

50376
1974
152
N° d'ordre : 302

50376
1974
152

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES

ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Jean-Paul DUBUS

Ingénieur C. N. A. M.

**Théorie et mise en application d'une méthode
de sondage électro - magnétique utilisable en
prospection géophysique à faible profondeur**



Soutenu le 31 Mai 1974, devant la COMMISSION d'EXAMEN

MM.	R. GABILLARD	Président
	P. DEBRABANT	Examineur
	F. LOUAGE	Examineur
	P. GRIVET	Invité
	J. FONTAINE	Invité
	H. TACHET des COMBES	Invité

A ma femme,

A ma fille,

A mes parents,

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire de Radiopropagation et Electronique de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, dirigé par Monsieur le Professeur GABILLARD.

Tout au long de mes années d'activité dans son laboratoire Monsieur le Professeur GABILLARD m'a toujours accordé sa confiance, n'a cessé de prodiguer ses conseils, a assuré ma formation, et a mis à ma disposition les moyens nécessaires à l'avancement de ce travail. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici ma profonde gratitude.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur le Professeur P. GRIVET, membre de l'Institut, pour le grand honneur qu'il m'a fait en acceptant de participer à mon Jury. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma déférente gratitude.

Je remercie également Monsieur TACHET des COMBES, Directeur Général à la Société PETROFINA d'avoir bien voulu participer à mon Jury et dont les remarques, concernant les problèmes industriels posés dans le domaine de la prospection géophysique, m'ont permis de faire le choix des orientations données à ce travail.

Je remercie aussi Monsieur le Professeur LOUAGE pour l'aide amicale qu'il m'a souvent apportée au cours de ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur DEBRABANT, Professeur de Géotechniques à l'U.S.T.L., qui a eu l'amabilité d'apporter son concours lors de la vérification des résultats d'interprétation.

Je remercie particulièrement Monsieur le Professeur FONTAINE pour le soutien, l'aide amicale et les conseils avisés qu'il m'a généreusement apportés pendant toute la durée de cette étude.

Enfin je tiens à exprimer ma gratitude aux membres de l'équipe de Radiopropagation MM. BAUDET, CAUTERMAN, CROSNIER, DEGAUQUE, DOCO, GAQUIERE, HUYGHE, MANGEZ, POISSONNIER, VANBREMEERSCH pour leur collaboration amicale ou leur participation dévouée, à Madame PASQUIER pour la dactylographie de ce mémoire et à Messieurs BOTELLA, DEHORTER et LEMAITRE pour son tirage.

S O M M A I R E

I N T R O D U C T I O N

I. PRESENTATION DE L'ETUDE DU RAYONNEMENT D'UN D.M.V. POUR SON EMPLOI EN PROSPECTION A FAIBLE PROFONDEUR.

- I.1. Position du problème*
- I.2. Choix du dispositif de prospection*
- I.3. Exposé chronologique des recherches effectuées et résultats obtenus*
 - I.3.1. Les méthodes classiques*
 - I.3.2. Cadre de notre travail pratique*
 - I.3.2.1. Le cas d'approximation de l'induction*
 - I.3.2.2. Cas où l'on ne fait pas d'approximations*

P R E M I E R E P A R T I E

II. EXPRESSION GENERALE DU POTENTIEL CREE, AU-DESSUS DE LA SURFACE D'UN SOL STRATIFIE, PAR UN DIPOLE MAGNETIQUE VERTICAL DANS DIVERSES ZONES D'APPROXIMATIONS

III. RELATIONS DONNANT LE POTENTIEL ET LES CHAMPS D'UN DIPOLE MAGNETIQUE VERTICAL DANS DIVERSES ZONES D'APPROXIMATIONS

- III.1. Rayonnement au-dessus d'un demi-milieu conducteur*
 - III.1.1. Approximation quasi-statique*
 - III.1.1.1. Paramètres de prospection*
 - III.1.1.2. Zone de validité de l'approximation quasi-statique*
 - III.1.2. Expression du potentiel, résultat d'une intégration par la méthode du col*
 - III.1.2.1. Contours d'intégration*
 - III.1.2.2. Calcul de l'intégrale donnant le potentiel*
 - III.1.2.3. Définition des zones d'approximation*
 - III.1.2.3.1. Zone asymptotique*
 - III.1.2.3.2. Zone intermédiaire*
 - III.1.2.3.3. Zone proche*

III.1.3. Calcul des champs dans l'approximation de la zone proche, comparaison avec ceux obtenus en quasi-statique et avec leurs valeurs exactes	
III.1.3.1. Calcul des champs magnétique et électrique	
III.1.3.2. Comparaison des valeurs des composantes des champs obtenues dans l'approximation de la zone proche avec celles obtenues dans l'approximation quasi-statique et avec les valeurs exactes	
III.1.3.3. Paramètres de prospection	
III.2. Rayonnement du dipôle au-dessus d'un milieu stratifié horizontalement	
III.2.1. Zone de validité de l'approximation	

IV. APPLICATION DU RAYONNEMENT A GRANDE DISTANCE D'UN D.M.V.
A LA PROSPECTION A FAIBLE PROFONDEUR

IV.1. Détermination de la gamme de fréquence	
IV.2. Distance minimum émetteur-récepteur	
IV.3. Moments magnétiques	
IV.4. Remarque sur la verticalité du sondage	

V. CONCLUSION

DEUXIEME PARTIE

I. APPLICATION D'UNE METHODE D'INDUCTION PAR UN DIPOLE MAGNETIQUE VERTICAL
A LA DETECTION DE L'EPAISSEUR D'UNE COUCHE GEOLOGIQUE SUPERFICIELLE :
CAS OU L'ON NEGLIGE LES TERMES DE PROPAGATION

I.1. Calcul des composantes du champ magnétique créé au voisinage d'un D.M.V. situé à une hauteur h au-dessus d'une couche conductrice horizontale d'épaisseur dh	
---	--

I.2.	Composante horizontale du champ magnétique créée par induction à l'aide d'un D.M.V. placé à la surface d'un demi-milieu stratifié à deux couches	
I.3.	Application à la mesure de l'épaisseur h_1 de la couche superficielle	
I.3.1.	Détermination des conditions expérimentales	
I.3.2.	Dispositif expérimental et résultats de mesures	
I.3.3.	Description d'un dispositif possible permettant l'évaluation directe de h_1	
I.3.3.1.	Evaluation de h_1 par variation de r	
I.3.3.2.	Evaluation de h_1 par étalonnage en deux points	
I.3.4.	Limites de la méthode	
I.4.	Application de la méthode d'induction à l'étude d'un milieu inhomogène	
I.4.1.	Composante horizontale H_x créée par un D.M.V. au-dessus d'un permafrost	
I.4.2.	Limite de détectabilité du socle	
I.4.3.	Conclusion	

II. APPLICATION DU RAYONNEMENT PROCHE D'UN DIPOLE MAGNETIQUE VERTICAL A LA PROSPECTION A FAIBLE PROFONDEUR. CAS OU L'ON NE FAIT PAS D'APPROXIMATIONS.

II.1.	Relations intégrales des composantes du champ électromagnétique, et méthode d'intégration	
II.2.	Détermination des conditions de prospection optimales	
II.3.	Méthodologie de prospection	
II.4.	Etude des erreurs introduites par la méthode d'interprétation ..	
II.4.1.	Cas d'un milieu à deux couches	
II.4.1.1.	Recherche de la conductivité superficielle	
II.4.1.2.	Recherche de σ_2 et h_1	
II.4.2.	Cas d'un milieu à trois couches	

II.5. Description de l'appareillage de mesure	
II.5.1. Appareillage de mesure de la conductivité superficielle	
II.5.2. Appareillage de mesure de l'angle α en fonction de la fréquence	
II.5.2.1. Station d'émission	
II.5.2.2. Station de réception	
II.6. Résultats de prospection effectuées sur quelques sites de la région du Nord	
II.6.1. Sondage du site de Leforest	
II.6.2. Sondages du site de Cassel	
II.6.3. Sondages du site de Lezennes	

CONCLUSION

INTRODUCTION

I N T R O D U C T I O N

L'essor économique d'un pays l'oblige à développer ses équipements. Ce développement se traduit par une extension des zones à urbaniser. Au cours de l'établissement de leurs projets, les urbanistes ont besoin de connaître la qualité du sol qui supportera leurs ouvrages jusqu'à une profondeur souvent voisine de 30 mètres.

Jusqu'à présent le principal outil mis à la disposition des spécialistes en travaux publics pour déterminer la structure du sous-sol proche est le sondage mécanique. Ce dernier présente l'avantage de donner une information précise et sûre sur la nature des terrains composant le sous-sol proche, mais les renseignements qu'il donne n'intéressent qu'une très petite région autour du forage. Bien qu'un net progrès ait été réalisé par la mise au point du procédé télég ^{||} qui permet d'accroître notablement le rayon d'investigation d'un sondage mécanique, la connaissance de la variation continue de la nature du sous-sol sur une grande surface n'est pas possible par cette méthode.

Pour connaître d'une façon continue la nature du sous-sol sans devoir forer, les ingénieurs en génie civil ont à leur disposition de nombreux procédés géophysiques. Parmi les principaux on peut citer les méthodes gravimétriques, les procédés électriques de mesure de résistivité, les moyens magnétométriques, les procédés mécaniques. Le choix du procédé de prospection est guidé par la nature de l'hétérogénéité recherchée dans le sous-sol.

Depuis plusieurs années, sous la direction de Monsieur le Professeur GABILLARD, nous nous sommes efforcé, au sein de son équipe, d'adapter à la recherche de la structure du sous-sol proche, les moyens que procure l'électromagnétisme. En particulier, nous avons cherché à faire l'étude critique aussi complète que possible d'un procédé utilisant un dipôle magnétique vertical qui permet de déterminer les caractéristiques d'un sous-sol stratifié horizontal ou renfermant des hétérogénéités.

Nous nous sommes particulièrement attaché à rechercher les limites de validité des solutions analytiques, utilisables pour interpréter les résultats de mesures, et à définir les conditions dans lesquelles il faut se placer expérimentalement pour pouvoir employer ces solutions. Nous nous sommes également placé dans le cas général où l'interprétation des résultats ne peut être faite que numériquement.

Dans une première partie nous rappelons les expressions des potentiels et des champs créés par un dipôle magnétique vertical (D.M.V.) au-dessus d'un demi-milieu stratifié à n couches. En nous servant du cas particulier du demi-milieu homogène, nous rappelons les divers paramètres de prospection qui mettent en évidence l'influence de la conductivité sur le rayonnement du dipôle magnétique.

Nous rappelons l'approximation introduite par J.R. Wait^[21] en 1962, dans l'expression du potentiel vecteur produit par un dipôle à la surface d'un demi-milieu stratifié. Cette approximation, qui revient à considérer l'onde qui se propage dans le sol après réfraction sur l'interface air-milieu conducteur comme une onde plane se propageant dans une direction normale aux interfaces, permet de définir un demi-milieu équivalent au demi-milieu considéré.

Nous déterminons les conditions dans lesquelles cette hypothèse est valable, et les incidences sur les paramètres de prospection, lorsqu'on désire se placer dans cette approximation, de manière à obtenir une méthode d'interprétation extrêmement simple.

Nous déduisons de cette étude qu'il faut se placer à des distances importantes qui nécessitent des puissances d'émission telles que la méthode perd beaucoup de son intérêt pour la prospection à faible profondeur.

Dans une seconde partie, nous envisageons le cas où pour une prospection à faible profondeur, l'émetteur est proche du récepteur. Cette condition est celle que l'on rencontre en pratique.

Dans un premier chapitre nous établissons une expression analytique de la composante horizontale du champ magnétique créé par un D.M.V. au-dessus d'un terrain à deux couches. Cette expression est

valable uniquement dans le cas où le produit du nombre d'onde et de la distance r séparant l'émetteur du récepteur est inférieur à 0.4, mais elle permet d'envisager un appareil simple, capable de mesurer l'épaisseur de la couche superficielle d'un terrain stratifié supposé composé de deux couches.

Dans un second chapitre nous nous plaçons dans les cas où il n'est plus possible de trouver des expressions analytiques permettant de calculer les composantes du champ électromagnétique d'un D.M.V. Dans ces conditions, il est nécessaire d'interpréter les résultats en intégrant numériquement les expressions des champs.

Nous donnons quelques abaques qui permettent de déterminer en fonction du type de terrain à prospector la distance émetteur-récepteur à respecter et la gamme de fréquences à utiliser.

Nous présentons une méthode d'interprétation des résultats expérimentaux permettant d'effectuer le sondage électromagnétique d'un terrain stratifié horizontalement.

Nous donnons quelques exemples de prospection et d'interprétation effectuées sur quelques sites de la région du Nord.

En conclusion, nous présentons une étude critique de ce procédé utilisé pour effectuer l'investigation d'un terrain stratifié horizontal comportant des hétérogénéités locales.

I. ETUDE DU RAYONNEMENT D'UN DIPOLE MAGNETIQUE VERTICAL POUR SON EMPLOI
EN PROSPECTION A FAIBLE PROFONDEUR

I.1. Position du problème

La structure du sous-sol couramment rencontrée jusqu'à une profondeur de 30 mètres s'apparente à celle d'un terrain stratifié à deux, trois, ou quatre couches. Les stratifications peuvent être horizontales ou inclinées. Les diverses couches de terrain ont une conductivité qui diffère suivant la nature du matériau qui les composent. Il en résulte que la mise en évidence de la présence et de l'importance de chaque couche de terrain à partir de la surface du sol peut être faite par une mesure de conductivité. Le résultat d'une prospection renseigne alors sur le nombre de couches de terrain de conductivité différente et sur l'épaisseur de chaque couche, sans pour autant définir la nature géologique des diverses couches de terrain. Mais la plupart du temps, la connaissance de la conductivité associée à la géologie de la région, permet de déduire la nature du terrain.

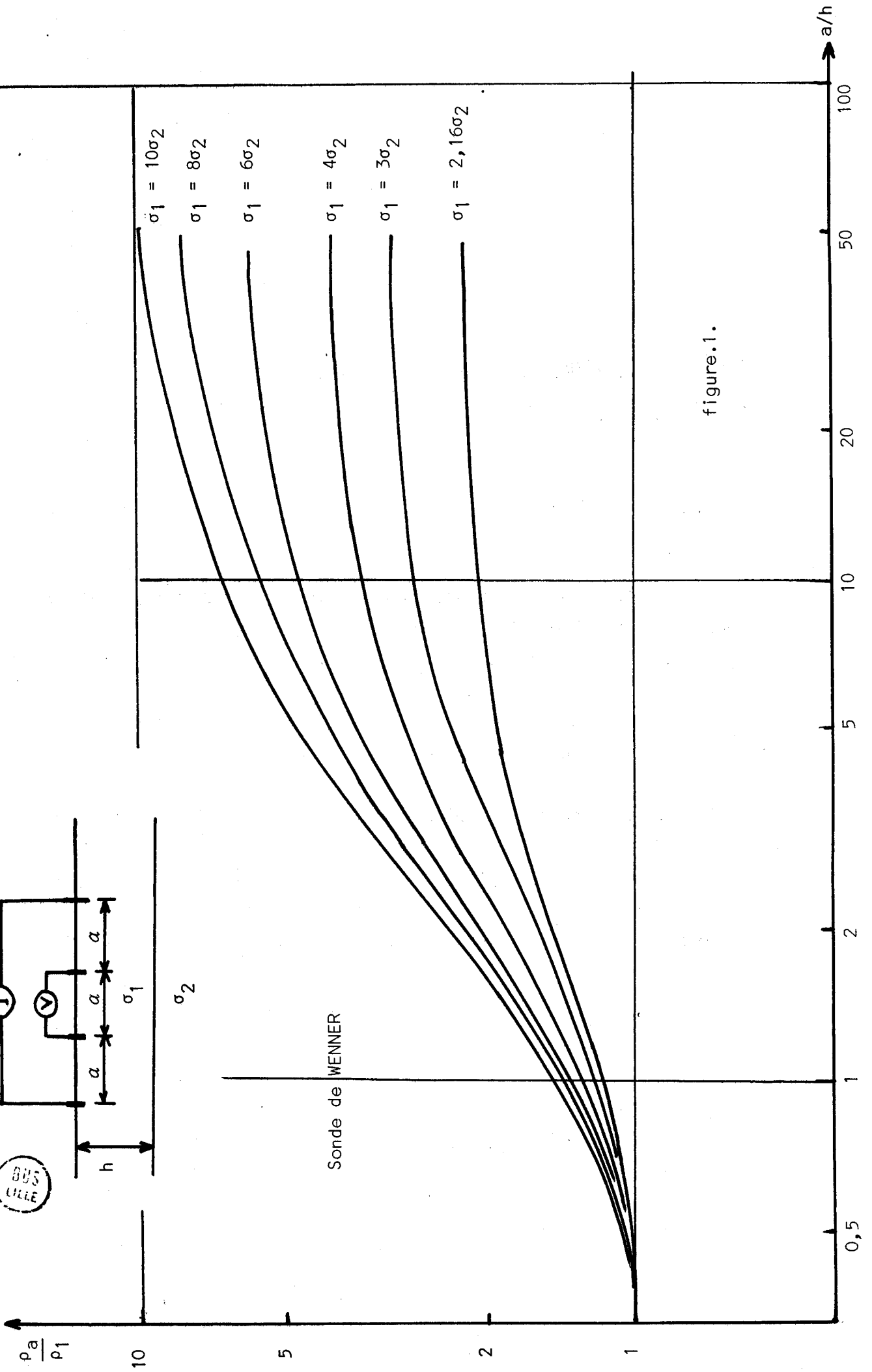
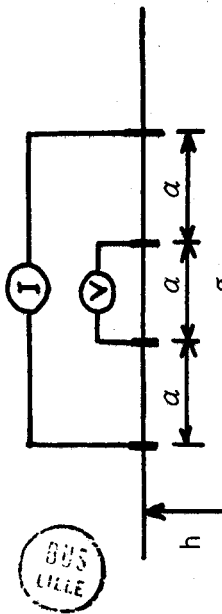


figure.1.

I.2. Choix du dispositif de prospection

La méthode la plus couramment employée pour détecter les couches d'un terrain stratifié est la méthode des résistivités. Cette méthode semble avoir été discutée pour la première fois par Maxwell en 1891^[1] mais son emploi systématique date des travaux de Wenner en 1915^[2] et de Schlumberger en 1920^[3]. Elle consiste à utiliser un quadripôle dit "quadripôle Schlumberger" ou une sonde dite "de Wenner" et à mesurer la résistivité apparente en fonction des dimensions de la sonde. Un tel système est d'un emploi relativement simple. Il ne nécessite qu'un générateur de courant très basse fréquence, un voltmètre et quatre électrodes. Mais il est nécessaire de modifier la dimension du quadripôle à chaque mesure. Ceci constitue une sujétion importante, car, la plupart du temps, les épaisseurs des couches de terrain varient d'un point à un autre. Les résultats de mesures sont comparés aux résultats théoriques disponibles sous forme d'abaques et obtenus à partir d'un modèle stratifié horizontalement. Il en résulte une comparaison difficile et par conséquent une interprétation parfois problématique. La figure.1. représente, pour une sonde de Wenner, dans le cas d'un terrain à deux couches, la variation de la résistivité apparente réduite ρ_a/ρ_1 en fonction de la dimension de la sonde pour diverses valeurs du contraste de conductivité. Ces courbes sont obtenues dans le cas où les électrodes sont parcourues par un courant continu. On remarque, que l'effet de la couche inférieure apparaît assez nettement lorsque la distance inter-électrodes a est comprise entre 2 et 10 fois celle de l'épaisseur de la première couche. On en déduit alors que pour mettre en évidence une couche inférieure située à une profondeur de 6 mètres, il faut que les électrodes de courant soient au minimum espacées de 36 mètres.

Pratiquement pour rendre la mesure de la différence de potentiel apparaissant aux bornes des électrodes de tension plus aisée, on utilise un courant continu permutté ou un courant sinusoïdal. Dans ces conditions, on peut admettre que l'on se trouve dans le cas du courant continu lorsque la distance séparant les électrodes extrêmes est environ 10 fois plus petite que la longueur d'onde dans le sol. Si on admet que la longueur d'onde dans le sol est voisine de celle d'une onde plane s'y propageant, son expression est donnée par la relation :

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (1)$$

où σ est la conductivité moyenne du terrain

$\mu = \mu_0$ = perméabilité du sous-sol.

Pour satisfaire les conditions du courant continu, il faut donc respecter l'inégalité :

$$3a < 20\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (2)$$

Il en résulte que pour mettre en évidence la structure d'un terrain jusqu'à une profondeur de 6 mètres, il faut une fréquence inférieure à 200 Hz.

On voit qu'il est nécessaire d'utiliser des fréquences très basses pour pratiquer une investigation à une profondeur encore relativement faible. Or à très basse fréquence les mesures peuvent être entachées d'erreurs dues à des phénomènes de polarisation d'électrodes, et d'interférences avec les parasites industriels.

Ces diverses raisons conduisent à s'intéresser à des dispositifs qui ne nécessitent pas la modification de la géométrie du système de mesure. Ces dispositifs sont principalement du type électromagnétique.

Parmi ces dispositifs on peut distinguer les procédés du type magnétotelluriques et les méthodes par induction.

La méthode magnétotellurique consiste à utiliser les courants induits dans le sol par les fluctuations du champ magnétique terrestre. Si les variations du champ magnétique peuvent être considérées comme composantes d'une onde plane qui serait produite par un émetteur placé à une distance infinie et rayonnant une puissance gigantesque, on peut montrer ^[10] qu'il existe, entre la composante horizontale H du champ magnétique et la composante horizontale E du champ électrique, créées à la surface d'un sol homogène de conductivité σ , la relation :

$$\frac{\vec{E}}{\vec{H}} = \sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma}} \quad (3)$$

Le rapport E/H mesuré à la surface d'un milieu inhomogène tel qu'un terrain stratifié à deux couches a pour expression : ^[6]

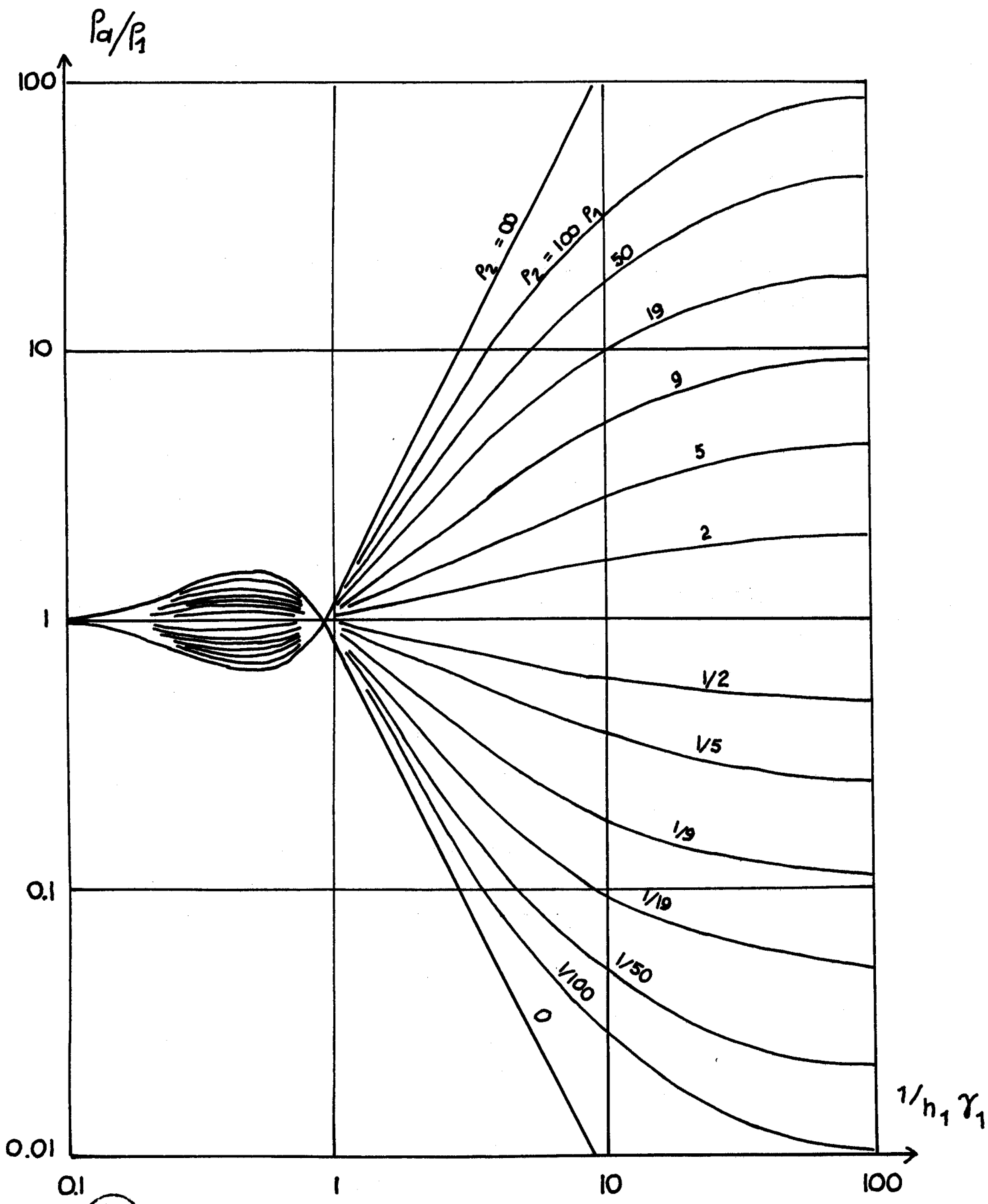


figure.2.

Extrait de ref [6]

$$E/H = \frac{-i\omega\mu}{\gamma_1} \coth(\gamma_1 h_1 + \arg \coth(\frac{\gamma_1}{\gamma_2})) \quad (3Bis)$$

où $\gamma_1^2 = i\omega\mu\sigma_1$ et $\gamma_2^2 = i\omega\mu\sigma_2$ représentent le carré du nombre d'onde dans la couche superficielle indiquée 1 et le substratum indicé 2.

Par analogie avec les relations du quadripôle électrique on peut faire apparaître une conductivité apparente égale à la conductivité du demi-milieu homogène qui présenterait à sa surface le même rapport E/H. En comparant les relations (2) et (3), on trouve facilement :

$$\sigma_{\text{apparent}} = \frac{-\gamma_1^2}{i\omega\mu} \th^2(\gamma_1 h_1 + \arg \coth(\frac{\gamma_1}{\gamma_2})) \quad (4)$$

Cette relation montre que la conductivité apparente est une fonction de caractéristiques du terrain et de la pulsation à laquelle on effectue la mesure des champs.

La figure.2. montre la variation de résistivité apparente réduite $\rho_a/\rho_1 = 1/\sigma_a \rho_1$, en fonction du rapport de la longueur d'onde et de l'épaisseur de la première couche.

En haute fréquence, la résistivité apparente tend vers la résistivité de la première couche. Ce cas correspond dans la méthode du quadripôle, à une petite distance interélectrodes.

En basse fréquence, la résistivité calculée tend vers celle du substratum.

On voit que l'avantage principal de la méthode magnéto-tellurique est qu'au fur et à mesure que l'on descend en fréquence, on mesure la conductivité des couches de plus en plus profondes.

D'autre part, la loi de Snell ^[22] relative à la réfraction des ondes planes s'énonce :

$$k_0 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 \quad (4Bis)$$

où k_0 et k_1 sont respectivement les nombres d'ondes dans l'atmosphère et dans le sol.

θ_0 = l'angle d'incidence de l'onde plane dans l'air

θ_1 = l'angle de réfraction dans le sol.

Cette loi montre que dans notre cas où $k_0 \ll k_1$, l'onde plane se réfracte dans le sol pratiquement verticalement quelque soit θ_0 .

Il en résulte que la valeur de la conductivité apparente mesurée à la surface du sol est celle du terrain situé à la verticale du point où l'on effectue la mesure.

Mais à cet avantage s'oppose la particularité qu'à le champ magnétique terrestre de ne varier que lentement (les fréquences de mesure des composantes de E et H sont inférieures à 100 Hz). En outre les variations du champ magnétique ont un caractère aléatoire. Ceci rend les mesures en magnétotellurique très difficiles et de toute façon les fréquences sont telles que le procédé est inapplicable dans le cas de la prospection à faible profondeur. Il en résulte, qu'il est nécessaire de choisir une méthode, qui utilise un dipôle émissif, placé au voisinage de la zone à prospecter. Les signaux électriques captés ont dans ce cas, une amplitude nettement supérieure à celle du bruit et une fréquence réglable à volonté. Parmi tous les types de dipôles possibles le plus commode est le dipôle magnétique vertical qui se réduit dans la plupart des cas à une simple boucle circulaire de fil étendue sur le sol.

I.3. Exposé chronologique des recherches effectuées et résultats obtenus

I.3.1. Les méthodes classiques

Les composantes du champ électromagnétique créées par un dipôle magnétique vertical (D.M.V.) au-dessus d'un milieu stratifié composé d'un empilement de M couches horizontales, dérivent d'un potentiel vecteur de Hertz comportant une composante verticale et représenté sous la forme de l'intégrale :

$$\Pi(z) = M \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_0} \left| e^{-u_0(z-h)} + \frac{u_0-u_1/Q}{u_0+u_1/Q} e^{-u_0(z+h)} \right| J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1a)$$

où M = moment magnétique du dipôle.

$$u_n = \sqrt{\lambda^2 - k_n^2} \quad \text{avec} \quad k_n^2 = \omega\mu\sigma_n + i\omega\epsilon_n$$

$$Q = \frac{u_1/u_2 Q_2 + \text{th } u_1 h_1}{1 + u_1/u_2 Q_2 \text{th } u_1 h_1}$$

$$Q_2 = \frac{u_2/u_3 Q_3 + \text{th } u_2 h_2}{1 + u_2/u_3 Q_2 \text{th } u_2 h_2} \quad \dots\dots\dots \quad (2a)$$

$$Q_n = \frac{u_n/u_{n+1} Q_{n+1} + \text{th } u_n h_n}{1 + u_n/u_{n+1} Q_{n+1} \text{th } u_n h_n}$$

$$Q_M = 1$$

Dans le cas général on ne connaît pas de solution analytique de l'intégrale représentant le potentiel. On ne dispose donc jusqu'à présent, des expressions analytiques permettant de calculer les composantes des champs que dans certains cas d'approximations. En particulier, lorsque l'on considère le D.M.V. rayonnant au-dessus d'un demi-milieu conducteur de conductivité σ et homogène, on connaît une solution analytique de l'intégrale pour le cas de l'approximation quasi-statique définie par :

$$k_0 = 0$$

Les expressions analytiques des composantes du champ électromagnétique du D.M.V. sont rappelées au paragraphe III.1.1.

Cette approximation convient bien dans tous les cas pratiques où l'on mesure la conductivité d'un sol pouvant être considéré comme un demi-milieu conducteur homogène.

Lorsque la structure du sous-sol est plus compliquée, et en particulier lorsqu'il s'agit d'un demi-milieu stratifié horizontalement on ne connaît plus de solution de l'intégrale donnant le potentiel valable dans tous les cas pratiques même si, l'on pose :

$$k_0 = 0 \tag{4a}$$

Pour rendre la méthode de sondage électromagnétique "compétitive" par rapport aux autres méthodes connues, nous avons tout d'abord pensé qu'il serait souhaitable de pouvoir interpréter les résultats de mesures à l'aide d'une formulation analytique. En effet, si une telle formulation pouvait être obtenue, l'interprétation des mesures sur le terrain se ferait sans avoir besoin d'un ordinateur coûteux.

La méthode de prospection la plus connue utilisant un D.M.V. consiste à placer l'émetteur suffisamment loin du point où l'on pratique le sondage pour pouvoir considérer que l'onde reçue est une onde plane se propageant verticalement dans le sol.

Si ces conditions sont réalisées, on interprète les résultats de mesures avec les abaques établis dans le cas bien connu de la magnétotellurique. Mais, pour réaliser les conditions de l'onde plane, il faut se placer très loin de l'émetteur, et dans ce cas, il faut émettre avec une puissance considérable si l'on veut capter un champ électromagnétique dont le niveau soit nettement supérieur à celui du bruit ambiant.

En 1962 J.R. Wait a proposé ⁽²¹⁾ une solution qui, dans le cas où le facteur de propagation k_0 dans l'air est beaucoup plus faible que les facteurs de propagation k_n dans les diverses couches du sous-sol, consiste à définir un demi-milieu équivalent au milieu stratifié, tel que son facteur de propagation k_e soit donné par la relation :

$$k_e = k_1/Q \tag{5a}$$

avec :

$$Q = \frac{k_1/k_2 Q_2 + \text{th } ik_1 h_1}{1 + k_1/k_2 Q_2 \text{th } ik_1 h_1}$$

$$Q_2 = \frac{k_2/k_3 Q_3 + \text{th } ik_2 h_2}{1 + k_2/k_3 Q_3 \text{th } ik_2 h_2} \dots \dots \dots \tag{6a}$$

$$Q_n = \frac{k_n/k_{n+1} Q_{n+1} + \text{th } ik_n h_n}{1 + k_n/k_{n+1} Q_{n+1} \text{th } ik_n h_n}$$

$$Q_{n+1} = 1$$

Q n'est autre que le coefficient de stratification décrit précédemment dans lequel on a fait $\lambda = 0$.

Pour déterminer les composantes des champs du dipôle à la surface du milieu stratifié, il suffit d'utiliser les expressions obtenues dans l'approximation quasi-statique pour un demi-milieu homogène en remplaçant dans ces formules k_1 par k_1/Q .

L'approximation de Wait suppose que la limite de l'intégrale (1a) est en majeure partie obtenue pour les valeurs faibles de la variable λ .

Mais, lorsque la distance séparant l'émetteur et le récepteur est faible vis-à-vis de la longueur d'onde dans le sol, les valeurs des champs calculées en faisant l'approximation de Wait, ne sont pas identiques à celles obtenues par intégration numérique. Par contre ces deux valeurs convergent lorsque la distance émetteur-récepteur est élevée. Nous avons donc cherché à préciser les distances minimum à respecter entre l'émetteur et le récepteur pour tenter d'interpréter analytiquement les résultats de mesure. Pour bien comprendre la portée de l'approximation de Wait, nous avons été amenés à rétablir (paragraphe III première partie), les expressions des composantes du champ électromagnétique du D.M.V., placé au-dessus de la surface d'un 1/2 milieu conducteur, en intégrant l'expression du potentiel par la méthode du col proposée par Banos⁽¹⁷⁾ et développée par Fontaine⁽¹⁹⁾.

Cette intégration permet d'écrire le potentiel sous la forme d'une série asymptotique donnée par la formule (62) du paragraphe III.1.2.1., qui converge si :

$$|k_1 r| > 1 \quad \text{et} \quad \frac{k_0}{k_1} = n < 1 \quad (7a)$$

Il est possible d'utiliser cette expression du potentiel à l'intérieur de chacune de trois zones d'approximations :

- La zone asymptotique définie par :

$$|n^2 k_0 r| \gg 1 \quad (8a)$$

- La zone intermédiaire définie par :

$$|k_0 r| \gg 1 \gg |n^2 k_0 r| \quad (9a)$$

- La zone proche définie par :

$$|k_1 r| > 1 \quad k_0 r < 1 \quad (10a)$$

Les deux premières zones d'approximations n'ont aucun intérêt pour nous car elles nécessitent de placer le récepteur trop loin de l'émetteur.

La zone proche offre plus d'intérêt car elle permet de placer le récepteur le plus près possible de l'émetteur tout en assurant la convergence de la série asymptotique représentant le potentiel. Nous nous sommes rendus compte que pour obtenir des expressions justes des composantes du champ, il fallait arrêter la série asymptotique du potentiel au quatrième terme⁽²⁰⁾ et non pas au troisième comme le préconise Banos.

Nous avons comparé les valeurs des composantes du champ magnétique calculées dans l'approximation quasi-statique avec les expressions que nous avons obtenues dans l'approximation de la zone proche et avec les valeurs vraies calculées en intégrant numériquement le potentiel.

Les résultats sont reportés figure.14. à .25.

Cette comparaison permet de constater que dans la gamme de fréquences comprise entre 1000 et 25 000 Hertz, et pour des conductivités comprises entre 20 et 100mS/m, la limite de validité des expressions obtenues dans l'approximation de la zone proche est donnée par la relation :

$$|k_1 r| > 7 \quad (11a)$$

D'autre part, dans le cas où :

$$|k_1 r| > 7 \quad \text{et} \quad k_0 r < 0,1 \quad (12a)$$

les expressions valables en zone proche permettent d'écrire :

$$\frac{H_r}{H_z} \neq \frac{|k_1 r|}{2} \frac{-k_0^2 r^2 + 3k_0 r + 3 + i(-k_0^2 r^2 - 3k_0 r + 3)}{k_0^3 r^3 - 9k_0 r + i(4k_0^2 r^2 - 9)} \quad (13a)$$

$$\frac{E_\phi}{H_r} = \sqrt{\frac{i\omega\mu_0}{\sigma}} \frac{-k_0^2 r^2 - 3k_0 r + 3 + i(k_0^2 r^2 - 3k_0 r - 3)}{-k_0^2 r^2 + 3k_0 r + 3 + i(-k_0^2 r^2 - 3k_0 r + 3)} \quad (14a)$$

Cette dernière expression ressemble à celle donnant l'impédance de surface c'est-à-dire le rapport des champs électriques et magnétiques tangentiels à la surface du sol d'une onde plane incidente sur cette surface.

On peut donc en déduire que dans la zone d'approximation définie par :

$$|k_1 r| > 7 \quad \text{et} \quad k_0 r < 1 \quad (15a)$$

l'onde émise par le D.M.V. au-dessus d'un demi-milieu conducteur présente au niveau du récepteur le caractère d'une onde plane.

Lorsque l'on applique la méthode du col à l'intégration du potentiel créé par un D.M.V. placé au-dessus d'un milieu stratifié, on peut montrer⁽¹⁹⁾ que la majeure partie de la valeur de l'intégrale est obtenue pour :

$$\lambda < k_0 \quad (16a)$$

de sorte que tant que :

$$k_n \gg k_0, \quad \text{on peut écrire ;} \quad (17a)$$

$$u_n = \sqrt{\lambda^2 - k_n^2} \neq i k_n \quad (18a)$$

Il en résulte que dans ces conditions on peut considérer que le champ électromagnétique créé au-dessus d'un milieu stratifié par un D.M.V. est celui obtenu avec les expressions du demi-milieu dans lesquelles on remplace ik_1 par ik_1/Q_1 et où Q_1 est le coefficient de stratification introduit par Wait.

Nous avons appliqué ce résultat aux expressions des composantes des champs établies dans le cas d'approximation de la zone proche. Dans ce cas les rapports des composantes du champ s'écrivent :

$$\frac{H_r}{H_z} = \frac{n}{Q_1} \frac{-k_0^2 r^2 + 3k_0 r + 3 - i(k_0^2 r^2 + 3k_0 r - 3)}{k_0 r - 9k_0 + i(4k_0^2 r^2 - 9)} \quad (19a)$$

$$\frac{E_\phi}{H_r} = Q \sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_1}} \frac{-k_0^2 r^2 - 3k_0 r + 3 + i(k_0^2 r^2 - 3k_0 r - 3)}{-k_0^2 r^2 + 3k_0 r + i(-k_0^2 r^2 - 3k_0 r + 3)} \quad (20a)$$

Nous avons comparé, dans le cas d'un milieu stratifié à deux couches, les rapports des composantes H_r/H_z du champ magnétique obtenu dans l'approximation de la zone proche, dans l'approximation quasi-statique et calculé par l'intégration numérique.

Ce résultat est reporté sur le tableau n°28 en fonction de la distance r et pour plusieurs fréquences. Il montre que les relations (19a) et (20a) donnent des valeurs comparables à celles obtenues par intégration numérique dès que la relation :

$$\eta_{\text{éq}} > 9 \quad \text{est vérifiée (*)} \quad (21a)$$

Il en est de même pour le cas de l'approximation quasi-statique associée à l'approximation du coefficient de stratification de Wait.

Ces relations, obtenues à partir d'une intégration du potentiel par la méthode du col, constituent une approche différente de celles précédemment connues d'un D.M.V. en vue de son application en prospection à faible profondeur. Elles donnent les mêmes résultats que ceux de l'approximation quasi-statique mais elles s'écrivent plus simplement et elles tiennent compte de l'effet du terme $k_0 r$ qui peut, à grande distance, devenir supérieur à 0,2 dans le cas des plus hautes fréquences de la gamme.

Mais, comme le montre un exemple numérique donné au paragraphe.IV, il faut, pour pratiquer un sondage ne dépassant pas 20 m. de profondeur, disposer le récepteur à une distance supérieure ou égale à environ 1200 m. afin de pouvoir interpréter analytiquement les résultats de mesures.

Pour produire à cette distance un champ magnétique avec une amplitude supérieure à celle des champs parasites, il faut disposer un émetteur de plusieurs kilowatts. La puissance de l'émetteur et le prix que nécessite sa mise en oeuvre nous semble trop importants par rapport à la faible profondeur d'investigation permise.

1.3.2. Cadre de notre travail pratique

Pour pouvoir conserver un matériel d'un coût et d'un poids acceptables, il faut opérer avec un espacement émetteur-récepteur plus petit.

Dans ce cas, l'interprétation des mesures ne peut plus être basée sur une formulation analytique simple sauf dans le cas particulier où la distance réduite η , relative à la première couche est inférieure à 0,6. Dans tous les autres cas, il est nécessaire d'avoir recours à un calcul numérique du champ électromagnétique du D.M.V.

1.3.2.1. *Le cas d'approximation de l'induction*

L'étude précédente permet de constater que pour prospecter à des profondeurs même faibles, la gamme de fréquences est presque toujours telle que le module du carré du nombre d'ondes $|k_1|^2$ n'excède pas quelques dixièmes.

(*) $\eta_{\text{éq}}$ est défini par : $r\sqrt{\omega\mu\sigma_{\text{éq}}}/\sqrt{2}$ ou $\sigma_{\text{éq}}$ est la conductivité du demi-milieu homogène à la surface duquel on mesure le même rapport des composantes du champ magnétique.

Il en résulte que lorsque la distance séparant l'émetteur et le récepteur est faible, le produit $k_n r$ est petit devant 1. On se trouve alors dans le cas d'approximation de l'induction qui permet de ne pas tenir compte des termes de propagation.

Dans ces conditions, on peut considérer que le potentiel créé dans l'air par un D.M.V. est solution de l'équation de Laplace :

$$\vec{\Delta} \Pi = 0 \quad (22a)$$

En effet dans l'équation d'onde :

$$(\Delta + k_n^2) \Pi = 0 \quad \text{on peut faire } k_n^2 = 0 \quad (23a)$$

Par conséquent, le champ magnétique dérive du potentiel par la relation :

$$\vec{H} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{ div } \vec{\Pi} \quad (24a)$$

Wait a montré⁽²³⁾ que le champ magnétique radial créé à l'ordonnée z et à la distance r d'un D.M.V. placé à une hauteur h au-dessus d'une fine couche conductrice horizontale d'épaisseur dh, était donné par la relation :

$$H_r \approx \frac{M}{r^3} (j\omega\mu\sigma \frac{dh}{2}) \frac{r^3}{(r^2 + (2h)^2)^{3/2}} + \dots \quad (25a)$$

Ce résultat appliqué au cas d'un milieu à deux couches dont les conductivités sont σ_1 et σ_2 et dont l'épaisseur de la première couche est h_1 , permet d'écrire la composante horizontale du champ magnétique sous la forme :

$$H_r = \frac{M}{r^3} \left[\left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 + \left[\left(\frac{k_1 r}{2}\right)^2 - \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \right] \frac{h_1}{\sqrt{r^2 + (2h_1)^2}} \right] \quad (26a)$$

Le champ magnétique calculé à l'aide de cette expression est identique à celui obtenu par intégration numérique tant que

$$\begin{aligned} & k_1 r < 0,4 \quad \text{quand} \quad k_1 > k_2 \\ \text{et} & k_2 r < 0,4 \quad \text{quand} \quad k_1 < k_2 \end{aligned} \quad (27a)$$

On constate sur la formule (26a) que H_r est directement proportionnel à h_1 dès que :

$$r > 15h_1 \quad (28a)$$

Nous avons vérifié expérimentalement l'expression donnant H_r et nous avons pu constater (figure.35.), la quasi-proportionnalité existant entre l'amplitude de la composante H_r du champ magnétique et l'épaisseur h_1 . Ces résultats permettent d'envisager la conception d'un appareillage portatif capable d'évaluer par affichage direct l'épaisseur d'une couche géologique superficielle.

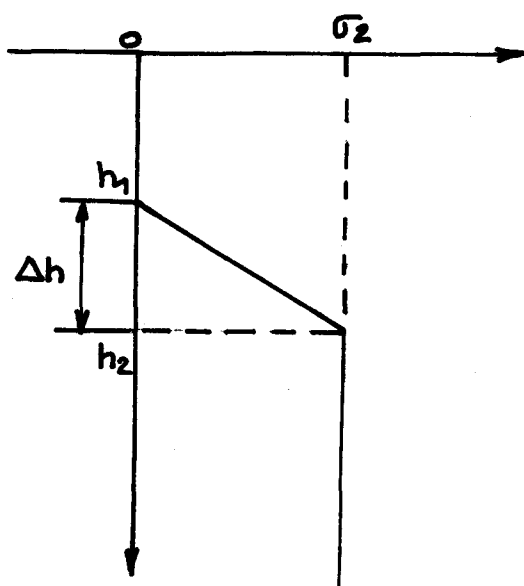
Cet appareillage comprendrait un petit émetteur à bobine à air ou à bobine à noyau ferrite (figure.34.) consommant une puissance de quelques watts, et un récepteur placé à une distance variant entre 10 et 20 mètres.

Ce dispositif serait capable d'afficher directement l'épaisseur de la première couche jusqu'à quatre mètres de profondeur à condition d'étalonner l'appareillage en deux points différents où l'on connaît parfaitement la structure du sous-sol.

Nous avons ensuite appliqué cette méthode d'induction où l'on néglige les termes de propagation à l'évaluation des conditions limites d'une prospection effectuée au-dessus du "permafrost". (§.1.4. de la deuxième partie).

Le permafrost est constitué par des terrains superficiellement gelés. La conductivité est donc très faible à la surface et augmente avec la profondeur suivant une loi qui varie à la fois en fonction de la nature du sous-sol et en fonction des saisons.

L'évolution de la conductivité que nous avons envisagée est représentée ci-dessous.



Le problème consiste à savoir dans quelles conditions expérimentales il faut se placer pour obtenir une composante horizontale du champ magnétique mesurable. Nous pensons que l'approximation définie par (23a) convient très bien pour répondre à cette question.

La composante H_r calculée à partir de l'expression ((25a) s'écrit :

$$H_r = \frac{M}{r^3} \left(\frac{k_2 r}{2} \right)^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{h_2}{(r^2 + (2h_2)^2)^{1/2}} - \frac{h_1 h_2}{\Delta h} \frac{1}{(r^2 + (2h_2)^2)^{1/2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\Delta h} \left[\frac{h_1 + \frac{r^2}{4}}{(r^2 + (2h_1)^2)^{1/2}} - \frac{\frac{r^2}{4}}{(r^2 + (2h_2)^2)^{1/2}} \right] \right] \quad (29a)$$

Par analogie avec l'expression (27a), on admet que (29a) est applicable tant que :

$$k_2 r < 0,4 \quad (30a)$$

L'étude de la variation de H_r en fonction des différents paramètres faite au §.1.4.2. de la deuxième partie permet d'établir que, pour une amplitude minimum de 1mγ de la composante horizontale du champ magnétique, le socle est décelable jusqu'à une profondeur h_2 que l'on peut relier directement au moment magnétique du D.M.V. par la relation :

$$h_{2max} \neq 10 \sqrt[3]{M} \quad (31a)$$

Dans ces conditions, si $M : 1000 \text{ Atm}^2$, on ne peut prétendre déceler la présence du socle que s'il est situé à une profondeur inférieure à 100mètres. Les valeurs des champs magnétiques relevées dans ces conditions ne permettraient pas d'en déduire la présence d'hétérogénéités susceptibles d'exister au sein du socle. Mais ce résultat permet de préciser la valeur du moment magnétique et des distances en-dessous desquelles il est exclu de pratiquer les mesures.

Les expressions analytiques simples (26a et (29a) permettent de décrire le comportement du champ magnétique créé à proximité d'un D.M.V. ne peuvent être appliquées que dans les cas où :

$$k_n r < 0,4 \quad (32a)$$

La comparaison des valeurs numériques obtenues par application des formules (26a et 29a) avec des résultats rigoureux obtenus par intégration sur ordinateur des expressions intégrales des champs (chapitre.II. de la deuxième partie) nous ont montré que ces formules ne sont utilisables que pour une prospection effectuée avec un espacement émetteur-récepteur d'un ordre de grandeur bien supérieur à la profondeur d'investigation.

I.3.2.2. Cas où l'on ne fait pas d'approximations

Ce traitement numérique sur ordinateur qui constitue la principale innovation par rapport aux méthodes analytiques plus ou moins élaborées d'interprétation des sondages, a donc intérêt à être utilisé dans la presque totalité des conditions de prospection. En effet, sur le terrain il n'est pas toujours possible d'opérer de manière à satisfaire les conditions de validité des formules analytiques.

Notre principal souci a été d'adapter la méthode d'interprétation des mesures et le calcul des composantes du champ magnétique à la prospection d'un terrain stratifié jusqu'à une profondeur de 25mètres, de telle sorte que le coût d'un sondage ne soit pas plus élevé que celui d'une autre méthode exploitant un phénomène physique différent (gravimétrie, sismique, sondage mécanique).

Nous avons tracé dans le cas d'un milieu à deux couches, les variations de l'angle α que fait avec le plan horizontal le grand axe de l'ellipse lieu de l'extrémité du vecteur champ magnétique, en fonction de la distance réduite relative à la couche superficielle :

$$\eta_1 = \frac{r}{\delta_1} \quad (33a)$$

Ceci pour diverses valeurs du contraste de conductivité σ_1/σ_2 et de la profondeur réduite h_1/r .

L'emploi du paramètre de prospection α offre l'avantage de pouvoir tenir compte des informations contenues à la fois dans les modules des composantes du champ magnétique et dans leur déphasage par rapport au courant émis.

Les résultats, reportés sur les figures 39 à 45, montrent que les variations de α sont les plus sensibles aux variations de l'un quelconque des paramètres σ_1/σ_2 , h_1/r et η_1 , lorsque la distance réduite η_1 vérifie l'inégalité :

$$0,7 < \eta_1 < 5 \quad (34a)$$

Lorsque l'on augmente l'épaisseur de la première couche du milieu stratifié, les courbes $\alpha = f(\eta_1)$ tendent vers la courbe du demi-milieu dont la conductivité est celle de la première couche quelque soit le contraste de conductivité.

Ceci signifie que le milieu stratifié peut être considéré comme un demi-milieu homogène dont la conductivité est égale à celle de la première couche dès que la profondeur réduite est supérieure à 0,5.

Pour mettre en évidence la stratification, il faut donc disposer l'émetteur et le récepteur de telle façon que la relation suivante soit vérifiée :

$$h_1/r < 0,5 \quad (35a)$$

Les diverses remarques que nous avons faites nous ont permis de bâtir une méthodologie de prospection décrite au paragraphe.11.3. de la deuxième partie.

Pour une séparation constante de l'émetteur et du récepteur, et pour un milieu stratifié à n couches le paramètre α est une fonction des conductivités, et des épaisseurs des diverses couches constitutives du terrain, et de la fréquence F de l'onde émise.

$$\alpha_F = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, F) \quad (36a)$$

α_F est donc fonction de $2n-1$, paramètres inconnus.

Les sondage électromagnétique consiste à relever en fonction de la fréquence, pour une distance connue r, le module des composantes horizontale et verticale et suivant une direction inclinée de 45° sur l'horizontale, du champ magnétique créé par un D.M.V. posé sur le sol.

Les valeurs de ces modules permettent de calculer α pour chaque fréquence.

La profondeur de pénétration des ondes électromagnétiques diminue au fur et à mesure que la fréquence augmente.

Il en résulte que si l'on utilise une fréquence suffisamment haute pour que la profondeur de pénétration soit petite vis-à-vis de l'épaisseur de la première couche de terrain, les composantes du champ électromagnétique ne dépendront que de la conductivité superficielle.

La connaissance de cette conductivité permet, compte tenu des prévision théoriques décrites au paragraphe précédent d'en déduire la gamme des fréquences à utiliser pour le sondage.

Pour déterminer les caractéristiques des couches plus profondes, on base la méthode d'interprétation sur la propriété qu'ont les ondes électromagnétiques de se propager d'autant plus profondément dans le sol que la fréquence est plus basse.

Ainsi on détermine deux fréquences pour lesquelles les caractéristiques des couches inférieures aux deux premières couches agissent peu sur les composantes du champ.

Pour ces deux fréquences, on peut donc supposer que l'angle α ne dépend que des conductivités σ_1 et σ_2 et de l'épaisseur h_1 de la couche superficielle. La détermination de σ_2 et de h_1 se ramène alors à la résolution du système d'équations :

$$\alpha_{F_1} = g_1(\sigma_2, h_1, \sigma_1, F_1) \quad (37a)$$

$$\alpha_{F_2} = g_2(\sigma_2, h_1, \sigma_1, F_2) \quad (38a)$$

où g_1 et g_2 représentent les expressions de α relatives à un modèle théorique de terrain à deux couches, et où σ_2 et h_1 sont les variables inconnues que l'on détermine.

On choisit ensuite deux fréquences immédiatement inférieures aux précédentes, et on suppose que pour ces fréquences, le terrain se comporte comme un milieu à trois couches dont on connaît les caractéristiques de la première et la conductivité de la seconde. La détermination de la conductivité de la troisième couche et de l'épaisseur de la seconde consiste à nouveau à résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

On peut aboutir ainsi par approximations successives à reconstituer un milieu stratifié à n couches dont la réponse en fréquence est la même que celle du terrain sondé. On déduit ainsi les diverses couches constitutives du terrain. Les sondages que nous avons pratiqués nous ont permis d'apprécier jusqu'à quatre couches géologiques différentes. Mais cela ne constitue pas une limitation théorique de la méthode d'interprétation,

Le procédé qui consiste à prospecter un milieu stratifié à l'aide d'un D.M.V. en mesurant l'angle α que fait le grand axe de l'ellipse de polarisation du champ magnétique n'est pas nouveau.

Mais la principale originalité de notre travail est que nous utilisons un dipôle magnétique pour déterminer les caractéristiques de toutes les couches géologiques composant le terrain, y compris la couche superficielle qui peut avoir une épaisseur inférieure au mètre.

En effet, nous avons constaté que les couches superficielles interviennent pour une part importante dans l'amplitude des composantes du champ magnétique à toutes les fréquences. Pour éviter de commettre des erreurs d'interprétation importantes, il est donc nécessaire d'avoir une connaissance précise de la composition du sous-sol près de la surface. Ceci nous a conduit à utiliser des émetteurs pouvant fonctionner jusqu'à 1MHz.

D'autre part, la méthode d'interprétation est basée sur le principe des approximations successives et ne suppose pas a priori le nombre de couches géologiques composant le terrain.

Enfin, nous avons conçu et utilisé un appareillage capable d'effectuer des mesures précises sur le terrain *ce qui nous permet d'interpréter des variations du paramètre de l'ordre de 3% comme résultant de l'effet d'une couche géologique et non d'une erreur de mesure.*

Les interprétations de sondages pratiqués sur quelques sites de la région du Nord, sont décrites au §.11.5. deuxième partie.

Les exemples d'interprétation choisis montrent :

- . §.11.5.1. que dans certains cas il est nécessaire de resserrer les points de fréquence du côté haut de la gamme pour être capable de tenir compte d'hétérogénéités superficielles pouvant provoquer des erreurs d'interprétation à plus grande profondeur.
- . §.11.5.2. qu'il est possible d'apprécier la pente d'une couche géologique. Les résultats obtenus à l'aide de ce type de sondage sont relatifs à une valeur moyenne des conductivités et des épaisseurs des terrains compris entre la verticale de l'émetteur et la verticale du récepteur. Dans le cas d'une couche régulièrement inclinée, l'épaisseur trouvée est celle située au milieu de l'espace compris entre l'émetteur et le récepteur.
- . Enfin, au §.11.5.3. qu'il est possible de déceler la présence d'une hétérogénéité isolante telle qu'une ancienne carrière souterraine exploitée par chambre et piliers et située à 13 mètres de profondeur, *à condition de tenir compte de l'effet de la couche irrégulière de limon superficiel conducteur.*

P R E M I E R E P A R T I E

II. EXPRESSION GENERALE DU POTENTIEL CREE AU-DESSUS DE LA SURFACE D'UN SOL STRATIFIE PAR UN DIPOLE MAGNETIQUE VERTICAL (D.M.V.)

Un dipôle magnétique vertical disposé au-dessus de la surface d'un milieu stratifié horizontalement peut être représenté en coupe par la figure.3.

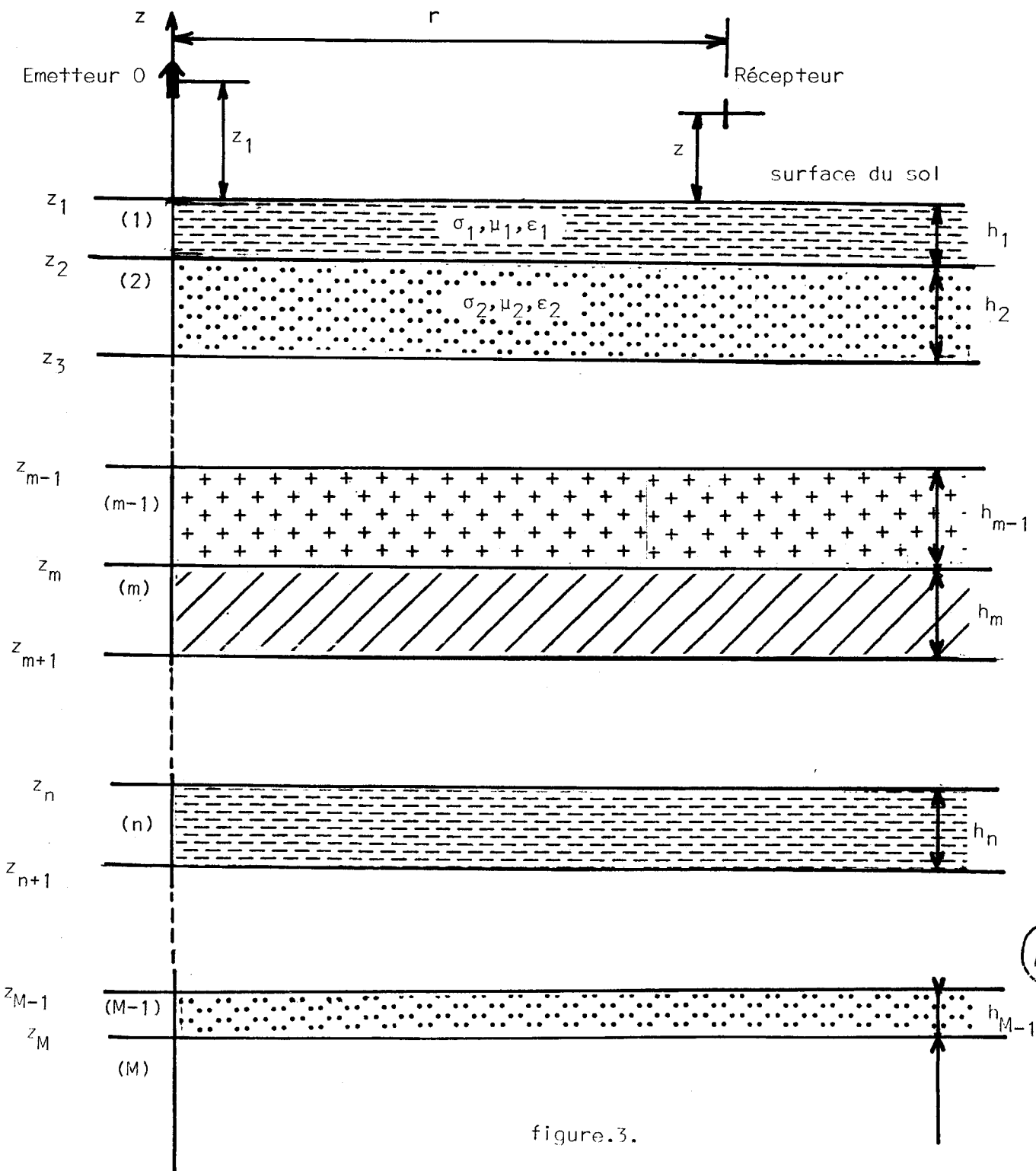


figure.3.

Pour établir l'expression générale du potentiel créé par le D.M.V. placé au-dessus du milieu stratifié, nous nous servons du formalisme matriciel mis au point par le Professeur Gabillard [12], [13] et dont nous rappelons les fondements en annexe. I.

Dans le cas général, le milieu est constitué par un empilement de M+1 couches géologiques horizontales. Chaque couche a une épaisseur h_m et les interfaces plans qui séparent les couches sont numérotés de 1 à M.

L'interface numéroté 1 représente la surface du sol.

On place l'émetteur dans la couche d'indice zéro représentant l'atmosphère et sa position est repérée à l'origine d'un système de coordonnées cylindriques dont l'axe vertical est orienté positivement vers le haut.

Dans chacune des couches, le potentiel de Hertz ne possède qu'une seule composante verticale par une intégrale de Sommerfeld :

$$\Pi_m = \int_0^{\infty} (a_m e^{-u_m z} + b_m e^{u_m z}) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (5)$$

a_m est l'amplitude de l'onde ascendante et b_m est celle de l'onde descendante.

Dans la couche d'indice M il ne peut exister qu'une onde descendante. On peut donc écrire :

$$\Pi_M = \int_0^{\infty} b_M e^{u_M z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (6)$$

Dans l'atmosphère où est situé le dipôle émetteur il faut tenir compte du potentiel primaire et nous avons :

$$\Pi_0 = \int_0^{\infty} \left(\frac{M\lambda}{u_0} e^{u_0 z} + a_0 e^{-u_0 z} \right) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (7)$$

où $M = \frac{NIS}{4\pi}$ = moment magnétique du dipôle.

$$u_0 = \sqrt{\lambda^2 + k_0^2} \quad k_0^2 = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \quad (8)$$

$$u_n = \sqrt{\lambda^2 + k_n^2} \quad k_n^2 = i\omega\mu_n(\sigma_n + i\omega\epsilon_n) \quad (9)$$

Le signe du radical de u_n est choisi de manière à avoir :

$$\text{Réelle } (u_n) > 0 \quad (10)$$

Les coefficients $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \dots b_M$ peuvent être déterminés en fonction du moment magnétique M , à l'aide des conditions aux limites satisfaites sur chaque interface.

