

50376
1974
102

N° d'ordre : 467

50376
1974
102

THESE

présentée à
L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE TROISIÈME CYCLE
Spécialité Electronique

par

Louis - Paul DOCO
Ingénieur I.M.A.

**MÉTHODE D'INTERPRÉTATION DES MESURES
DE TÉLÉDIAGRAPHIE DANS UN TERRAIN STRATIFIÉ
PRÉSENTANT DES CONTRASTES DE RÉSISTIVITÉ ÉLEVÉS**



Soutenu le 21 Juin 1974, devant la COMMISSION D'EXAMEN

Membres du Jury :	MM.	R. GABILLARD	Président
		G. SALMER	Examinateur
		F. LOUAGE	Examinateur
		P. DEGAUQUE	Examinateur
		J. FONTAINE	Invité
		G. BARON	Invité

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

2023年11月

M. GEHU Jean-Marie	Institut Agricole
M. GLACET Charles	Chimie Organique
M. GONTIER Gérard	Mécanique
M. GUILLAUME Jean	Biologie Végétale
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M. JOLY Robert	Biologie (Amiens)
Me LENOBLE Jacqueline	Physique Expérimentale
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M. MONTREUIL Jean	Chimie Biologique
M. POUZET Pierre	Informatique
Me SCHWARTZ Marie-Hélène	Analyse Supérieure
M. TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VAILLANT Jean	Mathématiques
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. VIVIER Emile	Biologie Animale
M. WERTHEIMER Raymond	Physique
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

PROFESSEURS A TITRE PERSONNEL

M. BOUISSET Simon	Physiologie Animale
M. DELHAYE Michel	Chimie
M. FLATRES Pierre	Géographie
M. LEBRUN André	Electronique
M. LINDER Robert	Botanique
M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. PARREAU Michel	Mathématiques Appliquées
M. PRUDHOMME Rémy	Droit et Sciences Economiques
M. SCHILTZ René	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique
M. BILLARD Jean	Physique
M. BODARD Marcel	Botanique
M. BOILLET Pierre	Physique
M. DERCOURT Jean-Michel	Géologie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LANDAIS Jean	Chimie
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. MAES Serge	Physique
Mle MARQUET Simone	Mathématiques
M. MONTEL Marc	Physique
M. PANET Marius	I.E.E.A.
M. PROUVOST Jean	Minéralogie

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés de fonctions)

M. ADAM Michel	Economie Politique
M. ANDRE Charles	Sciences Economiques
M. ANGRAND Jean-Pierre	Géographie
M. ANTOINE Philippe	Mathématiques
M. AUBIN Thierry	Mathématiques
M. BART André	Biologie
M. BEGUIN Paul	Mécanique des Fluides
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. BOSCO Denis	Mathématiques
M. BRIDOUX Michel	Chimie
M. BRUYELLE Pierre	Géographie et Aménagement Spatial
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COULON Jean	I.E.E.A.
M. DEBOURSE Jean-Pierre	Sciences Economiques et Sociales
M. DEBRABANT Pierre	Sciences Appliquées
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques et Sociales
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique
M. DRIEUX Baudouin	I.E.E.A.
M. DYMENT Arthur	Mathématiques
M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FONTAINE Jacques	Génie Electrique
M. FROELICH Daniel	Sciences Appliquées
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GUILLAUME Henri	Sciences Economiques et Sociales
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JOURNAL Gérard	Sciences Appliquées
M ^{lle} KOSMANN Yvette	Mathématiques
M. KREMBEL Jean	Chimie
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LAURENT François	Automatique
M. LAVAGNE Pierre	Sciences Economiques et Sociales
M ^{lle} LEGRAND Denise	Mathématiques
M ^{lle} LEGRAND Solange	Mathématiques
M ^{me} LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LENTACKER Firmin	Géographie et Aménagement Spatial
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOUAGE Francis	Sciences Appliquées
M ^{me} MAILLET Monique	Sciences Economiques
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques et Sociales
M. MERIAUX Emile	Sciences de la Terre
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MICEON Michel	Chimie (Sciences Appliquées)

M. PAQUET Jacques	Sciences Appliquées
M. PARSY Fernand	Mathématiques
M. PECQUE Marcel	Chimie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie (Valenciennes)
M. POVY Jean-Claude	Sciences Appliquées
M. RACZY Ladislas	Physique - Electronique
Me RENVERSEZ Françoise	Sciences Economiques et Sociales
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SALMER Georges	Radio Electricité Electronique
M. SEGUIER Guy	Electronique
M. SIMON Michel	Psychologie
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SMET Pierre	Physique
M. SOMME Jean	Géographie
Mle SPIK Geneviève	Chimie Biologique
M. TOULOTTE Jean-Marc	Sciences Appliquées
M. TREANTON Jean-René	Sciences Economiques et Sociales
M. VANDORPE Bernard	Chimie Physique
M. VILETTE Michel	Génie Mécanique
M. WATERLOT Michel	Géologie
Me ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques.

A la mémoire de mon père,

A ma mère,

A Céline,

Ce travail a été effectué au laboratoire de Radiopropagation et d'Electronique de l'Université des Sciences et Techniques de LILLE, sous la direction de Monsieur le Professeur GABILLARD.

J'exprime ma plus profonde gratitude à Monsieur le Professeur GABILLARD pour les conseils qu'il m'a prodigués et les facilités qu'il m'a accordées pour mener à bien ce travail.

Cette étude a été faite sous contrat de l'INSTITUT FRANCAIS du PETROLE. Je remercie cet organisme pour les moyens et l'aide qu'il m'a apportés, et son représentant, Monsieur BARON, pour l'honneur qu'il me fait de participer à mon jury.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Messieurs les Professeurs LOUAGE et SALMER qui ont bien voulu examiner mon travail et me faire l'honneur de participer à mon jury.

Tout au long de cette étude, Monsieur le Professeur FONTAINE, m'a fait bénéficier de ses conseils avisés. Je le remercie tout particulièrement de l'intérêt qu'il a montré pour ce travail.

Je suis vivement reconnaissant à Monsieur P. DEGAUQUE, pour l'aide et les conseils précieux qu'il m'a apportés lors de la rédaction de ce mémoire. Les avis qu'il m'a donnés ont été déterminants pour l'aboutissement de cette étude.

Je remercie Monsieur BERTHELOT, Ingénieur de l'I.F.P., avec qui j'ai eu des discussions qui ont permis de préciser certains points de mon travail.

Les calculs numériques de ma thèse ont été, en grande partie, exécutés par la Société FRANLAB. Je remercie celle-ci et ses ingénieurs informaticiens, en particulier Messieurs GRIMAUD et PRIA.

J'ai bénéficié de l'aide sympathique des membres de l'équipe. Je les en remercie, et particulièrement Messieurs M. CAUTERMAN, J.P. DUBUS, et P. MANGEZ qui m'ont fait profiter de leur collaboration par de longues et intéressantes discussions.

Mes remerciements s'adressent également à Madame D. PASQUIER pour la dactylographie de ce mémoire et à tous les membres du personnel technique et administratif.

S O M M A I R E

INTRODUCTION

PREMIERE PARTIE - ETUDE THEORIQUE DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE
ELECTROMAGNETIQUE EN MILIEU STRATIFIE.
APPLICATION A LA TELEDIAGRAPHE -

CHAPITRE. I.

RAPPELS SUR LA THEORIE MATRICIELLE DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE
ELECTROMAGNETIQUE EMISE PAR UN DIPOLE ELECTRIQUE HORIZONTAL DANS
UN MILIEU STRATIFIE

- I.1. Expression générale de la composante E_z du champ électromagnétique
- I.2. Cas où le dipôle émetteur est placé à l'interface des deux premières couches

CHAPITRE. II.

APPLICATION DE LA THEORIE MATRICIELLE A LA TELEDIAGRAPHE

- II.1. Cas d'une structure stratifiée présentant des contrastes de résistivité élevés. Emetteur à la surface du sol.
 - II.1.1. Etude de la composante E_z en fonction de la profondeur de réception
 - II.1.2. Etude de la résistivité apparente du milieu stratifié
- II.2. Application de la télédiagraphie en mer
 - II.2.1. Etude de la composante E_z
 - II.2.2. Optimisation de la puissance et de la fréquence d'émission

SECONDE PARTIE - LOCALISATION D'UNE ANOMALIE DE RESISTIVITE ELEVEE,
SITUEE DANS UN SOCLE SOUS-MARIN.
APPROXIMATION DU COURANT CONTINU -

CHAPITRE. I.

ETUDE THEORIQUE DU POTENTIEL CREE PAR UNE SOURCE PONCTUELLE DE COURANT.
DETERMINATION DE LA RESISTIVITE APPARENTE DU MILIEU.

- I.1. *Théorie des images en courant continu en présence des interfaces
Air - Mer et Mer - Sol*
- I.2. *Expression du potentiel*
- I.3. *Expression de la résistivité apparente*

CHAPITRE. II.

DETERMINATION DU TYPE ET DE LA POSITION DE L'ANOMALIE A PARTIR DES
VARIATIONS DE RESISTIVITE APPARENTE. APPLICATION A DEUX CAS PRECIS.

- II.1. *Cas d'une anomalie située latéralement par rapport au forage*
- II.2. *Cas d'une anomalie traversée par le forage*
- II.3. *Discussion sur la précision de la méthode d'interprétation*

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXES

I N T R O D U C T I O N

La Télédiagraphie est une méthode de prospection géophysique mise au point à l'Université des Sciences et Techniques de LILLE par l'équipe du Professeur GABILLARD en collaboration avec l'Institut Français du Pétrole.

Ce procédé permet de préciser la position d'un gisement par rapport à un forage. Il est basé sur les mesures, dans le sondage, du champ électrique créé par un dipôle émetteur situé à la surface du sol⁽¹⁾.

Les études théoriques d'interprétations des mesures de télédiagraphie effectuées sur le terrain ou sur un modèle analogique ont été faites jusqu'à présent en assimilant le sol à un demi-milieu homogène pouvant renfermer une anomalie de résistivité élevée et de forme simple : sphère, disque plat ou demi-plan infini^{(2),(3)}. Des résultats très encourageants ont ainsi été obtenus dans des cas tels que les stockages de gaz de LUSSAGNET et BEYNES^{(4),(5)}.

Cependant on a pu constater que les stratifications du sol provoquent une modulation de l'amplitude du signal reçu en fonction de la profondeur de la sonde. Cet effet est d'autant plus important que le rapport de résistivité entre deux couches successives de terrain est élevé. En particulier, si ce rapport devient important, par exemple supérieur à 50, l'hypothèse du demi-milieu homogène n'est plus suffisante pour une interprétation correcte des mesures.

Il a donc été envisagé de mettre au point un modèle théorique plus élaboré en tenant compte des stratifications.

Ce modèle est tout spécialement nécessaire pour interpréter les mesures de télédiagraphie en mer, la résistivité de la couche d'eau de mer étant beaucoup plus faible que celle du sol sous-marin. Le développement que prend la prospection pétrolière en mer nous a amené à étudier particulièrement ce cas.

Une première approche du problème⁽⁶⁾, nous a permis de montrer que la configuration : émetteur au fond de la mer, récepteur dans le forage, était la plus adaptée à la mise en oeuvre de la télédiagraphie, compte tenu d'impératifs technologiques concernant l'émetteur.

Dans une première partie de notre thèse, nous présentons tout d'abord le principe de la télédiagraphie et nous définissons les paramètres électriques utilisés dans l'interprétation des mesures⁽¹⁾. Nous entreprenons ensuite une étude numérique de la propagation des ondes électromagnétiques dans un terrain stratifié.

Dans un premier chapitre nous rappelons le formalisme matriciel introduit par le Professeur GABILLARD pour traiter le rayonnement d'un dipôle en milieu stratifié à n couches et mis au point par Z. BASSIOUNI dans le cas d'un dipôle électrique horizontal⁽⁷⁾⁽³⁾. Nous développons cette théorie de façon à concevoir un modèle numérique dans lequel l'émetteur peut être situé en surface ou à l'interface des deux premières couches. Cette étude est effectuée dans l'hypothèse où le courant d'émission est sinusoïdal.

Dans un deuxième chapitre, nous mettons en évidence l'influence des stratifications et des contrastes de résistivité sur l'amplitude de la composante verticale du champ électrique. Nous présentons de plus, une étude de faisabilité de la télédiagraphie appliquée à la prospection de gisements sous-marins. Cette analyse permet d'optimiser la puissance et la fréquence de l'émetteur, afin d'obtenir un rapport signal sur bruit permettant d'exploiter les mesures.

Dans une seconde partie, nous étudions l'influence d'un gisement sur l'amplitude du champ reçu, le socle sous-marin étant assimilé à un demi-milieu renfermant une hétérogénéité de faible épaisseur.

Pour interpréter les mesures, il est intéressant d'introduire la notion de résistivité apparente du milieu. Elle correspond à la valeur de la résistivité d'un demi-milieu homogène permettant de recevoir un signal d'amplitude égale à celle reçue dans le terrain réel, dans des conditions semblables d'émission et de réception.

Dans une première étape, nous mettons en évidence les variations de cette résistivité apparente dues à la présence de l'anomalie. Cependant, la théorie générale développée dans la première partie devient extrêmement compliquée si le milieu stratifié contient une anomalie de dimension finie. Nous nous limitons donc à l'approximation du courant continu, le domaine de fréquence ($f < 20\text{Hz}$) utilisé pour la télédiagraphie permettant cette hypothèse. Le développement mathématique est alors simplifié, la présence des interfaces et de l'hétérogénéité étant traitée par la théorie des images⁽¹³⁾.

Dans une deuxième étape, nous appliquons cette étude pour différentes formes d'anomalies et nous montrons qu'il est possible de déduire la présence, le type, et la position d'hétérogénéités dans le sol à partir de la résistivité apparente.

PREMIERE PARTIE

ETUDE THEORIQUE DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE
EN MILIEU STRATIFIE. APPLICATION A LA TELEDIAGRAPHE

PREMIERE PARTIE

ETUDE THEORIQUE DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE
EN MILIEU STRATIFIE. APPLICATION A LA TELEDIAGRAPHIE.

INTRODUCTION. PRINCIPE DE LA TELEDIAGRAPHIE⁽¹⁾

La Télédiagraphie est une méthode d'exploration directionnelle de terrains situés autour des forages.

Ce procédé nécessite l'émission dans le sol d'un courant alternatif de basse fréquence au moyen de deux électrodes plantées à la surface du sol et situées à des distances et dans une direction déterminées.

Le courant ainsi induit crée un champ électromagnétique dont la composante électrique verticale E_z est mesurée à l'aide d'une sonde descendue dans le forage.

En tenant compte de la dimension finie des antennes d'émission et de réception, et si l'on suppose que le terrain est homogène de résistivité ρ , on peut montrer que la tension reçue aux bornes de la sonde est donnée par la formule suivante⁽⁸⁾ :

$$V = \frac{I_0}{2\pi} \left[\frac{e^{-\gamma R_{11}}}{R_{11}} - \frac{e^{-\gamma R_{12}}}{R_{12}} - \frac{e^{-\gamma R_{21}}}{R_{21}} + \frac{e^{-\gamma R_{22}}}{R_{22}} \right] \quad (I.1.)$$

γ est la constante de propagation intrinsèque du milieu. Comme aux fréquences envisagées ($f < 20\text{Hz}$) le courant de déplacement est négligeable vis-à-vis du courant de conduction, γ est définie par :

$$\gamma = (1 + j)/\delta \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}}$$

Les distances R_{11} , R_{12} , R_{21} , R_{22} sont définies sur la figure.1.1.
 I est le courant émis.

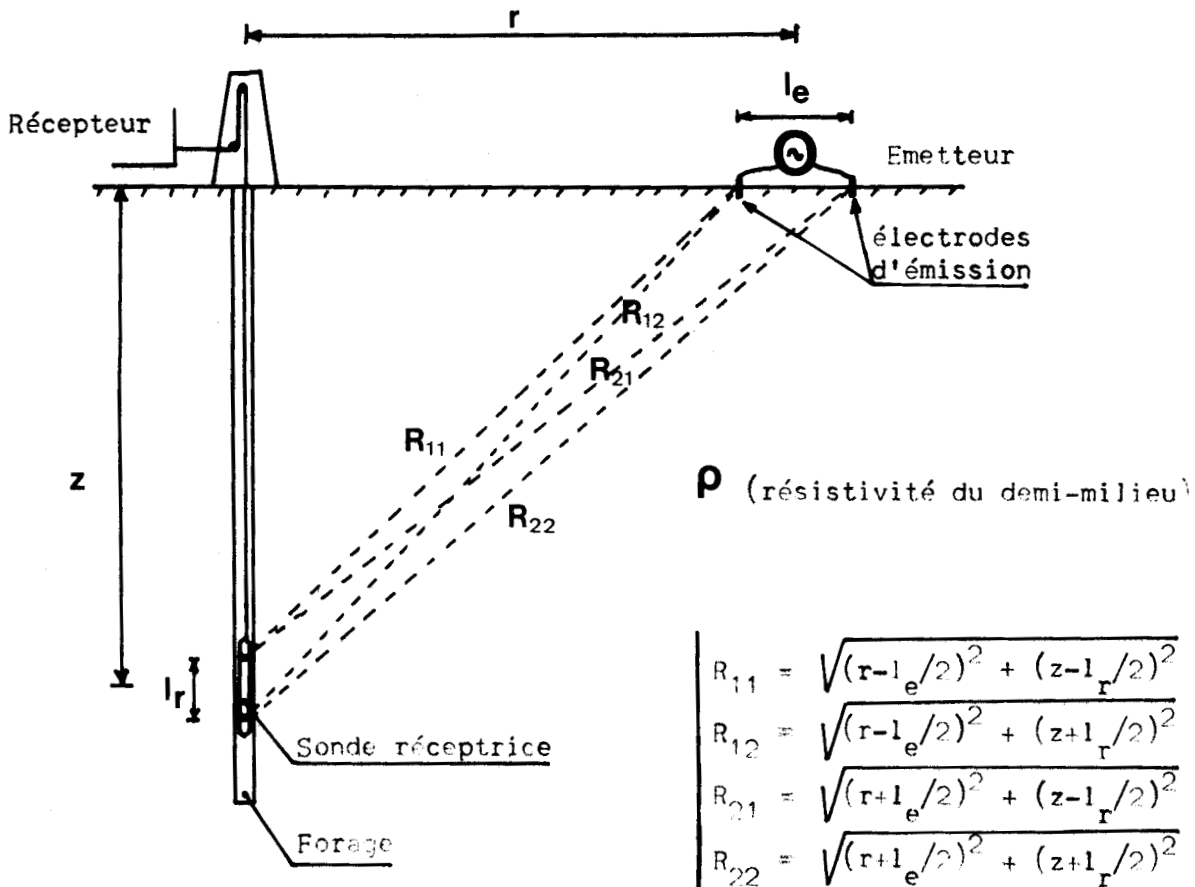


FIG.1.1.

Grâce à la formule (I.1.), connaissant V , I , r et z , il est donc possible de calculer la résistivité ρ_a d'un milieu homogène équivalent au terrain réel.

La mise en oeuvre de la télédiagraphie nécessite de placer la sonde de réception à une profondeur voisine de celle du gisement. On mesure alors la variation de la tension V en fonction de la distance radiale r émetteur - forage. La présence d'une anomalie de résistivité élevée dans la direction prospectée se traduit par une variation de la résistivité apparente. Si l'on représente graphiquement la fonction $\rho_a(r)$, les courbes obtenues comportent un minimum ou un maximum selon le type, la forme et l'emplacement de l'anomalie.

Pour affiner la méthode d'interprétation, il faut tenir compte directement de la présence de stratifications du terrain. Nous rappelons tout d'abord la théorie matricielle du rayonnement d'un dipôle électrique horizontal en envisageant le cas où l'émetteur se trouve à l'interface des deux premières couches.

Cette configuration permet de rendre compte de l'influence du terrain stratifié sur l'amplitude du champ reçu dans le forage et sur la résistivité apparente. Nous donnons ensuite, un exemple d'application à la prospection sous-marine, l'étude de la faisabilité portant essentiellement sur les caractéristiques d'émission exigées.

CHAPITRE.1.

RAPPELS SUR LA THEORIE MATRICIELLE DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE EMISE PAR UN DIPOLE ELECTRIQUE HORIZONTAL DANS UN MILIEU STRATIFIE

La structure du terrain stratifié est représentée par la figure.1.2. Chaque couche est isotrope, homogène et caractérisée par sa constante diélectrique ϵ_i , sa résistivité électrique ρ_i et son épaisseur h_i . La constante de propagation dans chaque milieu est définie par :

$$\gamma_i = \sqrt{j\omega\mu k_i} \quad \text{où} \quad k_i = \frac{1}{\rho_i} + j\omega\epsilon_i$$

La perméabilité magnétique μ_i est supposée la même pour toutes les couches et on pose $\mu_i = \mu_0$ perméabilité du vide.

Le dipôle électrique horizontal (D.E.H.) émetteur est placé à l'interface des deux premières couches et son centre constitue l'origine du système de coordonnées cartésiennes (x,y,z).

I.1. EXPRESSION GENERALE DE LA COMPOSANTE E_z DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS LA COUCHE D'INDICE m

Dans la couche d'indice m, le champ électrique \vec{E}_m peut être calculé à partir du potentiel de Hertz, $\vec{\Pi}_m$, ayant pour composantes $(\Pi_x)_m$ et $(\Pi_z)_m$, grâce à la relation :

$$\vec{E}_m = \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\Pi}_m \quad (\text{I.2.})$$

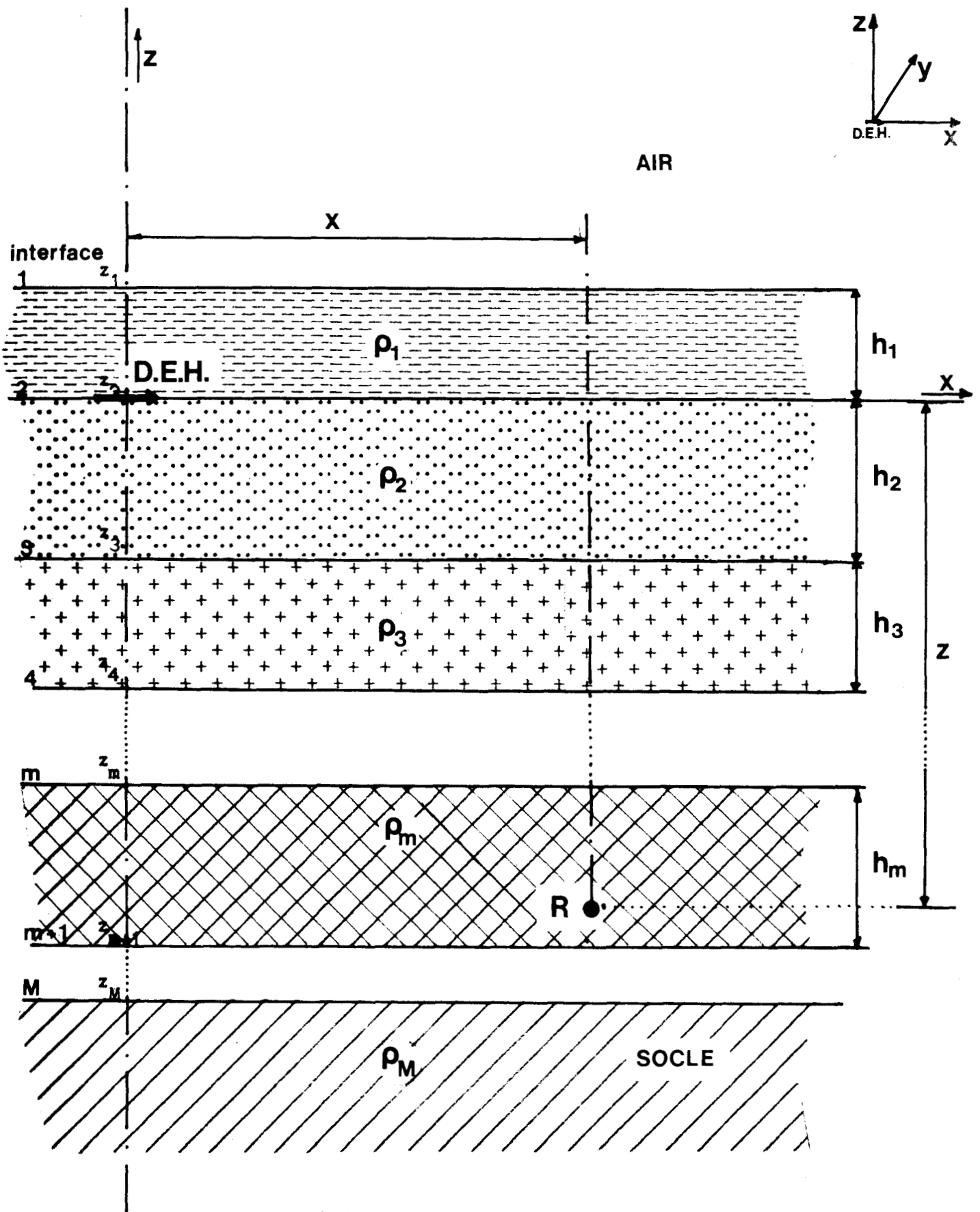


FIGURE.1.2. - STRUCTURE DU TERRAIN STRATIFIE -



Le vecteur $\vec{\Pi}_m$ devant satisfaire à l'équation différentielle :

$(\Delta - \gamma_m^2) \vec{\Pi}_m = 0$, la composante $(E_z)_m$ s'écrit :

$$(E_z)_m = -\gamma_m^2 (\Pi_z)_m + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\Pi_x)_m + \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_z)_m \right) \quad (I.3.)$$

Les composantes $(\Pi_x)_m$ et $(\Pi_z)_m$ sont données par les intégrales de Sommerfeld :

$$(\Pi_x)_m = \int_0^\infty (a_m e^{-u_m z} + b_m e^{+u_m z}) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (I.4.)$$

$$(\Pi_z)_m = -\cos\phi \int_0^\infty (f_m e^{-u_m z} + g_m e^{+u_m z}) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \arctg \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$u_m = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_m^2} \quad \text{la détermination du radical étant choisie}$$

de telle façon que $\text{Re}(u_m) > 0$.

En remplaçant $(\Pi_x)_m$ et $(\Pi_z)_m$ par leurs expressions dans l'équation (I.3.) on aboutit à la relation de définition de $(E_z)_m$:

$$(E_z)_m = -\cos\phi \int_0^\infty \{ (\lambda^2 f_m - u_m a_m) e^{-u_m z} + (u_m b_m + \lambda^2 g_m) e^{u_m z} \} J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (I.5.)$$

Formule de récurrence permettant de calculer les coefficients

Nous introduisons un formalisme matriciel permettant de calculer directement les termes $a_m e^{-u_m z}$, $b_m e^{+u_m z}$, $f_m e^{-u_m z}$ et $g_m e^{+u_m z}$

à partir des conditions aux limites sur les différents interfaces. Ces constantes sont considérées comme les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{A_m(z)}$:

$$\overrightarrow{A_m(z)} = \begin{bmatrix} -u_m z \\ a_m e \\ +u_m z \\ b_m e \\ -u_m z \\ f_m e \\ +u_m z \\ g_m e \end{bmatrix}$$

Ce vecteur vérifie la relation suivante pour une valeur de z se situant entre les cotes z_m et z_{m+1} :

$$\overrightarrow{A_m(z)} = D_m(z_m - z) \cdot \overrightarrow{A_m(z_m)} \quad (\text{I.6.})$$

D_m est une fonction de passage de z à z_m .

On montre⁽³⁾ qu'à chaque interface le vecteur vérifie les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{A_{m-1}(z_m)} = \frac{k_m}{k_{m-1}} V_{m-1}^{-1} V_m \overrightarrow{A_m(z_m)} \\ \overrightarrow{A_m(z_{m+1})} = D_m(h_m) \overrightarrow{A_m(z_m)} \end{array} \right. \quad (\text{I.7.})$$

$$(\text{I.8.})$$

où :

$$V_m = \begin{bmatrix} -u_m & u_m & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/k_m & 1/k_m & -u_m/k_m & u_m/k_m \end{bmatrix}$$

$$V_m^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1/u_m & 1 & 0 & 0 \\ 1/u_m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/u_m & 1 & -k_m/u_m \\ 0 & -1/u_m & 1 & k_m/u_m \end{bmatrix}$$

Dans ce cas $D_m(h)$ est donné :

$$D_m(h) = \begin{bmatrix} e^{u_m h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-u_m h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{u_m h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-u_m h} \end{bmatrix}$$

L'ensemble des équations (I.7.) et (I.8.) permet ainsi de définir ainsi la relation entre les caractéristiques de deux couches quelconques d'indice p et q :

$$\overrightarrow{A_q(z_q)} = \frac{k_p}{k_q} V_{qp} \overrightarrow{A_p(z_{p+1})} \quad (\text{I.9.})$$

$$\text{où } V_{qp} = V_q^{-1} V_{q-1} D_{q-1} V_{q-1}^{-1} \dots V_{p+1} D_{p+1} V_{p+1}^{-1} V_p \quad (\text{I.10.})$$

avec : $p < q$.

Nous allons montrer sur un exemple que les différentes constantes de $A_m(z)$ peuvent être déterminées grâce aux composantes du vecteur $A_n(z_{n+1})$ l'indice n caractérisant la couche dans laquelle est situé l'émetteur.

I.2. LE DIPOLE EMETTEUR EST SITUE A L'INTERFACE DES DEUX PREMIERES COUCHES

Nous supposons que le dipôle émetteur est situé dans la couche.1. comme le présente la figure.1.2.

A l'aide de la formule de récurrence (I.9.) nous obtenons les relations suivantes :

$$\overrightarrow{A_1(z_1)} = \frac{k_0}{k_1} V_{10} \overrightarrow{A_0(z_1)} \quad (\text{I.11.})$$

$$\overrightarrow{A_M(z_M)} = \frac{k_1}{k_M} V_{M1} \overrightarrow{A_1(z_2)} \quad (\text{I.12.})$$

M étant l'indice de la couche inférieure (socle).

De plus, à l'aide de (I.7.), nous obtenons :

$$\overrightarrow{A_1(z_2)} = D_1(h_1) \overrightarrow{A_1(z_1)} \quad (\text{I.13.})$$

En tenant compte de la contribution du champ primaire dans la couche 1 renfermant l'émetteur, nous exprimons $\overrightarrow{A_1(z_1)}$ et $\overrightarrow{A_1(z_2)}$ de la façon suivante :

$$A_1(z_1) = \begin{bmatrix} (a_1 + p_1 \frac{\lambda}{u_1}) e^{-u_1 z_1} \\ b_1 e^{+u_1 z_1} \\ f_1 e^{-u_1 z_1} \\ g_1 e^{+u_1 z_1} \end{bmatrix} \quad A_1(z_2) = \begin{bmatrix} a_1 e^{-u_1 z_2} \\ (b_1 + p_1 \frac{\lambda}{u_1}) e^{+u_1 z_2} \\ f_1 e^{-u_1 z_2} \\ g_1 e^{+u_1 z_2} \end{bmatrix}$$

où $p_1 = \frac{I\ell}{4\pi k_1}$ (ℓ est la longueur du dipôle émetteur)

Pour obtenir la convergence des intégrales définissant le potentiel de Hertz, il est nécessaire de choisir pour les couches extrêmes (Air et Socle) les coefficients suivants :

$$a_M = f_M = 0 \quad b_0 = g_0 = 0$$

Afin de simplifier l'écriture, nous notons : $V_{pq} = V_{qp}^{-1}$

L'expression I.11. devient :

$$\overrightarrow{A_0(z_1)} = \frac{k_1}{k_0} V_{01} \overrightarrow{A_1(z_1)} \quad (\text{I.14.})$$

Si nous écrivons les matrices V_{01} et V_{M1} sous la forme :

$$V_{01} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}$$

$$V_{M1} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & 0 & 0 \\ N_{21} & N_{22} & 0 & 0 \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} \\ N_{41} & N_{42} & N_{43} & N_{44} \end{bmatrix}$$

Les relations (I.14.) et (I.12.) mènent au système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{21} \left(a_1 + p_1 \frac{\lambda}{u_1} \right) e^{-u_1 z_1} + M_{22} b_1 e^{u_1 z_1} = 0 \quad (=b_o) \\ M_{41} \left(a_1 + p_1 \frac{\lambda}{u_1} \right) e^{-u_1 z_1} + M_{42} b_1 e^{u_1 z_1} + M_{43} f_1 e^{-u_1 z_1} + M_{44} g_1 e^{+u_1 z_1} = 0 \quad (=g_o) \\ N_{11} a_1 e^{-u_1 z_2} + N_{12} \left(b_1 + p_1 \frac{\lambda}{u_1} \right) e^{u_1 z_2} = 0 \quad (=a_M) \\ N_{31} a_1 e^{-u_1 z_2} + N_{32} \left(b_1 + p_1 \frac{\lambda}{u_1} \right) e^{u_1 z_2} + N_{33} f_1 e^{-u_1 z_2} + N_{34} g_1 e^{+u_1 z_1} = 0 \quad (=f_M) \end{array} \right.$$

Le dipôle émetteur étant situé à l'interface 2, les cotes z_1 et z_2 prennent respectivement les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} z_1 &= h_1 \\ z_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, le système d'équations précédent devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{11} a_1 + N_{12} \left(b_1 + p_1 \frac{\lambda}{u_1} \right) = 0 \\ M_{21} e^{-u_1 h_1} a_1 + M_{22} e^{u_1 h_1} \left(b_1 + p_1 \frac{\lambda}{u_1} \right) = p_1 \frac{\lambda}{u_1} (M_{22} e^{u_1 h_1} - M_{21} e^{-u_1 h_1}) \\ N_{31} a_1 + N_{32} \left(b_1 + p_1 \frac{\lambda}{u_1} \right) + N_{33} f_1 + N_{34} g_1 = 0 \\ M_{41} e^{-u_1 h_1} a_1 + M_{42} e^{u_1 h_1} \left(b_1 + p_1 \frac{\lambda}{u_1} \right) + M_{43} e^{-u_1 h_1} f_1 + M_{44} e^{u_1 h_1} g_1 = \\ = p_1 \frac{\lambda}{u_1} (M_{42} e^{u_1 h_1} - M_{41} e^{-u_1 h_1}) \end{array} \right.$$

et se met sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} N_{11} & & N_{12} & & 0 & & 0 \\ & -u_1 h_1 & & u_1 h_1 & & & \\ M_{21} e & & M_{22} e & & 0 & & 0 \\ N_{31} & & N_{32} & & N_{33} & & N_{34} \\ & -u_1 h_1 & & u_1 h_1 & & -u_1 h_1 & & u_1 h_1 \\ M_{41} e & & M_{42} e & & M_{43} e & & M_{44} e \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{A_1(z_2)} = p_1 \frac{\lambda}{u_1} \begin{bmatrix} & & 0 & & & & \\ & & & & & & \\ M_{22} e^{u_1 h_1} - M_{21} e^{-u_1 h_1} & & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ M_{42} e^{u_1 h_1} - M_{41} e^{-u_1 h_1} & & & & & & \end{bmatrix} \quad (\text{I.15.})$$

La résolution de cette équation mène à l'expression du vecteur $\overrightarrow{A_1(z_2)}$:

$$\overrightarrow{A_1(z_2)} = p_1 \frac{\lambda}{u_1} \vec{P} \quad (\text{I.16.})$$

où :

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_{12} G_{13}/D_{11} \\ N_{11} G_{13}/D_{11} \\ ((-M_{44} e^{u_1 h_1} D_{15} + N_{34} D_{16}) G_{13} - N_{34} D_{11} G_{14}) / (D_{11} \cdot D_{12}) \\ ((M_{43} e^{-u_1 h_1} D_{15} - N_{33} D_{16}) G_{13} + N_{33} D_{11} G_{34}) / (D_{11} \cdot D_{12}) \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} G_{13} &= M_{22} e^{u_1 h_1} - M_{21} e^{-u_1 h_1} \\ G_{14} &= M_{42} e^{u_1 h_1} - M_{41} e^{-u_1 h_1} \\ D_{11} &= M_{22} N_{11} e^{u_1 h_1} - M_{21} N_{12} e^{-u_1 h_1} \\ D_{12} &= M_{44} N_{33} e^{u_1 h_1} - M_{43} N_{34} e^{-u_1 h_1} \\ D_{15} &= N_{11} N_{32} - N_{12} N_{31} \\ D_{16} &= N_{11} M_{42} e^{u_1 h_1} - N_{12} M_{41} e^{-u_1 h_1} \end{aligned}$$

L'équation de récurrence (I.9.) se ramène, dans cette configuration, à l'expression suivante :

$$\overrightarrow{A_m(z_m)} = \frac{k_1}{k_m} v_{m1} p_1 \frac{\lambda}{u_1} \vec{P} = p_m \frac{\lambda}{u_1} v_{m1} \vec{P} \quad (\text{I.17.})$$

$$\text{où } p_m = \frac{I \ell}{4 \pi k_m}$$

en remplaçant $A_1(z_2)$ par sa valeur donnée par (I.16.), V_{m1} peut être calculé grâce à la relation de récurrence (I.10.) liant les matrices V_i et D_i .

