N° d'ordre : 306

THESES

présentées à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur Es Sciences Mathématiques

par

JEAN-CLAUDE DUPIN

Première Thèse : **Insérabilité des ensembles convexes
Etude des hyperconvexes
Applications à la séparation**

Deuxième Thèse : Propositions données par la Faculté
Solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles

---

Thèses soutenues le 12 Juin 1974 devant la Commission d'Examen

MM.	J. KAMPE DE FERIET,	Président
	M. PARREAU ,	Rapporteur
	J. VAILLANT ,	Examinateur

A Claire,

A Olivier et Christophe.

Monsieur le Professeur KAMPÉ DE FÉRIET s'est intéressé à mes travaux, a contribué à leur parution et a accepté de présider le Jury. Qu'il trouve ici le témoignage de ma reconnaissance.

C'est avec émotion que je remercie Monsieur le Professeur PARREAU qui est le rapporteur de cette thèse. Je lui ai "donné bien du travail" durant ces dernières années ! Ses suggestions, ses conseils, son contrôle permanent m'ont permis d'entrevoir ou d'améliorer bien des résultats, notamment dans les chapitres 3 et 4.

Je remercie Monsieur le Professeur VAILLANT qui a bien voulu me donner un second sujet et faire partie de la commission d'examen.

J'exprime ma reconnaissance à mon ami Gérard COQUET, Docteur Es Sciences, avec qui j'ai tant travaillé.

Je tiens enfin à remercier les membres du Secrétariat Scientifique de l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université des Sciences et Techniques de Lille qui ont participé, si consciencieusement, à la rédaction matérielle de cet ouvrage.

*   *

*

PLAN DU MEMOIRE

-:-:-

INTRODUCTION

Les chapitres 1 et 2 d'une part et les chapitres 3, 4, 5, 6 et 7 d'autre part sont quasi indépendants ; il présentent cependant une interférence au niveau d'une application située dans le chapitre 7.

Les chapitres 1 et 2, qui reprennent et développent les articles [7], [8] et la note [13], sont consacrés à l'étude de l'insérabilité et de l'anti-insérabilité ; les résultats essentiels sont le théorème 2.1.3 (caractérisation de l'anti-insérabilité d'un convexe à partir de ses translatés et de ses dilatés positifs), le théorème 2.4.5 et son corollaire (qui établissent un lien surprenant entre les convexes anti-insérables et les convexes basiques au sens de Coquet (resp. : et les convexes anti-insérables algébriquement fermés et linéairement bornés)), le théorème 2.6.3 (relatif à l'anti-insérabilité dans un espace semi-normé), le théorème 2.7.1 (en tant qu'application à la séparation des convexes) et le théorème 2.8.5 (qui ramène de façon simple un problème posé par Thorp et Witley à un problème d'existence de convexes fermés engendrant un sous-espace vectoriel dense) ; des applications sont obtenues dans ces chapitres ainsi qu'au chapitre 7 ; des résultats de Klee et de Thorp et Whitley sont généralisés ; le lien étroit (que nous établissons) entre la notion d'insérabilité et les notions "of finite width" et "of finite width in some direction" fait que notre étude s'intègre à de nombreux travaux notamment de Clark [5], Klee [28], Thorp et Whitley [31] et bien d'autres (voir, par exemple, Valentine [32] chapitre XII) ; notons enfin que certains de nos résultats ont été exploités très récemment dans d'autres directions en particulier par Jongmans [21] et Fourneau [16].

Les chapitres suivants développent et généralisent (certains des résultats figurant dans cette thèse n'ont pas encore été publiés) les notes [10], [11], [14] ; ces travaux s'intègrent à un courant de recherche très important, dont les pionniers sont Kalutani, Stone, Mazur, Eidelheit, Tukey (pour des références précises voir Valentine [32] page 20), auquel Klee et Hammer ont participé plus récemment en apportant des résultats remarquables (consulter [26], [18], [19], [20] et les références qui s'y trouvent) ainsi que très récemment Moore [30] et Bair [1]. Toutefois, en ce qui concerne la structure des hyperconvexes (convexes dont le complémentaire est convexe), seul le cas des hypercônes en un point avait été résolu (par Klee) et la question de l'existence, en dimension infinie, d'un "coconvexe" c'est-à-dire d'un hyperconvexe n'étant ni hypercône, ni cohypercône en une variété) restait implicitement posé (seul le cas de la dimension finie ayant été réglé par Hammer) ; nous répondons à cette question dans le chapitre 3 ; également dans le chapitre 3, nous caractérisons la convexité des éléments d'un couple de parties complémentaires d'un espace vectoriel en termes de section finissante et nous mettons en évidence l'hypercône "attaché" à un coconvexe, ces résultats étant fort utiles dans la suite ; le chapitre 4 et le chapitre 5 fournissent la structure analytique et géométrique d'un hyperconvexe quelconque (les théorèmes de structure de Klee (pour un hypercône) apparaissant alors comme des cas particuliers) ; dans le chapitre 6 nous remarquons qu'un hyperconvexe est ou bien d'internat non vide ou bien ubiquitaire (6.1), nous complétons l'étude des hyperconvexes basiques au sens de Klee (6.2 et 6.3) et nous introduisons et étudions la notion d'hyperconvexe topologique qui nous conduit en application à une caractérisation des hypercônes concerts de Moore (théorème 6.4.5) qui rend ces hypercônes concrets "plus maniables".

Le chapitre 7 ne comprend que des applications (solution d'un problème posé par Klee, solution d'un problème posé par Moore et interprétation de la séparation concrète de Moore en termes d'hyperconvexes topologiques complémentaires).

CHAPITRE 0

RAPPELS ELEMENTAIRES

0.0.- Ce chapitre est destiné à préciser une partie des notations qui seront utilisées dans la suite et un certain nombre de notions qui sont très élémentaires mais qui ont besoin d'être précisées dans la mesure où la terminologie varie avec les auteurs. Par contre, bon nombre de propriétés "classiques" des espaces vectoriels topologiques et de géométrie des convexes ne sont pas rappelées.

Le lecteur désireux d'approfondir les notions rappelées dans ce chapitre peut consulter avec profit [6] (chapitre 1), [4] et [32].

0.1.- Si A et B sont deux ensembles, le complémentaire de B dans A sera noté $\complement_A B$ ou $A \sim B$.

0.2.- Contrairement à certains auteurs, nous dirons qu'un ensemble est dénombrable s'il est fini ou de cardinal $\aleph_0$.

0.3.- Dans toute la suite, espace vectoriel siginifiera espace vectoriel réel et le mot base (utilisé seul) désignera une base algébrique.

L'origine d'un espace vectoriel sera notée 0.

0.4.- Si A est une partie de l'espace vectoriel E, on désigne par $S[A]$ le sous-espace vectoriel engendré par A, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel contenant A, et par $L[A]$ la variété linéaire engendrée par A, c'est-à-dire la plus petite variété linéaire contenant A.

Si A est non vide, on appelle dimension (resp. : codimension) de A, la dimension (resp. : codimension) de $L[A]$.

0.5.- Dans toute la suite, le mot variété désignera une variété linéaire non vide. Une variété contenant 0 est dite homogène.

0.6.- Si A et B sont des parties de l'espace vectoriel E, si $x \in E$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A+B = \{a+b \mid a \in A \text{ et } b \in B\},$$
$$x+A = \{x\} + A,$$
$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\},$$
$$-A = (-1)\,A.$$

0.7.- Si A est une partie de l'espace vectoriel E et si $x \in E$, le symétrique de A par rapport à x est la partie $2x-A$. Si $A = 2x-A$, A est dite symétrique par rapport à x ; plus rapidement, $-A$ est dite symétrique de A et, si $-A = A$, A est dite symétrique.

0.8.- Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide de parties de l'espace vectoriel E, contenant toutes 0. On appelle somme des A_i et on note $\sum_{i\in I} A_i$ l'ensemble des sommes $\sum_{i\in I} a_i$ avec, pour tout $i \in I$, $a_i \in A_i$, et $a_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices.

0.9.- A désignant une partie de l'espace vectoriel E, on note $C[A]$ (resp. : $CS[A]$) l'enveloppe convexe (resp. : convexe symétrique) de A, c'est-à-dire le plus petit convexe (resp. : convexe symétrique) contenant A.

0.10.- *Intervalles*

Si a et b sont deux points de l'espace vectoriel E, on définit les intervalles suivantes :

$[a,b] = \{\lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in [0,1]\}$ ("intervalle fermé" ou "segment")

$]a,b[= \{\lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in]0,1[\}$ (appelé "intervalle ouvert" seulement si $a \neq b$)

$]a,b] = \{\lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in [0,1[\}$, $[a,b[= \{\lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in]0,1]\}$ (appelés "intervalles semi-ouverts" seulement si $a \neq b$).

On a donc :

$$[a,a] =]a,a[=]a,a] = [a,a[= \{a\}.$$

0.11.- Une partie A de l'espace vectoriel E est dite étoilée si, pour tout $a \in A$, on a $[0,a] \subset A$.

0.12.- Soient x et y deux points distincts de l'espace vectoriel E. On appelle dr-oite passant par x et y et on note $\Delta(x,y)$:

$$\Delta(x,y) = \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

On appelle demi-droite pointée (ou fermée) issue de x (ou de sommet x, ou d'origine x) et on note $\Delta([x\to y)$:

$$\Delta([x\to y) = \{(1-\lambda)x + \lambda y \mid \lambda \geq 0\}.$$

On appelle demi-droite épointée (ou ouverte) issue de x (ou de sommet x, ou d'origine x) et on note $\Delta(]x\to y)$:

$$\Delta(]x\to y) = \{(1-\lambda)x + \lambda y \mid \lambda > 0\}.$$

Si Δ est une demi-droite issue de x, la symétrique de Δ par rapport à x est notée Δ^*.

0.13.- Soit A une partie de l'espace vectoriel E et soit $x \in E$. On dit que A est un cône de sommet x si A est stable par toute homothétie de centre x et de rapport > 0 ; si A est un cône de sommet x contenant x (resp. : ne contenant pas x), A est dit cône pointé (resp. : cône épointé) de sommet x.

0.14.- Si A est une partie de l'espace vectoriel E, on appelle cône (convexe) engendré par A le plus petit cône de sommet 0 (et convexe) contenant A.

Si $A \not\ni 0$, on définit de manière analogue le cône (convexe) pointé engendré par A.

0.15.- Une partie A de l'espace vectoriel E est dite linéairement bornée si son intersection avec toute droite est bornée (cette droite étant munie de la topologie naturelle). Ainsi un convexe est linéairement borné si et seulement s'il ne contient pas de demi-droite.

0.16.- Soit A une partie de l'espace vectoriel E. Un point x de E est dit point interne (resp. : interne relatif) de A si, pour toute droite Δ passant par x (resp. : passant par x et contenue dans $L[A]$), $\Delta \cap A$ contient un intervalle ouvert contenant x.

L'ensemble des points internes (resp. : internes relatifs) de A est appelé l'internat (resp. : l'internat relatif) de A et noté $i[A]$ (resp. : $ir[A]$).

Si $A = i[A]$, A est dit algébriquement ouvert.

Si A est un convexe non vide symétrique par rapport à un point x, alors $x \in ir[A]$.

Si A et B sont des parties de E, <u>A absorbe B</u> s'il existe $\alpha > 0$ tel que $A \supset \alpha B$. A est dite <u>absorbante</u> si A absorbe tout point de E. Si A est convexe, A est absorbante si et seulement si 0 est un point interne de A.

0.17.- A étant une partie de l'espace vectoriel E, on appelle enveloppe algébrique de A, et on note $\text{lin}\, A$, l'ensemble des points y de E tels qu'il existe $x \in A$ tel que $[x,y[\subset A$ (on a donc $A \subset \text{lin}\, A$) ; si A est un convexe contenant plus d'un point, on peut dans la définition précédente supposer $y \neq x$.

La frontière algébrique de A est par définition $Fr[A] = (\text{lin } A) \sim i[A]$

Si A est convexe, lin A aussi.

A est dit algébriquement fermé si $A = \text{lin } A$.

A est dit ubiquitaire (resp. : proprement ubiquitaire) si $\text{lin } A = E$ (resp. : $\text{lin } A = E$ et $A \neq E$).

0.18.- Soit A un convexe d'un espace vectoriel E et soit Δ une demi-droite contenue dans A. Si A est algébriquement fermé, alors, pour tout $a \in A$, la demi-droite parallèle à Δ, et de même sens, issue de a est dans A (ce résultat est donc encore valable pour un convexe fermé d'un espace vectoriel topologique car un tel convexe est algébriquement fermé) ; on peut alors définir le cône asymptote de A (noté $\mathcal{C}[A]$) comme étant le plus grand des cônes C pointés de sommet 0 tels que $a+C \subset A$, pour tout $a \in A$. Si $ir[A] \neq \emptyset$ et si $a \in ir[A]$ la demi-droite issue de a, parallèle à Δ et de même sens est dans $ir[A]$.

CHAPITRE I

INSERABILITE

1.0.- INTRODUCTION

1.0.1.- Les résultats de ce chapitre sont, mis à part dans le 1.5, obtenus assez simplement ; ils seront cependant fort utiles au chapitre 2 et comprennent la généralisation d'un résultat de Thorp et Whitley (voir remarque 1.1.13) et la généralisation d'un résultat de Klee (voir remarque 1.1.15),

Dans le 1.1, nous introduisons la notion de D-insérabilité (que nous comparons avec la notion "of finite width") et la notion T-D-insérabilité ; nous caractérisons la T-D-insérabilité en termes d'adhérence faible de $CS[A]$ et de $C[A-A]$ (proposition 1.1.6). Nous montrons, pour un convexe, l'équivalence entre le fait d'être D-insérable et le fait d'être "of finite width in direction D" (proposition 1.1.12), la première notion ayant pour avantage sur la seconde de pouvoir s'appliquer à une partie non nécessairement convexe ; nous obtenons alors une démonstration immédiate d'un résultat de Klee (voir remarque 1.1.15).

Le 1.2 fournit des critères de T-D-insérabilité notamment pour les bornés et pour une partie A convexe ou non, admettant un translaté absorbant $CS[A]$. La condition d'absorption précédente est étudiée dans le 1.3, dans le cas où A est convexe.

Le 1.4 étudie le cas, assez trivial, de la dimension finie.

Dans le 1.5, nous montrons, sur un exemple, qu'un convexe même d'internat non vide peut être linéairement borné sans être insérable.

1.0.2.- Notation et rappels

A désignant une partie d'un espace vectoriel topologique E (non nécessairement séparé), $\overline{A}^{\sigma}$ désigne l'adhérence faible de A, c'est-à-dire l'adhérence de A dans E muni de la topologie faible $\sigma = \sigma(E,E')$ (E' désignant le dual topologique de E). Il est bien connu que si E est localement convexe et si A est convexe, $\overline{A}^{\sigma} = \overline{A}$.

D désignant une droite homogène de l'espace normé E, un convexe A de E est dit "of finite width in direction D" (Clark [5]) s'il existe $k > 0$ tel que, pour toute droite Δ parallèle à D, $\Delta \cap A$ est de longueur $\leq k$; Klee remarque dans [28] que cette notion s'adapte facilement à un convexe d'un espace vectoriel.

Un convexe A d'un espace normé E est dit "of finite width" (Clark [5]) si A est situé dans une bande déterminée par deux hyperplans fermés et parallèles de E ; cette notion s'adapte à une partie A d'un espace vectoriel topologique.

Les notions de D-insérabilité, T-D-insérabilité sont définies pour des parties non vides.

1.1.- T-D-INSERABILITE

1.1.1.- Définition

Dans un espace vectoriel (resp. : espace vectoriel topologique) E, un ensemble (non vide) est dit insérable (resp. : topologiquement insérable) dans la direction définie par une droite homogène D ou plus simplement D-insérable (resp. : T-D-insérable) s'il est contenu dans une bande limitée par deux hyperplans parallèles (resp. : parallèles et fermés) et non parallèles à D (une bande est l'enveloppe convexe de deux hyperplans parallèles).

1.1.2.- Remarque

1) Dans un espace vectoriel topologique E, une partie A est "of

finite width" (voir 1.0.2) si et seulement s'il existe D telle que A soit T-D-insérable.2) Supposons A T-D insérable ; si $B \subset A$, alors B est T-D insérable ; $\overline{CS[A]}^{\sigma}$ est T-D insérable ; $\lambda A + \mu A + x$ est T-D insérable quels que soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $x \in E$.

1.1.3.- Définition

Dans un espace vectoriel (resp. : espace vectoriel topologique) E, un ensemble A est dit insérable (resp. : topologiquement insérable ou plus simplement T-insérable) s'il est D-insérable (resp. : T-D-insérable) pour toute droite homogène D.

1.1.4.- Remarque

Dans un espace vectoriel (resp. : espace vectoriel topologique) E, dire que A est D-insérable (resp. : T-D-insérable) revient à dire qu'il existe une forme linéaire sur E (resp. : linéaire continue sur E) non identiquement nulle sur D et bornée sur A (ou encore non bornée sur D et bornée sur A),

1.1.5.- Remarque

Lorsque l'espace vectoriel E est muni de la topologie localement convexe la plus fine, les notions de D-insérabilité et de T-D-insérabilité coïncident.

1.1.6.- Proposition

Pour une partie A d'un espace vectoriel topologique E, les assertions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes :

(i) A *est* T-D-*insérable.*

(ii) $\overline{CS[A]}^{\sigma}$ *ne contient pas* D.

(iii) $\overline{C[A-A]}^{\sigma}$ *ne contient pas* D.

Démonstration

(i) <=> (ii).

De façon évidente, on a les équivalences suivantes :

$$A \text{ T-D-insérable} \Leftrightarrow CS[A] \text{ T-D-insérable} \Leftrightarrow \overline{CS[A]}^{\sigma} \text{ T-D-insérable.}$$

Il est alors clair que, si A est T-D-insérable, $\overline{CS[A]}^{\sigma}$ ne contient pas D. Réciproquement, si $\overline{CS[A]}^{\sigma}$ ne contient pas D, soit $x \in D$ avec $x \notin \overline{CS[A]}^{\sigma}$; il existe (voir [2], page 84, proposition 4) un hyperplan faiblement fermé, donc fermé, séparant x et $\overline{CS[A]}^{\sigma}$. On utilise ensuite la symétrie pour conclure.

(i) <=> (iii).

Cette équivalence se démontre de la même manière que l'équivalence (i) <=> (ii) en remarquant que $A-A$ contient un translaté de A.

1.1.7.- Remarque

Avec les notations de la proposition 1.1.6, on peut encore dire que A est T-D-insérable si et seulement si le noyau linéaire de l'adhérence faible de $CS[A]$ (c'est-à-dire le plus grand sous-espace vectoriel de E contenu dans $\overline{CS[A]}^{\sigma}$) ne contient pas D ou encore si et seulement si l'adhérence faible de $CS[A]$ ne contient aucune droite parallèle à D (voir 0.18) ou encore si et seulement si l'adhérence faible de $CS[A]$ ne contient aucune demi-droite.

1.1.8.- Corollaire

Soit A une partie d'un espace vectoriel topologique E. La réunion de $\{0\}$ et des droites homogènes D telles que A soit non T-D-insérable est le noyau linéaire de $\overline{CS[A]}^{\sigma}$.

1.1.9.- Corollaire

Une partie A d'un espace vectoriel topologique E est T-insérable si et seulement si $\overline{CS[A]}^{\sigma}$ est linéairement borné.

1.1.10.- Théorème

Pour une partie A d'un espace vectoriel E, les assertions (i), (ii), *(iii) sont équivalentes ; si, de plus,* A *est convexe, les assertions (i) et (iv) sont équivalentes :*

(i) A *est* D-*insérable.*

(ii) CS[A] *ne contient pas* D.

(iii) C[A-A] *ne contient pas* D.

(iv) Il existe $x \in D$ *tel que* x+A *ne rencontre pas* A.

Démonstration

(i) <=> (ii) <=> (iii).

C'est une conséquence de la remarque 1.1.5, de la proposition 1.1.6 du 0.18 et du théorème 1.11 de [32]

(i) => (iv).

C'est immédiat.

(iv) => (i).

x+A-A ne contient pas 0 ; donc x+A-A ne contient pas D. Puisque $x \in D$, A-A ne contient pas D non plus ; or A-A = C[A-A], d'où le résultat puisque l'on a : (iii) => (i).

1.1.11.- Corollaire

Une partie A *d'un espace vectoriel* E *est insérable si et seulement si* CS[A] *est linéairement borné.*

1.1.12.- Proposition

Dans un espace vectoriel E, *un convexe* A *est* D-*insérable si et seulement si* A *est "of finite width in direction" définie par* D.

Démonstration

A est "of finite width in direction" définie par D (voir 1.0.2) si et seulement s'il existe un segment [-x,x] ($x \neq 0$) de D tel que l'intersection de A avec chaque droite parallèle à D soit contenue dans un translaté de $[-x,x]$. Il est clair que, si A est D-insérable, alors A est "of finite width in direction" définie par D.

Réciproquement, on voit que $(3x+A) \cap A = \emptyset$, d'où la conclusion d'après l'implication (iv) => (i) du théorème 1.1.10.

1.1.13.- Remarque

A partir de la proposition 1.1.12 et du ((i) <=> (iii)) du théorème 1.1.10 on étend un résultat de Thorp et Whitley sur les convexes fermés d'un espace de Banach (voir [31]) aux convexes quelconques d'un espace vectoriel.

1.1.14.- Corollaire

Soit A *une partie d'un espace vectoriel topologique. Si* $C[A-A]$ *(resp. :* $CS[A]$*) contient un point intérieur et si* A *est* D-*insérable, alors* A *est* T-D-*insérable.*

Démonstration

Il suffit d'utiliser le fait que, si une forme linéaire est bornée sur un convexe d'intérieur non vide, elle est continue.

1.1.15.- Remarque

Comme cas particulier du corollaire 1.1.14, on retrouve un résultat démontré par V. Klee pour un convexe A contenant un point intérieur (voir [28] pages 536 et 537).

1.2.- CRITERES DE T-D-INSERABILITE

1.2.1.- Proposition

Dans un espace vectoriel topologique E, *tout faiblement borné* A, *donc a fortiori tout faiblement borné, est* T-D-*insérable pour toute droite homogène* D *non située dans l'adhérence faible de l'origine.*

Démonstration

σ étant localement convexe, $\overline{CS[A]}^{\sigma}$ est donc faiblement borné. Il suffit alors de remarquer que le noyau linéaire de $\overline{CS[A]}^{\sigma}$ est l'adhérence faible de l'origine puis d'appliquer le corollaire 1.1.8.

1.2.2.- Proposition

Soit A *une partie d'un espace vectoriel* E. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* A *soit insérable est qu'il existe une topologie d'espace normé sur* E *pour laquelle* A *soit borné.*

La démonstration utilise le lemme suivant :

1.2.3.- Lemme

Soit, dans un espace vectoriel E, *un convexe* K *ayant un point interne relatif* a *(resp. : un convexe* K *symétrique par rapport à* a) *et linéairement borné. Il existe un convexe* C *(resp. : convexe* C *symétrique par rapport à* a) *ayant* a *pour point interne, linéairement borné et tel que* $C \supset K$ *(et même mieux* $C \cap L[K] = K$).

Démonstration

Si K est symétrique par rapport à a, alors on sait que a est point interne relatif de K.

On peut toujours supposer que l'origine de E est en a. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par K et soit G un sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans E. On peut évidemment supposer $F \neq E$. Désignons par $(e_i)_{i\in I}$ une base de G et posons $A = CS[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}]$. D'après le corollaire 2.6 de [6], A est linéairement borné et $C = \ddot{C}[K \cup A]$ est linéairement borné. D'après le théorème 2.3 de [6], $C \cap F = K$. Il est clair en outre que a est point interne de C et que C est symétrique dès que K l'est.

Démonstration de la proposition 1.2.2

La condition suffisante résulte immédiatement de la proposition 1.2.1.

Montrons maintenant la condition nécessaire. Supposons donc A insérable. D'après le corollaire 1.1.11, $CS[A]$ est linéairement borné. D'après le lemme 1.2.3, il existe un convexe C, symétrique, absorbant, linéairement borné et tel que $C \supset CS[A]$; il suffit alors de prendre pour topologie, celle dont un système fondamental de voisinages de l'origine est constitué par les ensembles $\frac{1}{n} C$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1.2.4.- Proposition

Soient, dans un espace vectoriel topologique E, *une droite homogène* D *et une partie* A *admettant un translaté qui absorbe* $CS[A]$. *Alors,* A *est* T-D-*insérable si et seulement si* $\bar{A}^\sigma$ *ne contient pas de demi-droite parallèle à* D.

Démonstration

Si A est T-D-insérable, d'après la remarque 1.1.7, $\overline{CS[A]}^\sigma$ ne contient pas de droite parallèle à D ; puisque $\bar{A}^\sigma \subset \overline{CS[A]}^\sigma$, $\bar{A}^\sigma$ ne contient aucune demi-droite parallèle à D.

Réciproquement, supposons que $\bar{A}^\sigma$ ne contienne aucune demi-droite parallèle à D. Désignons par B un translaté de A qui absorbe $CS[A]$; il est clair que $\bar{B}^\sigma$ ne contient aucune demi-droite parallèle à D. Puisque B absorbe $CS[A]$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha\, CS[A] \subset B$. On en déduit que $\alpha\, \overline{CS[A]}^\sigma \subset \bar{B}^\sigma$, donc que $\overline{CS[A]}^\sigma$ ne contient aucune droite parallèle à D ; ainsi, d'après la remarque 1.1.7, A est T-D-insérable.

Remarque

Si A est une partie d'un espace vectoriel E admettant un translaté absorbant $CS[A]$ alors A est D-insérable si et seulement si A ne contient pas de demi-droite parallèle à D (d'après le théorème 1.11 de [32], le 0.18 et la proposition 1.2.4).

1.2.5.- Corollaire

Soit, dans un espace vectoriel topologique, une partie A *admettant un translaté qui absorbe* $CS[A]$. *Alors,* A *est* T-*insérable si et seulement si* $\bar{A}^{\sigma}$ *ne contient aucune demi-droite.*

1.2.6.- Proposition

Soit, dans un espace vectoriel E, *une partie* A *admettant un translaté qui absorbe* $CS[A]$. *Alors,* A *est insérable si et seulement si* A *ne contient aucune demi-droite.*

Démonstration

Si A est insérable, d'après le corollaire 1.1.11, $CS[A]$ ne contient pas de demi-droite ; puisque $A \subset CS[A]$, A ne contient pas de demi-droite.

Réciproquement, supposons que A ne contienne pas de demi-droite.

Désignons par B un translaté de A qui absorbe $CS[A]$; il est clair que B ne contient pas de demi-droite. Puisque B absorbe $CS[A]$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha CS[A] \subset B$. On en déduit que $CS[A]$ ne contient pas de demi-droite ; ainsi, d'après le corollaire 1.1.11, A est insérable.

1.2.7.- Remarque

La condition "A admet un translaté qui absorbe $CS[A]$" implique que A admet un point interne relatif ; mais la condition précédente n'est pas nécessaire à l'insérabilité d'une partie admettant un point interne relatif (même si cette partie est convexe), ainsi que le montre l'exemple suivant.

Soit E un espace vectoriel ayant une base dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Posons $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{\frac{1}{n} e_n\}$, $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{-e_n\}$, $A = C[B \cup C]$ et $X = CS[A]$. X est linéairement borné car $X = CS[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{e_n\}]$ (voir [6], lemme 2.1) ; ainsi A est insérable. Montrons, par l'absurde, qu'aucun translaté de A n'absorbe $CS[A]$;

s'il en était ainsi, A admettrait un point intérieur dans l'espace E normé de telle sorte que X soit la boule unité fermée de E ; par suite 0 serait point intérieur de A (voir [6] proposition 1.2), donc A devrait absorber X ; or, on voit facilement que, Δ_n désignant la droite $\Delta_n = \{\lambda e_n | \lambda \in \mathbb{R}\}$, on a :

$$\Delta_n \cap A = [-e_n, \frac{1}{n} e_n] \quad \text{et} \quad \Delta_n \cap CS[A] = [-e_n, e_n].$$

Ainsi, il ne peut exister $\alpha > 0$ tel que $\alpha\, CS[A] \subset A$.

1.2.8.- *Remarque*

Un espace vectoriel topologique E est appelé c-régulier par Klee (voir [24], page 106) si tout convexe fermé est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent ; dans un tel espace, l'adhérence faible de tout convexe est égal à son adhérence (pour des exemples d'espaces vectoriels topologiques c-réguliers non localement convexes, nous renvoyons à [22], page 459.

Si E est c-régulier (en particulier si E est localement convexe), on peut donc, dans la proposition 1.1.6, remplacer les adhérences faibles par les adhérences ; il est clair que ce remplacement n'est pas possible pour tout espace vectoriel topologique : par exemple, si E est un espace vectoriel topologique séparé tel que le dual topologique E' de E soit réduit à l'origine (exemple : $L^p[a,b]$ avec $0 < p < 1$; voir [29], page 158), l'origine est un convexe symétrique fermé qui n'est pas T-D-insérable et ceci pour toute droite homogène D.

