

50376

1974

N° d'ordre 442

11

50376

1974

11

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le Grade de Docteur de Spécialité
(Mathématiques Pures)

par

Daniel Assiongbon KUEVIAKOE

**PROBLEMES MIXTES POUR L'EQUATION DES ONDES
DANS LES DOMAINES EXTERIEURS A FRONTIERE BORNEE OU NON :
THEORIE DE LA DIFFUSION**



Membres du Jury : MM. G. GONTIER, Président
F. PARSY, Rapporteur
J. VAILLANT, Examineur

Soutenu le 15 Février 1974

A mes parents,
Aux membres de ma famille,
dont l'aide, sous plusieurs formes,
m'ont permis de faire mes études.

* * *

A S. Adjoa, avec qui j'ai vécu
l'aventure européenne,

* * *

A toutes mes connaissances en Europe,

* * *

A mes professeurs du secondaire
qui m'ont donné le goût des mathématiques.

*

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance,

A Monsieur le Professeur GONTIER qui a bien voulu présider le jury de cette thèse,

A Monsieur le Professeur VAILLANT, avec qui j'ai préparé mon diplôme d'études approfondies, qui m'a initié à la recherche mathématique et qui, après avoir discuté ce travail avec moi, m'a donné ses conseils et a accepté d'être membre du jury,

A toute l'équipe de l'U.E.R. de Mathématiques de Lille qui, par ses efforts, a assuré ma formation.

A Monsieur PARSY, Chargé d'Enseignement, qui m'a proposé ce sujet, en a suivi avec ardeur et disponibilité l'évolution, malgré ses nombreuses occupations de directeur de l'U.E.R. de Mathématiques, et qui a dirigé mes recherches avec patience et maîtrise, j'exprime une reconnaissance toute particulière.

Mes vifs remerciements vont aussi

A Madame BÉRAT pour la rapidité et le dévouement avec lesquels elle a assuré la mise en page,

Au personnel de l'imprimerie et à tout le personnel du secrétariat de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées de Lille.

SOMMAIRE

INTRODUCTION.

PREFACE.

PRELIMINAIRES - LES SEMI-GROUPES D'OPERATEURS.

- . *Les opérateurs infinitésimaux.*
- . *Le théorème de Hille-Yosida.*
- . *Le théorème de Stone.*

CHAPITRE I - THEORIE DE LA REPRESENTATION ET L'OPERATEUR DE DIFFUSION.

1. *Le cas discret.*
2. *L'opérateur de diffusion dans le cas discret.*
3. *Le cas continu.*
4. *L'opérateur de diffusion dans le cas continu.*

CHAPITRE II - UN SEMI-GROUPE D'OPERATEURS LIE A LA MATRICE DE DIFFUSION.

1. *Les semi-groupes liés à la matrice de diffusion.*
2. *Des semi-groupes d'opérateurs de contraction.*
3. *Théorie spectrale.*
4. *Un théorème d'application spectrale.*
5. *Applications de la théorie spectrale.*
6. *Représentations sortantes équivalentes.*
Représentations entrantes équivalentes.

.../...

CHAPITRE III - SOLUTION DE L'EQUATION D'ONDE DANS UN ESPACE LIBRE.

1. L'espace de Hilbert H_0 et le groupe $\{U_0(t)\}$.
2. Représentation de translation et représentation spectrale de $\{U_0(t)\}$.
3. Les opérateurs I et R .

CHAPITRE IV - SOLUTION DE L'EQUATION D'ONDE DANS UN DOMAINE EXTERIEUR.

1. L'espace de Hilbert H et le groupe $\{U(t)\}$.
2. Décroissance de l'énergie et représentations de translation.
3. Le semi-groupe $\{Z(t)\}$.
4. Relation entre le semi-groupe $\{Z(t)\}$ et les solutions de l'équation d'onde réduite.
5. La matrice de diffusion.

CHAPITRE V - SOLUTION DE L'EQUATION D'ONDE DANS LES DOMAINES NON BORNES.

BIBLIOGRAPHIE.

CONCLUSION.

INTRODUCTION

Le problème mixte pour l'équation d'onde a été étudié par MORAWETZ, KATO, IKEBE, ZACHMANOGLU, etc. LAX et PHILIPPS, entre autres, ont abordé le même problème par les semi-groupes d'opérateurs de contraction qui, aux données initiales de l'équation d'onde, font correspondre la solution à l'instant t , que l'espace considéré soit libre ou perturbé. Cette étude est faite à l'aide de la représentation de translation et de la théorie spectrale. On suppose que dans l'espace perturbé, l'obstacle est étoilé.

MORAWETZ a démontré qu'alors l'énergie contenue dans toute sphère finie décroît au moins en $1/t^2$ et que la solution de l'équation d'onde décroît en $1/t$ dans les régions bornées. ZACHMANOGLU a montré que sous certaines conditions, la décroissance, en $1/t^2$ de l'énergie reste valable dans les régions non bornées. LAX et PHILLIPS et MORAWETZ ont, par la suite, démontré que la décroissance est en fait exponentielle, dans les régions bornées et pour les données initiales à support compact. Dans ce travail, nous montrons que sous certaines conditions, l'énergie décroît exponentiellement dans les régions non bornées et pour les données initiales à support non compact.

Nous parlons aussi, pour la théorie du scattering, de l'opérateur de diffusion qui, au comportement de la solution u quand t tend vers moins l'infini, fait correspondre son comportement quand t tend vers plus l'infini.

PREFACE

La théorie de la diffusion compare le comportement asymptotique d'un système en évolution quand t tend vers moins l'infini $(-\infty)$ à son comportement asymptotique quand t tend vers $+\infty$. C'est spécialement intéressant pour étudier les systèmes construits à partir d'un système plus simple par l'introduction d'une perturbation (ou d'un diffuseur) pourvu que l'influence de l'obstacle soit négligeable pour $|t|$ assez grand i.e. si pour t assez grand, un mouvement perturbé est indiscernable d'un mouvement non perturbé. Ainsi, si nous désignons par $U(t)$ et $U_0(t)$ les opérateurs qui relient respectivement les états perturbés et non perturbés, au temps zéro, à leur état respectif au temps t , alors à chaque f du système perturbé correspondent deux états f_- et f_+ du système non perturbé tels que $U(t)f$ se comporte comme $U_0(t)f_-$ quand $t \rightarrow -\infty$ et comme $U_0(t)f_+$ quand $t \rightarrow +\infty$. L'opérateur de diffusion se définit comme l'application

$$S : f_- \longrightarrow f_+.$$

Le but de la théorie de la diffusion est de prouver l'existence d'un tel opérateur de diffusion, et de lier ses propriétés à la nature du diffuseur. Dans la situation où l'opérateur de diffusion constitue la seule donnée observable du mouvement, le travail principal est la construction du diffuseur à partir de l'opérateur de diffusion.

La notion de diffusion (scattering) est intéressante pour les systèmes décrits par les opérateurs non linéaires. Cependant, plusieurs travaux sur la diffusion, y compris celui-ci, traitent des systèmes linéaires invariants par rapport au temps, cas dans lequel $\{U(t)\}$ forme un groupe à un paramètre d'opérateurs linéaires.

PRELIMINAIRES

LES SEMI-GROUPES D'OPERATEURS .

Nous allons établir certains résultats de la théorie des semi-groupes d'opérateurs qui nous serviront dans la théorie de la diffusion. Afin de simplifier la présentation, nous nous limiterons aux semi-groupes d'opérateurs de contraction sur un espace de Hilbert H . Ainsi, nous supposons que $\{Z(t), t \geq 0\}$ est une famille à un paramètre d'opérateurs sur H satisfaisant les propriétés suivantes :

$$(a) Z(0) = I \text{ et } Z(t_1 + t_2) = Z(t_1)Z(t_2) \quad \forall t_1, t_2 > 0 ;$$

$$(b) |Z(t)| \leq 1 \quad \forall t > 0 ;$$

$$(c) \lim_{t \rightarrow 0_+} Z(t)x = x \quad \forall x \in H.$$

Lemme 1. - $Z(t)x$ est une fonction continue en $t \geq 0 \quad \forall x \in H$.

Démonstration : Par la propriété (a) nous pouvons écrire :

$$Z(t_2)x - Z(t_1)x = Z(t_1)[Z(t_2 - t_1)x - x] \quad \text{pour } 0 \leq t_1 \leq t_0 \leq t_2 ;$$

et ceci tend vers 0, quand t_1 et t_2 tendent vers t_0 , par les propriétés (b) et (c).

On appelle générateur infinitésimal B tel que

$$(1) \quad Bx = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{Z(\Delta)x - x}{\Delta}$$

et le domaine de B est l'ensemble de ces vecteurs pour lesquels cette limite existe. Il est clair que B est un opérateur linéaire dans son domaine D(B).

Lemme 2.- Pour tout x dans D(B), la dérivée de Z(t)x existe (pour la topologie forte) et :

$$(2) \quad \frac{dZ(t)x}{dt} = Z(t)Bx = BZ(t)x \quad \forall t > 0.$$

Démonstration : Si $\Delta > 0$, alors par la propriété (a)

$$\frac{Z(t+\Delta)x - Z(t)x}{\Delta} = Z(t) \frac{Z(\Delta)x - x}{\Delta} = \frac{Z(\Delta) - I}{\Delta} Z(t)x .$$

Quand $x \in D(B)$, le membre du milieu de l'égalité ci-dessus converge vers $Z(t)Bx$ et alors les premier et troisième membres aussi convergent ; le premier vers la dérivée à droite de $Z(t)x$ et le troisième vers $BZ(t)x$. Ceci montre, entre autres, que $Z(t)D(B) \subseteq D(B)$. D'autre part, si $\Delta > 0$ et si $t - \Delta > 0$ alors :

$$\frac{Z(t)x - Z(t - \Delta)x}{\Delta} = Z(t - \Delta) \frac{Z(\Delta)x - x}{\Delta} .$$

Puisque $Z(t - \Delta)$ converge fortement vers $Z(t)$, le membre droit de cette égalité converge vers $Z(t)Bx$ tandis que le membre gauche converge vers la dérivée à gauche de $Z(t)x$. Il s'ensuit que la dérivée de $Z(t)x$ existe et satisfait

la relation (2). / . CQFD.

Intégrant $\frac{dZ(t)x}{dt}$ sur l'intervalle $[0, t]$, nous obtenons :

Corollaire 1.- Si x appartient à $D(B)$ alors

$$(3) \quad Z(t)x - x = \int_0^t Z(\tau)Bx \, d\tau.$$

Plus généralement, nous avons :

Lemme 3.- Pour tout x dans H ,

$$(4) \quad Z(t)x - x = B \int_0^t Z(\tau)x \, d\tau.$$

Démonstration : D'après la propriété (a), nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{Z(\Delta) - I}{\Delta} \int_0^t Z(\tau)x \, d\tau &= \frac{1}{\Delta} \int_0^t |Z(\tau + \Delta)x - Z(\tau)x| \, d\tau \\ &= \frac{1}{\Delta} \left(\int_t^{t+\Delta} Z(\tau)x \, dz - \int_0^\Delta \right) \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} Z(\tau)x \, d\tau - \frac{1}{\Delta} \int_0^t Z(\tau)x \, d\tau. \end{aligned}$$

d'où découle (4).

Lemme 4.- Le générateur B est un opérateur linéaire fermé à domaine dense.

Démonstration : D'après le lemme 3,

$$x_{\Delta} \equiv \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} Z(\tau)x \, d\tau$$

appartient à $D(B)$ pour tout x et puisque $\lim_{\Delta \rightarrow 0} x_{\Delta} = x$, nous concluons que

$D(B)$ est dense dans H .

D'autre part, supposons que la suite (x_n) de $D(B)$ tende vers x , que Bx_n tende vers y . Alors $Z(\tau)Bx_n$ converge vers $Z(\tau)y$ uniformément en τ et il découle de la relation (3) que

$$\frac{Z(\Delta)x - x}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} Z(\tau)y \, d\tau.$$

Passant à la limite quand Δ tend vers 0, nous voyons que x est dans $D(B)$ et que $Bx = y$; ce qui prouve que B est un opérateur fermé.

Lemme 5.- Un semi-groupe d'opérateurs est déterminé de manière unique par son générateur infinitésimal.

Démonstration : Supposons que les semi-groupes $\{Z_1(t)\}$ et $\{Z_2(t)\}$ ont le même générateur infinitésimal B . Alors, pour tout x dans $D(B)$ $Z_2(\tau)x$ appartient à $D(B)$ et par suite

$$\frac{d}{d\tau} Z_1(t - Z)Z_2(\tau)x = \dot{Z}_1(t - Z)[BZ_2(\tau)x] + Z_1(t - \tau)[-B] \times Z_2(\tau)x = 0.$$

Intégrant sur $[0, t]$, nous obtenons :

$$Z_2(t)x - Z_1(t)x = 0 \quad \forall t > 0 ;$$

et puisque $D(B)$ est dense dans H , nous voyons que les deux semi-groupes sont identiques. \square .

Le spectre du générateur d'un semi-groupe d'opérateurs de contraction est toujours contenu dans le demi-plan gauche ; en fait, comme le montre les lemmes suivants, pour tout λ tel que $\operatorname{Re} \lambda > 0$, la résolvante existe et peut s'exprimer comme la transformée de Laplace du semi-groupe. On entend par résolvante, l'opérateur

$$R(\lambda, B) = (\lambda I - B)^{-1}.$$

Lemme 6. - Si $\operatorname{Re} \lambda > 0$ alors :

$$(5) \quad R(\lambda, B)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Z(t)x \, dt.$$

Démonstration : Dans le lemme 3 et le corollaire 1, si nous remplaçons $\{Z(t)\}$ par $\{\exp(-\lambda t)Z(t)\}$ (et alors B par $(B - \lambda I)$), alors ces résultats peuvent s'écrire :

$$x - e^{-\lambda T} Z(T)x = (\lambda I - B) \int_0^T e^{-\lambda t} Z(t)x \, dt \quad \text{pour tout } x ;$$

$$x - e^{-\lambda T} Z(x) = \int_0^T e^{-\lambda t} Z(t)(\lambda I - B)x \, dt \quad \forall x \in D(B) ;$$

Il est clair que l'intégrale définie de la manière suivante :

$$R(\lambda)y \equiv \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Z(t)y \, dt$$

converge vers un opérateur borné quand $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Ensuite, passant à la limite

quand T tend vers l'infini et utilisant la fermeture de B , nous obtenons :

$$\begin{aligned} x &= (\lambda I - B)R(\lambda)x \quad \forall x ; \\ x &= R(\lambda)(\lambda I - B)x \quad \forall x \in D(B) ; \end{aligned}$$

ce qui prouve que λ est dans l'ensemble résolvant de B et que $R(\lambda) = R(\lambda, B)$.

La résolvante de B satisfait l'équation résolvante :

$$(6) \quad R(\lambda, B) - R(\mu, B) = (\mu - \lambda)R(\lambda, B)R(\mu, B)$$

pour tout λ, μ dans l'ensemble résolvant. Pour vérifier ceci, il suffit de multiplier

$$(\mu - \lambda)I = (\mu I - B) - (\lambda I - B)$$

à droite par $R(\mu, B)$ et à gauche par $R(\lambda, B)$. Il découle de (6) que les résolvantes de B commutent.

Lemme 7. - L'ensemble résolvant est ouvert et la résolvante $R(\lambda, B)$ est une fonction holomorphe de λ sur l'ensemble résolvant.

Démonstration ; Si λ_0 appartient à l'ensemble résolvant de B , alors

$$(\lambda I - B)R(\lambda_0, B) = I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, B)$$

et pour

$$(7) \quad |\lambda - \lambda_0| < |R(\lambda_0, B)|^{-1}$$

le membre droit est régulier ; il s'ensuit que l'expression

$$R(\lambda_0, B) [I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, B)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n [R(\lambda_0, B)]^{n+1}$$

est l'inverse à droite de $(\lambda I - B)$ et un raisonnement semblable montre qu'il est aussi l'inverse à gauche. Ainsi pour les λ suffisamment proches de λ_0 ,

$$(8) \quad R(\lambda, B) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n [R(\lambda_0, B)]^{n+1}$$

Ce développement explicite en série entière de la résolvante montre que l'ensemble résolvant est ouvert et que $R(\lambda, B)$ est holomorphe dans l'ensemble résolvant. */.

Le problème qui se pose dans la plupart des applications de cette théorie est de déterminer quand un opérateur donné est le générateur d'un semi-groupe d'opérateurs. A ce problème, E. Hille et D. Yosida ont obtenu la solution suivante :

Théorème 1. - Un opérateur linéaire fermé à domaine dense engendre un semi-groupe d'opérateurs de contraction fortement continu si et seulement si

$$(9) \quad |R(\lambda, B)| \leq 1/\lambda \quad \forall \lambda > 0.$$

Démonstration :

La condition nécessaire découle directement de l'expression (5) :

$$|R(\lambda, B)x| \leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} |Z(t)x| dt \leq |x| \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = |x|/\lambda \quad \forall \lambda > 0.$$

Pour prouver la réciproque, nous adopterons le raisonnement de Yosida et construirons un semi-groupe approximant de la forme :

$$(10) \quad Z_\lambda(t) \equiv \exp(t B_\lambda)$$

où

$$B_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, B) - \lambda I .$$

Au commencement, notons que l'inégalité (9) implique

$$|\lambda R(\lambda, B)x - x| = |R(\lambda, B)Bx| \leq \lambda^{-1} |Bx|$$

si $x \in D(B)$. Ainsi, pour de tels x ,

$$(11) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, B)x = x$$

et puisque $D(B)$ est dense dans H et que les opérateurs approximant sont uniformément bornés par (9), la limite (11) existe pour tout $x \in H$. En particulier, (11) montre que :

$$B_\lambda x = \lambda^2 R(\lambda, B)x - \lambda(\lambda I - B)R(\lambda, B)x = \lambda R(\lambda, B)Bx$$

tend vers Bx quand λ tend vers l'infini pour tout x dans $D(B)$.

Ensuite, nous obtenons une borne pour les $\{Z_\lambda(t)\}$:

$$Z_\lambda(t) = \exp(-\lambda t) \exp(t \lambda^2 R(\lambda, B)) = \exp(-\lambda t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t \lambda^2)^n}{n!} \times [R(\lambda, B)]^n$$

et en employant l'inégalité (9), nous obtenons :

$$(12) \quad |Z_\lambda(t)| \leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = 1 \quad \forall \lambda, t > 0.$$

Il est clair que tous les opérateurs ci-dessus commutent. Alors :

$$\begin{aligned} Z_\lambda(t) - Z_\mu(t) &= \int_0^t \frac{d}{d\tau} [Z_\lambda(\tau)Z_\mu(t-\tau)] d\tau. \\ &= \int_0^t Z_\lambda(\tau)Z_\mu(t-\tau)(B_\lambda - B_\mu) d\tau. \end{aligned}$$

En employant la borne (12), nous avons :

$$|Z_\lambda(t)x - Z_\mu(t)x| \leq t |B_\lambda x - B_\mu x|.$$

Ce qui montre que :

$$(13) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} Z_\lambda(t)x \equiv Z(t)x \quad (t > 0),$$

existe pour chaque x dans $D(B)$, uniformément sur les sous-ensembles compacts de $[0, \infty[$. Puisque les $\{Z_\lambda(t)\}$ sont uniformément bornés, cette limite existe pour tout $x \in H$, encore uniformément sur les sous-ensembles compacts de $[0, \infty[$. Une telle limite hérite des semi-groupes approximant les propriétés (a), (b) et (c) et alors $\{Z(t)\}$ défini par (13) est un semi-groupe d'opérateurs de contraction fortement continu.

Soit C le générateur de $\{Z(t)\}$. Reste à prouver que $C = B$.

Maintenant, pour $x \in D(B)$, nous avons par le corollaire 1

$$Z_\lambda(\Delta)x - x = \int_0^\Delta Z_\lambda(\tau)Bx d\tau.$$

Divisant par Δ et passant à la limite quand $\lambda \rightarrow \infty$, nous obtenons

$$\frac{Z(\Delta)x - x}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} Z(\tau)Bx \, d\tau,$$

d'où découle que $Cx = Bx$; donc $C \supset B$. Pour λ fixé, l'opérateur $(\lambda I - B)$ est, par hypothèse, bijective et évidemment, aucune extension propre de $(\lambda I - B)$ ne peut avoir cette propriété. D'autre part, d'après le lemme 6, l'opérateur $(\lambda I - C)$ doit avoir cette propriété ; par conséquent, $C = B$. */.

Cette démonstration est valable, comme elle est prouvée, pour tout espace de Banach. Cependant, les éléments suivants sur le semi-groupe adjoint sont valables comme ils sont mentionnés uniquement sur les espaces de Banach réflexifs et nous introduisons quelque simplification dans le raisonnement en nous limitant à un espace de Hilbert.

Pour un semi-groupe $\{Z(t)\}$ satisfaisant les propriétés (a), (b) et (c) nous définissons le semi-groupe adjoint comme la famille des opérateurs adjoints :

$$\{Z^*(t) ; t \geq 0\}.$$

De la définition, il découle que les opérateurs adjoints satisfont les propriétés (a) et (b) et que

$$(Z^*(t)x, y) = (x, Z(t)y) \rightarrow (x, y)$$

quand $t \rightarrow 0$. En conséquence :

$$|Z^*(t)x - x|^2 = (Z^*(t)x, Z^*(t)x) + (x, x) - (Z^*(t)x, x) - (x, Z^*(t)x).$$

a une limite supérieure non positive ; ce qui prouve que le semi-groupe adjoint a aussi la propriété (c).

Lemme 8.- Le générateur du semi-groupe adjoint est l'adjoint du générateur du semi-groupe originel.

Démonstration : Soit C le générateur du semi-groupe adjoint et soit x et y dans $D(B)$ et $D(C)$ respectivement. Alors

$$\begin{aligned} (Bx, y) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0_+} \left(\frac{Z(\Delta)x - x}{\Delta}, y \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(x, \frac{Z^*(\Delta)y - y}{\Delta} \right) \\ &= (x, Cy) \end{aligned}$$

et alors $C \subset B^*$. D'autre part, si x et y appartiennent respectivement à $D(B)$ et à $D(B^*)$, alors d'après le corollaire 1,

$$(Z(\Delta)x - x, y) = \int_0^\Delta (BZ(\tau)x, y) d\tau = \int_0^\Delta (x, Z^*(\tau)B^*y) d\tau$$

d'où vient que :

$$Z^*(\Delta)y - y = \int_0^\Delta Z^*(\tau)B^*y d\tau.$$

En divisant par Δ et en passant à la limite quand $\Delta \rightarrow 0$, nous voyons que :

$$Cy = B^*y,$$

ce qui prouve que $C \supset B^*$.

Il est alors aisé de démontrer le théorème de Stone caractérisant les

générateurs de groupes d'opérateurs unitaires. Nous rappelons qu'un générateur A à domaine dense est dit anti auto-adjoint si :

$$A^* = -A.$$

Théorème 2. - Un opérateur engendre un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires fortement continu si et seulement si il est anti-auto-adjoint.

Démonstration : Si $\{U(t)\}$ est un groupe d'opérateurs unitaires fortement continu à générateur infinitésimal A , alors

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0_+} \frac{U(-\Delta)x - x}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0_+} -U(-\Delta) \frac{U(\Delta)x - x}{\Delta}$$

existe si et seulement si $x \in D(A)$, dans quel cas la limite est simplement $-A$. Puisque $U^*(t) = U(-t)$, ceci montre que le générateur du semi-groupe adjoint $\{U^*(t) ; t \geq 0\}$ est $-A$ et alors par le lemme 8, nous avons $A^* = -A$; en d'autres termes, A est anti-auto-adjoint.

Réciproquement si A est supposé être anti-auto-adjoint, alors pour tout x dans $D(A)$

$$(Ax, x) = (x, A^*x) = - (x, Ax)$$

si bien que (Ax, x) est à valeur imaginaire pure. Ainsi pour

$$\lambda x \pm Ax = f \quad (\lambda > 0)$$

la partie réelle du produit intérieur avec x , est :

$$\lambda(x, x) = \operatorname{Re}(x, f) \leq |x| |f| ;$$

ce qui implique que $(\lambda I \pm A)$ est bijective et que

$$|(\lambda I \pm A)^{-1}| \leq 1/\lambda \quad \forall \lambda > 0.$$

Puisque A est égal à l'adjoint de $-A$, il est évidemment fermé et alors l'image de $(\lambda I \pm A)$ est un sous-espace fermé de H . Présentement, l'image est tout H car autrement, il existerait un y non nul orthogonal à l'image ; ainsi :

$$(\lambda x \pm Ax, y) = 0$$

pour tout x dans $D(A)$. Il s'ensuit que y appartient à $D(A^*) = D(A)$ et que :

$$A^*y = -Ay = \pm \lambda y ;$$

ce qui est impossible car la seule possibilité d'avoir $(Ay, y) = \pm \lambda(y, y)$ imaginaire pur est que y soit un vecteur nul. Alors $(\lambda I \pm A)$ est bijectif avec $|(\lambda I \pm A)^{-1}| \leq \lambda^{-1}$.

Le théorème de Hille-Yosida maintenant affirme que A et $-A$ engendrent les semi-groupes $\{U_+(t) ; t \geq 0\}$ et $\{U_-(t) ; t \geq 0\}$, respectivement. En plus, pour $x \in D(A)$,

$$\frac{d}{dt} |U_{\pm}(t)x|^2 = (\pm AU_{\pm}(t)x, U_{\pm}(t)x) + (U_{\pm}(t)x, \pm AU_{\pm}(t)x) = 0$$

d'où

$$|U_{\pm}(t)x| \equiv |x| ;$$

les opérateurs $\{U_{\pm}(t)\}$ sont alors des isométries ; en outre pour $x \in D(A)$,

$$\frac{d}{dt} U_{+}(t)U_{-}(t)x = U_{+}(t)AU_{-}(t)x + U_{+}(t)(-A)U_{-}(t)x = 0$$

ce qui entraîne :

$$U_{+}(t)U_{-}(t) \equiv I .$$

Autrement,

$$U_{-}(t)U_{+}(t) \equiv I$$

et il en découle que les opérateurs $\{U_{\pm}(t)\}$ sont unitaires. Enfin, il est clair à partir des semi-groupes approximant employés dans la démonstration du théorème de Hille-Yosida, que tous les opérateurs de ces deux semi-groupes commutent ; il s'ensuit que :

$$U(t) = \begin{cases} U_{+}(t) & \text{pour } t \geq 0 \\ U_{-}(-t) & \text{pour } t \leq 0 \end{cases}$$

définit un semi-groupe unitaire fortement continu d'opérateurs unitaires à générateur A .

THEORIE DE LA REPRESENTATION

ET

L'OPERATEUR DE DIFFUSION.

Nous allons obtenir certains théorèmes de représentation pour un groupe d'opérateurs unitaires $\{U(t) ; -\infty < t < \infty\}$ agissant sur un espace de Hilbert H pour lequel il y a un sous-espace sortant. Un sous-espace fermé D_+ est dit sortant s'il a les propriétés suivantes :

- (i) $U(t)D_+ \subset D_+$ pour $t > 0$,
- (ii) $\bigcap U(t)D_+ = \{0\}$,
- (iii) $\overline{\bigcup U(t)D_+} = H$.

On en obtient un exemple en prenant $H = L_2(-\infty, \infty; N)$, l'espace des fonctions de carré intégrable sur l'axe réel, à valeur dans un espace de Hilbert auxiliaire N , où $U(t)$ correspond à la translation à droite de t et où $D_+ = L_2(0, +\infty; N)$. Nous montrerons que, réciproquement, à tout sous-espace sortant pour le groupe $U(t)$ correspond toujours une représentation pour H et $U(t)$ de cette sorte. Nous l'appellerons une représentation de translation sortante.

Le cas discret de ce problème se résout facilement et puisqu'une simple transformation nous permet d'obtenir la représentation paramétrique continue en termes de la représentation analogue discrète, nous allons commencer par le cas discret.

1. Le cas discret.

Au lieu d'un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires, nous avons, dans le cas discret, un seul opérateur unitaire V et toutes ses puissances.

Par rapport à V , un sous-espace fermé D_+ sera dit sortant si :

- (i) $VD_+ \subset D_+$,
- (ii) $\bigcap V^k D_+ = \{0\}$,
- (iii) $\overline{\bigcup V^k D_+} = H$.

Exemple.- $H = \ell_2(-\infty, +\infty; N)$, espace des suites $\{y_k; -\infty < k < +\infty\}$ à valeur dans un espace de Hilbert auxiliaire N , et pour lesquelles $\sum |y_k|_N^2 < \infty$. V correspond à la coupure à droite et $D_+ = \ell_2(0, +\infty; N)$.

Théorème 1.1.- Si D est sortant par rapport à un opérateur unitaire V , alors H peut se représenter isométriquement comme $\ell_2(-\infty, +\infty; N)$ pour un espace de Hilbert auxiliaire N de telle sorte que V se transforme en l'opérateur de troncature à droite et que D s'applique sur $\ell_2(0, +\infty; N)$. Cette représentation est unique à un isomorphisme près de N .

Démonstration : Soit N le complément orthogonal de VD dans D , en symboles :

(1.1.)
$$N = D \ominus VD$$

Nous allons prouver que :

(1.2.)
$$D = \sum_{k \geq 0} \oplus V^k N,$$

et que :

$$(1.3.) \quad H = \sum \oplus V^k_N.$$

V unitaire, il est clair que :

$$V^k_N = V^k_D \ominus V^{k+1}_D.$$

En plus, il découle de la propriété (i) que $V^{k+1}_D \subset V^k_D$ pour tout k et qu'alors les V^k_N sont mutuellement orthogonaux et que D contient

$$M \equiv \sum_{k \geq 0} \oplus V^k_N.$$

Si M est un sous-espace propre de D, il existera un $x \neq 0$, $x \in D \ominus M$. Puisque x est orthogonal à N, il doit être dans V^1_D ; puisqu'il est aussi orthogonal à V^1_N , il doit être dans V^2_D . En continuant ainsi le raisonnement nous voyons que x doit être dans $\bigcap V^k_D$, ce qui est contraire à la propriété (ii). Ceci prouve (1.2.) et il découle de (1.2.) que :

$$V^k_D = \sum_{j \geq k} \oplus V^j_N \subset \sum \oplus V^j_N$$

et ceci implique (1.3.) puisque par la propriété (iii), $\bigcup V^k_D$ est dense dans H.

