

50376
1974
21
N° d'ordre : 155

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

50376
1974
21

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur Ingénieur

par

Mongi EL MABROUK



EQUATIONS INTEGRALES SINGULIERES EN ELASTICITE



0300088305

MEMBRES DU JURY : MM. G. GONTIER, Président
F. PARSY, Rapporteur
P. BEGUIN, Examineur
KERGUIGNAS, Invité

Soutenue le 10 Avril 1974

A la mémoire de mon Père,

A ma Mère, mes frères et soeur.

A Myriam.

A tous ceux qui m'ont encouragé dans cette voie.

Aux membres du Jury.

A tout le personnel de Mathématiques Pures et Appliquées.

J'adresse mes remerciements sincères.

INTRODUCTION

Le travail ci-après s'inscrit dans la ligne directe du mémoire de D.E.A. présenté à l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées de l'Université des Sciences et Techniques de Lille. Il y était question des Equations Intégrales singulières unidimensionnelles et d'applications diverses à la théorie mathématique de l'élasticité. En fait, ces applications, malgré leur valeur pratique indéniable, étaient surtout motivées par le souci d'illustrer d'une façon spécifique et simple la théorie.

Aussi, le travail présent se développe-t-il suivant 2 axes :

1 - Approfondir la théorie des Equations Intégrales Singulières et ce en exposant, succinctement certes, les principaux aspects de la théorie multidimensionnelle, d'ailleurs pas tout à fait achevée jusqu'à nos jours... Montrer comment on pouvait l'utiliser pour résoudre des problèmes tridimensionnels en physique mathématique. En particulier, on se penche sur quelques problèmes intéressants de la théorie mathématique de l'élasticité à 3 dimensions.

2 - Poursuivre le traitement pratique, numérique, des Equations Intégrales Singulières. A ce propos, il était intéressant de comparer les résultats (du point de vue algorithmique et des résultats proprement dits) avec les méthodes dites "variationnelles" : RITZ-GALERKIN, moindres carrés - projections orthogonales etc..., dont la méthode de RITZ-GALERKIN est largement représentative.

La comparaison est faite à propos de 2 problèmes :

Premier problème : Torsion d'une poutre à section carrée est surtout destiné à tester les 2 méthodes, puisqu'on peut comparer les résultats obtenus avec des résultats déjà établis et connus depuis St Venant.

Le deuxième offre un intérêt pratique plus réel et a une signification technologique évidente : la torsion d'un arbre claveté. A ce propos, on compare les résultats obtenus avec les résultats pratiques, basés essentiellement sur des mesures directes ou analogiques (analogie de la membrane, analogie hydrodynamique).

Enfin, dans un esprit de synthèse, on voit sur un exemple (torsion d'un arbre, de section elliptique), comment l'application conjuguée des deux méthodes

peut donner un résultat, rapidement et avec précision. Le fait est d'ailleurs prévisible : il suffit de regarder une équation intégrale comme une équation opérationnelle et dès lors beaucoup de méthodes opérationnelles peuvent s'y appliquer.

Il est à signaler enfin que toutes les équations intégrales considérées ici sont du type de Fredholm (singulières et régulières). Une autre famille, de Volterra, aurait mérité un peu plus d'attention. Mais elles sont restées, apparemment, les parents pauvres de la théorie des Equations Intégrales, et ceci est assez paradoxal. En effet, elles possèdent une propriété très intéressante : elles possèdent toujours une solution unique. Dans un proche avenir, on envisage de faire une étude de la question du point de vue des applications en physique mathématique. Dans le cas de l'élasticité, une solution fort élégante de quelques problèmes d'élastodynamique (à 2 et 3 dimensions) a été fournie par SCHMEIDLER, grâce à l'emploi des Equations Intégrales de VOLTERRA et des transformées de Fourier, ramenant les problèmes à des systèmes algébriques Cramériens.

PLAN

I. RAPPELS MATHÉMATIQUES.

- . Espaces métriques. Espaces L^p . Espaces de Sobolev.
- . Projection stéréographique.
- . Intégrales quasi-singulières (à faible singularité).

II. EQUATIONS INTEGRALES SINGULIERES.

- . Intégrales singulières multidimensionnelles.
- . Notion de symbole. Propriétés.
- . Equations Intégrales Singulières.
- . Système d'Equations Intégrales Singulières.
- . Théorèmes de Giraud.

III. APPLICATIONS.

- . Equations de l'Elasticité à 3 dimensions. Solutions fondamentales.
- . Equations Intégrales des problèmes aux limites.
- . Application de la notion de symbole. Un exemple de régularisation locale.

IV. RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS INTEGRALES.

- . Equations de Fredholm.
- . Equations Singulières.

V. APPLICATIONS NUMERIQUES.

- . Méthode de Ritz-Galerkin.
 - Torsion d'une poutre à section carrée.
 - Torsion d'un arbre avec logement de clavette.
- . Méthode des Equations Intégrales,
 - (mêmes problèmes).

VI. CONCLUSION.

- . Quelques remarques sur la méthode de Ritz-Galerkin.
- . Comparaison des 2 méthodes.
- . Conclusion : un exemple synthétique. Résolution du problème de la torsion d'un arbre à section elliptique par une méthode mixte : équations intégrales + méthode des moindres carrés.

RAPPELS MATHÉMATIQUES.

Nous supposons dans tout ce qui suit que le lecteur est familiarité avec la théorie des opérateurs dans les espaces métriques, en particulier dans les espaces linéaires normés. Aussi, on rappelle uniquement deux notions, qui seront utilisées dans le texte :

- . Espaces de Sobolev.
- . Éléments de théorie spectrale des opérateurs dans un espace Hilbertien.

§ 1. Espaces de Sobolev.

1.1. - Dérivées généralisées.

Soit D un domaine borné (ensemble connexe ouvert) de E_n et

$x = (x_1, \dots, x_n) \in D$.

Soit $\psi(x)$, ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre l dans D .

$\psi(x)$: finie.

Notation : $D^l \psi = \frac{\partial^l \psi}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \dots \partial x_n^{l_n}} \quad \sum l_i = l.$

En utilisant la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$\int_D D^l \psi(x) \psi(x) dx = (-1)^l \int_D \psi(x) D^l \psi(x) dx.$$

Définition.-

Soient $\psi(x)$ et $\chi(x)$ intégrables dans tout sous-domaine strict de D et : $\int_D \chi(x) \psi(x) dx = (-1)^l \int_D \psi(x) D^l \chi(x) dx \quad \forall \psi(x) \text{ } l\text{-fois continûment dérivable.}$

Alors $\chi(x)$ est dite "dérivée généralisée" de la forme 1 de $\psi(x)$ dans D .

Définition équivalente :

$\chi(x)$ est dite "dérivée généralisée" du type ① de $\psi(x)$ dans D , si $\exists$ une suite $\psi_m(x)$, l -fois continûment différentiable dans D , telle que $\psi_m(x)$ et $D^l \psi_m(x)$ convergent vers $\psi(x)$ et $\chi(x)$ respectivement dans $L_p(D')$, où D' est strictement inclus dans D .

① On peut, bien sûr, partant de ces 2 définitions, définir plus largement des opérateurs différentiels généralisés.

1.2. - Espaces $\tilde{W}_p^{(l)}$ et $W_p^{(l)}$:

1) $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$: Soit toujours D un domaine borné de E_n .

Considérons l'ensemble des fonctions $\psi(x)$ possédant toutes les dérivées généralisées d'ordre l , où $\psi(x)$ et $D^l \psi \in L_p(D)$ ($p \geq 1$).

On obtient un espace normé $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ en introduisant la norme (ou vérifie aisément que c'en est une).

$$\|\psi\|_{\tilde{W}_p^{(l)}(D)}^p = \int_D |\psi(x)|^p dx + \int_D \sum_{l_1 + \dots + l_n = l} \left| \frac{\partial^{l_1} \psi(x)}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \dots \partial x_n^{l_n}} \right|^p dx \quad (2)$$

① Cet espace est complet, linéaire et normé.

② $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ est séparable.

$$2) \boxed{W_p^{(\ell)}(D)} :$$

—————> Deux normes $||X||$ et $||X||_1$ sont dites équivalentes dans un espace linéaire normé X si :

$$c_2 ||X|| \leq ||X||_1 \leq c_1 ||X|| \quad \text{constantes : } c_1 > 0, \quad c_2 > 0.$$

—————> Les normes suivantes sont équivalentes à la norme 2 :

$$\odot \quad ||\psi|| = \sum_{\ell_1 + \dots + \ell_n = \ell} ||D^{\ell} \psi||_{L_p(D)} + ||\psi||_{L_p(D)}$$

$$\odot \quad ||\psi|| = \max_{\ell_1 + \dots + \ell_n = \ell} ||D^{\ell} \psi||_{L_p(D)} + ||\psi||_{L_p(D)}$$

$$\odot \quad ||\psi|| = \left\{ \int_D \left[\sum_{\ell_1 + \dots + \ell_n = \ell} (D^{\ell} \psi)^2 \right]^{p/2} dx \right\}^{1/p} + ||\psi||_{L_p(D)}$$

—————> $W_p(D)$: la norme est maintenant définie par :

$$||\psi||_{W_p^{(\ell)}(D)} = \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} ||D^{k_i} \psi||_{L_p(D)}$$

③

⊙ Cet espace est de même complet et séparable.

⊙ Pour une très large classe de domaines $W_p^{(\ell)}$ et $\tilde{W}_p^{(\ell)}$ sont les mêmes éléments.

⊙ Pour $\ell = 0$ et $\ell = 1$, les 2 espaces coïncident ($W_p^{(0)}(D) \equiv L_p(D)$).

Théorème 1. - Soit U ensemble d'éléments $\psi(x) \in W_p^{(\ell)}(D)$, borné dans $W_p^{(\ell)}(D)$ ($\ell \geq 1$) ; alors il est compact dans $W_p^{(\ell-1)}(D')$, où D' est strictement inclus dans D .

Théorème 2. - Soit $\psi_k(x)$ une suite de fonctions continûment dérivables jusqu'à l'ordre $\ell = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, convergentes dans $W_2^{(\ell)}(D')$; alors les ψ_k sont uniformément convergentes dans D' ($\forall D'$ strictement contenu dans D).

3) Théorèmes d'immersion : (Embedding theorems).

Théorème 1. - Si $p > 1$ et $p \cdot \ell > n$, toute fonction $\psi(x) \in W_p^{(\ell)}(D)$ est équivalente à une fonction de $C^{(0)}(D)$ et

$$||\psi||_{C(D)} \leq M ||\psi||_{W_p^{(\ell)}(D)}, \quad M \text{ dépendant uniquement du domaine } D.$$

Tout ensemble borné U dans $W_p^{(\ell)}(D)$ est compact dans $C^{(0)}(D)$.

$C^{(\ell)}(D)$ = ensemble des fonctions continûment dérivables jusqu'à l'ordre ℓ dans $\bar{D} = \partial D$; la norme y est :

$$||\psi||_{C^\ell(D)} = \max_{\substack{x \in \bar{D} \\ 0 \leq k \leq \ell}} |D^k \psi(x)|$$

Théorème 2. - Si $p > 1$ et $p \cdot \ell \leq n$ toute fonction $\psi(x) \in W_p^{(\ell)}(D)$ est équivalente à une fonction $\psi(x)$ qui est définie presque partout sur la section D_S de D par un plan (hyper) quelconque de dimension $S > n - p \cdot \ell$, $\psi(x)$ étant intégrable sur D_S jusqu'à l'ordre

$$q < \frac{pS}{n-p}$$

§ 2. Projection stéréographique.

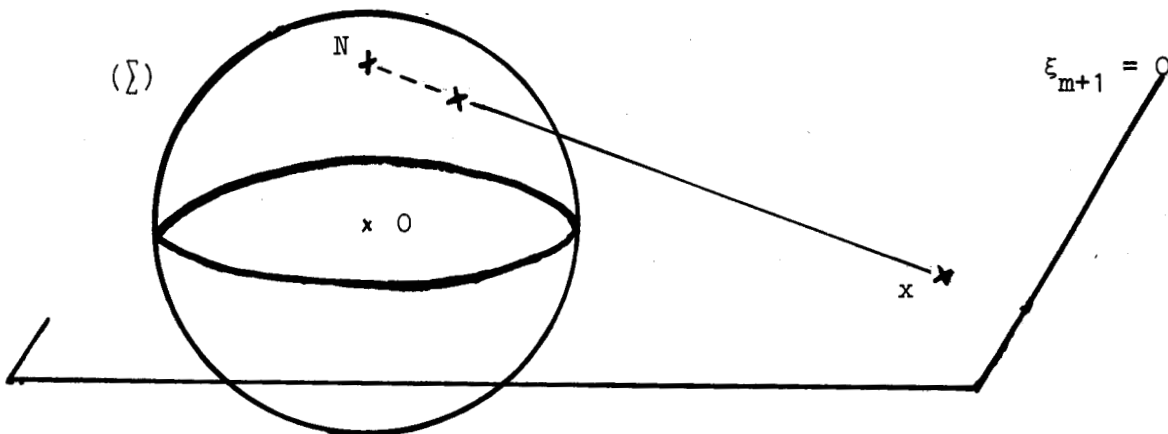
C'est une transformation qui applique l'espace euclidien E_m sur la sphère unité Σ dans l'espace euclidien E_{m+1} , suivant les formules :

$$\xi_k = \frac{2 x_k}{x^2 + 1} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\xi_{m+1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad (x^2 = |x|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2)$$

On peut la visualiser de la façon suivante :

Soit comme E_m le plan $\xi_{m+1} = 0$ dans l'espace E_{m+1} et dans ce plan le point $x(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Traçons la droite joignant x au point $(0, 0, \dots, 0, 1)$ de Σ . Le point d'intersection ξ obtenu est alors l'image de x .



Soient r et ρ les distances entre les 2 points x et y et entre leurs images. On a alors :

$$\rho^2 = \sum_{j=1}^{m+1} (\xi_j - \eta_j)^2 = 4 \sum_{j=1}^m \left(\frac{x_j}{x^2 + 1} - \frac{y_j}{y^2 + 1} \right)^2 + \left[\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} \right]^2$$

$$= \frac{4}{(x^2+1)^2(y^2+1)^2} \left\{ \sum_1^m [x_j(y^2+1) - y_j(x^2+1)]^2 + (x^2-y^2)^2 \right\}$$

soit finalement :

$$\rho^2 = 4r^2 \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}$$

—————> Soit dy l'élément de volume de E_m et $d\sigma$ l'élément de surface de Σ . On démontre alors que $dy = \left(\frac{y^2+1}{2}\right)^m d\sigma$.

—————> Dans le cas $m = 2$, on reconnaît parfaitement la transformation du plan complexe sur la sphère de Riemann. Nous continuerons à appeler Σ sphère de Riemann.

§ 3. Opérateurs Intégraux complètement Continus.

Théorème 1.— Soit D une région finie de E_m contenant l'origine à l'intérieur ou sur la frontière ; $A(x,y)$ une fonction bornée ($|A(x,y)| < A$), une constante $0 < \lambda < m$. L'opérateur

$$tu = v(x) = \int_D \frac{A(x,y)}{r^\lambda} u(y) dy \text{ à faible singularité}$$

est complètement continu dans l'espace $L_p(|x|^\beta; D)$, si

$$-m < \beta < \frac{mp}{p'}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Démonstration :

Nous rappelons d'abord les formules :

$$\int_D \frac{dy}{r^\lambda \rho^{\frac{\beta p'}{p}}} \leq \begin{cases} C & \lambda + \frac{\beta p'}{p} = m \\ C \ell_n \frac{C_1}{R} & \lambda + \frac{\beta p'}{p} > m \\ CR^{-(\lambda + \frac{p'}{p} - m)} & \lambda + \frac{\beta p'}{p} < m \end{cases} \quad C_1 = \text{cste} \quad \left\{ \text{soit } \int_D \dots \leq C_X(R) \right.$$

$$\boxed{\beta > 0.}$$

Posons $|x| = R$ $|y| = \rho$. D'où :

$$\left| R^{\frac{\beta}{p}} v(x) \right| \leq A R^{\beta/p} \int_D \frac{1}{r^\lambda} |u(y)| dy = A R^{\beta/p} \int_D \frac{1}{r^{\lambda/p'} \cdot \rho^{\beta/p}} \cdot \frac{|u(y)| \rho^{\beta/p}}{r^{\frac{\lambda}{p}}} dy$$

$$\leq A R^{\beta/p} \left\{ \int_D \frac{dy}{r^\lambda \rho^{\frac{\beta p'}{p}}} \right\}^{1/p'} \left\{ \int_D \frac{|u(y)|^p \rho^\beta}{r^\lambda} dy \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$\Rightarrow$

$$\|v\|^p \leq A^p C^p \int_D |u(y)|^p \rho^\beta dy \int_D \frac{R^\beta [\chi(R)]^{p/p'}}{r^\lambda} dx.$$

L'intégrale où figure $\chi(R)$ est bornée dans les 3 cas

$$(\lambda + \beta \frac{p'}{p} \leq m), \text{ donc } \|v\| \leq A B C \|u\|. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

$$\boxed{\beta < 0.}$$

Soit $u \in L_p(q; D)$ et $\tilde{u} = q^{1/p} u$. Alors $L_p(q; D) \supset L_p(D)$.

Soit f une fonctionnelle linéaire bornée dans $L_p(q; D)$ et

$\tilde{f}(\tilde{u}) = f(q^{-1/p} u)$. $\tilde{f}(\tilde{u})$ est donc de même bornée, dans $L_p(D)$, car :

$$|\tilde{f}(\tilde{u})| \leq \|f\|_{L_p(q;D)} \|q^{-\frac{1}{p}} u\|_{L_p(q;D)} = \|f\|_{L_p(q;D)} \|u\|_{L_p(D)}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{u}) &= \int_D \overline{\tilde{F}(x)} \tilde{u}(x) dx & \tilde{F}(x) &\in L_{p'}(D) \\ \implies f(u) &= \tilde{f}(q^{\frac{1}{p}} u) = \int_D \overline{F(x)} u(x) dx \end{aligned}$$

avec $F(x) = q^{1/p} \tilde{F}(x)$. Donc :

$$F(x) \in L_p(q^{-\frac{p'}{p}}; D).$$

Considérons alors l'opérateur t^* .

$$t \in L_p(R^\beta; D) \rightarrow t^* \in L_{p'}(R^\gamma; D) \quad \text{avec} \quad \gamma = -\beta \frac{p'}{p}$$

$$-m < \beta < 0 \implies 0 < \gamma < m p'/p.$$

Donc t^* est borné dans $L_{p'}(R^\gamma; D)$; il en va de même pour t dans $L_p(R^\beta; D)$.

Il reste à prouver que t est complètement continu :

en supposant $\beta > 0$ (si $\beta < 0$, on démontrera de la même façon pour t^*), on a :

$$tu = \int_{r < \eta} \frac{A(x,y)}{r^\lambda} u(y) dy + \int_{D \cap (r > \eta)} \frac{A(x,y)}{r^\lambda} u(y) dy = t'u + t''u$$

$\eta > 0$ arbitrairement petit.

t'' = borné et complètement continu dans $L_p(R^\beta; D)$.

t' = pour t' on a encore l'inégalité $||v'|| \leq A B C ||u||$ où B peut être rendu arbitrairement petit avec η . Donc $||t'|| \rightarrow 0$ quand $\eta \rightarrow 0$.

Conclusion : t est complètement continu dans $L_p(R; D)$ et donc dans $L_p(|x|^\beta; D)$ qui lui est équivalent. C.Q.F.D.

Théorème 2. - L'opérateur $\int_{E_m} \frac{\psi(y, \theta) - \psi(x, \theta)}{r^m} f(x, y) u(y) dy = v(x)$

$r = |y - x|$ $\theta = \frac{y - x}{r}$ est complètement continu dans $L_p(E_m)$, si $f(x, y)$ est borné et que $\psi(x, \theta)$ est tel que $|\psi(y, \theta) - \psi(x, \theta)| \leq A \rho^\lambda$, où ρ est la distance entre les points ξ et η de la sphère de Riemann, correspondant aux points x et y de E_m .

Démonstration :

$$v(x) = \int \sum \frac{\psi(y, \theta) - \psi(x, \theta)}{\rho^m} f(x, y) \left(\frac{y^2 + 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{m}{2}} u(y) d\sigma$$

Faisons la transformation

$$u'(\xi) = \left(\frac{x^2 + 1}{2} \right)^{\frac{m}{2}} u(x) \quad ; \quad v'(\xi) = \left(\frac{x^2 + 1}{2} \right)^{\frac{m}{2}} v(x)$$

transformation isométrique de $L_p(E_m)$ dans $L_p(q; \Sigma)$ avec :

$$q(\xi) = \left(\frac{1 + x^2}{2} \right)^{-m \left(\frac{p}{2} - 1 \right)} = (1 - \xi_{m+1})^{m(p/2 - 1)}$$

En posant :

$\beta = m(p-2)$, le théorème précédent nous permet de conclure que l'opérateur $v'(\xi)$ est complètement continu dans $L_p(q; \Sigma)$. Il en est donc de même de $v(x)$ dans $L_p(E_m)$.

CHAPITRE II

EQUATIONS INTEGRALES SINGULIERES.

§ 1 - Définitions - Propriétés de base.-

Soit $f(x)$, fonction de point définie (presque partout) dans un domaine Γ de l'espace E_m . Soit x_0 un point de Γ . Posons alors :

$\Gamma_\epsilon = \Gamma - \{x ; d(x, x_0) \leq \epsilon\}$ d étant la distance définie dans la métrique de Γ .

Si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} f(x) d\Gamma$ existe, alors nous appellerons cette limite intégrale singulière de $f(x)$ dans Γ .

Dans tout ce qui suit nous envisageons des intégrales singulières de la forme :

$$v(x) = \int_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y) dy \quad x, y \in E_m \quad r = |y-x|, \theta = \frac{y-x}{r}$$

x : s'appellera le pôle.

$f(x, \theta)$: s'appellera la caractéristique

$u(y)$: s'appellera la densité.

○ Nous supposerons en outre remplies les conditions suivantes :

- 1) Dans toute région finie de l'espace E_m $u(x) \in \text{Lip}(\alpha)$ $\alpha > 0$
- 2) A l'infini : $u(x) = O(|x|^{-k})$, $k > 0$
- 3) $f(x, \theta)$: bornée pour x fixé et continue par rapport à θ .

Propriétés de base.-

. CNS d'existence : Si les conditions 1 - 3 sont satisfaites, alors l'intégrale singulière $v(x) = \int_{E_m} \frac{f(x,\theta)}{r^m} u(y) dy$ existe sous la condition $\int_S f(x,\theta) dS = 0$, S étant la sphère unité sur laquelle se déplace θ . Cette condition est nécessaire et suffisante.

. Théorème.- Si $u(y) \in \text{Lip}(\alpha)$ dans $D \subseteq E_m$ ($0 < \alpha < 1$) et $u(y) = O(|y|^{-k})$ à l'infini, $k > 0$, alors l'intégrale singulière $v(x) = \int_D \frac{f(x,\theta)}{r^m} u(y) dy \in \text{Lip}(\alpha)$ dans tout sous-espace $D' \subset D$.

. Ordre à l'_{∞} : Soient :

$A_{\alpha,k}$ la classe des fonctions $v(x)$ tel que :

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{Ar^{\alpha}}{(x^2+1)^{k/2}} \quad \textcircled{1} \quad r \leq 1 \quad A = \text{cste}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$0 < k \leq m$$

et

$$|u(x)| \leq B(x^2+1)^{-k/2} \quad B = \text{cste}$$

$A'_{\alpha,k}$ la classe des fonctions $u(x)$ définies partout dans E_m et tel que :

$$u(x) \text{ satisfait } \textcircled{1}$$

$$\text{et } |u(x)| \leq \frac{B \ln(x^2+1)}{(x^2+1)^{k/2}} \quad B = \text{cste} \text{ pour } |x| \text{ suffisamment grand.}$$

Alors :

L'opérateur intégral singulier

$$v(x) = \int_{E_m} K(x,y) u(y) dy = \int_{E_m} \frac{f(x,\theta)}{r^m} u(y) dy \text{ transforme toute fonction}$$

$$u \in A_{\alpha,k} \text{ en } v \in A'_{\alpha,k}.$$

Corollaire 1.- Si $u(x) \in A_{\alpha,k}$, alors $v(x) \in A_{\alpha,k'}$, $\forall k' < k$

Corollaire 2.- Si $u(x) \in A_{\alpha,k}$, alors les fonctions :

$$v_0(x) = u(x), \dots, v_n(x) = \int_{E_m} K_n(x-y) v_{n-1}(y) dy \in A_{\alpha,k'} \quad (k' < k)$$

. Noyaux à faible singularité : Soit $D \subseteq E_m$ et

$$w(x) = \int_D u(y) \frac{\psi(x,\theta)}{r^{m-1}} dy \quad x \in D.$$

Supposons :

. $\psi(x,\theta)$ continue et bornée, ainsi que ses dérivées premières par rapport aux coordonnées cartésiennes de x et de θ .

. $u(y) \in \text{Lip}(\alpha)$ et qu'à l'infini $u(x) = O(|x|^{-\ell})$ $\ell > 1$.

Alors $w(x)$ est dérivable et les dérivées sont données par :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int_D u(y) \frac{\psi(x,\theta)}{r^{m-1}} dy = \int_D u(y) \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\psi(x,\theta)}{r^{m-1}} \right] dy - u(x) \int_S \psi(x,\theta) \cos(r, x_k) dS$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

§ 2 - Opérations sur les intégrales singulières. Le symbole. Changement de l'ordre d'intégration dans les intégrales ordinaires.-

Soit $\int_{E_m} L(x,y) u(y) dy$ tel que :

$$L(x,y) = r^{-\lambda} F(x,y) \quad 0 < \lambda < m$$

$F(x,y)$ bornée et ϵ Lipschitz (β) .

c'est-à-dire $|F(x,y') - F(x,y'')| < C |y' - y''|^\beta$, ($|y' - y''| \leq 1$), $\beta > 0$

Nous appellerons cette intégrale "ordinaire"

Soit alors $u(y) \in A_{\alpha,k}$ avec $k > m - \lambda$, $\alpha \geq \beta$ et

$$v(x) = \int_{E_m} \frac{f(x,\theta)}{r^m} u(y) dy \quad w(x) = \int_{E_m} L(x,y) v(y) dy$$

$f(x,\theta)$ satisfaisant les conditions 1 - 3 et $|f(x',\theta) - f(x'',\theta)| \leq C_1 |x' - x''|^\alpha$

On a alors :

$$w(x) = \int_{E_m} \frac{F(x,y)}{r^\lambda} dy \int_{E_m} \frac{f(y,\theta_1)}{r_1^m} u(z) dz \quad r_1 = |z-y| \quad \theta_1 = \frac{z-y}{r_1}$$

Théorème.- Dans l'expression de $w(x)$, nous pourrions changer l'ordre d'intégration et $w(x)$ s'exprimera en fonction de $u(x)$ par une intégrale dont le noyau sera $O(r^{-\lambda})$ quand $x \rightarrow y$.

Opérations sur les intégrales singulières à 2 dimensions.

Soient $A_n u = \int_{E_2} \frac{e^{in\theta}}{\cos^2 \theta} u(y) dy$ $Bu = \int_{E_2} \frac{r^2}{\cos^2 \theta} u(y) dy$

$(u \in A_{\alpha,k} \quad k > 1)$

$\Rightarrow Bu = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{E_2} u(y) \frac{dy}{\partial x_1} r$ et $B A_n u = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{E_2} \frac{r}{\partial x_1} \int_{E_2} \frac{e^{in\theta}}{r^2} u(z) dz$

D'après le théorème ci-dessus, on pourra donc écrire :

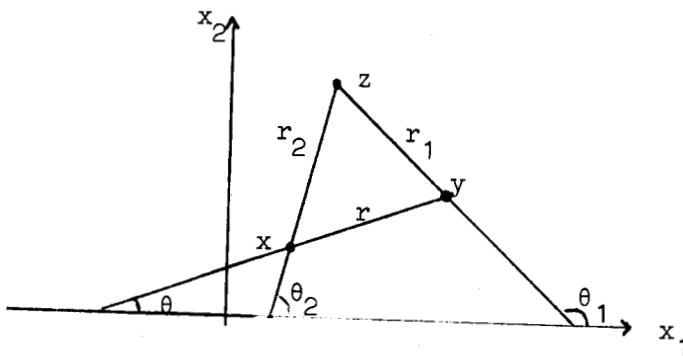
$B A_n u = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{E_2} u(z) dz \int_{E_2} \frac{e^{in\theta}}{r^2} dy$
 Or $\int_{E_2} \frac{e^{in\theta}}{r^2} dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{r_1 > \epsilon} \frac{e^{in\theta}}{r^2} dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\theta_1} d\theta_1 \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{dr_1}$

$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{in\theta_1}}{r_2} \left\{ \frac{r_n}{r_2} + \frac{r_n}{2} \left[1 - \frac{e^{\cos(\theta_1 - \theta_2)}}{e^{\cos(\theta_1 - \theta_2)}} \right] + \sqrt{1 - \frac{2e}{r_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)} + \frac{e}{r_2} \right\} d\theta_1$

$\Rightarrow B A_n u = -2 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\theta_1} \left\{ \frac{r_n}{\sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} \right\} d\theta_1$

Or $\int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\theta} \ln \left| \sin \frac{\theta - w}{2} \right| d\theta = -\pi \frac{e^{inw}}{n} \quad n \neq 0$

d'où $B A_n u = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{E_2} \frac{e^{in\theta}}{r^2} u(z) dz = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{E_2} \frac{e^{in\theta}}{r^2} u(y) dy$



En appliquant de nouveau la formule de différentiation, on a alors :

$$B A_n u = \begin{cases} \frac{2\pi}{|n|} \int_{E_2} (\cos \theta + i n \sin \theta) \frac{e^{in\theta}}{r^2} u(y) dy & n \neq \pm 1 \\ 2\pi \int_{E_2} \frac{e^{2i\theta}}{r^2} u(y) dy - 2\pi^2 u(x) & n = 1 \\ 2\pi \int_{E_2} \frac{e^{-2i\theta}}{r^2} u(y) dy - 2\pi^2 u(x) & n = -1 \end{cases}$$

. De même, en posant $Cu = i \int_{E_2} \frac{\sin \theta}{r^2} u(y) dy$, on aura

$$C A_n u = \begin{cases} \frac{2\pi}{|n|} \int_{E_2} (n \cos \theta + i \sin \theta) \frac{e^{in\theta}}{r^2} u(y) dy & n \neq \pm 1 \\ 2\pi \int_{E_2} \frac{e^{2i\theta}}{r^2} u(y) dy + 2\pi^2 u(x) & n = 1 \\ -2\pi \int_{E_2} \frac{e^{-2i\theta}}{r^2} u(y) dy - 2\pi^2 u(x) & n = -1 \end{cases}$$

. En introduisant la notation $hu = \frac{1}{2\pi i} A_1 u = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_2} \frac{e^{i\theta}}{r^2} u(y) dy$ on a :

$$\frac{1}{2\pi i} A_{-1} hu = u(x) \Rightarrow h^{-1} = \frac{1}{2\pi i} A_{-1}$$

Et plus généralement $A_n = \frac{2\pi i^n h^n}{n}$, $A_{-n} = \frac{2\pi i^n h^{-n}}{n}$ $n > 0$

soit finalement $\int_{E_2} \frac{e^{in}}{r^2} u(y) dy = \frac{2\pi i |n|}{|n|} h^n u$

. Opérateur singulier : Sera dit singulier l'opérateur de la forme :

$$a_0(x) u(x) + \int_{E_m} \frac{f(x,\theta)}{r^m} u(y) dy + T u$$

tel que

1) $|a_0(y) - a_0(x)| \leq A r^\lambda [(1+x^2)(1+y^2)]^{-\lambda/2}$

2) $f(x,\theta)$ satisfait les conditions de la page 15 et en plus :

$$|f(y,\theta) - f(x,\theta)| \leq B r^\mu [(1+x^2)(1+y^2)]^{-\frac{\mu}{2}}$$

3) T est complètement continu dans $L_p(E_m)$ pour $1 < p < \infty$.

L'opérateur $a_0(x) u(x) + \int_{E_m} \frac{f(x,\theta)}{r^m} u(y) dy$ sera dit "canonique".

LE SYMBOLE.

Considérons l'opérateur singulier $Au \equiv a_0(x) u(x) + \int_{E_2} \frac{f(x,\theta)}{r^2} u(y) dy + Tu$

Supposons que $f(x,\theta)$ puisse être développé en série de Fourier :

$$f(x, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(x) e^{in\theta}$$
 (Le "''" voulant dire l'omission du terme libre pour justement remplir la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de l'intégrale singulière $\int f(x, \theta) dS = 0$).

On peut donc écrire :

$$\int_{E_2} \frac{f(x, \theta)}{r^2} u(y) dy = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(x) h^n u \quad \text{avec} \quad a_n(x) = \frac{2\pi i |n|}{|n|} b_n(x)$$

d'où

$$Au = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(x) h^n u + Tu$$

. Considérons alors 2 opérateurs "canoniques" de la forme

$$A_j u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(j)}(x) h^n u \quad j = 1, 2.$$

Nous avons alors :

$$\begin{cases} A_1 A_2 u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^k u \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{k-n}^{(1)}(x) a_n^{(2)}(x) + \int_{E_2} M_1(x, y) u(y) dy \\ A_2 A_1 u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^k u \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{k-n}^{(2)}(x) a_n^{(1)}(x) + \int_{E_2} M_2(x, y) u(y) dy \end{cases}$$

M_1 et M_2 étant complètement continus dans $L_p(E_2)$.

Introduisons alors la fonction $\phi(x, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(x) e^{in\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

$\phi(x, \theta)$ sera par définition le symbole de l'opérateur singulier A . Un symbole nul sera attaché à tout opérateur complètement continu.

Nous voyons donc : 1) qu'un opérateur singulier est défini par son symbole, à un opérateur complètement continu près.

2) qu'à la somme et au produit d'opérateurs singuliers

"canoniques" correspond la somme, respectivement le produit de leurs symboles.

⊙ $m > 2$:

Dans le cas général ($m > 2$) Giraud propose comme définition du symbole de l'opérateur $a_o(x) u(x) + \int_{E_m} \frac{f(x,\theta)}{r^m} u(y) dy$

$$\phi(x, \theta) = a_o(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n,m} Y_{n,m}(x, \theta) \quad \gamma_{n,m} = \frac{i^n \pi^{m/2} \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2})}$$

$Y_{n,m}(x, \theta)$ étant les fonctions sphériques à m dimensions d'ordre n , tel que l'on puisse développer $f(x, \theta)$ en une série de la forme :

$$f(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n,m}(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n,m}(x, v_1, v_2, \dots, v_{m-1})$$

On démontre (cf. Mikhlin [2]) que dans ce cas aussi à la somme et au produit d'opérateurs "canoniques" correspond la somme ou le produit de leurs symboles.

ETUDE DU SYMBOLE.

Toutes les propriétés précédentes ont été établies par Giraud dans le cas où la caractéristique est indépendante du pôle. Nous allons voir que, en adoptant une nouvelle définition du symbole, d'ailleurs plus efficace pour les calculs, et dûe à Mikhlin, nous généralisons tout ce qui a été dit pour le cas où la caractéristique dépend du pôle.

Transformée de Fourier d'un noyau singulier et symbole.-

Considérons l'intégrale $v(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{E_m} K(x-y) u(y) dy$

avec $K(x-y) = \frac{f(\theta)}{r^m}$ donc indépendante du pôle. On établit alors facilement

que le théorème de convolution demeure valable, en fait :

$$Fv = FK \cdot Fu$$

où
$$FK = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\epsilon < |x| < N} e^{-i(x,z)^*} K(x) dx$$

Posons alors $w(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{E_m} K_1(x-y) v(y) dy$ $K_1(x-y) = \frac{f_1(\theta)}{r^m}$

Alors, de même $Fw = FK_1 \cdot Fv = FK_1 \cdot FK \cdot Fu$

Nous remarquons qu'au "produit" d'intégrales singulières (en fait d'opérateurs) correspond le produit des transformées de Fourier des noyaux ; propriété analogue à celle du symbole.

Considérons alors le cas le plus simple, où la caractéristique est une fonction sphérique du 1^{er} ordre; alors $K(x-y) = \sum_1^m a_j \frac{y_j - x_j}{r^{m+1}}$. Il s'agit de calculer la transformée de Fourier d'un tel noyau. Il est évident qu'on peut se restreindre au cas où on n'a qu'un terme, et qu'en numérotant judicieusement les axes, tout revient à calculer la transformée de :

$$K(x-y) = (2\pi)^{\frac{m}{2}} \frac{y_1 - x_1}{r^{m+1}} \quad (\text{on a choisi } a_1 = (2\pi)^{\frac{m}{2}})$$

Soient $R, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$ les coordonnées sphériques de x . Alors :

(*) (x, z) = produit scalaire

$$K(x) = - (2\pi)^{\frac{m}{2}} \frac{x_1}{R^{m+1}} = \frac{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}{m-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{R^{m-1}} \right)$$

$$\Rightarrow FK = \frac{1}{m-1} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon < R < N} e^{-i(x,z)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{R^{m-1}} \right) dx$$

$$\text{Nous trouvons après calcul } FK = \frac{\frac{m+1}{2}}{\Gamma(\frac{m+1}{2})} \cos v_1 \quad (v_1 : \text{coord. angulaire de } z)$$

qui montre que la transformée de Fourier du noyau $(2\pi)^{\frac{m}{2}} \frac{y_1 - x_1}{r^{m+1}}$ est égale au symbole du noyau $\frac{y_1 - x_1}{r^{m+1}}$.

Supposons la caractéristique indépendante du pôle et quadratiquement intégrable sur la sphère unité S ; alors le symbole de cette intégrale coïncide avec la transformée de Fourier de son noyau.

Théorème. - Soit $K(x-y) = (2\pi)^{\frac{m}{2}} f(\theta)/r^m$ avec $f(\theta) \in L_2(S)$ et

$$\int_S f(\theta) dS = 0.$$

Alors la transformée de Fourier de K est un opérateur sur f , complètement continu dans $L_2(S)$.

Démonstration. - En faisant le changement $x' = |z| x$, on se ramène au cas où $|z| = 1$, c'est-à-dire où FK est 1 fonction de points de la sphère unité S .

$$\begin{aligned} \int_{E_m} e^{-i(x,z)} \frac{f(\theta)}{R^m} dx &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon < R < N} e^{-i(x,z)} \frac{f(\theta)}{R^m} dx \\ &= \int_S f(\theta) dS \int_0^1 \frac{e^{-i(x,z)} - 1}{R} dR + \int_S f(\theta) dS \int_1^\infty \frac{e^{-i(x,z)}}{R} dR \end{aligned}$$

Le noyau de la 1^{ère} intégrale est continu.

Soit $\gamma = (\vec{x}, \vec{z})$. Alors
$$\int_1^\infty \frac{e^{-i(x,z)}}{R} dR = \int_1^\infty \frac{e^{-iR\cos\gamma}}{R} dR$$

$$= \ln \frac{1}{|\cos\gamma|} + 1 \text{ fonction bornée } Q(\cos\gamma)$$

. $\cos\gamma > 0$. Posons alors $R \cos\gamma = t$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{e^{-R\cos\gamma}}{R} dR = \int_{\cos\gamma}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{\cos\gamma}^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt + \ln \frac{1}{\cos\gamma} + \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

d'où

$$Q(\cos\gamma) = \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt + \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = - \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t} dt + \int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt - i \frac{\pi}{2} = \alpha - \frac{i\pi}{2}$$

. $\cos\gamma < 0$

On trouve
$$Q(\gamma) = \alpha + i \frac{\pi}{2}$$

La constante α peut être omise puisque $\int_S f(\theta) dS$ doit disparaître.

Ainsi donc le noyau de l'opérateur exprimant le symbole en fonction de la caractéristique s'écrit $\ln \frac{1}{|\cos\gamma|} - i \frac{\pi}{2} \text{ signe}(\cos\gamma)$

Cet opérateur est en outre complètement continu. Il suffit de voir que :

$$\int_S \int_S \ln^2 \frac{1}{|\cos\gamma|} dS dS_1 = \int_S dS \int_S \ln^2 \frac{1}{|\cos\gamma|} dS_1 \text{ est fini.}$$

Pour cela, nous choisissons un système de coordonnées tel que le 1^{er} axe passe par le point θ . Alors

$$\int_S \ln^2 \frac{1}{|\cos \gamma|} dS_1 = \int_0^\pi \ln^2 \frac{1}{|\cos \gamma|} \sin^{m-2} \gamma d\gamma \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \sin^{m-3} v_2 \dots \sin v_{m-2} dv_2 \dots dv_{m-1}$$

$$= \text{cte.} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Nous pouvons dès lors adopter pour un opérateur singulier A, dont la caractéristique ne dépend pas du pôle la nouvelle représentation :

$$A = F^{-1} \phi F \quad F = \text{transformée de Fourier}$$

$$\phi(\theta) = a + F\left[\frac{f(\theta)}{r^m}\right]$$

Nous énonçons maintenant 3 propriétés importantes du symbole :

1 - Supposons effectué le changement de coordonnées linéaire :

$$x = B\xi \quad y = B\eta \quad \text{et} \quad \xi = B^* B\xi = B^* x$$

$$B^* = \text{transportée de } B$$

Alors le symbole s'écrit :

$$\hat{\phi}(\xi) = \phi[(B^*)^{-1} \xi]$$

Si la transformation est orthogonale $(B^*)^{-1} = B$ et alors

$\hat{\phi}(\xi) = \phi(B\xi)$. C'est-à-dire que l'ensemble des valeurs du symbole est invariant dans une transformation orthogonale.

2 - Si la caractéristique est la fois continûment différentiable par rapport aux coordonnées cartésiennes de θ , alors le symbole possède des dérivées continues à un ordre $\leq k$ par rapport aux coordonnées angulaires.

3 - Si, pour un x fixé, la caractéristique $f(x, \theta)$ satisfait la condition $\int_S |f(x, \theta)|^2 dS < \infty$, alors le symbole, pour le même x , est continu sur la sphère S .

Autre représentation d'un opérateur singulier.-

Soient $v_1, v_2, \dots, v_{m-2}, v_{m-1}$ [$0 \leq v_j \leq \pi$, $j \leq m-2$, $-\pi < v_{m-1} \leq \pi$] les coordonnées angulaires de θ . Examinons alors l'opérateur H_j ($j = 1, 2, \dots, m-1$) dont le symbole est égal à e^{iv_j} . Soit $\varepsilon_j(\theta)$ la fonction spectrale de H_j . On a alors :

$$H_j = \int_0^\pi e^{iv} d\varepsilon_j(v) \quad 1 < j < m-2 \quad \text{et} \quad H_{m-1} = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{iv} d\varepsilon_{m-1}(v)$$

Soient alors h_j les opérateurs de multiplication des fonctions e^{iv_j} ($1 \leq j \leq m-1$) et leurs fonctions spectrales $\varepsilon_j^!(v)$. Le symbole $\phi(\theta)$ est une fonction unique de $e^{iv_1}, e^{iv_2}, \dots, e^{iv_{m-2}}, e^{iv_{m-1}}$

$$\phi(\theta) = \phi(e^{iv_1}, e^{iv_2}, \dots, e^{iv_{m-1}})$$

Donc l'opérateur de multiplication de $\phi(\theta)$ est une fonction des h_j . Mais alors, on a la décomposition spectrale :

$$\phi(\theta) u = \int_\pi \phi(e^{iv_1^*}, \dots, e^{iv_{m-1}^*}) d\varepsilon'(\theta^*) u = \int_\pi \phi(\theta^*) d\varepsilon'(\theta^*) u$$

π étant le parallépipède $0 \leq v_j^* \leq \pi$, $-\pi \leq v_{m-1}^* \leq \pi$

et

$$d\varepsilon'(\theta^*) = \prod_{j=1}^{m-1} d\varepsilon_j^!(v_j^*)$$

On en tire que :

$$d\varepsilon_j(v_j) = F^{-1} d\varepsilon_j^!(v_j) F$$

d'où

$$Au = \int_{\pi} \phi(\theta) d\varepsilon(\theta) u \quad \text{avec} \quad d\varepsilon(\theta) = \frac{m-1}{1} d\varepsilon_j(v_j)$$

donnant une nouvelle représentation de l'opérateur A. En adoptant cette nouvelle représentation pour un opérateur dont la caractéristique dépend du pôle, on peut élargir l'étude des propriétés du symbole, qui demeurent pour la plupart des extensions des propriétés déjà mentionnées à propos des symboles indépendants du pôle. Nous nous contentons d'énoncer le théorème fondamental suivant :

Théorème. - Supposons les symboles $\phi_A(x, \theta)$ et $\phi_B(x, \theta)$ des 2 opérateurs singuliers A et B uniformément continus par rapport à θ , comme fonctions du point ξ de la sphère de Riemann. Supposons en outre que ces symboles $\in W_2^l(S)$ uniformément par rapport à x , avec

$$l > \frac{m+3}{2} \quad p \geq 2$$

et

$$l > \frac{m-1}{p} + 2 \quad 1 < p < 2$$

Alors l'opérateur $AB - BA$ est complètement continu dans $L_p(E_m)$ et le symbole du produit AB est égal au produit $\phi_A(x, \theta) \phi_B(x, \theta)$.