On pose comme pour V_{M1} et V_{01} :

$$V_{m1} = \begin{bmatrix} 0_{11} & 0_{12} & 0 & 0 \\ 0_{21} & 0_{22} & 0 & 0 \\ 0_{31} & 0_{32} & 0_{33} & 0_{34} \\ 0_{41} & 0_{42} & 0_{43} & 0_{44} \end{bmatrix}$$

Grâce aux relations (I.17) et (I.6) on peut exprimer le vecteur $\overrightarrow{A_m(z)}$ en fonction de \vec{P} et V_{m1} :

$$\overrightarrow{A_m(z)} = p_m \frac{\lambda}{u_1} D_m (z_m - z) V_{m1} \vec{P}$$

On aboutit donc aux équations suivantes déterminant les coefficients des intégrants des composantes $(\Pi_x)_m$ et $(\Pi_z)_m$:

$$\begin{aligned} a_m &= p_m \frac{\lambda}{u_1} (0_{11}P_1 + 0_{12}P_2) e^{u_m z_m} \\ b_m &= p_m \frac{\lambda}{u_1} (0_{21}P_1 + 0_{22}P_2) e^{-u_m z_m} \\ f_m &= p_m \frac{\lambda}{u_1} (0_{31}P_1 + 0_{32}P_2 + 0_{33}P_3 + 0_{34}P_4) e^{u_m z_m} \\ g_m &= p_m \frac{\lambda}{u_1} (0_{41}P_1 + 0_{42}P_2 + 0_{43}P_3 + 0_{44}P_4) e^{-u_m z_m} \end{aligned}$$

Connaissant les différents paramètres ρ_i et h_i caractérisant les couches de terrain, on peut déterminer le potentiel de Hertz grâce aux relations ci-dessus et par conséquent l'amplitude du champ reçu en tout point.

Il est intéressant de remarquer que les éléments N_{ij} dépendent de la stratification totale du terrain tandis que les coefficients 0_{ij} rendent compte de l'état de la structure entre la couche où est placé l'émetteur et la couche où se fait la réception.

L'avantage de cette théorie matricielle réside dans le fait qu'elle permet d'obtenir directement une solution numérique à l'aide d'un ordinateur (annexe.I.1.) dans le cas général d'un milieu à un nombre quelconque de couches.

Dans le chapitre suivant nous donnons différents exemples et nous mettons en évidence l'influence des stratifications sur la composante E_z du champ électrique et sur la résistivité apparente du milieu.

CHAPITRE. II.

APPLICATION DE LA THEORIE MATRICIELLE A LA TELEDIAGRAPHE

Dans ce chapitre, nous étudions différents cas de structure stratifiée simple à l'aide du modèle numérique mis au point précédemment.

Dans un premier exemple nous nous intéressons à la configuration classique - émetteur à la surface du sol, récepteur dans le forage. Dans la présentation théorique, nous avons supposé que l'émetteur était situé à l'interface des deux premières couches. Pour traiter le cas d'une émission à la surface du sol, il suffit d'annuler l'épaisseur h_1 de la couche superficielle.

Dans un deuxième exemple, nous traitons le cas du forage en mer. Nous supposons que l'émetteur est placé au fond de la mer et nous étudions l'amplitude du champ reçu dans le sondage de façon à optimiser la puissance et la fréquence de l'émetteur.

II.1. CAS D'UNE STRUCTURE STRATIFIEE PRESENTANT DES CONTRASTES DE RESISTIVITE ELEVES. EMETTEUR A LA SURFACE DU SOL.

La structure étudiée est schématisée à la figure.1.3.A. et constitue un modèle très approché du sous-sol de Lussagnet. Le gaz naturel est stocké dans des pièges stratigraphiques de ce terrain et des mesures de télédiagraphie ont été effectuées afin de déterminer leur étendue⁽⁴⁾.

Nous décrivons ci-dessous la nature réelle des couches du terrain et leur résistivité donnée à partir de diagraphies électriques⁽⁹⁾.

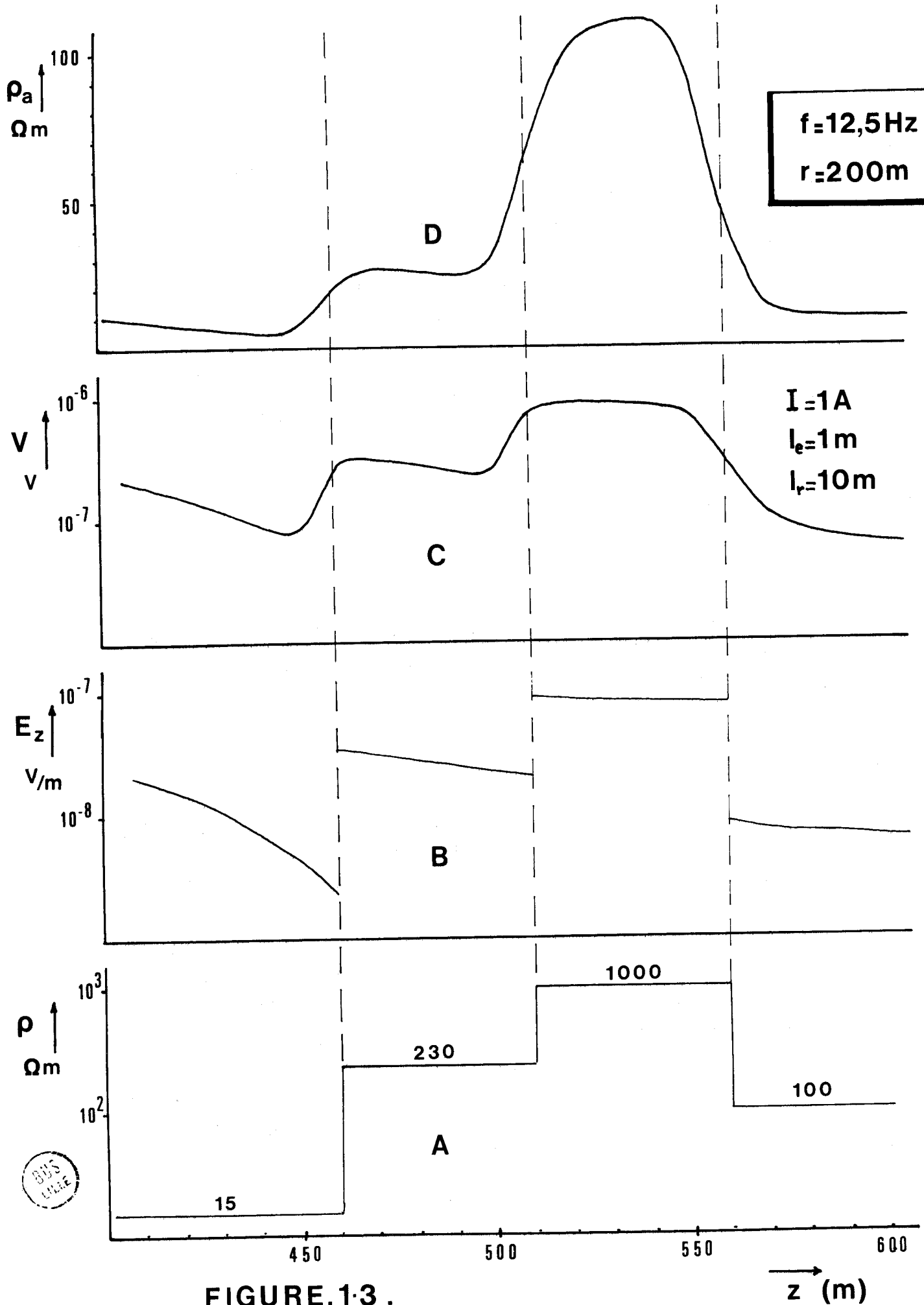


FIGURE.1.3.



- . Couverture : 10 à 20Ω.m épaisseur de 500m environ
- . Zone d'alternance : 300 à 600Ω.m

Bancs calcaires d'épaisseur 3 à 6 mètres dans un contexte argileux de 10Ω.m

Epaisseur totale de 50 mètres environ

- . Réservoir de stockage saturé en gaz : 100 à 2000Ω.m
épaisseur totale de 40 mètres à 60 mètres.

II.1.1. Etude de la composante E_z en fonction de la profondeur

Nous avons représenté sur la figure.1.3.B. l'amplitude du champ E_z calculée en fonction de la profondeur z du point de réception au voisinage des stratification pour une distance émetteur - forage $r = 200m$. La fréquence du courant d'émission est de 12,5Hz.

On peut vérifier facilement sur cette courbe que l'amplitude de E_z satisfait la condition aux limites sur chaque interface :

$$\frac{(E_z)_i}{(E_z)_{i+1}} = \frac{k_{i+1}}{k_i} \approx \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}}$$

En effet $k_i = \frac{1}{\rho_i} + j\omega\epsilon_i \approx \frac{1}{\rho_i}$, le courant de déplacement étant négligeable à cette fréquence vis-à-vis du courant de conduction.

Pratiquement, la distance entre les deux électrodes de réception est de l'ordre de 10 mètres. Nous avons donc représenté sur la figure. 1.3.C. la variation de la tension aux bornes d'une telle sonde, obtenue par intégration de la composante E_z .

On remarque que la tension mesurée est directement proportionnelle à la résistivité de la couche où se trouve la sonde. On peut déterminer ainsi la profondeur approximative d'un gisement.



$f = 12,5 \text{ Hz}$
 $l_f = 10 \text{ m}$

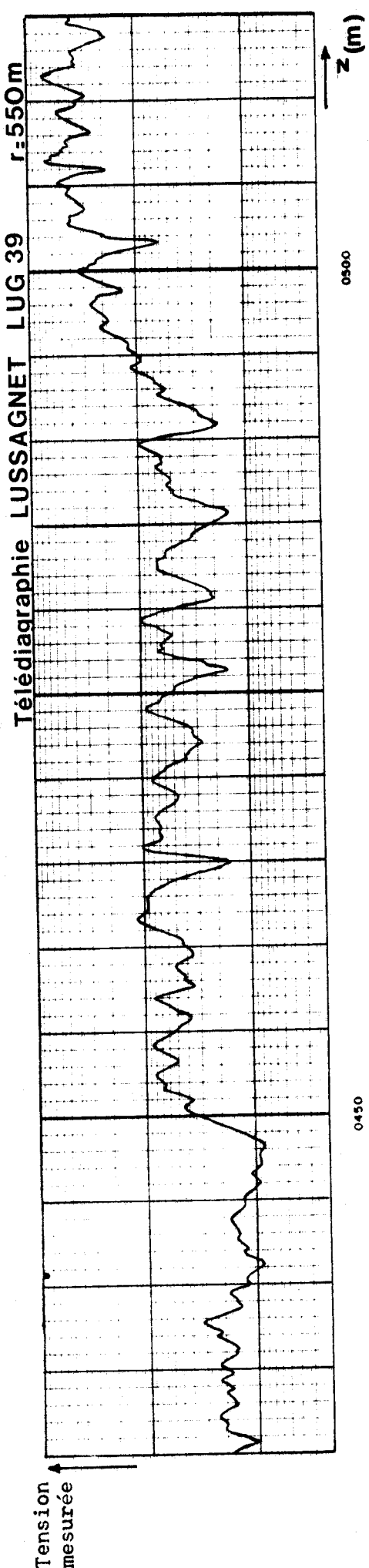
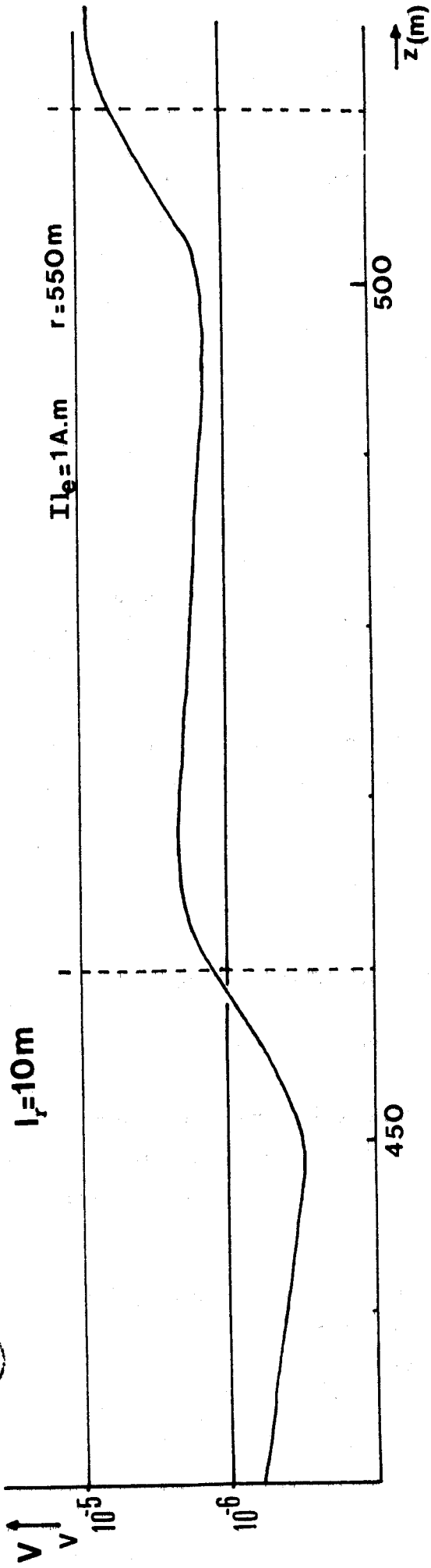


FIGURE.1.4.

Sur la figure.1.3.D. nous avons tracé la variation correspondante de la résistivité apparente ρ_a . Son évolution est semblable à celle de la résistivité réelle des couches successives. Nous allons étudier ce paramètre en fonction de la distance émetteur - forage dans le paragraphe suivant, la fluctuation de $\rho_a(r)$ permettant de préciser l'étendue du gisement.

Des mesures ont été effectuées dans le sous-sol de LUSSAGNET en 1971. L'émetteur était situé à 550 mètres du forage, la sonde se déplaçant entre 400 mètres et 515 mètres de profondeur. Les électrodes d'émission étaient espacées de 100 mètres et le courant émis avait une fréquence de 12,5Hz.

Sur la figure.1.4. nous avons représenté la tension mesurée aux bornes de la sonde et la tension que l'on obtient théoriquement dans les mêmes conditions :

Ne connaissant pas la valeur exacte de la tension mesurée, la comparaison des deux courbes ne peut être que qualitative. On remarque que leur allure est tout à fait similaire, la courbe expérimentale présentant des oscillations supplémentaires dues aux stratifications de faible épaisseur dont nous n'avons pas tenu compte dans le modèle théorique.

II.1.2. Etude de la résistivité apparente du milieu stratifié

Nous allons mettre en évidence la variation de la résistivité apparente ρ_a , en fonction de la distance r émetteur - forage, quand la structure comporte une couche résistante pouvant caractériser un gisement de grande étendue.

Cas d'un milieu stratifié comportant une ou plusieurs couches de grande résistivité

Nous avons calculé $\rho_a(r)$ dans les cas de structures représentés par les schémas de la figure.1.5. L'étude est faite pour un courant d'émission alternatif de fréquence 12,5Hz.

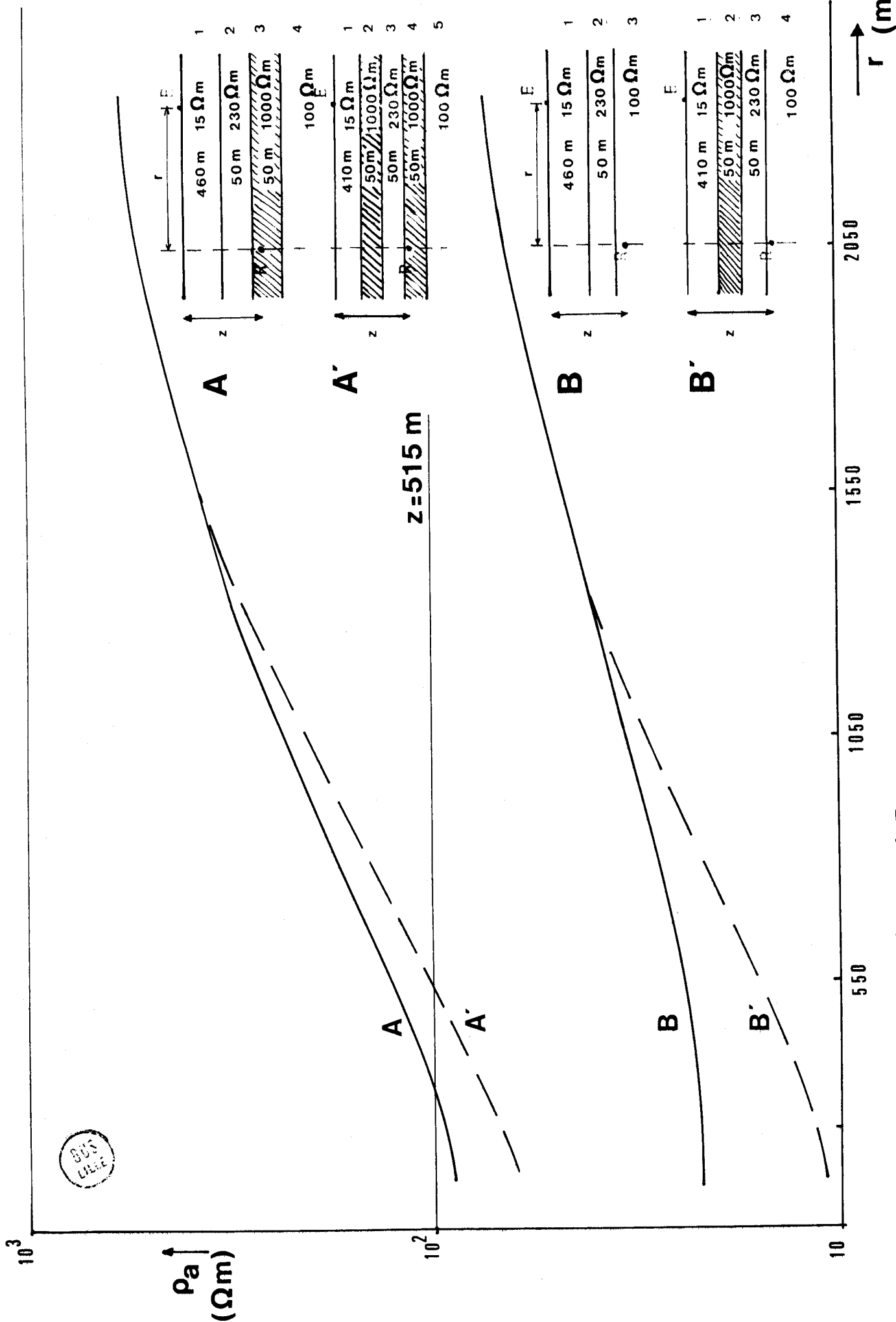


FIGURE.1-5 .

Nous avons envisagé différentes configurations en faisant varier les paramètres suivants : nombre de couches, contrastes de résistivité entre couches.

La courbe A de la figure.1.5. donne la variation de $\rho_a(r)$ pour le milieu stratifié représenté sur le schéma A, le récepteur étant placé à une profondeur $z = 515$ m.

Nous remarquons que cette fonction présente une variation continue. Elle tend vers la valeur $1000\Omega.m$, résistivité de la couche dans laquelle est placé le récepteur, quand r devient très grand. Or nous allons montrer, dans le paragraphe suivant que la présence d'une anomalie de dimension finie se traduit par un extrêmmum $\rho_a(r)$. Les stratifications auront une influence sur la pente de ρ_a sans annuler cet effet et il sera donc toujours possible de détecter l'anomalie.

Dans la structure A' nous avons remplacé la couverture de 460 mètres par une couche de 410 mètres et une couche résistive de $1000\Omega.m$ et d'épaisseur 50 mètres. Pour des valeurs faibles de r , $\rho_a(r)$ a une valeur inférieure à celle du cas précédent, puis se confond avec celle-ci pour des valeurs croissantes de r .

La diminution de ρ_a , donc de E_z , s'explique par la déformation des lignes de courant en présence de la couche résistive.

Dans l'exemple B, la couche résistive de $1000\Omega.m$ a été supprimée de la structure de base. La réception s'effectue alors au sein du socle de résistivité $100\Omega.m$ à la même profondeur $z = 515m$. $\rho_a(r)$ tend vers la valeur $100\Omega.m$.

En présence d'une couche résistive supplémentaire (cas B') on remarque la diminution de $\rho_a(r)$ comme dans l'exemple A'.

En comparant l'amplitude de ρ_a dans les configurations A et B, on note de plus que l'amplitude du champ reçu est plus importante si la réception s'effectue dans une couche résistante, ce qui rejoint évidemment les conclusions auxquelles nous avons abouti dans le paragraphe précédent.

D'après ces différents exemples on remarque que la présence d'une couche résistive au-dessus du point de réception n'a d'influence sur la valeur de la résistivité apparente que pour des distances émetteur-forage très faibles.

Ce résultat montre l'importance de la couche de réception. En effet, si l'on assimile la couche résistive à l'anomalie, il est opportun de placer le récepteur au niveau de l'hétérogénéité de façon à observer au maximum l'effet qu'elle crée sur la variation de la résistivité apparente.

Influence d'une hétérogénéité de dimension finie

Pour étudier l'influence de la dimension finie d'une anomalie nous comparons le cas d'une couche résistive placée dans un demi-milieu et celui d'un disque plan placé à la même profondeur et centré sur le forage. La théorie de la propagation des ondes électromagnétiques en présence d'un disque n'a été faite jusqu'à présent que dans l'approximation du courant continu. Nous supposons donc dans ce paragraphe que la fréquence d'émission est suffisamment basse pour justifier une telle hypothèse.

Le demi-milieu considéré a une résistivité $\rho_1 = 10\Omega.m$ et renferme, à la profondeur de 600 mètres, une couche infiniment étendue d'épaisseur 40 mètres et de résistivité $\rho_2 = 1000\Omega.m$ (fig.1.6.1.).

On suppose que le récepteur se situe à une profondeur $z = 600$ mètres c'est-à-dire à la limite supérieure de la couche résistive.

La courbe.1.a. représente la variation de $\rho_a(r)/\rho_1$ dans l'hypothèse du courant continu. A titre indicatif, la courbe 1.b a été tracée dans le cas d'un courant d'émission de fréquence 12,5Hz. On remarque que ces courbes présentent la même variation et ne diffèrent que par l'amplitude de ρ_a/ρ_1 à r donné.

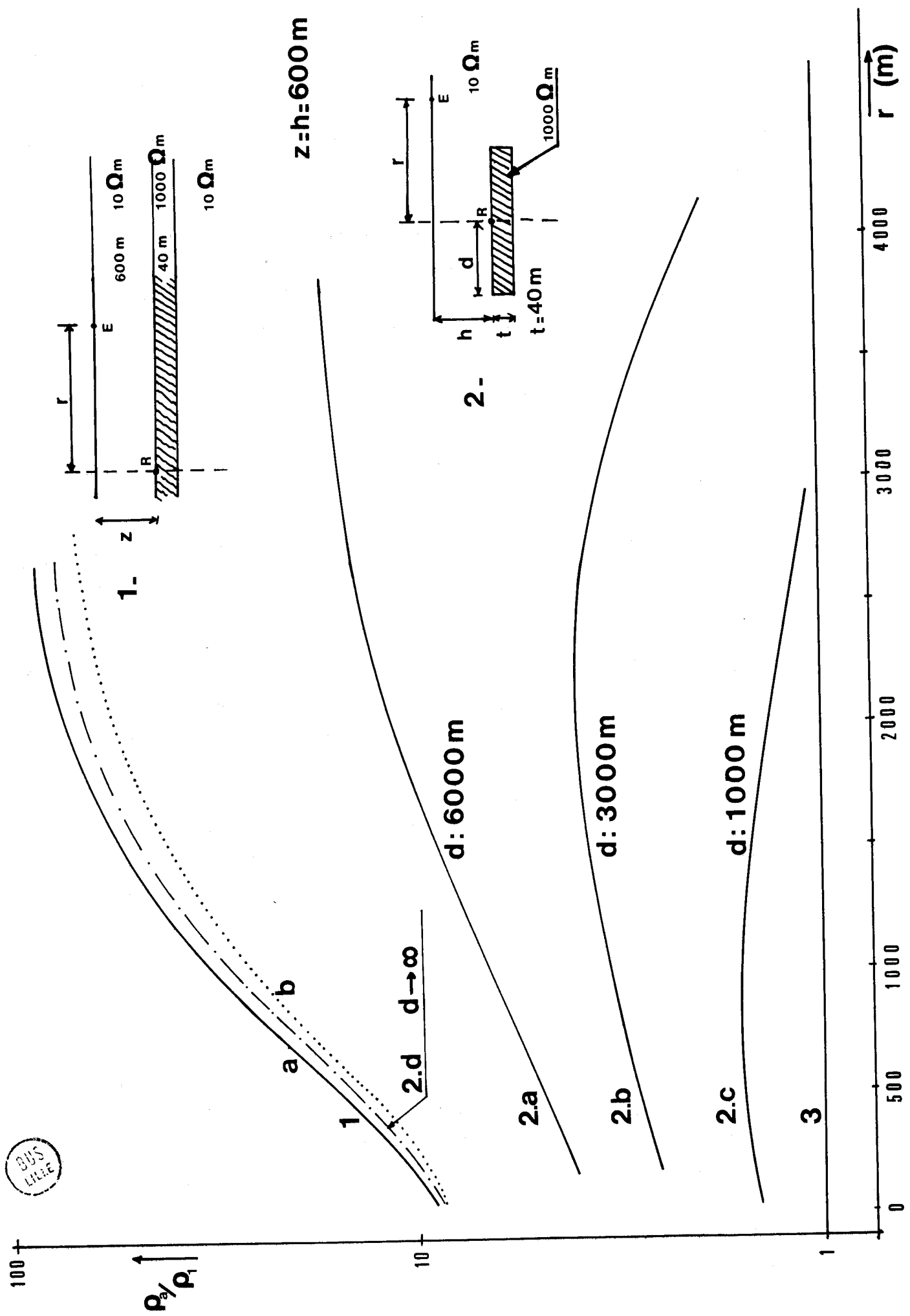


FIGURE.1-6 .

On peut donc admettre que l'hypothèse du courant continu est justifiée pour l'interprétation des mesures de télédigraphie effectuées à 12,5 Hz (3). Des mesures faites sur cuve analogique ont montré également la validité d'une telle hypothèse (8).

Les courbes 2. ont été tracées en remplaçant dans le modèle théorique, la couche résistive de dimension infinie par un disque plat de résistance et d'épaisseur identiques. Cette hétérogénéité est centrée sur l'axe du forage et a un rayon d .

Ce cas a été traité pour différentes valeurs de d de manière à observer l'influence de ce paramètre. Les résultats sont issus d'une application de la théorie développée par Bassiouni (3).

On remarque tout d'abord que si le rayon du disque tend vers l'infini, on retrouve les résultats obtenus directement par la théorie du milieu stratifié (courbe 2.d.). Les courbes 2.a., 2.b., 2.c. présentent un maximum pour une distance r_c émetteur-forage dépendant du diamètre $2d$ du gisement. Connaissant la valeur r_c à partir de mesures faites sur le terrain, il est possible de déterminer d à l'aide d'abaques $d(r_c)$ obtenues par simulation sur cuve analogique.

Pour des valeurs de r très supérieures à d les courbes 2.b et 2.c montrent que la valeur de la résistance apparente p_a tend vers celle du demi-milieu, le disque résistif ayant de moins en moins d'influence sur p_a .

Ces différentes courbes montrent donc que la variation de $p_a(r)$ est continue dans le cas où la structure du terrain est constituée de couches de dimension infinie, résistives ou non. En introduisant une hétérogénéité de dimension finie, nous constatons la présence d'un extrénum de $p_a(r)$ dont la position dépend de l'étendue de l'anomalie.

II.1.3. Conclusion

L'étude que nous venons de faire permet de préciser la profondeur du récepteur pour obtenir un effet important de variation de résistivité apparente, donc la meilleure détermination possible sur l'étendue d'un gisement : la sonde réceptrice doit être placée au sein de la couche contenant l'anomalie et, en particulier, dans celle-ci, quand le forage est central.

Nous avons montré de plus que les stratifications de terrain modifient seulement la valeur de ρ_a mais que les courbes $\rho_a(r)$ ne présentent pas d'extrémum susceptible d'affecter la détection d'une anomalie.

II.2. APPLICATION DE LA TELEDIAGNOSTIQUE EN MER

ETUDE DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE CREEE PAR UN D.E.H. SITUE AU FOND DE LA MER.

La structure retenue est schématisée à la figure.1.7. Le dipôle émetteur est situé au fond de la mer et la sonde de réception est placée dans le socle sous-marin à une profondeur z .

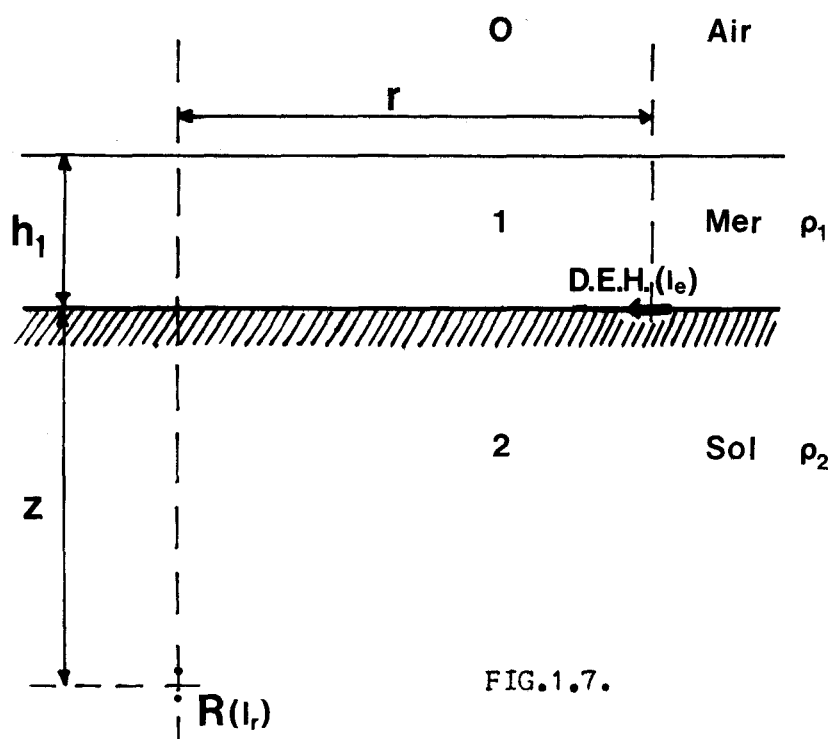


FIG.1.7.

