

50376
1975
105
N° d'ordre : 324

50376
1975
105

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

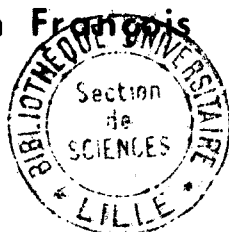
pour obtenir le titre de

DOCTEUR de SPECIALITE

(MATHEMATIQUES APPLIQUEES)

par

Lucien François HOSS



OPTIMISATION STOCHASTIQUE

THEORIE ET APPLICATIONS

Soutenu le 11 Avril 1975, devant la COMMISSION D'EXAMEN

Membres du Jury :	MM.	P. BACCHUS	Président
		C. BREZINSKI	Examineur
		P. HUARD	Rapporteur

DOYENS HONORAIRES DE L'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES Des Anciennes Facultés de Droit

Et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, SAVART, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENT HONORAIRE DE L'UNIVERSITE DES

SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

R. DEFRETIN

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES

SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. PARREAU.

PROFESSEURS TITULAIRES

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M. BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M. BLAYS Pierre	Géographie
M. BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOUISSET Simon	Physiologie Animale
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CELET Paul	Géologie Générale
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. CORSIN Pierre	Paléontologie
M. DECUYPER Marcel	Géométrie
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale
M. DELHAYE Michel	Chimie Physique
M. DERCOURT Michel	Géologie Générale
M. DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOURET René	Physique du Solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. GLACET Charles	Chimie Organique
M. GONTIER Gérard	Mécanique
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M. LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M. LEBRUN André	Electronique
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M. LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M. LOMBARD Jacques	Sociologie

.../...

M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M. MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. POUZET Pierre	Analyse Numérique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M. TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M. VAILLANT Jean	Analyse
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M. WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BODARD Marcel	Biologie Végétale
M. BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. DEPREZ Gilbert	Physique Théorique
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M. MAES Serge	Physique Atomique et Moléculaire
Melle MARQUET Simone	Probabilités
M. MIGEON Michel	Chimie Physique
M. MONTEL Marc	Physique du Solide
M. PANET Marius	Electrotechnique
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M. SALMER Georges	Electronique
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés d'Enseignement)

M. ADAM Michel	Sciences Economiques
M. ANDRE Charles	Sciences Economiques
M. ANGRAND Jean-Pierre	Géographie
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BART André	Biologie Animale
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M. BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M. BOSCOQ Denis	Probabilités
M. BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire

.../...

M. COQUERY Jean-Marie	Psycho-Physiologie
M. COULON Jean	Electrotechnique
Mlle DACCHARI Monique	Géographie
M. DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des Entreprises
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DHAINAUT André	Biologie Animale
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M. DRIEUX Baudouin	Informatique
M. DUEE Gérard	Géologie Appliquée
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
Mme EVRARD Micheline	Chimie Appliquée
M. FONTAINE Jacques-Marie	Electronique
M. FOURNET Bernard	Biochimie
M. FROELICH Daniel	Chimie Physique
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GRANELLE Jean Jacques	Sciences Economiques
M. GUIGOU Jean-Louis	Sciences Economiques
M. GUILLAUME Henri	Sciences Economiques
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. HERMAN Maurice	Physique Spatiale
M. JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
Mlle KOSMANN Yvette	Géométrie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LANGRAND Claude	Probabilités
M. LAURENT François	Automatique
Mlle LEGRAND Denise	Algèbre
Mlle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LENTACKER Firmin	Géographie
M. LEROY Jean-Marie	Chimie Appliquée
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique Théorique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU Jean-Marie	Physique Atomique et Moléculaire
Mme N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques
M. MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. MONTUELLE Bernard	Biologie Appliquée
M. NICOLE Jacques	Chimie Appliquée
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie Physique
M. PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M. PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M. POVY Lucien	Automatique
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean-Claude	Psycho-Physiologie
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SLIWA Henri	Chimie Organique
M. SOMME Jean	Géographie
Mlle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. THERY Pierre	Electronique
M. TOULOTTE Jean-Marc	Automatique
M. TREANTON Jean-René	Sociologie

.../...

M. VANDORPE Bernard
M. VILLETTE Michel
M. WERNIER Georges
M. WATERLOT Michel
M. YVON Jean-Pierre
Mme ZINN JUSTIN Nicole

Chimie Minérale
Mécanique
Informatique
Géologie Générale
Analyse Numérique
Algèbre

Je remercie très respectueusement Monsieur le Professeur BACCHUS qui me fait l'honneur de présider le jury.

Que Monsieur le Professeur BREZINSKI soit assuré de ma grande satisfaction pour avoir accepté de s'intéresser à ce travail et de le juger.

Je rends hommage à la qualité des conseils et suggestions donnés par Monsieur le Professeur HUARD, qui m'a permis de mener à bien cette recherche. Je le prie de croire à ma profonde reconnaissance.

J'apprécie la compétence et le soin apportés à la réalisation matérielle de cette thèse par Mademoiselle DESQUIENS ainsi que par Monsieur et Madame DEBOCK.

Enfin, je remercie l'association A. D. R. I. NORD et j'exprime ma sympathie envers les membres du Laboratoire de Calcul pour les échanges amicaux qui ont jalonné ce travail.

à Christiane.

à mes Parents.

I N T R O D U C T I O N

En programmation mathématique, les composantes des matrices B, a, p (de dimension $m \times n, m \times 1, 1 \times n$) dans le programme linéaire : décider x de façon à maximiser px sous les contraintes $Bx \leq a$ $x \geq 0$ sont connues et fixées.

En pratique les composantes B_i^j, a_i, p^j ($i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$) peuvent être affectées d'aléas et deviennent des variables aléatoires réelles. On qualifie alors ce problème de programme stochastique et l'appellation "programmation stochastique" désigne la famille de problèmes dont on obtient les données par "tirage" de valeurs suivant des lois de probabilité supposées connues.

Un programme stochastique peut engendrer une foule de programmes mathématiques différents nés de chaque réalisation de l'aléatoire. Par conséquent, les notions classiques de solution admissible et optimale, de valeur optimale pour la fonction économique, perdent leurs sens pour ce type de programme et demandent de nouvelles définitions.

Notre travail qui relie la programmation mathématique, les probabilités et statistiques, l'informatique s'est décomposé en :

* l'analyse des différentes conceptions du même énoncé de programme stochastique en s'appuyant sur les résultats bibliographiques parus depuis les années 1959-1960.

Cette analyse se détaille en schémas ou attitudes de base suivant l'ordre de la succession entre l'observation des réalisations des variables aléatoires et la prise de la décision.

- schéma "Réalisation-Décision" ou "Wait and See".

On expose dans le chapitre 1, les différentes approches du problème posé par Bereanu (1963), Fortet (1964), Sengupta, Tintner et Millham (1963) de la détermination de la fonction de répartition de la variable aléatoire optimum d'un programme stochastique.

Si la décision doit précéder la réalisation de l'aléatoire, on montre la complexité du choix de x due à la nature probabiliste du programme. En énonçant des conditions d'obtention d'une solution "optimale" nous suivrons l'idée directrice : se ramener à des programmes déterministes ou modèles afin de pouvoir utiliser des algorithmes connus. On peut distinguer

- schéma "Décision-Réalisation" objet du chapitre 2. On développe principalement les modèles proposés par Charnes et Cooper (1959 et 1963), Kataoka (1963), Bercanu (1964) des "programmes sous risques" ou "chance constrained programming problems". Nous classons les différents optimums obtenus en différenciant les définitions déterministes des contraintes.
- le schéma "Décision-Réalisation-Décision" du chapitre 3. On décompose, selon l'idée de Dantzig (1955) et Madansky (1960) la décision en (x,y) , le hasard intervenant entre ces deux sous décisions. Diverses particularités du programme stochastique seront envisagées. Ces deux schémas sont illustrés d'exemples et nous comparons les différents optimums obtenus par un exemple classique mis en annexe.

* L'application dans le chapitre 4, de l'attitude "programmes sous risques" à un problème concret d'investissement électrique après l'avoir formulé sous la forme d'un programme stochastique. On traite différents programmes mathématiques issus de ce problème, notamment par l'étude de l'influence du choix des seuils de probabilité de satisfaction des contraintes. La "Méthode des Centres Linéarisée" nous permet de proposer des solutions qui seront arrondies à des valeurs entières par une procédure heuristique. La version Fortran du code utilisé est mise en annexe.

PLAN GENERAL

THEORIE

CHAPITRE 1 : "REALISATION-DECISION"

- problème de la fonction de répartition de l'optimum

CHAPITRE 2 : "DECISION-REALISATION"

- solution espérance mathématique II.1
- solution prudente II.2
- programme sous risques
 - Admissibilité II.3
 - Optimalité, modèles II.23
 - Décisions séquentielles II.40

CHAPITRE 3 : "DECISION-REALISATION-DECISION"

- Recours fixe III.1
- Second membre aléatoire III.9
- Généralisation III.20
- Annexe : comparaison sur un exemple. III.26

APPLICATIONS

CHAPITRE 4 :

- Formulation du programme stochastique IV.2
- Méthode des centres IV.13
- Etude de programmes déterministes IV.21
- Annexe A : caractéristiques du réseau IV.48
- Annexe B : Listing Fortran

REFERENCES

reparties suivant chaque chapitre.

NOTATIONS ET DEFINITIONS

. \mathbb{R}^n espace vectoriel à n dimensions construit sur le corps des réels \mathbb{R}

. M matrice de format $(L \times J)$ L et J ensembles finis d'indices

M_l ($l \in L$) ligne l de M ; M^j ($j \in J$) colonne de M

M_l^j ($(l,j) \in L \times J$) élément (l,j) de M

$M_{L'}^{J'}$ ($L' \subset L$; $J' \subset J$) sous matrice $(L' \times J')$ de M

. On distinguera les contraintes fixes des contraintes de nature aléatoire par : I, J, L ensembles d'indices

$$|I| = m_0 ; |L| = m ; |J| = n ; m_0 \leq m$$

. $D = B_{L-I}$, $d = a_{L-I}$ composés d'éléments fixes qui définissent le polyèdre des contraintes fixes

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n / Dx \leq d, x \geq 0\}$$

. $A = B_I$, $b = a_I$ de composantes aléatoires
 $Ax \leq b$ contraintes affectées d'aléas.

. (R, A, P) espace de probabilité

A tribu sur R

P mesure de probabilité : application de A dans $[0,1]$

. B^n tribu engendrée par les ouverts de \mathbb{R}^n (tribu Borélienne)

. X variable aléatoire définie sur (R, A) à valeurs dans (\mathbb{R}^n, B^n) si $\forall H \in B^n X^{-1}(H) \in A$

. U_X support de la loi de probabilité de X : plus petit sous ensemble fermé de \mathbb{R}^n tel que

$$P\{w \in R / X(w) \in U_X\} = 1$$

- . $F_X(.)$ fonction de répartition de X : application de \mathbb{R}^n dans $[0,1]$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}^n F_X(t) = P\{w \in R / X(w) \leq t\} = P(X \leq t)$
- . $E(X)$ espérance mathématique de X : vecteur de \mathbb{R}^n à composantes supposées finies.
- . $\text{Var}(X)$ variance de X

$$\text{VAR}(X) = E[(X - E(X))^t (X - E(X))]$$

CHAPITRE I

"REALISATION - DECISION"
OU
"WAIT AND SEE"

INTRODUCTION :

L'observation des réalisations des variables aléatoires A_i^j, b_i, p^j ($i = 1, \dots, m_0$; $j = 1 \dots n$) précède la prise de la décision x et explique le titre "Réalisation - Décision". Chaque valeur connue, notée (A^1, b^1, p^1) du triplet aléatoire (A, b, p) définit un programme déterministe.

Maximiser px sous les contraintes $Ax \leq b^1$, $x \in K_1$ que l'on saura en général résoudre. Les définitions de solution réalisable et optimale pour une décision x sont donc celles des programmes mathématiques classiques.

Chaque réalisation de (A, b, p) conduit à l'optimum d'un programme mathématique qui est une valeur prise par une fonction dite "optimum" du programme stochastique. Bereanu [1.1], Fortet [1.10], Sengupta, Tintner et Millham [1.17] posent alors le problème probabiliste : déduire de la loi de probabilité des composantes aléatoires du programme stochastique celle de son "optimum" afin de permettre la prévision de ses valeurs. La réponse rencontre des difficultés dues à la détermination et l'utilisation des répartitions mixtes de probabilité des composantes (A_i^j, b_i, p^j) . Aussi, différentes approches sont proposées par la construction de la fonction de répartition ou l'estimation de l'espérance mathématique de l'"optimum" d'un programme stochastique

 (A, b, p) triplet aléatoire défini sur l'espace de probabilité (R, A, P) à valeurs dans \mathbb{R}^N ($N = (m_0 + 1)(n + 1) - 1$)

Soient

$$K(A, b) = \{x \in K_1 / Ax \leq b, (A, b) \in \mathbb{R}^{m_0(n+1)}\}$$

un représentant de la famille des polyèdres "possibles"
 $\{x \in K_1 / Ax \leq b\}$

. $Z(A, b, p)$ de la fonction telle que pour (A, b, p) connu

$$Z(A, b, p) = \begin{cases} -\infty & \text{si } K(A, b) = \emptyset \\ \max\{px / x \in K(A, b)\} & \text{si } K(A, b) \neq \emptyset \text{ et borné} \\ +\infty & \text{si } K(A, b) \neq \emptyset \text{ mais non borné} \end{cases}$$

1 Proposition Lemarie [1-11]

$Z(A,b,p)$ est une variable aléatoire définie sur (R,A,P)
à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$

$Z(A,b,p)$ est définie fonction "optimum" du programme stochastique.
On peut déduire, en outre, des résultats de la programmation
linéaire paramétrique, la propriété suivante :

1.1 Propriétés

A fixée $Z(A,b,p) = Z(b,p)$

- 1) $Z(b,p)$ fonction bilinéaire par morceaux des réalisations
de b et p
- 2) p fixée $Z(b,p) = Z(b)$
 $Z(b)$ fonction concave des réalisations de b
- 3) b fixée $Z(b,p) = Z(p)$
 $Z(p)$ fonction convexe des réalisations de p .

On aimerait donc déterminer la loi de probabilité de $Z(A,b,p)$ ou
au moins connaître son espérance mathématique. On commencera par
définir le support de la loi et donner des conditions pour
lesquelles $Z(A,b,p)$ prend des valeurs finies.

2 Support de la loi de $Z(A,b,p)$

Introduisons dans \mathbb{R}^N la relation d'ordre partiel
notée " \leq " $(\overset{0}{A}, \overset{0}{b}, \overset{0}{p}) \leq (\overset{1}{A}, \overset{1}{b}, \overset{1}{p}) \iff \overset{0}{A}_i^j > \overset{1}{A}_i^j ; b_i^0 < b_i^1 ; p^0 < p^1$
 \mathbb{R}^N $\forall i \in I \forall j \in J \quad |I| = m_0 \quad |J| = n$

2.1 Proposition :

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ (A, b, p) \end{array} \right] \leq_{\mathbb{R}^N} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ (A, b, p) \end{array} \right] \implies Z(A, b, p) \leq Z(A, b, p)$$

En effet $\forall (i, j) \in I \times J \quad \begin{matrix} 0 & 1 \\ A_i^j & \geq A_i^j \end{matrix} \implies \exists T_i^j \geq 0$ telle que $\overset{0}{A} = \overset{1}{A} + T$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \in K(A, b) \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} Tx \geq 0 \\ Ax \leq b \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} Ax \leq b \\ b^0 \leq b \end{array} \right\} \implies Ax \leq b \implies K(A^0, b^0) \subset K(A, b) \implies$$

$$\forall j \in J \quad \begin{matrix} 0 & 1 \\ p^j & \leq p^j \end{matrix} \implies \exists d^j \geq 0 \quad \overset{1}{p}x = \overset{0}{p}x + dx$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ (A, b, p) \end{array} \right] \leq \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ (A, b, p) \end{array} \right]$$

Ce résultat implique que le support est l'intervalle

$$(Z(A, b, p)^-; Z(A, b, p)^+) \text{ i.e. } (Z(A^+, b^-, p^-); Z(A^-, b^+, p^+))$$

de $\bar{\mathbb{R}}$. (Le signe +, respectivement -, indique que l'on remplace tous les éléments par leur borne supérieure (resp. inf)).

Nous en déduisons la propriété suivante.

2.2 Proposition :

Supposons (A^-, b^+, p^+) et (A^+, b^-, p^-) finies.

- 1 $K(A^+, b^-) \neq \emptyset$ $K(A^-, b^+)$ borné
- 2 $Z(A^+, b^-, p^-) > -\infty$ $Z(A^-, b^+, p^+) < +\infty$
- 3 le programme stochastique maximiser px
 $x \in K_1 \quad Ax \leq b$
 admet toujours un optimum fini

On a :

$$1 \implies 2 \iff 3$$

3 Construction de la loi

APPROCHES THEORIQUES

3-1 Bereanu [1.3], [1.5] et Lemarie [1.11] proposent une construction théorique de la fonction de répartition.

On suppose la proposition 2.2.2 vérifiée ; pour toute réalisation de (A,b,p) on mettra le programme déterministe obtenu sous la forme canonique, par adjonction éventuelle de variables d'écart *i.e* maximiser $\tilde{p}y$
 sous $\tilde{B}y = a$
 $y \geq 0$

où

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= (B,U) \text{ matrice } m \times (m+n) \text{ avec } B = (A,D) \\ p &= (p,o) \text{ matrice } (1 \times m) \quad U \text{ matrice identité} \\ a &= (b,d) \text{ matrice } m \times 1 \\ y &= (x, \text{écarts}) \end{aligned}$$

et on suppose que le rang du système $\tilde{B}y = a$ est m .
 Le principe est de construire une partition de l'ensemble des réalisations de (A,b,p) telle que pour toutes les valeurs appartenant à un même sous ensemble, les programmes correspondants admettent la même base optimale. La fonction de répartition s'obtient alors en sommant les probabilités calculées dans chacun d'eux.

A toute valeur du triplet (A,b,p) donc (\tilde{B},a,p) on associe de manière unique la base optimale réalisable du programme définie par une partie I_h de L ($|L| = n+m$, $|I_h| = m$, $|\bar{I}_h| = n$)
 On définit alors la relation d'équivalence suivante :

$$\begin{array}{ccc} o & o & o \\ (A,b,p) & \sim & (A,b,p) \end{array} \iff \text{les programmes correspondants ont même base optimale réalisable.}$$

Les classes d'équivalence sont appelées structures S_h , $h \in H$ avec

$$|H| = \frac{m+n!}{m!n!}$$

Ces structures S_h sont donc définies par

$$S_h = \{(A, b, p) \in \mathbb{R}^N / (\tilde{B}^h)^{-1} a \geq 0 ; \tilde{p}^h - \tilde{p}^h (\tilde{B}^h)^{-1} \tilde{B}^h \leq 0, y_{\tilde{I}_h} = 0\}$$

On reconnaît l'expression du critère de candidature \tilde{I}_h pour h fixé dans H .

Soit N^* le nombre de toutes les réalisations possibles de (A, b, p)
 $\forall l \in N^* \exists h \in H$ tel que $(A^l, b^l, p^l) \in S_h$
 et notons

$$\cdot \gamma_{h,1} = \tilde{p}^h (\tilde{B}^h)^{-1} a^l \text{ l'optimum correspondant}$$

$$\cdot N_h = \{l \in N^* / (A^l, b^l, p^l) \in S_h\}$$

la fonction de répartition $F_Z(\cdot)$ de $Z(A, b, p)$ s'obtient alors par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_Z(t) = \frac{1}{N^*} \sum_{h=1}^{|H|} \sum_{l \in N_h} f_{h,1} \text{ avec } f_{h,1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma_{h,1} > t \\ \text{fréquence de } \gamma_{h,1} & \text{sinon} \end{cases}$$

On pourra appliquer cette méthode de la façon suivante :

Soit (A^l, b^l, p^l) $l \in N^*$ un tirage de valeurs pour (A, b, p)

Test : Connait-on S_h ($1 \leq h \leq |H|$) tel que $(A^l, b^l, p^l) \in S_h$?

- Si oui

on ne résoud pas le programme linéaire puisqu'à l'aide I_0 on peut déterminer $\gamma_{h^0,1}$
 et $|N_{h^0}|$ devient $|N_{h^0}| + 1$

- Si non

on résoud le programme linéaire.

$|N_h^0| = 1$ et on détermine I_h^0 et $\gamma_{h^0,1}$

Néanmoins, en pratique, on rencontrera les difficultés suivantes :

. $\forall l \in N^*$, $\forall h \in H$, cette construction nécessite au moins, d'inverser B^{I_h} d'où la restriction aux programmes stochastiques dont $|H|$ et N^* sont petits de façon à réduire le volume des calculs à chaque tirage.

. Si N^* n'est pas fini ou grand, il se posera le choix et la détermination d'un échantillon bien représentatif pour obtenir une estimation avec une précision donnée.

