

N° d'Ordre : 159

50376
1974
194

50376
-1974
-194

THESE

95036

présentée à la

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE LILLE 1

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR INGENIEUR

par

Talaat Mohamed ABDEL-MONEIM



CONTRIBUTION à l'ANALYSE et à la SYNTHÈSE
DES SYSTEMES ECHANTILLONNES INCOMPLETEMENT OBSERVES

Soutenue le 12 Juillet 1974, devant la commission d'examen

MM. P. VIDAL Président
F. LAURENT Rapporteur
C. MELIN } Examineurs
M. BOURTON }

SCD LILLE 1



D 030 308299 7

N° d'Ordre : 159

50376
1974
194



50376
1974
194

A RETOURNER LE

FACU

CONTRIBUTION à l'ANALYSE et à la SYNTHÈSE
DES SYSTEMES ECHANTILLONNES INCOMPLETEMENT OBSERVES

Soutenu le 12 Juillet 1974, devant la commission d'examen

MM. P. VIDAL	Président
F. LAURENT	Rapporteur
C. MELIN	} Examineurs
M. BOURTON	



030 031660 6

Introduction Générale

L'utilisation des méthodes modernes de régulation implique le plus souvent la connaissance de toutes les composantes du vecteur état du processus.

Toutefois, dans la réalisation de la commande d'un système réel, cette contrainte n'est pas toujours satisfaite.

Après avoir dégagé dans un premier chapitre les caractéristiques d'une compensation échantillonnée qui annule le régime transitoire en un temps fini minimum, nous étendons ces propriétés aux systèmes échantillonnés incomplètement observés.

C'est ainsi que dans un deuxième chapitre, une étude est consacrée à l'estimation de la réaction d'état à l'aide d'un observateur asymptotique discret.

Pour un système physique, la considération des caractéristiques inhérentes au filtre à régler peut conduire à simplifier considérablement la synthèse de l'asservissement. C'est dans cet esprit que nous proposons une méthode de régulation (chapitre III).

De plus, la transformation de la réaction d'état en une réaction directe de sortie par l'augmentation de l'ordre du processus à commander, méthode mise au point par Pearson^(*) pour les systèmes continus, est dans le quatrième volet étendue aux systèmes discrets.

Enfin, nous envisageons dans un dernier chapitre la possibilité de généraliser dans le cadre des systèmes échantillonnés non linéaires les modes de régulation précédents.

(*) J.B. PEARSON : "Compensator design for dynamic optimisation"
Int. J. Control, Vol. 9, n°4, p.473-482, 1969.

CHAPITRE I

INTRODUCTION A LA REGULATION DES SYSTEMES ECHANTILLONNES INCOMPLETEMENT OBSERVES

INTRODUCTION

L'amélioration des performances d'un processus constitue une préoccupation essentielle lors de l'étude et de la mise au point d'un asservissement. En effet, la réponse à un ordre bien défini doit concilier la rapidité et la précision.

Dans ce sens, l'utilisation d'une compensation de type échantillonné caractérisée par une transmission de l'information à des instants discrets de temps s'avère particulièrement intéressante. Ainsi, divers travaux ont mis en évidence la possibilité d'assurer un amortissement du régime transitoire en un temps fini. Cependant cette caractéristique particulière dépend étroitement du degré d'observation du processus à compenser qui exprime les caractéristiques et les propriétés d'indépendance des informations obtenues à un même instant lors de l'observation du processus à régler.

Après avoir dégagé les propriétés particulières de la commande échantillonnée en boucle fermée d'un processus d'ordre "q" complètement observé, nous allons préciser les conséquences de la non-mesurabilité de tous les états lors de la réalisation pratique des capteurs.

Le problème d'optimisation du temps de réponse d'un système échantillonné imparfaitement observé nous a conduit à envisager l'utilisation d'un système de régulation intermédiaire correspondant à un mode particulier de l'élaboration de la commande à partir des informations possibles sur le processus.

I - Commande des systèmes complètement observés

La commande des systèmes est élaborée le plus souvent selon deux optiques bien distinctes : la commande en boucle ouverte et le fonctionnement en boucle fermée.

En abordant ce problème, nous proposons d'envisager le cas échantillonné d'un processus en "m" périodes ($1 \leq m \leq q$) pour un filtre d'ordre "q".

1.1 - Commande en boucle ouverte

La structure adoptée pour l'asservissement est présentée figure 1. La chaîne d'action comporte successivement un échantillonneur à période constante "T", un modulateur linéaire et le filtre à asservir dont la fonction de transfert $L(p)$ est d'ordre "q".

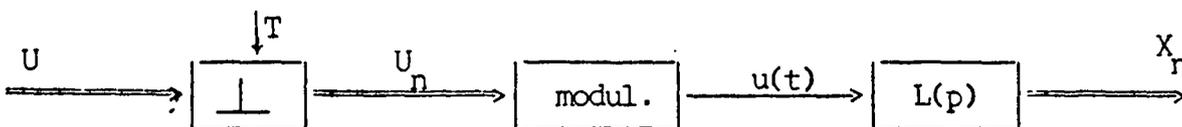


Figure 1

La commande $u(t)$ s'effectue à partir de " ℓ " impulsions de durée T , chacune d'entre elles étant indépendamment modulée en amplitude /1/ par une des composantes u_n^i ($i = 1, \dots, \ell$) du vecteur U_n grandeur d'entrée de l'ensemble.

L'équation de fonctionnement s'écrit alors /2/ :

$$(1) \quad X_{n+1} = A X_n + \sum_{i=1}^{\ell} u_n^i B_i$$

X_n : vecteur de dimension "q" représente l'état du filtre à l'instant nT

A : matrice carrée ($q \times q$) à coefficients constants caractérise le régime autonome du filtre pour la période T .

B_i : vecteur d'ordre (q) fonction de l'échantillonneur et du filtre, constitue la réponse du système partant de conditions initiales nulles avec :

$$u_n^j = 0 \quad (j \neq i) \quad \text{et} \quad u_n^i = 1$$

La matrice "B" de dimensions ($q \times \ell$), formée de la juxtaposition des vecteurs " B_i " définit la modulation et l'équation (1) s'écrit alors :

$$(2) \quad X_{n+1} = A X_n + B U_n$$

Un calcul élémentaire (equ.3) montre que la définition de la suite $U_{n+i} : i \rightarrow (0, m-1)$, pour atteindre un état désiré X_{n+m} à partir d'un état initial quelconque X_n est immédiate, pourvue que soit satisfaite la condition de commandabilité (4) /3/ :

$$(3) \quad X_{n+m} - A^m X_n = \underbrace{\begin{bmatrix} A^{m-1} B, & \dots, & B \end{bmatrix}}_{C_m} \begin{bmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ \vdots \\ U_{n+m-1} \end{bmatrix}$$

C_m : matrice de commandabilité en m périodes.

$$(4) \quad \text{rang} \{C_m\} = q, \quad \frac{q}{2} \leq m \leq q$$

La commande en boucle ouverte nécessite ainsi la connaissance parfaite du système à régler et son état initial. Dans ce sens, des perturbations peuvent amener une dérive de l'ensemble.

Ces impératifs techniques peuvent recevoir une solution de première approximation en imposant à priori une structure en boucle fermée.

1.2 - Commande en boucle fermée

Le principe bien connu de ce type de commande consiste à utiliser les diverses composantes de l'état du filtre en vue de l'élaboration du vecteur de commande U_n . Il semble intéressant de chercher une chaîne de retour $R(p)$, fig. (2), qui assure les fonctionnements particulièrement performants mis en évidence à propos de l'étude de la boucle ouverte.

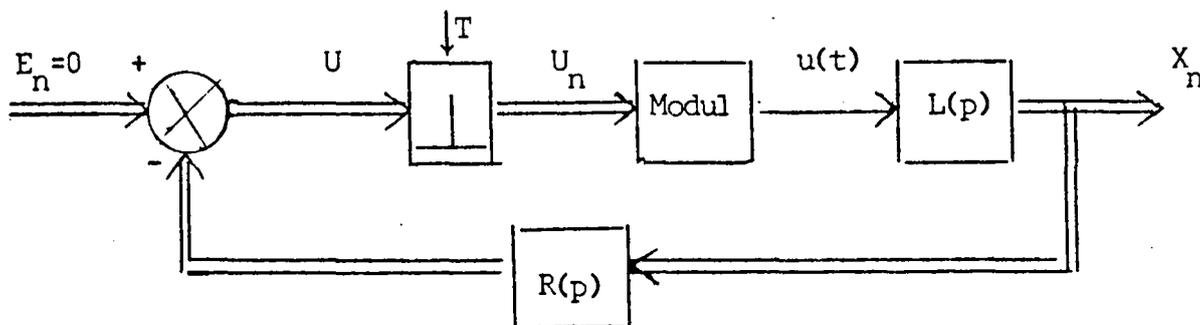


Figure 2

Pour simplifier l'analyse de notre étude se plaçant dans l'hypothèse linéaire, on supposera le signal d'entrée nul ce qui n'enlève rien à la généralité du problème.

L'effet de la boucle de contre-réaction s'écrit :

$$(5) \quad U_n = E_n - C X_n, \quad E_n = 0$$

E_n : vecteur d'entrée de "l" composantes

C : matrice (l×q) définissant la chaîne de retour.

1.2.1 - Condition d'amortissement

Une relation simple traduit l'élimination rigoureuse de l'effet des conditions initiales X_n sur le filtre au bout de "m" périodes d'échantillonnage. Elle s'écrit /4/ :

$$(6) \quad (A-BC)^m = 0 \iff X_{n+m} = 0, \quad \forall X_n$$

Une condition nécessaire s'identifie immédiatement avec le résultat obtenu à propos de la commandabilité du filtre L(p) ; en effet, la détermination d'un système asservi caractérisé par la relation (6) implique l'existence d'une suite U_{n+i} qui peut être identifiée à une séquence U_{n+i} définie par la relation (3) à propos de la commande en boucle ouverte.

1.2.2 - Détermination de la chaîne de retour

Les coefficients de la matrice "C", caractéristique de la chaîne de retour peuvent être obtenus à partir des équations matricielles /5/ :

$$(7) \quad A^m B = C_m \cdot G$$

$$C \cdot C_m = -R$$

Les matrices R et G, de dimensions (q×ml) et (ml×l) respectivement, ont la décomposition suivante :

$$(8) \quad G^T = \left(G_1^T, \dots, G_m^T \right)$$

$$R = \left(R_m, \dots, R_1 \right)$$

G_i et R_i ($i = 1, \dots, m$) sont des matrices carrées ($\ell \times \ell$) à coefficients constants définies par les relations :

$$(9) \quad R_i = \sum_{j=0}^{i-1} G_{i-j} \cdot R_j \quad i = 1, \dots, m$$

avec $R_0 = I_\ell$

L'ensemble des équations (7), (8) et (9) indique que la condition de commandabilité est suffisante pour le calcul des éléments de la chaîne de retour.

Un autre algorithme est présenté annexe 1.

1.2.3 - Stabilité de structure

Une analyse simple indique une équation de fonctionnement de la forme :

$$(10) \quad U_{n+m} + \sum_{i=1}^m F_i \cdot U_{n+m-i} = 0$$

Dans cette expression, les coefficients matriciels F_i de dimensions ($\ell \times \ell$) sont fonctions de la chaîne de retour C . En effet, la condition d'amortissement (6) équivaut à annuler les paramètres F_i ($i = 1, \dots, m$).

Soit $\psi(F_i)$ une norme géométrique de la matrice F_i , le critère de Wegrzyn-Vidal généralisé /6/, par exemple, permet de conclure à une atténuation rapide du régime transitoire lorsque l'expression $\sum_{i=1}^m \psi(F_i)$ est très petite devant 1, il en résulte ainsi une grande stabilité de structure autour des valeurs optimales indiquées par le calcul.

1.2.4 - Commande en une période d'échantillonnage

Si le modulateur plus complexe /1,7/ élabore la commande du filtre à partir de l'effet d'un ensemble de q retours ($\ell=q$), il est alors possible d'annuler le régime transitoire en une seule période d'échantillonnage par la chaîne de retour :

$$(11) \quad C = B^{-1} \cdot A$$

Le système fonctionne en régime dynamique comme un organe de copie caractérisé par la relation de récurrence :

$$(12) \quad E_n = X_{n+1}$$

où E_n est un vecteur dont les composantes sont fonctions de l'entrée $e(t)$ et de ses dérivées.

2 - Conséquences de la non-mesurabilité de tous les états

On a montré précédemment, que lorsque est vérifiée l'hypothèse de commandabilité, il est possible, par un choix approprié des systèmes de retour d'optimiser le temps de réponse en régime transitoire. En fait, les méthodes proposées jusqu'ici restent quelque peu théoriques puisqu'elles supposent toutes les grandeurs qui caractérisent l'état du système accessibles et mesurables à chaque instant d'échantillonnage, ce qui ne sera évidemment pas le cas dans la pratique où certains problèmes techniques de capteurs seront difficiles à résoudre.

A priori donc, tout état inaccessible entraîne une contrainte supplémentaire sur la structure de la matrice de réaction, à savoir : la colonne correspondante de C doit être nulle /8/.

S'il en est ainsi les possibilités de compenser le système sont considérablement limitées.

3 - Commande des systèmes imparfaitement observés

Par opposition aux systèmes précédents, le manque de données concernant l'état du système conduit à un plus grand nombre de prises d'échantillons, chacun contribuant à la connaissance d'un nombre limité de composantes du vecteur caractéristique de l'état de l'asservissement. Plusieurs éventualités sont alors offertes pour limiter le temps de réponse de ces asservissements : des auteurs s'attachent à généraliser la notion de retour tachymétrique en faisant intervenir des paramètres périodiques /9,10/ d'autres cherchent à adapter la chaîne d'action par le choix d'une modulation de type particulier des grandeurs accessibles de l'état lorsque le modulateur n'est pas imposé par des impératifs technologiques /5,11/.

Le problème d'optimisation du temps de réponse d'un système échantillonné imparfaitement observable nous a conduit à envisager la possibilité de conserver les avantages indiscutables inhérents aux asservissements échantillonnés lorsque toutes les variables d'état sont accessibles.

Dans cette intention, il semble intéressant de pallier aux défaillances de capteurs par un mode de régulation particulier :

- soit en adaptant un système de régulation intermédiaire se basant sur la reconstruction des états du processus pour un système dynamique approprié
- soit en cherchant un système associé qui permet de transformer la réaction d'état en une réaction de sortie.

CONCLUSION

La régulation en boucle fermée permet, lorsque tous les états sont accessibles à chaque instant d'échantillonnage, de conserver les avantages de la commande en boucle ouverte, tout en évitant les effets des diverses perturbations. Dans ces conditions il est possible d'imposer à la sortie du filtre un état donné en un temps fini.

Toutefois, le problème des capteurs d'informations demeure délicat. Dans ce sens, les prochains chapitres sont consacrés à l'étude de modes de régulation destinés à pallier à ces inconvénients.

BIBLIOGRAPHIE

- /1/ F. LAURENT
"Sur la commande d'un filtre linéaire par des impulsions modulées"
C.R. Acad. Paris, t. 270, p. 288-289, 26 Janvier 1970 - Série A
- /2/ P. VIDAL
"Systèmes échantillonnés non linéaires"
Gordon and Breach - 1968
- /3/ R.E. KALMAN
"On the general theory of control systems"
Proc. IFAC 1960-1, 480-492, Butterworths - London 1961
- /4/ F. LAURENT, P. BORNE, J.C. GENTINA, J.M. TOULOTTE
"Commande discrète, multimodulée d'un asservissement de position de moyenne puissance" - Congrès National Automatica 72, Octobre 1972.
- /5/ F. LAURENT, J.C. GENTINA, M. STAROSWIECKI, P. BORNE
"Sur l'optimisation du temps de réponse d'un système échantillonné incomplètement observable au moyen d'une commande multiple"
2^e IFAC Symposium On multivariable systems - Düsseldorf 1971.
- /6/ M. STAROSWIECKI
"Condition suffisante de stabilité asymptotique pour les équations récurrentes vectorielles" - Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Volume XX, N° 1 -1972
- /7/ F. LAURENT
"Sur la commande d'un filtre linéaire par des impulsions multimodulées"
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 270, p. 686-688, 9 Mars 1970, Série A
- /8/ V.N. ROSOVA
"On control fields of dynamic systems"
Moscow Translated from avtomatika i telemekhanika, n°3, p.13.20, March 1973
- /9/ P. BORNE
"Analyse des systèmes asservis échantillonnés à paramètres périodiques"
Thèse de Docteur de Spécialité en Automatique (Septembre 1970)
- /10/ J.C. GENTINA
"Contribution à la commande optimale des systèmes échantillonnés non linéaires"
Thèse de docteur Ingénieur (Juin 1970)
- /11/ F. LAURENT, P. BORNE, M. STAROSWIECKI, J.C. GENTINA
"Sur la détermination d'un modulateur optimum dans un système échantillonné"
Congrès de l'AFAS, Brest 6.11 Juillet 1970.

CHAPITRE II

ESTIMATION DE LA REACTION D'ETAT PAR UN SYSTEME DYNAMIQUE
--

INTRODUCTION

Les problèmes posés par la réalisation de capteurs nous ont conduits à envisager un mode de régulation fondé sur la reconstitution des états du processus par un système dynamique approprié.

Après avoir dégagé les résultats déjà obtenus dans ce sens, nous étendons l'utilisation des observateurs asymptotiques pour commander les systèmes linéaires à données échantillonnées. Un algorithme simple permettant la détermination d'un tel estimateur sera alors proposé.

1 - Commande par réaction d'état estimé

1.1. Structure de l'asservissement

Les états du processus peuvent ne pas être accessibles. Cependant, pour conserver les avantages des techniques de réaction d'état, on réalisera un système dynamique (estimateur) capable de reproduire les états du processus à partir de la commande et des sorties captées. Ces états estimés seront utilisés dans la chaîne de retour, figure 1

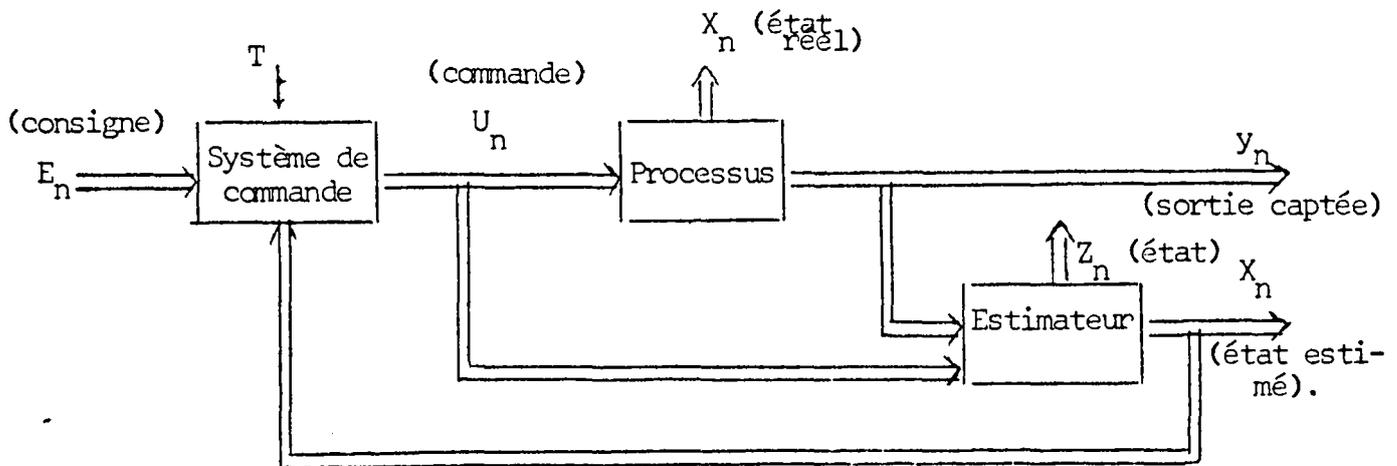


Figure:1

Afin de pouvoir appliquer ce mode de régulation, nous avons été amenés à distinguer deux régimes de fonctionnement.

(i) Régime de démarrage (estimation) :

Lors de la mise en marche de l'asservissement ou après une grande perturbation externe, l'état estimé ne correspond plus à celui du filtre à régler.

Ainsi, le régime de démarrage dépend uniquement de la structure de l'estimateur adopté et de ses propres conditions initiales.

(ii) Régime accroché (dynamique) :

Dans un fonctionnement normal de l'asservissement, l'état du processus réel est correctement estimé à chaque instant d'échantillonnage. Autrement dit, la commande peut être élaborée comme si le processus était complètement observé.

1.2. Choix de l'estimateur

Le rôle d'un estimateur consiste à reproduire les états du système réel de telle sorte qu'une norme de l'erreur entre les états estimés et les états réels soit petite, et tende à décroître quelles que soient les conditions initiales de l'estimateur et du processus réel.

Le choix particulier d'un estimateur peut être orienté par des impératifs techniques et économiques. Le but recherché peut être par exemple la minimisation du temps de réponse au démarrage, l'optimisation d'un critère de qualité ou enfin la réalisation technique la plus simple ou la plus économique.

2. Reconstitution des états non-mesurables

La reconstitution des états non directement mesurables d'un processus est envisagée le plus souvent selon trois optiques bien distinctes au point de vue dynamique :

- (i) Dérivation des sorties : Cette méthode consiste lorsque cela est possible à différencier les sorties un certain nombre de fois et à reconstituer à partir des signaux obtenus le vecteur état /9/. Il est clair que dans ce cas des problèmes de réalisation physique se poseront d'une manière aigüe ; en effet, un signal entaché de bruit peut difficilement être échantillonné et de plus un filtrage peut amener des erreurs.
- (ii) Estimateur en temps fini /11/ : Cette méthode consiste à construire un modèle complet du système et à réaliser un modulateur (B) qui permette d'amortir l'erreur d'estimation des états dans un temps minimum fini (Annexe 1). On utilise alors les états du modèle dans la chaîne de retour à la place des états du système à asservir (figure 2).

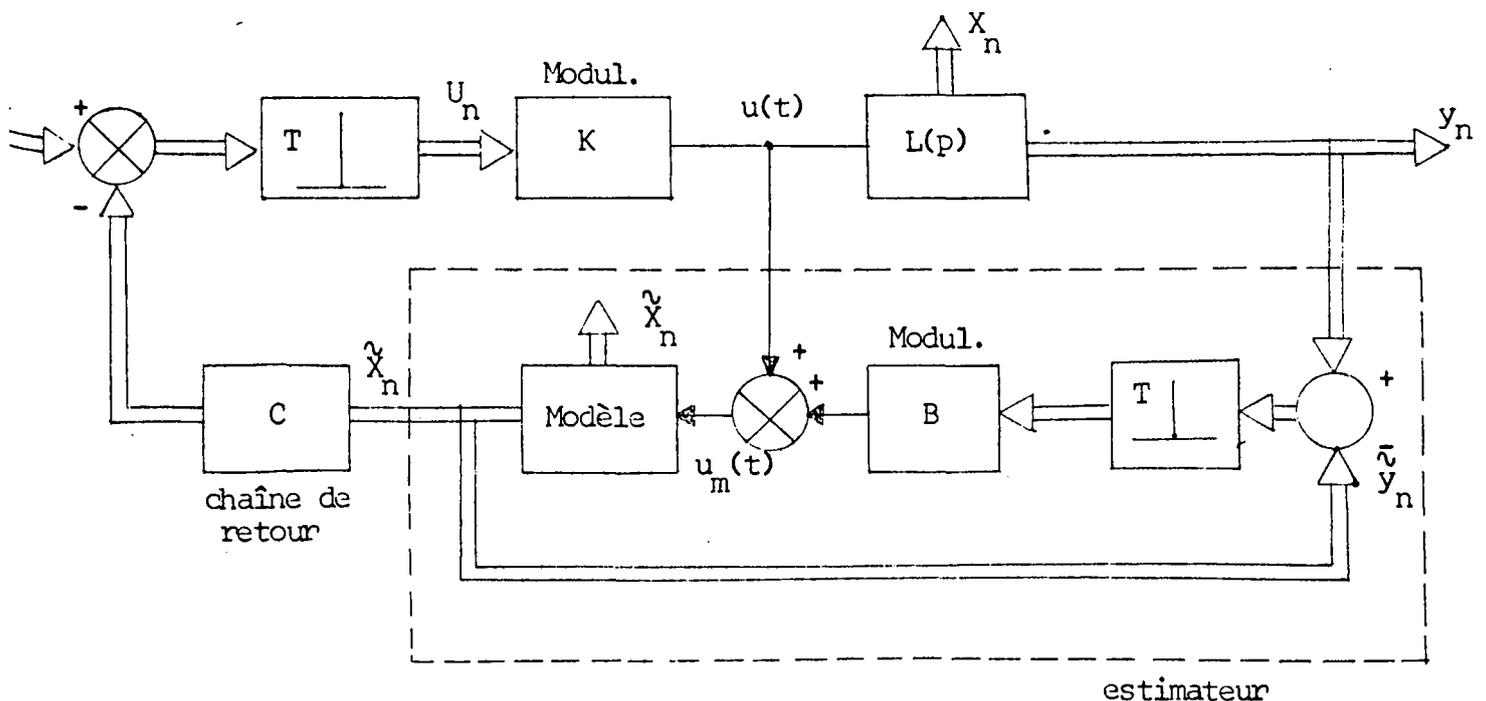


Figure 2

La validité d'une telle méthode réside dans la réalisation d'une identification parfaite et suffisamment rapide pour suivre les variations éventuelles du processus.

(iii) Observateur asymptotique

La méthode de l'observateur asymptotique d'abord proposée par D. LUENBERGER /3,4/ consiste à utiliser un système physique dont la dynamique est choisie arbitrairement. Cet estimateur est capable de reproduire les états non mesurables d'un processus d'une manière directe et suffisamment rapide sans subir les inconvénients inhérents aux méthodes précédentes.

Le problème de la détermination de l'observateur a été abordé par plusieurs chercheurs : Bongiorno et Youla /6/, moyennant l'observabilité du processus et la commandabilité de l'observateur à partir des sorties du processus, trouvent une solution particulière. Wolovich /7/ se limite au cas où les valeurs propres des modes de l'observateur sont réelles et distinctes. Yüksel et Bongiorno /8/, par une approche différente, obtiennent une classe plus générale d'observateurs pour les systèmes continus.

Dans ce sens, nous allons étendre l'utilisation des observateurs asymptotiques aux systèmes dont les informations n'apparaissent que sous forme discrète.

3. Observateurs asymptotiques pour des systèmes échantillonnés

3.1. Définition et principe

On appelle observateur (O) un système dynamique capable de reproduire les états non mesurables d'un système (S) à partir de la connaissance des entrées et des sorties captées (figure 3).

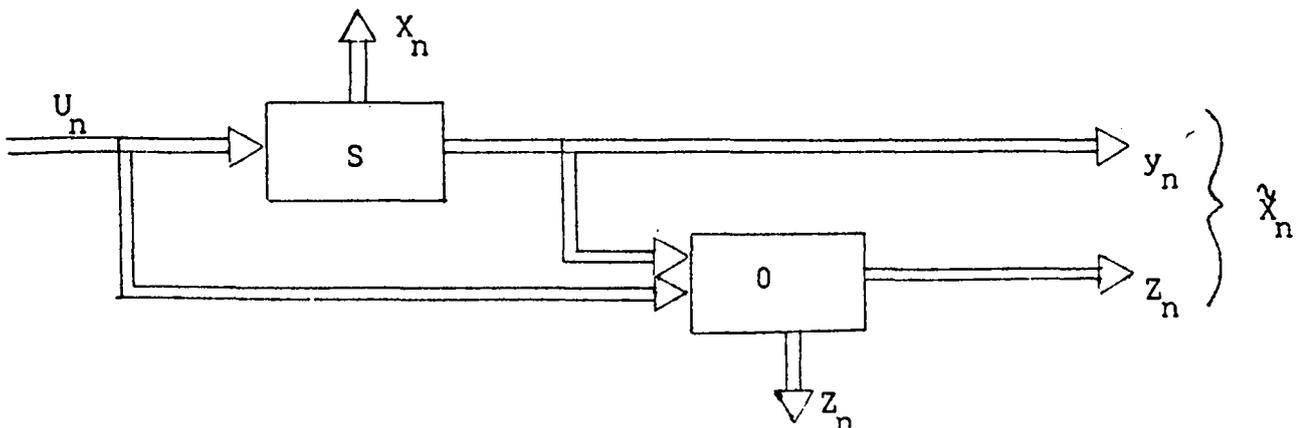


Figure 3

Si (S) est le processus linéaire d'ordre (q) :

$$(1) \quad (S) : X_{n+1} = A X_n + B U_n$$

$$y_n = \Lambda X_n$$

où $X_n \in E^q$: q composantes du vecteur état

$y_n \in E^r$: r composantes de sorties

$U_n \in E^l$: l composantes de commande

On associe le système physique (0) d'ordre (p) décrit par un modèle également linéaire défini par :

$$(2) \quad (0) : Z_{n+1} = F Z_n + G y_n + H U_n$$

$$X_n = W \begin{pmatrix} y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

où, $Z_n \in E^p$: p variables d'état

X_n état estimé du processus (S).

Toutefois, une relation linéaire liant X_n et Z_n peut être écrite sous la forme :

$$(3) \quad Z_n = \hat{T} X_n + \epsilon_n$$

$\epsilon_n \stackrel{\Delta}{=} \text{vecteur caractérisant l'erreur d'estimation.}$

Pour que \hat{T} existe, il faut néanmoins, compte tenu de (3), que les systèmes (1) et (2) soient compatibles. E_n substituant l'équation (3) dans (1) et (2), on a donc :

$$(\hat{T}A - \hat{T}F - G\Lambda)X_n + (\hat{T}B - H)U_n + \epsilon_{n+1} - F \epsilon_n = 0$$

$$\forall X_n, \forall U_n$$

d'où les conditions :

$$(4) \quad \hat{T}A - \hat{F}\hat{T} = GA$$

$$\hat{T}B = H$$

$$\epsilon_{n+1} = F \epsilon_n$$

En admettant que \hat{T} existe, il est évident que si l'observateur est stable ($|\lambda(F)| < 1$), l'erreur entre Z_n et $\hat{T} X_n$ diminue au cours du temps et, après un certain certain transitoire, cette erreur pourra être considérée comme négligeable.

En effet l'erreur entre l'état réel X_n et l'état estimé \hat{X}_n s'écrit :

$$(5) \quad X_n - \hat{X}_n = \left[I_q - W \begin{pmatrix} \Lambda \\ \hat{T} \end{pmatrix} \right] X_n + W \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

Des équations (4) et (5), on constate que la théorie des observateurs asymptotiques est alors fondée sur le choix de la matrice \hat{T} telle que :

$$(6) \quad I_q = W \begin{pmatrix} \Lambda \\ \hat{T} \end{pmatrix} \implies \text{rang}(W) = q, \text{rang} \begin{pmatrix} \Lambda \\ \hat{T} \end{pmatrix} = q$$

$$\limite_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0 \iff |\lambda(F)| < 1$$

Les résultats ainsi obtenus pour les systèmes échantillonnés sont semblables à ceux des systèmes continus /6,7/. A la suite de travaux effectués dans ce dernier cas, nous proposons un algorithme plus simple permettant de fixer aisément les paramètres de l'observateur asymptotique.

3.2. Algorithme de la détermination de l'observateur

3.2.1. Forme canonique

Considérons le processus linéaire (\hat{S}) caractérisé par le vecteur d'état Y_n d'ordre (q) :

$$(7.i) \quad (S) : Y_{n+1} = \hat{A} Y_n + \hat{B} U_n$$

$$y_n = \hat{\lambda} Y_n$$

$$y_n \in E^r, \quad U_n \in E^l, \quad Y_n \in E^q$$

U_n et y_n représentent les vecteurs d'entrées et de sorties de (S).

Si $\tilde{\lambda}$ est de rang r , on peut toujours fixer une matrice régulière (M) d'ordre (q) telle que :

$$(7.ii) \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} \\ \dots \\ M_1 \end{pmatrix}$$

M_1 est une matrice constante arbitraire de dimension ($p \times q$).

