

50376  
1974  
61  
N° d'ordre : 157

50376  
1974  
61

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

# THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur Ingénieur



Habib JOULAK

## METHODE DES DIFFERENCES FINIES EN ELASTICITE

MEMBRES DU JURY : MM. G. GONTIER, Président  
F. PARSY, Rapporteur  
P. BEGUIN, Examineur  
KERGUIGNAS, Invité

Soutenu le 25 Mai 1974

*A mes Parents,*

*A mes frères et soeurs,*

*A ma femme,*

*A ma fille Myriam.*

*A tous ceux qui m'ont encouragé dans cette voie.*

*Aux membres du Jury.*

*A tout le personnel de Mathématiques Pures et Appliquées.*

*J'adresse mes remerciements sincères.*

## PLAN

### I.- LA METHODE DES NOEUDS :

- Discrétisation du domaine
- Approximation des dérivées partielles
- Approximation des conditions - frontière
- Nature des erreurs
- Convergence et stabilité.

### II.- APPROXIMATION DE L'OPERATEUR HARMONIQUE $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} :$

- Approximation en losange  $\Delta_h$
- Approximation en carré  $\Delta'_h$
- Combinaison linéaire de  $\Delta_h$  et  $\Delta'_h$
- Discrétisation de l'opérateur biharmonique  $\Delta^2$
- Approximation de  $\Delta$  en coordonnées polaires.

### III.- ESTIMATION DE L'ERREUR POUR L'EQUATION DE POISSON : (cas du rectangle)

### IV.- METHODE DES DIRECTIONS ALTERNÉES POUR LES EQUATIONS DE LAPLACE ET DE POISSON :

- Mise sous forme matricielle
- Méthode des directions alternées. (Peaceman-Rachford)

### V.- EQUATIONS D'EQUILIBRE DE L'ELASTOSTATIQUE ET DE L'ELASTODYNAMIQUE.

#### CAS D'ELASTICITE PLANE.

### VI.- APPLICATION DE LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES A LA RESOLUTION NUMERIQUE

#### DU 1er PROBLEME DE L'ELASTOSTATIQUE. GENERALISATION A L'ELASTODYNAMIQUE.

- Elasticité plane
- Méthode des étapes fractionnaires pour la résolution du 1er problème de l'élastostatique dans le carré

- Méthode des étapes fractionnaires pour la résolution du 1er problème de l'élastodynamique dans le carré
- Elasticité à trois dimensions
- Cas particulier des systèmes à symétrie de résolution.

VII.- RESOLUTION NUMERIQUE DU 2ème PROBLEME DE L'ELASTOSTATIQUE :

- Elasticité plane : cas du rectangle
- Elasticité à trois dimensions : cas du parallélépipède.

VIII.- DETERMINATION DIRECTE DES CONTRAINTES POUR LE 2ème PROBLEME DE L'ELASTICITE

PLANE :

- Position du problème et notations
- Calcul de  $A \approx \sigma_x$  et  $B \approx \sigma_y$
- Calcul de la fonction  $C \approx -\tau_{xy}$

IX.- RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME MIXTE DE L'ELASTOSTATIQUE. CAS DU CARRE.

GENERALISATION A L'ELASTODYNAMIQUE :

- Position du problème
- Notation et discrétisation du problème
- Méthode itérative
- Généralisation à l'élastodynamique

APPLICATION I : TORSION D'UNE BARRE PRISMATIQUE A SECTION CARRE.

APPLICATION II : PROBLEME DES COINS DE CADRES. CALCUL DES CONTRAINTES PAR LA METHODE DIRECTE.

CONCLUSION.

BIBLIOGRAPHIE.

## INTRODUCTION

Le problème de la réduction d'un modèle physique à un modèle algébrique est essentiellement celui du choix d'un schéma de discrétisation et d'un schéma de prise en compte des conditions limites. Outre la forme du système algébrique obtenu, la précision est très largement conditionnée par ce choix.

L'expérience prouve qu'il est souhaitable d'adapter les schémas utilisés aux types d'équation à résoudre, et que la prise en compte des conditions aux limites doit être en général cohérente avec le schéma utilisé.

Dans l'application de la méthode des différences finies aux problèmes de l'élasticité linéaire, nous avons conduit notre travail selon 3 axes :

1) discrétisation de l'opérateur de Laplace  $\Delta$  avec divers ordres d'approximation en  $h$  (pas de la maille). En effet, cet opérateur joue un rôle important en élasticité : problèmes de torsion (nous avons donné une application pour le carré), et états plans de déformation ou contrainte.

2) discrétisation de l'opérateur de l'élastostatique  $\vec{\Delta}^*$  =  $\mu \vec{\Delta} + (\lambda + \mu) \text{grad div}$  (2 et 3 dimensions) avec des conditions - frontière du type Dirichlet et Neumann.

Nous pouvons dès lors déterminer les composantes du vecteur déplacement  $\vec{u}$  aux points noeuds du domaine discrétisé. En général, la méthode de résolution du système algébrique est celle de Gauss-Seidel.

Toutefois, les recherches récentes [6] [12] [13] [16], tendent à étendre la méthode des directions alternées ("Methods of fractional steps"), initialement développée pour l'équation de Laplace, à la résolution numérique des équations de l'élastostatique et de l'élastodynamique. Nous avons signalé les résultats de ces recherches et avons développé et détaillé l'idée de Yanenko [6] pour le problème mixte de l'élasticité plane dans un rectangle. La difficulté dans ces méthodes, est de déterminer un paramètre de séquence, assurant une convergence rapide.

3) Pour le calcul des contraintes en élasticité plane, nous pouvons éviter le passage par le calcul du vecteur déplacement  $\vec{u}$  ou de la fonction d'Airy  $\Psi$  vérifiant l'équation biharmonique (nous avons signalé la discrétisation de l'opérateur  $\Delta^2$ ). En effet, nous pouvons calculer directement les contraintes  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  en partant des équations de l'équilibre et de compatibilité. En application, nous avons détaillé un exemple communiqué par Monsieur KERGUIGNAS et proposé dans un bulletin technique VEVEY (1959).

Cette méthode directe développée dans le cas de plaques minces rectangulaires, peut être étendue au cas de disques circulaires (coordonnées polaires).

Il est à signaler enfin que nous essayons actuellement de combiner les méthodes variationnelles et celle des différences finies, et ce en partant de l'énergie élastique de déformation et de l'inégalité de Korn (voir mémoire de D.E.A).

## CHAPITRE I

### LA METHODE DES NOEUDS

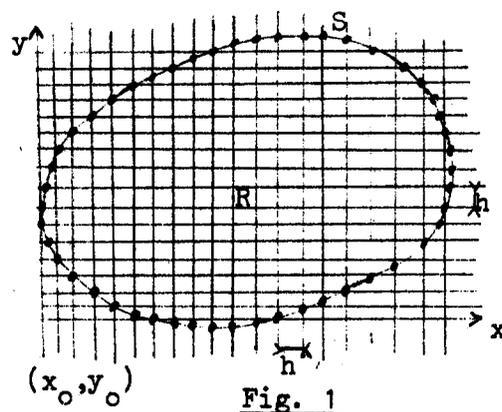
La méthode des noeuds (ou des différences finies) est l'une des méthodes numériques les plus utilisées pour la résolution des problèmes aux valeurs limites. Elle a été utilisée avec succès pour la résolution des équations de Laplace et de Poisson et plus généralement pour les équations du type elliptique, parabolique et hyperbolique [1]

On expose ci-dessous les idées générales de la méthode et les étapes à suivre.

Toutefois, l'application de la méthode de discrétisation pour un problème donné, est largement conditionnée par les données aux frontières ("boundary values").

#### I.- DISCRETISATION DU DOMAINE.-

Soit  $(x,y) \in E^2$  (espace euclidien à 2 dimensions)



Soit  $G = R \cup S$

$R$  = domaine simplement connexe

$S$  = contour plan, simple, régulier par morceaux et fermé.

Soit  $(x_0, y_0)$  point arbitraire du plan et  $h$  constante positive. Dans

certains problèmes, on peut tracer un treillis rectangulaire ( $h_x \neq h_y$ ).

L'ensemble des points  $\begin{cases} x_0 + ih & i=0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ y_0 + kh & k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$  est appelé

ensemble des noeuds. Deux noeuds sont adjacents si leur distance est  $h$ .

L'ensemble de toutes les lignes, dont chacune a au moins 2 noeuds adjacents, est appelé treillis. On désigne par  $\{G_h\} = \{\text{points noeuds qui sont, soit des noeuds dans } R, \text{ soit l'intersection de } S \text{ avec le treillis}\}$ .

$$S_h = S \cap G_h = \{\text{points noeuds sur la frontière}\}$$

$$R_h = G_h - S_h = \{\text{points noeuds internes}\}.$$

L'ensemble donné  $G = R \cup S$  est ainsi discrétisé en  $G_h = R_h \cup S_h$ .

## II.- APPROXIMATION DES DERIVEES PARTIELLES.-

Soit le problème limite aux dérivées partielles

$$\begin{cases} Lu = F(x,y) & \text{dans } R \\ lu = f(x,y) & \text{dans } S \end{cases} \quad u = u(x,y)$$

$L$  et  $l$  sont des opérateurs où figurent en général les dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

Le problème limite discrétisé se ramène à

$$\begin{cases} L_h U = F_h & \text{dans } R_h \\ l_h U = f_h & \text{sin } S_h \end{cases}$$

$U$  = solution approchée de  $u$  par la méthode des différences finies.

$L_h$  et  $l_h$  = opérateurs d'approximation de  $L$  et de  $l$ .

Considérons une maille de 12 points noeuds entourant le point

$$(i,k) \begin{cases} x_i = x_0 + ih \\ y_k = y_0 + kh \end{cases}$$

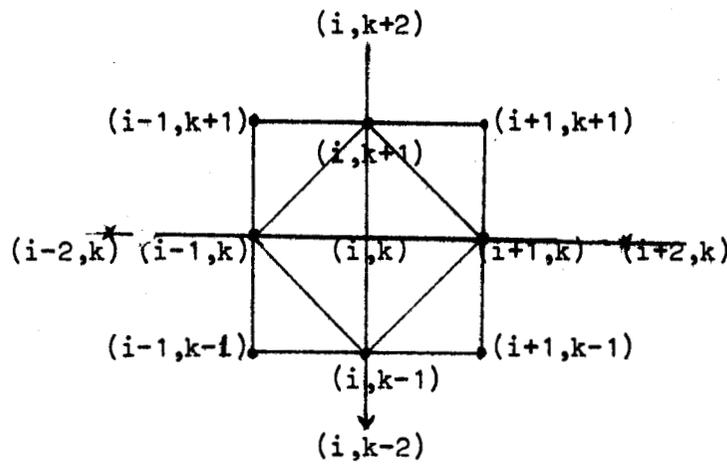


Fig. 2

Le développement de Taylor (voir II-1) nous donne les approximations suivantes, d'ordre 2 en h

1) dérivées partielles d'ordre 1

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,k} = \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{h} + O(h) & \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,k} = \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h} + O(h^2) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,k} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{h} + O(h) & \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,k} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2h} + O(h^2) \end{array} \right.$$

Lorsque  $(i,k)$  sera au voisinage ou sur la frontière  $S$ , on aura besoin des approximations :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,k} = \frac{-3u_{i,k} + 4u_{i+1,k} - u_{i+2,k}}{2h} + O(h^2) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,k} = \frac{-3u_{i,k} + 4u_{i,k+1} - u_{i,k+2}}{2h} + O(h^2) \end{array} \right.$$

2) dérivées partielles d'ordre 2

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,k} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2} + O(h^2) \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,k} = \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{h^2} + O(h^2) \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,k} = \frac{u_{i+1,k+1} + u_{i-1,k-1} - u_{i-1,k+1} - u_{i+1,k-1}}{4h^2} + O(h^2) \end{array} \right.$$

Pour les points au voisinage d'un contour curviligne on utilise encore le développement de Taylor pour l'approximation des dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

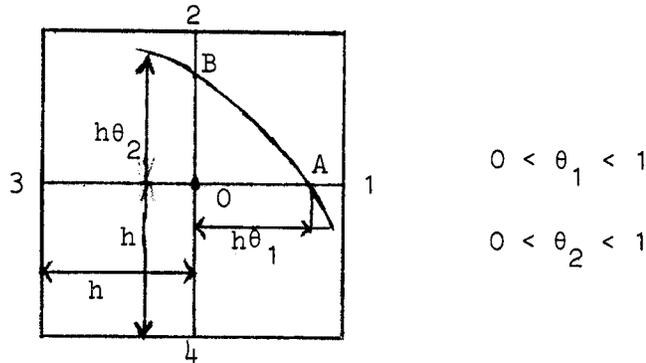


Fig. 2'

$$u_A = u_0 + h\theta_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2} h^2 \theta_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + O(h^3)$$

$$u_3 = u_0 - h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + O(h^3)$$

$$u_B = u_0 + h\theta_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \frac{1}{2} h^2 \theta_2^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 + O(h^3)$$

$$u_4 = u_0 - h \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 + O(h^3)$$

### 3) dérivées partielles d'ordre 1

$$(2') \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{\theta_1(1+\theta_1)} u_A - \frac{1-\theta_1}{\theta_1} u_0 - \frac{\theta_1}{1+\theta_1} u_3 \right\} + O(h^2) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{\theta_2(1+\theta_2)} u_B - \frac{1-\theta_2}{\theta_2} u_0 - \frac{\theta_2}{1+\theta_2} u_4 \right\} + O(h^2) \end{cases}$$

### 4) dérivées partielles d'ordre 2

$$(2'') \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{2}{\theta_1(1+\theta_1)} u_A + \frac{2}{1+\theta_1} u_3 - \frac{2}{\theta_1} u_0 \right\} + O(h) \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{2}{\theta_2(1+\theta_2)} u_B + \frac{2}{1+\theta_2} u_4 - \frac{2}{\theta_2} u_0 \right\} + O(h) \end{cases}$$

Application. - Pour l'équation de Poisson  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$  l'approximation d'ordre 3 en h au point 0 est :

$$\frac{2u_A}{\theta_1(1+\theta_1)} + \frac{2u_B}{\theta_2(1+\theta_2)} + \frac{2u_3}{1+\theta_1} + \frac{2u_4}{1+\theta_2} - 2\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}\right)u_0 = h^2 f_0 + O(h^3)$$

formule à rapprocher de (5) et (6).

Ces approximations vont remplacer l'équation aux dérivées partielles  $Lu = F$  dans  $R$  par un système d'équations algébriques  $L_h U = F_h$  dans  $R_h$ .

La discrétisation de  $\ell u = f$  sur  $S$  présente ses particularités. On se limitera à des indications dans le cas du problème de Dirichlet et celui de Neumann.

### III.- APPROXIMATION DES "CONDITIONS - FRONTIERE".-

On étudiera plus loin le cas particulier du contour rectangulaire.

Soit  $S$  un contour régulier et lisse.

#### 1) Problème de Dirichlet.-

$\ell u = f$  sur  $S$  se réduit ici à  $u|_S = \psi$

#### a) approximation d'ordre 2 en $h$

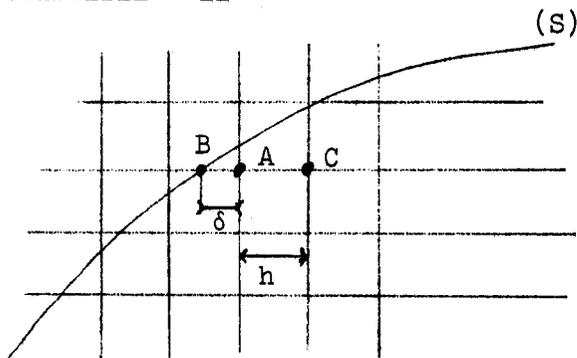


Fig. 3.

Il s'agit d'approcher  $U_A$  avec  $d(A,B) = \delta < h$ .

On se limite à une interpolation linéaire :

$$(4) \quad U_A = \frac{\delta U_C + h U_B}{\delta + h}$$

et l'erreur est ici d'ordre 2 en  $h$ .

b) approximation d'ordre 3 en h

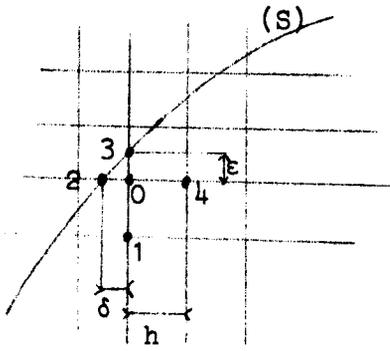


Fig. 4

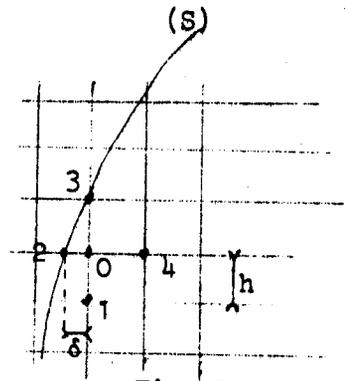


Fig. 5

Pour la résolution de l'équation de Poisson (problème de Dirichlet),

"Mikeladze" propose les évaluations suivantes de  $U_0$  au point noeud 0 :

$$(5) \quad U_0 = \frac{h}{h+\delta} \cdot \frac{h\psi_2 + \delta U_4}{h+\delta} + \frac{\delta}{h+\delta} \frac{U_1 + U_3}{2} - \frac{\delta}{2} \frac{h^2 f_0}{2(h+\delta)}$$

pour la Fig. 5.

$$(6) \quad U_0 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\delta} \frac{h\psi_2 + \delta U_4}{h+\delta} + \frac{\delta}{\varepsilon+\delta} \frac{h\psi_3 + \varepsilon U_1}{h+\varepsilon} - \frac{\delta \varepsilon h f_0}{2(\varepsilon+\delta)}$$

pour la Fig. 4. avec  $f_0 = (\Delta u)_0$ .

## 2) Problème de Neumann.

$lu = f$  sur  $S$  se réduit ici à  $\frac{\partial u}{\partial n}|_S = g(x,y)$ .

$\vec{n}$  = vecteur unitaire de la normale extérieure. On se limite à donner des approximations du 1er ordre en  $h$ . Soit  $(x,y)$  noté 0 et appartenant à  $S_h$  :

1er cas : l'axe de la normale rencontre le treillis en un point de  $R_h$  noté 1.

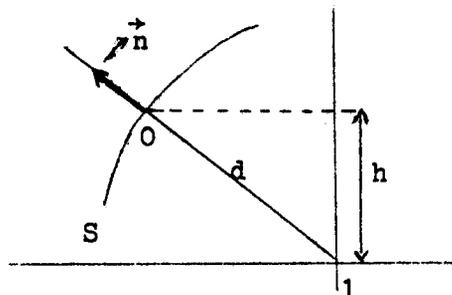


Fig. 6

$$(7) \quad g_0 = \frac{\partial u}{\partial n}|_0 = \frac{U_0 - U_1}{d} + O(d)$$

2ème cas : L'axe de la normale rencontre le treillis en un point  $\notin R_h$

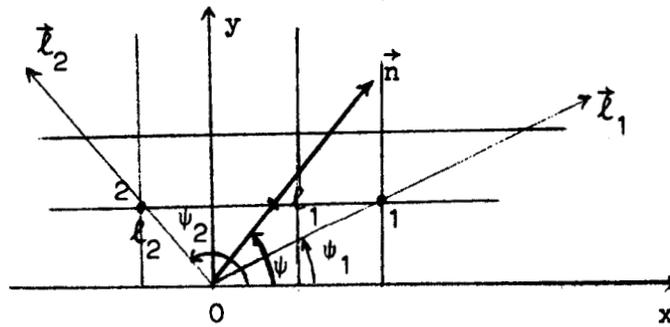


Fig. 7.

Soit  $0 \in S_h$ . Les points 1 et 2 du treillis peuvent être ou non sur la frontière. Les directions  $l_1$  et  $l_2$  ne sont pas parallèles.

Posons  $(\vec{l}_1, \vec{x}) = -\psi_1$   $(\vec{l}_2, \vec{x}) = -\psi_2$   $(\vec{n}, \vec{x}) = -\psi$ .

$$\alpha_1 = \cos \psi_1 \quad \beta_1 = \sin \psi_1 ; \quad \alpha_2 = \cos \psi_2 \quad \beta_2 = \sin \psi_2 ; \quad \alpha = \cos \psi \quad \beta = \sin \psi.$$

Par le développement de Taylor on a :

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{U_1 - U_0}{l_1} = \frac{U(x + l_1 \alpha_1, y + l_1 \beta_1) - U(x, y)}{l_1} = \alpha_1 U_x + \beta_1 U_y + R_1 \\ \frac{U_2 - U_0}{l_2} = \frac{U(x + l_2 \alpha_2, y + l_2 \beta_2) - U(x, y)}{l_2} = \alpha_2 U_x + \beta_2 U_y + R_2 \end{cases}$$

$R_1$  et  $R_2$  sont du 1er ordre respectivement en  $l_1$  et  $l_2$ .

On peut tirer  $U_x$  et  $U_y$  de et donc :

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_0 = \alpha U_x + \beta U_y = \frac{1}{\sin(\vec{l}_1, \vec{l}_2)} \left\{ \frac{U_1 - U_0 - R_1 l_1}{l_1} \sin(\vec{n}, \vec{l}_2) + \frac{U_2 - U_0 - R_2 l_2}{l_2} \sin(\vec{n}, \vec{l}_1) \right\}$$

Si on néglige  $R_1$  et  $R_2$  on a la formule approchée :

$$(10) \quad \varepsilon_0 = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_0 = \frac{1}{\sin(\vec{l}_1, \vec{l}_2)} \left\{ \frac{U_1 - U_0}{l_1} \sin(\vec{n}, \vec{l}_2) + \frac{U_2 - U_0}{l_2} \sin(\vec{l}_1, \vec{n}) \right\}$$

#### IV. - NATURE DES ERREURS. -

Le problème aux limites posé se réduit par la méthode des différences finies à un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues.

3 sortes d'erreurs peuvent être citées :

1°) l'erreur due au remplacement de l'équation  $Lu = F$  par un système d'équations aux différences finies. Le degré de cette erreur dépend de l'approximation des équations aux différences.

2°) l'erreur dans l'approximation des conditions aux frontières

3°) l'erreur dans la résolution du système d'équations, qui dépend de la méthode utilisée.

En général, une méthode itérative (Gauss-Seidel, relaxation, Jacobi) est indiquée. Lorsque la matrice n'est pas facilement inversible, on utilise la méthode des directions alternées introduite par "Peaceman", "Douglas" et "Rachford".

Les erreurs du type 1 et 2 sont des erreurs de méthode. Celle du type 3 est une erreur de résolution du système d'équations.

#### V.- CONVERGENCE ET STABILITE.-

Soit le problème aux limites :

$$(11) \quad \begin{cases} Lu = F & \text{dans } R \\ \ell u = f & \text{sur } S \end{cases}$$

Le schéma - différence <sup>aux</sup> correspondant est :

$$(12) \quad \begin{cases} L_h U = F_h & \text{dans } R_h \\ \ell_h U = f_h & \text{sur } S_h \end{cases}$$

Soit

$$(13) \quad \epsilon_{i,j} = |u_{i,j} - U_{i,j}|$$

#### 1) Convergence.-

Le schéma - différence (12) est dit convergent si  $\forall (i,j) \in G_h$

$$\epsilon_{ij} = |u_{i,j} - U_{i,j}| \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0.$$

La convergence de divers schémas - différence a été étudié dans [1]. Dans certains cas [1], la convergence n'est pas assurée pour des treillis carrés, et n'a lieu que pour une certaine relation entre  $h_x$  et  $h_y$  (treillis rectangulaire).

## 2) Stabilité.

L'ensemble des équations aux différences se réduit à un système d'équations linéaires :

$$P \vec{U} = \vec{b}$$

Si on utilise une méthode itérative, on se ramène à une forme explicite

$$(14) \quad \vec{U}^{(n+1)} = C_n \vec{U}^{(n)}$$

$n$  = nombre d'itérations.

Soit  $\vec{U}^{(n)}$  le vecteur approché donné par le  $n^e$  itération.

Posons

$$(15) \quad \vec{Z}^{(n)} = \vec{U}^{(n)} - \vec{U}^{(n)}$$

Définissons une norme  $|| \quad ||$ .

Si  $||\vec{Z}^{(n)}|| \rightarrow 0$   $n \rightarrow +\infty$ , le schéma différence est dit stable.

### a) Critère de stabilité

D'après (14), on a :

$$(16) \quad \begin{aligned} \vec{Z}^{(n+1)} &= C_n \vec{Z}^{(n)} \\ \Rightarrow ||\vec{Z}^{(n+1)}|| &\leq ||C_n|| ||\vec{Z}^{(n)}|| \text{ propriété de la norme.} \end{aligned}$$

Pour que l'erreur ne croît pas avec  $n$ , la condition nécessaire et suffisante de stabilité est que :

$$(17) \quad ||C_n|| \leq 1$$

Soit  $\rho(C_n)$  le rayon spectral de  $C_n$ . On sait que  $|\rho(C_n)| \leq ||C_n||$  pour

n'importe quelle norme. La condition nécessaire et suffisante de stabilité devient :

$$(18) \quad \underbrace{|\rho(C_n)|}_{\leq 1}$$

b) Cas particulier important

Définissons dans  $L_2$  la norme :

$$(19) \quad \|C_n\|_2 = (\text{Sup. des valeurs propres de } {}^T C C)^{1/2}$$

On démontre que [1]

$$(20) \quad \|C_n\|_2 = [\rho({}^T C C)]^{1/2}$$

Si la matrice  $C_n$  est symétrique on a :

$$\|C_n\|_2 = \max_s |\lambda_s| \quad s = \text{ordre de la matrice}$$

Exemple.-

$$C_n = \begin{pmatrix} (1-2r) & r & & 0 \\ r & (1-2r) & & r \\ & r & (1-2r) & \\ 0 & & r & (1-2r) \end{pmatrix} \quad \forall n$$

Les valeurs propres de cette matrice sont :

$$\lambda_s = 1 - 4r \sin^2 \frac{\pi s}{2N} \quad (s = 1, 2, \dots, N-1)$$

La méthode sera stable si :

$$-1 \leq 1 - 4r \sin^2 \frac{\pi s}{2N} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < r \leq \frac{1}{2}$$

Ce résultat sera utilisé par la suite (équation de Laplace).

CHAPITRE II

$$\text{APPROXIMATION DE } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

EN TERMES DE POINTS DISPOSES1°) EN LOSANGE2°) EN CARRE.

Pour la résolution numérique des équations de Laplace et de Poisson par la méthode des différences finies, on a besoin d'une représentation approchée de l'opérateur de Laplace :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} .$$

L'opérateur de discrétisation sera désigné par  $\Delta_h$  si les points sont disposés en losange et par  $\Delta'_h$  si les points sont disposés en carré. Une combinaison linéaire de ces 2 opérateurs, nous fournira une meilleure approximation de  $\Delta$ .

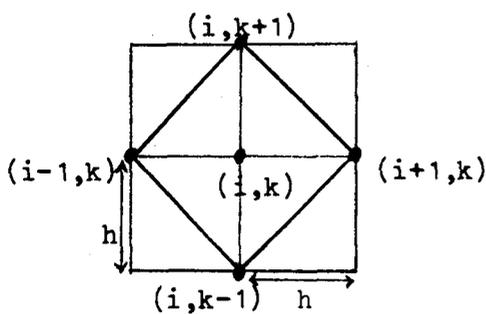
I.- APPROXIMATION EN LOSANGE :  $\Delta_h$ 

Fig. 1.

$$(i,k) \begin{cases} x_i = x_0 + ih \\ y_k = y_0 + kh \end{cases}$$

$$u(x_i, y_k) = u_{i,k}$$

Le développement de Taylor nous donne :

$$(1) \quad \begin{cases} u_{i+1,k} - u_{i,k} = h u_x + \frac{h^2}{2!} u_x^2 + \frac{h^3}{3!} u_x^3 + \frac{h^4}{4!} u_x^4 + \dots \\ u_{i-1,k} - u_{i,k} = -h u_x + \frac{h^2}{2!} u_x^2 - \frac{h^3}{3!} u_x^3 + \frac{h^4}{4!} u_x^4 + \dots \\ u_{i,k+1} - u_{i,k} = h u_y + \frac{h^2}{2!} u_y^2 + \frac{h^3}{3!} u_y^3 + \frac{h^4}{4!} u_y^4 + \dots \\ u_{i,k-1} - u_{i,k} = -h u_y + \frac{h^2}{2!} u_y^2 - \frac{h^3}{3!} u_y^3 + \frac{h^4}{4!} u_y^4 + \dots \end{cases}$$

$u \in C^{n,n} = \{\text{dérivable et continue jusqu'à l'ordre } n \text{ en } x \text{ et } y\}.$

Additionnons membre à membre :

$$u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4u_{i,k} =$$

$$2 \left[ \frac{h^2}{2!} (u_x^2 + u_y^2)_{i,k} + \frac{h^4}{4!} (u_x^4 + u_y^4)_{i,k} + \frac{h^6}{6!} (u_x^6 + u_y^6)_{i,k} + \dots \right]$$

sous la forme condensée :

$$(2) \quad \begin{cases} (\Delta u)_{i,k} = (\Delta_h u)_{i,k} - R_{i,k} \\ (\Delta_h u)_{i,k} = \frac{1}{h^2} [u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4u_{i,k}] \\ R_{i,k} = \frac{2h^2}{4!} (u_x^4 + u_y^4)_{i,k} + 2 \frac{h^6}{6!} (u_x^6 + u_y^6)_{i,k} + \dots \end{cases}$$

1°) Approximation d'ordre 2 en h

Soit  $u \in C^{4,4}$

$$R_{i,k} = \frac{4h^2}{4!} \theta M_4 = \frac{h^2}{6} \theta M_4 = O(h^2)$$

avec

$$(3) \quad \begin{cases} M_4 = \text{Sup} \left[ \left| u_x \right|, \left| u_y \right| \right] & (x,y) \text{ étant à l'intérieur du losange} \\ |\theta| \leq 1 \end{cases}$$

En définitive :

$$(4) \quad \begin{cases} (\Delta u)_{i,k} = (\Delta_h u)_{i,k} - \frac{h^2}{6} \theta M_4 \\ (\Delta_h u)_{i,k} = \frac{1}{h^2} [u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4u_{i,k}] \end{cases}$$

2°) Généralisation et notations nouvelles

Soit à discrétiser  $\vec{\Delta} \vec{u}$  avec  $\vec{u} = \vec{u}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)$  avec  $\vec{u} \in C^{4,4}$ .