Ces conditions aux limites sont traduites à l'aide des équations de Maxwell qui imposent la continuité des composantes horizontales des champs électrique et magnétique sur chaque interface :

Ces composantes horizontales s'écrivent :

$$E_{\phi m} = i\omega\mu \frac{\partial \Pi_m}{\partial r} \quad \text{pour le champ électrique} \quad (11)$$

$$H_{rm} = \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial r \partial z} \quad \text{pour le champ magnétique} \quad (12)$$

Les conditions aux limites s'écrivent alors sur l'interface d'indice m :

$$E_{\phi m-1}(z_m) = E_{\phi m}(z_m) \quad (13)$$

$$H_{rm-1}(z_m) = H_{rm}(z_m) \quad (14)$$

On voit immédiatement d'après les expressions (5) à (7) du potentiel qu'elles seront satisfaites si l'on a simplement :

$$Z_{m-1}(z_m) = Z_m(z_m) \quad (15)$$

$$\dot{Z}_{m-1}(z_m) = \dot{Z}_m(z_m) \quad (16)$$

avec :

$$Z_m(z_m) = a_m e^{-u_m z_m} + b_m e^{u_m z_m} \quad (17)$$

$$\dot{Z}_m(z_m) = \frac{\partial}{\partial z} Z_m(z_m) \quad (18)$$

Les expressions (15) et (16) prennent, pour les valeurs $0, n$ et M de l'indice m les formes particulières suivantes :

$$Z_0(z_1) = a_0 e^{-u_0 z_1} + \frac{M\lambda}{u_0} e^{u_0 z_1} \quad (19)$$

$$Z_n(z_n) = a_n e^{-u_n z_n} + b_n e^{u_n z_n} \quad (20)$$

$$Z_M(z_M) = b_M e^{u_M z_M} \quad (21)$$

On voit que les conditions (15) et (16) écrites sur les M interfaces forment un système de 2M équations à 2M inconnues que sont les coefficients a_m et b_m .

La résolution de ce système est rendue systématique grâce à l'emploi du formalisme matriciel rappelé en annexe.I.

Le résultat de ce calcul donne pour valeur du coefficient a_0 :

$$a_0 = \frac{M\lambda}{u_0} e^{2u_0 z_1} \frac{N_{12}}{N_{22}} \quad (22)$$

Le potentiel créé dans l'air à l'ordonnée z a donc pour expression générale :

$$\Pi_0(r, z) = M \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_0} e^{u_0 z} \left(1 + e^{2u_0(z_1-z)} \frac{N_{12}}{N_{22}} \right) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (23)$$

où N_{12} et N_{22} sont les coefficients de la matrice N_{M_0} définie par la relation :

$$N_{M_0} = U_0^{-1} U_1 D_1^{-1} U_1^{-1} \dots U_{M-1} D_{M-1}^{-1} U_{M-1}^{-1} U_M \quad (24)$$

avec :

$$U_m = \begin{vmatrix} -u_m & u_m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (25)$$

et

$$D_m = \begin{vmatrix} e^{u_m h_m} & 0 \\ 0 & e^{-u_m h_m} \end{vmatrix} \quad (26)$$

Le calcul des coefficients N_{12} et N_{22} développé en annexe.II. pour un milieu stratifié à M couches permet d'écrire le potentiel sous la forme :

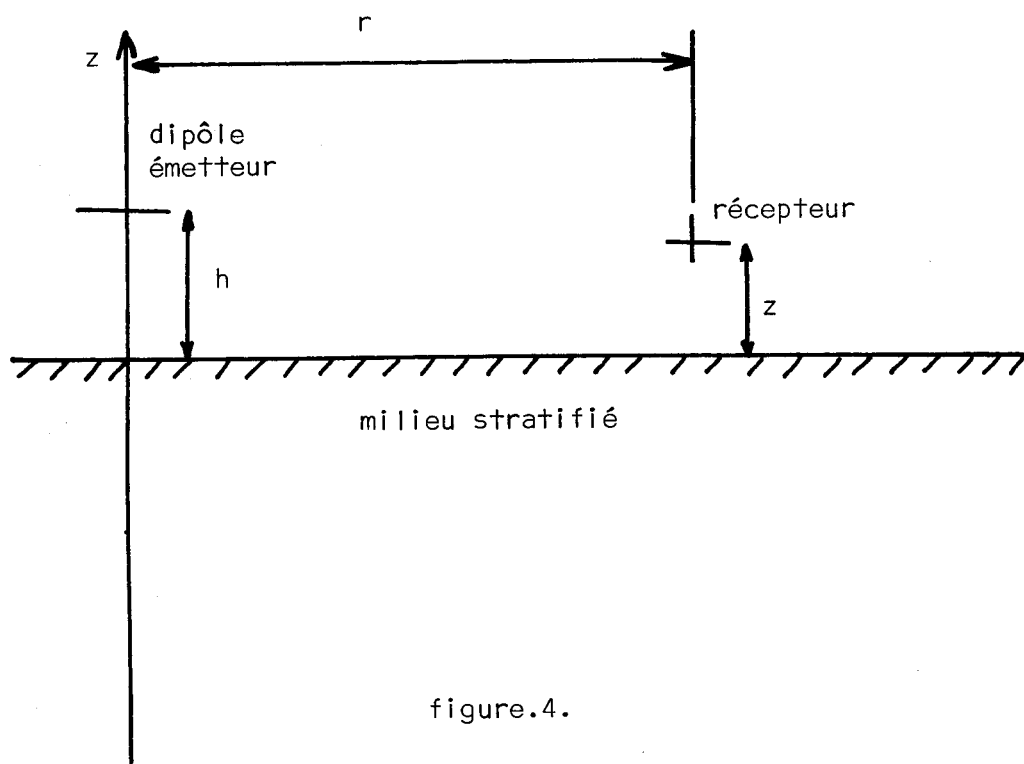


figure.4.



$$\Pi_0(r, z) = M \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_0} e^{u_0 z} \left(1 + e^{2u_0(z_1 - z)} \frac{u_0 - u_1/Q}{u_0 + u_1/Q} \right) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (27)$$

avec :

$$Q = \frac{u_1/u_2 Q_2 + \text{th } u_1 h_1}{1 + u_1/u_2 Q_2 \text{th } u_1 h_1}$$

$$Q_2 = \frac{u_2/u_3 Q_3 + \text{th } u_2 h_2}{1 + u_2/u_3 Q_3 \text{th } u_2 h_2} \dots\dots\dots$$

$$Q_n = \frac{u_n/u_{n+1} Q_{n+1} + \text{th } u_n h_n}{1 + u_n/u_{n+1} Q_{n+1} \text{th } u_n h_n} + \dots\dots$$

$$Q_M = 1$$

La plupart du temps, on préfère repérer la position de l'émetteur et celle du récepteur par rapport à la surface du sol.

Soit h la hauteur de l'émetteur au-dessus du sol et z celle du récepteur (figure.4.). Pour obtenir ces conditions il suffit dans l'expression précédente de remplacer z par h-z et z₁ par -h, le rapport N₁₂/N₂₂ reste inchangé.

L'expression s'écrit alors :

$$\Pi_0(r, z) = M \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_0} \left[e^{+u_0(z-h)} + \frac{u_0 - u_1/Q}{u_0 + u_1/Q} e^{-u_0(z+h)} \right] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (28)$$

avec Q donné dans l'expression (27)

Pour les besoins de la prospection, il serait utile de pouvoir relier analytiquement et d'une façon relativement simple, comme en magnétotellurique, les composantes du champ du dipôle à la structure du sous-sol.

Une relation analytique faciliterait l'interprétation des mesures et la rendrait plus rapide et surtout elle permettrait de mieux voir théoriquement l'influence des différents paramètres du terrain.

On conçoit parfaitement que l'on retrouvera les résultats de la magnétotellurique lorsqu'on se placera à une distance suffisante du dipôle pour que l'onde reçue puisse être considérée comme plane.

Le problème consiste à savoir quelle est la distance limite entre le dipôle émetteur et l'endroit où l'on effectue la mesure des champs en-dessous de laquelle on ne peut plus utiliser le concept de l'onde plane.

Pour calculer les composantes du champ électromagnétique, il faut calculer l'intégrale (28). L'expression de cette intégrale est compliquée et on ne connaît pas de solution analytique qui donne le potentiel dans tous les cas de figure.

On ne peut donc obtenir ce potentiel que dans certains cas d'approximations que nous allons rappeler. Parmi ces cas d'approximations, nous choisirons ceux qui nous permettront de résoudre le problème posé.

On pourra ensuite envisager une intégration numérique du potentiel si on doit se placer dans des zones où les approximations ne conviennent pas. Cette intégration sera par ailleurs utile pour vérifier les résultats des approximations.

III. EXPRESSIONS ANALYTIQUES DU POTENTIEL ET DES CHAMPS D'UN DIPOLE
MAGNETIQUE VERTICAL EN PRESENCE D'UN DEMI-MILIEU STRATIFIE
DANS DIVERSES ZONES D'APPROXIMATIONS

Avant d'étudier l'influence d'un milieu stratifié sur le rayonnement d'un dipôle magnétique vertical, nous rappelons les résultats obtenus au-dessus d'un demi-milieu. Ceci offre le double avantage de mettre en évidence l'influence d'un sol conducteur sur la valeur des composantes des champs et de pouvoir définir clairement les diverses zones d'approximation.

III.1. Rayonnement au-dessus d'un demi-milieu conducteur

Le potentiel créé par un D.M. V. disposé à une hauteur h au-dessus d'un demi-milieu conducteur se déduit de l'expression (28) en donnant au coefficient Q la valeur 1.

On obtient alors :

$$\Pi_0(r, z) = M \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{u_0} \left[e^{+u_0(z-h)} + e^{-u_0(z+h)} \frac{u_0 - u_1}{u_0 + u_1} \right] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (29)$$

lorsque l'émetteur et le récepteur sont tous deux au-dessus de la surface du sol.

Lorsque l'émetteur est posé sur le sol il suffit de rendre h nul dans l'expression (29) pour exprimer le potentiel dans le sol créé par un dipôle en surface, il suffit de remplacer dans l'expression (29) u_0 par u_1 , on obtient alors, avec $h = 0$:

$$\Pi_1(r, z) = M \int_0^{\infty} \frac{2\lambda e^{u_1 z}}{u_1 + u_0} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (30)$$

Dans les expressions (29) et (30), on a :

$$u_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} \quad u_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} \quad (31)$$

avec :

$$k_1^2 = i\omega\mu_0(\sigma_1 - i\omega\mu_0\epsilon_1) \quad (32)$$

$$k_0^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0$$

si on suppose que la perméabilité du sol est la même que celle du vide. Les composantes du champ électromagnétique du dipôle magnétique vertical sont déduites des équations de Maxwell :

$$\vec{E} = -i\omega\mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\Pi}_z \quad \vec{H} = \overrightarrow{\text{rot rot}} \Pi_z \quad (33)$$

Elles comportent deux composantes du champ magnétique, l'une verticale H_z , l'autre radiale H_r et une composante transversale E du champ électrique.

Ces deux composantes déduites de (33) sont données par les relations :

$$E = -i\omega\mu \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \quad (34)$$

$$H_r = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial r \partial z} \quad H_z = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right) \right)$$

III.1.1. Approximation quasi-statique

Cette approximation consiste à négliger l'influence des courant de déplacement dans l'air, soit :

$$k_0^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad u_0 = \lambda \quad (35)$$

L'expression du potentiel devient dans ce cas :

Dans l'air avec l'émetteur dans l'air :

$$\Pi_0(r, z) = M \int_0^\infty \left(e^{-\lambda(z-h)} - e^{-\lambda(z+h)} + \frac{2\lambda}{\lambda+u_1} e^{-\lambda(z+h)} \right) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (36)$$

Dans le sol avec l'émetteur dans l'air :

$$\Pi_1(r, z) = M \int_0^\infty \frac{\lambda e^{u_1 z} e^{-u_0 h}}{u_1 + \lambda} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (37)$$

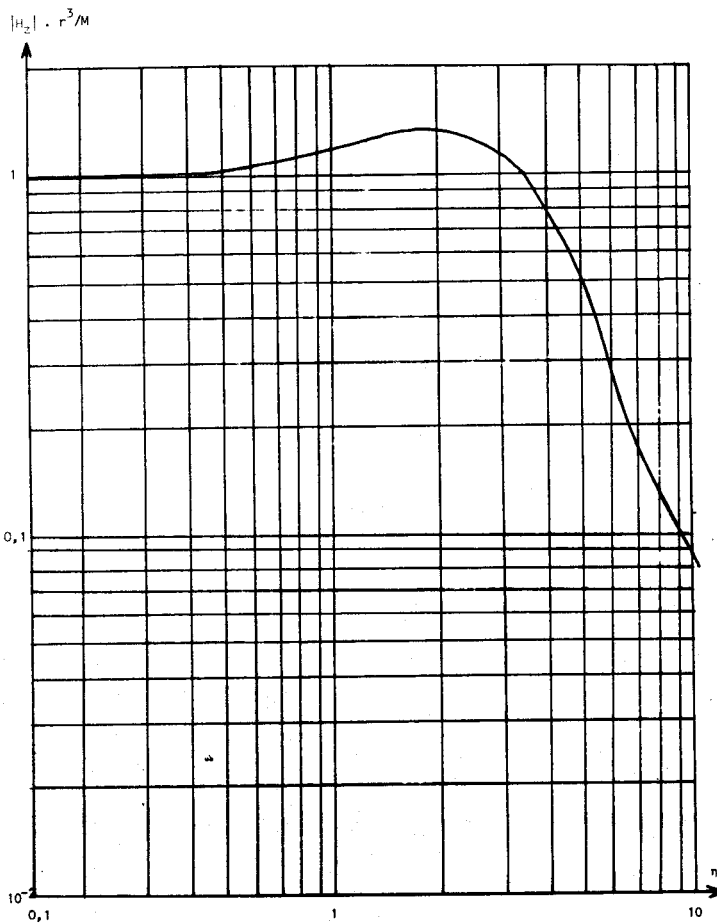


figure.5.

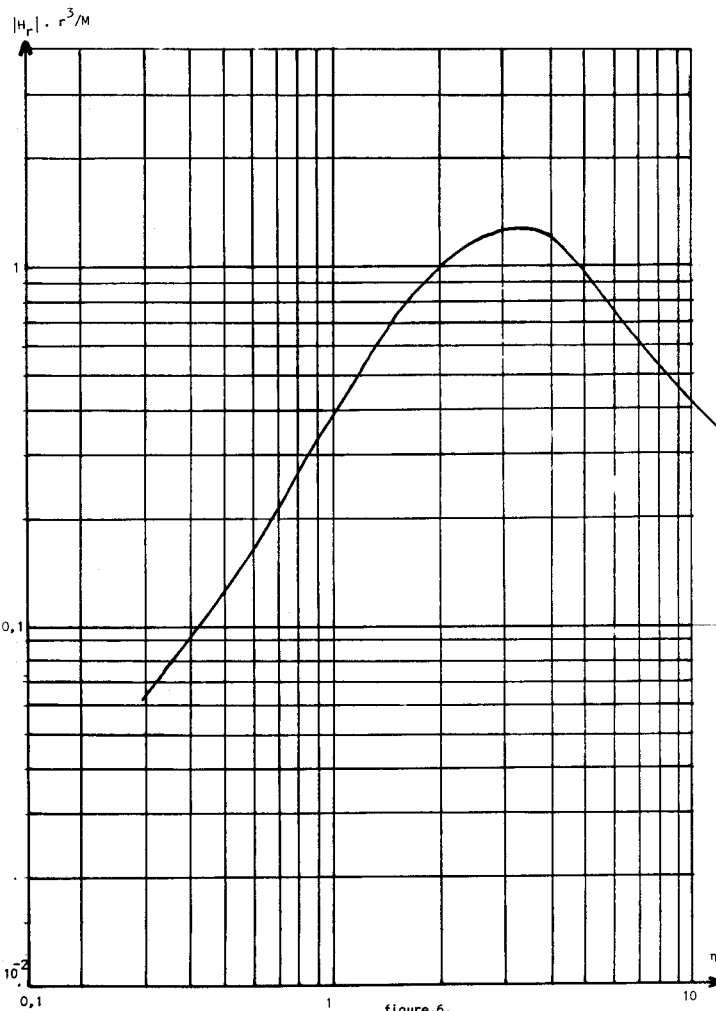


figure.6.

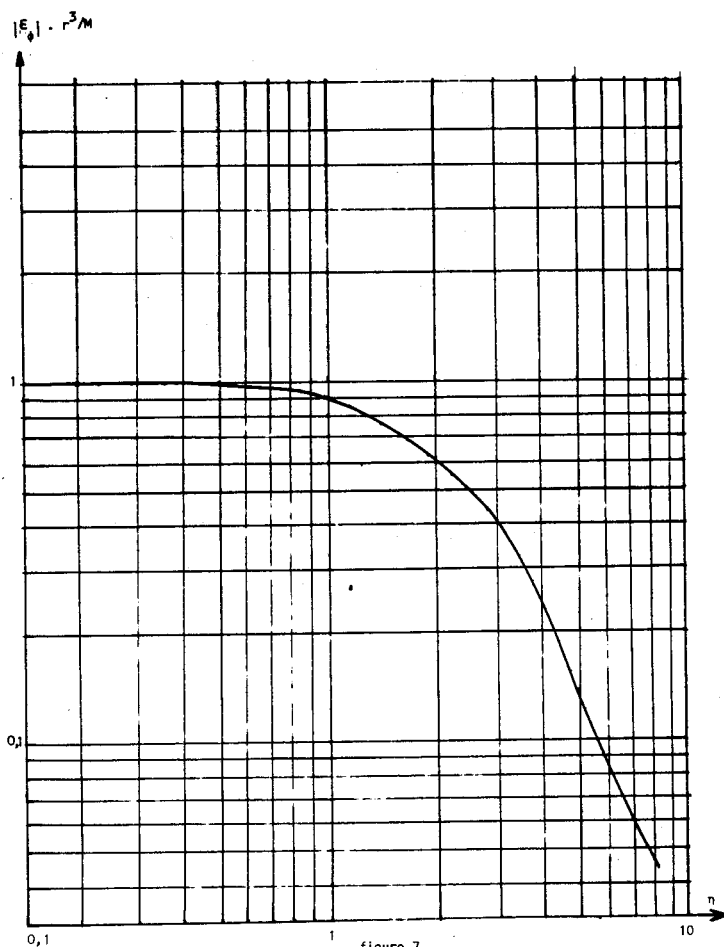


figure.7.



Il en résulte les expressions des composantes des champs suivantes pour $h=z=0$ [15] [16]

$$E_{\varphi} = \frac{i2M\omega\mu}{k_1^2 r^4} \left[3 - (3 - 3ik_1 r - k_1^2 r^2) e^{ik_1 r} \right] \quad (38)$$

$$H_z = \frac{+2M}{k_1^2} \frac{1}{r^5} \left[9 - (9 - 9ik_1 r - 4k_1^2 r^2 + ik_1^3 r^3) e^{ik_1 r} \right] \quad (39)$$

$$H_r = -\frac{M}{r^3} \left[16K_1 I_1 - 4ik_1 r (K_0 I_1 - I_0 K_1) + k_1^2 r (K_0 I_0 - K_1 I_1) \right] \quad (40)$$

K_j et I_j représentent les fonctions de Bessel modifiées, d'ordre j , de l'argument $-\frac{ik_1 r}{2}$.

Les courbes des figures 5, 6, et 7 représentent les modules des composantes réduites des champs magnétique et électrique [16] en fonction d'une variable sans dimension :

$$\eta = r \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma_1}{2}} \quad (41)$$

Ces courbes montrent en particulier quelle est l'influence de la conductivité sur la valeur des composantes du champ électromagnétique d'un D.M.V.

III.1.1.1. Paramètres de prospection

On remarque, en comparant les figures 5, 6 et 7, que la composante radiale H_r en champ magnétique est la plus sensible à la présence d'un demi-milieu conducteur, et ce, quelque soit la valeur de η . Il serait par conséquent intéressant de mesurer la composante radiale d'un D.M.V. pour connaître la valeur de la conductivité. Mais ce procédé nécessite l'étalonnage du capteur magnétique et la mesure du courant d'émission.

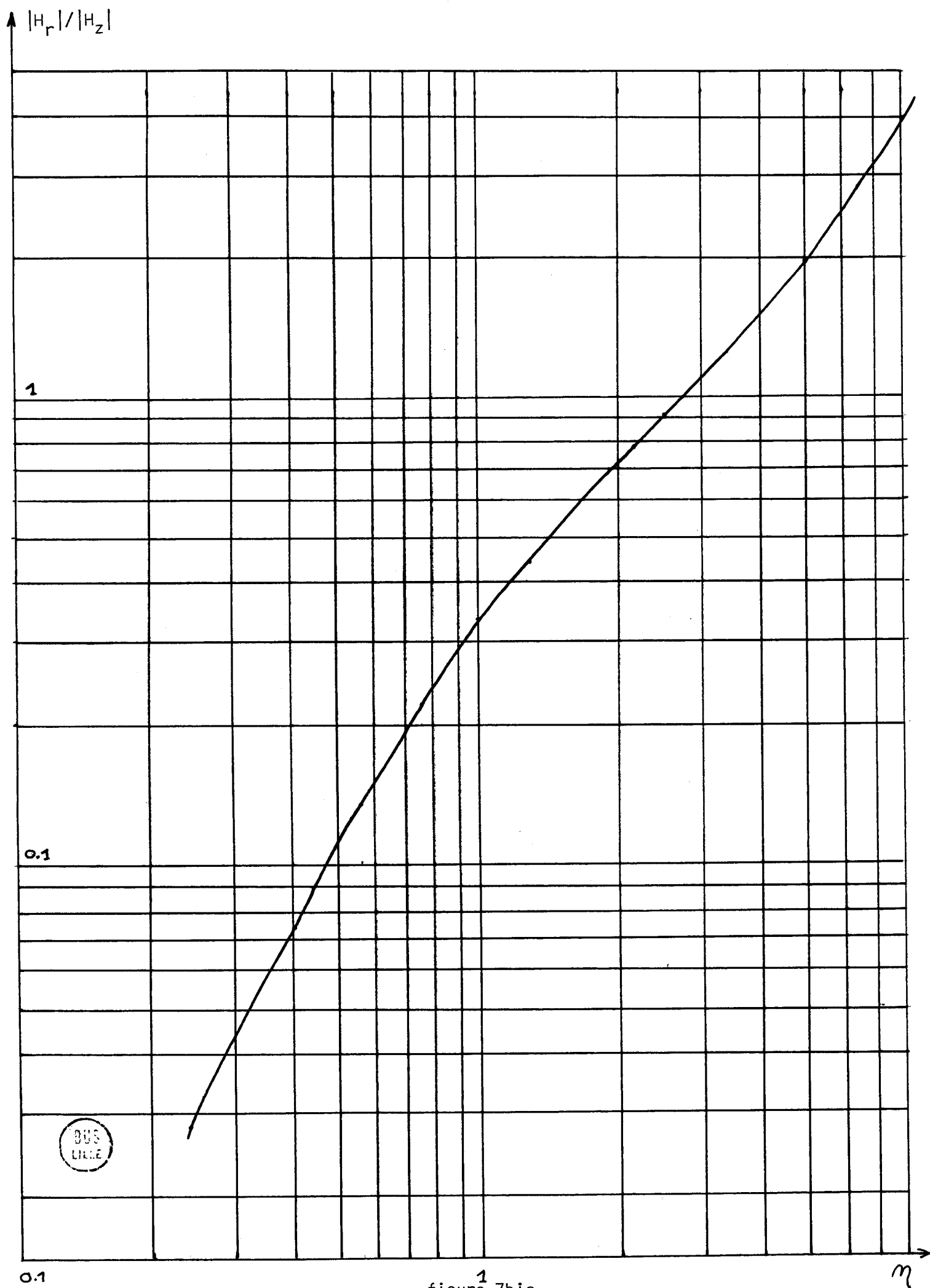


figure.7bis.

Pour rendre la mesure indépendante du courant d'émission, il suffit de mesurer le rapport de deux composantes :

$$\text{soit } H_r/E_\phi \quad ; \quad \text{soit } H_r/H_z ,$$

les composantes E_ϕ et H_z jouant le rôle de facteur de normalisation.

La mesure du rapport H_r/E_ϕ ne supprime pas l'inconvénient qui consiste à étalonner les capteurs.

Il est donc préférable en général de mesurer le rapport des composantes du champ magnétique en utilisant le même capteur.

La figure.7.bis montre l'évolution du rapport $|H_r|/|H_z| = f(n)$.

En réalité, les composantes H_r et H_z sont déphasées l'une par rapport à l'autre. Il en résulte que l'extrémité du vecteur champ magnétique décrit une ellipse, comme le montre la figure.8.

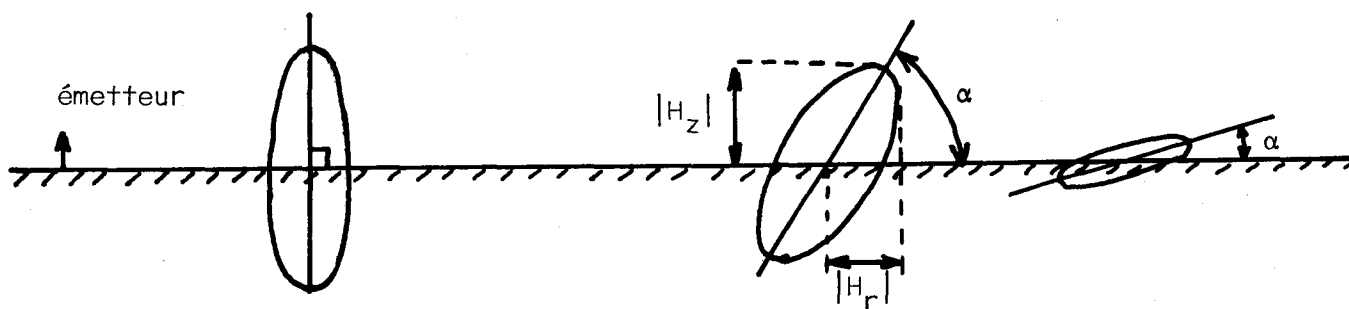


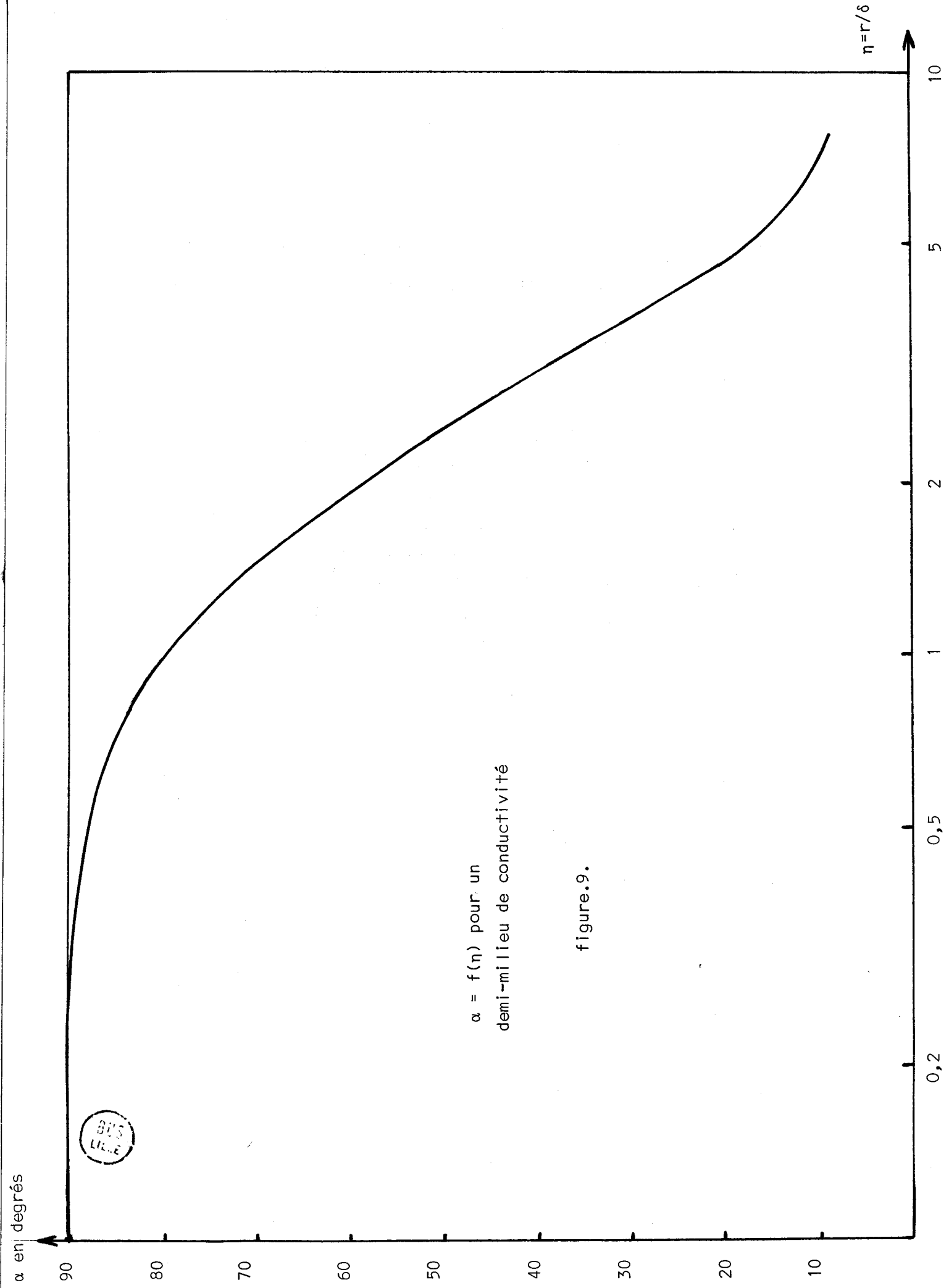
figure.8.

Près du dipôle émetteur le déphasage entre les composantes du champ magnétique est voisin de $\pi/2$ et l'ellipse a son grand axe vertical. Au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'émetteur le grand axe de l'ellipse s'incline, l'ellipse s'aplatit, son excentricité augmente tandis que les modules des composantes diminuent.

Il est alors possible de choisir l'excentricité ou l'angle α que forme le grand axe avec la surface du sol, comme paramètre de prospection.

Les composantes radiale et verticale du champ magnétique peuvent se mettre sous la forme :

$$H_z = |H_z| e^{j\phi_z} \quad \text{et} \quad H_r = |H_r| e^{j\phi_r} \quad (42)$$



$\alpha = f(\eta)$ pour un
demi-milieu de conductivité

figure.9.



On montre facilement (voir annexe.III.) que l'angle α représentant l'inclinaison du grand axe de l'ellipse sur le plan horizontal est donné par l'expression :

$$\alpha = \text{arc tg} \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 + 4A^2}}{2A} \right) \quad (43)$$

avec :

$$A = |H_r| \cdot |H_z| \cos (\varphi_r - \varphi_z) \quad (44)$$

$$B = |H_r|^2 - |H_z|^2 \quad (45)$$

Ces relations semblent montrer que pour connaître α il est nécessaire de mesurer le déphasage qui existe entre les deux composantes. Cette mesure, difficile à faire avec précision sur le terrain, peut être évitée à condition de mesurer le module d'une troisième composante H_{45} du champ magnétique suivant un axe incliné à 45° sur le plan horizontal. Dans ces conditions, $\cos (\varphi_r - \varphi_z)$ est donné par la relation :

$$\cos(\phi_r - \phi_z) = \frac{\frac{|H_r|^2 + |H_z|^2}{2} - |H_{45}|^2}{|H_r| |H_z|} \quad (46)$$

et l'angle α peut être déterminé à partir d'une mesure de module.

On peut constater à partir des formules (43) à (46) que α peut s'exprimer en fonction d'un rapport de modules des composantes du champ magnétique. Ce paramètre est donc comme le rapport $|H_r|/|H_z|$ indépendant de la valeur du moment magnétique du dipôle émetteur.

La connaissance de ce paramètre sur le terrain est utile (lorsqu'il est possible de le mesurer) parce qu'il contient à la fois les informations sur les modules et sur les phases des composantes du champ magnétique.

La figure.9. représente l'évolution de α en fonction de la variable réduite :

$$\eta = r \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$$

Cette courbe montre que pour obtenir la plus grande variation de α il faut que η soit compris entre 1 et 5. Ceci signifie que si l'on désire

baser une méthode de mesure de la conductivité sur la variation du paramètre α il faut se placer dans des conditions expérimentales telles que la relation suivante soit vérifiée :

$$2500 < r \sqrt{\sigma f} < 500 \quad (47)$$

On remarque, sur la figure 7bis que, lorsque ces conditions sont respectées, les modules des composantes horizontale et verticale du champ magnétique ont le même ordre de grandeur ce qui constitue des conditions favorables pour effectuer des mesures de α avec précision

III.1.1.2. Zone de validité de l'approximation quasi-statique

L'approximation quasi-statique suppose que l'expression suivante est vérifiée :

$$k_0 r = \frac{\omega r}{c} = 0 \quad (48)$$

Cette condition est impossible à réaliser pratiquement. Mais les expressions obtenues dans le cadre de cette approximation restent valables tant que :

$$\frac{\omega r}{c} \ll 0.1 \quad (49)$$

C'est-à-dire tant que la longueur d'onde dans l'air est supérieure ou égale à soixante fois la distance séparant l'émetteur et le récepteur. On peut donc considérer que dans un diagramme comportant la fréquence en ordonnées et les distances r en abscisse, la zone de validité de l'approximation quasi-statique est représentée par la surface hachurée de la figure.11.

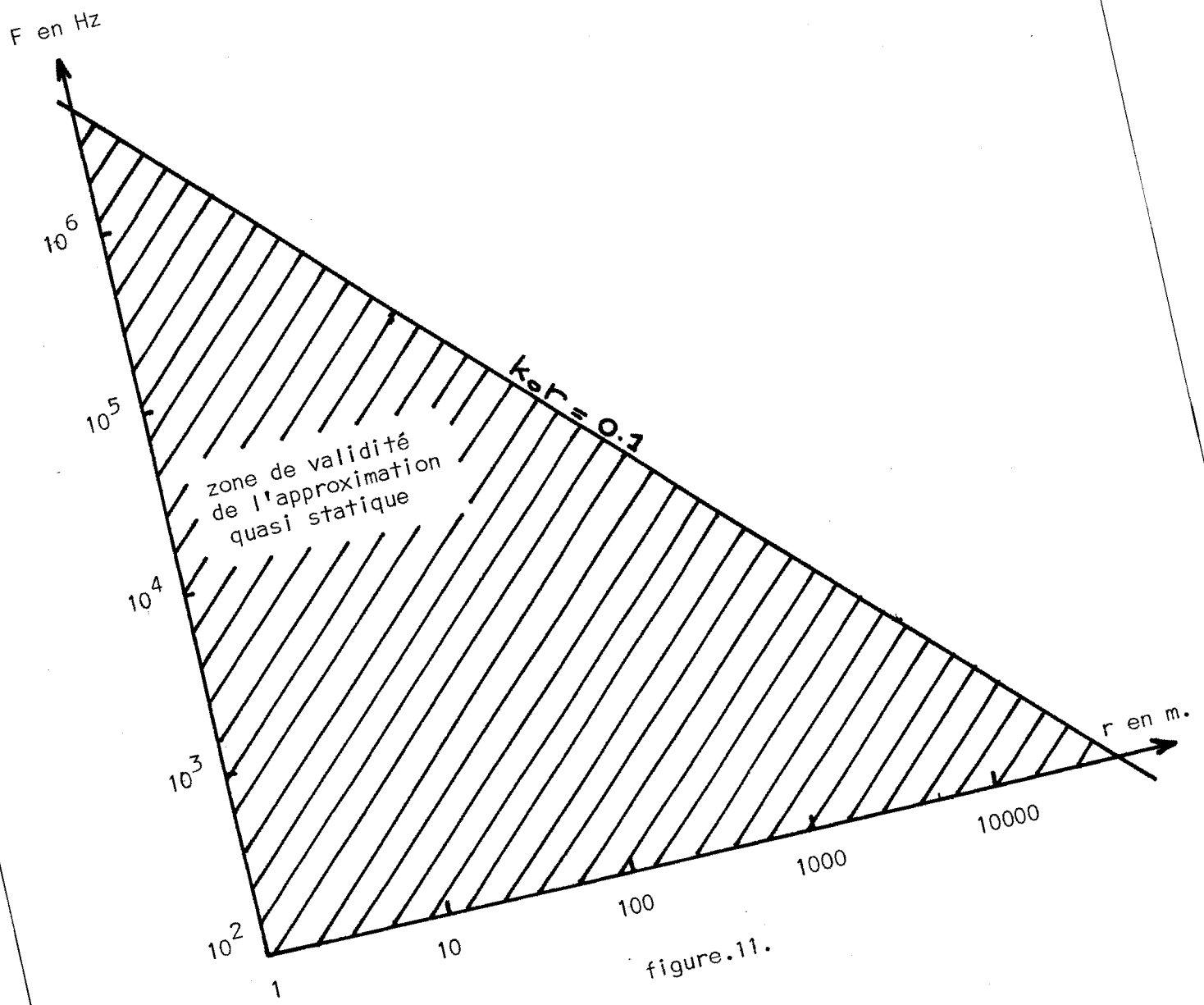


figure.11.



Lorsque l'on se trouve à une très grande distance de l'émetteur, le rayon de courbure de la surface d'onde est tel que l'onde émise peut être assimilée à une onde plane. Il faut observer pour cela entre le récepteur et l'émetteur une distance qui peut vérifier l'inégalité :

$$\frac{\omega r}{c} > 0.1$$

Dans ce cas l'approximation quasi-statique ne convient plus, il faut tenir compte de l'effet des courants de déplacement dans l'air et choisir d'autres cas d'approximation.

L'intégration du potentiel donné par l'expression (29) a été résolue par Banos^[17] en 1966 en faisant usage d'une méthode d'intégration appelée "méthode du col", dont nous rappelons brièvement les fondements^[17] en annexe.IV.

Le résultat de cette intégration permet de définir trois zones d'approximations que nous allons passer en revue. Nous choisirons alors l'approximation qui permettra de définir l'espacement minimum émetteur-récepteur qui permet de considérer l'onde émise comme plane.

III.1.2. Expression du potentiel, résultat d'une intégration par la méthode du col

L'expression du potentiel à intégrer est celle donnée formule (29) qui peut encore être mise sous la forme suivante :

$$\Pi_{0z} = M \int_0^{\infty} \left[\frac{\lambda}{u_0} e^{+u_0(z-h)} - \frac{\lambda}{u_0} e^{-u_0(z+h)} + \frac{2\lambda}{u_0+u_1} e^{-u_0(z+h)} \right] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (50)$$

Cette expression se décompose en trois intégrales distinctes.

Les deux premières intégrales sont des intégrales de Weber dont les solutions bien connues^[15] sont les suivantes :

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda}{u_0} e^{-u_0|z-h|} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{e^{jk_0 R_1}}{R_1} \quad (51)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda}{u_0} e^{-u_0(z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{e^{ik_0 R_2}}{R_2} \quad (52)$$

$$\text{avec : } R_1 = \sqrt{r^2 + (z-h)^2} \quad \text{et} \quad R_2 = \sqrt{r^2 + (z+h)^2} \quad (53)$$

Le potentiel s'écrit alors :

$$\Pi_{0z} = M \left[\frac{e^{ik_0 R_1}}{R_1} - \frac{e^{ik_0 R_2}}{R_2} \right] + \frac{2\lambda}{u_0 + u_1} e^{-u_0(z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (54)$$

Les deux premiers termes de cette dernière expression représentent les potentiels primaires créés par le dipôle émetteur et son image disposés symétriquement par rapport à la surface du sol.

Le dernier terme tient compte de la conductivité non infinie du sol. Tout le problème revient à intégrer ce 3ème terme qui peut être mis sous la forme générale :

$$I = M \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{-u_1 a} e^{-u_0 b} H_0^{(1)}(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (55)$$

$$\text{où } F(\lambda) = \frac{1}{u_0 + u_1}$$

$$a = 0$$

$$b = z+h$$

Dans cette dernière expression la fonction de Bessel $J_0(\lambda r)$ a été remplacée par une fonction de Hankel $H_0^{(1)}$ de manière à étendre le domaine d'intégration à tout l'axe réel de $-\infty$ à $+\infty$.

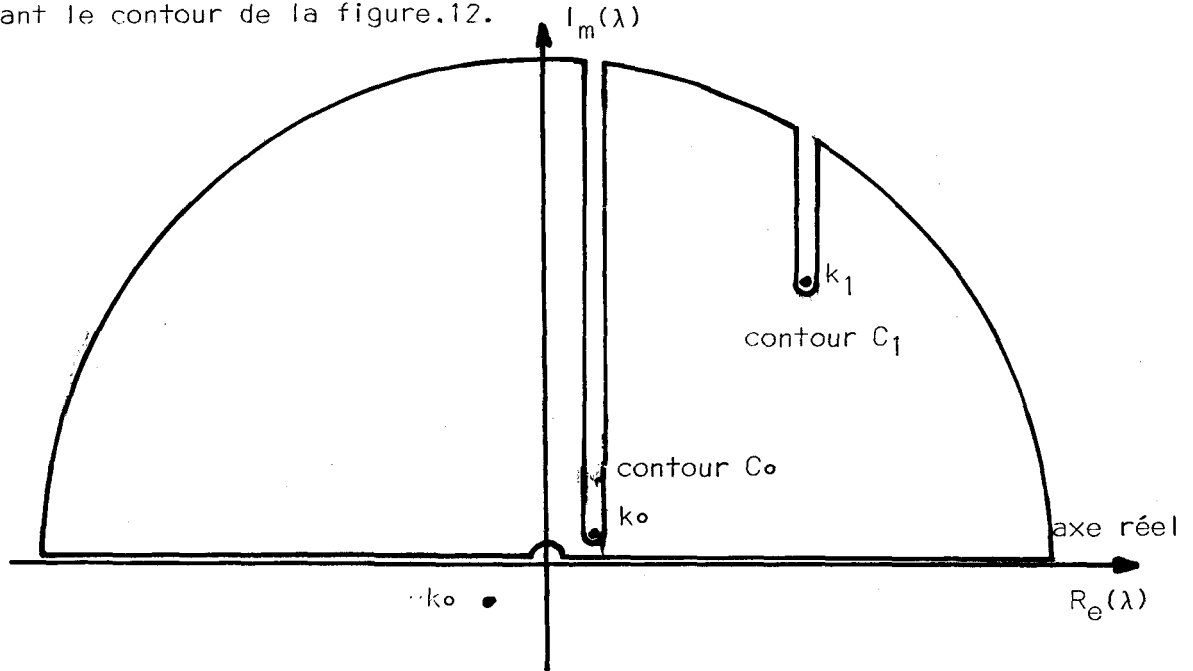
L'intégrale (55) est une intégrale de la variable réelle à coefficients complexes, avec :

$$u_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} \quad u_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} \quad (56)$$

Les fonctions u_0 et u_1 sont multiformes et l'intégration présente deux points de branchements définis par :

$$\lambda = \pm k_0 \quad \lambda = \pm k_1 \quad (57)$$

L'intégrale (55) peut être intégrée par la méthode des résidus en déformant le contour d'intégration initial représenté par l'axe réel et en intégrant suivant le contour de la figure.12.



$-k_1$ •

figure.12.

Le chemin d'intégration doit contourner les branches de coupure, issues des points de branchement, par 2 lacets.

Ces coupures transforment le plan des λ en une surface de Riemann à 4 feuillets, à l'intérieur des uns les parties réelles des fonctions u_n peuvent prendre des valeurs positives et à l'intérieur des autres des valeurs négatives.

On montre ^[19] qu'en vertu du Lemme de Jordan l'intégrale est nulle le long du cercle infini si on choisit le feuillet dans lequel les parties réelles des u_n sont positives. L'intégrale I converge et pour rester dans le même feuillet, les coupures ne peuvent pas traverser l'axe réel. Pour satisfaire ces conditions il faut choisir comme chemin d'intégration, celui qui se trouve dans le demi-plan supérieur.

L'intégrale I devient égale à la somme :

$$I = I_{(c_0)} + I_{(c_1)} \quad (58)$$

On intègre chacun des termes de l'expression (58) par la méthode du col.

III.1.2.1. Intégration le long du contour C₀

Le long de ce contour, l'intégrale à calculer est de la forme :

$$J^{\circ}(a,b,r) = \int_{C_0} F(\lambda) e^{-u_1 a} e^{-u_0 b} H_0^{(1)}(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (59)$$

La méthode d'intégration de cette expression est rappelée en annexe.4. Elle consiste, à transformer, par un changement de variable approprié, le contour d'intégration initial en un contour de plus grande pente étendu à l'axe réel. Puis, en remplaçant la fonction de Hankel par sa représentation intégrale on peut mettre J^o(a,b,r) sous la forme :

$$J^{\circ}(a,b,r) = -2k_0^2 e^{ik_0 r} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi(x,y) e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \quad (60)$$

où $\Phi(x,y) = f(x) g(x,y)$ (61)

La méthode du col consiste à trouver un développement limité au voisinage de l'origine pour la fonction $\Phi(x,y)$ et à intégrer terme à terme. On obtient, tous calculs faits, la contribution, sur le potentiel, de l'intégrale le long du contour C₀ :

$$U^{\circ} = \frac{-2ik_0 e^{[jk_0 r + \alpha(1-n)^{1/2}]} }{(1-n^2) (ik_1 r)^2} \{F_0(a,b) + \frac{F_1(a,b)}{i(k_1 r)} + \dots\} \quad (62)$$

$$F_0(a,b) = 1 - ik_1 b (1-n^2)^{1/2} \quad b = z+h \quad a = 0 \quad (64)$$

(63) où $F_1(a,b) = F_0 E_1 + b(E_{1b} - E_{1a})$ E_{1b} = $\frac{\partial E_1}{\partial b}$ E_{1a} = $\frac{\partial E_1}{\partial a}$ (65)

$$n = \frac{k_0}{k_1} = ik_1 a \quad (66)$$

L'expression entre parenthèses est une série asymptotique qui converge si :

$$a \ll r \quad \text{et} \quad b \ll r \quad (67)$$

et si ik₁r est plus grand que l'unité.

III.1.2.2. Intégration le long du contour C_1

L'intégration le long du contour C_1 s'effectue exactement de la même manière que le long du contour C_0 .

Or, sur l'expression (62), on voit que le potentiel est proportionnel à $e^{ik_0 r}/r^2$. Si on intègre le long du contour C_1 on trouve de même une expression proportionnelle à $e^{ik_1 r}/r^2$.

Il en résulte que si l'on fait l'hypothèse que :

$$|k_1| \gg |k_0| \quad (69)$$

ceci revenant à négliger les courants de déplacement dans le sol ce qui est vérifié en basse fréquence pour les milieux conducteurs tels que le sol, la contribution des intégrales le long du contour C_1 est négligeable vis-à-vis de celle le long de C_0 .

III.1.2.3. Définition des diverses zones d'approximation

Les résultats que nous venons de rappeler supposent que a et b soient beaucoup plus petits que la distance horizontale r qui sépare l'émetteur du récepteur. Soit :

$$a \ll r \quad \text{et} \quad b \ll r \quad (70)$$

or on a :

$a = 0$ et $b = z+h$. Il en résulte que la relation (70) est pratiquement toujours vérifiée puisque l'émetteur et le récepteur sont posés sur le sol. Cette remarque permet d'effectuer une simplification importante en écrivant :

$$k_0 a \quad \text{et} \quad k_0 b \ll 1 \quad (71)$$

En effet, dans notre cas $b=z+h$ est de l'ordre de 0,30mètre au maximum, si on admet que $k_0 b$ est négligeable devant 1 lorsqu'il est inférieur à

0.05, la fréquence maximum rendant le potentiel de Baños valable est donnée par la relation :

$$F < \frac{5 \cdot 10^{-2}}{b2\pi c} \approx 1\text{MHz} \quad (72)$$

où c représente la vitesse de la lumière.

En outre, la série asymptotique obtenue pour le potentiel n'est valable que si :

$$|k_1 r| > 1 \quad \text{et} \quad |n| = \left| \frac{k_0}{k_1} \right| < 1 \quad (73)$$

On peut enfin obtenir des simplifications intéressantes de la formule (68) en faisant apparaître des approximations supplémentaires. C'est ainsi que comme l'a proposé Baños, on peut considérer trois zones d'approximations pour lesquelles on obtient des expressions relativement simples du potentiel.

Ces trois zones sont :

. La zone proche définie par la relation :

$$|k_1 r| \gg 1 > k_0 r \quad (74)$$

. La zone intermédiaire définie par :

$$k_0 r \gg 1 \gg |n^2 k_0 r| \quad (75)$$

. La zone asymptotique définie par :

$$|n^2 k_0 r| \gg 1 \quad (76)$$

Les domaines d'utilité de ces diverses zones sont représentés sur la figure.13.

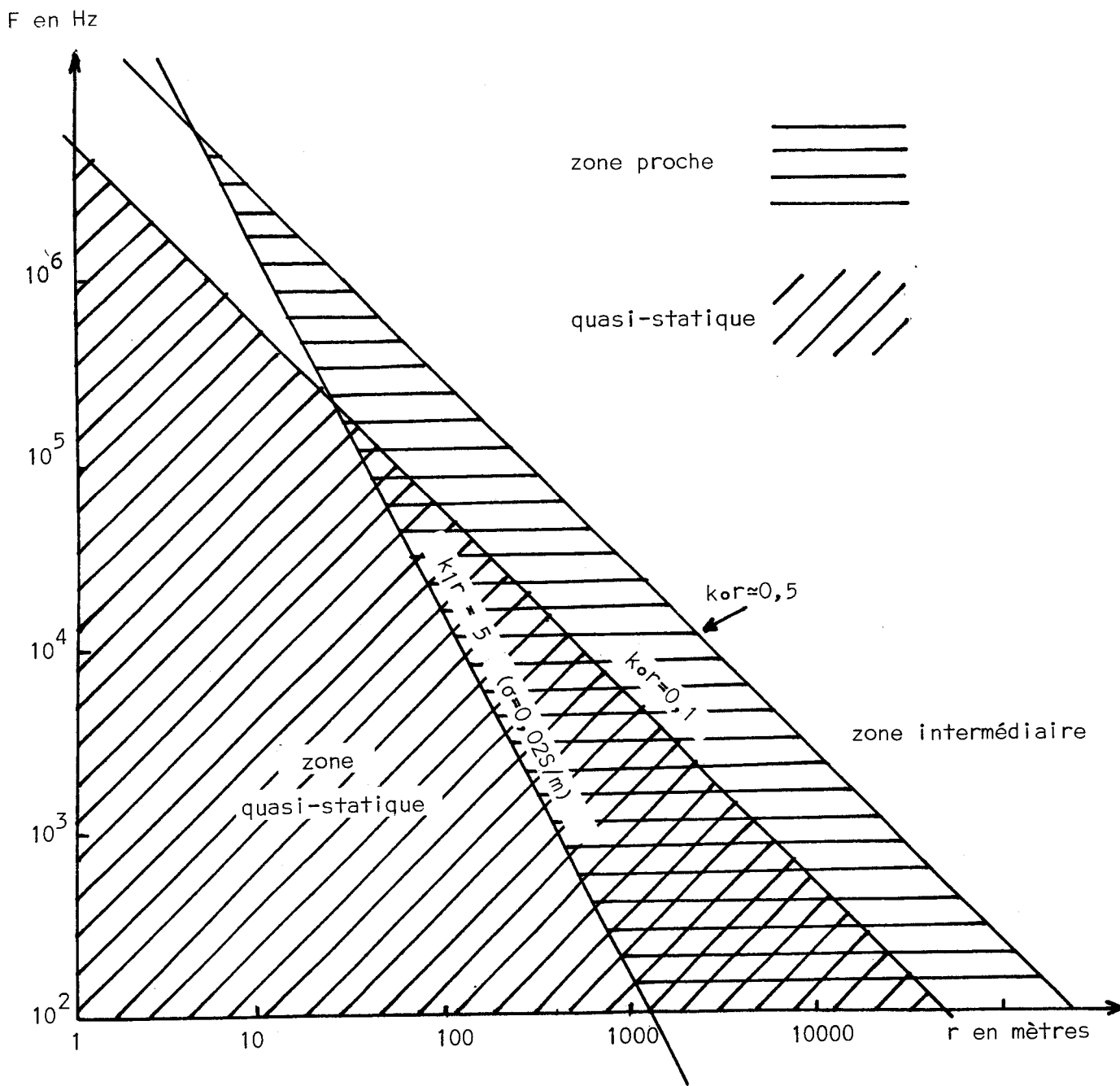


figure.13.



III.1.2.3.1. Zone asymptotique

Cette zone n'offre qu'un intérêt académique, car les signaux reçus sont pratiquement immesurables.

Si on effectue les simplifications valables dans cette zone, on obtient :

$$U^{\circ}(a,b,r) = \frac{2in(1-ik_1b(1-n^2)^{1/2})}{k_1(1-n^2)r^2} e^{ik_0r + ik_1a(1-n^2)^{1/2}} \quad (77)$$

III.1.2.3.2. Zone intermédiaire

Cette zone est caractérisée par l'approximation :

$$|n^2k_0r| \ll 1 \ll k_0r \quad (78)$$

Si on effectue des simplifications valables dans cette zone, on obtient :

$$U^{\circ}(a,b,r) = \frac{2(1-ik_1b)e^{ik_1a} \cdot e^{ik_0r(1+ik_0r)}}{k_1^2r^3} \quad (79)$$

Les résultats obtenus dans cette zone d'approximation sont encore valables pour k_0r de l'ordre de 1, sous condition que :

$$|n^2| \ll 1$$

III.1.2.3.3. Zone proche

Cette zone est caractérisée par l'approximation :

$$|k_1r| > 1 > |k_0r|$$

On voit sur le graphique de la figure.13. que parmi les trois zones, la zone proche est celle qui donne l'expression du potentiel pour les distances les plus courtes séparant l'émetteur et le récepteur.

Lorsque l'on effectue les simplifications valables dans cette zone, dans l'expression (62) on obtient :

$$U_0(a,b,r) = -2ik_1 e^{n\gamma + \alpha} \left[\frac{nE_1}{\gamma^2} - \frac{E_1}{\gamma^3} - \frac{nE_2}{\gamma^4} + \dots \right]$$

avec : $E_1 = (1-\beta)$ (80)

$$E_2 = \frac{3}{2} (3\alpha - 3\beta - 3\alpha\beta^2 - \beta^3)$$

$$\gamma = ik_1 r \quad \alpha = ik_1 a \quad \text{et} \quad \beta = ik_1 b$$

$$a = 0 \quad b = z+h$$

III.1.3. Calcul des champs dans l'approximation de la zone proche, comparaison avec ceux obtenus en quasi-statique et avec leurs valeurs exactes

III.1.3.1. Calcul des champs magnétique et électrique

Les composantes des champs magnétique et électrique sont obtenues à partir des expressions ci-dessous données par les équations de Maxwell :

$$H_r = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial r \partial z} \quad E = -i\omega\mu \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \quad (81)$$

$$H_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \Pi_z = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right) \right]$$

Le potentiel Π_z est donné par la formule (54) avec pour troisième terme l'expression (80) donnée par Banos.

Le calcul de la composante H_r s'effectue facilement en appliquant la formule (81).

On obtient après dérivations, pour h et $z \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 H_{or} &= \mathcal{R}H_r + j\mathcal{I}H_r \\
 &= M \left\{ \frac{r}{R_1^5} (h+z)(3-3ik_0R_1-k_0^2R_1^2)e^{ik_0R_1} + \dots \right. \\
 &\quad + \frac{r}{R_2^5} (h-z)(3-3ik_0R_2-k_0^2R_2^2)e^{ik_0R_2} + \dots \\
 &\quad \left. 2ik_1^2 e^{ik_0r} \left[k_0 \left(\frac{-n}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{9n}{2\gamma} (1-\beta)^2 + \dots \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + k_1 \left(\frac{2n}{\gamma} - \frac{3}{\gamma} - \frac{18n}{\gamma} (1-\beta^2) \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 R_1 &= (r^2+(z+h)^2)^{1/2} & R_2 &= (r^2+(z-h)^2)^{1/2} \\
 n &= \frac{k_0}{k_1} & \beta &= z+h & \gamma &= ik_1r
 \end{aligned}$$

Lorsque l'émetteur et le récepteur sont tous deux à la surface du sol, c'est-à-dire quand $h=z=0$, la composante horizontale du champ magnétique s'écrit :

$$H_r = -\frac{M e^{ik_0r}}{\eta r^3} \left\{ -k_0^2 r^2 + 3k_0 r + 3 - \frac{9}{2n^2} \left(\frac{k_0^2 r^2}{2} + 2k_0 r \right) + i \left[-k_0^2 r^2 - 3k_0 r + 3 - \frac{9}{2n^2} \left(-\frac{k_0^2 r^2}{2} + 2k_0 r \right) \right] \right\} \quad (85)$$

De même le calcul de la composante transversale du champ électrique E_ϕ s'écrit lorsque $h=z=0$:

$$E_\phi = -j\omega\mu_0 M \frac{e^{ik_0r}}{\eta r^3 k_1} (-k_0^2 r^2 - 3k_0 r + 3 + j(k_0^2 r^2 - 3k_0 r - 3)) \quad (86)$$

Le calcul de la composante verticale du champ magnétique est un peu plus délicat :

Si on applique la formule :

$$H_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \Pi_{oz} \quad (87)$$

à l'expression du potentiel (80) on constate que la formule obtenue ne vérifie pas les conditions aux limites, qui imposent la continuité des composantes du champ magnétique sur l'interface air-sol.

On n'obtient une expression de H_z qui vérifie correctement les conditions aux limites qu'en appliquant la relation (87) à l'expression générale de $U_0(a,b,r)$ donnée par :

$$U_0(a,b,r) = \frac{-2ik_1 e^{ik_0 r + \alpha(1-n^2)^{1/2}}}{\gamma^2} \{ G_0(a,b) + \frac{G_1(a,b)}{2\gamma} + \frac{G_2(a,b)}{8\gamma^2} + \dots \}$$

avec :

$$G_0(a,b) = n(1-\beta(1-n^2)^{1/2})$$

$$G_1(a,b) = -2[(1-\beta(1-n^2)^{1/2})] + 3n^2[(\alpha-\beta)(1-n^2)^{1/2} + \beta^2 - \alpha\beta - \frac{\beta^3}{3}(1-n^2)^{1/2}]$$

$$G_2(a,b) =$$

$$-3n \{ 12\alpha(1-n^2)^{-1/2} - 12\beta(1-n^2)^{-1/2} - 12\alpha\beta + 12\beta^2 - 4\beta^3(1-n^2)^{1/2} \}$$

$$+ n^3 \{ 15\alpha^2(1-n^2)^{-1} - 15\alpha(1-n^2)^{-3/2} - 15\alpha^2\beta(1-n^2)^{-1/2} - 15\alpha\beta(1-n^2)^{-1}$$

(88)

$$+ 15\beta(1-n^2)^{-3/2} + 10\alpha\beta^2(1-n^2)^{-1/2} - 10\alpha\beta^3 - 10\beta^3(1-n^2)^{-1/2}$$

$$- \beta^5(1-n^2)^{1/2} + 20\alpha\beta^2(1-n^2)^{-1/2} + 5\beta^4 \}$$

où l'on ne néglige pas n^2 devant 1 avant de dériver.

Mais l'expression obtenue pour la composante H_z par application de la formule (87) sur la relation (88) n'est pas exacte et est différente de celle calculée en appliquant l'expression :

$$H_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right) \quad (89)$$

qui donne un résultat juste.

Pour obtenir une expression juste de la composante verticale H_z du champ magnétique quelque soit la façon dont on dérive le potentiel, il est alors nécessaire de tenir compte du quatrième terme de la série asymptotique qui le compose.

Il est alors possible de négliger n^2 devant 1 dans les termes de la série asymptotique avant dérivation, mais il faut laisser subsister n^2 dans l'exposant de l'exponentielle.

Cette particularité est essentiellement due à la façon dont les termes s'éliminent au cours des opérations de dérivation.

L'expression du potentiel à utiliser dans tous les cas est alors donnée par [20] :

$$\Pi_z = M \left(\frac{e^{ik_0 R_1}}{R_1} - \frac{e^{ik_0 R_2}}{R_2} + U_0(a,b,r) \right)$$

$$U_0(a,b,r) = \frac{2iMe^{ik_0 r + \alpha(1-n^2)^{1/2}}}{k_1 r^2} \left[nE_1 - \frac{E_1}{\gamma} - \frac{nE_2}{\gamma^2} + \frac{E_2}{\gamma^3} + \dots \right]$$

avec : $E_1 = 1 - \beta$; $E_2 = \frac{3}{2} (3\alpha - 3\beta - 3\alpha\beta + 3\beta^2 - \beta^3)$

$\beta = ik_1 b$ $\alpha = ik_1 a$ $\gamma = ik_1 r$

$a = 0$ $b = z + h$

Dans ces conditions, l'expression de la composante verticale du champ magnétique s'écrit : lorsque $h \neq z \neq 0$

$$\begin{aligned} H_z = & M \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_2^2 \right) \left(\frac{e^{ik_0 R_2}}{R_2} - \frac{e^{ik_0 R_1}}{R_1} \right) \\ & + \frac{Me^{ik_0 r}}{n^2 r^3} \left\{ \left[(1+n_3) - in_3 \right] (k_0^3 r^3 - 9k_0 r + i(4k_0^2 r^2 - 9)) \right. \\ & \left. + \frac{3n_3}{4n} \left[(7k_0^2 r^2 + i(16k_0 r - k_0^3 r^3))(3 - 2n_3^2 - i(3 + 6n_3 + 2n_3^2)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (92)$$

lorsque $h = z = 0$

$$H_z = \frac{Me^{ik_0 r}}{n^2 r^3} \left[k_0^3 r^3 - 9k_0 r + i(4k_0^2 r^2 - 9) \right] \quad (93)$$

III.1.3.2. Comparaison des valeurs des composantes des champs obtenues dans l'approximation de la zone proche avec celles obtenues dans l'approximation quasi-statique et avec les valeurs exactes

Nous avons effectué cette comparaison pour le cas où l'émetteur et le récepteur sont tous deux à la surface du sol, sur les composantes du champ magnétique. La comparaison effectuée sur la composante du champ électrique donnerait les mêmes résultats.

Les expressions en zone proche donnant H_r , H_z et E sont des fonctions de η , r et $k_0 r$. Il en résulte que nous pouvons les représenter en fonction de r ou de $|k_1 r|$ pour diverses valeurs de la fréquence et de la conductivité.

