopique ou local et, pour les états stationnaires, on peut écrire :

$$\epsilon_0 \text{div } E = \overline{\rho} \quad (1.6.) \quad \text{rot } E = - \frac{dB}{dt} \quad (1.7.)$$

$$\text{div } B = 0 \quad (1.8.) \quad \frac{1}{\mu_0} \text{rot } B = \overline{\rho_m v} + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (1.9.)$$

Soit i_f le courant dû aux charges libres dans le milieu.

D'une façon générale, on peut relier P , M et i_f à l'amplitude des champs électromagnétiques E et B par des fonctions générales qui peuvent être développées en série de la façon suivante :

$$P = P_0 + P_1 E + P_2 E^2 + \dots \quad (1.10.)$$

$$-M = -M_0 + M_1 B + M_2 B^2 + \dots \quad (1.11.)$$

$$i_f = i_0 + i_1 E + i_2 E^2 + \dots \quad (1.12.)$$

Si le corps n'est pas isotrope, chaque composante des vecteurs P , M et i_f doit être développée en série, séparément et avec des coefficients

différents. Quand le corps n'est pas polarisé d'une façon permanente : $P_o = M_o = 0$. De plus on peut supposer généralement qu'il n'y a pas de courant de conduction permanent si le milieu est isolé (sauf pour les supra-conducteurs). Pour un milieu simple, c'est-à-dire homogène et isotrope, les relations (1.10.) à (1.12.) se simplifient pour se mettre sous la forme :

$$P = P_1 E = \epsilon_o \chi E = \epsilon_o (\epsilon_r - 1) E \quad (1.13.) \quad i_f = \sigma E \quad (1.14.)$$

$$-M = \frac{1}{\mu_o} \chi_m B \quad (1.15.)$$

Comme P et M ont des valeurs dépendant du mode de division, les paramètres ϵ_r et χ_m seraient également variables. On fixe donc le mode de division en prenant des volumes élémentaires ne coupant pas des groupes de charges fortement localisés. Cette étude est d'ailleurs détaillée dans le livre de R.W.P. King¹³. Les relations précédentes supposent une réponse instantanée des charges dans le conducteur. Si la fréquence du champ électromagnétique appliqué au milieu est très élevée, il faudra tenir compte du retard à l'établissement du courant induit et à la rotation des molécules.

Ces notions permettent de définir un corps conducteur.

En effet, si à l'instant $t = 0$, il existe dans un certain volume d'un milieu conducteur une densité de charge ρ_o , cette densité disparaîtra suivant la loi :

$$\rho = \rho_o e^{-t/T_r} \quad \text{avec} \quad T_r = \epsilon/\sigma \quad (1.16.)$$

T_r est le temps de relaxation introduit par Maxwell.

Si un champ électrique de période T_f est appliqué, un corps conducteur sera caractérisé par :

$$T_r \ll T_f \quad \text{soit} \quad \underline{\sigma} \gg \omega \epsilon \quad (1.17.)$$

Supposons maintenant qu'il y ait un régime transitoire dû à une fréquence élevée ; les champs électromagnétiques variant périodiquement suivant la loi :

$$E_{\text{instan.}} = E \cos (\omega t + \theta_E) \quad (1.18.)$$

$$B_{\text{instan.}} = B \cos (\omega t + \theta_B) \quad (1.19.)$$

Les quantités P, M et i_f ne suivent pas instantanément les variations du champ et, suivant la fréquence et la structure particulière du milieu envisagé, le temps de retard sera plus ou moins long. En adoptant une notation complexe, les valeurs instantanées de P, M et i_f sont données par :

$$P_{inst.} = \epsilon_0 \chi E = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E e^{j(\omega t + \theta_E - \theta_P)} \quad (1.20.)$$

$$-M_{inst.} = \frac{1}{\mu_0} \chi_m B e^{j(\omega t + \theta_B - \theta_M)} = \left(\frac{1}{\mu_r} - 1 \right) \frac{1}{\mu_0} B e^{j(\omega t + \theta_B - \theta_M)} \quad (1.21.)$$

$$i_{f inst.} = \sigma E e^{j(\omega t + \theta_E - \theta_i)} \quad (1.22.)$$

Dans ces relations, les paramètres χ , χ_m et σ sont des fonctions réelles de la fréquence ainsi que les déphasages θ_p , θ_m , θ_i . A partir de ces équations, il est donc possible de définir des paramètres ϵ_r , μ_r et σ complexes qui seront fonction de la fréquence ainsi que de la structure du corps.

$$\epsilon_r^* = \epsilon'_r - j\epsilon''_r, \quad \mu_r^* = \mu'_r - j\mu''_r \quad \text{et} \quad \sigma^* = \sigma' - j\sigma'' \quad (1.23.)$$

Pour des fréquences suffisamment basses, les temps de relaxation sont petits vis-à-vis de la période du signal et les termes imaginaires sont négligeables par rapport aux termes réels. En adoptant ces notations, on obtient :

$$P = (\epsilon^* - \epsilon_0) E, \quad -M = \left(\frac{1}{\mu^*} - \frac{1}{\mu_0} \right) B \quad \text{et} \quad i_f = \sigma^* E \quad (1.24.)$$

Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\epsilon^* \operatorname{div} E = \rho_f^*, \quad \operatorname{rot} E = -j\omega B, \quad \frac{1}{\mu^*} \operatorname{rot} B = (\sigma^* + j\omega\epsilon^*) E \quad (1.25.)$$

$$\operatorname{div} B = 0$$

De plus, l'équation de continuité des charges se met sous la forme :

$$\operatorname{div} \overline{\rho_m^* v} + j\omega \overline{\rho_f^*} = 0 \quad (1.26.)$$

soit :

$$\sigma^* \operatorname{div} E + j\omega \overline{\rho_f^*} = 0 \quad (1.27.)$$

En éliminant ρ_f^* entre les équations (1.25.) et (1.27.), on obtient :

$$\underline{\text{div } E = 0} \quad (1.28.)$$

Par conséquent, dans le cas d'un milieu simple, c'est-à-dire homogène et isotrope, on pourra appliquer en haute fréquence les équations classiques de l'électromagnétisme, en remplaçant σ , μ et ϵ par leurs équivalents complexes. Cela suppose que le milieu présente simplement un retard sur la réponse aux variations du champ électromagnétique.

Comme $\text{div } E = 0$, on peut montrer facilement (Banos^[11]) que le calcul de l'amplitude des champs se ramène à la détermination d'un seul vecteur qui est le vecteur de Hertz Π .

Cependant, comme nous l'avons déjà signalé, σ^* , ϵ^* et μ^* vont être fonction de la fréquence.^[14]

La phase de σ^* traduit le retard à l'établissement du courant créé par les charges libres. Si on admet que ce temps de retard est de l'ordre de grandeur du temps de libre parcours moyen τ_i , comme $\tau_i \approx 10^{-13}$ s, cet effet sera négligeable aux fréquences "radio" que nous envisagerons par la suite. C'est le retard dans l'orientation des dipôles microscopiques du milieu ainsi que l'effet de petites hétérogénéités qui seront prépondérants. Nous allons donc donner un aperçu de la variation de la permittivité ϵ^* avec la fréquence.

I.2. Variation des constantes diélectriques du milieu en fonction de la fréquence

I.2.1. Phénomènes de relaxation

Afin de simplifier les notations, on définit souvent une permittivité diélectrique totale par les relations suivantes :

$$\epsilon_t^* = \epsilon'_r - j\epsilon''_t \quad \text{avec} \quad \epsilon''_t = \epsilon''_r + \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \quad (1.29.)$$

Ceci permet d'inclure dans le terme "diélectrique" les pertes classiques dues à la conductivité du milieu. L'angle de perte total δ est donné par :

$$\text{tg } \delta = \epsilon''_t / \epsilon'_r \quad (1.30.)$$

En courant continu, la constante diélectrique a seulement une partie réelle correspondant à la valeur ϵ_{r0} . A une fréquence très élevée, ϵ_r est également réel mais possède une valeur plus faible ϵ_∞ . Debye^[15] a montré que pour un courant de pulsation ω , la valeur de ϵ^* est donnée par :

$$\epsilon'_T = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad \text{et} \quad \epsilon''_T = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_\infty) \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (1.31.)$$

τ étant le temps de relaxation "macroscopique" ou de Debye.

De nombreuses études expérimentales ont été entreprises, "in situ" et en laboratoire, pour déterminer les variations des caractéristiques des roches en fonction de la fréquence. Ces mesures se recourent rarement, étant donné d'une part le manque d'homogénéité du milieu et, d'autre part, l'influence des paramètres tels que l'humidité, la température, le pourcentage d'"impuretés" dans la roche ...

Comme les roches n'ont généralement pas une structure homogène, la loi de variation de ϵ^* en fonction de la fréquence sera compliquée. Il y aura notamment des effets de polarisation interfaciale qui ont été initialement étudiés par Maxwell et Wagner^{[16], [17]}. D'autres phénomènes, tels que les polarisations dipolaires, atomiques et électroniques pourront également se produire à des fréquences plus élevées^[18].

La polarisation interfaciale résulte, dans les diélectriques hétérogènes avec pertes, d'une vitesse de déplacement différente pour les porteurs de charges électriques ou d'un nombre différents de porteurs dans les différents milieux. Il y a donc accumulation de charges aux surfaces de contact séparant ces zones. Ce mécanisme microscopique se manifeste globalement par des variations de la constante diélectrique dans une bande de fréquence qui est essentiellement fonction de la constitution granulaire du milieu et des conductivités des différentes phases en présence. De plus, la quantité d'eau contenue dans le corps joue également un rôle important sur la valeur de ϵ^* .

1.2.2. Résultats de mesure

A titre d'exemple, nous avons représenté sur la figure.1.1. les variations de ϵ'_r en fonction de la fréquence pour un milieu poreux

Variation de ϵ'_r en fonction de la fréquence
Sable 315 - 400 μ
Saturation en eau S_w en paramètre

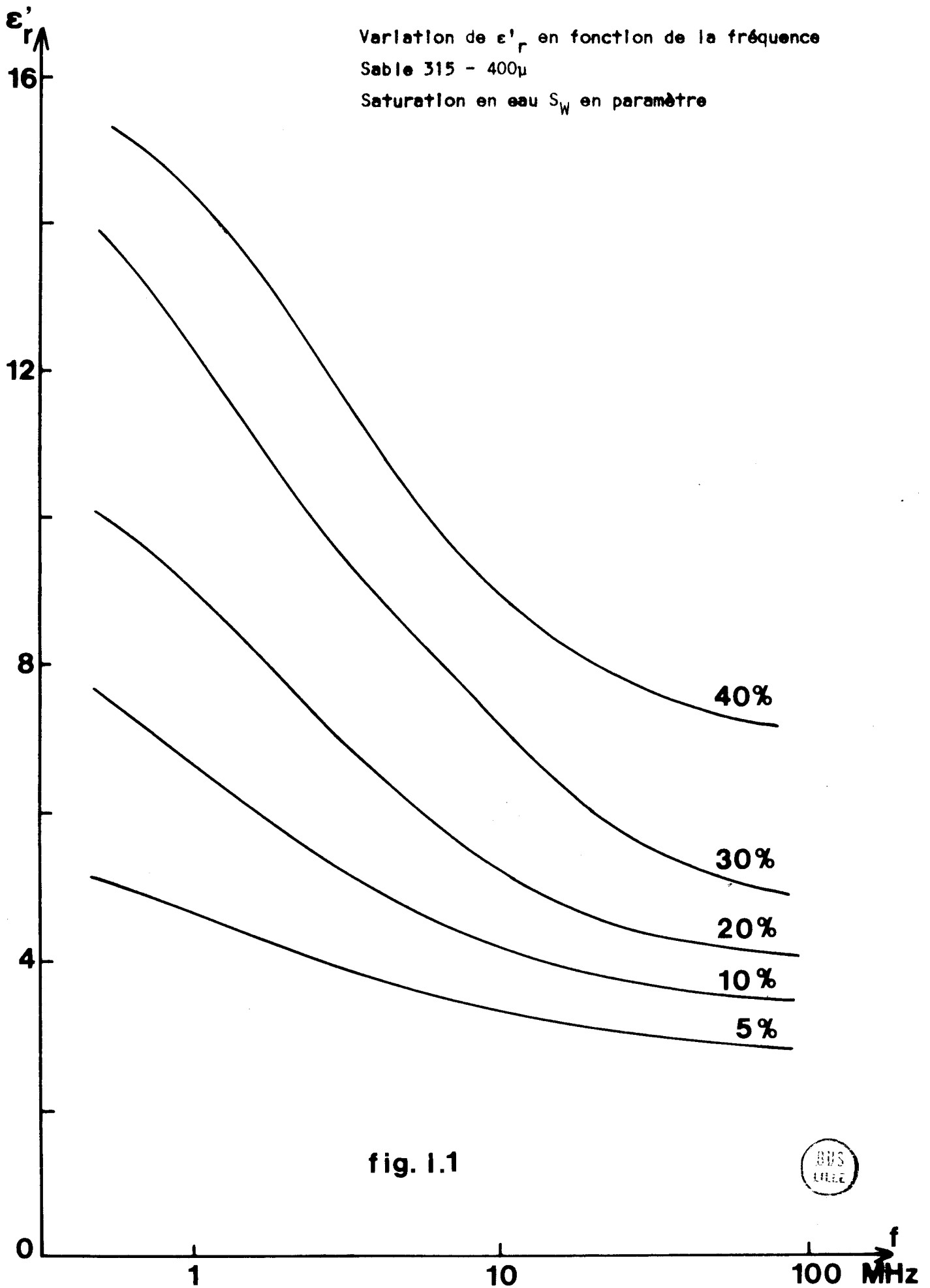


fig. I.1



constitué par du sable (classé 315/400 μ), la saturation en eau étant introduite en paramètre. Ces courbes ont été obtenues par Simandoux^[19] en plaçant le milieu à étudier dans une cellule associée à un résonateur.

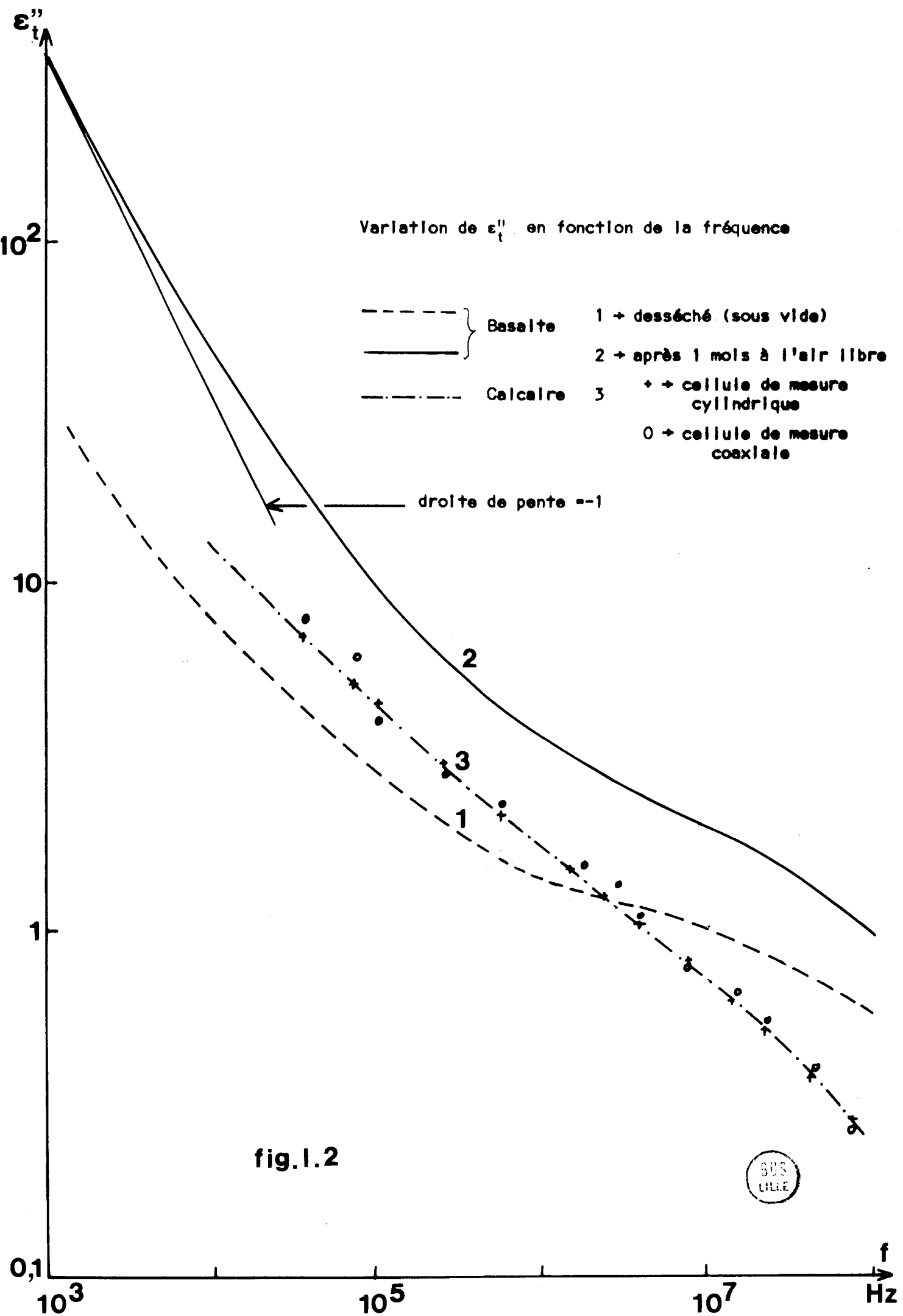
On remarque d'après ces courbes l'augmentation importante de ϵ''_r lorsque le corps contient de plus en plus d'eau. Les mesures expérimentales deviennent beaucoup plus difficiles lorsque le milieu à étudier se présente sous la forme d'une roche compacte. Il faut assurer, en effet, un très bon contact entre les extrémités de la cellule de mesure et la roche.

Nous avons essayé de déterminer expérimentalement les constantes diélectriques d'échantillons de basalte et de calcaire provenant du plateau du Sud de la France. Le diamètre correspondant aux cellules de mesure est d'environ 20mm, l'épaisseur des échantillons de l'ordre de 4mm et les surfaces du matériau étant définies à $\pm 0,01mm$.

Pour éviter un effet supplémentaire de polarisation interfaciale dû au contact corps-cellule, nous avons déposé sur l'échantillon, à l'aide d'une évaporation sous vide, une mince pellicule d'or et de cuivre. Ce procédé enlève pratiquement toute l'humidité du corps. La résistivité du milieu devient très élevée et la perturbation due à la polarisation aux électrodes est négligeable à partir d'une fréquence d'environ 1kHz. De plus, le coefficient de qualité à la résonance de la cellule est important, ce qui permet de faire des mesures relativement précises.

Sur la figure.1.2., nous avons représenté les variations de ϵ''_+ en fonction de la fréquence. Les courbes 1 et 2 correspondent au basalte et la courbe 3 au calcaire. La courbe 1 a été obtenue en faisant des mesures peu de temps après l'évaporation sous vide, tandis que pour la courbe 2, l'échantillon a été laissé environ 1 mois à l'air libre. Sur la courbe 3 nous avons fait figurer les points expérimentaux par une croix. A titre de comparaison, les points repérés par un cercle correspondent aux mesures qui ont été faites sur une autre cellule, mais de type coaxial. Dans ce cas, la réalisation des échantillons est évidemment beaucoup plus compliquée. On note cependant un bon accord entre les deux séries de mesure.

Si tous les paramètres diélectriques du milieu étaient constants en fonction de la fréquence, les courbes auraient une pente égale à -1, ϵ'' satisfaisant la relation : $\epsilon''_+ = \epsilon''_r + \sigma/\omega\epsilon_0$.



On remarque que les pentes réelles sont moins importantes, ce qui correspond à une augmentation de la conductivité apparente avec la fréquence. Cette variation est d'autant plus importante que le milieu a une résistivité élevée. Ceci rejoint les résultats obtenus par Chelidze^[20] avec des mesures faites sur du sable de quartz et de l'argile bentonite (classé 200 μ). Par exemple, pour le basalte desséché, la résistivité apparente vaut $60 \cdot 10^3 \Omega \cdot m$ à 10kHz et $10^3 \Omega \cdot m$ à 10MHz.

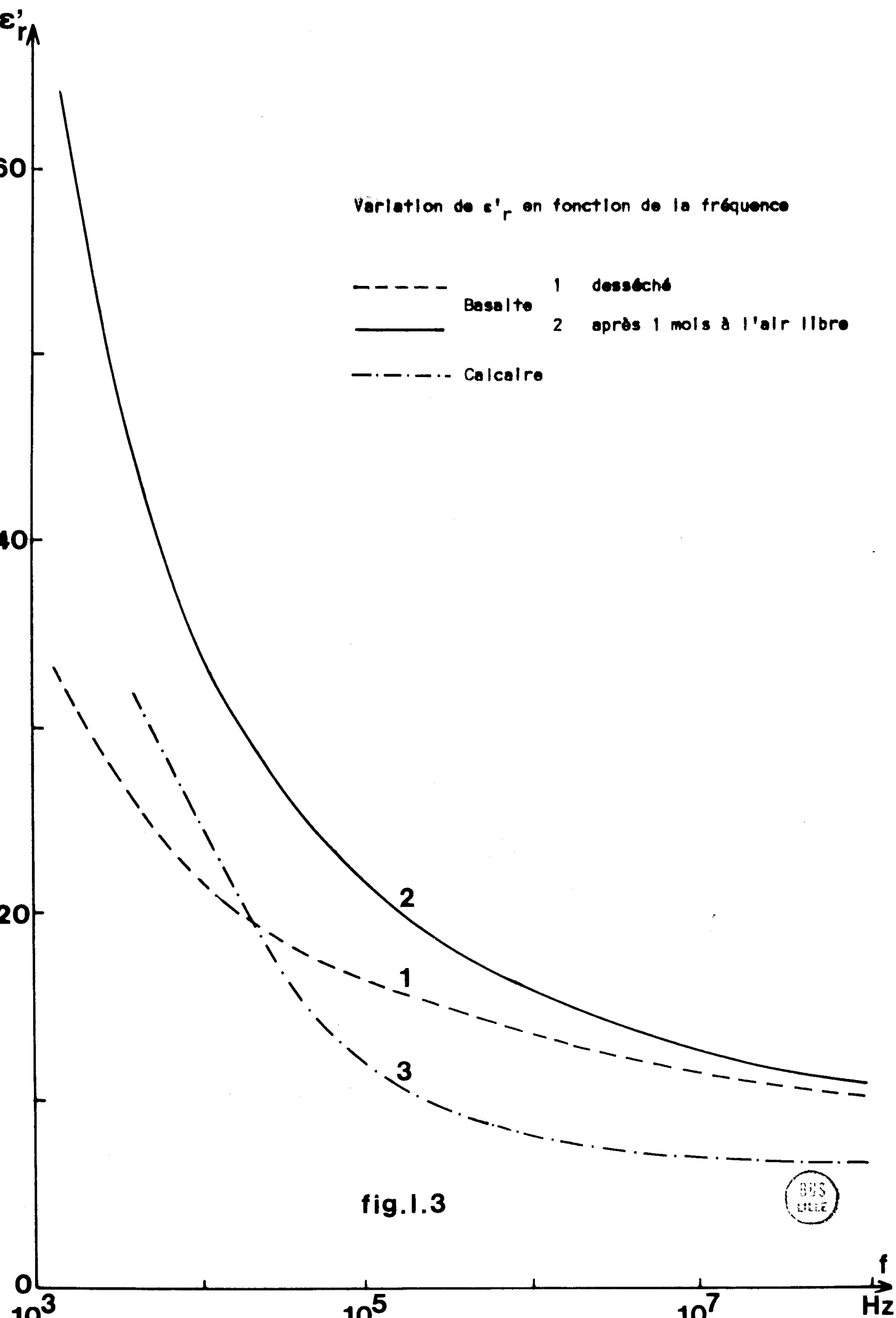
Les roches ayant une résistivité ρ peu élevée, inférieure à $100 \Omega \cdot m$, sont telles que cette valeur de ρ reste pratiquement constante jusqu'à des fréquences de l'ordre du MHz. Si on admet que la conduction est surtout due à la présence d'eau, cette non-variation de ρ apparent peut s'expliquer par l'absence de dispersion dans la résistivité des électrolytes (Ivanov^[21]).

Sur la figure.1.3., nous avons tracé les variations de ϵ'_r correspondant aux échantillons précédents. On remarque que les valeurs de ϵ'_r sont plus élevées lorsque le milieu contient un peu d'eau, ce que nous avons déjà constaté précédemment (cf.fig.1.1.).

Si on désire étudier les caractéristiques d'un milieu beaucoup plus conducteur, il faut placer l'échantillon entre deux fines lamelles de mica afin d'éviter un courant de conduction trop important dans la cellule. Ces mesures sont beaucoup plus difficiles à réaliser car il faut tenir compte de l'effet de parois dû à la présence du mica et qui ne doit pas masquer les fluctuations de ϵ^* du milieu à étudier.

De nombreux résultats de mesure ont été rassemblés par Parkhomenko^[22]. Malgré une dispersion importante existant entre ces résultats et qui traduisent les difficultés de mesure, l'allure des variations de ϵ^* en fonction de la fréquence reste la même que précédemment.

Par conséquent, dans la suite de notre étude, les valeurs affectées aux constantes diélectriques seront supposées être celles correspondant à la fréquence envisagée. Cependant, il sera quelquefois intéressant d'étudier le rayonnement d'un type d'antenne, dans un milieu donné, en fonction de la fréquence. Nous serons amenés dans ce cas, à supposer ϵ^* constant, cette hypothèse ne devant pas être oubliée si on



désire, par exemple, optimiser une fréquence de transmission. Le choix définitif devra prendre en compte l'augmentation apparente de conductivité et la variation de ϵ_r lorsque la fréquence augmente.

I.3. Rayonnement d'un dipôle électrique au sein d'un milieu infini ^{[23][24]}

Dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) dont l'axe polaire Oz est celui du dipôle, les composantes E_r , E_θ du champ électrique et H_ϕ du champ magnétique sont données par les formules suivantes :

$$E_r = \frac{ldl}{4\pi} \frac{1}{\sigma + j\omega\epsilon} \frac{2\cos\theta}{r^3} (1 + \gamma r) e^{-\gamma r} \quad (1.32.)$$

$$E_\theta = \frac{ldl}{4\pi} \frac{1}{\sigma + j\omega\epsilon} \frac{\sin\theta}{r^3} (1 + \gamma r + \gamma^2 r^2) e^{-\gamma r} \quad (1.33.)$$

$$H_\phi = \frac{ldl}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} (1 + \gamma r) e^{-\gamma r} \quad (1.34.)$$

Dans ces formules :

μ : perméabilité magnétique

γ : facteur de propagation défini par :

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \quad \text{avec } \epsilon = \epsilon_0\epsilon_r \quad (1.35.)$$

La détermination du radical est telle que la partie réelle de γ soit positive.

Le courant I est de la forme :

$$I = I_0 e^{j\omega t} \quad (1.36.)$$

Nous nous intéresserons dans la suite de notre étude à la composante E_θ dont l'amplitude est bien supérieure à celle de E_r et H_ϕ .

Nous introduisons une fréquence caractéristique f_c du milieu qui est la fréquence pour laquelle le courant de déplacement est égal au courant de conduction ^[24]:

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (1.37.)$$

La profondeur de pénétration n'ayant plus beaucoup de signification en haute fréquence, nous préférons définir une longueur caractéristique du milieu par la relation suivante :

$$L_C = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad (1.38.)$$

Une fréquence relative ξ et une distance relative x sont donnés par les rapports :

$$\xi = f/f_C \quad (1.39.) \quad x = r/L_C \quad (1.40.)$$

r étant la distance de la liaison.

On introduit un paramètre e_θ par le rapport de l'intensité de la composante du champ E_θ à la fréquence angulaire ω , à l'intensité de cette même composante en courant continu E_{θ_0} :

$$e_\theta = \frac{E_\theta e^{-j\omega t}}{E_{\theta_0}} \quad (1.41.)$$

La figure.1.4. montre les variations du module de e_θ en fonction de ξ , x étant pris comme paramètre. Nous voyons qu'après être passé par un minimum, $|e_\theta|$ augmente lorsque $\xi \approx 1$ et peut être supérieur à 1 pour les valeurs de ξ assez élevées.

Pour une valeur de la distance relative x donnée, l'amplitude du champ peut donc devenir, à partir d'une certaine fréquence f_M , supérieure à celle que l'on obtiendrait en courant continu. La "fenêtre" haute fréquence est définie pour des valeurs de fréquences supérieures à f_M . Par exemple, si $\sigma = 2 \cdot 10^{-4}$ mho/m et $\epsilon_r = 5$, pour une distance de liaison $r = 480$ m, on a $L_C = 60$ m soit $x = 8$ et $f_M = 7,2$ MHz (cf.fig.1.4.).

Cette étude, qui montre une possibilité de communiquer en haute fréquence à travers un milieu absorbant est cependant incomplète car elle suppose notamment que la longueur $d\ell$ du dipôle reste petite vis-à-vis de la longueur d'onde et que le moment électrique $Id\ell$ est maintenu constant dans toute la gamme de fréquences.

Afin de mettre en évidence le comportement réel de l'antenne d'émission H.F., nous allons d'abord étudier le rayonnement d'une antenne cylindrique placée directement au sein d'un milieu absorbant.

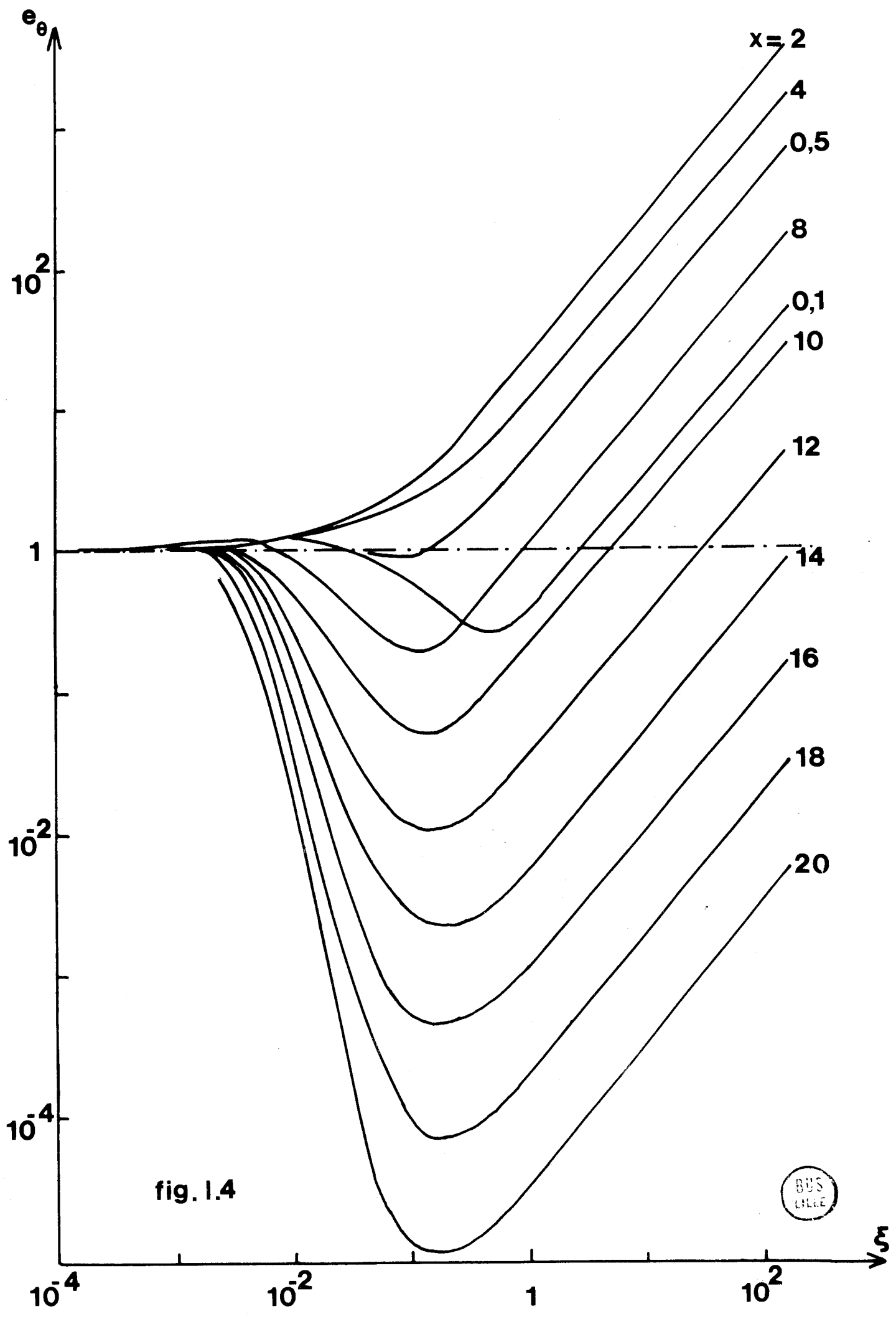


fig. 1.4



I.4. Antenne cylindrique demi-onde en milieu dissipatif

I.4.1. Présentation générale

Considérons une antenne cylindrique de rayon a , de longueur $2h$ et dont l'axe de symétrie coïncide avec l'axe Oz . Le générateur d'alimentation est placé entre les points A et B et nous supposons que la région d'excitation correspondant à la distance $AB = 2\delta$ est petite (cf. fig.1.5.).

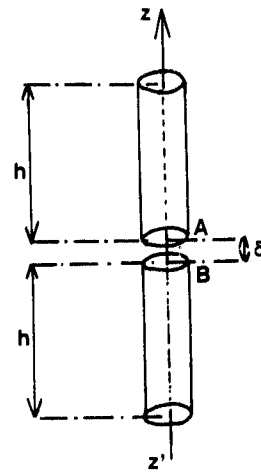


fig.1.5.

Dans ce cas, l'amplitude de la force électromotrice induite dans l'antenne est égale à la différence de potentiel scalaire entre les surfaces A et B.

En appliquant les relations de définition du potentiel scalaire ϕ et du potentiel vecteur A au cylindre conducteur on obtient dans tout l'espace :

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\int_{-h}^{-\delta} + \int_{\delta}^h \right) \frac{q'(z')}{R} e^{-\gamma R} dz' \quad (1.42.)$$

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int_{-h}^{-\delta} + \int_{\delta}^h \right) \frac{l(z')}{R} e^{-\gamma R} dz' \quad (1.43.)$$

$$\gamma \text{ est la constante de propagation propre du milieu extérieur } \gamma = \alpha + j\beta \quad (1.44.)$$

Dans ces formules, $l(z')$ désigne l'amplitude du courant total axial et $q'(z')$ la charge par unité de longueur. La distance R entre l'élément d'intégration dz' et le point où le potentiel est calculé, est donnée par :

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (1.45.)$$

Compte tenu de la symétrie de la configuration géométrique, on peut admettre que le potentiel vecteur A n'a qu'une composante A_z suivant l'axe $z'z$, le courant étant uniquement axial.

En exprimant le champ électrique en fonction du potentiel A_z , et en égalant ses composantes tangentielles le long de la surface de l'antenne, on obtient :

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \gamma^2 A_z = -j \frac{\gamma^2}{\omega} z_i I(z) \quad (1.46.)$$

ω est la pulsation du signal et z_i l'impédance de l'antenne par unité de longueur. En haute fréquence, si σ_a est la conductivité de l'antenne, z_i est donnée par :

$$z_i = \frac{1+j}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma_a}} \quad (1.47.)$$

En posant $\gamma = jk$, la solution générale de l'équation différentielle (1.46.) est de la forme ⁽²⁷⁾ :

$$(A_z)_{r=a} = -\frac{jk}{\omega} \left\{ C_1 \cos kz + C_2 \sin kz - z_i \int_{\delta}^z I(s) \sin k(z-s) ds \right\} \quad (1.48.)$$

Cette relation est valable pour $\delta \leq z \leq h$.

Une solution du même type est obtenue pour la moitié inférieure de l'antenne, en remplaçant δ par $-\delta$.

Pour calculer le potentiel scalaire ϕ , il suffit d'utiliser la relation liant A et ϕ (relation de Lorentz) :

$$\text{div } A + j \frac{k^2}{\omega} \phi = 0 \quad (1.49.)$$

De plus, comme la différence de potentiel V entre les points d'excitation de l'antenne est telle que :

$$V = |\phi(\delta) - \phi(-\delta)|_{r=a} = 2\phi(\delta) \quad (1.50.)$$

On obtient, si $\delta \leq z \leq h$:

$$A_z(z)_{r=a} = -\frac{jk}{\omega \cos k\delta} \left[C_1 \cos k(z-\delta) + \frac{1}{2} V \sin kz \right] + j \frac{z_i k}{\omega} \int_{\delta}^z l(s) \sin k(z-s) ds \quad (1.51.)$$

$$\phi(z)_{r=a} = \frac{1}{\cos k\delta} \left[-C_1 \sin k(z-\delta) + \frac{1}{2} V \cos kz \right] - z_i \int_{\delta}^z l(s) \cos k(z-s) ds \quad (1.52.)$$

où C_1 est une constante d'intégration qui est déterminée par les conditions aux limites à l'extrémité de l'antenne (en $z = \pm h$)

Pour la moitié inférieure de l'antenne, les relations donnant ϕ et A sont similaires à (1.51.) et (1.52.).

En égalant les expressions (1.43.) et (1.51.) de la composante A_z du potentiel vecteur au voisinage de la surface de l'antenne, on obtient, si $\delta \leq z \leq h$:

$$\left(\int_{-h}^{-\delta} + \int_{\delta}^h \right) l(z') K_1(z, z') dz' = -\frac{j4\pi}{n \cos k\delta} \left[C_1 \cos k(z-\delta) + \frac{V}{2} \sin kz \right] \dots + j z_i \frac{4\pi}{n} \int_{\delta}^z l(s) \sin k(z-s) ds \quad (1.53.)$$

avec :

$$n = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \quad (1.54.)$$

Le noyau de l'équation intégrale permettant de calculer la répartition de courant $l(z)$ est donnée par :

$$K_1(z, z') = \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} \quad \text{avec} \quad R_1 = \sqrt{(z-z')^2 + a^2} \quad (1.55.)$$

Lorsque le milieu entourant l'antenne est isolant, l'air par exemple, de nombreuses méthodes ^{(1), (2), (3)} .. ont été développées pour trouver une solution approchée de l'équation 1.53. Cependant la plupart de ces méthodes ne peuvent s'appliquer directement au cas d'un milieu extérieur présentant une conductivité non nulle.

King et Harrison ⁽²⁷⁾ ont étudié quelques cas particuliers et notamment celui d'une antenne demi-onde, lorsque le milieu est relativement peu dissipatif ($\alpha h \leq 0,3$). Nous allons en rappeler brièvement le principe de calcul.

I.4.2. Principe du calcul

On peut tout d'abord faire apparaître dans l'équation intégrale la différence des potentiels vecteurs A_z calculés d'une part à l'extrémité de l'antenne ($z=+h$) et d'autre part, en un point courant d'abscisse z . En supposant que la conductivité de l'antenne est très grande ($z_i \approx 0$), on obtient:

$$\int_{-h}^{+h} I_z(z') K_D(z, z') dz' = \frac{j4\pi k}{\omega\mu \cos kh} \left\{ \frac{1}{2} V \sin k(h-|z|) + U \cdot \cos(kz - kh) \right\} \quad (1.56.)$$

avec :
$$U = -\frac{j\omega}{k} A_z(h) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi k} \int_{-h}^{+h} I_z(z') \frac{e^{-jkRh}}{Rh} dz' \quad (1.57.)$$

$$K_D(z, z') = K(z, z') - K(h, z') = \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} - \frac{e^{-jkRh}}{Rh} \quad (1.58.)$$

La distance R_h étant définie par :
$$R_h = \sqrt{(h-z')^2 + a^2} \quad (1.59.)$$

Pour résoudre l'équation (1.56.), dans le cas où $\beta h = \pi/2$, King et Harrison ont séparé les expressions du courant total le long de l'antenne et celles du potentiel ϕ en plusieurs parties. Chacun des termes obtenu ne doit pas varier beaucoup en fonction de l'abscisse z d'un point courant, le long de l'antenne. Les différentes intégrales ainsi obtenues pourront être itérées indépendamment les unes des autres.

I.4.3. Propriétés de certaines fonctions caractéristiques

On introduit deux nouvelles fonctions $\phi_v(z)$ et $\phi_u(z)$ par les relations :

$$\phi_v(z) = \int_{-h}^{+h} \sin k(h-|z'|) K_D(z, z') dz' \quad (1.60.)$$

$$\phi_u(z) = \int_{-h}^{+h} (\cos kz' - \cos kh) K_D(z, z') dz' \quad (1.61.)$$

Pour une antenne résonnante en $\beta h = \pi/2$ et pour un milieu extérieur peu conducteur ($\alpha h < 0,3$), les expressions de $\phi_V(z)$ et $\phi_U(z)$ peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \phi_V(z) = & (1 - j\alpha \frac{\lambda}{4}) \{Ca(h,z) - Ca(h,h) - \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{\pi}{2} (1+j) - j \right] \cos kz\} \\ & + j\alpha \frac{\lambda}{4} \{Ea(h,z) - Ea(h,h) - Sa(h,z) + Sa(h,h)\} \end{aligned} \quad (1.62.)$$

Dans cette expression λ désigne la longueur d'onde dans le sol et les différents termes Ca , Sa et Ea sont tels que :

$$Ca(h,z) = \int_0^{+h} L \cos \beta z' dz' \quad (1.63.) \quad Sa(h,z) = \int_0^h L \sin \beta z' dz' \quad (1.64.)$$

$$Ea(h,z) = \int_0^h L dz' \quad (1.65.) \quad \text{avec} \quad L = \frac{e^{-j\beta R_1}}{R_1} + \frac{e^{-j\beta R_2}}{R_2} \quad (1.66.)$$

$$R_1 = \sqrt{(z-z')^2 + a^2} \quad \text{et} \quad R_2 = \sqrt{(z+z')^2 + a^2}$$

De même la fonction $\phi_U(z)$ prend la forme approchée suivante :

$$\phi_U(z) = \phi_U(0) \cos \beta z \quad (1.67.)$$

$$\text{avec } \phi_U(0) = \phi_U = (1+j\alpha \frac{\lambda}{4}) \{Ca(h,0) - Ca(h,h) - \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{\pi}{2} (1+j) - j \right] \} \quad (1.68.)$$

En comparant les expressions de ϕ_V et ϕ_U , on peut poser :

$$\phi_V(z) = \phi_U(z) + \phi_W(z) \quad (1.69.)$$

Comme on peut vérifier que la nouvelle expression $\phi_W(z)$ varie comme : $1 - \sin \beta z$, la fonction $\phi_V(z)$ s'écrit :

$$\phi_V(z) = \phi_U(0) \cos \beta z + \phi_W(0) (1 - \sin \beta |z|) \quad (1.70.)$$

avec :

$$\phi_w(0) = \phi_w = j \alpha \frac{\lambda}{4} \{Ea(h,0) - Ea(h,h) - Sa(h,0) + Sa(h,h)\} \quad (1.71.)$$

Connaissant la loi approchée de variations des fonctions ϕ avec l'abscisse z , l'expression du courant sera décomposée de façon à faire intervenir des termes ayant la forme précédente.