Posons :

$$(5) \quad \begin{cases} E \vec{u} = \vec{u} & (a) \\ T_{\pm i} \vec{u} = \vec{u}(x_1, x_2, \dots, x_i \pm h, x_{i+1}, \dots, x_N) & (b) \\ \vec{U}_{x_i} = \frac{T_{+i} - E}{h} \vec{u} = \frac{\vec{u}(x_i+h) - \vec{u}(x_i)}{h} & (c) \\ \vec{U}_{x_i} = \frac{E - T_{-i}}{h} \vec{u} = \frac{\vec{u}(x_i) - \vec{u}(x_i-h)}{h} & (d) \\ \Lambda_{i,i} \vec{u} = \vec{u}_{x_i x_i} = \frac{1}{h^2} [T_{+i} - 2E + T_{-i}] \vec{u} & (e) \end{cases}$$

L'approximation d'ordre 2 de  $\vec{\Delta}$  est alors :

$$\vec{\Delta}_h \vec{u} = \sum_{i=1}^N \Lambda_{ii} \vec{u}$$

$(\Lambda_{ii} \vec{u})$  est l'approximation d'ordre 2 de  $\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_i^2}$

II.- APPROXIMATION EN CARRE :  $\Delta'_h$

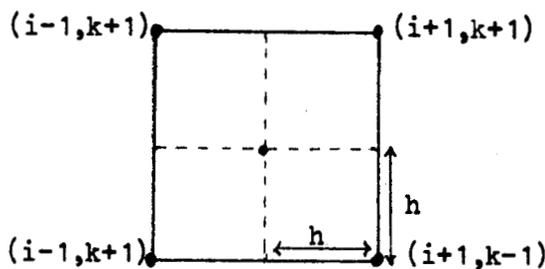


Fig. 2

Le développement de Taylor nous donne :

$$(6) \begin{cases} u_{i+1,k+1} - u_{i,k} = h\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)u + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2u + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3u + \dots \\ u_{i-1,k+1} - u_{i,k} = h\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)u + \frac{h^2}{2!}\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2u + \frac{h^3}{3!}\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3u + \dots \\ u_{i-1,k-1} - u_{i,k} = h\left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)u + \frac{h^2}{2!}\left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2u + \frac{h^3}{3!}\left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^3u + \dots \\ u_{i+1,k-1} - u_{i,k} = h\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)u + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2u + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^3u + \dots \end{cases}$$

Additionnons membre à membre :

$$u_{i+1,k+1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k-1} - 4u_{i,k} =$$

$$4\left[\frac{h^2}{2!}(u_{x^2} + u_{y^2})_{i,k} + \frac{h^4}{4!}(u_{x^4} + 6u_{x^2y^2} + u_{y^4})_{i,k} + \frac{h^6}{6!}(u_{x^6} + 15u_{x^4y^2} + 15u_{x^2y^4} + u_{y^6})_{i,k} + \dots\right]$$

sous forme condensée :

$$(7) \begin{cases} (\Delta u)_{i,k} = (\Delta_h' u)_{i,k} - R_{i,k}' \\ (\Delta_h' u)_{i,k} = \frac{1}{2h^2} |u_{i+1,k+1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k-1} - 4u_{i,k}| \\ R_{i,k}' = \frac{2h^2}{4!}(u_{x^4} + 6u_{x^2y^2} + u_{y^4})_{i,k} + \frac{2h^4}{6!}(u_{x^6} + 15u_{x^4y^2} + 15u_{x^2y^4} + u_{y^6})_{i,k} + \dots \end{cases}$$

→ approximation d'ordre 2 en h

Soit  $u \in C^{4,4}$

$$R_{i,k}' = \frac{2h^2}{3} \theta M_4' = O(h^2)$$

avec

$$(8) \begin{cases} M_4' = \text{Sup} [|u_{x^4}|, |u_{y^4}|, |u_{x^2y^2}|] (x,y) \text{ à l'intérieur du carré} \\ |\theta| \leq 1. \end{cases}$$

En définitive :

$$(9) \begin{cases} (\Delta u)_{i,k} = (\Delta'_h u)_{i,k} - \frac{2h^2}{3} \theta M'_4 \\ (\Delta'_h u)_{i,k} = \frac{1}{2h^2} [u_{i+1,k+1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k-1} - 4u_{i,k}] \end{cases}$$

### III.- COMBINAISON LINEAIRE DE $\Delta_h$ ET $\Delta'_h$ .

Formons une combinaison  $a(\Delta_h u)_{i,k} + b(\Delta'_h u)_{i,k}$ .

On ne peut choisir  $a$  et  $b$  de façon à faire disparaître les termes du 4ème ordre (dérivées partielles) car dans l'expression de  $\Delta'_h$  on a un terme moyen  $u_{x^2 y^2}$  qu'on ne trouve pas dans  $\Delta_h$ .

Toutefois, les opérateurs discrétisés  $\Delta_h$  et  $\Delta'_h$  servent à résoudre les équations de Laplace ou de Poisson.

Par suite  $\Delta u$  et  $\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$  ont une valeur donnée à l'intérieur du domaine. On va donc choisir  $a$  et  $b$  de telle façon que le coefficient de  $\Delta u$  soit égal à 1 et que les termes du 4ème ordre (dérivées partielles) forment l'opérateur biharmonique  $\Delta^2$ .

$$\begin{aligned} a(\Delta_h u)_{i,k} + b(\Delta'_h u)_{i,k} &= (a+b)(u_{x^2 y^2}) + (a+b) \frac{2h^2}{4!} (u_{x^4 y^4}) + \\ &+ 6b \frac{2h^2}{4!} u_{x^2 y^2} + \frac{2h^4}{6!} ((a+b)(u_{x^6 y^6}) + 15bu_{x^4 y^2} + 15bu_{x^2 y^4}) + \dots \\ \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 6b = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

En résumé on a :

$$(10) \begin{cases} \frac{2}{3}(\Delta_h u)_{i,k} + \frac{1}{3}(\Delta'_h u)_{i,k} = \Delta u + \frac{2h^2}{4!} \Delta^2 u + \frac{2h^4}{6!} (\Delta^3 u + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \Delta u) + R''_{i,k} \\ R''_{i,k} = \frac{2}{3} \frac{h^6}{8!} (3\Delta^4 u + 16 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \Delta^2 u + 20 \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} u) + \dots \end{cases}$$

Application à la résolution de  $\Delta u = 0$  et  $\Delta u = f(x,y)$

1°)  $\Delta u = 0$  (approximation d'ordre 6 en h)

$$R''_{i,k} = \frac{40h^6}{3 \cdot 8!} \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + \text{termes d'ordre supérieur.}$$

$$u \in C^{8,8} \Rightarrow R''_{i,k} = \frac{40h^6}{3 \cdot 8!} \theta M_8''$$

$$\text{avec } \begin{cases} M_8 = \text{Sup}[\text{valeurs absolues des dérivées d'ordre 8}] \\ |\theta| \leq 1. \end{cases}$$

L'approximation d'ordre 6 de l'équation de Laplace est :

$$\frac{2}{3}(\Delta_h U)_{i,k} + \frac{1}{3}(\Delta'_h U)_{i,k} = 0.$$

Soit :

$$(11) \quad \begin{aligned} & 4[U_{i+1,k} + U_{i-1,k} + U_{i,k+1} + U_{i,k-1}] + \\ & + [U_{i+1,k+1} + U_{i-1,k+1} + U_{i+1,k-1} + U_{i-1,k-1}] - 20 U_{i,k} = 0 \end{aligned}$$

2°)  $\Delta u = f(x,y)$

a) approximation d'ordre 6 en h

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{2}{3}(\Delta_h u)_{i,k} + \frac{1}{3}(\Delta'_h u)_{i,k} = f_{i,k} + \frac{2h^2}{4!} \Delta f_{i,k} + \frac{2h^4}{6!} (\Delta^2 f_{i,k}) + \frac{\partial^4 f_{i,k}}{\partial x^2 \partial y^2} + R'''_{i,k} \\ R'''_{i,k} = \frac{78h^6}{3 \cdot 8!} \theta M_8 = O(h^6) \end{cases}$$

b) approximation d'ordre 4 en h

$$R^{iv}_{i,k} = O(h^4).$$

$$\begin{aligned} & 4[U_{i+1,k} + U_{i-1,k} + U_{i,k+1} + U_{i,k-1}] + [U_{i+1,k+1} + U_{i-1,k+1} + U_{i+1,k-1} + U_{i-1,k-1}] - \\ & - 20U_{i,k} = h^2 \left[ \frac{8f_{i,k} + f_{i+1,k} + f_{i-1,k} + f_{i,k+1} + f_{i,k-1}}{2} \right] \end{aligned}$$

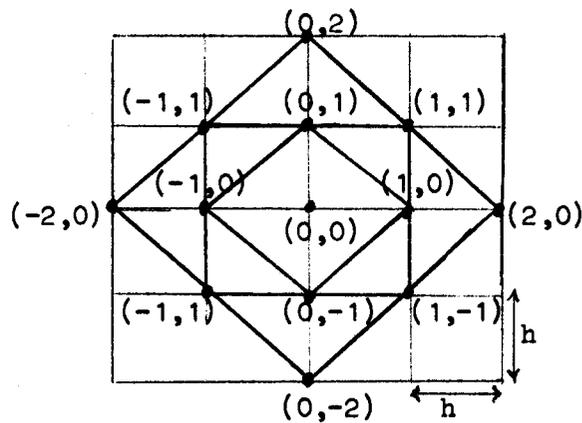
IV. - DISCRETISATION DE L'OPERATEUR BIHARMONIQUE  $\Delta^2$ .-

Fig. 3.

On va donner une approximation d'ordre 2 en  $h$  de  $(\Delta^2 U)_{0,0}$  en fonction de  $U_{0,0}$  et des valeurs de  $U$  pour les 12 points environnants.

Posons :

$$(S_1)_{0,0} = U_{1,0} + U_{0,1} + U_{-1,0} + U_{0,-1} - 4U_{0,0}$$

$$(S_2)_{0,0} = U_{1,1} + U_{-1,1} + U_{1,-1} + U_{-1,-1} - 4U_{0,0}$$

$$(S_3)_{0,0} = U_{2,0} + U_{0,2} + U_{-2,0} + U_{0,-2} - 4U_{0,0}$$

$$(S_1)_{0,0} = 2 \left[ \frac{h^2}{2!} (U_{x^2} + U_{y^2}) + \frac{h^4}{4!} (U_{x^4} + U_{y^4}) + \frac{h^6}{6!} (U_{x^6} + U_{y^6}) + \dots \right]$$

$$(S_2)_{0,0} = 4 \left[ \frac{h^2}{2!} (U_{x^2} + U_{y^2}) + \frac{h^4}{4!} (U_{x^4} + 6U_{x^2 y^2} + U_{y^4}) + \right. \\ \left. + \frac{h^6}{6!} (U_{x^6} + 15U_{x^4 y^2} + 15U_{x^2 y^4} + U_{y^6}) + \dots \right]$$

$$(S_3)_{0,0} = 2 \left[ \frac{4h^2}{2!} (U_{x^2} + U_{y^2}) + \frac{16h^4}{4!} (U_{x^4} + U_{y^4}) + \frac{64h^6}{6!} (U_{x^6} + U_{y^6}) + \dots \right]$$

Formons la combinaison linéaire  $a(S_1)_{0,0} + b(S_2)_{0,0} + c(S_3)_{0,0}$  de telle façon que le coefficient de  $\Delta U$  soit nul et que celui de  $\Delta^2 U = U_{x^4} + 2U_{x^2 y^2} + U_{y^4}$  soit égal à 1.

$$\begin{cases} 2 \frac{h^2}{2!} a + 4 \frac{h^2}{2!} b + 2 \frac{4h^2}{2!} c = 0 \\ 2 \frac{h^4}{4!} a + 4 \frac{h^4}{4!} b + 2 \frac{16h^4}{4!} c = 1 \\ 4 \frac{h^4}{4!} 6b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = \frac{2}{h^4} \quad a = -\frac{8}{h^4} \quad c = \frac{1}{h^4} .$$

D'où

$$(14) \left\{ \begin{aligned} (\Delta^2 U)_0 &= \frac{1}{h^4} [20U_{0,0} - 8(U_{1,0} + U_{0,1} + U_{-1,0} + U_{0,-1}) + 2(U_{1,1} + U_{1,-1} + U_{-1,-1} + U_{-1,1}) \\ &\quad + (U_{2,0} + U_{0,2} + U_{-2,0} + U_{0,-2})] - R_{0,0} \\ \text{avec } R_{00} &= \frac{10}{9} h^2 \theta M_6 \quad M_6 = \text{Sup}[|\text{dérivées partielles d'ordre 6}|] \quad x,y \text{ étant} \\ &\quad \text{dans le domaine des 12 points.} \\ &|\theta| \leq 1 \end{aligned} \right.$$

V.- APPROXIMATION DE  $\Delta$  EN COORDONNEES POLAIRES.

Pour les contours circulaires, on utilise souvent les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ . On a alors :

$$(15) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} .$$

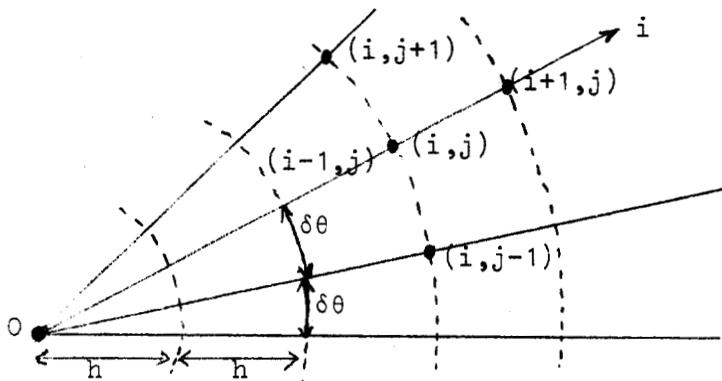


Fig. 4.

Dans le plan  $(r, \theta)$ , on définit les points noeuds par l'intersection des cercles  $(O, r = ih)$   $i=1,2,\dots$  et les demi-droites issues de  $O$  soit

$\theta = j\delta\theta$  ( $j=0,1,2,\dots$ ). Appelons  $\Delta_r$  l'approximation d'ordre 2 en  $h$  de  $\Delta$ .

Les relations (Chap.I, (1) et (3)) nous donnent :

$$\begin{aligned}
 (\Delta u)_{i,j} &= (\Delta_r u)_{i,j} + O(h^2) \\
 \text{avec } (\Delta_r u)_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{1}{ih} \frac{(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})}{2h} + \\
 (16) \qquad \qquad \qquad &+ \frac{1}{(ih)^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\delta\theta)^2}
 \end{aligned}$$

application  $\Delta u = 0$ .

L'approximation d'ordre 4 en  $h$  de l'équation de Laplace en coordonnées polaires est :

$$\begin{aligned}
 (17) \quad (1 - \frac{1}{2i})U_{i-1,j} + (1 + \frac{1}{2i})U_{i+1,j} - 2[1 + \frac{1}{(i\delta\theta)^2}]U_{i,j} + \frac{1}{(i\delta\theta)^2} U_{i,j-1} + \\
 + \frac{1}{(i\delta\theta)^2} U_{i,j+1} = 0
 \end{aligned}$$

avec  $i=1,2,\dots,n$  et  $j=1,2,\dots,m$ .

CHAPITRE III

ESTIMATION DE L'ERREUR DE LA SOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME DE DIRICHLET

POUR L'EQUATION DE POISSON PAR LA METHODE DES NOEUDS

(Cas du rectangle)

Soit le problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson :

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x,y) & \text{dans } R \\ u = \psi(x,y) & \text{dans } S \end{cases}$$

R = domaine intérieur du rectangle de côtés a et b (a ≤ b)

S = contour rectangulaire.

Supposons  $u \in C^{4,4}(R)$ . Le schéma - différence d'ordre 2 en h est :

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta_h U_{i,j} = \frac{1}{h^2} [U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j}] = f_{i,j} & \text{dans } R_h \\ u_{i,j} = U_{i,j} = \psi_{i,j} & \text{sur } S_h \end{cases}$$

avec

$$(3) \quad \begin{cases} R_{i,j} = -\Delta u_{i,j} + \Delta_h U_{i,j} = \frac{h^2}{6} \theta_{i,j} M_4 \\ |\theta_{i,j}| < 1 & \text{et } M_4 = \text{Sup}_R \{ |u_{xx}|, |u_{yy}| \} \end{cases}$$

Définissons :

$S_h^1$  = précontour n°1 = ensemble des points noeuds de  $R_h$  à une distance h de  $S_h$ .

Et plus généralement

$S_h^k$  = précontour n°k = ensemble des points noeuds de  $R_h$  à une distance kh de  $S_h$ .

On se propose d'estimer l'erreur de méthode aux points noeuds de  $R_h$  :

$$\epsilon_{i,j} = |u_{i,j} - U_{i,j}| \quad (i,j) \in R_h$$

Posons  $\delta_{i,j} = U_{i,j} - u_{i,j}$ .

L'estimation de  $\delta_{i,j}$  revient à estimer la solution du problème limite aux différences suivant :

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta_h \delta_{i,j} = \frac{h^2}{6} \theta_{i,j} M_4 & \text{dans } R_h \\ \delta_{i,j} = 0 & \text{sur } C_h \end{cases}$$

La solution du problème (4) peut s'écrire

$$(5) \quad \delta_{m,n} = h^2 \sum_i \sum_j g_{i,j}^{m,n} R_{i,j}$$

avec  $R_{i,j} = \frac{h^2}{6} \theta_{i,j} M_4$ , est  $g_{i,j}^{m,n}$  est la fonction de Green, solution du problème limite suivant :

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta_h g_{i,j}^{m,n} = F_{i,j} & \text{dans } R_h \\ g_{i,j}^{m,n} = 0 & \text{sur } S_h \end{cases}$$

où

$$(7) \quad \begin{cases} F_{m,n} = \frac{1}{h^2} \\ F_{i,j} = 0 & \text{si } i \neq m \text{ ou } j \neq n \end{cases}$$

De (5) on tire :

$$(8) \quad |\delta_{mn}| \leq \sup_R |R_{i,j}| h^2 \sum_i \sum_j |g_{i,j}^{m,n}|$$

Le problème de l'estimation de l'erreur revient à estimer la somme :

$$(9) \quad h^2 \sum_i \sum_j |g_{i,j}^{mn}|.$$

Proposition 1. - Soit  $r$  le nombre total de précontours du réseau  $S_h$ .

Alors, selon que  $a = 2rh$  ou  $a = (2r+1)h$  on a :

$$(10) \quad h^2 \sum_i \sum_j |g_{i,j}^{m,n}| < \frac{r^2 h^2}{2}$$

$$(11) \quad h^2 \sum_i \sum_j |g_{i,j}^{m,n}| < \frac{r(r+1)h^2}{2}$$

Démonstration

D'après (6) et (7) on a :

$$(12) \quad 4|g_{i,j}^{m,n}| - |g_{i-1,j}^{m,n}| - |g_{i+1,j}^{m,n}| - |g_{i,j-1}^{m,n}| - |g_{i,j+1}^{m,n}| < 0 \quad \text{pour } (i,j) \neq (m,n)$$

et

$$(13) \quad 4|g_{m,n}^{m,n}| - |g_{m-i,n}^{m,n}| - |g_{m+i,n}^{m,n}| - |g_{m,n-1}^{m,n}| - |g_{m,n+1}^{m,n}| < 1 \quad \text{pour le point } (m,n)$$

Additionnons (12) et (13) écrites pour tous les points  $R_h$

$$\sum_{S_h^1} |g_{i,j}^{m,n}| < 1$$

Additionnons (12) et (13) écrites pour tous les points de  $R_h^1 = R_h - S_h^1$

$$\sum_{S_h^2} |g_{i,j}^{m,n}| - \sum_{S_h^1} |g_{i,j}^{m,n}| < 1 \Rightarrow \sum_{S_h^2} |g_{i,j}^{m,n}| < 2$$

Plus généralement pour le kème précontour et pour  $k \neq r$  :

$$\sum_{S_h^k} |g_{i,j}^{m,n}| < k$$

Pour le rème précontour, selon que  $a = 2rh$  ou  $a = (2r+1)h$ , on a :

$$2 \sum_{S_h^r} |g_{i,j}^{m,n}| - \sum_{S_h^{r-1}} |g_{i,j}^{m,n}| < 1 \Rightarrow \sum_{S_h^r} |g_{i,j}^{m,n}| < \frac{r}{2}$$

ou

$$\sum_{S_h^r} |g_{i,j}^{m,n}| - \sum_{S_h^{r-1}} |g_{i,j}^{m,n}| < 1 \Rightarrow \sum_{S_h^r} |g_{i,j}^{m,n}| < r$$

En sommant sur tous les précontours on arrive à (10) et (11).

Proposition 2.- Grâce à (10) et (13) et par (8), on obtient :

$$(14) \quad \epsilon_{m,n} = |\delta_{m,n}| < \frac{h^4}{12} r^2 M_4 \quad \text{si } a = 2rh$$

$$(15) \quad \epsilon_{m,n} = |\delta_{m,n}| < \frac{h^4}{12} r(r+1) M_4 \quad \text{si } a = (2r+1)h$$

Les relations (14) et (15) peuvent être combinées en :

$$(16) \quad \epsilon_{m,n} = |\delta_{m,n}| < \frac{h^2}{12} \frac{a^2}{4} M_4$$

Cette estimation est plus exacte que celle connue et donnée par l'inégalité

$$\epsilon_{m,n} < \frac{h^2}{24} \cdot \frac{a^2+b^2}{4} M_4 \quad [2 \text{ p. } 465]$$

La relation (16) peut être utilisée pour tout domaine ayant un contour qui n'introduise pas une erreur due aux conditions frontière (voir III, Chap. I).

Proposition 3.- Si le point  $(m,n)$  appartient au  $k^{\text{ème}}$  contour ( $k < r$ ) on a :

$$(17) \quad h^2 \sum_i \sum_j |g_{i,j}^{m,n}| < \frac{h^2}{2} \cdot k (2r-k+1)$$

Démonstration

Si  $t \leq k$  on a

$$\sum_{S_h^t} |g_{i,j}^{m,n}| < t$$

Si  $t = k+1$  on a alors :

$$\sum_{S_h^{k+1}} |g_{i,j}^{m,n}| - \sum_{S_h^k} |g_{i,j}^{m,n}| < 0$$

$$\Rightarrow \sum_{S_h^{k+1}} |g_{i,j}^{m,n}| < \sum_{S_h^k} |g_{i,j}^{m,n}| < k.$$

Plus généralement pour  $t \geq k$

$$\sum_{S_h^t} |g_{i,j}^{m,n}| < k$$

En sommant sur tous les précontours, on aboutit à (17).

Conséquence.-

A partir de (17) et (8) on obtient

$$(18) \quad \epsilon_k < \frac{h^4}{12} k(2r-k+1) M_4$$

pour tous les points du k<sup>ème</sup> contour.

En particulier pour le 1er précontour :

$$(19) \quad \epsilon_1 < \frac{h^4}{6} r M_4 \quad \text{ou} \quad \epsilon_1 < \frac{h^3}{12} a M_4$$

Remarque.-

Les estimations (16) et 19) contiennent le terme

$M_4 = \text{Sup}_R [ |u_x|_4, |u_y|_4 ]$  où on peut estimer les dérivées d'ordre 4 par une approximation aux différences. Toutefois, en pratique, on peut appliquer le principe suivant : supposons connu l'ordre en h de l'erreur  $\epsilon_h(x,y)$  au point (x,y) :

$$\epsilon_h(x,y) \sim k(x,y)h^n$$

où k(x,y) est indépendant de h.

Désignons par  $U_h(x,y)$  et  $U_{2h}(x,y)$  les solutions approchées du problème limite, respectivement pour le côté de maille égal à h et à 2h.

Si  $u(x,y)$  est la solution exacte :

$$u(x,y) = U_h(x,y) + \epsilon_h(x,y) \quad u(x,y) = U_{2h}(x,y) + \epsilon_{2h}(x,y)$$

Soit

$$U_h - U_{2h} = \epsilon_{2h} - \epsilon_h$$

Comme  $\epsilon_h \sim k h^n$   $\epsilon_{2h} \sim k 2^n h^n \sim 2^n \epsilon_h(x,y)$  on aura :

$$U_h - U_{2h} \sim (2^n - 1) \epsilon_h(x,y)$$

d'où

$$(20) \quad \varepsilon_h(x,y) = \frac{U_h - U_{2h}}{2^{n-1}}$$

Par exemple, pour l'estimation (16) on a  $n=2$  et

$$(21) \quad \varepsilon_h(x,y) \approx \frac{U_h - U_{2h}}{3}$$

alors que pour l'estimation (19) on a  $n=3$  et

$$(22) \quad (\varepsilon_1)_h \approx \frac{U_h - U_{2h}}{7} .$$

CHAPITRE IVMETHODE DES DIRECTIONS ALTERNÉESPOUR LES EQUATIONS DE LAPLACE ET POISSON.CAS DU PROBLEME DE DIRICHLET DANS UN CARRE.

On a à résoudre le problème aux limites :

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 & \text{dans } R \\ U = \psi(x,y) & \text{sur } S \end{cases}$$

Le contour  $S$  est le carré unité et donc  $R = \{0 < x, y < 1\}$ .

Couvrons  $G = R \cup S$  de  $M$  mailles de côté  $h$ .

$Mh$  étant égal à 1, le nombre de points noeuds de  $R_h$  (points internes) est donc  $(M-1)^2$ .

L'approximation aux différences d'ordre 4 en  $h$  du problème (1) est alors d'après (Chap. II, (4)) :

$$\begin{cases} \Delta_h u_{i,j} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0 & \text{dans } R_h \\ U_{i,j} = u_{i,j} = \psi_{i,j} & \text{sur } S_h \end{cases}$$

avec  $R_{i,j} = \frac{1}{6} h^4 M_4$  et  $M_4 = \text{Sup}_{R_h} \left[ |U_{xx}|, |U_{yy}| \right]$  et

$\epsilon_{i,j} = |u_{i,j} - U_{i,j}| < \frac{h^2}{48} M_4$  d'après (chap. III. (16)).

La question de convergence ( $h \rightarrow 0$ ) a été traitée dans [3] pour un domaine quelconque, simplement connexe.



$$(6) \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{1,M-1} \\ u_{2,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{2,M-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{M-1,1} \\ u_{M-1,M-1} \end{bmatrix}$$

$$(7) \quad \vec{k} = \begin{bmatrix} k_{1,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ k_{1,M-1} \\ k_{2,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ k_{2,M-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ k_{M-1,1} \\ k_{M-1,M-1} \end{bmatrix}$$

Les éléments du vecteur  $\vec{u}$  constituent les  $(M-1)^2$  inconnues  $u_{i,j}$  ( $1 \leq i, j \leq M-1$ ) et les éléments du vecteur  $\vec{k}$  dépendent des valeurs à la frontière  $\psi(x,y)$ .

Depuis que  $\det A \neq 0$ , (3) admet une solution unique donnée par :

$$\vec{u} = A^{-1} \cdot \vec{k}$$

Pour résoudre le système (3), on utilise souvent une méthode itérative, car  $A$  contient un grand nombre de zéros.

## II.- METHODE DES DIRECTIONS ALTERNÉES.

Les méthodes de directions alternées de "Peaceman" et Rachford ont été imaginées pour résoudre les équations de Poisson et Laplace à 2 dimensions.

Douglas et Rachford [4] et Douglas [5] imaginèrent des méthodes de directions alternées résolvant l'équation de Poisson à 3 variables.

Yanenko [6] et Konovalov [7] généralisèrent ces méthodes pour les équations aux dérivées partielles d'ordre 2 à plusieurs variables.

Plusieurs articles récents [8,9] et surtout le [10] et [11] donnent des schémas itératifs pour les équations de Laplace et Poisson convergeant assez rapidement.

La méthode peut être étendue, grâce à la méthode des différences analogues de Schwartz [1 P.115] à des contours rectangulaires avec angles rentrants, mais si le cas se pose, le mieux est de partir de la forme (4) de la matrice A et de résoudre le problème par la méthode de Gauss-Seidel par exemple.

Nous n'indiquerons dans cette section que la méthode de Peaceman-Rachford. Les résultats de cette méthode pourront être appliqués à la résolution numérique du problème de la torsion d'une poutre (ou arbre) prismatique à section carrée.

### 1) Méthode de Peaceman-Rachford avec paramètre constant.

Pour les  $(M-1)^2$  points noeuds internes, l'équation aux différences (2) peut s'écrire :

$$(8) \quad (-u_{i-1,j} + 2u_{i,j} - u_{i+1,j}) + (-u_{i,j-1} + 2u_{i,j} - u_{i,j+1}) = 0$$

Rappelons que (Chap. I, (3)) :

$$-u_{i-1,j} + 2u_{i,j} - u_{i+1,j} = -h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} + O(h^4)$$

$$-u_{i,j-1} + 2u_{i,j} - u_{i,j+1} = -h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} + O(h^4)$$

La méthode des directions alternées consiste à scinder le schéma (8) en 2 équations où les opérateurs à inverser sont de la forme  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  ou  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . On discrétise donc le schéma (8) sur les 2 directions x et y.

Le schéma (8) peut s'écrire :

$$(9) \quad \begin{cases} -u_{i-1,j} + 2u_{i,j} - u_{i+1,j} + r u_{i,j} = r u_{i,j} + (u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) \\ -u_{i,j-1} + 2u_{i,j} - u_{i,j+1} + r u_{i,j} = r u_{i,j} + (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \end{cases}$$

où r est un paramètre scalaire qu'on appellera "paramètre de séquence".