La transformation $Y_n = M X_n$ permet de mettre le système (\tilde{S}) à la forme définie par l'équation (1), avec :

$$(7.iii) \quad A = \begin{pmatrix} I_r & : & 0 \\ & & \end{pmatrix} \quad I_r = \text{matrice unité d'ordre } r$$

$$\begin{aligned} \text{où,} \quad A &= M^{-1} \tilde{A} M \\ B &= M^{-1} \tilde{B} \\ \Lambda &= \tilde{\Lambda} M \end{aligned}$$

La décomposition en blocs selon l'équation (8) des matrices A et \hat{T} n'enlève rien à la généralité du problème,

$$(8) \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \dots & \vdots & \dots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} r \\ \\ p \end{array}$$

|-----|-----|
r p

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} T^* & : & I_p \\ & & \end{pmatrix} \quad I_p = \text{matrice unité d'ordre } p$$

et permet de fixer l'observateur cherché. En effet, l'inégalité de Sylvester /13/ concernant le rang du produit de deux matrices W et $(\Lambda^T, \hat{T}^T)^T$, avec la contrainte (6), montre bien que l'ordre minimal de l'observateur doit être :

$$(9) \quad p = q - r$$

La substitution directe de (8) dans l'ensemble des équations (4) et (6) donne alors :

$$(10) \quad \begin{aligned} F &= A_{22} + T^* A_{12} \\ G &= A_{21} + T^* A_{11} - F T^* \\ H &= (T^* : I_p) \cdot B \end{aligned}$$

et,

$$W = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -T^* & I_p \end{pmatrix}$$

La matrice W étant alors régulière, les conditions définies par la relation (6) seront satisfaites si les modes de la matrice F sont stables.

Une condition nécessaire et suffisante pour trouver la matrice inconnue (T^*) quelle que soit (F) est que la paire (A_{22}, A_{12}) ou également (A, Λ) soit observable /12/ (annexe 3). L'état estimé (\hat{Y}_n) du processus considéré (\hat{S}) est alors :

$$(11) \quad \hat{Y}_n = M W \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Le produit MW est une matrice régulière d'ordre q .

3.2.2. Calcul de T^* et F

Le problème de la détermination des matrices T^* et F , pour fixer les paramètres de l'observateur asymptotique, peut être ramené au problème suivant :

Soit le système d'ordre p :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= A X_n + B U_n \quad \text{avec} \quad A = A_{22}, \quad C = A_{12}, \quad B = T^* \\ U_n &= C X_n \end{aligned}$$

U_n est un vecteur de commande d'ordre n .

Chercher le modulateur B tel que le système bouclé

$$X_{n+1} = F X_n$$

où $F = A + B C$

admette un polynôme caractéristique arbitraire.

On trouvera dans l'annexe (1) une solution à ce problème.

Remarque :

Il n'est pas difficile de montrer que l'approche que nous venons de proposer permet aussi, dans l'hypothèse linéaire non stationnaire, de ramener le problème de la détermination d'un observateur asymptotique à la recherche d'un modulateur grâce auquel on fixera arbitrairement le polynôme caractéristique d'un système bouclé (§ 3.2.2).

Ainsi l'on sait résoudre ce dernier problème (§ 3.2.2), on pourra déterminer l'observateur désiré sans se limiter aux systèmes linéaires non stationnaires, cas envisagé par Yüksel et Bongiorno /10/.

4. Mise en oeuvre

L'élaboration d'un observateur asymptotique (0) pour estimer l'état du processus à régler (S) permet d'appliquer les techniques de réaction d'état.

Considérons une loi de commande de la forme :

$$(12) \quad U_n = E_n - C X_n$$

avec E_n : vecteur de consigne d'ordre (l)

C : une chaîne de retour telle que $(A-BC)^m = 0$ (chapitre I).

L'utilisation des états estimés (\hat{X}_n) au lieu des états réels (X_n) conduit à l'asservissement représenté par le schéma fonctionnel (figure 4) :

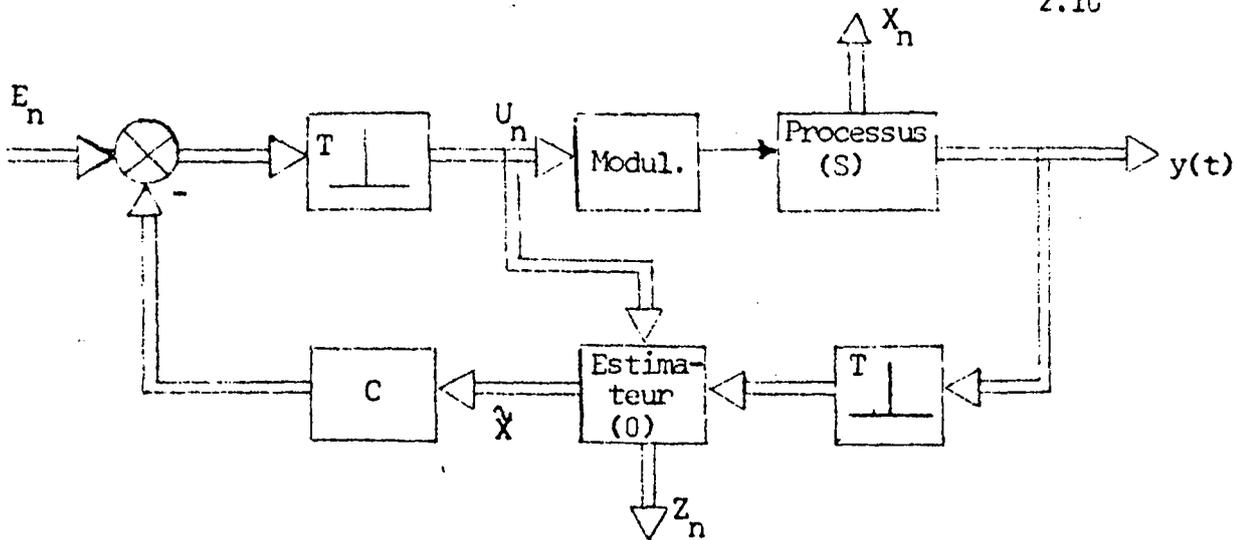


Figure 4

L'estimateur donné par l'équation de récurrence vectorielle (2) peut être réalisé par une simulation numérique. On peut aussi le réaliser par une structure échantillonnée, figure 5, dont les équations sont alors :

$$(13) \quad \begin{aligned} \dot{Z}(t) &= \bar{F} Z(t) + \bar{B} \cdot V(t) \\ V(t) &= M(t) \cdot \begin{pmatrix} y_n \\ U_n \end{pmatrix} \\ nT \leq t < (n+1)T \end{aligned}$$

T est la période d'échantillonnage.

Z(t) et V(t) sont les vecteurs d'état et de commande de dimensions respectives (p) et (l_1) d'un filtre physique continu. M(t) est une matrice de dimensions ($l_1 \times (r+l)$) qui caractérise le modulateur linéaire convenablement choisi.

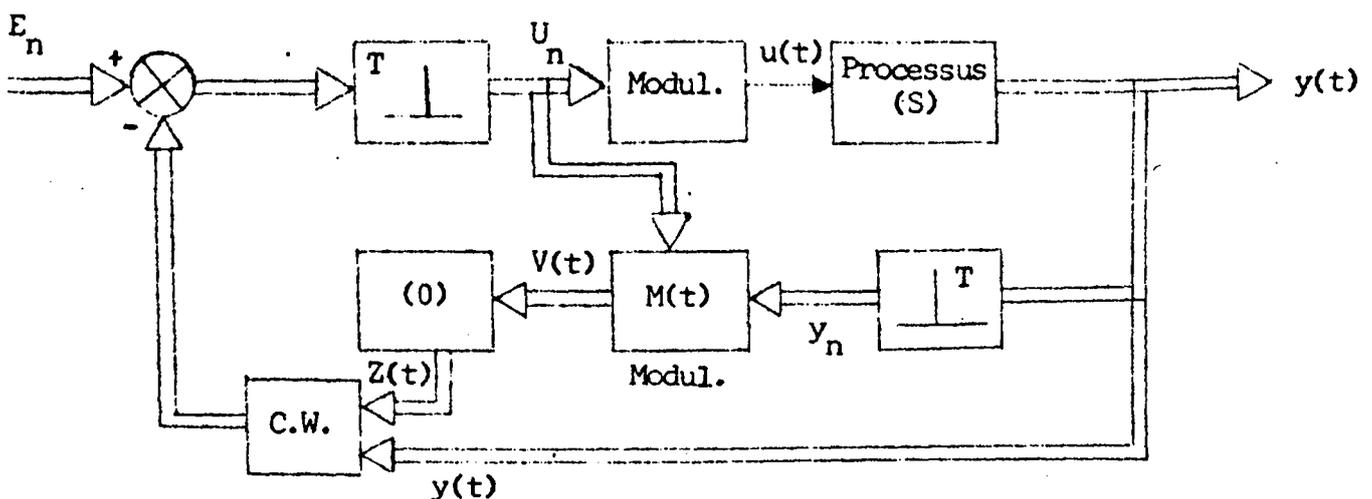


Figure 5

Le modèle (13) ayant la même forme que l'observateur discret (2) aux instants d'échantillonnage (n) permet, d'après la solution des équations différentielles (13), de formuler les contraintes ci-après sur les matrices \bar{F} et \bar{B} :

$$(14) \quad F = e^{\bar{F}T}$$

$$(G H) = F \int_0^T e^{-\bar{F}\tau} \bar{B} M(\tau) d\tau$$

Dans un cas particulier, le choix de $M(t) = I_{r+l}$ (le modulateur est un ensemble de bloqueurs d'ordre zéro) et des modes de l'observateur $\lambda(F)$ permet de fixer facilement le modèle échantillonné cherché :

$$(15) \quad F = e^{\bar{F}T}$$

$$\bar{B} = (F(I_p - F) \bar{F}^{-1})^{-1} \cdot (G H)$$

5. Stabilité de l'asservissement /10/ :

L'asservissement proposé, pour être utilisé pratiquement, doit être stable.

Considérons le filtre à régler (1) suivi de l'estimateur construit par l'algorithme du paragraphe (3.2). Dans l'hypothèse d'un observateur compatible, le système global est caractérisé par l'équation :

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ GA & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ T_1 B \end{pmatrix} \cdot U_n$$

et
$$\tilde{X}_n = (W_1 \ W_2) \begin{pmatrix} y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

où
$$W_1 = \begin{pmatrix} K_1^{-1} \\ -\hat{T} \Lambda_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix}$$

avec :
$$T_1 = (\hat{T} \ I_p), \quad p = q-r$$

La transformation :

$$(17) \quad \begin{pmatrix} X_n \\ \epsilon_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ -T_1 & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

permet de réduire ce système au système équivalent :

$$(18) \quad \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ \epsilon_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ \epsilon_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} U_n$$

$$\text{et} \quad \hat{X}_n = (I_q \quad W_2) \begin{pmatrix} X_n \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

Si l'on considère la loi de commande (12) élaborée à partir des états estimés (\hat{X}_n) à la place des états réels (X_n),

$$(19) \quad U_n = E_n - C \hat{X}_n$$

on obtient, en régime autonome ($E_n = 0$), la forme réductible (20) qui caractérise le système bouclé :

$$(20) \quad \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ \dots \\ \epsilon_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BC & \vdots & BC W_2 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ \dots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

L'observateur étant stable ($|\lambda(F)| < 1$), la stabilité absolue des solutions du modèle (20) est assurée si et seulement si le système théorique (1) et (12), caractérisé par $(A-BC)$, l'est. Cependant, on remarque l'existence d'un terme auxiliaire ($BCW_2\epsilon_n$) qui modifie sensiblement les réponses transitoires. Soit ($\bar{\epsilon}_n$) l'écart entre la réponse du processus et la trajectoire optimale, En supposant que toutes les variables d'état sont accessibles pour cette dernière, on obtient :

$$(21) \quad \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_{n+1} \\ \epsilon_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BC & BCW_2 \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_n \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

avec, $\bar{\epsilon}_n = X_n - X_n^*$

X_n^* : vecteur état du système optimal.

L'introduction d'une norme euclidienne ($\|X\|^2 = X^T X$) amène au système majorant :

$$(22) \quad \|\bar{\epsilon}_{n+1}\| \leq \lambda_b \|\bar{\epsilon}_n\| + \gamma \|\epsilon_n\|$$

$$\|\epsilon_{n+1}\| \leq \lambda_F \|\epsilon_n\|$$

où λ_b et λ_F sont respectivement les normes spectrales des matrices (A-BC) et F.

γ désigne la norme de la matrice (BCW₂)

L'évolution du système majorant (22) permet d'écrire :

$$(23) \quad \|\bar{\epsilon}_{n+m}\| \leq \lambda_b^m \|\bar{\epsilon}_n\| + \gamma (\lambda_b^{m-1} + \lambda_b^{m-2} F + \dots + \lambda_b^{m-1}) \|\epsilon_n\|$$

On constate donc que l'erreur ($\bar{\epsilon}$) sur la réponse théorique au bout de (m) périodes d'échantillonnage peut être améliorée en choisissant des observateurs suffisamment stables.

Remarque :

L'étude précédente montre bien que plus l'observateur aura tendance à se stabiliser, plus le temps d'estimation et l'écart de la réponse seront petits au démarrage. Mais si l'on augmente le degré de stabilité de l'observateur, l'indice énergétique de performance du système peut croître /8.10/ de façon importante. Le système ne sera plus alors optimal au sens de ce critère.

6. Application : Asservissement d'un filtre à données échantillonnées

Le système étudié se compose d'un filtre linéaire de transmittance :

$$L(p) = \frac{y}{u} = \frac{1}{p(1+\tau p)}$$

dont la sortie $y(t)$ est la seule grandeur accessible. De plus, pour couvrir une grande quantité de cas réels, on suppose que cette variable n'est disponible qu'aux instants d'échantillonnage nT ($n = 0, 1, \dots$; T est la période d'échantillonnage), figure 6.

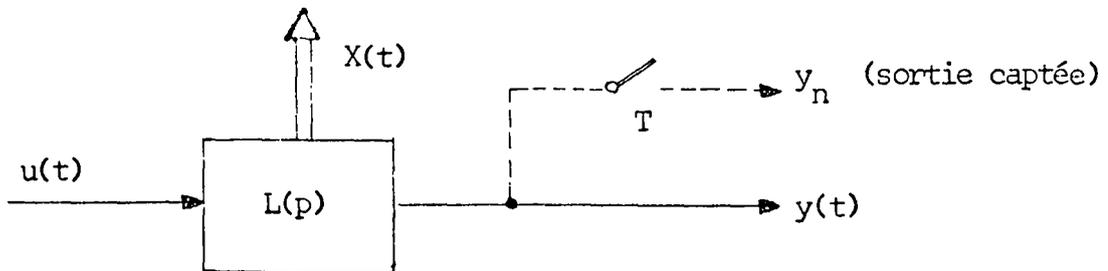


Figure 6

Afin d'amener le système à un état défini à l'avance, nous nous proposons d'introduire un observateur asymptotique échantillonné pour reconstruire la deuxième variable \hat{y}_n nécessaire à l'élaboration de la commande scalaire $u(t)$.

6.1. Commande monomodulée

Le diagramme fonctionnel de l'asservissement est présenté figure 7.

La chaîne d'action est caractérisée par un échantillonneur de Dirac, un bloqueur d'ordre zéro (B_0) et un gain constant (K). Dans la chaîne de retour un estimateur échantillonné est disposé pour estimer l'état (\hat{X}_n) du filtre.

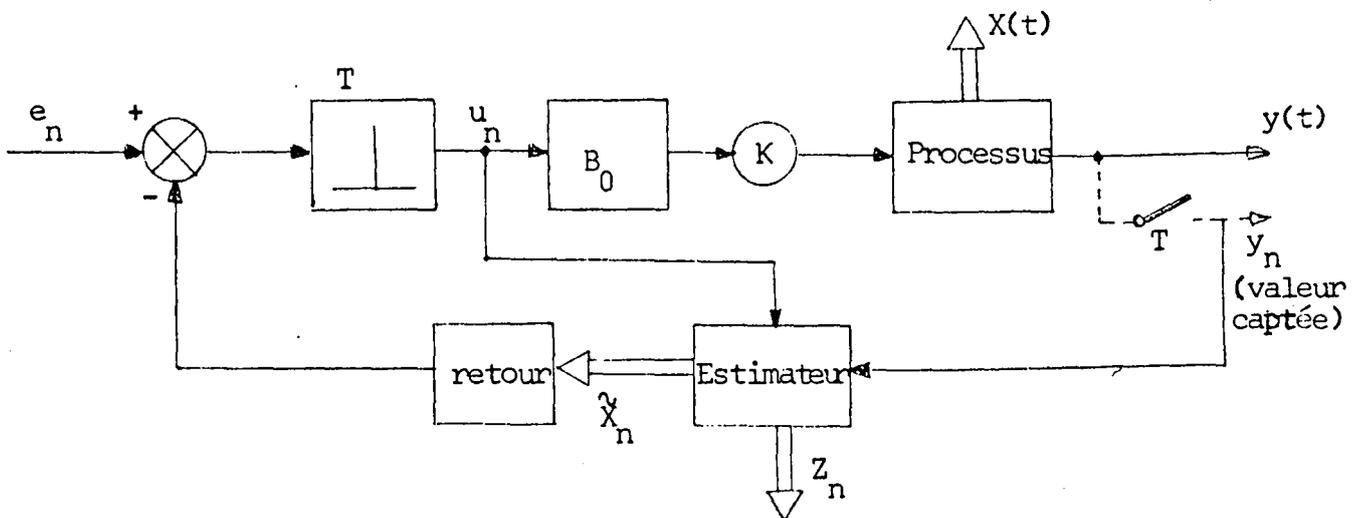


Figure 7

L'évolution du système s'exprime par l'ensemble des équations récurrentes suivantes :

$$(24) \quad (i) \text{ Processus : } X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \tau(1-D) \\ 0 & D \end{pmatrix} X_n + K \begin{pmatrix} T-\tau(1-D) \\ 1-D \end{pmatrix} U_n$$

$$y_n = (1 \quad 0) X_n, \quad X_n^T = (y_n^T, y_n^{oT})$$

avec $D = e^{-T/\tau}$

$$(ii) \text{ Estimateur : } Z_{n+1} = F Z_n + G y_n + H U_n$$

$$X_n = W \begin{pmatrix} y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

où X_n : état estimé du filtre

Z_n : variable scalaire caractérisant l'état de l'observateur asymptotique dont l'ordre est $p=1$.

F est une constante arbitraire tel que $|F| < 1$

$$G = \frac{F-D}{\tau(1-D)} \cdot (1-F)$$

$$H = K(1-D) + K(T-\tau(1-D)) \cdot \frac{(F-D)}{\tau(1-D)}$$

et
$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{F-D}{\tau(1-D)} & 1 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \text{ Loi de commande : } u_n = e_n - (1-\lambda) X_n$$

Les conditions théoriques pour annuler, sans erreur statique /9/, le régime transitoire du filtre (24.i), supposé observé, sont :

$$(25) \quad K = \frac{1}{T(1-\lambda)} \quad \lambda = \tau - \frac{TD^2}{1-D}$$

Une simulation de l'asservissement sur une calculatrice hybride a été réalisée avec $\tau = 1$, $T = 2$ sec. L'observateur a été représenté par un modèle analogique dont l'entrée est modulée par les signaux échantillonnés y_n et u_n (Annexe 4).

Les enregistrements figure 8 et figure 9 montrent les amplitudes et les temps de réponse des régimes transitoires lorsqu'on fait varier les dynamiques et les conditions initiales de l'observateur.

6.2. Commande multimodulée

Nous nous proposons d'asservir l'état (X_n) du filtre considéré à un vecteur de consigne (E_n) avec un retard minimum.

Pour cela, nous avons adopté la structure donnée figure 10.

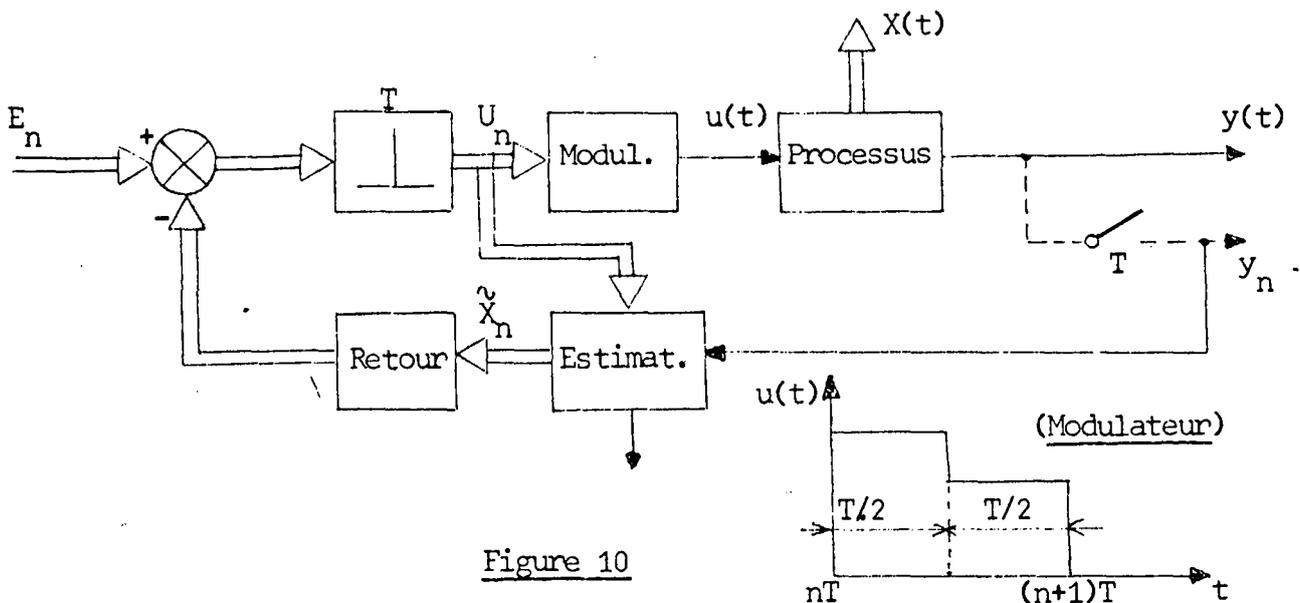


Figure 10

La commande scalaire $u(t)$ s'effectue en modulant le vecteur échantillonné (U_n) élaboré par l'intermédiaire d'un estimateur échantillonné convenable. Le système asservi est régi en boucle fermée par l'ensemble des équations de récurrence :

$$(26) \quad (i) \text{ Processus : } X_{n+1} = A X_n + B U_n$$

$$y_n = (1 \ 0) X_n$$

$$\text{où, } A = \begin{pmatrix} 1 & \tau(1-D) \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} T/2 - \tau(1-D_1) + \tau(1-D_1)^2 & T/2 - \tau(1-D_1) \\ D_1(1-D_1) & (1-D_1) \end{pmatrix}$$

$$\text{avec, } D_1 = e^{-T/2\tau}, \quad D = e^{-T/\tau}$$

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \text{ Estimateur : } Z_{n+1} = F Z_n + G y_n + H U_n$$

$$\hat{X}_n = W \begin{pmatrix} y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

$$\text{où } H = \left(\frac{F-D}{\tau(1-D)} \quad 1 \right) \cdot B$$

Les matrices F, G et W sont celles qui figurent dans l'équation (24.ii).

$$(iii) \text{ Loi de commande : } U_n = B^{-1} (E_n - A \hat{X}_n)$$

Un montage simulant ce système se trouve dans l'annexe (4). Les courbes de réponse enregistrées dans la figure 11 traduisent l'effet de l'observateur sur le régime transitoire. En régime dynamique, le système fonctionne comme un organe de copie caractérisé par la relation de récurrence :

$$E_n = X_{n+1}$$

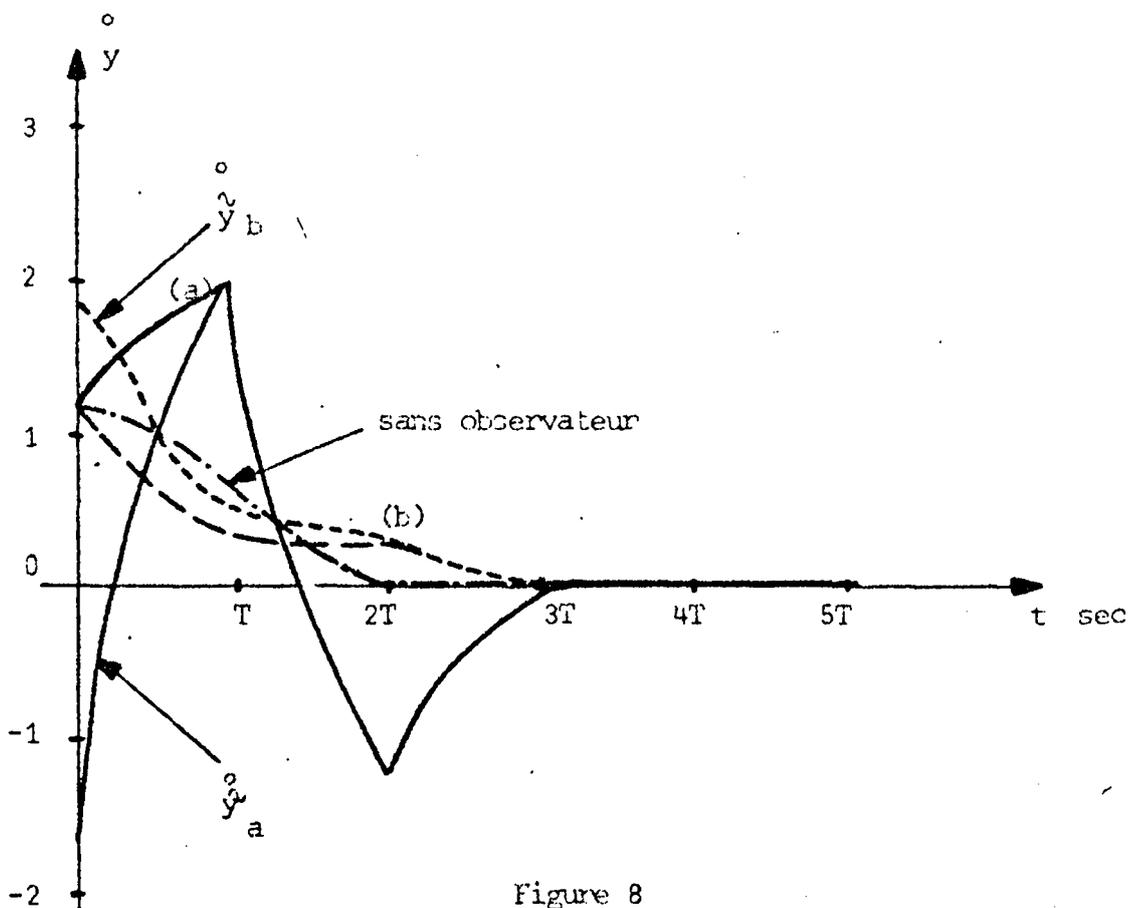
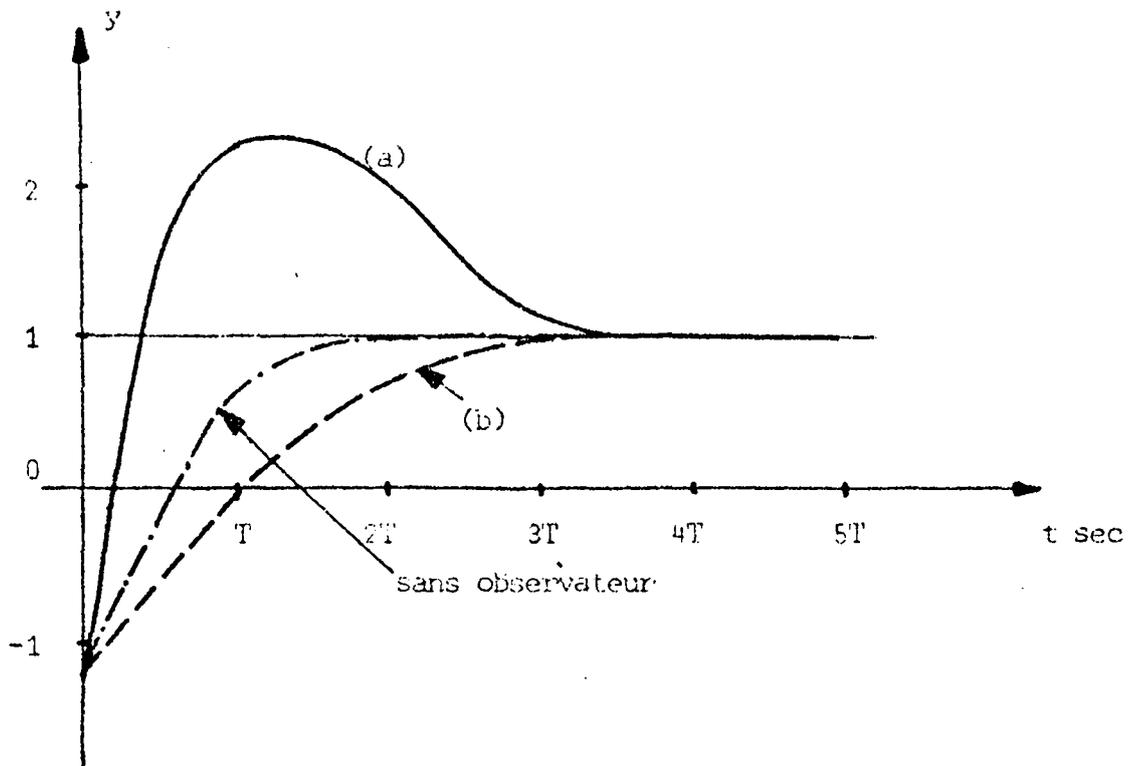