I.4.4. Décomposition du courant

A la résonance, l'équation intégrale du courant se met sous la forme ($\beta h = \pi/2$) :

$$\int_{-h}^{+h} I_{V1}(z') K_D(z, z') dz' + \int_{-h}^{+h} I_{V2}(z') K_D(z, z') dz' + \int_{-h}^{+h} I_U(z') K_D(z, z') dz' =$$

$$\dots \frac{4\pi(\beta - j\alpha)}{\omega \mu \alpha h} \left\{ \left| \frac{1}{2} V+U \right| (1 - j\alpha h) \cos \beta z + \frac{1}{2} jV\alpha h (1 - \sin \beta |z|) \right\} \quad (1.72.)$$

avec :

$$I(z) = I_{V1}(z) + I_{V2}(z) + I_U(z) \quad (1.73.)$$

Or chacune de ces intégrales peut être décomposée de la façon suivante :

$$\int_{-h}^{+h} I_{V1}(z') K_D(z, z') dz' = \psi_{V1} I_{V1}(z) - D_{V1}(z) \quad (1.74.)$$

$$\text{avec : } \psi_{V1} = \int_{-h}^{+h} g_{V1}(z, z') K_D(z, z') dz' \quad (1.75.)$$

$$D_{V1}(z) = \int_{-h}^{+h} [I_{V1}(z') - I_{V1}(z) g_{V1}(z, z')] K_D(z, z') dz' \quad (1.76.)$$

Pour pouvoir comparer ces expressions à celles des fonctions ϕ , on pose :

$$g_{V1} = g_U(z, z') = \frac{\cos \beta z'}{\cos \beta z} \quad (1.77.)$$

De même :

$$g_{v2} = \frac{1 - \sin\beta z'}{1 - \sin\beta z} \quad (1.78.)$$

Compte tenu de ces équations et de celles de ϕ_u et ϕ_v , on remarque que les fonctions ψ sont pratiquement constantes quelque soit z . On peut donc prendre leur valeur en zéro. On obtient dans ce cas :

$$\psi_{v1} = \psi_u = \frac{\phi_u}{1 - j\alpha h} \quad (1.79.) \quad \psi_{v2} = \frac{\phi_w}{j\alpha h} \quad (1.80.)$$

En négligeant en première approximation ⁽²⁸⁾ les termes de la forme $D_{v1}(z)$, le courant total est donné par :

$$I(z) = \frac{2\pi(\beta - j\alpha)}{\omega\mu\alpha h\psi_u} V \left\{ \left(1 + \frac{2U}{V}\right) (1 - j\alpha h) \cos\beta z + j\alpha h (1 - \sin\beta|z|) \frac{\psi_u}{\psi_{v2}} \right\} \quad (1.81.)$$

Pour déterminer la valeur de U , il suffit d'utiliser sa relation de définition (1.57.) et de remplacer dans celle ci $I(z)$ par l'expression précédente.

Tous calculs faits, la fonction U s'écrit :

$$U = -j \frac{V}{2\alpha h\psi_u} \left\{ \left(1 + \frac{2U}{V}\right) (1 - j\alpha h)\psi_c(h) + j\alpha h \psi_s(h) \frac{\psi_u}{\psi_{v2}} \right\} \quad (1.82.)$$

avec :

$$\psi_c(h) = Ca(h,h) + j\alpha h \quad (1.83.)$$

$$\psi_s(h) = Ea(h,h) - Sa(h,h) + j \frac{\alpha}{\beta} \quad (1.84.)$$

L'expression définitive de la répartition du courant le long de l'antenne est donc :

$$I(z) = - \frac{j2\pi(\beta - j\alpha)V}{\omega\mu\psi_{v2}} \{T(\lambda/4)\cos\beta z + \sin\beta|z| - 1\} \quad (1.85.)$$

$$\text{avec } T(\lambda/4) = \frac{(1 - j \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{\beta}) (\psi_{v2} + \psi_s(h))}{(1 - j \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{\beta}) \psi_c(h) - j \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{\beta} \psi_u} \quad (1.86.)$$

A partir de ces relations, on peut déduire la valeur de l'impédance d'entrée de l'antenne. Toutes les fonctions Ea , Sa et Ca intervenant dans les différentes fonctions ψ et ϕ doivent être calculées numériquement.

Cette étude, faite pour un milieu extérieur peu conducteur ($\alpha h \leq 0,3$) a été généralisée en 1969 par King et Wu⁽³⁶⁾ pour des milieux ayant une conductivité quelconque. Mais dans ce cas les calculs sont beaucoup plus compliqués et nous avons préféré envisager dans notre étude le cas d'une antenne biconique mince qui donne une solution plus simple. Nous comparons d'ailleurs dans le chapitre suivant les résultats d'applications numériques obtenus pour une antenne biconique et pour une antenne cylindrique placée dans un milieu homogène et infini.

CHAPITRE. II.

RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE BICONIQUE MINCE PLACEE
DANS UNE CAVITE SPHERIQUE AU SEIN D'UN MILIEU HOMO-
GENE ET INFINI.

C H A P I T R E . I I .

RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE BICONIQUE MINCE PLACEE DANS UNE CAVITE SPHERIQUE AU SEIN D'UN MILIEU HOMOGENE ET INFINI

Nous supposons dans ce chapitre que l'antenne biconique mince peut être placée dans une cavité diélectrique au sein du milieu absorbant. Après avoir précisé les différents points du développement mathématique, nous donnons l'expression des champs électromagnétiques rayonnés par l'antenne, et celle de l'impédance terminale.

Les formules obtenues étant très compliquées, nous effectuons des calculs numériques sur des exemples concrets afin de mettre en évidence le comportement de l'antenne. Nous envisageons tout d'abord le cas d'une antenne placée directement dans le milieu conducteur supposé homogène et infini. Nous déterminons les variations de l'impédance d'entrée et de la répartition du courant en fonction de la fréquence et des caractéristiques électriques du milieu et nous comparons aux résultats obtenus en supposant l'antenne cylindrique.

Nous faisons ensuite des applications numériques pour une antenne biconique placée dans une cavité diélectrique, les extrémités de cette antenne étant en contact direct avec les parois. Enfin nous étudions l'influence du rayon de la cavité sur l'amplitude des champs rayonnés, la longueur de l'antenne étant plus petite que le diamètre de la cavité.

II.1. Hypothèse de départ - système de coordonnées

L'antenne biconique envisagée est symétrique et formée d'un métal infiniment conducteur. Nous supposons que cette antenne de longueur $2a$ est placée dans une cavité sphérique de rayon b au sein d'un milieu

absorbant, homogène et infini.

Le cône défini par la surface $\theta = \theta_0$ est fermé à son extrémité par deux calottes sphériques.

Si la distance entre les points d'alimentation de l'antenne est très petite, l'espace total pourra être divisé en trois régions numérotées de 1 à 3 comme l'indique la figure.11.1.

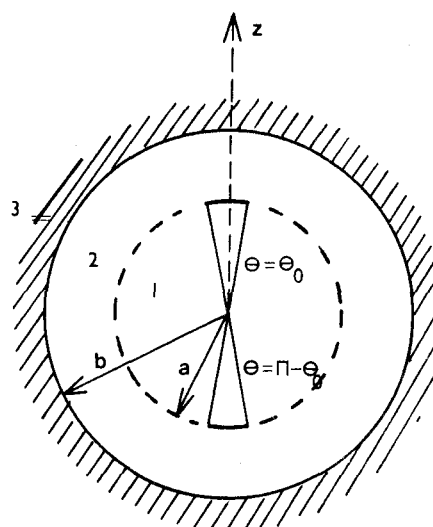


fig.11.1.

Les milieux d'indices respectifs 1, 2 et 3 sont caractérisés par les constantes électriques $\sigma_i, \epsilon_i, \mu_i$ ($i=1,2,3$) et nous faisons l'hypothèse suivante :

$\mu_i = \mu_0$ (perméabilité du vide). La région 1 est appelée région de l'antenne et les points courants sont repérés en coordonnées sphériques r, θ et ϕ .

Nous supposons que les courants circulent sur l'antenne suivant une direction uniquement radiale et que par conséquent, seuls les modes T.M. sont prépondérants, un mode T.E.M. se propageant de plus dans la région de l'antenne.

Afin de simplifier les calculs, nous serons amenés au cours de l'étude, à supposer que l'angle d'ouverture θ_0 de l'antenne est faible.

II.2. Expression des champs électromagnétiques

Le calcul des composantes du champ électromagnétique ne peut pas se ramener directement au calcul du vecteur de Hertz $\vec{\Pi}$ car, en coordonnées sphériques, la méthode de séparation des variables n'est pas applicable à l'équation différentielle que doit vérifier ce vecteur. Il faut passer par l'intermédiaire d'une fonction scalaire U , appelée souvent potentiel de Debye, et qui, si la région i ne contient pas de charge, satisfait l'équation :

$$(\Delta - \gamma_i^2) \frac{U}{r} = 0 \quad (2.1.)$$

γ_i est le facteur de propagation intrinsèque défini par :

$$\gamma_i = \sqrt{j\omega\mu(\sigma_i + j\omega\epsilon_i)} \quad (2.2.)$$

Les composantes du champ peuvent être calculées à partir de U par les relations :

$$E_r = \frac{1}{\sigma_i + j\omega\epsilon_i} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \gamma_i^2 \right) U \quad (2.3.)$$

$$E_\theta = \frac{1}{(\sigma_i + j\omega\epsilon_i)r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} \quad (2.4.)$$

$$H_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (2.5.)$$

En posant $U = R_\nu(r)T_\nu(\theta)$, on obtient en résolvant l'équation différentielle dans chacun des milieux et en posant $k_i = -j\gamma_i$:

$$R_\nu = A_\nu \hat{J}_\nu(k_i r) + B_\nu \hat{H}_\nu(k_i r) \quad (2.6.)$$

$$T_\nu = C_\nu P_\nu(\cos\theta) + D_\nu P_\nu(-\cos\theta) \quad (2.7.)$$

L'indice ν est une constante introduite par la méthode de résolution par séparation des variables.

Nous avons adopté les notations de Wait⁽²⁹⁾ pour les fonctions \hat{J}_ν et \hat{H}_ν qui sont les fonctions de Bessel et de Hankel de type sphérique :

$$\hat{J}_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{\nu+1/2}(x) \quad (2.8.)$$

$$\hat{H}_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_{\nu+1/2}^{(2)}(x) \quad (2.9.)$$

$P_\nu(\cos\theta)$ est la fonction de Legendre d'ordre ν , ν étant réel.

Nous déterminons les expressions des champs dans les différents milieux ainsi que les constantes d'intégration $A_\nu, B_\nu \dots$ en utilisant les conditions aux limites sur les composantes du champ électromagnétique.

II.2.1. Composantes du champ dans la région 1

Dans cette région, il faut tenir compte du mode T.E.M. qui est guidé par les parois métalliques de l'antenne. On associe à cette onde une impédance caractéristique K de la ligne de transmission biconique supposée de longueur infinie⁽³⁰⁾ :

$$K = \frac{\eta_1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{\eta_1}{\pi} \text{Log cotg } \theta_0 \quad (2.10.)$$

avec :

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma_1 + j\omega\epsilon_1}} \quad (2.11.)$$

Etant donnée la symétrie de l'antenne, les composantes du champ doivent être les mêmes quand on change de θ en $-\theta$. La seule combinaison des fonctions de Legendre satisfaisant cette condition est :

$$T_\nu = \frac{1}{2} [P_\nu(\cos\theta) - P_\nu(-\cos\theta)] \quad (2.12.)$$

De plus, comme la zone d'excitation de l'antenne, c'est-à-dire la distance entre les points d'alimentation a été supposée très petite (r peut tendre vers zéro), on doit choisir la solution suivante, somme d'une solution particulière correspondant au mode T.E.M. et de termes complémentaires dus au mode T.M.

$$E_{\theta 1} = \frac{\eta_1 V(r)}{2K\pi r \sin\theta} + \frac{j\eta_1}{2\pi r} \sum_\nu \frac{A_\nu}{\nu(\nu+1)} \frac{\hat{J}'_\nu(k_1 r)}{\hat{J}'_\nu(k_1 a)} \frac{dT_\nu}{d\theta} \quad (2.13.)$$

$$H_{\phi 1} = \frac{I_0(r)}{2\pi r \sin\theta} + \frac{1}{2\pi r} \sum_\nu \frac{A_\nu}{\nu(\nu+1)} \frac{\hat{J}'_\nu(k_1 r)}{\hat{J}'_\nu(k_1 a)} \frac{dT_\nu}{d\theta} \quad (2.14.)$$

$$E_{r 1} = \frac{-1}{2\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)r^2} \sum_\nu A_\nu \frac{\hat{J}'_\nu(k_1 r)T_\nu}{\hat{J}'_\nu(k_1 a)} \quad (2.15.)$$

$$\text{avec } \hat{J}'_v(x) = \frac{d}{dx} \hat{J}_v(x) \quad (2.16.)$$

Les conditions aux limites $E_r = 0$ en $\theta = \theta_0$ et $\theta = \pi - \theta_0$ mène à l'équation :

$$T_v(\cos\theta_0) = 0 \quad (2.17.)$$

ce qui conduit à une série infinie et discrète de valeurs de v .

Le courant I_0 associé à l'onde T.E.M. est déterminé en tout point de l'antenne par la théorie classique des lignes :

$$I_0(r) = \frac{V(a)}{K} \left[j \sin[k_1(a-r)] + KY_+ \cos[k_1(a-r)] \right] \quad (2.18.)$$

$V(r)$ est la "tension transverse" définie par la circulation du champ électrique le long d'un méridien qui va de θ_0 à $\pi - \theta_0$:

$$V(r) = \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} r E_\theta d\theta \quad (2.19.)$$

Y_+ est l'admittance terminale définie par :

$$Y_+ = \frac{I_0(a)}{V(a)} \quad (2.20.)$$

On peut montrer facilement, en calculant l'intégrale de l'équation (2.19.), que la tension transverse ne dépend uniquement que du mode T.E.M. Par conséquent Y_+ est l'admittance "vue par l'onde T.E.M." à l'extrémité de la ligne.

La tension $V(r)$ est donc donnée en tout point de l'antenne, par l'expression suivante :

$$V(r) = V(a) \left[\cos[k_1(a-r)] + jKY_+ \sin[k_1(a-r)] \right] \quad (2.21.)$$

Il est souvent intéressant d'introduire l'impédance Z_v qui est vue à une distance égale à $1/4$ de longueur d'onde, au-delà de l'extrémité de l'antenne, sur une ligne de même impédance caractéristique K :

$$Z_v = R_v + jX_v = K^2 Y_+ \quad (2.22.)$$

Si la région d'excitation de l'antenne est petite, les courants complémentaires dus aux modes T.M. sont donnés par la relation suivante :

$$\tilde{V}(r) = -2 \frac{n_1}{K} \sum_v A_v \hat{J}_v(k_1 r) \quad (2.23.)$$

Ces courants étant nuls à l'origine, l'impédance d'entrée est donnée par :

$$Z_e = \frac{V(0)}{I_o(0)} \quad (2.24.)$$

II.2.2. Composantes du champ dans la région 2

Le champ doit rester fini en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, or les polynômes de Legendre tendent vers l'infini pour ces valeurs, sauf pour ν entier. De plus, compte tenu de la symétrie, on doit prendre $\nu = n$, n étant impair

$$E_{\theta 2} = \frac{jn_2}{2\pi r} \sum_{n=1,3,5..} \frac{1}{n(n+1)} \left[c_n \frac{\hat{J}'_n(k_2 r)}{\hat{J}'_n(k_2 a)} + d_n \frac{\hat{H}'_n(k_2 r)}{\hat{H}'_n(k_2 a)} \right] \frac{dP_n}{d\theta} \quad (2.25.)$$

$$H_{\phi 2} = \frac{1}{2\pi r} \sum_{n=1,3,5..} \frac{1}{n(n+1)} \left[c_n \frac{\hat{J}_n(k_2 r)}{\hat{J}_n(k_2 a)} + d_n \frac{\hat{H}_n(k_2 r)}{\hat{H}_n(k_2 a)} \right] \frac{dP_n}{d\theta} \quad (2.26.)$$

$$E_{r 2} = \frac{-1}{2\pi(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2)r^2} \sum_{n=1,3,5..} \left[c_n \frac{\hat{J}_n(k_2 r)}{\hat{J}_n(k_2 a)} + d_n \frac{\hat{H}_n(k_2 r)}{\hat{H}_n(k_2 a)} \right] P_n \quad (2.27.)$$

II.2.3. Composantes du champ dans la région 3

On a de même, avec $\nu = n$:

$$E_{\theta 3} = \frac{jn_3}{2\pi r} \sum_{n=1,3,5..} \frac{1}{n(n+1)} b_n \frac{\hat{H}'_n(k_3 r)}{\hat{H}'_n(k_3 b)} \frac{dP_n}{d\theta} \quad (2.28.)$$

$$H_{\phi 3} = \frac{1}{2\pi r} \sum_n \frac{1}{n(n+1)} b_n \frac{\hat{H}_n(k_3 r)}{\hat{H}_n(k_3 b)} \frac{dP_n}{d\theta} \quad (2.29.)$$

$$E_{r 3} = \frac{-1}{2\pi(\sigma_3 + j\omega\epsilon_3)r^2} \sum_n b_n \frac{\hat{H}_n(k_3 r)}{\hat{H}_n(k_3 b)} P_n \quad (2.30.)$$

II.3. Calcul de l'impédance terminale

Nous allons tout d'abord relier l'admittance terminale Y_t aux coefficients c_n et d_n .

Pour cela, en calculant la circulation de $H_{\phi 1}$ sur un méridien entre θ_0 et $\pi - \theta_0$, on obtient, d'après (2.14.) :

$$\int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} a H_{\theta 1}(a) d\theta = \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} Y_t \frac{V(a)}{2\pi \sin\theta} d\theta \quad (2.31.)$$

En tenant compte de l'expression (2.10.) de l'impédance caractéristique K , l'équation précédente peut s'écrire :

$$Y_t = \frac{\eta_1 a}{K V(a)} \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} H_{\phi}(a) d\theta \quad (2.32.)$$

En remplaçant H_{ϕ} par sa valeur calculée en $r = a$ dans le milieu (2), on a finalement :

$$Y_t = \frac{-\eta_1}{\pi K V(a)} \sum_n \frac{(c_n + d_n)}{n(n+1)} P_n(\cos\theta_0) \quad (2.33.)$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Legendre, on peut montrer (Annexe.1.) que c_n et d_n satisfont la relation suivante :

$$P_r(\cos\theta_0) = \frac{-jKn_2}{V(a)\eta_1} \frac{1}{2r+1} \left[c_r \frac{\hat{J}'_r(k_2 a)}{\hat{J}_r(k_2 a)} + d_r \frac{\hat{H}'_r(k_2 a)}{\hat{H}_r(k_2 a)} \right] + j \frac{K}{V(a)} \sum_v \sum_n \frac{(r^2 + r)}{v(v+1)} \frac{\hat{J}'_v(k_1 a)}{\hat{J}_v(k_1 a)} (c_n + d_n) \frac{I_{vr} I_{vn}}{I_{vv'}} \quad (2.34.)$$

avec :

$$I_{vr} = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} T_v P_r \sin\theta d\theta \quad (2.35.)$$

$$I_{vv'} = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} T_v T_{v+e} \sin\theta d\theta \quad (2.36.)$$

Pour résoudre l'équation (2.34.), Tai⁽³¹⁾ a montré qu'il fallait considérer $c_n + d_n$ comme un nouveau paramètre que l'on pose égal à b'_n .

Pour cela, en introduisant les notations de Tai⁽³²⁾ :

$$\tau_n(x) = \frac{\hat{H}'_n(x)}{\hat{H}_n(x)} \quad (2.37.)$$

$$\rho_n(x) = \frac{\hat{J}'_n(x)}{\hat{J}_n(x)} \quad (2.38.)$$

et en égalant les composantes tangentielles du champ en $r = b$, on obtient :

$$c_n = \frac{\tau_n(-j\gamma_2 b) - \frac{\eta_3}{\eta_2} \tau_n(-j\gamma_3 b)}{\tau_n(-j\gamma_2 b) - \rho_n(-j\gamma_2 b)} \frac{\hat{J}_n(-j\gamma_2 a)}{\hat{J}_n(-j\gamma_2 b)} b_n \quad (2.39.)$$

$$d_n = \frac{-\rho_n(-j\gamma_2 b) + \frac{\eta_3}{\eta_2} \tau_n(-j\gamma_3 b)}{\tau_n(-j\gamma_2 b) - \rho_n(-j\gamma_2 b)} \frac{\hat{H}_n(-j\gamma_2 a)}{\hat{H}_n(-j\gamma_2 b)} b_n \quad (2.40.)$$

En posant $f_n = -d_n/c_n$ et en calculant les intégrales I_{vr} et I_{vv} , (Tai⁽³¹⁾, Smith⁽³³⁾), l'équation (2.34.) peut se mettre sous la forme suivante :

$$P_r(\cos\theta_0) = \frac{-Kb'_r W_r}{V(a)} - \frac{K}{V(a)} \sum_v \sum_n \frac{(r^2+r)P_n P_r}{(r,v)(n,v)} s_v b'_n \quad (2.41.)$$

avec :

$$s_v = -\frac{2v+1}{v(v+1)} \sin\theta_0 \left(\frac{dv}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_0} j \frac{\hat{J}'_v(-j\gamma_1 a)}{\hat{J}_v(-j\gamma_1 a)} \quad (2.42.)$$

$$W_r = \frac{j}{2r+1} \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{\rho_r(-j\gamma_2 a) - f_r \tau_r(-j\gamma_2 a)}{1 - f_r} \quad (2.43.)$$

$$(r,v) = r^2 + r - v^2 - v \quad (2.44.)$$

La résolution de cette infinité d'équations (2.41.) est difficile dans le cas d'angle θ_0 quelconque (Tai⁽³²⁾, Robin et Ferreira Gomès⁽³⁴⁾), mais se simplifie quand θ_0 tend vers zéro, c'est-à-dire pour une antenne biconique mince. On a dans ce cas $v \rightarrow n$ et nous nous limiterons à ce cas particulier qui correspond à une antenne à bande étroite et qui se rapproche le plus de l'antenne cylindrique classique. Les expressions de W_r et s_v deviennent simples (Tai⁽³¹⁾, Smith⁽³³⁾) et on obtient finalement :

$$c_n + d_n = \frac{jV(a)}{K} \frac{2n+1}{\frac{\eta_2}{\eta_1} \left\{ \frac{\rho_n(-j\gamma_2 a) - f_n \tau_n(-j\gamma_2 a)}{1-f_n} \right\} - \rho_n(-j\gamma_1 a)} \quad (2.45.)$$

L'admittance terminale Y_+ est obtenue en remplaçant $c_n + d_n$ par sa valeur dans (2.33.) :

$$Y_+ = \frac{-j\eta_1}{\pi K^2} \sum_{n=1,3,5..} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{1}{\frac{\eta_2}{\eta_1} \left\{ \frac{\rho_n(-j\gamma_2 a) - f_n \tau_n(-j\gamma_2 a)}{1-f_n} \right\} - \rho_n(-j\gamma_1 a)} \quad (2.46.)$$

On peut retrouver ce résultat en utilisant la théorie des lignes de transmission non uniforme de Schelkunoff⁽³⁵⁾. Etant donné l'application quelquefois délicate de cette théorie qui peut s'appliquer dans le cas général d'un milieu à n couches, nous avons jugé intéressant de retrouver dans l'annexe.II. l'expression de Y_+ par cette méthode.

Connaissant $c_n + d_n$, leur quotient par les équations (2.39.) et (2.40.), on peut déterminer facilement leurs expressions ainsi que celles des autres coefficients b_n et A_v .

L'impédance d'entrée peut être déduite de Y_+ à l'aide des équations (2.18.), (2.21) et (2.24). Il peut être également intéressant de déterminer la répartition du courant le long de l'antenne donnée par les relations (2.18.) et (2.23.).

Cependant, les développements limités ou asymptotiques des fonctions de Bessel et de Hankel ne peuvent pas être utilisés pour simplifier les expressions ci-dessus. En effet, l'argument de ces fonctions,

de la forme $\gamma_1 a$, a pour ordre de grandeur l'unité puisque les longueurs de l'antenne et de la cavité sont comparables à la longueur d'onde. Nous allons donc effectuer des calculs numériques sur des exemples concrets et nous supposerons tout d'abord que l'antenne est placée directement dans le milieu conducteur.

II.4. Cas d'une antenne immergée dans un milieu conducteur

II.4.1. Variation de l'impédance d'entrée

Nous avons supposé une fréquence d'émission de 50MHz, le milieu entourant l'antenne ayant une constante diélectrique $\epsilon'_r=5$. L'impédance caractéristique K de l'antenne dans l'air est prise égale à 750Ω , ce qui correspond à un angle d'ouverture $\theta_0=1,6^\circ$. L'antenne biconique est donc suffisamment mince pour que les indices de sommation puissent être considérés comme entiers.

Dans les calculs numériques, cette sommation a été faite jusqu'à l'ordre $n = 31$, ce qui donne une précision de l'ordre de 1% sur la valeur de l'impédance d'entrée.

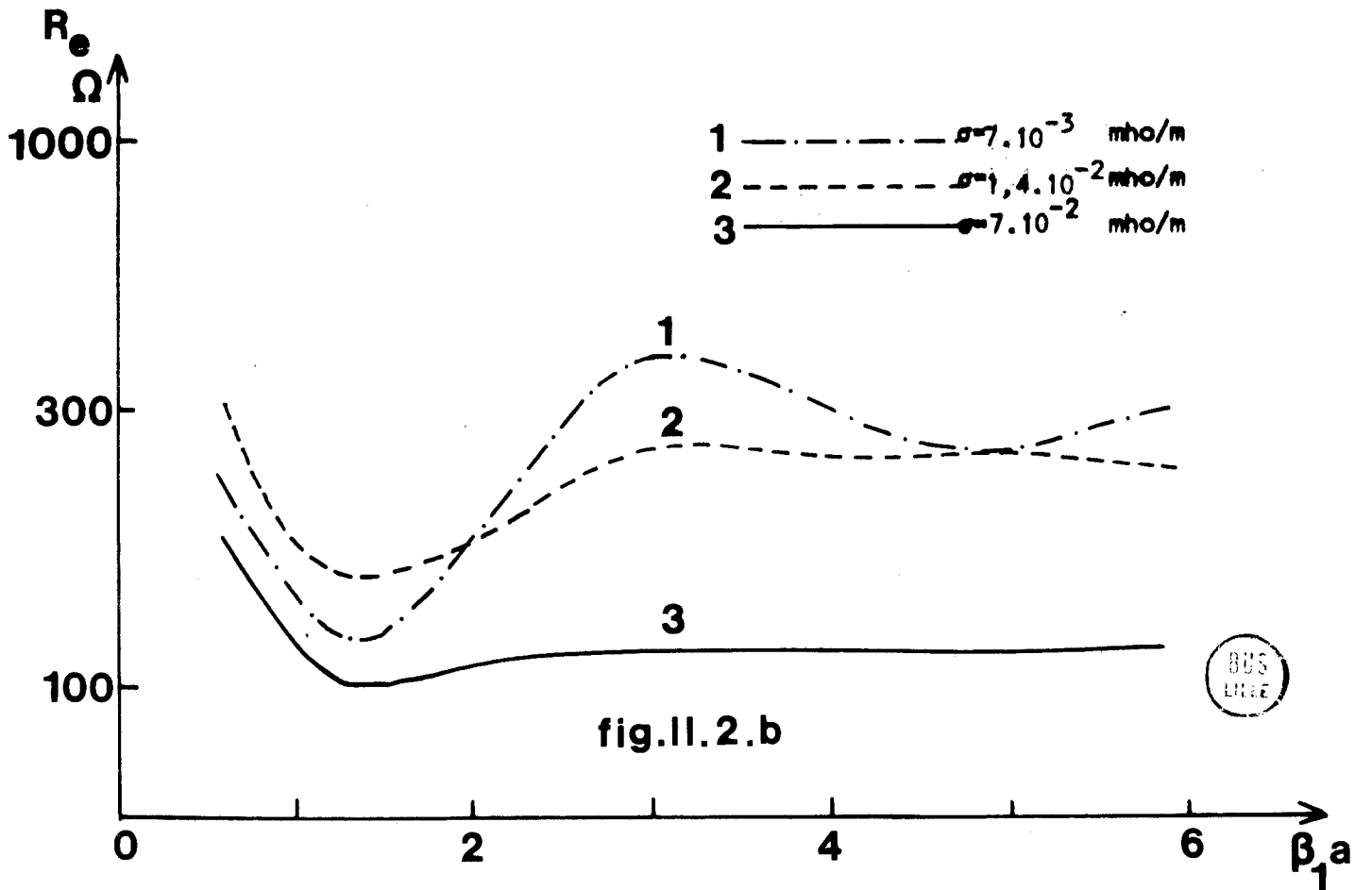
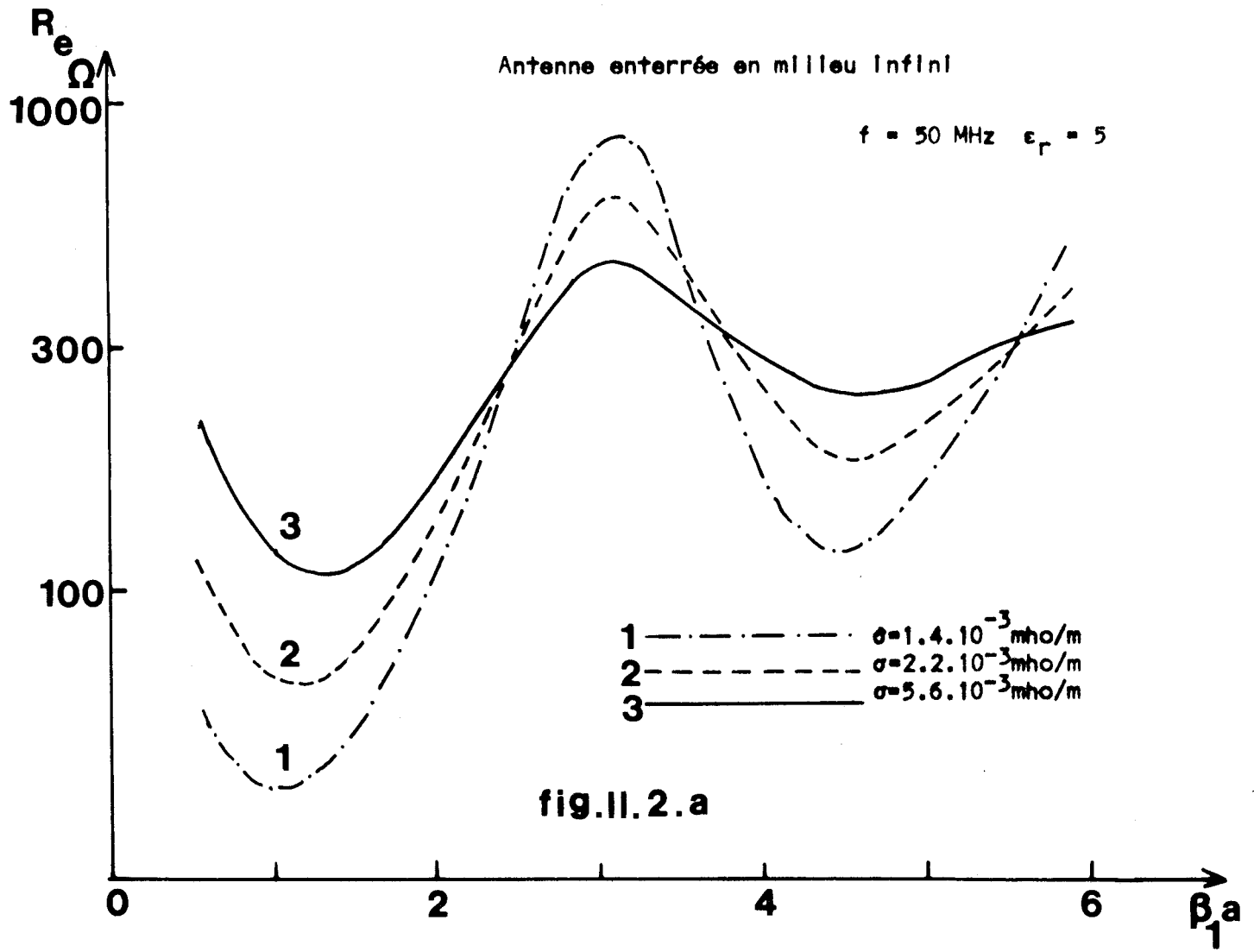
Nous avons représenté sur les figures 11.2. (a et b) et 11.3. (a et b), les variations de la résistance et de la réactance d'entrée en fonction du nombre d'onde $\beta_1 a$ ($\beta_1=2\pi/\lambda_{\text{sol}}$), la conductivité du sol étant introduite en paramètre. Pour une fréquence donnée, l'abscisse est donc proportionnelle à la longueur de l'antenne.

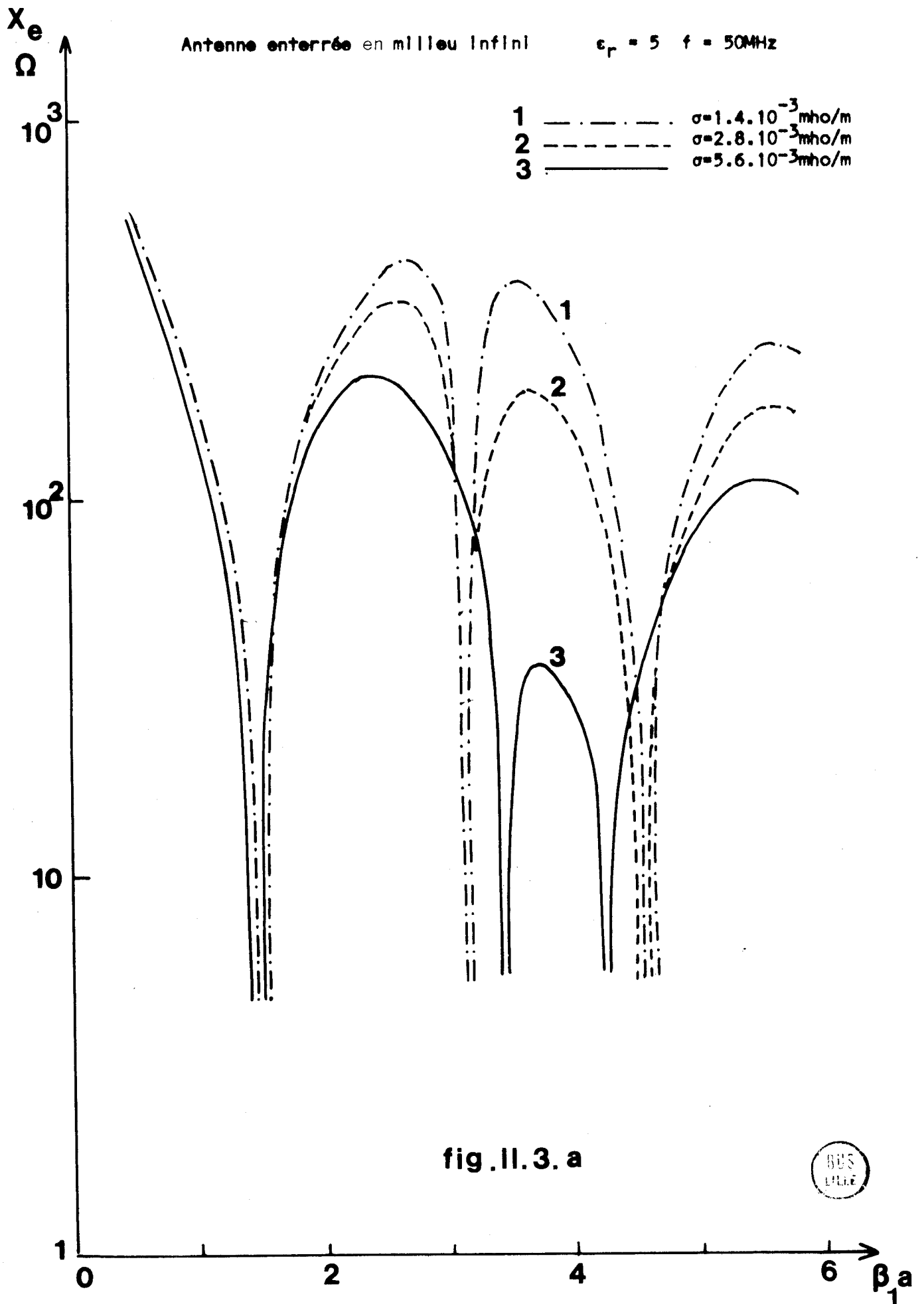
On remarque tout d'abord que l'allure des courbes dépend beaucoup de la conductivité du sol. Si la résonance de l'antenne est définie par la partie imaginaire nulle de l'impédance d'entrée, les résonances, pour les valeurs $a = \lambda/2$ et $a=3\lambda/4$ n'ont pas lieu lorsque σ est trop élevé (cf.fig.11.3.b.).

Pour $\epsilon'_r = 5$, la conductivité $\sigma = 1.4 \cdot 10^{-2}$ mho/m correspond à la fréquence caractéristique de 50MHz. Si la "fréquence relative" $\xi = f/f_c = \omega\epsilon/\sigma$ est supérieure à 5, donc, dans notre cas, si $\sigma < 2.8 \cdot 10^{-3}$ mhos/m, les valeurs de $\beta_1 a$ donnant les résonances successives de l'antenne ne dépendent pratiquement plus de σ . Si $2.5 < \xi < 5$, il y a toujours des résonances en $\lambda/2$, mais le nombre d'ondes pour obtenir des résonances d'ordre supérieur est étroitement lié à la valeur de σ ($\beta_1 a \neq \pi, 3\pi/2$).

Antenne enterrée en milieu infini

$f = 50 \text{ MHz}$ $\epsilon_r = 5$





Antenne enterrée en milieu infini $\epsilon_r = 5$ $f = 50\text{MHz}$

- 1 - - - - - $\sigma = 7 \cdot 10^{-3} \text{ mho/m}$
- 2 - - - - - $\sigma = 1.4 \cdot 10^{-2} \text{ mho/m}$
- 3 - - - - - $\sigma = 7 \cdot 10^{-2} \text{ mho/m}$

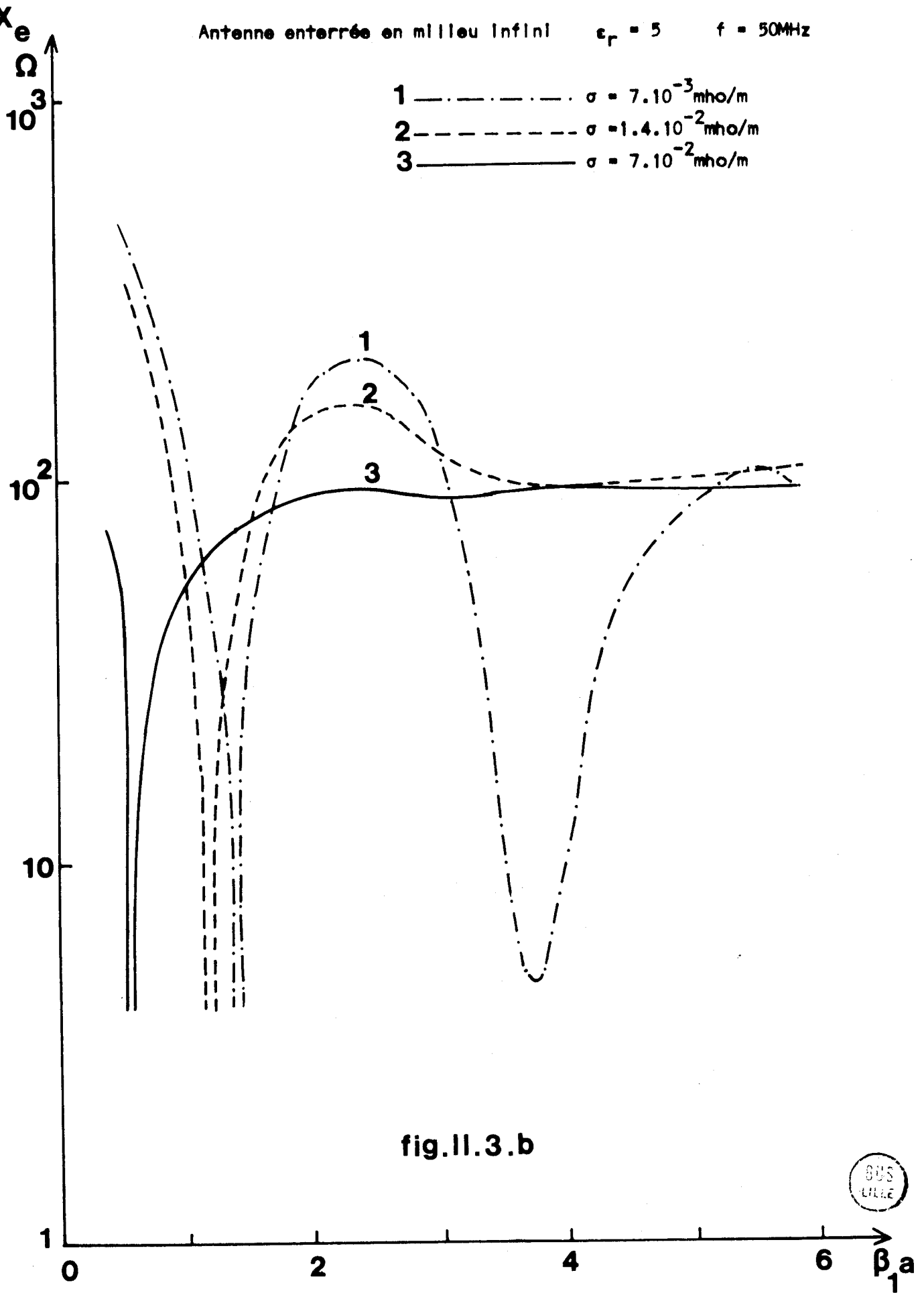


fig.II.3.b



On remarque enfin sur la figure.11.3.b. que si $\xi < 2,5f_c$ (ici $\sigma > 6.4.10^{-3}$ mho/m), l'antenne ne présente plus qu'une seule résonance. La valeur de $\beta_1 a$ correspondante diminue d'ailleurs lorsque le milieu devient plus conducteur ($\beta_1 a < \pi/2$) et les courbes présentent de moins en moins de variations.

II.4.2. Répartition du courant

A l'aide de quelques exemples numériques, nous étudions la répartition du courant suivant le mode de résonance et pour différentes conductivités du sol. En prenant les mêmes données que dans l'exemple précédent, nous avons représenté sur la figure.11.4, les variations du courant le long d'une moitié d'antenne de longueur a telle que $\beta_1 a = \pi/2$ ($a = \lambda/4$).

On voit d'après ces courbes que l'amplitude et la répartition du courant dépendent étroitement de la conductivité du milieu environnant, ce qui rejoint évidemment les conclusions auxquelles nous avons abouti pour les variations de l'impédance d'entrée.

Pour mettre en évidence l'influence de la longueur de l'antenne au voisinage de la première résonance ($a = \lambda/4$), nous donnons sur la figure .11.5. les courbes de répartition du courant pour deux valeurs du nombre d'ondes $\beta_1 a$ et en prenant une conductivité $\sigma_2 = 1,4.10^{-2}$ mho/m. La courbe.2. suppose que $\beta_1 a = \pi/2$ tandis que la courbe 1 a été tracée pour une longueur d'antenne assurant une partie imaginaire nulle de l'impédance d'entrée. Nous avons du prendre dans ce cas $\beta_1 a = 1,14$, c'est-à-dire une valeur bien inférieure à $\pi/2$ comme nous l'avions signalé dans le paragraphe précédent. A la résonance, on remarque que la partie imaginaire du courant est bien plus petite que la partie réelle le long d'une grande partie de l'antenne, ce qui n'est pas le cas si $\beta_1 a = \pi/2$.