Soit  $\vec{u}^{(n)}$  la n<sup>ème</sup> itération de  $\vec{u}$ .

La méthode de Peaceman-Rachford est définie par les équations :

$$(10) \begin{cases} -u_{i-1,j}^{(n*)} + (2+r)u_{i,j}^{(n*)} - u_{i+1,j}^{(n*)} = u_{i,j-1}^{(n)} - (2-r)u_{i,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} \\ -u_{i,j-1}^{(n+1)} + (2+r)u_{i,j}^{(n+1)} - u_{i,j+1}^{(n+1)} = u_{i-1,j}^{(n*)} - (2-r)u_{i,j}^{(n*)} + u_{i+1,j}^{(n*)} \end{cases}$$

On introduit donc une itération intermédiaire  $n^*$ .

Supposons connue la  $n^{\text{ème}}$  itération  $(u_{i,j}^{(n)} \quad 1 \leq i, j \leq M-1)$  en partant d'une approximation initiale quelconque  $(u_{i,j}^{(0)})$  et des conditions limites connues.

La 1ère équation itérative de (10), appliquée à chaque point noeud interne situé sur un treillis parallèle à l'axe des  $x$ , c'est-à-dire  $j = C^{\text{te}}$ , nous donne  $(M-1)$  équations algébriques linéaires aux  $(M-1)$  inconnues  $u_{1,j}^{(n*)}, u_{2,j}^{(n*)}, \dots, u_{M-1,j}^{(n*)}$ .

Comme chaque équation ne contient pas que 3 inconnues, ces  $(M-1)$  équations sont facilement résolues, par élimination par exemple. On applique ainsi la 1ère équation itérative pour chaque ligne parallèle à l'axe des  $x$  ( $1 \leq j \leq M-1$ ) et on détermine ainsi  $u_{i,j}^*$  pour  $1 \leq i, j \leq M-1$ .

On applique alors la 2ème équation itérative pour tous les points situés sur une parallèle à l'axe des  $y$ , c'est-à-dire  $i = C^{\text{te}}$ . On fait ensuite varier  $i$  de 1 à  $M-1$  comme ci-dessus, et on obtient  $u_{i,j}^{(n+1)}$  pour  $1 \leq i, j \leq M-1$ . On démontre [1] que la méthode itérative est convergente  $\forall r > 0$ . La rapidité de convergence est optimum pour :

$$(11) \quad r = r^* = \sin \frac{\pi}{M}$$

Le système (10) s'écrit sous forme matricielle

$$(12) \quad \begin{cases} (2E+rH) \vec{u}^{(n*)} = (2E-rV) \vec{u}^{(n)} + r\vec{k} \\ (2E+rV) \vec{u}^{(n+1)} = (2E-rH) \vec{u}^{(n*)} + r\vec{k} \end{cases}$$

$E =$  matrice unité d'ordre  $(M-1)^2$ .

$H =$  matrice d'ordre  $(M-1)^2$ .  $C =$  matrice d'ordre  $(M-1)$

$$(13) \quad H = \begin{pmatrix} C & & & \\ & C & & \\ & & 0 & \\ & & & C \end{pmatrix}$$

$$(14) \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

V = matrice d'ordre  $(M-1)^2$       J matrice unité

$$(15) \quad V = \begin{pmatrix} 2J & -J & & & \\ -J & 2J & -J & & 0 \\ & & & & \\ 0 & & & & -J \\ & & & -J & 2J \end{pmatrix}$$

2) Méthode de Peaceman-Rachford avec paramètre variable.

En faisant varier  $r$  d'une itération à une autre, on peut encore accélérer la convergence. Le système (12) s'écrit :

$$(16) \quad \begin{cases} \left(\frac{2}{r_{n+1}} E + H\right) \vec{u}^{(n*)} = \left(\frac{2}{r_{n+1}} E - V\right) \vec{u}^{(n)} + \vec{k} \\ \left(\frac{2}{r_{n+1}} E + V\right) \vec{u}^{(n*)} = \left(\frac{2}{r_{n+1}} E - H\right) \vec{u}^{(n+1)} + \vec{k} \end{cases}$$

En éliminant  $\vec{u}^{(n*)}$  entre les 2 équations de (16) on a :

$$(17) \quad \vec{u}^{(n+1)} = T_{n+1} \vec{u}^{(n)} + \vec{g}$$

avec

$$T_{n+1} = \left(\frac{2}{r_{n+1}} E + V\right)^{-1} \left(\frac{2}{r_{n+1}} E + H\right)^{-1} \left(\frac{2}{r_{n+1}} E - H\right) \left(\frac{2}{r_{n+1}} E - V\right)$$

$$\vec{g} = \left(\frac{2}{r_{n+1}} E + V\right)^{-1} \left\{ \left(\frac{2}{r_{n+1}} E + H\right)^{-1} \left(\frac{2}{r_{n+1}} E - H\right) + E \right\} \vec{k}$$

Vu que  $H$  et  $V$  sont commutables ( $HV = VH$ ), ces matrices admettent le même ensemble de vecteurs propres  $\vec{\alpha}^{p,q}$  ( $1 \leq p, q \leq M-1$ ) avec les valeurs propres données par :

$$H \vec{\alpha}^{p,q} = 4 \sin^2\left(\frac{p\pi}{2M}\right) \vec{\alpha}^{p,q}$$

$$V \vec{\alpha}^{p,q} = 4 \sin^2\left(\frac{q\pi}{2M}\right) \vec{\alpha}^{p,q}$$

$1 \leq p, q \leq M-1$

Ce système de vecteurs propres l'est aussi pour la matrice  $T_{n+1}$  et en utilisant (18) on trouve pour valeurs propres correspondantes :

$$T_{n+1} \vec{\alpha}^{p,q} = \left[1 - 2 \frac{a+b}{(1+a)(1+b)}\right] \vec{\alpha}^{p,q} \quad 1 \leq p, q \leq M-1$$

avec  $a = 2r_{n+1} \sin^2 \frac{p\pi}{2M}$

$$b = 2r_{n+1} \sin^2 \frac{q\pi}{2M}.$$

Si  $a$  et  $b$  sont  $> 0$ , on montre facilement que

$$-1 < 1 - 2 \frac{a+b}{(1+a)(1+b)} < 1 \quad \forall a, b > 0$$

Or  $\rho(T_{n+1}) = \sup_{p,q} |\lambda^{p,q}|$  avec  $\lambda^{p,q} = 1 - 2 \frac{a+b}{(1+a)(1+b)}$ . Donc

$$(19) \quad \rho(T_{n+1}) < 1$$

1er cas :  $r_{n+1}$  constant  $\forall n$

$T_{n+1}$  ne dépend pas alors de  $n$  et on peut écrire :

$$\vec{u}^{(n+1)} = T \vec{u}^{(n)} + \vec{g} \quad \vec{u} = T\vec{u} + \vec{g}$$

Soit  $\vec{e}_n$  l'erreur à la  $n^{\text{ième}}$  itération :

$$\vec{e}_n = \vec{u}^{(n)} - \vec{u} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

alors

$$\vec{e}_{n+1} + \vec{u} = T \vec{u}^{(n)} + T \vec{u} + \vec{g}$$

et ainsi

$$\vec{e}_{n+1} = T \vec{e}_n$$

D'où

$$\vec{e}_n = T^n \vec{e}_0$$

Le schéma sera convergent si  $\vec{e}_n \rightarrow \vec{0}$  quand  $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow T^n \rightarrow 0$  (matrice nulle).

Or on sait que  $T$  est convergente (c'est-à-dire  $T^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ ) si et seulement si  $\rho(T) < 1$ .

On en déduit donc d'après (19) que la méthode des directions alternées de Peaceman-Rachford est convergente  $\forall r = \text{constante} > 0$ .

2ème cas :  $r_{n+1}$  est variable. ( $n = 0, 1, \dots, n_0 - 1$ ) avec  $n_0 \geq 2$

Douglas [1 p.107] a donné les valeurs de  $r_{n+1}$  assurant une rapidité de convergence optimum.

Supposons que l'on cherche une solution de (2) avec une précision  $\epsilon$  dans le sens de la norme  $L_2$  c'est-à-dire

$$\|\vec{u}\|_{L_2} = [h^2 \sum_{i,j} u_{i,j}^2]^{1/2}$$

d'où

$$\|\vec{\epsilon}\|_{L_2} = \|\vec{u} - \vec{u}^{(n)}\|_{L_2} = [h^2 \sum_{i,j} (u_{i,j} - u_{i,j}^{(n)})^2]^{1/2}$$

Si le paramètre de cycle  $r_{n+1}$  avec  $n=0, 1, \dots, n_0 - 1$  est appliqué  $m$  fois, la convergence optimum pour avoir la précision  $\epsilon$  est définie par les relations :

$$(20) \quad n_0 \approx m \frac{\log \operatorname{tg} \frac{\pi}{2M} \log \epsilon}{\log\left(\frac{1}{2}\right) \log \frac{\nu-1}{\nu+1}}$$

avec  $\nu = \sqrt{2} + 1$ .

Cas particulier. - carré unité avec  $M = 10$ .

Douglas [1. p.111] prouve que la convergence de (16) est optimum pour les 2 paramètres de séquence :

$$(21) \quad \begin{aligned} r_1 &= 1,237 \\ r_2 &= 7,213. \end{aligned}$$

## CHAPITRE V

- EQUATIONS D'EQUILIBRE DE L'ELASTOSTATIQUE
- ET DE L'ELASTODYNAMIQUE
- PROBLEMES LIMITES

### I.- EQUATIONS D'EQUILIBRE ELASTOSTATIQUE.-

En élasticité plane, la déformation du milieu est caractérisée par le tenseur déformation :

$$(1) \quad \epsilon_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2$$

Les contraintes dans le milieu sont caractérisées par le tenseur - contrainte :

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma_{i,j} = \lambda \delta_{i,j} \epsilon + 2\mu \epsilon_{i,j} & i, j = 1, 2, 3 \\ \epsilon = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} = \text{div } \vec{u} \\ \delta_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } \delta_{i,j} = 1 \text{ si } i=j \end{cases}$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé.

Les conditions de l'équilibre élastique sont

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho F_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho F_2 = 0 \end{cases}$$

$\vec{F} \begin{cases} F_1 \\ F_2 \end{cases}$  vecteur densité massique de force (1), (2), (3) donnent l'équation de

l'élastostatique :

$$(4) \quad \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \rho \vec{F} = \vec{0}$$

(4) est valable pour le problème de l'élastostatique à 3 dimensions.

(4) est écrite sous forme condensée :

$$(5) \quad \Delta^* \vec{u} + \rho \vec{F} = \vec{0}$$

## II.- EQUATIONS DE L'EQUILIBRE ELASTODYNAMIQUE.-

Dans le cas où les forces appliquées au contour dépendent du temps (en général vibrations élastiques), le principe de la dynamique donne

$$(6) \quad \begin{cases} -\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho F_1 = 0 \\ -\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho F_2 = 0 \end{cases}$$

et l'équation de l'équilibre élastodynamique est :

$$(7) \quad -\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \Delta^* \vec{u} + \rho \vec{F} = \vec{0}$$

## III.- EQUATION BIHARMONIQUE.-

En négligeant les forces massiques ( $\vec{F} = \vec{0}$ ), posons

$$(8) \quad \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Le système (3) devient une identité. Toutefois, la fonction  $\psi$  n'est pas arbitraire. La condition de compatibilité du système s'écrit :

$$(9) \quad \Delta \Delta \psi = \Delta^2 \psi = 0$$

qui peut être utilisée en remplacement de  $\Delta^* \vec{u} = \vec{0}$ .

## IV.- PROBLEMES LIMITES EN ELASTICITE.-

On peut poser 3 sortes de problèmes pour l'équation générale (7).

1°) 1er problème limite (Dirichlet)

On se donne le vecteur déplacement  $\vec{u}$  sur la frontière  $S$  (abscisse curviligne  $s$ )

$$(10) \quad \vec{u}(s)|_S = \vec{f}(s,t)$$

2°) 2ème problème limite (Neumann)

On se donne le tenseur des contraintes sur le contour

$$(11) \quad \sigma_{i,k}(s)|_S = \psi_{i,k}(s,t)$$

3°) 3ème problème limite (mixte)

Soit  $S = S_1 \cup S_2$

$$(12) \quad \begin{cases} \vec{u}(s)|_{S_1} = \vec{f}(s,t) \\ \sigma_{i,k}(s)|_{S_2} = \psi_{i,k}(s,t) \end{cases}$$

V.- CAS D'ELASTICITE PLANE.-1) Etat plan de déformation (cylindre infiniment long)

Le vecteur déplacement est situé dans des plans parallèles à  $x O y$

$$\vec{u} \begin{cases} u_1 = u_1(x,y) \\ u_2 = u_2(x,y) \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) donnent les composantes du tenseur déformation et contrainte.

D'après (2)  $\sigma_z = \sigma_{33}$  s'exprime en fonction de  $\sigma_x = \sigma_{11}$  et  $\sigma_y = \sigma_{22}$

$$(13) \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad \text{avec} \quad \nu = \text{coefficient de Poisson}$$

En partant des équations d'équilibre (3) et de l'équation de compatibilité

$$(14) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

(les 5 autres sont des identités), on obtient :

$$(15) \quad (1-\nu) \Delta(\sigma_x + \sigma_y) + \rho \operatorname{div} \vec{F} = 0.$$

Dans le cas courant où  $\vec{F} = \vec{0}$  on introduit la fonction d'Airy  $\psi$  par les relations (8).

Si  $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{0}$  on posera :

$$(16) \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + P \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + P \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}.$$

avec  $\rho F_x = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad \rho F_y = - \frac{\partial P}{\partial y}.$

P dérive d'un potentiel harmonique et on a par (15) (vu  $\Delta P = 0$ ) :

$$\Delta \Delta \psi = 0$$

## 2) Etat plan des contraintes (plaques minces)

Les composantes du tenseur des contraintes sont :

$$\sigma_x = f(x,y) \quad \sigma_y = g(x,y) \quad \tau_{xy} = h(x,y) \quad \sigma_z = 0$$

Les composantes du tenseur des déformations sont :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad \varepsilon_z = - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

E = module d'élasticité longitudinale.

Les équations d'équilibre et de compatibilité donnent :

$$(17) \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) + (1+\nu)\rho \operatorname{div} \vec{F} = 0$$

Si  $\vec{F} = \vec{0}$  on introduit de la même façon la fonction d'Airy  $\psi$ .

Conclusion. - Pour les 2 états (déplacements ou contraintes planes) les relations (8) sont valables ( $\vec{F} = \vec{0}$ ).

CHAPITRE VI

APPLICATION DE LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES A LA RESOLUTION

NUMERIQUE DU 1er PROBLEME DE L'ELASTOSTATIQUE.

GENERALISATION A L'ELASTODYNAMIQUE.

I.- ELASTICITE PLANE.-

soit  $\vec{u} \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases}$  vecteur déplacement dans un milieu isotrope et homogène.

Désignons par R le domaine limité par la courbe lisse S.

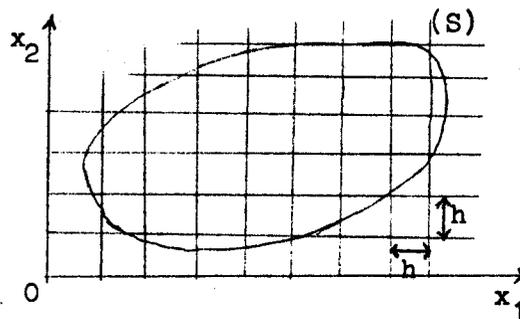


Fig. 1.

On doit avoir dans R :

$$(1) \quad \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \rho \vec{F} = \vec{0}$$

et sur S on a :

$$(2) \quad \vec{u}(s)|_S = \vec{\psi}(s)$$

Discretisons le domaine  $G = R \cup S$  et les équations

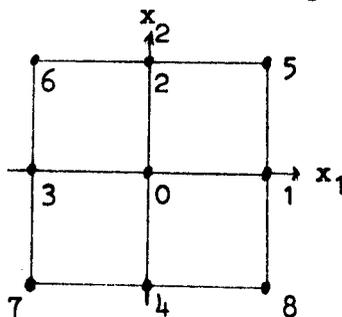


Fig. 2.

En utilisant les approximations (Chap. I : 1,2,3 et Chap. II-4), les équations (1) discrétisées deviennent :

$$(3) \left\{ \begin{aligned} 2(\lambda+3\mu)(u_1)_0 &= (\lambda+\mu)[(u_1)_1+(u_1)_3 + \frac{1}{4}\{(u_2)_5+(u_2)_7-(u_2)_6-(u_2)_8\}] \\ &\quad + \mu \sum_{i=1}^4 (u_1)_i + h^2 \rho F_1 + O(h^4) \\ 2(\lambda+3\mu)(u_2)_0 &= (\lambda+\mu)[(u_2)_2+(u_2)_4 + \frac{1}{4}\{(u_1)_5+(u_1)_7-(u_1)_6-(u_1)_8\}] \\ &\quad + \mu \sum_{i=1}^4 (u_2)_i + h^2 \rho F_2 + O(h^4) \end{aligned} \right.$$

Posons  $u_1 = X$  et  $u_2 = Y$  (3) nous donne une approximation d'ordre 4 pour tous les points intérieurs du domaine :

$$(4) \left\{ \begin{aligned} 2(\lambda+3\mu)X_0 &= (\lambda+\mu)[X_1+X_3 + \frac{1}{4}\{Y_5+Y_7-Y_6-Y_8\}] + \mu \sum_{i=1}^4 X_i + h^2 \rho F_1 \\ 2(\lambda+3\mu)Y_0 &= (\lambda+\mu)[Y_2+Y_4 + \frac{1}{4}\{X_5+X_7-X_6-X_8\}] + \mu \sum_{i=1}^4 Y_i + h^2 \rho F_2 \end{aligned} \right.$$

Pour les points voisins d'un contour non rectangulaire, on se limitera à une simple interpolation linéaire (voir Chap I, (III))

Pour les points du contour on a  $u_{i,j} = \psi_{i,j}$  (5).

Les  $n$  équations (4) et les  $m$  équations (5) nous donnent l'équation matricielle à  $n+m$  inconnues :

$$A \vec{u} = \vec{b}$$

On applique souvent la méthode itérative de Gauss-Seidel. Toutefois l'inversion de la matrice  $A$  est assez mal aisée et les recherches récentes [6] [12] tendent à étendre la méthode des directions alternées à l'équation d'équilibre de l'élasticité. On propose ci-dessus la "Splitting Method" de Konovalov [12].

II.- "SPLITTING METHOD" POUR LA RESOLUTION DU 1er PROBLEME DE L'ELASTOSTATIQUE  
DANS LE CARRE.-

Il s'agit de déterminer  $\vec{u}(u_1, u_2)$  :

$$(6) \quad \Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad div } \vec{u} + \frac{2(1+\sigma)}{E} \rho \vec{F} = \vec{0}$$

pour  $R\{0 < x_1, x_2 < 1\}$  et

$$(7) \quad \vec{u}|_S = \vec{\psi}(x_1, x_2)$$

$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$  coefficient de Poisson et  $E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$  module d'Young.

Discretisons  $G = R \cup S$  en  $G_h = R_h \cup S_h$ .

Posons :

$$\vec{\omega}_{x_i} = \frac{\vec{\omega}(x_i+h) - \vec{\omega}(x_i)}{h} \quad \vec{\omega}_{x_i}^- = \frac{\vec{\omega}(x_i) - \vec{\omega}(x_i-h)}{h}$$

$$\Lambda_{ii} \vec{\omega} = \vec{\omega}_{x_i x_i} = \frac{\vec{\omega}(x_i+h) - 2\vec{\omega}(x_i) + \vec{\omega}(x_i-h)}{h^2}$$

$$\text{Alors } \Delta_h \vec{\omega} = \Lambda_{11} \vec{\omega} + \Lambda_{22} \vec{\omega}$$

$$\Lambda_{12} \vec{\omega} = \frac{1}{4} (\vec{\omega}_{x_1 x_2} + \vec{\omega}_{x_1 x_2}^- + \vec{\omega}_{x_1 x_2}^- + \vec{\omega}_{x_1 x_2}^-)$$

$$\Lambda \vec{\omega} = (\Lambda_{11} \omega_1 + \Lambda_{12} \omega_2 ; \Lambda_{22} \omega_2 + \Lambda_{12} \omega_1)$$

$$\text{De plus } N h = 1 \quad \vec{\omega}_{i,j} = \vec{\omega}(ih_1, jh_2).$$

Soit  $\vec{v} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$  la valeur approchée de  $\vec{u} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ .

L'approximation d'ordre 2 en  $h$  du problème (6) (7) est :

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta_h \vec{v} + \frac{1}{1-2\sigma} \Lambda \vec{v} + \vec{F} = 0 & (x_1, x_2) \in R_h \\ \vec{v}|_{S_h} = \vec{\psi} & \vec{F} = \frac{2(1+\sigma)}{E} \rho \vec{F} \end{cases}$$

La détermination de  $\vec{v}$  à partir de (8) nécessite l'inversion de l'opérateur multidimensionnel  $\Delta_h + \frac{1}{1-2\sigma} \Lambda$ .

Konovalov propose le schéma itératif suivant : supposons déterminé  $\vec{v}^{(k)}(X^{(k)}, Y^{(k)})$  après la  $k^{\text{ème}}$  itération du vecteur  $\vec{v}$  dans  $R_h$ . Introduisons le vecteur auxiliaire  $\vec{v}^{(k+\frac{1}{2})}(X^{(k+\frac{1}{2})}, Y^{(k+\frac{1}{2})})$  défini dans  $R_h$  à partir de  $\vec{v}^{(k)}$  par :

$$(9) \begin{cases} X^{(k+\frac{1}{2})} = X^{(k)} + \alpha \left[ \left(1 + \frac{1}{1-2\sigma}\right) \Lambda_{11} X^{(k+\frac{1}{2})} + \Lambda_{22} X^{(k)} + \frac{1}{1-2\sigma} \Lambda_{12} Y^{(k)} + f_1 \right] \\ Y^{(k+\frac{1}{2})} = Y^{(k)} + \alpha \left[ \Lambda_{11} Y^{(k+\frac{1}{2})} + \left(1 + \frac{1}{1-2\sigma}\right) \Lambda_{22} Y^{(k)} + \frac{1}{(1-2\sigma)} \Lambda_{12} X^{(k)} + f_2 \right] \\ X^{(k+\frac{1}{2})} \Big|_{S_h} = \psi_1 \quad Y^{(k+\frac{1}{2})} \Big|_{S_h} = \psi_2 \quad \alpha = \text{constante} > 0. \end{cases}$$

La détermination de  $\vec{v}^{(k+\frac{1}{2})}$  suit à partir de (9) et ne nécessite que l'inversion d'un opérateur unidimensionnel. C'est pour cela que cette méthode s'appelle aussi méthode des étapes fractionnaires.

Avec les valeurs connues de  $\vec{v}^{(k)}$  et  $\vec{v}^{(k+\frac{1}{2})}$  on détermine  $\vec{v}^{(k+1)}$

par :

$$(10) \begin{cases} X^{(k+1)} = X^{(k+\frac{1}{2})} + \alpha \Lambda_{22} (X^{(k+1)} - X^{(k)}) \\ Y^{(k+1)} = Y^{(k+\frac{1}{2})} + \alpha \left(1 + \frac{1}{1-2\sigma}\right) \Lambda_{22} (Y^{(k+1)} - Y^{(k)}) \\ X^{(k+1)} \Big|_{S_h} = \psi_1 \quad Y^{(k+1)} \Big|_{S_h} = \psi_2 \end{cases}$$

La détermination de  $\vec{v}^{(k+1)}$  à partir de (10) nécessite l'inversion d'un opérateur unidimensionnel.

Konovalov [12] prouve la convergence de ce schéma itératif  $\forall \alpha > 0$  par une méthode basée sur les inégalités d'énergie.

### III.- SPLITTING METHOD POUR LA RESOLUTION DU 1er PROBLEME DE L'ELASTODYNAMIQUE

#### DANS LE CARRE. - (672 51e)

Il s'agit de déterminer  $\vec{u}(u_1, u_2)$

a) qui est solution de

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \vec{F} \quad \rho = 1$$

pour  $R = \{0 < x_1, x_2 < 1\} \times \{0 < t \leq T\}$ .

b) vérifiant les conditions initiales (Cauchy) :

$$(12) \quad \vec{u}(x_1, x_2, 0) = \vec{\psi}(x_1, x_2) \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x_1, x_2, 0) = \vec{\Psi}(x_1, x_2)$$

dans  $G = \{0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$ .

c) et satisfaisant les conditions aux frontières :

$$(13) \quad \vec{u}(x_1, x_2, t) \Big|_S = \vec{g}(x_1, x_2, t) \quad (x_1, x_2) \in S$$

Couvrons  $G = R \cup S$  par un treillis  $\vec{h}(h_1, h_2)$  et discrétisons la variable temps  $t = n\tau$   $\tau > 0$  -  $G = R \cup S \rightarrow G_h = R_h \cup S_h$ . On conserve les notations de Chap. II-5 et introduisons les notations supplémentaires :

$$\vec{\omega}_t^+ = \frac{\vec{\omega}(x_i, t+\tau) - \vec{\omega}(x_i, t)}{\tau} \quad \vec{\omega}_t^- = \frac{\vec{\omega}(x_i, t) - \vec{\omega}(x_i, t-\tau)}{\tau}$$

$$\vec{\omega}^n = \vec{\omega}(x_1, x_2, n\tau)$$

L'approximation aux différences d'ordre 2 en  $h$  du problème (11-13) est alors :

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_{tt}^n &= \frac{\vec{u}^{n+1} - 2\vec{u}^n + \vec{u}^{n-1}}{\tau^2} = \frac{1}{2} \mu \Delta_h (\vec{u}^{n+1} + \vec{u}^{n-1}) + \frac{1}{2} (\lambda + \mu) \Lambda_{ij} (\vec{u}^{n+\delta_{ij}} + \vec{u}^{n-\delta_{ij}}) + \vec{F}^n \\ \text{avec } \delta_{ij} &= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad \text{et } \frac{\tau}{h_i} = c^{te}. \\ \text{et } \Lambda_{ij} \vec{\omega} &= \{\Lambda_{11} \omega_1 + \Lambda_{12} \omega_2 ; \Lambda_{22} \omega_2 + \Lambda_{12} \omega_1\} \end{aligned} \right\}$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}^0 = \vec{\psi} \quad \vec{u}^1 = \vec{\psi} + \tau \vec{\Psi} + \frac{1}{2} \tau^2 [\mu \Delta_h \vec{\psi} + (\lambda + \mu) \Lambda_{ij} \vec{\psi} + \vec{F}^0] \\ (16) \quad \vec{u}^n |_{S_h} = \vec{g}^n \end{array} \right.$$

Ecrivons (14) sous la forme condensée :

$$(17) \quad (E - \frac{1}{2} \tau^2 L_h) (\vec{u}^{n+1} + \vec{u}^{n-1}) = J_h \vec{u}^n + \tau^2 \vec{F}^n$$

avec

$$(18) \quad L_h \vec{\omega} = \{ \mu \Delta_h \omega_1 + (\lambda + \mu) \Lambda_{11} \omega_1 ; \mu \Delta_h \omega_2 + (\lambda + \mu) \Lambda_{22} \omega_2 \}$$

et

$$(19) \quad J_h \vec{\omega} = \{ 2\omega_1 + \tau^2 (\lambda + \mu) \Lambda_{11} \omega_2, 2\omega_2 + \tau^2 (\lambda + \mu) \Lambda_{12} \omega_1 \}$$

$$(20) \quad E \vec{\omega} = \vec{\omega}$$

Konovalov [13] propose la méthode de directions alternées suivantes, vu que  $(E - \frac{1}{2} \tau^2 L_h)$  est un opérateur multidimensionnel :

$$(21) \quad (E - \frac{1}{2} \tau^2 L_h) \vec{u} = [E - \frac{1}{2} \tau^2 (L_1)_h] [E - \frac{1}{2} \tau^2 (L_2)_h] \vec{u} + O(\tau^4)$$

avec

$$(22) \quad (L_1)_h \vec{\omega} = \{ (\lambda + 2\mu) \Lambda_{11} \omega_1, \mu \Lambda_{11} \omega_2 \}$$

$$(23) \quad (L_2)_h \vec{\omega} = \{ \mu \Lambda_{12} \omega_1, (\lambda + 2\mu) \Lambda_{22} \omega_2 \}$$

Les opérateurs  $(L_1)_h$  et  $(L_2)_h$  sont unidimensionnels et donc facilement inversibles, (17) s'écrit alors

$$(24) \quad [E - \frac{1}{2} \tau^2 (L_1)_h] [E - \frac{1}{2} \tau^2 (L_2)_h] (\vec{u}^{n+1} + \vec{u}^{n-1}) = J_h \vec{u}^n + \tau^2 \vec{F}^n$$

(approximation d'ordre 4 en  $\tau$ ).

