50376
1974
93

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

50376
1974
93

N° d'ordre : 436

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES
ET DES TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ

par

Claude JAUFFRET

*

FORMALISME DU PROBLEME A 4 CORPS A L'AIDE DE LA METHODE DE FADDEEV

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE
Section SCIENCES
LILLE

APPLICATION AU CALCUL DES NIVEAUX D'ENERGIE DES ATOMES ET IONS

*

Soutenue le 27 février 1974 devant la Commission d'examen

Membres du Jury

M.	*WERTHEIMER*	*Président*
M.	*CORTOIS*	*Rapporteur*
M.	*TILLIEU*	*Examinateur*
M.	*VIDAL*	*Examinateur*
Mme	*SIRUGUE*	*Membre invité*

..... A la Mémoire de mon Père .....,

A ma Mère,

A Michel

A Poupoune,

En témoignage d'amour.

PREFACE

Le but de cette étude est l'utilisation de la méthode de Faddeev [8] du problème à trois corps pour écrire les équations exactes du problème à quatre corps et la résolution de ces équations pour déterminer les niveaux d'énergie des atomes et des ions composés de quatre particules, Li^6 par exemple.

Dans une première partie, nous appliquons directement la méthode de Faddeev à l'étude du problème à quatre corps ce qui conduit à une impasse. Pour lever cette difficulté, nous introduisons les fonctions de Green généralisées et obtenons ainsi un formalisme correct du problème à quatre corps [2]. Ce formalisme est développé de manière à utiliser les résultats obtenus lors de l'étude des problèmes à deux , à trois corps , à quatre corps avec interactions par paires dont nous donnons les principaux résultats.

Dans une deuxième partie, nous écrivons les équations de Faddeev du problème à quatre corps dans le cas où les interactions entre deux particules sont du type Coulombien. Pour terminer cette étude, nous donnons le principe du calcul numérique des niveaux d'énergie de Li^6 en montrant les difficultés du calcul numérique effectif de ces niveaux.

MISE EN PLACE

DU FORMALISME

DU PROBLEME

A

QUATRE CORPS

- = - = -

I. INTRODUCTION

Dans ce formalisme général, nous appliquons la méthode des équations de Faddeev [8] telle qu'elle apparaît dans le problème à trois corps. Cette méthode consiste à considérer la matrice de transition du problème à quatre corps comme la somme de six matrices de transition qui font intervenir d'abord un processus d'intéraction entre deux particules et ensuite tout autre processus d'interaction entre les quatre particules. L'avantage de cette méthode par rapport à celle de Lippmann-Schwinger [18] est qu'elle nous fournit une solution unique pour les fonctions d'onde ; cependant les équations de Faddeev du problème à quatre corps possèdent un noyau qui n'est pas de Hilbert-Schmidt [6] [13] (c'est-à-dire un noyau qui n'appartient plus à l'espace de Hilbert $\mathcal{L}_2$ que nous utilisons en mécanique quantique mais à un espace plus général de Banach) comme les équations de Lippmann-Schwinger car il contient des distributions δ. Malgré des itérations successives (cf. annexe), nous aboutissons toujours à un noyau qui n'est pas de Hilbert-Schmidt. Ceci est dû au fait que nous ne faisons pas intervenir d'abord tous les autres processus entre quatre corps comme les interactions à trois corps et les intéractions par couples. En utilisant alors les résultats des problèmes à deux corps [18] et à trois corps [8] ainsi que ceux obtenus par application de la méthode de Faddeev au problème d'interaction entre couples de particules (où nous considérons la matrice de transition associée comme somme des matrices de transition de chaque couple), nous écrivons les équations correctes du problème à quatre corps [2] dont le noyau est de Hilbert-Schmidt après une itération de ces équations. Ces équations étant bien définies, il nous faut choisir une représentation dans laquelle nous explicitons les éléments des matrices de transition du problème à quatre corps ainsi que ceux des matrices de transition des problèmes à deux corps, [20], trois corps [4] et quatre corps en interaction par couples. Après des transformations à l'intérieur de cette représentation qui permettent de simplifier les divers sous-noyaux de ces équations, nous obtenons des équations qui en principe peuvent être résolues par la connaissance des potentiels d'interaction entre deux particules.

II . ESSAI D'APPLICATION DIRECTE DE LA METHODE DE FADDEEV

A L'ETUDE DU PROBLEME A QUATRE CORPS

Soit $\mathcal{T}$ la matrice transition du problème à quatre corps.

Posons : $\mathcal{T} = \sum_{i<j} \mathcal{T}^{ij}$ avec i,j variant de 1 à 4.

où : $\mathcal{T}^{ij} = V_{ij} + V_{ij} G_o \mathcal{T}$ (1)

avec
- V_{ij} potentiel d'interaction entre les particules i et j.
- G_o fonction de Green (cf. chap. III.)

Introduisons la matrice de transition T_{ij} du problème à deux corps i et j en interaction.

Elle vérifie l'équation de Lippmann-Schwinger suivante [18] :

$$T_{ij} = V_{ij} + V_{ij} G_o T_{ij} \qquad (2)$$

ou encore :

$$V_{ij} = T_{ij} - V_{ij} G_o T_{ij} = T_{ij} - T_{ij} G_o V_{ij} \qquad (2')$$

La substitution de cette expression de V_{ij} dans celle de $\mathcal{T}^{ij}$ donne :

$$\mathcal{T}^{ij} = T_{ij} - T_{ij} G_o V_{ij} + T_{ij} G_o \mathcal{T} - T_{ij} G_o V_{ij} G_o \mathcal{T}$$

d'où $$\mathcal{T}^{ij} = T_{ij} + \sum_{k\ell} \sum_{\ell \neq j} T_{ij}\, G_o\, \mathcal{T}^{k\ell} \qquad (3)$$

ou sous forme matricielle $$\mathcal{T} = T + K\,\mathcal{T} \qquad (3')$$

Ce sont les équations de Faddeev du problème à quatre corps. D'après la théorie des équations intégrales, il faut que le noyau $K = K_o$ de (3') soit de Hilbert-Schmidt pour que cette équation appartienne à l'espace de Hilbert $\mathcal{L}_2$ [6] (cf. Annexe).

K sera de Hilbert-Schmidt si :

$$\mathrm{Tr} \sum_{i,j} \left\{ K_{ij}\, K_{ij}^{\dagger} \right\} < \infty \qquad (4)$$

où K_{ij} est l'élément de la matrice K. tel que $K_{ij} = T_{ij}\, G_o$

$$[K] = \begin{pmatrix} 0 & T_{23} & T_{23} & T_{23} & T_{23} & T_{23} \\ T_{13} & 0 & T_{13} & T_{13} & T_{13} & T_{13} \\ T_{14} & T_{14} & 0 & T_{14} & T_{14} & T_{14} \\ T_{12} & T_{12} & T_{12} & 0 & T_{12} & T_{12} \\ T_{24} & T_{24} & T_{24} & T_{24} & 0 & T_{24} \\ T_{34} & T_{34} & T_{34} & T_{34} & T_{34} & 0 \end{pmatrix} G_o \qquad (5)$$

$$\mathrm{Tr} \sum_{i,j} \left\{ K_{ij}\, K_{ij}^{\dagger} \right\} = 5 \left(T_{23}\, G_o^2\, T_{23} + T_{31}\, G_o^2\, T_{31} + T_{14}\, G_o^2\, T_{14} + T_{12}\, G_o^2\, T_{12} + T_{24}\, G_o^2\, T_{24} + T_{34}\, G_o^2\, T_{34} \right)$$

or dans une représentation $|\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}>$ définie au chapitre VI, $\mathrm{Tr} \sum_{i,j} \left\{ K_{ij}\, K_{ij}^{\dagger} \right\}$ comporte pour chaque terme une double distribution $\delta(\vec{q} - \vec{q}\,')\ \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ de sorte que K n'est pas un noyau de Hilbert-Schmidt.

Ainsi pour le terme $T_{23}\, G_o^2\, T_{23}$:

$$< \vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r} \mid T_{23}\, G_o^2\, T_{23} \mid \vec{p}'\ \vec{q}'\ \vec{r}' > \quad = \frac{\delta(\vec{q} - \vec{q}')\ \ \delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\left[E - p^2 - q^2 - r^2\right]^2} < \vec{p} \mid T_{23}^2 \mid \vec{p}' > \quad (6)$$

Dans le cas où le noyau n'est pas de Hilbert-Schmidt, on peut en itérant plusieurs fois, tenter de trouver un noyau qui sera de Hilbert-Schmidt (cf. annexe). Itérons l'équation (3') :

$$\mathcal{T} = T + KT + K^2\ \mathcal{T} \qquad (7)$$

$\mathrm{Tr}\ \sum_{i,j} \left([K^2]_{ij}\ [K^2]_{ij}^{\dagger}\right)$ comporte pour chaque terme encore des distributions donc $[K]^2$ n'est pas un noyau de Hilbert-Schmidt.

On peut montrer que les noyaux $[K]^3$, $[K]^4$ ... jusqu'à l'ordre n quelconque ne sont pas des noyaux de Hilbert-Schmidt.

Pour lever cette difficulté mathématique, il faut introduire les processus d'intéractions à trois corps et par couples. Le moyen le plus commode est l'emploi des fonctions de Green généralisées.

III - FONCTIONS DE GREEN GENERALISEES [2]

(QUATRE CORPS)

Comme pour le problème à n corps, on suppose que les interactions entre quatre corps peuvent se ramener à des interactions entre deux corps:

1°) Les interactions entre deux corps, les deux autres étant spectateurs:

l'hamiltonien est $H_{ij} = H_o + V_{ij}$ (8)

et la fonction de Green associée:

$$G_{ij}(E) = \frac{1}{E - H_{ij}} \tag{9}$$

2°) Les interactions deux à deux :

l'hamiltonien est alors:

$$H_{ij,k\ell} = H_o + V_{ij} + V_{k\ell} \tag{10}$$

et la fonction de Green associée:

$$G_{ij,k\ell}(E) = \frac{1}{E - H_{ij,k\ell}} \tag{11}$$

3°) Les interactions entre trois corps, le quatrième étant spectateur:

l'hamiltonien est tel que : $H_{ijk} = H_o + V_{ij} + V_{ik} + V_{jk}$ (12)

et la fonction de Green associée:

$$G_{ijk}(E) = \frac{1}{E - H_{ijk}} \tag{13}$$

4°) Les interactions entre quatre corps

l'hamiltonien s'écrit: $H = H_o + V$ (14)

$$\text{où } V = \sum_{i<j} V_{ij}$$

et la fonction de Green associée:

$$G(E) = \frac{1}{E-H} \tag{15}$$

La fonction de Green associée à l'hamiltonien libre H_o s'écrit:

$$G_o(E) = \frac{1}{E - H_o} \tag{16}$$

A partir de l'égalité suivante:

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A}\left(1 - B\,\frac{1}{A+B}\right) \tag{17}$$

nous déduisons des relations entre les diverses fonctions de Green:

$$G(E) = G_o(E) + G_o(E)\, V\, G(E) \tag{18}$$

$$G(E) = G_{ij}(E) + G_{ij}(E)\left[V_{ik} + V_{i\ell} + V_{jk} + V_{j\ell} + V_{k\ell}\right] G(E) \tag{19}$$

$$G(E) = G_{ijk}(E) + G_{ijk}(E)\left[V_{i\ell} + V_{j\ell} + V_{k\ell}\right] G(E) \tag{20}$$

$$G(E) = G_{ij\ell}(E) + G_{ij\ell}(E)\left[V_{ik} + V_{jk} + V_{k\ell}\right] G(E) \tag{21}$$

$$G(E) = G_{ij,k\ell}(E) + G_{ij,k\ell}(E)\left[V_{ik} + V_{i\ell} + V_{jk} + V_{j\ell}\right] G(E) \tag{22}$$

$$G_{ijk}(E) = G_o(E) + G_o(E)\left[V_{ij} + V_{ik} + V_{jk}\right] G_{ijk}(E) \tag{23}$$

$$G_{ij\ell}(E) = G_o(E) + G_o(E)\left[V_{ij} + V_{i\ell} + V_{j\ell}\right] G_{ij\ell}(E) \tag{24}$$

$$G_{ij,k\ell}(E) = G_o(E) + G_o(E)\left[V_{ij} + V_{k\ell}\right] G_{ij,k\ell}(E) \tag{25}$$

$$G_{ij,k\ell}(E) = G_{ij}(E) + G_{ij}(E)\, V_{k\ell}\, G_{ij,k\ell}(E) \tag{26}$$

Insérons dans l'équation (19) les résultats (20), (21) et (22)

On obtient:

$$G(E)=G_{ij}(E)+G_{ij}(E)\left[V_{ik}+V_{jk}\right]G_{ijk}(E)+G_{ij}(E)\left[V_{i\ell}+V_{j\ell}\right]G_{ij\ell}(E)$$

$$+G_{ij}(E)\,V_{k\ell}\,G_{ij,k\ell}(E)+G_{ij}(E)\left[V_{ik}+V_{jk}\right]G_{ijk}(E)\left[V_{i\ell}+V_{j\ell}+V_{k\ell}\right]G(E)$$

$$+G_{ij}(E)\left[V_{i\ell}+V_{j\ell}\right]G_{ij\ell}(E)\left[V_{ik}+V_{jk}+V_{k\ell}\right]G(E)$$

$$+G_{ij}(E)\,V_{k\ell}\,G_{ij,k\ell}(E)\left[V_{ik}+V_{i\ell}+V_{jk}+V_{j\ell}\right]G(E) \qquad (27)$$

Les indices i,j,k,ℓ varient de 1 à 4 avec $i\neq j\neq k\neq \ell$.

IV. MATRICES DE TRANSITION

(QUATRE CORPS)

Nous donnons les principaux résultats concernant les matrices de transition des problèmes à deux et à trois corps et généralisons la méthode de Faddeev au problème à quatre corps où les particules interagissent par couples.

I. Matrice de transition pour le problème à deux corps [18]

La matrice de transition T_{ij} associée à l'hamiltonien H_{ij} vérifie les équations de Lippmann-Schwinger :

$$T_{ij}(E) = V_{ij} + V_{ij}\, G_{ij}(E)\, V_{ij} \tag{2}$$

$$T_{ij}(E) = V_{ij} + V_{ij}\, G_o(E)\, T_{ij}(E) \tag{28}$$

II. Matrice de transition pour le problème à trois corps [8]

Posons : $T^{(\ell)} = T^{(\ell)}_{jk} + T^{(\ell)}_{ij} + T^{(\ell)}_{ik}$ ℓ indice indiquant la particule libre

avec $T^{(\ell)}$ vérifiant :

$$G_{ijk}(E) = G_o(E) + G_o(E)\, T^{(\ell)}(E)\, G_o(E) \tag{29}$$

Les opérateurs $T^{(\ell)}_{ij}$ ainsi définis vérifient les équations de Faddeev :

$$T^{(\ell)}_{ij}(E) = T_{ij}(E) + T_{ij}(E)\, G_o(E) \left[T^{(\ell)}_{ik}(E) + T^{(\ell)}_{jk}(E) \right] \tag{30}$$

Multipliant cette équation par $V_{ij}\, G_o(E)$ et utilisant l'équation (28), on aboutit à :

$$V_{ij}\, G_o(E) \left[T^{(\ell)}_{ik}(E) + T^{(\ell)}_{jk}(E) + T^{(\ell)}_{ij}(E) \right] = T^{(\ell)}_{ij}(E) - V_{ij} \tag{30'}$$

Transformons cette équation à partir de (23) et (29) :

$$T^{(\ell)}_{ij}(E) = V_{ij} + V_{ij}\, G_{ijk}(E) \left[V_{ij} + V_{ik} + V_{jk} \right] \tag{31}$$

Nous obtenons des équations similaires pour $T_{ik}^{(\ell)}$ et $T_{jk}^{(\ell)}$:

$$T_{ik}^{(\ell)}(E) = V_{ik} + V_{ik}\, G_{ijk}(E) \left[V_{ij} + V_{ik} + V_{jk} \right] \tag{32}$$

$$T_{jk}^{(\ell)}(E) = V_{jk} + V_{jk}\, G_{ijk}(E) \left[V_{ij} + V_{ik} + V_{jk} \right] \tag{33}$$

On définit de la même manière les opérateurs $T^{(k)}$, $T_{ij}^{(k)}$, $T_{i\ell}^{(k)}$, $T_{j\ell}^{(k)}$ vérifiant les équations de Faddeev

$$G_{ij\ell}(E) = G_o(E) + G_o(E)\, T^{(k)}(E)\, G_o(E) \tag{34}$$

$$T_{ij}^{(k)}(E) = T_{ij}(E) + T_{ij}(E)\, G_o(E) \left[T_{i\ell}^{(k)} + T_{j\ell}^{(k)} \right] \tag{35}$$

$$T_{ij}^{(k)}(E) = V_{ij} + V_{ij}\, G_{ij\ell}(E) \left[V_{i\ell} + V_{ij} + V_{j\ell} \right] \tag{36}$$

$$T_{i\ell}^{(k)}(E) = V_{i\ell} + V_{i\ell}\, G_{ij\ell}(E) \left[V_{ij} + V_{i\ell} + V_{j\ell} \right] \tag{37}$$

$$T_{j\ell}^{(k)}(E) = V_{j\ell} + V_{j\ell}\, G_{ij\ell}(E) \left[V_{ij} + V_{i\ell} + V_{j\ell} \right] \tag{38}$$

Combinons les résultats (23), (32) et (33) d'une part, (24), (37) et (38) d'autre part :

$$\left[V_{ik} + V_{jk} \right] G_{ijk}(E) = \left[T_{ik}^{(\ell)}(E) + T_{jk}^{(\ell)}(E) \right] G_o(E) \tag{39}$$

$$\left[V_{i\ell} + V_{j\ell} \right] G_{ij\ell}(E) = \left[T_{i\ell}^{(k)}(E) + T_{j\ell}^{(k)}(E) \right] G_o(E) \tag{40}$$

Ces équations se transforment en utilisant (30) et (35) :

$$T_{ij}(E)\, G_o(E) \left[V_{ik} + V_{jk} \right] G_{ijk}(E) = \left[T_{ij}^{(\ell)}(E) - T_{ij}(E) \right] G_o(E) \tag{41}$$

$$T_{ij}(E)\, G_o(E) \left[V_{i\ell} + V_{j\ell} \right] G_{ij\ell}(E) = \left[T_{ij}^{(k)}(E) - T_{ij}(E) \right] G_o(E) \tag{42}$$

III. Matrice de transition pour le problème à quatre corps où les particules interagissent par couples [2]

A la manière de Faddeev, posons :

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{ij} + \mathcal{Q}_{k\ell}$$

avec $\mathcal{Q}$ vérifiant :

$$G_{ij,k\ell}(E) = G_o(E) + G_o(E)\, \mathcal{Q}(E)\, G_o(E) \tag{43}$$

Les opérateurs $\mathcal{A}_{ij}$ et $\mathcal{A}_{k\ell}$ vérifient les équations de Faddeev :

$$\mathcal{A}_{ij}(E) = T_{ij}(E) + T_{ij}(E)\, G_o(E)\, \mathcal{A}_{k\ell}(E) \tag{44}$$

$$\mathcal{A}_{k\ell}(E) = T_{k\ell}(E) + T_{k\ell}(E)\, G_o(E)\, \mathcal{A}_{ij}(E) \tag{45}$$

$$\mathcal{A}_{ij}(E) = V_{ij} + V_{ij}\, G_{ij,k\ell}(E) \left[V_{ij} + V_{k\ell} \right] \tag{46}$$

$$\mathcal{A}_{k\ell}(E) = V_{k\ell} + V_{k\ell}\, G_{ij,k\ell}(E) \left[V_{ij} + V_{k\ell} \right] \tag{47}$$

Pour que ces équations soient correctes, il faut montrer que leurs noyaux sont de Hilbert-Schmidt. Elles s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{12} \\ T_{34} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ T_{34} & 0 \end{pmatrix} G_o \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{34} \end{pmatrix} \tag{48}$$

$$\text{d'où } [K] = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ T_{34} & 0 \end{pmatrix} G_o \tag{48'}$$

K doit vérifier :

$$\mathrm{Tr} \sum_{i,j} (K_{ij} K_{ij}^{\dagger}) < \infty$$

$$\mathrm{Tr} \sum_{i,j} (K_{ij} K_{ij}^{\dagger}) = T_{12}\, G_o^2\, T_{12} + T_{34}\, G_o^2\, T_{34}$$

or dans une représentation $|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}>$ définie au chapitre VI, $\mathrm{Tr} \sum_{i,j} (K_{ij} K_{ij}^{\dagger})$ comporte pour chaque terme une double distribution $\delta(\vec{b} - \vec{b}')\, \delta(\vec{c} - \vec{c}')$ de sorte que K n'est pas un noyau de Hilbert-Schmidt.

Ainsi pour le terme $T_{12}\, G_o^2\, T_{12}$:

$$<\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \mid T_{12}\, G_o^2\, T_{12} \mid \vec{a}'\,\vec{b}'\,\vec{c}'> = \int d\vec{a}' \, \frac{\delta(\vec{b} - \vec{b}')\ \delta(\vec{c} - \vec{c}')}{\left[E - a^2 - b^2 - c^2\right]^2}$$

$$\cdot < \vec{a} \mid T_{12} \mid \vec{a}'' >< \vec{a}'' \mid T_{12} \mid \vec{a}' > \tag{49}$$

Itérons l'équation (48) :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{12} \\ T_{34} \end{pmatrix} + [K] \begin{pmatrix} T_{12} \\ T_{34} \end{pmatrix} + [K^2] \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{34} \end{pmatrix} \tag{50}$$

$$\mathrm{Tr}\ \sum_{i,j} \left([K^2]_{ij}\ [K^2]^{\dagger}_{ij}\right) = T_{12}\ G_o^2\ T_{34}\ T_{12}\ G_o^2\ T_{34} + T_{34}\ G^2_o\ T_{12}\ T_{34}\ G_o^2\ T_{12}$$ ne

comporte qu'une seule distribution liée au centre de masse, distribution que l'on intègre facilement. Par conséquent, $[K^2]$ est de Hilbert-Schmidt.

Cependant, pour les valeurs positives de l'énergie, le noyau n'est plus de Hilbert-Schmidt, l'équation (49) possédant un pôle.

On peut montrer comme Faddeev que les termes dans l'itération de (48) contenant cinq éléments T_{ij} ou plus sont bornés et vérifient une condition de Hölder donc ces termes singuliers peuvent être résolus par la méthode du § V de l'annexe.

Réécrivons les équations (25) et (47) en y insérant (44)

$$T_{ij}\ (E)\ G_o\ (E)\ V_{k\ell}\ G_{ij,k\ell}\ (E) = \left[a_{ij}\ (E) - T_{ij}\ (E)\right]\ G_o\ (E) \qquad (51)$$

L'ensemble de ces résultats nous permet d'écrire les équations du problème à quatre corps.

V. EQUATIONS DE FADDEEV [2]

QUATRE CORPS

Soit $\mathcal{T}$ la matrice transition du problème à quatre corps.

Posons : $\mathcal{T}(E) = \sum_{i<j} \mathcal{T}^{ij}(E)$ avec i,j variant de 1 à 4.

où $\mathcal{T}^{ij}(E) = V_{ij} + V_{ij}\, G_o(E)\, \mathcal{T}(E)$ (1)

avec : $\begin{cases} V_{ij} \text{ potentiel d'interaction entre les particules i et j} \\ G_o(E) \text{ fonction de Green (cf. Chap. III).} \end{cases}$

Introduisons la fonction de Green G (E) telle que :

$$G(E) = G_o(E) + G_o(E)\, \mathcal{T}(E)\, G_o(E) \qquad (52)$$

En comparant avec l'équation (18), nous obtenons une nouvelle forme pour (1) :

$$\mathcal{T}^{ij}(E) = V_{ij} + V_{ij}\, G(E)\, V \qquad (1')$$

Nous utilisons les résultats (27), (2), (28), (41), (42), (30'), (31) et (51) pour obtenir les équations de Faddeev :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{ij}(E) = {} & T_{ij}(E) + T_{ij}^{(k)c}(E) + T_{ij}^{(\ell)c}(E) + \mathcal{a}_{ij}^{c}(E) \\
& + T_{ij}^{(k)c}(E)\, G_o(E) \left[\mathcal{T}^{ik}(E) + \mathcal{T}^{jk}(E) + \mathcal{T}^{\ell k}(E)\right] \\
& + T_{ij}^{(\ell)c}(E)\, G_o(E) \left[\mathcal{T}^{i\ell}(E) + \mathcal{T}^{j\ell}(E) + \mathcal{T}^{\ell k}(E)\right] \\
& + \mathcal{a}_{ij}^{c}(E)\, G_o(E) \left[\mathcal{T}^{ik}(E) + \mathcal{T}^{jk}(E) + \mathcal{T}^{i\ell}(E) + \mathcal{T}^{j\ell}(E)\right]
\end{aligned} \qquad (53)$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} T_{ij}^{(k)c}(E) = T_{ij}^{(k)}(E) - T_{ij}(E) \\ \mathcal{a}_{ij}^{c}(E) = \mathcal{a}_{ij}(E) - T_{ij}(E) \end{cases}$$

où la lettre c n'est pas un indice relatif à une particule quelconque mais un indice indiquant que l'on doit soustraire des matrices de transition considérées la matrice de transition du problème à deux corps associée.

$$
\begin{pmatrix} \mathcal{E}^{12} \\ \mathcal{E}^{13} \\ \mathcal{E}^{14} \\ \mathcal{E}^{23} \\ \mathcal{E}^{24} \\ \mathcal{E}^{34} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} T_{12} + T_{12}^{(3)c} + T_{12}^{(4)c} + \alpha_{12}^{c} \\ T_{13} + T_{13}^{(4)c} + T_{13}^{(2)c} + \alpha_{13}^{c} \\ T_{14} + T_{14}^{(2)c} + T_{14}^{(3)c} + \alpha_{14}^{c} \\ T_{23} + T_{23}^{(4)c} + T_{23}^{(1)c} + \alpha_{23}^{c} \\ T_{24} + T_{24}^{(1)c} + T_{24}^{(3)c} + \alpha_{24}^{c} \\ T_{34} + T_{34}^{(1)c} + T_{34}^{(2)c} + \alpha_{34}^{c} \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix}
0 & T_{12}^{(3)c} + \alpha_{12}^{c} & T_{12}^{(4)c} + \alpha_{12}^{c} & T_{12}^{(3)c} + \alpha_{12}^{c} & T_{12}^{(4)c} + \alpha_{12}^{c} & T_{12}^{(3)c} + T_{12}^{(4)c} \\
T_{13}^{(2)c} + \alpha_{13}^{c} & 0 & T_{13}^{(4)c} + \alpha_{13}^{c} & T_{13}^{(2)c} + \alpha_{13}^{c} & T_{13}^{(4)c} + T_{13}^{(2)c} & T_{13}^{(4)c} + \alpha_{13}^{c} \\
T_{14}^{(2)c} + \alpha_{14}^{c} & T_{14}^{(3)c} + \alpha_{14}^{c} & 0 & T_{14}^{(3)c} + T_{14}^{(2)c} & T_{14}^{(2)c} + \alpha_{14}^{c} & T_{14}^{(3)c} + \alpha_{14}^{c} \\
T_{23}^{(1)c} + \alpha_{23}^{c} & T_{23}^{(1)c} + \alpha_{23}^{c} & T_{23}^{(4)c} + T_{23}^{(1)c} & 0 & T_{23}^{(4)c} + \alpha_{23}^{c} & T_{23}^{(4)c} + \alpha_{23}^{c} \\
T_{24}^{(1)c} + \alpha_{24}^{c} & T_{24}^{(3)c} + T_{24}^{(1)c} & T_{24}^{(1)c} + \alpha_{24}^{c} & T_{24}^{(3)c} + \alpha_{24}^{c} & 0 & T_{24}^{(3)c} + \alpha_{24}^{c} \\
T_{34}^{(1)c} + T_{34}^{(3)c} & T_{34}^{(1)c} + \alpha_{34}^{c} & T_{34}^{(1)c} + \alpha_{34}^{c} & T_{34}^{(2)c} + \alpha_{34}^{c} & T_{34}^{(2)c} + \alpha_{34}^{c} & 0
\end{pmatrix}
G_o
\begin{pmatrix} \mathcal{E}^{12} \\ \mathcal{E}^{13} \\ \mathcal{E}^{14} \\ \mathcal{E}^{23} \\ \mathcal{E}^{24} \\ \mathcal{E}^{34} \end{pmatrix}
$$

(53')

Pour que ces équations soient correctes, il faut que le noyau soit de Hilbert-Schmidt [6] .

Réécrivons (53') sous forme matricielle condensée :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}^{12} \\ \mathcal{T}^{13} \\ \mathcal{T}^{14} \\ \mathcal{T}^{23} \\ \mathcal{T}^{24} \\ \mathcal{T}^{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{12} \\ \mathcal{T}_{13} \\ \mathcal{T}_{14} \\ \mathcal{T}_{23} \\ \mathcal{T}_{24} \\ \mathcal{T}_{34} \end{bmatrix} + [K] \begin{bmatrix} \mathcal{T}^{12} \\ \mathcal{T}^{13} \\ \mathcal{T}^{14} \\ \mathcal{T}^{23} \\ \mathcal{T}^{24} \\ \mathcal{T}^{34} \end{bmatrix} \qquad (53'')$$

où : $\mathcal{T}_{ij}(E) = T_{ij}(E) + T_{ij}^{(k)c}(E) + T_{ij}^{(\ell)c}(E) + a_{ij}^{c}(E)$

or dans une représentation $|\vec{p}\,\vec{q}\,\vec{r}>$ la trace de K : tr $\sum_{i,j}(K_{ij}\,K_{ij}^{+})$ comporte pour chaque terme des distributions de sorte que K n'est pas de Hilbert-Schmidt.

Cependant, en itérant une fois, on voit que K^2 est de Hilbert-Schmidt.

VI . CINEMATIQUE

QUATRE CORPS

L'hamiltonien libre H_o s'écrit dans le système du laboratoire :

$H_o = \sum_{i=1}^{4} \frac{k_i^2}{2\, m_i}$ où $\vec{k}_i$ est la quantité de mouvement de la particule i.

Dans le système du centre de masse et dans l'espace des impulsions, nous définissons deux ensembles de vecteurs auxquels correspondent dans l'espace des états deux bases possibles:

1) Couplage de deux particules qui définissent un vecteur $\vec{p}$ lié à l'impulsion relative de deux particules, puis intervention de la troisième particule qui sera associée au vecteur $\vec{q}$ et enfin la quatrième avec le vecteur $\vec{r}$ [12]

2) Couplage des particules deux à deux. A chaque couple différent seront associés les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et au couplage des deux groupes sera associé le vecteur $\vec{c}$. [22]

<u>1er cas</u> :

H_o s'écrit sous la forme :

$$H_o = p_{ij}^2 + q_k^2 + r_\ell^2$$

où

$$\vec{p}_{ij} = \frac{m_i\, \vec{k}_j - m_j\, \vec{k}_i}{\left[2\, m_i m_j\, (m_i+m_j)\right]^{1/2}}$$

$$\vec{q}_k = \frac{m_k\, (\vec{k}_i + \vec{k}_j) - (m_i + m_j)\vec{k}_k}{\left[2\, m_k\, (m_i+m_j)(m_i+m_j+m_k)\right]^{1/2}}$$

$$\vec{r}_\ell = \frac{m_\ell\, (\vec{k}_i + \vec{k}_j + \vec{k}_k) - (m_i + m_j + m_k)\vec{k}_\ell}{\left[2m_\ell\, (m_i+m_j+m_k)(m_i+m_j+m_k+m_\ell)\right]^{1/2}}$$

On peut également utiliser les triplets $(\vec{p}_{k\ell}, \vec{q}_i, \vec{r}_j)$, $(\vec{p}_{ik}, \vec{q}_\ell, \vec{r}_j)$. Par la suite, il sera nécessaire de passer d'un triplet à un autre. Déterminons donc les relations reliant ces divers triplets entre eux.

1) On couple des triplets composés du genre : $(\vec{p}_{ij}, \vec{q}_k, \vec{r}_\ell)$ et $(\vec{p}_{ik}, \vec{q}_j, \vec{r}_\ell)$.

Dans ce cas, on trouve :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{ij} &= \alpha^i_{jk}\, \vec{p}_{ik} - \beta^i_{jk}\, \vec{q}_j \\ \vec{q}_k &= -\beta^i_{jk}\, \vec{p}_{ik} + \alpha^i_{jk}\, \vec{q}_j \end{aligned} \tag{54}$$

Les α^i_{jk} et β^i_{jk} sont les coefficients de Ball et Chen [7] :

$$\begin{aligned} \alpha^i_{jk} &= \left[\frac{m_j\, m_k}{(m_i + m_j)\,(m_i + m_k)}\right]^{1/2} = \alpha^i_{kj} \\ \beta^i_{jk} &= \left[\frac{m_i\,(m_i + m_j + m_k)}{(m_i + m_j)(m_i + m_k)}\right]^{1/2} = \beta^i_{kj} \end{aligned} \tag{55}$$

avec $$\beta^i_{jk} = \left[1 - (\alpha^i_{jk})^2\right]^{1/2} \tag{56}$$

2) On couple des triplets composés à partir d'une particule initiale identique.

Nous obtenons deux matrices de décomposition inverses l'une de l'autre.

A) Si l'on passe d'une suite d'indices cyclique à une suite d'indices non cyclique, par exemple :

$(\vec{p}_{ij}, \vec{q}_k, \vec{r}_\ell)$ à $(\vec{p}_{i\ell}, \vec{q}_j, \vec{r}_k)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{ij} &= \alpha^i_{\ell j}\, \vec{p}_{i\ell} - \beta^i_{\ell j}\, \vec{q}_j \\ \vec{q}_k &= -\delta^i_{\ell jk}\, \vec{p}_{i\ell} - \mu^i_{\ell jk}\, \vec{q}_j + \rho^i_{\ell jk}\, \vec{r}_k \\ \vec{r}_\ell &= -\gamma^i_{\ell jk}\, \vec{p}_{i\ell} - \nu^i_{\ell jk}\, \vec{q}_j - \omega^i_{\ell jk}\, \vec{r}_k \end{aligned} \tag{57}$$

B) Si l'on passe d'une suite d'indices non cyclique à une suite d'indices cyclique, par exemple : $(\vec{p}_{i\ell}, \vec{q}_j, \vec{r}_k)$ à $(\vec{p}_{ij}, \vec{q}_k, \vec{r}_\ell)$:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{i\ell} &= \alpha^i_{\ell j}\, \vec{p}_{ij} - \delta^i_{\ell jk}\, \vec{q}_k - \gamma^i_{\ell jk}\, \vec{r}_\ell \\ \vec{q}_j &= -\beta^i_{\ell j}\, \vec{p}_{ij} - \mu^i_{\ell jk}\, \vec{q}_k - \nu^i_{\ell jk}\, \vec{r}_\ell \\ \vec{r}_k &= \rho^i_{\ell jk}\, \vec{q}_k - \omega^i_{\ell jk}\, \vec{r}_\ell \end{aligned} \tag{58}$$

où les nouveaux coefficients sont définis comme suit :

$$\delta^i_{\ell jk} = \left[\frac{m_i\, m_\ell\, m_k}{(m_i + m_\ell)(m_i + m_j)(m_i + m_j + m_k)}\right]^{1/2}$$

$$\gamma^i_{\ell jk} = \left[\frac{m_i\,(m_i + m_j + m_k + m_\ell)}{(m_i + m_\ell)(m_i + m_j + m_k)}\right]^{1/2} = \gamma^i_{\ell kj}$$

$$\mu^i_{\ell jk} = \left[\frac{m^2_\ell\, m_j\, m_k}{(m_i + m_\ell)(m_i + m_j)(m_i + m_\ell + m_j)(m_i + m_j + m_k)}\right]^{1/2} \qquad (59)$$

$$\nu^i_{\ell jk} = \left[\frac{m_\ell\, m_j\,(m_i + m_j + m_k + m_\ell)}{(m_i + m_\ell)\qquad(m_i + m_\ell + m_j)(m_i + m_j + m_k)}\right]^{1/2}$$

$$\rho^i_{\ell jk} = \left[\frac{(m_j + m_j)(m_i + m_j + m_k + m_\ell)}{(m_i + m_\ell + m_j)(m_i + m_j + m_k)}\right]^{1/2} = \rho^j_{\ell ik} = \rho^i_{kj\ell} = \rho^j_{ki\ell}$$

$$\omega^i_{\ell jk} = \left[\frac{m_\ell\quad m_k}{(m_i + m_\ell + m_j)(m_i + m_j + m_k)}\right]^{1/2} = \omega^i_{kj\ell} = \omega^j_{\ell ik} = \omega^j_{ki\ell}$$

Les coefficients satisfont aux relations :

$$\alpha^i_{\ell j}\quad \delta^i_{\ell jk} = \beta^i_{\ell j}\quad \mu^i_{\ell jk}$$

$$\alpha^i_{\ell j}\quad \gamma^i_{\ell jk} = \beta^i_{\ell j}\quad \nu^i_{\ell jk}$$

$$\delta^i_{\ell jk}\quad \rho^i_{\ell jk} = \gamma^i_{\ell jk}\quad \omega^i_{\ell jk}$$

$$\mu^i_{\ell jk}\quad \rho^i_{\ell jk} = \nu^i_{\ell jk}\quad \omega^i_{\ell jk}$$

$$\alpha^i_{\ell j}\quad \beta^i_{\ell j} = \delta^i_{\ell jk}\quad \mu^i_{\ell jk} + \gamma^i_{\ell jk}\quad \nu^i_{\ell jk} \qquad (60)$$

$$\rho^i_{\ell jk}\quad \omega^i_{\ell jk} = \delta^i_{\ell jk}\quad \gamma^i_{\ell jk} + \mu^i_{\ell jk}\quad \nu^i_{\ell jk}$$

$$(\alpha^i_{\ell j})^2 + (\beta^i_{\ell j})^2 = 1$$

$$(\beta^i_{\ell j})^2 + (\mu^i_{\ell jk})^2 + (\nu^i_{\ell jk})^2 = 1$$

$$(\alpha^i_{\ell j}) + (\delta^i_{\ell jk})^2 + (\gamma^i_{\ell jk})^2 = 1$$

$$(\delta^i_{\ell jk})^2 + (\mu^i_{\ell jk})^2 + (\rho^i_{\ell jk})^2 = 1$$

$$(\gamma^i_{\ell jk})^2 + (\omega^i_{\ell jk})^2 + (\omega^i_{\ell jk})^2 = 1$$

3) On couple des triplets indépendants :

$(\vec{p}_{ij}, \vec{q}_k, \vec{r}_\ell)$ et $(\vec{p}_{k\ell}, \vec{q}_i, \vec{r}_j)$, alors :

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{ij} &= \Theta^{ij}_{k\ell}\,\vec{q}_i - \gamma^{ij}_{k\ell}\,\vec{r}_j \\
\vec{q}_k &= \Theta^{k\ell}_{ij}\,\vec{p}_{k\ell} - \xi^{k\ell}_{ij}\,\vec{q}_i - \Omega^{ij}_{k\ell}\,\vec{r}_j \\
\vec{r}_\ell &= -\gamma^{k\ell}_{ij}\,\vec{p}_{k\ell} + \Omega^{k\ell}_{ij}\,\vec{q}_i + \omega^{ij}_{k\ell}\,\vec{r}_j
\end{aligned} \tag{61}$$

où

$$\begin{aligned}
\Theta^{ij}_{k\ell} &= \left[\frac{m_j\,(m_k + m_\ell)}{(m_i + m_j)(m_i + m_k + m_\ell)}\right]^{1/2} = \Theta^{ij}_{\ell k} \\
\xi^{ij}_{k\ell} &= \left[\frac{m_j\,m_k\,(m_i + m_j + m_k + m_\ell)^2}{(m_i + m_j)(m_k + m_\ell)(m_i + m_j + m_k)(m_i + m_k + m_\ell)}\right]^{1/2} = \xi^{k\ell}_{ij} \\
\Omega^{ij}_{k\ell} &= \left[\frac{m_j\,m_k\,(m_i + m_j + m_k + m_\ell)}{(m_i + m_j)(m_i + m_j + m_k)(m_i + m_k + m_\ell)}\right]^{1/2} \\
\gamma^{ij}_{k\ell} &= \gamma^{i}_{jk\ell} \\
\omega^{ij}_{k\ell} &= \omega^{i}_{jk\ell}
\end{aligned} \tag{62}$$

Nous déduisons les relations suivantes entre coefficients

$$\begin{aligned}
&(\Theta^{ij}_{k\ell})^2 + (\gamma^{ij}_{k\ell})^2 = 1 \\
&(\Theta^{k\ell}_{ij})^2 + (\xi^{k\ell}_{ij})^2 + (\Omega^{ij}_{k\ell})^2 = 1 \\
&(\gamma^{k\ell}_{ij})^2 + (\Omega^{k\ell}_{ij})^2 + (\omega^{k\ell}_{ij})^2 = 1 \\
&\Theta^{ij}_{k\ell}\;\xi^{ij}_{k\ell} = \gamma^{ij}_{k\ell}\;\Omega^{ij}_{k\ell} \\
&\Theta^{ij}_{k\ell}\;\Omega^{k\ell}_{ij} = \gamma^{ij}_{k\ell}\;\omega^{k\ell}_{ij} \\
&\Theta^{k\ell}_{ij}\;\gamma^{k\ell}_{ij} = \xi^{k\ell}_{ij}\;\Omega^{k\ell}_{ij} + \Omega^{ij}_{k\ell}\;\omega^{k\ell}_{ij} \\
&\xi^{ij}_{k\ell} = \gamma^{ij}_{k\ell}\;\gamma^{k\ell}_{ji}
\end{aligned} \tag{63}$$

Afin d'alléger l'écriture dans les chapitres suivants, nous écrirons les triplets sous la forme : $|\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}>$, ils reprendront leur forme différenciée si besoin est.

2ème cas

L'hamiltonien libre H_o s'écrit alors sous la forme :

$$H_o = \vec{p}_{ij}^{\,2} + \vec{p}_{k\ell}^{\,2} + \vec{p}_{ij,k\ell}^{\,2}$$

où
$$\vec{p}_{ij} = \frac{m_i\,\vec{k}_j - m_j\,\vec{k}_i}{\left[2\,m_i m_j\,(m_i + m_j)\right]^{1/2}}$$

$$\vec{p}_{k\ell} = \frac{m_k\,\vec{k}_\ell - m_\ell\,\vec{k}_k}{\left[2\,m_k\,m_\ell\,(m_k + m_\ell)\right]^{1/2}}$$

$$\vec{p}_{ij,k\ell} = \frac{(m_i+m_j)(\vec{k}_k+\vec{k}_\ell)-(m_k+m_\ell)(\vec{k}_i+\vec{k}_j)}{\left[2(m_i+m_j)(m_k+m_\ell)(m_i+m_j+m_k+m_\ell)\right]^{1/2}}$$

On peut aussi utiliser les triplets $(\vec{p}_{ik},\ \vec{p}_{j\ell},\ \vec{p}_{ik,j\ell})$. Déterminons les relations existant entre ces divers triplets :

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{ij} &= \alpha^{i}_{jk}\,\vec{p}_{ik} - \alpha^{j}_{i\ell}\,\vec{p}_{j\ell} + \varepsilon^{ij}_{k\ell}\,\vec{p}_{ik,j\ell} \\
\vec{p}_{k\ell} &= -\alpha^{k}_{i\ell}\,\vec{p}_{ik} + \alpha^{\ell}_{kj}\,\vec{p}_{j\ell} + \varepsilon^{\ell k}_{ji}\,\vec{p}_{ik,j\ell} \qquad (64)\\
\vec{p}_{ij,k\ell} &= \varepsilon^{ik}_{j\ell}\,\vec{p}_{ik} + \varepsilon^{\ell j}_{ki}\,\vec{p}_{j\ell} + \pi^{ij}_{k\ell}\,\vec{p}_{ik,j\ell}
\end{aligned}$$

où
$$\varepsilon^{ik}_{j\ell} = \left[\frac{m_i\,m_k\,(m_i + m_j + m_k + m_\ell)}{(m_i + m_j)(m_k + m_\ell)(m_i + m_k)}\right]^{1/2} = \varepsilon^{ki}_{\ell j}$$

$$\Pi^{ij}_{k\ell} = \left[\frac{(m_i\,m_\ell - m_k\,m_j)^2}{(m_i + m_k)(m_j + m_\ell)(m_i + m_j)(m_k + m_\ell)}\right]^{1/2} \qquad (65)$$

$$\Pi^{ij}_{k\ell} = -\,\Pi^{k\ell}_{ij} = -\,\Pi^{ji}_{\ell k} = \Pi^{ik}_{j\ell}$$

Les relations entre les coefficients sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
&(\alpha^{i}_{jk})^2 + (\alpha^{k}_{i\ell})^2 + (\varepsilon^{ik}_{j\ell})^2 = 1 \\
&(\alpha^{k}_{i\ell})^2 + (\alpha^{\ell}_{kj})^2 + (\varepsilon^{\ell j}_{ki})^2 = 1 \\
&(\varepsilon^{ik}_{j\ell})^2 + (\varepsilon^{\ell k}_{ji})^2 + (\Pi^{ij}_{k\ell})^2 = 1 \\
&\alpha^{i}_{jk}\ \alpha^{j}_{i\ell} + \alpha^{k}_{i\ell}\ \alpha^{\ell}_{kj} = \varepsilon^{j\ell}_{ik}\ \varepsilon^{ik}_{j\ell} \\
&\alpha^{j}_{i\ell}\ \varepsilon^{ij}_{k\ell} = \alpha^{\ell}_{kj}\ \varepsilon^{\ell k}_{ji} + \varepsilon^{\ell j}_{ki}\ \Pi^{ij}_{k\ell} \\
&\alpha^{k}_{i\ell}\ \varepsilon^{\ell k}_{ji} = \alpha^{i}_{jk}\ \varepsilon^{ij}_{k\ell} + \varepsilon^{ik}_{j\ell}\ \Pi^{ij}_{k\ell}
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Dans la suite des calculs, nous prendrons la notation :

$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}>$ quand nous n'avons pas besoin de différencier les kets.

VII . DECOMPOSITION EN ONDES PARTIELLES

QUATRE CORPS

I. Introduction

Les deux ensembles de vecteurs définis au chapitre IV forment deux bases qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation unitaire.

A) Base $|\vec{p}\,\vec{q}\,\vec{r}\rangle$.

L'élément d'intégration est :

$$\iiint d\vec{p} \quad d\vec{q} \quad d\vec{r}$$

l'opérateur identité :

$$\hat{I} = \iiint d\vec{p} \quad d\vec{q} \quad d\vec{r} \; |\vec{p}\,\vec{q}\,\vec{r}\rangle\langle\vec{p}\,\vec{q}\,\vec{r}| \tag{67}$$

et la condition de normalisation choisie de telle sorte que :

$$\langle\vec{p}\,\vec{q}\,\vec{r}\,|\,\vec{p}'\,\vec{q}'\,\vec{r}'\rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p}')\;\delta(\vec{q}-\vec{q}')\;\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{68}$$

B) Base $|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\rangle$.

L'élément d'intégration est :

$$\iiint d\vec{a} \quad d\vec{b} \quad d\vec{c}$$

l'opérateur identité :

$$\hat{I} = \iiint d\vec{a} \quad d\vec{b} \quad d\vec{c} \; |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\rangle\langle\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}| \tag{69}$$

et la condition de normalisation choisie de telle sorte que :

$$\langle\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,|\,\vec{a}'\vec{b}'\vec{c}'\rangle = \delta(\vec{a}-\vec{a}')\;\delta(\vec{b}-\vec{b}')\;\delta(\vec{c}-\vec{c}') \tag{70}$$

On a donc en général des intégrales à neuf variables. Il est intéressant de les réduire en intégrales triples et en sommes finies. Pour cela, on introduit un nouvel ensemble complet d'observables compatibles et par conséquent des nouveaux kets. Les équations de Faddeev seront écrites dans cette nouvelle représentation dite en ondes partielles [1] [15].

II. Représentation en ondes partielles des kets $|\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}\rangle$.

A) Choix d'un premier ensemble d'observables compatibles.