Afin de définir l'isomorphisme désiré, nous notons que chaque $x \in H$ a une décomposition unique d'après (1.3.) de la forme :

$$x = \sum \oplus V^k y_k$$

où chaque $y_k \in N$. En plus,

$$\|x\|_{H^2}^2 = \sum \|V^k y_k\|_{H^2}^2 = \|y_k\|_{N^2}^2$$

et chaque suite $\{y_k\}$ de N avec $\sum \|y_k\|_{N^2}^2 < \infty$ définit un $x \in H$ de cette façon. En conséquence, l'application

$$x \longmapsto \{y_k\}$$

est une isométrie de H sur $\ell_2(-\infty, +\infty; N)$ par laquelle D s'applique sur $\ell_2(0, +\infty; N)$. En plus, il est clair que :

$$V(x) = \sum \oplus V^{k+1} y_k \longmapsto \{y_{k-1}\},$$

de telle sorte que V correspond par cette application, à un opérateur de troncature à droite. La construction de (1.1.) de N et les décompositions (1.2.) et (1.3.) de D et de H sont canoniques. Ce qui prouve que la représentation est unique à un isomorphisme près de N .

Nous allons maintenant employer la transformation de Fourier pour obtenir la représentation spectrale à partir de la représentation de translation.

Corollaire 1.1.- Si D est sortant par rapport à un opérateur unitaire V , alors H peut se représenter isométriquement comme $L_2(0, 2\pi; N)$ pour tout espace de Hilbert auxiliaire N de telle sorte que V se transforme en la multiplication par $\exp(i\theta)$ et que D s'applique sur $H_2(N)$ la classe de Hardy des fonctions $f(\theta)$ dont les $k^{\text{ièmes}}$ coefficients de Fourier s'annulent pour les k négatifs. Cette représentation est unique à un isomorphisme près de N .

Remarque : Nous appellerons cette représentation représentation spectrale sortante pour l'opérateur V.

Démonstration : L'application :

$$\{y_k\} \in \ell_2(-\infty, +\infty; \mathbb{N}) \rightarrow f(\theta) \equiv \sum y_k e^{ik\theta} \in L_2(0, 2\pi; \mathbb{N})$$

avec

$$\|f\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int |f(\theta)|_N^2 d\theta = \sum |y_k|_N^2 = \|\{y_k\}\|_{\ell_2}^2$$

définit un isomorphisme de $\ell_2(-\infty, +\infty; \mathbb{N})$ sur $L_2(0, 2\pi; \mathbb{N})$ transformant l'opérateur de coupure à droite en multiplication par $\exp(i\theta)$ et $\ell_2(0, +\infty; \mathbb{N})$ en $H_2(\mathbb{N})$. La combinaison de ceci avec le résultat du théorème 1.1. nous donne la représentation spectrale sortante désirée. L'unicité découle de l'application inverse :

$$f(\theta) \in L_2(0, 2\pi; \mathbb{N}) \rightarrow \{y_k = \frac{1}{2\pi} \int f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta\} \in \ell_2(-\infty, +\infty; \mathbb{N})$$

et de l'application du résultat correspondant à la représentation de translation sortante.

Un sous-espace entrant D_- se définit de la même façon en remplaçant (i) par $(i)_- : V^{-1}D_- \subset D_-$, les propriétés (ii) et (iii) restant inchangées.

Notons que si D_- est entrant, son complément orthogonal est sortant et si D_+ est sortant, son complément orthogonal est entrant, il y a une représentation de translation analogue pour D_- et dans ce cas, nous prenons l'application de telle sorte que D_- s'applique sur $\ell_2(-\infty, -1; \mathbb{N})$. Dans la

représentation spectrale correspondante, D_- a pour image, la classe de Hardy conjuguée $\bar{H}_2(N_-)$, ensemble des fonctions $f \in L_2(0, 2\pi; N)$ dont les coefficients de Fourier s'annulent pour tous les k non négatifs.

Théorème 1.2.- Si, pour un opérateur unitaire donné, il existe deux représentations de translation, $\mathcal{L}_2(-\infty, +\infty; N)$ et $\mathcal{L}_2(-\infty, +\infty; N')$, alors N et N' sont équivalents.

Démonstration : Le contenu de ce théorème est une conséquence directe du théorème de multiplicité. On peut toutefois tenter une autre démonstration en montrant que N et N' ont la même dimension.

2. L'opérateur de diffusion dans le cas discret.

Soient deux sous-espaces sortant D_+ et entrant D_- pour le même opérateur unitaire et supposons en plus que D_+ et D_- sont orthogonaux. A chaque vecteur $f \in H$, on associe deux vecteurs k_- et k_+ qui sont les représentants respectifs de f pour les translations entrante et sortante. L'opérateur :

$$S : k_- \longmapsto k_+$$

qui applique $\mathcal{L}_2(-\infty, +\infty; N)$ sur $\mathcal{L}_2(-\infty, +\infty; N)$ s'appelle l'opérateur de diffusion.

Lemme 2.1.- L'opérateur de diffusion a les propriétés suivantes :

- (i) S est unitaire.
- (ii) S commute avec la translation.
- (iii) S applique $\mathcal{L}_2(-\infty, -1; N)$ dans $\mathcal{L}_2(-\infty, -1; N)$.

Démonstration : Les propriétés (i) et (ii) découlent de ce que S est défini en termes de deux représentations de translation unitaires différentes d'un même opérateur. Pour déduire la propriété (iii), notons que $k_- \in \mathcal{L}_2(-\infty, -1; \mathbb{N})$ signifie que $f \in D_-$. Puisque nous avons supposé que D_- est orthogonal à D_+ , il s'ensuit que f est orthogonal à D_+ . D'un autre côté, dans la représentation de translation sortante, D_+ a pour image $\mathcal{L}_2(0, +\infty; \mathbb{N})$ et alors k_+ se trouve dans le complément orthogonal de l'image de D_+ qui est $\mathcal{L}_2(-\infty, -1; \mathbb{N})$.

Corollaire 2.1.- Définissons l'opérateur $S \equiv FSF^{-1}$, F étant la transformation de Fourier ; ainsi S transforme la représentation spectrale entrante en la représentation spectrale sortante. S a les propriétés suivantes :

- (i)' S est unitaire.
- (ii)' S commute avec la multiplication par les fonctions mesurables bornées à valeur complexe.
- (iii)' S applique $\bar{H}_2(\mathbb{N})$ dans $\bar{H}_2(\mathbb{N})$.

Démonstration :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{L}_2(-\infty, \infty; \mathbb{N}) & \xrightarrow{S} & \mathcal{L}_2(-\infty, +\infty; \mathbb{N}) \\
 \uparrow F^{-1} & & \downarrow F \\
 L_2(0, 2\pi; \mathbb{N}) & \xrightarrow{S} & L_2(0, 2\pi; \mathbb{N})
 \end{array}$$

Chacune de ces propriétés, excepté (ii)', n'est qu'une reformulation des propriétés du lemme. Une reformulation de (ii) est que S commute avec les opérateurs

multiplicatifs $\{\exp(ik\theta)\}$. La propriété (ii)' découle maintenant du fait que tout scalaire mesurable borné peut être approximé presque partout et de manière bornée par des combinaisons linéaires de $\{\exp(ik\theta)\}$ et que la convergence de cette sorte implique la convergence forte des opérateurs multiplicatifs correspondants.

Un opérateur linéaire sur $L_2(0,2\pi;N)$, tel que S , qui commute avec la multiplication par les scalaires mesurables bornés et qui applique $\bar{H}_2(N)$ dans lui-même s'appelle opérateur de causalité chez les physiciens.

Théorème 2.1. - Si N est séparable, un opérateur S satisfaisant les propriétés (i)' - (iii)' peut se réaliser comme une fonction multiplicative à valeur opératrice $S(e^{i\theta})$ sur N dans N ayant les propriétés suivantes :

- (a) $S(e^{i\theta})$ est la valeur-limite d'une fonction à valeur opératrice $S(w)$ analytique pour $|w| > 1$ qui converge fortement le long des rayons (radiaux) pour presque tout θ vers $S(e^{i\theta})$;
- (b) $|S(w)| \leq 1$ pour tout w de valeur absolue > 1 ;
- (c) $S(e^{i\theta})$ est unitaire pour presque tout θ .

Démonstration : Soit $n \in N$. Alors $\exp(-i\theta)$ appartient à $\bar{H}_2(N)$ et par (iii)', $S[\exp(-i\theta)n]$ aussi appartient à $\bar{H}_2(N)$. Puisque

$$S[\exp(-i\theta)n] = \exp(-i\theta)Sn$$

par (ii)', il s'ensuit que :

$$S(n) \equiv \tilde{n}(e^{i\theta})$$

appartient à $\exp(i\theta)\bar{H}_2(N)$; de telles fonctions $n(e^{i\theta})$ sont les valeurs-limites de fonctions $\tilde{n}(w)$ analytiques à valeur vectorielle, fonctions qui sont régulières pour $|w| > 1$.

Ensuite, montrons que $\tilde{n}(w)$ est uniformément borné pour $|w| > 1$. Pour cela, soit n et m deux éléments de N (une paire d'éléments). Alors, pour tout entier $k \neq 0$, il est évident que $\exp(ik\theta)n$ et $\exp(ik\theta)m$ sont des éléments orthogonaux de $L_2(0, 2\pi; N)$. D'après (i)', l'opérateur S est une isométrie et il s'ensuit que les images de $\exp(ik\theta)n$ et $\exp(ik\theta)m$ sont aussi orthogonales :

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} (\tilde{n}(e^{i\theta}), \tilde{m}(e^{i\theta}))_N d\theta = 0 \quad (k \neq 0).$$

Ceci signifie que tous les coefficients de Fourier de la fonction scalaire $(\tilde{n}(e^{i\theta}), \tilde{m}(e^{i\theta}))_N$ sont nuls, sauf celui correspondant à $k = 0$; une telle fonction est une constante. La valeur de cette constante est $(2\pi)^{-1}$ multiplié par l'intégrale de la fonction qui, dans ce cas, est simplement le produit scalaire de \tilde{n} et \tilde{m} . Or $(\tilde{n}, \tilde{m}) = (n, m)$. Ainsi :

$$(2.1.) \quad (\tilde{n}(e^{i\theta}), \tilde{m}(e^{i\theta}))_N = (n, m)_N \quad \text{p.p.}$$

En posant : $n = m$, nous obtenons en particulier :

$$(2.1.)' \quad |\tilde{n}(e^{i\theta})|_N = |n|_N.$$

Puisque n appartient à $\exp(i\theta)\bar{H}_2(N)$, il se représente en termes de ses valeurs-limites par la formule de Poisson :

$$\tilde{n}(w) = \int_0^{2\pi} P(w, e^{i\theta}) n(e^{i\theta}) d\theta.$$

De (2.1.)' et du fait que le noyau de Poisson P est positif et de poids total 1, nous obtenons l'estimation :

$$(2.2.) \quad |\tilde{n}(w)|_N \leq \int P(w, e^{i\theta}) |\tilde{n}(e^{i\theta})|_N d\theta = |n|_N.$$

Nous définissons la fonction à valeur opératrice $S(w)$ comme suit :

$$S(w)\tilde{n} \equiv \tilde{n}(w).$$

et affirmons que $S(w)$ a les propriétés du théorème 2.1. Il est évident que $S(w)$ est fortement analytique pour $|w| > 1$ et que l'inégalité (2.2.) montre que (b) est valable. Afin de prouver (a), nous choisissons un sous-ensemble dénombrable dense $\{n_j\}$ de N . Pour chaque j , $S(w)n_j$ est une fonction bornée et par suite, a des limites radiales quand w tend vers $\exp(i\theta)$ hormis sur un sous-ensemble E_j de mesure nulle ; $E = \cup E_j$ est aussi de mesure nulle. Puisque la suite $\{n_j\}$ est dense et que $S(w)$ est uniformément bornée en norme, il découle que $S(w)n$ a des limites radiales pour tout $n \in N$ excepté sur E . Ainsi, $S(w)$ a des valeurs-limites fortement définies qui sont des opérateurs de contraction excepté sur E ; ceci termine la démonstration de (a). Si nous ajoutons à E l'ensemble nul sur lequel (2.1.) n'est pas défini pour tout choix possible de $n = n_j$ et $m = n_k$, alors (2.1.) implique que, excepté sur E , $S(e^{i\theta})$ est une isométrie sur $\{n_j\}$ et, par continuité, sur N .

L'opération de multiplication par $S(e^{i\theta})$ est une application d'opération bornée de $L_2(0, 2\pi; N)$ sur lui-même. Nous affirmons que c'est égal à l'opérateur donné S . En clair, par construction, les deux opérateurs coïncident pour les fonctions constantes. Puisque les deux opérateurs commutent avec la

multiplication par $\exp(i\theta)$, il s'ensuit qu'ils coïncident aussi pour les polynômes trigonométriques. Puisque les polynômes trigonométriques sont denses dans $L_2(0, 2\pi, N)$ et que les deux opérateurs sont bornés, nous en concluons qu'ils conviennent sur tout $L_2(0, 2\pi, N)$.

Il reste à prouver que $S(e^{i\theta})$ est unitaire pour presque tout θ . Pour cela, nous choisissons une base orthonormale complète $\{n_j\}$ pour N et posons $\tilde{n}_j(e^{i\theta}) = S(e^{i\theta})n_j$. Pour chaque $\theta \notin E$, nous savons que $S(e^{i\theta})$ est une isométrie et par suite que $\{\tilde{n}_j(e^{i\theta})\}$ est un ensemble orthonormal mesurant l'image de $S(e^{i\theta})$ dans N . Si

$$n_k = \sum_j (n_k, n_j(e^{i\theta}))_N \tilde{n}_j(e^{i\theta}) \quad \text{p.p.}$$

pour tout k , alors l'image de $S(e^{i\theta})$ est p.p. égale à N et $S(e^{i\theta})$ sera unitaire p.p. En d'autres termes, il y a un k tel que

$$g(e^{i\theta}) \equiv n_k - \sum_j (n_k, n_j(e^{i\theta}))_N n_j(e^{i\theta})$$

diffère de zéro sur un ensemble de mesure positive. Puisque $g(e^{i\theta})$ est mesurable et que $|g(e^{i\theta})|_N \leq |n_k|_N$, nous voyons g est un élément non trivial de $L_2(0, 2\pi; N)$. En plus :

$$(g(e^{i\theta}), e^{ik} \tilde{n}_j(e^{i\theta}))_N = 0 \quad \text{p.p.}$$

pour tout k et tout j , et a fortiori, g est L_2 -orthogonal à l'ensemble $\{e^{ik\theta} \tilde{n}_j(e^{i\theta})\}$. Cependant, cet ensemble est l'image, sous l'application unitaire S , de la base orthonormale complète $\{e^{ik\theta} n_j\}$ et alors mesure aussi $L_2(0, 2\pi; N)$. Ceci étant impossible, il découle que $S(e^{i\theta})$ est unitaire pour presque tout θ .

Corollaire 2.2.- L'opérateur $S(w)$ du théorème 2.1. est déterminé, dans la multiplication intérieure à droite par un opérateur unitaire sur N , par les propriétés (i)' - (iii)' et le sous-espace $D = S \bar{H}_2(N)$.

Démonstration : A cause de la propriété (ii)', l'opérateur S se détermine complètement par son action sur $N = e^{i\theta} \bar{H}_2(N) \ominus \bar{H}_2(N)$. Il applique N sur $N' = e^{i\theta} D \ominus D$, un sous-espace isomorphe à N . Ainsi, étant donnés deux applications unitaires S_1 et S_2 qui satisfont les conditions du corollaire, il est évident qu'il existe un opérateur unitaire τ de N sur N , nommément $\tau = S_2^{-1} S_1$ restreint à N , tel que $S_1 n = S_2 \tau n$ pour tout n dans N , d'où découle que $S_1(w) = S_2(w)\tau$. $\cdot /$.

Nous nous servons aussi de la version restreinte suivante du théorème 2.1.

Corollaire 2.3.- Soit N séparable ; un opérateur S qui satisfait seulement les propriétés (i)' et (ii)' peut se réaliser comme une fonction multiplicative à valeur opératrice $S(e^{i\theta})$ sur N dans N , qui est unitaire pour presque tout θ .

Démonstration : Choisissons une base orthonormale complète $\{n_j\}$ pour N et posons :

$$S(e^{i\theta})n_j \equiv S n_j = \hat{n}_j(e^{i\theta}).$$

Comme nous l'avons montré dans le théorème, pour tout θ n'appartenant pas à un ensemble nul E_0 , les vecteurs $\{\hat{n}(e^{i\theta})\}$ forment une base orthonormale complète de N . Tout vecteur $n \in N$ s'écrit :

$$n = \sum a_k n_k \quad \text{où} \quad \sum |a_k|^2 < \infty,$$

et nous définissons

$$S(e^{i\theta}) \equiv \sum a_k n_k(e^{i\theta}).$$

Ainsi défini, $S(e^{i\theta})$ est unitaire pour tout θ dans E_0 et une fonction à valeur opératrice fortement mesurable de θ . Finalement, nous notons que l'opération de multiplication par $S(e^{i\theta})$ définit une isométrie sur $L_2(0, 2\pi; N)$ et puisque S et $S(e^{i\theta})$ commutent tous les deux avec la multiplication par les fonctions scalaires et coïncident sur les fonctions à valeur vectorielle constantes, ils coïncident sur tout $L_2(0, 2\pi; N)$.

3. Le cas continu.

Nous retournons maintenant au problème de la représentation pour un groupe d'opérateurs unitaires fortement continu $\{U(t)\}$ que nous réduisons à la représentation d'un seul opérateur unitaire traité dans la première partie de ce chapitre. La réduction est faite au moyen de la transformation de Cayley du générateur infinitésimal A du groupe $\{U(t)\}$:

$$A \longmapsto V = (I + A)(I - A)^{-1} \quad (\text{transformation de Cayley}).$$

Lemme 3.1.- Si $U(t)D \subset D$ pour tout $t > 0$, alors $VD \subset D$ et réciproquement (voir Lax p. 47).

Corollaire 3.1.- $U(t)M \subset M$ pour tout réel t si et seulement si $V^k M \subset M$ pour tout entier k . Autrement, $U(t)M = M = V^k M$ pour t et pour tout k .

Démonstration : L'application du lemme aux deux semi-groupes.

$\{U(t) ; t \geq 0\}$ et $\{U(-t) ; t \geq 0\}$ montre que $U(t)M \subset M$ pour tout $t > 0$ (ou $t < 0$) si et seulement si $VM \subset M$ (ou $V^{-1}M \subset M$). La deuxième proposition découle directement de la propriété de groupe de $\{U(t)\}$ et de $\{V^k\}$.

Lemme 3.2.- Un sous-espace fermé D est sortant (ou entrant) pour $\{U(t)\}$ si et seulement si il est sortant (ou entrant) pour V (voir Lax p. 48)'./.

Les lemmes ci-dessus nous permettent d'employer la théorie de la représentation discrète déjà développée. Afin d'obtenir de la représentation spectrale $L_2(0, 2\pi; N)$ de V , la représentation spectrale appropriée de $L_2(-\infty, \infty; N)$ de $\{U(t)\}$, nous employons une transformation linéaire fractionnelle mettant le disque-unité dans le demi-plan supérieur

$$z = i \frac{1-w}{1+w} \quad (\text{avec pour inverse } w = \frac{1+iz}{1-iz})$$

En particulier :

$$(3.7.) \quad e^{i\theta} \longmapsto \sigma = i \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$$

$$\text{et} \quad d\theta = 2(1 + \sigma^2)^{-1} d\sigma.$$

Nous définissons maintenant l'application suivante :

$$(3.8.) \quad g(e^{i\theta}) \in L_2(0, 2\pi; N) \longmapsto f(\sigma)$$

$$\text{avec } f(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-i\sigma)} g\left(\frac{1+i\sigma}{1-i\sigma}\right) \in L_2(-\infty, \infty; N).$$

Il est évident que c'est une isométrie ; en fait :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|_N^2 d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\sigma)|_N^2 d\sigma.$$

En plus, l'application est surjective puisque l'application inverse est bien définie. Nous notons que :

$$e^{i\theta} g(e^{i\theta}) \longmapsto \frac{1+i\sigma}{1-i\sigma} f(\sigma).$$

Soit $A_+(N)$ et $A_-(N)$, ou simplement A_+ et A_- , les images des sous-espaces $H_2(N)$ et $\bar{H}_2(N)$ respectivement, sous l'application (3.8.). Puisque $H_2(N)$ et $\bar{H}_2(N)$ couvrent ensemble $L_2(0, 2\pi; N)$, les sous-espaces A_+ et A_- couvrent $L_2(-\infty, \infty; N)$. Chaque fonction dans $H_2(N)$ [ou $\bar{H}_2(N)$] est la valeur-limite, dans le sens de L_2 d'une fonction analytique à l'intérieur [ou à l'extérieur] du disque-unité, dont l'intégrale du carré sur les cercles concentriques est uniformément bornée. Il est aisé de déduire de ceci et de la forme explicite de l'application (3.8.) que chaque fonction dans A_+ [ou A_-] est la valeur-limite, au sens de L_2 , d'une fonction analytique dans le demi-plan supérieur [inférieur] dont l'intégrale du carré, le long des lignes $\text{Im } z = \text{const} > 0$ [< 0] est uniformément bornée. D'après le théorème de Paley-Wiener, chacune de ces fonctions est la transformation de Fourier d'une fonction de carré intégrable sur l'axe réel positif [négatif], et réciproquement :

$$A_+ = F L_2(0, \infty; N), \quad A_- = F L_2(-\infty, 0; N)$$

avec F = transformation de Fourier.

Ainsi, nous avons prouvé :

Lemme 3.3.- La relation (3.8.) est un isomorphisme de $L_2(0, 2\pi; N)$ sur $L_2(-\infty, \infty; N)$, qui applique $H_2(N)$ sur A_+ et l'opérateur multiplicatif $\exp(i\theta)$ sur l'opérateur multiplicatif $(1 + i\sigma)(1 - i\sigma)^{-1}$.

Nous en venons alors au principal résultat de cette section :

Théorème 3.1.- Si D est sortant par rapport à $\{U(t)\}$, alors H peut se représenter isométriquement comme $L_2(-\infty, +\infty; N)$ pour tout espace de Hilbert auxiliaire N de telle sorte que $U(t)$ se transforme en multiplication par $\exp(i\theta t)$ et que D s'applique sur A_+ . Cette représentation est unique à un isomorphisme de N près.

Remarque : Une représentation de ce genre s'appelle une représentation spectrale sortante pour le groupe $\{U(t)\}$.

Démonstration : Pour prouver ce théorème, nous avons besoin seulement du lemme précédent et du théorème correspondant pour le cas discret. Selon le lemme 3.2., D est sortant pour la transformée de Cayley V du générateur de $\{U(t)\}$. En appliquant le théorème 1.1. et son corollaire, nous obtenons la représentation spectrale pour V dans $L_2(0, 2\pi; N)$. Dans cette représentation spectrale, D s'applique sur $H_2(N)$ et V se transforme en la multiplication par $\exp(i\theta)$. Le lemme 3.3. nous fournit une transformation qui applique $L_2(0, 2\pi; N)$ sur $L_2(-\infty, \infty; N)$, $H_2(N)$ sur A_+ et transforme la multiplication par $\exp(i\theta)$ en multiplication par $(1 + i\sigma)(1 - i\sigma)^{-1}$. Il est déjà vérifié que $(1 + i\sigma)(1 - i\sigma)^{-1}$ est la transformée de Cayley de l'opération de multiplication par σ , qui est le générateur du groupe d'opérateurs multiplicatifs unitaires $\{\exp(i\sigma t)\}$. Nous rappelons que la transformée de Cayley seule détermine le générateur et que le générateur seul détermine le semi-groupe ou

le groupe qu'il engendré. Ainsi, sachant que $U(t)$ s'applique dans un groupe d'opérateurs unitaires, dont la transformée de Cayley du générateur est $(1 + i\sigma)(1 - i\sigma)^{-1}$ nous pouvons affirmer que $U(t)$ lui-même s'applique sur $\exp(i\sigma t)$ dans cette représentation.

Si pour un sous-espace sortant donné D , il y a deux représentations spectrales sortantes distinctes pour le groupe $\{U(t)\}$, alors nous pouvons recommencer le raisonnement et obtenir deux représentations de translation sortantes distinctes pour V . D'après le théorème 1.1., ces représentations de translation peuvent différer seulement par un isomorphisme de N , et alors, retournant aux représentations spectrales de $\{U(t)\}$, nous voyons qu'elles ne diffèrent que par un isomorphisme de N .

Nous appliquons maintenant l'inverse de la transformation de Fourier. D'après le théorème de Paley-Wiener, A_+ s'applique sur $L_2(0, \infty; N)$; ainsi nous déduisons :

Corollaire 3.2. - Si D est sortant par rapport au groupe d'opérateurs unitaires $\{U(t)\}$, alors H peut se représenter isométriquement comme $L_2(-\infty, \infty; N)$ pour tout espace de Hilbert auxiliaire N de telle sorte que $U(t)$ se transforme en translation à droite par t unités et que D s'applique sur $L_2(0, \infty; N)$. Cette représentation est unique à un isomorphisme près de N .

Remarque : Une représentation de cette sorte s'appelle une représentation de translation sortante pour le groupe $\{U(t)\}$.

On a des théorèmes de représentations analogues pour un sous-espace entrant D_- .

Théorème 3.2.- Si, pour un groupe unitaire $\{U(t)\}$, il existe deux représentations de translation (ou spectrale), soit $L_2(-\infty, +\infty; N)$ et $L_2(-\infty, \infty; N')$, alors N et N' sont équivalents.

Démonstration : Ceci découle du théorème 1.2. Nous appliquons simplement ces espaces sur $L_2(0, 2\pi; N)$ et $L_2(0, 2\pi; N')$ respectivement, et obtenons deux représentations spectrales pour la transformée de Cayley V du générateur de $\{U(t)\}$.

4. L'opérateur de diffusion dans le cas continu.

Juste comme dans le cas discret, nous commençons avec des sous-espaces orthogonaux sortant D_+ et entrant D_- pour un groupe d'opérateurs unitaires donné $\{U(t)\}$. Encore, à chaque vecteur $f \in H$, sont associés deux vecteurs k_- et k_+ , qui sont respectivement les représentants entrant et sortant de f .
L'application

$$S : k_- \longmapsto k_+$$

s'appelle l'opérateur de diffusion.

Lemme 4.1.- L'opérateur de diffusion a les propriétés suivantes :

- (i) S est unitaire ;
- (ii) S commute avec la translation ;
- (iii) S applique, dans lui-même, $L_2(-\infty, 0; N)$.

Démonstration : La démonstration paraphase celle du lemme 2.1.

Ensuite, en employant l'application qui va de $L_2(0, 2\pi; N)$ à $L_2(-\infty, \infty; N)$ définie au lemme 3.3., nous obtenons une représentation S pour S à partir de la représentation spectrale entrante à la représentation spectrale sortante de $\{U(t)\}$, qui a les propriétés suivantes :

- (i)" S est unitaire ;
- (ii)" S commute avec les fonctions mesurables bornées à valeur complexe ;
- (iii)" S applique A_- dans A_- .

Nous interprétons maintenant S comme un opérateur de $L_2(-\infty, \infty; N)$ sur lui-même. En posant

$$S(z) = S' \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right) ,$$

le théorème 2.1. devient :

Théorème 4.1. - Si N est séparable, un opérateur S sur $L_2(-\infty, \infty; N)$ satisfaisant les propriétés (i)" - (iii)" peut se réaliser comme une fonction multiplicative à valeur opératrice $S(\sigma)$ de N dans N , ayant les propriétés suivantes :

- (a) $S(\sigma)$ est la valeur-limite d'une fonction à valeur opératrice $S(z)$ analytique pour $\text{Im } z < 0$ qui converge fortement le long des lignes $\text{Re } z = \sigma$ vers $S(\sigma)$ pour presque tout σ ;
- (b) $|S(z)| \leq 1$ pour tout z tel que $\text{Im } z < 0$;
- (c) $S(\sigma)$ est unitaire pour presque tout σ .

Remarque : Ici, la convergence radiale dans la partie (a) du théorème 2.1. se transforme en la convergence le long d'un cercle orthogonal à l'axe réel.

Cependant, à cause de l'analyticité et de l'inégalité (b), nous obtenons du calcul usuel de la dérivée, l'inégalité :

$$|S(\sigma_1 - i\eta) - S(\sigma_2 - i\eta)| \leq |\sigma_1 - \sigma_2| / \eta$$

et ceci, avec la convergence le long des cercles, implique la convergence le long des lignes $\text{Re } z = \sigma$.

Les corollaires 2.2. et 2.3. deviennent :

Corollaire 4.1.- L'opérateur $S(z)$ du théorème 4.1. est déterminé, dans la multiplication à droite par un opérateur unitaire sur N , par les propriétés (i)" - (iii)" et le sous-espace $D = SA - (N)$.

Corollaire 4.2.- Si N est séparable, un opérateur S qui satisfait les propriétés (i)" et (ii)" peut se réaliser comme une fonction multiplicative à valeur opératrice $S(\sigma)$ de N dans N , qui est unitaire pour presque tout σ .

Habituellement, les physiciens définissent l'opérateur de diffusion en termes de groupes d'opérateurs unitaires, l'un perturbé $\{U(t)\}$, l'autre non perturbé $\{U_0(t)\}$. Ils commencent avec les opérateurs d'onde

$$(4.1.) \quad W_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(-t)U_0(t) \quad (\text{limite forte})$$

et ils définissent l'opérateur de diffusion S en ces termes :

$$(4.2.) \quad S = W_+^{-1} W_-$$

Nous allons montrer que, étant donné un groupe d'opérateurs unitaires $\{U(t)\}$ et une paire de sous-espaces orthogonaux, l'un entrant D_- , et l'autre sortant D_+ , nous pouvons définir un autre groupe d'opérateurs unitaires $\{U_0(t)\}$ de telle sorte que si nous considérons $U(t)$ comme une perturbation sur $U_0(t)$, alors l'opérateur de diffusion classique (4.2.) coïncide avec l'opérateur de diffusion que nous avons introduit dans la première partie de cette section.

Nous définissons $U_0(t)$ comme la translation à droite sur $H_0 \equiv L_2(-\infty, \infty; N)$. Pour relier $U_0(t)$ à $U(t)$, nous ferons les identifications suivantes sur les espaces où ils agissent : le sous-espace $L_2(-\infty, -1; N)$ de H_0 est identifié à D_- dans la représentation de translation entrante de $\{U(t)\}$ (après translation d'une unité à gauche) ; le sous-espace $L_2(1, \infty; N)$ de H_0 est identifié à D_+ dans la représentation de translation sortante de $\{U(t)\}$ (après translation d'une unité à droite) ; et la portion restante $L_2(-1, 1; N)$ de H_0 est identifié à $H \ominus (D_- \oplus D_+)$ de H de façon unitaire mais arbitraire.