Figure 8

Réponse avec observateur asymptotique

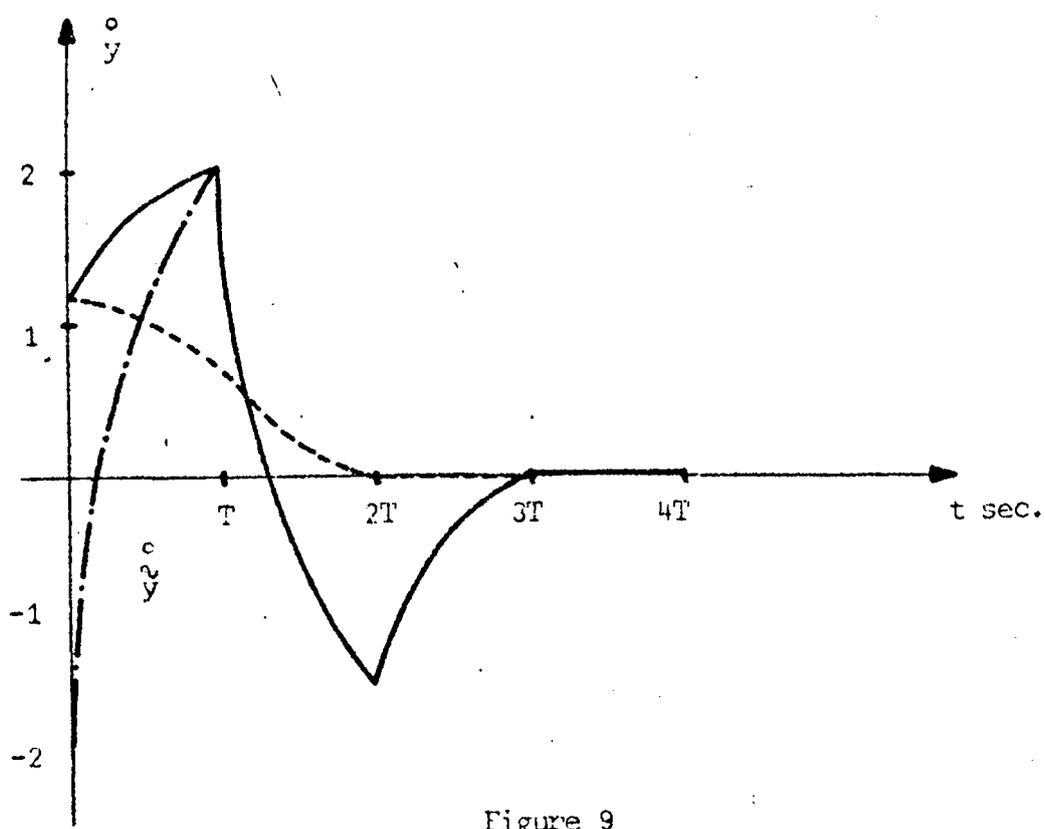
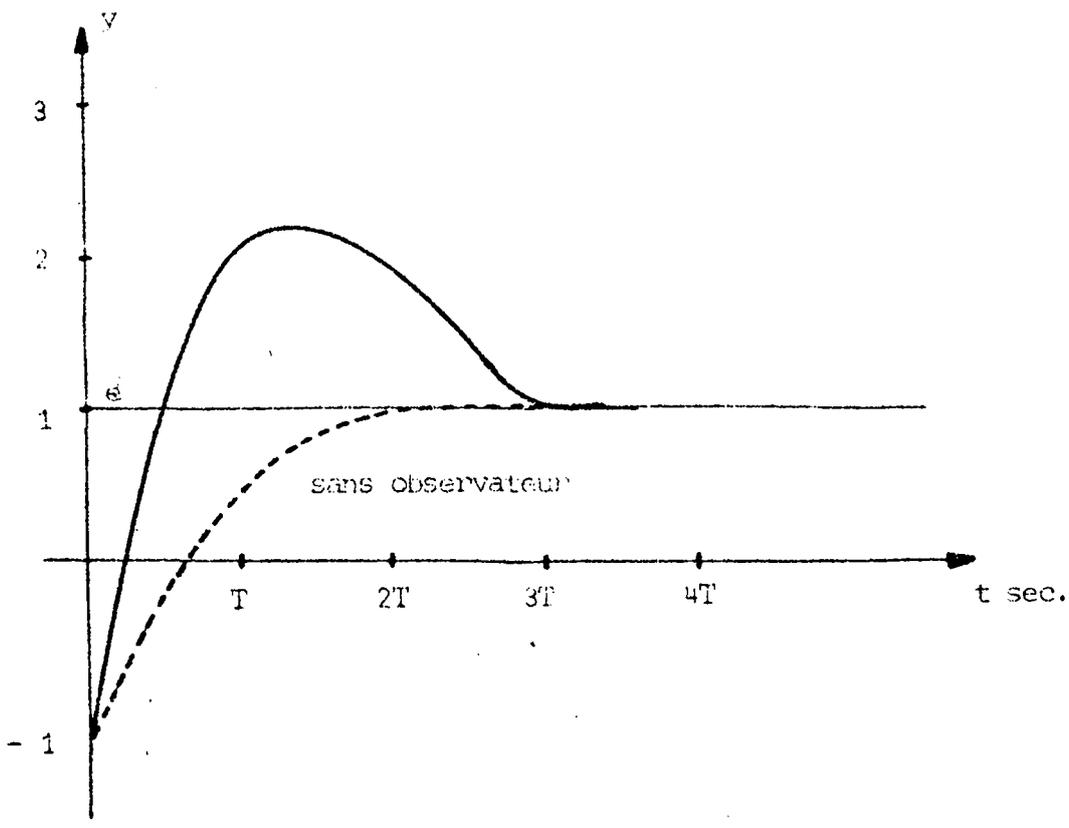
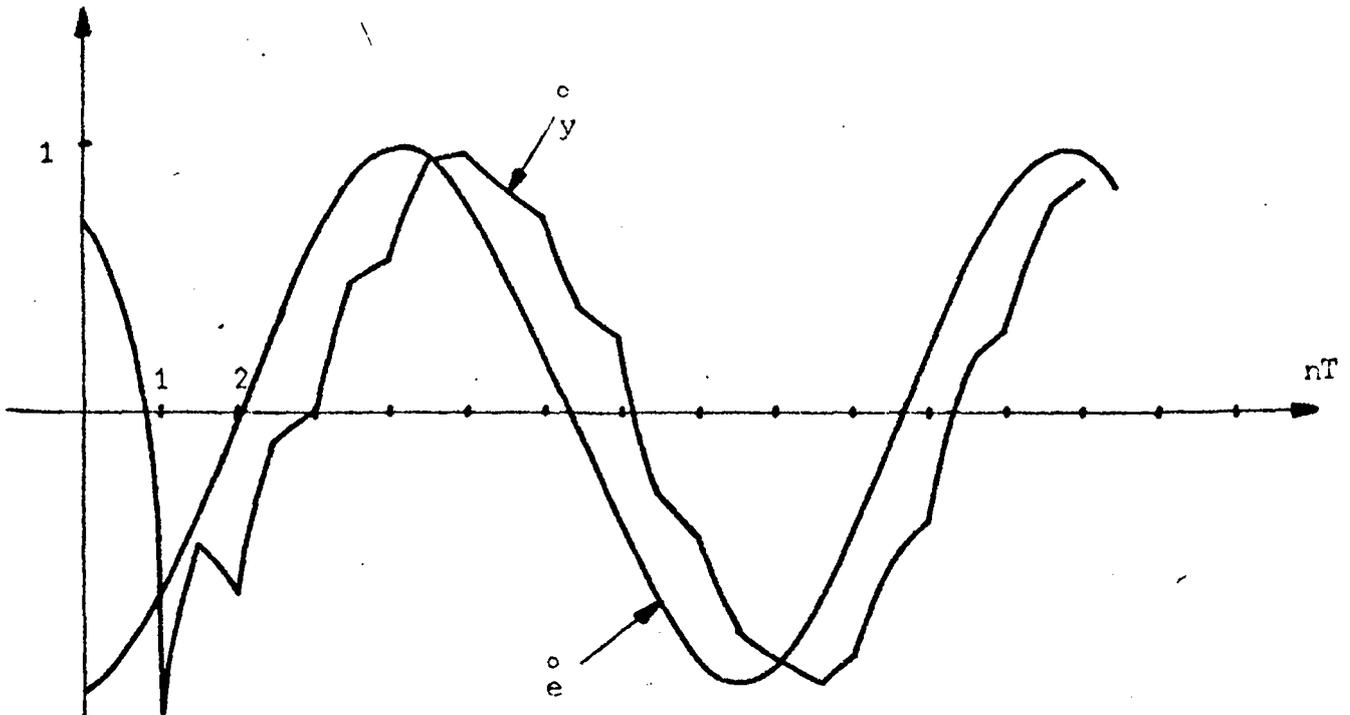
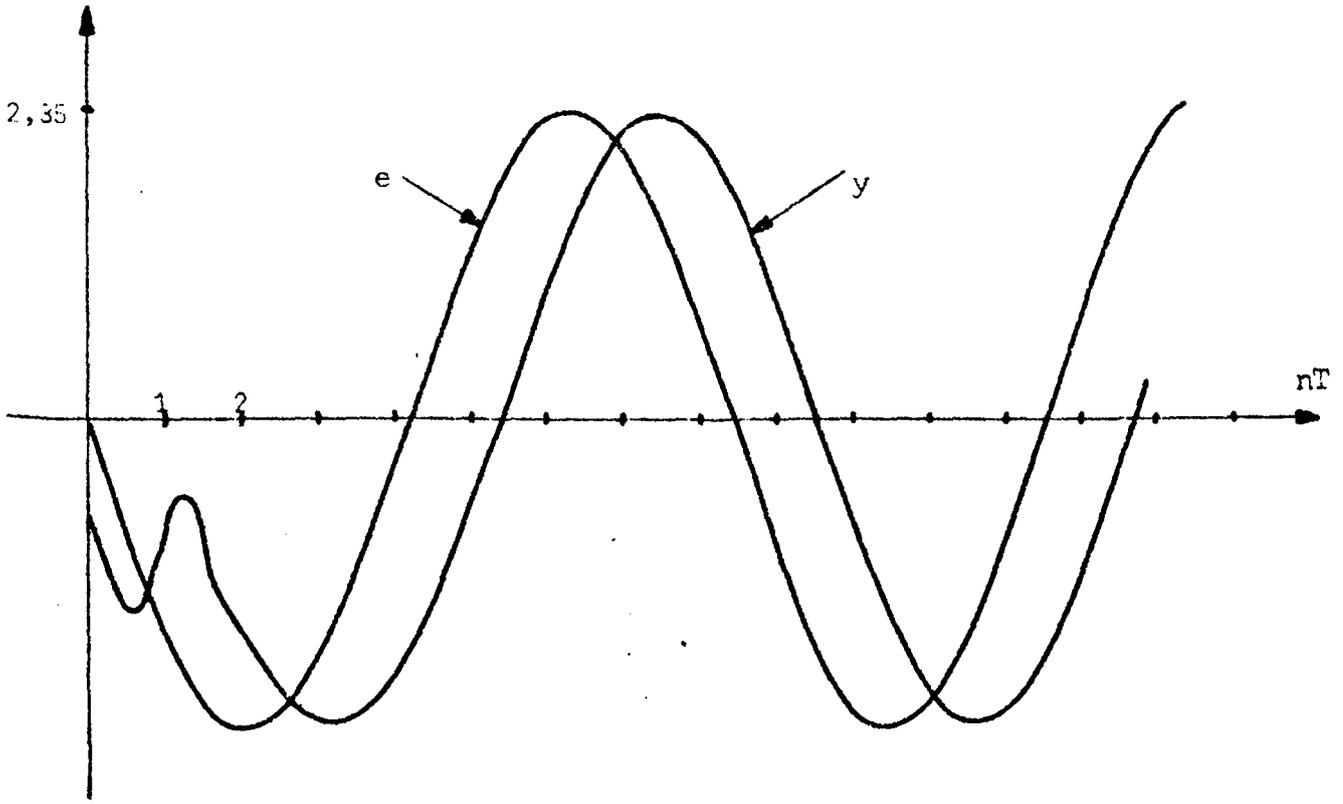


Figure 9

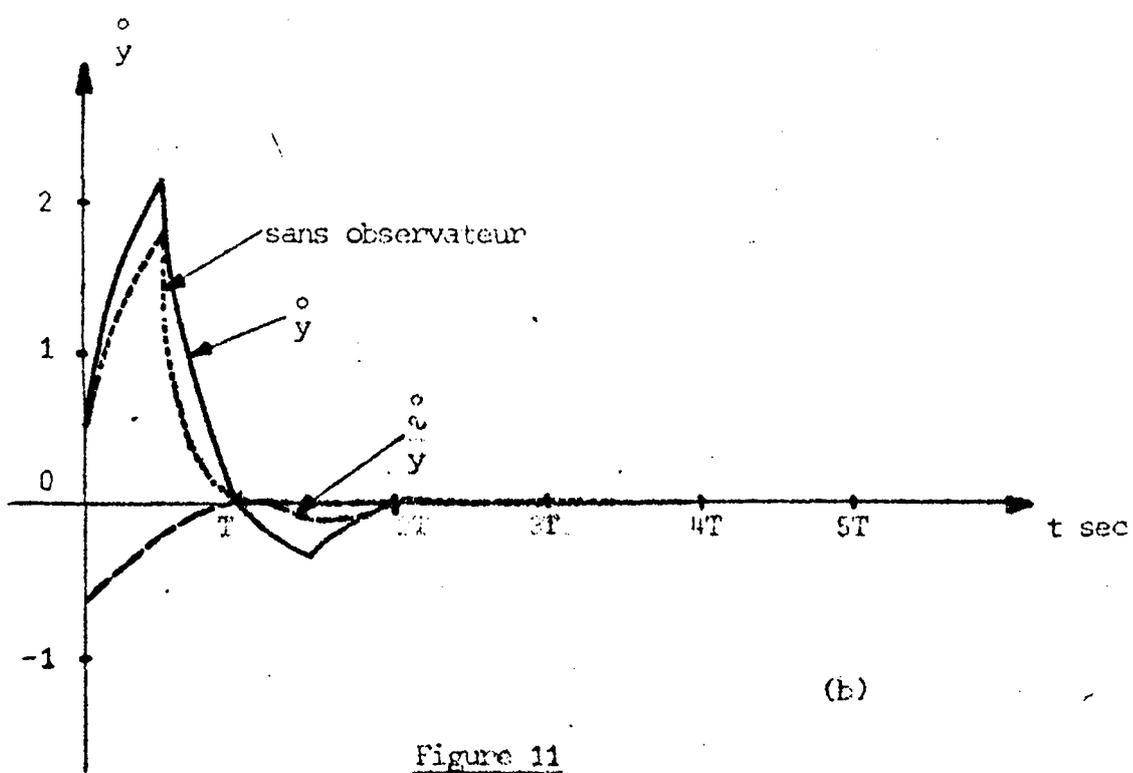
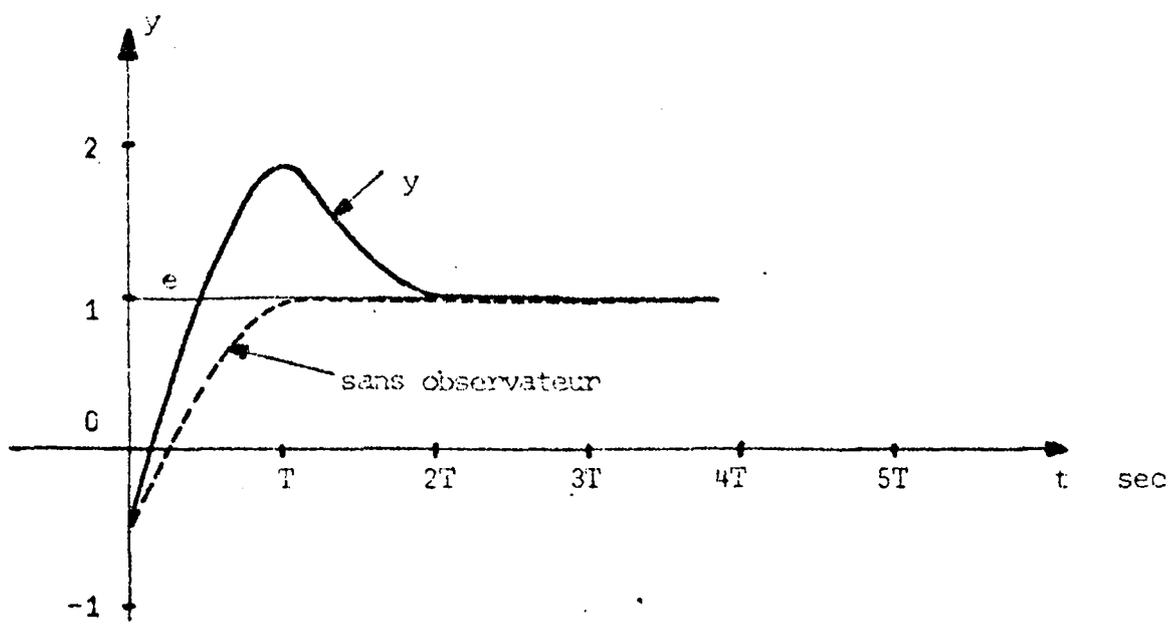
Réponse avec observateur en temps fini



(a)

Figure 11

Réponse avec observateur en temps fini



(b)

Figure 11
Réponse avec observateur
en temps fini.

CONCLUSION

L'utilisation des observateurs asymptotiques discrets permet de conserver les avantages des techniques de réaction d'état pour les processus à données échantillonnées. Toutefois, le régime dynamique étant fixé à l'avance, les amplitudes et les temps de réponse des régimes transitoires correspondants peuvent être modifiés sensiblement par rapport au cas théorique où toutes les variables d'état sont accessibles. De plus, un choix convenable de l'observateur discret peut amener à des asservissements en temps fini minimum.

BIBLIOGRAPHIE

- /1/ R.E. KALMAN and R.S. BUCY
 "New results in linear filtering and prediction theory"
 Trans. ASME, J. Basic Eng., Ser. D, p.95-108, Mars 1961
- /2/ A.E. BRYSON and D.E. JOHANSEN
 "Linear filtering for time varying systems using measurements containing colored noise"
 IEEE Trans. Automat. Cont., Vol. AC-10, p.4.10, Janvier 1965
- /3/ D.G. LUENBERGER
 "Observing the state of a linear system"
 IEEE Trans. Mil. Electron., Vol. MIL-8, p. 74-80, April 1964
- /4/ D.G. LUENBERGER
 "Observers for multivariable systems"
 IEEE Trans. Automat. Cont. , Vol. AC-11, p. 190-197, April 1966.
- /5/ J.C. WILLEMS and S.L. MITTER
 "Controllability, Observability, Pole allocation, and state reconstruction"
 IEEE Trans. Aut. Cont., Vol. AC-16, p. 582-595, December 1971
- /6/ J.J. BONGIORNO and D.C. YOULA
 "On observers in multivariable control systems"
 Int. J. Contr., Vol.8, p. 221-243, Septembre 1968
- /7/ W.A. WOLOVICH
 "On state estimation of observable systems"
 In 1968 Joint Automatic Control Conf., Preprints, p. 210-222
- /8/ Y.Ö. YÜKSEL and J.J. BONGIORNO
 "Observers for linear multivariable systems with applications"
 IEEE Trans. Aut. Cont., Vol. AC-16, p. 603-612, Décembre 1971
- /10/ C. MELIN
 "Contribution à l'analyse et la synthèse, dans l'espace d'état, des systèmes multidimensionnels décrits par des récurrences non linéaires"
 Thèse de doctorat d'état ès Sciences : Physique, Paris VI, 11 Décembre 73

- /11/ R. BOUDAREL, J. DELMAS et P. GUICHET
"Commande optimale des processus"
Dunod, Paris 1968, Tome I
- /12/ C.A. DESOER, C.T. CHEN
"Controllability and observability of Feedback systems"
IEEE Trans. Aut. Cont., p. 474-475, August 1967
- /13/ F.R. GANTMACHER
"Théorie des matrices"
Dunod, Paris 1966

CHAPITRE III

COMMANDE PRATIQUE DES SYSTEMES ECHANTILLONNES INCOMPLETEMENT OBSERVES
--

INTRODUCTION

Les types de régulation par estimateurs envisagés au cours du chapitre précédent, bien qu'assurant des performances acceptables, ne donnent pas forcément les meilleures solutions.

En effet, la considération des caractéristiques inhérentes au processus à régler peut amener à des réalisations plus faciles d'un point de vue pratique. C'est dans cet esprit que nous proposons une méthode de régulation fondée sur ce principe.

I - Présentation de la méthode

Soit le système à commander (S) d'ordre (q) défini par les équations différentielles linéaires à coefficients constants :

$$(1) \quad S : \begin{aligned} \dot{Y}(t) &= A Y(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= D Y(t) \end{aligned}$$

$Y(t)$ est un vecteur d'état d'ordre (q) appartenant à un espace E^q , $u(t)$ une fonction de commande scalaire et $y(t)$ un vecteur à (r) composantes définissant les sorties accessibles aux instants $t = nT$ ($n = 0, 1, \dots$; T : période d'échantillonnage).

Supposons qu'il existe un changement de base ($Y = MX$, M : matrice constante régulière) qui décompose /1/ le système (1) en deux sous-systèmes (S_1) et (S_2) dont les vecteurs états appartiennent à des sous-espaces disjoints

$$(2.i) \quad \begin{aligned} S_1 : \dot{X}_1(t) &= J_1 X_1(t) + \tilde{A}_{12} X_2(t) + \tilde{K}_1 u(t) \\ S_2 : \dot{X}_2(t) &= J_2 X_2(t) + \tilde{K}_2 u(t) \\ y &= (\Lambda_1 \ \Lambda_2) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où :

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} J_1 & A_{12} \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} B = \begin{pmatrix} \tilde{K}_1 \\ \tilde{K}_2 \end{pmatrix}$$

$$M D = (\Lambda_1 \ \Lambda_2)$$

les états X_1 de (S_1) génèrent l'espace E_1 de dimension (r), ceux de (S_2) l'espace E_2 de dimension (q-r).

Si cette décomposition vérifie les contraintes suivantes :

$$(2.ii) \quad (a) \text{ système } (S_2) \text{ stable} \rightarrow R_e \{ \lambda(J_2) \} < 0$$

(b) Λ_1 est une matrice carrée d'ordre (r) régulière.

alors on montre facilement qu'il est possible d'obtenir toutes les informations concernant l'état du filtre à asservir en disposant d'un modèle représentatif (\tilde{S}_2), qui simule le sous-système (S_2) :

$$(3) \quad \tilde{S}_2 : \dot{\tilde{Z}}(t) = J_2 \tilde{Z}(t) + \tilde{K}_2 u(t)$$

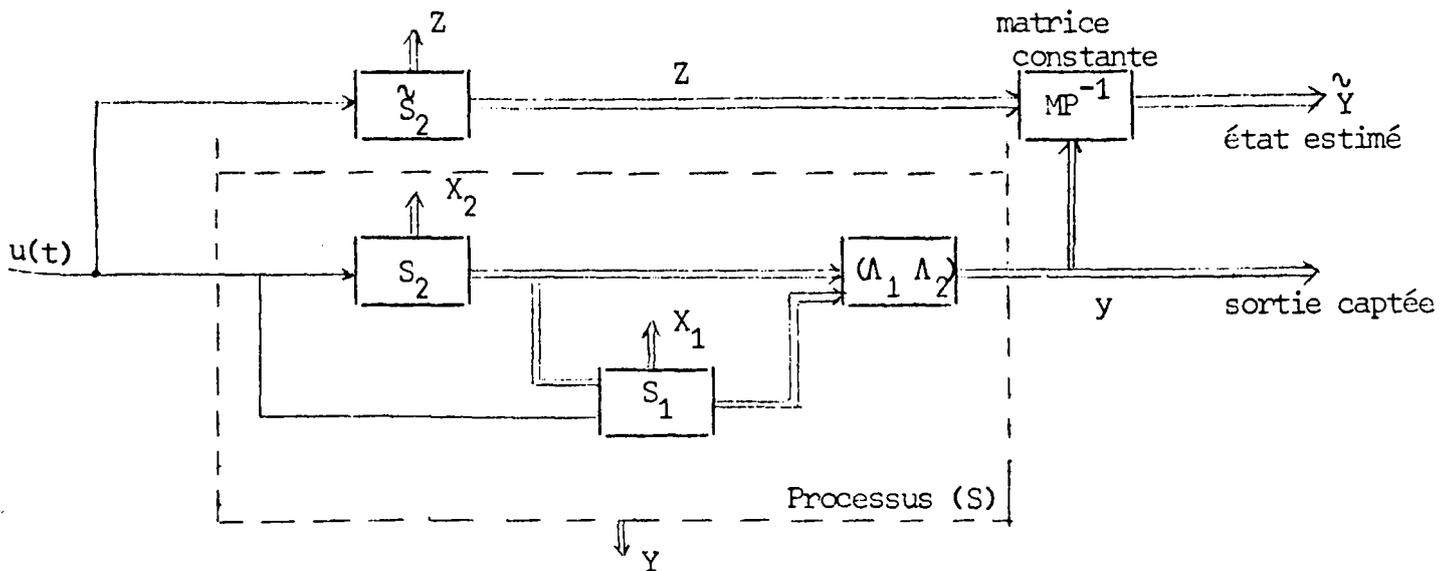


Figure 1

Le modèle étant soumis au même signal de commande que le système à régler (fig.1), le vecteur d'erreur (ϵ) entre ses états et ceux de (S_2) s'écrit :

$$(4) \quad \epsilon(t) = Z(t) - X_2(t)$$

$$\dot{\epsilon}(t) = J_2 \epsilon(t)$$

Le sous-système (S_2) étant stable, l'erreur (ϵ) diminue au cours du temps, et après un certain transitoire, elle pourra être considérée comme négligeable.

Le vecteur d'état estimé (\tilde{Y}) qui sera utilisé dans la chaîne de retour est donné par l'intermédiaire de la matrice régulière (MP^{-1}) :

$$(5) \quad \tilde{Y} = M P^{-1} \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} ; \quad P = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ 0 & I_{q-r} \end{bmatrix}$$

Dans de nombreux cas, la décomposition (2) n'est pas unique, on choisira celle dont la partie simulée (S_2) est la plus stable possible pour améliorer le temps d'estimation.

2. Rôle de la période d'échantillonnage

Dans un fonctionnement échantillonné, l'erreur d'estimation peut être caractérisée par la relation de récurrence :

$$(6.i) \quad \varepsilon_{n+1} = A_2 \cdot \varepsilon_n$$

$$A_2 = e^{J_2 \cdot T}, \quad T \text{ est la période d'échantillonnage.}$$

Reprenons la définition du temps de réponse à ($\beta\%$) près d'un système échantillonné non -linéaire donné par F. LAURENT /8/. Celui-ci est égal au temps (NT) au bout duquel l'écart entre un point (ε_n) d'une trajectoire et la position d'équilibre ($\varepsilon_n = 0$) atteint et ne dépasse plus ($\beta\%$) de sa valeur initiale.

Partant de l'équation (6.i), l'introduction d'une norme Euclidienne $\|\varepsilon_n\| = (\varepsilon_n^T \cdot \varepsilon_n)^{1/2}$ conduit au système de premier ordre suivant :

$$(6.ii) \quad \|\varepsilon_{n+1}\| \leq \rho^{1/2} \|\varepsilon_n\|$$

$$\rho = \text{rayon spectral de la matrice } (A_2^T \ A_2).$$

De la suite (6.ii), dont la solution majore celle de (6.i) et de la définition de ($\beta\%$), on obtient :

$$(7.i) \quad \beta \% = 100 \cdot \rho^{N/2}$$

Dans le cas particulier où le modèle (S_2) possède des valeurs propres simples et distinctes, la relation (7.i) conduit à l'expression :

$$(7.ii) \quad \frac{T}{\tau_{\max}} = \frac{1}{N} \log_e \left(\frac{100}{\beta \%} \right)$$

τ_{\max} = maximum constante de temps de S_2 .

Les résultats (7.i) et (7.ii) permettent de choisir la période d'échantillonnage et le sous-système (S_2) pour aboutir à une atténuation pratiquement totale du régime de démarrage ($\beta = 1\%$ par exemple) dans (q) périodes d'échantillonnage.

3. Exemple '1) : Estimation de l'état d'un filtre du 2nd ordre

Soit le système du 2nd ordre de fonction de transfert $L(p)$:

$$L(p) = \frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} = \frac{S}{u} \quad \tau_1 > 0$$

Pour disposer du vecteur état (X) de composantes (S) et (\dot{S}) correspondant à la sortie et sa dérivée, il suffit de capter la grandeur de sortie et le signal de sortie (Z) d'un filtre de fonction de transfert $L^*(p) = \frac{1}{1+\tau_1 p}$ de même entrée $u(t)$, (figure 2).

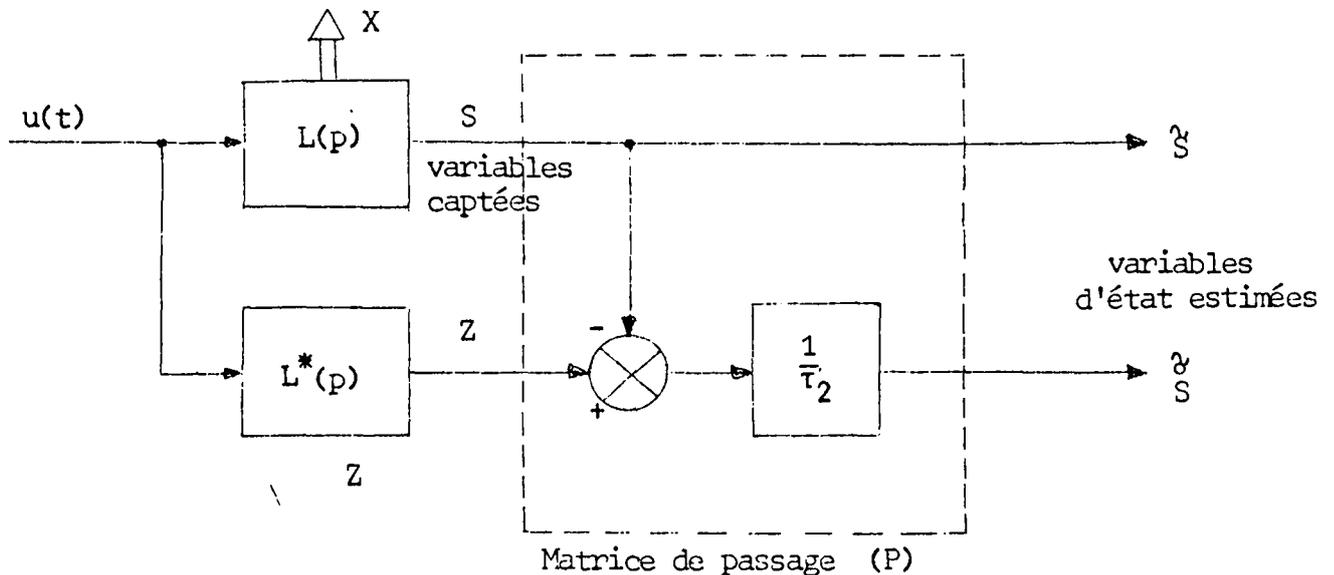


Figure 2

L'erreur d'estimation par rapport aux variables d'état réelles peut être caractérisée par la relation suivante :

$$\|\epsilon(t)\| \leq e^{-t/\tau_1} \cdot \|\epsilon_0\|$$

$$\|\epsilon\| = \|X - \hat{X}\| \quad , \text{ Norme euclidienne.}$$

Ce résultat permet de calculer précisément le temps de réponse en régime de démarrage. Dans un fonctionnement échantillonné, la disposition d'une période d'échantillonnage $T = 2 \tau_1$ conduit à un écart d'estimation d'ordre $\beta = 1,85 \%$ en deux périodes d'échantillonnage, ce qui est pratiquement négligeable.

Le vecteur d'état ainsi élaboré n'implique pas de dérivation ou de réalisation de modulateur particulier.

4. Mise en oeuvre

L'élaboration d'un modèle partiel $L^*(p)$ du système linéaire à commander peut permettre de disposer en régime accroché et à chaque instant de toutes les composantes caractéristiques de l'état du filtre $L(p)$ à asservir.

Considérons la loi de commande (8) :

$$(8) \quad U_n = E_n - \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \end{pmatrix} \quad U_n \in E^l$$

l'utilisation des états estimés \hat{X}_n au lieu des états réels $X_n = (X_n^1 \quad X_n^2)^T$ conduit à l'expression suivante :

$$(9) \quad U_n = E_n - \lambda_1 \cdot y_n - \lambda_2 \cdot Z_n$$

avec :

$$\lambda_1 = C_1 \Lambda_1^{-1}$$

$$\lambda_2 = C_2 - C_1 \Lambda_1^{-1} \Lambda_2$$

Dans ces conditions, le signal de commande est élaboré, d'une part à partir des informations stockées dans le modèle, et d'autre part à partir des sorties captées. La structure hybride adoptée pour l'asservissement est représenté figure 3.

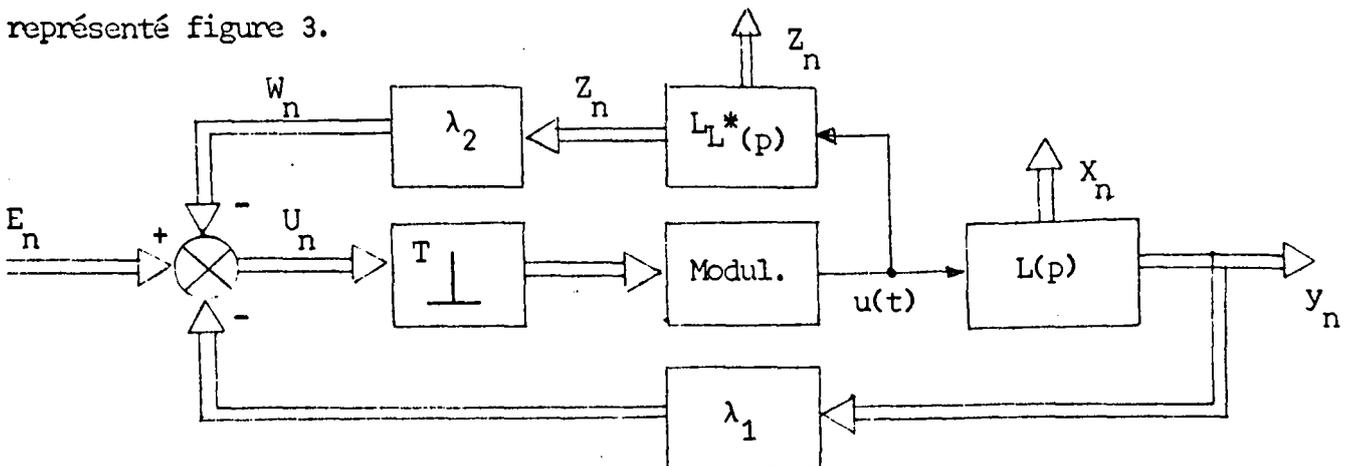


Figure 3

Dans certains cas, cette méthode de réglage conduit simplement à la réalisation d'un réseau-correcteur-numérique multi-cadence /2/, figure 4, dont l'algorithme est donné par la récurrence vectorielle:

$$(10) \quad U_{n+\rho} + \sum_{i=1}^{\rho} M_i U_{n+\rho-i} = V_{n+\rho} + \sum_{i=1}^{\rho} G_i V_{n+\rho-i}$$

$$\text{où :} \quad M_i = G_i + \sum_{j=0}^{i-1} G_j \lambda_2 \cdot A_2^{i-1-j} \cdot K_2$$

$$\sum_{i=0}^{\rho} G_i \lambda_2 A_2^{\rho-i} = 0, \quad G_0 = I_\ell$$

K_2 est la contribution de la commande U_n sur l'état du modèle sur l'intervalle de temps $(nT, (n+1)T)$.

La structure ainsi proposée implique l'observabilité du modèle $L^*(p)$ à partir des sorties W_n en (ρ) périodes d'échantillonnage.