1.3.- REMARQUES RELATIVES A L'ABSORPTION DE CS[A] PAR A

En relation avec la proposition 1.2.4 qui est intéressante dans la mesure où seule l'adhérence faible de A intervient, nous étudions, dans ce paragraphe, la condition d'absorption de CS[A].

1.3.1.- *Proposition*

Soit, dans un espace vectoriel E, *un convexe* A *contenant l'origine.*

Les assertions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes :

(i) A *absorbe* CS[A].

(ii) A *absorbe* -A.

(iii) Il existe, dans E, *un convexe symétrique* B *tel que* B *et* A *s'absorbent mutuellement.*

Démonstration

(i) => (ii).

C'est évident.

(ii) => (i)

En effet, par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que $-\alpha A \subset A$. Comme $-A$ est étoilé, on peut supposer $\alpha \leq 1$. Comme A est étoilé, $A \supset \alpha A$. Comme A est convexe $A \supset \alpha\, C[A \cup -A] = \alpha\, CS[A]$.

(i) => (iii).

En effet, on prend $B = CS[A]$.

(iii) => (ii).

En effet, B absorbant A et B étant symétrique, B absorbe -A.

1.3.2.- Remarque

Soit, dans un espace vectoriel E, un convexe A contenant l'origine, A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement s'il existe $\alpha > 1$ tel que $-\alpha A \subset A$.

En effet, la condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, soit $x \in A$ avec $x \neq 0$ (le cas où $A = \{0\}$ est trivial) ; on a $-\alpha x \in A$, $\alpha^2 x \in A, \ldots, \alpha^{2n} x \in A, -\alpha^{2n+1} x \in A, \ldots,$ et par suite $\lambda x \in A$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$; d'où le résultat, puisque A est convexe.

1.3.3.- Corollaire

Soit, dans espace vectoriel E, *un convexe* A *absorbant. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe sur* E *une topologie d'espace semi-normé telle que* A *soit voisinage borné de l'origine est que* A *absorbe*

$CS[A]$.

Démonstration

C'est une conséquence de l'équivalence entre (i) et (iii) de la proposition 1.3.1.

On peut rapprocher le corollaire suivant, du résultat de la proposition 1.2.2.

1.3.4.- Corollaire

Soit, dans un espace vectoriel E, *un convexe* A *contenant l'origine et absorbant. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe sur* E *une topologie d'espace normé telle que* A *soit voisinage borné de l'origine est que* A *soit linéairement borné et que* A *absorbe* $CS[A]$.

1.4.- CAS DE LA DIMENSION FINIE

1.4.1.- Proposition

Dans un espace vectoriel topologique séparé de dimension finie, tout borné est insérable et réciproquement.

Démonstration

Elle résulte immédiatement de la proposition 1.2.2 et du fait qu'il existe, dans un espace vectoriel de dimension finie, une seule topologie d'espace vectoriel topologique séparée qui fait d'ailleurs de cet espace un espace normé.

1.4.2.- Proposition

Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout convexe linéairement borné est convexe insérable et réciproquement.

Démonstration

Munissons l'espace vectoriel de la topologie canonique. Il y a équivalence, pour un convexe, entre le fait d'être borné et le fait d'être linéairement borné (voir [6], lemme 2.3).

On applique alors la proposition 1.4.1.

1.4.3.- Proposition

Dans un espace vectoriel topologique séparé de dimension finie, tout ensemble étoilé fermé linéairement borné est un ensemble étoilé fermé insérable et réciproquement.

Démonstration

Elle résulte de l'équivalence, pour un ensemble étoilé fermé, entre le fait d'être borné et le fait d'être linéairement borné.

1.5.- EXEMPLE, DANS UN ESPACE VECTORIEL E QUELCONQUE DE DIMENSION INFINIE, DE CONVEXE NON D-INSERABLE POUR UNE SEULE DROITE HOMOGENE D, AYANT UN POINT INTERNE ET LINEAIREMENT BORNE.

Premier cas : E possède une base dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Posons $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{a_n\}$, $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{b_n\}$, $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{c_n\}$,

avec $a_n = e_n$, $b_n = e_n + (n-1)e_1$, $c_1 = -e_1$ et pour $n > 1$, $c_n = -\frac{e_n}{n-1}$.

On va montrer que le convexe $K = C[A \cup B \cup C]$ répond à la question. Il est clair que l'origine est point interne de K car K contient CS[C]. De plus, CS[K] contient la droite $\Delta_1 = \{\lambda e_1 | \lambda \in \mathbb{R}\}$ car, pour tout n, $\frac{1}{2}(n-1)e_1 = \frac{1}{2} b_n - \frac{1}{2} a_n \in CS[K]$; donc K n'est pas Δ_1-insérable ; montrons que CS[K] ne contient pas d'autre droite D issue de l'origine, ce qui assurera la D-insérabilité de K ; D s'écrit sous la forme $D = \{\lambda y | \lambda \in \mathbb{R}\}$ où y est un point non nul de E, ayant une dernière composante non nulle d'indice $N > 1$.

Comme $CS[K] = C[CS[A] \cup CS[B]]$ il en résulte donc que, si $\lambda y \in CS[K]$, λy s'écrit sous la forme :

$$\lambda y = \mu(\sum_n \alpha_n e_n) + (1-\mu)[\sum_n \beta_n(e_n+(n-1)e_1)]$$

avec $0 \leq \mu \leq 1$, $\sum_n |\alpha_n| \leq 1$ et $\sum_n |\beta_n| \leq 1$, les α_n et β_n non nuls étant en nombre fini.

La composante de λy suivant e_N est donc :

$$\mu\ \alpha_N + (1-\mu)\ \beta_N$$

qui est en valeur absolue ≤ 1. $CS[K]$ ne contient pas D.

Il reste à montrer que K est linéairement borné ; il suffit donc de montrer que K ne contient aucune demi-droite passant par l'origine (voir 0.18) ou encore, d'après l'étude précédente de $CS[K]$, que K ne contient aucune demi-droite parallèle à Δ_1 ; or si λe_1 (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) appartient à K, λe_1 s'écrit sous la forme :

$$\lambda e_1 = \sum_n (\alpha_n\ a_n + \beta_n\ b_n + \gamma_n\ c_n)$$

avec $\alpha_n \geq 0$, $\beta_n \geq 0$, $\gamma_n \geq 0$, $\sum_n (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) = 1$, les α_n, β_n, γ_n étant nuls sauf pour un nombre fini. On en déduit :

$$\lambda = \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 + \sum_{n>1} (n-1)\ \beta_n.$$

et, pour $n > 1$,

$$(n-1)(\alpha_n+\beta_n) = \gamma_n,$$

d'où $|\lambda| \leq 1 + \sum_{n>1} \gamma_n \leq 2$; d'où le résultat.

Deuxième cas : E est de dimension infinie non dénombrable.

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension infinie dénombrable et G un supplémentaire de F. On considère dans F le convexe K obtenu dans le premier cas et dans G un convexe Γ symétrique absorbant et linéairement borné. Le convexe $U = C[K \cup \Gamma]$ répond à la question (voir le théorème 2.3 de [6]) compte tenu du fait que $CS[U] = C[CS[K] \cup \Gamma]$ et compte tenu du premier cas.

CHAPITRE II

CARACTERISATION DES CONVEXES ANTI-INSERABLES

2.0.- INTRODUCTION

2.0.1.- Les résultats centraux et techniquement difficiles de ce chapitre sont le théorème 2.4.5 et le corollaire 2.4.6 ; ils établissent un lien parfait et surprenant entre d'une part la notion de convexe basique développée par Coquet dans [6] et d'autre part la notion d'anti-insérabilité développée ici.

Dans le 2.1, nous introduisons, dans un espace vectoriel, la notion de partie A anti-insérable (c'est-à-dire telle qu'aucune forme linéaire, non nulle, ne soit bornée sur A) ; nous montrons (théorème 2.1.3) que l'anti-insérabilité de A s'exprime, fort simplement, en fonction de la famille des translatés de A et la famille des dilatés strictement positifs de A.

Le 2.2 montre l'existence, dans tout espace vectoriel (réel) de dimension infinie, d'un convexe anti-insérable, linéairement borné et d'internat non vide (corollaire 2.2.3) ; ce résultat est une application de la notion de base de décomposition développée par Coquet dans [6].

Le 2.3 met en évidence une propriété remarquable des convexes basiques (corollaire 2.3.5) et qui est exploitée dans le 2.4 ; cette propriété est établie à partir d'un théorème plus général, intéressant en soi (théorème 2.3.4).

Le 2.4 est consacré à la caractérisation proprement dite des convexes anti-insérables ; tout convexe anti-insérable y apparaît comme sur-ensemble d'un convexe basique (théorème 2.4.5) et aussi comme sur-ensemble d'un convexe anti-insérable linéairement borné et algébriquement fermé ; le théorème 2.4.2 règle le cas de la dimension infinie dénombrable ; le théorème 2.4.4 apparaît comme un théorème de " décomposition"mettant l'accent sur l'anti-insérabilité en dimension dénombrable.

Dans le 2.5, nous introduisons de façon naturelle la notion d'anti-insérabilité topologique ; le lien étroit entre cette notion et celle de séparation par un hyperplan fermé est établi dans le théorème 2.5.4 et son corollaire ; nous obtenons également une généralisation d'une proposition de Thorp et Whitley (remarque 2.5.3).

Le 2.6 s'intéresse au cas particulier de l'anti-insérabilité topologique dans un espace semi-normé, qui s'exprime en langage de bases grâce aux convexes basiques (théorème 2.6.3).

Le 2.7 est une application du 2.5 et fournit un exemple général, dans une famille importante d'espaces vectoriels topologiques de convexes disjoints qu'on ne peut pas séparer par un hyperplan fermé.

Le 2.8 est consacré à une étude simultanée de l'anti-insérabilité et l'anti-insérabilité topologique ; ceci rejoint naturellement une question posée par Thorp et Whitley ; nous formulons cette question sous une forme équivalente (2.8.5), l'intérêt de cette formulation étant montré par une application figurant dans la remarque 2.8.8. En s'appuyant sur des résultats respectifs de Choquet et Klee, nous montrons que, sous certaines conditions, dans un espace vectoriel topologique métrisable et complet, l'anti-insérabilité topologique implique l'anti-insérabilité (proposition 2.8.2 et corollaire 2.8.3) (l'accent est mis sur l'importance de l'hypothèse "complet" : remarque 2.8.4). Notons également (corollaire 2.8.3) des exemples assez généraux et non triviaux, de convexes fermés et anti-insérables (dans les espaces de Banach).

2.0.2.- Rappels

Définition d'une base triangulaire

Soient E *un espace vectoriel,* $(e_i)_{i\in I}$ *et* $(f_i)_{i\in I}$ *deux bases tota-*

lement ordonnées de E. *On dira que* $(f_i)_{i\in I}$ *est une base triangulaire de* E *relativement à la base* $(e_i)_{i\in I}$ *si pour tout* $j \in I$,

$$f_j = \sum_{i\in I} a_{j,i}\, e_i$$

avec : $\begin{cases} a_{j,i} = 0 \text{ pour tout } i > j \\ a_{j,j} \neq 0. \end{cases}$

Définition d'une famille de décomposition

Soient E *un espace vectoriel de dimension infinie et* $(e_i)_{i\in I}$ *une base bien ordonnée de* E *(c'est-à-dire que l'on suppose -ce qui est toujours possible- l'ensemble* I *bien ordonné).*

Considérons une famille (resp. : une base) $(f_j)_{j\in J}$ *de vecteurs de* E *avec* $f_j = \sum_{i\in I} a_{j,i}\, e_i$. *Soit* $r = (r_i)_{i\in I}$ *un élément fixé de* $(\mathbb{R}_+^*)^I$. *Posons, pour tout* $i \in I$,

$$P_i(r) = \{j \mid j \in J, \sum_{k>i} |a_{j,k}| \geq r_i\},$$

$$Q_i(r) = \{v_{j,i} \mid j \in P_i(r),\ v_{j,i} = \frac{a_{j,i}}{\sum_{k>i} |a_{j,k}|}\}.$$

Si, pour tout $i \in I$, $Q_i(r)$ *n'est pas borné dans* $\mathbb{R}$, *on dit que* $(f_j)_{j\in J}$ *est une* r-*famille (resp. :* r-*base) de décomposition de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$. *Si, pour tout* $i \in I$, $Q_i(r)$ *n'est ni majoré ni minoré dans* $\mathbb{R}$, *on dit que* $(f_j)_{j\in J}$ *est une* r-*famille (resp. :* r-*base) de décomposition forte de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$.

Si, pour tout $r \in (\mathbb{R}_+^*)^I$, $(f_j)_{j\in J}$ *est une* r-*famille (resp. :* r-*base) de décomposition de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$, *on dit que* $(f_j)_{j\in J}$ *est une famille (resp. : base) de décomposition de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$.

Si, pour tout $r \in (\mathbb{R}_+^*)^I$, $(f_j)_{j\in J}$ *est une* r-*famille (resp. :* r-*base) de décomposition forte de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$, *on dit que* $(f_j)_{j\in J}$ *est une famille (resp. : base) de décomposition forte de* E *associée à la* *base* $(e_i)_{i\varepsilon I}$.

Théorème

Soient E *un espace vectoriel de dimension infinie,* $(e_i)_{i\varepsilon I}$ *une base bien ordonnée de* E, r *un élément quelconque de* $(\mathbb{R}_+^*)^I$ *et* $(f_j)_{j\varepsilon J}$ *une* r*-famille de décomposition de* E *associée à la base* $(e_i)_{i\varepsilon I}$. *Alors,*

$$CS[\bigcup_{i\varepsilon I}\{e_i\}] + CS[\bigcup_{j\varepsilon J}\{f_j\}] = E.$$

Définition d'un convexe basique (au sens de Coquet)

Soit $(f_i)_{i\varepsilon I}$ *une base triangulaire de décomposition forte de l'espace vectoriel* E *associée à la base bien ordonnée* $(e_i)_{i\varepsilon I}$ *de* E *et telle que, pour tout* $i \varepsilon I$, *la dernière composante non nulle de* f_i *dans la base* $(e_i)_{i\varepsilon I}$ *soit* > 0. *Alors* $C[(\bigcup_{i\varepsilon I}\{e_i\}) \cup (\bigcup_{i\varepsilon I}\{f_i\})]$ *est appelé convexe basique de* E.

Définition de $\aleph_0$*-décomposable*

Soit F *un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel* E *et soient* A *et* B *deux parties de* E. *S'il existe une famille* $(F_j)_{j\varepsilon J}$ *de sous-espaces vectoriels de* F *tels que :*

$$\begin{cases} \forall j \varepsilon J, \dim F_j = \aleph_0 \\ \forall j \varepsilon J, \dim(A \cap F_j) = \dim(B \cap F_j) = \aleph_0 \\ F = \bigoplus_{j\varepsilon J} F_j, \end{cases}$$

alors on dit que F *est* $\aleph_0$*-décomposable relativement au couple* (A,B).

L'ordre sur $\mathbb{N}^*$ est, chaque fois qu'il n'est pas précisé, l'ordre naturel.

2.1.- ANTI-INSERABILITE

2.1.1.- *Définition*

Dans un espace vectoriel E, *on dira qu'un ensemble* A *est anti-insérable si, pour toute droite homogène* D, A *n'est pas* D-*insérable.*

2.1.2.- *Proposition*

Une partie A *d'un espace vectoriel* E *est anti-insérable si et seulement si* $CS[A] = E$ *ou encore si et seulement si* $C[A-A] = E$, *ou encore si et seulement si aucune forme linéaire sur* E *autre que la forme linéaire nulle n'est bornée sur* A.

Démonstration

Elle résulte immédiatement du corollaire 1.1.10.

2.1.3.- *Théorème*

Pour un convexe A *d'un espace vectoriel* E, *les assertions* (*i*), (*ii*) *et* (*iii*) *sont équivalentes :*

(*i*) A *est anti-insérable.*

(*ii*) A *rencontre chacun de ses translatés.*

(*iii*) A *rencontre chacun de ses dilatés strictement positifs* (*c'est-à-dire chaque ensemble du type* $x + \lambda A$ (*avec* $x \in E$ *et* $\lambda > 0$)).

Démonstration

(i) <=> (ii).

C'est une conséquence immédiate de l'équivalence entre (i) et (iv) du corollaire 1.1.10.

(iii) => (ii).

C'est évident.

(i) => (iii).

Montrons cette implication par l'absurde. On voit facilement que l'on peut supposer que $0 \in A$. Supposons qu'il existe $\lambda > 0$ et $x \in E$ tels que $A \cap (x+\lambda A) = \emptyset$; on peut supposer que $0 < \lambda < 1$. On en déduit que $(\lambda A) \cap (x+\lambda A) = \emptyset$. L'équivalence entre (i) et (iv) du corollaire 1.1.10 montre que λA n'est pas anti-insérable ; d'où la contradiction.

2.2.- EXEMPLES DE CONVEXES ANTI-INSERABLES LINEAIREMENT BORNES ET D'INTERNAT NON VIDE

2.2.1.- Lemme

Soient E *un espace vectoriel de dimension infinie,* $(e_i)_{i\in I}$ *une base bien ordonnée de* E, r *un élément de* $(\mathbb{R}_+^*)^I$ *et* $(f_j)_{j\in J}$ *une r-famille de décomposition associée à la base* $(e_i)_{i\in I}$. *Alors le convexe*

$$C = C[(\bigcup_{i\in I} \{e_i\}) \cup (\bigcup_{j\in J} \{f_j\})]$$

est anti-insérable.

Démonstration

On a $CS[C] = E$ car $CS[C]$ contient $\frac{1}{2} CS[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}] + \frac{1}{2} CS[\bigcup_{j\in J} \{f_j\}]$ (voir le 2.0.2) ; d'où la conclusion.

2.2.2.- Proposition

Soient E *un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable,* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une base de* E *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une base de décomposition de* E *associée à la base précédente avec, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n = a_{n,1}\, e_1 + a_{n,2}\, e_2 + \dots + a_{n,n}\, e_n,$$

les $a_{n,i}$ *étant* ≥ 0 *pour* $1 \leq i \leq n-1$ *et* $a_{n,n} > 0$.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *un nombre réel* s_n *tel que :*

$$0 < s_n \leq \inf\{\frac{a_{n,n}}{a_{n,i}} \mid i \in \{1,2,\dots,n\} \text{ et } a_{n,i} \neq 0\}.$$

Soit (u_n) *une série à termes strictement positifs et convergente. Alors le* *convexe* $C = C[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{e_n, f_n, -s_n u_n e_n\}]$ *est anti-insérable, linéairement borné et d'internat non vide.*

Démonstration

Il est clair que 0 est point interne de C ; en outre C est anti-insérable d'après le lemme 2.2.1.

Montrons que C est linéairement borné ; pour cela, il suffit de montrer que C ne contient aucune demi-droite issue de l'origine (voir 0.18).

Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$. Il existe un entier $k \geq 1$ et un seul tel que :

$$x = \sum_{n=1}^{k} x_n e_n \quad \text{et} \quad x_k \neq 0.$$

Montrons que l'on ne peut avoir $\lambda x \in C$ pour tout $\lambda > 0$. Si $\lambda x \in C$, λx s'écrit sous la forme :

$$\lambda x = \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n f_n + \beta_n e_n - \gamma_n s_n u_n e_n)$$

avec, pour tout n, α_n, β_n et $\gamma_n \geq 0$ et avec $\sum_{n=1}^{N} (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) = 1$.

Il est clair que l'on peut supposer $N > k$ quitte à introduire des coefficients α_n, β_n, γ_n nuls.

L'unicité de la décomposition dans la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ montre que :

$$\left\{\begin{array}{lr}
\lambda x_1 = a_{1,1}\,\alpha_1 + a_{2,1}\,\alpha_2 + \dots + a_{N,1}\,\alpha_N + \beta_1 - s_1\, u_1\, \gamma_1 & (1) \\
\vdots & \\
\lambda x_k = a_{k,k}\,\alpha_k + a_{k+1,k}\,\alpha_{k+1} + \dots + a_{N,k}\cdot\alpha_N + \beta_k - s_k\, u_k\, \gamma_k & (k) \\
\quad 0 = a_{k+1,k+1}\,\alpha_{k+1} + a_{k+2,k+1}\,\alpha_{k+2} + \dots + a_{N,k+1}\,\alpha_N + \beta_{k+1} - & \\
\qquad\qquad - s_{k+1}\, u_{k+1}\, \gamma_{k+1} & (k+1) \\
\quad \vdots & \\
\quad 0 = a_{N,N}\,\alpha_N + \beta_N - s_N\, \gamma_N\, u_N. & (N)
\end{array}\right.$$

Les égalités $(k+1),\ldots,(N)$ montrent que :

$$\alpha_{k+1} \leq \frac{s_{k+1}\, u_{k+1}}{a_{k+1,k+1}}, \ldots, \quad \alpha_N \leq \frac{s_N\, u_N}{a_{N,N}} .$$

Ainsi, pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq k$, on a :

$$\lambda |x_n| \leq a_{n,n} + \ldots + a_{k,n} + \frac{a_{k+1,n}}{a_{k+1,k+1}}\, s_{k+1}\, u_{k+1} + \ldots + \frac{a_{N,n}}{a_{N,N}}\, s_N\, u_N + 1 + s_n\, u_n,$$

c'est-à-dire, en désignant par $\sum_k$ la somme de tous les coefficients $a_{i,j}$ avec $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ et $j \leq i$, et par S la somme de la série (u_n) :

$$\lambda |x_n| \leq \textstyle\sum_k + S + 1.$$

On a donc : $\lambda \leq \dfrac{\sum_k + S + 1}{|x_k|}$; d'où la conclusion.

2.2.3.- *Corollaire*

Tout espace vectoriel E de dimension infinie contient un convexe anti-insérable, linéairement borné et d'internat non vide.

Démonstration

On peut écrire E sous la forme $E = \bigoplus_{j \in J} E_j$ où chaque E_j est de dimension infinie dénombrable et J bien ordonné. Dans chaque E_j on construit, comme dans la proposition 2.2.2, un convexe C_j obtenu à partir d'une base $(e^j_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de E_j et d'une base $(f^j_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de décomposition de E_j associée à $(e^j_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On pose $C = C\left[\bigcup_{j \in J} C_j\right]$. On voit facilement que l'internat de C contient 0 ; C est linéairement borné car chaque C_j l'est (voir [6], corollaire 2.6) ; C est anti-insérable, d'après le lemme 2.2.1, car C contient la famille $(f^j_n)_{(j,n) \in J \times \mathbb{N}^*}$ qui est une famille de décomposition de E associée à la base $(e^j_n)_{(j,n) \in J \times \mathbb{N}^*}$ bien ordonné au moyen du bon ordre lexicographique sur $J \times \mathbb{N}^*$ (voir [6], théorème 3.2).

2.3.- PROPRIETES DES CONVEXES BASIQUES

2.3.1.- Lemme

Soit $(e_i)_{i\in I}$ *une base bien ordonnée d'un espace vectoriel* E *(de dimension quelconque) et soit* $(f_i)_{i\in I}$ *une famille de points de* $E \sim \{0\}$ *telle que, pour tout* $i \in I$, *la dernière composante non nulle de* f_i *ait pour indice* i *et soit* > 0 ; *alors le convexe* $C = C[\bigcup_{i\in I} \{e_i, f_i\}]$ *est linéairement borné et algébriquement fermé.*

Démonstration

Posons, pour tout $\ell \in I$, $E_\ell = S[\bigcup_{i\leq\ell} \{e_i\}]$ et $C_\ell = C[\bigcup_{i\leq\ell} \{e_i, f_i\}]$. Montrons d'abord la propriété (1) :

$$(1) \qquad \forall \ell \in I,\ C \cap E_\ell = C_\ell.$$

Comme, pour tout $i \in I$, la dernière composante non nulle de f_i a pour indice i, on a $C_\ell \subset C \cap E_\ell$; réciproquement, si $x \in C \cap E_\ell$, alors $x \in C$, donc x s'écrit sous la forme :

$$x = \sum_{i\in I} (\lambda_i e_i + \mu_i f_i)$$

où les λ_i et μ_i sont tous nuls sauf un nombre fini, $\lambda_i \geq 0$, $\mu_i \geq 0$, $\sum_{i\in I} (\lambda_i + \mu_i) = 1$; puisque $x \in E_\ell$, il est clair, compte tenu de l'écriture précédente de x et du fait que la dernière composante de f_i est > 0 et a pour indice i, que $x \in C_\ell$. Montrons, par récurrence transfinie, que, pour tout $k \in I$, C_k est linéairement borné (ce qui, compte tenu de (1), montrera que C est aussi linéairement borné).

La propriété est vraie pour le plus petit élément i_o de I car $C_{i_o} = [e_{i_o}, f_{i_o}]$.

Supposons la propriété vraie pour tous les $\ell < k$ et montrons qu'elle est vraie pour k. Pour cela, montrons d'abord que $\Gamma_k = C[\bigcup_{i<k} \{e_i, f_i\}]$ est linéairement borné, c'est-à-dire, que puisque $\Gamma_k \subset \bigcup_{\ell<k} E_\ell$, que, pour tout $\ell < k$, $\Gamma_k \cap E_\ell$ est linéairement borné ; or, pour tout $\ell < k$, on a $\Gamma_k \cap E_\ell = C_\ell$: en effet, il est clair que $C_\ell \subset \Gamma_k \cap E_\ell$ et réciproquement, on a $\Gamma_k \cap E_\ell \subset C \cap E_\ell = C_\ell$ (d'après (1)) ; d'après l'hypothèse de récurrence, $\Gamma_k \cap E_\ell$ est donc linéairement borné. En outre, on a $C_k = C[\Gamma_k \cup [e_k, f_k]]$; comme Γ_k est linéairement borné et comme $[e_k, f_k]$ est linéairement borné et de dimension finie, C_k est donc linéairement borné (voir [6], corollaire 2.3) ; la récurrence est donc achevée.

On montre facilement que C est algébriquement fermé si et seulement si chaque $C \cap E_\ell$ l'est, c'est-à-dire, d'après (1), si et seulement si chaque C_ℓ l'est. Montrons donc, par récurrence transfinie que, pour tout $k \in I$, C_k est algébriquement fermé.

La propriété est vraie pour $k = i_o$.

Supposons la propriété vraie pour tous les $\ell < k$ et montrons qu'elle est vraie pour k ; pour cela, on voit facilement que Γ_k est algébriquement fermé car, pour tout $\ell < k$, $\Gamma_k \cap E_\ell = C_\ell$ est algébriquement fermé par hypothèse et car $\Gamma_k \subset \bigcup_{\ell<k} E_\ell$.

En outre le convexe $\Gamma_1 = [e_k, f_k]$ est algébriquement fermé, de dimension finie et on a $C_k = C[\Gamma_k \cup \Gamma_1]$. Soit $z \in \text{lin}\, C_k$; il existe $x \in C_k$ $(x \neq z)$ tel que $[x, z[\subset C_k$; soit S le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par $\Gamma_1 \cup [x, z[$; Γ_k et Γ_1 étant convexes, on voit facilement que $z \in \text{lin}\, C[(\Gamma_k \cap S) \cup \Gamma_1]$; or, $\Gamma_k \cap S$ et Γ_1 étant linéairement bornés et algébriquement fermés sont donc compacts dans S muni de la topologie naturelle (Théorème 1.17 de [32]) et par suite $C[(\Gamma_k \cap S) \cup \Gamma_1]$ est compact ([2] proposition 15 page 54), donc aussi algébriquement fermé ; on a donc $z \in C[(\Gamma_k \cap S) \cup \Gamma_1]$ et il en résulte que $z \in C[\Gamma_k \cup \Gamma_1] = C_k$.

2.3.2.- *Remarque*

L'exemple suivant montre l'importance de l'hypothèse de bon ordre dans le lemme 2.3.1.

Exemple : Soit E un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de E que l'on ordonne totalement de la façon suivante : pour $n \in \mathbb{N}^*$ les e_n sont ordonnés dans l'ordre inverse de l'ordre naturel sur $\mathbb{N}^*$ et on décrète que e_o est strictement inférieur à chaque autre e_n. On pose $f_o = e_o$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n = 2n\, e_o - e_{n+1} + e_n$.

Montrons que $C = C[\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{e_n,f_n\}]$ n'est pas linéairement borné. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C contient $x = \frac{1}{n}(f_1+f_2+\ldots+f_n) = (n+1)e_o - \frac{1}{n}\, e_{n+1} + \frac{1}{n}\, e_1$ et par suite C contient $\frac{1}{2}\, x + \frac{1}{2}(\frac{1}{n}\, e_{n+1} + \frac{n-1}{n}\, e_1) = \frac{n+1}{2}\, e_o + \frac{1}{2}\, e_1$; donc la demi-droite $(e_o + \frac{1}{2}\, e_1) + \Delta_o$, où $\Delta_o = \{\lambda\, e_o | \lambda \geq 0\}$, est contenue dans C.

Montrons que C n'est pas algébriquement fermé.

Pour cela il suffit de montrer que C ne contient pas $e_o + \Delta_o$ car C contient e_o (voir 0.18).