Les planches 14 à 25 donnent l'évolution de $r^3 |H_r|$ et $r^3 |H_z|$ fonction de r pour les conductivités $\sigma = 0.1S/m$ et $0.02S/m$ et pour les fréquences 1000Hz, 10000Hz, 25000Hz obtenues dans l'approximation quasi-statique et dans l'approximation de la zone proche. Nous avons reporté sur ces mêmes planches l'écart relatif entre les deux approximations donné par :

$$\frac{H_{\text{zone proche}} - H_{\text{quasi-statique}}}{H_{\text{quasi-statique}}} \quad (94)$$

*

Ces résultats montrent une bonne correspondance entre les deux approximations dès que :

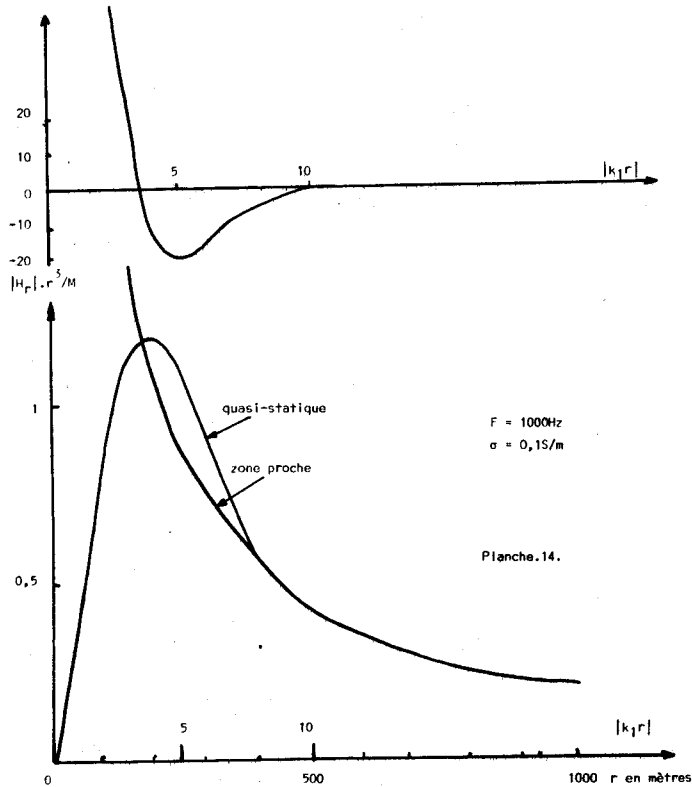
$$|k_1 r| = 7 \quad \text{ou} \quad \eta = 5 \quad (95)$$

quelles que soient les fréquences et les conductivités.

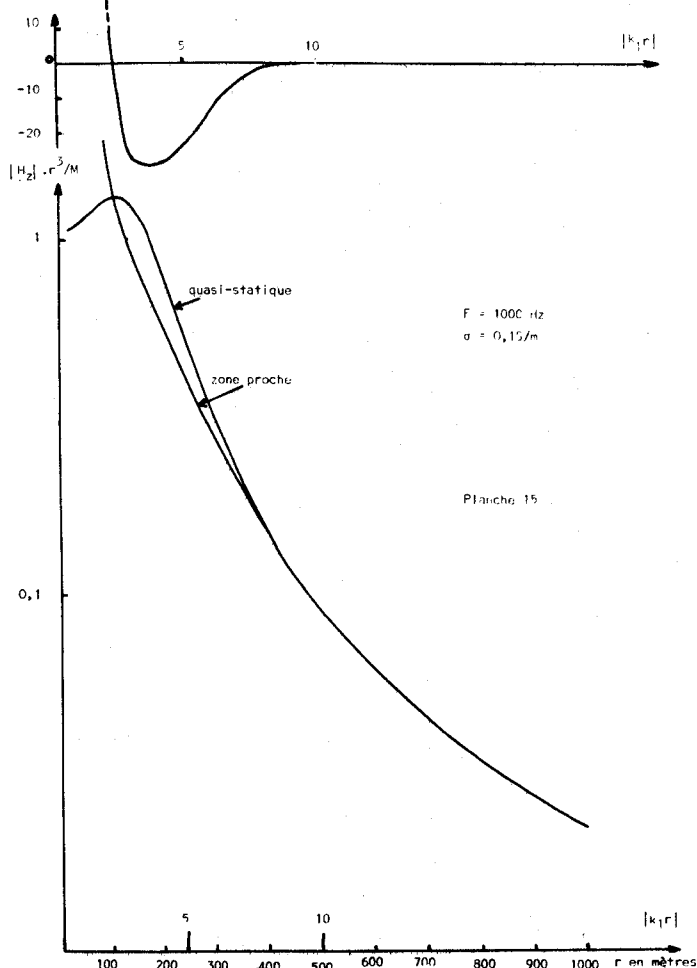
Si on prolongeait les courbes donnant H_r et H_z vers les distances r croissantes, on remarquerait à nouveau une divergence entre les résultats obtenus en quasi-statique et en zone proche. Cette divergence apparaîtrait dès que $k_0 r$ est supérieur à 0.1. Ceci signifie que l'approximation quasi-statique n'est plus valable pour des valeurs de $k_0 r$ supérieures à 0,1.

* Les valeurs exactes données par une intégration numérique du potentiel donnent des courbes pratiquement confondues avec celles du quasi-statique.

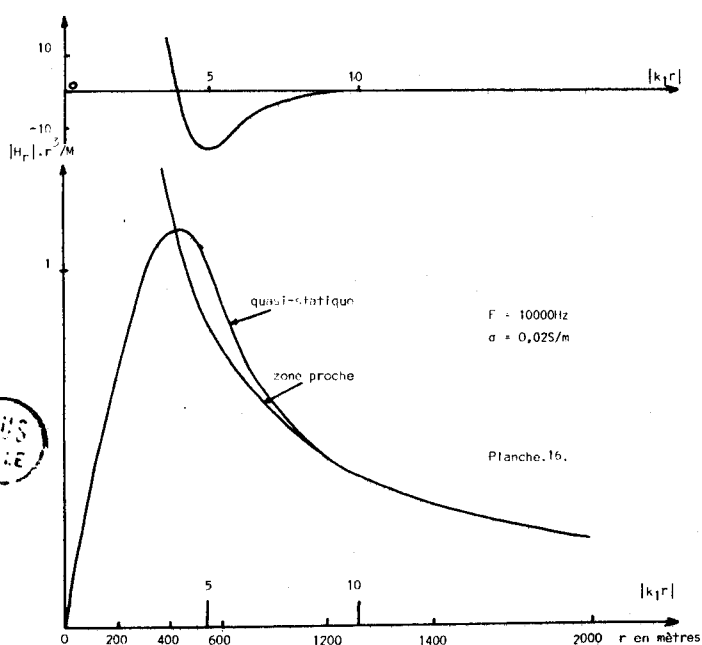
écart entre le quasi-statique
et la zone proche en %



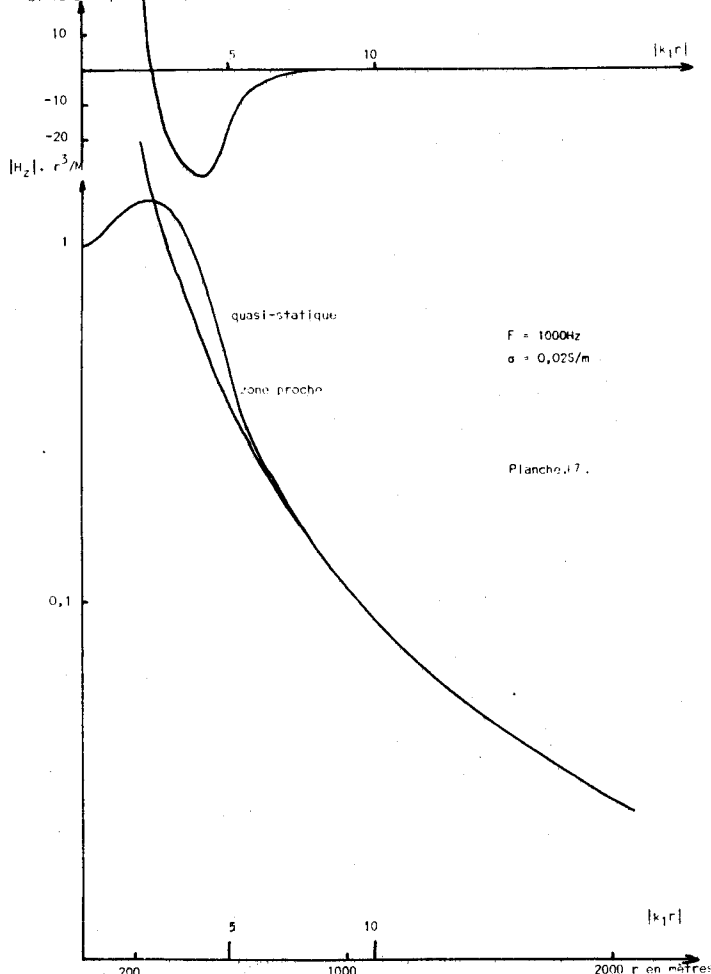
et la zone proche en %



écart entre le quasi-statique
et la zone proche en %

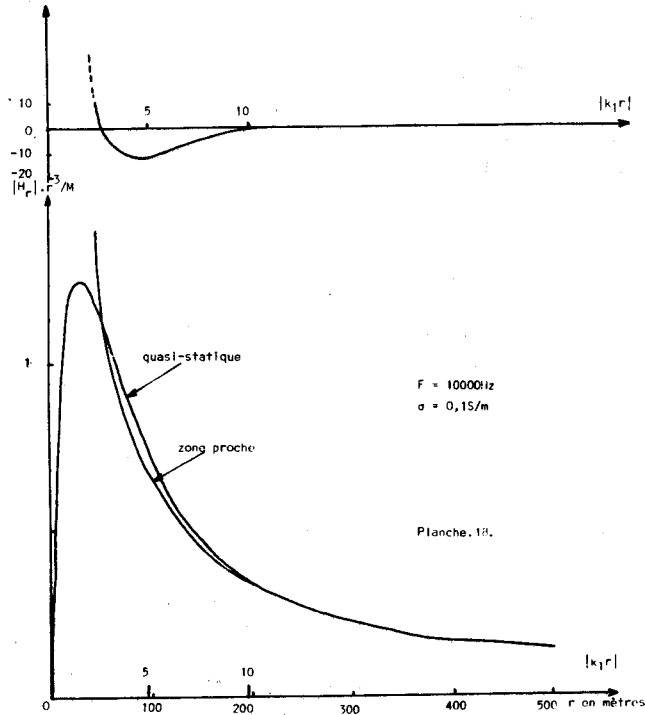


écart entre le quasi-statique
et la zone proche en %



BUS
LILLE

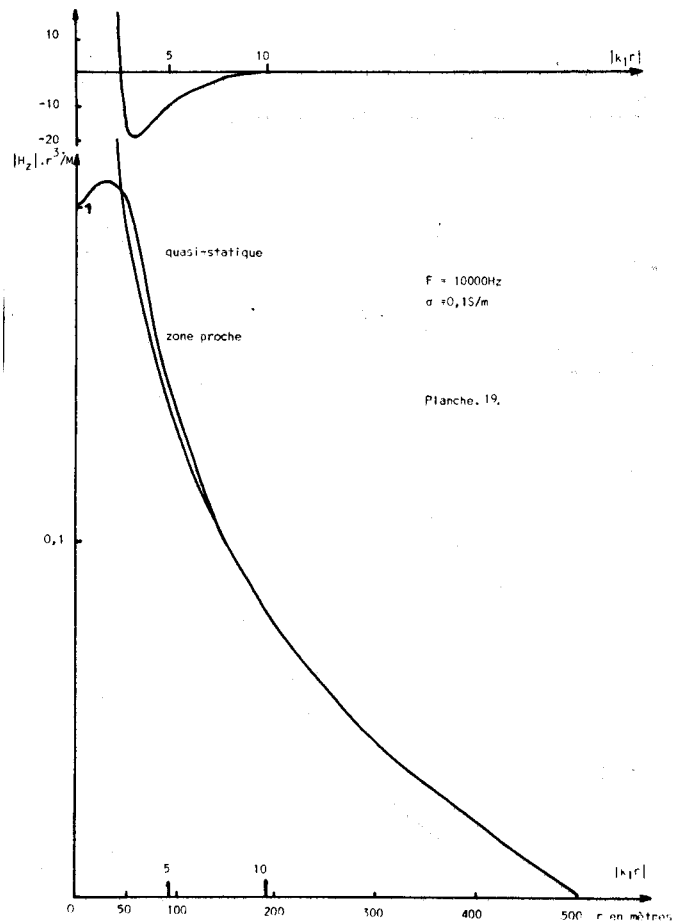
écart entre le quasi-statique
et la zone proche en %



$F = 10000 \text{ Hz}$
 $\alpha = 0,15/\text{m}$

Planche 18.

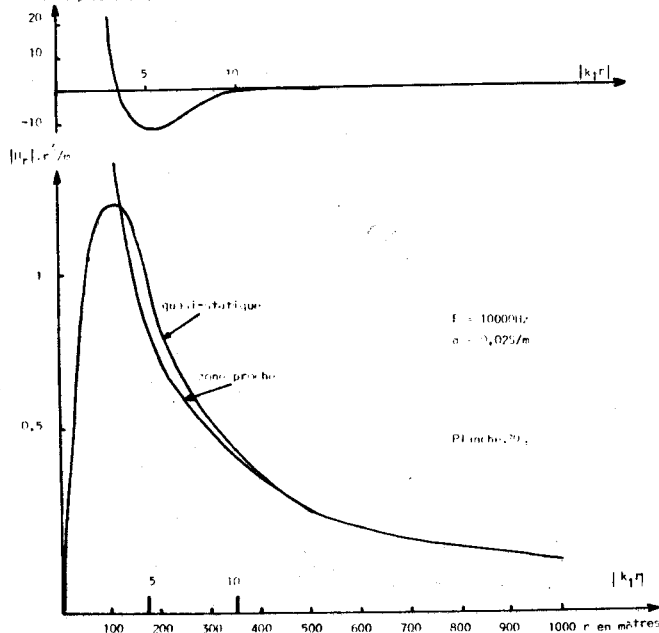
écart entre le quasi-statique
et la zone proche en %



$F = 10000 \text{ Hz}$
 $\alpha = 0,15/\text{m}$

Planche 19.

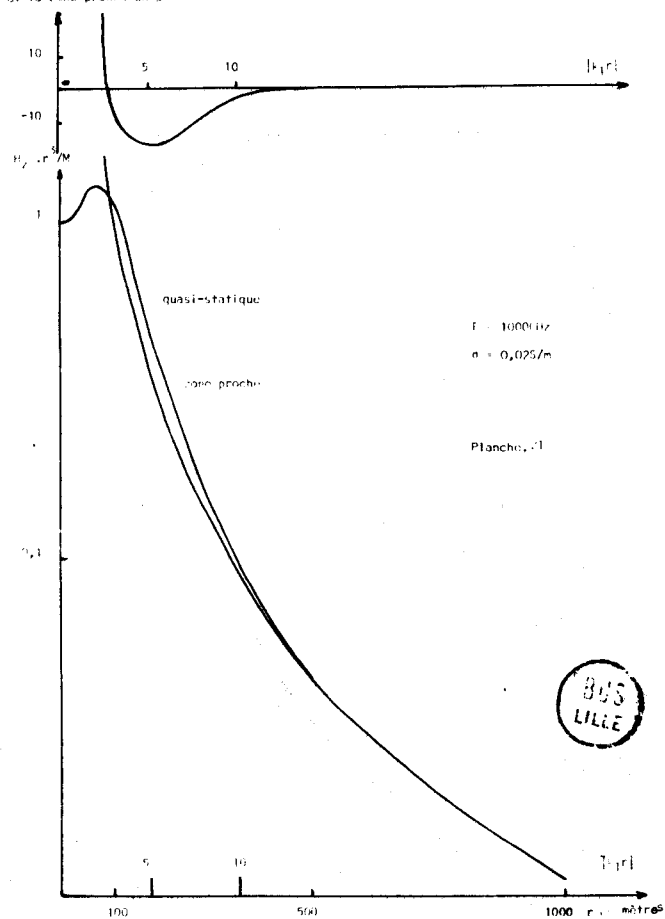
écart entre le quasi-statique
et la zone proche en %



$F = 10000 \text{ Hz}$
 $\alpha = 0,025/\text{m}$

Planche 20.

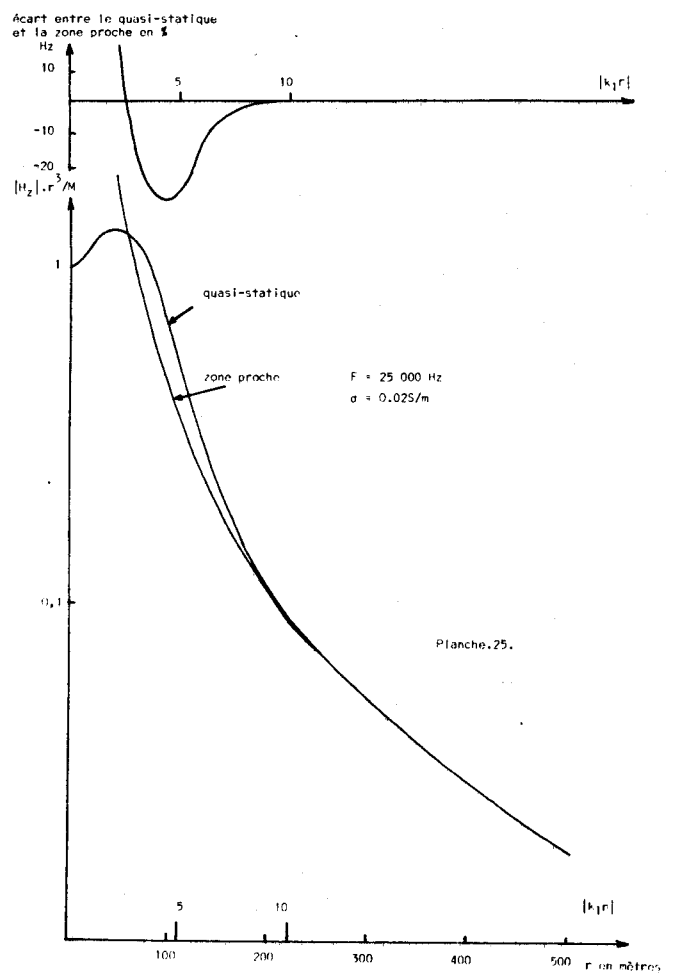
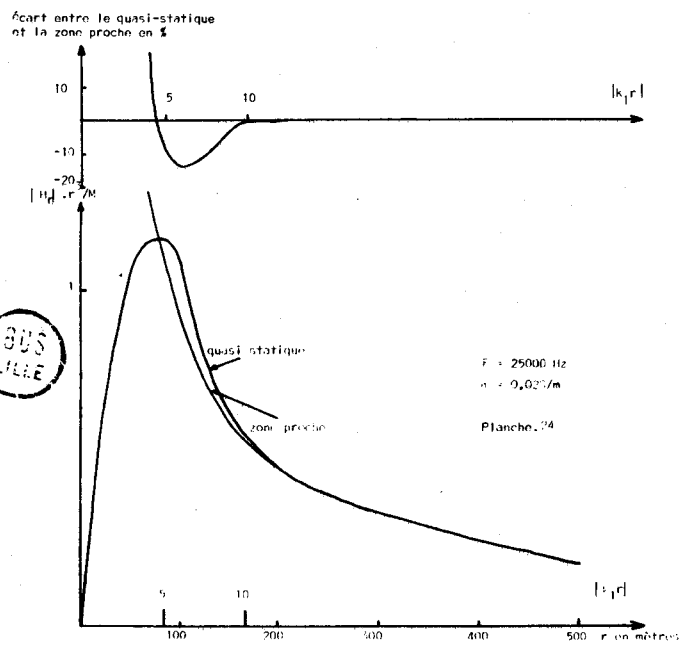
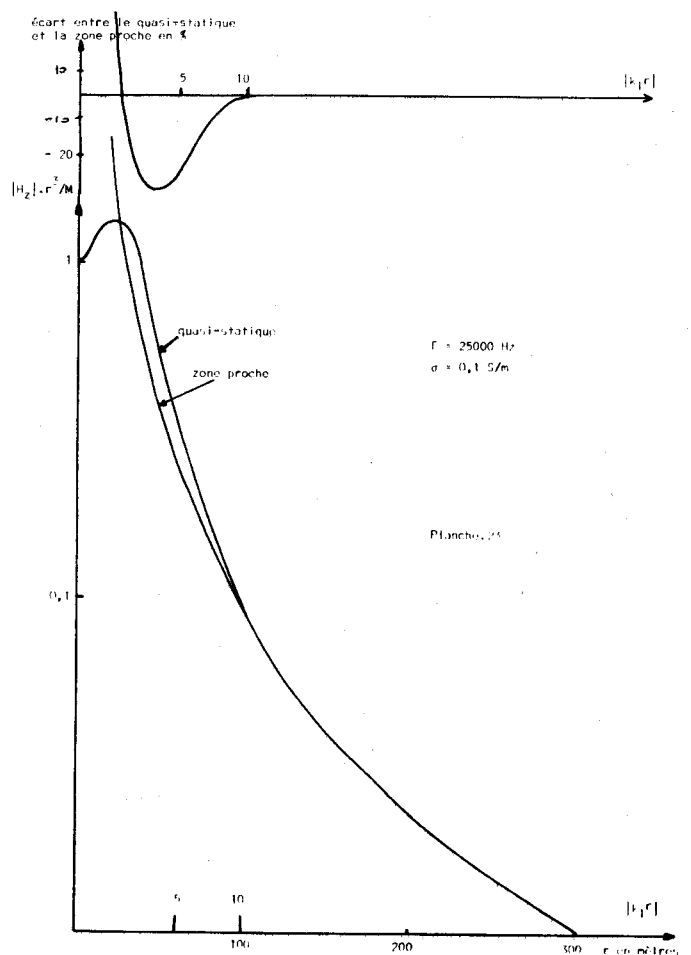
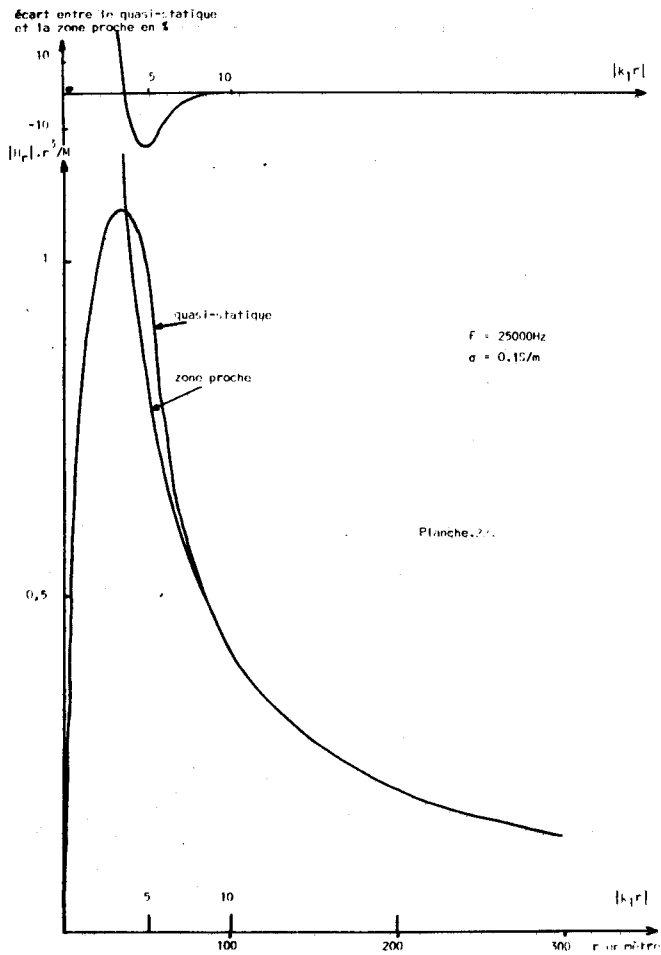
écart entre le quasi-statique
et la zone proche en %



$F = 10000 \text{ Hz}$
 $\alpha = 0,025/\text{m}$

Planche 21.





On constate donc une zone de recouvrement entre les résultats obtenus dans les deux approximations, illustrée sur la planche.26.

A l'intérieur de cette zone de recouvrement les formules donnant les composantes des champs sont considérablement simplifiées et par conséquent pourraient être utilisées avec profit en prospection.

III.1.3.3. Paramètres de prospection

Les expressions des champs obtenus dans l'approximation de la zone proche ne sont valables que pour des valeurs de η supérieures à 5. Dans cette zone la valeur du module de la composante H_r est grande vis-à-vis de celle du module de H_z . Il en résulte, et on le remarque sur la figure.9., que le grand axe de l'ellipse ne forme qu'un angle inférieur à 15° . Le paramètre α offre alors peu d'intérêt car sa variation est peu sensible à celle de la conductivité.

Le rapport des composantes du champ magnétique s'exprime par la relation :

$$\frac{H_r}{H_z} \approx \eta \frac{-k_0^2 r^2 + 3k_0 r + 3 + i(-k_0^2 r^2 - 3k_0 r + 3)}{k_0^3 r^3 - 9k_0 r + i(4k_0^2 r^2 - 9)} \quad (96)$$

si l'on suppose que $k_0 r < 0.1$ et $\eta > 5$.

On constate que le rapport des modules des composantes du champ magnétique est directement proportionnel à la racine carrée de la conductivité, le facteur de proportionnalité ne dépend que de la distance r séparant l'émetteur et le récepteur et de la fréquence.

De même le rapport du champ électrique transversal et de la composante horizontale du champ magnétique est donné par la relation :

$$\frac{E_\psi}{H_r} = \sqrt{\frac{i\omega\mu_0}{\sigma}} \frac{(-k_0^2 r^2 - 3k_0 r + 3 + i(k_0^2 r^2 - 3k_0 r - 3))}{-k_0^2 r^2 + 3k_0 r + 3 + i(-k_0^2 r^2 - 3k_0 r + 3)} \quad (97)$$

On constate à nouveau que ce rapport est le produit d'un facteur inversement proportionnel à la racine carrée de la conductivité, et d'un facteur ne dépendant pas de σ .

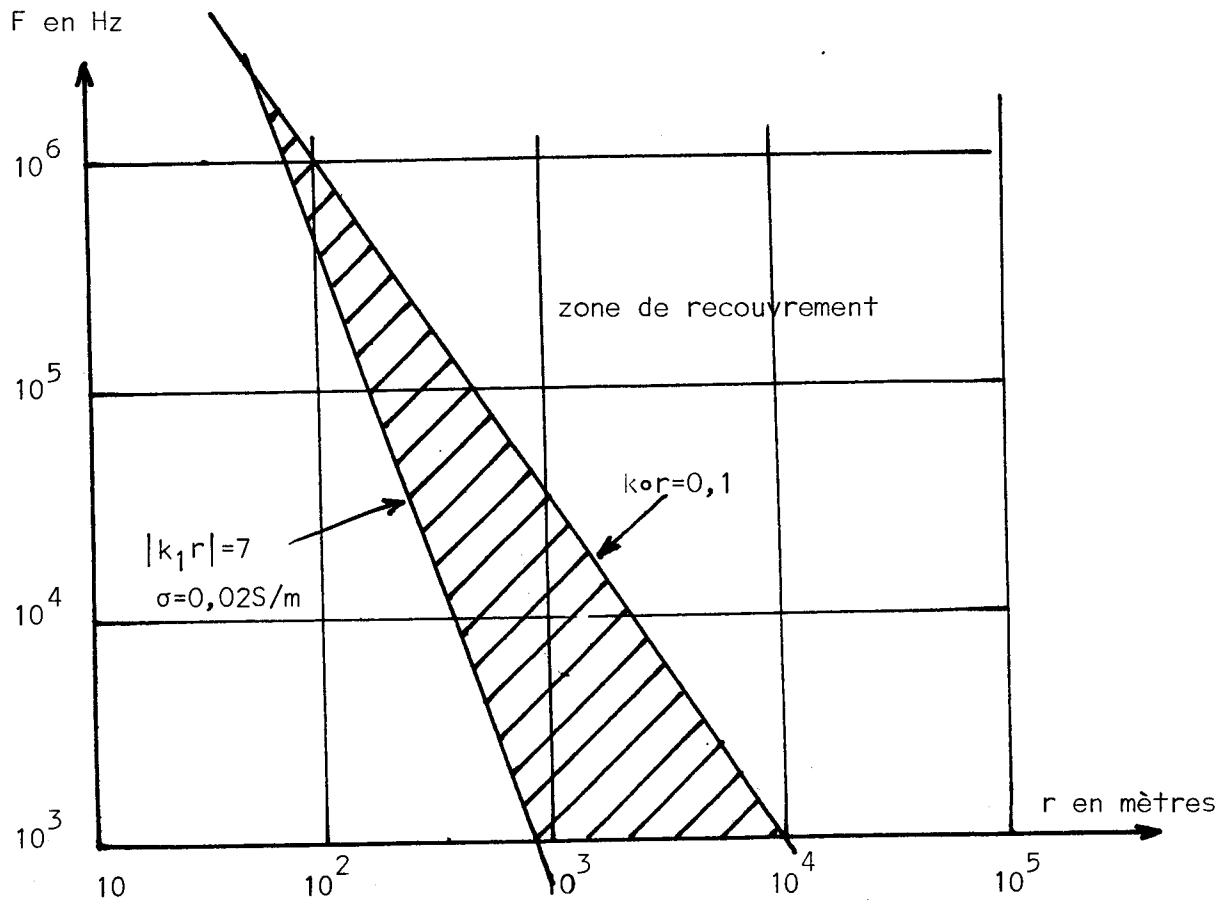
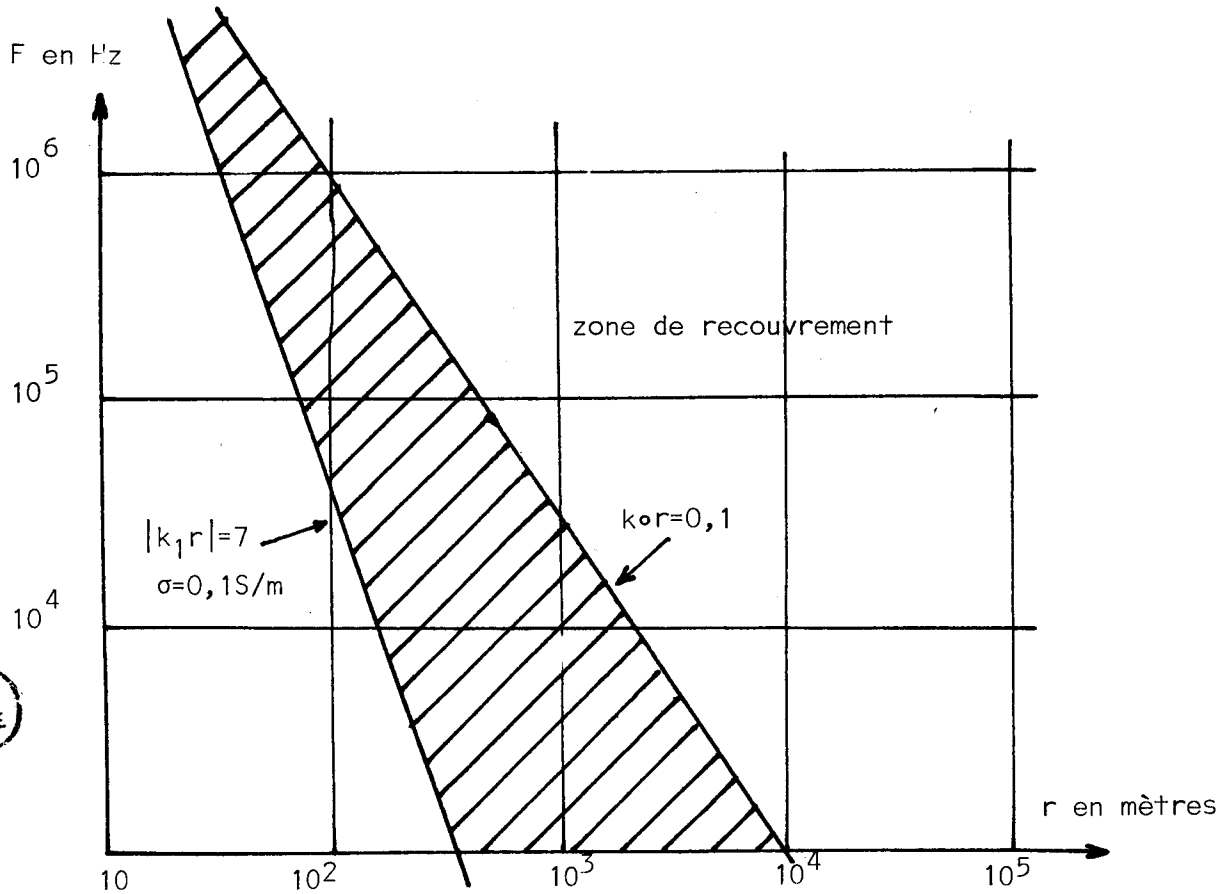


Planche.26.



A l'inverse la mesure du rapport E_{ϕ}/H_r est plus intéressante à grande distance de l'émetteur bien qu'il soit nécessaire de tenir compte des étalonnages séparés des capteurs de champ électrique et de champ magnétique.

Pratiquement, on s'assure sur le terrain que l'on se trouve dans la zone d'application de l'expression (97) quand le rapport H_r/H_z est supérieur à 7.

On peut remarquer qu'avec les expressions obtenues dans l'approximation quasi-statique pour les grandes valeurs de r , on obtient à peu près les résultats des formules (96) et (97). En effet, pour des valeurs grandes de $k_1 r$, on obtient, à partir des expressions (38) à (40) :

$$E_{\phi} \approx \frac{6M i \omega \mu_0}{k_1^2 r^4} \qquad H_z \approx \frac{18M}{k_1^2 r^5} \qquad (98)$$

$$H_r \approx \frac{6M}{i k_1 r^4}$$

$$\text{et } \frac{H_r}{H_z} \approx - \frac{(1+i)\eta}{3} \qquad ; \qquad \frac{E_{\phi}}{H_r} \approx \sqrt{\frac{i \omega \mu_0}{\sigma}} \qquad (99)$$

les formules (99) sont sensiblement les mêmes que les expressions (96) et (97) lorsqu'on annule dans ces dernières le produit $k_0 r$.

L'expression (99) donnant le rapport E_{ϕ}/H_r est identique à celle donnant l'impédance de surface produite par l'incidence d'une onde plane. Il en résulte donc que dans la zone d'approximation donnant l'expression (99), l'onde émise par le D.M.V. et reçue au niveau du récepteur, peut être considérée comme plane.

Il en est de même pour la zone d'approximation définie par :

$$|k_1 r| > 7 \qquad k_0 r < 1$$

dans laquelle l'expression (97) est valable.

Cette remarque, associée à une démonstration faite par J. FONTAINE en 1969^[19] va nous permettre d'en déduire les conditions dans lesquelles il faut se placer pour prospecter un terrain stratifié en utilisant une formulation analytique.

III.2. Rayonnement au-dessus d'un milieu stratifié horizontalement

Ainsi qu'il est précisé formule (8) le potentiel créé par un D.M.V. au-dessus de la surface du sol, peut s'écrire :

$$\Pi_0(z,r) = M \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{u_0} \left[e^{+u_0(z-h)} e^{-u_0(z+h)} \frac{u_0 - u_1/Q_1}{u_0 + u_1/Q_1} \right] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (100)$$

ou encore :

$$\Pi_0(r,z) = M \int_0^{\infty} \left[\frac{\lambda}{u_0} \left(e^{+u_0(z-h)} - e^{-u_0(z+h)} \right) + \frac{2\lambda e^{-u_0(z+h)}}{u_0 + u_1/Q_1} \right] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (101)$$

Les deux premiers termes de cette dernière expression représentent des intégrales de Weber, et le troisième terme peut être mis sous la forme :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{-u_1 a} e^{-u_0 b} H_0^{(1)}(\lambda r) \lambda d\lambda$$

avec : a = 0 b = z+h

$$F(\lambda) = \frac{1}{u_0 + u_1/Q_1}$$

$$Q_1 = \frac{\frac{u_1}{u_2} Q_2 \operatorname{th} u_1 h_1}{1 + \frac{u_1}{u_2} \operatorname{th} u_1 h_1}, \quad Q_2 = \frac{\frac{u_2}{u_3} Q_3 + \operatorname{th} u_2 h_2}{1 + \frac{u_2}{u_3} Q_3 \operatorname{th} u_2 h_2} \quad (102)$$

$$\dots\dots Q_n = \frac{\frac{u_n}{u_{n+1}} Q_{n+1} + \operatorname{th} u_n h_n}{1 + \frac{u_n}{u_{n+1}} Q_{n+1} \operatorname{th} u_n h_n} \quad \dots Q_N = 1$$

La fonction F(λ) possède, dans le cas d'un terrain stratifié à N couches, N+1 points de branchement définis par : λ = ± k_0 λ = ± k_1 ... λ = ± k_n
 ... λ = ± k_N.

L'intégrale I peut être calculée par la méthode des résidus en intégrant suivant le contour ci-dessous (figure(27)).

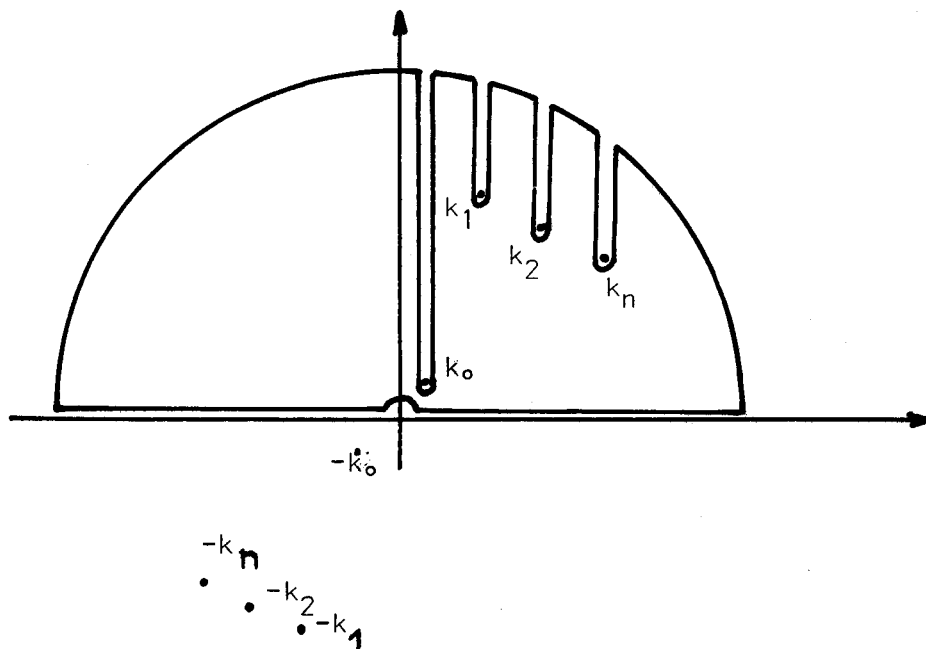


figure.27.

L'intégration s'effectue de la même façon que dans le cas du demi-milieu et on peut écrire que l'intégrale résulte de la somme des intégrations obtenues le long de chaque contour k_n .

Si on fait l'hypothèse que :

$$|k_n| \gg |k_0|$$

la contribution des intégrales calculées le long des chemins $C_1, C_2 \dots C_n$ est négligeable vis-à-vis de l'intégrale le long du contour C_0 .

L'intégration par la méthode du col, permet^[17], en effectuant le changement de variable :

$$\lambda = k_0 \cos w \tag{103}$$

de mettre l'intégrale I sous la forme :

$$I \approx \int_{C_0} F(w) e^{\Psi(w)} dw \tag{104}$$

Si on effectue le nouveau changement de variable :

$$\frac{1}{2} x^2 = \Psi(0) - \Psi(w) = jk_0 r (1 - \cos w) \tag{105}$$

Le nouveau contour d'intégration est l'axe réel et les fonctions de s'expriment en fonction de x.

Si on pose :

$$\varepsilon = Cx \tag{106}$$

on obtient :

$$\cos \omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \qquad \sin \omega = \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{1/2} \qquad \sin \omega \frac{d\omega}{dx} = C\varepsilon \tag{107}$$

L'intégrale I s'écrit alors :

$$I = -k_0^2 e^{ik_0 r} \int_0^\infty |F(\omega) + F(-\omega)| \frac{d\omega}{dx} e^{-x^2/2} dx \tag{108}$$

avec : $|F(\omega) + F(-\omega)| \frac{d\omega}{dx} = \Phi(x)$

L'intégration consiste à rechercher un développement limité de $\Phi(x)$ au voisinage du col et à intégrer terme à terme. Ceci conduit à un développement asymptotique dont la validité est limitée par le rayon de convergence de la série.

Le rayon de convergence est donné par [19] :

$$R^{1/2} = |4ik_0 r|^{1/2} \tag{109}$$

comme il est montré en annexe.4.

Il en résulte que :

$$x \ll |4ik_0 r|^{1/2} \tag{110}$$

Cette limitation de x entraîne une limitation de la variable λ . Soit :

$$\lambda = k_0 \cos \omega \tag{111}$$

Il suit que :

$$|\cos \omega| \leq 1 \quad \text{d'où} \quad \lambda < k_0 \tag{112}$$

Ceci signifie que la contribution la plus importante de l'intégrale est celle obtenue au voisinage du col.

Cette limitation du domaine de variation de λ permet d'affirmer que :
lorsque : $k_n \gg k_0$, on peut considérer :

$$u_n \approx i k_n \quad (113)$$

qui veut dire que dans l'intégration du potentiel, u_n peut être considéré indépendant de λ

Mais ceci implique que ;

$$|k_1 r| \gg 1 \quad \text{et} \quad |k_n r| \gg 1 \quad (114)$$

Il est alors possible, dans ces conditions, de considérer que le champ électromagnétique créé au-dessus d'un milieu stratifié par un D.M.V. est celui obtenu avec les expressions du demi-milieu dans lesquelles on a remplacé ik_1 par ik_1/Q_1 .

Les expressions des composantes du champ magnétique, du champ électrique ainsi que leurs rapports s'écrivent : (115)

$$\frac{H_r}{H_z} \approx \frac{n}{Q_1} \frac{-k_0^2 r^2 + 3k_0 r + 3 - i(k_0^2 r^2 + 3k_0 r - 3)}{k_0^3 r^3 - 9k_0 r + i(4k_0^2 r^2 - 9)} \quad (116)$$

$$\frac{E_\varphi}{H_r} \approx Q_1 \sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_1}} \frac{-k_0^2 r^2 - 3k_0 r + 3 + i(k_0^2 r^2 - 3k_0 r - 3)}{-k_0^2 r^2 + 3k_0 r + 3 + i(-k_0^2 r^2 - 3k_0 r + 3)}$$

Q_1 étant le coefficient de stratification introduit par Wait en 1962 qui n'est autre que celui de la formule (102) dans laquelle on a fait :

$$\lambda = 0 \quad (117)$$

III.2.1. Zone de validité de l'approximation

Pour déterminer la zone de validité de l'approximation qui consiste à considérer $\lambda = 0$ dans l'expression de Q_1 , nous avons comparé les valeurs des champs obtenus en utilisant ce coefficient Q_1 dans l'approximation quasi-statique et dans l'approximation de la zone proche avec les valeurs exactes des champs obtenues en intégrant numériquement le potentiel. Cette comparaison a été faite dans le cas d'un terrain stratifié à deux couches dont les conductivités des couches ont des valeurs couramment rencontrées dans la région du nord de la France. Les caractéristiques du terrain choisi sont :

$$\sigma_1 = 0.06S/m \qquad \sigma_2 = 0.02S/m \qquad h_1 = 5m$$

elles correspondent à un terrain constitué d'une couche de limon reposant sur de la craie.

Les composantes du champ magnétique ont été calculées en fonction de r pour quelques valeurs de fréquences comprises entre 1000Hz et 25000Hz, gamme que nous utiliserons couramment en prospection à faible profondeur.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau n°28.

Ces résultats permettent de vérifier que pour les grandes valeurs de η la valeur du rapport des composantes du champ magnétique obtenu grâce aux approximations tend vers la valeur juste obtenue par intégration numérique.

De nombreux autres résultats obtenus avec d'autres cas de terrains permettent de conclure que la limite de validité de l'approximation de la zone proche est donnée par la relation :

$$\eta_{\text{équivalent}} \geq 9 \qquad (118)$$

$\eta_{\text{équivalent}}$ est la valeur de η , d'un demi-milieu qui donne le même rapport $|H_r|/|H_z|$ dans les mêmes conditions de mesure.

$$\sigma_{\text{équivalent}} = \frac{r}{500} \sqrt{f \sigma_{\text{équivalent}}} \qquad (119)$$

$\sigma_{\text{équivalent}}$ est la conductivité de ce demi-milieu.



Fréquences	Distances	H _r quasi-stat.	H _r vrai	H _r zone proche	H _z quasi-stat.	H _z vrai	n _{éq}	H _r /H _z zone proche	H _r /H _z quasi-stat.	H _r /H _z vrai
1kHz	200m	1,28.10 ⁻⁷	1,18.10 ⁻⁷	2,31.10 ⁻⁷	1,77.10 ⁻⁷	1,28.10 ⁻⁷	2	0,921	0,724	0,709
	700m	1,88.10 ⁻⁹	2,01.10 ⁻⁹	1,96.10 ⁻⁹	5,29.10 ⁻⁹	6,25.10 ⁻¹⁰	7	3,22	3,56	3,04
	1500m	8,58.10 ⁻¹¹	8,64.10 ⁻¹¹	8,61.10 ⁻¹¹	1,24.10 ⁻¹¹	1,24.10 ⁻¹¹	10	6,91	6,92	6,95
5kHz	200m	1,54.10 ⁻⁷	1,48.10 ⁻⁷	2,53.10 ⁻⁷	8,65.10 ⁻⁸	6,48.10 ⁻⁸	4,50	2,28	2,54	1,61
	400m	6,92.10 ⁻⁹	6,83.10 ⁻⁹	6,98.10 ⁻⁹	1,56.10 ⁻⁹	1,49.10 ⁻⁹	8	4,56	4,23	5,14
	700m	7,31.10 ⁻¹⁰	7,35.10 ⁻¹⁰	7,33.10 ⁻¹⁰	9,15.10 ⁻¹¹	9,26.10 ⁻¹¹	11	7,93	7,96	7,91
10kHz	200m	7.10 ⁻⁸	8,68.10 ⁻⁸	7,92.10 ⁻⁸	1,44.10 ⁻⁸	2,99.10 ⁻⁸	6,5	3,45	4,85	2,90
	300m	1,45.10 ⁻⁸	1,42.10 ⁻⁸	1,52.10 ⁻⁸	2,88.10 ⁻⁹	2,52.10 ⁻⁹	9	5,18	5,06	5,63
	400m	4,53.10 ⁻⁹	4,58.10 ⁻⁹	4,54.10 ⁻⁹	6,53.10 ⁻¹⁰	6,64.10 ⁻¹⁰	10	6,91	6,93	6,86

T A B L E A U N ° 2 8

Dans la pratique, on remarque, à partir du tableau.28., que l'approximation de la zone proche à laquelle on applique l'approximation du facteur de stratification de Wait est utilisable dès que le rapport des composantes du champ magnétique est supérieur à 7.

Le problème consiste donc à déterminer la distance r permettant de vérifier ces conditions.

IV. APPLICATION DU RAYONNEMENT A GRANDE DISTANCE D'UN D.M.V. A LA PROSPECTION A FAIBLE PROFONDEUR

Nous avons vu que les paramètres de prospection utilisables à grande distance d'un D.M.V. étaient le rapport des modules des composantes du champ magnétique ou le rapport des modules du champ électrique et de la composante horizontale du champ magnétique.

Le premier est inversement proportionnel au coefficient de stratification, le second lui est proportionnel.

IV.1. Détermination de la gamme de fréquence de prospection

Pour décrire une méthode de recherche de la gamme de fréquence à utiliser, nous allons raisonner sur un exemple en considérant un terrain stratifié à deux couches.

Le mode de raisonnement est valable quel que soit le type de terrain envisagé.

Dans ce cas, le module du coefficient de stratification tracé en fonction de $\sqrt{2} h_1/\delta_1$ pour diverses valeurs du rapport $\sqrt{\sigma_1/\sigma_2}$ est reporté figure n°29.

On a constaté, sur cette figure, que le module de Q_1 est le plus sensible à la variation des conductivités ou à l'épaisseur de la première couche quand :

$$0.1 < \sqrt{2} \frac{h_1}{S_1} < 0.3 \text{ ou } 0.1 < \frac{\sqrt{2} h_1}{500} \sqrt{\sigma_1 f} < 0.3 \quad (120)$$

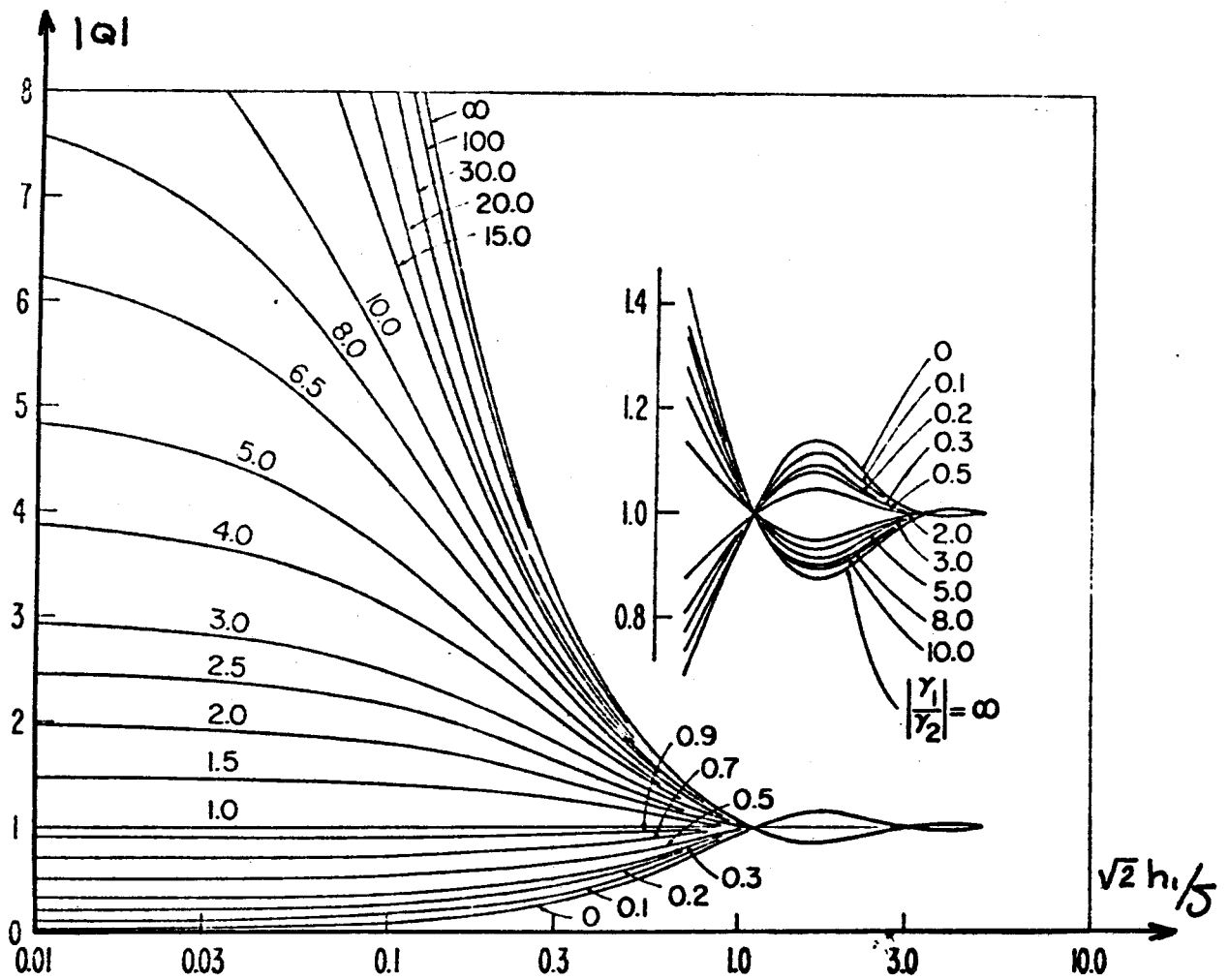


figure.29.

Extrait de [21]

Il en résulte que pour des épaisseurs h_1 variant entre 1,50m et 20m, il faut émettre des signaux dont les fréquences f sont comprises dans la gamme :

$$500 \text{ Hz} < f < 50 \text{ 000 Hz} , \quad (121)$$

Si on tient compte d'une conductivité de la couche superficielle σ_1 égale à 0.05 S/m.



IV.2. Distances minimum émetteur-récepteur

Nous avons précisé au paragraphe III.2.1. qu'il était nécessaire de se placer à une distance de l'émetteur telle que $n_{\text{équivalent}} = 9$, ce qui signifie que pour le terrain pris pour exemple au paragraphe III.2.1., la distance minimum émetteur-récepteur doit être de 1500m.

En pratique, sans préjuger de la nature du terrain, il serait nécessaire d'assurer une distance émetteur-récepteur de 2000m.

IV.3. Moment magnétique de l'antenne d'émission

La valeur du moment magnétique de l'antenne dépend de la distance émetteur-récepteur, de la fréquence, de la conductivité équivalente du terrain, et de la sensibilité des capteurs du récepteur.

On peut considérer qu'un capteur de champ magnétique est capable de mesurer avec précision un champ magnétique lorsque son amplitude est supérieure ou égale à $1m\gamma$.

D'autre part la sensibilité maximum d'un capteur de champ électrique basse fréquence opérant à la surface du sol est égale à $10\mu V$. Si on considère une base de réception de 10 mètres, le champ électrique minimum mesurable avec précision est égal à $1\mu V/m$.

Il est alors facile, en utilisant les formules (115) de déduire, dans une configuration de terrain donnée, la valeur minimum du moment magnétique de l'antenne d'émission.

En pratique il faut conserver une distance émetteur-récepteur constante quelle que soit la fréquence de l'onde émise. Pour s'assurer les conditions de l'onde plane, il faut donc considérer la distance minimum obtenue pour la plus basse fréquence de la gamme.

Dans l'exemple choisi planche.28., la plus basse fréquence de la gamme est 1kHz et la distance minimum est 1500m.

Dans ces conditions, le module des composantes du champ magnétique calculées en fonction de la fréquence sont reportées dans le tableau n°30 pour une valeur unitaire du moment magnétique.

R	F	$ H_r $ A/m	$ H_z $ A/m	$ E_\varphi $ V/m	$ H_r/H_z $	$ E_\varphi/H_r $
1500m	1000Hz	$8,58 \cdot 10^{-11}$	$8,62 \cdot 10^{-11}$	$3,43 \cdot 10^{-11}$	6,91	0,4
1500m	5000Hz	$3,46 \cdot 10^{-11}$	$2,02 \cdot 10^{-11}$	$3,08 \cdot 10^{-11}$	17,15	0,89
1500m	10kHz	$2,28 \cdot 10^{-11}$	$8,81 \cdot 10^{-12}$	$2,87 \cdot 10^{-11}$	26,21	1,26
1500m	15kHz	$1,78 \cdot 10^{-11}$	$5,34 \cdot 10^{-12}$	$2,74 \cdot 10^{-11}$	34,19	1,54

Tableau n°30

On constate alors qu'il est nécessaire que le moment magnétique de l'antenne d'émission soit égal à $100\ 000\ \text{Atm}^2$.

Ce moment magnétique est donné par l'expression :

$$M = \frac{NIS}{4\pi} \quad (122)$$

où N représente le nombre de tours de la bobine

I le courant qui la traverse

S la surface de la boucle.

Le dipôle émetteur le plus simple est réalisé sous la forme d'une grande boucle étendue sur le sol. Une étude théorique rappelée en annexe.6. montre qu'une boucle de courant peut être considérée comme un dipôle tant que son rayon ne dépasse pas le septième de la distance émetteur-récepteur.

Dans notre cas, le rayon de la boucle ne doit pas dépasser 200 mètres. Si on considère alors une boucle de 400 mètres de diamètre, il faut la faire traverser par un courant de 8 Ampères. Une boucle de cette dimension présente une impédance voisine de $35\ \Omega$ et nécessite une puissance émise de 2,25kW.

IV.4. Remarque sur la verticalité du sondage

Le procédé qui consiste à mesurer les composantes du champ électromagnétique à grande distance d'un dipôle magnétique vertical, offre surtout l'avantage d'assurer la verticalité du sondage. En effet le récepteur étant situé à une distance suffisamment grande de l'émetteur, l'onde qui arrive et se réfracte dans le sol au voisinage du récepteur peut être considérée comme plane. On se trouve alors dans les mêmes conditions qu'en magnétotellurique avec l'avantage supplémentaire que le signal reçu est un signal non aléatoire. Dans ce cas les signaux captés par le récepteur sont caractéristiques de la nature du sous-sol situé en-dessous du récepteur. On peut schématiser ce phénomène en effectuant le raisonnement physique suivant :

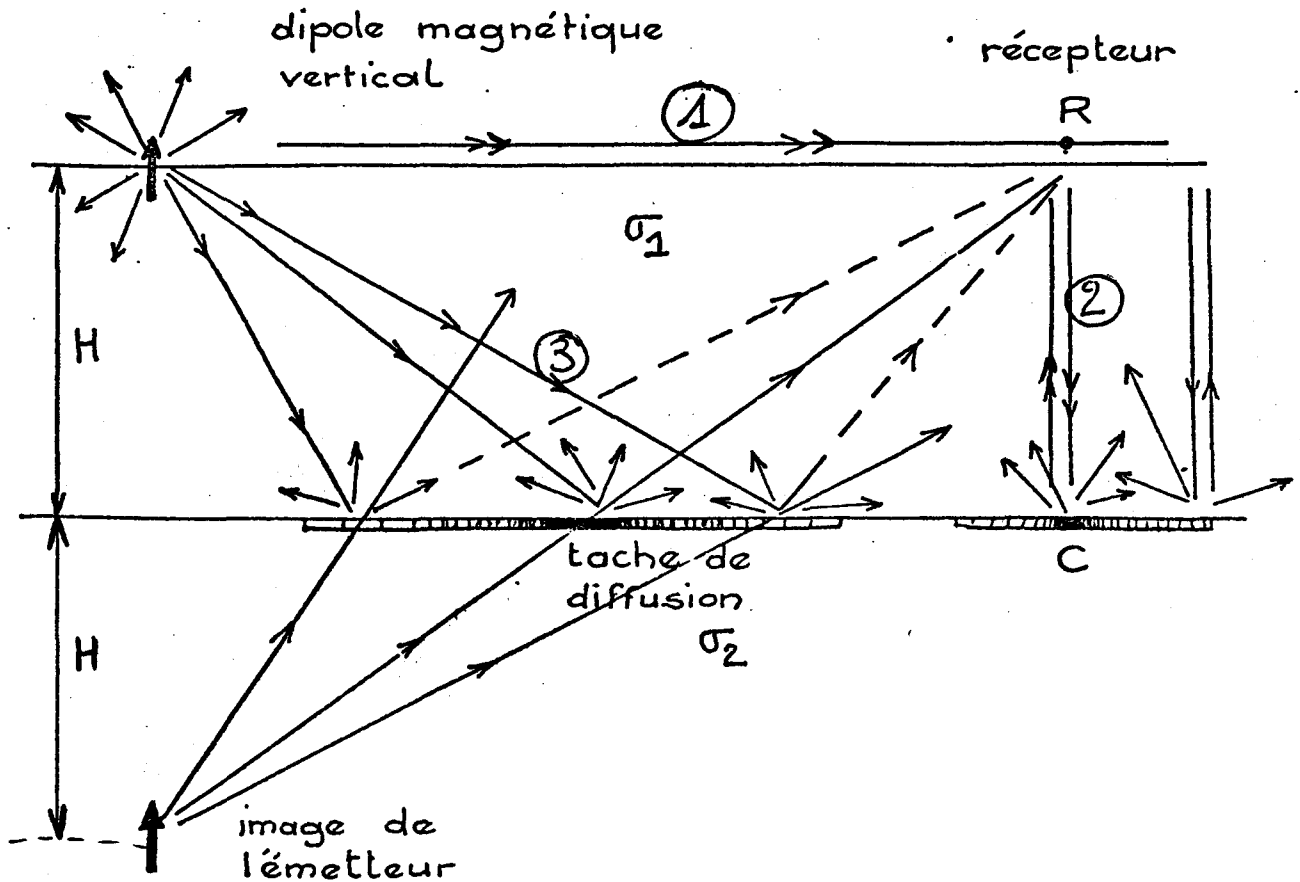


Figure 31

La figure.31. représente très schématiquement le rayonnement d'un D.M. V. émetteur placé à la surface d'un demi-milieu stratifié à deux couches. Le signal reçu par le récepteur, résulte de la superposition :

- d'une onde directe de surface du type 1 qui s'est propagée dans l'air
- d'ondes partielles du type 2 qui résultent de la réfraction de l'onde directe au voisinage du récepteur, de sa réflexion et de sa diffusion sur l'interface géologique
- d'ondes partielles du type 3 rayonnées dans le sol par le dipôle émetteur et se réfléchissant sur l'interface entre le milieu 1 et le milieu 2.

Si l'interface géologique était parfaitement réflecteur, le récepteur aurait l'impression de recevoir une onde provenant d'un D.M.V. enfoui à une profondeur $2H$ sous le dipôle émetteur : c'est le "dipôle image".

Mais en fait l'interface géologique est largement diffusant, de sorte que le dipôle image est entouré d'un halo.

Lorsque le récepteur est situé à une distance au moins égale à celles de l'approximation de la zone proche, les ondes du type 3 arrivent au niveau du récepteur avec une amplitude quasiment nulle.

Le signal détecté ne résulte que de la superposition de l'onde directe 1 et de l'onde 2 qui se propage verticalement et qui provient de la réfraction de 1 au voisinage du récepteur. On voit alors parfaitement que ce signal ne dépend que de la nature du sous-sol situé en-dessous du récepteur. On dit alors que le sondage est "vertical". Lorsque le récepteur est situé plus près de l'émetteur on voit que le signal reçu résulte de la superposition des trois types d'ondes, avec chacune une contribution comparable. Ce signal reflète alors principalement la nature des terrains situés sous l'espace compris entre le récepteur et l'émetteur.

V. CONCLUSION

Dans la première partie de notre thèse nous avons établi les conditions dans lesquelles il fallait se placer pour effectuer une prospection à faible profondeur à l'aide d'un dipôle magnétique vertical en mettant en oeuvre une méthode d'interprétation du type magnétotellurique.

Nous avons montré en particulier que l'on ne peut disposer d'expressions simples reliant les composantes des champs aux paramètres du terrain que lorsque l'onde rayonnée par l'émetteur peut être assimilée à une onde plane.