L'objectif de cette étude est d'évaluer les puissances d'émission et les caractéristiques des antennes pour que le rapport signal/bruit au niveau du récepteur soit suffisant pour exploiter les mesures.

II.2.1. Etude de la composante E_z du champ électromagnétique

La configuration du modèle a été choisie suffisamment simple pour permettre un traitement analytique à partir du formalisme matriciel.

Nous avons pu vérifier de cette façon le modèle numérique général que nous avons développé dans le chapitre précédent.

Nous cherchons tout d'abord l'expression de la composante E_z du champ, dans le socle sous-marin. La couche 1 représentant la mer a une épaisseur h_1 et une résistivité ρ_1 (fig.1.7.).

Le socle semi-infini a une résistivité ρ_2 .

Expression de E_z

Nous avons vu que E_z peut être calculé, dans le milieu 2, à partir du potentiel de Hertz grâce à la relation :

$$\begin{aligned} (E_z)_2 &= -\gamma_2^2 \Pi_{2z} + \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \overrightarrow{\Pi}_2 \\ &= -\gamma_2^2 \Pi_{2z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Pi_{2x} + \frac{\partial}{\partial z} \Pi_{2z} \right) \end{aligned}$$

où γ_2 est la constante de propagation intrinsèque du milieu 2.

Le D.E.H. étant orienté suivant Ox dans le repère choisi, si le point de réception est situé dans le zox, les composantes du potentiel de Hertz Π_2 sont données par :

$$\Pi_{2x} = \int_0^{\infty} b_2 e^{u_2 z} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\Pi_{2z} = \int_0^{\infty} g_2 e^{u_2 z} J_1(\lambda r) \lambda d\lambda$$

Les conditions aux limites sur les différents interfaces permettent de calculer les coefficients b_2 et g_2 . Le détail de ce calcul est donné en annexe.1.2.

L'expression du champ E_z devient :

$$(E_z)_2 = \int_0^{\infty} ((j\omega\mu k_2 - u_2^2) g_2 - u_2 b_2) e^{u_2 z} J_1(\lambda r) \lambda d\lambda$$

avec :

$$b_2 = 2p_1 \lambda \frac{k_1 \left[(u_1 + u_0) e^{d_1} + (u_1 - u_0) e^{-d_1} \right]}{k_2 \left[(u_1 + u_0) (u_1 + u_2) e^{d_1} - (u_1 - u_0) (u_1 - u_2) e^{-d_1} \right]}$$

$$g_2 = 2p_1 \lambda \frac{k_1}{k_2} \times \frac{N}{D}$$

$$\text{où : } N = 4k_2 u_1^2 (k_1 - k_0) + 2(k_2 - k_1) (k_0 u_1^2 - k_1 u_0^2) \\ + (k_2 - k_1) \left[(k_0 u_1 - k_1 u_0) (u_1 - u_0) e^{-2d_1} + (k_0 u_1 + k_1 u_0) (u_1 + u_0) e^{2d_1} \right]$$

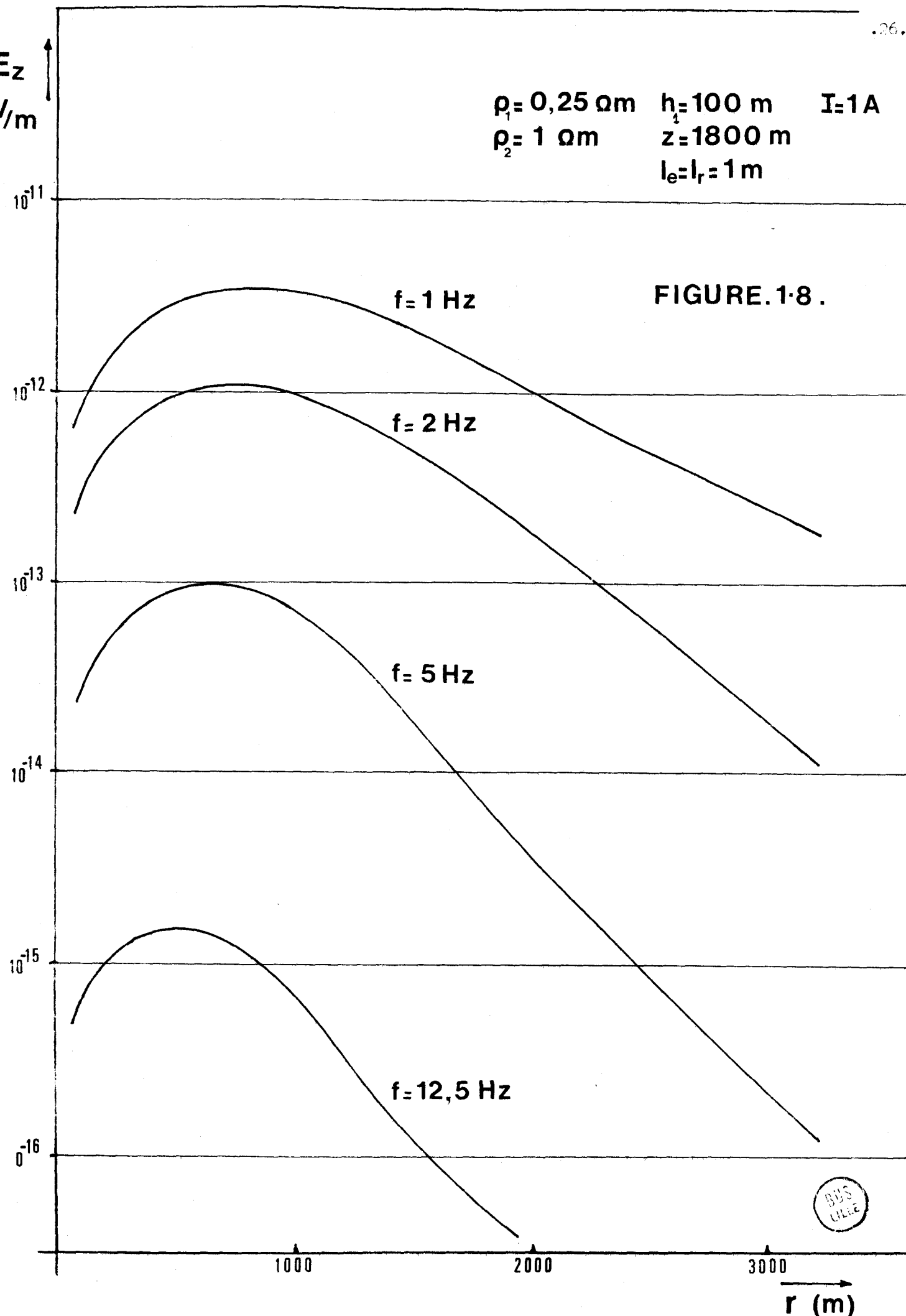
$$D = \left[(u_0 + u_1) (u_2 + u_1) (k_0 u_1 + k_1 u_0) (k_2 u_1 + k_1 u_2) e^{2d_1} \right. \\ \left. + (u_1 - u_0) (u_1 - u_2) (k_0 u_1 - k_1 u_0) (k_2 u_1 - k_1 u_2) e^{-2d_1} \right] \\ - 2 (k_0 k_2 u_1^2 + k_1^2 u_0 u_2) (u_1^2 + u_2 u_0) - k_1 u_1^2 (k_0 u_2 + k_2 u_0) (u_2 + u_0)$$

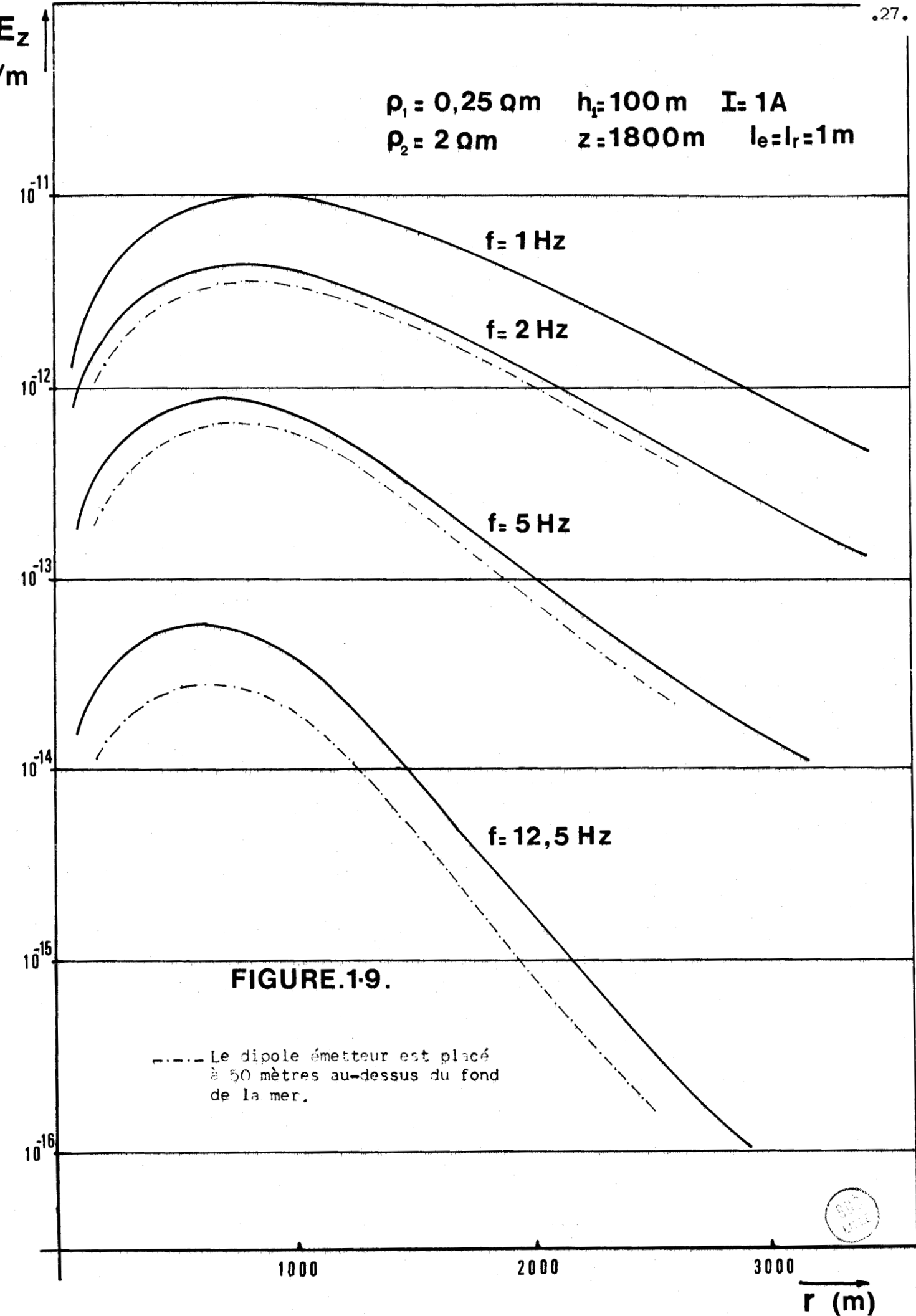
$$\text{où } p_1 = \frac{I\ell}{4\pi} \rho_1 \quad d_1 = u_1 h_1$$

$$k_i = \frac{1}{\rho_i} + j\omega\epsilon_i \neq \frac{1}{\rho_i} \quad u_i = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_i^2} \quad \text{avec } \text{Re} |u_i| > 0$$

Le programme numérique donnant l'intégrant de $(E_z)_2$ est en annexe.1.3.

$\rho_1 = 0,25 \Omega m$ $h_1 = 100 m$ $I = 1 A$
 $\rho_2 = 1 \Omega m$ $z = 1800 m$
 $l_e = l_r = 1 m$





Evaluation de E_z en fonction de la distance r émetteur - forage

Les calculs ont été menés en supposant une couche d'eau de mer de hauteur $h_1 = 100$ mètres et de résistivité $\rho_1 = 0,25\Omega.m$.

La profondeur z du récepteur par rapport au fond de la mer est de 1800 mètres. Le moment électrique de l'antenne émettrice I est égal à $1A.m$.

Les courbes des figures.1.8. et 1.9. représentent la variation de $E_z(r)$ pour une résistivité du socle respectivement égale à $1\Omega.m$ et $2\Omega.m$. La fréquence du courant d'émission est introduite en paramètre et varie entre 1Hz et 12,5Hz.

Sur la courbe.1.9. nous représentaons en tirets la variation de E_z lorsque l'émetteur est placé à une distance $h = 50$ mètres au-dessus du fond de la mer.

Influence de la position de l'émetteur dans la mer

L'émetteur est placé à une distance h au-dessus du fond de la mer (figure.1.10.).

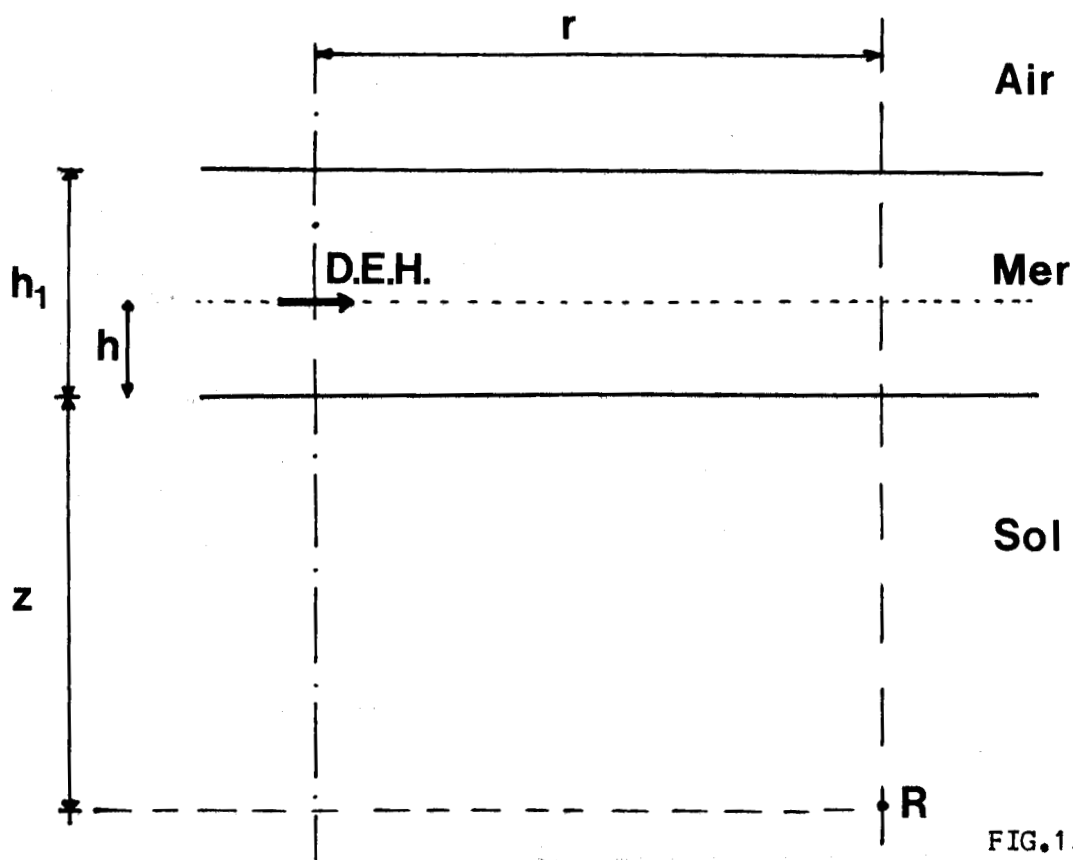
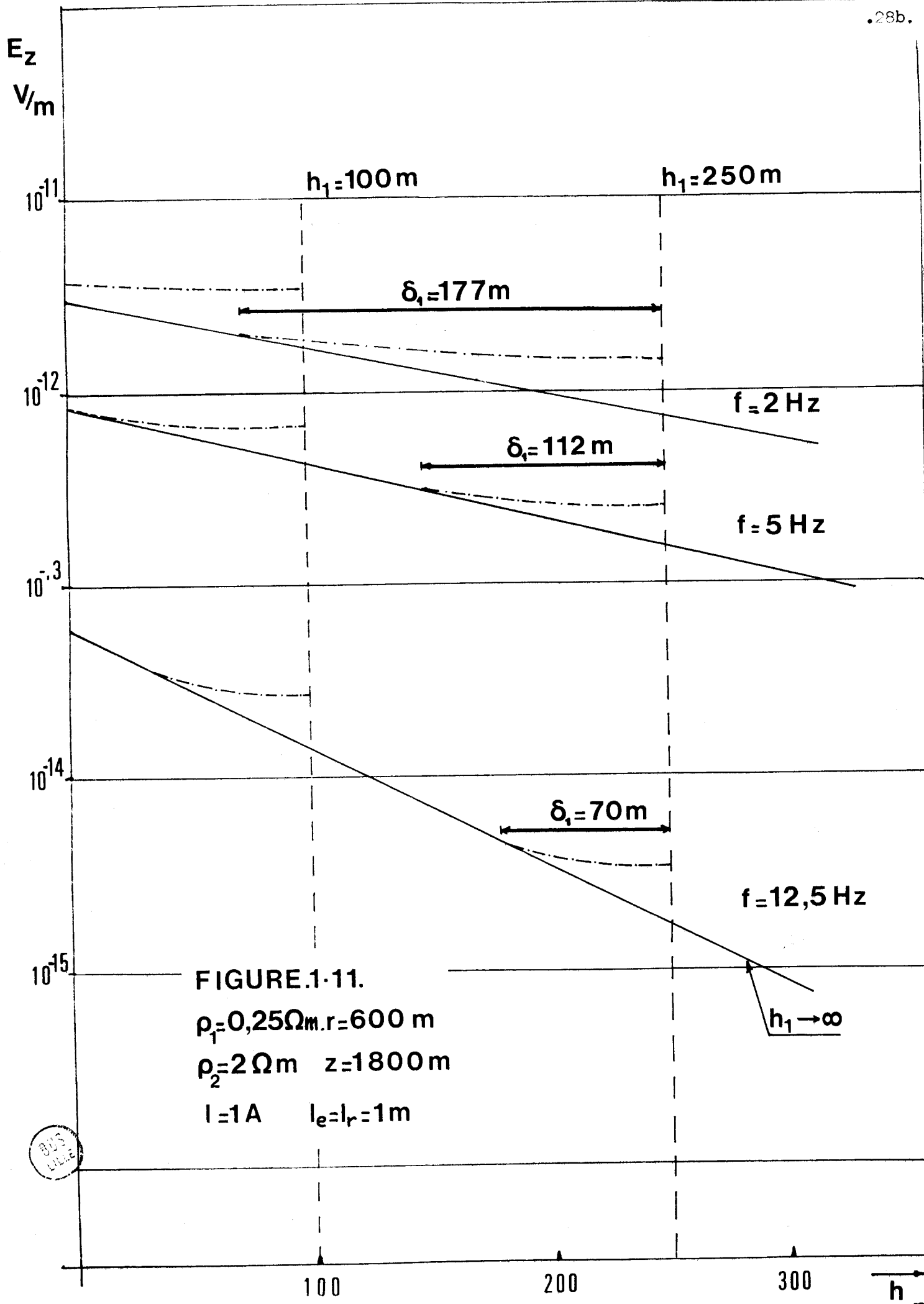


FIG.1.10.



La figure.1.11. montre la variation du champ E_z en fonction de h . Nous supposons que la profondeur de la sonde est de 1800 mètres par rapport au fond de la mer. La distance émetteur - forage r est égale à 600 mètres. La fréquence est introduite en paramètre. L'épaisseur h_1 de la mer prend les valeurs 100 mètres et 250 mètres, la droite en trait plein représentant la décroissance de E_z lorsque h_1 est infinie.

Nous remarquons d'après ces courbes que l'amplitude de E_z décroît rapidement lorsque l'émetteur s'éloigne du fond de la mer. Cependant cette décroissance est beaucoup plus lente aux environs de la surface, une partie des ondes électromagnétiques étant réfléchiée par l'interface air-mer. Cet effet est surtout sensible si la distance émetteur - surface ($h_1 - h$) est inférieure à la profondeur de pénétration δ_1 . Du point de vue amplitude, il est également intéressant d'évaluer le facteur d'atténuation lorsque l'émetteur est à la surface de la mer. Par exemple, à la fréquence de 5Hz ($\delta_1 = 112$ mètres), et pour une couche de mer de 100 mètres d'épaisseur, l'émission en surface ne donne un affaiblissement supplémentaire que de 4 db par rapport à une émission au fond.

Par conséquent, pour des épaisseurs de mer ayant l'ordre de grandeur de la profondeur de pénétration, il peut être envisagé de placer l'émetteur à la surface de la mer.

Evaluation de E_z en fonction de la profondeur de réception

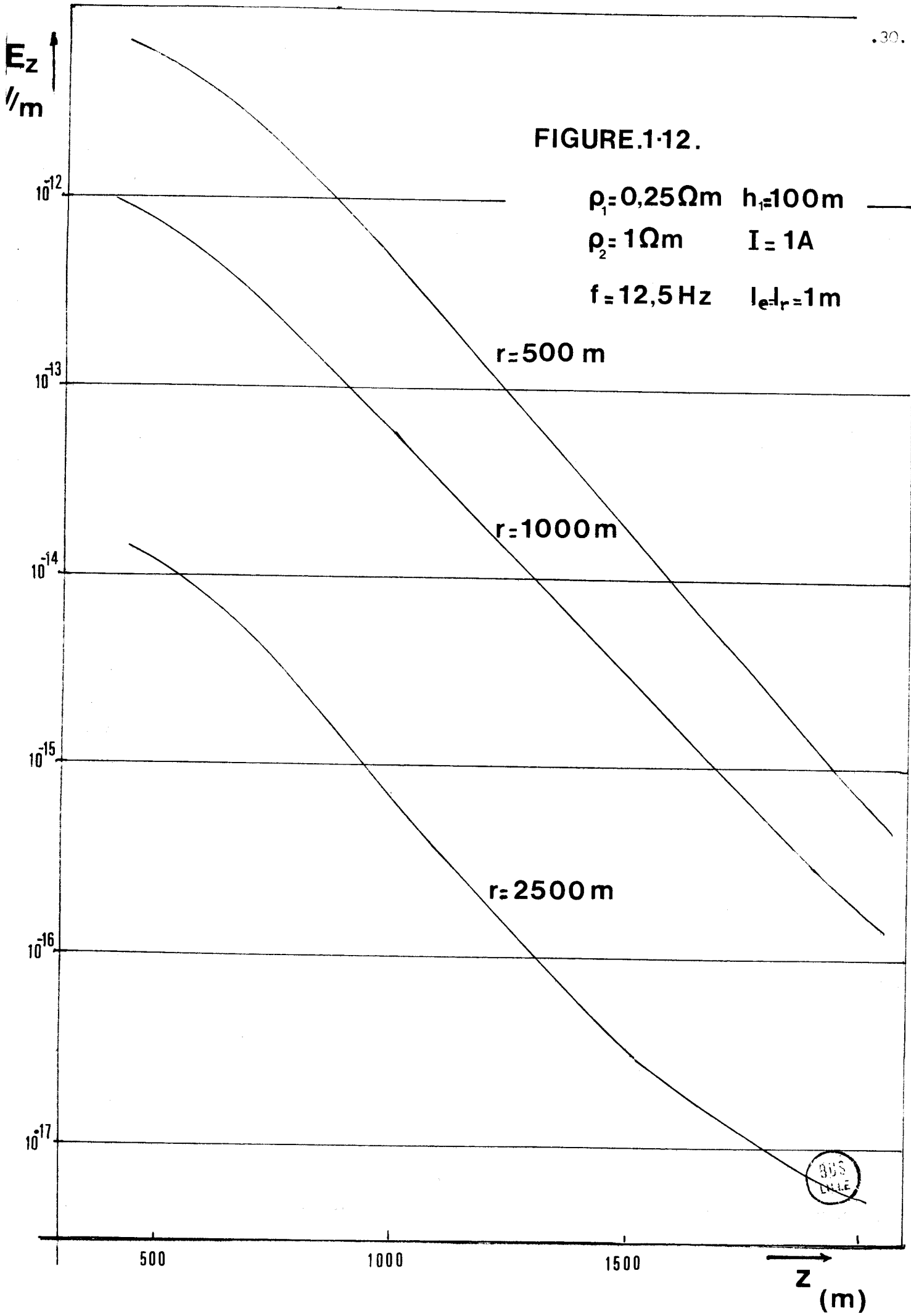
Nous supposons que les caractéristiques du milieu sont les mêmes que précédemment. La variation de E_z est donnée sur la figure.1.12. pour des distances émetteur - forage $r = 500$ mètres, 1000 mètres, 2500 mètres, la fréquence d'émission étant de 12,5Hz. La variation de $E_z(z)$ est soumise aux mêmes lois que celles du demi-milieu air-sol.

FIGURE.1-12.

$\rho_1 = 0,25 \Omega m$ $h_1 = 100 m$

$\rho_2 = 1 \Omega m$ $I = 1 A$

$f = 12,5 Hz$ $I_e = I_r = 1 m$



BUS
LILLE

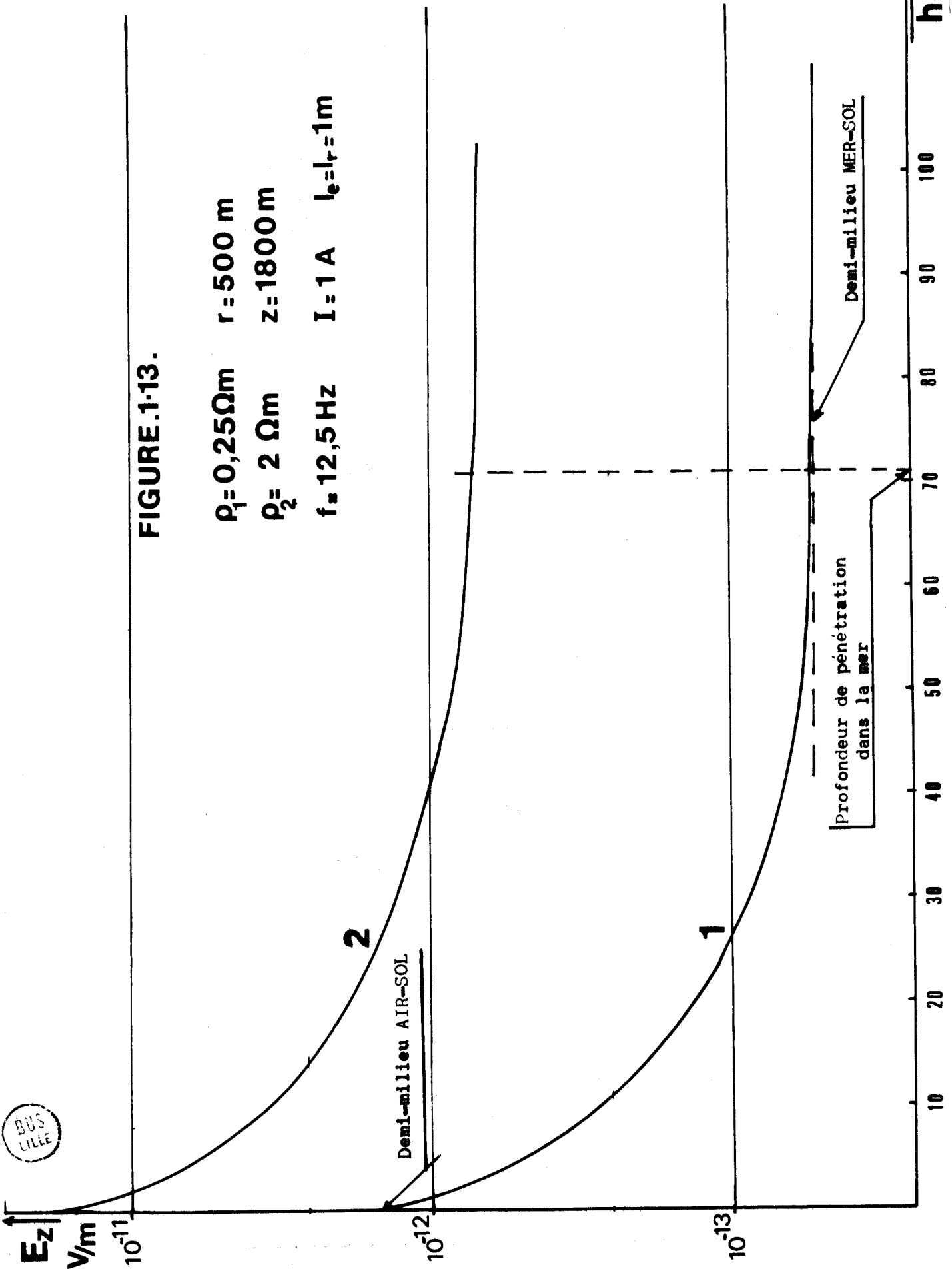


FIGURE.1-13.

$\rho_1 = 0,25 \Omega m$ $r = 500 m$
 $\rho_2 = 2 \Omega m$ $z = 1800 m$
 $f = 12,5 Hz$ $I = 1 A$ $l_e = l_r = 1 m$

Influence de l'épaisseur de la mer sur le champ E_z reçu dans un forage

Si nous envisageons une fréquence d'émission de 12,5Hz, la profondeur de pénétration δ_1 de l'onde dans le milieu marin de résistivité $\rho_1 = 0,25\Omega.m$, est d'environ 70 mètres, c'est-à-dire l'ordre de grandeur de l'épaisseur h_1 de la mer.

La courbe.1. de la figure.1.13. représente la fonction $E_z(h_1)$ pour $z = 1800$ mètres et $r = 500$ mètres. Nous remarquons que l'interface air - mer n'a plus aucune influence dès que l'épaisseur de la mer atteint des valeurs supérieures à la profondeur de pénétration δ_1 .

La présence de la mer entraîne la diminution du champ E_z qui est 30 fois plus faible que dans le cas d'un demi-milieu air-sol.

Tout au long de cette étude nous avons vérifié que le modèle numérique, correspondant au cas général d'un milieu à M couches, donnait des résultats identiques à ceux provenant de la mise en équation directe de E_z . Le modèle général nous permet de placer une couche résistive supplémentaire au niveau du récepteur, qui peut représenter un gisement de résistivité élevée, traversé par le forage.

La courbe 2 de la figure.1.13. montre l'augmentation du champ reçu qui traduit la présence de cette couche d'épaisseur 50 mètres et de résistivité $100\Omega.m$.

II.2.2. Optimisation des caractéristiques de l'émetteur

Etude du bruit dans le domaine des très basses fréquences

Les spectres de bruit ont fait l'objet de nombreux travaux et notamment ceux de Soderberg^{(10),(11)}.

La figure.1.14. montre les spectres de bruit obtenus à la surface de la mer pour les composante horizontale E_r et verticale E_z mesurées dans l'air.

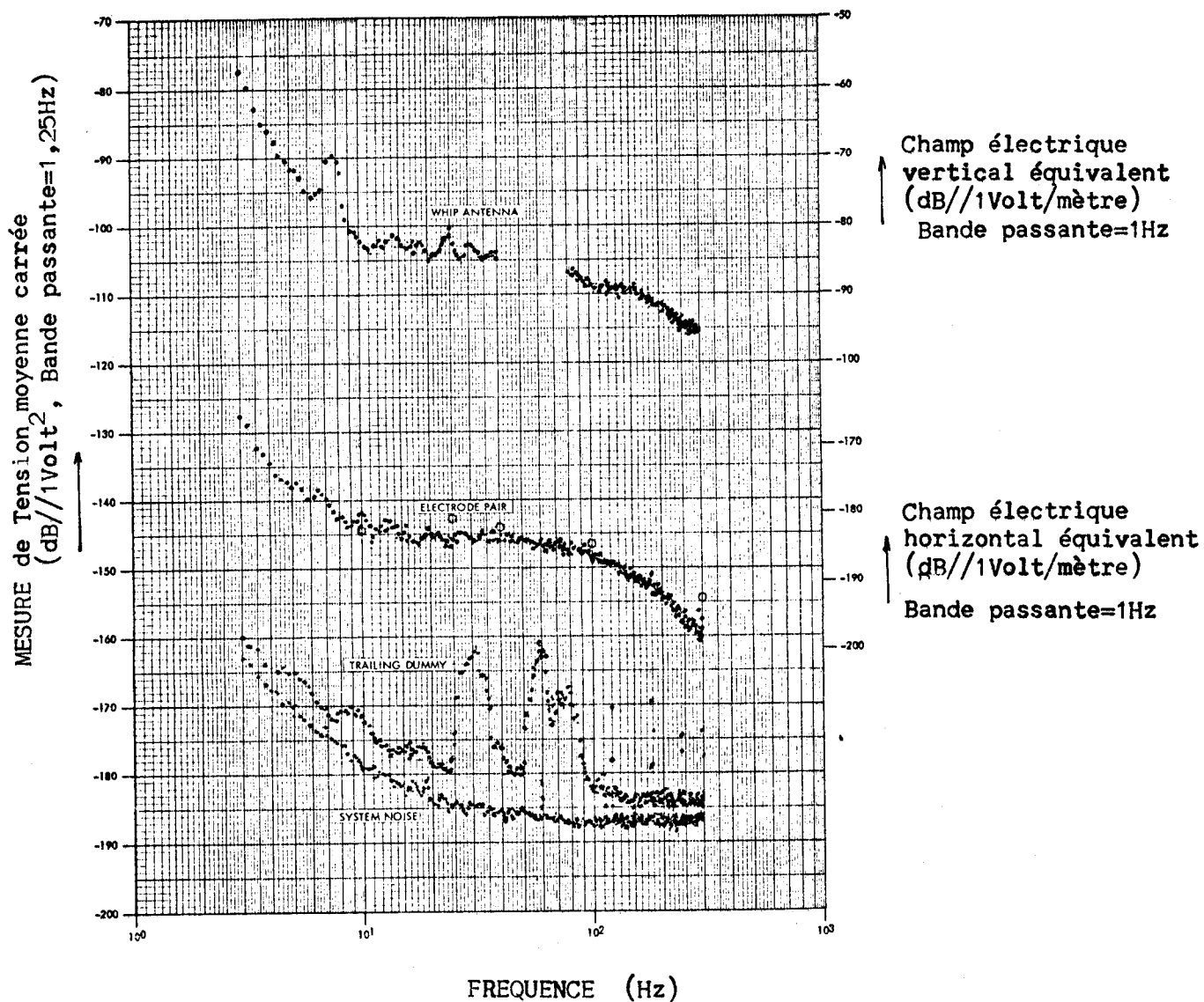


FIGURE 1-14. - SPECTRE de BRUIT T.B.F. (à la surface de la mer) -



Nous notons sur ces spectres une remontée très importante de l'amplitude de bruit en-dessous de 10Hz, avec une augmentation sensible aux environs de 8Hz, due à la résonance de la cavité terre-ionosphère. Il faut remarquer qu'à 2Hz l'amplitude du bruit est 30 fois plus grande qu'à 10Hz et 200 fois plus grande à 1Hz.