Une autre application numérique permet de montrer la répartition du courant pour les différentes résonances (fig.11.6.). Dans ce cas, la conductivité du sol doit être choisie suffisamment faible pour que les résonances d'ordre élevé puissent avoir lieu. Nous avons pris $\sigma = 1.4.10^{-4}$ mho/m, ce qui correspond à une fréquence relative ξ égale à 100. Les figure.11.6. (a,b et c) représentent les variations de la phase et de

REPARTITION DU COURANT.
 ANTENNE PLACÉE EN MILIEU INFINI.
 $\epsilon_r = 5$, $f = 50\text{MHz}$, $\beta_1 a = \pi/2$

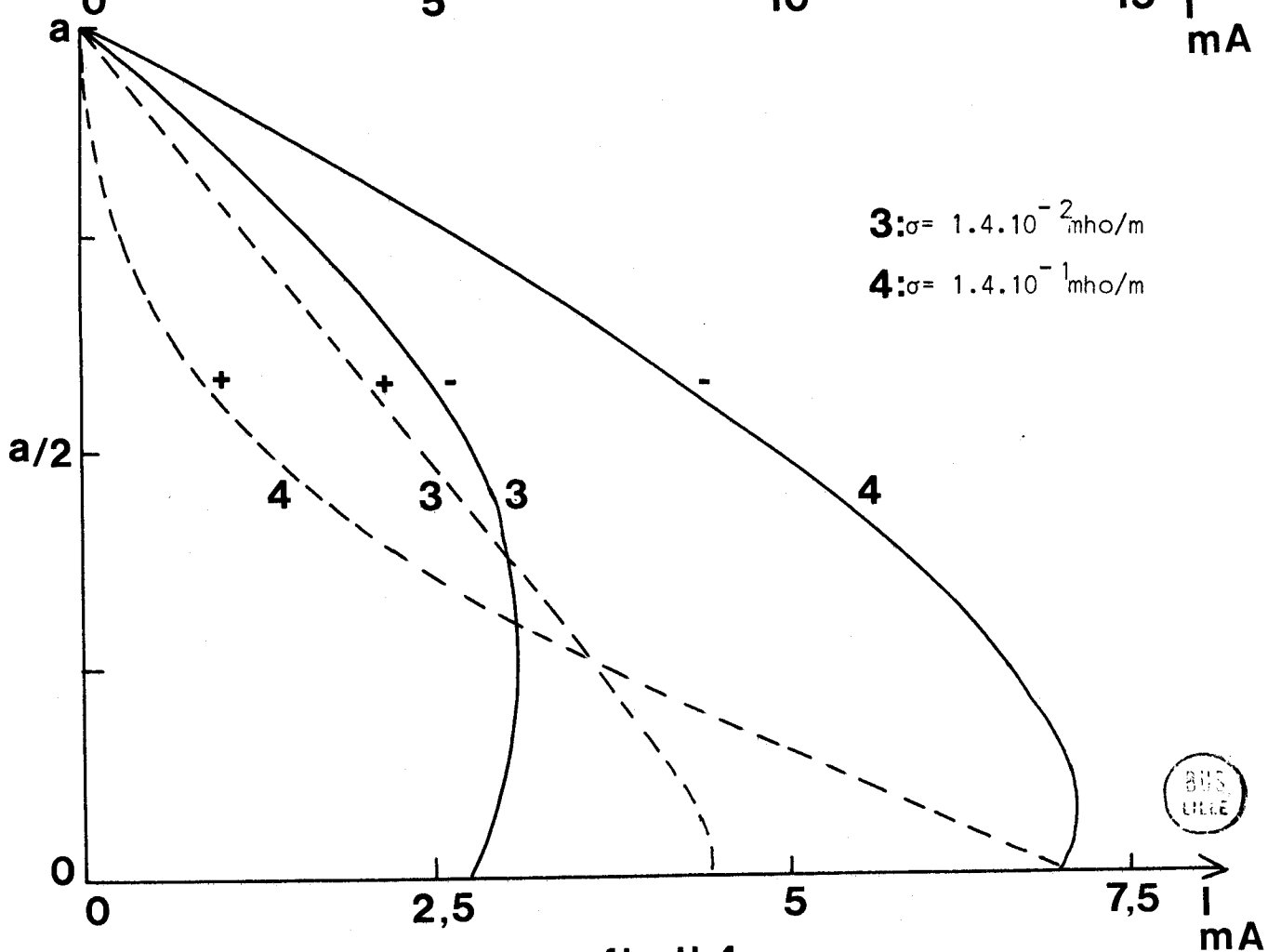
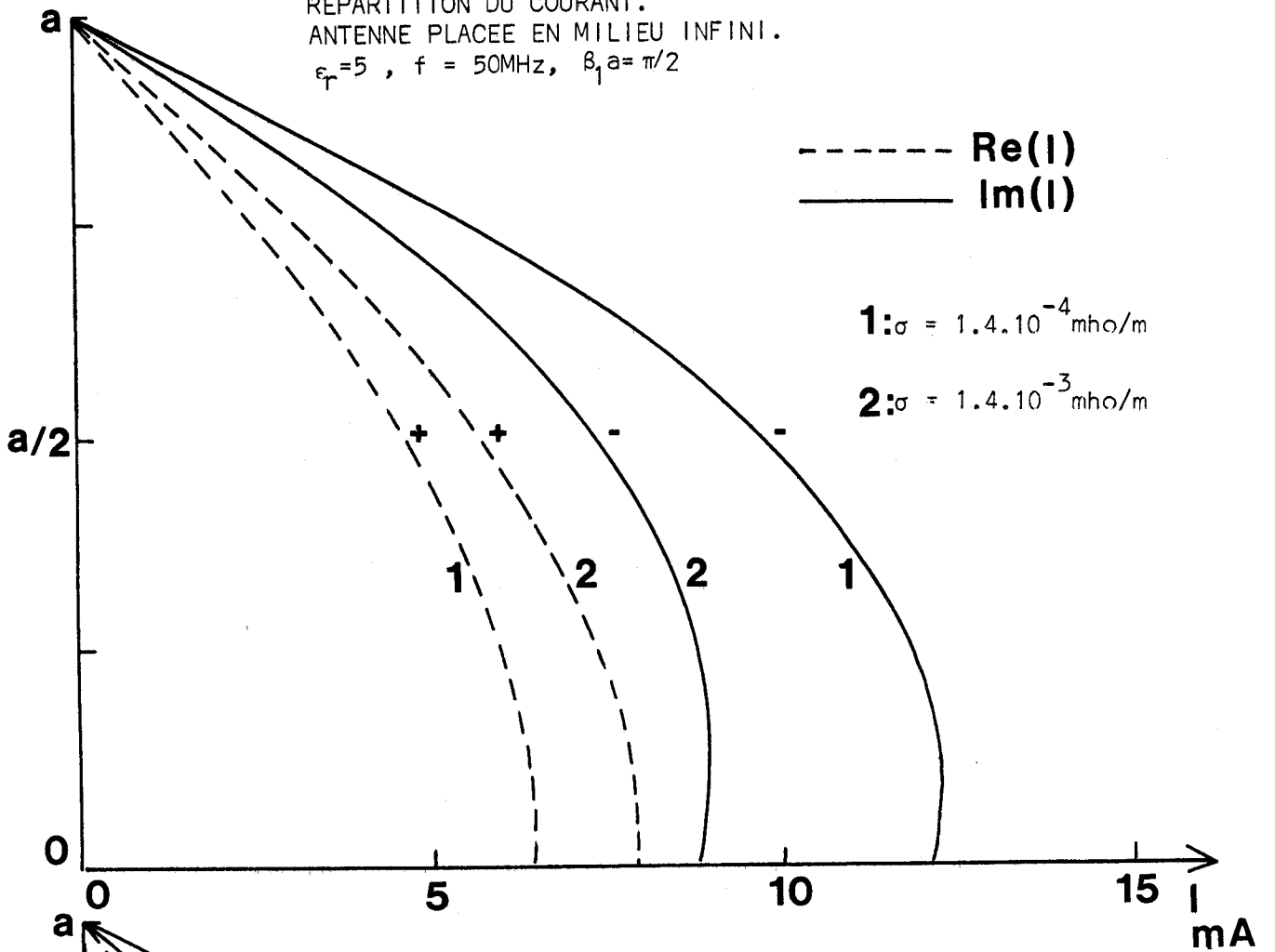


fig.II.4



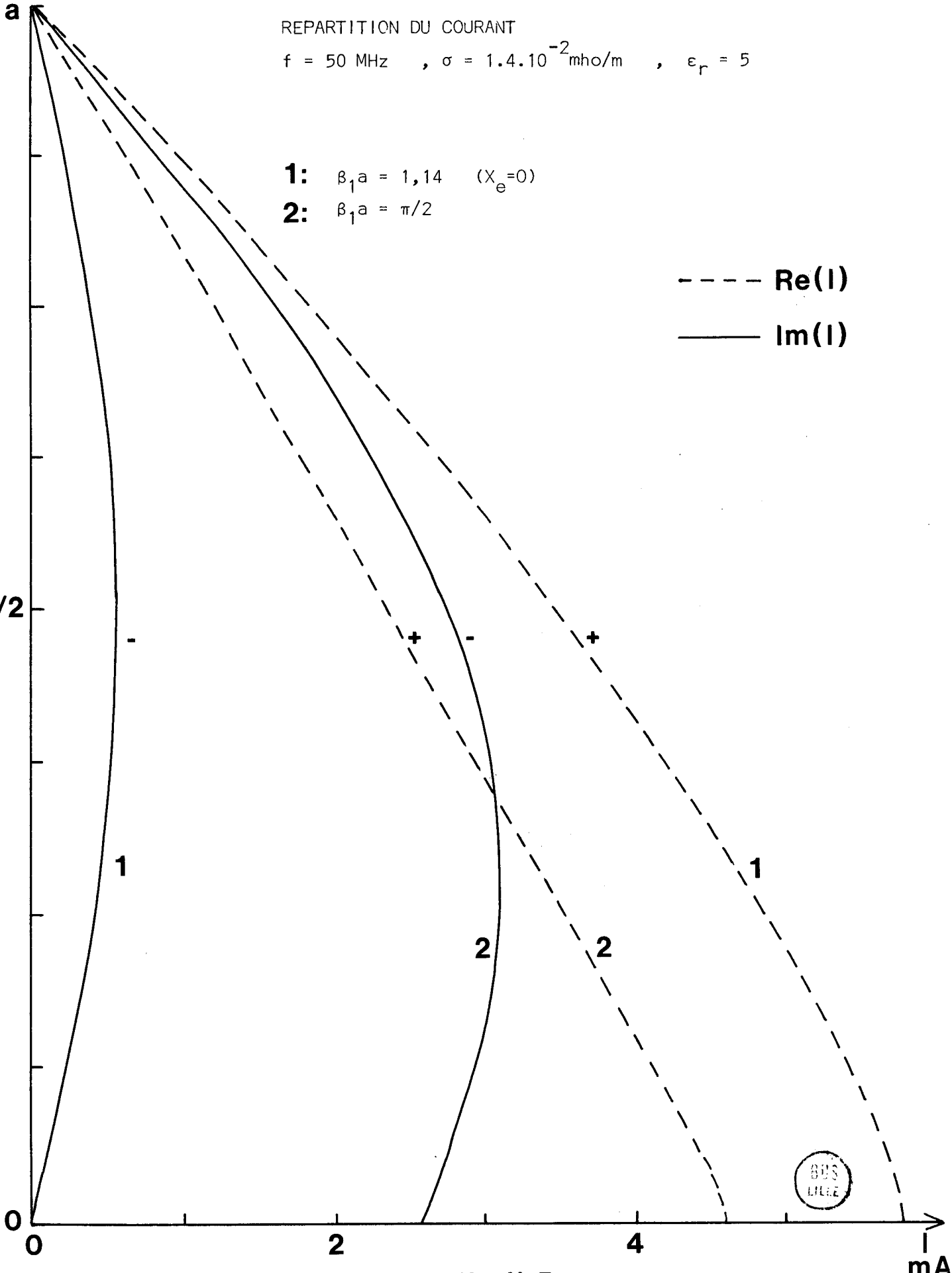
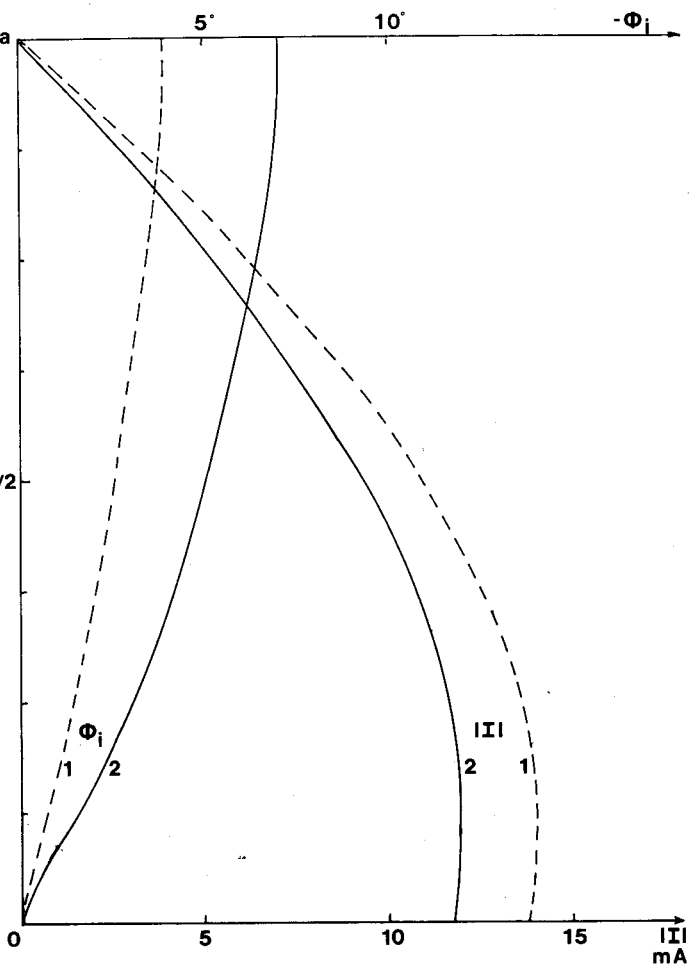
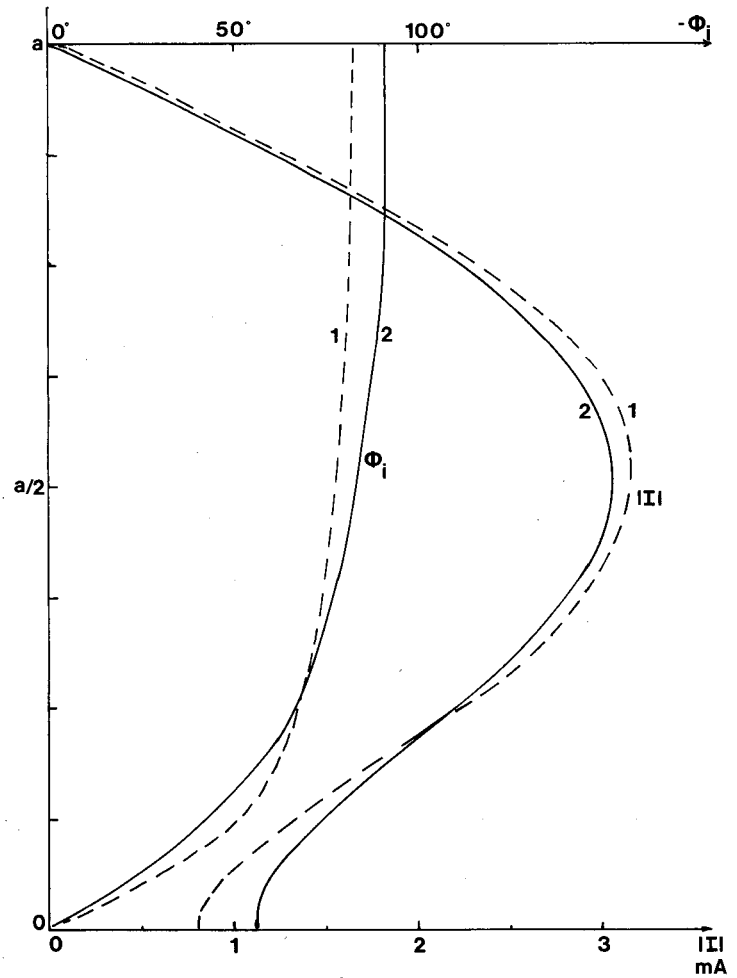


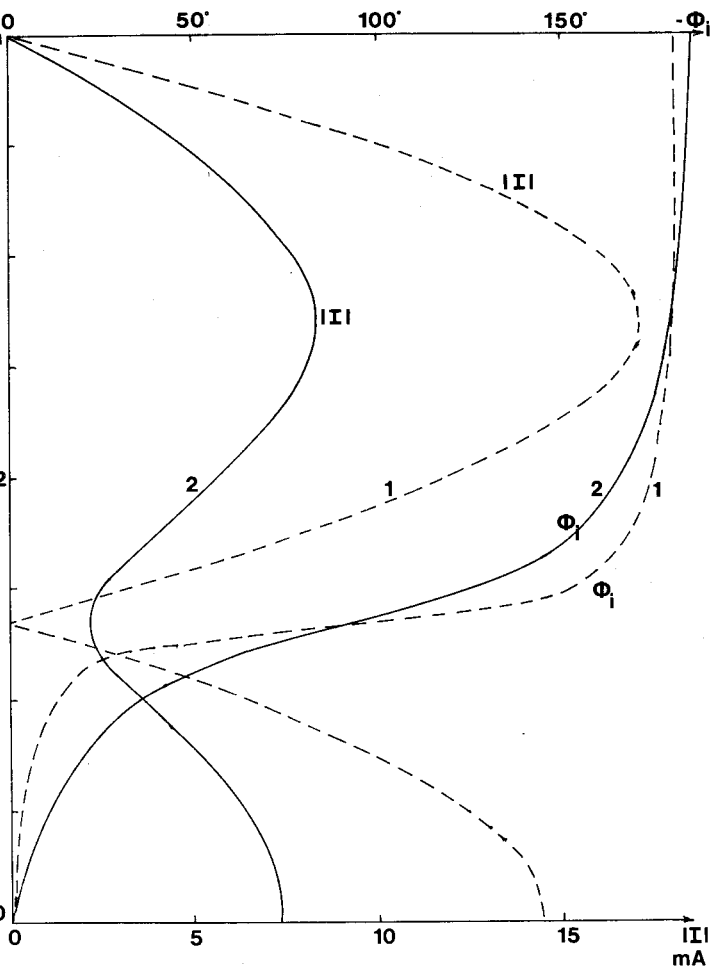
fig.II.5



-a-



-b-



-c-

ANTENNE ENTERREE

MILIEU INFINI

$f = 50 \text{ MHz}$

$\epsilon_r = 5$

-a-: $\beta a = \pi/2$

-b-: $\beta a = \pi$

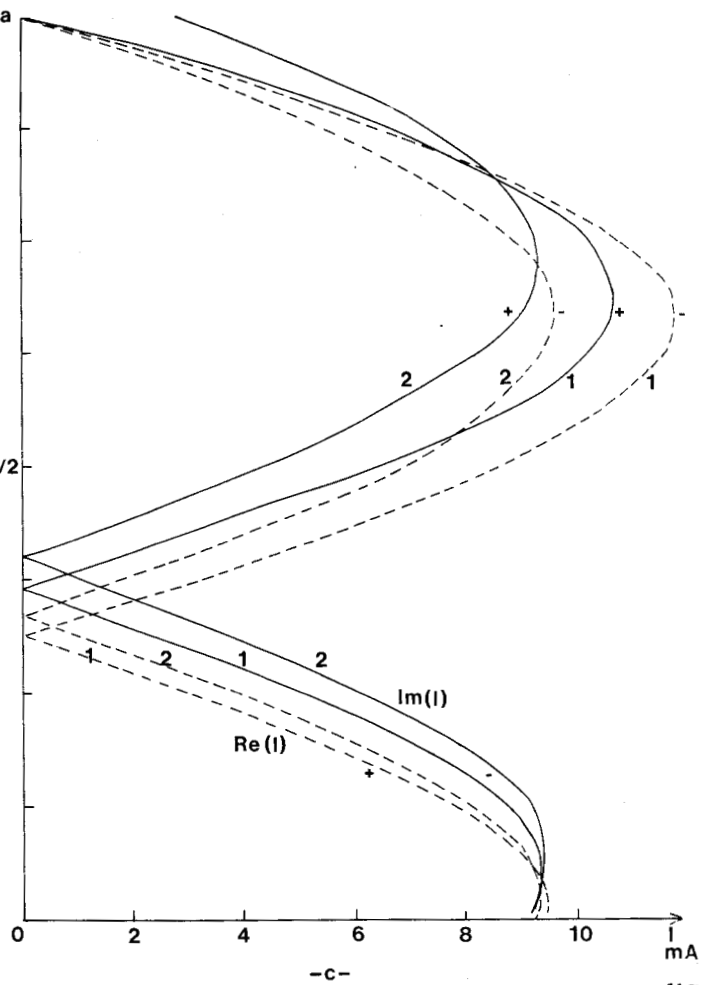
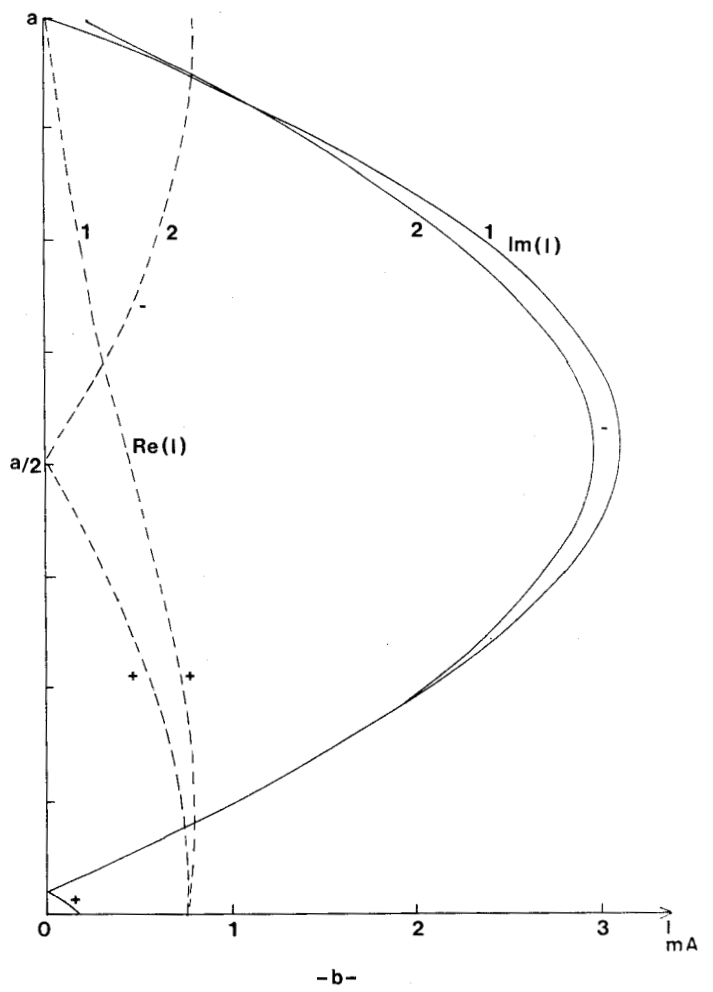
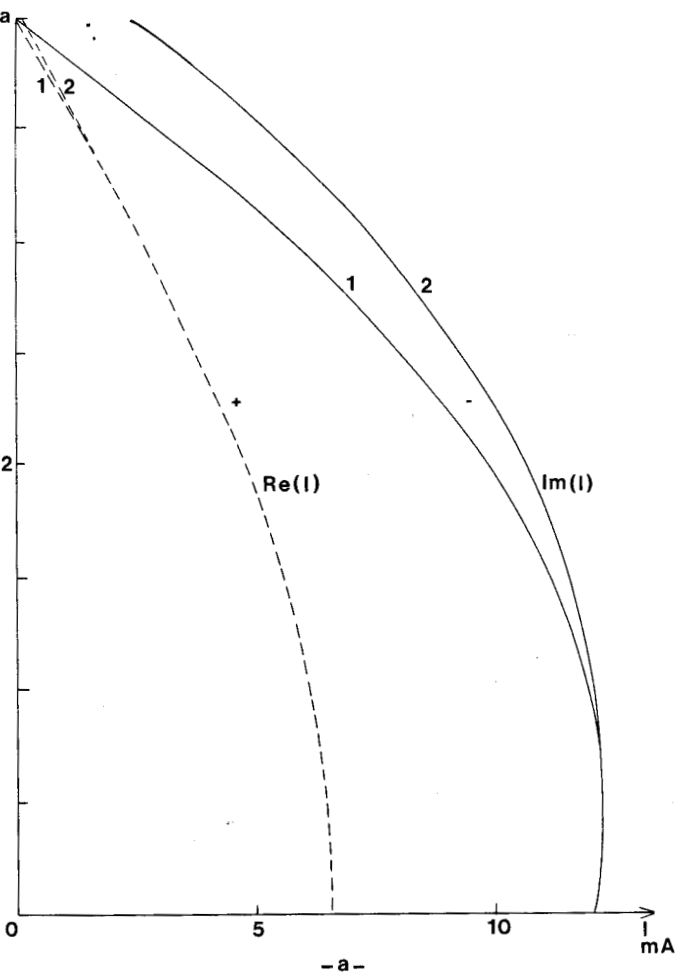
-c-: $\beta a = 3\pi/2$

1: $\sigma = 0$

2: $\sigma = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ mho/m}$



fig 11.6



ANTENNE ENTERREE

MILIEU INFINI

$f=50\text{MHz}$

$\sigma=1,4 \cdot 10^{-4} \text{ mho/m}$

$\epsilon_r=5$

-a- : $\beta a = \pi/2$

-b- : $\beta a = \pi$

-c- : $\beta a = 3\pi/2$

1: I total

2: I du au mode TEM



fig. II.7

l'amplitude totale du courant, respectivement pour $\beta_1 a = \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$. Le courant près de l'émetteur est pris comme origine des phases. A titre de comparaison, nous avons reporté également la répartition du courant qui serait obtenue si le milieu autour de l'antenne était un diélectrique parfait ($\sigma=0, \epsilon_r=5$).

Enfin, pour voir l'influence des courants complémentaires dus au mode T.M., les figures.11.7 (a, b et c) représentent d'une part les mêmes variations du courant que précédemment, mais en séparant partie réelle et partie imaginaire et, d'autre part, la répartition en faisant l'hypothèse sinusoïdale, c'est-à-dire en ne tenant compte que du courant associé à la propagation de l'onde T.E.M. Ces courbes montrent que les amplitudes des courants dans ces deux cas sont sensiblement différentes, sauf évidemment au voisinage de l'émetteur. Il faudra donc tenir compte du courant complémentaire pour calculer le champ rayonné par l'antenne.

On pourrait montrer également l'influence de l'angle d'ouverture θ_0 du cône sur le courant et l'impédance d'entrée. On retrouverait certainement une conclusion analogue à celle obtenue pour une antenne biconique placée dans l'air : la bande passante à la résonance est d'autant plus faible que l'angle θ_0 est petit.

Nous allons comparer ces résultats à ceux obtenus par la théorie de l'antenne cylindrique, développée au chapitre précédent.

II.4.3. Comparaison avec l'antenne cylindrique

Nous avons exposé dans le chapitre précédent, le principe de résolution de l'équation intégrale permettant de calculer les caractéristiques électriques de l'antenne. Cette méthode peut être étendue, moyennant des complications mathématiques, au cas d'antennes de longueur totale inférieure à une longueur d'onde et ceci quelle que soit la conductivité du sol⁽³⁶⁾. Un programme Fortran, mis au point par King et Wu⁽³⁷⁾ permet de déterminer la valeur de l'impédance d'entrée normalisée Z_e^* de l'antenne. Le facteur de normalisation introduit est tel que :

$$Z_e^* = Z_e \cdot \Delta \quad \text{avec} \quad \Delta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\beta_1}{2\pi\mu f} \quad (2.47.)$$

f est la fréquence et β_1 est défini par la constante de propagation propre du milieu $\gamma_1 = \alpha_1 + j\beta_1$.

Pour comparer les antennes cylindriques et biconiques, Schelkunoff⁽³⁵⁾ a défini une impédance caractéristique moyenne K_a d'une antenne cylindrique dans l'air.

Elle est donnée par la formule suivante :

$$K_a = 120 \left(\text{Log} \frac{2a}{e} - 1 \right) \quad (2.48.)$$

$2a$ étant la longueur totale de l'antenne et e le rayon du cylindre.

En utilisant des valeurs données par King⁽³⁶⁾, nous avons représenté sur les figures (11.8.a. et 11.8.b.), les valeurs de l'impédance normalisée Z_e^* pour une antenne cylindrique, résonnante respectivement en $\beta_1 a = \pi/2$ et $\beta_1 a = \pi$. Dans cet exemple, l'impédance caractéristique moyenne de l'antenne est voisine de 400Ω . La variable portée en abscisse est β_1/α_1 .

Sur les mêmes figures, nous avons tracé les courbes correspondant à une antenne biconique mince d'impédance caractéristique $K=750\Omega$, ce qui correspond pratiquement à la limite de validité de nos approximations sur l'angle d'ouverture de l'antenne. Nous avons supposé que la fréquence d'émission est de 50MHz et que la permittivité du sol $\epsilon_r = 5$. La valeur de la conductivité σ varie entre 10^{-3} et 10^{-1} mho/m, ce qui correspond à une variation de β/α de 10^{-2} à environ 1.

On remarque d'après ces courbes que les antennes cylindriques et biconiques donnent les mêmes variations de Z_e^* en fonction de la variable β/α , donc, dans notre cas, en fonction de la conductivité. On s'aperçoit notamment que, si on maintient constante la résonance en $\beta_1 a = \pi$, la réactance X_e^* peut prendre des valeurs positives, négatives ou nulles suivant les caractéristiques du sol. Ce type d'antenne ($2a=\lambda$) peut donc être utilisé pour déterminer les propriétés électriques du milieu dans lequel il est immergé.⁽³⁶⁾

II.5. Cas d'une antenne biconique dont les extrémités sont en contact avec la cavité sphérique

Nous supposons que l'antenne de longueur a est située dans une cavité sphérique de rayon b , tel que $b = a$. Nous étudions les

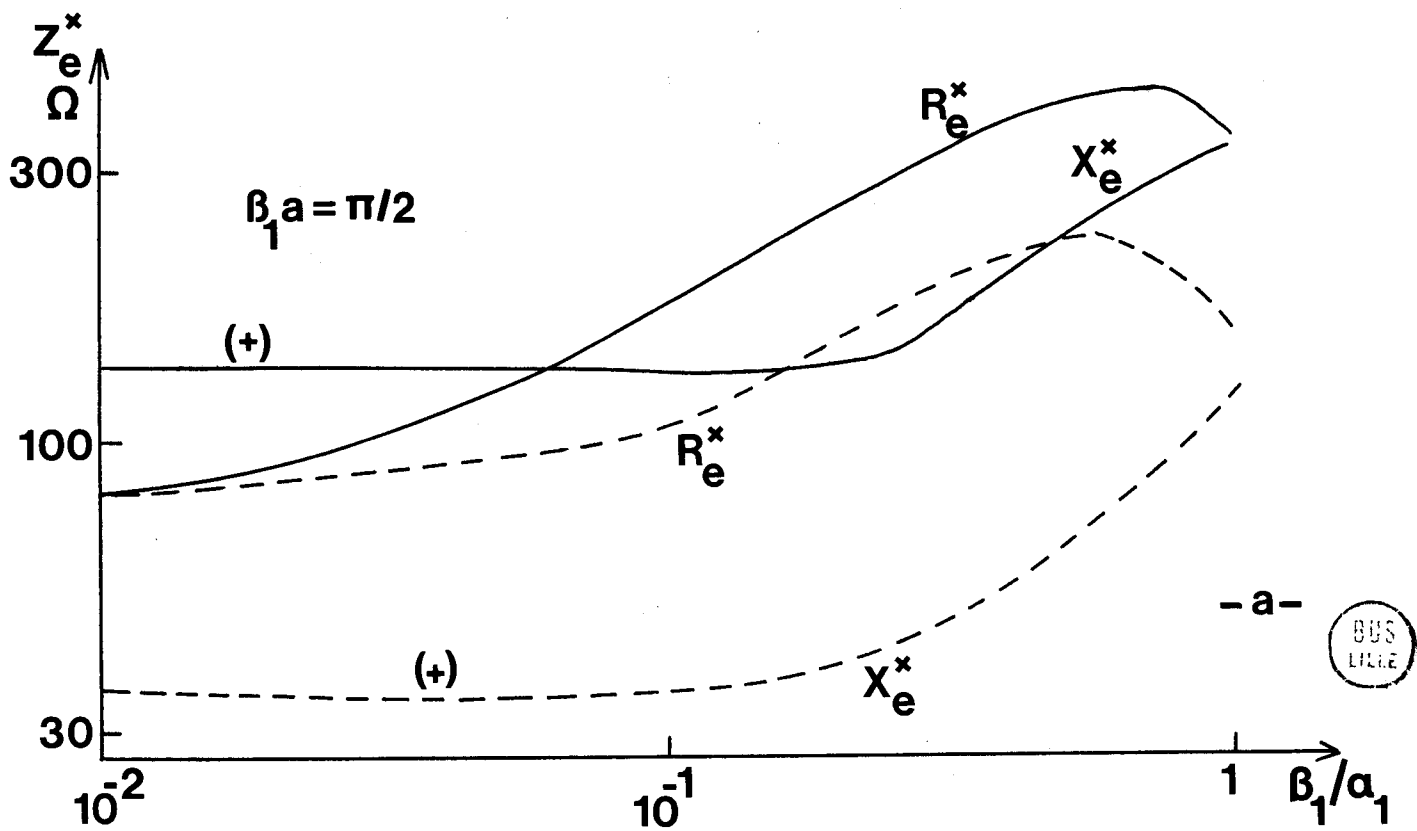
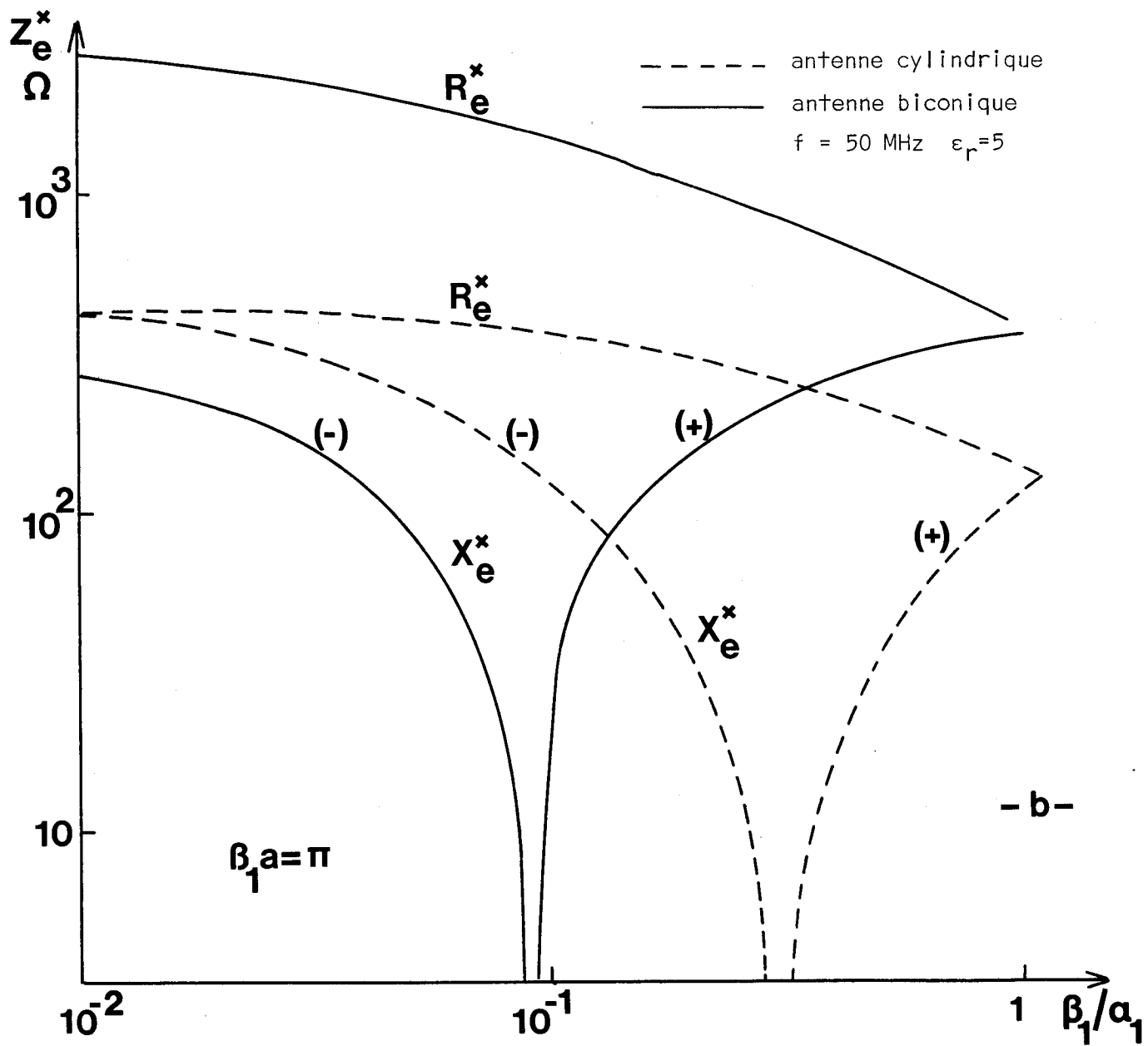


fig. II.8

variations de l'impédance d'entrée et du courant en fonction de la longueur d'antenne et des constantes électriques de la cavité et du milieu environnant. Nous montrons qu'à puissance d'entrée constante, l'amplitude du champ reçu en haute fréquence peut, sous certaines conditions être indépendante de cette fréquence.

II.5.1. Variation de l'impédance d'entrée et du champ rayonné en fonction de la fréquence

Nous choisissons comme exemple celui que nous avons brièvement décrit lors de l'étude du rayonnement du dipôle (ch.1.). Le milieu absorbant est caractérisé par sa conductivité $\sigma = 2 \cdot 10^{-4}$ mho/m et par une permittivité relative $\epsilon_r = 5$. Pour une distance de liaison $r = 480$ m, on obtient une longueur caractéristique $L_c = 60$ m et une fréquence f_M , seuil de la fenêtre H.F., égale à 7,2MHz (cf.fig.1.4.). Nous ne nous intéressons qu'à des fréquences supérieures à cette valeur et nous supposons tout d'abord que la cavité est remplie d'air.

Nous donnons sur la figure.11.9. la variation de l'impédance d'entrée Z_e en fonction de $\beta_0 a$ avec :

$$\beta_0 = 2\pi/\lambda_{\text{air}} \quad (2.49.)$$

la fréquence étant prise comme paramètre.

La résonance de l'antenne est obtenue lorsque la partie imaginaire de l'impédance d'entrée est nulle. Les résonances intéressantes, si la tension d'alimentation V_e est constante, seront donc celles qui donnent une faible résistance d'entrée. Pour l'exemple choisi, les valeurs de a correspondantes sont données par $\beta_0 a = 1,34$ et $\beta_0 a = 4,25$ ce qui correspond respectivement à des résonances en 1/4 d'onde ($a \approx \lambda/4$) et 3/4 d'ondes ($a \approx 3\lambda/4$). On remarque de plus que l'impédance d'entrée, dans la fenêtre H.F. est pratiquement indépendante de la fréquence.

La figure.11.10. représente la variation de l'amplitude du champ électrique E_θ en fonction de $\beta_1 a$, la liaison étant réalisée sur une distance $r = 480$ m. L'angle que fait l'antenne avec la direction émetteur-récepteur est choisi de telle façon que l'amplitude du champ électrique soit

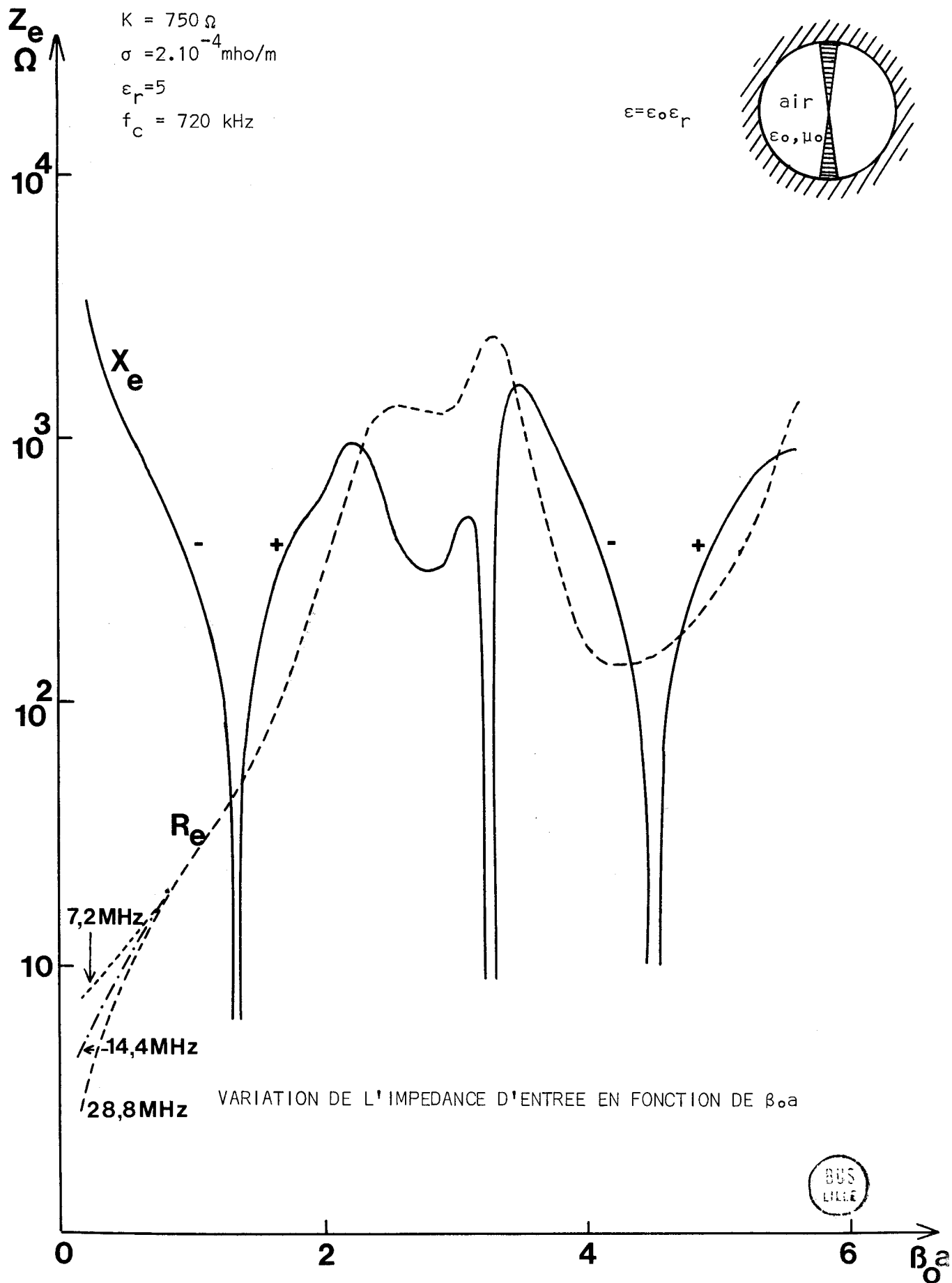


fig.II.9

$$K = 750\Omega$$

$$\sigma = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mho/m}$$

$$\epsilon_r = 5$$

$$r = 480\text{m}$$

$$(x = 8)$$

Antenne placée dans une cavité remplie d'air (en abscisse $\beta_1 a = 2\pi \frac{a}{\lambda_{\text{air}}}$)

Antenne placée directement au sein d'un milieu absorbant ----- 4
 $\beta_1 a = 2\pi \frac{a}{\lambda_{\text{milieu}}}$

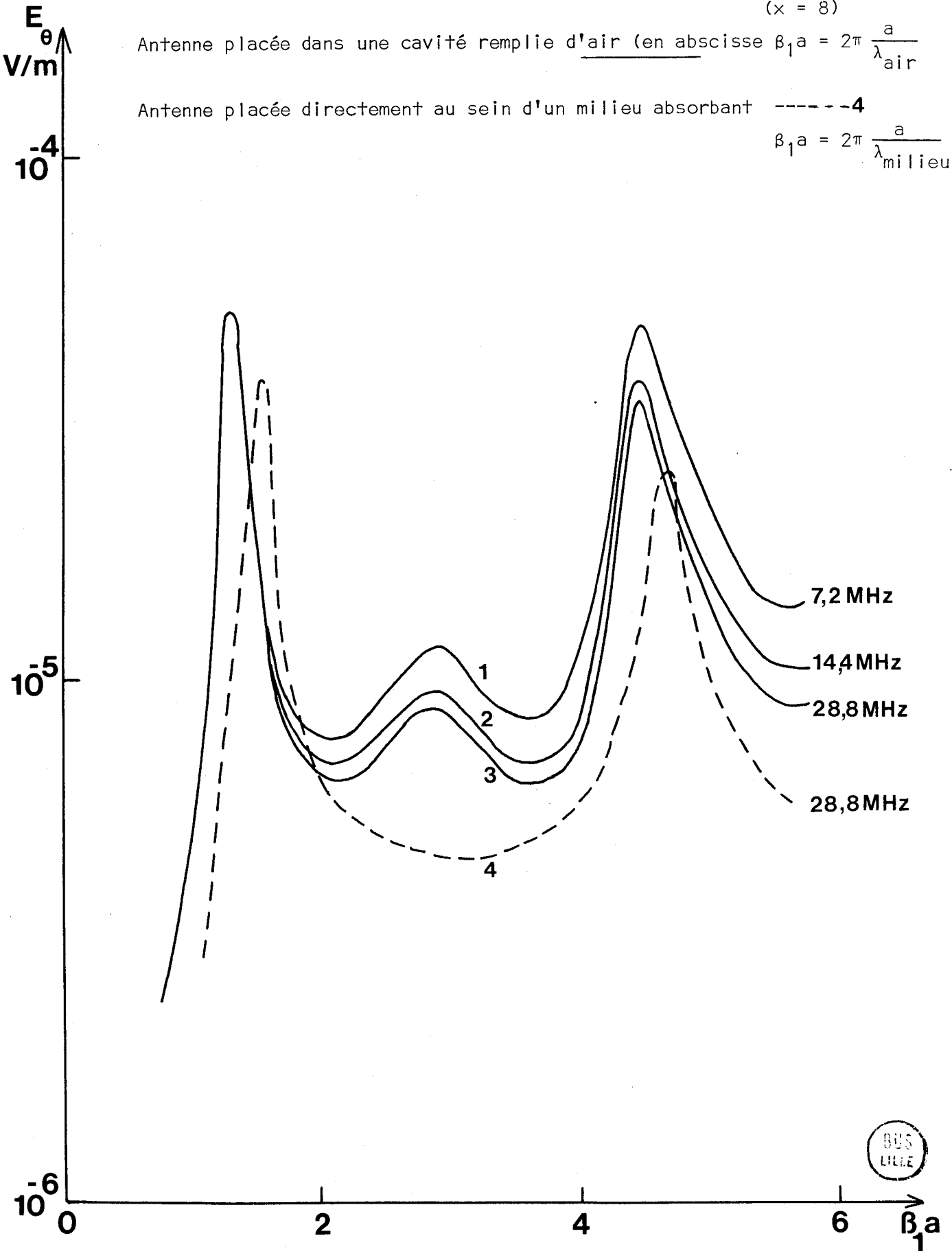


fig.II.10

maximum. Nous verrons en effet que la valeur optimum de cet angle dépend de l'accord choisi pour l'antenne. Nous remarquons sur les courbes (1) à (3), lorsque le diélectrique de la sphère est sans pertes, que l'amplitude du champ à la première résonance est pratiquement indépendante de la fréquence. La résistance d'entrée ne variant pas dans la gamme de fréquences choisie (cf. fig. 11.9.), l'amplitude du courant est constante.