Cette approximation suppose que la distance qui sépare l'émetteur et le récepteur soit au moins égale à 1500 mètres quand la profondeur d'investigation ne dépasse pas une vingtaine de mètres.

Ceci nous permet de prétendre que l'on ne peut pas interpréter avec le concept de l'onde plane des résultats de prospection effectués à plus grande profondeur avec un dispositif identique à celui que nous avons décrit dont la distance émetteur-récepteur est inférieure à 800 mètres, sans courir le risque de faire de graves erreurs d'interprétation.

Les principaux avantages de la méthode de prospection décrite sont, d'une part les facilités d'interprétation obtenues grâce à une formulation analytique simple et d'autre part le fait que les signaux captés ne dépendent que des caractéristiques locales du terrain situé au-dessous du récepteur. Mais ces avantages obligent la mise en oeuvre d'un émetteur de plusieurs kilowatts.

La puissance de l'émetteur et le prix que nécessite sa mise en oeuvre nous semblent trop importants par rapport à la faible profondeur d'investigation permise.

Pour éviter cet inconvénient et pour pouvoir conserver un matériel d'un coût et d'un poids acceptables, il faut opérer avec un espacement émetteur-récepteur plus petit.

Mais dans ce cas le sondage n'est plus vertical et les composantes du champ électromagnétique ne dépendent plus seulement de la nature des terrains situés à la verticale du récepteur mais aussi des hétérogénéités situées entre l'émetteur et le récepteur.

Par ailleurs, la méthode d'interprétation ne peut plus être basée sur une formulation analytique simple que dans le cas particulier où la distance réduite n , relative à la première couche est inférieure à 0.6. Dans tous les autres cas il est nécessaire d'avoir recours à un calcul numérique des composantes du champ électromagnétique du D.M.V.

Dans la seconde partie de notre thèse nous allons donc envisager une prospection à faible profondeur utilisant un dipôle magnétique vertical et un faible espacement émetteur-récepteur.

L'interprétation des sondages effectués dans ces conditions nous a conduit, après avoir essayé d'utiliser des expressions analytiques, à envisager l'emploi systématique de méthodes numériques d'intégration des expressions intégrales des potentiels dont dérivent les composantes des champs.

DEUXIEME PARTIE

Dans ce qui précède, nous avons pu remarquer que le sondage n'était vertical que lorsque le récepteur était disposé très loin de l'émetteur. Dans les autres cas, les valeurs des composantes du champ que l'on mesure, dépendent de la nature des terrains situés sous le récepteur mais aussi de ceux qui se trouvent placés entre le récepteur et l'émetteur.

Pour tenter de localiser au mieux la zone d'investigation du dispositif, nous essayons de rapprocher au maximum l'émetteur et le récepteur.

Nous avons pu constater (formule 121) que pour des profondeurs de sondage même faibles, les fréquences des signaux n'excédaient pas quelques dizaines de kilohertz. Ceci signifie que si la conductivité du sol est de l'ordre de 0.1 S/m, le carré du module du nombre d'onde dans le sol à 25 kHz, est égal à :

$$|k_1|^2 = \omega\mu\sigma \approx 3.10^{-3} \quad (123)$$

Il en résulte que suivant les valeurs de la distance r séparant l'émetteur et le récepteur la distance réduite η_1 , donnée par la relation :

$$\eta_1 = \sqrt{2} |k_1 r| = r \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (124)$$

varie de quelques dixièmes à plusieurs unités.

Dans un premier chapitre nous développons le cas où la distance réduite η_1 est inférieure ou égale à quelques dixièmes.

Dans ces conditions il est possible de trouver une expression analytique de la composante du champ magnétique créée par un D.M.V. au-dessus d'un milieu stratifié.

Dans un second chapitre nous envisageons le cas fréquemment rencontré au cours d'une prospection, où les valeurs de la distance réduite η_1 est de l'ordre de l'unité. Dans ce cas, il n'est plus possible de trouver l'expression analytique des composantes du champ et nous présentons le calcul numérique rigoureux de ces composantes sans faire d'approximations sur les valeurs de la distance réduite.

Après avoir établi les conditions optimum pour pratiquer une prospection jusqu'à une profondeur donnée, nous présentons une méthode que nous avons mise au point pour interpréter les sondages électromagnétiques de terrains stratifiés horizontalement.

Nous appliquons cette méthode pour interpréter les résultats de sondages effectués sur quelques sites de la région du Nord.

I. APPLICATION D'UNE METHODE D'INDUCTION UTILISANT UN DIPOLE MAGNETIQUE VERTICAL POUR LA DETECTION DE L'EPAISSEUR D'UNE COUCHE GEOLOGIQUE SUPERFICIELLE

I.1. Calcul des composantes du champ magnétique créé au voisinage d'un D.M.V. situé à une hauteur h_1 au-dessus d'une fine couche conductrice horizontale d'épaisseur dh

On considère un dipôle magnétique vertical disposé au-dessus d'une fine couche conductrice à l'origine d'un système de coordonnées cylindriques comme indiqué fig.32.

Dans une première phase du calcul, on suppose que la couche conductrice est seule à exister et qu'elle est entourée par de l'air de conductivité nulle. En d'autres termes, nous commençons par déterminer l'effet de "blindage" de la couche conductrice fine.

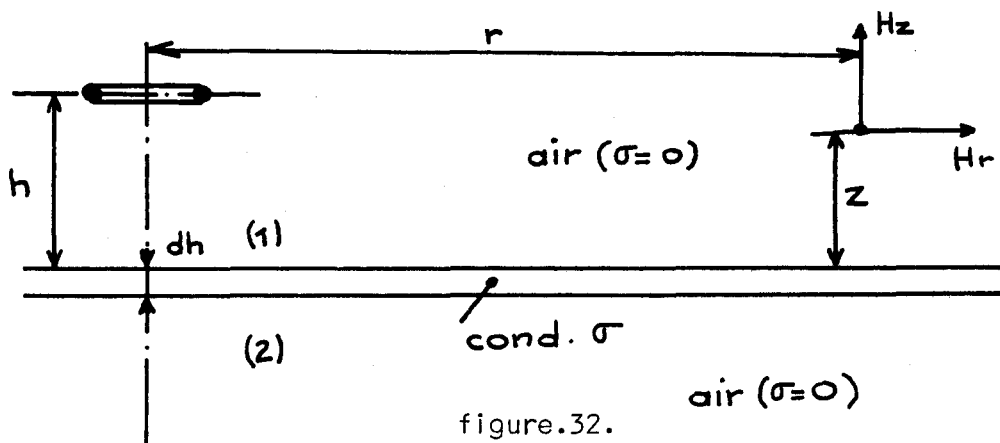


figure.32.

Si le courant I qui traverse le D.M.V., varie suffisamment lentement en fonction du temps et si la distance horizontale r est faible vis-à-vis des longueurs d'onde, on peut admettre^[23] que le potentiel Π créée dans l'air par le D.M.V. est solution de l'équation de Laplace :

$$\vec{\Delta}\Pi = 0 \tag{125}$$

En effet dans l'équation d'onde :

$$(\Delta + k^2)\Pi = 0 \quad \text{on peut faire} \quad k^2 \neq 0 \tag{126}$$

Par conséquent, le champ magnétique H dérive du potentiel par la relation :

$$\vec{H} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{ div } \vec{\Pi} \tag{127}$$

$\vec{\Pi}$ est le vecteur potentiel de Hertz qui ne possède qu'une composante Π_z .

Les composantes du champ magnétique et du champ électrique sont données par les relations :

$$H_r = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial r \partial z} ; \quad H_z = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} ; \quad E_\phi = j\omega\mu \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad (128)$$

La solution de l'équation de Laplace dans les deux demi-espaces (1) et (2) peut se mettre sous la forme :

$$\Pi_1 = \Pi_p + M \int_0^\infty f_1(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (129)$$

où Π_p est le potentiel primaire : $M(r^2+z^2)^{-1/2}$

Une représentation intégrale de Π_p est donnée par :

$$\Pi_p = M \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad \text{pour } 0 < z < -h$$

$$\Pi_2 = M \int_0^\infty f_2(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (130)$$

Π_1 est le potentiel créé au-dessus de la couche conductrice

Π_2 est le potentiel créé au-dessous de la couche conductrice

$f_1(\lambda)$ et $f_2(\lambda)$ sont déterminés par les conditions aux limites.

Les conditions aux limites traduisent l'égalité des composantes tangentielles des champs de part et d'autre des 2 interfaces qui limitent la fine couche conductrice d'épaisseur dh .

L'application de ces conditions aux limites devrait conduire à 2 systèmes de 2 équations, l'un obtenu pour $z=-h$, l'autre obtenu pour $z=-(h+dh)$. Mais dans notre cas, la fréquence est suffisamment basse pour pouvoir considérer l'épaisseur dh de la couche conductrice beaucoup plus petite que la profondeur de pénétration de l'onde dans cette couche.

Il en résulte qu'il on peut admettre que les courants induits dans cette couche restent homogènes dans toute son épaisseur. Les composantes tangentielles du champ électrique sont alors identiques de part et d'autre de la couche d'épaisseur dh et le système de 4 équations aux limites peut se réduire aux deux équations suivantes valables pour $z=-h$.

$$\left. \begin{aligned} E_{1\phi} &= E_{2\phi} \\ H_{1r} &= H_{2r} + \sigma dh E_{\phi} \end{aligned} \right\} \text{pour } z = -h \quad (131)$$

La première relation traduit l'homogénéité des courants induits dans toute l'épaisseur de la fine couche conductrice.

La seconde relation décrit l'influence des courants induits sur la valeur du champ magnétique au-dessus de la couche conductrice.

La résolution de ce système d'équations permet d'écrire les potentiels Π_1 et Π_2 sous la forme : [23]

pour $0 > z > -h$:

$$\Pi_1 = M \left\{ \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} - iq \int_0^{\infty} (\lambda + iq)^{-1} e^{-\lambda(z+2h)} J_0(\lambda r) d\lambda \right\} \quad (132)$$

et pour $z < -h$:

$$\Pi_2 = M \left\{ \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} - iq \int_0^{\infty} (\lambda + iq)^{-1} e^{\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \right\} \quad (133)$$

$$\text{avec } q = \omega \mu \sigma dh / 2 \quad ; \quad M = \frac{NIS}{4\pi} \quad (134)$$

Si on utilise la relation :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda\beta}}{\lambda + iq} d\lambda = -e^{i\beta q} E_i(-i\beta q) \quad (135)$$

On peut écrire :

$$iq \int_0^{\infty} (\lambda + iq)^{-1} e^{\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda = i \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^m (r/2)^{2m}}{(m!)^2} q^{2m+1} \frac{a^{2m}}{ax^{2m}} [-e^{-ix} E_i(-ix)] \quad (136)$$

avec $x = \beta q$ et $\beta = z + 2h$

où $E_i(-ix)$ est une fonction exponentielle intégrale connue et tabulée [24].

En effectuant les dérivations indiquées on peut, comme il est montré en annexe.5., écrire la composante horizontale du champ magnétique sous la forme décrite par Wait en 1962^[25]:

$$H_r \neq \frac{M}{r^3} (i\omega\mu\sigma \frac{dh}{2})C^3 + \dots \quad (137)$$

$$\text{avec : } C = \frac{r}{(r^2 + (2h)^2)^{1/2}}$$

On voit que H_r est directement proportionnel au produit σdh , lorsque la fréquence est suffisamment basse pour que les dimensions du système puissent être considérées comme beaucoup plus petites que la longueur d'onde dans l'air et $dh \ll \delta$.

I.2. Composante horizontale du champ magnétique créée par induction à l'aide d'un D.M.V. placé à la surface d'un demi-milieu stratifié à deux couches

Nous considérons maintenant que le terrain est constitué de l'empilement d'un nombre arbitrairement grand de couches fines d'épaisseur dh dont nous avons calculé l'effet de blindage au §.1.1.

Pour calculer la valeur de H_r en présence d'un demi-milieu stratifié à deux couches, il suffit de calculer l'intégrale :

$$H_r = \frac{M}{r^3} \int_0^\infty \frac{i\omega\mu}{2} \sigma(h) \frac{r^4}{(r^2 + (2h)^2)^{3/2}} dh \quad (138)$$

$$\text{avec } \sigma(h) = \sigma_1 \text{ pour } 0 < h < h_1$$

$$\sigma(h) = \sigma_2 \text{ pour } h_1 < h < \infty$$

Le résultat de ce calcul donne :

$$H_r = \frac{M}{r^3} \left[\left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 + \left[\left(\frac{k_1 r}{2}\right)^2 - \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \right] \frac{h_1}{(r^2 + (2h_1)^2)^{1/2}} \right] \quad (139)$$

On voit que la composante H_r est pratiquement proportionnelle à l'épaisseur h_1 de la première couche dès que :

$$r \geq 5h_1 \quad (140)$$

La comparaison de H_r donnée par la formule (139) à la valeur exacte obtenue par intégration numérique montre que l'approximation faite reste valable tant que :

$$\begin{aligned} k_1 r &\leq 0.4. && \text{quand } k_1 > k_2 && (141) \\ -k_2 r &< 0.4. && \text{quand } k_1 < k_2 \end{aligned}$$

Il est possible expérimentalement de se placer dans une telle condition en ajustant la fréquence pour que la condition (140) soit aussi respectée. Nous allons appliquer ces conditions à l'exemple de la mesure directe de l'épaisseur de la première couche.

I.3. Application à la mesure de l'épaisseur h_1

I.3.1. Détermination des conditions expérimentales

Des mesures expérimentales ont été effectuées sur l'emplacement de la nouvelle faculté des lettres de Lille située à l'est de Lille. Les fouilles faites à l'emplacement des bâtiments avant leur construction nous donnent une connaissance assez exacte de la structure du terrain et en particulier, permettent de mesurer l'épaisseur de la première couche.

La structure du terrain est celle de la figure.32.bis

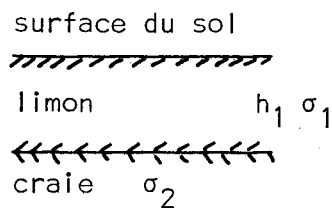


figure.32.bis

L'épaisseur du limon varie suivant les endroits entre 0 et 3 mètres, la conductivité du limon est grossièrement estimée à $7 \cdot 10^{-2}$ S/m et celle de la craie à $2 \cdot 10^{-2}$ S/m.

Ces estimations permettent de calculer les distances et les fréquences à utiliser.

Pour déterminer la fréquence du signal de mesure on utilise la notion de demi-milieu équivalent.

On définit un demi-milieu équivalent à un milieu stratifié c'est-à-dire un demi-milieu homogène de conductivité σ qui produit à une fréquence donnée et à une distance fixe r d'un D.M.V., la même composante horizontale du champ magnétique que celle obtenue au-dessus du milieu stratifié.

L'expression du champ magnétique radial au-dessus du demi-milieu équivalent peut s'écrire :

$$H_{\text{réq}} = \frac{j\omega\mu r^2}{4} \sigma_e \quad (143)$$

d'autre part, si on pose :

$$a = \frac{r^2}{4h_1^2} \quad (144)$$

l'expression du champ magnétique radial créé au-dessus du milieu stratifié s'écrit :

$$H_r = \frac{j\omega\mu r^2}{8(a+1)^{1/2}} [(2(a+1)^{1/2}-1)\sigma_2+\sigma_1] \quad (145)$$

Si on compare les expressions (143) et (145) on obtient alors :

$$\sigma_e = \frac{[2(a+1)^{1/2}-1]\sigma_2+\sigma_1}{2(a+1)^{1/2}} \quad (146)$$

L'épaisseur maximum de la première couche est de 3m et l'application de la condition donnée par la relation (140) fixe la valeur minimum de r à 15 mètres.

L'utilisation de la formule (144) permet de donner la valeur de a égale au minimum à 7 dans notre cas.

Il en résulte d'après (146) que :

$$\sigma_e = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ S/m} \quad (147)$$

Enfin l'application de la condition (141) donne la fréquence du signal à émettre égale, dans l'exemple choisi, à 25kHz.

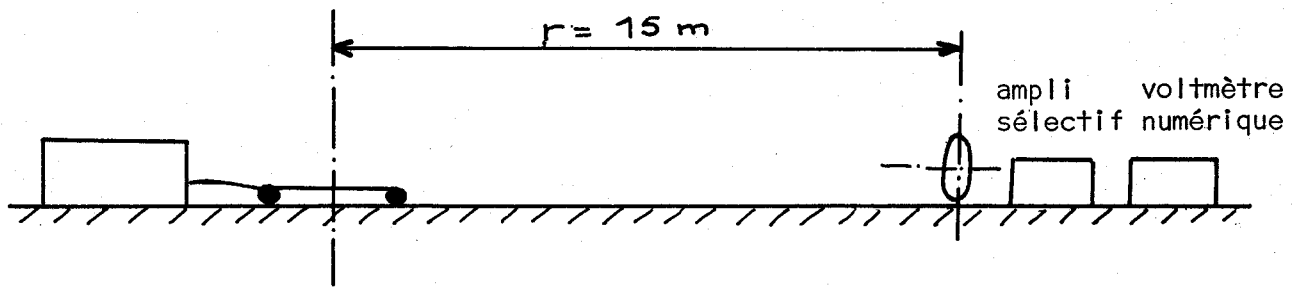


figure.33.



BES
LICE

figure.34.

I.3.2. Dispositif expérimental et résultats de mesures

Le dispositif expérimental comporte, comme le montre la figure.33., un émetteur débitant un courant sinusoïdal à la fréquence 25kHz, dans une bobine plate à air de 20 spires et de 1,15m de diamètre. La bobine est posée sur le sol et l'ensemble constitue un dipôle magnétique vertical.

Nous avons utilisé également un autre émetteur dont l'antenne était constituée par un bobinage à noyau ferrite d'axe vertical. Cet émetteur, représenté figure.34., d'encombrement plus réduit, a donné les mêmes résultats que le précédent.

Le récepteur est composé d'un capteur de champ magnétique qui délivre une tension proportionnelle au champ magnétique à l'entrée d'un amplificateur sélectif suivi d'un voltmètre numérique.

L'étude expérimentale entreprise a pour but de vérifier que la composante horizontale du champ magnétique varie proportionnellement à l'épaisseur de la couche superficielle. Le capteur de champ magnétique ainsi que l'amplificateur sélectif sont linéaires. Il en résulte que l'on peut, sans étalonnage du capteur, apprécier l'évolution du champ magnétique en mesurant l'amplitude du signal de sortie de l'amplificateur.

Ce dispositif a été disposé en plusieurs endroits du terrain d'expérimentation où l'on connaissait parfaitement l'épaisseur du limon.

Le résultat des mesures est résumé sur la figure.35.

Cette courbe montre la quasi proportionnalité existant entre l'amplitude de la composante H_r et l'épaisseur h_1 de la couche de limon, et constitue une très bonne vérification de la formule (139).

h_1 en m	0,40	1,50	2,60	2,90
$ H_r $ en m	56	78	102	107

$|H_r|$ converti en mV

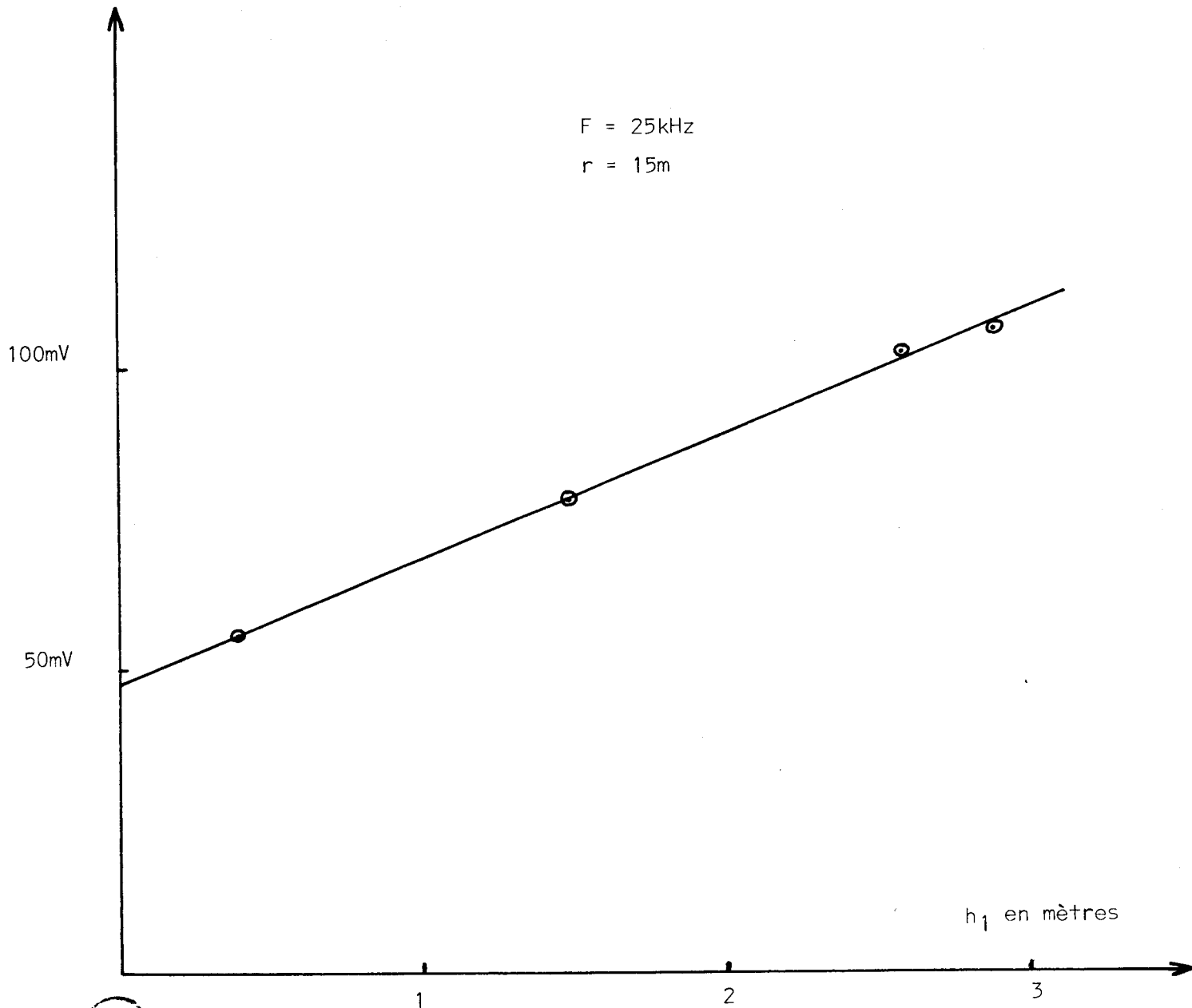


figure.35.

I.3.3. Description d'un dispositif possible permettant l'évaluation directe de h_1 .

Les résultats précédents permettent d'envisager la conception d'un appareillage portatif et d'un emploi commode capable d'évaluer l'épaisseur d'une couche géologique superficielle par affichage direct.

Ce dispositif se composerait d'un émetteur de même type que celui décrit précédemment. La fréquence du signal émis serait ajustable en fonction de la gamme des épaisseurs à mesurer et des conductivités superficielles.

Le dispositif récepteur serait muni d'un bobinage d'axe horizontal suivi d'un amplificateur. L'évaluation de l'épaisseur de la couche superficielle peut, avec ce dispositif, s'effectuer de deux manières possibles.

I.3.3.1. Evaluation de h_1 par variation de r

L'expression (139) montre que H_r est une fonction non linéaire de la distance r séparant l'émetteur du récepteur. Il en résulte que pour évaluer séparément σ_1 , σ_2 et h_1 il suffit, avec un amplificateur à gain constant, de mesurer une grandeur proportionnelle à H_r pour trois distances r différentes, en respectant $|h_2 r| < 0.4$ et de résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues suivant :

$$H_{r1} = \frac{j\omega\mu r_1^2}{8 \left(\frac{r_1^2}{4h_1^2} + 1\right)^{1/2}} \left[2 \left(\frac{r_1^2}{4h_1^2} + 1\right)^{1/2} - 1 \right] \sigma_2 + \sigma_1$$

$$H_{r2} = \frac{j\omega\mu r_2^2}{8 \left(\frac{r_2^2}{4h_1^2} + 1\right)^{1/2}} \left[2 \left(\frac{r_2^2}{4h_1^2} + 1\right)^{1/2} - 1 \right] \sigma_2 + \sigma_1$$

$$H_{r3} = \frac{j\omega\mu r_3^2}{8 \left(\frac{r_3^2}{4h_1^2} + 1\right)^{1/2}} \left[2 \left(\frac{r_3^2}{4h_1^2} + 1\right)^{1/2} - 1 \right] \sigma_2 + \sigma_1$$

Ce procédé a l'inconvénient de n'être applicable qu'au cas où l'épaisseur h_1 de la couche superficielle est constante sur une grande étendue. En pratique ce n'est pas le cas et ce système d'équations risque, lorsque le toit de la seconde couche est un peu tourmenté, de ne pas avoir de solution.

I.3.3.2. Evaluation de h_1 par étalonnage en deux points

Compte tenu de la forme de la courbe (figure.35.) qui représente la variation de H_r en fonction de l'épaisseur de la couche superficielle, le gain de l'amplificateur aurait pour expression :

$$\frac{v_s}{v_e} = - \frac{V_d}{v_e} + A \quad (148)$$

où V_d et A sont des constantes dont les valeurs sont déterminées au cours d'un étalonnage préalable.

L'étalonnage se ferait en deux points distincts du terrain où l'on connaîtrait les épaisseurs H_1 et H_2 de la couche superficielle.

Soient v_{e1} et v_{e2} les valeurs respectives des tensions développées à l'entrée de l'amplificateur en chacun de ces deux points, les valeurs de V_d et A seraient alors données par les relations :

$$A = \frac{H_1 - H_2}{V_{e1} - V_{e2}} \quad \text{et} \quad V_d = A v_{e1} - H_1 \quad (149)$$

I.3.4. Limites de la méthode

La plupart du temps, pour prévoir les travaux de terrassements des routes, il est nécessaire de connaître l'épaisseur de la couche du limon à évacuer et surtout il est commode de prévoir l'emplacement des zones de dissolution éventuelles où l'épaisseur du limon devient brusquement très importante. Le dispositif précédemment décrit serait alors d'une grande utilité, et constituerait à notre connaissance, une méthode géotechnique originale.

Ce procédé offrirait l'avantage d'attacher directement l'épaisseur h de la couche superficielle à condition cependant de pouvoir se placer dans le cas d'approximation qui a permis d'établir les relations approchées précédentes. Soit :

$$h_1 \ll r \quad \text{et} \quad k_1 r \leq 0.4. \quad (150).$$

C'est-à-dire, que si l'on désire obtenir une information suffisamment locale pour être en mesure d'apprécier au mieux les irrégularités du sous-sol, il faut limiter l'espacement émetteur-récepteur à 20 mètres. Il en résulte alors que l'épaisseur de la couche superficielle doit être inférieure à 4 mètres environ.

I.4. Application de la méthode d'induction à l'étude d'un milieu inhomogène

L'application d'une méthode d'induction à l'étude d'un milieu inhomogène a été entreprise à la suite d'une demande qui nous a été faite d'évaluer les conditions limites d'une prospection effectuée au-dessus du "permafrost".

Le "permafrost" est constitué par des terrains superficiellement gelés de sorte que la conductivité est très faible à la surface et augmente avec la profondeur suivant une loi qui varie à la fois en fonction de la nature du sous-sol et en fonction des conditions climatiques.

L'évolution de la conductivité du permafrost envisagé est représentée par la figure.36.

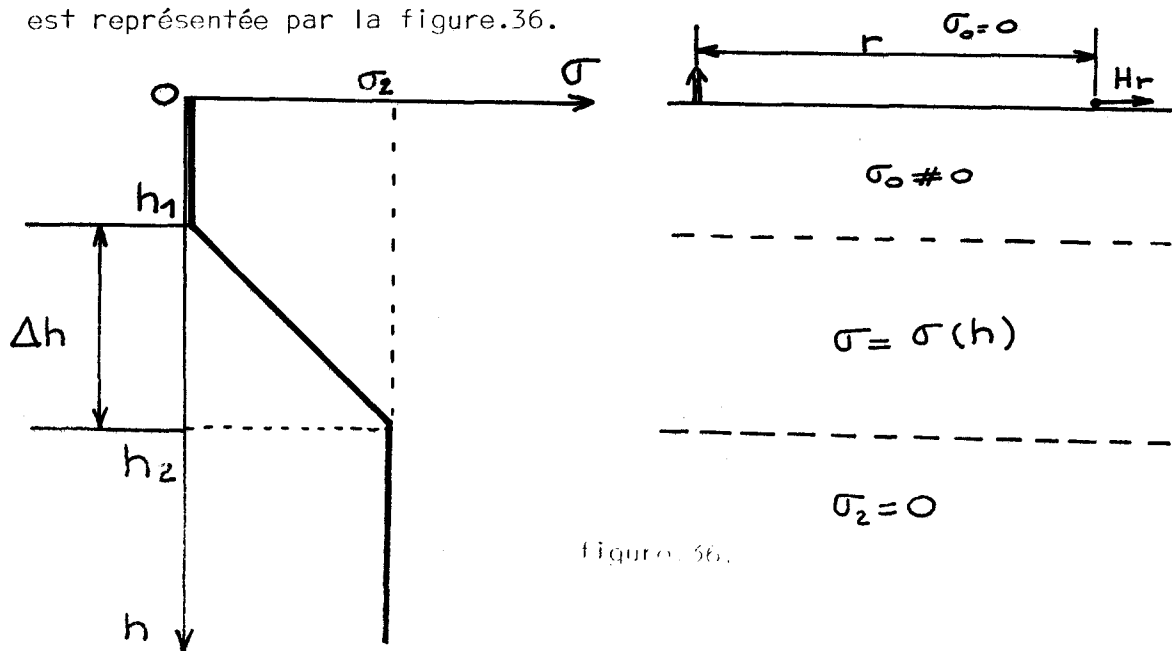


Figure 36.

Ce permafrost se compose d'une couche superficielle gelée de conductivité pratiquement nulle et d'épaisseur h_1 , d'une seconde couche dont la conductivité varie presque régulièrement de σ_0 à la conductivité σ_2 entre la profondeur h_1 et la profondeur h_2 . La conductivité σ_2 est celle d'une couche homogène représentant le socle non gelé.

Le problème consiste à déterminer les limites de détectabilité du socle situé en-dessous du terrain gelé.

Nous savons que la composante horizontale H_r du champ magnétique joue un très grand rôle dans le domaine de la prospection électromagnétique. La figure.7.bis. montre que la composante H_r diminue en même temps que la variable réduite η . C'est-à-dire que H_r tend vers zéro quand la fréquence devient très petite ou quand la conductivité équivalente est très faible. Ce cas se produit au-dessus du permafrost lorsque l'épaisseur de terrain gelé est importante. Pour déterminer les limites de détectabilité de la composante H_r , il faut se placer dans le cas le plus défavorable c'est-à-dire en très basse fréquence. L'approximation décrite précédemment convient très bien à ce cas.

I. 4.1. Composante horizontale H_r créée par un D.M.V. au-dessus d'un permafrost

La valeur de la composante H_r du champ magnétique est donnée par l'expression :

$$H_r = \frac{M}{r^3} \int_0^{\infty} \frac{i\omega\mu}{2} \sigma(h) \frac{r^4}{(r^2 + (2h)^2)^{3/2}} dh \quad (151)$$

$$\text{avec : } \sigma(h) = \sigma_0 + \frac{\sigma_0 h_2 - \sigma_2 h_1}{\Delta h} + \frac{\sigma_2 - \sigma_0 h}{\Delta h} + \sigma_2 \quad (152)$$

où $\Delta h = h_2 - h_1$

Le calcul de cette intégrale a pour résultat :

F en Hz

10^4

10^3

10^2

10

10

100

1000

r en mètres

$|k_2 r| = 0.4$

figure.37.

$\sigma = 10^{-1} \text{ S/m}$

$\sigma = 10^{-2} \text{ S/m}$

$\sigma = 10^{-3} \text{ S/m}$



$$H_r = \frac{M}{r^3} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{h_2}{(r^2 + (2h_2)^2)^{1/2}} - \frac{h_1 h_2}{\Delta h} \frac{1}{(r^2 + (2h_2)^2)^{1/2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\Delta h} \left[\frac{h_1^2 + \frac{r^2}{4}}{(r^2 + (2h_1)^2)^{1/2}} - \frac{\frac{r^2}{4}}{(r^2 + (2h_2)^2)^{1/2}} \right] \right] \quad (153)$$

On constate que cette expression peut se mettre sous la forme :

$$H_r = \frac{M}{r^2} \left[\frac{k_2 r}{2} \right]^2 \times (\text{facteur géométrique}) \quad (154)$$

Par analogie avec l'expression (141) on admet que cette formule est applicable tant que :

$$|k_2 r| \leq 0.4. \quad (155)$$

On peut donc prendre, pour un cas de figure donné, une fréquence limite qui vérifie la relation :

$$|k_2 r| = 0.4. \quad (156)$$

dont la zone d'applicabilité est donnée par l'abaque figure.37.

I.4.2. Limite de détectabilité du socle

Les variations du facteur géométrique sont tracées figure.38. en fonction de r/h_2 pour diverses valeurs de $k = h_1/h_2$.

Ces courbes permettent de déterminer, dans les conditions les plus défavorables de la très basse fréquence, la relation qui lie, pour une sensibilité donnée des capteurs, l'épaisseur maximum détectable h_2 de terrain gelé et le moment magnétique M de l'antenne d'émission.

Les cas les plus intéressants dans la pratique sont ceux pour lesquels le rapport r/h_2 est le plus faible pour que l'étendue latérale du dispositif soit la plus faible possible.

Les cas les plus intéressants dans la pratique sont ceux pour lesquels le rapport r/h_2 est faible car dans ces cas l'étendue latérale du dispositif peut être assez petite ce qui permet une investigation pratiquement verticale.

facteur géométrique

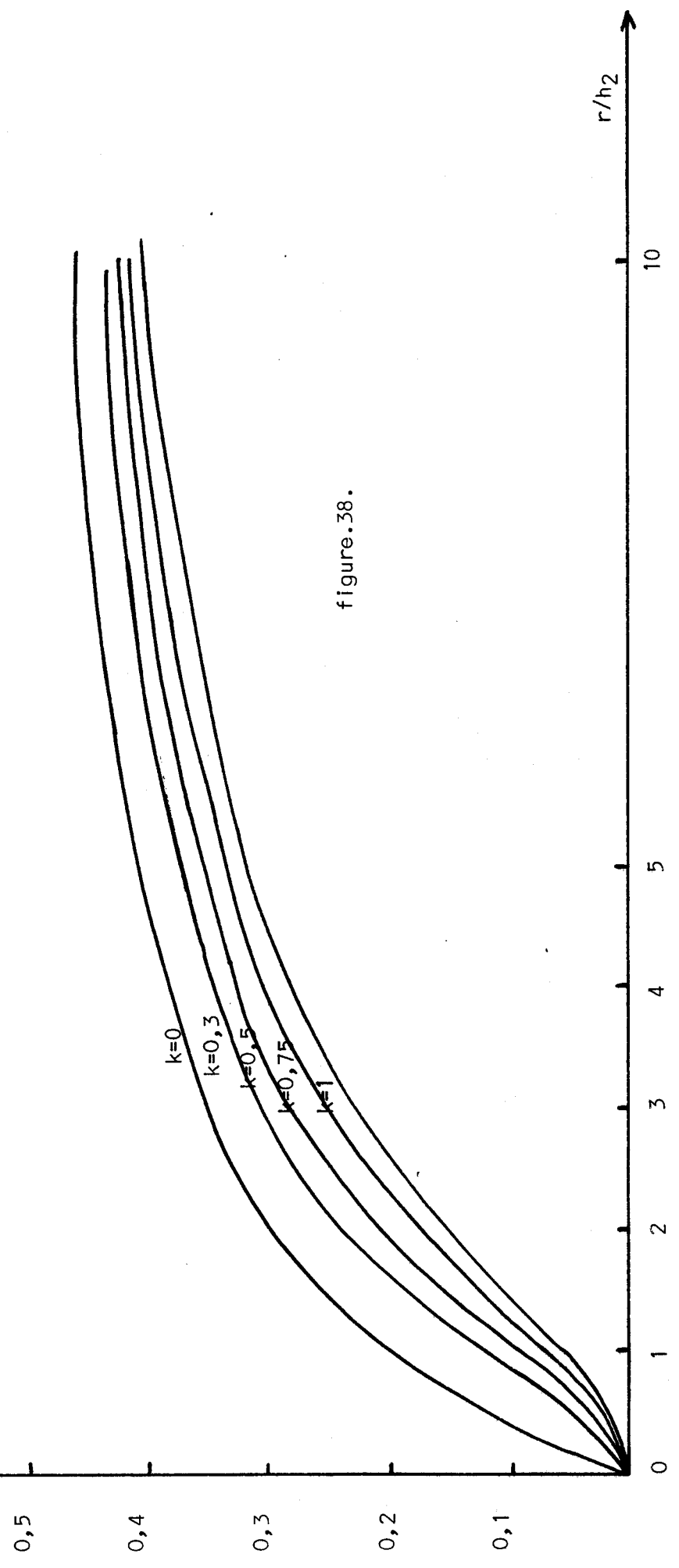
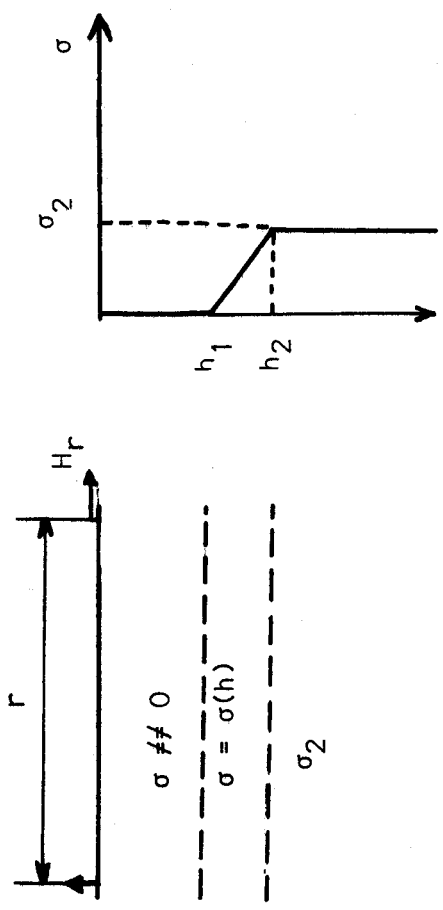


figure.38.

Mais on constate sur la figure.38. que la valeur du facteur géométrique tend vers zéro avec r/h_2 . On choisit alors sur ces courbes une valeur :

$$r/h_2 = 1.5 \quad (157)$$

qui résulte d'un compromis entre la nécessité d'avoir une valeur du facteur géométrique la plus grande possible et le désir d'effectuer un sondage d'étendue latérale limitée.

Pour cette valeur de r/h_2 , on voit sur les courbes n°38, que le facteur géométrique évolue entre 0.1 et 0.25.

Il en résulte que dans le cas le plus défavorable H_r est donné par l'expression :

$$H_r \neq \frac{M}{r^3} \cdot \frac{(0,4)^2}{4} \times 0,1 \quad (158)$$

Or on peut admettre que la valeur de H_r minimum détectable est égale à $1m\gamma$ avec :

$$1m\gamma = \frac{10^{-3}}{400\pi} \text{ A/m} \quad (159)$$

Il en résulte que la valeur de r donnant une composante H_r de $1m\gamma$ est égale à :

$$r = \sqrt[3]{\frac{(0,4)^2 \cdot 400\pi \cdot 0,1}{4 \cdot 10^{-3}}} \sqrt[3]{M} = 17 \sqrt[3]{M} \quad (160)$$

L'application de la formule (157) impose

$$h_2 \text{ max } \neq 10 \sqrt[3]{M} \quad (161)$$

Dans ces conditions, si $M = 1000 \text{ Atm}^2$, on ne peut prétendre déceler la présence du socle, que s'il est situé à une profondeur inférieure à 100m.

I.4.3. Conclusion

Ce résultat permet de déterminer la limite de détectabilité du socle situé au-dessous d'une couche de terrain gelé. Il est bien évident que les valeurs des champs magnétiques relevées dans ces conditions ne permettraient pas d'en déduire la présence d'hétérogénéités susceptibles d'exister au sein du socle.

Mais il permet d'établir dans quelles conditions on obtient une composante horizontale du champ magnétique avec un dipôle magnétique vertical placé au-dessus d'un permafrost.

II. APPLICATION DU RAYONNEMENT PROCHE D'UN DIPOLE MAGNETIQUE VERTICAL
A LA PROSPECTION A FAIBLE PROFONDEUR

Nous avons constaté dans le chapitre précédent, que les expressions analytiques simples donnant les valeurs des composantes du champ magnétique créées à proximité d'un D.M.V. au-dessus d'un milieu stratifié, ne sont valables que dans une certaine zone d'approximation correspondant à des conditions expérimentales bien précises. Ces conditions ne permettent pas d'envisager une prospection jusqu'à plusieurs dizaines de mètres de profondeur avec un espacement émetteur-récepteur de l'ordre de grandeur de la profondeur d'investigation.

Pour permettre d'interpréter des résultats de mesures dans n'importe quelles conditions de prospection, on ne peut plus faire d'approximations, et il est nécessaire d'utiliser un traitement numérique des expressions intégrales des champs sur ordinateur.

Le principe de prospection, consiste à mesurer les composantes du champ magnétique d'un D.M.V. rayonnant au-dessus d'un demi-milieu, et à comparer, par approximations successives, en utilisant un algorithme approprié, les résultats expérimentaux aux résultats obtenus en considérant des modèles théoriques de terrain.

Nous rappelons brièvement les relations intégrales donnant les composantes du champ électromagnétique d'un D.M.V. et nous décrivons succinctement la méthode d'intégration du champ que nous avons employée.

Nous décrivons ensuite, à l'aide des résultats de l'intégration numérique, la méthode de détermination des conditions expérimentales optimum permettant de prospector un terrain donné jusqu'à la profondeur voulue.

Après avoir établi une méthode d'interprétation appropriée à la prospection de terrains stratifiés horizontalement nous présentons des résultats de prospection obtenus sur quelques sites de la région du Nord.

II.1. Relations intégrales des composantes du champ électromagnétique, et méthode d'intégration

Dans le cas de la prospection le dipôle émetteur et le récepteur sont posés sur le sol, mais, afin de nous placer dans un cas général, nous allons supposer qu'ils sont respectivement disposés aux altitudes h et z.

En effet, il est nécessaire de se placer dans ce cas général, car en haute fréquence, où la distance r peut être faible, il faut tenir compte des quelques centimètres qui séparent nécessairement du sol le plan médian du D.M.V. émetteur et l'axe du dispositif récepteur.

Le potentiel est donné par la relation (28) et s'exprime :

$$\Pi_0(x,y) = M_1 \left(\frac{e^{ikoR}}{R} + \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_0} \frac{u_0 - u_1/Q}{u_0 + u_1/Q} e^{-u_0(z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda \right) \quad (162)$$

avec :

$$Q_1 = \frac{u_1/u_2 Q_2 + th u_1 h_1}{1 + u_1/u_2 Q_2 + th u_1 h_1}$$

$$Q_2 = \frac{u_2/u_3 Q_3 + th u_2 h_2}{1 + u_2/u_3 Q_3 + th u_2 h_2}$$

$$\dots Q_n = \frac{u_n/u_{n+1} Q_{n+1} + th u_n h_n}{1 + u_n/u_{n+1} Q_{n+1} + th u_n h_n} \quad \dots Q_M = 1 \quad (163)$$

On obtient les expressions des champs en appliquant les relations :

$$H_r = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial r \partial z} \quad (164)$$

$$H_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right) \quad (165)$$

Les relations (164) et (165) appliquées à la formule (163) donnent, après quelques transformations, détaillées en annexe.6., les expressions suivantes :

$$H_r = \frac{M_1 r (z-h)}{R_1^5} (3 - k_0^2 R_1^2 - i 3 k_0 R_1) e^{i k_0 R} + M_1 \int_0^\infty 2 \frac{u_0 - u_1 / Q}{u_0 + u_1 / Q} e^{-u_0 (z+h)} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (166)$$

avec : $R = (r^2 + (z-h)^2)^{1/2}$

$$\begin{aligned} H_z = & \frac{M_1}{R_2^3} (1 - i k_0 R_2 - k_0^2 R_2^2) e^{j k_0 R_2} - \frac{M_1}{R_2^5} (z+h)^2 (3 - 3 i k_0 R_2 - k_0^2 R_2^2) e^{i k_0 R_2} \\ & - \frac{M_1}{R_1^3} (1 - i k_0 R_1 - k_0^2 R_1^2) e^{j k_0 R_1} + \frac{M_1}{R_1^5} (z-h)^2 (3 - 3 i k_0 R_1 - k_0^2 R_1^2) e^{i k_0 R_1} \\ & + M_1 \int_0^\infty \left| \frac{2 \lambda^3 e^{-u_0 (z+h)}}{u_0 + u_1 / Q} - \lambda^2 e^{-\lambda (z+h)} \right| J_0(\lambda r) d\lambda + \frac{3 M_1 (z+h)^2}{((z+h)^2 + r^2)^{5/2}} \\ & - \frac{M_1}{((z+h)^2 + r^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (167)$$

Tout le problème revient à évaluer les intégrales :

$$I_1 = \int_0^{\infty} \lambda^2 \frac{u_0 - u_1 \gamma Q}{u_0 + u_1 \gamma Q} e^{-u_0(z+h)} J_1(\lambda r) d\lambda = \int_0^{\infty} RFR(\lambda) d\lambda + i \int_0^{\infty} IFR(\lambda) d\lambda \quad (168)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \left(\frac{2\lambda^3 e^{-u_0(z+h)}}{u_0 + u_1 \gamma Q} \right) - \lambda^2 e^{-\lambda(z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda = \int_0^{\infty} RFZ(\lambda) d\lambda + i \int_0^{\infty} IFZ(\lambda) d\lambda \quad (169)$$

Ces intégrales ne convergent que très lentement et pour éviter des temps de calcul considérables et peu exploitables, nous utilisons une méthode d'accélération de convergence basée sur l'application d'une transformation non linéaire décrite par Gray et Atchinson ⁽²⁵⁾ en 1967.

Cette transformation consiste à considérer l'intégrale :

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \quad (170) \quad \text{qui tend vers la valeur } \delta \text{ quand } t \text{ tend vers l'infini.}$$

On pose :

$$R(t, a) = \frac{f(t+a)}{f(t)} \quad (171)$$

avec $a > 0$ et $f(t) \neq 0$

Si on trouve une valeur de a telle que :

$$R(t, a) \rightarrow R(a) \neq 1 \quad (172) \quad \text{quand } t \text{ tend vers l'infini,}$$

on démontre ⁽²⁵⁾ que l'expression :

$$G(f, t, a) = \frac{F(t+a) - R(t, a) F(t)}{1 - R(t, a)} \quad (173)$$

tend vers la valeur δ de l'intégrale pour toute valeur finie de t supérieure à une valeur limite d , si et seulement si :

$$\frac{F(t+a) - F(t)}{1 - R(t, a)} \rightarrow \infty \quad \text{quand } t \rightarrow \infty .$$

En pratique nous admettons que l'on atteint la valeur limite d de la variable t lorsque pour deux valeurs distinctes de t le résultat de l'intégrale ne varie pas d'une quantité supérieure au dixième de la précision voulue.

Le calcul de la fonction $G(F, t, a)$ permet d'atteindre la limite de l'intégrale pour des valeurs relativement faibles de la variable d'intégration t , et permet de réduire considérablement le temps de calcul.

Cette méthode d'accélération de la convergence a été appliquée pour résoudre les intégrales des relations (168) à (169).

Pour le cas de la composante horizontale du champ magnétique, l'expression à intégrer est de la forme :

$$f(\lambda) = \lambda^2 \frac{u_0 - u_1 / Q}{u_0 + u_1 / Q} e^{-u_0(z+h)} J_1(\lambda r) \quad (174)$$

Cette expression tend vers :

$$e^{-\lambda(z+h)} \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} \cos(\lambda r - 3\pi/4) \text{ quand } \lambda \text{ tend vers l'infini} \quad (175)$$

Il en résulte que quand λ est grand :

$$R(\lambda, a) = \frac{f(\lambda+a)}{f(\lambda)} \neq \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+a}} \frac{\cos((\lambda+a)r - 3\pi/4)}{\cos(\lambda r - 3\pi/4)} \quad (177)$$

$$\text{et } R(\lambda, a) \rightarrow -1 \text{ quand } \lambda \rightarrow \infty \text{ si } ar = \pi \quad (178)$$

Pour le cas de la composante verticale du champ magnétique l'expression à intégrer est de la forme :

$$f(\lambda) = \left| \frac{2\lambda^3 e^{-u_0(z+h)}}{u_0 + u_1 / Q} - \lambda^2 e^{-\lambda(z+h)} \right| J_0(\lambda r) \quad (179)$$

quand λ est grand :

$$R(\lambda, a) = \frac{f(\lambda+a)}{f(\lambda)} \neq \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+a}} \frac{\cos(r(\lambda+a) - \pi/4)}{\cos(\lambda r - \pi/4)} \quad (180)$$

Il en résulte que si l'on prend : $kr = \pi$ alors :

$$R(\lambda, k) \rightarrow -1 \text{ quand } \lambda \rightarrow \infty$$

Les intégrales contenues dans les formules donnant H_r et H_z sont résolues en calculant les expressions :

$$\int_0^{\infty} \text{RFR}(\lambda) d\lambda = \frac{\text{RFR}(\lambda) \int_0^{\lambda+\pi/r} \text{RFR}(\lambda) d\lambda - \text{RFR}(\lambda+\pi/r) \int_0^{\lambda} \text{RFR}(\lambda) d\lambda}{\text{RFR}(\lambda) - \text{RFR}(\lambda+\pi/r)}$$

$$\int_0^{\infty} \text{IFR}(\lambda) d\lambda = \frac{\text{IFR}(\lambda) \int_0^{\lambda+\pi/r} \text{IFR}(\lambda) d\lambda - \text{IFR}(\lambda+\pi/r) \int_0^{\lambda} \text{IFR}(\lambda) d\lambda}{\text{IFR}(\lambda) - \text{IFR}(\lambda+\pi/r)}$$

$$\int_0^{\infty} \text{RFZ}(\lambda) d\lambda = \frac{\text{RFZ}(\lambda) \int_0^{\lambda+\pi/r} \text{RFZ}(\lambda) d\lambda - \text{RFZ}(\lambda+\pi/r) \int_0^{\lambda} \text{RFZ}(\lambda) d\lambda}{\text{RFZ}(\lambda) - \text{RFZ}(\lambda+\pi/r)}$$

$$\int_0^{\infty} \text{IFZ}(\lambda) d\lambda = \frac{\text{IFZ}(\lambda) \int_0^{\lambda+\pi/r} \text{IFZ}(\lambda) d\lambda - \text{IFZ}(\lambda+\pi/r) \int_0^{\lambda} \text{IFZ}(\lambda) d\lambda}{\text{IFZ}(\lambda) - \text{IFZ}(\lambda+\pi/r)} \quad (181)$$

En pratique, compte tenu de la forme de l'intégrant la valeur de λ est de l'ordre de l'unité.

Le programme que nous avons mis au point et dont le "listing" est reproduit en annexe.6. permet de calculer les modules et les phases des composantes H_r et H_z et la valeur α de l'inclinaison du grand axe avec le plan horizontal de l'ellipse, lieu de l'extrémité du vecteur champ magnétique.

II.2. Détermination des conditions de prospection optimales

Nous avons tracé sur les planches 39 à 45 la variation du paramètre α donné par l'expression (43) en fonction des paramètres sans dimensions σ_1/σ_2 , h_1/r et η_1 pour un milieu stratifié à deux couches.

σ_1/σ_2 est un paramètre électrique appelé contraste de conductivité

h_1/r est un paramètre géométrique que l'on appelle profondeur réduite

$\eta_1 = r/\delta_1$ est un paramètre électromagnétique où δ_1 représente la profondeur de pénétration de l'onde dans la première couche

η_1 est appelé distance réduite.