Remarques :

1) A et b fixés, seul p aléatoire. Brans [1.8]. dans ce cas $|H|$ est le nombre de points extrêmes du domaine convexe fixe $\tilde{K} = \{y \in \mathbb{R}^{n+m} / \tilde{B}y = a, y \geq 0\}$

Les structures S_h sont alors les cones convexes, centrés à l'origine, et définis par $S_h = \{p \in \mathbb{R}^n / \tilde{p}y^h \geq \tilde{p}^r y^r, \forall r \in H - \{h\}\}$

Mais il faut pouvoir dénombrer les points extrêmes de \tilde{K} .

Le simple exemple proposé par Onicescu et Iosifescu [1.12]

$$\max \left\{ \frac{1}{p}x_1 + \frac{2}{p}x_2 / 0 \leq x_1 \leq 1 ; 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}$$

avec p^1 et p^2 variables aléatoires indépendantes de distribution Normale exige déjà un long calcul pour déterminer la fonction de répartition de $Z(p)$ - (emploi de lois mixtes et conditionnelles) puisque dans ce cas $|H| = 4$ (sommets du carré unité) et $\forall l \in N^*$ on a

$$Z(p) = \begin{cases} \gamma_{1,1} = 0 & \text{si } p^1 \leq 0 \text{ et } p^2 \leq 0 \\ \gamma_{2,1} = p^1 & \text{si } p^1 \geq 0 \text{ et } p^2 \leq 0 \\ \gamma_{3,1} = p^1 + p^2 & \text{si } p^1 \geq 0 \text{ et } p^2 \geq 0 \\ \gamma_{4,1} = p^2 & \text{si } p^1 \leq 0 \text{ et } p^2 \geq 0 \end{cases}$$

2) A et p fixés seul b aléatoire

par passage au dual, on retrouve le cas de la remarque 1) ;
il suffit d'adapter les résultats.

3.2 Approche de Tintner et Sengupta [8], [1.16]

Cette approche qualifiée "active" repose sur le choix d'une matrice d'affectation U afin de décomposer les contraintes en des conditions sur chaque variable de décision x_j i.e on considère le programme stochastique sous la forme

maximiser px
sous $AX \leq BU$
 $x \in K_1$

avec U matrice $m_0 \times n$ telle que $U_i^j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^n U_i^j = 1 \forall i = 1 \dots m_0$

X matrice carrée diagonale ($n \times n$) $X_j^j = x_j$

B matrice carrée diagonale ($m_0 \times m_0$) $B_i^i = b_i$

On a donc remplacé les contraintes $A_i x \leq b_i$ par

$$A_i^j x_j \leq b_i U_i^j \quad \forall i = 1 \dots m_0 \quad \forall j = 1 \dots n$$

c'est donc que l'affectation de b_i s'effectuera suivant des taux U_i^j choisis.

Le raisonnement est le suivant :

On se fixe $U \rightarrow$ on observe $(A, b, p) \rightarrow$ on détermine \hat{x} et $Z(A, b, p)$ notée $Z^1(A, b, p)$.

Répétant ce schéma pour U restant fixée, on obtient empiriquement une fonction de répartition de $Z^1(A, b, p)$ dépendant donc de ce choix de U .

On a $Z^1(A, b, p) \leq Z(A, b, p)$

puisque

$$\left. \begin{array}{l} A_i^j x_j \leq b_i \quad U_i^j \\ \sum_{j=1}^n U_i^j = 1 \\ \forall i=1 \dots m_0 \quad \forall j=1 \dots n \end{array} \right\} \implies A_i x \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m_0$$

d'où $E[Z^1(A, b, p)] \leq E[Z(A, b, p)]$ (E = Espérance mathématique)

Par cette méthode on peut donc penser approximer la loi de $Z(A, b, p)$ ou faire choix d'une loi d'après celui de U .

Néanmoins, il faudra encore obtenir, un échantillon de valeurs de (A, b, p) assez réduit de façon à ne pas avoir à résoudre un trop grand nombre de programmes.

3.3 Construction en Pratique :

. METHODES EMPIRIQUES

Le principe est : disposant d'échantillons de valeurs de (A, b, p) on obtient un échantillon d'optimums par résolution des programmes mathématiques pour tracer l'histogramme cumulé de $Z(A, b, p)$. Par utilisation de la convergence de la fonction de répartition empirique, vers la fonction de répartition théorique (théorèmes de probabilité) on peut en déduire la loi suivie par $Z(A, b, p)$.

Tintner et Sastry [1.18] testent à ce propos diverses convergences. Néanmoins il faut pouvoir obtenir des estimations sans biais. A titre d'exemple, Bracken et Soland [1.7], ont effectué 20 000 tirages (simulation) pour un programme stochastique où seul p est aléatoire et avec 4 composantes.

Ce procédé se révèle à la fois prohibitif et restrictif puisque par exemple le cas où seul b est aléatoire et $|I| = 9$ et b_i à 10 réalisations possibles, il faudrait examiner $10^9 = 1$ milliard de programmes.

METHODES DE PARAMETRISATION

Bereanu et Peeters [1;6] utilisent les résultats de la programmation linéaire paramétrique, en supposant seuls b ou p aléatoire et dépendant linéairement d'une seule variable aléatoire réelle : on pose $p = \overset{\circ}{p} + t \overset{l}{p}$ avec $\overset{\circ}{p}$ et $\overset{l}{p}$ matrices fixes t variable aléatoire réelle de loi de probabilité $F_t(\cdot)$ connue, strictement croissante, continue et de support (α, β) . l'idée est alors de subdiviser (α, β) en valeurs caractéristiques λ_j telles que $\alpha = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N = \beta$ et d'étudier $Z(t)$ pour t paramètre variant sur ces subdivisions. Ils exhibent, alors, des algorithmes de construction.

Pour $t \in (\lambda_{j-1}, \lambda_j)$ soit y^j la solution optimale fourni par la méthode simpliciale.

$$\text{Définissons } w_j(z) = \frac{z - p^{\circ} y^j}{p^l y^j} \text{ si } p^l y^j \neq 0$$

$$\text{alors } P(Z(t) \leq z) = \sum_{j=1}^N H_j(z)$$

$$\text{avec } H_j(z) =$$

$$\text{si } p^l y^j > 0 \quad H_j(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } w_j(z) \leq \lambda_{j-1} \\ F_t(\lambda_j) - F_t(\lambda_{j-1}) & \text{si } w_j(z) \geq \lambda_j \\ F_t(w_j(z)) - F_t(\lambda_{j-1}) & \text{si } \lambda_{j-1} < w_j(z) < \lambda_j \end{cases}$$

$$\text{si } p^l y^j < 0 \quad H_j(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } w_j(z) \geq \lambda_j \\ F_t(\lambda_j) - F_t(\lambda_{j-1}) & \text{si } w_j(z) \leq \lambda_{j-1} \\ F_t(\lambda_j) - F_t(w_j(z)) & \text{si } \lambda_{j-1} < w_j(z) < \lambda_j \end{cases}$$

$$\text{si } p^l y^j = 0 \quad H_j(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } p^l y^j \geq z \\ F_t(\lambda_j) - F_t(\lambda_{j-1}) & \text{si } p^l y^j < z \end{cases}$$

avec $F_t(-\infty) = 0$ ($\alpha = -\infty$) et $F_t(+\infty) = 1$ ($\lambda_N = \beta = +\infty$)

. METHODES APPROCHEES

On suppose que les moments d'ordre 2 de (A,b,p) existent.

1 les N composantes de (A,b,p) sont indépendantes en probabilité. Par application de l'inégalité de Bienayme Tchebycheff et utilisation de la propriété de croissance de $Z(A,b,p)$ on a

$$P \{ Z[E(A,b,p) - t \sigma(A,b,p)] \leq Z(A,b,p) \leq Z[E(A,b,p) + t \sigma(A,b,p)] \} \geq [1 - \frac{1}{2t^2}]^N$$

où E espérance mathématique et σ écart type.

En faisant varier t dans \mathbb{R} on obtient une approximation.

2 Les composantes de (A,b,p) ne sont plus indépendantes, si (A,b,p) suit une loi Normale à valeurs dans \mathbb{R}^N alors

$$P \{ Z [E(A,b,p) - t \sigma(A,b,p)] \leq Z(A,b,p) \leq Z [E(A,b,p) + t \sigma(A,b,p)] \} \geq$$

$$P(X_N^2 \leq t^2)$$

où X_N^2 est une variable aléatoire qui suit une loi du X^2 à N degrés de liberté.

Cette inégalité peut permettre d'approcher par valeurs inférieures la fonction de répartition de $Z(A,b,p)$

CONCLUSION

On ne possède pas encore de méthodes numériques efficaces pour résoudre le problème posé, sauf cas particuliers. Les principales difficultés pratiques sont :

- détermination de lois mixtes de probabilité
- volume des calculs à envisager
- détermination de la taille de l'échantillon nécessaire à une bonne estimation.

CHAPITRE II

"DECISION - REALISATION"

"CHANCE CONSTRAINED PROGRAMMING PROBLEMS"

INTRODUCTION

On se pose le problème de prendre une décision x avant de connaître les réalisations des variables aléatoires (valeurs des composantes $A_i^j, b_i, p^j \forall i \in I, \forall j \in J, |I| = m_0, |J| = m$). On s'affranchit des aléas sur les contraintes ou sur la fonction économique en choisissant des définitions déterministes du programme stochastique et ainsi proposer comme solutions celles de programmes mathématiques. A ces attitudes correspondent donc différentes notions d'admissibilité et d'optimalité pour une solution déterministe à un programme stochastique. Une définition importante "chance constrained Programming problems" que nous qualifions de "programmes sous risque", introduite par Charnes et Cooper [2.9], [2.11] puis par Kataoka [2.31] et Bereanu [2.5] demeure l'attitude principale du schéma "décision-réalisation". Elle se caractérise par l'étude séparée du caractère aléatoire des contraintes de celui de la fonction économique. La prise en compte du risque de ne pas toujours pouvoir satisfaire les contraintes se traduit par le choix d'un niveau de probabilité acceptable, encore appelé niveau de confiance, sur la satisfaction de l'ensemble des contraintes ou de chacune d'elles. On en déduit un domaine de solutions admissibles appelé domaine de confiance. On définit l'optimalité d'une décision en prenant des versions déterministes de la fonction objective telles que maximisation de la probabilité qu'elle soit supérieure à une valeur donnée, ou maximisation de son espérance mathématique.

Rappelons que l'on a noté $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n / Dx \leq d, x \geq 0\}$ le domaine convexe fixe.

1 Solution espérance mathématique

On utilise l'espérance mathématique des variables aléatoires comme estimateurs et l'on qualifie de domaine de décision admissible, le polyèdre supposé non vide

$$K = \{x \in K_1 / \sum_{j \in J} E(A_i^j) x_j \leq E(b_i) \forall i \in I\}$$

L'optimalité d'une décision est déterminée par la résolution du programme déterministe linéaire maximiser $\sum_{j \in J} E(p_j) x_j$
 $x \in K$

On peut remarquer que :

- les espérances mathématiques peuvent se révéler de mauvais estimateurs surtout si les variables aléatoires sont fortement dispersées autour de leurs moyennes.

- si après intervention du hasard la valeur du couple (A, b) appartient à l'ensemble $\{(A, b) \in \mathbb{R}^{(n+1)m_0} / A_i^j \geq E(A_i^j), b_i \leq E(b_i), \forall i \in I, \forall j \in J\}$

Le domaine obtenu $K(A, b) = \{x \in K_1 / Ax \leq b\}$ est inclus dans K et par conséquent x de K déclaré admissible peut ne pas vérifier les contraintes $Ax \leq b$ lorsque (A, b) sera connu

2 Solution "prudente"

On se place à l'abri de toute violation de contraintes en définissant admissible toute décision x de K_1 qui vérifie tous les systèmes de contraintes possibles $Ax \leq b$
 i.e $K = \bigcap_{(A, b) \in \mathbb{R}^{(n+1)m_0}} \{x \in K_1 / Ax \leq b\}$

on qualifiera de décision optimale, celle qui maximise $E(p)x$ sur K . Le modèle déterministe obtenu est encore un programme mathématique linéaire.

Mais on peut remarquer que :

- les polyèdres $\{x \in K_1 / Ax \leq b, (A, b) \in \mathbb{R}^{(n+1)m_0}\}$ peuvent être en nombre infini (cas de distributions continues) ou même dans le cas d'un nombre fini, l'intersection peut être vide.

- l'optimum obtenu peut être très inférieur à celui obtenu après réalisation de l'aléatoire.

Les remarques faites à ces deux solutions conduisent à ne pas retenir ces attitudes en pratique.

3 Programmes sous risques

3.1 Etude de l'admissibilité

La fonction de répartition $F_{A,b}(\cdot)$ du couple aléatoire (A,b) est connue par hypothèse et nous la supposons continue. Pour tout x fixé de K_1 désignons par $F_{Ax-b}(\cdot)$ la fonction de répartition du vecteur aléatoire $Ax-b$ déduite de $F_{A,b}(\cdot)$. On a par définition $\forall t \in \mathbb{R}^m$ o $\forall x$ fixé dans K_1

$$F_{Ax-b}(t) = P(Ax-b \leq t) = P(A_i x - b_i \leq t_i, \forall i \in I)$$

Posons $g(x,t) = F_{Ax-b}(t)$ où $g : K_1 \times \mathbb{R}^m \longrightarrow [0,1]$ avec $g(\cdot, t)$ application qui à x fait correspondre la valeur que prend la fonction de répartition correspondante au point t .

$g(x, \cdot)$ fonction monotone non décroissante de la variable t (propriété de $F_{Ax-b}(\cdot)$)

de même pour les fonctions de répartition marginales posons

$$g_i(x, t_i) = F_{A_i x - b_i}(t_i) = P(A_i x - b_i \leq t_i)$$

où $g_i : K_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \quad \forall i \in I$

On a par définition

$$\begin{aligned} g_i(x, t_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{t_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dF_{Ax-b}(\cdot) \\ &= F_{Ax-b}(\infty, \infty, \dots, t_i, \infty, \dots, \infty) \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

d'où l'on déduit de façon générale

$$g_i(x, t_i) \geq g(x, t) \quad \forall i \in I, \forall t \in \mathbb{R}^m \text{ o } \forall x \text{ fixé.}$$

On distingue alors deux conceptions déterministes des contraintes ;

CAS 1 :

On désire la satisfaction de chaque contrainte avec une certaine probabilité. On choisit donc un vecteur α de \mathbb{R}^m tel que $0 \leq \alpha_i \leq 1 \forall i \in I$ et l'on définit d'admissibilité de x en imposant :

$$P(A_i x \leq b_i) \geq \alpha_i \quad \forall i \in I \text{ soit encore } g_i(x, 0) \geq \alpha_i \quad \forall i \in I.$$

Cette définition signifie que la $i^{\text{ème}}$ contrainte par exemple pourra être violée mais seulement dans plus $100(1 - \alpha_i)\%$ des cas. On détermine ainsi le domaine de confiance D_α

$$D_\alpha = \{x \in K_1 / g_i(x, 0) \geq \alpha_i \quad \forall i \in I\} = \bigcap_{i \in I} D_{\alpha_i}$$

$$\text{où } D_{\alpha_i} = \{x \in K_1 / g_i(x, 0) \geq \alpha_i\}$$

CAS 2 :

On veut satisfaire l'ensemble des contraintes avec une certaine probabilité.

On se fixe alors un nombre β tel que $0 < \beta \leq 1$ et une décision sera dite admissible si elle vérifie :

$$P(Ax \leq b) \geq \beta \text{ soit encore } P(A_i x - b_i \leq 0, \quad \forall i \in I) \geq \beta.$$

Le domaine de confiance se définit donc par :

$$D_\beta = \{x \in K_1 / g(x, 0) \geq \beta\}$$

Puisque l'on se fixe α ou β pour définir l'admissibilité il nous a paru intéressant de comparer ces deux conceptions :

a) l'avantage de prendre $P(A_i x - b_i \leq 0) \geq \alpha_i \quad \forall i \in I$ est que l'on peut donner plus ou moins d'importance à la satisfaction de chaque contrainte par le choix de α_i .

On peut ainsi envisager de choisir certaines composantes de α inférieures à 0,5 et d'autres proches de 1.

Par contre, il est naturel de choisir $\beta > 0.5$

b) Si $\beta > \alpha_i \forall i \in I$ on a $D_\alpha \subset D_\beta$

Ceci résulte de l'inégalité $g_i(x,0) > g(x,0) \forall i \in I$

Cette inclusion est bien entendu vérifiée aussi dans le cas où (A_i, b_i) et (A_k, b_k) sont indépendants $\forall i \in I, \forall k \in I, i \neq k$ car alors $g(x,0) = \prod_{i=1}^{m_0} g_i(x,0)$ et puisque

$$0 \leq \prod_{i=1}^{m_0} g_i(x,0) \leq g_i(x,0) \leq 1 \forall i \in I \text{ on a le résultat.}$$

Par contre, toujours dans le cas d'indépendance si $\prod_{i=1}^{m_0} \alpha_i > \beta$ alors $x \in D_\alpha$ implique $\prod_{i=1}^{m_0} g_i(x,0) > \beta$ d'où $D_\alpha \subset D_\beta$

c) Si $0 < \beta \leq \sum_{i=1}^{m_0} \alpha_i - (m_0 - 1)$ on a $D_\alpha \subset D_\beta$

En effet, quels que soient les événements E et F, on a

$$1 \geq P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

$$\implies P(E \cap F) \geq P(E) + P(F) - 1$$

d'où $P(Ax-b \leq 0) \geq \sum_{i=1}^{m_0} P(A_i x - b_i \leq 0) - (m_0 - 1)$ et le résultat s'en déduit.

d) Dans le cas où seul b est aléatoire, les domaines D_α et D_β s'écrivent

$$D_\beta = \{x \in K_1 / G(Ax) \geq \beta\} \text{ où } G(\cdot) = P(b \geq \cdot)$$

et

$$D_\alpha = \{x \in K_1 / F_{b_i}(A_i x) \leq 1 - \alpha_i \forall i \in I\}$$

où $F_{b_i}(\cdot) = P(b_i \leq \cdot)$ fonction de répartition marginale de $b_i \forall i \in I$.

Si les variables aléatoires b_i sont indépendantes entre elles on a $\beta \leq \prod_{i=1}^{m_0} \alpha_i \implies D_\alpha \subset D_\beta$

Puisque dans ce cas

$$G_b(Ax) = \prod_{i=1}^{m_0} G_{b_i}(A_i x) = \prod_{i=1}^{m_0} [1 - F_{b_i}(A_i x)]$$

donc

$$x \in D_\alpha \implies G_b(Ax) \geq \prod_{i=1}^{m_0} \alpha_i \text{ d'où le résultat.}$$

e) si l'on choisit $\alpha_i = \beta = 1 \forall i \in I$ on quitte l'attitude des "programmes sous risques" pour prendre celle de "solution prudente" ou celle des "programmes avec recours" que l'on traitera au chapitre III.

Si l'on considère α ou β comme des paramètres, on peut désigner D comme une fonction multivoque de $[0,1]^{m_0} \longrightarrow P(K_1)$ telle que $D(\alpha) = \{x \in K_1 / g_i(x,0) \geq \alpha_i, \alpha_i \in [0,1], \forall i \in I\}$ nous énonçons alors le résultat suivant :

3.3.1 Proposition

$$\left[\alpha \geq \alpha^1 (\alpha_i \geq \alpha_i^1 \forall i \in I) \implies D(\alpha) \subset D(\alpha^1) \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{En effet } \forall i \in I \ g_i(x,0) \geq \alpha_i^1 \\ \alpha_i \geq \alpha_i^1 \end{array} \right\} \implies g_i(x,0) \geq \alpha_i^1 \forall i \in I \implies D(\alpha) \subset D(\alpha^1)$$

Ce résultat est applicable à D_β puisque $\beta \geq \beta^1 \implies D(\beta) \subset D(\beta^1)$

avec $D(\beta) = \{x \in K_1 / g(x,0) \geq \beta, \beta \in [0,1]\}$

Conséquences :

Puisqu'il est naturel de choisir $\alpha_i \geq \frac{1}{2} \forall i \in I$
désignons par

e_1 vecteur de \mathbb{R}^m de composantes 1

$e_{\frac{1}{2}}$ vecteur de \mathbb{R}^m de composantes $\frac{1}{2}$

On a $D(e_1) \subset D(\alpha) \subset D(e_{\frac{1}{2}})$

or $D(e_1) = \{x \in K_1 / P(A_i x - b_i \leq 0) = 1 \forall i \in I\}$
 $= \{x \in K_1 / A_i x \leq b_i \forall i \in I, \forall (A_i, b_i) \in U_{A_i, b_i}\}$

avec U_{A_i, b_i} support de la loi de (A_i, b_i)

$D(e_1)$ est donc le domaine des solutions admissibles dans la
conception "solution prudente" et est polyèdre convexe puisque
intersection de convexes.

$$D(e_{\frac{1}{2}}) = \{x \in K_1 / P(A_i x - b_i \leq 0) \geq \frac{1}{2} \forall i \in I\}$$

Si l'on suppose $F_{A_i x - b_i}(\cdot)$ continue $\forall x$ de K_1 alors

$$D(e_{\frac{1}{2}}) = \{x \in K_1 / F_{A_i x - b_i}^{-1}(\frac{1}{2}) \leq 0 \forall i \in I\} \text{ où } F_{A_i x - b_i}^{-1}(\frac{1}{2}) \text{ est}$$

l'expression de la médiane de la distribution de $A_i x - b_i$;
dans le cas particulier où $A_i x - b_i$ de distribution Normale
 $\forall i \in I$

on a

$$F_{A_i x - b_i}^{-1}(\frac{1}{2}) = E(A_i)x - E(b_i)$$

d'où

$$D(e_{\frac{1}{2}}) = \{x \in K_1 / E(A_i)x \leq E(b_i) \forall i \in I\}$$

qui est le domaine de la conception "solution espérance mathématique". Ce cas particulier se rencontre notamment si (A_i^j, b_i) variables aléatoires mutuellement indépendantes et de distribution Normale.