Posons :

$$(25) \quad \vec{u}^{n+1} \frac{1}{2} = \left[ E - \frac{1}{2} \tau^2 (L_2)_h \right] (\vec{u}^{n+1} + \vec{u}^{n-1}).$$

Le vecteur  $\vec{u}^{n+1}$  est alors calculé à partir des valeurs connues de  $\vec{u}^n$  et  $\vec{u}^{n-1}$  par le système :

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{\vec{u}^{n+1} \frac{1}{2} - 2\vec{u}^n}{\tau^2} = \frac{1}{2} (L_1)_h \vec{u}^{n+1} \frac{1}{2} + (\lambda + \mu) \Lambda_{12} \vec{u}^n + \vec{F}^n \\ \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^{n+1} \frac{1}{2} + \vec{u}^{n-1}}{\tau^2} = \frac{1}{2} (L_2)_h (\vec{u}^{n+1} + \vec{u}^{n-1}). \end{cases}$$

On calcule  $\vec{u}^{n+1} \frac{1}{2}$  par la 1ère équation de (26) et on en déduit  $\vec{u}^{n+1}$  par la 2ème équation de (26). La condition frontière s'écrit ici :

$$(27) \quad \vec{u}^{n+1} \frac{1}{2} \Big|_{S_h} = \left[ E - \frac{1}{2} \tau^2 (L_2)_h \right] (\vec{g}^{n+1} + \vec{g}^{n-1}).$$

Konovalov [13] montre que pour  $u \in C^{4,4}(G)$  et  $\vec{F} \in C^{0,0}(G)$ , le schéma (14-16) est convergent et que l'approximation est d'ordre 2 en  $\tau$ , c'est-à-dire plus précisément que si l'on appelle  $\vec{z}^n = \vec{u}^n - \vec{u}(x_1, x_2, t)$  avec  $t = n\tau$  on a

$$\|\vec{z}^n\| + \|\vec{z}^n\|_2 = O(\tau^2)$$

$$\text{avec } \|\vec{z}^n\|^2 = h_1 h_2 \int_{G_h^n} [(z_1^n)^2 + (z_2^n)^2]$$

$$\|\vec{z}^n\|_1^2 = \|\vec{z}^n_{x_1}\|_1^2 + \|\vec{z}^n_{x_2}\|_1^2 \quad \text{et} \quad \|\vec{z}^n\|_2^2 = \|\vec{z}^n\|_1^2 + \|\vec{z}^n_t\|_1^2.$$

#### IV.- ELASTICITE A 3 DIMENSIONS.-

On peut étendre le système (4) au cas de l'espace à 3 dimensions.

On doit avoir

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \rho \vec{F} = \vec{0} \quad \text{dans } R$$

$$\vec{u}|_S = \vec{\psi}(x, y, z)$$

$\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ . Posons  $u_1 = X$   $u_2 = Y$   $u_3 = Z$ .  $\vec{V}(X, Y, Z)$  vecteur approché de  $\vec{u}$ .

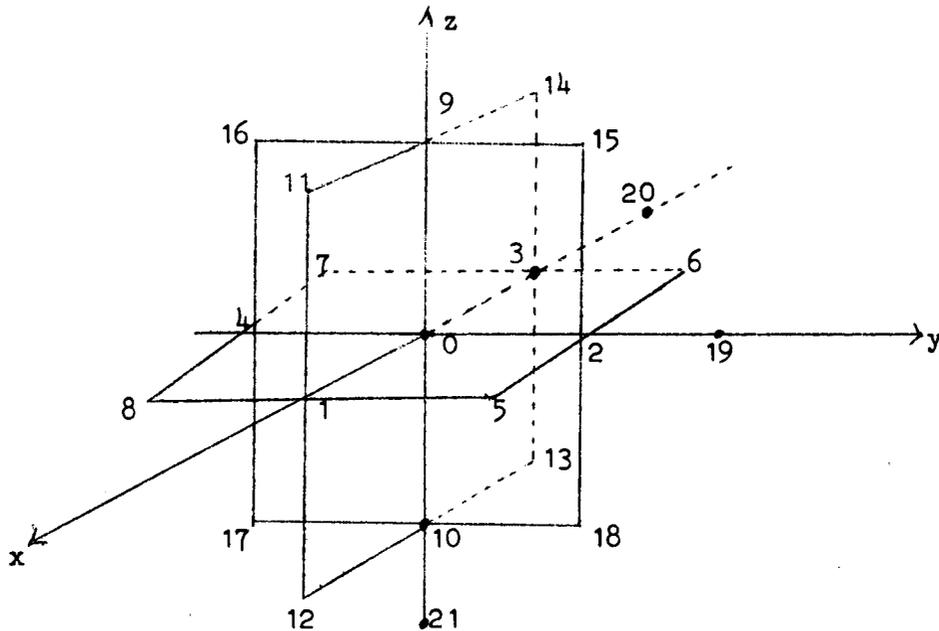


Fig. 3.

L'approximation d'ordre 4 en  $h$  pour tous les points intérieurs du domaine est :

$$(28) \left\{ \begin{array}{l} 2(\lambda + 4\mu)X_0 = (\lambda + \mu) \left[ (X_1 + X_3) + \frac{1}{4}(Y_5 + Y_7 - Y_6 - Y_8) + \frac{1}{4}(Z_{11} + Z_{13} - Z_{12} - Z_{14}) \right] \\ \quad + \mu \left( \sum_{i=1}^4 X_i + X_9 + X_{10} \right) + h^2 \rho F_1 \\ 2(\lambda + 4\mu)Y_0 = (\lambda + \mu) \left[ (Y_2 + Y_4) + \frac{1}{4}(X_5 + X_7 - X_6 - X_8) + \frac{1}{4}(Z_{15} + Z_{17} - Z_{16} - Z_{18}) \right] \\ \quad + \mu \left( \sum_{i=1}^4 Y_i + Y_9 + Y_{10} \right) + h^2 \rho F_2 \end{array} \right.$$

$$2(\lambda+4\mu)Z_0 = (\lambda+\mu)[(Z_9+Z_{10}) + \frac{1}{4}(X_{11}+X_{13}-X_{12}-X_{14}) + \frac{1}{4}(Y_{15}+Y_{17}-Y_{16}-Y_{18})] \\ + \mu \left[ \sum_{i=1}^4 Z_i + Z_9 + Z_{10} \right] + h^2 \rho F_3.$$

Ce système combiné avec les conditions-frontière permet de résoudre le problème de Dirichlet. On étudiera plus loin le 2<sup>ème</sup> problème de l'élastostatique pour un parallélépipède.

#### V.- CAS PARTICULIER DES SYSTEMES A SYMETRIE DE REVOLUTION.-

Soit R le domaine à étudier et S la frontière.

On pose le problème de Dirichlet pour l'élastostatique. Dans R  $\vec{u}$  vérifie l'équation d'équilibre :

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \rho \vec{F} = 0$$

Sur S  $\vec{u}$  satisfait la condition limite :

$$\vec{u}|_S = \vec{\psi}(r, z)$$

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , soient  $u_r, u_\theta$  et  $u_z$  les composantes de  $\vec{u}$ .

Pour les systèmes à symétrie de révolution, le vecteur  $\vec{u}$  est contenu dans le plan  $(r, z)$  et par suite :

$$u_\theta = 0 \quad \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = 0$$

(C) = S  $\cap$  plan quelconque passant par z'z

$$u_r(z, -r) = -u_r(z, r)$$

$$u_z(z, -r) = u_z(z, r)$$

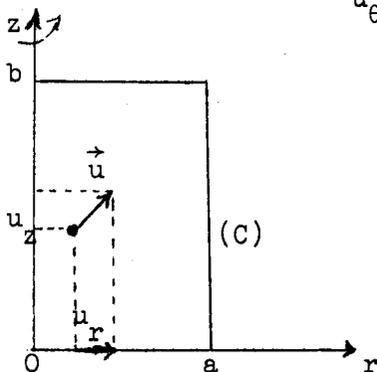


Fig. 4.

La fig. 4 représente un domaine cylindrique, mais les formules qui vont suivre, sont valables pour tout domaine à symétrie axiale.

L'équation de l'équilibre s'écrit :

$$(29) \left\{ \begin{aligned} \mu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \rho k_z &= 0 \\ \mu \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho k_r &= 0 \end{aligned} \right.$$

Posons  $u_r \approx R$      $u_z \approx Z$  et  $r = kh$ .

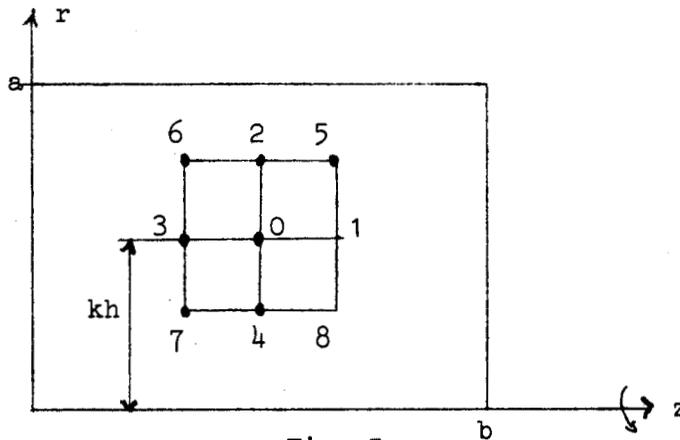


Fig. 5.

En appliquant les relations (1) et (2) du Chap. I, on obtient l'approximation d'ordre 4 en  $h$  du système (29) :

$$(30) \left\{ \begin{aligned} R_0 \left( (\lambda + 2\mu) \frac{1}{k^2} + 2(\lambda + 3\mu) \right) &= (\lambda + 2\mu) \left[ R_2 \left( 1 + \frac{1}{2k} \right) + R_4 \left( 1 - \frac{1}{2k} \right) \right] + \\ &+ \mu(R_1 + R_3) + (\lambda + \mu) \frac{1}{4} (Z_5 + Z_7 - Z_6 - Z_8) + h^2 \rho F_r \\ Z_0 (2(\lambda + 3\mu)) &= (\lambda + 2\mu) (Z_1 + Z_3) + \mu \left[ Z_2 \left( 1 + \frac{1}{2k} \right) + Z_4 \left( 1 - \frac{1}{2k} \right) \right] + (\lambda + \mu) \left[ \frac{1}{4} (R_5 + R_7 - R_6 - R_8) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2k} (R_1 - R_3) \right] + h^2 \rho F_z. \end{aligned} \right.$$

Ces équations jointes à la condition frontière, permettent de ramener le problème différentiel à un problème algébrique et par conséquent de résoudre le problème. Si la courbe (C) est quelconque, on se contentera d'une interpo-

lation linéaire pour les points voisins de la frontière.

\* Calcul des contraintes à partir des déplacements :

$$(31) \quad T = 2\mu E + \lambda(\operatorname{div} \vec{u}) I \quad \left\{ \begin{array}{l} T = \text{tenseur symétrique des contraintes} \\ E = \text{tenseur symétrique des déformations} \\ I = \text{tenseur unité} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} \\ \epsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \epsilon_{\theta z} &= \epsilon_{r\theta} = 0 \end{aligned}$$

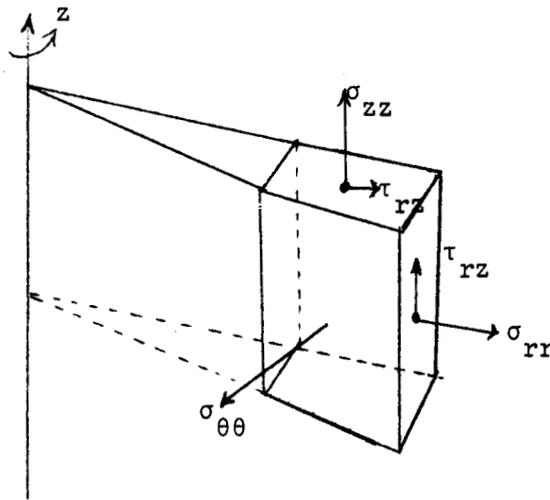


Fig. 6.

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \\ \sigma_{rr} = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = 2\mu \frac{u_r}{r} + \lambda \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \\ \tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0 \end{array} \right.$$

<=> (32)

Ces équations discrétisées donnent : (au point 0) fig.5

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{zz} = \frac{\mu}{h}(Z_1 - Z_3) + \frac{\lambda}{2h} [(Z_1 - Z_3) + (R_2 - R_4) + \frac{2R_0}{k}] + o(h^2) \\ \sigma_{rr} = \frac{\mu}{h}(R_2 - R_4) + \frac{\lambda}{2h} [(Z_1 - Z_3) + (R_2 - R_4) + \frac{2R_0}{k}] + o(h^2) \\ \sigma_{\theta\theta} = 2\mu \frac{R_0}{kh} + \frac{\lambda}{2h} [(Z_1 - Z_3) + (R_2 - R_4) + \frac{2R_0}{k}] + o(h^2) \\ \tau_{rz} = \frac{\mu}{2h} [(R_1 - R_3) + (Z_2 - Z_4)] + o(h^2) \end{array} \right.$$

Ces relations sont valables pour tous les points intérieurs du domaine. Les formules donnant les contraintes au voisinage du contour et sur le contour dépendent de la forme de la frontière (C).

\* Problème particulier :

On pourrait vérifier les relations (30) et (33) pour un cylindre en traction sous l'action de forces uniformément réparties sur ses bases avec la densité superficielle  $f$ . La solution analytique est

$$u_r = -\frac{\nu f}{E} r \quad u_z = \frac{f}{E} z \quad \sigma_{zz} = f.$$

CHAPITRE VIIRESOLUTION NUMERIQUE DU2ème PROBLEME DE L'ELASTOSTATIQUE.CAS DU RECTANGLE ET DU PARALLELEPIPEDEI.- ELASTICITE PLANE (rectangle). - (déformation plane)1) Position du problème. -

Dans le rectangle  $G = R \cup S$   $\{x(x_1, x_2) ; 0 \leq x_1 \leq a \quad 0 \leq x_2 \leq b\}$

on pose le 2ème problème de l'élastostatique.

$$\begin{cases} (1) & \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \rho \vec{F} = 0 \quad x \in R \\ (2) & \ell \vec{u} = \vec{f} \quad x \in S \end{cases}$$

où  $\vec{u}(u_1, u_2)$  est le vecteur déplacement élastique et  $\vec{f}(f_1, f_2)$  la densité superficielle de force.

$$(3) \quad \ell \vec{u} = \sum_{i,k=1}^2 \sigma_{ik} \cos(\vec{v}, \vec{x}_i) \vec{e}_k$$

$\vec{v}(n_1, n_2)$  = normale externe.

$\vec{e}_k$  = vecteur unitaire le long de  $x_k$ .

Les composantes du tenseur contrainte s'expriment en fonction de

$\vec{u}(u_1, u_2)$  : (on a omis  $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ ).

$$(4) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & (a) \\ \sigma_{22} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & (b) \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & (c) \end{cases}$$

La projection de (3) sur  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  donne :

$$(5) \quad \begin{cases} \left[ \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] n_1 + \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) n_2 = f_1 \\ \left[ \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] n_2 + \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) n_1 = f_2 \end{cases} \\ x \in S$$

Le 2ème problème limite se ramène donc à la résolution de (1) et (5).

Les conditions de solvabilité sont :

$$(6) \quad \begin{cases} \int_R \rho \vec{F} \, dx - \int_S \vec{f} \, ds = \vec{0} \\ \int_R (\vec{r} \wedge (\rho \vec{F})) \, dx - \int_S (\vec{r} \wedge \vec{f}) \, ds = \vec{0} \end{cases}$$

avec  $\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2) = \overrightarrow{OM}$ .

Pour l'unicité on doit avoir

$$(7) \quad \begin{cases} \int_R \vec{u} \, dx = \vec{Q}_1 \\ \int_R (\vec{r} \wedge \vec{u}) \, dx = \vec{Q}_2 \end{cases}$$

2) Discretisation du problème. -

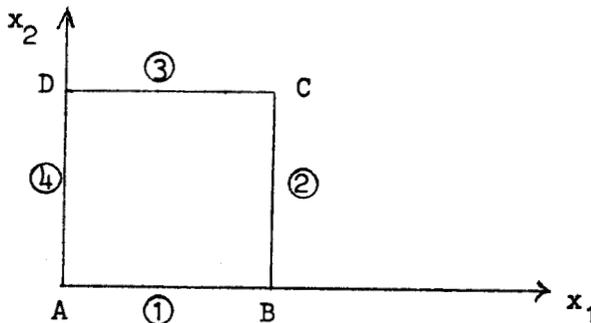


Fig. 1.

On pose  $u_1 \approx U_1 = X$  et  $u_2 \approx U_2 = Y$ .

a) points intérieurs :  $\{R_h\}$

On a déjà discrétisé (1) (voir Chap. VI.4).

L'approximation d'ordre 4 en h est :

$$(8) \quad \begin{cases} 2(\lambda+3\mu)X_0 = (\lambda+\mu) [X_1+X_3 + \frac{1}{4} \{Y_5+Y_7-Y_6-Y_8\}] + \mu \sum_{i=1}^4 X_i + h^2 \rho F_1 \\ 2(\lambda+3\mu)Y_0 = (\lambda+\mu) [Y_2+Y_4 + \frac{1}{4} \{X_5+X_7-X_6-X_8\}] + \mu \sum_{i=1}^4 Y_i + h^2 \rho F_2 \end{cases}$$

b) point situés sur les côtés (on exclut les sommets)

Désignons par  $f^{(i)}$  la densité superficielle de force sur le côté  $i$ .

\* points du côté 3 (C et D exclus)

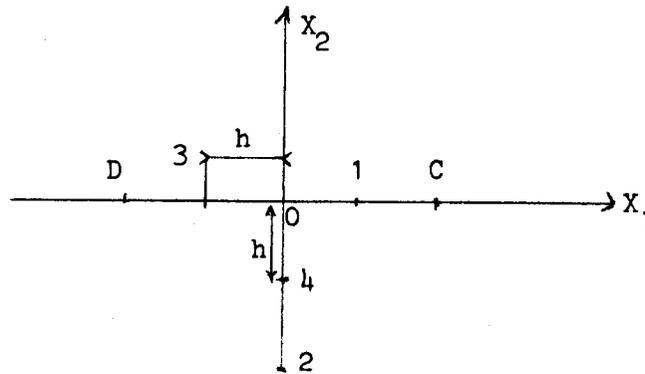


Fig. 2.

Pour le côté 3  $n_1 = 0$  et  $n_2 = +1$ .

(5) deviennent :

$$(9) \quad \begin{cases} \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = f_1^{(3)} \\ \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = f_2^{(3)} \end{cases}$$

En utilisant les relations (Chap. I, 1,2), on discrétise (9) au point 0 du côté 3.

L'approximation d'ordre 3 en  $h$  est :

$$(10) \quad \begin{cases} 3X_0 = 4X_4 + Y_3 - X_2 - Y_1 + \frac{2h}{\mu} f_1^{(3)} \\ 3(\lambda+2\mu)Y_0 = \lambda(X_3 - X_1) + (\lambda+2\mu)(4Y_4 - Y_2) + 2h f_2^{(3)} \end{cases}$$

\* points du côté 1 (A et B exclus)

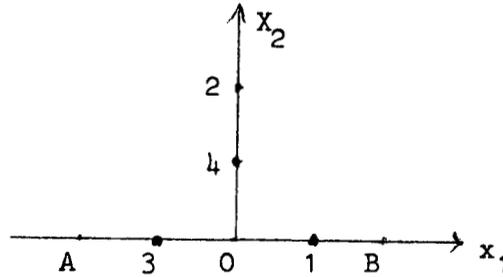


Fig. 3.

Pour le côté 1 on a  $n_1 = 0$   $n_2 = -1$ .

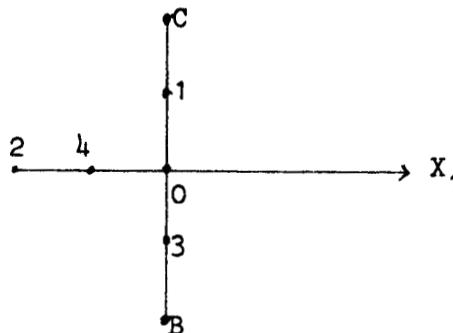
(5) deviennent :

$$(11) \quad \begin{cases} \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = -f_1^{(1)} \\ \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -f_2^{(1)} \end{cases}$$

L'approximation aux différences d'ordre 3 en h est :

$$(12) \quad \begin{cases} 3X_0 = 4X_4 - Y_3 - X_2 + Y_1 + \frac{2h}{\mu} f_1^{(1)} \\ 3(\lambda + 2\mu)Y_0 = \lambda(X_1 - X_3) + (\lambda + 2\mu)(4Y_4 - Y_2) + 2h f_2^{(1)} \end{cases}$$

\* point du côté 2 (B et C exclus)



Pour le côté 2 on a  
 $n_1 + 1 = 0$   $n_1 = 1$   
 $n_2 = 0$

Fig. 4.

(5) deviennent :

$$(13) \quad \begin{cases} \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = f_1^{(2)} \\ \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = f_2^{(2)} \end{cases}$$

L'approximation aux différences d'ordre 3 en  $h$  est :

$$(14) \quad \begin{cases} 3(\lambda + 2\mu)X_0 = \lambda(Y_3 - Y_1) + (\lambda + 2\mu)(4X_4 - X_2) + 2h f_1^{(2)} \\ 3Y_0 = 4Y_4 + X_3 - Y_2 - X_1 + \frac{2h}{\mu} f_2^{(2)} \end{cases}$$

\* points du côté 4 (A et D exclus)

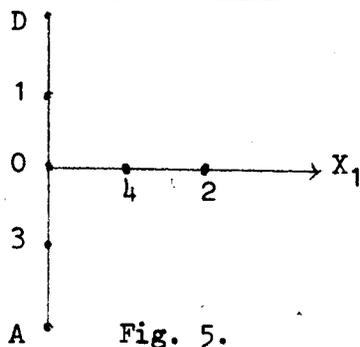


Fig. 5.

Pour le côté 4 on a  $n_1 = -1$  et  $n_2 = 0$ .

L'approximation aux différences d'ordre 3 en  $h$  s'obtient par calcul analogue :

$$(15) \quad \begin{cases} 3(\lambda + 2\mu)X_0 = \lambda(Y_1 - Y_3) + (\lambda + 2\mu)(4X_4 - X_2) + 2h f_1^{(4)} \\ 3Y_0 = 4Y_4 - X_3 - Y_2 + X_1 + \frac{2h}{\mu} f_2^{(4)} \end{cases}$$

c) sommet D.

$$D = \textcircled{3} \cap \textcircled{4}$$

Sur le côté 3 : (9) donne :

$$(16) \quad \begin{cases} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{\mu} f_1^{(3)} = k \\ \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = f_2^{(3)} \end{cases}$$

Sur le côté 4 :

$$(17) \quad \begin{cases} \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -f_1^{(4)} \\ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{\mu} f_2^{(4)} = k' \end{cases}$$

Pour l'équilibre en D on doit avoir une densité de couple nulle, c'est-à-dire :

$$f_1^{(3)} + f_2^{(4)} = 0$$

D'où  $k = k'$  et on aura pour le sommet D :

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = k & (a) \\ \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = f_2^{(3)} & (b) \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -f_1^{(4)} & (c) \end{cases}$$

avec  $k = \frac{1}{\mu} f_1^{(3)} = -\frac{1}{\mu} f_2^{(4)}$ .

Décrivons (a) par rapport à  $x_1$  et  $x_2$ , (b) par rapport à  $x_1$  et (c) par rapport à  $x_2$ .

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial k}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial k}{\partial x_2} \\ \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial f_2^{(3)}}{\partial x_1} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = -\frac{\partial f_1^{(4)}}{\partial x_2} \end{cases}$$

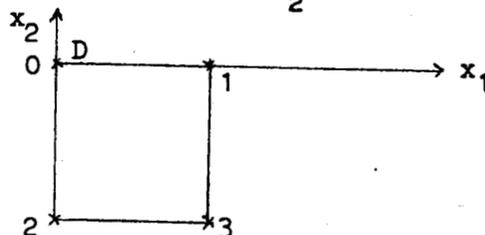


Fig. 6.

Discretisons (18) et (19) au point D c'est-à-dire O.

En utilisant les relations (Chap. I.3) l'approximation du 4ème ordre en h est :

$$(20) \quad \begin{cases} 2\mu Y_0 = (\lambda+2\mu)(Y_1-X_2) + 2\mu X_0 + \lambda(X_1-Y_2) - h\lambda(k_{x_1} + k_{x_2}) - (\lambda+2\mu)kh \\ \quad - \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial f_1^{(4)}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2^{(3)}}{\partial x_1} + (\lambda+2\mu) \left( \frac{\partial k}{\partial x_1} - \frac{\partial k}{\partial x_2} \right) \right] \\ 2\lambda X_0 = 2\lambda X_1 + (\lambda+2\mu)(Y_1+Y_2-Y_0-Y_3) - 2\lambda hk_{x_1} - h^2 \frac{\partial f_2^{(3)}}{\partial x_1} \end{cases}$$

avec

$$(21) \quad \begin{cases} k_{x_1} = - \frac{\lambda f_2^{(3)} + (\lambda+2\mu) f_1^{(4)}}{4\mu(\lambda+\mu)} \\ k_{x_2} = \frac{(\lambda+2\mu) f_2^{(3)} + \lambda f_1^{(4)}}{4\mu(\lambda+\mu)} \end{cases}$$

Pour les sommets A, B et C on a par permutation, des relations analogues à (20) et (21).

#### d) Résolution.-

Les équations aux différences finies (8), (10), (12), (14), (15), (20) permettent de calculer le vecteur déplacement  $\vec{u}(X,Y)$ , ce qu'on fait généralement avec la méthode itérative de Gauss-Seidel (voir exemple traité).

### 3) Calcul des contraintes.-

a) point intérieur :  $\{R_h\}$

voir Fig. 2 du Chap. VI.

$$(22) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = \frac{1}{2h} [(\lambda+2\mu)(X_1-X_3) + \lambda(Y_2-Y_4)] \\ \sigma_{22} = \frac{1}{2h} [\lambda(X_1-X_3) + (\lambda+2\mu)(Y_2-Y_4)] \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{1}{2h} \mu [Y_1-Y_3 + X_2-X_4] \end{cases}$$

b) côté 3 (voir Fig. 2)

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \frac{1}{\lambda+2\mu} \left[ \frac{2\mu}{h} (\lambda+\mu)(X_1-X_3) + \lambda f_2^{(3)} \right] \\ \sigma_{22} = f_2^{(3)} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = f_1^{(3)} \end{array} \right.$$

c) côté 1 (voir Fig. 3)

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \frac{1}{\lambda+2\mu} \left[ \frac{2\mu}{h} (\lambda+\mu)(X_1-X_3) - \lambda f_2^{(1)} \right] \\ \sigma_{22} = -f_2^{(1)} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = -f_1^{(1)} \end{array} \right.$$

d) côté 2 (voir Fig. 4)

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = f_1^{(2)} \\ \sigma_{22} = \frac{1}{\lambda+2\mu} \left[ \frac{2\mu}{h} (\lambda+\mu)(Y_1-Y_3) + \lambda f_1^{(2)} \right] \\ \sigma_{21} = \sigma_{12} = f_2^{(2)} \end{array} \right.$$

e) côté 4 (voir Fig. 5)

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = -f_1^{(4)} \\ \sigma_{22} = \frac{1}{\lambda+2\mu} \left[ \frac{2\mu}{h} (\lambda+\mu)(Y_1-Y_3) - \lambda f_1^{(4)} \right] \\ \sigma_{21} = \sigma_{12} = -f_2^{(4)} \end{array} \right.$$

## II.- ELASTICITE A 3 DIMENSIONS (parallélépipède).-

Dans le parallélépipède  $G = R \cup S \{x(x_1, x_2, x_3) ; 0 \leq x_1 \leq e, 0 \leq x_2 \leq b ; 0 \leq x_3 \leq b\}$  on pose le 2ème problème de l'élastostatique :



Pour la face 1 (ABCD) on a :  $n_1 = 1$   $n_2 = 0$   $n_3 = 0$  (28) donnent :

$$(29) \quad \begin{cases} (\lambda+2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = f_1^{(1)} \\ \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = f_2^{(1)} \\ \mu \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = f_3^{(1)} \end{cases}$$

en désignant par  $f^{(i)}$  la densité sur la face  $i$ . Les équations mises sous forme de différences finies donnent (Fig. 3 du Chap. VI) une approximation d'ordre 3 en  $h$  :

$$(30) \quad \begin{cases} 3(\lambda+2\mu)X_0 = 2h f_1^{(1)} + (\lambda+2\mu)(4X_3 - X_{20}) + \lambda(Y_4 - Y_2 + Z_{10} - Z_9) \\ 3\mu Y_0 = 2h f_2^{(1)} + \mu(4Y_3 - Y_{20} + X_4 - X_2) \\ 3\mu Z_0 = 2h f_3^{(1)} + \mu(4Z_3 - Z_{20} + X_{10} - X_9) \end{cases}$$

b) 2ème cas : Le point est sur une arête mais non un sommet -  
exemple = arête AB (Fig. 7.).

Les équations (29) sont toujours valables, mais en plus il faut considérer que le point se trouve aussi sur la face 2 (AB FG) où  $n_1 = 0$   $n_2 = 0$   $n_3 = 1$ . (28) deviennent :

$$(31) \quad \begin{cases} \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial u_1} \right) = f_1^{(2)} \\ \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = f_2^{(2)} \\ (\lambda+2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = f_3^{(2)} \end{cases}$$

La densité du couple étant nulle sur AB on doit avoir

$$f_1^{(3)} = f_3^{(1)} = \mu k_3$$

On a donc simultanément (29) et (31) qui constituent un système de 5 équations.

On élimine  $\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$  entre la 1ère équation de (29) et la 3ème équation de (31) et on additionne la 2ème équation de (29) avec la 2ème équation de (31). On obtient le système :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = f_1^{(1)} - f_3^{(2)} \\ \mu \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial (u_1 + u_3)}{\partial x_2} \right] = f_2^{(1)} + f_2^{(2)} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = k_3 \end{array} \right.$$

Ces équations mises sous forme de différences finies donnent (Fig. 3 du Chap. VI) une approximation d'ordre 3 en  $h$  :

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} 3X_0 = + \frac{h}{\mu} (f_1^{(1)} - f_3^{(3)}) + (4X_3 - X_{20}) - (4Z_{10} - Z_{21} - 3Z_0) \\ 6Y_0 = \frac{2h}{\mu} (f_2^{(1)} + f_2^{(2)}) + (4Y_3 - Y_{20}) + (4Y_{10} - Y_{21}) + (X_4 + Z_4) - (X_2 + Z_2) \\ 3Z_0 = \frac{2h}{\mu} k_3 + (4Z_3 - Z_{20}) + (4X_{10} - X_{21} - 3X_0) \end{array} \right.$$

c) 3ème cas : Le point est un sommet : exemple = B (Fig. 7). Les équations (32) sont toujours valables, mais en plus, le point se trouve sur la face 3 (BCEF) où  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = -1$  et  $n_3 = 0$ .