Montrons plus précisément que $C \cap \Delta_o = \{e_o\}$. Si $\lambda\, e_o \in C$, $\lambda\, e_o$ s'écrit sous la forme :

$$\lambda\, e_o = \sum_{n=0}^{N} (\lambda_n e_n + \mu_n f_n)$$

avec, pour $0 \leq n \leq N$, $\lambda_n \geq 0$ et $\mu_n \geq 0$, et avec $\sum\limits_{n=0}^{N} (\lambda_n + \mu_n) = 1$. On en déduit que :

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_o + \mu_o + \sum\limits_{n=1}^{N} 2n\, \mu_n \\ 0 = \lambda_1 + \mu_1 \\ 0 = \lambda_n + \mu_n - \mu_{n-1} \quad \text{pour } 2 \leq n \leq N \\ 0 = -\mu_n, \end{cases}$$

donc que $\lambda_n = \mu_n = 0$ pour $1 \leqslant n \leqslant N$. Il en résulte que $\lambda = 1$, d'où le résultat.

2.3.3.- *Remarque*

On peut voir facilement que le résultat du lemme 2.3.1 reste valable si on remplace la famille $(f_i)_{i\varepsilon I}$ de ce lemme par une famille (libre) formée de points de $E \sim \{0\}$ dont la dernière composante non nulle dans la base $(e_i)_{i\varepsilon I}$ est > 0, deux éléments distincts de la famille étant tels que les indices de leur dernière composante non nulle soient distincts. Toutefois l'exemple suivant montre qu'on ne peut pas aller trop loin dans le sens d'une généralisation du lemme 2.3.1.

Exemple : Soit E un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable et soit $(e_n)_{n\varepsilon\mathbb{N}^*}$ une base de E que l'on munit d'un bon ordre en décrétant que tout entier pair est strictement inférieur à tout entier impair (l'ordre sur les entiers pairs d'une part et sur les entiers impairs d'autre part étant l'ordre naturel). On pose, pour tout $n \varepsilon \mathbb{N}^*$,

$$f_n = -e_{2n} + ne_1$$

La famille $(f_n)_{n\varepsilon\mathbb{N}^*}$ est une famille libre et chaque f_n a une dernière composante non nulle qui est > 0 ; toutefois $C = C[\bigcup_{n\varepsilon\mathbb{N}^*} \{e_n,f_n\}]$ contient la demi-droite $\frac{1}{2}e_1 + \Delta_1$ avec $\Delta_1 = \{\lambda e_1 | \lambda \geqslant 0\}$; de plus C n'est pas algébriquement fermé car C ne contient pas la demi-droite $e_3 + \Delta_1$. (en effet $e_1 + e_3 \notin C$).

2.3.4.- *Théorème*

Soient E *un espace vectoriel de dimension infinie,* $(e_i)_{i\varepsilon I}$ *une base bien ordonné de* E*,* r *un élément de* $(\mathbb{R}_+^*)^I$ *et* $(f_i)_{i\varepsilon I}$ *une r-base triangulaire de décomposition associée à la base* $(e_i)_{i\varepsilon I}$ *telle que, pour tout* $i \varepsilon I$*, la dernière composante non nulle de* f_i *dans la base* $(e_i)_{i\varepsilon I}$ *soit* > 0*. Alors le* *convexe* $C = C[\bigcup_{i \in I} \{e_i, f_i\}]$ *est anti-insérable, linéairement borné et algébriquement fermé.*

Démonstration

C est algébriquement fermé et linéairement borné d'après le lemme 2.3.1. C est anti-insérable d'après le lemme 2.2.1.

2.3.5.- *Corollaire*

Dans un espace vectoriel E *de dimension infinie, tout convexe basique est anti-insérable, linéairement borné et algébriquement fermé.*

2.4.- CARACTERISATION DES CONVEXES ANTI-INSERABLES

Nous allons montrer que tout convexe anti-insérable contient un convexe basique (et même un convexe basique d'un type particulier comme on peut le voir dans la démonstration du théorème 2.4.5).

2.4.1.- *Lemme*

Si, dans un espace vectoriel E*, le convexe* C *est tel que* $CS[C] = E$*, alors* $C-C = E$.

Démonstration

(voir la proposition 2.1.2).

2.4.2.- *Théorème*

Dans un espace vectoriel E *de dimension infinie dénombrable, tout convexe anti-insérable* C *contient un convexe basique.*

Démonstration

Puisque C est anti-insérable, $\check{S}[C] = E$.

Soit $(g_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une base de E telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $g_i \in C$. Construisons, par récurrence sur l'entier n, une suite d'entiers > 0 $(m(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ strictement croissante, une base $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de E et une suite libre $(f'_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$

de vecteurs de E, ces deux dernières familles étant liées à l'entier n par les propriétés suivantes :

$R_1(n)$: $e_{m(n-1)+1}, e_{m(n-1)+2}, \dots e_{m(n)} \in C$.

$R_2(n)$: $S[\{e_1,e_2,\dots,e_{m(n)}\}] = S[\{g_1,g_2,\dots,g_{m(n)}\}]$.

$R_3(n)$: $f'_n \in C$.

$R_4(n)$: $f'_n = a_{n,1}\, e_1 + a_{n,2}\, e_2 + \dots + a_{n,m(n)}\, e_{m(n)}$,

les $a_{n,i}$ vérifiant les propriétés $H_1(n)$, $H_2(n)$, $H_3(n)$, $H_4(n)$ suivantes :

$$\begin{cases} H_1(n) : \ |a_{n,i}| \geqslant n \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m(n-1). \\ H_2(n) : \begin{cases} a_{n,m(n-1)+1} = 1 \\ a_{n,i} = 0 \quad \text{pour} \quad m(n-1)+2 \leqslant i \leqslant m(n). \end{cases} \\ H_3(n) : \ \dfrac{|a_{n,i}|}{|a_{n,i+1}|+|a_{n,i+2}|+\dots+|a_{n,m(n)}|} \geqslant n \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m(n-1). \\ H_4(n) : \ a_{n,i} \text{ est du signe de } (-1)^{n+i} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m(n-1). \end{cases}$$

On pose $m(1) = 1$ et $f'_1 = e_1 = g_1$.

Supposons la construction faite jusqu'au rang n et construisons $m(n+1)$, $e_{m(n)+1}, e_{m(n)+2}, \dots, e_{m(n+1)}$ et f'_{n+1}. Désignons par B_n l'ensemble des $m(n)$-uples $(b_1,b_2,\dots,b_{m(n)})$ formés de réels (tous non nuls) vérifiant les conditions $H'_3(n)$ et $H'_4(n)$:

$$H'_3(n) : \ \frac{|b_{m(n)}|}{2} \geqslant n+1, \ \frac{|b_{m(n)-1}|}{2+|b_{m(n)}|} \geqslant n+1, \ \dots, \ \frac{|b_1|}{2+|b_2|+|b_3|+\dots+|b_{m(n)}|} \geqslant n+1.$$

$H'_4(n)$: b_i est du signe de $(-1)^{n+1+i}$.

Soit W l'ensemble des vecteurs

$$w = \sum_{i=1}^{m(n)} b_i \, e_i$$

où $(b_1, b_2, \ldots, b_{m(n)}) \in B_n$.

Posons $S[\{g_1, g_2, \ldots, g_{m(n)}\}] = S_n$ et $C' = C \cap S_n$. Distinguons les cas a) et b) :

a) $W \cap (C'-C') \neq \emptyset$.

Soit $w = \sum_{i=1}^{m(n)} b_i \, e_i \in W \cap (C'-C')$. Il existe c'_1 et $c'_2 \in C'$ tels que $w = c'_1 - c'_2$ soit encore $c'_1 = w + c'_2$.

On pose :

$$\begin{cases} m(n+1) = m(n) + 1, & (1) \\ e_{m(n+1)} = \frac{1}{2}\,(c'_2 + g_{m(n)+1}), & (2) \\ f'_{n+1} = \frac{1}{2}\,w + e_{m(n+1)} = \frac{1}{2}\,(c'_1 + g_{m(n)+1}), & (3) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a_{n+1,m(n+1)} = 1 & (4) \\ a_{n+1,i} = \frac{1}{2}\,b_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq m(n) & (5) \end{cases}$$

$R_1(n+1)$ et $R_2(n+1)$ sont assurées par (2) ; $R_3(n+1)$ est vraie à cause de (3) ; $H_1(n+1)$ et $H_3(n+1)$ sont vraies grâce à (5) et $H'_3(n)$; $H_2(n+1)$ grâce à (1) et (4) ; $H_4(n+1)$ grâce à (5) et $H'_4(n)$.

b) $W \cap (C'-C') = \emptyset$.

Soit $w = \sum_{i=1}^{m(n)} b_i \, e_i \in W$. Puisque $C - C = E$ (d'après le lemme 2.4.1), il existe c_1 et $c_2 \in C$ tels que $w = c_1 - c_2$, soit encore :

$$c_1 = w + c_2. \qquad (6)$$

Soit k le plus petit entier $\geqslant 0$ tel que :

$$S[\{e_1,e_2,\ldots,e_{m(n)},c_2\}] \subset S[\{g_1,g_2,\ldots,g_{m(n)},\ldots,g_{m(n)+k}\}]. \qquad (7)$$

Puisque $w \notin C' - C'$, $c_2 \notin S_n$, donc k est > 0.

On pose alors :

$$\begin{cases} m(n+1) = m(n) + k, & (8) \\ e_{m(n)+1} = c_2 & (9) \\ e_{m(n)+i} = g_{m(n)+i-1}\ , \text{ pour } 2 \leqslant i \leqslant k, & (10) \\ f'_{n+1} = w + c_2 = c_1, & (11) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a_{n+1;m(n)+1} = 1, & (12) \\ a_{n+1,m(n)+i} = 0 \quad \text{pour } 2 \leqslant i \leqslant k, & (13) \\ a_{n+1,i} = b_i \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant m(n). & (14) \end{cases}$$

Les propriétés suivantes sont vraies : $R_1(n+1)$ à cause de (9) et (10) ; $R_2(n+1)$ à cause de (7), (8), (9) et (10) ; $R_3(n+1)$ à cause de (11) et (6) ; $H_1(n+1)$ et $H_3(n+1)$ grâce à (14) et $H'_3(n)$; $H_2(n+1)$ grâce à (12) et (13) ; $H_4(n+1)$ grâce à $H'_4(n)$ et (14).

On vérifie, dans les deux cas précédents, que la récurrence est achevée. En outre, d'après le paragraphe 3.3.1 de [6], la famille $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien une famille libre de décomposition forte de E associée à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En ajoutant des e_i de façon convenable à la famille $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on obtient une base triangulaire $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de décomposition forte de E associée à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la composante de f_n par rapport à e_n soit > 0 (en fait égale à 1). Ainsi C contient un convexe basique.

2.4.3.- Lemme

Soient, dans un espace vectoriel E, *un convexe anti-insérable* C *et un sous-espace vectoriel* F *de codimension dénombrable. S'il existe une famille* $(F_j)_{j\varepsilon J}$ *de sous-espaces vectoriels de* F *telle que :*

(1) $F = \bigoplus_{j\varepsilon J} F_j$.

(2) $\forall j \varepsilon J$, $\dim F_j = \aleph_0$.

(3) $\forall j \varepsilon J$, $C \cap F_j$ *contient un convexe basique de* F_j,

alors il existe une famille $(E_i)_{i\varepsilon I}$ *de sous-espaces vectoriels de* E *telle que :*

(1) $E = \bigoplus_{i\varepsilon I} E_i$.

(2) $\forall i \varepsilon I$, $\dim E_i = \aleph_0$.

(3) $\forall i \varepsilon I$, $C \cap E_i$ *contient un convexe basique de* E_i.

Démonstration

Le corollaire 2.3.5, le lemme 2.4.1 et les hypothèses montrent que F est $\aleph_0$-décomposable relativement au couple (C,-C) (voir 2.0.2). D'après le lemme 4.1 de [6], il en résulte que E est aussi $\aleph_0$-décomposable relativement au couple (C,-C). Ainsi il existe une famille $(E_i)_{i\varepsilon I}$ de sous-espaces vectoriels de E telle que :

1) $E = \bigoplus_{i\varepsilon I} E_i$.

2) $\forall i \varepsilon I$, $\dim E_i = \aleph_0$.

3) $\forall i \varepsilon I$, $(C \cap E_i) - (C \cap E_i) = E_i$.

Puisque, pour tout $i \varepsilon I$, $(C \cap E_i) - (C \cap E_i) = E_i$, on a, pour tout $i \varepsilon I$, $CS[C \cap E_i] = E_i$. Le théorème 2.4.2 montre alors que, pour tout $i \varepsilon I$, $C \cap E_i$ contient un convexe basique de E_i.

2.4.4.- Théorème

Soit, dans un espace vectoriel E *de dimension infinie, un convexe anti-insérable* C*. Il existe une famille* $(E_j)_{j \in J}$ *de sous-espaces vectoriels de* E *de dimension infinie dénombrable telle que :*

(1) $E = \bigoplus_{j \in J} E_j$.

(2) $\forall j \in J$, $C \cap E_j$ *contient un convexe basique de* E_j.

Démonstration

Supposons le théorème 2.4.4 faux.

Puisque C est anti-insérable, $CS[C] = E$. Soit $(g_i)_{i \in I}$ une base bien ordonnée de E telle que, pour tout $i \in I$, $g_i \in C$. Soit i_o le plus petit élément de I.

Montrons, par récurrence transfinie, qu'à chaque $\ell \in I$, on peut associer un sous-espace vectoriel E_ℓ de E tel que l'on ait (h_1) et (h_2) avec :

(h_1) : - ou bien $E_\ell = \{0\}$,

- ou bien $\dim E_\ell = \aleph_o$ et $C \cap E_\ell$ contient un convexe basique de E_ℓ,

(h_2) : la somme $\sum_{i \leq \ell} E_i$ est directe et contient g_ℓ.

La suite de la démonstration montrera que la propriété précédente est vraie pour $\ell = i_o$.

Soit maintenant $\ell \in I$. Supposons les propriétés (h_1) et (h_2) vraies pour tous les $i < \ell$ et montrons qu'elles sont vraies pour ℓ. Si $g_\ell \in \bigoplus_{i<\ell} E_i$, on choisit $E_\ell = \{0\}$.

Sinon, posons $F_\ell = \bigoplus_{i<\ell} E_i$.

F_ℓ ne peut être de codimension finie à cause du lemme 2.4.3 (quitte à ôter les E_i éventuellement réduits à $\{0\}$), car alors le théorème 2.4.4 serait vrai, ce qui contredit l'hypothèse de départ. On peut donc supposer que F_ℓ a une codimension infinie.

Construisons, par récurrence sur l'entier n, une suite libre

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs de E et une suite libre $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs de E satisfaisant aux propriétés $R_1(n)$, $R_2(n)$, $R_3(n)$, $R_4(n)$ suivantes :

$R_1(n)$: $e_n \in C$.

$R_2(n)$: la somme $F_\ell + S[\{e_1,e_2,\dots,e_{n-1}\}]$ est directe et

$$e_n \notin F_\ell + S[\{e_1,e_2,\dots,e_{n-1}\}].$$

$R_3(n)$: $f_n \in C$.

$R_4(n)$: $f_n = a_{n,1}\, e_1 + a_{n,2}\, e_2 + \dots + a_{n,n-1}\, e_{n-1} + e_n$,

les $a_{n,i}$ vérifiant les propriétés $H_1(n)$, $H_2(n)$ et $H_3(n)$ suivantes :

$$\begin{cases} H_1(n) : \ |a_{n,i}| \geq n \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n-1. \\[2ex] H_2(n) : \ \dfrac{|a_{n,i}|}{|a_{n,i+1}|+|a_{n,i+2}|+\dots+|a_{n,n-1}|+1} \geq n \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n-1. \\[2ex] H_3(n) : \ a_{n,i} \text{ est du signe de } (-1)^{n+i} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

On pose $f_1 = e_1 = g_\ell$.

Supposons $e_1,e_2,\dots e_n$, $f_1,f_2,\dots,f_n$ construits.

Soit B_n l'ensemble des n-uples $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ formés de réels vérifiant les conditions $H'_2(n)$ et $H'_3(n)$ suivantes :

$$H'_2(n) : \ \frac{|b_n|}{2} \geq n+1, \ \frac{|b_{n-1}|}{2+|b_n|} \geq n+1, \dots \ \frac{|b_1|}{2+|b_2|+|b_3|+\dots+|b_n|} \geq n+1.$$

$H'_3(n)$: b_i est du signe de $(-1)^{n+1+i}$.

Soit W l'ensemble des vecteurs $w = \sum_{i=1}^{n} b_i\, e_i$ où $(b_1,b_2,\dots,b_n) \in B_n$. Posons $S_n = S[\{e_1,e_2,\dots,e_n\}]$ et $C' = C \cap (S_n \oplus F_\ell)$ (la somme $S_n + F_\ell$ est bien directe d'après $R_2(n)$).

Distinguons deux cas :

a) $W \cap (C'-C') \neq \emptyset$.

Soit $w = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \in W \cap (C'-C')$. Il existe c'_1 et $c'_2 \in C'$ tels que $w = c'_1 - c'_2$ soit encore $c'_1 = w + c'_2$.

Puisque F_ℓ est de codimension infinie, donc aussi $S_n \oplus F_\ell$, il existe un vecteur g_k de la base précédemment définie et n'appartenant pas à $S_n \oplus F_\ell$.

On pose :

$$\begin{cases} e_{n+1} = \frac{1}{2}(c'_2 + g_k), & (1) \\ f_{n+1} = \frac{1}{2} w + e_{n+1} = \frac{1}{2}(c'_1 + g_k), & (2) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$a_{n+1,i} = \frac{1}{2} b_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n. \qquad (3)$$

$R_1(n+1)$ et $R_2(n+1)$ résultent de (1) ; $R_3(n+1)$ résulte de (2) ; $H_1(n+1)$ et $H_2(n+1)$ résultent de $H'_2(n)$ et de (3) ; $H_3(n+1)$ résulte de $H'_3(n)$ et de (3).

b) $W \cap (C'-C') = \emptyset$.

Soit $w \in W$. Puisque $C - C = E$ (d'après le lemme 2.4.1), il existe c_1 et $c_2 \in C$ tels que $w = c_1 - c_2$ avec $c_2 \notin S_n \oplus F_\ell$.

On pose :

$$\begin{cases} e_{n+1} = c_2, & (4) \\ f_{n+1} = w + e_{n+1} = c_1, & (5) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$a_{n+1,i} = b_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n. \qquad (6)$$

$R_1(n+1)$ et $R_2(n+1)$ résultent de (4) ; $R_3(n+1)$ résulte de (5) ; $H_1(n+1)$ et $H_2(n+1)$ résultent de $H'_2(n)$ et de (6) ; $H_3(n+1)$ résulte de $H'_3(n)$ et de (6).

Posons maintenant $E_\ell = S[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{e_n\}]$. D'après le mode de construction des e_n, la somme $\sum_{i\leq\ell} E_i$ est bien directe, contient g_ℓ et de plus (h_1) est bien vérifiée (voir paragraphe 3.3.1 de [6]).

Notons que pour amorcer la récurrence transfinie, on procède comme précédemment en partant de $F_{i_o} = \{0\}$. Soit maintenant $(E_j)_{j\varepsilon J}$ la sous-famille de la famille $(E_i)_{i\varepsilon I}$ composée des $E_i \neq \{0\}$. Cette famille satisfait au théorème 2.4.4. Ainsi le théorème 2.4.4 est vrai.

2.4.5.- *Théorème*

Soit, dans un espace vectoriel E *de dimension infinie, un convexe* C. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* C *soit anti-insérable est que* C *contienne un convexe basique.*

Démonstration

La condition est suffisante d'après le lemme 2.2.1.

Réciproquement, reprenons les notations de l'énoncé du théorème 2.4.4, posons $C_j = C \cap E_j$. et supposons J muni d'un bon ordre.

D'après le corollaire 2.3.5, C_j est anti-insérable dans E_j ; d'après la démonstration du théorème 2.4.2, C_j contient un convexe basique $C'_j = C[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{e^j_n, f^j_n\}]$ associé à une base $(e^j_n)_{n\varepsilon\mathbb{N}^*}$ de E_j.

Le convexe $C' = C[\bigcup_{j\varepsilon J} C'_j]$ est contenu dans C et on vérifie facilement en utilisant le théorème 3.2 de [6] que le convexe C' est un convexe basique de E associé à la base $(e^j_n)_{(j,n)\varepsilon J\times\mathbb{N}^*}$ bien ordonnée par l'ordre lexicographique sur $J \times \mathbb{N}^*$.

2.4.6.- *Corollaire*

Soit C *un convexe de l'espace vectoriel* E *de dimension infinie.* C *est anti-insérable, si et seulement si* C *contient un convexe anti-insérable, linéairement borné et algébriquement fermé.*

Démonstration

Elle résulte immédiatement du théorème 2.4.5 et du corollaire 2.3.5.

2.5.- ANTI-INSERABILITE TOPOLOGIQUE

2.5.1.- *Définition*

Dans un espace vectoriel topologique E, *on dira qu'un ensemble* $A \subset E$ *est topologiquement anti-insérable (en abrégé : T-anti-insérable) si, pour toute droite homogène* D *de* E, A *n'est pas T-D-insérable.*

2.5.2.- *Proposition*

Une partie A *d'un espace vectoriel topologique* E *est* T-*anti-insérable si et seulement si* $\overline{CS[A]}^{\sigma} = E$ *ou encore si et seulement si* $\overline{C[A-A]}^{\sigma} = E$ *ou encore si et seulement si aucune forme linéaire continue sur* E *autre que la forme linéaire nulle n'est bornée sur* A.

Démonstration

Elle résulte immédiatement de la proposition 1.1.6.

2.5.3.- *Remarque*

1) La proposition 2.5.2 étend à une partie quelconque d'un espace vectoriel topologique un résultat obtenu dans [31] pour un convexe fermé d'un espace de Banach.

2) Une partie A T-anti-insérable qui possède un point intérieur est anti-insérable (voir 1.1.14).

2.5.4.- *Théorème*

Soit A *une partie d'un espace vectoriel topologique* E. *Alors* A *est* T-*anti-insérable si et seulement si* A *ne peut être séparée, par un hyperplan fermé, d'aucun de ses translatés.*

Démonstration

Remarquons d'abord que deux parties non vides X et Y de E sont séparées par un hyperplan fermé si et seulement s'il existe $f \in E' \sim \{0\}$ tel que $0 \leq f(X-Y)$. A est donc séparé de $x+A$ si et seulement si il existe $f \in E' \sim \{0\}$ tel que $0 \leq f(x+A-A)$, c'est-à-dire tel que :

$$0 \leq f(\overline{x+C[A-A]^{\sigma}}).$$

Donc, d'après un corollaire du théorème de Hahn-Banach, A est séparée d'un de ses translatés au moyen d'un hyperplan fermé si et seulement si $\overline{C[A-A]}^{\sigma} \neq E$. On applique alors la proposition 2.5.2.

2.5.5.- <u>Corollaire</u>

Soit A *une partie d'un espace vectoriel* E. *Alors* A *est anti-insérable si et seulement si* A *ne peut être séparée d'aucun de ses translatés.*

<u>Démonstration</u>

Il suffit d'appliquer le théorème 2.5.4 à E muni de la topologie localement convexe la plus fine.

2.6.- <u>ANTI-INSERABILITE TOPOLOGIQUE DANS UN ESPACE SEMI-NORME</u>.-

2.6.1.- <u>Lemme</u>

Soient E *un espace semi-normé,* B *sa semi-boule unité (ouverte ou fermée),* A *une partie de* E *et* D *une droite homogène de* E. *Alors,* A *est* T-D-*insérable si et seulement si* $A \cup B$ *est* D-*insérable.*

<u>Démonstration</u>

La démonstration utilise le fait qu'une forme linéaire sur E est continue si et seulement si elle est bornée sur B.

2.6.2.- <u>Proposition</u>

Soient A *une partie d'un espace semi-normé* E *et* B *la semi-boule unité (ouverte ou fermée) de* E. *Alors* A *est* T-*anti-insérable si et seulement si* $A \cup B$ *est anti-insérable, c'est-à-dire si et seulement si* $C[A \cup B]$

contient un convexe basique de E.

Démonstration

La première partie est une conséquence immédiate du lemme 2.6.1 ; la deuxième partie est une conséquence du théorème 2.4.5.

2.6.3.- Théorème

Soient E *un espace semi-normé de dimension infinie et* B *sa semi-boule unité (ouverte ou fermée) ; soit* A *une partie de* E *de dimension infinie et de codimension dénombrable. Alors les assertions (i), (ii), (iii) et (iv) sont équivalentes :*

(*i*) A *est* T*-anti-insérable*

(*ii*) *Il existe une base* $(e_i)_{i\varepsilon I}$ *de* E, *contenue dans* B, *telle que* $C[A \cup (\bigcup_{i\varepsilon I} \{e_i\})]$ *contienne un convexe basique de* E.

(*iii*) *Il existe une base* $(e_i)_{i\varepsilon I}$ *de* E, *contenue dans* B, *telle que* A *soit* T*-anti-insérable dans l'espace* E *normé de telle sorte que* $CS[\bigcup_{i\varepsilon I} \{e_i\}]$ *soit boule unité de* E.

(*iv*) *Il existe une base* $(e_i)_{i\varepsilon I}$ *de* E, *contenue dans* B, *telle que, pour toute famille bornée* $(M_i)_{i\varepsilon I}$ *de nombres réels non tous nuls, l'ensemble* $\{\sum_{i\varepsilon I} (y_i\, M_i) \mid y = \sum_{i\varepsilon I} y_i\, e_i\ \varepsilon\ A\}$ *est non borné.*

Démonstration

(i) <=> (iii).

En effet, d'après le théorème 6.2 de [6], pour une partie A de E de dimension infinie et de codimension dénombrable, CS[A] est dense dans l'espace semi-normé E si et seulement s'il existe une base $(e_i)_{i\varepsilon I}$ contenue dans B telle que CS[A] soit dense dans l'espace normé admettant $CS[\bigcup_{i\varepsilon I} \{e_i\}]$ pour boule unité.

(ii) <=> (iii).

En effet, d'après la proposition 2.6.2, l'assertion (iii) est équivalente au fait que $A \cup CS[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}]$ est anti-insérable, ce qui est encore équivalent, par définition de l'insérabilité, au fait que $A \cup C[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}]$ est anti-insérable ; d'où le résultat d'après le théorème 2.4.5.

(iii) <=> (iv).

En effet, si E est normé de telle sorte que $CS[\bigcup_{i\in I} \{e_i\}]$ soit boule unité de E, une forme linéaire sur E est continue si et seulement si la famille $(f(e_i))_{i\in I}$ est bornée.

2.7.- APPLICATION.-

2.7.1.- *Théorème*

Soit A *un convexe de l'espace vectoriel topologique* E *satisfaisant à l'hypothèse* (h) :

(h) A *est* T-*anti-insérable et n'est pas anti-insérable.*

Alors il existe un translaté A_1 *de* A *disjoint de* A *et tel que* A_1 *et* A *ne puissent pas être séparés par un hyperplan fermé.*

Démonstration

Elle résulte immédiatement du théorème 2.1.3 et du théorème 2.5.4.

2.7.2.- *Remarque*

Pour des exemples de convexes fermés d'un espace de Banach satisfaisant à l'hypothèse (h), voir [28] et [31] et le 2.8.8.

2.8.- A PROPOS D'UNE QUESTION DE THORP ET WHITLEY.-

Dans [31], Thorp et Whitley demandent si tout espace de Banach contient un convexe fermé vérifiant l'hypothèse (h) du théorème 2.7.1. Le théorème 2.8.5 qui suit permet de ramener cette question à une question équivalente.

2.8.1.- Lemme

Soit, dans un espace vectoriel topologique séparé E, *un convexe fermé* A *ne contenant pas l'origine et soit* U *un cône convexe de sommet* 0, *algébriquement fermé contenant* A. *Alors* U *contient l'adhérence du cône pointé* K[A] *engendré par* A.

Démonstration

Supposons $A \neq \emptyset$ (le cas où $A = \emptyset$ est trivial).

Désignons par $\mathcal{E}(A)$ le cône asymptote de A (voir le 0.18). D'après un théorème de Choquet, on a :

$$\overline{K[A]} = K[A] + \mathcal{E}(A)$$ (voir par exemple [3] page 125, exercice 14)

Montrons que U contient $\mathcal{E}(A)$. Soit D une demi-droite d'origine 0 contenue dans $\mathcal{E}(A)$; si $a \in A$, on a $a+D \subset A$, donc $a+D \subset U$. Comme, de plus, U contient $[0,a]$ et comme U est algébriquement fermé, U contient D. De plus, U est convexe et contient K[A] et $\mathcal{E}(A)$; d'où la conclusion.