Cette inclusion justifie encore l'abandon des solutions précédentes

remarques :

$$* \text{ On a de même } \forall \beta > \frac{1}{2} \quad D(1) \subset D(\beta) \subset D(\frac{1}{2})$$

avec

$$D(1) = \{x \in K_1 / Ax \leq b, \forall (A,b) \in U_{A,b}\}$$

où $U_{A,b}$ support de la loi mixte de (A,b)

$$. D(\frac{1}{2}) = \{x \in K_1 / g(x,0) \geq \frac{1}{2}\}$$

* la proposition est aussi valable dans le cas où seul b est aléatoire puisque $D(\alpha) = \{x \in K_1 / F_{b_i}(A_i x) \leq 1 - \alpha_i, \forall i \in I\}$

Nous en déduisons :

3.1.2 Proposition

Si $D(e_1)$ est non vide et $D(e_2)$ borné, le programme stochastique admet toujours un optimum fini dans chaque conception "programmes sous risques" réalisant $1 > \alpha_i > \frac{1}{2}$ et version déterministe à coefficients finis de la fonction économique.

Ceci résulte de $D(e_1) \subset D(\alpha) \subset D(e_2)$

Remarquons que si on choisit le cas 2 pour l'admissibilité on prendra $\beta > \frac{1}{2}$ et $D(\frac{1}{2})$ et $D(1)$ joueront les rôles de $D(e_2)$ et $D(e_1)$ respectivement.

On supposera désormais $D(e_1)$ non vide et $D(e_2)$ borné.

3.1.3 Autres définitions déterministes des domaines

Les définitions probabilistes précédentes sélectionnent les fonctions de répartition des différents vecteurs $Ax-b$ admissibles (x variant dans K_1) et retiennent les valeurs de x pour lesquelles les fonctions de répartition correspondantes prennent à l'origine une valeur supérieure ou égale à α_i (ou β). On conçoit que dans le but de résolutions pratiques, cette admissibilité ne sera pas commode à déterminer. Aussi, dans le cas de distributions continues, on préférera des définitions équivalentes des domaines D_α et D_β par utilisation des propriétés de monotonie des fonctions de répartition et en se basant sur la propriété suivante : soit X une variable aléatoire réelle

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F(t) = P(X \leq t) \geq \alpha \iff t \geq F^{-1}(\alpha)$$

pour x fixé dans K_1 désignons par t^x le vecteur de \mathbb{R}^m (de composantes t_i^x) tel que : si on choisit le cas 1, t_i^x défini par $g_i(x, t_i^x) = \alpha_i \quad \forall i \in I \quad (t_i^x = F_{A_i x - b_i}^{-1}(\alpha_i))$

où si le cas 2 est retenu

$$g(x, t^x) = \beta \quad (t^x = F_{A x - b}^{-1}(\beta))$$

pour x variant dans K_1 , on dénombrera donc des vecteurs notés t^x .

3.1.3 Proposition : Symonds [2.55]

D_α ou D_β admettent pour définitions équivalentes déterministes

$$\{x \in K_1 / t_i^x \leq 0 \quad \forall i \in I\}$$

C'est donc une sélection sur les quantités d'ordre α_i (ou β).
Illustrons cette proposition par l'exemple suivant :

On suppose $m_0 = 1$ et (A^j, b) composés de variables aléatoires positives $\forall j \in J$

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geq x^1 \geq 0\}$$

$F_{Ax-b}(\cdot)$ répartition de la loi Normale.

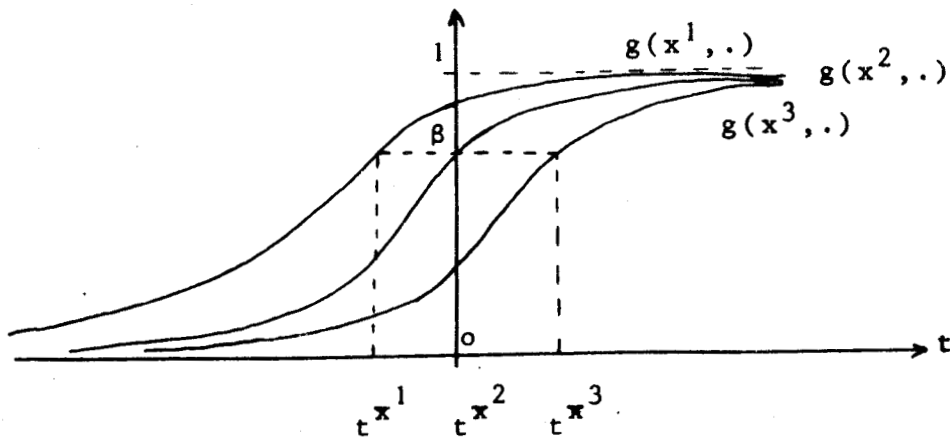
On a $\forall t \in \mathbb{R}$ $g(\cdot, t)$ fonction non croissante de x puisque

$$\forall x^2 \in K_1 \{t \in \mathbb{R} / Ax^2 - b \leq t\} \subset \{t \in \mathbb{R} / Ax^1 - b \leq t\}$$

d'où

$$P(Ax^2 - b \leq t) \leq P(Ax^1 - b \leq t) \iff g(x^2, t) \leq g(x^1, t)$$

Soit



t^{x^1}, t^{x^2} et t^{x^3} sont définis par $g(x^1, t^{x^1}) = g(x^2, t^{x^2}) = g(x^3, t^{x^3}) = \beta$

$$D_\beta = \{x \in K_1 / g(x, 0) \geq \beta\} = \{x \in K_1 / g(x, t^{x^2}) \geq g(x^2, t^{x^2})\} = K_1 \cap \{x \leq x^2\} = [x^1, x^2]$$

d'après la propriété de $g(\cdot, t^{x^2})$

or

$$\{x \in K_1 / t^x \leq 0\} = \{x \in K_1 / t^x \leq t^{x^2}\} = \{x \geq x^1 \geq 0\} \cap \{x \leq x^2\} = [x^1, x^2]$$

APPLICATIONS

1 Si (A_i^j, b_i) et (A_k^1, b_k) sont indépendantes

$$\forall i \in I, \forall k \in I \quad i \neq k$$

$$\forall l \in J, \forall j \in J \quad j \neq l$$

$$D_\beta = \{x \in K_1 / t_i^x \leq 0 \quad \forall i \in I, \prod_{i=1}^{m_0} g_i(x, t_i^x) = \beta\}$$

2 A fixée, b vecteur aléatoire

$$\text{- On choisit } b^* = \max \{t / \prod_{i=1}^{m_0} [1 - F_{b_i}(t_i)] \geq \beta\}$$

comme équivalent de b

$$\text{d'où } D_\beta = \{x \in K_1 / Ax \leq b^*\}$$

polyèdre convexe

- Pour le cas 1 on choisit

$$b_i^* = \max \{t_i / F_{b_i}(t_i) \leq 1 - \alpha_i\} \quad \forall i \in I$$

d'où

$$D_\alpha = \bigcap_{i=1}^{m_0} \{x \in K_1 / A_i x \leq b_i^* \quad \forall i \in I\}$$

polyèdre convexe.

3.2 Convexité des domaines

Dans le but de résoudre pratiquement ces problèmes, il est naturel de chercher des conditions de convexité de ces domaines.

3.2.1 Convexité de D_α

$\forall i \in I$ supposons connaître l'espérance mathématique des composantes de (A_i, b_i) et la matrice de covariance de (A_i, b_i) .
(matrice définie non négative)

d'où $\forall x$ fixé dans K_1

$$E(A_i x - b_i) = \sum_{j=1}^n E(A_i^j) x_j - E(b_i)$$

$$\text{Var}(A_i x - b_i) = \sum_{j=1}^n \text{var}(A_i^j) x_j^2 + \text{Var}(b_i)$$

$$+ \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(A_i^j, A_i^h) x_j x_h - 2 \sum_{j=1}^n \text{Cov}(A_i^j, b_i) x_j$$

$$h \neq j$$

or

$$g_i(x, 0) = P(A_i x - b_i \leq 0) =$$

$$P \left(\frac{(A_i x - b_i) - E(A_i x - b_i)}{[\text{Var}(A_i x - b_i)]^{1/2}} \leq \frac{-E(A_i x - b_i)}{[\text{Var}(A_i x - b_i)]^{1/2}} \right)$$

Quelles que soient les lois suivies par les variables aléatoires A_i^j et b_i , on suppose que $g_i(x, \cdot)$ est une fonction de répartition de loi Normale $\forall i \in I, \forall x \in K_1$
(c'est le cas notamment pour A_i^j et b_i Gaussiennes $\forall i \in I \forall j \in J$)

3.2.1 Proposition : Kataoka [2.31], Lemarie [2.34]

Une condition suffisante pour que D_α soit convexe est que

$$\alpha_i \geq \frac{1}{2} \quad \forall i \in I$$

En effet $\forall x$ fixé dans K_1

$\forall i \in I$ $g_i(x, \cdot)$ fonction de répartition Normale \implies la fonction de répartition $N(\cdot)$ de la variable centrée réduite

$$\bar{A}_i x - \bar{b}_i = \frac{(A_i x - b_i) - E(A_i x - b_i)}{[\text{Var}(A_i x - b_i)]^{1/2}}$$

est celle de la loi Normale $N(0,1)$ $\forall i \in I$;

Soit \bar{t}_i le quantile d'ordre α_i de la loi $N(0,1)$ défini par

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\bar{t}_i} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \alpha_i$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \forall i \in I \quad g_i(x,0) \geq \alpha_i &\iff N\left[\frac{-E(A_i x - b_i)}{[\text{Var}(A_i x - b_i)]^{1/2}}\right] \geq N(\bar{t}_i) \\ &\iff \frac{-E(A_i x - b_i)}{[\text{Var}(A_i x - b_i)]^{1/2}} \geq \bar{t}_i \end{aligned}$$

d'où

$$E(A_i x - b_i) + \bar{t}_i [\text{Var}(A_i x - b_i)]^{1/2} \leq 0$$

Le membre de gauche est l'expression générale des t_i^x .
or

$$\alpha_i \geq \frac{1}{2} \quad \forall i \in I \implies \bar{t}_i \geq 0 \quad \forall i \in I$$

matrice de covariance de (A_i, b_i) définie non négative $\forall i \in I$

$\bar{t}_i [\text{Var}(A_i x - b_i)]^{1/2}$ fonction convexe de x d'après Kataoka [2.31]
on en déduit que

$$D_\alpha = \{x \in K_1 / E(A_i x - b_i) + \bar{t}_i [\text{Var}(A_i x - b_i)]^{1/2} \leq 0 \quad \forall i \in I\}$$

est convexe

Remarques :

$$1 \text{ Puisque } \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in I \quad \bar{t}_i \geq 0 \\ E(A_i x - b_i) + \bar{t}_i [\text{Var}(A_i x - b_i)]^{\frac{1}{2}} \leq 0 \end{array} \right\} \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in I \quad (\bar{t}_i)^2 \text{Var}(A_i x - b_i) - [E(A_i x - b_i)]^2 \leq 0 \\ E(A_i x - b_i) \leq 0 \end{array} \right\}$$

D_α s'écrit encore

$$D_\alpha = \{x \in K_1 / (\bar{t}_i)^2 \text{Var}(A_i x - b_i) - [E(A_i x - b_i)]^2 \leq 0, E(A_i) x \leq E(b_i) \forall i \in I\}$$

et est donc défini par des contraintes quadratiques.

2 Dans le cas où les variables aléatoires A_i^j et b_i sont indépendantes et gaussiennes, les termes de covariances disparaîtront et l'expression de D_α sera un peu plus "agréable".

Posons

$$\begin{array}{ll} m_i^j = E(A_i^j) & \sigma_i^2 = \text{Var}(A_i^j) \\ \mu_i = E(b_i) & \theta_i^2 = \text{Var}(b_i) \end{array}$$

D_α s'écrit donc

$$D_\alpha = \bigcap_{i=1}^{m_0} \{x \in K_1 / \bar{t}_i \left[\sum_{j=1}^n \sigma_i^2 x_j^2 + \theta_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^n m_i^j x_j - \mu_i \leq 0\}$$

3 Dans le cas particulier $\alpha_i = \frac{1}{2}$, D_{α_i} est un polyèdre convexe puisque $\bar{t}_i = 0$ (symétrie de la loi Normale $N(0,1)$) et $D_{\frac{1}{2}} = \{x \in K_1 / E(A_i) x \leq E(b_i)\}$. ceci montre en particulier le risque que l'on peut prendre en utilisant l'espérance mathématique des variables aléatoires comme estimateurs.

4 La loi Normale est très utilisée en pratique car elle possède de "bonnes" propriétés (en particulier celle de symétrie). Dans le cas de distributions arbitraires, on aura recours au théorème central limite pour se ramener à des fonctions de répartition de loi Normale ou bien on utilisera des inégalités du type Bienaymé -Tchebycheff pour expliciter D_{α_i} .
Par exemple

- en supposant A_i^j fixé, b_i variable aléatoire positive $\forall i \in I, \forall j \in J$, on a

$$\forall i \in I \quad A_i x > 0 \quad P(b_i > A_i x) \leq \frac{\theta_i^2 + \mu_i^2}{(A_i x)^2}$$

nous en déduisons le domaine

$$\{x \in K_1 / \alpha_i (A_i x)^2 \leq \theta_i^2 + \mu_i^2, A_i x > 0, \forall i \in I\}$$

ou encore avec

$$0 < \alpha_i \leq 1 \quad \{x \in K_1 / 0 < A_i x \leq \frac{\sqrt{\theta_i^2 + \mu_i^2}}{\alpha_i} \quad \forall i \in I\}$$

qui contient D_{α} et a l'avantage d'être linéaire pour permettre une sur-optimisation.

- Sengupta [2.45], [2.46] suppose A fixée, b_i variable aléatoire positive, $A_i x < \mu_i \quad \forall i \in I, \forall x \in K_1$.

On a alors

$$1 - P(b_i > A_i x) = P(b_i \leq A_i x) = P(\mu_i - b_i \geq \mu_i - A_i x) \leq \frac{\theta_i^2}{(\mu_i - A_i x)^2}$$

le domaine obtenu s'écrit

$$\{x \in K_1 / 1 - \alpha_i (\mu_i - A_i x)^2 \geq \theta_i^2, \mu_i - A_i x > 0 \quad \forall i \in I\}$$

qui est intérieur à D_{α} et conduira à une sous-optimisation.

mais avec $0 \leq \alpha_i < 1$ on peut remarquer que le domaine est un polyèdre convexe et s'écrit

$$\{x \in K_1 / \sqrt{(1 - \alpha_i)} (\mu_i - A_i x) \geq \theta_i \quad \forall i \in I\}$$

Sengupta [2.45], [2.49], a aussi étudié le cas de différentes distributions pour les variables aléatoires en particulier celles du X^2 (Khideox) et peut expliciter D_{α_i} à partir de domaines de confiance des lois de X^2 ou de Fisher-Snedecor.

Par exemple A_i^j et b_i indépendantes et suivent des lois de X^2 $\forall j \in J$ alors

$$\gamma_i(x) = \frac{b_i}{A_i x}$$

pour $x > 0$ suit une loi de Fisher non centrée et D_{α_i} s'explique à partir de domaines de confiance de cette loi i.e

$$D_{\alpha_i} = \{x \in K_1 / P(\gamma_i(x) \geq 1) \geq \alpha_i, x > 0\}$$

5 Dans le cas particulier où les variables x sont mixtes

$$i.e \quad 0 \leq x_j \leq 1 \quad j \in C$$

$$C \cap D = \emptyset \quad C \cup D = J$$

$$x_j = 0 \text{ ou } 1 \quad j \in D$$

Hillier [2.26] propose des approximations par excès ou par défaut très serrées de $\text{Var}(A_i x - b_i) / 2$. Il détermine ainsi des domaines extérieurs ou intérieurs à D_{α} qui permettent l'utilisation des algorithmes de programmation linéaire en nombres entiers.

CAS PARTICULIER :

A fixée, b vecteur aléatoire. $P(A_i x \leq b_i) = 1 - F_{b_i}(A_i x) \quad \forall i \in I$

On obtient de façon générale un polyèdre convexe pour D_{α} qui s'écrit

$$D_{\alpha} = \{x \in K_1 / A_i x \leq b_i^* \quad \forall i \in I\} \text{ avec } b_i^* = F_{b_i}^{-1}(1 - \alpha_i)$$

en supposant bien entendu $F_{b_i}^{-1}(1 - \alpha_i)$ bien défini

(par exemple si $F_{b_i}(\cdot)$ est la fonction de répartition Normale, on posera $\alpha_i \neq 1$)ⁱ

exemples:

- 1) b_i variable aléatoire gaussienne
alors

$$b_i^* = E(b_i) + q_{1-\alpha_i} [\text{Var}(b_i)]^{\frac{1}{2}}$$

avec $q_{1-\alpha_i}$ quantile d'ordre $1 - \alpha_i$ de la loi Normale $N(0,1)$

- 2) $0 < \alpha_i \leq 1$ et b_i distribué suivant une loi de Weibull de paramètres donnés $k_i > 0$ et $u_i > 1$ (Sengupta [2.48])

$$F_{b_i}(A_i x) = \begin{cases} 1 - \exp[-k_i (A_i x)^{u_i}] & \text{si } A_i x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où

$$b_i^* = \left(-\frac{1}{k_i} \log \alpha_i\right)^{\frac{1}{u_i}}$$

Remarquons que si $u_i = 1$ on retrouve le cas de la loi exponentielle

Puisque seul le second membre est aléatoire, on peut envisager plutôt que des formes linéaires $A_i x$, des fonction $h_i(x)$ avec $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexes $\forall i \in I$.

En supposant $F_{b_i}(\cdot)$ quasi-convexe sur un ensemble convexe de \mathbb{R} contenant tous les points de la forme $h_i(x)$, $x \in K_1$, $\forall i \in I$, le domaine D_α est convexe puisqu'alors $F_{b_i}(h_i(x))$ fonction quasi convexe de x .

En effet $\forall x^1 \in K_1$, $\forall x^2 \in K_1$ supposons $F_{b_i}(h_i(x^2)) \leq F_{b_i}(h_i(x^1))$

$F_{b_i}(\cdot)$ quasi-convexe \implies

$$\forall \lambda \in [0,1] F_{b_i} [\lambda h_i(x^2) + (1-\lambda) h_i(x^1)] \leq F_{b_i}(h_i(x^1))$$

h_i convexe

$F_{b_i}(\cdot)$ monotone non décroissante

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \implies F_{b_i} [h_i(\lambda x^2 + (1-\lambda)x^1)] \leq F_{b_i} [h_i(x^1)]$$

donc $F_{b_i} [h_i(\cdot)]$ fonction quasi-convexe

3.2.2 Convexité de D_β

Cette convexité se révèle plus difficile à établir, car la définition de D_β se base sur la loi mixte des variables aléatoires $A_i x - b_i$ puisque

$$F_{Ax-b}(0) = P(A_i x - b_i \leq 0 \quad \forall i \in I)$$

et nécessitera des hypothèses fortes. Les résultats proposés dans la littérature concernant les cas où soit A est fixée et b aléatoire et inversement et en outre les composantes sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

3.2.2.1 A fixée

$$P(A_i x \leq b_i \quad \forall i \in I) = \prod_{i=1}^{m_0} P(A_i x \leq b_i) = \prod_{i=1}^{m_0} [1 - F_{b_i}(A_i x)]$$

en posant

$$G_{b_i}(\cdot) = 1 - F_{b_i}(\cdot) \quad D_\beta \text{ s'écrit } \{x \in K_1 / \prod_{i=1}^{m_0} G_{b_i}(A_i x) \geq \beta\}$$

or pour beaucoup de distributions d'importance pratique (loi uniforme, loi Normale...) $\prod_{i=1}^{m_0} G_{b_i}(\cdot)$ n'est pas une fonction concave et D_β ne sera pas convexe. Miller et Wagner [2.36] ont cherché des conditions à imposer à $G_{b_i}(\cdot) \quad \forall i \in I$ pour obtenir un domaine convexe.