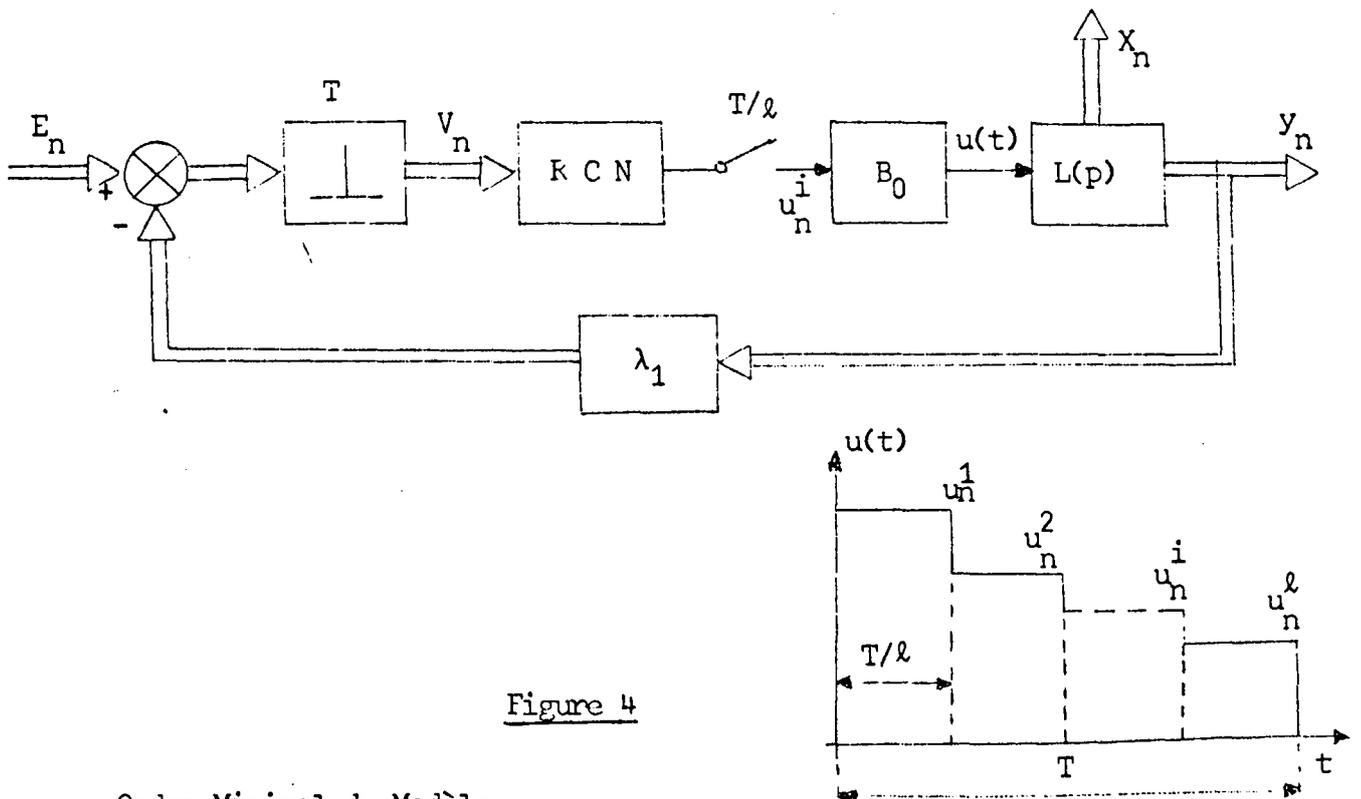


Figure 4

Ordre Minimal du Modèle

La compensation par une modulation multivariable particulière peut limiter le nombre de variables d'état à estimer. Dans ce sens, il est possible de réduire l'ordre du modèle à réaliser. En effet, le filtre minimal à construire est formé de la partie à la fois commandable et observable du modèle $L^*(p)$, figure 3, à partir de la commande U_n et de la sortie W_n .

5. Stabilité de structure

Un problème pratique délicas se pose immédiatement, en effet le modèle ne peut être parfait, c'est-à-dire identique au sous-système S_2 .

Dans cet esprit, considérons un système à non-linéarité séparable /3/ avec pour partie linéaire le filtre $L(p)$ d'ordre (q) représenté par les équations (1.3) et un modèle partiel $L^*(p)$ d'ordre $(q-r)$, figure 5.

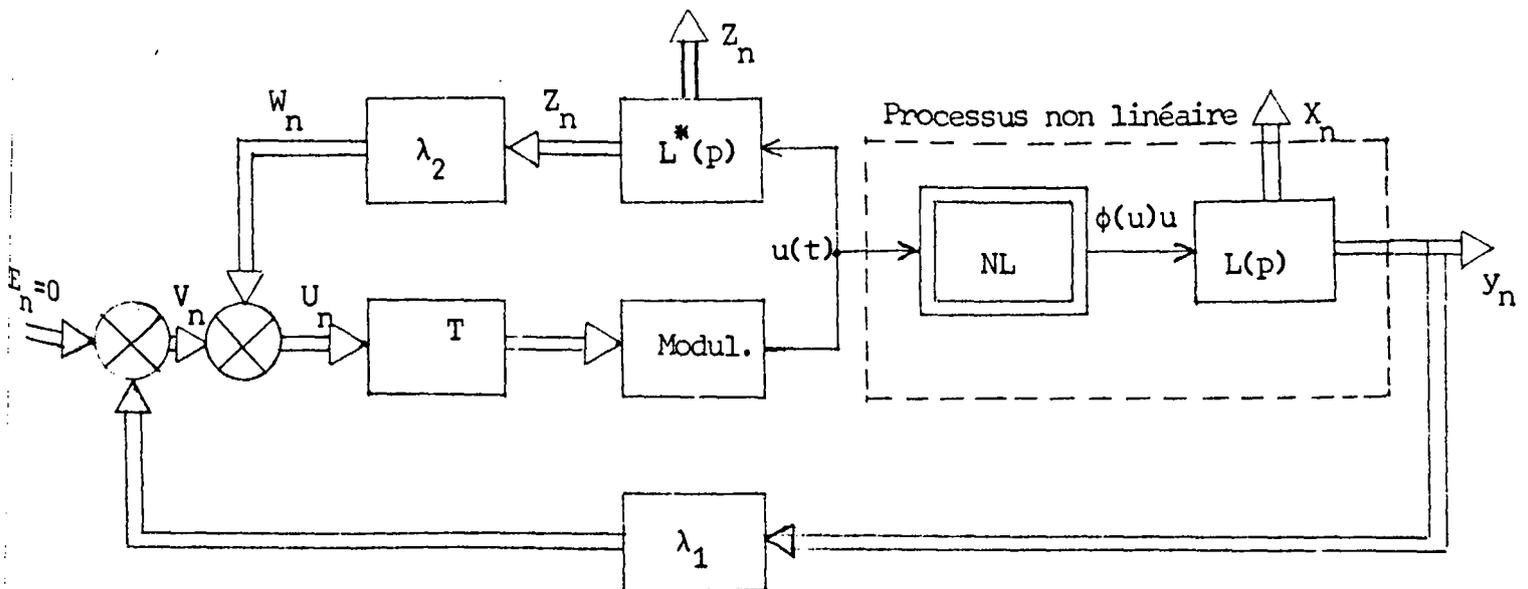


Figure 5

S'il l'on dispose de la loi de commande donnée par la relation (9), l'ensemble de l'asservissement peut être alors décrit en régime autonome ($E_n = 0$) par les équation de récurrence (11) et (12) :

Processus :

$$X_{n+1} = A X_n + K(U_n) \cdot U_n$$

$$y_n = \Lambda X_n, \quad K(U_n) = \begin{pmatrix} K_1(U_n) \\ K_2(U_n) \end{pmatrix}$$

$K(U_n)$ = matrice de dimensions $(q \times \ell)$ dont les coefficients sont non-linéaires.

Modèle : $Z_{n+1} = A_2^* Z_n + K_2^* \cdot U_n$

Système global :

$$Y_{n+1} = \tilde{A}_n \cdot Y_n$$

avec,

$$Y_n = (X_n^T \quad \varepsilon_n^T)^T, \quad \text{vecteur d'état d'ordre } (2q-r)$$

$$\tilde{A}_n = \begin{pmatrix} A - K(U_n) C & \vdots & -K(U_n) \lambda_2 \\ \dots & \vdots & \dots \\ \Delta_n^1 & \vdots & A_2^* + \Delta_n^2 \end{pmatrix}$$

où

$$\Delta_n^1 = \begin{bmatrix} -\left(K_2^* - K_2(U_n)\right) C_1 & \vdots & (A_2^* - A_2) - \left(K_2^* - K_2(U_n)\right) C_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_n^2 = -\left(K_2^* - K_2(U_n)\right) \lambda_2$$

Les matrices Δ_n^1 et Δ_n^2 caractérisent la connaissance approchée du processus et la difficulté de déterminer le modèle partiel parfait.

Dans le cas idéal de réglage et d'identification, on a :

$$(13) \quad \left. \begin{array}{l} A_2^* = A_2 \\ K_2^* = K_2 \\ K(U_n) = K \end{array} \right\} \iff \Delta_n^1 = \Delta_n^2 = 0$$

$$(A - K C)^m = 0 \quad (\text{chapitre I})$$

La matrice de transition \tilde{A}_n se réduit alors à la forme réductible :

$$(14) \quad A_{\text{idéal}} = \begin{pmatrix} A - K C & \vdots & -K \lambda_2 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & A_2 \end{pmatrix}$$

La stabilité de l'asservissement est alors assurée si le modèle est stable.

Dans le cas général d'imperfections de réglage et d'identification du processus, l'introduction d'une norme multiplicative conduit à l'inégalité :

$$(15) \quad \|Y_{n+1}\| \leq \|A_n\| \cdot \|Y_n\|$$

Cette équation permet de conclure à une atténuation du régime transitoire de l'asservissement /4,5/ lorsque le réglage des paramètres du système est voisin de celui défini par la relation (13).

Remarque :

En principe, la régulation par réaction d'état estimé par un système dynamique amène à une augmentation de l'ordre de l'ensemble, donc une complexité accrue de son analyse.

Le problème de stabilité du système non-linéaire (12) peut être abordé sous une forme simplifiée par un choix particulier d'une norme vectorielle régulière telle que la direction caractéristique du système majorant /6/ relatif à la norme choisie soit fixe.

6. Exemple 2 : Asservissement d'un moteur à courant continu

Reprenons l'exemple (2) déjà traité au chapitre précédent. L'organe à régler est caractérisé par une fonction de transfert :

$$L(p) = \frac{1}{p(1+tp)} = \frac{\theta}{u}$$

dont la position (θ) est la seule grandeur captée.

Pour disposer de la vitesse ($\dot{\theta}$), il suffit d'introduire un filtre de fonction de transfert $L^*(p) = (1+tp)^{-1}$ de même entrée $u(t)$. Ainsi l'état du moteur $X = (\theta \quad \dot{\theta})^T$ est estimé à partir de la sortie accessible (θ) et la sortie (Z) du modèle (la matrice P est identique à I_2).

6.1. Commande monomodulée

La structure adoptée pour l'asservissement est présentée figure 6, l'échantillonneur de Dirac de période T est suivi d'un bloqueur d'ordre zéro (B_0) et un gain constant K .

L'évolution du système s'exprime par les relations de récurrence suivantes :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \tau(1-D) \\ 0 & D \end{pmatrix} X_n + K \begin{pmatrix} T - \tau(1-D) \\ 1-D \end{pmatrix} \cdot u_n$$

$$Z_{n+1} = D Z_n + K(1-D) u_n$$

$$u_n = e_n - (1 - \lambda) \hat{X}_n$$

où $\hat{X}_n = (\theta_n \ Z_n)^T$ est l'état estimé du moteur.

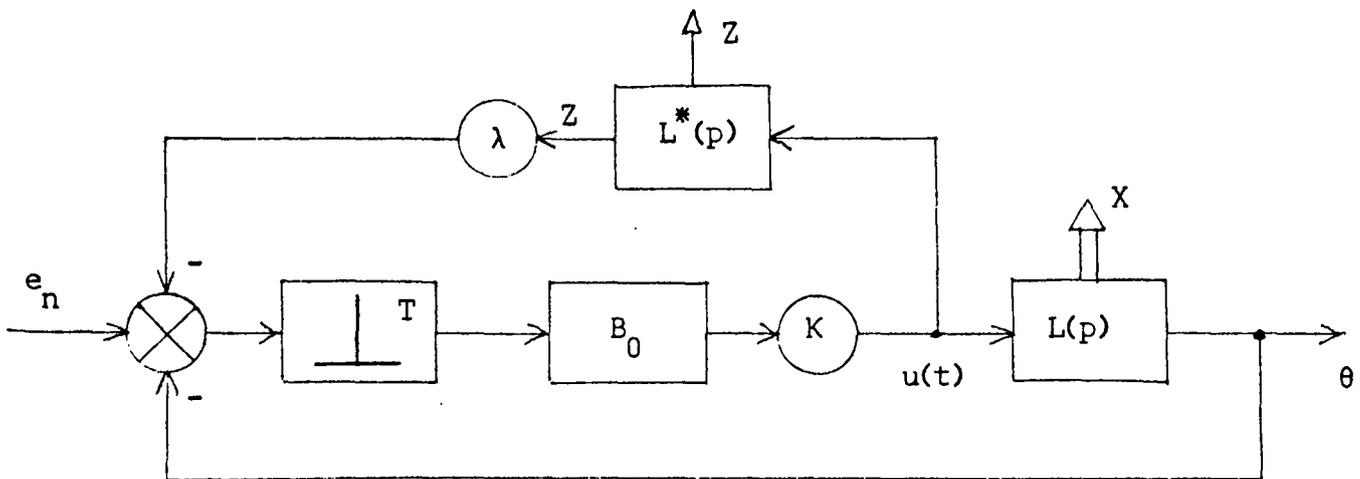


Figure 6

Selon la technique de réaction d'état complètement observée, les conditions d'annulation du régime transitoire avec erreur statique nulle /7/ donnent :

$$K = \frac{1}{T(1-D)} \quad , \quad \lambda = \tau - \frac{T D^2}{1-D}$$

Une simulation hybride de l'asservissement a été réalisée avec $\tau = 1$ sec., $T = 2$ sec. (Annexe 4). Les courbes de réponse, figure 7 montrent bien l'amortissement du régime transitoire pratiquement complet en quatre périodes d'échantillonnage

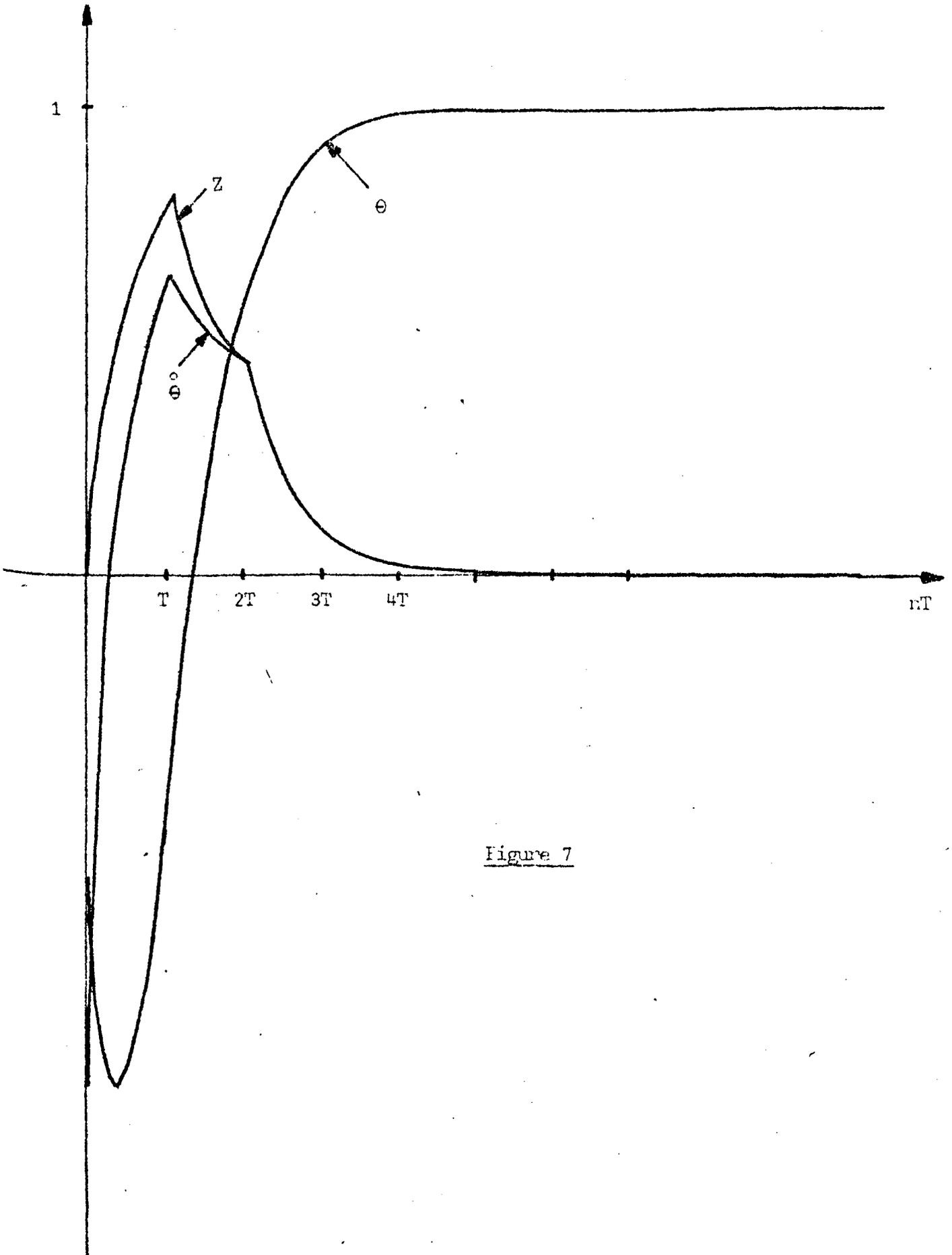


Figure 7

6.2. Commande multimodulée

L'adoption d'un modulateur multi-impulsionnel après l'échantillonneur dans la chaîne d'action (figure 8), conduit aux équations suivantes :

$$X_{n+1} = A X_n + B \cdot U_n$$

$$Z_{n+1} = D Z_n + B_2 \cdot U_n$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \tau(1-D) \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} T/2 - \tau(1-D_1) + \tau(1-D_1)^2 & T/2 - \tau(1-D_1) \\ D_1(1-D_1) & (1-D_1) \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} D_1(1-D_1) & (1-D_1) \end{pmatrix}$$

avec

$$D_1 = e^{-T/2\tau}, \quad U_n = (u_n^1 \quad u_n^2)^T$$

La commandabilité en une période d'échantillonnage, en régime accroché, sera assurée si l'on dispose la loi de commande :

$$U_n = B^{-1} (E_n - A X_n) \quad , \quad E_n = (e_n \quad e_n^0)^T \quad , \quad \text{vecteur de consigne.}$$

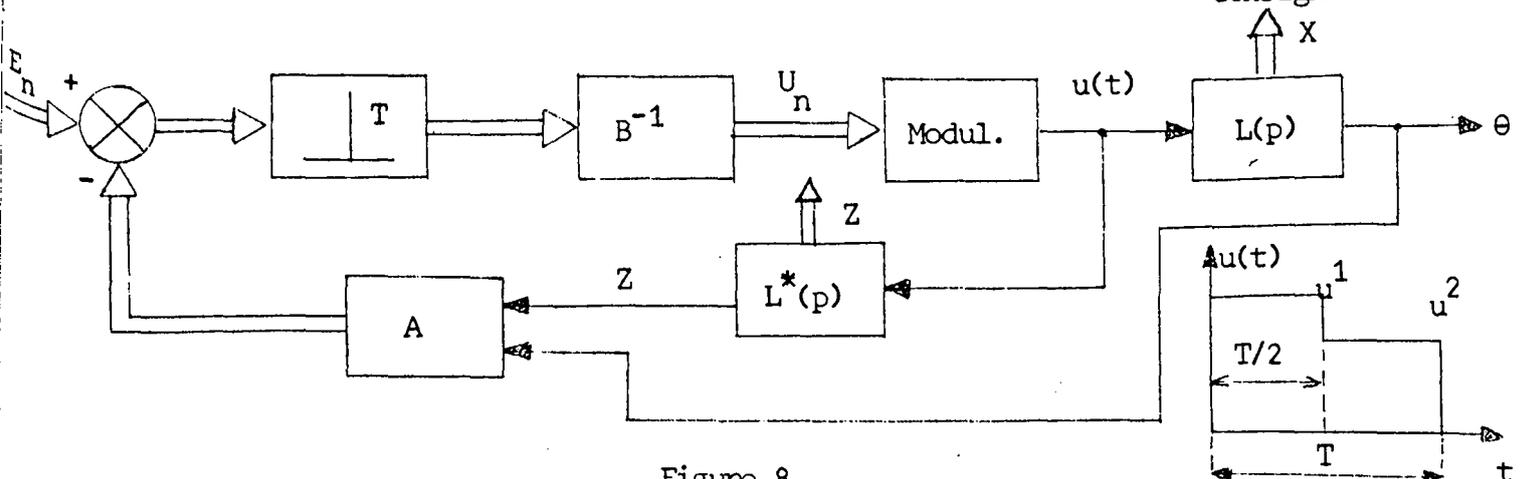


Figure 8

Une réalisation de ce montage sur une calculatrice hybride (Annexe 4), nous a permis d'enregistrer les courbes de réponse du système pour différents types de consigne E_n , (figure 9). Après un régime de démarrage annulé, pratiquement, en trois coups, le système fonctionne comme un organe de recopie caractérisé par la relation de récurrence :

$$E_n = X_{n+1}$$

6.3. Stabilité du filtre en présence d'une non-linéarité

Nous avons conservé le même exemple avec une non-linéarité séparable du gain $\phi(u)$ placé devant le filtre $L(p)$, le réglage est celui du système linéaire parfaitement compensé avec une commande multimodulée. Dans ces conditions, il n'est pas difficile de montrer que l'étude de la stabilité de l'asservissement se ramène à celle du processus observé avec une loi de commande :

$$\begin{aligned} U_n &= -B^{-1} A \cdot X_n, & E_n &= 0 \text{ (régime autonome)} \\ &= -(C_1 \quad C_2) X_n \end{aligned}$$

avec $C_2 = 0$.

En effet, pour $n \geq 1$, l'ensemble de l'asservissement est caractérisé par les équations :

$$Z_n = 0$$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 - \phi_n^1 - 0,22(\phi_n^1 - \phi_n^2) & 0,865 \\ -0,37(\phi_n^1 - \phi_n^2) & 0,135 \end{pmatrix} \cdot X_n$$

où : ϕ_n^i est le gain non-linéaire correspondant à la commande u_n^i .

Le critère de Kalman-Bertram /3/ donne la condition suffisante suivante de stabilité asymptotique du système :

$$1,13 \geq \phi(u) \geq 0,9$$

Si la non-linéarité correspond à une variation finie $|a(u)| \leq 0,2$ l'application d'une norme du type $\max |x_i|$ montre que les variables d'état du processus présentent des oscillations majorées à la limite /4,5/ par $L \leq 1,69$. Une série d'enregistrements (figure 10) traduit l'effet de la non-linéarité considérée /9/ sur l'asservissement.

On peut conclure ainsi à une grande insensibilité aux variations des paramètres de réglage.

En effet, les imperfections de réglage et d'identification peuvent être considérées comme des perturbations sur les paramètres d'un système linéaire bouclé totalement observé. Dans ces conditions, la propriété de stabilité de structure est conservée.

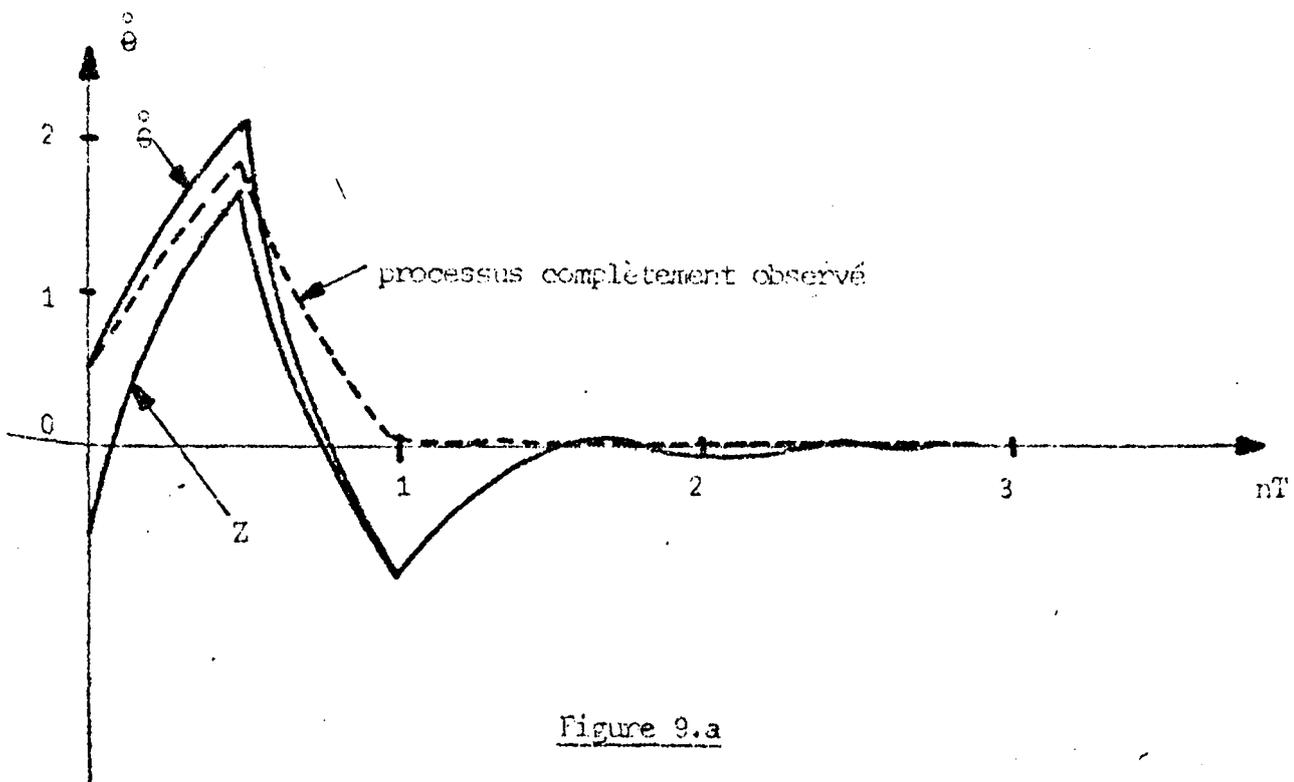
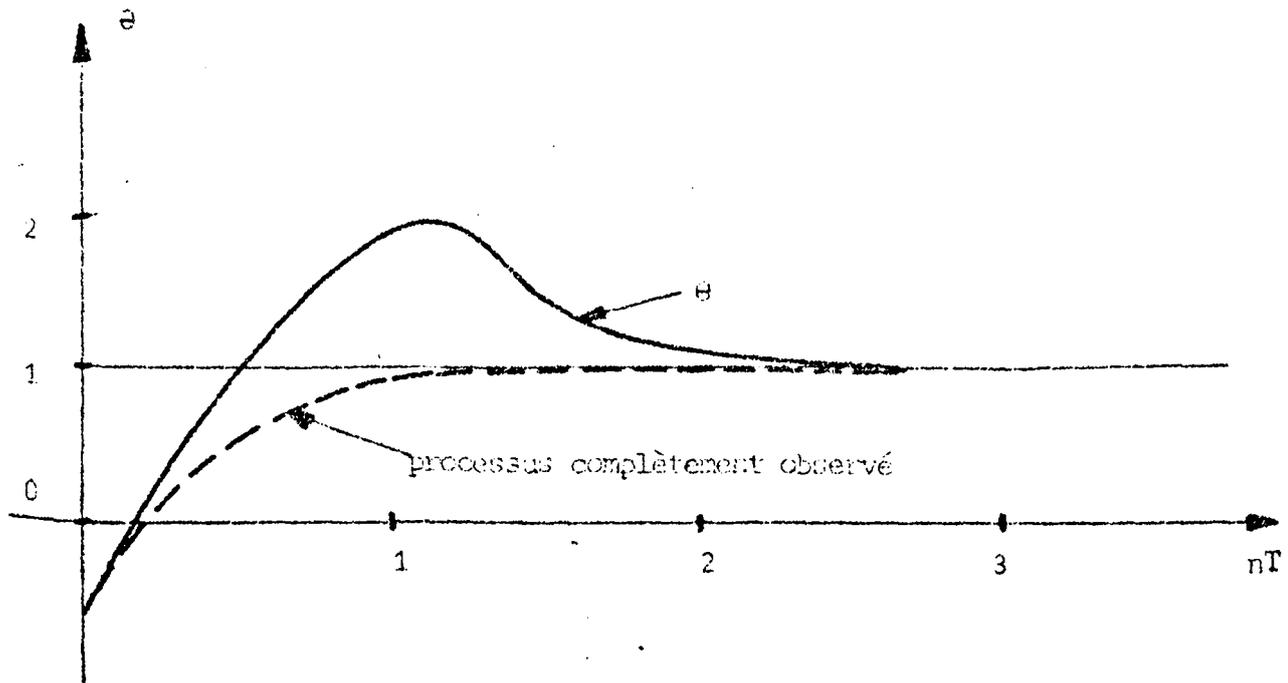