Par conséquent, à puissance d'entrée constante, l'amplitude du champ reçu dans la "fenêtre" H.F., à une distance donnée de l'émetteur, est indépendante de la fréquence⁽³⁸⁾.

L'exemple numérique ne restreint pas nos conclusions, des calculs faits avec d'autres valeurs de σ et ϵ ont donné le même résultat.

Ceci confirme ce que nous avons obtenu par la théorie simple du dipôle. En effet, l'antenne résonnant en $1/4$ d'onde, si la fréquence est multipliée dans un certain rapport, la longueur de l'antenne est diminuée dans le même rapport. A moment électrique constant, l'amplitude du champ est donc proportionnelle à la fréquence, ce que prévoit la théorie du dipôle lorsque $|\gamma r| \gg 1$ et $\omega \epsilon \gg \sigma$.

$$E_{\theta} \rightarrow \frac{Idl \cdot e^{-r/L_c} \mu_0}{2r} \cdot f \quad (2.50.)$$

Supposons que l'antenne soit alimentée en courant continu et possède un moment électrique équivalent à celui d'une résonance en $\lambda/4$ à une fréquence $f = 7,2\text{MHz}$. L'amplitude du champ rayonné est, dans ce cas, d'environ $5 \cdot 10^{-5} \text{V/m}$ et cette valeur est comparable à celle obtenue par une émission en haute fréquence (cf. fig. 11.10.).

La courbe (4) de la figure (11.10.) a été tracée en supposant l'antenne placée directement au sein du milieu infini. En abscisse, la variable est maintenant β_1 avec :

$$\beta_1 = 2\pi/\lambda_{\text{sol}} \quad (2.51.)$$

L'allure de cette courbe, tracée pour une fréquence $f = 28,8\text{MHz}$ est comparable à celle de la courbe (3) tracée pour la même fréquence. Les champs reçus avec ou sans la présence de la cavité sont donc du même ordre

de grandeur , mais il existe toutefois entre les longueurs respectives d'antenne un rapport égal à $\lambda_{\text{air}}/\lambda_{\text{sol}}$.

La figure.11.11. représente le diagramme de rayonnement de l'antenne pour les deux résonances intéressantes. Au premier accord ($\beta_0 a \approx 1,34$) le diagramme a une forme analogue à celle obtenue pour un dipôle, le premier mode ($n=1$) étant prépondérant. Le champ E_θ est donc maximum pour $\theta = \pi/2$. Par contre, pour $\beta_0 a = 4,25$ il apparaît d'autres lobes, les modes d'ordre élevé jouant un rôle important. Pour chacun d'entre eux, on remarque d'après la formule (2.28.) que la fonction traduisant la variation du champ en fonction de l'angle θ est $P_n^1(\cos\theta)$.

II.5.2. Répartition du courant

Afin de montrer l'influence du sol sur la répartition du courant le long de l'antenne, nous avons représenté sur la figure.11.12, le module et la phase de I dans deux cas. Pour la courbe 1, nous supposons que l'antenne est placée dans l'air, considéré comme milieu infini, tandis que pour la courbe 2, nous tenons compte de la présence du sol autour de l'antenne.

La fréquence est prise égale à 100MHz. Le sol ayant les caractéristiques suivantes : $\sigma = 10^{-3}$ mho/m et $\epsilon_r = 3$, l'émission se fait donc à une fréquence relative : $\xi \approx 17$.

On voit que l'amplitude et la phase sont sensiblement modifiées et, dans ce cas également, on ne pourra pas négliger l'influence du sol sur la répartition du courant pour calculer le champ rayonné par l'antenne.

Le rôle du sol se remarque également sur les courbes de la figure.11.13. qui ont été tracées en faisant varier σ et ϵ_r . Il est donc nécessaire de procéder à une étude paramétrique pour montrer l'influence, notamment sur l'impédance d'entrée, des constantes électriques de la cavité et du sol.

II.5.3. Influence des constantes électriques de la cavité sur l'impédance d'entrée de l'antenne. Influence de la constante diélectrique ϵ_r

Afin de mettre en évidence la variation de l'impédance

Demi-longueur de l'antenne

—	$a \approx 0,21\lambda$	$(\beta_0 a = 1,34)$
- - - -	$a \approx 0,72\lambda$	$(\beta_0 a = 4,25)$

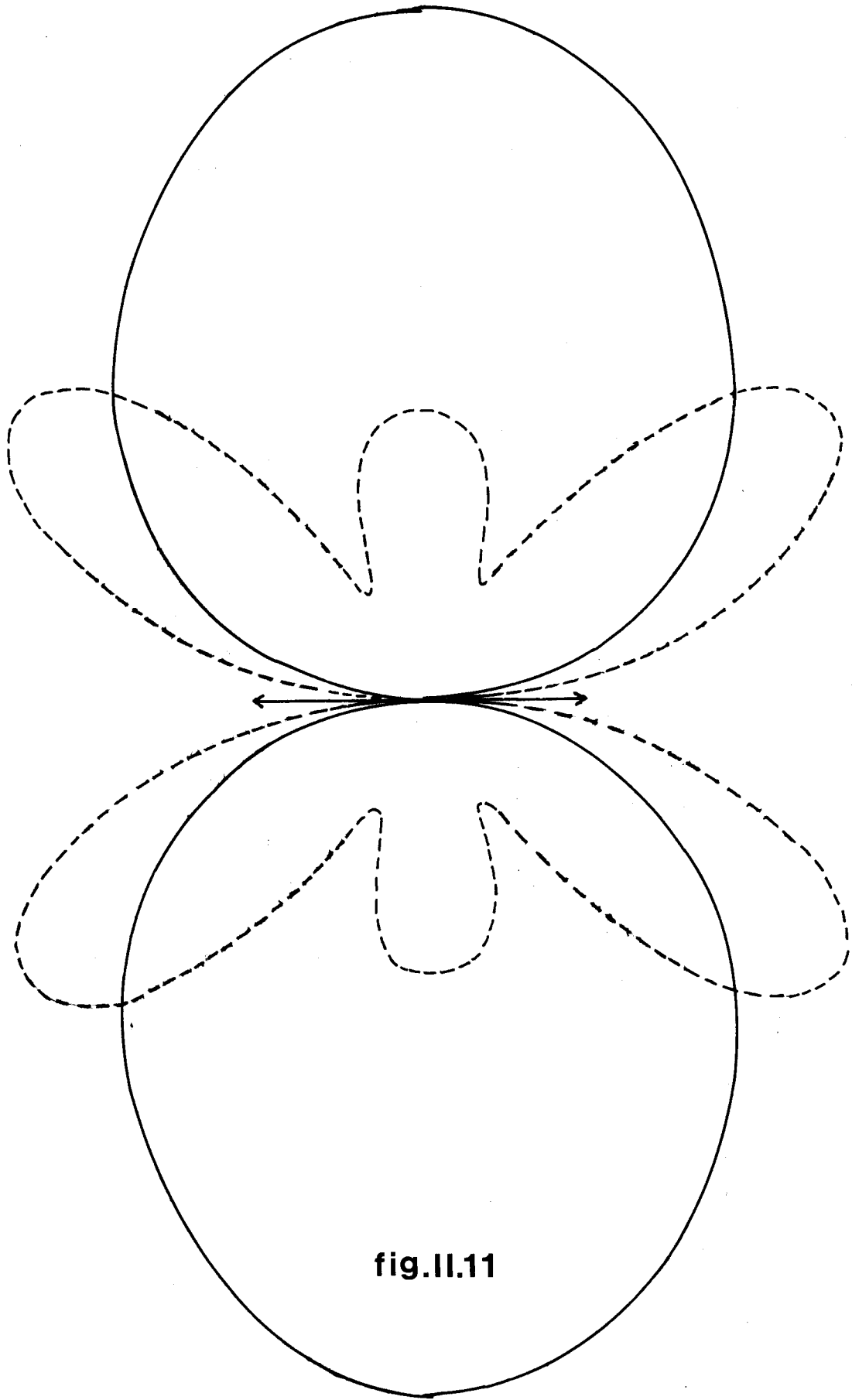


fig.II.11



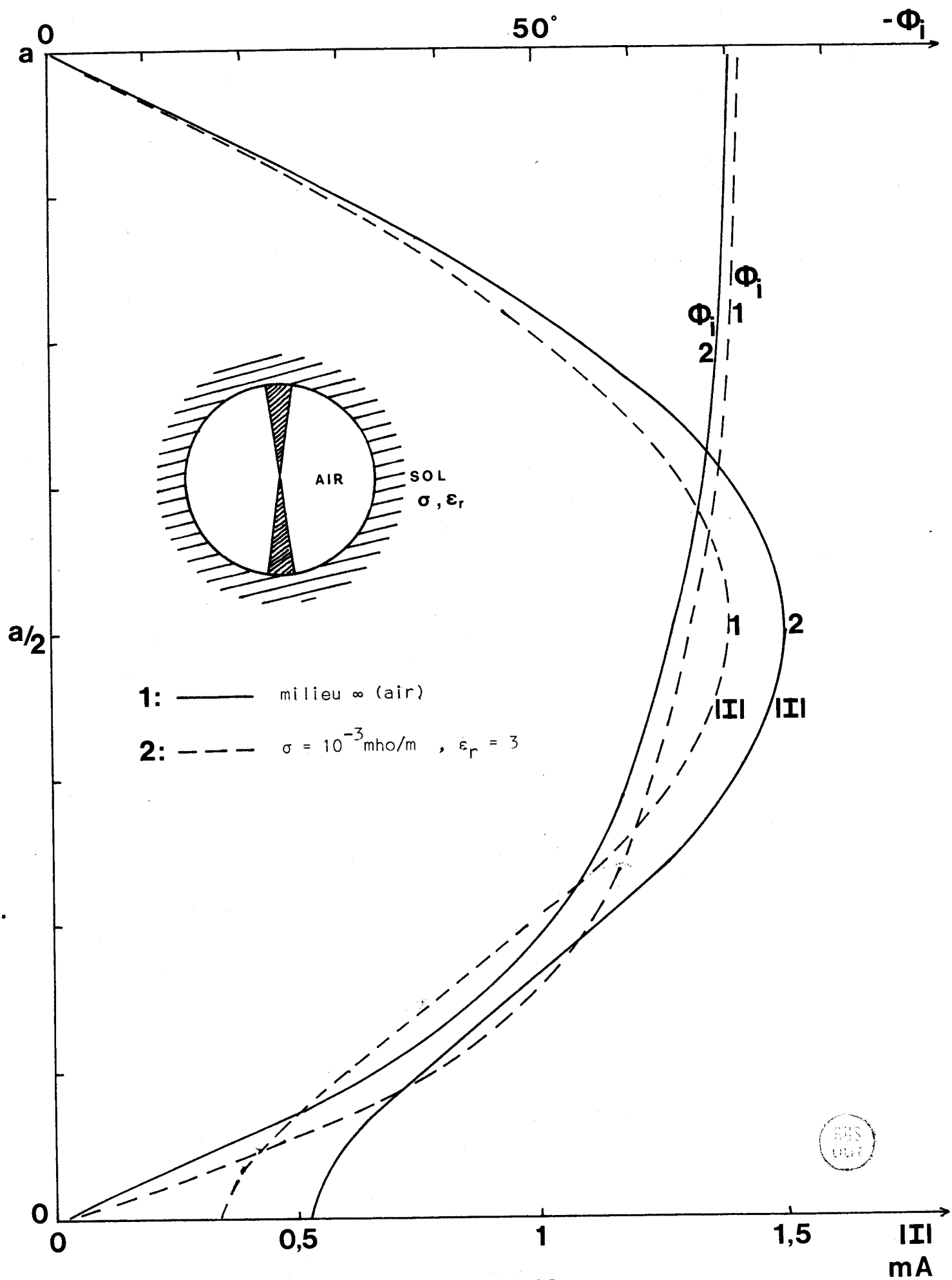


fig.II.12

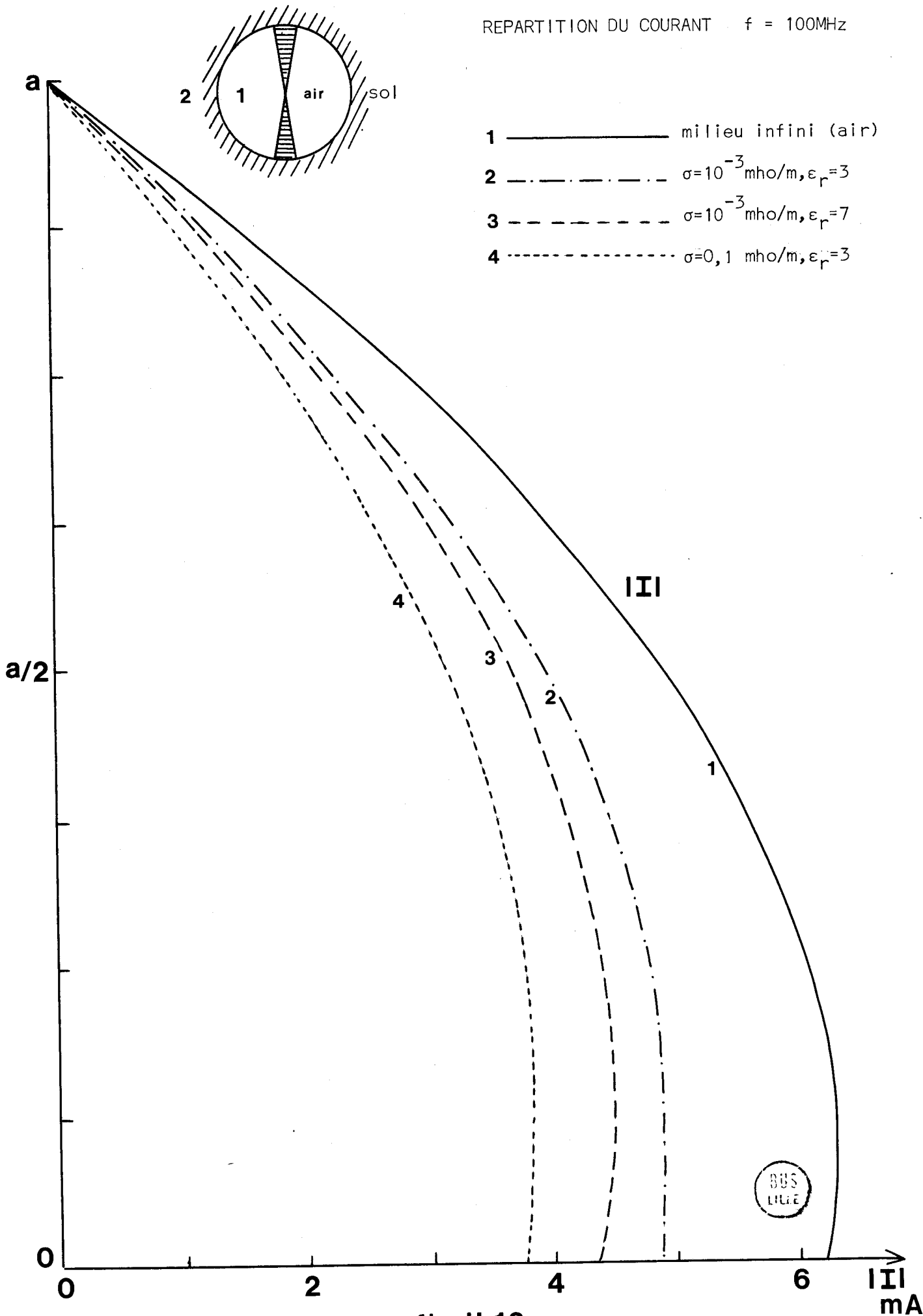


fig.II.13

d'entrée en fonction des caractéristiques de la cavité sphérique (milieu.1.) entourant l'antenne, nous avons représenté respectivement sur les figures (II.14.) et (II.15) la résistance et la réactance en fonction de $\beta_1 a$ ($\beta_1 = 2\pi/\lambda_{\text{cavité}}$) pour différentes valeurs de la permittivité relative ϵ_{r1} . Sur la figure. II.14., les valeurs de $\beta_1 a$ correspondant aux longueurs d'antennes pour lesquelles la résonance est obtenue, sont repérées sur les courbes par le signe +.

Nous remarquons tout d'abord que, pour la première résonance ($a = \lambda/4$), si ϵ_{r1} augmente, la résistance d'entrée diminue. Ceci peut être confirmé par un calcul approché. En effet si nous supposons à la limite que l'impédance caractéristique de l'antenne $K \rightarrow \infty$, la résistance d'entrée pour la résonance en $\lambda/4$ est donnée par la valeur correspondante de R_v c'est-à-dire par la partie réelle de l'impédance inverse de rayonnement Z_v . Or si on suppose le milieu 1 infini, R_v est proportionnel à η_1 et par conséquent, en haute fréquence, inversement proportionnel à $\sqrt{\epsilon_{r1}}$.

Dans l'exemple envisagé il y a évidemment le même sens de variation pour R_e mais la loi mathématique est beaucoup plus compliquée, d'autant plus que l'accord de l'antenne change légèrement en fonction de ϵ_{r1} .

Influence de la conductivité

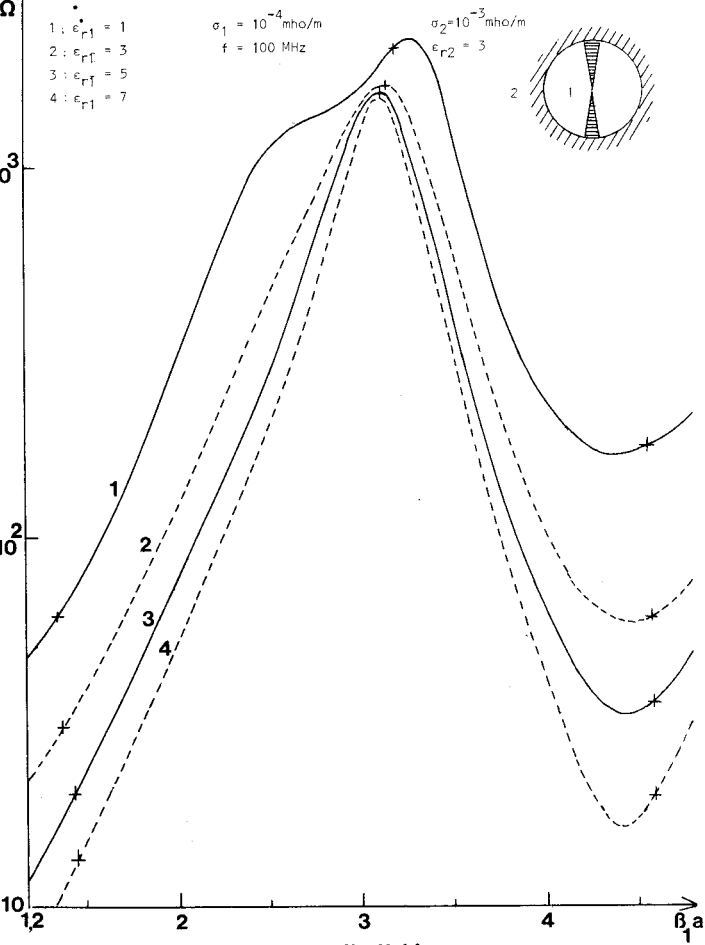
Sur les figures. II.16. et .II.17. nous avons comme précédemment représenté la variation de R_e et X_e , la conductivité σ_1 étant introduite en paramètre.

Lorsque le milieu 1 devient de plus en plus conducteur, on voit que l'amplitude des variations de l'impédance d'entrée diminue et on note pour la résonance en $a \approx \lambda/4$ une augmentation importante de R_e . Ceci se produit notamment lorsque σ n'est plus négligeable vis-à-vis de $\omega\epsilon$. C'est en particulier le cas correspondant à la courbe (4) de la fig. II.16. car, pour la fréquence envisagée : $\omega\epsilon = 3 \cdot 10^{-2}$. Ceci peut être justifié approximativement par un raisonnement identique à celui que nous venons de faire ($R_{in} \propto \eta_1$).

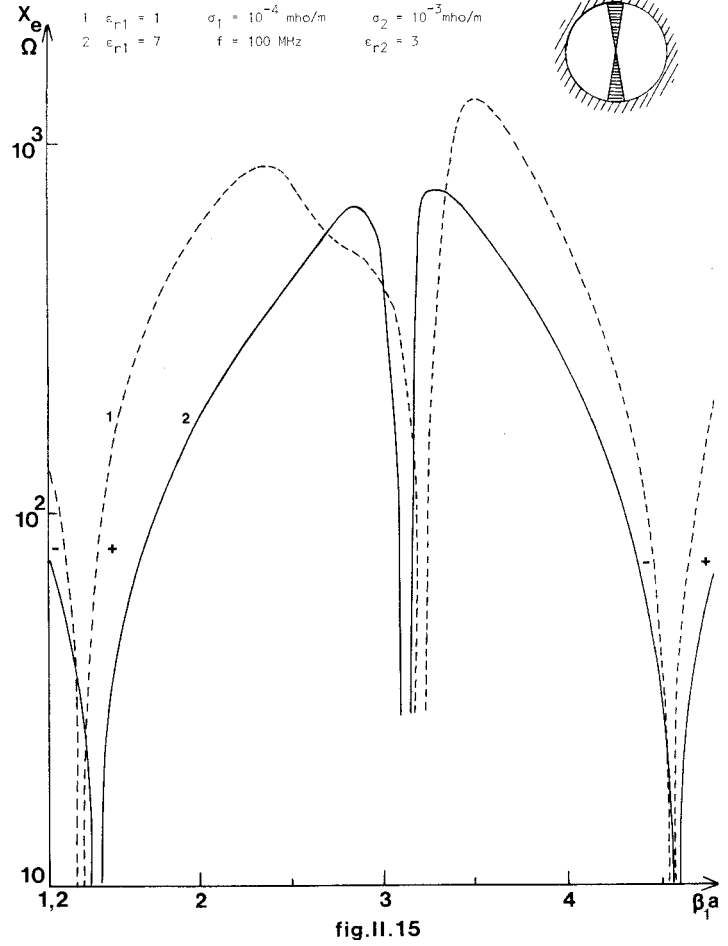
II.5.4. Influence des constantes électriques du sol

Variation de la constante diélectrique ϵ_{r2}

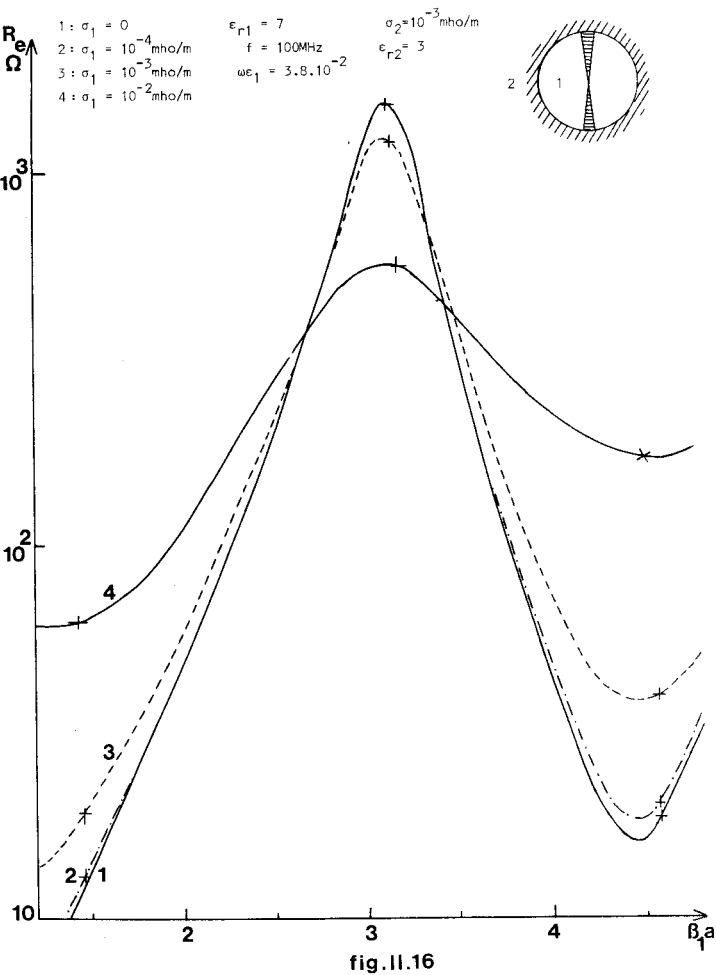
INFLUENCE DE ϵ_{r1} SUR LA RESISTANCE D'ENTREE



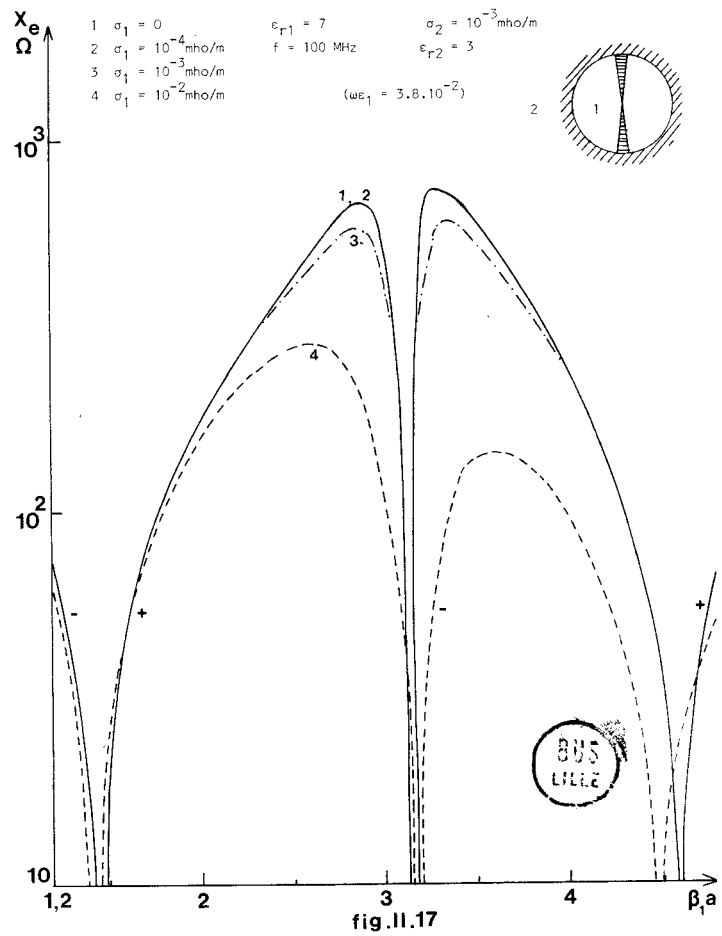
INFLUENCE DE ϵ_{r1} SUR LA REACTANCE D'ENTREE



INFLUENCE DE σ_1 SUR LA RESISTANCE D'ENTREE



INFLUENCE DE σ_1 SUR LA REACTANCE D'ENTREE



Dans les différents exemples que nous avons choisis on suppose que l'antenne est placée dans une cavité sphérique dont les caractéristiques électriques sont les suivantes : $\sigma_1=10^{-4}$ mho/m et $\epsilon_{r1}=7$. Une conductivité $\sigma = 10^{-3}$ mho/m a été choisie pour le sol.

A la fréquence de 100MHz le sol se comporte donc comme un diélectrique à pertes qui réfléchit plus ou moins les ondes provenant de l'antenne. Par conséquent, suivant la valeur de ϵ_{r2} , les courbes des figures.11.18. et 11.19. montrent une variation de R_e et de l'accord de l'antenne représenté par le signe + sur la figure.11.18. Cependant, étant donné la complexité des expressions mathématiques de l'impédance d'entrée, on ne peut pas prévoir sans calcul numérique la variation de la résistance d'entrée en fonction de la permittivité du sol.

Influence de la conductivité σ_2

La constante diélectrique ϵ_{r2} a été supposée égale à 3 et les fig.11.20. et 11.21. représentent les variations de Z_e pour $\sigma = 10^{-3}$, 10^{-2} et 10^{-1} mho/m. Contrairement au cas précédent on remarque une variation importante de la résistance d'entrée pour l'accord en $\lambda/4$. En effet, lorsque la conductivité du sol augmente, le coefficient de réflexion des ondes sur les parois de la cavité sphérique devient important ce qui provoque une modification de l'amplitude du champ électromagnétique en tout point de la cavité.

Il est donc nécessaire de séparer l'effet de résonance de la cavité et de l'antenne sur l'amplitude des champs rayonnés. Nous allons donc étudier le cas où l'antenne n'est plus en contact direct avec les parois ($b>a$).

II.6. Influence des dimensions de la cavité sur le rayonnement de l'antenne ⁽³⁹⁾

Nous allons limiter nos applications numériques à des valeurs du rayon de la cavité b telle que $1 < b/a < 2,5$. Nous supposons comme pour la première étude que le diélectrique de la cavité est l'air et que le milieu extérieur a une conductivité $\sigma = 2.10^{-4}$ mho/m et une permittivité relative $\epsilon_r = 5$.

INFLUENCE DE LA PERMITTIVITE DU SOL ϵ_{r2}

$\sigma_1 = 10^{-4}$ mho/m $\sigma_2 = 10^{-5}$ mho/m
 $\epsilon_{r1} = 7$ $f = 100$ MHz

- 1 ——— $\epsilon_{r2}=3$
- 2 - - - $\epsilon_{r2}=5$
- 3 - - - $\epsilon_{r2}=9$

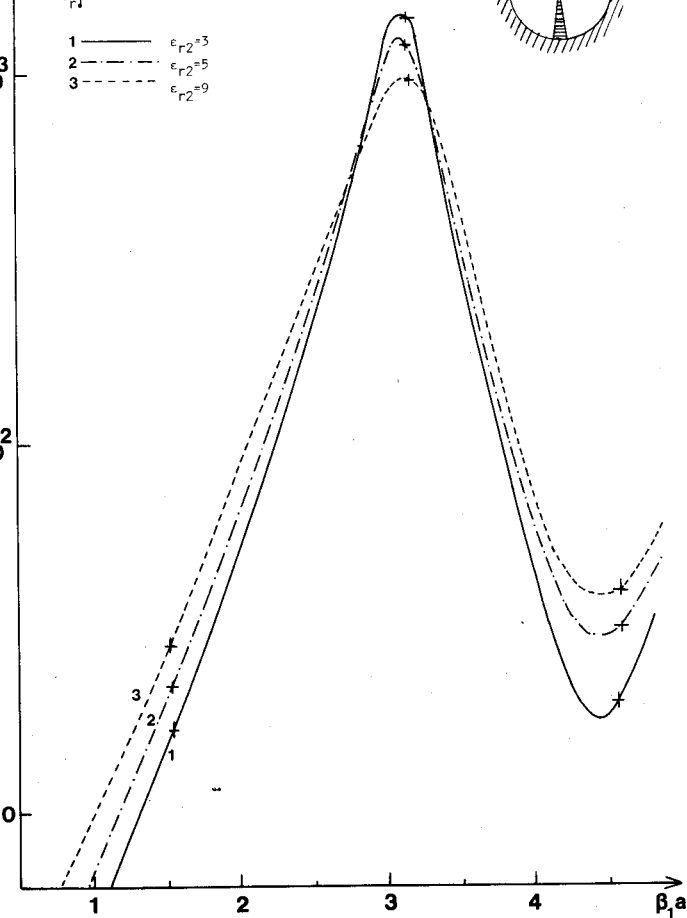
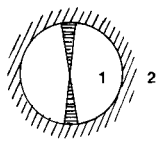


fig.II.18

INFLUENCE DE LA PERMITTIVITE DU SOL ϵ_{r2}

$\sigma_1 = 10^{-4}$ mho/m $f = 100$ MHz
 $\epsilon_{r1} = 7$ $\sigma_2 = 10^{-5}$ mho/m

- 1 ——— $\epsilon_{r2}=3$
- 2 - - - $\epsilon_{r2}=9$

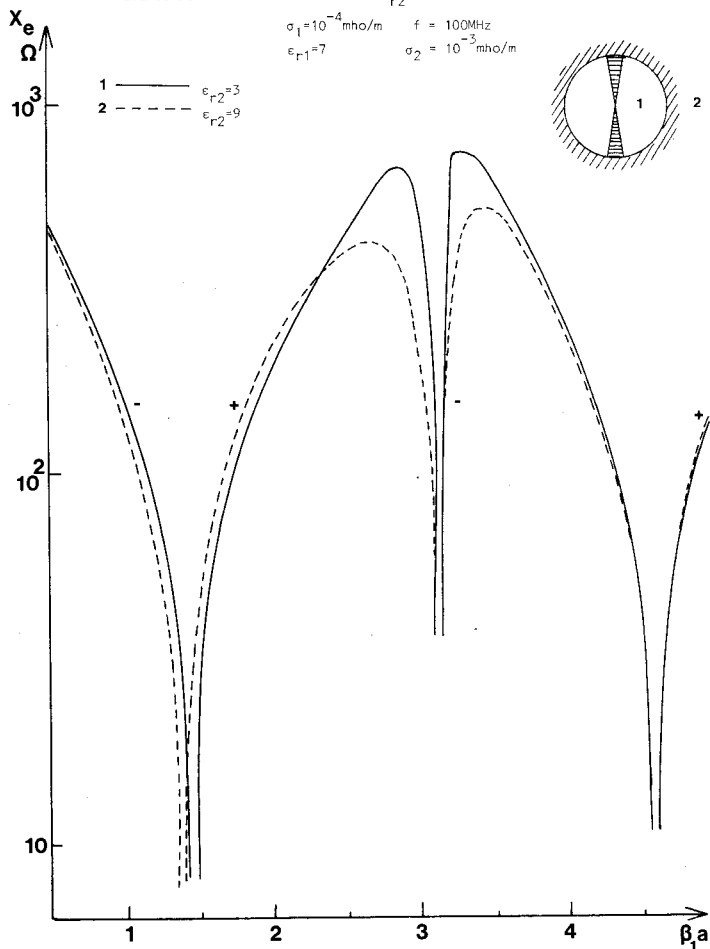
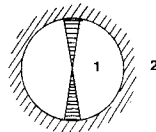


fig.II.19

INFLUENCE DE LA CONDUCTIVITE DU SOL σ_2

- 1 ——— $\sigma_2 = 10^{-3}$ mho/m
- 2 - - - $\sigma_2 = 10^{-2}$ mho/m
- 3 - - - $\sigma_2 = 10^{-1}$ mho/m

$\sigma_1 = 10^{-4}$ mho/m $f = 100$ MHz
 $\epsilon_{r1} = 7$ $\epsilon_{r2} = 3$

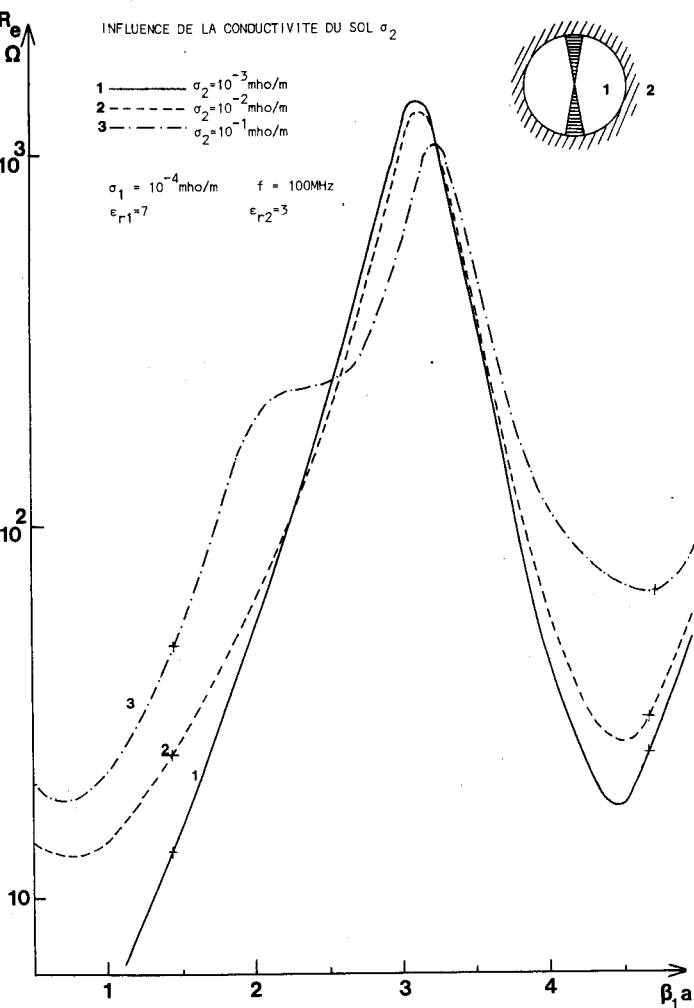
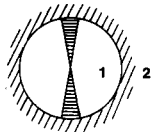


fig.II.20

INFLUENCE DE LA CONDUCTIVITE DU SOL σ_2

- 1 ——— $\sigma_2 = 10^{-3}$ mho/m
 - 2 - - - $\sigma_2 = 10^{-1}$ mho/m
- $\sigma_1 = 10^{-4}$ mho/m $f = 100$ MHz
 $\epsilon_{r1} = 7$ $\epsilon_{r2} = 3$

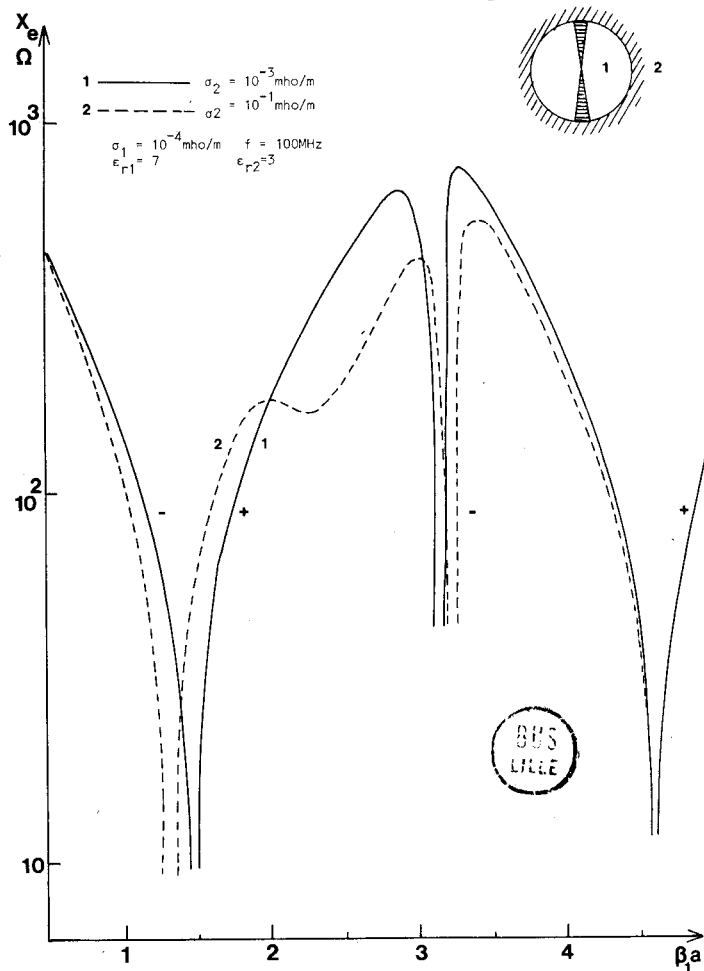
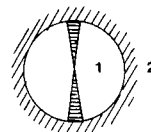


fig.II.21

Nous avons représenté sur la figure.11.22. la variation de l'impédance d'entrée en fonction de $\beta_1 a$, pour $b/a = 1,5$.

L'allure de la courbe est identique à celle que nous avons obtenue pour une antenne directement en contact avec les parois de la cavité (cf.fig.11.9.). Nous avons vérifié de plus que cette allure était peu modifiée pour d'autres valeurs du rapport b/a . Les valeurs de $\beta_1 a$ correspondant aux résonances en $a \approx \lambda/4$ et $a \approx 3\lambda/4$ se décalent lorsque b augmente et tendent vers les valeurs limites obtenues pour une antenne placée dans l'air ($\beta_1 a = 0,24$ et $\beta_1 a \approx 0,74$).

La figure.11.23. représente la variation de la résistance d'entrée en fonction du rapport b/a pour les deux accords précédents, la fréquence étant prise comme paramètre. Ceci suppose donc que, pour chaque valeur de b , la longueur de l'antenne est ajustée de manière à réaliser une résonance.

On remarque tout d'abord que la résistance d'entrée est pratiquement indépendante de la fréquence. Mais on voit de plus qu'il existe des valeurs particulières du rayon de la cavité rendant minimum la résistance d'entrée. Ceci se produit approximativement lorsque la cavité résonne en $b = (2n+1)\lambda/4$, les résonances en $b = n\lambda/2$ donnant une résistance maximum.

Cependant, il est intéressant de noter que la valeur de la résistance d'entrée reste faible et varie dans un rapport très limité (3 au maximum). Par conséquent, l'effet de résonance de la cavité est relativement peu important dans la "fenêtre H.F.". Quelque soit le rayon de la cavité, les ondes électromagnétiques restent couplées au milieu extérieur.