3.2.2.1 Proposition Miller et Wagner [2.36]

$$D_\beta \text{ convexe si } \forall i \in I \frac{d^2 G_{b_i}(t_i)}{dt_i^2} = [G_{b_i}(t_i)]'' \leq 0$$

sur l'ensemble $C_i = \{t_i \in \mathbb{R} / G_{b_i}(t_i) > 0\}$

$G_{b_i}(\cdot)$ étant décroissante on a C_i convexe $\forall i \in I$.

On établit alors le résultat en remarquant que

$$\forall \beta \ 0 < \beta \leq 1 \ \forall t_i \in C_i \quad 0 < G_{b_i}(t_i) \leq 1$$

$$\prod_{i=1}^{m_0} G_{b_i}(t_i) \geq \beta \iff \sum_{i=1}^{m_0} \log G_{b_i}(t_i) \geq \log \beta.$$

or

$$\left. \begin{array}{l} \forall t_i \in C_i \ [G_{b_i}(t_i)]'' \leq 0 \implies \log G_{b_i}(\cdot) \text{ concave} \\ A_i x \text{ linéaire} \end{array} \right\} \implies \log G_{b_i}(A_i x) \text{ fonction concave sur } K_1$$

d'où

$$D_\beta = \{x \in K_1 / \sum_{i=1}^{m_0} \log G_{b_i}(A_i x) \geq \log \beta\} \text{ convexe.}$$

L'hypothèse demandée est vérifiée en particulier par les lois dites à taux de survie croissant (utilisées en économie [2.47], [2.48]) i.e

$$q(t_i) = \frac{[F_{b_i}(t_i)]'}{1 - F_{b_i}(t_i)}$$

fonction croissante sur $\{t_i \in \mathbb{R} / 0 \leq F_{b_i}(t_i) < 1\}$

D_β sera donc convexe dans le cas de distributions dont les densités $[F_{b_i}(\cdot)]'$ sont de la forme

$$[F_{b_i}(t_i)]' = \begin{cases} \frac{n_i}{r_i - \lambda_i} \left(\frac{t_i - \lambda_i}{r_i - \lambda_i} \right)^{n_i - 1} & \text{si } \lambda_i \leq t_i \leq r_i, \\ & n_i \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec λ_i et r_i réels et n_i entier. si $n_i = 1$ on retrouve la distribution uniforme.

Finalement remarquons que dans le cas de loi exponentielle de paramètre $\lambda_i > 0$, les contraintes de D_β sont linéaires :

$$[F_{b_i}(t_i)]' = \begin{cases} \lambda_i \exp - \lambda_i (t_i - r_i) & \text{si } -\infty < r_i \leq t_i, r_i \text{ fixé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc

$$G_{b_i}(t_i) = \exp - \lambda_i (t_i - r_i) \quad \text{avec } -\infty < r_i \leq t_i$$

d'où

$$D_\beta = \{x \in K_1 / \sum_{i=1}^{m_0} \lambda_i A_i x \leq \sum_{i=1}^{m_0} \lambda_i r_i - \log \beta, A_i x \geq r_i \quad \forall i \in I\}$$

3.2.2.2

b fixée. Jagannathan [2.29] suppose en outre $\beta > (\frac{1}{2})^{m_0}$, A_i^j variables aléatoires Normales et $P(A_i x \leq b_i) \geq \frac{1}{2}$

A_i est donc distribuée suivant la loi Normale d'espérance $E(A_i)$ et de matrice de variance V_i diagonale $\forall i \in I$.

On montre l'équivalence

$$\left. \begin{aligned} P(A_i x \leq b_i \quad \forall i \in I) &= \prod_{i=1}^{m_0} P(A_i x \leq b_i) \geq \beta \\ P(A_i x \leq b_i) &\geq \frac{1}{2} \quad \forall i \in I \end{aligned} \right\} \iff \begin{cases} \prod_{i=1}^{m_0} N(t_i) \geq \beta \\ E(A_i)x + t_i (xV_i x)^{\frac{1}{2}} \leq b_i \\ \forall i \in I \\ t_i \geq 0 \end{cases}$$

avec $N(\cdot)$ fonction de répartition de la loi $N(0,1)$

sur $[0, \infty[\log N(.)$ concave $\longrightarrow \sum_{i=1}^m \log N(.)$ concave

de plus $(xV_i x)^{1/2}$ convexe $\forall x \in K_1$

Le domaine $D_\beta \cap \{x \in K_1 / P(A_i x \leq b_i) \geq \frac{1}{2} \forall i \in I\}$

$= \{(x, t) \in K_1 \times \mathbb{R}^{m_0} / \sum_{i=1}^m \log N(t_i) \geq \log \beta, E(A_i)x + t_i (xV_i x)^{1/2} \leq b_i,$

$t_i \geq 0, \forall i \in I\}$

est donc convexe.

3.2.2.3

Dans le cas de non indépendance des variables aléatoires, Prekopa [2.39] et Bereanu [2.6] ont envisagé des contraintes de la forme $P(b_i \leq h_i(x), \forall i \in I) \geq \beta$ avec b vecteur aléatoire et $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions concaves $\forall i \in I$ et $0 < \beta < 1$

3.2.2.4 Proposition

Si la fonction $F_b(.)$ est quasi-concave sur un ensemble convexe de \mathbb{R}^{m_0} contenant tous les points de la forme $(h_1(x), h_2(x), \dots, h_{m_0}(x))$ $x \in K_1$

Alors $\{x \in K_1 / P(b_i \leq h_i(x), \forall i \in I) \geq \beta\}$ est convexe

Prekopa [2.39] précise la notion de quasi-concavité de la fonction de répartition multidimensionnelle $F_b(.)$ sur un ensemble convexe E de \mathbb{R}^{m_0} de la façon suivante : on décompose les composantes $(t_1, t_2, \dots, t_{m_0})$ en 2 groupes disjoints et notons y et z les vecteurs dont les composantes appartiennent à ces groupes (y ne comprend pas nécessairement les premières composantes de $t = (t_1, \dots, t_{m_0})$).

On dira que

$F_b(t) = F_b(y, z)$ est concave par rapport à y sur E si

$\forall t^1 = \begin{pmatrix} y^1 \\ z \end{pmatrix} \in E, \forall t^2 = \begin{pmatrix} y^2 \\ z \end{pmatrix} \in E$ avec $y^1 \leq y^2$ (relation sur chaque composante)
la fonction $F_b(\cdot)$ est concave entre t^1 et t^2 , donc quasi-concave.

Le résultat de la proposition s'établit alors en montrant que la fonction $\phi(x) = F_b(h_1(x), h_2(x), \dots, h_{m_0}(x)) = P(b_i \leq h_i(x), \forall i \in I)$ est quasi-concave sur K_1 .

or $h_i(x)$ concave $\forall i \in I \implies$

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x^1 \in K_1, \forall x^2 \in K_1, h_i(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq \lambda h_i(x^1) + (1-\lambda)h_i(x^2) \left. \vphantom{\forall \lambda \in [0, 1]} \right\} \rightarrow$$

$F_b(\cdot)$ monotone non décroissante

$$\implies \phi(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq F_b(\lambda h_1(x^1) + (1-\lambda)h_1(x^2), \dots, \lambda h_{m_0}(x^1) + (1-\lambda)h_{m_0}(x^2)) \left. \vphantom{\implies} \right\} \rightarrow$$

$F_b(\cdot)$ quasi concave

$$\phi(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq \min [F_b[h_1(x^1), h_2(x^1), \dots, h_{m_0}(x^1)], F_b[h_1(x^2), h_2(x^2), \dots, h_{m_0}(x^2)]]$$

$$\text{donc } \phi(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq \min[\phi(x^1), \phi(x^2)]$$

Mais la quasi-concavité de $F_b(\cdot)$ ne peut s'obtenir que sous des conditions particulières : dans le cas où $m_0 = 2$ et b_1 et b_2 distribuées suivant les lois Normales $N(\mu_1, \theta_1^2)$ et $N(\mu_2, \theta_2^2)$ respectivement.

$$F_b(t_1, t_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi\theta_1\theta_2\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \exp - \frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(b_1 - \mu_1)^2}{\theta_1^2} - 2r \frac{(b_1 - \mu_1)(b_2 - \mu_2)}{\theta_1\theta_2} + \frac{(b_2 - \mu_2)^2}{\theta_2^2} \right] db_1 db_2$$

où r rayon de corrélation de (b_1, b_2) et $|r| < 1$

Prekopa [2.39] montre alors que $F_b(\cdot)$ est quasi-concave pour $t_1 \geq 0$ et $t_2 \geq 0$ si $r \geq 0$.

Avec la même forme de contraintes que celle envisagée par Prekopa, Bawa [2.4] propose de nouvelles conditions pour obtenir la convexité de D_β mais avec les suppositions :

$$h_i(x) \text{ linéaires } (h_i(x) = A_i x \quad \forall i \in I)$$

les variables aléatoires b_i sont indépendantes.

$$\text{i.e. } D_\beta = \{x \in K_1 / P(b_i < A_i x \quad \forall i \in I) \geq \beta\}$$

$$= \{x \in K_1 / \prod_{i \in I} F_{b_i}(A_i x) \geq \beta\}.$$

3.2.2.5 Proposition

Si $\forall i \in I, \gamma_i, 0 < \gamma_i < 1$ $f_{b_i}(t_i) = \frac{dF_{b_i}(t_i)}{dt_i}$
fonction non croissante et
 $\log f_{b_i}(t_i)$ concave sur $\{t_i \in \mathbb{R} / t_i \geq t_{\gamma_i}, F_{b_i}(t_{\gamma_i}) = \gamma_i\}$
 $f_{b_i}(t_i)$ doublement différentiable sur ce même ensemble
 $\beta \geq \gamma_i$
Alors $H(t) = \prod_{i \in I} F_{b_i}(t_i)$ est une fonction concave sur $\{t \in \mathbb{R}^m / H(t) \geq \beta\}$

Les hypothèses rendent le hessien de $H(t)$ matrice semi définie négative lorsque $\beta \geq \gamma_i \quad \forall i \in I$ donc $H(t)$ concave et D_β convexe.

Cette proposition est vérifiée pour beaucoup de lois d'importance pratique (Loi Normale, de Weibull, exponentielle...).

Par exemple dans le cas de la loi Normale avec la particularité suivante :

$$\forall i \in I \quad f_{b_i}(t_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t_i^2}{2}\right) & \text{si } t_i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $f'_{b_i}(t_i) = -t_i f_{b_i}(t_i) \leq 0$

On choisira donc $\gamma_1 = 0,5$ (puisque $t_{\gamma_i} = 0$) et $\beta \geq 0,5$

3.3 Etude de l'optimalité d'une décision

Puisque le domaine des décisions possibles a été mis sous forme déterministe, le choix d'une décision optimale dépend uniquement du caractère aléatoire de px . Plusieurs modèles à fonction économique déterministe, généralement non linéaire, sont proposés pour définir l'optimalité d'une décision. On prendra le plus souvent D_α plutôt que D_β pour domaine des décisions admissibles puisqu'il est plus aisé à expliciter (emploi des fonctions de répartitions marginales, conditions sur chaque contrainte) et les propriétés de convexité sont plus faciles à établir.

3.1 Modèle "E"

La fonction économique déterministe choisie est l'espérance mathématique de px .

On suppose que la loi de p est indépendante du choix de x d'où

$$E(px) = E(p)x = \sum_{j=1}^n E(p^j)x_j$$

Le programme déterministe obtenu est donc

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^n E(p^j) x_j / x \in D_\alpha \right\}$$

Si on sait expliciter D_α , la détermination d'une décision optimale ne présentera pas en général de difficultés.

Par exemple si pour les contraintes seul b est aléatoire le programme déterministe est linéaire.

$$\max \{ E(p)x / Dx \leq d, x \geq 0, A_i x \leq b_i^* \quad \forall i \in I \}$$

où $b_i^* = \max \{ t_i / F_{b_i}(t_i) \leq 1 - \alpha_i \}$, que l'on peut résoudre par la méthode simpliciale par exemple.

C'est le cas pratique envisagé par Smith [2.54] pour un problème d'irrigation : drainage et utilisation des terres pour la culture du riz avec la précipitation d'eau à variation aléatoire.

Dans le cadre du modèle "E" un autre exemple pratique est proposé par Naslund [2-37], [2.44]. C'est un problème d'investissement d'une entreprise pour n périodes. Le programme déterministe obtenu se formule comme suit :

$$\left[\begin{array}{l} \max E \left[\sum_{j=1}^n x_j \frac{P_j - P_{j-1}}{P_{j-1}} \right] \\ P \left(x_j \frac{P_j - P_{j-1}}{P_{j-1}} \geq -L_j \right) \geq \alpha_j \quad 0 < \alpha_j < 1 \quad \forall j \in J \\ P \left(x_j \leq K_j + \sum_{l=2}^j x_{l-1} \frac{P_{l-1} - P_{l-2}}{P_{l-2}} \right) \geq \eta_j \quad 0 < \eta_j \leq 1 \quad \forall j \in J \\ x_j \geq 0 \quad \forall j \in J \end{array} \right.$$

x_j capital cumulé investi en stock

p_j prix unitaire du stock en période j

L_j perte maximale que l'on peut avoir en période j

K_j capital cumulé qu'on peut utiliser pour investir en stock d'après les bénéfices des investissements précédents

Les variables aléatoires sont $\frac{p_j - p_{j-1}}{p_{j-1}}$ et l'on suppose qu'elles sont distribuées suivant la loi Normale $N(\mu, \sigma^2)$ avec μ et σ constantes $\forall j \in J$.

La résolution de ce programme est proposée par Sengupta [6] pour le cas $|J| = 3$ et en utilisant la méthode S.U.M.T de Fiacco et M_c Cormick.

Remarque .

Si l'on connaît le coût de violation de chaque contrainte on peut définir une nouvelle fonction économique en introduisant une fonction de pénalisation : l'objectif est alors de maximiser la moyenne de px et de minimiser l'espérance du coût de violation des contraintes (Evers [2.21], Sengupta [2.46]).

On obtient ainsi un programme déterministe

exemple :

Soit k_i le coût de violation

$$\forall i \in I \quad k_i = \begin{cases} 0 & \text{si } A_i x > b_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où l'espérance du coût de violation :

$$E[C_i(x)] = k_i \int_0^{\infty} (A_i x - b_i) dF_{A_i x - b_i}(\cdot) = k_i \int_0^{\infty} (A_i x - b_i) dg_i(x, \cdot)$$

et le programme

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^n E(p^j) x_j - \sum_{i=1}^{m_0} E[C_i(x)] \mid x \in D_\alpha \right\}$$

dans le cas particulier où A fixée et b_i variable aléatoire non négative et $F_{b_i}(0) = 0 \forall i \in I$
par intégration par partie on a

$$E[C_i(x)] = k_i \int_0^{A_i x} F_{b_i}(\cdot) db_i = k_i (A_i x) \cdot F_{b_i}(A_i x)$$

Les inclusions de 3.1.1 vont nous permettre d'énoncer des inégalités et de situer la solution du modèle "E". On a d'abord la propriété suivante

3.3.1.1 Proposition

$\forall \alpha \in [0,1]^{m_0} \quad \forall p \in \mathbb{R}^n \quad Z(p) = \max\{px \mid x \in D_\alpha\}$
fonction convexe de p .

En effet puisque $\forall \lambda \in [0,1]$ soit $p^\lambda = \lambda p^1 + (1-\lambda)p^2$
(p^1 et p^2 2 réalisations de p)

$$Z(p^\lambda) \leq \lambda \max\{p^1 x \mid x \in D_\alpha\} + (1-\lambda) \max\{p^2 x \mid x \in D_\alpha\}$$

donc

$$Z(p^\lambda) \leq \lambda Z(p^1) + (1-\lambda) Z(p^2)$$

Cette proposition est encore vérifiée si l'on désigne par $\phi(x,p)$ la fonction économique du programme ($\phi(x,p) = px$ pour le cas linéaire) avec $\phi(x,\cdot)$ fonction convexe.

On suppose $\alpha_i \geq \frac{1}{2} \forall i \in I$

3.3.1.2 Proposition

Si $D_{(\alpha)}$ convexe $\forall \alpha_i \in]\frac{1}{2}, 1[$, $\forall i \in I$

$$\max_{x \in D(e_1)} \phi(x, E(p)) \leq \max_{x \in D(\alpha)} \phi(x, E(p)) \leq E[\max_{x \in D(\alpha)} \phi(x, p)] \leq E[\max_{x \in D(e_1)} \phi(x, p)]$$

dans le cas linéaire $\phi(x, p) = px$ et $\phi(x, E(p)) = E(p)x$

- . le 1er membre de gauche donne l'optimum de la conception "solution prudente" et la 1ère inégalité résulte de $D(e_1) \subset D(\alpha)$
- . le 2e membre donne l'optimum du modèle "E" des programmes sous risque
- . le 3e membre est la moyenne des optimums obtenus en faisant varier p.
- . la 2e inégalité résulte de l'inégalité de Jensen, d'où la nécessité de l'hypothèse et $\phi(x, \cdot)$ convexe.
- . la 3e inégalité résulte de $D(\alpha) \subset D(e_1)$
- . dans le cas où $D(e_1) = \{x \in K_1 / E(A_i)x \leq E(b_i) \quad \forall i \in I\}$ le 4e membre est $\frac{1}{2}$ l'expression de la moyenne des optimums obtenus en faisant varier p et en prenant comme estimateurs de A_i^j et b_i leurs espérances mathématiques.

3.3.1.3 Proposition

Si $D(e_1)$ convexe on a $\forall \alpha_i > \frac{1}{2} \quad \forall i \in I$

$$\max_{x \in D(e_1)} \phi(x, E(p)) \leq \max_{x \in D(\alpha)} \phi(x, E(p)) \leq \max_{x \in D(e_1)} \phi(x, E(p)) \leq E \left[\max_{x \in D(e_1)} \phi(x, p) \right]$$

- les 2 premières inégalités résultent de $D(e_1) \subset D_{(\alpha)} \subset D(e_1)$
il faut remarquer que le 3e membre de gauche est $\frac{1}{2}$
l'optimum obtenu dans la conception "solution espérance
mathématique" dans le cas où
 $D(e_1) = \{x \in K_1 / E(A_i)x \leq E(b_i) \forall i \in I\}$
 $\frac{1}{2}$
- la 3e inégalité résulte de l'inégalité de Jensen

Remarques :

Les propositions 3.3.2 et 3.3.3 s'appliquent aussi pour $D_{(\beta)}$
en prenant pour $D(e_1)$ et $D(e_1)$ les domaines $D(\frac{1}{2})$ et $D(1)$.

De plus si $\beta \geq \alpha_i \forall i \in I$ on a

$$\max_{x \in D_{(\alpha)}} \phi(x, E(p)) \geq \max_{x \in D_{(\beta)}} \phi(x, E(p))$$

ce qui peut permettre de combiner les inégalités entre $D_{(\alpha)}$ et $D_{(\beta)}$

3.3.2 Modèle "V"

On se donne $u \in \mathbb{R}$, valeur préférée de px , $x \in D_{\alpha}$
Une décision est dite optimale si elle minimise la dispersion de
 px par rapport à u .

Soient $\bar{p} = E(p)$ et V la matrice de variance-covariance de p .
Le programme déterministe s'écrit

$$\max \{-xVx / x \in D_{\alpha}, \bar{p}x \geq u\}$$

C'est le problème du contrôle de la variance pour un profit moyen
minimal donné

V étant une matrice définie non négative, $-xVx$ est une fonction
concave.

En supposant D_α convexe, ce programme est donc convexe et pourra être résolu par les algorithmes de programmation quadratique.

Puisque u est une valeur que l'on se fixe, il est intéressant de considérer u comme un paramètre et d'étudier la fonction

$$\phi(u) = \max \{-x^T x / x \in D_\alpha, \bar{p}x \geq u, u \text{ fixé}\}$$

3.3.2.1 Proposition Lemarie [2.34]

- On suppose D_α convexe
- $\phi(u)$ est définie sur l'intervalle $]-\infty, u_M]$ où
- $$u_M = \max \{\bar{p}x / x \in D_\alpha\} \text{ (obtenue par le modèle "E")}$$
- $\phi(u)$ est une fonction non croissante et il existe un nombre u_m tel que pour tout $u \leq u_m$, $\phi(u)$ est constante
 - $\phi(u)$ est une fonction concave de u

Résumons la démonstration :

- par définition de u_M , $\forall u > u_M \{x \in \mathbb{R}^n / x \in D_\alpha, \bar{p}x \geq u\} = \emptyset$
donc $\phi(u)$ définie sur $]-\infty, u_M]$

- si $u_1 \leq u_2 \leq u_M$, $\bar{p}x \geq u_2 \implies \bar{p}x \geq u_1$ d'où $\phi(u_2) \leq \phi(u_1)$

posons $u_m = \bar{p}\hat{x}$ où \hat{x} solution optimale de

$$\max \{-x^T x / x \in D_\alpha\} \text{ donc } \phi(u_m) = \phi(-\infty)$$

$$\phi(u) \text{ non croissante } \implies \forall u \leq u_m \phi(-\infty) \geq \phi(u) \geq \phi(u_m) \implies$$

$$\phi(u) = \phi(u_m) \quad \forall u \leq u_m$$

. la concavité de $\phi(u)$ résulte de la convexité de D_α et de xVx

Par conséquent, connaissant l'influence de u , on peut apprécier son choix en résolvant les programmes, par utilisation des résultats de la paramétrisation, $P_{x,u} [\max \{-xVx / x \in D_\alpha \bar{p}x \geq u\}]$
pour $u \in [u_m, u_M]$

3.3.3 Le modèle "P" [2.3] [2.5] [2.7] [2.8] [2.20] [2.22]
[2.23]

Comme le souligne Kataoka [2.31], le modèle "E" peut se révéler non satisfaisant surtout dans le cas d'une forte dispersion de px autour de sa moyenne.