Figure 9.a

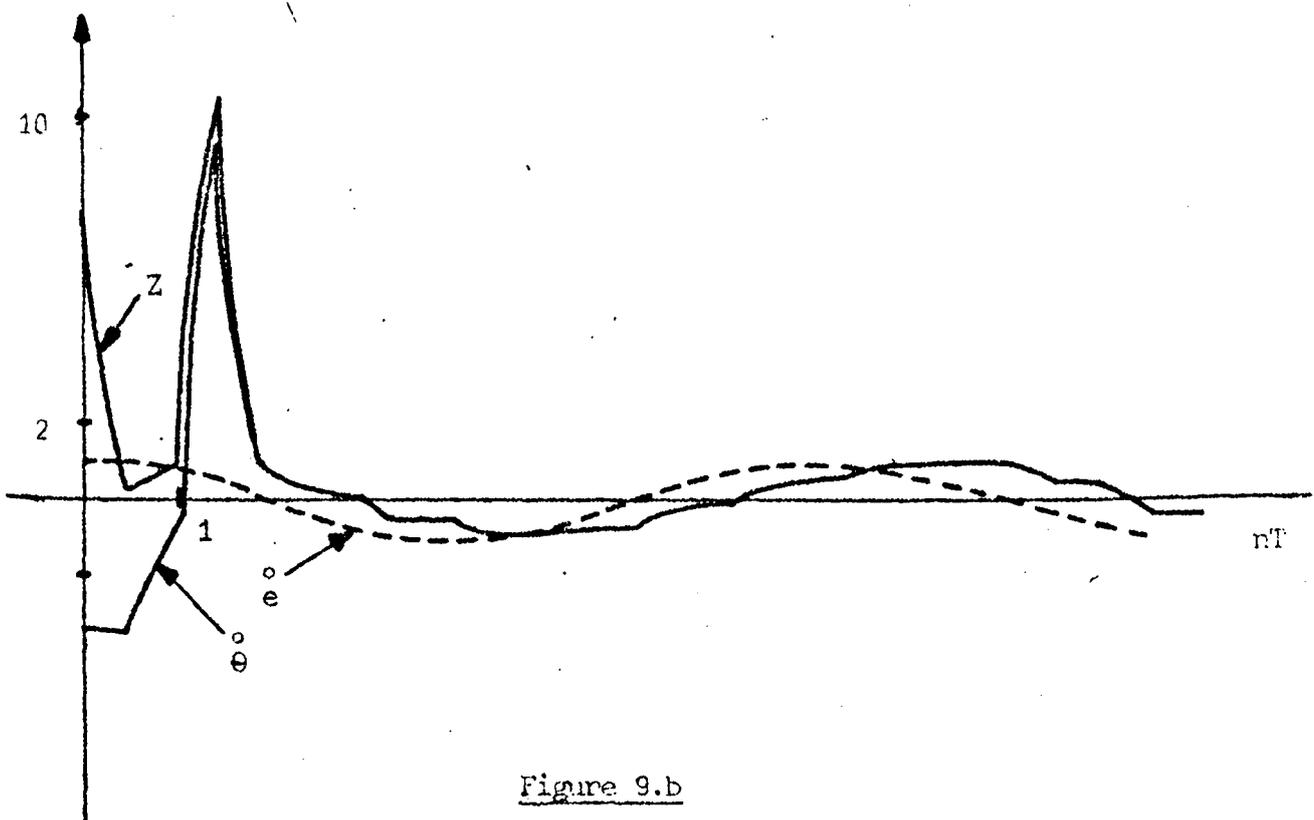
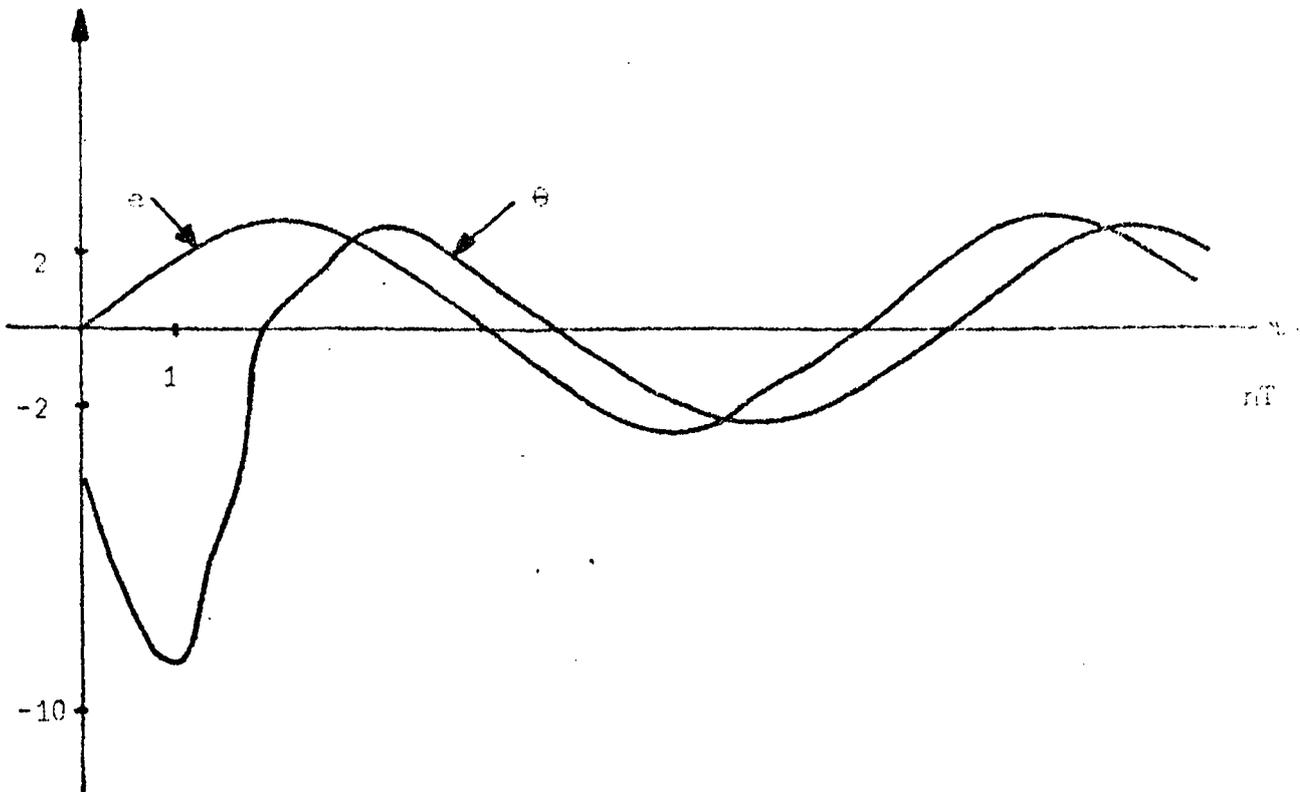
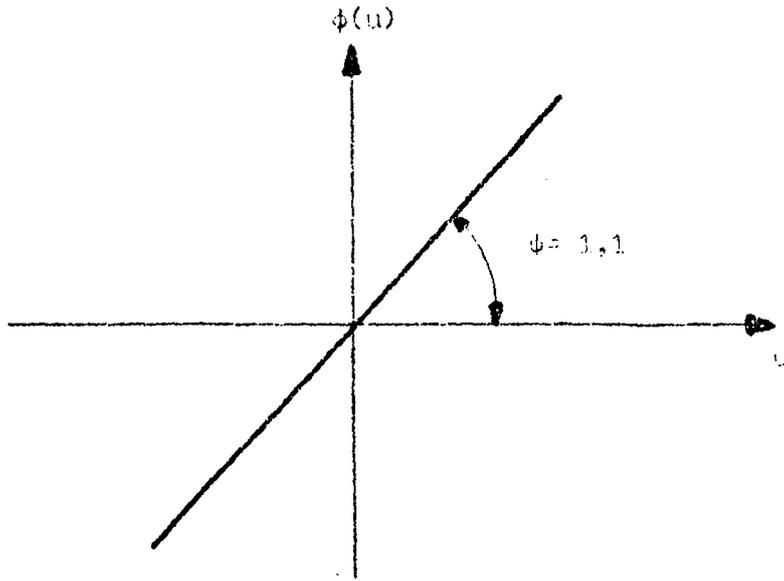


Figure 9.b



Echelle : 2 Volt/cm

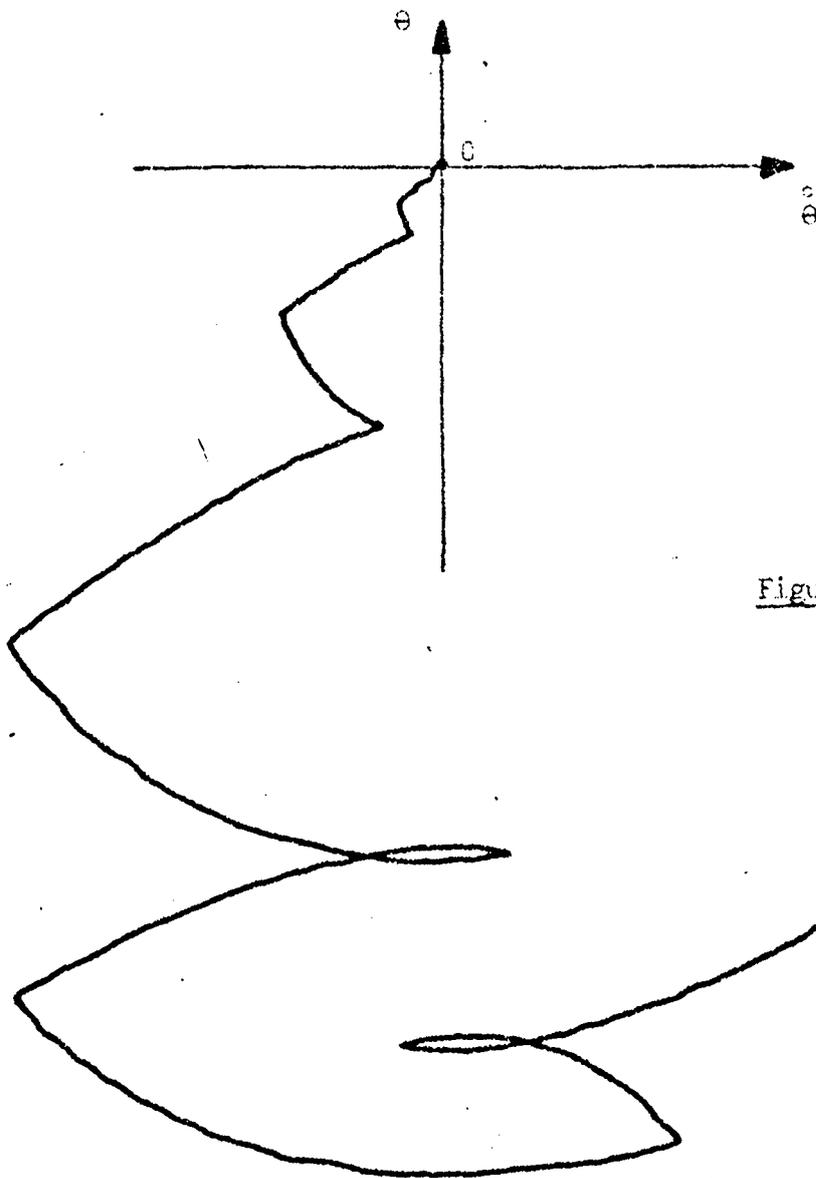
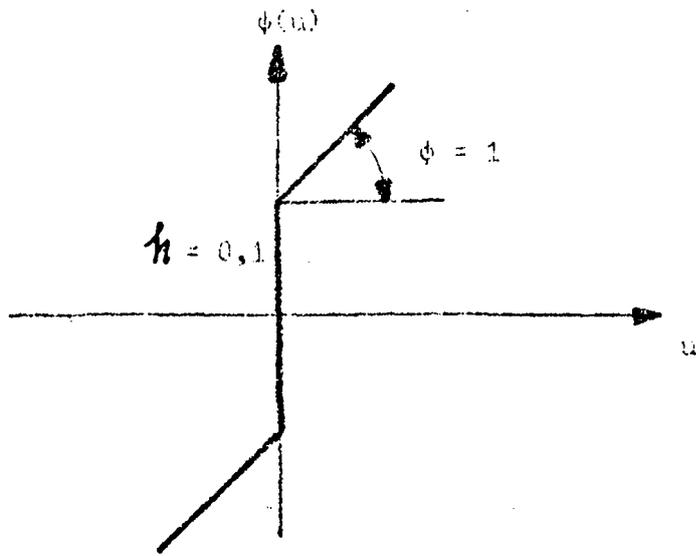


Figure 10.a

C.I.



Echelle : 2 V/cm

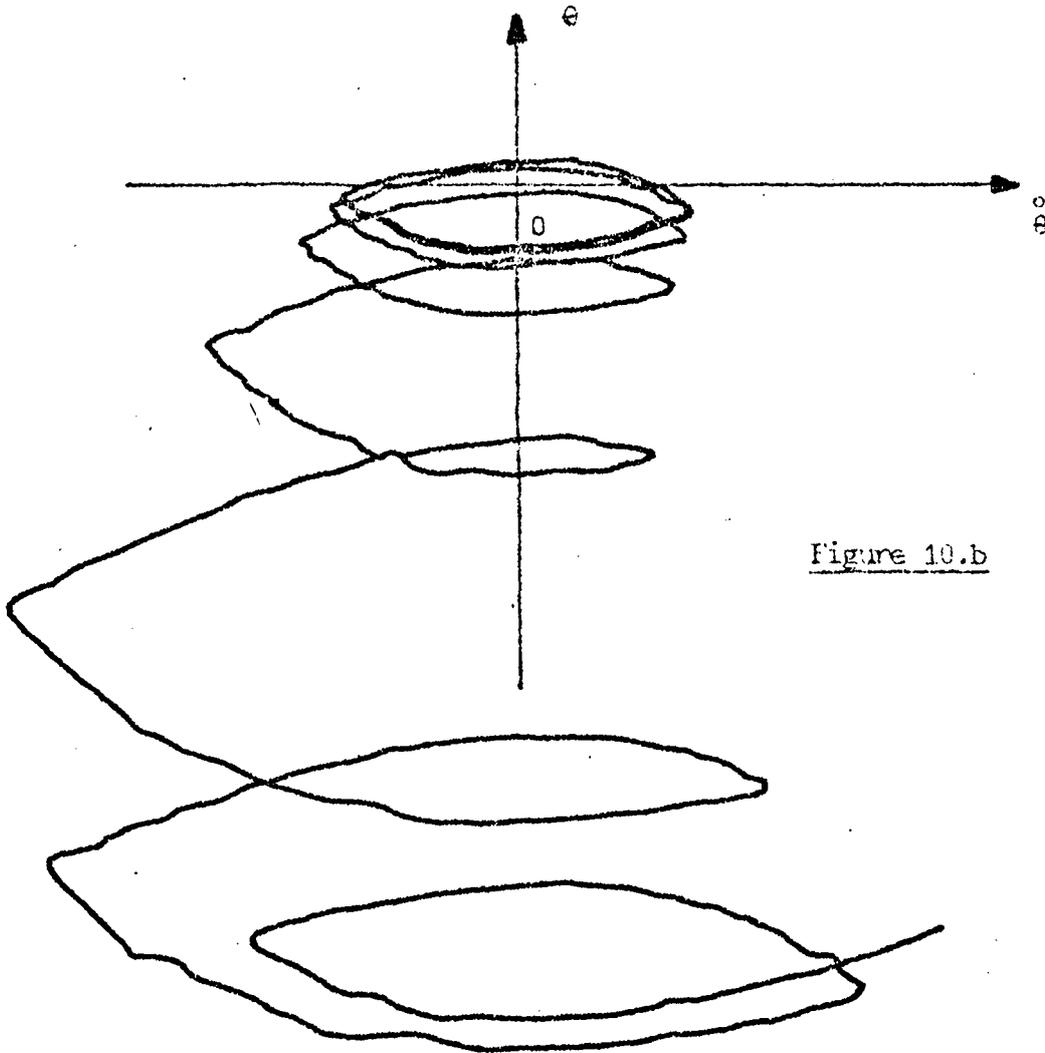


Figure 10.b

CONCLUSION

En pratique, l'utilisation d'un modèle d'une partie stable de l'organe à régler permet dans un temps suffisamment court de disposer en régime accroché, des informations complémentaires indispensables à une régulation optimale.

De plus, cette technique conduit à des asservissements stables dont la structure est facile à réaliser lors de la mise en oeuvre.



BIBLIOGRAPHIE

- /1/ A. FOSSARD
"Commande des systèmes multidimensionnels"
Dunod, Paris 1972
- /2/ J.R. RAGAZZINI, G.F. FRANKLIN
"Les systèmes asservis échantillonnés"
Dunod, Paris 1962.
- /3/ P. VIDAL
"Systèmes échantillonnés non-linéaires"
Gordon and Breach 1968.
- /4/ F. LAURENT, P. VIDAL
"Sur une condition suffisante d'unicité de la réponse d'un système échantillonné non-linéaire à une sollicitation quelconque"
Comptes rendus, t. 264, p. 779, Série A, 1967.
- /5/ C. MAIZIERES, F. LAURENT
"Sur l'unicité de la réponse d'un système continu non-linéaire"
C.R.A.S., t. 264, p. 1157, Série A, 1967.
- /6/ P. BORNE, J.C. GENTINA, F. LAURENT
"Sur la stabilité des systèmes échantillonnés non-linéaires"
RAIRO Revue Jaune (Juin 1972).
- /7/ J.M. TOULOTTE, F. LAURENT, P. VIDAL
"Régulation par échantillonnage et correction tachymétrique"
International pulse symposium de Budapest, Avril 1968.
- /8/ F. LAURENT
"Sur la stabilité globale et le temps de réponse d'un système échantillonné non-linéaire"
C.R.A.S., t. 260, p. 4444, 1965
- /9/ C. MAIZIERES
"Sur quelques méthodes d'étude des systèmes continus non-linéaires"
Thèse Sciences Physiques - Lille - Novembre 1968.

CHAPITRE IV

<p>REACTION DIRECTE DE SORTIE PAR EXTENSION DU SYSTEME A COMMANDER</p>
--

INTRODUCTION

La technique de réaction d'état estimé par un système dynamique se traduit par une augmentation de l'ordre du système asservi.

Dans cet esprit, des approches /1,2,3/ ont été proposées pour les systèmes continus linéaires afin de transformer la réaction d'état en une réaction de sortie par extension du processus à commander.

Nous allons étendre ce principe aux systèmes échantillonnés linéaires en conservant à ce type de système asservi leurs caractéristiques essentielles de réponse en temps fini et en excluant tout procédé de dérivation.

1 - Principe de la méthode

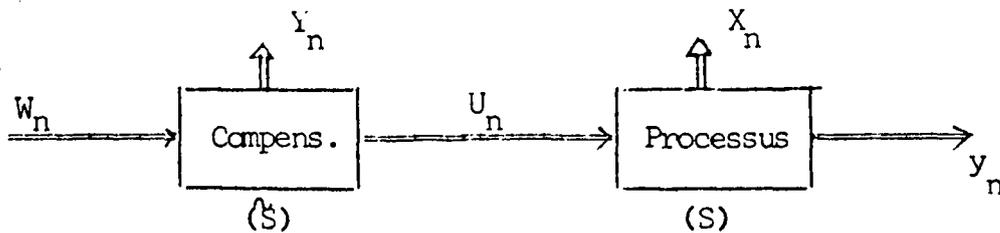


Figure 1

Au système à régler (S) défini par les équations (1), est associé le système \hat{S} défini par les équations (2), figure 1.

$$(1) \quad \begin{aligned} X_{n+1} &= A X_n + B U_n \\ y_n &= \Omega \cdot X_n \end{aligned}$$

où : X_n : vecteur d'état d'ordre (q)
 U_n : vecteur de commande de (l) composantes
 y_n : vecteur de sortie captée de (r) variables

$$(2) \quad \begin{aligned} Y_{n+1} &= F Y_n + G \cdot W_n \\ U_n &= H \cdot Y_n \end{aligned}$$

où : Y_n : vecteur d'état d'ordre (p)
 W_n : vecteur de commande de (l^*) composantes

Le système associé \hat{S} étant placé en avant du processus (S), figure 1, le système global de dimension (q+p) est donné par :

$$(3) \quad \begin{aligned} Z_{n+1} &= \tilde{A} Z_n + \tilde{B} \cdot W_n, \quad Z_n^T = (X_n^T, Y_n^T) \\ y_n &= \tilde{\Omega} \cdot Z_n \end{aligned}$$

où : Z_n : vecteur d'état du système augmenté,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B H \\ 0 & F \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}$$

Si le système augmenté (3) est commandable, on obtient une solution optimale de la forme :

$$(4) \quad W_n = \tilde{E}_n + \tilde{C}_0 \cdot X_n + \tilde{C}_1 \cdot Y_n$$

E_n : vecteur d'entrée de (l) composantes.

La réaction directe de la sortie y_n peut être obtenue en faisant certaines transformations (voir par exemple paragraphe 2) pour que la commande désirée (U_n) soit exprimée à partir des grandeurs accessibles (y_{n-i}) et (U_{n-i}), $i \geq 0$.

Toutefois, la structure de l'asservissement ainsi obtenue, est liée étroitement au système arbitraire (\tilde{S}). Sans ce sens, nous allons envisager d'utiliser un réseau correcteur numérique (RCN), comme système de commande relativement simple à réaliser en pratique permettant d'asservir les systèmes échantillonnés incomplètement observés.

2 - Réglage par un RCN

2.1 - Choix particulier du système associé (\tilde{S}) :

Considérons une augmentation de l'ordre du processus à commander (S) par l'introduction d'un retard de (ρ) périodes d'échantillonnage sur la commande (U_n), le système (\tilde{S}) (figure 2) représenté à la forme d'état (2) s'écrit :

$$(5) \quad Y_n^T = (U_n^T, U_{n+1}^T, \dots, U_{n+\rho-1}^T)$$

$$p = \rho l \quad , \quad l^* = l$$

avec,

$$F = \begin{bmatrix} 0 & I_l & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & I_l \\ 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix}$$

I_l = matrice unité
d'ordre (l)

$$G^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I_l \end{bmatrix} \quad , \quad H = \begin{bmatrix} I_l & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

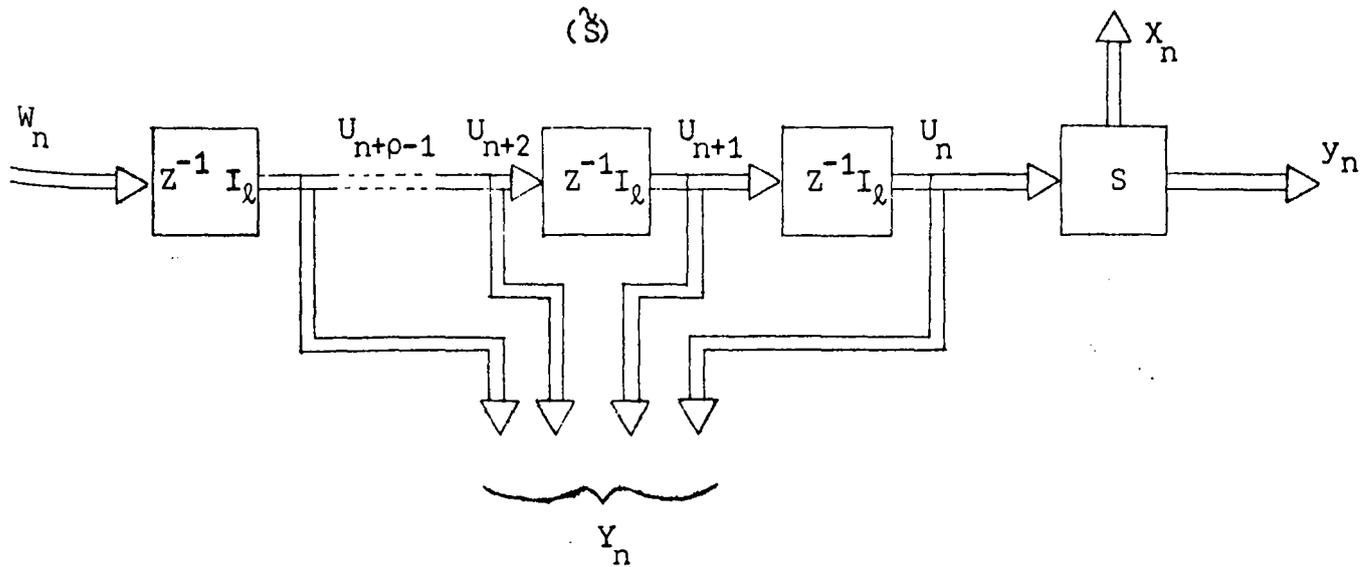


Figure 2

Pour cette forme particulière du compensateur (5), la matrice de commandabilité $(C_{\rho+K})$ en $(\rho+K)$ périodes d'échantillonnage du système augmenté (3) s'écrit :

$$(6) \quad (6) \quad C_{\rho+K} = \begin{bmatrix} C_K & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

$$C_K = (A^{K-1}B, \dots, B) \quad ; \quad C_\rho = \begin{bmatrix} I_\ell & 0 \\ 0 & I_\ell \end{bmatrix}$$

où,

C_K : matrice de commandabilité du processus en K périodes, de dimensions $(q \times K\ell)$

C_ρ : matrice de commandabilité du système associé en ρ périodes, de dimensions $(\rho\ell \times \rho\ell)$.

Il est évident que le système global est commandable dans $(\rho+K)$ périodes si et seulement si le processus l'est dans K périodes. Dans ce cas, on peut trouver une chaîne de retour \hat{C} sur l'état Z_n du système (3), permettant d'éliminer l'effet des conditions initiales dans $(K+\rho)$ périodes, (chapitre I). La loi de commande s'écrit :

$$(7) \quad W_n = \hat{E}_n + \hat{C} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = (\hat{C}_0 \quad \hat{C}_1)$$

\hat{C}_0 est de dimension $(l \times q)$, \hat{C}_1 est de dimension $(l \times p)$.

2.2 - Transformation de la réaction d'état en une réaction de sortie

La loi de commande (7) peut être exprimée en fonction des commandes U_{n+i} et des sorties y_{n+i} , avec $i \leq p$, sous la forme d'un RCN représenté par l'expression (8) :

$$(8) \quad U_{n+p} = E_n^y + (N_0, \dots, N_{p-1}) \begin{bmatrix} U_n \\ \vdots \\ U_{n+p-1} \end{bmatrix} + (D_0, \dots, D_p) \begin{bmatrix} y_n \\ \vdots \\ y_{n+p} \end{bmatrix}$$

N_i et D_i sont des matrices constantes de dimensions $(l \times l)$ et $(l \times r)$ respectivement.

En effet, d'après l'évolution du processus à régler, on a :

$$(9) \quad \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+p} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Omega \\ \Omega A \\ \vdots \\ \Omega A^p \end{bmatrix}}_{O_{p+1}} X_n + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \Omega B & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \Omega A^{p-1} B & \dots & \Omega B \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ \vdots \\ U_{n+p-1} \end{bmatrix}$$

O_{p+1} : matrice d'observabilité du processus en $(p+1)$ périodes à partir des sorties, de dimensions $((1+p)r \times q)$.

$$(10) \quad U_{n+p} = W_n \quad (\text{système associé choisi})$$

Des équations (7), (8), (9) et (10), on peut déduire :

$$(11) \quad (D_0, \dots, D_p) \cdot O_{p+1} = \hat{C}_0$$

$$(D_0, \dots, D_p) \cdot M + (N_0, \dots, N_{p-1}) = \hat{C}_1$$

Une condition suffisante /4/ d'existence d'une solution pour les matrices cherchées $\{ D_i \}$ et $\{ N_i \}$ se ramène à l'observabilité du système :

$$(12) \quad \text{rang}(O_{p+1}) = q$$

$$q \geq 1+p \geq \frac{q}{r}$$

$$M^{*-1} = \begin{bmatrix} I_\ell & & & & 0 \\ C & B & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ C & A^{k-1} B & \dots & C B & I_\ell \end{bmatrix}, \quad O_K^* = \begin{bmatrix} C \\ C A \\ \vdots \\ C A^{k-1} \end{bmatrix}$$

Les caractéristiques du retour (C) résultant de l'équation (17) assurent d'une part une matrice A^* identiquement nulle, et d'autre part l'observabilité du processus au bout de K périodes (rang $O_K^* = q$, dualité des notions de commandabilité et d'observabilité des systèmes linéaires stationnaires /6/). On peut alors avoir la décomposition matricielle suivante :

$$(20) \quad C A^K = (L_K, \dots, L_1) \cdot O_K^*$$

L_i sont des matrices ($\ell \times \ell$) à coefficients constants.

Le filtre (1) peut alors être utilisé en tant qu'organe de récopie d'un vecteur d'entrée E_n à (ℓ) composantes, ce qu'exprime la relation (21) :

$$(21) \quad \lambda^T X_{n+K+p} = E_n = E_{n+m}$$

λ^T est une matrice ($\ell \times q$) définissant le vecteur de sortie désiré, elle vérifie en outre l'équation :

$$(22) \quad \lambda^T = Q \cdot C$$

Q : matrice régulière de dimensions ($\ell \times \ell$).

L'ensemble des équations (19), (20), (21) et (22) conduit alors à la relation :

$$(23) \quad Q C X_{n+p+K} = Q (L_K, \dots, L_1) \begin{pmatrix} E_{n+m} \\ \vdots \\ E_{n+m+K-1} \end{pmatrix}$$

Une solution concernant l'asservissement du vecteur de sortie désiré au vecteur d'entrée E_n peut alors être obtenue lorsque l'équation (24) est vérifiée :

$$(24) \quad L_i = 0, \quad \forall i \geq 1, i \neq K$$

$$Q L_K = I_\ell$$

Il est évident que le retard le plus petit possible entre la consigne E_n et la sortie désirée sera de K périodes d'échantillonnage, pour que le RCN soit réalisable. Le système aura alors en régime dynamique le fonctionnement suivant :

$$(25) \quad \lambda^T X_{n+\rho+K} = E_{n+\rho} \quad , \quad \forall n \geq 0$$

$$(m = \rho, \hat{E}_n = E_{n+\rho})$$

3 - Mise en oeuvre

Notons par Z^{-i} un opérateur de retard de (i) périodes d'échantillonnage, le compensateur représenté par l'expression (8) a une matrice de transfert discrète de la forme :

$$(26) \quad G_c(Z^{-1}) = \frac{U}{Y} = \frac{\sum_{i=0}^{\rho} D_i Z^{i-\rho}}{-\sum_{i=0}^{\rho} N_i Z^{i-\rho}}$$

avec $N_\rho = -I_\ell$.

Le schéma de l'asservissement est représenté dans la figure 3.

Les (ρ) premières périodes constituent un temps d'estimation de l'état réel du processus à partir des informations mémorisées dans le RCN sur les commandes et les sorties captées. Il en résulte, en régime dynamique, l'équation de fonctionnement :

$$(27) \quad \lambda^T X_{n+K} = E_n \quad , \quad \forall n \geq \rho$$

Dans ce mode de commande l'effet d'une perturbation intervenant sur l'état du système est éliminé au bout de $(\rho+K)$ périodes d'échantillonnage.

4 - Stabilité de structure

L'asservissement proposé pour être utilisé pratiquement doit être stable et peu sensible aux variations des paramètres de réglage qui peuvent résulter des imperfections d'identification du processus à commander. Dans ce sens, considérons le processus à non-linéarité séparable avec pour partie linéaire le modèle d'état (28) commandé par un RCN d'ordre $(\rho\ell)$ défini par l'expression (29) (figure 4).

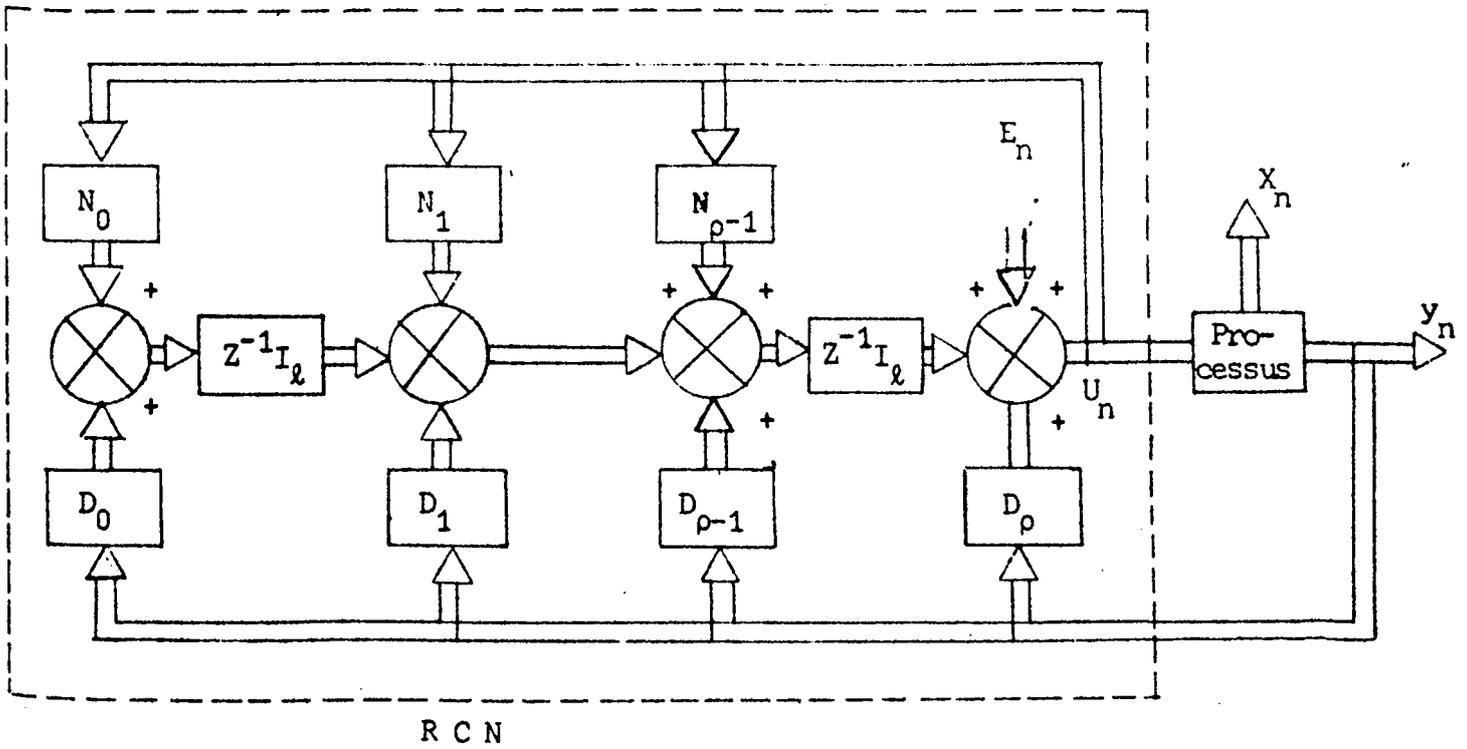


Figure 3

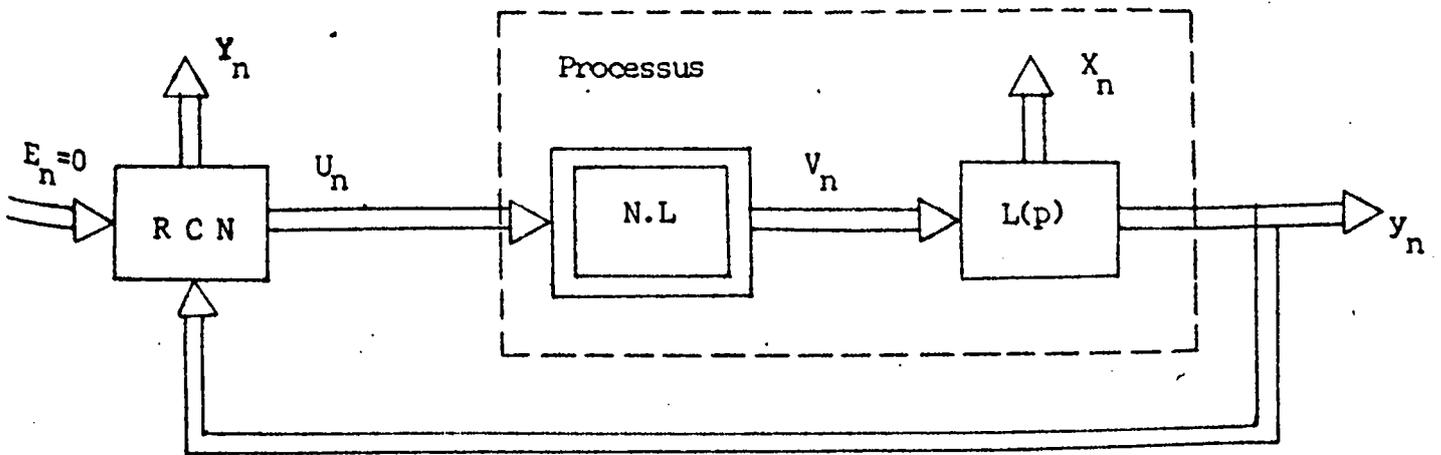


Figure 4

$$(28) \quad \text{Processus : } X_{n+1} = A^* X_n + B^* \cdot V_n \quad (\text{partie linéaire})$$

$$V_n = \phi_n(U_n) \cdot U_n \quad (\text{partie non-linéaire})$$

$$y_n = \Lambda \cdot X_n \quad (\text{sortie captée})$$

$$(29) \quad \text{RCN : } U_{n+\rho} = \sum_{i=0}^{\rho-1} N_i \cdot U_{n+i} + \sum_{i=0}^{\rho} D_i y_{n+i} + E_{n+\rho}$$

Dans un fonctionnement en régulateur ($E_n = 0$), le système asservi peut être représenté par la relation vectorielle :

$$(30) \quad \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ \hline U_{n+1} \\ \vdots \\ U_{n+\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & B^* \phi_n & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & I_{\ell} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & I_{\ell} \\ D^* & N_0^* & \dots & \dots & N_{\rho-1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ \hline U_n \\ \vdots \\ U_{n+\rho-1} \end{pmatrix} = \tilde{A}^* \begin{pmatrix} X_n \\ \hline U_n \\ \vdots \\ U_{n+\rho-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } D^* = (D_0 \dots D_{\rho}) \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda A^* \\ \vdots \\ \Lambda A^{*\rho} \end{pmatrix}$$

$$(N_0^* \dots N_{\rho-1}^*) = (N_0 \dots N_{\rho-1}) + (D_0 \dots D_{\rho}) \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ \Lambda B^* \phi_n & & & & 0 \\ \vdots & & & & \\ \Lambda A^{*\rho-1} B^* \phi_n & \dots & \Lambda B^* \phi_{n+\rho-1} \end{pmatrix}$$

L'étude de la stabilité /7/ et de la sensibilité de réglage du système commandé par le RCN considéré se ramène alors à celle des solutions de l'équation (30).