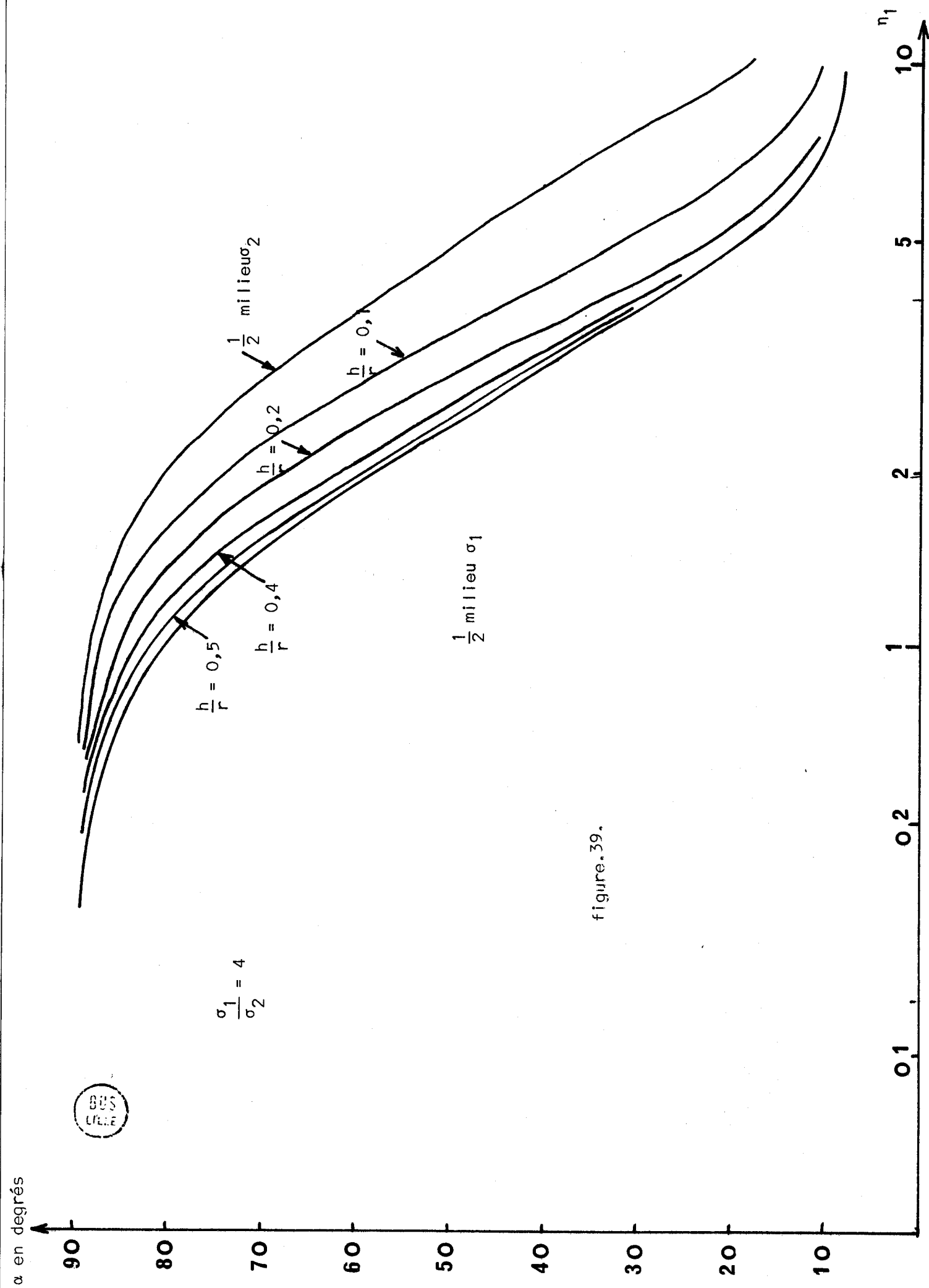
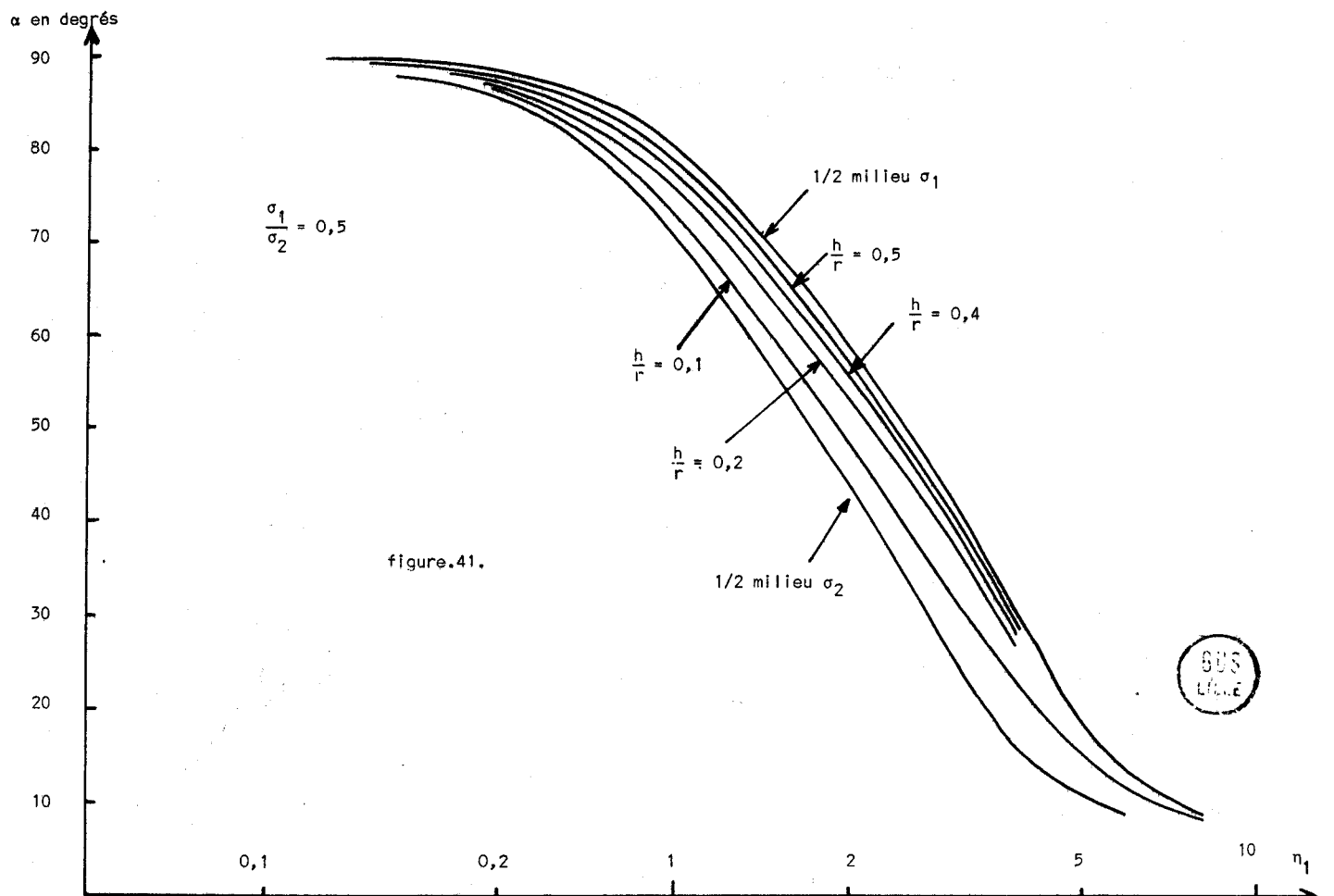
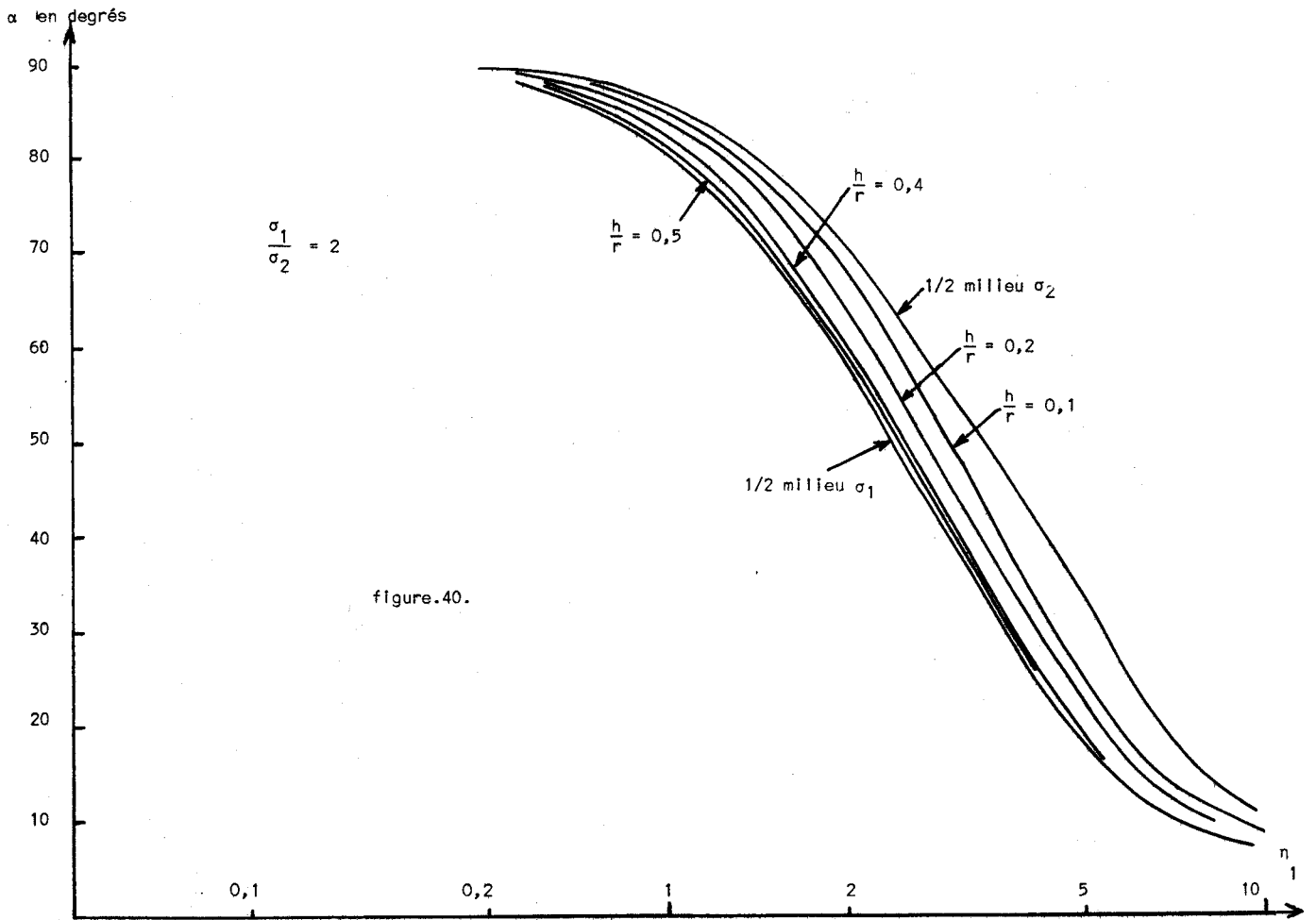
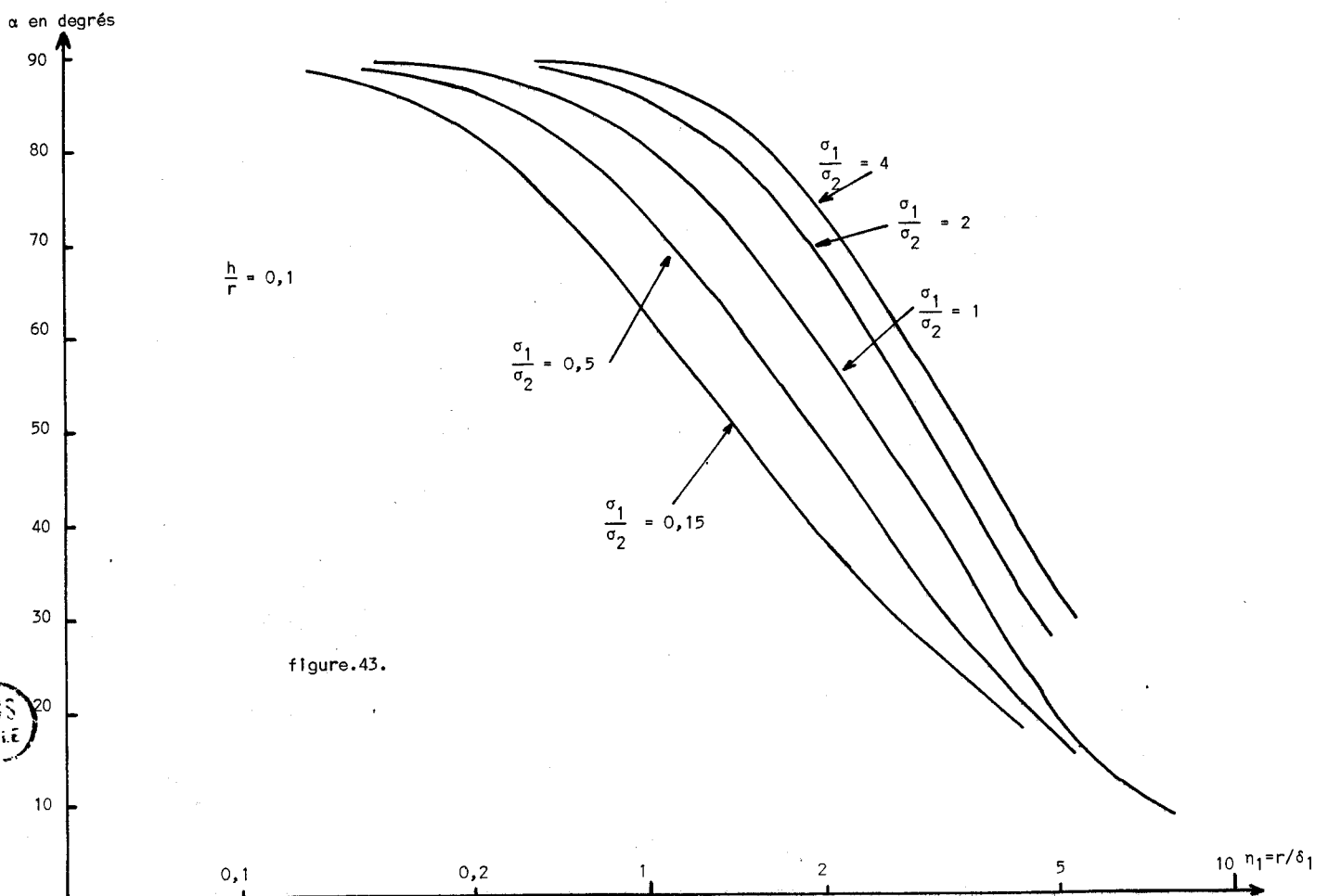
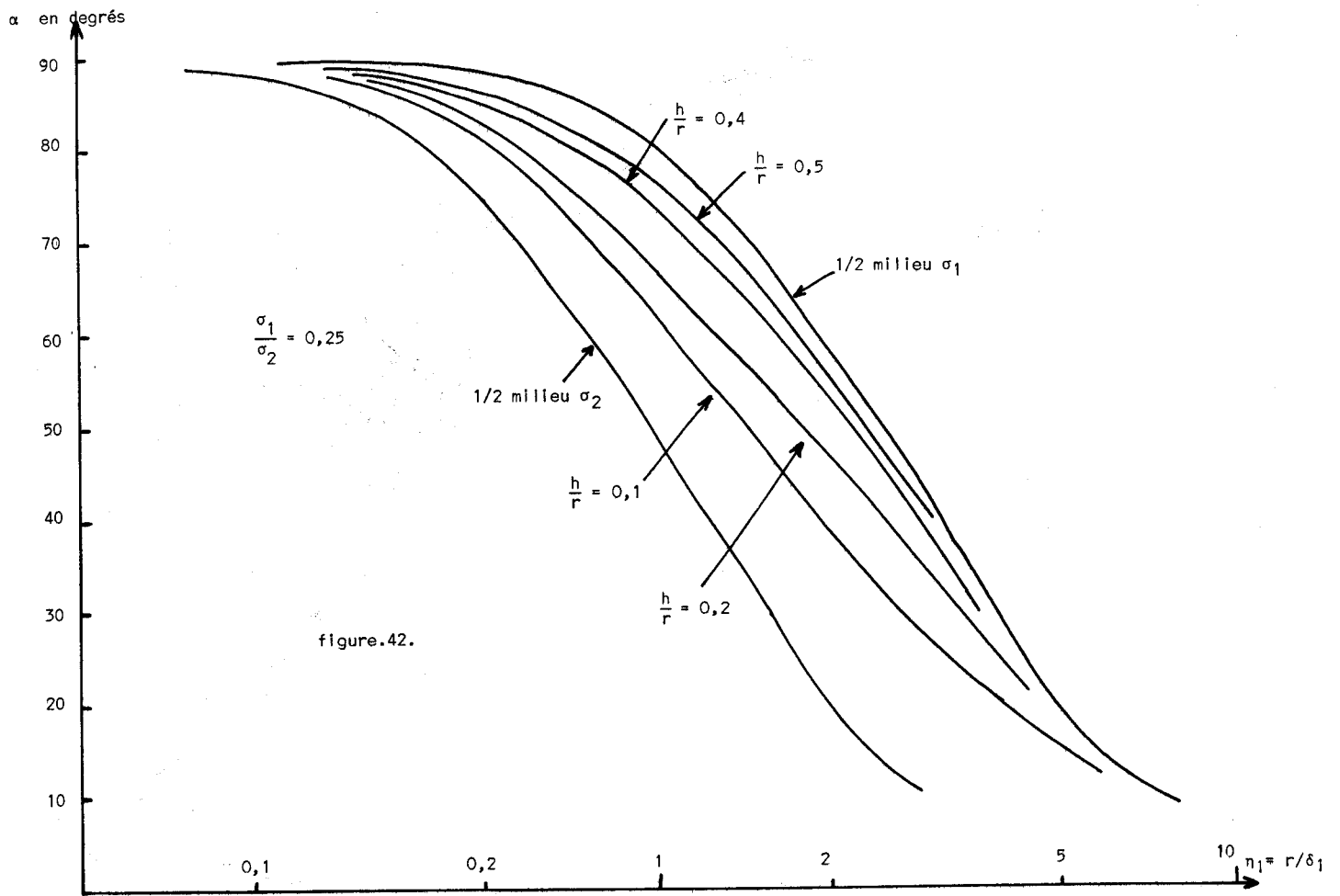
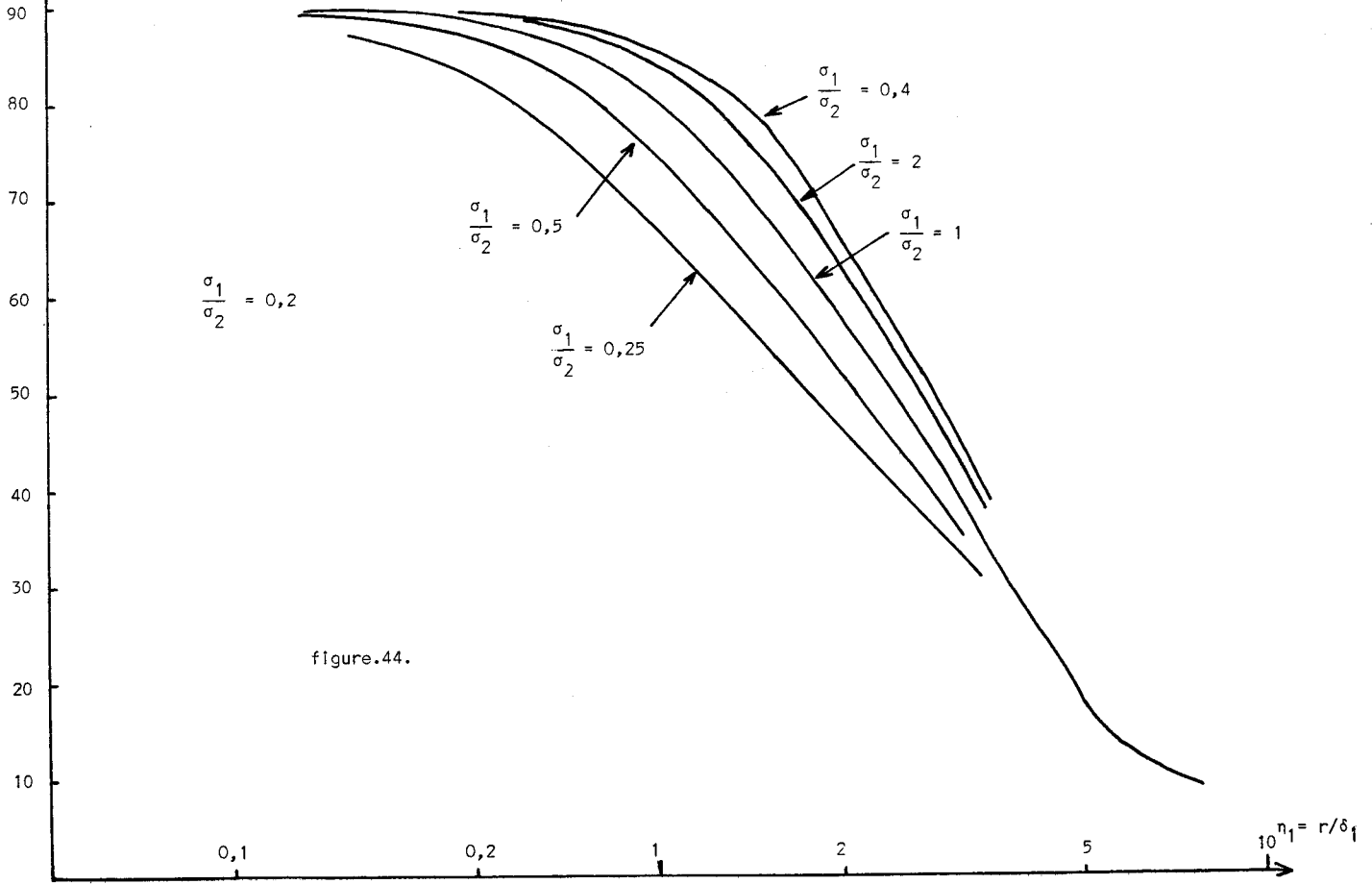


figure. 39.

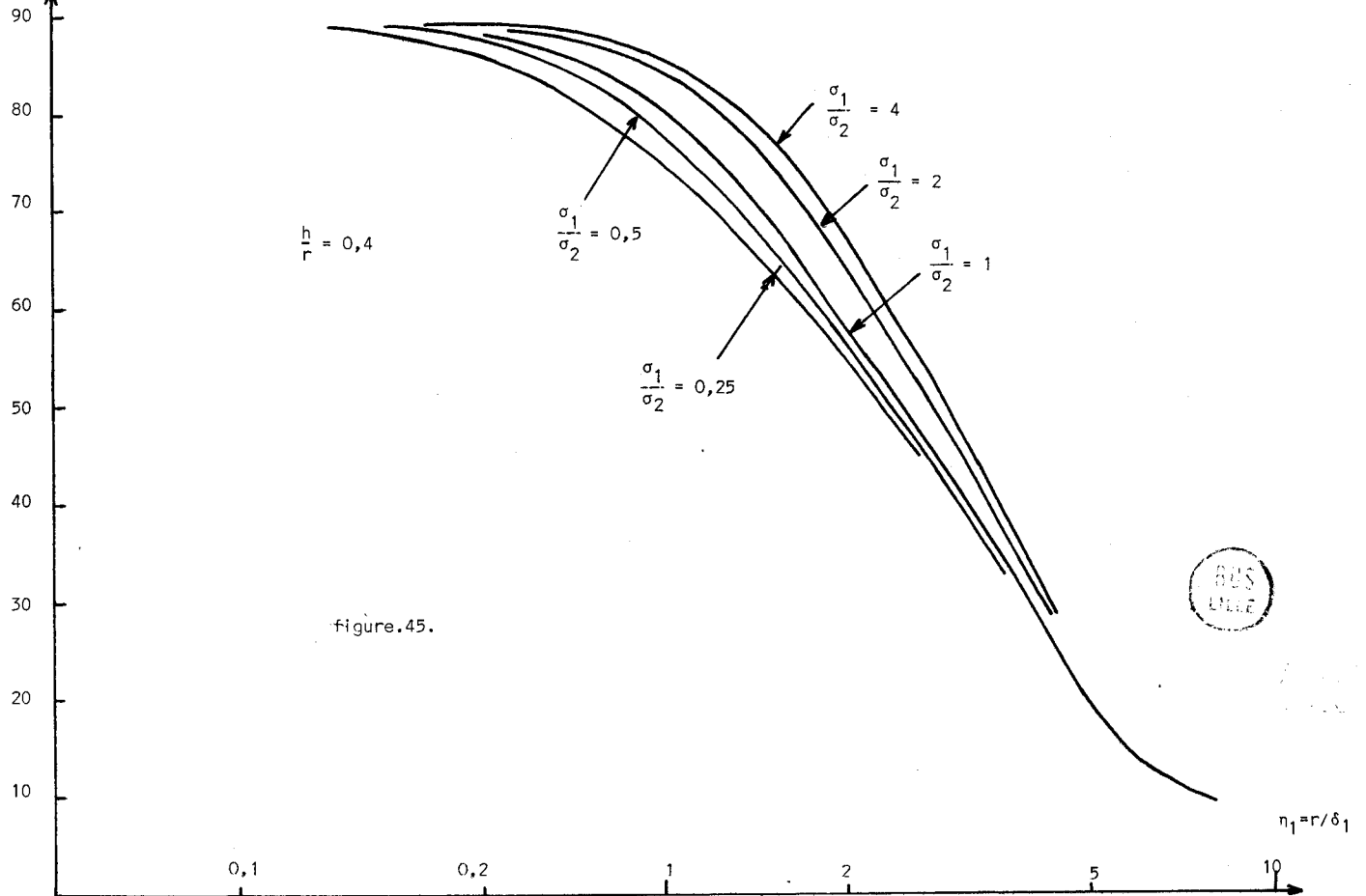




α en degrés



α en degrés



Les courbes reportées sur les planches 39 à 42 représentent la variation de α en fonction de la distance réduite, pour chaque valeur du contraste de conductivité σ_1/σ_2 et pour diverses valeurs de la profondeur réduite.

Des courbes analogues ont été tracées planches 43 à 45 pour chaque valeur de la profondeur réduite et pour diverses valeurs du contraste de conductivité.

Ces courbes ainsi tracées permettent la confrontation directe avec celles relevées expérimentalement en fonction de la fréquence.

On constate sur toutes ces planches que la variation de α est la plus sensible en fonction de la variation de l'un quelconque des trois paramètres sans dimensions, lorsque la distance réduite η_1 vérifie l'inégalité :

$$0,7 \leq \eta_1 \leq 5 \quad (183)$$

Dans cette zone on constate par ailleurs que les modules des composantes H_r et H_z ont le même ordre de grandeur.

Les planches 39 et 40 montrent que lorsque le contraste σ_1/σ_2 est supérieur à 1 toutes les courbes sont situées à droite de celle correspondant au demi-milieu homogène dont la conductivité est celle de la première couche. De même pour le contraste inverse (planches 41 et 42) toutes les courbes sont situées à gauche de cette même courbe demi-milieu. On vérifie en outre que quel que soit le contraste de conductivité, les courbes 39 à 42 évoluent entre la courbe obtenue pour un demi-milieu de conductivité σ_1 et celle obtenue pour un demi-milieu de conductivité σ_2 .

Lorsque l'épaisseur de la première couche du milieu stratifié augmente, les courbes $\alpha=f(\eta_1)$ tendent vers la courbe du demi-milieu dont la conductivité est celle de la première couche du milieu stratifié quel que soit le contraste de conductivité. Ceci signifie que le milieu stratifié peut être considéré comme un demi-milieu homogène dont la conductivité est égale à celle de la première couche dès que la profondeur réduite est supérieure à 0.5. Ceci est d'autant plus marqué que η_1 est plus élevé. *Pour mettre en évidence la stratification, il faut donc disposer l'émetteur et le récepteur de telle façon que la relation suivante soit vérifiée :*

$$h_1/r \leq 0,5 \quad (184)$$

Des courbes analogues aux précédentes tracées dans le cas de milieux à trois et quatre couches montrent que pour une valeur de n_1 fixée, la valeur de l'angle α devient pratiquement indépendante de la nature des couches situées à une profondeur égale ou supérieure à la moitié de la distance r émetteur-récepteur. Il n'y a que dans le cas de contrastes de conductivité très importants que cette profondeur peut être portée aux deux tiers de la distance r .

En pratique, pour réduire au maximum l'incertitude latérale du sondage on limite la distance émetteur-récepteur au double de la profondeur prévue du sondage.

Lorsque la distance émetteur-récepteur est définie, on déduit facilement de l'expression (183), en fonction d'une gamme de conductivités superficielles possibles, la gamme de fréquence de l'appareillage à utiliser pour le sondage.

Par exemple, pour des profondeurs de sondage inférieures à 20 mètres, la distance émetteur - récepteur peut être de 40 mètres et compte tenu d'une gamme de conductivités de terrain superficiel s'étendant de 0.02 à 0.10 S/m, la gamme de fréquences de sondage peut être comprise entre 1kHz et 100kHz.

Les diverses remarques que nous avons faites sur toutes les courbes tracées vont nous permettre de bâtir une méthodologie de prospection.

II.3. Méthodologie de prospection

Pour une séparation constante de l'émetteur et du récepteur, et pour un milieu stratifié à n couches le paramètre α est une fonction des conductivités, des épaisseurs des diverses couches constitutives du terrain, et de la fréquence F de l'onde émise.

$$\alpha_F = g(\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n, h_1, h_2, \dots h_{n-1}, F) \quad (185)$$

α_F est donc fonction de $2n-1$, paramètres inconnus.

Le sondage électromagnétique consiste à relever en fonction de la fréquence, pour une distance connue r , le module des composantes horizontale, verticale et suivant une direction inclinée à 45° sur l'horizontale, du champ magnétique créé par un D.M.V. posé sur le sol.

Les valeurs de ces modules permettent de calculer α pour chaque fréquence.

Pour déterminer les conductivités et les épaisseurs de chaque couche de terrain il suffit alors de résoudre le système :

$$\begin{aligned} \alpha_{F_1} &= g_1 (\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n, h_1, h_2 \dots h_{n-1}, F_1) \\ \alpha_{F_2} &= g_2 (\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n, h_1, h_2 \dots h_{n-1}, F_2) \\ &\vdots \\ \alpha_{F_{2n-1}} &= g_{2n-1} (\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n, h_1, h_2 \dots h_{n-1}, F_{2n-1}) \end{aligned} \quad (186)$$

composé de $2n-1$ équations non linéaires obtenues pour $2n-1$ points de fréquence où α_{F_i} sont des valeurs expérimentales et les fonctions g_i représentent les valeurs théoriques obtenues par intégration numérique.

On pourrait résoudre globalement ce système d'équations. Mais ce procédé nécessite d'une part de connaître a priori le nombre de couches de terrain et d'autre part, il conduirait à des calculs coûteux en temps d'utilisation d'ordinateur.

Pour obvier à cette difficulté, on préfère procéder par approximations successives.

La profondeur de pénétration des ondes électromagnétiques diminue au fur et à mesure que la fréquence augmente.

Il en résulte que si l'on utilise une fréquence suffisamment haute pour que la profondeur de pénétration soit petite vis-à-vis de l'épaisseur de la première couche de terrain, les composantes du champ électromagnétique ne dépendront que de la conductivité superficielle.

La connaissance de cette conductivité permet, compte tenu des prévisions théoriques décrites au paragraphe précédent d'en déduire la gamme des fréquences à utiliser pour le sondage.

Pour déterminer les caractéristiques des couches plus profondes, on base la méthode d'interprétation sur la propriété qu'ont les ondes électromagnétiques de se propager d'autant plus profondément dans le sol que la fréquence est plus basse.

Ainsi on considère deux fréquences pour lesquelles les ondes électromagnétiques ne "pénètrent" que dans les deux premières couches de terrain, c'est-à-dire pour lesquelles les caractéristiques des couches inférieures agissent peu sur les composantes du champ. Pour ces deux fréquences on suppose que l'angle α ne dépend que des conductivités σ_1 et σ_2 et de l'épaisseur h_1 de la couche superficielle. La détermination de σ_2 et de h_1 se ramène alors à la résolution du système d'équations :

$$\alpha F_1 = g_1(\sigma_2, h_1, \sigma_1, F_1)$$

$$\alpha F_2 = g_2(\sigma_2, h_1, \sigma_1, F_2)$$

où g_1 et g_2 représentent les expressions de α relatives à un modèle théorique de terrain à deux couches, et où σ_2 et h_1 sont les variables inconnues que l'on détermine.

On choisit ensuite deux fréquences immédiatement inférieures aux précédentes, et on suppose que pour ces fréquences, le terrain se comporte comme un milieu à trois couches dont on connaît les caractéristiques de la première et la conductivité de la seconde. La détermination de la conductivité de la troisième couche et de l'épaisseur de la seconde consiste à nouveau à résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

On peut aboutir ainsi par approximations successives à reconstituer un milieu stratifié à n couches dont la réponse en fréquence est la même que celle du terrain sondé et en déduire ses diverses couches constitutives. Les sondages que nous avons pratiqués nous ont permis d'apprécier jusqu'à quatre couches géologiques différentes. Mais cela ne constitue pas une limitation de la méthode d'interprétation.

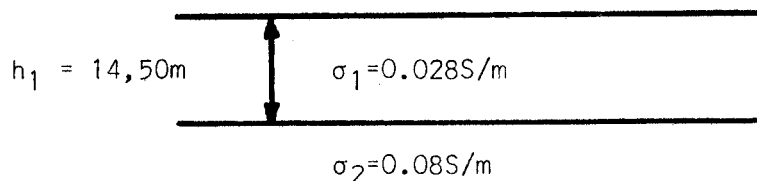
Nous allons illustrer cette méthode en l'appliquant à deux exemples. L'un concerne un sondage sur un milieu à deux couches, l'autre est relatif à un sondage sur un milieu à trois couches.

II.4. Etude des erreurs introduites par la méthode d'interprétation

Pour cette étude, les valeurs des composantes des champs et celles de α données en fonction de la fréquence sont considérées comme des valeurs expérimentales supposées élevées sur le terrain, mais elles correspondent en réalité à des valeurs théoriques obtenues avec un modèle à deux couches et un modèle à trois couches. Ces valeurs de l'angle α ou de l'amplitude des composantes des champs seront appelées "valeurs simulées" de α ou des composantes des champs. L'intérêt de ce procédé est de donner une idée des erreurs introduites par la méthode d'interprétation indépendamment des erreurs expérimentales des mesures sur le terrain.

II.4.1. Cas d'un milieu à deux couches

Nous allons considérer la réponse en fréquence d'un milieu à deux couches constitué, comme le montre la figure ci-dessous, d'une couche superficielle de conductivité $\sigma_1=28\text{mS/m}$, et d'épaisseur $h_1=14,50\text{m}$ surmontant un substratum de conductivité $\sigma_2 = 80\text{mS/m}$.



Nous allons simuler une interprétation en nous servant des valeurs des champs et de l'angle α calculés avec le modèle théorique comme si elles résultaient de mesures faites sur un terrain réel inconnu.

$|H_r|/|H_z|$

$F = 580 \text{ kHz}$

$h = 0,10\text{m}, z = 0,23\text{m}, r = 10\text{m}$

2

1

0,805



$\sigma = 0,028\text{S/m}$

0,02

0,05

0,10

0,20

$\sigma \text{ en S/m}$

0,5

figure.46.

II.4.1.1. Recherche de la conductivité superficielle

On détermine tout d'abord la conductivité de la couche superficielle. Pour cela, dans la pratique, on relève les composantes du champ magnétique d'un D.M.V. à une fréquence suffisamment élevée pour pouvoir considérer que le terrain sondé se comporte comme un demi-milieu homogène de conductivité σ_1 . Il en est ainsi, si pour deux fréquences voisines, on détermine la même conductivité. Sur les sites rencontrés jusqu'à présent, la mesure à 580kHz a suffi avec une distance r émetteur-récepteur de 10 mètres.

Dans notre cas, le résultat du calcul à 580kHz du rapport des modules des composantes du champ magnétique obtenu avec le modèle théorique précédent est résumé dans le tableau ci-dessous.

Fréquence	H_r converti en tension de sortie du capteur	H_z converti en tension de sortie du capteur	$ H_r / H_z $ simulé	r
580kHz	2,78V	3,45V	0,805	10m

Nous considérons ce résultat comme la réponse à 580kHz d'un milieu inconnu.

Pour déterminer la conductivité superficielle de ce milieu inconnu, on compare le rapport des composantes du champ magnétique du tableau ci-dessus à celles de la courbe figure.46.

Cette courbe représente l'évolution du rapport $|H_r|/|H_z|$ créé à 580kHz par un D.M.V. au-dessus d'un demi-milieu homogène en fonction de la conductivité σ de ce milieu.

Cette comparaison montre que notre milieu inconnu se comporte comme un demi-milieu de conductivité $\sigma = 0.028S/m$.

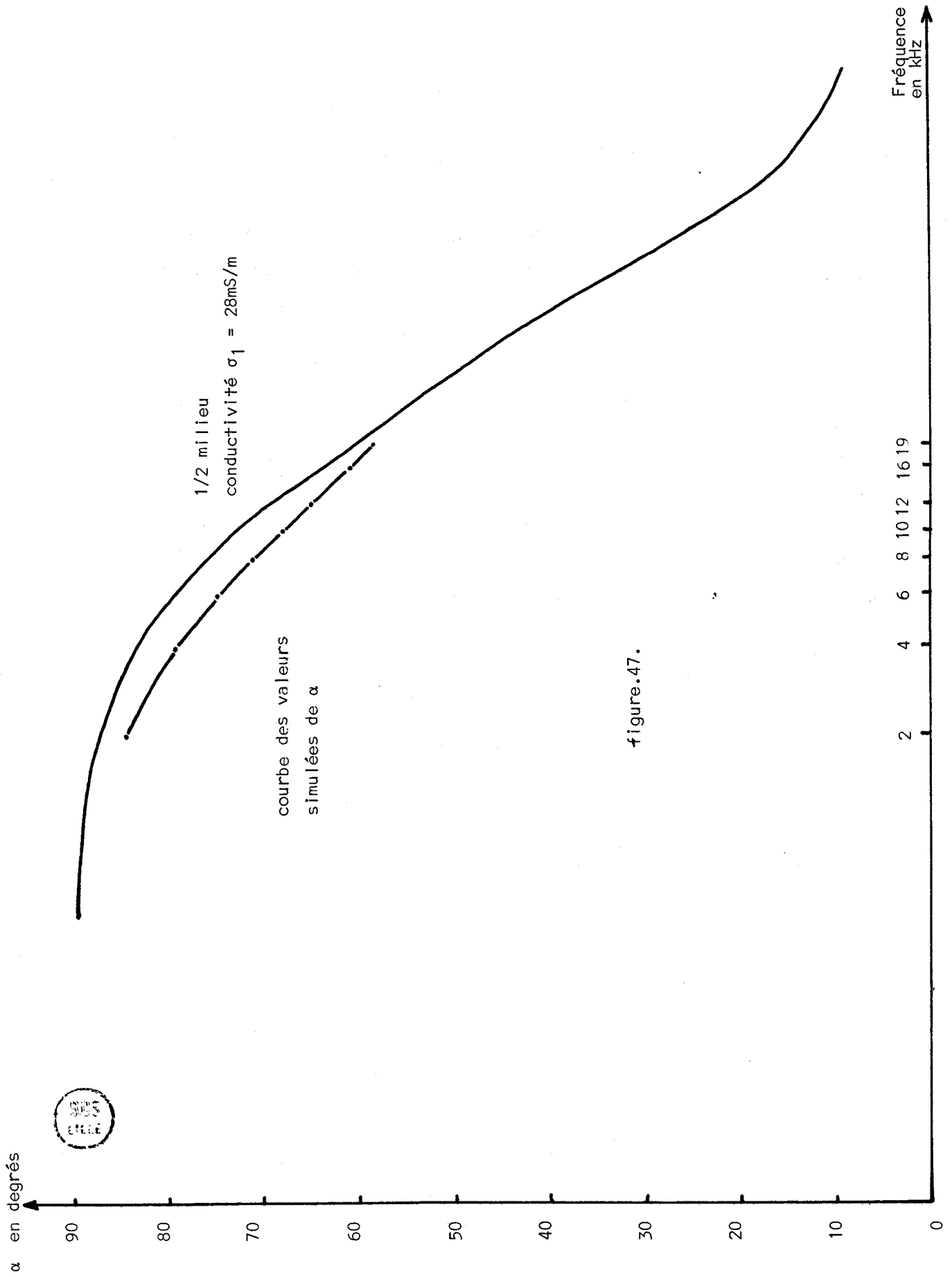


figure.47.



On constate que cette valeur de conductivité est précisément celle de la couche superficielle du milieu à deux couches qui nous a servi de modèle.

Compte tenu de cette conductivité, pour que la distance réduite η_1 relative à la première couche soit comprise entre 0,5 et 1,5, il faut choisir une gamme de fréquence pour le sondage, s'étendant de 1500Hz à 20 000Hz.

Les valeurs simulées de α obtenues en fonction de la fréquence avec le modèle théorique précédent sont reportées sur la courbe figure.47. et dans le tableau de la page suivante. Cette courbe est comparée à celle d'un demi-milieu de conductivité $\sigma = 28\text{mS/m}$.

Elle montre, d'après les constatations faites sur les figures.39. à .45., qu'elle peut être assimilée, en première approximation, à celle d'un milieu à deux couches de contraste de conductivité σ_1/σ_2 inférieur à l'unité.

Le problème se ramène donc à celui de la recherche de l'épaisseur h_1 de la première couche et de la conductivité σ_2 de la deuxième couche de ce milieu équivalent à deux couches.

Le milieu sondé peut être un milieu à deux couches comme celui supposé, mais il peut aussi être plus compliqué et posséder plus de deux couches.

Mais, de la même manière que précédemment, ce milieu à plus de deux couches pourra être considéré comme un milieu à deux couches si la fréquence est telle que l'onde ne pénètre que dans les deux premières couches.

La détermination de h_1 et σ_2 s'effectuera donc en considérant les valeurs simulées de α obtenues pour les fréquences les plus élevées de la gamme.

Fréquence en Hz	H_r en mV	H_z en mV	H_{45} en mV	α en degrés	r en mètres	n_1	α 1/2 milieu de conductivité $\sigma_1 = 28 \text{ mS/m}$
19	32	50	20,5	58,57	40	1,84	61
16	30,5	50	22	61,12	40	1,69	64
12	25,5	50	22	65,32	40	1,46	69,5
10	24	50	22,5	67,96	40	1,34	73
8	27	61	30	71,03	40	1,19	75,70
6	19,5	50	25	74,64	40	1,03	79,20
4	22	66	37	79,00	40	0,84	83,50
2	9	50	30	84,47	40	0,60	87,50



II.4.1.2. Recherche de σ_2 et h_1

Lorsque σ_1 est connu, la valeur de α pour deux fréquences F_1 et F_2 suffisamment élevées devient une fonction de σ_2 et h_1 . Ces deux inconnues sont donc solution du système d'équations :

$$\alpha_{F_1} - f_1(\sigma_2, h_1) = 0 \quad (187)$$

$$\alpha_{F_2} - f_2(\sigma_2, h_1) = 0 \quad (188)$$

où α_{F_1} et α_{F_2} sont les valeurs simulées de α aux fréquences F_1 et F_2 . Dans le cas d'un sondage réel elles correspondraient aux résultats de mesures sur le terrain.

$f_1(\sigma_2, h_1)$ et $f_2(\sigma_2, h_1)$ sont les valeurs théoriques de α obtenues aux fréquences F_1 et F_2 dans le cas d'un modèle théorique, composé d'une couche de conductivité σ_1 connue et d'épaisseur h_1 reposant sur un substrat de conductivité σ_2 .

La résolution de ce système d'équations peut se faire automatiquement sur ordinateur. Mais dans la pratique les erreurs de mesure sur le terrain et la nature même du terrain qui n'est pas rigoureusement stratifié horizontalement, font que le système d'équations n'a pas nécessairement de solution. Il est donc préférable de résoudre ce système graphiquement avec l'aide de l'ordinateur, pour calculer les valeurs des champs du modèle théorique d'une façon précise, et sans faire d'approximations.

Dans un système orthonomé à 3 dimensions (σ_2, h_1, α) la fonction

$$\alpha = \alpha_{F_1} - f_1(\sigma_2, h_1) \text{ calculée à la fréquence } F_1$$

est représenté par une surface gauche. La trace de cette surface gauche sur le plan horizontal ($\sigma_2, h_1, 0$) constitue le lieu des couples (σ_2, h_1) solutions de l'équation (187) :

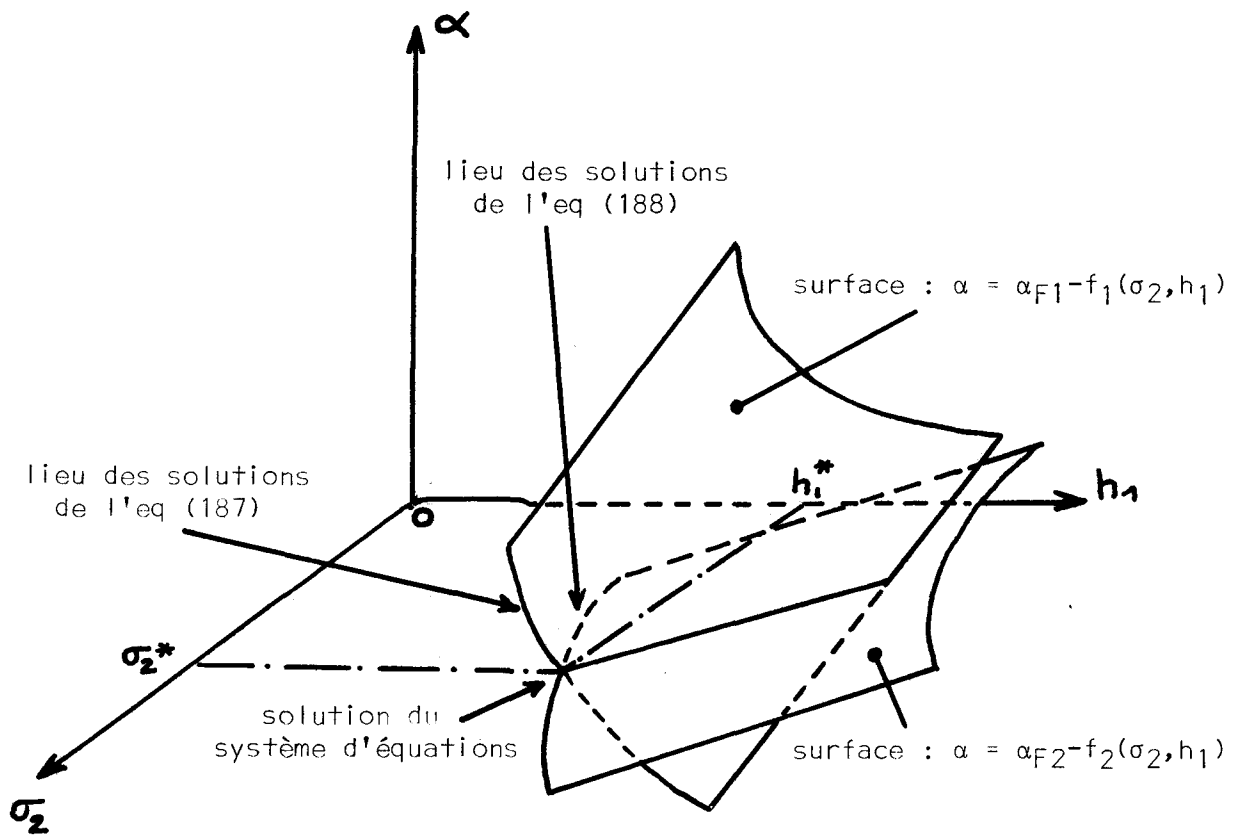
$$\alpha_{F_1} - f_1(\sigma_2, h_1) = 0 \quad (187)$$

De même, dans le repère précédent, la fonction

$$\alpha = \alpha_{F2} - f_2(\sigma_2, h_1) \text{ calculée à la fréquence } F_2$$

est représentée par une autre surface gauche et sa trace sur le plan horizontal $(\sigma_2, h_1, 0)$ constitue le lieu des couples (σ_2, h_1) solutions de l'équation (188) :

$$\alpha_{F2} - f_2(\sigma_2, h_1) = 0 \tag{188}$$



Nous noterons (σ_2^*, h_1^*) le couple solution qui vérifie simultanément les deux équations du système (187), (188). Ce couple est trouvé à l'intersection des deux lieux.

α en degrés

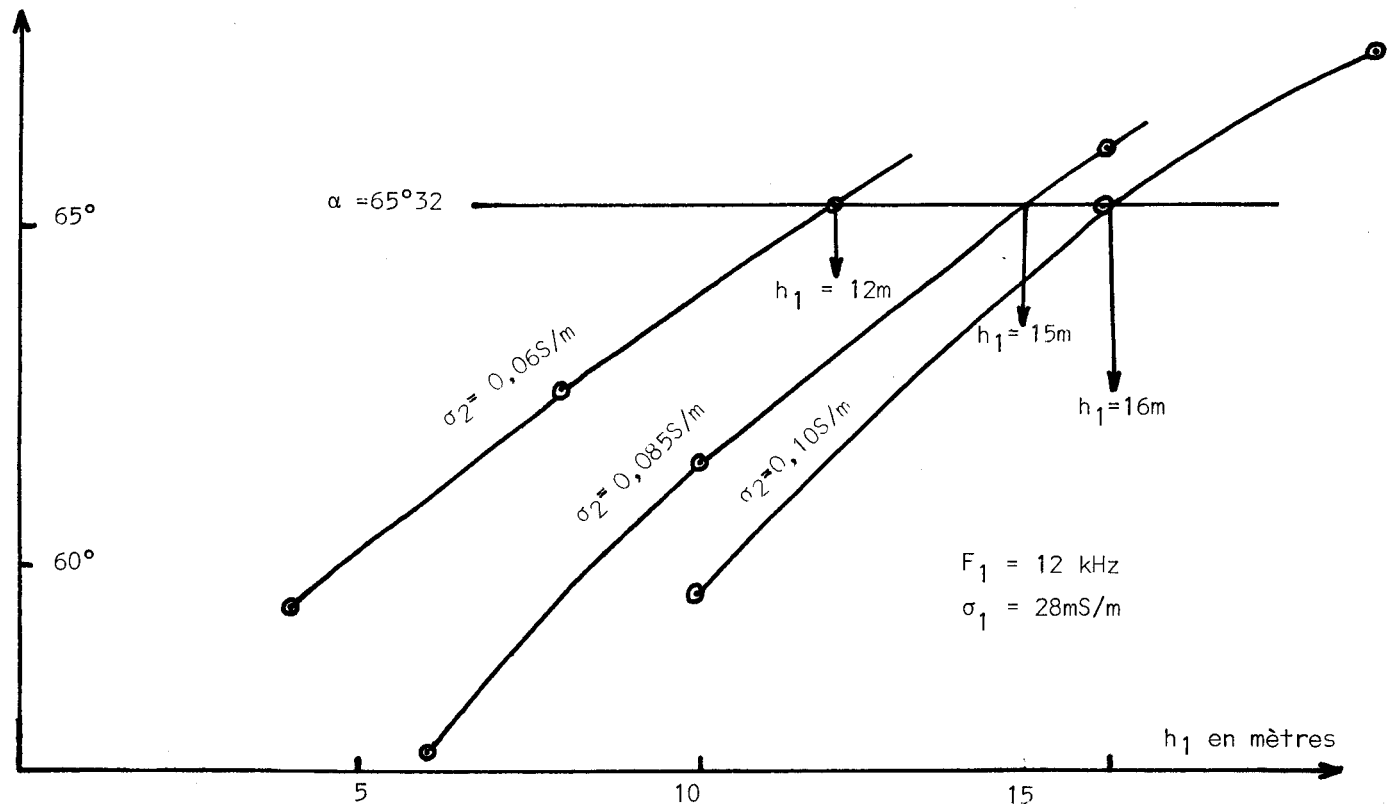


figure.48.

α en degrés

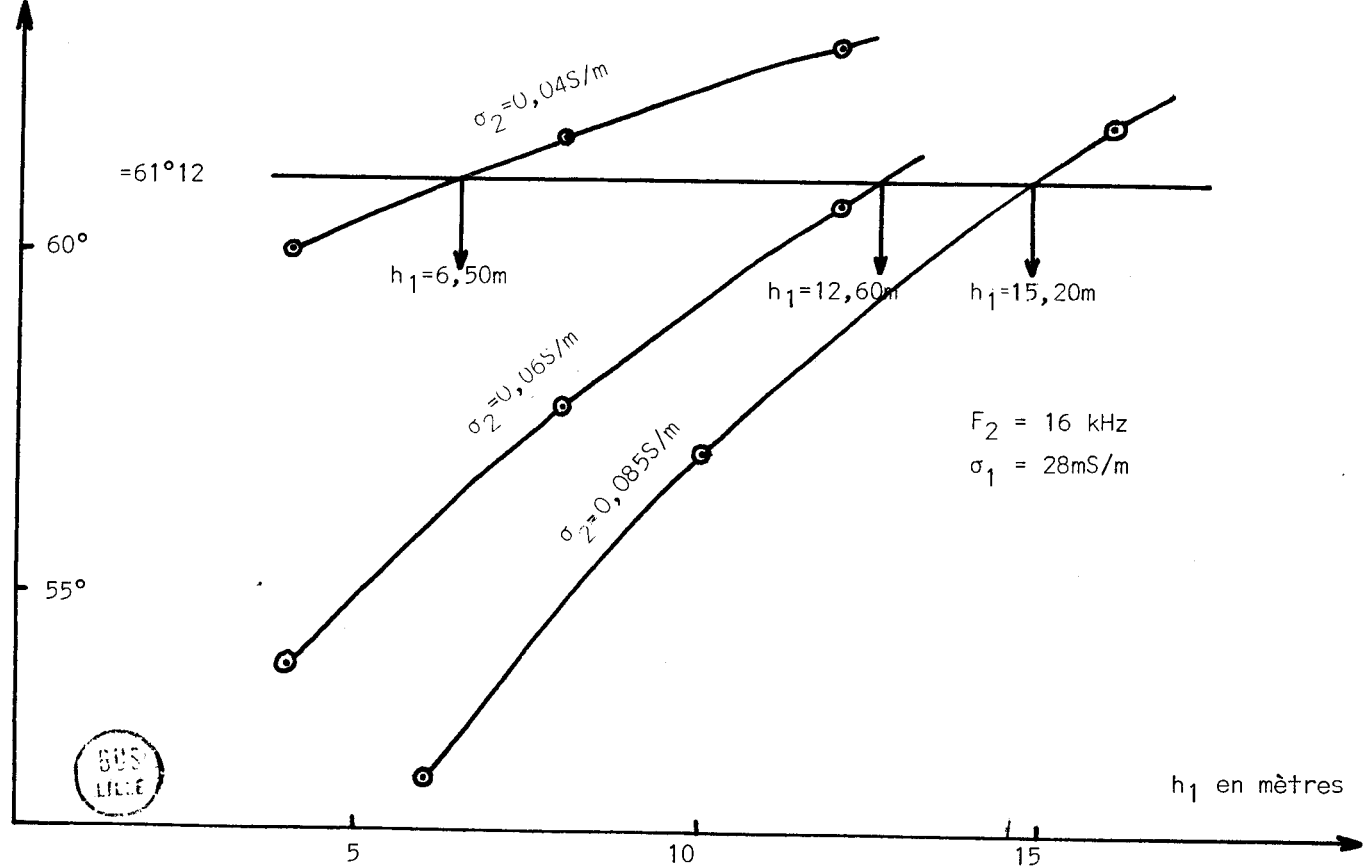


figure.49.



Dans la pratique, la façon la plus commode pour résoudre ce système d'équations consiste à se ramener à un problème plan et à procéder de la façon suivante : Pour l'exemple présent,

la fréquence F_1 est choisie égale à 12 kHz et F_2 est choisie égale à 16kHz, car à 19kHz et aux fréquences plus élevées, l'onde ne pénètre pas suffisamment dans la deuxième couche et l'intersection des lieux n'est pas assez nette pour conduire à la solution la plus précise.

On trace pour chacune des deux fréquences $F_1=12\text{kHz}$ et $F_2=16\text{kHz}$, un réseau de courbes donnant l'évolution de α d'un milieu à deux couches, dont on connaît la valeur de σ_1 , en fonction de h_1 pour diverses valeurs de σ_2 . Soit :

le réseau $\alpha = f_1(h_1)$ à la fréquence $F_1=12\text{kHz}$ figure.48.

$$\sigma_2 = \text{Cte}$$

le réseau $\alpha = f_2(h_1)$ à la fréquence $F_2=16\text{kHz}$ figure.49.

$$\sigma_2 = \text{Cte}$$

Les intersections du réseau de la figure.48. et de la droite horizontale représentant la valeur de α_{F_1} donnent un certain nombre de couples (σ_2, h_1) solutions de l'équation (187). Ces couples appartiennent au lieu des solutions de l'équation (187) à la fréquence $F_1=12\text{kHz}$ (tracé planche 50).

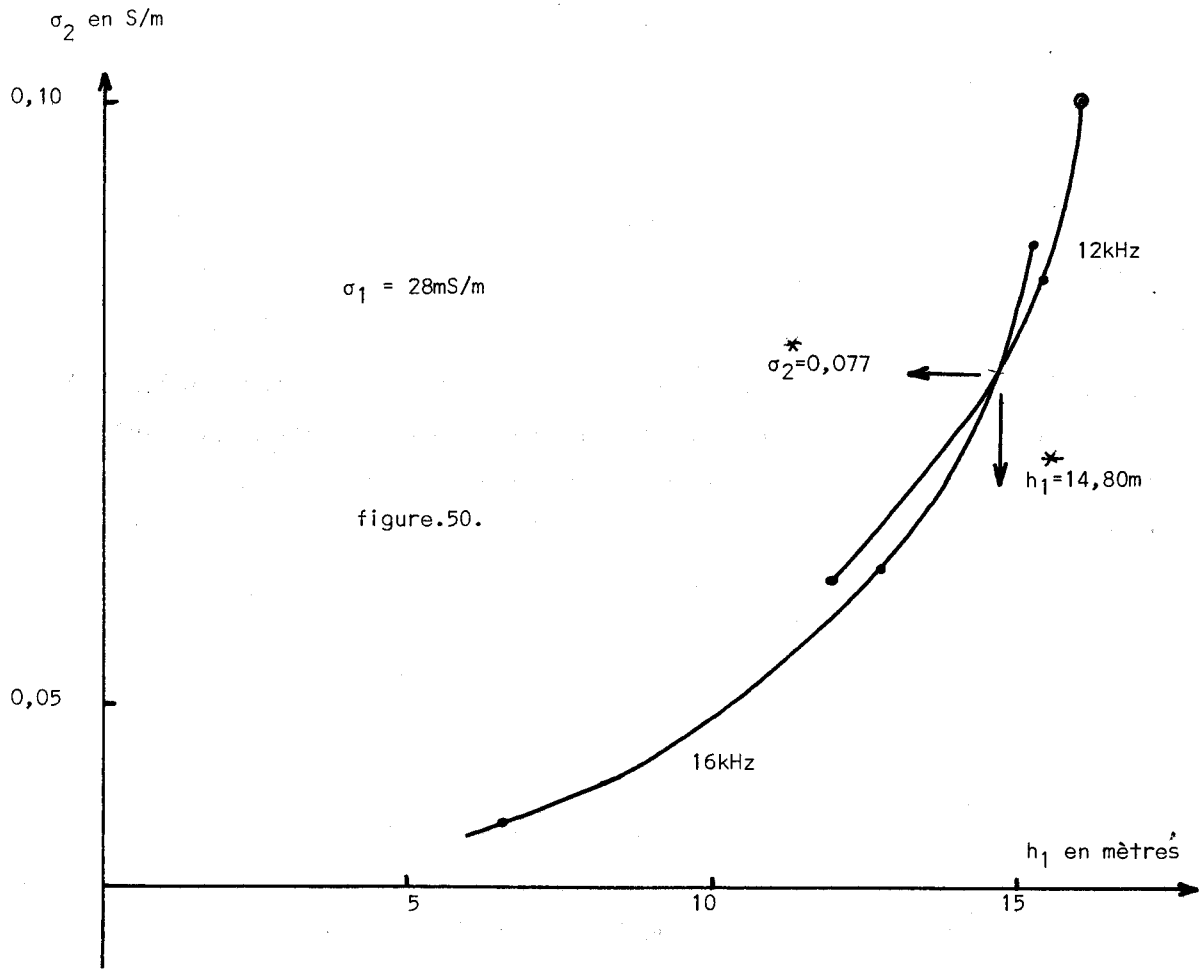
De même, l'intersection du réseau de la figure.49. et de la droite horizontale représentant la valeur de α_{F_2} permettent de tracer (figure.50.) le lieu des solutions de l'équation (188) à la fréquence $F_2 = 16\text{kHz}$.

L'intersection de ces deux courbes donne pour solution du système :

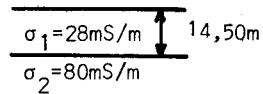
$$\sigma_2^* = 77\text{mS/m}$$

$$h_1^* = 14,80\text{m}$$

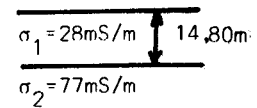
Le calcul de $\alpha = f(\text{fréquence})$, pour le cas du terrain à deux couches qui résulte de cette interprétation donne les valeurs reportées dans le tableau suivant. Ce résultat est placé en face des valeurs de α résultant de la structure de départ et de celles de la réponse en fréquence du demi-milieu dont la conductivité est égale à celle de la première couche.



Structure de départ



Structure résultant de l'interprétation



Fréquence en kHz	Valeurs simulées de α en degrés	α 1/2 milieu conductivité $\sigma = 28\text{mS/m}$	α milieu à 2 couches $\sigma_1 = 28\text{mS/m}$ $\sigma_2 = 77\text{mS/m}$ $h_1 = 14,50\text{m}$
19	58,57	61	58,65
16	61,12	64	61,23
12	65,32	69,5	65,45
10	67,96	73	68,02
8	71,03	75,70	71,13
6	74,64	79,20	74,72
4	79,00	83,50	79,08
2	84,47	87,50	84,53



On constate que l'écart relatif entre les valeurs finales de et les valeurs de départ est inférieur à deux pour mille. Dans la pratique, ces écarts ne peuvent plus être interprétés comme résultant de l'effet d'une couche supplémentaire.

On remarque d'autre part, que si le nombre de couches de la structure résultant de l'interprétation ne diffère pas de celle du modèle de départ, la valeur absolue des épaisseurs et des conductivités s'en écartent.

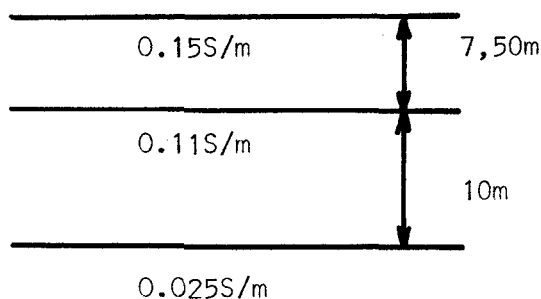
Cet écart est relativement plus important que celui existant entre les valeurs de départ et les valeurs finales de α .

Ceci permet de mettre en évidence la faible sensibilité des variations de α aux modifications des épaisseurs et des conductivités des couches constitutives du terrain.

II.4.2. Cas d'un milieu à trois couches

Nous allons effectuer le même type d'interprétation mais appliqué cette fois à un milieu à trois couches.

Le modèle théorique de départ est représenté en coupe ci-dessous :



Les valeurs de α et du rapport $|H_r|/|H_z|$ calculées avec ce modèle en fonction de la fréquence sont reportées dans le tableau suivant. Ces valeurs sont considérées comme la réponse en fréquence d'un milieu inconnu que l'on essaie de reconstituer.

α en degrés

90
80
70
60
50
40
30
20
10

F en kHz

1,1 2 4 6 10 12 16 19

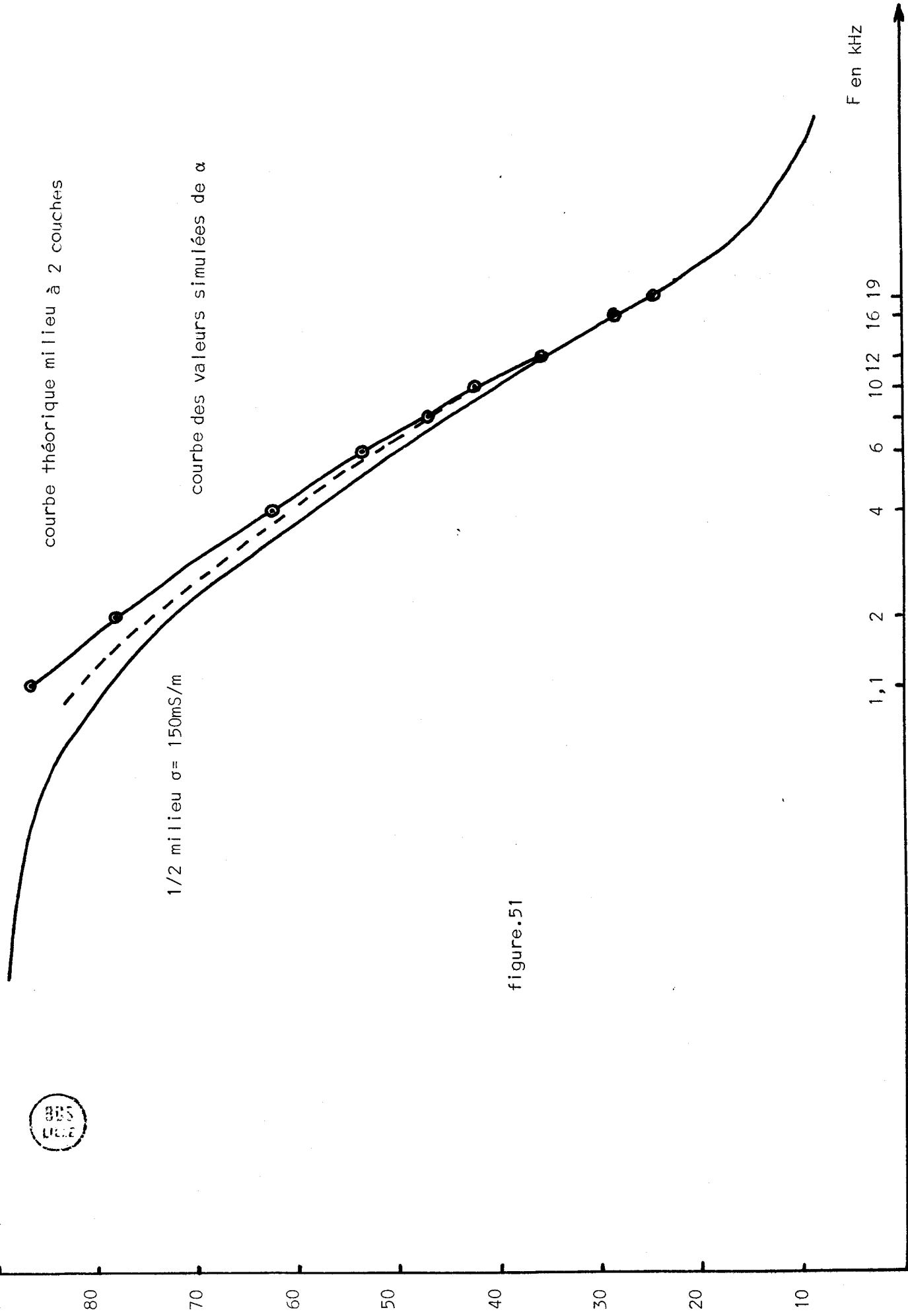


courbe théorique milieu à 2 couches

1/2 milieu $\sigma = 150\text{mS/m}$

courbe des valeurs simulées de α

figure.51



F en kHz	r en m.	H _r en mV	H _z converti en mV	H ₄₅ converti en mV	α simulé en degrés	H _r / H _z simulé
580	10	4360	1940	2150		2,25
19	40	41	23	21	25,70	1,78
16	40	40	27	22	30,42	1,48
12	40	40	32	21	37,57	1,25
10	40	51	48	30	42,12	1,06
8	40	63	66	40	47,95	0,955
6	40	61	74	43	54,34	0,824
4	40	53	79	47	64,07	0,672
2	40	17	38	25	77,22	0,448

On suppose qu'à 580kHz l'onde ne pénètre que dans la couche superficielle et le milieu inconnu se comporte comme un demi-milieu homogène. Dans ce cas, le rapport $|H_r|/|H_z|$ obtenu à 580kHz est celui d'un demi-milieu de conductivité égale à 0,15S/m. On en déduit que c'est la conductivité superficielle.

La courbe montrant l'évolution de α en fonction de la fréquence est comparée à celle du demi-milieu de conductivité égale à 150mS/m sur la figure.51.

On constate sur cette figure que cette courbe est pratiquement confondue avec la courbe du 1/2 milieu de conductivité σ_1 tant que la fréquence est supérieure à 12 kHz.

On peut donc supposer qu'au-delà de cette fréquence l'onde ne pénètre que dans la première couche. D'autre part, on constate que pour les fréquences inférieures la courbe des valeurs simulées est située à droite de la courbe du demi-milieu. Cela signifie qu'au fur et à mesure que la fréquence diminue, l'onde pénètre dans les couches inférieures de conductivité plus faible que la couche superficielle.

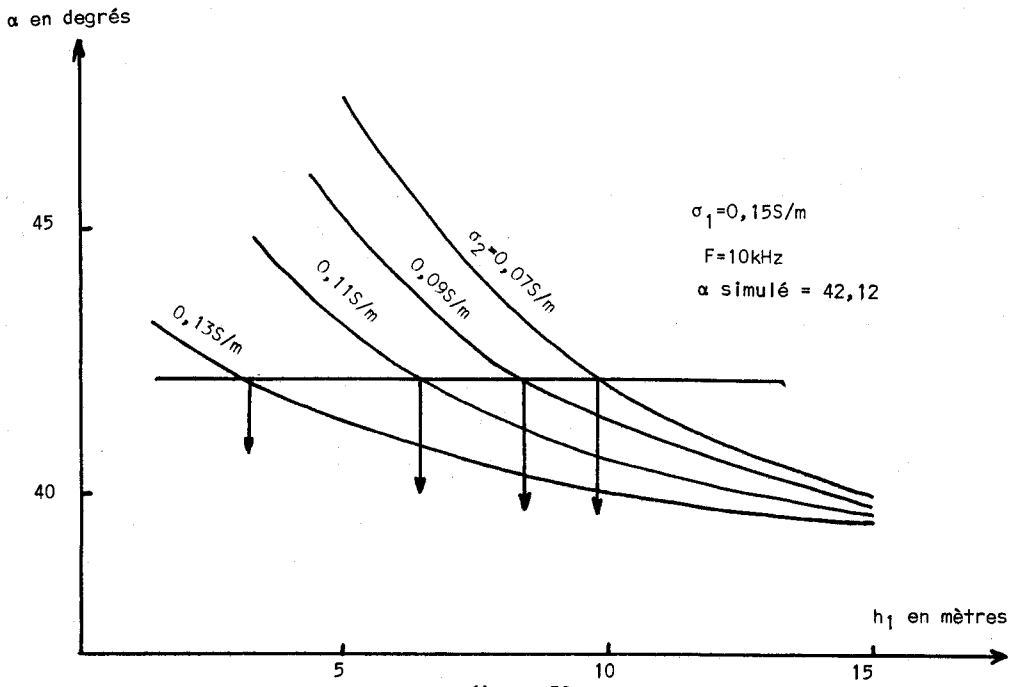


figure.52.

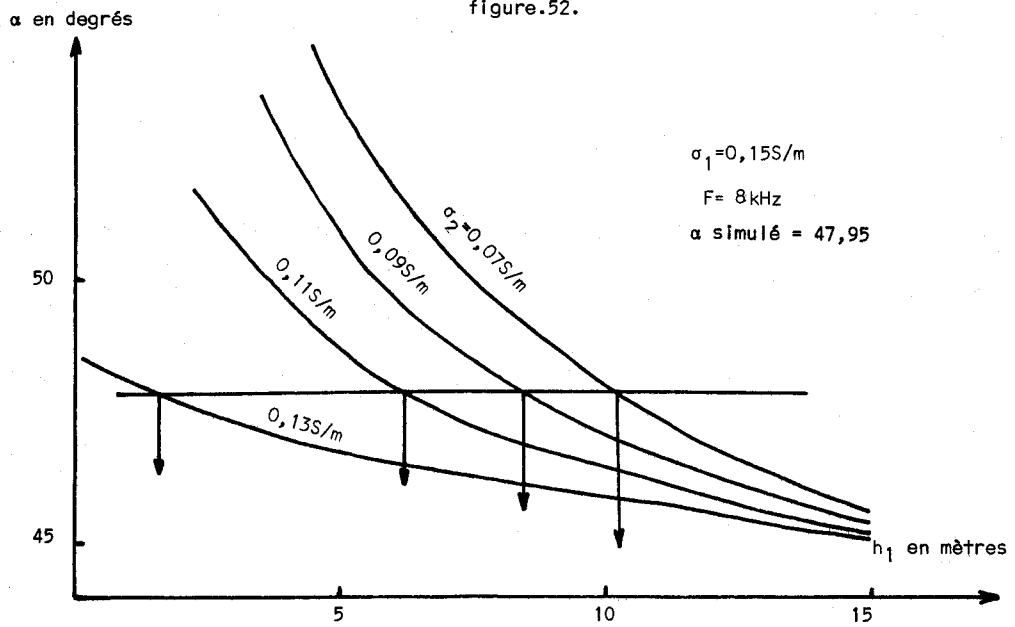


figure.53.