A titre d'exemple, pour une fréquence d'environ 10Hz, l'amplitude de E_r est de $-80\text{dB/V/m}/\sqrt{\text{Hz}}$. Si nous admettons que le bruit est dû à une source lointaine (orages tropicaux ...), la composante verticale du champ dans le sol est donnée approximativement par

$$E_z = \frac{\gamma_{\text{air}}}{\gamma_{\text{sol}}} E_r, \text{ soit } -200\text{dB/V/m}/\sqrt{\text{Hz}}.$$

La bande passante du récepteur actuellement utilisé pour la télédiagraphie étant de $2 \cdot 10^{-2}\text{Hz}$, l'amplitude du bruit de cette nature sera de l'ordre du pV/m, donc tout à fait négligeable par rapport au bruit propre des appareils (5nV pour une bande passante de 0,02Hz).

Cependant, pour la mise en oeuvre de la Télédiagraphie, la sonde de réception se déplace dans le forage. Dans ce cas il apparaît un autre bruit au niveau des électrodes, dû au potentiel spontané des différentes couches. Seules, des mesures dans un forage pourront permettre de se rendre compte de l'amplitude et du spectre de ce bruit.

Evaluation de la puissance à mettre en oeuvre

L'étude de E_z , faite dans le paragraphe précédent, permet de caractériser les antennes d'émission et de réception, ainsi que d'évaluer le courant d'émission.

Nous supposons, dans l'état actuel de la technique de réception⁽¹²⁾ que le signal minimum décelable est de 50nV aux bornes des électrodes de la sonde. De plus celles-ci sont séparées par une distance $2r$ comprise entre 20 et 100 mètres.

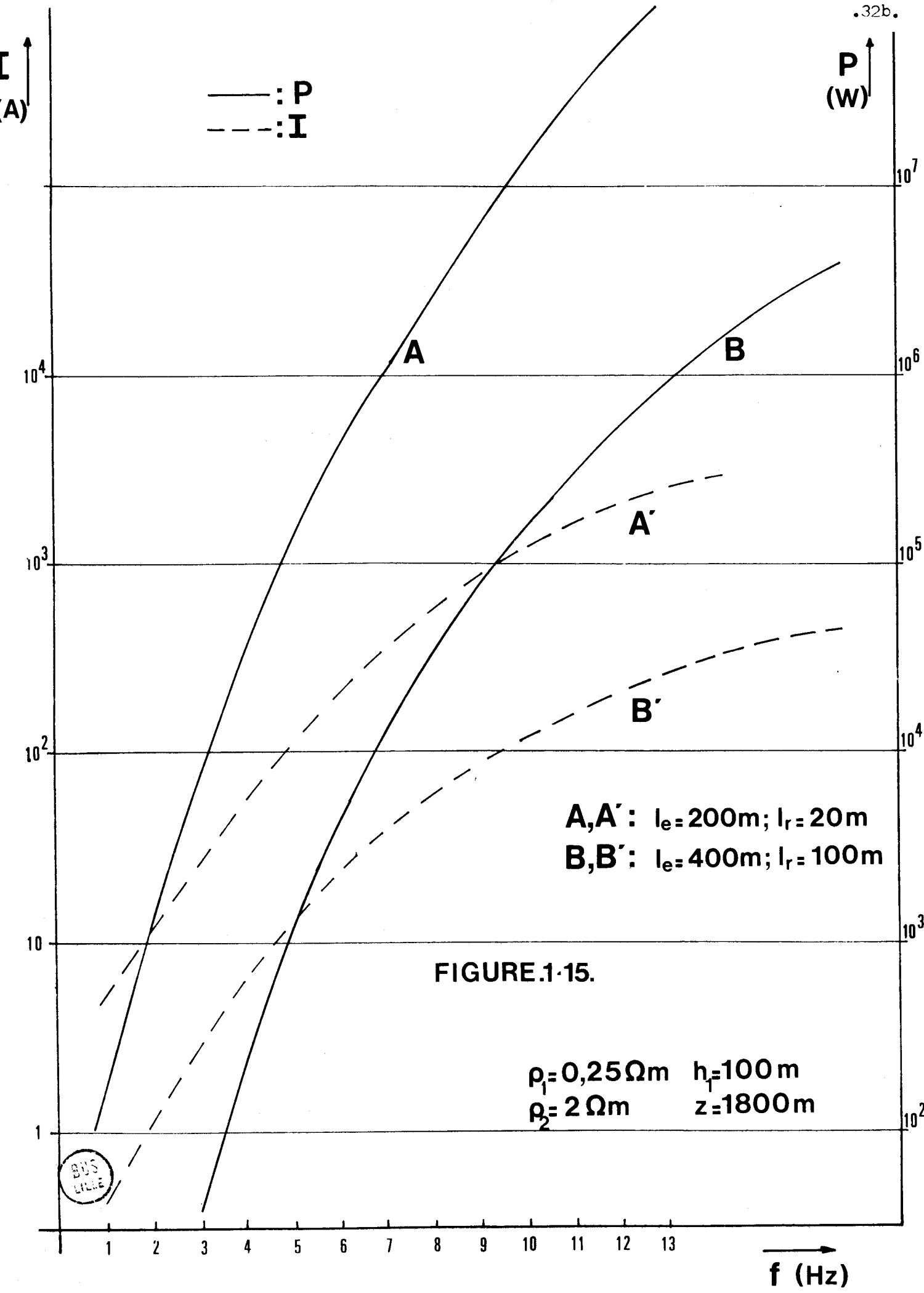


FIGURE.1-15.

Ces valeurs étant fixées, nous pouvons déterminer le moment électrique $I l_e$ de l'antenne d'émission nécessaire pour recevoir une tension V_r de 50nV.

A partir du calcul de V_r obtenu par intégration de E_z nous donnons sur la figure.1.15. l'amplitude du courant d'émission nécessaire en fonction de la fréquence.

Les courbes A' et B' ont été obtenues respectivement pour des antennes d'émission et de réception de 200 et 20 mètres et de 400 et 100 mètres.

Les deux électrodes d'émission peuvent être constituées par des sphères métalliques, reposant sur le fond de la mer, si leur diamètre est de 30cm, elle présente dans ce cas une impédance d'environ 4Ω .

En considérant une résistance totale d'antenne de 10Ω nous avons représenté en trait continu sur la figure.1.15., l'évolution de la puissance d'émission exigée, en fonction de la fréquence.

Nous voyons que pour une résistivité du sol sous-marin $\rho_2 = 2\Omega.m$, cette puissance est de 10kW à 3Hz pour des antennes de 200 mètres à l'émission et de 20 mètres à la réception. A une fréquence de 7Hz, la puissance devrait atteindre 1MW avec des antennes de cette longueur. Cependant, si cette fréquence doit être choisie pour des raisons technologiques (réalisation du récepteur, bruit au niveau des électrodes), il est nécessaire d'utiliser des antennes plus longues. Par exemple pour une antenne d'émission de 400 mètres et celle de réception de 100 mètres, la puissance nécessaire à 7Hz n'est plus que de 10 kW.

L'ordre de grandeur de la puissance à émettre reste dans le domaine du raisonnable si l'on envisage de ramener la fréquence aux valeurs indiquées et d'adapter les longueurs des bases d'émission et de réception.

CONCLUSION

Nous avons vérifié que l'approximation du courant continu était valable pour la fréquence d'émission de 12,5Hz qui a été choisie lors de nombreuses expériences.

L'étude de la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu stratifié a permis également d'analyser l'influence du contraste de résistivité entre couches sur l'interprétation des mesures de télédigraphie. En particulier, nous avons montré que les stratifications du terrain modifient la valeur de la résistivité apparente mais que les courbes $\rho_a(r)$ ne présentent d'extrémum qu'en présence d'une anomalie de dimension finie. Cependant l'étendue du fissement est déterminée à partir de la position de cet extrémum ; nous comparons donc dans le chapitre suivant la variation de la résistivité apparente $\rho_a(r)$ en présence d'une hétérogénéité, d'une part dans le cas d'un demi-milieu et d'autre part pour un milieu stratifié. L'exemple que nous choisissons est celui de la télédigraphie en mer pour lequel nous venons de préciser les ordres de grandeur des caractéristiques d'émission et les positions des antennes.

DEUXIEME PARTIE

LOCALISATION D'UNE ANOMALIE DE RESISTIVITE ELEVEE SITUEE
DANS UN SOCLE SOUS-MARIN. APPROXIMATION DU COURANT CONTINU.

DEUXIEME PARTIE

LOCALISATION D'UNE ANOMALIE DE RESISTIVITE ELEVEE SITUEE DANS UN SOCLE SOUS-MARIN. APPROXIMATION DU COURANT CONTINU.

L'interprétation des mesures de télédiagraphie se fait habituellement en assimilant le sol à un demi-milieu homogène surmonté d'un demi-milieu diélectrique, l'air.

Dans le cas du forage en mer, il est nécessaire de tenir compte de la couche d'eau supplémentaire, l'émetteur pouvant être placé à l'interface mer-sol.

Cependant, la théorie générale que nous avons exposée dans les chapitres précédents devient extrêmement compliquée si le milieu stratifié contient une anomalie de dimension finie. Nous nous limiterons donc à l'approximation du courant continu qui permet de trouver une solution analytique relativement simple. Une telle hypothèse a déjà permis de montrer qu'il est possible de déceler une anomalie latérale de résistivité, située dans un demi-milieu air-sol, et de connaître la distance la séparant de l'axe du forage ⁽³⁾.

Nous envisageons donc le cas d'une hétérogénéité de faible épaisseur placée dans le socle sous-marin. Nous exprimons le potentiel créé, en un point de celui-ci, par une source ponctuelle de courant située au fond de la mer. Cette expression permet de déterminer la variation de résistivité apparente traduisant la présence de l'anomalie. Nous traitons successivement le cas où le forage traverse l'anomalie et le cas d'une hétérogénéité latérale.

CHAPITRE. I.

ETUDE THEORIQUE DU POTENTIEL CREE PAR UNE SOURCE PONCTUELLE DE COURANT.
DETERMINATION DE LA RESISTIVITE APPARENTE DU MILIEU.

Le modèle théorique que nous utilisons est représenté par la figure.2.1. Une hétérogénéité, de résistivité élevée ρ_3 d'épaisseur t , est placée dans un milieu homogène semi-infini située sous une couche de mer d'épaisseur h_1 . Nous supposons que cette hétérogénéité se situe à une profondeur h par rapport à la surface de la mer.

La circulation du courant est créée par deux sources $+I$ et $-I$ placées respectivement aux points Q et Q' au fond de la mer.

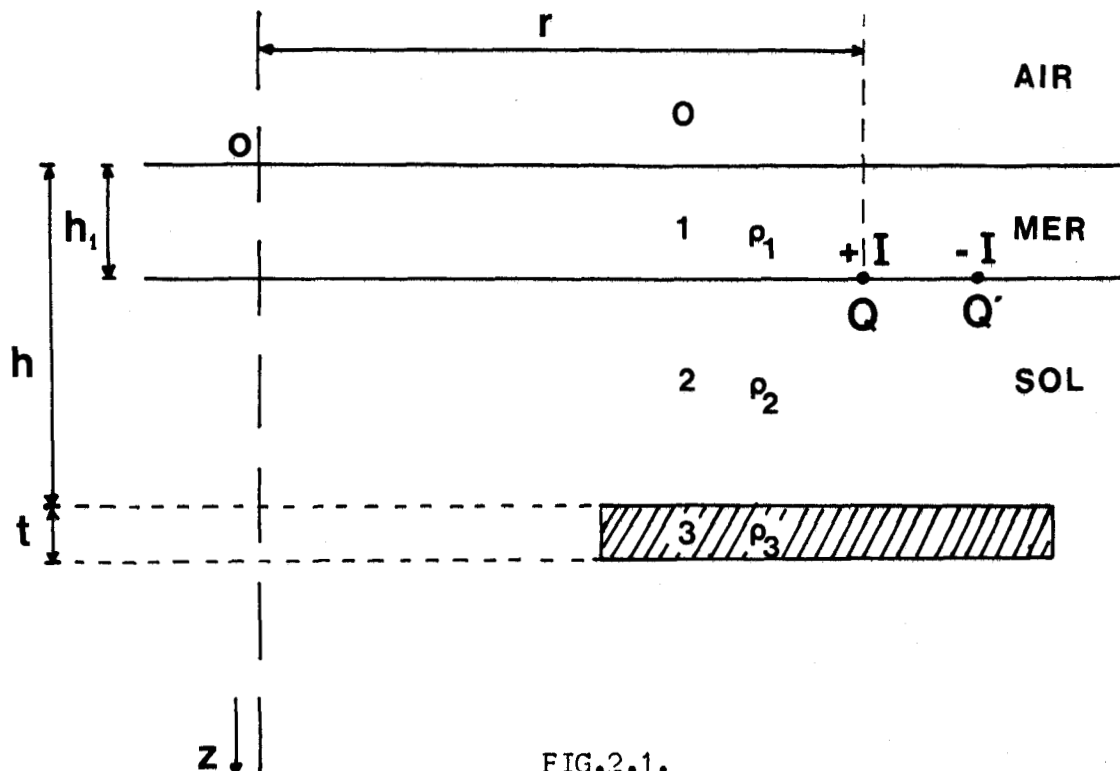


FIG.2.1.

Afin d'obtenir une solution analytique relativement simple, il est intéressant d'utiliser la théorie des images en courant continu pour tenir compte des interfaces de l'hétérogénéité. L'expression du potentiel créé en un point du milieu homogène par la source de courant $+I$ permettra de calculer la résistivité apparente du milieu.

I.1. THEORIE DES IMAGES EN COURANT CONTINU EN PRESENCE DES INTERFACES AIR - MER et MER - SOL⁽¹³⁾, (14)

Nous déterminons tout d'abord la position des images de la source par rapport aux différents interfaces et nous donnons l'amplitude des courants secondaires correspondants. Le milieu stratifié se transpose ainsi en un milieu homogène infini de résistivité constante. La densité superficielle de charge créée sur une anomalie joue le rôle d'une source de courant secondaire située dans le socle.

Nous déterminons donc successivement les images d'une source ponctuelle, placée, soit au fond de la mer, soit au sein du socle sous-marin.

I.1.1. La source ponctuelle est placée au fond de la mer

Considérons un système de coordonnées cylindriques représenté par la figure.2.2.

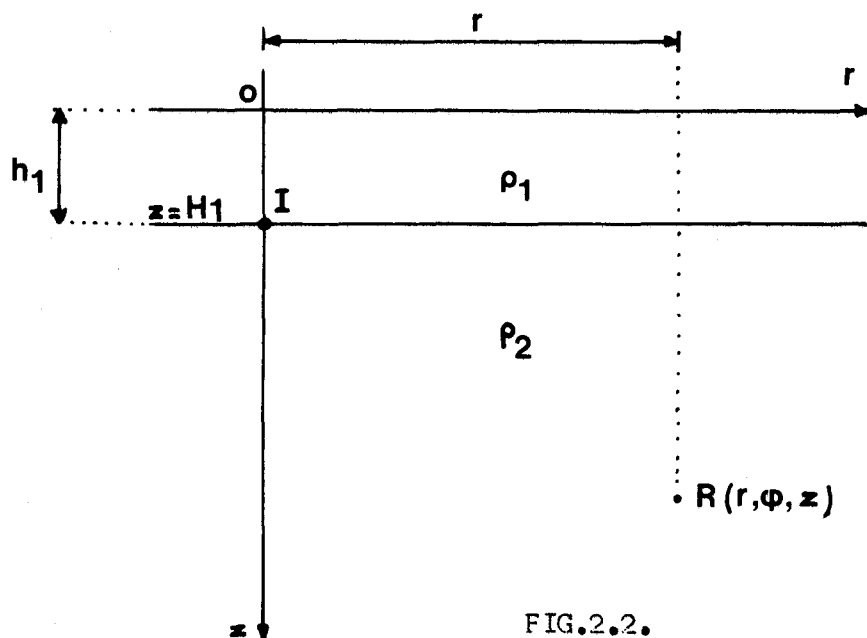


FIG.2.2.

Le potentiel créé en tout point de la structure stratifiée sans anomalie est la somme du potentiel primaire obtenu dans un milieu homogène et d'un potentiel secondaire causé par les interfaces.

Le potentiel primaire U_0 créé en un point R par une source ponctuelle de courant située à une profondeur h_1 dans un demi-milieu homogène de résistivité est donné par :

$$U_0 = \frac{I\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0} \right) \tag{II.1.}$$

$$\text{où } R_1 = \sqrt{r^2 + (z-h_1)^2}$$

$$R_0 = \sqrt{r^2 + (z+h_1)^2}$$

Le potentiel électrique secondaire U'_i créé au point R de la couche i satisfait l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 U'_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U'_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 U'_i}{\partial z^2} = 0$$

dont la solution générale s'écrit :

$$U'_i = \int_0^\infty \{A_i(\lambda)e^{-\lambda z} + B_i(\lambda)e^{+\lambda z}\} J_0(\lambda r) d\lambda \tag{II.2.}$$

Par conséquent, le potentiel total U_i en un point de la couche i est donné par :

$$U_i = \frac{I\rho_1}{4\pi} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \right) + \int_0^\infty \{A_i(\lambda)e^{-\lambda z} + B_i(\lambda)e^{+\lambda z}\} J_0(\lambda r) d\lambda \tag{II.3.}$$

Les coefficients $A_i(\lambda)$ et $B_i(\lambda)$ vont se mettre sous forme de séries traduisant les réflexions successives de l'onde sur chacun des interfaces et sont déterminés par les conditions aux limites suivantes :

$$\left. \begin{aligned} U_i &= U_{i+1} \\ \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial U_i}{\partial z} &= \frac{1}{\rho_{i+1}} \frac{\partial U_{i+1}}{\partial z} \end{aligned} \right\} \text{pour } z = H_i$$

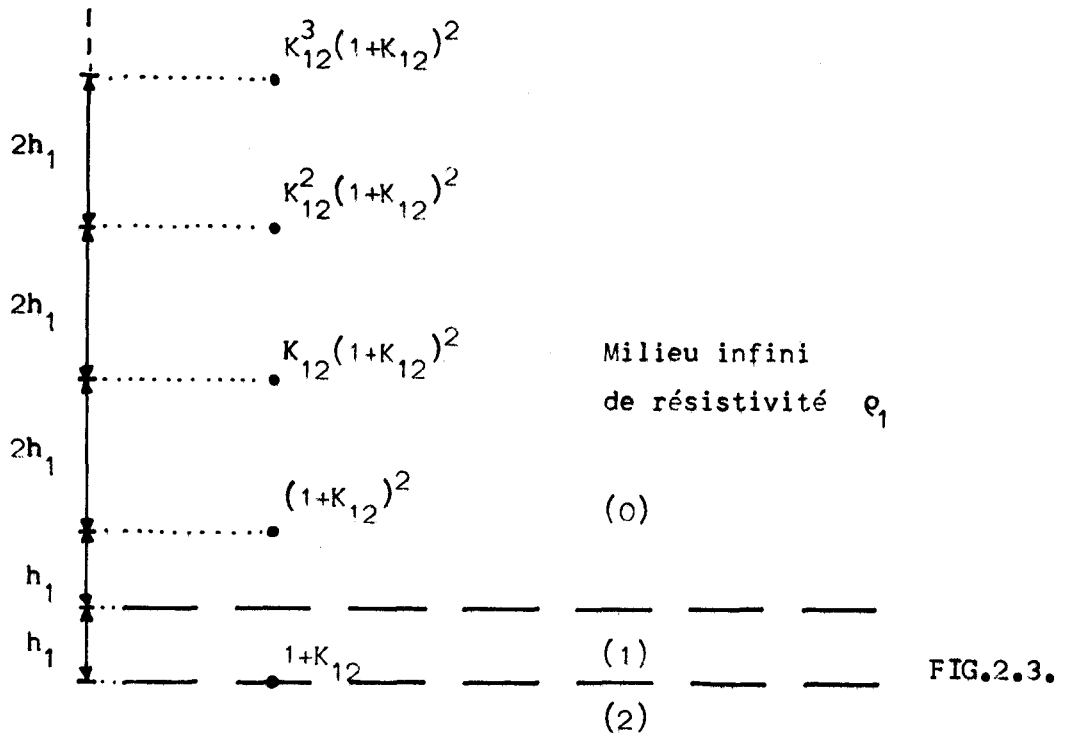
Nous avons développé ce calcul dans l'annexe.2.1.A. pour exprimer le potentiel U_2 créé en un point situé dans le couche 2 semi-infinie.

Nous obtenons :

$$U_2 = q_1 \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \right) + q_1 \sum_{n=1}^{\infty} (K_{12})^n \left[\frac{2}{(r^2 + ((2n-1)h_1+z)^2)^{1/2}} + \frac{1}{(r^2 + ((2n+1)h_1+z)^2)^{1/2}} + \frac{1}{(r^2 + ((2n-3)h_1+z)^2)^{1/2}} \right] \quad (II.4.)$$

avec : $q_1 = \frac{I\rho_1}{4\pi}$ $K_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$

L'indice n est associé à la n^{ième} image de la source.
 Cette expression permet de pondérer et de situer les images de la source représentées sur la figure.2.3.



A titre d'exemple nous supposons que la mer a une hauteur $h_1 = 50$ mètres et une résistivité ρ_1 , le socle ayant une résistivité ρ_2 .

Nous montrons sur la figure.2.4., en trait discontinu, la variation de E_z en envisageant successivement 5, 10 et 15 images.

FIGURE.2-4.

$\rho_1 = 0,25 \Omega m$

$\rho_2 = 50 \Omega m$

$h_1 = 50 m$

$z = 1000 m$

$I = 1A$

$l_e = l_r = 1m$

$E_z \uparrow$
V/m

9×10^{-10}

8×10^{-10}

- 5 images
- - - 10 "
- 15 "
- Calcul effectué par la Théorie Matricielle à $f=0 Hz$



$r (m)$

200 300 400 500 600 700 800 900 1000 1100

Nous avons également traité le même milieu stratifié à l'aide de la théorie matricielle exposée dans la première partie. Nous représentons en trait plein la variation de E_z correspondante. Lorsque le nombre d'images devient de plus en plus important, les deux courbes tendent évidemment à se confondre. Le tableau ci-dessous donne l'erreur relative sur la valeur exacte du potentiel calculé à partir de la théorie matricielle en fonction du nombre d'images considéré.

nombre d'images	erreur relative (%)
10	2
15	0,2
20	0,1
500	0,03

Dans la suite de notre étude nous nous limiterons donc à 15 images de source et d'anomalie qui donnent une précision suffisante pour l'exploitation des mesures de télédiagraphie.

II.1.2. La source ponctuelle est placée dans le socle sous-marin

La source secondaire due à l'anomalie est située dans la couche 2 à la profondeur h à partir de la surface de la mer (figure.2.5.).

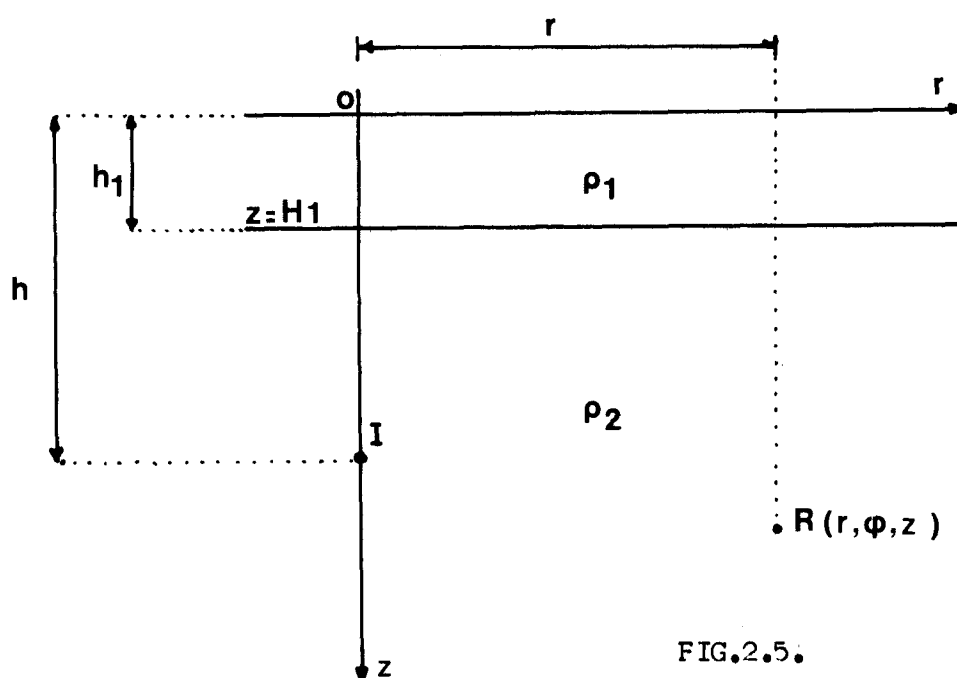


FIG.2.5.

De la même façon que précédemment, nous exprimons le potentiel U'_2 en un point $R(r, \phi, z)$ de la couche.2. Le calcul est développé en annexe.2.1.B. On obtient :

$$U'_2 = q'_2 \left(\frac{1}{R'_{0'}} + \frac{1}{R'_{1'}} \right) + q' \sum_{n=1}^{\infty} (k_{12})^n \left[\frac{1}{(r^2 + (2nh_1 + h + z)^2)^{1/2}} + \frac{2}{(r^2 + ((2n-2)h_1 + h + z)^2)^{1/2}} + \frac{1}{(r^2 + ((2n-4)h_1 + h + z)^2)^{1/2}} \right] \quad (\text{II.5.})$$

avec $q'_2 = \frac{I \rho_2}{4\pi}$ $R'_{0'} = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$
 $R'_{1'} = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}$

Les images caractérisées par cette relation sont représentées sur la figure.2.6.

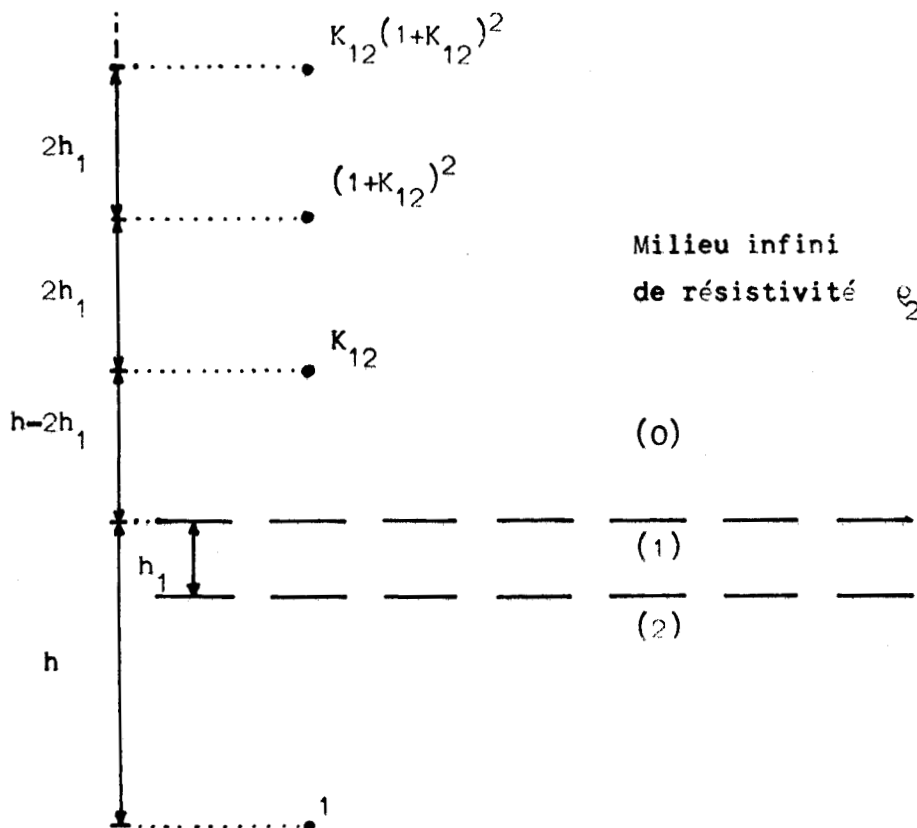


FIG.2.6.

Remarque sur la juxtaposition des deux effets

Les images de la source d'émission par rapport aux interfaces ont été obtenues pour un milieu infini de résistivité ρ_1 . Les positions des images sources et leurs pondérations sont fonctions des caractéristiques de ce milieu. Cependant les images de l'anomalie se situent dans un milieu infini de résistivité ρ_2 .

Il est donc nécessaire de représenter les deux phénomènes dans un milieu de caractéristique unique.

Si nous choisissons comme milieu infini le socle sous-marin, de résistivité ρ_2 , il faut apporter une correction à la contribution des images - sources placées dans un milieu de résistivité ρ_1 .

Le potentiel, au point d'observation $R(r, \phi, z)$, dû à une source ponctuelle située dans le milieu 1, est de la forme :

$$U_1 = \frac{q_1}{R_1} \quad \text{où} \quad q_1 = \frac{I\rho_1}{4\pi}$$

R_1 est une distance liant R au point source ou à l'une de ses images.

Dans un milieu de résistivité ρ_2 :

$$U_2 = \frac{q_2}{R_2} \quad \text{où} \quad q_2 = \frac{I\rho_2}{4\pi}$$

Pour obtenir le même potentiel il faut donc que $R_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} R_1$.

Il suffit donc de corriger les coordonnées géométriques de la source et des images-sources par un facteur multiplicatif ρ_2/ρ_1 dans le système de coordonnées initial.

La figure.2.7. présente la disposition des images de la source et de l'anomalie dans le milieu infini de résistivité ρ_2 .

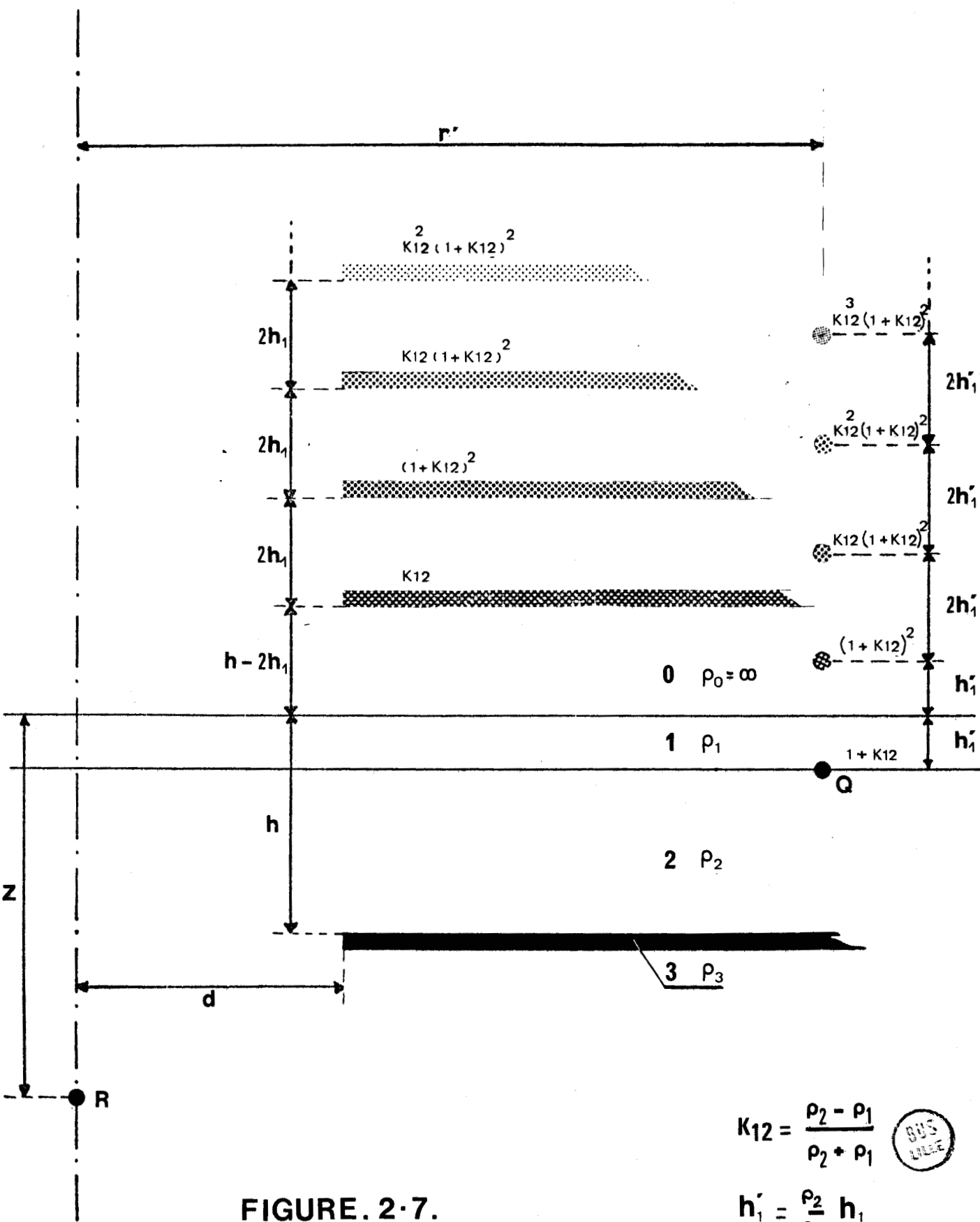


FIGURE. 2-7.

$$K_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

$$h_1' = \frac{\rho_2}{\rho_1} h_1$$

$$r' = \frac{\rho_2}{\rho_1} r$$



1.2. EXPRESSION DU POTENTIEL RECU DANS LE FORAGE EN PRESENCE D'UNE ANOMALIE EN FORME DE COUCHE TRES MINCE

Comme le montre la figure.2.8. une anomalie de résistivité ρ_3 et d'épaisseur t est enfermée à la profondeur h dans le socle sous-marin de résistivité ρ_2 . Nous supposons que la mer a une résistivité ρ_1 et une épaisseur h_1 .