On considère l'ensemble complet d'observables compatibles :

$$\{ H_p, H_q, H_r, \vec{\ell}^{\,2}, \ell_z, \vec{L}^{\,2}, L_z, \vec{\mathcal{L}}^{\,2}, \mathcal{L}_z \}$$

où : $H_p = p^2$

$H_q = q^2$

$H_r = r^2$

$\vec{\ell}$ moment cinétique lié à $\vec{p}$

$\ell_z = -i \dfrac{\partial}{\partial \phi_p}$

$\vec{L}$ moment cinétique lié à $\vec{q}$

$L_z = -i \dfrac{\partial}{\partial \phi_q}$

$\vec{\mathcal{L}}$ moment cinétique lié à $\vec{r}$

$\mathcal{L}_z = -i \dfrac{\partial}{\partial \phi_r}$

dont les kets propres sont : $|\, p\ q\ r\ \ell m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle$ tels que :

$$H_p\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle = p^2\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle$$

$$H_q\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle = q^2\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle$$

$$H_r\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle = r^2\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle$$

$$\vec{L}^{\,2}\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle = L\,(L+1)\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle$$

$$L_z\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle = m_L\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle$$

$$\vec{\ell}^{\,2}\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle = \ell(\ell+1)\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle$$

$$\ell_z\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle = m_\ell\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle$$

$$\vec{\mathcal{L}}^{\,2}\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle = \mathcal{L}\,(\mathcal{L}+1)\, |\, p\ q\ r\ L\ m_L\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle$$

$$\mathcal{L}_z\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle = m_{\mathcal{L}}\, |\, p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}}\rangle$$

On choisira la normalisation :

$$\langle p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\, m_L\ \mathcal{L} m_{\mathcal{L}} |\, p'\ q'\ r'\ \ell'\ m'_\ell\ L'\ m'_L\ \mathcal{L}'\ m'_{\mathcal{L}}\rangle = (p\ q\ r)^{-2}$$

$$\delta(p-p')\,\delta(q-q')\,\delta(r-r')\,\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{m_\ell m_{\ell'}}\,\delta_{LL'}\,\delta_{m_L m_{L'}}\,\delta_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}\,\delta_{m_{\mathcal{L}} m_{\mathcal{L}'}} \quad (71)$$

L'élément d'intégration sera :

$$\sum_{\substack{\ell,\, m_\ell,\, L,\, m_L \\ \mathcal{L},\, m_{\mathcal{L}}}} \iiint p^2\, q^2\, r^2\, dp\, dq\, dr$$

et l'opérateur identité :

$$\hat{I} = \sum_{\substack{\ell,\, m_\ell,\, L,\, m_L \\ \mathcal{L},\, m_{\mathcal{L}}}} \iiint p^2\, q^2\, r^2\, dp\, dq\, dr \;|\, p\, q\, r\, \ell\, m_\ell\, L\, m_L\, \mathcal{L} m_{\mathcal{L}} \rangle \langle p\, q\, r\, \ell\, m_\ell\, L\, m_L\, \mathcal{L} m_{\mathcal{L}} \,| \tag{72}$$

B) <u>Passage d'une représentation à l'autre</u>

Les kets propres précédemment définis peuvent être décomposés sur les kets $|\, \vec{p}\, \vec{q}\, \vec{r} \rangle$:

$$|\, p\, q\, r\, \ell\, m_\ell\, L\, m_L\, \mathcal{L} m_{\mathcal{L}} \rangle = \iiint \overrightarrow{dp'}\, \overrightarrow{dq'}\, \overrightarrow{dr'} \;\langle\, \vec{p}\,' \,|\, p\, \ell\, m_\ell \rangle$$
$$\cdot \langle\, \vec{q}\,' \,|\, q L\, m_L \rangle \langle\, \vec{r}\,' \,|\, r \mathcal{L}\, m_{\mathcal{L}} \rangle \;|\, \vec{p}\,'\, \vec{q}\,'\, \vec{r}\,' \rangle$$

où nous avons utilisé l'opérateur identité.

La fonction propre associée au ket propre $|\, p\, \ell\, m_\ell \rangle$ des trois observables $\{H_p, \vec{\ell}^{\,2}, \ell_z\}$ est :

$$\langle\, \vec{p}\,' \,|\, p\, \ell\, m_\ell \rangle = \frac{\delta(p - p')}{p^2}\, Y_{\ell m_\ell}(\hat{p}')$$

$$\text{où : } \hat{p}' = (\Theta_{\vec{p}'}, \phi_{\vec{p}'})$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$|\, p\, q\, r\, L\, m_L\, \ell\, m_\ell\, \mathcal{L} m_{\mathcal{L}} \rangle = \iiint \overrightarrow{dp'}\, \overrightarrow{dq'}\, \overrightarrow{dr'}\; Y_{\ell\, m_\ell}(\hat{p}')\, Y_{L m_L}(\hat{q}')$$

$$\cdot\; Y_{\mathcal{L} m_{\mathcal{L}}}(\hat{r}') \;\frac{\delta(p - p')\;\delta(q - q')\;\delta(r - r')}{p^2\, q^2\, r^2} \;|\, \vec{p}\, \vec{q}\, \vec{r} \rangle$$

or : $\overrightarrow{dp'} = p^2\, d\hat{p}'\, dp'$; $\overrightarrow{dq'} = q^2\, d\hat{q}'\, dq'$, $\overrightarrow{dr'} = r^2\, d\hat{r}'\, dr'$

$$\text{avec : } \begin{cases} d\hat{p}' = -\, d\,(\cos \Theta_{\vec{p}'})\;\; d\,\phi_{\vec{p}'} \\ d\hat{q}' = -\, d\,(\cos \Theta_{\vec{q}'})\;\; d\,\phi_{\vec{q}'} \\ d\hat{r}' = -\, d\,(\cos \Theta_{\vec{r}'})\;\; d\,\phi_{\vec{r}'} \end{cases}$$

$$\text{d'où : } |\, p\, q\, r\, \ell\, m_\ell\, L\, m_L\, \mathcal{L} m_{\mathcal{L}} \rangle = \iint d\hat{p}\, d\hat{q}\, d\hat{r}\; Y_{\ell m_\ell}(\hat{p})\, Y_{L m_L}(\hat{q})\, Y_{\mathcal{L} m_{\mathcal{L}}}(\hat{r}) \;|\, \vec{p}\, \vec{q}\, \vec{r} \rangle \tag{73}$$

C) Choix d'un deuxième ensemble complet d'observables compatibles.

On obtient un deuxième ensemble complet d'observables compatibles en couplant $\vec{\ell}$ et $\vec{L}$:

$$\{ H_p, H_q, H_r, J^2, J_z, \vec{\ell}^2, \vec{L}^2, \vec{\mathcal{L}}^2, \mathcal{L}_z \}$$

$$\text{où } \vec{J} = \vec{\ell} + \vec{L}$$

dont les kets propres sont écrits : $| p\ q\ r\ J\ M\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}} \rangle$ tels que

$$J^2 \,|\, p\ q\ r\ J\ M\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}} \rangle = J\ (J+1) \,|\, p\ q\ r\ J\ M\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}} \rangle$$
$$J_z \,|\, p\ q\ r\ J\ M\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}} \rangle = M \,|\, p\ q\ r\ J\ M\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}} \rangle$$

avec la normalisation :

$$\langle p\ q\ r\ J\ M\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}} | p'\ q'\ r'\ J'\ M'\ \ell'\ L'\ \mathcal{L}'\ m_{\mathcal{L}'} \rangle = (p\ q\ r)^{-2}\ \delta(p - p')$$
$$\delta(q - q')\ \ \delta(r - r')\ \ \delta_{JJ'}\ \ \delta_{MM'}\ \ \delta_{\ell\ell'}\ \ \delta_{LL'}\ \ \delta_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}\ \ \delta_{m_{\mathcal{L}} m_{\mathcal{L}'}} \qquad (74)$$

L'élément d'intégration étant :

$$\sum_{\substack{J, M, \ell, L \\ \mathcal{L}, m_{\mathcal{L}}}} \iiint p^2\ q^2\ r^2\ dp\ dq\ dr.$$

et l'opérateur identité :

$$\hat{I} = \sum_{\substack{J, M, L, \ell \\ \mathcal{L}, m_{\mathcal{L}}}} \iiint p^2\ q^2\ r^2\ dp\ dq\ dr\ |p\ q\ r\ J\ M\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}}\rangle\langle p\ q\ r\ J\ M\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}}| \qquad (75)$$

D) Choix d'un troisième ensemble d'observables compatibles

En couplant $\vec{J}$ et $\vec{\mathcal{L}}$ nous obtenons un dernier ensemble complet d'observables compatibles :

$$\{ H_p, H_q, H_r, \vec{\mathcal{J}}^2, \mathcal{J}_z, \vec{J}^2, \vec{\ell}^2, \vec{L}^2, \vec{\mathcal{L}}^2 \}$$

$$\text{où } \vec{\mathcal{J}} = \vec{J} + \vec{\mathcal{L}}$$

de kets propres : $| p\ q\ r\ \mathcal{J}\ \mathcal{M}\ J\ \ell\ L\ \mathcal{L} \rangle$ tels que :

$$\mathcal{J}^2 \,|\, p\ q\ r\ \mathcal{J}\ \mathcal{M}\ J\ \ell\ L\ \mathcal{L}\rangle = \mathcal{J}\ (\mathcal{J}+1) \,|\, p\ q\ r\ \mathcal{J}\ \mathcal{M}\ J\ \ell\ L\ \mathcal{L}\rangle$$
$$\mathcal{J}_z \,|\, p\ q\ r\ \mathcal{J}\ \mathcal{M}\ J\ \ell\ L\ \mathcal{L}\rangle = \mathcal{M} \,|\, p\ q\ r\ \mathcal{J}\ \mathcal{M}\ J\ \ell\ L\ \mathcal{L}\rangle$$

avec la normalisation :

$$< p\ q\ r\ \mathcal{J}\mathcal{M} J\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ |\ p'q'r'\mathcal{J}\mathcal{M}J'\ell'L'\mathcal{L}' > = (p\ q\ r)^{-2}\ \delta(p - p')\ \delta(q - q')$$

$$\cdot\ \delta(r - r')\ \delta_{\mathcal{J}\mathcal{J}'}\ \delta_{\mathcal{M}\mathcal{M}'}\ \delta_{JJ'}\ \delta_{\ell\ell'}\ \delta_{LL'}\ \delta_{\mathcal{L}\mathcal{L}'} \qquad (76)$$

L'élément d'intégration étant :

$$\sum_{\substack{\mathcal{J},\mathcal{M},\\ \mathcal{L},J}} \sum_{L,\ \ell} \iiint p^2\ q^2\ r^2\ dp\ dq\ dr$$

et l'opérateur identité :

$$\hat{I} = \sum_{\substack{\mathcal{J},\mathcal{M},\\ \mathcal{L},J}} \sum_{L,\ \ell} \iiint p^2\ q^2\ r^2\ dp\ dq\ dr\ \ |\ p\ q\ r\ \mathcal{J}\mathcal{M} J\ \ell\ L\ \mathcal{L}><\ p\ q\ r\ \mathcal{J}\mathcal{M}\ J\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ | \qquad (77)$$

E) <u>Equations de passage entre les diverses représentations en ondes partielles</u>

On passe de $|\ p\ q\ r\ \mathcal{J}\mathcal{M} J\ \ell\ L\ \mathcal{L} >$ à $|p\ q\ r\ J\ M\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}} >$

en écrivant :

$$p\ q\ r\ \mathcal{J}\mathcal{M} J\ \ell\ L\ \mathcal{L} > = \sum_{M,\ m_{\mathcal{L}}} < p\ q\ r\ J\ M\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}}\ |\ p\ q\ r\ \mathcal{J}\mathcal{M} J\ \ell\ L\ \mathcal{L} >$$

$$\cdot\ |\ p\ q\ r\ J\ M\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}} >$$

où $< p\ q\ r\ J\ M\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}}\ |\ p\ q\ r\ \mathcal{J}\mathcal{M} J\ \ell\ L\ \mathcal{L} >$ est le coefficient de Clebsch-Gordan.

On peut encore écrire :

$$|\ p\ q\ r\ \mathcal{J}\mathcal{M} J\ \ell\ L\ \mathcal{L} > = \sum_{M,\ m_{\mathcal{L}}} (-1)^{\mathcal{L}-J-\mathcal{M}}\ (2\ \mathcal{J} + 1)^{1/2} \begin{pmatrix} J & \mathcal{L} & \mathcal{J} \\ M & m_{\mathcal{L}} & -\mathcal{M} \end{pmatrix} |p\ q\ r\ J\ M\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}} > \qquad (78)$$

où $\begin{pmatrix} J & \mathcal{L} & \mathcal{J} \\ M & m_{\mathcal{L}} & -\mathcal{M} \end{pmatrix}$ est le coefficient de Wigner

de même :

$$|\ p\ q\ r\ J\ M\ \ell\ L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}} > = \sum_{m_\ell,\ m_L} (-1)^{\ell-M}\ (2\ J + 1)^{1/2} \begin{pmatrix} \ell & L & J \\ m_\ell & m_L & -M \end{pmatrix} |p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\ m_L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}} > \qquad (79)$$

En appelant $\beta = (\mathcal{J}\ \mathcal{M}\ J\ \ell\ L\ \mathcal{L})$, nous obtenons en couplant les deux résultats précédents :

$$| p\ q\ r\ \beta > = \sum_{\substack{M,\ m_{\mathcal{L}} \\ m_\ell,\ m_L}} (-1)^{\mathcal{L}+L-J-\ell-\mathcal{M}-M} \left[(2\mathcal{J}+1)(2J+1)\right]^{1/2}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} J & \mathcal{L} & \mathcal{J} \\ M & m_{\mathcal{L}} & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & L & J \\ m_\ell & m_L & -M \end{pmatrix} \quad | p\ q\ r\ \ell\ m_\ell\ L\ m_L\ \mathcal{L}\ m_{\mathcal{L}} > \qquad (80)$$

III. <u>Représentation en ondes partielles des kets $|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}>$</u>.

Comme précédemment, nous définirons un premier ensemble complet d'observables compatibles.

$$\{ H_a,\ H_b,\ H_c,\ \vec{\ell}_a^{\,2},\ \ell_{az},\ \vec{\ell}_b^{\,2},\ \ell_{bz},\ \vec{\Lambda}^2,\ \Lambda_z \}$$

de kets propres $| a\ b\ c\ \ell_a\ m_{\ell_a}\ \ell_b\ m_{\ell_b}\ \Lambda\ m_\Lambda >$

Ces kets sont normalisés :

$$< a\ b\ c\ \ell_a\ m_{\ell_a}\ \ell_b\ m_{\ell_b}\ \Lambda\ m_\Lambda \ | a'b'c'\ell'_a\ m_{\ell'_a}\ \ell'_b\ m_{\ell'_b}\ \Lambda'\ m_{\Lambda'} > =$$

$$(a\ b\ c)^{-2}\ \delta(a-a')\ \delta(b-b')\ \delta(c-c')\ \delta_{\ell_a \ell'_a}\ \delta_{m_{\ell_a} m_{\ell'_a}}\ \delta_{\ell_b \ell'_b}$$

$$\cdot\ \delta_{m_{\ell_b}\ m_{\ell'_b}}\ \delta_{\Lambda\Lambda'}\ \delta_{m_\Lambda\ m_{\Lambda'}} \qquad (81)$$

Nous pouvons les décomposer sur les kets $|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}>$:

$$| a\ b\ c\ \ell_a\ m_{\ell_a}\ \ell_b\ m_{\ell_b}\ \Lambda\ m_\Lambda > = \int d\hat{a}\ d\hat{b}\ d\hat{c}\ Y_{\ell_a m_{\ell_a}}(\hat{a})$$

$$\cdot\ Y_{\ell_b m_{\ell_b}}(\hat{b})\ Y_{\Lambda m_\Lambda}(\hat{c}) \quad | \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} > \qquad (82)$$

Un deuxième ensemble complet d'observables compatibles peut être déduit du premier en couplant $\vec{\ell}_a$ et $\vec{\ell}_b$:

$$\{ H_a,\ H_b,\ H_c,\ \vec{J}_{ab}^{\,2},\ J_{abz},\ \vec{\ell}_a^{\,2},\ \vec{\ell}_b^{\,2},\ \vec{\Lambda}^2,\ \Lambda_z \}$$

où $\vec{J}_{ab} = \vec{\ell}_a + \vec{\ell}_b$

de kets propres : $|a\ b\ c\ J_{ab}\ M_{ab}\ \ell_a\ \ell_b\ \Lambda\ m_\Lambda>$

La condition de normalisation étant :

$$< a\ b\ c\ J_{ab}\ M_{ab}\ \ell_a\ \ell_b\ \Lambda\ m_\Lambda \mid a'b'c'J'_{ab}M'_{ab}\ \ell'_a\ \ell'_b\ \Lambda'\ m_{\Lambda'} >$$

$$= (a\ b\ c)^{-2}\ \delta(a-a')\ \delta(b-b')\ \delta(c-c')\ \delta_{J_{ab}\ J'_{ab}}\ \delta_{M_{ab}\ M'_{ab}}$$

$$\cdot\ \delta_{\ell_a \ell'_a}\ \delta_{\ell_b \ell'_b}\ \delta_{\Lambda\Lambda'}\ \delta_{m_\Lambda m_{\Lambda'}} \qquad (83)$$

On peut enfin coupler $\vec{J}_{ab}$ et $\vec{\Lambda}$, ce qui donne un nouvel ensemble complet d'observables compatibles :

$$\{ H_a,\ H_b,\ H_c,\ \vec{\mathcal{J}},\ \mathcal{J}_z,\ \vec{J}^2_{ab},\ \vec{\ell}_a^{\,2},\ \vec{\ell}_b^{\,2},\ \vec{\Lambda}^2 \}$$

$$\text{où : } \vec{\mathcal{J}} = \vec{J}_{ab} + \vec{\Lambda}$$

de kets propres $|a\ b\ c\ \mathcal{J}\ \mathcal{M}\ J_{ab}\ \ell_a\ \ell_b\ \Lambda>$ normalisés :

$$< a\ b\ c\ \mathcal{J}\ \mathcal{M} J_{ab}\ \ell_a\ \ell_b\ \Lambda \mid a'b'c'\mathcal{J}'\mathcal{M}'J'_{ab}\ \ell'_a\ \ell'_b\ \Lambda' > =$$

$$(a\ b\ c)^{-2}\ \delta(a-a')\ \delta(b-b')\ \delta(c-c')\ \delta_{\mathcal{J}\mathcal{J}'}\ \delta_{\mathcal{M}\mathcal{M}'}\ \delta_{J_{ab}\ J'_{ab}}\ \delta_{\ell_a \ell'_a}$$

$$\cdot\ \delta_{\ell_b \ell'_b}\ \delta_{\Lambda\Lambda'} \qquad (84)$$

Donnons enfin les équations de passage d'un ensemble complet d'observables compatibles à l'autre :

$$|a\ b\ c\ \mathcal{J}\ \mathcal{M}\ J_{ab}\ \ell_a\ \ell_b\ \Lambda> = \sum_{M_{ab},m_\Lambda} (-1)^{\Lambda-J_{ab}-\mathcal{M}}\ (2\mathcal{J}+1)^{1/2}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} J_{ab} & \Lambda & \mathcal{J} \\ M_{ab} & m_\Lambda & -\mathcal{M} \end{pmatrix} |a\ b\ c\ J_{ab}\ M_{ab}\ \ell_a\ \ell_b\ \Lambda\ m_\Lambda> \qquad (85)$$

$$|a\ b\ c\ J_{ab}\ M_{ab}\ \ell_a\ \ell_b\ \Lambda\ m_\Lambda> = \sum_{m_{\ell_a},m_{\ell_b}} (-1)^{\ell_b-\ell_a-M_{ab}}\ (2J_{ab}+1)^{1/2}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \ell_a & \ell_a & J_{ab} \\ m_{\ell_a} & m_{\ell_b} & -M_{ab} \end{pmatrix} |a\ b\ c\ \ell_a\ m_{\ell_a}\ \ell_b\ m_{\ell_b}\ \Lambda\ m_\Lambda> \qquad (86)$$

En appelant $\gamma = \mathcal{J}\,\mathcal{M}\,J_{ab}\;\ell_a\;\ell_b\;\Lambda$, nous obtenons en portant (83) dans (82) :

$$|a\;b\;c\;\gamma> \;=\; \sum_{\substack{M_{ab},m_\Lambda \\ m_{\ell_a},m_{\ell_b}}} (-1)^{\Lambda+\ell_b-J_{ab}-\ell_a-\mathcal{M}-M_{ab}} \left[(2\mathcal{J}+1)(2J_{ab}+1)\right]^{1/2}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} J_{ab} & \Lambda & \mathcal{J} \\ M_{ab} & m_\Lambda & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_a & \ell_b & J_{ab} \\ m_{\ell_a} & m_{\ell_b} & -M_{ab} \end{pmatrix} |a\;b\;c\;\ell_a\;m_{\ell_a}\;\ell_b\;m_{\ell_b}\;\Lambda\;m_\Lambda> \quad (87)$$

L'introduction des différents ensembles complets d'observables compatibles est liée à diverses étapes conduites pour effectuer l'addition des moments cinétiques des quatre particules, en tenant compte des opérations semblables pour deux ou trois particules.

VIII. ECRITURE DES EQUATIONS DE FADDEEV DU PROBLEME A QUATRE CORPS EN ONDES PARTIELLES

Nous allons utiliser les résultats précédents pour expliciter les équations de Faddeev sur les kets $|\, p\ q\ r\ \beta\rangle$:

$$
\begin{aligned}
&\langle p\ q\ r\ \beta|\mathcal{T}^{ij}(s)|p_o q_o r_o \beta_o\rangle = \langle p\ q\ r\ \beta|T_{ij}(s)|p_o q_o r_o \beta_o\rangle + \langle p\ q\ r\ \beta|T_{ij}^{(k)c}(s)|p_o q_o r_o \beta_o\rangle \\
&+ \langle p\ q\ r\ \beta|T_{ij}^{(\ell)c}(s)|p_o q_o r_o \beta_o\rangle + \langle p\ q\ r\ \beta|Q_{ij}^{c}(s)|p_o q_o r_o \beta_o\rangle + \sum_{\beta_j,\beta_k}\int p_j^2\, p_k^2\, q_j^2 \\
&\cdot\ q_k^2 r_j^2 r_k^2 dp_j dp_k dq_j dq_k dr_j dr_k \langle p\ q\ r\ \beta|T_{ij}^{(k)c}(s)|p_j q_j r_j \beta_j\rangle\langle p_j q_j r_j \beta_j|G_o|p_k q_k r_k \beta_k\rangle \\
&\cdot\ \langle p_k q_k r_k \beta_k|\mathcal{T}^{ik}(s)+\mathcal{T}^{jk}(s)+\mathcal{T}^{\ell k}(s)|p_o q_o r_o \beta_o\rangle + \sum_{\beta_j,\beta_k}\int p_j^2 p_k^2 q_j^2 q_k^2 r_j^2 r_k^2 \\
&\cdot\ dp_j dp_k dq_j dq_k dr_j dr_k \langle p\ q\ r\ \beta|T_{ij}^{(\ell)c}(s)|p_j q_j r_j \beta_j\rangle\langle p_j q_j r_j \beta_j|G_o|p_k q_k r_k \beta_k\rangle \\
&\cdot\ \langle p_k q_k r_k \beta_k|\mathcal{T}^{i\ell}(s)+\mathcal{T}^{j\ell}(s)+\mathcal{T}^{\ell k}(s)|p_o q_o r_o \beta_o\rangle + \sum_{\beta_j,\beta_k}\int p_j^2 p_k^2 q_j^2 q_k^2 r_j^2 r_k^2 \\
&\cdot\ dp_j dp_k dq_j dq_k dr_j dr_k \langle p\ q\ r\ \beta|Q_{ij}^{c}(s)|p_j q_j r_j \beta_j\rangle\langle p_j q_j r_j \beta_j|G_o|p_k q_k r_k \beta_k\rangle \\
&\cdot\ \langle p_k\ q_k\ r_k\ \beta_k|\mathcal{T}^{ik}(s) + \mathcal{T}^{jk}(s) + \mathcal{T}^{i\ell}(s) + \mathcal{T}^{j\ell}(s)|p_o q_o r_o \beta_o\rangle \qquad (88)
\end{aligned}
$$

G_o étant la fonction de Green libre, nous déduisons :

$$
\langle p_j q_j r_j \beta_j|G_o|p_k q_k r_k \beta_k\rangle = \frac{1}{s - p_j^2 - q_j^2 - r_j^2}\langle p_j q_j r_j \beta_j|p_k q_k r_k \beta_k\rangle
$$

$$
= -\frac{1}{p_j^2 + q_j^2 + r_j^2 - s}(p_j\ q_j\ r_j)^{-2}\ \delta_{\beta_j\beta_k}\ \delta(p_j - p_k)\ \delta(q_j - q_k)\ \delta(r_j - r_k)
$$

s étant la variable associée à l'énergie E.

Posons :

$$< p\ q\ r\ \beta \mid \mathcal{T}^{ij}(s) \mid p_o q_o r_o \beta_o > = \Psi_\beta^{(ij)}\ (p,\ q,\ r,\ s)$$

$$< p\ q\ r\ \beta \mid T_{ij}(s) \mid p_o q_o r_o \beta_o > = \Phi_\beta^{(ij)}\ (p,\ q,\ r,\ s)$$

$$< p\ q\ r\ \beta \mid T_{ij}^{(k)}(s) \mid p_o q_o r_o \beta_o > = \psi_\beta^{(k)ij}\ (p,\ q,\ r,\ s)$$

$$< p\ q\ r\ \beta \mid T_{ij}^{(\ell)}(s) \mid p_o q_o r_o \beta_o > = \psi_\beta^{(\ell)ij}\ (p,\ q,\ r,\ s)$$

$$< p\ q\ r\ \beta \mid \mathcal{A}_{ij}(s) \mid p_o q_o r_o \beta_o > = \Omega_\beta^{(ij)}\ (p,\ q,\ r,\ s)$$

$$< p\ q\ r\ \beta \mid T_{ij}(s) \mid p_j q_j r_j \beta_j > = K_i\ (p\ q\ r\ \beta;\ p_j q_j r_j \beta_j)$$

$$< p\ q\ r\ \beta \mid T_{ij}^{(k)}(s) \mid p_j q_j r_j \beta_j > = K^k\ (p\ q\ r\ \beta;\ p_j q_j r_j \beta_j)$$

$$< p\ q\ r\ \beta \mid T_{ij}^{(\ell)}(s) \mid p_j q_j r_j \beta_j > = K^\ell\ (p\ q\ r\ \beta;\ p_j q_j r_j \beta_j)$$

$$< p\ q\ r\ \beta \mid \mathcal{A}_{ij}(s) \mid p_j q_j r_j \beta_j > = K_{ij}\ (p\ q\ r\ \beta\ ;\ p_j q_j r_j \beta_j)$$

Cette notation permet d'alléger l'écriture des équations de Faddeev qui deviennent :

$$\Psi_\beta^{(ij)}\ (p,q,r,s\ ) = -2\ \Phi_\beta^{(ij)}\ (p,q,r,s) + \psi_\beta^{(k)ij}\ (p,q,r,s) + \psi_\beta^{(\ell)ij}\ (p,q,r,s)$$

$$+ \Omega_\beta^{(ij)}\ (p,q,r,s) - \sum_{\beta_j,\beta_k} \int p_j^2\ p_k^2\ q_j^2\ q_k^2\ r_j^2\ r_k^2\ dp_j\ dp_k\ dq_j\ dq_k$$

$$\cdot\ dr_j\ dr_k\ \frac{\delta(p_j-p_k)\ \delta(q_j-q_k)\ \delta(r_j-r_k)}{p_k^2\ q_k^2\ r_k^2}\ \delta_{\beta_j\ \beta_k}\ \frac{1}{p_j^2 + q_j^2 + r_j^2 - s}$$

$$\cdot\ K^k\ (p\ q\ r\ \beta\ ;\ p_j q_j r_j \beta_j)\ \left[\ \Psi_{\beta_j}^{(ik)}\ (p_j,q_j,r_j,s) + \Psi_{\beta_j}^{(jk)}\ (p_j,q_j,r_j,s)\right.$$

$$\left. +\ \Psi_{\beta_j}^{(\ell k)}\ (p_j,q_j,r_j,s)\right] - \sum_{\beta_j,\beta_k} \int p_j^2 p_k^2 q_j^2 q_k^2 r_j^2 r_k^2 dp_j\ dp_k\ dq_j\ dq_k\ dr_j\ dr_k$$

$$\cdot\ \frac{\delta(p_j-p_k)\ \delta(q_j-q_k)\ \delta(r_j-r_k)}{p_k^2\ q_k^2\ r_k^2}\ \delta_{\beta_j\ \beta_k}\ \frac{1}{p_j^2 + q_j^2 + r_j^2 - s}$$

$$\cdot \quad K^{\ell}\,(p\ q\ r\ \beta\ ;\ p_j q_j r_j \beta_j)\ \Big[\Psi^{(i\ell)}_{\beta_j}\,(p_j,q_j,r_j,s) + \Psi^{(j\ell)}_{\beta_j}\,(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+ \Psi^{(\ell k)}_{\beta_j}\,(p_j,q_j,r_j,s)\Big] - \sum_{\beta_j,\beta_k} \int p_j^{\,2}\, p_k^{\,2}\, q_j^{\,2}\, q_k^{\,2}\, r_j^{\,2}\, r_k^{\,2}\, dp_j\, dp_k$$

$$\cdot \quad \frac{dq_j\, dq_k\, dr_j\, dr_k\, \delta(p_j-p_k)\ \delta(q_j-q_k)\ \delta(r_j-r_k)}{p_k^{\,2}\, q_k^{\,2}\, r_k^{\,2}}\ \delta_{\beta_j\,\beta_k}\ \frac{1}{p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s}$$

$$\cdot \quad K_{ij}\,(p\ q\ r\ \beta;\ p_j\ q_j\ r_j\ \beta_j)\ \Big[\Psi^{(ik)}_{\beta_j}\,(p_j,\ q_j,\ r_j,\ s) + \Psi^{(jk)}_{\beta_j}\,(p_j,\ q_j,\ r_j,\ s)$$

$$+ \Psi^{(i\ell)}_{\beta_j}\,(p_j,q_j,r_j,s) + \Psi^{(j\ell)}_{\beta_j}\,(p_j,q_j,r_j,s)\Big] - 2\sum_{\beta_j,\beta_k} \int p_j^{\,2}\, p_k^{\,2}\, q_j^{\,2}\, q_k^{\,2}\, r_j^{\,2}\, r_k^{\,2}$$

$$\cdot \quad \frac{dp_j\, dp_k\, dq_j\, dq_k\, dr_j\, dr_k\, \delta(p_j-p_k)\ \delta(q_j-q_k)\ \delta(r_j-r_k)}{p_k^{\,2}\, q_k^{\,2}\, r_k^{\,2}}\ \delta_{\beta_j\,\beta_k}\ \frac{1}{p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s}$$

$$\cdot \quad K_i\,(p\ q\ r\ \beta;\ p_j\ q_j\ r_j\ \beta_j)\ \Big[\Psi^{(ik)}_{\beta_j}(p_j,q_j,r_j,s) + \Psi^{(jk)}_{\beta_j}\,(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+ \Psi^{(\ell k)}_{\beta_j}\,(p_j,q_j,r_j,s) + \Psi^{(i\ell)}_{\beta_j}\,(p_j,q_j,r_j,s) + \Psi^{(j\ell)}_{\beta_j}\,(p_j,q_j,r_j,s)\Big] \qquad (89)$$

Utilisons les identités :

$$\int dp_k\, p_k^{\,2}\, \frac{\delta(p_j - p_k)}{p_j^{\,2}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \int dr_k\, r_k^{\,2}\, \frac{\delta(r_j - r_k)}{r_j^{\,2}} = 1\ ;$$

$$\int dq_k\, q_k^{\,2}\, \frac{\delta(q_j - q_k)}{q_j^{\,2}} = 1$$

Les équations de Faddeev s'écrivent finalement :

$$\Psi^{(ij)}_{\beta}\,(p,q,r,s) = -\,2\,\Phi^{(ij)}_{\beta}\,(p,q,r,s) + \psi^{(k)ij}_{\beta}\,(p,q,r,s) + \psi^{(\ell)ij}_{\beta}\,(p,q,r,s)$$

$$+ \Omega^{(ij)}_{\beta}\,(p,q,r,s) - \sum_{\beta_j} \int p_j^{\,2} dp_j q_j^{\,2} dq_j r_j^{\,2} dp_j\ \frac{1}{p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s}$$

$$\cdot \quad K^{k}\,(p\ q\ r\ \beta\ ;\ p_j q_j r_j \beta_j)\ \Big[\Psi^{(ik)}_{\beta_j}\,(p_j,q_j,r_j,s) + \Psi^{(jk)}_{\beta_j}\,(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+ \Psi^{(\ell k)}_{\beta_j}(p_j,q_j,r_j,s)] - \sum_{\beta_j} \int p_j^{\,2} dp_j q_j^{\,2} dq_j r_j^{\,2} dr_j \quad \frac{1}{p_j^{\,2} + q_j^{\,2} + r_j^{\,2} - s}$$

$$\cdot K^{\ell}(p\ q\ r\ \beta\ ;\ p_j q_j r_j \beta_j)\ [\Psi^{(i\ell)}_{\beta_j}(p_j,q_j,r_j,s) + \Psi^{(j\ell)}_{\beta_j}(p_j,q_j,r_j,s) + \Psi^{(\ell k)}_{\beta_j}(p_j,q_j,r_j,s)]$$

$$- \sum_{\beta_j} \int p_j^{\,2} dp_j q_j^{\,2} dq_j r_j^{\,2} dr_j \quad \frac{1}{p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s} \quad K_{ij}(p\ q\ r\ \beta;\ p_j q_j r_j \beta_j)\ [\Psi^{(ik)}_{\beta_j}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+ \Psi^{(jk)}_{\beta_j}(p_j,q_j,r_j,s) + \Psi^{(i\ell)}_{\beta_j}(p_j,q_j,r_j,s) + \Psi^{(j\ell)}_{\beta_j}(p_j,q_j,r_j,s)\ ]$$

$$2\sum_{\beta_j} \int p_j^{\,2} dp_j q_j^{\,2} dq_j r_j^{\,2} dr_j \quad \frac{1}{p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s} \quad K_i(p\ q\ r\ \beta\ ;\ p_j q_j r_j \beta_j)\ [\Psi^{(\ell k)}_{\beta_j}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+ \Psi^{(ik)}_{\beta_j}(p_j,q_j,r_j,s) + \Psi^{(jk)}_{\beta_j}(p_j,q_j,r_j,s) + \Psi^{(i\ell)}_{\beta_j}(p_j,q_j,r_j,s) + \Psi^{(j\ell)}_{\beta_j}(p_j,q_j,r_j,s)]$$

(90)

Il nous faut maintenant expliciter les différents sous-noyaux K_i, K^k et K_{ij} dans la représentation choisie. Grâce à des transformations judicieuses, nous obtiendrons une forme simple de ces divers sous-noyaux et par conséquent une écriture allégée des équations de Faddeev.

IX . ETUDE DU NOYAU

DES EQUATIONS DE FADDEEV

QUATRE CORPS

I. Calcul de $K_i\ (p\ q\ r\ \beta;\ p_j q_j r_j \beta_j) = \langle p\ q\ r\ \beta\ |T_{ij}\ (s)|\ p_j q_j r_j \beta_j \rangle$.

Nous définissons $\beta_j = \mathcal{J}'\mathcal{M}J'L'\ell'\mathcal{L}$.

Grâce aux relations (73) et (80), nous déduisons que :

$$K_i = \sum_{\substack{M, m_{\mathcal{L}}, M', m_{\mathcal{L}'} \\ m_\ell, m_L, m_{\ell'} \\ m_{L'}}} \left[(2\mathcal{J}+1)(2\mathcal{J}'+1)(2J+1)(2J'+1)\right]^{1/2} (-1)^{L+L'+\mathcal{L}+\mathcal{L}'-\ell-\ell'-J-J'-\mathcal{M}-\mathcal{M}'-M-M'}$$

$$\begin{pmatrix} J & \mathcal{L} & \mathcal{J} \\ M & m_{\mathcal{L}} & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & \mathcal{L}' & \mathcal{J}' \\ M' & m_{\mathcal{L}'} & -\mathcal{M}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & L & J \\ m_\ell & m_L & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & L' & J' \\ m_{\ell'} & m_{L'} & -M' \end{pmatrix}$$

$$\bullet \int d\hat{p}\ d\hat{q}\ d\hat{r}\ d\hat{p}_j\ d\hat{q}_j\ d\hat{r}_j\ Y^*_{\ell m_\ell}(\hat{p})\ Y^*_{L m_L}(\hat{q})\ Y^*_{\mathcal{L} m_{\mathcal{L}}}(\hat{r})\ Y_{\ell' m_{\ell'}}(\hat{p}_j)$$

$$\bullet \quad Y_{L' m_{L'}}(\hat{q}_j)\ Y_{\mathcal{L}' m_{\mathcal{L}'}}(\hat{r}_j)\ \langle \vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}\ |\ T_{ij}(s)\ |\ \vec{p}_j\ \vec{q}_j\ \vec{r}_j \rangle \qquad (91)$$

$T_{ij}(s)$ est la matrice de transition pour le problème à deux corps, par conséquent :

$$\langle \vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}\ |\ T_{ij}(s)\ |\ \vec{p}_j\ \vec{q}_j\ \vec{r}_j \rangle = \langle \vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}\ |\ T_{ij}(s)\ |\ \vec{p}_i\ \vec{q}_i\ \vec{r}_i \rangle =$$

$$\delta(\vec{q} - \vec{q}_i)\ \ \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)\ \langle \vec{p}\ |\ T_{ij}\left[\ s''\ \right]|\ \vec{p}_i \rangle$$

où $s'' = s - q^2 - r^2$

Cet élément de matrice se décompose dans la représentation choisie suivant (voir problème à deux corps) :

$$\langle \vec{p}\ |\ T_{ij}\ (s-q^2-r^2)\ |\ \vec{p}_i \rangle = \sum_{\ell'', m_{\ell''}} Y_{\ell'', m_{\ell''}}(\hat{p})\ Y^*_{\ell'', m_{\ell''}}(\hat{p}_i)\ T^{(ij)}_{\ell''}(p, p_i, s'') \qquad (92)$$

K_i s'écrit alors :

$$K_i = \sum_{\substack{M, m_{\mathcal{L}}, M', m_{\mathcal{L}'} \\ m_\ell, m_L, m_{\ell'} \\ m_{L'}}} (-1)^{L+L'+\mathcal{L}+\mathcal{L}'-\ell-\ell'-J-J'-\mathcal{M}-\mathcal{M}'-M-M'} \left[(2\mathcal{J}+1)(2\mathcal{J}'+1)(2J+1)(2J'+1)\right]^{1/2}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} J & \mathcal{L} & \mathcal{J} \\ M & m_{\mathcal{L}} & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & \mathcal{L}' & \mathcal{J}' \\ M' & m_{\mathcal{L}'} & -\mathcal{M}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & L & J \\ m_\ell & m_L & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & L' & J' \\ m_{\ell'} & m_{L'} & -M' \end{pmatrix}$$

$$\cdot \int d\hat{p}_j \, d\hat{q}_j \, d\hat{r}_j \, Y^*_{Lm_L}(\hat{q}) \, Y^*_{\mathcal{L}m_{\mathcal{L}}}(\hat{r}) \, Y^*_{\ell m_\ell}(\hat{p}_i) \, Y_{\ell' m_{\ell'}}(\hat{p}_j)$$

$$\cdot \, Y_{L' m_{L'}}(\hat{q}_j) \, Y_{\mathcal{L}' m_{\mathcal{L}'}}(\hat{r}_j) \, \frac{\delta(q^2-q_i^2)\,\delta(r^2-r_i^2)}{4\,q\,r} \, T^{(ij)}_\ell(p, p_i, s'') \qquad (93)$$

Nous avons tenu compte des égalités suivantes :

$$\int d\hat{p} \, Y^*_{\ell m_\ell}(\hat{p}) \, Y_{\ell'', m_{\ell''}}(\hat{p}) = \delta_{\ell\ell''} \, \delta_{m_\ell m_{\ell''}}$$

$$\int d\hat{q} \, \delta(\hat{q}-\hat{q}_i) \, Y^*_{Lm_L}(\hat{q}_i) = Y^*_{Lm_L}(\hat{q}) \qquad (94)$$

$$\int d\hat{r} \, \delta(\hat{r}-\hat{r}_i) \, Y^*_{\mathcal{L}m_{\mathcal{L}}}(\hat{r}_i) = Y^*_{\mathcal{L}m_{\mathcal{L}}}(\hat{r})$$

Grâce aux transformations [1] sur les harmoniques sphériques définies dans l'appendice A [7] , nous réduisons l'intégration sur six variables à une intégration sur quatre variables.

$$K_i = \frac{(2\ell'+1)^{1/2}}{8\sqrt{\pi}\,rq} \sum_{\substack{n_L, n_{\mathcal{L}}, n_\ell \\ n_{L'}, n_{\mathcal{L}'}}} A_{n_L, n_{\mathcal{L}}, n_\ell, n_{L'}, n_{\mathcal{L}'}} \int d(\cos \Theta_{\vec{q}_j \vec{p}_j}) \, d(\cos \Theta_{\vec{r}_j \vec{p}_j})$$

$$\cdot \, d\phi_{\vec{q}_j \vec{p}_j} \, \delta(q^2-q_i^2)\,\delta(r^2-r_i^2) \, Y^*_{Ln_L}(\Theta_{\vec{q}\vec{p}_j}, \phi_{\vec{q}\vec{p}_j}) \, Y^*_{\mathcal{L}\, n_{\mathcal{L}}}(\Theta_{\vec{r}\vec{p}_j}, \phi_{\vec{r}\vec{p}_j})$$

$$\cdot \, Y^*_{\ell n_\ell}(\Theta_{\vec{p}_i \vec{p}_j}, 0) \, Y_{L' n_{L'}}(\Theta_{\vec{q}_j \vec{p}_j}, \phi_{\vec{q}_j \vec{p}_j}) \, Y_{\mathcal{L}' n_{\mathcal{L}'}}(\Theta_{\vec{r}_j \vec{p}_j}, \phi_{\vec{r}_j \vec{p}_j}) \, T^{(ij)}_\ell(p, p_i, s'')$$

(95)

avec :

$$A_{n_L,n_{\mathcal{L}},n_\ell,n_{L'},n_{\mathcal{L}'}} = \sum_{\substack{M,m_{\mathcal{L}},M',m_{\mathcal{L}'}\\ m_\ell,m_L,m_{\ell'},m_{L'}}} (-1)^{L+L'+\mathcal{L}+\mathcal{L}'-\ell-\ell'-J-J'-\mathcal{M}-\mathcal{M}'-M-M'}$$

$$\cdot \left[(2\mathcal{J}+1)(2\mathcal{J}'+1)(2J+1)(2J'+1)\right]^{1/2} \begin{pmatrix} J & \mathcal{L} & \mathcal{J} \\ M & m_{\mathcal{L}} & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & \mathcal{L}' & \mathcal{J}' \\ M' & m_{\mathcal{L}'} & -\mathcal{M}' \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \ell & L & J \\ m_\ell & m_L & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & L' & J' \\ m_{\ell'} & m_{L'} & -M' \end{pmatrix} \int d\omega\, \mathcal{D}^{*L}_{n_L,m_L}(\omega)\, \mathcal{D}^{*\mathcal{L}}_{n_{\mathcal{L}},m_{\mathcal{L}}}(\omega)$$

$$\cdot \mathcal{D}^{*\ell}_{n_\ell,m_\ell}(\omega)\, \mathcal{D}^{\ell'}_{o,m_{\ell'}}(\omega)\, \mathcal{D}^{L'}_{n_{L'},m_{L'}}(\omega)\, \mathcal{D}^{\mathcal{L}'}_{n_{\mathcal{L}'},m_{\mathcal{L}'}}(\omega) \qquad (96)$$

Il nous reste à utiliser les relations reliant les divers éléments de matrice entre eux pour donner à $A_{n_L,n_\ell,n_{L'},n_{\mathcal{L}},n_{\mathcal{L}'}}$ une forme simplifiée.

Les relations (A-4) de l'appendice A nous permettent d'écrire :

$$A_{n_L,n_{\mathcal{L}},n_\ell,n_{L'},n_{\mathcal{L}'}} = \sum_{\substack{M,m_{\mathcal{L}},M',m_{\mathcal{L}'},m_\ell,\\ m_L,m_{\ell'},m_{L'},\ell''',m_{\ell'''}\\ L''',m_{L'''},n_{L'''},\mathcal{L}'',m_{\mathcal{L}''}\\ n_{\mathcal{L}''}}} 8\pi^2 (-1)^{L+L'+\mathcal{L}+\mathcal{L}'+n_L+n_\ell+n_{\mathcal{L}}-\ell-\ell'-J-J'-\mathcal{M}-\mathcal{M}'-M-M'-m_{\mathcal{L}}-m_L-m_\ell}$$

$$\cdot \left[(2\mathcal{J}+1)(2\mathcal{J}'+1)(2J+1)(2J'+1)(2L'''+1)^2(2\ell'''+1)^2(2\mathcal{L}''+1)^2\right]^{1/2}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} J & \mathcal{L} & \mathcal{J} \\ M & m_{\mathcal{L}} & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & \mathcal{L}' & \mathcal{J}' \\ M' & m_{\mathcal{L}'} & -\mathcal{M}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & L & J \\ m_\ell & m_L & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & L' & J' \\ m_{\ell'} & m_{L'} & -M' \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \ell' & L' & \ell''' \\ m_{\ell'} & m_{L'} & -m_{\ell'''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & L' & \ell''' \\ 0 & n_{L'} & -n_{L'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & L & L''' \\ n_\ell & n_L & n_{L'''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & L & L''' \\ m_\ell & m_L & m_{L'''} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{L}' & \mathcal{L}'' \\ -m_{\mathcal{L}} & m_{\mathcal{L}'} & -m_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{L}' & \mathcal{L}'' \\ -n_{\mathcal{L}} & n_{\mathcal{L}'} & -n_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell''' & L''' & \mathcal{L}'' \\ m_{\ell'''} & m_{L'''} & m_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell''' & L''' & \mathcal{L}'' \\ n_{L'} & n_{L'''} & n_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix} \qquad (97)$$

A l'aide des relations d'orthogonalité des coefficients de Wigner [12] et compte-tenu de la conservation du moment angulaire total, K_i s'écrit alors sous la forme :

$$K_i = \frac{(2\ell'+1)^{1/2}\Pi\sqrt{\Pi}}{q\ r} \sum_{\substack{M, m_{\mathcal{L}}, M', m_{\mathcal{L}'}, n_{L''}, \\ n_\ell, n_L, N, \mathcal{L}'', m_{\mathcal{L}''} \\ n_{\mathcal{L}}, n_{\mathcal{L}'}, n_{\mathcal{L}''}}} (-1)^{L+L'+\mathcal{L}+\mathcal{L}'+n_L+n_\ell+n_{\mathcal{L}}-\ell-\ell'-J-J'-m_{\mathcal{L}}-m_L-m_\ell-M-M'}$$

$$\cdot \left[(2\mathcal{J}+1)^2\ (2J+1)\ (2J'+1)\ (2\mathcal{L}''+1)^2\right]^{1/2} \begin{pmatrix} J & \mathcal{L} & \mathcal{J} \\ M & m_{\mathcal{L}} & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & \mathcal{L}' & \mathcal{J} \\ M' & m_{\mathcal{L}'} & -\mathcal{M} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \ell' & L' & J' \\ 0 & n_{L'} & -n_{L'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & L & J \\ n_\ell & n_L & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{L}' & \mathcal{L}'' \\ -m_{\mathcal{L}} & m_{\mathcal{L}'} & -m_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{L}' & \mathcal{L}'' \\ -n_{\mathcal{L}} & n_{\mathcal{L}'} & -n_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} J' & J & \mathcal{L}'' \\ M' & -M & m_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & J & \mathcal{L}'' \\ n_{L'} & N & n_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix} \int d(\cos\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})\ d(\cos\Theta_{\vec{r}_j\vec{p}_j})\ d\phi_{\vec{q}_j\vec{p}_j}$$

$$\cdot\ \delta(q^2-q_i^2)\ \delta(r^2-r_i^2)\ Y^*_{Ln_L}(\Theta_{\vec{q}\vec{p}_j}, \phi_{\vec{q}\vec{p}_j})\ Y^*_{\mathcal{L}n_{\mathcal{L}}}(\Theta_{\vec{r}\vec{p}_j}, \phi_{\vec{r}\vec{p}_j})\ Y^*_{\ell n_\ell}(\Theta_{\vec{p}_j\vec{p}_j}, 0)$$

$$\cdot\ Y_{L'n_{L'}}(\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j}, \phi_{\vec{q}_j\vec{p}_j})\ Y_{\mathcal{L}'n_{\mathcal{L}'}}(\Theta_{\vec{r}_j\vec{p}_j}, \phi_{\vec{r}_j\vec{p}_j})\ T_\ell^{(ij)}(p, p_i, s'') \qquad (98)$$

où nous avons posé : $n_{L'''} = N$.