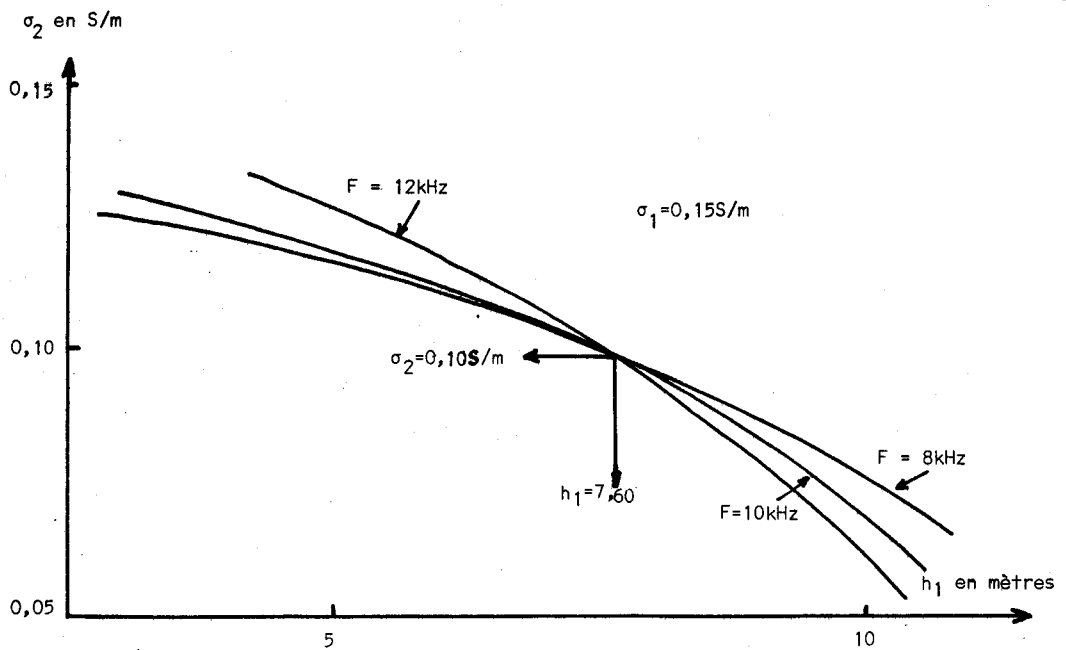


figure.54.



On suppose que pour les trois fréquences : 12kHz, 10kHz et 8kHz, l'onde ne pénètre que dans les deux premières couches. Par conséquent, pour ces fréquences, on suppose que tout se passe comme si le milieu sondé ne comportait que deux couches.

On recherche alors, comme précédemment, les caractéristiques du milieu théorique à deux couches qui produit, aux fréquences 10kHz et 8kHz les mêmes effets que le terrain sondé.

La figure.52. donne quatre couples (σ_2, h_1) solution de l'équation ;

$$\alpha_{\text{simulé à } F=10\text{kHz}} = f_{\text{théorique}}(\sigma_1, \sigma_2, h_1, F = 10\text{kHz}) \quad (189)$$

La figure.53. donne quatre couples (σ_2, h_1) solutions de l'équation :

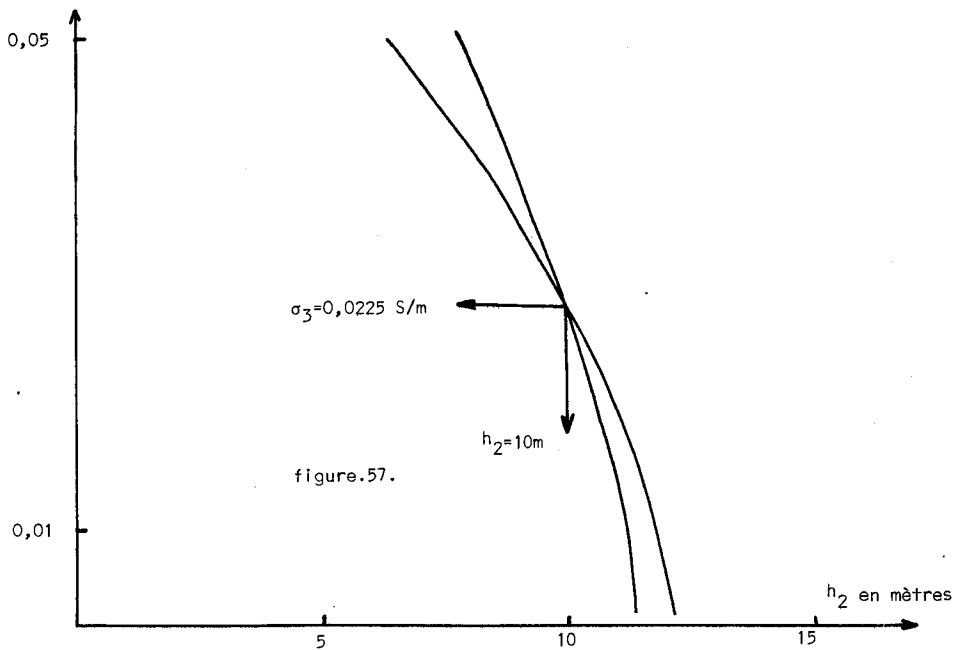
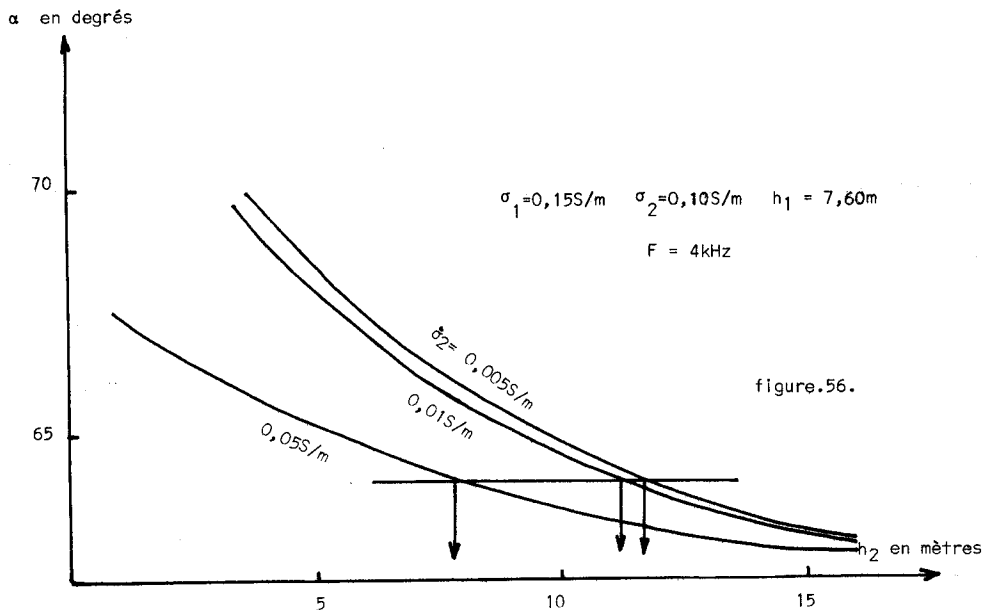
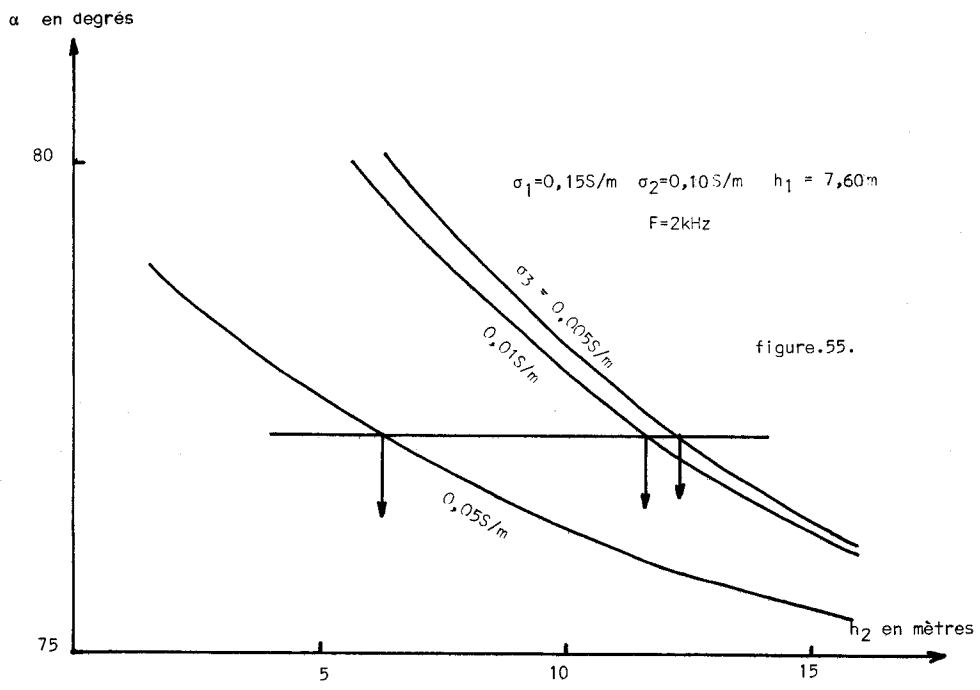
$$\alpha_{\text{simulé à } F=8\text{kHz}} = f_{\text{théorique}}(\sigma_1, \sigma_2, h_1, F = 8\text{kHz}) \quad (190)$$

La figure.54. donne au croisement des lieux des couples solutions, obtenus aux fréquences 12kHz, 10kHz et 8kHz, le couple "solution simultanée" donné par :

$$h_1^* = 7,6\text{m} \quad \sigma_2^* = 0.10\text{S/m} \quad (191)$$

On peut alors, dans le tableau ci-dessous et sur la courbe figure.51. comparer les valeurs simulées de α avec les valeurs de α obtenues en fonction de la fréquence à l'aide du milieu théorique à deux couches que nous venons de trouver.

Fréquence en kHz	α simulé	α du milieu à 2 couches
19	25°70	25,92
16	30°42	30,66
12	37°57	37,52
10	42,12	41,95
8	47,95	47,53
6	54,34	53,39
4	64,07	62,34
2	77,22	74,51



L'examen de ce tableau montre une bonne concordance entre les valeurs **de α simulées** et les valeurs théoriques pour toutes les fréquences supérieures à 8kHz. En-dessous de cette fréquence les valeurs théoriques s'écartent à nouveau des valeurs expérimentales. On peut donc en déduire que nous sommes en présence d'un milieu plus compliqué qu'un terrain à deux couches.

On recherche alors les caractéristiques d'un milieu à trois couches qui produit jusqu'à 2 kHz le même effet que le milieu sondé et dont les deux premières couches ont les mêmes conductivités que le milieu à deux couches trouvé précédemment. On utilise la même procédure que ci-dessus pour déterminer h_2 et σ_3 de ce milieu à 3 couches.

Les figures. 55. et .56. permettent de trouver trois solutions pour chacune des deux équations :

$$\alpha_{\text{théorique}}(\sigma_1=0,15\text{S/m}, \sigma_2=0,10\text{S/m}, h_1=7,6\text{m}, h_2^*, \sigma_3^*, F=4\text{kHz}) = \alpha_{\text{simulé}} \quad \text{à } F=4\text{kHz} \quad (192)$$

$$\alpha_{\text{théorique}}(\sigma_1=0,1\text{S/m}, \sigma_2=0,10\text{S/m}, h_1=7,6\text{m}, h_2^*, \sigma_3^*, F=2\text{kHz}) = \alpha_{\text{simulé}} \quad \text{à } F=2\text{kHz} \quad (193)$$

où (h_2^*, σ_3^*) représente chacun des couples solution.

Ces six couples obtenus servent à tracer des lieux, donnant les valeurs de la conductivité de la troisième couche et de l'épaisseur de la seconde couche du milieu à trois couches cherché. Soit, (figure.57.) :

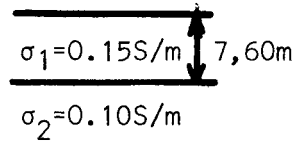
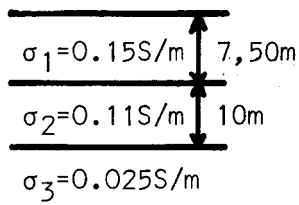
$$\sigma_3=22,5\text{mS/m} \quad h_2 = 10\text{m} \quad (194)$$

Enfin, le tableau suivant montre, que l'angle α calculé en fonction de la fréquence pour le milieu théorique de caractéristiques :

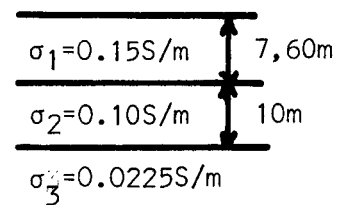
$$\sigma_1=0,15\text{S/m} \quad , \quad \sigma_2=0,10\text{S/m} \quad , \quad \sigma_3=0,0225\text{S/m} \quad , \quad h_1=7,60\text{m} \quad , \quad h_2 = 10\text{m}$$

a des valeurs quasiment identiques aux valeurs de α donnant la réponse en fréquence du milieu de départ.

Modèle de départ



Milieu résultant de l'interprétation



Fréquence en Hz	α simulé	α théorique 2 couches	α théorique 3 couches
19 000	25°70	25°92	25°67
16 000	30°42	30°66	30°40
12 000	37°57	37°52	37°55
10 000	42°12	41°95	42°10
8 000	47°95	47°53	47°94
6 000	54°34	53°39	54°34
4 000	64°07	62°34	64°10
2 000	77°22	74°51	77°29



Les écarts existant entre les valeurs de α obtenues pour le milieu à 3 couches et les valeurs de α obtenues expérimentalement sont inférieures à la valeur évaluée des erreurs de mesure que pourrait introduire l'appareillage. On ne peut donc plus interpréter ces écarts comme étant dus à l'effet d'une couche supplémentaire.

On constate sur ce tableau un écart peu important entre les caractéristiques du modèle de départ et celles du milieu résultant de l'interprétation.

La présentation de ces deux exemples, permet de faire remarquer deux difficultés d'interprétation qui peuvent conduire à des résultats erronés.

La première de ces difficultés est due à la nature de la méthode d'interprétation proposée. En effet, on suppose, par exemple dans le cas d'un terrain à trois couches, que pour les fréquences les plus élevées de la gamme, le terrain se comporte comme un milieu à deux couches. Dans l'exemple du terrain à trois couches précédent, cette hypothèse s'avère fondée et l'effet des couches de terrain inférieures à la deuxième est pratiquement nul sur la valeur des composantes du champ magnétique. Ceci est dû principalement au fait que l'épaisseur de la deuxième couche est suffisamment importante. Mais il se pourrait que l'épaisseur de cette couche soit plus faible et qu'il ne soit pas possible de trouver deux fréquences pour lesquelles l'effet des couches inférieures est négligeable. Dans ces conditions, si l'épaisseur de la deuxième couche est très faible et si sa conductivité n'est pas très importante, tout se passe comme si elle n'existait pas et le problème ne se pose même pas ; mais si son épaisseur n'est pas négligeable, la conductivité σ_2 que l'on trouvera aura une valeur comprise entre σ_2 et la conductivité de la couche suivante. La connaissance du sens du contraste de conductivité entre la deuxième et la troisième couche, permet d'en déduire le sens de l'erreur faite sur σ_2 et par retouches successives d'approcher la solution juste.

La seconde difficulté est due à la faible sensibilité de la méthode d'induction à la variation de la conductivité et des épaisseurs de couches de terrain.

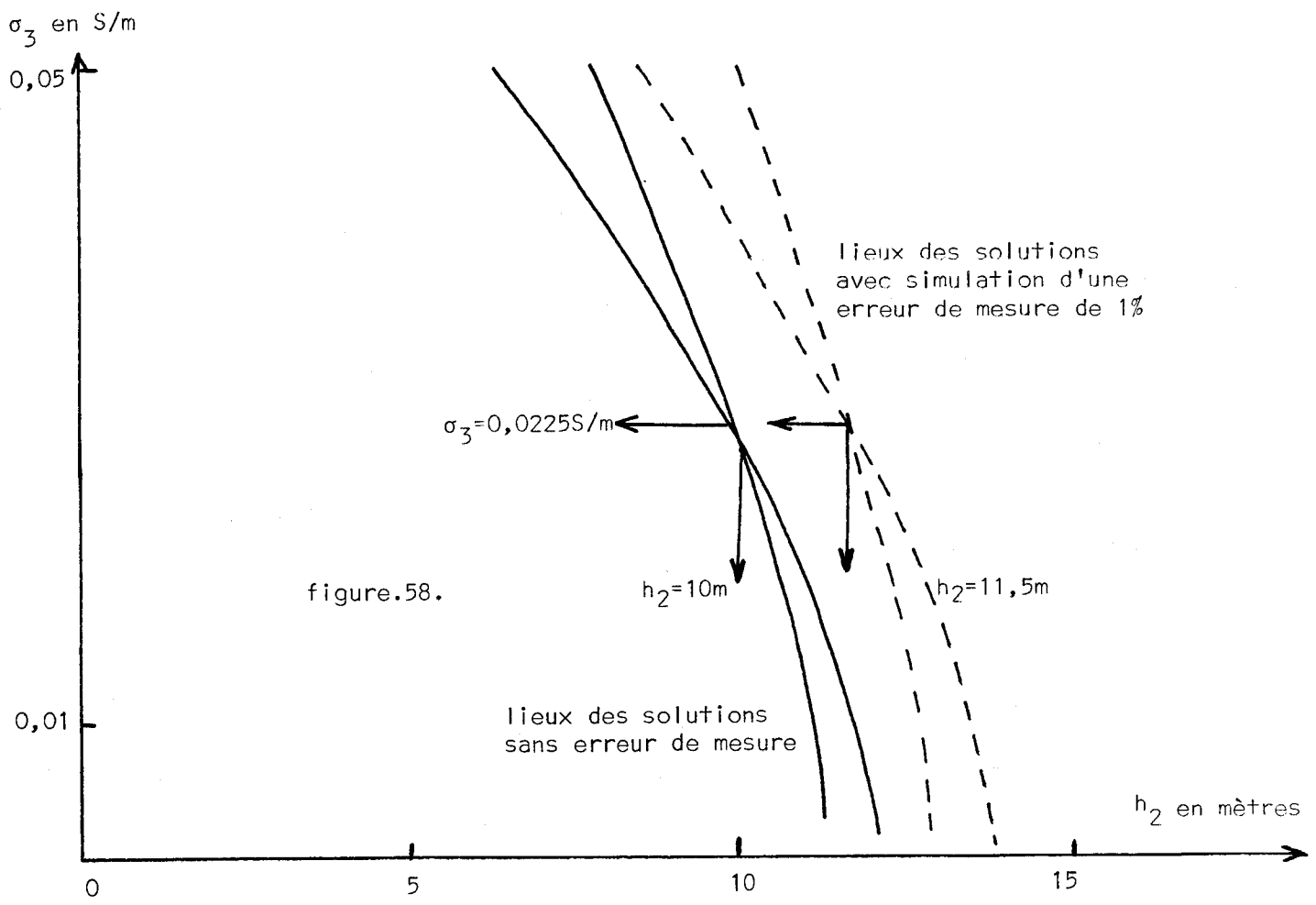


figure.58.



En particulier, une faible variation de la valeur expérimentale α due *par exemple* à une *erreur de mesure sur le terrain*, peut entraîner une *erreur importante sur la solution*.

Nous avons comparé sur la figure.58., les lieux de solutions de la figure.57. avec ceux obtenus en simulant une erreur de mesure de 1%. On constate que la solution devient :

$$\sigma_3 = 0.0225S/m \quad \text{et} \quad h_2 = 11,50m$$

au lieu de :

$$\sigma_3 = 0.0225S/m \quad \text{et} \quad h_2 = 10m$$

ce qui entraîne une erreur sur l'épaisseur de la seconde couche de 15%.

Il en résulte qu'il est nécessaire de concevoir un appareillage capable d'effectuer la mesure des composantes du champ magnétique avec une précision au moins égale et si possible meilleure au pour cent.

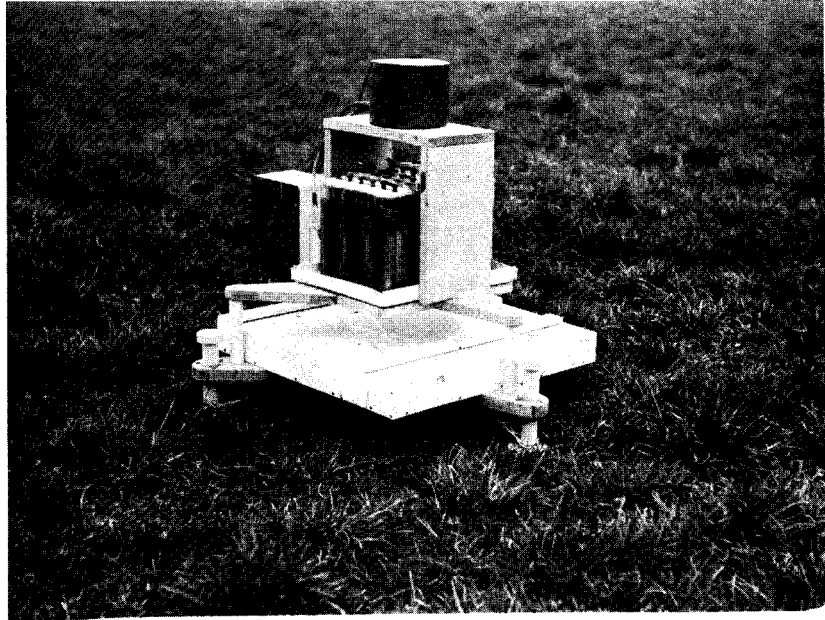
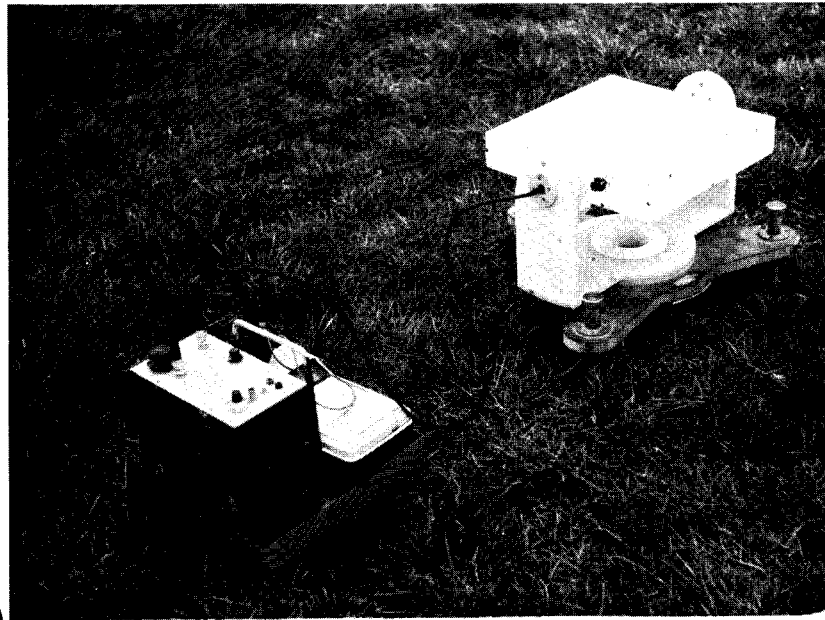


Figure 59



SUS
LILLE

Figure 60

I.5. Description de l'appareillage de mesure

Il est nécessaire de distinguer l'appareillage servant à la mesure de la conductivité superficielle et celui utilisé pour effectuer le sondage électromagnétique. Leurs fréquences de fonctionnement sont très différentes et leur construction fait appel à des technologies distinctes.

II.5.1. Appareillage de mesure de la conductivité superficielle

Le dispositif de mesure de la conductivité superficielle comporte une station d'émission et une station de réception. Ces deux stations sont séparées par une distance pouvant varier entre 5 et 10 mètres.

La station d'émission dont la photographie est donnée figure.59. est composée d'un amplificateur de puissance commandé par une horloge située en haut de l'appareil, et débitant un courant dans une bobine plate accordée en bas du dispositif. La fréquence du signal émis peut varier par valeurs fixes de 580kHz à 5,8MHz. La fréquence est choisie en fonction de l'épaisseur de la première couche. Pour les terrains que nous avons eu à sonder jusqu'à présent, l'expérience a montré que la fréquence de 580kHz suffisait.

L'ensemble de l'émetteur est construit suivant une structure coaxiale de façon à ce que le champ électromagnétique rayonné présente une symétrie de révolution autour de l'axe de la bobine. Des vis calantes permettent de placer le plan de la bobine d'émission parallèlement à la surface du sol.

Enfin pour permettre d'atteindre une précision de mesure maximum, l'émetteur dispose d'un circuit de régulation assurant un courant de sortie constant de l'amplificateur et indépendant de la conductivité du terrain et de la température.

La station de réception comporte, comme le montre la figure.60., un capteur de champ magnétique constitué par une bobine plate accordée sur la fréquence d'émission.

Pour permettre de s'affranchir de l'étalonnage du capteur et d'atteindre le maximum de précision, c'est le même bobinage qui effectue la mesure des composantes du champ magnétique en pivotant autour d'un axe horizontal.

Le capteur délivre une tension proportionnelle à l'amplitude de la composante du champ magnétique à l'entrée d'un amplificateur accordé. La tension de sortie de cet amplificateur est mesurée à l'aide d'un voltmètre numérique 1000 points. Cet amplificateur comporte trois étages : un étage amplificateur sélectif accordé sur la fréquence d'émission, un étage changeur de fréquence, et un étage amplificateur sélectif très basse fréquence accordé sur une fréquence voisine de 5kHz. Cette structure offre l'avantage de permettre un gain très élevé de l'amplificateur (80dB) et de délivrer un signal basse fréquence susceptible d'être mesuré à l'aide d'un voltmètre numérique.

L'amplificateur de réception est muni d'un contrôle automatique de fréquence permettant de compenser une éventuelle dérive dans le temps de la valeur des composants.

L'ensemble émetteur-récepteur est capable d'effectuer des mesures avec une précision de l'ordre du pour-cent.

II.4.2. Appareillage de mesure de l'angle α en fonction de la fréquence

Comme précédemment l'appareillage comporte une station d'émission et une station de réception.

II.4.2.1. Station d'émission

La station d'émission se compose d'un amplificateur de puissance débitant un courant en créneaux dans une boucle de fil souple circulaire posée sur le sol.

L'impédance de cette boucle est de la forme :

$$Z = R + j\omega L$$

La résistance R est en général très faible. Pour une boucle de 8 mètres de diamètre constituée par un fil de 1mm^2 de section les caractéristiques sont :

$$R \approx 0,8\Omega \quad \text{et} \quad L \approx 90\mu\text{H}$$

Cette boucle est accordable en série sur chaque fréquence d'émission.

Le courant débité par l'amplificateur est limité à la valeur maximum, admissible à l'aide d'une résistance placée en série avec la boucle.

Nous avons construit plusieurs émetteurs dont les caractéristiques diffèrent suivant la profondeur des sondages entrepris.

Pour des sondages effectués jusqu'à une profondeur de 20 mètres l'amplificateur de puissance est constitué par un préamplificateur suivi d'un étage de sortie du type push-pull série. Il est alimenté par une petite batterie d'accumulateurs au plomb, et il débite un courant de 7 Ampères crête à crête.

La figure.62. représente la station d'émission opérant au cours d'un sondage.



figure.62.

II.4.2.2. Station de réception

La station de réception est composée d'un capteur de champ magnétique constitué par une bobine plate de 300 spires comportant des prises intermédiaires toutes les 50 spires. Les fréquences de résonance propre correspondant à chaque partie de bobinage sont régulièrement réparties entre 48 kHz et 86 kHz. La bobine du capteur n'est pas accordée et on peut choisir pour chaque fréquence la prise qui procure le maximum de sensibilité.

Le capteur est suivi d'un filtre amplificateur accordable sur chacune des fréquences de la gamme. Le coefficient de qualité de ce filtre est de 100, son gain en tension est de 60 dB. Un contrôle automatique de fréquence permet de s'affranchir d'un éventuel glissement de la fréquence d'accord survenant au cours de la mesure.

La lecture de la tension proportionnelle au module de la composante du champ magnétique mesurée, s'effectue à l'aide d'un voltmètre numérique. Le schéma de détail du récepteur est reproduit en annexe.8. La figure.63. représente la station de réception en cours de mesure.

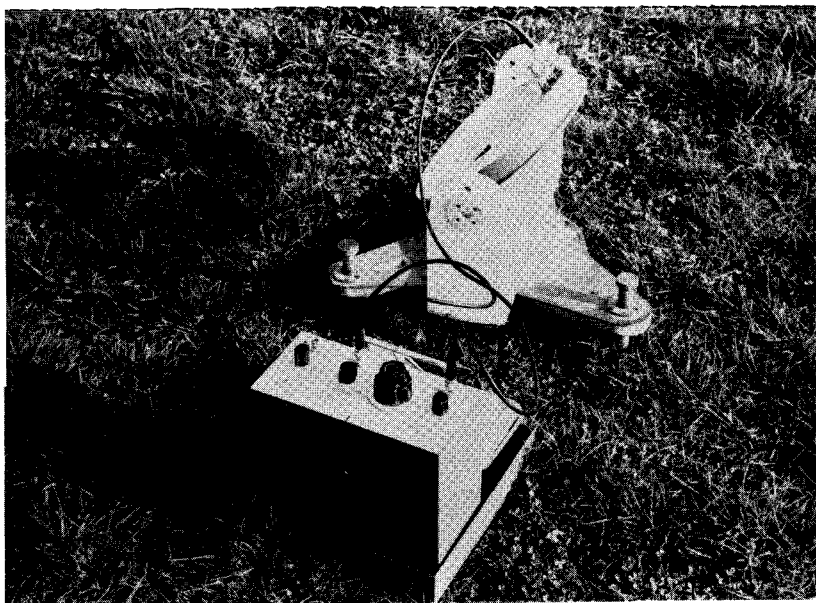
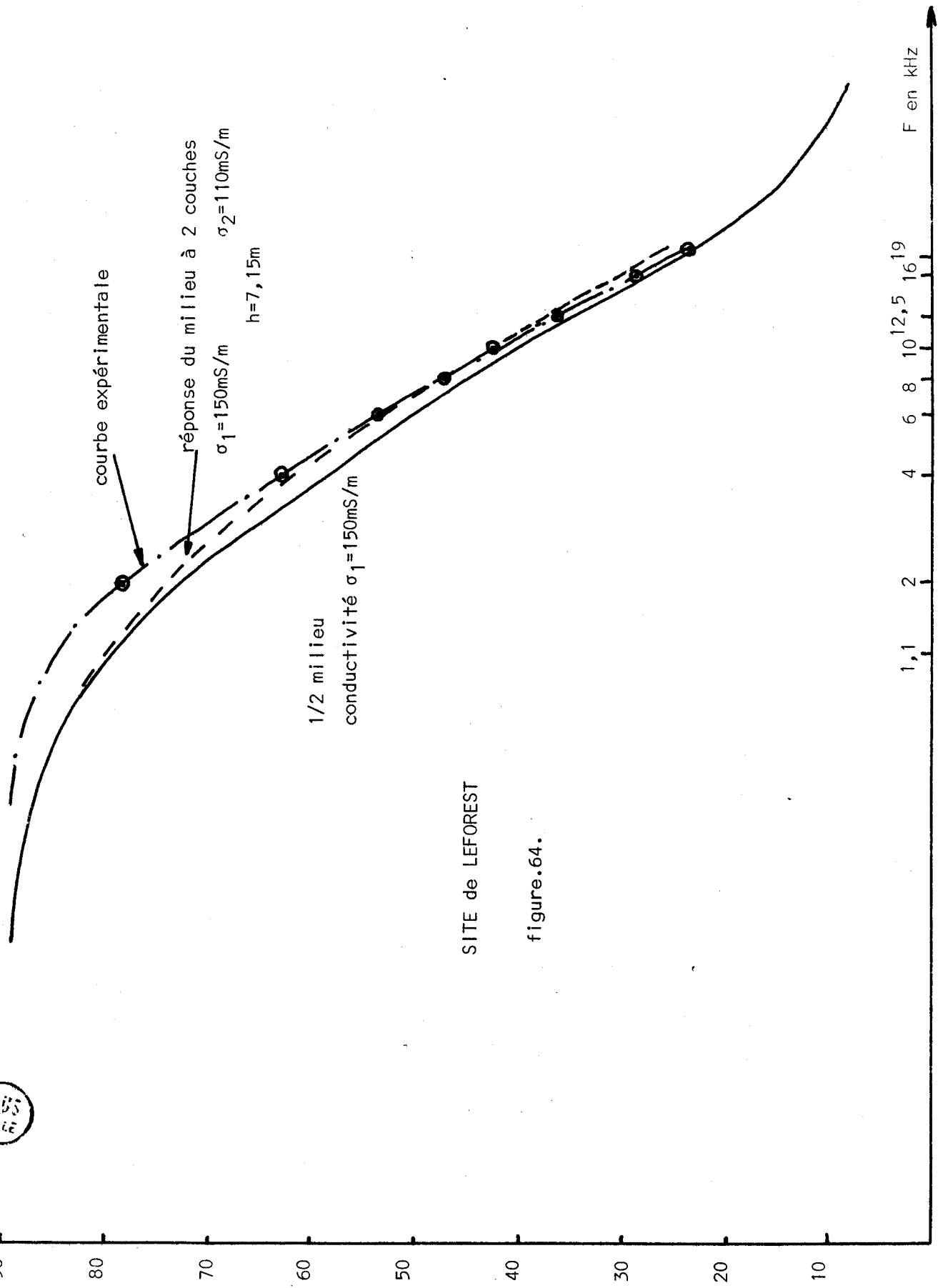


figure.63.

Cet appareillage a été utilisé sur quelques sites de la région du nord où nous avons effectué quelques sondages électromagnétiques jusqu'à une profondeur de 20 mètres.

α en degrés



SITE de LEFOREST

figure.64.

II.5. Résultats de prospections effectuées sur quelques sites de la région du nord

Nous donnons les résultats de prospection obtenus sur quelques terrains stratifiés de la région du nord en détaillant la méthode d'interprétation et en comparant les résultats des sondages électromagnétiques avec les données géologiques connues.

II.5.1. Sondage du site de Leforest

Nous avons effectué un sondage électromagnétique au nord de la carrière de Leforest.

Le site de Leforest a été choisi parce qu'il correspond au cas d'une couche conductrice surmontant une couche moins conductrice. Les résultats de mesures sur le terrain sont donnés sur le tableau suivant :

Fréquence	H_z	H_r	H_{45}	α expérimental en degrés
580kHz	2,03	4,36		
19kHz	23	41	21	24,53
16kHz	27	40	22	28,69
12kHz	32	40	21	35,85
10kHz	48	51	30	41,96
8kHz	66	63	40	47,62
6kHz	74	61	43	53,85
4kHz	79	53	47	63,76
2kHz	38	17	25	77,85



La mesure à 580kHz révèle une conductivité superficielle $\sigma_1 = 160\text{mS/m}$.

La planche.64. permet de comparer la courbe expérimentale $\alpha = f(\text{fréquence})$ à celle du demi-milieu de conductivité égale à σ_1 .

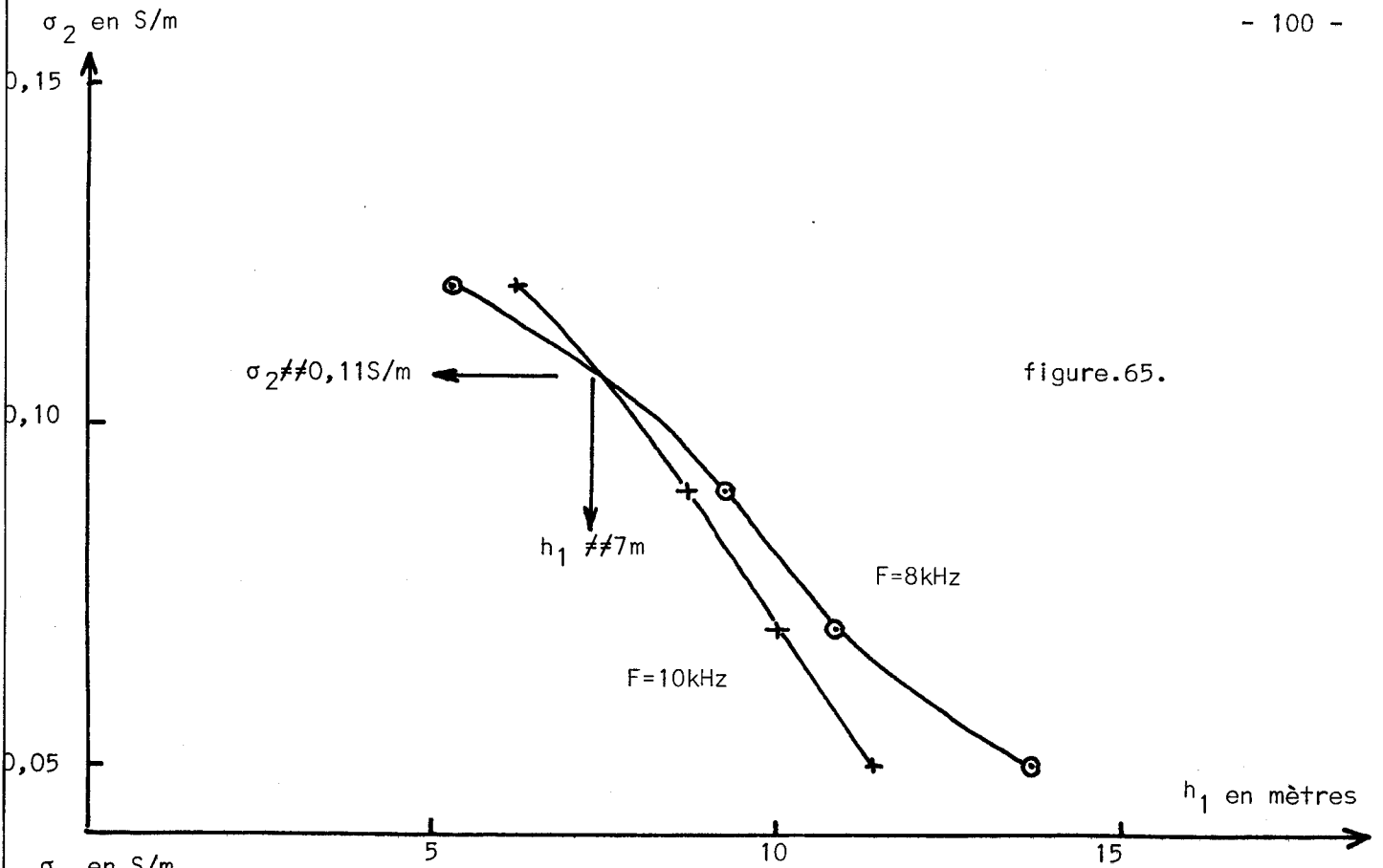


figure.65.

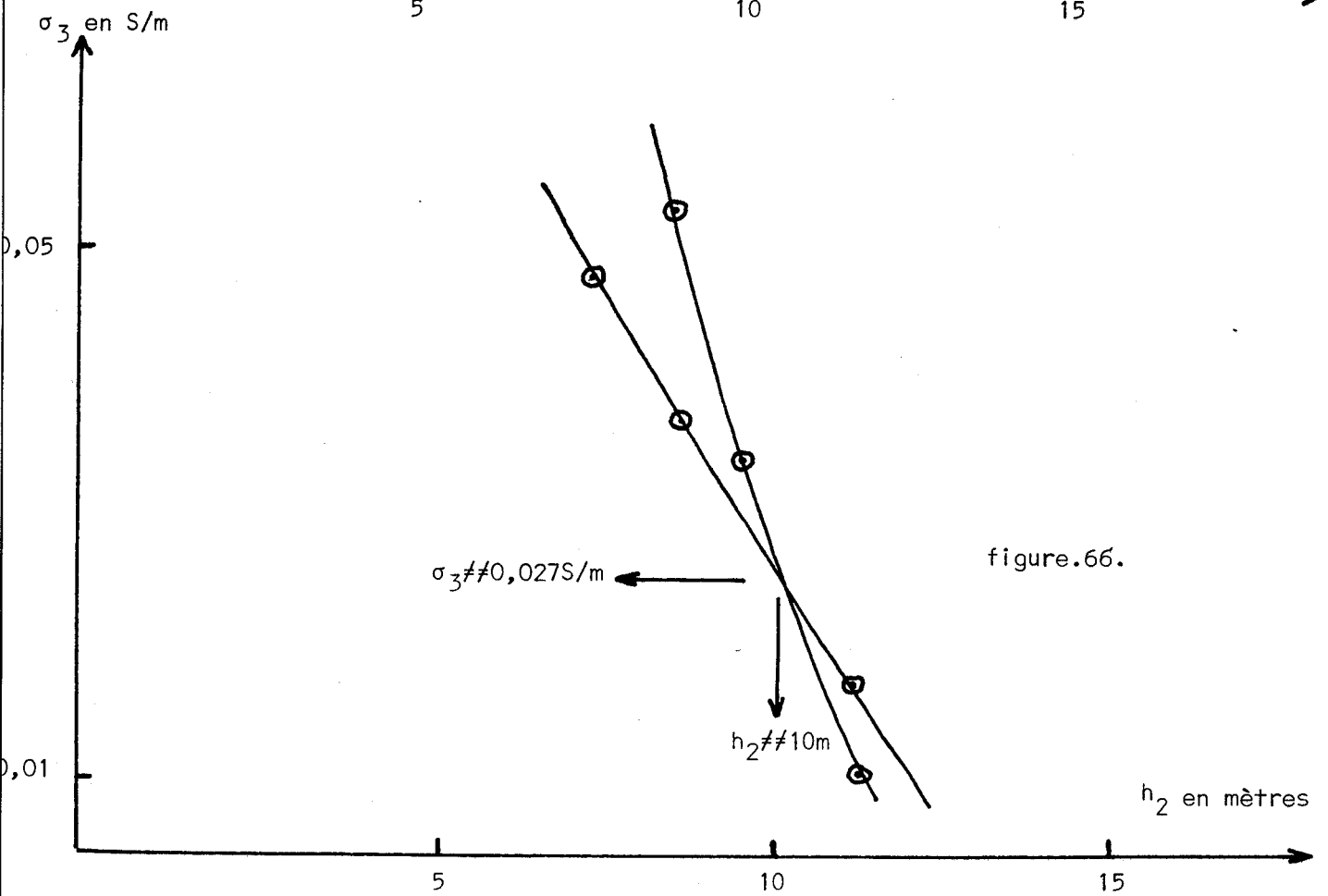
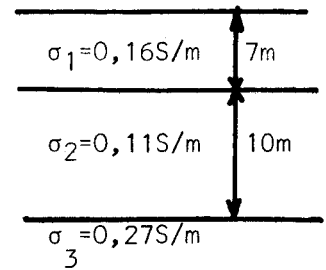
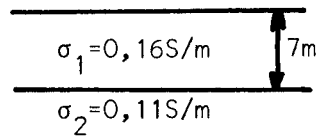


figure.66.





fréquence en kHz	α milieu à 2 couches $\sigma_1 = 0,16 \text{ S/m}$ $h_1 = 7 \text{ m}$ $\sigma_2 = 0,11 \text{ S/m}$	α expérimental	α 3 couches $\sigma_1 = 0,16 \text{ S/m}$ $h_1 = 7 \text{ m}$ $\sigma_2 = 0,11 \text{ S/m}$ $\sigma_3 = 0,27 \text{ S/m}$ $h_2 = 10 \text{ m}$
19	25,64	24,53	25,70
16	30,36	28,69	30,42
12	37,52	35,85	37,57
10	41,90	41,96	42,12
8	47,43	47,62	47,95
6	53,39	53,85	54,30
4	62,34	63,76	64,07
2	74,51	77,85	77,22



On constate que la courbe expérimentale est située à droite de la courbe du demi-milieu. Le terrain sondé possède donc une conductivité superficielle supérieure à celle des couches profondes.

La planche.65. représente les lieux des solutions des milieux à deux couches de conductivité superficielle égale à σ_1 , produisant le même angle α à 10kHz d'une part et à 8 kHz d'autre part que le terrain sondé. L'intersection de ces deux lieux, détermine le milieu à deux couches donnant la même réponse que le terrain sondé simultanément à 8 et à 10kHz. Ce milieu à deux couches a les caractéristiques :

$$\sigma_1 = 160\text{mS/m} \quad \sigma_2 = 110\text{mS/m} \quad h_1 \neq 7\text{m}$$

La réponse en fréquence de ce milieu à deux couches est comparée figure.64. à celle du demi-milieu et à la courbe expérimentale.

On constate que pour les fréquences inférieures à 4kHz la courbe expérimentale s'écarte à nouveau de la courbe théorique du milieu à deux couches, et permet de conclure que le site de Leforest se comporte comme un milieu à plus de deux couches. D'autre part, on déduit que la troisième couche a une conductivité inférieure à celle des couches supérieures.

La planche.66. donne le tracé des lieux des solutions des milieux à trois couches ayant la même réponse à 2kHz et à 4kHz que le terrain sondé.

L'intersection de ces deux lieux donne le couple solution :

$$\sigma_3 = 27\text{mS/m} \quad h_2 \neq 10\text{m}$$

Enfin, si on compare sur le tableau ci-contre la réponse en fréquence du milieu de caractéristiques :

$$\sigma_1 = 0,16\text{S/m} \quad , \quad \sigma_2 = 0,11\text{S/m} \quad , \quad \sigma_3 = 0,027\text{S/m} \quad , \quad h_1 = 7\text{m}$$

$$h_2 = 10\text{m}$$

on constate un léger écart entre la courbe expérimentale et la courbe théorique du milieu à trois couches pour les fréquences les plus élevées de la gamme. On peut compenser cet écart en augmentant légèrement la conductivité de la couche superficielle et en diminuant son épaisseur.

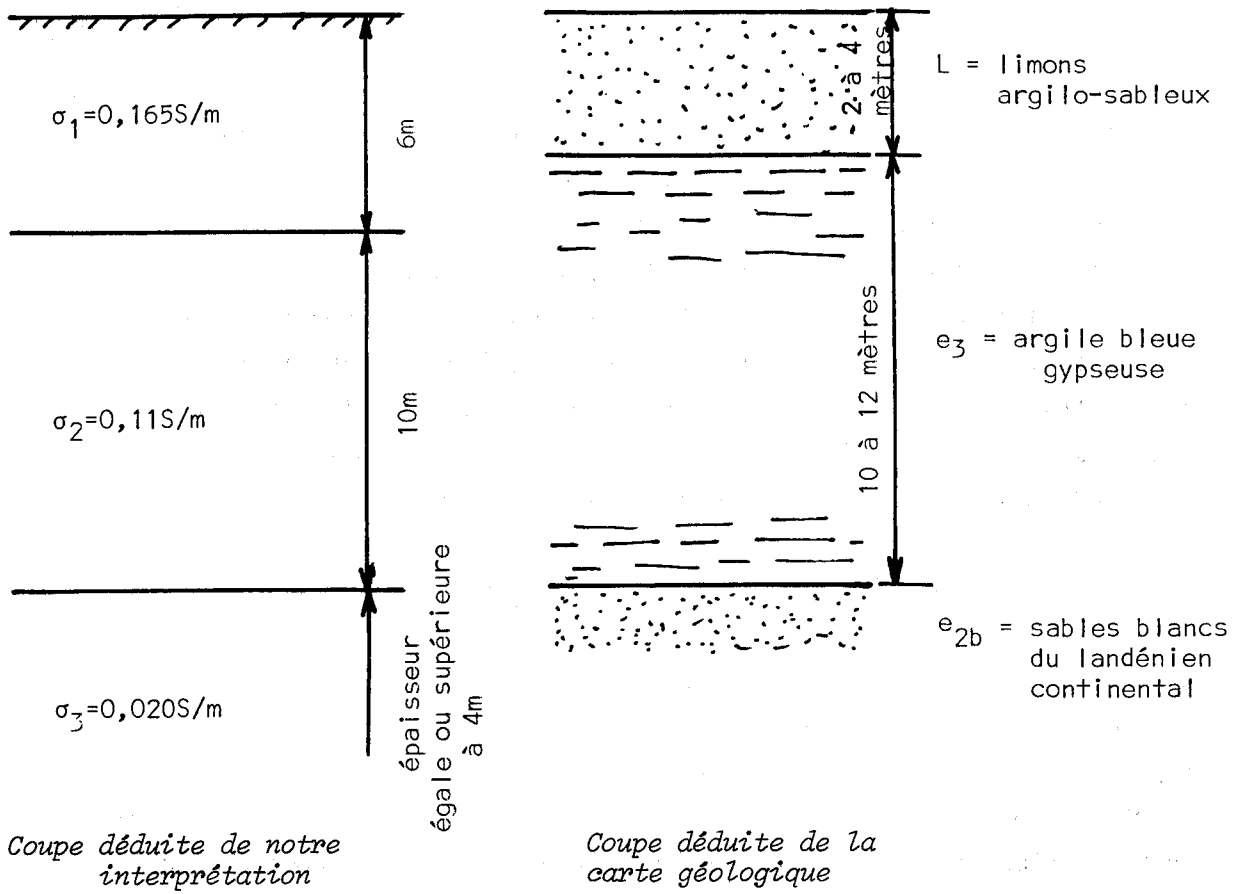


figure.67.

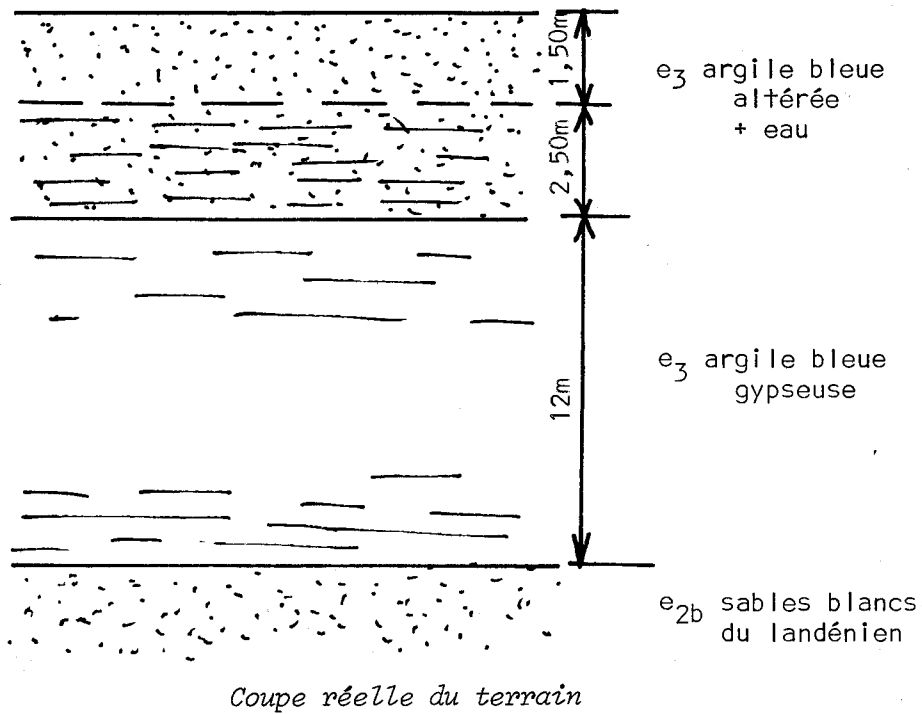


figure.67.bis.



La coupe du milieu stratifié à trois couches résultant de notre interprétation est représentée figure.67. Cette coupe est comparée à celle déduite de la carte géologique de Carvin.

La comparaison des deux coupes permet de constater que l'on distingue parfaitement les trois couches de terrain déduites de la carte géologique.

Toutefois on remarque que le sondage électromagnétique fait découvrir une couche de limon de 6 mètres alors qu'à partir de la carte géologique on peut constater que le limon a une épaisseur maximum de 4 mètres.

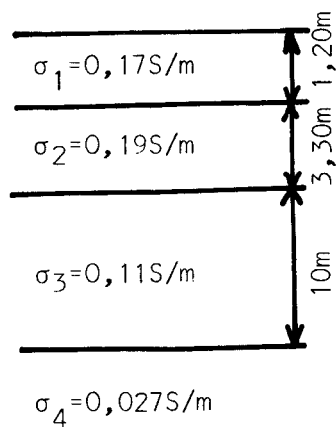
Cet écart entre les deux résultats peut s'expliquer par le fait que la couche d'argile bleue est imperméable et très épaisse. Il en résulte que cette couche peut retenir une nappe d'eau dans le bas de la couche de limon. Cette eau peut diffuser dans la couche d'argile sur une épaisseur de un à deux mètres, et rendre la partie supérieure de la couche aussi conductrice que le limon.

Nous avons cherché à vérifier cette hypothèse en pratiquant un petit sondage à la carrière à l'endroit où nous avons effectué nos mesures.

Ce sondage a révélé (voir figure.67.bis.) que l'argile gypseuse existe à partir de la surface. Cette argile est altérée et perméable à l'eau jusqu'à une profondeur de 4 mètres. L'argile inférieure non altérée et imperméable, retient dans le bas de la couche superficielle, une nappe d'eau dont le sommet est situé à une profondeur de 1,50m.

La découverte de cette nappe d'eau explique les difficultés que nous avons à raccorder à 19kHz les valeurs expérimentales et la réponse du modèle trouvé par l'interprétation.

En effet, la mesure à 580kHz, qui nous permet de calculer la conductivité de la première couche, n'intéresse que le terrain superficiel au-dessus de la nappe d'eau. Cette nappe d'eau augmente la conductivité de l'argile et fait intervenir une couche fortement conductrice que la méthode d'interprétation ne peut pas préciser, parce qu'aucune mesure n'a été faite entre 580kHz et 19kHz. Mais sa présence, sensible à plus basse fréquence, fait apparaître une erreur sur la composition de la première couche. Cette erreur est d'autant plus faible qu'elle intéresse les couches plus profondes.



Fréquences en kHz	α_{exp} en degrés	$\alpha_{\text{théorique}}$ réponse du milieu à 4 couches ci-dessus	écarts entre α_{exp} et $\alpha_{\text{théorique}}$
19	24,53	24,67	-0,55%
16	28,69	29,16	-1,6%
12	35,85	37,30	-3,9%
10	41,96	41,66	+0,72%
8	47,62	47,37	+0,52%
6	53,85	54,63	+0,18%
4	63,76	64,16	-0,62%
2	77,85	77,51	+0,44%



Le tableau ci-contre permet la comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées de α lorsque l'on tient compte de la couche conductrice située juste en-dessous de la couche superficielle. On constate que, sauf pour 12kHz où il semble que nous ayons fait une erreur de mesure importante, *l'écart relatif entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques obtenues avec le milieu à quatre couches résultant de l'interprétation est de l'ordre du pour cent.*

Ces écarts sont de l'ordre de grandeur des erreurs de mesure sur le terrain et on ne peut plus les interpréter comme résultant de l'effet de couches de terrains supplémentaires.

II.5.2. Sondage du site de Cassel

Nous avons effectué deux sondages sur le versant nord du Mont Cassel.

Le site de Cassel a été choisi parce qu'il correspond au cas d'une couche superficielle peu conductrice recouvrant une couche conductrice.

Par ailleurs, le mont Cassel est composé par un empilement de couches géologiques horizontales. Ces couches géologiques affleurent sur les flancs de la colline. La structure de cette colline peut donc être schématisée comme le montre la figure.68.

La méthode d'interprétation est basée sur les comparaisons successives des résultats de terrain et des résultats théoriques relatifs à des milieux stratifiés horizontalement.

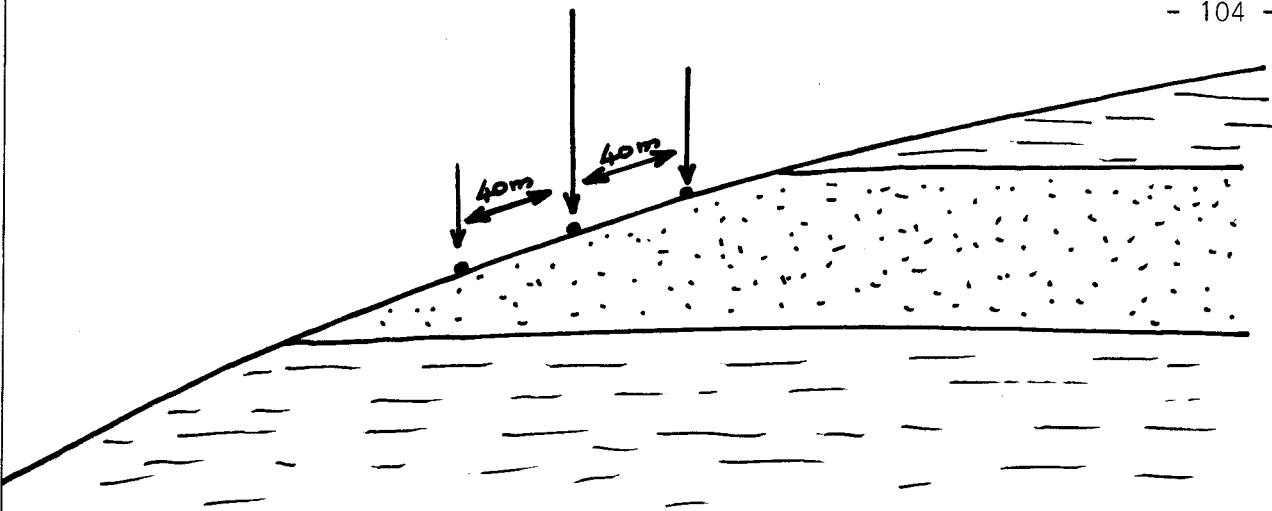


figure.68.

Logiquement il faut disposer l'axe joignant l'émetteur et le récepteur parallèlement à une courbe de niveau.

Nous avons volontairement disposé l'axe du dispositif de sondage perpendiculairement aux courbes de niveau. Cela permet de simuler l'effet d'un pendage des couches géologiques.

Nous avons disposé pour cela, comme le montre la figure.68., un récepteur de part et d'autre de la position de l'émetteur, et nous allons pouvoir comparer les deux résultats.

Les résultats du sondage effectué avec le récepteur placé en amont de l'émetteur sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

Fréquence	H_z	H_r	H_{45}	H_r/H_z	$\alpha_{\text{expérimental}}$
580kHz	3,45	2,78	1,97	0,805	
19kHz	50	32	20,5		59,40
16kHz	50	30,5	22		61,25
12kHz	50	25,5	22		65,54
10kHz	50	24	22,5		66,50
8kHz	61	27	30		69,23
6kHz	50	19,5	25		71,92
4kHz	66	22	37		75,75
2kHz	50	9	30		81,05

α en degrés

90

80

70

60

50

40

30

20

10



milieu 2 couches
 $\sigma_1=0,028S/m$ $\sigma_2=0,08S/m$ $h_1=14,7m$

1/2 milieu $\sigma=0,028S/m$

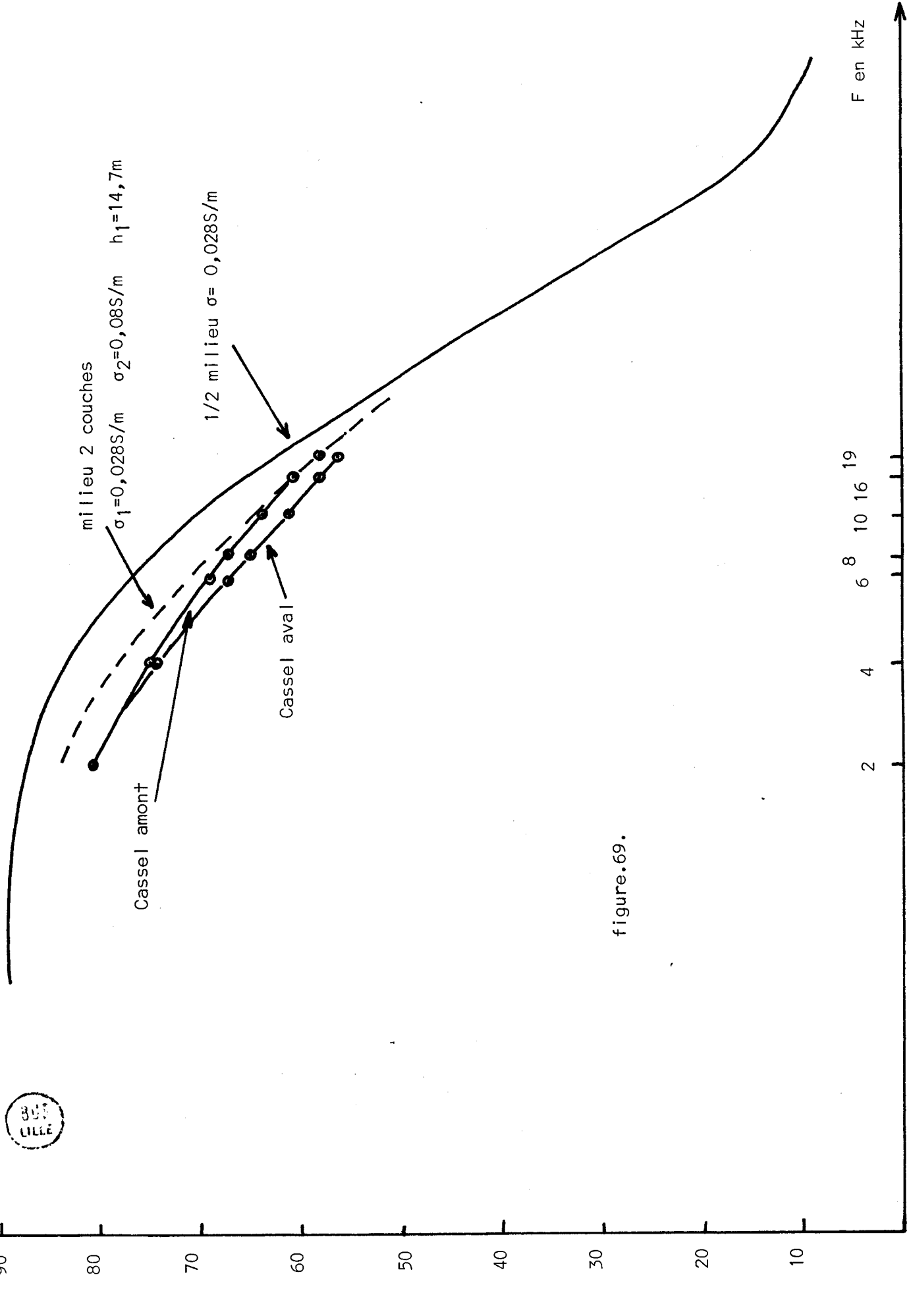
Cassel amont

Cassel aval

F en kHz
2 4 6 8 10 16 19

F en kHz

figure.69.