UN SEMI-GROUPE D'OPERATEURS LIE

A

LA MATRICE DE DIFFUSION.

Dans la théorie classique de la diffusion des ondes de son et des ondes électromagnétiques, l'opérateur de diffusion relie le comportement de la solution du problème non perturbé au comportement de la solution du problème perturbé aux grandes distances et aux temps positifs élevés, ceci pour les solutions qui se comportent de la même manière dans les deux systèmes pour les grandes distances et pour les temps négatifs élevés. En plus, il était trouvé qu'il y a une relation entre le comportement des solutions du problème perturbé aux positions fixes et pour les temps positifs élevés et la continuité analytique de la matrice de diffusion dans le demi-plan supérieur. En particulier, un développement rapidement convergent, valable pour les positions fixées et pour les temps positifs élevés, peut s'obtenir en termes de pôles de la matrice de diffusion.

Dans ce chapitre, nous allons jeter une nouvelle lumière sur cet aspect de la théorie de la diffusion à l'aide d'une famille d'opérateurs $\{Z(t) ; t \geq 0\}$ définis par :

$$Z(t) = P_+ U(t)P_- \quad (t \geq 0) ;$$

où P_+ est la projection orthogonale de H sur le complément orthogonal de D_+ et P_- la projection orthogonale de H sur le complément orthogonal de D_- . La raison de considérer l'opérateur $Z(t)$ est la suivante :

A la fin du dernier chapitre, nous avons construit une famille d'opérateurs $\{U_0(t)\}$ par rapport à qui $\{U(t)\}$ était une perturbation. L'action des deux groupes s'accorde sur D_- pour $t < 0$ et sur D_+ pour $t > 0$. Ainsi,

nous pouvons voir D_- comme consistant en tous les signaux non affectés dans le passé par la perturbation et D_+ comme consistant en tous les signaux non affectés dans le futur par la perturbation. En particulier, D_- contient certains signaux qui ne seront pas affectés par la perturbation pour un temps très long et le but de l'opérateur P_- est de ne pas considérer ces signaux. Après l'action de $\{U(t)\}$, P_+ écarte cette partie du signal qui ne sera pas non plus affecté par le diffuseur. En conséquence de quoi, les opérateurs $\{Z(t)\}$ apparaissent comme un outil raisonnable pour isoler les effets de la perturbation. */.

Nous allons montrer que $Z(t)$ forme un semi-groupe d'opérateurs sur le complément orthogonal de D_+ et D_- et que toute l'information essentielle ayant rapport à $\{U(t)\}$, à D_+ et à D_- , peut s'obtenir par $\{Z(t)\}$. En particulier, $\sqrt{-1}$ multiplié par le complexe conjugué du spectre du générateur infinitésimal de $\{Z(t)\}$ coïncide avec l'ensemble des points dans le demi-plan inférieur où la matrice de diffusion n'est pas régulière, et si $Z(T)$ est compact pour un T , alors le développement de $Z(t)x$ en termes de vecteurs propres des opérateurs $Z(t)$ coïncide avec le développement précédemment mentionné, obtenu à partir de la matrice de diffusion.

1. Les semi-groupes liés à l'opérateur de diffusion.

Nous commençons par prouver que l'opérateur $Z(t)$ forme un semi-groupe.

Théorème 1.1. - Les opérateurs $\{Z(t) ; t \geq 0\}$ annulent D_+ et D_- , appliquent le complément orthogonal K de $[D_+ \oplus D_-]$ dans K et forment un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de contraction sur K . En plus, $Z(t)$ tend vers 0 fortement quand $t \rightarrow \infty$: $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t)x = 0$ pour tout x dans K .

Démonstration : Puisque P_- annule D_- , de par la définition de $Z(t) = P_+ U(t)P_-$, il en est de même de $Z(t)$. En plus, comme D_- est orthogonal à D_+ , P_- agit sur D_+ comme l'identité ; pour t positif, $U(t)$ applique D_+ dans lui-même, et par conséquent P_+ annule $U(t)D_+$; ainsi, $Z(t)$ annule D_+ .

Nous allons montrer maintenant que $Z(t)$ applique K dans K . Le dernier facteur dans l'expression de $Z(t)$ étant P_+ , il s'ensuit que l'image de $Z(t)$ est orthogonale à D_+ . Il reste à montrer que si x est orthogonal à D_- , il en est de même de $Z(t)x$: si x est orthogonal à D_- , $P_-x = x$ et puisque $U(-t)$ applique D_- dans lui-même, son adjoint $U(t)$ applique le complément orthogonal de D_- dans lui-même. Ainsi, $U(t)P_-x$ est orthogonal à D_- et finalement comme D_+ est orthogonal à D_- , la projection P_+ applique le complément orthogonal de D_- dans lui-même si bien que $Z(t)x$ est aussi orthogonal à D_- .

Pour prouver que $\{Z(t)\}$ forme un semi-groupe sur K , nous employerons l'identité suivante :

$$P_+ U(t)P_+ = P_+ U(t) \quad (t \geq 0)$$

qui découle de ce que $U(t)$ applique D_+ dans lui-même. Notons aussi que P_- agit comme l'identité sur K si bien que $Z(t) = P_+ U(t)$ sur K . Ainsi

$$Z(t)Z(s) = P_+ U(t)P_+ U(s) = P_+ U(t)U(s) = P_+ U(t+s) = Z(t+s)$$

sur K . Ce qui prouve la propriété de semi-groupe de $Z(t)$. La continuité forte et la contraction découle des propriétés correspondantes de $U(t)$.

Pour montrer que $Z(t)$ tend fortement vers zéro, nous employons le fait que les translatés $U(t)D_+$ sont denses dans H , ceci est la propriété

(iii) d'un sous-espace sortant. Ainsi, étant donné un $x \in K$ et un $\varepsilon > 0$, il existe $y \in D_+$ et un nombre positif T tels que $|x - U(-T)y| < \varepsilon$. Puisque $P_+U(t)$ est une contraction et que $P_+U(t)x = Z(t)x$ pour $x \in K$, nous obtenons :

$$|Z(t)x - P_+U(t)U(-T)y| < \varepsilon.$$

Pour $t > T$, nous avons, puisque y appartient à D_+ ,

$P_+U(t)U(-T)y = P_+U(t-T)y = 0$; ainsi pour $t > T$, $|Z(t)x| < \varepsilon$. Ceci complète la démonstration du théorème 1.1.

Considérons maintenant l'action de $Z(t)$ dans la représentation de translation sortante où $U(t)$ correspond à la translation à droite de t unités et où P_+ correspond à la restriction à l'axe réel négatif. L'action de $Z(t)$ est manifestement une translation suivie de troncature. Dans cette représentation, D_+ correspond à $L_2(0, \infty; N)$ de sorte que son complément orthogonal se représente par $L_2(-\infty, 0; N)$. Comme nous l'avons vu dans la section 4 du chapitre I, il est représenté par $S[L_2(-\infty, \infty; N)]$ et alors K par

$$(1.1.) \quad K \longleftrightarrow L_2(-\infty, 0; N) \ominus SL_2(-\infty, 0; N).$$

Comme nous l'avons montré ci-dessus, $Z(t)$ applique K dans lui-même et alors l'espace représentant K dans la représentation de translation sortante est invariant sous le déplacement droit suivi de troncature.

Dans la représentation spectrale sortante, K correspond à un sous-espace de fonctions que nous notons R .

$$(1.2.) \quad R = A_- \ominus S A_-,$$

où A_- est, comme ci-dessus, le transformé de Fourier de $L_2(-\infty, 0; N)$.

Soit A_+ le transformé de Fourier de $L_2(0, \infty; N)$; puisque la transformation de Fourier est unitaire, A_+ est le complément orthogonal de A_- ; de même, puisque la multiplication par S est unitaire, $S A_+$ est le complément orthogonal de $S A_-$. Ainsi, (1.2.) peut s'écrire

$$(1.2.)' \quad R = A_- \cap S A_+ .$$

Si nous interchangeons les rôles de D_+ et D_- et, en même temps, changeons la direction de t , nous obtenons encore un semi-groupe d'opérateurs, nommément $\{P_- U(-t)P_+ ; t \geq 0\}$, auquel le théorème 1.1. s'applique. C'est simplement le semi-groupe adjoint, qui est :

$$Z^*(t) = P_- U(-t)P_+ \quad (t \geq 0)$$

Dans la représentation de translation entrante, K est représenté par :

$$(1.3.) \quad K \longleftrightarrow L_2(0, \infty; N) \otimes S^{-1} L_2(0, \infty; N)$$

et $Z^*(t)$ agit comme la translation à gauche suivie de la troncature. Dans la représentation spectrale entrante, K correspond au sous-espace de A_+ que nous notons par R^* . Il découle de la définition et du caractère unitaire de que

$$(1.4.) \quad R^* = A_+ \otimes S A_+ = A_+ \cap S^* A_- = S^* R .$$

La caractérisation suivante de R découle immédiatement de (1.2.)'.

Lemme 1.1.- La fonction $f(\sigma)$ appartient à R si et seulement si f appartient à A_- et $S^*(\sigma)f(\sigma)$ à A_+ .

Les propriétés de S^* sont analogues à celles de S .

Lemme 1.2.- $S^*(\bar{z})$ est une fonction à valeur opératrice de z , analytique dans le demi-plan supérieur où elle est de norme inférieure ou égale à 1. Quand z tend vers σ (par dessus σ) sur les segments verticaux, $S^*(\bar{z})$ converge fortement vers $S^*(\sigma)$ pour presque tout σ réel.

Démonstration : Puisque $S(z)$ est analytique dans le demi-plan inférieur, la formule

$$(1.5.) \quad (S(z)n, m)_N = (n, S^*(z)m)_N$$

montre que $S^*(z)$ est faiblement presque analytique (skew-analytic). Par un principe bien connu (la borne uniforme), $S^*(z)$ est presque analytique aussi pour la topologie d'opérateurs uniforme. Par conséquent, $S^*(\bar{z})$ est analytique dans le demi-plan supérieur. Les opérateurs adjoints ont la même norme ; ainsi

$$|S^*(z)|_N = |S(z)|_N \leq 1 \text{ pour } \text{Im } z \leq 0.$$

D'après le théorème 4.1. du chapitre I, hormis un ensemble nul de σ , $S(z)$ tend fortement vers $S(\sigma)$ quand z tend vers σ en bas le long des segments verticaux. Il découle de (1.5.) que $S^*(z)m$ tend faiblement vers $S^*(\sigma)$ le long de tels segments verticaux. Pour montrer que cette convergence est forte, nous notons que, puisque $S^*(\sigma)$ est unitaire pour presque tout σ ,

$$|S^*(\sigma)m|_N = |m|_N. \text{ D'autre part, comme il est montré ci-dessus, } |S^*(z)m|_N \leq |m|_N.$$

D'après un principe élémentaire bien connu de la théorie des espaces de Hilbert, si une suite $\{u_k\}$ tend faiblement vers u et si

$$\limsup |u_k|_N \leq |u|_N,$$

alors la convergence est nécessairement forte. L'application de ce principe complète la démonstration. '/.

Nous avons besoin, plus loin, du résultat suivant sur le comportement de $S(z)$ à la limite dans son domaine de définition.

Lemme 1.3.- Soit σ_0 un point de l'axe réel et supposons que pour tout z dans le demi-plan inférieur et assez proche de σ_0 , $S(z)$ est régulière et que $|S^{-1}(z)|$ est uniformément bornée. Alors $S(z)$ peut se prolonger analytiquement à travers l'axe réel dans un voisinage de σ_0 .

Démonstration : La partie principale est de montrer que, pour presque tout σ proche de σ_0 , $S^{-1}(z)$ est fortement continue quand z tend vers σ en dessous le long d'un segment vertical : nous avons déjà montré que, pour presque tout σ , $S(\sigma)$ est unitaire et que $S(z)$ approche fortement $S(\sigma)$ quand z tend vers σ le long des segments verticaux. Pour un tel σ , étant donné un vecteur $m \in N$, il existe un autre vecteur n dans N tel que

$$S(\sigma)n = m ;$$

en plus, $S(z)n$ tend fortement vers m quand z tend vers σ . Enfin, nous notons que :

$$S^{-1}(z)m = S^{-1}(z)S(\sigma)n = S^{-1}(z)\{S(z)n + [S(\sigma) - S(z)]n\} = n + S^{-1}(z)[S(\sigma) - S(z)]n.$$

Si σ est assez proche de σ_0 , et z assez proche de σ , alors $|S^{-1}(z)|_N$ est uniformément borné et puisque $|S(\sigma)_n - S(z)_n|$ tend vers 0, il découle de l'identité ci-dessus que $S^{-1}(z)_m$ tend vers $n = S^{-1}(\sigma)_m$.

Puisque $|S^{-1}(z)|_N$ est uniformément borné dans le demi-plan inférieur près de σ_0 , nous en déduisons que $|S^{*-1}(\bar{z})|_N$ sera uniformément borné dans le demi-plan supérieur au voisinage de σ_0 . D'après le lemme 1.2., $S^*(\bar{z})$ a les mêmes propriétés que $S(z)$ et il s'ensuit, comme ci-dessus, que, dans z tend vers σ le long d'un segment vertical supérieur, $S^{*-1}(\bar{z})$ tend vers $S^{*-1}(\sigma)$ fortement pour presque tout σ dans le voisinage de σ_0 . Finalement, puisque $S(\sigma)$ est unitaire presque partout, nous voyons que $S^{*-1}(\sigma) = S(\sigma)$ presque partout. Nous avons donc montré : $S^{*-1}(\bar{z})$ est une fonction analytique bornée dans la partie du demi-plan supérieur appartenant au voisinage de σ_0 , fonction dont les valeurs-limites sur l'axe réel s'accordent avec celles de $S(z)$. D'après le principe de réflexion de Schwarz de la théorie des fonctions, ceci garantit que $S^{*-1}(z)$ est le prolongement analytique de $S(z)$ dans le voisinage de σ_0 . La démonstration du lemme 1.3. est alors complète. */.

Lemme 1.4.- Si $S(z)$ peut se prolonger analytiquement dans un voisinage de σ_0 , alors toutes les fonctions $f(\sigma)$ de R sont nécessairement analytiques dans le voisinage de σ_0 .

Démonstration : Par le lemme 1.1., f appartient à R si et seulement si $f(\sigma)$ appartient à A_- et $S^*(\sigma)f(\sigma)$ à A_+ . Soit $g(z)$ la fonction analytique dans le demi-plan supérieur qui est égale à $S^*(\sigma)f(\sigma)$ pour z réel. Alors, $S^*(\bar{z})f(z)$ est le prolongement analytique de $g(z)$ dans le demi-plan inférieur (d'après le principe de réflexion de Schwarz) près de σ_0 . Ceci montre que $g(z)$ est analytique dans le voisinage de σ_0 ; mais alors il en est de même de $f(z) = S(z)g(z)$.

2. Des semi-groupes d'opérateurs de contraction.

Le fait que le semi-groupe peut se représenter comme une translation suivie de troncature agissant sur un espace invariant par translation n'est pas aussi spécial qu'on pourrait le supposer. Il ressort que tout groupe d'opérateurs de contraction peut se représenter ainsi pourvu qu'il tende fortement vers 0 quand t tend vers l'infini. Nous allons le prouver dans cette section.

Théorème 2.1.- Soit $\{S(t) ; t \geq 0\}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de contraction sur un espace de Hilbert K qui tend fortement vers zéro :

$$\lim S(t)x = 0, \quad \forall x \in K.$$

Alors K peut se représenter isométriquement comme le complément orthogonal d'un sous-espace, invariant par translation, de $L(-\infty, 0; N)$ N étant un espace de Hilbert auxiliaire, de sorte que $S(t)$ correspond à la translation de t unités à droite suivie de la restriction à $(-\infty, 0)$.

Démonstration : Nous représentons le vecteur x de K par la fonction de t ; $S(-t)x$, $t \leq 0$. C'est évidemment une représentation de translation. Ce qui reste à construire, c'est une nouvelle norme sur K , soit $|x|_K$, de telle sorte que la norme L_2 de la fonction $S(-t)x$ égale la K -norme de x :

$$(2.1.) \quad \int_{-\infty}^0 |S(-t)x|_N^2 dt = |x|_K^2 .$$

Nous appliquons ceci à $S(s)x$ au lieu de x :

$$\begin{aligned}
 (2.1.)' \quad |S(s)x|_K^2 &= \int_{-\infty}^0 |S(-t)S(s)x|_N^2 dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 |S(-t+s)x|_N^2 dt \\
 &= \int_{-\infty}^{-s} |S(-t)x|_N^2 dt.
 \end{aligned}$$

Finalement, en différenciant par rapport à s et en faisant $s = 0$, on obtient :

$$(2.2.) \quad |x|_N^2 = - (Bx, x) - (x, Bx)_K, \quad x \in D_B$$

où B est le générateur infinitésimal de $\{S(t)\}$.

Nous prenons maintenant (2.2.) pour la définition de $|x|_N^2$ pour tout x dans le domaine de B . Puisque nous avons supposé que les opérateurs $S(s)$ sont des contractions, il s'ensuit que le membre gauche de (2.1.)' est une fonction non croissante de s ; par conséquent, l'opposé de sa dérivée, qui est la nouvelle norme, est non négatif.

Nous pouvons maintenant vérifier qu'avec la définition précédente de la nouvelle norme, (2.1.) est valable pour tout x dans $D(B)$. Car alors $S(-t)x$ appartient à $D(B)$ pour toutes les valeurs de t , et

$$\begin{aligned}
 |S(-t)x|_{\text{nouveau}}^2 &= - 2 \operatorname{Re}(BS(-t)x, S(-t)x)_K \\
 &= \frac{d}{dt} |S(-t)x|_K^2.
 \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à t et en supposant, comme nous l'avons fait, que $|S(t)x|_K$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini, nous obtenons (2.1.).

Enfin, nous définissons N comme le complété de $D(B)$ dans la nouvelle norme, plus précisément de $D(B)$ modulo les vecteurs nuls. Puisque

$D(B)$ est dense dans K , la représentation peut s'étendre isométriquement à tout K .

3. Théorie spectrale.

Fondamentalement, le semi-groupe $\{Z(t)\}$ et la matrice de diffusion $S(z)$ sont déterminés tous les deux par la représentation de K dans la représentation de translation sortante de $\{U(t)\}$. Il n'est donc pas surprenant qu'il y ait une relation étroite entre les propriétés spectrales de $\{Z(t)\}$ et le comportement de la fonction $S(z)$.

Nous rappelons la terminologie suivante : un opérateur linéaire fermé V est régulier s'il admet un inverse borné ou, ce qui est équivalent, s'il est biunivoque. Autrement, il est singulier. L'ensemble résolvant $\rho(V)$ de V consiste en tous ces nombres complexes λ pour lesquels $\lambda I - V$ est régulier ; le spectre $\sigma(V)$ de V consiste en ces λ pour lesquels $\lambda I - V$ est singulier. λ appartient au spectre-point de V si $\lambda I - V$ n'est pas injectif, c'est-à-dire si son noyau est non nul.

Nous noterons B le générateur infinitésimal de $\{Z(t)\}$. Comme la formule (voir appendice)

$$(3.1.) \quad (\mu I - B)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} Z(t) dt$$

le montre, l'ensemble résolvant de B contient le demi-plan à droite. Comme pour le demi-plan à gauche, nous avons :

Théorème 3.1. - Si $\operatorname{Re} \mu < 0$, alors μ appartient au spectre point de B si et seulement si $S^*(i\bar{\mu})$ a un noyau non trivial (i.e. un espace nul non trivial).

Corollaire 3.1. - Si $\operatorname{Re} \mu < 0$, alors $\bar{\mu}$ appartient au spectre-point de B^* si et seulement si $S(i\bar{\mu})$ a un noyau non trivial.

Démonstration : Soit x une fonction propre de B :

$$Bx = \mu x$$

comme $Z(t)x$ satisfait l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} Z(t)x = BZ(t)x = Z(t)Bx = \mu Z(t)x$$

d'où découle que

$$(3.2.) \quad Z(t)x = e^{\mu t} x.$$

Dans la représentation de translation sortante, B agit comme la différenciation et son domaine ne contient que les fonctions qui sont continues pour $s \leq 0$. Si le vecteur-propre x a $f(s)$ pour représentant, alors il découle de (3.2.) que f satisfait l'équation fonctionnelle

$$f(s-t) = e^{\mu t} f(s) \quad (s \leq 0 \leq t);$$

la proposition inverse est aussi vraie. En se servant du fait que $f(s)$ est continue pour $s \leq 0$ et en posant $s = 0$, on obtient que :

$$f(s) = \begin{cases} e^{-\mu s} n & (s \leq 0) \\ 0 & (s > 0) \end{cases}$$

pour un $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. La représentation spectrale $h(\sigma)$ de x est obtenue

en prenant la transformée de Fourier de f . Ainsi

$$h(\sigma) = \frac{n}{i\sigma - \mu}.$$

Nous aurons besoin du résultat plus général suivant :

Théorème 3.2.-

(i) Si $\operatorname{Re} \mu < 0$, alors μ appartient à l'ensemble résolvant de B si et seulement si $S(i\bar{\mu})$ est régulier.

(ii) Un μ_0 imaginaire pur appartient à l'ensemble résolvant de B si et seulement si $S(z)$ peut se prolonger analytiquement à travers l'axe réel au point $\sigma_0 = i\bar{\mu}_0$.

Démonstration : Nous allons d'abord prouver les conditions nécessaires de ces deux propositions. Dans le cas de (i), nous supposons pour un μ avec $\operatorname{Re} \mu < 0$ que $S^*(i\bar{\mu})$ est régulier et nous souhaitons montrer que $\mu I - B$ est biunivoque sur K . Le théorème 3.1. montre que l'opérateur est biunivoque et pour prouver que son image est K , nous procédons comme suit :

Comme nous l'avons déjà signalé, B agit comme $-\frac{d}{ds}$ dans la représentation spectrale sortante et son domaine consiste en ces fonctions à support dans $]-\infty, 0]$ dont la dérivée sur $(-\infty, 0)$ est de carré intégrable. En prenant la transformée de Fourier, nous obtenons la description suivante de B et de son domaine dans la représentation spectrale :

Lemme 3.1.- Une fonction $h(\sigma)$ de R appartient au domaine de B si et seulement si il existe un vecteur n de N tel que :

$$(3.5.) \quad i\sigma h(\sigma) - n$$

appartient à \mathcal{R} ; Bh est donné par (3.5.).

Remarque : Un argument suffisant pour le lemme 3.1. est une application directe de la théorie des distributions. Ainsi, si les transformées de Fourier inverses de h et de Bh sont respectivement $f(s)$ et $g(s)$, le théorème de Plancherel donne :

$$\int g\phi ds = \int f\phi' ds - n\phi(0)$$

pour toutes les fonctions test $\phi(s)$ et la proposition en découle directement.

Ainsi, pour prouver que $\mu I - B$ applique son domaine sur K , il suffit de prendre un k arbitraire dans \mathcal{R} et de montrer qu'il existe un n de \mathbb{N} et un h de \mathcal{R} tels que :

$$(\mu - i\sigma)h(\sigma) + n = k(\sigma).$$

En clair,

$$(3.6.) \quad h(\sigma) = \frac{k(\sigma) - n}{\mu - i\sigma} ;$$

ce qui reste à prouver, c'est que pour un n convenable, h appartient à \mathcal{R} .

Maintenant, d'après le lemme 1.1., h appartient à \mathcal{R} si et seulement si h appartient à A_- et S^*h à A_+ . Par le théorème de Paley-Wiener, h appartient à A_- si et seulement si on peut l'étendre à être analytique dans le demi-plan inférieur et les intégrales du carré de sa valeur absolue le long des lignes $\text{Im } z = c < 0$ sont uniformément bornées. La fonction k est déjà dans \mathcal{R} , donc il peut être ainsi prolongée et puisque le dénominateur de (3.6.)

ne s'annule pas dans le demi-plan inférieur, il découle de (3.6.) que :

$$\frac{k(z) - n}{\mu - iz}$$

est le prolongement demandé de h ; ainsi h appartient à A_- pour tout choix de n .

Nous considérons maintenant S^*h :

$$S^*(\sigma)h(\sigma) = \frac{S^*(\sigma)k(\sigma) - S^*(\sigma)n}{\mu - i\sigma} .$$

Puisque k appartient à R , par le lemme 1.1., S^*k peut se prolonger en une fonction analytique de carré intégrable uniformément dans le demi-plan supérieur. Ainsi, S^*h a le prolongement méromorphe :

$$(3.7.) \quad \frac{g(z) - S^*(\bar{z})n}{\mu - iz} .$$

dans le demi-plan supérieur. Cette expression sera analytique si et seulement si le numérateur de (3.7.) s'annule au point $z = -i\mu$ où le dénominateur s'annule ; c'est le cas si et seulement si :

$$(3.8.) \quad g(-i\mu) = S^*(i\bar{\mu})n .$$

Puisque nous avons supposé que $S(i\bar{\mu})$ et par suite $S^*(i\bar{\mu})$ est régulier, l'équation (3.8.) détermine n de manière unique. Avec un tel choix de n , la fonction (3.7.) est analytique et les intégrales du carré de sa valeur absolue sont uniformément bornées le long des lignes $\text{Im } z = c > 0$. Ainsi, par le théorème de Paley-Wiener S^*h appartient à A_+ et par le lemme 1.1.,

h appartient à \mathcal{R} . Ceci complète la condition nécessaire du théorème 3.2. (i).

Notre construction de $(\mu I - B)^{-1}$ est tout-à-fait explicite et peut s'employer pour obtenir une évaluation de la norme de la résolvante. La relation (3.6.) et l'inégalité triangulaire donnent :

$$|h| \leq \left| \frac{k}{\mu - i\sigma} \right| + \left| \frac{n}{\mu - i\sigma} \right| .$$

Le premier terme à droite peut s'évaluer en remplaçant le dénominateur par sa plus petite valeur ; le second terme peut s'évaluer explicitement. Employant l'abréviation $\tau = -\operatorname{Re} \mu$, nous obtenons :

$$(3.9.) \quad |h| \leq \tau^{-1} |k| + (2\tau)^{-1/2} |n|_N .$$

La valeur de n est donnée par (3.8.) :

$$n = S^{*-1}(i\bar{\mu}) g(-i) ;$$

et par suite,

$$(3.10.) \quad |n|_N \leq S^{-1}(i\bar{\mu})|_N |g(-i\mu)|_N .$$

Maintenant $g(-i\mu)$ peut s'exprimer par l'intégrale de Cauchy et l'intégrale résultante peut s'évaluer par l'inégalité de Schwarz. Ce qui donne :

$$(3.11.) \quad |g(-i\mu)|_N = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\sigma)}{\sigma + i\mu} d\sigma \right|_N \leq (2\tau)^{-1/2} |g| .$$

En plus, puisque $S^*(\sigma)$ est unitaire sur l'axe réel,

$$|g| = |S^*k| = |k|,$$

et en faisant une substitution dans (3.11.), (3.10.) et (3.9.) successivement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |h| &\leq \tau^{-1}|k| + (2\tau)^{-1}|S^{-1}(i\bar{\mu})|_N|k| \\ &\leq (3|2\tau)|S^{-1}(i\bar{\mu})|_N|k|. \end{aligned}$$

Finalement, puisque $(\mu I - B)h = k$, nous obtenons l'inégalité

$$(3.12.) \quad |(\mu I - B)^{-1}| \leq \frac{3|S^{-1}(i\bar{\mu})|_N}{2|\operatorname{Re} \mu|}.$$

La démonstration est analogue pour la condition nécessaire de la partie (ii) où l'hypothèse est que $S(z)$ est analytique au point $\sigma_0 = i\bar{\mu}_0$. Dans ce cas, chaque fonction $k(\sigma)$ de R est analytique au point σ_0 par le lemme 1.4. En employant ce fait, il est aisé de vérifier que si n est choisi égal à $k(\sigma_0)$, alors h , donné par (3.6.), appartient à A_- et S^*h à A_+ .

Maintenant, nous prouvons la condition suffisante du théorème 3.2., en commençant par la partie (i). Ainsi pour $\operatorname{Re} \mu < 0$, nous supposons que μ appartient à $\rho(B)$ et nous souhaitons montrer que $S(i\bar{\mu})$ est régulier. Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que $S(i\bar{\mu})$ n'est pas régulier. Alors $S^*(i\bar{\mu})$ n'est aussi pas régulier et l'une des deux possibilités suivantes s'offre :

- (a) $S^*(i\bar{\mu})$ n'est pas injectif.
- (b) L'image de $S^*(i\bar{\mu})$ n'est pas tout K .

Dans le cas (a), μ devrait appartenir au spectre-point de B par le théorème 3.1. Ce qui est contraire à $\mu \in \rho(B)$. Le cas (b) peut se subdiviser en deux cas :

(b)' L'image de $S^*(i^-)$ n'est pas dense dans K .

(b)" $S^{*-1}(i^-)$ n'est pas borné.

Dans le cas (b)', l'espace nul (le noyau) de $S(i\bar{\mu})$ serait non trivial et ainsi, d'après le corollaire (3.1.), μ devrait appartenir au spectre-point de B , ce qui est encore en contradiction avec $\mu \in \rho(B)$.