Afin de préciser ce résultat, nous avons représenté sur la figure.11.24. la variation du champ E_θ reçu à une distance $r = 480m$ en fonction du rapport b/a , pour différentes valeurs de la fréquence et pour les deux accords de l'antenne. On remarque que l'amplitude du champ a les mêmes fluctuations, mais en sens contraire, que celles de la résistance d'entrée. Cependant la théorie générale que nous avons exposée montre qu'il n'existe pas de relation simple entre ces deux grandeurs. De plus l'amplitude du champ à la première résonance varie très peu lorsque la fréquence augmente et ceci quelque soit la valeur du rapport b/a .

$f=28,8\text{MHz}$ $b/a = 1,5$
 $\epsilon_r=5$ $\sigma=2 \cdot 10^{-4} \text{ mho/m}$
 impédance caractéristique de
 l'antenne : 750Ω

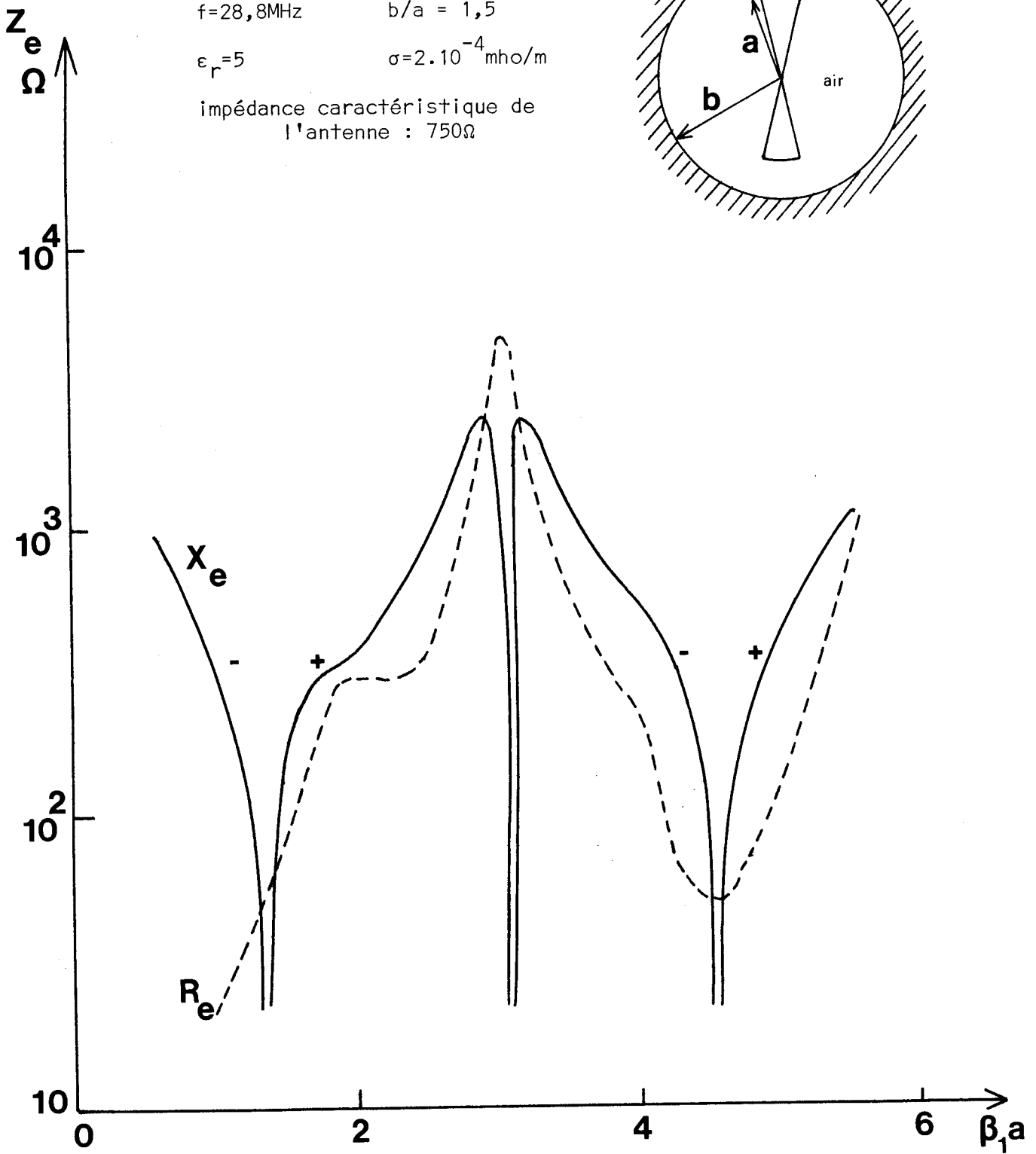
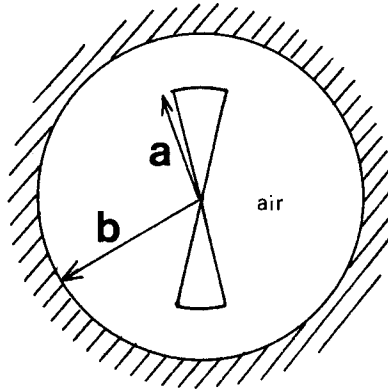


fig.II.22



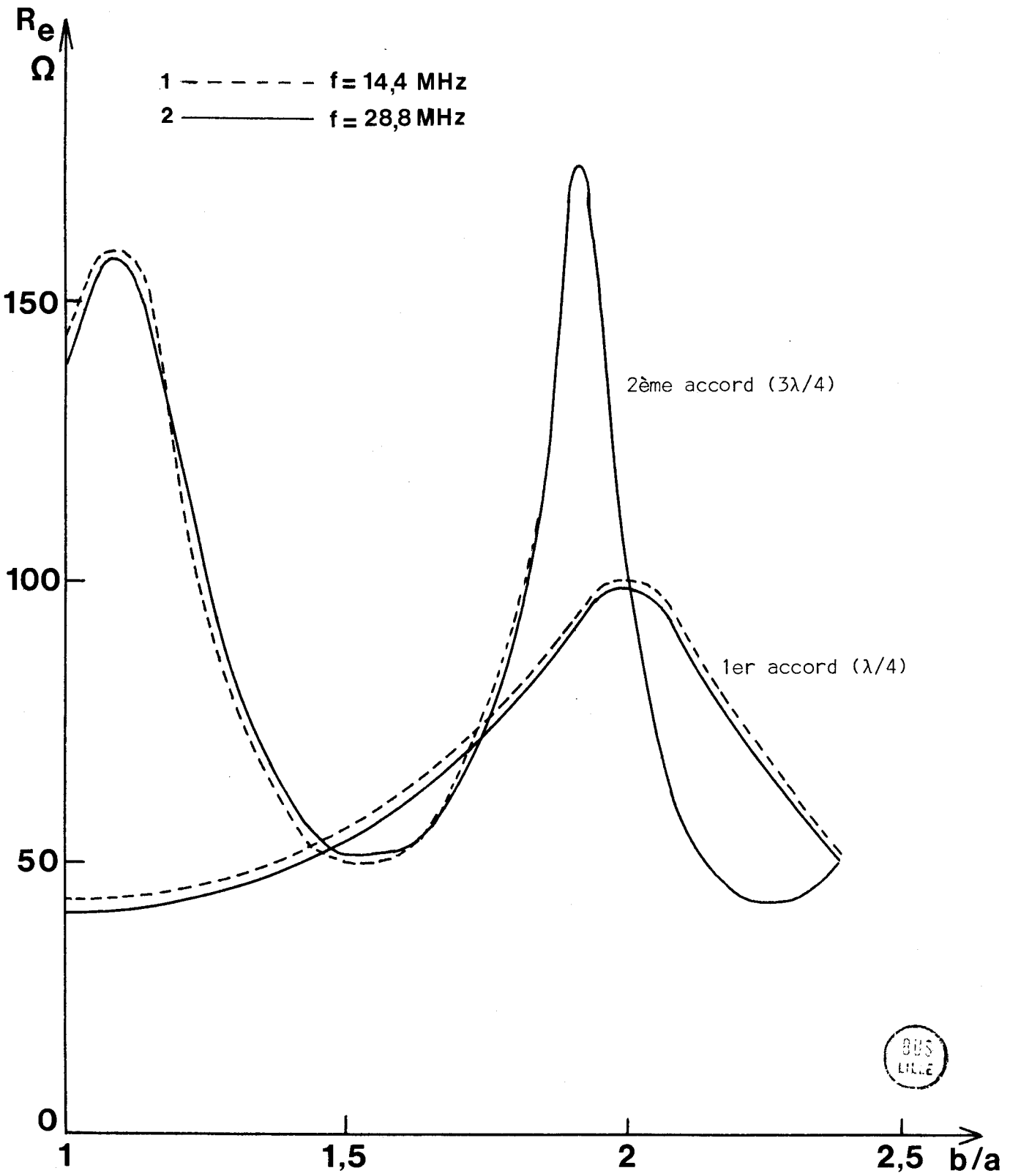


fig.II.23

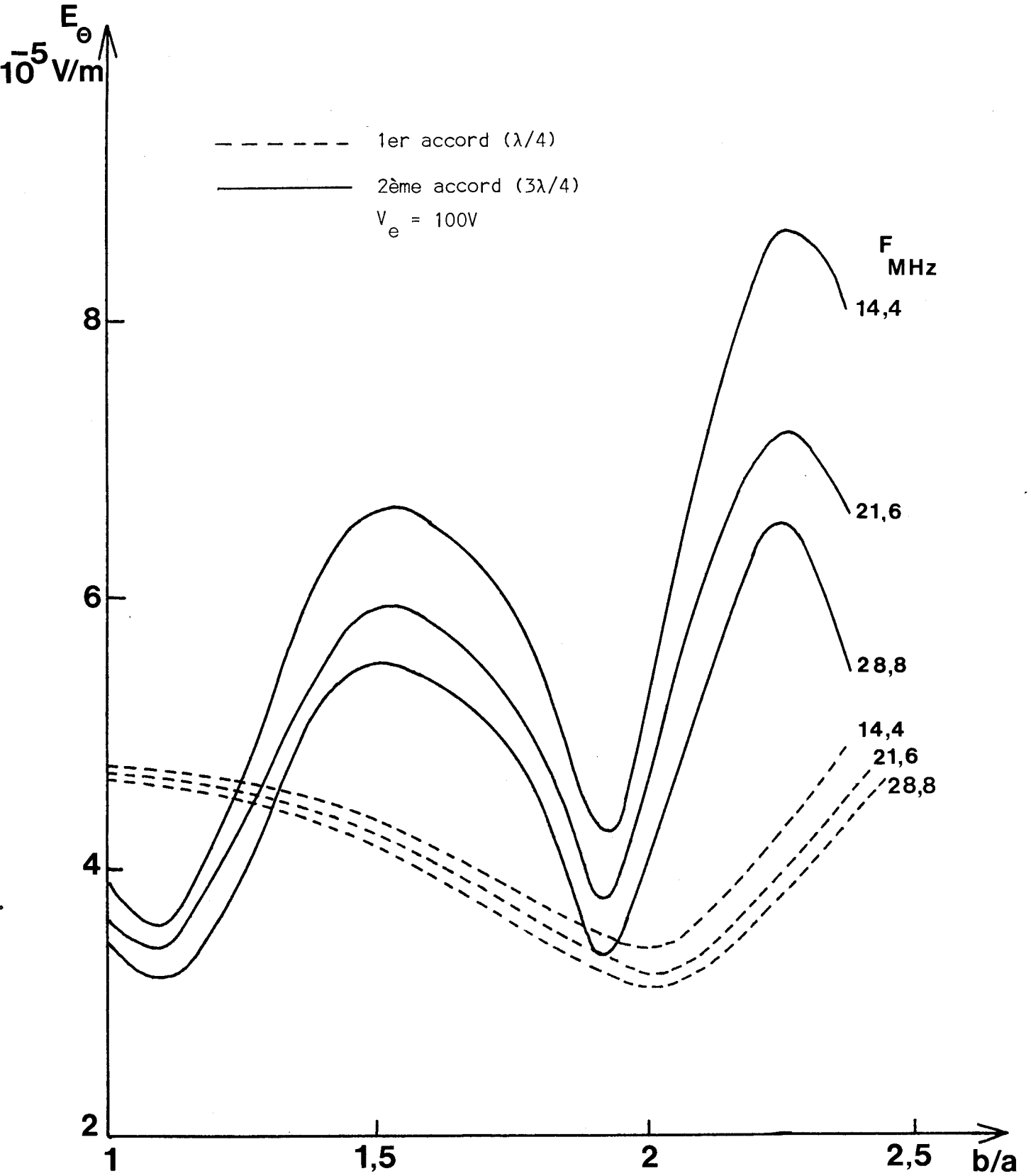


fig.II.24



L'examen de ces courbes nous amène ainsi à la conclusion suivante :

Dans la "fenêtre" haute fréquence, la valeur du rayon de la cavité dans laquelle l'antenne est placée n'a que peu d'influence sur l'accord de l'antenne et sur l'amplitude du champ reçu.

Le paramètre le plus important reste la longueur de l'antenne qui doit toujours être ajustée de manière à réaliser des résonances en quart d'onde ou trois quarts d'onde.

L'étude que nous venons de faire vérifie donc les résultats obtenus par la théorie simple du dipôle mais fait intervenir le comportement de l'antenne elle-même en haute fréquence. Elle montre la possibilité de l'emploi des hautes fréquences pour la réalisation de télécommunications à travers un milieu absorbant, l'amplitude des champs reçus étant comparable à celle obtenue avec une émission en courant continu. Les discordances qui peuvent exister entre ces prévisions théoriques et les constatations expérimentales pourraient s'expliquer par les variations de σ et ϵ en fonction de la fréquence.

Il n'y a eu, à notre connaissance, que quelques essais de liaison H.F. à travers des massifs rocheux et qui ont surtout été réalisés par Fritsch⁽⁴⁰⁾. Les observations qu'il a faites sont d'ailleurs à porter à l'actif de la théorie précédente. Cependant, la plupart des expériences ont été faites en galeries de mine et il est difficile de séparer, dans l'amplitude du champ reçu, la contribution due aux ondes qui se sont propagées à travers le sol de celle due à une propagation dans les galeries, le long de conducteurs métalliques qui s'y trouvent. Ceci fait d'ailleurs l'objet d'autres études effectuées dans le laboratoire⁽⁴¹⁾.

Sur le plan pratique, en dehors de ce type de communication, les antennes H.F. enterrées sont situées non loin de la surface afin d'obtenir un rayonnement important dans l'air. De plus, si l'antenne est aérienne, sa hauteur peut être du même ordre de grandeur que la longueur d'onde correspondant à la fréquence d'émission. Dans ce cas, le milieu entourant l'antenne ne peut plus être supposé de dimension infinie. Nous montrons donc dans le chapitre suivant, l'influence de l'interface air-sol sur la répartition du courant et sur l'impédance d'entrée de l'antenne.

CHAPITRE. III.

CARACTERISTIQUES ELECTRIQUES D'UNE ANTENNE
BICONIQUE MINCE, PLACEE VERTICALEMENT PRES
DE L'INTERFACE AIR-SOL.

CHAPITRE III

CARACTERISTIQUES ELECTRIQUES D'UNE ANTENNE BICONIQUE MINCE, PLACEE VERTICALEMENT PRES DE L'INTERFACE AIR-SOL

Nous avons supposé précédemment que l'antenne biconique était située au sein d'un milieu de dimension infinie. Une telle hypothèse pour le calcul des caractéristiques électriques de l'antenne est valable si l'antenne est suffisamment éloignée de l'interface air-sol. Cependant, si par exemple l'antenne est dans le sol, elle doit être enterrée à très faible profondeur pour éviter un affaiblissement important des ondes. En effet, les conductivités des terrains proches de la surface sont souvent élevées et il est même intéressant, dans ce cas, de placer l'antenne dans une cavité diélectrique à faibles pertes^{(42), (43)}.

Nous étudions donc le cas général d'une antenne biconique mince, située soit dans l'air, soit dans le sol, et en tenant compte de la présence de l'interface. On supposera que si l'antenne est enterrée, le milieu entourant cette antenne peut être un diélectrique à faibles pertes, donc de nature différente que le sol environnant.

Nous donnons tout d'abord les expressions des composantes des champs électromagnétiques. Puis en écrivant les conditions aux limites sur les différents milieux, nous déterminerons les caractéristiques électriques de l'antenne comme l'impédance d'entrée et la répartition du courant. Nous montrerons sur des exemples que l'effet de l'interface air-sol n'est pas négligeable si la distance entre l'antenne et l'interface est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde.

III.1. Hypothèses de départ. Système de coordonnées

Nous supposons que l'antenne biconique mince de longueur $2a$ est placée verticalement à une distance h de l'interface air-sol.

L'antenne, d'angle θ_0 , définit une région sphérique (1) de rayon a (fig.III.1.a.)

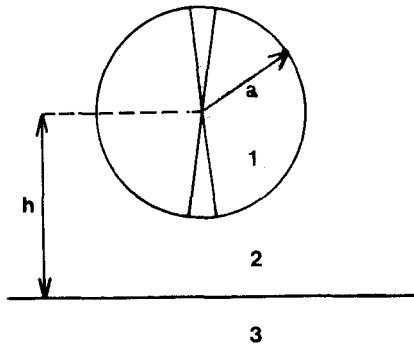


fig.III.1.a.

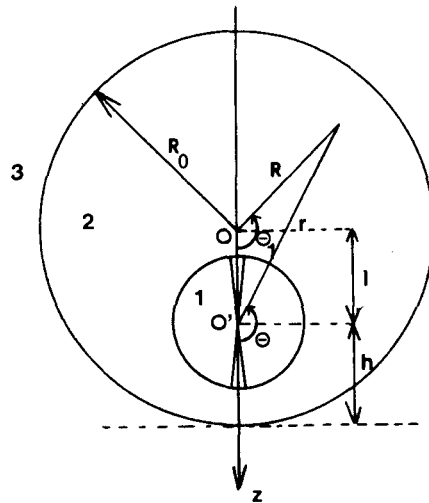


fig.III.1.b.

Les milieux 1, 2 et 3 correspondent soit au sol, soit à l'air. Ces différents milieux sont caractérisés par leurs constantes σ_i et ϵ_i avec $i=1,2,3$ et nous faisons l'hypothèse suivante : $\mu_i = \mu_0$ (perméabilité du vide).

Comme nous l'avons vu précédemment, le calcul de l'impédance d'entrée se ramène à la détermination des champs électromagnétiques. Celle-ci peut se faire en écrivant les conditions aux limites du champ sur chaque interface. Etant donné la configuration géométrique correspondant à ce problème, nous allons utiliser une méthode employée par D'Jakonov⁽⁴⁴⁾ en envisageant le cas de deux sphères non concentriques.

Si R_0 est le rayon de la sphère externe (fig.III.1.b.) le résultat correspondant à un interface plan sera obtenu en faisant tendre $R_0 \rightarrow \infty$, tout en maintenant la distance h constante.

Les points courants sont repérés dans deux systèmes de coordonnées sphériques. L'un (r, θ, ϕ) est rattaché au centre de l'antenne, l'autre (R, θ_1, ϕ) au centre de la sphère externe. De plus, les centres sont situés sur l'axe des z à une distance $l = R_0 - h$ l'un de l'autre.

Si la région d'excitation de l'antenne est très petite, nous avons vu dans le chapitre précédent que le potentiel de Debye U dans chacun des milieux pouvait se mettre sous la forme :

$$U_1 = \sum_v A_v \hat{J}_v(k_1 r) T_v(\cos\theta) \quad (3.1.)$$

$$U_2 = \sum_{n=1,2,3 \dots} [c_n \hat{J}_n(k_2 r) + d_n \hat{H}_n(k_2 r)] P_n(\cos\theta) \quad (3.2.)$$

$$U_3 = \sum_{n=1,2,3 \dots} E_n \hat{H}_n(k_3 R) P_n(\cos\theta_1) \quad (3.3.)$$

La fonction $T_\nu(\cos\theta)$ est donnée d'une façon générale par :

$$T_\nu(\cos\theta) = a_\nu P_\nu(\cos\theta) + b_\nu P_\nu(-\cos\theta) \quad (3.4.)$$

En effet, les fonctions $P_\nu(x)$ et $P_\nu(-x)$ sont linéairement indépendantes, ν n'étant pas en général un entier, puisque solution de $T_\nu(\cos\theta_0)=0$, d'après l'équation (2.17). Si l'angle d'ouverture θ_0 est faible, on peut montrer facilement en utilisant les développements limités et asymptotiques de $T_\nu(x)$ au voisinage de $x = \pm 0$, que les valeurs de ν solutions de l'équation précédente, tendent vers un entier n quelconque, pair ou impair. Par conséquent la fonction T_ν se comporte comme un polynôme de Legendre $P_n(\cos\theta)$ sauf au voisinage de $\theta = 0$ ⁽³³⁾.

Comme il n'existe pas de symétrie en θ , on doit prendre toutes les valeurs, paires ou impaires, de n .

L'impédance d'entrée de l'antenne est obtenue à partir de l'impédance inverse de rayonnement Z_ν par l'équation 2.24. En faisant un calcul analogue à celui du chapitre précédent, on aboutit à la relation suivante définissant Z_ν :

$$Z_\nu = \frac{2\eta_1 K_1}{V(a)} \sum_{n=1,3,5 \dots} [c_n \hat{J}_n(k_2 a) + d_n \hat{H}_n(k_2 a)] \quad (3.5.)$$

K_1 est l'impédance caractéristique de la structure biconique correspondant au mode T.E.M. dans le milieu 1, et $V(a)$ la tension transverse.

Les coefficients inconnus c_n et d_n sont déterminés en écrivant l'égalité des composantes tangentes du champ sur chaque interface.

III.2. Relations entre les coefficients c_n et d_n d'après les conditions aux limites

III.2.1. Conditions aux limites entre les milieux 1 et 2

Sur les limites de la région sphérique délimitée par

l'antenne, c'est-à-dire en $r=a$, les conditions de passage sur les champs E_r et E_θ donnent une première relation entre c_n et d_n :

$$\begin{aligned}
 -\delta_r P_r(\cos\theta_0) &= -j \frac{\pi K_1}{V(a)} \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{2r(r+1)}{2r+1} \left[c_r \hat{J}'_r(k_2 a) + d_r \hat{H}'_r(k_2 a) \right] \dots \\
 \dots + j \frac{\pi K_1}{V(a)} 2r(r+1) \sum_n \sum_v \frac{n(n+1)}{v(v+1)} \frac{\hat{J}'_v(k_1 a)}{\hat{J}'_v(k_1 a)} \left[c_n \hat{J}'_n(k_2 a) + d_n \hat{H}'_n(k_2 a) \right] \frac{l_{vr} l_{vn}}{l_{vv'}}
 \end{aligned} \quad (3.6.)$$

où $\delta_r = 0$ si r est pair et $\delta_r = 1$ pour r impair.

On rappelle que l_{vr} et $l_{vv'}$ sont définis par :

$$l_{vr} = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} P_n T_v \sin\theta d\theta \quad \text{et} \quad l_{vv'} = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} T_v T_{v'} \sin\theta d\theta \quad (3.7.)$$

Pour une antenne mince ($\theta_0 \rightarrow 0$), ces expressions se simplifient et on obtient finalement :

$$c_n = -\frac{1}{p_n} d_n + s_n \quad (3.8.)$$

$$\text{avec} \quad p_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n} \quad \text{et} \quad s_n = \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \quad (3.9.)$$

$$\alpha_n = \frac{\eta_2}{\eta_1} \hat{J}'_n(k_2 a) - \frac{\hat{J}'_n(k_1 a)}{\hat{J}'_n(k_1 a)} \hat{J}'_n(k_2 a) \quad (3.10.)$$

$$\beta_n = \frac{\eta_2}{\eta_1} \hat{H}'_n(k_2 a) - \frac{\hat{J}'_n(k_1 a)}{\hat{J}'_n(k_1 a)} \hat{H}'_n(k_2 a) \quad (3.11.)$$

$$\gamma_n = -j \delta_n \frac{2n+1}{2n(n+1)} \frac{V(a)}{\pi K_1} \quad (3.12.)$$

III.2.2. Conditions aux limites sur l'interface air-sol

Le sol et l'air étant repérés par deux systèmes de coordonnées sphériques, les conditions aux limites sur cet interface mènent à des calculs plus compliqués.

Nous devons tout d'abord introduire une autre normalisation des fonctions de Bessel et Hankel :

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) \quad h_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}(x) \quad (3.13.)$$

En effet, les théorèmes d'addition que nous allons faire intervenir prennent une forme plus simple lorsque ces fonctions sont ainsi normalisées. On définit de plus un nouveau potentiel V_i , relié par U_i par la relation :

$$V_i = U_i/k_i r \quad (3.14.)$$

On obtient donc dans chacun des milieux 2 et 3 :

$$V_2 = \sum_{n=1,2,..} [c_n j_n(k_2 r) + d_n h_n(k_2 r)] P_n(\cos\theta) \quad (3.15.)$$

$$V_3 = \sum_{n=1,2,..} E_n h_n(k_3 R) P_n(\cos\theta_1) \quad (3.16.)$$

L'égalité des composantes tangentielles E_θ et H_ϕ implique que V_i doit vérifier les équations suivantes sur l'interface :

$$k_2 V_2 = k_3 V_3 \quad (3.17.)$$

$$k_2 V_3 + k_2 R_0 \frac{\partial V_3}{\partial R} = k_3 V_2 + k_3 R_0 \frac{\partial V_2}{\partial R} \quad (3.18.)$$

En remplaçant V_2 et V_3 par leurs expressions, dans l'équation (3.17.), on obtient :

$$\sum_{n=1,2,\dots} k_3 E_n h_n(k_3 R_0) P_n(\cos\theta_1) = \sum_{n=1,2,\dots} k_2 [c_n j_n(k_2 r') + d_n h_n(k_2 r')] P_n(\cos\theta') \quad (3.19.)$$

Afin d'éviter toute confusion dans la suite de la démonstration, on notera r' et θ' les coordonnées d'un point courant du système (r, θ, ϕ) , mais se trouvant sur l'interface air-sol.

Pour se ramener à un même système de coordonnées, nous utilisons les théorèmes d'addition suivants, valables pour $R > \ell$ ⁽⁴⁵⁾ :

$$h_m(k_3 r) P_m(\cos\theta) = \sum_n L_{mn}(k_3 \ell) h_n(k_3 R) P_n(\cos\theta_1) \quad (3.20.)$$

$$j_m(k_3 r) P_m(\cos\theta) = \sum_n M_{mn}(k_3 \ell) j_n(k_3 R) P_n(\cos\theta_1) \quad (3.21.)$$

L_{mn} et M_{mn} sont des fonctions de "passage" dépendant uniquement de la distance ℓ entre les centres de coordonnées.

De plus, grâce aux propriétés d'orthogonalité des polynômes de Legendre, on a finalement :

$$k_3 E_n h_n(k_3 R_0) = \sum_m k_2 c_m M_{mn}(k_2 \ell) j_n(k_2 R_0) + \sum_m k_2 d_m L_{mn}(k_2 \ell) h_n(k_2 R_0) \quad (3.22.)$$



De même, en remplaçant V_2 et V_3 par leurs valeurs dans la deuxième équation aux limites (3.18.), le coefficient E_n s'exprime en fonction de c_n et d_n par la relation :

$$\begin{aligned} k_2 E_n h_n(k_3 R_0) + k_2 k_3 R_0 E_n h'_n(k_3 R_0) &= \sum_m k_3 c_m M_{mn}(k_2 \ell) j_n(k_2 R_0) + \dots \\ \dots + k_3 d_m L_{mn}(k_2 \ell) h_n(k_2 R_0) + k_2 k_3 R_0 c_m M_{mn}(k_2 \ell) j'_n(k_2 R_0) &+ \dots \\ \dots + k_2 k_3 R_0 d_m L_{mn}(k_2 \ell) h'_n(k_2 R_0) &\quad (3.23.) \end{aligned}$$

En égalent les deux expressions de E_n : (3.22.) et (3.23.) et à l'aide de l'équation (3.8.) reliant c_n et d_n , on aboutit finalement à :

$$\sum_{m=1,2,\dots} d_m \left[\frac{1}{p_m} M_{mn}(k_2 \ell) - q_n L_{mn}(k_2 \ell) \right] = \sum_{m=1,2,\dots} s_m M_{mn}(k_2 \ell) \quad (3.24.)$$

avec :

$$q_n = \frac{\frac{k_2^2}{k_3^2} \frac{h_n(k_2 R_0)}{h_n(k_3 R_0)} - \frac{h_n(k_2 R_0) + k_2 R_0 h'_n(k_2 R_0)}{h_n(k_3 R_0) + k_3 R_0 h'_n(k_3 R_0)}}{\frac{k_2^2}{k_3^2} \frac{j_n(k_2 R_0)}{h_n(k_3 R_0)} - \frac{j_n(k_2 R_0) + k_2 R_0 j'_n(k_2 R_0)}{h_n(k_3 R_0) + k_3 R_0 h'_n(k_3 R_0)}} \quad (3.25.)$$

Les coefficients p_m et s_n étant toujours donnés par la relation (3.9.). Les valeurs de d_n peuvent être déterminées à partir de ce système infini d'équations. Malheureusement, pour un interface plan, les séries convergent excessivement lentement. Afin d'augmenter la rapidité de convergence, nous allons suivre une méthode proposée par D'Jakonov⁽⁴⁴⁾ dans un article traitant de l'influence d'une inclusion sphérique dans le sol sur la répartition du champ électromagnétique créé par un dipôle. Nous avons jugé utile de détailler la démonstration, l'article de D'Jakonov comportant des imprécisions et quelques erreurs de calcul.

Il faut d'abord faire apparaître le coefficient d_n que l'on obtiendrait si l'antenne était placée dans un milieu infini, donc en l'absence de l'interface air-sol. Or on remarque que le terme q_n est assimilable à un coefficient de réflexion du milieu 2 sur le milieu 3 et, en particulier $q_n=0$ si les deux milieux sont identiques. De plus, le terme du membre de droite de l'équation (3.24.) peut se mettre sous la forme :

$$\sum_m s_m M_{mn}(k_2 \ell) = V(a) \sum_m s_m^* M_{mn}(k_2 \ell) \quad (3.26.)$$

$$\text{où } s_m^* = s_m / V(a) \quad (3.27.)$$

Si $V_0(a)$ est la tension transverse en l'absence de l'interface air-sol, on obtient d'après l'équation (3.24.), en supposant les milieux 2 et 3 identiques :

$$\sum_m d_m \frac{1}{p_m} M_{mn}(k_2 \ell) = V_0(a) \sum_m s_m^* M_{mn}(k_2 \ell) \quad (3.28.)$$

Le terme s_m^* est en effet indépendant des caractéristiques du milieu 3.

Le coefficient d_{o_m} est donné par la théorie classique des antennes biconiques :

$$d_{o_m} = -\delta_n \frac{j V_o(a)}{2\pi K_1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{1}{\hat{H}_n(k_2 a) \left[\frac{n_2}{n_1} \frac{H'_n(k_2 a)}{\hat{H}_n(k_2 a)} - \frac{J'_n(k_1 a)}{J_n(k_1 a)} \right]}$$

où $\delta_n = 0$ si n est pair et $\delta_n = 1$ pour n impair. (3.29.)

En combinant les équations (3.26.) et (3.28.), on peut poser :

$$\sum_m s_m M_{mn}(k_2 \ell) = \sum_m d_{o_m}^* \frac{1}{p_m} M_{mn}(k_2 \ell) \quad (3.30.)$$

avec : $d_{o_m}^* = d_{o_m} \cdot V(a)/V_o(a)$ (3.31.)

Le coefficient $d_{o_m}^*$ a donc la même forme que celle que l'on obtiendrait si l'antenne était placée au sein d'un milieu infini. Cependant la valeur elle-même est différente puisque $V(a)$ est la tension transverse en présence de l'interface air-sol.

En multipliant membre à membre (3.24.) par $j_n(k_2 R) P_n(\cos \theta_1)$ et en sommant sur toutes les valeurs de n , on obtient, en tenant compte de l'équation (3.30.) et des théorèmes d'additions, une nouvelle relation que doit vérifier d_m :

$$\sum_m d_{o_m}^* \frac{1}{p_m} j_m(k_2 r) P_m(\cos \theta) = \sum_m d_m \cdot \frac{1}{p_m} j_m(k_2 r) P_m(\cos \theta) \dots$$

$$\dots - \sum_m d_m L_m(r, \theta) \quad (3.32.)$$

où $L_m(r, \theta) = \sum_n q_n L_{mn}(k_2 \ell) j_n(k_2 R) P_n(\cos \theta_1)$ (3.33.)

III.2.3. Cas particulier d'une antenne placée directement au sein d'un demi-milieu

Si l'antenne est située directement dans un demi-milieu : l'air ou le sol, les coefficients c_n et d_n ne peuvent être obtenus simplement à partir des équations précédentes. En effet, si on fait $\sigma_1 = \sigma_2$ et $\epsilon_1 = \epsilon_2$ dans ces formules, on aboutit à une forme indéterminée. Il faut donc écrire directement les conditions aux limites sur les différents interfaces. On obtient tout d'abord : $d_n = d_{o_n}^*$.

Ce coefficient n'est différent de zéro que pour les valeurs impaires de n. Cependant, le manque de symétrie autour de l'antenne apparaîtra grâce aux coefficients c_n où l'indice n pourra prendre toutes les valeurs entières.

La conditions aux limites (3.2.2.) sur l'interface air-sol mène à la relation suivante :

$$\sum_m c_m M_{mn}(k_2 \ell) + d_{o_m}^* q_n L_{mn}(k_2 \ell) = 0 \quad (3.34.)$$

Comme précédemment, en multipliant membre à membre par $j_n(k_2 R) P_n(\cos \theta_1)$ en sommant par rapport à n et en utilisant les propriétés d'addition, on a :

$$\sum_m c_m j_m(k_2 r) P_m(\cos \theta) = - \sum_n d_{o_n}^* L_n(r, \theta) \quad (3.35.)$$

Dans cette formule, $L_n(r, \theta)$ est toujours donné par la relation (3.33.).

Afin de pouvoir utiliser les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Legendre, nous allons rechercher une forme intégrale particulière de la fonction $L_n(r, \theta)$.

III.3. Expression intégrale de la fonction $L_m(r, \theta)$

Tout d'abord, on peut remarquer qu'il est plus intéressant de mettre $L_m(r, \theta)$ sous la forme suivante :

$$L_m(r, \theta) = \sum_n \phi(n) h_n(k_2 R_o) L_{mn}(k_2 \ell) P_n(\cos \theta_1) \quad (3.36.)$$

$$\text{avec } \phi(n) = q_n \frac{j_n(k_2 R)}{h_n(k_2 R_o)} \quad (3.37.)$$

En effet, la série (3.36.) ne diffère de la série exprimant $h_m(k_2 r') P_m(\cos \theta')$ que par le facteur $\phi(n)$. On rappelle que r' et θ' caractérisent un point de l'interface air-sol.

Pour trouver une forme intégrale de $L_m(r, \theta)$, nous allons partir de la représentation intégrale de $h_m(k_2 r') P_m(\cos \theta')$. Celle-ci est donnée par Yasuo Sato⁽⁴⁶⁾ (p.19.éq.6.11.). D'après cette formule :

$$h_n(k_2 r') P_n(\cos \theta') = - \frac{j_n}{\gamma_2} \int_0^\infty e^{-u_2 h} J_o(\lambda \rho) P_n\left(\frac{u_2}{\gamma_2}\right) \frac{\lambda}{u_2} d\lambda \quad (3.38.)$$

avec : $\rho = R_0 \sin \theta = r' \sin \theta'$ et $u_2 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_2^2}$ (3.39.)

De plus, la limite de la quantité ϕ_n quand le rayon $R_0 \rightarrow \infty$ peut être calculée grâce à une représentation asymptotique de Debye pour les fonctions de Bessel et de Hankel d'argument complexe ⁽⁴⁷⁾ on obtient :

$$\frac{h'_v(z)}{h_v(z)} = -j \sqrt{1 - \frac{v^2}{z^2}} \quad (3.40.)$$

$$\frac{j'_v(z)}{j_v(z)} = j \sqrt{1 - \frac{v^2}{z^2}} \quad (3.41.)$$

$$\frac{j_n(k_2 R)}{j_n(k_2 R_0)} = e^{-(R_0 - R)u_2} \quad (3.42.)$$

Or quand $R \rightarrow \infty$, $R_0 - R \rightarrow h - z$ (cf. fig. III.2.)

L'expression de ϕ_n devient donc :

$$\phi_n = e^{-u_2 h + u_2 z} \frac{\gamma_2^2 u_3^2 - \gamma_3^2 u_2^2}{\gamma_2^2 u_3^2 + \gamma_3^2 u_2^2} \quad (3.43.)$$

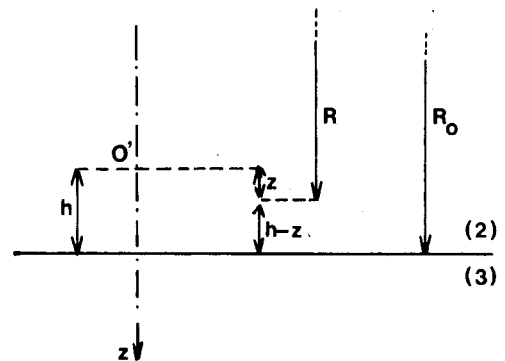


fig. III.2.

Si l'indice n de sommation de l'équation (3.36.) est relié à un nouvel indice λ par la relation $n = \lambda R_0$, les écarts entre deux valeurs successives de λ seront telles que $\Delta \lambda = 1/R_0$. Comme $R_0 \rightarrow \infty$, on pourra assimiler λ à une variable continue entre 0 et l'infini. Par conséquent, compte tenu des équations (3.38.) et (3.43.), la série (3.36.) définissant $L_m(r, \theta)$ peut être assimilée à l'intégrale suivante :

$$L_m(r, \theta) = - \frac{j^m}{\gamma_2} \int_0^{\infty} e^{-2u_2 h + u_2 z} \frac{\gamma_2^2 u_3^2 - \gamma_3^2 u_2^2}{\gamma_2^2 u_3^2 + \gamma_3^2 u_2^2} J_0(\lambda \rho) P_m \left(\frac{u_2}{\gamma_2} \right) \frac{\lambda}{u_2} d\lambda \quad (3.44.)$$

En effet, on peut montrer (D'Jakonov ⁽⁴⁴⁾) que les séries vérifient les conditions nécessaires pour pouvoir inverser les ordres de sommation et pour passer à la limite d'une série à une intégrale.

Nous allons maintenant exprimer le terme $e^{\frac{u_2 z}{\gamma_2}} J_0(\lambda \rho)$ intervenant dans l'intégrand en une série de polynômes de Legendre. Ceci

nous permettra d'utiliser les propriétés d'orthogonalité de ces polynômes quand nous remplacerons $L_m(r, \theta)$ par sa nouvelle expression dans l'équation de définition (3.32.) des coefficients d_m .

On montre dans l'annexe.3., en suivant une méthode proposée par Negi⁽⁴⁸⁾ que :

$$J_0(jk_2 r \sin \theta sht) e^{jk_2 r \cos \theta cht} = \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) j_n(k_2 r) P_n(\cos \theta) P_n(cht) \quad (3.45.)$$

Pour pouvoir comparer $e^{u_2 z} J_0(\lambda \rho)$ à la quantité ci-dessus, il faut faire le changement de variable $\lambda = jk_2 sht$ dans l'intégrale de définition de $L_m(r, \theta)$ (éq.3.44.) :

$$L_m(r, \theta) = -j^m \int_C e^{-2\gamma_2 hcht + \gamma_2 zcht} \frac{\gamma_2^2 u_3 - \gamma_3^2 u_2}{\gamma_2^2 u_3 + \gamma_3^2 u_2} J_0(jk_2 r \sin \theta sht) \dots$$

$$\dots P_m(cht) sht dt \quad (3.46.)$$

En remarquant que $z = r \cos \theta$, les équations (3.45.) et (3.46.) mènent à :

$$L_m(r, \theta) = -j^m \int_C e^{-2\gamma_2 hcht} \frac{\gamma_2^2 u_3 - \gamma_3^2 u_2}{\gamma_2^2 u_3 + \gamma_3^2 u_2} \sum_{v=0}^{\infty} j^v (2v+1) j_v(k_2 r) P_v(\cos \theta) \dots$$

$$\dots P_v(cht) P_m(cht) sht dt \quad (3.47.)$$

Il suffit maintenant de remplacer $L_m(r, \theta)$ par cette expression, dans les équations que doivent vérifier les coefficients.

III.4. Relations permettant de calculer les coefficients c_n et d_n

III.4.1. Cas où les trois milieux sont différents

La relation de définition des coefficients d_n est donnée par (3.32.). En remplaçant $L_m(r, \theta)$ par sa valeur dans cette expression, on obtient :

$$\sum_m d_{o_m}^* \frac{1}{p_m} j_m(k_2 r) P_m(\cos\theta) = \sum_m d_m \frac{1}{p_m} j_m(k_2 r) P_m(\cos\theta) \dots$$

$$- \sum_m d_m (-j)^m \int_0^{\infty} e^{-2\gamma_2 h c h t} \frac{\gamma_2^2 u_3 - \gamma_3^2 u_2}{\gamma_2^2 u_3 + \gamma_3^2 u_2} \sum_{v=0}^{\infty} j^{v(2v+1)} j_v(k_2 r) P_v(\cos\theta)$$

$$\dots P_v(c h t) P_m(c h t) s h t d t \quad (3.48.)$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Legendre, on aboutit finalement à la relation suivante :

$$d_n = d_{o_n}^* + j^n (2n+1) p_n \sum_{r=1,2,3..} d_r j^r \beta_{nr}$$

$$\text{avec } \beta_{nr} = \frac{1}{\gamma_2} \int_0^{\infty} e^{-2u_2 h} \frac{\gamma_3^2 u_2 - \gamma_2^2 u_3}{\gamma_3^2 u_2 + \gamma_2^2 u_3} P_n\left(\frac{u_2}{\gamma_2}\right) P_r\left(\frac{u_2}{\gamma_2}\right) \frac{\lambda}{u_2} d\lambda \quad (3.49.)$$

On rappelle que le coefficient c_n ainsi que le terme p_n sont définis par les relations (3.8.) à (3.12.).

Le système linéaire d'équations donné par (3.49.) peut être résolu par une méthode d'approximations successives. Une approche itérative est donnée par Schelkunoff⁽³⁵⁾ et elle est telle qu'à chaque étape d'approximations, tous les modes sont pris en considération. En effet, la série (3.49.) peut se mettre sous la forme :

$$d_n [1 - p_n (-1)^n (2n+1) \beta_{nn}] = d_{o_n}^* + \sum_{v \neq n} d_v [p_n j^{v+n} (2n+1) \beta_{nv}] \quad (3.50.)$$

$$\text{Posons : } X_{nv} = p_n j^{v+n} (2n+1) \beta_{nv} \quad (3.51.)$$

D'après l'équation (3.50.) on obtient :

$$d_n [1 - (-1)^n p_n (2n+1) \beta_{nn}] = d_{o_n}^* + \sum_{v \neq n} d_v X_{nv} \quad (3.52.)$$

La première approximation consiste à négliger l'influence de la série :

$$d_n^{(1)} = \frac{d_{o_n}^*}{1 - (-1)^n p_n (2n+1) \beta_{nn}} \quad (3.53.)$$

La solution complète est alors donnée par :

$$d_n = d_n^{(1)} + d_n^{(2)} + d_n^{(3)} \dots \quad (3.54.)$$

La relation de récurrence étant définie de la façon suivante :

$$d_n^{(m)} = \frac{\sum_{v \neq n} d_v^{(m-1)} X_{nv}}{1 - (-1)^n p_n (2n+1) \beta_{nn}} \quad (3.55.)$$

La série (3.52.) converge rapidement car on peut vérifier que la matrice formée des éléments X_{nv} est à diagonale principale dominante.

De plus, si l'antenne est située près de l'interface air-sol, ($|\gamma_2 h| \lesssim 1$) et pour la forme particulière de l'intégrand de β_{nv} , les différentes méthodes de calcul approché d'intégrales (méthode du col, phase stationnaire ...) ne peuvent pas être appliquées. Il faut par conséquent avoir recours à une résolution numérique.