(28) deviennent :

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = -f_1^{(3)} \\ \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -f_2^{(3)} \\ \mu \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = -f_3^{(3)} \end{array} \right.$$

En comparant avec (29) et (31), la densité du couple est nulle au point

B si :

$$f_2^{(1)} = -f_1^{(3)} = \frac{k_2}{\mu} \quad \text{et} \quad f_2^{(2)} = -f_3^{(3)} = \frac{k_1}{\mu}$$

Éliminons  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$  dans la 1ère équation de (32) et la 2ème équation de (34),

(32) et (34) sont équivalentes à :

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\lambda+2\mu}{\lambda} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{2\mu} (f_1^{(1)} - f_3^{(2)}) - \frac{1}{\lambda} f_2^{(3)} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial(u_1+u_3)}{\partial x_2} = k_1 + k_2 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = k_3 \end{array} \right.$$

Les équations (35) mises sous forme de différences finies donnent (fig. 3, Chap. VI) une approximation d'ordre 3 en  $h$ .

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} 3X_0 = 2h k_3 + (4Z_3 - Z_{20} - 3Z_0) + (4X_{10} - X_{21}) \\ 6Y_0 = 2h(k_1 + k_2) - [(Y_{20} - 4Y_3) + (Y_{21} - 4Y_{10}) + 3(X_0 + Z_0) \\ \quad - 4(X_2 + Z_2) + (X_{19} + Z_{19})] \\ 6Z_0 = 2h \left[ \frac{1}{2\mu} (f_3^{(2)} - f_1^{(1)}) - \frac{1}{\lambda} f_2^{(3)} \right] + 2(4Z_{10} - Z_{21}) + \frac{\lambda+2\mu}{\lambda} (4Y_2 - Y_{10} - 3Y_0) \end{array} \right.$$

### Conclusion.

Les systèmes (28 bis), (30), (33), (36) permettent, par la méthode de Gauss-Seidel, en général, de résoudre le problème et de calculer le vecteur déplacement en tout point du parallélépipède.

### Calcul des contraintes.

#### a) points intérieurs $\{R_h\}$

Les composantes du tenseur des contraintes s'expriment en termes déplacements par :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

$$\delta_{ij} \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

L'approximation d'ordre 2 en  $h$  de ( ) donne (fig

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \sigma_x = \frac{1}{2h} [(\lambda+2\mu)(X_1-X_3) + \lambda(Y_2-Y_4+Z_9-Z_{10})] \\ \sigma_{22} = \sigma_y = \frac{1}{2h} [(\lambda+2\mu)(Y_2-Y_4) + \lambda(X_1-X_3+Z_9-Z_{10})] \\ \sigma_{33} = \sigma_z = \frac{1}{2h} [(\lambda+2\mu)(Z_9-Z_{10}) + \lambda(X_1-X_3+Y_2-Y_4)] \\ \sigma_{12} = \tau_{xy} = \frac{\mu}{2h} [X_2-X_4+Y_1-Y_3] \\ \sigma_{13} = \tau_{xz} = \frac{\mu}{2h} [X_9-X_{10}+Z_1-Z_3] \\ \sigma_{23} = \tau_{yz} = \frac{\mu}{2h} [Y_9-Y_{10}+Z_2-Z_4] \end{array} \right.$$

b) point sur la face 1 (fig

La condition-frontière peut s'écrire :

$$\lambda n_j \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \sum_{k=1}^3 n_k \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = f_j$$

$$j = 1, 2, 3$$

avec  $\vec{f}(f_1, f_2, f_3)$ .

Pour la face 1, on a  $n_1 = 1$      $n_2 = 0$      $n_3 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \sigma_x = f_1^{(1)} \\ \sigma_{12} = \tau_{xy} = f_2^{(1)} \\ \sigma_{13} = \tau_{xz} = f_3^{(1)} \\ \sigma_{22} = \sigma_y = \frac{\lambda+\mu}{2h} [(Y_2-Y_4) + 4X_3 - 3X_0 - X_{20}] + f_1^{(1)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{33} = \sigma_z = \frac{\lambda + \mu}{2h} [(z_9 - z_{10}) + 4x_3 - 3x_0 - x_{20}] + f_1^{(1)} \\ \sigma_{23} = \tau_{yz} = \frac{\mu}{2h} [(y_9 - y_{10}) + (z_2 - z_4)] \end{array} \right.$$

c) point sur l'arête AB (fig

AB est à la fois sur le côté 1 et 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \sigma_x = f_1^{(1)} \\ \sigma_{12} = \tau_{xy} = f_2^{(1)} \\ \sigma_{13} = \tau_{xz} = f_3^{(1)} = f_1^{(2)} \\ \sigma_{33} = \sigma_z = f_3^{(2)} \\ \sigma_{23} = \tau_{yz} = f_2^{(2)} \\ \sigma_{22} = \sigma_y = \frac{\lambda + \mu}{2h} [(y_2 - y_4) + 4x_3 - 3x_0 - x_{20}] + f_1^{(1)} \end{array} \right.$$

d) point B (sommet)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \sigma_x = f_1^{(1)} \\ \sigma_{12} = \tau_{xy} = f_2^{(1)} = -f_1^{(3)} \\ \sigma_{13} = \tau_{xz} = f_3^{(1)} = f_1^{(2)} \\ \sigma_{33} = \sigma_z = f_3^{(2)} \\ \sigma_{23} = \tau_{xz} = f_2^{(2)} = -f_3^{(3)} \\ \sigma_{22} = \sigma_y = -f_2^{(3)} \end{array} \right.$$

CHAPITRE VIII

DETERMINATION DIRECTE DES CONTRAINTES  
POUR LE 2<sup>e</sup> PROBLEME DE L'ELASTICITE PLANE  
CAS DU RECTANGLE

I.- POSITION DU PROBLEME ET NOTATIONS.-

Rappelons les notations usuelles pour les composantes du tenseur des contraintes :

$$\sigma_{11} = \sigma_x \quad \sigma_{22} = \sigma_y \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{xy}$$

Il s'agit de déterminer ces composantes en chaque point du domaine  $G = R \cup S$  connaissant la densité superficielle de force  $\vec{f}(f_x, f_y)$  sur le contour lisse  $S$ .

Nous avons déjà développé une méthode indirecte basée sur la détermination du vecteur déplacement (voir Chap. VII). Nous proposons dans cette section une méthode directe de détermination de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ . Appelons  $n_x$  et  $n_y$  les cosinus directeurs de la normale extérieure au domaine sur le contour  $S$ . On a

$$(1) \quad \begin{cases} n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} = f_x \\ n_y \sigma_y + n_x \tau_{xy} = f_y \end{cases}$$

$\vec{v}(n_x, n_y)$ .

On néglige les forces massiques et on appelle  $\psi$  la fonction des contraintes. On a alors

$$\sigma_{22} = \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$\psi$  satisfait la condition de compatibilité.

$$(3) \quad \Delta \Delta \psi = \Delta^2 \psi = 0$$

On pourrait appliquer la méthode des différences finies à l'équation biharmonique (3) et ce en utilisant l'approximation d'ordre 6 en  $h$  donnée par (Chap. II.14) Nous proposons ici un calcul direct.

On supposera par la suite, que le contour  $S$  est rectangulaire.

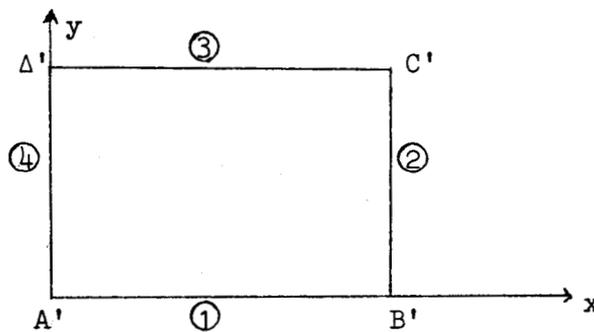


Fig. 1.

D'après (1), on connaît :

$$(4) \quad \begin{cases} \sigma_y & \text{sur les côtés 1 et 3} \\ \sigma_x & \text{sur les côtés 2 et 4} \\ \tau_{xy} & \text{sur tout le contour} \end{cases}$$

D'après (2), on a :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \end{cases}$$

et la condition de compatibilité (3) s'écrit :

$$(6) \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

Par dérivation de (5) par rapport à  $x$  et  $y$ , on obtient 2 équations aux dérivées partielles du 2ème ordre, qui jointes à (6) donnent

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \quad (a) \\ \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (b) \\ \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x \partial y} = -\Delta \tau_{xy} \quad (c) \end{array} \right.$$

Le problème de calcul des contraintes se ramène donc à la résolution de (7) avec les conditions frontière (4). On appliquera la méthode des différences finies avec approximation d'ordre 4 en  $h$ .

$$\text{Posons } \underline{A \approx \sigma_x \quad B \approx \sigma_y \quad C \approx -\tau_{xy}}$$

## II.- CALCUL DE $A \approx \sigma_x$ et $B \approx \sigma_y$ .

On discrétise le problème suivant :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \quad (a) \\ \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (b) \end{array} \right.$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \sigma_x^{(2)} = f_x^{(2)} & \sigma_x^{(4)} = -f_x^{(4)} & ; & \tau_{xy}^{(1)} = -f_x^{(1)} & \tau_{xy}^{(2)} = f_y^{(2)} \\ \sigma_y^{(1)} = -f_y^{(1)} & \sigma_y^{(3)} = f_y^{(3)} & ; & \tau_{xy}^{(3)} = f_x^{(3)} & \tau_{xy}^{(4)} = -f_y^{(4)} \end{array} \right.$$

en désignant par  $\sigma^{(i)}$  la contrainte sur le côté  $i$  et  $f^{(i)}$  densité linéaire sur le côté  $i$ .

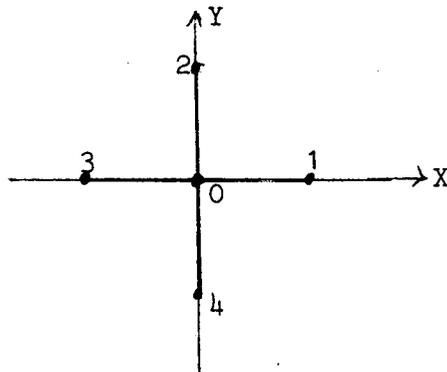
1) Points à l'intérieur du domaine (non voisins d'un côté).-

Fig. 2

L'approximation d'ordre 4 en  $h$  de 7 est (voir Chap. I et II) :

$$(9) \quad \begin{cases} A_1 - 2A_0 + A_3 = B_2 - 2B_0 + B_4 \\ \sum_{i=1}^4 A_i + \sum_{i=1}^4 B_i = 4(A_0 + B_0) \end{cases}$$

La résolution en  $A_0$  et  $B_0$  donne :

$$(10) \quad \begin{cases} 8A_0 = B_1 + B_3 - (B_2 + B_4) + A_2 + A_4 + 3(A_1 + A_3) \\ 8B_0 = B_1 + B_3 - (A_1 + A_3) + A_2 + A_4 + 3(B_2 + B_4) \end{cases}$$

Ce système n'est pas utilisable pour les points au voisinage du contour (points du 1er précontour) où interviennent les conditions limites (8).

2) Points au voisinage d'une limite  $||_0^y$ .-

a) points au voisinage du côté 2

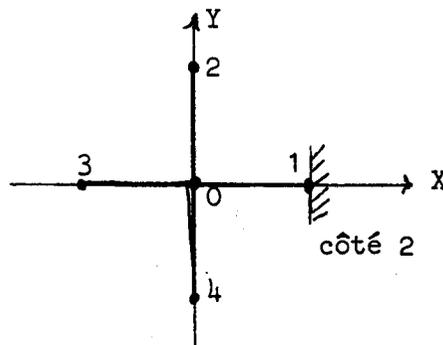


Fig. 3.

Le point 1 étant sur le côté 2, d'après (8) on a :

$A_1 = (f_x^{(2)})_1$      $C_1 = - (f_y^{(2)})_1$  et par suite  $(\frac{\partial C}{\partial y})_1 = - [\frac{\partial}{\partial y} f_y^{(2)}]_1$  est aussi connue.

D'après la 1ère équation de (5) on a :

$$(\frac{\partial C}{\partial y})_1 = (\frac{\partial A}{\partial x})_1 = - \frac{-3A_1 + 4A_0 - A_3}{2h}$$

qui s'écrit

$$(11) \quad 4A_0 = 3A_1 + A_3 - 2h(\frac{\partial C}{\partial y})_1$$

D'autre part :

$$2A_1 - 4A_0 + 2A_3 = 2B_2 - 4B_0 + 2B_4$$

En utilisant (11), on obtient :

$$(12) \quad 4B_0 = A_1 - A_3 + 2(B_2 + B_4) - 2h(\frac{\partial C}{\partial y})_1$$

En résumé, on a le système suivant pour le point 0 :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4A_0 = 3A_1 + A_3 - 2h(\frac{\partial C}{\partial y})_1 \\ 4B_0 = A_1 - A_3 + 2(B_2 + B_4) - 2h(\frac{\partial C}{\partial y})_1 \\ \text{avec } A_1 = (f_x^{(2)})_1 \text{ et } (\frac{\partial C}{\partial y})_1 = - [\frac{\partial}{\partial y} f_y^{(2)}]_1 \end{array} \right.$$

b) points au voisinage du côté 4

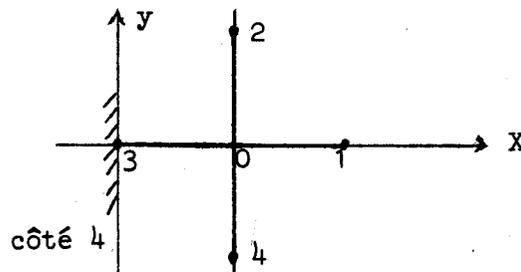


Fig. 4.

Le point 3 étant sur le côté 4, d'après (8) on a  $A_3 = -(f_x^{(4)})_3$      $C_3 = (f_y^{(4)})_3$   
 et par suite  $(\frac{\partial C}{\partial y})_3 = [\frac{\partial}{\partial y} f_y^{(4)}]_3$  est aussi connue.

En utilisant le fait que

$$(14) \quad \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_3 = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_3 = \frac{-3A_3 + 4A_0 - A_1}{2h}$$

et en faisant des calculs analogues à ceux de ci-dessus on arrive au système :

$$(15) \quad \begin{cases} 4A_0 = 3A_3 + A_1 + 2h\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_3 \\ 4B_0 = A_3 - A_1 + 2(B_2 + B_4) + 2h\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_3 \\ \text{avec } A_3 = -(f_x^{(4)})_3 \text{ et } \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_3 = \left[\frac{\partial}{\partial y} f_y^{(4)}\right]_3 \end{cases}$$

3) Points au voisinage d'une limite  $||0_x$  .-

a) points au voisinage du côté 1

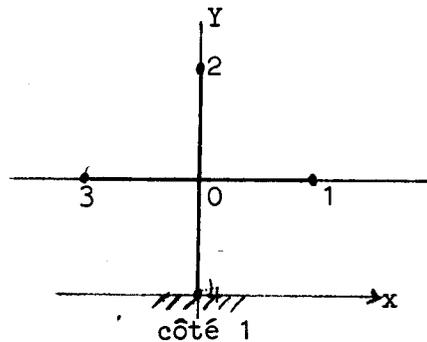


Fig. 5.

Le point 4 étant sur le côté 1, d'après (8), on a :

$$B_4 = -(f_y^{(1)})_4 \quad C_4 = (f_x^{(1)})_4$$

et par suite  $\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_4 = \left[\frac{\partial}{\partial x} f_x^{(1)}\right]_4$  est aussi connue.

On utilise ici la 2ème équation de (5) :

$$(16) \quad \left[\frac{\partial C}{\partial x}\right]_4 = \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_4 = \frac{-3B_4 + 4B_0 - B_2}{2h} .$$

On combine cette relation avec

$$A_1 - 2A_0 + A_3 = B_2 - 2B_0 + B_4$$

on aboutit au système

$$(17) \quad \begin{cases} 4A_0 = B_4 - B_2 + 2(A_1 + A_3) + 2h \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_4 \\ 4B_0 = 3B_4 + B_2 + 2h \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_4 \\ \text{avec } B_4 = -(f_y^{(1)})_4 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial C}{\partial y} \right)_4 = \left[ \frac{\partial}{\partial x} f_x^{(1)} \right]_4 \end{cases}$$

b) points au voisinage du côté 3

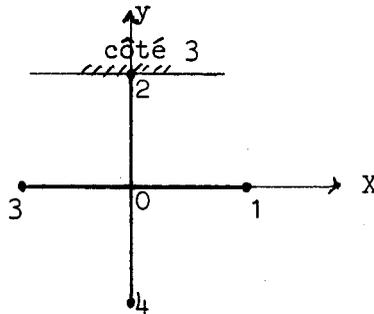


Fig. 6.

Le point 2 étant sur le côté 3, d'après (8) on a :

$$B_2 = [f_y^{(3)}]_2 \quad C_2 = - [f_x^{(3)}]_2$$

et par suite  $\left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_2 = - \left[ \frac{\partial f_x^{(3)}}{\partial x} \right]_2$  est aussi connue.

La 2ème équation de (5) devient ici

$$(18) \quad \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_2 = \left( \frac{\partial B}{\partial y} \right)_2 = - \frac{-3B_2 + 4B_0 - B_4}{2h}$$

Avec les mêmes calculs que ci-dessus, on a

$$(19) \quad \begin{cases} 4A_0 = B_2 - B_4 + 2(A_1 + A_3) - 2h \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_2 \\ 4B_0 = 3B_2 + B_4 - 2h \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_2 \\ \text{avec } B_2 = (f_y^{(3)})_2 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_2 = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} f_x^{(3)} \right]_2 \end{cases}$$

4) Points au voisinage d'un sommet.-

Les systèmes seront obtenus par discrétisation de (5), c'est-à-dire :

(20)

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial y} \\ \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial x} \end{cases}$$

a) sommet A'

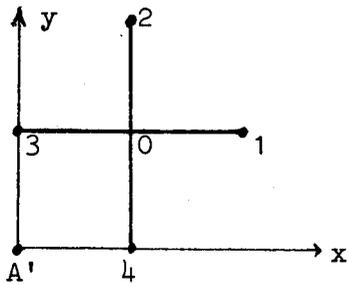


Fig. 7.

$$(21) \begin{cases} 4A_0 = 3A_3 + A_1 + 2h\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_3 \\ 4B_0 = 3B_4 + B_2 + 2h\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_4 \\ \text{avec } A_3 = -(f_x^{(4)})_3 & B_4 = -(f_y^{(1)})_4 \\ \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_3 = \left[\frac{\partial}{\partial y} f_y^{(4)}\right]_3 & \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_4 = \left[\frac{\partial}{\partial x} f_x^{(1)}\right]_4 \end{cases}$$

b) sommet B'

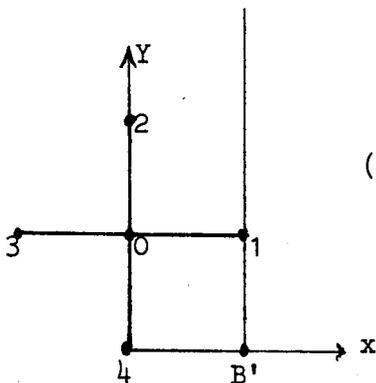


Fig. 8.

$$(22) \begin{cases} 4A_0 = 3A_1 + A_3 - 2h\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_1 \\ 4B_0 = 3B_4 + B_2 + 2h\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_4 \\ \text{avec } A_1 = (f_x^{(2)})_1 & B_4 = -(f_y^{(1)})_4 \\ \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_1 = -\left[\frac{\partial}{\partial y} f_y^{(2)}\right]_1 & \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_4 = \left[\frac{\partial}{\partial x} f_x^{(1)}\right]_4 \end{cases}$$

c) sommet C'

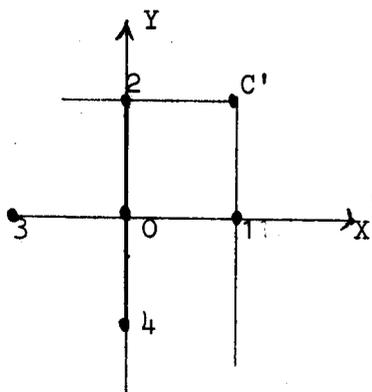
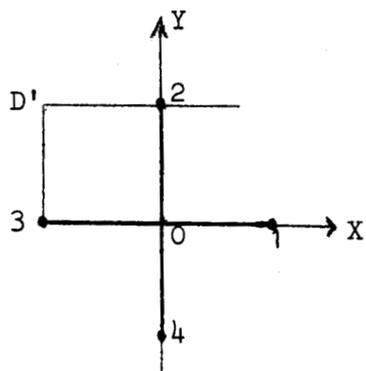


Fig. 9.

$$(23) \begin{cases} 4A_0 = 3A_1 + A_3 - 2h\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_1 \\ 4B_0 = 3B_2 + B_4 - 2h\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_2 \\ \text{avec } A_1 = (f_x^{(2)})_1 & B_2 = (f_y^{(3)})_2 \\ \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_1 = -\left[\frac{\partial}{\partial y} f_y^{(2)}\right]_1 & \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_2 = -\left[\frac{\partial}{\partial x} f_x^{(3)}\right]_2 \end{cases}$$

d) sommet D'



$$(24) \left\{ \begin{array}{l} 4A_0 = 3A_3 + A_1 + 2h\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_3 \\ 4B_0 = 3B_2 + B_4 - 2h\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_2 \\ \text{avec } A_3 = -(f_x^{(4)})_3 \qquad B_2 = (f_y^{(3)})_2 \\ \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_3 = \left[\frac{\partial}{\partial y} f_y^{(4)}\right]_3 \qquad \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_2 = -\left(\frac{\partial}{\partial x} f_x^{(3)}\right)_2 \end{array} \right.$$

Fig. 10.

Les systèmes (10), (13), (15), (17), (19), (21), (22), (23), (25) nous donnent tous les éléments nécessaires au calcul des fonctions A et B à l'intérieur du domaine  $R_h$ . On utilisera pour cela, la méthode itérative de Gauss-Seidel et on pourra prendre zéro comme valeur de départ.

Il reste à déterminer  $\sigma_x \sim A$  sur les côtés 1 et 3 et  $\sigma_y \sim B$  sur les côtés 2 et 4.

5) Détermination de A sur les côtés 1 et 3.

a) Détermination de A sur le côté 1 (A'B')

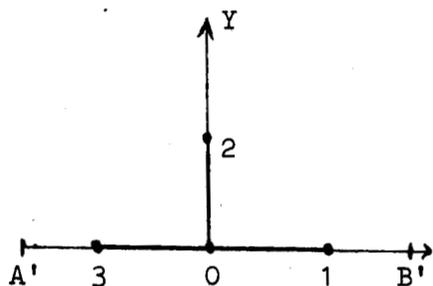


Fig. 11.

On discrétise ici (7 a) c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$$

Par le développement de Taylor d'ordre 4 en h :

$$h^2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_0 = A_3 - 2A_0 + A_1$$

Par le développement de Taylor d'ordre 3 en h :

$$h^2 \left(\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right)_0 = 2(B_2 - B_0) - 2h \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_0$$

Or  $\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0$ .

On aura finalement l'approximation d'ordre 3 en h :

$$(26) \begin{cases} 2A_0 = A_1 + A_3 + 2B_0 - 2B_2 + 2h\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0 \\ \text{avec } \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0 = \left[\frac{\partial}{\partial x} f_x^{(1)}\right]_0 ; A_{A'} = -(f_x^{(4)})_{A'} ; A_{B'} = (f_x^{(2)})_{B'} \end{cases}$$

b) détermination de A sur le côté 3 (C'D')

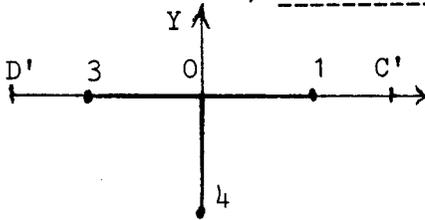


Fig. 12.

Par un raisonnement analogue à ci-dessus, on a l'approximation d'ordre 3 en h :

$$(27) \begin{cases} 2A_0 = A_1 + A_3 + 2B_0 - 2B_4 - 2h\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0 \\ \text{avec } \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0 = -\left[\frac{\partial}{\partial x} f_x^{(3)}\right]_0 ; A_{C'} = (f_x^{(2)})_{C'} ; A_{D'} = -(f_x^{(4)})_{D'} \end{cases}$$

6) Détermination de B sur les côtés 2 et 4.-

a) détermination de B sur le côté 2 (B'C')

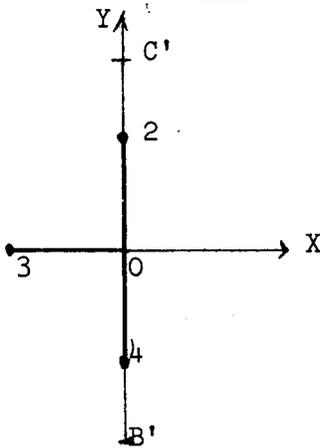


Fig. 13.

L'approximation d'ordre 3 en h est :

$$(28) \begin{cases} 2B_0 = B_2 + B_4 + 2A_0 - 2A_3 - 2h\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0 \\ \text{avec} \\ \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0 = -\left[\frac{\partial}{\partial y} f_y^{(2)}\right]_0 ; B_{B'} = -(f_y^{(1)})_{B'} \\ B_{C'} = (f_y^{(3)})_{C'} \end{cases}$$

b) détermination de B sur le côté 4 (A'D')

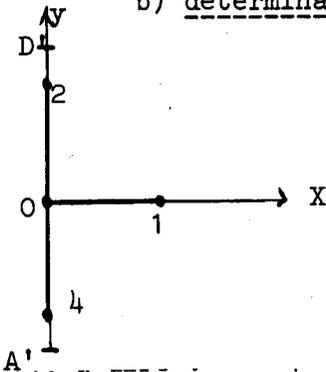


Fig. 14.

L'approximation d'ordre 3 en h est :

$$(29) \begin{cases} 2B_0 = B_2 + B_4 + 2A_0 - 2A_1 + 2h\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0 \\ \text{avec} \\ \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0 = \left[\frac{\partial}{\partial y} f_y^{(4)}\right]_0 ; B_{A'} = -(f_y^{(1)})_{A'} ; B_{D'} = (f_y^{(3)})_{D'} \end{cases}$$

La résolution de (26), (27), (28), (29) peut se faire par approximations

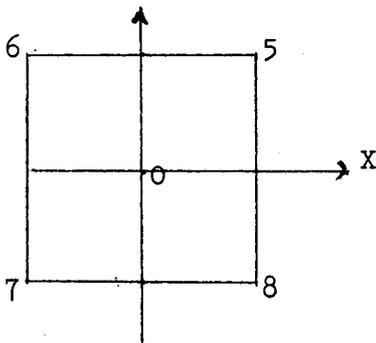
successives (méthode de Gauss-Seidel).

### III.- CALCUL DE LA FONCTION $C \approx \tau_{xy}$

A et B étant connus partout, on calcule C en discrétisant (7 c)  
c'est-à-dire :

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2(A+B)}{\partial x \partial y} = \Delta C \\ \text{avec } C \text{ connue sur tout le contour } S_h \end{array} \right.$$

D'après (Chap. I,3), on a les approximations suivantes d'ordre 4 en h.



$$4h^2 \left[ \frac{\partial^2(A+B)}{\partial x \partial y} \right]_O = (A+B)_5 + (A+B)_7 - (A+B)_6 - (A+B)_8$$

$$2h^2 \Delta' C = C_5 + C_6 + C_7 + C_8 - 4C_0$$

On en déduit alors :

Fig. 15.

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} 8C_0 = 2(C_5 + C_6 + C_7 + C_8) + (A+B)_6 + (A+B)_8 - (A+B)_7 - (A+B)_5 \\ C \text{ connue sur le contour } S_h. \end{array} \right.$$

CHAPITRE IXRESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEMEMIXTE DE L'ELASTOSTATIQUE. CAS DU CARRE.GENERALISATION A L'ELASTODYNAMIQUE

Dans la résolution numérique du 1er et du 2ème problème de l'élastostatique dans un carré, nous aboutissons à l'équation matricielle :

$$A\vec{u} = \vec{b}$$

Nous avons résolu le 2ème problème dans un cas particulier (voir applications) par la méthode itérative de Gauss-Seidel.

Toutefois, nous avons proposé pour le 1er problème une méthode itérative de directions alternées ("Splitting Method") ayant pour but de fournir des opérateurs facilement inversibles (voir Chap. VI.3)

Nous allons étendre cette méthode au problème mixte et comparerons les résultats avec ceux de (Chap.VI.3).

1.- POSITION DU PROBLEME.-

Dans l'intérieur du carré  $R\{0 < x_1, x_2 < 1\}$  on cherche le vecteur déplacement  $\vec{u}(u_1, u_2)$  satisfaisant :

$$(1) \quad \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \rho \vec{F} = \vec{0}$$

Sur la partie de frontière  $S_1 = S_{11} + S_{12}$  où  $S_{1i} = \{x_i = 0\}$  on se donne le vecteur déplacement :

$$(2) \quad \vec{u}|_{S_1} = \vec{\psi}$$

Sur le reste de la frontière  $S_2 = S_{21} + S_{22}$  où  $S_{2i} = \{x_i = 1\}$  on se donne les composantes du tenseur des contraintes :

$$(3) \quad \sigma_{i,k} |_{S_2} = f_{i,k}$$

Ces composantes s'expriment en fonction des  $u_i$  :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = (\lambda+2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \sigma_{22} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda+2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \end{array} \right.$$

Les relations (1), (2), (3), (4) résument le problème mixte.

## II.- NOTATIONS ET DISCRETISATION DU PROBLEME.-

On discrétise  $G = R \cup S$  par un treillis rectangulaire, la maille du grillage ayant pour côtés  $(h_1, h_2)$ .