Il reste à prouver que le cas (b)" est impossible et pour cela, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.- Etant donné μ avec, $\text{Re } \mu < 0$, et un vecteur unitaire n de N , il existe un vecteur non nul a de K tel que pour tout t positif,

$$(3.13.) \quad | [Z(t) - e^{\mu t} I] a | \leq 4 | S^*(i\bar{\mu}) n |_N | a | .$$

Avant de démontrer le lemme, nous allons montrer comment utiliser cette inégalité pour établir le cas (b)". Pour cela, nous commençons avec l'expression (3.1.) pour la résolvante de B et un nombre positif k :

$$(kI - B)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-kt} Z(t) dt .$$

La soustraction de $(k-\mu)^{-1}$ des deux côtés donne l'identité :

$$(3.14.) \quad (kI - B)^{-1} - (k - \mu)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-kt} | Z(t) - e^{\mu t} | dt .$$

Soit $Q = Q(\mu)$ l'opérateur à gauche de (3.14.). Alors Q peut se récrire comme

$$Q(\mu) = - (\mu I - B)(kI - B)^{-1}(k - \mu)^{-1} .$$

Il est évident, à partir de cette identité, que $Q(\mu)$ est régulier si et seulement

si $(\mu I - B)$ est bijectif. Maintenant, d'après le lemme 3.2., étant donné un vecteur unitaire n de N , il existe un élément non nul de K tel que (3.13.) soit satisfait. Nous employons (3.14.) pour exprimer Qa et alors nous évaluons la norme de l'expression résultante avec l'aide de (3.13.) Soit en abrégé $S^*(i\bar{\mu}) = S^*$, nous avons :

$$|Qa| = \left| \int_0^{\infty} e^{-Kt} [Z(t) - e^{\mu t} I] a dt \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-Kt} 4 |S^* n|_N |a| dt$$

$$\leq \frac{4}{K} |S^* n|_N |a|$$

Puisque n est unitaire, cette dernière inégalité peut s'écrire :

$$(3.15.) \quad \frac{|n|_N}{|S^* n|_N} \leq \frac{4|a|}{k|Qa|}$$

Nous avons supposé que $(\mu I - B)$ est régulier et par suite, comme nous l'avons noté plus haut, il en est de même de Q . Ceci implique que le membre droit de (3.15.) est borné et par conséquent que l'inverse de S^* est borné ; ce qui montre que le cas (b)" ne peut avoir lieu. La régularité de $S^*(i\bar{\mu})$ est ainsi démontrée.

L'inégalité (3.15.) peut s'exprimer ainsi :

$$(3.15.)' \quad |S^{*-1}(i\bar{\mu})|_N \leq \frac{4}{k} |Q^{-1}(\mu)|$$

en tous les points N de $\rho(B)$ où $\text{Re } \mu < 0$.

Finalement, nous nous intéressons à la condition suffisante du théorème 3.2. (ii) : nous devons montrer que si μ_0 est imaginaire pur et appartient à $\rho(B)$, alors $S(z)$ est analytique au point $\sigma_0 = i\bar{\mu}_0$. Puisque l'ensemble

résolvant est ouvert, tous les points μ suffisamment proches de μ_0 appartiennent aussi à $\rho(B)$ et par suite, comme ci-dessus, $Q(\mu)$ sera régulier pour de tels μ et

$$(3.16.) \quad \begin{aligned} Q^{-1}(\mu) &= - (KI - B)(\mu I - B)^{-1}(K - \mu) \\ &= (\mu - K)I - (K - \mu)^2(\mu I - B)^{-1} \end{aligned}$$

est uniformément borné en norme au voisinage de μ_0 . D'après l'inégalité (3.15.) ceci implique que $S^{-1}(z)$ est uniformément borné pour tout z dans le demi-plan inférieur qui est assez proche de $\sigma_0 = i\bar{\mu}_0$. En plus, le lemme 1.3. garantit, quand c'est le cas, que $S(z)$ est analytique en σ_0 .

Notre démonstration du théorème 3.2. est complète modulo la démonstration du lemme 3.2.

Afin d'établir le lemme 3.2., nous avons pour un n donné de N , à construire un élément a de K tel que l'inégalité (3.13.) ait lieu.

Nous rappelons de la démonstration du théorème 3.1. que si n était tel que $S^*(i\bar{\mu})n = 0$ alors nous pourrions choisir l'élément a comme le vecteur propre de B et par suite de $Z(t)$; dans ce cas, la représentation de translation sortante de a serait $f(s) = \exp(-\mu s)n$ pour $s \leq 0$ et $= 0$ pour $s > 0$. Nous ferons le même choix pour un n en général mais puisque, dans ce cas, la fonction exponentielle précédente ne représente pas un élément de K , nous prenons pour a l'élément qui lui est le plus proche dans K , nommément sa projection orthogonale sur K .

Nous allons opérer dans la représentation spectrale sortante où la fonction exponentielle devient par la transformation de Fourier :

$$e = e(n, \mu) = M \frac{n}{i\sigma - \mu} \quad M = (2 \operatorname{Re} \mu)^{1/2} ;$$

le facteur normalisant M est choisi de sorte que :

$$|e| = |n|_N .$$

Maintenant nous décomposons e comme

$$(3.17.) \quad e = a + b,$$

$a \in R$ et b étant orthogonal à R mais dans A_- ; ainsi b est dans l'image SA_- de D_- .

Il est clair que a et b peuvent se déterminer expliciter ; pour cela, multiplions (3.17.) par $S^*(\sigma)$:

$$(3.18.) \quad S^*e = S^*a + S^*b .$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, b est la forme Sc d'un c de A_- . Puisque S est unitaire, $S^*S = I$ et ainsi, $S^*b = c$. D'autre part, le lemme 1.1. affirme que S^*a appartient à A_+ si a est dans R . Ainsi, (3.18.) est la décomposition orthogonale de $S^*e = M(i\sigma - \mu)^{-1} S^*(\sigma)n$ en ses composantes de A_+ et A_- . Cette décomposition peut se voir comme

$$(3.19.) \quad M \frac{S^*(\sigma)n}{i\sigma - \mu} = M \frac{S^*(\sigma)n - S^*(i\bar{\mu})n}{i\sigma - \mu} + M \frac{S^*(i\bar{\mu})n}{i\sigma - \mu} .$$

Le premier terme à droite est la valeur limite de $M(iz - \mu)^{-1} [S^*(z)n - S^*(i\bar{\mu})n]$ et appartient à A_+ par le théorème de Paley-Wiener ; il est évident que le second terme appartient à A_- .

La norme de S^*b peut se calculer à partir de (3.19.) pour être $|S^*(i\bar{\mu})n|_N$ et puisque S^* est unitaire, c'est égal à la norme de b :

$$(3.20.) \quad |b| = |S^*(i\bar{\mu})n|_N .$$

Par la relation de Pythagore et (3.17.), nous avons :

$$(3.21.) \quad |a|^2 = |n|_N^2 - |S^*(i\bar{\mu})n|_N^2 .$$

Il est clair, à partir de la relation de translation sortante de $U(t)$ que la fonction exponentielle est une fonction propre de $P_+U(t)$ i.e.

$P_+U(t)e = \exp(\mu t)e$. En appliquant $P_+U(t) - \exp(\mu t)I$ à (3.17.), nous avons

$$(3.22.) \quad 0 = [Z(t) - e^{\mu t}I]a + [P_+U(t) - e^{\mu t}I]b .$$

Evidemment,

$$|P_+U(t) - \exp(\mu t)I| \leq |P_+U(t)| + |\exp(\mu t)| \leq 2 ;$$

et ainsi, nous concluons de (3.22.), en employant (3.20.), que

$$(3.23.) \quad |[Z(t) - e^{\mu t}I]a| = |[P_+U(t) - e^{\mu t}I]b| \leq 2|b| = 2|S^*(i\bar{\mu})n|_N .$$

Nous avons aisément :

$$(3.24.) \quad |[Z(t) - e^{\mu t}I]a| \leq 2|a| .$$

Prenons un vecteur unitaire n . Si $|S^*(i\bar{\mu})n|_N \geq 1/2$, alors (3.24.) implique l'inégalité désirée (3.13.) ; si $|S^*(i\bar{\mu})n|_N \leq 1/2$, alors il découle de (3.21.) que $|a| > 1/2$ et ainsi nous avons de (3.23.) que

$$|[Z(t) - e^{\mu t} I]a| \leq 2|S^*(i\bar{\mu})n|_N \leq 4|S^*(i\bar{\mu})n|_N |a|$$

qui est encore l'inégalité (3.13.) Ceci complète la démonstration du lemme 3.2. et par suite, le théorème 3.2.

4. Un théorème d'application spectrale.

Le prochain résultat dont nous aurons besoin est le théorème d'application spectrale connue à partir de la théorie des semi-groupes d'opérateurs (Philipps [1]).

Nous allons commencer par quelques mots sur le calcul fonctionnel pour le générateur infinitésimal B du semi-groupe $\{Z(t)\}$. Soit $m(dt)$ une mesure complexe sur les sous-ensembles de Borel des réels non négatifs à mesure totale finie. Sa transformée de Laplace

$$(4.1.) \quad g(\mu) = \int_0^{\infty} e^{\mu t} m(dt), \quad \text{Re } \mu < 0$$

est analytique dans le demi-plan gauche et continue jusqu'à l'axe imaginaire.

Définition 4.1.- Si $g(\mu)$ est une fonction de la forme (4.1.), nous définissons $g(B)$ de la manière suivante :

$$(4.2.) \quad g(B) = \int_0^{\infty} Z(t) m(dt).$$

Cette correspondance définit un homomorphisme des transformées de Laplace dans

l'algèbre des opérateurs linéaires bornés.

Lemme 4.1. - Si $g_i(B)$ correspond à la mesure $m_i(dt)$ comme dans (4.2.) pour $i = 1, 2, 3$ et si $m_3 = m_1 * m_2$, alors

$$g_3(B) = g_1(B) g_2(B) .$$

Démonstration : Ce résultat découle directement de l'identité

$$\begin{aligned} g_3(B) &= \int_0^\infty Z(r) [m_1 * m_2](dr) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty Z(t+s) m_1(dt) m_2(ds) \\ &= g_1(B) g_2(B) . \end{aligned}$$

Nous allons maintenant prouver le théorème d'application spectrale suivant :

Théorème 4.1. - Si μ_0 appartient au spectre de B , alors $g(\mu_0)$ appartient au spectre de $g(B)$.

Démonstration : Comme nous l'avons vu, $\operatorname{Re}[\sigma(B)] \leq 0$.

Supposons premièrement que $\operatorname{Re} \mu_0 < 0$; alors d'après le théorème 3.2., l'opérateur $S^*(i\bar{\mu}_0)$ est singulier. Comme dans la preuve du théorème 3.2., il y a trois possibilités :

- (a) $S^*(i\bar{\mu}_0)$ n'est pas injectif.
- (b)' L'image de $S^*(i\bar{\mu}_0)$ n'est pas dense dans N .
- (b)" $S^{*-1}(i\bar{\mu}_0)$ n'est pas borné.

Si (a) [ou (b)'] est valable, alors il découle du théorème 3.1. que B [ou B^*] a une fonction propre avec μ_0 [ou $\bar{\mu}_0$] pour valeur propre. Cette fonction propre correspond à un exponentiel (à support $]-\infty, 0]$ [ou $(0, \infty)$] dans la représentation de translation sortante (ou entrante) qui montre que c'est aussi une fonction propre de $g(B)$ [ou $g(B)^*$] avec la valeur propre $g(\mu_0)$ ou $\overline{g(\mu_0)}$ ⁽¹⁾. Ce qui prouve les propositions dans les cas (a) ou (b)'.

Nous allons maintenant montrer que (b)'' est incompatible avec la régularité de $[g(B) - g(\mu_0)I]$. Par définition,

$$g(B) - g(\mu_0)I = \int_0^{\infty} [Z(t) - \exp(\mu_0 t)I] m(dt) .$$

D'après le lemme 3.2., étant donné un vecteur unitaire n de N , il existe un élément non nul a de K tel que l'inégalité (3.13.) soit satisfaite. L'expression $|[g(B) - g(\mu_0)I]a|$ peut s'évaluer à l'aide de cette inégalité comme :

$$|[g(B) - g(\mu_0)I]a| \leq 4M |S^*(i\bar{\mu}_0)n|_N |a| \quad \text{où } M = \int_0^{\infty} |m(dt)| .$$

Puisque n est unitaire, ceci peut se réécrire :

$$(4.3.) \quad \frac{|n|_N}{|S^*(i\bar{\mu}_0)n|_N} \leq 4M \frac{|a|}{|[g(B) - g(\mu_0)I]a|}$$

Si $[g(B) - g(\mu_0)I]$ est régulier alors le membre de droite est borné pour tout a et le membre de gauche sera borné pour tout n de N , ce qui contredit (b)''.

Nous notons que la relation (4.3.) peut s'exprimer comme :

(1) Notons que $g(B)^* = h(B^*)$ où $h(N) = \int_0^{\infty} e^{\mu t} \bar{m}(dt) = \overline{g(\bar{\mu})}$.

$$(4.4.) \quad |S^{-1}(i\bar{\mu}_0)|_N \leq 4M | [g(B) - g(\mu_0)I]^{-1} |.$$

Finalemment, si $\text{Re } \mu_0 = 0$, et $[g(B) - g(\mu_0)I]$ régulier, alors, puisque l'ensemble résolvant est ouvert pour $g(B)$ et que la résolvante même est continue, et puisque $g(\mu)$ est continue jusqu'à l'axe imaginaire, il y aura un voisinage de μ_0 tel que $| [g(B) - g(\mu)]^{-1} |$ soit borné pour tout μ , à $\text{Re } \mu < 0$, dans ce voisinage. D'après (4.4.), $|S^{-1}(i\bar{\mu})|$ sera borné dans le même ensemble et par conséquent, par le lemme 1.3., $S(z)$ sera analytique dans un voisinage de $i\bar{\mu}_0$. Dans ce cas, le théorème 3.2. s'applique et nous voyons que $[\mu_0 I - B]$ est nécessairement régulier.

Ceci conclut la démonstration du théorème 4.1. '/*.

De (4.4.) nous déduisons :

Corollaire 4.1.- Si λ appartient à $\rho[g(B)]$, alors $S(z)$ est régulier et son inverse uniformément borné en tous les points $i\bar{\mu}$ pour lesquels $g(\mu) = \lambda$ et $\text{Re } \mu \leq 0$.

Théorème 4.2.- Si pour une fonction g analytique dans le spectre de B et de la forme (4.1.) le générateur $g(B)$ est compact, alors B a un spectre-point pur excepté peut-être pour ces valeurs de μ_0 pour lesquelles $g(\mu_0) = 0$. Le spectre de B ne peut avoir que ces points pour points d'accumulation.

Démonstration : Supposons que μ est dans $\sigma(B)$ et posons $\lambda = g(\mu)$. Alors, par le théorème d'application spectrale, λ appartient à $\sigma[g(B)]$. Puisque $g(B)$ est un opérateur compact, son spectre consiste en un ensemble dénombrable de points avec uniquement un zéro au point d'accumulation éventuel. Si $g(\mu) = \text{constante}$, alors $g(B) = \text{constante}$. I ne peut être compact que lorsque K est de dimension finie dans quel cas le théorème est vrai de manière triviale. Autrement, g est non constante et analytique dans le spectre de B

et par suite l'équation

$$(4.5.) \quad g(\mu) = \lambda$$

a au plus un nombre dénombrable de solutions dans $\sigma(B)$; ce qui montre que le spectre de B est dénombrable. En plus, si la suite $\{\mu_n\}$ appartient à $\sigma(B)$ et converge vers μ_0 alors puisque g est analytique les sous-ensembles infinis des $g(\mu_n)$ sont distincts de sorte que $g(\mu_0)$ est un point d'accumulation du spectre de $g(B)$ et par suite $g(\mu_0) = 0$, ce qui montre que le spectre de B est un ensemble de points dénombrable dont les seuls points d'accumulation sont ces valeurs μ_0 pour lesquelles $g(\mu_0) = 0$.

Il reste à montrer que le spectre de B est un spectre-point pur excepté probablement pour les valeurs μ_0 pour lesquelles $g(\mu_0) = 0$. Maintenant, pour $\lambda \neq 0$, dans le spectre de $g(B)$, l'opérateur $[\lambda I - g(B)]$ a un noyau de dimension finie N_λ . Les opérateurs $Z(t)$ commutent avec $g(B)$ et par conséquent N_λ est un sous-espace invariant de $Z(t)$ (Lemme de Schur). D'après la théorie spectrale élémentaire des semi-groupes d'opérateurs sur un espace de dimension finie, N_λ appartient au domaine de B et est un sous-espace invariant de B . Par conséquent, N_λ contient un vecteur propre x de B :

$$Bx = \nu x .$$

En clair, $Z(t)x = \exp(\nu t)x$ et ainsi $g(B)x = g(\nu)x$. Puisque N_λ consiste en tous les vecteurs propres de $g(B)$ pour la valeur propre λ , il s'ensuit que :

$$(4.6.) \quad g(\nu) = \lambda .$$

Soit k un point quelconque dans le demi-plan à droite et définissons g_k par :

$$g_k(\mu) = \frac{1}{k-\mu} g(\mu) .$$

La fonction g_k est le produit de deux fonctions toutes analytiques dans le spectre de B et de la forme (4.1.) de sorte que g_k est-elle même de la forme $g_k(B) = (kI - B)^{-1} g(B)$. L'opérateur $g_k(B)$ est compact, comme produit de deux opérateurs bornés dont l'un, $g(B)$, est compact. Par conséquent, les résultats trouvés plus haut s'appliquent aussi à la fonction g_k . Ainsi, pour μ dans $\sigma(B)$, $g_k(\mu)$ appartient à $\sigma[g_k(B)]$ et il existe une valeur propre v_k dans le spectre-point de B tel que

$$g_k(v_k) = g_k(\mu) .$$

En employant la définition de g_k et l'abréviation λ pour $g(\mu)$, nous pouvons déjà déduire de la partie antérieure que :

$$(4.7.) \quad g(v_k) = \frac{k-v_k}{k-\mu} \lambda .$$

Puisque v_k est une valeur propre de B et que le spectre de B comme il a été montré plus haut, est un ensemble dénombrable de points, il doit y avoir une valeur de v qui égale v_k pour un ensemble non dénombrable de k . Mais alors, il découle de (4.7.) que :

$$\frac{k-v}{k-\mu} \lambda$$

est indépendant de k sur cet ensemble non dénombrable et puisque $\lambda \neq 0$, nous concluons que $v = \mu$. Ainsi, nous avons montré que μ appartient au spectre-point de B .

Maintenant, nous pouvons prouver un peu plus sous les hypothèses du théorème 4.2. pour μ dans $\sigma(B)$ de telle sorte que $g(\mu) \neq 0$:

Corollaire 4.2.- $\operatorname{Re} \mu < 0$.

Corollaire 4.3.- Le noyau de $\mu I - B$ est de dimension finie.

Corollaire 4.4.- La résolvante de B a un pôle en μ .

Corollaire 4.5.- Si $g(\mu)$ n'a pas de zéro dans le spectre de B , alors la résolvante de B est méromorphe dans tout le plan. $\cdot /$.

Démonstration : Puisque μ est dans le spectre de B par le théorème précédent, il existe un vecteur propre x tel que $Z(t)x = \exp(\mu t)x$. Du fait que $Z(t)$ tend fortement vers 0 ; il est impossible à $\operatorname{Re} \mu$ d'être nul ; ce qui prouve le corollaire 4.2. Le corollaire 4.3. découle de ce que le noyau de $\mu I - B$ est un sous-espace du noyau de $[g(\mu)I - g(B)]$, et ce dernier est de dimension finie.

Démonstration du corollaire 4.4.- D'après le théorème 4.2., μ est un point isolé de $\sigma(B)$ et par suite, une singularité isolée de $(\mu I - B)^{-1}$. Il reste à montrer que c'est un pôle. Puisque $g(B)$ est compact, sa résolvante a un pôle au point $\lambda \equiv g(\mu) \neq 0$; soit m l'ordre du pôle. Alors, pour ν assez proche mais différent de λ ,

$$(4.8.) \quad |[\gamma I - g(B)]^{-1}| \leq \text{const.} \cdot |\gamma - \lambda|^{-m}.$$

Puisque g est analytique près de μ , tout point γ proche de λ peut s'exprimer comme :

$$\gamma = g(v)$$

avec v proche de μ , probablement de plus d'une façon. Si la dérivée de g a un zéro d'ordre $p-1$ alors

$$|v - \mu|^p \leq \text{const } |\gamma - \lambda|.$$

L'insertion de cette expression dans (4.8.) donne :

$$|[\gamma I - g(B)]^{-1}| \leq \text{const } |v - \mu|^{-mp}$$

et la combinaison de ceci avec l'inégalité (4.4.) (rappelons que $\text{Re } \mu < 0$) donne :

$$|S^{-1}(i\bar{v})| \leq \text{const } |v - \mu|^{-mp}.$$

En substituant cette évaluation pour S^{-1} dans l'inégalité (3.12.) donne finalement :

$$|(vI - B)^{-1}| \leq \text{const } |v - \mu|^{-mp}$$

comme l'affirme le corollaire 4.4.

Démonstration du corollaire 4.5. - Si $g(\mu)$ n'est nulle part nulle dans le spectre de B , alors ce dernier a au plus l'infini comme son seul point d'accumulation et par les corollaires précédents l'axe imaginaire appartient à l'ensemble résolvant et tout point du spectre est un pôle pour la résolvante. Par conséquent, $(vI - B)^{-1}$ est méromorphe dans tout le plan.

5. Applications de la théorie spectrale.

Les résultats des deux précédentes sections relient le comportement de la matrice de diffusion $S(z)$ aux propriétés spectrales du semi-groupe d'opérateurs $\{Z(t)\}$. Ceci ouvre deux voies : la première est d'étudier directement le comportement de la matrice de diffusion dans le demi-plan inférieur et de là obtenir des informations sur le semi-groupe ; l'autre est d'étudier directement $\{Z(t)\}$ et à partir de $\{Z(t)\}$, obtenir des informations sur la matrice de diffusion. Dans cette étude, nous suivrons la seconde voie.

Théorème 5.1.- Si pour certaines valeurs positives de T et de k , l'opérateur $Z(T) (kI - B)^{-1}$ est compact, alors B a un spectre-point pur et la matrice de diffusion $S(z)$ est holomorphe sur l'axe réel et méromorphe dans tout le plan ; elle a un pôle en tout point z tel que iz appartient au spectre de B . */.

Théorème 5.2.- Si pour une valeur T , $|Z(T)| < \alpha < 1$, alors $S(z)$ est holomorphe et borné dans la bande $\text{Im } z < -\frac{\text{Log } \alpha}{T}$. Réciproquement, si $S(z)$ est holomorphe et borné dans la bande $\text{Im } z < \gamma$, alors

$$(5.1.) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log |Z(t)| \leq -\gamma.$$

Théorème 5.3.- Si pour une valeur de T , $Z(T)$ est compact, alors la matrice de diffusion est méromorphe dans tout le plan et toute bande horizontale ne contient qu'un nombre fini de ses pôles.

Démonstration du théorème 1.- Si nous appliquons le théorème 4.2. et les corollaires 4.2. et 4.5. à la fonction $g(\mu) = \exp(\mu T)(k-\mu)^{-1}$, nous

voyons que B a un spectre-point pur et que la résolvante de B est holomorphe sur l'axe imaginaire et méromorphe dans tout le plan. Par suite, par le théorème 3.2., la matrice de diffusion $S(z)$ peut se prolonger analytiquement à travers l'axe réel, son prolongement analytique étant égal à $S^{*-1}(\bar{z})$ qui est analytique en tous les points où $S(\bar{z})$ est régulière. Finalement, de (3.12.), nous voyons que $S^{-1}(\bar{z})$ sera singulière en tout point spectral iz de B et de (3.15.)' et (3.16.), nous voyons que les singularités ne sont pas pires que celles de $(izI - B)^{-1}$.

Démonstration du théorème 5.2.- Puisque $|Z(T)| = \alpha_0 < \alpha < 1$, nous avons pour tout entier positif n

$$(5.2.) \quad |Z(nT)| = |Z^n(T)| \leq |Z(T)|^n \leq \alpha_0^n = e^{-n \beta T}$$

β étant défini comme $-(\log \alpha_0)/T$. Soit t un nombre positif quelconque et décomposons t modulo T ; ainsi écrivons $t = nT + r$, n étant un entier non négatif et $0 \leq r < T$. De (5.2.) et du fait que $|Z(r)| \leq 1$, nous obtenons :

$$(5.3.) \quad |Z(t)| = |Z(nT)Z(r)| \leq |Z(nT)| |Z(r)| \leq c e^{-\beta t}$$

où $c = \exp(\beta T)$; en d'autres termes, $Z(t)$ décroît exponentiellement. En employant cette évaluation dans l'expression de la transformée (3.1.) pour la résolvante de B , nous obtenons le résultat que $(\mu I - B)^{-1}$ est holomorphe pour $\text{Re } \mu > -\beta$ et bornée en norme dans toute bande plus petite. D'après le théorème 3.2., ceci implique que la matrice de diffusion est régulière pour $-\beta < \text{Im } z < 0$ et d'après l'inégalité (3.15.)', sa réciproque est bornée dans toute bande plus petite. Encore par le théorème 3.2., $S(z)$ est holomorphe sur l'axe réel et par suite peut se prolonger par réflexion à être holomorphe dans

la bande $0 \leq \text{Im } z < \beta$ et bornée dans toute bande plus petite.

Pour démontrer la réciproque, soit u et v des éléments de R . Alors v est dans A_- et par le lemme 1.1. $u = Sw$ où w est dans A_+ . En employant la représentation spectrale sortante pour $\{U(t)\}$ nous pouvons écrire :

$$(5.3.) \quad (Z(t)u, v) = (U(t)u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} (Sw, v)_N d\sigma .$$

Par hypothèse, l'intégrande peut s'étendre analytiquement dans la bande $\text{Im } z < \gamma$ comme $e^{izt} (S(z)w(z), v(z))_N$ et dans cette bande $|S(z)|_N \leq M_\gamma$. Choisissons $\gamma_0 < \gamma$. Il est aisé de voir que nous pouvons transformer le chemin d'intégration en la ligne $\text{Im } z = \gamma_0$ et en appliquant l'évaluation précédente de $|S(z)|_N$ et l'inégalité de Schwarz à l'intégrale ainsi transformée, nous obtenons :

$$(5.4.) \quad |(Z(t)u, v)| \leq \exp(-\gamma_0 t) M_\gamma |w| |v| = \exp(-\gamma_0 t) M_\gamma |u| |v| ;$$

ici, nous nous sommes servis du fait que l'intégrale du carré de $w(z)$ le long de la ligne $\text{Im } z = \gamma_0$ est inférieure ou égale à $|w|^2$ et du résultat analogue pour v . Puisque (5.4.) a lieu pour tout $\gamma_0 < \gamma$, il s'ensuit que

$$\limsup t^{-1} \log |Z(t)| \leq -\gamma$$

Finalement, parce que $\log |Z(t)|$ est une fonction sous-additive, la limite existe.

Démonstration du théorème 5.3. - La première partie du théorème, qui établit que $S(z)$ est méromorphe dans tout le plan découle du théorème 5.1. puisque $Z(T)(kI - B)^{-1}$ est compact si $Z(T)$ est compact. Pour prouver la

la seconde partie, nous allons faire un raisonnement indirect. Supposons qu'il y ait indéfiniment plusieurs rôles $\{\pi_j\}$ dans une bande : $\text{Im } \pi_j \leq \gamma$. Il vient encore du théorème 5.1. que $i \pi_j$ appartient au spectre de B et ainsi, par l'application spectrale $\exp(i \pi_j t)$ appartient au spectre de $Z(t)$. Choisissons t de telle sorte que t soit plus grand que T et que les nombres $\{\exp(i \pi_j t)\}$ soient tous distincts (ceci comprend un nombre dénombrable de valeurs de t). Pour un tel t , $Z(t) = Z(t - T)Z(T)$ est compact et par conséquent n'a qu'un nombre fini de points, dans son spectre, dont la valeur absolue est plus grande que $\exp(-\gamma t)$. Mais ceci contredit le fait que tous les nombres $\exp(i \pi_j t)$ appartiennent au spectre de $Z(t)$. La démonstration de la seconde partie du théorème 5.3. est ainsi complète. \cdot/\cdot .

Dans la démonstration du théorème 5.2., nous avons montré que l'hypothèse $|Z(T)| < 1$ pour une valeur de T implique que $|Z(t)|$ décroît exponentiellement. Maintenant, nous allons montrer que l'hypothèse du théorème 5.3. implique plus.

Théorème 5.4.- Si pour une valeur de T , $Z(T)$ est compact, alors le développement en fonctions propres de $Z(t)$ est asymptotiquement valable dans le sens suivant :

Rangeons les valeurs propres μ_j de B en ordre décroissant de leur partie réelle et notons P_j la projection sur le $j^{\text{ième}}$ espace propre. Alors

$$(5.5.) \quad Z(t) \sim \sum \exp(\mu_j t) P_j$$

a lieu dans le sens que pour tout $\epsilon > 0$,

$$(5.6.) \quad \left| Z(t) - \sum_{j=1}^n \exp(\mu_j t) P_j \right| \leq \text{const } |\exp((\mu_{n+1} + \epsilon)t)|,$$

la valeur de la constante dépendant de n et de ϵ .

Démonstration : Nous allons esquisser la démonstration de ce résultat.

Soit M_n le noyau de l'opérateur de projection $\sum_{j=1}^n P_j$. En clair M_n est un sous-espace invariant de $\{Z(t)\}$ et le rayon spectral de $Z(T)$ sur M_n est inférieur ou égal à $|\exp(\mu_{n+1} T)|$. Sinon il existerait une valeur propre λ , telle que $|\lambda| > \exp(\mu_{n+1} T)$, de $Z(T)$ sur M_n . Par la remarque 4.1., il y aura une valeur propre ν et une fonction propre dans M pour B avec $\lambda = \exp(\nu T)$; mais ceci est contraire à notre ordre sur le spectre de B . D'après la formule de Gelfand pour le rayon spectral, nous avons par conséquent :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |Z(T)^k|_n^{1/k} \leq |\exp(\mu_{n+1} T)|,$$

où $|\cdot|_n$ est la norme sur M_n . Puisque $Z(T)^k = Z(kT)$ et que $|Z(r)| \leq 1$, ceci montre que pour un ϵ donné et pour t suffisamment grand,

$$(5.7.) \quad |Z(t)|_n \leq \text{const} |\exp[(\mu_{n+1} + \epsilon)t]|.$$

Pour tout u de K , soit $u_n = \sum_{j=1}^n P_j u$; u_n est la projection de u sur les n premiers espaces propres. Le reste $r_n = u - u_n$ appartient à M_n . Alors u_n dépend de manière bornée de u et par conséquent il en est de même de r_n :

$$(5.8.) \quad |r_n| \leq \text{const} |u|.$$

En posant :

$$R_n(t) = Z(t) - \sum_{j=1}^n \exp(\mu_j t) P_j,$$

il vient que $R_n(t)u_n = 0$ et que $R_n(t)r_n = Z(t)r_n$. Par suite, l'emploi de (5.7.) et (5.8.) donne :

$$\begin{aligned} |R_n(t)u| &= |R_n(t)r_n| = |Z(t)r_n| \leq |Z(t)|_n |r_n| \\ &\leq \text{const} [\exp(|\mu_{n+1} + \epsilon|t)] |u|, \end{aligned}$$

ceci prouve l'inégalité (5.6.). ' /.