2.8.2.- Proposition

Soit, dans un espace vectoriel topologique E *métrisable et complet, un convexe fermé* A *tel que* A-A *engendre* E. *Alors* A-A *est un voisinage de* 0. *En conséquence, si* A *est* T-*anti-insérable,* A *est anti-insérable.*

Démonstration

Supposons qu'il existe un demi-espace D algébriquement fermé limité par un hyperplan H tel que $D \supset A$ et $A \cap H = \emptyset$; on peut supposer, quitte à effectuer une translation que $0 \in H$. D'après le lemme 2.8.1, on a $C = \overline{K[A]} \subset D$. Or C est un cône convexe complet tel que $C-C = E$; H est donc fermé (voir (3.4) de [25]). Chaque forme linéaire sur E telle que $f(A) \neq \mathbb{R}$ est donc continue et par suite A-A a un intérieur non vide (voir [25], théorème B) donc est un voisinage de 0 (voir [32] théorème 1.16). La dernière assertion résulte de la remarque 2.5.3.

2.8.3.- *Corollaire*

Soit, dans un espace de Banach E, *le convexe* $A = C[\{0\} \cup (\bigcup_{i\varepsilon I} \{f_i\})]$, *où* $(f_i)_{i\varepsilon I}$ *est une base de décomposition de* E *associée à une base* $(e_i)_{i\varepsilon I}$ *de* E *contenue dans la boule unité* B. *Alors* $\bar{A}$ *est anti-insérable.*

Démonstration

Il suffit d'appliquer à $\bar{A}$ la proposition 2.8.2 (voir également [6] page 90).

2.8.4.- *Remarque*

L'exemple suivant montre l'importance de l'hypothèse de completion dans la proposition 2.8.3.

Exemple : Soit E un espace vectoriel topologique séparé, non complet, ayant un hyperplan homogène H dense contenant un convexe C compact contenant O et qui engendre H (pour des exemples de tels espaces, même normés, voir [12]) Soit $x \varepsilon H$ tel que $O \notin x+C$. Le cône pointé K engendré par $x+C$ est fermé. Comme $O \varepsilon C$, $x+C$ engendre H, donc $K-K = H$. Posons $A = K + [0,e]$ où $e \varepsilon E \sim H$. A est fermé car $[0,e]$ est compact. $A-A$ engendre E. A n'est pas anti-insérable car A est dans la bande limitée par H et par $e+H$; mais A est T-anti-insérable car $A-A \supset H$.

2.8.5.- *Théorème*

Soit E *un espace vectoriel topologique métrisable complet. Alors les assertions (i) et (ii) sont équivalentes :*

(i) E *contient un convexe fermé vérifiant l'hypothèse* (h) *du théorème 2.7.1.*

(ii) E *contient un convexe fermé* C *contenant* O *et engendrant un sous-espace vectoriel dense dans* E *et différent de* E.

Démonstration

(i) => (ii).

Soit A un convexe fermé vérifiant (h). On peut prendre $C = A-a$ (a étant un point quelconque de A) : en effet, $\overline{A-A} = E$, donc $A-A$ engendre un sous-espace vectoriel dense qui n'est autre que le sous-espace vectoriel engendré par $A-a$; mais $A-A$ n'engendre pas E d'après la proposition 2.8.2.

(ii) => (i).

Soit S le sous-espace vectoriel dense de E engendré par C. Soit $x \in S \sim C$ (x existe car C est fermé et $S \neq E$) ; on a donc : $0 \notin x-C$; l'adhérence A du cône convexe engendré par $x-C$ vérifie (h) : en effet, d'après le lemme 2.8.1, on a $A \subset S$ et en outre $A-A = S$ car $A-A \supset C$.

2.8.6.- Remarque

L'implication (ii) => (i) du théorème 2.8.5 reste vraie dans un espace vectoriel topologique quelconque.

2.8.7.- Remarque

Dans tout espace semi-normé E de dimension infinie, il existe des convexes A linéairement bornés et algébriquement fermés satisfaisant à (h) : soit $(f_j)_{j \in J}$ une famille libre de décomposition de E associée à une base de E contenue dans la boule unité ; il suffit de poser $A = C[\bigcup_{j \in J} \{f_j\}]$. A n'est pas anti-insérable car $CS[A]$ est linéairement borné et A est T-anti-insérable car $\overline{CS[A]} = E$. (théorème 6.1 de [6]).

2.8.8.- Remarque : Application du théorème 2.8.5

Le théorème 2.8.5 permet de retrouver de façon élémentaire le résultat suivant déjà obtenu par Klee (voir [28]) et par Thorp et Whitley (voir [31]) à savoir que tout espace de Banach E séparable de dimension infinie contient un convexe fermé vérifiant (h) : soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite dense dans E et formée de points non nuls ; l'enveloppe convexe symétrique fermée C de l'ensemble constitué par les $\frac{e_n}{n||e_n||}$ est un compact (voir [29] page 241) ; donc C n'engendre pas E d'après le théorème de Baire ; il est clair que C engendre un sous-espace vectoriel dense dans E ; d'où la conclusion.

CHAPITRE III

HYPERCONES, COHYPERCONES ET COCONVEXES

3.0. INTRODUCTION

3.0.1.- Le paragraphe 3.1 comprend une étude du noyau de linéarité d'une partie d'un espace vectoriel (réel), étude très limitée mais suffisante pour la suite.

Le paragraphe 3.2 constitue une introduction à la notion d'hypercône ; certains résultats de Klee et Hammer y sont rappelés et utilisés avec, à chaque fois, référence aux auteurs.

Dans le paragraphe 3.3, on trouvera une caractérisation de la convexité des éléments d'un couple de parties complémentaires d'un espace vectoriel en termes de section finissante (pour un ordre total sur l'espace vectoriel et compatible) et en termes d'hypercônes en un point (théorème 3.3.2), une caractérisation des cohypercônes en un point comme des sections finissantes fermées (proposition 3.3.4), une caractérisation des cohypercônes (porposition 3.3.5) particulièrement utile pour la suite.

Dans le paragraphe 3.4, on montre le lien entre les coconvexes et les hypercônes (théorème 3.4.1) et le théorème 3.4.2 fournit, à l'aide des remarques le suivant, un procédé de construction de tous les coconvexes dans un espace vectoriel (de dimension infinie).

3.0.2.- *Remarques et rappels préliminaires*

Les espaces vectoriels sont réels.

Une partie d'un espace vectoriel E sera dite hyperconvexe si elle est convexe et si son complémentaire est convexe ($\emptyset$ et E sont hyperconvexes).

Le mot variété désigne une variété linéaire non vide.

Rappelons que, dans un espace vectoriel E, $\emptyset$ est un cône épointé de sommet tout point de E.

Les relations d'ordre sont systématiquement notées $\leq$. I étant un ensemble ordonné, une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'ensembles est dite filtrante si I est filtrant, c'est-à-dire si, pour tout $(i,j) \in I \times I$, il existe $k \in I$, k majorant i et j $(k \geq i$ et $k \geq j)$; $(A_i)_{i \in I}$ est dite croissante si $i \leq j$ implique $A_i \subset A_j$.

J étant une partie d'un ensemble préordonné I pour la relation notée $\lesssim$ (réflexive et transitive), J est dite section commençante (resp. ; finissante) de I si on a :

$$\forall (i,j) \in I \times J \text{ , } (i \lesssim j \text{ (resp. : } i \gtrsim j) \Rightarrow i \in J).$$

Remarquons que $\emptyset$ et I sont des sections commençantes et finissantes de I.

3.1. NOTION DE NOYAU DE LINEARITE

3.1.1.- Définition

On appelle noyau de linéarité d'une partie A *de l'espace vectoriel* E *et on notera* $N\ell[A]$, *l'ensemble des* $x \in E$ *tels que* $x+A = A$.

3.1.2.- Proposition

Soit A *une partie de l'espace vectoriel* E. *On a* (1) *et* (2) :

(1) *Un sous-espace vectoriel* V *de* E *est contenu dans* $N\ell[A]$ *si et seulement si* $A+V \subset A$.

(2) *Si* A *est convexe,* $N\ell[A]$ *est un sous-espace vectoriel de* E,

3.1.3.- Proposition

Si A *et* B *sont deux parties complémentaires de l'espace vectoriel* E, *alors* $N\ell[A] = N\ell[B]$.

Démonstration

Il suffit de montrer que $N\ell[A] \subset N\ell[B]$ (puisque A et B jouent des rôles symétriques). Or, si $x \in N\ell[A]$, on a $x+A = A$; mais A et B étant complémentaires, $x+A$ et $x+B$ sont complémentaires, donc $x+B$ et A sont complémentaires et par suite $x+B = B$.

3.2. NOTION D'HYPERCÔNE

3.2.1.- Définition (voir [20])

V étant une variété de l'espace vectoriel E, un convexe A de E est dit hypercône d'arête V ou hypercône en V si A est un convexe maximal (pour la relation d'ordre d'inclusion) ne rencontrant pas V.

Une partie de E est appelée hypercône si elle est hypercône en une certaine variété de E.

3.2.2.- Remarques et notation

L'existence d'un hypercône en V se montre aisément à l'aide du lemme de Zorn.

$\emptyset$ est un hypercône en E (de par la définition précédente).

Le sous-espace vectoriel parallèle à V est noté $V(0)$.

3.2.3.- Proposition

Si A est un hypercône en V de l'espace vectoriel E, on a :

(1) *(Hammer [20], théorème 3). Si* $x \in V$, *A est un cône convexe épointé de sommet* x.

(2) $A = A+V(0)$.

(3) *Si* $x \in V$, *alors* $(2x-A) \cup A = E \sim V$.

(4) *Si* $x \in V$, *alors* $(2x-A) \cap A = \emptyset$ *et le symétrique* $2x-A$ *de* A *par rapport à* x *est un hypercône en* V.

(5) *Si* $x \in V$ *et si* Δ *est une droite contenant* x *et non contenue dans* V,

$\Delta \cap A$ *est une demi-droite épointée issue de* x.

(6) *Si* $x \in V$, $A \cup V$ *est un cône convexe pointé de sommet* x.

(7) *(Hammer [20], théorème 3)* $N\ell[A] = V(0)$.

(8) *Si* $x \in V$, $\complement A = (2x-A) \cup V$ *est un cône convexe pointé de sommet* x.

Démonstration

(1) Le plus petit cône épointé de sommet x et contenant A (il est égal à $x + \bigcup_{\lambda>0} \lambda(A-x)$) est un cône convexe qui contient A et ne rencontre pas V, donc ce cône est égal à A, d'après la maximalité de A.

(2) $A+V(0)$ est convexe, contient A et ne rencontre pas V, donc $A+V(0) = A$.

(3) On peut supposer, quitte à effectuer une translation, que $x = 0$. Il suffit de montrer que, si $y \notin (-A) \cup V$, alors $y \in A$, ce qui sera acquis si on montre que $C[A \cup \{y\}]$ ne rencontre pas V ; or, si $C[A \cup \{y\}]$ rencontre V, il existe $\lambda \in]0,1[$, $a \in A$, $v \in V$ tels que $(1-\lambda)y = v - \lambda a$; or $\lambda a \in A$ (d'après le (1)), et par suite $v - \lambda a \in -A$ (d'après le (2)), donc $y \in -A$ (d'après le (1)), d'où la contradiction.

(4) Si $(2x-A) \cap A \neq \emptyset$, on voit facilement, compte tenu de la convexité de A, que $x \in A$. Le reste est immédiat.

(5) C'est une conséquence immédiate de (1) et (3).

(6) Compte tenu de (2), on montre aisément que :

$$A \cup V = (A \cup \{x\}) + V(0) ;$$

d'où le résultat, compte tenu de (1).

(7) D'après le (2) et la proposition 3.1.2, on a $V(0) \subset N\ell[A]$. Il reste à montrer que, si Δ est une droite homogène non contenue dans $V(0)$, $\Delta+A$ n'est pas contenu dans A. Or, si $x \in V$, $x+\Delta$ n'est pas contenu dans $\complement A$ (d'après (5)) ; ainsi, puisque $x \in \complement A$, $\Delta+\complement A$ n'est pas contenu dans $\complement A$, d'où il résulte que $\Delta+A$ n'est pas contenu dans A.

(8) $\complement A = (2x-A) \cup V$ d'après (3) et (4) ; $\complement A$ est donc un cône convexe pointé de sommet x d'après le (4) et le (6).

3.2.4.- Théorème

Soient A *une partie de l'espace vectoriel* E *et* V *un sous-espace vectoriel de* E. *Alors les assertions* (1) *et* (2) *sont équivalentes* :

(1) A *est un hypercône en* V.

(2) A *est convexe et* $A \cup -A = E \sim V$.

Démonstration

(1) => (2)

C'est une conséquence du (3) de la proposition 3.2.3.

(2) => (1).

A ne rencontre pas V. Il reste à montrer la maximalité de A ; or, si $y \in E \sim A$, $C[A \cup \{y\}]$ rencontre V : si $y \in V$, c'est clair ; sinon $-y \in A$ (par hypothèse), donc $0 = -\frac{y}{2} + \frac{y}{2} \in C[A \cup \{y\}]$.

3.2.5.- Remarque

Le résultat précédent a été obtenu par Klee dans [26], pour les hypercônes en un point.

3.2.6.- Corollaire

Soient A *une partie de l'espace vectoriel* E *et* V *une variété de* E. *Alors les assertions* (1), (2) *et* (3) *sont équivalentes* :

(1) A *est un hypercône en* V.

(2) A *est convexe et il existe* $x \in V$ *tel que* $A \cup (2x-A) = E \sim V$.

(3) A *est convexe et, pour tout* $x \in V$, *on a* $A \cup (2x-A) = E \sim V$.

3.2.7.- Proposition

(1) Si l'espace vectoriel E *est somme directe des sous-espaces vectoriels* F *et* G *de* E *et si* A *est un hypercône en* V *dans l'espace vectoriel* F, *alors* A+G *est un hypercône en* V+G *dans* E.

(2) Soit F *un sous-espace vectoriel de* E *et soit* p *l'application canonique de* E *sur l'espace vectoriel quotient* E/F. *Alors on a* (a) *et* (b) :

(a) *Si* A *est un hypercône en* V *de* E *et si* $V(0) \supset F$, *alors* $p(A)$ *est un hypercône en* $p(V)$ *de* E/F.

(b) *Si* A *est un hypercône en* V *de* E/F, *alors* $p^{-1}(A)$ *est un hypercône en* $p^{-1}(V)$ *de* E.

Démonstration

C'est une conséquence du corollaire 3.2.6.

Le (2) est une généralisation (facile) d'un résultat déjà vu par Hammer.

3.2.8.- Théorème

Soient A *et* B *deux parties complémentaires de l'espace vectoriel* E *et soit* $x \in E$. *Alors les assertions (1) et (2) sont équivalentes :*

(1) A *est un hypercône dont l'arête contient* x.

(2) A *est un cône convexe épointé de sommet* x *et* B *est convexe.*

Démonstration

(1) => (2).

C'est une conséquence du (1) et du (8) de la proposition 3.2.3.

(2) => (1).

On peut supposer que $x = 0$. On va montrer que $A \cup (-A) = E \sim N\ell[A]$, ce qui assurera la conclusion d'après le théorème 3.2.4.

Montrons d'abord que $A \cup (-A) \subset E \sim N\ell[A]$. Comme $0 \in B$, B contient $0 + N\ell[B] = N\ell[A]$ (proposition 3.1.3) ; donc A ne rencontre pas $N\ell[A]$ et par raison de symétrie $-A$ non plus.

Montrons maintenant, par l'absurde, que $A \cup (-A) \supset E \sim N\ell[A]$.

Soit $y \in E \sim N\ell[A]$ avec $y \notin A \cup (-A)$. Le complémentaire de $A \cup (-A)$ étant un cône symétrique, la droite homogène Δ contenant y est donc dans B ; B étant un cône convexe (par hypothèse), B contient donc $B+\Delta$; donc

d'après le (1) de la proposition 3.1.2, on a $\Delta \subset N\ell[B]$ *et par suite* $\subset N\ell[A]$;
d'où la contradiction.

3.2.9.- <u>Définition</u>

Dans l'espace vectoriel E, *on appelle cohypercône une partie de* E *complémentaire d'un hypercône.* V *étant une variété de* E, *une partie* B *de* E *est appelée cohypercône en* V *ou cohypercône d'arête* V *si* B *est le complémentaire dans* E *d'un hypercône* A *en* V. A *et* B *sont alors dits hypercône et cohypercône associés.*

Si A *et* B *sont deux convexes complémentaires dans* E *et tels qu'aucun ne soit hypercône,* A *(resp. :* B*) est appelé coconvexe ;* A *et* B *sont dits coconvexes associés.*

Si A *est un hypercône en* V, A *et l'hypercône* 2V-A *(voir* (4) *et* (7) *de la proposition* 3.2.3*) sont dits hypercônes associés (en particulier* $\emptyset$ *et* $\emptyset$ *sont deux hypercônes associés).*

Deux hyperconvexes seront dits associés s'ils sont hypercônes associés, ou hypercône et cohypercône associés ou coconvexes associés.

3.2.10.- <u>Proposition</u>

Soient A *et* B *deux convexes de l'espace vectoriel* E *et* V *une variété de* E. *Alors les assertions (1) et (2) sont équivalentes :*

(1) A *et* B *sont des hypercônes associés d'arête* V.

(2) $A \cup B = E \sim V$.

<u>Démonstration</u>

(1) => (2).

C'est une conséquence du corollaire 3.2.6.

(2) => (1)

Cette implication résulte également du corollaire 3.2.6 compte tenu du fait que, si $x \in V$, toute droite Δ passant par x et non contenue dans

V est telle que $\Delta \sim \{x\}$ est réunion de deux demi-droites épointées issues de x dont l'une est dans A et l'autre dans B.

3.3.- *HYPERCÔNES ET RELATION D'ORDRE TOTAL COMPATIBLE*

3.3.1.- *Proposition* (voir [19], page 307)

Soit E *un espace vectoriel muni d'une relation d'ordre (notée* $\leq$*) compatible (c'est-à-dire que* E *est un espace vectoriel ordonné).* $\leq$ *est une relation d'ordre total si et seulement si le cône des éléments* ≥ 0 *est un co-hypercône en* 0 *ou encore si et seulement si le cône des éléments* > 0 *(c'est-à-dire* ≥ 0 *et* $\neq 0$*) est un hypercône en* 0.

3.3.2.- *Théorème*

Soient A *et* B *deux parties complémentaires de l'espace vectoriel* E. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) A *et* B *sont convexes.*

(2) Il existe sur E *une relation d'ordre total compatible telle que, pour tout* $x \in A$ *et pour tout* $y \in B$, $x > y$.

(3) Il existe un hypercône S *d'arête* 0 *tel que* $A = \bigcap_{x \in B} (x+S)$.

(4) Il existe un hypercône S *d'arête* 0 *tel que* $A+S \subset A$.

(5) Il existe sur E *une relation d'ordre total et compatible telle que* A *soit une section finissante (c'est-à-dire telle que* A *vérifie :* $\forall (a,y) \in A \times E$, $(y \geq a \Rightarrow y \in A)$).

(6) Il existe un cohypercône S_o *d'arête* 0 *tel que* $A+S_o = A$.

Démonstration

(1) => (2).

Le résultat est connu : c'est une conséquence du théorème 2.4 de [27].

(2) => (1).

Montrons que A est convexe (la démonstration est analogue pour B). Raisonnons par l'absurde. S'il existe a_1 et $a_2 \in A$ $(a_1 \neq a_2)$ et

$z \in]a_1\ a_2[\cap B$, il existe un réel $\lambda < 0$ tel que $a_1 - z = \lambda(a_2 - z)$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $a_1 - z > 0$ et $a_2 - z > 0$.

(1) => (3).

C'est le corollaire 5 de [18].

(3) => (1).

A est, de toute évidence, convexe. De plus, si on pose $S_o = S \cup \{0\}$, $B = \bigcup_{x \in B} (x - S_o)$ (d'après le (8) de la proposition 3.2.3) ; or la famille des $x - S_o$ $(x \in E)$ est totalement ordonnée par inclusion : en effet, si x' et x'' sont deux éléments de E et si on a $x' \leqslant x''$ (E étant muni de la relation d'ordre total compatible telle que S soit le cône des éléments > 0 (voir proposition 3.3.1)), alors $x' - S_o \subset x'' - S_o$ car $x' - S_o$ (resp. : $x'' - S_o$) est l'ensemble des minorants de x' (resp. : x''). Il en résulte que B est convexe.

(3) => (4).

On a :

$$A+S = \left(\bigcap_{x \in B} (x+S)\right) + S \subset \bigcap_{x \in B} (x+S+S).$$

Or, $S+S = S$, car S est un cône convexe (de sommet 0) ; d'où la conclusion.

(4) <=> (5).

Cela résulte de la proposition 3.3.1 et du fait que, E étant ordonné de la même façon que dans la démonstration de l'implication ((3) => (1)), $A+S = \bigcup_{x \in A} (x+S)$ est l'ensemble des majorants stricts d'au moins un élément de A ; donc l'inclusion $A+S \subset A$ équivaut au fait que A est une section finissante.

(4) <=> (6).

En effet on a $A+S \subset A$ si et seulement si $A+S_o = A$.

(6) => (1).

On a $A = \bigcup_{x \in A} (x+S_o)$, d'où $B = \bigcap_{x \in A} (x-S)$; il suffit alors d'appliquer l'implication ((3) => (1)).

3.3.3.- *Remarques*

1) Compte tenu de la démonstration de l'implication ((3) => (4)) et de l'équivalence ((4) <=> (6)) et par complémentarité, on voit facilement que si A et B sont des parties complémentaires de E et si S est un hypercône en 0 de E, les 6 assertions suivantes sont équivalentes : $A = \bigcap_{x \in B} (x+S)$, $A = A+S_o$, $A \supset A+S$, $B \supset B-S$, $B = \bigcap_{x \in A} (x-S)$, $B = B-S_o$.

2) D'après le ((1) <=> (6)) du théorème 3.3.2, la somme d'un hyperconvexe et d'un convexe quelconque est un hyperconvexe.

3.3.4.- *Proposition*

Soient A *une partie de l'espace vectoriel* E *et* $x \in E$. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) A *est un cohypercône en* x.

(2) Il existe un hypercône S *en* 0 *tel que* $A+S \subset A$ *et* $A \sim (A+S) = \{x\}$.

(3) Il existe sur E *une relation d'ordre total compatible telle que* A *soit une section finissante fermée (c'est-à-dire une section finissante ayant un plus petit élément) de plus petit élément* x.

Démonstration

Posons $B = \complement A$.

(1) => (2).

Il existe un hypercône S en 0 tel que $A = x+S_o$ (rappelons que $S_o = S \cup \{0\}$) et $B = x-S$; il est clair que $A+S \subset A$.

D'autre part $A \sim (A+S) = (x+S_o) \sim (x+S_o+S) = \{x\}$.

(3) => (1).

Si S désigne l'hypercône en 0 des éléments > 0 (voir proposition 3.3.1), A s'écrit sous la forme $A = x+S_o = \complement(x-S)$.

(2) <=> (3).

Cela résulte du fait que si S est un hypercône en 0, on a

($A+S \subset A$ et $A+S \neq A$) si et seulement si A est une section finissante fermée (dans E muni de l'ordre pour lequel S est le cône des éléments > 0) car l'existence d'un plus petit élément dans A équivaut à $A \cap \complement(A+S) \neq \emptyset$ ($\complement(A+S)$ étant l'ensemble des minorants de A).

La caractérisation d'un cohypercône en un point au moyen de la proposition 3.3.4 a un analogue permettant de caractériser un cohypercône d'arête quelconque. Plus précisément on a :

3.3.5.- Proposition

Pour une partie A *de l'espace vectoriel* E *les assertions (1) et (2) sont équivalentes :*

(1) A *est un cohypercône*

(2) Il existe un hypercône D *en* $N\ell[A]$ *tel que* $A+D \subset A$ *et* $A+D \neq A$.

Démonstration

Le résultat s'obtient à partir de l'équivalence ((1) <=> (2)) de la proposition 3.3.4 et en utilisant le (2) de la proposition 3.2.7.

3.3.6.- Remarque

A désignant un cohypercône de l'espace vectoriel E, on a, avec les notations de la proposition précédente :

1) Si V est l'arête de A, alors $V = A \sim (A+D)$ (le raisonnement est le même que dans la proposition 3.3.4).

2) B étant l'hypercône associé à A, $B-D = B$ (l'inclusion $B-D \subset B$ s'obtient facilement à partir de l'inclusion $A+D \subset A$; on a en outre $B-D = B$ sinon B serait cohypercône en une variété parallèle à V (d'après la proposition 3.3.5 et le (7) de la proposition 3.2.3) donc nécessairement égale à V (d'après le (5) de la proposition 3.2.3).

3) D est unique ; plus généralement, si U est une partie non vide de E et si D et D_1 sont des hypercônes en $N\ell[U]$ tels que $U+D \subset U$ et $U+D_1 \subset U$, alors $D = D_1$: en effet, si $D \neq D_1$, on voit facilement, en utilisant le (5) de la proposition 3.2.3, que $D+D_1$ contient une droite homogène Δ non contenue dans $N\ell[U]$; mais comme $U+D+D_1 \subset U$, on a $U+\Delta \subset U$ et Δ serait située dans $N\ell[U]$ (d'après le (1) de la proposition 3.1.2).

4) B étant l'hypercône associé à A, on a $B+V = -D$: en effet, d'après le 2), $B+V - D \subset B+V$; d'où le résultat d'après 3) et compte tenu du fait que $B+V$ est un hypercône en $N\ell[A]$.

3.4.- CARACTERISATION DES COCONVEXES ET CONSTRUCTION DE COCONVEXES

A l'aide de la proposition 3.3.5, on obtient la caractérisation suivante des coconvexes en termes d'hypercônes :

3.4.1.- Théorème

Soient A *et* B *deux parties complémentaires de l'espace vectoriel* E. *Alors les assertions (1) et (2) sont équivalentes :*

(1) A *est un coconvexe.*

(2) Il existe un hypercône D *en* $N\ell[A]$ *tel que* $A+D = A$ *et* $B-D = B$

Démonstration

(1) => (2).

L'existence d'un hypercône D en $N\ell[A]$ tel que $A+D \subset A$ et $B-D \subset B$ s'obtient à l'aide du (2) de la proposition 3.2.7, de l'équivalence ((1) <=> (4)) du théorème 3.3.2 et de la remarque 3.3.3. Les inclusions précédentes sont en fait des égalités d'après la proposition 3.3.5.

(2) => (1).

Cela résulte du 3) de la remarque 3.3.6 et de la proposition 3.3.5.

Nous allons maintenant construire des coconvexes dans tout espace vectoriel de dimension infinie (théorème 3.4.2 et 2) de la remarque 3.4.3) et nous obtiendrons par la même occasion une nouvelle caractérisation des coconvexes (théorème 3.4.2 et 1) de la remarque 3.4.3).

3.4.2.- Théorème

Soit $E = \varinjlim E_i$ *(c'est-à-dire que* $(E_i)_{i\in I}$ *est une famille filtrante croissante de sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel* E *et telle que* $E = \bigcup_{i\in I} E_i$*). Soient, pour tout* $i \in I$, A_i *et* B_i *deux convexes complémentaires de* E_i *dont l'un est un hypercône d'arête* V_i.

On suppose que, si $j \leq i$*, on a* $A_j \subset A_i$ *et* $B_j \subset B_i$*. Alors, on a (1) et (2) :*

(1) Une condition nécessaire et suffisante pour que $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ *et* $B = \bigcup_{i\in I} B_i$ *soient des coconvexes associés de* E *est que, pour tout* $i \in I$, $\bigcap_{j\geq i} V_j = \emptyset$.

(2) S'il en est ainsi, en désignant par P_i *et* Q_i *les hypercônes d'arête* V_i *de* E_i *respectivement contenus dans* A_i *et* B_i*, on a* $A = \bigcup_{i\in I} P_i$ *et* $B = \bigcup_{i\in I} Q_i$.

Démonstration

(1) A et B sont complémentaires car $E = \bigcup_{i\in I} E_i$. De plus A et B sont convexes car les familles $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ sont filtrantes croissantes.

Supposons qu'il existe $k \in I$ tel que $\bigcap_{i\geq k} V_i \neq \emptyset$. Soit $d \in \bigcap_{i\geq k} V_i$. Alors $d \in E_k$. Supposons, par exemple, que $d \in B_k$. Pour tout $i \geq k$, on a $d \in B_i$ et $d \in V_i$ et par suite B_i est un cône pointé de sommet d (voir (8) de la proposition 3.2.3). Or on a, par hypothèse, $B = \bigcup_{i\geq k} B_i$; B est donc un cône pointé de sommet d ; B est donc un cohypercône d'après le théorème 3.2.8. Réciproquement, supposons, par exemple, que A est un hypercône. Alors B est un cône pointé de sommet d (voir (8) de la proposition 3.2.3). Soit $k \in I$ tel que $d \in E_k$. Alors, pour tout $i \geq k$, $d \in B_i$ car on a $E_k \subset E_i$ et car $d \notin A_i$ (sinon d serait dans A). Il en résulte que $d \in \bigcap_{i\geq k} V_i \neq \emptyset$.