On préférera alors selon les données :

. le modèle P_1 : chercher à maximiser la probabilité pour que px soit supérieur à une valeur u donnée. On définit le programme

$$P_1 \quad \begin{array}{l} \max \gamma \\ \text{sous } P(px \geq u) = \gamma, x \in D_\alpha \end{array}$$

que Bereanu [2.5] qualifie de programme de risque minimal au niveau u .

. le modèle P_2 : chercher à maximiser la borne inférieure de px tel que la probabilité pour que px dépasse cette valeur soit égale à un nombre γ de $[0,1]$ fixé. Le programme s'écrit

$$P_2 \quad \begin{array}{l} \max u \\ \text{sous } P(px \geq u) = \gamma, x \in D_\alpha \end{array}$$

que Kataoka [2.31] appelle programme de niveau maximal u . On verra que ces deux formulations sont liées et que l'on retrouve dans des cas particuliers le modèle "E".

Remarquons que $P(px \geq u) = \gamma \iff F_{px}(u) = 1 - \gamma \iff u = F_{px}^{-1}(1-\gamma)$
 si la fonction $F_{px}(\cdot)$ est continue.

Si on suppose $\gamma \geq \frac{1}{2}$ on obtient $u \leq F_{px}^{-1}(\frac{1}{2})$ qui est la médiane de la distribution de px (la moyenne dans le cas de loi Normale)

Nous en déduisons :

3.3.3.1 Proposition

$$\left[\begin{array}{l} \forall \alpha_i \geq \frac{1}{2} \quad \forall i \in I \quad \text{et} \quad \forall \gamma \geq \frac{1}{2} \\ \max u \leq \max_{x \in D(\alpha)} F_{px}^{-1}(1-\gamma) \leq \max_{x \in D(\alpha)} F_{px}^{-1}(\frac{1}{2}) \leq \max_{x \in D(e_1)} F_{px}^{-1}(\frac{1}{2}) \\ F_{px}^{-1}(1-\gamma) = u \quad x \in D(\alpha) \qquad \qquad \qquad x \in D(\alpha) \qquad \qquad \qquad x \in D(e_1) \\ \qquad \qquad \qquad x \in D(e_1) \end{array} \right.$$

résulte des hypothèses et $D(e_1) \subset D(\alpha) \subset D(e_1)$

- . le 1er membre de gauche est le modèle P_2 avec le domaine de la solution "prudente"
- . le 2e membre est le modèle P_2 avec $\alpha_i \geq \frac{1}{2} \forall i \in I$
- . dans le cas où $F_{px}^{-1}(\frac{1}{2}) = E(px)$, le 3e membre est le modèle "E"
- . si $F_{px}^{-1}(\frac{1}{2}) = E(px)$ et $D(e_1) = \{x \in K_1 / E(A_i)x \leq E(b_i) \forall i \in I\}$

(cas de Lois Normales) on retrouve le modèle solution "espérance mathématique" pour le 4e membre.

On fait des hypothèses communes aux modèles P_1 et P_2 :

- 1 p est un vecteur Gaussien de moyenne \bar{p} et de matrice de covariance V définie positive pour x fixé, px est donc distribué suivant la loi Normale $N(px, xVx)$
- 2 D_α convexe et l'on supposera que $0 \notin D_\alpha$. Ceci n'est pas une forte restriction puisque

$x = 0$ si $\gamma = 1$ et $u \leq 0$ $x = 0$ trivialement optimal pour P_1
 si $\gamma = 0$ et $u > 0$ $x = 0$ non optimal

De ces hypothèses on obtient

$$\gamma = P(px \geq u) = 1 - P\left(\frac{px - \bar{p}x}{(xVx)^{1/2}} \leq \frac{u - \bar{p}x}{(xVx)^{1/2}}\right)$$

$$\gamma = 1 - N\left(\frac{u - \bar{p}x}{(xVx)^{1/2}}\right)$$

où $N(\cdot)$ désigne la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite $N(0,1)$

or

$$1 - N\left(\frac{u - \bar{p}x}{(xVx)^{1/2}}\right) = N\left(\frac{\bar{p}x - u}{(xVx)^{1/2}}\right)$$

propriété de $N(\cdot)$

d'où

* Le modèle P_1

$N(\cdot)$ étant non décroissante le programme P_1 est équivalent au programme P'_1

$$\max_{x \in D_\alpha} (\bar{p}x - u)(xVx)^{-\frac{1}{2}}$$

or $(xVx)^{1/2}$ fonction convexe différente de 0, Bereanu [2.6] et Mangasarian [2.35] montrent alors que :

- si $\bar{p}x - u \leq 0$ la fonction économique est strictement quasi-convexe donc en particulier quasi-convexe. Par conséquent si D_α polyèdre convexe borné, l'optimum est atteint en un sommet.

. si $\bar{p}x - u \geq 0$ la fonction économique est strictement quasi-concave ce qui implique que tout maximum local est un maximum global strict.

On peut remarquer que

si $u = u_M = \max \{ \bar{p}x / x \in D_\alpha \}$ la valeur optimale de P'_1 est 0 ce qui donne $\gamma = 0,5$
d'où

$u \leq u_M \iff \gamma \geq 0.5$ du fait de la monotonie de $N(\cdot)$
l'étude de P_2 permettra d'approfondir ce lien entre u et γ et nous donnera une façon de résoudre P'_1 basée sur la résolution d'un programme P'_2 .

Dragomirescu [2.20] propose la résolution de P'_1 grâce au programme quadratique paramétré par $\lambda > 0$

$$P_\lambda \quad \max_{x \in D_\alpha} \lambda \bar{p}x - \frac{1}{2} xVx$$

la fonction économique est strictement concave et en supposant D_α polyèdre convexe borné, la résolution de P_λ par l'algorithme de programmation quadratique de Wolfe donne une solution $x(\lambda)$ optimale unique.

L'auteur montre que :

$$\lambda^* \text{ maximise } \Lambda(\lambda) = (\bar{p}x(\lambda) - u) (x(\lambda) Vx(\lambda))^{-\frac{1}{2}}$$

$$x^* = x(\lambda^*) \quad \left. \vphantom{\Lambda(\lambda)} \right\} \longleftarrow x^* \text{ solution optimale de } P'_1$$

* le modèle P_2

On a vu que $\gamma = P(\bar{p}x \geq u) = N\left(\frac{\bar{p}x - u}{(xVx)^{1/2}}\right)$

désignons par q_γ le quantile d'ordre γ de la loi Normale

$$N(0,1) \text{ i.e. } N(q_\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{q_\gamma} \left(\exp - \frac{u^2}{2} \right) du = \gamma$$

d'où

$$N \left(\frac{\bar{p}_x - u}{(xVx)^{1/2}} \right) = N(q_\gamma)$$

on en déduit

$$u = \bar{p}_x - q_\gamma (xVx)^{1/2}$$

Le programme P_2 est donc équivalent à

$$P'_2 \quad \max_{x \in D_\alpha} \bar{p}_x - q_\gamma (xVx)^{1/2}$$

On peut remarquer que la fonction

$$f(q_\gamma) = \max\{\bar{p}_x - q_\gamma (xVx)^{1/2} / x \in D_\alpha \text{ fixe}\}$$

est une fonction strictement monotone décroissante de q_γ (donc de γ)

$$\text{puisque } \gamma_1 < \gamma_2 \implies q_{\gamma_1} < q_{\gamma_2} \implies \max\{\bar{p}_x - q_{\gamma_2} (xVx)^{1/2} / x \in D_\alpha\} =$$

$$\bar{p}_{x^*} - q_{\gamma_2} (x^*Vx^*)^{1/2} < \bar{p}_{x^*} - q_{\gamma_1} (x^*Vx^*)^{1/2} \leq \max\{\bar{p}_x - q_{\gamma_1} (xVx)^{1/2} / x \in D_\alpha\}$$

On en déduit que

$\forall \gamma > 0.5$ P'_2 a une valeur optimale finie puisque

$$\hat{u} = \max\{\bar{p}_x - q_\gamma (xVx)^{1/2} / x \in D_\alpha\} \leq u_M = \max\{\bar{p}_x / x \in D_\alpha\} \quad (q_{\frac{1}{2}} = 0)$$

en outre la fonction économique est concave puisque $q_\gamma \geq 0$ et $(xVx)^{1/2}$ fonction convexe ; le programme P'_2 pourra être résolu par les algorithmes de programmation non linéaire ou quadratique.

Les modèles P_1 et P_2 sont très liés : pour un même domaine D_α on a vu $\gamma \geq 0.5 \iff u \leq u_M$ et l'on peut montrer que

- 1 Chaque γ fixé de P_2 est solution optimale de P_1 avec $u = \hat{u}$ solution optimale de P_2
- 2 Chaque u fixé de P_1 est solution optimale de P_2 avec $\gamma = \hat{\gamma}$ solution optimale de P_1

En effet

- 1 γ fixé \hat{u} solution optimale de $P_2 \implies$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{u} \geq \bar{p}x - q_\gamma (xVx)^{1/2} \quad \forall x \in D_\alpha \\ xVx > 0 \quad \forall x \in D_\alpha \end{array} \right\} \implies q_\gamma \geq \frac{\bar{p}x - \hat{u}}{(xVx)^{1/2}} \quad \forall x \in D_\alpha \implies$$

γ solution optimale de P_1 avec $u = \hat{u}$

- 2 u fixé $\hat{\gamma}$ solution optimale de $P_1 \implies$

$$\left. \begin{array}{l} q_{\hat{\gamma}} \geq (\bar{p}x - u) (xVx)^{-1/2} \quad \forall x \in D_\alpha \\ xVx > 0 \quad \forall x \in D_\alpha \end{array} \right\} \implies u \geq \bar{p}x - q_{\hat{\gamma}} (xVx)^{1/2} \quad \forall x \in D_\alpha \implies$$

u solution optimale de P_2 avec $\gamma = \hat{\gamma}$

Par conséquent pour résoudre P_1 , Lemarie [2.34] Carton [2.8] proposent de chercher par dichotomie la valeur de q_γ (d'où γ) telle que \hat{u} soit égale à la valeur fixée u du modèle P_1 .

RESOLUTIONS DE P'_2 PROPOSEES

Ces résolutions utilisent les algorithmes de programmation quadratique. On suppose donc D_α polyèdre convexe fermé.

(C'est le cas notamment de $D_\alpha = \{x \in K_1 / A_i x \leq b_i^* \quad \forall i \in I\}$ avec $b_i^* = \max \{t_i / F_{b_i}(t_i) \leq 1 - \alpha_i\}$ et $\gamma > 0.5$ ($q_\gamma > 0$))

Kataoka [2.31] propose de résoudre le programme semi-quadratique P'_2 par utilisation du programme quadratique paramétré par $R > 0$

$$P_R \max \left\{ \bar{p}x - \frac{q_\gamma}{2R} xVx \mid x \in D_\alpha \right\}$$

or

$$\gamma > 0.5 \quad (q_\gamma > 0)$$

la fonction économique est strictement concave et P_R admet une solution optimale unique \hat{x}_R .

On montre alors à l'aide des relations de Kuhn et Tucker que \hat{x}_R solution optimale de P_R telle

$$R = (\hat{x}_R V \hat{x}_R)^{1/2} \iff \hat{x}_R \text{ solution optimale de } P'_2.$$

Sengupta [2.51], [6] applique cette méthode à un problème d'agriculture à 5 variables et 5 contraintes ($|I| = |J| = 5$).

Geoffrion [2.23] [2.24] applique une méthode "bi-critères" en utilisant le programme quadratique paramétré par $\lambda \in [0, 1]$

$$P_\lambda \max \left\{ \lambda \bar{p}x - (1 - \lambda) xVx \mid x \in D_\alpha \right\}$$

Soit $x^*(\lambda)$ la solution optimale de P_λ on cherche alors λ^* tel que la fonction

$$\Lambda(\lambda) = \bar{p}x_\lambda^* - q_\gamma (x_\lambda^* V x_\lambda^*)$$

atteint son maximum sur $[0, 1]$ en λ^* : (on commencera avec $\lambda = 1$ i.e $x^*(1)$ solution du programme "E" : $\bar{p}x^*(1) = u_M$ et on fait décroître λ) alors $x^* = x^*(\lambda^*)$ solution optimale de P'_2 .

On peut remarquer que cette méthode peut s'appliquer pour résoudre P'_1 en supposant $\bar{p}x \geq u \forall u \leq u_M$ (la fonction économique de P'_1 est alors strictement quasi-concave) et rejoint celle de Dragomirescu [2.20]

3.3.4 Autres Règles de décision

3.3.4.1

Jusqu'à présent on s'était fixé α ou β pour définir l'admissibilité d'une décision. Une autre conception est de considérer α_i ou β comme des paramètres de $]0,1[$ et de chercher une solution $(\hat{x}, \hat{\alpha})$ (ou (\hat{x}, β)) au programme stochastique en raisonnant sur la fiabilité du système (Sengupta [2.50] [6] [7][2.50])

D_α était défini par $\{x \in K_1 / g_i(x,0) \geq \alpha_i \forall i \in I\}$, on propose alors $R(x) = \prod_{i=1}^m g_i(x,0)$ comme mesure de fiabilité du système.

Cette définition est basée sur l'équivalence : le système des contraintes est fiable \iff

- 1 Chaque contrainte est satisfaite au niveau α_i
- 2
$$1 \geq \max_{\substack{i \in I \\ x \in K_1}} g_i(x,0) \geq \min_{\substack{i \in I \\ x \in K_1}} g_i(x,0) \geq R(x) > 0$$

Dans le cas du modèle "E" par exemple, on prendra pour objectif celui de maximiser $E(p)x$ et la fiabilité du système i.e on prendra pour décision optimale celle qui maximise une pondération entre $E(p)x$ et $\log R(x)$.

Le programme à résoudre sera :

$$\left[\begin{array}{l} \max w_1 \sum_{j=1}^n E(p^j)x_j + w_2 \sum_{i=1}^m \log g_i(x,0) \\ g_i(x,0) \geq \alpha_i \quad \forall i \in I \\ Dx \leq d \quad x \geq 0 \end{array} \right.$$

avec w_1 et w_2 2 poids positifs donnés.

or

$$x \in D_\alpha \implies R(x) = \prod_{i=1}^{m_0} g_i(x, \alpha) \geq \prod_{i=1}^{m_0} \alpha_i$$

On peut donc définir une fonction utilité

$$U(x, \alpha) = w_1 \sum_{j=1}^n E(p^j) x_j + w_2 \sum_{i=1}^{m_0} \log \alpha_i$$

et le programme est équivalent à

$$\begin{aligned} \max \quad & U(x, \alpha) \\ \text{s.t.} \quad & x \in D_\alpha \quad 0 < \alpha_i \leq 1 \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

APPLICATIONS

- 1 Si (A_i, b_i) et (A_h, b_h) mutuellement indépendantes
 $\forall i \in I \quad \forall h \in I \quad h \neq i$

$$x \in D_\beta \implies g(x, \alpha) = F_{Ax} - b(\alpha) = \prod_{i=1}^{m_0} g_i(x, \alpha) \geq \beta$$

le programme s'écrira

$$\begin{aligned} \max \quad & U(x, \beta) = w_1 \sum_{j=1}^n E(p^j) x_j + w_2 \log \beta \\ & \left[\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m_0} \log g_i(x, \alpha) &\geq \log \beta \\ x \in K_1 \quad & 0 < \beta \leq 1 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

- 2 On peut appliquer cette méthode pour les modèles "V" et "P" en remplaçant $\sum_{j=1}^n E(p^j) x_j$ par la fonction économique de ces modèles

- 3 Dans le cas où A fixée et b seul aléatoire, on aura

$$R(x) = \prod_{i=1}^{m_0} [1 - F_{b_i}(A_i x)]$$

- 4 Sengupta [6] applique cette théorie pour un problème de production et de main d'oeuvre dans une entreprise de peinture.

3.4.2

On a proposé, jusqu'à présent des décisions choisies avant connaissance d'aucune valeur prise par les variables aléatoires : Elles sont appelées dans la littérature "décisions d'ordre zéro".

Mais si certaines des composantes aléatoires de (A, b, p) peuvent être observées avant que certaines composantes de x doivent être spécifiées, on peut chercher une décision x de la forme $\phi(A, b, p)$ plutôt que de préciser tous les éléments de x directement (en général ϕ est une forme linéaire).

Charnes et Cooper [2.9], [2.11] ont supposé A fixée et K_1 réduit à $\{x \in \mathbb{R}^n / x \geq 0\}$. Ils ont alors cherché des décisions de la forme $x = Cb$ avec C matrice à déterminer.

d'où

$$P(A_i x \leq b_i) \geq \alpha_i \quad \forall i \in I \text{ s'écrit } P(A_i Cb - b_i \leq 0) \geq \alpha_i \quad \forall i \in I$$

On suppose alors $A_i Cb - b_i$ distribué suivant la loi Normale $\forall i \in I$

d'où

$$D_\alpha = \{x \in K_1 / x = Cb, \mu_{b_i} - A_i C \mu_b \geq q_{\alpha_i} [E(\delta_i - A_i C \delta)^2]^{1/2} \quad \forall i \in I\}$$

où q_{α_i} quantile d'ordre α_i de la loi $N(0,1)$

$$\mu_b = E(b); \delta = b - \mu_b \text{ variable centrée}$$

Puisque souvent on prend $\alpha_i > \frac{1}{2}$ ($q_{\alpha_i} > 0$) on peut introduire de nouvelles variables $v_i \quad \forall i \in I$ telles que

$$\mu_{b_i} - A_i C \mu_b \geq v_i \geq q_{\alpha_i} [E(\delta_i - A_i C \delta)^2]^{1/2} \geq 0$$

et écrire D_α sous la forme

$$D_\alpha = \left\{ (C, v) / \begin{array}{l} \mu_i(C) - v_i \geq 0, \quad q_{\alpha_i}^2 \mu_i^2(C) - q_{\alpha_i}^2 \sigma_i^2(C) + v_i^2 \geq 0 \\ v_i \geq 0, \quad \forall i \in I \end{array} \right\}$$

où

$$\sigma_i^2(C) = E(A_i C b - b_i)^2; \mu_i(C) = (\mu_{b_i} - A_i C \mu_b)$$

On peut alors considérer les trois modèles précédents.

Par exemple pour le modèle "E" :

$E(p x) = E(p C b) = E(p) C E(b)$ où b et p supposés non corrélés
le programme du modèle "E" s'écrit donc

$$\left[\begin{array}{l} \max \mu_p C \mu_b \quad \text{où } \mu_p = E(p) \\ (C, v) \in D_\alpha \end{array} \right.$$

qui est un programme convexe.

Des formules semblables se retrouvent pour les modèles "V", "P".

Comme application, notons que Charnes et Cooper ont cherché cette forme de décision pour un problème de raffinerie.

3.4 Décisions séquentielles [2.16] [2.17] [2.18] [2.30] [2.33]

On considère le problème de décision pour N périodes mais en respectant la règle suivante :

La décision X^k pour la $k^{\text{ème}}$ période est prise après connaissance des décisions antérieures X^1, X^2, \dots, X^{k-1} et après avoir observé les variables aléatoires des $(k-1)^{\text{ème}}$ périodes précédentes mais avant de connaître les valeurs prises par les variables aléatoires de l'époque k , les réalisations des variables aléatoires et les décisions des périodes $k+1$ à N .

C'est la répétition du schéma i.e

Décision - Réalisation - Décision - Réalisation

où X est une décision d'ordre 0.