Si $Z(T)$ est compact, alors par le corollaire (4.2.) le spectre de B ne peut avoir des valeurs imaginaires pures. Le précédent théorème implique par conséquent le corollaire suivant :

Corollaire 5.1. - Si pour une valeur de T , l'opérateur $Z(T)$ est compact, alors $\{Z(t)\}$ décroît exponentiellement.

Dans le cas où B a des fonctions propres généralisées, la projection P_j est définie par

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} (\mu I - B)^{-1} d\mu,$$

où Γ_j est un petit cercle au tour du point μ_j et ne contenant aucun autre point de $\sigma(B)$.

6. Représentations sortantes équivalentes - Représentations entrantes équivalentes.

La matrice de diffusion est définie en termes de deux sous-espaces orthogonaux, l'un, entrant, D_- , l'autre sortant D_+ . Aux différentes paires, correspondent différentes matrices de diffusion. Il y a toutefois des paires qui sont équivalentes, dans un sens que nous préciserons. Le but de cette partie

est de montrer que les matrices de diffusion correspondant à de telles paires équivalentes diffèrent les unes des autres par des facteurs non essentiels.

Définition 6.1.- Deux sous-espaces sortants (entrants) D et D' sont dits équivalents par rapport au groupe $\{U(t)\}$ s'il existe un nombre réel T tel que

$$(6.1.) \quad U(T)D \subset D' \quad \text{et} \quad U(T)D' \subset D.$$

Nous allons besoin du concept suivant :

Définition 6.2.- Une fonction à valeur opératrice $M(z)$ s'appelle facteur trivial intérieur si :

- (i) $M(z)$ est défini et unitaire pour z réel.
- (ii) $M(z)$ peut se prolonger comme fonction analytique dans le demi-plan inférieur et y est de croissance exponentielle :

$$(6.2.) \quad |M(z)| \leq \exp(k|\operatorname{Im} z|) \quad ;$$

- (iii) $M(z)$ est régulier en tout point du demi-plan inférieur et son inverse croît au plus exponentiellement :

$$(6.3.) \quad |M^{-1}(z)| \leq \exp(k|\operatorname{Im} z|) \quad .$$

Remarque 6.1.- La condition (iii) équivaut à demander que $M(z)$ soit analytique dans le demi-plan supérieur et y soit de croissance exponentielle (voir lemme 1.3.).

Remarque : Les facteurs intérieurs triviaux forment un groupe.

Théorème 6.1.- Soit D et D' deux sous-espaces entrants [sortants] équivalents. Alors il existe un facteur intérieur trivial $S(z)$ tel que les représentants spectraux a et a' de tout élément f de H par rapport aux représentations spectrales de D et D' respectivement soient reliés par :

$$(6.4.) \quad a'(\sigma) = M(\sigma)a(\sigma) .$$

Démonstration : Puisque a et a' sont des représentants d'un même élément f dans deux représentations spectrales entrantes différentes [sortantes différentes], il vient qu'ils sont reliés par un opérateur unitaire M qui commute avec $U(t)$. Aussi découle-t-il de l'équivalence supposée de D et D' que $e^{iT\sigma}M(\sigma)$ et $e^{iT\sigma}M^{-1}(\sigma)$ appliquent, tous les deux, A_- [A_+] dans lui-même pour une valeur de T . D'après le théorème de Fourès et Segal (Théorème 4.1. chapitre II), tous les deux opérateurs peuvent se réaliser comme des matrices de diffusion, ceci comme fonctions à valeur opératrices, unitaires pour z réel, analytiques et bornées dans le demi-plan inférieur. De plus, leur produit est égal à $\exp(2i T\sigma)I$ sur l'axe réel et ainsi peut se prolonger analytiquement comme $\exp(2i Tz)I$; en particulier, leur produit est égal à $\exp(2i Tz)$ dans le demi-plan inférieur. Ceci montre que $M(z)$ est un facteur intérieur trivial et ceci complète la démonstration du théorème 6.1.

On a une conséquence immédiate :

Théorème.- Si D_-, D'_- et D_+, D'_+ sont des paires de sous-espaces entrants et sortants équivalents, D_- orthogonal à D_+ et D'_- orthogonal à D'_+ , alors les matrices de diffusion associées sont reliées par la relation suivante :

$$(6.5.) \quad S' = M_+ S M_-^{-1}$$

où M_- et M_+ sont les facteurs intérieurs triviaux reliant respectivement a_- à a'_- et a_+ à a'_+ .

Puisque les facteurs intérieurs triviaux sont inversibles pour tout z , la formule (6.5.) montre que les matrices de diffusion $S(z)$ et $S'(z)$ sont régulières aux mêmes points du demi-plan ; et que, aux points où elles sont singulières les dimensions de leur noyau, aussi bien que les codimensions de leur image (i.e. les noyaux de $S^*(z)$ et $S'^*(z)$) sont respectivement égales.

Puisque la situation des points z où la matrice de diffusion est singulière détermine le spectre du générateur infinitésimal du semi-groupe correspondant par le théorème 3.2. et puisque d'après le corollaire 3.2. la dimension du noyau de la matrice de diffusion égale la dimension de l'espace propre correspondant du générateur du semi-groupe, nous avons :

Théorème 6.3.- Soit D_-, D'_- et D_+, D'_+ deux paires de sous-espaces entrants et sortants orthogonaux et équivalents et soit $\{Z(t)\}$ et $\{Z'(t)\}$ les semi-groupes liés à ces espaces. Alors les générateurs de $\{Z(t)\}$ et $\{Z'(t)\}$ ont le même spectre et les espaces propres correspondants ont la même dimension. \cdot/\cdot .

Non seulement, les valeurs propres mais aussi les vecteurs propres des semi-groupes équivalents sont reliés.

Théorème 6.4.- En plus des hypothèses du théorème 6.3., supposons que D_- et D_+ contiennent respectivement D'_- et D'_+ . Si μ est une valeur propre de B , alors l'opérateur P_+ applique le noyau de $\mu I - B'$ sur le noyau de $\mu I - B$ de façon injective.

Démonstration : Puisque par le théorème 6.3., les noyaux de $\mu I - B$ et $\mu I - B'$ sont de même dimension, il suffit de montrer que : si f' est un vecteur propre de B' , alors

$$(6.6.) \quad f = P_+ f'$$

est un vecteur propre non nul de B correspondant à la même valeur propre.

Dans un premier temps, montrons que f définie par (6.6.) appartient au domaine K de $Z(t)$, i.e. que f est orthogonal à D_+ et D_- . Par construction, f est orthogonale à D_+ . Pour prouver qu'elle est aussi orthogonale à D_- , nous employons le lemme suivant :

Lemme 6.1.- f' est orthogonale à D_- .

Démonstration du lemme.- Soit g dans D_- . Nous voulons montrer que $(f', g) = 0$. Puisque f' est un élément propre de B' , nous avons :

$$Z'(T)f' = e^{\mu T} f' .$$

d'où nous tirons :

$$(6.7.) \quad \begin{aligned} e^{\mu T}(f', g) &= (e^{\mu T} f', g) = (Z'(T)f', g) \\ &= (P_+ U(T)f', g) = (f', U(-T)P_+ g). \end{aligned}$$

Maintenant g appartient à D_- et est par conséquent orthogonal à D_+ et puisque D_+ contient D'_+ , g est a fortiori orthogonal à D'_+ ; ainsi $P'_+ g = g$. D'autre part, D_- est équivalent à D'_- et, par suite, pour t assez grand, $U(-T)$ applique D_- dans D'_- . De là, vient que pour T assez

grand, $U(-T)P_+ g$ appartient à D'_- . Mais puisque f' appartient au domaine K' de $Z'(t)$, il est orthogonal à D'_- . Ceci montre que le produit scalaire à l'extrême droite de (6.7.) est nul et par suite démontre le lemme.

Puisque f est définie comme $P_+ f'$, nous pouvons écrire que

$$(6.8.) \quad f = f' + h, \quad h \in D_+$$

d'où h orthogonal à D_- et par le lemme 6.1., il en est de même de f' ; par conséquent, f lui-même est orthogonal à D_- et par conséquent appartient à K .

Pour montrer que f est un vecteur propre de B , nous procédons comme suit : de (6.8.), nous tirons :

$$Z(t)f = Z(t)f' + Z(t)h = Z(t)f',$$

puisque h est dans D_+ et que $Z(t)$ annule D_+ . Maintenant, D_+ contient D'_+ et par suite $P_+ = P'_+ P_+$ comme $P_- = P'_- P_-$. Ainsi :

$$Z(t) = P_+ U(t)P_- = P_+ P'_+ U(t)P'_- P_- = P_+ Z'(t)P_-$$

et ainsi

$$Z(t)f = Z(t)f' = P_+ Z'(t)f' = P_+ [\rho^{\mu t} f'] = \mu^t f.$$

Il reste à montrer que f est non nulle. Nous notons que h dans D_+ implique que $U(T)h$ est dans D'_+ et par suite que

$$Z'(T)h = P'_+ U(T)h = 0$$

Ainsi, $Z'(T)f = Z'(T)f' - Z'(T)h = \exp(\mu^T)f' \neq 0$, d'où $f \neq 0$. Ce qui complète la démonstration du théorème 6.4.

SOLUTION DE L'EQUATION D'ONDE

DANS UN ESPACE LIBRE

1. L'espace de Hilbert H_0 et le groupe $\{U_0(t)\}$.

Les éléments de H_0 sont les données de Cauchy de l'équation d'onde, i.e. des paires de fonctions à valeur complexe définies sur R_n :

$$f = \{f_1, f_2\}.$$

Soient f_1 et f_2 des fonctions régulières à support compact ; nous définissons la norme de l'énergie par :

$$|f|_E = \frac{1}{2} \int_{R_n} \{|\partial_x f_1|^2 + |f_2|^2\} dx ;$$

L'intégration est étendue à tout R_n et $|\partial_x f_1|^2$ signifie $\sum_{j=1}^n |\partial f_1 / x_j|^2$. Le produit scalaire correspondant sera noté $(f, g)_E$. H_0 est

défini comme le complété des paires de fonctions f dans la norme de l'énergie. Par conséquent, les éléments de H_0 se présentent comme des paires de vecteurs dont le second est une fonction de carré intégrable et dont le premier appartient au complété de C_0^∞ dans la norme $\{ \int |\partial_x f_1|^2 \}^{1/2}$. Il est intéressant de savoir que :

Lemme 1.1. - Si la dimension de l'espace est supérieure à 2, alors la première composante de tout élément de H_0 est une fonction de carré intégrable localement.

Démonstration : La démonstration est basée sur l'inégalité suivante pour les fonctions $f_1 \in C_0^\infty$:

$$(1.2.) \quad \int_{|x| \leq R} |f_1|^2 dx \leq \frac{R^2}{2(n-2)} \int |\partial_x f_1|^2 dx$$

qui peut se déduire comme suit :

$$f_1(x) = - \int_{|x|}^{\infty} \partial_r f_1 \left(r \frac{x}{|x|} \right) dr.$$

Par l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned} |f_1(x)|^2 &\leq \left(\int_{|x|}^{\infty} r^{1-n} dr \right) \left(\int_{|x|}^{\infty} |\partial_r f_1|^2 r^{n-1} dr \right) \\ &= \frac{|x|^{2-n}}{n-2} \int_{|x|}^{\infty} |\partial_r f_1|^2 r^{n-1} dr. \end{aligned}$$

L'intégration par rapport à $w = \frac{x}{|x|}$ sur la sphère unité donne :

$$\int |f_1(Rw)|^2 dw \leq \frac{R^{2-n}}{n-2} \int_{|x| \geq R} |\partial_x f_1|^2 dx ;$$

(1.2.) s'en déduit par multiplication et par intégration. Soit $u(x,t)$ une solution de l'équation d'onde dans l'espace libre avec pour données de Cauchy f :

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

$$(1.3.) \quad u(x,0) = f_1(x), \quad u_t(x,0) = f_2(x).$$

On a le résultat suivant :

Théorème 1.1.- Soit une fonction $f \in C_0$; le problème de Cauchy (1.3.) a une solution unique C_0^∞ dont l'énergie ne dépend pas du temps t .

Démonstration : Pour prouver la conservation de l'énergie, nous multiplions l'équation d'onde (1.3.) par u_t et intégrons sur $0 \leq t \leq T$. L'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} 0 &= \iint u_t (u_{tt} - u_{xx}) dx dt = \iint (u_t u_{tt} + u_{tx} u_x) dx dt - \int (u_t u_x) dt \\ (1.4.) &= \iint (u_t u_{tt} + u_{tx} u_x) dx dt = \iint \frac{1}{2} (u_t^2 + u_x^2)_t dx dt \\ &= \frac{1}{2} \left| \int (u_t^2 + u_x^2) dx \right|_0^T, \end{aligned}$$

ce qui montre que l'énergie est indépendante du temps.

La seconde égalité dans (1.4.) donne la troisième égalité qui est une conséquence de la vitesse finie du signal qui découle du :

Théorème 1.2.- Supposons les données f nulles dans la boule $|x - x_0| < R$; alors la solution $u(x,T)$ du problème de Cauchy (1.3.) s'annule dans la boule $|x - x_0| < R - T$.

La démonstration de ce théorème se fait de la même manière que celle

sur la conservation de l'énergie, excepté que l'intégration se fait sur le cône tronqué $|x - x_0| < R - t$, $0 \leq t \leq T$.

Le théorème 1.2. affirme qu'aucun signal n'est propagé à une vitesse supérieure à l'unité. Le théorème suivant affirme que si la dimension de l'espace est impair, alors aucun signal n'est transmis à une vitesse inférieure à l'unité :

Théorème 1.3. - Supposons les données de Cauchy nulles pour $|x - x_0| > R$, alors la solution $u(x,t)$ du problème de Cauchy est nulle pour $|x - x_0| < |t| - R$.

La démonstration sera donnée plus loin.

En combinant les deux résultats précédents, nous obtenons le célèbre principe de Huygens :

Principe de Huyghens : La valeur d'une solution $u(x,t)$ de l'équation d'onde au point (x,t) ne dépend que des valeurs des données de Cauchy et de leurs dérivées aux points de la sphère $|x - x_0| = t$.

Nous définissons l'opérateur $U_0(t)$ comme l'application qui, aux données de Cauchy de l'équation d'onde, fait correspondre les données de la solution au temps t :

$$U_0(t) : \{f_1, f_2\} \rightarrow \{u(t), u_t(t)\}.$$

Il découle des théorèmes 1.1. et 1.2. que l'opérateur $U_0(t)$ tel qu'il est défini applique les données C_0^∞ dans les données C_0^∞ , forme un groupe à un paramètre et conserve l'énergie. Il peut donc s'étendre par prolongement à tout H_0 et définit un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires sur H_0 .

D'après le théorème de Stone, tout groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires à un générateur infinitésimal qui est anti-symétrique. Soit A_0 le générateur infinitésimal de $U_0(t)$. En clair, toute fonction $f \in C_0^\infty$ appartient au domaine de A et pour un tel f , on a

$$\begin{aligned} A_0 f &= \left. \frac{d}{dt} U_0(t)f \right|_{t=0} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} u_t \\ \Delta u \end{pmatrix} \Big|_{t=0} \\ &= \begin{pmatrix} f_2 \\ \Delta f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} f \end{aligned}$$

Plus généralement, A_0 est la fermeture de l'opérateur différentiel matriciel

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

défini originellement dans C_0^∞ . Puisque, d'après le théorème 1.2., les signaux se propagent à une vitesse finie, le problème de Cauchy (1.3.) peut se résoudre pour toute donnée $f \in C^\infty$ arbitraire qui n'est assujettie à aucune restriction, même à l'infini. Une extension est même possible en admettant les distributions comme données initiales ; dans ce cas, les solutions sont aussi des distributions :

Théorème 1.4. - Etant donnée une paire de distributions f_1 et f_2 , il existe une distribution unique $U(t)$ solution de l'équation d'onde à données initiales f dans le sens suivant : pour toute fonction $\phi(x) \in C_0^\infty$,

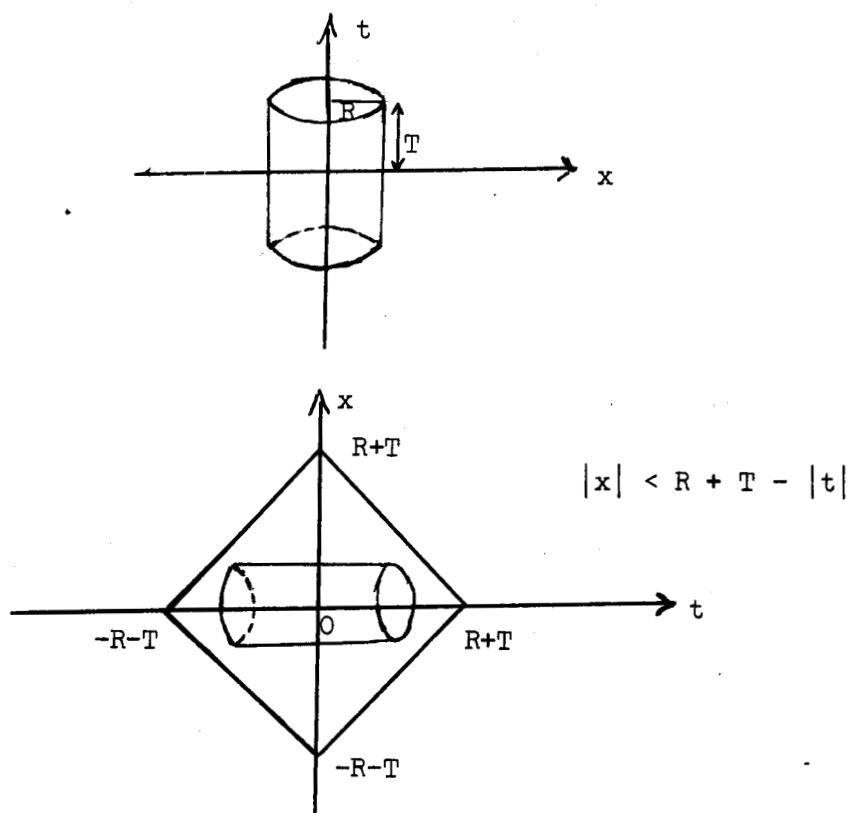
(u, ϕ) est une fonction C^∞ de t , égale à (f_1, ϕ) en $t = 0$ et dont la dérivée à l'instant initial est égale à (f_2, ϕ) .

Démonstration : Le théorème 1.4. est le dual du théorème d'existence 1.1. pour les données C_0^∞ .

Soit W l'opérateur qui, à f , fait correspondre u à données f .

Théorème 1.5. (ou th. d'unicité de Holmgren) -

Soit $u(x, t)$ une solution de l'équation d'onde qui s'annule à l'intérieur du cylindre $|x| < R$, $|t| \leq T$. Alors $u(x, t)$ s'annule pour $|x| < R + T - |t|$.



Démonstration : La démonstration se fait par le développement harmonique (ou voir Hörmander p. 123-126).

2. Représentation de translation et représentation spectrale pour $\{U_0(t)\}$.

Soit D_+ [respectivement D_-] l'ensemble des f de H_0 tels que les solutions correspondantes $u = Wf$ de l'équation d'onde s'annule dans le cône d'avenir [resp. du passé] :

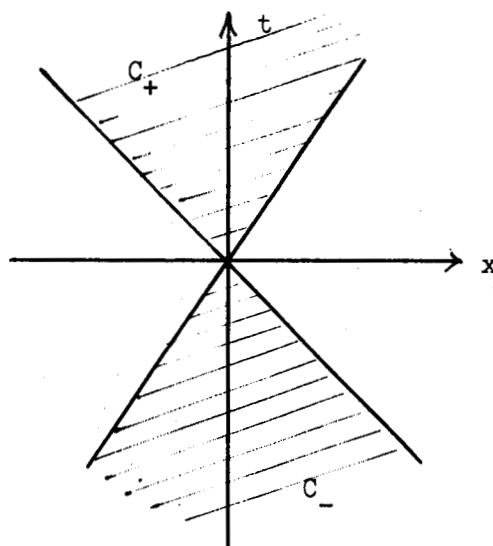
$$(2.1.) \quad |x| < t \quad [|x| < -t]$$

D_+ ainsi défini est sortant, i.e. que D_+ est fermé et satisfait les conditions

(i) $U_0(t)D_+ \subset D_+$ pour $t > 0$,

(ii) $\bigcap U_0(t)D_+ = \{0\}$,

(iii) $\overline{\bigcup U_0(t)D_+} = H$;



D_- satisfait les conditions entrantes analogues. La fermeture de D_+ découle de l'estimation du lemme 1.1. La propriété (i) est clairement établie puisque si $u(x,t) = Wf$ s'annule dans le cône (2.1.) alors pour $s > 0$, $W U_0(s)f = u(x,t+s)$ s'annule dans le cône plus grand $|x| < t+s$. Ceci montre que $U_0(s)D_+$ s'annule pour $|x| < s$; d'où découle (ii).

Pour vérifier (iii), nous employons le principe de Huyghens pour conclure que si f est nulle pour $|x| \leq R$, alors $u(x,t) = Wf$ est nulle pour $|x| < t - R$; ce qui implique que $U_0(R)f = g$ appartient à D_+ et par suite $U_0(-R)D_+$ inclut toutes les données à support compact dans la boule $|x| \leq R$. Puisque H_0 est le complété des données à support compact, (iii) s'ensuit.

Nous pouvons donc appliquer les résultats du premier chapitre et conclure qu'il existe des représentations de translation entrante et sortante pour le groupe $\{U_0(t)\}$. Nous montrerons plus loin l'orthogonalité de D_- et D_+ et leur complémentarité :

$$D_+ \oplus D_- = H_0.$$

Les étapes de la présente démonstration seront inversées. Nous allons construire une représentation de translation particulière pour $\{U_0(t)\}$ et nous allons vérifier que les sous-espaces entrant et sortant associés à cette représentation sont D_+ et D_- définis ci-dessus. La représentation de translation sera obtenue par la transformation d'une représentation spectrale de $\{U_0(t)\}$.

D'après la théorie spectrale générale, la représentation spectrale d'une fonction f de H_0 est donnée par le produit scalaire de fonctions propres ϕ_σ du générateur infinitésimal A_0 de $\{U_0(t)\}$:

$$\tilde{f}_\sigma = (f, \phi_\sigma)_E,$$

où ϕ_σ satisfait l'équation de la valeur propre

$$(2.2.) \quad A_0 \phi_\sigma = i\sigma \phi_\sigma.$$

Nous avons déterminé la forme de A_0 dans la première partie :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Cet opérateur n'a pas de fonctions propres spécifiques ; toutefois, parmi ces fonctions propres non spécifiques mais bornées, il y a les fonctions :

$$(2.3.) \quad \phi_{\sigma,w} = \exp(-i\sigma xw) \{1, i\sigma\} \quad (|w| = 1).$$

\tilde{f} sera de même une fonction à la fois de σ et de w . Nous pouvons considérer \tilde{f} comme une fonction de σ à valeur dans l'espace auxiliaire $N = L_2(S_{n-1})$. Nous noterons le L_2 -produit scalaire sur $\mathbb{R} \times S_{n-1}$ par les crochets :

$$[\tilde{f}, \tilde{g}] = \iint \tilde{f}(s,w) \overline{\tilde{g}(s,w)} ds dw.$$

Pour rendre la représentation spectrale unitaire, les valeurs propres doivent être affectées des coefficients convenables ; ces coefficients sont de la forme $\sigma^{(n-3)/2}$ (n impair comme dans tout ce chapitre).

Théorème 2.1. - La fonction \tilde{f} définie par

$$(2.4.) \quad \tilde{f}(\sigma,w) = (-i\sigma)^{(n-3)/2} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (f, \phi_{\sigma,w})_E,$$

où $\phi_{\sigma,w}$ est donné par (2.3.), est une représentation spectrale unitaire de H_0 pour $\{U_0(t)\}$.

Avant la démonstration de ce théorème, nous allons établir l'expression explicite de la représentation de translation correspondante :

Théorème 2.2. - Soit k la représentation de translation de f dans S (ensemble des fonctions tempérées) déduite de la représentation spectrale (2.4.) par la transformation de Fourier ; alors k et f s'expriment en fonction l'un

de l'autre par les formules suivantes :

$$(2.5.) \quad k(s,w) = -\partial_s^{(n+1)/2} M_1 + \partial_s^{(n-1)/2} M_2$$

où M_1 et M_2 sont définies par les intégrales suivantes sur les hyperplans :

$$(2.6.) \quad M_1(s,w) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_{x \text{ w=s}} f_1(x) dS$$

$$M_2(s,w) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_{x \text{ w=s}} f_2(x) dS.$$

Réciproquement,

$$(2.7.) \quad f_1(x) = S(x) \quad , \quad f_2(x) = S'(x)$$

où S, S' sont définies par les intégrales suivantes sur les sphères :

$$(2.8.) \quad \left\{ \begin{array}{l} S(x) = \int h(xw,w) dw \\ S'(x) = \int h'(xw,w) dw \end{array} \right.$$

où h et h' sont les fonctions suivantes :

$$(2.9.) \quad h(s,w) = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} (-\partial_s)^{(n-3)/2} k$$

$$h'(s,w) = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} (-\partial_s)^{(n-1)/2} k.$$

Démonstration du théorème 2.1. - Soit $f \in S$, i.e. C^∞ et tel que toutes les dérivées de f tendent vers 0 à l'infini plus vite que toutes les puissances de $|x|^{-1}$. Il s'ensuit que \tilde{f} définie par (2.4.) appartient aussi à S . Soit \tilde{h} le représentant de $A_0 f$; nous obtenons par intégration par parties et du fait que ϕ est une fonction propre de A_0 que :

$$\begin{aligned} \tilde{h} &= (A_0 f, \phi)_E = - (f, A_0 \phi)_E = i\sigma (f, \phi)_E \\ &= i\sigma \tilde{f}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que (2.4.) est en réalité une représentation spectrale de A_0 . D'où il découle que (2.4.) aussi définit une représentation spectrale de $\{U_0(t)\}$.

Pour prouver que la représentation est isométrique, nous faisons une intégration qui convertit le produit scalaire d'énergie en L_2 -produit scalaire ;

$$\begin{aligned} (2.10.) \quad (f, \phi)_E &= \frac{1}{2} \int (\partial_x f_1 \overline{\partial_x \phi_1} + f_2 \overline{\phi_2}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int (-f_1 \overline{\Delta \phi_1} + f_2 \overline{\phi_2}) dx. \end{aligned}$$

L'emploi de la définition (2.3.) de $\phi_{\sigma, w}$ montre que

$$(2.11.) \quad \tilde{f} = - (-i\sigma)^{(n+1)/2} \tilde{f}_1 + (-i\sigma)^{(n-1)/2} \tilde{f}_2.$$

où

$$(2.12.) \quad \tilde{f}_j(\sigma, w) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f_j(x) e^{i\sigma x w} dx \quad (j = 1, 2).$$

La formule (2.12.) montre que les deux fonctions \tilde{f}_j sont des fonctions paires de (σ, w) ; il s'ensuit que les fonctions à droite de (2.11.) sont de parité opposée donc sont orthogonales :

$$(2.13.) \quad ||\tilde{f}||^2 = ||\sigma^{(n+1)/2} \tilde{f}_1||^2 + ||\sigma^{(n-1)/2} \tilde{f}_2||^2 .$$

Puisque les \tilde{f}_j sont paires :

$$(2.14.) \quad ||\sigma^{(n+1)/2} \tilde{f}_1||^2 = 2 \int_0^\infty |\tilde{f}_1(\sigma, w)|^2 \sigma^{(n+1)} d\sigma dw .$$

$$||\sigma^{(n-1)/2} \tilde{f}_2||^2 = 2 \int_0^\infty |\tilde{f}_2(\sigma, w)|^2 \sigma^{n-1} d\sigma dw .$$

Les formules (2.12.) montrent que les \tilde{f}_j peuvent s'exprimer en termes de transformées de Fourier $\hat{f}_j(\xi)$ de f_j en posant $\xi = \sigma w$; ce qui donne, avec la formule de Parseval en (2.14.) :

$$||\sigma^{(n+1)/2} \tilde{f}_1||^2 = \frac{1}{2} \int |\partial_x f_1|^2 dx$$

$$||\sigma^{(n-1)/2} \tilde{f}_2||^2 = \frac{1}{2} \int |f_2|^2 dx .$$

La substitution dans (2.13.) donne l'isométrie :

$$||\tilde{f}||^2 = |f|_E^2 .$$

Pour montrer que la représentation est non seulement isométrique mais aussi unitaire, nous devons vérifier que l'ensemble des fonctions \tilde{f} qui représente les données f de classe S est dense dans $L_2(\mathbb{R} \times S_{n-1})$. Il découle des

formules (2.11.) et (2.12.) et du fait que les deux termes à droite de (2.11.) sont de parité opposée, que si \tilde{f} est C^∞ et s'annule pour σ proche de 0, et pour σ tendant vers l'infini alors \hat{f}_1 et \hat{f}_2 sont C_0^∞ et ainsi f_1 et f_2 appartiennent à S . Puisque cette classe de fonctions \tilde{f} est dense dans $L_2(\mathbb{R} \times S_{n-1})$, la démonstration du théorème 2.1. est complète.

Démonstration du théorème 2.2.- Soit f de classe S ; faisons les intégrations de (2.12.) premièrement le long des hyperplans $xw = s$ et ensuite par rapport à s ; nous obtenons

$$(2.15.) \quad \tilde{f}_j(\sigma, w) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int M_j(s, w) e^{i\sigma s} ds \quad (j = 1, 2),$$

où M_j est donné par la formule (2.6.)

La substitution de (2.15.) dans (2.11.) donne :

$$\tilde{f}(\sigma, w) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int [-M_1(s, w)(-i)^{(n+1)/2} + M_2(s, w)(-i\sigma)^{(n-1)/2}] e^{i\sigma s} ds.$$

Une intégration par parties montre alors que f est la transformée de Fourier d'une fonction donnée par la formule (2.5.) ; ce qui complète la démonstration de la première partie du théorème (2.2.).