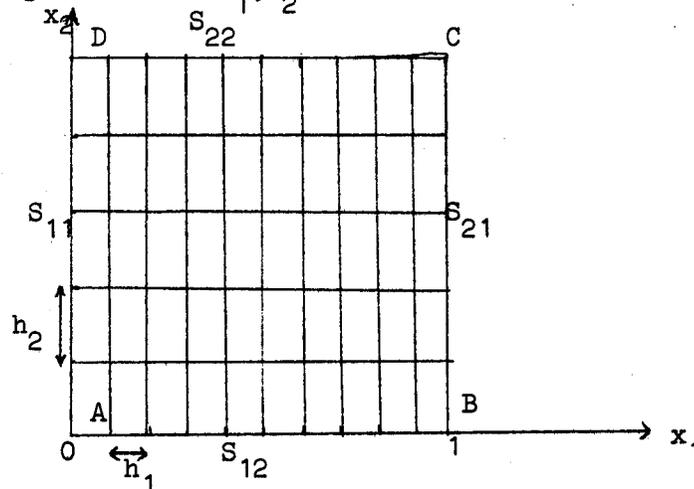


Fig. 1.

Soit  $\vec{\omega}(\omega_1, \omega_2) \in C^{4,4}(G_h)$ . Reprenons les notations de (Chap.VI.2).

$$\vec{\omega}_{x_i} = \frac{\vec{\omega}(x_i+h_i) - \vec{\omega}(x_i)}{h_i} \quad \vec{\omega}_{x_i}^- = \frac{\vec{\omega}(x_i) - \vec{\omega}(x_i-h_i)}{h_i}$$

$$\Lambda_{ii} \vec{\omega} = \vec{\omega}_{x_i x_i} = \frac{\vec{\omega}(x_i+h_i) - 2\vec{\omega}(x_i) + \vec{\omega}(x_i-h_i)}{h_i^2}$$

$$\Delta_h \vec{\omega} = \Lambda_{11} \vec{\omega} + \Lambda_{22} \vec{\omega}.$$

$$\Lambda_{12} \vec{\omega} = \frac{1}{4} (\vec{\omega}_{x_1 x_2} + \vec{\omega}_{x_1 \bar{x}_2} + \vec{\omega}_{\bar{x}_1 x_2} + \vec{\omega}_{\bar{x}_1 \bar{x}_2})$$

$$\Lambda \vec{\omega} = (\Lambda_{11} \omega_1 + \Lambda_{12} \omega_2 ; \Lambda_{22} \omega_2 + \Lambda_{12} \omega_1).$$

De plus :  $N_i h_i = 1$        $\omega_{i,j} = \omega(ih_1, jh_2)$ .

Soit  $\vec{v} \begin{cases} X \\ Y \end{cases}$  la valeur approchée de  $\vec{u} \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases}$ .

L'approximation aux différences finies d'ordre 2 en  $h$  du problème mixte (1 - 3) est :

$$\mu \Delta_h \vec{v} + (\lambda + \mu) \Lambda \vec{v} + \rho \vec{F} = \vec{0} \quad (5)$$

$$\vec{v}|_{S_1} = \vec{\psi} \quad (6)$$

$$\left[ (\lambda + 2\mu) X_{x_1}^- + \lambda Y_{x_2}^- \right]_{S_{21}} = f_{11} \quad (7)$$

$$\left[ \mu X_{x_2}^- + \mu Y_{x_1}^- \right]_{S_{21}} = f_{12} \quad (8)$$

$$\left[ (\lambda + 2\mu) Y_{x_2}^- + \lambda X_{x_1}^- \right]_{S_{22}} = f_{22} \quad (9)$$

$$\left[ \mu X_{x_2}^- + \mu Y_{x_1}^- \right]_{S_{22}} = f_{21} \quad (10)$$

### III.- METHODE ITERATIVE.-

Pour résoudre le problème aux différences (5 - 10), nous proposons le procédé d'itération suivant : supposons connue la  $k^{\text{ème}}$  itération du vecteur noeud  $\vec{v}^{(k)}(X_{ij}^{(k)}, Y_{i,j}^{(k)})$  dans  $G_h$  c'est-à-dire pour  $0 \leq i \leq N_1$  et  $0 \leq j \leq N_2$ .

Le vecteur noeud  $\vec{v}^{(k+1)}$  sur  $S_h$  est alors déterminé par les conditions frontière (6 - 10).

Pour déterminer  $\vec{v}^{(k+1)}$  dans  $R_h$  c'est-à-dire pour  $1 \leq i < N_1$  et  $1 \leq j < N_2$ , on peut utiliser la méthode itérative de directions alternées, proposée dans (Chap.VI.2), car on a ramené mixte à un problème de Dirichlet.

Toutefois, la détermination de  $\vec{v}^{(k+1)}$  sur  $S_2$  présente des particu-

larités qu'on va discuter.

a) points du côté  $S_{21}$ .

Ecrivons les conditions (7) et (8) sous la forme :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda+2\mu) \frac{X_{N_1,j}^{(k+1)} - X_{N_1,j-1}^{(k)}}{h_1} + \lambda \frac{Y_{N_1,j}^{(k+1)} - Y_{N_1,j-1}^{(k+1)}}{h_2} = (f_{11})_{N_1,j} \\ \mu \frac{X_{N_1,j}^{(k+1)} - X_{N_1,j-1}^{(k+1)}}{h_2} + \mu \frac{Y_{N_1,j}^{(k+1)} - Y_{N_1,j-1}^{(k)}}{h_1} = (f_{1,2})_{N_1,j} \end{array} \right.$$

Les points de  $S_{21}$  sont notés  $(N_1, j)$  avec  $N_1 h_1 = 1$  et  $0 \leq j \leq N_2 - 1$ .

Par hypothèse, on connaît  $X_{N_1-1,j}^{(k)}$  et  $Y_{N_1-1,j}^{(k)}$ .

D'autre part pour le point B  $(N_1, 0)$  la condition (6) s'écrit :

$$(12) \quad X_{N_1,0}^{(k+1)} = (\psi_1)_{N_1,0} \quad Y_{N_1,0}^{(k+1)} = (\psi_2)_{N_1,0}$$

En considérant (11) comme un système algébrique ayant pour inconnues  $X_{N_1,j}^{(k+1)}$  et  $Y_{N_1,j}^{(k+1)}$ , il est possible de les déterminer pour  $j = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ .

Sous certaines conditions :

Condition d'unicité.-

Exprimons à partir de (11)  $\vec{v}_{N_1,j}^{(k+1)}$  en fonction de  $\vec{v}_{N_1,j-1}^{(k+1)}$  :

$$\vec{v}_{N_1,j}^{(k+1)} = A \vec{v}_{N_1,j-1}^{(k+1)} + \text{vecteur d'ordre indépendant de l'itération (k+1).}$$

Si on passe aux variations :

$$(13) \quad \delta \vec{v}_{N_1,j}^{(k+1)} = A \delta \vec{v}_{N_1,j-1}^{(k+1)}$$

avec

$$(14) \quad A = \begin{pmatrix} \lambda h_1^2 & \lambda h_1 h_2 \\ (\lambda+2\mu)h_1 h_2 & \lambda h_1^2 \end{pmatrix}$$

La condition nécessaire et suffisante d'unicité de la solution est que :

$$\text{dét } A = \lambda h_1^2 (\lambda h_1^2 - (\lambda+2\mu)h_2^2) \neq 0$$

Soit

$$(15) \quad \boxed{\lambda h_1^2 - (\lambda+2\mu)h_2^2 \neq 0}$$

Condition de stabilité.-

L'étape variable est l'indice  $j=1,2,\dots,N_2-1$ .

La condition nécessaire et suffisante de stabilité (voir Chap.I - 18)

est que

$$||A|| < 1$$

Définissons une norme pour  $\delta \vec{v}$  par :

$$(16) \quad ||\delta \vec{v}|| = |\delta X| + |\delta Y|$$

La norme correspondante pour la matrice  $A\{a_{m,e}\}$  est :

$$A : \sup_{\ell} \sum_{m=1}^2 |a_{m\ell}|$$

Ici

$$a_{11} + a_{21} = \lambda h_1^2 + (\lambda+2\mu)h_1 h_2$$

$$a_{12} + a_{22} = \lambda h_1 h_2 + \lambda h_1^2$$

On doit donc avoir :

$$\lambda h_1^2 + (\lambda+2\mu)h_1 h_2 < 1$$

Soit

$$(17) \quad \frac{h_2}{h_1} > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}}$$

La condition de stabilité satisfait par la même la condition d'unicité (15).

En résumé, il suffit que (17) soit assurée pour que la solution de (11) soit unique et stable.

b) points du côté  $S_{22}$

Ecrivons les conditions (9) et (10) sous la forme :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \frac{X_{i,N_2}^{(k+1)} - X_{i-1,N_2}^{(k+1)}}{h_1} + (\lambda+2\mu) \frac{Y_{i,N_2}^{(k+1)} - Y_{i,N_2-1}^{(k)}}{h_2} = (f_{22})_{i,N_2} \\ \mu \frac{X_{i,N_2}^{(k+1)} - X_{i,N_2-1}^{(k)}}{h_2} + \mu \frac{Y_{i,N_2}^{(k+1)} - Y_{i-1,N_2}^{(k+1)}}{h_1} = (f_{21})_{i,N_2} \end{array} \right.$$

Les points de  $S_{22}$  sont notés  $(i, N_2)$  avec  $N_2 h_2 = 1$   $0 \leq i \leq N_1 - 1$ . Par hypothèse on connaît  $X_{i,N_2-1}^{(k)}$  et  $Y_{i,N_2-1}^{(k)}$ .

D'autre part pour le point  $D(0, N_2)$ , la condition (6) s'écrit :

$$(19) \quad (X)_{0,N_2}^{(k+1)} = (\psi_1)_{0,N_2} \quad (Y)_{0,N_2}^{(k+1)} = (\psi_2)_{0,N_2} .$$

Avec un raisonnement analogue à celui de (14), une condition suffisante pour la détermination unique et stable de  $X_{i,N_2}^{(k+1)}$  et  $Y_{i,N_2}^{(k+1)}$   $i=1,2,\dots, N_1-1$  est que :

$$(20) \quad \frac{h_1}{h_2} > \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}\right)}$$

En comparant (17) et (20), on remarque qu'il est impossible de satisfaire simultanément ces 2 conditions  $\forall h_1$  et  $h_2$ .

c) Discussion

Choisissons  $h_1$  et  $h_2$  tels que la condition de stabilité (17) soit satisfaite sur  $S_{21}$ . On peut alors déterminer par (11) le vecteur  $\vec{v}^{(k+1)}$  sur

$S_{21}$ . Pour déterminer  $v^{(k+1)}$  sur  $S_{22}$ , on élargit le côté de la maille  $h_1$ , c'est-à-dire qu'on choisit

$$h_1' = \bar{h}_1 = m h_1 \quad m > 1$$

tel que la condition (20) soit satisfaite

$$(21) \quad m \frac{h_1}{h_2} > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}}$$

On supposera que  $\frac{N_1}{m}$  est entier.

Examinons les 2 cas de la discussion :

1er cas : m entier.

Le système (18) permet de déterminer  $\vec{v}_{i,N_2}^{(k+1)} \{X_{i,N_2}^{(k+1)}, Y_{i,N_2}^{(k+1)}\}$  avec la condition de stabilité assurée (21) pour  $i = m, 2m, \dots, \frac{N_1}{m-1}$ . Pour  $\alpha m < i < (\alpha+1)m$ , on peut se contenter d'une interpolation linéaire :

$$\vec{v}_{i,N_2}^{(k+1)} = \frac{[(\alpha+1)m-i] \vec{v}_{\alpha m, N_2}^{(k+1)} + (i-\alpha m) \vec{v}_{(\alpha+1)m, N_2}^{(k+1)}}{m}$$

2ème cas : m ≠ entier avec  $\frac{N_1}{m}$  entier

Posons  $m = n + \epsilon$  avec  $n$  entier et  $0 < \epsilon < 1$ . Alors, à partir des quantités connues  $\vec{v}_{\alpha n, N_2-1}^{(k)}$  et  $\vec{v}_{\alpha(n+1), N_2-1}^{(k)}$ , on détermine par interpolation linéaire le vecteur  $\vec{v}_{\alpha(n+\epsilon), N_2-1}^{(k)}$ . Le système (18) permet alors de déterminer  $\vec{v}_{\alpha(n+\epsilon), N_2}^{(k+1)}$ .

d) Cas particuliers

. La valeur de  $\vec{v}^{(k+1)}$  au sommet  $C (i=N_1, j=N_2)$  peut se calculer à partir de (18) où on choisit  $h_1' = m h_1$ , car le vecteur  $\vec{v}_{N_1, N_2-1}^{(k)}$  est connu à partir de (11).

. si, par exemple, on ne peut élargir le côté  $h_1$  de la maille (on trouve par exemple  $m h_1 > 1$  pour satisfaire (20)), on rétrécit alors le côté  $h_2$  de la maille, c'est-à-dire on choisit :

$$h_2' = \bar{h}_2 = m h_2 \quad \text{avec } m < 1$$

telle que la condition (20) soit satisfaite :

$$(22) \quad \frac{h_1}{m h_2} > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu}}$$

Comme la  $k^{\text{ème}}$  itération est connue par hypothèse, on détermine les valeurs de  $\vec{v}^{(k)}$  aux points noeuds  $(i h_1, (N_2 - 1) h_2 + \frac{h_2}{m})$  par interpolation linéaire de  $\vec{v}_{i, N_2 - 1}$  et  $\vec{v}_{i, N_2}^{(k)}$ . En choisissant  $h_2' = m h_2$  dans (18), on détermine alors de façon stable le vecteur  $\vec{v}_{i, N_2}^{(k+1)}$ .

. si nous partons initialement d'un grillage carré :

$$h_1 = h_2 = h$$

On rétrécit le côté  $h_1$  de la maille pour le côté  $S_{21}$  c'est-à-dire qu'on pose :

$$h_2 = h \quad \bar{h}_1 = \frac{h}{m}$$

La condition de stabilité (11) est satisfaite si :

$$(23) \quad m > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2\lambda}{\lambda + \mu}}$$

Pour le côté  $S_{22}$  on pose :

$$h_1 = h \quad \text{et} \quad \bar{h}_2 = \frac{h}{m}$$

et la condition (18) est satisfaite si  $m$  vérifie (23).

Les valeurs de  $\vec{v}^{(k)}$  aux points de coordonnées  $\{h(N_1 - 1) + \frac{h}{m}, j h\}$  et  $\{i h, (N_2 - 1) h + \frac{h}{m}\}$  sont déterminés par interpolation linéaire.

#### IV.- GENERALISATION A L'ELASTODYNAMIQUE.

On peut appliquer le procédé ci-dessus pour la résolution numérique du problème mixte de l'élastodynamique dans le carré unité.  $\vec{u}(u_1, u_2)$  satisfait :

$$(24) \quad \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \rho \vec{F}$$

dans

$$D = \{0 < x_1, x_2 < 1\} \times \{0 < t \leq T\}$$

les conditions initiales ( $t=0$ ) sont :

$$(25) \quad \vec{u}(x_1, x_2, 0) = \vec{\gamma} \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x_1, x_2, 0) = \vec{g}$$

les conditions aux frontières sont :

$$(26) \quad \vec{u}|_{S_1} = \vec{\psi}(x_1, x_2, t) \quad 0 < t \leq T$$

$$(27) \quad \sigma_{i,k}|_{S_2} = f_{i,k}(x_1, x_2, t) \quad 0 < t \leq T$$

On approche (24) par l'équation aux différences :

$$(28) \quad \rho \frac{v_{i,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^n + v_{i,j}^{n-1}}{\tau^2} = \mu \Delta_h v_{i,j}^n + (\lambda + \mu) \Lambda v_{i,j}^n + \rho \vec{F}_{i,j}^n$$

où  $v_{i,j}^n = \vec{v}(ih_1, jh_2, n\tau)$ .

Les conditions initiales (25) peuvent être approchées par :

$$(29) \quad v_{i,j}^{0} = \vec{\gamma}_{i,j} \quad v_{i,j}^1 = \vec{\gamma}_{i,j} + \overrightarrow{\tau g_{i,j}}$$

On peut alors déterminer  $v_{i,j}^{n+1}$  pour  $0 < i < N_1$  et  $0 < j < N_2$  à partir de (28).

Par les conditions-frontière (7 - 10), on détermine  $v_{i,j}^{n+1}$  sur  $S_{21}$  et  $S_{22}$ .

Les conditions de stabilité (17) et (20) le long de chaque frontière doivent être satisfaites.

On montre (voir Yanenko [6]) que la condition de stabilité du schéma aux différences (28) est :

$$(30) \quad \tau \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) < \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}$$

Cette condition (30) n'impose pas des restrictions supplémentaires pour le choix de  $h_1$  et  $h_2$ , car  $h_1$  et  $h_2$  étant déterminés par (17) et (20), on peut satisfaire la condition (30) par un choix convenable de  $\tau$ .

Remarque.-

Aussi bien pour le problème mixte de l'élastostatique que celui de l'élastodynamique, la question de la convergence reste ouverte.

APPLICATION I

TORSION D'UNE BARRE

PRISMATIQUE A SECTION CARREE.

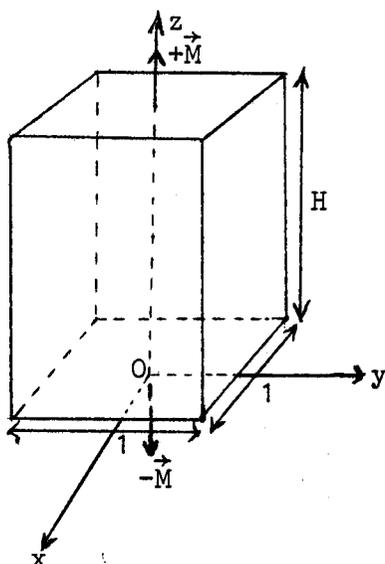


Fig. 1.

Les génératrices sont parallèles à  $Oz$ , et la surface latérale n'est pas chargée.

On néglige les forces de volume et on admet que les efforts extérieurs appliqués sur les faces  $z=0$  et  $z=H$  sont respectivement équivalents à un couple de torsion

$-M$  sur la face  $z=0$  et

$+M$  sur la face  $z=H$ .

La matrice du tenseur des contraintes est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour alléger l'écriture on remplacera par la suite  $\tau_{xz}$  par  $\tau_x$  et  $\tau_{yz}$  par  $\tau_y$ . On démontre que :

$$(1) \quad \tau_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \tau_y = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} .$$

$\Psi$  fonction de Prandtl vérifiant :

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta \Psi = -2G\theta & \text{à l'intérieur du carré} \\ \Psi = 0 & \text{sur le contour.} \end{cases}$$

$G = \mu =$  coefficient de Lamé

$\theta =$  angle de rotation unitaire.

Posons  $U = \psi + \frac{2G\theta}{4} (x^2 + y^2)$

$$(2) \Rightarrow (3) \quad \begin{cases} \Delta U = 0 & \text{à l'intérieur du carré} \\ U = \frac{G\theta}{2} (x^2 + y^2) & \text{sur le contour.} \end{cases}$$

Posons  $V = \frac{U}{G\theta}$  et appelons  $\phi = \frac{\psi}{G\theta}$

$$(3) \Rightarrow (4) \quad \begin{cases} \Delta V = 0 & \text{à l'intérieur du carré} \\ V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) & \text{sur le contour} \end{cases}$$

avec  $V = \phi + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

D'après (1), on a alors :

$$(5) \quad \begin{cases} \tau_x = G\theta \left[ -y + \frac{\partial V}{\partial y} \right] \\ \tau_y = G\theta \left[ x - \frac{\partial V}{\partial x} \right] \end{cases}$$

Remarquons que  $M = G \theta C$  ( $C$  module de torsion du carré =  $2,249 a^4$  ; ici  $a = \frac{1}{2} m \Rightarrow C \approx 0,14 m^4$ ).

Le calcul de  $\tau_x$  et  $\tau_y$  se ramène à la résolution de (4) : problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace. On utilise la méthode des différences finies avec un pas  $h = \frac{1}{10}$ . (4) est remplacée par l'approximation d'ordre 4 en  $h$  :

$$(6) \quad \begin{cases} \tilde{v}_{i+1,j} + \tilde{v}_{i-1,j} + \tilde{v}_{i,j+1} + \tilde{v}_{i,j-1} - 4\tilde{v}_{i,j} = 0 \\ \tilde{v} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) & \text{sur le contour} \end{cases}$$

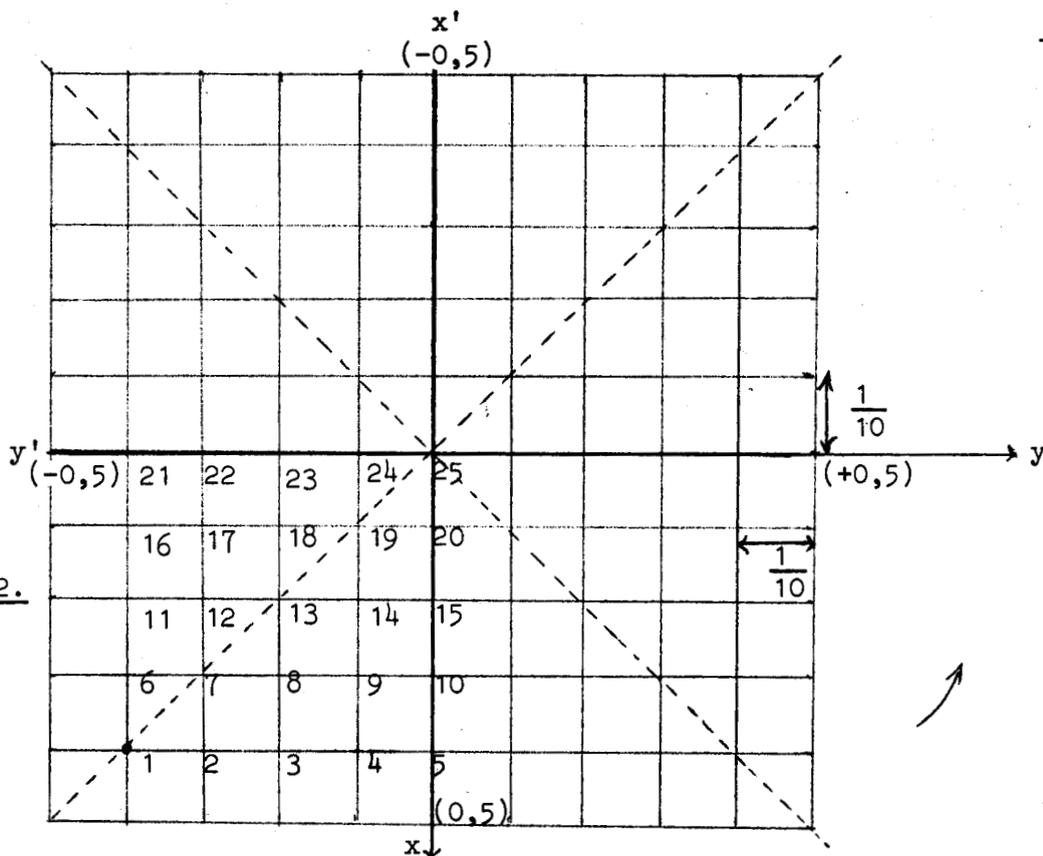


Fig. 2.

On a symétrie par rapport à  $x'x$  et  $y'y$  et les 2 diagonales pour la forme (6).

Nous avons calculé  $V$  (voir programme 1) pour les 25 points de la Fig. 2 (nous aurions pu ne calculer que 19 points en raison de la symétrie par rapport aux 2 diagonales). Nous en déduisons par (5) les valeurs de  $\tau_x$  et  $\tau_y$  (voir Fig. 3)

Estimation des erreurs.-

La fonction de Prandtl vérifiant (2) est exprimable sous forme de série rapidement convergente (voir [14] p. 215 à 219). Pour le cas de la Fig. 2 on a :

$$(7) \quad \Psi(x,y) = \frac{8G\theta}{\Pi^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left(1 - \frac{\text{ch } \lambda_n y}{\text{ch } \frac{\lambda_n}{2}}\right) \cos \lambda_n x.$$

avec  $\lambda_n = (2n+1)\Pi$

Pour une estimation rapide des erreurs, nous nous contentons du 1er terme de la série :

$$(8) \quad \phi = \frac{\Psi}{G\theta} \approx \frac{8}{\Pi^3} \left(1 - \frac{\text{ch } \Pi y}{\text{ch } \frac{\Pi}{2}}\right) \cos \Pi x.$$

\* Calcul d'erreurs sur V (ou  $\emptyset$ )

Posons  $\epsilon_{i,j} = |V_{i,j} - \tilde{V}_{i,j}|$ .

D'après l'inégalité (16) du chap. III :

$$\epsilon_{i,j} < \frac{h^2}{12} \cdot \frac{1}{4} M_4$$

$$M_4 = \text{Sup}_{\text{carré}} \{ |V_{4x}|, |V_{4y}| \} = \text{Sup} \{ |\emptyset_{4x}|, |\emptyset_{4y}| \}$$

Si nous nous contentons du 1er terme de la série (7) nous pouvons admettre

$$M_4 \approx 8\pi$$

$$\epsilon_{i,j} < 0,5 h^2 \text{ dans notre cas } \underline{\epsilon_{i,j} < 5 \times 10^{-3}}$$

Toutefois, les inégalités (18) du Chap. III nous donnent plus de précision sur la distribution de ces erreurs

- 1er précontour :

$$\epsilon_1 < 2 \cdot 10^{-3}$$

- 2ème précontour :

$$\epsilon_2 < 3,5 \cdot 10^{-3}$$

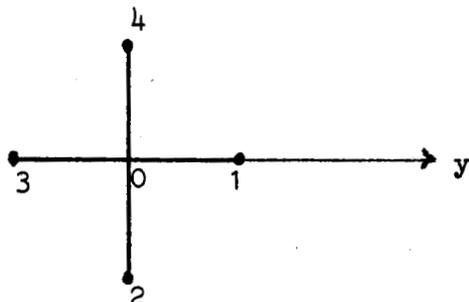
- 3ème précontour et 4ème précontour :

$$\epsilon_3 < 5 \cdot 10^{-3} \text{ et } \epsilon_4 < 5 \cdot 10^{-3}$$

La précision décroît lorsqu'on s'approche du centre du carré.

\* Calcul d'erreurs sur  $\frac{IX}{G\theta}$  et  $\frac{IY}{G\theta}$

→ points à l'intérieur du carré



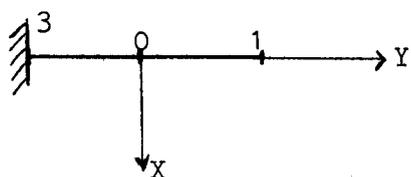
$$\left. \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \right|_0 = \frac{\tilde{V}_2 - \tilde{V}_4}{2h} - \frac{h^2}{6} \theta_0 M_3$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right|_0 = \frac{\tilde{V}_1 - \tilde{V}_3}{2h} - \frac{h^2}{6} \theta_0 M_3$$

$$\theta_0 < 1 \quad M_3 = \text{Sup}_{\text{carré}} \{ |\emptyset_{3x}|, |\emptyset_{3y}| \} \approx 8$$

L'erreur introduite par  $V$  sur le calcul de  $\frac{IX}{G\theta}$  et  $\frac{IY}{G\theta}$  est inférieure à  $5 \cdot 10^{-2}$ . Celle introduite par l'approximation de  $\frac{\partial V}{\partial x}$  ou  $\frac{\partial V}{\partial y}$  est inférieure à  $1,5 \cdot 10^{-2}$ . Globalement l'erreur est inférieure à 6,5 %.

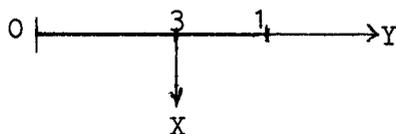
→ points du 1er précontour



Aucune erreur sur  $V_3$  ici.

L'erreur introduite par  $V$  est inférieure à  $2 \cdot 10^{-2}$ . L'erreur globale est inférieure à 3,5 %. Ce sont les points où la précision est la meilleure.

→ points situés sur un côté



$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \Big|_0 = \frac{-3\tilde{V}_0 + 4\tilde{V}_3 - \tilde{V}_1}{2h} + \frac{h^2}{3} M_3 \theta_0.$$

L'erreur globale est ici inférieure à  $6,5 \cdot 10^{-2}$  (après calculs).

Remarque. -

Le calcul d'erreur laisse supposer une grande imprécision car  $h = \frac{1}{10}$  n'est pas assez petit. Toutefois nous avons vérifié et comparé les résultats obtenus avec les résultats de la solution exacte.

En particulier, au milieu des côtés du carré la contrainte est maximum, et le calcul par les différences finies donne :

$$\frac{\tau_{\max}}{G\theta} = 0,65$$

La valeur donnée par un calcul théorique (voir Solomon p.216) est = 0,666 à  $2 \cdot 10^{-3}$ , ce qui est très satisfaisant. Evidemment en diminuant le pas, la précision augmente et est de l'ordre de  $7h^2$  sur la détermination de

$\frac{IX}{G\theta}$  et  $\frac{IY}{G\theta}$ .