Envisageons le modèle "E". Le problème s'écrit :

$$\left[\begin{array}{l}
 \max E(p^1 X + p^2 X + \dots + p^N X) \\
 P(A_i^1 X \leq b_i^1) \geq \alpha_i \\
 P(A_i^2 X + A_i^1 X \leq b_i^2) \geq \alpha_i \\
 P(A_i^3 X + A_i^2 X + A_i^1 X \leq b_i^3) \geq \alpha_i \\
 \dots \\
 P(A_i^N X + A_i^{N-1} X + \dots + A_i^1 X \leq b_i^N) \geq \alpha_i \\
 X \geq 0 \quad k = 1 \dots N \quad i = 1, \dots, m_1 \quad l = 1 \dots N
 \end{array} \right.$$

A^k $l \geq k$ matrice $m_1 \times n_k$ fixées

b^l matrice $m_1 \times 1$ b_i^l variables aléatoires de distribution connue $i = 1 \dots m_1$

p^k matrice $1 \times n_k$ p_j^k variables aléatoires de distribution connue $j = 1 \dots n_k$

X^k matrice $n_k \times 1$

α matrice $m_1 \times 1$ tel que $0 \leq \alpha_i \leq 1$ $i = \dots m_1$
 $l = 1 \dots N$

* Le domaine "équivalent" déterministe pour les contraintes :

Désignons par

$F^1(.)$ la distribution commune de $(b^1, b^2, \dots, b^1, p^1, \dots, p^{1-1})$

$\bar{F}^1(.)$ la distribution conditionnelle de b^1 étant donné

$$(b^1, b^2, \dots, b^{1-1}, p^1, p^2, \dots, p^{1-1})$$

$G^1(\cdot)$ la distribution commune de $(b^1, b^2, \dots, b^{1-1}, p^1, p^2, \dots, p^{1-1})$

Par définition ; pour tout ensemble mesurable K

$$\int_K dF^1(\cdot) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_K d\bar{F}^1(\cdot) \right) dG^1(\cdot)$$

on peut alors définir $\bar{\alpha}^1$ tel que

$$\int_K dF_i^1(\cdot) \leq 1 - \bar{\alpha}_i^1 \iff \int_K d\bar{F}_i^1(\cdot) \leq 1 - \bar{\alpha}_i^1$$

$(F_i^1(\cdot), \bar{F}_i^1(\cdot))$ désignant les fonctions de répartitions marginales) et par conséquent les contraintes peuvent s'écrire :

$$\bar{F}_i^1 \left(\sum_{k=1}^1 A_i^{k k} X \right) \leq 1 - \bar{\alpha}_i^1 \quad 1 = 1 \dots N \quad i = 1 \dots m_1$$

or ceci est équivalent à

$$\sum_{k=1}^1 A_i^{k k} X \leq \bar{F}_i^1{}^{-1} (1 - \bar{\alpha}_i^1) \quad 1 = 1 \dots N \quad i = 1 \dots m_1$$

où $\bar{F}_i^1{}^{-1} (1 - \bar{\alpha}_i^1) = \max \{ y / \bar{F}_i^1(y) \leq 1 - \bar{\alpha}_i^1 \}$ supposé bien définie, $\forall i$ et $\forall 1$ (dans le cas $\bar{F}_i^1(\cdot)$ distribution Normale on supposera $\bar{\alpha}_i^1 \neq 1$ sinon $\bar{F}_i^1{}^{-1} (1 - \bar{\alpha}_i^1) = \infty$)

Le domaine déterministe est donc défini par les contraintes

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^1 A_i^{k k} X \leq \bar{F}_i^1{}^{-1} (1 - \bar{\alpha}_i^1) \\ X \geq 0 \quad 1 = 1 \dots N ; \quad i = 1 \dots m_1 ; \quad k \leq 1 \end{array} \right.$$

Remarques

1 $\forall 1 \geq 2$ $\bar{\alpha}^1$ difficile à déterminer (détermination de $\bar{F}^1(\cdot)$ et $G^1(\cdot)$)

2 $\bar{\alpha}^1 = \alpha^1$ car $\bar{F}^1(.) = F^1(.)$ (X^1 décision d'ordre 0)

3 si $\bar{\alpha}^1 = 1 \forall 1$ on retrouve le problème à N étages (ch.3) ce qui nous permet de déduire que le problème à N étages n'a pas de solutions pour les distributions telles que $\bar{F}^{1-1}(0) = -\infty$ (cas de la loi Normale)

* la fonction économique

$$E\left(\sum_{k=1}^N \frac{k}{p} X^k\right) = \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} p^k X^k dF(.)$$

où $F(.)$ désigne la fonction de répartition de $(b^1, \dots, b^N, p^1, \dots, p^N)$

Or X fonction de X^1, \dots, X^{k-1} et de $(b^1, \dots, b^{k-1}, p^1, \dots, p^{k-1})$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{p} X^k dF(.) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{p} X^k \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{F}(.) \right) d\hat{G}(.) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{p} X^k d\hat{G}(.) \end{aligned}$$

où $\hat{F}(.)$ est la fonction de distribution de $(b^k, \dots, b^N, p^{k+1}, \dots, p^N)$ conditionnée par $(b^1, \dots, b^{k-1}, p^1, \dots, p^k)$

$\hat{G}(.)$ est la fonction de la distribution commune de $(b^1, \dots, b^{k-1}, \dots, p^1, \dots, p^k)$

d'où

$$E\left(\sum_{k=1}^N \frac{k}{p} X^k\right) = \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{p} X^k d\hat{G}(.)$$

La forme du programme est donc très compliquée, néanmoins donnons le théorème le plus important

La décision optimale X^k est une fonction linéaire par morceaux de $F^{k-1}(1 - \alpha^k)$ et de X^1, X^2, \dots, X^{k-1}

On en déduit en particulier que X^1 est une fonction linéaire par morceaux de $F^{-1}(1 - \alpha^1)$ pour les cas précédemment étudiés.

Des formules semblables (faisant intervenir les distributions conditionnelles) peuvent être obtenues par le modèle P (Kaplan et Soden [2.30])

CONCLUSION

Le principe "décision-réalisation" implique le choix d'un programme déterministe, généralement non linéaire, qui permet grâce aux algorithmes connus, d'exhiber des solutions au programme stochastique posé.

L'attitude "Programmes sous risques" se révèle la plus réaliste face à la nature probabiliste du problème : les coefficients étant affectés d'aléas, il est naturel de prendre un risque de ne pas obtenir certaines valeurs.

Néanmoins elle nécessite l'hypothèse de lois de Probabilité continues pour déterminer des définitions équivalentes déterministes des domaines de solutions admissibles, et bien souvent Normales pour établir la convexité ou une version quadratique de la fonction économique. Mais, comme en pratique, on conclut généralement à des Lois Normales, on peut préférer cette attitude pour proposer des solutions à un programme stochastique.

Nous l'adopterons pour la résolution de problèmes concrets (ch. 4).

CHAPITRE III

"DECISION-REALISATION-DECISION"

OU

"TWO-STAGE PROGRAMMING PROBLEMS"

INTRODUCTION

On connaît les lois de probabilité des composantes de (A, b, p) mais aussi des informations sur les possibilités d'adaptation à la situation postérieure à la réalisation de l'aléatoire (par exemple : coûts de violation des contraintes).

On choisit de décomposer la décision en suivant le schéma "décision x - Réalisation de l'aléatoire - Decision y " qui caractérise cette attitude, introduite par Dantzig [3.6] et Madansky [3.16], de "programmes à 2 étages" ou "programmes avec recours".

La décision corrective y sera déterminée par la résolution d'un programme mathématique bien défini, puisqu'elle intervient à posteriori. Par contre, le choix de x devient le problème de cette conception d'un programme stochastique.

3.1 Cas du recours fixe

On connaît une matrice $q(1 \times n_0)$ dont les composantes q^u ($u = 1, \dots, n_0$) sont les pénalités du mode d'adaptation à la situation à posteriori et on impose aux décisions d'être liées par la relation $Ax + My \leq b$ pour toute réalisation de (A, b) avec M matrice fixée ($m_0 \times n_0$).

1er étage choix de la décision "à priori" x

Cette décision doit en particulier assurer la possibilité de prendre $y \geq 0$ telle que $Ax + My \leq b$ pour toute réalisation de (A, b) et vérifier les contraintes fixes $Dx \leq d$

2e étage Choix de la décision "a posteriori" y

(A,b) est connu, x fixé, on décidera y en désirant s'adapter à la situation de la meilleure façon possible i.e y solution optimale du programme déterministe, où toutes les données sont connues :

$$\begin{aligned} & \text{maximiser } qy \\ & My \leq b - Ax \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

3.1.1 Admissibilité d'une décision x

Désignons par

$$\Gamma = \{t \in \mathbb{R}^{m_0} / t \geq My, y \geq 0, y \in \mathbb{R}^{n_0}\}$$

Γ est un cône convexe pointé fermé de \mathbb{R}^{m_0}

Definition

Une décision x est dite admissible si et seulement si x appartient à l'intersection K, supposée non vide, de K_1 et

$$K_2 = \{x \in \mathbb{R}_+^n / P[(b - Ax) \in \Gamma] = 1\}$$

Walkup et Wets [3.33], [3.37], [3.44] montrent que cette formulation probabiliste de K_2 est encore équivalente à

$$K_2 = \bigcap_{(A,b) \in U_{A,b}} K_2(A,b)$$

où

$$K_2(A,b) = \{x \in \mathbb{R}_+^n / b - Ax \in \Gamma, (A,b) \in U_{A,b}\} \text{ et } U_{A,b}$$

support de la loi de (A,b) qui est le plus petit sous ensemble fermé de mesure 1.

K_2 est dit polyèdre des contraintes induites sur x (on s'assure que le domaine des solutions réalisables du second étage sera non vide)

Remarque :

La détermination de K_2 est "délicate" sauf cas particuliers :

- * M matrice carrée régulière (inversible)
 alors $\Gamma = \{t \in \mathbb{R}^m / M^{-1}t \geq 0\}$ cône convexe engendré par les colonnes de M^{-1}
 et $K_2 = \bigcap_{(A,b) \in U_{A,b}} \{x \in \mathbb{R}_+^n / M^{-1}Ax \leq M^{-1}b\}$

Si M matrice identité on retrouve

$$K = \{x \in K_1 / Ax \leq b, \forall (A,b) \in U_{A,b}\}$$

polyèdre obtenu dans la conception "solution prudente".

- * la relation liant x et y est en égalité et les corrections sont proportionnelles aux écarts et aux signes.

$$y^+ - y^- = b - Ax$$

$$y^+ = \sup(b - Ax ; 0) \text{ cas d'un excédent de } b \text{ sur } Ax$$

$$y^- = \sup(0, -(b-Ax)) \text{ cas d'un déficit de } b \text{ sur } Ax$$

alors

$$K_2 = \{x \in \mathbb{R}_+^n / \exists y^+ \geq 0 \exists y^- \geq 0 \ y^+ - y^- = b - Ax, \forall (A,b) \in U_{A,b}\}$$

donc $K_2 = \mathbb{R}_+^n$

3.1.2 Optimalité d'une décision [3.3] [3.14] [3.29] [3.37]
[3.38] [3.39] [3.44]

- 1 Chaque optimum du programme du second étage pour chaque réalisation de (A,b) choisi dans $U_{A,b}$ et x fixé dans $K_2(A,b)$ est une valeur de la fonction

$$Q(x, (A,b)) = \max \{ qy / My \leq b - Ax, y \geq 0 \}$$

- 2 On montre que pour tout x fixé, (A,b) couple aléatoire, la fonction $Q(x, (A,b)) = Q(x, \cdot) \circ (A,b)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$.

La fonction $px + Q(x, (A,b))$ est donc une variable aléatoire réelle dont on peut utiliser la valeur moyenne i.e

$$E[px + Q(x, (A,b))] = \bar{p}x + E_{A,b}[Q(x, (A,b))]$$

qui est une fonction de x sur K_2 (\bar{p} désigne $E_p(p) < \infty$)

- 3 On définit "meilleure décision à priori" celle qui maximise

$$\bar{p}x + E_{A,b}[Q(x, (A,b))] \text{ sur } K_1$$

Remarques :

- 1 Par utilisation de l'espérance mathématique, on a donc envisagé toutes les situations possibles du deuxième étage et l'on maximise la valeur moyenne de px pénalisée par la moyenne des corrections optimales. La variable y introduite artificiellement n'intervient que pour fournir une valeur moyenne pour la décision de x .
- 2 La définition de l'optimalité de x s'accompagne d'un problème probabiliste : détermination de la loi de probabilité de la variable aléatoire $Q(x, (A,b))$ ou le calcul de son espérance mathématique à partir des lois de A et b .

On retrouve le problème exposé un Chapitre 1 puisque $Q(x, (A, b))$ est de la même forme que $Z(b)$ avec $(y, q, M, b - Ax)$ jouant le rôle de (x, p, A, b) respectivement.

3.1.3 Proposition

$\forall (A, b) \in U_{A, b}$, $Q(\cdot, (A, b))$ est une fonction concave polyédrique (affine par morceaux) de x

$$\forall (A, b) \in U_{A, b} \quad \forall x \in K_2(A, b) \quad Q(x, (A, b)) > -\infty$$

d'après la définition de $K_2(A, b)$

soient $\overset{0}{y}$ et $\overset{1}{y}$ deux ϵ -sup

$$\begin{aligned} q\overset{0}{y} &> Q(\overset{0}{x}, (A, b)) - \epsilon_1 \\ q\overset{1}{y} &> Q(\overset{1}{x}, (A, b)) - \epsilon_2 \end{aligned}$$

$$\forall \lambda \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} y^\lambda &= \lambda \overset{0}{y} + (1 - \lambda) \overset{1}{y} && \text{est réalisable} && (My^\lambda \leq b - Ax^\lambda) \\ x^\lambda &= \lambda \overset{0}{x} + (1 - \lambda) \overset{1}{x} && && y^\lambda \geq 0 \end{aligned}$$

$$qy^\lambda = \lambda q\overset{0}{y} + (1 - \lambda) q\overset{1}{y} \implies qy^\lambda > \lambda Q(\overset{0}{x}, (A, b)) + (1 - \lambda) Q(\overset{1}{x}, (A, b)) - \epsilon$$

avec $\epsilon = \lambda \epsilon_1 + (1 - \lambda) \epsilon_2$ y^λ pas nécessairement optimal

$$Q(x^\lambda, (A, b)) > \lambda Q(\overset{0}{x}, (A, b)) + (1 - \lambda) Q(\overset{1}{x}, (A, b))$$

Cette proposition permet de déduire que

$$\bar{p}x + E_{A, b} [Q(x, (A, b))]$$

est une fonction concave de x sur K puisque combinaison linéaire de fonctions concaves. Par conséquent, le programme déterministe défini dans l'optimalité du choix de x est un programme convexe.

Si $U_{A, b}$ est borné (donc compact) avec pour borne inférieure (A^+, b^-) et pour borne supérieure (A^-, b^+) , le signe + (respectivement -)

indiquant les bornes supérieures (inf) de toutes les composantes, Les définitions d'admissibilité et d'optimalité nous permettent d'énoncer

3.1.4 Proposition

Si $K_2(A^+, b^-) \cap K_1 \neq \emptyset$ et $K_2(A^-, b^+) \cap K_1$ borné
Alors le programme stochastique admet un optimum fini dans la conception "programmes avec recours"

En effet

$$\forall (A, b) \in U_{A, b} \quad K_2(A^+, b^-) \subset K_2(A, b) \subset K_2(A^-, b^+) \implies$$

$$Q(x, (A^+, b^-)) \leq Q(x, (A, b)) \leq Q(x, (A^-, b^+))$$

$$\left. \begin{array}{l} K_2(A^+, b^-) \cap K_1 \neq \emptyset \implies \bar{p}x + Q(x, (A^+, b^-)) > -\infty \\ K_2(A^-, b^+) \cap K_1 \text{ borné} \implies \bar{p}x + Q(x, (A^-, b^+)) < +\infty \end{array} \right\} \implies$$

$$-\infty < \bar{p}x + E_{A, b} [Q(x, (A, b))] < +\infty$$

3.1.4 Proposition

Si $\bar{p}x + E_{A, b} [Q(x, (A, b))]$ est bornée sur K alors cette fonction est lipschitzienne sur K

Démonstration : Wets [3.44]

Cette maximisation en moyenne garde son sens d'optimalité que si la variable aléatoire $\bar{p}x + Q(x, (A, b)) \forall x \in K_1$ est faiblement dispersée autour de sa moyenne. Dans le cas contraire nous proposons une correction à la fonction économique du programme en écrivant :

$$E[\bar{p}x + Q(x, (A, b))] - \lambda D(x)$$

où λ paramètre ≥ 0 et $D(x) = [\text{Var}[\bar{p}x + Q(x, (A, b))]]^{1/2}$

Supposons p indépendant de (A, b) d'où

$$D(x) = \left[\sum_{j=1}^n (\text{Var } p^j) x_j^2 + \text{Var} [Q(x, (A, b))] \right]^{1/2}$$

pour déterminer $\text{Var } Q(x, (A, b))$ on met le programme du recours sous forme canonique

$$\begin{aligned} \max \quad & \tilde{q} \tilde{y} \\ \tilde{M} \tilde{y} &= b - Ax \\ \tilde{y} &\geq 0 \end{aligned}$$

par adjonction éventuelle de variables d'écart.

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= (M, U) \quad \tilde{q} = (q, 0) \\ \tilde{y} &= (y, \text{écarts}) \end{aligned}$$

soit I une base optimale réalisable $Q(x, (A, b)) = \tilde{q}^I (\tilde{M}^I)^{-1} (b - Ax)$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Var } Q(x, (A, b)) &= E \left[\left[\tilde{q}^I (\tilde{M}^I)^{-1} (b - Ax) - E \left[\tilde{q}^I (\tilde{M}^I)^{-1} (b - Ax) \right] \right]^T \right. \\ &\quad \left. \left[\tilde{q}^I (\tilde{M}^I)^{-1} (b - Ax) - E \left[\tilde{q}^I (\tilde{M}^I)^{-1} (b - Ax) \right] \right] \right] \\ &= (\tilde{q}^I (\tilde{M}^I)^{-1})^T W (\tilde{q}^I (\tilde{M}^I)^{-1}) \end{aligned}$$

avec W matrice de variance covariance du vecteur $b - Ax$, i.e du terme général

$$W_i^j = E \left[\left[(b_i - A_i x) - E(b_i - A_i x) \right]^T \left[(b_j - A_j x) - E(b_j - A_j x) \right] \right]$$

or W_i^i s'écrit déjà

$$\begin{aligned} W_i^i &= \sum_{j=1}^n (\text{Var } A_i^j) x_j^2 + \text{Var } b_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(A_i^j, A_i^k) x_j x_k \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^n \text{cov}(A_i^j, b_i) x_j \end{aligned}$$

L'expression de $D(x)$ paraît donc difficile à utiliser mais néanmoins dans le cas où $\forall j \in J, \forall i \in I A_{i,p}^j$ et b_i sont toutes indépendantes, alors W est diagonale et les termes de covariance disparaissent.

En particulier si A est fixée et b composé de variables aléatoires indépendantes alors W diagonale et $W_i^i = \text{Var } b_i$. Dans ce cas

$$D(x) = \left[\sum_{j=1}^n (\text{Var } p^j) x_j^2 + C \right]^{\frac{1}{2}}$$

avec C constante. Si en outre p est fixe alors $D(x) = \text{constante}$ et est un coefficient correctif.

Dans le même esprit, Dempster [3.8] propose de pondérer $\bar{p}x$ par la fonction

$$E_{A,b} [k(b - Ax) - \|G(b - Ax)\|^2]$$

($k(1 \times m_0)$, $G(n \times m_0)$ matrices fixées et $\|\cdot\|$ norme euclidienne).

L'auteur énonce le résultat suivant, que Sachan [3.25] a illustré d'exemples.

3.1.5 Proposition

On suppose que les covariances de b et A existent et sont finies. Une condition suffisante pour obtenir un optimum fini est :

$$\exists u \in \mathbb{R}^n \quad \|u\| \leq \|GA^x\| \quad \text{tel que } E_{p,A}(p - kA) \leq E_A(uGA)$$

la fonction économique s'écrit

$$E_{p,A}(p - kAx) + kE_b(b) + 2 E_{A,b}(bG^T GAx) - E_A ||GAx||^2 - E_b ||Gb||^2$$

$$||u|| \leq ||GAx|| \implies |uGAx| \leq ||GAx||^2 \implies E_A(uGAx) - E_A ||GAx||^2 \leq 0 \implies$$

$$\forall x \geq 0 \quad E_{p,A}(p - kAx) - E_A ||GAx||^2 + 2E_{A,b}(bG^T GAx) \leq 2 E_{A,b}(bG^T GAx)$$

$$E_{A,b}(bG^T GAx) \leq ||G||^2 E(||b|| ||A||) ||x|| \implies$$

$$\text{Inégalité de Schwartz} \implies E(||b|| ||A||) \leq (E ||b||^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (E ||A||^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$$\bar{p}x + E_{A,b}[k(b - Ax) - ||G(b - Ax)||^2] < \infty \quad \forall x \geq 0 \text{ donc sur } K_1$$

Dans le cas général du recours fixe, on peut relever deux difficultés majeures qui sont les déterminations de K_2 et de $E_{A,b}[Q(x(A,b))]$.