Dans le cas idéal de réglage, on a :

$$A^* = A \quad , \quad B^* = B \quad , \quad \phi_n = I_{\ell}$$

La matrice caractéristique A^* aura un polynôme minimal d'ordre $(p+K)$ dont les coefficients sont nuls ($A^* = \lambda : A^{p+K} = 0$).

5. Application /8/ : Asservissement de l'état d'un moteur

Reprenons l'exemple (2) considéré au chapitre (II). La position (θ) du moteur est la seule grandeur accessible. Nous proposons d'asservir l'état $X = (\theta, \dot{\theta})^T$ à une consigne (E) selon l'équation :

$$X_{n+1} = E_n = \begin{pmatrix} e_n \\ \dot{e}_n \end{pmatrix}$$

Cet organe est commandé par un RCN multi-cadence, figure 5.

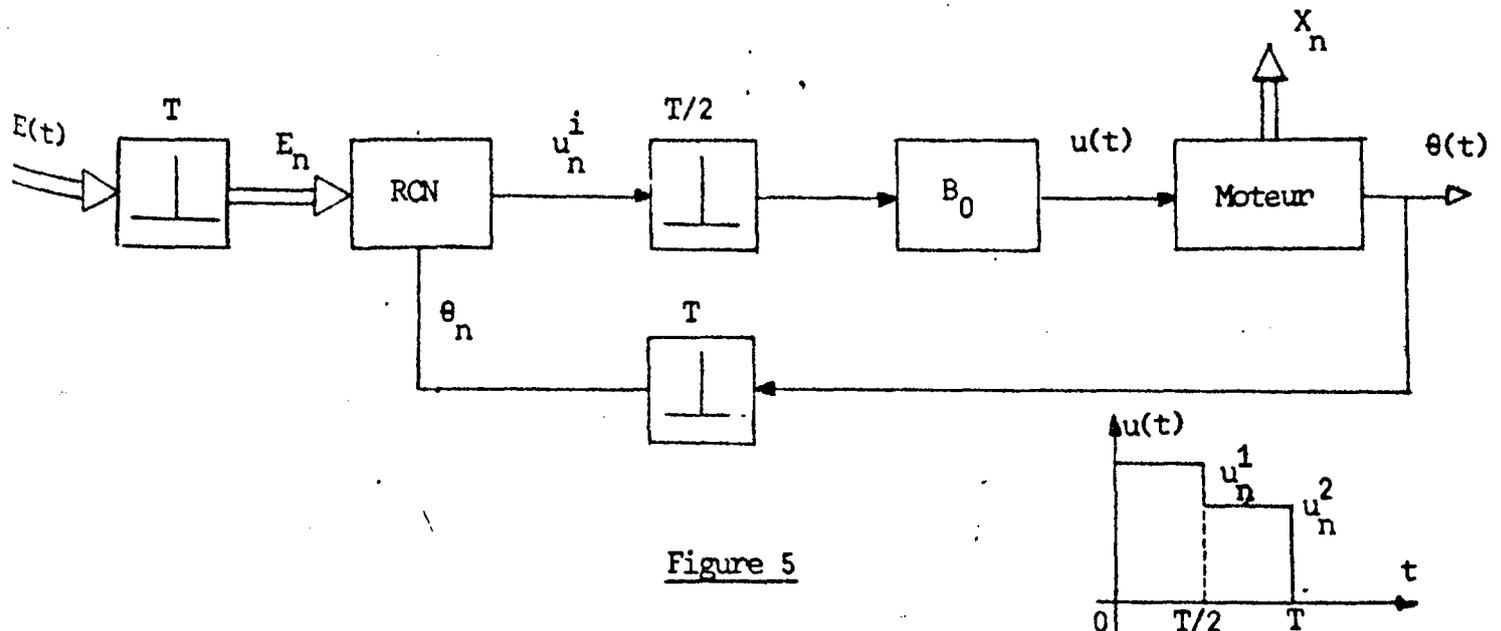


Figure 5

L'état X_n étant commandable en une période $(K=1)$ et observable à partir de la sortie θ_n en deux itérations $(p=1)$, il vient pour l'expression de la commande au nième instant d'échantillonnage :

$$\begin{pmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} e_n \\ \dot{e}_n \end{pmatrix} - B^{-1} \cdot A^2 \cdot O_2^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \theta_{n-1} \\ \dot{\theta}_n \end{pmatrix} - (B^{-1}AB - B^{-1}A^2O_2^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ AB \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} u_{n-1}^1 \\ u_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

avec,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \tau(1-D) \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} T/2 - \tau(1-D^*)D^* & T/2 - \tau(1-D^*) \\ D^*(1-D^*) & 1-D^* \end{pmatrix}$$

$$O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \tau(1-D) \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = (1 \ 0) \quad , \quad D = e^{-T/\tau} \quad , \quad D^* = e^{-T/2\tau}$$

La simulation sur calculatrice hybride du moteur nous a permis de mettre en oeuvre un asservissement de ce type, la commande étant élaborée sur la partie numérique de cette calculatrice (le programme du calcul se trouve dans l'annexe 4).

Les figures (5.a,b) illustrent les résultats obtenus lors de la copie des différents types de vecteur de consigne.

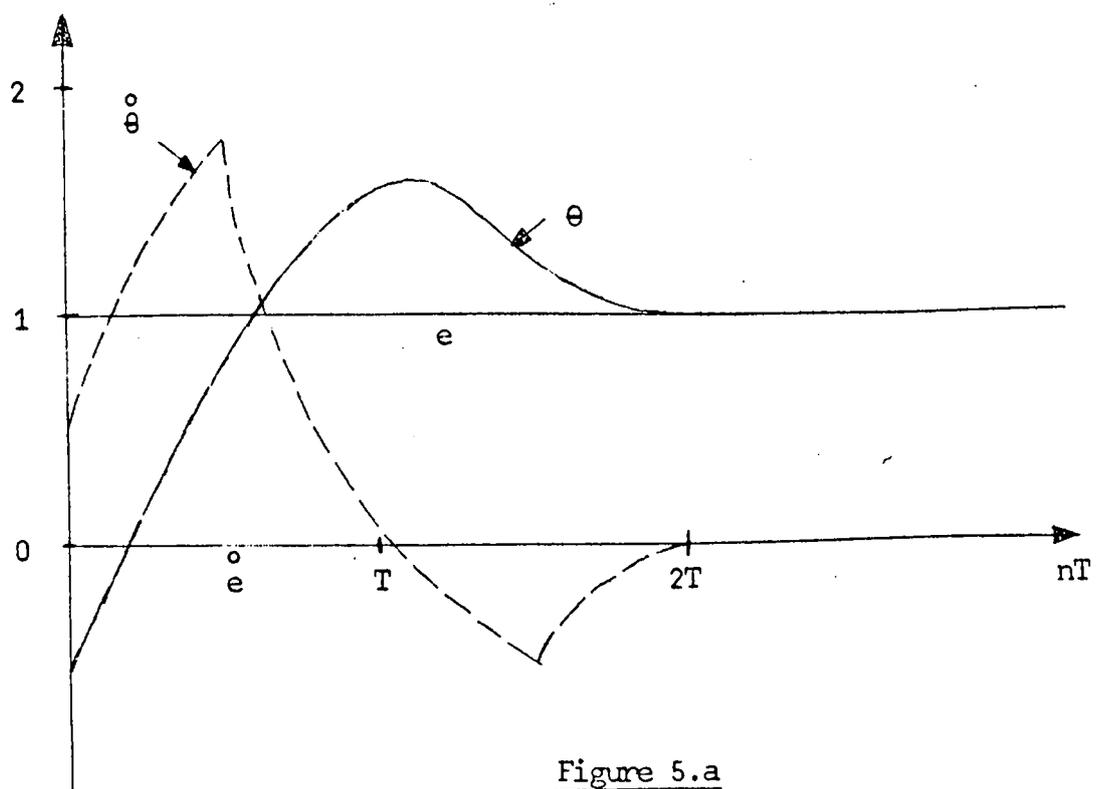


Figure 5.a

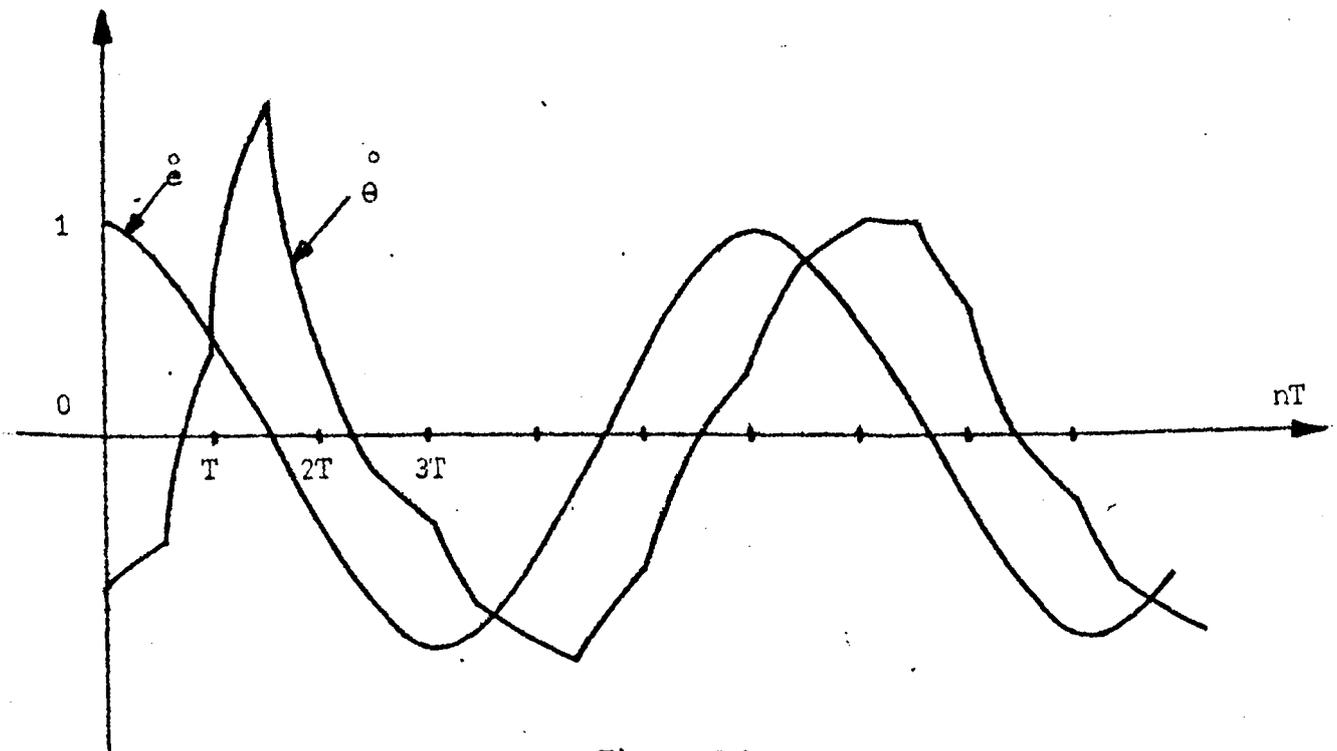
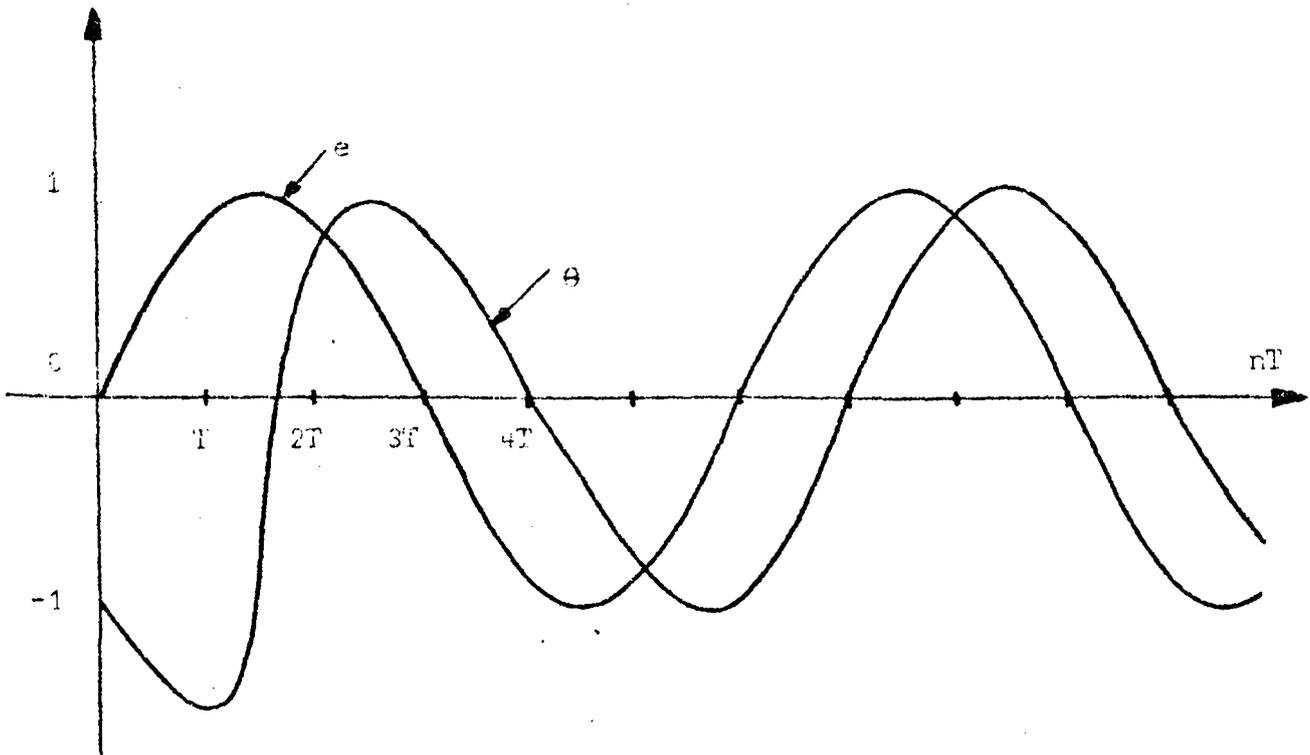


Figure 5.b

CONCLUSION

L'introduction d'un retard pur dans la chaîne d'action ajoute de nouvelles entrées et sorties qui permettent de placer arbitrairement les "pôles" du système augmenté, et par là d'éliminer le transitoire en un temps fini.

Le RCN qui en résulte permet d'asservir l'état du filtre à régler à une consigne donnée à partir des grandeurs d'état accessibles. Dans ce mode de commande l'effet d'une perturbation intervenant sur l'état est éliminé au bout d'un temps fini.

BIBLIOGRAPHIE

- /1/ J.B. PEARSON, CY. DING
"Compensator Design for multivariable linear systems"
IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-14, N° 2, April 1969
p. 130-134.
- /2/ F. DELLON, P.E. SARACHIK
"Optimal control of unstable linear plants with inaccessible states"
IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-13, October 1968, p. 491-495
- /3/ J .D. FERGUSON, Z.V. REKASIUS
"Optimal linear control systems with incomplete state measurements"
IEEE Trans. Automatic Control, Vol AC-14, April 1969, p. 135-140
- /4/ F.G. GANTMACHER
"Théorie des matrices"
Dunod, Paris 1966
- /5/ F. LAURENT, J.C. GENTINA, M. STAROSWIECKI, P. BORNE
"Sur l'optimisation du temps de réponse d'un système échantillonné
incomplètement observable au moyen d'une commande multiple"
2nd IFAC Symposium - Düsseldorf 1971
- /6/ R.E. KALMAN
"On the general theory of control systems"
Proc. IFAC (1960), 1, 480-492, Butterworths - London 1961
- /7/ P. VIDAL
" Systèmes échantillonnés non linéaires"
Gordon and Breach, 1968
- /8/ J.C. GENTINA, D. HAUY, T.M. ABDEL-MONEIM
"Commande numérique de processus échantillonnés"
AFAS Congrès de Saint Etienne (1973)

CHAPITRE V

EXTENSION DE LA COMMANDE PAR REACTION D'ETAT AUX SYSTEMES ECHANTILLONNES INCOMPLETEMENT OBSERVES

INTRODUCTION

Le réglage d'un processus linéaire commandé à partir d'un modulateur-échantillonneur quelconque (linéaire ou non) est un problème extrêmement fréquent en pratique.

Dans ce sens, après avoir précisé le type des processus que nous nous proposons d'étudier, nous envisagerons dans une première partie l'utilisation des méthodes présentées aux chapitres II, III et IV, dans le but de commander les systèmes échantillonnés non linéaires incomplètement observés. Ensuite, dans un second volet, nous analyserons les difficultés liées au régime de démarrage qui orientent le choix du mode de commande.

1. Description des systèmes étudiés

L'organe à régler est constitué par un filtre linéaire stationnaire (mono-variable) d'ordre (q) dont la fonction de transfert associée $L(p)$ est donnée par :

$$(1.i) \quad L(p) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_s p^s}{\beta_0 + \beta_1 p + \dots + \beta_q p^q}$$

avec : $\beta_q \neq 0$

$$q \geq s$$

Sous la réserve d'observabilité /1/, le processus est décrit dans une représentation d'état par une équation différentielle vectorielle du type :

$$(1.ii) \quad \dot{X}(t) = A X(t) + B \cdot u(t)$$

$$y(t) = \Lambda X(t)$$

où : $X(t) \in E^q$: q variables caractérisant l'état du système à l'instant (t).

$y(t) \in E^r$: r sorties captées

Dans l'intervalle $R = [nT, (n+1)T[$, le signal scalaire de commande $u(t)$ se ramène à une impulsion modulée par un vecteur échantillonné $U_n = U(nT)$ de (l) composantes u_n^i :

$$(1.iii) \quad u(t) = f_{U_n}(u_n^1, \dots, u_n^l, \tau+nT)$$

$\tau \in R$; T = période constante d'échantillonnage

Un modèle récurrent décrivant l'évolution du système aux instants d'échantillonnage s'écrit alors /2/ :

$$(2) \quad X_{n+1} = A \cdot X_n + B(U_n) \cdot U_n$$

$$y_n = \Lambda \cdot X_n$$

où $A = e^{\lambda T}$

$$B(U_n) \cdot U_n = \int_{nT}^{(n+1)T} e^{\lambda(T-\tau)} \cdot f_{U_n}(U_n, \tau+nT) \cdot B \cdot d\tau$$

A est une matrice carrée d'ordre (q) à coefficients constants caractérisant le régime autonome du filtre discret pour la période T .

$B(U_n)$ est une matrice d'observation de dimension $(r \times q)$ à coefficients constants.

Il apparaît ainsi que la formulation (2) peut représenter deux structures particulièrement importantes en pratique : la première fig.(1.a) concerne un processus non linéaire à non linéarité séparable et à commande échantillonnée linéaire, la seconde fig.(1.b) est relative à l'étude de l'asservissement d'un filtre linéaire à commande non linéaire comme par exemple la modulation de largeur.

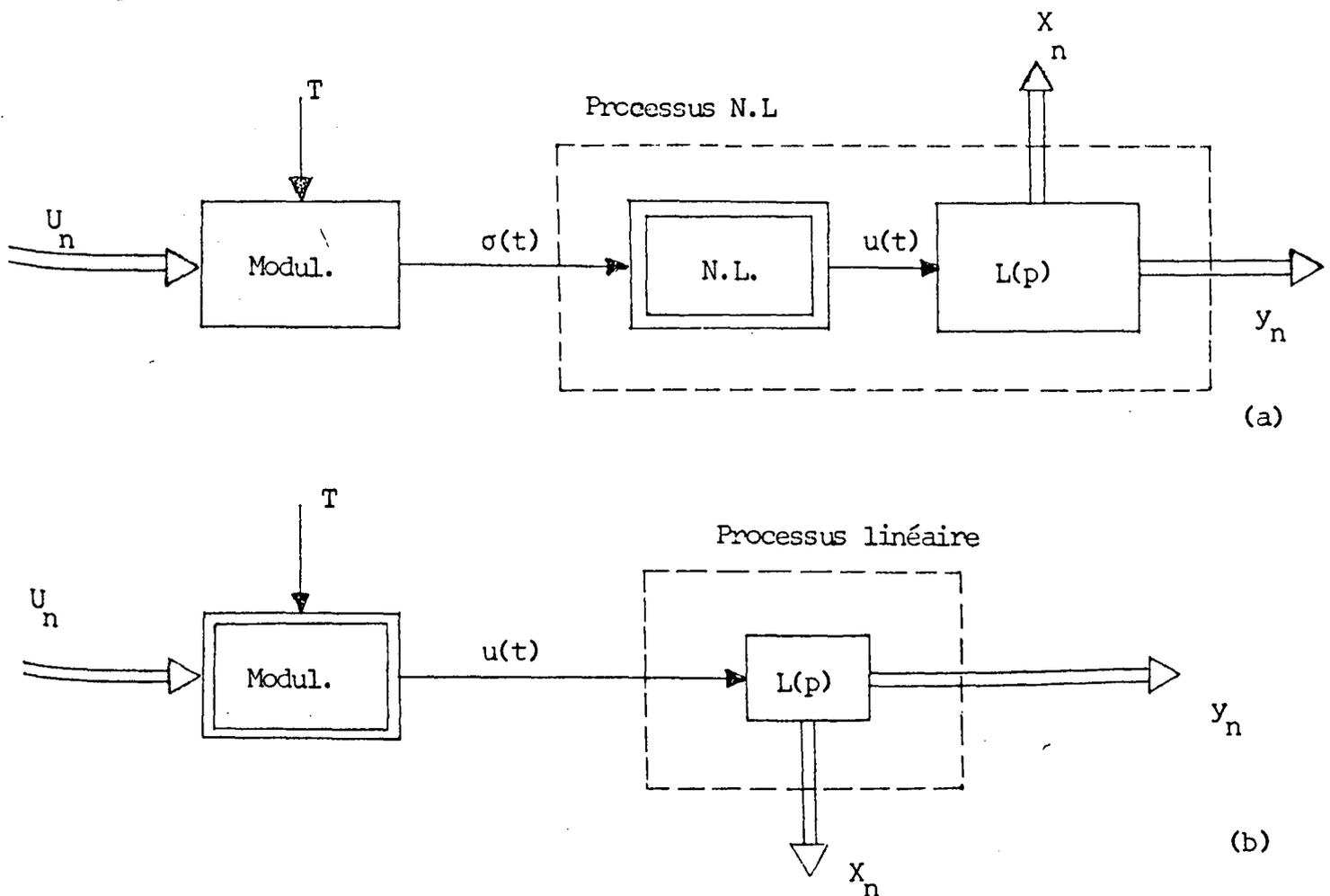


Figure 1 : Structure en boucle ouverte.

Un ensemble de contraintes techniques voir même économiques s'introduit dans la pratique au niveau de l'échantillonneur modulateur. Elles s'imposent dans la plupart des cas sous la forme :

$$(3) \quad \Omega : \forall n, \phi_i(u_n^i) \leq c_i, c_i = \text{constante positive}$$

$$\phi_i(u_n^i) = 0 \iff u_n^i = 0$$

$$\phi_i(u_n^i) \geq 0 \quad \forall u_n^i$$

Ces contraintes sont alors associées à la résolution du système d'équations non linéaires /2/.

2. Régulation des systèmes échantillonnés non linéaires incomplètement observés

L'élaboration d'une commande performante nécessite l'accessibilité de la totalité des composantes du vecteur état (X_n). En effet la commande (U_n) en boucle fermée est une solution d'une équation de forme générale :

$$(4) \quad U_n = C_n \cdot X_n$$

C_n caractérise une chaîne de retour non linéaire de dimension ($l \times q$) dont les éléments sont des fonctions non linéaires de X_n , U_n et d'un vecteur de consigne E_n .

Pour les mêmes raisons que celles indiquées chapitre I, il est impossible de réaliser cette loi de commande à partir des seuls signaux de sorties échantillonnées (y_n).

Dans ce sens nous allons étendre l'utilisation des modes de régulation proposés aux chapitres précédents pour pallier à la défaillance des capteurs.

2.1. Introduction d'un observateur échantillonné non linéaire

Pour la classe des systèmes non-linéaires définis par l'équation (2), nous proposons l'introduction d'un observateur asymptotique de même classe, de la forme :

$$(5) \quad Z_{n+1} = F Z_n + G y_n + H(U_n) \cdot U_n$$

$$\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

où : \hat{X}_n : vecteur état estimé du processus
 Z_n : vecteur état d'ordre (q-r) définissant l'observateur, figure 2.

Suivant les notations introduites dans l'hypothèse linéaire en remplaçant (H) par $H(U_n)$ et (B) par $B(U_n)$, la structure (5) permet d'appliquer directement l'algorithme donné dans le paragraphe (II.3). On obtient ainsi les mêmes expressions (II.10) pour les matrices F , G , $W = (W_1 \ W_2)$ et $H(U_n)$.

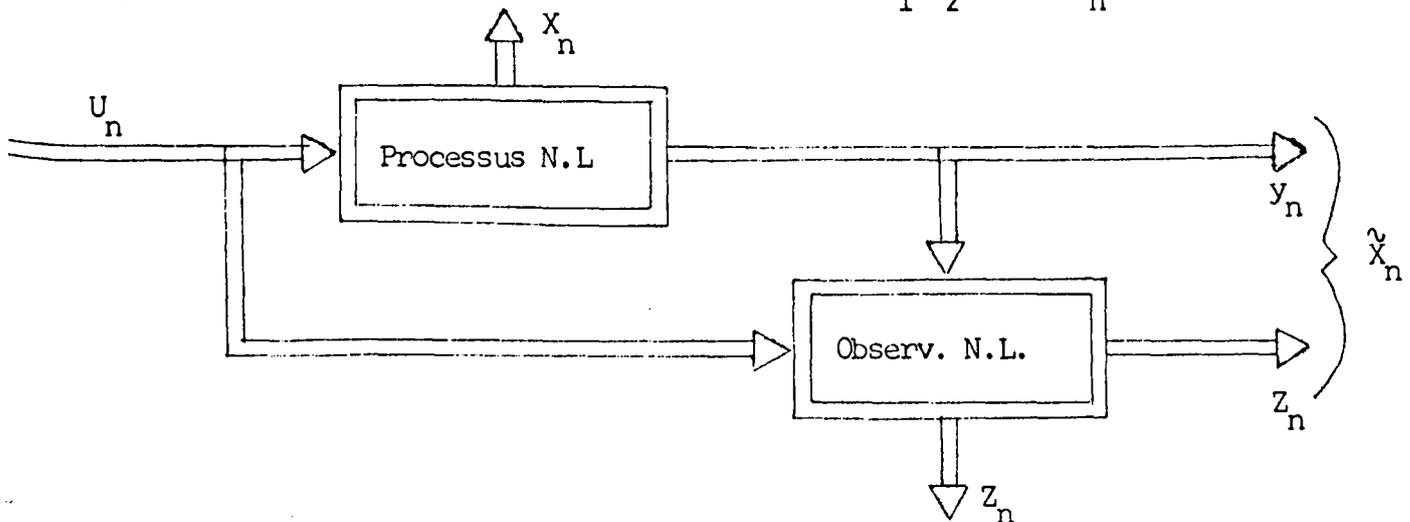


Figure 2

L'observateur échantillonné non linéaire (5) peut être, en général, réalisé par simulation numérique ou simplement, dans certains cas, par un modèle hybride.

L'asservissement proposé figure 2, pour être utilisé pratiquement, doit être stable. Comme l'a montré l'analyse effectuée au paragraphe (II.5), les équations (2), (4) et (5), (II.3) décrivant l'évolution autonome ($E_n=0$) du système donnent :

$$(6) \quad \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ \epsilon_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B(U_n) C_n & B(U_n) C_n W_2 \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

Cette forme remarquable conduit naturellement à l'utilisation des normes vectorielles /3/. Soit $(\phi_1(X_n), \phi_2(\epsilon_n))^T$ une norme vectorielle régulière dont les composantes sont du type de Hölder, il en résulte le système majorant suivant :

$$\begin{pmatrix} \phi_1(X_{n+1}) \\ \phi_2(\epsilon_{n+1}) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} S_{11}(A+B(U_n)C_n) & S_{12}(B(U_n)C_n W_2) \\ 0 & S_{22}(F) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(X_n) \\ \phi_2(\epsilon_n) \end{pmatrix}$$

$S_{ij}(Q_{ij})$ désigne la norme géométrique de la matrice Q_{ij} , relative aux normes ϕ_i et ϕ_j . Les conditions de stabilité globale se déduisent immédiatement :

$$(8) \quad (i) \quad S_{11}(A+B(U_n)C_n) < 1 \quad \forall U_n, X_n$$

$$(ii) \quad S_{22}(F) < 1$$

$$(iii) \quad S_{12}(B(U_n)C_n W_2) \leq L < \infty \quad \forall U_n, X_n$$

Dans l'hypothèse d'un observateur compatible, nous pouvons choisir les valeurs propres de (F) de telle façon que la condition (ii) soit satisfaite. La stabilité de l'asservissement est alors assurée si et seulement si la loi de commande (4) gouvernant le processus (2) supposé complètement observé, vérifie les contraintes (i) et (iii).

2.2.2. Réglage pratique

La reconstitution du vecteur état suivant le principe (III.1) fondé sur une décomposition structurelle particulière du processus, peut être facilement généralisée à la classe des systèmes échantillonnés non linéaires (2).