(2) Il est clair que $A \supset \bigcup_{i\varepsilon I} P_i$. Montrons que $A \subset \bigcup_{i\varepsilon I} P_i$. Si $x \varepsilon A$, alors $x \varepsilon A_k$ pour un certain k de I. Si $x \varepsilon P_k$, la conclusion est assurée ; sinon, on a $x \varepsilon V_k$; comme $x \notin \bigcap_{j \geq k} V_j$ (d'après (1)), il existe $j \varepsilon I$ tel que $x \notin V_j$; or $x \varepsilon A_k \subset A_j$, donc $x \varepsilon P_j$; d'où la conclusion.

3.4.3.- Remarque

Supposons E de dimension infinie et considérons E comme limite inductive de tous ses sous-espaces vectoriels E_i $(i\varepsilon I)$ de dimension finie. Alors ;

1) Soient A un coconvexe de E et B le coconvexe associé. Posons, pour tout $i \varepsilon I$, $A_i = A \cap E_i$ et $B_i = B \cap E_i$. A_i (resp. : B_i) est alors un hypercône ou un cohypercône de E_i car, dans un espace vectoriel de dimension finie, tout convexe dont le complémentaire est convexe est un hypercône ou un cohypercône ([20]), théorème 3). On a donc, d'après le théorème 3.4.2 et avec les notations de ce théorème $A = \bigcup_{i\varepsilon I} P_i$.

2) Pour construire effectivement des coconvexes, il suffit de choisir A_i et B_i de E_i de la façon suivante : si E_i est de dimension paire, on prend pour V_i l'origine ; si E_i est de dimension impaire, on prend pour V_i une variété de E_i ne contenant pas 0. La famille des V_i vérifie bien l'hypothèse du (1) du théorème 3.4.2 (compte tenu de la dimension finie de E), donc le procédé constructif contenu dans le (2) de ce théorème s'applique.

CHAPITRE IV

STRUCTURE GEOMETRIQUE D'UN HYPERCONVEXE

4.0. INTRODUCTION

4.0.1.- Le paragraphe 4.1 de ce chapitre est consacré à l'étude des classes de Klee d'un convexe A non vide ; il est à noter que les parties extrémales de A s'expriment simplement comme sections commençantes de A pour l'ordre de Klee (proposition 4.1.4).

Les résultats centraux du paragraphe 4.2 sont le théorème 4.2.3 et la proposition 4.2.5 ; les hypercônes et les coconvexes y apparaissent comme réunion de demi-espaces algébriquement ouverts (dans les variétés qu'ils engendrent) satisfaisant à certaines conditions.

Le paragraphe 4.3 fournit la structure géométrique de l'hypercône attaché à un coconvexe (proposition 4.3.3).

Le paragraphe 4.4 est une application de ce qui précède à l'étude des parties extrémales d'un hyperconvexe.

4.0.2.- Remarquons que l'ensemble $\{A_i\}_{i\in I}$ (les A_i étant tous distincts) est muni d'une relation d'ordre (notée $\leqslant$) si et seulement si l'ensemble I des indices est muni d'une relation d'ordre (encore notée $\leqslant$) ; en effet, si i et $j \in I$, il suffit de poser :

$$j \leqslant i \iff A_j \leqslant A_i.$$

4.1. CLASSES DE KLEE D'UN CONVEXE NON VIDE

4.1.1.- *Rappels* (Klee [26], page 56).

Soit A un ensemble convexe non vide. La relation $\lesssim$ définie sur A par :

$$x \lesssim y \iff \exists z \in A,\ [x,y] \subset [x,z[$$

est une relation de préordre sur A ($\lesssim$ est réflexive et transitive). La relation $\equiv$ définie sur A par :

$$x \equiv y \iff x \lesssim y \text{ et } y \lesssim x$$

est alors une relation d'équivalence sur A.

Les classes d'équivalence de A pour la relation précédente sont convexes et seront appelées classes de Klee de A ou encore classes de A.

La relation de préordre sur A induit une relation d'ordre, notée $\leq$, sur l'ensemble des classes de Klee de A ; plus précisément, si ξ et η sont les classes respectives de x et y, on a :

$$\xi \leq \eta \iff x \lesssim y.$$

La relation d'ordre précédente est appelée relation d'ordre de Klee.

4.1.2.- *Proposition*

Soient A *un ensemble convexe non vide de l'espace vectoriel* E *et* Σ *l'ensemble des classes de* A. *On a (1), (2) et (3) :*

(1) Toute classe η *de* A *est convexe et* $\eta = \mathrm{ir}[\eta]$.

(2) ξ *et* η *étant deux classes de* A, *on a les deux équivalences suivantes :*

$$\xi \leq \eta \iff \xi \subset \mathrm{lin}\ \eta.$$

$$\xi < \eta \iff \xi \subset (\mathrm{lin}\ \eta) \sim \eta.$$

(3) *Si* η *est une classe de* A, *alors*

$$A \cap L[\eta] = \bigcup_{\xi \varepsilon \sum, \xi \leq \eta} \xi$$

et $L[\eta]$ *est une variété d'appui de* A *(c'est-à-dire que* $A \sim L[\eta]$ *est convexe).*

Démonstration

(1) Montrons que $\eta = ir[\eta]$. Soit x un point de η et soit D une droite de $L[\eta]$ contenant x. Puisque η engendre $L[\eta]$, il existe une variété V de dimension finie contenant D et telle que $\eta \cap V$ engendre V. $\eta \cap V$ admet un internat non vide dans V (voir [15], théorème 4). De plus, $\eta \cap V$ est formé de points équivalents dans A, donc aucun point y de la frontière de $\eta \cap V$ dans V (muni de la topologie canonique) n'est dans A (car si z est dans l'internat de $\eta \cap V$ dans V, et si $y \varepsilon \eta \cap V$, la demi-droite $\Delta = \Delta([z \rightarrow y)$ serait telle que $\Delta \cap (\eta \cap V) = [z,y]$ (d'après le théorème 1.11 de [32]) ; d'où la contradiction). Par suite $\eta \cap V$ est algébriquement ouvert dans V ; d'où la conclusion compte tenu du fait que $x \varepsilon (\eta \cap V) \cap D$ et que $D \subset V$.

(2) La démonstration est immédiate.

(3) Posons

$$S_\eta = \bigcup_{\xi \varepsilon \sum, \ \xi \leq \eta} \xi \ .$$

On a $S_\eta \subset A \cap L[\eta]$ d'après le (2).

Réciproquement, si $x \varepsilon A \cap L[\eta]$, alors x appartient à une certaine classe de A qui est $\leq \eta$ d'après le (1).

Montrons que $L[\eta]$ est une variété d'appui de A.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $A \sim L[\eta]$ est non convexe. Il existe deux points a et b de $A \sim L[\eta]$ tels que $]a,b[$ contienne un point c de $A \cap L[\eta]$ donc de S_η. Or tout point de $]a,b[$ est manifestement équivalent (dans A) à c, et par suite $]a,b[$ est contenu dans S_η. On en déduit, puisque $S_\eta \subset L[\eta]$, que $[a,b] \subset L[\eta]$, d'où la contradiction.

Nous allons maintenant exprimer une partie extrémale d'un convexe en termes de classes de Klee.

4.1.3.- Définition

Soit A *une partie de l'espace vectoriel* E. *Une partie* F *de* A *est dite partie extrémale de* A *si :*

$$\forall(x,y) \in A^2, \; ( ]x,y[\cap F \neq \emptyset \Rightarrow x\in F \text{ et } y\in F)$$

($\emptyset$ est une partie extrémale de A*).*

4.1.4.- Proposition

Soient A *un convexe non vide de l'espace vectoriel* E *et* Σ *l'ensemble des classes de* A. *Alors, pour toute partie* F *de* A, *les assertions (1), (2) et (3) sont équivalentes :*

(1) F *est une partie extrémale de* A.

(2) F *est réunion des éléments d'une section commençante de* Σ *(donc, en particulier, une réunion de classes de* A*).*

(3) F *est une section commençante de* A *(pour* $\leqslant$*)*

Démonstration

(1) => (3).

Il suffit de montrer que, si x et y vérifient $y \in F$, $x \in A$ et $x \leqslant y$, alors $x \in F$; ce qui est immédiat.

(3) => (1).

Si x et y sont deux éléments de A tels que $]x,y[\cap F \neq \emptyset$, on a, en désignant par z un point de $]x,y[\cap F$, $x \leqslant z$ et $y \leqslant z$; d'où la conclusion.

(2) <=> (3).

C'est évident.

4.2. CARACTERISATION GEOMETRIQUE DES HYPERCONVEXES

La proposition suivante met en évidence certaines propriétés des classes d'un hyperconvexe. La technique utilisée dans la démonstration de cette proposition est analogue à celle utilisée par Klee dans le (2.4) de [26] pour étudier la structure des hypercônes en un point.

4.2.0.- Lemme

Soit A *un hyperconvexe. Si* x *et* y *sont deux points distincts de* A, *alors* $\Delta([x \to y\ )$ ou $\Delta([y \to x\ )$ *est dans* A.

Démonstration

Cela résulte du fait que $\Delta \cap A$ et $\Delta \cap \complement A$ sont des convexes complémentaires de la droite $\Delta = \Delta(x,y)$.

4.2.1.- Proposition

Soient, dans l'espace vectoriel E, A *et* B *deux convexes non vides et complémentaires. Désignons par* $\sum$ *l'ensemble des classes de* A. *On a :*

(1) $\sum$ *est totalement ordonné.*

(2) Toute classe η *de* A *est un demi-espace de* $L[\eta]$ *algébriquement ouvert sauf si* A *est un cohypercône en* η *; si* A *n'est pas un cohypercône en* η, $T_\eta = \bigcup_{\xi \in \sum,\ \xi < \eta} \xi$ *est un convexe de l'hyperplan* H_η *de* $L[\eta]$ *bordant* η.

(3) Si η *est une classe de* A *et si* A *n'est pas un cohypercône en* η, *le demi-espace* η^* *de* $L[\eta]$ *algébriquement ouvert et associé à* η *(voir définition 3.2.9) est une classe de* B.

<u>Démonstration</u>

(1) Soient ξ et η deux classes de A, $x \in \xi$ et $y \in \eta$. On a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ d'après le lemme 4.2.0, d'où la conclusion.

(2) Soit $\eta \in \sum$.

Montrons que $\eta = L[\eta]$ si et seulement si A est un cohypercône en η.

Si A est un cohypercône en η, η est une classe de A d'après le (5) de la proposition 3.2.3 car un point de A non situé dans η ne peut être équivalent à un point de η. Réciproquement, supposons que $\eta = L[\eta]$. Si $x \in \eta$ et si Δ est une droite passant par x et non contenue dans $L[\eta]$ alors, compte tenu du fait que η est une classe de A et de la complémentarité de A et B, on voit facilement que $\Delta \cap (A \sim \eta)$ est une demi-droite épointée issue de x ; d'où la conclusion d'après le théorème 3.2.8.

Supposons maintenant que A n'est pas un cohypercône en η, donc que $\eta \neq L[\eta]$. η est algébriquement ouvert dans $L[\eta]$ (d'après le (1) de la proposition 4.1.2) ; par suite $\text{lin}\,\eta \neq L[\eta]$ (voir [32], théorème 1.1.4). S_η est distinct de $L[\eta]$ car on a $S_\eta \subset \text{lin}\,\eta \neq L[\eta]$ (d'après le (2) de la proposition 4.1.2). D'après le théorème de Hahn-Banach (par exemple), il existe dans $L[\eta]$ un hyperplan H_η séparant $S_\eta = A \cap L[\eta]$ (voir le (3) de la proposition 4.1.2) et $B \cap L[\eta]$ tel que η soit situé dans un demi-espace D_η algébriquement ouvert de $L[\eta]$ limité par H_η (d'après le théorème 2.7 de [32]) ; les points de D_η étant des points de $A \cap L[\eta]$ équivalents (dans A) aux points de η, on a donc $D_\eta = \eta$. De plus, comme T_η et η sont disjoints et comme $T_\eta \cup \eta = S_\eta \subset H_\eta \cup \eta$, on a donc $T_\eta = H_\eta \cap S_\eta$; d'où la conclusion.

(3) Comme $S_\eta = A \cap L[\eta] \subset H_\eta \cup \eta$, η^* est donc dans $B \cap L[\eta]$ et par suite dans B. Soit η_1 la classe de $\bar{B}$ contenant η^* ; montrons que $\eta_1 = \eta^*$. η_1 n'est pas une variété (sinon η_1 contiendrait η), donc le demi-

espace η_1^* de $L[\eta_1]$ algébriquement ouvert et associé à η_1 existe et est contenu dans A. On voit facilement que $\eta_1^* \supset \eta$; or η_1^* est formé de points équivalents dans A, donc $\eta_1^* = \eta$ et par suite $\eta_1 = \eta^*$.

4.2.2.- Lemme

Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ *un ensemble totalement ordonné (pas forcément par inclusion) de convexes de l'espace vectoriel* E *coïncidant avec leurs internats relatifs et tel que* $A_i \subset \text{lin } A_j$ *si* $i < j$ $(i,j \in I)$. *Alors* $\bigcup_{i\in I} A_i$ *est convexe.*

Démonstration

Elle est élémentaire.

Le théorème suivant fournit une caractérisation d'un hyperconvexe en termes de demi-espaces.

4.2.3.- Théorème

a.- Soient un ensemble $\{V_i\}_{i\in I}$ *non vide totalement ordonné par inclusion de variétés de dimension* ≥ 1 *d'un espace vectoriel* E *et, pour tout* $i \in I$, *un hyperplan* H_i *de* V_i *vérifiant (i) et (ii) :*

(i) Pour tout $x \in E \sim \bigcap_{i\in I} H_i$, *il existe* $i \in I$ *tel que* $x \in V_i \sim H_i$.

(ii) Pour tout $i \in I$ *et pour tout* $j \in I$ *avec* $j < i$ *(voir 4.0.2), on a* $V_j \subset H_i$.

Alors, en désignant par A_i *et* B_i *les deux demi-espaces de* V_i *algébriquement ouverts limités par* H_i *et en posant* $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ *et* $B = \bigcup_{i\in I} B_i$, *on a (1), (2) et (3) :*

(1) Si $\bigcap_{i\in I} H_i \neq \emptyset$, A *et* B *sont deux hypercônes associés d'arête* $\bigcap_{i\in I} H_i$.

(2) Si $\bigcap_{i\in I} H_i = \emptyset$, A *et* B *sont deux coconvexes associés de* E, *et on a* $N\ell[A] = N\ell[B] = \bigcap_{i\in I} H_i(0)$.

(3) *Les* A_i *(resp. : les* B_i*) sont les classes de* A *(resp. : de* B*) et l'ordre total sur l'ensemble* $\{A_i\}_{i\in I}$ *obtenu à partir de l'ordre total sur* I *est l'ordre de Klee sur l'ensemble des classes de* A.

b.- Réciproquement, si A *et* B *sont deux hypercônes non vides (resp. : deux coconvexes) associés d'un espace vectoriel* E, *ils sont du même type que ceux rencontrés en (1) (resp. : (2)).*

Démonstration

a.- A et B sont convexes d'après (ii) et lemme 4.2.2. A et B sont disjoints car, pour tout $(i,j) \in I^2$, $A_i \cap B_j = \emptyset$ (d'après (ii)).

Montrons (3).

Les A_i sont les classes de A car chaque A_i est formé de points équivalents dans A et car si $j < i$ (i et $j \in I$), on a $A_j \subset H_i$ (et par suite un point de A_j n'est pas équivalent à un point de A_i).

De même les B_i sont les classes de B.

Enfin le reste de l'assertion (3) résulte du fait que si $(i,j) \in I^2$, on a $i \leq j$ si et seulement si $A_i \subset \operatorname{lin} A_j$ (d'après (ii)).

Avant de montrer que l'on a (1) et (2), montrons que l'on a :

$$A \cup B = E \sim \bigcap_{i\in I} H_i \qquad \text{(I)}$$

Si $x \in A$ (resp. : B), il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ (resp. : B_i), donc $x \notin H_i$. Réciproquement, si $x \notin \bigcap_{i\in I} H_i$, d'après (i), il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i \cup B_i$.

Montrons (1).

Soit $x \in \bigcap_{i\in I} H_i$. Pour tout $i \in I$, $x \in H_i$, donc $B_i = 2x - A_i$ et par suite $B = 2x - A$. On en déduit que $A \cup B = A \cup (2x-A)$, donc, d'après (I), que $A \cup (2x-A) = E \sim \bigcap_{i\in I} H_i$; il suffit alors d'appliquer le corollaire 3.2.6.

Montrons (2).

A et B sont des convexes complémentaires non vides et aucun d'eux n'admet pour classe une variété ; A et B sont donc des coconvexes associés d'après le (2) de la proposition 4.2.1.

Montrons que $N\ell[A] = N\ell[B] = \bigcap_{i\varepsilon I} H_i(0)$.

D'après la proposition 3.1.3, il suffit de montrer que $N\ell[A] = \bigcap_{i\varepsilon I} H_i(0)$. Or, pour tout $j \varepsilon I$, on a, d'après la proposition 3.1.2, $(\bigcap_{i\varepsilon I} H_i(0)) + A_j \subset A_j$ car $N\ell[A_j] = H_j(0)$; d'où, d'après la proposition 3,1.2, $\bigcap_{i\varepsilon I} H_i(0) \subset N\ell[A]$. Réciproquement si $i \varepsilon I$ et si Δ est une droite homogène contenue dans $N\ell[A]$ on a $A_i + \Delta \subset A_i$: en effet, on a $A_i + \Delta \subset A$ (par hypothèse) et $A_i + \Delta$ est, d'une part, formée de points équivalents dans A et, d'autre part, rencontre A_i. L'inclusion $A_i + \Delta \subset A_i$ montre alors que $\Delta \subset N\ell[A_i] = H_i(0)$.

b.- Soient A et B deux hypercônes associés ou deux coconvexes associés et soit $I = \sum$ l'ensemble des classes de A ; I est totalement ordonné (d'après le (1) de la proposition 4.2.1).

Si $\eta \varepsilon I$, on pose $V_\eta = L[\eta]$, $A_\eta = \eta$ et $B_\eta = \eta^*$. L'ensemble $\{V_i\}_{i\varepsilon I}$ est alors totalement ordonné par inclusion car si i et $j \varepsilon I$ avec $i < j$, on a $V_i \subset V_j$ et $V_i \neq V_j$ (d'après le (2) de la proposition 4.2.1). On a $A = \bigcup_{\eta\varepsilon\sum} A_\eta$ (de façon évidente) et $B = \bigcup_{\eta\varepsilon\sum} B_\eta$ (d'après le (3) de la proposition 4.2.1).

Montrons que (i) est vérifié. Pour cela, il suffit de montrer que, si $x \notin \bigcap_{\eta\varepsilon\sum} H_\eta$, alors $x \varepsilon A_\eta$ ou $x \varepsilon B_\eta$ (pour un certain η). Or, c'est clair si A et B sont des coconvexes. Si A et B sont des hypercônes associés, il suffit de montrer que x n'appartient pas à leur arête ; or, si x appartenait à l'arête de A et de B, x appartiendrait à chaque H_η (d'après le (5) de la proposition 3.2.3).

Enfin (ii) est une conséquence immédiate du (2) de la proposition 4.2.1.

4.2.4.- Remarques et définition

Avec les notations du a.- du théorème 4.2.3, on a :

1) A contient une plus petite classe (pour l'ordre de Klee) si et seulement si I possède un plus petit élément donc si et seulement si $\{V_i\}_{i\in I}$ possède une plus petite variété (pour l'inclusion) donc encore si et seulement si $\{H_i\}_{i\in I}$ possède une plus petite variété (pour l'inclusion).

2) $\{V_i\}_{i\in I}$ possède une plus petite variété si et seulement si $\bigcap_{i\in I} V_i \neq \bigcap_{i\in I} H_i$.

En effet, si $\{V_i\}_{i\in I}$ possède une plus petite variété V_j alors H_j est plus petite variété de $\{H_i\}_{i\in I}$.

Réciproquement, si $\bigcap_{i\in I} V_i \neq \bigcap_{i\in I} H_i$ et si $x \in (\bigcap_{i\in I} V_i) \sim (\bigcap_{i\in I} H_i)$, il existe $k \in I$ tel que $x \in V_k \sim H_k$; on voit alors facilement que V_k répond à la question.

3) Si A est un coconvexe, A ne contient pas de plus petite classe (pour l'ordre de Klee) car $\bigcap_{i\in I} H_i = \emptyset$. Par contre, si A est un hypercône, il peut arriver que A contienne une plus petite classe (par exemple si A est un demi-espace algébriquement ouvert), auquel cas A est dit <u>hypercône de première espèce</u>, ou que A n'ait pas de plus petite classe (voir proposition 4.3.3), auquel cas A est dit <u>hypercône de deuxième espèce</u>.

4) Compte tenu du 1), du 2) et du 3), on peut dire que A est coconvexe si et seulement si $\bigcap_{i\in I} V_i = \bigcap_{i\in I} H_i = \emptyset$, que A est hypercône de deuxième espèce si et seulement si $\bigcap_{i\in I} V_i = \bigcap_{i\in I} H_i \neq \emptyset$ et que A est hypercône de première espèce si et seulement si $(\bigcap_{i\in I} V_i \neq H_i$ et $\bigcap_{i\in I} H_i \neq \emptyset)$.

5) Si A est un hypercône, on a également $N\ell[A] = \bigcap_{i\in I} H_i(0)$. En effet, d'après le (1) du théorème 4.2.3 et le (7) de la proposition 3.2.3, on a $N\ell[A] = (\bigcap_{i\in I} H_i)(0)$; On voit alors facilement, compte tenu du fait que $\bigcap_{i\in I} H_i \neq \emptyset$, que $(\bigcap_{i\in I} H_i)(0) = \bigcap_{i\in I} H_i(0)$.

4.2.5.- <u>Proposition</u>

Avec les notations du a.- du théorème 4.2.3, la propriété ((i) et (ii)) est équivalente à la propriété ((iii) et (iv)) et aussi à la propriété (v) avec

(iii) Pour tout $x \in E \sim \bigcap_{i\in I} H_i$, *il existe une plus petite variété de la famille* $(V_i)_{i\in I}$ *contenant* x.

(iv) Pour tout $i \in I$, *avec* i *non plus petit élément de* I, *on a* $H_i = \bigcup_{j<i} V_j$.

(v) Pour toute section commençante S *non vide de* I, *on a :*

$$\bigcup_{i\in S} V_i = \bigcap_{i\notin S} H_i$$

(et, en particulier, pour $S = I$, $\bigcup_{i\in I} V_i = E$*).*

<u>Démonstration</u>

Montrons simplement que (v) implique ((i) et (ii)), les autres points étant faciles à montrer.

(v) => (i).

Soit $x \notin \bigcap_{i\in I} H_i$. Il existe $j \in I$ tel que $x \notin H_j$. Si $x \in V_j$, c'est terminé. Sinon l'ensemble $S = \{i \mid x \notin V_i\}$ est une section commençante non vide de I. Par définition de S, on a (α) et (β) :

(α) $$x \notin \bigcup_{i\in S} V_i .$$

(β) $$x \in \bigcap_{i\notin S} V_i .$$

D'après (v) et (α), on a (γ) :

$$(\gamma) \qquad x \notin \bigcap_{i \notin S} H_i .$$

D'après (γ) et (β), il existe donc $i \in I \sim S$ tel que $x \in V_i$ et $x \notin H_i$; d'où la conclusion.

(v) => (ii).

Soient k et $j \in I$ avec $k < j$; il faut montrer que $V_k \subset H_j$. L'ensemble des $i \in I$ vérifiant $i \leqslant k$ est une section commençante non vide de I. On a donc $\bigcup_{i \leqslant k} V_i = \bigcap_{i > k} H_i$; d'où la conclusion.

4.3. STRUCTURE GEOMETRIQUE DE L'HYPERCONE ATTACHE A UN COCONVEXE

4.3.1.- *Définition*

Si A *est un hypercône non vide ou si* A *est un coconvexe on sait (2) et 3) de la remarque 3.3.6 et théorème 3.4.1) qu'il existe un et un seul hypercône* D *en* $N\ell[A]$ *tel que* $A+D = A$. D *est dit hypercône attaché à* A *(le cas intéressant est en fait le cas où* A *est un coconvexe).*

Le but de ce paragraphe est de donner la structure géométrique de D. Auparavant, nous allons, dans le lemme suivant, étudier ce que devient A lorsqu'on soumet chaque H_i à une trnaslation (dépendant de i) convenable.

4.3.2.- *Lemme*

Soit (avec les notations du a.- du théorème 4.2.3) $A = \bigcup_{i\varepsilon I} A_i$ *un hypercône non vide ou un coconvexe de l'espace vectoriel* E. *Soit, pour tout* $i \in I$, *une variété* $H_i^!$ *translatée de* H_i *de telle sorte que, si* $j < i$ $(j,i \in I)$, *on ait* $H_j^! \subset H_i^!$. *Alors* $A^1 = \bigcup_{i\varepsilon I} (A_i+H_i^!)$ *est un hypercône ou un coconvexe de* E *et le noyau de linéarité de* A^1 *est* $N\ell[A]$. *Si* $\bigcap_{i\varepsilon I} (H_i+H_i^!) = \emptyset$, A^1 *est un coconvexe. Si* $\bigcap_{i\varepsilon I} (H_i+H_i^!) \neq \emptyset$, A^1 *est un* *hypercône en* $\bigcap_{i\in I} (H_i+H_i')$.

Démonstration

On peut vérifier aisément que, si $x \in H_i'$, on a :

$$H_i + H_i' = H_i + x \qquad (\alpha)$$

et

$$V_i + H_i' = V_i + x. \qquad (\beta)$$

Posons, pour tout $i \in I$, $V_i^1 = V_i + H_i'$ et $H_i^1 = H_i + H_i'$.

Les V_i^1 sont toutes distinctes (car V_i^1 est une translatée de V_i) et l'ensemble $\{V_i^1\}$ est totalement ordonné par inclusion au moyen de l'ordre sur I car, si $j < i$, on a $V_j \subset V_i$ et $H_j' \subset H_i'$.

De plus H_i^1 est un hyperplan de V_i^1 et $A_i + H_i'$ est un demi-espace algébriquement ouvert de V_i^1 limité par H_i^1. Montrons que A^1 est un hypercône ou un coconvexe de E : pour cela il suffit de montrer, d'après la proposition 4.2.5, que si S est une section commençante non vide de I, on a :

$$\bigcup_{i\in S} (V_i+H_i') = \bigcap_{i\notin S} (H_i+H_i').$$

Soit $j \in S$ et soit $x \in H_j'$. On a alors :

$$\bigcap_{i\notin S} (H_i+H_i') = \bigcap_{i\notin S} (H_i+x) \quad \text{(d'après } (\alpha))$$

$$= x + \bigcap_{i\notin S} H_i$$

$$= x + \bigcup_{i\in S} V_i \quad \text{(d'après le (v) de la proposition 4.2.5)}$$

$$= \bigcup_{i\in S} (V_i+x)$$

$$= \bigcup_{i\in S, i\geq j} (V_i+x) \quad \text{(par hypothèse)}$$

$$= \bigcup_{i\varepsilon S, i\geq j} (V_i+H_i') \text{ (d'après } (\beta))$$

$$= \bigcup_{i\varepsilon S} (V_i+H_i') \text{ (par hypothèse).}$$

Montrons que $N\ell[A^1] = N\ell[A]$.

D'après le (2) du a.- du théorème 4.2.3 et le 5) de la remarque 4.2.4, on a $N\ell[A^1] = \bigcap_{i\varepsilon I} (H_i+H_i')(0) = \bigcap_{i\varepsilon I} H_i(0) = N\ell[A]$.

Les deux dernières assertions du lemme résultent du a.- du théorème 4.2.3.

4.3.3.- Proposition

Soit (avec les notations du a.- du théorème 4.2.3) $A = \bigcup_{i\varepsilon I} A_i$ *un hypercône non vide ou un coconvexe de l'espace vectoriel* E. *Alors* $D = \bigcup_{i\varepsilon I} (A_i-H_i)$ *est l'hypercône attaché à* A. *De plus, si* A *est un coconvexe,* D *est de deuxième espèce.*

Démonstration

D'après le lemme 4.3.2, D est un hypercône en $\bigcap_{i\varepsilon I} (H_i-H_i) = \bigcap_{i\varepsilon I} H_i(0) = N\ell[A]$. De plus, si A est un coconvexe, D est de deuxième espèce, d'après le 1) et le 3) de la remarque 4.2.4.

Montrons que A+D = A, ce qui assurera la conclusion.

Il est clair que l'on a (α) :

$$(\alpha) \qquad A + D = \bigcup_{(i,j)\varepsilon I^2} (A_i+A_j-H_j)$$

On a en outre (β) :

(β) Si $j \leq i$ $(i,j \varepsilon I)$, alors $A_i + (A_j-H_j) = A_i + (A_j-H_i) = A_i$.

En effet, on peut supposer $j < i$ (le cas $i=j$ se résoud facilement) ; comme $V_j \subset H_i$ (d'après le (ii) du théorème 4.2.3), on a $A_j \subset H_i$ et $H_j \subset H_i$; il en résulte que $A_j - H_j$ et $A_j - H_i$ sont contenus dans $H_i(0)$; or $H_i(0) = N\ell[A_i]$; d'où (β).