Pour terminer ce calcul, intégrons les deux distributions $\delta(q^2 - q_i^2)$ et $\delta(r^2 - r_i^2)$. Pour cela, nous explicitons les différentielles $d(\cos\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})$ et $d(\cos\Theta_{\vec{r}_j\vec{p}_j})$ en fonction des différentielles dq_i^2 et dr_i^2.

D'après l'appendice B, nous voyons que nous pouvons écrire de manière générale :

$$d(\cos\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})\ d(\cos\Theta_{\vec{r}_j\vec{p}_j}) = \frac{dq_i^2\ dr_i^2}{4\ A_jB_jC_jp_jq_jr_j} \qquad (99)$$

Le produit $A_jB_jC_j$ et les nouvelles bornes Q_{ij} et R_{ij} pour p_j^2, M_{ij} et V_{ij} pour r_j^2 ont les valeurs possibles suivantes :

1) $A_j\ B_j\ C_j = \beta^i_{\ell j}\ \rho^i_{\ell jk}\ \omega^i_{\ell jk}$

$$M_{ij} = \frac{(r_i - \rho^i_{\ell jk}\, q_j)^2}{(\omega^i_{\ell jk})^2} \quad \text{et } V_{ij} = \frac{(r_i + \rho^i_{\ell jk}\, q_j)^2}{(\omega^i_{\ell jk})^2}$$

$$Q_{ij} = \frac{(q_i - 1)^2}{(\beta^i_{\ell j})^2} \quad \text{et } R_{ij} = \frac{(q_i + 1)^2}{(\beta^i_{\ell j})^2}$$

2) $A_j\ B_j\ C_j = \alpha^i_{\ell j}\ \beta^i_{\ell j}\ \omega^i_{\ell jk}$

$$M_{ij} = \frac{(r_i - 1)^2}{(\omega^i_{\ell jk})^2} \quad \text{et } V_{ij} = \frac{(r_i + 1)^2}{(\omega^i_{\ell jk})^2}$$

$$Q_{ij} = \frac{(p_i - \beta^i_{\ell j}\, q_j)^2}{(\alpha^i_{\ell j})^2} \quad \text{et } R_{ij} = \frac{(p_i + \beta^i_{\ell j}\, q_j)^2}{(\alpha^i_{\ell j})^2}$$

3) $A_j\ B_j\ C_j = \Theta^{ij}_{k\ell}\ \Theta^{k\ell}_{ij}\ \gamma^{ij}_{k\ell}$

$$M_{ij} = \frac{(p_i - \Theta^{ij}_{k\ell}\, q_j)^2}{(\gamma^{ij}_{k\ell})^2} \quad \text{et } V_{ij} = \frac{(p_i + \Theta^{ij}_{k\ell}\, q_j)^2}{(\gamma^{ij}_{k\ell})^2}$$

$$Q_{ij} = \frac{(q_i - 1)^2}{(\Theta^{k\ell}_{ij})^2} \quad \text{et } R_{ij} = \frac{(q_i + 1)^2}{(\Theta^{k\ell}_{ij})^2}$$

K_i s'écrit alors :

$$K_i = \frac{(2\ell'+1)^{1/2}\ \Pi\sqrt{\Pi}}{4A_jB_jC_jp_jq_jr_jqr} \sum_{\substack{M, m_{\mathcal{L}}, M', m_{\mathcal{L}'}, n_{L'} \\ n_\ell, n_L, N, \mathcal{L}'', m_{\mathcal{L}''} \\ n_{\mathcal{L}}, n_{\mathcal{L}'}, n_{\mathcal{L}''}}} (-1)^{L+L'+\mathcal{L}+\mathcal{L}'+n_L+n_\ell+n_{\mathcal{L}}-\ell-\ell'-J-J'-m_{\mathcal{L}}-m_L-m_\ell-M-M'}$$

$$+ \left[(2\mathcal{J}+1)^2(2J+1)(2J'+1)(2\mathcal{L}''+1)^2\right]^{1/2} \begin{pmatrix} J & \mathcal{L} & \mathcal{J} \\ M & m_{\mathcal{L}} & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & \mathcal{L}' & \mathcal{J} \\ M' & m_{\mathcal{L}'} & -\mathcal{M} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \ell' & L' & J' \\ 0 & n_{L'} & -n_{L'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & L & J \\ n_\ell & n_L & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{L}' & \mathcal{L}'' \\ -m_{\mathcal{L}} & m_{\mathcal{L}'} & -m_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{L}' & \mathcal{L}'' \\ -n_{\mathcal{L}} & n_{\mathcal{L}'} & -n_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} J' & J & \mathcal{L}'' \\ M' & -M & m_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & J & \mathcal{L}'' \\ n_{L'} & N & n_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix} \int d\,\phi_{\vec{q}_j\vec{p}_j}\; Y^*_{Ln_L}(\Theta_{\vec{q}\vec{p}_j}, \phi_{\vec{q}\vec{p}_j})\, Y^*_{\mathcal{L}n_{\mathcal{L}}}(\Theta_{\vec{r}\vec{p}_j}, \phi_{\vec{r}\vec{p}_j})$$

$$\cdot\; Y^*_{\ell n_\ell}(\Theta_{\vec{p}_i\vec{p}_j}, 0)\; Y_{L'n_{L'}}(\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j}, \phi_{\vec{q}_j\vec{p}_j})\; Y_{\mathcal{L}'n_{\mathcal{L}'}}(\Theta_{\vec{r}_j\vec{p}_j}, \phi_{\vec{r}_j\vec{p}_j})\; T^{(ij)}_{\ell}(p, p_i, s'') \tag{100}$$

II. <u>Calcul de $K^k(p\ q\ r\ \beta;\ p_j q_j r_j \beta_j) = \langle p\ q\ r\ \beta | T^{(k)}_{ij}(s) | p_j q_j r_j \beta_j \rangle$.</u>

Grâce aux relations (73) et (80), nous déduisons que :

$$K^k = \sum_{\substack{M, m_{\mathcal{L}}, M', m_{\mathcal{L}'} \\ m_\ell, m_L, m_{\ell'} \\ m_{L'}}} \left[(2\mathcal{J}+1)(2\mathcal{J}'+1)(2J+1)(2J'+1)\right]^{1/2} (-1)^{L+L'+\mathcal{L}+\mathcal{L}'-\ell-\ell'-J-J'-\mathcal{M}-\mathcal{M}'-M-M'}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} J & \mathcal{L} & \mathcal{J} \\ M & m_{\mathcal{L}} & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & \mathcal{L}' & \mathcal{J}' \\ M' & m_{\mathcal{L}'} & -\mathcal{M}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & L & J \\ m_\ell & m_L & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & L' & J' \\ m_{\ell'} & m_{L'} & -M' \end{pmatrix}$$

$$\cdot \int d\hat{p}\, d\hat{q}\, d\hat{r}\, d\hat{p}_j\, d\hat{q}_j\, d\hat{r}_j\; Y^*_{\ell m_\ell}(\hat{p})\; Y^*_{Lm_L}(\hat{q})\; Y^*_{\mathcal{L}m_{\mathcal{L}}}(\hat{r})\; Y_{\ell' m_{\ell'}}(\hat{p}_j)$$

$$\cdot\; Y_{L'm_{L'}}(\hat{q}_j)\; Y_{\mathcal{L}'m_{\mathcal{L}'}}(\hat{r}_j)\; \langle \vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r} | T^{(k)}_{ij}(s) | \vec{p}_j\ \vec{q}_j\ \vec{r}_j \rangle \tag{101}$$

$T^k_{ij}(s)$ est la matrice de transition du problème à trois corps d'où :

$$\langle \vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r} | T^{(k)}_{ij}(s) | \vec{p}_j\ \vec{q}_j\ \vec{r}_j \rangle = \langle \vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r} | T^{(k)}_{ij}(s) | \vec{p}_i\ \vec{q}_i\ \vec{r}_i \rangle$$

$$= \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \langle \vec{p}\ \vec{q} | T^{(k)}_{ij}(s') | \vec{p}_i\ \vec{q}_i \rangle \quad \text{où } s' = s - r^2$$

Nous pouvons montrer, de la même manière que pour le problème à quatre corps, que l'on peut écrire :

$$\sum_{m_\ell, m_L} (-1)^{L-\ell-M} (2J+1)^{1/2} \begin{pmatrix} \ell & L & J \\ m_\ell & m_L & -M \end{pmatrix} \int d\hat{p}\, d\hat{q}\; Y^*_{\ell m_\ell}(\hat{p})\; Y^*_{Lm_L}(\hat{q}) \langle \vec{p}\ \vec{q} | =$$

$$\langle p\ q\ J\ M\ \ell\ L | \tag{102}$$

$$\vec{p}_i\vec{q}_i> = \sum_{m_{\ell''},m_{L''}} (2J''+1)^{1/2}(-1)^{L''-\ell''-M''}\begin{pmatrix}\ell'' & L'' & J''\\ m_{\ell''} & m_{L''} & -M''\end{pmatrix} Y^*_{\ell''m_{\ell''}}(\hat{p}_i)Y^*_{L''m_{L''}}(\hat{q}_i)\,|p_iq_iJ''M''\ ''L''> \tag{102'}$$

En tenant compte des résultats (101), K^k prendra donc la forme suivante :

$$K^k = \sum_{\substack{M,m_{\mathcal{L}},M',m_{\mathcal{L}'}\\ m_{\ell'},m_{L'},m_{\ell''}\\ m_{L''}}} (-1)^{L'+L''+\mathcal{L}+\mathcal{L}'-\ell'-\ell''-J-J'-\mathcal{M}-\mathcal{M}'-M'-M''}$$

$$\cdot\ \left[(2\mathcal{J}+1)(2\mathcal{J}'+1)(2J'+1)(2J''+1)\right]^{1/2} \begin{pmatrix}J & \mathcal{L} & \mathcal{J}\\ M & m & -\mathcal{M}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J' & \mathcal{L}' & \mathcal{J}'\\ M' & m_{\mathcal{L}'} & -\mathcal{M}'\end{pmatrix}$$

$$\cdot\ \begin{pmatrix}\ell' & L' & J'\\ m_{\ell'} & m_{L'} & -M'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell'' & L'' & J''\\ m_{\ell''} & m_{L''} & -M''\end{pmatrix}\int d\hat{p}_j\ d\hat{q}_j\ d\hat{r}_j\ Y^*_{\mathcal{L}m_{\mathcal{L}}}(\hat{r})\ Y^*_{\ell''m_{\ell''}}(\hat{p}_i)Y^*_{L''m_{L''}}(\hat{q}_i)$$

$$\cdot\ Y_{\ell'm_{\ell'}}(\hat{p}_j)\ Y_{L'm_{L'}}(\hat{q}_j)\ Y_{\mathcal{L}'m_{\mathcal{L}'}}(\hat{r}_j)\ \frac{\delta(r^2-r_i^{\,2})}{2\,r}\ \psi^{(k)ij}_{\rho\rho_i}(pq\ ;p_iq_i\ ;s') \tag{103}$$

où nous avons posé :

$$< p\ q\ J\ M\ L\ \ell|T^{(k)}_{ij}(s)\ |p_iq_iJ''M''L''\ell''> = < p\ q\ \rho|T^{(k)}_{ij}(s)\ |\ p_iq_i\rho_i>$$
$$= \psi^{(k)ij}_{\rho\rho_i}(p\ q\ ;\ p_iq_i;s')$$

De la même façon que dans le paragraphe I, nous utilisons les transformations de l'appendice A [7][1] et la conservation du moment angulaire total pour écrire le noyau sous la forme :

$$K^k = \frac{(2\mathcal{J}+1)^{1/2}2\,\pi\sqrt{\pi}}{r}\sum_{\substack{M,m_{\mathcal{L}},M',m_{\mathcal{L}'},n_{L'}\\ n_{\ell''},n_{L''},N'',\mathcal{L}''\\ m_{\mathcal{L}''},n_{\mathcal{L}},n_{\mathcal{L}'},n_{\mathcal{L}''}}} (-1)^{L'+L''+\mathcal{L}+\mathcal{L}'+n_{L''}+n_{\ell''}+n_{\mathcal{L}}-\ell'-\ell''-J-J'-m_{\mathcal{L}}-m_{L''}-m_{\ell''}-M'-M''}$$

$$\cdot\ \left[(2\mathcal{J}+1)^2\ (2J'+1)(2J''+1)(2\mathcal{L}''+1)^2\right]^{1/2}\begin{pmatrix}J & \mathcal{L} & \mathcal{J}\\ M & m_{\mathcal{L}} & -\mathcal{M}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J' & \mathcal{L}' & \mathcal{J}\\ M' & m_{\mathcal{L}'} & -\mathcal{M}\end{pmatrix}$$

$$\cdot\ \begin{pmatrix}\ell' & L' & J'\\ 0 & n_{L'} & -n_{L'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell'' & L'' & J''\\ n_{\ell''} & n_{L''} & N''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{L} & \mathcal{L}' & \mathcal{L}''\\ -m_{\mathcal{L}} & m_{\mathcal{L}'} & -m_{\mathcal{L}''}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{L} & \mathcal{L}' & \mathcal{L}''\\ n_{\mathcal{L}} & n_{\mathcal{L}'} & -n_{\mathcal{L}''}\end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} J' & J'' & \mathcal{L}'' \\ M' & -M'' & m_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & J'' & \mathcal{L}'' \\ n_{L'} & N'' & n_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix} \int d(\cos\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j}\ d(\cos\Theta_{\vec{r}_j\vec{p}_j})\ d\phi_{\vec{q}_j\vec{p}_j}$$

$$\cdot\ \delta(r^2-r_i^{\,2})\ Y^*_{L''n_{L''}}(\Theta_{\vec{q}_i\vec{p}_j},\ \phi_{\vec{q}_i\vec{p}_j})\ Y^*_{\mathcal{L}n_{\mathcal{L}}}(\Theta_{\vec{r}\vec{p}_j},\ \phi_{\vec{r}\vec{p}_j})\ Y^*_{\ell''n_{\ell''}}(\Theta_{\vec{p}_i\vec{p}_j},0)$$

$$\cdot\ Y_{L'n_{L'}}(\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j},\ \phi_{\vec{q}_j\vec{p}_j})\ Y_{\mathcal{L}'n_{\mathcal{L}'}}(\Theta_{\vec{r}_j\vec{p}_j},\ \phi_{\vec{r}_j\vec{p}_j})\ \psi^{(k)ij}_{\rho\rho_i}(pq\ ;\ p_iq_i\ ;\ s') \tag{104}$$

Et en explicitant les différentielles $d(\cos\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})$ et $d(\cos\Theta_{\vec{q}_j\vec{r}_j})$ (voir paragraphe précédent), nous aboutissons à :

$$K^k = \frac{(2\ell'+1)^{1/2}\ \Pi\sqrt{\pi}}{2A_jB_jC_jp_jq_jr_jr} \sum_{\substack{M,m_{\mathcal{L}},M',m_{\mathcal{L}'},n_{L'}\\ n_{\ell''},n_{L''},N'',\mathcal{L}''\\ m_{\mathcal{L}''},n_{\mathcal{L}},n_{\mathcal{L}'},n_{\mathcal{L}''}}} (-1)^{L'+L''+\mathcal{L}+\mathcal{L}'+n_{\ell''}+n_{L''}+n_{\mathcal{L}}-\ell'-\ell''-J-J'-m_{\mathcal{L}}-m_{L''}-m_{\ell''}-M'-M''}$$

$$\cdot\ \left[(2\mathcal{J}+1)^2\ (2J'+1)\ (2J''+1)\ (2\mathcal{L}''+1)^2\right]^{1/2} \begin{pmatrix} J & \mathcal{L} & \mathcal{J} \\ M & m & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & \mathcal{L}' & \mathcal{J} \\ M' & m_{\mathcal{L}'} & -\mathcal{M} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \ell' & L' & J' \\ 0 & n_{L'} & -n_{L'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell'' & L'' & J'' \\ n_{\ell''} & n_{L''} & N'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{L}' & \mathcal{L}'' \\ -m_{\mathcal{L}} & m_{\mathcal{L}'} & -m_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{L}' & \mathcal{L}'' \\ -n_{\mathcal{L}} & n_{\mathcal{L}'} & -n_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} J' & J'' & \mathcal{L}'' \\ M' & -M'' & m_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & J'' & \mathcal{L}'' \\ n_{L'} & N'' & n_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix} \int dq_i^{\,2}\ d\phi_{\vec{q}_j\vec{p}_j}\ Y^*_{L''n_{L''}}(\Theta_{\vec{q}_i\vec{p}_j},\ \phi_{\vec{q}_i\vec{p}_j})$$

$$\cdot\ Y^*_{\mathcal{L}n_{\mathcal{L}}}(\Theta_{\vec{r}\vec{p}_j},\ \phi_{\vec{r}\vec{p}_j})\ Y^*_{\ell''n_{\ell''}}(\Theta_{\vec{p}_i\vec{p}_j},0)\ Y_{L'n_{L'}}(\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j},\ \phi_{\vec{q}_j\vec{p}_j})$$

$$\cdot\ Y_{\mathcal{L}'n_{\mathcal{L}'}}(\Theta_{\vec{r}_j\vec{p}_j},\ \phi_{\vec{r}_j\vec{p}_j})\ \psi^{(k)ij}_{\rho\rho_i}(pq\ ;\ p_iq_i\ ;\ s') \tag{105}$$

III - Calcul de $K_{ij}(pqr\beta;\ p_j q_j r_j \beta_j) = \langle pqr\beta | \mathcal{A}_{ij}(s) | p_j q_j r_j \beta_j \rangle$

Les états $|pqr\beta\rangle$ et $|abc\gamma\rangle$ étant identiques et $\mathcal{A}_{ij}(s)$ agissant sur ces kets, nous écrivons K_{ij} sous la forme:

$$K_{ij} = \langle abc\gamma | \mathcal{A}_{ij}(s) | a_j b_j c_j \gamma_j \rangle = \langle abc\gamma | \mathcal{A}_{ij}(s) | a_i b_i c_i \gamma_i \rangle$$

ou encore : $K_{ij} = \mathcal{A}^{(ij)}_{\gamma\gamma_i}(abc;\ a_i b_i c_i; s)$ (106)

Il nous faut étudier maintenant le problème à quatre corps avec interactions par paires pour déterminer la forme de $\mathcal{A}^{(ij)}_{\gamma\gamma_i}(abc;\ a_i b_i c_i; s)$, le problème à trois corps pour expliciter $\psi^{(k)ij}_{\rho\rho_i}(pq;\ p_i q_i; s-r^2)$ et le problème à deux corps pour expliciter $T^{(ij)}_{\ell}(p; p_i; s-q^2-r^2)$.

X - EQUATIONS DE FADDEEV DU PROBLEME A QUATRE CORPS AVEC INTERACTIONS PAR COUPLES

Les équations de Faddeev du problème à quatre corps avec interactions par couples s'écrivent:

$$\mathcal{A}_{ij}(E) = T_{ij}(E) + T_{ij}(E)\, G_o\,(E)\, \mathcal{A}_{k\ell}(E) \qquad (107)$$

Explicitons ces équations sur les kets $|abc\gamma>$ précédemment définis et en utilisant :

$$< a_f b_f c_f \gamma_f \,|G_o\,|a_\ell b_\ell c_\ell \gamma_\ell > = \frac{-1}{a_f^{\,2}+b_f^{\,2}+c_f^{\,2}-s}\,(8\, a_f b_f c_f)^{-2}\delta(a_f^{\,2}-a_\ell^{\,2})$$

$$.\delta\,(b_f^{\,2}-b_\ell^{\,2})\,\delta\,(c_f^{\,2}-c_\ell^{\,2})$$

$$\int da_f^{\,2}\,\delta(a_f^{\,2}-a_\ell^{\,2}) = 1$$

Les équations de Faddeev deviennent:

$$\mathcal{A}^{(ij)}_{\gamma\gamma_i}(abc;a_i b_i c_i;s) = \Phi^{(ij)}_{\gamma\gamma_i}(abc;\, a_i b_i c_i;s) - \frac{1}{8}\sum_{\gamma_\ell}\iiint da_\ell^{\,2} db_\ell^{\,2} dc_\ell^{\,2}$$

$$.\,\frac{a_\ell b_\ell c_\ell}{a_\ell^{\,2}+b_\ell^{\,2}+c_\ell^{\,2}-s}\,K^{(ij)}(abc;\, a_\ell b_\ell c_\ell;s)\,\mathcal{A}^{(k\ell)}_{\gamma_\ell\gamma_i}(a_\ell b_\ell c_\ell;a_i b_i c_i;s) \qquad (108)$$

où nous avons défini:

$$<abc\gamma\,|\mathcal{A}_{ij}(s)|a_i b_i c_i \gamma_i> = \mathcal{A}^{(ij)}_{\gamma\gamma_i}(abc;a_i b_i c_i;s)$$

$$<abc\gamma\,|T_{ij}(s)|a_i b_i c_i \gamma_i> = \Phi^{(ij)}_{\gamma\gamma_i}(abc;a_i b_i c_i;s)$$

$$<abc\gamma\,|T_{ij}(s)G_o(s)|a_\ell b_\ell c_\ell \gamma_\ell> = K^{(ij)}(abc\gamma;a_\ell b_\ell c_\ell \gamma_\ell;s)$$

où s est l'énergie relative à ce problème à quatre corps particulier

Il nous reste à étudier le noyau $K^{(ij)}$ dans la représentation choisie.

$$K^{(ij)} = \langle a\ b\ c\ \gamma \mid \mathcal{Q}_{ij}(s) \mid a_\ell\ b_\ell\ c_\ell\ \gamma_\ell \rangle$$

Grâce aux relations (82) et (87), nous déduisons que :

$$K^{(ij)} = \sum_{\substack{M_{ab}, m_\Lambda, M_{a_\alpha b_\alpha} \\ m_{\Lambda_\alpha}, m_{\ell_a}, m_{\ell_b} \\ m_{\ell_{a_\alpha}}, m_{\ell_{b_\alpha}}}} \left[(2\mathcal{J}+1)(2\mathcal{J}'_\alpha+1)(2J_{ab}+1)(2J_{a_\alpha b_\alpha}+1)\right]^{1/2}$$

$$\cdot\ (-1)^{\ell_b+\ell_{b_\alpha}+\Lambda+\Lambda_\alpha-\ell_a-\ell_{a_\alpha}-J_{ab}-J_{a_\alpha b_\alpha}-\mathcal{M}-\mathcal{M}'-M_{ab}-M_{a_\alpha b_\alpha}}$$

$$\cdot\ \begin{pmatrix} J_{ab} & \Lambda & \mathcal{J} \\ M_{ab} & m_\Lambda & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{a_\alpha b_\alpha} & \Lambda_\alpha & \mathcal{J}_\alpha \\ M_{a_\alpha b_\alpha} & m_{\Lambda_\alpha} & -\mathcal{M}'_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_a & \ell_b & J_{ab} \\ m_{\ell_a} & m_{\ell_b} & -M_{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{a_\alpha} & \ell_{b_\alpha} & J_{a_\alpha b_\alpha} \\ m_{\ell_{a_\alpha}} & m_{\ell_{b_\alpha}} & -M_{a_\alpha b_\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\cdot\ \int d\hat{a}\, d\hat{b}\, d\hat{c}\, d\hat{a}_\ell\, d\hat{b}_\ell\, d\hat{c}_\ell\ Y^*_{\ell_a m_{\ell_a}}(\hat{a})\ Y^*_{\ell_b m_{\ell_b}}(\hat{b})\ Y^*_{\Lambda m_\Lambda}(\hat{c})\ Y_{\ell_{a_\alpha} m_{\ell_{a_\alpha}}}(\hat{a}_\ell)$$

$$\cdot\ Y_{\ell_{b_\alpha} m_{\ell_{b_\alpha}}}(\hat{b}_\ell)\ Y_{\Lambda_\alpha m_{\Lambda_\alpha}}(\hat{c}_\ell) \langle \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \mid T_{ij}(s) \mid \vec{a}_\ell\ \vec{b}_\ell\ \vec{c}_\ell \rangle \qquad (109)$$

$T_{ij}(s)$ est la matrice relative à un couple de deux particules pris parmi les quatre corps.

$$\langle \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \mid T_{ij}(s) \mid \vec{a}_\ell\ \vec{b}_\ell\ \vec{c}_\ell \rangle = \langle \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \mid T_{ij}(s) \mid \vec{a}_k\ \vec{b}_k\ \vec{c}_k \rangle$$

$$= \delta(\vec{b} - \vec{b}_k)\ \delta(\vec{c} - \vec{c}_k) \langle \vec{a} \mid T_{ij}(s''') \mid \vec{a}_k \rangle$$

$$\text{où } s''' = s - b^2 - c^2$$

Dans la représentation choisie, l'élément de matrice devient :

$$\langle \vec{a} \mid T_{ij}(s''') \mid \vec{a}_k \rangle = \sum_{\ell'''_a, m_{\ell'''_a}} Y_{\ell'''_a m_{\ell'''_a}}(\hat{a})\ Y^*_{\ell'''_a m_{\ell'''_a}}(\hat{a}_k)\ T^{(ij)}_{\ell''_a}(a, a_k, s''') \qquad (110)$$

$K^{(ij)}$ s'écrit alors :

$$K^{(ij)} = \sum_{\substack{M_{ab},\, m_\Lambda,\, M_{a_\alpha b_\alpha} \\ m_{\Lambda_\alpha},\, \ell_a,\, \ell_b \\ m_{\ell_{a_\alpha}},\, m_{\ell_{b_\alpha}}}} \left[(2\mathcal{J}+1)(2\mathcal{J}_\alpha+1)(2J_{ab}+1)(2J_{a_\alpha b_\alpha}+1)\right]^{1/2} (-1)^{\ell_b+\ell_{b_\alpha}+\Lambda+\Lambda_\alpha-\ell_a-\ell_{a_\alpha}-J_{ab}-J_{a_\alpha b_\alpha}-\mathcal{M}-\mathcal{M}_\alpha-M_{ab}-M_{a_\alpha b_\alpha}}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} J_{ab} & \Lambda & \mathcal{J} \\ M_{ab} & m_\Lambda & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{a_\alpha b_\alpha} & \Lambda_\alpha & \mathcal{J}_\alpha \\ M_{a_\alpha b_\alpha} & m_{\Lambda_\alpha} & -\mathcal{M}_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_a & \ell_b & J_{ab} \\ m_{\ell_a} & m_{\ell_b} & -M_{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{a_\alpha} & \ell_{b_\alpha} & J_{a_\alpha b_\alpha} \\ m_{\ell_{a_\alpha}} & m_{\ell_{b_\alpha}} & -M_{a_\alpha b_\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \int d\hat{a}_\ell \, d\hat{b}_\ell \, d\hat{c}_\ell \, Y^*_{\ell_b m_{\ell_b}}(\hat{b}) \, Y^*_{\Lambda m_\Lambda}(\hat{c}) \, Y^*_{\ell_a m_{\ell_a}}(\hat{a}_k) \, Y_{\ell_{a_\alpha} m_{\ell_{a_\alpha}}}(\hat{a}_\ell)$$

$$\cdot \; Y_{\ell_{b_\alpha} m_{\ell_{b_\alpha}}}(\hat{b}_\ell) \, Y_{\Lambda_\alpha m_{\Lambda_\alpha}}(\hat{c}_\ell) \, \frac{\delta(b^2-b_k^2)\;\delta(c^2-c_k^2)}{4\,b\,c} \, T^{(ij)}_{\ell_a}(a, a_k, s''') \tag{111}$$

Grâce aux transformations [7] [1] définies dans l'appendice A, nous obtenons :

$$K^{(ij)} = \frac{(2\ell_{a_\alpha}+1)^{1/2}\pi\sqrt{\pi}}{b\,c} \sum_{\substack{M_{ab},\, m_\Lambda,\, M_{a_\alpha b_\alpha},\, m_{\Lambda_\alpha} \\ n_{\ell_{b_\alpha}},\, n_{\ell_a},\, n_{\ell_b},\, N_{ab} \\ \Lambda''',\, m_{\Lambda''},\, n_\Lambda,\, n_{\Lambda_\alpha},\, n_{\Lambda'''}}} (-1)^{\ell_b+\ell_{b_\alpha}+\Lambda+\Lambda_\alpha+n_{\ell_b}+n_{\ell_a}+n_\Lambda-\ell_a-\ell_{a_\alpha}-J_{ab}-J_{a_\alpha b_\alpha}-m_\Lambda-m_{\ell_b}-m_{\ell_a}-\mathcal{M}-\mathcal{M}_\alpha-M_{ab}-M_{a_\alpha b_\alpha}}$$

$$\cdot \left[(2\mathcal{J}+1)(2\mathcal{J}_\alpha+1)(2J_{ab}+1)(2J_{a_\alpha b_\alpha}+1)(2\Lambda'''+1)^2\right]^{1/2} \begin{pmatrix} J_{ab} & \Lambda & \mathcal{J} \\ M_{ab} & m_\Lambda & -\mathcal{M} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} J_{a_\alpha b_\alpha} & \Lambda_\alpha & \mathcal{J}_\alpha \\ M_{a_\alpha b_\alpha} & m_{\Lambda_\alpha} & -\mathcal{M}_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{a_\alpha} & \ell_{b_\alpha} & J_{a_\alpha b_\alpha} \\ 0 & n_{\ell_{b_\alpha}} & -n_{\ell_{b_\alpha}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_a & \ell_b & J_{ab} \\ n_{\ell_a} & n_{\ell_b} & N_{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda_\alpha & \Lambda''' \\ -m_\Lambda & m_{\Lambda_\alpha} & -m_{\Lambda'''} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda_\alpha & \Lambda''' \\ -n_\Lambda & n_{\Lambda_\alpha} & -n_{\Lambda'''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{a_\alpha b_\alpha} & J_{ab} & \Lambda''' \\ M_{a_\alpha b_\alpha} & -M_{ab} & m_{\Lambda'''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{a_\alpha b_\alpha} & J_{ab} & \Lambda''' \\ n_{\ell_{b_\alpha}} & N_{ab} & n_{\Lambda'''} \end{pmatrix}$$

$$\int d(\cos\Theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})\, d(\cos\Theta_{\vec{c}_\ell \vec{a}_\ell})\, d\phi_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell}\, \delta(b^2-b_k^{\,2})\, \delta(c^2-c_k^{\,2})\, Y^*_{\ell_b n_{\ell_b}}(\Theta_{\vec{b}\vec{a}_\ell}, \phi_{\vec{b}\vec{a}_\ell})$$

$$Y^*_{\Lambda n_\Lambda}(\Theta_{\vec{c}\vec{a}_\ell}, \phi_{\vec{c}\vec{a}_\ell})\, Y^*_{\ell_a n_{\ell_a}}(\Theta_{\vec{a}_k \vec{a}_\ell}, 0)\, Y_{\ell_{b_\alpha} n_{\ell_{b_\alpha}}}(\Theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell}, \phi_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})$$

$$Y_{\Lambda_\alpha n_{\Lambda_\alpha}}(\Theta_{\vec{c}_\ell \vec{a}_\ell}, \phi_{\vec{c}_\ell \vec{a}_\ell})\, T^{(ij)}_{\ell_a}(a, a_k, s''') \qquad (111')$$

Comme nous avons fait précédemment, nous allons intégrer les deux distributions $\delta(b^2-b_k^{\,2})$ et $\delta(c^2-c_k^{\,2})$.

D'après l'appendice B, nous écrivons :

$$d(\cos\Theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})\, d(\cos\Theta_{\vec{c}_\ell \vec{a}_\ell}) = \frac{db_k^{\,2}\, dc_k^{\,2}}{4\, X_\ell Y_\ell Z_\ell a_\ell b_\ell c_\ell}$$

Le produit $X_\ell Y_\ell Z_\ell$ ainsi que les bornes $S_{k\ell}$ et $W_{k\ell}$, $E_{k\ell}$ et $G_{k\ell}$ associées ont les valeurs suivantes :

$$X_\ell\, Y_\ell\, Z_\ell = \alpha^i_{jk}\, \alpha^j_{i\ell}\, \Pi^{ij}_{k\ell}$$

$$S_{k\ell} = \frac{(b_k - \alpha^j_{i\ell} b_\ell)^2}{(\alpha^i_{jk})^2} \quad \text{et} \quad W_{k\ell} = \frac{(b_k + \alpha^j_{i\ell} b_\ell)^2}{(\alpha^i_{jk})^2}$$

$$E_{k\ell} = \frac{(c_k - 1)^2}{(\Pi^{ij}_{k\ell})^2} \quad \text{et} \quad G_{k\ell} = \frac{(c_k + 1)^2}{(\Pi^{ij}_{k\ell})^2}$$

En tenant compte de la conservation du moment angulaire, $K^{(ij)}$ s'écrit :

$$K^{(ij)} = \frac{(2\ell_{a_\alpha}+1)^{1/2}\pi\sqrt{\pi}}{4X_\ell Y_\ell Z_\ell a_\ell b_\ell c_\ell bc} \sum_{\substack{M_{ab}, m_\Lambda, M_{a_\alpha b_\alpha}, m_{\Lambda_\alpha} \\ n_{\ell_{b_\alpha}}, n_{\ell_a}, n_{\ell_b}, N_{ab} \\ \Lambda''', m_{\Lambda'''}, n_\Lambda, n_{\Lambda_\alpha}, n_{\Lambda'''}}} (-1)^{\ell_b+\ell_{b_\alpha}+\Lambda+\Lambda_\alpha+n_{\ell_b}+n_{\ell_a}+n_\Lambda-\ell_a-\ell_{a_\alpha}-J_{ab}-J_{a_\alpha b_\alpha}-m_\Lambda-m_{\ell_b}-m_{\ell_a}-M_{ab}-M_{a_\alpha b_\alpha}}$$

$$\left[(2\mathcal{J}+1)^2(2J_{ab}+1)(2J_{a_\alpha b_\alpha}+1)(2\Lambda'''+1)^2\right]^{1/2} \begin{pmatrix} J_{ab} & \Lambda & \mathcal{J} \\ M_{ab} & m_\Lambda & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{a_\alpha b_\alpha} & \Lambda_\alpha & \mathcal{J} \\ M_{a_\alpha b_\alpha} & m_{\Lambda_\alpha} & -\mathcal{M} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ell_{a_\alpha} & \ell_{b_\alpha} & J_{a_\alpha b_\alpha} \\ 0 & n_{\ell_{b_\alpha}} & -n_{\ell_{b_\alpha}} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \ell_a & \ell_b & J_{ab} \\ n_{\ell_a} & n_{\ell_b} & N_{ab} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda_\alpha & \Lambda''' \\ -m_\Lambda & m_{\Lambda_\alpha} & -m_{\Lambda'''} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda_\alpha & \Lambda''' \\ -n_\Lambda & n_{\Lambda_\alpha} & -n_{\Lambda'''} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} J_{a_\alpha b_\alpha} & J_{ab} & \Lambda''' \\ M_{a_\alpha b_\alpha} & -M_{ab} & m_{\Lambda'''} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} J_{a_\alpha b_\alpha} & J_{ab} & \Lambda''' \\ n_{\ell_{b_\alpha}} & N_{ab} & n_{\Lambda'''} \end{pmatrix}$$

$$\int d\,\phi_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell}\, Y^*_{\ell_b n_{\ell_b}}(\Theta_{\vec{b}\vec{a}_\ell}, \phi_{\vec{b}\vec{a}_\ell})\, Y^*_{\Lambda n_\Lambda}(\Theta_{\vec{c}\vec{a}_\ell}, \phi_{\vec{c}\vec{a}_\ell})\, Y^*_{\ell_a n_{\ell_a}}(\Theta_{\vec{a}_k \vec{a}_\ell}, o)$$

$$Y_{\ell_{b_\alpha} n_{\ell'_{b_\alpha}}}(\Theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell}, \phi_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})\, Y_{\Lambda_\alpha n_{\Lambda_\alpha}}(\Theta_{\vec{c}_\ell \vec{a}_\ell}, \phi_{\vec{c}_\ell \vec{a}_\ell})\, T^{(ij)}_{\ell_a}(a, a_k, s''')\ (111'')$$

Cependant quand, à la place de $T^{(ij)}_{\ell_a}$, nous utilisons $T^{(k\ell)}_{\ell_b}$ qui agit sur b et b_k, nous obtiendrons des distributions $\delta(a^2-a_k^2)$ et $\delta(c^2-c_k^2)$ et la différentielle suivante :

$$d(\cos\Theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})\, d(\cos\Theta_{\vec{c}_\ell \vec{a}_\ell}) = \frac{da_k^2\, dc_k^2}{4X_\ell Y_\ell Z_\ell a_\ell b_\ell c_\ell}$$

Le produit $X_\ell Y_\ell Z_\ell$ ainsi que les bornes $E_{k\ell}$ et $G_{k\ell}$ sont invarian et à la place des bornes $S_{k\ell}$ et $W_{k\ell}$, nous aurons :

$$S'_{k\ell} = \frac{(a_k - \alpha^i_{jk}\, b_\ell)}{(\alpha^j_{i\ell})^2} \quad \text{et} \quad W'_{k\ell} = \frac{(a_k + \alpha^i_{jk}\, b_\ell)^2}{(\alpha^j_{i\ell})^2}$$

Nous envisageons une transformation qui fait passer du trièdre de référence à un trièdre où le vecteur $\vec{a}_\ell$ est colinéaire à z et x appartient au plan formé par les vecteurs $\vec{b}_k$ et $\vec{a}_\ell$. (cf précédemment).

$K^{(ij)}$ s'écrira alors :

$$K^{(ij)} = \frac{(2\ell_{a_\alpha}+1)^{1/2}\pi\sqrt{\pi}}{4X_\ell Y_\ell Z_\ell a_\ell b_\ell c_{\ell ac}} \sum_{\substack{M_{ab}, m_\Lambda, M_{a_\alpha b_\alpha}, m_{\Lambda_\alpha} \\ n_{\ell_{b_\alpha}}, n_{\ell_a}, n_{\ell_b}, N_{ab} \\ \Lambda''', m_{\Lambda'''}, n_\Lambda, n_{\Lambda_\alpha}, n_{\Lambda'''}}} (-1)^{\ell_b+\ell_{b_\alpha}+\Lambda+\Lambda_\alpha+n_{\ell_b}+n_{\ell_a}+n_\Lambda-\ell_a-\ell_{a_\alpha}} -J_{ab}-J_{a_\alpha b_\alpha}-m_\Lambda-m_{\ell_b}-m_{\ell_a}-M_{ab}-M_{a_\alpha b_\alpha}$$

$$\cdot \left[(2\mathcal{J}+1)^2(2J_{ab}+1)(2J_{a_\alpha b_\alpha}+1)(2\Lambda'''+1)^2\right]^{1/2} \begin{pmatrix} J_{ab} & \Lambda & \mathcal{J} \\ M_{ab} & m_\Lambda & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{a_\alpha b_\alpha} & \Lambda_\alpha & \mathcal{J} \\ M_{a_\alpha b_\alpha} & n_{\Lambda_\alpha} & -\mathcal{M} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \ell_{a_\alpha} & \ell_{b_\alpha} & J_{a_\alpha b_\alpha} \\ 0 & n_{\ell_{b_\alpha}} & -n_{\ell_{b_\alpha}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_a & \ell_b & J_{ab} \\ n_{\ell_a} & n_{\ell_b} & N_{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda_\alpha & \Lambda''' \\ -m_\Lambda & m_{\Lambda_\alpha} & -m_{\Lambda'''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda_\alpha & \Lambda''' \\ -n_\Lambda & n_{\Lambda_\alpha} & -n_\Lambda \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} J_{a_\alpha b_\alpha} & J_{ab} & \Lambda''' \\ M_{a_\alpha b_\alpha} & -M_{ab} & m_{\Lambda'''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{a_\alpha b_\alpha} & J_{ab} & \Lambda''' \\ n_{\ell_{b_\alpha}} & N_{ab} & n_{\Lambda'''} \end{pmatrix} \int d\,\phi_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell}\, Y^*_{\ell_a n_{\ell_a}}(\Theta_{\vec{a}\vec{a}_\ell}, \phi_{\vec{a}\vec{a}_\ell})$$

$$\cdot\ Y^*_{\Lambda n_\Lambda}(\Theta_{\vec{c}\vec{a}_\ell}, \phi_{\vec{c}\vec{a}_\ell})\ Y^*_{\ell_b n_{\ell_b}}(\Theta_{\vec{b}_m \vec{a}_\ell}, 0)\ Y_{\ell_{b_\alpha} n_{\ell_{b_\alpha}}}(\Theta_{\vec{b}\vec{a}_{\ell\ell}}, \phi_{\vec{b}\vec{a}_{\ell\ell}})\ Y_{\Lambda_\alpha n_{\Lambda_\alpha}}(\Theta_{\vec{c}_\ell \vec{a}_\ell}, \phi_{\vec{c}_\ell \vec{a}_\ell})$$

$$\cdot\ T^{(k\ell)}_{\ell_b}(b, b_k, s''') \qquad (111''')$$

Nous pouvons écrire aussi $K^{(ij)}$ pour une transformation qui ferait passer du trièdre de référence à un trièdre où le vecteur $\vec{b}$ est colinéaire à z et où x appartient au plan formé par les vecteurs $\vec{b}_\ell$ et $\vec{b}_k$.