§ 3 - Equations intégrales singulières.

Cas où le symbole est indépendant du pôle :

Soit $A_0 u = F^{-1} \phi(\theta) F u = g(x)$ l'équation intégrale singulière "canonique".

Nous faisons les hypothèses suivantes :

* $\phi(\theta)$ est fini et la limite inférieure de $|\phi(\theta)|$ est > 0 .

* $g(x) \in L_2(E_m)$

Alors $[\phi(\theta)]^{-1}$ existe et est borné ; donc l'opérateur $B_0 = f^{-1}[\phi(\theta)]^{-1} F$ est borné dans $L_2(E_m)$. Et on a $B_0 = A_0^{-1}$.

L'équation a une solution unique dans $L_2(E_m)$, s'exprimant par :

$$u = F^{-1}[\phi(\theta)]^{-1} Fg$$

Dans le cas général donc, l'équation type :

$$F^{-1} \phi(\theta) Fu + Tu = z(x) ,$$

T opérateur complètement continu dans E_m peut être réduite à l'équation équivalente du type Schauder-Riesz :

$$u + B_0 Tu = B_0 g$$

. Si $[\phi(\theta)]^{-1} \hat{\in} W_2^{(\ell)}(S)^*$, alors B_0 est borné dans $L_2(E_m)$ [$\ell \geq \frac{m+1}{2}$]

. Si en plus $g(x) \in L_2(E_m)$, alors l'équation a une solution unique dans $L_2(E_m)$.

Symbole dépendant du pôle.-

Soit l'équation intégrale singulière.

(*) $f(x, t, \dots, \theta) \hat{\in} W_p^{(\ell)}(S)$ veut dire que : $\int_S |f(x, t, \dots, \theta)|^p dS \leq C$ et $\int_S |D^\ell f|^p dS \leq C$ et $f(x, t, \dots, \theta) \in W_p^{(\ell)}(S)$ pour des valeurs fixées des paramètres.

$$Au = \int_{\pi} \phi(x, \theta) d\varepsilon(\theta) u + Tu = g(x) \quad g(x) \in L_p(E_m)$$

Supposons $\phi(x, \theta) \in \hat{W}_2^{(\ell)}(S)$ $[\ell \geq \frac{m-1}{p} + 1$ pour $p < 2$ et

$$\ell \geq \frac{m+1}{2} \text{ pour } p \geq 2]$$

et qu'en plus : $\inf |\phi(x, \theta)| > 0$

Alors, un opérateur quelconque dont le symbole est $\phi^{-1}(x, \theta)$ peut être pris comme opérateur régularisant. Si B est un tel opérateur, on aura :

$$AB = I + T, \quad T \text{ étant complètement continu dans } L_p(E_m).$$

Il est évident qu'alors, pour l'opérateur conjugué A^* , on prendra un opérateur ayant pour symbole $[\phi(x, \theta)]^{-1}$.

Il s'ensuit les théorèmes suivants :

- 1 - chacun des opérateurs A et A^* possède un nombre fini de solutions.
- 2 - l'opérateur A est normalement soluble.
- 3 - l'indice de l'opérateur A ne dépend pas d'un terme complètement continu.

Premier théorème fondamental sur l'indice.-

Examinons l'opérateur

$A_\lambda u \equiv u(x) - \lambda \int_{\pi} \phi(x, \theta) d\varepsilon(\theta) u + Tu$, $\phi(x, \theta)$ satisfaisant les conditions déjà mentionnées ci-haut.

Soit $\sigma =$ le sous-ensemble du plan λ pour lequel le symbole $1 - \lambda \phi(x, \theta)$ a une limite inférieure (pour le module) égale à zéro.

$\Delta = C_{\text{plan}\lambda}(\sigma) = \bigcup \Delta_j$, l'ensemble des Δ_j étant fini dénombrable. Alors le théorème fondamental est vrai :

Théorème. - Dans chacun des domaines Δ_j , l'indice de l'opérateur est constant.

Démonstration. - Considérons les valeurs du paramètre : λ et $\lambda + \Delta\lambda$. Choisissons $\Delta\lambda$ tel que :

- . $(\lambda + \Delta\lambda) \in \delta_j$, δ_j étant un sous-domaine fermé de Δ_j
- . $|\Delta\lambda| \cdot \|B_\lambda\| \|C\| < 1$ avec $Cu = \int_{\pi} \phi(x, \theta) d\varepsilon(\theta) u$

On sait qu'alors $\text{Ind } A_{\lambda + \Delta\lambda} = \text{Ind } A_\lambda$.

D'après le lemme de Borel, on conclut à la constance de l'indice dans le domaine Δ_j entier.

D'où les corollaires :

1. - Si $\phi(x, \theta) \in \hat{W}_2^{(\ell)}(S)$ avec $\ell \geq \frac{m-1}{p} + 2$
 - . $\phi(x, \theta)$ est continu sur la sphère de Riemann par rapport à θ .
 - . $\sup |\phi(x, \theta)| < 1$. A

$$\text{Alors } \text{Ind} \left[u(x) - \int_{\pi} \phi(x, \theta) d\varepsilon(\theta) u + Tu \right] = 0$$

En effet, considérons l'opérateur :

$$u(x) - \lambda \int_{\pi} \phi(x, \theta) d\varepsilon(\theta) u + Tu \quad \text{avec} \quad \sup |\phi(x, \theta)| = q < 1$$

Dans le cercle $|\lambda| < q^{-1}$, le symbole satisfait
 $\inf |1 - \lambda \phi(x, \theta)| \geq 1 - |\lambda| q > 0$.

Donc l'indice est constant dans le cercle $|\lambda| < q^{-1}$. Or il est
 égal à zéro pour $\lambda = 0$. C.Q.F.D.

2. - Soient A_t un opérateur singulier dont le symbole $\phi(x, \theta, t)$
 dépend d'un paramètre $t \in [0, 1]$. Supposons :

$$- \phi(x, \theta, t) \in \hat{W}_2^{(\ell)}(S) \quad (\ell \geq \frac{m-1}{p} + 2)$$

$$- \|\phi(x, \theta, t + \Delta t) - \phi(x, \theta, t)\|_{W_2^{(\ell)}(S)} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \quad \text{uniformément par rapport à } x \text{ et } t.$$

- $\phi(x, \theta, t)$ continu uniformément en ξ et t par rapport à θ
 ξ : image de x sur la sphère de Riemann.

$$- \inf |\phi(x, \theta, t)| > 0$$

Alors $\text{Ind } A_t$ est indépendant de t .

En effet, supposons sans diminuer la généralité que A_t est "canonique".
 Alors A_t est borné. Donc $\|B_t\| \leq M$ ($M = \text{cste}$) où B_t est l'opérateur
 canonique de symbole $[\phi(x, \theta, t)]^{-1}$.

Il suffit alors de choisir Δt tel que $\|A_{t+\Delta t} - A_t\| > M^{-1}$ pour conclure que $\text{Ind } A_{t+\Delta t} = \text{Ind } A_t$. C.Q.F.D.

Deuxième théorème fondamental.

Soit le symbole $\phi(x, \theta)$ satisfaisant les conditions du premier théorème, alors l'équation $Au \equiv \int_{\pi} \phi(x, \theta) d\varepsilon(\theta) u + Tu = g(x)$ se prête à une régularisation équivalente et son indice est nul.

Nous donnons la démonstration pour les cas

$\left. \begin{array}{l} m = 2 \\ m = 3 \end{array} \right\}$ qui sont les plus utiles en pratique

(c'est notamment le cas des équations de l'élasticité).

$m = 2$

D'après les conditions du théorème $\phi(x, \theta) = \phi(x, v)$, $0 \leq v \leq 2\pi$ possède une dérivée seconde généralisée quadratiquement intégrable :

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right|^2 dv \leq C = \text{cste}.$$

La série $\phi(x, v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(x) e^{inv}$ est alors absolument et uniformément convergente puisque $|a_n(x)| \leq C/n^2$.

Soit alors

$$\phi_n(x, v) = \sum_{-n}^{+n} a_k(x) e^{ikv}$$

Choisissons n tel que $|a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ et $|\phi(x, v) - \phi_n(x, v)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Posons :

$$\phi_0(x, v) = \frac{2}{3} \varepsilon e^{inv} + \phi_n(x, v) \text{ et } A_0 \text{ l'opérateur correspondant}$$

Alors

$$|\phi(x, v) - \phi_0(x, v)| < \varepsilon$$

$$\phi_0(x, v) = \left[\frac{2}{3} \varepsilon + a_n(x) \right] e^{-inv} \frac{2n}{\pi} \left[\alpha_k(x) - e^{iv} \right]$$

avec $\sup |\alpha_k(x)| < 1$ ou $\inf |\alpha_k(x)| > 1$. Faisons en 2 groupes :

$$\alpha'_k(x) \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\alpha''_k(x) \quad k = 1, 2, \dots, \sigma$$

$$\sigma + s = 2n$$

$$\text{et posons } \phi'(x, e^{iv}) = \frac{s}{\pi} \left[\alpha'_k(x) - e^{iv} \right] ; \quad \phi''(x, e^{iv}) = \frac{\sigma}{\pi} \left[\alpha''_k(x) - e^{iv} \right]$$

Soit alors :

$$\begin{aligned} \phi(x, \theta, t) &= \left[\frac{2}{3} \varepsilon + a_n(x) \right] e^{-inv} \frac{s}{\pi} \left[(1-t) \alpha'_k(x) - e^{iv} \right] \frac{\sigma}{\pi} \left[\alpha''_k(x) - (1-t) e^{iv} \right] \\ &= \left[\frac{2}{3} \varepsilon + a_n(x) \right] \cdot (1-t)^s e^{-inv} \phi'\left(x, \frac{e^{iv}}{1-t}\right) \phi''\left[x, (1-t) e^{iv}\right] \end{aligned}$$

et A_t l'opérateur correspondant, qui coïncide avec A_0 pour $t = 0$. A_t satisfait les conditions du 2^{ème} corollaire. Donc $\text{Ind } A_0 = \text{Ind } A_1$.

$$\text{Or } A_1 = (-1)^s \left[\frac{2}{3} \varepsilon + a_n(x) \right] \frac{\sigma}{\pi} \alpha''_k(x) h^{s-n}$$

$$\Rightarrow \text{Ind } A_1 = (s-n) \text{Ind } h = 0$$

Donc $\text{Ind } A_0 = 0$.

Il suffit alors de choisir ε tel que $\sup \left| \frac{\phi - \phi_0}{\phi_0} \right| < 1$

Or $\phi = \phi_0 \left[1 - \frac{\phi_0 - \phi}{\phi_0} \right]$. Il lui correspond l'opérateur :

$$A = A_0(I - A_1) + T_2 \quad A_1 \text{ de symbole } \frac{\phi - \phi_0}{\phi_0}$$

$$\text{Donc } \text{Ind } A = \text{Ind } A_0 + \text{Ind}(I - A_1) = 0 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

$$m = 3$$

Le symbole, ainsi que ses dérivées première et seconde, peut être développé en séries convergentes (absolument et uniformément). Soit $\gamma(x, \theta)$ la somme partielle de la série telle que :

$$|\phi(x, \theta) - \gamma(x, \theta)| < \varepsilon \quad \theta \in \text{sphère unité.}$$

θ est fonction de v_1 et de v_2 ($0 \leq v_1 \leq \pi$; $0 \leq v_2 \leq 2\pi$).

Mais la continuité par rapport à θ et la continuité par rapport à v_1 et v_2 ne sont pas équivalentes. (En particulier e^{iv_2} est discontinue aux pôles de la sphère S).

Cependant, les polynômes sphériques sont continus et indéfiniment différentiables, en tant que fonction de θ . En particulier $e^{\pm iv_2} \sin v_1$ qui est la fonction sphérique du premier ordre.

Deux cas sont donc à examiner :

$1 - \phi = \phi(x, v_1)$ Alors continuité par rapport à θ = continuité par rapport à v_1 .

Et on peut écrire : $\gamma(x, \theta) = \sum_0^n a_k(x) P_k(\cos v_1)$, P_k : polynôme de Legendre.

Prenons $\phi_0(x, \theta) = \gamma(x, \theta) = \sum_0^n b_k(x) \cos^k v_1$ (1)

Or $|\phi(x, \theta) - \phi_0(x, \theta)| < \varepsilon \implies \inf |\phi_0(x, \theta)| > 0$ pour ε judicieusement choisi

(1) $\implies \phi_0(x, \theta) = (-1)^n b_n(x) \prod_1^n [\alpha_k(x) - \cos(v_1)]$ (2)

α_k = racines du polynôme (1)

$$\inf |\phi_0(x, \theta)| > 0 \implies \begin{cases} \operatorname{Re} \alpha_k(x) = 0 \\ \inf |\alpha_k(x)| > 1 \end{cases}$$

$\phi_0(x, \theta)$ peut s'écrire aussi : $\phi_0(x, \theta) = b_0(x) \prod_1^n \left[1 - \frac{\cos v_1}{\alpha_k(x)} \right]$

Considérons alors le symbole $\phi_0(x, \theta, t) = b_0(x) \prod_1^n \left[1 - \frac{(1-t) \cos v_1}{\alpha_k(x)} \right]$

$$= \sum_0^n (1-t)^k b_k(x) \cos^k v_1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

et l'opérateur canonique correspondant A_t .

Or $\phi_0(x, \theta, t)$ est continu sur la sphère de Riemann puisqu'il en est de même de $b_k(x)$, et $|\phi_0(x, \theta, t)| > 0$.

D'après le lemme 2

$$\operatorname{Ind} A_0 = \operatorname{Ind} A_1 = \operatorname{Ind} b_0(x) I = 0$$

Avec les mêmes notations que précédemment on a :

$$\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind} A_0 + \operatorname{Ind}(I - A_1) = 0$$

C.Q.F.D.

2 - Cas général : $\phi(x, \theta) = \phi(x, v_1, v_2)$

Développons $\phi(x, \theta)$ en série de fonctions sphériques, convergente d'après les conditions du théorème.

Soit $\phi_0(x, \theta)$ la somme partielle telle que $|\phi(x, \theta) - \phi_0(x, \theta)| < \varepsilon$, avec ε tel que $\inf |\phi_0(x, \theta)| > 0$.

Dans l'espace à 3 dimensions, $Y_{j,3}^{(k)}(\theta)$ diffèrent des $P_j^{(k)}(\cos v_1) e^{\pm i k v_2}$ par une constante multiplicative.

D'autre part : $P_j^k(\cos v_1) = \sin^{|k|} v_1 \pi_{j-k}(\cos v_1)$, $\pi_{j-k} = \text{polyn.}$
de d^{0}_{j-k}

On peut donc écrire :

$$\phi_0(x, \theta) = \sum_{-n}^{+n} b_k(x, v_1) \sin^{|k|} v_1 e^{i k v_2}$$

$$b_k(x, v_1) = \text{polyn. en } \cos v_1$$

$$\text{Posons } e^{i v_2} = \frac{z+i}{z-i} \implies \phi_0(x, \theta) = \frac{P(v_1, z)}{(z^2+1)^n}$$

$$P(v_1, z) = \sum_{-n}^{+n} b_k \sin^{|k|} v_1 (z+i)^{n+k} (z-i)^{n-k}$$

$$|p_0| = \left| \sum_{-n}^{+n} b_k \sin^{|k|} v_1 \right| = \text{mod} |\phi_0(x, \theta)|_{v_2=0} > 0$$

Puisque $\inf |\phi_0(x, \theta)| > 0$, $P(v_1, z)$ n'a pas de racines réelles pour des valeurs réelles de v_1 .

$$v_1 = 0 \implies P(0, z) = b_0(x, 0)(z^2+1)^n \quad a \begin{cases} n \text{ racines} = +i & \text{pour } \text{Im } z > 0 \\ n \text{ " } = -i & \text{" } \text{Im } z > 0 \end{cases}$$

$P(v_1, z)$ n'a pas de racines réelles, donc, pour v_1 fixé, il possède n racines $\alpha_1 \dots \alpha_n$ dans le $\frac{1}{2}$ plan supérieur et n racines $\beta_1 \dots \beta_n$ dans le $\frac{1}{2}$ plan inférieur.

$$\begin{aligned} \text{Et alors } \phi_0(x, \theta) &= \frac{p_0}{(z^2+1)^n} \pi \prod_{k=1}^n (z-\alpha_k)(z-\beta_k) \\ z = i \frac{e^{iv_2} + 1}{e^{iv_2} - 1} &\Rightarrow \phi_0(x, \theta) = \frac{p_0}{4^n} \pi \prod_{k=1}^n (\alpha_k + i)(\beta_k - i) \left[1 - \frac{\alpha_{k-i}}{\alpha_{k+i}} e^{iv_2} \right] \left[1 - \frac{\beta_{k+i}}{\beta_{k-i}} e^{iv_2} \right] \\ &= \underbrace{\phi_1}_{\uparrow} \cdot \underbrace{\phi_2}_{\uparrow} \cdot \underbrace{\phi_3}_{\nearrow} \cdot \underbrace{\phi_4}_{\nearrow} \end{aligned}$$

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les opérateurs canoniques correspondants.

Alors :

$$\begin{aligned} A_0 &= \sum_{k=1}^n \text{Ind } A_k = \text{Ind } A_1 + \text{Ind } A_2 + \text{Ind } A_3 + \text{Ind } A_4 \\ &= 0 + 0 + \text{Ind } A_3 + \text{Ind } A_4 \end{aligned}$$

Examinons $\text{Ind } A_3$:

$$\text{Pour cela, on considère le symbole } \phi_3(x, \theta, t) = \frac{n}{\pi} \left(1 - \frac{\alpha_{k-i}}{\alpha_{k+i}} t e^{iv_2} \right) \quad 0 \leq t \leq 1$$

et l'opérateur correspondant $A_t^{(3)}$.

On a :

$$A_0^{(3)} = I, A_1^{(3)} = A^{(3)}$$

Or $\phi_3(x, t)$ est un symbole qui satisfait les conditions du corollaire 2 donc

$A_t^{(3)}$ indépendant de t .

$$\text{D'où } \text{Ind } A^{(3)} = \text{Ind } A_O^{(3)} = \text{Ind } I = 0.$$

Pour $\text{Ind } A_L$ la démonstration est exactement identique.

Conclusion. -

$$\text{Ind } A_O = 0$$

C.Q.F.D.

EXTENSIONS PARAMETRIQUES

. $p > 2$.

Soit l'équation intégrale singulière $Au + Tu = g(x)$ $g(x) \in L_p(E_m)$ (1).

A : opérateur singulier dont le symbole $\phi(x, \theta)$ est uniformément continu sur la sphère de Riemann. Supposons en plus $\phi(x, \theta) \in \hat{W}_2^{(l)}(S)$.

En plus : on suppose qu'il est possible de tracer une courbe L continue et "lisse" joignant les 2 points $\xi = 0$ et $\xi = \infty$ dans le plan complexe, L n'ayant pas de point commun avec l'ensemble des valeurs du symbole. Sans diminuer la généralité, on supposera qu'il existe une constante β tel que :

$$|\phi(x,) - \xi| \geq \beta \quad \xi \in L \quad (2)$$

Soit $\tilde{L}$ la transformée de L par la transformation $\xi = \frac{\lambda-1}{\lambda}$
 $\tilde{L}$ est une courbe finie (puisque, si L existe, on peut toujours éviter de passer par le point $\xi = 1$).

Examinons alors l'équation : $u - \lambda(u - Au) + tu = g(x) \quad \lambda \in \tilde{L} \quad (3)$

dont le symbole est $1 - \lambda + \lambda \phi$.

$$(2) \text{ donne pour } \lambda \in \tilde{L} \quad \beta \leq \left| \phi - \frac{\lambda-1}{\lambda} \right| = \frac{|1-\lambda+\lambda\phi|}{|\lambda|}$$

Or ϕ est bornée. Soit $|1-\phi| \leq K$ = iste. En prenant $|\lambda| \geq \frac{1}{2K}$, on a :

$$|1-\lambda+\lambda\phi| \geq \frac{\beta}{2K} \quad \text{donc} \quad |1-\lambda+\lambda\phi| > 1 - |\lambda| K > \frac{1}{2}$$

Donc $\text{Ind}[I-\lambda(I-A)]$ est indépendant de λ .

En remplaçant par $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$, on a donc $\text{Ind } A = \text{Ind } I = 0$.

. On entrevoit donc par là la possibilité d'avoir une régularisation équivalente pour l'équation (1). En effet :

$$\text{Soit } \lambda \in \tilde{L} \text{ et } H_\lambda \text{ l'opérateur : } H_\lambda u = \int_{\pi} \frac{1-\phi(x,\theta)}{1-\lambda+\lambda\phi(x,\theta)} d\varepsilon(\theta) u$$

Or $\text{Ind} |1-\lambda+\lambda\phi| > 0$ donc

$$\left| \frac{1-\phi(x,\theta)}{1-\lambda+\lambda\phi(x,\theta)} \right| < C = \text{liste indépendante de } \lambda.$$

$\lambda = 0 \implies \|I-A\| < C$. Donc si $|\lambda_0| \leq \frac{1}{2C}$ alors l'opérateur :

$[I-\lambda_0(I-A)]^{-1}$ existe et est défini dans tout l'espace $L_p(E_m)$,

et en plus il est borné. Son symbole est $[1-\lambda_0+\lambda_0\phi]^{-1}$.

En faisant opérer l'opérateur sus-mentionné sur les 2 membres de l'équation (3), on obtient une équation équivalente avec le symbole :

$$\frac{1-\lambda+\lambda\phi}{1-\lambda_0+\lambda_0\phi} = 1 - \frac{(\lambda-\lambda_0)(1-\phi)}{1-\lambda_0+\lambda_0\phi}$$

De même on applique à la nouvelle équation l'opérateur

$$[I - (\lambda_1 - \lambda_0)H_{\lambda_0}]^{-1} \quad \text{avec} \quad |\lambda_1 - \lambda_0| \leq \frac{1}{2C} . \text{ On obtient une nouvelle équation,}$$

ayant pour symbole :

$$1 - \frac{(\lambda - \lambda_1)(1-\phi)}{1-\lambda_1+\lambda_1\phi} \quad \text{équivalente à (3) .}$$

$$\text{Au bout de } k \text{ étapes, on aura le symbole } 1 - \frac{(1-\lambda_k)(1-\phi)}{1-\lambda_k+\lambda_k\phi}$$

Pour k assez grand on peut poser $\lambda_k = 1$ et on obtient donc une équation dont le symbole est égal à 1, équivalente à (1).

$p = 2$.

On suppose toujours que $\phi \in W_2^{(k)}(S)$ et $\inf |\phi| > 0$.

Si (1) est soluble, alors elle est équivalente à

$$(A^* + T^*)(A + T)u = (A^* + T^*)g \quad (4)$$

Le symbole de (4) n'est autre que $|\phi(x, \theta)|^2 > 0$ et est réel.

Dès lors, si l'on prend $L = [-\infty, 0]$, on peut appliquer la procédure ci-haut et réduire (1) à une équation équivalente du type Schauder-Riesz.

(Équivalente si l'équation (1) est soluble ; en effet les équations de Schauder-Riesz sont toujours solubles).

Exemple. - Soit l'équation unidimensionnelle :

$$Pu = a(z) u(z) - \frac{b(z)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{u(t)}{t-z} dt + Tu = g(z) \quad z \in \gamma$$

γ : courbe fermée "lisse" dans le plan, $a(z)$ et $b(z)$ continues sur γ
 T complètement continu dans $L_p(\gamma)$.

$$\text{Symbole}(P) = \phi(z, j) = a(z) - j b(z) \quad (j = \pm 1).$$

Prenons par exemple :

$$||\phi(z, j)|| = \max |a(z)| + \max |b(z)| \quad z \in \gamma$$

La non-évanescence du symbole équivaut ici à exiger
 $a^2(z) - b^2(z) \neq 0 \quad z \in \gamma$.

D'après la théorie unidimensionnelle, nous savons que :

$$\text{Ind } P = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\gamma} d \arg[a(z) - b(z)] - \int_{\gamma} d \arg[a(z) + b(z)] \right\}$$

L'ensemble des valeurs du symbole est situé sur les deux courbes
représentées paramétriquement par

$$\xi = a(z) - b(z) \quad \text{et} \quad \xi = a(z) + b(z) \quad z \in \gamma$$

Si aucune de ces courbes n'entoure le point $\xi = 0$, alors la
courbe L existe et l'extension paramétriquement est possible et dans ce
cas $\text{Ind } P = 0$ d'ailleurs.

Si une des courbes entoure le point 0, alors $\text{Ind } P$ peut être différent de zéro, voire négatif ; mais alors la régularisation équivalente est impossible et la procédure d'extension est inapplicable.

§ 4 - Systèmes d'équations intégrales singulières.

Nous étudions les systèmes de la forme :

$$\sum_{k=1}^m A_{jk} u_k = g_j(x) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

A_{jk} a pour symbole $\phi_{jk}(x, \theta)$.

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{sera dite "opérateur matriciel} \\ \text{singulier".} \end{array}$$

En posant $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ et $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$, on peut considérer l'écriture du système sous la forme :

$$Au = g.$$

$$\phi(x, \theta) = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1n} \\ \vdots & & \\ \phi_{n1} & \dots & \phi_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{sera dite "matrice symbolique} \\ \text{du système".} \end{array}$$

$\delta = \det \phi$ sera dit : "déterminant symbolique" de l'opérateur A . Il est évident qu'au produit $A_1 A_2$ correspond la matrice $\phi_1 \phi_2$.

Théorème 1. - Si $\inf |\delta| > 0$, alors, dans l'espace correspondant $L_p(\Gamma)$, le système (1) est normalement soluble et son indice est fini.

Démonstration. - Il suffit de rappeler que les opérateurs A et A^* sont régularisables. Des régularisants possibles : les opérateurs correspondants aux matrices symboliques $\phi^{-1}(x, \theta)$ et $\phi^{*-1}(x, \theta)$.

A noter la différence avec le cas d'une équation unique où l'indice devait être égal à zéro.

Théorème 2. - Si les valeurs propres de la matrice $\psi(x, \theta)$ ont un module strictement inférieur à l'unité, $\forall x$ et θ , alors l'indice du système est nul avec $\psi(x, \theta) = I - \phi(x, \theta)$.

Démonstration. - Nous supposons que les éléments de la matrice $\psi(x, \theta)$ satisfont les conditions :

- 1) $\psi_{jk}(x, \theta) \in W_2^{(l)}(S) \quad (l \geq \frac{m-1}{q} + 2, \quad q = \min(p, p'))$
- 2) $\psi_{jk}(x, \theta)$ continues sur la sphère de Riemann uniformément.

Soit A_λ l'opérateur associé à la matrice $I - \lambda\psi(x, \theta)$, et dans le plan l'ensemble ouvert Δ , où les nombres caractéristiques de cette matrice sont différents de zéro. Nous démontrons d'abord que $\text{Ind } A_\lambda$ est constant dans chaque "domaines". D'autre part, il est aisé de voir que le cercle $|\lambda| < 1$ appartient à un de ces domaines. Donc $\text{Ind } A_0 = \text{Ind } A_1$.

Or $\text{Ind } A_1 = \text{Ind } A$.

Conclusion.- $\text{Ind } A = 0 = \text{Indice } A_0 = \text{Indice d'un système du type}$
Schauder-Riesz.

Théorème 3.- Si la borne inférieure des modules des mineurs $\delta_1 \dots \delta_n$ est positive, l'indice du système est égal à zéro.

$$\delta_1 = \phi_{11} ; \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{vmatrix} \quad \dots \quad \delta_n = \delta = \det \phi(x, \theta) .$$

Théorème 4.- Si, dans le plan complexe ξ , Γ une courbe L lisse joignant les points $\xi = 0$ et $\xi = \infty$ et n'ayant aucun point commun avec l'ensemble des valeurs propres de la matrice $\phi(x, \theta)$, alors $\text{Ind } A = 0$, A étant l'opérateur singulier correspondant.

Démonstration.- Supposons que L ne passe par le point $\xi = 1$. Soit alors $\tilde{L}$ la transformée de L par $\xi = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. $\tilde{L}$ est donc de longueur finie.

On se penche alors sur le système :

$$u - \lambda(I-A) u = g(x) \quad \text{de matrice symbolique } I - \lambda(I-\phi) = \lambda(\phi - \xi I)$$

Soit $\eta > 0$ donné.

→ $|\lambda| < n$ alors $\det[I - \lambda(I - \Phi)] \approx (1 - \lambda)^n$ n étant l'ordre du système.

Donc $\exists q > 0$ tel que $|\det[(1 - \lambda)I + \lambda\Phi]| > q$

→ $|\lambda| \geq n$ Alors :

$$|\det[(1 - \lambda)I + \lambda\Phi]| \geq n^n |\det(\xi I - \Phi)| = n^n \prod_{k=1}^n |\xi - \xi_k(x, \theta)|$$

$\xi_k(x, \theta)$ étant les valeurs caractéristiques de $\Phi(x, \theta)$, formant un ensemble borné, puisqu'ils dépendent continûment de x et de θ .

Donc $\exists \gamma > 0$ tel que $|\xi - \xi_k(x, \theta)| \geq \gamma$.

Soit finalement $|\det[(1 - \lambda)I + \lambda\Phi]| \geq (\gamma n)^n \quad \lambda \in \mathbb{C}$

Conséquence. - Dans l'espace $L_p(\Gamma)$, l'opérateur singulier :

$$H_\lambda u = \int_{\pi} [(1 - \lambda)I + \lambda\Phi(x, \theta)]^{-1} [I - \Phi(x, \theta)] d\varepsilon(\theta) u \text{ est borné } \forall \lambda.$$

Posons

$$\|H_\lambda u\| < C.$$

Posons $\lambda = 0 \implies \|I - A\| < C$. Donc si $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ et $|\lambda_0| \leq \frac{C}{2}$, l'opérateur $[I - \lambda_0(I - A)]^{-1}$ existe et est borné. Son indice est nul.

On procède alors comme avant c'est-à-dire :

1) On "multiplie" "l'équation" initiale par H_λ . On obtient alors une nouvelle équation telle que :

a - elle est équivalente à l'équation initiale.

b - elle possède le même indice.

c - sa matrice symbolique est : $I - (\lambda - \lambda_0)[(1 - \lambda_0)I + \lambda_0\Phi]^{-1}(I - \Phi)$

2) On "multiplie" cette nouvelle par l'opérateur :

$$[I - (\lambda_1 - \lambda_0) H_{\lambda_0}]^{-1} \quad \lambda_1 \in \mathbb{L} \quad |\lambda_1 - \lambda_0| \leq \frac{1}{2} C.$$

3) etc... jusqu'à $\lambda_k = 1$ au bout de k opérations.

On obtient alors finalement un système de Schauder-Riesz. Et comme en chemin, l'indice n'a pas changé, on en conclut que :

$$\text{Ind } A = \text{Ind (syst. de Schauder-Riesz)} = 0 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Corollaire. - Si le déterminant symbolique n'est pas nul, mais que la matrice soit hermitique ou anti-symétrique, alors l'indice du système est nul.

Théorème 5. - Soit $m \geq 3$, le domaine d'intégration étant E_m ou un domaine de Lyapounov Γ dans lequel Γ un système régulier de coordonnées. Si le symbole est indépendant de v_{m-1} et que $\text{Inf} |\delta| > 0$, alors l'indice du système est nul.

§ 5 - Théorèmes de Giraud. -

Giraud fut l'un des rares mathématiciens français à s'intéresser au problème des équations intégrales singulières (qu'il appelait d'ailleurs à intégrales principales). Ces travaux lui ont permis en particulier d'étudier le problème de la dérivée oblique dans un espace à m dimensions. Nous résumons ici les principaux résultats théoriques auxquels il a abouti :

5.1 - Définitions.-

x et y étant 2 points de l'espace E_3 :

1 - $F(x,y)$ est dite appartenir à la classe $N^{(\alpha)}$ si :

a - $F(x,y)$ est continue pour tout couple de valeurs de x et y ,
 x et y appartenant à l'ensemble borné de valeurs pour lesquelles
 $x \neq y$.

b - $\exists \alpha$ ($0 < \alpha < 3$) tel que :

$$F(x,y) = O(r^{\alpha-3}(x,y)) \text{ et } F(x,y) = O\left(\frac{C}{r(x,y)}\right) \text{ si } \alpha = 3$$

2 - $F(x,y)$ est dite appartenir à la classe $N^{(\alpha,\lambda)}$ [$F(x,y) \in N^{(\alpha,\lambda)}$] si :

a - $F(x,y) \in N^{(\alpha)}$

b - $\exists \lambda > 0$ ($0 < \lambda < 1$) , $\lambda \leq \alpha$ tel que :

$$F(x',y) - F(x'',y) = O(r^\lambda(x',x'')) r_y^{\alpha-\lambda-3}(x',x'')$$

$x', x'', y \in E_3$ $\ell_y(x',x'') = \ell_y$ est la plus petite distance de y au
segment $x' x''$

3 - Si en plus b - est remplie pour les 2 arguments (x,y)
alors $F(x,y) \in N_*^{(\alpha,\lambda)}$.

Exemples.-

$$1) F(x,y) = \frac{1}{r(x,y)} \in N^{(2,1)}$$

$$2) F_k(x,y) = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r(x,y)} \in N_*^{(1,1)}$$

$$3) F(x,y) = \frac{f(x,y)}{r^{3-\alpha}(x,y)} \text{ où } f(x,y) \in H(\lambda) \implies F(x,y) \in N^{(\alpha,\xi)}$$

avec $\mu = \inf(\alpha,\lambda)$

5.2. - Théorèmes de Giraud :

Théorème 1.- Si $F_1(x,y)$ est un noyau quasi-singulier $\in N^{(\alpha,\lambda)}$ et $F_2(x,y) \in N^{(\beta)}$, alors

$$F_3(x,y) = \int_S F_1(x,\xi) F_2(\xi,y) dS_\xi \in N^{(\alpha+\beta-1, \mu)}, \mu > 0 \text{ inférieur à } \lambda$$

et $\mu < \alpha^{-1}$, si $\alpha + \beta \leq 4$; si $\alpha + \beta > 4$ et $\beta \leq 3$, $F_3(x,y) \in H(\mu)$ en tant que fonction de x , $\mu \leq \lambda$, $\mu \leq \alpha + \beta - 4$.

Théorème 2.- $F(x,y) \in N^{(\alpha,\lambda)}$ et $\psi(x)$ continue. Alors

$$D(x) = \int_S F(x,y) \psi(y) dS_y \in H(\mu) \quad \mu < \alpha - 1, \mu \leq \lambda.$$

Théorème 3.- $F(x,y) = F_1(x,y) + F_2(x,y)$ tel que :

a - $F_2(x,y) \in N^{(\alpha,\lambda)}$, $\alpha > 1$

b - $F_1(x,y) = f(x_1^{-y_1}, x_2^{-y_2}, x_3^{-y_3}; v(x))$; $v(x) \in H(\lambda)$

c - $f(w_1, w_2, w_3, v)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$ sont des formes homogènes positives d'ordre - 2 par rapport à w_1, w_2 et w_3 .

d - $\frac{\partial f}{\partial w_i}$ ($i = 1, 2, 3$) sont des formes homogènes positives d'ordre - 3 par rapport à w_1, w_2 et w_3 .

e - La valeur principale de l'intégrale $\int_S F_1(x,y) dS_y$ existe.

f - $\psi(x) \in H(\mu)$

g - $\mu \leq \lambda$, $\mu < \alpha$

Alors la fonction $D(x) = \int_S F(x,y) \psi(y) dS_y \in H(\mu)$

Théorème 4.- $F(x,y)$ étant la même qu'au théorème 3 et en plus :

$$a - H(x,y) \in N_*^{(\alpha,\lambda)}, \quad \alpha > 1$$

$$b - \varphi(x) \in H(\mu)$$

$$\text{Alors } \int_S H(x,y) dS_y \int_S F(y,\xi) \varphi(\xi) dS_\xi = \int_S \varphi(\xi) dS_\xi \int_S H(x,y) F(y,\xi) dS_y$$

et la fonction :

$$L(x,y) = \int_S H(x,\xi) F(\xi,y) dS_\xi \in N^{(\alpha',\lambda')}, \quad \alpha' > 1$$

Théorème 5.- $F(x,y)$ étant la même qu'au théorème 3 et en plus :

$$a - H(x,y) \in N^{(\alpha,\lambda)}, \quad \alpha > 1$$

$$b - \varphi(x) \text{ est continues,}$$

$$\text{alors } \int_S F(x,y) dS_y \int_S H(x,\xi) \varphi(\xi) dS_\xi = \int_S \varphi(\xi) dS_\xi \int_S F(x,y) H dS_y$$

$$\text{et la fonction } L'(x,y) = \int_S F(x,\xi) H(\xi,y) dS_\xi \in N^{(\alpha'',\lambda'')}, \quad \alpha'' > 1$$

Théorème 6.- $F(x,y) = F_1(x,y) + F_2(x,y)$ et $H(x,y) = H_1(x,y) + H_2(x,y)$

et en plus :

$$a - F_1 \text{ est la même qu'en théorème 3.}$$

$$b - F_2 \in N_*^{(\alpha,\lambda)}, \quad \alpha > 1$$

$$c - H_1(x,y) \text{ est semblable à } F_1(x,y) \text{ [de structure] .}$$

$$d - H_2(x,y) \in N^{(\alpha,\lambda)} \quad \alpha > 1$$

$$e - \text{L'intégrale } \int_S H_1(x,y) dS_y \text{ existe en tant que valeur principale :}$$

Alors, la fonction

$$L(x,y) = \int_S F(x,\xi) H(\xi,y) dS_\xi \in N^{(1)}.$$

Théorème 7.- $F(x,y)$ et $H(x,y)$ étant les mêmes qu'en théorème 6 et $\int_S L(x,y) dS_y$ existe en tant que valeur principale, sachant que :

$$L(x,y) = \int_S F(x,\xi) H(\xi,y) dS$$

$\exists \phi(x)$, indépendante de $\psi(x)$, tel que :

$$\int_S F(x,y) dS_y \int_S H(y,\xi) \psi(\xi) dS_\xi = - \phi(x) \psi(x) + \int_S L(x,\xi) \psi(\xi) dS_\xi.$$

Théorème 8.-

$$\phi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_S \int_{S(x,\epsilon)} F(x,\xi) H(\xi,y) dS_\xi dS_y$$

Il est à remarquer que ces théorèmes sont étroitement apparentés à ceux des pages 16-17 . (Corollaire I et II), en particulier les 4 premiers.

CHAPITRE III

APPLICATION DE LA THEORIE
DES EQUATIONS INTEGRALES A L'ELASTICITE.

Après avoir exposé succinctement les principaux résultats de la théorie des équations intégrales singulières, nous allons maintenant voir comment les équations intégrales se révèlent être un outil précieux pour la résolution des problèmes aux limites en physique mathématique et principalement en théorie de l'élasticité, où nous serons d'ailleurs en fait amenés à considérer le plus souvent un système d'équations plutôt qu'une équation. A ce propos, deux idées essentielles sous-tendent tout notre exposé :

- Les équations intégrales fournissent une méthode simple et presque irremplaçable quand il s'agit d'établir des théorèmes d'existence et d'unicité. C'est d'ailleurs uniquement ce rôle qui leur a été longtemps et le plus longuement reconnu.

- Mais depuis les récents développements des machines à calculer modernes, elles se révèlent être tout aussi bien efficaces quant à la résolution numérique de certains problèmes précis... C'est ce qui amène tout naturellement à se poser la question de les comparer aux méthodes plus classiques ; en particulier les méthodes variationnelles.

En fin de compte, nous nous poserons la question de savoir, si dans certains cas et le plus souvent possible, il n'est pas préférable de chercher à appliquer d'une façon heureuse les deux points de vue à la fois ; ceci en mettant à profit le fait que les équations intégrales peuvent être regardées

comme étant le résultat d'opérateurs linéaires, dont la théorie est de nos jours très étudiée et très approfondie. (Cf. Akhiezer et Glozman et en particulier les travaux de Kohberg).

Soulignons enfin l'existence de méthodes, traitant les équations de l'élasticité directement comme un système d'équations elliptiques de la forme $\Delta u(x,y) + a(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} + cu(x,y) = 0$, qui se révèle très concluantes en particulier en élasticité à deux dimensions. C'est en particulier l'essence des méthodes employées par I.N. VEKUA dans son récent ouvrage "New methods for solving elliptic equations" et basées sur l'introduction et la construction de la fonction de Riemann.

§ 1. Système d'équations. Formules générales.

Soit E_3 muni du référentiel $Ox_1 x_2 x_3$.

$\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ désigne le vecteur déplacement.

$$v_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) \quad j, k = 1, 2, 3 \quad \text{est le tenseur des déformations.}$$

La loi de Hooke pour un milieu isotrope et homogène s'écrit :

$$\tau_{jj} = \lambda \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu \frac{\partial v_j}{\partial x_j} ; \quad \tau_{jk} = \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) \quad j, k = 1, 2, 3$$

L'équation de l'élastodynamique s'écrit alors :

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} + F_j = \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} \quad j = 1, 2, 3$$

soit en termes de déplacements :

$$u \Delta \vec{v} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \vec{F} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2}.$$

Supposons que la force $\vec{F}$ soit de la forme :

$\vec{F}(x, t) = \vec{\phi}^{(1)}(x) \cos wt + \vec{\phi}^{(2)}(x) \sin wt$, $w \neq$ fréquences propres du milieu.

Le problème se réduit alors à trouver $\vec{v}^{(1)}$ et $\vec{v}^{(2)}$ tel que

$$\vec{v}(x, t) = \vec{v}^{(1)}(x) \cos wt + \vec{v}^{(2)}(x) \sin wt.$$

En posant $\vec{\phi} = \vec{\phi}^{(1)} + i \vec{\phi}^{(2)}$ et $\vec{u} = \vec{v}^{(1)} + i \vec{v}^{(2)}$, on se ramène à l'étude de l'équation :

$$u \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + w^2 \vec{u}(x) + \vec{\phi}(x) = 0$$

soit en écrivant

$$\Delta^* \vec{u} = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} :$$

$$\Delta^* \vec{u}(x) + w^2 \vec{u}(x) = -\vec{\phi}(x).$$

① Pour $w = 0$, on a l'équation d'équilibre $\Delta^* \vec{u} = -\vec{\phi}(x)$

② Pour $\vec{\phi}(x) = 0$, les équations homogènes correspondantes :

$$\overrightarrow{\Delta^* u} + w^2 \vec{u} = \vec{0}$$

et $\overrightarrow{\Delta^* u} = \vec{0}.$

Formules de Betti.-1 - Domaine fini.