Dans la littérature, on s'est donc plus particulièrement intéressé au cas susceptible d'applications, celui où seul b est composé de variables aléatoires. (A fixé)

3.2 Seul b est aléatoire

On peut alors considérer le cas général des programmes non linéaires stochastiques : décider x qui maximise $\phi(x)$

$$\text{sous } g(x) \leq b$$

$$x \in K_1$$

où $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ concave

$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_0}$ g_i convexe $i = 1 \dots m_0$

b vecteur aléatoire à valeurs dans $W \subset \mathbb{R}^{m_0}$

$$W = \prod_{i=1}^{m_0}]r_i, t_i[\quad (r_i \in \bar{\mathbb{R}}, t_i \in \bar{\mathbb{R}})$$

Les résultats présentés pour le cas non linéaire [3.4] [3.5] [3.19] [3.24] [3.30] [3.34] s'appliquent au cas linéaire [3.3] [3.6] [3.10] [3.16] [3.38] [3.39] [3.43] en faisant

$$\phi(x) = px \quad g_i(x) = A_i x \quad i = 1 \dots m_0$$

On impose aux décisions x et y d'être liées par la relation $g(x) + h(y) \leq b \quad \forall b \in W$ et que la fonction de pénalité est $\psi(y)$.

$$\begin{aligned} \psi &: \mathbb{R}_n^0 \rightarrow \mathbb{R}_m^0 \text{ concave} \\ h &: \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}^0 \quad h_i \text{ convexes } i = 1 \dots m_0 \end{aligned}$$

(pour le cas linéaire $\psi(y) = qy \quad h_i(y) = M_i y$)

3.2.1 Admissibilité d'une décision

Le domaine des contraintes induites se définit ici par :

$$K_2 = \bigcap_{b \in W} K_2(b) = \bigcap_{b \in W} \{x \in \mathbb{R}_+^n / \exists y \in \mathbb{R}^0 \quad y \geq 0, g(x) + h(y) \leq b, b \in W\}$$

K_2 est donc convexe puisque intersection de convexes.

On en déduit le domaine des décisions admissibles $K = K_1 \cap K_2$ supposé non vide. Ce domaine est en outre convexe.

3.2.2 Optimalité d'une décision

On raisonne comme précédemment

Appelons $\gamma(x, b)$ la fonction $\max \{\psi(y) / h(y) \leq b - g(x), y \geq 0\}$

3.2.2.1 Proposition

$$\left[\gamma(x, \cdot) : W \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction concave de } b \right.$$

notons $C_b^x = \{y \in \mathbb{R}_+^n / h(y) \leq b - g(x), b \in W, x \in K_2(b)\}$

$\forall b^0 \in W, \forall b^1 \in W$ soit $x \in K_2(b^0) \cap K_2(b^1) \neq \emptyset$
 y^0 et y^1 deux ϵ -sup

$$\psi(y^0) \geq \gamma(x, b^0) - \epsilon_1$$

$$\psi(y^1) \geq \gamma(x, b^1) - \epsilon_2$$

$\forall \lambda \in [0, 1]$

$$\left. \begin{array}{l} \psi \text{ concave} \\ \psi(\lambda y^0 + (1-\lambda)y^1) / y^0 \in C_{b^0}^x, y^1 \in C_{b^1}^x \end{array} \right\} \rightarrow \{\psi(\lambda y^0 + (1-\lambda)y^1) / y^0 \in C_{b^0}^x, y^1 \in C_{b^1}^x\} \geq \lambda \gamma(x, b^0) + (1-\lambda) \gamma(x, b^1) - \epsilon$$

$$\max\{\psi(\lambda y^0 + (1-\lambda)y^1) / y^0 \in C_{b^0}^x, y^1 \in C_{b^1}^x\} \geq \max\{\psi(\lambda y^0 + (1-\lambda)y^1) / y^0 \in C_{b^0}^x, y^1 \in C_{b^1}^x\}$$

$$y^0 \in C_{b^0}^x, y^1 \in C_{b^1}^x$$

$$\left. \begin{array}{l} h_i \text{ convexes } i = 1, \dots, m_0 \end{array} \right\} \rightarrow \lambda y^0 + (1-\lambda)y^1 \in C_{\lambda b^0 + (1-\lambda)b^1}^x$$

$$\implies \max\{\psi(z) / z \in C_{\lambda b^0 + (1-\lambda)b^1}^x\} \geq \max\{\psi(\lambda y^0 + (1-\lambda)y^1) / y^0 \in C_{b^0}^x, y^1 \in C_{b^1}^x\}$$

$$\gamma(x, \lambda b^0 + (1-\lambda)b^1) \geq \lambda \gamma(x, b^0) + (1-\lambda) \gamma(x, b^1)$$

On en déduit puisque W est ouvert, que $\gamma(x, \cdot)$ est continue sur W .

Or b v.a.r. $\implies \gamma(x, b) = \gamma(x, \cdot)$ ob variable aléatoire réelle.

On peut donc envisager $E_b[\gamma(x, b)]$ que l'on supposera finie.

$E_b[\gamma(x, b)]$ est donc une fonction de x sur K_2 .

On définit "meilleure" décision "à priori" la solution optimale du programme non linéaire déterministe

$$P \quad \begin{cases} \max \phi(x) + E_b[\gamma(x, b)] \\ x \in K_1 \end{cases}$$

3.2.2.2 Proposition

$$\left[\gamma(\cdot, b) : K_2(b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction concave de } x. \right.$$

b fixé dans W. Soient $x^0 \in K_2(b)$ et $x^1 \in K_2(b)$
 y^0 et y^1 ε -sup $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$\left. \begin{array}{l} y^0 \in C_b^{x^0} \quad y^1 \in C_b^{x^1} \\ h_i \text{ et } g_i \text{ convexes } i=1 \dots m_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda y^0 + (1-\lambda)y^1 \in C_b^{\lambda x^0 + (1-\lambda)x^1} \longrightarrow \text{en raisonnant}$$

comme précédemment (on fait jouer à x^0 et x^1 le rôle de b^0 et b^1)
 on a

$$\lambda \gamma(x^0, b) + (1 - \lambda) \gamma(x^1, b) \leq \gamma(\lambda x^0 + (1 - \lambda)x^1, b)$$

On en déduit que $E[\gamma(x, b)]$ est une fonction concave de x sur K_2
 et par conséquent le programme P est convexe.

3.2.3 Résultat fondamental

- Posons . $G(x, b) = \phi(x) + \gamma(x, b)$
- . $\bar{b} = E(b) < \infty$
- . $\bar{x}_{\bar{b}}$ solution optimale de $\max_{x \in K_1} G(x, \bar{b})$

On a les inégalités suivantes :

$$E[G(\bar{x}_{\bar{b}}, b)] \leq \max_{x \in K_1} E[G(x, b)] \leq E[\max_{x \in K_1} G(x, b)] \leq \max_{x \in K_1} G(x, \bar{b})$$

. $E[G(x, b)]$ étant une fonction de x , la 1^{ère} inégalité
 résulte de x fixé à $\bar{x}_{\bar{b}} \in K_1$ dans le membre de gauche. Cette inégalité
 signifie que l'optimum du programme P est supérieur ou égal à la
 moyenne de ceux obtenus en remplaçant x par $\bar{x}_{\bar{b}}$.

$$\begin{aligned} . G(x, b) \leq \max_{x \in K_1} G(x, b) &\implies E[G(x, b)] \leq E[\max_{x \in K_1} G(x, b)] \implies \\ \max_{x \in K_1} E[G(x, b)] &\leq E[\max_{x \in K_1} G(x, b)] \end{aligned}$$

Le premier membre donne l'optimum du programme P .

On peut interpréter le second membre comme la moyenne des optimums obtenus si on attendait les réalisations de b .

. Puisque $\max_{x \in K_1} G(x,b)$ est une fonction concave de b, grâce

à l'inégalité de Jensen on déduit $E[\max_{x \in K_1} G(x,b)] \leq \max_{x \in K_1} G(x, E(b))$

Conséquences

1 Si \bar{x}_b existe et appartient à K

. $E[G(\cdot, b)] : K \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en \bar{x}_b

. \hat{x} solution optimale de P existe

Alors

$$0 \leq (\max_{x \in K_1} E[G(x,b)]) - (E[G(\bar{x}_b, b)]) \leq (\hat{x} - \bar{x}_b) \nabla E[G(\bar{x}_b, b)]$$

Ceci résulte de la concavité de $E[G(\cdot, b)]$ et de la définition de \bar{x}_b

2 Avriel et Williams [3-1] définissent la valeur esperée d'un d'une parfaite information (E.V.P.I) par

$$E.V.P.I = E \left[\max_{x \in K_1} G(x,b) \right] - \max_{x \in K_1} E[G(x,b)]$$

le résultat fondamental permet de borner E.V.P.I par

$$0 \leq E.V.P.I \leq \max_{x \in K_1} G(x, \bar{b}) - \max_{x \in K_1} E[G(x,b)]$$

Remarques :

1 Pour le cas linéaire, on retrouve les inégalités de Madansky [3.16] origines du résultat fondamental.

2 L'étude d'un programme stochastique où seule la fonction économique est aléatoire se mène de façon analogue par passage au dual.

3.2.4 Solution "Maximin"

On utilise la plus petite valeur réalisable de b rendant possible le recours. D'après la relation d'ordre partiel " \leq " (relation sur chaque composante) on a

$$\forall b^0 \in W \quad \forall b^1 \in W \quad b^0 \leq b^1 \implies K_2(b^0) \subset K_2(b^1)$$

Supposons U_b , le support de $F_b(\cdot)$ (plus petit sous ensemble fermé de \mathbb{R}^0 de mesure 1 tel que $U_b \subset W \subset \mathbb{R}^{m_0}$) ; sous ensemble borné donc compact. Alors il existe un plus petit parallélépipède $\{b / -\infty < b_m \leq b \leq b_M < \infty\}$ inclus dans W et contenant U_b

On appelle solution "maximin" la solution optimale du programme

$$\max_{x \in K_1} G(x, b_m)$$

Or $\forall b \in U_b \quad K_2(b_m) \subset K_2(b)$ d'où

$$\max_{x \in K_1} G(x, b_m) \leq \max_{x \in K_1} E G(x, b) \leq \max_{x \in K_1} G(x, E(b))$$

ce qui permet d'encadrer l'optimum du programme P par les optimums de 2 programmes déterministes.

3.2.5 Programmes particuliers.3.2.5.1 b variable aléatoire discrète

b a un nombre fini k de réalisations b^1 telles que

$$P(b = b^1) = \theta^1 \quad l = 1 \dots k \quad \text{et} \quad \sum_{l=1}^k \theta^1 = 1$$

$$\text{d'où } E[\gamma(x, b)] = \sum_{l=1}^k P[\gamma(x, b) = \gamma(x, b^1)] \gamma(x, b^1) = \sum_{l=1}^k \theta^1 \gamma(x, b^1)$$

le programme déterministe P s'écrit donc

$$\left[\begin{array}{l} \max_{x \in K_1} px + \sum_{l=1}^k \theta^1 qy^l \\ Ax + My^l \leq b^l \\ y^l \geq 0 \quad l = 1 \dots k \end{array} \right.$$

Par passage au dual on peut envisager la résolution par des algorithmes de décomposition en supposant k, n, n_0 petits.

3.2.5.2 Le recours "élémentaire"

Très étudié par Wets [3.40] et Williams [3.47]

[3.48] [3.49]

La relation liant x et y est $y^+ - y^- = b - Ax$
 $y^+ \geq 0 \quad y^- \geq 0 \quad y^+ y^- = 0$

dans ce cas $K_2(b) = \mathbb{R}_+^n$ ce qui implique que tout x satisfaisant les contraintes fixes est dit réalisable pour le programme déterministe P.

En partitionnant q en (q^+, q^-) le programme d'adaptation du second étage s'écrit $\max q^+ y^+ + q^- y^-$
 $y^+ - y^- = b + Ax$
 $y^+ \geq 0 \quad y^- \geq 0 \quad x \text{ et } b \text{ fixés.}$

Ce programme sera réalisable si et seulement si son dual :

$$\min u(x, b) \quad b - Ax$$

$$u(x, b) \in [I, -I] \geq (q^+, q^-) \quad \text{l'est aussi, i.e } q^+ \leq u(x, b) \leq q^-$$

d'où la condition supplémentaire : $q^+ + q^- = \tilde{q} \leq 0$

Soit $F_b(\cdot)$ la fonction de répartition de b et $F_{b_i}(\cdot)$ les fonctions de répartition marginales.

On a

$$E[\gamma(x, b)] = \int_{A_i x}^{+\infty} \sum_{i=1}^m [q_i^+ (b_i - A_i x)] dF_{b_i}(\cdot) - \int_{-\infty}^{A_i x} \sum_{i=1}^m [q_i^- (b_i - A_i x)] dF_{b_i}(\cdot)$$

On peut changer l'ordre d'intégration et de sommation

$$E[\gamma(x, b)] = \sum_{i=1}^m q_i^+ \int_{A_i x}^{+\infty} (b_i - A_i x) dF_{b_i}(\cdot) - \sum_{i=1}^m q_i^- \int_{-\infty}^{A_i x} (b_i - A_i x) dF_{b_i}(\cdot)$$

Par conséquent seules les lois marginales interviennent et on fera l'hypothèse que sur tout intervalle fini, $\forall i$ $F_{b_i}(\cdot)$ a un nombre fini de discontinuités, ce qui permet l'intégration par parties.

d'où

$$E[\gamma(x,b)] = \sum_{i=1}^m [q_i^+ (E(b_i) - A_i x) + \tilde{q}_i \int_{-\infty}^{A_i x} F_{b_i}(\cdot) dt_i]$$

On vérifie que $E[\gamma(x,b)]$ est une fonction concave puisque $\tilde{q}_i \leq 0$ et $F_{b_i}(\cdot)$ est une fonction monotone non décroissante donc

$\tilde{q}_i \int_{-\infty}^{A_i x} F_{b_i}(\cdot) dt_i$ concave.

On en déduit que le programme P

$$\max_{x \in K_1} px + \sum_{i=1}^m [q_i^+ (E(b_i) - A_i x) + \tilde{q}_i \int_{-\infty}^{A_i x} F_{b_i}(\cdot) dt_i]$$

est convexe avec la particularité que dans la fonction économique seules les lois marginales interviennent. On dira que P est un programme convexe séparable.

L'avantage du recours élémentaire est que lorsque les distributions marginales sont continues, le gradient de la fonction économique est aisément calculable puisque

$$\frac{\partial}{\partial (A_i x)} [q_i^+ (E(b_i) - A_i x) + \tilde{q}_i \int_{-\infty}^{A_i x} F_{b_i}(\cdot) dt_i] = -q_i^+ + \tilde{q}_i F_{b_i}(A_i x)$$

On peut donc envisager la résolution de P par des algorithmes de gradients. Wets [3.40] utilise la méthode de Frank et Wolfe, mais profitant de la linéarité des contraintes on pourrait avantageusement choisir la méthode du Gradient réduit.

Puisque $E[\gamma(x,b)]$ s'exprime en fonction de Ax le programme P

s'écrit encore $\max_{x \in K_1} px + H(X)$ où $H(X) = E[\gamma(x,b)]$
 $Ax = X$

Supposons $K_1 = \mathbb{R}_+^n$ et considérons la fonction de Lagrange

$$L(x, X; u) = px + H(X) + u(X - Ax)$$

$$L(x, X; u) = (p - uA)x - (q^+ - u)X + \sum_{i=1}^m \tilde{q}_i \int_{-\infty}^{X_i} F_{b_i}(\cdot) dt_i + q^+ E(b)$$

La recherche du col $(\hat{x}, \hat{X}; \hat{u})$ tel que

$$L(x, X; \hat{u}) \leq L(\hat{x}, \hat{X}; \hat{u}) \leq L(\hat{x}, \hat{X}; u)$$

permet à Williams [3.47] [3.48] de caractériser les solutions optimales de P par

3.2.5.2 Proposition

(\hat{x}, \hat{X}) solution optimale de P \iff
 $A\hat{x} - \hat{X} = 0$ $\hat{x} \geq 0$ et il existe \hat{u} satisfaisant $\hat{u}A \geq p$ tel que

- $\hat{x}_j > 0$ seulement si $(\hat{u}A)_j = p^j$
- $F_{b_i}(\hat{X}_i + \epsilon) \geq \frac{q_i^+ - \hat{u}_i}{\tilde{q}_i} \geq F_{b_i}(\hat{X}_i - \epsilon) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \forall i$ tel que $\tilde{q}_i < 0$

Williams en déduit une approximation de l'optimum $\hat{z} = p\hat{x} + H(\hat{X})$ de la façon suivante :

$\forall b^*$ réalisation choisie de b soit x^* solution optimale de $\max_{x \geq 0} px$
 $Ax \leq b^*$

et u^* une solution optimale duale satisfaisant $q^+ \leq u^* \leq -q^-$

Posons $z^* = px^* + H(b^*)$
 $= px^* - q^+ b^* + \sum_{i=1}^m \tilde{q}_i \int_{-\infty}^{b_i^*} F_{b_i}(\cdot) dt_i + q^+ E(b)$

3.2.5.3 Approximation

$0 \leq \hat{z} - z^* \leq (q^+ - u^*) (b^* - \hat{X}) + \sum_{i=1}^m \tilde{q}_i \int_{\hat{X}_i}^{b_i^*} F_{b_i}(\cdot) dt_i$

avec

$F_{b_i}(\hat{X}_i + \epsilon) \geq \frac{q_i^+ - u_i^*}{\tilde{q}_i} \geq F_{b_i}(\hat{X}_i - \epsilon) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \forall i \quad \tilde{q}_i < 0$

(\hat{X}_i quantile d'ordre $\frac{q_i^+ - u_i^*}{\tilde{q}_i}$ de $F_{b_i}(\cdot)$)

En effet

$$\left. \begin{aligned} A\hat{x} = \hat{X} &\implies \hat{z} = p\hat{x} + H(\hat{X}) + u^*(\hat{X} - A\hat{x}) \\ u^* \text{ s.o. duale} &\implies (p - u^*A)x \leq 0 \end{aligned} \right\} \implies \hat{z} \leq u^*\hat{X} + H(\hat{X})$$

or $px^* = u^*b^*$

en remplaçant px^* par u^*b^* dans z^* et en effectuant $u^*\hat{X} + H(\hat{X}) - z^*$ on obtient la borne supérieure de $\hat{z} - z^*$

Par conséquent par utilisation de cette borne on pourra justifier le choix d'un estimateur b^* pour la variable aléatoire b en cherchant à diminuer $\hat{z} - z^*$.

Dans le cadre du recours "élémentaire" le programme déterministe P obtenu est en général un programme quadratique,

Exemples :

① b_i suit la loi uniforme $\forall i$ sur $[\alpha_i, \beta_i]$

$$F_{b_i}(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i > \beta_i \\ \frac{t_i - \alpha_i}{\beta_i - \alpha_i} & \text{si } t_i \in [\alpha_i, \beta_i] \\ 0 & \text{si } t_i < \alpha_i \end{cases}$$

d'où $\tilde{q}_i \int_{\alpha_i}^{A_i x} F_{b_i}(t_i) dt_i = \frac{\tilde{q}_i}{2(\beta_i - \alpha_i)} (A_i x - \alpha_i)^2$ (≤ 0 puisque $\tilde{q}_i \leq 0$)

la fonction économique du programme P s'écrit donc

$$px + E[\gamma(x, b)] = px + \sum_{i=1}^{m_0} [q_i^+ [E(b_i) - A_i x] + \frac{\tilde{q}_i}{2(\beta_i - \alpha_i)} (A_i x - \alpha_i)^2]$$

② $\forall i$ b_i suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_i > 0$ sur $[0, +\infty[$

$$F_{b_i}(t_i) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_i t_i} & \text{si } t_i \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } t_i < 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \tilde{q}_i \int_0^{A_i x} F_{b_i}(t_i) dt_i = \tilde{q}_i A_i x + \frac{\tilde{q}_i}{\lambda_i} [e^{-\lambda_i A_i x} - 1]$$

par utilisation du développement en série de Taylor de $e^{-\lambda_i X_i}$ avec $X_i = A_i x$ on a

$$[e^{-\lambda_i X_i} - 1] = -\lambda_i X_i + \frac{\lambda_i^2 X_i^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda_i^n X_i^n}{n!}$$

en approximant à l'ordre 2 on obtient

$$px + E[\gamma(x, b)] = px + \sum_{i=1}^{m_0} [q_i^+ [E(b_i) - A_i x] + \frac{\lambda_i}{2} \tilde{q}_i (A_i x)^2]$$

3.2.6 Application des "Programmes sous risques"

Montrons que l'on peut combiner l'attitude "programmes sous risques" avec celle des "programmes avec recours" :

On désire la satisfaction de certaines contraintes avec un niveau de probabilité et on prendra une action corrective y dans le cas de violation des autres contraintes.

décomposons $g = (g^1, g^2)$ $b = (b^1, b^2)$ (g_i^1, b_i^1) $i = 1 \dots m_1$ composantes de (g^1, b^1)
 (g_i^2, b_i^2) $i = m_1 + 1, \dots, m_0$ composantes de (g^2, b^2) .

le programme déterministe s'écrit

$$\left[\begin{array}{l} \max_{x \in K_1} \phi(x) + E \left[\max_{y \geq 0} \{ \psi(y) / g_i^2(x) + h_i(y) \leq b_i^2, i = m_1 + 1, \dots, m_0 \} \right] \\ P(g_i^1(x) \leq b_i^1) \geq \beta_i \quad i = 1 \dots m_0 \quad \beta_i \in [0, 1] \end{array} \right]$$

:Or d'après les résultats du Chapitre II on sait que

$$P(g_i^1(x) \leq b_i^1) \geq \beta_i \iff g_i^1(x) \leq b_i^{1*}$$

$$\text{où } b_i^{1*} = \max\{t_i / F_{b_i^1}(t_i) \leq 1 - \beta_i\}$$

Le domaine des décisions admissibles est donc

$$\{x \in K_1 / g_i^1(x) \leq b_i^{1*} \forall i = 1 \dots m_1\} \cap K_2(b^2)$$

Si en outre on suppose prendre le recours avec au moins une certaine probabilité β^2 on impose

$$P(g_i^2(x) + h_i(y) \leq b_i^2) \geq \beta_i \quad i = m_1 + 1, \dots, m_0 \quad \beta_i^2 \in [0,1]$$

Si $F_b(\cdot / b^1 = b^{1*})$ désigne la distribution conditionnelle de $b = (b^1, b^2)$

b^1 étant fixé à b^{1*} et $F_{b_i^1}(\cdot / b^1 = b^{1*})$ les distributions marginales

$$P(g_i^2(x) + h_i(y) \leq b_i^2) \geq \beta_i^2 \iff F_{b_i^1}(g_i^2(x) + h_i(y) / b^1 = b^{1*}) \leq 1 - \beta_i^2$$

$$\iff g_i^2(x) + h_i(y) \leq b_i^{2*}$$

$$\text{avec } b_i^{2*} = \max\{t_i / F_{b_i^1}(t_i / b^1 = b^{1*}) \leq 1 - \beta_i^2\}$$

d'après les résultats sur les décisions séquentielles du chapitre 2.