Pour prouver la seconde partie, nous devons inverser (2.5.) ; pour cela, utilisons le caractère unitaire de la représentation de translation, selon lequel

$$(2.16.) \quad (f, g)_E = [k, \ell].$$

Pour tout f et pour tout g dans H_0 , k et ℓ étant les représentations de translation de f et g respectivement. Il est suffisant de supposer que g est de classe S et que k est C^∞ en s et w dans $L_2(\mathbb{R} \times S_{n-1})$. En

employant la formule (2.5.) pour exprimer ℓ à droite de (2.16.), nous obtenons :

$$[\mathbf{k}, \ell] = \iint \mathbf{k}(s, w) \{ -\partial_s^{(n+1)/2} \bar{M}_1 + \partial_s^{(n-1)/2} \bar{M}_2 \} ds dw .$$

L'intégration par parties par rapport à s donne :

$$[\mathbf{k}, \ell] = (2\pi)^{(n-1)/2} \iint (h_1 \bar{M}_1 + h_2 \bar{M}_2) ds dw$$

$$(2.17.) \quad h_1 = \frac{-1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} (-\partial_s)^{(n+1)/2} \mathbf{k}, \quad h_2 = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} (-\partial_s)^{(n-1)/2} \mathbf{k} .$$

Aux M_j , substituons leur expression explicite (2.6.) et recombinaons dS et ds comme dx dans l'intégrale multiple ; nous avons alors :

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}, \ell] &= \frac{1}{2} \iint h_1 \left(\int_{xw=s} \bar{g}_1(x) dS \right) ds dw + \iint h_2 \left(\int_{xw=s} \bar{g}_2(x) dS \right) ds dw = \\ &= \frac{1}{2} \iint (h_1(xw, w) \bar{g}_1(x) + h_2(xw, w) \bar{g}_2(x)) dx dw . \end{aligned}$$

Interchangeons l'ordre d'intégration par rapport à x et w ; nous obtenons :

$$(2.18.) \quad [\mathbf{k}, \ell] = \frac{1}{2} \int (S_1(x) \bar{g}_1(x) dx + S_2(x) \bar{g}_2(x)) dx$$

où

$$(2.19.) \quad S_j(x) = \int h_j(xw, w) dw .$$

D'autre part, par (2.10.), nous pouvons écrire le membre gauche de (2.16.) comme :

$$(2.18.)' \quad (f, g)_E = \frac{1}{2} (-\Delta f_1 \overline{g_1} + f_2 \overline{g_2}) dx.$$

En vue de (2.16.), (2.18.) et (2.18.)' doivent être égales pour tout g de classe S . Puisque ces données forment un ensemble dense, les coefficients de g_1 et g_2 dans (2.18.) et (2.18.)' sont identiques :

$$(2.20.) \quad -\Delta f_1 = S_1, \quad f_2 = S_2;$$

ce qui prouve la seconde partie des formules données pour f dans (2.7.) du théorème 2.2.

Pour obtenir la première formule, nous exprimons la fonction S_1 comme elle est donnée par (2.19.) en termes de S donnée par (2.8.) :

$$S_1 = -\Delta S.$$

La combinaison de ceci avec la première équation de (2.20.) donne :

$$\Delta(f_1 - S) = 0,$$

i.e. que $f_1 - S$ est une fonction harmonique définie dans tout le plan. D'autre part, si f est de classe S , alors il en est de même de h et par suite (2.8.) montre que S tend vers zéro quand $|x| \rightarrow \infty$. Ainsi $f_1 - S$ tend vers 0 quand $|x| \rightarrow \infty$, et par suite, par le principe du maximum, est identiquement nulle. D'où $f_1 = S$ comme l'affirme (2.7.).

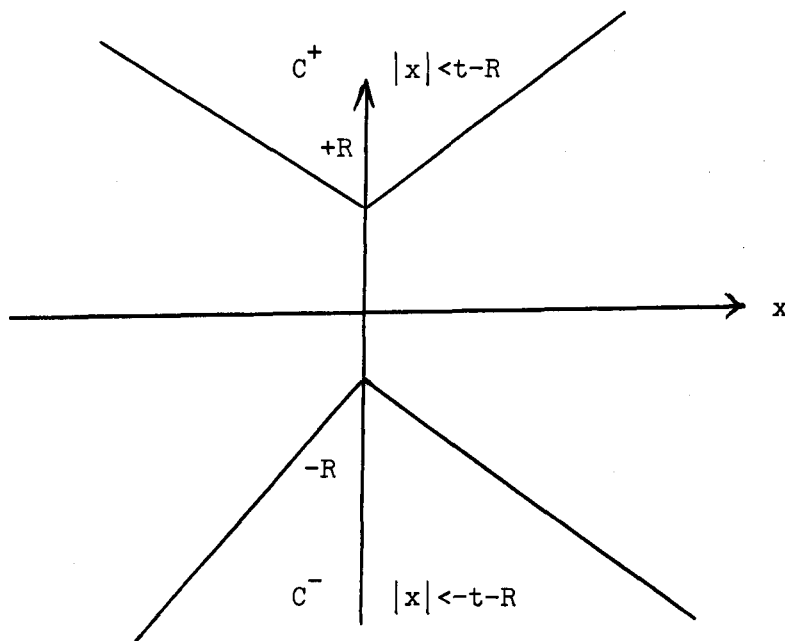
Appliquant (2.7.) à $U_0(t)f$ et en notant que le dernier est représenté par le translaté de k , nous obtenons :

Corollaire 2.1.- Soit $u(x,t) = Wf$ la solution de l'équation d'onde à données de Cauchy f et supposons que le représentant de translation de f est C^∞ . Alors :

$$(2.21.) \quad u(x,t) = \int h(xw - t, w) dw$$

$$(2.21.)' \quad u_t(x,t) = \int h'(xw - t, w) dw.$$

Supposons les données $f \in C^\infty$ et égales à zéro pour $|x| \geq R$; alors il découle de (2.5.) et (2.6.) que k est nulle pour $|s| \geq R$. Par (2.9.) et (2.21.), il s'ensuit que $u(x,t) = Wf$ est nul dans les cônes $|x| < |t| - R$ car alors $|xw - t| > R$ et par suite le facteur sous le signe somme dans (2.21.) est nul pour tout w dans S_{n-1} . Ce qui démontre le principe de Huyghens du théorème 1.3.



Théorème 2.3.- Les sous-espaces $L_2((-\infty, 0) \times S_{n-1})$ et $L_2((0, \infty) \times S_{n-1})$ associés à la représentation de translation du théorème 2.2. sont respectivement les espaces D_- et D_+ décrits au début de ce paragraphe.

Démonstration : Supposons f dans S représentée par une fonction k qui s'annule sur l'axe négatif. Alors la formule (2.9.) montre que h aussi s'annule sur le même axe et il découle de la formule (2.21.) que $u(x,t)$ est nulle dans le cône d'avenir (2.1.). Plus généralement, soit f dans H_0 qui est représentée par une fonction k qui s'annule sur l'axe négatif. Approximons k par une suite de fonctions $k_n \in C^\infty$ qui s'annulent sur l'axe négatif ; il découle de (2.21.) que les éléments f_n représentés par les k_n appartiennent à D_+ ; et puisque D_+ est fermé, f aussi appartient à D_+ .

Remarque : Les signaux à données de Cauchy dans D_+ "sortent" ou "rayonnent" à l'infini en ce sens que en un temps t , le signal est nul dans la boule $|x| < t$ ($|x| < t$) ; d'où l'expression "sortant" ou "rayonnant". On donne une définition similaire pour "entrant" ou anti-rayonnant.

Une conséquence immédiate du théorème 2.3. est

Corollaire 2.2.- D_+ et D_- sont orthogonaux.

Supposons que $f = \{f_1, f_2\}$ appartient à D_+ ; alors $f' = \{f_1, -f_2\}$ appartient à D_- et ainsi par le corollaire 2.2. f et f' sont orthogonaux :

$$0 = (f, f')_E = \frac{1}{2} \left\{ \int |\partial_x f_1|^2 dx - \int |f_2|^2 dx \right\}.$$

Interprétation physique.

Corollaire 2.3.- Dans le signal sortant ou entrant, les énergies cinétique et potentielle sont équiparties.

Nous allons maintenant montrer comment à partir de (2.21.), on peut étudier le comportement asymptotique des solutions de l'équation d'onde le long

des rayons i.e. le long des lignes de la forme $x = (t+s)\theta$ quand $t \rightarrow \pm \infty$.

En posant $x = (t+s)\theta$ dans la formule (2.21.)', nous obtenons :

$$(2.22.) \quad u_t((t+s)\theta, t) = \int h' [(t+s)(\theta w - 1) + s, w] dw .$$

Supposons h' continu à support borné. Alors pour $|t|$ grand, le facteur sous le signe somme est nul excepté pour les valeurs de w proches de θ . Ainsi, en remplaçant w par θ dans le second argument, nous introduisons une erreur ε qui tend vers 0 quand $|t| \rightarrow \infty$. En faisant cette substitution et en introduisant $\rho = \theta w$ comme nouvelle variable d'intégration, on a expression suivante à droite de (2.22.) :

$$w_{n-1} \int_{-1}^{+1} h' [(t+s)(\rho - 1) + s, \theta] + \varepsilon (1 - \rho^2)^{(n-3)/2} d\rho,$$

où $w_{n-1} = \frac{2\pi \frac{n-1}{2}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$ est l'aire de la sphère unité dans \mathbb{R}_{n-1} . En prenant $\tau = |t+s| \times (1-\rho)$ comme nouvelle variable, d'intégration, nous avons :

$$2^{(n-3)/2} w_{n-1} |t+s|^{(1-n)/2} \int_0^\infty \{h'(s \pm \tau, \theta) + \varepsilon\} \times \tau^{(n-3)/2} (1+\eta) d\tau.$$

où η est un polynôme en τ qui tend vers 0 quand $|t+s| \rightarrow \infty$.

D'après la formule (2.9.), $h' = (2\pi)^{(1-n)/2} (-\partial_S)^{(n-1)/2} k$;

en substituant ceci dans l'intégrale ci-dessus, en intégrant $(n-1)/2$ fois et en remplaçant w_{n-1} par $(2\pi)^{(n-1)/2} [((n-3)/2)!]^{-1}$ donne :

$$(t+s)^{(n-1)/2} u_t((t+s)\theta, t) = k(s, \theta) + o(1).$$

Nous avons ainsi prouvé que :

Théorème 2.4.- Soit $u(x,t)$ une solution de l'équation d'onde à énergie finie et soit k la représentation de translation des données initiales de u construite dans le théorème 2.2. Supposons $\partial_s^{(n-1)/2} k$ continue et à support borné. Alors :

$$(2.23.) \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} t^{(n-1)/2} u_t(x,t) = k(s,\theta)$$

le long du rayon

$$(2.24.) \quad x = (t+s)\theta.$$

Soit R l'opérateur qui, à f , fait correspondre k :

$$k = Rf$$

et I l'opérateur qui à k fait correspondre f :

$$f = Ik.$$

Pour les classes de données f et les représentants k considérées dans ce paragraphe, les opérateurs R et I sont inverses l'un de l'autre :
 $RI = IR = I.$

3. I et R .

Pour la suite, nous allons donner quelques définitions et énoncer quelques propriétés :

Pour $g \in C_0^\infty$, on définit :

$$(3.1.) \quad (g, Ik)_E = [Rg, k].$$

$$(3.2a.) \quad \text{Si } g = 0 \text{ pour } |x| > r, \quad g = 0 \text{ pour } |s| > r.$$

$$(3.2b.) \quad R A_0 = -\partial_S R (= -\partial_S R).$$

$$(4.2c.) \quad IR = I.$$

Définition 3.1.- f est dit éventuellement sortant s'il existe une constante r telle que $U_0(r)f$ soit sortant, i.e. tq $Wf = 0$ pour $|x| < t - r$.

On donne une définition similaire pour un élément "initialement entrant".

Nous nous contenterons d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.1.- Soit g à support compact, μ un nombre complexe ;
alors l'équation

$$(3.4.) \quad (A_0 - \mu)f = g$$

a une solution unique f qui est éventuellement sortante (initialement entrante). '/*.

L'équation $(A_0 - \mu)f = g$ peut s'exprimer en termes de composantes de f de la façon suivante :

$$f_2 = \mu f_1, \quad \Delta f_1 - \mu f_2 = w.$$

En notant v la première composante f_1 , nous pouvons écrire f sous la forme :

$$(3.17.) \quad f = \{v, \mu v\},$$

et v satisfait l'équation d'onde réduite

$$(3.18.) \quad \Delta v - \mu^2 v = w.$$

Définition 3.2.- Une solution v de l'équation d'onde réduite non homogène (4.18.), où w est à support compact, est dite μ -sortante (μ -entrante) si les données (3.17.) sont éventuellement sortantes (initialement entrantes).

Pour $w = \delta$, la solution élémentaire γ_u est :

$$\gamma_u = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2(2\pi)^{(n-1)/2}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{(n-3)/2} \left(\frac{e^{-\mu r}}{r} \right).$$

La solution μ -sortante de (3.18.) pour w arbitraire est le produit de convolution de w et γ_u .

$$v(x) = w * \gamma_u = \iint w(y) \gamma_u(x-y) dy. \quad \prime/.$$

SOLUTION DE L'EQUATION D'ONDE

DANS

UN DOMAINE EXTERIEUR

La théorie précédente a été développée pour l'étude de l'équation d'onde dans un domaine extérieur.

Dans la section 1, nous considérons les solutions faibles de l'équation d'onde définies pour tout temps et pour tout x à l'extérieur d'un obstacle tel que les solutions s'annulent sur son bord. Les données initiales peuvent se choisir arbitrairement et si elles sont d'énergie finie, la solution aura la même énergie à tous les autres temps. L'opérateur qui applique la donnée initiale et la transforme en la donnée au temps t sera noté $U(t)$; ces opérateurs forment un groupe à un paramètre qui est unitaire pour la norme de l'énergie. Notre démonstration de ces faits familiers de la propagation d'onde consiste à montrer que le générateur infinitésimal formel A de $U(t)$, restreint à un domaine proprement défini, est anti-auto-adjoint ; $U(t) = \exp(At)$ est alors bien défini et nous fournit une solution faible de l'équation d'onde pour les données initiales d'énergie finie. La différentiabilité de ces solutions faibles pour les données régulières est prouvée par les propriétés connues de l'opérateur de Laplace.



Dans la section 2, les sous-espaces entrant et sortant D_- et D_+ sont définis essentiellement comme dans le problème de l'espace libre ; plus précisément, $D_- [D_+]$ consiste en toutes les données initiales pour lesquelles la solution s'annule identiquement dans un voisinage sphérique de l'obstacle pour tous les temps passés $t < 0$ [futurs $t > 0$]. Nous montrons que chacun de ces sous-espaces a les trois propriétés postulées au premier chapitre.

La plus difficile à vérifier de ces propriétés - et de loin - est la densité de $\int U(t)D$ dans H , espace de toutes les données d'énergie finie. Notre démonstration est indirecte et utilise à la fois la théorie spectrale et l'analyse harmonique. Une conséquence facile de ce résultat est que l'énergie contenue dans un sous-domaine borné tend vers zéro quand t tend vers l'infini, pour toute solution d'énergie totale finie.

Dans la section 3, nous étudions le semi-groupe $\{Z(t)\}$ et son générateur infinitésimal B . Ici, le principal résultat est que $Z(2\rho)(kI - B)^{-1}$ est un opérateur compact et d'après le résultat général déduit du premier chapitre, ceci implique que le spectre de B , nommé $\sigma(B)$, est discret. Dans le cas d'un obstacle étoilé, nous montrons que $Z(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini ; de là, nous déduisons que le rythme de décroissance de l'énergie contenue dans un domaine borné est exponentiel en t , en fait, uniformément pour tous les signaux qui partent d'un domaine borné donné.

Dans la section 4, nous concluons à partir des propriétés spectrales de B et de la relation entre A et B que si g a un support borné et que μ n'appartient pas au spectre de B alors l'équation $(\mu I - A)f = g$ a une solution locale f qui est éventuellement sortante et analytique en μ . Il découle de ceci que la fonction de Green μ -sortante pour l'opérateur d'onde réduit $(\Delta - \mu^2)$ peut se prolonger méromorphiquement du demi-plan gauche au demi-plan droit et que ses pôles consiste en $\sigma(B)$. En plus, nous montrons que l'équation d'onde réduite a une solution qui s'annule sur l'obstacle et qui est éventuellement μ -sortante si et seulement si μ appartient à $\sigma(B)$.

Dans la section 5, nous exprimons les représentations spectrales entrante et sortante pour le problème extérieur en termes d'ondes planes diffusées et montrons que la matrice de diffusion seule permet de déterminer l'obstacle.

1. L'espace de Hilbert H et le groupe {U(t)}.

Dans cette section, nous allons étudier les solutions de l'équation d'onde dans un domaine extérieur G, qui satisfait la condition au bord d'être nulle sur ∂G . Nous allons montrer que, étant donné les données initiales à énergie finie, il existe une solution unique liée à cette condition et, si les données satisfont certaines conditions, que la solution est C^∞ . Finalement, nous montrons comment construire les solutions pour les données initiales qui ne sont d'énergie finie que localement. Dans ce chapitre, nous supposons G de classe C^2 et ∂G borné.

Nous introduisons la notation suivante : $G(R)$ est l'ensemble des points de G pour lesquels $|x| < R$; et $E(u(t), R)$ est l'énergie contenue dans le domaine $G(R)$ d'une solution u de l'équation au temps t, c'est-à-dire :

$$E(u(t), R) = \frac{1}{2} \int_{G(R)} \{ |u_x(x, t)|^2 + |u_t(x, t)|^2 \} dx.$$

Nous commençons en prouvant l'inégalité classique suivante :

Théorème 1.1. - Soit $u(x, t)$ une solution régulière de l'équation d'onde

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

pour tout x dans G et pour tout t, satisfaisant la condition au bord :

$$u(x, t) = 0 \text{ pour } x \in \partial G.$$

On a alors l'inégalité d'énergie suivante :

$$(1.1.) \quad E(u(T), R) \leq E(u(0), R + T).$$

Démonstration : Multiplions l'équation d'onde par u_t et intégrons sur le domaine de l'espace-temps : $x \in G, |x| < R + T - t, 0 < t < T$.

L'intégration par parties donne l'identité d'intégrale :

$$(1.2.) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{G(R)} \{ |u_x(T)|^2 + |u_t(T)|^2 \} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{G(T)} \{ |u_x(0)|^2 + |u_t(0)|^2 \} dx + \int_{\partial G} u_t u_n \, dS \\ & + \frac{1}{2^{3/2}} \int_{|x|=R+T-t} (u_t^2 - 2u_t u_r + u_x^2) \, dS = 0. \end{aligned}$$

A cause de la condition-limite, l'intégrale sur le bord ∂G est nulle ; l'intégrale au bord sur le cône est évidemment non négative, ainsi l'inégalité d'énergie (1.1.) découle de l'identité sus-mentionnée.

Corollaire 1.1.- Si les données initiales de u s'annulent dans la boule $\{|x| < R\}$, alors $u(x,t)$ s'annule dans le cône $\{|x| < R - t\}$.

En particulier, si les données initiales sont nulles sur G , il s'ensuit que u est nulle en tout temps. En inversant la direction du temps, nous obtenons l'inégalité

$$E(u(T), R) \geq E(u(0), R - T),$$

et en laissant tendre R vers l'infini, nous obtenons

Corollaire 1.2. - Si à l'origine, l'énergie totale de u est finie, u a la même énergie totale en tout temps.

A partir de l'estimation a priori (1.1.), il n'est pas difficile, en employant les méthodes des équations aux dérivées partielles, de donner une démonstration de l'existence des solutions avec les données initiales prescrites. Nous allons toutefois donner une autre démonstration ici qui cadre mieux avec notre approche de la théorie de la diffusion par les espaces de Hilbert.

Nous noterons par $f = \{f_1, f_2\}$ les paires de fonctions à valeur complexe définies dans G qui devront servir de données initiales. Nous définissons de la manière suivante la norme de l'énergie :

$$|f|_E^2 = \frac{1}{2} \int_G \{ |\partial_x f_1|^2 + |f_2|^2 \} dx ;$$

l'espace de Hilbert H est défini comme le complété, dans la norme de l'énergie, des données régulières à support compact dans G .

Nous introduisons la notation suivante pour la référence future :

H_D est le fermé, pour la norme de Dirichlet, des fonctions régulières, à valeur scalaire, à support compact dans G ; la norme de Dirichlet étant définie ainsi :

$$|u|_D^2 = \int_G |\partial_x u|^2 dx .$$

Ainsi H consiste en des vecteurs dont la première composante appartient à H_D et dont la seconde composante est de carré intégrable. Ainsi

$$|f|_E^2 = |f_1|_D^2 + |f_2|_0^2$$

où la 0-norme est celle de L_2 .

Soit G' un sous-domaine de G ; l'énergie locale $|f|_E^{G'}$ est définie en intégrant sur G' au lieu de G .

Notons que H a un plongement naturel comme sous-espace de H_0 ; ce qui permet de définir les données comme nulles dans $R_n - G$.

Notre but est de construire la famille à un paramètre d'opérateurs $\{U(t)\}$ qui fait correspondre aux données initiales f les données de la solution de l'équation d'onde au temps t . En clair, ces opérateurs $\{U(t)\}$ forment un groupe ; en plus, il découle du corollaire 1.2. que $U(t)$ est unitaire. Un tel groupe d'opérateurs unitaires à un paramètre (qui est en plus fortement continu) est entièrement caractérisé par son générateur infinitésimal A .

Nous allons maintenant procéder dans le sens contraire et construire le générateur infinitésimal A .

Définition. - L'opérateur A se définit comme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} ;$$

son domaine $D(A)$ est l'ensemble de toutes les données $f = \{f_1, f_2\}$ telles que Af soit dans H . Ce qui signifie que Δf_1 , défini au sens des distributions est de carré intégrable sur G et que f_2 est de carré intégrable et appartient à H_D .

Théorème 1.2.- A, tel qu'il est défini, est anti-auto-adjoint.

Démonstration : Nous devons montrer que $D(A)$ est dense dans H et que $A^* = -A$. Le premier est évident puisque $D(A)$ inclut toutes les données $C_0^\infty(G)$. Pour montrer que $A^* = -A$, nous retournons à la définition de A^* :

$A^*g = h$, avec $g, h \in H$, signifie que pour tout f dans $D(A)$

$$(1.3.) \quad (Af, g)_E = (f, h)_E.$$

Nous allons prouver d'abord que A est antisymétrique et que, alors A^* prolonge $-A$. Pour f et g arbitraires, appartenant respectivement à $D(A)$ et $C_0^\infty(G)$, une intégration par parties donne :

$$(Af, g)_E = \frac{1}{2} \int_G [\partial_x f_2 \overline{\partial_x g_1} - \partial_x f_1 \overline{\partial_x g_2}] dx.$$

Maintenant pour tout g dans $D(A)$ la seconde composante g_2 appartient à la fois à H_D et à L_2 , et il s'ensuit qu'il existe une suite approximante $\{g_n\}$ contenue dans $C_0^\infty(G)$ telle que $g_n \rightarrow g$ pour la métrique de H et que au même moment $g_2^n \rightarrow g_2$ pour la métrique de H_D . La relation ci-dessus est valable pour tout g dans $D(A)$, d'où nous concluons que

$$(Af, g)_E = -(f, Ag)_E.$$

Afin de prouver que $-A$ étend A^* , soit g un élément arbitraire de $D(A^*)$; alors g satisfait (1.3.). En prenant f de première composante nulle, nous obtenons :

$$(f_2, g_1)_D = (f_2, h_2)_0.$$

En particulier, pour $f_2 \in C_0^\infty(G)$, si nous intégrons par parties à gauche, nous obtenons :

$$(-\Delta f_2, g_1)_0 = (f_2, h_2)_0$$

qui montre que

$$(1.4.) \quad -\Delta g_1 = h_2$$

au sens des distributions.

Par la suite, nous choisissons un f de seconde composante nulle ;

(1.3.) donne

$$(1.5.) \quad (\Delta f_1, g_2)_0 = (f_1, h_1)_D.$$

Nous choisissons f_1 de la manière suivante : soit ϕ une fonction C_0^∞ arbitraire. Il découle des estimations classiques que pour tout sous-domaine compact G' de G et pour tout ψ de H_D

$$\int_{G'} |\psi|^2 dx \leq \text{const} |\psi|_D^2.$$

En prenant pour G' le support de ϕ , nous obtenons de la relation ci-dessus que :

$$|(\phi, \psi)_0| \leq \text{const} |\psi|_D ;$$

ainsi la fonctionnelle linéaire $\ell(\psi) = \overline{(\phi, \psi)}_0$ est bornée pour la norme de Dirichlet. De là, par le théorème de représentation de Riesz, il existe f_1

de H_D telle que

$$(1.6.) \quad (f_1, \Psi)_D = (\phi, \Psi)_O$$

pour tout Ψ dans H_D . En prenant $\Psi \in C_0^\infty(G)$ et en intégrant par parties, nous concluons que

$$- (\Delta f_1, \Psi)_O = (\phi, \Psi)_O$$

de sorte que

$$(1.7.) \quad -\Delta f_1 = \phi$$

au sens des distributions.

La substitution de (1.7.) dans le membre gauche de (1.5.) et l'emploi de (1.6.) à droite avec $\Psi = h_1$, donnent

$$- (\phi, g_2)_O = (\phi, h_1)_O$$

qui montre que

$$(1.8.) \quad -g_2 = h_1 .$$

Les équations (1.4.) et (1.8.) montrent ensemble que $g = \{g_1, g_2\}$ appartient à $D(A)$ et que $h = -Ag$. Puisque $h = A^*g$, ceci achève la démonstration du théorème 1.2.

Après avoir montré, comme ci-dessus, que A ainsi défini est anti-auto-adjoint, il découle maintenant du théorème de Stone que A engendre un

groupe d'opérateurs $\{U(t)\}$ avec les propriétés suivantes :

- (a) $U(t)$ est unitaire.
- (b) $\{U(t)\}$ forme un groupe à un paramètre.
- (c) $U(t)$ est fortement continu en t .
- (d) $U(t)f$ est fortement différentiable par rapport à t si et seulement si f appartient à $D(A)$, auquel cas

$$(1.9.) \quad \frac{d}{dt} U(t)f = A U(t)f .$$

- (e) $U(t)$ applique $D(A)$ sur $D(A)$ et commute avec A .

Supposons que f appartienne à $D(A)$ et soit $u(x,t)$ la première composante de $U(t)f$. Alors la seconde composante de la relation (1.9.) donne

$$(1.10.) \quad u_{tt} = \Delta u ;$$

ainsi u satisfait l'équation d'onde au sens des distributions.

Nous allons montrer que pour de telles solutions, les résultats du théorème 1.1. et de ses corollaires restent vrais ; ainsi, les intégrations par parties de la démonstration du théorème 1.1. restent aussi valables pour u .

Lemme 1.1.- Si f dans $D(A)$, la fonction $u(x,t) = [U(t)f]_1$ a ses dérivées secondes qui sont de carré intégrable par rapport à x quel que soit t .

Démonstration : Puisque f appartient à $D(A)$, il en est de même de $U(t)f$, et alors, par la définition de A , le laplacien de la première composante est de carré intégrable. Par suite, nous nous servons du résultat suivant de la

théorie des équations elliptiques :

Si $u(x)$ appartient à H_D et si Δu est de carré intégrable, alors toutes les dérivées secondes de u sont de carré intégrable et

$$(1.11.) \quad \left| \partial_x^2 u \right|_0 \leq K \{ |\Delta u|_0 + |u|_D \} \quad (K = \text{constante})$$

Ce résultat montre que les dérivées secondes par rapport à x seul de u sont de carré intégrable ; l'intégrabilité du carré des dérivées mixtes (par rapport à x et t) découle de ce que la première composante de $\frac{d}{dt} U(t)f$ appartient à H_D ; finalement, l'intégrabilité du carré de u_{tt} vient de (1.10.), ce qui achève la démonstration du lemme 1.1.

Théorème 1.4. - Soit F l'ensemble des données telles que

$$(1.12.) \quad |Af|_E + |f|_E \leq 1 ;$$

alors F est précompact, pour la norme de l'énergie locale $|f|_{E'}^{G'}$, pour tout sous-ensemble borné G' de G .

Démonstration : D'après la définition de A , l'inégalité (1.12.) peut s'écrire

$$(1.12)' \quad |f_2|_0 + |\partial_x f_2|_0 + |\partial_x f_1|_0 + |\Delta f_1|_0 \leq 1.$$

Puisque f_1 appartient à H_D , l'estimation (1.11.) s'applique et alors

$$\left| \partial_x^2 f_1 \right|_0 \leq K \{ |\Delta f_1|_0 + |\partial_x f_1|_0 \}.$$

En combinant cette relation avec (1.12.)' nous voyons que toutes les intégrales des carrés de toutes les dérivées de f_1 d'ordre supérieur à deux, et celles de f_2 d'ordre supérieur à un sont uniformément bornées pour tout f dans F . Il découle alors du théorème de compacité de Rellich que pour tout sous-ensemble borné G' de G , l'ensemble de f_1 est précompact par rapport à la norme $|f_1|_D^{G'}$, et l'ensemble de f_2 est précompact par rapport à la norme de $|f_2|_0^{G'}$. CQFD.

Les données f sont dites localement dans H si $\phi f \in H$ pour toute fonction scalaire $\phi \in C_0^\infty$. Une définition analogue pour " f appartient localement à $D(A)$ ".

Nous allons maintenant montrer comment définir $U(t)f$ pour f localement dans H ; nous décomposons f comme suit par une partition de l'unité :

$$f = \sum f_j,$$

où tous les f_j appartiennent à H et où f_j est nulle pour $|x| < j$.

Nous définissons

$$U(t)f = \sum U(t)f_j .$$

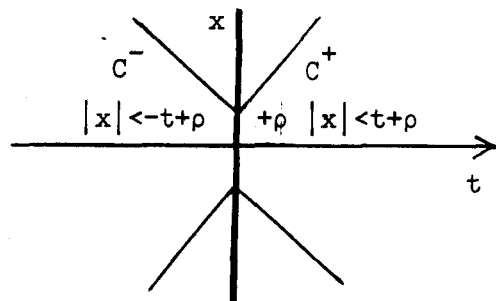
Il découle du corollaire 1.1. que cette somme est localement finie, i.e. pour x et t dans un ensemble borné donné, seul un nombre fini de termes sont non nuls. On vérifie que cette définition est indépendante de la décomposition choisie de f .