En effet, le modèle représentatif (\hat{S}_2) étant soumis au même signal de commande que le filtre $L(p)$ à régler, l'évolution et le temps d'amortissement à β % de l'erreur d'estimation caractérisés par les relations (III.6, III.7) ne dépendent pas du type du modulateur-échantillonneur, figure 3.a. Ces propriétés sont aussi conservées pour les processus contenant une non linéarité séparable si l'on dispose d'un modèle partiel non linéaire dont la non linéarité est identique à celle du processus, figure 3.b.

Dans l'hypothèse d'une décomposition structurelle compatible, le modèle ($\hat{S}_2 \equiv S_2$) a une matrice de transition (A_2) telle que $S_{\phi\phi}(A_2) < 1$. La mise en place de la commande à partir de l'état ainsi estimé conserve la stabilité absolue qui aurait été établie par l'état réel du filtre.

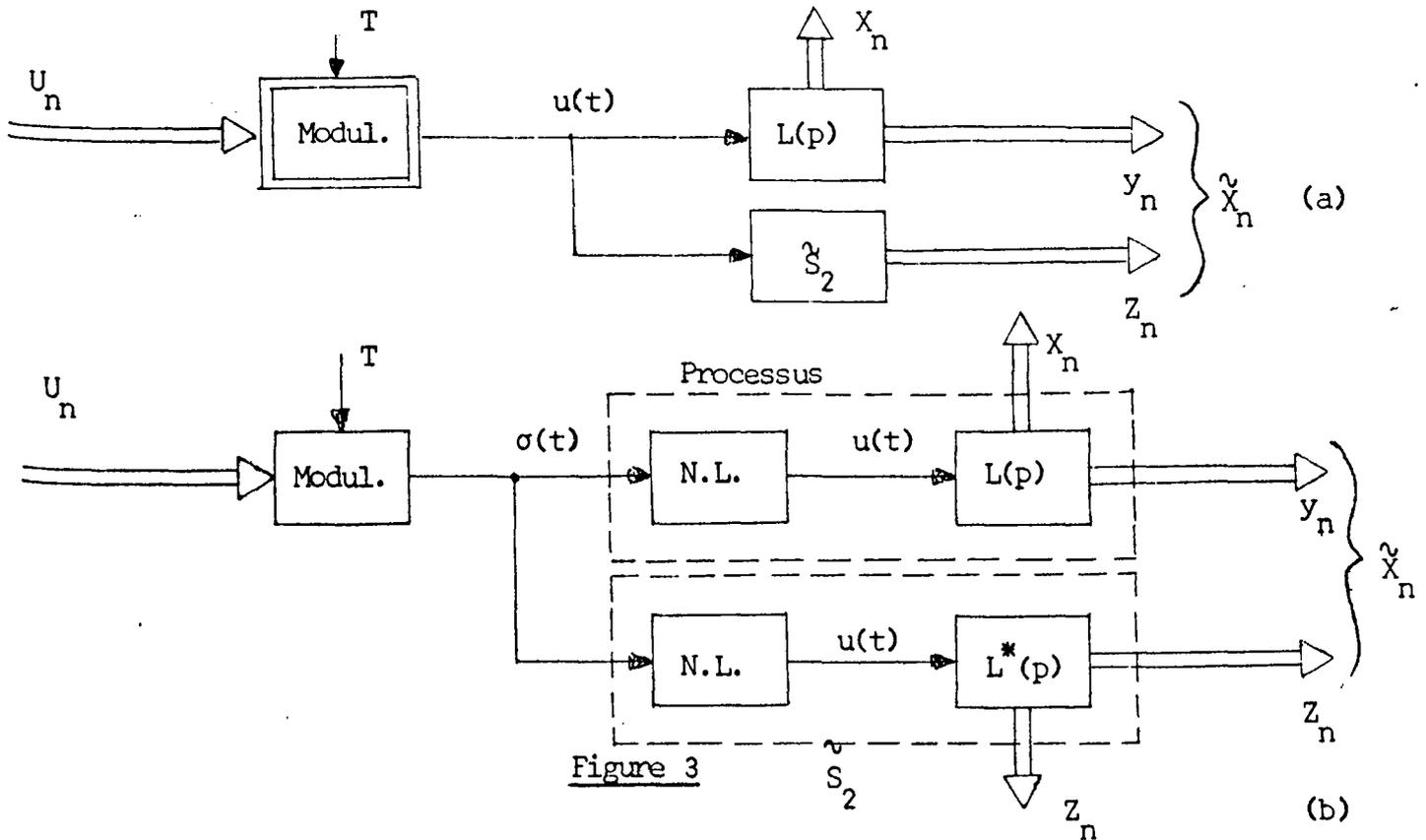


Figure 3

2.3. Commande numérique par RCN non linéaire

Nous allons analyser deux propriétés caractéristiques qui vont nous permettre d'étendre l'approche proposée au cours du chapitre (IV) pour la régulation des systèmes échantillonnés non linéaires considérés.

PROPRIÉTÉ (1) :

Reprenons le processus linéaire commandable et observable (9), gouverné par le réseau-correcteur-numérique (RCN) linéaire défini par sa fonction de transfert discrète /4/ (10), figure 4.

$$(9) \quad X_{n+1} = A X_n + B \cdot U_n$$

$$y_n = \Lambda X_n$$

où : $X_n \in E^q$: vecteur d'état

$U_n \in E^l$: vecteur de commande

$y_n \in E^r$: vecteur de sortie captée.

$$(10) \quad G_c = \frac{\sum_{i=0}^{\rho} D_i Z^i}{Z^{\rho} I_{\ell} - \sum_{i=0}^{\rho-1} N_i Z^i} = \frac{U(z)}{y(z)}$$

Z^{-1} caractérise un retard pur d'une période d'échantillonnage tel que $Z^j X_n = X_{n+j}$.

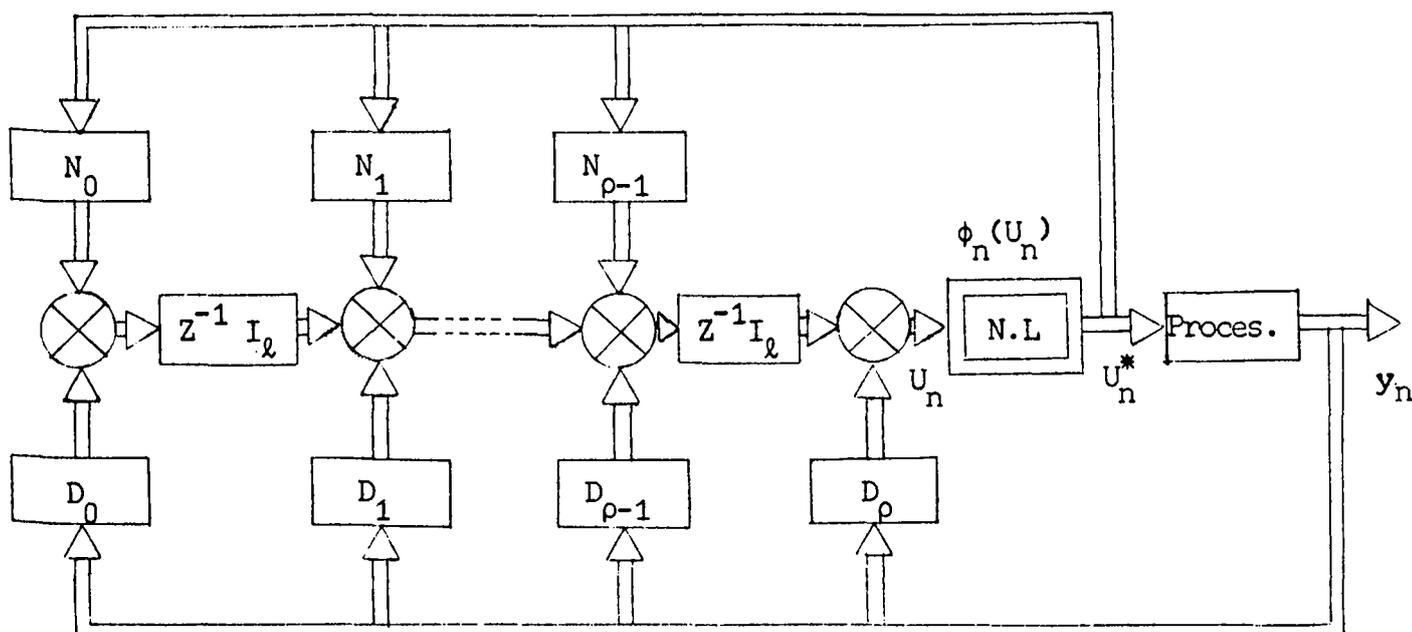


Figure 4

Les paramètres N_i et D_i assurent une réponse identique à celle du système de la figure 5 dont la loi de commande (W_n) est obtenue selon les techniques de réaction d'état (indiquée en IV.2).

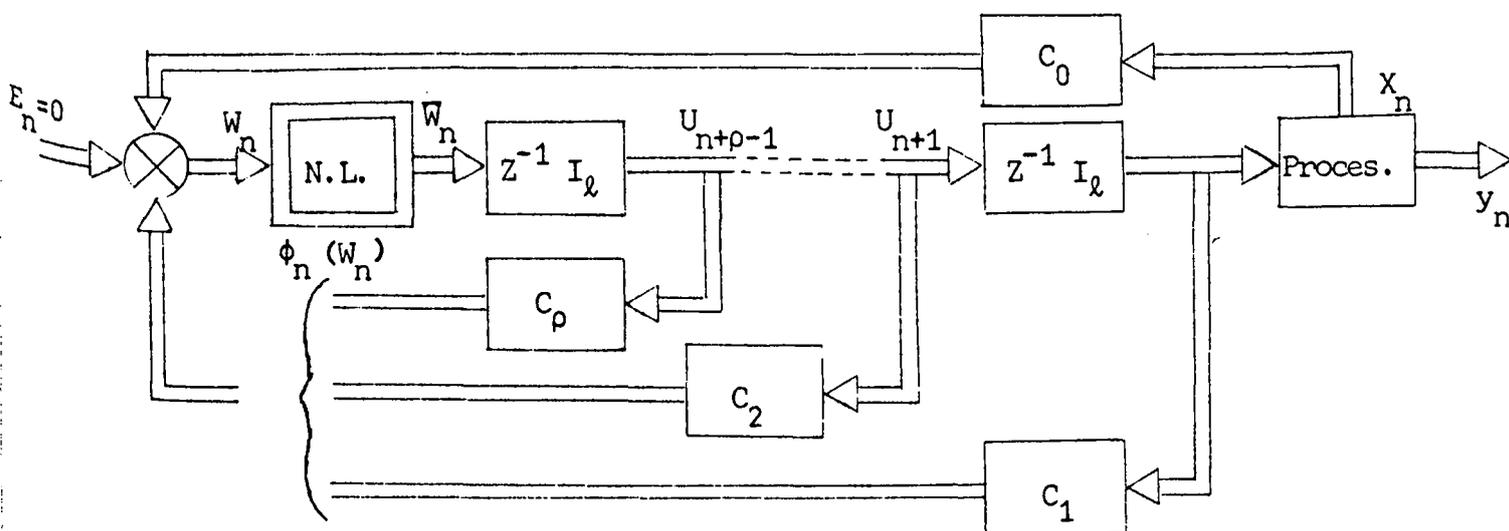


Figure 5

Nous cherchons une réalisation du compensateur (10) qui assure la stabilité globale du système bouclé en remplaçant (U_n) par $(\phi_n \cdot U_n) / 1/$; ϕ_n est une matrice de dimension $(l \times l)$ à coefficients variables avec le temps et bornés. Le problème équivalent est le suivant :

Soit $A_{0p}(Z)$ la fonction de transfert échantillonnée $\frac{W(z)}{\bar{W}(z)}$, où la commande (W_n) est donnée par la relation suivante :

$$(11) \quad w_n = c_0 X_n + (c_1, c_2, \dots, c_\rho) \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ \vdots \\ U_{n+\rho-1} \end{pmatrix}$$

$(\rho+1)$ est l'indice d'observabilité (A, Λ) . On montre que la fonction de transfert échantillonnée $A(Z) = U(Z)/U^*(z)$ du processus commandé par le RCN (10) est égal à $A_{0p}(Z)$ si :

$$(12) \quad W_n = U_{n+\rho}$$

$$c_0 = (D_0, \dots, D_\rho) \cdot O_{\rho+1}$$

$$(c_1, \dots, c_\rho) = (N_0, \dots, N_{\rho-1}) + (D_0, \dots, D_\rho) \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \Lambda B & & & \\ & \vdots & & & \\ & \vdots & & & \\ & \Lambda A^{\rho-1} B & \dots & & \Lambda B \end{pmatrix}$$

Considérons d'abord la réalisation montrée dans la figure 4, $A(Z)$ s'écrit :

$$(13) \quad A(Z) = Z^{-\rho} \{ (N_0, \dots, N_{\rho-1}) \begin{pmatrix} I_l \\ Z I_l \\ \vdots \\ Z^{\rho-1} I_l \end{pmatrix} + (D_0, \dots, D_\rho) \begin{pmatrix} I_l \\ Z I_l \\ \vdots \\ Z I_l \end{pmatrix} G(Z) \}$$

$$\text{où : } G(Z) = \Lambda(ZI-A)^{-1} B = \frac{Y}{U}$$

Λ = fonction de transfert discrète du processus.

I_l = matrice unité d'ordre (l) .

Considérons maintenant le système de la figure 5, $A_{Op}(Z)$ s'écrit :

$$(14) \quad A_{Op}(Z) = Z^{-\rho} \{ (c_1, \dots, c_\rho) \begin{pmatrix} I_\ell \\ Z I_\ell \\ \vdots \\ Z^{\rho-1} I_\ell \end{pmatrix} + c_0 (ZI-A)^{-1} B \}$$

Des égalités (12), il vient

$$(14.i) \quad A_{Op}(Z) = Z^{-\rho} \left\{ (N_0, \dots, N_{\rho-1}) \begin{pmatrix} I_\ell \\ Z I_\ell \\ \vdots \\ Z^{\rho-1} I_\ell \end{pmatrix} + (D_0, \dots, D_\rho) \right\}$$

$$\left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \Lambda B & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \Lambda A^{-1} B \dots \Lambda B \end{array} \right) \begin{pmatrix} I_\ell \\ Z I_\ell \\ \vdots \\ Z^{\rho-1} I_\ell \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda A \\ \vdots \\ \Lambda A \end{pmatrix} (ZI-A)^{-1} B \end{array} \right]$$

F(Z)

En tenant compte des équations (9) du système, on peut obtenir facilement l'égalité suivante :

$$(15) \quad F(Z) = \begin{pmatrix} I_\ell \\ Z I_\ell \\ \vdots \\ Z^\rho I_\ell \end{pmatrix} \cdot G(Z)$$

Des équations (14.i) et (15) on montre :

$$(16) \quad A_{Op}(Z) = A(Z)$$

L'égalité (16) nous permet alors d'établir la propriété suivante : "si la compensation du processus (9) précédé par le système associé $W_n = U_{n+\rho}$ (fig.5) satisfait la stabilité absolue avec n remplacé par $\phi_n(W_n) \cdot W_n$, la réalisation (figure 4) du RCN qui permet de transformer la réaction d'état (11) en une réaction de sortie (10) satisfait le même critère de stabilité avec U_n remplacé par $\phi_n(U_n) \cdot U_n$ ".

PROPRIETE (2) :

"Si le processus (9), supposé complètement observé, admet une non linéarité $\phi_n(U_n)$ (figure 6) avec la contre-réaction :

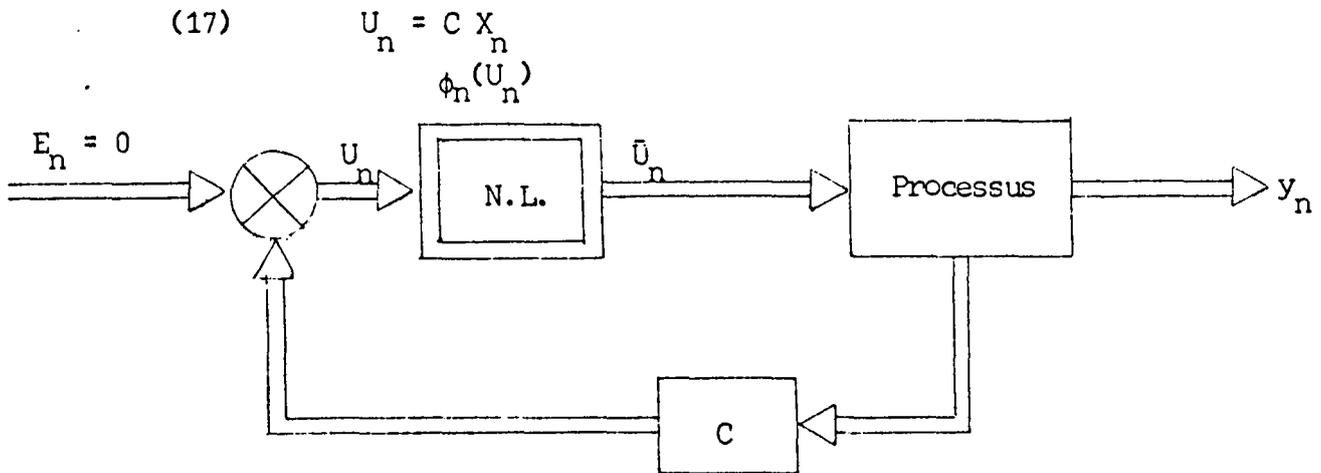


Figure 6

où C est une matrice constante de dimension $(l \times q)$,

alors le système de la figure 5 conserve la stabilité avec la même non-linéarité $\phi_n(w_n)$ si les égalités suivantes sont vérifiées :

$$(18) \quad C_0 = C A^p$$

$$(C_1, \dots, C) = C (A^{p-1}B, \dots, B)$$

En effet, la fonction de transfert échantillonnée $\bar{A}(Z) = \frac{\bar{U}(Z)}{U(Z)}$ s'écrit :

$$(19) \quad \bar{A}(Z) = C(ZI-A)^{-1} B$$

La substitution des relations (18) dans l'équation (14) donne :

$$(20) \quad A_{0p}(Z) = Z^{-p} \left\{ CA^p(ZI-A)^{-1}B + CA^p + CA^{p-1}B + CA^{p-2}BZ + \dots + CBZ^{p-1} \right\}$$

Or le terme entre crochets est égal à $Z^p \bar{A}(Z)$, il vient donc :

$$(21) \quad \bar{A}(Z) = A_{0p}(Z)$$

ce qui justifie la propriété énoncée ci-dessus. (En effet le résultat (21) se déduit immédiatement du fait que $W_n = U_{n+p}$).

Les propriétés précédentes nous permettent de voir que la compensation proposée dans le cadre des systèmes linéaires peut être étendue à la classe des systèmes non linéaires présentés dans le paragraphe 1.

Suivant l'algorithme simplifié (IV.2), la première étape de la synthèse du RCN (10) est une reconstitution de l'état du processus à régler, à l'aide de ses équations de fonctionnement. En effet, d'après la relation (9), l'évolution des variables (X_n) et (y_n) du filtre à partir de l'instant ($n_0 T$) permet d'écrire :

$$(22) \quad (a) : \begin{pmatrix} y_{n_0} \\ y_{n_0+1} \\ \vdots \\ y_{n_0+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda A \\ \vdots \\ \Lambda A^p \end{pmatrix} X_{n_0} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda \\ \Lambda A \\ \vdots \\ \Lambda A^{p-1} \end{pmatrix} B(U_{n_0}) \cdot U_{n_0} + \dots$$

$$\dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Lambda \end{pmatrix} B(U_{n_0+p-1}) \cdot U_{n_0+p-1}$$

$$(b) : X_{n_0+p} = A^p X_{n_0} + A^{p-1} B(U_{n_0}) \cdot U_{n_0} + \dots + B(U_{n_0+p-1}) \cdot U_{n_0+p-1}$$

La relation (22.a) admet une solution unique (X_{n_0}) si et seulement si le système est observable, c'est-à-dire s'il existe un nombre entier (ρ) tel que :

$$(23) \quad \text{rang}(O_{\rho+1}) = q \quad ; \quad O_{\rho+1} = \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda A \\ \vdots \\ \Lambda A^\rho \end{pmatrix} \triangleq \text{matrice d'observabilité}$$

$$q-1 \geq \rho \geq \frac{q}{r} - 1$$

Si l'on suppose que la matrice non linéaire $B(U_n)$ de dimension ($q \times \ell$) associée au modulateur-échantillonneur est stationnaire, l'instant de démarrage (n_0) peut être quelconque ($n_0 = n$). Dans ce cas, connaissant (X_n) solution de (22.a), la substitution dans l'équation (22.b) permet d'estimer l'état (\hat{X}_n) à tout instant (n) :

$$(24) \quad \begin{aligned} \dot{X}_n &= (M_0 Z^{-\rho} + \dots + M_{\rho-1} Z^{-1}) \cdot B(U_n) \cdot U_n + \dots \\ &\quad \dots (G_0 Z^{-\rho} + \dots + G_\rho) \cdot y_n \end{aligned}$$

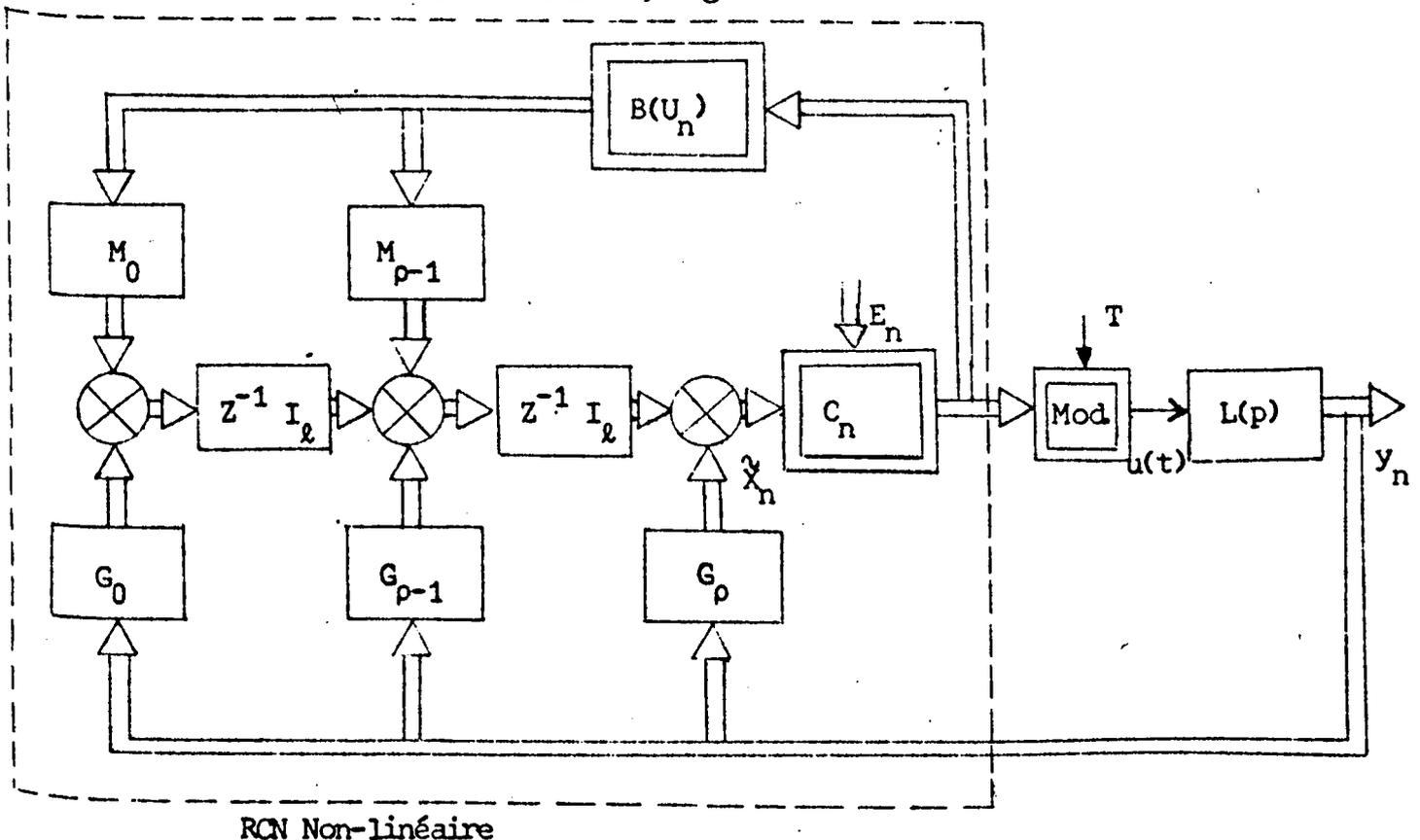
où : Z est un opérateur de retard pur : $Z^j X_n = X_{n+j}$

avec

$$\begin{aligned} (G_0 \dots G_\rho) &= A^\rho O_{\rho+1}^+ \\ M_i &= A^{\rho-1-i} - A^\rho O_{\rho+i}^+ \end{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Lambda \\ \Lambda A \\ \vdots \\ \Lambda A^{\rho-1-i} \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, \rho-1$$

$O_{\rho+1}^+ \triangleq$ pseudo-inverse de la matrice d'observabilité au sens de "Penrose"

La deuxième étape consiste à chercher la commande (U_n) pour la régulation du système non linéaire (9) comme s'il était complètement observé. Des équations (4) et (24) avec (\dot{X}_n) à la place de (X_n), on déduit la structure d'un RCN non linéaire qui permet de commander le processus considéré à partir des sorties échantillonnées accessibles, fig.(7).



RCN Non-linéaire

Figure 7

3. Mode de commande

Parmi toutes les façons performantes de commander un système dynamique, une des plus importantes est le mode de commande en temps minimum. En général, un système est commandable s'il est possible de déterminer un vecteur de commande susceptible de le faire passer d'un état initial (X_n) à l'instant (nT) dans un état (X_{n+k}) en un temps fini (kT) /5/.

Contrairement au cas linéaire, l'absence d'une théorie générale /6.11/ pour la commandabilité globale des systèmes échantillonnés non linéaires supposés complètement observés conduit le plus souvent à envisager le problème de la réalisation de la commande selon deux optiques bien distinctes :

- (1) Soit en utilisant les notions de domaines de commandabilité /12.16/
- (2) Soit à partir du concept de stabilité /17.20/.

Dans ce qui va suivre, notre but est de poser les problèmes qui apparaissent avec les systèmes échantillonnés non linéaires incomplètement observés, selon les deux optiques précédentes.

3.1. Utilisation des notions de domaines de commandabilité

Lors de la mise en route du système asservi ou après une perturbation importante, la limitation de la quantité d'information physiquement disponible à chaque échantillonnage sur le processus exige pratiquement un certain nombre (ρ) de périodes d'échantillonnage pour reconstituer correctement son état. Pendant ce régime d'estimation il n'est pas possible d'amener le filtre dans un état arbitraire.

Par définition (25), quel que soit le point (Z_n) du domaine de commandabilité (D_k), il existe un vecteur séquence de commande $(U_n^T, U_{n+1}^T, \dots, U_{n+k-1}^T)^T$ qui permette l'atteindre.

$$(25) \quad (i) D_k : \{ Z \mid \exists (U_n, U_{n+1}, \dots, U_{n+k-1}) \in \Omega^k \text{ tel que :}$$

$$\sum_{j=1}^k A^{k-j} B(U_{n+j-1}) \cdot U_{n+j-1} = Z \}$$

$$(ii) Z_n = E_n - A^k X_n$$

où : E_n : état final désiré au bout de k périodes

$$E_n = X_{n+K}$$

X_n : état initial à l'instant (nT) .

Il est évident que l'utilisation des états estimés (\hat{X}_n) (§ V.2) au lieu des états réels (X_n) dans l'équation (25.ii) peut amener le point ($Z_{n+\rho}$) à l'extérieur du domaine (D_N) définissant le régime accroché.

Il est donc nécessaire de prévoir un algorithme efficace de rentrée dans le domaine (D_N). D'autre part, il importe, du point de vue pratique, que la loi de commande soit élaborée en boucle fermée.

Les difficultés inhérentes aux phénomènes non linéaires et les exigences précédentes compliquent considérablement les problèmes à résoudre. En effet, les méthodes de synthèse connues /12.16/ fondées sur les notions de domaines de commandabilité ne peuvent être appliquées que pour des cas très particuliers de systèmes échantillonnés non linéaires incomplètement observés.

3.2. Définition de la commande selon le concept de stabilité

L'étude des caractéristiques d'amortissement des systèmes discrets non linéaires complètement observés est envisagée le plus souvent à partir du concept de stabilité de la notion de temps de réponse lié au degré de stabilité /17.18/.

Pour les systèmes qui nous concernent, il est nécessaire lors de la recherche d'une loi de contre-réaction appartenant à une classe donnée de déterminer celle qui conduit à la stabilité absolue de l'asservissement.

4. Exemple d'application

Afin d'illustrer les méthodes de réglage que nous venons d'exposer, considérons le processus non linéaire de la figure 8 où $L(p) = 1/(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)$ représente un filtre linéaire du second ordre et $NL = \phi(u)$ la partie non linéaire.

Le processus étant précédé d'un échantillonneur linéaire à période constante (T) et d'un bloqueur d'ordre zéro (B_0), le vecteur d'état (Y) de composantes (s, y) satisfait à l'équation de récurrence suivante :

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_2 & \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} (D_1 - D_2) \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - D_2 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} (D_1 - D_2) \\ 1 - D_1 \end{pmatrix} \phi(u_n)$$

$$\text{où } D_1 = e^{-T/\tau_1}, \quad D_2 = e^{-T/\tau_2}$$

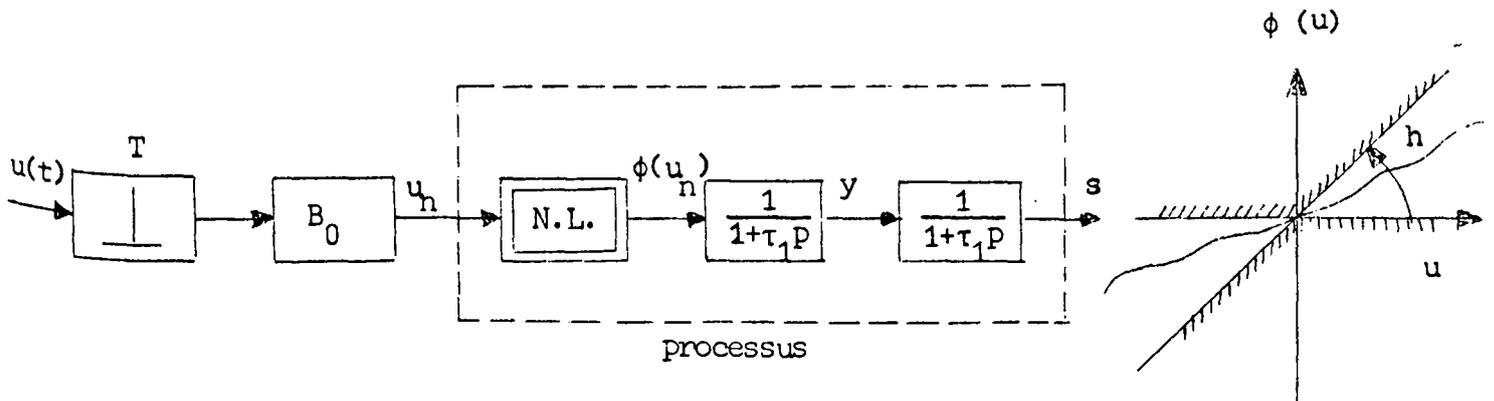


Figure 8

Le changement de base :

$$X_n = P Y_n \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

permet d'obtenir une représentation diagonale de la matrice du régime libre du processus et conduit à l'expression suivante :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} X_n + \begin{pmatrix} -\frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} (1 - D_2) \\ 1 - D_1 \end{pmatrix} \phi(U_n)$$

Pour la fonction de Ljapunov : $V_n = X_n^T X_n$, l'application de la méthode de linéarisation de l'action des commandes proposée en référence /18/ donne :

$$u_n = -\frac{1}{\alpha \phi^*} \begin{pmatrix} -\frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} (1 - D_2) D_2, & \frac{\tau_2}{(\tau_1 - \tau_2)^2} (1 - D_2) D_2 + (1 - D_1) D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{avec : } \alpha = (1 - D_1)^2 + \frac{\tau_2^2}{(\tau_1 - \tau_2)^2} (1 - D_2)^2$$

$$\phi^* > \frac{h}{2}$$

Cette contre réaction assure la stabilité absolue du modèle avec un temps de réponse ($\beta\%$) de (N) périodes d'échantillonnage si /18/ :

$$\max_i (D_i^2)^N \leq \beta/100 \quad i = 1, 2$$

L'utilisation des modes de régulation précédents (§ V.2) permet de réaliser la loi de commande à partir des sorties accessibles ($s_n, \forall n \geq 0$).