Soit B_i un domaine fini de E_3 , rempli par un matériau élastique, S sa frontière et $\vec{n}$ la normale extérieure. Soient α et β deux réels tel que :

$$\alpha + \beta = \lambda + \mu .$$

Nous avons alors l'identité :

$$(\alpha + \beta) \int_{B_i} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m \partial x_l} dv = \alpha \int_S \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \cos n x_m dS + \beta \int_S \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \cos \vec{n} \vec{x}_l dS \quad (l, m=1,2,3)$$

Ce qui donne :

$$\int_{B_i} \vec{\Delta}^* u dv = \int_S P^{(n)} \vec{u} dS$$

avec :

$$P^{(x)} \vec{u} = P^{(1)} \vec{u} \cos n x_1 + P^{(2)} \vec{u} \cos n x_2 + P^{(3)} \vec{u} \cos n x_3$$

$$P^{(k)} \vec{u} = (\pi_{1k}, \pi_{2k}, \pi_{3k}) \quad \pi_{jk}(\vec{u}) = \alpha \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad j \neq k$$

$$\pi_{jj}(\vec{u}) = \beta \operatorname{div} u + (\alpha + \mu) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad j = k$$

Soit $\vec{v}$ ayant des dérivées suffisamment continues, permettant d'appliquer la formule d'Ostrogradsky. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{P}^{(n)} \vec{v} = Q_1 \cos n x_1 + Q_2 \cos n x_2 + Q_3 \cos n x_3$$

avec $Q_k = \sum_1^3 \pi_{jk}(x) u_j$. Soit $\vec{Q}(Q_1, Q_2, Q_3)$. On a alors :

$$\operatorname{div} \vec{Q} = \sum \sum \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_k} u_j + E(\vec{u}, \vec{v}) , \quad E(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{étant une forme bilinéaire}$$

symétrique des dérivées partielles de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\text{D'autre part} \quad \sum_1^3 \frac{\partial \pi_{jk}(v)}{\partial x_k} = \Delta_j^* \cdot \vec{v} \quad j = 1, 2, 3 .$$

$$\text{d'où} \quad \operatorname{div} \vec{Q} = \vec{u} \cdot \vec{\Delta}^* v + E(\vec{u}, \vec{v})$$

En y appliquant le théorème d'Ostrogradsky :

$$\int_{B_i} \vec{u} \cdot \vec{\Delta}^* v \, dv = \int_S \vec{u} \cdot \vec{P}^{(n)} \vec{v} \, dS - \int_{B_i} E(\vec{u}, \vec{v}) \, dv .$$

$$\text{pour } \vec{u} = \vec{v} \implies \int_{B_i} \vec{u} \cdot \vec{\Delta}^* u \, dv = \int_S \vec{u} \cdot \vec{P}^{(x)} u \, dS - \int_{B_i} E(\vec{u}, \vec{u}) \, dv$$

En échangeant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et en retranchant les 2 équations obtenues, on obtient :

$$\int_{B_i} (\vec{u} \cdot \vec{\Delta}^* \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\Delta}^* \vec{u}) \, dv = \int_S (\vec{u} \cdot \vec{P}^{(n)} \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{P}^{(n)} \vec{u}) \, dS$$

Ce sont là les formules de Betti pour un domaine fini, que nous allons détailler un peu plus, pour des valeurs admissibles de α et β .

$$\alpha = \mu, \quad \beta = \lambda$$

$$\text{Alors } \pi_{jk} = \tau_{jk} , \quad P^{(n)} u \longrightarrow T^{(n)} \vec{u}$$

$$T^{(n)} \vec{u} = T^{(1)} \cos n x_1 + T^{(2)} \cos n x_2 + T^{(3)} \cos n x_3 .$$

$$T^{(1)} = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}) ; T^{(2)} = (\tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23}) ; T^{(3)} = (\tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33})$$

et les formules de Betti deviennent :

$$\int_{B_i} \vec{u} \cdot \overrightarrow{\Delta^* v} dv = \int_S \vec{u} \cdot \vec{T}^{(n)}_v dS - \int_{B_i} W(\vec{u}, \vec{v}) dv$$

$$\int_{B_i} \vec{u} \cdot \overrightarrow{\Delta^* u} dv = \int_S \vec{u} \cdot \vec{T}^{(n)}_u dS - \int_{B_i} W(\vec{u}, \vec{u}) dv$$

$$\int_{B_i} (\vec{u} \cdot \Delta^* v - v \Delta^* u) dv = \int_S [\vec{u} \cdot \vec{T}^{(n)}_v - v \vec{T}^{(n)}_u] dS$$

Ce sont les formules de Betti classique de la théorie de l'élasticité où $\vec{T}$ représente le vecteur tension au point x , de normale extérieure $\vec{n}$, et $W(\vec{u}, \vec{u})$ est l'énergie de déformation élastique :

$$W(\vec{u}, \vec{u}) = 2\mu [2(u_{12}^2 + u_{23}^2 + u_{31}^2) + \sum_1^3 (\frac{\partial u_k}{\partial x_k})^2] + \lambda (\text{div } \vec{u})^2$$

$$\text{et } T^{(n)} \vec{u} = 2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial u} + \lambda \vec{n} \cdot \text{div } \vec{u} + \mu (\vec{n} \wedge \overrightarrow{\text{rot } \vec{u}}) .$$

$$\odot \quad \alpha = \frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu} ; \quad \beta = \frac{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu}$$

Le vecteur $P^{(n)} \vec{u} = (\alpha+\mu) \frac{\partial \vec{u}}{\partial u} + \beta \vec{n} \cdot \text{div } \vec{u} + \alpha (\vec{n} \wedge \overrightarrow{\text{rot } \vec{u}})$ devient alors :

$$N^{(n)} \vec{u} = \frac{2\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu} \frac{\partial \vec{u}}{\partial u} + \frac{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu} \vec{n} \cdot \text{div } \vec{u} + \frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu} \vec{n} \wedge \overrightarrow{\text{rot } \vec{u}}$$

qu'on appellera "pseudo-vecteur tension".

Les formules de Betti sont alors évidentes, avec cette fois :

$$W(\vec{u}, \vec{u}) = \frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu} 4(u_{12}^2 + u_{23}^2 + u_{31}^2) + 2 \sum_1^3 u_{kk}^2 + \frac{2\mu^2}{\lambda+3\mu} \sum_1^3 (\overrightarrow{\text{grad}} u_k)^2 + \frac{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu} (\text{div} u)^2$$

L'opérateur $\vec{P} = (\alpha+\mu) \frac{\partial}{\partial u} + \beta \vec{n} \text{ div } u + \alpha(\vec{n} \quad \overrightarrow{\text{rot}})$ sera dit "opérateur tension généralisée".

2 - Domaine infini.

L'étude des solutions dans un domaine infini posant le problème du comportement à l'infini de telles solutions, nous verrons plus loin comment on peut aussi établir des formules analogues pour le cas du domaine infini. Nous allons auparavant étudier le problème des solutions fondamentales.

SOLUTIONS FONDAMENTALES.

1 - Solutions fondamentales.

Sachant que tout vecteur $\vec{X}$ peut être écrit comme la somme

$\vec{X} = \overrightarrow{\text{grad}} f + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{g}$, on peut écrire donc

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} \psi(x) + \overrightarrow{\text{rot}} \Psi(x)$$

et

$$\vec{\phi} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi'(x) + \overrightarrow{\text{rot}} \Psi(x)$$

En portant dans l'équation $\Delta^* \vec{u} + w^2 \vec{u} = -\vec{\phi}$, on aura donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi + k_1^2 \phi(x) = -\frac{1}{a^2} \phi'(x) \\ \Delta \vec{\Psi} + k_2^2 \vec{\Psi}(x) = -\frac{1}{b^2} \vec{\Psi}(x) \end{array} \right\} \quad \text{avec} \quad a^2 = \lambda + 2\mu ; b^2 = \mu ; k_1^2 = \frac{w^2}{a^2} \\ k_2^2 = \frac{w^2}{b^2}$$

En particulier, si $\vec{\phi}(x)$ est une force concentrée en un point $y(y_1, y_2, y_3)$ et dirigée suivant x_1 , de module 4π on a :

$$\phi'(x) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r(x,y)} \quad \vec{\Psi}(x) = \left[0, \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{r} ; -\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{r} \right]$$

d'où le système particulier :

$$\Delta \phi + k_1^2 \phi(x) = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r(x,y)}$$

$$\Delta \Psi_1 + k_2^2 \Psi_1(x) = 0$$

$$\Delta \Psi_2 + k_2^2 \Psi_2(x) = -\frac{1}{b^2} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{r(x,y)}$$

$$\Delta \Psi_3 + k_2^2 \Psi_3(x) = \frac{1}{b^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{r(x,y)}$$

possédant les intégrales particulières :

$$\phi(x,y) = -\frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{e^{ik_1 r}}{r} - \frac{1}{r} \right) ; \Psi_1(x,y) = 0 ; \Psi_2(x,y) = \frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{e^{ik_2 r}}{r} - \frac{1}{r} \right) ; \\ \Psi_3 = -\frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{e^{ik_2 r}}{r} - \frac{1}{r} \right)$$

En faisant jouer successivement les 2 autres directions x_2 et x_3 , on aura des solutions analogues. Et on obtient ainsi une solution pour le cas d'une force concentrée, au problème dynamique. Cette solution peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\vec{u}^{(k)}(x,y) = \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\delta}^{(k)} \frac{e^{ik_2 r}}{r}) - \overrightarrow{\text{grad}} \text{div}(\vec{\delta}^{(k)} \frac{e^{ik_1 r}}{r}) \quad k = 1,2,3$$

$$\vec{\delta}^{(k)} = (\delta_{k_1}, \delta_{k_2}, \delta_{k_3}) .$$

Nous introduisons dès lors pour cette solution (vue son importance) la notation :

$$\vec{u}^{(k)}(x,y) = \Gamma^{(k)}(x,y) \quad \text{et pour les projections} \quad u_j^{(k)} = \Gamma_j^{(k)} .$$

et la matrice :

$$\Gamma(x,y) = \begin{bmatrix} \Gamma_1^{(1)} & \Gamma_1^{(2)} & \Gamma_1^{(3)} \\ \Gamma_2^{(1)} & \Gamma_2^{(2)} & \Gamma_2^{(3)} \\ \Gamma_3^{(1)} & \Gamma_3^{(2)} & \Gamma_3^{(3)} \end{bmatrix}$$

dont les vecteurs colonnes ne sont autres que les solutions fondamentales trouvées.

⊙ Il est utile de considérer les vecteurs $\vec{u}_p = \overrightarrow{\text{grad}} \psi$ et $\vec{u}_s = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\Psi}$. ($\vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s$) et les Γ_p et Γ_s correspondants, si on veut envisager u comme étant la somme d'un terme (onde) potentiel et d'un terme solénoïdal, c'est-à-dire en fait onde longitudinale et onde transversale.

⊙ En faisant $w = 0$ dans la matrice Γ , nous obtenons la matrice $\Gamma^0(x,y)$, qui n'est autre que la matrice fondamentale du problème statique correspondant.

$$\Gamma^{(k)}(x,y) = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div}(\vec{\delta}^{(k)} \frac{r}{2a^2}) - \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\delta}^{(k)} \frac{2}{2b^2})$$

⊙ Notons que $[\Gamma^{(k)} - \overset{\circ}{\Gamma}^{(k)}]$ reste borné quand $x = y$, ou $r = 0$

⊙ Notons que $\text{div}_x \Gamma^{(k)}(x,y) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{e^{ik_1 r}}{r}$. Il s'en suit dès lors que :

$$\begin{aligned} \text{div } \Gamma(x,y) &= \sum_{k,s=1}^3 i_s \frac{\partial \Gamma_s^{(k)}}{\partial x_k} = i_s \frac{\partial \Gamma_k^{(s)}}{\partial x_k} = \sum_{s=1}^3 i_s \text{div } \Gamma^{(s)} = \sum i_s \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{e^{ik_1 r}}{a^2 r} \right) \\ &= \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{e^{ik_1 r}}{a^2 r} \right) \end{aligned}$$

(i_s = vecteurs unitaires)

2 - Solutions fondamentales généralisées.

Soit $P^{(x)}$ l'opérateur tension généralisé au point x . Considérons la matrice :

$$\pi(x,y) = \begin{bmatrix} P_1^{(y)}(1) & P_2^{(y)}(1) & P_3^{(y)}(1) \\ P_1^{(y)}(2) & P_2^{(y)}(2) & P_3^{(y)}(2) \\ P_1^{(y)}(3) & P_2^{(y)}(3) & P_3^{(y)}(3) \end{bmatrix} = [\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \pi^{(3)}]$$

c'est-à-dire $\pi_k^{(s)}(x,y) = P_s^{(y)} \Gamma^{(k)}(x,y) \quad (s,k = 1,2,3)$

Rappelons que :

$$P^{(y)} \Gamma^{(k)}(x,y) = (\alpha + \mu) \frac{\partial \Gamma^{(k)}}{\partial x_y}(x,y) + \beta n_y \text{div}_y \Gamma^{(k)}(x,y) + \alpha (n_y \wedge \text{rot}_y \Gamma^{(k)}(x,y))$$

Théorème. - Les vecteurs colonnes de la matrice π sont solutions de l'équation fondamentale de l'élastodynamique au point $x(x_1, x_2, x_3)$.

En fait :

$$F = \mu \Delta_x \pi_k^{(s)}(x,y) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{div}_x \pi^{(s)}(x,y) + w^2 \pi_k^{(s)}(x,y) = 0$$

(s, k = 1, 2, 3)

En effet

$$F = (\alpha + \mu) \frac{\partial}{\partial n_y} (\mu \Delta \Gamma_k^{(s)} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{div}_x \Gamma^{(s)} + w^2 \Gamma_s^{(k)})$$

$$+ \beta \cos n_y x_s [(\lambda + 2\mu) \Delta \operatorname{div}_y \Gamma^{(k)} + w^2 \operatorname{div}_y \Gamma^{(k)}]$$

$$+ \alpha n_y [\mu \Delta \operatorname{rot}_y \Gamma^{(k)} + w^2 \operatorname{rot}_y \Gamma^{(k)}] x_s$$

Or $\mu \Delta \Gamma^{(k)} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \Gamma^{(k)} + w^2 \Gamma^{(k)} = 0$ d'après la définition même de $\Gamma^{(k)}$.

En prenant la divergence et le rotationnel de cette expression, on voit que les 2 autres parenthèses sont nulles $\implies F = 0$. C.Q.F.D.

D'où :

$$a - \alpha = \mu, \beta = \lambda$$

On obtient la solution fondamentale de première espèce :

$$\Gamma_I(x,y) = \begin{bmatrix} T_1^{(y)} \Gamma^{(1)} & T_2^{(y)} \Gamma^{(1)} & T_3^{(y)} \Gamma^{(1)} \\ T_1^{(y)} \Gamma^{(2)} & T_2^{(y)} \Gamma^{(2)} & T_3^{(y)} \Gamma^{(2)} \\ T_1^{(y)} \Gamma^{(3)} & T_2^{(y)} \Gamma^{(3)} & T_3^{(y)} \Gamma^{(3)} \end{bmatrix} = [\Gamma_I^{(1)}, \Gamma_I^{(2)}, \Gamma_I^{(3)}]$$

$$b - \alpha = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu}; \beta = \frac{(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu}$$

On obtient la solution fondamentale de deuxième espèce :

$$\Gamma_{II}(x, y) = \begin{bmatrix} N_1^{(y)} \Gamma^{(1)} & N_2^{(y)} \Gamma^{(1)} & N_3^{(y)} \Gamma^{(1)} \\ N_1^{(y)} \Gamma^{(2)} & N_2^{(y)} \Gamma^{(2)} & N_3^{(y)} \Gamma^{(2)} \\ N_1^{(y)} \Gamma^{(3)} & N_2^{(y)} \Gamma^{(3)} & N_3^{(y)} \Gamma^{(3)} \end{bmatrix} = [\Gamma_{II}^{(1)}, \Gamma_{II}^{(2)}, \Gamma_{II}^{(3)}]$$

Pour le cas statique, on a évidemment les solutions correspondantes Γ_I et Γ_{II} obtenues en faisant $w = 0$.

c - solution de troisième espèce :

Soit $v(x, y) = x_1 \ell_n(r + x_1) - r$ définie pour x arbitraire et $y(y_1, y_2, y_3) \in S$ et telle que $r + x_1 \neq 0$ pour des points intérieurs.

Cette fonction est harmonique : $\Delta_x v(x, y) = 0$.

Considérons alors la matrice :

$$Z(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} & -\frac{\partial^2 v}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & -\frac{x_2}{r(x_1+r)} & -\frac{x_3}{r(x_1+r)} \\ \frac{x_2}{r(x_1+r)} & \frac{1}{r} + \frac{r(x_1+r)-x_3^2}{r(x_1+r)^2} & \frac{x_2 x_3}{r(x_1+r)} \\ \frac{x_3}{r(x_1+r)} & \frac{x_2 x_3}{r(x_1+r)} & \frac{1}{r} + \frac{r(x_1+r)-x_2^2}{r(x_1+r)^2} \end{bmatrix}$$

On remarque que $\operatorname{div} Z^{(k)}(x,y) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} Z^{(k)}(x,y) = 0$

d'où $\Delta^* Z^{(k)} = 0$

La matrice $M(x,y) = -\frac{1}{3(\lambda+\mu)} \left[\frac{1}{2} Z - (\lambda+2\mu) \overset{0}{\Gamma} \right]$ satisfait de même

l'équation $\Delta^* M = 0$ c'est la solution fondamentale de troisième espèce.

Elle est caractérisée par la propriété très importante suivante, établie par Kupradze.

$$T^{(x)} M(x,y) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 & \frac{\partial r}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_2} & \left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 & \frac{\partial r}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_3} \\ \frac{\partial r}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_3} & \frac{\partial r}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_3} & \left(\frac{\partial r}{\partial x_3}\right)^2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r(x,y)}$$

c'est-à-dire que l'opérateur T agissant sur la solution de troisième espèce donne lieu à une singularité de la forme $\frac{\partial}{\partial n} \cdot \frac{1}{r}$ pour $x = y$. Un résultat analogue peut être établi pour l'opérateur généralisé P agissant sur la solution fondamentale $\overset{0}{\Gamma}(x,y)$.

§ 2 - Potentiels élastiques - Equations intégrales des problèmes aux limites.

La méthode de réduction des problèmes aux limites à des équations intégrales est désormais classiques. Comme pour les équations harmoniques, on peut généralement pour toute équation (ou système) elliptique, il suffit de construire des potentiels correspondants, ayant des propriétés limites bien établies, et de rechercher la solution du problème sous forme de combinaisons de ces divers potentiels. La méthode a été exposée d'une façon parachevée dans l'ouvrage de Bisatze "Boundary value problems for elliptic equations" et nous suivons ici

exactement le même plan.

1 - Potentieux élastiques.

a - $V(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma(x,y) \varphi(y) dS_y$ solution de l'équation : $\Delta^* \vec{u} + w^2 \vec{u} = 0$
potentiel de simple couche.

b - $W_I(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma_I(x,y) \varphi(y) dS_y$ solution de la même équation,
potentiel de double couche de
première espèce.

c - $W_{II}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma_{II}(x,y) \varphi(y) dS_y$ potentiel de double couche de
deuxième espèce.

d - $A(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S M(x,y) \varphi(y) dS_y$ vérifiant $\Delta^* \vec{u} = 0$
potentiel d'antenne.

e - $U(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_i} \Gamma(x,y) \varphi(y) dy$ potentiel de volume.

Ces potentiels d'oscillation donnent bien sûr pour $w = 0$, les
potentiels d'équilibre correspondants $\overset{0}{V}(x)$, $\overset{0}{W}_I(x)$, $\overset{0}{W}_{II}(x)$ et $\overset{0}{U}(x)$.

2 - Propriétés limites des potentiels élastiques.

a - Le potentiel de simple couche $V(x)$ est continu partout.

b -
$$\begin{cases} W_{I,i}(x_0) = -\varphi(x_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma_I(x_0,y) \varphi(y) dS_y \\ W_{I,e}(x_0) = \varphi(x_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma_I(x_0,y) \varphi(y) dS_y \end{cases} \quad \begin{array}{l} \varphi(y) \in H(\gamma) , \\ x \rightarrow x_0 \in S \end{array}$$

$$c - \begin{cases} W_{II,i}(x_0) = -\psi(x_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma_{II}(x_0, y) \psi(y) dS_y \\ W_{II,e}(x_0) = \psi(x_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma_{II}(x_0, y) \psi(y) dS_y \end{cases} \quad \begin{array}{l} \psi(y) \in H(\gamma) \\ x \rightarrow x_0 \in S \end{array}$$

$$d - \begin{cases} (TV)_i = \psi(x_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S [T^{(x_0)} \Gamma(x_0, y)] \psi(y) dS_y \\ (TV)_e = -\psi(x_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S [T^{(x_0)} \Gamma(x_0, y)] \psi(y) dS_y \end{cases} \quad \begin{array}{l} \psi(y) \in H(\gamma) \\ x \rightarrow x_0 \in S \end{array}$$

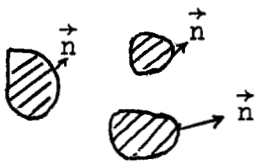
$$e - \begin{cases} (NV)_i = \psi(x_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S [N^{(x_0)} \Gamma(x_0, y)] \psi(y) dS_y \\ (NV)_e = -\psi(x_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S [N^{(x_0)} \Gamma(x_0, y)] \psi(y) dS_y \end{cases} \quad \begin{array}{l} \psi(y) \text{ continue} \\ x \rightarrow x_0 \in S. \end{array}$$

$$f - A(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S M(x, y) \psi(y) dS_y \text{ est continu dans le domaine fermé } B_i, \\ \text{pourvu que } \psi(y) \text{ soit continue.}$$

$$g - (TA)_i = (TA)_e = -\psi(x_0) + \frac{1}{2\pi} \int_S [T^{(y)} M(x, y)] \psi(y) dS_y \text{ pourvu que la} \\ \text{"densité" } \psi \text{ soit} \\ \text{continue.}$$

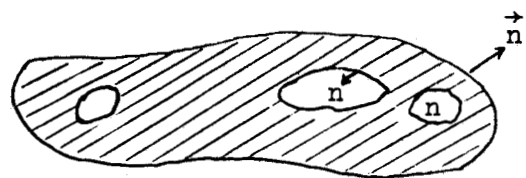
3 - Equations intégrales des problèmes aux limites.

L'espace est supposé divisé par le domaine rempli du matériau élastique en deux domaines complémentaires, simplement ou multiplement connexes. L'intérieur B_i sera toujours pris comme fini, la région extérieure B_e pouvant être finie ou infinie.



1er cas : B_i = région hachurée (finie)

B_e = région non hachurée (infinie)



2e cas : B_i = région non hachurée (finie)
 B_e = région hachurée (finie)

Nous appelons $\vec{u}(x)$ solution régulière de l'équation $\overrightarrow{\Delta^*} u + w^2 \vec{u} = 0$ (1)

1 - Dans B_i , si $\odot \vec{u}$ satisfait (1) dans B_i

$\odot$ Les formules de Betti sont applicables

$\vec{u}$ dans $\bar{B}_i = B_i + \partial B_i$.

2 - Dans B_e , si $\odot \vec{u}$ satisfait (1) dans B_e

$\odot$ Les formules de Betti sont applicables dans $\bar{B}_e$

$\odot u(x)$ satisfait en plus certaines conditions d'amortissement à l'infini, dites "conditions de radiations".

Les principaux problèmes aux limites de la théorie de l'élasticité s'énoncent alors comme suit :

D_i = Trouver la solution de (1), régulière dans B_i , telle que la limite de l'intérieur du vecteur déplacement soit égale à un vecteur donné $\epsilon H(\gamma)$ sur S .

D_e = Trouver la solution de (1), régulière dans B_e , telle que la limite de l'extérieur du vecteur déplacement soit égale à un vecteur donné $\epsilon H(\gamma)$ sur S .

T_i, T_e = Même problème si on se donne cette fois-ci la limite du vecteur tension sur S .

M_i, M_e = dits problèmes mixtes. Même énoncé relatif à la combinaison :

$$T u(x) + \sigma u(x) \quad \sigma \geq 0$$

Nous allons déduire l'équation intégrale du problème D_i , puis par analogie écrire celles de D_e , T_i , T_e , M_i et M_e :

D_i = Il suffit de rechercher la solution sous la forme du potentiel W_I .

Or
$$W_{I,i}(x_o) = -\psi(x_o) + \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma_I(x_o, y) \psi(y) dS_y$$

Il suffit d'écrire que cette limite est égale au vecteur donné $f(x_o)$.

On obtient l'équation intégrale, vérifiée par la densité ψ :

$$\psi(x_o) + \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma_I(x_o, y) \psi(y) dS_y = -f(x_o)$$

On en déduit, par un raisonnement identique :

$$T_i = \psi(x_o) + \frac{1}{2\pi} \int_S [T^{(x_o)} \Gamma(x_o, y)] \psi(y) dS_y = f(x_o)$$

$$D_e = \psi(x_o) + \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma_I(x_o, y) \psi(y) dS_y = f(x_o)$$

$$T_e = \psi(x_o) + \frac{1}{2\pi} \int_S [T^{(x_o)} \Gamma(x_o, y)] \psi(y) dS_y = -f(x_o)$$

$$M_i = \psi(x_o) + \frac{1}{2\pi} \int_S [T^{(x_o)} \Gamma(x_o, y) + \sigma(x_o) \Gamma(x_o, y)] \psi(y) dS_y = f(x_o)$$

$$M_e = \psi(x_o) - \frac{1}{2\pi} \int_S [T^{(x_o)} \Gamma(x_o, y) + \sigma(x_o) \Gamma(x_o, y)] \psi(y) dS_y = f(x_o).$$

Soit $K^*(x, y)$ la matrice associée à $K(x, y)$, c'est-à-dire obtenue à partir de $K(x, y)$ en :

- Intervertissant les arguments
- Intervertissant lignes et colonnes.

Posons $K(x,y) = \frac{1}{2\pi} T^{(x)} \Gamma(x,y)$. Nous pouvons alors condenser l'écriture des problèmes D_i, D_e et T_i, T_e .

$$\varphi(x) - \int_S \varphi(y) K(y,x) dS_y = f'(x) : [D] \begin{cases} = D_i & \text{Pour } x = +1 \text{ et } f' = -f \\ = D_e & \text{" } x = -1 \text{ et } f' = +f \end{cases}$$

$$\varphi(x) - \int_S K(x,y) \varphi(y) dS_y = f'(x) : [T] \begin{cases} = T_i & \text{Pour } x = -1 \text{ et } f' = +f \\ = T_e & \text{" } x = +1 \text{ et } f' = -f \end{cases}$$

Il faut remarquer tout d'abord que les équations ci-dessus sont singulières, et que par conséquent les intégrales y figurant doivent être comprises comme valeurs principales. La théorie développée au début de notre étude s'y applique parfaitement. Nous verrons en particulier comment la notion de symbole permet de traiter le problème de la régularisation, c'est-à-dire, du passage à un système d'équations de Fredholm, permettant à la fois d'en étudier les propriétés et de suggérer des solutions numériques connues en effet pour les équations de ce type.

Condition de radiation - Formule de Betti pour un domaine infini.

Quand on résout les problèmes d'élastodynamique pour un domaine B_e s'étendant à l'infini, il est nécessaire d'imposer certaines conditions à la solution recherchée pour assurer l'unicité de la solution, et un comportement physiquement admissible de la solution à l'infini. Les conditions, dites conditions de radiations, sont analogues à celles de Sommerfeld pour la solution de l'équation de Helmholtz. Soient $\vec{u}_p$ et $\vec{u}_s$ les deux composantes, potentielle et solénoïdale de u . Les conditions de radiations de l'élasticité s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{u}_p = \vec{0} \quad ; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \vec{u}_p}{\partial r} - i k_1 \vec{u}_p \right) = \vec{0} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{u}_s = \vec{0} \quad ; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \vec{u}_s}{\partial r} - i k_2 \vec{u}_s \right) = \vec{0} \end{array} \right.$$

Soient alors :

$\rho = r(o,y)$ $R = r(o,x)$ $r = r(x,y)$ et les vecteurs unitaires correspondants ρ_o, R_o, r_o .

On peut établir les estimations suivantes :

$$\begin{array}{l} \vec{T}u_p(x) - iwa\vec{u}_p(x) = O(R^{-1}) \quad \left| \quad T\Gamma_p^{(k)}(x,y) - iwa\Gamma_p^{(k)}(x,y) = O(R^{-2}) \quad \right| \quad \Gamma_s^{(k)}u_p(x) = O(R^{-2}) \\ \vec{T}u_s(x) - iwb\vec{u}_s(x) = O(R^{-1}) \quad \left| \quad T\Gamma_s^{(k)}(x,y) - iwb\Gamma_s^{(k)}(x,y) = O(R^{-2}) \quad \right| \quad R^2(u_p \Gamma_s^{(k)}) = O(1) \end{array}$$

$$\text{et } R^2(u_s \cdot \Gamma_p^{(k)}) = O(1).$$

Soit alors $x \in B_e$, B_e s'étendant à l'infini. Traçons autour de x une sphère Σ_R de rayon R suffisamment large pour englober B_i . Si $\vec{u}(x)$ est la solution régulière dans B_e de l'équation fondamentale (1), on peut écrire :

$$u_k(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S+\Sigma_R} \Gamma^{(k)}(x,y) Tu(y) dS_y - \frac{1}{4\pi} \int_{S+\Sigma_R} u(y) T^{(k)} \Gamma^{(k)}(x,y) dS_y$$

$$\text{Or } \vec{u}(x) = \vec{u}_p(x) + \vec{u}_s(x) \text{ et } \Gamma^{(k)} = \Gamma_p^{(k)} + \Gamma_s^{(k)} \text{ d'où :}$$

$$4\pi u_k(x) = \int_S [\Gamma^{(k)}(x,y) Tu(y) - u(y) T\Gamma^{(k)}(x,y)] dS_y + \int_{\Sigma_R} (f_1 + f_2 + f_3 + f_4) dS_y$$

$$f_1 = \Gamma^{(k)}(Tu_p - ik_1 a^2 u_p) \quad ; \quad f_2 = \Gamma^{(k)}(Tu_s - ik_2 b^2 u_s)$$

$$f_3 = -u_p(T\Gamma_p^{(k)} - ik_1 a^2 \Gamma_p^{(k)}); \quad f_4 = -u_s(T\Gamma_s^{(k)} - ik_2 b^2 \Gamma_s^{(k)})$$

En tenant compte des estimations faites précédemment on voit que

$$\int_{\Sigma_R} (\Sigma f_i) dS_y = 0$$

d'où

$$u_k(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S [\Gamma^{(k)}(x,y) Tu(y) - u(y) T\Gamma^{(k)}(x,y)] dS_y \quad x \in B_e$$

C'est la formule de Betti pour la région infinie B_e , S étant la frontière.

On en déduit immédiatement les conclusions suivantes :

- 1 - toute solution, régulière dans B_e , de l'équation $\Delta^{**}\vec{u} + w^2 \vec{u} = \vec{0}$, vérifie les relations asymptotiques $Ru(x) = O(1) \quad Ru_p(x) = O(1) \quad Ru_s(x) = O(1)$.
- 2 - toute solution, régulière dans tout l'espace, de $\Delta^{**}\vec{u} + w^2 \vec{u} = \vec{0}$ est identiquement nulle.
- 3 - toute solution, régulière dans B_e et B_i , de $\Delta^{**}\vec{u} + w^2 \vec{u} = \vec{0}$, et vérifiant les conditions $u_i = u_e$ et $(Tu)_i = (Tu)_e$ sur S est identiquement nulle.
- 4 - la solution de l'équation $\Delta^{**}\vec{u} + w^2 \vec{u} = \vec{0}$ régulière dans B_e et vérifiant sur S : $[Tu(x) + \sigma u(x)]_e = 0$ avec $\text{Im } \sigma \geq 0$ est identiquement nulle.
- 5 - le vecteur régulier $\vec{u}(x)$ vérifiant : $\mu_i \Delta u + (\lambda_i + \mu_i)$
 $\text{grad div } u + w^2 u = 0 \quad x \in B_i$ et $\mu_e \Delta u + (\lambda_e + \mu_e) \text{ grad div } u + w^2 u = 0$
pour $x \in B_e$

et les conditions à la frontière : $C_i u_i = C_e u_e$ et $C'_i (Tu)_i = C'_e (Tu)_e$
est identiquement nul ($C_i, C_e, C'_i, C'_e \neq 0$).

6 - La solution de $\overrightarrow{\Delta^*} u = 0$ régulière dans B_i et vérifiant les conditions
 $u_i(x) = 0$ ou $(Tu + \sigma u)_i = 0$ $\sigma > 0$ est identiquement nulle.

7 - la solution de $\overrightarrow{\Delta^*} u = \vec{0}$, régulière dans B_i et satisfaisant la condition :
 $[Tu(x)]_i = 0$ est égale à $\vec{A} + \vec{B}(x)$, $\vec{A}$ est arbitraire constant et $\vec{B}(x)$
ayant pour composantes : $q x_3 - r x_2$; $r x_1 - p x_3$; $p x_2 - q x_1$,
 p, q, r arbitraires
c'est-à-dire correspond à un déplacement rigide.

§ 3 - Application de la notion de symbole - Investigation des équations

(D) et (T).-

Remarquons tout d'abord que ces deux équations sont "associées". Il
suffira donc par exemple d'étudier (T) seulement, l'étude de (D) se faisant
exactement de la même façon. (T) s'écrit :

$$\psi(x) - \lambda \int_S K(x,y) \psi(y) dS_y = f(x)$$

ou en notation d'opérateurs :

$$(I - \lambda K) \psi = f .$$

Nous allons étudier le problème de la régularisation de ce système,
c'est-à-dire, trouver un opérateur singulier H tel que le système :

$(I+\lambda H) (I-\lambda K) = (I + \lambda H) f$ soit un système de Fredholm de deuxième espèce.

Une fois l'opérateur H construit, nous serons en mesure d'appliquer les théorèmes classiques de Fredholm.

En développant le produit ci-dessus, et en tenant compte du fait que, d'après le théorème de Giraud n° 8, on a :

$$- \lambda^2 H K \varphi = \lambda^2 \varphi(x, \lambda) \varphi(x) - \lambda^2 \int_S \varphi(\xi) dS_\xi \int_S H(x, y, \lambda) K(y, \xi) dS_y,$$

on obtient le système :

$$[I + \lambda^2 \varphi(x, \lambda)] \varphi(x) + \lambda \int_S F(x, y, \lambda) \varphi(y) dS_y = X(x) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F = H - K - \lambda HK \\ X = f + \lambda Hf. \end{cases}$$

qui sera de Fredholm si :

$$1 - F(x, y, \lambda) = O[r^{-2+\delta'}] \quad \delta' > 0$$

$$2 - \text{Det}[I + \lambda^2 \varphi] \neq 0$$

En passant en coordonnées locales (y'_3 suivant la normale, y'_1 et y'_2 dans le plan tangent) le problème est réduit à construire l'opérateur

$$L^{(2)} \varphi \equiv \varphi(x) + \lambda \int_{E_2} H(x, y, \lambda) \varphi(y) d\gamma_y + \text{O.C.C.} \quad [\text{opérateur complètement continu}]$$

($d\gamma$ étant l'élément de surface dans le plan tangent)
tel que le système $L^{(2)} L^{(1)} \varphi = L^{(2)} f$ soit "fredholmien" de deuxième espèce,

avec de même ici : $L^{(1)} \varphi \equiv \varphi(x) - \lambda \int_{E_2} K(x, y) \varphi(y) d\gamma_y + \text{O.C.C.}$

Ceci est justifié, vu qu'un changement de coordonnées ne change pas l'indice du système.

1ère étape : Etablissement de la matrice symbolique $\psi^{(1)}$ de $L^{(1)}$.

Nous avons :

$$K(x,y) = \frac{1}{2\pi} T^{(x)} \Gamma(x,y) = \frac{1}{2\pi} T^{(x)} \Gamma^0(x,y) + \frac{1}{2\pi} T^{(x)} [\Gamma^0(x,y) - (x,y)],$$

d'où

$$K_{jk}(x,y) = \frac{\mu}{2\pi(\lambda+2\mu)} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \cos n_x x_k - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} \cos n_x x_j \right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)} (\mu \delta_{jk} + 3(\lambda+\mu) \frac{\partial r}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j}) \cdot \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} + \frac{1}{2\pi} (T^{(x)} \Omega)_{jk}$$

$$T^{(x)} \Omega = T^{(x)} (\Gamma - \Gamma^0).$$

En passant en coordonnées locales au point x^0 suivant les formules :

$$x_i - y_i = a_{1i}(x^0)(x'_1 - y'_1) + a_{2i}(x^0)(x'_2 - y'_2) + a_{3i}(x^0)(x'_3 - y'_3).$$

On arrive à écrire $K(x,y)$ sous la forme :

$$K(x,y) = K'_1(x,y) + \frac{1}{2} M(x,y; \epsilon) + K'_2(x,y) \text{ avec}$$

$$\odot \quad K'_1(x,y) = \frac{\mu}{2\pi(\lambda+2\mu)} \cdot \frac{1}{\rho^2(x,y)} \times \begin{bmatrix} 0 & A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta & A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta \\ - [A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta] & 0 & A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta \\ - A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta & -(A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta) & 0 \end{bmatrix}$$

avec $\rho^2(x,y) = (x'_1 - y'_1)^2 + (x'_2 - y'_2)^2$

$$\cos \theta = \frac{x'_1 - y'_1}{\rho(x,y)} ; \quad \sin \theta = \frac{x'_2 - y'_2}{\rho(x,y)}$$

$$A_1 = a_{11}(x^0) \cos n_x x_2 - a_{12}(x^0) \cos n_x x_1$$

$$A_2 = a_{21}(x^0) \cos n_x x_2 - a_{22}(x^0) \cos n_x x_1$$

$$A_3 = a_{11}(x^0) \cos n_x x_3 - a_{13}(x^0) \cos n_x x_1$$

$$A_4 = a_{21}(x^0) \cos n_x x_3 - a_{23}(x^0) \cos n_x x_1$$

$$A_5 = a_{12}(x^0) \cos n_x x_3 - a_{13}(x^0) \cos n_x x_2$$

$$A_6 = a_{22}(x^0) \cos n_x x_3 - a_{23}(x^0) \cos n_x x_2$$

⊙ $M(x,y;\epsilon) =$ matrice dont le module tend vers zéro avec ϵ .

⊙ $K'_2(x,y) = O[\rho^{\eta-2}(x,y)]$ $\eta > 0$ donc quasi-singulier ("à faible singularité").

Nous avons alors pour les projections $L_{x_i}^{(1)} \psi$ de $L^{(1)} \psi$, en posant

$$\ell = \frac{\mu}{2\pi(\lambda+2\mu)}$$

$$L_{x_1}^{(1)} \psi = \psi_1 - \lambda \ell \int_{E_2} \frac{A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta}{\rho^2} \psi_2 \, d\ell_y - \lambda \ell \int_{E_2} \frac{A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta}{\rho^2} \psi_3 \, d\sigma_y + \text{O.C.C.}$$

$$L_{x_2}^{(1)} \psi = \psi_2 - \lambda \ell \int_{E_2} \frac{A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta}{\rho^2} \psi_1 \, d\sigma_y - \lambda \int_{E_2} \frac{A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta}{\rho^2} \psi_3 \, d\sigma_y + \text{O.C.C.}$$

$$L_{x_3}^{(1)} \psi = \psi_3 + \lambda \ell \int_{E_2} \frac{A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta}{\rho^2} \psi_1 \, d\sigma_y + \lambda \ell \int_{E_2} \frac{A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta}{\rho^2} \psi_2 \, d\sigma_y + \text{O.C.C.}$$

On en déduit alors tout simplement les éléments L_{ij}^1 . $[\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)]$.

La matrice symbolique est alors : $\Psi^1 = \Psi_{ij}^1$ avec :

$$\Psi_{11}^1 = 1 ; \Psi_{12}^1 = -2\pi i \lambda \ell (A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta) ; \Psi_{13}^1 = -2\pi i \lambda \ell (A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta)$$

$$\Psi_{21}^1 = 2\pi i \lambda \ell (A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta) ; \Psi_{22}^1 = 1 ; \Psi_{23}^1 = -2\pi i \lambda \ell (A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta)$$

$$\Psi_{31}^1 = 2\pi i \lambda \ell (A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta) ; \Psi_{32}^1 = 2\pi i \lambda \ell (A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta) ; \Psi_{33}^1 = 1.$$

d'où

$$\det \Psi^1 = 1 - 4\pi^2 \lambda^2 \ell^2 (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta \\ \mu_2 = A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta \\ \mu_3 = A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta \end{array} \right.$$

Pour des surfaces de Liapunov, on démontre que $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2$ peut s'écrire sous la forme $1 + v(x, x_0)$, $v(x, x_0)$ étant arbitrairement petit.

On peut donc écrire :

$$\det \Psi^1 \approx 1 - 4\pi^2 \lambda^2 \ell^2.$$

Conséquence : Pour les valeurs de $\lambda \neq \pm \frac{1}{2\pi \ell} = \pm \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = \pm (2 + \frac{\lambda}{\mu})$,

il est possible de construire la matrice $\Psi^{(2)}$ de $L^{(2)}$.

2ème étape : Matrice symbolique de $L^{(2)}$.

$$\Psi^2 = [\Psi^1]^{-1} = \frac{1}{1 - 4\pi^2 \lambda^2 \ell^2} [\Psi_{ik}^*] \quad \text{pour } \lambda \neq \pm \frac{1}{2\pi \ell}$$

soit :

$$\Psi_{11}^* = 1 - 4\pi^2 \lambda^2 \ell^2 (A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta)^2 ; \Psi_{22}^* = 1 - 4\pi^2 \lambda^2 \ell^2 (A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta)^2 ;$$

$$\Psi_{33}^* = 1 - 4\pi^2 \lambda^2 \ell^2 (A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta)^2.$$

$$\Psi_{12}^* = 2\pi i \lambda \ell (A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta) + 4\pi^2 \lambda^2 \ell^2 (A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta)(A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta)$$

$$\Psi_{13}^* = 2\pi i \lambda \ell (A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta) - 4\pi^2 \lambda^2 \ell^2 (A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta)(A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta)$$

$$\Psi_{21}^* = -2\pi i \lambda \ell (A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta) + 4\pi^2 \lambda^2 \ell^2 (A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta)(A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta)$$

$$\Psi_{23}^* = 2\pi i \lambda \ell (A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta) + 4\pi^2 \lambda^2 \ell^2 (A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta)(A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta)$$

$$\Psi_{31}^* = -2\pi i \lambda \ell (A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta) - 4\pi^2 \lambda^2 \ell^2 (A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta)(A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta)$$

$$\Psi_{32}^* = -2\pi i \lambda \ell (A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta) + 4\pi^2 \lambda^2 \ell^2 (A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta)(A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta)$$

3ème étape : Construction d'un opérateur régularisant.

C'est l'opérateur d'élément général :

$$M_{jk} \psi_k = b_o^{(jk)} \psi_k + \int_{E_2} \frac{f_{jk}^{(2)}}{\rho^2} \psi_k(y) d\sigma_y + O.C.C.$$

On a ici :

$$b_o^{11} = \frac{1}{\Delta} [1 - \Delta' (A_5^2 + A_6^2)] ; f_{11}^{(2)} = - \frac{\Delta'}{\Delta} [(A_6^2 - A_5^2) \cos 2\theta - 2A_5 A_6 \sin 2\theta]$$

$$b_o^{12} = \frac{\Delta'}{\Delta} (A_3 A_5 + A_4 A_6) ; f_{12}^{(2)} = \frac{\Delta \rho}{\Delta} (A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta) - \frac{\Delta'}{\Delta} [(A_3 A_6 + A_4 A_5) \sin 2\theta + A_1 A_5 - A_2 A_6] \cos 2\theta$$

$$b_o^{13} = - \frac{\Delta'}{\Delta} (A_1 A_5 + A_2 A_6) ; f_{13}^{(2)} = \frac{\Delta \rho}{\Delta} (A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta) + \frac{\Delta'}{\Delta} [(A_1 A_6 + A_2 A_5) \sin 2\theta + (A_1 A_5 - A_2 A_6) \cos 2\theta]$$

$$b_o^{21} = \frac{\Delta'}{\Delta} (A_3 A_5 + A_4 A_6) ; f_{21}^{(2)} = - \frac{\lambda \ell}{\Delta} (A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta) - \frac{\Delta'}{\Delta} [(A_3 A_6 + A_4 A_5) \sin 2\theta + (A_3 A_5 - A_4 A_6) \cos 2\theta]$$

$$b_o^{22} = \frac{1}{\Delta} [1 - \Delta' (A_3^2 + A_4^2)] ; f_{22}^{(2)} = - \frac{\Delta'}{\Delta} [(A_4^2 - A_3^2) \cos 2\theta - 2A_3 A_4 \sin 2\theta].$$

$$b_o^{23} = \frac{\Delta'}{\Delta} (A_1 A_3 + A_2 A_4) ; f_{23}^{(2)} = \frac{\lambda \ell}{\Delta} (A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta) - \frac{\Delta'}{\Delta} [(A_1 A_4 + A_2 A_5) \sin 2\theta + (A_1 A_3 - A_2 A_4) \cos 2\theta]$$

$$b_o^{31} = -\frac{\Delta'}{\Delta} (A_1 A_5 + A_2 A_6) ; f_{31}^{(2)} = -\frac{\lambda \ell}{\Delta} (A_3 \cos \theta + A_4 \sin \theta) + \frac{\Delta'}{\Delta} [(A_1 A_6 + A_2 A_5) \sin 2\theta + (A_1 A_5 - A_2 A_6) \cos 2\theta]$$

$$b_o^{32} = \frac{\Delta'}{\Delta} (A_1 A_3 + A_2 A_4) ; f_{32}^{(2)} = -\frac{\lambda \ell}{\Delta} (A_5 \cos \theta + A_6 \sin \theta) - \frac{\Delta'}{\Delta} [(A_1 A_4 + A_2 A_3) \sin 2\theta + (A_1 A_3 - A_2 A_4) \cos 2\theta]$$

$$b_o^{33} = \frac{1}{\Delta} [1 - \Delta' (A_1^2 + A_2^2)] ; f_{33}^{(2)} = -\frac{\Delta'}{\Delta} [(A_2^2 - A_1^2) \cos 2\theta - 2A_1 A_2 \sin 2\theta],$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \Delta = 1 - 4\pi^2 \lambda^2 \ell^2 \\ \Delta' = 2\pi^2 \lambda^2 \ell^2. \end{cases}$$

$$\text{Posons } B(x; \lambda) = [b_o^{jk}(x; \lambda)] \quad \text{et} \quad D(x, y; \lambda) = \frac{1}{\lambda \rho^2(x, y)} [f_{jk}^{(2)}(x; \theta)].$$

On a alors $\det B(x; \lambda) = \det B(x_o; \lambda) + \eta(x, x^o)$ $\eta(x, x^o)$ de module pouvant être rendu arbitrairement petit.