III.4.2. Antenne placée directement dans un demi-milieu ⁽⁴⁹⁾

Si l'antenne est située dans l'air ou directement dans le sol, sans diélectrique autour de l'antenne, nous avons vu précédemment (§.III.2.3.) qu'il fallait écrire les conditions aux limites dans cette configuration particulière. Les deux relations définissant c_n et d_n étaient :

$$d_n = d_{o_n}^* \quad (3.56.)$$

$$\sum_m c_m j_m(k_2 r) P_m(\cos\theta) = - \sum_m d_m^* L_m(r, \theta) \quad (3.57.)$$

En remplaçant $L_m(r, \theta)$ par sa valeur (3.47.) dans l'équation précédente, et grâce aux propriétés d'orthogonalité des polynômes de Legendre,

on aboutit à :

$$c_n = -j^n (2n+1) \sum_v d_{0v}^* j^v \beta_{nv} \quad (3.58.)$$

où l'intégrale β_{nv} est toujours définie par l'expression (3.49.). Il est cependant possible de calculer analytiquement β_{nv} si l'antenne est placée dans l'air au-dessus d'un milieu parfaitement conducteur.

III.4.3. Antenne biconique placée dans l'air au-dessus d'un milieu parfaitement conducteur

Dans ce cas particulier, l'expression de β_{nr} se simplifie et devient :

$$\beta_{nr} = \frac{1}{\gamma_2} \int_0^\infty e^{-2u_2 h} P_m \left(\frac{u_2}{\gamma_2} \right) P_r \left(\frac{u_2}{\gamma_2} \right) \frac{\lambda}{u_2} d\lambda \quad (3.59.)$$

Nous avons de plus la relation suivante ⁽⁵⁰⁾ :

$$P_n(x) P_v(x) = \sum_{k=0}^{v'} A(k, n, v) P_{n+v-2k}(x) \quad (3.60.)$$

où v' est le plus petit des deux nombres n et v et A est un coefficient qui est seulement une fonction des indices :

$$A(k, m, n) = \frac{a_{m-k} a_k a_{n-k}}{a_{n+m-k}} \frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1} \quad (3.61.)$$

avec :

$$a_k = \frac{(2k-1)!!}{k!} \quad (3.62.) \quad \text{avec } n!! = n.(n-2)(n-4)\dots(n-i) \text{ tant que } n-i > 0$$

La nouvelle forme de l'expression (3.58.) de c_n est :

$$c_m = -j^m (2m+1) \sum_v d_v j^v \sum_{k=0}^{v'} A(k, m, v) \left[\frac{1}{\gamma_2} \int_0^\infty e^{-2u_2 h} P_{m+v-2k} \left(\frac{u_2}{\gamma_2} \right) \frac{\lambda}{u_2} d\lambda \right] \quad (3.63.)$$

En tenant compte de la représentation intégrale de la fonction de Hankel :

$$h_n(k_2 h) = - \frac{j^n}{\gamma_2} \int_0^\infty P_n\left(\frac{u_2}{\gamma_2}\right) e^{-u_2 h} \frac{\lambda}{u_2} d\lambda \quad (3.64.)$$

la forme simplifiée définissant le coefficient c_m est :

$$c_m = (2m+1) \sum_v d_{0v}^* \sum_{k=0}^v A(k, m, v) j^{2k} h_{m+v-2k}(2k_2 h) \quad (3.65)$$

Nous donnons quelques applications numériques afin de mettre en évidence l'influence de l'interface air-sol sur l'impédance d'entrée et sur la répartition du courant le long de l'antenne.

III.5. Résultats numériques

Nous avons vu précédemment que l'antenne pouvait être caractérisée du point de vue impédance, par son impédance inverse de rayonnement Z_v ou par son impédance d'entrée Z_e . Le terme Z_v présente l'avantage d'être indépendant de l'impédance caractéristique K , c'est-à-dire de l'angle d'ouverture θ_0 de l'antenne biconique. Cependant, dans les applications numériques suivantes, nous tracerons également les courbes de variation de l'impédance d'entrée afin de voir les changements éventuels de longueur de résonance et de résistance d'entrée, grandeurs directement accessibles à la mesure.

III.5.1. Variation des impédances Z_e et Z_v

Nous considérons tout d'abord le cas d'une antenne enterrée dans un milieu ayant les caractéristiques suivantes : $\sigma_2 = 10^{-3}$ mho/m et $\epsilon_{r2} = 3$, mais entourée d'un diélectrique à faibles pertes ayant une conductivité $\sigma_1 = 10^{-4}$ mho/m et une permittivité $\epsilon_{r1} = 5$.

Sur la figure.III.3. nous avons représenté la variation de l'impédance inverse de rayonnement Z_v en fonction de la longueur de l'antenne. La fréquence d'émission est de 50MHz et Z_v a été calculé pour

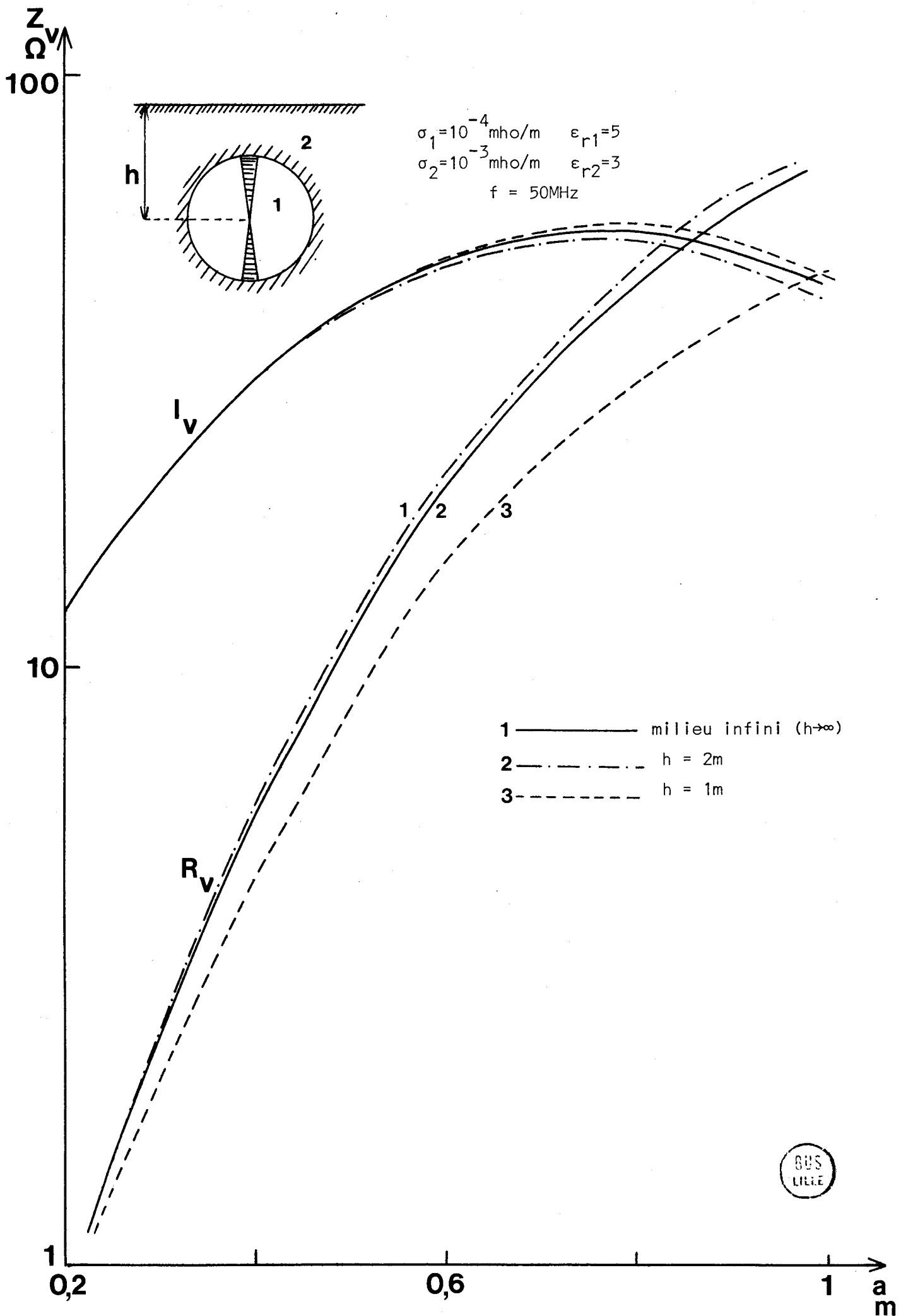


fig.III.3

pour différentes profondeurs de l'antenne. Pour obtenir une précision de l'ordre de quelques %, il est nécessaire de pousser l'indice de sommation n intervenant dans le calcul de l'admittance terminale et de Z_v (éq.3.5.) jusqu'à la valeur $n=15$. De plus, la résolution de l'équation (3.49.) nécessite dans ce cas 8 itérations pour obtenir la valeur correcte de d_n .

La figure.III.4. montre la variation de l'impédance d'entrée pour la même configuration. L'angle du cône de l'antenne θ_0 est égal à environ $1,5^\circ$, ce qui correspond à une impédance caractéristique K de l'antenne dans l'air, de 750Ω . Les courbes 1 et 2 ont été tracées pour une antenne placée dans une capsule sphérique à une profondeur $h \rightarrow \infty$ et $h=1m$. On remarque que la variation de cette profondeur a une effet négligeable sur la réactance d'entrée. Des applications numériques faites avec d'autres valeurs de fréquence et de constantes électriques des milieux ont donné le même résultat.

Sur cette figure, les courbes A et B représentent la variation de la résistance d'entrée en supposant que l'antenne est placée directement au sein du milieu conducteur. On remarque que ces courbes ont la même forme que les précédentes et qu'elles ne diffèrent que par la valeur de R_e pour une longueur d'antenne donnée. On voit de plus que la résistance d'entrée est affectée sensiblement par la présence de l'interface air-sol.

Sur la figure.III.5., nous supposons que l'antenne est située dans l'air au-dessous d'un sol homogène et nous avons représenté la variation de l'impédance d'entrée en fonction de la hauteur au-dessus du sol, exprimée en longueur d'onde, et pour une fréquence d'émission de 100 MHz. Le sol est caractérisé par ses constantes électriques $\sigma_2=10^{-2}$ mho/m et $\epsilon_{r2}=10$.

Les lignes horizontales de la figure.III.5. correspondent aux valeurs de la résistance et de la réactance d'entrée pour une antenne biconique mince dans l'espace libre.

D'après ces courbes, nous voyons donc que la variation de l'impédance d'entrée est sensible, même si l'antenne est située à une distance d'une longueur d'onde de l'interface air-sol⁽⁵¹⁾.

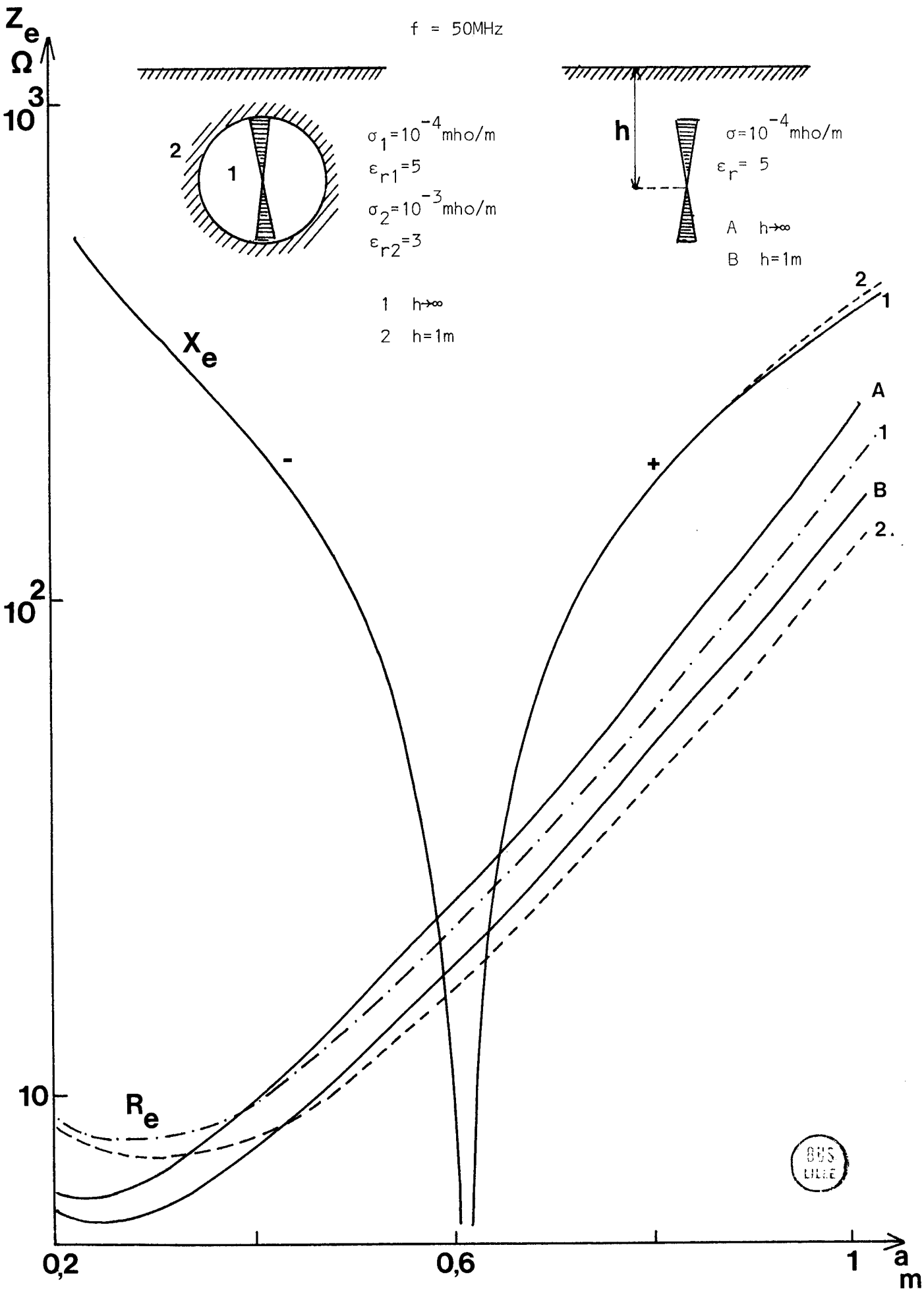


fig.III.4

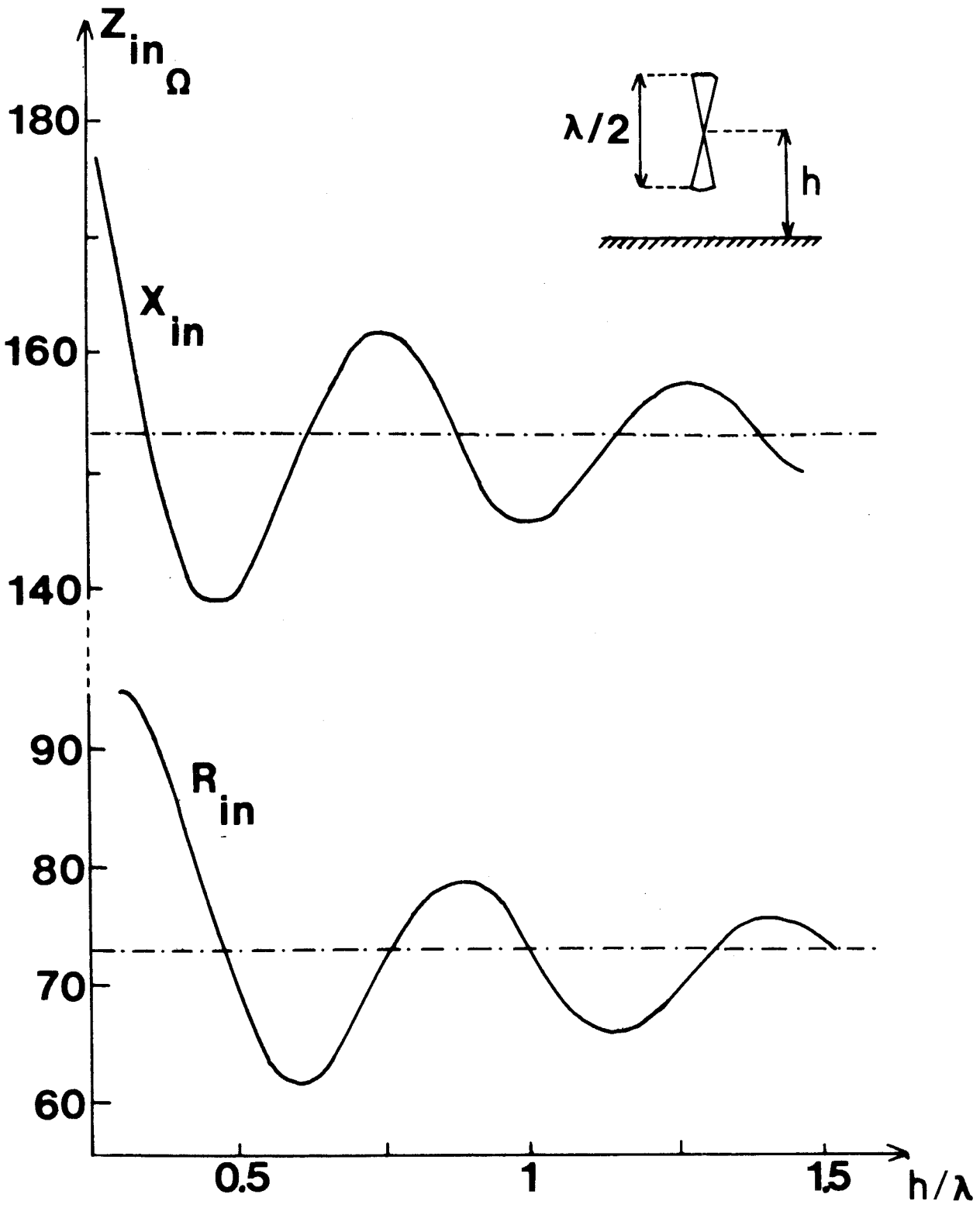


fig.III.5



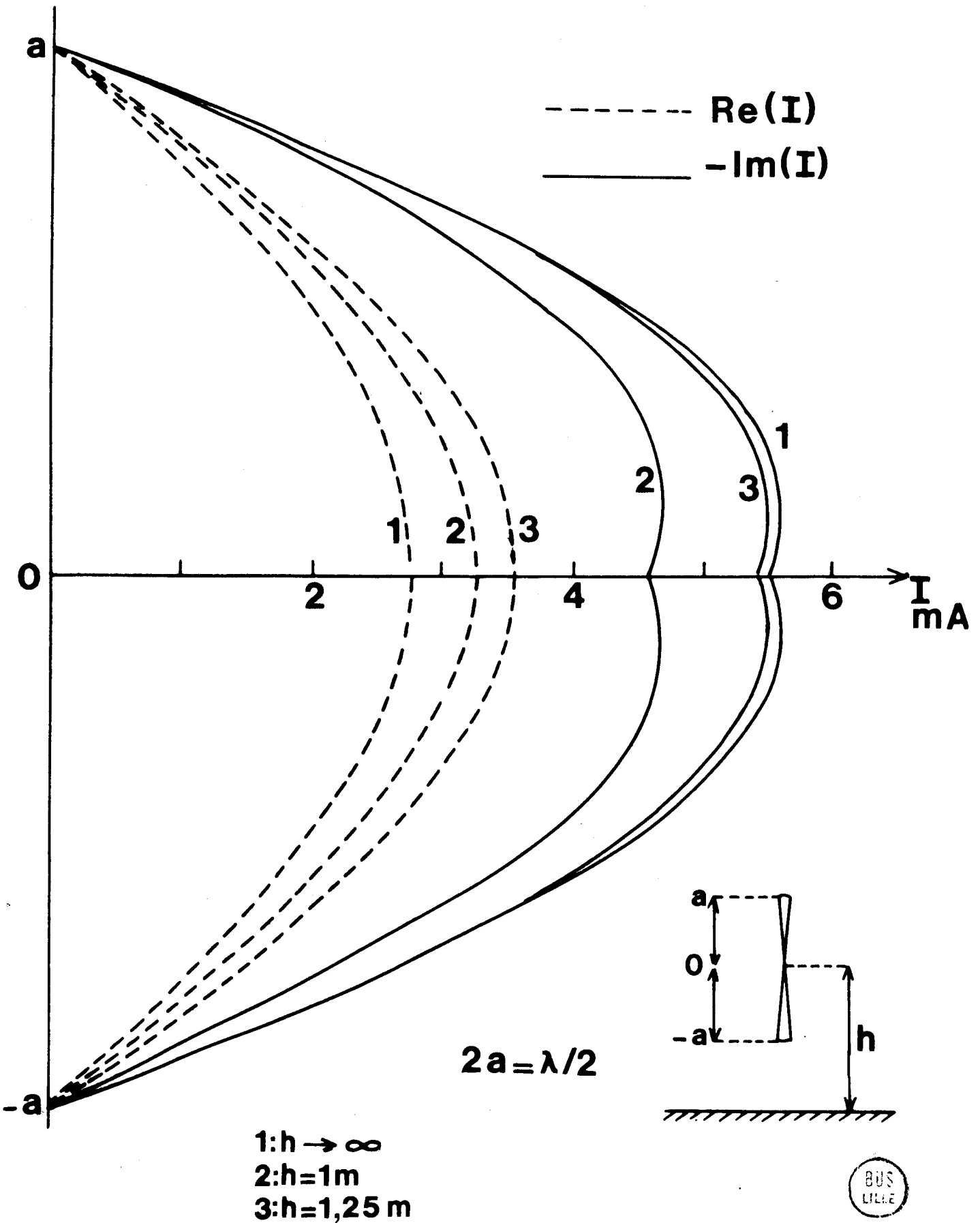


fig. III.6

III.5.2. Répartition du courant

La figure.III.6. montre la distribution du courant le long d'une antenne demi-onde au-dessus du sol. Les lignes continues se rapportent à la partie imaginaire du courant et les lignes en pointillés à la partie réelle. La courbe.1. est tracée en supposant que l'air est un milieu infini ($h \rightarrow \infty$). Pour les courbes 2 et 3, la hauteur du centre de l'antenne est respectivement égale à 1m et 1,25m. L'amplitude du courant est normalisée à une tension d'entrée de 1 Volt. On remarque que cette amplitude est affectée par la présence du sol considéré comme un milieu imparfaitement conducteur⁽⁵²⁾.

III.5.3. Conclusion

En écrivant les conditions aux limites sur les différents milieux, la solution du problème a été obtenue sous la forme de séries mais qui convergent suffisamment rapidement pour un calcul numérique. Nous avons montré sur des exemples que l'effet de l'interface air-sol sur la valeur de la résistance d'entrée n'est pas négligeable même si la distance entre l'antenne biconique et l'interface est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde. De même, l'amplitude du courant est affectée par la présence de cet interface. Cependant, comme dans le cas des antennes cylindriques⁽⁵³⁾, la dissymétrie sur la répartition du courant, qui correspond à l'effet de proximité, est seulement observable si l'antenne est située très près de l'interface.

Connaissant la répartition du courant le long de l'antenne, nous allons pouvoir déterminer son diagramme de rayonnement. Nous étudions donc dans le chapitre suivant le rayonnement en haute fréquence d'un dipôle placé dans un demi-milieu et nous généraliserons au cas d'une antenne résonnante, assimilée à une suite de petits dipôles.

CHAPITRE. IV.

RAYONNEMENT EN HAUTE FREQUENCE D'UNE ANTENNE
VERTICALE SITUEE PRES DE L'INTERFACE AIR-SOL.

C H A P I T R E . I V .

RAYONNEMENT EN HAUTE FREQUENCE D'UNE ANTENNE VERTICALE SITUEE PRES DE L'INTERFACE AIR-SOL

La plupart des études sur le rayonnement du dipôle enterré supposent que le courant de déplacement dans le sol est négligeable vis-à-vis du courant de conduction ($\omega\epsilon \ll \sigma$). En effet, les auteurs envisagent souvent une liaison électromagnétique entre terminaux souterrains dans des milieux relativement bons conducteurs. Dans ce cas, les fréquences optimum se situent dans la gamme V.L.F. ⁽⁵⁴⁾ et l'hypothèse précédente est pleinement justifiée.

Cependant, certains auteurs : Wait ⁽⁵⁵⁾, Stalman ⁽⁵⁶⁾, Tamir ⁽⁵⁷⁾, Biggs et Swarm ⁽⁵⁸⁾, ont abordé le cas où σ est de l'ordre de grandeur de $\omega\epsilon$ en étudiant le rayonnement du dipôle H.F. près de l'interface afin notamment de trouver un angle optimum d'inclinaison de l'antenne enterrée pour exciter le mieux possible l'onde de surface (ou onde latérale).

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord chercher les expressions permettant de calculer le rayonnement dans tout l'espace d'un dipôle électrique vertical placé dans le sol ou dans l'air. Pour cela, après avoir rappelé le principe de calcul du potentiel de Hertz, nous donnerons les résultats obtenus par Banos ⁽¹¹⁾ et développés par Fontaine ⁽¹²⁾ concernant le champ rayonné près de l'interface. En utilisant le mode de présentation de Banos, nous déterminerons ensuite l'amplitude des champs rayonnés dans tout l'espace. Nous insisterons plus particulièrement sur la déformation des contours d'intégration de la fonction dans le plan complexe lorsque $\omega\epsilon \approx \sigma$. Les expressions asymptotiques que nous allons obtenir comportant des termes en puissances successives de n , la convergence sera d'autant plus rapide que n sera grand devant 1, c'est-à-dire en haute fréquence, si la permittivité relative ϵ_r du sol est importante.

Enfin, nous donnerons des applications numériques en traçant des diagrammes de rayonnement d'antenne aérienne ou enterrée, la répartition du courant ayant été déterminée au chapitre précédent.

IV.1. Expression du potentiel de Hertz pour un D.E.V.

Le sol est assimilé à un demi-milieu conducteur et homogène surmonté d'un diélectrique : l'atmosphère. Ces deux milieux sont repérés par leurs indices respectifs (1) et (2). La position d'un point est donnée en coordonnées cylindriques par ses coordonnées (r, ϕ, z) .

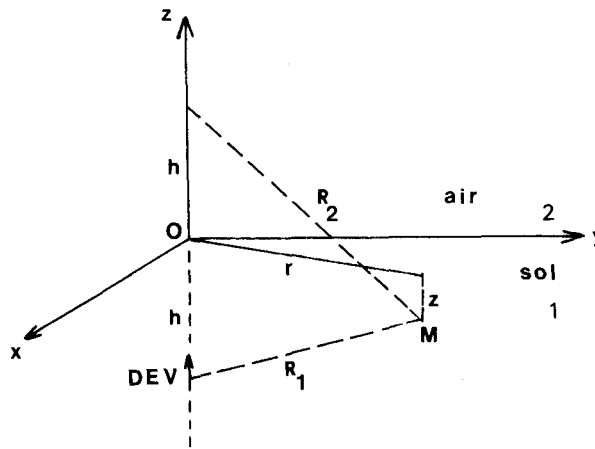


fig.IV.1.

Etant donné la symétrie de révolution autour de l'antenne verticale, le potentiel de Hertz ne possède qu'une seule composante Π_z . Dans les milieux 1 et 2, celle-ci peut être calculée à partir de l'intégrale classique de Sommerfeld V_i définie par :

$$V_i = \int_{-\infty}^{+\infty} - \frac{e^{-u_1 a_i - u_2 b_i}}{\gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_1} H_0^{(2)}(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (4.1.)$$

Comme nous nous intéressons uniquement aux composantes du champ dans l'air, l'indice i pourra prendre les valeurs 1 et 2 suivant que le dipôle est placé respectivement, soit dans le sol, soit dans l'air.

Dans la formule précédente, on a posé :

$$\text{si } i = 1 : a_1 = h, b_1 = z \text{ et } u_1 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_1^2} \quad (4.2.)$$

$$\text{si } i = 2 : a_2 = 0, b_2 = z+h \text{ et } u_2 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_2^2} \quad (4.3.)$$

La détermination des radicaux est telle que l'on ait :

$$R_e\{u_1\} \text{ et } R_e\{u_2\} > 0 \quad (4.4.)$$

$R_e\{u_1\}$ désignant la partie réelle de u_1 . On désignera de même par $I_m\{u_1\}$ la partie imaginaire de u_1 .

h et z représentent respectivement la hauteur de l'émetteur et celle du récepteur et on pose h positif.

Les composantes du champ électromagnétique dans l'air peuvent être déterminées à partir de V_1 grâce aux relations suivantes :

D.E.V. dans le sol

$$E_r = - \frac{j\omega\rho\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\partial^2 V_1}{\partial r \partial z} \right\} \quad (4.5.)$$

$$E_z = - \frac{j\omega\rho\mu_0}{4\pi} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) V_1 \right\} \quad (4.6.)$$

$$H_\phi = \frac{P\gamma_2^2}{4\pi} \frac{\partial V_1}{\partial r} \quad \text{avec } P = 1\ell \quad (4.7.)$$

D.E.V. dans l'air

$$E_r = \frac{j\omega\rho\mu_0}{4\pi\gamma_2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} [G_2 - G_1 - \gamma_1^2 V_2] \right\} \quad (4.8.)$$

$$E_z = \frac{j\omega\rho\mu_0}{4\pi\gamma_2} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) [G_2 - G_1 - \gamma_1^2 V_2] \right\} \quad (4.9.)$$

$$H_\phi = - \frac{P}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [G_2 - G_1 - \gamma_1^2 V_2] \right\} \quad (4.10.)$$

Dans ces formules :

$$G_1 = \frac{e^{-\gamma_2 R_1}}{R_1} \quad (4.11.) \quad G_2 = \frac{e^{-\gamma_2 R_2}}{R_2} \quad (4.12.)$$

R_1 et R_2 étant les distances représentées sur la figure.IV.1.

IV.2. Principe de calcul de l'intégrale V_i

Le calcul approché de l'intégrale de Sommerfeld V_i se fait par la méthode d'intégration dite du "col" et développée dans le livre de Banos⁽¹¹⁾. Nous en rappelons les points essentiels.

Le domaine initial d'intégration est l'axe réel du plan des λ défini par $\lambda = \xi + j\eta$, et amputé de l'origine par un demi-cercle de rayon infiniment petit de manière à éviter le point de branchement logarithmique introduit par la fonction de Hankel.

L'intégrale initiale, définie entre $-\infty$ et $+\infty$, est transformée en une intégrale de contour afin de la calculer par la méthode des résidus. Le contour d'intégration passe dans le demi-plan inférieur des λ , ce qui impose le choix de la fonction de Hankel d'ordre 2 dans l'expression (4.1.) du potentiel de Hertz.

La fonction à intégrer présente des points de branchement définis par $u_1=0$ et $u_2=0$ donc, dans le demi-plan inférieur, pour les valeurs de λ suivantes :

$$\lambda = -j\gamma_1 \quad \text{et} \quad \lambda = -j\gamma_2 \quad (4.13.)$$

Pour rendre la fonction à intégrer uniforme dans tout le plan de la variable complexe λ , nous devons déformer le contour d'intégration afin d'éviter les branches de coupure issues de ces points de branchement. Le choix de ces coupures est tout à fait arbitraire tant que l'on respecte la condition $R_e(u_1 \text{ et } u_2) > 0$ afin d'assurer la convergence de l'intégrale (fig.4.2.).

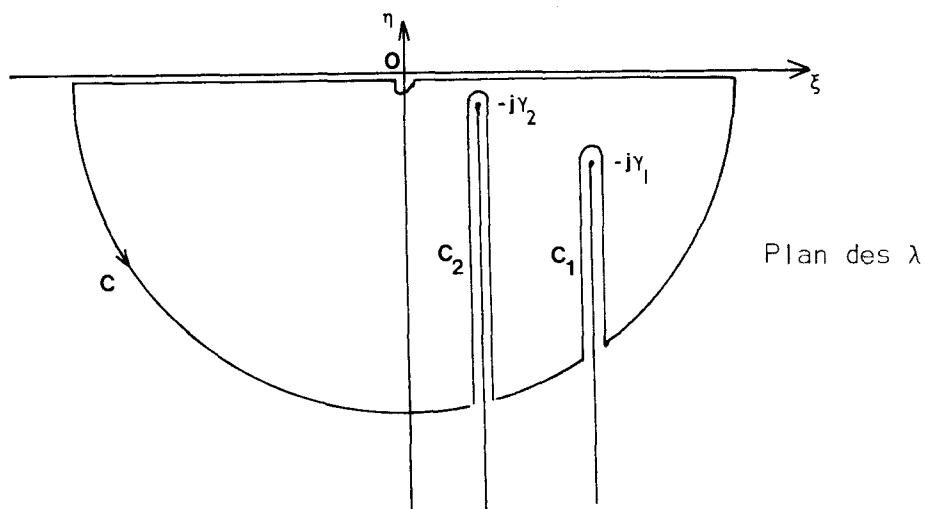


fig.IV.2.

Les deux coupures $\lambda = -j\gamma_1$ et $\lambda = -j\gamma_2$ déterminent une surface de Riemann à 4 feuillets dans chacun desquels la fonction à intégrer reste uniforme. A chaque fois que le contour d'intégration traverse une branche de coupure, il y a changement de détermination de la fonction multiforme correspondante et, par conséquent, le contour d'intégration saute d'un feuillet sur un autre.

Pour pouvoir appliquer le théorème des résidus, il faut pouvoir refermer le contour sur lui-même, et de plus, ce contour doit toujours parcourir entièrement chacun des feuillets sur lequel il passe. Nous avons indiqué dans le tableau ci-dessous les différents feuillets de la surface de Riemann suivant les déterminations de u_1 et u_2 .

Feuillets de la surface de Riemann	Détermination de u_1		Détermination de u_2	
	+	-	+	-
I	+		+	
II		-	+	
III	+			-
IV		-		-

L'intégration doit se faire dans le premier feuillet de Riemann afin d'assurer la convergence de l'intégrale. Sur ce feuillet, la fonction à intégrer ne présente pas de pôles. Le dénominateur de la fonction V_1 définie par :

$$D = \gamma_1^2 u_2^2 + \gamma_2^2 u_1^2 \tag{4.14.}$$

s'annule en effet uniquement dans les feuillets II et III pour les valeurs de λ définies par $\lambda = \pm \gamma_0$.

avec :

$$\gamma_0^2 = - \frac{\gamma_1^2 \gamma_2^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} = - \frac{\gamma_2^2}{1+n^2} \quad \text{avec} \quad n = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \tag{4.15.}$$

L'intégrale I, dont le domaine d'intégration initial est l'axe réel du plan des λ se décompose donc en deux intégrales le long des chemins C_1 et C_2 .

L'application du théorème des résidus donne alors :

$$I = I_{c1} + I_{c2}$$

L'intégration le long de ces contours par la méthode du col conduit à l'obtention de développements asymptotiques représentant les intégrales étudiées.

Nous rappelons les résultats détaillés dans la thèse de Fontaine⁽¹²⁾ lorsque le point d'observation est près de l'interface air-sol et qui restent valables pour $\omega\varepsilon \approx \sigma$. Nous détaillerons ensuite les contours d'intégration correspondant à une position quelconque, dans l'air, de ce point d'observation. Pour cela nous reprenons l'étude de Banos⁽¹¹⁾ sans faire l'approximation $\sigma \gg \omega\varepsilon$.

IV.3. Calcul du champ près de l'interface

L'intégrale V_i se décompose donc en la somme de deux intégrales $V_i^{(1)}$ et $V_i^{(2)}$ le long des contours d'intégration C_1 et C_2 .

Le développement asymptotique de $V^{(2)}$ est donné par la relation suivante :

$$V^{(2)}(a_i, b_i, r) = - \frac{2\gamma_1^3 e^{-\gamma_2 r - \gamma_1 a_i} (1-n^2)^{1/2}}{(\gamma_1^4 - \gamma_2^4) \gamma_1^2 r^2} \frac{1+n^2}{n^3} \left\{ F_0 - \frac{F_1}{2\gamma_2 r} + \dots \right\} \quad (4.16.)$$

Les coefficients de développement étant :

$$F_0 = 1 - \beta n^2 (1-n^2)^{1/2} \quad (4.17.)$$

$$F_1 = F_0 E_1 + b \left(\frac{\partial E_1}{\partial b} - n^2 \frac{\partial E_1}{\partial a} \right) \quad (4.18.)$$

avec :

$$E_1 = n^{-2} [6 + 4n^2 + (3\alpha + \beta^2)n^4 + \dots] \quad (4.19.)$$

$$E_2 = n^{-4} [120 + 168n^2 + (48 + 60\alpha + 20\beta^2)n^4 + \dots] \quad (4.20.)$$

$$\text{et } \alpha = -\gamma_1 a_i, \quad \beta = -\gamma_1 b_i \quad (4.21.)$$

Le rayon de convergence de la série asymptotique (4.16.) est limitée par la présence des pôles près du contour d'intégration. L'étude détaillée de cette série montre que les termes successifs décroissent en $(n^2 \gamma_2 r)^{-1}$. La formule (4.16.) ne pourra être utilisée que pour des distances émetteur-récepteur relativement grandes puisque r doit satisfaire la relation : $|n^2 \gamma_2 r| \gg 1$.

Cependant, le domaine d'application du développement peut être étendu en appliquant la technique de soustraction du pôle. Dans ce cas :

$$V^{(2)} = V^{(s)} + V^{(p)} \tag{4.22.}$$

où $V^{(s)}$ est le développement asymptotique après soustraction du pôle
 $V^{(p)}$ est la contribution de ce pôle.

On obtient les résultats suivants :

$$V^{(p)}(a_i, b_i, r) = - \frac{j\pi n^2 (1+n^2)^{-1/2}}{\gamma_1 (1-n^4)} e^{-\gamma_2 r - \gamma_1 a_i (1+n^2)^{-1/2} + n\gamma_2 b (1+n^2)^{-1/2}} \dots \times \{H_0^{(2)}(\gamma_0 r) e^{-j\gamma_0 r}\} \{e^{-x_0^2/2} \operatorname{erfc}(jx_0/\sqrt{2})\} \tag{4.23.}$$

$$\text{avec : } x_0 = -2\gamma_2 r [1 - (1+n^2)^{-1/2}]^{1/2} \tag{4.24.}$$

Le terme erfc désigne la fonction d'erreur.

De même :

$$V^{(s)}(a_i, b_i, r) = \frac{-2Q^{-1/2} e^{-\gamma_2 r}}{\gamma_1 (1-n^4) (\gamma_1 r)} e^{-\gamma_1 a (1+n^2)^{-1/2} + n\gamma_2 b (1+n^2)^{-1/2}} \dots \times \left\{ 1 - \frac{n(9+64\alpha+64\beta^2)}{128\gamma_1 r} + \dots \right\} \tag{4.25.}$$

avec :

$$Q = 2n^{-2} [(1+n^2)^{-1/2} - 1] \tag{4.26.}$$

Le comportement des premiers termes montre que ces séries convergent en $(\gamma_2 r)^{-1}$ ce qui correspond à une augmentation importante du domaine d'application du développement asymptotique.

La valeur de $V^{(1)}$ étant proportionnelle à $e^{-\alpha_1 r}/r^2$ avec $\alpha_1 = R_e\{\gamma_1\}$ la contribution de l'intégrale V le long du contour C_1 sera négligeable par rapport à $V^{(2)}$ sauf pour des points d'observation situés près de l'antenne, mais satisfaisant quand même la condition $|\gamma_2 r| \gg 1$, et placés au-dessus d'un sol très peu conducteur.

A titre d'exemple, nous donnons sur la figure.IV.3., les variations de α_1 en fonction de la fréquence pour différentes conductivités σ_1 du sol et en supposant une permittivité $\epsilon_{r1} = 10$. On a vu précédemment (ch.I.) que pour une valeur de σ_1 donnée, le coefficient d'affaiblissement tend, en haute fréquence, vers L_c^{-1} , L_c étant la longueur caractéristique du milieu définie par :

$$L_c = \frac{2}{\sigma_1} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \quad (4.27.)$$

Pour des conductivités moyennes de terrain et pour les fréquences qui nous intéressent ($f \geq 1\text{MHz}$), on déduit, d'après la fig.IV.3., que l'intégrale $V^{(1)}$ sera négligeable pour une distance émetteur-récepteur supérieure à une centaine de mètres.

Les développements asymptotiques que nous venons de donner ne sont valables que pour des points situés près de l'interface, donc si $r \gg h$ et z . Nous allons donc étudier dans le paragraphe suivant, le champ rayonné dans tout le demi-espace supérieur (air).

IV.4. Calcul du champ rayonné dans l'air

La forme générale de l'intégrale à calculer est :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{-u_1 a - u_2 b} H_0^{(2)}(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (4.28.)$$

Le principe de la méthode de calcul consiste à effectuer un changement de variable de façon à mettre l'intégrale sous la forme suivante :

$$I = \int_C G(\omega) e^{\phi(\omega)} d\omega \quad (4.29.)$$

On fait intervenir dans la fonction $\phi(\omega)$ les paramètres a , b et r qui peuvent devenir infinis lors du calcul. Le chemin d'intégration est le



fig.IV.3

contour de plus grande pente défini par : $I_m\{\phi(\omega)\} = \text{Cte}$ (4.30.)

Le col ω_0 de la fonction ϕ est tel que :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0} = 0 \quad (4.31.)$$

L'équation du contour est donc :

$$I_m\{\phi(\omega)\} = I_m\{\phi(\omega_0)\} \quad (4.32.)$$

Un changement de variable permet de revenir ensuite très facilement à une intégration le long de l'axe réel. Comme la valeur de l'intégrale est très faible quand on est loin du col, il suffit de trouver une représentation en série au voisinage de ce point et d'intégrer terme à terme. Tous les points délicats de la méthode sont expliqués clairement dans Banos⁽¹¹⁾ et Fontaine⁽¹²⁾. Nous renvoyons le lecteur à ces articles et nous nous contentons ici de détailler les chemins d'intégration afin de voir les modifications qui interviennent lorsque $\omega c \geq \sigma$.

IV.4.1. Déformation du chemin d'intégration dans le plan des λ

Nous avons vu précédemment (éq.4.2.) que la hauteur du point d'observation par rapport à l'interface intervenait dans le paramètre b . Il est donc intéressant de prendre comme exposant ϕ le terme :

$$\phi = -j\lambda r - u_2 b \quad (4.33.)$$

le terme en λr provenant du développement asymptotique de la fonction de Hankel. Nous allons exposer qualitativement les différents contours dont nous cherchons ensuite les équations. Le nouveau chemin d'intégration dépendra de l'angle θ défini par :

$$\text{tg}\theta = r/b \quad (4.34.)$$

et donc du gisement du point d'observation.

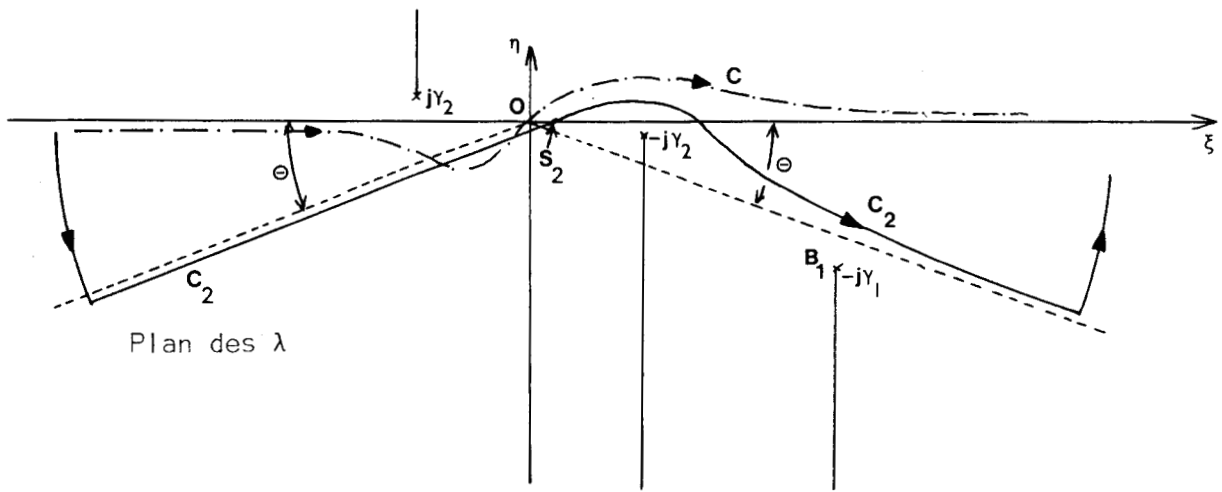


fig.IV.4.