PROGRAMME I

```
1: INTEGER FLAG
2: DIMENSION A(25,26),X(25)
3: 1 READ (5,100) N , ITMAX , EPS
4: WRITE (6,200) N, ITMAX, EPS
5: NP1=N+1
6: DO 11 I=1,N
7: 11 READ(5,105)(A(I,J),J=1,N)
8: 105 FORMAT(16(1X,I4)/9(1X,I4))
9: READ (5,101) (A(I,NP1),I=1,N)
10: READ (5,101) (X(I),I=1,N)
11: DO 2 I=1,N
12: 2 WRITE (6,201) (A(I,J),J=1,NP1)
13: WRITE (6,202)
14: WRITE (6,201) (X(I),I=1,N)
15: DO 3 I=1,N
16: ASTAR=A(I,I)
17: DO 3 J=1,NP1
18: 3 A(I,J)=A(I,J)/ASTAR
19: DO 9 ITER=1,ITMAX
20: FLAG=1
21: DO 7 I=1,N
22: XSTAR=X(I)
23: X(I)=A(I,NP1)
24: DO 5 J=1,N
25: IF (1.EQ.J) GO TO 5
26: X(I)=X(I)=A(I,J)*X(J)
27: 5 CONTINUE
28: IF (ABS(XSTAR-X(I)).LE.EPS) GO TO 7
29: FLAG=0
30: 7 CONTINUE
31: IF (FLAG.NE.1) GO TO 9
32: WRITE (6,203) ITER
33: WRITE (6,201) (X(I),I=1,N)
34: GO TO 10
```



```

35:      9 CONTINUE
36:      WRITE (6,204) ITER
37:      WRITE(6,206)(X(I),I=1,N)
38:      206 FORMAT(/10(F8.5,1X)/10(F8.5,1X)/5(F8.5,1X))
39:      100 FORMAT (14,1X,14,1X,F10.6)
40:      101 FORMAT(16(1X,F4.1)/9(1X,F4.1))
41:      200 FORMAT (72H1 SOLUTION OF SIMULTANEOUS LINEAR EQUATIONS BY GAUSS-SE
42:      1DEL METHOD, WITH          /1H0, 5X, 9HN      = , 14/
43:      2 6X, 9HITMAX = , 14/ 6X , 9HEPS = , F10.6/ 47H0 THE COEFFICIEN
44:      3T MATRIX A(1,1)...A(N+1,N+1) IS)
45:      201 FORMAT(/10(F8.3,1X)/10(F8.3,1X)/5(F8.3,1X))
46:      202 FORMAT (36H0 THE STARTING VECTOR X(1)...X(N) IS)
47:      203 FORMAT (35H0 PROCEDURE CONVERGED, WITH ITER = , 14/
48:      1 32H0 SOLUTION VECTOR X(1)...X(N) IS)
49:      204 FORMAT (16H0 NO CONVERGENCE/ 10H0 ITER = , 14/
50:      1 31H0 CURRENT VECTOR X(1)...X(N) IS)
51:      10 CONTINUE
52:      END

```











.000	.000	.000	.000	-100.000	.000	.000	.000	-200.000	400.000
.000	.000	.000	.000	-100.000					
.000									
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000	.000	.000	.000	.000	-200.000	.000	.000	.000	.000
400.000	-100.000	.000	.000	.000					
12.500									
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000	.000	.000	.000	.000	.000	-200.000	.000	.000	.000
-100.000	400.000	-100.000	.000	.000					
.000									
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	-200.000	.000	.000
.000	-100.000	400.000	-100.000	.000					
.000									
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	-200.000	.000
.000	.000	-100.000	400.000	-100.000					
.000									
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	-200.000
.000	.000	.000	-200.000	400.000					
.000									

0 THE STARTING VECTOR X(1)...X(N) IS

.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

0 PROCEDURE CONVERGED, WITH ITER = 53

0 SOLUTION VECTOR X(1),...X(N) IS



.186	.166	.150	.141	.137	.166	.158	.150	.145	.143
.150	.150	.148	.146	.145	.141	.145	.146	.145	.145
.137	.143	.145	.145	.145					

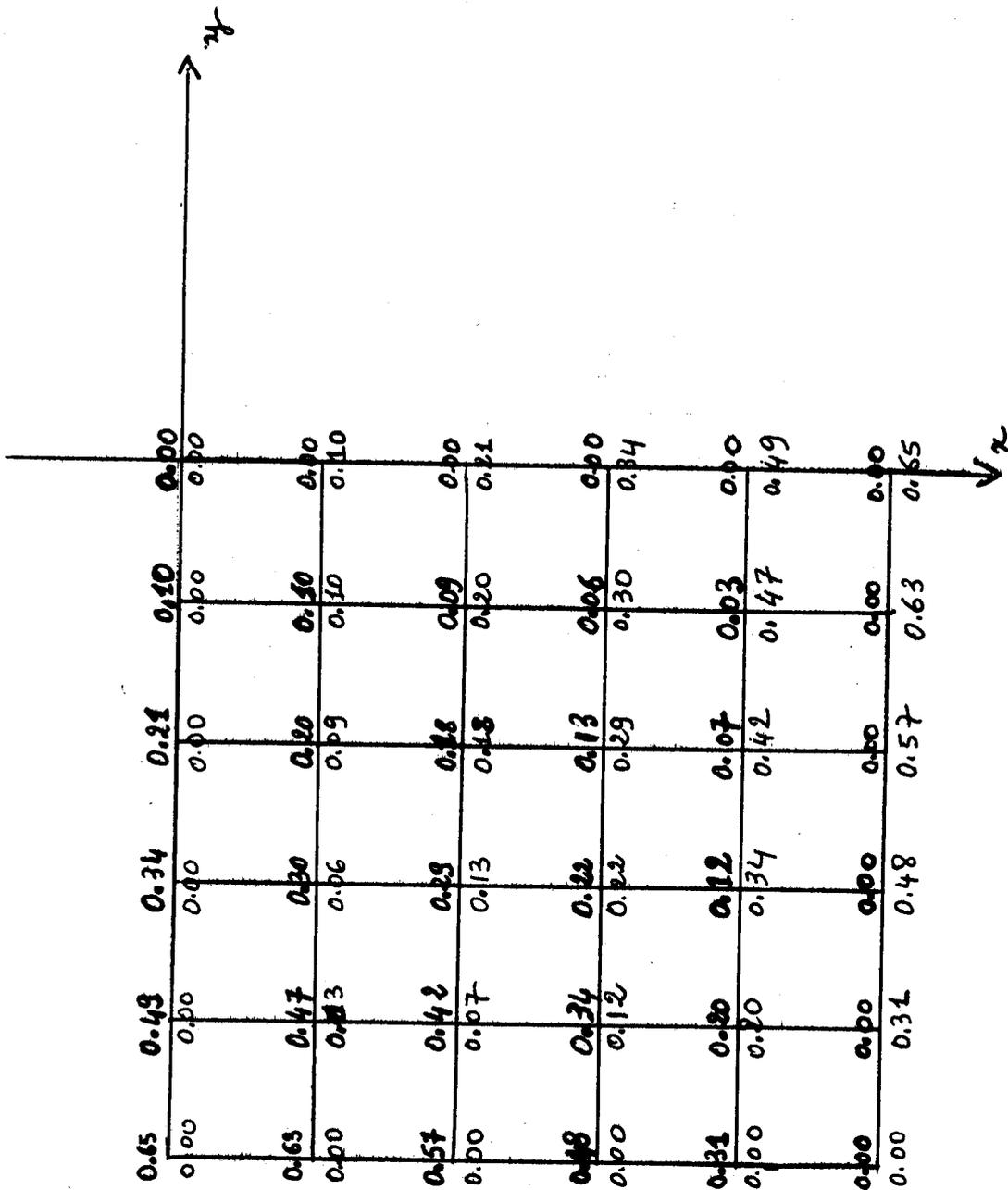
\*STOP\* 0

JOB STEP 03 TERMINATED AFTER 0000.07MIN

. CORE USED 0013 DISC USED 0009 WAIT TIME 0000.02



DIFFERENCES FINIES  
 CARRÉ UNITÉ - TORSION  
 $h = \frac{1}{10}$



valeurs de  $\frac{G\tau}{G\theta}$  —  $\sin \frac{\pi}{4}$  de carré unité'



fig 3

DIFFÉRENCES FINIES :  
CARRÉ UNITE' - TORSION  
 $k = \frac{1}{10}$

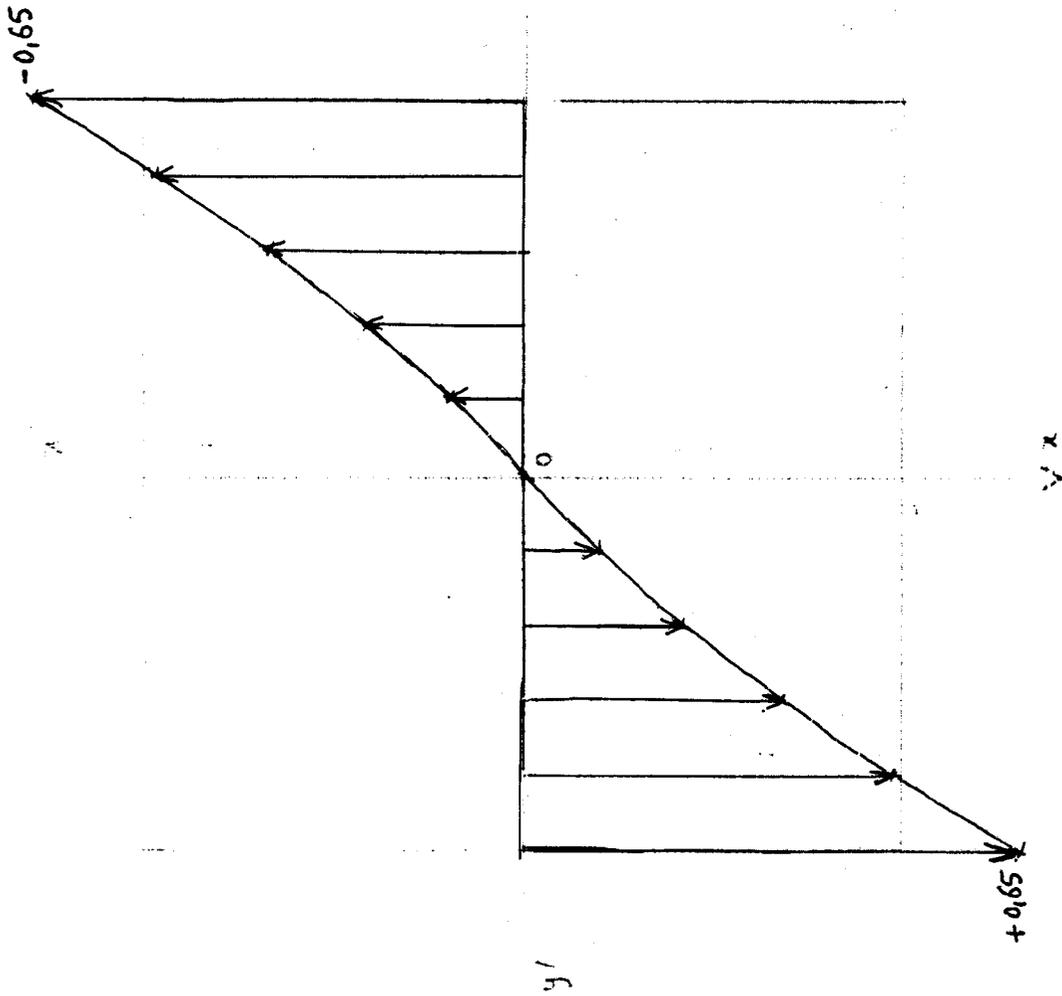


fig 4

Variations de  $\frac{Gx}{G\theta}$  le long de  $y'y$   
(rotation de  $90^\circ$  pour  $\frac{Gx}{G\theta}$ )



## APPLICATION II

### PROBLEME DES COINS DE CADRES

#### CALCUL DES CONTRAINTES PAR LA METHODE DIRECTE.

##### I.- POSITION DU PROBLEME ET CALCULS PRELEMINAIRES.-

. Ce problème nous a été communiqué par Monsieur KERGUIGNAS et a été publié dans un bulletin technique VEYVEY de 1959. Il s'agit d'un coin de cadre avec âme et semelles, soumis seulement à des moments fléchissants :

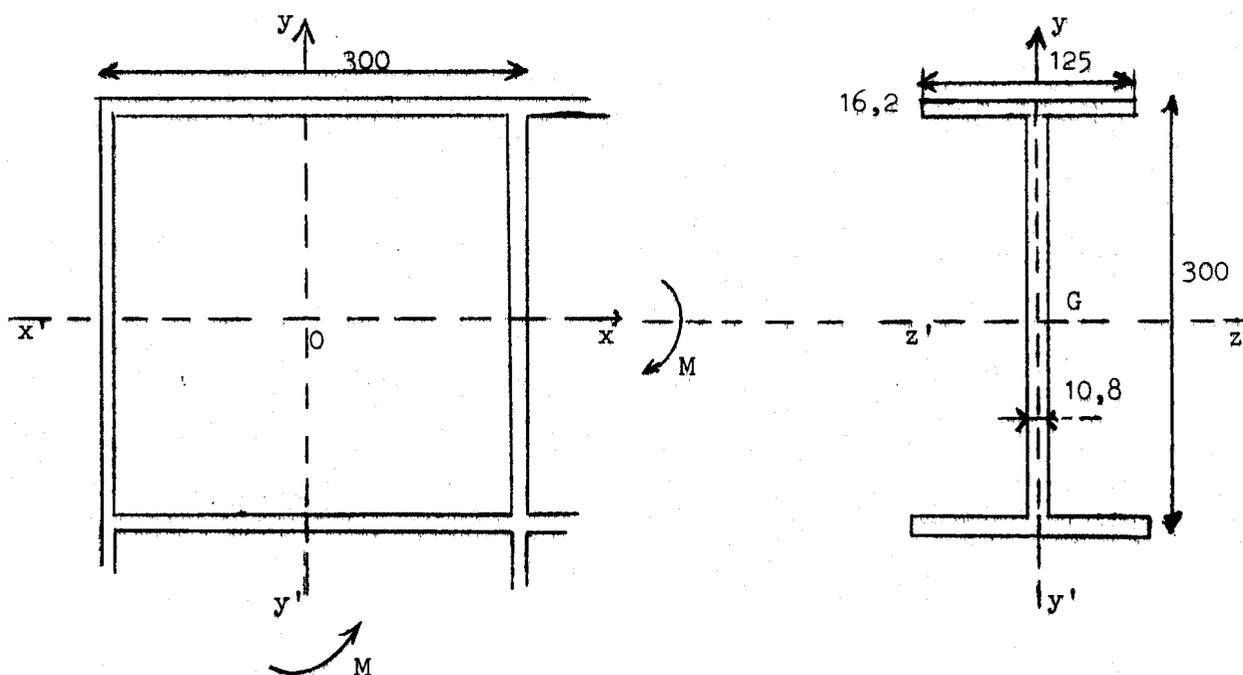


Fig. 1.

La section est une poutrelle I.P.N 300. Nous avons supposé que la largeur de l'âme du coin de cadre est égale à sa hauteur, ce qui nous donne le carré de la Fig.1.

Nous subdivisons le cas de la Fig. 1 en deux et séparons pour cela la transmission des efforts dans les membrures (cas I de la fig 2) et celle dans les âmes (cas II de la fig. 2)

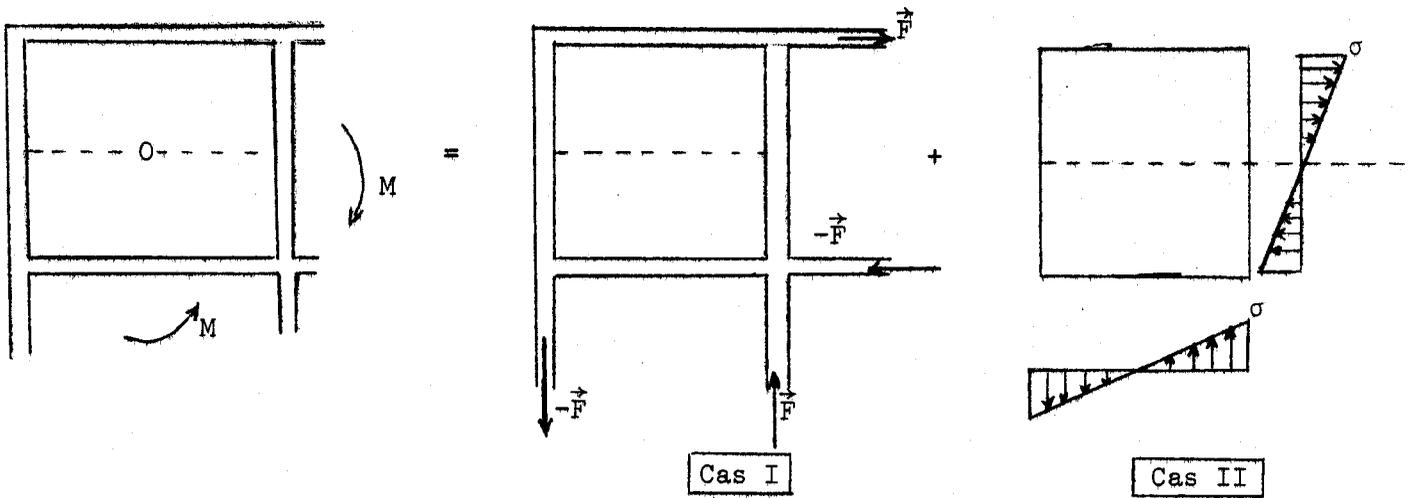


Fig. 2

Calculs préliminaires

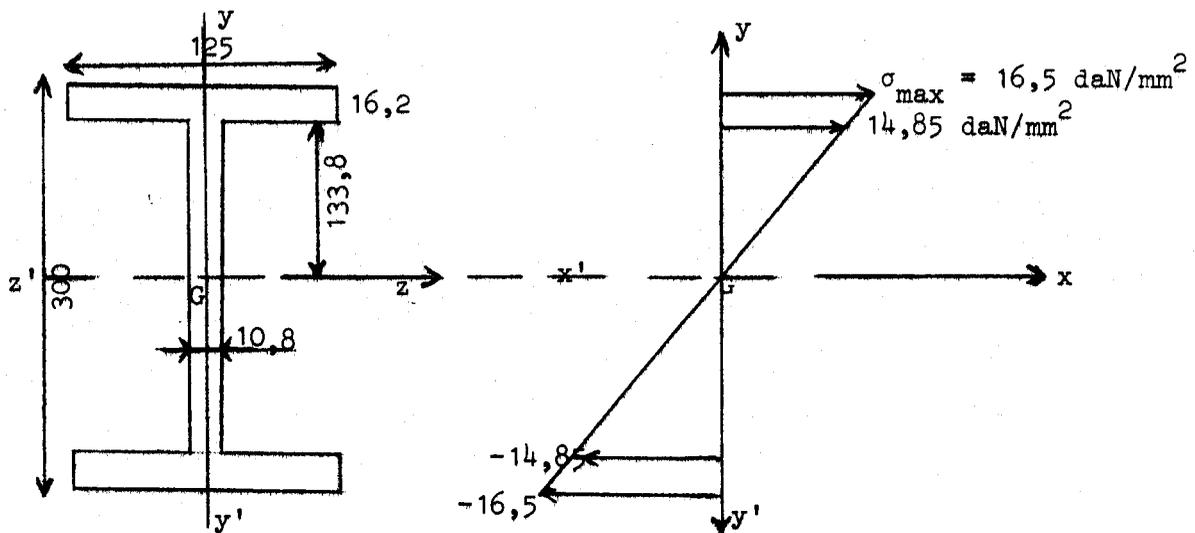


Fig. 3

*Donnée* Nous avons admis  $\sigma_{max} = 16,5 \text{ daN/mm}^2$   
 IPN 300 :  $I_{z'z'} = 9800 \text{ cm}^4$       $\frac{I_{z'z'}}{v} = 653 \text{ cm}^3$

Le moment fléchissant total est :

$$M = \sigma_{max} \left( \frac{I_{z'z'}}{v} \right) = 16,5 \times 653 = 10774,5 \text{ m daN}$$

La contrainte  $\sigma$  au niveau de la jonction âme semelle est :

$$\sigma = \frac{10774,5 \times 13,38}{9800} = 14,85 \text{ daN/mm}^2$$

La contrainte moyenne appliquée au rectangle - semelle d'aire 125×16,2 est :

$$\sigma_{\text{moy}} = \frac{16,5+14,85}{2} = 15,675 \text{ daN/mm}^2$$

L'effort de compression ou de traction supporté par une section de semelle est donc :

$$F = 15,675 \times 125 \times 16,2 \approx 31742 \text{ daN}$$

Pour le cas I de la fig. 2, la partie du moment total repris par les ailes est :

$$\text{Mailes} = (300-32,4) \times 31742 = 8495 \text{ m daN}$$

a) calcul de 1ère approximation

Nous pouvons admettre (et nous vérifierons plus loin la validité de l'hypothèse) que pour le cas I de la Fig. 2, les âmes seules supportent les efforts tranchants F, et que la contrainte de cisaillement  $|\tau|$ , sur le contour de l'âme du coin du cadre est constante :

$$|\tau_{\text{moyen}}|_{\text{âme}} = \frac{31742}{10,8 \times 267,6} = 11 \text{ daN/mm}^2$$

L'application que nous développerons plus loin est d'ailleurs basée sur cette hypothèse.

b) répartition réelle de  $|\tau|$  dans la section

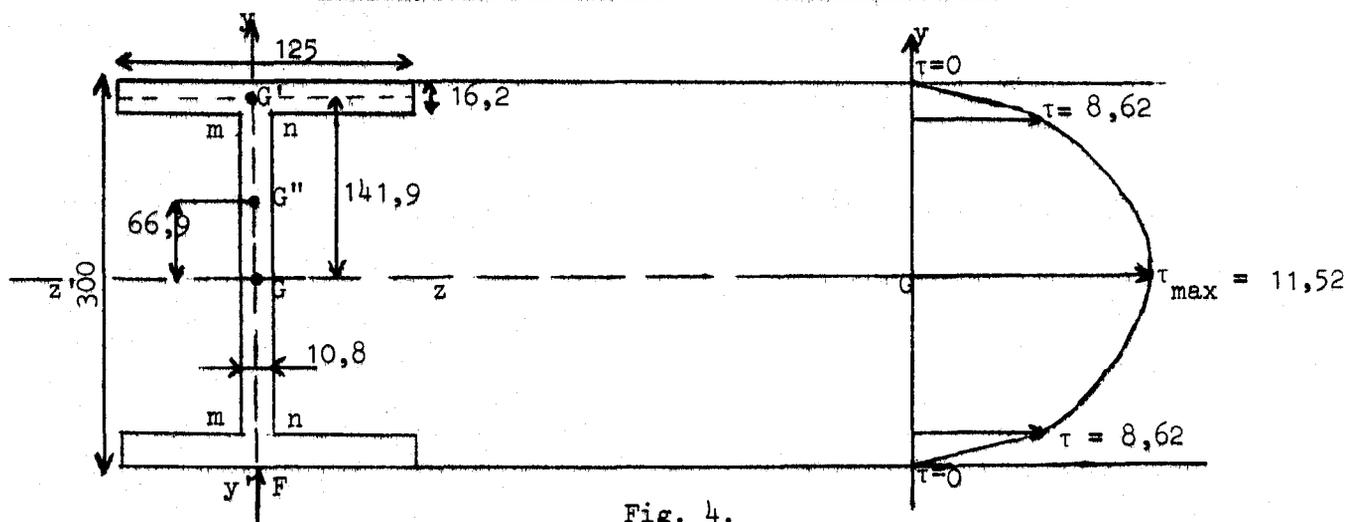


Fig. 4.

. Pour les arêtes supérieure et inférieure  $\tau=0$ .

. Valeur de  $|\tau|$  le long de l'arête m jonction de l'âme et de la semelle :

$$|\tau| = \frac{F \mu'_{Gz}}{b I_{Gz}}$$

avec  $b = 1,08 \text{ cm}$       $I_{Gz} = 9800 \text{ cm}^4$       $F = 31742 \text{ daN}$ .

Le moment statique  $\mu'_{Gz}$  de la semelle est :

$$\mu'_{Gz} = 1,62 \times 12,5 \times 14,19 = 287,35 \text{ cm}^3$$

D'où :

$$|\tau| = \frac{31742 \times 287,35}{1,08 \times 9800} = 8,62 \text{ daN/mm}^2$$

. distribution de  $|\tau|$  dans l'âme :

L'âme étant rectangulaire, nous savons que  $|\tau|$  a une distribution parabolique sur l'axe  $y'y$  et que la valeur maximale de  $|\tau|$  est atteinte au point G :

$$|\tau_{\max}| = \frac{F \mu_{Gz}}{b I_{Gz}}$$

$$\mu_{Gz} = \mu'_{Gz} + \mu''_{Gz}$$

$\mu''_{Gz}$  = moment statique de la demi-âme

$$\mu''_{Gz} = 1,08 \times 13,38 \times 6,69 = 96,67 \text{ cm}^3$$

$$\mu_{Gz} = 287,35 + 96,67 = 384 \text{ cm}^3$$

$$|\tau_{\max}| = \frac{31742 \times 384}{1,08 \times 9800} = 11,52 \text{ daN/mm}^2$$

Dans un calcul de 2ème approximation, nous pouvons prendre

$$|\tau_{\text{moy}}|_{\text{âmes}} = \frac{8,62 + 11,52}{2} = 10,7 \text{ daN/mm}^2$$

qui est une valeur très voisine de celle prise en 1ère approximation (11 daN/mm<sup>2</sup>).

L'effort tranchant supporté par l'âme seule est :

$$T \approx 10,7 \times 133,8 \times 2 \times 10,8 = 30924 \text{ daN}$$

ce qui justifie la 1ère approximation, où nous avons supposé que l'âme seule supportait l'effort tranchant  $F = 31742 \text{ daN}$ .

Pour l'application, nous supposons une contrainte moyenne constante  $|\tau| = 11 \text{ daN/mm}^2$ . Toutefois, la méthode du Chap. VIII est applicable avec la répartition parabolique de  $\tau$  de la fig. 4.

## II.- CALCUL DES CONTRAINTES. - ( $\tau = \text{Constante}$ ).

Rappelons les notations du Chap. VIII :

$$A = \sigma_x \quad B = \sigma_y \quad C = -\tau_{xy}$$

Le problème de la fig. 1 se ramène à résoudre le problème suivant :

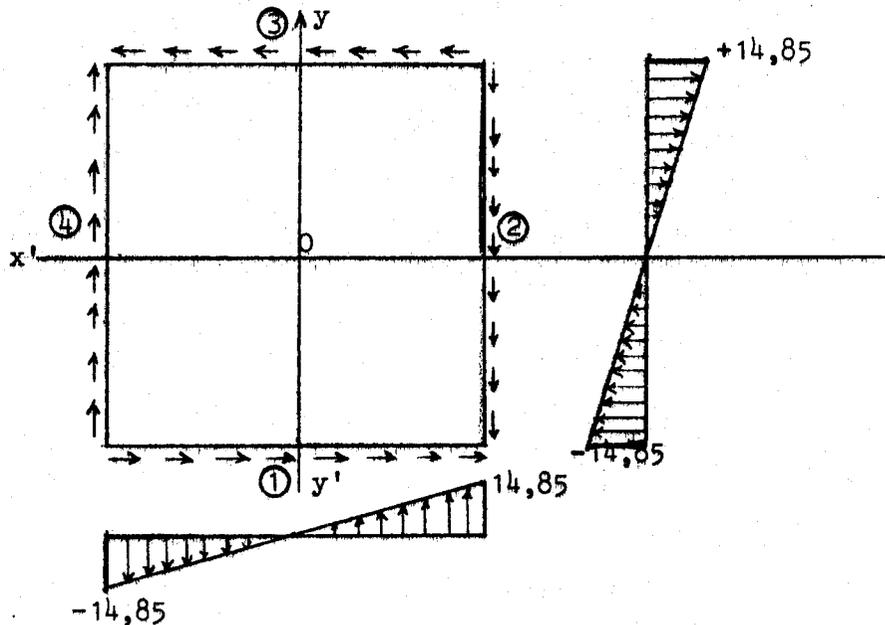


Fig. 5.

Les conditions aux frontières sont :

<u>côté 1</u>	$\sigma_y = \frac{14,85}{278,6} x$	$\tau_{xy} = +11$	$\sigma_x ?$
<u>côté 2</u>	$\sigma_x = \frac{14,85}{278,6} y$	$\tau_{xy} = -11$	$\sigma_y ?$
<u>côté 3</u>	$\sigma_y = 0$	$\tau_{xy} = -11$	$\sigma_x ?$
<u>côté 4</u>	$\sigma_x = 0$	$\tau_{xy} = 11$	$\sigma_y ?$

Nous résolvons le problème avec la méthode des différences finies exposée au Chap. VIII.

1) pas  $h = \frac{1}{6} L$  (25 points internes)

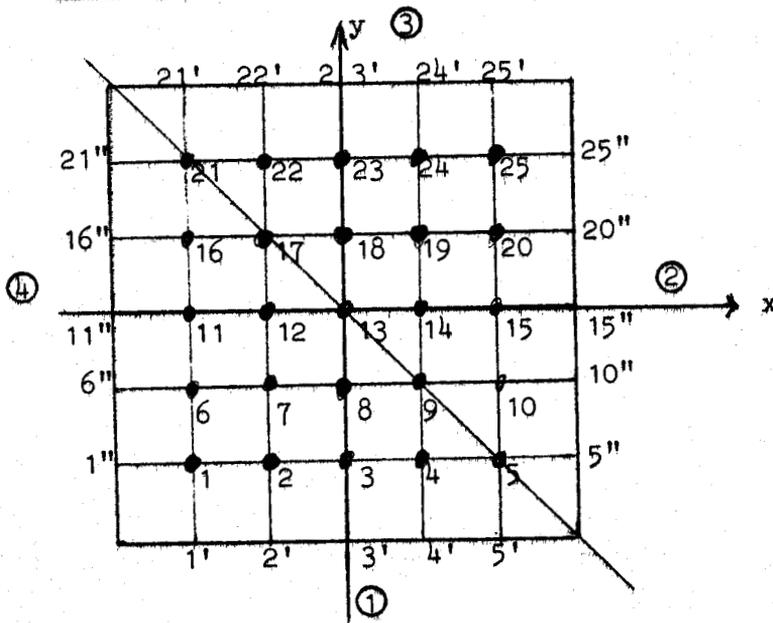


Fig. 6.

a) Calcul de  $A \approx \sigma_x$  et  $B \approx \sigma_y$  pour les noeuds internes

Les équations (10), (13), (15), (17), (19), (21), (22), (23) et (25) conduisent à un système algébrique de 50 équations à 50 inconnues ( $A_i, B_i$ ), mais nous pouvons réduire le nombre d'inconnues à 15. En effet, nous avons une symétrie par rapport à la 2ème bissectrice ( $\sigma_x(x,y) = -\sigma_y(-y,-x)$ ) et deux symétries par rapport à  $x'x$  et  $yy'$  car :

$$\sigma_x(x,y) = -\sigma_x(x,-y)$$

et

$$\sigma_y(x,y) = -\sigma_y(-x,y)$$

Nous avons néanmoins dans ce calcul de 1ère approximation gardé toutes les équations pour déceler toute erreur dans l'écriture du système algébrique.