Pour rechercher les zéros de $\det B(x; \lambda)$, il est donc suffisant de rechercher ceux de $\det B(x_o; \lambda)$. Or

$$\det B(x_o; \lambda) = \frac{1}{\Delta} [-\Delta'^3 \sin^4 \theta + \Delta'^2 (1 + \sin^2 \theta + \sin^4 \theta) - \Delta' (2 + \sin^2 \theta) + 1]$$

d'où les 3 racines :

$$\Delta'_1 = 1 ; \quad \Delta'_{2,3} = \frac{1 + \sin^2 \theta \pm \sqrt{1 + 2 \sin^2 \theta - 3 \sin^4 \theta}}{2 \sin^4 \theta}$$

Elles sont toutes 3 réelles et positives. De plus $(|\Delta'_2|, |\Delta'_3|) \geq 1$

$$\theta = 0 \rightarrow \Delta'_4 = \Delta'_3 = \infty.$$

Les valeurs correspondantes de λ sont $\lambda_1 = \pm \frac{1}{\pi l \sqrt{2}}$; $\lambda_2 = \pm \frac{\sqrt{\Delta'_2}}{\pi l \sqrt{2}}$
 $\lambda_3 = \pm \frac{\sqrt{\Delta'_3}}{\pi l \sqrt{2}}$.

Dans le plan de la variable complexe, muni de la coupure
 $(-\infty, -\frac{1}{4\pi l} ; +\frac{1}{4\pi l}, +\infty)$, on a donc $\text{Dét } B(x;\lambda) \neq 0 \implies B^{-1}(x;\lambda)$ existe
 $\forall x \in E_2$.

L'opérateur

$L^{(2)}\psi = I\psi(x) + \lambda \int_{E_2} B^{-1}(x;\lambda) D(x,y;\lambda) \psi(y) d\sigma_y + \text{O.C.C.}$ est donc aussi un régularisant.

En posant $H(x,y;\lambda) = B^{-1}(x;\lambda) D(x,y;\lambda)$, nous construisons l'opérateur
 $L^{(2)}\psi = (I + \lambda H)\psi$ qui remplit toutes les conditions requises. Et le système devient :

$$L^{(2)} L^{(1)}\psi = (I + \lambda B^{-1} D)(I - \lambda K)\psi = [1 + \lambda^2 \frac{1}{\lambda^2} B^{-1}(I - B)]\psi(x) + \lambda \int_S F(x,y;\lambda) \psi(y) dS_y$$

avec :

⊙ $F(x,y;\lambda) = \text{noyau de Fredholm.}$

⊙ $\text{Dét}[I + \lambda^2 \Phi(x;\lambda)] = \text{Dét}[I + B^{-1}[I - B]] = \text{Dét } B^{-1} \neq 0$. Il suffit de poser

$$\lambda^2 \Phi(x;\lambda) = B^{-1}[I - B].$$

4ème étape : Analyse du système fredholmien obtenu.

Il s'agit maintenant d'étudier le système :

$$[I + \lambda^2 \Phi(x;\lambda)]\psi(x) + \lambda \int_S F(x,y;\lambda) \psi(y) dS_y = X(x).$$

Tous les théorèmes de Fredholm s'appliquent. En particulier :

1er théorème : Il existe une matrice "résolvante" $N(x,y;\lambda)$, fonction méromorphe de λ dans le plan π , telle que, pour toute valeur de λ différente des pôles,

solution unique :

$$\psi(x) = [I + \lambda^2 \Phi(x; \lambda)]^{-1} f(x) + \lambda \int_S N(x, \xi; \lambda) f(\xi) dS_\xi.$$

La "résolvante" vérifie les 2 équations fonctionnelles :

$$N(x, y; \lambda) - [I + \lambda^2 \Phi(x; \lambda)]^{-1} K(x, y) - \lambda \int_S N(x, \xi; \lambda) K(\xi, y) dS_\xi = 0$$

$$N(x, y; \lambda) - K(x, y) [I + \lambda^2 \Phi(y; \lambda)]^{-1} - \lambda \int_S K(x, \xi) N(\xi, y; \lambda) dS_\xi = 0$$

2ème théorème : Soient :

r le nombre de solutions linéairement indépendantes de

$$\psi(x) - \lambda_0 \int_S K(x, \xi) \psi(\xi) dS_\xi = 0.$$

r' celui des solutions de l'équation associée $\psi(y) - \lambda_0 \int_S \psi(\xi) K(\xi, y) dS_\xi = 0$.

Alors : $r = r'$.

3ème théorème :

Soit $\lambda = \lambda_0$ un pôle de la résolvante et valeur propre de l'équation $(I - \lambda K)\psi = 0$.

Soit $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ l'ensemble des solutions linéairement indépendantes de l'équation associée. Alors :

La C.N.S. pour que l'équation $\psi(x) - \lambda_0 \int_S K(x, \xi) \psi(\xi) dS_\xi = f(x)$ ait une solution est que le second membre $f(x)$ soit orthogonal à $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ c'est-à-dire doit remplir les r conditions $\int_S \psi_j(x) \cdot f(x) dS_x = 0 \quad j=1, 2, \dots, r$.

5ème étape : Retour aux problèmes aux limites de l'élasticité.

Retournons maintenant, par exemple, aux problèmes D_i et T_e , dont les équations sont respectivement :

$$\varphi(x) - \int_S \varphi(y) K(y, x) dS_y = -f(x) \quad (D_i)$$

$$\varphi(x) - \int_S K(x, y) \varphi(y) dS_y = -f(x) \quad (T_e).$$

Nous remarquons d'abord que la valeur $\lambda = 1$ correspondant à ces 2 problèmes se trouve en dehors de la coupure, puisque $\frac{1}{4\pi\ell} = 1 + \frac{\lambda}{2\mu} > 1$ ($\lambda, \mu > 0$).

Considérons les équations homogènes correspondantes (qui sont associées)

$$\varphi(x) - \int_S \varphi(y) K(y, x) dS_y = 0 \quad (\overset{0}{D}_i)$$

$$\varphi(x) - \int_S K(x, y) \varphi(y) dS_y = 0 \quad (\overset{0}{T}_e).$$

Supposons que $\Psi(x)$ soit une solution $\neq 0$ de $(\overset{0}{T}_e)$. On prouve facilement que ceci est impossible et que nécessairement $\Psi(x) = 0$. Il s'ensuit d'après le second théorème de Fredholm que $(\overset{0}{D}_i)$ non plus ne peut avoir une solution différente de zéro.

Le 3ème théorème de Fredholm permet alors de conclure que :

- 1 - Le problème D_i possède une solution unique pour $f(x) \in H(\gamma)$.
- 2 - Il en est de même pour (T_e) .

Des conclusions analogues peuvent alors être établies pour les autres problèmes.

CHAPITRE IV

RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS INTEGRALES
DE LA THEORIE DE L'ELASTICITE.

§ 1. Résolution des Equations Intégrales de Fredholm.

Soit l'équation intégrale $\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\psi(y)dy = f(x)$. ①

Pour résoudre numériquement cette équation, deux idées directrices s'offrent à nous :

- 1 - Remplacer l'équation par un système linéaire.
- 2 - Résoudre par approximations successives.

Notons, dès d'abord, que ces deux idées, loin de servir uniquement à déterminer des solutions numériques, sont à la base aussi de l'étude théorique des équations intégrales de Fredholm. Nous allons développer succinctement le principe des deux voies offertes, la littérature à ce propos étant largement répandue et connue.

1.1. - Réduction à un système d'équations algébriques.

Il existe plusieurs façons de réduire l'étude de l'équation intégrale à celle d'un système algébrique. Nous nous bornons ici à signaler la plus ancienne, et la plus connue, utilisant des formules d'interpolation et d'intégration numérique connues.

En fait, tout revient à remplacer le terme $\int_a^b K(x,y)\psi(y)dy$ par une des nombreuses formules d'intégration numérique :

$$1.2. - \int_a^b \Psi(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \Psi(x_k) + \rho, \quad \rho \text{ étant le reste.}$$

A_k : des coefficients connues pour la formule utilisée.

x_k : points à choisir suivant la formule utilisée.

ρ : reste qu'on peut évaluer.

Exemple :

1. Formule du carré : $x_1 = a$; $x_2 = a + \frac{b-a}{n}$, ... ; $x_n = a - (n-1) \frac{b-a}{n}$;

$$A_k = \frac{b-a}{n}.$$

2. " des trapèzes : $x_1 = a$; $x_2 = a + \frac{b-a}{n-1}$, ..., $x_n = b$.

$$A_1 = A_n = \frac{b-a}{2n-2} ; \quad A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = \frac{b-a}{n-1}.$$

3. " de la tangente : $x_1 = a + \frac{b-a}{2n}$, $x_2 = a + 3 \frac{b-a}{n}$... $x_n = a + (2n-1) \frac{b-a}{2n}$

$$A_k = \frac{b-a}{n}.$$

4. " de Tschebyscheff : $x_k = \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} x_k^{(n)}$ $A_k = \frac{b-a}{n}$

Les $x_k^{(n)}$ étant les "points de Tschebyscheff" connus.

5. " de Gauss :

$$x_k = a + (b-a) x_k^{(n)} \quad A_k = (b-a) A_k^{(n)}$$

$x_k^{(n)}$: "points de Gauss", zéros des polynômes de Legendre.

$A_k^{(n)}$: "coefficients de Gauss", construit pour l'intervalle (0,1).

En appliquant la formule ②, on a alors :

$$\psi(x) - \lambda \sum_{k=1}^n A_k K(x, x_k) \psi(x_k) = f(x) + \lambda \rho(x) \quad \text{pour tout } x.$$

En particulier, en remplaçant x par $x_1 \dots x_n$ successivement, on aboutit au système :

$$\psi(x_i) - \lambda \sum_{k=1}^n A_k K(x_i, x_k) \psi(x_k) = f(x_i) + \lambda \rho_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

D'où, en négligeant au départ les reste ρ_i le système approché :

$$\boxed{\psi(x_i) - \lambda \sum_{k=1}^n A_k K(x_i, x_k) \psi(x_k) = f(x_i)} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

La résolution de ce système donnera des valeurs approchées $\psi_1 \dots \psi_n$ recherchées. Pour évaluer l'erreur due à l'omission des termes ρ_i ; diverses formules ont été établies (cf. à ce propos Kantorowitch et Krylov : Näherungs methoden der Höheren Analysis).

1.2. - Approximation successive.

On recherche la solution sous forme d'une série de la forme :

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \lambda \psi_1(x) + \dots + \lambda^n \psi_n(x) + \dots$$

En remplaçant dans l'équation ①, on voit que :

$$\psi_0(x) = f(x) ; \psi_1(x) = \int_a^b K(x,y)\psi_0(y)dy ; \psi_2(x) = \int_a^b K(x,y)\psi_1(y)dy \quad \text{etc...}$$

On pose alors $K_1(x,y) = K(x,y)$

$$K_2(x,y) = \int_a^b K(x,t)K_1(t,y)dt$$

$$K_3(x,y) = \int_a^b K(x,t)K_2(t,y)dt$$

... etc...

$$\text{d'où } \psi_0 = f(x), \dots ; \psi_n(x) = \int_a^b K_n(x,y)f(y)dy$$

$$\text{et } \psi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b (K_1 + \lambda K_2 + \dots)f(y)dy = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,y;)f(y)dy.$$

Avec $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ et $\|K\| < M_1^+$, la série sera sûrement convergente.

En prenant n termes seulement pour $\psi(x)$, on néglige un reste R_n tel que

$$|R_n| < \frac{f(x) M^n(b-a)^n |\lambda|^n}{1 - M(b-a) |\lambda|}.$$

(La série ci-dessus est souvent appelée série de Neumann).

§ 2. Traitement des équations intégrales singulières.

La première idée qui vient à l'esprit est qu'il suffit de régulariser l'équation donnée et de traiter la "fredholmienne" obtenue par les méthodes ci-avant. Cependant, dans la pratique, la construction d'un opérateur régularisant est le plus souvent très laborieuse (on s'en est rendu compte à propos de l'équation (T) ; et encore ce n'était qu'une régularisation ponctuelle, au

point x_0), et l'équation obtenue a souvent une structure compliquée. De plus la régularisation n'est pas toujours équivalente... Aussi faut-il le plus souvent avoir recours à d'autres artifices.

2.1. - Utilisation de la série de Neumann : théorème de Schmeidler.

Nous citons tout simplement un théorème établi par Schmeidler, qui permet de fixer le type de noyaux singuliers, pour lesquels la méthode est applicable.

Théorème. - Soit $K(x,y)$ un noyau tel que :

- 1 - Il vérifie les 3 conditions ci-après ;
- 2 - La forme bilinéaire intégrale $\int_a^b \int_a^b K(S,t) \bar{x}(s) y(t) ds dt$ pour des fonctions $x(s)$ et $y(t)$ normées soit bornée par une constante M .

Alors l'équation $y(S) - \lambda \int_a^b K(S,t) y(t) dt = f(S)$, où $f(S)$ est à carré intégrable et $|\lambda| < 1$, peut être résolue par la série de Neumann. La série converge alors en moyenne vers $y(S)$, solution à carré intégrable. La solution est déterminée d'une façon unique, à un ensemble de mesure nulle près.

CONDITION I : $\int_a^b K(S,t) y(t) dt$ est une fonction de s à carré intégrable, pour tout y à carré intégrable dans (a,b) .

CONDITION II : $\int_c^d K(S,t) x(S) ds$ est une fonction de t à carré intégrable pour toute $x(S)$ à carré intégrable $(c \leq S \leq d)$.

CONDITION III : Pour toute couple de fonctions $x(S)$ et $y(t)$ à carré intégrable, on a :

$$\int_c^d s(s) \left[\int_a^b K(S,t) y(t) dt \right] dS = \int_a^b y(t) \left[\int_c^d K(S,t) x(S) dS \right] dt.$$

Schmeidler traite par cette méthode le système suivant :

$$v(x) = -\epsilon \int_{-1}^{+1} \frac{h(\xi)}{x-\xi} d\xi$$

$$h(x) = \epsilon k + \epsilon \int_{-1}^{+1} \frac{v(\xi)}{x-\xi} d\xi$$

où v et h représentent les composantes de la force exercée par un mur de barrage sur le sol.

Il établit notamment que le noyau $\frac{1}{x-\xi}$ vérifie

les conditions du théorème.

2.2. - Réduction à un système algébrique.

Reprenons le système :

$$\psi(x_i) - \lambda \sum_{k=1}^n A_k K(x_i, x_k) \psi(x_k) = f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Nous voyons, que pour un noyau singulier, les termes diagonaux deviennent infinis ou n'ont plus aucun sens et le système n'a plus aucune valeur.

⊙ Pour éviter cet écueil, Kantorovitch propose la méthode suivante :

Reprenons l'équation intégrale ① et écrivons là, sous la forme :

$$\psi(x) \left[1 - \lambda \int_a^b K(x, y) dy \right] - \lambda \int_a^b K(x, y) [\psi(y) - \psi(x)] dy = f(x).$$

L'intégrant $K(x, y) [\psi(y) - \psi(x)]$ est alors rendu continu et l'intégrale n° 2 peut être remplacée sans inconvénient par une somme finie. L'intégrale $\int_a^b K(x, y) dy$ donne alors une fonction $\chi(x)$ (à calculer).

Le système algébrique s'écrit alors :

$$\psi(x_i) \left[1 - \lambda \chi(x_i) \right] - \lambda \sum_{k=1}^n A_k K(x_i, x_k) [\psi(x_k) - \psi(x_i)] = f(x_i) \quad i = 1, \dots, n.$$

Pour lever l'indétermination sur les termes de la diagonale principale,

il suffit alors de remplacer $K(x_i, x_i) [\psi(x_i) - \psi(x_i)]$ par une formule d'interpolation. Par exemple, en utilisant une interpolation linéaire :

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} K(x_i, x_{i-1}) [\psi(x_{i-1}) - \psi(x_i)] + \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} K(x_i, x_{i+1}) [\psi(x_{i+1}) - \psi(x_i)].$$

Le système algébrique est alors complètement défini, et se prête à une résolution classique. Cependant cette méthode a un défaut patent : il est très difficile d'évaluer l'erreur commise, et la solution trouvée peut se différencier notablement de la solution cherchée. (D'ailleurs son auteur la présente sans aucun commentaire).

. Une méthode, récemment proposée par Kupradze, retient beaucoup plus l'attention. Elle s'applique parfaitement aux équations de l'élasticité et ne possède aucune des incertitudes signalées plus haut. Nous allons l'exposer d'une façon détaillée pour quelques problèmes de la théorie de l'élasticité. Elle est basée sur la possibilité de réduire les équations singulières de la théorie de l'élasticité à des équations fonctionnelles équivalentes, ayant des propriétés très intéressantes.

Diffraction des ondes élastiques.

Il s'agit de résoudre le problème suivant :

Soit B_i un domaine fini de frontière S du type de Liapounoff. Soit B_e le domaine infini complémentaire, supposé occupé par un milieu élastique de constantes de carré λ_e, μ_e .

Soit au point $x_0 \in B_e$ la source de vibrations, de fréquence ω (différente des fréquences propres de B_i), $E(x, x_0)$ le champ de déplacements engendré par cette source en l'absence de B_i . Le champ peut être évalué par les formules de la page 72, et nous supposons qu'il est tout simplement donné.

Le problème est alors de construire le vecteur $\vec{u}(x)$ tel que :

1. $\mu_e \Delta \vec{u}(x) + (\lambda_e + \mu_e) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{u}(x) + \omega^2 \vec{u}(x) = 0 \quad x \in B_e$
2. $[T^e \vec{u}(x)] = 0 \quad \text{sur } S.$
3. $\vec{u}(x) - \vec{E}(x, x_0) \quad x \in B_e$ est un vecteur régulier.

⊙ La solution de ce problème, qui n'est autre que (T_e) pour le vecteur $\vec{u}(x) - \vec{E}(x, x_0)$, peut alors être recherchée sous la forme

$$\vec{u}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \vec{\psi}(y) \Gamma(x, y) dS_y + E(x, x_0) \quad x \in B_e$$

ψ vérifiant l'équation intégrale singulière (le système en fait) :

$$\psi(x) - \frac{1}{2\pi} \int_S \psi(y) T^x \Gamma(x, y) dS_y = T^{(x)} \vec{E}(x, x_0) .$$

On peut dès lors résoudre par la méthode de Kantorovitch citée en

p. 7.

⊙ On peut aussi procéder de la manière suivante :

Supposons tout d'abord que B_i ne soit pas une cavité, mais remplie d'un matériau de constantes λ_i, μ_i . Le problème posé devient celui d'un milieu non-homogène. Or, Kupradze a prouvé que la solution de ce problème vérifie (nécessairement et suffisamment) le système d'équations :

$$\begin{aligned} \eta(x) \vec{u}(x) = & \omega^2 (\mu_e - \mu_i) \int_{B_i} \vec{u}(y) \Gamma_{(e)}(x, y) dv_y + \tau \int_{B_i} \vec{u}(y) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \Gamma_e(x, y) dv_y \\ & + \mu_e \int_S \vec{u}_i(y) T_y^* \Gamma_e(x, y) dS_y + \mu_e \int_S \vec{\psi}(y) T^e \Gamma_e(x, y) dS_y + 4\pi \mu_e \vec{E}(x, x_0) , \end{aligned}$$

$$\text{avec } \vec{\psi} = \vec{u}_e - \vec{u}_i ; \quad \eta(x) = \frac{4}{3} (2 \mu_i + \mu_e \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\lambda_e + 2\mu_e}) \quad \text{pour } x \in B_i$$

$$\eta(x) = 4\pi \mu_e \quad \text{pour } x \in B_e$$

$$\tau = \lambda_i \mu_e - \lambda_e \mu_i ; \quad T^* = T^e - T^i.$$

De plus pour $|\tau|$ suffisamment petit, la solution du système ci-dessus est solution du problème suivant de la théorie de l'élasticité :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_i^* \vec{u}(x) + \omega^2 \vec{u}(x) = 0 & x \in B_i \\ \Delta_e^* \vec{u}(x) + \omega^2 \vec{u}(x) = 0 & x \in B_e \\ \vec{u}_e(x) - \vec{u}_i(x) = \vec{\psi}(x) & x \in S \\ [T^i \vec{u}(x)]_i = [T^e \vec{u}(x)]_e & x \in S \\ \vec{u}(x) - \vec{E}(x, x_0) \text{ est une solution régulière de } \Delta_e^{**} \vec{v} + \omega^2 \vec{v} = 0 & \\ & \text{pour } x \in B_e. \end{array} \right.$$

En posant $\lambda_i = \mu_i = 0$ on obtient notre problème. De plus $\tau = 0$.

Conclusion.

La solution de notre problème est donnée par le système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 = \frac{1}{4\pi} \int_S \vec{\psi}(y) T_y^e \Gamma_e(x, y) dS_y + \vec{E}(x, x_0) & x \in B_i \\ \vec{u}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \vec{\psi}(y) T_y^e \Gamma_e(x, y) dS_y + \vec{E}(x, x_0) & x \in B_e \end{array} \right.$$

En posant $K(x, y) = \frac{1}{2\pi} T_y^e \Gamma_e(x, y)$, il devient :

$$\int_S \vec{\psi}(y) K(y, x) dS_y = -2\vec{E}(x, x_0) \quad \text{pour } x \in B_i$$

$$\vec{u}(x) = \frac{1}{2} \int_S \vec{\psi}(y) K(y, x) dS_y + \vec{E}(x, x_0) \quad x \in B_e.$$

L'avantage d'un tel système saute aux yeux, pour le calcul numérique de ψ .

1 - Les domaines de variation de x et y sont distincts. Donc, en réduisant la première équation à un système algébrique, le problème des éléments diagonaux ne se pose même pas.

2 - Le degré d'arbitraire laissé au choix des points x_i .

3 - L'équation donnant $\vec{\psi}$ est de première espèce.

. L'écriture de tels systèmes d'équations fonctionnelles peut être faite pour bon nombre d'autres problèmes, et d'autres opérateurs que celui de l'élasticité.

Nous donnons les résultats suivants :

1. Système pour (D_i) .

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma(x, y) \vec{\psi}(y) dS_y - \frac{1}{4\pi} \int_S \Gamma_I(x, y) \vec{f}(y) dS_y \quad x \in B_e \\ \vec{u}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma(x, y) \vec{\psi}(y) dS_y - \frac{1}{4\pi} \int_S \Gamma_I(x, y) \vec{f}(x) dS_y \quad x \in B_i \end{array} \right.$$

2. Système pour le problème statique (T_i) .

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{1}{4\pi} \int_S \Gamma(x, y) \vec{f}(y) dS_y + \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma_I(x, y) \vec{\psi}(y) dS_y \quad x \in B_e \\ \vec{u}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \Gamma(x, y) \vec{f}(y) dS_y + \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma_I(x, y) \vec{\psi}(y) dS_y \quad x \in B_i \end{array} \right.$$

3. Problème (D_e).

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{1}{4\pi} \int_S \Gamma_I(x,y) \vec{f}(y) + \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma(x,y) \vec{\psi}(y) dS_y \quad x \in B_i \\ \vec{u}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \Gamma_I(x,y) \vec{f}(y) + \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma(x,y) \vec{\psi}(y) dS_y \quad x \in B_e \end{array} \right.$$

4. Problème (T_e).

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{1}{4\pi} \int_S \Gamma(x,y) \vec{f}(y) dS_y + \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma_I(x,y) \vec{\psi}(y) dS_y \quad x \in B_i \\ \vec{u}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \Gamma(x,y) \vec{f}(y) dS_y + \frac{1}{2\pi} \int_S \Gamma_I(x,y) \vec{\psi}(y) dS_y \quad x \in B_e \end{array} \right.$$

5. Problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans le plan.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{1}{2\pi} \int_S f(y) \frac{\cos(\vec{xy}, \vec{ny})}{r(x,y)} dS_y + \frac{1}{\pi} \int_S \psi(y) \ell_n r(x,y) dS_y \quad x \in B_e \\ u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S f(y) \frac{\cos(\vec{xy}, \vec{ny})}{r(x,y)} dS_y + \frac{1}{\pi} \int_S \psi(y) \ell_n r(x,y) dS_y \quad x \in B_i \end{array} \right.$$

$$f(x) = u(x) \text{ pour } x \in S.$$

APPLICATIONS NUMERIQUES.

Problème de la torsion.

Nous savons, que pour un prisme de section quelconque, de génératrice Oz, les sections ne restent pas planes, et en termes de déplacements, on a la solution :

$$u = -\tau zy \quad v = \tau zx \quad w = \tau \phi(x, y)$$

d'où $\tau_{zx} = \mu\tau\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - y\right)$ et $\tau_{yz} = \mu\tau\left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + x\right)$, les restes sont nuls.

En remplaçant dans les équations d'équilibre on obtient $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$.

Ecrivant que les efforts sont nuls sur la surface extérieure (à part les extrémités), on obtient la condition à la frontière :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - y\right)\cos(n, x) + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + x\right)\cos(n, y) = 0 \quad \text{sur } L$$

$$\text{c.à.d.} \quad \frac{d\phi}{dn} = y \cos(n, x) - x \cos(n, y) \quad \text{sur } L.$$

On aboutit ainsi à un problème de Neumann pour la fonction harmonique $\phi(x, y)$.

Soit alors $\Psi(x, y)$ la fonction conjuguée de ϕ :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

$$\text{or } \cos(n, x) = \frac{dy}{ds} \quad \text{et} \quad \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds} \implies \frac{d\phi}{du} = \frac{d\Psi}{ds}$$

$$\text{De plus } y \cos(n,y) - x \cos(n,y) = x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)$$

$$\implies \frac{d\psi}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{x^2 + y^2}{2}$$

d'où

$$\psi = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + C_k \text{ sur } h_k \quad (L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m). \text{ Une seule}$$

des C_k peut être fixée arbitrairement, les autres étant fixés par la condition que $\psi(x,y)$ est à valeur unique (non multiforme).

Soit $F(z) = \phi + i\psi$, holomorphe dans S ($\partial S = L$).

$$\implies \tau_{xz} - i \tau_{yz} = \mu \tau (F'(z) - i \bar{z}).$$

Introduisons alors

$$\Psi(x,y) = \psi(x,y) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2).$$

Le problème devient $\Delta \Psi = -2$ et $\Psi = 0$ sur L .

$$\text{avec } \tau_{xz} = \mu \tau \frac{\partial \Psi}{\partial y} ; \quad \tau_{yz} = -\mu \tau \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

⊙ Ainsi, pour résoudre le problème de la torsion, on peut, suivant ce qui semble être le plus accessible résoudre un problème de Dirichlet pour la fonction ψ vérifiant l'équation de Laplace, ou bien le problème de Neumann pour ψ vérifiant $\Delta \psi = 0$, ou bien une équation de Poisson en ψ , avec un problème homogène de Dirichlet.

⊙ La rigidité à la torsion s'évalue par l'intégrale

$$D = \mu \iint_S (x^2 + y^2 + x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x}) dx dy$$

§ 1. Méthode de RITZ-GALERKIN.

Nombre de problèmes de physique mathématique conduisent souvent à un problème d'équations aux dérivées partielles (Electrostatique - Elasticité hydrodynamique etc...), avec des données à la frontière, ou des données initiales. Du point de vue du calcul des variations, la solution du problème, si elle existe, est recherchée comme minimisant une expression intégrale. En pratique, il est le plus souvent impossible de trouver de telles solutions sous forme exactes. Aussi essaye-t-on de remplacer l'étude du minimum de l'expression en question, par l'étude d'un système algébrique à coefficients constants et obtenue une solution approchée du problème. Diverses méthodes, reposant presque toutes sur ce principe ont été développées. Nous présentons celle de RITZ-GALERKIN, qui en est largement représentative.

1.1. - Exposé de la méthode : Soit à rechercher le minimum de l'intégrale double $I(u) = \iint_D F(x,y,u,u_x,u_y) dx dy$ dans la condition $u = \psi(S)$ et $\Gamma = \partial D$.

$u^*(x,y)$ est la solution exacte et $I(u^*) = m$ le minimum correspondant.

Soient alors $\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n$ une suite de fonctions satisfaisant $\bar{u}_1 = \psi(S)$ sur Γ et telles que $I(\bar{u}_k)$ converge (dans un sens à préciser) vers m . Alors $\bar{u}_n$ convergera vers u^* (dans un sens à préciser aussi).

Examinons alors la suite de fonctions $u = \phi(x,y,a_1,a_2,\dots,a_n)$ tel que $u = \psi(s)$ sur Γ .

En recherchant parmi ces fonctions celles qui minimisent I , on est amené à résoudre le problème :

Trouver $a_1, \dots, a_n$ tel que $I = I(a_1, a_2, \dots, a_n)$ soit minimum. Les nombres $a_1, \dots, a_n$ doivent donc vérifier le système algébrique

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Soit $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ la solution de ce système. La fonction $\bar{u} = \phi(x, y, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ est alors une solution approchée de notre problème.

Pour la convergence, il suffit que le système $\phi_n(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n)$ soit complet.

Soit alors à résoudre l'équation $L(u) = 0$, L étant un opérateur différentiel linéaire (à 2 variables), avec la condition $u = 0$ sur Γ (c'est-à-dire le problème homogène).

Nous cherchons la solution approchée sous la forme :

$$\bar{u}(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x, y),$$

les ψ_i vérifiant la même condition sur Γ et supposées être les premières fonctions d'un système $\{\psi_i(x, y)\}$ ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) complet dans un domaine D . $L(\bar{u})$ devant être nul, il doit être orthogonal à toutes les fonctions du système complet $\{\psi_i\}$. Pour déterminer les c_i , nous disposons donc de n relations d'orthogonalité :

$$\iint_D L(\bar{u}) \psi_i \, dx \, dy = 0 = \iint_D L\left(\sum_{j=1}^n c_j \psi_j(x, y)\right) \psi_i(x, y) \, dx \, dy = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Ceci nous donne un système linéaire (L étant supposé linéaire) pour la détermination des c_i et donc de la solution approchée $\bar{u}(x, y)$.

Pour une étude approfondie de la question (estimation de l'erreur, amélioration de la convergence, etc...), se référer à l'ouvrage de S.G. Mikhlin "Variational methods in mathematical physics" ; du même auteur aussi "Numerical performance of variational methods".

2.2. - Application aux équations aux dérivées partielles de second ordre :
Equation de Poisson.

Considérons l'équation de Poisson :

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f = 0 \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Le problème aux données non homogènes peut toujours être ramené à un problème homogène en considérant à la place de u la fonction $w(x,y) = u(x,y) - v(x,y)$, $v(x,y)$ prenant la valeur imposée $f(s)$ sur Γ .

D'après ce qui précède, nous recherchons la solution approchée sous la forme :

$$u_n(x,y) = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \psi_k(x,y), \quad \text{les } a_k \text{ étant déterminés par le système :}$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - f \right) \psi_s \, dx \, dy = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Le problème qui se pose est alors celui du choix du système complet $\psi_k(x,y)$.

Pour cela, nous nous basons sur le théorème suivant, qui est une généralisation du théorème de Weierstrass :

Théorème. - Soit $v(x,y)$ une fonction continue, ainsi que ses dérivées

$\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$, dans un domaine fermé D . Il existe toujours un polynôme $P(x,y)$,

tel que l'on ait dans D :

$$|v(x,y) - P(x,y)| < \epsilon ; \quad \left| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right| < \epsilon ; \quad \left| \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \right| < \epsilon ; \quad \epsilon \text{ arbitrairement}$$

petit.

Ce théorème permet d'affirmer :

Le système de fonctions $\psi_0 = w$; $\psi_1 = wx$; $\psi_2 = wy$; $\psi_3 = wx^2$;
 $\psi_4 = wxy$ etc... est un système complet dans D ; pour cela, il suffit que :

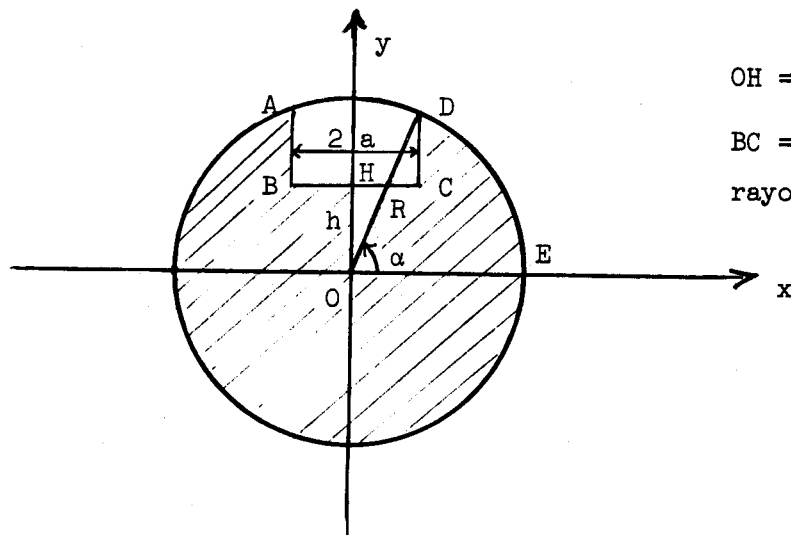
1. $w(x,y) > 0$, continue, bornée dans D .
2. $\frac{\partial w}{\partial x}$ et $\frac{\partial w}{\partial y}$ existent, sont continues et bornées dans D .
3. $w(x,y) = 0$ sur Γ .

On en déduit alors un moyen simple pour trouver un système complet dans un domaine D . Il suffit de prendre pour $w(x,y)$ l'équation du contour. Ceci est particulièrement aisé pour les contours algébriques convexes. Pour les contours concaves (polygones concaves etc...) la construction de la fonction $w(x,y)$ est beaucoup plus délicate et problématique.



Nous allons appliquer la méthode, pour résoudre le problème de la torsion d'une poutre à section carrée, et d'un arbre claveté.

Nous commençons par le problème de la section circulaire avec logement de clavette



$$OH = h ; (\vec{Ox}, \vec{OD}) = \alpha$$

$$BC = 2a \quad (CH = a)$$

$$\text{rayon} = R.$$

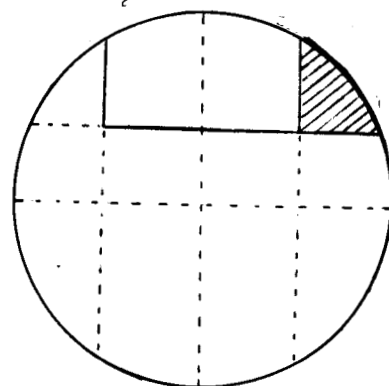
$$w(x,y) = [|y-h| - (y-h) + |a-x| - (a-x) + |a+x| - (a+x)] \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2}$$

$$w(x,y) = [|y-h| - (y-h) + |a-x| - (a-x) + |a+x| - (a+x)] \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2}$$

$$w(-x,y) = w(x,y).$$

$$1. \quad y \geq h \quad x \geq a$$

$$w_1(x,y) = (x-a)(R^2 - x^2 - y^2) = w_1(x,y;a,h)$$

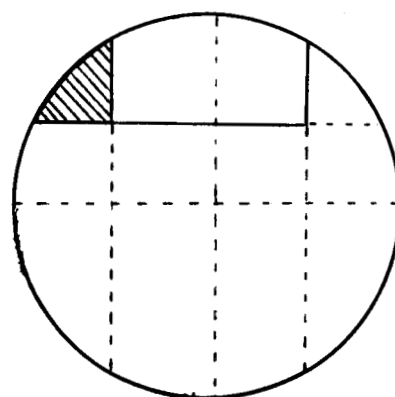


$$2. \quad y \geq h \quad x \leq -a$$

$$w_2(x,y) = -(a+x)(R^2 - x^2 - y^2) = w_1(-x,y;a,h) = w_1(-x,y)$$

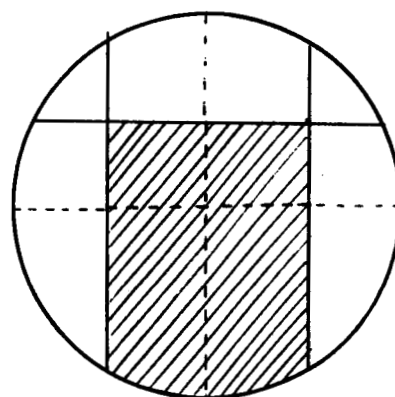
avec

$$\begin{aligned} w_1(-x,y;a,h) &= w_1(x,y;a,h) - 2x(R^2 - x^2 - y^2) \\ &= w_1(x,y) - 2P(x,y). \end{aligned}$$



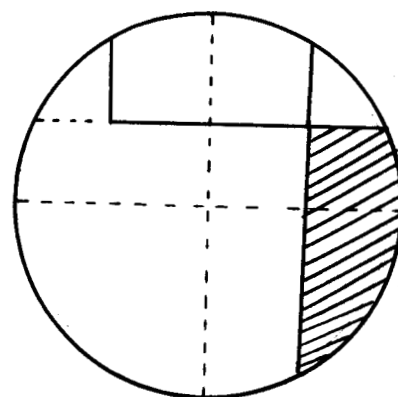
$$3. \quad y \leq h \quad -a \leq x \leq +a$$

$$w_3(x,y) = -(y-h)(R^2 - x^2 - y^2) = -w_1(y,x;h,a)$$



$$4. \quad y \leq h \quad x \geq a$$

$$\begin{aligned} w_4(x,y) &= [(x-a) - (y-h)] (R^2 - x^2 - y^2) \\ &= w_1(x,y;a,h) - w_1(y,x;h,a) \\ &= w_1(x,y) + w_3(x,y). \end{aligned}$$



$$5. \quad y \leq h \quad x \leq -a$$

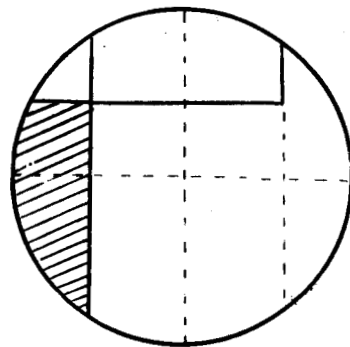
$$w_5(x,y) = -[(a+x) + (y-h)] (R^2 - x^2 - y^2)$$

$$= w_1(-x, y; a, h) - w_1(y, x; h, a)$$

$$= w_4(-x, y) = w_1(x, y) + w_3(x, y) - 2x(R^2 - x^2 - y^2)$$

$$= w_1(x, y; a, h) - w_1(y, x; h, a) - 2x(R^2 - x^2 - y^2)$$

$$= w_2(x, y) + w_3(x, y) = w_3(x, y) + w_1(x, y) - 2P(x, y)$$



DERIVEES PREMIERES

$$1. \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = -3x^2 - y^2 + 2ax + R^2 \quad \left| \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial x} - 2ax \right.$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = -2y(x-a) \quad \left| \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial w_1}{\partial y} - 2ay \right.$$

$$2. \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial x} - 2(R^2 - 3x^2 - y^2) = \frac{\partial w_1}{\partial x} - 2 \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial x} - 2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - 2ax \right) = -\frac{\partial w_1}{\partial x} + 4ax$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{\partial w_1}{\partial y} - 2 \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial w_1}{\partial y} - 2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} - 2ay \right) = -\frac{\partial w_1}{\partial y} + 4ay$$

$$3. \quad \frac{\partial w_3}{\partial x} = 2x(y-h)$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial y} = x^2 + 3y^2 - 2yh - R^2.$$

$$4. \quad \frac{\partial w_4}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w_4}{\partial y} = \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial y}$$

$$5. \quad \frac{\partial w_5}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_3}{\partial x} = -\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_3}{\partial x} + 4ax$$

$$\frac{\partial w_5}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial y} = -\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial y} + 4ay$$

On en déduit :

$$\sum_{j=1}^5 \frac{\partial w_j}{\partial x} = 8ax + 3 \frac{\partial w_3}{\partial x}$$

$$\sum_{j=1}^5 \frac{\partial w_j}{\partial y} = 8ay + 3 \frac{\partial w_3}{\partial y}.$$

$$\text{D'ailleurs } \sum_{j=1}^5 w_j = 3w_3 + 4(w_1 - P) = 3w_3 - 4a(R^2 - x^2 - y^2).$$

DERIVEES SECONDES - LAPLACIENS -

$$1. \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 2a - 6x = 2(a - 3x)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = -2(x - a)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - 2a$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - 2a$$

$$\Delta w_1 = 4(a - 2x)$$

$$P = w_1 - 4a = -8x$$

$$(w_1 - P) = 4a$$

$$2. \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + 4a$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + 4a$$

$$\Delta w_2 = -\Delta w_1 + 8a = \Delta w_1(-x)$$

$$3. \quad \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} = 2(y - h)$$

$$\frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} = 2(3y - h)$$

$$\Delta w_3 = 4(2y - h)$$

$$4. \quad \frac{\partial^2 w_4}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 w_4}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2}$$

$$\Delta w_4 = \Delta w_1 + \Delta w_3$$

$$5. \quad \frac{\partial^2 w_5}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 w_5}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2}$$

$$\Delta w_5 = -\Delta w_1 + \Delta w_3 + 8a = \Delta w_2 + \Delta w_3$$

On en déduit :

$$\sum_{j=1}^5 \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} = 8a + 3 \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}$$

$$\sum_{j=1}^5 \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} = 8a + 3 \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2}$$

Compte tenu de la symétrie du contour par rapport à Oy, nous prendrons comme expression approchée pour $u(x,y)$:

$$u_n(x,y) = \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^{2p} A_{2i}^k w(x,y) x^{2i} y^k \quad \begin{cases} i = 0, \dots, p \\ k = 0, \dots, 2p \\ n = (p+1)(2p+1) \end{cases}$$

u_n dépend de $(p+1)(2p+1)$ coefficient A_{2i}^k qui doivent vérifier le système :

$$\iint_S (\Delta u_n + 2) w x^{2\beta} y^\alpha dx dy = 0 \quad \begin{cases} \beta = 0, \dots, p \\ \alpha = 0, \dots, 2p \end{cases} \quad \text{soit } (p+1)(2p+1) \text{ équations.}$$

soit

$$\iint_D \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^{2p} A_{2i}^k [\Delta(x^{2i} y^k w)] w x^{2\beta} y^\alpha dx dy = -2 \iint_D w x^{2\beta} y^\alpha dx dy$$

$$\text{or } \Delta(x^{2i} y^k w) = x^{2i-2} y^{k-2} \left[x^2 y^2 \Delta w + w [2i(2i-1)y^2 + k(k-1)x^2] + 4ixy^2 \frac{\partial w}{\partial x} + 2k x^2 y \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

et le système devient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^{2p} A_{2i}^k \iint x^{2i+2\beta-2} y^{k+\alpha-2} \left[x^2 y^2 w \Delta w + w [2i(2i-1)y^2 + k(k-1)x^2] + 4ixy^2 w \frac{\partial w}{\partial x} \right. \\ \left. + 2k y x^2 w \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy = -2 \iint_D w(x,y) x^{2\beta} y^\alpha dx dy. \end{aligned}$$

Posons alors :

$$I_{1j}^{\alpha\beta ik} = \iint_{D_j} x^{2i+2\beta} y^{k+\alpha} w_j \Delta w_j dx dy ; \quad I_{4j}^{\alpha\beta ik} = \iint_{D_j} x^{2i+2\beta-1} y^{k+\alpha} w_j \frac{\partial w_j}{\partial x} dx dy$$

$$I_{2j}^{\alpha\beta ik} = \iint_{D_j} x^{2i+2\beta-2} y^{k+\alpha} w_j^2 dx dy ; \quad I_{5j}^{\alpha\beta ik} = \iint_{D_j} x^{2i+2\beta} y^{k+\alpha-1} w_j \frac{\partial w_j}{\partial y} dx dy$$

$$I_{3j}^{\alpha\beta ik} = \iint_{D_j} x^{2i+2\beta} y^{k+\alpha-2} w_j^2 dx dy ; \quad I_{6j}^{\alpha\beta ik} = \iint_{D_j} w_j x^{2\beta} y^{\alpha} dx dy.$$

Le système prend alors la forme simple suivante :

$$\sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^{2p} A_{2i}^k \left[\sum_{j=1}^5 I_{1j}^{\alpha\beta ik} + 2i(2i-1) I_{2j}^{\alpha\beta ik} + k(k-1) I_{3j}^{\alpha\beta ik} + 4i I_{4j}^{\alpha\beta ik} + 2k I_{5j}^{\alpha\beta ik} \right] = -2 \sum_{j=1}^5 I_{6j}^{\alpha\beta ik}.$$

Le problème numérique le plus important est alors de calculer les $I_{nj}^{\alpha\beta ik}$, après quoi on peut poser le système et le résoudre par les méthodes classiques. Or ces coefficients peuvent être ramenés à des combinaisons linéaires de termes de la forme : 114 - 120.

$$D_k(r,s) = \iint_{D_k} x^r y^s dx dy, \text{ dont le calcul est donné dans tous}$$

les cas par les formules des pages :

$$I. \quad I_{1j}^{\alpha\beta ik}.$$

$$1. \quad I_{11}^{\alpha\beta ik} = \iint_{D_1} x^{2i+2\beta} y^{k+\alpha} w_1 \Delta w_1 dx dy = 4 \iint_{D_1} x^{2i+2\beta} y^{k+\alpha} (R^2 - x^2 - y^2)(x-a)(a-2x) dx dy :$$

$$= 4\{(a^2 - 2R^2)D_1(2i+2\beta+2, k+\alpha) + 3aR^2 D_1(2i+2\beta+1, k+\alpha) - a^2 R^2 D_1(2i+2\beta, k+\alpha) + 2D_1(2i+2\beta+4, k+\alpha) - 3aD_1(2i+2\beta+3, k+\alpha) + 2D_1(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) - 3aD_1(2i+2\beta+1, k+\alpha+2) + a^2 D_1(2i+2\beta, k+\alpha+2)\}.$$

$$\begin{aligned}
2. \quad I_{12}^{\alpha\beta ik} &= \iint_{D_2} x^{2i+2\beta} y^{k+\alpha} w_2 \Delta w_2 \, dx \, dy = 4 \iint_{D_2} x^{2i+2\beta} y^{k+\alpha} (x^2 + y^2 - R^2)(a+x)(a+2x) \\
&\quad dx \, dy. \\
&= 4 [(a^2 - 2R^2)D_2(2i+2\beta+2, k+\alpha) - 3aR^2D_2(2i+2\beta+1, k+\alpha) - a^2R^2D_2(2i+2\beta, k+\alpha) + \\
&\quad + 2D_2(2i+2\beta+4, k+\alpha) + 3aD_2(2i+2\beta+3, k+\alpha) + 2D_2(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) + 3aD_2(2i+2\beta+1, \\
&\quad k+\alpha+2) + a^2D_2(2i+2\beta, k+\alpha+2)].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad I_{13}^{\alpha\beta ik} &= 4 \iint_{D_3} x^{2i+2\beta} y^{k+\alpha} (2y-h)(h-y)(R^2 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \\
&= 4 \{ 3hR^2D_3(2i+2\beta, k+\alpha+1) - h^2R^2D_3(2i+2\beta, k+\alpha) - 3hD_3(2i+2\beta+2, k+\alpha+1) + 2D_3 \\
&\quad (2i+2\beta+2, k+\alpha+2) + h^2D_3(2i+2\beta+2, k+\alpha) - 3hD_3(2i+2\beta, k+\alpha+3) + 2D_3(2i+2\beta, k+\alpha+4) \\
&\quad + (h^2 - 2R^2)D_3(2i+2\beta, k+\alpha+2) \}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad I_{14}^{\alpha\beta ik} &= 4 \{ 4R^2D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+1) - 3(h-a)R^2D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha) + 3(h-a)R^2D_4(2i+2\beta, \\
&\quad k+\alpha+1) - (a-h)^2R^2D_4(2i+2\beta, k+\alpha) + [(a-h)^2 - 2R^2]D_4(2i+2\beta, k+\alpha+2) + 2D_4(2i+2\beta+4, \\
&\quad k+\alpha) + 4D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) - 4D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha+1) + 3(h-a)D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha) - \\
&\quad - 3(h-a)D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha+1) + 2D_4(2i+2\beta, k+\alpha+4) + [(a-h)^2 - 2R^2]D_4(2i+2\beta+2, \\
&\quad k+\alpha) - 4D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+3) + 3(h-a)D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+2) - 3(h-a)D_4(2i+2\beta, \\
&\quad k+\alpha+3) \}.
\end{aligned}$$

$$5. \quad I_{15}^{\alpha\beta ik} = \text{s'obtient de } I_{14} \text{ en changeant :}$$

- le domaine d'intégration chaque fois,

- de signe chaque fois que le 1er argument est impair.