La conclusion résulte de (α) et (β).

4.3.4.- Remarque

Réciproquement (avec les notations du théorème 4.2.3), si $D = \bigcup_{i \in I} A_i$ est un hypercône (de seconde espèce) admettant pour arête un sous-espace vectoriel de E et si, pour tout $i \in I$, H'_i désigne une variété parallèle à H_i de telle sorte que, si $j < i$ $(j,i \in I)$, on ait $H'_j \subset H'_i$, et si, en outre, $\bigcap_{i \in I} H'_i = \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} (A_i + H'_i)$ est un coconvexe admettant D pour hypercône attaché (lemme 4.3.2) ; de plus, la proposition 4.3.3 montre que tout coconvexe ayant D pour hypercône attaché est du type précédent.

4.4.- PARTIES EXTREMALES D'UN HYPERCONVEXE

4.4.1.- Définition

Une face d'une partie A *d'un espace vectoriel* E *est une partie extrémale convexe.*

La proposition suivante montre que si A est un hyperconvexe, toute partie extrémale de A est une face.

4.4.2.- Proposition

Soient A *et* B *deux parties complémentaires de l'espace vectoriel* E. *Alors les assertions (1) et (2) sont équivalentes :*

(1) A *et* B *sont convexes.*

(2) Toutes les parties extrémales de A *et* B *sont des faces.*

Démonstration

(1) => (2).

Si $A = \emptyset$ ou si $B = \emptyset$, c'est trivial. Sinon, il suffit d'appliquer le lemme 4.2.2, la proposition 4.1.2. et la proposition 4.1.4.

(2) => (1).

A (resp. : B) est une partie extrémale de A (resp. : B).

4.4.3.- Proposition

Soit A *un hyperconvexe de l'espace vectoriel* E. *Alors les assertions (1), (2) et (3) sont équivalentes :*

(1) A *est un cohypercône*

(2) A *possède une face qui est une variété.*

(3) A *possède une face qui est un cône pointé.*

Démonstration

(1) => (2).

Si A est un cohypercône en V, V est la plus petite classe de Klee de A ((2) de la proposition 4.2.1) ; la conclusion est alors une conséquence de la proposition 4.1.4 et de la proposition 4.4.2.

(2) => (3).

C'est immédiat.

(3) => (1).

Soit F le cône en question et soit x un sommet de F. Montrons que A est un cône de sommet x (ce qui assurera la conclusion d'après le théorème 3.2.8). Soit $a \in A$ avec $a \neq x$. Si $a \in F$, la demi-droite $\Delta([x \to a)$ est dans F (par hypothèse), donc dans A. Si $a \notin F$, la demi-droite $\Delta([a \to x)$ n'est pas dans A (car $x \in F$ et F est une face), donc $\Delta([x \to a)$ est dans A (lemme 4.2.0).

4.4.4.- *Lemme*

Si A *est un hyperconvexe de l'espace vectoriel* E *et* W *une variété d'appui de* A *(c'est-à-dire* $W \cap A \neq \emptyset$ *et* $A \sim W$ *convexe) qui rencontre* $E \sim A$, *alors* W *est une variété d'appui de* $E \sim A$.

Démonstration

On peut raisonner par l'absurde en utilisant le fait que si $a \in A$, le symétrique par rapport à a d'un segment situé dans $E \sim A$ est dans A (il suffit, en fait, de choisir a dans $A \cap W$).

4.4.5.- *Proposition*

Soient, dans un espace vectoriel E, *un hyperconvexe* A *de* E *et* F *une face non vide de* A. *Alors* $L[F] \sim F$ *est une face de* $E \sim A$.

Démonstration

Elle résulte du lemme 4.4.4 et de la propriété élémentaire suivante : une face non vide d'un convexe est la trace d'une variété d'appui (voir, par exemple, [17]).

CHAPITRE V

ETUDE ANALYTIQUE DES HYPERCONVEXES

5.0.- INTRODUCTION

5.0.1.- Le paragraphe 5.1 de ce chapitre est consacré à l'introduction et aux premières propriétés de la notion de P-famille ; comme cas particulier de cette notion (plus précisément lorsque $K_{\mathcal{J}} = \{0\}$ et par suite $g_i = f_i$), on retrouve la notion de famille $S(F,r)$ de Klee ([26], page 55). Le résultat (2.1) de [26] apparaît comme cas particulier de la proposition 5.1.5.

L'étude des P-familles minimales est faite dans le paragraphe 5.2. ; ces P-familles, qui apparaîtront dans la suite comme un outil plus maniable que les P-familles quelconques, s'introduisent naturellement (proposition 5.2.3) ; diverses caractérisations en sont données (proposition 5.2.4).

Le paragraphe 5.3 comprend le résultat essentiel de ce chapitre (théorème 5.3.1) ; ce théorème fournit une caractérisation des hyperconvexes en termes de P-familles minimales ; le résultat de Klee (théorème (2.5) de [26]) fournissant la structure des hypercônes en 0 apparaît alors comme corollaire immédiat du théorème 5.3.1. La remarque 5.3.2 est relative à l'ordre sur l'ensemble des indices d'une P-famille minimale et sera fort utile dans la suite.

Le paragraphe 5.4 est consacré à l'étude analytique de l'hypercône attaché D à un coconvexe A ; il fournit la structure analytique de D à partir de celle de A (proposition 5.4.2) et réciproquement il donne la structure analytique de tout coconvexe admettant D pour hypercône attaché (remarque 5.4.3).

5.0.2.- *Rappel élémentaire*

Les familles $(x_i)_{i\varepsilon I}$ et $(y_j)_{j\varepsilon J}$ sont égales si $J = I$ et si

$x_i = y_i$ pour tout $i \in I$.

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite ordonnée si I est ordonné, la famille $(y_j)_{j\in J}$ est dite famille ordonnée extraite de la famille $(x_i)_{i\in I}$ si c'est une famille extraite ($J \subset I$, $y_j = x_j$ pour tout $j \in J$) et si elle est ordonnée au moyen de l'ordre sur J induit par celui de I ; par exemple si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille ordonnée, la famille vide en est une famille ordonnée extraite.

5.0.3.- *Notation*

g_i étant une forme linéaire affine sur un espace vectoriel E, la forme linéaire associée est notée f_i (f_i est donc la forme linéaire unique telle que $g_i - f_i$ soit constant sur E).

On pose $\mathrm{Ker}\, g_i = \{x \in E | g_i(x) = 0\}$.

5.1.- *NOTION DE P-FAMILLE*

5.1.1.- *Définition et notations*

On dira que la famille $\mathcal{G} = (g_i)_{i\in I}$ *est une* P-*famille sur l'espace vectoriel* E *si elle est constituée par des formes linéaires affines sur* E, *si elle est totalement ordonnée et si, pour tout* $x \in E \sim K_{\mathcal{G}}$ avec $K_{\mathcal{G}} = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\, g_i$, *il existe un indice noté* $i_{\mathcal{G}}(x)$ *tel que l'on ait :*

$$\begin{cases} g_{i_{\mathcal{G}}(x)}(x) \neq 0 \\ \forall i \in I, (i > i_{\mathcal{G}}(x) \Rightarrow g_i(x) = 0). \end{cases}$$

On pose alors $A_{\mathcal{G}} = \{x \in E | g_{i_{\mathcal{G}}(x)}(x) > 0\}$, $B_{\mathcal{G}} = \{x \in E | g_{i_{\mathcal{G}}(x)}(x) < 0\}$, *l'ensemble* $\{A_{\mathcal{G}}, B_{\mathcal{G}}\}$ *est appelé* $\mathcal{G}$-*ensemble de la* P-*famille* $\mathcal{G}$. *On pose, pour tout* $i \in I$:

$$H_i(\mathcal{G}) = \bigcap_{k\geq i} \mathrm{Ker}\, g_k \;;\; V_i(\mathcal{G}) = \bigcap_{k>i} \mathrm{Ker}\, g_k$$

$$D_i(\mathcal{G}) = \{x \in A_{\mathcal{G}} | i_{\mathcal{G}}(x) = i\} = \{x | x \in V_i(\mathcal{G}) \text{ et } g_{i_{\mathcal{G}}(x)}(x) > 0\}$$

$$D_i^*(\mathcal{G}) = \{x \in B_{\mathcal{G}} | i_{\mathcal{G}}(x) = i\} = \{x | x \in V_i(\mathcal{G}) \text{ et } g_{i_{\mathcal{G}}(x)}(x) < 0\}.$$

Remarques (avec les notations précédentes)

1) Un g_i peut être éventuellement une constante réelle.

2) Si $I = \emptyset$, $\mathcal{G} = (g_i)_{i\in I}$ est automatiquement une P-famille

3) Les notations $K_{\mathcal{G}}$, $H_i(\mathcal{G})$, $V_i(\mathcal{G})$ seront parfois utilisées dans la suite pour une famille ordonnée $\mathcal{G} = (g_i)_{i\in I}$ (même si $\mathcal{G}$ n'est pas une P-famille).

4) Si $\mathcal{G} = (g_i)_{i\in I}$ est une P-famille sur E et si $(r_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+^*)^I$, alors $\mathcal{G}' = (r_i g_i)_{i\in I}$ et $\mathcal{G}'' = (-r_i g_i)_{i\in I}$ sont des P-familles et on a :

$$A_{\mathcal{G}'} = A_{\mathcal{G}},\ B_{\mathcal{G}'} = B_{\mathcal{G}},\ A_{\mathcal{G}''} = B_{\mathcal{G}},\ B_{\mathcal{G}''} = A_{\mathcal{G}}.$$

5) Si la famille $\mathcal{G} = (g_i)_{i\in I}$ est constituée de formes linéaires affines sur l'espace vectoriel E et si I est muni de l'ordre inverse d'un bon ordre, alors $\mathcal{G}$ est une P-famille sur E.

5.1.2.- *Lemme (immédiat)*

Soient, dans l'espace vectoriel E, *un hyperplan* H *et une variété* W. *Si* $H \cap W \neq \emptyset$, *alors* $H \cap W$ *est un hyperplan de* W *ou est égal à* W.

5.1.3.- *Lemme*

Soit $\mathcal{G} = (g_i)_{i\in I}$ *une P-famille sur l'espace vectoriel* E. *On a :*

1) $A_{\mathcal{G}}$ *et* $B_{\mathcal{G}}$ *sont deux convexes disjoints tels que* $A_{\mathcal{G}} \cup B_{\mathcal{G}} = E \sim K_{\mathcal{G}}$.

2) Pour tout $i \in I$, $D_i(\mathcal{G})$ *est ou vide ou un demi-espace algébriquement ouvert de* $L[D_i(\mathcal{G})]$ *ou une variété ; plus précisément on a (a) et (b) :*

(a) $D_i(\mathcal{G})$ *est un demi-espace algébriquement ouvert de* $L[D_i(\mathcal{G})]$ *si et seulement si* ($H_i(\mathcal{G}) \neq \emptyset$ *et* $D_i(\mathcal{G}) \neq \emptyset$). *S'il en est ainsi,* $D_i(\mathcal{G})$ *est un demi-espace algébriquement ouvert de* $V_i(\mathcal{G})$, *limité par* $H_i(\mathcal{G})$ *et* $D_i^*(\mathcal{G})$ *est le demi-espace algébriquement ouvert de* $V_i(\mathcal{G})$ *associé à* $D_i(\mathcal{G})$.

(b) $D_i(\mathcal{G})$ *est une variété si et seulement si* ($H_i(\mathcal{G}) = \emptyset$ *et* $D_i(\mathcal{G}) \neq \emptyset$). *S'il en est ainsi,* $D_i(\mathcal{G}) = V_i(\mathcal{G})$, $D_i^*(\mathcal{G}) = \emptyset$ *et, pour tout*

$j < i$ $(j \in I)$, $D_j(\mathcal{G}) = D_j^*(\mathcal{G}) = \emptyset$.

3) Si $i \neq j$ $(i,j \in I)$, $D_i(\mathcal{G}) \cap D_j(\mathcal{G}) = \emptyset$.

4) Si $D_i(\mathcal{G})$ *est non vide,* $D_i(\mathcal{G})$ *est une classe de Klee de* $A_{\mathcal{G}}$ *; les éléments de l'ensemble des classes de Klee de* $A_{\mathcal{G}}$ *sont donc les* $D_i(\mathcal{G})$ *non vides.*

5) Si x *et* $y \in A_{\mathcal{G}}$ *on a :*

$$x \equiv y \iff i_{\mathcal{G}}(x) = i_{\mathcal{G}}(y).$$

Démonstration

1) La démonstration est immédiate.

2) (a) se montre aisément à l'aide du lemme 5.1.2.

Montrons seulement le dernier point de (b) : si $j < i$, on a $D_j(\mathcal{G}) \cup D_j^*(\mathcal{G}) \subset V_j(\mathcal{G}) \subset H_i(\mathcal{G})$; or $H_i(\mathcal{G}) = \emptyset$; donc $D_j(\mathcal{G}) = D_j^*(\mathcal{G}) = \emptyset$.

3) Supposons, par exemple, $j < i$, $D_i(\mathcal{G}) \neq \emptyset$ et $D_j(\mathcal{G}) \neq \emptyset$ (le cas où $D_i(\mathcal{G}) = \emptyset$ ou $D_j(\mathcal{G}) = \emptyset$ est trivial). D'après le (a) de 2), $D_i(\mathcal{G})$ est un demi-espace algébriquement ouvert de $V_i(\mathcal{G})$ limité par $H_i(\mathcal{G})$; la conclusion résulte alors du fait que l'on a $D_j(\mathcal{G}) \subset H_i(\mathcal{G})$.

4) D'après le 2), les éléments de $D_i(\mathcal{G})$ sont équivalents dans $A_{\mathcal{G}}$; la conclusion résulte alors du 3) et de l'égalité $A_{\mathcal{G}} = \bigcup_{i \in I} D_i(\mathcal{G})$.

5) C'est une conséquence de 4).

5.1.4.- Remarque

Les résultats du lemme 5.1.3 formulés dans l'ensemble pour $A_{\mathcal{G}}$ et les $D_i(\mathcal{G})$ ont des analogues évidents pour $B_{\mathcal{G}}$ et les $D_i^*(\mathcal{G})$.

5.1.5.- Proposition

Soit $\mathcal{G} = (g_i)_{i \in I}$ *une* P-*famille de l'espace vectoriel* E.

1) si $K_{\mathcal{G}} \neq \emptyset$, $A_{\mathcal{G}}$ *et* $B_{\mathcal{G}}$ *sont deux hypercônes associés d'arête* $K_{\mathcal{G}}$.

2) si $K_{\mathcal{G}} = \emptyset$ *et si, pour tout* $i \in I$, $H_i(\mathcal{G}) \neq \emptyset$, *alors* $A_{\mathcal{G}}$ *et* $B_{\mathcal{G}}$

sont deux coconvexes associés et on a $N\ell[A_{\mathcal{G}}] = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\, f_i$ *(voir 5.0.3).*

Démonstration

1) C'est une conséquence du 1) du lemme 5.1.3 et de la proposition 3.2.10.

2) Pour montrer que $A_{\mathcal{G}}$ et $B_{\mathcal{G}}$ sont des coconvexes associés, il suffit, compte tenu du 1) du lemme 5.1.3, de montrer que $A_{\mathcal{G}}$ est un coconvexe ; il suffit donc de vérifier que $A_{\mathcal{G}}$ n'est pas un cohypercône et que $B_{\mathcal{G}}$ n'est pas un cohypercône ; montrons, par exemple, par l'absurde, que $A_{\mathcal{G}}$ n'est pas un cohypercône.

Si $A_{\mathcal{G}}$ est un cohypercône d'arête V, V est une variété et est une classe de $A_{\mathcal{G}}$ ((2) de la proposition 4.2.1) ; il existe donc $i \in I$ tel que $V = D_i(\mathcal{G})$ (4) du lemme 5.1.3). D'après le (b) du 2) du lemme 5.1.3, on a donc $H_i(\mathcal{G}) = \emptyset$; d'où la contradiction.

Montrons que $N\ell[A_{\mathcal{G}}] = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\, f_i$.

On vérifie facilement que $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\, f_i \subset N\ell[A_{\mathcal{G}}]$; montrons l'inclusion dans l'autre sens c'est-à-dire que, si $y \in N\ell[A_{\mathcal{G}}]$ et si $i \in I$, alors $y \in \mathrm{Ker}\, f_i$; soit $x \in H_i(\mathcal{G})$; on peut supposer que $x \in A_{\mathcal{G}}$ (car $N\ell[A_{\mathcal{G}}] = N\ell[B_{\mathcal{G}}]$ d'après la proposition 3.1.3) ; puisque $x \in H_i(\mathcal{G})$ on a $i_{\mathcal{G}}(x) < i$; or $i_{\mathcal{G}}(x+y) = i_{\mathcal{G}}(x)$ (c'est clair si $y = 0$; sinon $x + \Delta(0,y)$ est dans $A_{\mathcal{G}}$ et on applique le 5) du lemme 5.1.3) et par suite $i_{\mathcal{G}}(x+y) < i$; d'après les inégalités $i_{\mathcal{G}}(x) < i$ et $i_{\mathcal{G}}(x+y) < i$, $g_i(x) = 0$ et $g_i(x+y) = 0$; donc $f_i(x) = 0$; d'où la conclusion.

Remarques

1) En particulier, si $\mathcal{G}$ est constituée de formes linéaires, $A_{\mathcal{G}}$ et $B_{\mathcal{G}}$ sont toujours des hypercônes d'arête un sous-espace vectoriel de E.

2) L'hypothèse faite sur les $H_i(\mathcal{G})$ dans le 2) de la proposition précédente ne peut pas être négligée comme on le verra dans le théorème 5.3.1.

5.2.- P-FAMILLE MINIMALE

5.2.1.- *Définition*

Une P-*famille* $\mathcal{G}$ *sur* E *est dite minimale si, pour toute* P-*famille* $\mathcal{G}'$ *sur* E *extraite de* $\mathcal{G}$ (*c'est-à-dire que* $\mathcal{G}'$ *est une famille ordonnée extraite de* $\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{G}'$ *est une* P-*famille sur* E) *et différente de* $\mathcal{G}$, *le* $\mathcal{G}'$*-ensemble est différent du* $\mathcal{G}$*-ensemble* (*en particulier, si* $\mathcal{G}$ *est indexée par le vide,* $\mathcal{G}$ *est une* P-*famille minimale*).

5.2.2.- Remarques

1) L'intérêt de la notion de P-famille minimale apparaîtra dans la proposition 5.2.3 et le théorème 5.3.1.

2) Exemple : soit f une forme linéaire non nulle sur E. $\mathcal{G} = (f_i)_{i\varepsilon\{1,2\}}$ avec $f_1 = -f$ et $f_2 = f$. $\mathcal{G}' = (-f)$ est une P-famille minimale extraite de $\mathcal{G}$ et on a $A_{\mathcal{G}'} = B_{\mathcal{G}}$ et $B_{\mathcal{G}'} = A_{\mathcal{G}}$. $\mathcal{G}'' = (f)$ est une autre P-famille minimale extraite de $\mathcal{G}$ et on a $A_{\mathcal{G}''} = A_{\mathcal{G}}$ et $B_{\mathcal{G}''} = B_{\mathcal{G}}$.

On remarquera cependant que $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ sont indexées par des ensembles ayant même cardinal (voir le 1) de la remarque 5.3.2).

3) Exemple : La famille (0) n'est pas une P-famille minimale.

5.2.3.- *Proposition et définition*

Soit $\mathcal{G} = (g_i)_{i\varepsilon I}$ une P-famille sur E. Soit $I_o=\{i\varepsilon I|\ |x\varepsilon E, i_{\mathcal{G}}(x)=i\}$. *La famille* $\mathcal{G}_o = (g_i)_{i\varepsilon I_o}$ *est une* P-*famille minimale extraite de* $\mathcal{G}$ *et on a* $A_{\mathcal{G}} = A_{\mathcal{G}_o}$ *et* $B_{\mathcal{G}} = B_{\mathcal{G}_o}$.

Elle sera appelée P-*famille minimale canonique associée à* $\mathcal{G}$.

Démonstration

On vérifie facilement que $\mathcal{G}_o$ est une P-famille et que l'on a $A_{\mathcal{G}} = A_{\mathcal{G}_o}$ et $B_{\mathcal{G}} = B_{\mathcal{G}_o}$.

Montrons que $\mathcal{G}_o$ est une P-famille minimale. Soit donc $\mathcal{G}' = (g_i)_{i\varepsilon I'}$ une P-famille extraite de $\mathcal{G}_o$ ($I' \subset I_o$) et telle que l'on ait (1) :

(1) Le $\mathcal{G}_o$-ensemble et le $\mathcal{G}'$-ensemble sont égaux.

Montrons que $I' = I_o$; il suffit pour cela de montrer que, si $i_o \varepsilon I_o$, alors $i_o \varepsilon I'$.

Par définition de I_o, il existe $x \varepsilon A_{\mathcal{G}} \cup B_{\mathcal{G}}$ tel que $i_{\mathcal{G}}(x) = i_o$; comme $i_o \varepsilon I_o$, on en déduit (2) :

(2) $$i_{\mathcal{G}_o}(x) = i_o.$$

Mais $x \varepsilon A_{\mathcal{G}'} \cup B_{\mathcal{G}'}$ (d'après (1)) ; donc il existe $i \varepsilon I'$ tel que l'on ait (3) :

(3) $$i_{\mathcal{G}'}(x) = i$$

Comme $i \varepsilon I_o$, il existe $y \varepsilon A_{\mathcal{G}} \cup B_{\mathcal{G}}$ tel que l'on ait (4) :

(4) $$i_{\mathcal{G}_o}(y) = i.$$

(4) donne, compte tenu du fait que $i \varepsilon I'$, (5) :

(5) $$i_{\mathcal{G}'}(y) = i.$$

Compte tenu de (3) et (5), on obtient (6) :

(6) $$i_{\mathcal{G}'}(x) = i_{\mathcal{G}'}(y).$$

D'après le lemme 5.1.3, les deux seuls cas suivants peuvent se produire

<u>1er cas</u> : x et y sont équivalents dans $A_{\mathcal{G}}$ (ou $B_{\mathcal{G}}$).

On a donc $i_{\mathcal{G}_o}(x) = i_{\mathcal{G}_o}(y)$, d'où $i = i_o$ (d'après (2) et (4)).

<u>2e.cas</u> : L'un des points x et y est dans une classe de $A_{\mathcal{G}}$, l'autre dans une classe de $B_{\mathcal{G}}$ et ces deux classes sont des demi-espaces algébriquement ouverts, dans la variété qu'elles engendrent, et associés. Alors, d'après le lemme 5.1.3, on a encore $i_{\mathcal{G}_o}(x) = i_{\mathcal{G}_o}(y)$; d'où la conclusion.

5.2.4.- *Proposition*

Soit $\mathcal{G} = (g_i)_{i \in I}$ *une* P-*famille sur l'espace vectoriel* E.

a.- Les assertions (1), (2), (3), (4) et (4') sont équivalentes :

(1) $\mathcal{G}$ *est une* P-*famille minimale.*

(2) Pour tout $i \in I$, *il existe* $x \in E$ *tel que* $i = i_{\mathcal{G}}(x)$.

(3) Pour tout $i \in I$, $D_i(\mathcal{G}) \cup D_i^*(\mathcal{G})$ *est non vide.*

(4) Pour tout $i \in I$, $\text{Ker } g_i \not\supset V_i(\mathcal{G})$.

(4') Pour tout $i \in I$, $H_i(\mathcal{G}) \neq V_i(\mathcal{G})$.

b.- Si on suppose que, pour tout $i \in I$, $H_i(\mathcal{G})$ *est non vide, alors les assertions (1), (5) et (6) sont équivalentes :*

(5) Pour tout $i \in I$, $\text{Ker } f_i \not\supset \bigcap_{k>i} \text{Ker } f_k$.

(6) Pour tout $i \in I$, f_i *n'appartient pas à l'adhérence (dans le dual algébrique* E^* *muni de la topologie faible* $\sigma(E^*,E)$*) du sous-espace vectoriel engendré par les* f_k *avec* $k > i$.

Démonstration

a.- (1) <=> (2).

Cette équivalence résulte de la proposition 5.2.3.

(2) <=> (3).

C'est immédiat, compte tenu du fait que $D_i(\mathcal{G}) \cup D_i^*(\mathcal{G}) = \{x \in E \mid i_{\mathcal{G}}(x) = i\}$.

(3) <=> (4).

(3) est vérifiée si et seulement si, pour tout $i \in I$, $\{x \in E \mid x \in V_i(\mathcal{G})$ et $g_i(x) \neq 0\}$ est non vide, donc si et seulement si, pour tout $i \in I$, $V_i(\mathcal{G}) \cap \text{Ker } g_i \neq V_i(\mathcal{G})$, c'est-à-dire encore si et seulement si (4) est vérifiée.

b.- (4) <=> (5).

En effet, si $i \in I$ et si x est un point de $H_i(\mathcal{G})$, on peut remarquer que, pour tout $k \geqslant i$ $(k \in I)$, on a :

$$\mathrm{Ker}\ f_k = \mathrm{Ker}\ g_k - x.$$

On en déduit que :

$$\mathrm{Ker}\ g_i \not\supset \bigcap_{k>i} \mathrm{Ker}\ g_k \iff \bigcap_{k>i} \mathrm{Ker}\ g_k \neq \bigcap_{k\geq i} \mathrm{Ker}\ g_k$$

$$\iff (\bigcap_{k>i} \mathrm{Ker}\ g_k)-x \neq (\bigcap_{k\geq i} \mathrm{Ker}\ g_k)-x$$

$$\iff \bigcap_{k>i} (\mathrm{Ker}\ g_k-x) \neq \bigcap_{k\geq i} (\mathrm{Ker}\ g_k-x)$$

$$\iff \bigcap_{k>i} \mathrm{Ker}\ f_k \neq \bigcap_{k\geq i} \mathrm{Ker}\ f_k \iff \mathrm{Ker}\ f_i \not\supset \bigcap_{k>i} \mathrm{Ker}\ f_k.$$

(5) <=> (6).

Cette équivalence s'obtient par dualité, compte tenu du fait que l'orthogonal de $\bigcap_{k>i} \mathrm{Ker}\ f_k$ est l'adhérence faible dans E^* du sous-espace vectoriel engendré par les f_k avec $k > i$ (voir [2], pages 93 et 94).

5.2.5.- *Remarques*

1) Compte tenu du b.- de la proposition 5.2.4, si $\mathfrak{F}$ est une P-famille minimale sur E constituée de formes linéaires sur E, alors la famille $\mathfrak{F}$ est nécessairement algébriquement libre dans E^*.

2) Voici un exemple typique où le (6) de la proposition 5.2.4 est vérifié : soit $\mathfrak{F} = (f_i)_{i\varepsilon I}$ une famille de formes linéaires sur E et topologiquement libre dans E^* muni de $\sigma(E^*,E)$ (c'est-à-dire que, pour tout $k \varepsilon I$, le sous-espace vectoriel fermé engendré par les f_i d'indice $i \neq k$ ne contient pas f_k ; voir [2], page 16) ; alors $\mathfrak{F}$ satisfait au (6) de la proposition 5.2.4 et ceci quel que soit l'ordre total sur I.

3) Si $\mathcal{G} = (g_i)_{i\varepsilon I}$ est une P-famille minimale, les g_i sont toutes distinctes (d'après le (4) de la proposition 5.2.4) ; toutefois, la réciproque

est inexacte même si on suppose que $\mathcal{G}$ est une P-famille (voir le 3) de la remarque 5.2.2).

4) L'exemple qui suit montre que l'hypothèse "$H_i(\mathcal{G}) \neq \emptyset$" ne peut pas être abandonnée dans le b.- de la proposition 5.2.4.

Soit $E = \mathbb{R}^2$; posons $g_1(x,y) = x$, $g_2(x,y) = y$ et $g_3(x,y) = x+y+1$; on vérifie facilement que $(g_i)_{i\varepsilon\{1,2,3\}}$ est une P-famille minimale sur $\mathbb{R}^2$; toutefois le (5) de la proposition 5.2.4 n'est pas vérifié.

5) Si $\mathcal{G} = (g_i)_{i\varepsilon I}$ est une P-famille minimale et si $K_{\mathcal{G}} = \emptyset$, alors les assertions (1) et (2) sont équivalentes :

(1) $\exists i \varepsilon I, \; H_i(\mathcal{G}) = \emptyset$.

(2) I a un plus petit élément.

Démonstration

(2) => (1).

i désignant le plus petit élément de I, on a $H_i(\mathcal{G}) = K_{\mathcal{G}}$, donc $H_i(\mathcal{G})$ est vide car $K_{\mathcal{G}}$ l'est par hypothèse.

(1) => (2).

Montrons que i est le plus petit élément de I. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $j \varepsilon I$ avec $j < i$. On a $V_j(\mathcal{G}) \subset H_i(\mathcal{G})$ et $H_j(\mathcal{G}) \subset H_i(\mathcal{G})$; donc $V_j(\mathcal{G}) = H_j(\mathcal{G}) = \emptyset$, ce qui est en contradiction avec le fait que $\mathcal{G}$ est une P-famille minimale (voir le (4') de la proposition 5.2.4).