Sur la figure.IV.4. nous avons représenté le nouveau contour dans le plan des λ . Le chemin part de $\lambda \rightarrow -\infty$, décrit une partie du cercle de rayon R, puis continue le long du chemin de plus grande pente C_2 , asymptotique à l'infini à une droite faisant l'angle θ avec l'axe réel. On retourne ensuite vers $\lambda \rightarrow +\infty$ par une autre partie du cercle.

Le contour C représenté également sur cette figure est le contour tracé pour $\theta = 0$, c'est-à-dire lorsque le point d'observation M se situe à la verticale de l'émetteur.

Quand M se rapproche de l'interface, donc lorsque θ augmente, le contour C_2 va traverser la branche de coupure associée au point $\lambda = -j\gamma_1$ (fig.IV.5.)

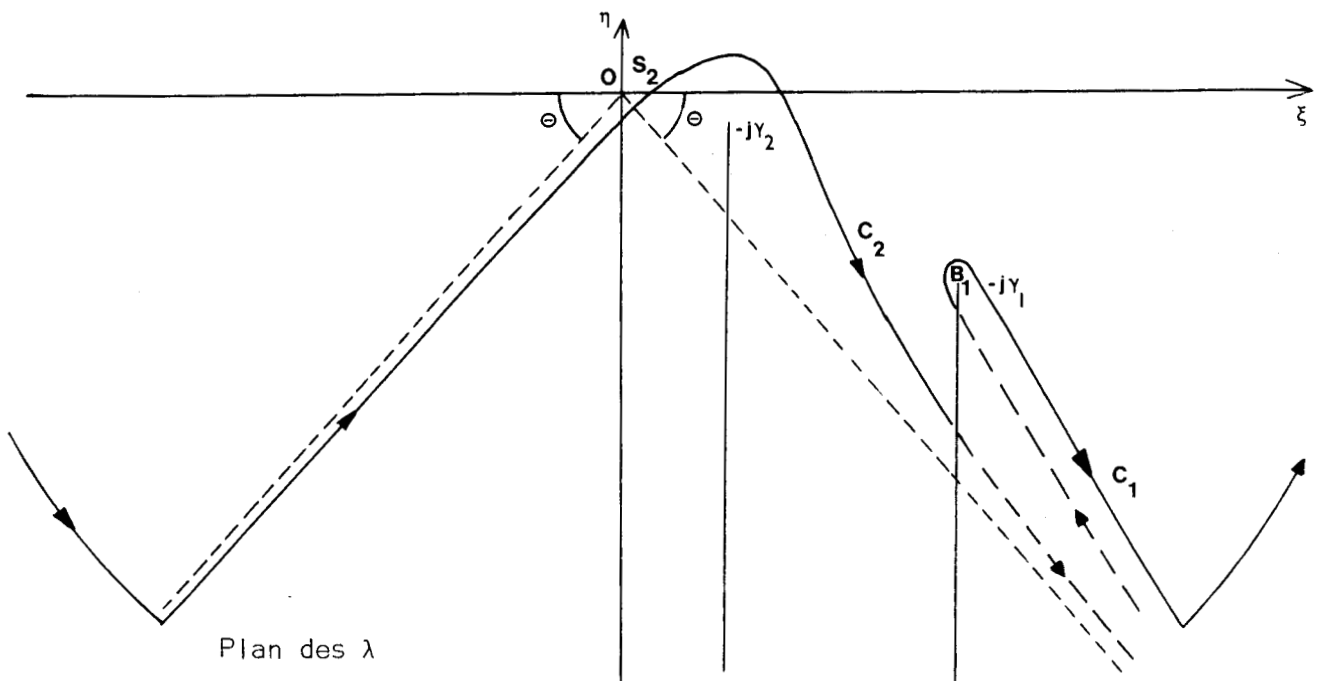


fig.IV.5.

La partie en pointillé de C_2 correspond à une excursion dans le feuillet II. Pour revenir dans le feuillet I, on va décrire un contour C_1 qui traversera de nouveau la coupure et, contournant le point de branchement B_1 défini par $\lambda = -j\gamma_1$, retournera à l'infini parallèlement à lui-même.

La valeur critique θ_0 pour laquelle le chemin C_2 passe par B_1 dépendra essentiellement de la fréquence et des caractéristiques du sol, contrairement au cas des basses fréquences. En effet, si $\sigma \gg \omega\epsilon$, le point B_1 se déplace en fonction de la fréquence sur une droite faisant un angle constant de $\pi/4$ avec l'axe des réels, ce qui n'est pas le cas en H.F.

A titre d'exemple, nous avons d'ailleurs représenté sur la figure.IV.6. la valeur de l'angle θ^* avec :

$$\theta^* = \text{Arc tg } \alpha_1/\beta_1 \quad (4.35.)$$

et qui caractérise l'angle que fait OB_1 avec l'axe réel, pour différentes valeurs de la conductivité du sol.

La branche de coupure correspondant à $u_1 = 0$ aurait pu être déformée afin qu'elle suive le chemin C_1 . Ceci aurait évité une excursion dans le feuillet II, mais au prix d'introduire pour u_1 une branche de coupure dépendant de l'angle θ . Il est préférable de retenir le choix initial des coupures dans le plan des λ qui sont des droites parallèles à l'axe imaginaire. Par conséquent, si nous notons $V^{(2)}$ et $V^{(1)}$ la valeur de l'intégrale le long des contours C_2 et C_1 , on peut écrire :

$$V(a_i, b_i, r) = V^{(2)} + \delta(\theta - \theta_0) V^{(1)} \quad (4.36.)$$

où $\delta(r)$ est la fonction unité telle que $\delta = +1$ si $\theta \geq \theta_0$ et $\delta = 0$ si $\theta < \theta_0$.

IV.4.2. Calcul de V le long du contour C_2

Pour calculer l'intégrale $V^{(2)}$ le long du contour C_2 par la méthode du col, il est intéressant d'effectuer la transformation conforme du plan des λ dans le plan des α grâce à la relation :

$$\lambda = -j\gamma_2 \sin \alpha \quad (4.37.)$$

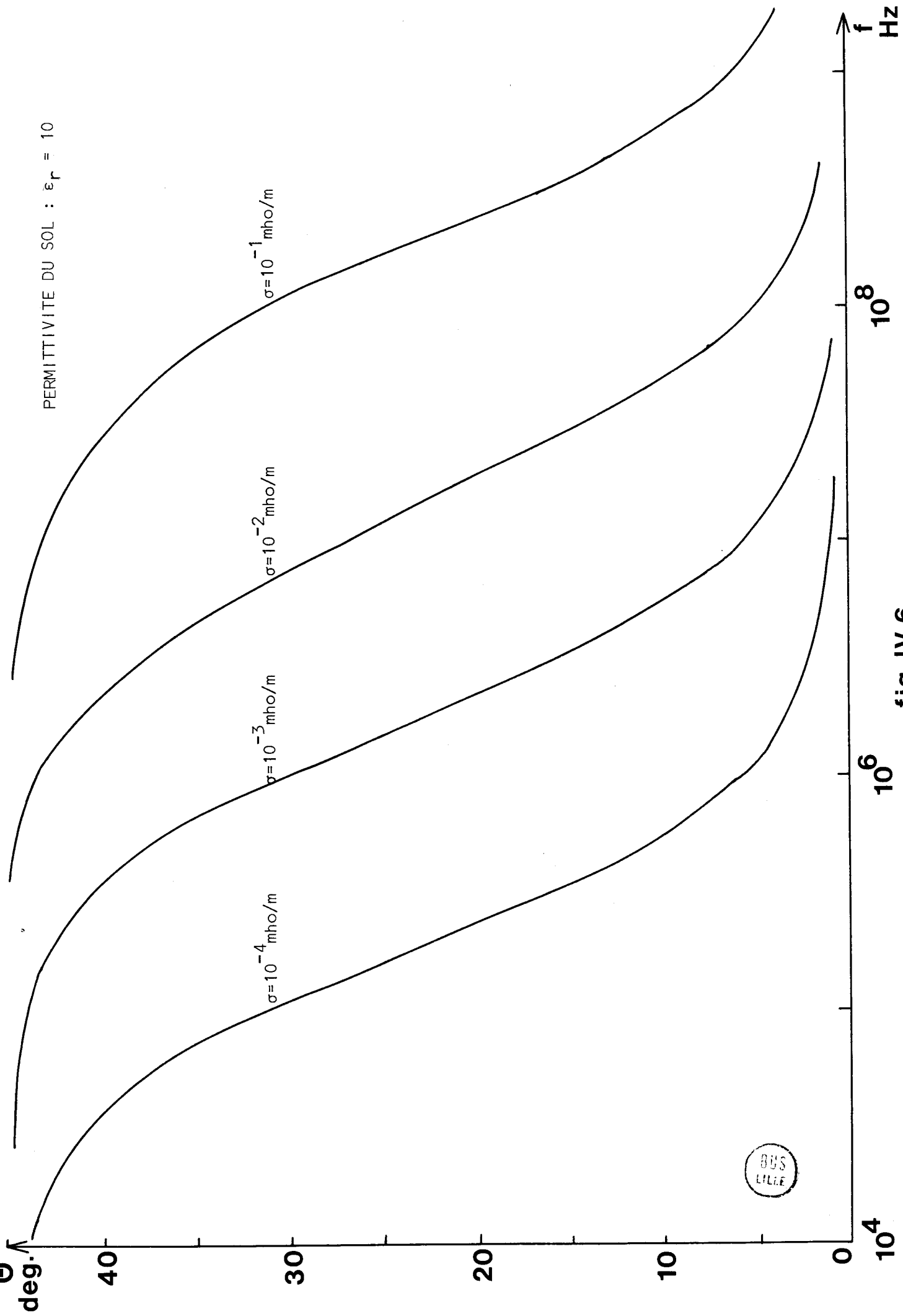


fig.IV.6

En posant :

$$\alpha = u + jv \quad (4.38.)$$

On obtient :

$$\lambda = \beta_2 \sin u \operatorname{ch} v + j\beta_2 \cos u \operatorname{sh} v \quad (4.39.)$$

Dans ce cas :

$$d\lambda = -j\gamma_2 \cos \alpha \, d\alpha \quad (4.40.)$$

$$u_1 = \gamma_1 (1 - n^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} \quad \text{et} \quad u_2 = \gamma_2 \cos \alpha \quad (4.41.)$$

Le dénominateur de la fonction à intégrer (4.1.) se met sous la forme :

$$D = \gamma_1^2 u_2^2 + \gamma_2^2 u_1^2 = \gamma_1^2 \gamma_2^2 \{ \cos^2 \alpha + n(1 - n^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} \} \quad (4.42.)$$

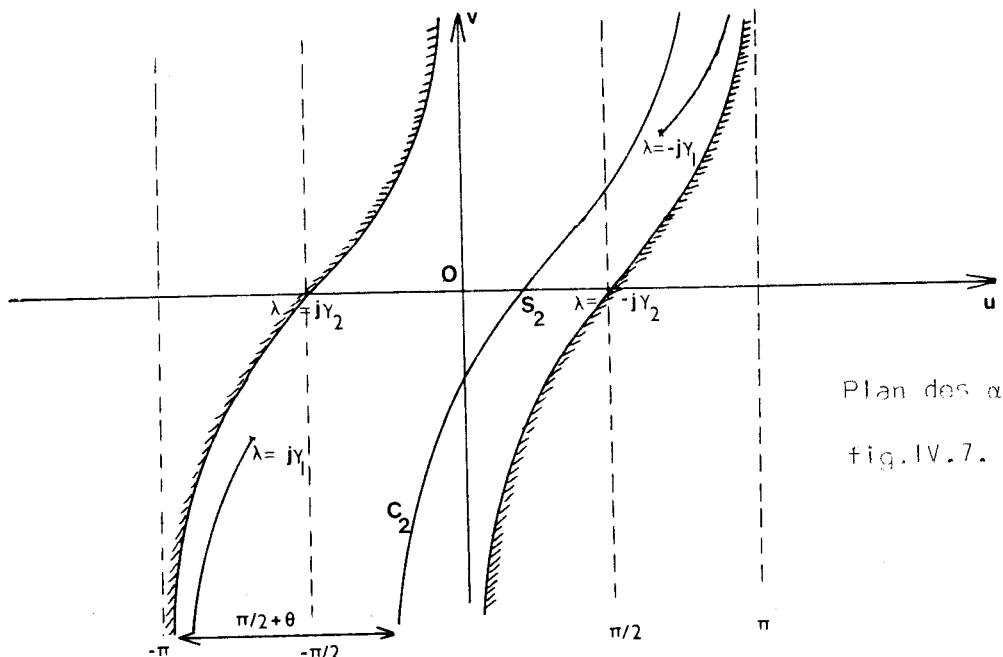
Le feuillet I de la surface de Riemann dans le plan des λ va se transformer en une bande curviligne de largeur égale à π et dont les limites sont les transformées des branches de coupure de u_2 . L'équation des coupures dans le plan des α est donc, d'après l'équation (4.39.) :

$$\sin u \operatorname{ch} v = \pm 1 \quad (4.43.)$$

Comme la condition $\operatorname{Re}\{u_2\} > 0$ doit également être vérifiée, on obtient :

$$v = -\log \operatorname{tg}(-u/2) \quad \text{et} \quad v = -\log \operatorname{tg}(-u/2 - \pi/2) \quad (4.44.)$$

Les courbes associées à ces équations traversent donc l'axe réel en $u = \pm \pi/2$ avec une pente de -1 et admettent des asymptotes en $u = 0$ et $u = \pm \pi$. Elles sont représentées sur la figure.IV.7.



Nous avons vu précédemment que l'exposant ϕ était :

$$\phi = -j\lambda r - u_2 b$$

En appliquant la transformation conforme, on obtient :

$$\phi = -\gamma_2 (r \sin \alpha + b \cos \alpha) \quad (4.45.)$$

Cette expression peut encore se mettre sous la forme :

$$\phi = -\gamma_2 R \cos (\alpha - \theta) \quad (4.46.)$$

avec :

$$r = R \sin \theta \quad , \quad b = R \cos \theta \quad , \quad R = \sqrt{r^2 + b^2} \quad (4.47.)$$

Le col de la fonction étant solution de $d\phi/d\alpha = 0$, il se situe dans le plan des α en $\alpha = \theta$. Il est représenté par le point S_2 sur la figure.IV.7. De même, dans le plan des λ , il est situé en $\lambda = -j\gamma_2 \sin \theta$, donc pratiquement sur l'axe réel, entre 0 et $-j\gamma_2$ (fig.IV.4.) et (IV.5.).

Le chemin de plus grande pente étant défini par $I_m\{\phi\} = I_m\{\phi\}_{\alpha=\theta}$, cette condition s'écrit :

$$I_m\{-\gamma_2 R \cos (\alpha - \theta)\} = I_m\{\gamma_2 R\} \quad (4.48.)$$

soit, puisque $\alpha = u + jv$:

$$\cos(u - \theta) \operatorname{ch} v = 1 \quad (4.49.)$$

En comparant les équations (4.49.) et (4.43.), on voit que le chemin de plus grande pente C_2 , dans le plan des α , peut être déduit de la branche de coupure correspondant à $\lambda = j\gamma_2$ par une translation égale à $\pi/2 + \theta$ (fig.IV.7.). Sur la figure.IV.7., nous avons d'ailleurs supposé que $\theta < \theta_0$, par conséquent C_2 ne rencontre pas la transformée de la branche de coupure associée à $\lambda = +j\gamma_1$.

Expression de V_2

En appliquant la méthode du col le long du contour C_2 , la solution de V est la série asymptotique suivante :

$$V^{(2)}(a_j, b_j, r) = \frac{-2\cos\theta e^{-\gamma_2 R - \gamma_1 a(1-n^2\sin^2\theta)^{1/2}}}{\gamma_1^2 R \{\cos\theta + n(1-n^2\sin^2\theta)^{1/2}\}} \left[1 + j \frac{E_1}{\gamma_2 R} + \dots \right] \quad (4.50.)$$

le terme E_1 est donné par :

$$\begin{aligned} E_1 = & -1 - \frac{1}{2} n^2 \alpha \frac{2\cos^2\theta - 3\sin^2\theta}{(1-n^2\sin^2\theta)^{1/2}} - \frac{1}{2} n^4 \alpha \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta}{(1-n^2\sin^2\theta)^{3/2}} \\ & + \frac{1}{2} n^4 \alpha^2 \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta}{1-n^2\sin^2\theta} - \frac{n^2 \alpha \sin^2\theta \cos\theta [n^3 \cos\theta + (1-n^2\sin^2\theta)^{1/2}]}{(1-n^2\sin^2\theta) [\cos\theta + n(1-n^2\sin^2\theta)^{1/2}]} \\ & + \frac{\sin^2\theta}{1-n^2\sin^2\theta} \left[\frac{n^3 \cos\theta + (1-n^2\sin^2\theta)^{1/2}}{\cos\theta + n(1-n^2\sin^2\theta)^{1/2}} \right]^2 + [\cos\theta + n(1-n^2\sin^2\theta)^{1/2}]^{-1} \\ & \times \left\{ \cos\theta + \frac{1}{2} n^3 \frac{2\cos^2\theta - 3\sin^2\theta}{(1-n^2\sin^2\theta)^{1/2}} + \frac{1}{2} n^5 \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta}{(1-n^2\sin^2\theta)^{3/2}} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \right\} \end{aligned} \quad (4.51.)$$

L'étude de la série asymptotique montre que si θ est proche de zéro, les termes d'ordre élevé dans l'équation (4.50.) se comportent en puissance de $|\gamma_2 R(1-\sin\theta)|^{-1}$, tandis que si $\theta \rightarrow \pi/2$, ils varient en $(n^2 \gamma_2 R)^{-1}$.

De plus on peut remarquer que le premier terme de la série (4.50.) se comporte en $\exp(-\gamma_2 R)/R$. Ceci n'est évidemment valable que si le deuxième terme entre crochets est négligeable vis-à-vis de 1, ce qui se produit quand θ est petit. Par contre, lorsque $\theta \rightarrow \pi/2$, donc quand le point d'observation est proche de l'interface, on obtient, en recombinaison les termes du même ordre de grandeur :

$$V_{\theta \approx \pi/2}^{(2)} = -2 \frac{e^{-\gamma_2 R - \gamma_1 a(1-n^2\sin^2\theta)^{1/2}}}{\gamma_1^2 R [\cos\theta + n(1-n^2\sin^2\theta)^{1/2}]} \times \left\{ \cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\gamma_2 R [\cos\theta + n(1-n^2\sin^2\theta)^{1/2}]} \right\} \quad (4.52.)$$

Cette représentation n'est correcte que si $|n^2 \gamma_2 R \sin\theta| \gg 1$.

Ce faible rayon de convergence dans le cas $\theta \approx \pi/2$ provient du fait qu'il existe un pôle près du contour. En appliquant la technique de soustraction du pôle, on retrouverait les expressions (4.23.) à (4.26.) données précédemment pour un point d'observation situé près de l'interface.

IV.4.3. Calcul de V le long du contour C₁

a) Détermination de θ₀

Le contour C₁ n'intervenant dans le calcul de V que si θ₀ < θ < π/2, il importe de déterminer la valeur de l'angle critique θ₀. On sait que θ₀ est l'angle pour lequel le contour C₂ passe par le point de branchement B₁ défini par λ₁ = -jγ₁. Il est utile tout d'abord de trouver une valeur approchée de θ₀.

Si le contour C₂ coïncidait avec son asymptote au voisinage de B₁, on aurait :

$$\theta_0 = |\text{Arg}(-j\gamma_1)| \quad (4.53.)$$

en posant :

$$\gamma_1 = |\gamma_1| e^{j\chi_1} \quad (4.54.)$$

on obtient :

$$\theta_0 \approx \pi/2 - \chi_1 \quad (4.55.)$$

On peut chercher ainsi une solution pour θ₀ de la forme θ₀ = π/2 - χ₁ + ε.

Pour déterminer ε, il suffit de connaître l'équation du contour C₂ et d'écrire que les coordonnées du point de branchement B₁ vérifient cette équation. Si on se place par exemple dans le plan des α, on doit avoir :

$$-j\gamma_2 \sin \alpha_b = -j\gamma_1 \quad \text{soit} \quad \sin \alpha_b = \frac{1}{n} \quad (4.56.)$$

avec : α_b = u₁ + jv₁, u₁ et v₁ étant les coordonnées de B₁.

Si |n²| << 1, c'est-à-dire en haute fréquence, si la permittivité ε_r du sol est élevée, les solutions de (4.56.) sont données par :

$$u_1 = \pi - \chi_1 + O(n^2) \quad (4.57.)$$

$$v_1 = -\log \frac{|n|}{2} + O(n^4) \quad (4.58.)$$

Dans le cas contraire (|n²| < 1), il faut développer en série u₁ et v₁ à des degrés de n plus importants.

Or l'équation du contour C_2 dans le plan des α est :

$$v = - \text{Log} [\text{tg}(\pi/4 + \theta/2 - u/2)] \quad (4.59.)$$

Par conséquent, en remplaçant u et v par leurs valeurs données par les équations (4.57.) et (4.58.), on obtient finalement la valeur de θ_0 :

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \chi_1 + |n| + O(n^2) \quad (4.60.)$$

b) Chemin d'intégration

Pour calculer l'intégrale $V^{(1)}$ le long du contour C_1 , on introduit la transformation conforme $\lambda = -j\gamma_1 \cos \omega$ (4.61.)

On a donc : $d\lambda = j\gamma_1 \sin \omega d\omega$ (4.62.)

et $u_1 = -\gamma_1 \sin \omega$ $u_2 = \gamma_2 (1 - n^{-2} \cos^2 \omega)^{1/2}$ (4.63.)

Comme précédemment, le feuillet l de la surface de Riemann dans le plan des λ va se transformer en une bande curviligne de largeur π et limitée par les coupures correspondant à $\lambda = \pm j\gamma_1$.

Les équations de ces coupures sont donc :

$$\beta_1 \cos u \operatorname{ch} v - \alpha_1 \sin u \operatorname{sh} v = \pm \beta_1 \quad (4.64.)$$

On peut montrer facilement que les solutions de l'équation précédente sont :

$$v = - \text{Log} \frac{\sin 1/2 (\chi_1 - u)}{\sin 1/2 (\chi_1 + u)} \quad (4.65.)$$

$$v = - \text{Log} \frac{\sin 1/2 (\chi_1 - \pi - u)}{\sin 1/2 (\chi_1 + \pi + u)} \quad (4.66.)$$

Ces courbes sont représentées dans le plan des ω sur la figure.IV.8.

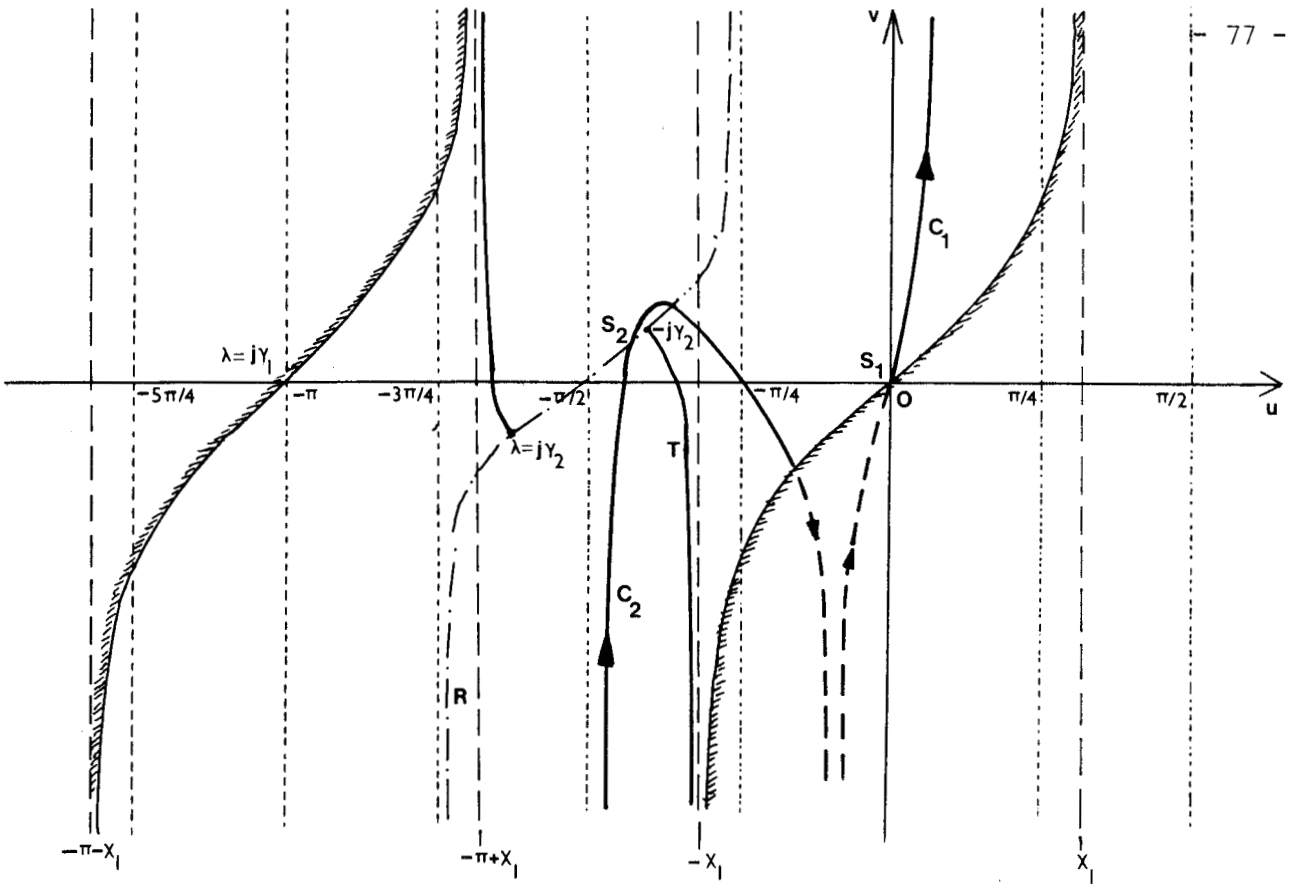


fig.IV.8.

La transformée de l'axe réel du plan des λ , satisfait dans le plan des ω la condition $I_m\{-j\gamma_1 \cos\omega\} = 0$, ce qui se traduit par l'équation :

$$v = \frac{1}{2} \text{Log tg}\left(\frac{3\pi}{4} + u\right) \quad (4.67.)$$

Sur la figure.IV.8., cette transformée est repérée par la lettre R et est tracée en traits mixtes.

Il est intéressant de faire également figurer la transformée de la coupure correspondant au point de branchement $\lambda = -j\gamma_2$. Elle est asymptotique à la droite verticale d'abscisse $u = -\chi_1$ et est repérée par la lettre T.

De plus, il faut choisir pour C_1 un chemin de plus grande pente pour pouvoir calculer l'intégrale le long de ce contour. Or l'exposant que l'on a choisi est :

$$\phi = -j\lambda r - u_2 b$$

La transformée conforme précédente mène donc à :

$$\phi(\omega) = -\gamma_1 r \cos\omega + j\gamma_1 b (\cos^2\omega - n^2)^{1/2} \quad (4.68.)$$

Les cols associés à cette fonction doivent être solutions de $d\phi/d\omega = 0$.
On trouve deux valeurs de ω :

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad \omega = -\pi/2 - \text{Arc sin}(n \sin\theta) \quad (4.69.)$$

que l'on a fait figurer par les points S_1 et S_2 .
Le contour C_1 est alors défini par :

$$I_m \{-\gamma_1 r \cos\omega + j\gamma_1 b (\cos^2\omega - n^2)^{1/2}\} = I_m \{-\gamma_1 r + j\gamma_1 b (1-n^2)^{1/2}\} \quad (4.70.)$$

En remplaçant ω par $u+jv$ dans l'équation précédente et en faisant tendre v vers l'infini, on trouve que le chemin C_1 admet les asymptotes verticales en :

$$u = \pm (\pi/2 - \theta - \chi_1) \quad (4.71.)$$

Les contours C_1 et C_2 sont représenté sur la figure.IV.8., les morceaux en pointillé correspondant, comme nous l'avions signalé, à une excursion dans le feuillet II.

c) Expression de $V^{(1)}(a_i, b_i, r)$

En appliquant la méthode du col, on trouve⁽¹¹⁾ :

$$V^{(1)} = \frac{2[-j\gamma_1 a(1-n^2)^{1/2} + n^2] e^{-\gamma_1 r - \gamma_1 b(1-n^2)^{1/2}}}{\gamma_1(1-n^2) (\gamma_1 r)^2 [1-j(1-n^2)^{-1/2} \cotg\theta]^{3/2}} \quad (4.72.)$$

Comme pour des points au voisinage de l'interface, le coefficient d'affaiblissement de $V^{(1)}$ est proportionnel à $e^{-\alpha_1 r/r^2}$.

La valeur de l'intégrale $V^{(1)}$ le long du contour C_1 sera négligeable par rapport à $V^{(2)}$ sauf pour des points d'observation situés près de l'antenne, au-dessus d'un sol peu conducteur.

Dans le cas général, la solution globale est donnée par $V = V^{(1)} + V^{(2)}$ si $\theta_0 \leq \theta \leq \pi/2$ et par $V = V^{(2)}$ si $\theta < \theta_0$. On remarque que si $\omega \epsilon$ n'est plus négligeable devant σ , la seule modification dans les formules analytiques par rapport au cas des basses fréquences est la valeur de l'angle θ_0 à partir de laquelle il faut tenir compte de l'intégrale $V^{(1)}$.

Connaissant les valeurs de $V^{(1)}$ et $V^{(2)}$ on peut en déduire, d'après les formules (4.5.) à (4.12.), l'amplitude du champ rayonné dans tout l'espace.

IV.5. Exemples numériques : diagramme de rayonnement

L'antenne d'émission peut être assimilée à une suite de petits dipôles. Connaissant la répartition du courant, le champ électrique total s'obtient en effectuant l'intégration du champ produit par ces dipôles élémentaires.

IV.5.1. Cas d'une antenne aérienne

Nous avons représenté sur la figure.IV.9. le diagramme de rayonnement dans l'air d'une antenne placée au-dessus du sol, à une distance d'une demi-longueur d'onde. L'antenne résonne en $a = \lambda/4$, la fréquence d'émission étant de 100MHz. La permittivité du sol ϵ_r est supposée constante : $\epsilon_r = 5$ et la conductivité σ a été introduite en paramètre. Elle prend successivement la valeur : $\sigma \rightarrow \infty$, 10^{-1} et 10^{-2} mho/m. Les courbes (1) en pointillé, ont été tracées en supposant une répartition sinusoïdale du courant et les courbes (2) en tenant compte de tous les modes T.M. qui se propagent, et également, de la présence de l'interface air-sol. On a supposé dans les deux cas que le courant fourni par le générateur est identique.

On remarque que les formes de diagramme, pour une conductivité donnée du terrain, sont semblables et ne diffèrent seulement que par l'amplitude du champ dans une direction donnée. Ce résultat peut s'expliquer aisément en comparant, comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents, les répartitions du courant suivant les différentes configurations. En particulier, nous avons vu que la dissymétrie du courant sur chacun des bras de l'antenne, qui traduit l'effet de proximité du sol, était faible. De plus, les modes T.M. interviennent essentiellement dans l'amplitude du courant. Ces différentes contributions ne modifient donc pas d'une façon sensible, la forme des diagrammes.

Pour mettre en évidence l'influence de la conductivité du sol, nous avons représenté sur les figures (IV.10.) à (IV.13.) le diagramme,

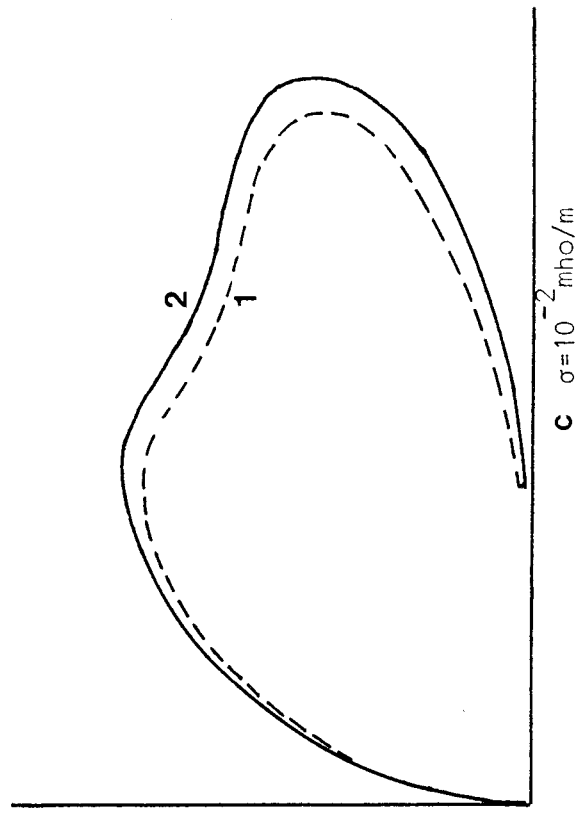
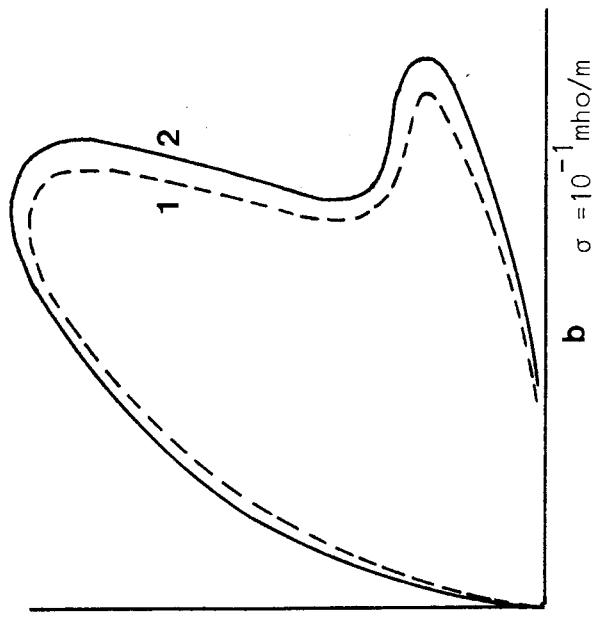
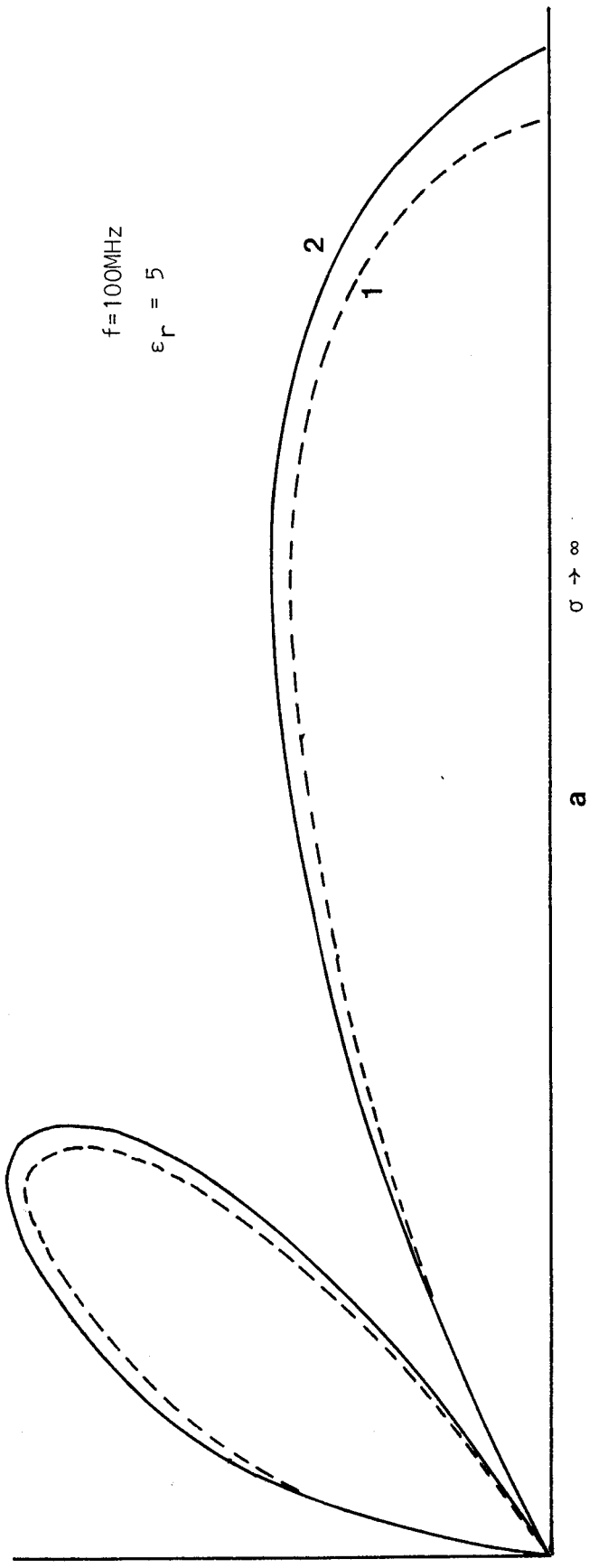