On obtient dès lors :

$$\begin{aligned}
I_{15}^{\alpha\beta ik} &= 4 \{ -uR^2D_5(2i+2\beta+1, k+\alpha+1) + 3(h-a)R^2D_5(2i+2\beta+1, k+\alpha) + 3(h-a)R^2D_5(2i+2\beta, \\
&\quad k+\alpha+1) - (a-h)^2R^2D_5(2i+2\beta, k+\alpha) + [(a-h)^2 - 2R^2]D_5(2i+2\beta, k+\alpha+2) + 2D_5(2i+2\beta+4, \\
&\quad k+\alpha) + 4D_5(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) + 4D_5(2i+2\beta+3, k+\alpha+1) - 3(h-a)D_5(2i+2\beta+3, k+\alpha) \\
&\quad - 3(h-a)D_5(2i+2\beta+2, k+\alpha+1) + 2D_5(2i+2\beta, k+\alpha+4) + [(a-h)^2 - 2R^2]D_5(2i+2\beta+2, \\
&\quad k+\alpha) + 4D_5(2i+2\beta+1, k+\alpha+3) - 3(h-a)D_5(2i+2\beta+1, k+\alpha+2) - 3(h-a)D_5(2i+2\beta, k+\alpha+3) \}.
\end{aligned}$$

II. $I_{2j}^{\alpha\beta ik}$

$$\begin{aligned}
 1. \quad I_{21}^{\alpha\beta ik} &= \iint_{D_1} x^{2i+2\beta-2} y^{k+\alpha} w_1^2 dx dy \\
 &= \iint_{D_1} x^{2i+2\beta-2\beta} y^{k+\alpha} (x-a)^2 (R^2-x^2-y^2)^2 dx dy \\
 &= R^4 D_1(2i+2\beta, k+\alpha) + D_1(2i+2\beta+u, k+\alpha) + D_1(2i+2\beta, k+\alpha+u) + 2D_1(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) \\
 &\quad - 2R^2 D_1(2i+2\beta+2, k+\alpha) - 2R^2 D_1(2i+2\beta, k+\alpha+2) - 2aR^4 D_1(2i+2\beta-1, k+\alpha) \\
 &\quad - 2aD_1(2i+2\beta+3, k+\alpha) - 2aD_1(2i+2\beta-1, k+\alpha+4) - 4aD_1(2i+2\beta+1, k+\alpha+2) + \\
 &\quad + 4aR^2(2i+2\beta+1, k+\alpha) + 2aR^2 D_1(2i+2\beta-1, k+\alpha+2) + a^2 R^4 D_1(2i+2\beta-2, k+\alpha) \\
 &\quad + a^2 D_1(2i+2\beta+2, k+\alpha) + a^2 D_1(2i+2\beta-2, k+\alpha+4) + 2a^2 D_1(2i+2\beta, k+\alpha+2) \\
 &= 2a^2 R^2 D_1(2i+2\beta, k+\alpha) - 2a^2 R^2 D_1(2i+2\beta-2, k+\alpha+2).
 \end{aligned}$$

$$2. \quad I_{22}^{\alpha\beta ik} = \iint_{D_2} x^{2i+2-2} y^{k+\alpha} w_2^2 dx dy.$$

On peut l'obtenir de I_{21} en changeant à chaque fois le domaine d'intégration par D_2 et en changeant de signe chaque fois que le 1er argument est impair. On obtient :

$$\begin{aligned}
 I_{22}^{\alpha\beta ik} &= R^4 D_2(2i+2\beta, k+\alpha) + D_2(2i+2\beta+u, k+\alpha) + D_2(2i+2\beta, k+\alpha+u) + 2D_2(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) \\
 &\quad - 2R^2 D_2(2i+2\beta+2, k+\alpha) - 2R^2 D_2(2i+2\beta, k+\alpha+2) + 2aR^4 D_2(2i+2\beta-1, k+\alpha) + \\
 &\quad + 2aD_2(2i+2\beta+3, k+\alpha) + 2aD_2(2i+2\beta-1, k+\alpha+4) + 4aD_2(2i+2\beta+1, k+\alpha+2) - \\
 &\quad - 4aR^2 D_2(2i+2\beta+1, k+\alpha) - 2aR^2 D_2(2i+2\beta-1, k+\alpha+2) + a^2 R^4 D_2(2i+2\beta-2, k+\alpha) \\
 &\quad + a^2 D_2(2i+2\beta+2, k+\alpha) + a^2 D_2(2i+2\beta-2, k+\alpha+4) + 2a^2 D_1(2i+2\beta, k+\alpha+2) - \\
 &\quad - 2a^2 R^2 D_2(2i+2\beta, k+\alpha) - 2a^2 R^2 D_2(2i+2\beta-2, k+\alpha+2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad I_{23}^{\alpha\beta ik} &= R^2 D_3(2i+2\beta-2, k+\alpha+2) + D_3(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) + D_3(2i+2\beta-2, k+\alpha+6) + \\
 &\quad + 2D_3(2i+2\beta, k+\alpha+u) - 2R^2 D_3(2i+2\beta, k+\alpha+2) - 2R^2 D_3(2i+2\beta-2, k+\alpha+u) \\
 &\quad + h^2 R^2 D_3(2i+2\beta-2, k+\alpha) + h^2 D_3(2i+2\beta+2, k+\alpha) + h^2 D_3(2i+2\beta-2, k+\alpha+4) \\
 &\quad + 2h^2 D_3(2i+2\beta, k+\alpha+2) - 2h^2 R^2 D_3(2i+2\beta, k+\alpha) - 2h^2 R^2 D_3(2i+2\beta-2, k+\alpha+2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2hR^2D_3(2i+2\beta-2, k+\alpha+1) - 2hD_3(2i+2\beta+2, k+\alpha+1) - 2hD_3(2i+2\beta-2, k+\alpha+5) \\
& -4hD_3(2i+2\beta, k+\alpha+3) + 4hR^2D_3(2i+2\beta, k+\alpha+1) + uhR^2D_3(2i+2\beta-2, k+\alpha+3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad I_{24}^{\alpha\beta ik} = & R^4D_4(2i+2\beta, k+\alpha) + R^4D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha+2) - 2R^4D_4(2i+2\beta-1, k+\alpha+1) \\
& + (h-a)^2R^4D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha) + 2R^4(h-a)D_4(2i+2\beta-1, k+\alpha) - 2(h-a)R^4D_4(2i+2\beta-2, \\
& k+\alpha+1) - 2R^2D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha) - 2R^2D_4(2i+2\beta, k+\alpha+2) + 4R^2D_4(2i+2\beta+1, \\
& k+\alpha+1) - 2R^2(h-a)^2D_4(2i+2\beta, k+\alpha) - 4R^2(h-a)D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha) \\
& + 2R^2(h-a)D_4(2i+2\beta, k+\alpha+1) - 2R^2D_4(2i+2\beta, k+\alpha+2) - 2R^2D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha+u) \\
& + uR^2D_4(2i+2\beta-1, k+\alpha+3) - 2R^2(h-a)^2D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha+2) - 4R^2(h-a)D_4(2i+2\beta-1, \\
& k+\alpha+2) + 4R^2(h-a)D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha+3) + 3D_4(2i+2\beta+4, k+\alpha) + D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) \\
& - 2D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha+1) + (h-a)^2D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha) + 2(h-a)D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha) \\
& - 2(h-a)D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha+1) + D_4(2i+2\beta, k+\alpha+4) + D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha+6) - \\
& - 2D_4(2i+2\beta-1, k+\alpha+5) + (h-a)^2D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha+u) + 2(h-a)D_4(2i+2\beta-1, k+\alpha+4) \\
& - 2(h-a)D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha+5) + 2D_4(2i+2\beta, k+\alpha+u) - 4D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+3) + \\
& + 2(h-a)^2D_4(2i+2\beta, k+\alpha+2) + 2(h-a)D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+2) - 2(h-a)D_4(2i+2\beta, k+\alpha+3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad I_{25}^{\alpha\beta ik} = & -R^4D_4(2i+2\beta, k+\alpha) - R^4D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha+2) - 2R^4D_4(2i+2\beta-1, k+\alpha+1) - (h-a)^2 \\
& R^4D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha) + 2R^4(h-a)D_4(2i+2\beta-1, k+\alpha) + 2(h-a)R^4D_4(2i+2\beta-2, \\
& k+\alpha+1) + 2R^2D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha) + 2R^2D_4(2i+2\beta, k+\alpha+2) + uR^2D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+1) \\
& + 2R^2(h-a)^2D_4(2i+2\beta, k+\alpha) - 4R^2(h-a)D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha) - 2R^2(h-a)D_4(2i+2\beta, \\
& k+\alpha+1) + 2R^2D_4(2i+2\beta, k+\alpha+2) + 2R^2D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha+4) + 4R^2D_4(2i+2\beta-1, \\
& k+\alpha+3) + 2R^2(h-a)^2D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha+2) - uR^2(h-a)D_4(2i+2\beta-1, k+\alpha+2) - \\
& - 4R^2(h-a)D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha+3) - 3D_4(2i+2\beta+4, k+\alpha) - D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) - \\
& - 2D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha+1) - (h-a)^2D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha) + 2(h-a)D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha) - \\
& - 2(h-a)D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha+1) - D_4(2i+2\beta, k+\alpha+4) - D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha+6) - \\
& - 2D_4(2i+2\beta-1, k+\alpha+5) - (h-a)^2D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha+u) + 2(h-a)D_4(2i+2\beta-1, k+\alpha+4) \\
& - 2(h-a)D_4(2i+2\beta-2, k+\alpha+5) - 2D_4(2i+2\beta, k+\alpha+4) - 4D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+3) - \\
& - 2(h-a)^2D_4(2i+2\beta, k+\alpha+2) + 2(h-a)D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+2) + 2(h-a)D_4(2i+2\beta, \\
& k+\alpha+3).
\end{aligned}$$

$$\boxed{I_{3j}}$$

$$1. \quad I_{31}^{\alpha\beta ik} = R^4 D_1(2i+2\beta+2, k+\alpha-2) + D_1(2i+2\beta+6, k+\alpha-2) + D_1(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) + \\ + 2D_1(2i+2\beta+4, k+\alpha) - 2R^2(2i+2\beta+4, k+\alpha-2) - 2R^2 D_1(2i+2\beta+2, k+\alpha) - \\ - 2aR^4 D_1(2i+2\beta+1, k+\alpha-2) - 2aD_1(2i+2\beta+5, k+\alpha-2) - 2aD_1(2i+2\beta+1, k+\alpha+2) - \\ - 4aD_1(2i+2\beta+3, k+\alpha) + 4aR^2 D_1(2i+2\beta+3, k+\alpha-2) + 2aR^2 D_1(2i+2\beta+1, k+\alpha) + \\ + a^2 R^4 D_1(2i+2\beta, k+\alpha-2) + a^2 D_1(2i+2\beta+4, k+\alpha-2) + a^2 D_1(2i+2\beta, k+\alpha+2) + \\ + 2a^2 D_1(2i+2\beta+2, k+\alpha) - 2a^2 R^2 D_1(2i+2\beta+2, k+\alpha-2) - 2a^2 R^2 D_1(2i+2\beta, k+\alpha).$$

$$2. \quad I_{32}^{\alpha\beta ik} = -I_{31}(-x). \quad \text{S'obtiendra donc simplement en changeant de signe dans} \\ I_{31} \quad \text{chaque fois que le 1er argument est impair.}$$

$$3. \quad I_{33}^{\alpha\beta ik} = R^2 D_3(2i+2\beta, k+\alpha) + D_3(2i+2\beta+4, k+\alpha) + D_3(2i+2\beta, k+\alpha+4) + 2D_3(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) - \\ - 2hD_3(2i+2\beta, k+\alpha+3) - 2R^2 D_3(2i+2\beta+2, k+\alpha) - 2R^2 D_3(2i+2\beta, k+\alpha+2) + \\ + h^2 R^2 D_3(2i+2\beta, k+\alpha+2) + h^2 D_3(2i+2\beta+4, k+\alpha-2) + h^2 D_3(2i+2\beta, k+\alpha+2) + \\ + 2h^2 D_3(2i+2\beta+2, k+\alpha) - 2h^2 R^2 D_3(2i+2\beta+2, k+\alpha-2) - 2h^2 R^2 D_3(2i+2\beta, k+\alpha) - \\ - 2h^2 R^2 D_3(2i+2\beta, k+\alpha-1) - 2hD_3(2i+2\beta+4, k+\alpha-1) - 4hD_3(2i+2\beta+2, k+\alpha+1) + \\ + 4hR^2 D_3(2i+2\beta+2, k+\alpha-1) + 4hR^2 D_3(2i+2\beta, k+\alpha+1).$$

$$4. \quad I_{34}^{\alpha\beta ik} = R^4 D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha-2) + R^4 D_4(2i+2\beta, k+\alpha) - 2R^4 D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha-1) + \\ + (h-a)^2 R^4 D_4(2i+2\beta, k+\alpha-2) + 2R^4 (h-a) D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha-2) - 2(h-a) R^4 D_4(2i+2\beta, \\ k+\alpha-1) - 2R^2 D_4(2i+2\beta+4, k+\alpha-2) - 2R^2 D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha) + 4R^2 D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha-1) - \\ - 2R^2 (h-a)^2 D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha-2) - 4R^2 (h-a) D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha-2) + 2R^2 (h-a) \\ D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha-1) - 2R^2 D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha) - 2R^2 D_4(2i+2\beta, k+\alpha+2) + \\ + 4R^2 D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+1) - 2R^2 (h-a)^2 D_4(2i+2\beta, k+\alpha) - 4R^2 (h-a) D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha) + \\ + 4R^2 (h-a) D_4(2i+2\beta, k+\alpha+1) + 3D_4(2i+2\beta+6, k+\alpha-2) + D_4(2i+2\beta+4, k+\alpha) - \\ - 2D_4(2i+2\beta+5, k+\alpha-1) + (h-a)^2 D_4(2i+2\beta+4, k+\alpha-2) + 2(h-a) D_4(2i+2\beta+5, k+\alpha-2) - \\ - 2(h-a) D_4(2i+2\beta+5, k+\alpha-1) + D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) + D_4(2i+2\beta, k+\alpha+4) - \\ - 2D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+3) + (h-a)^2 D_4(2i+2\beta, k+\alpha+2) + 2(h-a) D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+3) -$$

$$-2(h-a)D_4(2i+2\beta, k+\alpha+3)+2D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha+2)-4D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha+1)+ \\ +2(h-a)^2D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha)+2(h-a)D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha)-2(h-a)D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha+1).$$

5. $I_{35}^{\alpha\beta ik} = -I_{34}(-x) \implies$ s'obtiendra en changeant de signe dans I_{34} chaque fois que le 1er argument est impair.

$$I_{4j}$$

1. $I_{41}^{\alpha\beta ik} = 3D_1(2i+2\beta+4, k+\alpha)+4D_1(2i+2\beta+2, k+\alpha+2)-5aD_1(2i+2\beta+3, k+\alpha)+D_1(2i+2\beta, k+\alpha+4) \\ +2aR^2D_1(2i+2\beta-1, k+\alpha+2)-aD_1(2i+2\beta-1, k+\alpha+4)+(R^4-2a^2R^2)D_1(2i+2\beta, k+\alpha)- \\ -aR^4D_1(2i+2\beta-1, k+\alpha)+2(a^2-2R^2)D_1(2i+2\beta+2, k+\alpha)+2(a^2-R^2)D_1(2i+2\beta, \\ k+\alpha+2)+6aR^2D_1(2i+2\beta+1, k+\alpha)-6a(2i+2\beta+1, k+\alpha+1).$

2. $I_{42}^{\alpha\beta ik} = +I_{41}(-x) \implies$ s'obtiendra à partir de I_{41} en changeant désigne chaque fois que le 1er argument est impair.

3. $I_{43}^{\alpha\beta ik} = -3D_3(2i+2\beta, k+\alpha+3)-4D_3(2i+2\beta+2, k+\alpha+1)+5hD_3(2i+2\beta, k+\alpha+2)-D_3(2i+2\beta+4, \\ k+\alpha-1)-2hR^2D_3(2i+2\beta+2, k+\alpha-2)+hD_3(2i+2\beta+4, k+\alpha-2)-(R^4-2h^2R^2)D_3(2i+2\beta, \\ k+\alpha-1)-hR^4D_3(2i+2\beta, k+\alpha-2)-2(h^2-2R^2)D_3(2i+2\beta, k+\alpha+1)-2(h^2-R^2)D_3(2i+2\beta, 2, \\ k+\alpha-1)-6hR^2D_3(2i+2\beta, k+\alpha)+6hD_3(2i+2\beta+1, k+\alpha).$

4. $I_{44}^{\alpha\beta ik} = 6(a-h)R^2D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha)+R^2[R^2-2(a-h)^2]D_4(2i+2\beta, k+\alpha)- \\ -R^4D_4(2i+2\beta-1, k+\alpha+1)+(h-a)R^4D_4(2i+2\beta-1, k+\alpha)+3D_4(2i+2\beta+4, k+\alpha)- \\ -5(a-h)D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha)-2[2R^2-(a-h)^2]D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha)-D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+3)+ \\ +6D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha+2)+R^2D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+1)-6(a-h)D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+2)- \\ -2[2R^2-(a-h)^2]D_4(2i+2\beta, k+\alpha+2)-D_4(2i+2\beta-1, k+\alpha+5)+3D_4(2i+2\beta, k+\alpha+4)+ \\ +(h-a)D_4(2i+2\beta-1, k+\alpha+4)-2(h-a)R^2D_4(2i+2\beta-1, k+\alpha+2)+2R^2(2i+2\beta-1, k+\alpha+3).$

5. $I_{45}^{\alpha\beta ik} = I_{44}(x) \Rightarrow$ s'obtient à partir de I_{44} en changeant de signe chaque fois que le 1er argument est impair.

$$\boxed{I_{5j}^{\alpha\beta ik}}$$

1. $I_{51}^{\alpha\beta ik} = \iint_{D_1} x^{2i+2\beta} y^{k+\alpha-1} w_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} dx dy$
 $= 2\{2aR^2 D_1(2i+2\beta+1, k+\alpha) - a^2 R^2 D_1(2i+2\beta, k+\alpha) + (a^2 - R^2) D_1(2i+2\beta+2, k+\alpha) +$
 $+ D_1(2i+2\beta+4, k+\alpha) - 2a D_1(2i+2\beta+3, k+\alpha) + D_1(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) -$
 $- 2a D_1(2i+2\beta+1, k+\alpha+2) + a^2 D_1(2i+2\beta, k+\alpha+2)\}.$
2. $I_{52}^{\alpha\beta ik} = 2\{-2aR^2 D_2(2i+2\beta+1, k+\alpha) - a^2 R^2 D_2(2i+2\beta, k+\alpha) + (a^2 - R^2) D_2(2i+2\beta+2, k+\alpha) +$
 $+ D_2(2i+2\beta+4, k+\alpha) + 2a D_2(2i+2\beta+3, k+\alpha) + D_2(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) +$
 $+ 2a D_2(2i+2\beta+1, k+\alpha+2) + a^2 D_2(2i+2\beta, k+\alpha+2)\}.$
3. $I_{53}^{\alpha\beta ik} = 2(h^2 - R^2) D_3(2i+2\beta+2, k+\alpha) + 2hR^2 D_3(2i+2\beta+2, k+\alpha-1) + 6hR^2 D_3(2i+2\beta, k+\alpha+1) -$
 $- hD_3(2i+2\beta+4, k+\alpha-1) + 2(h^2 - 2R^2) D_3(2i+2\beta, k+\alpha+2) + uD_3(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) -$
 $- hR^4 D_3(2i+2\beta, k+\alpha-1) + R^2(R^2 - 2h^2) D_3(2i+2\beta, k+\alpha) + D_3(2i+2\beta+4, k+\alpha) -$
 $- 5hD_3(2i+2\beta, k+\alpha+3) + 3D_3(2i+2\beta, k+\alpha+4) - 6hD_3(2i+2\beta+2, k+\alpha+1).$
4. $I_{54}^{\alpha\beta ik} = 6R^2 D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+1) - 2[2R^2 - (h-a)^2] D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha) -$
 $- 4(h-a)R^2 D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha) + 2R^2 D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha-1) - R^4 D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha-1)$
 $- 2[2R^2(h-a)^2] D_4(2i+2\beta, k+\alpha+2) + 6(h-a)R^2 D_4(2i+2\beta, k+\alpha+1) +$
 $+ R^2[R^2 - 2(h-a)^2] D_4(2i+2\beta, k+\alpha) + 2(h-a)R^2 D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha-1) -$
 $- R^4(h-a) D_4(2i+2\beta, k+\alpha-1) - 6D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha+1) + 3D_4(2i+2\beta+4, k+\alpha) +$
 $+ 4(h-a) D_4(2i+2\beta+3, k+\alpha) - D_4(2i+2\beta+5, k+\alpha-1) + 6D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) -$
 $- 6(h-a) D_4(2i+2\beta+2, k+\alpha+1) - (h-a) D_4(2i+2\beta+4, k+\alpha-1) - 5D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+3) +$
 $+ 4(h-a) D_4(2i+2\beta+1, k+\alpha+2) + 3D_4(2i+2\beta, k+\alpha+u) - 5(h-a) D_4(2i+2\beta, k+\alpha+3).$

$$\begin{aligned}
5. \quad I_{55}^{\alpha\beta ik} = & -6R^2 D_5(2i+2\beta+1, k+\alpha+1) - 2[2R^2 - (h-a)^2] D_5(2i+2\beta+2, k+\alpha) + \\
& + 4(h-a)R^2 D_5(2i+2\beta+1, k+\alpha) - 2R^2 D_5(2i+2\beta+3, k+\alpha-1) + R^4 D_5(2i+2\beta+1, k+\alpha-1) - \\
& - 2[2R^2 - (h-a)^2] D_5(2i+2\beta, k+\alpha+2) + 6(h-a)R^2 D_5(2i+2\beta, k+\alpha+1) + \\
& + R^2[R^2 - 2(h-a)^2] D_5(2i+2\beta, k+\alpha) + 2(h-a)R^2 D_5(2i+2\beta+2, k+\alpha-1) - \\
& - R^4(h-a) D_5(2i+2\beta, k+\alpha-1) + 6D_5(2i+2\beta+3, k+\alpha+1) + 3D_5(2i+2\beta+u, k+\alpha) - \\
& - u(h-a) D_5(2i+2\beta+3, k+\alpha) + D_5(2i+2\beta+5, k+\alpha-1) + 6D_5(2i+2\beta+2, k+\alpha+2) - \\
& - 6(h-a) D_5(2i+2\beta+2, k+\alpha+1) - (h-a) D_5(2i+2\beta+4, k+\alpha-1) + 5D_5(2i+2\beta+1, k+\alpha+3) - \\
& - 4(h-a) D_5(2i+2\beta+1, k+\alpha+2) + 3D_5(2i+2\beta, k+\alpha+u) - 5(h-a) D_5(2i+2\beta, k+\alpha+3).
\end{aligned}$$

$$I_{6j}^{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned}
1. \quad I_{61}^{\alpha\beta} &= \iint_1 w_1(x, y) x^{2\beta} y^\alpha dx dy \\
&= R^2 D_1(2\beta+1, \alpha) - D_1(2\beta+3, \alpha) - D_1(2\beta+1, \alpha+2) - aR^2 D_1(2\beta, \alpha) + aD_1(2\beta+2, \alpha) + aD_1(2\beta, \alpha+2) \\
2. \quad I_{62}^{\alpha\beta} &= -R^2 D_2(2\beta+1, \alpha) + D_2(2\beta+3, \alpha) + D_1(2\beta+1, \alpha+2) - aR^2 D_2(2\beta, \alpha) + aD_2(2\beta+2, \alpha) + aD_2(2\beta, \alpha+2) \\
3. \quad I_{63}^{\alpha\beta} &= hR^2 D_3(2\beta, \alpha) - hD_3(2\beta+1, \alpha) - hD_3(2\beta, \alpha+2) - R^2 D_3(2\beta, \alpha+1) + D_3(2\beta+2, \alpha+1) + D_3(2\beta, \alpha+3) \\
4. \quad I_{64}^{\alpha\beta} &= R^2 D_4(2\beta+1, \alpha) - D_4(2\beta+3, \alpha) - D_4(2\beta+1, \alpha+2) + (h-a)R^2 D_4(2\beta, \alpha) - h(a)D_4(2\beta+2, \alpha) - \\
&\quad - (h-a)D_4(2\beta, \alpha+2) - R^2 D_4(2\beta, \alpha+1) + D_4(2\beta+2, \alpha+1) + D_4(2\beta, \alpha+3). \\
5. \quad I_{65}^{\alpha\beta} &= -R^2 D_5(2\beta+1, \alpha) + D_5(2\beta+3, \alpha) + D_5(2\beta+1, \alpha+2) + (h-a)R^2 D_5(2\beta, \alpha) - (h-a)D_5(2\beta+2, \alpha) - \\
&\quad - (h-a)D_5(2\beta, \alpha+2) - R^2 D_5(2\beta, \alpha+1) + D_5(2\beta+2, \alpha+1) + D_5(2\beta, \alpha+3).
\end{aligned}$$

En remarquant que $D_1(2p, q) = D_2(2p, q)$ et que $D_1(2p+1, q) = -D_2(2p+1, q)$, et les relations équivalents pour $D_4(2p, q)$ et $D_4(2p+1, q)$ avec $D_5(2p, q)$ et $D_5(2p+1, q)$, on obtient :

$$\sum_1^5 I_{6j} = 2[R^2 D_1(2\beta+1, \alpha) - D_1(2\beta+3, \alpha) - D_1(2\beta+1, \alpha+2) - aR^2 D_1(2\beta, \alpha) + aD_1(2\beta+2, \alpha) + \\ + aD_1(2\beta, \alpha+2) + R^2 D_4(2\beta+1, \alpha) - D_4(2\beta+3, \alpha) - D_4(2\beta+1, \alpha+2) + (h-a)R^2 D_4(2\beta, \alpha) - \\ - (h-a)D_4(2\beta+2, \alpha) - (h-a)D_4(2\beta, \alpha+2) - R^2 D_4(2\beta, \alpha+1) + D_4(2\beta+2, \alpha+1) + D_4(2\beta, \alpha+3)] \\ + hR^2 D_3(2\beta, \alpha) - hD_3(2\beta+2, \alpha) - hD_3(2\beta, \alpha+2) - R^2 D_3(2\beta, \alpha+1) + D_3(2\beta+2, \alpha+1) + D_3(2\beta, \alpha+3).$$

En posant $I_1 = \sum I_{1j}$; $I_2 = \sum I_{2j}$; $I_3 = \sum I_{3j}$; $I_4 = \sum I_{4j}$;
 $I_5 = \sum I_{5j}$ et $I_6 = \sum I_{6j}$.

On obtient, pour le système d'équations la forme condensée :

$$\sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^{2p} A_{2i}^k \left[I_1^{\alpha\beta ik} + 2i(2i-1) I_2^{\alpha\beta ik} + k(k-1) I_3^{\alpha\beta ik} + 4i I_4^{\alpha\beta ik} + 2k I_5^{\alpha\beta ik} \right] \\ = -2 I_6^{\alpha\beta}.$$

Nous allons expliciter la forme du système pour un exemple, soit $U_2(x, y)$. Les 2 coefficients vérifient alors le système :

$$\begin{cases} A_0^0 I_1^{0000} + A_0^1 (I_1^{0001} + 2 I_5^{0001}) = -2 I_6^{00} \\ A_0^0 I_1^{1000} + A_0^1 (I_1^{1001} + 2 I_5^{1001}) = -2 I_6^{10} \end{cases}.$$

En posant $B_{11} = I_1^{0000}$, $B_{21} = I_1^{0001}$; $B_{12} = I_1^{0001} + 2 I_5^{0001}$;
 $B_{22} = I_1^{1001} + 2 I_5^{1001}$

on aura :

$$A_0^0 = -2 \frac{\begin{vmatrix} I_6^{00} & B_{12} \\ I_6 & B_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}} ; \quad A_0^1 = -2 \frac{\begin{vmatrix} B_{11} & I_6^{00} \\ B_{21} & I_6^{10} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}} .$$

Il est maintenant nécessaire d'avoir les formules qui permettent de calculer systématiquement les termes $D_k(p,q)$. C'est ce qui est fait dans les pages suivantes :

Il reste maintenant à calculer les $D_k(p,q)$. Pour cela 4 cas sont à envisager :

I. $D_k(2p, 2q) :$

$$\begin{aligned} 1. D_1(2p, 2q) &: \iint_{D_1} x^{2p} y^{2q} dx dy = \int_a^{\sqrt{R^2-h^2}} x^{2p} dx \int_h^{\sqrt{R^2-x^2}} y^{2q} dy = \\ &= \frac{1}{2q+1} \int_a^{\sqrt{R^2-h^2}} x^{2p} [y^{2q+1}]_h^{\sqrt{R^2-x^2}} (R^2-x^2)^{1/2} dx = \\ &= \frac{1}{2q+1} \left[-\frac{h^{2q+1}}{2p+1} [x^{2p+1}]_a^{\sqrt{R^2-h^2}} + \int_a^{\sqrt{R^2-h^2}} (R^2-x^2)^{\frac{2q+1}{2}} x^{2p} dx \right] \\ &= \frac{1}{2q+1} \left[-\frac{h^{2q+1}}{2p+1} [x^{2p+1}]_a^{\sqrt{R^2-h^2}} + J_1(p,q) \right]. \end{aligned}$$

$$2. D_2(2p, 2q) = -D_1(2p, 2q).$$

$$\begin{aligned}
3. \quad D_3(2p, 2q) &= -2 \int_0^a dx \int_h^{\sqrt{R^2-x^2}} x^{2p} y^{2q} dy = \\
&+ \frac{2}{2q+1} \left[\frac{h^{2q+1}}{2p+1} a^{2p+1} + \int_0^a (R^2-x^2)^{\frac{2q+1}{2}} x^{2p} dx \right] \\
&= + \frac{2}{2q+1} \left[\frac{h^{2q+1}}{2p+1} a^{2p+1} + I_3(p, q) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad D_4(2p, 2q) &= \iint x^{2p} y^{2q} dx dy = \int_h^{\sqrt{R^2-a^2}} y^{2q} dy \int_a^{\sqrt{R^2-y^2}} x^{2p} dx = \\
&= \frac{-1}{2p+1} \int_h^{\sqrt{R^2-h^2}} y^{2q} [x^{2p+1}]_a^{\sqrt{R^2-y^2}} dy = \frac{-1}{2p+1} \left[-\frac{a^{2p+1}}{2q+1} [y^{2q+1}]_h^{\sqrt{R^2-h^2}} + \right. \\
&+ \left. \int_h^{\sqrt{R^2-a^2}} (R^2-y^2)^{\frac{2p+1}{2}} y^{2q} dy \right] \\
&= \frac{-1}{2p+1} \left[-\frac{a^{2p+1}}{2q+1} [y^{2q+1}]_h^{\sqrt{R^2-a^2}} + I_4(q, p) \right].
\end{aligned}$$

$$5. \quad D_5(2p, 2q) = -D_4(2p, 2q).$$

II. $D_k(2p, 2q+1)$

$$\begin{aligned}
1. \quad D_1(2p, 2q+1) &= \frac{1}{2q+2} \left[-\frac{h^{2q+2}}{2p+1} [x^{2p+1}]_a^{\sqrt{R^2-h^2}} + \int_a^{\sqrt{R^2-h^2}} (R^2-x^2)^{q+1} x^{2p} dx \right] \\
&= \frac{1}{2(q+1)} \left[-\frac{h^{2(q+1)}}{2p+1} [x^{2p+1}]_a^{\sqrt{R^2-h^2}} + K_1(2p, q+1) \right].
\end{aligned}$$

$$2. D_2(2p, q+1) = -D_1(2p, 2q+1).$$

$$\begin{aligned} 3. D_3(2p, 2q+1) &= -2 \int_0^a dx \left[\frac{-\sqrt{R^2-x^2}}{2} x^{2p} y^{2q} dy \right] \\ &= + \frac{2}{2q+2} \left[\frac{h^{2q+2}}{2p+1} a^{2p+1} + \int_b^a (R^2-x^2)^{q+1} x^{2p} dx \right] \\ &= + \frac{2}{2q+2} \left[\frac{h^{2q+2}}{2p+1} a^{2p+1} + K_3(2p, q+1) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. D_4(2p, 2q+1) &= - \frac{1}{2p+1} \left[- \frac{a^{2p+1}}{2(q+1)} [y^{2(q+1)}]_h^{-\sqrt{R^2-a^2}} + \right. \\ &\quad \left. \int_h^{-\sqrt{R^2-a^2}} (R^2-y^2)^{\frac{2p+1}{2}} y^{2q+1} dy \right] \\ &= \frac{-1}{2p+1} \left[- \frac{a^{2p+1}}{2(q+1)} [y^{2(q+1)}]_h^{-\sqrt{R^2-a^2}} + I_4 \left[\left(q + \frac{1}{2} \right), p \right] \right] \end{aligned}$$

$$5. D_5(2p, 2q+1) = -D_4(2p, 2q+1).$$

III. $D_k(2p+1, 2q)$

$$\begin{aligned} 1. D_1(2p+1, 2q) &= \iint_{D_1} x^{2p+1} y^{2q} dx dy = \frac{1}{2q+1} \left[- \frac{h^{2q+1}}{2(p+1)} [x^{2(p+1)}]_a^{\sqrt{R^2-h^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \int_a^{\sqrt{R^2-h^2}} (R^2-x^2)^{\frac{2q+1}{2}} x^{2p+1} dx \right] = \\ &= \frac{1}{2q+1} \left[- \frac{h^{2q+1}}{2(p+1)} [x^{2(p+1)}]_a^{\sqrt{R^2-h^2}} + I_1 \left(p + \frac{1}{2}, 2q \right) \right] \end{aligned}$$

$$2. \quad D_2(2p+1, 2q) = D_1(2p+1, 2q)$$

$$3. \quad D_3(2p+1, 2q) = \iint_{D_3} x^{2p+1} y^{2q} dx dy = 0$$

$$\begin{aligned} 4. \quad D_4(2p+1, 2q) &= \iint_{D_4} x^{2p+1} y^{2q} dx dy = \int_h^{-\sqrt{R^2-a^2}} y^{2q} dy \int_a^{\sqrt{R^2-y^2}} x^{2p+1} dx = \\ &= -\frac{1}{2p+2} \int_h^{-\sqrt{R^2-a^2}} y^{2q} [x^{2p+2}]_a^{\sqrt{R^2-y^2}} dy \\ &= \frac{-1}{2p+1} \int_h^{-\sqrt{R^2-a^2}} y^{2q} [(R^2-y^2)^{\frac{2p+2}{2}} - a^{2p+2}] dy = \\ &= \frac{1}{2p+2} \left[-\frac{a^{2p+2}}{2q+1} [y^{2q+1}]_h^{-\sqrt{R^2-a^2}} + \int_h^{-\sqrt{R^2-a^2}} (R^2-y^2)^{p+1} y^{2q} dy \right] \\ &= \frac{-1}{2p+2} \left[-\frac{a^{2(p+1)} [y^{2q+1}]_h^{-\sqrt{R^2-a^2}}}{2q+1} + K_4(2q, 2p) \right] \end{aligned}$$

$$5. \quad D_5(2p+1, 2q) = D_4(2p+1, 2q).$$

IV. $D_k(2p+1, 2q+1)$

$$\begin{aligned} 1. \quad D_1(2p+1, 2p+1) &= \iint_{D_1} x^{2p+1} y^{2q+1} dx dy = \int_x^{\sqrt{R^2-h^2}} x^{2p+1} \frac{[y^{2q+2}]_h^{\sqrt{R^2-x^2}}}{2q+2} dx = \\ &= \frac{1}{2q+2} \int_a^{\sqrt{R^2-h^2}} x^{2p+1} [(R^2-x^2)^{q+1} - h^{2(q+1)}] dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2q+2} \left[-\frac{h^{2q+2}}{2p+2} [x^{2p+2}]_a^{\sqrt{R^2-h^2}} + \int_a^{\sqrt{R^2-h^2}} (R^2-x^2)^{q+1} x^{2p+1} dx \right] \\
&= \frac{1}{2q+2} \left[-\frac{h^{2q+2}}{2q+2} [x^{2p+2}]_a^{\sqrt{R^2-h^2}} + K_1(2p+1, q+1) \right].
\end{aligned}$$

$$2. \quad D_2(2p+1, 2q+1) = D_1(2p+1, 2q+1).$$

$$3. \quad D_3(2p+1, 2p+1) = 0$$

$$\begin{aligned}
4. \quad D_4(2p+1, 2p+1) &= \frac{1}{2p+2} \left[-a^{2p+2} \frac{[y^{2(q+1)}]_h^{-\sqrt{R^2-a^2}}}{2q+2} + \int_h^{-\sqrt{R^2-a^2}} (R^2-y^2)^{p+1} y^{2q+1} dy \right] \\
&= \frac{1}{2p+2} \left[-a^{2p+2} \frac{[y^{2q+2}]_h^{-\sqrt{R^2-a^2}}}{2q+2} + K_4(2q+1, p+1) \right]
\end{aligned}$$

$$5. \quad D_5(2p+1, 2q+1) = D_4(2p+1, 2q+1).$$

On a posé ici :

$$\begin{aligned}
J_k(p, q) &= \int_{a_k}^{b_k} (R^2-x^2)^{\frac{2q+1}{2}} x^{2p} dx = \sum_{j=0}^{q-1} \frac{(2q+1)[2(q-j)+1] \dots [2[q-(j-1)]+1]}{(2p+1)[2(p+1)+1] \dots [2(p+j)+1]} \\
&\quad \left[x^{2(p+j)+1} (R^2-x^2)^{\frac{2(q-j)+1}{2}} \right]_{a_k}^{b_k} + \\
&\quad + \frac{(2q+1)[2(q-1)+1] \dots [2[q-(q-1)]+1]}{(2p+1) \dots 2(p+q-1)+1} J_k[2(p+q), 0]
\end{aligned}$$

$$K_k(m, n) = \int_{a_k}^{b_k} (R^2-t^2)^m t^n dt = \sum_{p=0}^m 2^p \frac{m(m-1) \dots [m-(p-1)]}{(n+1)(n+2) \dots (n+1+2p)} [t^{n+1+2p} (R^2-t^2)^{m-p}]_{a_k}^{b_k}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} a_1 = a & & & a_3 = 0 & & a_4 = h \\ b_1 = \sqrt{R^2 - h^2} & & & b_3 = a & & b_4 = -\sqrt{R^2 - a^2} \end{array}$$

soit finalement :

$$J_k(p, q) = \sum_{j=0}^{q-1} \frac{\prod_{o}^{j-1} [2(q-k)+1]}{\prod_{o}^j [2(p+k)+1]} \left[x^{2(p+j)+1} (R^2 x^2)^{\frac{2(q-j)+1}{2}} \right]_{a_k}^{b_k} +$$

$$+ \frac{\prod_{o}^{q-1} [2(q-j)+1]}{\prod_{o}^{q-1} [2(p+j)+1]} J_k[2(p+q), 0]$$

$$\text{avec } J_k[2(p+q), 0] = R^{2(p+q+1)} \left[\int_{\theta_{1k}}^{\theta_{2k}} \cos^{2(p+q+1)} \theta \, d\theta - \int_{\theta_{1k}}^{\theta_{2k}} \cos^{2(p+q)} \theta \, d\theta \right] =$$

$$= R^{2(p+q+1)} [N[2(p+q+1)] - N(2(p+q))]$$

$$\text{avec : } \theta_{1k} = \arccos \frac{a_k}{R} \text{ et } \theta_{2k} = \arccos \frac{b_k}{R}$$

$$\text{or, en posant } N(2S) = \int_{\theta_{1k}}^{\theta_{2k}} \cos^{2S} \theta \, d\theta, \text{ on obtient :}$$

$$N(2S) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\prod_{o}^j [2[S-(k-1)]-1]}{2^{j+1} \prod_{o}^j (s-k)} \left[\sin \theta \cos \theta^{2(S-j)-1} \right]_{\theta_{1k}}^{\theta_{2k}} + \frac{\prod_{o}^S [2[S-(k-1)]-1]}{2^S \prod_{o}^{s-1} (s-j)} [\theta_{2k} - \theta_{1k}]$$

Et comme :

$$N[2(S+1)] = \frac{1}{2(S+1)} \left[\sin \theta \cos \theta^{2(S+1)-1} \right]_{\theta_{1k}}^{\theta_{2k}} + \frac{2(S+1)-1}{2(S+1)} N(2S).$$

$$\Rightarrow N[2(S+1)] - N(2S) = \frac{1}{2(S+1)} \left[\sin \theta \cos \theta^{2(S+1)-1} \right]_{\theta_{1k}}^{\theta_{2k}} - \frac{1}{2(S+1)} N(2S).$$

On obtient enfin de compte :

$$J_k[2(p+q), 0] = R^{2p+q+1} \left[\frac{\left[\sin \theta \cos \theta^{2(p+q+1)-1} \right]_{\theta_{1k}}^{\theta_{2k}}}{2(p+q+1)} - \frac{1}{2(p+q+1)} N(2(p+q)) \right].$$

avec

$$N[2(p+q)] = \sum_{j=0}^{p+q-1} \frac{\prod_{o=0}^j [2(p+1-(k-1))-1]}{2^{j+1} \prod_{o=0}^j (p+q-k)} \left[\sin \theta \cos \theta^{2(p+q-j)-1} \right]_{\theta_{1k}}^{\theta_{2k}} +$$

$$+ \frac{1}{2^{p+q} \prod_{o=0}^{p+q-1} (p+q-j)} [\theta_{2k} - \theta_{1k}].$$

Application numérique $a = h = \frac{1}{2}$, $R = 1$.