5.3.- CARACTERISATION ANALYTIQUE DES HYPERCONVEXES

5.3.1.- *Théorème*

a.- Soit $\mathcal{G} = (g_i)_{i\varepsilon I}$ une P-famille minimale sur l'espace vectoriel E. Alors on a (1), (2) et (3) :

(1) Si $K_{\mathcal{G}} \neq \emptyset$, $A_{\mathcal{G}}$ et $B_{\mathcal{G}}$ sont des hypercônes associés d'arête $K_{\mathcal{G}}$.

(2) Si $K_{\mathcal{G}} = \emptyset$ *et* I *sans plus petit élément,* $A_{\mathcal{G}}$ *et* $B_{\mathcal{G}}$ *sont des coconvexes associés et on a* $N\ell[A_{\mathcal{G}}] = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\, f_i$.

(3) Si $K_{\mathcal{G}} = \emptyset$ *et si* I *a un plus petit élément* j, *alors le* $\mathcal{G}$*-ensemble est constitué d'un hypercône et d'un cohypercône associés et d'arête* $V_j(\mathcal{G})$.

b.- Réciproquement, si A *et* B *sont des hyperconvexes associés de l'espace vectoriel* E, *il existe une* P*-famille minimale* $\mathcal{G}$ *sur* E *telle que* $A = A_{\mathcal{G}}$ *et* $B = B_{\mathcal{G}}$.

<u>Démonstration</u>

a.- (1) résulte de la proposition 5.1.5.

(2) résulte de la proposition 5.1.5 et du 5) de la remarque 5.2.5.

(3) On a $H_j(\mathcal{G}) = \emptyset$ (d'après le 5) de la remarque 5.2.5) ; d'autre part $D_j(\mathcal{G}) \cup D_j^*(\mathcal{G})$ est non vide (d'après (1) et (3) de la proposition 5.2.4) ; supposons, par exemple, que $D_j(\mathcal{G})$ est non vide ; alors $D_j(\mathcal{G}) = V_j(\mathcal{G})$ est une variété (d'après le b) du 2) du lemme 5.1.3) ; comme $D_j(\mathcal{G})$ est une classe de $A_{\mathcal{G}}$ (4) du lemme 5.1.3), $A_{\mathcal{G}}$ est un cohypercône en $V_j(\mathcal{G})$ ((2) de la proposition 4.2.1) ; $B_{\mathcal{G}}$ est donc l'hypercône associé.

b.- Distinguons trois cas :

<u>1er cas</u> : A et B sont deux hypercônes associés non vides ou deux coconvexes associés.

On peut écrire, avec les notations du théorème 4.2.3 :

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{i\in I} B_i \qquad (I \text{ étant totalement ordonné}).$$

Pour tout $i \in I$, soit g_i une forme linéaire affine sur E telle que $H_i \subset \mathrm{Ker}\, g_i$ et $g_i > 0$ sur A_i (donc $g_i < 0$ sur B_i). Soit $\mathcal{G} = (g_i)_{i\in I}$ la famille totalement ordonnée ainsi obtenue.

Montrons que $\mathcal{G}$ est une P-famille sur E.

Montrons d'abord que $K_{\mathcal{G}} = \bigcap_{i\in I} H_i$. Il est clair que $K_{\mathcal{G}} \supset \bigcap_{i\in I} H_i$; réciproquement, on a $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\, g_i \subset \bigcap_{i\in I} H_i$ car si $x \notin \bigcap_{i\in I} H_i$, x appartient à $A_j \cup B_j$ pour un certain j de I (d'après le (i) du a.- du théorème 4.2.3) et par suite $g_j(x) \neq 0$. Montrons que, si $x \notin K_{\mathcal{G}}$, $i_{\mathcal{G}}(x)$ existe.

Si $x \in V_j \sim H_j$, on a $j = i_{\mathcal{G}}(x)$ car $V_j \subset H_i$ pour tout $i > j$ (théorème 4.2.3).

$\mathcal{G}$ est donc une P-famille.

$\mathcal{G}$ est une P-famille minimale (d'après le (1) et le (2) de la proposition 5.2.4) car, pour tout $i \in I$, on a $i = i_{\mathcal{G}}(x)$ si on choisit x dans $V_i \sim H_i$.

On vérifie facilement que, pour tout $i \in I$, $D_i(\mathcal{G}) = A_i$ et $D_i^*(\mathcal{G}) = B_i$; donc $A = A_{\mathcal{G}}$ et $B = B_{\mathcal{G}}$.

<u>2e cas</u> : A et B vides.

On prend pour $\mathcal{G}$ la famille vide.

<u>3e cas</u> : A et B sont respectivement cohypercône et hypercône associés d'arête V.

Alors $A \sim V$ et B sont des hypercônes associés. D'après les deux premiers cas, il existe une P-famille minimale $\mathcal{G}$ telle que $K_{\mathcal{G}} = V$, $A_{\mathcal{G}} = A \sim V$ et $B_{\mathcal{G}} = B$. Posons $I' = \{\alpha\} \cup I$ où $\alpha \notin I$ et $\alpha < i$, pour tout $i \in I$; désignons par g_α une forme linéaire affine sur E et > 0 sur V ; on vérifie facilement que $\mathcal{G}' = (g_i)_{i \in I'}$ est une P-famille minimale sur E et que $A_{\mathcal{G}'} = A$ et $B_{\mathcal{G}'} = B$.

5.3.2.- <u>*Remarques*</u>

1) si $\mathcal{G} = (g_i)_{i \in I}$ est une P-famille minimale, le cardinal de I est le plus grand des cardinaux de $\sum(A_{\mathcal{G}})$ et de $\sum(B_{\mathcal{G}})$ ($\sum(A_{\mathcal{G}})$ et $\sum(B_{\mathcal{G}})$ désignant respectivement l'ensemble des classes de Klee de $A_{\mathcal{G}}$ et de $B_{\mathcal{G}}$).

En effet, distinguons deux cas :

<u>1er cas</u> : $A_{\mathcal{G}}$ et $B_{\mathcal{G}}$ sont deux hypercônes non vides ou deux coconvexes.

Alors chaque $D_i(\mathcal{G})$ et chaque $D_i^*(\mathcal{G})$ est non vide ((3) de la proposition 5.2.4, (2) de la proposition 4.2.1 et (b) du 2) du lemme 5.1.3). L'application $i \in I \to D_i(\mathcal{G}) \in \sum(A_{\mathcal{G}})$ est alors bijective (3) et 4) du lemme 5.1.3).

<u>2e cas</u> : $K_{\mathcal{G}} = \emptyset$ et I a un plus petit élément j.

On peut supposer que $A_{\mathcal{G}}$ est un cohypercône d'arête $V_j(\mathcal{G})$; donc $D_j(\mathcal{G}) = V_j(\mathcal{G})$ (démonstration du (3) du a.- du théorème 5.3.1) et $D_j^*(\mathcal{G}) = \emptyset$.

On vérifie comme précédemment que les applications :

$$i \in I \to D_i(\mathcal{G}) \in \sum(A_{\mathcal{G}})$$

et

$$i \in I \sim \{j\} \to D_i^*(\mathcal{G}) \in \sum(B_{\mathcal{G}})$$

sont bijectives.

2) Dans le premier cas, comme dans le second cas du 1), $\sum(A_{\mathcal{G}})$ étant muni de l'ordre de Klee, l'application $i \in I \to D_i(\mathcal{G}) \in \sum(A_{\mathcal{G}})$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

En effet si $k < i$ $(k,i \in I)$ on a $D_k(\mathcal{G}) < D_i(\mathcal{G})$ car $D_k(\mathcal{G}) \subset V_k(\mathcal{G}) \subset H_i(\mathcal{G}) \subset (\text{lin } D_i(\mathcal{G})) \sim D_i(\mathcal{G})$ (d'après (a) et (b) du 2) du lemme 5.1.3).

De même la seconde application intervenant dans le deuxième cas du 1) est un isomorphisme d'ordre.

3) Il résulte en particulier du 2) que, dans le cas où $A_{\mathcal{G}}$ et $B_{\mathcal{G}}$ sont tous deux des hypercônes, ils sont de première espèce si et seulement si I a un plus petit élément.

5.4.- <u>ETUDE ANALYTIQUE DE L'HYPERCONE ATTACHE A UN COCONVEXE</u>

5.4.1.- <u>Lemme</u>

Soit $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$ *une* P-*famille minimale sur l'espace vectoriel* E *constituée de formes linéaires. Soit, pour tout* $i \in I$, g_i *une forme linéaire* *affine admettant* f_i *pour forme associée et soit* $\mathcal{G} = (g_i)_{i \in I}$. *Si, pour tout* $i \in I$, $H_i(\mathcal{G})$ *est non vide, alors* $\mathcal{G}$ *est une* P-*famille minimale sur* E.

Démonstration

Si $x \in E \sim K_{\mathcal{G}}$, il existe $k \in I$ tel que $g_k(x) \neq 0$. Soit $y \in H_k(\mathcal{G})$ (non vide par hypothèse). On a donc $x-y \notin K_{\mathcal{F}}$ (car $f_k(x-y) \neq 0$). On vérifie alors qu'on a $i_{\mathcal{G}}(x) = i_{\mathcal{F}}(x-y)$. $\mathcal{G}$ est donc une P-famille.

C'est une P-famille minimale d'après la proposition 5.2.4, compte tenu du fait que $\mathcal{F}$ est une P-famille minimale.

5.4.2.- *Proposition*

Soit $\mathcal{G} = (g_i)_{i \in I}$ *une* P-*famille minimale sur l'espace vectoriel* E. *Si* $A_{\mathcal{G}}$ *est un coconvexe (c'est-à-dire si* $K_{\mathcal{G}} = \emptyset$ *et si* $H_i(\mathcal{G}) \neq \emptyset$ *pour tout* $i \in I$), *alors son hypercône attaché est* $A_{\mathcal{F}}$ *où* $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$.

Démonstration

On a $A_{\mathcal{G}} = \bigcup_{i \in I} D_i(\mathcal{G})$ car $A_{\mathcal{G}}$ est réunion de ses classes (chaque classe $D_i(\mathcal{G})$ est non vide : voir le premier cas du 1) de la remarque 5.3.2). D'après le (a) du 2) du lemme 5.1.3, $H_i(\mathcal{G})$ est la frontière algébrique de $D_i(\mathcal{G})$; en désignant par D l'hypercône attaché à $A_{\mathcal{G}}$, on a donc, compte tenu de la proposition 4.3.3 :

$$D = \bigcup_{i \in I} (D_i(\mathcal{G}) - H_i(\mathcal{G})).$$

Par définition de $D_i(\mathcal{G})$, g_i est nulle sur $H_i(\mathcal{G})$ et > 0 sur $D_i(\mathcal{G})$; il en résulte que f_i est nulle sur la frontière algébrique de $D_i(\mathcal{G}) - H_i(\mathcal{G})$ et > 0 sur $D_i(\mathcal{G}) - H_i(\mathcal{G})$; compte tenu de cette dernière remarque et du fait que l'ordre sur I est isomorphe à l'ordre sur les classes de $A_{\mathcal{G}}$ ((2) de la remarque 5.3.2) et par suite isomorphe à l'ordre sur les classes de D, le raisonnement fiat dans la démonstration du b.- du théorème 5.3.1 s'applique, on a donc $D = A_{\mathcal{F}}$.

5.4.3.- *Remarque*

Réciproquement, soit D un hypercône d'arête un sous-espace vectoriel de E. Il existe une P-famille minimale $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$ sur E telle que $D = A_{\mathcal{F}}$ (voir démonstration du b.- du théorème 5.3.1 (1er cas)) ; si, pour tout $i \in I$, g_i est une forme linéaire affine admettant f_i pour forme associée et si la famille ordonnée $\mathcal{G} = (g_i)_{i\in I}$ est telle que $K_{\mathcal{G}} = \emptyset$ et $H_i(\mathcal{G}) \neq \emptyset$ (pour tout $i \in I$), alors $\mathcal{G}$ est une P-famille minimale et $A_{\mathcal{G}}$ est un coconvexe admettant $A_{\mathcal{F}}$ pour hypercône attaché. De plus, tout coconvexe admettant $A_{\mathcal{F}}$ pour hypercône attaché est du type précédemment décrit.

En effet, montrons d'abord que $A_{\mathcal{G}}$ est un coconvexe admettant $A_{\mathcal{F}}$ pour hypercône attaché.

$\mathcal{G}$ est une P-famille minimale (lemme 5.4.1) ; $A_{\mathcal{G}}$ est un coconvexe ((2) du a.- du théorème 5.3.1 et 5) de la remarque 5.2.5) ; la conclusion résulte alors de la proposition 5.4.2.

Montrons que tout coconvexe A admettant $A_{\mathcal{F}}$ pour hypercône attaché est du type précédent.

On a $A_{\mathcal{F}} = \bigcup_{i\in I} D_i(\mathcal{F})$ et chaque $D_i(\mathcal{F})$ admet $H_i(\mathcal{F})$ pour frontière algébrique ; d'après la remarque 4.3.4 et avec les notations de cette remarque, A s'écrit sous la forme : $A = \bigcup_{i\in I} (D_i(\mathcal{F}) + H_i^!(\mathcal{F}))$; soit, pour tout $i \in I$, une forme linéaire affine g_i admettant f_i pour forme associée et telle que $H_i^!(\mathcal{F}) \subset \operatorname{Ker} g_i$; on voit facilement que g_i est > 0 sur $D_i(\mathcal{F}) + H_i^!(\mathcal{F})$ et que l'ordre sur I est isomorphe à l'ordre sur les classes de A ; le raisonnement fait dans la démonstration du b.- du théorème 5.3.1 s'applique ; on a donc $A = A_{\mathcal{G}}$ où $\mathcal{G} = (g_i)_{i\in I}$; comme A est un coconvexe, on a en outre $K_{\mathcal{G}} = \emptyset$ et $H_i(\mathcal{G}) \neq \emptyset$ (pour tout $i \in I$), d'après le a.- du théorème 5.3.1.

CHAPITRE VI

ETUDE DE DIVERS CAS PARTICULIERS D'HYPERCONVEXES

6.0.- INTRODUCTION

Il est montré dans le paragraphe 6.1 de ce chapitre qu'un hyperconvexe est soit ubiquitaire soit d'internat non vide (ce résultat est d'ailleurs voisin d'un résultat qu'on peut trouver dans Valentine ([32], théorème 2.4)) ; la caractérisation d'un hyperconvexe d'internat non vide est alors donnée en termes de classes de Klee et de P-famille (théorème 6.1.2).

Le paragraphe 6.2 apporte des compléments à l'étude des hypercônes (en un point) basiques faite par Klee dans [26] (on veillera à ne pas confondre cette notion d'hypercône basique avec la notion de convexe basique développée dans le chapitre 2 ; un hypercône basique n'est pas un convexe basique comme le montre le corollaire 2.3.5) ; dans la proposition 6.2.2, nous montrons que l'hypercône basique admet une "base de cône" particulièrement simple ; la proposition 6.2.3 donne une caractérisation des hypercônes basiques en termes de base algébrique ; la proposition 6.2.4 met l'accent sur les hypercônes basiques, d'un type particulier, dont les classes de Klee sont munies d'un bon ordre ; enfin la proposition 6.2.5 montre l'existence, dans tout espace vectoriel de dimension non dénombrable, d'un hypercône en 0 non basique et ubiquitaire (ce qui complète un résultat de Klee ([26], théorème (2.7)), l'hypercône non basique exhibé par Klee étant d'internat non vide).

Le paragraphe 6.3 permet d'exhiber les coconvexes basiques, ces derniers étant définis de façon naturelle à partir de la notion d'hypercône attaché.

Le paragraphe 6.4 étudie la notion d'hyperconvexe topologique suggérée par Klee ([27], page 33) et son lien avec la notion d'hypercône concret ("concrete semispace") introduite par Moore dans [30] ; la première notion apparaît plus générale et plus simple que la seconde (théorème 6.4.5 et son corollaire) le théorème 6.4.4 apporte, dans le cadre des espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés, une caractérisation harmonieuse des hyperconvexes topologiques en termes de P-familles constituées de formes linéaires affines continues.

6.1.- HYPERCONVEXE UBIQUITAIRE ; HYPERCONVEXE D'INTERNAT NON VIDE.-

6.1.1.- Proposition

Soient A *et* B *deux hyperconvexes associés, non vides, de l'espace vectoriel* E. A *et* B *sont soit tous deux ubiquitaires, soit tous deux d'internat non vide.*

Démonstration

1er cas : $B = \complement A$.

Si A n'est pas ubiquitaire, B admet un point interne : en effet, si $x \notin \text{lin } A$, x est alors point interne de $\complement A$ (par définition de lin A).

Si maintenant A est ubiquitaire, alors B l'est aussi, d'après l'étude précédente.

2ème cas : A et B sont des hypercônes associés.

Le résultat est alors une conséquence du premier cas, compte tenu du fait que A et B sont symétriques par rapport à un point quelconque de l'arête commune.

6.1.2.- Théorème

Soit A *un hyperconvexe non vide de l'espace vectoriel* E *et soit* $\mathcal{G} = (g_i)_{i\in I}$ *une P-famille minimale sur* E *telle que* $A = A_{\mathcal{G}}$. *Alors les assertions (1), (2) et (3) sont équivalentes :*

(1) A *a une plus grande classe de Klee.*

(2) I *a un plus grand élément.*

(3) A *a un internat non vide.*

Démonstration

(1) => (2).

C'est une conséquence du 2) de la remarque 5.3.2.

(2) => (3).

Soit k le plus grand élément. Comme $\mathcal{G}$ est une P-famille minimale, $D_k(\mathcal{G}) \cup D_k^*(\mathcal{G}) = \{x | g_k(x) \neq 0\}$ est non vide (proposition 5.2.4) ; $D_k(\mathcal{G}) = \{x | g_k(x) > 0\}$ n'est pas vide (car, si $D_k(\mathcal{G})$ était vide, on aurait $D_k^*(\mathcal{G}) = E$, d'où $A = A_{\mathcal{G}} = \emptyset$) ; d'où la conclusion.

(3) => (1).

$i[A]$ est la plus grande classe de Klee de A : en effet, si $x \in i[A]$ et si $y \in A$, on a $y \lesssim x$.

Remarques

1) Avec les notations du théorème 6.1.2, la démonstration précédente montre en outre que, si A satisfait à l'une des assertions (1), (2) et (3), alors $i[A]$ est égal à la plus grande classe de A et aussi à $D_k(\mathcal{G})$.

2) Le ((2) <=> (3)) du théorème 6.1.2 a été remarqué indépendamment par Moore pour un hypercône en un point ([30], page 661).

6.2.- *HYPERCONE BASIQUE*.-

6.2.1.- *Définition* (*Klee*, [26]) *et notation*

Un hypercône S *(en* 0*) de l'espace vectoriel* E *est dit hypercône basique s'il existe une base de* E, $(e_i)_{i \in I}$, *totalement ordonnée telle que*

$$S = \{ \sum_{j \in I} x_j e_j | \exists i \in I, x_i > 0 \text{ et } (\forall k > i, x_k = 0)\}.$$

On a donc $S = A_{\mathcal{F}}$ *où* $\mathcal{F} = (p_i)_{i \in I}$ *est la* P-*famille minimale sur* E *constituée des formes-coordonnées associées à la base* $(e_i)_{i \in I}$ *; remarquons en outre que les classes de* S *sont constituées par les* $D_i(\mathcal{F}) = \{ \sum_{j \in I} x_j e_j | x_i > 0$ *et* $(\forall k > i, x_k = 0)\}$ *(4) du lemme 5.1.3 et (3) du a.- de la proposition 5.2.4.).*

S *sera encore noté* $A_{(e_i)i\varepsilon I}$.

6.2.2.- Proposition

Dans l'espace vectoriel E, *l'hypercône basique* $S = A_{(e_i)i\varepsilon I}$ *est le cône convexe* C *engendré les* $-e_i + te_j$ *(avec* $i < j$ *et* $t \varepsilon \,]0,1]$*) et par les* e_i.

Démonstration

Il est clair que $C \subset S$.

Montrons que $S \subset C$.

Soit $x \varepsilon S$; x s'écrit sous la forme :

$$x = x_{i_1} e_{i_1} + x_{i_2} e_{i_2} + \ldots + x_{i_n} e_{i_n}$$

avec $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ et $x_{i_n} > 0$; x peut donc s'écrire sous la forme :

$$x = x_{i_1}(e_{i_1} - \alpha_{i_1} e_{i_n}) + x_{i_2}(e_{i_2} - \alpha_{i_2} e_{i_n}) + \ldots + x_{i_{n-1}}(e_{i_{n-1}} - \alpha_{i_{n-1}} e_{i_n})$$

$$+ (\alpha_{i_1} x_{i_1} + \alpha_{i_2} x_{i_2} + \ldots + \alpha_{i_{n-1}} x_{i_{n-1}} + x_{i_n}) e_{i_n}$$

avec, pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$\begin{cases} \alpha_{i_j} = 0 \quad \text{si} \quad x_{i_j} > 0 \\ \alpha_{i_j} = \alpha \quad \text{si} \quad x_{i_j} \leqslant 0 \quad (\text{avec} \quad \alpha \,\varepsilon\, \mathbb{R}). \end{cases}$$

Si α est choisi dans $]0,1]$ de façon que

$$\alpha_{i_1} x_{i_1} + \alpha_{i_2} x_{i_2} + \ldots + \alpha_{i_{n-1}} x_{i_{n-1}} + x_{i_n} > 0$$

on voit que chacun des éléments de la somme précédente est dans C et ainsi $x \varepsilon C$.

Remarque

Si $I = \mathbb{N}^*$ muni de l'ordre naturel, C est simplement engendré par les e_n et les $-e_n + te_{n+1}$ (avec $t \in]0,1]$) ; en effet, si m est un entier $> n$, on a :

$$-e_n + te_m = (-e_n+te_{n+1}) + t(-e_{n+1}+e_{n+2}) + \ldots + t(-e_{m-1}+e_m).$$

6.2.3.- Proposition

Soit S *un hypercône en* 0 *de l'espace vectoriel* E. *Alors les assertions (1) et (2) sont équivalentes :*

(1) S *est un hypercône basique.*

(2) Il existe un système de représentants des classes de S *qui est une base de* E.

Démonstration

(1) => (2).

Si $S = A_{(e_i)_{i\in I}}$, $(e_i)_{i\in I}$ est un système de représentants des classes de S car, pour tout $i \in I$, $e_i \in D_i(\mathcal{F})$ (voir 6.2.1).

(2) => (1).

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base qui est un système de représentants des classes de S (c'est-à-dire que I est l'ensemble des classes de S et que, pour tout $i \in I$, on a $e_i \in i$).

Montrons que, I étant muni de l'ordre de Klee, on a $S = A_{(e_i)i\in I}$. S et $A_{(e_i)i\in I}$ étant deux convexes maximaux ne rencontrant pas 0, il suffit de montrer que $A_{(e_i)i\in I} \subset S$. Or, si $x \in A_{(e_i)i\in I}$, il existe $i \in I$ tel que $x = \sum_{j\in I} x_j e_j$ avec $x_i > 0$ et $x_k = 0$ pour tout $k > i$; par suite, la classe de e_i dans S contient x (compte tenu de l'ordre choisi sur I et du (2) de la proposition 4.2.1) ; d'où la conclusion.

6.2.4.- *Proposition*

Soit, dans l'espace vectoriel E, *un hypercône* S *en* O *et soit* I *l'ensemble des classes de* S. *Alors les assertions (1) et (2) sont équivalentes :*

(1) Tout système de représentants des classes de S *est une base de* E.

(2) L'ordre de Klee sur I *est un bon ordre.*

Démonstration

(2) => (1).

Soit $\mathcal{S} = (e_i)_{i\in I}$ avec, pour tout $i \in I$, $e_i \in i$, et montrons que $\mathcal{S}$ est une base de E.

Montrons d'abord par récurrence transfinie sur I que, pour tout $i \in I$, on a (α_i) :

$$(\alpha_i) \qquad S[\{e_k | k \leqslant i\}] = S[i].$$

Soit j le plus petit élément de I ; l'hyperplan homogène H_j de $S[j]$ bordant j est tel que $H_j \cap S = \emptyset$ (sinon j ne serait pas la plus petite classe de S) et, par suite, $H_j = \{0\}$ ((5) de la proposition 3.2.3) ; j est donc une demi-droite épointée issue de 0 ; d'où (α_j). Supposons (α_ℓ) vraie pour tout $\ell < i$ et montrons que (α_i) est vraie.

Pour $k < i$, e_k est dans l'hyperplan H_i qui borde i dans $S[i]$ car $e_k \prec e_i$; donc $S[\{e_k | k \leqslant i\}] \subset S[i]$. Soit $x \in S[i]$ et montrons que $x \in S[\{e_k | k \leqslant i\}]$; on se ramène facilement au cas où $x \in H_i \sim \{0\}$ puis, compte tenu du fait que S contient x ou −x, au cas où $x \in H_i \cap S$; x est alors dans une classe ℓ de S avec $\ell < i$; d'où la conclusion d'après (α_ℓ).

Comme $\bigcup_{i\in I} S[i] = E$ (théorème 4.2.3), compte tenu de (α_i), $\mathcal{S}$ engendre E ; en outre $\mathcal{S}$ est une famille libre ((2.3) de [26]).

(1) => (2).

Montrons que, si I n'est pas bien ordonné, il existe au moins un système de représentants qui n'est pas une base.

Soit $\mathcal{S} = (e_i)_{i\varepsilon I}$ un système de représentants ; si $\mathcal{S}$ est une base, montrons qu'on peut lui associer un autre système de représentants $\mathcal{S}'$ qui, lui, n'est pas une base.

Soit $(i_n)_{n\varepsilon\mathbb{N}}$ une suite infinie strictement décroissante d'éléments de I (il en existe car I est supposé non bien ordonné).

Posons

$$\begin{cases} e'_i = e_i & \text{si } i \varepsilon I \sim \{i_p\}_{p\varepsilon\mathbb{N}} & (1)' \\ e'_{i_n} = e_{i_{n+1}} + e_{i_n} & \text{si } i_n \varepsilon \{i_p\}_{p\varepsilon\mathbb{N}}. & (2)' \end{cases}$$

Posons $\mathcal{S}' = (e'_i)_{i\varepsilon I}$.

D'après (1) et (2), $\mathcal{S}'$ est un système de représentants : en effet, d'après (2), compte tenu du fait que $S = A_{(e_i)i\varepsilon I}$ (proposition 6.2.3) et du fait que la suite $(i_p)_{p\varepsilon\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, on a, pour tout $n \varepsilon \mathbb{N}$, $e'_{i_n} \equiv e_{i_n}$.

D'autre part $\mathcal{S}'$ n'est pas une base de E car, d'après (1)' et (2)', pour tout $n \varepsilon \mathbb{N}$, $e_{i_n} \notin S[\mathcal{S}']$.

6.2.5.- Proposition

Dans tout espace vectoriel E de dimension non dénombrable, il existe un hypercône en O non basique et ubiquitaire.

Démonstration

E étant de dimension non dénombrable, il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires E_1 et E_2 de E tels que E_1 soit de dimension non dénombrable et E_2 soit de dimension infinie dénombrable.

Soit S_1 un hypercône en O non basique de E_1 (voir [26], théorème (2.7)). $\mathcal{B} = (e_n)_{n\varepsilon\mathbb{N}^*}$ désignant une base de E_2, désignons par S_2

l'hypercône de E_2 constitué par les points de E_2 dont la dernière composante non nulle dans $\mathcal{B}$ est > 0 (N^* étant muni du bon ordre naturel).

Posons $S = S_1 \cup (E_1+S_2)$.

D'après le (1) de la proposition 3.2.7, $E_1 + S_2$ est un hypercône de E d'arête E_1 ; il en résulte que S est un hypercône en O de E, que tout point de S_1 est $\prec$ (vis-à-vis de la relation de préordre de Klee sur S (voir 4.1.1) à tout point de $E_1 + S_2$; par suite les classes de S sont d'une part les classes de S_1 et d'autre part les classes de $E_1 + S_2$, et chaque classe de S_1 est $<$ (dans S) à chaque classe de $E_1 + S_2$. On vérifie en outre qu'il existe un isomorphisme d'ordre entre l'ensemble des classes de S_2 et l'ensemble des classes de S contenues dans $E_1 + S_2$. S_1 étant non basique, la proposition 6.2.3 montre que S ne peut être basique ; le théorème 6.1.2 montre que S est ubiquitaire.

6.3.- COCONVEXE BASIQUE.-

6.3.1.- *Définition*

Un coconvexe A *de l'espace vectoriel* E *est dit coconvexe basique si l'hypercône* S *qui lui est attaché est un hypercône basique.*

Remarque

Si A est un coconvexe basique, on a nécessairement $N\ell[A] = \{O\}$.