Les calculs et les résultats sont collectés dans le programme II.

b) Calcul de  $A \approx \sigma_x$  sur les côtés ① et ③ et  $B \approx \sigma_y$  sur ② et ④.

Les symétries signalées résument les calculs à 5 inconnues par exemple aux points 1', 2', 3' 4', 5'.

On trouve : (relation (26) du Chap. VIII) :

$$A'_1 = -3,7860 \quad A'_2 = -5,9576 \quad A'_3 = -7,4220 \quad A'_4 = -8,8864$$

$$A'_5 = -11,06$$

c) Calcul de  $C \approx -\tau_{xy}$  (avec  $\tau=0$  sur le contour)

L'état de cisaillement de la fig 5 est la superposition de 2 états :

1er état :

$\tau=0$  sur le contour avec  $\sigma_x$  connue sur 2 et  $\sigma_y$  connue sur 1 .

2ème état :  $\tau = 11 \text{ daN/mm}^2 = \text{cisaillement pur.}$

Pour simplifier les calculs, nous avons calculé par les relations (31) du Chap. VIII, les  $C_i = -(\tau_{xy})_i$   $i=1,2,..25$  pour l'état 1. L'état final s'en déduit aisément par superposition de l'état de cisaillement pur.

2) pas  $h = \frac{1}{12} L$  (121 points internes)

Les symétries signalées permettent de ramener le problème à la résolution de 66 équations à 66 inconnues ( $A_i$ ). Les résultats obtenus par la méthode itérative de Gauss-Seidel sont collectés (p : 114)

Les relations (26) du Chap. VIII nous permettent de calculer les  $A_i$  pour le côté 1.

On trouve :

$$A_{1,1} = -3,2256 \quad A_{2,1} = -5,0142 \quad A_{3,1} = -6,0796 \quad A_{4,1} = -6,7332$$

$$A_{5,1} = -7,1528 \quad A_{6,1} = -7,4628 \quad A_{7,1} = -7,7728 \quad A_{8,1} = -8,1924$$

$$A_{9,1} = -8,8460 \quad A_{10,1} = -9,9114 \quad A_{11,1} = -11,72.$$

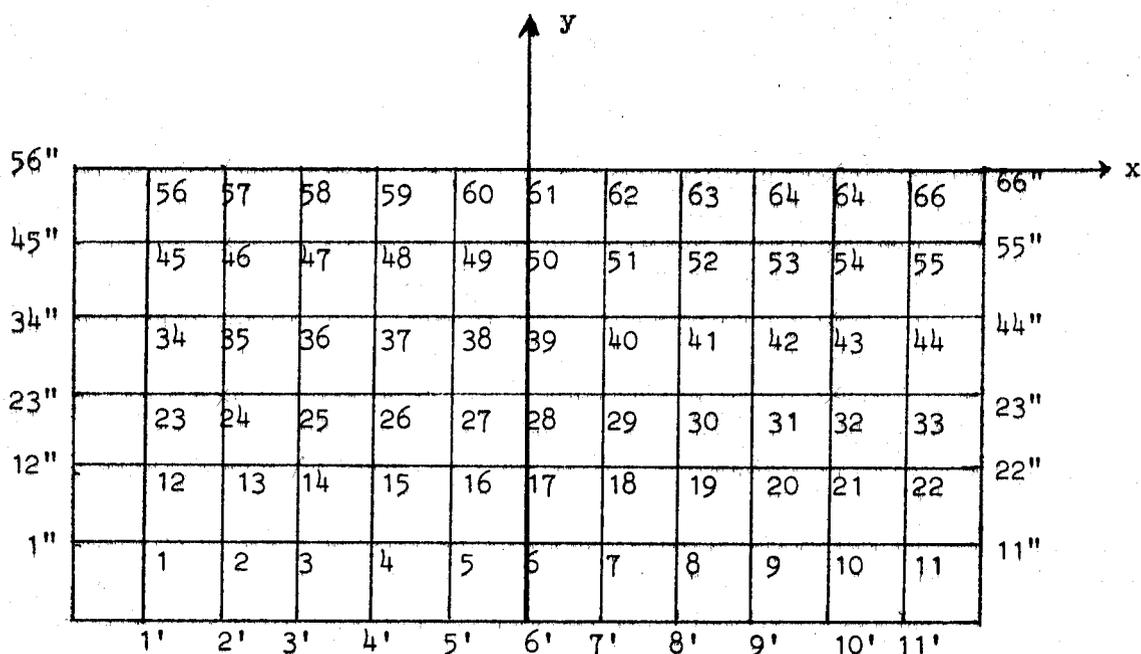


Fig. 7.

Estimation des erreurs.-

a) points intérieurs (on exclut les points du 1er précontour et les points 13 et 21).

Pour ces points, nous avons approché  $\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$  par  $\Delta_h(A+B) = 0$  (approximation en losange). D'après les résultats du Chap. III, nous savons que l'erreur est d'ordre  $h^2$ .

Posons  $h = \frac{1}{2}$        $h' = 2h = \frac{1}{6}$ .

Le principe de calcul d'erreurs signalé à la fin du Chap. III nous permet d'écrire :

$$(\epsilon_{i,j})_h \sim \frac{(A_{i,j})_h - (A_{i,j})_{h'}}{3}$$

avec  $\epsilon_{i,j} = |A_{ij} - (\sigma_x)_{i,j}|$ .

Pour les points 14..... 20

24..... 32

35..... 43

46..... 54

57..... 64

la comparaison des  $A_i$  pour  $h = \frac{1}{12}$  et  $h' = \frac{1}{6}$  montre que l'erreur reste inférieure à 6 %. La précision est d'autant meilleure qu'on se rapproche du centre, (par exemple pour le point 37, l'erreur est de 1 %).

Les résultats sont donc éloquents dans cette zone.

b) points 13 et 21 (et leurs symétriques /Ox).

La précision est ici très médiocre.

En effet nous trouvons par exemple :

$$(A_{13})_h = -1,4339 \quad (A_{13})_{h'} = -0,8082.$$

La variation est de l'ordre de 0,6, ce qui est indicateur d'une mauvaise précision. Cela tient au fait que 13 correspondait à 1 de la Fig. 6, qui est un point voisin du sommet.

c) points situés sur le 1er précontour (1 et 11 exclus)

Nous raisonnons ici par analogie : nous avons trouvé que pour le point 35 de la Fig. 7 (correspondant à 6 de la Fig. 6) que l'erreur est de l'ordre de 2 %. Or le point 6 est un point du 1er précontour pour la Fig. 6 ( $h = \frac{1}{6}$ ). Il est permis donc d'en déduire que pour les points du 1er précontour de la Fig. 7 ( $h = \frac{1}{12}$ ), la précision sera de l'ordre de 2 % (||Oy) et 6 % (||Ox).

d) points sur le côté 1 (par exemple)

Les résultats sont trop médiocres pour être pris en considération. Il faudrait diminuer sensiblement le pas au voisinage des sommets.

En résumé : si l'on exclut les points voisins du sommet, la précision est très satisfaisante et l'erreur reste inférieure à 6 %.

Remarque : Tous ces calculs sont valables à condition que les contraintes sur le contour soient assez faibles pour éviter le phénomène de VOILEMENT.

PROGRAMME II ( $h = \frac{1}{6}$ )

```

1:      INTEGER FLAG
2:      DIMENSION A(50,51),X(50)
3:      1 READ (5,100) N , ITMAX , EPS
4:      WRITE (6,200) N, ITMAX, EPS
5:      NP1=N+1
6:      DO 11 I=1,N
7:      11 READ(5,105)(A(I,J),J=1,N)
8:      105 FORMAT(12,26(1X,12)/23(1X,12))
9:      READ (5,101) (A(I,NP1),I=1,N)
10:     DO 79 I=1,N
11:     79 X(I)=0.
12:     DO 2 I=1,N
13:     2 WRITE (6,201) (A(I,J),J=1,NP1)
14:     WRITE (6,202)
15:     WRITE (6,201) (X(I),I=1,N)
16:     DO 3 I=1,N
17:     ASTAR=A(I,I)
18:     DO 3 J=1,NP1
19:     3 A(I,J)=A(I,J)/ASTAR
20:     DO 9 ITER=1,ITMAX
21:     FLAG=1
22:     DO 7 I=1,N
23:     XSTAR=X(I)
24:     X(I)=A(I,NP1)
25:     DO 5 J=1,N
26:     IF (I.EQ.J) GO TO 5
27:     X(I)=X(I)-A(I,J)*X(J)
28:     5 CONTINUE
29:     IF (ABS(XSTAR-X(I)).LE.EPS) GO TO 7
30:     FLAG=0
31:     7 CONTINUE
32:     IF (FLAG.NE.1) GO TO 9
33:     WRITE (6,203) ITER
34:     WRITE (6,201) (X(I),I=1,N)
35:     GOTO 10
36:     9 CONTINUE
37:     WRITE (6,204) ITER
38:     WRITE(6,206)(X(I),I=1,N)
39:     206 FORMAT(5(/10(F8.5,1X)))
40:     100 FORMAT (I4,1X,I4,1X,F10.6)
41:     101 FORMAT(4(11(1X,F6.2),/),6(1X,F6.2))
42:     200 FORMAT (72H1 SOLUTION OF SIMULTANEOUS LINEAR EQUATIONS BY GAUSS-SE
43:     1IDEL METHOD, WITH /1HO, 5X, 9HN = , 14/
44:     2 6X, 9HITMAX = , 14/ 6X , 9HEPS = , F10.6/ 47HO THE COEFFICIEN
45:     3T MATRIX A(1,1)...A(N+1,N+1) IS)
46:     201 FORMAT(5(/10(F8.4,1X)))
47:     202 FORMAT (36HO THE STARTING VECTOR X(1)...X(N) IS)
48:     203 FORMAT (35HO PROCEDURE CONVERGED, WITH ITER = , 14/
49:     1 32HO SOLUTION VECTOR X(1)...X(N) IS)
50:     204 FORMAT (16HO NO CONVERGENCE/ 10HO ITER = , 14/
51:     1 31HO CURRENT VECTOR X(1)...X(N) IS)
52:     10 CONTINUE
53:     END

```

0 PROCEDURE CONVERGED, WITH ITER = 30  
 0 SOLUTION VECTOR X(1)...X(N) IS (VALEURS DE (A,B)<sub>i</sub>  $\approx$  ( $\sigma_x, \sigma_y$ )<sub>i</sub> ; i=1,2,...,25 h =  $\frac{1}{2}$ ) =

-.8082	-9.0918	-3.2326	-4.5964	-4.9500	.0000	-6.6673	4.5964	-9.0918	9.0918
-.3536	-6.6673	-1.4143	-3.5357	-2.4750	.0000	-3.5357	3.5357	-4.5964	6.6673
.0000	-4.9500	.0000	-2.4750	.0000	.0000	.0000	2.4750	.0000	4.9500
.3536	-3.2326	1.4143	-1.4143	2.4750	.0000	3.5357	1.4143	4.5964	3.2326
.8082	-.8082	3.2326	-.3536	4.9500	.0000	6.6673	.3536	9.0918	.8082

\*STOP\* 0  
 JOB STEP 03 TERMINATED AFTER 0000.23MIN  
 CORE USED 0017 DISC USED 0009 WAIT TIME 0000,01

0 PROCEDURE CONVERGED, WITH ITER =  
 0 SOLUTION VECTOR X(1)...X(N) IS (VALEURS DE C<sub>i</sub>  $\approx$   $\tau_{xy}$  ; i=1,2,...,25 avec  $\tau=0$  sur le contour)

-.0000	.1986	.2526	.1983	-.0000	-.1982	-.0000	.1335	-.0000	-.1983
-.2527	-.1335	-.0000	-.1335	-.2527	-.1985	-.0000	.1335	-.0000	-.1986
-.0000	.1985	.2526	.1982	-.0000	-.1985	-.0000	.1335	-.0000	-.1986

\*STOP\* 0  
 JOB STEP 03 TERMINATED AFTER 0000.05MIN  
 CORE USED 0014 DISC USED 0009 WAIT TIME 0000,01



PROGRAMME III ( $h = \frac{1}{12}$ )

```

1      INTEGER FLAG
2      DIMENSION A(66,67),X(66)
3      1 READ (5,100) N , ITMAX , EPS
4      WRITE (6,200) N, ITMAX, EPS
5      NP1=N+1
6      DO 11 I=1,N
7      11 READ(5,105)(A(I,J),J=1,N)
8      105 F0RMAT(2(26(1X,I2),/),14(1X,I2))
9      READ (5,101) (A(I,NP1),I=1,N)
10     DO 79 I=1,N
11     79 X(I)=0.
12     DO 2 I=1,N
13     2 WRITE (6,201) (A(I,J),J=1,NP1)
14     WRITE (6,202)
15     WRITE (6,201) (X(I),I=1,N)
16     DO 3 I=1,N
17     ASTAR=A(I,I)
18     DO 3 j=1, NP1
19     3 A(I,J)=A(I,J)/ASTAR
20     DO 9 ITER=1,ITMAX
21     FLAG=1
22     DO 7 I=1,N
23     XSTAR=X(I)
24     X(I)=A(I,NP1)
25     DO 5 J=1,N
26     IF (I.EQ.J) GO TO 5
27     X(I)=X(I)-A(I,J)*X(J)
28     5 CONTINUE
29     IF (ABS(XSTAR-X(I)).LE.EPS) GO TO 7
30     FLAG=0
31     7 CONTINUE
32     IF (FLAG.NE.1) GO TO 9
33     WRITE (6,203) ITER
34     WRITE (6,201) (X(I),I=1,N)
35     GO TO 10
36     9 CONTINUE
37     WRITE (6,204) ITER
38     WRITE(6,206)(X(I),I=1,N)
39     206 F0RMAT(6(/11(F8.4,1X)))
40     100 F0RMAT (I4,1X,I4,1X,F10.6)
41     101 F0RMAT(7(9(1X,F7.3),/),3(1X,F7.3))
42     200 F0RMAT (72H1 S0LUT10N 0F SIMULTANEOUS LINEAR EQUATIONS BY GAUSS-SE
43     1IDEL METHOD, WITH /1H0, 5X, 9HN = , 14/
44     2 6X, 9HITMAX = , 14/ 6X , 9HEPS = , F10.6/ 47H0 THE COEFFICIEN
45     3T MATRIX A(1,1)...A(N+1,N+1) IS)
46     201 F0RMAT(6(/11(F8.4,1X)))
47     202 F0RMAT (36H0 THE STARTING VECTOR X(1)...X(N) IS)
48     203 F0RMAT (35H0 PROCEDURE CONVERGED, WITH ITER = , I4/
49     1 32H0 S0LUT10N VECTOR X(1)...X(N) IS)
50     204 F0RMAT (16H0 N0 CONVERGENCE/ 10H0 ITER = , I4/
51     1 31H0 CURRENT VECTOR X(1)...X(N) IS)
52     10 CONTINUE
53     END

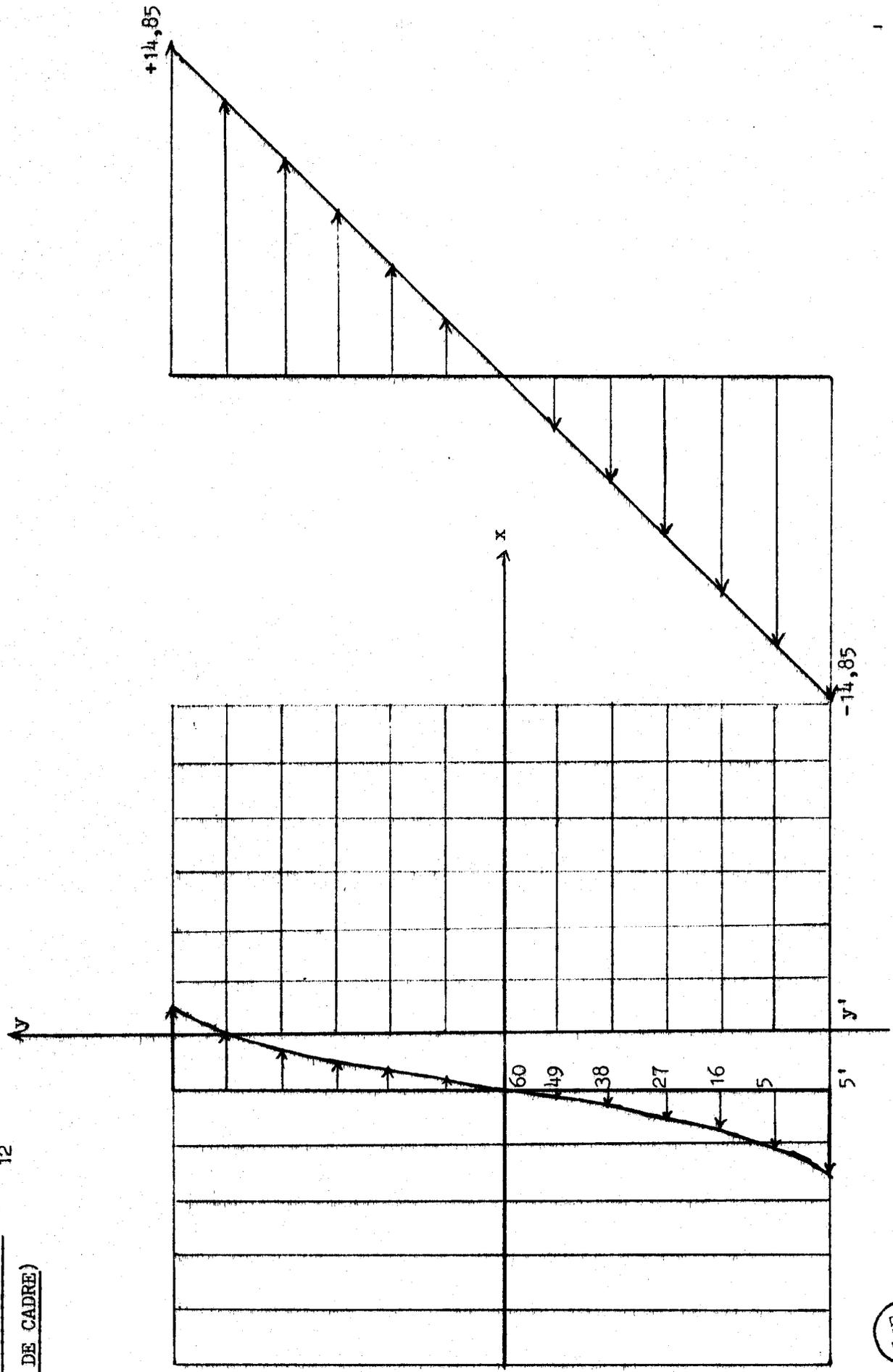
```





DIFFERENCES FINIES  $h = \frac{1}{12}$

(COIN DE CADRE)



ALLURE DES CONTRAINTES  $\sigma_x$  LE LONG D'UN AXE PARALLELE A  $Y'Y$

### CONCLUSION

Tout au long de ce travail, nous avons montré que les 3 types de problème en élasticité linéaire peuvent être abordés et résolus par la méthode des différences finies, qui s'avère donc un outil efficace surtout pour les domaines à limites parallèles aux axes Ox, Oy Oz. Toutefois quelques remarques et critiques méritent d'être soulignées :

1) si le problème à résoudre, ne présente aucune symétrie, les résultats numériques, pour être valables, ont besoin d'un moyen de calcul de grande capacité. En effet la précision des schèmes - différences proposés est généralement d'ordre 2 en h (pas de la maille).

2) pour le 2ème problème de l'élastostatique du Chap. VII, nous avons calculé le vecteur déplacement  $\vec{u}$  dans le cas d'un contour rectangulaire (ou parallélépipédique). La méthode s'étend pour des domaines simplement connexes, où on peut définir sans ambiguïté la normale externe en chaque point du contour. Soit par exemple le cas d'un état plan de déformation :

$$(1) \quad \begin{cases} f_x = n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} \\ f_y = n_y \sigma_y + n_x \tau_{xy} \end{cases}$$

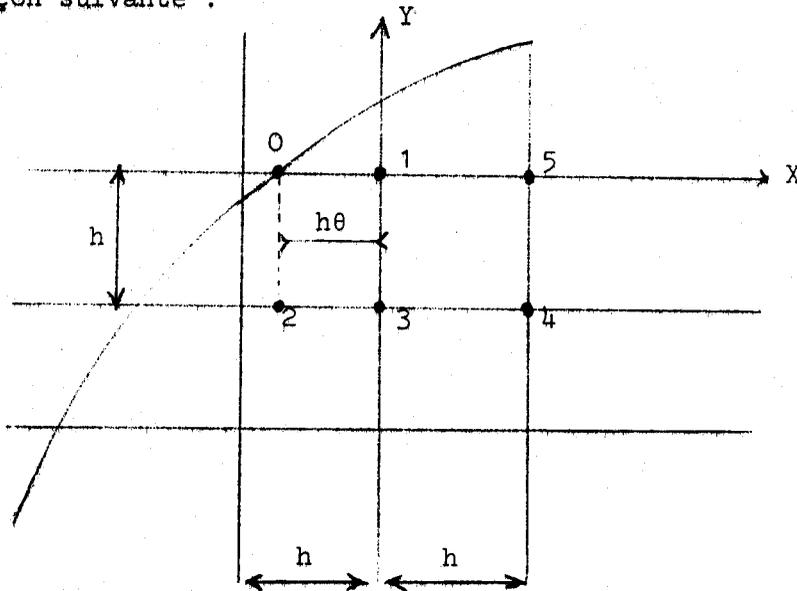
avec

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \sigma_y = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \end{cases}$$

$$\text{et } \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y),$$

Pour les points noeuds internes (on exclut les points voisins du contour qu'on désigne par points du 1er précontour), les relations (4) du Chap. VI restent valables.

Pour les points du contour et du 1er précontour, nous raisonnerons de la façon suivante :



$\theta < 1$

Nous discrétisons (2) au point 0. Soit  $\vec{U} \begin{cases} X \approx u_1 \\ Y \approx u_2 \end{cases}$  X et Y aux

points 1 et 2 peuvent approchés par interpolation linéaire avec précision d'ordre 2 en h :

$$X_1 = \frac{\theta X_5 + X_0}{1+\theta} \quad Y_1 = \frac{\theta Y_5 + Y_0}{1+\theta}$$

$$X_2 = (1+\theta)X_3 - \theta X_4 \quad Y_2 = (1+\theta)Y_3 - \theta Y_4$$

Nous aurons alors les approximations d'ordre 2 en h pour les relations (2) :

$$(\lambda+2\mu) \frac{X_5 - X_0}{1+\theta} + \lambda [Y_0 - (1+\theta)Y_3 + \theta Y_4] = h(\sigma_x)_0$$

$$\lambda \frac{X_5 - X_0}{1+\theta} + (\lambda+2\mu) [Y_0 - (1+\theta)Y_3 + \theta Y_4] = h(\sigma_y)_0$$

$$\mu [X_0 - (1+\theta)X_3 + X_4 + \frac{Y_5 - Y_0}{\theta+1}] = h(\tau_{xy})_0$$

Il suffit de remplacer ces relations dans (1). Il faut bien entendu que  $\vec{n}(n_x, n_y)$  soit bien défini en chaque point du contour.

3) Pour ce même 2ème problème (Chap. VII), nous promettons dans un prochain travail d'analyser le cas de forces concentrées. Il faudrait introduire la distribution de Dirac  $\delta$  car :

$$\vec{f}(P) = \vec{F} \delta(P)$$

$\vec{F}$  = force concentrée et  $\vec{f}$  distribution linéaire correspondante.

$P \neq M$  point d'application de  $\vec{F}$ .

Au voisinage du point d'application de  $\vec{F}$ , la densité linéaire  $\vec{f}$  devient infinie, ce qui introduit une singularité. Du point de vue mécanique, les équations de l'élasticité linéaire n'ont plus de sens, car il y a apparition de zones de déformations plastiques ou bien de fissures. Toutefois pour des points suffisamment éloignés de  $M$ , nous pouvons admettre la validité des hypothèses de l'élasticité linéaire. Pour les problèmes d'élasticité plane, nous pensons pouvoir éviter la singularité en introduisant la fonction d'Airy  $\psi$ .

4) La détermination de  $\vec{u}$  par les méthodes du Chap. VI et VII, nécessitent un temps de calcul beaucoup plus court que par les méthodes de détermination de la fonction  $\psi$  ou de calcul direct des contraintes.

En effet, la fonction d'Airy (pour le cas plan), concerne un opérateur du 4ème ordre, alors que celui des déplacements est du 2ème ordre.

D'autre part, le calcul direct des tensions consiste à déterminer 3 fonctions  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , tandis que dans un état de déformation plane, il y en a deux seulement :  $u_1$  et  $u_2$ .

Le calcul direct des tensions se fera donc de préférence dans les problèmes d'état plan de contraintes (voir application II).

Le calcul de  $\vec{u}$  se fera de préférence dans les problèmes du type Dirichlet (les déplacements sur les limites sont des grandeurs mesurables) et dans les problèmes de déformation plane.

5) Soit le 2ème problème de l'élastostatique dans le rectangle  
 $G = R U S$  :

$$\vec{\Delta}^* \vec{u} + \rho \vec{F} = \vec{0} \quad x \in R$$

$$\ell \vec{u} = \vec{f} \quad x \in S \quad (\text{voir Chap. VII})$$

D'après [25]  $\vec{u}$  doit minimiser la fonctionnelle :

$$I(\vec{u}) = 2W(\vec{u}) + 2 \int_R \rho \vec{F} \, dx + 2 \int_S \vec{f} \vec{u} \, ds$$

$W(u)$  : énergie de déformation élastique

$$W(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_R \left\{ 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \right\} dx,$$

Nous pensons qu'on pourrait essayer de combiner les méthodes variationnelles avec la méthode des différences finies. Cette approche du problème a été traitée récemment [22] pour le cas d'un disque avec densité linéaire de force donnée sur le contour.

6) La méthode des étapes fractionnaires développée par Yanenko et Konovalov, pour les problèmes d'élasticité plane (état plan de déformation) peut être étendue au cas du parallélépipède avec la condition frontière  $\ell \vec{u} = \vec{f}$ .

Le modèle algébrique peut s'écrire :

$$(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \vec{u} = \vec{k}$$

où  $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$  est une matrice définie positive, et où  $A_1, A_2, A_3$  sont des matrices facilement inversibles car elles représentent des opérateurs du type  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$  et  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . Par contre la matrice  $A_4$  représente des opérateurs du

type  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}$  et  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}$  et n'est pas facilement inversible. La méthode des étapes fractionnaires consiste à utiliser un schème itératif, par exemple :

$$(A_1 + r) \vec{u}_{n+\frac{1}{3}} = (r - A_2 - A_3 - A_4) \vec{u}_n + \vec{k}$$

$$(A_2+r)\vec{u}_{n+\frac{2}{3}} = (r-A_3-A_1-A_4)\vec{u}_{n+\frac{1}{3}} + \vec{k}$$

$$(A_3+r)\vec{u}_{n+1} = (r-A_1-A_2-A_4)\vec{u}_{n+\frac{2}{3}} + \vec{k}$$

$\vec{u}_n$  = vecteur itéré d'ordre  $n$ . Ce schéma converge pourvu que  $r$  soit assez grand. La difficulté est de choisir  $r$  de façon à assurer une rapide convergence.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.R. MITCHELL : *Computational Methods in Partial differential Equations.*
- [2] BEREZIN and ZHIDKOV : *Computing Methods*  
Volume 2 - 1960
- [3] GREENSPAN : *Introductory Numerical Analysis of Elliptic Boundary Value Problems.*
- [4] DOUGLAS Jr, and RACHFORD : *On the numerical solution of heat conduction problems in two or three space variables.*
- [5] DOUGLAS Jr : *Alternating direction iteration methods for n space variables.*
- [6] N.N. YANENKO : *The Method of fractional Steps - 1971*
- [7] A.N. KONOVALOV : *La méthode de discrétisation appliquée au problème de Cauchy pour l'équation d'oscillation à N dimensions.*  
Trad. dans : Soviet. Math. Dokl. T 36 p.1536-1538.
- [8] FAIRWEATHER and MITCHELL : *Some computational results of an improved ADI method for the Dirichlet Problem.*
- [9] HADJIDIMOS : *Schémes for the solution of Laplace's equation in three space variables.*
- [10] V.A. ENAL'SKII : *The properties of an iterational Process :*  
USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics - Vol 3 - 1968 - p.81-91.
- [11] D'YAKONOV : *Une méthode de résolution de l'équation de Poisson.*  
Trad dans Soviet Math. Dokl. T 32. p.320-324.
- [12] KONOVALOV : *Iterative system for solving static problems in the theory of Elasticity :*  
USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics - Vol 3 - (1963) - p.217 à 222.
- [13] KONOVALOV : *Application of the Splitting Method to the numerical solution of dynamic problems in Elasticity Theory :*  
USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics - Vol 4 n°4 - p.192 à 198 (1964)
- [14] L. SOLOMON : *Elasticité linéaire - 1968.*
- [15] I.D. MAERGOIZ : *Error estimation in the numerical solution of boundary values problems for certain elliptic equations by the net method.*  
USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics - Vol 5 n°2 p.268 à 272 (1965)

- [16] SAMARSKII. A.A : *Economics differences shemes for a hyperbolic systems and their application in the theory of Elasticity.*  
USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics (1965) p.44 à 56.
- [17] D. ZARESKI : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*  
T. 268 p.1568 (1969).
- [18] D. ZARESKI : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*  
T. 270 p.1119 (1970).
- [19] DURAND : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*  
T. 261 p.4601 (1965).
- [20] GREENSPAN Donald : *A numerical approach to the biharmonic problems.*  
Journal S.I.A.M (1967-68).
- [21] PRAGER WILLIAM : *Numerical Methods of stress Analysis.*
- [22] W. FELDMANN : *Numerical determination of displacement fields in Elastic disks.*  
Quarterly of applied Mathematics (juillet 1971),
- [23] ZIENKIEWICZ : *The finite Element Method in Engineering Science.*
- [24] GODUNOV et RYABENSI : *The theory of differences schemes.*
- [25] MIKHLIN SG : *Variational Methods in mathematical Physics (1967).*