Nous allons appliquer, maintenant, les résultats précédents à un cas particulier. Nous étudions le cas $a = h = \frac{1}{2}$ et $R = 1$. Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned} D_1(0,1) &= 0,5562 ; D_1(2,1) = 0,0199 ; D_1(4,1) = 0,009 ; D_1(2,3) = 0,0899 ; \\ D_1(0,3) &= 0,021 ; D_1(0,5) = 0,006 ; D_1(4,2) = 0,0054 ; D_1(2,2) = 0,0129 ; \\ D_1(4,0) &= 0,1016 ; D_1(0,2) = 0,0324 ; D_1(0,0) = 0,0767 ; D_1(6,0) = 0,0056 ; \\ D_1(2,0) &= 0,0323 ; D_1(6,1) = 0,0053 ; D_1(4,3) = 0,002 ; D_1(0,4) = 0,014 ; \\ D_1(2,4) &= 0,0055 ; D_1(1,0) = 0,049 ; D_1(3,0) = 0,0207 ; D_1(1,2) = 0,0199 ; \\ D_1(1,1) &= 0,0312 ; D_1(3,1) = 0,0161 ; D_1(1,3) = 0,013 ; D_1(3,2) = 0,0087 ; \\ D_1(1,4) &= 0,0086. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_4(1,1) &= -0,125 ; D_4(3,1) = -0,0716 ; D_4(1,3) = -0,013 ; D_4(1,2) = 0,0225 ; \\ D_4(3,2) &= 0,022 ; D_4(1,4) = 0,0122 ; D_4(3,3) = 0,007 ; D_4(1,5) = -0,031 ; \\ D_4(3,0) &= 0,209 ; D_4(1,0) = 0,383 ; D_4(5,0) = 0,138 ; D_4(5,1) = -0,0058 ; \\ D_4(0,2) &= 0,066 ; D_4(4,0) = 0,0706 ; D_4(2,0) = 0,0898 ; D_4(0,4) = 0,0194 ; \\ D_4(0,1) &= -0,0081 ; D_4(0,3) = -0,0201 ; D_4(4,1) = -0,0086 ; D_4(2,3) = 0,012 ; \\ D_4(2,1) &= -0,02 ; D_4(0,5) = 0,0033 ; D_4(2,2) = 0,002 ; D_4(6,0) = 0,0522 ; \\ D_4(4,2) &= 0,004 ; D_4(6,1) = -0,0086 ; D_4(4,3) = -0,0034 ; D_4(2,5) = -0,0035 ; \\ D_4(2,4) &= 0,0112 ; D_4(0,6) = 0,0079. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3(2,2) &= 0,0253 ; D_3(2,1) = 0,0458 ; D_3(4,2) = 0,0037 ; D_3(4,3) = 0,0024 ; \\ D_3(4,1) &= 0,0067 ; D_3(2,4) = 0,0117 ; D_3(2,5) = 0,0269 ; D_3(2,3) = 0,0165 ; \\ D_3(4,0) &= 0,0175 ; D_3(6,0) = 0,003 ; D_3(2,0) = 0,1185 ; D_3(6,1) = 0,0012 ; \\ D_3(0,1) &= 0,5883 ; D_3(0,0) = 1,4568 ; D_3(0,6) = 0,1093 ; D_3(0,3) = 0,2245 ; \\ D_3(0,4) &= 0,1691 ; D_3(0,2) = 0,335 ; D_3(0,5) = 0,1516. \end{aligned}$$

Ce qui donne, tous calculs faits :

$$I_1^{0000} = -0,7820 ; I_1^{1000} = 1,2224 ; I_1^{0001} ; I_1^{1001} = 1,0684 ; I_5^{0001} = -0,4338 ;$$

$$I_5^{1001} = 0,1132 ; I_6^{00} = 0,4327 ; I_6^{10} = -0,6663.$$

Le système vérifié par A_0^0 et A_0^1 est alors :

$$\left. \begin{aligned} -1,1216 A_0^0 + 0,3548 A_0^1 &= -0,8654 \\ 1,2224 A_0^0 + 0,9552 A_0^1 &= 1,3326 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A_0^0 = 0,8544 \\ A_0^1 = 0,2526 \end{cases}$$

$$U_2(x,y) = w(x,y)(A_0^0 + A_0^1 y) = w(x,y)(0,8544 + 0,2526y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial x} = (A_0^0 + A_0^1 y) \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} = (A_0^0 + A_0^1 y) \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} + A_0^1 w(x,y). \end{cases}$$

Dans le dessein d'avoir les contraintes suivant l'axe Oy, nous calculons ces 2 expressions dans le domaine D_3 .

$$\frac{\partial u_2(3)}{\partial x} = (A_0^0 + A_{oy}^1) \frac{\partial w_3(x,y)}{\partial x} = 2(A_0^0 + A_{oy}^1)x(y-h)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2(3)}{\partial y} &= (A_0^0 + A_0^1 y) \frac{\partial w_3}{\partial y} + A_0^1 w_3(x,y) \\ &= (A_0^0 + A_0^1 y)(x^2 + 3y^2 - 2yh - R^2) + A_0^1(h-y)(R^2 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

qui pour $x = 0$, $h = \frac{1}{2}$, $R = 1$ donnent :

$$\frac{\partial u_2(3)}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial u_2(3)}{\partial x} = (A_0^0 + A_0^1 y)(3y^2 - y - 1) + A_0^1 \left(\frac{1}{2} - y\right)(1 - y^2)$$

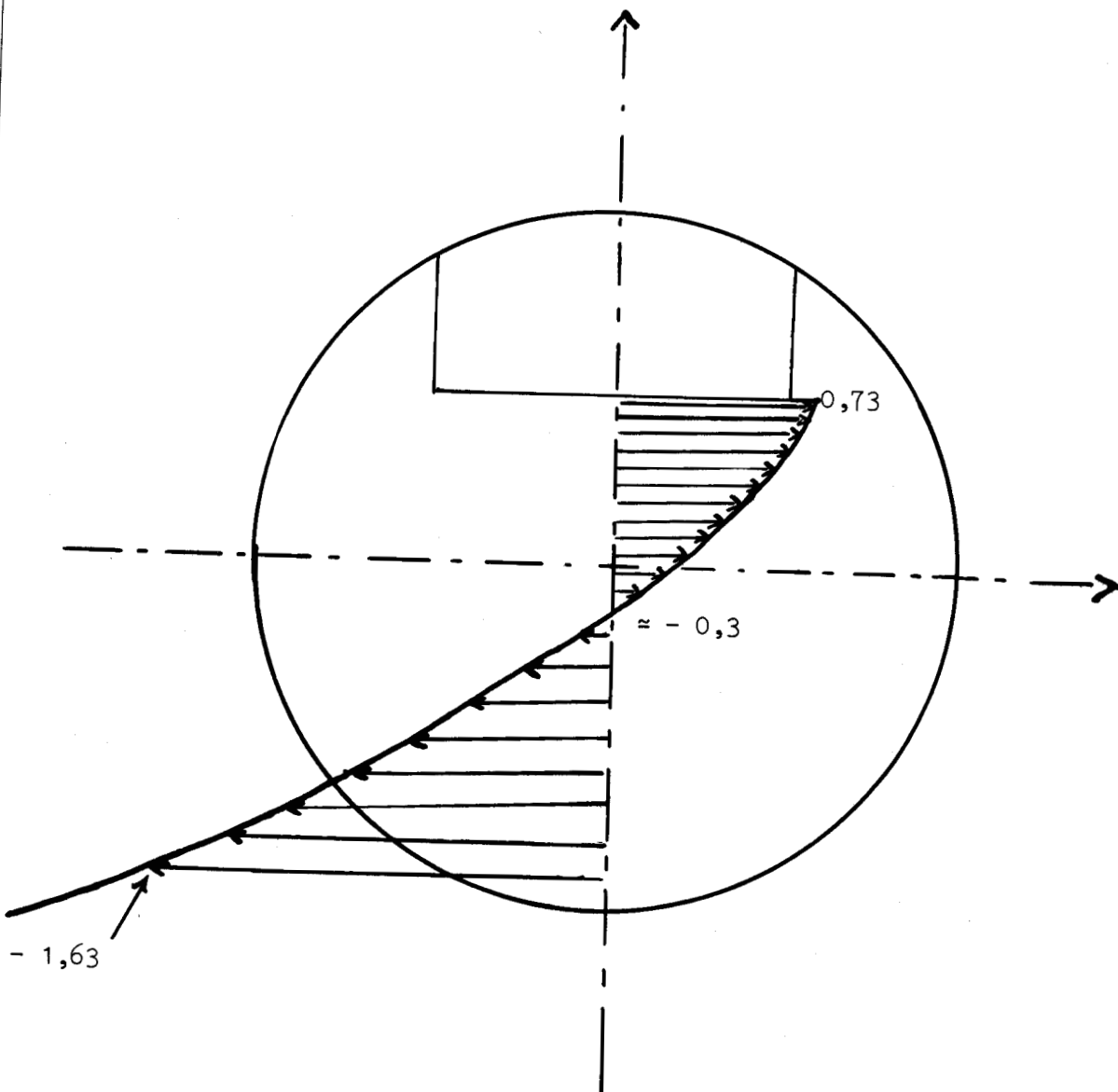
Soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{x=0} &= y^3(3A_0^1 + A_0^1) + y^2(3A_0^0 - A_0^1 - \frac{1}{2} A_0^1) + y(-A_0^0 - A_0^1 - A_0^1) - A_0^0 + \frac{1}{2} A_0^1 \\ &= 4A_0^1 y^3 + (3A_0^0 - \frac{3}{2} A_0^1)y^2 - (A_0^0 + 2A_0^1)y - A_0^0 + \frac{1}{2} A_0^1. \end{aligned}$$

Nous avons alors pour les contraintes :

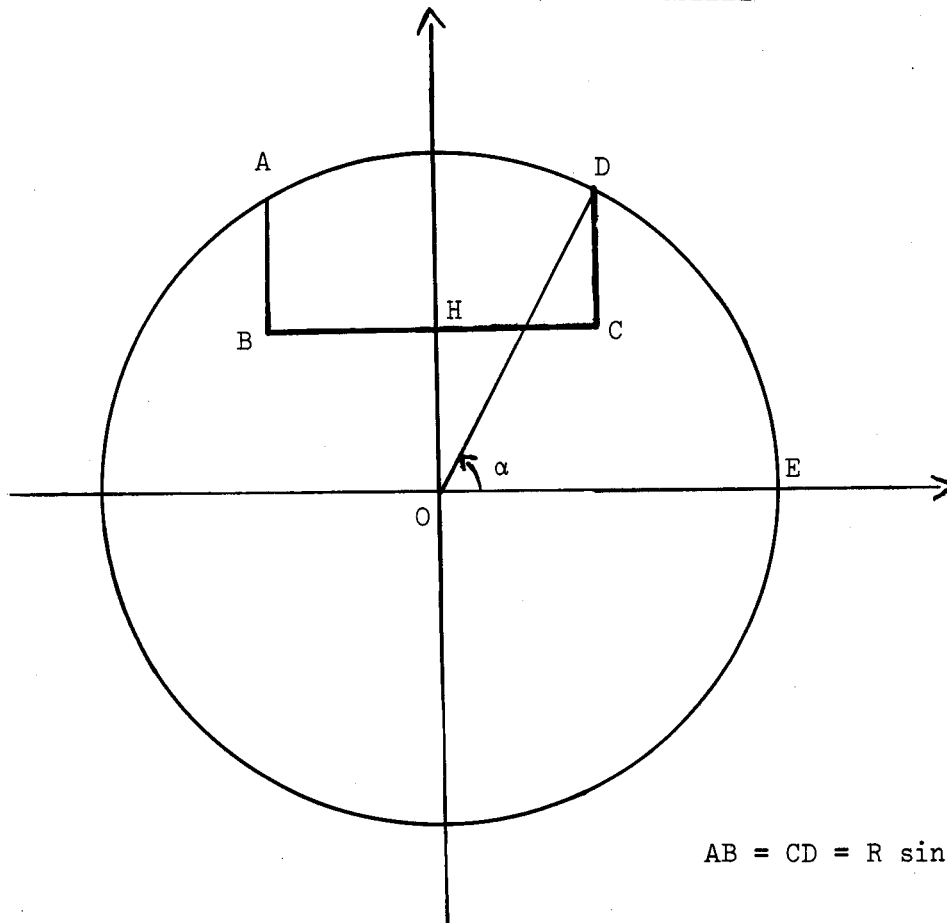
$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{yz} = -\mu\tau \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \\ \tau_{xz} = +\mu\tau \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{x=0} = 4A_0^1 y^3 + (3A_0^0 - \frac{3}{2} A_0^1)y^2 - (A_0^0 + 2A_0^1)y - A_0^0 + \frac{1}{2} A_0^1. \end{array} \right.$$

La distribution des contraintes est figurée sur la page suivante en papier millimétré. De même, certaines valeurs de $u(x,y)$ ont été calculées.



$$u(0,0) = 0,8544 \cdot \frac{1}{2} = 0,4272$$

METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES



$$AB = CD = R \sin \alpha - h$$

Nous posons $AB = DC = h_0 - h$; $BC = 2a$; nous choisissons comme paramètre l'abscisse curviligne s comptée à partir du point E

$$(\Rightarrow s_E^+ = 0) ; \cos \alpha = \frac{a}{R} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} ; OH = h.$$

Soit Y le point courant du contour x et y ses coordonnées.

L'équation paramétrique du contour s'écrit alors :

$$I. Y \in \overrightarrow{ED} \quad 0 < s < s_D$$

$$ds = R d\theta \quad \Rightarrow \quad s - s_E = R(\theta - \theta_e) \quad \Rightarrow \quad s = R\theta.$$

$$\text{d'où} \quad \begin{cases} x = R \cos \theta = R \cos \frac{s}{R} \\ y = R \sin \theta = R \sin \frac{s}{R} \end{cases}$$

$$s_D = R\alpha \quad ; \quad y_D = R \sin \alpha.$$

$$\text{II. } Y \in \overrightarrow{DC} : \quad s_D < s < s_C$$

$$ds = -dy \implies s - s_D = -(y - y_D) \implies s = s_D - y + y_D$$

$$\text{soit } s = -y + R\alpha + R \sin \alpha$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2a}{2} = a \\ y = -s + R\alpha + R \sin \alpha \\ \quad = -s + s_D + y_D \end{array} \right\} \quad s_C = R_\alpha + R \sin \alpha - h$$

$$\text{III. } Y \in \overrightarrow{CB} : \quad s_C < s < s_B$$

$$ds = -dx \implies s - s_C = -(x - x_C) \implies s = s_C - x + x_C$$

$$x = -s + s_C + x_C = -s + \frac{2a}{2} + R\alpha + R \sin \alpha - h = -s + a - h + R(\alpha + \sin \alpha)$$

$$y = h$$

$$\text{IV. } Y \in \overrightarrow{BA} : \quad s_B < s < s_A$$

$$ds = dy \implies s - s_B = y - y_B = y - h$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = s + h - s_B = s + h - s_B \\ x = -a \end{array} \right. \quad s_B = s_C + 2a$$

$$\text{V. } Y \in \overrightarrow{AE} : \quad s_A < s < s_E$$

$$ds = R d\theta \implies s - s_A = R(\theta - \theta_A) \implies \theta = \frac{s - s_A}{R} + \theta_A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = R \cos \left[\frac{s - s_A}{R} + \theta_A \right] \\ y = R \sin \left[\frac{s - s_A}{R} + \theta_A \right] \end{array} \right.$$

Tout ceci avec :

$$s_E = s_A + R(\Pi + \alpha) \qquad = \text{Arc cos } \frac{a}{R}$$

$$s_D = R\alpha$$

$$s_C = R\alpha + R \sin \alpha - h$$

$$s_B = s_C + 2a$$

$$s_A = s_B + R \sin \alpha - h$$

$$\theta_A = \Pi - \alpha$$

Réduction du système d'équations intégrales à un système algébrique.

Nous avons donc le système d'équations intégrales :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{1}{2\Pi} \int_S f(Y) \frac{\cos(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{nY})}{r(X,Y)} dS_Y + \frac{1}{\Pi} \int_S \varphi(Y) \ln r(X,Y) dS_Y \quad X \in B_e \\ \\ u(X) = \frac{1}{2\Pi} \int_S f(Y) \frac{\cos(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{nY})}{r(X,Y)} dS_Y + \frac{1}{\Pi} \int_S \varphi(Y) \ln r(X,Y) dS_Y \quad X \in B_i . \end{array} \right.$$

Nous allons étudier d'abord la 1ère équation qui nous permettra de calculer les valeurs $\varphi_1 \dots \varphi_2$. Soit donc $Y(x,y)$ et $X(\xi,\eta)$ et s le paramètre de la courbe S . Nous prenons comme lieu de X la courbe homothétique de S dans l'homothétie $(0,10)$. Nous avons donc les étapes suivantes :

1 - Réduction de l'intervalle d'intégration à $(-1,+1)$

On a :

$$0 = \frac{1}{2} \int_0^{s_E} f(Y(s)) \frac{\cos(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{nY})}{r(X,Y)} ds + \frac{1}{\Pi} \int_S \varphi(Y(s)) \ln r(X,Y) ds$$

$$\text{on a ici } Y = (x,y) \quad X = (\xi,\eta) \quad \overrightarrow{nY} \begin{cases} n_1 \\ n_2 \end{cases} \quad \overrightarrow{XY} \begin{cases} x-\xi \\ y-\eta \end{cases}$$

$$f(Y) = (x^2 + y^2) \frac{1}{2}$$

$$r^2(X,Y) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \quad \cos(\vec{XY}, \vec{nY}) = \frac{n_1(x-\xi) + n_2(y-\eta)}{r(X,Y)}.$$

L'équation devient :

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_E} \frac{x^2+y^2}{2} \cdot \frac{n_1(x-\xi) + n_2(y-\eta)}{r^2(X,Y)} ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_E} \psi(Y) \ln r^2(X,Y) ds$$

En posant $s = \frac{s_E}{2} (s'+1)$, on a :

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{x^2+y^2}{2} \frac{n_1(x-\xi) + n_2(y-\eta)}{r^2(X,Y)} ds' + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \psi(Y) \ln r^2(X,Y) ds'$$

En appliquant la méthode de Gauss avec N points d'interpolation :

$$0 = \sum_1^N A_i \frac{x_i^2 + y_i^2}{2} \frac{n_{1i}(x_i-\xi) + n_{2i}(y_i-\eta)}{(x_i-\xi)^2 + (y_i-\eta)^2} + \sum_1^N \psi_i A_i \ln(x_i-\xi)^2 + (y_i-\eta)^2$$

soit :

$$\sum_1^N \psi_i A_i \ln(x_i-\xi)^2 + (y_i-\eta)^2 = - \frac{1}{2} \sum_1^N A_i \frac{x_i^2 + y_i^2}{2} \frac{n_{1i}(x_i-\xi) + n_{2i}(y_i-\eta)}{(x_i-\xi)^2 + (y_i-\eta)^2}.$$

En prenant les points (ξ, η) homothétiques à (x_i, y_i) , nous obtenons le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \psi_i A_i \ln(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N A_i \frac{x_i^2 + y_i^2}{2} \frac{n_{1i}(x_i - \xi_j) + n_{2i}(y_i - \eta_j)}{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2} \\ j = 1, \dots, 20. \end{array} \right.$$

En posant :

$$B_{ij} = A_i \ln(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ j = 1, \dots, N \end{array}$$

$$\text{et } C_j = - \sum_{i=1}^N A_i \frac{x_i^2 + y_i^2}{2} \frac{n_{1i}(x_i - \xi_j) + n_{2i}(y_i - \eta_j)}{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2}$$

le système s'écrit :

$$\sum_{i=1}^N B_{ij} \psi_i = C_j \quad j = 1, \dots, N$$

D'où la marche des calculs à suivre :

1 - Calcul des s_i :

La méthode de Gauss nous donne les valeurs $s_i^!$ ($-1 \leq s_i^! \leq +1$)

$$\text{D'où } s_i = \frac{s_E}{2} (s_i^! + 1).$$

Dans le cas où on emploierait une autre méthode, il s'agit de calculer les noeuds et les poids d'interpolation.

2 - Trouver dans quelle portion de la courbe "tombe" s_i et ce, en comparant avec les valeurs $0, s_D, s_C, s_B, s_A$.

3 - En déduire les valeurs x_i et y_i d'avec les formules des pages 125 et 126.

4 - En déduire les valeurs ξ_j et η_j en multipliant par K .

5 - Calculer n_{1i} et n_{2i} . Pour cela :

$$\cdot \quad 0 < s < s_D : \quad n_{1i} = \frac{1}{R} x_i ; \quad n_{2i} = \frac{y_i}{R}$$

$$\cdot \quad s_D < s < s_C \quad n_{1i} = -1 ; \quad n_{2i} = 0$$

$$\cdot \quad s_C < s < s_B \quad n_{1i} = 0 ; \quad n_{2i} = 1$$

$$\cdot \quad s_B < s < s_D \quad n_{1i} = +1 ; \quad n_{2i} = 0$$

$$\cdot \quad s_B < s < s_E \quad n_{1i} = \frac{x_i}{R} ; \quad n_{2i} = \frac{y_i}{R} .$$

6 - Calculer les N^2 coefficients B_{ij} et les N coeff. C_j avec les formules de la page précédente.

7 - Résoudre le système : pour cela nous avons choisi la méthode de JACOBI.

8 - Ayant ainsi obtenu les valeurs : $\psi_1 \psi_2 \dots \psi_{20}$ de la "densité" il est loisible en utilisant de nouveau une méthode d'interpolation d'obtenir n'importe quelle valeur pour $u(X)$.

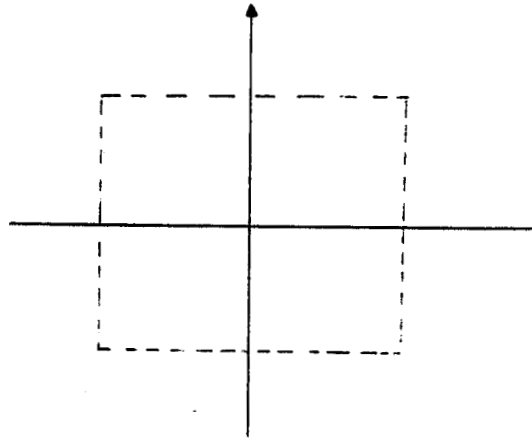
Pour la méthode de Gauss avec 20 points d'interpolation, nous avons, par exemple :

$s_i =$	$A_i =$
$\pm 0,99312 \quad 85991 \quad 85094$	$0,01761 \quad 40071 \quad 39152$
$\pm 0,96397 \quad 19272 \quad 77913$	$0,04060 \quad 14298 \quad 00386$
$\pm 0,91223 \quad 44282 \quad 51325$	$0,06267 \quad 20483 \quad 34109$
$\pm 0,83911 \quad 69718 \quad 22218$	$0,08327 \quad 67415 \quad 76704$
$\pm 0,74633 \quad 19064 \quad 60150$	$0,10193 \quad 01198 \quad 17240$
$\pm 0,63605 \quad 36807 \quad 26515$	$0,11819 \quad 45319 \quad 61518$
$\pm 0,51086 \quad 70019 \quad 50827$	$0,13168 \quad 86384 \quad 49176$
$\pm 0,37370 \quad 60887 \quad 15419$	$0,14209 \quad 61093 \quad 18382$
$\pm 0,22778 \quad 58511 \quad 41645$	$0,14917 \quad 29864 \quad 72603$
$\pm 0,07652 \quad 65211 \quad 33497$	$0,15275 \quad 33871 \quad 30725$

CAS DU CARRE

L'équation du contour s'écrit ici :

$$\omega(x,y) = (a^2 - x^2)(a^2 - y^2), \text{ pour un carré de côté } 2a.$$



Par raison de symétrie, nous prendrons pour approximation à l'ordre

n :

$$u_n(x,y) = \omega(x,y) (A_1^0 + A_4^0 x^2 + \dots + A_{2i}^{2j} x^{2i} y^{2j})$$

$$= \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^p A_{2i}^{2j} (x,y) x^{2i} y^{2j} \Rightarrow n = (p+1)^2.$$

$$\text{En posant } P(x,y) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p A_{2i}^{2j} x^{2i} y^{2j}, \text{ on a } u_n(x,y) = \omega(x,y) P(x,y).$$

D'où :

$$\Delta u_n(x,y) = \omega(x,y) \Delta P(x,y) + P(x,y) \cdot \Delta \omega(x,y) + 2 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^p A_{2i}^{2j} 2ix^{2i-1} y^{2j} \quad ; \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = -2x(a^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \sum_{i=2}^p \sum_{j=0}^p A_{2i}^{2j} 2i(2i-1)x^{2i-2} y^{2j} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = -2(a^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \sum_{o=0}^p \sum_{o=0}^p A_{2i}^{2j} 2j x^{2i} y^{2j-1} \quad ; \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = -2y(a^2 - x^2)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \sum_{o=0}^p \sum_{o=0}^p A_{2i}^{2j} 2j x^{2i} y^{2j-1} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = -2y(a^2 - x^2)$$

$$\Rightarrow AP = \sum_{o=0}^p \sum_{o=0}^p A_{2i}^{2j} [2i(2i-1)x^{2i-2} y^{2j} + 2j(2j-1)x^{2i} y^{2j-2}] \quad ; \quad \Delta \omega = -2(2a^2 - x^2 - y^2)$$

L'équation variationnelle : $\iint_D (\Delta u_n - f) \psi_S dx dy = 0$, devient alors :

$$\begin{aligned} \iint_D \left[\sum_{o=0}^p \sum_{o=0}^p A_{2i}^{2j} [x^{2i} y^{2j} \Delta \omega + \omega 2i(2i-1)x^{2i-2} y^{2j} + 2j(2j-1)x^{2i} y^{2j-2} + 4i \frac{\partial \omega}{\partial x} x^{2i-1} y^{2j} + \right. \\ \left. + 4j \frac{\partial \omega}{\partial y} x^{2i} y^{2j-1} + \omega x^{2\alpha} y^{2\beta}] dx dy = -2 \iint_D \omega x^{2\alpha} y^{2\beta} dx dy. \right. \end{aligned}$$

$$\text{En posant : } D(p, q) = \iint_D x^{2p} y^{2q} dx dy.$$

On obtient le système linéaire suivant de $(n+1)^2$ équations et $(n+1)^2$ inconnues A_{2i}^{2j} .

$$\sum_{o=0}^n \sum_{o=0}^n A_{2i}^{2j}(i, j, \alpha, \beta) \left[\sum_{r=1}^{14} I_r(i, j, \alpha, \beta) \right] = -I_{15}(a, o, \alpha, \beta) \quad \begin{matrix} \alpha = 0, \dots, n \\ \beta = 0, \dots, n \end{matrix}$$

avec :

$$I_1(i, j, \alpha, \beta) = -4a^6(1 + i + j + 2i^2 + 2j^2)D(i + \alpha, j + \beta)$$

$$I_2(i, j, \alpha, \beta) = 2a^4(3 + 3i + 4j + 2i^2 + 8j^2)D(i + \alpha + 1, j + \beta)$$

$$I_3(i, j, \alpha, \beta) = 2a^4(3 + 4i + 3j + 8i^2 + 2j^2)D(i + \alpha, j + \beta + 1)$$

$$I_4(i, j, \alpha, \beta) = 4a^2(1 - 3i - 3j - 2i^2 - 2j^2)D(i + \beta + 1, j + \beta + 1)$$

$$I_5(i, j, \alpha, \beta) = -2a^2(1 + 2i + 4i^2)D(i + \alpha, j + \beta + 2)$$

$$I_6(i, j, \alpha, \beta) = -4a^2(j + 2j^2)D(i + \alpha + 2, j + \beta)$$

$$I_7(i,j,\alpha,\beta) = 2(1 + 3j + 2j^2)D(i+\alpha+2,j+\beta+1)$$

$$I_8(i,j,\alpha,\beta) = 2(1 + 3i + 2i^2)D(i+\alpha+1,j+\beta+2)$$

$$I_9(i,j,\alpha,\beta) = -4a^6(-i+2i^2)D(i+\alpha-1,j+\beta+1)$$

$$I_{10}(i,j,\alpha,\beta) = 2a^8(-i+2i^2)D(i+\alpha-1,j+\beta)$$

$$I_{11}(i,j,\alpha,\beta) = 2a^4(-i+2i^2)D(i+\alpha-1,j+\beta+2)$$

$$I_{12}(i,j,\alpha,\beta) = 2a^8(-j+2j^2)D(i+\alpha,j+\beta-1)$$

$$I_{13}(i,j,\alpha,\beta) = -4a^6(-j+2j^2)D(i+\alpha+1,j+\beta-1)$$

$$I_{14}(i,j,\alpha,\beta) = 2a^4(-j+2j^2)D(i+\alpha+2,j+\beta-1)$$

$$I_{15}(0,0,\alpha,\beta) = -2a^4D(\alpha,\beta) + 2a^2D(\alpha+1,\beta) + 2a^2D(\alpha,\beta+1) - 2D(\alpha+1,\beta+1)$$

Les calculs ont été conduits jusqu'à la seconde approximation. On trouve :

$$u_2(x,y) = (a^2-x^2)(a^2-y^2)[A_1 + A_2(x^2+y^2)] \quad \text{avec :}$$

$$A_1 = \frac{5}{8} \cdot \frac{259}{177} \cdot \frac{1}{a^2} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{35}{277} \cdot \frac{1}{a^4}$$

d'où :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial x} = (a^2-y^2)[2A_2x(a^2-x^2) - 2x(A_1 + A_2(x^2+y^2))] \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} = (a^2-x^2)[-2y(A_1+A_2(x^2+y^2)) + 2A_2y(a^2-y^2)] \end{cases}$$

d'où :

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{y=0} = a^2[2A_2x(a^2-x^2) - 2x(A_1+A_2x^2)]$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{x=0} = a^2[-2y(A_1+A_2y^2) + 2A_2y(a^2-y^2)]$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 .$$

On trouvera dans les programmes ci-joints une étude comparative des valeurs de u et de ses dérivées avec les mêmes quantités obtenues à partir des séries doubles, considérées comme donnant la solution exacte.

* METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES *

Nous suivons exactement la méthode décrite dans les pages 129 et 130 . Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus à partir de l'écriture de la solution en séries doubles.

LECTURE DES PROGRAMMES

Nous définissons ici les principales notations apparaissant dans les programmes FORTRAN ci-joints :

SPRIME (I) = Abscisses d'interpolation de GAUSS.

G(I) = Coefficients d'interpolation.

S(I) = Abscisses curvilignes sur la courbe réelle.

X(I),Y(I) = Coordonnées des points du contour où sont calculées les densités,

A(I,ND) = Densités $\varphi(I)$ aux points ci-dessus.

PP(J),EP(J) = Coordonnées cartésiennes des points où sont calculées les valeurs de la fonction $u(x)$.

PSI(J),ETA(J) = Coordonnées des points auxiliaires homothétiques à X(I) et Y(I).

K = Rapport d'homothétie > 1 .

N = Nombre de points sur le contour = nombre d'équations en φ .

U1(I),U₂(I) = Fonctions de torsion suivant xx et yy.

SOLEX = Solution, supposée exacte, par les séries doubles.

ϕ = Largeur de la clavette ; côté du carré.

SA,SB,SC,SD,SE = Notations évidentes.

H = 1-profondeur de la clavette.

DUX,DUY = Contraintes données par la dérivation des séries doubles.

CONT 1, CONT 2 = Contraintes correspondantes données par la solution des Equations intégrales.

APENT,BPENT = Rapport tension/Abscisse (resp. ordonnée) de la solution intégrale.

COEFX,COEFY = Rapports correspondants pour les séries doubles.

KP = < 1 , Rapport d'homothétie permettant d'avoir les points homothétiques intérieurs au contour étudié.

—————> Tous les calculs ont été faits en double précision.

ANALYSE DES RESULTATS OBTENUS

Bien que les programmes ci-joints parlent d'eux-mêmes, il paraît matériellement souhaitable de commenter très succinctement les résultats obtenus.

1 - CAS DU CARRE.

Ce cas est avant tout en cas test. En particulier, le fait que le carré possède des points anguleux et non point une courbe "lisse", permet de tester la méthode d'une façon sévère.

a - Influence du nombre de points d'interpolation.

Nous avons effectué les calculs avec 20, puis 40 points d'interpolation.

→ Sur la fonction de torsion :

Les valeurs obtenues tendent vers les valeurs exactes à mesure que l'on augmente N . En particulier pour la valeur au centre (de 0,163 elle passe à 0,159). En augmentant N (jusqu'à 100 par exemple), on aurait certainement diminué encore l'erreur, qui pour 40 se situe à 10 % environ.

→ Sur les contraintes :

Les valeurs obtenues pour $N = 20$, sont assez grossières. Ceci n'est pas étonnant vu qu'on a affaire ici à un calcul de dérivées et que les résultats sont de mieux en mieux à mesure que l'on diminue le pas. Pour $N = 40$, elles sont ainsi nettement améliorées.

b - Influence du contour auxiliaire.

Dans tous les cas, on voit que le fait de varier K ne change pas notablement les valeurs obtenues. Les 3 premiers chiffres restent identiques. Ceci est une preuve éclatante de la stabilité de la méthode.

2 - CAS DE LA CLAVETTE.

Bien qu'étant assurés de la validité et de la stabilité de la méthode des Equations Intégrales (Cas du Carré), il nous a semblé utile, en faisant varier ϕ et H , d'avoir la solution pour des cas limites, dont la solution exacte est connue. En particulier, pour $\phi = 0$ et $H = 1$, on a tout simplement le cas du contour circulaire. Les résultats obtenus sont assez éloquentes. Accessoirement aussi, en faisant $H = 0$ et ϕ très petit (0,01), nous avons le cas d'une fissure radiale. Pour $\phi = 1$, $H = 0$, on obtient le cas du contour semi-circulaire...

→ Tout d'abord, nous remarquons que les valeurs obtenues dans le voisinage du contour sont très douteux. (U devient négatif pour $J = 1$ et $J = 40$, souvent). Nous ne devons donc tenir compte que des valeurs pour $J = 2, \dots, 39$.

→ La perturbation (concentration des contraintes, position du centre de torsion, etc...) diminue à mesure que les dimensions de la clavette diminuent. Par exemple, pour $\phi = 0,5$ et $H = 0,8$, on voit que le centre de torsion est en O . Malheureusement, pour des raisons d'encombrement, il n'a pas été possible de joindre tous les résultats obtenus en faisant varier ϕ et H . Nous donnons uniquement les résultats suivants :

. pages 146 - 163 : $\phi = 0,5$, H variant de 0 à 0,8.

. pages 164 - 168 : cas du cercle ($\phi = 1$, $H = 1$)

→ A mesure que la profondeur de la clavette diminue, le centre de torsion "remonte" vers O .

→ La tension maximum est obtenue dans tous les cas, au point $(0, H)$.

→ Les valeurs de $APENT(J)$ et $BPENT(J)$ permettent d'avoir les valeurs approchées du coefficient de contrainte correspondant aux points

PP(J), EP(J).

→ La méthode de Ritz donne des contraintes du type fig. I. Mais ceci est dû uniquement au fait qu'on est à l'approximation d'ordre 2. En fait à l'ordre 3, le résultat est déjà amélioré : la contrainte en $(0,H)$ augmente, celle en $(0,-R)$ diminue. La convergence est ainsi prévisible, mais très lente. D'où un avantage extraordinaire de la méthode intégrale qui donne les résultats de la figure II.

→ Enfin, notons, qu'en changeant de méthode d'intégration numérique (méthode des rectangles au lieu de Gauss), les résultats obtenus (ceci a été fait pour le cas du carré) sont pratiquement identiques.

→ En augmentant les dimensions de la section, l'erreur va en augmentant, ce qui est normal, puisque les noeuds d'approximation s'éloignent les uns des autres. Pour avoir une précision équivalente, il faut multiplier dans le même rapport le nombre de points.

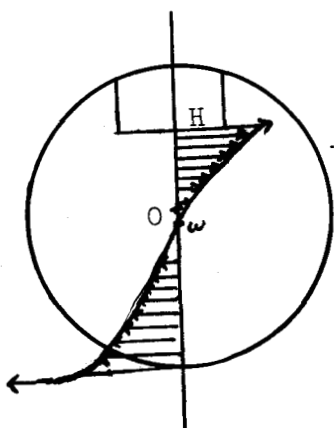


fig. I

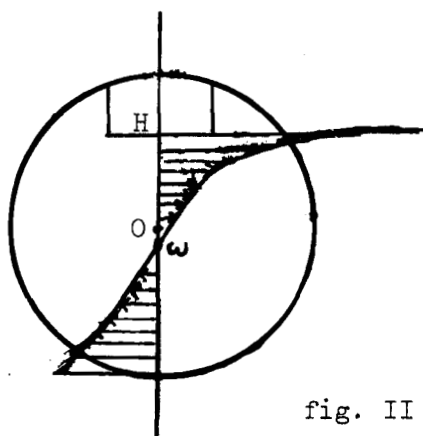


fig. II

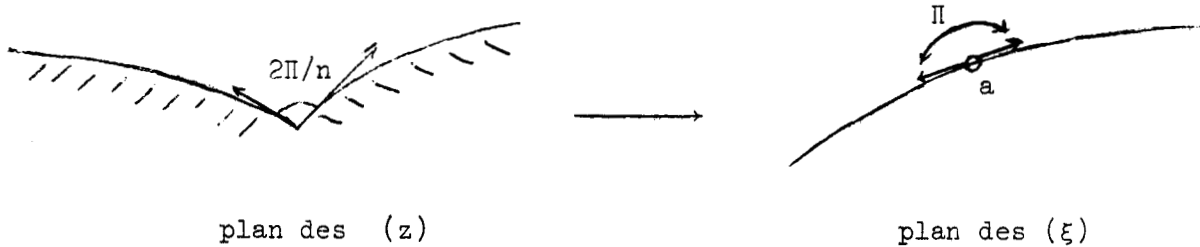
→ Comportement de la solution aux points anguleux :

Soit $z = r e^{i\theta}$ l'affixe d'un point voisin du point anguleux. Appliquons au voisinage de ce point la transformation $\xi(z) = z^n$, $n > 1$ (transformation en éventail déplié) $\Rightarrow |\xi| = r^n$ et $\text{Arg } \xi = n\theta$.

Pour recouvrir exactement une fois le plan ξ , on choisit z dans un secteur de largeur $\frac{2\pi}{n}$, c'est-à-dire $\alpha \leq \theta \leq \alpha + \frac{2\pi}{n}$. En faisant $\alpha = 0$,

la transformation se fait en considérant le secteur $0 \leq \theta \leq \frac{2\Pi}{n}$ et en "ouvrant l'éventail" de manière à faire coïncider les 2 bords $\theta = 0$ et $\theta = \frac{2\Pi}{n}$.

Nous avons alors la correspondance :



Or pour le cas de la torsion, nous savons que :

$$T = \tau_{zx} - i\tau_{zy} = \frac{df}{dz} \longrightarrow |T| = \left| \frac{df}{dz} \right| = \left| \frac{df}{d\xi} \right| \cdot \left| \frac{d\xi}{dz} \right|$$

$$\text{soit } |T| = \frac{\Pi}{\alpha} z^{\frac{\Pi}{\alpha} - 1} \left| \frac{df}{d\xi} \right|$$

d'où :

1) $\alpha < \Pi$: angle sortant : $\left| \frac{df}{d\xi} \right| \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow 0$, donc $|T| \rightarrow 0$.

La contrainte est donc nulle.

2) $\alpha = \Pi$: Cas d'un point régulier : La tension n'est ni nulle, ni infinie.

3) $\alpha > \Pi$: Angle rentrant : $|T| \rightarrow \infty$ quand $z \rightarrow 0$.

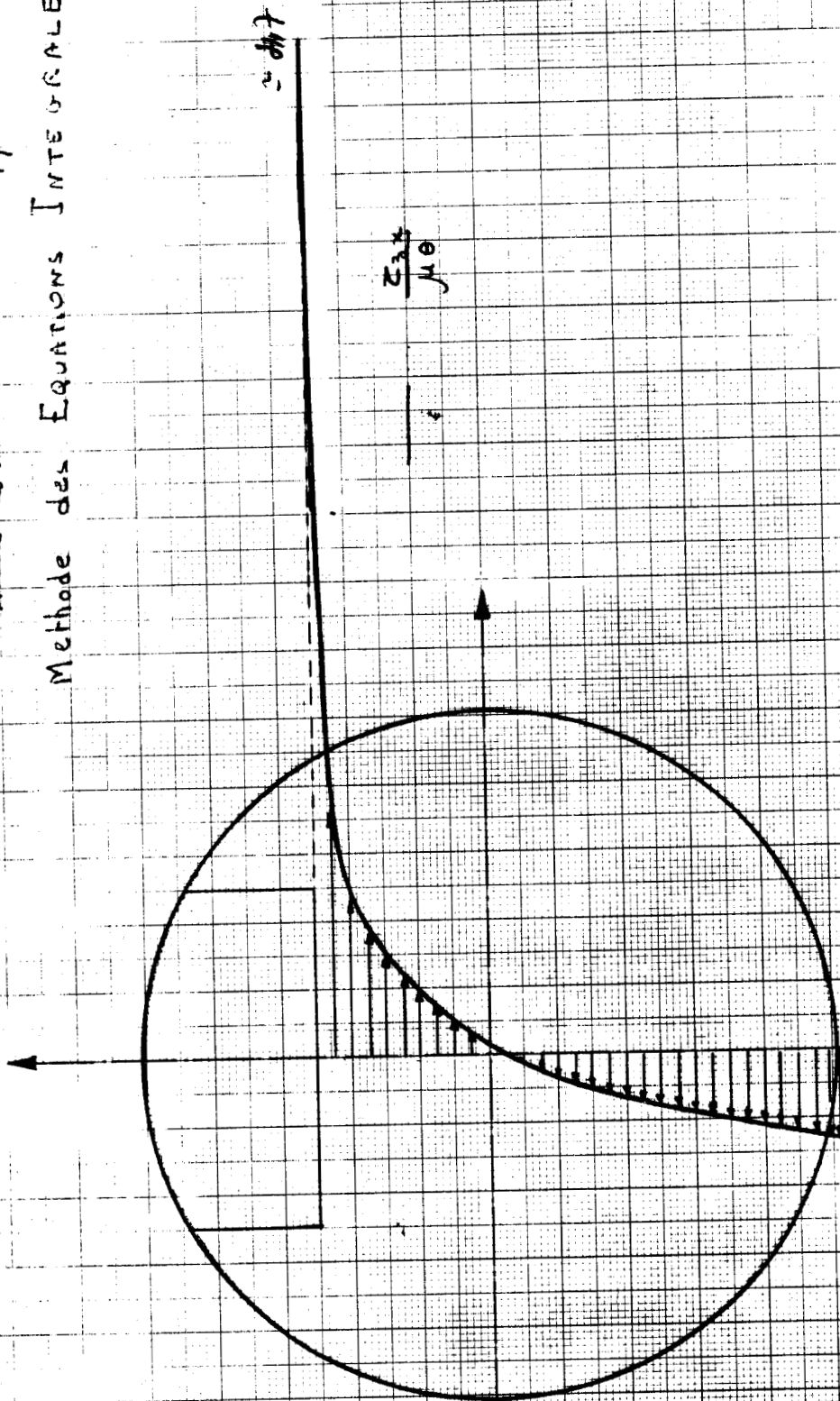
La contrainte devient théoriquement infinie. Pratiquement, nous aurons un début de plastification en de tels points.