6.3.2.- *Théorème*

Soit A *une partie de l'espace vectoriel* E. *Alors* A *est un coconvexe basique si et seulement s'il existe une base* $(e_i)_{i\in I}$ *de* E *totalement ordonnée (sans plus petit élément) et une famille* $(r_i)_{i\in I}$ *de nombres réels tels que l'on ait (a), (b) et (c) :*

(a) *Il existe un nombre infini de* r_i *non nuls.*

(b) *Pour tout* $i \in I$, *les* r_k *avec* $k \geq i$ *sont nuls, sauf un nombre fini.*

(c) $A = \{ \sum_{j\varepsilon I} x_j\, e_j \mid \exists i \varepsilon I,\ x_i > r_i$ *et* $(\forall k > i,\ x_k = r_k)\}$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer le 5.4.3 en remarquant que, si $(e_i)_{i\varepsilon I}$ est une base totalement ordonnée de E et si on pose $\mathcal{G} = (p_i+r_i)_{i\varepsilon I}$ (avec p_i défini comme en 6.2.1 et avec $r_i \varepsilon \mathbb{R}$), alors

$$K_{\mathcal{G}} = \{x \mid \forall i \varepsilon I,\ x_i = -r_i\}$$

et

$$H_i(\mathcal{G}) = \{x \mid \forall k \geqslant i,\ x_k = -r_k\}$$

6.3.3.- Remarques

1) Si A est un coconvexe basique, le complémentaire B de A est (avec les notations du théorème précédent) :

$$B = \{ \sum_{j\varepsilon I} x_j\, e_j \mid \exists i \varepsilon I,\ x_i < r_i \text{ et } (\forall k > i,\ x_k = r_k)\}$$

(et est basique).

2) Dans un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, tout coconvexe A tel que $N\ell[A] = \{0\}$ est basique. En effet, l'hypercône attaché à A est un hypercône en 0 et est un hypercône basique car (voir [26], théorème (2.7)) tout hypercône en 0 d'un espace vectoriel de dimension dénombrable est basique.

3) Soit, avec les notations du théorème 6.3.2, $J = \{i \mid i \varepsilon I$ et $r_i \neq 0\}$. Montrons que la propriété ((a) et (b)) est équivalente à (d) :

(d) J n'est pas minoré (dans I) et J muni de l'ordre inverse de celui induit par I est isomorphe à $\mathbb{N}$ (muni du bon ordre naturel).

Démonstration

((a) et (b)) => (d).

Les propriétés (a) et (b) montrent que J n'est pas minoré dans I.

Munissons J de l'ordre inverse de celui induit par I ; (b) montre que J est bien ordonné ; (a) et (b) montrent alors que J est isomorphe à $\mathbb{N}$ (voir, par exemple, [3], page 125, exercice n°9).

(d) => ((a) et (b)).

Cette implication se vérifie facilement.

6.4.- HYPERCONVEXE TOPOLOGIQUE.-

6.4.1.- Définition

Dans un espace vectoriel topologique séparé E, *un hyperconvexe* A *est dit topologique si pour toute classe* η *de* A *différente d'une variété (voir la proposition 4.2.1), l'hyperplan* H_η *de* $L[\eta]$ *bordant* η *est fermé (dans* E*).*

6.4.2.- Remarque

1) Soit A un cohypercône d'arête V de l'espace vectoriel topologique séparé E. Alors A est topologique si et seulement si $A \sim V$ est un hypercône topologique.

En effet l'ensemble des classes de A qui ne sont pas des variétés est égal à l'ensemble des classes de $A \sim V$ (aucune de ces dernières n'étant une variété ; voir proposition 4.2.1).

2) Exemples : Si E est un espace vectoriel topologique séparé, E, $\emptyset$, un demi-espace ouvert (resp. : fermé) sont des hyperconvexes topologiques.

3) Si A est un cohypercône (resp. : un hypercône) topologique, son arête est fermée (c'est évident si $A = E$ ou $\emptyset$; sinon on applique le (1) du a.- du théorème 4.2.3).

4) Si A est un hyperconvexe topologique de l'espace vectoriel topologique séparé E, alors toute variété engendrée par une classe de A est fermée. En effet, soit η une classe de A. Si η est une variété on applique le 3) ; sinon l'hyperplan H_η de $L[\eta]$ est fermé dans E (définition 6.4.1),

donc $L[\eta]$ est fermé d'après un résultat classique ([29], page 152). Cependant la réciproque est fausse comme le montre l'exemple d'un demi-espace algébriquement ouvert et non ouvert.

5) Un hyperconvexe associé à un hyperconvexe topologique est topologique (voir 4.2.3).

6.4.3.- Proposition

Dans un espace vectoriel topologique séparé E, *un coconvexe est topologique si et seulement si l'hypercône qui lui est attaché est topologique.*

Démonstration

C'est une conséquence de la structure de l'hypercône attaché à un coconvexe (voir la proposition 4.3.3).

6.4.4.- Théorème

Soit, dans un espace vectoriel topologique séparé E, *un hyperconvexe* A. *Considérons les assertions (1) et (2) :*

(1) Il existe une P-*famille* $\mathcal{G}$ *sur* E *constituée de formes linéaires affines continues telle que* $A = A_{\mathcal{G}}$.

(2) A *est un hyperconvexe topologique.*

Alors (1) implique (2). Si, de plus, E *est localement convexe, alors (2) implique (1).*

Démonstration

(1) => (2).

Posons $\mathcal{G} = (g_i)_{i\varepsilon I}$. Si η est une classe de A qui n'est pas une variété, alors il existe $i \varepsilon I$ tel que η soit bordée par $\bigcap_{k\geq i} \mathrm{Ker}\, g_k$ (4) du lemme 5.1.3 et (a) du 2) du même lemme) ; H_η est donc bien fermé.

(2) => (1). (en supposant E localement convexe).

Il suffit de remarquer que, dans la démonstration du b. du théorème 5.3.1, les g_i peuvent être choisies continues (d'après le théorème de Hahn-Banach).

<u>*Remarque*</u>

On ne peut pas négliger l'hypothèse "localement convexe" (voir 7.3.1 et 7.3.3).

6.4.5.- <u>Théorème</u>

Soit A *un hyperconvexe d'un espace vectoriel topologique séparé* E. *Alors les assertions (1) et (2) sont équivalentes :*

(1) A *est topologique.*

(2) Chaque classe η *de* A *est un ouvert de* $L[\eta]$ *c'est-à-dire chaque* H_η *est fermé dans* $L[\eta]$.

<u>Démonstration</u>

(1) => (2).

Si η est une variété, c'est clair ; sinon H_η est fermé dans E donc aussi dans $L[\eta]$; et par suite η est ouvert dans $L[\eta]$ car H_η est un hyperplan fermé de $L[\eta]$.

(2) => (1).

On peut supposer que A est un coconvexe ou que A est un hypercône non vide (le cas où A est un hypercône vide et le cas où A est un cohypercône étant respectivement réglés par le 2) et le 1) de la remarque 6.4.2).

Raisonnons alors par l'absurde en supposant (avec les notations du théorème 4.2.3) qu'il existe $k \in I$ tel que H_k ne soit pas fermé. Soit $x \in \bar{H}_k \sim H_k$. D'après le théorème 4.2.3, il existe $i \in I$ tel que l'on ait (α) :

$$(\alpha) \qquad x \in V_i \sim H_i.$$

On a $k \leq i$ (car, si $\ell > i$, alors $H_\ell \supset V_i$ et, par suite, H_ℓ contient x).

On a donc $H_k \subset H_i$; d'où $\bar{H}_k \subset \bar{H}_i$; comme $x \in \bar{H}_k$, on a donc $x \in \bar{H}_i$ ce qui, compte tenu de (α), montre que $x \in (\bar{H}_i \cap V_i) \sim H_i$ donc que H_i est non fermé dans V_i.

6.4.6.- Définition (Moore ; voir [30]).

Dans un espace vectoriel topologique séparé, un hypercône S *en un point est dit concret si et seulement si chaque classe* η *de* S *est un ouvert de* $L[\eta]$.

Le théorème 6.4.5 permet alors de caractériser un hypercône concret de façon plus simple et plus maniable que sa définition elle-même ; plus précisément, on a :

6.4.7.- Corollaire

Soit, dans un espace vectoriel topologique séparé, un hypercône S *en un point. Alors* S *est concret si et seulement s'il est topologique.*

6.4.8.- Remarques

1) Compte tenu du corollaire 6.4.7, il apparaît que le théorème 6.4.4, dans le cadre des espaces localement convexes, a été également (et indépendamment) démontré par Moore ([30], théorème 3.1) ; nous avions, de notre côté, annoncé ce théorème 6.4.4 dans [11] (théorème 15, page 386).

2) Dans tout espace localement convexe séparé, il existe un hypercône concret (voir par exemple [30], paragraphe 3) ; cette question est plus difficile dans le cadre des espaces non localement convexes et sera résolue, dans un cas particulier, dans le 7.3.

CHAPITRE VII

APPLICATION A LA SEPARATION CONCRETE

7.0.- INTRODUCTION

Dans le paragraphe 7.1 de ce chapitre, nous montrons (théorème 7.1.4 et théorème 7.1.5) que la notion d'hyperconvexe topologique permet l'interprétation naturelle de la notion de séparation concrète étudiée par Moore dans [30].

Le paragraphe 7.2 apporte une réponse (plus complète que celle que nous avions apportée dans [11]) à un problème posé par Klee et relatif à la séparation concrète de convexes fermés ; cette étude permet au passage de mettre en évidence des exemples assez généraux de convexes fermés disjoints ne pouvant être séparés par un hyperplan fermé (exemples du 7.2.3).

Dans le paragraphe 7.3, nous répondons à une question de Moore relative à l'existence d'hypercônes concrets dans les espaces vectoriels topologiques non localement convexes. Enfin, par une remarque élémentaire (voir le 7.3.3), nous attirons l'attention sur un aspect nouveau et prometteur de la séparation concrète.

7.1.- INTERPRETATION DE LA SEPARATION CONCRETE

7.1.1.- *Définition* (*voir* [30])

Deux convexes C_1 *et* C_2 *d'un espace vectoriel topologique séparé sont dits concrètement séparés s'il existe un hypercône concret* S *en* O *contenant* C_1-C_2 *(voir le 6.4.6 et le 6.4.7).*

7.1.2.- *Lemme*

Soient, dans un espace vectoriel topologique séparé E, *un hypercône (resp. : un cohypercône) topologique* D *et un convexe* C. *Alors* $C+D$ *est un hyperconvexe topologique.*

Démonstration

On peut supposer que D est un hypercône (resp. : un cohypercône) en un sous-espace vectoriel V. D'après le 2) de la remarque 3.3.3, C+D est un hyperconvexe.

Montrons que, si η est une classe de C+D différente d'une variété alors H_η est fermé.

Il suffit, pour cela, de montrer que $H_\eta(0)$ est fermé, donc de montrer que $\eta(0) = \eta - H_\eta$ est une classe de D.

Montrons d'abord que $\eta(0)$ est dans D.

Désignons par $\eta^*(0)$ le demi-espace algébriquement ouvert de $L[\eta(0)]$ associé à $\eta(0)$; on a $\eta+D \subset (C+D) + D$ et, par suite, $\eta+D \subset C+D$ (car $C+D+D = C+D$ d'après le (1) de la proposition 3.2.3) ; donc, comme C+D ne rencontre pas η^*, η+D ne rencontre pas η^* et, par suite, on vérifie aisément que D en rencontre pas $\eta^*(0)$; de plus, si Δ est une droite homogène rencontrant $\eta(0)$, alors Δ est non contenue dans V, sinon on aurait :

$$L[\eta] = \eta+\Delta \subset \eta+V \subset (C+D)+V = C+D \quad (\text{car } V = N\ell[D])$$

et η ne serait pas une classe de C+D ; d'où la conclusion d'après le (5) de la proposition 3.2.3.

Enfin, $\eta(0)$ est une classe de D car on vérifie aisément que, si x est dans la classe de D contenant $\eta(0)$, alors, en désignant par y un point de η, x+y (qui est dans D+(C+D) donc dans C+D) est dans la classe de C+D contenant η, donc dans η et, comme $D \cap \eta^*(0) = \emptyset$, x est dans $\eta(0)$.

7.1.3.- Lemme

Soient A *et* B *deux hyperconvexes non vides et associés de l'espace vectoriel* E. *On a alors :*

1) Si A *est un hypercône et si* B *est un hypercône ou un cohypercône,* A-B *est l'hypercône attaché à* A.

2) Si A *est un cohypercône en* V, A-B *est l'hypercône attaché à l'hypercône* $A \sim V$.

3) Si A *et* B *sont des coconvexes,* A-B *est l'hypercône attaché à* A.

Démonstration

1) On peut supposer que l'arête de A et B est un sous-espace vectoriel.

1er cas : B est un hypercône.

Alors, $A-B = A - (-A) = A+A$

$= A$ (d'après le (1) de la proposition 3.2.3).

2ème cas : B est un cohypercône

Alors, $A-B = A - ((-A) \cup V) = [A-(-A)] \cup [A-V]$

$= A \cup A$ (car $V = N\ell[A]$)

$= A$

2) Il suffit d'appliquer 1) à B-A

3) Avec les notations du théorème 4.2.3, on a :

$$A-B = \bigcup_{i\in I} A_i - \bigcup_{i\in I} B_i$$

$$= \bigcup_{(i,j)\in I^2} (A_i-B_j)$$

$$= \bigcup_{(i,j)\in I^2} (A_i-H_i+H_j-B_j)$$

$$= \bigcup_{i\in I} (A_i-H_i) + \bigcup_{i\in I} (H_i-B_i)$$

$$= \bigcup_{i\in I} (A_i-H_i) - \bigcup_{i\in I} (B_i-H_i),$$

d'où la conclusion d'après la proposition 4.3.3 d'une part et le 1) d'autre part.

7.1.4.- Théorème

Soient C_1 *et* C_2 *deux convexes d'un espace vectoriel topologique séparé* E. *Alors les assertions (1) et (2) sont équivalentes :*

(1) Il existe des hyperconvexes topologiques complémentaires A *et* B *tels que* $A \supset C_1$ *et* $B \supset C_2$.

(2) Il existe un hypercône topologique D *de* E, *d'arête un sous-espace vectoriel, tel que* $D \supset C_1 - C_2$.

Démonstration

(1) => (2).

Si A ou B est vide c'est trivial ; sinon on a $A-B \supset C_1-C_2$ et on applique le lemme 7.1.3.

(2) => (1).

Posons $A = (D \cup V) + C_1$ où V désigne l'arête de D.

A est un hyperconvexe topologique d'après le 1) de la remarque 6.4.2 et le lemme 7.1.2.

Il est clair que $A \supset C_1$. De plus, compte tenu de l'hypothèse $D \supset C_1 - C_2$, on vérifie que $A \cap C_2 = \emptyset$. Il suffit alors, compte tenu du 5) de la remarque 6.4.2, de poser $B = \complement A$.

7.1.5.- Théorème

Soient C_1 *et* C_2 *deux convexes d'un espace localement convexe séparé* E. *Alors les assertions (1) et (2) sont équivalentes :*

(1) Il existe des hyperconvexes topologiques complémentaires A *et* B *tels que* $A \supset C_1$ *et* $B \supset C_2$.

(2) C_1 *et* C_2 *sont concrètement séparés.*

Démonstration

(2) => (1).

C'est une conséquence du ((2) => (1)) du théorème 7.1.4 et du corollaire 6.4.7.

(1) => (2).

D'après le théorème 7.1.4, il existe dans E un hypercône topologique D d'arête un sous-espace vectoriel V de E tel que $D \supset C_1 - C_2$; la conclusion résulte alors du lemme suivant :

7.1.6.- Lemme

Si D est un hypercône topologique en un sous-espace vectoriel V fermé de l'espace localement convexe séparé E, il existe un hypercône en O concret S contenant D.

Démonstration

Soit S_V un hypercône en O concret de l'espace V (il en existe car V est un espace localement convexe séparé ; voir, le 2) de la remarque 6.4.8) ; alors on vérifie facilement que $S = S_V \cup D$ répond à la question car V est fermé.

7.2.- REPONSE A UNE QUESTION DE KLEE

Dans [27], page 33, Klee demande si deux convexes fermés disjoints d'un espace localement convexe séparé sont concrètement séparés. Nous répondons dans le 7.2.2 et le 7.2.3 par la négative.

7.2.1.- Lemme

Soit C un convexe d'un espace vectoriel topologique séparé E. On suppose qu'il existe un hypercône topologique D de E, ubiquitaire tel que $D \supset C$. Alors, pour toute classe ν de Klee de C, $L[\nu]$ est non dense dans E.

Démonstration

Si ν est une classe de Klee de C, comme $D \supset C$, ν est dans une classe η de D. Comme D est ubiquitaire, η n'est pas un demi-espace de E

(d'après le 6.1.1 et le 6.1.2) ; donc on a $L[\eta] \neq E$; d'où la conclusion, compte tenu du fait que $L[\eta]$ est fermé (voir le 4) de la remarque 6.4.2).

7.2.2.- *Proposition*

Soient C_1 *et* C_2 *deux convexes non vides d'un espace vectoriel topologique séparé* E. *On suppose que* C_1 *et* C_2 *ne sont pas séparés par un hyperplan fermé et que* C_1-C_2 *a une classe* ν *telle que* $L[\nu]$ *soit dense dans* E. *Alors il n'existe pas d'hyperconvexes topologiques complémentaires* A *et* B *tels que* $A \supset C_1$ *et* $B \supset C_2$. *En particulier* C_1 *et* C_2 *ne peuvent pas être concrètement séparés.*

Démonstration

Raisonnons par l'absurde ; il existe alors, d'après le théorème 7.1.4, un hypercône topologique D en un sous-espace vectoriel V tel que $D \supset C_1-C_2$. D est ubiquitaire (sinon D admettrait un internat non vide (d'après le 6.1.1) qui serait une classe η (remarque 1) du 6.1.2) ; donc D, et par suite C_1-C_2, serait dans le demi-espace fermé $H_\eta \cup \eta$ et C_1 et C_2 seraient séparés par un hyperplan fermé (voir début de la démonstration du théorème 2.5.4)). Ceci contredit le lemme 7.2.1.

Enfin, la dernière assertion de la proposition 7.2.2 résulte du théorème 7.1.4.

7.2.3.- *Exemples*

L'exemple assez général que nous allons exhiber repose sur la proposition suivante.

Proposition

Soient, dans un espace vectoriel topologique séparé E, *deux convexes fermés* C *et* C' *situés dans un sous-espace vectoriel* W *distinct de* E *et dense dans* E. *On suppose que l'internat* $i_W[C-C']$ *de* $C-C'$ *dans* W *est non vide et qu'il n'existe pas de translaté de* C' *dans* W *pouvant être séparé de* C *dans* W *par un hyperplan fermé de* W. *Alors, si on désigne par* C_2 *un* *translaté de* C' *dans* E *ne rencontrant pas* W *et si on pose* $C_1 = C$, C_1 *et* C_2 *sont deux convexes fermés disjoints et satisfaisant aux hypothèses de la proposition 7.2.2 (donc aussi à sa conclusion).*

Démonstration

Posons $C_2 = x+C'$.

C_1-C_2 contient un translaté de $i_W[C-C']$; comme par hypothèse la variété engendrée par $i_W[C-C']$ est W, C_1-C_2 possède bien une classe qui engendre une variété dense. Montrons, pour terminer, et par l'absurde, que C_1 et C_2 ne sont pas séparés par un hyperplan fermé.

Soit H un hyperplan fermé de E séparant C_1 et C_2. H rencontre W et on a $H \cap W \neq W$ (car W est dense dans E et H est un hyperplan fermé) ; donc, d'après le lemme 5.1.2, $H \cap W$ est un hyperplan fermé dans l'espace vectoriel topologique W.

Soit y un point de $(W+x) \cap (H(O))$; alors on vérifie aisément que $C_2-y = (x-y) + C'$ est situé dans W et séparé de C dans W par l'hyperplan fermé $H \cap W$; ceci contredit une des hypothèses faites.

Exemple 1

Si C est un convexe fermé d'un espace localement convexe séparé, T-anti-insérable et non anti-insérable (voir le 2.8.8 et le 2.8.4), C et $C' = C$ satisfont aux hypothèses de la proposition précédente (d'après la proposition 2.5.2, la proposition 2.1.2, le théorème 2.5.4 et le corollaire 2.5.5 (appliqué à $S[C-C]$)).

Exemple 2

Si C est un cône convexe de sommet O fermé et d'internat relatif non vide d'un espace vectoriel topologique séparé E, si $S[C]$ est dense dans E et distinct de E et si x désigne un point de $ir[C]$, alors C et la droite $C' = \Delta(O,x)$ satisfont aux hypothèses de la proposition précédente (on a $C-C' = S[C]$).

Remarque

La construction faite dans l'exemple 2 est toujours possible dans un espace de Banach séparable de dimension infinie (il suffit de prendre pour C le plus petit cône pointé de sommet 0 contenant K, K étant un translaté, ne contenant pas 0, du compact construit dans le 2.8.8) ; C et C' sont alors tous deux localement compacts ainsi que les convexes C_1 et C_2 obtenus à partir de C et C' comme dans la proposition précédente ; on obtient ainsi, en particulier, et de façon particulièrement simple, un exemple de convexes fermés, localement compacts, disjoints, dont l'un est une droite, et ne pouvant être séparés par un hyperplan fermé (des exemples du même type ont été construits de manière différente par Klee (4.3 de [23]) et par Dieudonné (4. de [9])).

Remarque

Pour une autre analyse de la question posée par Klee, on peut consulter [30].

7.3.- REPONSE A UNE QUESTION DE MOORE

Moore signale ([30], page 662) qu'il n'est pas connu s'il existe ou non des hypercônes (en un point) concrets dans un espace vectoriel topologique séparé E dont le dual topologique E' n'est pas total (dans le dual algébrique E^* muni de la topologie $\sigma(E^*,E)$).

Le lemme 7.3.1 et l'exemple 7.3.2 apportent une réponse affirmative et très simple à cette question dans le cadre des espaces vectoriels topologiques séparés de dimension infinie dénombrable.

7.3.1.- Lemme

Dans tout espace vectoriel topologique séparé E *de dimension infinie dénombrable, il existe un hypercône en* 0 *concret.*

Démonstration

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base algébrique de E bien ordonnée par l'ordre naturel sur $\mathbb{N}^*$. Soit $S = A_{(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}$ (voir 6.2.1). Les classes de S sont toutes de dimension finie (voir 6.2.1) ; d'où la conclusion car E est séparé.

Il reste à donner un exemple d'espace vectoriel topologique séparé E de dimension infinie dénombrable avec E' non total.

7.3.2.- Exemple

Soit F un espace vectoriel topologique séparé dont le dual F' n'est pas total, et contenant une partie U telle que les ensembles αU ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$) forment une base de voisinages de 0 (par exemple $L^p[a,b]$ pour $0 < p < 1$; voir [29], page 157). On peut voir facilement que $C[U]$ contient une droite homogène Δ. On démontre aisément qu'il existe une partie infinie dénombrable $A = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ formée de points de U telle que $C[A]$ contienne Δ. Le sous-espace vectoriel E engendré par A et muni de la topologie induite par celle de F répond à la question car $C[U \cap E]$ contient Δ.

7.3.3.- Remarque

Soit F défini comme en 7.3.2 avec $F' = \{0\}$ (par exemple $F = L^p[a,b]$ pour $0 < p < 1$). On peut, par une technique analogue à celle utilisée en 7.3.2, construire un sous-espace vectoriel E de F de dimension infinie dénombrable tel que $C[U \cap E] = E$ (construire, par récurrence une suite (E_n) de sous-espaces vectoriels de dimension infinie dénombrable tels que $C[U \cap E_{n+1}] \supset E_n$ et prendre $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$; on a alors $E' = \{0\}$). Dans E, deux points quelconques distincts ne peuvent donc pas être séparés par un hyperplan fermé alors qu'ils peuvent être séparés concrètement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BAIR. - *Sur les partitions convexes dans un espace vectoriel,* Bull. Soc. Roy. des Sciences de Liège, 1-2, 1973, p. 23-30.

[2] N. BOURBAKI. - *Espaces vectoriels topologiques,* Chapitres 1 et 2, Actualités Scientifiques et Industrielles n°1189, Hermann, Paris, 1966.

[3] N. BOURBAKI. - *Théorie des ensembles,* Chapitre 3, Actualités Scientifiques et Industrielles n°1243, Hermann, Paris, 1967.

[4] L. BRAGARD. - *Extensions diverses des notions de convexité,* Dissertation de Doctorat, Université de Liège, Faculté des Sciences, 1973.

[5] C. CLARK. - *On convex sets of finite width,* J. London Math. Soc., 43, 1968, p. 513-516.

[6] G. COQUET. - *Sur les familles de décomposition et leurs applications à la théorie des ensembles convexes,* Thèse de Doctorat d'Etat, n° d'ordre 287, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1973.

[7] G. COQUET et J.C. DUPIN. - *Quelques propriétés des ensembles convexes linéairement bornés et des ensembles insérables,* Bull. Classe des Sciences, Acad. Roy. de Belgique, 7, 1971, p. 287-295.

[8] G. COQUET et J.C. DUPIN. - *Caractérisation des ensembles convexes anti-insérables,* Bull. Classe des Sciences, Acad. Roy. de Belgique, 10, 1972, p. 1216-1230.

[9] J. DIEUDONNE. - *Sur la séparation des ensembles convexes,* Math. Annalen, 163, 1966, p. 1-3.

[10] J.C. DUPIN et G. COQUET. - *Caractérisations et propriétés des couples de convexes complémentaires*,
Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 276, 1973, p. 273-276.

[11] J.C. DUPIN et G. COQUET. - *Caractérisations et propriétés des couples de convexes complémentaires*,
Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 276, 1973, p. 383-386.

[12] J.C. DUPIN et G. COQUET. - *A propos d'une question posée par V. KLEE*,
Ann. de l'Institut Fourier, Grenoble, 24, 1974.

[13] J.C. DUPIN et G. COQUET. - *A propos de la notion d'insérabilité et de la notion "of finite width"*,
Comptes rendus Acad. Sciences, Paris.

[14] J.C. DUPIN et G. COQUET. - *A propos d'un problème de C.E. MOORE*,
Comptes rendus Acad. Sciences, Paris.

[15] H.G. EGGLESTON. - *Convexity*,
Cambridge University Press, 1958.

[16] R. FOURNEAU. - *Ensembles algébriquement bornés, ensembles linéairement bornés et ensembles ordonnés de convexes algébriquement fermés*,
Bull. Soc. Roy. des Sciences de Liège,

[17] M. GOULLET DE RUGY. - *Géométrie des simplexes*,
Centre de Documentation Universitaire, Paris, 1968.

[18] P.C. HAMMER. - *Maximal convex sets*,
Duke Math. J., 22, 1955, p. 103-106.

[19] P.C. HAMMER. - *Semispaces and the topology of convexity*,
Proceedings of Symposia in Pure Math., vol. 7, p. 305-316.

[20] P.C. HAMMER. - *Isotonic spaces in convexity*,
Proceedings of the Colloquium on Convexity, p. 132-141,
Københavns Universitets Matematiske Institut, 1967.

[21] F. JONGMANS. - *Sur les complications d'une loi de simplification dans les espaces vectoriels*,
Bull. Soc. Roy. des Sciences de Liège,

[22] V. KLEE. - *Convex sets in linear spaces*,
Duke Math. J. 18, 1951, p. 443-466.

[23] V. KLEE. - *Convex sets in linear spaces II*,
Duke Math. J., 18, 1951, p. 875-883.

[24] V. KLEE. - *Convex sets in linear spaces III*,
Duke Math. J., 20, 1953, p. 105-112.

[25] V. KLEE. - *Boundedness and continuity of linear functionals*,
Duke Math. J., 22, 1955, p. 263-270.

[26] V. KLEE. - *The structure of semispaces*,
Math. Scand. 4, 1956, p. 54-64.

[27] V. KLEE. - *Separation and support properties of convex sets A survey*,
Mathematical Note n° 599, Boeing Scientific Laboratories, mai 1969.

[28] V. KLEE. - *On a question of Colin Clark concerning three properties of convex sets*,
Canad. Math. Bull., 15, 1972, p. 535-537.

[29] G. KÖTHE. - *Topological vector spaces I*,
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1969.

[30] C.E. MOORE. - *Concrete semispaces and lexicographic separation of convex sets*,
Pacific J. Math., vol. 44, n°2, 1973, p. 659-670.

[31] E. THORP et R. WHITLEY. - *Partially bounded sets of infinite width*,
J. Reine Angew. Math. 248, 1971, p. 117-122.

[32] F.A. VALENTINE. - *Convex sets*,
Mc. Graw-Hill, New-York, 1964.

*   *

*

INDEX TERMINOLOGIQUE *

* variété = variété linéaire non vide

* espace vectoriel = espace vectoriel réel

* espace vectoriel topologique = espace vectoriel topologique réel

Autres symboles :

$\bar{A}^{\sigma}$ (1.0.2)

$\equiv$ (4.1.1)

$\preccurlyeq$ (4.1.1)

$\leqslant$ (3.0.2)

$V(0)$ (3.2.2)

* *

*