On distingue ainsi les trois organes suivants :

(1) Réglage à l'aide d'un observateur asymptotique (figure 9):

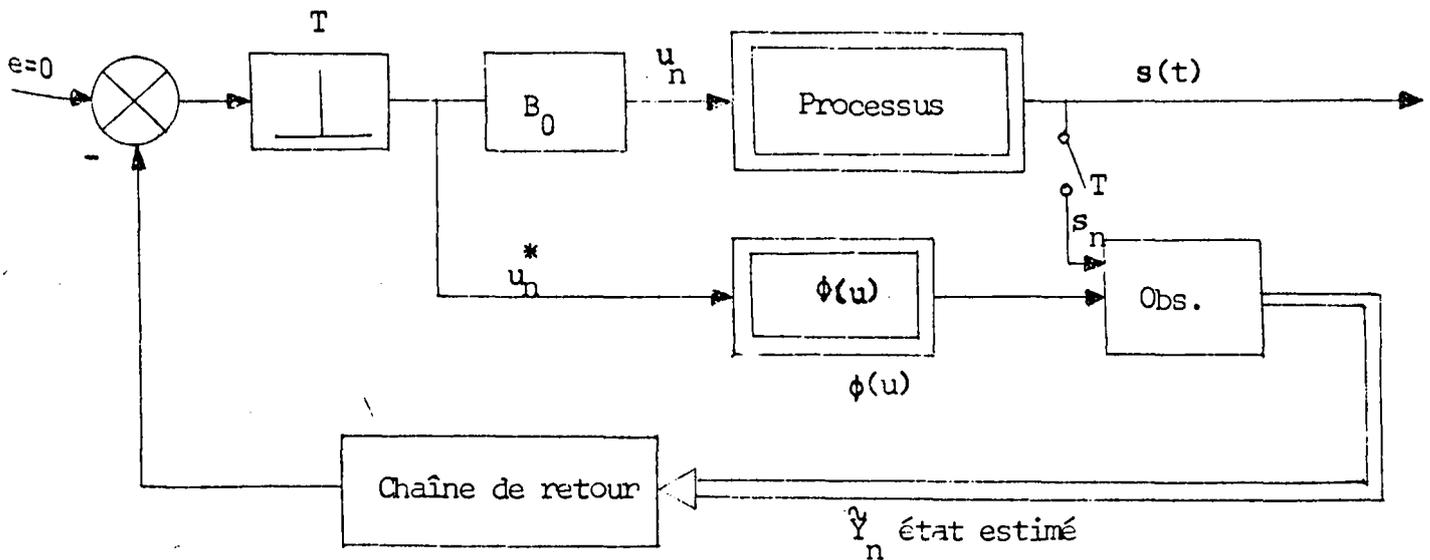


Figure 9

L'observateur est défini par la relation de récurrence suivante :

$$Z_{n+1} = F \cdot Z_n + G \cdot s_n + H \cdot v_n ; Z_n \in E^1$$

où : $|F| < 1$, F arbitraire

$$G = (1-F)\hat{T} \quad ; \quad \hat{T} = \frac{(F-D_1)(\tau_1-\tau_2)}{(D_1-D_2)\tau_1}$$

$$H = (1-D_1) + \hat{T} \left[(1-D_2) - \frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2} (D_1-D_2) \right]$$

l'état estimé $\hat{Y}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\hat{T} & 1 \end{pmatrix} Y_n$

(2) Commande pratique (figure 10) :

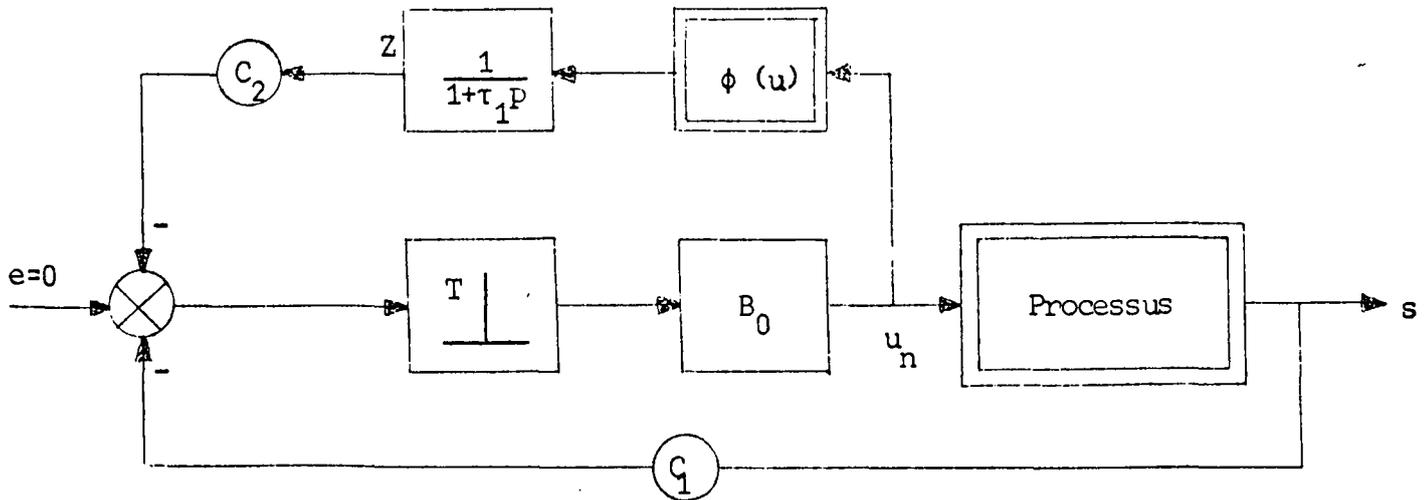


Figure 10

Les paramètres de réglage sont donnés par les équations :

$$C_1 = \frac{1}{\alpha \phi^*} \left(-\frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} (1 - D_2) D_2 \right)$$

$$C_2 = \frac{1}{\alpha \phi^*} \left(\frac{\tau_1 \tau_2}{(\tau_1 - \tau_2)^2} (1 - D_2) D_2 + (1 - D_1) D_1 \right)$$

(3) Commande numérique par un RCN non linéaire (figure 11) :

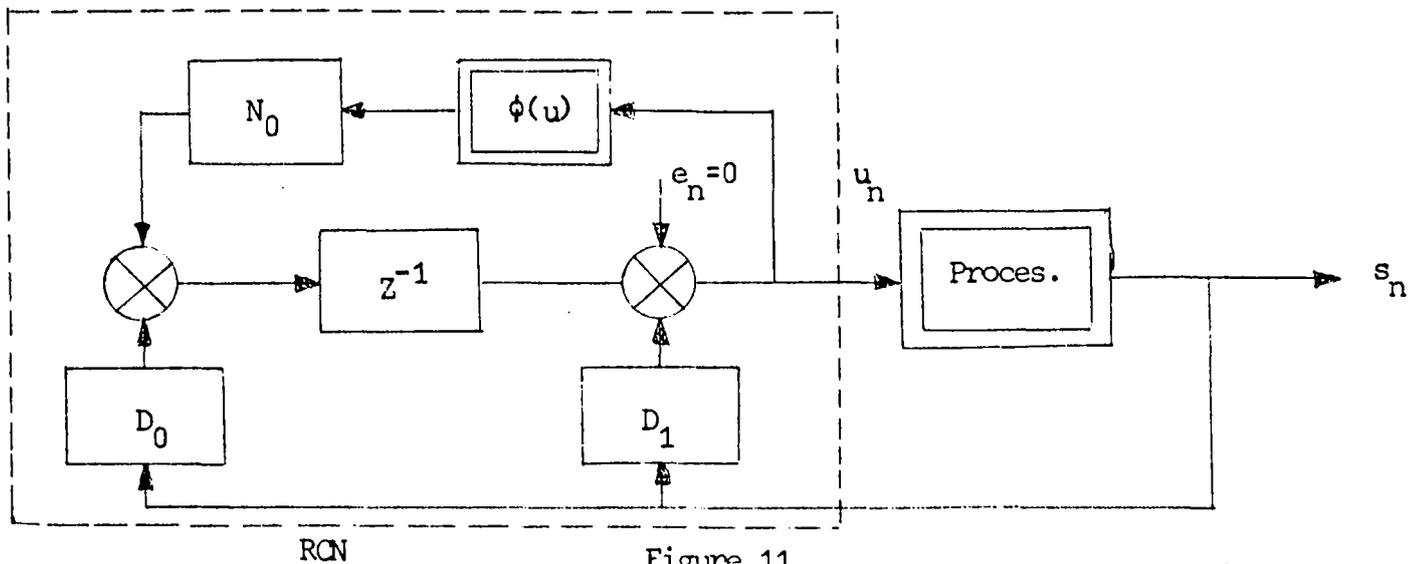


Figure 11

L'ensemble des relations (12), (17) et (18) fixe les paramètres D_0 , D_1 et N_0 du RCN.

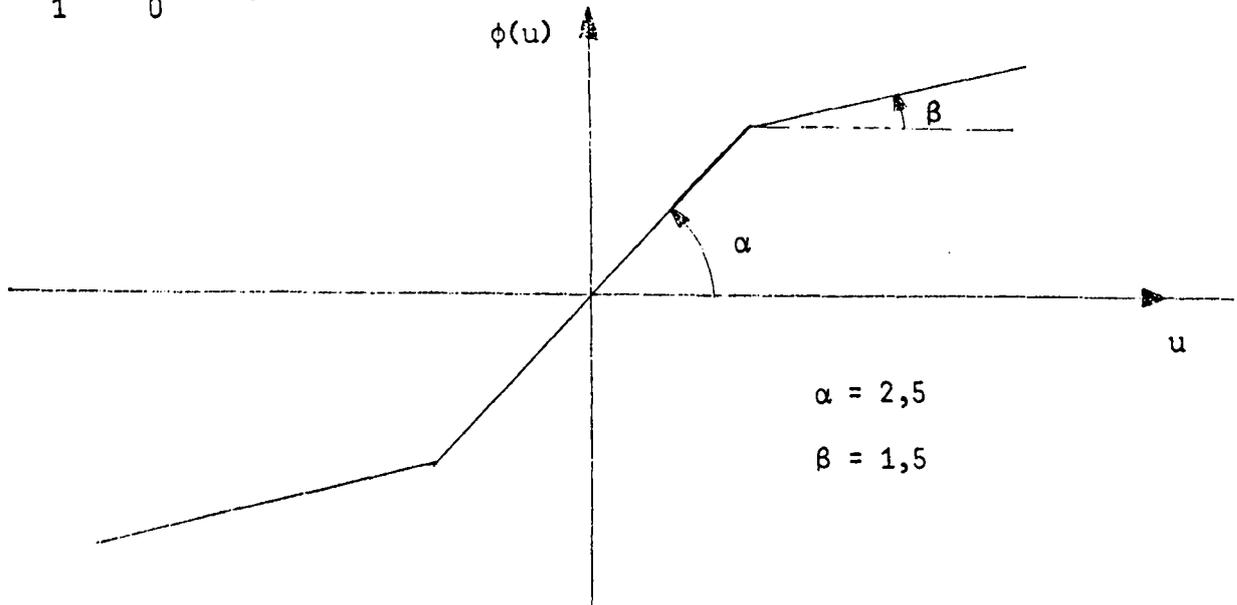


Figure 12

Les figures (13), (14) et (15) représentent l'allure du système pour ces types de commande. Les valeurs adoptées pour les paramètres sont :

$$\tau_1 = 1 \quad , \quad \tau_2 = 2 \quad \text{et} \quad T = 2 \quad ;$$

la non linéarité est représentée figure 12. Les détails de la simulation sont donnés dans l'annexe (5).

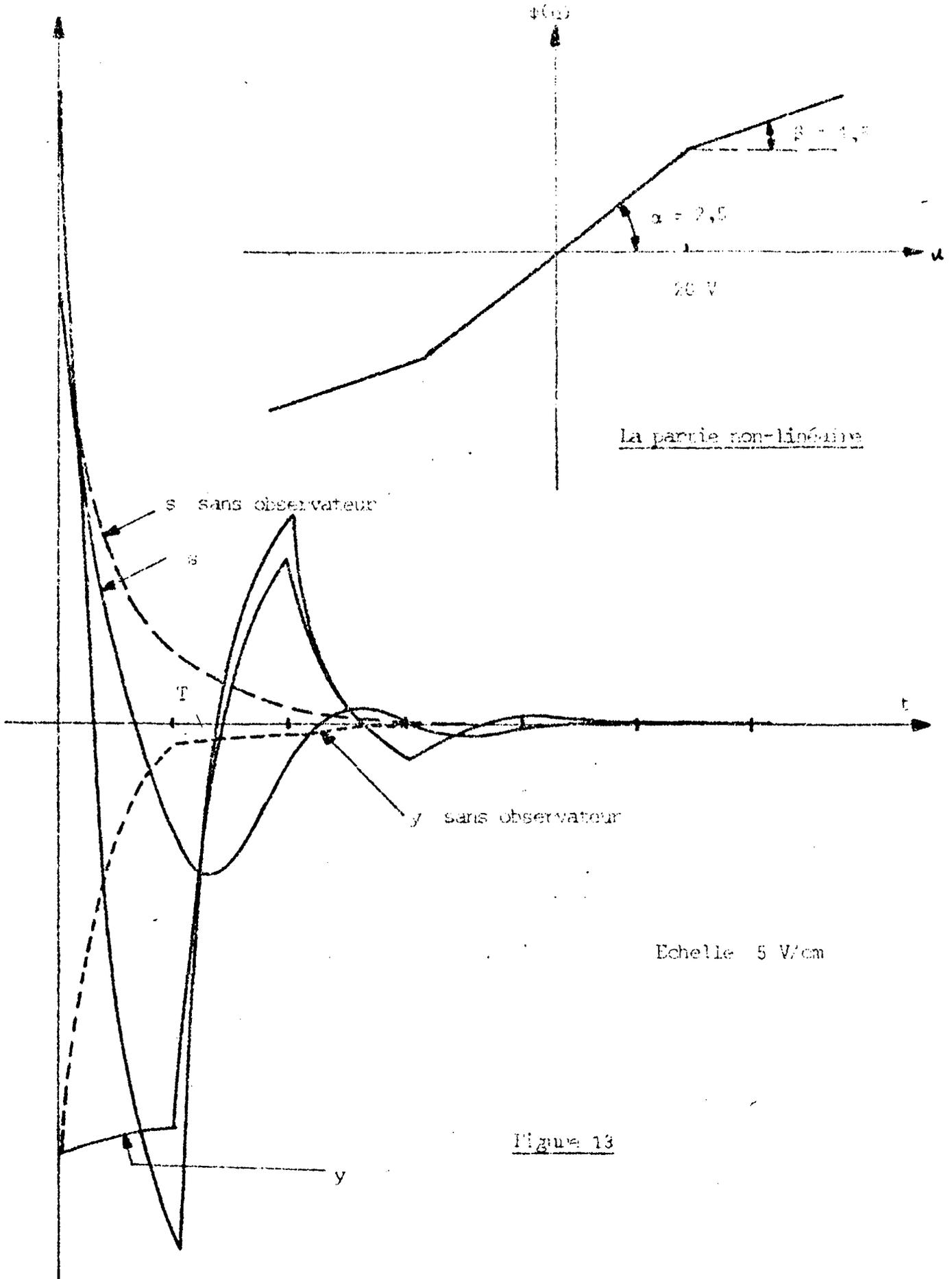
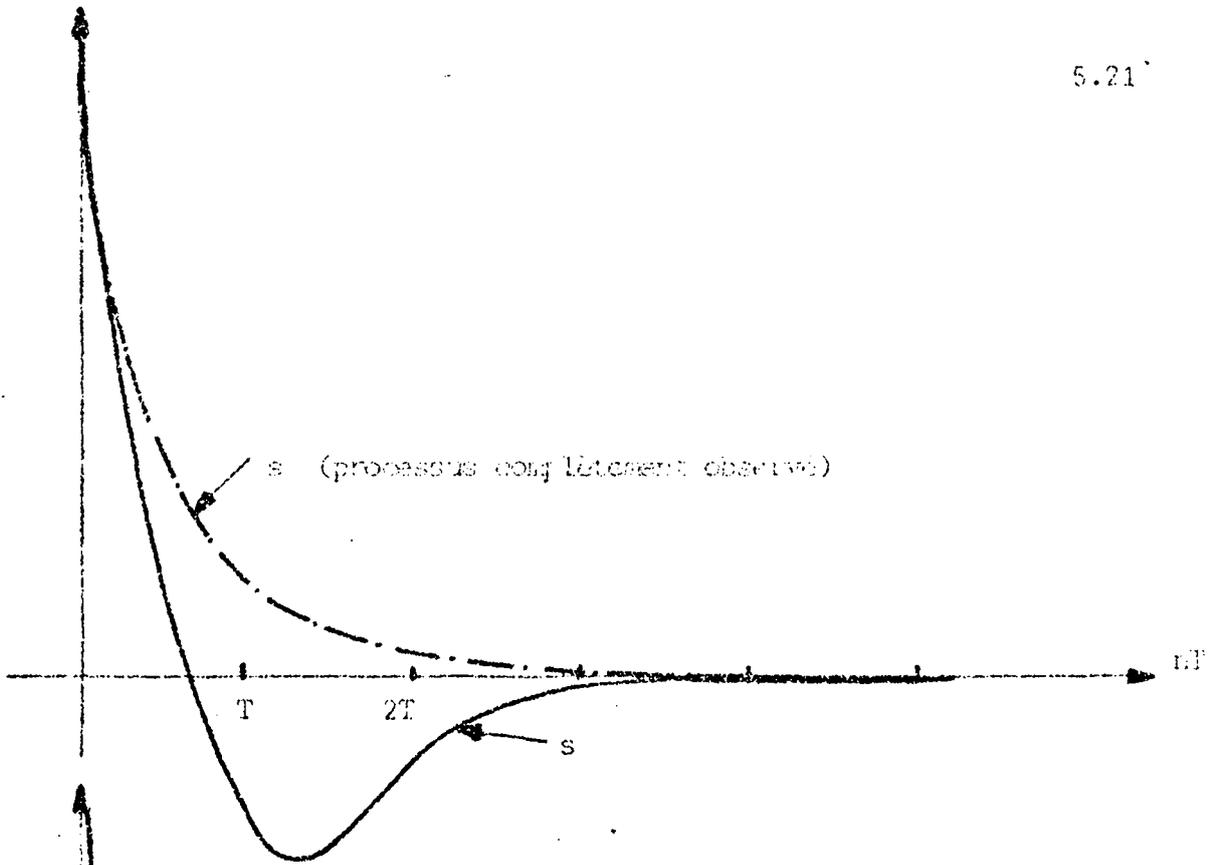


Figure 13



Echelle : 5 V/cm

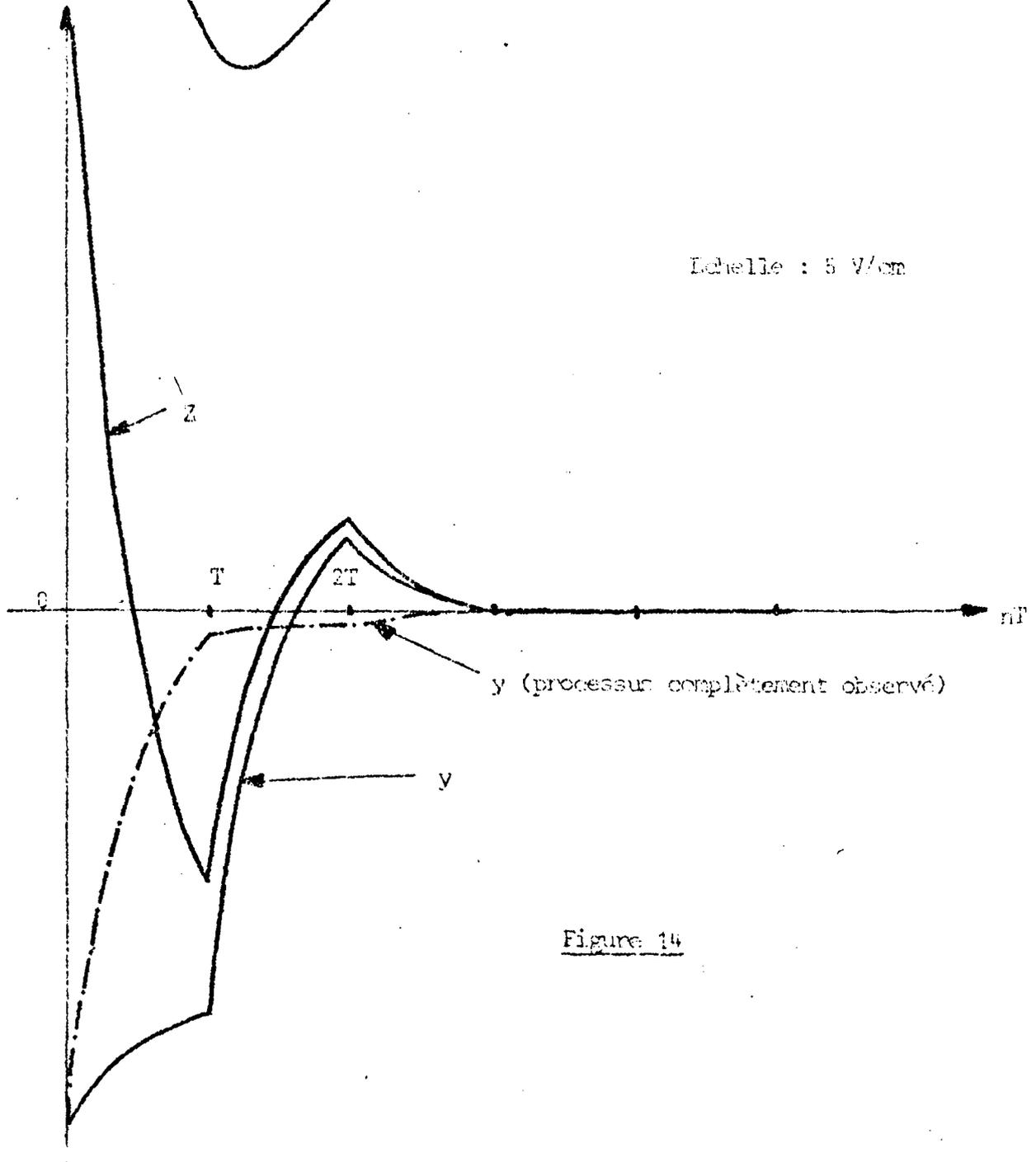


Figure 14

CONCLUSION

Les régulations précédemment définies permettent d'étendre à la classe considérée des systèmes échantillonnés non linéaires la notion de commande par réaction d'état.

Cependant, il est apparu lors de l'étude du problème de démarrage que la stabilité illimitée ou la commandabilité globale est nécessaire lors de la réalisation de cette commande à partir des sorties accessibles.

BIBLIOGRAPHIE

- /1/ ZADEH L.A., DESOER C.A. :
 "Linear system theory"
 New York : Mc Graw Hill, 1963
- /2/ P. VIDAL
 "Systèmes échantillonnés non linéaires"
 Gordon and Breach, 1968
- /3/ P. BORNE, J.C. GENTINA, F. LAURENT
 "Sur une forme simplifiée d'une condition de stabilité des systèmes continus et échantillonnés non linéaires"
 Congrès AUTOMATICA 72, Barcelone (Octobre 1972)
- /4/ E.I. JURY
 "Theory and application of the Z-Transform method"
 John Wiley and Sons, Inc. New York, London, Sydney
- /5/ KALMAN K.E.
 "On the general theory of control systems"
 Proc. 1st Int. Aut. Cont., Vol.1, p.129.136
 Butterworths London (1961)
- /6/ E.B. LEE, L. MARKUS
 "Foundations of optimal control theory"
 (SIAM Series in Applied Mathematics)
 New York : Wiley, 1967, p. 36.58
- /7/ CLAUDE LOBRY :
 "Controlabilité des systèmes non linéaires"
 SIAM J. Control, Vol. 8, N°4, Novembre 1970, p. 573-605
- /8/ E.J. DAVISON, E.G. KUNZE
 "Some sufficient conditions for the global and local controllability of non linear time-varying systems"
 SIAM J. Control, Vol 8, n°4, Novembre 1970, p. 489-497

- /9/ S.B. GERSHWIN, D.H. JACOBSON
"A controllability theory for non linear systems"
I.E.E.E. Trans. Autom. Contr., Vol AC-16, n°1, February 1971, p;37-46
- /10/ D.L. LUKES
"Global controllability of non linear systems"
SIAM J. Control, Vol. 10, n°1, Février 1972, p. 112-126
- /11/ K. MIRZA, B.F. WOMACK
"On the controllability of a class of non linear systems"
IEEE Trans. Automat. Contr., August 1972, p. 531-535
- /12/ J.WING, C.A. DESOER
"The multiple input minimal time regulator problem : général theory"
IEEE Trans Automat. Contr., AC-8, N°2, 1963, p. 125-136
- /13/ J.P. JANICOT
"Commande numérique directe par impulsions. Application à un système échantillonné modulé en largeur"
Thèse de Docteur Ingénieur, Lille 1, Mars 1973
- /14/ M.S. MOSTAFA
"Contribution à la synthèse des asservissements échantillonnés non-linéaires"
Thèse de Docteur Ingénieur, Paris VI, Juin 1973
- /15/ J.M. TOULOTTE
"Contribution à l'étude de la commande et de la compensation des systèmes échantillonnés non linéaires à modulateur non linéaire"
Thèse de Docteur ès Sciences Physiques, Lille 1, Octobre 1970.
- /16/ F. LAURENT
"Sur la commande d'un filtre linéaire par impulsions multimodulées"
C.R.A.S., Paris, t.270, Série A, Janv. 1970, p. 286-289

- /17/ F. LAURENT
"Sur la stabilité globale et le temps de réponse d'un système échantillonné non linéaire"
C.R.A.S., Tome 260, Avril 1965, p. 4444-4447
- /18/ C. MELIN
"Contribution à l'analyse et à la synthèse, dans l'espace d'état, des systèmes multidimensionnels décrits par des récurrences non linéaires"
Doctorat d'état ès Sciences : Physique, Paris VI, Décembre 1973
- /19/ F. LAURENT, C. MAIZIERES
"Sur la dispersion des réponses, à une entrée quelconque, des systèmes non linéaires, continus ou échantillonnés"
IFAC Symposium sur la Sensibilité et l'Adaptivité, Dubrovnik 1968.
- /20/ VIN ROZOVA
"On control fields of dynamic systems"
Avtomatika i Telemekhanika, Vol. 34, n° 3, Part. 2, March 1973, p.349-355

Conclusion Générale

La régulation échantillonnée en boucle fermée par une contre-réaction proportionnelle permet, lorsque tous les états sont accessibles, d'imposer au filtre à commander un état donné en un temps fini minimum.

Or, la réalisation d'un tel processus se heurte dans la pratique à l'impossibilité de capter toutes les variables d'état. De plus, la loi de commande définie par la relation vectorielle $u_n = U(y_n)$ (y_n est le vecteur de sortie) n'appartient pas en général à l'ensemble des lois de commande proportionnelles, elle doit donc contenir des éléments non stationnaires.

C'est ainsi que le but de nos travaux consistait à présenter des modes de régulation destinés à pallier à ces inconvénients.

L'étude a mis en évidence un certain nombre de propriétés : En premier lieu, l'utilisation des observateurs asymptotiques échantillonnés permet une élimination suffisamment rapide du régime de démarrage et l'estimation en régime accroché de la réaction d'état. L'approche présentée pour la synthèse d'un tel estimateur nous a amené à étendre simplement le théorème des observateurs à la classe des systèmes discrets linéaires et non linéaires. En effet, nous avons montré que le problème à résoudre est mathématiquement équivalent à la recherche d'un modulateur permettant de stabiliser un système bouclé dont la chaîne de retour est imposée.

Lors d'une décomposition structurelle particulière du processus à commander, l'introduction d'un modèle représentatif soumis uniquement au même signal de commande, conduit à des asservissements plus simples à réaliser.

Enfin, l'extension par un retard pur du système à régler a permis de transformer la réaction d'état en une réaction directe des sorties accessibles. Le réseau-correcteur-numérique ainsi obtenu conserve aux asservissements échantillonnés une réponse en temps fini minimum et en excluant tout procédé de dérivation.

Toutefois, le fonctionnement en régime dynamique étant fixé à l'avance, les amplitudes et le temps de réponse des régimes transitoires correspondants peuvent être modifiés sensiblement par rapport au cas théorique où toutes les variables d'état sont captées.

Les informations accessibles dans le cas d'un système réel ne permettent pas toujours une identification parfaite. Il importe donc, d'une part d'étudier la sensibilité du modèle choisi vis à vis des variations de structure, et d'autre part, d'envisager la possibilité d'établir une théorie générale où les variables de sortie jouent un rôle dominant au lieu des variables d'état. C'est dans cette voie qu'il conviendrait de poursuivre nos travaux.

°
° °

TABLE DES MATIERES

	Page
INTRODUCTION GENERALE	
<u>CHAPITRE I</u> : Introduction à la régulation des systèmes échantil- lonnés incomplètement observés.....	1.1
1. Commande des systèmes complètement observés	1.2
1.1. Commande en boucle ouverte	1.2
1.2. Commande en boucle fermée	1.3
1.2.1. Condition d'amortissement	1.4
1.2.2. Détermination de la chaîne de retour ...	1.4
1.2.3. Stabilité de structure	1.5
1.2.4. Commande en une période d'échantillonnage	1.5
2. Conséquences de la non-mesurabilité de tous les états	1.6
3. Commande des systèmes imparfaitement observés	1.6
Conclusion	1.7
<u>CHAPITRE II</u> : Estimation de la réaction d'état par un système dyna- mique	2.1
1. Commande par réaction d'état estimé	2.2
1.1. Structure de l'asservissement	2.2
1.2. Choix de l'estimateur	2.3
2. Reconstitution des états non- mesurables	2.3
3. Observateurs asymptotiques pour des systèmes échantillonnés	2.4
3.1. Définition et principe	2.4
3.2. Algorithme de la détermination de l'observateur	2.6
3.2.1. Forme canonique	2.6
3.2.2. Calcul de T^* et de F	2.8
4. Mise en oeuvre	2.9
5. Stabilité de l'asservissement	2.11
6. Application : Asservissement d'un filtre à données échantil- lonnées	2.13

	Page
6.1. Commande monomodulée	2.14
6.2. Commande multimodulée	2.16
Conclusion	2.22
 <u>CHAPITRE III</u> : Commande pratique des systèmes échantillonnés in- complètement observés	
	3.1
1. Présentation de la méthode	3.2
2. Rôle de la période d'échantillonnage	3.4
3. Exemple (1) : Estimation de l'état d'un filtre du second ordre.	3.5
4. Mise en oeuvre	3.6
5. Stabilité de structure	3.8
6. Exemple (2) : Asservissement d'un moteur à courant continu	3.10
6.1. Commande monomodulée	3.10
6.2. Commande multimodulée	3.13
6.3. Stabilité du filtre en présence d'une non linéarité .	3.14
Conclusion	3.20
 <u>CHAPITRE IV</u> : Réaction directe de sortie par extension du système à commander	
	4.1
1. Principe de la méthode	4.2
2. Réglage par un RCN	4.3
2.1. Choix particulier du système associé (\hat{S})	4.3
2.2. Transformation de la réaction d'état en une réaction de sortie	4.5
2.3. Algorithme simplifié de la détermination du RCN	4.6
2.4. Régime dynamique	4.7
3. Mise en oeuvre	4.9
4. Stabilité de structure	4.9
5. Application : Asservissement de l'état d'un moteur	4.12
Conclusion	4.15



<u>CHAPITRE V</u> : Extension de la commande par réaction d'état aux systèmes échantillonnés incomplètement observés	5.1
1. Description des systèmes étudiés	5.2
2. Régulation des systèmes échantillonnés non linéaires incomplètement observés	5.4
2.1. Introduction d'un observateur échantillonné non linéaire	5.4
2.2. Réglage pratique	5.6
2.3. Commande numérique par RCN non linéaire	5.7
3. Mode de commande	5.14
3.1. Utilisation des notions de domaines de commandabilité	5.14
3.2. Définition de la commande selon le concept de stabilité	5.15
4. Exemple d'application	5.15
Conclusion	5.23

CONCLUSION GENERALE

TABLE DES MATIERES

ANNEXE I : A) Sur la recherche d'un modulateur (une contre-réaction)
B) Estimateur d'ordre maximal

ANNEXE II : Application du pseudo-inverse d'une matrice à l'estimation de l'état d'un processus

ANNEXE III : Sur une condition d'observabilité d'un processus

ANNEXE IV : Asservissement d'un moteur à courant continu

ANNEXE V : Régulation d'un processus non-linéaire.