2. Décroissance de l'énergie et représentations de translation.

Dans ce paragraphe, nous allons appliquer la théorie développée au premier chapitre au groupe $\{U(t)\}$ du paragraphe précédent. Les sous-espaces entrant et sortant appropriés peuvent se définir comme suit :

Choisissons $\rho > 0$ de sorte que la boule $\{|x| < \rho\}$ contienne ∂G dans son intérieur et soit $D_+^\rho = U_0(\rho)D_+$ et $D_-^\rho = U_0(-\rho)D_-$, où D_+ et D_- désignent les sous-espaces sortant et entrant de données dans l'espace libre. Notons que les données f dans $D_+^\rho | D_-^\rho$ sont caractérisées par la propriété que $[U(t)f](x)$ s'annulent sur le cône d'avenir tronqué [sur le cône du passé tronqué]

$$\begin{aligned} |x| < t + \rho & \quad (t > 0) \\ [|x| < -t + \rho & \quad (t < 0)] \end{aligned}$$



Théorème 2.1. - D_+^ρ est un sous-espace sortant ; ainsi, D_+^ρ est un sous-espace fermé satisfaisant les conditions :

- (i) $U(t)D_+^\rho \subset D_+^\rho$ pour $t > 0$,
- (ii) $\bigcap U(t)D_+^\rho = \{0\}$,
- (iii) $\overline{\bigcup U(t)D_+^\rho} = H$.

De la même façon, D_-^ρ est un sous-espace entrant. En plus D_+^ρ et D_-^ρ sont orthogonaux.

Démonstration : La démonstration de (i) et (ii) est analogue à celle de l'espace libre. Il en est de même pour l'orthogonalité de D_+^ρ et D_-^ρ .

La propriété (iii) sera prouvée par une série de lemmes.

Pour commencer, nous remarquons que la propriété (iii) est intimement liée à la décroissance locale de l'énergie i.e. la propriété suivante :

$$(2.1.) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |U(t)f|_E^{G'} = 0$$

$\forall f \in H$ et pour tout sous-domaine borné G' de G . Nous allons montrer d'abord

Lemme 2.1. - La propriété (iii) implique la relation (2.1.)

Démonstration : Si la propriété (iii) est vraie, alors étant donné tout $f \in H$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre T et un élément g dans D_+^0 tels que

$$|f - U(T)g|_E < \epsilon.$$

Soit R assez grand de sorte que G' soit contenu dans la boule $\{|x| < R\}$.

Alors $U(T+t)$ s'annule dans G' pour $t > R - T$ et puisque

$$|U(t)f - U(t+T)g|_E = |f - U(T)g|_E < \epsilon, \text{ il vient que :}$$

$$|U(t)f|_E^{G'} < \epsilon,$$

pour tout $t > R - T$. Ceci, ensemble avec le fait que ϵ est arbitraire, prouve le lemme 2.1.

Maintenant, nous allons nous intéresser à l'implication inverse ; la propriété (iii) même découle d'une proposition beaucoup plus faible, nommément

$$(2.1.)_w \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} |U(t)f|_E^{G'} = 0$$

pour tout f dans H et pour tous les sous-domaines bornés G' de G .

Lemme 2.2.- La relation (2.1.)_w implique la propriété (iii).

Démonstration : Supposons la propriété (iii) fausse. Alors, par le théorème de la projection orthogonale, il existe $g \neq 0$, appartenant à H et orthogonal à toutes les données de la forme $U(t)D_+^\rho$, t positif ou négatif. Ce qui peut aussi s'exprimer en disant que $U(t)g$ est orthogonal à D_+^ρ pour t .

Ensuite, nous utilisons le fait que H s'applique dans H_0 si bien que l'opérateur de l'espace libre $U_0(s)$ est applicable aux éléments de H . Par définition $U_0(\rho)D_+^\rho = D_+^\rho$. Nous voyons alors que la représentation de translation de l'espace libre de D_+^ρ est tout $L_2((\rho, \infty) \times S_{n-1})$ et puisque $U(t)g$ s'étend dans le complément orthogonal de cet ensemble, nous en déduisons que $U_0(-\rho)U(t)g$ appartient à D_- . En d'autres termes $[U_0(-s)U(t)g](x)$ s'annule dans le cône passé $\{|x| < s-\rho\}$ d'où découle, pour $s > 2\rho$, que $U_0(-s)U(t)g$ est aussi une solution du problème mixte ; en fait

$$U_0(-(s+2\rho))U(t)g = U(-s)U_0(-2\rho)U(t)g \quad \text{pour } s \geq 0.$$

Puis, soit $G(R)$ la boule $\{x ; |x| < R\}$. Par (2.1.)_w, nous voyons qu'étant donné $\varepsilon > 0$ et k , il existe $t(k, \varepsilon) > (k+1)\rho$ tel que

$$|U(t)g|_E^{G(5\rho)} < \varepsilon.$$

En appliquant le théorème 1.3., qui est aussi valable pour la solution de l'espace libre, nous avons :

$$(2.3.) \quad \text{et} \quad \begin{aligned} |U_0(-2\rho)U(t)g|_E^{G(3\rho)} &< \varepsilon \\ |U(t-2\rho)g|_E^{G(3\rho)} &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Puisque $U_0(-s)U(t)g$ et $U(-s)U(t)g = U(-s+t)g$ ont les mêmes données de Cauchy en dehors de la boule $\{|x| < \rho\}$ au point $s = 0$, ces deux solutions seront égales dans le domaine de dépendance de cet ensemble, nommément dans l'ensemble $\{|x| > |s| + |\rho|\}$. En particulier

$$[U_0(-2\rho)U(t)g](x) = [U(t-2\rho)g](x)$$

pour $|x| > 3\rho$. Ainsi, la différence des deux côtés est nulle pour $|x| > 3\rho$; ce qui, combiné avec (2.3.), donne :

$$|U_0(-2\rho)U(t)g - U(t-2\rho)g|_E < 2\varepsilon.$$

Finalement, si nous appliquons l'opérateur unitaire $U(2\rho-t)$ à la différence et si nous employons la relation (2.2.) avec $s = t-2\rho$, nous obtenons :

$$|U_0(-t)U(t)g - g|_E < 2\varepsilon.$$

Le rappel que $[U_0(-t)U(t)g](x)$ s'annule pour $|x| < t-\rho$ et que $t > (k+1)\rho$ nous permet de conclure que :

$$|g|_E^{G(2\rho)} < 2\varepsilon.$$

Puisque cette relation est valable pour tout k et pour tout ε , il s'ensuit que $|g|_E = 0$, contrairement à notre hypothèse sur la non-nullité de g .

CQFD (pour le lemme).

Reste à prouver la décroissance de l'énergie ; cette propriété est liée aux propriétés spectrales du générateur infinitésimal A .

Nous allons montrer la nature de cette relation en établissant la proposition suivante :

Si le spectre de A est absolument continu, alors $U(t)$ tend faiblement vers 0 quand t tend vers l'infini, pour tout f dans H .

Démonstration : Nous représentons $U(t)$ comme

$$(2.4.) \quad (U(t)f, g)_E = \int e^{i\lambda t} d(P(\lambda)f, g)_E,$$

où $\{P(\lambda)\}$ est la famille spectrale des opérateurs de projection de A . La continuité absolue du spectre de A signifie que pour tout f et pour tout g , la mesure scalaire

$$dm(\lambda) = d(P(\lambda)f, g)_E,$$

est absolument continue.

Il découle alors du lemme de Riemann-Lebesgue que (2.4.), qui est la transformée de Fourier de dm , tend vers 0 quand t tend vers l'infini. CQFD.

De ce que $U(t)$ tend faiblement vers 0 , on déduit que l'énergie locale décroît. Montrons que l'opérateur A a un spectre absolument continu. Le résultat suivant, dû à Rellich, suffit pour notre propos et peut se déduire directement :

Théorème 2.2.- Le générateur A n'a pas de spectre-point.

Notre démonstration de ce résultat se fera après avoir établi que l'énergie décroît au moyen de l'affirmation de ce théorème.

Lemme 2.3.- Si A n'a pas de spectre-point, alors il existe une suite $\{t_k\}$, tendant vers l'infini, telle que $\{U(t_k)\}$ tende faiblement vers 0.

La démonstration de ce lemme est fondée sur le résultat suivant dû à Wiener :

Proposition 2.1.- Soit dm une mesure signée de variation totale finie et ne contenant aucune mesure point. Alors la valeur moyenne du carré de sa transformée de Fourier est nulle.

Pour la recherche de la complétion, nous allons introduire maintenant une démonstration du théorème de Wiener : soit \hat{m} la transformée de Fourier de dm ; si la variation totale de dm est finie, nous en dirons que \hat{m} est bornée. La transformée de Fourier de $m(\lambda+\epsilon) - m(\lambda-\epsilon)$ est $t^{-1} \sin \epsilon t$ et $\hat{m}(t)$, fonction de carré intégrable ; et alors par la relation de Parseval, nous obtenons :

$$(2.5.) \quad \text{const} \int_{-\infty}^{+\infty} |m(\lambda+\epsilon) - m(\lambda-\epsilon)|^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \epsilon t}{t^2} \times |\hat{m}(t)|^2 dt.$$

Soit

$$M(\epsilon) = \sup_{\lambda} |m(\lambda+\epsilon) - m(\lambda-\epsilon)|.$$

Alors l'intégrale à gauche de (2.5.) est bornée par

$$M(\epsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} |m(\lambda+\epsilon) - m(\lambda-\epsilon)| d\lambda ,$$

qui peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned}
 M(\varepsilon) & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\varepsilon}^{(2k+1)\varepsilon} |m(\lambda+\varepsilon) - m(\lambda-\varepsilon)| d\lambda \\
 & = M(\varepsilon) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |m[(2k+1)\varepsilon+\tau] - m[(2k-1)\varepsilon+\tau]| d\tau. \\
 & \leq M(\varepsilon) 2\varepsilon V,
 \end{aligned}$$

où V est la variation totale de dm . Puisque dm ne contient aucune mesure-point et a une variation totale finie, $m(\lambda)$ est uniformément continue sur les nombres réels (augmentés) ; cela implique alors que $M(\varepsilon)$ tend vers 0 avec ε . Il découle alors de l'estimation ci-dessus que le membre gauche de (2.5.), et par suite le membre droit est du genre $O(\varepsilon)$.

En employant l'inégalité

$$2\theta/\pi \leq |\sin \theta| \quad \text{pour} \quad |\theta| \leq \pi/2$$

nous trouvons que le membre droit de (2.5.) est minoré par

$$\frac{1}{T^2} \int_{-T}^T |\hat{m}(t)|^2 dt,$$

où $T = \pi/2\varepsilon$. Il découle alors de notre estimation précédente que

$$(2.6.) \quad \frac{1}{T} \int_{-T}^T |\hat{m}(t)|^2 dt$$

tend vers 0 quand T tend vers l'infini ; ce qui prouve le théorème de Wiener.*/.

Du fait que (2.6.) tend vers 0, nous avons :

Corollaire 2.1.- Etant donné deux nombres positifs c et d , alors, pour T assez grand, la mesure de Lebesgue de l'ensemble des points t dans l'intervalle $(-T, T)$ où $|\hat{m}(t)| \geq d$ est inférieure à cT .

Nous allons retourner à la démonstration du lemme 2.3. Soit un ensemble dénombrable dense $\{f_i\}$ de H . Pour tout k , choisissons $d = 1/k$ et $c < 1/2k^2$. Alors pour T assez grand et $k > k$, il existe $t_k > T/2$ tel que

$$(2.7.) \quad |(U(t_k)f_i, f_j)_E| < 1/k,$$

pour $i, j < k$. En clair, les t_k tendent vers l'infini avec k , et puisque les f_i sont denses et que $U(t_k)$ est borné en norme, il vient de (2.7.) que les $U(t_k)$ tendent faiblement vers 0, comme l'affirme le lemme 2.3.

Lemme 2.4.- La décroissance de l'énergie

$$(2.1.)_w \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} |U(t)f|_E^{G'} = 0$$

est valable pour tout f dans H et pour tout sous-domaine borné G' de G .

Démonstration : Puisque $|U(t)f|_E^{G'} \leq |U(t)f|_E = |f|_E$, il suffit de prouver (2.1.)_w pour tout sous-ensemble dense de H . Nous prenons comme sous-ensemble le domaine de A . Pour f dans $D(A)$, nous avons

$$|U(t)f|_E = |f|_E \quad \text{et} \quad |AU(t)f|_E = |Af|_E (= |Af|_E).$$

D'après le théorème 1.4., cela implique que l'ensemble à un paramètre $\{U(t)f ; t \text{ réel}\}$ est précompact pour la norme de l'énergie locale $|\cdot|_E^{G'}$, pour tout sous-ensemble borné G' . Alors étant donné une suite $\{t_k\}$, nous pouvons

choisir une sous-suite (ayant le même nom) telle que $\{U(tk)f\}$ converge pour la norme de l'énergie locale. D'autre part, d'après le théorème 2.2. et le lemme 2.3., nous pouvons choisir la suite $\{t_k\}$ de sorte que $\{U(tk)\}$ tende faiblement vers 0. Comme conséquence $\{U(tk)\}$ tend vers 0 pour la norme de l'énergie locale ; ce qui complète le lemme 2.4. En combinant les lemmes 2.4. et 2.2., nous concluons que la propriété (iii) du théorème 2.1. est vérifiée. Il reste à démontrer le théorème 2.2.

Démonstration du théorème 2.2.- Puisque A est anti-auto-adjoint, son spectre est imaginaire pur et ainsi, nous devons prouver que $i\sigma$, avec σ réel, n'est pas une valeur propre.

La valeur $\sigma = 0$ doit être traitée de façon spéciale ; ce que nous allons faire maintenant.

Supposons que f appartient à $D(A) \subset H$ et satisfait la relation

$$Af = 0 .$$

Pour les composantes f_1, f_2 de f , ceci signifie que f_2 est nulle et que f_1 satisfait l'équation de Laplace

$$\Delta f_1 = 0 ,$$

et en plus, que f_1 s'annule sur ∂G . En multipliant par f_1 et en intégrant par parties, sur G , nous concluons que l'intégrale de Dirichlet de f_1 sur G s'annule de sorte que f_1 est aussi nulle. Ce qui montre que $\sigma = 0$ n'est pas une valeur propre de A . Ensuite, soit σ un nombre réel non nul et supposons que f appartient à $D(A) \subset H$ et satisfait l'équation

$$(2.8.) \quad Af = i\sigma f.$$

Nous allons en déduire que f est nulle sans utiliser le fait que f s'annule sur le bord ∂G . Pour cela, soit ϕ une fonction scalaire C^∞ qui s'annule près de ∂G et qui est égale à 1 pour tout $|x| > \rho$. Soit g égale ϕf dans G et 0 hors de G . Ainsi g est partout définie, a une énergie finie et satisfait

$$(2.9.) \quad (A_0 - i\sigma)g = h ;$$

ici h s'annule dans la région où $\phi \equiv 1$, i.e. pour $|x| > \rho$. Les données g s'annulent pour $|x| > \rho$; alors f même s'annule pour $|x| > \rho$. En G , la fonction f satisfait l'équation elliptique (2.8.) ; les solutions d'une telle équation sont analytiques et il s'ensuit que f est nulle sur G . CQFD.

Le théorème d'unicité de Rellich qui suit est une simple conséquence du théorème 2.2.

Théorème 2.3. - Soit f une solution locale de l'équation de valeur propre (2.8.), $\sigma \neq 0$ et réel, dans un domaine extérieur G et supposons que f est éventuellement sortante. Alors f est identiquement nulle dans G .

Démonstration : Puisque f est éventuellement sortante, $[U_0(t)f](x)$ est nul pour $|x| < t - \text{constante}$; en particulier pour T assez grand, $U_0(t)f$ s'annule dans le cône d'avenir $\{|x| < \rho + t - T\}$ et

$$(2.10.) \quad U(t)U_0(T)f = U_0(t+T)f \text{ pour } t > 0.$$

D'autre part, f satisfait l'équation de valeur propre (2.8.) et il s'ensuit que

$$(2.11.) \quad U(t)f = e^{i\sigma t} f .$$

Définissons

$$f_T = U(T)f - U_0(T)f .$$

Du domaine dont dépend l'argument, il s'ensuit que f_T est nul pour $|x| > T+\rho$. Donc, f_T a une énergie finie E , et la même chose est vraie pour $U(t)f_T$. En particulier, l'énergie de $U(t)f_T$ dans la boule de rayon $t+\rho$ est inférieure à E ; c'est

$$(2.12.) \quad |U(t)f_T|_E^{G(t+\rho)} \leq E .$$

A partir de (2.10.) et (2.11.), nous voyons alors que pour t positif,

$$(2.13.) \quad U(t)f_T = \exp[i\sigma(t+T)]f - U_0(t+T)f .$$

Puisque f est sortante, le choix précédent de T nous permet d'affirmer que $U_0(t+T)$ est nulle dans $G(t+\rho)$; et ainsi, nous concluons à partir de (2.11.) que

$$U(t)f_T = \exp[i\sigma(t+T)]f \text{ dans } G(t+\rho) ,$$

ce qui, substitué dans (2.12.), nous montre, puisque σ est réel, que f lui-même est d'énergie finie dans $G(t+\rho)$; puisque t est arbitraire, l'énergie totale de f est inférieure à E et alors il découle du théorème 2.2. que f s'annule dans G . Ce qui complète la démonstration de 2.3.

La théorie de la représentation développée au début est applicable au groupe $\{U(t)\}$ et aux sous-espaces entrant et sortant D_-^ρ et D_+^ρ . En particulier, il existe une représentation de translation sortante pour laquelle D_+^ρ s'applique sur $L_2(0, \infty; N)$ et par le théorème 3.1. du premier chapitre, cette représentation est unique à un isomorphisme près.

Nous allons montrer comment relier la représentation de translation pour $\{U(t)\}$ à la représentation de translation pour l'espace libre. Ce qui est à noter, c'est que $U(t)$ et $U_0(t)$ agissent de la même manière sur D_+^ρ quand t est positif. Comme nous l'avons remarqué, $U_0(\rho)D_+^\rho = D_+^\rho$, de sorte que D_+^ρ s'applique sur $L_2(\rho, \infty; N)$ dans la représentation de translation de l'espace libre. Par suite, si f dans D_+^ρ s'applique sur k_0 dans la représentation de translation de l'espace libre, alors l'application

$$f \rightarrow k_+(s) = k_0(s+\rho)$$

applique D_+^ρ sur $L_2(0, \infty; N)$ de telle manière que $U(t)f$ se transforme en $k_+(s-t)$ pour $t > 0$. Si maintenant nous étendons ces applications à toutes les f qui sont dans D_+^ρ afin de préserver cette propriété, alors nous allons obtenir une représentation de translation sortante pour $\cup U(t)D_+^\rho$. Cette application se prolonge évidemment par continuité à $\cup U(t)D_+^\rho$ qui est H , par le théorème 2.1.

Il est aisé, à ce niveau, de relier notre présentation au formalisme usuel de la théorie de la diffusion dans laquelle on commence avec les opérateurs d'ondes :

$$W_\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(-t)U_0(t)$$

En premier lieu, si f appartient à D_+^0 , alors $U(-t)U_0(t)f = f$ pour $t > 0$ de sorte que W_+ restreint à D_+^0 agit comme l'identité. De même, si $U(T)f$ est dans D_+^0 , alors $W_+f = U(-T)U_0(T)f$. Par suite, si nous considérons W_+ comme application de la représentation de translation de l'espace libre dans la représentation de translation sortante de $\{U(t)\}$ comme défini ci-dessus, alors

$$k_0(s) \rightarrow k_+(s) = k_0(s+\rho),$$

au moins pour les représentants $k_0(s)$ qui s'annulent, disons, pour $s < -T$. Puisque les données avec de tels représentants sont denses dans H_0 , W_+ a la représentation ci-dessus pour tout f dans H_0 . Ce qui prouve non seulement que W_+ existe sur tout H_0 mais aussi que son image est tout H . De même, W_- peut se réaliser comme l'application

$$k_0(s) \rightarrow k_-(s) = k_0(s-\rho)$$

de la translation de l'espace libre à la translation sortante pour $\{U(t)\}$.

Puisque W_+ et W_- sont des applications unitaires de H_0 sur H , l'opérateur de diffusion

$$S = W_+^{-1} W_-$$

est bien défini et unitaire sur H_0 lui-même. En employant les représentations de translation entrante et sortante, alors S se définit comme une application

$$k_-(s+\rho) \mapsto k_+(s-\rho)$$

de l'espace libre sur lui-même. Ici $k_-(s)$ et $k_+(s)$ sont respectivement les représentants de W_-f dans les translations entrante et sortante. Ceci remonte

à la définition de S donné au début (premier chapitre), à la translation de 2ρ près.

3. Le semi-groupe $\{Z(t)\}$.

L'opérateur de diffusion et le semi-groupe $\{Z(t)\}$ introduit au deuxième chapitre sont tous les deux déterminés par les sous-espaces entrant et sortant D_+^ρ et pour cela, deux éléments sont, de diverses façons, duaux l'un de l'autre. En conséquence, nous pouvons employer le semi-groupe comme outil dans l'étude de la matrice de diffusion. Dans cette section, nous établissons quelques propriétés du semi-groupe.

Nous rappelons la définition de $\{Z(t)\}$:

$$Z^\rho(t) = P_+^\rho U(t) P_-^\rho \quad (t \geq 0)$$

où $P_-^\rho [P_+^\rho]$ est la projection orthogonale de H sur le complément orthogonal de $D_- [D_+]$. D'après le théorème 1.1. du chapitre II, les opérateurs $\{Z^\rho(t) ; t \geq 0\}$ forment un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur le sous-espace

$$K^\rho = (D_+^\rho + D_-^\rho)^\perp$$

et annulent le sous-espace $D_+^\rho + D_-^\rho$. Nous noterons B^ρ le générateur infinitésimal de ce semi-groupe. Nous omettrons en général l'indice ρ et noterons $G(k)$ le domaine $G \cap \{|x| < k\}$.

Le théorème suivant a pour but d'établir la propriété méromorphe de la matrice de diffusion.

Théorème 3.1. - $Z(2)(kI - B)^{-1}$ est un opérateur compact pour $k > 0$.

La démonstration de ce théorème est fondée pour les trois lemmes suivants où l'on considère l'opérateur

$$M = U(2\rho) - U_0(2\rho).$$

Lemme 3.1. - L'opérateur M a les propriétés suivantes :

- (i) $|M| \leq 2$.
- (ii) Pour f arbitraire dans H , $[Mf](x) = 0$ pour $|x| > 3\rho$.
- (iii)

$$(3.1.) \quad |Mf|_E \leq 2|f|_E^{G(5\rho)}.$$

Démonstration : Puisque M est la différence de deux opérateurs unitaires, il est clair que $|M| \leq 2$. D'autre part, par le théorème 1.3., nous voyons que $[U(t)f](x) = [U_0(t)](x)$ pour $|x| > t$. Ainsi, $[Mf](x)$ s'annule pour $|x| > 3\rho$ et

$$|Mf|_E = |Mf|_E^{G(3\rho)} \leq |U(2\rho)f|_E^{G(3\rho)} + |U_0(2\rho)f|_E^{G(3\rho)}.$$

Une autre application du principe du théorème de dépendance (le théorème 1.3.) montre que $|U(2\rho)f|_E^{G(3\rho)}$ et $|U_0(2\rho)f|_E^{G(3\rho)}$ sont tous les deux bornés par $|f|_E^{G(5\rho)}$; ce qui donne l'inégalité (3.1.).

Lemme 3.2. - Si f est orthogonale à D_-^ρ , il en est de même pour $U(t)f$ et $U_0(t)f$ pour $t > 0$.

Démonstration : Le sous-espace D_-^ρ s'applique sur lui-même par $U(-t)$

et $U_0(-t)$ si $t > 0$ et par conséquent le complément orthogonal de D_-^0 s'applique sur lui-même par les adjoints de ces opérateurs, nommément $U(t)$ et $U_0(t)$.

Corollaire.- M applique le complément orthogonal de D_-^0 dans lui-même.

Lemme 3.3.- $P_+^0 U(2\rho)P_-^0 = 0$.

Démonstration : Dans les représentations de translation des espaces libres, les sous-espaces D_-^0 et D_+^0 correspondent respectivement à $L_2(-\rho, -\infty; N)$ et à $L_2(\rho, \infty; N)$. Le complément orthogonal de D_-^0 correspond alors à $L_2(-\rho, \infty; N)$ et une translation de 2ρ applique ceci dans $L_2(\rho, \infty; N)$; en d'autres termes $U_0(2\rho)$ applique le complément orthogonal de D_-^0 dans D_+^0 et par là $P_+^0 U(t)P_-^0 = 0$.

Corollaire 3.2.- $P_+^0 U(2\rho)P_-^0 = P_+^0 M P_-^0$.

Démonstration du théorème 3.1. : Nous savons que pour $k > 0$

$$(3.2.) \quad (kI - B)^{-1} f = \int_0^{\infty} e^{-kt} Z(t) f dt$$

et

$$(kI - A)^{-1} f = \int_0^{\infty} e^{-kt} U(t) f dt,$$

où A est le générateur du groupe $\{U(t)\}$. En plus, par le lemme 3.2., $P_-^0 U(t)P_-^0 = U(t)P_-^0$ de sorte que $P_-^0 (kI - A)^{-1} P_-^0 = (kI - A)^{-1} P_-^0$. La combinaison de ces déductions avec le corollaire 3.2. nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
 (3.3.) \quad Z(2\rho)(kI - B)^{-1}f &= \int_0^\infty e^{-kt} Z(t+2\rho)f \, dt \\
 &= P_+^0 U(2\rho) \int_0^\infty e^{-kt} U(t) P_-^0 f \, dt \\
 &= P_+^0 U(2\rho) P_-^0 (kI - A)^{-1} P_-^0 f \\
 &= P_+^0 M P_-^0 (kI - A)^{-1} P_-^0 f \\
 &= P_+^0 M (kI - A)^{-1} P_-^0 f.
 \end{aligned}$$

Ensuite, nous nous servons de ce que $A(kI - A)^{-1}$ est un opérateur borné. Plus précisément,

$$\begin{aligned}
 |A(kI - A)^{-1} P_-^0 f|_E &\leq k |(kI - A)^{-1} P_-^0 f|_E + |P_-^0 f|_E \\
 &\leq 2 |f|_E.
 \end{aligned}$$

Définissons l'ensemble F comme

$$F = \{g\}, \quad g = (kI - A)^{-1} P_-^0 f, \quad (|f|_E \leq 1).$$

D'après l'inégalité ci-dessus, $|Ag|_E \leq 2$ pour tout g dans F . Par suite, en appliquant le théorème 1.4., nous trouvons que l'ensemble F est précompact pour la norme de l'énergie local $|\cdot|_E^{G(5\rho)}$

Si nous employons maintenant l'inégalité (3.1.), nous voyons que MF et par suite $P_+^0 MF$ est précompact pour la norme de l'énergie. Puisque par la formule (3.3.), l'ensemble $P_+^0 MF$ est l'image de la sphère unité par l'opérateur $Z(2\rho) \times (kI - B)^{-1}$, il découle que $Z(2\rho)(kI - B)^{-1}$ est un opérateur compact.

CQFD.

Le théorème ci-dessus donne, avec les corollaires 4.2. et 4.5. du second chapitre, le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.- Le générateur B a un spectre-point pur et la résolvante de B est méromorphe dans le plan et holomorphe sur l'axe imaginaire.

Pour les obstacles très étendus, l'assertion sur la décroissance de l'énergie du lemme 2.1. ou la proposition sur la compacité du théorème 3.1. ne sont pas prouvées. Cependant, si on restreint la géométrie de l'objet réfléchissant, alors on peut espérer en savoir plus. Le premier résultat de ce genre a été donné par Morawetz qui montra que pour les obstacles étoilés et pour les données f à support dans le domaine $G(k)$, on a :

$$(3.4.) \quad |U(t)f|_E^{G(k)} \leq \frac{\text{const}}{t} |f|_E$$

ce résultat combiné avec les propriétés de semi-groupe de $\{Z(t)\}$ permettent à Lax, Philipps et Morawetz de montrer que la décroissance est en fait, exponentielle.

Théorème 3.2.- Si l'obstacle est étoilé, alors pour toutes les données à support compact dans $G(\rho)$, il existe des constantes c et α telles que

$$(3.5.) \quad |U(t)f|_E^{G(\rho)} \leq c e^{-\alpha t} |f|_E \quad (t > 0).$$

Démonstration : En appliquant l'estimation de Morawetz (3.4.) pour $k = 5\rho$, nous voyons que pour T suffisamment grand,

$$(3.6.) \quad |U(T)g|_E^{G(5\rho)} \leq \frac{1}{8} |g|_E$$

pour tout g à support dans $G(5\rho)$. Maintenant, par le lemme 3.1., la donnée $g = Mf$ a son support dans $G(3\rho)$ pour tout f dans H , par suite, en employant (3.1.) et (3.6.), nous obtenons :

$$(3.7.) \quad |M U(T)Mf|_E \leq 2 |U(T)Mf|_E^{G(5\rho)} \\ \leq \frac{1}{4} |Mf|_E \leq \frac{1}{2} |f|_E .$$

Pour $t \geq 4\rho$, les lemmes 3.2. et 3.3. impliquent que :

$$(3.8.) \quad Z(t)f = P_+^0 M U(t-4\rho) M P_-^0 f,$$

et combinant (3.7.) et (3.8.), nous avons :

$$|Z(T+4\rho)f|_E \leq 1/2 |f|_E .$$

Par suite, pour $t > 0$, avec $k(T+4\rho) \leq t \leq (k+1)(T+4\rho)$, nous pouvons écrire :

$$(3.9.) \quad |Z(t)f|_E \leq |[Z(T+4\rho)]^k f|_E \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k |f|_E \\ \leq c e^{-\alpha t} |f|_E .$$

pour quelques constantes positives c et α , et pour tout f dans H .

Notons que les données dans D_{\pm}^0 ont leur support en dehors de la boule $\{|x| < \rho\}$. Par conséquent, les données f à support dans cette boule satisfont $P_{\pm}^0 f = f$ et pour les données g , $[P_{\pm}^0 g](x) = g(x)$ pour $|x| < \rho$. Ainsi, pour f à support dans la boule $\{|x| \ll \rho\}$, il découle de (3.9.)

que

$$\begin{aligned} |U(t)f|_E^{G(\rho)} &= |Z(t)f|_E^{G(\rho)} \leq |Z(t)f|_E \\ &\leq c e^{-\alpha t} |f|_E, \end{aligned}$$

comme l'affirme le théorème 3.2. CQFD.

4. La relation entre le semi-groupe $\{Z(t)\}$ et les solutions de l'équation d'onde réduite.

Nous avons vu que le spectre du générateur du semi-groupe, B , détermine les pôles de la matrice de diffusion et par suite, une caractérisation de ce spectre est souhaitable. Le spectre de B est l'ensemble des nombres complexes μ pour lesquels il y a une solution μ -sortante non triviale de l'équation d'onde réduite

$$\Delta u - \mu^2 u = 0$$

(4.1.)

$$u = 0 \text{ sur } \partial G.$$

Théorème 4.1.- Le générateur B a μ comme valeur propre si et seulement si l'équation

$$(4.2.) \quad Af = \mu f$$

a une solution locale éventuellement sortante et non triviale

(Lax p. 158).