Les équations de Faddeev du problème à quatre corps avec interaction par couples s'écrivent :

$$\mathcal{A}^{(ij)}_{\gamma\gamma_i}(abc\,;\,a_ib_ic_i\,;\,s) = \Phi^{(ij)}_{\gamma\gamma_i}(abc\,;\,a_ib_ic_i\,;\,s)$$

$$- \sum_{\substack{\ell_{a_\alpha},\ \ell_{b_\alpha},\ \Lambda_\alpha \\ M_{ab},\ m_\Lambda,\ M_{a_\alpha b_\alpha},\ m_{\Lambda_\alpha} \\ n_{\ell_{b_\alpha}},\ n_{\ell_a},\ n_{\ell_b},\ N_{ab} \\ \Lambda''',\ m_{\Lambda'''},\ n_\Lambda,\ n_{\Lambda_\alpha},\ n_{\Lambda'''}}} \int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}} da_\ell^2 \int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}} dc_\ell^2 \int_0^\infty db_\ell^2\, (-1)^{\substack{\ell_b+\ell_{b_\alpha}+\Lambda+\Lambda_\alpha+n_{\ell_b}+n_{\ell_a}+n_\Lambda \\ -\ell_a-\ell_{a_\alpha}-J_{ab}-J_{a_\alpha b_\alpha}-m_\Lambda \\ -m_{\ell_b}-m_{\ell_a}-M_{ab} \\ -M_{a_\alpha b_\alpha}}}$$

$$\cdot \frac{(2\ell_{a_\alpha}+1)^{1/2}\pi\sqrt{\pi}\left[(2\mathcal{J}+1)^2(2J_{ab}+1)(2J_{a_\alpha b_\alpha}+1)(2\Lambda'''+1)^2\right]^{1/2}}{32\, X_\ell Y_\ell Z_\ell \quad bc} \begin{pmatrix} J_{ab} & \Lambda & \mathcal{J} \\ M_{ab} & m_\Lambda & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{a_\alpha b_\alpha} & \Lambda_\alpha & \mathcal{J} \\ M_{a_\alpha b_\alpha} & n_{\Lambda_\alpha} & -\mathcal{M} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \ell_{a_\alpha} & \ell_{b_\alpha} & J_{a_\alpha b_\alpha} \\ 0 & n_{\ell_{b_\alpha}} & -n_{\ell_{b_\alpha}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_a & \ell_b & J_{ab} \\ n_{\ell_a} & n_{\ell_b} & N_{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda_\alpha & \Lambda''' \\ -m_\Lambda & -m_{\Lambda_\alpha} & -m_{\Lambda'''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda_\alpha & \Lambda''' \\ -n_\Lambda & n_{\Lambda_\alpha} & -n_{\Lambda'''} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} J_{a_\alpha b_\alpha} & J_{ab} & \Lambda''' \\ M_{a_\alpha b_\alpha} & M_{ab} & m_{\Lambda'''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{a_\alpha b_\alpha} & J_{ab} & \Lambda''' \\ n_{\ell_{b_\alpha}} & N_{ab} & n_{\Lambda'''} \end{pmatrix} \int d\phi_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell}$$

$$\cdot\ Y^*_{\ell_b n_{\ell_b}}(\Theta_{\vec{b}\vec{a}_\ell}, \Phi_{\vec{a}\vec{a}_\ell})\, Y^*_{\Lambda n_\Lambda}(\Theta_{\vec{c}\vec{a}_\ell}, \Phi_{\vec{c}\vec{a}_\ell})\, Y^*_{\ell_a n_{\ell_a}}(\Theta_{\vec{a}_m \vec{a}_\ell}, 0)$$

$$\cdot\ Y_{\ell_{b_\alpha} n_{\ell_{b_\alpha}}}(\Theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell}, \Phi_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})\, Y_{\Lambda_\alpha n_{\Lambda_\alpha}}(\Theta_{\vec{c}_\ell \vec{a}_\ell}, \Phi_{\vec{c}_\ell \vec{a}_\ell})\, T^{(ij)}_{\ell_a}(a, a_m, s-b^2-c^2)$$

$$\cdot\ \mathcal{A}^{(k\ell)}_{\gamma_\ell \gamma_i}(a_\ell b_\ell c_\ell\ ;\ a_i b_i c_i\ ;\ s) \qquad (111'''')$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \ell'_a & \ell'_b & J'_{ab} \\ 0 & n_{\ell'_b} & -n_{\ell'_b} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \ell_a & \ell_b & J_{ab} \\ n_{\ell_a} & n_{\ell_b} & N_{ab} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda' & \Lambda'' \\ -m_\Lambda & m_{\Lambda'} & -m_{\Lambda''} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda' & \Lambda'' \\ -n_\Lambda & n_{\Lambda'} & -n_{\Lambda''} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} J'_{ab} & J_{ab} & \Lambda'' \\ M'_{ab} & -M_{ab} & m_{\Lambda''} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} J'_{ab} & J_{ab} & \Lambda'' \\ n_{\ell'_b} & N_{ab} & n_{\Lambda''} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \int d\,\phi_{\vec{b}_j \vec{a}_j}\; Y^*_{\ell_b n_{\ell_b}}(\theta_{\vec{b}\vec{a}_j}, \phi_{\vec{b}\vec{a}_j})\; Y^*_{\Lambda n_\Lambda}(\theta_{\vec{c}\vec{a}_j}, \phi_{\vec{c}\vec{a}_j})\; Y^*_{\ell_a n_{\ell_a}}(\theta_{\vec{a}_i \vec{a}_j}, o)$$

$$\cdot\; Y_{\ell'_b n_{\ell'_b}}(\theta_{\vec{b}_j \vec{a}_j}, \phi_{\vec{b}_j \vec{a}_j})\; Y_{\Lambda' n_{\Lambda'}}(\theta_{\vec{c}_j \vec{a}_j}, \phi_{\vec{c}_j \vec{a}_j})\; \mathcal{a}^{(ij)}_{\ell_a}(a, a_i, s''') \qquad (111)$$

Cependant quand, à la place de $\mathcal{a}^{(ij)}_{\ell_a}$, nous utilisons $\mathcal{a}^{(k\ell)}_{\ell_b}$ qui agit sur b et b_i, nous obtiendrons des distributions $\delta(a^2-a_i^2)$ et $\delta(c^2-c_i^2)$ et la différentielle suivante :

$$d(\cos\theta_{\vec{b}_j \vec{a}_j})\, d(\cos\theta_{\vec{c}_j \vec{a}_j}) = \frac{da_i^2\, dc_i^2}{4X_jY_jZ_ja_jb_jc_j} \qquad (110')$$

Le produit $X_jY_jZ_j$ ainsi que les bornes E_{ij} et G_{ij} sont invariantes et à la place des bornes S_{ij} et W_{ij}, nous aurons :

$$S'_{ij} = \frac{(a_i - \alpha^i_{jk}\, b_j)}{(\alpha^j_{i\ell})^2} \quad \text{et} \quad W'_{ij} = \frac{(a_i + \alpha^i_{jk}\, b_j)^2}{(\alpha^j_{i\ell})^2}$$

Nous envisageons une transformation qui fait passer du trièdre de référence à un trièdre où le vecteur $\vec{a}_j$ est colinéaire à z et x appartient au plan formé par les vecteurs $\vec{b}_i$ et $\vec{a}_j$. (cf précédemment)

K_{ij} s'écrira alors :

$$K_{ij} = \frac{(2\ell'_a+1)^{1/2}\pi\sqrt{\pi}}{4X_jY_jZ_ja_jb_jc_jac} \sum_{\substack{M_{ab}, m_\Lambda, M'_{ab}, m_{\Lambda'} \\ n_{\ell'_b}, n_{\ell_a}, n_{\ell_b}, N_{ab} \\ \Lambda'', m_{\Lambda''}, n_\Lambda, n_{\Lambda'}, n_{\Lambda''}}} (-1)^{\ell_b+\ell'_b+\Lambda+\Lambda'+n_{\ell_b}+n_{\ell_a}+n_\Lambda-\ell_a-\ell'_a} -J_{ab}-J'_{ab}-m_\Lambda-m_{\ell_b}-m_{\ell_a}-M-M'$$

$$\cdot \quad \left[(2\mathcal{J}+1)^2(2J_{ab}+1)(2J'_{ab}+1)(2\Lambda''+1)^2\right]^{1/2} \begin{pmatrix} J_{ab} & \Lambda & \mathcal{J} \\ M_{ab} & m_\Lambda & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J'_{ab} & \Lambda' & \mathcal{J} \\ M'_{ab} & n_{\Lambda'} & -\mathcal{M} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \quad \begin{pmatrix} \ell'_a & \ell'_b & J'_{ab} \\ 0 & n_{\ell'_b} & -n_{\ell'_b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_a & \ell_b & J_{ab} \\ n_{\ell_a} & n_{\ell_b} & N_{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda' & \Lambda'' \\ -m_\Lambda & m_{\Lambda'} & -m_{\Lambda''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda' & \Lambda'' \\ -n_\Lambda & n_{\Lambda'} & -n_{\Lambda''} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \quad \begin{pmatrix} J'_{ab} & J_{ab} & \Lambda'' \\ M'_{ab} & -M_{ab} & m_{\Lambda''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J'_{ab} & J_{ab} & \Lambda'' \\ n_{\ell'_b} & N_{ab} & n_{\Lambda''} \end{pmatrix} \int d\, \phi_{\vec{b}_j \vec{a}_j}\, Y^*_{\ell_a n_{\ell_a}} (\Theta_{\vec{a}\vec{a}_j}, \phi_{\vec{a}\vec{a}_j})$$

$$\cdot \quad Y^*_{\Lambda n_\Lambda}(\Theta_{\vec{c}\vec{a}_j}, \phi_{\vec{c}\vec{a}_j})\; Y^*_{\ell_b n_{\ell_b}}(\Theta_{\vec{b}_i \vec{a}_j}, 0)\; Y_{\ell'_b n_{\ell'_b}}(\Theta_{\vec{b}_j \vec{a}_j}, \phi_{\vec{b}_j \vec{a}_j})\; Y_{\Lambda' n_{\Lambda'}}(\Theta_{\vec{c}_j \vec{a}_j}, \phi_{\vec{c}_j \vec{a}_j})$$

$$\times\; a^{(k\ell)}_{\ell_b}(b, b_i, s'') \qquad (112)$$

Nous pouvons écrire aussi K_{ij} pour une transformation qui ferait passer du trièdre de référence à un trièdre où le vecteur $\vec{b}_j$ est colinéaire à z et où x appartient au plan formé par les vecteurs $\vec{b}_i$ et $\vec{b}_j$. Il nous faut étudier maintenant le problème à trois corps pour déterminer la forme de $\psi^{(k)ij}_{\rho\rho_i}$ (p q; $p_i q_i$; s - r^2) et le problème à deux corps pour expliciter $T^{(ij)}_\ell$ (p; p_i; s - q^2 - r^2) ainsi que $a^{(ij)}_{\ell_a}$ (a; a_i; s - b^2 - c^2) et $a^{(k\ell)}_{\ell_b}$ (b; b_i; s - a^2 - c^2)

X . EQUATIONS DE FADDEEV

POUR LE PROBLEME A TROIS CORPS

Les équations de Faddeev du problème à trois corps s'écrivent [3]

$$T_{ij}^{(k)}(E') = T_{ij}(E') + T_{ij}(E')\, G_o(E') \left[T_{i\ell}^{(k)}(E') + T_{j\ell}^{(k)}(E')\right]$$

$$\text{où : } E' = E - H_r \qquad (113)$$

D'une manière analogue au problème à quatre corps, nous définissons successivement des observables $\vec{p}$ et $\vec{q}$ définissant une base $|\vec{p}\ \vec{q}>$ et reliées entre elles par les relations :

$$\vec{p}_i = \alpha_{ij}\vec{p}_j - \beta_{ij}\vec{q}_j$$

$$\vec{q}_i = -\beta_{ij}\vec{p}_j + \alpha_{ij}\vec{q}_j$$

$$\text{avec : } \alpha_{ij} = \left[\frac{m_i\, m_j}{(m_i+m_k)(m_j+m_k)}\right]^{1/2} \qquad (114)$$

$$\beta_{ij} = (1 - \alpha_{ij}^2)^{1/2}$$

Nous choisissons deux ensembles complets d'observables compatibles $\{H_p, H_q, \vec{L}^2, L_z, \vec{\ell}^2, \ell_z\}$ et $\{H_p, H_q, \vec{J}^2, J_z, \vec{L}^2, \vec{\ell}^2\}$ dont les kets propres vérifient les relations :

$$|\, p\ q\ L\ m_L\ \ell\ m_\ell > \ = \int d\hat{p}\ d\hat{q}\ Y_{Lm_L}(\hat{q})\ \ Y_{\ell m_\ell}(\hat{p})\ |\vec{p}\ \vec{q}>$$

$$|\, p\ q\ J\ M\ L\ \ell> = \sum_{m_L, m_\ell} (-1)^{\ell-L-M}\ (2J+1)^{1/2} \begin{pmatrix} L & \ell & J \\ m_L & m_\ell & -M \end{pmatrix} |p\ q\ L\ m_L\ \ \ell\ m_\ell> \qquad (115)$$

En projetant les équations de Faddeev sur les kets $|p\ q\ \rho>$ où $\rho = J\ M\ L\ \ell$ et en utilisant :

$$< p_\ell\, q_\ell\, \rho_\ell |\, G_o\,(s')\, |p_f\, q_f\, \rho_f> = \frac{-1}{p_\ell^{\,2}+q_\ell^{\,2}-s'}\,(4\, q_\ell p_\ell)^{-2}\;\; \delta(p_\ell^{\,2}-p_f^2)\;\delta(q_\ell^{\,2}-q_f^{\,2})$$

$$\int dp^2_{\,f}\;\; \delta(p_\ell^{\,2} - p_f^{\,2}) = 1$$

Les équations de Faddeev deviennent :

$$\psi^{(k)ij}_{\rho\rho_i}\,(p\;q\;;\;p_i q_i;s') = \Phi^{(k)ij}_{\rho\rho_i}\,(p\;q\;;\;p_i q_i;s') - \frac{1}{4}\;\sum_{\rho_\ell}\iint dp^2_{\,\ell}\;\; dq^2_\ell\;\frac{p_\ell\; q_\ell}{p_\ell^{\,2}+q_\ell^{\,2}-s'}$$

$$\cdot\quad K^{(k)ij}\;(p\;q\;\rho;\;p_\ell\;q_\ell\rho_\ell)\;\Big[\psi^{(k)i\ell}_{\rho_\ell\rho_i}(p_\ell\;q_\ell;\;p_i q_i;s')$$

$$+\;\;\psi^{(k)j\ell}_{\rho_\ell\rho_i}\;(p_\ell q_\ell\;;\;p_i q_i;s')\Big] \qquad (116)$$

où nous avons défini :

$$< p\;q\;\rho|T^{(k)}_{ij}\;(s')\;|\;p_i q_i \rho_i > = \;\psi^{(k)ij}_{\rho\rho_i}\;(p\;q\;;\;p_i q_i;s')$$

$$< p\;q\;\rho|T_{ij}\;\;(s')\;|\;p_i q_i \rho_i > = \;\Phi^{(k)ij}_{\rho\rho_i}\;(p\;q\;;\;p_i q_i;s')$$

$$< p\;q\;\rho|T_{ij}\;\;\;(s')|\;p_\ell q_\ell \rho_\ell > = K^{(k)ij}\;(p\;q\;\rho\;;\;p_\ell q_\ell \rho_\ell\;)$$

SCS LILLE

Il nous reste à étudier le noyau $K^{(k)ij}$. Pour cela, nous employons la même méthode qu'au paragraphe I du chapitre VII du problème à quatre corps.

Nous obtenons :

$$K^{(k)ij} = \frac{2(2\ell_1+1)^{1/2}\pi\sqrt{\pi}}{q}\;\sum_{\substack{n_\ell,n_L\\ n_{L_1}}}\;(-1)^{\ell+\ell_1-L-L_1+n_\ell+n_L-m_\ell-m_L}\begin{pmatrix} L & \ell & J\\ n_L & n_\ell & -n_{L_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_1 & \ell_1 & J\\ n_{L_1} & 0 & -n_{L_1}\end{pmatrix}$$

$$\cdot\;\int d(\cos\Theta_{\vec q_\ell \vec p_\ell})\,\delta(q^2-q_k^{\,2})\;Y^*_{\ell n_\ell}(\Theta_{\vec p_k \vec p_\ell},0)\;Y^*_{Ln_L}(\Theta_{\vec q_k \vec p_\ell},\,0)$$

$$\cdot\;\;Y_{L_1 n_{L_1}}\;(\Theta_{\vec q_\ell \vec p_\ell},0)\;\;T^{(ij)}_\ell\;\;(p,\,p_k,\,s'-q^2) \qquad (117)$$

Pour terminer le calcul de $K^{(k)ij}$ il faut intégrer la distribution liée au centre de masse du problème à trois corps $\delta(q^2-q_k^{\,2})$. Pour cela, nous explicitons donc la différentielle $d(\cos\Theta_{\vec q_\ell \vec p_\ell})$ en fonction de $dq_k^{\,2}$.

D'après l'appendice B :

$$d\,(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell \vec{p}_\ell}) = \frac{dq_k^{\,2}}{2\,\alpha_{k\ell}\,\beta_{k\ell} p_\ell q_\ell}$$

où l'intégration sur $p_\ell^{\,2}$ se fera

de $L_{k\ell} = \dfrac{(q_k - \alpha_{k\ell}\, q_\ell)^2}{(\beta_{k\ell})^2}$ à $U_{k\ell} = \dfrac{(q_k + \alpha_{k\ell}\, q_\ell)^2}{(\beta_{k\ell})^2}$

$K^{(k)ij}$ s'écrit par conséquent :

$$K^{(k)ij} = \frac{(2\ell_1+1)^{1/2}\pi\sqrt{\pi}}{\alpha_{k\ell}\beta_{k\ell}p_\ell q_\ell q} \sum_{\substack{n_\ell, n_L \\ n_{L_1}}} (-1)^{\ell+\ell_1-L-L_1+n_\ell+n_L-m_\ell-m_L} \begin{pmatrix} L & \ell & J \\ n_L & n_\ell & -n_{L_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & \ell_1 & J \\ n_{L_1} & 0 & -n_{L_1} \end{pmatrix}$$

$$\cdot\; Y^*_{\ell n_\ell}(\Theta_{\vec{p}_k \vec{p}_\ell}, 0)\; Y^*_{L n_L}(\Theta_{\vec{q}_k \vec{p}_\ell}, 0)\; Y_{L_1 n_{L_1}}(\Theta_{\vec{q}_\ell \vec{p}_\ell}, 0)\; T^{(ij)}_\ell(p, p_k, s' - q^2) \tag{118}$$

Les équations de Faddeev du problème à trois corps s'écrivent :

$$\psi^{(k)ij}_{\rho\rho_i}(pq\,;\,p_i q_i; s') = \phi^{(k)ij}_{\rho\rho_i}(p\,q\,;\,p_i q_i; s') - \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4\,\alpha_{k\ell}\beta_{k\ell}q} \sum_{\substack{n_\ell, n_L, n_{L_1} \\ \ell_1, L_1}} (-1)^{\ell+\ell_1-L-L_1+n_\ell+n_L-m_\ell-m_L}$$

$$\cdot \int_0^\infty dq_\ell^{\,2} \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^{\,2}\, \frac{(2\ell_1+1)^{1/2}}{p_\ell^{\,2}+q_\ell^{\,2}-s'} \begin{pmatrix} L & \ell & J \\ n_L & n_\ell & -n_{L_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & \ell_1 & J \\ n_{L_1} & 0 & -n_{L_1} \end{pmatrix}$$

$$\cdot\; Y^*_{\ell n_\ell}(\Theta_{\vec{p}_k \vec{p}_\ell}, 0)\; Y^*_{L n_L}(\Theta_{\vec{q}_k \vec{p}_\ell}, 0)\; Y_{L_1 n_{L_1}}(\Theta_{\vec{q}_\ell \vec{p}_\ell}, 0)\; T^{(ij)}_\ell(p, p_k, s' - q^2)$$

$$\cdot \left[\psi^{(k)i\ell}_{\rho_\ell \rho_i}(p_\ell q_\ell; p_i q_i; s') + \psi^{(k)j\ell}_{\rho_\ell \rho_i}(p_\ell q_\ell; p_i q_i; s') \right] \tag{119}$$

L'étude complète du problème à trois corps nécessite la connaissance des solutions du problème à deux corps dont nous rappelons maintenant les principaux résultats.

XI. EQUATIONS DE LIPPMANN-SCHWINGER

DU PROBLEME A DEUX CORPS

Considérons le système quantique régi par l'hamiltonien H_{ij} du problème à deux corps. [18] [21] .

On écrit :

$$H_{ij} = H_p + V_{ij}$$

où H_p est l'hamiltonien des deux particules libres.

On connait ses valeurs propres et ses kets propres :

$$H_p \mid \vec{p} > \; = \; p^2 \mid \vec{p} >$$

V_{ij} est le potentiel d'interaction des deux particules i et j

On cherche les solutions de :

$$H_{ij}|\psi> \; = \; E''|\psi> \qquad \text{où } E'' = E - H_q - H_r$$

Les équations de Lippmann Schwinger relient $|\psi>$ à $|\vec{p}>$:

$$|\psi> \; = \; |\vec{p}> \; + \frac{1}{E - H_p} \; V_{ij}|\psi>$$

où en appelant : $G_o\ (E'') = \dfrac{1}{E'' - H_p}$

$$|\psi> \; = \; |\vec{p}> \; + G_o\ (E'') \;\; V_{ij}|\psi> \qquad (120)$$

Les équations de Lippmann-Schwinger s'écrivent aussi en faisant intervenir la matrice de transition T_{ij} :

$$T_{ij}\ (E'') = V_{ij} + V_{ij}\ G_{ij}\ (E'')\ V_{ij} \qquad (120')$$

$$T_{ij}\ (E'') = V_{ij} + V_{ij}\ G_{ij}\ (E'')\ T_{ij}\ (E'') \qquad (120'')$$

où : $G_{ij}\ (E'') = \dfrac{1}{E''-H_{ij}}$

(Nous remarquons que l'équation (120') fait intervenir l'opérateur de Green G_{ij} (E") lié à l'hamiltonien H_{ij}).

Les kets propres de H_{ij} représentent soit des états discrets $|\psi_n>$ de valeurs propres E_n, soit des états continus $|\psi_\sigma>$ de valeurs propres E_σ.

Définissons l'opérateur identité $\hat{I}$ tel que :

$$\hat{I} = \sum_n |\psi_n><\psi_n| + \int d\sigma\, |\psi_\sigma><\psi_\sigma| \tag{121}$$

L'équation (120') devient :

$$T_{ij}(E'') = V_{ij} + \sum_n \frac{V_{ij}|\psi_n><\psi_n|V_{ij}}{E''-E_n} + \int d\sigma \frac{V_{ij}|\psi_\sigma><\psi_\sigma|V_{ij}}{E''-E_\sigma} \tag{122}$$

Dans la base des kets propres $|\vec{p}>$ de H_p, les équations de Lippmann-Schwinger prennent la forme :

$$<\vec{p}|T_{ij}(s'')|\vec{p}_i> = <\vec{p}|V_{ij}|\vec{p}_i> + \sum_n \frac{<\vec{p}|V_{ij}|\psi_n><\psi_n|V_{ij}|\vec{p}_i>}{s''-E_n}$$

$$+ \int d\sigma \frac{<\vec{p}|V_{ij}|\psi_\sigma><\psi_\sigma|V_{ij}|\vec{p}_i>}{s''-E_\sigma} \tag{123}$$

$$<\vec{p}|T_{ij}(s'')|\vec{p}_i> = <\vec{p}|V_{ij}|\vec{p}_i> + \int d\vec{p}_k \frac{<\vec{p}|V_{ij}|\vec{p}_k><\vec{p}_k|T_{ij}(s'')|\vec{p}_i>}{s''-p_k^2} \tag{124}$$

Nous pouvons écrire les mêmes équations pour T_{ij} et $T_{k\ell}$ du problème à quatre corps avec interactions par couples:

$$<\vec{a}|T_{ij}(s''')|\vec{a}_k> = <\vec{a}|V_{ij}|\vec{a}_k> + \sum_n \frac{<\vec{a}|V_{ij}|\psi_n><\psi_n|V_{ij}|\vec{a}_k>}{s'''-E_n}$$

$$+ \int d\sigma \frac{<\vec{a}|V_{ij}|\psi_\sigma><\psi_\sigma|V_{ij}|\vec{a}_k>}{s'''-E_\sigma} \tag{123'}$$

$$<\vec{b}|T_{k\ell}(s''')|\vec{b}_k> = <\vec{b}|V_{k\ell}|\vec{b}_k> + \sum_n \frac{<\vec{b}|V_{k\ell}|\psi_n><\psi_n|V_{k\ell}|\vec{b}_k>}{s'''-E_n}$$

$$+ \int d\sigma \frac{<\vec{b}|V_{k\ell}|\psi_\sigma><\psi_\sigma|V_{k\ell}|\vec{b}_k>}{s'''-E_\sigma} \tag{123''}$$

$$\langle\vec{a}|T_{ij}(s'')|\vec{a}_k\rangle=\langle\vec{a}|V_{ij}|\vec{a}_k\rangle + \int d\vec{a}_r \frac{\langle\vec{a}|V_{ij}|\vec{a}_r\rangle\langle\vec{a}_r|T_{ij}(s'')|\vec{a}_k\rangle}{s'' - a_r^2} \qquad (124')$$

$$\langle\vec{b}|T_{k\ell}(s''')|\vec{b}_k\rangle=\langle\vec{b}|V_{k\ell}|\vec{b}_k\rangle + \int d\vec{b}_r \frac{\langle\vec{b}|V_{k\ell}|\vec{b}_r\rangle\langle\vec{b}_r|T_{k\ell}(s''')|\vec{b}_k\rangle}{s'' - b_r^2} \qquad (124'')$$

Nous n'explicitons pas les éléments de matrice de transition $T_\ell^{(ij)}$, $T_{\ell_a}^{(ij)}$ et $T_{\ell_b}^{(k\ell)}$ car, comme nous le verrons dans la 2° partie, nous pouvons apporter de grandes simplifications dans les équations précédentes et leur écriture en ondes partielles en sera facilitée.

X. CONCLUSION

La connaissance des potentiels d'interaction entre deux particules nous permet donc de déterminer en principe les solutions des équations de Faddeev du problème à quatre corps.

Dans le cas général (potentiel quelconque et moments angulaires non nuls), les équations de Faddeev du problème à quatre corps sont actuellement pratiquement insolubles numériquement.

Nous considérons dans la suite le cas d'atomes étudiés dans leur état fondamental et où les potentiels sont donc du type coulombien.

ETUDE DU FORMALISME

DANS LE CAS

DE POTENTIELS COULOMBIENS

I. INTRODUCTION

Dans cette deuxième partie, nous étudions la forme des équations de Faddeev du problème à quatre corps dans le cas d'interactions coulombiennes en nous plaçant au niveau des basses énergies.

Dans un premier temps, nous donnons les résultats concernant les potentiels attractifs [5] et les potentiels répulsifs [3] [4] [21] et nous les insérons dans les équations de Faddeev du problème à trois corps et à quatre corps avec interactions par paires.

Dans un deuxième temps, nous utilisons ces résultats pour donner une forme simple aux équations de Faddeev du problème à quatre corps. Ces équations seront correctes après une seule itération [8].

II. POTENTIELS COULOMBIENS

DEUX CORPS

Les potentiels coulombiens sont de deux types : attractif (dans ce cas nous sommes au voisinage d'un état lié) ou répulsif.

Nous allons donner les formes que revêt la matrice de transition T_{ij} dans les deux cas.

I. Potentiel attractif [5].

Dans ce cas, nous sommes au voisinage d'un état lié, c'est-à-dire $s'' = E_n = \frac{-Z^2\mu}{n^2}$ (en unités Rydberg) et le deuxième terme de l'équation de Lippmann-Schwinger (123) prédomine :

$$\langle\vec{p}|T_{ij}(s'')|\vec{p}_i\rangle \simeq \sum_n \frac{\langle\vec{p}|V_{ij}|\psi_n\rangle\langle\psi_n|V_{ij}|\vec{p}_i\rangle}{s'' - E_n} \qquad (125)$$

Nous savons que $|\psi_n\rangle$ est ket propre de H avec la valeur propre E_n et $|\vec{p}\rangle$ ket propre de H_o avec la valeur propre p^2, par conséquent nous écrirons :

$$\langle\vec{p}|V_{ij}|\psi_n\rangle = \langle\vec{p}|H-H_o|\psi_n\rangle = \langle\vec{p}|H|\psi_n\rangle - \langle\vec{p}|H_o|\psi_n\rangle = \langle\vec{p}|\psi_n\rangle E_n$$

$$- p^2\langle\vec{p}|\psi_n\rangle = (E_n-p^2)\langle\vec{p}|\psi_n\rangle = (E_n-p^2)\,\psi_n(\vec{p})$$

Utilisant ce résultat, l'équation (125) devient :

$$\langle\vec{p}|T_{ij}(s'')|\vec{p}_i\rangle \simeq \sum_n \frac{(E_n-p^2)(E_n-p_i^2)}{s'' - E_n}\,\psi_n(\vec{p})\,\psi_n(\vec{p}_i) \qquad (12\ldots)$$

Définissons l'ensemble complet d'observables compatibles $\{H_p, \vec{\ell}^2, \vec{\ell}_z\}$ de kets propres $|p\,\ell\,m_\ell\rangle$ et dont l'opérateur identité $\hat{I}$ s'écrit :

$$\hat{I} = \sum_{\ell, m_\ell} \int p^2 \, dp \, | \, p \, \ell \, m_\ell >< p \, \ell \, m_\ell \, |$$

Portant l'opérateur identité dans l'élément de matrice $<\vec{p} \mid T_{ij}(s'') \mid \vec{p}_i>$ et définissant la fonction propre associée au ket propre $| \, p_k \, \ell' \, m_{\ell'} >$:

$$< \vec{p} \mid p_k \ell' m_{\ell'} > = \frac{\delta(p - p_k)}{p^2} \, Y_{\ell' m_{\ell'}} (\hat{p})$$

nous en déduisons que :

$$<\vec{p}|T_{ij}(s'')|\vec{p}_i> = \sum_{\substack{\ell', \ell'' \\ m_{\ell'}, m_{\ell''}}} Y_{\ell' m_{\ell'}} (\hat{p}) \, Y^*_{\ell'' m_{\ell''}} (\hat{p}_i) \, T_{\ell' \ell''} (p, p_i, s'') \qquad (126)$$

En introduisant la conservation du moment angulaire lié à deux corps : $\ell' = \ell''$, on obtient :

$$<\vec{p}|T_{ij}(s'')|\vec{p}_i> = \sum_{\ell'', m_{\ell''}} Y_{\ell'' m_{\ell''}} (\hat{p}) \, Y^*_{\ell'' m_{\ell''}} (\hat{p}_i) \, T_{\ell''} (p, p_i, s'') \qquad (126')$$

D'autre part, le potentiel coulombien étant central :

$$\psi_n (\vec{p}) = \sum_{\ell'', m_{\ell''}} F_{n \ell''} (p) \, Y_{\ell'' m_{\ell''}} (\hat{p})$$

avec : $F_{n\ell} (p) = \left[\frac{2^{4\ell+5}}{\pi} \, \frac{(n-\ell-1)!}{(n+\ell)!} \right]^{1/2} \ell! \, (-E_n)^{\frac{\ell+2}{2}}$

$$\cdot \frac{p^\ell}{(p^2-E_n)^{\ell+2}} \, C^{\ell+1}_{n-\ell-1} \left(\frac{p^2-E_n}{p^2+E_n} \right)$$

où $C^{\ell+1}_{n-\ell-1} \left(\frac{p^2-E_n}{p^2+E_n} \right)$ est la fonction de Gegenbauer.

Nous obtenons finalement :

$$T_{\ell''} (p, p_i, s'') = \sum_n \frac{(E_n - p^2)(E_n - p_i^2)}{s'' - E_n} \, F_{n\ell''} (p) \, F_{n\ell''} (p_i) \qquad (127)$$

II. Potentiel répulsif [3] [21] [4]

Les deux particules se trouvant dans un état lié à quatre corps, l'énergie correspondant à ce potentiel répulsif sera donc négative.

Comme nous l'avons montré précédemment, on peut écrire :

$$\langle\vec{p}|T_{ij}(s'')|\vec{p}_i\rangle = \sum_{\ell'',m_{\ell''}} Y_{\ell''m_{\ell''}}(\hat{p})\, Y^*_{\ell''m_{\ell''}}(\hat{p}_i)\, T_{\ell''}(p, p_i, s'')$$

$$\langle\vec{p}|V_{ij}|\vec{p}_i\rangle = \sum_{\ell'',m_{\ell''}} Y_{\ell''m_{\ell''}}(\hat{p})\, Y^*_{\ell''m_{\ell''}}(\hat{p}_i)\, V_{\ell''}(p, p_i)$$

L'équation de Lippmann-Schwinger s'écrira donc :

$$T_{\ell''}(p, p_i, s'') = V_{\ell''}(p, p_i) + \int p_k^2\, dp_k\, \frac{V_{\ell''}(p, p_k)}{s''-p_k^2}\, T_{\ell''}(p_k, p_i, s'') \quad (128)$$

Nous obtenons une équation intégrale. Il nous faut étudier si son noyau est de Hilbert-Schmidt [6]

Le noyau de cette équation intégrale est :

$$K_\ell(p, p_k, s'') = \frac{V_{\ell''}(p,p_k)}{s''-p_k^2} \quad (129)$$

s'' étant négatif, il n'y aura pas de pôle lié à s''.

Dans le cas d'un potentiel coulombien, on connaît la forme de $V_{\ell''}(p, p_k)$:

$$V_{\ell''}(p, p_k) = -\frac{Z\,\mu^{1/2}}{\sqrt{2}\,p\,p_k}\, Q_{\ell''}\left(\frac{p^2+p_k^2}{2pp_k}\right)$$

où la fonction de Legendre de seconde espèce $Q_{\ell''}$ est égale à :

$$Q_{\ell''}\left(\frac{p^2+p_k^2}{2pp_k}\right) = \frac{1}{2}\, P_{\ell''}\left(\frac{p^2+p_k^2}{2pp_k}\right) \mathrm{Log}\left(\frac{p+p_k}{p-p_k}\right)^2 - W_{\ell''-1}\left(\frac{p^2+p_k^2}{2pp_k}\right)$$

$W_{\ell''-1}$ est un polynôme de degré $\ell''-1$ et $P_{\ell''}$ un polynôme de Legendre de degré ℓ''.

$W_{\ell''-1}$ et $P_{\ell''}$ sont par conséquent deux fonctions régulières. $Q_{\ell''}$ aura un point de branchement logarithmique pour $p = p_k$ et elle sera singulière en ce point.

Cependant, comme nous nous plaçons en dehors de la couche de masse, la fonction $Q_{\ell''}$ sera régulière en tout point et $K_{\ell''}$ sera un noyau de Hilbert-Schmidt et vérifiera :

$$\iiint p^2\, dp\, p_k^2\, dp_k\, ds''\, |K_\ell(p, p_k, s'')|^2 < \infty$$

Tout opérateur de Hilbert-Schmidt peut être approché par un noyau de rang fini (cf. annexe).

$$K_{\ell''}(p, p_k, s'') = \sum_n \lambda_{n\ell''}(s'') \; \Phi_{n\ell''}(p, s'') \; \Phi_{n\ell''}(p_k, s'') \qquad (130)$$

les fonctions $\Phi_{n\ell''}(p)$ étant normalisées :

$$\int p^2 \, dp \; \Phi_{n\ell''}(p, s'') \; \Phi_{n'\ell''}(p, s'') = \delta_{nn'} \qquad (131)$$

L'équation de Lippmann-Schwinger devient :

$$T_{\ell''}(p,p_i,s'') = \sum_n \lambda_{n\ell''}(s'') \; \Phi_{n\ell''}(p,s'') \; \Phi_{n\ell''}(p_i, s'') \; (s''-p_i^2)$$
$$+ \sum_n \lambda_{n\ell''}(s'') \; \Phi_{n\ell''}(p,s'') \int p_k^2 \, dp_k \; \Phi_{n\ell''}(p_k,s'') \; T_{\ell''}(p_k, p_i, s'') \qquad (132)$$

Posons : $h(p_i,s'') = \int p_k^2 \, dp_k \; \Phi_{n\ell''}(p_k,s'') \; T_{\ell''}(p_k, p_i, s'')$

en multipliant les deux membres de (132) par $\Phi_{n'\ell''}(p, s'')$ et en intégrant sur p , on aboutit à :

$$h(p_i,s'') = \sum_n \lambda_{n\ell''}(s'') \Big[\Phi_{n\ell''}(p_i,s'') \int p^2 \, dp \; \Phi_{n\ell''}(p, s'') \; \Phi_{n'\ell''}(p, s'')(s''-p^2)$$
$$+ \int p^2 \, dp \; \Phi_{n\ell''}(p, s'') \; \Phi_{n'\ell''}(p, s'') \; h(p_i, s'')\Big] \qquad (133)$$

$$\text{soit : } h(p_i,s'') = \sum_n \frac{\lambda_{n\ell''}(s'')}{1-\lambda_{n\ell''}(s'')} \; \Phi_{n\ell''}(p_i,s'') \int p^2 \, dp \; \Phi^2_{n\ell''}(p, s'')(s''-p^2) \qquad (134)$$

Finalement, nous obtiendrons :

$$T_{\ell''}(p,p_i,s'') = \sum_n \frac{-\lambda_{n\ell''}(s'')}{1-\lambda_{n\ell''}(s'')} \; \Phi_{n\ell''}(p,s'') \; \Phi_{n\ell''}(p_i,s'')(p^2-s'') \qquad (135)$$

Il nous reste à déterminer la nature des $\lambda_{n\ell''}$ et $\Phi_{n\ell''}$.

Nous venons de voir que :

$$V_{\ell''}(p,p_i) = \sum_n \lambda_{n\ell''}(s'') \; \Phi_{n\ell''}(p,s'') \; \Phi_{n\ell''}(p_i,s'') \; (s''-p^2)$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $\Phi_{n'\ell''}(p,s'')$ et intégrons sur p_i. En tenant compte de (131) on obtient :

$$\int p_i^2 \, dp_i \; V_{\ell''}(p,p_i) \; \Phi_{n\ell''}(p_i,s'') = \lambda_{n\ell''}(s'') \; \Phi_{n\ell''}(p,s'') \; (s''-p^2) \qquad (136)$$

ou encore :

$$\int p_i^2 \, dp_i \, \frac{V_{\ell\mu}(p,p_i)}{\lambda_{n\ell''}(s'')} \, \Phi_{n\ell''}(p_i,s'') = \Phi_{n\ell''}(p_i,s'')(s''-p^2) \qquad (137)$$

C'est l'équation de Schrödinger en ondes partielles du potentiel $\frac{V}{\lambda_n}$ dont on connait les valeurs propres et les vecteurs propres pour une énergie négative :

$$\lambda_{n\ell''}(s'') = \frac{-Z\mu^{1/2}}{n\sqrt{-s''}}$$

$$\phi_{n\ell''}(p,s'') = \left[\frac{2^{4\ell''+5}}{\pi} \; \frac{(n-\ell''-1)!}{(n+\ell'')!}\right]^{1/2} \ell''! \, (-s'')^{\frac{\ell''+2}{2}} \; \frac{p^{\ell''}}{(p^2-s'')^{\ell''+2}}$$

$$\cdot \; C_{n-\ell''-1}^{\ell''+1}\left(\frac{p^2-s''}{p^2+s''}\right)$$

Nous aurons de même pour $T_{\ell''}$ les résultats suivants :

$$T_{\ell''_a}(a,a_k,s''') = \sum_{n_a} \frac{(E_{n_a}-a^2)(E_{n_a}-a_k^2)}{s'''-E_{n_a}} \; F_{n\ell''_{aa}}(a) \; F_{n\ell''_{aa}}(a_k) \qquad (127')$$

$$T_{\ell''_b}(b,b_k,s''') = \sum_{n_b} \frac{(E_{n_b}-b^2)(E_{n_b}-b_k^2)}{s'''-E_{n_b}} \; F_{n\ell''_{bb}}(b) \; F_{n\ell''_{bb}}(b_k) \qquad (127'')$$

$$T_{\ell''_a}(a,a_k,s''') = \sum_{n_a} \frac{-\lambda_{n\ell''_{aa}}(s''')}{1-\lambda_{n\ell''_{aa}}(s''')} \; \Phi_{n\ell''_{aa}}(a,s''') \, \Phi_{n\ell''_{aa}}(a_k,s''') \; (a^2-s''') \qquad (135')$$

$$T_{\ell''_b}(b,b_k,s''') = \sum_{n_b} \frac{-\lambda_{n\ell''_{bb}}(s''')}{1-\lambda_{n\ell''_{bb}}(s''')} \; \Phi_{n\ell''_{bb}}(b,s''') \, \Phi_{n\ell''_{bb}}(b_k,s''') \; (b^2-s''') \qquad (135'')$$

III. EQUATIONS DE FADDEEV

POUR LES POTENTIELS COULOMBIENS

TROIS CORPS

I - Introduction

Nous considérons le cas où le moment angulaire total est nul, ce qui entraîne : $J = N = n_{L_1} = 0$ et puisque $\vec{J} = \vec{L} + \vec{\ell}$ nous déduisons que :

$$\left| \begin{array}{l} L = \ell \\ n_L = -n_\ell \end{array} \right. \text{ et que } L_1 = \ell_1$$

Les équations de Faddeev du problème à trois corps s'écrivent :

$$\psi^{(k)ij}_{\ell\ell''}(pq\,;\,p_iq_i\,;\,s') = \Phi^{(k)ij}_{\ell\ell''}(pq\,;\,p_iq_i\,;\,s')$$

$$- \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4\,q\alpha_{k\ell}\beta_{k\ell}} \sum_{n_\ell,\ell_1} \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^{\,2} \int_0^\infty dq_\ell^{\,2} \frac{(2\ell_1+1)^{1/2}}{p_\ell^{\,2}+q_\ell^{\,2}-s'} \begin{pmatrix} \ell & \ell & 0 \\ -n_\ell & n_\ell & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y^*_{\ell n_\ell}(\Theta_{\vec{p}_k\vec{p}_\ell},0)\; Y^*_{\ell -n_\ell}(\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_\ell},0)\; Y_{\ell_1,0}(\Theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell},0)\; T^{(ij)}_\ell(p,\,p_k,\,s'-q^2)$$

$$\left[\psi^{(k)i\ell}_{\ell_1\ell''}(p_\ell q_\ell;\,p_iq_i;s') + \psi^{(k)j\ell}_{\ell_1\ell''}(p_\ell q_\ell;\,p_iq_i;s')\right] \tag{138}$$

Compte-tenu des propriétés des harmoniques sphériques, nous pouvons mettre le noyau de ces équations sous la forme :

$$K^{(k)ij} = \frac{(-1)^{\ell+\ell_1}}{8\,\pi\sqrt{\pi}} \left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2} P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell}) - P_\ell(\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})$$

$$\cdot\; T^{(ij)}_\ell(p,\,p_k,\,s'-q^2) \tag{139}$$

Les équations de Faddeev s'écriront :

$$\psi^{(k)ij}_{\ell\ell''}(pq\,;\,p_iq_i;s') = \Phi^{(k)ij}_{\ell\ell''}(pq\,;\,p_iq_i;s') + \sum_{\ell_1} \int_0^\infty dq_\ell^{\,2} \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^{\,2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{\ell+\ell_1+1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2}}{(p_\ell^2+q_\ell^2-s')\ 32\ \alpha_{k\ell}\beta_{k\ell}\ q} P_{\ell_1}(\cos\theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell})\ P_\ell(\cos\theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})\ T_\ell^{(ij)}(p,p_k s'-$$

$$\cdot \left[\psi^{(k)i\ell}_{\ell_1\ell''}(p_\ell q_\ell;\ p_i q_i; s') + \psi^{(k)j\ell}_{\ell_1\ell''}(p_\ell q_\ell;\ p_i q_i; s')\right] \qquad (140)$$

Itérons :

$$\psi^{(k)ij}_{\ell\ell''}(pq\ ;\ p_i q_i; s') = \Phi^{(k)ij}_{\ell\ell''}(pq\ ;\ p_i q_i; s')$$

$$+ \sum_{\ell_1} \int_0^\infty dq_\ell^2 \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^2 \frac{(-1)^{\ell+\ell_1+1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2} P_{\ell_1}(\cos\theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell})}{32\ \alpha_{k\ell}\ \beta_{k\ell}\ q(p_\ell^2+q_\ell^2-s')}$$

$$\cdot P_\ell(\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})\ T_\ell^{(ij)}(p,\ p_k,\ s'-q^2)\left[\Phi^{(k)i\ell}_{\ell_1\ell''}(p_\ell q_\ell;\ p_i q_i; s')\right.$$

$$\left. + \Phi^{(k)j\ell}_{\ell_1\ell''}(p_\ell q_\ell\ ;\ p_i q_i\ s')\right]$$

$$+ \sum_{\ell_1} \int_0^\infty dq_\ell^2 \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^2 \frac{(-1)^{\ell+\ell_1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2} P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell})\ P_\ell(\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})}{32\ \alpha_{k\ell}\ \beta_{k\ell} q(p_\ell^2+q_\ell^2-s')}$$

$$\cdot T_\ell^{(ij)}(p,\ p_k,\ s'-q^2)\ \sum_{\ell_2} \int_0^\infty dq_m^2 \int_{L_{\ell m}}^{U_{\ell m}} dp_m^2 \frac{(-1)^{\ell_1+\ell_2}\left[(2\ell_1+1)(2\ell_2+2)\right]^{1/2}}{32\ \alpha_{\ell m}\ \beta_{\ell m}\ q_\ell}$$

$$\cdot \frac{P_{\ell_2}(\cos\Theta_{\vec{q}_m\vec{p}_m}) P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})}{(p_m^2+q_m^2-s')} \left\{ T^{(i\ell)}_{\ell_1}(p_\ell,\ p_k,\ s'-q_\ell^2)\right.$$

$$\cdot \left[\psi^{(k)ij}_{\ell_1\ell''}(p_m q_m\ ;\ p_i q_i; s') + \psi^{(k)j\ell}_{\ell_1\ell''}(p_m q_m\ ;\ p_i q_i;\ s')\right] +$$

$$\left. T^{(j\ell)}_{\ell_1}(p_\ell,\ p_k,\ s'-q^2)\left[\psi^{(k)ij}_{\ell_1\ell''}(p_m q_m;\ p_i q_i;\ s') + \psi^{(k)i\ell}_{\ell_1\ell''}(p_m q_m;\ p_i q_i;\ s')\right]\right\}$$

(141)

Utilisons les résultats du problème à deux corps concernant les éléments de matrice de transition T_ℓ.

Il y aura trois cas possibles suivant que T_ℓ et T_{ℓ_1} sont associés à des potentiels attractifs, à des potentiels répulsifs ou que l'un est associé à un potentiel attractif, l'autre à un potentiel répulsif.

II. Potentiels attractifs

Nous avons vu que dans ce cas :

$$T_\ell^{(ij)}(p, p_k, s'-q^2) = \sum_n \frac{(E_n-p^2)(E_n-p_k^2)}{s'-q^2-E_n} F_{n\ell}(p) F_{n\ell}(p_k)$$

On aura de même pour $T_{\ell_1}^{(i\ell)}$ et $T_{\ell_1}^{(j\ell)}$:

$$T_{\ell_1}^{(i\ell)}(p_\ell, p_k, s'-q^2) = T_{\ell_1}^{(j\ell)}(p_\ell, p_k, s'-q^2) =$$

$$\sum_{n_1} \frac{(E_{n_1}-p_\ell^2)(E_{n_1}-p_k^2)}{s'-q_\ell^2-E_{n_1}} F_{n_1\ell_1}(p_\ell) F_{n_1\ell_1}(p_k)$$

Les équations de Faddeev s'écrivent alors :

$$\psi_{\ell\ell''}^{(k)ij}(pq\,;\,p_iq_i;s') = \Phi_{\ell\ell''}^{(k)ij}(pq\,;\,p_iq_i;s') + \sum_{\ell_1,n} \int_0^\infty dq_\ell^2 \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^2$$

$$\cdot \frac{(-1)^{\ell+\ell_1+1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2} P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell}) P_\ell(\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})(E_n-p^2)(E_n-p_k^2)}{32\,\alpha_{k\ell}\,\beta_{k\ell}\;q\;(p_\ell^2+q_\ell^2-s')\;(s'-q^2-E_n)}$$

$$\cdot F_{n\ell}(p) F_{n\ell}(p_k)\left[\Phi_{\ell_1\ell''}^{(k)i\ell}(p_\ell q_\ell;\,p_iq_i;s') + \Phi_{\ell_1\ell''}^{(k)j\ell}(p_\ell q_\ell;\,p_iq_i;s')\right]$$

$$+ \sum_{\ell_1,n} \int_0^\infty dq_\ell^2 \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^2 \frac{(-1)^{\ell+\ell_1+1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2} P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell}) P_\ell(\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})}{32\,\alpha_{k\ell}\,\beta_{k\ell}\;q\;(p_\ell^2+q_\ell^2-s')(s'-q^2-E_n)}$$

$$\cdot (E_n-p^2)(E_n-p_k^2) F_{n\ell}(p) F_{n\ell}(p_k) \sum_{\ell_2,n_1} \int_0^\infty dq_m^2 \int_{L_{\ell m}}^{U_{\ell m}} dp_m^2 (-1)^{\ell_1+\ell_2} (2\ell_1+1)^{1/2}$$

$$\cdot \frac{(2\ell_2+1)^{1/2}\, P_{\ell_2}(\cos\Theta_{\vec{q}_m\vec{p}_m})\, P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})\,(E_{n_1}-p_k^2)(E_{n_1}-p_\ell^2)\, F_{n_1\ell_1}(p_k)\, F_{n_1\ell_1}(p_\ell)}{32\,\alpha_{\ell m}\;\beta_{\ell m}\, q_\ell\,(p_m^2+q_m^2-s')(s'-q_\ell^2-E_{n_1})}$$

$$\cdot \left[2\psi^{(k)ij}_{\ell_1\ell''}(p_m q_m\,;\, p_i q_i; s') + \psi^{(k)j\ell}_{\ell_1\ell''}(p_m q_m\,;\, p_i q_j; s') + \psi^{(k)i\ell}_{\ell_1\ell''}(p_m q_m\,;\, p_i q_j; s')\right] \tag{142}$$

Définissons la fonction $\chi^{(k)ij}_{n\ell}(q, q_i, s')$ telle que :

$$\psi^{(k)ij}_{\ell\ell''}(pq\,;\, p_i q_i; s') = \Phi^{(k)ij}_{\ell\ell''}(pq\,;\, p_i q_i; s') + \sum_n \frac{(E_n-p^2)(E_n-p_k^2)}{s'-q^2-E_n}$$

$$\cdot\; F_{n\ell}(p)\;\; \chi^{(k)ij}_{n\ell\ell''}(q, q_i, s') \tag{143}$$

Portant cette expression dans (142), nous obtenons :

$$\chi^{(k)ij}_{n\ell\ell''}(q, q_i, s') = \eta^{(k)ij}_{n\ell\ell''}(q, q_i, s') + \sum_{n_1,\ell_1}\int_0^\infty dq_\ell^{\,2}\, K_{n\ell,n_1\ell_1}(q, q_\ell, s')$$

$$\cdot \left[\chi^{(k)i\ell}_{n_1\ell_1\ell''}(q_\ell, q_i, s') + \chi^{(k)j\ell}_{n_1\ell_1\ell''}(q_\ell, q_i, s')\right] \tag{144}$$

où $$\eta^{(k)ij}_{n\ell\ell''}(q, q_i, s') = \sum_{\ell_1}\int_0^\infty dq_\ell^{\,2}\int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^{\,2}\;\frac{(-1)^{\ell+\ell_1+1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2}}{32\;\alpha_{k\ell}\beta_{k\ell}\; q\;(p_\ell^{\,2}+q_\ell^{\,2}-s')}$$

$$\cdot\; P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell})\, P_\ell(\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})\, F_{n\ell}(p_k)\left[\Phi^{(k)i\ell}_{\ell_1\ell''}(p_\ell q_\ell;\, p_i q_i; s') + \Phi^{(k)j\ell}_{\ell_1\ell''}(p_\ell q_\ell;\, p_i q_j; s')\right] \tag{145}$$

$$K_{n\ell_1,n_1\ell_1}(q, q_\ell, s') = \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^{\,2}\;\frac{(-1)^{\ell+\ell_1+1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2}}{32\;\alpha_{k\ell}\beta_{k\ell}\, q\;(p_\ell^{\,2}+q_\ell^{\,2}-s')}$$

$$\frac{(E_{n_1}-p_n^2)\, P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell})\, P_\ell(\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})\,(E_{n_1}-p_\ell^2)\; F_{n\ell}(p_k)\; F_{n_1\ell_1}(p_\ell)}{s'-q_\ell^{\,2}-E_{n_1}} \tag{146}$$

III. Potentiels répulsifs

L'élément de matrice de transition T_ℓ s'écrit :

$$T_\ell^{(ij)}(p,p_k,s'-q^2) = \sum_n \frac{-\lambda_{n\ell}(s'-q^2)}{1-\lambda_{n\ell}(s'-q^2)} \Phi_{n\ell}(p,s'-q^2)\ \Phi_{n\ell}(p_k,s'-q_k^2)(p^2+q^2-s')$$

de même pour $T_{\ell_1}^{(i\ell)}$ et $T_{\ell_1}^{(j\ell)}$

Nous définirons cette fois $\chi_{n\ell\ell''}^{(k)ij}(q, q_i, s')$ par la relation :

$$\psi_{\ell\ell''}^{(k)ij}(pq\ ;\ p_iq_i;s') = \Phi_{\ell\ell''}^{(k)ij}(pq\ ;\ p_iq_i;s') + \sum_n \frac{-\lambda_{n\ell}(s'-q^2)}{1-\lambda_{n\ell}(s'-q^2)} \Phi_{n\ell}(p,\ s'-q^2)$$

$$\cdot\ \chi_{n\ell\ell''}^{(k)ij}(q,\ q_i,\ s') \qquad (147)$$

Nous obtenons :

$$\chi_{n\ell\ell''}^{(k)ij}(q,\ q_i,\ s') = \eta_{n\ell\ell''}^{(k)ij}(q,\ q_i,\ s') + \sum_{n_1,\ell_1} \int_0^\infty dq_\ell^{\,2}\ K_{n\ell,n_1\ell_1}(q,\ q_\ell,\ s')$$

$$\cdot \left[\chi_{n_1\ell_1\ell''}^{(k)i\ell}(q_\ell,\ q_i,\ s') + \chi_{n_1\ell_1\ell''}^{(k)j\ell}(q_\ell,\ q_i,\ s')\right] \qquad (148)$$

où : $$\eta_{n\ell\ell''}^{(k)ij}(q,\ q_i,\ s') = \sum_{\ell_1} \int_0^\infty dq_\ell^{\,2} \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^{\,2}\ \frac{(-1)^{\ell+\ell_1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2}}{32\ \alpha_{k\ell}\beta_{k\ell}\ q}$$

$$\cdot\ P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell})\ P_\ell(\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})\ \Phi_{n\ell}(p_k,\ s'-q_k^2)$$

$$\cdot \left[\Phi_{\ell_1\ell''}^{(k)i\ell}(p_\ell q_\ell;\ p_iq_i;s') + \Phi_{\ell_1\ell''}^{(k)j\ell}(p_\ell q_\ell;\ p_iq_i;s')\right] \qquad (149)$$

$$K_{n\ell,n_1\ell_1}(q,\ q_\ell,\ s') = \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^{\,2}\ \frac{(-1)^{\ell+\ell_1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2}}{32\ \alpha_{k\ell}\ \beta_{k\ell}\ q}$$

$$\cdot\ P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell})\ P_\ell(\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})\ \frac{\left[\lambda_{n_1\ell_1}(s'-q^2)\right]}{1-\lambda_{n_1\ell_1}(s'-q^2)}\ \Phi_{n\ell}(p_k,\ s'-q_k^2)\ \Phi_{n_1\ell_1}(p_\ell,s'-q_\ell^2)$$

(150)

IV. Potentiels attractif et répulsif.

Nous aurons deux possibilités, soit :

A) $$T_{\ell}^{(ij)}(p,p_k,s'-q^2) = \sum_n \frac{(E_n-p^2)(E_n-p_k^2)}{s'-q^2-E_n} F_{n\ell}(p)\, F_{n\ell}(p_k)$$

$$T_{\ell_1}^{(i\ell)}(p_\ell,p_n,s'-q_\ell^2) = \sum_{n_1} \frac{(E_{n_1}-p_\ell^2)(E_{n_1}-p_n^2)}{s'-q_\ell^2-E_{n_1}} F_{n_1\ell_1}(p_\ell)\, F_{n_1\ell_1}(p_n)$$

$$T_{\ell_1}^{(j\ell)}(p_\ell,p_n,s'-q_\ell^2) = \sum_{n_1} \frac{-\lambda_{n_1\ell_1}(s'-q_\ell^2)}{1-\lambda_{n_1\ell_1}(s'-q_\ell^2)} \Phi_{n_1\ell_1}(p_\ell,s'-q_\ell^2)\, \Phi_{n_1\ell_1}(p_n,s'-q_n^2)$$

$$\cdot\ (p_\ell^2+q_\ell^2-s')$$

ou bien $T_{\ell_1}^{(i\ell)}$ et $T_{\ell_1}^{(j\ell)}$ sont intervertis.