Pour notre arbre claveté, nous aurons donc :

1 - Contraintes nulles aux points A,D.

2 - Contraintes infinies aux points C et B, avec début de plastification.

Allure des courbes suivant $\gamma\gamma$.
 Méthode des Équations Intégrales.



```

1: DOUBLE PRECISION RP(40),CP(40),U(40),PP(40),EP(40),RP(40,40)
2: DOUBLE PRECISION DP(40,40)
3: DOUBLE PRECISION PI,ZP(40),U1(40),U2(40),C9NT1(40),C9NT2(40),
4: 1APENT(40),RPENT(40)
5: DOUBLE PRECISION A(40,81),DETER
6: DOUBLE PRECISION SPRIME(40),G(40),RN1(40),RN2(40),X(40),Y(40),
7: 1PSI(40),ETA(40),ALPHA,S(40),DARC8S,DSIN,DL9G,Z(40),
8: 2R8(40,40),B(40,41),DC8S,SD,SC,SB,SA,SE,TETA,YD,C(40,41)
9: DOUBLE PRECISION KP
10: PROBLEME DE LA FISSURE RADIALE
11: READ(105,103)8,R,K,N
12: WRITE(108,1050)
13: 1050 FORMAT(3H 0=,1X,3H R=,3X,3H K=,1X,3H N=)
14: WRITE(108,103)8,R,K,N
15: 103 FORMAT(2(F4.2,1X),I2,1X8I2)
16: READ(105,15) N,EPS
17: 15 FORMAT(13,1X,F6.4)
18: READ(105,185) PI
19: 185 FORMAT(D17.10)
20: READ(105,102)(SPRIME(I),G(I),I=1,N)
21: WRITE(108,1051)
22: 1051 FORMAT(28H ABSCISSES ET COEF. DE GAUSS)
23: WRITE(108,102)(SPRIME(I),G(I),I=1,N)
24: ND=N+1
25: H=C.00
26: 777 CONTINUE
27: WRITE(108,950) H
28: 950 FORMAT(13H *****H=,F6.3)
29: KP=C.000000000000
30: ALPHA=DARC8S(8/R)
31: SD=R*ALPHA
32: SC=SD+R*DSIN(ALPHA)=H
33: SB=SC+2.*8
34: SA=SB+R*DSIN(ALPHA)=H
35: SE=PI+R+SA+R*ALPHA
36: TETA=PI-ALPHA
37: YD=R*DSIN(ALPHA)
38: WRITE(108,1052)
39: 1052 FORMAT(/,29H ALPHA,SD,SC,SB,SA,SE,TETA,YD)
40: WRITE(108,300) ALPHA,SD,SC,SB,SA,SE,TETA,YD

```

BUS
LILLE

```

41: 300 FORMAT(/,5(D16.10,1X)/3(D16.10))
42: C
43: 0 EST PETITA
44: DO 1 I=1,N
45: 1 S(I)=SE*(SPRIME(I)+1.)/2.
46: 201 FORMAT(10X,D15.10)
47: DO 100 I=1,N
48: PLACER S(I)
49: IF(S(I)*(S(I)-SD).LT.0)GOTO 20
50: IF((S(I)-SD)*(S(I)-SC).LT.0)GOTO 30
51: IF((S(I)-SC)*(S(I)-SB).LT.0)GOTO 40
52: IF((S(I)-SB)*(S(I)-SA).LT.0)GOTO 50
53: GOTO 60
54: 20 X(I)=R*DCBS(S(I))
55: Y(I)=R*DSIN(S(I))
56: RN1(I)=X(I)/R
57: RN2(I)=Y(I)/R
58: GOTO 100
59: 30 X(I)=B
60: Y(I)=-S(I)+SD+YD
61: RN1(I)=1.
62: RN2(I)=0.
63: GOTO 100
64: 50 X(I)=-B
65: Y(I)=S(I)+H-SB
66: RN1(I)=1.
67: RN2(I)=0.
68: GOTO 100
69: 40 X(I)=-S(I)+SC+0
70: Y(I)=H
71: RN1(I)=0.
72: RN2(I)=1.
73: GOTO 100
74: 60 X(I)=R*DCBS(TETA+(S(I)-SA)/R)
75: Y(I)=R*DSIN(TETA+(S(I)-SA)/R)
76: RN1(I)=X(I)/R
77: RN2(I)=Y(I)/R
78: 100 CONTINUE
79: WRITE(108,1053)
80: 1053 FORMAT(/,3X,6H X(I)=,13X,6H Y(I)=)
      WRITE(108,211)(X(I),Y(I),I=1,N)

```


 BUS
LILLE

```

81: 211 FORMAT(/2(D20.10,1X))
82: D855 I=1,N
83: J=I
84: PSI(J)=K*X(I)
85: ETA(J)=K*Y(I)
86: 55 CONTINUE
87: D82 L=1,N
88: M=1
89: 4 R6(L,M)=(X(M)-PSI(L))*2+(Y(M)-ETA(L))*2
90: B(L,M)=G(M)*DL6G(R6(L,M))
91: M=M+1
92: IF(M.LE.N)GOTO4
93: 2 CONTINUE
94: D83 L=1,N
95: B(L,ND)=0.
96: M=1
97: 44 Z(M)=(X(M)**2+Y(M)**2)/2.
98: C(L,M)=Z(M)*(RN1(M)*(X(M)-PSI(L))+RN2(M)*(Y(M)-ETA(L)))
99: B(L,ND)=R(L,ND)+G(M)*C(L,M)/(2.*R6(L,M))
100: M=M+1
101: IF(M.LE.N)GOTO44
102: B(L,ND)=-2.*B(L,ND)
103: 3 CONTINUE
104: WRITE(108,210)(B(L,ND),L=1,N)
105: 206 FORMAT(5D20.10)
106: 202 FORMAT(/20X,D20.10)
107: 210 FORMAT(/53X,D20.10)
108: NPLUS=2*N+1
109: WRITE(108,16)N,EPS,NPLUS
110: D879 I=1,N
111: D879 J=1,NPLUS
112: IF(J-ND)74,75,76
113: 74 A(I,J)=B(J,I)
114: GOTO879
115: 75 A(I,J)=B(I,ND)
116: GOTO879
117: 76 IF(J-(ND+1))77,78,77
118: 77 A(I,J)=0.
119: GOTO879
120: 78 A(I,J)=1.

```

805
1974

```

121: 79 CONTINUE
122: 71 FORMAT(/5D20.10)
123: 109 KN=1,N
124: DETER=1.
125: 9 DETER=DETER*A(KN,KN)
126: WRITE(108,88)DETER
127: 88 FORMAT(/H DETER=,D20.10)
128: D873 KN=1,N
129: IF(DABS(A(KN,KN)).GT.EPS)GOTO873
130: WRITE(108,72)
131: 72 FORMAT(/12H SINGULARITE//)
132: 73 CONTINUE
133: D882 KN=1,N
134: D882 J=KN+1,NPLUS
135: A(KN,J)=A(KN,J)/A(KN,KN)
136: 82 A(KN,KN)=1.
137: D883 I=1,N
138: D883 KN=1,N
139: IF(I.EQ.KN*8R.A(I,KN).EQ.0)GOTO883
140: D884 J=KN+1,NPLUS
141: 84 A(I,J)=A(I,J)-A(I,KN)*A(KN,J)
142: A(I,KN)=0.
143: 83 CONTINUE
144: WRITE(108,1054)
145: 1054 FORMAT(/130H DENSITES AUX POINTX DE GAUSS=)
146: WRITE(108,210)(A(I,ND),I=1,N)
147: 86 FORMAT(/5D20.10)
148: 16 FORMAT(/13,1X,F6.4,1X,I3)
149: 106 FORMAT(3(F4.2,1X),I2,1X,I2)
150: 101 FORMAT(14,1X,F6.4)
151: 102 FORMAT(2(D17.10,1X))
152: 104 FORMAT(13/(4D20.10))
153: 666 CONTINUE
154: D8340 I=1,N
155: J=I
156: PP(J)=KP*X(I)
157: EP(J)=KP*Y(I)
158: ZP(J)=(PP(J)**2+EP(J)**2)/2.
159: 345 CONTINUE
160: D8342 I=1,N

```

```

161: D8342 J=1,N
162: RP(I,J)=(X(I)-PP(J))**2+(Y(I)-EP(J))**2
163: 342 CONTINUE
164: D8341 J=1,N
165: CP(J)=0.
166: D8341 I=1,N
167: DP(I,J)=RN1(I)*(X(I)-PP(J))+RN2(I)*(Y(I)-EP(J))
168: CP(J)=CP(J)+Z(I)*G(I)*DP(I,J)/RP(I,J)
169: 341 CONTINUE
170: D8343 J=1,N
171: BP(J)=0.
172: D8343 I=1,N
173: BP(J)=BP(J)+G(I)*A(I,ND)*DL6G(RP(I,J))
174: 343 CONTINUE
175: D8345 J=1,N
176: U(J)=SE*(BP(J)+CP(J))/(4.*PI)-ZP(J)
177: 346 FORMAT(50X,D20.10)
178: 345 CONTINUE
179: PAS=2.*K/FL6AT(N)
180: D8945 J=1,N
181: PP(J)=K*FL6AT(J)*PAS
182: EP(J)=0.
183: D8942 I=1,N
184: RP(I,J)=(X(I)-PP(J))**2+(Y(I)-EP(J))**2
185: 942 CONTINUE
186: CP(J)=0.
187: D8941 I=1,N
188: DP(I,J)=RN1(I)*(X(I)-PP(J))+RN2(I)*(Y(I)-EP(J))
189: CP(J)=CP(J)+Z(I)*G(I)*DP(I,J)/RP(I,J)
190: 941 CONTINUE
191: BP(J)=0.
192: D8943 I=1,N
193: BP(J)=BP(J)+G(I)*A(I,ND)*DL6G(RP(I,J))
194: 943 CONTINUE
195: ZP(J)=(PP(J)**2+EP(J)**2)/2.
196: U1(J)=SE*(BP(J)+CP(J))/(4.*PI)-ZP(J)
197: 945 CONTINUE
198: C8NT1(I)=U1(I)/PAS
199: AP8NT(1)=C8NT1(1)/PP(1)
200: D8947 J=2,N
201: C8NT1(J)=(U1(J)-U1(J=1))/PAS
202: AP8NT(J)=C8NT1(J)/PP(J)
203: 947 CONTINUE
204: WRITE(108,1C55)

```

```

205: 1055 FORMAT(/,5X,10H RESULTATS,/,5X,7H EP(I)=,15X,7H PP(I)=,
206: 115X,7H U1(I)=,10X,10H C/NT1(I)=,10X,10H APENT(I)=)
207: WRITE(108,1000)(PP(J),EP(J),U1(J),C/NT1(J),APENT(J),J=1,N)
208: 1000 FORMAT(5(D20.10,1X))
209: D0946 J=1,N
210: PP(J)=0.
211: EP(J)=-R+FL6AT(J)*(R+H)/FL9AT(N)
212: D0842 I=1,N
213: RP(I,J)=(X(I)-PP(J))*2+(Y(I)-EP(J))*2
214: 842 CONTINUE
215: CP(J)=0.
216: D0841 I=1,N
217: DP(I,J)=RN1(I)*(X(I)-PP(J))+RN2(I)*(Y(I)-EP(J))
218: CP(J)=CP(J)+Z(I)*G(I)*DP(I,J)/RP(I,J)
219: 841 CONTINUE
220: BP(J)=0.
221: D0843 I=1,N
222: BP(J)=BP(J)+G(I)*A(I,ND)*DL9G(RP(I,J))
223: 843 CONTINUE
224: ZP(J)=(PP(J)**2+EP(J)**2)/2.
225: U2(J)=SE*(BP(J)+CP(J))/(4.*PI)-ZP(J)
226: 946 CONTINUE
227: C/NT2(1)=U2(1)/PAS
228: RPENT(1)=C/NT2(1)/EP(1)
229: D0949 J=2,N
230: C/NT2(J)=U2(J)-U2(J=1)/PAS
231: RPENT(J)=C/NT2(J)/EP(J)
232: 949 CONTINUE
233: WRITE(108,904)
234: 904 FORMAT(23H CONTRAINTES SUIVANT YY)
235: WRITE(108,1056)
236: 1056 FORMAT(/,5X,10H RESULTATS,/,5X,7H EP(I)=,15X,7H PP(I)=,
237: 115X,7H U1(I)=,10X,10H C/NT1(I)=,10X,10H APENT(I)=)
238: WRITE(108,1000)(PP(J),EP(J),U2(J),C/NT2(J),BPENT(J),J=1,N)
239: 1000 FORMAT(3(D20.10))
240: H=H+0.1
241: IF(H*LE.SQRT(1.-R**2))G0T6777
242: END

```

EP(I)=	FP(I)=	U(I)=	RESULTS	C/NT1(I)=	APENT(I)=
..95000004770 00	..00000000000 00	..54986426170 00	..00	..10997285890 02	..11576089830 02
..90000003580 00	..00000000000 00	..43784060090 00	..00	..22404733500 01	..24894147350 01
..85000002380 00	..00000000000 00	..36997648830 00	..00	..13572783330 01	..15967979940 01
..80000001190 00	..00000000000 00	..31186480310 00	..00	..11622377730 01	..14527971940 01
..75000000590 00	..00000000000 00	..25902190140 00	..00	..10568580970 01	..14091440180 01
..70000004770 00	..00000000000 00	..21080587150 00	..00	..96432065590 00	..13776008430 01
..65000003580 00	..00000000000 00	..16661661330 00	..00	..88378521710 00	..13596694900 01
..60000002380 00	..00000000000 00	..12385709260 00	..00	..85519046320 00	..14253173820 01
..55000007150 00	..00000000000 00	..63927350310 01	..01	..11985949180 01	..21792632040 01
..50000005960 00	..00000000000 00	..33613308180 00	..00	..54441149550 01	..10888228610 02
..45000004770 00	..00000000000 00	..21497088870 00	..00	..24232440070 01	..53849861130 01
..40000003580 00	..00000000000 00	..71406045500 01	..01	..28712970340 01	..71782419440 01
..35000008340 00	..00000000000 00	..10020172150 01	..01	..16285244500 01	..46529258910 01
..30000007150 00	..00000000000 00	..65164028540 01	..01	..11028771940 01	..36762564360 01
..25000005960 00	..00000000000 00	..86401933690 01	..01	..42475812830 00	..16990321080 01
..20000004770 00	..00000000000 00	..40440680940 01	..01	..91922510990 00	..45961244540 01
..15000009540 00	..00000000000 00	..27094194800 00	..00	..46100256160 01	..30733484570 02
..10000008340 00	..00000000000 00	..39903298430 00	..00	..25618208790 01	..25618187410 02
..50000071530 01	..00000000000 00	..51165608670 00	..00	..22524621810 01	..45049179170 02
..59604644780 07	..00000000000 00	..62282088370 00	..00	..22232960740 01	..37300718460 08
..49999237060 01	..00000000000 00	..74672730250 00	..00	..24781285230 01	..49563326740 02
..99999427800 01	..00000000000 00	..85732084850 00	..00	..22118710520 01	..22118837090 02
..14999961850 00	..00000000000 00	..94756212720 00	..00	..18048256820 01	..12032201810 02
..19999980930 00	..00000000000 00	..10750533500 01	..01	..25498246060 01	..12749135190 02
..24999904630 00	..00000000000 00	..12518974350 01	..01	..35368831090 01	..14147586410 02
..29999923710 00	..00000000000 00	..15461310040 01	..01	..58846705230 01	..19615618300 02
..34999942780 00	..00000000000 00	..27572643770 01	..01	..24222668920 02	..69207738620 02
..39999961850 00	..00000000000 00	..15843819870 01	..01	..23457649200 02	..58644178940 02
..44999980930 00	..00000000000 00	..12344346540 01	..01	..69989470750 01	..15553222310 02
..49999904630 00	..00000000000 00	..10507336110 01	..01	..36740210780 01	..73480061710 01
..54999923710 00	..00000000000 00	..94267837160 00	..00	..21611049160 01	..39292871150 01
..59999942780 00	..00000000000 00	..86508166760 00	..00	..15519341730 01	..25865594220 01
..64999961850 00	..00000000000 00	..79866389790 00	..00	..13283554730 01	..20436250030 01
..69999980930 00	..00000000000 00	..73705083730 00	..00	..12322612860 01	..17603737460 01
..74999904630 00	..00000000000 00	..67750059050 00	..00	..11910050070 01	..15880086960 01
..79999923710 00	..00000000000 00	..61852929290 00	..00	..11794260210 01	..14742839320 01
..84999942780 00	..00000000000 00	..55921692340 00	..00	..11862474620 01	..13955861880 01
..89999961850 00	..00000000000 00	..49888913790 00	..00	..12065557820 01	..13406181030 01
..94999980930 00	..00000000000 00	..43693850390 00	..00	..12390127530 01	..13042242130 01
..99999904630 00	..00000000000 00	..12146623250 00	..00	..63094458050 01	..63094458220 01

BUS
LILLE

CONTRAINTES SUIVANT YY

RESULTS

PP(I)=	U(I)=	C/NT(I)=	APENT(I)=
..975000000000000000	..372958393500000000	..7459168314001	..7650428853001
..950000000000000000	..361721164400000000	..2247445952000	..2365732462000
..925000011900000000	..335499482800000000	..5244336633000	..5669553043000
..900000000000000000	..330462992900000000	..1007298028000	..1119219986000
..875000000000000000	..337946729200000000	..1496747341000	..1710568389000
..850000023800000000	..351495165900000000	..2709687508000	..3187867568000
..825000047700000000	..367694873200000000	..3239941659000	..3927201784000
..800000011900000000	..384840208000000000	..3429067164000	..4286333892000
..775000035800000000	..402106065400000000	..3453171667000	..4455705171000
..750000000000000000	..419109678900000000	..3400722922000	..4534297229000
..725000023800000000	..435684060900000000	..3314876588000	..4572243419000
..700000047700000000	..451763747000000000	..3215937406000	..4594195982000
..675000011900000000	..467328177900000000	..3112886374000	..4611683435000
..650000035800000000	..482374683500000000	..3009301291000	..4629694039000
..625000000000000000	..496906470500000000	..2906357575000	..4650172120000
..600000023800000000	..510927031100000000	..2804112292000	..4673520301000
..575000047700000000	..524438215800000000	..2702237111000	..4699542411000
..550000011900000000	..537439237700000000	..2600204534000	..4727644504000
..525000035800000000	..549926131700000000	..2497378950000	..4756911961000
..500000000000000000	..561891574800000000	..2393088752000	..4786177505000
..475000023800000000	..573324160000000000	..2286517182000	..4813720142000
..450000047700000000	..584207963500000000	..2176760830000	..4837245776000
..425000011900000000	..594521658200000000	..2062739065000	..4853503546000
..400000035800000000	..604237507900000000	..1943170042000	..4857924671000
..375000000000000000	..613320492300000000	..1816596996000	..4844258655000
..350000023800000000	..621727046300000000	..1681310908000	..4803745124000
..325000047700000000	..629404226400000000	..1535436102000	..4724418083000
..300000011900000000	..636288928000000000	..1376940409000	..4589801182000
..275000035800000000	..642307697700000000	..1203754003000	..4377286713000
..250000000000000000	..647377646100000000	..1013989734000	..4055958938000
..225000023800000000	..651408557000000000	..80618224190-01	..3583031806000
..200000047700000000	..654307051900000000	..57969900810-01	..2898494349000
..175000011900000000	..655982526200000000	..33509488020-01	..1914827756000
..150000035800000000	..656353902100000000	..74275190490-02	..49516781860-01
..125000000000000000	..655352889000000000	..20020262790-01	..1601621023000
..100000023800000000	..652912110200000000	..48815579930-01	..4881556829000
..750000047680-01	..648912063300000000	..80000942940-01	..1066678561001
..500000011920-01	..643047580800000000	..1172896566000	..2345792573001
..250000035760-01	..634646439000000000	..1680228459000	..6720904221001
..000000000000000000	..622821019600000000	..2365084030000	..7237004957076

*****H# .100



RESULTS

EP(1)=

PF(1)=

U(1)=

C/NT(1)=

APENT(1)=

```

000000000000 00 --.97250002620 00 --.14815395870 00 --.29630793500 01 --.3046861440 01
000000000000 00 --.94500005250 00 --.46372796380-01 --.20356233670 01 --.21540986820 01
000000000000 00 --.91750007870 00 --.86915574610-02 --.11012871430 01 --.12003128590 01
000000000000 00 --.89000010490 00 --.45943889880-01 --.74504669280 00 --.83713101680 00
000000000000 00 --.86250007150 00 --.77001187390-01 --.62114598720 00 --.72016920080 00
000000000000 00 --.83500009760 00 --.10545755550 00 --.56912739680 00 --.68153961690 00
000000000000 00 --.80750012400 00 --.13245428940 00 --.53993470890 00 --.66864969170 00
000000000000 00 --.78000015020 00 --.15841479240 00 --.51921009160 00 --.66565383540 00
000000000000 00 --.75250017640 00 --.18352671880 00 --.50223855710 00 --.66742649740 00
000000000000 00 --.72500014310 00 --.20788454540 00 --.48715656290 00 --.67193995410 00
000000000000 00 --.69750016930 00 --.23153935510 00 --.47309622060 00 --.67827398680 00
000000000000 00 --.67000019550 00 --.25452051890 00 --.45962330490 00 --.68600473250 00
000000000000 00 --.64250022170 00 --.27684597480 00 --.44650914460 00 --.69495562730 00
000000000000 00 --.61500024800 00 --.29852777130 00 --.43363595500 00 --.70509882950 00
000000000000 00 --.58750039340 00 --.31957489600 00 --.42094251830 00 --.71649742370 00
000000000000 00 --.56000024080 00 --.33999530130 00 --.40840813170 00 --.72929992160 00
000000000000 00 --.53250050540 00 --.35979543880 00 --.39600277370 00 --.74366647480 00
000000000000 00 --.50500035290 00 --.37898258950 00 --.38374303590 00 --.75988666880 00
000000000000 00 --.47750055790 00 --.39756271870 00 --.37160260630 00 --.77822444430 00
000000000000 00 --.45000040530 00 --.41554262430 00 --.35959813320 00 --.79910624300 00
000000000000 00 --.42250061040 00 --.43292782620 00 --.34770405930 00 --.82296699890 00
000000000000 00 --.39500045780 00 --.44972419880 00 --.33592747120 00 --.85044830860 00
000000000000 00 --.36750072240 00 --.46593577090 00 --.32423146200 00 --.88226074750 00
000000000000 00 --.34000056980 00 --.48156611610 00 --.31260692320 00 --.91943058620 00
000000000000 00 --.31250041720 00 --.49661597850 00 --.30099726500 00 --.96318996200 00
000000000000 00 --.28500062230 00 --.51108321050 00 --.28934465810 00 --.10152421980 01
000000000000 00 --.25750046970 00 --.52496217730 00 --.2757935220 00 --.10779761010 01
000000000000 00 --.23000073430 00 --.53824113740 00 --.26557921680 00 --.11546885600 01
000000000000 00 --.20250058170 00 --.55090240500 00 --.25322537790 00 --.12504921010 01
000000000000 00 --.17500078680 00 --.56291957610 00 --.24034342590 00 --.13733848310 01
000000000000 00 --.14750063420 00 --.57425849850 00 --.22677846130 00 --.15374744830 01
000000000000 00 --.12000048160 00 --.58487762860 00 --.21238261420 00 --.17698480150 01
000000000000 00 --.92500686650-01 --.59473419460 00 --.19713133330 00 --.21311337290 01
000000000000 00 --.65000534060-01 --.60379823210 00 --.18128076030 00 --.27889118600 01
000000000000 00 --.37500798700-01 --.61207972400 00 --.16562984850 00 --.44167018900 01
000000000000 00 --.10000646110-01 --.61968011020 00 --.15200773170 00 --.15199791090 02
000000000000 00 --.17498970030-01 --.62686068500 00 --.14361150590 00 --.82068547850 01
000000000000 00 --.44999122620-01 --.63399461450 00 --.14267859790 00 --.31706973290 01
000000000000 00 --.72498321530-01 --.64011847350 00 --.12247718780 00 --.16893796330 01
000000000000 00 --.99998474120-01 --.63527221840 00 --.96925109330-01 --.96926588310 00

```

883
FILE

*****H= .200

RESULTS

PF(I)=	PE(I)=	U(I)=	C/NT1(I)=	APENT(I)=
..9500000477D 00	..0000000000D 00	..3653071415D-01	..7306143265D 00	..76906/6735D 00
..9000000358D 00	..0000000000D 00	..1210325325D 00	..1690036467D 01	..1877818222D 01
..8500000238D 00	..0000000000D 00	..1566447441D 00	..7122442749D 00	..8379344176D 00
..8000000119D 00	..0000000000D 00	..1790911239D 00	..4489276223D 00	..5611595195D 00
..7500000596D 00	..0000000000D 00	..1960384650D 00	..3389468427D 00	..4519290877D 00
..7000000477D 00	..0000000000D 00	..2087441841D 00	..2541143982D 00	..3630205441D 00
..6500000358D 00	..0000000000D 00	..2169813507D 00	..1647433412D 00	..2534512802D 00
..6000000238D 00	..0000000000D 00	..2201868727D 00	..6411044423D-01	..1068507361D 00
..5500000715D 00	..0000000000D 00	..2180187983D 00	..4336149146D-01	..7883906513D-01
..5000000596D 00	..0000000000D 00	..2108670816D 00	..1430343425D 00	..2860686510D 00
..4500000477D 00	..0000000000D 00	..2000156119D 00	..2170294067D 00	..4822875194D 00
..4000000358D 00	..0000000000D 00	..1871339574D 00	..2576331063D 00	..6440827080D 00
..3500000834D 00	..0000000000D 00	..1735574245D 00	..2715306733D 00	..7758017389D 00
..3000000715D 00	..0000000000D 00	..1599652016D 00	..2718444734D 00	..9061480286D 00
..2500000596D 00	..0000000000D 00	..1465163448D 00	..2689771522D 00	..1075908352D 01
..2000000477D 00	..0000000000D 00	..1332516088D 00	..2652947367D 00	..1326473367D 01
..1500000954D 00	..0000000000D 00	..1203656694D 00	..2577188030D 00	..1718124261D 01
..1000000834D 00	..0000000000D 00	..1083942293D 00	..2394288156D 00	..2394286158D 01
..5000007153D-01	..0000000000D 00	..9843826931D-01	..1991192126D 00	..3982378556D 01
..5960464478D-07	..0000000000D 00	..9182740278D-01	..1322173385D 00	..2218238848D 07
..4999923706D-01	..0000000000D 00	..8909172436D-01	..5471357151D-01	..1094288128D 01
..9999942780D-01	..0000000000D 00	..8944248529D-01	..7015219005D-02	..7015259147D-01
..1499996185D 00	..0000000000D 00	..9154206783D-01	..4199165328D-01	..2799450671D 00
..1999998093D 00	..0000000000D 00	..9447442713D-01	..5864718946D-01	..29323622269D 00
..2499990463D 00	..0000000000D 00	..9791682094D-01	..6884788027D-01	..2753925716D 00
..2999992371D 00	..0000000000D 00	..1018448505D 00	..7856059647D-01	..2618693209D 00
..3499994278D 00	..0000000000D 00	..1063135980D 00	..8937495468D-01	..2553574309D 00
..3999996185D 00	..0000000000D 00	..1112923261D 00	..9957456872D-01	..2489366592D 00
..4499998093D 00	..0000000000D 00	..1163866765D 00	..1018870134D 00	..2264156814D 00
..4999990463D 00	..0000000000D 00	..1202598863D 00	..7746420075D-01	..1549286970D 00
..5499992371D 00	..0000000000D 00	..1205214861D 00	..5231995717D-02	..9512732661D-02
..5999994278D 00	..0000000000D 00	..1151302679D 00	..1078243703D 00	..1797074552D 00
..6499996185D 00	..0000000000D 00	..1036229808D 00	..2301457554D 00	..3540706007D 00
..6999998093D 00	..0000000000D 00	..8662606681D-01	..3399383002D 00	..4856262754D 00
..7499990463D 00	..0000000000D 00	..6493246905D-01	..4338719810D 00	..5784967102D 00
..7999992371D 00	..0000000000D 00	..3912224001D-01	..5162046115D 00	..6452563798D 00
..8499994278D 00	..0000000000D 00	..9549666922D-02	..5914514971D 00	..6958257591D 00
..8999996185D 00	..0000000000D 00	..2357126331D-01	..6624186441D 00	..7360210276D 00
..9499998093D 00	..0000000000D 00	..5992715483D-01	..7271178738D 00	..7653873892D 00
..9999990463D 00	..0000000000D 00	..3536563050D 00	..5874583353D 01	..5874588955D 01

BUS
FILE

CONSTRAINTES SUIVANT YY

RESULTS

EP(I)=	PP(I)=	U1(I)=	C/NT1(I)=	APENT(I)=
..9500000477D 00	..0000000000D 00	..9079776250D-01	..1815955358D 01	..1911531860D 01
..5000000358D 00	..0000000000D 00	..2974066040D-01	..2410768602D 01	..2678631674D 01
..8500000238D 00	..0000000000D 00	..9995643303D-01	..1404315482D 01	..1652135814D 01
..8000000119D 00	..0000000000D 00	..1482839068D 00	..9665495861D 00	..1208186965D 01
..7500000596D 00	..0000000000D 00	..1876051985D 00	..7864258821D 00	..1048567760D 01
..7000000477D 00	..0000000000D 00	..2221746972D 00	..6913900139D 00	..9876999525D 00
..6500000358D 00	..0000000000D 00	..2532299167D 00	..6211044282D 00	..9555452216D 00
..6000000238D 00	..0000000000D 00	..2811604840D 00	..5586113796D 00	..9310189290D 00
..5500000715D 00	..0000000000D 00	..3062149893D 00	..5010901349D 00	..9110728541D 00
..5000000596D 00	..0000000000D 00	..3286894877D 00	..4494899952D 00	..8989798832D 00
..4500000477D 00	..0000000000D 00	..3489080317D 00	..4043709050D 00	..8986019160D 00
..4000000358D 00	..0000000000D 00	..3671169440D 00	..3641782671D 00	..9104455863D 00
..3500000834D 00	..0000000000D 00	..3834015211D 00	..3256915611D 00	..9305470956D 00
..3000000715D 00	..0000000000D 00	..3977114680D 00	..2861989551D 00	..9539962894D 00
..2500000596D 00	..0000000000D 00	..4099651027D 00	..2450727078D 00	..9802905973D 00
..2000000477D 00	..0000000000D 00	..4201001514D 00	..2027009876D 00	..1013504696D 01
..1500000954D 00	..0000000000D 00	..4280167226D 00	..1583314334D 00	..1055542218D 01
..1000000834D 00	..0000000000D 00	..4335234824D 00	..1101352010D 00	..1101351091D 01
..5000007153D-01	..0000000000D 00	..4364056588D 00	..5764353317D-01	..1152869014D 01
..596046478D-07	..0000000000D 00	..4365855238D 00	..3597298726D-02	..6035265774D 05
..4999923706D-01	..0000000000D 00	..4342233696D 00	..4724308704D-01	..9448761585D 00
..9999942780D-01	..0000000000D 00	..4296555672D 00	..9135605302D-01	..9135657577D 00
..1499996185D 00	..0000000000D 00	..4232367272D 00	..1283908073D 00	..8559408919D 00
..1999998093D 00	..0000000000D 00	..4152177063D 00	..1603664272D 00	..8018329008D 00
..2499990463D 00	..0000000000D 00	..4057219052D 00	..1899160345D 00	..7596670357D 00
..2999992371D 00	..0000000000D 00	..3947284468D 00	..2198691811D 00	..7328991342D 00
..3499994278D 00	..0000000000D 00	..3820309023D 00	..2539509034D 00	..7255751960D 00
..3999996185D 00	..0000000000D 00	..3672115626D 00	..2963868123D 00	..7409677373D 00
..4499998093D 00	..0000000000D 00	..3497504879D 00	..3492215160D 00	..7760481424D 00
..4999990463D 00	..0000000000D 00	..3292554076D 00	..4099016296D 00	..8198048228D 00
..5499992371D 00	..0000000000D 00	..3056227131D 00	..4726539182D 00	..8593719524D 00
..5999994278D 00	..0000000000D 00	..2789888405D 00	..5326774845D 00	..8877966541D 00
..6499996185D 00	..0000000000D 00	..2495538919D 00	..5886990058D 00	..9056913097D 00
..6999998093D 00	..0000000000D 00	..2174585351D 00	..6419071749D 00	..9170104998D 00
..7499990463D 00	..0000000000D 00	..1827628149D 00	..6939144453D 00	..9252204368D 00
..7999992371D 00	..0000000000D 00	..1454719786D 00	..7458167698D 00	..9322718514D 00
..8499994278D 00	..0000000000D 00	..1055692553D 00	..7980545135D 00	..9388882949D 00
..8999996185D 00	..0000000000D 00	..6303314782D-01	..8507222009D 00	..9452472905D 00
..9499998093D 00	..0000000000D 00	..1791631777D-01	..9023366548D 00	..9498282484D 00
..9999990463D 00	..0000000000D 00	..2811403446D 00	..5981133603D 01	..5981139307D 01

CONTRAINTES SUIVANT YY

BUS
FILE

RÉSULTATS

EP(I)=	PP(I)=	U1(I)=	C/NT1(I)=	APENT(I)=
..9500000477D 00	..0000000000D 00	..1465835483D 00	..2931671142D 01	..3085969468D 01
..9000000358D 00	..0000000000D 00	..9914408769D-01	..9487892697D 00	..1054210258D 01
..8500000238D 00	..0000000000D 00	..1151151201D 00	..3194206680D 00	..3757890106D 00
..8000000119D 00	..0000000000D 00	..1473449791D 00	..6445972182D 00	..8057465108D 00
..7500000596D 00	..0000000000D 00	..1815787355D 00	..6846751673D 00	..9129001505D 00
..7000000477D 00	..0000000000D 00	..2140189431D 00	..6488041911D 00	..9268630670D 00
..6500000358D 00	..0000000000D 00	..2437952837D 00	..5955268472D 00	..9161950992D 00
..6000000238D 00	..0000000000D 00	..2708198275D 00	..5404909080D 00	..9008181442D 00
..5500000715D 00	..0000000000D 00	..2951934071D 00	..4874716221D 00	..8863119249D 00
..5000000596D 00	..0000000000D 00	..3170500859D 00	..4371336024D 00	..8742671006D 00
..4500000477D 00	..0000000000D 00	..3365127060D 00	..3892524243D 00	..8650052956D 00
..4000000358D 00	..0000000000D 00	..3536779311D 00	..3433045225D 00	..8582612294D 00
..3500000834D 00	..0000000000D 00	..3686169476D 00	..2987803474D 00	..8536579319D 00
..3000000715D 00	..0000000000D 00	..3813858968D 00	..2553789995D 00	..8512631287D 00
..2500000596D 00	..0000000000D 00	..3920325946D 00	..2129339689D 00	..8517356725D 00
..2000000477D 00	..0000000000D 00	..4005922171D 00	..1711924597D 00	..8559620942D 00
..1500000954D 00	..0000000000D 00	..4070811105D 00	..1297778768D 00	..8651852954D 00
..1000000834D 00	..0000000000D 00	..4115044463D 00	..8846672073D-01	..8846664691D 00
..5000007153D-01	..0000000000D 00	..4138779095D 00	..4746926799D-01	..9493840016D 00
..596046478D-07	..0000000000D 00	..4142453278D 00	..7348364739D-02	..1232851025D 06
..4999923706D-01	..0000000000D 00	..4126749408D 00	..3140774165D-01	..6281644179D 00
..9999942780D-01	..0000000000D 00	..4092361754D 00	..6877531133D-01	..6877570487D 00
..1499996185D 00	..0000000000D 00	..4039737637D 00	..1052482412D 00	..7016567258D 00
..1999998093D 00	..0000000000D 00	..3968903684D 00	..1416679135D 00	..7083402431D 00
..2499990463D 00	..0000000000D 00	..3879376168D 00	..1790550435D 00	..7162229062D 00
..2999992371D 00	..0000000000D 00	..3770120546D 00	..2185112572D 00	..7283727095D 00
..3499994278D 00	..0000000000D 00	..3639649112D 00	..2609428825D 00	..7455523118D 00
..3999996185D 00	..0000000000D 00	..3486290234D 00	..3067177743D 00	..7667951670D 00
..4499998093D 00	..0000000000D 00	..3308568091D 00	..3554443064D 00	..7898765712D 00
..4999990463D 00	..0000000000D 00	..3105465061D 00	..4062060842D 00	..8124137181D 00
..5499992371D 00	..0000000000D 00	..2876401684D 00	..4581267815D 00	..8329589401D 00
..5999994278D 00	..0000000000D 00	..2621071480D 00	..5106604398D 00	..8511015446D 00
..6499996185D 00	..0000000000D 00	..2339239221D 00	..5636645512D 00	..8671767415D 00
..6999998093D 00	..0000000000D 00	..2030665865D 00	..6171467479D 00	..8816384515D 00
..7499990463D 00	..0000000000D 00	..1695125826D 00	..6710801192D 00	..8947746300D 00
..7999992371D 00	..0000000000D 00	..1332405415D 00	..7254408649D 00	..9068019460D 00
..8499994278D 00	..0000000000D 00	..9423074950D-01	..7801958863D 00	..9178781312D 00
..8999996185D 00	..0000000000D 00	..5246297403D-01	..8353555592D 00	..9281732369D 00
..9499998093D 00	..0000000000D 00	..8041051190D-02	..8884385097D 00	..9351986191D 00
..9999990463D 00	..0000000000D 00	..2915116026D 00	..5991053432D 01	..5991059146D 01

BES
LILLE

CONTRAINTES SUIVANT YY

U1(I) =

PP (I) =

U1(I) =

```
APENT(I) =
```

*7023114766D 00
 -1278689324D 01
 -5969740511D 00
 -6456553785D 00
 -6922576821D 00
 -7072487155D 00
 -7083819651D 00
 -7052500502D 00
 -7013627269D 00
 -6976863994D 00
 -6942783247D 00
 -6909372492D 00
 -6874197393D 00
 -6834816057D 00
 -6788526872D 00
 -6732957376D 00
 -6664537115D 00
 -6579179499D 00
 -6470882460D 00
 -6330663464D 00
 -6145293563D 00
 -5893088785D 00
 -5536464919D 00
 -5005539375D 00
 -4151195962D 00
 -2593119482D 00
 -1017552211D 00
 -1746861024D 01
 -4313625427D 01
 -1897825235D 01
 -1476338286D 01
 -1303939713D 01
 -1211999982D 01
 -1157230304D 01
 -1126446171D 01
 -1121687284D 01
 -1164909896D 01
 -1316330042D 01
 -1672528111D 01
 -2130678246D 01

V.62 - 155

RESULTATS

EP(I)=	FP(I)=	U1(I)=	C/NT1(I)=	APENT(I)=
..9500000477D 00	..0000000000D 00	..1040312257D-01	..2080624639D 00	..2190131089D 00
..9000000358D 00	..0000000000D 00	..6169114123D-01	..1441885362D 01	..1602094783D 01
..8500000238D 00	..0000000000D 00	..1029800282D 00	..8257777887D 00	..9715032535D 00
..8000000119D 00	..0000000000D 00	..1416519213D 00	..7734379070D 00	..9667973694D 00
..7500000596D 00	..0000000000D 00	..1784693176D 00	..7363479715D 00	..9817972173D 00
..7000000477D 00	..0000000000D 00	..2129789093D 00	..6901918753D 00	..9859883260D 00
..6500000358D 00	..0000000000D 00	..2449997308D 00	..6404164679D 00	..9852560502D 00
..6000000238D 00	..0000000000D 00	..2744788974D 00	..5895833664D 00	..9826389050D 00
..5500000715D 00	..0000000000D 00	..3014061428D 00	..5385449399D 00	..9791724906D 00
..5000000596D 00	..0000000000D 00	..3257869491D 00	..4876161561D 00	..9752321960D 00
..4500000477D 00	..0000000000D 00	..3476359570D 00	..4369801838D 00	..9710669723D 00
..4000000358D 00	..0000000000D 00	..3669782601D 00	..3868460850D 00	..9671151259D 00
..3500000834D 00	..0000000000D 00	..3838524715D 00	..3374842472D 00	..9642404765D 00
..3000000715D 00	..0000000000D 00	..3983115258D 00	..2891811035D 00	..9639367820D 00
..2500000596D 00	..0000000000D 00	..4104184985D 00	..2421394691D 00	..9685576457D 00
..2000000477D 00	..0000000000D 00	..4202390185D 00	..1964104120D 00	..9820518257D 00
..1500000954D 00	..0000000000D 00	..4278336058D 00	..1518917539D 00	..1012611049D 01
..1000000834D 00	..0000000000D 00	..4332529794D 00	..1083874783D 00	..1083873879D 01
..5000007153D-01	..0000000000D 00	..4365363081D 00	..6566657955D-01	..1313329712D 01
..5960464478D-07	..0000000000D 00	..4377110842D 00	..2349552243D-01	..3941894548D 06
..4999923706D-01	..0000000000D 00	..4367935999D 00	..1834968734D-01	..3669993468D 00
..9999942780D-01	..0000000000D 00	..4337900575D 00	..6007085193D-01	..6007119566D 00
..1499996185D 00	..0000000000D 00	..4286984581D 00	..1018319927D 00	..6788816777D 00
..1999998093D 00	..0000000000D 00	..4215098229D 00	..1437727134D 00	..7188642524D 00
..2499990463D 00	..0000000000D 00	..4122082367D 00	..1860317343D 00	..7441297757D 00
..2999992371D 00	..0000000000D 00	..4007690070D 00	..2287846086D 00	..7626173015D 00
..3499994278D 00	..0000000000D 00	..3871588222D 00	..2722037124D 00	..7777261640D 00
..3999996185D 00	..0000000000D 00	..3713346462D 00	..3164835381D 00	..7912095997D 00
..4499998093D 00	..0000000000D 00	..3532433641D 00	..3618256634D 00	..8040573707D 00
..4999990463D 00	..0000000000D 00	..3328218026D 00	..4084312558D 00	..8168640697D 00
..5499992371D 00	..0000000000D 00	..3099964403D 00	..4565072729D 00	..8300143748D 00
..5999994278D 00	..0000000000D 00	..2846902510D 00	..5061238163D 00	..8435404983D 00
..6499996185D 00	..0000000000D 00	..2568284559D 00	..5572359343D 00	..8572865559D 00
..6999998093D 00	..0000000000D 00	..2263465562D 00	..6096380310D 00	..8709117102D 00
..7499990463D 00	..0000000000D 00	..1931965101D 00	..6630009616D 00	..8840024063D 00
..7999992371D 00	..0000000000D 00	..1573465968D 00	..7169983071D 00	..8962487386D 00
..8499994278D 00	..0000000000D 00	..1187860147D 00	..7712116895D 00	..9073084808D 00
..8999996185D 00	..0000000000D 00	..7751906026D-01	..8253391375D 00	..9170438748D 00
..9499998093D 00	..0000000000D 00	..3354932354D-01	..8793947866D 00	..9256789086D 00
..9999990463D 00	..0000000000D 00	..2622669551D 00	..5916325925D 01	..5916331568D 01