Les résultats relatifs au sondage effectué avec le récepteur placé en aval de l'émetteur sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Fréquence	H_z	H_r	H_{45}	H_r/H_z	$\alpha_{\text{expérimental}}$
580kHz	3,53	2,66		0,752	
19kHz	50	35	20		56,78
16kHz	50	34,5	22		57,85
12kHz	50	29	20		61,57
10kHz	50	26,5	23		64,99
8kHz	50	24	23		66,81
6kHz	50	21	25		70,30
4kHz	50	16	28		76,05
2kHz	51	10,5	31		81,20

Les mesures à 580kHz permettent de déterminer la conductivité superficielle du terrain.

Cette conductivité est égale à 28mS/m en amont de l'émetteur et à 25mS/m en aval.

La figure .69. comparant les courbes $\alpha = f(\text{fréquence})$ relevée expérimentalement à la courbe du demi-milieu de conductivité $\sigma_1=0,028\text{S/m}$, montre que le terrain superficiel est moins conducteur que les couches inférieures. Les lieux des milieux à deux couches solutions à 16kHz et à 12kHz tracés sur la figure .70 permettent de déduire les caractéristiques des deux couches supérieures des sondages en amont et en aval de l'émetteur.

Ces caractéristiques sont :

Sondage en aval

$$\sigma_1 = 28\text{mS/m}$$

$$\sigma_2 = 80\text{mS/m}$$

$$h_1 = 11\text{m}$$

Sondage en amont

$$\sigma_1 = 25\text{mS/m}$$

$$\sigma_2 = 82\text{mS/m}$$

$$h_1 = 14,70\text{m}$$

La figure .71. donne le tracé des lieux des milieux à trois couches

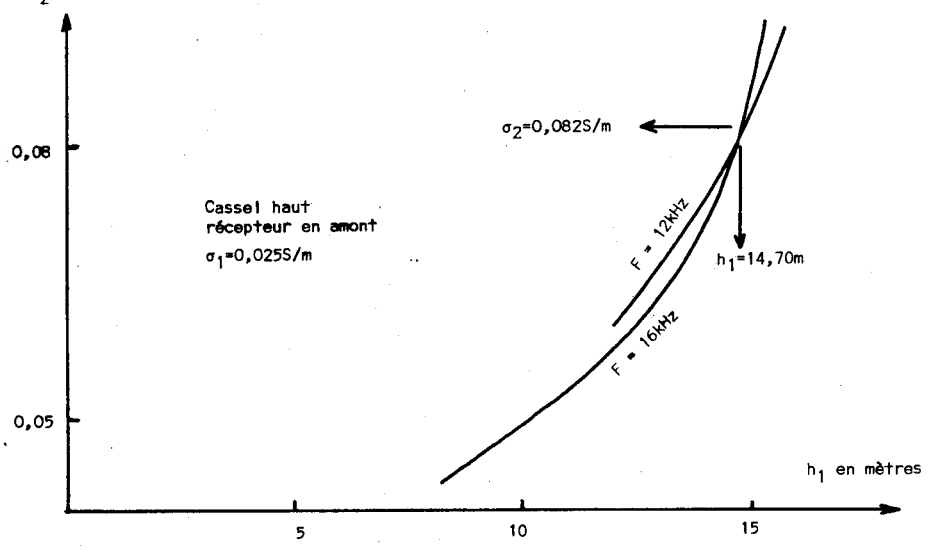
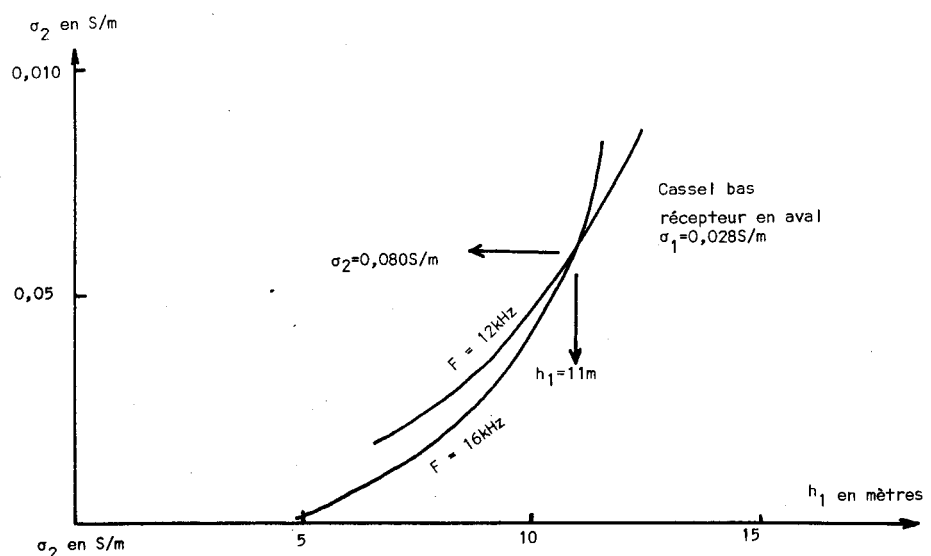


figure.70.

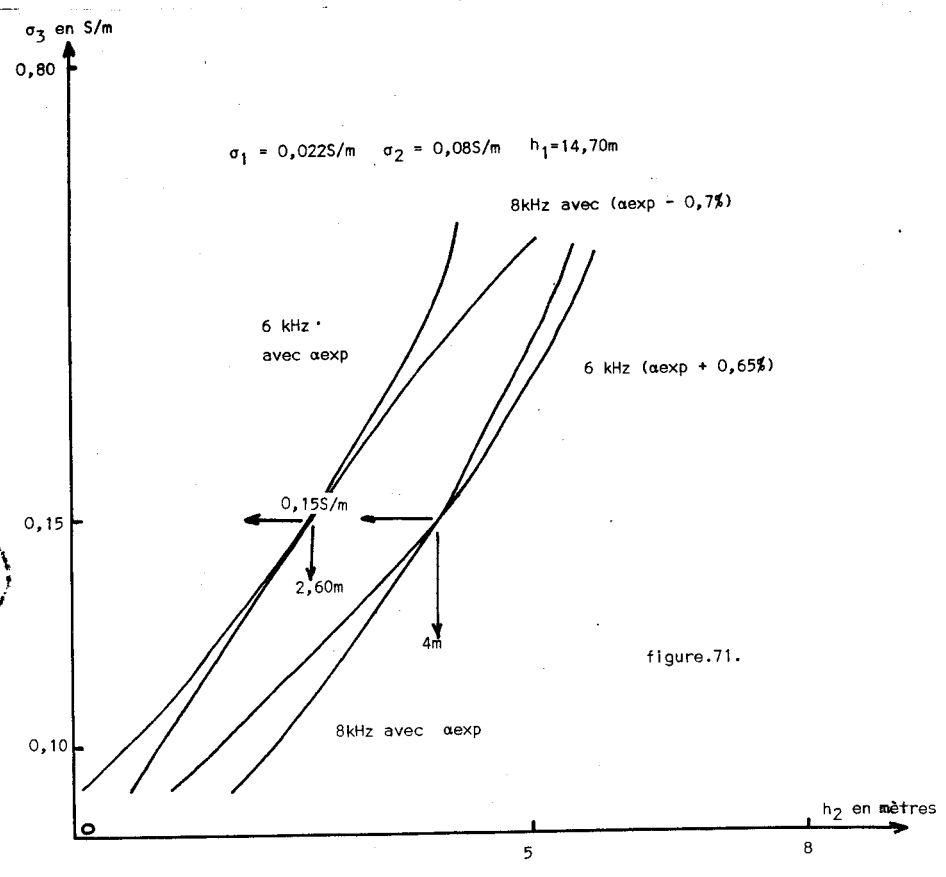


figure.71.



solutions à 8kHz et à 6kHz. On constate alors que si on utilise la valeur de α expérimental obtenue à 6kHz sur le terrain, les deux lieux n'ont pas d'intersection.

Dans ce cas on suppose une erreur de mesure faite sur la valeur de α soit à 8 kHz, soit à 6kHz.

Si on suppose une erreur de mesure faite à 8kHz, on se rend compte que lorsque les lieux s'interceptent, on obtient deux solutions, elles se réduisent à une solution unique lorsque les lieux deviennent tangents. Cette solution est obtenue en supposant une erreur par excès de 0,7% sur la valeur de α mesurée à 8kHz, et elle est égale à :

$$\sigma_3 = 0,15S/m \qquad h_2 = 2,60m$$

Par contre si on simule une erreur par défaut de 0,65% sur la mesure de χ à 6kHz, on obtient la solution :

$$\sigma_3 = 0,15S/m \qquad h_2 = 4m$$

En définitive, on suppose que le milieu relatif au sondage situé en amont de l'émetteur est composé comme il suit :

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 = 0,028S/m & \sigma_2 = 0,08S/m & \sigma_3 = 0,15S/m \\ h_1 = 14,70m & h_2 = 3,50m & \end{array}$$

parce que sa réponse en fonction de la fréquence donne les valeurs de α les plus proches des valeurs expérimentales

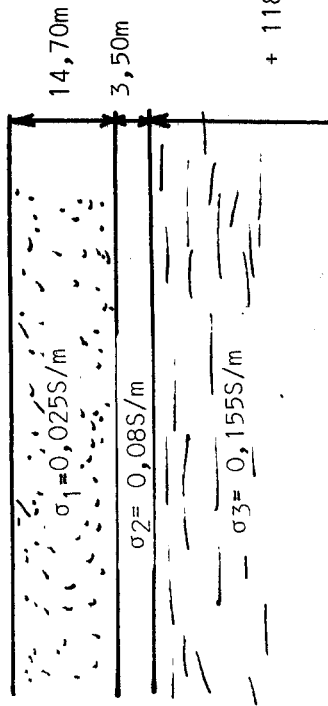
Une interprétation identique appliquée au sondage en aval de l'émetteur donne pour solution :

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 = 0,02S/m & \sigma_2 = 0,08S/m & \sigma_3 = 0,15S/m \\ h_1 = 11,5m & h_2 = 2,50m & \end{array}$$

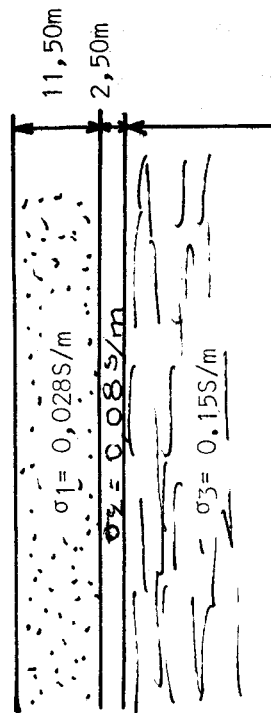
Les réponses des milieux à trois couches solutions comparées aux valeurs expérimentales sont données dans le tableau suivant. On observe une bonne correspondance entre ces réponses.



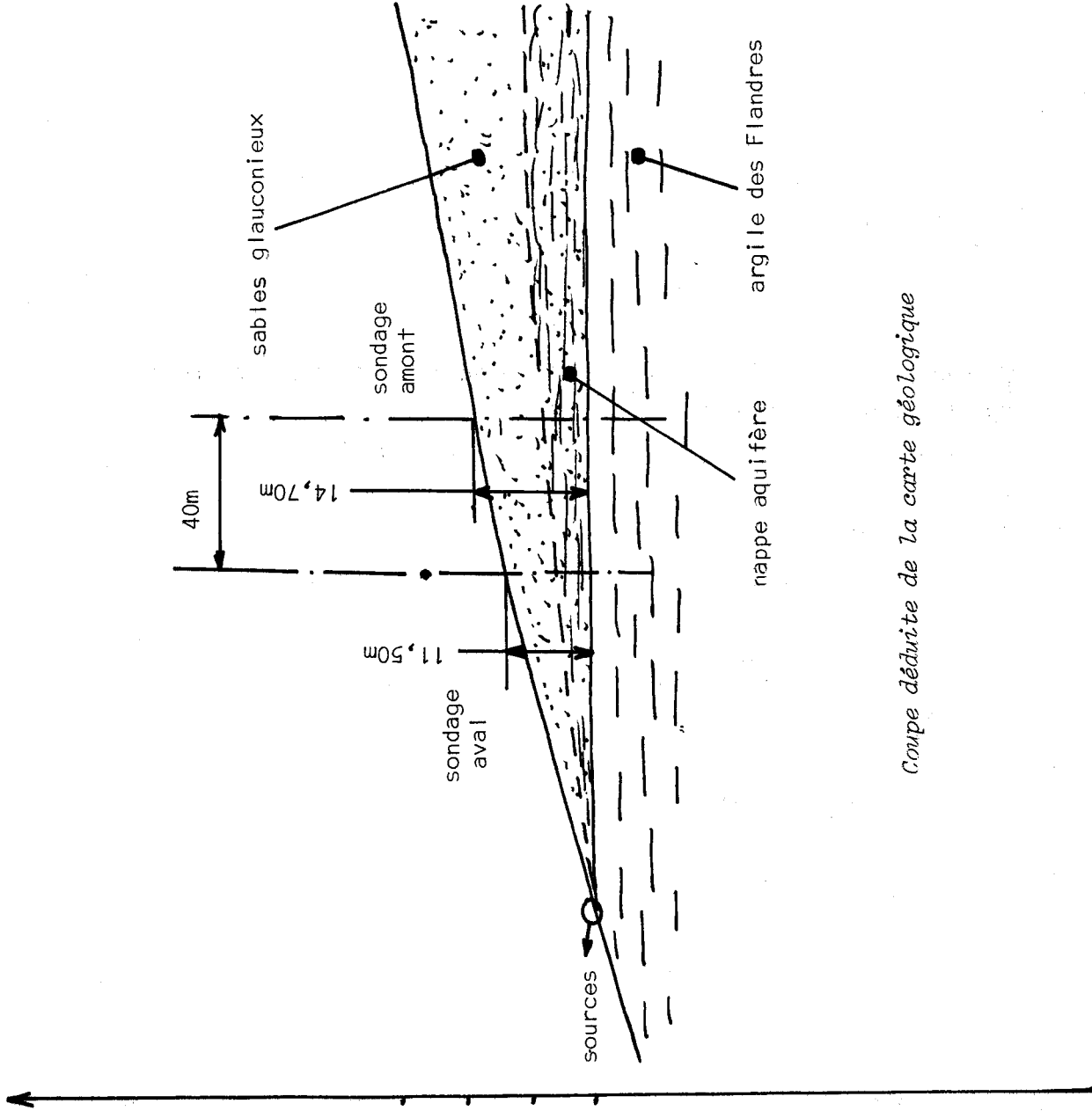
sondage amont



sondage aval



Coupes déduites de notre interprétation



Coupe déduite de la carte géologique

figure.72.

Fréquences en kHz	Cassel amont			Cassel aval		
	α_{exp}	milieu à 2 couches solution	écart $\frac{\alpha_{exp} - \alpha_{3c}}{\alpha_{exp}}$	α_{exp}	milieu à 3 couches solution	écart $\frac{\alpha_{exp} - \alpha_{3c}}{\alpha_{exp}}$
19	59,40	58,39	+1,7%	56,78	56,55	+0,4%
16	61,25	60,63	+1%	57,85	58,55	-1,2%
12	65,14	64,17	+1,5%	61,57	61,60	-0%
10	66,50	66,56	-0%	64,99	64,22	+1,2%
8	69,23	69,23	0%	66,81	66,58	+0,34%
6	71,92	72,44	-0,72%	70,30	70,25	+0%
4	75,75	76,50	-1%	76,05	75,98	+0%
2	81,05	82,19	-1,4%	81,20	81,02	+0,25%

Ces sondages ont été effectués sur le flanc nord du mont Cassel aux altitudes approximatives 110 et 130 mètres.

En ces endroits, la coupe géologique déduite de la carte géologique de Cassel peut s'interpréter de la manière suivante :

- sables glauconieux de l'Ypresien supérieur (Panisélien) .. de 0 à 30m.
- argile des Flandres

La notice XXIII.3. de la carte de Cassel précise que les sables paniséliens renferment à leur base un niveau aquifère retenu inférieurement par les niveaux imperméables de l'argile des Flandres.

La coupe géologique est comparée (figure .72.) à celle des milieux à trois couches solutions.

Cette comparaison permet de constater que les résultats de l'interprétation des sondages corréleront très bien avec les données géologiques où :

- la couche superficielle de conductivité 28S/m correspond à la couche de sable,
- la couche intermédiaire de conductivité de 8mS/m correspond à une nappe aquifère dont l'épaisseur diminue lorsque l'on se rapproche de l'affleurement de la couche d'argile,
- la couche inférieure correspond à la couche d'argile des Flandres.

En tenant compte de l'épaisseur du sable, on peut repérer approximativement sur la coupe géologique, la verticale des points où l'on effectue le

sondage. On constate alors que la distance séparant ces deux verticales est égale à 50 mètres. Or, les positions successives des récepteurs est de 80 mètres, cela signifie, comme on avait pu le prévoir, que la verticale du sondage ne correspond pas à celle passant par la position du récepteur, mais que ce que l'on mesure est une valeur moyenne de la nature des terrains situés entre l'émetteur et le récepteur.

II.5.3. Sondage du site de Lezennes

Le site de Lezennes a été choisi, car il contient des carrières souterraines dans la couche de craie qui le compose. Nous avons effectué deux sondages électromagnétiques sur Lezennes. L'un est situé dans une zone où il n'y a pas de carrières souterraines, l'autre est situé au-dessus d'une carrière souterraine connue.

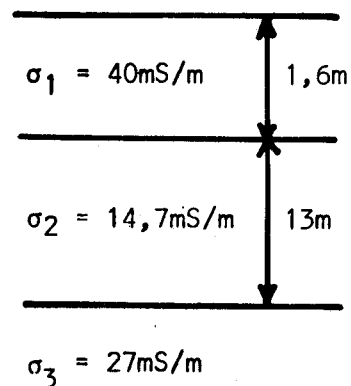
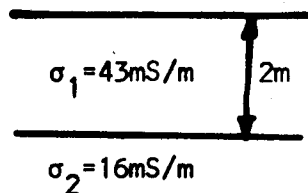
Les résultats obtenus sur le terrain sont donnés sur le tableau ci-dessous :

Fréquences	α hors carrière	α sur carrières
19kHz	68,77	65,50
16kHz	71,57	68,48
12kHz	75,56	73,57
10kHz	76,96	76,17
8kHz	79,37	78,21
6kHz	82,11	81,11
4kHz	84,75	83,66
2 kHz	88,44	87,60

les mesures à 580kHz pratiquées hors carrières et sur carrières donnent les conductivités superficielles suivantes :

hors carrières : $H_r/H_z = 1,035$ à 580kHz $\sigma_1 = 0,040$ S/m
 sur carrières : $H_r/H_z = 1,2$ à 580kHz $\sigma_1 = 0,068$ S/m

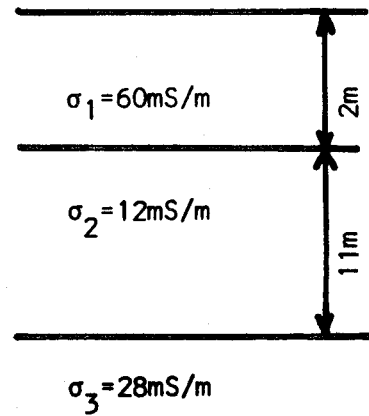
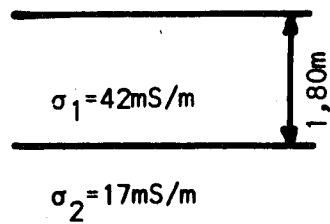
L'interprétation des résultats relevés sur le terrain donne les solutions successives rassemblées sur les tableaux suivants :



SONDAGE HORS CARRIERE

Fréquences en kHz	milieu à 2 couches	α_{exp}	milieu à 3 couches	
			$\alpha_{\text{théor.}}$	$\frac{\alpha_{\text{exp}} - \alpha_{\text{th}}}{\alpha_{\text{exp}}}$
19	68,17	68,77	68,33	+0,64%
16	71,41	71,57	71,17	+0,56%
12	76,16	75,66	75,29	+0,48%
10	78,63	76,96	77,53	+0,78%
8	81,12	79,37	79,97	-0,75%
6	83,72	82,11	82,58	-0,57%
4	86,36	84,75	85,41	-0,77%
2	88,74	88,44	88,21	+0,26%





SONDAGE SUR CARRIERES				
Fréquences en kHz	milieu à 2 couches	α_{exp}	milieu à 3 couches	
			$\alpha_{\text{théor.}}$	$\frac{\alpha_{\text{exp}} - \alpha_{\text{th}}}{\alpha_{\text{exp}}}$
19	65,14	65,50	64,9	+0,9%
16	68,29	68,48	67,81	+1%
12	73,78	73,57	72,98	+0,8%
10	76,67	76,17	75,56	+0,8%
8	79,50	78,21	78,30	+0,14%
6	82,51	81,11	81,30	-0,25%
4	85,62	83,66	84,59	-1%
2	88,47	87,60	87,89	-0,34%

Les coupes des terrains correspondant à ces résultats sont reportées figure.73.



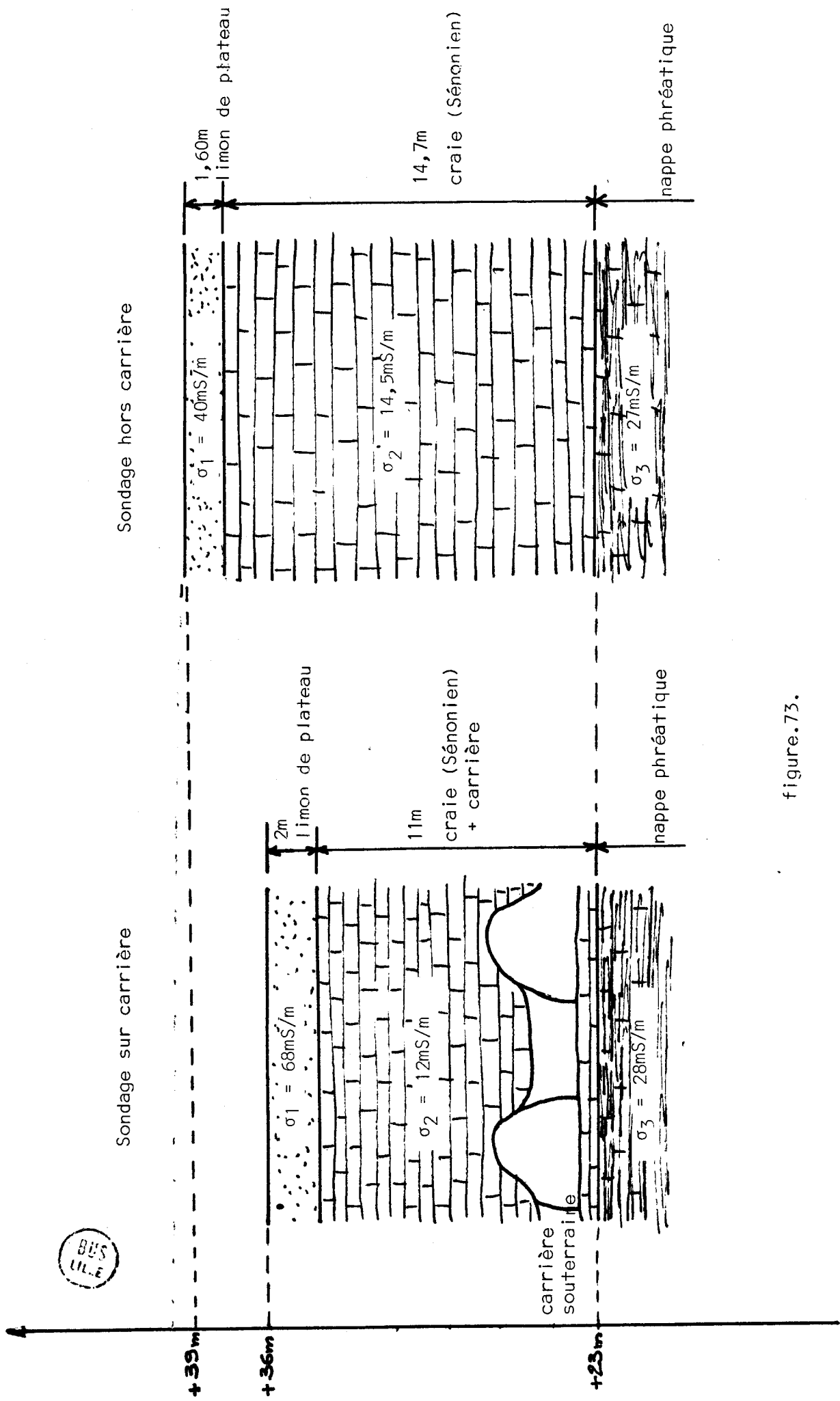


figure.73.

La couche superficielle représente le limon de plateau, la couche intermédiaire de conductivité plus faible que la couche superficielle correspond à la couche de craie blanche (Sénonien), la couche inférieure de conductivité voisine de 28mS/m correspond à la nappe phréatique.

La partie supérieure de la nappe phréatique est découverte à une profondeur de 16,30m par le sondage hors carrière et à une profondeur de 13 mètres par le sondage sur carrière.

Or, on peut déduire de la carte géologique que l'altitude à la surface du sondage hors carrière est de 39 mètres tandis que l'altitude à la surface du sondage sur carrière est de 36 mètres environ. Il en résulte que l'on retrouve bien la surface de la nappe phréatique horizontale ce qui est conforme aux données hydrogéologiques.

On constate en outre que la couche de craie a une conductivité égale à 14,50mS/m lorsqu'il n'y a pas de carrière, et cette même couche de craie a une conductivité plus faible et égale à 12mS/m lorsqu'il existe une carrière souterraine. Le sens de variation de la conductivité de la couche de craie correspond bien à celui que l'on peut penser être provoqué par la présence d'une hétérogénéité non conductrice.

Le simple examen des valeurs expérimentales laisse supposer que la conductivité moyenne du terrain, calculée à toutes les fréquences comprises entre 19kHz et 2 kHz, est plus importante à l'endroit où il existe une hétérogénéité isolante qu'à l'endroit où il n'y en a pas. Par conséquent une méthode d'interprétation qui consisterait à calculer pour chaque fréquence la conductivité apparente du terrain, ne permettrait pas de conclure à la présence des carrières. Ceci est dû au fait que la couche superficielle de limon, dont la conductivité et surtout l'épaisseur, varient beaucoup d'un point à un autre interviennent pour une part très importante sur les valeurs de α .

Par contre, la méthode que nous utilisons qui consiste à découvrir successivement les caractéristiques des diverses couches de terrain permet plus facilement de mettre en évidence la présence d'une hétérogénéité isolante telle qu'une carrière souterraine profonde située dans l'une des couches.

A partir de ce résultat nous pensons dans un proche avenir perfectionner la méthode de mesure et la méthode d'interprétation pour tenter

de mettre en oeuvre un procédé électromagnétique capable de détecter des hétérogénéités isolantes telles que des carrières souterraines du type d'exploitation par chambres et piliers situées à des profondeurs voisines de 15 mètres.

C O N C L U S I O N

Nous avons fait une étude critique d'un procédé de prospection géophysique bien connu mettant en oeuvre un dipôle magnétique vertical (D.M.V.) pour permettre de l'utiliser dans le cas de la prospection à faible profondeur qui présente une utilité certaine en géotechnique.

Nous nous sommes tout d'abord placé dans le cas où l'on pouvait supposer qu'à l'endroit où l'on effectuait la mesure des composantes du champ électromagnétique créé par le D.M.V., l'onde émise pouvait être considérée comme une onde plane se propageant dans une direction normale aux interfaces.

Nous avons pu montrer que lorsque cette condition était réalisée on pouvait interpréter les résultats de mesures à l'aide d'une formulation aussi simple qu'en magnétotellurique.

Mais dans ce cas il faut placer le récepteur à une distance importante de l'émetteur.

Par exemple, pour une prospection à une profondeur de l'ordre de 30 mètres, il faut respecter entre l'émetteur et le récepteur, une distance au moins égale à 1200mètres. Ceci explique les résultats décevants obtenus par certains auteurs qui utilisaient une méthode d'interprétation analogue avec un dispositif dont l'espacement émetteur-récepteur était inférieur ou égal à 800mètres.

Des distances supérieures ou égales à 1200mètres ne peuvent être atteintes qu'en mettant en oeuvre un émetteur d'une puissance de plusieurs kilowatts. Dans ces conditions la méthode perd beaucoup de son intérêt pour la prospection à faible profondeur.

Pour effectuer une prospection à faible profondeur avec un matériel d'un poids et d'une puissance faibles, nous avons considéré le cas où l'émetteur était proche du récepteur.

Nous avons tout d'abord montré dans les cas où on peut considérer que le potentiel créé par le D.M.V. est solution de l'équation

de Laplace, dans quelles conditions il faut se placer pour rendre l'amplitude de la composante horizontale du champ magnétique proportionnelle à l'épaisseur de la couche superficielle d'un milieu à deux couches. Ce résultat nous a permis d'envisager une méthode, à notre connaissance originale de la mesure directe de cette épaisseur.

Nous nous sommes ensuite placé dans le cas où il n'était plus possible de faire d'approximations et où les composantes du champ électromagnétique d'un D.M.V. placé au-dessus d'un milieu stratifié devaient être calculées à l'aide d'une intégration numérique du potentiel. Nous avons pratiqué plusieurs sondages dans ces conditions en employant une méthode d'interprétation qui, par approximations successives, permet de reconstituer la structure du terrain sans supposer a priori le nombre de couches qui le constituent. Cette méthode d'interprétation, associée à un appareillage capable d'effectuer des mesures précises ont donné des résultats qui corrélaient parfaitement avec la structure réelle des terrains.

La principale originalité de ce travail est que nous utilisons le même type d'appareillage pour mesurer les caractéristiques des diverses couches de terrain y compris la couche superficielle. De plus cet appareillage est capable d'effectuer des mesures précises, ce qui nous permet d'interpréter toute fluctuation supérieure à 2% des composantes du champ comme résultant de l'effet d'une couche de terrain.

Nous avons pu ainsi montrer que ce type d'appareillage et cette méthode d'interprétation pouvaient servir à déceler la présence d'une carrière souterraine là où d'autres méthodes d'interprétation avaient échoué.

BIBLIOGRAPHIE

T A B L E D E S A N N E X E S

ANNEXE.1.

Rappel des fondements de la théorie matricielle. Expression du potentiel créé dans l'atmosphère par un D.M.V. disposé au-dessus d'un sol stratifié.

ANNEXE.2.

Calcul des coefficients N_{12} et N_{22} pour un demi-milieu stratifié à M couches.

ANNEXE.3.

Expression de l'inclinaison du grand axe d'une ellipse en fonction du module de sa projection sur les axes ox , oy et oz incliné d'un angle de $\pi/4$ sur ox .

ANNEXE.4.

Rappel des fondements de l'intégration d'une fonction par la méthode dite "méthode du col".

ANNEXE.5.

Composante horizontale du champ magnétique créé au-dessus d'une fine couche conductrice par un dipôle magnétique vertical.

ANNEXE.6.

Expressions intégrales des composantes du champ d'un D.M.V., mises sous une forme intégrale numériquement.

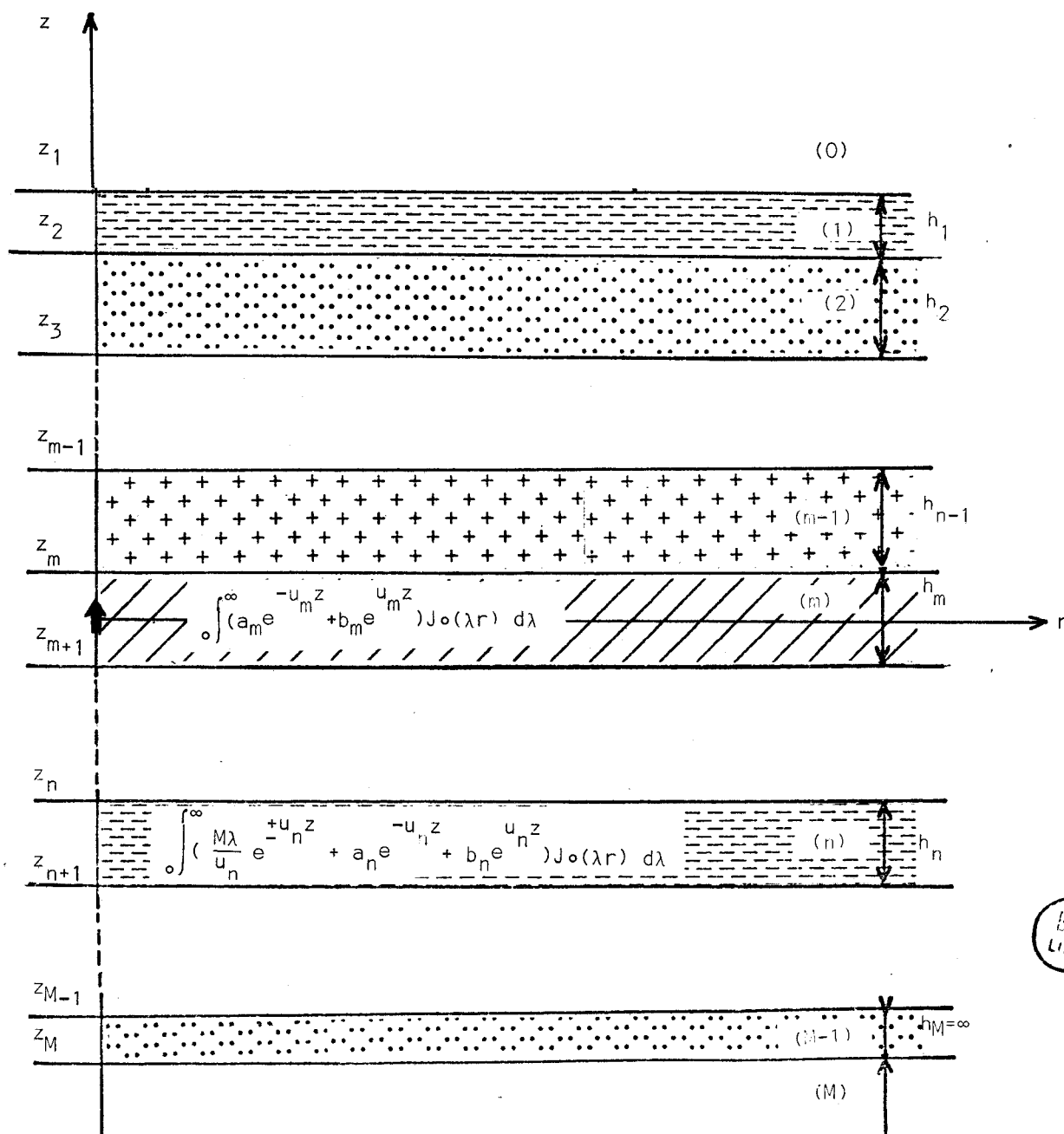
ANNEXE.7.

Composantes H_z et E_ϕ du champ électromagnétique créé par une boucle placée à la surface du sol. Comparaison avec les composantes du dipôle.

A N N E X E . I .

RAPPEL DES FONDEMENTS DE LA THEORIE MATRICIELLE. EXPRESSION DU POTENTIEL
CREE DANS L'ATMOSPHERE PAR UN D.M.V. DISPOSE AU-DESSUS D'UN SOL STRATIFIE

I. POTENTIEL CREE DANS UNE COUCHE QUELCONQUE D'UN MILIEU STRATIFIE
PAR UN D.M.V. PLACE DANS LA COUCHE OU L'ON MESURE LE POTENTIEL



Le dipôle magnétique vertical est disposé dans la couche d'indice n à l'origine d'un système de coordonnées cylindriques.

La couche d'indice m a une épaisseur h_m , elle possède une conductivité σ_m , une permittivité ϵ_m et l'interface supérieure de cette couche se trouve à l'ordonnée z_m .

L'atmosphère est représentée par un demi-espace d'indice zéro, la couche inférieure possède l'indice M et son épaisseur est infinie.

Le potentiel créé dans une couche m quelconque par le D.M.V. ne possède qu'une composante verticale Π_z .

Ce potentiel est donné par l'intégrale de Sommerfeld :

$$\Pi_{mz} = \int_0^{\infty} (a_m e^{-u_m z} + b_m e^{u_m z}) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1)$$

a_m est l'amplitude de l'onde ascendante et b_m l'amplitude de l'onde descendante dans la couche m .

Dans la couche 0 il n'existe qu'une onde ascendante :

$$\Pi_0 = \int_0^{\infty} a_0 e^{-u_0 z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (2)$$

Dans la couche M il n'existe qu'une onde descendante :

$$\Pi_M = \int_0^{\infty} b_M e^{u_M z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3)$$

Dans la couche contenant le dipôle, il faut tenir compte du potentiel primaire, et on peut écrire :

$$\Pi_n = \int_0^{\infty} \left(\frac{M\lambda}{u_n} e^{+u_n z} + a_n e^{-u_n z} + b_n e^{u_n z} \right) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (4)$$

où :

$$M = \frac{\mu_r N I S}{4\pi} \quad (5)$$

N = nombre de spires

I = courant traversant le bobinage formant antenne

S = section de la boucle

μ_r = perméabilité relative apparente du matériau magnétique

Les coefficients u_m sont définis par :

$$u_m = \pm \sqrt{\lambda^2 - k_m^2} \quad (6)$$

avec :

$$k_m^2 = \omega^2 \mu \epsilon_m + j \omega \mu \sigma_m \quad (7)$$

Le signe du radical (6) est choisi de manière à avoir toujours quelsoit λ la partie réelle de u_m positive ou nulle :

$$\Re(u_m) > 0 \quad (8)$$

Dans ces conditions le signe du premier terme de l'intégrale (4) doit être :

+1 si z est négatif et -1 si z est positif.

L'axe oz est orienté positivement vers le haut et son zéro est pris à la position du D.M.V.

Si E_m et H_m représentent les composantes horizontales du champ électrique et du champ magnétique dans la couche m , on sait que :

$$E_m = j \omega \mu \frac{\partial \Pi_m}{\partial r} \quad (9)$$

$$H_m = \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial r \partial z} \quad (10)$$

Les équations de Maxwell imposent que l'on ait, de part et d'autre de chaque interface m :

$$E_{m-1}(z_m) = E_m(z_m) \quad (11)$$

$$H_{m-1}(z_m) = H_m(z_m) \quad (12)$$

On voit immédiatement, d'après les expressions (1) à (4) du potentiel, que ces conditions aux limites seront vérifiées si on a simplement :

$$\dot{Z}_{m-1}(z_m) = \dot{Z}_m(z_m) \quad (13)$$

$$Z_{m-1}(z_m) = Z_m(z_m) \quad (14)$$

avec :

$$Z_m(z_m) = a_m e^{-u_m z_m} + b_m e^{u_m z_m} \quad (15)$$

$$\dot{Z}_m(z_m) = \frac{\partial}{\partial z} [Z_m(z_m)] \quad (16)$$

Ces expressions prennent les valeurs particulières pour les valeurs 0, n et M de l'indice m.

On a :

$$Z_0(z_1) = a_0 e^{-u_0 z_1} \quad (17)$$

$$Z_n(z_n) = \left(a_n + \frac{M\lambda}{u_n}\right) e^{-u_n z_n} + b_n e^{u_n z_n} \quad (18)$$

$$Z_n(z_{n+1}) = a_n e^{-u_n z_{n+1}} + \left(b_n + \frac{M\lambda}{u_n}\right) e^{u_n z_{n+1}} \quad (19)$$

$$Z_M(z_M) = b_M e^{u_M z_M} \quad (20)$$

Les conditions (13) et (14) écrites pour toutes les valeurs de l'indice m fournissent un système de 2M équations entre les coefficients a_m et b_m . Ceux-ci sont donc parfaitement déterminés et le problème à résoudre consiste à exprimer chacun d'eux en fonction du paramètre connu M.

I.2. Introduction des vecteurs $\overrightarrow{A}_m(z)$. Expression des conditions aux limites et formules de récurrence entre ces vecteurs

On utilise un espace fonctionnel à deux dimensions dans lequel on considère les vecteurs $\overrightarrow{A}_m(z)$ définis sous forme matricielle par :

$$\vec{A}_m(z) = \begin{pmatrix} a_m e^{-u_m z} \\ b_m e^{u_m z} \end{pmatrix} \quad (21)$$

On utilise également les vecteurs $\vec{Z}_m(z)$ définis par :

$$\vec{Z}_m(z) = \begin{pmatrix} \dot{Z}_m(z) \\ Z_m(z) \end{pmatrix} \quad (22)$$

Les expressions (15) et (16) permettent d'observer que :

$$\vec{Z}_m(z) = U_m A_m(z) \quad (23)$$

avec :

$$U_m = \begin{pmatrix} -u_m & u_m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

L'expression (23) est valable quelsoit l'indice, mais :

$$\cdot \text{ pour } m = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{A}_0(z) = \begin{pmatrix} a_0 e^{-u_0 z} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\cdot \text{ pour } m = M \quad \longrightarrow \quad \vec{A}_M(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_M e^{u_M z} \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\cdot \text{ pour } m = n \quad \longrightarrow \quad \vec{A}_n(z) = \begin{pmatrix} (a_n + \frac{M\lambda}{u_n}) e^{-u_n z} \\ b_n e^{u_n z} \end{pmatrix} \quad (27)$$

avec $z > 0$

$$\cdot \text{ pour } m = n \quad \longrightarrow \quad \vec{A}_n(z) = \begin{pmatrix} a_n e^{-u_n z} \\ (b_n + \frac{M\lambda}{u_n}) e^{u_n z} \end{pmatrix} \quad (28)$$

avec $z < 0$

Compte tenu de ces définitions, les conditions aux limites (13) et (14) s'écrivent :

$$\vec{Z}_{m-1}(z_m) = \vec{Z}_m(z_m) \quad (29)$$

Il est possible, en utilisant l'expression (23) de transformer la relation (29) en une condition portant sur les vecteurs $A_m(z)$. Soit :

$$\overrightarrow{A_{m-1}(z_m)} = U_{m-1}^{-1} U_m A_m(z_m) \quad (30)$$

Il est ensuite facile de transformer la conditions (30) en une formule de récurrence entre les vecteurs $A_m(z_m)$.

Si on introduit :

$$D_m = \begin{vmatrix} e^{u_m h_m} & 0 \\ 0 & e^{-u_m h_m} \end{vmatrix} \quad (31)$$

avec : $z_m = z_{m-1} - h_{m-1}$ (32)

On obtient :

$$A_{m-1}(z_m) = \begin{vmatrix} a_{m-1} e^{-u_{m-1} z_{m-1}} & \times & e^{u_{m-1} h_{m-1}} \\ b_{m-1} e^{u_{m-1} z_{m-1}} & \times & e^{-u_{m-1} h_{m-1}} \end{vmatrix} \quad (33)$$

qui peut s'écrire :

$$\overrightarrow{A_{m-1}(z_m)} = D_{m-1} \overrightarrow{A_{m-1}(z_{m-1})} \quad (34)$$

La condition (30) prend alors la forme :

$$\overrightarrow{A_{m-1}(z_{m-1})} = D_{m-1}^{-1} U_{m-1}^{-1} U_m \overrightarrow{A_m(z_m)} \quad (35)$$

En modifiant les indices on obtient alors :

$$\overrightarrow{A_m(z_m)} = U_m^{-1} U_{m-1} D_{m-1} \overrightarrow{A_{m-1}(z_{m-1})} \quad (36)$$

et

$$\overrightarrow{A_{m+1}(z_{m+1})} = U_{m+1} U_m D_m \overrightarrow{A_m(z_m)} \quad (37)$$

Relation entre les vecteurs $\vec{A}_n(z)$ de la couche n contenant le D.M.V. et les vecteurs correspondants des couches extrêmes 0 et M

On écrit que les conditions aux limites sont vérifiées sur l'interface inférieure n+1 de la couche où il y a le dipôle . On a :

$$Z_n(z_{n+1}) = Z_{n+1}(z_{n+1}) \quad (38)$$

$$\text{soit : } A_n(z_{n+1}) = U_n^{-1} U_{n+1} A_{n+1}(z_{n+1}) \quad (39)$$

$$A_{n-1}(z_{n-1}) = D_{m-1}^{-1} U_{n-1}^{-1} U_n A_n(z_n) \quad (40)$$

$$\begin{aligned} A_n(z_{n+1}) &= U_n^{-1} U_{n+1} U_{n+1}^{-1} U_{n+2} D_{n+1}^{-1} A_{n+2}(z_{n+2}) \\ &= U_n^{-1} U_{n+2} D_{n+1}^{-1} A_{n+2}(z_{n+2}) \\ &= U_n^{-1} U_{n+2} D_{n+1}^{-1} D_{n+2}^{-1} U_{n+2}^{-1} U_{n+3} A_{n+3}(z_{n+3}) \\ &= U_n^{-1} D_{n+1}^{-1} D_{n+2}^{-1} U_{n+3} A_{n+3}(z_{n+3}) \\ &= U_n^{-1} U_{n+1} D_{n+1}^{-1} U_{n+1}^{-1} U_{n+2} D_{n+2}^{-1} U_{n+2}^{-1} U_{n+3} \dots D_{M-1}^{-1} U_{M-1}^{-1} U_M A_M(z_M) \end{aligned} \quad (41)$$

On écrit maintenant les conditions aux limites sur l'interface supérieure de la couche n et on a :

$$Z_n(z_n) = Z_{n-1}(z_n) \quad (42)$$

$$\text{soit : } A_n(z_n) = U_n^{-1} U_{n-1} A_{n-1}(z_n) \quad (43)$$

$$\text{ou encore, d'après : } A_{n-1}(z_n) = D_{n-1} A_{n-1}(z_{n-1})$$

on obtient :

$$A_n(z_n) = U_n^{-1} U_{n-1} D_{n-1} A_{n-1}(z_{n-1}) \quad (44)$$

En appliquant (44) on peut écrire :

$$A_n(z_n) = U_n^{-1} U_{n-1} D_{n-1} U_{n-1}^{-1} U_{n-2} D_{n-2} A_{n-2}(z_{n-2}) \quad (45)$$

et par récurrence on obtient :

$$A_n(z_n) = (U_n^{-1} U_{n-1} D_{n-1} U_{n-1}^{-1} U_{n-2} D_{n-2} \dots U_3^{-1} U_2 D_2 U_2^{-1} U_1 D_1 U_1^{-1} U_0) A_0(z_1) \quad (46)$$

Si on considère deux nombres p et q tels que :

$$q > p \quad (47)$$

et si on pose :

$$M_{qp} = U_q^{-1} U_{q-1} D_{q-1} U_{q-1}^{-1} \dots D_{p+1} U_{p+1} U_{p+1}^{-1} U_p \quad (48)$$

on remarque que :

$$M_{qp}^{-1} = U_p^{-1} U_{p+1} D_{p+1}^{-1} U_{p+1}^{-1} \dots U_{q-1} D_{q-1}^{-1} U_{q-1}^{-1} U_q \quad (49)$$

Il en résulte que l'on peut écrire :

$$A_n(z_{n+1}) = M_{Mn}^{-1} A_M(z_M) \quad (50)$$

$$A_n(z_n) = M_{n_0} A_0(z_1)$$

Expression du potentiel de Hertz

On peut écrire dans tous les cas :

$$\Pi_m = \int_0^\infty \vec{T}_+ \vec{A}_m(z) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (51)$$

$$\text{Le vecteur } \vec{T}_+ \text{ représenté par la matrice : } |1,1| \quad (52)$$

est tel que la matrice qui le représente est la matrice transposée de celle qui représente le vecteur :

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (53)$$

On suppose que le dipôle émetteur est à la position z telle que :

$$z_{n+1} < z < z_n$$

Il faut distinguer le cas où z est positif et celui où z est négatif et celui où z est négatif.

$z > 0$

On a :

$$A_n(z) = \begin{vmatrix} (a_n + \frac{M_\lambda}{u_n} e^{-u_n z}) \\ b_n e^{u_n z} \end{vmatrix} \quad (54)$$

$$\text{or : } z_n = z + z_n - z \quad (55)$$

et si on pose :

$$D_n(z_n - z) = \begin{vmatrix} e^{u_n(z_n - z)} & 0 \\ 0 & e^{-u_n(z_n - z)} \end{vmatrix} \quad (56)$$

On peut écrire :

$$\boxed{A_n(z) = D_n(z_n - z) \cdot A_n(z_n)} \quad (57)$$

Si on fait tendre z vers 0 on obtient :

$$A_n(0) = D_n(z_n) A_n(z_n) \quad (58)$$

$$\text{Soit : } A_n(0) = D_n(z_n) M_{n0} A_0(z_1) \quad (59)$$

Si on pose maintenant :

$$M_{n0} = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} \quad (60)$$

on peut écrire le système d'équations :

$$a_n + \frac{M\lambda}{u_n} = e^{u_n z_n} M_{11} A_0(z_1) \quad (61)$$

$$b_n = e^{-u_n z_n} M_{21} A_0(z_1) \quad (62)$$

Ce système d'équations conduit à la relation :

$$\boxed{a_n + \frac{p\lambda}{u_n} = e^{2u_n z_n} \frac{M_{11}}{M_{21}} b_n} \quad (63)$$

z < 0

On a :

$$A_n(z) = \begin{vmatrix} a_n e^{-u_n z} & \\ b_n + \frac{M\lambda}{u_n} e^{u_n z} & \end{vmatrix} \quad (64)$$

de même :

$$z_{n+1} = z + z_{n+1} - z \quad (65)$$

et si :

$$D_n(z_{n+1} - z) = \begin{vmatrix} e^{u_n(z_{n+1} - z)} & 0 \\ 0 & e^{-u_n(z_{n+1} - z)} \end{vmatrix} \quad (66)$$

On peut écrire :

$$A_n(z) = D_n(z_{n+1} - z) A_n(z_{n+1}) \quad (67)$$

et si on fait tendre z vers 0 on obtient :

$$A_n(0) = D(z_{n+1}) A_n(z_{n+1}) \quad (68)$$

Soit :

$$A_n(0) = D(z_{n+1}) M_{Mn}^{-1} A_M(z_M) \quad (69)$$

Si on appelle :

$$M_{Mn}^{-1} = \begin{vmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{vmatrix} \quad (70)$$

On obtient un système d'équations :

$$a_n = N_{12} b_M e^{u_M z_M} \cdot e^{u_n(z_{n+1})} \quad (71)$$

$$\frac{M\lambda}{u_n} + b_n = N_{22} b_M e^{u_M z_M} \cdot e^{-u_n(z_{n+1})} \quad (72)$$

d'où :

$$b_n + \frac{M\lambda}{u_n} = e^{-2u_n(z_{n+1})} \frac{N_{22}}{N_{12}} a_n \quad (73)$$

Si l'on tient compte de la relation :

$$z_{n+1} = z_n - h_n \quad (74)$$

on trouve :

$$a_n + \frac{M\lambda}{u_n} = e^{2u_n z_n} \frac{M_{11}}{M_{21}} b_n \quad (75)$$

$$a_n \left(\frac{N_{22}}{N_{12}} e^{-2u_n(z_n - h_n)} - \frac{M\lambda}{u_n} \right) = b_n \quad (76)$$

$$- a_n \frac{N_{22}}{N_{12}} \frac{M_{11}}{M_{21}} e^{2u_n h_n} + \frac{M\lambda}{u_n} e^{2u_n z_n} \frac{M_{11}}{M_{21}} = -e^{2u_n z_n} \frac{M_{11}}{M_{21}} b_n \quad (77)$$

d'où :

$$a_n \left(1 - \frac{N_{22} M_{11}}{N_{12} M_{21}} e^{2u_n h_n} \right) + \frac{M\lambda}{u_n} \left(1 + e^{2u_n z_n} \frac{M_{11}}{M_{21}} \right) = 0 \quad (78)$$

soit :

$$a_n = M \frac{\lambda}{u_n} \frac{e^{2u_n z_n} \frac{M_{11}}{M_{21}} + 1}{\frac{N_{22} M_{11}}{N_{12} M_{21}} e^{2u_n h_n} - 1} \quad (79)$$

On trouve de même :

$$b_n = \frac{M\lambda}{u_n} \frac{e^{2u_n z_{n+1}} \frac{N_{22}}{N_{12}} + 1}{e^{2u_n h_n} \frac{M_{11} N_{22}}{M_{21} N_{12}} - 1} \quad (80)$$

Cas où l'émetteur et le récepteur sont au-dessus de la surface du sol

On suppose l'émetteur placé un peu au-dessous du récepteur. L'origine du système est choisie au niveau de l'émetteur de sorte que nous aurons $z < 0$ et on peut écrire :

$$A_0(z) = \begin{vmatrix} a_0 \exp(-u_0 z) \\ \frac{M\lambda}{u_0} \exp(u_0 z) \end{vmatrix} \quad (81)$$

or :

$$A_0(z) = D(z_1 - z) A_0(z_1) \quad (82)$$

avec :

$$D(z_1 - z) = \begin{vmatrix} \exp(z_1 - z) & 0 \\ 0 & \exp(-u_0(z_1 - z)) \end{vmatrix} \quad (83)$$

On peut relier $A_0(z_1)$ à $A_M(z_M)$ à l'aide de :

$$A_0(z_1) = M_{M_0}^{-1} A_M(z_M) \quad (84)$$

et si on appelle :

$$M_{M_0}^{-1} = \begin{vmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad A_M(z_M) = \begin{vmatrix} 0 \\ b_M \exp(u_M z_M) \end{vmatrix} \quad (85)$$

On peut écrire :

$$A_0(z) = M_{M_0}^{-1} D(z_1 - z) A_M(z_M) \quad (86)$$

ce qui conduit au système d'équations :

$$u_0 \exp(-u_0 z) = N_{12} b_M \exp(u_M z_M) \exp(u_0(z_1 - z)) \quad (87)$$

$$\frac{M\lambda}{u_0} \exp(u_0 z) = N_{22} b_M \exp(u_M z_M) \exp(-u_0(z_1 - z))$$

Il en résulte que :

$$a_0 = M \frac{\lambda}{u_0} \exp(2u_0 z_1) \frac{N_{12}}{N_{22}} \quad (88)$$

Le potentiel de Herz au point de coordonnée (r, z) sera :

$$\Pi_0(r, z) = \int_0^{\infty} (a_0 \exp(-u_0 z) + \frac{M\lambda}{u_0} \exp(u_0 z)) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (89)$$

ou

$$\Pi_0(r, z) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{u_0} \exp(u_0 z) (1 + \exp(1 + \exp(2u_0(z_1 - z)) \frac{N_{12}}{N_{22}})) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (90)$$

Il est préférable, à ce niveau de repérer l'émetteur et le récepteur par rapport à la surface du sol, et de considérer que l'émetteur se trouve à une hauteur h au-dessus de la surface du sol et que le récepteur se situe à une hauteur z au-dessus du sol. L'origine du système de coordonnées correspond alors à l'intersection de l'interface sol-air et de l'axe vertical.

Pour satisfaire ces conditions, il suffit, dans l'expression précédente, de remplacer z par $h-z$ et z_j par $-h$. Le rapport $\frac{N_{12}}{N_{22}}$ reste inchangé.

L'expression du potentiel s'écrit alors :

$$\Pi(r, z) = M \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{u_0} \left| \exp(-u_0(z-h)) + \exp(-u_0(z+h)) \right| \frac{N_{12}}{N_{22}} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (91)$$

A N N E X E . 2.

CALCUL DES COEFFICIENTS N_{12} ET N_{22} POUR UN DEMI-MILIEU STRATIFIE A
M COUCHES

La matrice M_{M0}^{-1} dont les coefficients sont les N_{ij} est donnée par l'expression :

$$M_{M0}^{-1} = U_0^{-1} (U_1 D_1^{-1} U_1^{-1}) (U_2 D_2^{-1} U_2^{-1}) \dots (U_m D_m^{-1} U_m^{-1}) \dots (U_{M-1} D_{M-1}^{-1} U_{M-1}^{-1}) U_M \quad (1)$$

$$U_m D_m^{-1} U_m^{-1} = \frac{1}{2U_m} \begin{vmatrix} -u_m & u_m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \exp(-u_m h_m) & 0 \\ 0 & \exp(u_m h_m) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & u_m \\ 1 & u_m \end{vmatrix} \quad (2)$$

ce qui peut s'écrire :

$$U_m D_m^{-1} U_m^{-1} = \text{ch}(u_m h_m) \begin{vmatrix} 1 & u_m \text{th}(u_m h_m) \\ \frac{1}{u_m} \text{th}(u_m h_m) & 1 \end{vmatrix} \quad (3)$$

ou encore :

$$U_m D_m^{-1} U_m^{-1} = \text{ch}(u_m h_m) \left[\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \text{th}(u_m h_m) \begin{vmatrix} 0 & u_m \\ \frac{1}{u_m} & 0 \end{vmatrix} \right] \quad (4)$$

si on pose :

I = matrice unité

$t_m = \text{th}(u_m h_m)$

$C_m = \text{ch}(u_m h_m)$

$$\text{et } \Gamma_m = \begin{vmatrix} 0 & u_m \\ \frac{1}{u_m} & 0 \end{vmatrix} \quad (5)$$

l'expression (4) s'écrit :

$$U_m D_m^{-1} U_m^{-1} = C_m (I + \tau_m \Gamma_m) \quad (6)$$

et

$$M_{M_0}^{-1} = U_0^{-1} \cdot \prod_{m=1}^{m=M-1} C_m \cdot \prod_{m=1}^{m=M-1} (I + \tau_m \Gamma_m) \cdot U_M \quad (7)$$

Si on pose :

$$\prod_{m=1}^{m=M-1} C_m \cdot \prod_{m=1}^{m=M-1} (I + \tau_m \Gamma_m) = \begin{matrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{matrix} = H \quad (8)$$

on obtient :

$$M_{M_0}^{-1} = U_0^{-1} H U_M = \begin{matrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{matrix} \quad (9)$$

Le développement de l'expression (9) donne :

$$N_{12} = \frac{1}{2u_0} \left| -u_M H_{11} - H_{12} + u_0 (u_M H_{21} + H_{22}) \right| \quad (10)$$

$$N_{22} = \frac{1}{2u_0} \left| u_M H_{11} + H_{12} + u_0 (u_M H_{21} + H_{22}) \right| \quad (11)$$

Le rapport N_{12}/N_{22} peut alors s'écrire :

$$\frac{N_{12}}{N_{22}} = \frac{u_0 - V}{u_0 + V} \quad (12)$$

avec :

$$V = \frac{u_M + H_{12}/H_{11}}{u_M \frac{H_{21}}{H_{11}} + \frac{H_{22}}{H_{11}}} \quad (13)$$

N_{12}/N_{22} peut s'écrire en fonction du rapport de coefficients de la matrice H.
Il suffit donc de ne calculer que l'expression ;

$$\prod_{m=1}^{m=M-1} (1 + t_m \Gamma_m) \quad (14)$$

Milieu à deux couches

$$1 + t_1 \Gamma_1 = \begin{vmatrix} 1 & t_1 u_1 \\ \frac{t_1}{u_1} & 1 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$\frac{H_{12}}{H_{11}} = t_1 u_1 \quad \frac{H_{21}}{H_{11}} = \frac{t_1}{u_1} \quad \frac{H_{22}}{H_{11}} = 1 \quad (16)$$

$$v = \frac{u_2 + t_1 u_1}{\frac{u_2 \cdot t_1}{u_1} + 1} = u_1 / Q_1 \quad (17)$$

avec :

$$Q_1 = \frac{\frac{u_1}{u_2} + \text{th } u_1 h_1}{1 + \frac{u_1}{u_2} \text{th } u_1 h_1} \quad (18)$$

Milieu à trois couches

$$u_M = u_3$$

$$(1 + t_1 \Gamma_1) (1 + t_2 \Gamma_2) = 1 + t_1 \Gamma_1 + t_2 \Gamma_2 + t_1 t_2 \Gamma_1 \Gamma_2 \quad (19)$$

$$\Gamma_1 \Gamma_2 = \begin{vmatrix} 0 & u_1 \\ \frac{1}{u_1} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ \frac{1}{u_2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1/u_2 & 0 \\ 0 & u_2/u_1 \end{vmatrix} \quad ()$$

$$(1+t_1 r_1) (1+t_2 r_2) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{u_1}{u_2} t_1 t_2 & t_1 u_1 + t_2 u_2 \\ \frac{t_1}{u_1} + \frac{t_2}{u_2} & 1 + \frac{u_2}{u_1} t_1 t_2 \end{vmatrix}$$

alors :

$$\frac{H_{12}}{H_{11}} = \frac{t_1 u_1 + t_2 u_2}{1 + \frac{u_1}{u_2} t_1 t_2} \quad \frac{H_{21}}{H_{11}} = \frac{\frac{t_1}{u_1} + \frac{t_2}{u_2}}{1 + \frac{u_1}{u_2} t_1 t_2}$$

$$\frac{H_{22}}{H_{11}} = \frac{1 + \frac{u_2}{u_1} t_1 t_2}{1 + \frac{u_1}{u_2} t_1 t_2}$$

Dans ce cas V devient :

$$V = \frac{u_3 + \frac{t_1 u_1 + u_2 t_2}{1 + \frac{u_1}{u_2} t_1 t_2}}{\frac{t_1}{u_1} + \frac{t_2}{u_2} + \frac{1 + \frac{u_2}{u_1} t_1 t_2}{1 + \frac{u_1}{u_2} t_1 t_2}}$$

$$= u_1 \frac{\frac{u_3}{u_1} + \frac{u_3}{u_2} t_1 t_2 + t_1 + \frac{u_2}{u_1} t_2}{\frac{u_3}{u_1} t_1 + \frac{u_3}{u_2} t_2 + 1 + \frac{u_2}{u_1} t_1 t_2}$$

$$= u_1 / Q$$

d'où, après avoir multiplié le numérateur et le dénominateur de Q par u_1/u_3 :

$$Q = \frac{\frac{u_1}{u_2} \left(\frac{u_2}{u_3} + t_2 \right) + t_1 \left(1 + \frac{u_2}{u_3} t_2 \right)}{1 + \frac{u_2}{u_3} t_2 + \frac{u_1}{u_2} \left(\frac{u_2}{u_3} + t_2 \right) t_1}$$

Soit :

$$\frac{u_1}{u_2} \left(\frac{\frac{u_2}{u_3} + t_2}{1 + \frac{u_2}{u_3} t_2} \right) + t_1$$

$$Q = \frac{1 + \frac{u_1}{u_2} \frac{\frac{u_2}{u_3} + t_2}{1 + \frac{u_2}{u_3} t_2} t_1}{1 + \frac{u_2}{u_3} t_2 + \frac{u_1}{u_2} \left(\frac{u_2}{u_3} + t_2 \right) t_1}$$

Le facteur Q est de la forme :

$$Q = \frac{\frac{u_1}{u_2} Q_2 + \text{th } u_1 h_1}{1 + \frac{u_1}{u_2} Q_2 + \text{th } u_1 h_1} \quad \text{avec : } Q_2 = \frac{\frac{u_2}{u_3} + \text{th } u_2 h_2}{1 + \frac{u_2}{u_3} \text{th } u_2 h_2}$$

Dans le cas d'un milieu à quatre couches on peut mettre Q sous la forme :

$$Q = \frac{\frac{u_1}{u_2} Q_2 + \text{th } u_1 h_1}{1 + \frac{u_1}{u_2} Q_2 + \text{th } u_1 h_1}$$

$$Q_2 = \frac{\frac{u_2}{u_3} Q_3 + \text{th } u_2 h_2}{1 + \frac{u_2}{u_3} Q_3 + \text{th } u_2 h_2}$$

$$Q_3 = \frac{\frac{u_3}{u_4} + \text{th } u_3 h_3}{1 + \frac{u_3}{u_4} \text{th } u_3 h_3}$$

et dans le cas d'un milieu à M couches, on trouverait :

$$Q = \frac{\frac{u_1}{u_2} Q_2 + \text{th } u_1 h_1}{1 + \frac{u_2}{u_3} Q_3 + \text{th } u_2 h_2}$$

$$Q_2 = \frac{\frac{u_2}{u_3} Q_3 + \text{th } u_2 h_2}{1 + \frac{u_2}{u_3} Q_3 + \text{th } u_2 h_2}$$

$$Q_{M-1} = \frac{\frac{u_{M-1}}{u_M} + 1 + \text{th } u_{M-1} h_{M-1}}{1 + \frac{u_{M-1}}{u_M} + \text{th } u_{M-1} h_{M-1}}$$

ANNEXE.3.