Nous posons :

$$\psi_{\ell\ell''}^{(k)ij}(pq\ ;\ p_iq_j s') = \Phi_{\ell\ell''}^{(k)ij}(pq\ ;\ p_iq_j s') + \sum_n \frac{(E_n-p^2)(E_n-p_k^2)}{s'-q^2-E_n}$$

$$\cdot\ F_{n\ell}(p)\ \chi_{n\ell\ell''}^{(k)ij}(q,\ q_i,\ s') \tag{151}$$

ce qui nous permet d'écrire les équations de Faddeev sous la forme :

$$\chi_{n\ell\ell''}^{(k)ij}(q,q_i,s') = \eta_{n\ell\ell''}^{(k)ij}(q,q_j s') + \sum_{n_1,\ell_1} \int_0^\infty dq_\ell^2 \Big[K_{n\ell,n_1\ell_1}^{(i\ell)}(q,\ q_\ell,\ s')$$

$$\cdot\ \chi_{n_1\ell_1\ell''}^{(k)i\ell}(q_\ell,q_i,s') + K_{n\ell,n_1\ell_1}^{(j\ell)}(q,q_\ell,s')\ \chi_{n_1\ell_1\ell''}^{(k)j\ell}(q_\ell,q_i,s')\Big] \tag{151'}$$

où : $$\eta_{n\ell\ell''}^{(k)ij}(q,q_i,s') = \sum_{\ell_1} \int_0^\infty dq_\ell^2 \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^2 \frac{(-1)^{\ell+\ell_1+1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2}}{32\ \alpha_{k\ell}\beta_{k\ell}q(p_\ell^2+q_\ell^2-s')}$$

$$\cdot\ P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell})P_\ell(\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})\ F_{n\ell}(p_k)\ \Big[\Phi_{\ell_1\ell''}^{(k)i\ell}(p_\ell q_\ell;\ p_iq_j s')$$

$$+\ \Phi_{\ell_1\ell''}^{(k)j\ell}(p_\ell q_\ell;\ p_iq_j s')\Big] \tag{152}$$

$$K^{(i\ell)}_{n\ell,n_1\ell_1}(q,q_\ell,s') = \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^{\,2} \frac{(-1)^{\ell+\ell_1+1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2}}{32\ \alpha_{k\ell}\beta_{k\ell}q\ (p_\ell^{\,2}+q_\ell^{\,2}-s')}$$

$$\cdot \frac{P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell})\ P_\ell\ (\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})(E_{n_1}-p_\ell^{\,2})(E_{n_1}-p_n^{\,2})\ F_{n\ell}(p_n)F_{n_1\ell_1}(p_\ell)}{s' - q_\ell^{\,2} - E_{n_1}} \tag{153}$$

$$K^{(j\ell)}_{n\ell,n_1\ell_1}(q,q_\ell,s') = \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^{\,2} \frac{(-1)^{\ell+\ell_1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2} P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell})}{32\ \alpha_{k\ell}\ \beta_{k\ell}q\left[1-\lambda_{n_1\ell_1}(s'-q_\ell^{\,2})\right]\ F_{n_1\ell_1}(p_n)}$$

$$\cdot\ P_\ell\ (\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})\left[\lambda_{n_1\ell_1}\ (s'-q_\ell^{\,2})\right] F_{n\ell}(p_k)\ \Phi_{n_1\ell_1}\ (p_\ell,s'-q_\ell^{\,2})\ \phi_{n_1\ell_1}\ (p_n,s'-q_n^{\,2}) \tag{154}$$

Si l'on intervertit $T^{(i\ell)}_{\ell_1}$ et $T^{(j\ell)}_{\ell_1}$, seuls les noyaux $K^{(i\ell)}_{n\ell,n_1\ell_1}$ et $K^{(j\ell)}_{n\ell,n_1\ell_1}$ sont intervertis.

B) $$T^{(ij)}_\ell\ (p,\ p_k,\ s'-q^2) = \sum_n \frac{-\lambda_{n\ell}(s'-q^2)}{1-\lambda_{n\ell}(s'-q^2)}\ \Phi_{n\ell}(p,s'-q^2)\,\Phi_{n\ell}(p_k,s'-q^2_k)\,(p^2+q^2-s')$$

Dans ce cas $T^{(i\ell)}_{\ell_1}$ et $T^{(j\ell)}_{\ell_1}$ sont tous deux attractifs :

$$T^{(i\ell)}_{\ell_1}\ (p_\ell,p_n,\ s'-q_\ell^2) = T^{(j\ell)}_{\ell_1}\ (p_\ell,\ p_k,\ s'-q_\ell^2) =$$

$$\sum_{n_1} \frac{(E_{n_1}-p_\ell^{\,2})\ (E_{n_1}-p_n^{\,2})}{s'-q_\ell^{\,2}-E_n}\ F_{n_1\ell_1}(p_\ell)\ F_{n_1\ell_1}(p_n)$$

Nous poserons cette fois :

$$\psi^{(k)ij}_{\ell\ell''}\ (pq\ ;\ p_iq_i;s') = \Phi^{(k)ij}_{\ell\ell''}\ (pq\ ;\ p_iq_i;s') + \sum_n \frac{-\lambda_{n\ell}(s'-q^2)}{1-\lambda_{n\ell}(s'-q^2)}\ \Phi_{n\ell}(p,s'-q^2)$$

$$\cdot\ \chi^{(k)ij}_{n\ell\ell''}\ (q,\ q_i,\ s') \tag{155}$$

Les équations de Faddeev deviennent :

$$\chi^{(k)ij}_{n\ell\ell''}(pq\,;\,p_iq_i;s') = \eta^{(k)ij}_{n\ell\ell''}(q,\,q_i,\,s') + \sum_{n_1,\ell_1}\int_0^\infty dq_\ell^{\,2}\,K_{n\ell,n_1\ell_1}(q,\,q_\ell,\,s')$$

$$\cdot\left[\chi^{(k)i\ell}_{n_1\ell_1\ell''}(q_\ell,\,q_i,\,s') + \chi^{(k)j\ell}_{n_1\ell_1\ell''}(q_\ell,\,q_i,\,s')\right] \qquad (156)$$

où : $$\eta^{(k)ij}_{n\ell\ell''}(q,\,q_i,\,s') = \sum_{\ell_1}\int_0^\infty dq_\ell^{\,2}\int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^{\,2}\,\frac{(-1)^{\ell+\ell_1+1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2}}{32\;\alpha_{k\ell}\beta_{k\ell}\;q}$$

$$\cdot\;P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell})\;P_\ell(\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})\;\Phi_{n\ell}(p_k,\,s'-q^2_k)\left[\Phi^{(k)i\ell}_{\ell_1\ell''}(p_\ell q_\ell;\,p_iq_i;s')\right.$$

$$\left.+\;\Phi^{(k)j\ell}_{\ell_1\ell''}(p_\ell\,q_\ell;\,p_iq_i;s')\right] \qquad (157)$$

$$K_{n\ell,n_1\ell_1}(q,\,q_\ell,\,s') = \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^{\,2}\,\frac{(-1)^{\ell+\ell_1+1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2}}{32\;\alpha_{k\ell}\;\beta_{k\ell}\;q\;(p_\ell^{\,2}+q_\ell^{\,2}-s')}$$

$$\cdot\;\frac{P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell})\;P_\ell(\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})(E_{n_1}-p_\ell^{\,2})(E_{n_1}-p_n^{\,2})}{\left(s'-q^2_\ell-E_{n_1}\right)\Phi_{n_1\ell_1}(p_n,\,s'-q_n^{\,2})}\;\Phi_{n\ell}(p_k,s'-q_k^2)F_{n_1\ell_1}(p_\ell)F_{n_1\ell_1}(p_n)$$

(158)

IV. - EQUATIONS DE FADDEEV POUR LES POTENTIELS COULOMBIENS QUATRE CORPS AVEC INTERACTIONS PAR COUPLES

I. - INTRODUCTION

Nous considérons le cas où les moments angulaires totaux sont nuls, ce qui entraine : $\mathcal{J} = J_{ab} = J_{a_\alpha b_\alpha} = 0$

Or : $\vec{\mathcal{J}} = \vec{J}_{ab} + \vec{\Lambda}$ d'où

$$\Lambda = \Lambda_\alpha = \Lambda''' = m_\Lambda = m_{\Lambda_\alpha} = m_{\Lambda'''} = n_\Lambda = n_{\Lambda_\alpha} = n_{\Lambda'''} = M_{ab} = M_{a_\alpha b_\alpha} = N_{ab} = n_{\ell_{b_\alpha}} = 0$$

D'autre part, puisque $\vec{J}_{ab} = \vec{\ell}_a + \vec{\ell}_b$, nous en déduisons que :

$$\ell_a = \ell_b \; ; \; \ell_{a_\alpha} = \ell_{b_\alpha} \; ; \; n_{\ell_a} = -n_{\ell_b} \; ; \; n_{\ell''_{a_\alpha}} = -n_{\ell''_{b_\alpha}}$$

Les équations de Faddeev du problème à quatre corps s'écrivent :

$$\mathcal{a}^{(ij)}_{\ell_a \ell''_a}(abc\,;\,a_i b_i c_i\,;\,s) = \Phi^{(ij)}_{\ell_a \ell''_a}(abc\,;\,a_i b_i c_i\,;\,s)$$

$$- \sum_{\ell_{a_\alpha}} \int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}} da^2_\ell \int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}} dc^2_\ell \int_0^\infty db^2_\ell \; \frac{(-1)^{\ell_a+\ell_{a_\alpha}} \left[(2\ell_a+1)(2\ell_{a_\alpha}+1)\right]^{\frac{1}{2}} P_{\ell_a}(\cos\sigma) P_{\ell_{a_\alpha}}(\cos\Theta_{\vec{b}})}{512 \; X_\ell Y_\ell Z_\ell \; bc \; (a^2_\ell + b^2_\ell + c^2_\ell - s)}$$

$$\cdot \; T^{(ij)}_{\ell_a}(a, a_k, s-b^2-c^2) \; \mathcal{a}^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha} \ell''_a}(a_\ell b_\ell c_\ell\,;\,a_i b_i c_i\,;\,s)$$

où nous avons tenu compte des propriétés des harmoniques sphériques

σ angle entre les directions $(\theta_{\vec{a}_k \vec{a}_\ell}, 0)$ et $(\theta_{\vec{b}\vec{a}_\ell}, \phi_{\vec{b}\vec{a}_\ell})$

Itérons cette équation au premier ordre :

$$\mathcal{a}^{(ij)}_{\ell_a \ell''_a}(abc\ ;\ a_i b_i c_i\ ;\ s) = \Phi^{(ij)}_{\ell_a \ell''_a}(abc\ ;\ a_i b_i c_i\ ;\ s)$$

$$- \sum_{\ell_{a_\alpha}} \int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}} da_\ell^2 \int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}} dc_\ell^2 \int_0^\infty db_\ell^2 \frac{(-1)^{\ell_a+\ell_{a_\alpha}} \left[(2\ell_a+1)(2\ell_{a_\alpha}+1)\right]^{\frac{1}{2}} P_{\ell_a}(\cos\sigma)}{512\ X_\ell Y_\ell Z_\ell\ bc\ (a_\ell^2 + b_\ell^2 + c_\ell^2 - s)}$$

$$\cdot\ P_{\ell_{a_\alpha}}(\cos\theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})\ T^{(ij)}_{\ell_a}(a, a_k, s-b^2-c^2)\ \Phi^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha} \ell''_a}(a_\ell b_\ell c_\ell\ ;\ a_i b_i c_i\ ;\ s)$$

$$- \sum_{\ell_{a_\alpha}} \int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}} da_\ell^2 \int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}} dc_\ell^2 \int_0^\infty db_\ell^2 \frac{(-1)^{\ell_a+\ell_{a_\alpha}} \left[(2\ell_a+1)(2\ell_{a_\alpha}+1)\right]^{\frac{1}{2}} P_{\ell_a}(\cos\sigma)}{512\ X_\ell Y_\ell Z_\ell\ bc\ (a_\ell^2 + b_\ell^2 + c_\ell^2 - s)}$$

$$\cdot\ P_{\ell_{a_\alpha}}(\cos\theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})\ T^{(ij)}_{\ell_a}(a, a_k, s-b^2-c^2) \sum_{\ell_{a_\beta}} \int_{S_{\ell m}}^{W_{\ell m}} da_m^2 \int_{E_{\ell m}}^{G_{\ell m}} dc_m^2 \int_0^\infty db_m^2\ (-1)^{\ell_{a_\alpha}+\ell_{a_\beta}}$$

$$\cdot\ \frac{\left[(2\ell_{a_\alpha}+1)(2\ell_{a_\beta}+1)\right]^{\frac{1}{2}} P_{\ell_{a_\beta}}(\cos\theta_{\vec{b}_m \vec{a}_m})\ P_{\ell_{a_\alpha}}(\cos\sigma_1)}{512\ X_m Y_m Z_m\ b_\ell c_\ell\ (a_m^2 + b_m^2 + c_m^2 - s)}$$

$$\cdot\ T^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_\ell, a_n, s-b_\ell^2-c_\ell^2)\ \mathcal{a}^{(k\ell)}_{\ell_{a_\beta} \ell''_a}(a_m b_m c_m\ ;\ a_i b_i c_i\ ;\ s) \qquad (158-$$

Il y aura trois cas possibles suivant que T_{ℓ_a} et $T_{\ell_{a_\alpha}}$ sont associés à des potentiels attractifs, à des potentiels répulsifs ou que l'un est associé à un potentiel attractif, l'autre à un potentiel répulsif.

II. - POTENTIELS ATTRACTIFS

Nous avons vu que dans ce cas :

$$T^{(ij)}_{\ell_a}(a, a_k, s-b^2-c^2) = \sum_{n_a} \frac{(E_{n_a} - a^2)(E_{n_a} - a_k^2)}{s-b^2-c^2 - E_{n_a}} F_{n_a \ell_a}(a) F_{n_a \ell_a}(a_k)$$

On aura de même pour $T^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}$

$$T^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_\ell, a_n, s-b_\ell^2-c_\ell^2) = \sum_{n_{a_\alpha}} \frac{(E_{n_{a_\alpha}} - a_\ell^2)(E_{n_{a_\alpha}} - a_n^2)}{s - b_\ell^2 - c_\ell^2 - E_{n_{a_\alpha}}} F_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}}(a_\ell) F_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}}$$

En utilisant la même méthode qu'au chapitre précédent, nous définissons la fonction $\chi^{(ij)}_{n_a \ell_a \ell''_a}(bc\ ;\ b_i c_i\ ;\ s)$ telle que :

$$\mathcal{a}^{(ij)}_{\ell_a \ell''_a}(abc\ ;\ a_i b_i c_i\ ;\ s) = \Phi^{(ij)}_{\ell_a \ell''_a}(abc\ ;\ a_i b_i c_i\ ;\ s) + \sum_{n_a} \frac{(E_{n_a} - a^2)(E_{n_a} - a_k^2)}{s-b^2-c^2-E_{n_a}}$$

$$\cdot\ F_{n_a \ell_a}(a)\ \chi^{(ij)}_{n_a \ell_a \ell''_a}(bc\ ;\ b_i c_i\ ;\ s) \qquad (158\text{-b})$$

Portant cette expression dans (158-a), nous obtenons :

$$\chi^{(ij)}_{n_a \ell_a \ell''_a}(bc\ ;\ b_i c_i\ ;\ s) = \eta^{(ij)}_{n_a \ell_a \ell''_a}(bc\ ;\ b_i c_i\ ;\ s) + \sum_{n_{a_\alpha}, \ell_{a_\alpha}} \int_0^\infty db_\ell^2 \int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}} dc_\ell^2$$

$$\cdot\ K_{n_a \ell_a,\ n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}}(bc\ ;\ b_\ell c_\ell\ ;\ s)\ \chi^{(k\ell)}_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha} \ell''_a}(b_\ell c_\ell\ ;\ b_i c_i\ ;\ s) \qquad (158\text{-c})$$

où : $$\eta^{(ij)}_{n_a \ell_a \ell''_a}(bc\ ;\ b_i c_i\ ;\ s) = \sum_{\ell_{a_\alpha}} \int_0^\infty db_\ell^2 \int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}} dc_\ell^2 \int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}} da_\ell^2$$

$$\cdot \frac{(-1)^{\ell_a+\ell_{a_\alpha}+1}\left[(2\ell_a+1)(2\ell_{a_\alpha}+1)\right]^{\frac{1}{2}} P_{\ell_a}(\cos\sigma)\, P_{\ell_{a_\alpha}}(\cos\Theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})}{1024\,\pi\; X_\ell Y_\ell Z_\ell\; bc\,(a_\ell^2+b_\ell^2+c_\ell^2-s)}$$

$$\cdot\; F_{n_a \ell_a}(a_k)\; \Phi^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha}\ell''_a}(a_\ell b_\ell c_\ell\; ;\; a_i b_i c_i\; ;\; s) \qquad (158\text{-d})$$

$$\cdot\; K_{n_a \ell_a,\, n_{a_\alpha}\ell_{a_\alpha}}(bc\; ;\; b_\ell c_\ell\; ;\; s) = \int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}} da_\ell^2\, \frac{(-1)^{\ell_a+\ell_{a_\alpha}+1}}{1024\,\pi\; X_\ell Y_\ell Z_\ell\; bc}$$

$$\cdot\; \frac{\left[(2\ell_a+1)(2\ell_{a_\alpha}+1)\right]^{\frac{1}{2}} P_{\ell_a}(\cos\sigma)\, P_{\ell_{a_\alpha}}(\cos\Theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})\,(E_{n_{a_\alpha}} - a_i^2)}{(a_\ell^2+b_\ell^2+c_\ell^2-s)}$$

$$\frac{(E_{n_{a_\alpha}} - a_\ell^2)\; F_{n_a \ell_a}(a_i)\; F_{n_{a_\alpha}\ell_{a_\alpha}}(a_\ell)}{s - b_\ell^2 - c_\ell^2 - E_{n_{a_\alpha}}} \qquad (158\text{-e})$$

III. - POTENTIELS REPULSIFS

L'élément de matrice de transition T_ℓ s'écrit :

$$T^{(ij)}_{\ell_a}(a,\, a_k,\, s-b^2-c^2) = \sum_{n_a} \frac{-\lambda_{n_a \ell_a}(s-b^2-c^2)}{1-\lambda_{n_a \ell_a}(s-b^2-c^2)}\; \Phi_{n_a \ell_a}(a,\, s-b^2-c^2)$$

de même pour $T^{(k\ell)}_{\ell_{a_\beta}}$

Nous définirons cette fois $\chi^{(ij)}_{n_a \ell_a \ell''_a}(bc\ ;\ b_i c_i\ ;\ s)$ par la relation :

$$a^{(ij)}_{\ell_a \ell''_a}(abc\ ;\ a_i b_i c_i\ ;\ s) = \Phi^{(ij)}_{\ell_a \ell''_a}(abc\ ;\ a_i b_i c_i\ ;\ s) + \sum_{n_a} \frac{\lambda_{n_a \ell_a}(s-b^2-c^2)}{1-\lambda_{n_a \ell_a}(s-b^2-c^2)}$$

$$\cdot\ \Phi_{n_a \ell_a}(a,\ s-b^2-c^2)\ \chi^{(ij)}_{n_a \ell_a \ell''_a}(bc\ ;\ b_i c_i\ ;\ s) \qquad (158\text{-f})$$

Nous obtenons :

$$\chi^{(ij)}_{n_a \ell_a \ell''_a}(bc\ ;\ b_i c_i\ ;\ s) = \eta^{(ij)}_{n_a \ell_a \ell''_a}(bc\ ;\ b_i c_i\ ;\ s) + \sum_{n_{a_\alpha}, \ell_{a_\alpha}} \int_0^\infty db^2_\ell \int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}} dc^2_\ell$$

$$\cdot\ K_{n_a \ell_a,\ n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}}(b_\ell c_\ell\ ;\ s)\ \chi^{(k\ell)}_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha} \ell''_a}(b_\ell c_\ell\ ;\ b_i c_i\ ;\ s) \qquad (158\text{-g})$$

où :

$$\eta^{(ij)}_{n_a \ell_a \ell''_a}(bc\ ;\ b_i c_i\ ;\ s) = \sum_{\ell_{a_\alpha}} \int_0^\infty db^2_\ell \int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}} dc^2_\ell \int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}} da^2_\ell$$

$$\cdot\ \frac{(-1)^{\ell_a+\ell_{a_\alpha}} \left[(2\ell_a+1)(2\ell_{a_\alpha}+1)\right]^{\frac{1}{2}}\ P_{\ell_a}(\cos\sigma)\ P_{\ell_{a_\alpha}}(\cos\Theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})}{512\ X_\ell Y_\ell Z_\ell\ bc}$$

$$\cdot\ \Phi_{n_a \ell_a}(a_k,\ s-b_k^2-c_k^2)\ \Phi^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha} \ell''_a}(a_\ell b_\ell c_\ell\ ;\ a_i b_i c_i\ ;\ s) \qquad (158\text{-h})$$

$$K_{n_a \ell_a, n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}} (bc \; ; b_\ell c_\ell \; ; s) = \int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}} da_\ell^2 \; \frac{(-1)^{\ell_a + \ell_{a_\alpha}} \left[(2\ell_a+1)(2\ell_{a_\alpha}+1)\right]^{\frac{1}{2}}}{512 \quad X_\ell Y_\ell Z_\ell \quad bc}$$

$$\cdot \; P_{\ell_a} (\cos \sigma) \; P_{\ell_{a_\alpha}} (\cos \Theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell}) \; \frac{\left[\lambda_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}} (s - b_\ell^2 - c_\ell^2)\right]}{1 - \lambda_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}} (s - b_\ell^2 - c_\ell^2)} \; \Phi_{n_a \ell_a} (a_k, s - b_k^2 - c_k^2)$$

$$\cdot \; \Phi_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}} (a_\ell, s - b_\ell^2 - c_\ell^2 \qquad (158 - i)$$

IV. - POTENTIELS ATTRACTIF ET REPULSIF.

Nous aurons deux possibilités, soit :

A) $$T_{\ell_a}^{(ij)} (a, a_k, s - b^2 - c^2) = \sum_{n_a} \frac{(E_{n_a} - a^2)(E_{n_a} - a_k^2)}{s - b^2 - c^2 - E_{n_a}} \; F_{n_a \ell_a}(a) F_{n_a \ell_a}(a_k)$$

$$T_{\ell_{a_\alpha}}^{(k\ell)} (a_\ell, a_n, s - b_\ell^2 - c_\ell^2) = \sum_{n_{a_\alpha}} \frac{-\lambda_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}} (s - b_\ell^2 - c_\ell^2)}{1 - \lambda_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}} (s - b_\ell^2 - c_\ell^2)} \; \Phi_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}} (a_\ell, s - b_\ell^2 -$$

$$\cdot \; \Phi_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}} (a_n, s - b_n^2 - c_n^2)(a_\ell^2 + b_\ell^2 + c_\ell^2 - s)$$

Nous posons :

$$\mathcal{a}_{\ell_a \ell''_a}^{(ij)} (abc \; ; a_i b_i c_i \; ; s) = \Phi_{\ell_a \ell''_a}^{(ij)} (abc \; ; a_i b_i c_i \; ; s) + \sum_{n_a} \frac{(E_{n_a} - a^2)(E_{n_a} - a_k^2)}{s - b^2 - c^2 - E_{n_a}}$$

$$\cdot \; F_{n \ell} (a) \; \chi_{n \ell \ell''}^{(ij)} (bc \; ; b_i c_i \; ; s) \qquad (158 - j)$$

ce qui nous permet d'écrire les équations de Faddeev sous la forme :

$$\chi^{(ij)}_{n_a \ell_a \ell''_a}(bc\ ;\ b_i c_i\ ;\ s) = \eta^{(ij)}_{n_a \ell_a \ell''_a}(bc\ ;\ b_i c_i\ ;\ s) + \sum_{n_{a_\alpha}, \ell_{a_\alpha}} \int_0^\infty db_\ell^2 \int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}} dc_\ell^2$$

$$\cdot\ K_{n_a \ell_a,\ n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}}(bc\ ;\ b_\ell c_\ell\ ;\ s)\ \chi^{(k\ell)}_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha} \ell''_a}(b_\ell c_\ell\ ;\ b_i c_i\ ;\ s) \qquad (158 - k)$$

où : $$\eta^{(ij)}_{n_a \ell_a \ell''_a}(bc\ ;\ b_i c_i\ ;\ s) = \sum_{\ell_{a_\alpha}} \int_0^\infty db_\ell^2 \int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}} dc_\ell^2 \int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}} da_\ell^2 \frac{(-1)^{\ell_a + \ell_{a_\alpha} + 1}}{512\ X_\ell Y_\ell Z_\ell\ bc}$$

$$\cdot\ \frac{\left[(2\ell_a+1)(2\ell_{a_\alpha}+1)\right]^{\frac{1}{2}} P_{\ell_a}(\cos\sigma)\ P_{\ell_{a_\alpha}}(\cos\theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})\ F_{n_a \ell_a}(a_k)}{(a_\ell^2 + b_\ell^2 + c_\ell^2 - s)}$$

$$\cdot\ \Phi^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha} \ell''_a}(a_\ell b_\ell c_\ell\ ;\ a_i b_i c_i\ ;\ s) \qquad (158 - \ell)$$

$$K^{(ij)}_{n_a \ell_a,\ n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}}(bc\ ;\ b_\ell c_\ell\ ;\ s) = \int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}} da_\ell^2 \frac{(-1)^{\ell_a + \ell_{a_\alpha}} \left[(2\ell_a+1)(2\ell_{a_\alpha}+1)\right]^{\frac{1}{2}}}{512\ X_\ell Y_\ell Z_\ell bc}$$

$$\cdot\ \frac{P_{\ell_{a_\alpha}}(\cos\theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})\ P_{\ell_a}(\cos\sigma)\ \lambda_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}}(s - b_\ell^2 - c_\ell^2)}{\left[1 - \lambda_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}}(s - b_\ell^2 - c_\ell^2)\right] F_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}}(a_n)}\ F_{n_a \ell_a}(a_k)$$

$$\cdot\ \Phi_{n_{a_\alpha}\ \ell_{a_\alpha}}(a_\ell,\ s-b_\ell^2-c_\ell^2)\ \Phi_{n_{a_\alpha}\ \ell_{a_\alpha}}(a_n,\ s-b_n^2-c_n^2) \qquad (158-m)$$

B) $$T_{\ell_a}^{(ij)}(a,\ a_k,\ s-b^2-c^2) = \sum_{n_a} \frac{-\lambda_{n_a\ell_a}(s-b^2-c^2)}{[1-\lambda_{n_a\ell_a}(s-b^2-c^2)]}\ \Phi_{n_a\ell_a}(a,\ s-b^2-c^2)$$

$$\cdot\ \Phi_{n_a\ell_a}(a_k,\ s-b_k^2-c_k^2)\ (a^2+b^2+c^2-s)$$

$$T_{\ell_{a_\alpha}}^{(k\ell)}(a_\ell, a_n,\ s-b_\ell^2-c_\ell^2) = \sum_{n_{a_\alpha}} \frac{(E_{n_{a_\alpha}}-a_\ell^2)\ (E_{n_{a_\alpha}}-a_n^2)}{s-b_\ell^2-c_\ell^2-E_{n_a}}\ F_{n_{a_\alpha}\ \ell_{a_\alpha}}(a_\ell)$$

$$\cdot\ F_{n_{a_\alpha}\ \ell_{a_\alpha}}(a_n)$$

Nous poserons cette fois :

$$\mathcal{a}_{\ell_a\ell''_a}^{(ij)}(abc\ ;\ a_ib_ic_i\ ;\ s) = \Phi_{\ell_a\ell''_a}^{(ij)}(abc\ ;\ a_ib_ic_i\ ;\ s) + \sum_{n_a} \frac{\lambda_{n_a\ell_a}(s-b^2-c^2)}{[1-\lambda_{n_a\ell_a}(s-b^2-c^2)]}$$

$$\cdot\ \Phi_{n_a\ell_a}(a,\ s-b^2-c^2)\ \chi_{n_a\ell_a\ell''_a}^{(ij)}(bc\ ;\ b_ic_i\ ;\ s) \qquad (158-n)$$

Les équations de Faddeev deviennent :

$$\chi_{n_a\ell_a\ell''_a}^{(ij)}(bc\ ;\ b_ic_i\ ;\ s) = \eta_{n_a\ell_a\ell''_a}^{(ij)}(bc\ ;\ b_ic_i\ ;\ s) + \sum_{n_{a_\alpha},\ell_{a_\alpha}} \int_0^\infty db_\ell^2 \int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}} dc_\ell^2$$

$$\cdot\ K_{n_a\ell_a,\ n_{a_\alpha}\ell_{a_\alpha}}(bc\ ;\ b_\ell c_\ell;\ s)\ \chi_{n_{a_\alpha}\ \ell_{a_\alpha}\ \ell''_a}^{(ij)}(b_\ell c_\ell\ ;\ b_ic_i\ ;\ s) \qquad (158-o)$$

$$\text{où :}\quad \eta^{(ij)}_{n_a \ell_a \ell''_a}(bc\,;\,b_i c_i\,;\,s) = \sum_{\ell_{a_\alpha}} \int_0^{\infty} db_\ell^2 \int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}} dc_\ell^2 \int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}} da_\ell^2 \; \frac{(-1)^{\ell_a+\ell_{a_\alpha}}}{512\; X_\ell Y_\ell Z_\ell\; b}$$

$$\cdot\; \left[(2\ell_a+1)(2\ell_{a_\alpha}+1)\right]^{\frac{1}{2}} P_{\ell_{a_\alpha}}(\cos\theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})\, P_{\ell_a}(\cos\sigma)\, \Phi_{n_a \ell_a}(a_k,\, s-b_k^2-c_k^2)$$

$$\cdot\; \Phi^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha} \ell''_a}(a_\ell b_\ell c_\ell\,;\,a_i b_i c_i\,;\,s) \qquad (158-p)$$

$$K^{(ij)}_{n_a \ell_a,\, n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}}(bc\,;\,b_\ell c_\ell\,;\,s) = \int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}} da_\ell^2 \; (-1)^{\ell_a+\ell_{a_\alpha}+1} \frac{}{512\; X_\ell Y_\ell Z_\ell\; bc}$$

$$\cdot\; \frac{\left[(2\ell_a+1)(2\ell_{a_\alpha}+1)\right]^{\frac{1}{2}} P_{\ell_{a_\alpha}}(\cos\theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})\; P_{\ell_a}(\cos\sigma)\; (E_{n_{a_\alpha}} - a_\ell^2)(E_{n_{a_\alpha}} - a_n^2)}{(a_\ell^2 + b_\ell^2 + c_\ell^2 - s)\; \Phi_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}}(a_n,\, s - b_n^2 - c_n^2)\,(s - b_\ell^2 - c_\ell^2 - E_{n_a})}$$

$$\cdot\; \Phi_{n_a \ell_a}(a_k,\, s - b_k^2 - c_k^2)\; F_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}}(a_\ell)\; F_{n_{a_\alpha} \ell_{a_\alpha}}(a_n) \qquad (158-q)$$

IV . ETUDE DU PROBLEME A QUATRE CORPS

POUR LES POTENTIELS COULOMBIENS

I. INTRODUCTION

Nous considérons le cas où le moment angulaire total est nul ainsi que les moments angulaires totaux relatifs au problème à trois corps et au problème à quatre corps dans lequel les particules interagissent par couples.

Par conséquent :

$$\mathcal{J} = J = J' = J'' = J_{ab} = J'_{ab} = 0$$

ce qui entraîne puisque : $\vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathcal{L}} + \vec{J} = \vec{\Lambda} + \vec{J}_{ab}$ et que : $\begin{cases} \vec{J} = \vec{L} + \vec{\ell} \\ \vec{J}_{ab} = \vec{\ell}_a + \vec{\ell}_b \end{cases}$

d'une part :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' = \mathcal{L}'' = \Lambda = \Lambda' = \Lambda'' = m_{\mathcal{L}} = m_{\mathcal{L}'} = m_{\mathcal{L}''} = m_{\Lambda} = m_{\Lambda'} = m_{\Lambda''} = n_{\mathcal{L}}$$

$$= n_{\mathcal{L}'} = n_{\mathcal{L}''} = n_{\Lambda} = n_{\Lambda'} = n_{\Lambda''} = M = M' = M'' = M_{ab} = M'_{ab} = N = N''$$

$$= N_{ab} = n_{L'} = n_{\ell'_b} = 0$$

et d'autre part :

$$L = \ell \; ; \; L' = \ell' \; ; \; L'' = \ell'' \; ; \; \ell_a = \ell_b \; ; \; \ell'_a = \ell'_b$$

$$n_L = - n_\ell \; ; \; n_{L''} = - n_{\ell''} \; ; \; n_{\ell_a} = - n_{\ell_b} \; ; \; n_{\ell'_a} = - n_{\ell'_b}$$

Alors les divers éléments du noyau (100), (105) s'écrivent :

$$K_i = \frac{(2\ell'+1)^{1/2} \, \pi \sqrt{\pi}}{4A_jB_jC_jp_jq_jr_jq_r} \sum_{n_\ell} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & \ell' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell & 0 \\ n_\ell & -n_\ell & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int d\,\phi_{\vec{q}_j\vec{p}_j} \, Y^*_{\ell-n_\ell}(\theta_{\vec{q}\vec{p}_j}, \phi_{\vec{q}\vec{p}_j})$$

$$\cdot\ Y^*_{oo}\ (\Theta_{\vec{r}\vec{p}_j},\ \Theta_{\vec{r}\vec{p}_j})\ Y^*_{\ell n_\ell}\ (\Theta_{\vec{p}_i\vec{p}_j}\ ;\ 0)\ Y_{\ell' o}\ (\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j}\ ;\ \phi_{\vec{q}_j\vec{p}_j})$$

$$\cdot\ Y_{oo}\ (\Theta_{\vec{r}_j\vec{p}_j},\ \phi_{\vec{r}_j\vec{p}_j})\ \ T^{(ij)}_\ell\ (p,\ p_i,\ s'') \tag{159}$$

Compte-tenu des relations entre les harmoniques sphériques et des valeurs particulières des coefficients de Wigner [12] , K_i prend la forme :

$$K_i = \frac{(-1)^{\ell+\ell'}\ \left[(2\ell+1)(2\ell'+1)\right]^{1/2}}{64\ A_jB_jC_jp_jq_jr_jq\ r}\ P_\ell\ (\cos\gamma)\ P_{\ell'}\ (\cos\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})\ T^{(ij)}_\ell(p,p_i,s'') \tag{160}$$

où γ est l'angle entre les directions $(\Theta_{\vec{p}_i\vec{p}_j},\ 0)$ et $(\Theta_{\vec{q}\vec{p}_j},\ \phi_{\vec{q}\vec{p}_j})$.

Nous avons de même :

$$K^k = \frac{(-1)^{\ell'+\ell''}\ \left[(2\ell'+1)(2\ell''+1)\right]^{1/2}}{32\ A_jB_jC_jp_jq_jr_j\ \ r}\ \int dq_r^{\ 2}\ \ P_{\ell''}\ (\cos\gamma)\ P_{\ell'}\ (\cos\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})$$

$$\cdot\ \psi^k_{\ell\ell''}\ (p\ q\ ;\ p_jq_j\ ;\ s') \tag{161}$$

$$K_{ij} = \mathcal{a}^{(ij)}_{\ell_a\ell''_a}\ (abc\ ;\ a_ib_ic_i\ ;\ s) \tag{162}$$

Les équations de Faddeev du problème à quatre corps sont donc :

$$\psi^{(ij)}_\ell\ (p,q,r,s) = -\ 2\ \Phi^{(ij)}_\ell(p,q,r,s) + \psi^{(k)ij}_\ell\ (p,q,r,s) + \psi^{(\ell)ij}_\ell\ (p,q,r,s)$$

$$+\ \Omega^{(ij)}_\ell\ (p,q,r,s) - \sum_{\ell'} \int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\ 2} \int_{M_{ij}}^{N_{ij}} dr_j^{\ 2} \int_o^\infty dq_j^{\ 2}\ \frac{(-1)^{\ell'+\ell''}\left[(2\ell'+1)(2\ell''+1)\right]}{256\ \ A_jB_jC_j\ r}$$

$$\cdot\ \frac{1}{p_j^{\ 2}+q_j^{\ 2}+r_j^{\ 2}-s}\ P_{\ell''}\ (\cos\gamma)\ P_{\ell'}\ (\cos\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j}) \int_o^\infty dq_i^{\ 2}\ \ \psi^{(k)ij}_{\ell\ell''}\ (pq\ ;\ p_iq_i\ ;\ s - r^2)$$

$$\left[\psi_{\ell'}^{(ik)}(p_j,q_j,r_j,s) + \psi_{\ell'}^{(jk)}(p_j,q_j,r_j,s) + \psi_{\ell'}^{(\ell k)}(p_j,q_j,r_j,s)\right]$$

$$- \sum_{\ell'} \int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\,2} \int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^{\,2} \int_0^\infty dq_j^{\,2} \; \frac{(-1)^{\ell'+\ell''}\left[(2\ell'+1)(2\ell''+1)\right]^{1/2}}{256\; A_jB_jC_jr(p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s)}$$

$$\cdot\, P_{\ell''}(\cos\gamma)\, P_{\ell'}(\cos\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j}) \int_0^\infty dq_i^{\,2}\; \psi_{\ell\ell''}^{(\ell)ij}(pq\,;\,p_iq_i\,;\,s-r^2)$$

$$\cdot \left[\psi_{\ell'}^{(i\ell)}(p_j,q_j,r_j,s) + \psi_{\ell'}^{(j\ell)}(p_j,q_j,r_j,s) + \psi_{\ell'}^{(k\ell)}(p_j,q_j,r_j,s)\right]$$

$$- \sum_{\ell'_a} \int_0^\infty da_j^{\,2} \int_0^\infty dc_j^{\,2} \int_0^\infty db_j^{\,2} \; \frac{a_jb_jc_j}{8}$$

$$\cdot\; \mathcal{a}_{\ell_a\ell''_a}^{(ij)}(\cancel{abc}\,;\,a_ib_ic_i\,;\,s) \left[\psi_{\ell'_a}^{(ik)}(a_j,b_j,c_j,s) + \psi_{\ell'_a}^{(jk)}(a_j,b_j,c_j,s)\right.$$

$$\left. + \psi_{\ell'_a}^{(i\ell)}(a_j,b_j,c_j,s) + \psi_{\ell'_a}^{(j\ell)}(a_j,b_j,c_j,s)\right] - \sum_{\ell'} \int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\,2} \int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^{\,2} \int_0^\infty dq_j^{\,2}$$

$$\cdot\; \frac{(-1)^{\ell+\ell'}\left[(2\ell+1)(2\ell'+1)\right]^{1/2} P_\ell(\cos\gamma)\, P_{\ell'}(\cos\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})\, \mathbb{T}_\ell^{(ij)}(p,p_i,s-q^2-r^2)}{256\; A_jB_jC_jq\; r\,(p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s)}$$

$$\cdot \left[\psi_{\ell'}^{(k\ell)}(p_j;q_j,r_j,s) + \psi_{\ell'}^{(ik)}(p_j,q_j,r_j,s) + \psi_{\ell'}^{(jk)}(p_j,q_j,r_j,s)\right.$$

$$\left. + \psi_{\ell'}^{(i\ell)}(p_j,q_j,r_j,s) + \psi_{\ell'}^{(j\ell)}(p_j,q_j,r_j,s)\right] \qquad (163)$$

Le noyau de cette équation intégrale n'est pas de Hilbert-Schmidt [6]. Il le devient en itérant une fois.

Compte-tenu de la longueur de cette itération, nous l'avons placé en appendice C.

Dans le cas de potentiels coulombiens, les équations de Faddeev peuvent avoir plusieurs formes possibles suivant que les potentiels sont attractifs ou répulsifs.