Corollaire 4.1.- A part un ensemble discret de valeurs μ telles que $\operatorname{Re} \mu < 0$, il n'y a aucune solution μ -sortante non triviale de l'équation d'onde réduite (4.1.) satisfaisant la condition-limite.

Théorème 4.2.- Si μ appartient à l'ensemble résolvant du générateur B et si h appartient à H et a un support borné, (ou simplement appartient à K^c pour $c > \rho$), alors il y a une solution locale unique éventuellement - sortante de

$$(4.7.) \quad \mu f - Af = h ;$$

cette solution, f_μ , est analytique en μ au sens fort de la norme d'énergie locale.

Démonstration : D'après le théorème 4.1., la solution est unique. Nous allons procéder ensuite à la construction d'une solution de l'équation (4.7.). Supposons que h appartient à K^c . Notons avant tout que pour tout $a > c$,

$$f_\mu^a \equiv (\mu I - B^a)^{-1} h$$

existe et est analytique en μ dans l'ensemble résolvant de B_-^a par le théorème 6.3. du chapitre précédent, l'ensemble résolvant est indépendant de a et par le corollaire 3.3. du présent chapitre, il est connexe. Maintenant, d'après (3.2.) si $a \geq c$, et $\operatorname{Re} \lambda > 0$, alors

$$(4.8.) \quad (\lambda I - B^a)^{-1} h = P_+^a \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) h dt.$$

Par conséquent, si $\operatorname{Re} \lambda > 0$, alors $f_\lambda^a = P_+^a f_\lambda^b$ pour $a < b$ et puisque par le

lemme 3.2. $U(t)h$ est orthogonal à D_-^c , il s'ensuit que f_λ^a est aussi orthogonal à D_-^c . Toutes ces deux propriétés sont conservées par le prolongement analytique et par suite, nous pouvons affirmer pour tout μ dans l'ensemble résolvant de B que

$$(4.9.) \quad f_\mu^a = P_+^a f_\mu^b \quad \text{pour } a < b$$

et que f_μ^a est orthogonal à D_-^c . En particulier, $f_\mu^a(x) = f_\mu^b(x)$ pour $|x| < a$ de sorte que :

$$(4.10.) \quad f_\mu \equiv \lim_{a \rightarrow \infty} f_\mu^a$$

est bien définie et appartient à H localement. Nous employons le lemme (4.1.) et en déduisons que f_μ appartient à $D(A)$ localement et que pour $|x| < a$ ($a > c$)

$$[Af_\mu](x) = [B^a f_\mu^a](x) = \mu f_\mu^a(x) - h(x) = \mu f_\mu(x) - h(x) \quad , \quad \text{d'où}$$

découle (4.7.).

Puisque f_μ^a est orthogonal à D_-^c , nous savons que $[U_0(t)f_\mu^a](x)$ s'annule pour $|x| < t - c$. Le domaine de définition de l'argument montre que

$$[U_0(t)f_\mu](x) = [U_0(t)f_\mu^a](x) \quad \text{pour } |x| < a - t,$$

et a arbitraire, nous pouvons conclure que $[U_0(t)f_\mu](x) = 0$ pour $|x| < t - c$ et par suite que f_μ est éventuellement sortante. Pour finir, l'analyticité de f_μ^a pour tout a prouve que f est analytique pour la norme de l'énergie locale. Ce qui achève la démonstration du théorème 4.2.'/.

Pour obtenir une solution μ -sortante pour l'équation d'onde réduite non homogène,

$$(4.11.) \quad \Delta u - \mu^2 u = h, \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial G$$

où h est à support compact, nous prenons la solution éventuellement sortante de

$$\mu f - Af = \{0, -h\}$$

fournie par le théorème 4.2. et posons $u = f_1$. Ce qui, combiné avec les corollaires 4.1. et 3.3., donnent :

Corollaire 4.2.- Hormis un ensemble discret de μ telles que $\text{Re } \mu < 0$, pour lesquelles (4.1.) a une solution μ -sortante non triviale, il existe toujours une solution unique μ -sortante de l'équation d'onde réduite non homogène (4.11.) satisfaisant la condition limite. Cette solution dépend analytiquement de μ dans la norme locale H_D .

Remarque : Tous ces résultats restent valables si l'on remplace sortant par entrant.

Pour $\text{Re } \lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur intégral dont le noyau est la fonction de Green $G(\lambda; x, y)$. Les propriétés analytiques de $((\lambda I - A)^{-1} f, g)$ pour f et g à support compact montre que :

Théorème 4.3.- Pour $x \neq y$, $G(\lambda; x, y)$ a un prolongement méromorphe dans le λ -demi-plan gauche et a ses pôles sur le spectre de B .

Soit μ un nombre complexe n'appartenant pas au spectre de B et soit g une fonction de $L_2(G)$ à support borné. Soit u une solution dans G de l'équation d'onde non homogène

$$(4.12.) \quad u_{tt} - \Delta u = e^{\mu t} g ,$$

qui s'annule sur ∂G et dont les valeurs initiales ont une énergie finie. Le résultat suivant, connu sous le nom du principe de l'amplitude limitante, décrit le comportement asymptotique de $u(x,t)$ pour t grand :

Théorème 4.4.- Quand t tend vers l'infini, $u(x,t)$ converge pour la norme de l'énergie locale vers une solution d'équilibre $e^{\mu t} v$ où v est la solution μ -sortante de l'équation d'onde réduite non homogène

$$(4.13.) \quad \Delta v - \mu^2 v = -g .$$

Démonstration : Comme nous l'avons remarqué dans le corollaire 4.2., la solution μ -sortante v de (4.13.) est la première composante de f , la solution éventuellement sortante de l'équation

$$\mu f - Af = h = (0, g) ;$$

une telle solution locale f existe d'après 4.2. La différence $u - e^{\mu t} v$ satisfait l'équation d'onde homogène tandis que la différence de leurs données de Cauchy, nommément

$$d(t) = (u, u_t) - e^{\mu t} f$$

satisfait

$$d(t) = U(t)d_0,$$

où $d_0 = u_0 - f$.

Notre but est de montrer que $d(t)$ tend vers 0 dans la norme locale. Maintenant, la donnée initiale u_0 de $u(t)$ est supposée appartenir à H et par suite, par le lemme de la décroissance de l'énergie (lemme 2.1.), il découle que $U(t)u_0$ décroît localement. Il suffit alors de prouver que $U(t)f$ aussi décroît localement. Par construction, f est éventuellement sortante ; par conséquent f a un représentant dans l'espace libre et se décompose en deux fonctions f_1 et f_2 ($f = f_1 + f_2$) où $U(t)f_1 = U_0(t)f_1$ s'annule pour $|x| < t + \rho$ et f_2 a une énergie finie. Puisque $f_2 = f - f_1$, nous voyons que f_2 aussi appartient à H . Ainsi,

$$U(t)f = U(t)f_1 + U(t)f_2 ;$$

comme ci-dessus, $U(t)f_1$ s'annule pour $|x| < t + \rho$ et puisque f_2 est d'énergie finie, le lemme 2.1. implique que $U(t)f_2$ tend vers 0 pour la norme locale. Ce qui complète la démonstration du théorème 4.4.

5. La matrice de diffusion.

Dans cette section, nous obtenons des renseignements sur la matrice de diffusion au moyen de la théorie développée dans les précédents chapitres reliée aux propriétés établies de l'équation d'onde.

Comme nous l'avons noté précédemment au premier chapitre, la théorie de la représentation s'applique puisque la solution du problème extérieur engendre un groupe d'opérateurs unitaires $\{U(t)\}$ pour lequel D_-^0 et D_+^0

jouent le rôle de sous-espaces entrant et sortant. L'espace auxiliaire N qui apparaît dans cette théorie est identifié dans la section 2 à $L_2(S_{n-1})$. Cet espace est séparable et par suite, d'après le théorème 4.1. du premier chapitre l'opérateur de diffusion S sur $L_2(-\infty, \infty; N)$ peut se construire comme fonction multiplicative à valeur opératrice $S(\sigma)$ de N dans N , ayant les propriétés suivantes :

- (a) $S(\sigma)$ est la valeur limite d'une fonction $S(z)$ à valeur opératrice, analytique pour $\text{Im } z < 0$, qui converge fortement le long des lignes $\text{Re } z = \sigma$ vers $S(\sigma)$ pour presque tout σ ,
- (b) $|S(z)| \leq 1$ pour tout z avec $\text{Im } z \leq 1$.
- (c) $S(\sigma)$ est unitaire pour presque tout σ .

En plus, l'opérateur $Z(2\rho)(\lambda I - B^a)^{-1}$ est compact par le théorème 3.1.

Par conséquent, nous pouvons invoquer le théorème 5.1. du second chapitre et en le combinant avec les théorèmes 3.1. et 4.1., nous obtenons :

Théorème 5.1.- La matrice de diffusion $S(z)$ est holomorphe sur l'axe réel et méromorphe dans tout le plan, avec un pôle exactement aux points z pour lesquels il y a une solution locale éventuellement sortante non triviale de

$$Af = izf .$$

De même, le théorème 5.2. du second chapitre et l'expression (3.9.) donnent :

Théorème 5.2.- Si l'obstacle est étoilé, alors pour une constante α positive, la matrice de diffusion $S(z)$ est holomorphe et borné dans la bande $\text{Im } z < \alpha$.

On démontre que la matrice de diffusion seule permet de déterminer l'obstacle.

Théorème.- La matrice de diffusion seule permet de déterminer l'obstacle (ou le diffuseur).

Démonstration : Supposons $S = S'$. Alors $W_+^{-1} W_- = W_+'^{-1} W_-'$ et nous pouvons poser

$$W = W_- W_-^{-1} = W_+' W_+'^{-1}.$$

Or nous savons que W est un opérateur unitaire de H dans H' et satisfait les propriétés suivantes :

- i) W restreint à $D_-^0 + D_+^0$ est l'identité
- ii) $W U(t) = U'(t)W$.

Nous allons d'abord montrer que pour tout f dans H , $|Wf|(x) = f(x)$ pour $[x] > \rho$. Soit g dans D_-^0 , alors par (i) $Wg = g$ et ainsi par (ii)

$$(5.14.) \quad U'(t)g = W U(t)g.$$

Ensuite, nous décomposons $U(t)g = f_1 + f_2$ et $U'(t)g = f_1' + f_2'$ en somme orthogonale f_1 et f_1' dans $D_-^0 + D_+^0$, f_2 et f_2' dans le complémentaire orthogonal K^0 de ce sous-espace. Alors par (i), $Wf_1 = f_1$ et puisque W

est unitaire, Wf_2 appartient à K ; par suite, par (5.14.), nous voyons que $f_1 = Wf_1 = f'_1$ et $Wf_2 = f'_2$. D'autre part, par le domaine de dépendance de l'argument, $[U(t)g](x) = [U'(t)g](x)$ pour $|x| > |t| + \rho$, et puisque $f_1 = f'_1$, nous concluons que $f_2(x) = f'_2(x)$ pour $|x| > |t| + \rho$.

D'après le théorème 2.1., l'union des $U(t)$ images de D_-^0 est dense dans H et par conséquent, il s'ensuit que $[Wf](x) = f(x)$ pour tout $|x| > \rho$ et pour tout f dans H .

Soit T l'opérateur d'inversion du temps :

$$T\{f_1, f_2\} = \{f_1, -f_2\}.$$

On vérifie que $T = T^*$ et que $T^2 = 1$; en plus

$$T A_0 = -A_0 T \text{ et } T A = -A T ;$$

il découle de cela que :

$$T U_0(t) = U_0(-t)T \text{ et } T U(t) = U(-t)T .$$

Par conséquent, les opérateurs d'ondes W_{\pm} sont transformés en $W_{\pm} T = T W_{\pm}$ et puisque $S = W_+^{-1} W_-$, nous voyons que

$$(5.12.) \quad S T = T S^{-1} .$$

Comme $W_+ T = T W_-$ et que $W_+^* T = T W_-^*$, il s'ensuit que $W T = T W$. En particulier, alors,

$$W\{f_1, 0\} = 1/2 W(f+Tf) = 1/2(Wf+TWf) = \{[Wf]_1, 0\} ;$$

Ainsi, si f a sa seconde composante nulle, il en est de même pour Wf .
 Maintenant, prenons $f = \{f_1, 0\}$ dans H de sorte que f_1 est harmonique pour $|x| < 2\rho$, et égale identiquement à un pour $|x| = 2\rho$; d'après le principe de Dirichlet, f est d'énergie minimum quand on compare f à tout g de H égale à f pour $|x| > 2\rho$. Puisque W est unitaire et que $[Wf](x) = f(x)$ pour $|x| > 2\rho$ il vient que Wf est d'énergie minimum, comparée à tout de H' égale à $f(x)$ pour $|x| > 2\rho$. Par conséquent, il découle du principe de Dirichlet que $\{f'_1, 0\} = Wf$ est aussi harmonique pour $|x| < 2\rho$. Mais nous avons montré que $f_1(x) = f'_1(x)$ pour $|x| > \rho$ de sorte que par l'analyticité, nous pouvons conclure que $f_1(x) = f'_1(x)$ sur $G \cap G'$. Puisque soit f_1 , soit f'_1 s'annule en tout point de $\partial(G \cap G')$, nous voyons que les deux fonctions s'annulent en tout point de $\partial(G \cap G')$. D'autre part f_1 [et f'_1] est supérieure à zéro sur $G \cap \{|x| < 2\rho\}$ [respectivement $G' \cap \{|x| < 2\rho\}$] et par suite, nous pouvons conclure que $\partial G = \partial G'$. */.

DECROISSANCE DE LA SOLUTION DE L'EQUATION DES ONDES

DANS LES DOMAINES NON BORNES :

Dans ce dernier chapitre, nous allons rappeler la démonstration de Morawetz et parler des hypothèse de Zachmanoglou lorsqu'on considère la solution de l'équation d'ondes, avec des données initiales à support compact ou non, dans des domaines non bornés.

Pour commencer, nous montrerons que si $f = \{f_1, f_2\}$ est à support non compact mais que ∂G est borné, alors dans tout sous-domaine G' borné de G , la décroissance de la solution de l'équation d'onde est encore exponentielle.

Nous considérerons ensuite le cas des obstacles étoilés non bornés, c'est-à-dire des corps étoilés dont la surface tend vers l'infini et montrerons que sous certaines conditions, l'inégalité qui exprime la décroissance exponentielle reste valable.

Pour finir, nous supposerons f à support quelconque mais d'énergie finie et nous montrerons que l'on peut se ramener à l'un des cas étudiés ci-dessus.

1. Décroissance de l'énergie pour les obstacles étoilés. (C.S. MORAWETZ).

La loi générale de conservation de l'énergie pour U se démontre en multipliant l'équation d'onde par U_T et en notant que la forme quadratique qui en résulte est une divergence :

$$(1) \quad U_T (U_{TT} - \Delta_X U) = \operatorname{div}_X P + Q_T$$

ou

$$(2) \quad P = -U_T \nabla U, \quad Q = \frac{1}{2} (U_T^2 + |\nabla U|^2).$$

Intégrée sur un domaine \mathcal{D} , cette expression donne une intégrale de surface dans l'espace (X, T) , intégrale qui s'annule quand U est une solution de l'équation d'onde ; on l'appelle identité générale d'énergie. Elle a en plus cette propriété que le facteur sous le signe somme est une forme définie positive sur les surfaces.

La transformation de Kelvin

$$(3) \quad \begin{cases} X = \frac{x}{r^2 - t^2}, & T = \frac{t}{r^2 - t^2}, & RU = ru, & r = |x| \\ R = |X| \end{cases}$$

préserve l'opérateur d'onde dans ce sens que

$$(4) \quad R^3 (U_{TT} - \Delta_X U) = r^3 (u_{tt} - \Delta_x u).$$

D'autre part,

$$(5) \quad RU_T = r [(r^2 + t^2) u_t + 2t(ru)_r]$$

et

$$\frac{dX}{R^4} \frac{dT}{r^4} = \frac{dx}{r^4} \frac{dt}{r^4}.$$

La combinaison de (4), (5) et (6) donne :

$$\int U_T (U_{TT} - \Delta_X U) dX dT = \int Nu (u_{tt} - \Delta_X u) dx dt$$

avec
$$Nu = (r^2 + t^2)u_t + 2t(ru)_r .$$

En employant (1), le membre gauche peut s'écrire comme une intégrale de surfac et par suite, il en est de même du second membre. Ainsi, nous obtenons :

Théorème 1.- Soit $u(x,t)$ une solution de l'équation d'onde qui a des dérivées de carré intégrables. Alors, sur toute surface ∂ de dimension trois, avec comme élément de surface dS , nous avons :

$$\int_{\partial} (p_n + q_{nt}) dS = 0$$

où (n, n_t) sont les composantes de la normale extérieure.

Le calcul montre que :

$$\begin{aligned} (9) \quad p &= -t u_t^2 x - 2t(x\nabla u)\nabla u + t|\nabla u|^2 x \\ &\quad - (r^2 + t^2)u_t \nabla u - 2tu \nabla u - \frac{1}{2} r^{-2} ((r^2 + t^2)u^2)_t x \\ &= \phi(r, t, u, u_t, \nabla u). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10) \quad q &= \frac{1}{2} (r^2 + t^2)(|\nabla u|^2 - u_r^2) + \frac{1}{4r^2} \{ (r+t)^2 ((ru)_r + (ru)_t)^2 + \\ &\quad + (r-t)^2 ((ru)_r - (ru)_t)^2 \} = \psi(r, t, u, u_t, \nabla u). \end{aligned}$$

q est une forme définie positive.

Théorème 2. - (Théorème de Morawetz).

Soit u une solution de l'équation d'onde à l'extérieur d'un corps étoilé de bord B et soit $u = 0$ sur B . Supposons en plus que les données initiales f de u s'annulent pour $|x| \geq k$. Alors :

$$(11) \quad |u(\tau)|_h \leq \frac{2k}{\tau} |f|$$

pour $\tau \geq 2h$. Ici $|u(\tau)|_h^2$ est l'énergie $\int (|\nabla u|^2 + u_t^2) dx$ à l'intérieur de la sphère de rayon h au temps τ et $|f|^2$ est l'énergie totale des données initiales.

Conformément aux notations précédentes,

$|f|_E = |f|$, $|U(\tau)f|_E^{G(h)} = |u(\tau)|_h$, de là, l'inégalité (3.4.) du chapitre précédent.

Démonstration : Choisissons l'origine de telle sorte que B soit étoilé par rapport à l'origine, i.e. $x_n \leq 0$. Nous appliquons le théorème 1 à un domaine borné par les plans $t = \tau$, $t = 0$ et le corps cylindre $x \in B$, $0 \leq t \leq \tau$. Alors, puisque la solution s'annule pour r assez grand,

$$(12) \quad \int_{t=\tau} q \, dx + \int_0^\tau \int_B p n \, ds \, dt = \int_{t=0} q \, dx.$$

Puisque u s'annule sur B , $\nabla u = (\partial u / \partial n)n$ et $u_t = 0$; ainsi, de (9) il découle que $p n = -t \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 x_n$. Puisque B est étoilé par rapport à l'origine,

$x_n \leq 0$, d'où $p n \geq 0$. Par suite, de (12),

$$(13) \quad \int_{t=\tau} q \, dx \leq \int_{t=0} q \, dx.$$

De l'expression (10) de q , nous voyons que pour $t = 0$,
 $q \leq \frac{1}{2} r^2 (|\nabla u|^2 + u_t^2)$. Par suite, puisque f a son support dans la boule
 $|x| \leq k$, nous trouvons que :

$$(14) \quad \int_{t=0} q \, dx \leq \frac{1}{2} k^2 |f|^2 .$$

Puisque q est positif, nous obtenons de (13) et (14) pour tout h ,

$$(15) \quad \int_{\substack{t=\tau \\ r \leq h}} q \, dx \leq \int_{t=\tau} q \, dx \leq \frac{1}{2} k^2 |f|^2 .$$

L'emploi de l'expression (10) nous permet de minorer q pour $r \leq t/2$:

$$(16) \quad \frac{1}{4} t^2 \left[\frac{1}{2} (|\nabla u|^2 - u_r^2) + \frac{1}{4r^2} ((ru)_r + (ru)_t)^2 + \frac{1}{4r^2} ((ru)_r - (ru)_t)^2 \right] \leq q$$

ou

$$(17) \quad \frac{1}{8} t^2 (|\nabla u|^2 + u_t^2 + \operatorname{div} \frac{1}{r^2} u^2 x) \leq q .$$

L'introduction de (17) dans (15), pour $\tau \geq 2h$, donne

$$(18) \quad \int_{\substack{t=\tau \\ r \leq h}} (|\nabla u|^2 + u_t^2 + \operatorname{div} \frac{1}{r^2} u^2 x) dx \leq \frac{4}{\tau^2} k^2 |f|^2 ;$$

puisque $u = 0$ sur B , l'intégration de la divergence donne :

$$(19) \quad \int_{\substack{t=\tau \\ r \leq h}} (|\nabla u|^2 + u_t^2) dx + \int_{\substack{t=\tau \\ r=h}} \frac{1}{r} u^2 \, dS \leq \frac{4}{\tau^2} k^2 |f|^2$$

où dS est l'élément de surface sur la sphère $r = h$.

Par suite,

$$(20) \quad \int_{\substack{t=\tau \\ r \leq h}} (|\nabla u|^2 + u_t^2) dx \leq \frac{4}{\tau^2} k^2 |f|^2$$

soit

$$(21) \quad |u(\tau)|_h^2 \leq \frac{4}{\tau^2} k^2 |f|^2$$

ou

$$(22) \quad |u(\tau)|_h \leq \frac{2}{\tau} k |f| \quad \text{CQFD.}$$

Remarque. - Signalons que Zachmanoglou a pu généraliser le résultat de Morawetz en considérant des espaces de dimension $n \geq 3$ et en prenant

$$w = r^{\frac{n-1}{2}} u .$$

Il a montré que la décroissance de l'énergie est encore en $1/t^2$, quand bien même le bord de l'obstacle a une surface qui tend vers l'infini, pourvu que cet obstacle reste étoilé.

2. Cas de données initiales à support non compact.

Considérons l'équation d'onde dans la région G :

$$(1) \quad \nabla^2 u - u_{tt} = 0$$

$$(2) \quad u(x,0) = f_1(x), \quad u_t(x,0) = f_2(x)$$

$$(3) \quad u(x,t) = 0 \quad \text{pour } x \in B, \quad t \geq 0,$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions régulières.

Zachmanoglou a montré, par une méthode semblable à celle de Morawetz, et par des calculs beaucoup plus longs encore, (voir Zachmanoglou, [1], p. 316-322), que :

Théorème. - Si f_1 et f_2 satisfont la condition

$$(4) \quad \int_G r^2 \left[|\nabla f|^2 + (n-1)(f_1/r)^2 + f_2^2 \right] dv < \infty$$

alors pour $t > R_0$

$$(5) \quad \int_{B_0} (|\nabla u|^2 + u_t^2) dv < \frac{1}{(1 - R_0/t)^2 t^2}$$

où $B_0 = G \cap B(0, R_0)$ de dv est l'élément de volume de \mathbb{R}^n .

$$B(0, R_0) = \{x \mid |x| < R_0\}. \quad K = K(f_1, f_2).$$

Le résultat (5) reste valable que $f = \{f_1, f_2\}$ soit à support compact ou non et quand la surface de l'obstacle tend vers l'infini.

(5) montre que l'énergie dans toute sphère finie décroît en $1/t^2$ et que si f est à support non compact mais satisfait la condition (4),

l'énergie reste localement finie dans \mathbb{R}^n .

3. La décroissance exponentielle.

a) Cas de $f = \{f_1, f_2\}$ à support non compact.

Supposons f à support non compact et ∂G borné. Soit G' un sous-domaine borné de G .

\mathbb{R}^n étant paracompact, pour tout recouvrement ouvert relativement compact $(U_i)_{i \in I}$ de \mathbb{R}^n , il existe un recouvrement localement fini et plus fin $(V_i)_{i \in J}$ (donc qui est aussi relativement compact).

A $(V_i)_{i \in J}$, on fait correspondre une partition de l'unité $(a_i(x))_{i \in J}$, chaque a_i ayant son support dans V_i .

$$f = \sum_{i \in J} a_i(x) f = \sum_{i \in J} f_j \text{ avec } f_j = 0 \text{ pour } |x| < j.$$

Comme d'après (5), l'énergie contenue dans toute sphère finie est finie, f est d'énergie localement finie. G' borné est contenu dans la réunion d'un nombre fini de V_i :

$$G' \subset \bigcup_{i \in J_0 \text{ fini}} V_i$$

et d'après le théorème 3.2. du chapitre précédent, si nous prenons ρ tel que $G' \subset G(\rho)$, alors il existe c et α positifs tels que

$$|U(t)f|_E^{G(\rho)} \leq c \exp(-\alpha t) |f|_E^{\bigcup_{i \in J_0} V_i}.$$

Donc si f est à support non compact mais telle que localement l'énergie contenue

dans toute sphère finie soit majorée par K/t^2 (K constante), alors la décroissance de l'énergie est exponentielle.

b) Cas des corps étoilés dont la surface s'étend indéfiniment :

α) f à support compact :
~~~~~

Nous pouvons considérer le bord  $\partial G$  comme borné et ensuite faire tendre  $\rho$  vers l'infini. La donnée initiale  $f$  étant à support compact, il existe  $\rho$  tel que  $\text{supp } f \subset G(\rho)$  ; nous avons alors, pour  $t \geq 4\rho$ ,

$$|U(t)f|_E^{G(\rho)} \leq c e^{-\alpha t} |f|_E ,$$

formule valable quand la surface de l'obstacle et par suite  $\rho$  tend vers l'infini.

β)  $f$  à support quelconque :  
~~~~~

Si f est à support quelconque, nous savons que f est localement d'énergie finie si f satisfait la condition de Zachmanoglou (4).

Toutefois si f est d'énergie totale finie, il existe $g \in C_0^\infty$ telle que

$$|f-g|_E < \varepsilon ,$$

puisque C_0^∞ est dense dans H . On se ramène alors au cas de la fonction à support compact et l'inégalité

$$|U(t)f|_E^{G(\rho)} \leq c e^{-\alpha t} |f|_E$$

reste valable.

CONCLUSION

Le problème mixte pour l'équation des ondes est actuellement l'objet de nombreuses recherches. La théorie du scattering, qui étudie le comportement asymptotique des solutions, voit son essor avec l'application à la physique (mécanique quantique, télédétection, optique géométrique, acoustique, etc...). Signalons pour l'avenir, les travaux récents de William Goodhue pour les systèmes hyperboliques à coefficients du type de Gevrey et les articles de Lax et Philipps sur la théorie du scattering pour les systèmes hyperboliques dispersifs.

BIBLIOGRAPHIE

ADAMJAN, AROV -

- [1] *A class of scattering operators and of characteristic operator-functions of contractions,*
Dokl. Akad. Nauk SSSR. Engl. translation in Soviet Math. Dokl. 6,
1-5 (1965).
- [2] *Scattering operators and contraction semi-groups in Hilbert Space,*
Dokl. Akad. Nauk. SSSR ; Engl. transl. in Soviet. Math. Dokl. 6,
1377-1380 (1965).

BUCHAL -

The approach to steady state of solutions of exterior boundary value problems for the wave equation,
J. Math. Mech. 12, 225-234 (1963).

COURANT-HILBERT -

Methods of Mathematical Physics, tome II, 1962.

DONALDSON, GIBSON and HERSCH -

On the invariance principle of scattering theory,
Journal of functional analysis, p. 131-133. (1973).

DUNFORD-SCHWARTZ -

Linear operators,
Tomes I et II, Interscience publishers.

GARNIER, WILDE et SCHMETS

Analyse fonctionnelle,
Math. Reiche.

HILLE -

Analytic function theory,
Baisdell publishing company.

.../...

HORMANDER -

Linear partial differential operators,
Springer Verlag, 1969.

HORVATH -

- [1] *Linear operators and approximations,*
Proceedings of the Conference of Oberwolfach.
- [2] Cours à l'Université de Paris 1972-1973.

IKEBE T. -

*Eigenfunction expansions associated with the schrödinger operator
and their applications to scattering theory,*
Arch. Rat. Mech. Analysis 5, 1-34 (1960).

KATO T -

- [1] *Perturbation theory for linear operators,*
Springer Verlag (1966).
- [2] *Wave operators and unitary equivalence,*
Pacific J. Math. 171-180, (1965).

LAX, MORAWETZ, PHILLIPS -

*Exponential decay of solutions of the wave equation in the
exterior of a star-shaped obstacle,*
CPAM 16, 477-486 (1963).

LAX, PHILLIPS -

- [1] *Scattering theory,*
Academic Press, 1967.
- [2] *The wave equation in exterior domains,*
Bull. Am. Math. Soc. 68, 47-49 (1962).
- [3] *Scattering theory,*
Bull. Am. Math. Soc, 70, 130-142 (1964).
- [4] *Scattering theory,*
Rocky Mountain Journal of Math. 1, 173-223 (1971)

- [5] *Scattering theory for dissipative hyperbolic systems*,
14, 172-235 (1973).
- [6] *Poles of the scattering matrix*,
Arch. Rat. Mech. and Analysis, 40, p. 268-280, (1971).
- [7] *Purely decaying modes for the wave equation in the exterior of an
obstacle, in functional analysis and related topics*,
p. 11-20, Tokyo 1969.

MORAWETZ C.S. -

- [1] *The decay of solutions of the exterior initial - boundary value
problem for the wave equation*,
CPAM 14, 561-568 (1961).
- [2] *The limiting amplitude principle*,
CPAM 15, 349-361 (1962).

PHILIPPS - voir LAX.

ROACH G.F. -

Green's functions,
Van Nostrand company, 1970.

YOSIDA K. -

Functional analysis,
p. 458, Springer, Berlin (1965).

WILLIAM GOODHUE -

*Scattering theory for hyperbolic systems with coefficients of
Gevrey type*,
Trans. Amer. Math. Society, 180, p. 337-346, juin 1973.

ZACHMANOGLOU E.C. -

*The decay of solutions of the initial boundary value problem for
the wave equation in unbounded regions*,
Arc. Rational Mechanics Analysis, Vol. 14, p. 312-325.