CONTRAINTES SUIVANT YY

RESULTS

EP(I)=	PP(I)=	U1(I)=	C/NT1(I)=	APENT(I)=
.000000000000 00	-.9625000358D 00	.2745938400D 00	.5491877128D 01	-.5705846155D 01
.000000000000 00	-.9250000119D 00	.1067342292D 00	-.3357192417D 01	.3629397161D 01
.000000000000 00	-.8875000477D 00	.9249796566D-01	-.2847252871D 00	.3208172077D 00
.000000000000 00	-.8500000238D 00	.1102223212D 00	.3544871312D 00	-.4170436721D 00
.000000000000 00	-.8125000000D 00	.1363128793D 00	.5218111946D 00	-.6422291625D 00
.000000000000 00	-.7750000358D 00	.1640555774D 00	.5548539952D 00	-.7159406059D 00
.000000000000 00	-.7375000119D 00	.1913467742D 00	.5458239674D 00	-.7401002829D 00
.000000000000 00	-.7000000477D 00	.2175164965D 00	.5233944778D 00	-.7477063459D 00
.000000000000 00	-.6625000238D 00	.2423493632D 00	.4966573626D 00	-.7496714637D 00
.000000000000 00	-.6250000000D 00	.2657725674D 00	.4684641118D 00	-.7495425789D 00
.000000000000 00	-.5875000358D 00	.2877581554D 00	.4397117870D 00	-.7484455493D 00
.000000000000 00	-.5500000119D 00	.3082928204D 00	.4106933253D 00	-.7467151208D 00
.000000000000 00	-.5125000477D 00	.3273681106D 00	.3815058257D 00	-.7444015419D 00
.000000000000 00	-.4750000238D 00	.3449774305D 00	.3521864189D 00	-.7414450553D 00
.000000000000 00	-.4375000000D 00	.3611145372D 00	.3227421532D 00	-.7376963501D 00
.000000000000 00	-.4000000358D 00	.3757730399D 00	.2931700721D 00	-.7329251147D 00
.000000000000 00	-.3625000119D 00	.3889461305D 00	.2634618280D 00	-.7267912258D 00
.000000000000 00	-.3250000477D 00	.4006262163D 00	.2336017284D 00	-.7187744436D 00
.000000000000 00	-.2875000238D 00	.4108049266D 00	.2035742196D 00	-.7080841833D 00
.000000000000 00	-.2500000000D 00	.4194728312D 00	.1733581027D 00	-.6934324108D 00
.000000000000 00	-.2125000358D 00	.4266193549D 00	.1429304819D 00	-.6726139194D 00
.000000000000 00	-.1750000119D 00	.4322326338D 00	.1122655852D 00	-.6415175863D 00
.000000000000 00	-.1375000477D 00	.4362992530D 00	.8133238878D-01	-.5915080769D 00
.000000000000 00	-.1000000238D 00	.4388041021D 00	.5009698430D-01	-.5009697236D 00
.000000000000 00	-.6250000000D-01	.4397300789D 00	.1851953703D-01	-.2963125925D 00
.000000000000 00	-.25000003576D-01	.4390578427D 00	-.1344472402D-01	.5377881915D 00
.000000000000 00	.1249980927D-01	.4367654987D 00	-.4584688411D-01	-.3667806695D 01
.000000000000 00	.4999923706D-01	.4328282551D 00	-.7874487593D-01	-.1574921550D 01
.000000000000 00	.8749961853D-01	.4272176577D 00	-.1122119549D 00	-.1282427933D 01
.000000000000 00	.1250000000D 00	.4199012735D 00	-.1463276919D 00	-.1170621535D 01
.000000000000 00	.1624994278D 00	.4108408990D 00	-.1812075009D 00	-.1115127009D 01
.000000000000 00	.199998093D 00	.3999873720D 00	-.2170705532D 00	-.1085353801D 01
.000000000000 00	.2374992371D 00	.3872706930D 00	-.2543335952D 00	-.1070881735D 01
.000000000000 00	.2749996185D 00	.3725661422D 00	-.2940910339D 00	-.1069423425D 01
.000000000000 00	.3125000000D 00	.3556115482D 00	-.3390919012D 00	-.1085094084D 01
.000000000000 00	.3499994278D 00	.3357893500D 00	-.3964439877D 00	-.1132698960D 01
.000000000000 00	.3874998093D 00	.3116282956D 00	-.4832211157D 00	-.1247022848D 01
.000000000000 00	.4249992371D 00	.2800064838D 00	-.6324362733D 00	-.1488088020D 01
.000000000000 00	.4624996185D 00	.2363896686D 00	-.8723363556D 00	-.1886134216D 01
.000000000000 00	.5000000000D 00	.1803672667D 00	-.1120448107D 01	-.2240896213D 01

*****H# .600

RESULTATS

EP(I)=	PP(I)=	U1(I)=	C/NT1(I)=	APENT(I)=
..9500000477D 00	..0000000000D 00	..9266112885D-01	..1853222687D 01	..1950760626D 01
..9000000358D 00	..0000000000D 00	..2581302886D-01	..2369483295D 01	..2632759112D 01
..8500000238D 00	..0000000000D 00	..9266283002D-01	..1336996103D 01	..1572936547D 01
..8000000119D 00	..0000000000D 00	..1389138519D 00	..9250204931D 00	..1156275599D 01
..7500000096D 00	..0000000000D 00	..1774278341D 00	..7702796891D 00	..1027039504D 01
..7000000477D 00	..0000000000D 00	..2120590482D 00	..6926243238D 00	..9894632523D 00
..6500000358D 00	..0000000000D 00	..2438124983D 00	..6350690405D 00	..9770292394D 00
..6000000238D 00	..0000000000D 00	..2729315633D 00	..5823813331D 00	..9706355165D 00
..5500000715D 00	..0000000000D 00	..2994797263D 00	..5309632923D 00	..9653876787D 00
..5000000596D 00	..0000000000D 00	..3234856479D 00	..4801184613D 00	..9602368082D 00
..4500000477D 00	..0000000000D 00	..3449763760D 00	..4298145872D 00	..9551434258D 00
..4000000358D 00	..0000000000D 00	..3639849931D 00	..3801723654D 00	..9504308286D 00
..3500000834D 00	..0000000000D 00	..3805517825D 00	..3313358069D 00	..9466735084D 00
..3000000715D 00	..0000000000D 00	..3947230179D 00	..2834247246D 00	..94477488567D 00
..2500000596D 00	..0000000000D 00	..4065480833D 00	..2365013225D 00	..9460050644D 00
..2000000477D 00	..0000000000D 00	..4160762896D 00	..1905641383D 00	..9528204644D 00
..1500000954D 00	..0000000000D 00	..4233540159D 00	..1455545344D 00	..9703629454D 00
..1000000834D 00	..0000000000D 00	..4284228545D 00	..1013767765D 00	..1013766920D 01
..5000007153D-01	..0000000000D 00	..4313186352D 00	..5791561786D-01	..1158310700D 01
..5960464478D-07	..0000000000D 00	..4320712819D 00	..1505293498D-01	..2525463415D 06
..4999923706D-01	..0000000000D 00	..4307051382D 00	..2732287451D-01	..5464658286D 00
..9999942780D-01	..0000000000D 00	..4272393215D 00	..6931633946D-01	..6931673609D 00
..1499996185D 00	..0000000000D 00	..4216881247D 00	..1110239424D 00	..7401614983D 00
..1999998093D 00	..0000000000D 00	..4140605442D 00	..1525516181D 00	..7627588180D 00
..2499990463D 00	..0000000000D 00	..4043591175D 00	..1940285460D 00	..7761171448D 00
..2999992371D 00	..0000000000D 00	..3925767184D 00	..2356479960D 00	..7854953177D 00
..3499994278D 00	..0000000000D 00	..3786944316D 00	..2776457527D 00	..7932748761D 00
..3999996185D 00	..0000000000D 00	..3626775418D 00	..3203378142D 00	..8008452993D 00
..4499998093D 00	..0000000000D 00	..3444736060D 00	..3640787386D 00	..8090642065D 00
..4999990463D 00	..0000000000D 00	..3240134665D 00	..4092028153D 00	..8184071916D 00
..5499992371D 00	..0000000000D 00	..3012138101D 00	..4559931537D 00	..8290796114D 00
..5999994278D 00	..0000000000D 00	..2759867843D 00	..5045405461D 00	..8409017120D 00
..6499996185D 00	..0000000000D 00	..2482471170D 00	..5547933800D 00	..8535287778D 00
..6999998093D 00	..0000000000D 00	..2179202236D 00	..6065379032D 00	..8664829550D 00
..7499990463D 00	..0000000000D 00	..1849479865D 00	..6594447823D 00	..8792608278D 00
..7999992371D 00	..0000000000D 00	..1492881522D 00	..7131967282D 00	..8914967605D 00
..8499994278D 00	..0000000000D 00	..1109175503D 00	..7674120838D 00	..9028383534D 00
..8999996185D 00	..0000000000D 00	..6982658763D-01	..8218193021D 00	..9131329449D 00
..9499998093D 00	..0000000000D 00	..2603674958D-01	..8757968134D 00	..9218915676D 00
..9999990463D 00	..0000000000D 00	..2703161988D 00	..5927059320D 01	..5927064973D 01

BUS
LILLE

CONTRAINTES SUIVANT YY

RESULTS

AP(I)=	PP(I)=	U1(I)=	C/NT1(I)=	APENT(I)=
000000000000000000	96000000381D 00	82905160560-02	1658103310D 00	1727190879D 00
000000000000000000	92000000763D 00	4640783324D-01	1093957051D 01	1189094522D 01
000000000000000000	88000000548D 00	7738344895D-01	6195123512D 00	7039912643D 00
000000000000000000	84000000930D 00	1092703048D 00	6377371557D 00	7592108156D 00
000000000000000000	80000000715D 00	1409302813D 00	6331995677D 00	7914993888D 00
000000000000000000	7600001097D 00	1713491405D 00	6083772201D 00	8004962268D 00
000000000000000000	7200001478D 00	2002135324D 00	5772878722D 00	8017885467D 00
000000000000000000	6800001264D 00	2274466423D 00	5446622311D 00	8009737204D 00
000000000000000000	6400001645D 00	2530301849D 00	5116708815D 00	7994855468D 00
000000000000000000	6000001431D 00	2769575005D 00	4785463402D 00	7975770436D 00
000000000000000000	5600000240D 00	2992231916D 00	4453138482D 00	7952029584D 00
000000000000000000	5200000457D 00	3198217508D 00	4119712088D 00	7922516271D 00
000000000000000000	4800000317D 00	3387474192D 00	3785133921D 00	7885690459D 00
000000000000000000	4400000534D 00	3559933039D 00	3449177146D 00	7839029454D 00
000000000000000000	4000000393D 00	3715524886D 00	3111837115D 00	7779585136D 00
000000000000000000	3600000252D 00	3854168087D 00	272864189D 00	7702395118D 00
000000000000000000	3200000469D 00	3975772737D 00	2432093148D 00	7600279931D 00
000000000000000000	2800000329D 00	4080242122D 00	2089387826D 00	7462090611D 00
000000000000000000	2400000546D 00	4167464293D 00	1744443511D 00	7268498095D 00
000000000000000000	2000000405D 00	4237318243D 00	1397079081D 00	6985381247D 00
000000000000000000	1600000622D 00	4289666306D 00	1046961340D 00	6543482924D 00
000000000000000000	1200000481D 00	4324357722D 00	6938283521D-01	5781879729D 00
000000000000000000	8000000698D-01	43411223452D 00	3373146243D-01	4216395986D 00
000000000000000000	4000005579D-01	4340077277D 00	2292350395D-02	5730796057D-01
000000000000000000	4172325134D-06	4320713113D 00	3872833075D-01	9282193862D 05
000000000000000000	3999900818D-01	4282905674D 00	7561488243D-01	1890418935D 01
000000000000000000	7999897003D-01	4226406983D 00	1129973894D 00	1412485552D 01
000000000000000000	1199989319D 00	4150949723D 00	1509145288D 00	1257632267D 01
000000000000000000	1599988937D 00	4056245945D 00	1894075658D 00	1183805471D 01
000000000000000000	1999988556D 00	3941988057D 00	2285157902D 00	1142585489D 01
000000000000000000	2399988174D 00	3807848019D 00	2682800925D 00	1117839227D 01
000000000000000000	2799987793D 00	3653471091D 00	3087538753D 00	1102697219D 01
000000000000000000	3199987411D 00	3478453612D 00	3500349783D 00	1093863610D 01
000000000000000000	3599987030D 00	3282276822D 00	3923536031D 00	1089875046D 01
000000000000000000	3999986649D 00	3064113111D 00	4363274471D 00	1090822259D 01
000000000000000000	4399986267D 00	2822189757D 00	4838467370D 00	1099655107D 01
000000000000000000	4799985886D 00	2551095944D 00	5421876585D 00	1129560943D 01
000000000000000000	5199985504D 00	2226876805D 00	6484383161D 00	1247000238D 01
000000000000000000	5599985123D 00	1726264091D 00	1001225489D 01	1787907409D 01
000000000000000000	5999984741D 00	7460454949D-01	1960437309D 01	3267403824D 01

*****H= .706
BUS
LIFE

EP(I)=	PF(I)=	RESULTATS	C/NT1(I)=	APENT(I)=
..95000004770 00	..00000000000 00	..1769339401D 00	..3538679014D 01	..3724925091D 01
..90000003580 00	..00000000000 00	..1008111119D 00	..1522456654D 01	..1691618438D 01
..8500000238D 00	..00000000000 00	..1193783001D 00	..3713437861D 00	..4368750302D 00
..8000000119D 00	..00000000000 00	..1555212476D 00	..7228589921D 00	..9035737266D 00
..7500000596D 00	..00000000000 00	..1936183101D 00	..7619412952D 00	..1015921646D 01
..7000000477D 00	..00000000000 00	..2300518563D 00	..7286709671D 00	..1040958454D 01
..6500000358D 00	..00000000000 00	..2640450628D 00	..6798641714D 00	..1045944822D 01
..6000000238D 00	..00000000000 00	..2954657069D 00	..6284129196D 00	..1047354824D 01
..5500000715D 00	..00000000000 00	..3243021594D 00	..5767290840D 00	..1048598198D 01
..5000000596D 00	..00000000000 00	..3505567225D 00	..5250912923D 00	..1050182459D 01
..4500000477D 00	..00000000000 00	..3742323868D 00	..4735133158D 00	..1052251701D 01
..4000000358D 00	..00000000000 00	..3953359647D 00	..4220715820D 00	..1055178861D 01
..3500000834D 00	..00000000000 00	..4138810357D 00	..3709014429D 00	..1059718156D 01
..3000000715D 00	..00000000000 00	..4298888266D 00	..3201558364D 00	..1067185867D 01
..2500000596D 00	..00000000000 00	..4433870528D 00	..2699645408D 00	..1079857906D 01
..2000000477D 00	..00000000000 00	..4544078951D 00	..2204168597D 00	..1102084036D 01
..1500000954D 00	..00000000000 00	..4629854090D 00	..1715502867D 00	..1143667851D 01
..1000000834D 00	..00000000000 00	..4691530335D 00	..1233524975D 00	..1233523946D 01
..5000007153D 01	..00000000000 00	..4729413175D 00	..7576568474D 01	..1515311527D 01
..5960464478D 07	..00000000000 00	..4743761962D 00	..2869757600D 01	..4814654313D 06
..4999923706D 01	..00000000000 00	..4734770560D 00	..1796981230D 01	..3594017300D 00
..9999942780D 01	..00000000000 00	..4702590017D 00	..6437408227D 01	..6437445062D 00
..1499996185D 00	..00000000000 00	..4647259662D 00	..1106607178D 00	..7377399949D 00
..199998093D 00	..00000000000 00	..4568770429D 00	..1569784742D 00	..7848931197D 00
..2499990463D 00	..00000000000 00	..4467037214D 00	..2034664421D 00	..8138688730D 00
..2999992371D 00	..00000000000 00	..4341904333D 00	..2502657781D 00	..8342213819D 00
..3499994278D 00	..00000000000 00	..4193168848D 00	..2974709874D 00	..8499184963D 00
..3999996185D 00	..00000000000 00	..4020588767D 00	..3451601821D 00	..8629012781D 00
..4499998093D 00	..00000000000 00	..3823902487D 00	..3933725842D 00	..8741616687D 00
..4999990463D 00	..00000000000 00	..3602850877D 00	..4421032464D 00	..8842081792D 00
..5499992371D 00	..00000000000 00	..3357175150D 00	..4913514831D 00	..8933675721D 00
..5999994278D 00	..00000000000 00	..3086653398D 00	..5410435348D 00	..9017400846D 00
..6499996185D 00	..00000000000 00	..2791091350D 00	..5911241326D 00	..9094222761D 00
..6999998093D 00	..00000000000 00	..2470330408D 00	..6415219218D 00	..9164601380D 00
..7499990463D 00	..00000000000 00	..2124257387D 00	..6921460830D 00	..9228626175D 00
..7999992371D 00	..00000000000 00	..1752786958D 00	..7429409036D 00	..9286770151D 00
..8499994278D 00	..00000000000 00	..1355947941D 00	..7936780802D 00	..9337395465D 00
..8999996185D 00	..00000000000 00	..9339120662D 01	..8440718001D 00	..9378579532D 00
..9499998093D 00	..00000000000 00	..4863833633D 01	..8950574591D 00	..9421659356D 00
..9999990463D 00	..00000000000 00	..2465221177D 00	..5903209433D 01	..5903215063D 01

CONTRAINTES SUIVANT YY



RESULTS

EP(I)=	PP(I)=	U1(I)=	C/NT1(I)=	APENT(I)=
000000000000000000	957500040500	766212652D-01	1533242622D 01	1601297710D 01
000000000000000000	915000021500	3418138238D-01	2216870310D 01	2422809025D 01
000000000000000000	872500062000	9490663910D-01	1214505207D 01	1391982946D 01
000000000000000000	830000042900	13692595000 00	8403862675D 00	1012513523D 01
000000000000000000	787500023800	1724797273D 00	7110755890D 00	9029531016D 00
000000000000000000	745000064400	2051066580D 00	6525386533D 00	8758907341D 00
000000000000000000	702500045300	2356913987D 00	6116948496D 00	8707399432D 00
000000000000000000	660000085800	2644232468D 00	5746369971D 00	8706620036D 00
000000000000000000	617500066800	2913315178D 00	5381654513D 00	8715229039D 00
000000000000000000	575000405300	3164150673D 00	5016710208D 00	8724707255D 00
000000000000000000	532500088200	3396703980D 00	4651066410D 00	8734395567D 00
000000000000000000	490000188400	3610934952D 00	4284619695D 00	8744118466D 00
000000000000000000	447500228900	3806816261D 00	3917626409D 00	8754467944D 00
000000000000000000	405000329000	3984316410D 00	3550003200D 00	8765432879D 00
000000000000000000	362500429200	4143400798D 00	3181687950D 00	8777059817D 00
000000000000000000	320000112100	4284030313D 00	2812590456D 00	8789342098D 00
000000000000000000	277500152600	4406155287D 00	2442499644D 00	8801795678D 00
000000000000000000	235000252700	4509721884D 00	2071332060D 00	8814169501D 00
000000000000000000	192500352900	4594665847D 00	1698879356D 00	8825331127D 00
000000000000000000	150000393400	4660911333D 00	1324909795D 00	8832708802D 00
000000000000000000	107500493500	4708368204D 00	9491374842D-01	8829145365D 00
000000000000000000	6500017643D-01	4736929573D 00	5712274070D-01	8788090101D 00
000000000000000000	2250027657D-01	4746466463D 00	1907378187D-01	8477132186D 00
000000000000000000	199950409D-01	4736824683D 00	1928356233D-01	9642020246D 00
000000000000000000	6249904633D-01	4707817552D 00	5801426578D-01	9282424163D 00
000000000000000000	1049995422D 00	4659217051D 00	9720100775D-01	9257279192D 00
000000000000000000	1474990845D 00	4590750110D 00	1369338895D 00	9283711147D 00
000000000000000000	1899995804D 00	4502079938D 00	173403534D 00	9333723424D 00
000000000000000000	2324991226D 00	4392808116D 00	2185436582D 00	9399762704D 00
000000000000000000	2749996185D 00	4262450350D 00	2607155480D 00	9480578531D 00
000000000000000000	3174991608D 00	4110455785D 00	3039891476D 00	9574486649D 00
000000000000000000	3599996567D 00	3936207530D 00	3484965316D 00	9680468443D 00
000000000000000000	4024991989D 00	3739146523D 00	3941220368D 00	9791871334D 00
000000000000000000	4449996948D 00	3519059188D 00	4401746963D 00	9891572992D 00
000000000000000000	4874992371D 00	3277139466D 00	4838394721D 00	9924927780D 00
000000000000000000	5299987793D 00	3019311951D 00	5156550611D 00	9729363184D 00
000000000000000000	5724992752D 00	2767683942D 00	5032560487D 00	8790509797D 00
000000000000000000	6149997711D 00	2603947961D 00	3274719804D 00	5324749630D 00
000000000000000000	6574993134D 00	2877815342D 00	5477347933D 00	8330575898D 00
000000000000000000	6999988556D 00	5060296863D-01	4743571593D 01	6776541927D 01

RESULTS

EP(I)=	PP(I)=	U1(I)=	C/NT1(I)=	APENT(I)=
..95000004770 00	..00000000000 00	..26814216570-01	..53628436330 00	..56450982780 00
..900000003580 00	..00000000000 00	..76719714790-01	..20706787510 01	..23007540760 01
..850000002380 00	..00000000000 00	..13304836220 00	..11265730160 01	..13253799810 01
..800000001190 00	..00000000000 00	..17671811610 00	..87339512910 00	..10917438950 01
..750000005960 00	..00000000000 00	..21565495150 00	..77873675410 00	..10383155900 01
..700000004770 00	..00000000000 00	..25162487880 00	..71939859030 00	..10277122020 01
..650000003580 00	..00000000000 00	..28499435220 00	..66738950750 00	..10267530320 01
..600000002380 00	..00000000000 00	..31582238140 00	..61656062000 00	..10276009920 01
..550000001190 00	..00000000000 00	..34411182110 00	..56578882850 00	..10287068270 01
..500000005960 00	..00000000000 00	..36986166610 00	..51499693090 00	..10299937390 01
..450000004770 00	..00000000000 00	..39307526830 00	..46427207040 00	..10317156030 01
..400000003580 00	..00000000000 00	..41376063500 00	..41370735850 00	..10342683040 01
..350000008340 00	..00000000000 00	..43192929260 00	..36337317470 00	..10382088230 01
..300000001190 00	..00000000000 00	..44759512290 00	..31331662420 00	..10443884980 01
..250000005960 00	..00000000000 00	..46077293500 00	..26355625860 00	..10542247830 01
..200000004770 00	..00000000000 00	..47147726860 00	..21408668420 00	..10704331660 01
..150000009540 00	..00000000000 00	..47972118000 00	..16487823750 00	..10991875510 01
..100000008340 00	..00000000000 00	..48551529710 00	..11588234890 00	..11588225220 01
..500000071530-01	..00000000000 00	..48886705130 00	..67035087970-01	..13406998410 01
..5960464780-07	..00000000000 00	..48978032520 00	..18265479950-01	..30644390250 06
..49999237060-01	..00000000000 00	..48825541490 00	..30498208220-01	..60997347180 00
..99999427800-01	..00000000000 00	..48428914180 00	..79325465940-01	..79325919850 00
..14999961850 00	..00000000000 00	..47787556240 00	..12827159710 00	..85514615530 00
..19999980930 00	..00000000000 00	..46900666890 00	..17737788010 00	..88689024610 00
..24999904630 00	..00000000000 00	..45767356550 00	..22666208240 00	..90665178830 00
..29999923710 00	..00000000000 00	..44386654020 00	..27614052050 00	..92047074260 00
..34999942780 00	..00000000000 00	..42757728120 00	..32578520140 00	..93081638280 00
..39999961850 00	..00000000000 00	..40879879100 00	..37556982620 00	..93892546100 00
..44999980930 00	..00000000000 00	..38752602810 00	..42545528300 00	..94545658520 00
..49999904630 00	..00000000000 00	..36375649450 00	..47539070050 00	..95078321450 00
..54999923710 00	..00000000000 00	..33748815690 00	..52536678230 00	..95521365660 00
..59999942780 00	..00000000000 00	..30872168920 00	..57532938840 00	..95888322840 00
..64999961850 00	..00000000000 00	..27745807440 00	..62527233280 00	..96195799960 00
..69999980930 00	..00000000000 00	..24369836840 00	..67519416140 00	..96456335060 00
..74999904630 00	..00000000000 00	..20744380580 00	..72509129470 00	..96678962220 00
..79999923710 00	..00000000000 00	..16869222630 00	..77503163670 00	..96879046980 00
..84999942780 00	..00000000000 00	..12743978190 00	..82504893620 00	..97064646070 00
..89999961850 00	..00000000000 00	..83673644140-01	..87532280790 00	..97258130990 00
..94999980930 00	..00000000000 00	..37440636050-01	..92466021680 00	..97332673940 00
..99999904630 00	..00000000000 00	..26233486510 00	..59955103810 01	..59955160990 01

CONTRAINTES SUIVANT YY



U1(I) =

$$PP(I) =$$

U1(I) =

APENT(I) =

[illegible]

-,9550000429D 00
 -,9100000262D 00
 -,8650000095D 00
 -,8199999928D 00
 -,7749999762D 00
 -,7300000191D 00
 -,6850000024D 00
 -,6399999857D 00
 -,5950000882D 00
 -,5500000119D 00
 -,50500003529D 00
 -,46000002766D 00
 -,41500002003D 00
 -,37000001240D 00
 -,3250000477D 00
 -,2799999714D 00
 -,23500002527D 00
 -,19000001764D 00
 -,14500001001D 00
 -,10000000238D 00
 -,5499994755D-01
 -,1000022888D-01
 -,3499984741D-01
 -,7999992371D-01
 -,1250000000D 00
 -,1700000763D 00
 -,2149991989D 00
 -,2599992752D 00
 -,3049993515D 00
 -,3499994278D 00
 -,3949995041D 00
 -,4399995804D 00
 -,4849996567D 00
 -,5299997330D 00
 -,5749998093D 00
 -,6199998856D 00
 -,6649999619D 00
 -,7099990845D 00
 -,7549991608D 00

.3800779034D-01
 .6346094567D-01
 .1167514432D 00
 .1571438445D 00
 .1932806100D 00
 .2270149577D 00
 .2586894605D 00
 .2883465869D 00
 .3159823063D 00
 .3415905394D 00
 .3651670617D 00
 .3867099325D 00
 .4062171927D 00
 .4236872671D 00
 .4391184775D 00
 .4525088893D 00
 .4638561133D 00
 .4731575361D 00
 .4804096456D 00
 .4856082397D 00
 .4887481098D 00
 .4898227574D 00
 .4888240415D 00
 .4857416427D 00
 .4805624804D 00
 .4732698696D 00
 .4638426718D 00
 .4522530758D 00
 .4384660630D 00
 .4224365499D 00
 .4041072220D 00
 .3834065746D 00
 .3602496457D 00
 .3345496368D 00
 .3062696884D 00
 .2756201783D 00
 .2437733594D 00
 .2151548207D 00
 .1960571424D 00

-.7601558522D 00
 .2029374841D 01
 .1065810014D 01
 .8078480750D 00
 .7227353531D 00
 .6746869936D 00
 .6334900933D 00
 .5931425640D 00
 .5527144196D 00
 .5121646939D 00
 .4715304727D 00
 .4308574429D 00
 .3901452267D 00
 .3494015084D 00
 .3086242278D 00
 .2678082521D 00
 .2269444920D 00
 .1860284667D 00
 .1450422004D 00
 .1039718879D 00
 .6279740518D-01
 .2149295319D-01
 -.1997431897D-01
 -.6164797884D-01
 -.1035832522D 00
 -.1458522261D 00
 -.1885439672D 00
 -.2317919331D 00
 -.2757402735D 00
 -.3205902809D 00
 -.3665865793D 00
 -.4140129719D 00
 -.4631386058D 00
 -.5140002099D 00
 -.5655990001D 00
 -.6129902398D 00
 -.6369364160D 00
 -.5723708079D 00
 -.3819535883D 00

79597467860 00
 22300821790 01
 12321502920 01
 98518058780 00
 93256177460 00
 92422873420 00
 92480305270 00
 92678527690 00
 92893165990 00
 93120851420 00
 93372305590 00
 93664605190 00
 94010852630 00
 94432808470 00
 94961286930 00
 95645814090 00
 96572020410 00
 97909628420 00
 10002903470 01
 10397186310 01
 11417720920 01
 21492461260 01
 57069731570 00
 77060047040 00
 82866601790 00
 85795388620 00
 87695195200 00
 89150992040 00
 90406839280 00
 91597372850 00
 92806845450 00
 94093946980 00
 95492563630 00
 96981220540 00
 98365076130 00
 98869411770 00
 95779917670 00
 80615710700 00
 50589935480 00

$$U_1(I) =$$

EP(I) =	PP(I) =
-.950000004770 00	.000000000000 00
-.900000003580 00	.000000000000 00
-.850000002380 00	.000000000000 00
-.800000001190 00	.000000000000 00
-.750000005960 00	.000000000000 00
-.700000004770 00	.000000000000 00
-.650000003580 00	.000000000000 00
-.600000002380 00	.000000000000 00
-.550000007150 00	.000000000000 00
-.500000005960 00	.000000000000 00
-.450000004770 00	.000000000000 00
-.400000003580 00	.000000000000 00
-.350000008340 00	.000000000000 00
-.300000007150 00	.000000000000 00
-.250000005960 00	.000000000000 00
-.200000004770 00	.000000000000 00
-.150000009540 00	.000000000000 00
-.100000008340 00	.000000000000 00
-.50000071530 -01	.000000000000 00
-.59604644780 -07	.000000000000 00
.49999237060 -01	.000000000000 00
.99999427800 -01	.000000000000 00
.14999961850 00	.000000000000 00
.19999980930 00	.000000000000 00
.24999904630 00	.000000000000 00
.29999923710 00	.000000000000 00
.34999942780 00	.000000000000 00
.39999961850 00	.000000000000 00
.44999980930 00	.000000000000 00
.49999904630 00	.000000000000 00
.54999923710 00	.000000000000 00
.59999942780 00	.000000000000 00
.64999961850 00	.000000000000 00
.69999980930 00	.000000000000 00
.74999904630 00	.000000000000 00
.79999923710 00	.000000000000 00
.84999942780 00	.000000000000 00
.89999961850 00	.000000000000 00
.94999980930 00	.000000000000 00
.99999904630 00	.000000000000 00

.5644803873D-01
 .6398834074D-01
 .1312801742D 00
 .1784119339D 00
 .2184467799D 00
 .2549482560D 00
 .2887421866D 00
 .3199989523D 00
 .3487498285D 00
 .3749999425D 00
 .3987499637D 00
 .4199999752D 00
 .4387499638D 00
 .4549999748D 00
 .4687499843D 00
 .4799999921D 00
 .4887499892D 00
 .4949999960D 00
 .4987500004D 00
 .5000000017D 00
 .4987500352D 00
 .4950000463D 00
 .4887500335D 00
 .4799999952D 00
 .4687501672D 00
 .4550001169D 00
 .4387500301D 00
 .4199998998D 00
 .3987497167D 00
 .3749999447D 00
 .3487496618D 00
 .3199992791D 00
 .2887487821D 00
 .2549981741D 00
 .2187482199D 00
 .1799976707D 00
 .1387474362D 00
 .9499749120D-01
 .4877262538D-01
 .1597469715D-03

C0NT1(1)=

- .11289608420 01
- .24087277330 01
- .13458367500 01
- .94263525060 00
- .80069696680 00
- .73002956510 00
- .67587865390 00
- .62513535080 00
- .57501755790 00
- .52500231040 00
- .47500045390 00
- .42500025380 00
- .37499979440 00
- .32500023950 00
- .27500020630 00
- .22500017020 00
- .17499995130 00
- .12500014440 00
- .75000091710=01
- .25000029150=01
- .24999331730=01
- .74999784160=01
- .12500026240 00
- .17500077670 00
- .22499657280 00
- .27500102240 00
- .32500175600 00
- .37500262740 00
- .42500368850 00
- .47499546740 00
- .52500568880 00
- .57500768880 00
- .62500997820 00
- .67501219950 00
- .72499912750 00
- .77501102950 00
- .82500474040 00
- .87499895140 00
- .92449737150 00
- .97225762610 00

APENT(1) =

•1188379774D	01
••2676364041D	01
••1583337308D	01
••1178294046D	01
••1067595871D	01
••1042899308D	01
••1039813257D	01
••1041892210D	01
••1045486333D	01
••1050004496D	01
••1055556452D	01
••1062500540D	01
••1071427729D	01
••1083333873D	01
••1100000563D	01
••1125000583D	01
••1166665601D	01
••1250000401D	01
••1499999688D	01
••4194308890D	06
••4999942639D	00
••7500021331D	00
••8333372023D	00
••8750047180D	00
••8999897245D	00
••9166724059D	00
••9285779639D	00
••9375074625D	00
••9444530415D	00
••9499927468D	00
••9545571219D	00
••9583470620D	00
••9615543769D	00
••9643034050D	00
••9666667325D	00
••9687647108D	00
••9705944656D	00
••9722214692D	00
••9731553233D	00
••9722585533D	00

DIFFERENCE=

•1051979934D-00	•3101162707D-01	•7469805524D-02	•1588056532D-02	•3031754109D-03
•5171065713D-04	•7790107807D-05	•1033369796D-05	•1321541734D-06	•2773565602D-07
•1479924752D-07	•1052826563D-07	•7024218582D-08	•3765481399D-08	•8259727763D-09
•1649590312D-08	•3463763679D-08	•4349177754D-08	•3942703344D-08	•1749191542D-08
•2909578883D-08	•1096769243D-07	•2371770487D-07	•4295772328D-07	•7119937601D-07
•1119641495D-06	•1701863491D-06	•2527529975D-06	•3691555287D-06	•5321169057D-06
•7577717597D-06	•1064205411D-05	•1465885937D-05	•1959410325D-05	•2495363590D-05
•2939626183D-05	•3050209334D-05	•2852122471D-05	•2244418232D-04	•158/932976D-03

CONTRAINTES SUIVANT YY



.0000000000 00	.89999996185D 00	.9473871727D-01	..8859358662D 00	..9843736019D 00
.0000000000 00	.9499998093D 00	.2667966683D-01	..1361181090D 01	..1432822487D 01
.0000000000 00	.1000000000D 01	.1930716831D-06	..5335895070D 00	..5335895070D 00
DIFFERENCE=				
.2207115064D-01	.2618333330D-03	..2849070795D-03	..9952374896D-04	..2474021243D-04
..4943624236D-05	..8187061472D-06	..1296699866D-06	..4046588283D-07	..3295615500D-07
..3235208730D-07	..3043483196D-07	..2680843843D-07	..2189478507D-07	..1629692301D-07
..1071288354D-07	..5865705657D-08	..2425928528D-08	..9362772502D-09	..1749187531D-08
..4985604790D-08	..1052093077D-07	..1799903200D-07	..2687362739D-07	..3647077869D-07
..4606405686D-07	..5495297724D-07	..6253243176D-07	..6838185369D-07	..7290869859D-07
..8437278760D-07	..1776832382D-06	..8712953238D-06	..5002051822D-05	..2480771263D-04
..9960574239D-04	..2850215635D-03	.26162260566D-03	.2207051437D-01	..1930716831D-06



CONCLUSION

Tout au long de ce travail, nous avons montré, avec suffisamment de conviction j'espère, que les équations intégrales offrent au mécanicien, et au physicien plus généralement, un outil d'investigation puissant, économique quant à l'effort, à la fois théorique et pratique... En particulier, l'économie d'effort est éclatante quand on compare avec les méthodes variationnelles... Il ne faut cependant pas tomber dans les vices de la mode... Les limites (sur le plan pratique) de la méthode sont assez patentes :

1 - Les résultats deviennent peu précis à mesure que l'on travaille dans le voisinage de la frontière du contour.

2 - Les résultats sont surtout ponctuels, alors que les méthodes variationnelles donnent la solution sous forme explicite (approchée certes), permettant donc une investigation qualitative plus poussée.

3 - Pour être valables, les résultats numériques ont besoin d'un moyen de calcul de grande capacité.

Qu'on nous permette enfin de faire trois suggestions quant à la poursuite de ce travail :

A 1 - Les résultats obtenus pour l'arbre claveté nécessiteraient une plus longue investigation. En particulier, nous pensons qu'il serait utile de les confronter avec des résultats expérimentaux, seuls juges en la matière pour un praticien. Nous nous attacherons à ce travail dès que l'occasion nous en sera donnée.

A 2 - Dans toutes les méthodes numériques employées, il y a un fait assez gênant et source d'erreur : on passe toujours par une fonction auxiliaire,

la fonction densité. Or, en travaillant directement sur les équations de Betti, on peut faire l'économie d'un tel détour. En effet on a, pour un vecteur $\vec{v}(x)$, solution des équations de l'élasticité dans un domaine fini :

$$\delta(x) v_k(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S [\Gamma^{(k)}(x,y) \cdot P\vec{v}(y) - \vec{v}(y) \cdot P \Gamma^{(k)}(x,y)] dS_y$$

avec

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x \in B_i \\ 1/2 & x \in S \quad y \in S \\ 0 & x \in B_e \end{cases}$$

$v_k(x)$ étant la $k^{\text{ème}}$ composante de $v(x)$, $\Gamma(x,y)$ la matrice solution fondamentale, P le vecteur tension généralisé.

Nous voyons donc que pour $x \in S$, on a :

$$\frac{1}{2} v_k(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S [\Gamma^{(k)}(x,y) P v(x,y) - v(x,y) \cdot P \Gamma^{(k)}(x,y)] dS_y.$$

Supposons, par exemple que l'on ait à résoudre le problème (T).

Dans ce cas, $P\vec{v}(x,y)$ est donné sur S , $\Gamma^{(k)}$ est connu, $P\Gamma^{(k)}$ est connu.

On obtient donc une équation intégrale liant les valeurs de $\vec{v}$ sur la frontière.

Il suffira donc de résoudre cette équation par une méthode de discrétisation

quelconque pour avoir $\vec{v}$ en certains points de la frontière. A partir de quoi

en appliquant la formule de Betti quand $x \in$ intérieur du domaine, on obtient

le champ des déplacements. Du point de vue conduite des calculs, il n'y a

apparemment pas de difficulté majeure... En effet, on aura à calculer des

intégrales de la forme :

$$\int_{\Delta S} \Gamma^{(k)}(x,y) dS_y \quad \text{et} \quad \int_{\Delta S} P\Gamma^{(k)}(x,y) dS_y$$

qui sont faciles à évaluer (surtout dans le cas du plan).

La méthode que nous proposons ici, et qui à notre connaissance est inédite, présente des avantages évidents :

1 - On travaille directement sur les grandeurs physiques.

2 - On n'a pas besoin de fonctions auxiliaires (fonction densité, tenseur de Green etc...), de construction suivant ardue.

C'est ce que nous nous promettons de vérifier le plus tôt possible.

A 3 - Soit à résoudre le problème de Dirichlet pour une ellipse de $\frac{1}{2}$ axes a et b . En considérant l'équation intégrale obtenue comme une équation opérationnelle dans l'espace de Hilbert $L_2(p ; S)$ avec :

$$p(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$$

on aboutit, en appliquant la méthode des moindres carrés au problème suivant :

$$\left\| \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(z) - u(\sigma) \right\|_S^2 = \min$$

avec $\varphi_0(z) = 1$; $\varphi_k(z) = [z \sqrt{z^2 - c^2}]^k + [z - \sqrt{z^2 - c^2}]^k$, $k > 1$

$u(\sigma)$ = valeur de la fonction $u(x,y)$ sur S .

$\{\varphi_k(z)\}$ formant ainsi un système linéaire complet de $L_2(p ; S)$

Or sur $S : z = a \cos t + b \sin t \implies z^2 - c^2 = (b \cos t + i a \sin t)^2$

$$\implies \psi_k(z) = (a+b)^k e^{ikt} + (a-b)^k e^{-ikt} \quad k > 0$$

Posant $a_k = \alpha_k - i \beta_k$, on a :

$$\operatorname{Re} \{a_k \psi_k(z)\} = [(a+b)^k + (a-b)^k] \alpha_k \cos kt + [(a+b)^k - (a-b)^k] \beta_k \sin kt$$

Nous voyons que les coefficients dans cette formule, ne sont autres que les coefficients de Fourier de $u(\sigma)$. Donc :

$$\alpha_0 = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) dt ; \quad \sigma_k = \frac{1}{\pi [(a+b)^k + (a-b)^k]} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \cos kt dt$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi [(a+b)^k - (a-b)^k]} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \sin kt dt$$

D'où la solution exacte du problème :

$$f(z) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_k [(z + \sqrt{z^2 - c^2})^k + (z - \sqrt{z^2 - c^2})^k]$$

Notre troisième suggestion sera donc : ne point opposer les méthodes des équations intégrales aux autres méthodes existantes, mais plutôt de rechercher une méthode (ou plutôt une méthodologie) de synthèse. Ceci nous est facilité par le fait que l'opérateur intégral (fredholmien ou singulier) est un opérateur linéaire borné, dans un espace de Hilbert approprié.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] UMBERTO NERI - *Singular Integrals*,
Springer Verlag (1967).
- [2] S.G. MIKHLIN - *Multidimensional Singular Integrals and
Integral Equations*,
Pergamon Press (1965).
- [3] L.W. KANTOROWITSCH und V.I. KRYLOW - *Näherungsmethoden der Höheren Analysis*,
Deutscher Verlag der Wissenschaften,
Berlin (1956).
- [4] N.I. MUSKHELISHVILI - *Some basic problems of the mathematical
theory of Elasticity*,
P. Noordhoff Ltd (Gronnigen-Holland, 1953).
- [5] SCHMEIDLER WERNER - *Integralgleichungen mit Anwendungen in
Physik und Technik*,
Leipzig, 1955.
- [6] S.G. MIKHLIN - *Variational methods in Mathematical Physics*,
Pergamon Press, 1964.
- [7] COURANT R. und D. HILBERT - *Methoden der Mathematischen Physik* (tomes I
et II),
Interscience 1953, 1962.
- [8] FRIEDRICHS K. - *"On the boundary value problems of the theory
of Elasticity and Korn's Inequality"*,
Annals of Mathematics (1947).
- [9] GUNTHER N.M. - *La théorie du potentiel*,
Gauthier-Villars - Paris (1934).

- [10] S.G. MIKHLIN - *Integral Equations*,
Pergamon Press, Oxford (1957).
- [11] S.G. MIKHLIN - *The problem of the minimum of a quadratic functional*,
HOLDEN DAY (1965).
- [12] MUSKHELISHVILI - *Singular Integral Equations*,
P. Noordhoff, Groningen (1953).
- [13] SMIRNOV V.I. - *Lehrgang der höheren Mathematik*,
Teil IV et III - Berlin 1958.
- [14] SOBOLEV S.L. - *Partial differential equations of mathematical physics*,
Pergamon Press, Oxford (1964).
- [15] TIKHONOV A.N. and A.A. SAMARSKY - *Equations of Mathematical Physics*,
Pergamon Press, Oxford (1963).
- [16] S.G. MIKHLIN - *The Numerical Performance of variational methods*,
Noordhoff P. (1971).
- [17] AKHIEZER N.I. and I.M. GLAZMAN - *Theory of linear operators in Hilbert space*,
Ungar. New York (1962).
- [18] I.N. VEKUA - *New Methods for solving elliptic equations*,
North-Holland (1968).
- [19] A.V. BITSADZE - *Boundary value problems for second order elliptic equations*,
North-Holland (1968).
- [20] GAHOV F.D. - *Boundary value problems*,
(1963).

- [21] V.D. JUPRADZE - *Dynamical problems in elasticity*,
North-Holland (1963).
- [22] R.F. MILLAR - *Singularities of solutions to linear,
second order analytic elliptic equations
in two independent variables :*
I. *The completely regular boundary*
Applicable analysis, 1971, vol. 1, p. 01-21.
II. *The Piecewise regular boundary :*
Applicable Analysis, 1972, vol. 1, p. 301-320.
- [23] M. STUART LYNN and WILLIAM P. TIMLAKE - *The numerical solution of singular
integral equations of potentiel theory*,
Numerische Mathematik, Vol. 11, p. 77-98,
(1968).
- [24] Y.M. KUO and H.D. CONWAY - *The torsion of composite tubes and cylinders*,
International journal of solids structures,
vol. 9 (1973).