EXPRESSION DE L'INCLINAISON DU GRAND AXE D'UNE ELLIPSE EN FONCTION DES
 MODULES DE SA PROJECTION SUR LES AXES \vec{oz} , \vec{or} et \vec{oa} INCLINE D'UN ANGLE
 DE $\pi/4$ SUR \vec{ox}

Le vecteur champ magnétique créé à la surface du sol par un
 D.M.V. posé sur le sol est contenu dans un plan vertical passant par
 l'axe du dipôle.

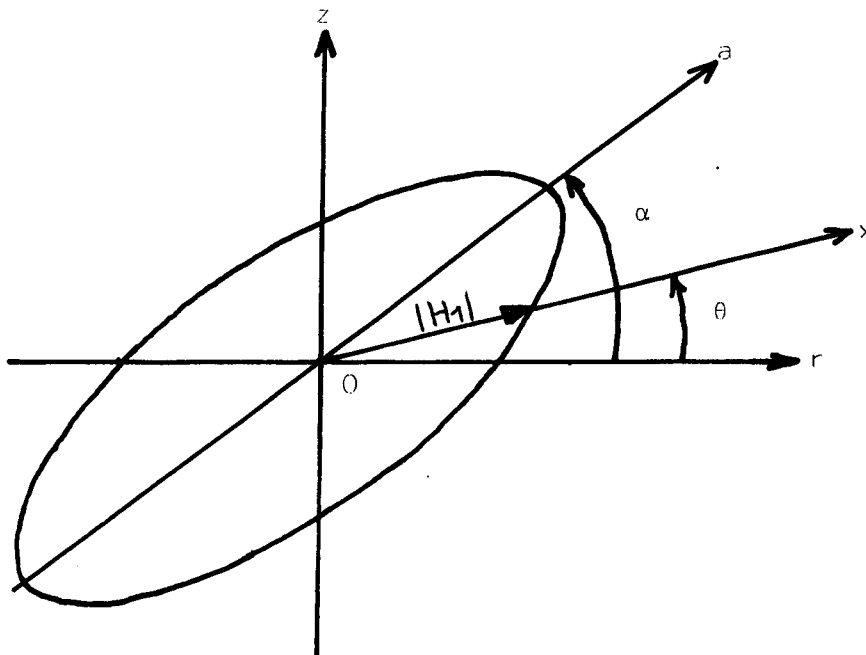
Ce vecteur champ magnétique peut se décomposer en une composante
 horizontale et une composante verticale.

Lorsque l'on calcule séparément chacune de ces composantes, on
 se rend compte qu'elles possèdent chacune une phase distincte.
 Ces composantes du champ magnétique peuvent être écrites sous la forme :

$$\mathcal{H}_z = H_z e^{j\phi_z} \quad \mathcal{H}_r = H_r e^{j\phi_r} \quad (1)$$

où H_z et H_r représentent le module de chacune de ces composantes.

L'extrémité du vecteur champ magnétique décrit donc une ellipse.



Soit ox un axe formant un angle θ avec l'axe horizontal or et soit H_1 la valeur du champ magnétique à l'instant où le vecteur qui le représente est confondu avec \vec{ox} .

H_1 est à cet instant donné par l'expression :

$$H_1 = H_r \cos \phi_r \cos \theta + H_z \cos \phi_z \sin \theta + j |H_r \sin \phi_r \cos \theta + H_z \sin \phi_z \sin \theta| \quad (2)$$

L'amplitude instantannée de ce vecteur champ magnétique est représentée par le module de H_1 et on a :

$$|H_1|^2 = H_r^2 \cos^2 \theta + H_z^2 \sin^2 \theta + 2H_r H_z \cos \theta \sin \theta \cos(\phi_r - \phi_z) \quad (3)$$

L'angle α formé par l'axe horizontal or et le grand axe de l'ellipse oa est égal à la valeur de l'angle α pour laquelle $|H_1|^2$ est maximum

L'angle α est donc solution de l'équation :

$$\frac{d|H_1|^2}{d\alpha} = 0 \quad (4)$$

$$\text{Si : } \cos \alpha \neq 0 \text{ c'est-à-dire si } \alpha \neq (2k+1) \pi/2 \quad (5)$$

cette équation peut s'écrire :

$$0 = H_r H_z \cos(\phi_r - \phi_z) \text{tg}^2 \alpha + (H_r^2 - H_z^2) \text{tg} \alpha - H_r H_z \cos(\phi_r - \phi_z) \quad (6)$$

Si on pose :

$$A = H_r H_z \cos(\phi_r - \phi_z) \quad (7)$$

$$B = H_r^2 - H_z^2 \quad (8)$$

La solution de l'équation (6) peut s'écrire :

$$\alpha = \text{arc tg} \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 + 4A^2}}{2A} \right) \quad (9)$$

De même, l'amplitude du vecteur champ magnétique à l'instant où ce vecteur se confond avec un axe incliné à 45° est donnée par, le module de H_1 lorsque $\theta = \pi/4$. On peut alors écrire :

$$H_{45^\circ}^2 = |H_1|^2 \quad \text{pour } \theta = \pi/4 \quad (10) \quad \text{soit :}$$

$$H_{45^\circ}^2 = \frac{H_r^2}{2} + \frac{H_z^2}{2} + H_r H_z \cos(\phi_r - \phi_z) \quad (11)$$

d'où :

$$\cos(\phi_r - \phi_z) = \frac{\frac{H_r^2 + H_z^2}{2} - H_{45^\circ}^2}{H_r H_z} \quad (12)$$

On voit alors, qu'à l'aide des formules (9) et (12), il est possible de calculer l'angle α uniquement avec les valeurs des modules des composantes H_r , H_z et H_{45} du champ magnétique.

ANNEXE. 4.

RAPPEL DES FONDEMENTS DE L'INTEGRATION D'UNE FONCTION PAR LA METHODE
DU COL ET INTEGRATION DU POTENTIEL $J^{\circ}(\alpha, b, r)$ LE LONG DU CONTOUR C_0

Rappel des fondements de la méthode du col

On cherche, à l'aide d'un changement de variable approprié, à mettre l'intégrale à calculer sous la forme canonique :

$$I = \int_C F(\omega) e^{\phi(\omega)} d\omega \quad (1)$$

On peut déformer, dans certaines limites, le contour d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale.

On cherche alors un contour tel que la valeur totale de l'intégrale soit déterminée en n'utilisant qu'une petite portion de contour.

Si on pose :

$$\phi(\omega) = \phi_r(\omega) + i \phi_j(\omega) \quad (2)$$

$$\text{avec : } \omega = u + iv \quad (3)$$

l'exponentielle de l'intégrand devient :

$$\exp|\phi_r + i \phi_j| \quad (4)$$

Le contour d'intégration doit être tel que la fonction $\phi_r(\omega)$ a une valeur maximum en un point donné et décroît aussi rapidement que possible avec la distance à ce point.

Si ϕ_r et ϕ_j sont les parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique, elles satisfont les conditions de Cauchy Riemann :

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial u} = - \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \quad \frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \quad (5)$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial v^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial v^2} = 0 \quad (6)$$

$\phi_r(u,v)$ et $\phi_i(u,v)$ sont solutions de l'équation de Laplace et déterminent des familles de courbes orthogonales. Il en résulte que si dans le plan complexe, on représente les courbes $\phi_r(u,v) = \text{cte}$ et $\phi_i(u,v) = \text{cte}$, les courbes de plus grande variation ou de plus grande pente de $\phi_r(u,v)$ sont les courbes $\phi_i(u,v)$ et inversement.

Par conséquent le contour d'intégration doit coïncider avec une courbe $\phi_i = \text{Cte}$. C'est ainsi que la méthode d'intégration est appelée méthode de la plus grande pente.

Le point pour lequel $\phi_r(u,v)$ est maximum est appelé "point de passage" du "col".

Il est clair que pour $\phi_r(u,v)$ maximum il faut $\frac{\partial \phi_r}{\partial \omega} = 0$ et puisque $\phi_i(u,v) = 0$ on aura (7) au point de passage :

$$\frac{\partial \phi(\omega)}{\partial \omega} = 0 \quad (8)$$

soit :

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial u} = \frac{\partial \phi_i}{\partial v} = 0 \quad (9)$$

Supposons l'équation (8) résolue et vérifiée pour :

$$\omega = \omega_0 \quad (10)$$

On voit que le domaine d'intégration sera le lieu des points donnés par :

$$\phi(\omega) = \phi(\omega_0) - x^2/2 \quad (11)$$

où x peut prendre toutes les valeurs réelles comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

Le "col" correspond à :

$$x = 0 \quad (12)$$

En séparant les parties réelle et imaginaire de $\phi(\omega)$ on obtient :

$$\phi_i(\omega) = \phi_i(\omega_0) \quad ; \quad \phi_r(\omega) = \phi_r(\omega_0) - x^2/2 \quad (13)$$

Par ce changement de variable le contour d'intégration est transformé et il coïncide avec l'axe réel dans le plan complexe :

$$x = x' + i x'' \quad (14)$$

On peut regarder comment évoluent les fonctions $\phi_i(\omega)$ et $\phi_r(\omega)$ dans le plan complexe en remplaçant x par sa valeur complexe dans les équations (13).

On obtient alors :

$$\phi_r = \phi_r(\omega_0) - \left(\frac{x'^2 - x''^2}{2} \right) \quad , \quad \phi_i = \phi_i(\omega_0) - x'x'' \quad (15)$$

On constate que les fonctions :

$$\phi_r = \text{cte} \quad \text{et} \quad \phi_i = \text{cte} \quad (16)$$

décrivent deux systèmes d'hyperboles orthogonales (figure.1.).

On voit sur la figure.1. que l'axe réel est une des courbes :

$$\phi_i(x', x'') = \text{cte} \quad (17)$$

et est une ligne de plus rapide décroissance de $\phi_r(x', x'')$.

En intégrant sur ce contour, la valeur la plus importante de l'intégrale sera alors obtenue, au voisinage du col.

Si on applique la relation (11) dans la relation (1), le calcul de l'intégrale I se ramène à celui de l'intégrale :

$$I = e^{\phi(\omega_0)} \int_0^{\infty} \Phi(x) e^{-x^2/2} dx \quad (18)$$

avec :

$$\Phi(x) = |F(\omega) + F(-\omega)| \frac{d\omega}{dx} \quad \text{de la variable réelle } x \quad (19)$$

La fonction $\Phi(x)$ est une fonction paire de x et la méthode du col consiste à trouver un développement limité de la fonction $\Phi(x)$ au voisinage de $\omega = \omega_0$, que l'on intègre terme à terme. Ce développement limité est un développement asymptotique dont la validité est fixée par le rayon de convergence de la série asymptotique. Le rayon de convergence est fixé par la singularité la plus proche de l'origine.

Cette singularité est définie par :

Intégration de la fonction $J^0(a,b,r)$

L'intégrale à calculer est de la forme :

$$J^0(a,b,r) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{-u_1^a} e^{-u_0 b} H_0^{(1)}(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (20)$$

Pour pouvoir l'écrire sous la forme canonique (1), il faut faire le changement de variable :

$$\lambda = k_0 \cos \omega \quad (21)$$

et $\phi(\omega)$ est choisi de telle sorte que le contour C soit un contour de plus grande pente.

On obtient :

$$\phi(\omega) = ik_0 r \cos \omega \quad (22)$$

Le col de cette fonction est situé à $\omega = 0$ et :

$$\phi(\omega) = \phi(0) - \frac{x^2}{2} \quad (23)$$

$$F(\omega) = G(\omega) \cos \omega \sin \omega \{ H_0^{(1)}(k_0 r \cos \omega) e^{-ik_0 r \cos \omega} \} \quad (24)$$

$$G(\omega) = \exp \{ ik_1 a (1 - n^2 \cos^2 \omega)^{1/2} - ik_0 b \sin \omega \} \quad (25)$$

$$n^2 = \frac{k_0^2}{k_1^2} \quad (26)$$

$$\text{et avec } \frac{x^2}{2} = \phi(0) - \phi(\omega) = ik_0 r (1 - \cos \omega) \quad (27)$$

$$J^0(a,b,r) = -k_0^2 e^{ik_0 r} \int_0^\infty |F(\omega) + F(-\omega)| \frac{d\omega}{dx} e^{-x^2/2} \cdot \phi x \quad (28)$$

L'intégrale $J^0(a,b,r)$ contient une fonction de Hankel qui possède un point de branchement à l'origine. Si on remplace cette fonction de Hankel par sa représentation intégrale on peut mettre $J^0(a,b,r)$ sous la forme :

$$J^0(a,b,r) = -2k_0^2 e^{ik_0 r} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \phi(x,y) e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \quad (29)$$

$$\text{avec : } \Phi(x,y) = f(x) g(x,y) \quad (30)$$

Cette dernière fonction est mise sous la forme d'une série asymptotique que l'on intègre terme à terme.

On obtient alors, tous calculs faits :

$$J^{\circ}(a,b,r) = \frac{2ik_0^3 e^{[jk_0 r + \alpha(1-n^2)^{1/2}]} }{(jk_0 r)^2} \left\{ 1 + \frac{E_1(a,b)}{2(jk_0 r)} + \frac{E_2(a,b)}{8(jk_0 r)^2} + \dots \right\} \quad (31)$$

avec :

$$E_1(a,b) = -2 + n^2 |3\alpha(1-n^2)^{-1/2} + \beta^2|$$

$$E_2(a,b) = -3n^2 |12\alpha(1-n^2)^{-1/2} + 4\beta^2| \quad (32)$$

$$+ n^4 |15\alpha^2(1-n^2)^{-1} - 15\alpha(1-n^2)^{-3/2} + 10\alpha\beta^2(1-n^2)^{-1/2} + \beta^4|$$

$$\alpha = ik_1 a \quad \beta = ik_1 b \quad (33)$$

Le potentiel $U^{\circ}(a,b,r)$ est donné par la relation ^[17] :

$$U_{\circ}(a,b,r) = \left(\frac{\partial J^{\circ}}{\partial a} - \frac{\partial J^{\circ}}{\partial b} \right) \cdot \frac{1}{k_1^2 - k_0^2} \quad (34)$$

Le rayon de convergence de la série asymptotique de l'intégrale $J^{\circ}(a,b,r)$ est défini par la singularité la plus proche de l'origine.

L'intégrale $J^{\circ}(a,b,r)$ mise sous la forme (28) a été obtenue en posant :

$$\epsilon = C x \quad C = (ik_0 r)^{1/2} \quad (35)$$

On obtient alors :

$$\cos w = 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \quad (36)$$

$$\sin w = \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4} \right)^{1/2} \quad (37)$$

$$\sin w \frac{dw}{dx} = C \epsilon \quad (38)$$

La singularité la plus proche de l'origine^[17] est donnée par le point de
 branchement introduit par $\sin w$

et défini par : $\varepsilon = 2$ (39)

d'où :

$$\frac{x}{(ikor)^{1/2}} = 2 \quad (40)$$

Le rayon de convergence de la série asymptotique est alors :

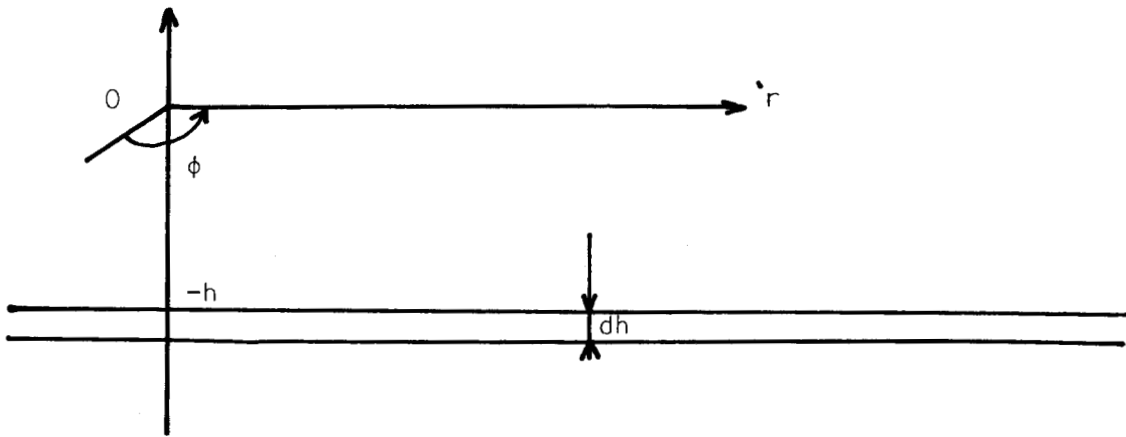
$$R^{1/2} = |4ikor|^{1/2}$$

et

$$x < |4ikor|^{1/2}$$

ANNEXE.5.

Les composantes des champs créées au-dessus d'une fine couche conductrice par un dipôle magnétique vertical sont données par les relations :



$$H_r = \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} \quad H_\phi = 0 \quad H_z = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

à l'extérieur de la couche conductrice et au-dessus de cette couche le potentiel a pour expression :

$$F = \frac{M}{(r^2 + z^2)^{1/2}} - M i q \int_0^\infty (\lambda + i q)^{-1} e^{-\lambda(z+2h)} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$q = \omega \mu \sigma d h / 2$$

avec $M = N I S / 4\pi$

Si on appelle :

$$I(\beta) = i q \int_0^\infty (\lambda + i q)^{-1} e^{-\lambda \beta} J_0(\lambda r) d\lambda$$

Le potentiel s'écrit :

$$F = \frac{M}{(r^2 + z^2)^{1/2}} - M I(\beta) \quad \text{avec} \quad \beta = z + 2h$$

Avant de dériver le potentiel pour obtenir les composantes des champs, il faut résoudre l'intégrale qui définit $I(\beta)$.

Si on remplace $J_0(z)$ par la série :

$$J_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

Dans l'expression de $I(\beta)$, on obtient :

$$I(\beta) = iq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (r/2)^{2m}}{(m!)^2} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{2m} e^{-\lambda\beta}}{\lambda + iq} d\lambda$$

$$\text{or : } \int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-\mu x}}{x+\beta} dx = (-1)^{n-1} \beta^n e^{\beta\mu} E_i(-\beta\mu) + \sum_{k=1}^n (k-1)! (-\beta)^{n-k} \mu^{-k}$$

$$|\arg\beta| < \pi \quad \text{Re}(\mu) > 0$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} = -\frac{M}{2} (r^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2r - M\{iq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{1}{2})^{2m} 2m r^{2m-1}}{(m!)^2} \int_0^{\infty} f(\lambda) d\lambda\}$$

$$H_r = \frac{3M}{2} r(r^2+z^2)^{-5/2} 2z - M\{iq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{1}{2})^{2m} 2m r^{2m-1}}{(m!)^2} \int_0^{\infty} \frac{-\lambda^{2m+1} e^{-\lambda\beta} d\lambda}{\lambda + iq}\}$$

pour $z = 0$

$$\frac{r^3 H_r}{M} = iq \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{m}{(m!)^2} \frac{r^{2m+1}}{2^{2m-1}} \int_0^{\infty} \lambda^{2m+1} \frac{e^{-\lambda\beta}}{\lambda + iq} d\lambda$$

$$\frac{r^3 H_r}{M} = iq \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{m}{(m!)^2} \frac{r^{2m+1}}{2^{2m-1}} \{(-1)^{2m} (iq)^{2m+1} e^{ix} E_i(-ix) \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{2m+1} (k-1)! (-iq)^{2m+1-k} \left(\frac{x}{q}\right)^{-k} \right]$$

avec $x = \beta q$

$$\frac{r^3 H_r}{M} = irq \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m}{(m!)^2} \frac{(rq)^{2m+1}}{2^{2m-1}} \left[(-1)^m i e^{ix} E_i(-ix) \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=1}^{2m+1} (k-1)! (-1)^{2m+1-k} (i)^{2m+1-k} (x)^{-k} \right] \right\}$$

pour $m=1$ on obtient :

$$irq \left\{ -\frac{(rq)^3}{2} \left[-i e^{ix} E_i(-ix) - \frac{1}{x} - \frac{i}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \dots \right] \right\}$$

pour $m=2$ on obtient :

$$irq \left\{ \frac{2(rq)^5}{(2!)^2 2^5} \left[i e^{ix} E_i(-ix) - \frac{1}{x} + \frac{i}{x^2} - \frac{2!}{x^3} - \frac{3!i}{x^4} + \frac{4!}{x^5} + \dots \right] \right\}$$

pour $m=3$ on a :

$$irq \left\{ \frac{-3}{(3!)^2} \frac{(rq)^7}{2^5} \left[-i e^{ix} E_i(-ix) - \frac{1}{x} - \frac{i}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!i}{x^4} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4!}{x^5} - \frac{5!i}{x^6} + \frac{6!}{x^7} + \dots \right] \right\}$$

c'est-à-dire dans le cas où l'on mesure la composante horizontale H_r du champ magnétique à la même altitude que celle du dipôle émetteur.

On peut écrire $z = 0$ et :

$$\frac{rq}{x} = \frac{r}{2h}$$

Si on groupe le quatrième terme de la série représentant $r^3 H_r/m$ pour $m=1$ avec le sixième terme de la série obtenue pour $m=2$, avec le huitième terme de la série correspondant à $m=3$... etc ...

On obtient le développement de :

$$rq \left(1 + \left(\frac{rq}{x} \right)^2 \right)^{-3/2}$$

De même si on groupe les troisième, quatrième, cinquième etc ... termes des séries obtenues respectivement pour $m=1$, $m=2$, $m=3$, on obtient le développement de l'expression :

$$rq \left| 1 - \left(1 + \left(\frac{rq}{x} \right)^2 \right)^{-1/2} \right|$$

Il en résulte que si on pose :

$$rq = \omega \mu \sigma r dh/2 = \delta$$

$$\text{et} \quad \left(1 + \left(\frac{rq}{x} \right)^2 \right)^{-1/2} = \sin \theta \quad \text{soit} \quad \frac{rq}{x} = \cot \theta$$

on trouve :

$$\frac{r^3 H_r}{M} = i \delta \cos^3 \theta + \delta^2 (1 - \sin \theta) + i \delta^3 \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \dots$$

$$\text{avec : } \cos \theta = \frac{r}{(r^2 + (2h)^2)^{1/2}}$$

ANNEXE. 6.

EXPRESSIONS INTEGRALES DONNANT LES COMPOSANTES DU CHAMP MAGNETIQUE D'UN
D.M.V. PLACE AU-DESSUS D'UN TERRAIN STRATIFIE.

L'expression du potentiel d'un D.M.V. placé au-dessus de la surface du sol est :

$$\Pi_0(z,r) = M \left\{ \frac{e^{jk_0 R}}{R} + \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_0} \frac{u_0 - u_1/Q}{u_0 + u_1/Q} e^{-u_0(z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda \right\} \quad (1)$$

$$\text{avec :} \quad Q = \frac{u_1/u_2 Q_2 + \text{th } u_1 h_1}{1 + u_1/u_2 Q_2 \text{ th } u_1 h_1} \quad Q_2 = \frac{u_2/u_3 Q_3 + \text{th } u_2 h_2}{1 + u_2/u_3 Q_2 \text{ th } u_2 h_2}$$

$$\dots \quad Q_n = \frac{u_n/u_{n+1} Q_{n+1} + \text{th } u_n h_n}{1 + u_n/u_{n+1} Q_{n+1} \text{ th } u_n h_n} \quad (2)$$

Les composantes du champ magnétique sont données par les relations :

$$H_r = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial r \partial z} \quad (3)$$

$$H_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right) \quad (4)$$

Ces expressions appliquées à la relation (1) donnent :

$$\boxed{H_r = \frac{Mr(z-h)}{R_1^5} (3-3jk_0 R_1 - k_0^2 R_1^2) e^{jk_0 R_1} + \dots} \\ \dots + M \int_0^\infty \lambda^2 \frac{u_0 - u_1/Q}{u_0 + u_1/Q} e^{-u_0(z+h)} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (5)$$

$$H_z = \frac{M}{R_1^3} (-1 + jk_0 R_1 + k_0^2 R_1^2) e^{jk_0 R_1} - \frac{M}{R_1^5} (z-h)^2 (-3 + 3jk_0 R_1 + k_0^2 R_1^2) e^{jk_0 R_1} + M \int_0^\infty \frac{\lambda^3}{u_0} \frac{u_0 - u_1/Q}{u_0 + u_1/Q} e^{-u_0(z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (6)$$

$$\text{où } R_1 = (r^2 + (z-h)^2)^{1/2}, \quad u_0 = (\lambda^2 - k_0^2)^{1/2}$$

$$u_1 = (\lambda^2 - k_1^2)^{1/2}$$

On remarque que l'intégrale comprise dans l'expression de H_z possède u_0 au dénominateur qui s'annule pour $\lambda = \omega/c$. Il en résulte que l'intégrand est indéterminé pour cette valeur.

On peut obvier à cette difficulté en écrivant le potentiel sous la forme :

$$\Pi_z = M \left\{ \frac{e^{jk_0 R_1}}{R_1} - \frac{e^{jk_0 R_2}}{R_2} + \int_0^\infty \frac{2\lambda}{u_0 + u_1/Q} e^{-u_0(z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda \right. \quad (7)$$

$$\text{avec : } R_2 = (r^2 + (z+h)^2)^{1/2}$$

La composante verticale du champ magnétique s'écrit alors après dérivation :

$$H_z = -\frac{M}{R_1^3} (1 - jk_0 R_1 - k_0^2 R_1^2) e^{jk_0 R_1} + \frac{M}{R_1^5} (z-h)^2 (3 - 3jk_0 R_1 - k_0^2 R_1^2) e^{jk_0 R_1} + \frac{M}{R_2^3} (1 - jk_0 R_2 - k_0^2 R_2^2) e^{jk_0 R_2} - \frac{M}{R_2^5} (z+h)^2 (3 - 3jk_0 R_2 - k_0^2 R_2^2) e^{jk_0 R_2} + M \int_0^\infty \frac{2\lambda^3}{u_0 + u_1/Q} e^{-u_0(z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (8)$$

On remarque alors que :

$$u_0 + u_1/Q \rightarrow 2\lambda \quad \text{quand } \lambda \rightarrow \infty \quad (9)$$

$$J_0(\lambda r) \sim \frac{K}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{quand } \lambda \rightarrow \infty \quad (10)$$

Il en résulte que l'intégrale comprise dans l'expression donnant H_z diverge si z et h sont très faibles.

Mais on remarque que :

$$\int_0^{\infty} \frac{2\lambda^3}{u_0+u_1/\Omega} e^{-u_0(z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda \quad \text{tend vers} \quad \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (11)$$

quand $\lambda \rightarrow \infty$

Il en résulte que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{2\lambda^3}{u_0+u_1/\Omega} e^{-u_0(z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda = \\ & \int_0^{\infty} \left[\frac{2\lambda^3}{u_0+u_1/\Omega} e^{-u_0(z+h)} - \lambda^2 e^{-\lambda(z+h)} \right] J_0(\lambda r) d\lambda + \dots \\ & \dots + \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \quad (12)$$

Ainsi l'intégrale qui divergerait peut être remplacée par deux intégrales qui convergent.

La dernière intégrale peut être calculée analytiquement et donne pour résultat :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(z+h)} J_0(\lambda r) d\lambda \\ &= \frac{3(z+h)^2}{(r^2+(z+h)^2)^{5/2}} - \frac{1}{(r^2+(z+h)^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (13)$$

L'expression finale permettant de calculer la composante H_z s'écrit :

$$\begin{aligned}
H_z = & -\frac{M}{R_1^3} (1 + jk_0 R_1 - k_0^2 R_1^2) e^{jk_0 R_1} + \frac{M}{R_1^5} (z-h)^2 (3 - 3jk_0 R_1 - k_0^2 R_1^2) e^{jk_0 R_1} \\
& + \frac{M}{R_2^3} (1 - jk_0 R_2 - k_0^2 R_2^2) e^{jk_0 R_2} - \frac{M}{R_2^5} (z+h)^2 (3 - 3jk_0 R_2 - k_0^2 R_2^2) e^{jk_0 R_2} \\
& M \int_0^\infty \left(\frac{2\lambda^3 e^{-u_0(z+h)}}{u_0 + u_1/Q} - \lambda^2 e^{-\lambda(z+h)} \right) J_0(\lambda r) d\lambda \\
& + \frac{3M(z+h)^2}{(r^2 + (z+h)^2)^{5/2}} - \frac{M}{(r^2 + (z+h)^2)^{3/2}} \tag{14}
\end{aligned}$$

Le programme ci-dessous exécuté en Algol, permet de calculer les modules et les phases de H_r et H_z .

PILATION ALGOL N 40 DATE 201173&

```

0000  *REAL *PI, EPS0, MU, K, R, H, Z, H1, H2, SIGMA1, SIGMA2, SIGMA3, CO, ABS1,
0000  ABS2, ABS3, RFR, IFR, RFZ, IFZ, FR;
0001  *REAL *FF, FI;
0002  *REAL *Z1H, K2R, K3R, K1R, RU5, RU3;
0003  *REAL *CI;
0004  *INTEGER *I;
0005  *INTEGER *M, Y, E, N;
0006  *INTEGER *P;
0007  N:=DATA;
0008  Y:=DATA;
0009  E:=DATA;
0010  *BEGIN *ARRAY *BOR[0:Y], ROZ[0:E];
0011  *ARRAY *FF[0:Y+2, 0:N], FI[0:Y+2, 0:N];
0012  *ARRAY *X[0:N], H3[0:N];
0013  *REAL *INT1, INT2, INT3, INT4, RFR, IFR, RFZ, IFZ;
0014  *REAL *RHZ1, IHZ1, RHZ2, IHZ2, RHZX, IHZX, RHZY, IHZY;
0015  *REAL *RHR1, RHR2, IHR1, IHR2, RHRX, IHRX, RHRy, IHRy, XZ;
0016  *REAL *PI, KO, KOR, RHRP, IHRP, RHR, IHR, RHZP, IHZP, RHZ, IHZ, HR, HZ, AB, BB, AHR,
0016  AHZ, ALPHA, HRHZ;
0017  *PROCEDURE *CAPPOL(A, B, RA, ARC);
0018  *VALUE *A, B;
0019  *REAL *A, B, RA, ARC;
0020  *BEGIN *REAL *PI;
0021  PI:=3.141592;
0022  *IF *A=0 *AND *B=0 *THEN *BEGIN *RA:=0;
0023  ARC:=0;
0024  *GOTO *XI;
0025  *END;
0026  *IF *A>=0 *THEN *BEGIN *IF *A<ABS(B)*0.01 *THEN *BEGIN *IF *B>0 *THEN *ARC:
0026  =PI/2 *ELSE *ARC:=-PI/2 *END *ELSE *ARC:=ARCTAN(B/A) *END;
0027  *IF *A<0 *THEN *BEGIN *IF *ABS(A)<ABS(B)*0.01 *THEN *BEGIN *IF *B>0 *THEN *
0027  ARC:=PI/2 *ELSE *ARC:=-PI/2 *END *ELSE *ARC:=ARCTAN(B/A)+PI *END;
0028  RA:=A*A+B*B;
0029  RA:=SQRT(RA);
0030  XI: *END *PROCEDURE, CAPPOL;
0031  *PROCEDURE *RACIM(C, D, RE, IM, RA, ARC);
0032  *VALUE *C, D;
0033  *REAL *C, D, RE, IM, RA, ARC;
0034  *BEGIN *IF *C>=0 *THEN *BEGIN *IF *C<ABS(D)*0.01 *THEN *BEGIN *IF *D>0 *TH
0034  EN *ARC:=PI/2 *ELSE *ARC:=-PI/2 *END *ELSE *ARC:=ARCTAN(D/C) *END;
0035  *IF *C<0 *THEN *BEGIN *IF *ABS(C)<ABS(D)*0.01 *THEN *BEGIN *IF *D>0 *THEN *
0035  ARC:=PI/2 *ELSE *ARC:=-PI/2 *END *ELSE *ARC:=ARCTAN(D/C)+PI *END;
0036  *IF *ARC>PI *THEN *ARC:=ARC/2-PI *ELSE *ARC:=ARC/2;
0037  RA:=SQRT(C*C+D*D);
0038  RA:=SQRT(RA);
0039  RE:=RA*COS(ARC);
0040  IM:=RA*SIN(ARC);
0041  *END *PROCEDURE, RACIM;
0042  *PROCEDURE *GAUSS(A, B, L, M, RFR, IFR, RFZ, IFZ, INT1, INT2, INT3, INT4);
0043  *VALUE *A, B, L;
0044  *VALUE *M;
0045  *INTEGER *L, M;
0046  *REAL *A, B;
0047  *REAL *RFR, IFR, RFZ, IFZ, INT1, INT2, INT3, INT4;
0048  *BEGIN *REAL *TI, HG;
0049  *ARRAY *T[0:N];
0050  *REAL *HG3, HG4, HG2;

```




```

0051 HG:=0;
0052 HG2:=0;
0053 HG3:=0;
0054 HG4:=0;
0055 *FOR'D:=0'STEP'1'UNTIL'N'DO'T(P):=(A+B)/2+(P-A)*X(P)/2;
0056 *FOR'D:=0'STEP'1'UNTIL'N'DO'*BEGIN'T1:=T(P);
0057 T(T1,L,M,P,RFR,IFR,RFZ,IFZ);
0058 *IF'L=1'THEN'*BEGIN'HG:=HG+H3(P)*RFR;
0059 HG2:=HG2+H3(P)*IFR;
0060 *END'*ELSE'*BEGIN'HG3:=HG3+H3(P)*RFZ;
0061 HG4:=HG4+H3(P)*IFZ;
0062 *END';
0063 *END';
0064 *IF'L=1'THEN'*BEGIN'INT1:=(B-A)*HG/2;
0065 INT2:=(B-A)*HG2/2;
0066 *END'*ELSE'*BEGIN'INT3:=(B-A)*HG3/2;
0067 INT4:=(B-A)*HG4/2;
0068 *END';
0069 *END'PROCEDUREGAUSS;
0070 *PROCEDURE'F(LA,L,M,P,RF1,IF1,RF2,IF2);
0071 *VALUE'LA,L;
0072 *VALUE'M,P;
0073 *REAL'LA;
0074 *INTEGER'M,P;
0075 *INTEGER'L;
0076 *REAL'RF1,IF1,RF2,IF2;
0077 *BEGIN'*REAL'RZ,IZ;
0078 *REAL'VAR,ROU1,MUIQ,AUIQ,RUIQ,IUIQ,RUI,IUI,ROU1,ARI,RO,IO,RDD,IDD,RO
0078 D,AD,RN,IN,PDN,IND,PON,AN,RO,AP,MC,AR,MR,MZ,AZ,RUO,IUO,ROUO,ARO;
0079 *REAL'RU2,IU2,ROU2,AR2,RU3,IU3,ROU3,AR3,RU23,AR23,RH2,IH2,EX2,TH2,TA
0079 H,DTH,RTH,I TH,ROTH,ATH,NRQ2,NIQ2,DRQ2,DIQ2,RNQ2,ANQ2,RDQ2,ADQ2,ROQ2,
0079 AQ2,RU12,AP12,RUI2,NRQ,NIQ,DRQ,DIQ,RNQ,ANQ,RDQ,ADQ,MODQ,AQ;
0080 *INTEGER'I;
0081 VAR:=LA*LA-C0;
0082 RACIM(VAR,0,ROU,IUO,ROUO,ARO);
0083 VAR:=LA*LA-C1;
0084 RACIM(VAR,ARS1,RU1,IU1,ROU1,ARI);
0085 RACIM(VAR,ARS2,RU2,IU2,ROU2,AR2);
0086 RACIM(VAR,ARS3,RU3,IU3,ROU3,AR3);
0087 RU23:=ROU2/ROU3;
0088 AR23:=AR2-AR3;
0089 RH2:=RU2*H2;
0090 IH2:=IU2*H2;
0091 E1:EX2:=EXP(RH2);
0092 TH2:=(EX2-1/EX2)/(EX2+1/EX2);
0093 TAN:=SIN(IH2)/COS(IH2);
0094 DTH:=1+TAN*TAN*TH2*TH2;
0095 RTH:=TH2*(1+TAN*TAN)/DTH;
0096 ITH:=TAN*(1-TH2*TH2)/DTH;
0097 CARPOL(OTH,ITH,ROTH,ATH);
0098 *IF'I=2'THEN'*GOTO'E2;
0099 NRQ2:=RU23*COS(AR23)+RTH;
0100 NIQ2:=RU23*SIN(AR23)+ITH;
0101 DRQ2:=1+RU23*ROTH*COS(AR23+ATH);
0102 DIQ2:=RU23*ROTH*SIN(AR23+ATH);
0103 CARPOL(NRQ2,NIQ2,RNQ2,ANQ2);
0104 CARPOL(DRQ2,DIQ2,RDQ2,ADQ2);
0105 ROQ2:=RNQ2/ROQ2;

```



```

0106  A22:=A100-A002;
0107  R012:=R001/R002;
0108  A12:=A11-A02;
0109  R112:=R012*R002;
0110  A12:=A12+A02;
0111  R023:=R012;
0112  A23:=A12;
0113  R02:=R01*R1;
0114  I02:=I01*R1;
0115  I:=2;
0116  *GOTO*E1;
0117  E2:NR0:=R012*COS(A12)+RTH;
0118  I:=0;
0119  NI0:=R012*SIN(A12)+ITH;
0120  DRQ:=1+R012*R0TH*COS(A12+ATH);
0121  DIQ:=R012*R0TH*SIN(A12+ATH);
0122  CARPOL(NR0,NI0,R0Q,ANG);
0123  CARPOL(DRQ,DIQ,R0Q,ADQ);
0124  MODQ:=R0Q/R0Q;
0125  A0:=ANQ-ADQ;
0126  MUIQ:=R0U1/MODQ;
0127  AU1Q:=A11-A0;
0128  RUIQ:=MUIQ*COS(AU1Q);
0129  IUIQ:=MUIQ*SIN(AU1Q);
0130  R0:=R0Q+RUIQ;
0131  I0:=I0Q+IUIQ;
0132  CARPOL(P0,I0,R0Q,AD);
0133  RN:=R0Q-RUIQ;
0134  IN:=I0Q-IUIQ;
0135  CARPOL(RN,IN,R0Q,AN);
0136  R0:=RON/R0Q;
0137  AP:=AN-AD;
0138  MC:=LA*LA*P0*EXP(-RU0*(Z+H));
0139  *IF*L=1*THEN*BEGIN*MR:=MC*FI[M,P];
0140  AR:=AP-IU0*(Z+H);
0141  RFI:=MR*COS(AR);
0142  IFI:=MR*SIN(AR);
0143  *END*FLSE*BEGIN*MZ:=2*LA*LA*LA*EXP(-RU0*(Z+H))/R0Q;
0144  AZ:=-IU0*(Z+H)-AD;
0145  RZ:=MZ*COS(AZ);
0146  IZ:=MZ*SIN(AZ);
0147  RZ:=RZ-LA*LA*EXP(-LA*(Z+H));
0148  RF2:=R7*FF[M,P];
0149  IF2:=I7*FF[M,P];
0150  *END*;
0151  *END*PROCEDUREF;
0152  *FOR*M:=0*STEP*1*UNTIL*N*DO*X[M]:=DATA;
0153  *FOR*M:=0*STEP*1*UNTIL*N*DO*H3[M]:=DATA;
0154  *FOR*M:=0*STEP*1*UNTIL*Y+2*DO*BEGIN*FOR*P:=0*STEP*1*UNTIL*N*DO*BE
0154  GIN*FI[M,P]:=DATA;
0155  *END*;
0156  *END*;
0157  *FOR*M:=0*STEP*1*UNTIL*Y+2*DO*BEGIN*FOR*P:=0*STEP*1*UNTIL*N*DO*FF[
0157  H,P]:=DATA;
0158  *END*;
0159  *FOR*M:=0*STEP*1*UNTIL*Y+2*DO*BEGIN*FOR*P:=0*STEP*1*UNTIL*N*DO*BE
0159  GIN*END*;
0160  *END*;

```



```

0161 *FOR'N:=0'STEP'1'UNTIL'Y+2'DO''BEGIN''FOR'P:=0'STEP'1'UNTIL'N'DO''BE
0161 GIB''END';
0162 *END';
0163 PI:=3.141592;
0164 EPS0:=10-09/(36*PI);
0165 MU:=4*PI*10-07;
0166 K:=DATA;
0167 H:=DATA;
0168 Z:=DATA;
0169 R:=DATA;
0170 *FOR'M:=0'STEP'1'UNTIL'Y'DO''BEGIN'BOR[M]:=DATA;
0171 TEXT("BOR\");
0172 EDIT("LII.5\,BOR[M]);
0173 BOR[M]:=BOR[M]/R;
0174 *END';
0175 PRINT(2);
0176 *FOR'M:=0'STEP'1'UNTIL'E'DO''BEGIN'BOZ[M]:=DATA;
0177 TEXT("BOZ\");
0178 EDIT("LII.5\,BOZ[M]);
0179 BOZ[M]:=BOZ[M]/R;
0180 *END';
0181 PRINT(2);
0182 V1:SIGMA1:=DATA;
0183 SIGMA2:=DATA;
0184 SIGMA3:=DATA;
0185 H1:=DATA;
0186 H2:=DATA;
0187 FR:=DATA;
0188 CO:=4*PI*PI*FR*FR*10-07/(9*10+09);
0189 ABS1:=2*PI*FR*MU*SIGMA1;
0190 C1:=CO*K;
0191 ABS2:=ABS1*SIGMA2/SIGMA1;
0192 ABS3:=ABS1*SIGMA3/SIGMA1;
0193 I:=1;
0194 K0:=2*PI*FR/3008;
0195 E3:RI:=SQRT((Z-H)*(Z-H)+R*R);
0196 KOR:=K0*RI;
0197 RHR:=0;
0198 IHR:=0;
0199 RHZ:=0;
0200 IHZ:=0;
0201 RHRP:=R*(Z-H)*((3-KOR*KOR)*COS(KOR)+3*KOR*SIN(KOR))/(RI+5);
0202 IHRP:=R*(Z-H)*((3-KOR*KOR)*SIN(KOR)-3*KOR*COS(KOR))/(RI+5);
0203 TEXT("*\");
0204 PRINT(1);
0205 *FOR'M:=0'STEP'1'UNTIL'Y-1'DO''BEGIN'GAUSS(BOR[M],BOR[M+1],I,M,FR,I
0205 FR,RFZ,IFZ,INT1,INT2,INT3,INT4);
0206 RHR:=RHR+INT1;
0207 IHR:=IHR+INT2;
0208 *END';
0209 F(BOR[Y],I,Y,0,RHR,IHR,RHZ,IHZ);
0210 TEXT("**\");
0211 SPACE(2);
0212 XZ:=BOR[Y]+PI/R;
0213 TEXT("XZ=\");
0214 EDIT("LII.5\,XZ);
0215 PRINT(1);
0216 M:=Y+1;

```



```

0217 F(XZ,I,M,0,RHR2,IHR2,RHZ2,IHZ2);
0218 M:=Y+2;
0219 GAUSS(BOZ[Y],XZ,I,M,RFR,IFR,RFZ,IFZ,INT1,INT2,INT3,INT4);
0220 RHRX:=RHR2*RHR;
0221 IHRX:=IHR2*IHR;
0222 RHR1:=RHR*(RHR+INT1);
0223 IHR1:=IHR*(IHR+INT2);
0224 RHR:=(RHR1-RHRX)/(RHR1-RHR2);
0225 IHR:=(IHR1-IHRX)/(IHR1-IHR2);
0226 TEXT("RHR\");
0227 EDIT("L11.5\",RHR);
0228 SPACE(2);
0229 TEXT("IHR\");
0230 EDIT("L11.5\",IHR);
0231 PRINT(1);
0232 RHR:=RHR+RHRP;
0233 IHR:=IHR+IHRP;
0234 ZIH:=(Z-H)*(Z-H);
0235 E8:K2R:=3-KOR*KOR;
0236 K3R:=3*KOR;
0237 RU5:=R1*5;
0238 RU3:=R1*3;
0239 K1R:=1-KOR*KOR;
0240 RHRP:=(ZIH*(K2R*COS(KOR)+K3R*SIN(KOR)))/RU5-(K1R*COS(KOR)+KOR*SIN(KOR)
0241 )/RU3;
0241 IHRP:=(ZIH*(K2R*SIN(KOR)-K3R*COS(KOR)))/RU5-(K1R*SIN(KOR)-KOR*COS(KOR)
0242 )/RU3;
0242 'IF'I=2'THEN'GOTO'E9;
0243 RHZP:=RHRP;
0244 IHZP:=IHRP;
0245 RI:=SQRT((Z+H)*(Z+H)+R*R);
0246 ZIH:=(Z+H)*(Z+H);
0247 KOR:=K0*RI;
0248 I:=2;
0249 'GOTO'E8;
0250 E9:RHZP:=RHZP-RHRP;
0251 IHZP:=IHZP-IHRP;
0252 I:=0;
0253 RHRP:=(3*(Z+H)*(Z+H)/R1*5)-1/R1*3;
0254 TEXT("RHRP\");
0255 EDIT("L11.5\",RHRP);
0256 PRINT(2);
0257 'FOR'M:=0'STEP'I'UNTIL'E-I'DO'BEGIN'GAUSS(BOZ[M],BOZ[M+1],0,M,RFR,I
0257 FR,RF7,IFZ,INT1,INT2,INT3,INT4);
0258 RHZ:=RHZ+INT3;
0259 IHZ:=IHZ+INT4;
0260 'END';
0261 F(BOZ[E],0,E,0,RHRI,IHRI,RHZI,IHZI);
0262 TEXT("**\");
0263 SPACE(2);
0264 XZ:=BOZ[E]+PI/R;
0265 TEXT("XZ=\");
0266 EDIT("L11.5\",XZ);
0267 PRINT(1);
0268 M:=E+1;
0269 F(XZ,0,M,0,RHR2,IHR2,RHZ2,IHZ2);
0270 M:=E+2;
0271 GAUSS(BOZ[E],XZ,0,M,RFR,IFR,RFZ,IFZ,INT1,INT2,INT3,INT4);

```



```

0272 RHZX:=RHZ2*RHZ;
0273 IHZ:=IHZ2*IHZ;
0274 RHZY:=RHZ1*(RHZ+INT3);
0275 IHZY:=IHZ1*(IHZ+INT4);
0276 RHZ:=(RHZY-RHZX)/(RHZ1-RHZ2);
0277 IHZ:=(IHZY-IHZX)/(IHZ1-IHZ2);
0278 RHZ:=RHZ+PH7P+RHRP;
0279 IHZ:=IHZ+IH7P;
0280 TEXT("RHZ\");
0281 EDIT("L11.5\,RHZ);
0282 SPACE(2);
0283 TEXT("IHZ\");
0284 EDIT("L11.5\,IHZ);
0285 PRINT(1);
0286 CARPOL(RHZ,IHZ,HZ,AHZ);
0287 CARPOL(RHR,IHR,HR,AHR);
0288 AB:=HR*HZ*COS(AHR-AHZ);
0289 BB:=HR*HR-HZ*HZ;
0290 ALPHA:=(=BR+SQR(BB*BB+4*AB*AB))/(2*AB);
0291 *IF ALPHA>=0 THEN ALPHA:=ARCTAN(ALPHA)*ELSE ALPHA:=ARCTAN(ALPHA)+PI;
0292 ALPHA:=ALPHA*360/(2*PI);
0293 HRHZ:=HR/HZ;
0294 TEXT("R\");
0295 EDIT("L11.5\,R);
0296 SPACE(2);
0297 TEXT("H\");
0298 EDIT("L11.5\,H);
0299 SPACE(2);
0300 TEXT("Z\");
0301 EDIT("L11.5\,Z);
0302 SPACE(2);
0303 TEXT("FR\");
0304 EDIT("L11.5\,FR);
0305 PRINT(4);
0306 TEXT("H1\");
0307 EDIT("L11.5\,H1);
0308 SPACE(2);
0309 TEXT("H2\");
0310 EDIT("L11.5\,H2);
0311 SPACE(2);
0312 TEXT("SIGMA1\");
0313 EDIT("L11.5\,SIGMA1);
0314 SPACE(2);
0315 TEXT("SIGMA2\");
0316 EDIT("L11.5\,SIGMA2);
0317 SPACE(2);
0318 TEXT("SIGMA3\");
0319 EDIT("L11.5\,SIGMA3);
0320 PRINT(3);
0321 TEXT("HR\");
0322 EDIT("L11.5\,HR);
0323 SPACE(2);
0324 TEXT("HZ\");
0325 EDIT("L11.5\,HZ);
0326 SPACE(2);
0327 TEXT("ALPHA\");
0328 EDIT("L11.5\,ALPHA);
0329 SPACE(2);

```

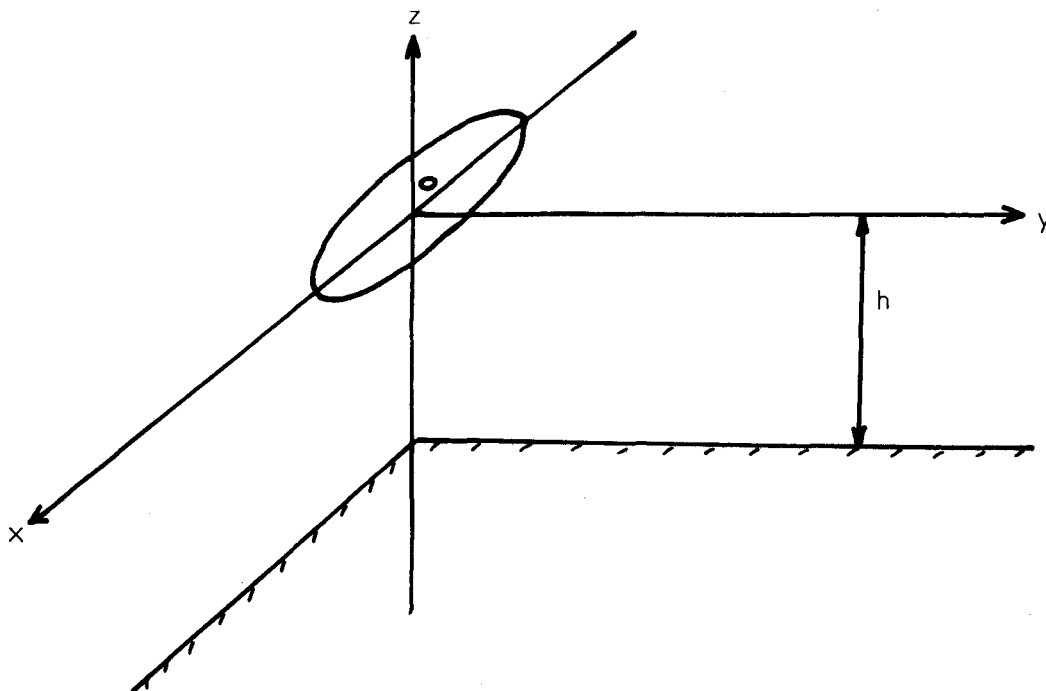
805
L11E

```
0330 TEXT("HRHZ\");  
0331 EDIT("L11.5\,HRHZ");  
0332 PRINT(3);  
0333 'GOTO'VI;  
0334 'END';  
0335 'END';  
0336
```

FIN DE COMPILATION

ANNEXE.7.COMPOSANTES H_z et E_ϕ DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE CREE PAR UNE BOUCLE PLACEE A LA SURFACE DU SOL. COMPARAISON AVEC LES COMPOSANTES DU DIPOLE

On considère une boucle de courant de rayon ρ , d'axe vertical et placée à une hauteur h au-dessus du sol. Le centre de la boucle coïncide avec l'origine d'un système de coordonnées cylindriques.



Les composantes du champ électromagnétique dérivent d'un potentiel vecteur F possédant une seule composante verticale par les relations :

$$H_r = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} \quad E_\phi = \frac{\partial F}{\partial r} \quad H_z = \frac{1}{j\omega\mu} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) \right) \quad (1)$$

Le potentiel primaire créé par la boucle est de la forme : (SEICHTER 1933)

$$F = \frac{j\omega\mu\rho I}{2} \int_0^{\infty} \frac{J_1(\lambda\rho)J_0(\lambda r)e^{-\lambda|z|}}{\lambda} d\lambda \quad (2)$$

Dans l'air la solution générale du potentiel est de la forme :

$$F_o = \frac{j\omega\mu\rho^2 I}{4} \int_0^{\infty} [\rho_o(\lambda)e^{-\lambda z} + G_o(\lambda)e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3)$$

$$\text{avec : } \rho_o(\lambda) = \frac{2J_1(\lambda\rho)}{\lambda\rho} \quad (4)$$

Dans le sol le potentiel s'écrit :

$$F_I = \frac{j\omega\mu\rho^2 I}{4} \int_0^{\infty} f_I(\lambda)e^{u z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (5)$$

A partir des conditions aux limites écrites sur l'interface air-sol, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} G_o(\lambda) &= -f_o(\lambda)e^{-\lambda h} \frac{\mu_o\mu - \mu\lambda}{\mu_o\mu + \mu\lambda} \\ f_I(\lambda) &= [f_o(\lambda)e^{-\lambda h} + G_o(\lambda)e^{\lambda h}] e^{uh} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Si $\mu_o = \mu$ et si $h = 0$ (boucle posée sur le sol), le potentiel dans l'air s'écrit :

$$F_o = \frac{j\omega\mu\rho^2 I}{4} \int_0^{\infty} \frac{2\lambda}{\mu + \lambda} f_o(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda \quad (7)$$

en remplaçant $J_1(x)$ par :

$$J_1(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{m!(m+1)!2^{2m+1}} \quad (8)$$

on peut écrire :

$$I_0 = \frac{2j\omega\mu\rho^2 I}{4} \sum_0^{\infty} \frac{(-I) \rho^{2m}}{m!(m+1)! 2^{2m}} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{2m+1}}{\mu+\lambda} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (9)$$

La résolution de l'intégrale (9) (WATT 1954), permet d'écrire le potentiel F_0 sous la forme :

$$F_0 = \frac{2j\omega\mu\rho^2 I}{4} \sum_0^{\infty} \frac{(-I) \rho^{2m}}{m!(m+1)! 2^{2m}} \left[-\frac{I}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right]_m R(\gamma r) \quad (10)$$

$\left[-\frac{I}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right]_m R(\gamma r)$ veut dire que l'opérateur $\left[-\frac{I}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right]$ est

appliqué m fois à la fonction $R(\gamma r)$.

Cet opérateur est égal à I pour $m = 0$.

$$R(\gamma r) = \frac{I}{2\gamma^3 r^3} \left[I - (I+\gamma r)e^{-\gamma r} \right] \quad (11)$$

Il en résulte que :

$$H_z = \frac{\rho^2 I}{2} \sum_0^{\infty} \frac{(\rho/2)^{2m} (-I)^m}{m!(m+1)! 2^{2m}} \left[-\frac{I}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right]_{m+1} R(\gamma r) \quad (12)$$

$$E_{\phi} = \frac{2j\omega\mu\rho^2 I}{4} \sum_0^{\infty} \frac{(-I) \rho^{2m}}{m!(m+1)! 2^{2m}} \left[-\frac{I}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right]_m \frac{\partial}{\partial r} (R(\gamma r)) \quad (13)$$

Tous calculs faits on trouve :

$$H_z = \frac{\rho^2 I}{2\gamma^2 r^5} - [9 - (9+9\gamma r + 4\gamma^2 r^2 + \gamma^3 r^3)] e^{-\gamma r} + \dots$$

$$\dots - \frac{\rho^2}{8r^2} [225 - (225 + 225\gamma r + 108\gamma^2 r^2 + 33\gamma^3 r^3 + 7\gamma^4 r^4 + \gamma^5 r^5)] e^{-\gamma r}$$

$$+ \frac{\rho^2}{192r^4} [11025 - (11025\gamma r + 5400\gamma^2 r^2 + 1725\gamma^3 r^3 + \dots$$

$$\dots 402\gamma^4 r^4 + 72\gamma^5 r^5 + 10\gamma^6 r^6 + \gamma^7 r^7)] e^{-\gamma r} + \dots$$

$$\begin{aligned}
 E_{\varphi} &= \frac{j\omega\mu\rho^2 I}{2\gamma^2 r^4} \left\{ -3\left(3+3\gamma r+\gamma^2 r^2\right)e^{-\gamma r} + \dots \right. \\
 &\dots + \frac{\rho^2}{4r^2} \left[-45+(45+45\gamma r+21\gamma^2 r^2+6\gamma^3 r^3+\gamma^4 r^4)e^{-\gamma r} \right. \\
 &\dots + \frac{\rho^4}{192r^4} \left. \left. -1575+(1575+1575\gamma r+765\gamma^2 r^2+240\gamma^3 r^3+54\gamma^4 r^4 \right. \right. \\
 &\left. \left. + 9\gamma^5 r^5+\gamma^6 r^6\right)e^{-\gamma r} \right] + \dots \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Nous avons tracé le rapport du module du champ magnétique (verticale H_z) produit par la boucle à une distance R , et du module de la même composante créée à la même distance par un dipôle, en fonction du rapport R/ρ .

La courbe figure.1. montre qu'au-delà de $R/\rho = 8$. Le champ magnétique vertical créé par la boucle diffère de moins de 1% de celui créé par le dipôle. On peut donc admettre qu'au-delà de $R/\rho = 10$ on peut assimiler la boucle de rayon R à un dipôle.

$\frac{H_z \text{ boucle}}{H_z \text{ dipôle}}$

R = distance boucle émetteur

ρ = rayon de la boucle

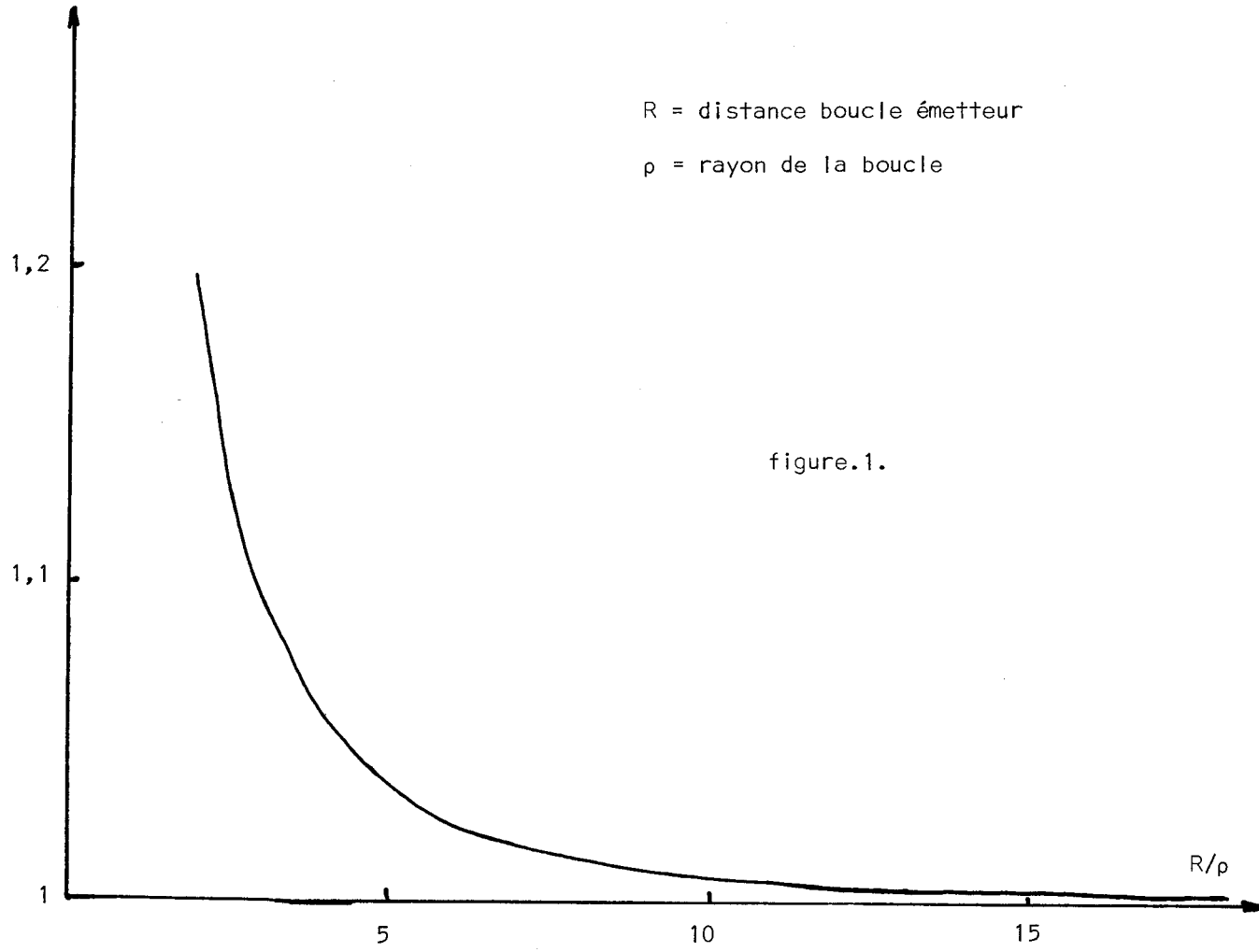


figure.1.