II. Potentiels attractifs.

Les équations de Faddeev s'écrivent :

$$\Psi_{\ell}^{(ij)}(p,q,r,s) = \xi_{\ell}^{(ij)}(p,q,r,s) - \sum_{\ell'} \int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\,2} \int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^{\,2} \int_0^{\infty} dq_j^{\,2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{\ell'+\ell''}\left[(2\ell'+1)(2\ell''+1)\right]^{1/2} P_{\ell''}(\cos\gamma)\, P_{\ell'}(\cos\Theta_{\vec{q}_j\vec{r}_j})}{256\, A_jB_jC_jr\,(p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s)} \int_0^{\infty} dq_r^{\,2}$$

$$\cdot \Big\{ \Phi^{(k)ij}_{\ell\ell''}(pq\,;\,p_iq_i\,;\,s-r^2) + \sum_{\ell_1,n} \int_0^{\infty} dq_\ell^{\,2} \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^{\,2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{\ell+\ell_1+1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2} P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell})}{32\,\alpha_{k\ell}\,\beta_{k\ell}\,q}$$

$$\cdot \frac{P_\ell(\cos\Theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})(E_n-p^2)(E_n-p_k^{\,2})\,F_{n\ell}(p)\,F_{n\ell}(p_k)}{(p_\ell^{\,2}+q_\ell^{\,2}+r_\ell^{\,2}-s)(s-q^2-r^2-E_n)}$$

$$\cdot \Big[\psi^{(k)i\ell}_{\ell_1\ell''}(p_\ell\,q_\ell;\,p_iq_i\,;\,s-r^2) + \psi^{(k)j\ell}_{\ell_1\ell''}(p_\ell q_\ell;\,p_iq_i\,;\,s-r^2)\Big]\Big\}\Big\{\Psi^{(ik)}_{\ell'}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+ \Psi^{(jk)}_{\ell'}(p_j,q_j,r_j,s) + \Psi^{(\ell k)}_{\ell'}(p_j,q_j,r_j,s)\Big\}$$

$$- \sum_{\ell'} \int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\,2} \int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^{\,2} \int_0^{\infty} dq_j^{\,2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{\ell'+\ell''}\left[(2\ell'+1)(2\ell''+1)\right]^{1/2} P_{\ell''}(\cos\gamma)\, P_{\ell'}(\cos\Theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})}{256\, A_jB_jC_jr\,(p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s)}$$

$$\cdot \int_0^{\infty} dq_i^{\,2} \Big\{\Phi^{(\ell)ij}_{\ell\ell''}(pq\,;\,p_iq_i;s-r^2) + \sum_{\ell_1,n} \int_0^{\infty} dq_\ell^{\,2} \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^{\,2}\,(-1)^{\ell+\ell_1+1}$$

$$\cdot \frac{\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2} P_{\ell_1}(\cos\Theta_{\vec{q}_\ell \vec{p}_\ell}) P_\ell(\cos\Theta_{\vec{q}_k \vec{p}_k})(E_n-p^2)(E_n-p_k^2) F_{n\ell}(p) F_{n\ell}(p_k)}{32\ \alpha_{k\ell}\beta_{k\ell}(p_\ell^2+q_\ell^2+r_\ell^2-s)(s-q^2-r^2-E_n)}$$

$$\cdot \left[\psi^{(\ell)ik}_{\ell_1\ell''}(p_\ell q_\ell ; p_i q_i , s-r^2) + \psi^{(\ell)jk}_{\ell_1\ell''}(p_\ell q_\ell ; p_i q_i ; s-r^2)\right]\Bigg\}$$

$$\cdot \left\{\psi^{(i\ell)}_{\ell'}(p_j,q_j,r_j,s) + \psi^{(j\ell)}_{\ell'}(p_j,q_j,r_j,s) + \psi^{(k\ell)}_{\ell'}(p_j,q_j,r_j,s)\right\}$$

$$- \frac{1}{8}\sum_{\ell'_a} \int_0^\infty a_j\, da_j^2 \int_0^\infty c_j\, dc_j^2 \int_0^\infty b_j\, db_j^2 \Big\{\Phi^{(ij)}_{\ell_a\ell''_a}(abc;a_ib_ic_i;s)$$

$$- \sum_{n_a,\ell_{a_\alpha}} \int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}} da_\ell^2 \int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}} dc_\ell^2 \int_0^\infty db_\ell^2 \frac{(-1)^{\ell_a+\ell_{a_\alpha}}\left[(2\ell_a+1)(2\ell_{a_\alpha}+1)\right]^{1/2} P_{\ell_a}(\cos\sigma)}{512\ X_\ell Y_\ell Z_\ell bc(a_\ell^2+b_\ell^2+c_\ell^2-s)}$$

$$\cdot \frac{P_{\ell_{a_\alpha}}(\cos\Theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell})(E_{n_a}-a^2)(E_{n_a}-a_k^2)}{s-b^2-c^2-E_{n_a}} \frac{F_{n_a\ell_a}(a)\ F_{n_a\ell_a}(a_k)}{} \mathcal{Q}^{(k\ell)}_{\ell_{a_\beta}\ell''_a}(a_\ell b_\ell c_\ell;a_ib_ic_i;s)\Big\}$$

$$\left[\psi^{(ik)}_{\ell'_a}(a_j,b_j,c_j,s) + \psi^{(jk)}_{\ell'_a}(a_j,b_j,c_j,s) + \psi^{(i\ell)}_{\ell'_a}(a_j,b_j,c_j,s) + \psi^{(j\ell)}_{\ell'_a}(a_j,b_j,c_j,s)\right]$$

$$- \sum_{n,\ell'} \int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^2 \int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^2 \int_0^\infty dq_j^2$$

$$\cdot \frac{(-1)^{\ell+\ell'}\left[(2\ell+1)(2\ell'+1)\right]^{1/2} P_\ell(\cos\gamma)\, P_{\ell'}(\cos\Theta_{\vec{q}_j \vec{p}_j})}{256\ A_jB_jC_jq\ r\ (p_j^2+q_j^2+r_j^2-s)}$$

$$\cdot \frac{(E_n-p^2)(E_n-p_i^2)\ F_{n\ell}(p)\ F_{n\ell}(p_i)}{s-q^2-r^2-E_n} \Big[\psi^{(ik)}_{\ell'}(p_j, q_j, r_j, s)$$

$$+ \psi^{(i\ell)}_{\ell'}(p_j,q_j,r_j,s) + \psi^{(jk)}_{\ell'}(p_j,q_j,r_j,s) + \psi^{(j\ell)}_{\ell'}(p_j,q_j,r_j,s) + \psi^{(k\ell)}_{\ell'}(p_j,q_j,r_j,s)\Big]$$

où l'on a posé :

$$\xi_\ell^{(ij)}(p,q,r,s) = -2\,\varphi_\ell^{(ij)}(p,q,r,s) + \psi_\ell^{(k)ij}(p,q,r,s)$$

$$+ \psi_\ell^{(\ell)ij}(p,q,r,s) + \Omega_\ell^{(ij)}(p,q,r,s)$$

II. Potentiels répulsifs

$$\psi_\ell^{(ij)}(p,q,r,s) = \xi_\ell^{(ij)}(p,q,r,s) - \sum_{\ell'} \int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\,2} \int_{M_{ij}}^{N_{ij}} dr_j^{\,2} \int_0^\infty dq_j^{\,2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{\ell'+\ell''}\left[(2\ell'+1)(2\ell''+1)\right]^{1/2} P_{\ell''}(\cos\gamma)\, P_{\ell'}(\cos\theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})}{256\; A_jB_jC_j\; r\,(p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s)} \int_0^\infty dq_i^{\,2}$$

$$\cdot \Big\{ \Phi_{\ell\ell''}^{(k)ij}(pq\,;\,p_iq_i;s-r^2) + \sum_{\ell_1,n} \int_0^\infty dq_\ell^{\,2} \int_{L_{k\ell}}^{H_{k\ell}} dp_\ell^{\,2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{\ell+\ell_1}\left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2} P_{\ell_1}(\cos\theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell})\, P_\ell(\cos\theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})}{32\;\alpha_{k\ell}\;\beta_{k\ell}\;q}$$

$$\cdot \frac{\lambda_{n\ell}(s-q^2-r^2)\;\Phi_{n\ell}(p,s-q^2-r^2)\;\Phi_{n\ell}(p_k,s-q_k^{\,2}-r_k^{\,2})}{\left[1-\lambda_{n\ell}(s-q^2-r^2)\right]} \Big[\psi_{\ell_1\ell''}^{(k)i\ell}(p_\ell q_\ell\,;\,p_iq_i\,;\,s-r^2)$$

$$+ \psi_{\ell_1\ell''}^{(k)j\ell}(p_\ell q_\ell\,;\,p_iq_i;s-r^2)\Big]\Big\}\Big\{\psi_{\ell'}^{(ik)}(p_j,q_j,r_j,s) + \psi_{\ell'}^{(jk)}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+ \psi_{\ell'}^{(\ell k)}(p_j,q_j,r_j,s)\Big\} - \sum_{\ell'} \int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\,2} \int_{M_{ij}}^{N_{ij}} dr_j^{\,2} \int_0^\infty dq_j^{\,2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{\ell'+\ell''}\left[(2\ell'+1)(2\ell''+1)\right]^{1/2} P_{\ell''}(\cos\gamma)\, P_{\ell'}(\cos\theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})}{256\;A_jB_jC_j\;r\;(p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s)}$$

$$\cdot \int_0^\infty dq_i^{\,2} \Bigg\{ \Phi^{(\ell)ij}_{\ell\ell''} (pq\,;\, p_i q_i\,;\, s-r^2) + \sum_{\ell_1,n} \int_0^\infty dq_\ell^{\,2} \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} dp_\ell^{\,2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{\ell+\ell_1} \left[(2\ell+1)(2\ell_1+1)\right]^{1/2} P_{\ell_1} (\cos \Theta_{\vec{q}_\ell \vec{p}_\ell}) \, P_\ell (\cos \Theta_{\vec{q}_k \vec{p}_k})}{32 \; \alpha_{k\ell} \; \beta_{k\ell} q \; \left[1 - \lambda_{n\ell} (s - q^2 - r^2)\right]}$$

$$\cdot \lambda_{n\ell} (s - q^2 - r^2) \; \Phi_{n\ell} (p, s-q^2-r^2) \; \Phi_{n\ell} (p_k, s-q_k^{\,2}-r_k^{\,2}) \; \Big[\psi^{(\ell)ik}_{\ell_1\ell''} (p_\ell q_\ell\,;\, p_i q_i\,;\, s-r^2)$$

$$+ \psi^{(\ell)jk}_{\ell_1\ell''} (p_\ell q_\ell\,;\, p_i q_i\,;\, s-r^2)\Big] \Bigg\} \Bigg\{ \Psi^{(i\ell)}_{\ell'} (p_j, q_j, r_j, s) + \Psi^{(j\ell)}_{\ell'} (p_j, q_j, r_j, s)$$

$$+ \Psi^{(k\ell)}_{\ell'} (p_j, q_j, r_j, s) \Bigg\} - \sum_{n_a, \ell'_a} \int_0^\infty db_j^{\,2} \int_0^\infty dc_j^{\,2} \int_0^\infty da_j^{\,2} \; \frac{a_j b_j c_j}{8}$$

$$\Big\{ \Phi^{(ij)}_{\ell_a \ell''_a} (abc; a_i b_i c_i; s-b^2-c^2) + \sum_{\ell_{a_\alpha}, n_a} \int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}} da_\ell^{\,2} \int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}} dc_\ell^{\,2} \int_0^\infty db_\ell^{\,2} \; (-1)^{\ell_a + \ell_{a_\alpha}}$$

$$\cdot \frac{\left[(2\ell_a+1)(2\ell_{a_\alpha}+1)\right]^{1/2} P_{\ell_a} (\cos\sigma) \, P_{\ell_{a_\alpha}} (\cos \Theta_{\vec{b}_\ell \vec{a}_\ell}) \; \lambda_{n_a \ell_a} (s-b^2-c^2)}{512 \; X_\ell \, Y_\ell \, Z_\ell \; b \; c \; \left[1 - \lambda_{n_a \ell_a} (s-b^2-c^2)\right]}$$

$$\cdot \Phi_{n_a \ell_a} (a, s-b^2-c^2) \; \Phi_{n_a \ell_a} (a_k, s-b_k^{\,2}-c_k^{\,2}) \; \mathcal{Q}^{(k\ell)}_{\ell_a \ell_a} (abc; a_i b_i c_i; s) \Big\}$$

$$\cdot \Big[\Psi^{(ik)}_{\ell'_a} (a_j, b_j, c_j, s) + \Psi^{(jk)}_{\ell'_a} (a_j, b_j, c_j, s) + \Psi^{(i\ell)}_{\ell'_a} (a_j, b_j, c_j, s) + \psi^{(j\ell)}_{\ell'} (a_j, b_j, c_j, s) \Big]$$

$$+ \sum_{n, \ell'} \int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\,2} \int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^{\,2} \int_0^\infty dq_j^{\,2}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{\ell+\ell'} \left[(2\ell+1)(2\ell'+1)\right]^{1/2} P_\ell (\cos \gamma) P_{\ell'} (\cos \Theta_{\vec{q}_j \vec{p}_j})}{256 \; q_j \; A_j B_j C_j \; q \; r}$$

$$\cdot \frac{\lambda_{n\ell} (s-q^2-r^2) \; \Phi_{n\ell} (p, s-q^2-r^2) \; \Phi_{n\ell} (p_k, s-q_k^{\,2}-r_k^{\,2})}{\left[1 - \lambda_{n\ell} (s - q^2 - r^2)\right]} \; \Big[\Psi^{(ik)}_{\ell'} (p_j, q_j, r_j, s)$$

$$+ \Psi_{\ell'}^{(i\ell)} (p_j,q_j,r_j,s) + \Psi_{\ell'}^{(jk)} (p_j,q_j,r_j,s) + \Psi_{\ell'}^{(j\ell)} (p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+ \Psi_{\ell'}^{(k\ell)} (p_j,q_j,r_j,s) \Big] \qquad (165)$$

III. Potentiels attractifs et répulsifs

Chaque élément de matrice de transition T_ℓ $(p,p_i,s-q^2-r^2)$ et a_ℓ $(a,a_i,s-b^2-c^2)$ a deux formes possibles, ce qui entraîne comme nous l'avons vu quatre possibilités pour les équations de Faddeev à trois corps $\psi_\ell(pq\ ;\ p_iq_i\ ;\ s-r^2)$ et pour les équations de Faddeev à quatre corps $\Psi_\ell^{(ij)}$ (p,q,r,s) il y aura douze possibilités.

IV- Effet de spin

Nous considérons des potentiels atomiques non relativistes. En conséquence, il n'y a pas de couplage spin-orbite.
L'effet du spin $|1|$ des différentes particules sur notre formalisme est uniquement de multiplier le noyau par un facteur suivant l'expression:

$$K^{(i,j)}_{n\ell S_{ij}S_{k\ell},n'\ell' S_{ik}S_{jk}}(pp_ip_j;qq_iq_j;r_j;s;S) = \left[(2S_{ij}+1)(2S_{k\ell}+1)\right]^{1/2}$$

$$\cdot\left[(2S_{ik}+1)(2S_{j\ell}+1)\right]^{1/2}\begin{Bmatrix} S_i & S_j & S_{ij} \\ S_k & S_\ell & S_{k\ell} \\ S_{ik} & S_{j\ell} & S \end{Bmatrix} K^{(i,j)}_{n\ell,n'\ell'}(pp_ip_j;qq_iq_j;r_j;s;S)$$

où S_{ij} est le spin de la paire (i,j), $S_{k\ell}$ celui de la paire (k,ℓ), S_{ik} celui de la paire (i,k) et $S_{j\ell}$ celui de la paire (j,ℓ) ; S le spin total du quatre corps; S_i, S_j, S_k et S_ℓ les spins des particules et $\{\ \}$ représente le symbole "9j" de Wigner.

V. CONCLUSION

La connaissance des potentiels d'interaction nous permet de calculer les niveaux d'énergie des atomes ou molécules. Cependant, malgré la forme simple des potentiels coulombiens, nous obtenons des équations dont le noyau K^2 est extrêmement complexe.

Nous appliquerons le formalisme explicité dans les chapitres précédents au calcul des niveaux d'énergie de l'atome Li^6.

C A L C U L D E S

N I V E A U X D ' E N E R G I E

D E Li^6

-=-=-=-=-

ETUDE DE Li^6

I. Description

L'atome Li^6 est formé d'un noyau composé de trois protons de charge Ze entouré d'un cortège d'électrons.

Dans son état fondamental, le moment angulaire total est égal à 1/2, le moment angulaire orbital nul et le spin total 1/2. Nous pouvons donc utiliser les résultats des chapitres précédents.

L'effet de spin n'étant qu'un facteur multiplicatif dans le noya il n'interviendra pas dans le calcul de l'énergie

Les équations de Faddeev du problème à quatre corps comporteront donc des potentiels coulombiens attractifs et répulsifs et il y aura donc deux $\psi^{(ij)}$ différents.

Pour pouvoir poser le calcul numérique, nous considérons que les éléments de matrice T_ℓ ne contiennent qu'un seul terme, c'est-à-dire que : $n = n_a = 1$ donc cela entraîne que $\ell = \ell' = \ell_a = \ell'_a = o$.

II. Equations de Faddeev de L_i^6.

$$\psi_o^{(eN)}(p,q,r,s) = \xi_o^{(eN)}(p,q,r,s) - \int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^2 \int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^2 \int_o^\infty dq_j^2$$

$$\cdot \int_o^\infty \frac{dq_i^2}{128\ A_jB_jC_jr(p_j^2+q_j^2+r_j^2-s)} \psi_o^{(e)eN}(pq\ ;\ p_iq_i\ ;\ s-r^2)$$

$$\cdot \left[2\,\psi_o^{(ee)}(p_j,q_j,r_j,s) + \psi_o^{(ep)}(p_j,q_j,r_j,s)\right] - \int_0^\infty da_j^2 \int_0^\infty dc_j^2 \int_o^\infty db_j^2$$

$$\frac{a_jb_jc_j}{8}\ \mathcal{a}_0^{(eN)}(abc\ ;\ a_ib_ic_i\ ;\ s) \quad \left[\psi_o^{(ee)}(a_j,b_j,c_j,s)\right.$$

$$+ \psi_o^{(eN)} (a_j, b_j, c_j, s)\Big] - \int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\,2} \int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^{\,2} \int_o^{\infty} dq_j^{\,2}$$

$$\cdot \frac{(E_1 - p^2)(E_1 - p_i^{\,2}) F_{10}(p) F_{10}(p_i)}{256 \; A_j B_j C_j q r (p_j^{\,2} + q_j^{\,2} + r_j^{\,2} - s)(s - q^2 - r^2 - E_1)}$$

$$\cdot \Big[2 \; \psi_o^{(eN)} (p_j, q_j, r_j, s) + 3 \; \psi_o^{(ee)} (p_j, q_j, r_j, s) \Big] \tag{166}$$

$$\psi_o^{(ee)} (p, q, r, s) = \xi_o^{(ee)} (p, q, r, s) - \int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\,2} \int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^{\,2} \int_o^{\infty} dq_j^{\,2}$$

$$\cdot \int_o^{\infty} \frac{dq_i^{\,2}}{256 \; A_j B_j C_j r (p_j^{\,2} + q_j^{\,2} + r_j^{\,2} - s)} \Big\{ 3 \; \psi_o^{(N)ee} (pq \; ; \; p_i q_i \; ; \; s - r^2)$$

$$\cdot \psi_o^{(eN)} (p_j, q_j, r_j, s) + \psi_o^{(e)ee} (pq \; ; \; p_i q_i \; ; \; s - r^2) \Big[2 \; \psi_o^{(ee)} (p_j, q_j, r_j, s)$$

$$+ \psi_o^{(eN)} (p_j, q_j, r_j, s) \Big] \Big\} + 2 \int_o^{\infty} db_j^{\,2} \int_o^{\infty} dc_j^{\,2} \int_o^{\infty} da_j^{\,2} \frac{a_j b_j c_j}{8}$$

$$\cdot \quad \mathcal{a}_0^{(ee)} (abc \; ; \; a_i b_i c_i \; ; \; s)$$

$$\cdot \Big[\psi_o^{(ee)} (a_j, b_j, c_j, s) + \psi_o^{(eN)} (a_j, b_j, c_j) \Big] + \int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\,2} \int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^{\,2}$$

$$\cdot \int_0^\infty d\sigma^2 \; \frac{\lambda_{10}(s-q^2-r^2)\;\Phi_{10}(p,s-q^2-r^2)\;\Phi_{10}(p_i,s-q_i^2-r_i^2)}{256 \quad A_jB_jC_jq\;r\;\left[1-\lambda_{10}(s-q^2-r^2)\right]}$$

$$\cdot \left[3\;\Psi_o^{(eN)}\;(p_j,q_j,r_j,s) \;+\; 2\;\Psi_o^{(ee)}\;(p_j,q_j,r_j,s)\right] \tag{167}$$

III. <u>Détermination des produits de coefficients et des bornes d'intégration des équations de Faddeev.</u>

Les produits $A_jB_jC_j$ ont les valeurs possibles suivantes auxquelles correspondent des bornes Q_{ij} et R_{ij}, M_{ij} et V_{ij}

La masse de l'électron étant négligeable devant celle du noyau, nous obtenons alors les valeurs suivantes :

1) $A_j\;B_j\;C_j = \frac{1}{3}$

$$M_{ij} = 3\;(r_i - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,q_j)^2 \quad \text{et } V_{ij} = 3\;(r_i + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,q_j)^2$$

$$Q_{ij} = 2\;(q_i - 1)^2 \quad \text{et } R_{ij} = 2\;(q_i + 1)^2 \tag{168}$$

ou $$M_{ij} = 3\;(p_i - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,q_j)^2 \quad \text{et } V_{ij} = 3\;(p_i + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,q_j)^2$$

$$Q_{ij} = 2\;(q_i - 1)^2 \quad \text{et } R_{ij} = 2\;(q_i + 1)^2$$

2) $A_j\;B_j\;C_j = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$$M_{ij} = 3\;(r_i - 1)^2 \quad \text{et } V_{ij} = 3\;(r_i + 1)^2$$

$$Q_{ij} = 2\;(p_i - \frac{q_j}{\sqrt{2}})^2 \quad \text{et } R_{ij} = 2\;(p_i + \frac{q_j}{\sqrt{2}})^2 \tag{169}$$

3) $A_j\;B_j\;C_j = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$M_{ij} = 2\;(p_i - \frac{q_j}{\sqrt{2}})^2 \quad \text{et } V_{ij} = 2\;(p_i - \frac{q_j}{\sqrt{2}})^2$$

$$Q_{ij} = \frac{3(q_i-1)^2}{2} \quad \text{et } R_{ij} = \frac{3(q_i+1)^2}{2} \tag{170}$$

$$\text{ou } M_{ij} = 3\left(r_i - \sqrt{\frac{2}{3}}\, q_j\right)^2 \quad \text{et } V_{ij} = 3\left(r_i + \sqrt{\frac{2}{3}}\, q_j\right)^2$$

$$Q_{ij} = \frac{4\,(q_i - 1)^2}{3} \quad \text{et } R_{ij} = \frac{4\,(q_i + 1)^2}{3}$$

4) $A_j\ B_j\ C_j = \frac{1}{4}$

$$M_{ij} = 3\,(r_i - 1)^2 \quad \text{et } V_{ij} = 3\,(r_i + 1)^2$$

$$Q_{ij} = 4\left(p_i - \sqrt{\frac{3}{2}}\, q_j\right)^2 \quad \text{et } R_{ij} = 4\left(p_i + \sqrt{\frac{3}{2}}\, q_j\right)^2 \tag{171}$$

IV - Calcul des solutions des équations de Faddeev du problème à trois corps

Nous avons deux possibilités, soit trois électrons en interaction, soit deux électrons en interaction avec le noyau ; c'est-à-dire que nous aurons des potentiels d'interaction entre deux particules uniquement répulsifs ou bien attractifs et répulsifs.

1) Détermination des coefficients [3].

Le produit $\alpha_{k\ell}\ \beta_{k\ell}$ ainsi que les bornes $L_{k\ell}$ et $U_{k\ell}$ ont les valeurs suivantes :

1. $$\alpha_{k\ell}\ \beta_{k\ell} = \frac{\sqrt{3}}{4} \tag{172}$$

$$L_{k\ell} = \frac{4\left(q_k - \frac{q_\ell}{2}\right)^2}{3} \quad \text{et} \quad U_{k\ell} = \frac{4\left(q_k + \frac{q_\ell}{2}\right)^2}{3} \tag{173}$$

2. $$\alpha_{k\ell}\ \beta_{k\ell} = \frac{1}{2} \tag{174}$$

$$L_{k\ell} = 2\left(q_k - \frac{q_\ell}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \text{et} \quad U_{k\ell} = 2\left(q_k + \frac{q_\ell}{\sqrt{2}}\right)^2 \tag{175}$$

2) Potentiels répulsifs. [4] [19].

Dans ce cas :

$$\lambda_{10}\ (s' - q^2) = \frac{-Z\mu^{1/2}}{\sqrt{q^2 - s'}} \tag{176}$$

où μ est la masse réduite.

$$\Phi_{10}\ (p) = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ (q^2 - s')\ \frac{1}{(p^2 + q^2 - s')^2} \tag{176'}$$

Les équations de Faddeev s'écrivent alors :

$$\Psi_o^{(k)ij}\ (pq\ ;\ p_i q_i\ ;\ s') = \Phi_o^{(k)ij}\ (pq\ ;\ p_i q_i, s') + \frac{4Z\mu^{1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ (q^2 - s')}{(p^2 + q^2 - s')^2\left[\sqrt{q^2 - s'} + Z\mu^{1/2}\right]}$$

$$\cdot\ \chi_{10}^{(k)ij}\ (q_j,q_i,s') \tag{177}$$

où :

$$\chi_{10}^{(k)ij}\ (q,q_i,s') = \eta_{10}^{(k)ij}\ (q,q_i,s') + \int_0^\infty dq_\ell^{\,2}\ K_{10,10}^{(ij)}\ (q,q_\ell,s')$$

$$\cdot \left[\chi_{10}^{(k)i\ell}(q_\ell,q_i,s') + \chi_{10}^{(k)j\ell}\ (q_\ell,q_i,s') \right] \tag{178}$$

avec :

$$\eta_{10}^{(k)ij}\ (q,q_i,s') = \frac{\sqrt{2}\ (q_k^{\,2}-s')}{8\ \sqrt{\pi}\alpha_{k\ell}\ \beta_{k\ell}\ q} \int_0^\infty dq_\ell^{\,2} \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} \frac{1}{(p_\ell^{\,2}+q_\ell^{\,2}-s')}$$

$$\cdot \left[\Phi_{10}^{(k)i\ell}(p_\ell,q_\ell\ ;\ p_i,q_i\ ;\ s') + \Phi_{10}^{(k)j\ell}(p_\ell,q_\ell\ ;\ p_i,q_i\ ;\ s') \right] \tag{179}$$

$$K_{10,10}^{(ij)}\ (q,q_\ell,s') = \frac{-(q_k^{\,2}-s')(q_\ell^{\,2}-s')\ Z\mu^{1/2}}{2\ \pi\alpha_{k\ell}\ \beta_{k\ell}\ q\ \left[Z\mu^{1/2}+\sqrt{q^2-s'}\right]} \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} \frac{dp_\ell^{\,2}}{(p_\ell^{\,2}+q_\ell^{\,2}-s')^4} \tag{180}$$

Nous aurons pour $K_{10,10}$ deux valeurs différentes :

$$1)\ K_{10,10}^{(ij)}\ (q,q_\ell,s') = \frac{2(q_k^{\,2}-s')(q_\ell^{\,2}-s')Z\mu^{1/2}}{3\pi q\sqrt{3}\left[Z\mu^{1/2}+\sqrt{q^2-s'}\right]} \left\{ \frac{1}{\left[\frac{4(q_k+\frac{q_\ell}{\sqrt{2}})^2}{3} + q_\ell^{\,2}-s'\right]^3} - \frac{1}{\left[\frac{4(q_k-\frac{q_\ell}{2})^2}{3} + q_\ell^{\,2}-s'\right]^3} \right\} \tag{180'}$$

$$2)\ K_{10,10}^{(ij)}\ (q,q_\ell,s') = \frac{(q_k^{\,2}-s')(q_\ell^{\,2}-s')Z\mu^{1/2}}{3\ \pi q\ \left[Z\mu^{1/2}+\sqrt{q^2-s'}\right]} \left\{ \frac{1}{\left[2(q_k-\frac{q_\ell}{\sqrt{2}})^2+q_\ell^{\,2}-s'\right]^3} - \frac{1}{\left[2(q_k+\frac{q_\ell}{\sqrt{2}})^2 + q_\ell^{\,2}-s'\right]^3} \right\} \tag{180''}$$

3) Potentiels attractif et répulsif [5] [19]

Dans ce cas :

$$E_1 = - Z^2\mu$$

$$F_{10}(p) = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Z^2 \mu}{(p^2+Z^2\mu)^2}$$

$$\lambda_{10}(s'-q^2) = \frac{-Z\mu^{1/2}}{\sqrt{q^2-s'}}$$

$$\Phi_{10}(p) = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} (q^2-s') \frac{1}{(p^2+q^2-s')^2} \tag{181}$$

Cas A.

Les équations de Faddeev s'écrivent :

$$\psi_o^{(k)ij} (pq;p_iq_i;s') = \Phi_o^{(k)ij} (pq;p_iq_i;s')+4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Z^2\mu(p_k^2+Z^2\mu)}{(p^2+Z^2\mu)(s'-q^2+Z^2\mu)}$$

$$\cdot \chi_{10}^{(k)ij} (q,q_i,s') \tag{182}$$

où :

$$\chi_{10}^{(k)ij} (q,q_i,s') = \eta_{10}^{(k)ij} (q,q_i,s') + \int_o^\infty dq_\ell^{\,2} \Big[K_{10,10}^{(i\ell)} (q,q_\ell,s')$$

$$\cdot \chi_{10}^{(k)i\ell} (q_\ell,q_i,s') + K_{10,10}^{(j\ell)} (q,q_\ell,s') \chi_{10}^{(k)j\ell}(q_\ell,q_i,s') \Big] \tag{183}$$

avec :

$$\eta_{10}^{(k)ij} (q,q_i,s') = \frac{-\sqrt{\frac{2}{\pi}} Z^2 \mu}{8\alpha_{k\ell}\beta_{k\ell}q(p_k^2 + Z^2\mu)^2} \int_o^\infty dq_\ell^{\,2} \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} \frac{dp_\ell^{\,2}}{(p_\ell^{\,2}+q_\ell^{\,2}-s')}$$

$$\cdot \Big[\Phi_o^{(k)i\ell}(p_\ell q_\ell;p_iq_i;s') + \Phi_o^{(k)j\ell} (p_\ell q_\ell;p_iq_i;s')\Big] \tag{184}$$

$$K^{(i\ell)}_{10,10}(q,q_\ell,s) = \frac{-Z^4\ \mu^2}{2\pi\,\alpha_{k\ell}\beta_{k\ell}q\ (Z^2\mu+p_k^{\ 2})(s'-q_\ell^{\ 2}+Z^2\mu)} \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} \frac{dp_\ell^{\ 2}}{(p_\ell^{\ 2}+q_\ell^{\ 2}-s')(p_\ell^{\ 2}+Z^2\mu)} \tag{185}$$

$$K^{(j\ell)}_{10,10}(q,q_\ell,s) = \frac{-Z\mu^{1/2}(q_\ell^{\ 2}-s')(q_k^{\ 2}-s')(p_k^2+Z^2\mu)}{2\ \pi\alpha_{k\ell}\beta_{k\ell}q\ (\sqrt{q_\ell^2-s'}+Z\mu^{1/2})(p_n^2+Z^2\mu)} \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} \frac{dp_\ell^{\ 2}}{(p_\ell^{\ 2}+q_\ell^{\ 2}-s')^4} \tag{186}$$

Nous aurons pour les noyaux $K^{(i\ell)}_{10,10}$ et $K^{(j\ell)}_{10,10}$ deux valeurs différentes :

1) $$K^{(i\ell)}_{10,10}\ (q,\ q_\ell,\ s') = \frac{-2\ Z^4\ \mu^2}{\sqrt{3}\ \pi\ q\ (Z^2\mu + p_k^{\ 2})\ (s' - q_\ell^{\ 2} + Z^2\mu)^2}$$

$$\text{Log.}\left\{\frac{\left[\frac{4(q_k+\frac{q_\ell}{2})^2}{3} + q_\ell^{\ 2} - s'\right]\left[\frac{4(q_k-\frac{q_\ell}{2})^2}{3} + Z^2\ \mu\right]}{\left[\frac{4(q_k-\frac{q_\ell}{2})^2}{3} + q_\ell^{\ 2} - s'\right]\left[\frac{4(q_k+\frac{q_\ell}{2})^2}{3} + Z^2\ \mu\right]}\right\} \tag{185'}$$

$$K^{(j\ell)}_{10,10}\ (q,q_\ell,s') = \frac{2(q_k^2-s')(q_\ell^{\ 2}-s')Z\mu^{1/2}\quad(p_k^2+Z^2\mu)}{3\pi\ q\ \sqrt{3}\left[Z\mu^{1/2}+\sqrt{q_\ell^2-s'}\right]\quad(p_n^2+Z^2\mu)}$$

$$\left\{\frac{1}{\left[\frac{4(q_k+\frac{q_\ell}{2})^2}{3}+q_\ell^{\ 2}-s'\right]^3} + \frac{1}{\left[\frac{4(q_k-\frac{q_\ell}{2})^2}{3}+q_\ell-s\right]^3}\right\} \tag{186'}$$

2) $$K^{(i\ell)}_{10,10}\ (q,q_\ell,s') = \frac{-Z^4\ \mu^2}{\pi q(Z^2\mu+p_k^{\ 2})(s'-q_\ell^{\ 2}+Z^2\mu)^2}$$

$$\text{Log.}\left\{\frac{\left[2(q_k+\frac{q_\ell}{\sqrt{2}})^2 + q_\ell^{\ 2}-s'\right]\left[2(q_k-\frac{q_\ell}{\sqrt{2}})^2 + Z^2\mu\right]}{\left[2(q_k-\frac{q_\ell}{\sqrt{2}})^2 + q_\ell^{\ 2}-s'\right]\left[2(q_k+\frac{q_\ell}{\sqrt{2}})^2 + Z^2\mu\right]}\right\} \tag{185''}$$

$$K^{(j\ell)}_{10,10}\ (q,q_\ell,s') = \frac{(q_k^{\,2}-s')(q_\ell^{\,2}-s')Z\mu^{1/2}}{3\ \pi q\left[Z\mu^{1/2}+\sqrt{q^2-s'}\right]} \left\{ \frac{1}{\left[2(q_k+\frac{q_\ell}{\sqrt{2}})^2+q_\ell^{\,2}-s'\right]^3} - \frac{1}{\left[2(q_k-\frac{q_\ell}{\sqrt{2}})^2+q_\ell^{\,2}-s'\right]^3} \right\} \tag{186''}$$

Cas B.

Les équations de Faddeev s'écrivent :

$$\psi_o^{(k)ij}\ (pq;p_iq_i;s') = \Phi_o^{(k)ij}\ (pq;p_iq_i;s') + \frac{4Z\mu^{1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ (q^2-s')}{(p^2+q^2-s')^2\left[\sqrt{q^2-s'}+Z\mu^{1/2}\right]}$$

$$\cdot\ \chi_{10}^{(k)ij}\ (q,\ q_i,\ s') \tag{187}$$

où :

$$\chi_{10}^{(k)ij}\ (q,q_i,s') = \eta_{10}^{(k)ij}\ (q,q_i,s') + \int_o^\infty dq_\ell^{\,2}\ K^{(ij)}_{10,10}\ (q,q_\ell,s')$$

$$\cdot\left[\ \chi_{10}^{(k)i\ell}(q_\ell,q_i,s') + \chi_{10}^{(k)j\ell}(q_\ell,q_i,s')\ \right] \tag{188}$$

avec : $$\eta_{10}^{(k)ij}(q,q_i,s') = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{(q_k^{\,2}-s')}{8\ \alpha_{k\ell}\beta_{k\ell}q} \int_o^\infty dq_\ell^{\,2} \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} \frac{dp_\ell^{\,2}}{(p_\ell^{\,2}+q_\ell^{\,2}-s')^2}$$

$$\left[\Phi_o^{k(i\ell)}\ (p_\ell q_\ell;\ p_iq_i\ ;\ s') + \Phi_o^{(k)j\ell}(p_\ell q_\ell;\ p_iq_i\ ;\ s')\right] \tag{189}$$

$$K^{(ij)}_{10,10}\ (q,q_\ell,s') = \frac{2\ Z^4\ \mu^2\ (q_k^{\,2}-s')}{\pi\alpha_{k\ell}\ \beta_{k\ell}\ q(p_n^{\,2}+Z^2\mu)(q_n^{\,2}-s')(s'-q_\ell^{\,2}+Z^2\mu)}$$

$$\cdot\ \int_{L_{k\ell}}^{U_{k\ell}} \frac{dp_\ell^{\,2}}{(p_\ell^{\,2}+q_\ell^{\,2}-s')\ (p_\ell^{\,2}+Z^2\mu)} \tag{190}$$

Nous aurons deux valeurs différentes pour le noyau $K^{(ij)}_{10,10}$:

$$1)\ K^{(ij)}_{10,10}(q,q_\ell,s') = \frac{8\,Z^4\,\mu^2\,(q_k^{\,2}-s')}{\sqrt{3}\pi q\,(Z^2\mu+p_n^{\,2})(s'-q_\ell^{\,2}+Z^2\mu)^2(q_n^{\,2}-s')}$$

$$\text{Log.}\left\{\frac{\left[\dfrac{4(q_k+\frac{q_\ell}{2})^2}{3}+q_\ell^{\,2}-s'\right]\left[\dfrac{4(q_k-\frac{q_\ell}{2})^2}{3}+Z^2\,\mu\right]}{\left[\dfrac{4(q_k-\frac{q_\ell}{2})^2}{3}+q_\ell^{\,2}-s'\right]\left[\dfrac{4(q_k+\frac{q_\ell}{2})^2}{3}+Z^2\,\mu\right]}\right\} \qquad (190')$$

$$2)\ K^{(ij)}_{10,10}(q,q_\ell,s') = \frac{4\,Z^4\,\mu^2\,(q_k^{\,2}-s')}{\pi q\,(Z^2\mu+p_n^{\,2})(s'-q_\ell^{\,2}+Z^2\mu)^2(q_n^{\,2}-s')}$$

$$\text{Log.}\left\{\frac{\left[2(q_k+\frac{q_\ell}{\sqrt{2}})^2+q_\ell^{\,2}-s'\right]\left[2(q_k-\frac{q_\ell}{\sqrt{2}})^2+Z^2\mu\right]}{\left[2(q_k-\frac{q_\ell}{\sqrt{2}})^2+q_\ell^{\,2}-s'\right]\left[2(q_k+\frac{q_\ell}{\sqrt{2}})^2+Z^2\mu\right]}\right\} \qquad (190'')$$

4) <u>Méthode du calcul numérique [9] [10] [16] [17]</u>

De manière générale, on écrit :

$$\chi^{(k)ij}_{10}(q,q_i,s') = \eta^{(k)ij}_{10}(q,q_i,s') + \sum_{j\neq i,k}\int_0^\infty dq_\ell^{\,2}\,K^{(ij)}_{10,10}(q,q_\ell,s')$$

$$\cdot\ \chi^{(k)ij}_{10}(q_\ell,q_i,s') \qquad (191)$$

L'intégrale est remplacée par une série de Gauss de poids μ_m :

$$\int_0^\infty dq_\ell^{\,2}\,K^{(ij)}_{10,10}(q,q_\ell,s')\,\chi^{(k)ij}_{10}(q_\ell,q_i,s') = \sum_{m=1}^{\infty}\mu_m\,q^2_{\ell m}\,K^{(ij)}_{10,10}(q,q_{\ell m},s')$$

$$\cdot\ \chi^{(k)ij}_{10}(q_{\ell m},q_i,s') \qquad (192)$$

Définissons $A_m^{(ij)}$ par :

$$A_m^{(ij)}(q,q_{\ell m},s') = \mu_m q_{\ell m}^2 K^{(ij)}(q,q_{\ell m},s') \tag{193}$$

Nous écrivons :

$$\chi^{(k)ij}(q,q_i,s') = \eta^{(k)ij}(q,q_i,s') + \sum_{j\neq i,k} \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(ij)}(q,q_{\ell m},s')$$

$$\cdot\ \chi^{(k)ij}(q_{\ell m},q_i,s') \tag{194}$$

Pour obtenir une matrice A carrée d'éléments $A_{(mn)}^{(ij)}$ et où les q_n sont les mêmes points de Gauss, nous écrivons :

$$\chi^{(k)ij}(q_n,q_i,s') = \eta^{(k)ij}(q_n,q_i,s') + \sum_{j\neq i,k} \sum_{m=1}^{\infty} A_{(mn)}^{(ij)}(q_n,q_{\ell m},s')$$

$$\cdot\chi^{(k)ij}(q_{\ell m},q_i,s') \tag{195}$$

On choisit pour q_i les mêmes points de Gauss que précédemment. Par conséquent les q_i, q_n et $q_{\ell m}$ étant connus, nous pouvons écrire sous forme matricielle :

$$\chi(s') = \eta(s') + A(s')\ \chi(s') \tag{196}$$

$$\text{où}\quad \chi(s') = \left[I - A(s')\right]^{-1}\ \eta(s')$$

On calcule le déterminant de la matrice $I - A(s')$ et la valeur de s' telle que le déterminant soit nul sera la valeur de l'énergie du problème à trois corps considéré. Compte-tenu que nous avons soit un problème à trois électrons, soit un problème à un noyau et deux électrons, nous obtiendrons pour s' deux valeurs différentes.

Connaissant s', nous pouvons déterminer la valeur de $\psi^{(k)ij}(pq\ ;\ p_iq_i\ ;\ s')$ solution des équations de Faddeev pour des $p,q,p_k,q_k,p_\ell,q_\ell$ choisis.

V. Calcul des solutions des équations de Faddeev du problème à quatre corps avec interactions par paires.

Nous avons deux possibilités, soit deux électrons en interaction, soit un électron et le noyau en interaction. Nous sommes donc dans le cas où il y a des potentiels attractif et répulsif.

1) Détermination des coefficients

Le produit $X_\ell Y_\ell Z_\ell$ ainsi que les bornes $S_{k\ell}$ et $W_{k\ell}$, $S'_{k\ell}$ et $W'_{k\ell}$, $E_{k\ell}$ et $G_{k\ell}$ ont les valeurs suivantes:

1) $X_\ell Y_\ell Z_\ell = \frac{1}{4\sqrt{2}}$

$$S_{k\ell} = 4\left(b_k - \frac{b_\ell}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \text{et } W_{k\ell} = 4\left(b_k + \frac{b_\ell}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$S'_{k\ell} = 2\left(a_k - \frac{a_\ell}{2}\right)^2 \quad \text{et } W'_{k\ell} = 2\left(a_k + \frac{a_\ell}{2}\right)^2$$

$$E_{k\ell} = 4\left(c_k - 1\right)^2 \quad \text{et } G_{k\ell} = 4\left(c_k + 1\right)^2$$

2) $X_\ell Y_\ell Z_\ell = \frac{-1}{4\sqrt{2}}$

$$S_{k\ell} = 2\left(b_k - \frac{b_\ell}{2}\right)^2 \quad \text{et } W_{k\ell} = 2\left(b_k + \frac{b_\ell}{2}\right)^2$$

$$S'_{k\ell} = 2\left(a_k - \frac{a_\ell}{2}\right)^2 \quad \text{et } W'_{k\ell} = 2\left(a_k + \frac{a_\ell}{2}\right)^2$$

$$E_{k\ell} = 4\left(c_k - 1\right)^2 \quad \text{et } G_{k\ell} = 4\left(c_k + 1\right)^2$$

2) Potentiels attractif et répulsif

Dans ce cas:

$$E_1 = -Z^2\mu$$

$$F_{10}(a) = 4\sqrt{\frac{2}{\mu}}\ \frac{Z^2\mu}{(a^2+Z^2\mu)^2}$$

$$\lambda_{10}(s-b^2-c^2) = \frac{-Z\mu^{1/2}}{\sqrt{b^2+c^2-s}}$$

$$\Phi_{10}(a,s-b^2-c^2) = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(b^2+c^2-s)\quad \frac{1}{(a^2+b^2+c^2-s)^2}$$

Cas A -

Les équations de Faddeev s'écrivent:

$$\mathcal{a}_o^{(ij)}(abc;a_ib_ic_i;s)=\Phi_o^{(ij)}(abc;\ a_ib_ic_i;s)+4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{Z^2\mu(a_k^2+Z^2\mu)}{(a^2+Z^2\mu)(s-b^2-c^2+Z^2\mu)}$$

$$\cdot\ \chi_{10}^{(ij)}\ (bc;b_ic_i;s) \qquad (196\text{-a})$$

où $\chi_{10}^{(ij)}(bc;b_ic_i;s)= \eta_{10}^{(ij)}(bc;b_ic_i;s)+ \int_o^\infty db_\ell^2\int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}}dc_\ell^2\ K_{10,10}^{(ij)}\ (bc;b_\ell c_\ell;\ s)$

$$\cdot\chi_{10}^{(k\ell)}(b_\ell c_\ell;\ b_ic_i;s) \qquad (196\text{-b})$$

avec

$$\eta_{10}^{(ij)}(bc;b_ic_i;s)= \frac{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Z^2\mu}{128\ X_\ell Y_\ell Z_\ell bc(a_k^2+Z^2\mu)^2}\int_o^\infty db_\ell^2\int_{Ek_\ell}^{G_{k\ell}}dc_\ell^2$$

$$\cdot\int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}}\frac{da_\ell^2}{(a_\ell^2+b_\ell^2+c_\ell^2-s)}\ \Phi_o^{(ij)}(a_\ell b_\ell c_\ell;\ a_ib_ic_i;s) \qquad (196\text{-c})$$

$$K_{10,10}^{(ij)}\ (bc;\ b_\ell c_\ell;s) = \frac{-Z\mu^{1/2}(b_n^2+c_n^2-s)(b_\ell^2+c_\ell^2-s)(a_k^2+Z^2\mu)}{16\pi\ X_\ell Y_\ell Z_\ell bc\ (\sqrt{b_\ell^2+c_\ell^2-s}+Z\mu^{1/2})\ (a_n^2+Z^2\mu)}$$

$$\cdot\int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}}\frac{da_\ell^2}{(a_\ell^2+b_\ell^2+c_\ell^2-s)^4} \qquad (196\text{-d})$$

Nous aurons deux valeurs différentes pour le noyau $K^{(ij)}_{10,10}$

$$1)\ K^{(ij)}_{10,10}(bc;b_\ell c_\ell;s)=\frac{Z\mu^{1/2}(b_n^2+c_n^2-s)\ (a_k^2+Z^2\mu)}{12\sqrt{2}\pi\ bc(\sqrt{b_\ell^2+c_\ell^2-s}+Z\mu^{1/2})\ (a_n^2+Z^2\mu)}$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{\left[4(b_k+\frac{b_\ell}{\sqrt{2}})^2+b_\ell^2+c_\ell^2-s)\right]^3}-\frac{1}{\left[4(b_k-\frac{b_\ell}{\sqrt{2}})^2+b_\ell^2+c_\ell^2-s\right]^3}\right\}$$

(196'-d)

$$2)\ K^{(ij)}_{10,10}(bc;b_\ell c_\ell;s)=\frac{-Z\mu^{1/2}(b_n^2+c_n^2-s)}{12\sqrt{2}\pi\ bc(\sqrt{b_\ell^2+c_\ell^2-s}+Z\mu^{1/2})}$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{\left[2(b_k+\frac{b_\ell}{2})^2+b_\ell^2+c_\ell^2-s\right]^3}-\frac{1}{\left[2(b_k+\frac{b_\ell}{2})^2+b_\ell^2+c_\ell^2-s\right]^3}\right\}$$

(196"-d)

Cas B -

Les équations de Faddeev s'écrivent :

$$\mathcal{a}^{(ij)}_o(abc;a_ib_ic_i;s)=\Phi^{(ij)}_o(abc;a_ib_ic_i;s)+\frac{4Z\mu^{1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(b^2+c^2-s)}{(a^2+b^2+c^2-s)^2\left[\sqrt{b^2+c^2-s}+Z\mu^{1/2}\right]}$$

$$\cdot\chi^{(ij)}_{10}(bc;b_ic_i;s) \qquad (196\text{-}e)$$

$$\text{où: } \chi^{(ij)}_{10}(bc;b_ic_i;s)=\eta^{(ij)}_{10}(bc;b_ic_i;s)+\int_o^\infty db_\ell^2\int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}}dc_\ell^2K^{(ij)}_{10,10}(bc;b_\ell c_\ell;s)$$

$$\cdot\chi^{(k\ell)}_{10}(b_\ell c_\ell;b_ic_i;s) \qquad (196\text{-}f)$$

avec:

$$\eta^{(ij)}_{10}(bc;b_ic_i;s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(b_k^2+c_k^2-s)}{128\ X_\ell Y_\ell Z_\ell bc}\int_o^\infty db_\ell^2\int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}}dc_\ell^2\int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}}\frac{da_\ell^2}{(a_\ell^2+b_\ell^2+c_\ell^2-s)^2}$$

$$\cdot\ \Phi^{(ij)}_o(a_\ell b_\ell c_\ell;\ a_ib_ic_i;s) \qquad (196\text{-}g)$$

$$K^{(ij)'}_{10,10}(bc;b_\ell c_\ell;s) = \frac{Z^4\mu^2(b_k^2+c_k^2-s)}{16\pi\, X_\ell Y_\ell Z_\ell bc\,(a_n^2+Z^2\mu)(b_n^2+c_n^2-s)(s-b_\ell^2-c_\ell^2+Z^2\mu)}$$

$$\cdot \int_{S_{k\ell}}^{W_{k\ell}} \frac{da_\ell^2}{(a_\ell^2+Z^2\mu)(a_\ell^2+b_\ell^2+c_\ell^2-s)} \qquad (196\text{-b})$$

Nous aurons deux valeurs différentes pour le noyau $K^{(ij)}$:

$$1)\, K^{(ij)}_{10,10}(bc;\, b\ c\ ;s) = \frac{Z^4\mu^2\,(b_k^2+c_k^2-s)}{4\sqrt{2}\,\pi\,(a_n^2+Z^2\mu)(b_n^2+c_n^2-s)(s-b_\ell^2-c_\ell^2+Z^2\mu)^2}$$

$$\cdot\ \mathrm{Log}\left\{\frac{\left[4(b_k+\frac{b_\ell}{\sqrt{2}})^2+b_\ell^2+c_\ell^2-s\right]\left[4(b_k-\frac{b_\ell}{\sqrt{2}})^2+Z^2\mu\right]}{\left[4(b_k-\frac{b_\ell}{\sqrt{2}})^2+b_\ell^2+c_\ell^2-s\right]\left[4(b_k+\frac{b_\ell}{\sqrt{2}})^2+Z^2\mu\right]}\right\} \qquad (196'\text{-h})$$

$$2)\ K^{(ij)}_{10,10}(bc;b_\ell c_\ell;s) = \frac{-Z^4\mu^2(b_k^2+c_k^2-s)}{4\sqrt{2}\pi\,(a_n^2+Z^2\mu)(b_n^2+c_n^2-s)(s-b_\ell^2-c_\ell^2+Z^2\mu)^2}$$

$$\cdot\ \mathrm{Log}\left\{\frac{\left[2(b_k+\frac{b_\ell}{2})^2+b_\ell^2+c_\ell^2-s\right]\left[2(b_k-\frac{b_\ell}{2})^2+Z^2\mu\right]}{\left[2(b_k-\frac{b_\ell}{2})^2+b_\ell^2+c_\ell^2-s\right]\left[2(b_k+\frac{b_\ell}{2})^2+Z^2\mu\right]}\right\} \qquad (196''\text{-h})$$

4°) Méthode du calcul numérique [9][10][16][17]

De manière générale, on écrit:

$$\chi_{10}^{(ij)}(bc;b_ic_i;s)=\eta_{10}^{(ij)}(bc;b_ic_i;s)+\int_0^{\infty}db_\ell{}^2\int_{E_{k\ell}}^{G_{k\ell}}dc_\ell{}^2K_{10,10}^{(ij)}(bc;b_\ell c_\ell;s)$$

$$\cdot\ \chi_{10}^{(ij)}(b_\ell c_\ell;\ b_ic_i,s)$$

Les intégrales sont remplacées par des séries de Gauss de poids μ_m et μ_n et en posant:

$$C_{mn}^{(ij)}(bc;b_{\ell m},c_{\ell n},s)=\mu_m\ \mu_n\ b_{\ell m}^2\ c_{\ell n}^2\ K^{(ij)}(bc;b_{\ell m}c_{\ell n};s)$$

nous obtenons:

$$\chi^{(ij)}(bc;b_ic_i;s)=\eta^{(ij)}(bc;b_ic_i,s)+\sum_{m,n=1}^{\infty}C_{mn}^{(ij)}(bc;b_{\ell m}c_{\ell n};s)$$

$$\cdot\ \chi^{(ij)}(b_{\ell m}\ c_{\ell n};\ b_ic_i;s)$$

En choisissant pour b, c, b_i, c_i les mêmes points de Gauss que précédemment, nous pouvons écrire sous forme matricielle:

$$\chi(s)\ =\ \eta(s)+C(s)\ \chi(s)$$

ou

$$\chi(s)\ =\ [I\ -\ C(s)]^{-1}\eta(s)$$

La valeur de s annulant le déterminant sera la valeur de l'énergie du problème à quatre corps lorsqu'il y a interactions par couples.