La circulation du courant est créée par deux sources $+I$ et $-I$ placées respectivement aux points $Q(r,0,h_1)$ et $Q'(r+l,0,h_1)$ de l'interface mer-sol.

Nous calculons le potentiel créé au point $R(0,0,z)$ du forage à l'aide de la théorie des images et nous déterminons la résistivité apparente du milieu étudié.

1.2.1. Expression du potentiel

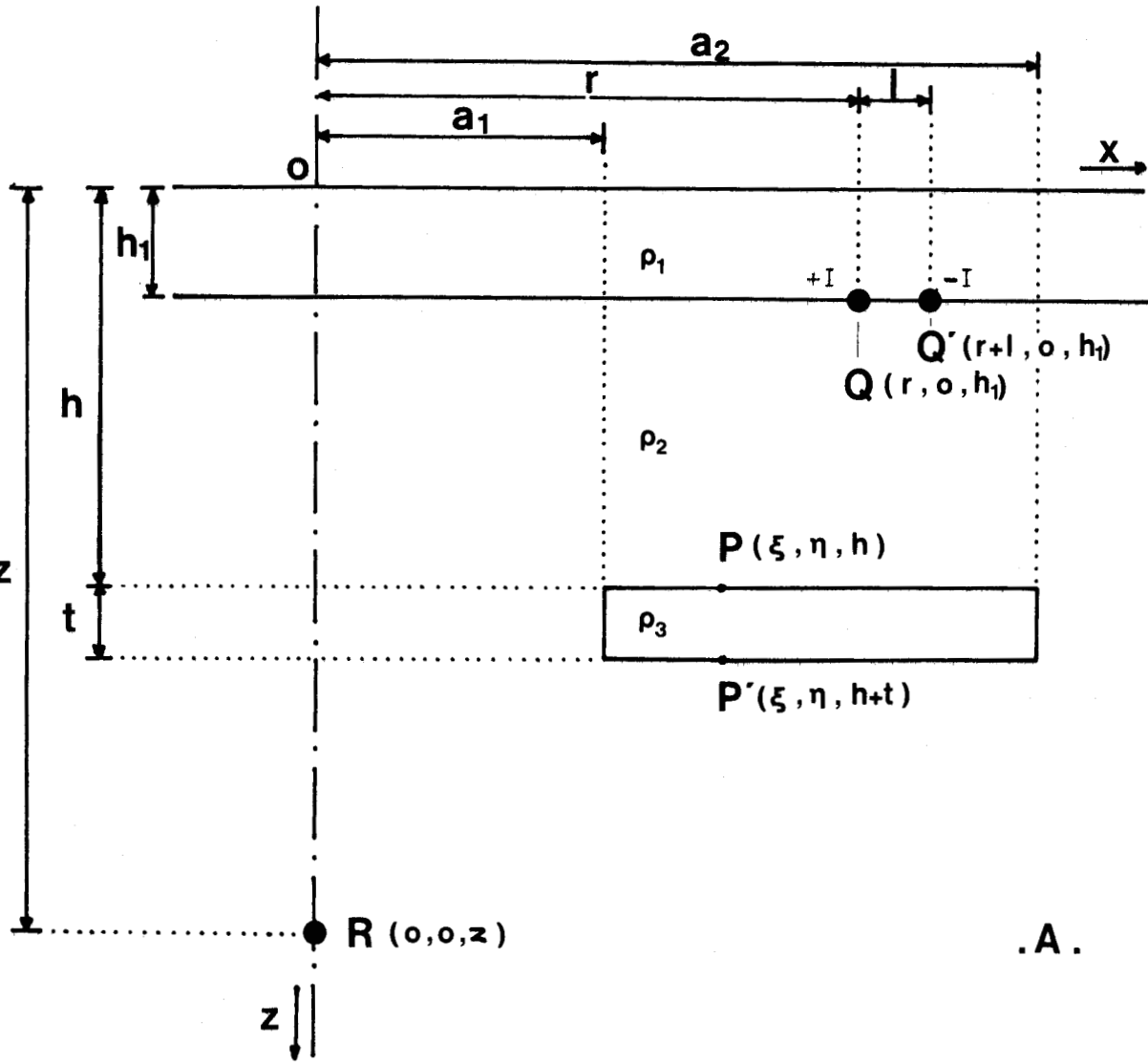
La configuration de la structure nous permet de considérer un repère de coordonnées cartésiennes dont l'origine est placée à l'intersection de l'axe du forage et de la surface de la mer.

On peut montrer, par la méthode de séparation de variables⁽¹⁵⁾, que le potentiel $U(x,y,z)$ créé par le courant I en un point (x,y,z) a la forme générale suivante, solution de l'équation de Laplace :

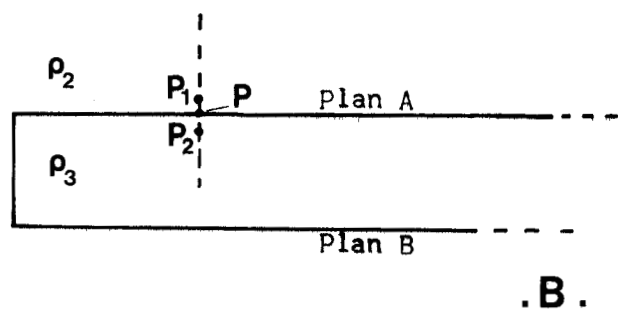
$$U(x,y,z) = \int_0^{\infty} du \int_{-\pi}^{+\pi} G(u,v) e^{u(-z-jy\cos v-jx\sin v)} dv \quad (\text{II.6.})$$

La fonction $G(u,v)$ est caractérisée par les conditions aux limites sur les surfaces de discontinuités, c'est-à-dire :

- par la position de ces surfaces
- par la position de la source
- par les contrastes de résistivités.



.A.



.B.

FIGURE .2.8. Modèle d'étude .



Soit $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ la fonction de distribution des charges au point P de coordonnées (ξ, η, ζ) situé sur la surface S de l'anomalie. $G(u, v)$ peut-être exprimé en fonction de σ grâce à la relation suivante ^{(16), (17)}:

$$G(u, v) = \iiint e^{u(\frac{+}{-}\zeta - j\eta \cos v - j\xi \sin v)} \sigma(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{II.7.})$$

Or, on montre que :

$$\int_0^{\infty} du \int_{-\pi}^{+\pi} e^{u\{(c^+ - z) + j(b^+ - y)\cos v + j(a^+ - x)\sin v\}} dv$$

$$= \frac{1}{(c^+ - z)^2 + (b^+ - y)^2 + (a^+ - x)^2}^{1/2} \quad (\text{II.8.})$$

En reportant (II.7.) et (II.8.) dans l'expression (II.6.) de $U(x, y, z)$ le potentiel total au point de coordonnées (x, y, z) est donné par :

$$U(x, y, z) = U_0(x, y, z) + \int_S \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{1/2}} dS \quad (\text{II.9.})$$

où $U_0(x, y, z)$ est le potentiel primaire au point de coordonnées (x, y, z) .

I.2.2. Détermination de $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$

Soit $P_1(\xi, \eta, \zeta - \alpha)$ et $P_2(\xi, \eta, \zeta + \alpha)$ deux points très proches de P. Lorsque α est infiniment petit, le champ électrique vertical créé en P_1 et P_2 par les charges du plan A est respectivement ⁽¹⁹⁾ :

$$E_S(P_1) = - 2\pi\sigma(P)$$

$$E_S(P_2) = + 2\pi\sigma(P) \quad (\text{II.10.})$$

Si $U(P)$ est la somme des potentiels créée en P par l'ensemble des surfaces autres que A et par la source Q , le champ électrique total en P_1 et P_2 est :

$$\begin{aligned} E(P_1) &= - \frac{\partial U(P)}{\partial z} - 2\pi\sigma(P) \\ E(P_2) &= - \frac{\partial U(P)}{\partial z} - 2\pi\sigma(P) \end{aligned} \quad (\text{II.11.})$$

L'équation (II.9.) nous permet de mettre $U(P)$ sous la forme :

$$U(P) = U_0(P) + \int_B \sigma(P) D_{PP_i} dS \quad (\text{II.12.})$$

D_{PP_i} est la distance entre les points P et P_i où P_i est un point du plan B inférieur de l'hétérogénéité.

Si l'épaisseur t de l'anomalie est petite par rapport à sa profondeur, on peut considérer que les charges sur les faces supérieure et inférieure sont égales mais de signe contraire.

Dans ce cas en un point P' de coordonnées $(\xi, \eta, h+t)$ nous avons :

$$\sigma(P') = -\sigma(P)$$

En considérant que $\int_B D_{PP_i} dS$ est l'angle solide sous lequel du point P

on voit le plan B et est égal à 2π ,

L'égalité (II.13.) permet d'écrire, à partir de (II.11.) que :

$$\begin{aligned} E(P_1) &= - \left(\frac{\partial U_0(P)}{\partial z} - 2\pi\sigma(P) \right) - 2\pi\sigma(P) \\ E(P_2) &= - \left(\frac{\partial U_0(P)}{\partial z} - 2\pi\sigma(P) \right) + 2\pi\sigma(P) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} E(P_1) &= - \frac{\partial U_0(P)}{\partial z} \\ E(P_2) &= - \frac{\partial U_0(P)}{\partial z} + 4\pi\sigma(P) \end{aligned} \quad (\text{II.13.})$$

D'autre part la condition $\frac{\partial}{\partial t} \sigma(P) = 0$ étant satisfaite après un temps suffisamment long, les composantes verticales de la densité de courant sont égales de part et d'autre du plan :

Nous obtenons alors la relation :

$$\frac{1}{\rho_2} E(P_1) = \frac{1}{\rho_3} E(P_2)$$

En tenant compte de cette condition aux limites nous obtenons l'expression de $\sigma(P)$ en fonction du potentiel primaire $U_o(P)$:

$$\sigma(P) = - \frac{K'}{4\pi} \frac{\partial U_o(P)}{\partial z} \quad (\text{II.14.})$$

$$\text{où } K' = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_2}$$

Or $U_o(P)$ est donné par :

$$U_o(P) = \frac{I\rho_2}{4\pi} \times \frac{1}{D_{QP}} \quad (\text{II.15.})$$



où D_{QP} est la distance entre le point source $Q(r,0,h_1)$ et le point $P(\xi,\eta,h)$

$$\text{et } D_{QP} = ((r-\xi)^2 + \eta^2 + (h-h_1)^2)^{1/2}$$

En remplaçant U_o par (II.15.) dans l'expression (II.14.), la fonction $\sigma(\xi,\eta,h)$ est donnée par :

$$\sigma(\xi,\eta,h) = - \frac{I\rho_2}{16\pi^2} K' \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{D_{QP}} \right) \quad (\text{II.16.})$$

1.2.3. Expression du potentiel au point (x,y,z) créé par une source en présence d'une anomalie ⁽²⁰⁾

La forme générale du potentiel secondaire U_S au point (x,y,z) dans un milieu infini, mais en présence d'une anomalie, est donnée en substituant $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$ par son expression dans la relation de définition de U_S (II.9.). Le domaine d'intégration S est constitué par les plans supérieur A et inférieur B de la couche mince :

$$U_S(x,y,z) = \int_A \frac{\sigma(\xi,\eta,h) dS}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-h)^2)^{1/2}} + \int_B \frac{\sigma(\xi,\eta,h+t) dS}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-h-t)^2)^{1/2}} \quad (\text{II.17.})$$

En tenant compte que $\sigma(\xi,\eta,h+t) = -\sigma(\xi,\eta,h)$, le potentiel secondaire au point R(o,o,z) s'écrit sous la forme générale :

$$U_S(R) = - \frac{I\rho_2}{16\pi^2} K' \iint \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{D_{QP}} \right) \times \left(\frac{1}{D_{RP}} - \frac{1}{D_{RP'}} \right) d\eta d\xi \quad (\text{II.18.})$$

où $D_{QP} = ((r-\xi)^2 + \eta^2 + (h-h_1)^2)^{1/2}$ distance entre Q et P

$D_{RP} = (\xi^2 + \eta^2 + (z-h)^2)^{1/2}$ distance entre R et P

$D_{RP'} = (\xi^2 + \eta^2 + (z-h-t)^2)^{1/2}$ distance entre R et P' (fig.2.9.)

Dans cette relation, nous pouvons faire apparaître la contribution des surfaces supérieure A et inférieure B de l'anomalie, en posant :

$$U_S(R) = - \frac{I\rho_2}{16\pi^2} K' (\mathcal{J} - \mathcal{J}') \quad (\text{II.19.})$$

\mathcal{J} est relié à la position du plan supérieur par la relation suivante :

$$J = H_2 \int_{a_1}^{a_2} d\xi \int_{b_1}^{b_2} (n^2 + \alpha^2)^{-1/2} (n^2 + \beta^2)^{-3/2} dn \quad (\text{II.20.})$$

où $H_2 = h - h_1$ (figure.2.9.)

$$\alpha^2 = \xi^2 + H_1^2$$

$$\beta^2 = (r - \xi)^2 + H_2^2$$

$$H_1 = z - h$$

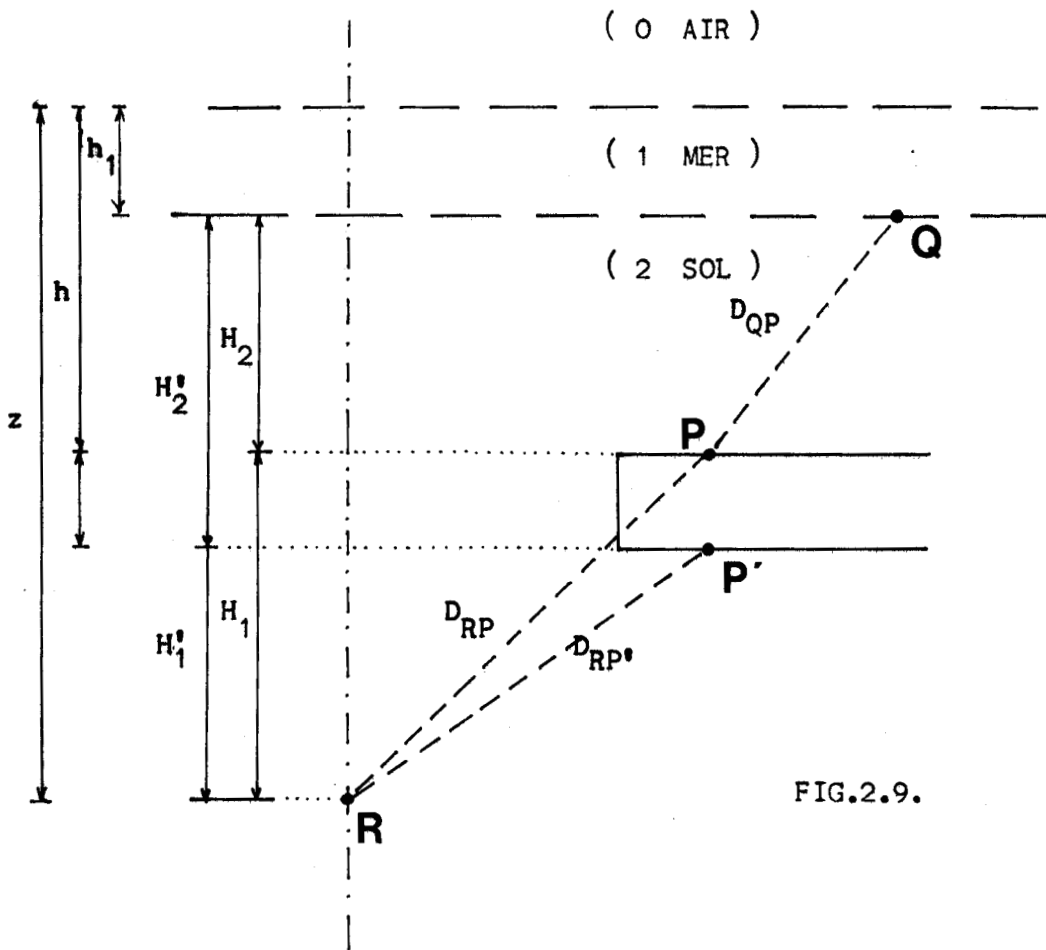


FIG.2.9.

J' , associé au plan inférieur a une forme tout à fait similaire à celle de l'expression (II.20.). Il suffit de remplacer H_2 et H_1 par les valeurs suivantes :

$$H'_2 = h + t - h_1$$

$$H'_1 = z - h - t$$

Le potentiel $U_S(R)$ donné par l'équation (II.19.) traduit l'effet de l'anomalie placée dans un milieu infini. Pour tenir compte des stratifications du terrain, il suffit de calculer tous les potentiels secondaires créés par les images de la source et de l'anomalie par rapport aux différents interfaces. Dans ce cas, l'expression générale (II.19.) est toujours valable à condition d'associer à h et h_1 les profondeurs respectives des images de l'anomalie et de la source.

I.2.4. Expression du potentiel total au point $R(o,o,z)$ en tenant compte des interfaces

Le potentiel total créé au point R s'exprime de la façon suivante :

$$U(R) = U_o(R) + U_{S_o}(R) + U_{S'_o}(R) + \sum_{j=1}^{\infty} U_{S_j}(R) \quad (\text{II.21.})$$

$U_o(R)$ est le potentiel primaire dû à la source de courant et à ses images par rapport aux interfaces en absence d'anomalie.

- Les différents potentiels U_S tiennent compte de la source et de toutes ses images par rapport aux interfaces:

$U_{S_o}(R)$ est dû à la présence de l'anomalie

$U_{S'_o}(R)$ est dû à la première image de l'anomalie par rapport à l'interface mer - sol.

Enfin la série représente la contribution de toutes les autres images de l'anomalie sur le potentiel total.

Le développement des potentiels U_S est donné en Annexe.2.2.

I.3. CALCUL DE LA RESISTIVITE APPARENTE

La résistivité apparente ρ_a d'un milieu stratifié a été définie au chapitre.II. de la première partie. Elle correspond à la résistivité du demi-milieu homogène qui permet d'obtenir une valeur de potentiel identique dans des conditions géométriques semblables.

Elle est donc reliée au potentiel U créé par une source de courant I par la relation suivante (cf. équation (II.1.)) :

$$U(R) = \frac{I\rho_a}{4\pi} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \right)$$

avec : $R_0 = \sqrt{r^2 + (z-h_1)^2}$

$$R_1 = \sqrt{r^2 + (z+h_1)^2}$$

En remplaçant $U(R)$ par l'expression (II.21.) nous obtenons :

$$\rho_a = \frac{4\pi}{I} \left(\frac{R_0 R_1}{R_0 + R_1} \right) \left(U_0(R) + U_{S_0}(R) + U_{S'_0}(R) + \sum_{j=1}^{\infty} U_{S_j}(R) \right) \quad (\text{II.22.})$$

Cette relation permet de déterminer ρ_a en fonction de la position r de l'émetteur par rapport au forage et de la profondeur z du récepteur par rapport à la surface de la mer.

Les paramètres principaux sont le contraste de résistivité entre l'hétérogénéité et le milieu adjacent, la profondeur de l'hétérogénéité, sa distance au forage et son étendue. Nous allons donc étudier sur des exemples la variation de ρ_a et l'influence de ces différentes grandeurs sur la précision de localisation d'un gisement.

CHAPITRE. II.

DETERMINATION DU TYPE ET DE LA POSITION DE L'ANOMALIE A PARTIR DES VARIATIONS DE RESISTIVITE APPARENTE. APPLICATION A DEUX CAS PRECIS.⁽²¹⁾

L'étude théorique précédente permet de connaître l'allure de la variation de la résistivité apparente ρ_a en fonction de la position de l'émetteur et du récepteur.

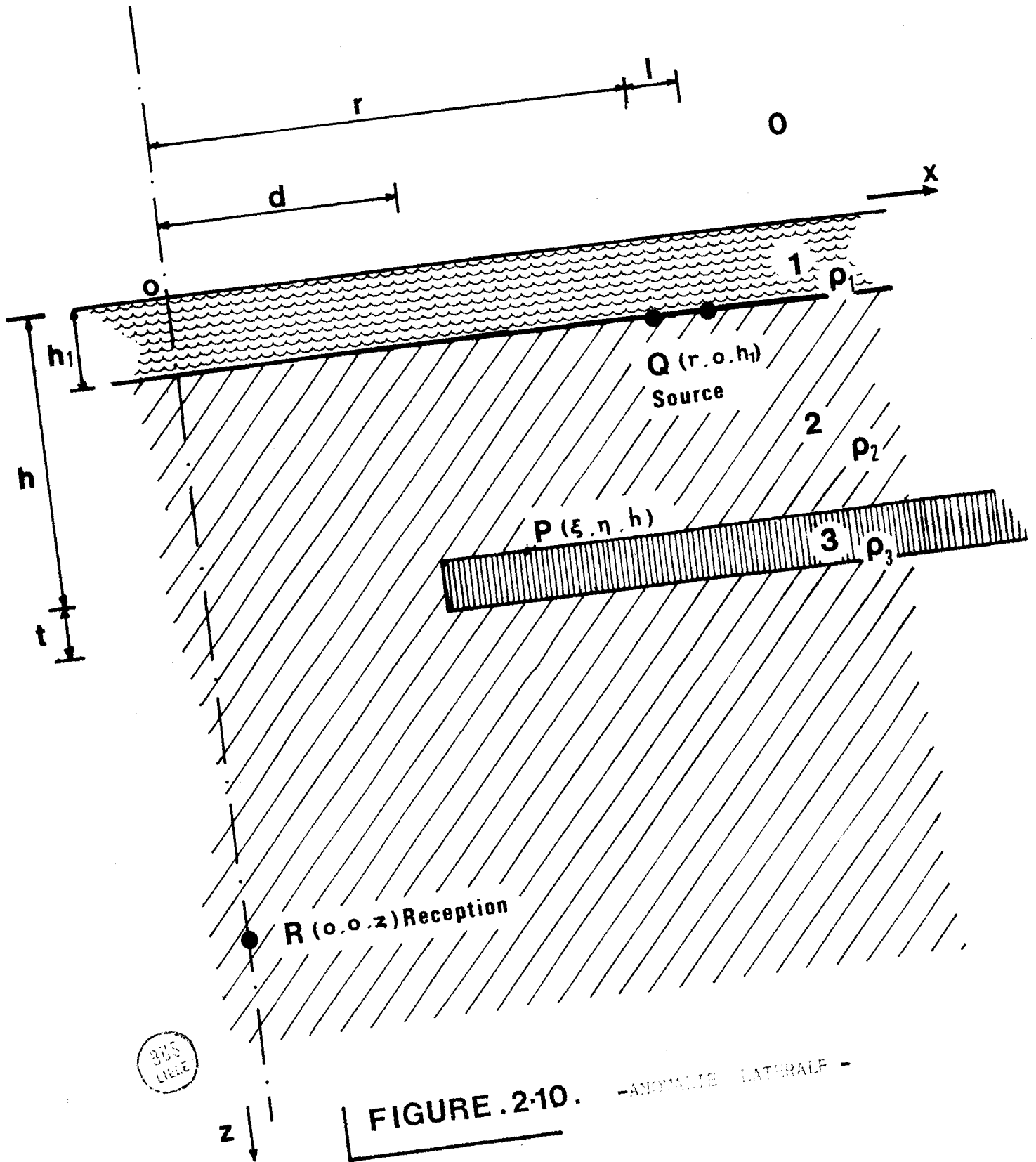
Si ces courbes $\rho_a(r)$ présentent un extrênum pour $r = r_c$, nous pourrions en déduire, comme dans le cas d'une anomalie placée dans un demi-milieu, la distance d qui sépare le bord de l'hétérogénéité de l'axe du forage.

En effet, connaissant $\rho_a(r)$ résistivité apparente du milieu stratifié en présence d'une anomalie et $\rho_{a_0}(r)$ résistivité apparente sans anomalie, il est possible de simuler la fonction $\rho_a(r)/\rho_{a_0}(r)$ sur cuve analogique. Cette simulation permet de faire varier la position de l'anomalie et de tracer des abaques reliant d et r_c . A partir de ces courbes et de la mesure de r_c faite sur le terrain, la distance d peut être évaluée.⁽³⁾

Dans les exemples que nous présentons l'émetteur est toujours placé au fond de la mer.

Nous envisageons tout d'abord le cas d'une anomalie située latéralement par rapport au forage où s'effectue la mesure.

Nous supposons ensuite que l'anomalie est traversée par le forage et possède une symétrie de révolution par rapport à celui-ci.



305
L102

FIGURE 2-10. -ANOMALIE LATRALE-

II.1. CAS D'UNE ANOMALIE SITUEE LATERALEMENT PAR RAPPORT AU FORAGE

L'hétérogénéité placée dans le milieu homogène sous-marin est constituée par une couche d'épaisseur t ayant la forme d'un demi-plan infini, son bord étant situé à la distance d du forage (figure.2.10.).

La valeur de la résistivité apparente est donnée à partir de la formule (II.22.). Les limites d'intégration intervenant dans les fonction du potentiel $U_S(R)$ deviennent dans ce cas :

$$\begin{array}{ll} a_1 = d & a_2 = +\infty \\ b_1 = -\infty & b_2 = +\infty \end{array}$$

Le calcul des différentes intégrales de définition de U_S est donné dans l'Annexe .2.3.

A titre d'exemple, nous envisageons une anomalie d'épaisseur $t = 40$ mètres, et située à une profondeur de 400 mètres par rapport à la surface de la mer. La résistivité du socle sous-marin est $\rho_2 = 1\Omega.m.$

Pour déterminer la profondeur du gisement, nous relevons la courbe $\rho_a(z)$ pour une position d'émetteur donnée (figure .2.11.) On suppose dans cet exemple que la distance émetteur - forage est de 800 mètres, et que le contraste de résistivité entre l'anomalie et la socle est de 50 et 100.

On remarque que ces courbes présentent un maximum lorsque le récepteur est à la profondeur de l'anomalie.

Nous introduisons une résistivité apparente ρ_a^* normalisée par rapport à la résistivité du milieu encaissant :

$$\rho_a^* = \rho_a / \rho_2$$

Les courbes en trait plein de la figure .2.12.

représentent $\rho_a^*(r)$ pour différentes valeurs de la distance d de l'anomalie au forage, le récepteur étant placé à la profondeur du plan supérieur de l'anomalie.

Nous constatons qu'elles présentent un minimum très peu accentué. Cependant la résistivité apparente $\rho_{a_0}^*$ du milieu sans anomalie n'est pas constante, la structure étudiée étant stratifiée. Nous avons d'ailleurs présenté sur la même figure la variation de $\rho_{a_0}^*(r)$.

Pour caractériser la présence d'une anomalie, il est donc plus intéressant de normaliser ρ_a par rapport à la résistivité apparente ρ_{a_0} obtenue sans anomalie. Les courbes A', B', C', D' représentent donc la variation de ce paramètre ρ_a/ρ_{a_0} . Nous remarquons que le minimum qu'elles présentent est beaucoup plus accentué. Celui-ci servant à déterminer la position du gisement, les résultats ainsi obtenus seront donc plus précis.

Une telle exploitation des mesures nécessite cependant la connaissance de $\rho_{a_0}(r)$. Cette résistivité apparente peut être obtenue in-situ suivant un profil dont la direction est opposée à celle de l'anomalie par rapport au forage.

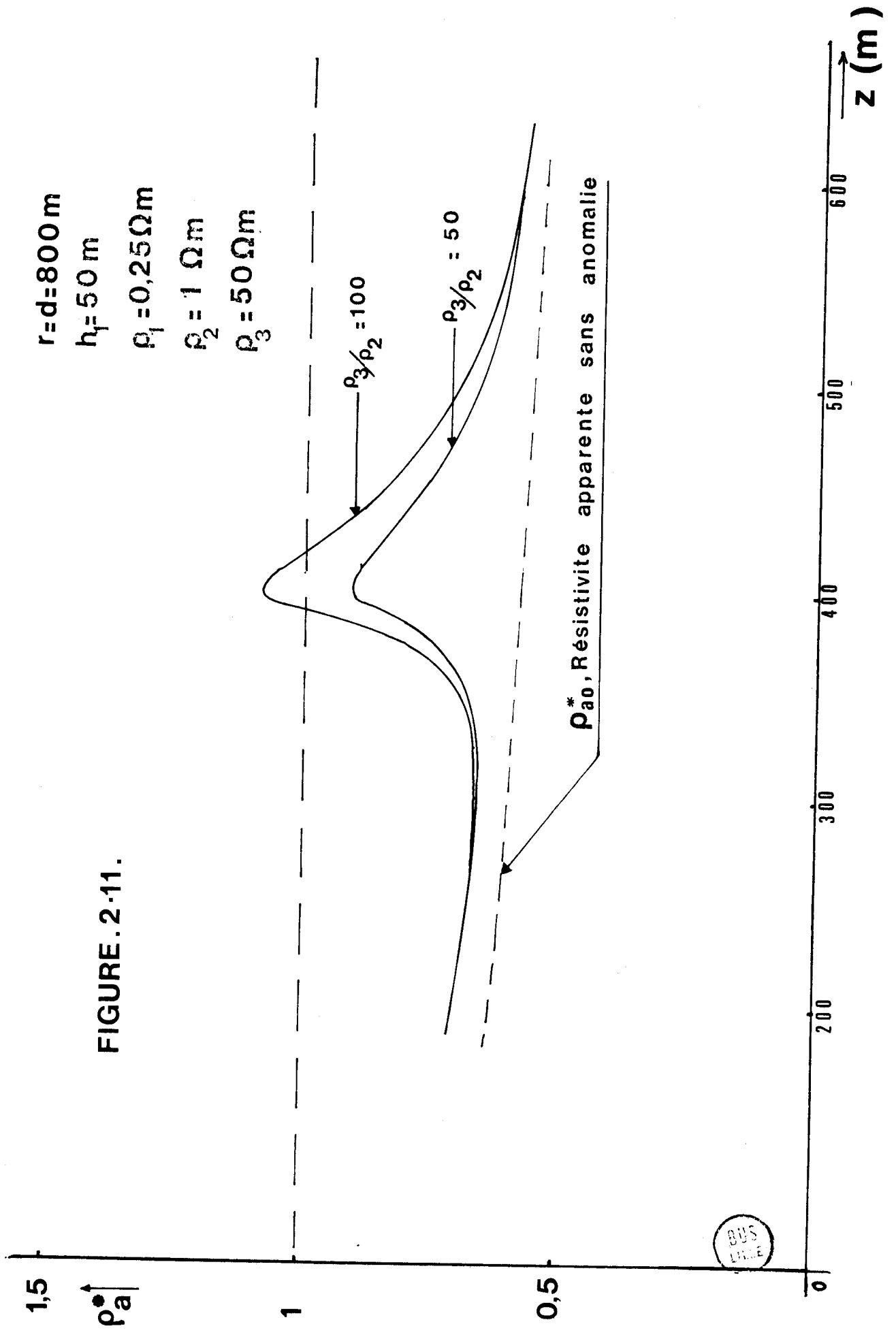
La courbe .1. de la figure .2.13. présente la variation de la distance critique r_c , correspondant au minimum de la courbe $\rho_a(r)/\rho_{a_0}(r)$ en fonction de la distance d entre le forage et l'anomalie.

La normalisation ρ_a/ρ_{a_0} permet de se ramener au cas d'un demi-milieu équivalent contenant une anomalie de même nature, qu'il est possible de simuler sur cuve analogique.

A titre de comparaison, nous avons représenté, sur la figure .2.13. , la courbe.2. obtenue directement à partir de la fonction $\rho_a(r)$ sans normalisation. L'écart entre ces courbes montre l'influence des stratifications sur la position des minima des courbes $\rho_a(r)$.

$r = d = 800 \text{ m}$
 $h_f = 50 \text{ m}$
 $\rho_1 = 0,25 \Omega \text{ m}$
 $\rho_2 = 1 \Omega \text{ m}$
 $\rho_3 = 50 \Omega \text{ m}$

FIGURE. 2.11.