fig.IV.9

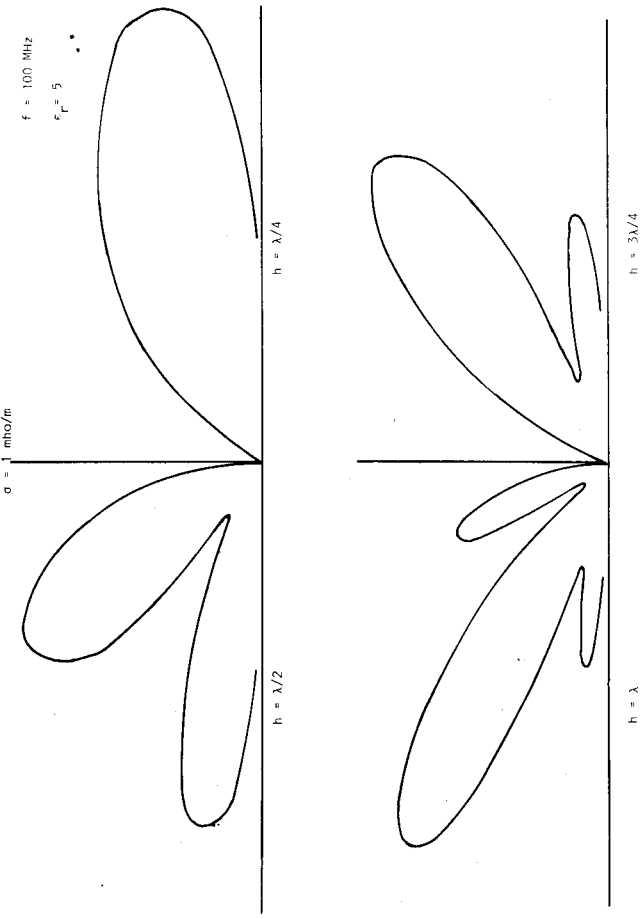


fig. IV.11

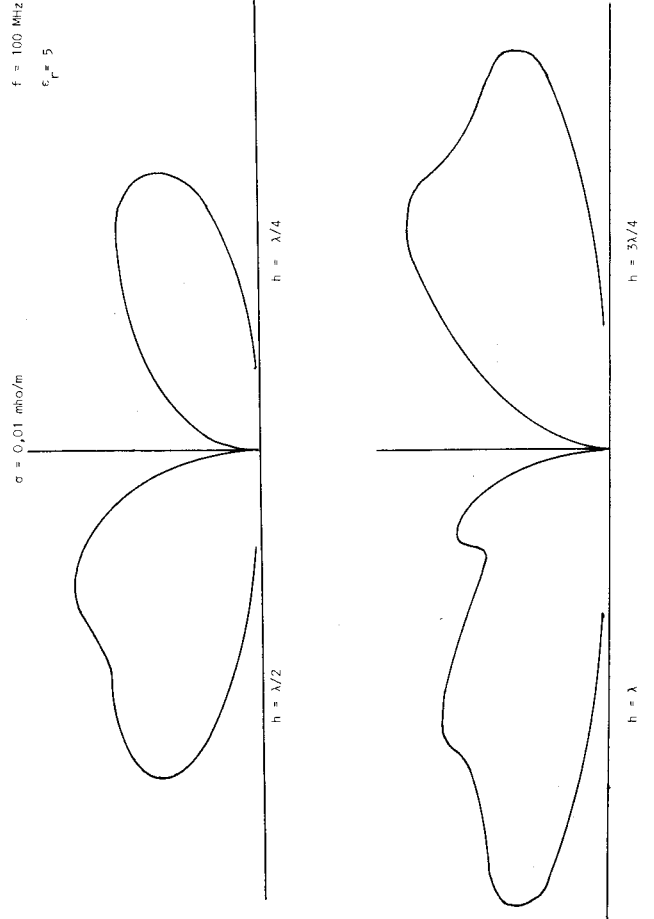


fig. IV.13

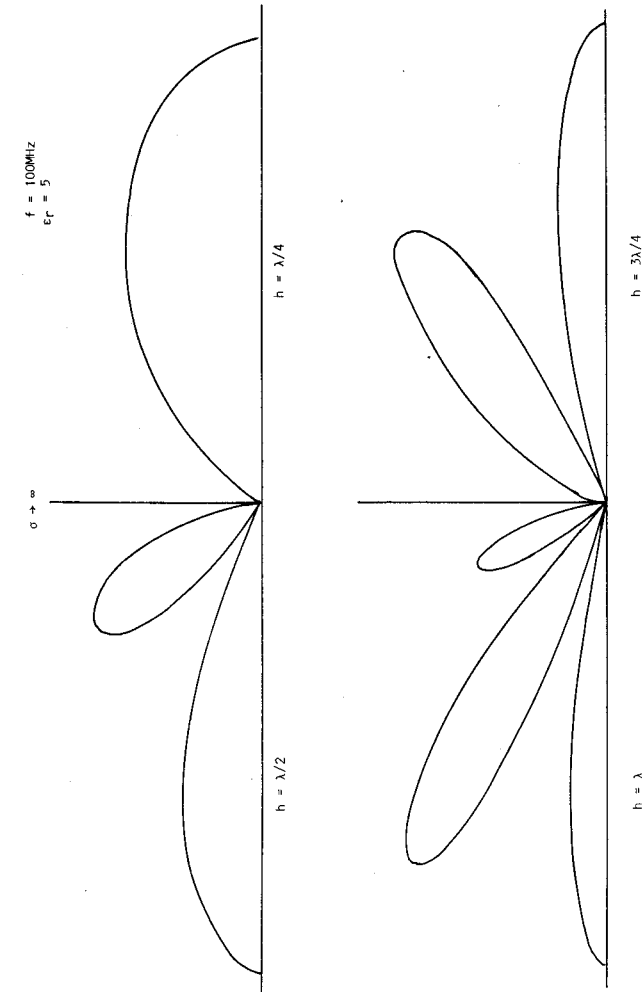


fig. IV.10

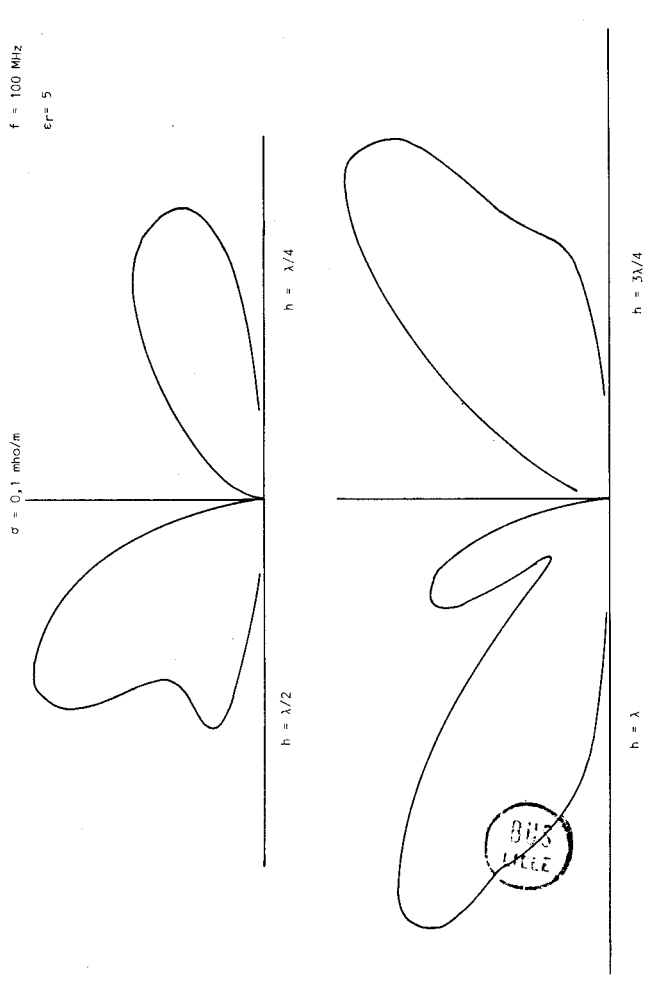


fig. IV.12

BUS
 FREE

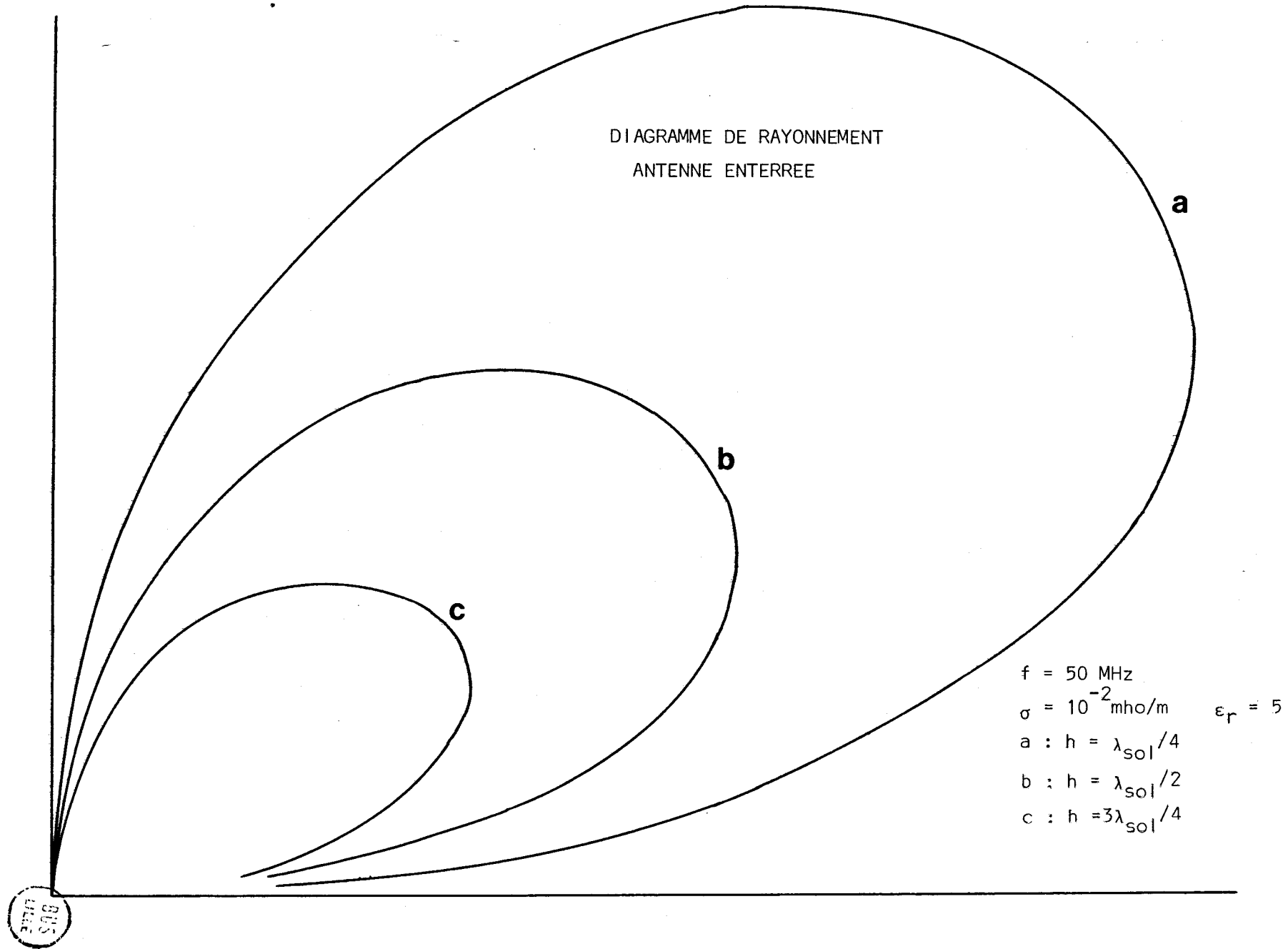


fig.IV.14

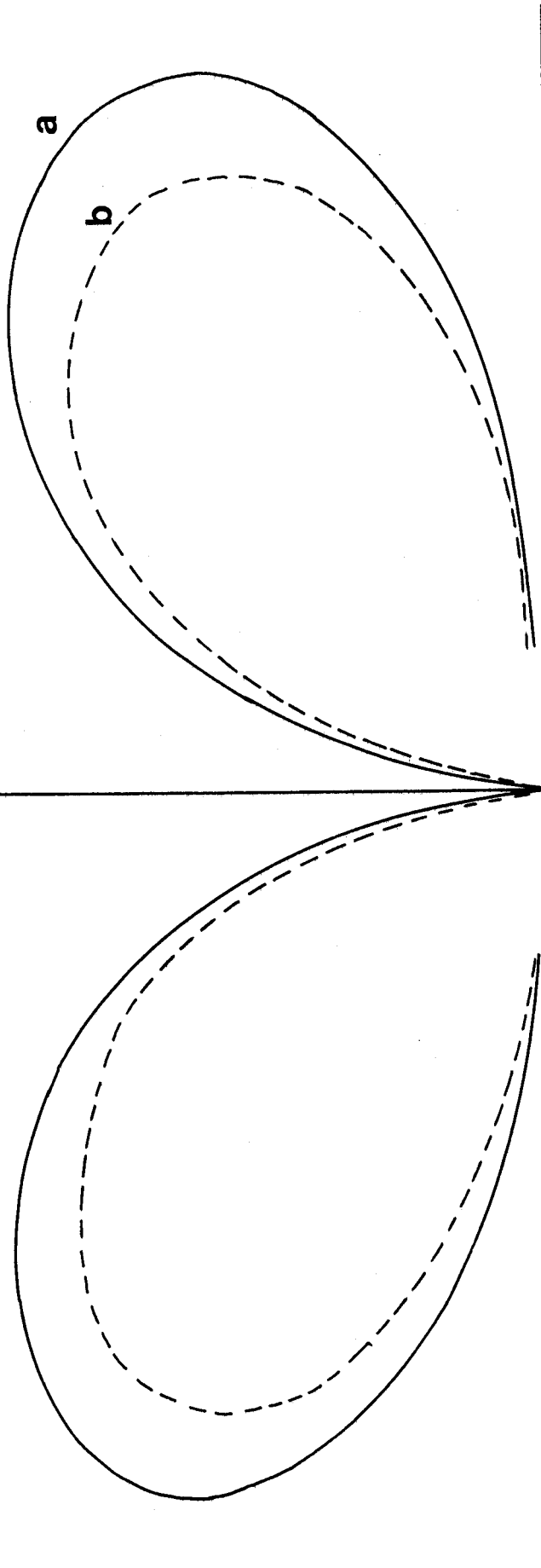
DIAGRAMME DE RAYONNEMENT - ANTENNE ENTERREE -

$f = 50 \text{ MHz}$ $h = 1 \text{ m}$

$\epsilon_r = 5$

a : $\sigma = 10^{-4} \text{ mho/m}$

b : $\sigma = 10^{-2} \text{ mho/m}$



L'amplitude de la courbe b a été multipliée par un facteur 4 par rapport à celle de la courbe de a



fig.IV.15

dans l'air, d'une antenne résonnante en $a = \lambda/4$, placée à une hauteur $h = \lambda/4, \lambda/2, 3\lambda/4$ et λ et pour différentes valeurs de conductivité : $\sigma \rightarrow \infty, 1, 10^{-1}$ et 10^{-2} mho/m.

Lorsque la conductivité diminue, les différents lobes d'un même diagramme deviennent évidemment de moins en moins séparés, et l'allure de la courbe tend à s'uniformiser.

IV.5.2. Cas d'une antenne enterrée

La figure.IV.14. donne le diagramme dans l'air obtenu à partir d'une antenne enterrée dans un sol ayant les caractéristiques suivantes : $\sigma = 10^{-2}$ mho/m et $\epsilon_r = 5$. La fréquence d'émission est de 50MHz et l'antenne résonne en $a = \lambda/4$. On remarque d'après ces courbes que la forme du diagramme est pratiquement indépendante de la profondeur de l'antenne.

Enfin, les courbes de la figure.IV.15. montrent l'influence de la conductivité du terrain, l'antenne étant enterrée à une profondeur constante $h = 1$ m. Dans ce cas également, la valeur de la conductivité ne joue que sur l'amplitude du champ rayonné.

Cette étude des diagrammes de rayonnement montre donc qu'il n'y a pas de modification sensible de la forme des diagrammes en prenant comme répartition du courant celle donnée par le calcul exact au lieu de celle due à l'approximation sinusoïdale. Cependant, il est nécessaire de calculer rigoureusement la valeur de l'impédance d'entrée de l'antenne afin de déterminer le courant fourni par l'émetteur et par conséquent, l'amplitude du champ rayonné.

C O N C L U S I O N

Dans cette étude, nous avons développé la théorie de l'antenne biconique mince placée verticalement près de la surface du sol. Bien que de nombreux travaux aient déjà été faits sur ce type d'antenne, peu d'entre eux portent sur l'influence des paramètres électriques du sol sur l'amplitude des champs rayonnés. De plus, les modifications des caractéristiques électriques de l'antenne biconique dues à l'interface air-sol n'avaient pas encore été étudiées.

Nous avons supposé tout d'abord que l'antenne pouvait être placée dans une cavité diélectrique au sein d'un milieu conducteur, homogène et infini. Les expressions exactes de l'impédance d'entrée et de la répartition du courant ont été obtenues. De nombreuses applications numériques ont mis en évidence le rôle de chacun des paramètres caractérisant l'antenne et son environnement. Cette étude permet, pour une situation donnée, d'ajuster les paramètres dont on dispose afin d'assurer le meilleur rayonnement possible. L'hypothèse assimilant le sol, pour une antenne enterrée, à un milieu homogène et infini n'est cependant valable que si cette antenne est située suffisamment loin d'une interface pour pouvoir négliger son influence. Or, dans la plupart des cas pratiques, les couches de terrain proches de la surface sont très conductrices et il est nécessaire de placer l'antenne à faible profondeur afin d'éviter un affaiblissement des ondes trop important.

Nous avons donc étudié les modifications apportées par la surface du sol, sur les caractéristiques de l'antenne. Nous avons envisagé le cas général où l'antenne pouvait être placée soit dans l'air, soit dans le sol.

Les exemples donnés montrent que la présence de l'interface change essentiellement la valeur de l'impédance d'entrée, mais que la dissymétrie du courant sur les deux bras de l'antenne reste très faible.

Enfin, pour déterminer l'amplitude du champ rayonné par l'antenne aérienne ou enterrée, nous avons repris le travail de Banos en ne faisant plus l'hypothèse restrictive du courant de déplacement négligeable vis-à-vis du courant de conduction. L'influence des caractéristiques du sol et de l'antenne sur la forme des diagrammes de rayonnement a été mise en évidence grâce à de nombreux exemples.

Nous pensons donc avoir apporté une contribution importante au problème de rayonnement d'une antenne biconique mince. Cette étude pourrait être étendue au cas d'une antenne biconique d'angle quelconque. Cependant les expressions analytiques auxquelles on aboutirait seraient beaucoup plus compliquées.

BIBLIOGRAPHIE

REFERENCES

- (1) R.W.P. KING and D. MIDDLETON, "The cylindrical antenna, current and impedance", Quart. of appl. Math., vol.III, n°4, 1946
- (2) C.T. TAI, "A variational solution to the problem of cylindrical antennas" Stanford Res. Inst., Rept.12, Aug. 1950
- (3) R.H. DUNCAN and F.A. HINCHEY, "Cylindrical antenna theory", J. of Res. of the N.B.S., n°5, 1960, vol.64.D.
- (4) R.F. HARRINGTON, "Field computation by moment method", Mc Millan Co, 1968
- (5) S.A. SCHELKUNOFF, "Theory of antennas of arbitrary size and shape", Proc.I.R.E., Vol.29, pp.493-521, 1941
- (6) F.P. ZIOLKOWSKI and C.K. H. TSAO, "Antennas buried in a roadway for vehicular traffic communications", I.E.E.E. Trans. on Vehicular Tech., Vol.VT 20, n°4, Nov. 1971
- (7) E.K. MILLER, A.J. POGGIO, G.J. BURKE and E.S. SELDEN, "Analysis of wire antennas in the presence of a conducting half-space", Canad. J. of phys., part I, II and III, 1973
- (8) R. GABILLARD, "Réflexions sur le problème de la propagation d'une onde électromagnétique dans le sol", Revue de l'I.F.P., vol.XVIII, n°9, Sept. 1963
- (9) J.R. WAIT, "Radiation from dipoles in an idealized jungle environment", Radio Sci., vol.2, n°7, pp.747-750, July 1967
- (10) T.M. TAMIR and A.W. BIGGS, "On the optimization of the ground wave above a dissipative half-space", I.E.E.E. Trans. A.P., vol.16, pp.607-608, 1968
- (11) A. BANOS, "Dipole radiation in the presence of a conducting half-space", PERGAMON Press, 1966
- (12) J. FONTAINE, "Contribution à la théorie du rayonnement des dipôles enterrés et au développement de méthodes d'optimisation des liaisons électromagnétiques entre terminaux souterrains", Thèse de Doctorat d'Etat, LILLE, 1969
- (13) R.W.P. KING, "Electromagnetic Engineering - Fundamentals", Mc GRAW-HILL Co, 1945

- (14) G.V. KELLER, F.C. FRISCHKNECHT, "Electrical methods in geophysical prospecting", Pergamon Press, 1970
- (15) DEBYE, "Polar molecules", Chemical Catalog Co
- (16) J.C. MAXWELL, "A treatise on electricity and magnetism", Oxford ed., 1892
- (17) K.W. WAGNER, Ann. Physik, vol.40, p.817, 1913
- (18) A. VON HIPPEL, "Dielectrics and waves", J. Wiley Co, 1954
- (19) P. SIMANDOUX, "L'effet Maxwell-Wagner dans les milieux poreux", Rapport I.F.P.-A.R.T.F.P., Mars 1962
- (20) K.L. CHELIDZE, "Concerning the question of the frequency dependence of the electrical properties of rocks", Ir. Inst. Geofiz., Akad. Nauk. Georgian SSR, vol.21, 1963
- (21) A.G. IVANOV, "On the relationship of the active resistivity of a rock to the frequency of the current", Vopr. Teorii i Praktiki Elektrometrii, 1961
- (22) E.I. PARKHOMENKO, "Electrical properties of rocks", Plenum Press, N.Y., 1967
- (23) R. GABILLARD, P. DEGAUQUE, J.R. WAIT, "Rayonnement des sources électromagnétiques placées dans des milieux absorbants, Analyse bibliographique", A.G.A.R.D. Proc.n°77, pp.4-1, 4-21, Paris, Juin 1970
- (24) R. GABILLARD, P. DEGAUQUE, J.R. WAIT, "Rayonnement des antennes placées dans des milieux absorbants. Revue", A.G.A.R.D, Proc. n°77, pp.5-1,5-23, Paris, Juin 1970
- (25) R. GABILLARD, P. DEGAUQUE, J.R. WAIT, "Subsurface electromagnetic telecommunication. A review", I.E.E.E. Trans. on Comm. Tech., vol.COM 19, n°6, pp.1217-1228, Dec.1971
- (26) R.W.P. KING, "The theory of linear antennas", Harvard U. Press, Cambridge, 1956
- (27) R.W.P. KING, C.W. HARRISON, "Half wave cylindrical antenna in a dissipative medium : current and impedance", J. of Res. of the N.B.S., vol.64.D, n°4, 1960
- (28) R.W.P. KING, "Cylindrical antennas and arrays", in "Antenna theory", R.E. COLLIN and F.J. ZUCKER Ed. , Mc GRAW-HILL Co, 1969

- (29) J.R. WAIT, "Electromagnetic radiation from conical structure", in Antenna theory, R.E. Collin and F.J. Zucker Ed., Mc GRAW-HILL Co, 1969
- (30) S.A. SCHELKUNOFF, "Advanced antenna theory", J. Wiley Co, N.Y. 1952
- (31) C.T. TAI, "On the theory of biconical antennas", J. of Appl. Phys., vol.19, pp.1155-1160, 1948
- (32) C.T. TAI, "Application of a variational principle to biconical antennas" J. Appl. Phys., vol.20, pp.1076-1084, 1949
- (33) D.P. SMITH, "The conical dipole of wide angle", J. Appl. Phys., vol.19, pp.11-23, 1948
- (34) L. ROBIN, et A. PEREIRA-GOMES, "L'antenne biconique, symétrique, d'angle quelconque", Ann. Telecom., vol.8, 1953
- (35) S.A. SCHELKUNOFF, "Electromagnetic waves", Van Nostrand Co, N.Y., 1945
- (36) R. W.P. KING, B. SANDLER, T. T. WU, "Cylindrical antennas immersed in arbitrary homogeneous isotropic media", J. of appl. Phys., vol.40, n°13, pp.5049-5065, Dec.1969
- (37) R. W. P. KING, B. H. SANDLER, T. T. WU, "Cylindrical antennas in a dissipative medium program", ASIS-NAPS Doc., NAPS-0212, N.Y., May 1973
- (38) P. DEGAUQUE, J. FONTAINE et R. GABILLARD, "Sur le rayonnement en haute fréquence des antennes placées en milieu absorbant", C.R. Acad. Sci. fr., t.274, pp.23-26, 1972
- (39) P. DEGAUQUE, J. FONTAINE et R. GABILLARD, "Sur le rayonnement d'une antenne biconique dans une cavité diélectrique au sein d'un milieu absorbant" C. R. Acad. Sci. fr., t.274, p.680-683, 1972
- (40) V. FRITSCH, "Propagation of radiofrequency electromagnetic fields in geological conductors", J. of Res. of the N.B.S., Vol.67D, n°2, pp.161-178, 1963
- (41) J. FONTAINE, M. SOIRON, P. DEGAUQUE and R. GABILLARD, "Radiowave propagation in tunnel, along multiconductor transmission line", U.R.S.I. Symp. to be held in London, July 1974
- (42) L. L. HAIDLE, J. E. PARTCH and R.G. FITZGERREL, "An encapsulant for buried U.H.F. antennas", Electr. Letters, vol.7, pp.121-123, 1971
- (43) R. G. FITZGERREL, R. L. GALLAWA, R.L. HAIDLE, A. Q. HOWARD and J. E. PARTCH, "Buried vertically polarized U.H.F. antennas", Off. of Telecom., I.T.S., Boulder, Co., Res. Rept. n°8, 1970

- (44) B.P. D'JAKONOV, "The diffraction of electromagnetic waves by a sphere located in a half-space", *Izv. Geophys.*, pp.1579-1590, 1959
- (45) G.N. WATSON, "Theory of Bessel functions", Cambridge U. Press, 1944
- (46) Y. SATO, "Transformation of wave functions related to the transformation of coordinates system", *Bull. Earthquake Res. Inst.*, Vol.28, pp.1-22, 1947
- (47) PETRASHEN, G.I. SMIRNOVAN, S. MAKAROV, "La représentation asymptotique des fonctions cylindriques", *Uch. Zap. Leningrad U., Ser. Math., Fasc. 26 à 28*, pp.1-95, 1953, disponible à : Nat. Lending Libr., for sci. and Tech., Boston, Yorksh., G.B.
- (48) J.G. NEGI, "Discussion contribution", *Geophysics*, Vol.28, p.665-668, 1963
- (49) P. DEGAUQUE, J. FONTAINE and R. GABILLARD, "Input impedance of a thin biconical antenna vertically buried near the air-ground interface", *Electron. Letters*, vol.8, n°25, Dec. 1972
- (50) GRADSHTEYN and RYZHIK, "Table of integrals series and products", Academic Press, 1965
- (51) P. DEGAUQUE, J. FONTAINE and R. GABILLARD, "Electrical characteristics of a thin biconical antenna over a conducting half-space", *I.E.E.E./AP Symposium*, Boulder, Co., 21-24 Aug. 1973
- (52) P. DEGAUQUE, J. FONTAINE and R. GABILLARD, "Theory of a thin vertical biconical antenna located near the air-ground interface", to be pub. in *I.E.E.E. Trans. on Ant. and Prop.*
- (53) D.C. CHANG and J.R. WAIT, "Theory of a vertical tubular antenna located above a conducting half-space", *I.E.E.E. Trans. on A.P.*, vol.AP.18, n°2, pp.182-188, march 1970
- (54) R. GABILLARD, J. FONTAINE et P. DEGAUQUE, "Méthode d'optimisation d'une liaison électromagnétique entre terminaux souterrains", *Ann. Télécom.*, vol.25, n°7-8, pp.281-293, 1970
- (55) J.R. WAIT, "Radiation from dipole in an idealized jungle environment", *Radio Sci.*, 1967, n°7, pp.747-750
- (56) D. STAIMAN and T. TAMIR, "Nature and optimisation of the ground wave excited by submerged antennas", *Proc.I.E.E.*, 1966, vol.113, n°8, pp.1299-1310
- (57) T. TAMIR and L. B. FELSEN, "On lateral waves in slab configuration and their relations to other wave types", *I.E.E.E. Trans. A-P*, 1965, Vol.A-P 13, pp.410-422

- (58) A.W. BIGGS and H.M. SWARM, "Radiation fields from an electric dipole antenna in homogeneous antartic terrain", I.E.E.E. Trans.A-P, 1968, Vol.A-P 16, pp.201-208 and "Comments" : I.E.E.E. Trans. A-P, 1968, pp.607-609
- (59) L. ROBIN, "Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales", Bull. C.N.E.T., 1957-1959
- (60) S. A. SCHELKUNOFF, "Antenna theory and practice", J. Wiley Co, N.Y., 1952
- (61) J.G. FIKIORIS, "The biconical antenna in a radially stratified media", I.E.E.E. Trans. A-P, vol.AP-13, pp.289-302, 1965
- (62) ERDELY, MAGNUS, OBERHETTINGER and TRICOMI, "Higher transcendental functions", Bate man Man. Proj., Cal. Inst. of Tech., Mc GRAW-HILL Co, 1953

ANNEXES

A N N E X E . 1.RECHERCHE DU SYSTEME D'EQUATIONS DEFINISSANT L'IMPEDANCE TERMINALE

L'admittance terminale Y_+ peut être calculée à partir des constantes c_n et d_n grâce à la relation (2.33.) et il faut donc déterminer le système d'équations qu'elles doivent vérifier. Pour cela, nous cherchons tout d'abord les relations entre les constantes intervenant dans l'expression des champs correspondant aux différents milieux.

En écrivant les conditions aux limites en $r=a$ sur les composantes E_r dans les milieux 1 et 2, on obtient :

$$\gamma_1^2 E_{r1} = \gamma_2^2 E_{r2}(a) \quad (A1.1)$$

En effet, on a supposé que les perméabilités magnétiques des milieux étaient identiques :

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0 \quad (A1.2)$$

En remplaçant E_{r1} et E_{r2} par leurs expressions données respectivement par les équations (2.15.) et (2.27.), on a :

$$\frac{\gamma_2^2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \sum_n (c_n + d_n) P_n(\cos\theta) = \frac{\gamma_1^2}{\sigma_1 + j\omega\epsilon_1} \sum_v A_v T_v(\cos\theta) \quad (A1.3)$$

D'où :

$$\sum_n (c_n + d_n) P_n = \sum_v A_v T_v \quad (A1.4)$$

En multipliant chaque membre de l'équation précédente par $T_v \cdot \sin\theta$ et en intégrant de θ_0 à $\pi - \theta_0$, on obtient :

$$A_v = \sum_n (c_n + d_n) \frac{I_{vn}}{I_{vv'}} \quad (\text{A1.5})$$

avec :

$$I_{vn} = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} T_v P_n \sin\theta \, d\theta \quad (\text{A1.6})$$

$$I_{vv'} = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} T_v T_{v+e} \sin\theta \, d\theta \quad (\text{A1.7})$$

Les constantes c_n et d_n vont être déterminées en égalant les composantes de E_θ en $r=a$ dans chacun des deux milieux.

D'après les équations (2.13) et (2.25), on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\eta_1 V(a)}{k \sin\theta} + j\eta_1 \sum_v \frac{A_v}{v(v+1)} \frac{\hat{J}'_v(-j\gamma_1 a)}{\hat{J}_v(-j\gamma_1 a)} \frac{dT_v}{d\theta} \\ = j\eta_2 \sum_n \frac{1}{n(n+1)} \left[c_n \frac{\hat{J}'_n(-j\gamma_2 a)}{\hat{J}_n(-j\gamma_2 a)} + d_n \frac{\hat{H}'_n(-j\gamma_2 a)}{\hat{H}_n(-j\gamma_2 a)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A1.8})$$

En multipliant cette expression par $\sin\theta \frac{dP_r}{d\theta}$ et en intégrant de 0 à π , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{V(a)}{k \sin\theta} \sin\theta \frac{dP_r}{d\theta} \, d\theta + j \sum_v \int_0^\pi \frac{A_v}{v(v+1)} \frac{\hat{J}'_v(-j\gamma_1 a)}{\hat{J}_v(-j\gamma_1 a)} \frac{dT_v}{d\theta} \frac{dP_r}{d\theta} \sin\theta \, d\theta \\ = j \frac{\eta_2}{\eta_1} \sum_n \int_0^\pi \frac{1}{n(n+1)} \left[c_n \frac{\hat{J}'_n(-j\gamma_2 a)}{\hat{J}_n(-j\gamma_2 a)} + d_n \frac{\hat{H}'_n(-j\gamma_2 a)}{\hat{H}_n(-j\gamma_2 a)} \right] \frac{dP_n}{d\theta} \frac{dP_r}{d\theta} \sin\theta \, d\theta \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

Le membre de gauche de cette dernière équation peut se ramener à une intégrale prise entre θ_0 et $\pi-\theta_0$ puisque, dans la région de l'antenne, le champ E_θ est nul entre 0 et θ_0 , et $\pi-\theta_0$ et π .

En utilisant les relations suivantes (Robin⁽⁵⁹⁾) :

$$\int_0^\pi \frac{dP_n}{d\theta} \frac{dP_r}{d\theta} \sin\theta d\theta = 0 \text{ si } n \neq r$$

$$= \frac{2r(r+1)}{2r+1} \sin n = r \quad (\text{A1.10})$$

$$\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \sin\theta \frac{dP_n}{d\theta} \frac{dT_v}{d\theta} d\theta = n(n+1) \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} P_n T_v \sin\theta d\theta \quad (\text{A1.11})$$

L'équation (A1.9) peut s'écrire :

$$P_r(\cos \theta_0) = -\frac{jK}{2V(a)} \frac{n_2}{n_1} \frac{2}{2r+1} \left[c_r \frac{\hat{J}'_r(-j\gamma_2 a)}{\hat{J}_r(-j\gamma_2 a)} + d_r \frac{\hat{H}'_r(-j\gamma_2 a)}{\hat{H}_r(-j\gamma_2 a)} \right]$$

$$+ \frac{jK}{2V(a)} (r^2+r) \sum_v \frac{A_v}{v(v+1)} \left[\frac{\hat{J}'_v(-j\gamma_1 a)}{\hat{J}_v(-j\gamma_1 a)} \right]_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} P_r T_v \sin\theta d\theta \quad (\text{A1.12})$$

En remplaçant enfin A_v par sa valeur donnée par (A1.5) on obtient l'équation que doivent satisfaire c_n et d_n :

$$P_r(\cos\theta_0) = -\frac{jK}{V(a)} \frac{n_2}{n_1} \frac{1}{2r+1} \left[c_r \frac{\hat{J}'_r(-j\gamma_2 a)}{\hat{J}_r(-j\gamma_2 a)} + d_r \frac{\hat{H}'_r(-j\gamma_2 a)}{\hat{H}_r(-j\gamma_2 a)} \right]$$

$$+ \frac{jK}{V(a)} \sum_v \sum_n \frac{r(r+1)}{v(v+1)} \frac{\hat{J}'_v(-j\gamma_1 a)}{\hat{J}_v(-j\gamma_1 a)} (c_n+d_n) \frac{l_{vr} l_{vn}}{l_{vv}} \quad (\text{A1.13})$$

l_{vr} , l_{vn} et l_{vv} étant définies par les équations (A1.6) et (A1.7).

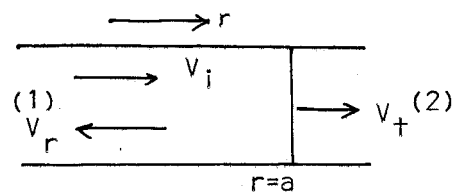
A N N E X E . I I .CALCUL DE L'IMPEDANCE TERMINALE PAR LA THEORIE DES LIGNES DE TRANSMISSIONNON UNIFORMES

Pour déterminer l'expression de l'impédance terminale Y_+ , nous allons faire l'analogie entre la structure de l'antenne et une ligne de transmission non uniforme. Après avoir rappelé les points essentiels de la théorie développée par Schelkunoff⁽⁶⁰⁾, nous appliquons cette méthode à notre cas particulier.

1. Rappel sur la théorie des lignes

Considérons tout d'abord la ligne de transmission donnée par la figure.A.II.1.

Si les indices i , r et t désignent respectivement une onde incidente, réfléchie et transmise, les impédances caractéristiques de la région .1. sont définies de la façon suivante :

fig.A.II.1.

$$V_i = K^+ I_i \quad \text{et} \quad V_r = - K^- I_r \quad (\text{A2.1})$$

K^+ correspond à une onde se propageant suivant l'axe des $r>0$, c'est-à-dire une onde "sortante" et K^- à une onde "rentrante", se dirigeant suivant l'axe $r<0$.

D'une manière générale, ces impédances ne sont pas des constantes mais dépendent de l'abscisse r envisagée.

Si Z est l'impédance vue par l'onde "sortante" en $r=a$, dans le milieu 2, on a par définition :

$$V_t = Z I_t \quad (\text{A2.2})$$

On définit les coefficients de réflexion en courant et en tension du milieu.1. sur le milieu.2. par :

$$q_{12i} = \frac{I_r}{I_i} \quad \text{et} \quad q_{12V} = \frac{V_r}{V_i} \quad (\text{A2.3})$$

A l'aide des relations précédentes et en utilisant le fait que, en $r = a$:

$$V_t = V_i + V_r \quad \text{et} \quad I_t = I_i + I_r \quad (\text{A2.4})$$

le coefficient de réflexion peut être exprimé de la façon suivante :

$$q_i = \frac{K^+(a) - Z(a)}{K^-(a) + Z(a)} \quad q_V = - \frac{K^-(a)}{K^+(a)} q_i \quad (\text{A2.5})$$

2. Expression de Y_t en fonction des impédances radiales

Chacune des expressions des composantes du champ électrique et magnétique peut être en général décomposée en la somme de deux termes, l'un ne faisant intervenir que des fonctions de Hankel et l'autre des fonctions de Bessel. Etant donné le comportement asymptotique de chacune de ces fonctions, on peut associer à chaque terme correspondant respectivement une onde "sortante" et une onde "rentrante". Ces ondes seront repérées par leurs indices + ou -.

On peut montrer (Fikioris⁽⁶¹⁾) que l'admittance terminale Y_t est définie par :

$$Y_t = - \frac{j}{\pi K^2} \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{1}{Z_{2,n}(a) - K a_1^-} \quad (\text{A2.6})$$

Dans cette formule $K a_1^-$ est l'impédance radiale pour une onde T.M. rentrante, correspondant à l'ordre n et calculée en $r = a$ dans le milieu 1 :

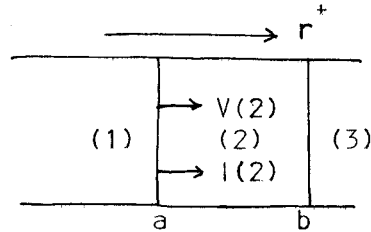
$$K a_1^- = - \frac{E_{\theta 1, n}^-(a)}{H_{\phi 1, n}^-(a)} \quad (\text{12.7})$$

$Z_{2,n}(a)$ est par contre l'impédance radiale totale de l'onde T.M. d'ordre n , dans le milieu.2. en $r=a$;

$$Z_{2,n(a)} = \frac{E_{\theta 2,n(a)}}{H_{\phi 2,n(a)}} = \frac{E_{\theta 2,n(a)}^+ + E_{\theta 2,n(a)}^-}{H_{\phi 2,n(a)}^+ + H_{\phi 2,n(a)}^-} \quad (\text{A2.8})$$

3. Calcul des impédances radiales

Nous faisons l'analogie de l'antenne biconique en milieu stratifié à la ligne de transmission donnée par la figure.A.11.2. La composante E_{θ} est assimilée à une tension V et H_{ϕ} à un courant I .



Soit x_{abV}^+ le coefficient de transmission en tension de $r=a$ à $r=b$ et x_{abI}^+ le coefficient de transmission en courant :

fig.A.11.2.

$$x_{abV}^+ = \frac{V_2^+(b)}{V_2^+(a)} \quad x_{abI}^+ = \frac{I_2^+(b)}{I_2^+(a)} \quad (\text{A2.9})$$

De la même manière, on définit les coefficients x_{baV}^- et x_{baI}^- par :

$$x_{baV}^- = \frac{V_2^-(a)}{V_2^-(b)} \quad x_{baI}^- = \frac{I_2^-(a)}{I_2^-(b)} \quad (\text{A2.10})$$

Les coefficients de réflexion du milieu.3. sur le milieu.2. et du milieu.2. sur le milieu.1. sont notés respectivement :

$$q_{23V} = \frac{V_2^-(b)}{V_2^+(b)} \quad q_{23I} = \frac{I_2^-(b)}{I_2^+(b)} \quad q_{21V} = \frac{V_2^+(a)}{V_2^-(a)} \quad q_{21I} = \frac{I_2^+(a)}{I_2^-(a)} \quad (\text{A2.11})$$

Si nous choisissons un courant et une tension de référence $I(2)$ et $V(2)$ qui sont associés à la première onde incidente dans le milieu.2., la tension totale en $r=a$ pour des ondes sortantes est :

$$V_{fa2}^+ = V(2) [1 + x_{ab}^+ q_{23V} x_{baV}^- q_{21V} + \dots] \quad (\text{A2.12})$$

$$V_{ta2}^+ = \frac{V(2)}{1 - x_V Q_V} \quad (A2.13)$$

avec :

$$x_V = x_{abV}^+ x_{baV}^- \quad \text{et} \quad Q_V = q_{23V} q_{21V} \quad (A2.14)$$

Pour les ondes rentrantes, nous avons de même :

$$V_{ta2}^- = V(2) \frac{x_{abV}^+ q_{23V} x_{baV}^-}{1 - x_V Q_V} \quad (A2.15)$$

En écrivant des relations similaires pour le courant et en posant :

$$Q_i = q_{23i} q_{21i} \quad \text{et} \quad x_i = x_{abi}^+ x_{bai}^- \quad (A2.16)$$

On aboutit à la relation suivante définissant $Z_{2,n(a)}$:

$$Z_{2,n(a)} = \frac{V(2)}{I(2)} \frac{1 - Q_i x_i}{1 - Q_V x_V} \frac{1 + x_{abV}^+ q_{23V} x_{baV}^-}{1 + x_{abi}^+ q_{23i} x_{bai}^-} \quad (A2.17)$$

Nous allons montrer, en calculant les coefficients de réflexion et de transmission que $Q_i x_i = Q_V x_V$, ce qui va donc permettre de simplifier l'expression précédente.

4. Calcul des coefficients de réflexion et de transmission

A partir des expressions de E_θ et H_ϕ dans chaque région et en appliquant les relations de définition (A2.5), (A2.9) à (A2.11), on obtient :

$$q_{23i} = \frac{K_{b2}^+ - Z_{b3}}{K_{b2}^- + Z_{b3}} \quad q_{21i} = \frac{K_{a2}^- - K_{a1}^-}{K_{a2}^+ + K_{a1}^-} \quad (A2.18)$$

$$q_{23V} = - \frac{K_{b2}^-}{K_{b2}^+} q_{23i} \quad q_{21V} = - \frac{K_{a2}^+}{K_{a2}^-} q_{21i} \quad (A2.19)$$

avec :

$$K_{b2}^+ = j n_2 \frac{\hat{H}'_n(-j\gamma_2 b)}{\hat{H}_n(-j\gamma_2 b)} \quad K_{b2}^- = - j n_2 \frac{\hat{J}'_n(-j\gamma_2 b)}{\hat{J}_n(-j\gamma_2 b)} \quad (A2.20)$$

$$K_{a2}^+ = jn_2 \frac{\hat{H}'_n(-j\gamma_2 a)}{\hat{H}_n(-j\gamma_2 a)} \quad K_{a2}^- = -jn_2 \frac{\hat{J}'_n(-j\gamma_2 a)}{\hat{J}_n(-j\gamma_2 a)} \quad (\text{A2.21})$$

$$Z_{b3} = jn_3 \frac{\hat{H}'_n(-j\gamma_3 b)}{\hat{H}_n(-j\gamma_3 b)} \quad K_{a1}^- = -jn_1 \frac{\hat{J}'_v(-j\gamma_1 a)}{\hat{J}_v(-j\gamma_1 a)} \quad (\text{A2.22})$$

Les coefficients de transmission sont donnés par :

$$x_{abV}^+ = \frac{a}{b} \frac{\hat{H}'_n(-j\gamma_2 b)}{\hat{H}_n(-j\gamma_2 a)} \quad x_{baV}^- = \frac{b}{a} \frac{\hat{J}'_n(-j\gamma_2 a)}{\hat{J}'_n(-j\gamma_2 b)} \quad (\text{A2.23})$$

$$x_{abi}^+ = \frac{a}{b} \frac{\hat{H}_n(-j\gamma_2 b)}{\hat{H}_n(-j\gamma_2 a)} \quad x_{bai}^- = \frac{b}{a} \frac{\hat{J}_n(-j\gamma_2 a)}{\hat{J}_n(-j\gamma_2 b)} \quad (\text{A2.24})$$

Il est ainsi facile de vérifier que $Q_V x_V = Q_I x_I$ et l'équation (A.2.17) devient :

$$Z_{2,n(a)} = K_{a2}^+ \frac{1 + x_{abV}^+ q_{23V} x_{baV}^-}{1 + x_{abi}^+ q_{23I} x_{bai}^-} \quad (\text{A2.25})$$

Compte tenu de l'équation (A.2.19) $Z_{2,n(a)}$ peut être mis sous la forme :

$$Z_{2,n(a)} = K_{a2}^+ \frac{1 + x_I q_{23} \frac{\hat{J}'_n(-j\gamma_2 a)}{\hat{J}_n(-j\gamma_2 a)} \frac{\hat{H}_n(-j\gamma_2 a)}{\hat{H}'_n(-j\gamma_2 a)}}{1 + x_I q_{23I}} \quad (\text{A2.26})$$

Connaissant l'expression de $Z_{2,n(a)}$, en remplaçant q_{23I} et x_I par leurs valeurs, ainsi que celle de K_{a1}^+ , l'impédance terminale est donnée par l'équation (A.2.6). On retrouve ainsi la formule (2.46.) que l'on avait établie en suivant les conditions aux limites sur chacune des interfaces. L'avantage de cette méthode réside dans sa facilité de mise en oeuvre pour un milieu stratifié à n couches.

A N N E X E . I I I .DEVELOPPEMENT EN SERIE DE POLYNOMES DE LEGENDRE DE $e^{u_2 z} J_0(\lambda \rho)$

Compte tenu des changements de variable qui seront nécessaires dans le chapitre.III, ce développement en série est fait en supposant λ réel ou complexe, en suivant une méthode proposée par Negi⁽⁴⁸⁾.

Le développement en série d'une exponentielle, en fonction des polynômes de Gegenbauer C_n^v et des fonctions de Bessel est donnée par Robin⁽⁵⁹⁾ (T.3., p.198, éq.64).

$$e^{jxy} = (v-1)! \left(\frac{2}{y}\right)^v \sum_{n=0}^{\infty} j^n (v+n) C_n^v(x) J_{v+n}(y) \quad (A3.1)$$

Cette formule est vraie quelque soit v , x et y car elle est une généralisation de l'intégrale de Gegenbauer pour toutes valeurs des différents variables. En faisant $v=1/2$, les polynômes C_n^v se ramènent à des polynômes de Legendre, et on obtient :

$$e^{jxy} = \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) P_n(x) j_n(y) \quad (A3.2)$$

On peut également développer $P_n(x)$ en utilisant le théorème d'addition⁽⁶¹⁾ :

$$P_n(x) = P_n(\mu) P_n(\mu') + 2 \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu) P_n^m(\mu') \cos m\omega \quad (A3.3)$$

où μ et μ' sont des nombres réels ou complexes pris hors du segment $(-1,+1)$
Ces variables sont reliées par la relation :

$$x = \mu\mu' - (\mu^2-1)^{1/2} (\mu'^2-1)^{1/2} \cos\omega \quad (A3.4)$$

En remplaçant $P_n(x)$, donné par (A3.3) dans l'équation (A3.2) et en intégrant membre à membre par rapport à ω entre 0 et π , on aboutit à :

$$\int_0^\pi e^{jxy} d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) j_n(y) \pi P_n(\mu) P_n(\mu') \quad (A3.5)$$

En remplaçant x par son expression en fonction de ω , l'exponentielle peut s'écrire :

$$e^{jxy} = e^{j\mu\mu'y} e^{-jy(\mu^2-1)^{1/2}} (\mu'^2-1)^{1/2} \cos\omega \quad (A3.6)$$

Pour faire apparaître la représentation intégrale d'une fonction de Bessel, on définit une variable A par :

$$A = -(\mu^2-1)^{1/2} (\mu'^2-1)^{1/2} y \quad (A3.7)$$

$$\text{et posons : } y = -j\gamma_2 r = k_2 r \quad (A3.8)$$

$$\text{L'expression (A3.6) devient donc : } e^{jxy} = e^{j\mu\mu'y} e^{jA\cos\omega} \quad (A3.9)$$

Pour faire tendre μ vers un réel compris entre -1 et +1, on pose, en adoptant les notations de Robin, $\mu = \cos\omega + j.0.$, ce qui correspond à un point du plan complexe infiniment voisin, mais situé au-dessous du segment (-1,+1). Dans ce cas, la détermination du radical $\sqrt{\mu^2-1}$ est donnée par :

$$\sqrt{\mu^2-1} = e^{j\pi/2} \sin\theta \quad (A3.10)$$

En posant de plus $\mu' = \text{cht}$; l'expression de A se met sous la forme :

$$A = -\gamma_2 r \sin\theta \text{sh}\theta \quad (A3.11)$$

Or une représentation intégrale de la fonction de Bessel est donnée par Bateman⁽⁶²⁾ (p.21, éq.31 et 33) :

$$J_0(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{jA\cos\omega} d\omega \quad (A3.12)$$

En remplaçant A par sa valeur (A3.11) dans l'équation (A3.12) et grâce aux relations (A3.5) et (A3.6), on obtient :

$$J_0(\gamma_2 r \sin \theta sht) e^{\gamma_2 r \cos \theta cht} = \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) j_n(k_2 r) P_n(\cos \theta) P_n(cht) \quad (A3.13)$$

Pour pouvoir comparer l'expression ci-dessus à $e^{u_2 z} J_0(\lambda \rho)$, il suffit de faire le changement de variable $\lambda = \gamma_2 sht$, puisque $\rho = r \sin \theta$.