Connaissant s, nous pouvons déterminer la valeur de $\mathcal{a}^{(ij)}(abc;a_ib_ic_i,s)$

V. Détermination de l'énergie fondamentale de Li^6

Remplaçons dans l'équation (160) les intégrations par des séries de Gauss, nous obtenons:

$$\Psi_o^{(eN)}(p,q,r,s)=\xi_o^{(eN)}(p,q,r,s)-\sum_{\ell,m,n,t=1}^{\infty}\mu_\ell\,\mu_m\,\mu_n\,\mu_t\,p_{j\ell}^2\,q_{jm}^2\,r_{jn}^2\,q_{it}^2\,K_o^{(e)eN}$$

$$\cdot\left[2\Psi_o^{(ee)}(p_{j\ell},q_{jm},r_{jn},s)+\Psi_o^{(eN)}(p_{j\ell},q_{jm},r_{jn},s)\right]-\sum_{\ell,m,n=1}^{\infty}\mu_\ell\,\mu_m\,\mu_n\,a_{j\ell}^2\,b_{jm}^2\,c_{jn}^2$$

$$\cdot K_o^{(eN)}\left[\Psi_o^{(ee)}(a_{j\ell},b_{jm},c_{jn},s)+\Psi_o^{(eN)}(a_{j\ell},b_{jm},c_{jn},s)\right]-\sum_{\ell,m,n=1}^{\infty}\mu_\ell\,\mu_m\,\mu_n\,p_{j\ell}^2\,q_{jm}^2\,r_{jn}^2$$

$$\cdot\ K'^{(eN)}_o\left[2\Psi_o^{(eN)}(p_{j\ell},q_{jm},r_{jn},s)+3\Psi_o^{(ee)}(p_{j\ell},q_{jm},r_{jn},s)\right] \qquad (197)$$

où nous avons posé:

$$K_o^{(e)eN}=\frac{\Psi_o^{(e)eN}(pq;p_i\ q_{it};s')}{256\pi A_j\ B_j\ C_j\ r(p_{j\ell}^2+q_{jm}^2+r_{jn}^2-s)}$$

$$K_o^{(eN)}=\mathcal{a}_0^{(eN)}\ (abc\ ;\ a_ib_ic_i\ ;\ s)\ \frac{a_{j\ell}b_{jm}c_{jn}}{8} \qquad (198)$$

$$K'^{(eN)}_o=\frac{(E_1-p^2)(E_1-p_i^2)F_{1o}(p)F_{1o}(p_i)}{512\pi A_j\ B_j\ C_j\ qr(p_{j\ell}^2+q_{jm}^2+r_{jn}^2-s)(s-q^2-r^2-E_1)}$$

Nous obtenons une équation similaire pour $\Psi_o^{(ee)}$

Posons:

$$B_{\ell mnt}^{(e)eN}=\mu_\ell\,\mu_m\,\mu_n\,\mu_t\,p_{j\ell}\,q_{jm}^2\,r_{jn}^2\,q_{it}^2\,K_o^{(e)eN}$$

$$B_{\ell mn}^{(eN)}=\mu_\ell\,\mu_m\,\mu_n\,a_{j\ell}^2\,b_{jm}^2\,c_{jn}^2\,K_o^{(eN)} \qquad (199)$$

$$B'^{(eN)}_{\ell mn}=\mu_\ell\,\mu_m\,\mu_n\,p_{j\ell}^2\,q_{jm}^2\,r_{jn}^2\,K'^{(eN)}_o$$

Nous définissons ainsi une matrice B qui sera carrée en choisissant pour p, q, r les même points de Gauss;

$$\Psi_o^{(eN)}(p_\ell,q_m,r_n,s)=\xi_o^{(eN)}(p_\ell,q_m,r_n,s)$$

$$-2\sum_{\ell,m,n,t=1}^{\infty} B_{\ell mnt}^{(e)eN}\left[2\Psi_o^{(ee)}(p_{j\ell},q_{jm},r_{jn},s)+\Psi_o^{(eN)}(p_{j\ell},q_{jm},r_{jn},s)\right]$$

$$-2\sum_{\ell,m,n=1}^{\infty} B_{\ell mn}^{(eN)}\left[\Psi_o^{(ee)}(a_{j\ell},b_{jm},c_{jn},s)+\Psi_o^{(eN)}(a_{j\ell},b_{jm},c_{jn},s)\right]$$

$$-2\sum_{\ell,m,n=1}^{\infty} B'^{(eN)}_{\ell mn}\left[2\Psi_o^{(eN)}(p_{j\ell},q_{jm},r_{jn},s)+3\Psi_o^{(ee)}(p_{j\ell},q_{jm},r_{jn},s)\right] \tag{200}$$

on choisit pour a_i et p_i, les mêmes points de Gauss que précédemment. Nous avons une équation similaire pour $\Psi_o^{(ee)}$.

Réécrivons ces deux équations sous forme matricielle

$$\Psi(s) = \xi(s) + B(s)\ \Psi(s) \tag{201}$$

Comme nous l'avons vu dans le formalisme général, nous devons itérer cette équation:

$$\Psi(s) = \phi(s) + B^2(s)\ \Psi(s) \tag{202}$$

où nous avons défini : $\phi(s) = \xi(s)\left[I+B^2(s)\right]$

ou encore: $$\Psi(s)=\left[I-B^2(s)\right]^{-1}\ \phi(s) \tag{202'}$$

On calcule le déterminant de la matrice $I - B^2(s)$. La valeur de s qui annule ce déterminant correspond à la valeur de l'énergie fondamentale de Li^6. Radhakant, Shastry et Rajagopal [16] montrent dans le cas du problème à trois corps, que l'on obtient une valeur correcte de l'énergie si l'on prend 40 points de Gauss.

En utilisant 40 points de Gauss dans chaque série pour le calcul de l'énergie, on travaillerait sur des matrices de dimension $4^4.10^4.4^4.10^4$.

En conclusion, cette étude nous permet d'obtenir les équations exactes du problème à quatre corps, évitant ainsi les approximations du calcul variationnel. Cette méthode, très générale, s'applique en particulier aux problèmes à quatre particules pour lesquels le calcul variationnel est inapplicable.

ANNEXE

-=-=-=-=-=-=-=-=-

RAPPEL SUR LES EQUATIONS INTEGRALES

I. - INTRODUCTION [13]

Les équations intégrales de la forme :

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\ \phi(s)\ ds = f(x) \qquad \text{(I-1)}$$

où : $\begin{cases} K(x,s) \text{ est appelé le noyau de l'équation intégrale} \\ f(x) \text{ une fonction connue} \\ \phi(x) \text{ fonction inconnue apparaissant sous le signe } \int \end{cases}$

se classent en trois catégories :

(a) les équations du type de Fredholm où le noyau est de Hilbert-Schmidt, c'est-à-dire :

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x,s)|\, dx\, ds < \infty \qquad \text{(I-2)}$$

(b) les équations à faible singularité où le noyau a la forme :

$$K(x,s) = \frac{H(x,s)}{|x-s|^{\alpha}} \qquad \text{(I-3)}$$

où $H(x,s)$ est borné

α constante telle que : $0 < \alpha < 1$

(c) les équations singulières où le noyau a la forme :

$$K(x,s) = \frac{A(x,s)}{x-s} \qquad \text{(I-4)}$$

où $A(x,s)$ est une fonction différentielle de x et s.

Alors , $\int_a^b K(x,s)\ \phi(s)\ ds$ diverge.

Dans le cas où le noyau n'est pas de Hilbert-Schmidt, on peut grâce à des transformations (cf. réf. [20]) revenir à un noyau de Hilbert-Schmidt. Une de

ces transformations souvent utilisée est la suivante :

On itère une seconde fois l'équation intégrale : $\phi = f + \lambda K \phi$

$$\text{d'où : } \phi = f + \lambda K f + \lambda^2 K^2 \phi$$

Si $K \notin \mathcal{L}_2$ (voir § III), on aura $K^2 \in \mathcal{L}_2$. Si $K_2 \notin \mathcal{L}_2$, on itère à nouveau.

La plupart des équations intégrales utilisées en théorie de la diffusion étant du type (a) et (c), nous étudierons seulement les méthodes de résolution qui leur correspondent. Avant d'introduire ces méthodes, il faut d'abord donner les notions mathématiques concernant les espaces de Banach et de Hilbert qui servent de base à ce rappel.

II. - ESPACE DE BANACH [6]

1°) Définition

On appelle espace de Banach un espace linéaire normé complet.

2°) Espaces de Banach particuliers.

(a) Espace de Hilbert (cf. III).

(b) Espace C^n (I) défini pour un intervalle I compact et un nombre positif n comme la famille de ces fonctions scalaires sur I ayant n dérivées continues et bornées.

La norme est :

$$||f|| = \sum_{i=0}^{n} \sup_{s \in I} |f^{(i)}(s)|$$

Donc C^1 aura la norme :

$$||f|| = \sup_{s \in I} |f(s)| + \sup_{s \in I} |f'(s)|$$

3°) Propriétés de l'espace C^1

Théorème 1.

Tout opérateur continu et borné sur un intervalle compact est compact.

Théorème 2.

La somme ou la limite d'un ensemble d'opérateurs compacts est compact à condition qu'elle converge.

III. - ESPACE DE HILBERT [6]

1°) Définition

On appelle espace de Hilbert un espace linéaire métrique complet avec la norme : $||f|| = (f,f)^{1/2}$

2°) Espace $\mathcal{L}_2$

Espace de Hilbert dont le produit scalaire est :

$$(f,g) = \int_s f(s)\ \overline{g(s)}\ \mu(ds) \qquad f,g \in \mathcal{L}_2$$

3°) Propriétés de l'espace $\mathcal{L}_2$

Définition

Un opérateur K de $\mathcal{L}_2$ ou opérateur de Hilbert-Schmidt est tel que :

$$(Kf)\ (s) = \int_s k(s,t)\ f(t)\ \mu(dt) \qquad f \in \mathcal{L}_2$$

$$\text{où : } \int_s \int_s |k\ (s,t)|^2\ \mu(ds)\ \mu(dt) < \infty$$

Théorème

Tout opérateur K de $\mathcal{L}_2$ est compact, c'est-à-dire que : $tr\ (KK^{\dagger}) < \infty$

Il peut donc être approché par un noyau de rang fini, c'est-à-dire qu'on peut trouver une série de "noyaux séparables" $|s> <\bar{s}|$ telle que

$$\forall\ \varepsilon > o \left|\left|\ K - \sum_{s=1}^{p} |\ s> <\bar{s}\ |\right|\right| < \varepsilon$$

pour p (ε) suffisamment grand.

IV. - METHODE DE FREDHOLM [23]

Considérons l'équation intégrale générale :

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K\ (x,\xi)\ \phi\ (\xi)\ d\xi \qquad \text{(IV-1)}$$

que l'on peut encore écrire sous une forme plus générale :

$$\phi = f + \lambda\ K\ \phi \qquad \text{(IV-2)}$$

si l'on se place en dehors de toute représentation. On retrouve les équations bien

connues de la diffusion :

$$\begin{cases} G = G_o + \lambda K G \\ T = V + \lambda K T \end{cases} \qquad \text{où} \begin{cases} K = G_o V \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

K est appelé le noyau de l'intégrale.

Revenons à l'équation intégrale. C'est la limite de l'équation suivante quand $\delta \to 0$:

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{q=1}^{n} K(x,x_q)\ \phi(x_q)\ \delta \qquad \text{(IV-3)}$$

$$\text{où :} \begin{cases} x_q - x_{q-1} = \delta \\ x_1 = a \\ x_n = b \end{cases}$$

Puisque l'équation est vraie pour $a \leq x \leq b$, elle est vraie aussi pour x prenant les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ et on a :

$$-\lambda\ \delta \sum_{q=1}^{n} K(x_p, x_q)\ \phi(x_q) + \phi(x_p) = f\ (x_p) \qquad p = 1, \ldots, n \qquad \text{(IV-4)}$$

Ce système d'équations pour $\phi(x_p)$ $(p = 1, \ldots, n)$ a une solution unique si le déterminant formé par les coefficients de $\phi(x_p)$ ne tend pas vers 0. Ce déterminant est :

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\delta\ K\ (x_1,x_1) & -\lambda\delta K\ (x_1, x_2) & \cdots & -\lambda\delta\ K\ (x_1,x_n) \\ -\lambda\delta\ K\ (x_2,x_1) & 1 - \lambda\delta\ K\ (x_2,x_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\lambda\delta\ K\ (x_n,x_1) & \cdots & \cdots & 1 - \lambda\delta\ K\ (x_n,x_n) \end{vmatrix}$$

$D_n(\lambda)$ devient, en développant en puissances de λ :

$$D_n(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{p=1}^{n} \delta\ K(x_p,x_p) + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{p,q=1}^{n} \delta^2 \begin{vmatrix} K(x_p,x_p) & K(x_p,x_q) \\ K(x_q,x_p) & K(x_q,x_q) \end{vmatrix}$$

$$- \frac{\lambda^3}{3!} \sum_{p,q,r=1}^{n} \delta^3 \begin{vmatrix} K(x_p,x_p) & K(x_p,x_q) & K(x_p,x_r) \\ K(x_q,x_p) & K(x_q,x_q) & K(x_q,x_r) \\ K(x_r,x_p) & K(x_r,x_q) & K(x_r,x_r) \end{vmatrix} + \dots \quad \text{(IV-5)}$$

Faisons tendre $\delta \to 0$ et $n \to \infty$ et remplaçons les sommations par des intégrations, on a :

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b K(\xi_1, \xi_1)\, d\xi_1 + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(\xi_1, \xi_1) & K(\xi_1, \xi_2) \\ K(\xi_2, \xi_1) & K(\xi_2, \xi_2) \end{vmatrix} d\xi_1\, d\xi_2$$

$$- \dots\dots \quad \text{(IV-6)}$$

De plus, si $D_n(x_\mu, x_\nu)$ est le cofacteur du terme dans $D_n(\lambda)$ qui contient $K(x_\nu, x_\mu)$, la solution du système d'équations linéaires (IV-4) est :

$$\phi(x_\mu) = \frac{f(x_1)\, D_n(x_\mu, x_1) + \dots + f(x_n)\, D_n(x_\mu, x_n)}{D_n(\lambda)} \quad \text{(IV-7)}$$

On voit que $D_n(x_\mu, x_\mu) = D_n(\lambda)$ et que pour $\mu \neq \nu$, on a :

$$D_n(x_\mu, x_\nu) = \lambda\delta \left\{ K(x_\mu, x_\nu) - \lambda\delta \sum_{p=1}^{n} \begin{vmatrix} K(x_\mu, x_\nu) & K(x_\mu, x_p) \\ K(x_p, x_\nu) & K(x_p, x_p) \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \lambda^2 \delta^2 \sum_{p,q=1}^{n} \begin{vmatrix} K(x_\mu, x_\nu) & K(x_\mu, x_p) & K(x_\mu, x_q) \\ K(x_p, x_\nu) & K(x_p, x_p) & K(x_p, x_q) \\ K(x_q, x_\nu) & K(x_q, x_p) & K(x_q, x_q) \end{vmatrix} - \dots \right\}$$

D'où la forme limite de $D_n(x_\mu, x_\nu)\,\delta^{-1}$ est :

$$D(x_\mu, x_\nu, \lambda) = \lambda K(x_\mu, x_\nu) - \lambda^2 \int_a^b \begin{vmatrix} K(x_\mu, x_\nu) & K(x_\mu, \xi_1) \\ K(\xi_1, x_\nu) & K(\xi_1, \xi_1) \end{vmatrix} d\xi_1$$

$$+ \frac{1}{2!} \lambda^3 \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(x_\mu, x_\nu) & K(x_\mu, \xi_1) & K(x_\mu, \xi_2) \\ K(\xi_1, x_\nu) & K(\xi_1, \xi_1) & K(\xi_1, \xi_2) \\ K(\xi_2, x_\nu) & K(\xi_2, \xi_1) & K(\xi_2, \xi_2) \end{vmatrix} d\xi_1 \; d\xi_2 - \dots \qquad \text{(IV-8)}$$

On a donc la solution de l'équation intégrale :

$$\phi(x) = f(x) + \frac{1}{D(\lambda)} \int_a^b D(x, \xi, \lambda)\, f(\xi)\, d\xi \qquad \text{(IV-9)}$$

Cette solution unique converge.

V. - METHODE DE RESOLUTION DES EQUATIONS INTEGRALES SINGULIERES [11] [15]

Pour résoudre ces équations, il y a deux possibilités :

(1) l'une est de séparer une partie du noyau que l'on peut résoudre par une méthode connue et dont le reste est compact.

(2) l'autre est de changer d'espace de Banach car si un opérateur n'est pas compact dans l'un, il peut l'être dans l'autre.

Nous allons donner un exemple qui illustrera cette méthode : la diffusion à deux corps dans le cas des ondes partielles. On considère l'espace C_1 dont les propriétés sont indiquées dans le 2) du § II.

Considérons le noyau de l'équation de Lippmann-Schwinger :

$$\langle p | \hat{K}_\ell(s) | q \rangle = 4\pi\, V_\ell(p,q)\, q^2 \left[q^2 - s\right]^{-1} \qquad \text{(V-1)}$$

où $\begin{cases} p, q & \text{sont des quantités de mouvement valeurs propres des kets propres} \\ & |p> \text{ et } |q> \text{ d'un ensemble complet d'observables compatibles.} \\ s = p^2 & \\ V_\ell & \text{potentiel en ondes partielles.} \end{cases}$

On peut écrire $\hat{K}_\ell$ (s) sous la forme :

$$\hat{K}_\ell (s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds' \frac{\hat{\Delta}_\ell (s')}{s' - s} \qquad (V-2)$$

où $< p| \hat{\Delta}_\ell (s) |q> = 2\pi^2 V_\ell (p, s^{1/2}) s^{1/2} \delta(q - s^{1/2})$

on aura :

(a) $2\pi^2 V_\ell (p, s^{1/2}) s^{1/2}$ appartenant à C_1 si $V_\ell (p, q)$ et $\frac{\partial V_\ell (p, q)}{\partial p}$ sont continus et bornés en p.

(b) $\delta (q - s^{1/2})$ appartenant à C_1

on sait que :

$$f(a) = \int \delta (p - a) \; f(p) \, dp \qquad \text{où} \begin{cases} f(a) \\ f(p) \end{cases} \in C_1$$

Donc δ (p - a) fait passer d'une fonction de C_1 à une autre fonction de C_1 donc δ (p - a) appartient à l'espace adjoint C_1^* et on pourrait montrer que δ' (p - a) appartient aussi à C_1^* et qu'elles sont toutes deux de norme unité

Par conséquent, $< p| \hat{\Delta}_\ell (s) |q>$ appartient à C_1 donc est un opérateur linéaire de C_1 quel que soit s si (a) est vérifié.

D'après le théorème 1 - § II, on en conclut que $\hat{\Delta}_\ell$ (s) est un opérateur compact et d'après le théorème 2 - § II, $\hat{K}_\ell$ (s) le sera aussi si (V-2) converge.

Nous devons considérer deux cas :

(α) On se place en dehors de la couche d'impulsion. Dans ce cas, l'intégrale n'est pas singulière et convergera si $|\hat{\Delta}_\ell (s)| \leq \frac{C}{1 + \mathrm{Log}^2 s}$ uniformément en s donc compte tenu que $\delta (q - s^{1/2})$ a une norme unité dans C_1^* et de (a) :

$$\left\{ \begin{array}{l} |q\, V_\ell (p, q)| \leq \dfrac{A}{1 + \mathrm{Log}^2 q} \\ \\ \left| q \dfrac{\partial V_\ell (p, q)}{\partial p} \right| \leq \dfrac{B}{1 + \mathrm{Log}^2 q} \end{array} \right. \quad \text{uniformément en } p, q \qquad (V\text{-}3)$$

(β) On se place sur la couche d'impulsion, l'intégrale est alors singulière. Pour montrer que l'intégrale convergera sous certaines conditions, on utilise les deux théorèmes suivants de Mikhlin [13]

Théorème 1.

Si $\hat{\Delta}(s)$ est un opérateur dépendant de la variable réelle s et vérifiant la condition de Lipschitz-Hölder $H(\mu)$:

$$|\hat{\Delta}(s) - \hat{\Delta}(s')| < C\, |s - s'|^\mu$$

au voisinage de s, alors l'intégrale suivante existe :

$$\int \frac{\hat{\Delta}(s')\, ds'}{s' - s}$$

Théorème 2.

Si $\hat{\Delta}(s)$ a une dérivée bornée dans le voisinage de s, alors $\hat{\Delta}(s)$ vérifie $H(1)$ sauf en $s = 0$ où il vérifie $H\left(\frac{1}{2}\right)$.

Pour que la dérivée de $\Delta(s)$: $\dfrac{d\hat{\Delta}\,(q^2)}{dq}$ $(s = q^2)$ soit bornée, il suffit qu'elle appartienne à C_1.

On a :

$$\frac{d\hat{\Delta}\,(q^2)}{dq} = 8\pi^2\, q\, V_\ell\, (p, q) + 4\pi^2\, q^2\, \frac{\partial V_\ell\, (p, q)}{\partial q}$$

$\frac{d\,\hat{\Delta}(q^2)}{dq}$ appartiendra à C_1 si :

(1) $V_\ell\,(p,\,q)$ appartient à C_1 donc :

$$\left\{\begin{array}{l} |q\,V_\ell\,(p,\,q)| < E \\ \left|q\,\dfrac{\partial\,V_\ell\,(p,\,q)}{\partial\,p}\right| < F \end{array}\right. \qquad \text{(V-4)}$$

(2) $\dfrac{\partial\,V_\ell\,(p,\,q)}{\partial\,q}$ appartient à C_1 donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial\,[q\,V_\ell\,(p,\,q)]}{\partial q}\right| < D \\ \left|\dfrac{\partial^2\,[q\,V_\ell\,(p,\,q)]}{\partial p\,\partial q}\right| < G \end{array}\right. \qquad \text{(V-5)}$$

où G, D, E, F sont des constantes.

APPENDICE A

TRANSFORMATION DES HARMONIQUES SPHERIQUES A L'AIDE DE ROTATIONS FINIES [1] [7]

I. Définition

Les harmoniques sphériques étant les fonctions propres de l'opérateur moment orbital angulaire et cet opérateur étant invariant lors d'une rotation du système de référence, les nouvelles harmoniques sphériques obtenues après cette rotation sont encore fonctions propres de l'opérateur moment orbital angulaire.

La transformation sera définie par:

$$Y_{\ell m_\ell}(\theta_{\vec{p}_j}, \phi_{\vec{p}_j}) = D(\rho,\delta,\mu) Y_{\ell m_\ell}(\theta_{\vec{p}_i}, \phi_{\vec{p}_i}) = \sum_{m'_\ell=-\ell}^{+\ell} Y_{\ell m'_\ell}(\theta_{\vec{p}_i}, \phi_{\vec{p}_i}) \langle \ell m'_\ell | D(\rho,\delta,\mu) | \ell m_\ell \rangle \qquad (A-1)$$

où $D(\rho,\delta,\mu)$ est la matrice de rotation considérée.

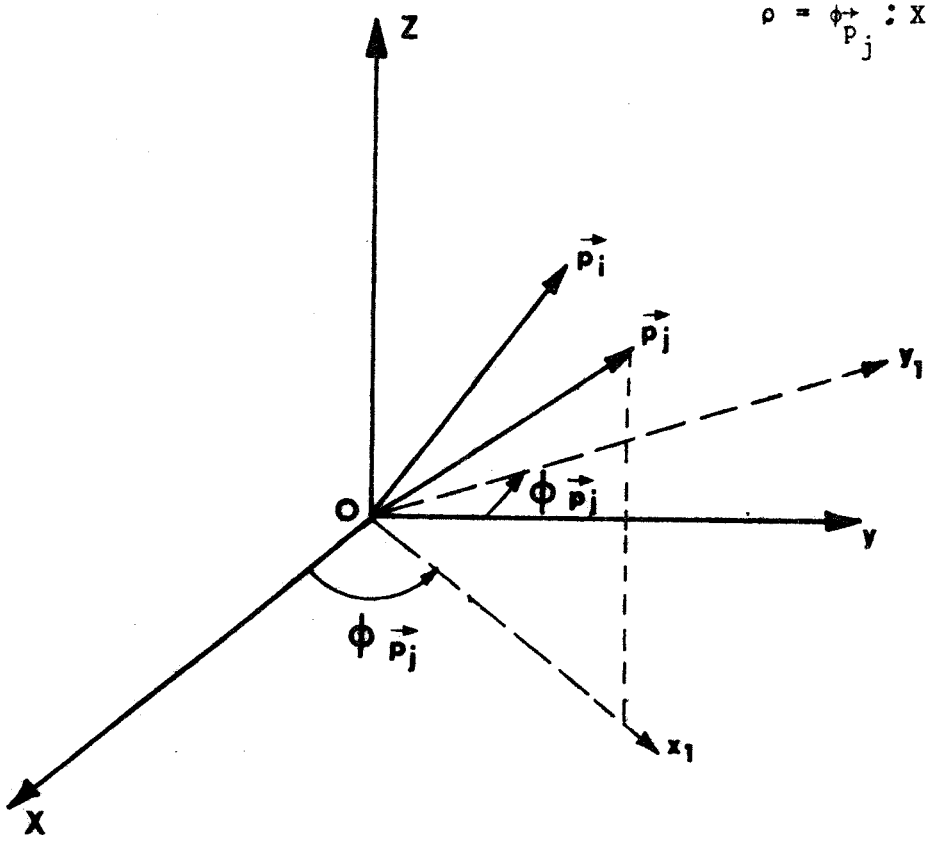
Nous choisissons une rotation qui fait passer du système de référence S_{xyz} à un système de référence S'_{xyz} où le vecteur $\vec{p}_j$ est colinéaire à z et x appartient au plan formé par les vecteurs $\vec{p}_i$ et $\vec{p}_j$.
Dans ce cas , ρ est la rotation qui amène le vecteur $\vec{p}_j$ dans le plan x_1Oz par conséquent $\rho = \phi_{\vec{p}_j}$; δ est la rotation qui amène le vecteur $\vec{p}_j$ sur l'axe Oz d'où: $\delta = \theta_{\vec{p}_j}$ et enfin μ est la rotation amenant x dans le plan formé par les vecteurs $\vec{p}_i$ et $\vec{p}_j$ tel que :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{-\sin\theta_{\vec{p}_i} \sin(\phi_{\vec{p}_j} - \phi_{\vec{p}_i}) \cos\theta_{\vec{p}_j} + \cos\theta_{\vec{p}_i} \sin\theta_{\vec{p}_j}}{\sin\theta_{\vec{p}_j} \cos(\phi_{\vec{p}_j} - \phi_{\vec{p}_i})}$$

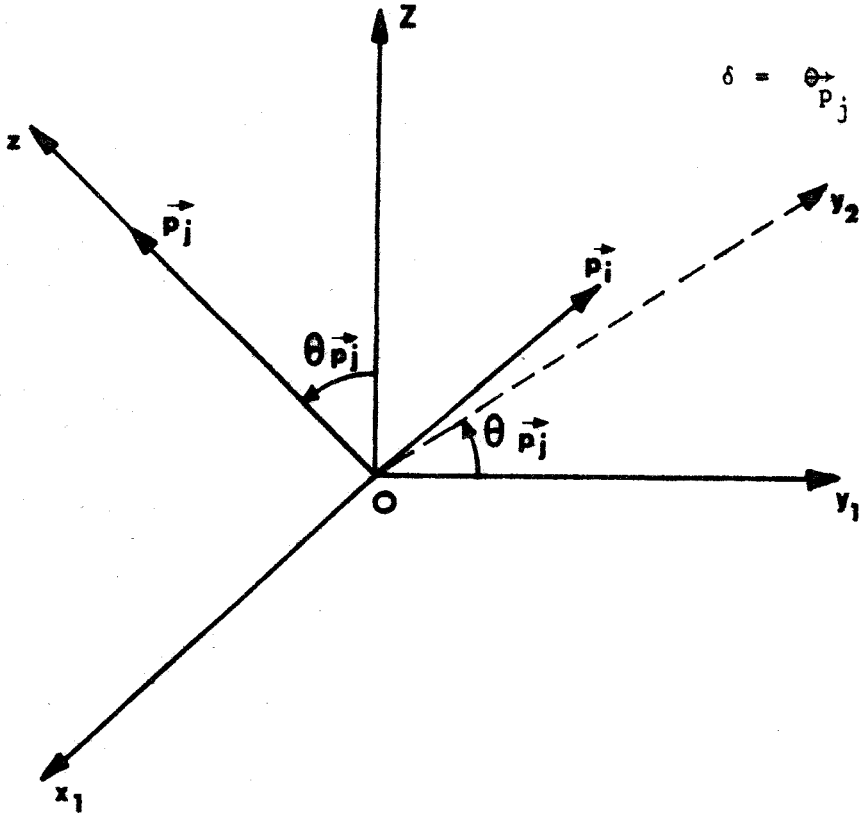
Les harmoniques sphériques du noyau K_i des équations du problème à quatre corps deviennent:

$$Y^*_{Lm_L}(\hat{q}) = \sum_{n_L=-L}^{+L} Y^*_{Ln_L}(\theta_{\vec{q}\vec{p}_j}, \phi_{\vec{q}\vec{p}_j}) D^{*L}_{n_L,m_L}(\omega)$$

$\rho = \phi_{\vec{p}_j} : X\ Y\ Z \rightarrow x_1\ y_1\ Z$

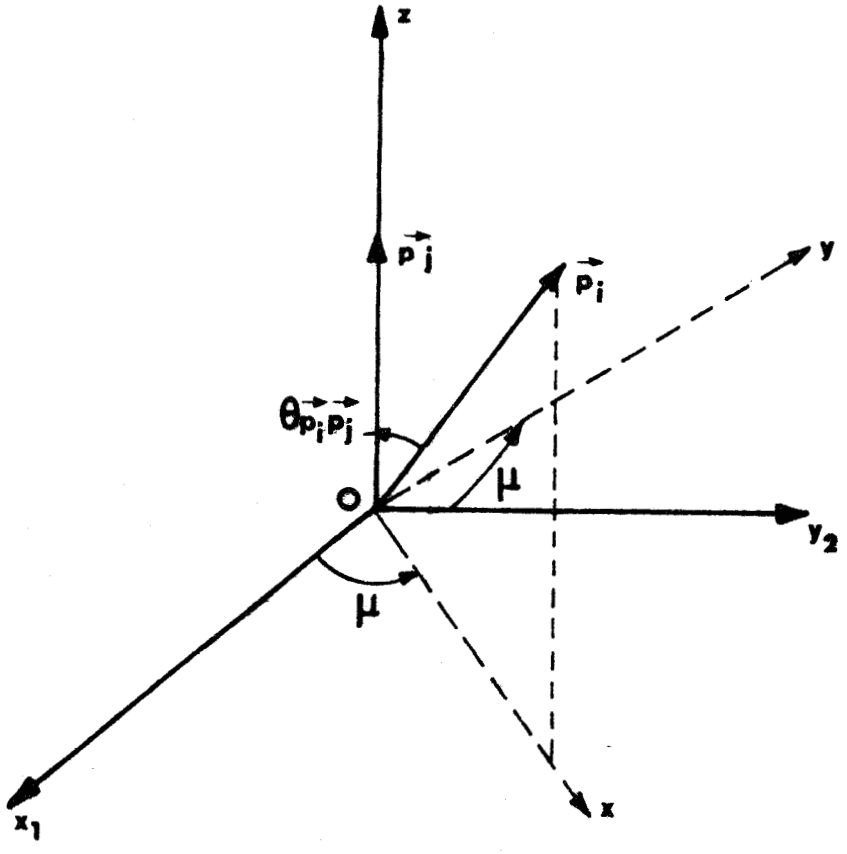


$\delta = \theta_{\vec{p}_j} : x_1\ y_1\ Z \rightarrow x_1\ y_2\ z$



BUS LILLE

μ : $x_1\ y_2\ z \rightarrow x\ y\ z$



$$\text{avec : } \operatorname{tg} \mu = \frac{-\sin \theta_{\vec{p}_i} \sin (\phi_{\vec{p}_j} - \phi_{\vec{p}_i}) \cos \theta_{\vec{p}_j} + \cos \theta_{\vec{p}_i} \sin \theta_{\vec{p}_j}}{\sin \theta_{\vec{p}_i} \cos (\phi_{\vec{p}_j} - \phi_{\vec{p}_i})}$$

BUS LILLE

$$Y^{*}_{\mathcal{L}m_{\mathcal{L}}}(\hat{r}) = \sum_{n_{\mathcal{L}}=-\mathcal{L}}^{+\mathcal{L}} Y^{*}_{\mathcal{L}n_{\mathcal{L}}}(\theta_{\vec{r}\vec{p}_j}, \phi_{\vec{r}\vec{p}_j})\, D^{*\mathcal{L}}_{n_{\mathcal{L}}m_{\mathcal{L}}}(\omega)$$

$$Y^{*}_{\ell m_\ell}(\hat{p}_i) = \sum_{n_\ell=-\ell}^{+\ell} Y^{*}_{\ell n_\ell}(\theta_{\vec{p}_i\vec{p}_j}, 0)\, D^{*\ell}_{n_\ell, m_\ell}(\omega)$$

$$Y_{\ell' m_{\ell'}}(\hat{p}_j) = \sum_{n_{\ell'}=-\ell'}^{+\ell'} Y_{\ell' n_{\ell'}}(0,0)\, D^{\ell'}_{n_{\ell'}, m_{\ell'}}(\omega) \qquad \text{(A-2)}$$

$$Y_{L' m_{L'}}(\hat{q}_j) = \sum_{n_{L'}=-L'}^{+L'} Y_{L' n_{L'}}(\theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j}, \phi_{\vec{q}_j\vec{p}_j})\, D^{L'}_{n_{L'}, m_{L'}}(\omega)$$

$$Y_{\mathcal{L}' m_{\mathcal{L}'}}(\hat{r}_j) = \sum_{n_{\mathcal{L}'}=-\mathcal{L}'}^{+\mathcal{L}'} Y_{\mathcal{L}' n_{\mathcal{L}'}}(\theta_{\vec{r}_j\vec{p}_j}, \theta_{\vec{r}_j\vec{p}_j})\, D^{\mathcal{L}'}_{n_{\mathcal{L}'}, m_{\mathcal{L}'}}(\omega)$$

où nous avons posé: $\omega = (\rho, \delta, \mu)$, l'angle $\phi_{\vec{r}_j\vec{p}_j}$ dépend de $\phi_{\vec{q}_j\vec{p}_j}$.

II. Relations d'orthogonalité des $D^{j}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)$

Les divers éléments de la matrice de rotation ont les propriétés suivantes:

$$D^{j}_{nm}(\omega) D^{j'}_{n'm'}(\omega) = \sum_{j'', m'', n''} (2j''+1) \begin{pmatrix} j & j' & j'' \\ n & n' & n'' \end{pmatrix} D^{j''*}_{n''m''}(\omega) \begin{pmatrix} j & j' & j'' \\ m & m' & m'' \end{pmatrix}$$

$$D^{j*}_{m'm}(\omega) = (-1)^{m'-m} D^{j}_{-m'-m}(\omega) \qquad \text{(A-3)}$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \int d\omega\, D^{j}_{nm}(\omega) D^{j'}_{n'm'}(\omega)\, D^{j''}_{n''m''}(\omega) = \begin{pmatrix} j & j' & j'' \\ n & n' & n'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j' & j'' \\ m & m' & m'' \end{pmatrix}$$

Pour les éléments de la matrice de rotation intervenant dans le noyau K_i, nous aurons par conséquent:

$$D^{*\ell}_{n_\ell,m_\ell}(\omega)\, D^{*L}_{n_L,m_L}(\omega) = (-1)^{n_\ell+n_L-m_\ell-m_L}\, D^{\ell}_{-n_\ell,-m_\ell}(\omega)\, D^{L}_{-n_L,-m_L}(\omega)$$

$$= \sum_{L''',n_{L'''},m_{L'''}} (-1)^{n_\ell+n_L-m_\ell-m_L-n_{L'''}-m_{L'''}} (2L'''+1) \begin{pmatrix} \ell & L & L''' \\ -n_\ell & -n_L & -n_{L'''} \end{pmatrix} D^{*L'''}_{n_{L'''},m_{L'''}}(\omega) \begin{pmatrix} \ell & L & L''' \\ -m_\ell & -m_L & -m_{L'''} \end{pmatrix}$$

(A-4)

$$D^{\ell'}_{o,m_{\ell'}}(\omega)\, D^{L'}_{n_{L'},m_{L'}}(\omega) = \sum_{\ell''',m_{\ell'''}} (-1)^{-n_{L'}-m_{\ell'''}} \begin{pmatrix} \ell' & L' & \ell''' \\ 0 & n_{L'} & -n_{L'} \end{pmatrix}$$

$$\cdot\, D^{*\ell'''}_{n_{L'},m_{\ell'''}}(\omega) \begin{pmatrix} \ell' & L' & \ell''' \\ m_{\ell'} & m_{L'} & -m_{\ell'''} \end{pmatrix}$$

(A-4')

$$D^{*\mathcal{L}}_{n_{\mathcal{L}},m_{\mathcal{L}}}(\omega)\, D^{\mathcal{L}'}_{n_{\mathcal{L}'},m_{\mathcal{L}'}}(\omega) = (-1)^{n_{\mathcal{L}}-m_{\mathcal{L}}}\, D^{\mathcal{L}}_{-n_{\mathcal{L}},-m_{\mathcal{L}}}(\omega)\, D^{\mathcal{L}'}_{n_{\mathcal{L}'},m_{\mathcal{L}'}}(\omega)$$

$$= \sum_{\mathcal{L}'',n_{\mathcal{L}''},m_{\mathcal{L}''}} (-1)^{n_{\mathcal{L}}-m_{\mathcal{L}}-n_{\mathcal{L}''}-m_{\mathcal{L}''}} (2\mathcal{L}''+1) \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{L}' & \mathcal{L}'' \\ -n_{\mathcal{L}} & n_{\mathcal{L}'} & -n_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix}$$

$$\cdot\, D^{*\mathcal{L}''}_{n_{\mathcal{L}''},m_{\mathcal{L}''}}(\omega) \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{L}' & \mathcal{L}'' \\ -m_{\mathcal{L}} & m_{\mathcal{L}'} & -m_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix}$$

(A-4'')

$$\frac{1}{8\pi^2} \int d\omega\, D^{*L'''}_{n_{L'''},m_{L'''}}(\omega)\, D^{*\ell'''}_{n_{L'},m_{\ell'''}}(\omega)\, D^{*\mathcal{L}''}_{n_{\mathcal{L}''},m_{\mathcal{L}''}}(\omega) =$$

$$\frac{1}{8\pi^2} (-1)^{n_{L'''}+n_{L'}+n_{\mathcal{L}''}-m_{L'''}-m_{\ell'''}-m_{\mathcal{L}''}} \int d\omega\, D^{L'''}_{-n_{L'''},-m_{L'''}}(\omega)\, D^{\ell'''}_{-n_{L'},-m_{\ell'''}}(\omega)$$

$$\cdot\, D^{\mathcal{L}''}_{-n_{\mathcal{L}''},-m_{\mathcal{L}''}}(\omega) = (-1)^{n_{L'''}+n_{L'}+n_{\mathcal{L}''}-m_{L'''}-m_{\ell'''}-m_{\mathcal{L}''}}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \ell & L' & L''' & \mathcal{L}'' \\ -n_{L'} & -n_{L'''} & -n_{L''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell''' & L''' & \mathcal{L}'' \\ -m_{\ell'''} & -m_{L'''} & -m_{\mathcal{L}''} \end{pmatrix}$$

(A-4''')

A P P E N D I C E B

DETERMINATION DE LA FORME EXPLICITE DES COSINUS EN FONCTION DES LONGUEURS DES VECTEURS ASSOCIES

I. Etude des triplets $|\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}>$

Les relations du chapitre IV du formalisme général vont nous permettre de donner quatre forme différentes aux $\cos\theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j}$ et $\cos\theta_{\vec{q}_j\vec{r}_j}$

1) Le premier type de relations est :

$$\vec{p}_{ij} = \alpha^i_{jk}\,\vec{p}_{ik} - \beta^i_{jk}\,\vec{q}_j$$

$$\vec{q}_k = -\beta^i_{jk}\,\vec{p}_{ik} + \alpha^i_{jk}\,\vec{q}_j \qquad (54)$$

Partant de ces relations, nous obtenons la forme explicite de $\cos\theta_{\vec{p}_{ik}\vec{q}_j}$

$$\cos\theta_{\vec{p}_{ik}\,\vec{q}_j} = \frac{p_j^{\,2} - (\alpha^i_{jk})^2\,p_{ik}^2 - (\beta^i_{jk})^2 q_j^{\,2}}{-2\alpha^i_{jk}\,\beta^i_{jk}\,p_{ik}\,q_j} \qquad (B-1)$$

Utilisant le fait que l'hamiltonien libre H_o s'écrit:

$$H_o = p_{ij}^{\,2} + q_k^{\,2} + r_\ell^{\,2} = p_{ik}^2 + q_j^{\,2} + r_\ell^{\,2}$$

et que : $(\beta^i_{jk})^2 = 1 - (\alpha^i_{jk})^2$, $\cos\theta_{\vec{p}_{ik}\vec{q}_j}$ prend la forme :

$$\cos\theta_{\vec{p}_{ik}\,\vec{q}_j} = \frac{(\beta^i_{jk})^2\,p_{ik}^2 + (\alpha^i_{jk})^2\,q_j^{\,2} - q_k^{\,2}}{-2\alpha^i_{jk}\,\beta^i_{jk}\,p_{ik}\,q_j} \qquad (B-2)$$

or: $-1 \leqslant \cos\theta_{\vec{p}_{ik}\,\vec{q}_j} \leqslant +1$

Considérons les deux cas extrêmes:

1) $\cos\theta_{\vec{p}_{ik}\,\vec{q}_j} = -1$

d'où $(\beta^i_{jk}\ p_{ik} - \alpha^i_{jk}\ q_j)^2 = q_k^{\ 2}$

soit : $\beta^i_{jk}\ p_{ik} - \alpha^i_{jk}\ q_j = \pm\ q_k$

et par conséquent:

$$p_{ik}^{\ 2} = \frac{(\alpha^i_{jk}\ q_j - q_k)^2}{(\beta^i_{jk})^2} \quad \text{ou} \quad \frac{(\alpha^i_{jk}\ q_j + q_k)^2}{(\beta^i_{jk})^2}$$

2) $\cos\theta_{\vec{p}_{ik}\vec{q}_j} = +1$

Nous obtenons les mêmes formes pour p^2_{ik}

Différentions $\cos\theta_{\vec{p}_{ik}\,\vec{q}_j}$ par rapport à $q_k^{\ 2}$

$$d(\cos\theta_{\vec{p}_{ik}\,\vec{q}_j}) = \frac{dq_k^{\ 2}}{2\alpha^i_{jk}\ \beta^i_{jk}\ p_{ik}\ q_j} \qquad \text{(B-3)}$$

Réécrivons ces résultats sous forme générale:

$$d(\cos\theta_{\vec{q}_\ell\vec{p}_\ell}) = \frac{dq_k^{\ 2}}{2\alpha_{k\ell}\ \beta_{k\ell}\ p_\ell\ q_\ell} \qquad \text{(B-4)}$$

où $p_\ell^{\ 2}$ varie de $L_{k\ell} = \dfrac{(q_k - \alpha_{k\ell} q_\ell)^2}{(\beta_{k\ell})^2}$ à $U_{k\ell} = \dfrac{(q_k + \alpha_{k\ell} q_\ell)^2}{(\beta_{k\ell})^2}$

Ces résultats ne sont utilisables que pour le problème à trois corps car ils ne font intervenir que trois particules.