BUS
LILLE

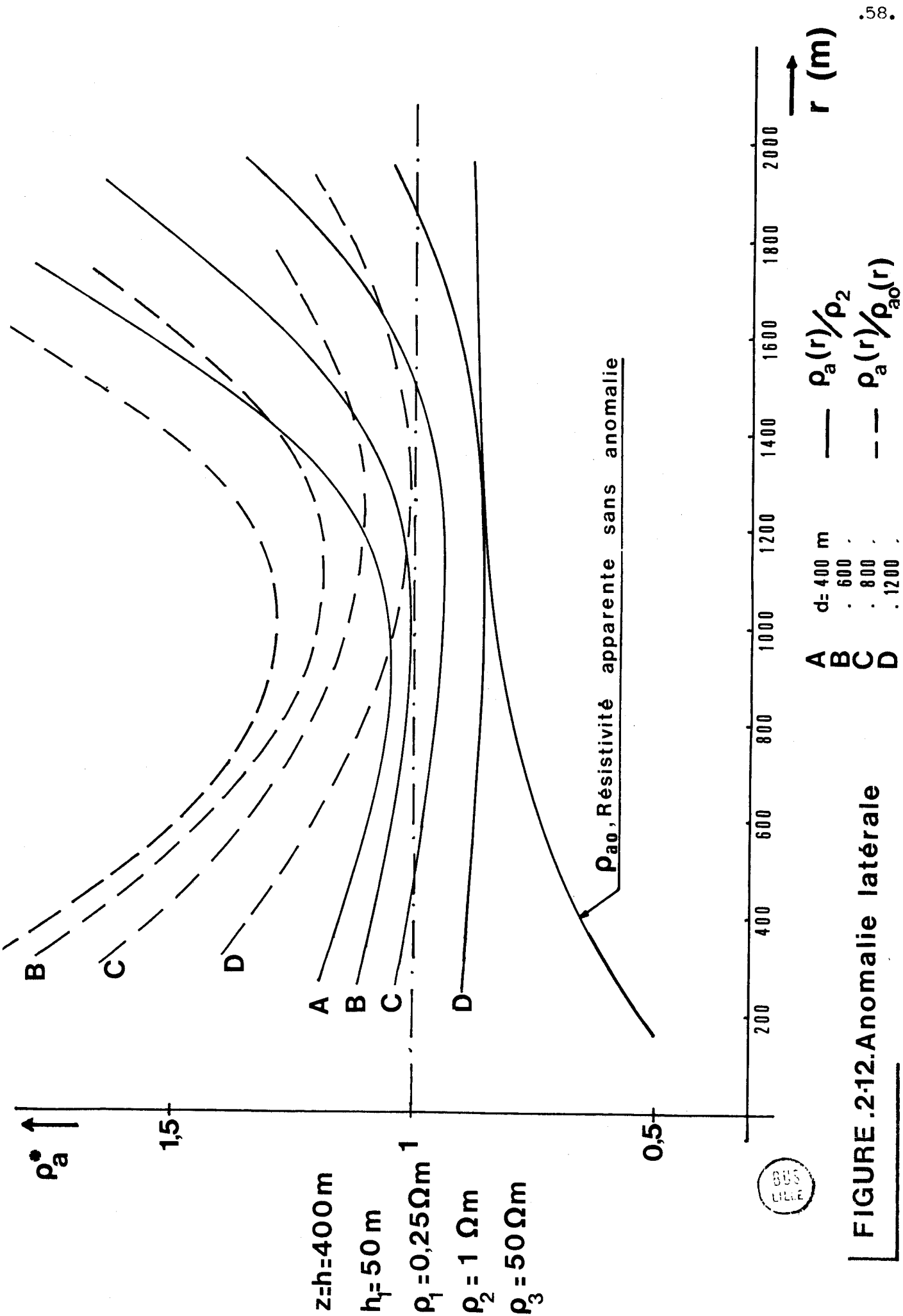


FIGURE 2.12. Anomalie latérale

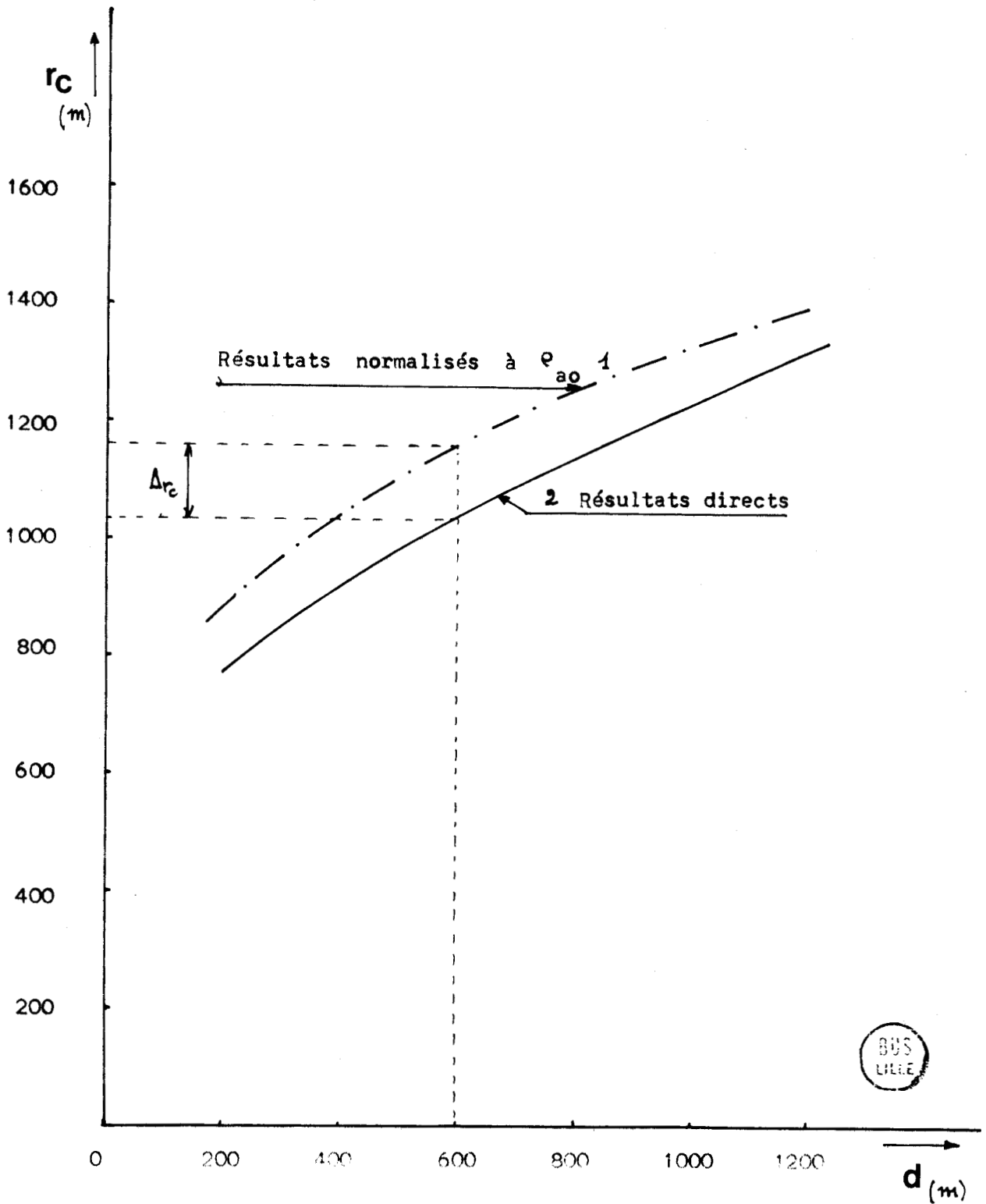


FIGURE .2-13. — ANOMALIE LATÉRALE —

$z = h = 400$ m $h_1 = 50$ m
 $\rho_2/\rho_1 = 4$ $\rho_3/\rho_2 = 50$

Les résultats obtenus dans le cas d'une anomalie latérale située dans le socle sous-marin sont donc tout à fait similaires à ceux que l'on obtient pour un demi-milieu. Cependant, les couches de terrain ayant une épaisseur importante, il est nécessaire de normaliser la résistivité apparente ρ_a par rapport à cette même résistivité du milieu stratifié sans anomalie.

Les méthodes d'interprétation du demi-milieu peuvent ainsi se transposer au cas de gisements latéraux en milieu stratifié.

II.2. CAS D'UNE ANOMALIE TRAVERSEE PAR LE FORAGE

Nous considérons maintenant que la couche d'épaisseur t a la forme d'un disque de rayon d centré sur le forage. La résistivité apparente ρ_a est calculée à partir de l'expression (II.22.). Compte tenu de la symétrie de révolution par rapport à l'axe Oz, les expressions intégrales des potentiels U_G sont traitées dans un repère de coordonnées cylindriques (Annexe.2.4.) et calculées numériquement sur ordinateur.

Nous supposons que le disque a la même épaisseur que précédemment ($t=40$ mètres), son rayon étant égal à d (figure.2.14.).

La figure2.15. représente la fonction $\rho_a(z)$ pour deux valeurs du contraste ρ_3/ρ_2 . Les courbes montrent une variation d'amplitude nettement plus marquée que dans le cas d'une hétérogénéité latérale, la réception s'effectuant au sein même de la couche résistive.

Comme précédemment, nous montrons la variation de la résistivité apparente $\rho_a^*(r)$ normalisée par rapport à la valeur ρ_2 (courbes A B C D en trait plein de la figure .2.16.). Nous présentons également la variation de $\rho_a(r)/\rho_{a_0}(r)$ sur les courbes A' B' C' D', ρ_{a_0} étant toujours la résistivité apparente du milieu sans anomalie. Le rayon d du disque est introduit en paramètre.

Contrairement au cas de l'hétérogénéité latérale, ces fonctions présentent un maximum. Celui -ci est d'autant plus marqué que le rayon de l'anomalie est petit.

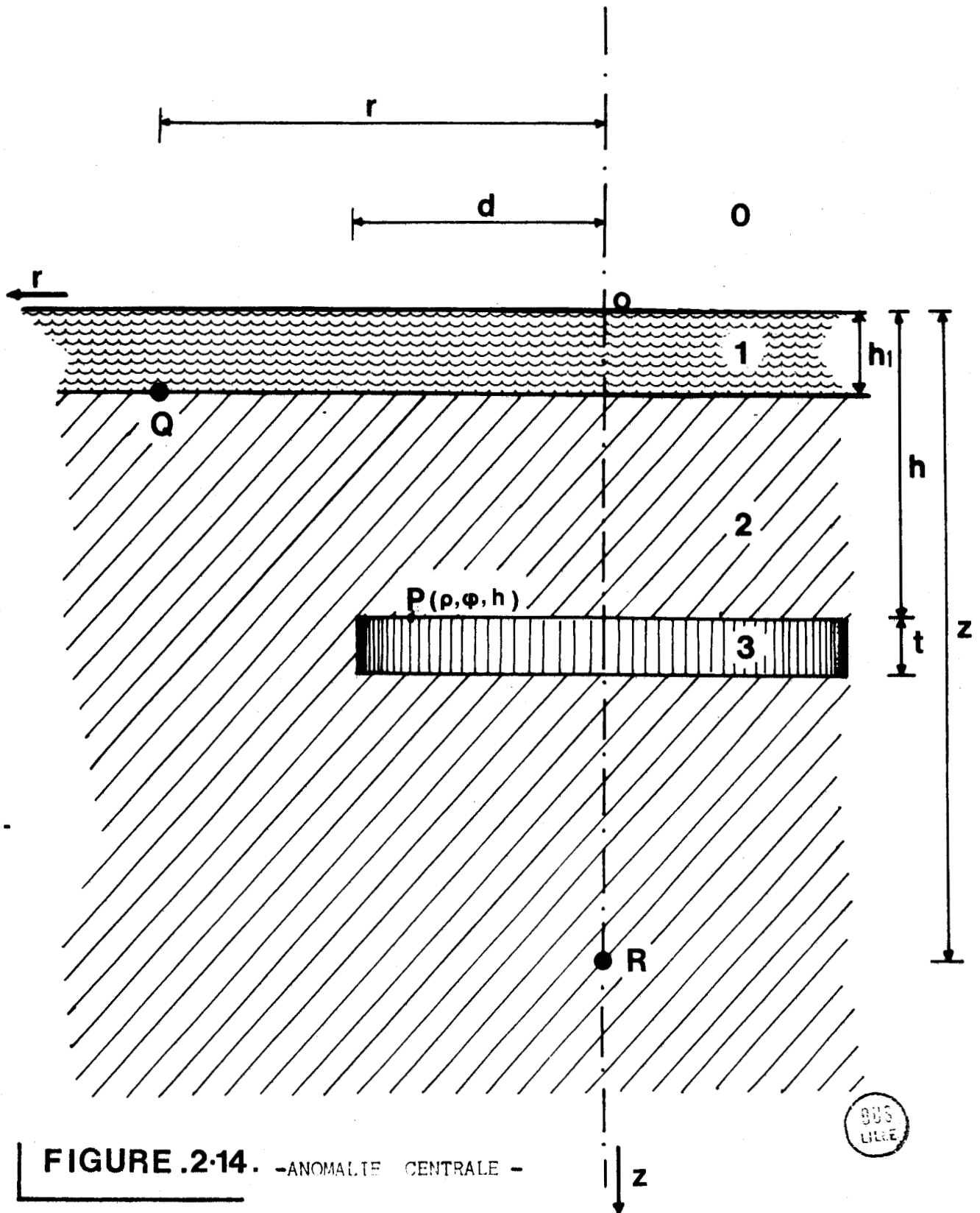


FIGURE 2.14. -ANOMALIE CENTRALE -

$r = d = 800 \text{ m}$
 $h_1 = 50 \text{ m}$
 $\rho_1 = 0,25 \Omega \text{ m}$
 $\rho_2 = 1 \Omega \text{ m}$
 $\rho_3 = 50 \Omega \text{ m}$

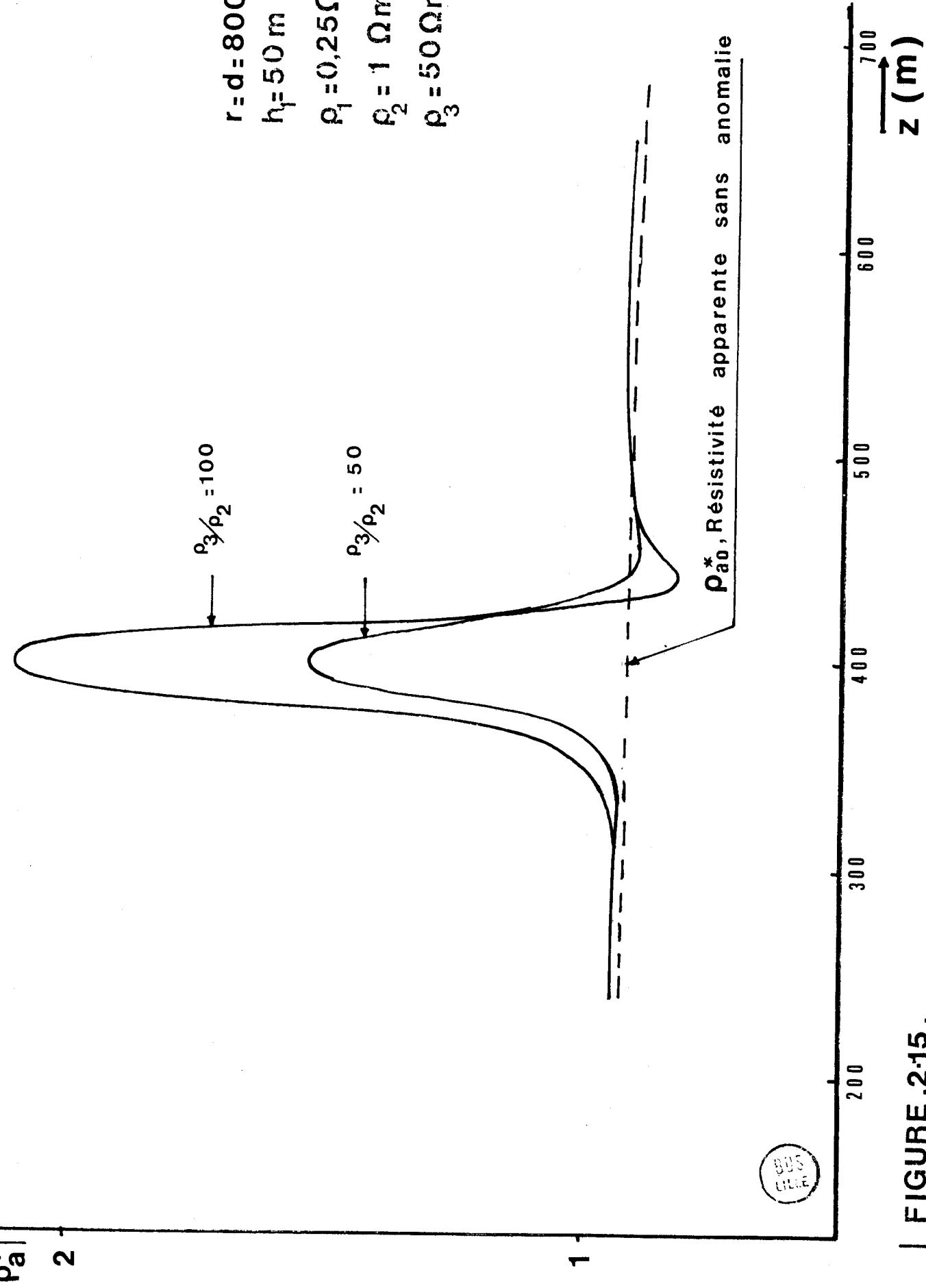


FIGURE 2-15.

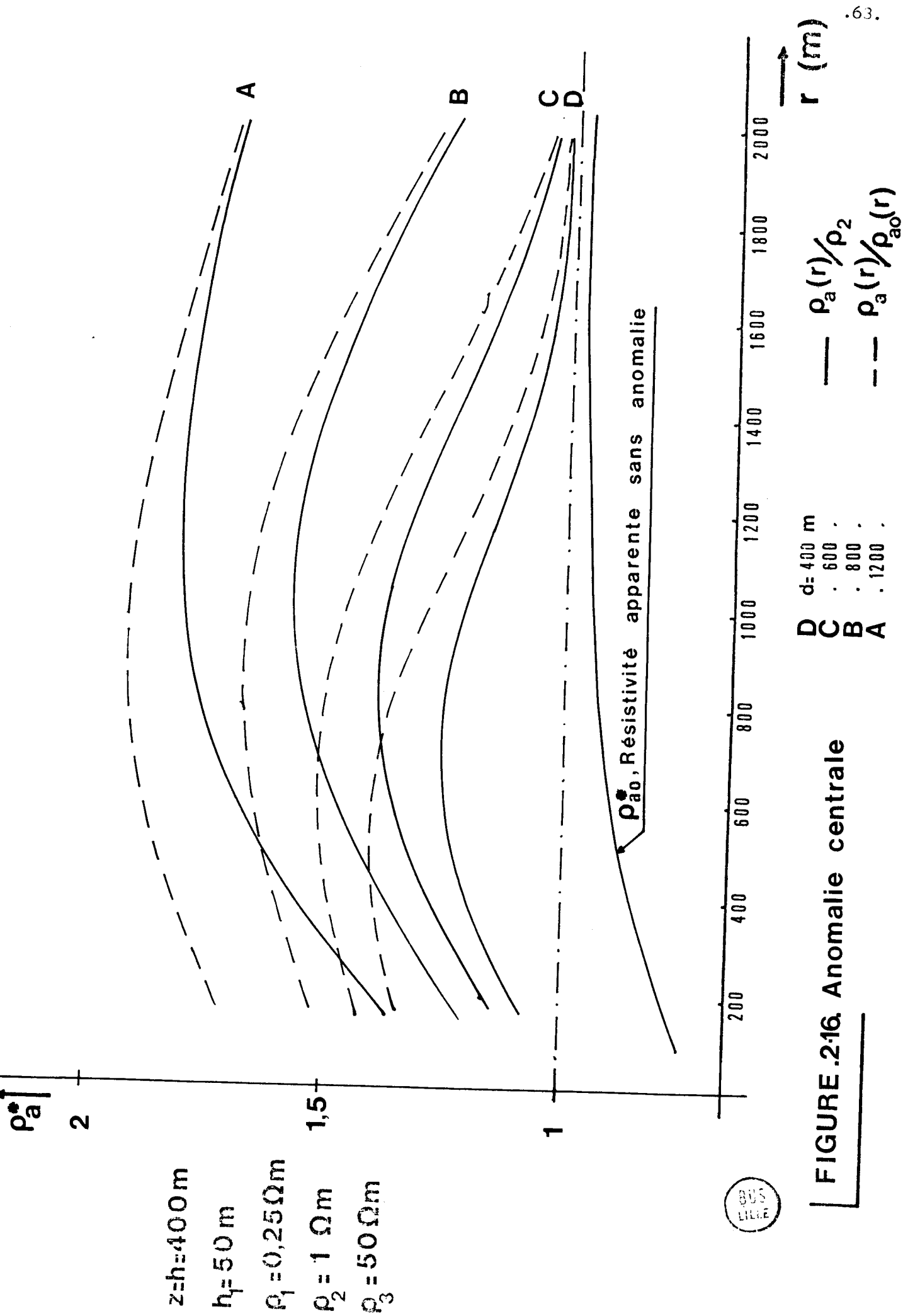


FIGURE .216. Anomalie centrale

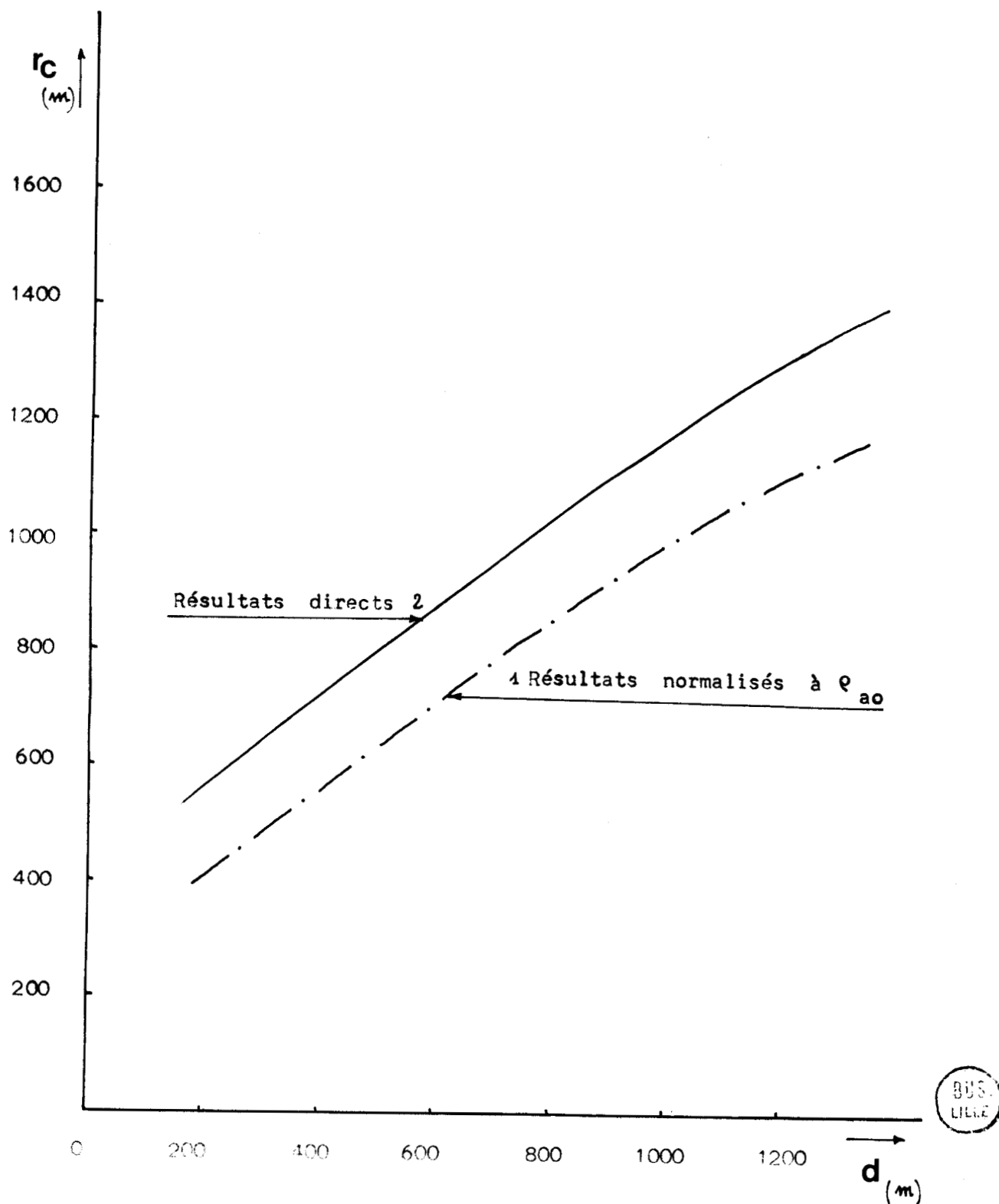


FIGURE.2-17.

— ANOMALIE CENTRALE —

$z = h = 400$ m $h_1 = 50$ m

$\rho_2/\rho_1 = 4$ $\rho_3/\rho_2 = 50$

Nous donnons sur la figure.2.17.la valeur de la position r_c des extrêma des courbes précédentes en fonction du rayon d de l'anomalie. Dans ce cas également, il est utile de normaliser par rapport à ρ_{a_0} afin de se ramener à un demi-milieu équivalent que l'on peut simuler sur cuve.

II.3. DISCUSSION SUR LA PRECISION DE LA METHODE D'INTERPRETATION

Dans le cadre de cette étude, il nous a été proposé d'appliquer ces résultats à la configuration du gisement de Frigg en mer du Nord.

Celui-ci s'est avéré être à la limite de la portée de la télédiagraphie dans son état technologique actuel (voir étude de faisabilité du paragraphe II.2. du chapitre II de la première partie).

Le gisement traversé par le forage se situe à une profondeur de 1800 mètres par rapport au fond de la mer et présente un contraste de 500 dans un milieu encaissant de résistivité $\rho_2 = 2\Omega.m$. La mer atteint une épaisseur de 100 mètres.

Le calcul de la résistivité apparente a été fait pour des distances émetteur - forage allant jusqu'à 3000 mètres et pour un rayon de l'anomalie de 500, 1000, 1500, 2000 et 3000 mètres.

Nous avons représenté sur les figures.2.18.et.2.19. les courbes $\rho_a(r)/\rho_{a_0}(r)$ et $d = f(r_c)$ qui sont nécessaires pour exploiter les résultats de mesure.

Nous remarquons sur la figure.2.18.que les courbes présentent des maxima qui s'accroissent de moins en moins lorsque d augmente c'est-à-dire lorsque le gisement est de grande dimension. Par exemple sur la courbe E ($d = 3000$ mètres), la variation relative de ρ_a est seulement de 6,5% pour une position d'émetteur r variant de 500 mètres à 2400 mètres.

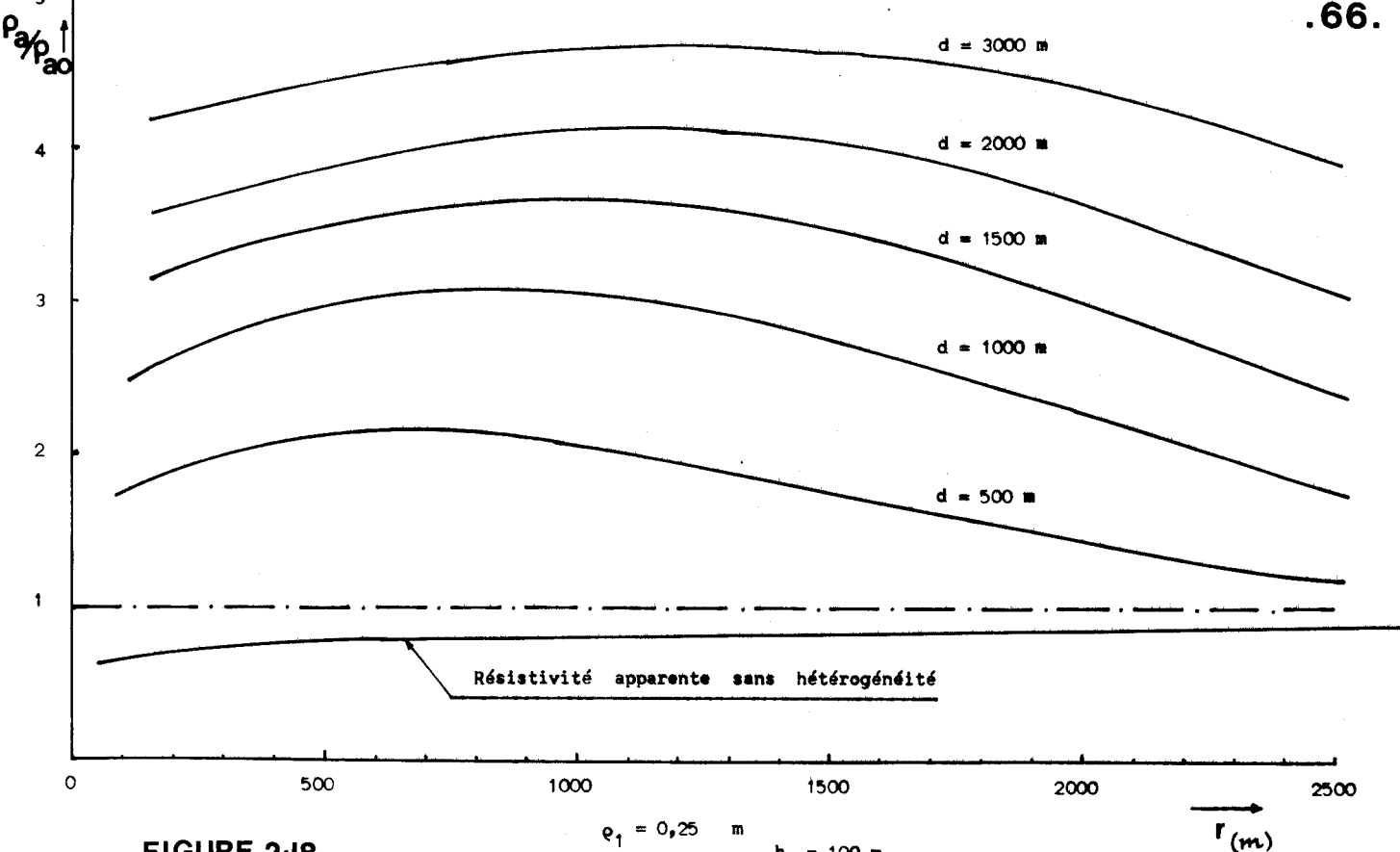


FIGURE.2-18.

$e_1 = 0,25$ m
 $e_2 = 2$ m
 $e_3 = 1000$ m
 $h_1 = 100$ m
 $z = h = 1900$ m

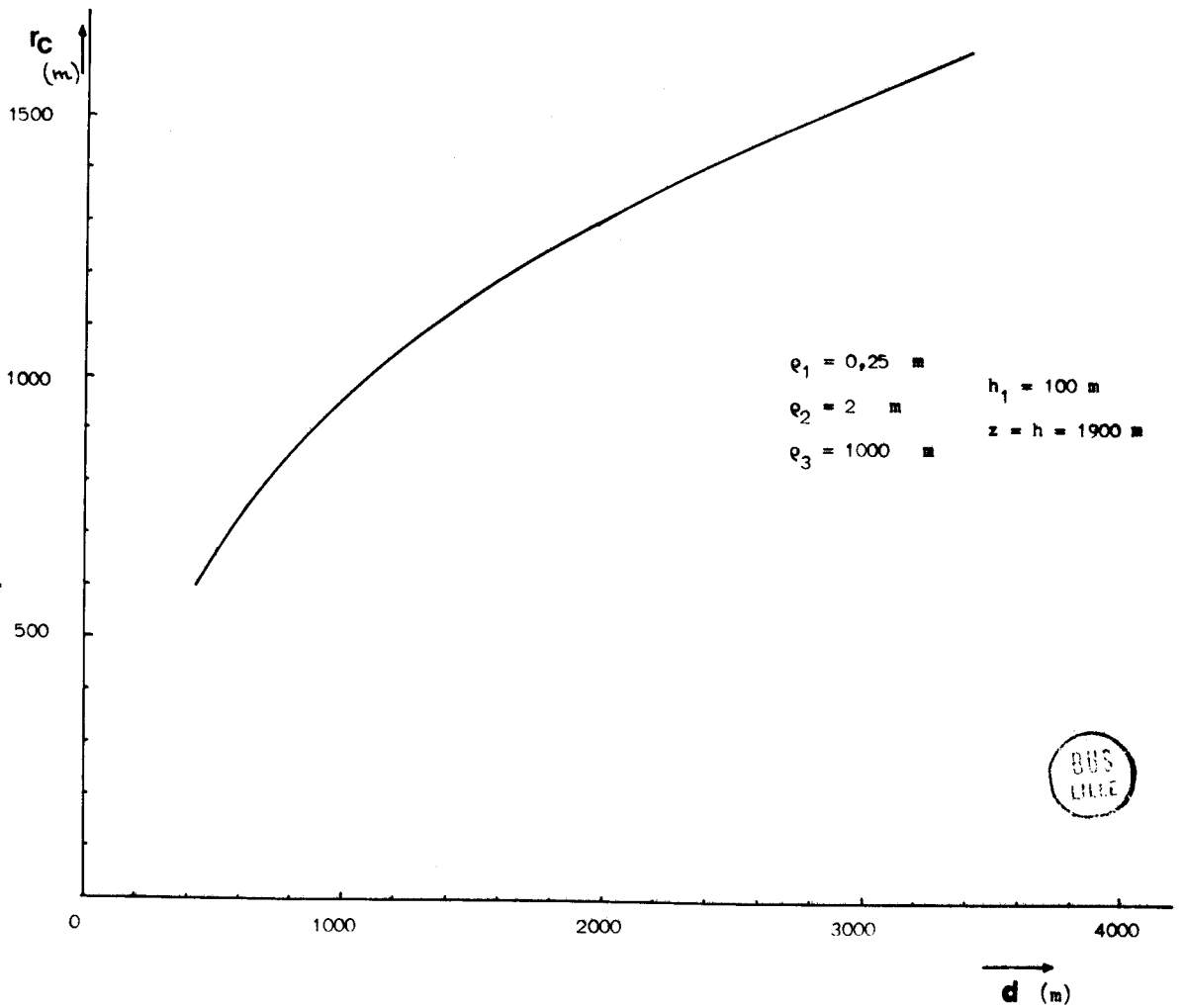


FIGURE.2-19.

$e_1 = 0,25$ m
 $e_2 = 2$ m
 $e_3 = 1000$ m
 $h_1 = 100$ m
 $z = h = 1900$ m



Il est donc nécessaire de déterminer la précision avec laquelle doivent être effectuées les mesures pour une interprétation correcte.

Supposons que l'erreur relative avec laquelle doit être déterminé le diamètre du gisement soit de 20%.

Dans ce cas, nous donnons dans le tableau ci-dessous, obtenus d'après les courbes précédentes, la précision nécessaire sur la valeur de la résistivité apparente en fonction du diamètre du gisement.

d	précision nécessaire sur ρ_a
500 mètres	11%
1000	5%
1500	2,5%
2000	1%
3000	0,4%

Si l'on admet que la valeur 1% soit la limite de la précision possible, le diamètre maximum que l'on puisse évaluer avec une erreur de 20% est d'environ 2000 mètres.

CONCLUSION

Les résultats que nous obtenons permettent de connaître l'influence des couches d'un terrain stratifié simple sur la détection d'une anomalie de dimension finie.

Ils ne remettent pas en cause la méthode d'interprétation appliquée jusqu'à présent à un demi-milieu homogène.

Dans les cas particuliers que nous venons de traiter, les courbes présentent, en effet, un aspect similaire à celui qui est obtenu dans l'approximation du demi-milieu.

Il est néanmoins nécessaire de normaliser la fonction $\rho_a(r)$ à la valeur de $\rho_{a_0}(r)$ résistivité apparente du terrain sans anomalie. Le milieu stratifié peut être transposé en un demi-milieu homogène pour l'interprétation des résultats.

De plus, dans le cas d'un forage traversant l'anomalie, nous avons montré que la méthode est d'autant plus précise que le diamètre de cette anomalie est faible.

C O N C L U S I O N

Dans cette étude nous avons analysé l'effet des stratifications du terrain sur l'interprétation des mesures de télédiagraphie. En effet, celle-ci était basée jusqu'à présent sur la théorie de la propagation d'une onde électromagnétique dans un demi-milieu homogène.

Le développement numérique de la théorie matricielle nous a tout d'abord permis de calculer l'amplitude de la composante verticale du champ électrique créé par un dipôle horizontal et la résistivité apparente ρ_a d'un milieu comportant plusieurs couches. En particulier nous avons montré que leurs valeurs étaient étroitement liées à la résistivité de la couche où se trouve placé le récepteur. Nous avons vu également que la variation monotone de ρ_a en fonction de la distance émetteur - forage, due aux stratifications, ne pouvait pas perturber la détection d'un gisement de dimension finie.

L'étude de la propagation des ondes dans un socle sous-marin a permis d'évaluer les caractéristiques d'émission nécessaires pour appliquer la télédiagraphie au forage en mer. Pour que la puissance d'émission soit raisonnable (10kW), il faut émettre à une fréquence d'environ 5Hz dans le cas d'une détection à grande profondeur (de l'ordre de 1800m).

Nous avons montré en outre les possibilités de localisation d'une anomalie située dans le socle sous-marin. Dans ce cas il est nécessaire d'introduire la notion de résistivité apparente du milieu sans anomalie. La normalisation des résultats par rapport à cette grandeur compense l'effet des couches et permet de transposer le terrain environnant le gisement à un demi-milieu homogène.

Il est ainsi possible d'utiliser les méthodes d'interprétation déjà mises au point pour cette configuration et qui sont actuellement affinées pour tenir compte d'une forme quelconque d'anomalie. (22)

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES REFERENCES

- (1) R. GABILLARD, F. LOUAGE, Z. BASSIOUNI, R. DESBRANDES
Télédiagraphie, une méthode d'exploration directionnelle à grande distance d'un sondage
12th Annual Logging Symposium, May 1971, DALLAS
- (2) M. CAUTERMAN
Etude théorique et expérimentale de l'influence d'une inclusion sphérique sur la distribution du courant dans un milieu conducteur homogène
Thèse 3ème cycle, LILLE, 1971
- (3) Z. BASSIOUNI
Contribution à la création et au développement d'une nouvelle méthode de diagraphie pétrolière : "LE TELELOG"
Thèse d'Etat, 1972
- (4) Résultats de la campagne de mesures Télélog sur LUSSAGNET 39
(S.N.P.A.), 1971
- (5) Z. BASSIOUNI, R. GABILLARD
Expériences de télédiagraphie de Beynes d'Octobre 1970 et interprétation.
Rapport interne, Novembre 1970
- (6) J. FONTAINE, L.P. DOCO
Etude de faisabilité de l'application en mer de la méthode Télélog
Rapport I.F.P., Mars 1973
- (7) R. GABILLARD
Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu stratifié quelconque, Rapport I.R.E.L.
- (8) M. GOETGHELICK
Etude et réalisation d'une cuve analogique haute fréquence. Application à l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur.
D.E.A., Juillet 1969
- (9) Note sur les résultats des campagnes de mesures "Télélog" effectuées à Lussagnet
S.N.P.A., Juin 1973
- (10) E.F. SODERBERG
A comparison of ELF atmosphere noise spectra measured above and in the sea
AGARD Conference, n°77

- (11) E.F. SODERBERG
ELF noise in the sea at depths from 30 to 300 meters
Journal of Geophysical research, vol.74, n°9, May 1969
- (12) P. MANGEZ
Contribution à l'étude théorique et expérimentale des filtres
d'échantillonnage. Application à l'extraction de signaux très
faibles pour le procédé "Télélog"
Thèse de 3ème Cycle, Février 1973
- (13) P.K. BHATTACHARYA, H.P. PATRA
Direct current geoelectric sounding. Methods in geochemistry and
geophysics n°9
Elsevier Publishing Company, 1968
- (14) MASON and WEAVER
The electromagnetic field
- (15) L. ALFANO
Induction to the interpretation of resistivity measurements for
complicated structural conditions
Geophysical prospecting, 1959, vol.7, p.311-366
- (16) G.V. KELLER
Electrical prospecting for oil
Quart. of the Colorado School of Mines, vol.63, n°2, april 1968,
p.172-185
- (17) G.V. KELLER and C. FRISCHKNECHT
Electrical methods in geophysical prospecting.
Int. Ser. of monographs in electromagnetic waves, Vol.10, PERGAMON PRESS,
1970, p.188-196
- (18) G.N. WATSON
A treatise on the theory of BESSEL functions, 1948
- (19) E. DURAND
Electrostatique et magnéto-statique
MASSON, 1953
- (20) R. GABILLARD, Z. BASSIOUNI
Détermination de la distance du bord d'un gisement à l'axe d'un puits
central par des mesures de Télédiagraphie
Rapport I.F.P. réf.19359, Juin 1971
- (21) J. FONTAINE, L. P. DOCO
Etude de la résistivité apparente d'un milieu sous-marin enfermant
une anomalie de résistivité élevée
Rapport I.F.P., Septembre 1973

(22) M. CAUTERMAN
Thèse d'Etat, à paraître

(23) J. FONTAINE
Contribution à la théorie du rayonnement des dipôles électriques
enterrés et au développement de méthodes d'optimisation des
liaisons électromagnétiques entre terminaux souterrains.
Thèse d'Etat, Octobre 1969

OUVRAGES MATHÉMATIQUES NON RÉFÉRENCES

G. PETIAU
Théorie des fonctions de Bessel, C.N.R.S. 1955

J.S. GRADSHTEYN, I.M. RYZHIK
Table of integrals series and products
ACADEMIC PRESS

P.F. BYRD, M.D. FRIEDMAN
Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists
SPRINGER - VERLAG, BERLIN 1954

CAYLEY
Elementary treatise on elliptic functions
BELL and SON'S, LONDON, 1876

ANNEXES

TABLE DES ANNEXES

- ANNEXE.1.1. *Algorithme permettant le traitement numérique du formalisme matriciel*
- ANNEXE.1.2. *Composantes du potentiel de Hertz Π_x et Π_y dans le substratum d'un milieu 2 couches. Le D.E.H. est placé sur l'interface des 2 couches*
- ANNEXE.2.1. *Application de la théorie des images en courant continu. Expression du potentiel créé par une source de courant en un point d'un milieu stratifié*
- Annexe.2.2. *Développement de la formulation du potentiel $U(R)$*
- Annexe.2.3. *Résolution analytique de l'intégrale du type*

$$\mathcal{J} = \int_d^\infty d\xi \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{dn}{(\eta^2 + \alpha^2)^{1/2} (\eta^2 + \alpha^2)^{3/2}}$$

- Annexe.2.4. *Expression de l'intégrale \mathcal{J} en coordonnées cylindriques*

ANNEXE.1.1.

ALGORITHME PERMETTANT LE TRAITEMENT NUMERIQUE DU FORMALISME MATRICIEL

Le développement de la composante du champ électromagnétique $(E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)$ s'effectue dans le programme principal du calcul numérique.

Les variables suivantes y sont introduites en données :

- FR fréquence du courant d'émission
- I_1, I_2, I_3 borne inférieure, borne supérieure et pas de variation de la variable r , distance émetteur-forage
- J_1, J_2, J_3 borne inférieure, borne supérieure et pas de variation de la variable z , profondeur du récepteur
- NC nombre de couches du terrain stratifié
- $H(I)$ et $RAU(I)$ hauteur et résistivité de la couche I ($I=1, \dots, NC$)
- IC indice de choix de la composante du champ.

La composante choisie est calculée par appel du sous-programme d'intégration SIMPSON (du nom de la méthode employée). Celui-ci utilise la fonction $F(LA, IC, MR, NC, H(I), RAU(I))$ où LA représente la variable d'intégration et MR est l'indice de la couche où est placé le récepteur.

Nous présentons, dans les pages suivantes, l'organigramme et le texte de la fonction F issue d'un algorithme matriciel permettant de calculer l'intégrant de chaque composante.

Les correspondances essentielles entre les variables matricielles de l'organigramme et celles du formalisme sont les suivantes :

$$V_m : V(MR, K, L)$$

$$V_m^{-1} : W(MR, K, L)$$

$$D_m : D(MR, K, L)$$

$$V_{M1} : V_{IN}(K, L)$$

$$V_{m1} : V_{I1}(K, L)$$

$$\overrightarrow{A_m(z)} : AZ(K, 1)$$

$$K = 1, 2, 3, 4$$

$$L = 1, 2, 3, 4$$

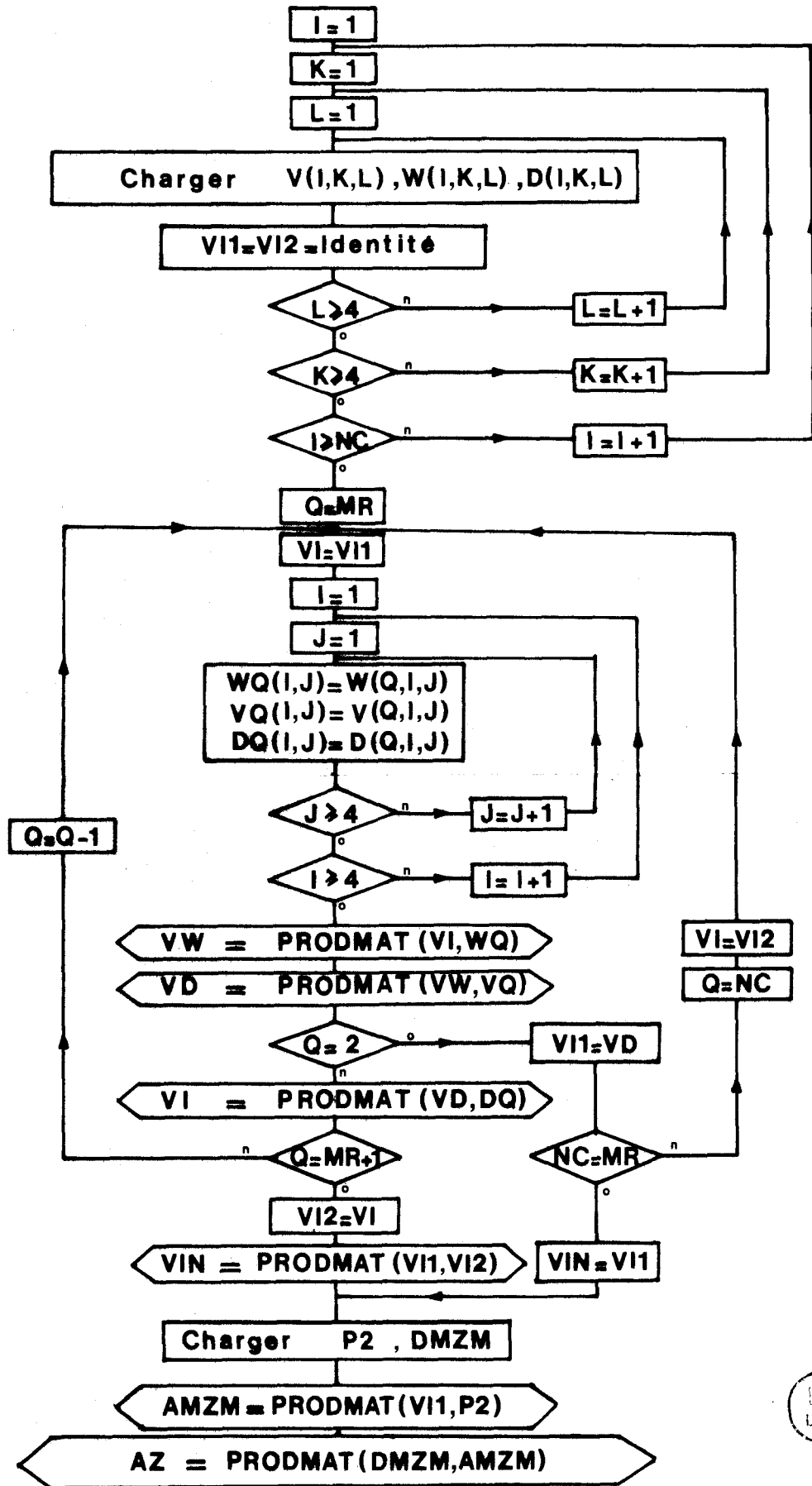
Les coefficients déterminant l'intégrant de la composante choisie sont les suivants :

$$a_m e^{-u_m z} : AZ(1, 1)$$

$$b_m e^{+u_m z} : AZ(2, 1)$$

$$f_m e^{-u_m z} : AZ(3, 1)$$

$$g_m e^{+u_m z} : AZ(4, 1)$$



- F(LA,1,...)
(E_x)
- F(LA,2,...)
(E_y)
- F(LA,3,...)
(E_z)
- F(LA,4,...)
(H_x)
- F(LA,5,...)
(H_y)
- F(LA,6,...)
(H_z)

```

COMPLEX FUNCTION F(LA,IC)
COMMON PI,M,FR,WF,R,Z,EQ,H,ZC,KS,P,NO,NC,DE,DR,MEZ,PHI
DIMENSION H(15),KS(15),U(15),DC(15),V(15,4,4),W(15,4,4),D(15
1,4,4),CEP(15),CEM(15),VI1(4,4),VI2(4,4),V3(4,4),VD(4,4),DG(4,4),
2VW(4,4),VD(4,4),VIN(4,4),P2(4,1),DMZM(4,4),AMZM(4,1),A7(4,1),
3ZC(16),P(15),HT(15)
INTEGER I
REAL LA,M,LR,KS
REAL MEZ
REAL LA2
COMPLEX U,DC,V,W,D,CEP,CEM,VI1,VI2,V3,VD,DG,VW,VD,VIN,P2,DMZM,AMZ
1M,AZ,UO,KO,M21,M22,M33,M43,M44,M41,M42,E1,D11,D12,D15,D16,G13,G14,
2N11,N12,N22,N21,N31,N32,N33,N34,N41,N42,N43,N44,CLR,CP,CN,IUN
COMPLEX IZERB

```

C
C

```

SN=SIN(PHI)
CS=COS(PHI)
CS2=CS*CS
LA2=LA*LA
UO=CMPLX(LA,0.)
KO=CMPLX(0.,WF*EQ)

```

C

```

DO 100 I=1,NC
U(I)=CS*RT(CMPLX(LA*LA,WF*M*KS(I)))
DC(I)=U(I)*H(I)

```

C

```

DO 200 K=1,4
DO 300 L=1,4
V(I,K,L)=(0.,0.)
W(I,K,L)=(0.,0.)
D(I,K,L)=(0.,0.)
300 CONTINUE
200 CONTINUE
V(I,1,1)=U(I)
V(I,1,2)=U(I)
V(I,2,1)=(1.,0.)
V(I,2,2)=(1.,0.)
V(I,3,3)=(1.,0.)
V(I,3,4)=(1.,0.)
V(I,4,1)=CMPLX(1./KS(I),0.)
V(I,4,2)=CMPLX(1./KS(I),0.)
V(I,4,3)=-U(I)/KS(I)
V(I,4,4)= U(I)/KS(I)
W(I,1,1)=-1./U(I)/2.
W(I,1,2)=(.5,0.)
W(I,2,2)=(.5,0.)
W(I,3,3)=(.5,0.)
W(I,4,3)=(.5,0.)
W(I,2,1)=.5/U(I)
W(I,3,2)=.5/U(I)

```



```

52.      W(I,4,2)=-.5/U(I)
53.      W(I,3,4)=-.5*KS(I)/U(I)
54.      W(I,4,4)=-.5*KS(I)/U(I)
55.      C
56.      CEP(I)=CEXP(DC(I))
57.      CEM(I)=CEXP(-DC(I))
58.      C
59.      D(I,1,1)=CEP(I)
60.      D(I,2,2)=CEM(I)
61.      D(I,3,3)=CEP(I)
62.      D(I,4,4)=CEM(I)
63.      C
64.      105 CONTINUE
65.      C
66.      M21=(1.-U(1)/U0)/2.
67.      M22=(1.+U(1)/U0)/2.
68.      M33=(1.+K0*U(1)/KS(1)/U0)/2.
69.      M43=(1.-K0*U(1)/KS(1)/U0)/2.
70.      M44=M33
71.      M41=(K0/KS(1)/U0-1./U0)/2.
72.      M42=M41
73.      E1=CEP(1)
74.      DB 400 I=1,4
75.      DB 500 J=1,4
76.      VI1(I,J)=(0.,0.)
77.      VI2(I,J)=(0.,0.)
78.      505 CONTINUE
79.      VI1(I,I)=(1.,0.)
80.      VI2(I,I)=(1.,0.)
81.      405 CONTINUE
82.      C
83.      C
84.      DB 600 Q=MR,2=-1
85.      DB 601 I=1,4
86.      DB 602 J=1,4
87.      WQ(I,J)=W(Q,I,J)
88.      VQ(I,J)=V(Q-1,I,J)
89.      DQ(I,J)=D(Q-1,I,J)
90.      602 CONTINUE
91.      601 CONTINUE
92.      C
93.      CALL PRBDMAT(VI1,WQ,VW,4,4)
94.      CALL PRBDMAT(VW,VQ,VD,4,4)
95.      IF(Q=2) 603,603,606
96.      603 DB 605 I=1,4
97.      DB 604 J=1,4
98.      VI1(I,J)=VD(I,J)
99.      604 CONTINUE
100.     605 CONTINUE
101.     GOTO 610
102.     606 CALL PRBDMAT(VD,DQ,VI1,4,4)

```



```

103. 605 CONTINUE
104. 615 IF(NC=MR) 623,623,626
105. 623 DO 625 I=1,4
106.     DO 624 J=1,4
107.         VIN(I,J)=VI1(I,J)
108. 624 CONTINUE
109. 625 CONTINUE
110.     GOT0 750
111. 626 DO 700 G=NC,MR+1,-1
112.     DO 701 I=1,4
113.     DO 702 J=1,4
114.         WQ(I,J)=W(G,I,J)
115.         VQ(I,J)=V(G-1,I,J)
116.         DQ(I,J)=D(G-1,I,J)
117. 702 CONTINUE
118. 701 CONTINUE
119. C
120.     CALL PR0DMAT(VI2,WQ,VW,4,4)
121.     CALL PR0DMAT(VW,VQ,VD,4,4)
122.     CALL PR0DMAT(VD,DQ,VI2,4,4)
123. 700 CONTINUE
124. C
125.     CALL PR0DMAT(VI2,VI1,VIN,4,4)
126. C
127. 750 N11=VIN(1,1)
128.     N12=VIN(1,2)
129.     N21=VIN(2,1)
130.     N22=VIN(2,2)
131.     N31=VIN(3,1)
132.     N32=VIN(3,2)
133.     N33=VIN(3,3)
134.     N34=VIN(3,4)
135.     N41=VIN(4,1)
136.     N42=VIN(4,2)
137.     N43=VIN(4,3)
138.     N44=VIN(4,4)
139. C
140.     D11=M22*N11*E1-M21*N12/E1
141.     D12=M44*N33*E1-M43*N34/E1
142.     D15=N11*N32-N12*N31
143.     D16=N11*M42*E1-N12*M41/E1
144.     G13=M22*E1-M21/E1
145.     G14=M42*E1-M41/E1
146. C
147. C
148.     P2(1,1)=-N12*G13/D11
149.     P2(2,1)=N11*G13/D11
150.     P2(3,1)=[(-M44*E1*D15+N34*D16)*G13-N34*D11*G14]/(D11*D12)
151.     P2(4,1)=[(M43*D15/E1-N33*D16)*G13+N33*D11*G14]/(D11*D12)
152. C
153.     CALL PR0DMAT(VI1,P2,AMZM,4,1)

```



```

154. C
155. CP=CLXP(=U(MR)*(ZC(MR)-Z))
156. CM=1./CP
157. DO 900 I=1,4
158. DO 901 J=1,4
159. DMZM(I,J)=(0.,0.)
160. 901 CONTINUE
161. 900 CONTINUE
162. DMZM(1,1)=CP
163. DMZM(2,2)=CM
164. DMZM(3,3)=CP
165. DMZM(4,4)=CM
166. C
167. CALL PR6DMAT(DMZM,AMZM,AZ,4,1)
168. C
169. DO 950 I=1,4
170. 950 AZ(I,1)=P(MR)*LA*AZ(I,1)/U(1)
171. IF(MR.EQ.NC) AZ(1,1)=(0.,0.);AZ(2,1)=(0.,0.)
172. LR=LA*R
173. CLR=CMPLX(0.,-LR)
174. IF(IC.EQ.1) F=((WF*M*KS(MR)-CS2*LA2)*IZERO(CLR)+LA*CS2*IUN(CLR)*(0
175. 1.,1.)/R)*(AZ(1,1)+AZ(2,1))-U(MR)*CS2*(LA2*IZERO(CLR)-LA*IUN(CLR))*
176. 2.,1.)/R*(AZ(4,1)-AZ(3,1))
177. IF(IC.EQ.2) F=SN*CS*(LA*IUN(CLR)*(0.,1.)/R-LA2*IZERO(CLR))*(A7(1,1
178. 1)+AZ(2,1)+U(MR)*(AZ(4,1)-AZ(3,1)))
179. IF(IC.EQ.3)
180. 1F=((0.,1.)*WF*M*KS(MR)-U(MR)*U(MR))*(AZ(3,1)+A7(4,1))-U(MR)*(AZ(2
181. 2,1)-AZ(1,1))*IUN(CLR)*(0.,1.)*LA*CS
182. IF(IC.EQ.4) F=SN*CS*KS(MR)*(LA*IUN(CLR)*(0.,1.)/R-LA2*IZERO(CLR))*
183. 1(AZ(3,1)+AZ(4,1))
184. IF(IC.EQ.5) F=KS(MR)*(U(MR)*IZERO(CLR)*(A7(2,1)-AZ(1,1))+CS2*(LA2*
185. 1IZERO(CLR)-LA*IUN(CLR))*(0.,1.)/R)*(A7(3,1)+A7(4,1)))
186. IF(IC.EQ.6) F=SN*KS(MR)*IUN(CLR)*(0.,1.)*LA*(AZ(1,1)+AZ(2,1))
187. RETURN
188. END

```

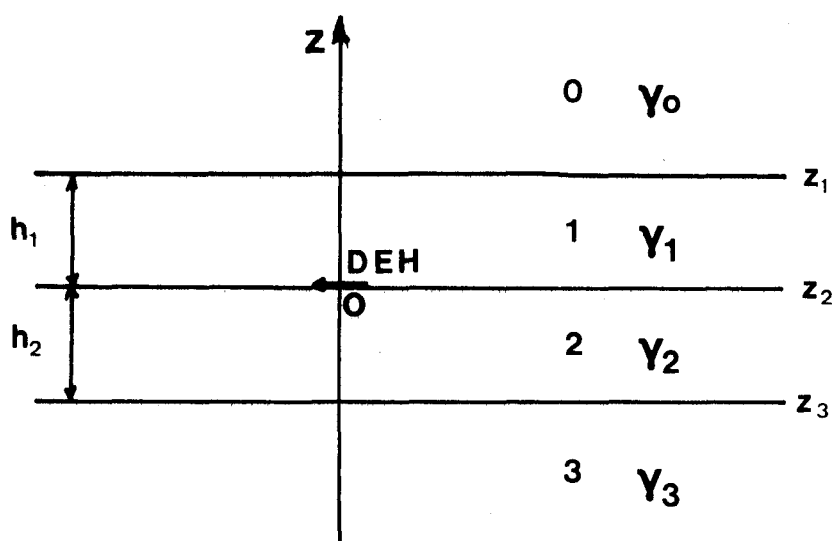


ANNEXE.1.2.

COMPOSANTES DU POTENTIEL π_x et π_z DANS LE SUBSTRATUM D'UN MILIEU
2 COUCHES. LE D.E.H. EST PLACE SUR L'INTERFACE DES DEUX COUCHES

Le formalisme introduit par le Professeur GABILLARD
donne les composantes du potentiel de Hertz pour chaque couche de
terrain.

Pour traiter le cas du milieu 2 couches, nous avons
adopté un modèle 3 couches traité suivant le schéma suivant : ⁽²³⁾



L'origine des axes de coordonnées est choisie au niveau de l'émetteur sur une interface $z = z_2 = 0$.

Dans la couche 3 les composantes du potentiel de Hertz s'expriment par :

$$\begin{aligned}\Pi_{3x} &= \int_0^{\infty} b_3 e^{u_3 z} J_0(\lambda r) d\lambda \\ \Pi_{3z} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} g_3 e^{u_3 z} J_0(\lambda r) d\lambda\end{aligned}$$

La théorie matricielle donne :

$$\begin{aligned}b_3 &= p_1 \frac{\lambda}{u_1} e^{-u_3 z_3} \frac{e^{d_1} M_{11} + e^{-d_1} M_{21}}{G} \\ g_3 &= p_1 \frac{\lambda}{u_1} e^{-u_3 z_3} \frac{\Delta_1 (N_{22} + N_{12}) + \Delta_4 (e^{d_1} M_{11} + e^{-d_1} M_{21})}{G \Delta_0}\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= e^{d_1} M_{33} N_{44} - e^{-d_1} M_{43} N_{34} \\ \Delta_1 &= M_{33} M_{41} - M_{31} M_{43} \\ \Delta_4 &= e^{-d_1} M_{43} N_{32} - e^{d_1} M_{33} N_{42} \\ G &= e^{d_1} M_{11} N_{22} - e^{-d_1} M_{21} N_{12}\end{aligned}$$

Les termes M_{ij} , N_{ij} sont les coefficients respectifs des matrices M_{10} et M_{31}^{-1} données par :

$$M_{10} = U_1^{-1} U_0$$

$$M_{31}^{-1} = U_1^{-1} U_2 D_2^{-1} U_3$$

où :

$$U_i = \frac{1}{j\omega u} \begin{bmatrix} -\gamma_i^2 u_i & \gamma_i^2 u_i & 0 & 0 \\ \gamma_i^2 & \gamma_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_i^2 & \gamma_i^2 \\ 1 & 1 & -u_i & u_i \end{bmatrix}$$

$$D_i = \begin{bmatrix} di & & & \\ e & 0 & 0 & 0 \\ & -di & & \\ 0 & e & 0 & 0 \\ & & di & \\ 0 & 0 & e & 0 \\ & & & -di \\ 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$

avec : $di = u_i h_i$

$$u_i = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_i^2}$$

En considérant que les couches 2 et 3 ont les mêmes caractéristiques électriques en particulier $\rho_2 = \rho_3$, par l'égalité $U_2 = U_3$, M_{31}^{-1} se ramène à l'expression :

$$M_{31}^{-1} = U^{-1} U_2 D_2^{-1}$$

Après le traitement matriciel, les expressions b_3 et g_3 qui nous intéressent sont données par :

$$b_3 = b_2 = 2p_1 \lambda \frac{k_1 [(u_1 + u_0)e^{d_1} + (u_1 - u_0)e^{-d_1}]}{k_2 [(u_1 + u_0)(u_1 + u_2)e^{d_1} - (u_1 - u_0)(u_1 - u_2)e^{-d_1}]}$$

$$g_3 = g_2 = 2p_1 \lambda \frac{k_1}{k_2} \times \frac{N}{D}$$

où :

$$N = 4k_2 u_1^2 (k_1 - k_0) + 2(k_2 - k_1) (k_0 u_1^2 - k_1 u_0^2) + (k_2 - k_1) [(k_0 u_1 - k_1 u_0) (u_1 - u_0) e^{-2d_1} + (k_0 u_1 + k_1 u_0) (u_1 + u_0) e^{2d_1}]$$

$$\begin{aligned}
D = & \left[(u_0+u_1) (u_2+u_1) (k_0u_1+k_1u_0) (k_2u_1+k_1u_2) e^{2d_1} \right. \\
& + (u_1-u_0) (u_1-u_2) (k_0u_1-k_1u_0) (k_2u_1-k_1u_2) e^{-2d_1} \\
& \left. - 2 \left[(k_0k_2u_1^2+k_1^2u_0u_2) (u_1^2+u_2u_0) - k_1u_1^2(k_0u_2+k_2u_0) (u_2+u_0) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\rho_1 = \frac{I\ell}{4\pi} \rho_1 \quad d_1 = u_1 h_1$$

$$k_i = \frac{1}{\rho_i} + j\omega\epsilon_i \neq \frac{1}{\rho_i}$$

$$u_i = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_i^2} \quad \gamma_i^2 = j\omega\mu k_i$$

TEXTE DE LA FONCTION PERMETTANT LE CALCUL DE L'INTEGRANT DE E_zDANS UN MILIEU 2 COUCHES -

```

)064 'REAL' 'PROCEDURE' F(L,T,X);
)065 'VALUE' L,T,X;
)066 'REAL' X;
)067 'INTEGER' L,T;
)068 'BEGIN' 'REAL' M1,LA,W,M,PH1,PH2,A1,A2,B1,B2,F0,N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N
)068 8,N9,N10,N11,N43,N56,N87,N96,K1,K2,K3,K4,K5,K6,SN1,SN2,SN3,CS1,CS2,C
)068 S3,RNG2,ING2,R1,I1,R2,I2,R3,I3,R4,I4,R5,R6,I6,R7,I7,R8,I8,R9,I9,R10,
)068 I10,R11,I11,R12,I12,R45,I45,R78,I78,R90,I90,R13,I13,R46,I46,R71,I71,
)068 RDG2,IDG2,DG2,RG2,RNB2,INB2,RDB2,IDB2,DR2,RR2,IB2,E1,E2,E3,RE,IE,RIE
)068 Z,IEZ,M2,PI,JI,V,IG2;
)069 PI:=3.1415926537;
)070 W:=2*PI*FR;
)071 EO:=(1/(36*PI))*1@-9;
)072 M:=4*PI*1@-7;
)073 LA:=X;
)074 'IF' LA=0 'THEN' 'BEGIN' PH1:=PH2:=PI/2;
)075 M1:=SQRT(SQRT(W*W*M*M*SIGMA1*SIGMA1));
)076 M2:=SQRT(SQRT(W*W*M*M*SIGMA2*SIGMA2));
)077 'END' 'ELSE' 'BEGIN' M1:=SQRT(SQRT(LA+4+W*W*M*M*SIGMA1*SIGMA1));
)078 M2:=SQRT(SQRT(LA+4+W*W*M*M*SIGMA2*SIGMA2));
)079 PH1:=(ARCTAN(W*M*SIGMA1/LA/LA))/2;
)080 PH2:=(ARCTAN(W*M*SIGMA2/LA/LA))/2;
)081 'END';
)082 A1:=M1*COS(PH1);
)083 B1:=M1*SIN(PH1);
)084 A2:=M2*COS(PH2);
)085 B2:=M2*SIN(PH2);
)086 N1:=4*SIGMA2*(SIGMA1*(A1*A1-B1*B1)+2*A1*B1*W*EO);
)087 N2:=-2*W*EO*A1*B1-SIGMA1*LA*LA;
)088 N3:=B1*(B1*W*EO+SIGMA1*LA);
)089 N4:=W*FO*A1*(A1-LA);
)090 N5:=(A1-LA)*(B1*W*EO+SIGMA1*LA);
)091 N6:=B1*W*EO*A1;
)092 N7:=B1*(SIGMA1*LA-B1*W*FO);
)093 N8:=W*FO*A1*(A1+LA);
)094 N9:=(A1+LA)*(SIGMA1*LA-B1*W*FO);
)095 N10:=4*SIGMA2*(2*A1*B1*SIGMA1-W*EO*(A1*A1-B1*B1));
)096 N11:=W*EO*(A1*A1-B1*B1);
)097 N43:=N4-N3;
)098 N56:=N5+N6;
)099 N87:=N7+N8;