2) Couplage des triplets composés à partir d'une particule initiale identique

A) Passage d'une suite d'indices cyclique à une suite d'indices non cyclique.

$$\vec{p}_{ij} = \alpha^{i}_{\ell j}\,\vec{p}_{i\ell} - \beta^{i}_{\ell j}\,\vec{q}_j$$

$$\vec{q}_k = -\,\delta^{i}_{\ell jk}\,p_{i\ell} - \mu^{i}_{\ell jk}\,\vec{q}_j + \rho^{i}_{\ell jk}\,\vec{r}_k \qquad (57)$$

$$\vec{r}_\ell = -\,\gamma^{i}_{\ell jk}\,\vec{p}_{i\ell} - \nu^{i}_{\ell jk}\,\vec{q}_j - \omega^{i}_{\ell jk}\,\vec{r}_k$$

Or le déterminant de la matrice des coefficients des cosinus est nul. Nous ne pouvons donc expliciter que le cosinus de $\vec{q}_j$ et $\vec{p}_{i\ell}$, les deux autres cosinus vérifient une relation du type :

$$a \cos \theta_{\vec{p}_{i\ell}\,\vec{r}_k} + b \cos \theta_{\vec{q}_j\,\vec{r}_k} = 0 \qquad \text{(B-6)}$$

Explicitons $\cos \theta_{\vec{p}_{i\ell}\,\vec{q}_j}$:

$$\cos \theta_{\vec{p}_{i\ell}\,\vec{q}_j} = \frac{(\beta^{i}_{\ell j})^2 p^2_{i\ell} + (\alpha^{i}_{\ell j})^2 q_j^{\,2} + r_k^{\,2} - r_\ell^{\,2} - q_k^{\,2}}{-2\alpha^{i}_{\ell j}\;\beta^{i}_{\ell j}\cdot p_{i\ell} q_j} \qquad \text{(B-7)}$$

avec $p^2_{i\ell}$ variant de $Q_{ij} = \dfrac{(p_{ij} - \beta^{i}_{\ell j} q_j)^2}{(\alpha^{i}_{\ell j})^2}$ à $R_{ij} = \dfrac{(p_{ij} + \beta^{i}_{\ell j} q_j)^2}{(\alpha^{i}_{\ell j})^2}$

$$d(\cos \theta_{\vec{p}_{i\ell}\,,\vec{q}_j}) = \frac{dq_k^{\,2}}{2\alpha^{i}_{\ell j}\;\beta^{i}_{\ell j}\;p_{i\ell} q_j} \qquad \text{(B-8)}$$

Les deux autres cosinus étant liés, nous posons arbitrairement:

$$\cos\theta_{\vec{q}_j\,\vec{r}_k} = \frac{r_\ell^{\,2} - (\omega^{i}_{\ell jk})^2\, r_k^{\,2} - 1}{2\omega^{i}_{\ell jk}\;r_k} \qquad \text{(B-9)}$$

avec r_k^2 variant de $M_\ell = \dfrac{(r_\ell - 1)^2}{(\omega^i_{\ell jk})^2}$ à $V_\ell = \dfrac{(r_\ell + 1)^2}{(\omega^i_{\ell jk})^2}$

$$d(\cos\theta_{\vec{q}_j\,\vec{r}_k}) = \frac{dr_\ell^2}{2\omega^i_{\ell jk}\, r_k} \tag{B-10}$$

B) Passage d'une suite d'indices non cyclique à une suite d'indices cyclique:

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{i\ell} &= \alpha^i_{\ell j}\ \vec{p}_{ij} - \delta^i_{\ell jk}\ \vec{q}_k - \gamma^i_{\ell jk}\ \vec{r}_\ell \\
\vec{q}_j &= -\beta^i_{\ell j}\ \vec{p}_{ij} - \mu^i_{\ell jk}\ \vec{q}_k - \nu^i_{\ell jk}\ \vec{r}_\ell \\
\vec{r}_k &= \rho^i_{\ell jk}\ \vec{q}_k - \omega^i_{\ell jk}\ \vec{r}_\ell
\end{aligned} \tag{58}$$

Nous obtenons cette fois:

$$\cos\theta_{\vec{q}_k\,\vec{r}_\ell} = \frac{r_k^2 - (\rho^i_{\ell jk})^2\, q_k^2 - (\omega^i_{\ell jk})^2 r_\ell^2}{-2\rho^i_{\ell jk}\ \omega^i_{\ell jk}\ q_k\ r_\ell} \tag{B-11}$$

avec r_ℓ^2 variant de $M_{k\ell} = \dfrac{(r_k - \rho^i_{\ell jk}\ q_k)^2}{(\omega^i_{\ell jk})^2}$ à $V_{k\ell} = \dfrac{(r_k + \rho^i_{\ell jk}\ q_k)^2}{(\omega^i_{\ell jk})^2}$

$$d(\cos\theta_{\vec{q}_k\,\vec{r}_\ell}) = \frac{dr_k^2}{-2\rho^i_{\ell jk}\ \omega^i_{\ell jk}\ q_k\ r_\ell} \tag{B-12}$$

Les deux autres cosinus étant liés, nous posons:

$$\cos\theta_{\vec{p}_{ij}\,\vec{q}_k} = \frac{q_j^2 - (\beta^i_{\ell j})^2\, p_{ij}^2 - 1}{-2\beta^i_{\ell j}\ p_{ij}} \tag{B-13}$$

avec p_{ij}^2 variant de $Q_j = \dfrac{(q_j - 1)^2}{(\beta^i_{\ell j})^2}$ à $R_j = \dfrac{(q_j + 1)^2}{(\beta^i_{\ell j})^2}$

$$d(\cos\theta_{\vec{p}_{ij}\vec{q}_k}) = \frac{dq_j^{\,2}}{-2\beta^{i}_{\ell j}\, p_{ij}} \qquad \text{(B-14)}$$

3) Couplage de triplets indépendants.

$$\vec{p}_{ij} = \theta^{ij}_{k\ell}\vec{q}_i - \gamma^{ij}_{k\ell}\vec{r}_j$$

$$\vec{q}_k = \theta^{k\ell}_{ij}\,\vec{p}_{k\ell} - \xi^{k\ell}_{ij}\vec{q}_i - \Omega^{ij}_{k\ell}\vec{r}_j \qquad (61)$$

$$\vec{r}_\ell = -\gamma^{k\ell}_{ij}\,\vec{p}_{k\ell} + \Omega^{k\ell}_{ij}\vec{q}_i + \omega^{ij}_{k\ell}\vec{r}_j$$

Nous obtenons:

$$\cos\theta_{\vec{q}_i\vec{r}_j} = \frac{p_{k\ell}^{\,2} + (\gamma^{ij}_{k\ell})^2\, q_i^{\,2} + (\theta^{ij}_{k\ell})^2\, r_j^{\,2} - q_k^{\,2} - r_\ell^{\,2}}{-\,2\theta^{ij}_{k\ell}\,\gamma^{ij}_{k\ell}\, q_i\, r_j} \qquad \text{(B-15)}$$

avec r_j^2 variant de $M_{ij} = \dfrac{(p_{ij} - \theta^{ij}_{k\ell}\, q_i)^2}{(\gamma^{ij}_{k\ell})^2}$ à $V_{ij} = \dfrac{(p_{ij} + \theta^{ij}_{k\ell}\, q_i)^2}{(\gamma^{ij}_{k\ell})^2}$

$$d(\cos\theta_{\vec{q}_i\vec{r}_j}) = \frac{dr_\ell^{\,2}}{2\theta^{ij}_{k\ell}\,\gamma^{ij}_{k\ell}\, q_i\, r_j} \qquad \text{(B-16)}$$

Les deux autres cosinus étant liés, nous posons:

$$\cos\theta_{\vec{q}_i\vec{p}_{k\ell}} = \frac{q_k^{\,2} - (\theta^{k\ell}_{ij})^2 p^2_{k\ell} - 1}{2\theta^{k\ell}_{ij}\, p_{k\ell}} \qquad \text{(B-17)}$$

avec $p_{k\ell}^2$ variant de $Q_k = \dfrac{(q_k - 1)^2}{(\theta^{k\ell}_{ij})^2}$ à $R_k = \dfrac{(q_k + 1)^2}{(\theta^{k\ell}_{ij})^2}$

$$d(\cos\theta_{\vec{q}_i\vec{p}_{k\ell}}) = \frac{dq_k^{\,2}}{2\theta^{k\ell}_{ij}\, p_{k\ell}} \qquad \text{(B-18)}$$

II. Etude des triplets $|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}>$

Les relations entre ces triplets sont du type:

$$\vec{p}_{ij} = \alpha^{i}_{jk}\,\vec{p}_{ik} - \alpha^{j}_{i\ell}\,\vec{p}_{j\ell} + \varepsilon^{ij}_{k\ell}\,\vec{p}_{ik,j\ell}$$

$$\vec{p}_{k\ell} = -\,\alpha^{k}_{i\ell}\,\vec{p}_{ik} + \alpha^{\ell}_{kj}\,\vec{p}_{j\ell} + \varepsilon^{\ell k}_{ji}\,\vec{p}_{ik,j\ell} \qquad (64)$$

$$\vec{p}_{ij,k\ell} = \varepsilon^{ik}_{j\ell}\,\vec{p}_{ik} + \varepsilon^{\ell j}_{ki}\,\vec{p}_{j\ell} + \pi^{ij}_{k\ell}\,\vec{p}_{ik,j\ell}$$

Cette fois, les trois cosinus sont liés par une relation du type:

$$a_1 \cos\theta_{\vec{p}_{ik}\vec{p}_{j\ell}} + b_1 \cos\theta_{\vec{p}_{ik}\vec{p}_{ik,j\ell}} + c_1 \cos\theta_{\vec{p}_{j\ell}\vec{p}_{ik,j\ell}} = 0 \qquad \text{(B-19)}$$

Par conséquent, nous posons arbitrairement:

$$\cos\theta_{\vec{p}_{ik}\vec{p}_{j\ell}} = \frac{p_{k\ell}^{\,2} - (\alpha^{i}_{jk})^2\, p_{ik}^{2} - (\alpha^{j}_{i\ell})^2\, p_{j\ell}^{\,2}}{-2\alpha^{i}_{jk}\,\alpha^{j}_{i\ell}\, p_{ik}\, p_{j\ell}} \qquad \text{(B-20)}$$

alors p_{ik}^{2} varie de $S_{jk\ell} = \dfrac{(p_{k\ell} - \alpha^{j}_{i\ell}\, p_{j\ell})^2}{(\alpha^{i}_{jk})^2}$

à $W_{jk\ell} = \dfrac{(p_{k\ell} + \alpha^{j}_{i\ell}\, p_{j\ell})^2}{(\alpha^{i}_{jk})^2}$

$$d(\cos\theta_{\vec{p}_{ik}\vec{p}_{j\ell}}) = \frac{dp_{k\ell}^{\,2}}{-2\alpha^{i}_{jk}\,\alpha^{j}_{i\ell}\, p_{ik} p_{j\ell}} \qquad \text{(B-21)}$$

et nous posons aussi:

$$\cos\theta_{\vec{p}_{j\ell}\vec{p}_{ik,j\ell}} = \frac{p_{ij,k\ell}^{\,2} - (\pi^{ij}_{k\ell})^2\, p_{ik,j\ell}^{\,2} - 1}{-\,2\pi^{ij}_{k\ell}\, p_{ik,j\ell}} \qquad \text{(B-22)}$$

alors $p^2_{ik,j\ell}$ varie de $E_{ij,k\ell} = \dfrac{(p_{ij,k\ell}-1)^2}{(\pi^{ij}_{k\ell})^2}$

à $G_{ij,k\ell} = \dfrac{(p_{ij,k\ell}+1)^2}{(\pi^{ij}_{k\ell})^2}$

$$d(\cos\theta_{\vec{p}_{j\ell}\vec{p}_{ik'j\ell}}) = \frac{dp^2_{ij,k\ell}}{-2\pi^{ij}_{k\ell}\, p_{ik,j\ell}} \qquad \text{(B-23)}$$

A P P E N D I C E C

ITERATION DES EQUATIONS DE FADDEEV DU PROBLEME A QUATRE CORPS.

Itérons l'équation (156) au premier ordre:

$$\psi_\ell^{(ij)}(p,q,r,s)=-2\Phi_\ell^{(ij)}(p,q,r,s)+\psi_\ell^{(k)ij}(p,q,r,s)+\psi_\ell^{(\ell)ij}(p,q,r,s)+\Omega_\ell^{(ij)}(p,q,r,s)$$

$$-\sum_{\ell'}\int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\,2}\int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^{\,2}\int_0^\infty dq_j^{\,2}\;\frac{(-1)^{\ell'+\ell''}\left[(2\ell'+1)(2\ell''+1)\right]^{1/2}}{256\;A_j\;B_j\;C_j\;r}$$

$$\cdot\;\frac{P_{\ell''}(\cos\gamma)P_{\ell'}(\cos\theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})}{p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s}\int_0^\infty dq_i^{\,2}\;\;\psi_{\ell\ell''}^{(k)ij}(pq;p_iq_i;s-r^2)\left[-2\Phi_{\ell'}^{(ik)}(p_j,q_j,r_j,s)\right.$$

$$-2\Phi_{\ell'}^{(jk)}(p_j,q_j,r_j,s)-2\Phi_{\ell'}^{(\ell k)}(p_j,q_j,r_j,s)+\psi_{\ell'}^{(j)ik}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+\psi_{\ell'}^{(i)jk}(p_j,q_j,r_j,s)+\psi_{\ell'}^{(i)\ell k}(p_j,q_j,r_j,s)+\psi_{\ell'}^{(\ell)ik}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+\psi_{\ell'}^{(\ell)jk}(p_j,q_j,r_j,s)+\psi_{\ell'}^{(j)\ell k}(p_j,q_j,r_j,s)+\Omega_{\ell'}^{(ik)}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$\left.+\;\Omega_{\ell'}^{(jk)}(p_j,q_j,r_j,s)+\Omega_{\ell'}^{(\ell k)}(p_j,q_j,r_j,s)\right]$$

$$-\sum_{\ell'}\int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\,2}\int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^{\,2}\int_0^\infty dq_j^{\,2}\;\frac{(-1)^{\ell'+\ell''}\left[(2\ell'+1)(2\ell''+1)\right]^{1/2}P_{\ell''}(\cos\gamma)P_{\ell'}(\cos\theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})}{256\;A_jB_jC_jr(p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s)}$$

$$\cdot\int_0^\infty dq_i^2\ \psi_{\ell\ell''}^{(\ell)ij}(pq;p_iq_i;s-r^2)\Big[-2\Phi_{\ell'}^{(i\ell)}(p_j,q_j,r_j,s)-2\Phi_{\ell'}^{(j\ell)}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$-2\Phi_{\ell'}^{(k\ell)}(p_j,q_j,r_j,s)+\psi_{\ell'}^{(j)i\ell}(p_j,q_j,r_j,s)+\psi_{\ell'}^{(i)j\ell}(p_j,q_j,r_j,s)+\psi_{\ell'}^{(j)k\ell}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+\psi_{\ell'}^{(k)i\ell}(p_j,q_j,r_j,s)+\psi_{\ell'}^{(k)j\ell}(p_j,q_j,r_j,s)+\psi_{\ell'}^{(i)k\ell}(p_j,q_j,r_j,s)+\Omega_{\ell'}^{(i\ell)}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+\Omega_{\ell'}^{(j\ell)}(p_j,q_j,r_j,s)+\Omega_{\ell'}^{(k\ell)}(p_j,q_j,r_j,s)\Big]-\sum_{\ell'_a}\int_0^\infty da_j^2\int_0^\infty dc_j^2\int_0^\infty db_j^2\ \frac{a_jb_jc_j}{8}$$

$$\cdot\ \mathcal{a}_{\ell_a\ell''}^{(ij)}(abc\ ;\ a_ib_ic_i\ ;\ s)$$

$$\cdot\Big[-2\Phi_{\ell'_a}^{(ik)}(a_j,b_j,c_j,s)-2\Phi_{\ell'_a}^{(jk)}(a_j,b_j,c_j,s)\ -2\Phi_{\ell'_a}^{(i\ell)}(a_j,b_j,c_j,s)$$

$$-2\Phi_{\ell'_a}^{(j\ell)}(a_j,b_j,c_j,s)+\psi_{\ell'_a}^{(j)ik}(a_j,b_j,c_j,s)+\psi_{\ell'_a}^{(i)jk}(a_j,b_j,c_j,s)$$

$$+\psi_{\ell'_a}^{(j)i\ell}(a_j,b_j,c_j,s)+\psi_{\ell'_a}^{(\ell)ik}(a_j,b_j,c_j,s)+\psi_{\ell'_a}^{(\ell)jk}(a_j,b_j,c_j,s)$$

$$+\psi_{\ell'_a}^{(k)i\ell}(a_j,b_j,c_j,s)+\psi_{\ell'_a}^{(k)j\ell}(a_j,b_j,c_j,s)+\Omega_{\ell'_a}^{(ik)}(a_j,b_j,c_j,s)$$

$$+\Omega_{\ell'_a}^{(jk)}(a_j,b_j,c_j,s)+\Omega_{\ell'_a}^{(i\ell)}(a_j,b_j,c_j,s)+\Omega_{\ell'_a}^{(j\ell)}(a_j,b_j,c_j,s)\Big]$$

$$-\sum_{\ell'}\int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^2\int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^2\int_0^\infty dq_j^2\frac{(-1)^{\ell+\ell'}\left[(2\ell+1)(2\ell'+1)\right]^{1/2}P_\ell(\cos\gamma)P_{\ell'}(\cos\theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})}{256\,A_j\,B_j\,C_j\,qr\,(p_i^2+q_j^2+r_j^2-s)}$$

$$\cdot T_\ell^{(ij)}(p,p_i,s-q^2-r^2)\Big[-2\Phi_{\ell'}^{(k\ell)}(p_j,q_j,r_j,s)-2\Phi_{\ell'}^{(ik)}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$-2\Phi_{\ell'}^{(jk)}(p_j,q_j,r_j,s)-2\Phi_{\ell'}^{(i\ell)}(p_j,q_j,r_j,s)-2\Phi_{\ell'}^{(j\ell)}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+\psi_{\ell'}^{(i)k\ell}(p_j,q_j,r_j,s)+\psi_{\ell'}^{(j)ik}(p_j,q_j,r_j,s)+\psi_{\ell'}^{(i)jk}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+\psi_{\ell'}^{(j)i\ell}(p_j,q_j,r_j,s)+\psi_{\ell'}^{(i)j\ell}(p_j,q_j,r_j,s)+\psi_{\ell'}^{(j)k\ell}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+\psi_{\ell'}^{(\ell)ik}(p_j,q_j,r_j,s)+\psi_{\ell'}^{(\ell)jk}(p_j,q_j,r_j,s)+\psi_{\ell'}^{(k)i\ell}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+\psi_{\ell'}^{(k)j\ell}(p_j,q_j,r_j,s)+\Omega_{\ell'}^{(k\ell)}(p_j,q_j,r_j,s)+\Omega_{\ell'}^{(ik)}(p_j,q_j,r_j,s)$$

$$+\Omega_{\ell'}^{(jk)}(p_j,q_j,r_j,s)+\Omega_{\ell'}^{(i\ell)}(p_j,q_j,r_j,s)+\Omega_{\ell'}^{(j\ell)}(p_j,q_j,r_j,s)\Big]$$

$$+\sum_{\ell'}\int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\,2}\int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^{\,2}\int_0^\infty dq_j^{\,2}\;\frac{(-1)^{\ell'+\ell''}\left[(2\ell'+1)(2\ell''+1)\right]^{1/2}P_{\ell''}(\cos\gamma)}{256\;A_j\;B_j\;C_j\;r}$$

$$\cdot\;\frac{P_{\ell'}(\cos\theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})}{p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s}\;\int_0^\infty dq_i^{\,2}\;\psi_{\ell\ell''}^{(k)ij}(pq;p_iq_i;s-r^2)\;\sum_{\ell_\alpha}\int_{Q_{jk}}^{R_{jk}} dp_k^{\,2}$$

$$\cdot\int_{M_{jk}}^{V_{jk}} dr_k^{\,2}\int_0^\infty dq_k^{\,2}\;\frac{(-1)^{\ell_\alpha+\ell_\beta}\left[2\ell_\alpha+1)(2\ell_\beta+1)\right]^{1/2}P_{\ell_\beta}(\cos\gamma_\beta)\;P_{\ell_\alpha}(\cos\theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})}{256\;A_k\;B_k\;C_k\;r_j\;(p_k^{\,2}+q_k^{\,2}+r_k^{\,2}-s)}$$

$$\cdot\int_0^\infty dq_n^{\,2}\Big\{\left[\psi_{\ell'\ell_\beta}^{(j)ik}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^{\,2})+\psi_{\ell'\ell_\beta}^{(j)\ell k}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^{\,2})\right]\left[\Psi_{\ell_\alpha}^{(ij)}(p_k,q_k,r_k,s)\right.$$

$$\left.+\Psi_{\ell_\alpha}^{(jk)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(j\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)\right]+\left[\psi_{\ell'\ell_\beta}^{(i)jk}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^{\,2})+\psi_{\ell'\ell_\beta}^{(i)\ell k}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j$$

$$\cdot\left[\Psi_{\ell_\alpha}^{(ij)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(ik)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(i\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)\right]$$

$$+\left[\psi^{(\ell)ik}_{\ell'\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)+\psi^{(\ell)jk}_{\ell'\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)\right]$$

$$\cdot\left[\Psi^{(i\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(j\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(k\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\right]\Big\}$$

$$+\sum_{\ell'}\int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^2\int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^2\int_0^\infty dq_j^2\ \frac{(-1)^{\ell'+\ell''}\left[(2\ell'+1)(2\ell''+1)\right]^{1/2}P_{\ell''}(\cos\gamma)}{256\ A_j\ B_j\ C_j\ r(p_j^2+q_j^2+r_j^2-s)}$$

$$\cdot P_{\ell'}(\cos\theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})\psi^{(\ell)ij}_{\ell\ell''}(pq;p_iq_i;s-r^2)\sum_{\ell_\alpha}\int_{Q_{jk}}^{R_{jk}} dp_k^2\int_{M_{jk}}^{V_{jk}} dr_k^2\int_0^\infty dq_k^2\ \frac{(-1)^{\ell_\alpha+\ell_\beta}\left[(2\ell_\alpha+1\right.}{256\ A_kB_kC_k\ r_j}$$

$$\cdot\frac{\left[(2\ell_\beta+1)\right]^{1/2}P_{\ell_\beta}(\cos\gamma_\beta)P_{\ell_\alpha}(\cos\theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})}{(p_k^2+q_k^2+r_k^2-s)}\int_0^\infty dq_n^2\Big\{\left[\psi^{(j)i\ell}_{\ell'\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)+\psi^{(j)k\ell}_{\ell'\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s\right.$$

$$\cdot\left[\Psi^{(ij)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(jk)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(j\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\right]$$

$$+\left[\psi^{(i)j\ell}_{\ell'\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)+\psi^{(i)k\ell}_{\ell'\ell_\beta}p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)\right]$$

$$\cdot\left[\Psi^{(ij)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(ik)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(i\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\right]$$

$$+\left[\psi^{(k)i\ell}_{\ell'\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)+\psi^{(k)j\ell}_{\ell'\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)\right]$$

$$\cdot\left[\Psi^{(ik)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(jk)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(k\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\right]\Big\}$$

$$+\sum_{\ell'_a}\int_0^\infty da_j^2\int_0^\infty dc_j^2\int_0^\infty db_j^2\quad \mathcal{A}^{(ij)}_{\ell_a\ell''_a}(abc\ ;\ a_ib_ic_i\ ;\ s)\ \frac{a_jb_jc_j}{8}$$

$$\cdot \frac{1}{8}\sum_{\ell_{a_\alpha}} \int_0^\infty a_k\,da_k^{\,2}\int_0^\infty c_k\,dc_k^{\,2}\int_0^\infty b_k\,db_k^{\,2}\Big\{ a^{(ik)}_{\ell'_a\,\ell_{a_\mu}}(a_j b_j c_j; a_\ell b_\ell c_\ell; s)\,[\Psi^{(i\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)$$

$$+\Psi^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(ij)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(jk)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)]+a^{(j\ell)}_{\ell'_a\,\ell_{a_\mu}}(a_j b_j c_j; a_\ell b_\ell c_\ell; s)$$

$$[\Psi^{(ij)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(i\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(jk)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)]$$

$$+a^{(jk)}_{\ell'_a\,\ell_{a_\mu}}(a_j b_j c_j; a_\ell b_\ell c_\ell; s)\;[\Psi^{(ij)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(ik)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(j\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)$$

$$+\Psi^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)]+a^{(i\ell)}_{\ell'_a\,\ell_{a_\mu}}(a_j b_j c_j;\; a_\ell b_\ell c_\ell; s)\;[\Psi^{(ij)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(j\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s$$

$$+\Psi^{(ik)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)]\Big\} + \sum_{\ell'}\int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\,2}\int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^{\,2}\int_0^\infty dq_j^{\,2}$$

$$\cdot\;\frac{(-1)^{\ell+\ell'}\,[(2\ell+1)(2\ell'+1)]^{1/2}P_\ell(\cos\gamma)P_{\ell'}(\cos\theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})}{256\,A_j\,B_j\,C_j\,q\,r(\,p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s)}$$

$$\cdot T_{\ell}^{(ij)}(p,p_i,s-q^2-r^2)\sum_{\ell_\alpha}\int_{Q_{jk}}^{R_{jk}} dp_k^2\int_{M_{jk}}^{V_{jk}} dr_k^2\int_0^\infty dq_k^2\frac{(-1)^{\ell_\beta+\ell_\alpha}\left[(2\ell_\beta+1)(2\ell_\alpha+1)\right]^{1/2}}{512 A_k\ B_k\ C_k\ r_j(p_k^2+q_k^2+r_k^2-s)}$$

$$\cdot P_{\ell_\beta}(\cos\gamma_\beta)P_{\ell_\alpha}(\cos\theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})\Big\{T_{\ell_\beta}^{(k\ell)}(p_j,p_n,s-q_j^2-r_j^2)\Big[\Psi_{\ell}^{(ij)}(p_k,q_k,r_k,s)$$

$$+\Psi_{\ell_\alpha}^{(ik)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(jk)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(i\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(j\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)\Big]$$

$$+T_{\ell_\beta}^{(ik)}(p_j,p_n,s-q_j^2-r_j^2)\Big[\Psi_{\ell_\alpha}^{(ij)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(i\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(jk)}(p_k,q_k,r_k,s)$$

$$+\Psi_{\ell_\alpha}^{(j\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(k\ell)}p_k,q_k,r_k,s)\Big]+T_{\ell_\beta}^{(jk)}(p_j,p_n;s-q_j^2-r_j^2)\Big[\Psi_{\ell_\alpha}^{(ij)}(p_k,q_k,r_k,s)$$

$$+\Psi_{\ell_\alpha}^{(ik)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(i\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(j\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(k\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)\Big]$$

$$+T_{\ell_\beta}^{(i\ell)}(p_j,p_n,s-q_j^2-r_j^2)\Big[\Psi_{\ell_\alpha}^{(ij)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(ik)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(jk)}(p_k,q_k,r_k,s)$$

$$\Psi_{\ell_\alpha}^{(j\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(k\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)\Big]+T_{\ell_\beta}^{(j\ell)}(p_j,p_n,s-q_j^2-r_j^2)$$

$$\cdot\Big[\Psi_{\ell_\alpha}^{(ij)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(ik)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(i\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(jk)}(p_k,q_k,r_k,s)$$

$$+\Psi_{\ell_\alpha}^{(k\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)\Big]+\sum_{\ell'}\int_{Q_{ij}}^{R_{ij}}dp_j^2\int_{M_{ij}}^{V_{ij}}dr_j^2\int_0^\infty dq_j^2\frac{(-1)^{\ell'+\ell''}\left[(2\ell'+1)(2\ell''+1)\right]^{1/2}P_{\ell''}(\cos\gamma)P_{\ell'}(\cos\theta_{\vec{q}_j}}{256 A_j\ B_j\ C_j\ r(p_j^2+q_j^2+r_j^2-s)}$$

$$\cdot\int_0^\infty dq_i^2\ \Big[\psi_{\ell\ell''}^{(k)ij}(pq;p_iq_i;s-r^2)\sum_{\ell_{a_\alpha}}\int_Q da_k^2\int_0 dc_k^2\int_0^\infty db_k^2\ \frac{a_kb_kc_k}{8}$$

$$\cdot\Big\{\ a_{\ell'_a}^{(ik)}{}_{\ell_{a_\mu}}(a_jb_jc_j\ ;\ a_\ell b_\ell c_\ell\ ;\ s)$$

$$\cdot\left[\Psi^{(i\ell)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(k\ell)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(ij)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(jk)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)\right]$$

$$+\mathcal{A}^{(jk)}_{\ell' a_\ell \partial_\mu}(a_j b_j c_j;a_\ell b_\ell c_\ell;s)\left[\Psi^{(ij)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(ik)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)\right.$$

$$\left.+\Psi^{(j\ell)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(k\ell)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)\right]+\mathcal{A}^{(k\ell)}_{\ell' a_\ell \partial_\mu}(a_j b_j c_j;a_\ell b_\ell c_\ell;s)$$

$$\cdot\left[\Psi^{(ik)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(i\ell)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(jk)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(j\ell)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)\right]\Big\}$$

$$+\Psi^{(\ell)ij}_{\ell\ell''}(pq;p_i q_i;s-r^2)\sum_{\ell a_\alpha}\int_0^\infty da_k^{\,2}\int_0^\infty db_k^{\,2}\int_0^\infty dc_k^{\,2}\Big\{\mathcal{A}^{(i\ell)}_{\ell' a_\ell \partial_\mu}(a_j b_j c_j;a_\ell b_\ell c_\ell;s)$$

$$\cdot\left[\Psi^{(ij)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(j\ell)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(ik)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(k\ell)}_{\ell a_\alpha}(a_k,b_k,c_k,s)\right]$$

$$+ a^{(j\ell)}_{\ell' a} \ell_{a_\mu}(a_j b_j c_j \; ; \; a_\ell b_\ell c_\ell \; ; \; s) \qquad \left[\Psi^{(ij)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(i\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,\right.$$

$$\left.+\Psi^{(jk)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\Psi^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)\right]$$

$$+\sum_{\ell'}\int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^{\,2}\int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^{\,2}\int_0^\infty dq_j^{\,2}\;\frac{(-1)^{\ell'+\ell''}\left[(2\ell'+1)(2\ell''+1)\right]^{1/2}P_{\ell''}(\cos\gamma)P_{\ell'}(\cos\theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})}{128\,A_j\;B_j\;C_j\;r(p_j^{\,2}+q_j^{\,2}+r_j^{\,2}-s)}$$

$$\cdot\left[\Psi^{(k)ij}_{\ell\ell''}(pq;p_iq_i;s-r^2)\sum_{\ell_\alpha}\int_{Q_{jk}}^{R_{jk}} dp_k^{\,2}\int_{M_{jk}}^{V_{jk}} dr_k^{\,2}\int_0^\infty dq_k^{\,2}\;\frac{(-1)^{\ell_\beta+\ell_\alpha}\left[(2\ell_\beta+1)(2\ell_\alpha+1)\right]^{1/2}}{128A_k\;B_k\;C_k\;r_j(p_k^{\,2}+q_k^{\,2}+r_k^{\,2}-s)}\right.$$

$$\cdot P_{\ell_\beta}(\cos\gamma_\beta)P_{\ell_\alpha}(\cos\theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})\left\{T^{(ik)}_{\ell_\beta}(p_j,p_n,s-q_j^2-r_j^2)\left[\Psi^{(ij)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(i\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\right.\right.$$

$$\left.+\Psi^{(jk)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(j\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(k\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\right]+T^{(jk)}_{\ell_\beta}(p_j,p_n,s-q_j^{\,2}-r_j^{\,2})$$

$$\cdot\left[\Psi^{(ij)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(ik)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(i\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(j\ell)}_{\ell_\alpha}p_k,q_k,r_k,s)\right.$$

$$\left.+\Psi^{(k\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\right]+T^{(k\ell)}_{\ell}(p_j,p_n,s-q_j^{\,2}-r_j^{\,2})\left[\Psi^{(ij)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,r_k,s)+\Psi^{(ik)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\right.$$

$$\left.\left.+\Psi^{(jk)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(i\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(j\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\right]\right\}$$

$$+\Psi^{(\ell)ij}_{\ell\ell''}(pq;p_iq_i;s-r^2)\sum_{\ell_\alpha}\int_{Q_{jk}}^{R_{jk}} dp_k^{\,2}\int_{M_{jk}}^{V_{jk}} dr_k^{\,2}\int_0^\infty dq_k^{\,2}\;\frac{(-1)^{\ell_\beta+\ell_\alpha}\left[(2\ell_\beta+1)(2\ell_\alpha+1)\right]^{1/2}}{128\,A_k\;B_k\;C_k\;r_j(p_k^{\,2}+q_k^{\,2}+r_k^{\,2}-s)}$$

$$\cdot P_{\ell_\beta}(\cos\gamma_\beta)P_{\ell_\alpha}(\cos\theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})\left\{T^{(i\ell)}_{\ell_\beta}(p_j,p_n,s-q_j^{\,2}-r_j^{\,2})\left[\Psi^{(ij)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\right.\right.$$

$$+\Psi_{\ell_\alpha}^{(ik)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(jk)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(j\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(k\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)\Big]$$

$$+T_{\ell_\beta}^{(j\ell)}(p_j,p_n,s-q_j^2-r_j^2)\Big[\Psi_{\ell_\alpha}^{(ij)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(ik)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(i\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)$$

$$+\Psi_{\ell_\alpha}^{(jk)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(k\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)\Big]+T_{\ell_\beta}^{(k\ell)}(p_j,p_n,s-q_j^2-r_j^2)\Big[\Psi_{\ell_\alpha}^{(ij)}(p_k,q_k,r_k,s)$$

$$+\Psi_{\ell_\alpha}^{(ik)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(i\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(jk)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(j\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)\Big]\Big\}$$

$$+2\sum_{\ell'_a}\int_0^\infty da_j^2\int_0^\infty dc_j^2\int_0^\infty db_j^2 \qquad \frac{a_jb_jc_j}{8}$$

$$\cdot\, a_{\ell_a\ell_\beta}^{(ij)}(abc\,;\,a_ib_ic_i\,;\,s)\sum_{\ell_\alpha}\int_{Q_{jk}}^{R_{jk}}dp_k^2\int_{M_{jk}}^{V_{jk}}dr_k^2\int_0^\infty dq_k^2\,\frac{(-1)^{\ell_\beta+\ell_\alpha}\left[(2\ell_\beta+1)(2\ell_\alpha+1)\right]^{1/2}}{128\,A_k\,B_k\,C_k\,r_j(p_k^2+q_k^2+r_k^2-s)}$$

$$\cdot P_{\ell_\beta}(\cos\gamma_\beta)P_{\ell_\alpha}(\cos\vec{q}_k\vec{p}_k)\int_0^\infty dq_n^2\Big\{\Big[\psi_{\ell_\beta}^{(j)ik}(p_j\,q_j;p_n\,q_n;s-r_j^2)+\psi_{\ell_\beta}^{(j)i\ell}(p_j\,q_j;p_nq_n;s-r_j^2)\Big]$$

$$\cdot\Big[\Psi_{\ell_\alpha}^{(ij)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(jk)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(j\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)\Big]+\Big[\psi_{\ell_\beta}^{(i)jk}(p_j\,q_j;p_n\,q_n;s-r_j^2)$$

$$+\psi_{\ell_\beta}^{(i)j\ell}(p_j\,q_j;p_n\,q_n,s)\Big]\Big[\Psi_{\ell_\alpha}^{(ij)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(ik)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(i\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)\Big]$$

$$+\Big[\psi_{\ell_\beta}^{(k)i\ell}(p_j\,q_j;p_n\,q_n;s-r_j^2)+\psi_{\ell_\beta}^{(k)j\ell}(p_j\,q_j;p_n\,q_n;s-r_j^2)\Big]\Big[\Psi_{\ell_\alpha}^{(ik)}(p_k,q_k,r_k,s)$$

$$+\Psi_{\ell_\alpha}^{(jk)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(k\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)\Big]+\Big[\psi_{\ell_\beta}^{(\ell)ik}(p_jq_j;p_n\,q_n;s-r_j^2)+\psi_{\ell_\beta}^{(\ell)jk}(p_jq_j;p_nq_n;s-r$$

$$\cdot\Big[\Psi_{\ell_\alpha}^{(i\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(j\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi_{\ell_\alpha}^{(k\ell)}(p_k,q_k,r_k,s)\Big]\Big\}$$

$$+\sum_{\substack{\ell' \\ a}} \int_0^\infty da_j^2 \int_0^\infty dc_j^2 \int_0^\infty db_j^2 \quad \mathcal{A}^{(ij)}_{\ell_a \ell_a''}(abc\,;\,a_i b_i c_i\,;\,s) \frac{a_j\, b_j c_j}{8}$$

$$\cdot \sum_{\ell_\alpha} \int_{Q_{jk}}^{R_{jk}} dp_k^2 \int_{M_{jk}}^{V_{jk}} dr_k^2 \int_0^\infty dq_k^2 \; \frac{(-1)^{\ell_\beta+\ell_\alpha}\left[(2\ell_\beta+1)(2\ell_\alpha+1)\right]^{1/2}}{256 A_k\, B_k\, C_k\, q_j\, r_j (p_k^2+q_k^2+r_k^2-s)}$$

$$\cdot P_{\ell_\beta}(\cos\gamma_\beta) P_{\ell_\alpha}(\cos\theta_{\vec{q}_k \vec{p}_k}) \Big\{ T^{(ik)}_{\ell_\beta}(p_j, p_n, s-q_j^2-r_j^2) \big[\Psi^{(ij)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)$$

$$+\Psi^{(i\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(jk)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(j\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(k\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\big]$$

$$+T^{(jk)}_{\ell_\beta}(p_j,p_n,s-q_j^2-r_j^2)\big[\Psi^{(ij)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(ik)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(i\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)$$

$$+\Psi^{(j\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(k\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\big]+T^{(i\ell)}_{\ell_\beta}(p_j,p_n,s-q_j^2-r_j^2)\big[\Psi^{(ij)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)$$

$$+\Psi^{(ik)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(jk)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(j\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(k\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\big]$$

$$+T^{(j\ell)}_{\ell_\beta}(p_j,p_n,s-q_j^2-r_j^2)\;\big[\Psi^{(ij)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(ik)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(jk)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)$$

$$+\Psi^{(i\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\Psi^{(k\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\;\big]\Big\}$$

$$+2\sum_{\ell'} \int_{Q_{ij}}^{R_{ij}} dp_j^2 \int_{M_{ij}}^{V_{ij}} dr_j^2 \int_0^\infty dq_j^2 \; \frac{(-1)^{\ell+\ell'}\left[(2\ell+1)(2\ell'+1)\right]^{1/2} P_\ell(\cos\gamma) P_{\ell'}(\cos\theta_{\vec{q}_j \vec{p}_j})}{256 A_j\, B_j\, C_j\, qr(p_j^2+q_j^2+r_j^2-s)}$$

$$\cdot T^{(ij)}_{\ell}(p,p_i,s-q^2-r^2) \sum_{\ell_\alpha} \int_{Q_{jk}}^{R_{jk}} dp_k^2 \int_{M_{jk}}^{V_{jk}} dr_k^2 \int_0^\infty dq_k^2 \frac{(-1)^{\ell_\beta+\ell_\alpha}\left[(2\ell_\beta+1)(2\ell_\alpha+1)\right]^{1/2}}{128 A_k\, B_k\, C_k\, r(p_k^2+q_k^2+r_k^2-s)}$$

$$\cdot P_{\ell_\beta}(\cos\gamma_\beta)P_{\ell_\alpha}(\cos\theta_{\vec{q}_k\vec{p}_k})\Big\{\Big[\psi^{(j)k\ell}_{\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)+\psi^{(j)ik}_{\ell_\beta}(p_jp_q;p_nq_n;s-r_j^2)$$

$$+\psi^{(j)i\ell}_{\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)\Big]\Big[\psi^{(ij)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\psi^{(jk)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\psi^{(j\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\Big]$$

$$+\Big[\psi^{(i)k\ell}_{\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)+\psi^{(i)jk}_{\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)+\psi^{(i)j\ell}_{\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)\Big]$$

$$\cdot\Big[\psi^{(ij)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\psi^{(ik)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\psi^{(i\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\Big]+\Big[\psi^{(k)i\ell}_{\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)$$

$$+\psi^{(k)j\ell}_{\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)\Big]\Big[\psi^{(ik)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\psi^{(jk)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\psi^{(k\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\Big]$$

$$+\Big[\psi^{(\ell)ik}_{\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)+\psi^{(\ell)jk}_{\ell_\beta}(p_jq_j;p_nq_n;s-r_j^2)\Big]\Big[\psi^{(i\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)+\psi^{(j\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,$$

$$+\psi^{(k\ell)}_{\ell_\alpha}(p_k,q_k,r_k,s)\Big]\Big\}+\sum_{\ell'}\int_{Q_{ij}}^{R_{ij}}dp_j^2\int_{M_{ij}}^{V_{ij}}dr_j^2\int_0^\infty dq_j^2\,\frac{(-1)^{\ell+\ell'}\big[(2\ell+1)(2\ell'+1)\big]^{1/2}}{256\;A_j\;B_j\;C_j\;qr(p_j^2+q_j^2+r_j^2-s)}$$

$$\cdot P_\ell(\cos\gamma)P_{\ell'}(\cos\theta_{\vec{q}_j\vec{p}_j})\;T^{(ij)}_\ell(p,p_i,s-q^2-r^2)$$

$$\cdot\Big\{\sum_{\ell_{a_\alpha}}\int_0^\infty db_k^2\int_0^\infty dc_k^2\int_0^\infty da_k^2\qquad\frac{a_kb_kc_k}{8}$$

$$\cdot\mathcal{A}^{(j\ell)}_{\ell_{a_\alpha}\ell_\mu}(a_jb_jc_j\;;\;a_\ell b_\ell c_\ell\;;\;s)\Big[\psi^{(ij)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\psi^{(i\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\psi^{(jk)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)$$

$$+\psi^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)]+\sum_{\ell_{a_\alpha}}\frac{1}{8}\int_0^\infty a_k\,da_k^{\,2}\int_0^\infty c_k\,dc_k^{\,2}\int_0^\infty b_k\,db_k^{\,2}\,\{a^{(ik)}_{\ell'_a\ell_{a_\mu}}(a_j b_j c_j;a_\ell b_\ell c_\ell;s)$$

$$\cdot[\psi^{(i\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\psi^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\psi^{(ij)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\psi^{(jk)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)]$$

$$+a^{(i\ell)}_{\ell'_a\ell_{a_\mu}}(a_j b_j c_j;a_\ell b_\ell c_\ell;s)\;[\psi^{(ij)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\psi^{(j\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\psi^{(ik)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)$$

$$+\psi^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)]+a^{(jk)}_{\ell'_a\ell_{a_\mu}}(a_j b_j c_j;a_\ell b_\ell c_\ell;s)\;[\psi^{(ij)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\psi^{(jk)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s$$

$$+\psi^{(j\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\psi^{(k\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)]+a^{(k\ell)}_{\ell'_a\ell_{a_\mu}}(a_j b_j c_j;a_\ell b_\ell c_\ell;s)$$

$$\cdot[\psi^{(ik)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\psi^{(jk)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\psi^{(i\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)+\psi^{(j\ell)}_{\ell_{a_\alpha}}(a_k,b_k,c_k,s)]$$

TABLE DES MATIERES

- PREFACE 1
- MISE EN PLACE DU FORMALISME DU PROBLEME A QUATRE CORPS 2
- CHAPITRE I : Introduction 3
- CHAPITRE II: Essai d'application directe de la méthode de Faddeev à l'étude du problème à quatre corps 4
- CHAPITRE III: Fonctions de Green généralisées (quatre corps) 7
- CHAPITRE IV: Matrices de transition (quatre corps) 10
  - I. Matrice de transition pour le problème à deux corps 10
  - II. Matrice de transition pour le problème à trois corps 10
  - III. Matrice de transition pour le problème à quatre corps où les particules interagissent par couples 11
- CHAPITRE V: Equations de Faddeev (quatre corps) 14
- CHAPITRE VI: Cinématique (quatre corps) 17
  - I. 1er cas 17
  - II. 2ème cas 21
- CHAPITRE VII: Décomposition en ondes partielles (quatre corps) 23
  - I. Introduction 23
    - I-A Base $|\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}\rangle$ 23
    - I-B Base $|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\rangle$ 23
  - II. Représentation en ondes partielles des kets $|\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}\rangle$ 24
    - II-A Choix d'un premier ensemble d'observables compatibles 24
    - II-B Passage d'une représentation à l'autre 25
    - II-C Choix d'un deuxième ensemble d'observables compatibles 26
    - II-D Choix d'un troisième ensemble d'observables compatibles 26
    - II-E Equations de passage entre les diverses représentations en ondes partielles 27
  - III. Représentation en ondes partielles des kets $|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\rangle$ 28
- CHAPITRE VIII: Ecriture des équations de Faddeev du problème à quatre corps en ondes partielles 31
- CHAPITRE IX: Etude du noyau des équations de Faddeev (quatre corps) 35
  - I. Calcul de $K_j(pqr\beta;p_jq_jr_j\beta_j)=\langle pqr\beta|T_{ij}(s)|p_jq_jr_j\beta_j\rangle$ 35
  - II. Calcul de $K^k(pqr\beta;p_jq_jr_j\beta_j)=\langle pqr\beta|T_{ij}^{(k)}(s)|p_jq_jr_j\beta_j\rangle$ 40
  - III. Calcul de $K_{ij}(pqr\beta;p_jq_jr_j\beta_j)=\langle pqr\beta|Q_{ij}(s)|p_jq_jr_j\beta_j\rangle$ 42

- CHAPITRE X : Equations de Faddeev pour le problème à quatre corps avec interactions par paires 43
- CHAPITRE XI : Equations de Faddeev pour le problème à trois corps 48
- CHAPITRE XII : Equations de Lippmann-Schwinger du problème à deux corps 51
- CHAPITRE XIII : Conclusion 54

- ETUDE DU FORMALISME DANS LE CAS DE POTENTIELS COULOMBIENS 55
- CHAPITRE I : Introduction 56
- CHAPITRE II : Potentiels Coulombiens (deux corps) 57
  I. Potentiel attractif 57
  II. Potentiel répulsif 58
- CHAPITRE III : Equations de Faddeev pour les potentiels Coulombiens (trois corps) 62
  I. Introduction 62
  II. Potentiels attractifs 64
  III. Potentiels répulsifs 66
  IV. Potentiels attractif et répulsif 67
- CHAPITRE IV : Equations de Faddeev pour les potentiels Coulombiens (quatre corps avec interactions par paires) 69-a
  I. Introduction 69-a
  II. Potentiels attractifs 69-c
  III. Potentiels répulsifs 69-d
  IV. Potentiels attractif et répulsif 69-f
- CHAPITRE V : Etude du problème à quatre corps pour les potentiels coulombiens 70
  I. Introduction 70
  II. Potentiels attractifs 73
  III. Potentiels répulsifs 75
  IV. Potentiels attractifs et répulsifs 77
  V. Effet de spin 77
- CHAPITRE VI : Conclusion 78

- CALCUL DES NIVEAUX D'ENERGIE DE Li^6 79
  I. Description 80
  II. Equations de Faddeev de Li^6 80
  III. Détermination des produits de coefficients et des bornes d'intégration des équations de Faddeev 82
  IV. Calcul des solutions des équations de Faddeev du problème à trois corps 84

V. Calcul des solutions des équations de Faddeev du problème à quatre corps avec interactions par paires 90-a

VI. Détermination de l'énergie fondamentale de Li^6 91

- POSTFACE 92

- ANNEXE : RAPPEL SUR LES EQUATIONS INTEGRALES I

I. Introduction I

II. Espace de Bananch II

III. Espace de Hilbert III

IV. Méthode de Fredholm III

V. Méthode de résolution des équations intégrales singulières. VI

- APPENDICE A : Transformation des harmoniques sphériques à l'aide de rotations finies. X

I. Définition X

II. Relations d'orthogonalité des $D^j_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)$ XIII

- APPENDICE B : Détermination de la forme explicite des cosinus en fonction des longueurs des vecteurs associés. XV

I. Etude des triplets $|\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}\rangle$ XV

II. Etude des triplets $|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\rangle$ XX

- APPENDICE C : Itération des équations de Faddeev du problème à quatre corps XXII

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE

B I B L I O G R A P H I E

[1]	AHMADZADEZ,TJON	- Phys.Rev.139, 4B, 1085	(1965)
[2]	ALESSANDRINI	- J.of Math Physics,7, 2, 215	(1966)
[3]	BALL,CHEN, WONG	- Phys. Rev.173, 202	(1968)
[4]	BALL, WONG	- Phys. Rev.169, 5, 1362	(1968)
[5]	CHEN, CHUNG	- Phys. Rev.184, 1, 64	(1969)
[6]	DUNFORD,SCHWARTZ	- Linear Operators I & II Wiley N.Y. (Interscience Publishers)	(1964)
[7]	EDMONDS	- Angular Momentum in Q.Mechanics	(1957)
[8]	FADDEEV	- Sov.Phys.JETP, 12, 1014	(1961)
		- Sov.Phys.DOKLADY,7, 600	(1963)
		- Mathematical Aspects of 3 body problem in the Quantum Scattering theory (Israël Program for Scientific translations)	(1965)
[9]	KIM.	- J. of Math Physics 10, 8, 1491	(1969)
[10]	KOTOVA, TERENTEV	- Sov.Phys.DOKLADY 15, 2, 153	(1970)
[11]	LOVELACE	- Phys. Rev. 135, B, 1225	(1964)
[12]	MESSIAH	- Mécanique Quantique T.I et II	(1967)
[13]	MIKHLIN	- Integral Equations Pergamon Press	(1957)
[14]	MITRA	- Phys.Rev.123, 5, 1892	(1961)
[15]	OSBORN, NOYES	- Phys. Rev. D,3, 2, 395	(1971)
[16]	RADHAKANT,SHASTRY,RAJAGOPAL	- Phys.Rev. A, 3, 1, 234	(1971)
[17]	RAJAGOPAL,MAJUMDAR	- Phys.Letters 30A,7, 429	(1969)
[18]	ROMAN	- Advanced Quantum Theory (Addison-Wesley,Publishing Co Massachusetts)	(1965)
[19]	SALPETHER, BETHE	- Quantum Mechanics of one and two electron atoms (Springer Verlag, Berlin)	(1957)
[20]	SITENKO, KHARCHENKO	- Sov.Phys. USPEKHI 14,2, 125	(1971)
[21]	WATSON, NUTTALL	- Topics in Several Particle Dynamics(HOLDEN-DAY SAN FRANCISCO)	(1967)
[22]	WEYERS	- Phys.Rev.145, 4, 1236	(1966)

[23] WHITTAKER, WATSON - Modern Analysis
Cambridge University Press (1962)

[24] WONG, ZAMBOTTI - Phys. Rev. 154, 5, 1540 (1967)

-=-=-=-=-=-=-=-

- R E M E R C I E M E N T S -

Ce travail a été effectué à l'U.E.R. de Physique Fondamentale de Lille I, dans le laboratoire de Physique Théorique, dirigé par Monsieur le Professeu TILLIEU qui a bien voulu faire partie de mon jury.

Monsieur le Professeur WERTHEIMER m' a fait l'honneur de présider mon jury et je l'en remercie.

Monsieur le Professeur VIDAL a bien voulu juger mon travail, je lui en suis reconnaissant .

Madame le Professeur SIRUGUE de l'Université de Provence à Marseille a accepté de se joindre au jury. Qu'elle trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie particulièrement Monsieur le Professeur CORTOIS pour l'intérêt qu'il a porté à mes études et les conseils précieux qu'il m'a prodigués.

Enfin, j'adresse tous mes remerciements à ceux qui ont contribué à l'élaboration matérielle de ce mémoire, en particulier Messieurs CAREY, VILAIN, RAFFAUD, et Mesdames HUCHETTE et LECROART qui se sont acquittées avec dextérité de la tâche ingrate de la frappe.