```



```

00 N96:=N9-N6;
01 K1:=2*A1*H1;
02 K2:=2*B1*H1;
03 SN1:=SIN(K2);
04 CS1:=COS(K2);
05 RNG2:=2*LA*SIGMA1*(N1+2*(SIGMA2-SIGMA1)*(N2+EXP(-K1)*(N43*SN1-N56*CS
05 1)/2+EXP(K1)*(N96*CS1-N87*SN1)/2));
06 ING2:=2*LA*SIGMA1*(N10+2*(SIGMA2-SIGMA1)*(N11+EXP(-K1)*(N43*CS1+N56*
06 SN1)/2+EXP(K1)*(N96*SN1+N87*CS1)/2));
07 R1:=(LA+A1)*(A1+A2)-B1*(B1+B2);
08 I1:=B1*(A1+A2)+(B1+B2)*(A1+LA);
09 R2:=SIGMA1*LA-B1*W*E0;
10 I2:=W*E0*A1;
11 R3:=SIGMA2*A1+SIGMA1*A2;
12 I3:=SIGMA2*B1+SIGMA1*B2;
13 R4:=(A1-LA)*(A1-A2)-B1*(B1-B2);
14 I4:=B1*(A1-A2)+(B1-B2)*(A1-LA);
15 R5:=B1*W*E0+SIGMA1*LA;
16 R6:=SIGMA2*A1-SIGMA1*A2;
17 I6:=SIGMA2*B1-SIGMA1*B2;
18 I7:=SIGMA1*SIGMA1*B2*LA+W*E0*SIGMA2*(A1*A1-R1*B1);
19 R7:=SIGMA1*SIGMA1*LA*A2-2*A1*B1*W*E0*SIGMA2;
20 R8:=A1*A1-B1*B1+A2*LA;
21 I8:=B2*LA+2*A1*B1;
22 R9:=A1*A1-B1*B1;
23 I9:=2*A1*B1;
24 R10:=SIGMA2*LA-B2*W*E0;
25 I10:=W*E0*A2;
26 R11:=A2+LA;
27 I11:=B2;
28 R12:=R1*R2-I1*I2;
29 I12:=I1*R2+R1*I2;
30 I45:=R4*I2-I4*R5;
31 R45:=R4*R5+I4*I2;
32 R78:=R7*R8-I7*I8;
33 I78:=R7*I8+I7*R8;
34 R90:=R9*R10-I9*I10;
35 I90:=R9*I10+R10*I9;
36 R13:=R12*R3-I12*I3;
37 I13:=R12*I3+R3*I12;
38 R46:=I45*I6+R45*R6;
39 I46:=I45*R6-R45*I6;
40 R71:=R78-SIGMA1*(R90*R11-I90*I11);
41 I71:=I78-SIGMA1*(R90*I11+R11*I90);
42 RDG2:=SIGMA2*((R13*CS1-I13*SN1)*EXP(K1)+(I46*SN1-R46*CS1)*EXP(-K1)-2
42 *R71);
43 IDG2:=SIGMA2*((R13*SN1+I13*CS1)*EXP(K1)+(I46*CS1+R46*SN1)*EXP(-K1)-2
43 *I71);
44 DG2:=RDG2*RDG2+IDG2*IDG2;
45 RG2:=(RNG2*PDG2+ING2*IDG2)/DG2;
46 IG2:=(ING2*RDG2-RNG2*IDG2)/DG2;
47 K3:=A1*H1;
48 K4:=B1*H1;
49 CS2:=COS(K4);
50 SN2:=SIN(K4);
51 RNB2:=2*LA*SIGMA1*(((A1+LA)*CS2-B1*SN2)*EXP(K3)+((A1-LA)*CS2+B1*SN2)
51 *EXP(-K3));
52 INB2:=2*LA*SIGMA1*((B1*CS2+(A1+LA)*SN2)*EXP(K3)+(B1*CS2-(A1-LA)*SN2)

```



```

152 *EXP(-K3));
153 RDB2:=SIGMA2*((R1*CS2-I1*SN2)*EXP(K3)-(R4*CS2+I4*SN2)*EXP(-K3));
154 IDB2:=SIGMA2*((I1*CS2+R1*SN2)*EXP(K3)-(I4*CS2-R4*SN2)*EXP(-K3));
155 DB2:=RDB2*RDB2+IDB2*IDB2;
156 RB2:=(RNB2*RDB2+INB2*IDB2)/DB2;
157 IB2:=(INB2*RDB2-RNB2*IDB2)/DB2;
158 E1:=2*A2*B2;
159 E2:=W*M*SIGMA2;
160 E3:=A2*A2-B2*B2;
161 RF:=B2*IB2+F1*IG2-E2*IG2-E3*RG2-A2*RB2;
162 IE:=E2*RG2-B2*RB2-A2*IB2-E3*IG2-E1*RG2;
163 K5:=-A2*Z;
164 K6:=-B2*Z;
165 CS3:=COS(K6);
166 SN3:=SIN(K6);
167 V:=LA*R;
168 'IF'V<=10'THEN'JI:=-2*GFRIGE11(0,V,-PI/2)/PI'ELSE'JI:=-2*AGERIGE11(0
168 ,V,-PI/2)/PI;
169 IIEZ:=EXP(K5)*(IE*CS3+RE*SN3)*JI*LA;
170 RIFZ:=EXP(K5)*(RE*CS3-IF*SN3)*JI*LA;
171 'IF'T=0'THEN'F:=RIEZ'ELSE'F:=IIEZ;
172 'END'.DE.PROCEDURE.F;

```



ANNEXE.2.1.

APPLICATION DE LA THEORIE DES IMAGES EN COURANT CONTINU. EXPRESSION
DU POTENTIEL CREE PAR UNE SOURCE DE COURANT EN UN POINT D'UN MILIEU
STRATIFIE

A. La source ponctuelle est placée à l'interface 1.2. d'un milieu 2 couches

Nous avons vu au paragraphe .II.1.1. que :

$$U_i = \frac{I\rho_1}{4\pi} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \right) + \int_0^{\infty} (A_i(\lambda) e^{-\lambda z} + B_i(\lambda) e^{+\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda$$

où A_i et B_i sont déterminés par les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} U_i &= U_{i+1} \\ \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial U_i}{\partial z} &= \frac{1}{\rho_{i+1}} \frac{\partial U_{i+1}}{\partial z} \quad \text{à } z = H_i \end{aligned}$$

$$U_1 = \frac{I\rho_1}{4\pi} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \right) + \int_0^{\infty} (A_1 e^{-\lambda z} + B_1 e^{+\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{I\rho_1}{4\pi} \left(\frac{z+h_1}{R_0^3} + \frac{z-h_1}{R_1^3} \right) + \int_0^{\infty} (-A_1 e^{-\lambda z} + B_1 e^{+\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 = \int_0^{\infty} (-A_1 + B_1) J_0(\lambda r) d\lambda$$

ce qui entraîne que : $A_1 = B_1$

$$\text{et que : } U_1 = \frac{I\rho_1}{4\pi} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \right) + \int_0^{\infty} A_1 (e^{-\lambda z} + e^{+\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda$$

A l'interface 1.2. :

$$U_2 = \frac{I\rho_1}{4\pi} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \right) + \int_0^{\infty} A_2 e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda$$

($B_2=0$ car. la couche 2 s'étendant infiniment vers les $z > 0$, il faut que l'intégrale converge).

A $z = H_1$, l'égalité $U_1 = U_2$ entraîne :

$$A_1 (e^{\lambda H_1} + e^{-\lambda H_1}) = A_2 e^{-\lambda H_1}$$

l'égalité :

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2}{\partial z} ,$$

sachant que :

$$\frac{1}{R_0} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(z+h_1)} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\frac{1}{R_1} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(z-h_1)} J_0(\lambda r) d\lambda$$

caractérisant des intégrales de Weber,

$$q = \frac{I\rho_1}{4\pi} , \text{ entraîne,}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} (A_1 (e^{\lambda H_1} - e^{-\lambda H_1}) - q(1 + e^{-2\lambda H_1})) \\ = - \frac{1}{\rho_2} (A_2 e^{-\lambda H_1} + q(1 + e^{-2\lambda H_1})) \end{aligned}$$

Nous avons alors le système de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} A_2 - A_1 (e^{2\lambda H_1} + 1) = 0 \\ A_2 \rho_1 e^{-\lambda H_1} + A_1 \rho_2 (e^{\lambda H_1} - e^{-\lambda H_1}) = q(1 + e^{-2\lambda H_1}) (\rho_2 - \rho_1) \end{cases}$$

dont les solutions sont :

$$\begin{aligned} \bullet A_1 &= q K_{12} (1 + e^{-2\lambda H_1}) e^{-\lambda H_1} / (1 - K_{12} e^{-2\lambda H_1}) \\ \bullet A_2 &= q K_{12} e^{-2\lambda H_1} (2e^{\lambda H_1} + e^{-\lambda H_1} + e^{3\lambda H_1}) / (1 - K_{12} e^{-2\lambda H_1}) \end{aligned}$$

$$\text{avec : } K_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

$$\text{En remarquant que } \frac{K_{12} e^{-2\lambda H_1}}{1 - K_{12} e^{-2\lambda H_1}} = \sum_{n=1}^{\infty} K_{12}^n e^{-2n\lambda H_1}$$

nous pouvons écrire :

$$A_2 = q \sum_{n=1}^{\infty} K_{12}^n (2e^{-(2n-1)\lambda H_1} + e^{-(2n+1)\lambda H_1} + e^{-(2n-3)\lambda H_1})$$

$$\begin{aligned} U_2 &= q \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \right) + \int_0^{\infty} A_2 e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \\ &= q \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \right) + q \sum_{n=1}^{\infty} K_{12}^n \int_0^{\infty} (2e^{-(2n-1)\lambda H_1 - \lambda z} + \\ &\quad + e^{-(2n+1)\lambda H_1 - \lambda z} + e^{-(2n-3)\lambda H_1 - \lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned}$$

$$\text{D'après les intégrales de Weber : } \int_0^{\infty} e^{-\lambda(z-H)} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{(r^2 + (z-H)^2)^{1/2}}$$

et sachant que $H_1 = h_1$:

$$U_2 = q\left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1}\right) + q \sum_{n=1}^{\infty} K_{12}^n \left[\frac{2}{(r^2 + ((2n-1)h_1 + z)^2)^{1/2}} + \frac{1}{(r^2 + ((2n+1)h_1 + z)^2)^{1/2}} + \frac{1}{(r^2 + ((2n-2)h_1 + z)^2)^{1/2}} \right]$$

B. La source ponctuelle est placée au sein de la couche 2 à la profondeur h

Pour faciliter le calcul nous avons créé au niveau de la source I une interface fictive 2.3. en considérant bien que $\rho_2 = \rho_3$.

Nous aurons alors les conditions aux limites suivantes :

$$\bullet \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial z} = 0 \quad \text{à } z = 0$$

$$\bullet \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2}{\partial z} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial z} \quad \text{à } z = H_1 = h_1$$

$$\bullet U_2 = U_1$$

$$\bullet \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial U_3}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{U_2}{z} \quad \text{à } z = h$$

Ces conditions entraînent, en utilisant le même développement : de $U_i =$

$$\frac{I_0 I_2}{4\pi} \left(\frac{1}{R'_0} + \frac{1}{R'_1} \right) + \int_0^{\infty} (A_i e^{-\lambda z} + B_i e^{+\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\text{avec : } R'_0 = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$$

$$R'_1 = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}$$

les égalités suivantes :

$$(1) \quad A_1 = B_1$$

$$(2) \quad \frac{1}{\rho_2} (A_2 e^{-\lambda H_1} - B_2 e^{\lambda H_1} + q' (e^{-\lambda(H_1+h)} + e^{-\lambda(H_1-h)})) \\ = -\frac{1}{\rho_1} (A_1 (e^{\lambda H_1} - e^{-\lambda H_1}) - q' (e^{-\lambda(H_1+h)} + e^{-\lambda(H_1-h)}))$$

$$(3) \quad A_1 (e^{-\lambda H_1} + e^{\lambda H_1}) = A_2 e^{-\lambda H_1} + B_2 e^{\lambda H_1}$$

$$(4) \quad A_3 e^{-\lambda h} = A_2 e^{-\lambda h} - B_2 e^{+\lambda h}$$

$$(5) \quad A_3 e^{-\lambda h} = A_2 e^{-\lambda h} + B_2 e^{+\lambda h} \quad \text{avec } q' = \frac{I\rho_2}{4\pi}$$

Ce système se ramène à : $A_3 = A_2$, $B_2 = 0$, $A_1 = B_1$

$$\begin{cases} A_2 - A_1 (e^{+2\lambda H_1} + 1) = 0 \\ A_2 \rho_1 e^{-\lambda H_1} + A_1 \rho_2 (e^{\lambda H_1} - e^{-\lambda H_1}) = q' (e^{-\lambda(H_1+h)} + e^{-\lambda(H_1-h)}) (\rho_2 - \rho_1) \end{cases}$$

dont les solutions sont :

$$A_1 = q' K_{12} (e^{-\lambda(h+2H_1)} + e^{-\lambda h}) / (1 - e^{-2\lambda H_1} K_{12})$$

$$A_2 = q' K_{12} (e^{-2\lambda H_1} (e^{-h} + 2e^{-\lambda(h-2H_1)}) + e^{-\lambda(h-4H_1)}) / (1 - K_{12} e^{-2\lambda H_1})$$

$$\text{avec } K_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

De la même façon, à l'aide de l'expression :

$$\frac{K_{12} e^{-2\lambda H_1}}{1 - K_{12} e^{-2\lambda H_1}} = \sum_{n=1}^{\infty} K_{12}^n e^{-2n\lambda H_1}$$

Nous écrivons :

$$A_2 = q' \sum_{n=1}^{\infty} K_{12}^n \left(e^{-\lambda(2nH_1+h)} + 2e^{-\lambda(2n-2)H_1+h} + e^{-\lambda((2n-4)H_1+h)} \right)$$

L'expression de U_2 sera alors, après les transformations d'intégrales :

$$U_2 = q' \left(\frac{1}{R'_0} + \frac{1}{R'_1} \right) + q' \sum_{n=1}^{\infty} K_{12}^n \frac{1}{(r^2 + (2nh_1 + h + z)^2)^{1/2}} \\ + \frac{2}{(r^2 + ((2n-2)h_1 + h + z)^2)^{1/2}} + \frac{1}{(r^2 + ((2n-4)h_1 + h + z)^2)^{1/2}}$$

ANNEXE.2.2.DEVELOPPEMENT DE LA FORMULATION DU POTENTIEL U(R)

Nous avons vu que l'expression du potentiel total au point R pouvait se ramener à la forme :

$$U(R) = U_o(R) + U_{S_o}(R) + U_{S',o}(R) + \sum_{j=1}^{\infty} U_{S_j}(R)$$

Nous allons ici expliciter les différentes termes en définissant les grandeurs qui les composent :

- a) $U_o(R)$ est le potentiel primaire dû à la source de courant et à ses images en absence d'anomalie.

Ce résultat est directement obtenu à partir du potentiel U_2 trouvé à la première partie de l'annexe.2.1.

Cette expression a été transformée de façon à caractériser l'effet de chaque image :

$$U_o(R) = \frac{I\rho_1}{4\pi} \left[(1+K_{12}) (r^2 + (z-h_1)^2)^{-1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} K_{12}^n (1+K_{12})^2 (r^2 + (z+(2n+1)h_1)^2)^{-1/2} \right]$$

ρ_1 est la résistivité de la couche 1

r est l'abscisse du point source Q

z est la profondeur du point de réception R

h_1 est l'épaisseur de la couche 1

K_{12} est le taux de réflexion au niveau de l'interface 1.2.

$$K_{12} = \frac{\rho_2^- \rho_1}{\rho_2^+ \rho_1}$$

- b) $U_{S_0}(R)$ est le potentiel secondaire dû à la présence de l'anomalie par effet de la source et de ses images :

$$U_{S_0}(R) = \frac{I\rho_2}{16\pi^2} K' \left[I_0 - I_0' + \sum_{i=1}^{\infty} (I_i - I_i') \right]$$

K' est le taux de réflexion au niveau de l'anomalie :

$$K' = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_2}$$

Remarque

Nous notons ici que nous appelons I l'intégrale obtenue à partir de la distribution de charge sur la surface supérieure de l'anomalie ou de ses images. I' est l'intégrale obtenue à partir de la distribution sur la surface inférieure.

I_0 et I_0' représentent l'effet causé par la source

I_i et I_i' représentent l'effet dû à l'image i de la source.

$$I = (1+K_{12}) (h-h'_1) \int d\xi \int d\eta \left(\xi^2 + \eta^2 + (h-z)^2 \right)^{-1/2} \left((\xi-r')^2 + \eta^2 + (h-h'_1)^2 \right)^{-3/2} d\eta$$

$$I_0' = (1+K_{12}) (h-h'_1) \int d\xi \int d\eta \left(\xi^2 + \eta^2 + (h+t-z)^2 \right)^{-1/2} \left((\xi-r')^2 + \eta^2 + (h-h'_1)^2 \right)^{-3/2} d\eta$$

$$I_i = C_i \int d\xi \int d\eta \left(\xi^2 + \eta^2 + (h-z)^2 \right)^{-1/2} \left((\xi-r')^2 + \eta^2 + (h+(2i-1)h'_1)^2 \right)^{-3/2} d\eta$$

$$I_i' = C_i \int d\xi \int d\eta \left(\xi^2 + \eta^2 + (h+t-z)^2 \right)^{-1/2} \left((\xi-r')^2 + \eta^2 + (h+(2i-1)h'_1)^2 \right)^{-3/2} d\eta$$

avec $C_i = (1+K_{12})^2 K_{12}^{i-1} (h+(2i-1)h'_1)$

Note

Les intégrations en ξ et η s'effectuent respectivement entre ξ_1 et ξ_2 , et entre η_1 et η_2 limites en x et en y respectivement (suivant le repère adopté) de l'anomalie.

Nous développerons analytiquement ces intégrales dans le cas d'une anomalie très mince ayant la forme d'un demi-plan infini ($\xi_1=d, \xi_2=+\infty, \eta_1=-\infty, \eta_2=+\infty$).

- c) $U_{S_o}'(R)$ est le potentiel secondaire dû à la présence de la première image de l'anomalie (symétrique à celle-ci par rapport à l'interface 1.2) par effet de la source et de ses images.

$$U_{S_o}'(R) = \frac{I\rho_2}{16\pi^2} K' \left[I_{oo} - I'_{oo} + \sum_{i=1}^{\infty} (I_{oi} - I'_{oi}) \right]$$

I_{oo} et I'_{oo} représentent l'effet de la source

I_{oi} et I'_{oi} représentent l'effet de l'image i de la source

$$I_{oo} = C_{oo} \int d\xi' \int (\xi^2 + \eta^2 + (h+z-2h_1)^2)^{-1/2} ((\xi-r')^2 + \eta^2 + (h-h'_1)^2)^{-3/2} d\eta$$

$$I'_{oo} = C_{oo} \int d\xi \int (\xi^2 + \eta^2 + (h+t-z-2h_1)^2)^{-1/2} ((\xi-r')^2 + \eta^2 + (h-h'_1)^2)^{-3/2} d\eta$$

$$\text{avec } C_{oo} = - (1+K_{12}) K_{12} (h-h'_1)$$

$$I_{oi} = C_{oi} \int d\xi \int (\xi^2 + \eta^2 + (h+z-2h_1)^2)^{-1/2} ((\xi-r')^2 + \eta^2 + ((2i+1)h'_1-h)^2)^{-3/2} d\eta$$

$$I'_{oi} = C_{oi} \int d\xi \int (\xi^2 + \eta^2 + (h+t+z-2h_1)^2)^{-1/2} ((\xi-r')^2 + \eta^2 + ((2i+1)h'_1-h)^2)^{-3/2} d\eta$$

$$\text{avec } C_{oi} = (1+K_{12})^2 K_{12}^i ((2i+1)h'_1-h)$$

- d) $U_{S_j}(R)$ est le potentiel secondaire dû à la présence de l'anomalie image j par effet de la source et de ses images.

$$U_{S_j} = \frac{I\rho_2}{16\pi^2} K' \left[I_{jo} - I'_{jo} + \sum_{i=1}^{\infty} (I_{ji} - I'_{ji}) \right]$$

I_{jo} et I'_{jo} représentent l'effet de la source

I_{ji} et I'_{ji} représentent l'effet de l'image i de la source

$$I_{jo} = C_{jo} \int d\xi \int (\xi^2 + \eta^2 + (h+z+(2j-1)h_1)^2)^{-1/2} ((\xi-r')^2 + \eta^2 + (h+(2j-1)h'_1)^2)^{-3/2} d\eta$$

$$I'_{j0} = C_{j0} \int d\xi \int (\xi^2 + \eta^2 + (h+t+z+(2j-1)h_1)^2)^{-1/2} ((\xi-r')^2 + \eta^2 + (h+(2j-1)h'_1)^2)^{-3/2} d\eta$$

$$\text{avec } C_{j0} = - (1+K_{12})^3 K_{12}^{j-1} (h+(2j-1)h'_1)$$

$$I_{ji} = C_{ji} \int d\xi \int (\xi^2 + \eta^2 + (h+z+2j-1)h_1)^2)^{-1/2} ((\xi-r')^2 + \eta^2 + ((2(i-j)+1)h'_1-h)^2)^{-3/2} d\eta$$

$$I'_{ji} = C_{ji} \int d\xi \int (\xi^2 + \eta^2 + (h+z+2(j-1)h_1)^2)^{-1/2} ((\xi-r')^2 + \eta^2 + ((2(i-j)+1)h'_1-h)^2)^{-3/2} d\eta$$

$$\text{avec } C_{ji} = (1+K_{12})^4 K_{12}^{i+j-2} ((2(i-j)+1)h'_1-h)$$

Le potentiel total $U(R)$ peut se mettre sous la forme :

$$U(R) = U_0(R) + \frac{I_p 2}{16\pi^2} K' \left[I_0 - I'_0 + I_{00} - I'_{00} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{\infty} (I_i - I'_i + I_{oi} - I'_{oi}) \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{\infty} (I_{j0} - I'_{j0} + \sum_{i=1}^{\infty} (I_{ji} - I'_{ji})) \right]$$

Nous indiquons la formulation de la résistivité apparente issue de la relation précédente par :

$$U(R) = \frac{I_p a}{4\pi} \left[(r^2 + (z-h_1)^2)^{-1/2} + (r^2 + (z+h_1)^2)^{-1/2} \right]$$

$$\rho_a = \frac{1}{(r^2 + (z-h_1)^2)^{-1/2} + (r^2 + (z+h_1)^2)^{-1/2}} \left[(1+K_{12})^2 (r^2 + (z-h_1)^2)^{-1/2} \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{\infty} K_{12}^i (1+K_{12})^2 (r^2 + (z+(2i+1)h_1)^2)^{-1/2} \right. \\ \left. + \frac{K'}{4\pi} \left[I_0 - I'_0 + I_{00} - I'_{00} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^{\infty} (I_i - I'_i + I_{oi} - I'_{oi}) \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=1}^{\infty} (I_{j0} - I'_{j0} + \sum_{i=1}^{\infty} (I_{ji} - I'_{ji})) \right] \right]$$

ANNEXE.2.3.

RESOLUTION ANALYTIQUE DE L'INTEGRALE DU TYPE :

$$J = \int_d^\infty d\xi \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{d\eta}{(\eta^2 + \alpha^2)^{1/2} (\eta^2 + \alpha^2)^{3/2}}$$

Dans le cas que nous appliquons : $\alpha^2 = \xi^2 + H_1^2$

$$\beta^2 = (\xi - r)^2 + H_2^2$$

$$J = 2 \int_d^\infty d\xi \int_0^\infty \frac{d\eta}{(\eta^2 + \alpha^2)^{1/2} (\eta^2 + \beta^2)^{3/2}}$$

Si $\alpha^2 < \beta^2$

$$\int_0^\infty \frac{d\eta}{(\eta^2 + \alpha^2)^{1/2} (\eta^2 + \beta^2)^{3/2}} = \frac{1}{\beta^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \phi d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}$$

$$\text{où } \phi = \text{Arc sin } \sqrt{\frac{\beta^2}{\beta^2 + \eta^2}}$$

$$k^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2}$$

Cette intégrale est exprimable par une série infinie :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \phi d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j-1)!!(2j+1)!!}{2^{2j+1} j!(j+1)!} k^{2j}$$

pour $k^2 < 1$

Cette expression nous permet alors de ramener \mathcal{J} à :

$$\mathcal{J} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right)^2 \times \frac{2n+1}{2n+2} \sum_{m=0}^n G(n,m) I_m$$

$$\text{où } G(n,m) = (-1)^m \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad I_m = \int_d^{\infty} \frac{(\alpha^2)^m}{(\beta^2)^{m+3/2}} d\xi$$

— Résolution de l'intégrale I_m

$$I_m = \int_d^{\infty} \frac{(\xi^2 + H_1^2)^m}{((\xi-r)^2 + H_2^2)^{m+3/2}} d\xi$$

En appliquant le changement de variable $x = \xi - r$, nous nous ramenons à la résolution d'une intégrale de la forme :

$$I_m = \int_{d-r}^{\infty} \frac{((x+r)^2 + H_1^2)^m}{(x^2 + H_2^2)^{m+3/2}} dx$$

Suivant la formule du binôme :

$$\begin{aligned} ((x+r)^2 + H_1^2)^m &= \sum_{p=0}^m C_m^p (x+r)^{2p} H_1^{2(m-p)} \\ &= \sum_{p=0}^m C_m^p H_1^{2(m-p)} \sum_{q=0}^{2p} C_{2p}^q x^q r^{2p-q} \\ &= \sum_{p=0}^m C_m^p H_1^{2(m-p)} r^{2p} \sum_{q=0}^{2p} C_{2p}^q \frac{x^q}{r^q} \end{aligned}$$

Cela nous amène au développement de I_m suivant :

$$I_m = H_1^{2m} m! \sum_{p=0}^m \left(\frac{r}{H_1}\right)^{2p} x \frac{(2p)!}{p!(m-p)!} \sum_{q=0}^{2p} \frac{1}{q!(2p-q)! r^q} I_q$$

$$\text{avec : } I_q = \int_{d_1}^{\infty} \frac{x^q}{(x^2 + H_2^2)^{m+3/2}} dx$$

$$d_1 = d - r$$

Résolution de l'intégrale I_q exprimable au moyen d'une série finie

Cas où q est pair

$$I_q = \int_{d_1}^{\infty} \frac{x^q}{(x^2 + H_2^2)^{m+3/2}} dx = \frac{1}{H_2^{2(m-q/2+1)}} \sum_{v=0}^{m-q/2} \frac{(-1)^v}{q+2v+1} C_{m-q/2}^v \left(1 - \frac{d_1^2}{d_1^2 + H_2^2}\right)^{q/2+v+1/2}$$

$$m \geq q/2$$

Cas où q est impair :

$$I_q = \int_{d_1}^{\infty} \frac{x^q}{(x^2 + H_2^2)^{m+3/2}} dx = \sum_{v=0}^{(q-1)/2} \frac{(-1)^{q/2+v+3/2}}{2m-2v+1} \frac{H_2^{2((q-1)/2-v)}}{C_{(q-1)/2}^v (d_1^2 + H_2^2)^{m-v+1/2}}$$

Si $\alpha^2 > \beta^2$

La procédure est la même à la différence que la forme intégrale de I_m est :

$$I_m = \int_d^{\infty} \frac{(\beta^2)^m}{(\alpha^2)^{m+3/2}} d\xi = \int_d^{\infty} \frac{((\xi-r)^2 + H_2^2)^m}{(\xi^2 + H_1^2)^{m+3/2}}$$

Un changement de variables n'est plus nécessaire, il s'agit alors de développer l'intégrale :

$$I_q = \int_d^{\infty} \frac{\xi^q}{(\xi^2 + H_1^2)^{m+3/2}} d\xi \quad \text{traitée auparavant}$$

ANNEXE.2.4.EXPRESSION DE L'INTEGRALE \mathcal{J} EN COORDONNEES CYLINDRIQUES

Nous avons vu dans le paragraphe I.2.3. de la deuxième partie que :

$$U_S(R) = - \frac{I\rho_2}{16\pi^2} K' \iint \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{D_{QP}} \right) \times \left(\frac{1}{D_{RP}} - \frac{1}{D_{RP'}} \right) dnd\xi$$

Les distances D_{QP} , D_{RP} , $D_{RP'}$, sont définies à la figure.2.9. :

$$U_S(R) = - \frac{I\rho_2}{16\pi^2} K' (\mathcal{J} - \mathcal{J}')$$

$$\mathcal{J} = \iint \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{D_{QP}} \right) \times \frac{1}{D_{RP}} dnd\xi$$

Dans un repère de coordonnées cylindriques :

$$= \int_0^d (\rho^2 + \alpha^2)^{-1/2} d\rho \int_0^{2\pi} (\beta^2 - \gamma \cos\phi)^{-2/3} d\phi$$

$$\text{où : } \alpha^2 = H_1^2$$

$$\beta^2 = \rho^2 + r^2 + H_2^2$$

$$\gamma = 2\rho r$$

H_1 et H_2 ont la même définition que sur la figure.2.9. :

$$H_1 = z - h$$

$$H_2 = h - h_1$$

L'intégrale \mathcal{J}' a la même forme que \mathcal{J} , il suffit d'y remplacer H_1 et H_2 par H'_1 et H'_2

$$\text{avec } H'_1 = z - h - t$$

$$H'_2 = h - h_1 + t$$

EXPRESSION DES INTEGRALES EN COORDONNES CYLINDRIQUES (UTILISEES DANS LE CAS D'UNE ANOMALIE CENTRALE) (cf. Annexe.2.2.)

$$I_o = C_o \int_0^d \frac{d\rho}{(\rho^2 + (h-z)^2)^{1/2}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(\rho^2 + r'^2 + (h-h'_1)^2 - 2r\rho\cos\phi)^{3/2}}$$

$$I'_o = C'_o \int_0^d \frac{d\rho}{(\rho^2 + (h+t-z)^2)^{1/2}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(\rho^2 + r'^2 + (h-h'_1)^2 - 2r\rho\cos\phi)^{3/2}}$$

avec $C'_o = 2(1+K_{12}) (h-h'_1)$

$$I_i = C'_i \int_0^d \frac{d\rho}{(\rho^2 + (h-z)^2)^{1/2}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(\rho^2 + r'^2 + (h+(2i-1)h'_1)^2 - 2r\rho\cos\phi)^{3/2}}$$

$$I'_i = C''_i \int_0^d \frac{d\rho}{(\rho^2 + (h+t-z)^2)^{1/2}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(\rho^2 + r'^2 + (h+(2i-1)h'_1)^2 - 2r\rho\cos\phi)^{3/2}}$$

avec $C''_i = 2(1+K_{12})^2 (h+(2i-1)h'_1)$

$$I_{oo} = C'_{oo} \int_0^d \frac{d\rho}{(\rho^2 + (h+z-2h_1)^2)^{1/2}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(\rho^2 + r'^2 + (h-h'_1)^2 - 2r\rho\cos\phi)^{3/2}}$$

$$I'_{oo} = C''_{oo} \int_0^d \frac{d\rho}{(\rho^2 + (h+t+z-2h_1)^2)^{1/2}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(\rho^2 + r'^2 + (h-h'_1)^2 - 2r\rho\cos\phi)^{3/2}}$$

avec $C''_{oo} = 2(1+K_{12})K_{12} (h-h_1)$

$$I_{oi} = C'_{oi} \int_0^d \frac{d\rho}{(\rho^2 + (h+z-2h_1)^2)^{1/2}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(\rho^2 + r'^2 + ((2i+1)h'_1 - h)^2 - 2r\rho\cos\phi)^{3/2}}$$

$$I'_{oi} = C'_{oi} \int_0^d \frac{d\rho}{(\rho^2 + (h+z-2h_1)^2)^{1/2}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(\rho^2 + r'^2 + ((2i+1)h'_1 - h)^2 - 2r\rho\cos\phi)^{3/2}}$$

$$\text{avec } C'_{oi} = 2(1+K_{12})^2 K_{12}^i (h - (2i+1)h'_1)$$

$$I_{jo} = C'_{jo} \int_0^d \frac{d\rho}{(\rho^2 + (h+z+(2j-1)h_1)^2)^{1/2}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(\rho^2 + r'^2 + (h + (2j-1)h_1)^2 - 2r\rho\cos\phi)^{3/2}}$$

$$I'_{jo} = C'_{jo} \int_0^d \frac{d\rho}{(\rho^2 + (h+z+(2j-1)h_1)^2)^{1/2}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(\rho^2 + r'^2 + (h + (2j-1)h_1)^2 - 2r\rho\cos\phi)^{3/2}}$$

$$\text{avec } C'_{jo} = -2(1+K_{12})^3 K_{12}^{j-1} (h + (2j-1)h_1)$$

$$I_{ji} = C'_{ij} \int_0^d \frac{d\rho}{(\rho^2 + (h+z+(2j-1)h_1)^2)^{1/2}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(\rho^2 + r'^2 + ((2i-j)+1)h'_1 - h)^2 - 2r\rho\cos\phi)^{3/2}}$$

$$I'_{ji} = C'_{ji} \int_0^d \frac{d\rho}{(\rho^2 + (h+z+(2j-1)h_1)^2)^{1/2}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(\rho^2 + r'^2 + ((2(i-j)+1)h'_1 - h)^2 - 2r\rho\cos\phi)^{3/2}}$$

$$\text{avec } C'_{ji} = 2(1+K_{12})^4 K_{12}^{i+j-2} ((2(i-j)+1)h'_1 - h)$$