On obtient la formulation suivante du programme déterministe :

$$\begin{cases} \max \phi(x) + \max \{\psi(y) / g_i^2(x) + h_i(y) \leq b_i^{2*} \quad i = m_1 + 1, \dots, m_0\} \\ x \in K_1 \quad y \geq 0 \\ g_i^1(x) \leq b_i^{1*} \quad i = 1 \dots m_1 \end{cases}$$

Sachan [3.25] applique cette conception séparée des contraintes dans le cas linéaire.

3.3 Généralisation

3.3.1

M et q ne sont pas fixées mais leurs composantes sont aléatoires de lois de probabilité connues.

C'est le prolongement du cas 3.1 proposé par Van Slyke, Walkup et Wets [3.29] [3.33] [3.34] [3.37]

On suit la même démarche que précédemment :

On impose aux décisions x et y d'être liées par la relation

$Ax + My \leq b$ quelle que soit la réalisation de l'aléatoire (A, b, p, q, M) le problème est celui du choix de x .

Considérons $\alpha = (A, b, q, M)$ comme un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^N ($N = m_0(n + n_0 + 1) + n_0$) dont la loi a pour support U_α

Pour définir le domaine des contraintes induites on rencontre la difficulté que $\Gamma = \{t \in \mathbb{R}^m / t \geq My, y \geq 0\}$ n'est plus un cône fixe mais dépend de la valeur prise par M .

On définit alors Γ comme une fonction d'ensemble de \mathbb{R}^N dans $C(\mathbb{R}^m)$ ensemble des cônes convexes pointés fermés de \mathbb{R}^m telle

$$\Gamma(M) = \{t \in \mathbb{R}^m / t \geq My, y \geq 0, y \in \mathbb{R}^{n_0}, M \in \mathbb{R}^{m_0+n_0}\} \neq \emptyset$$

3.3.1 Définition

Une décision x est dite admissible si et seulement si x appartient à l'intersection K de K_1 et $K_2 = \{x \in \mathbb{R}_+^n / P[b - Ax \in \Gamma(M)] = 1\}$

Walkup et Wets [3.34] ont cherché une définition basée sur le support U_α : puisque l'on s'adaptera à la situation postérieure à la réalisation de α , il faut assurer que les domaines des solutions réalisables des programmes primal et dual du 2^e étage soient non vides pour toute réalisation de α .

$$\{y \in \mathbb{R}^{n_0} / My \leq b - Ax, y \geq 0\} \neq \emptyset$$

$$\text{et } \{u \in \mathbb{R}^{m_0} / uM \geq q, u \geq 0\} \neq \emptyset$$

La "W" condition ($W = M$) introduite par les auteurs, s'écrit ici : les restrictions des fonctions d'ensemble

$$\Gamma_1 : \mathbb{R}^N \rightarrow C(\mathbb{R}^m) \quad \Gamma_1(M) = \{t \in \mathbb{R}^m / t \geq My, y \geq 0, y \in \mathbb{R}^{n_0}\}$$

$$\Gamma_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow C(\mathbb{R}^{m_0}) \quad \Gamma_2(M) = \{w \in \mathbb{R}^{m_0} / w \leq uM, u \geq 0, u \in \mathbb{R}^{m_0}\}$$

au support U_α sont fermées et inf-continues.

(On utilise la distance de Hausdorff entre les éléments de $C(\mathbb{R}^m)$ (respectivement $C(\mathbb{R}^n)$) et leurs intersections avec la boule unité de \mathbb{R}^m (resp \mathbb{R}^n))

$$d(\Gamma(M^1), \Gamma(M^2)) = \max\{\delta(\Gamma(M^1), \Gamma(M^2)) ; \delta(\Gamma(M^2), \Gamma(M^1))\}$$

$$\text{où } \delta(\Gamma(M^1), \Gamma(M^2)) = \sup_{t^1 \in \Gamma(M^1) \cap B} \inf_{t^2 \in \Gamma(M^2)} ||t^1 - t^2||$$

B boule unité ;

Si cette condition est satisfaite on obtient

$$K_2 = \bigcap_{\alpha \in U_\alpha} \{x \in \mathbb{R}_+^n / \exists y \in \mathbb{R}_+^m \text{ My } \leq b - Ax\}$$

Néanmoins cette définition est encore difficilement applicable en général, puisqu'elle dépend de la forme de M et de la détermination du support U_α (support de loi mixte)

Mais on obtient quand même la propriété de convexité pour le programme déterministe.

$$\max_{x \in K_1} \bar{p}x + E_\alpha [\max_{y \geq 0} qy / \text{My } \leq b - Ax]$$

en montrant la concavité de la fonction économique.

3.3.2 Problème à N étages ou problème de décisions séquentielles.

Le principe est le suivant :

la décision X^k pour la $k^{\text{ième}}$ période est prise après connaissance des décisions antérieures X_1, X_2, \dots, X_{k-1} et après avoir observé les variables aléatoires des $(k-1)$ périodes précédentes, mais avant de connaître les valeurs prises par les variables aléatoires de l'époque k , les réalisations des variables aléatoires et les décisions des périodes $k + 1$ à N .

C'est le schéma "Décision-Observation-Décision-Observation-Décision..."

pour tout $k > 1$ la décision X^k est donc décision "à priori" pour la période k mais décision "à postériori" pour la période $k-1$

$\forall k \geq 1$ les décisions X^k et X^{k+1} sont liées par la relation
 $A X^k + M X^{k+1} \leq b$ quelle que soit la réalisation du couple aléatoire
 (A, b) . M données et fixées. On suppose en outre que les pénalités q^k
sont aléatoires et l'on considère $\alpha^k = (A, b, q)$ comme un vecteur
aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^{N^k} $N^k = \sum_{k=0}^{\infty} (n_k + 1) + \sum_{k=0}^{\infty} n_k$

Les fonctions de recours pour les périodes k ($k=1 \dots N$) s'écriront donc

$$Q_k^k(X, \alpha) = \max_{\substack{X \geq 0 \\ k+1}} [q^k X^{k+1} + E_{\alpha^{k+1}} \{Q_{k+1}^{k+1}(X, \alpha) / \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^k\}]$$

$$M X^{k+1} \leq b - A X^k$$

le problème posé est celui de la décision de X^k avant de connaître α^k, X^{k+1} $k = 1 \dots N$

Le programme déterministe pourra s'écrire de la façon suivante

$$\max_{X \geq 0} \left\{ p X^1 + E \left[\max_{\alpha^2, X \geq 0} q^2 X^2 + E \left[\max_{\alpha^3, X \geq 0} q^3 X^3 + \dots + E \left[\max_{\alpha^{N+1}, X \geq 0} q^{N+1} X^{N+1} \right] \right] \right] \right\}$$

$$\begin{array}{rcl}
 D X^1 & & \leq d \\
 A X^1 + M X^2 & & \leq b^1 \\
 A X^2 + M X^3 & & \leq b^2 \\
 A X^3 + M X^4 & & \leq b^3 \\
 \vdots & & \vdots \\
 A X^{N-1} + M X^N & & \leq b^{N-1} \\
 A X^N + M X^{N+1} & & \leq b^N
 \end{array}$$

Wets [3.42] donne la définition :

les v.a. α^k sont d'étage-indépendantes si toutes les composantes de α^k sont indépendantes de celles de $\alpha^i \forall i \neq k$.

3.3.2 Proposition Wets [3.42]

- . α^k avec variances finies et d'étage-indépendantes
 $\forall k = 1 \dots N$
- . U_k support de la loi $F_{\alpha^k}(\cdot)$
- . $[U_k]$ polyédrique

Alors ce programme est convexe et sa fonction économique est finie et lipschitzienne ou identiquement égale à $+\infty$.

CONCLUSION

En prévoyant de corriger le choix éventuellement mauvais d'une première décision devant un avenir aléatoire, le schéma "Décision-Réalisation-Décision" conduit à la prise en compte de la moyenne des corrections optimales.

Mais cette attitude rencontre deux problèmes primordiaux en pratique :

- . La détermination du domaine des contraintes induites qui dépend en particulier de la forme de la matrice M .
En outre, dans le cas de distributions continues, la définition de ce domaine peut comporter un trop grand nombre de contraintes nées de toutes les réalisations possibles des variables aléatoires.
- . Le calcul de la moyenne des corrections optimales qui risque de demander soit la résolution d'un grand nombre de problèmes du 2^e étage (simulation des réalisations)

Soit le choix d'un échantillon, sans biais, de valeurs pour les variables aléatoires.

Soit une série d'intégrations incomplètes sur les portions du domaine K_2 dans le cas de fonctions de répartition présentant des discontinuités.

Néanmoins, les cas où seul b est aléatoire et plus particulièrement celui du recours élémentaire permettent d'utiliser ce schéma et d'appliquer des algorithmes connus.

ANNEXEUn exemple simple

Nous avons choisi un exemple souvent utilisé dans la littérature mais en comparant les diverses attitudes et en envisageant les cas où $q^+ \cdot q^- \neq 0$

Un centre de ressources R dispose de 100 unités d'un bien.

On doit envoyer un nombre x d'unités de R vers une destination D pour y satisfaire une demande b aléatoire. Le coût d'une unité en provenance de R est 1 et on suppose que b suit la loi uniforme sur $(70, 80)$ i.e

$$F_b(t) = P(b \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 70 \\ \frac{t-70}{10} & \text{si } 70 \leq t \leq 80 \\ 1 & \text{si } t \geq 80 \end{cases}$$

Le programme stochastique s'écrit donc

$$\begin{array}{ll} \min x & \\ 0 \leq x \leq 100 & \\ x \geq b & \end{array}$$
1) Solution "prudente"

$\forall b \in (70, 80)$ on choisit $x \geq b$ donc $\hat{x} = 80$ coût 80

2) Solution "espérance mathématique"

On remplace b par $E(b) = 75$ d'où $\hat{x} = 75$ coût 75

3) Solution "programmes sous risques"

On choisit $\alpha \in [0, 1]$ et on impose $P(b \leq x) \geq \alpha$
i.e $x \geq 70 + 10\alpha$

selon les valeurs données à α on obtient

$\alpha = 0.5$	$\hat{x} = 75$	coût 75 (solution 2)
$\alpha = 0.8$	$\hat{x} = 78$	coût 78
$\alpha = 0.95$	$\hat{x} = 79,5$	coût 79,5
$\alpha = 1$	$\hat{x} = 80$	coût 80 (solution 1)

4) Solution "Programmes à 2 étages"

4.1 On sait que si b se révèle supérieure aux disponibilités de D on devra s'approvisionner au prix unitaire q^+ chez un concurrent et que dans le cas contraire, on paiera des coûts de stockage q^- avec $0 \leq q^- < q^+$

le programme déterministe s'écrit

$$\min [x + E\{\min q^+ y^+ + q^- y^- / y^+ - y^- = b - x, y^+ \geq 0, y^- \geq 0\}]$$

$$0 \leq x \leq 100$$

$$\text{avec } y^+ \cdot y^- = 0$$

Soit $g(x)$ la fonction économique

$$g(x) = \begin{cases} x + q^+ (75 - x) & 0 \leq x \leq 70 \\ x + \frac{q^-}{10} \int_{70}^x (x - t) dt + \frac{q^+}{10} \int_x^{80} (t - x) dt & 70 \leq x \leq 80 \\ x + q^- (x - 75) & x \geq 80 \end{cases}$$

d'où

$$g(x) = \begin{cases} x (1 - q^+) + 75 q^+ & 0 \leq x \leq 70 \\ x (1 + q^-) - 75 q^- + \frac{q^+ + q^-}{20} (80 - x)^2 & 70 \leq x \leq 80 \\ x (1 + q^-) - 75 q^- & x \geq 80 \end{cases}$$

$g(x)$ est une fonction convexe ($q^+ + q^- \geq 0$) continue qui atteint son minimum sur $(70, 80)$ tel que

$$\frac{d}{dx} g(\hat{x}) = 0 \implies \hat{x} = 80 - 10 \frac{1 + q^-}{q^+ + q^-}$$

$$\text{et } g(\hat{x}) = 80 + 5q^- - 5 \frac{(1+q^-)^2}{q^+ + q^-}$$

Pour différentes valeurs de q^+ et q^- on obtient donc :

- 1) $q^- = 0$, $q^+ = 2$ on retrouve l'exemple de Dantzig
 $\hat{x} = 75 = E(b)$ $g(\hat{x}) = 77,5$

. Brans fait varier q^+

$q^+ = 4$	$\hat{x} = 77,5$	$g(\hat{x}) = 78.75$
$q^+ = 5$	$\hat{x} = 78$	$g(\hat{x}) = 79$

- 2) $q^-, q^+ \neq 0$

$q^+ = 2$	$q^- = 0.5$	$\hat{x} = 74$	$g(\hat{x}) = 78$
	$q^- = 1$	$\hat{x} = 73.33$	$g(\hat{x}) = 78.33$
$q^+ = 4$	$q^- = 0.5$	$\hat{x} = 76.66$	$g(\hat{x}) = 80$
	$q^- = 1$	$\hat{x} = 76$	$g(\hat{x}) = 81$
	$q^- = 2$	$\hat{x} = 75$	$g(\hat{x}) = 82.5$

- 3) Si l'on ne peut pas s'alimenter chez un concurrent ($q^+ = 0$) et que l'on décide la solution "prudente" ($\hat{x} = 80$) ; on risque de payer des coûts de stockage et $g(x)$ nous donne la moyenne du coût de satisfaction de la demande :

$$q^- = 0.5 \quad g(80) = 80 (1 + 0.5) - 75 \times 0.5 = 82.5$$

4.2 Approche de Williams

Si on choisit $b^* = E(b) = 75$

le programme \min_x a pour solution optimale $x^* = 75$

$$0 \leq x \leq 100$$

$$x \geq 75$$

et son dual max - $100 u_1 + 75 u_2$ a pour solutions optima-
 $-u_1 + u_2 \leq 1$ les $u_2^* = 1$ $u_1^* = 0$

pour $q^+ = 4; q^- = 0$ on a $F_b(\hat{X}) = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} \implies \hat{X} = 77,5$

$$z^* = 75 - 4 \times 75 + 4 \int_{70}^{75} F_b(t) dt + 4 \times 75 = 80$$

d'où

$$80 - (1-4)(75 - 77,5) + 4 \int_{77,5}^{75} F_b(t) dt \leq g(\hat{x}) \leq 80$$

soit $78,75 \leq g(\hat{x}) \leq 80$

or pour $q^+ = 4; q^- = 0$ on a vu que $g(\hat{x}) = 78,75$ on a donc vérifié que la formule de Williams permet de localiser l'optimum.

5) Valeur espérée d'une parfaite information

Par définition $EVPI = 78,75 - 75 = 3,75$, dans le cas
 $q^+ = 4 ; q^- = 0$. $3,75$ représente le coût de l'information
sur la valeur qu'est susceptible de prendre b .

CHAPITRE IV

APPLICATIONS

INTRODUCTION

Pour la distribution d'énergie, E.D.F. cherche à satisfaire les demandes de la manière la plus économique tout en assurant une bonne qualité de service. Suite à des pannes de centrales ou des indisponibilités de lignes, l'utilisateur peut souffrir des défaillances du réseau, mesurées par la valeur de l'énergie non distribuée.

Un problème s'impose :

disposant d'un réseau de distribution, où et comment investir de nouveaux ouvrages (centrales ou lignes) au moindre coût de façon à pallier à ces défaillances.

La nature discrète des variables de décision et des variables aléatoires gêne la recherche d'une solution optimale. Dodu [4.4] propose les méthodes de simulation mais qui nécessitent la résolution de milliers de programmes mathématiques ou le choix "délicat" d'un échantillon représentatif des événements à observer.

Nous présentons une nouvelle façon d'aborder ce problème en le modélisant, à partir des lois de Kirchhoff, sous la forme d'un programme stochastique. Le choix de lois de probabilité continues permet de prendre l'attitude des "programmes sous risques" (ch2) et d'exhiber un programme mathématique non linéaire et déterministe. En transformant les variables décisionnelles discrètes en variables continues, ce programme bénéficie de vérifier les hypothèses de la méthode des centres Linéarisée (Partie 2) qui permet de déterminer les solutions optimales. On ajuste ensuite ces valeurs à des solutions entières par une procédure heuristique en se souciant d'obtenir un coût minimum.

Par la résolution de 7 problèmes nés de conceptions déterministes différentes, on compare l'importance du choix des taux de satisfaction des contraintes ou de l'influence des pannes et déduit l'ébauche d'un plan de prévision en paramétrant les consommations en énergie.

1 Formulation du problème

La distribution de l'énergie s'effectue dans l'approximation du courant continu. La répartition peut se schématiser par un graphe connexe orienté à

$|T| = n$ sommets ou noeuds

$|M| = m$ arcs ou liaisons.

* Matrices caractéristiques du graphe.

. MATRICE D'INCIDENCE S ($n \times m$).

Cette matrice est une représentation du graphe et exprime les liaisons entre les noeuds. Indignée en lignes par les sommets, en colonnes par les arcs, on la définit par

$\forall j \in M$ la colonne S^j a seulement 2 éléments non nuls et égaux à +1 ou -1 qui indiquent les noeuds que relie la liaison j

$\forall i \in T$ la ligne S_i met en évidence par ses éléments non nuls (+1 et -1) quelles sont les liaisons qui aboutissent (-1) au noeud i ou qui en partent (+1)

. MATRICE CYCLOMATIQUE C ($n \times (m - n + 1)$)

D'un réseau connexe, on peut extraire un arbre dont les sommets sont ceux du graphe et dont les branches forment un sous ensemble maximum de l'ensemble des liaisons du réseau.

Soit $\bar{n} = |\bar{N}| = n - 1$ le nombre de branches
d'où $m - (n - 1) =$ nombre de mailles

On peut choisir de différentes façons un arbre, on le fera de façon unique et définitive dans le but de fixer les indices composant \bar{N} .

La matrice C est alors définie en exprimant le sens des liaisons à partir de celui des mailles (+1 pour le même sens, -1 pour le sens contraire) i.e $\forall k \in M - \bar{N}$ la colonne C^k indique par ses éléments non nuls (+1 et -1) de quelles liaisons est constituée la maille d'indice k .

$\forall j \in M$ la ligne C_j permet de connaître par ses éléments non nuls (+1 et -1) les mailles utilisant la liaison j .

On remarquera que C se décompose sous la forme $C = \begin{pmatrix} I \\ H \end{pmatrix}$

où I matrice unité $(m - \bar{n} \times m - \bar{n})$

1.1 * Réseau existant

Noeuds

En chaque sommet i ($i \in T$) on dispose d'un parc de $|K_i|$ centrales dont chaque élément est caractérisé par la donnée d'un taux de panne $\tau_{k,i}$ et d'une puissance maximale $p_{k,i}^M$ ($k \in K_i$). L'aléa sur la production définit la puissance maximale disponible de la centrale d'indice (k,i) par une variable aléatoire $p_{k,i}^0$ telle que

$$p_{k,i}^0 = \begin{cases} p_{k,i}^M & \text{avec la probabilité } 1 - \tau_{k,i} \\ 0 & \text{avec la probabilité } \tau_{k,i} \end{cases}$$

Par conséquent, $\forall i \in T$, la puissance maximale que l'on peut injecter au noeud i est $p_i^0 = \sum_{k \in K_i} p_{k,i}^0$, variable aléatoire à valeurs dans

$[0; \sum_{k \in K_i} p_{k,i}^M]$ dont on cherchera la loi de probabilité en remarquant

que p_i^0 est une somme de variables aléatoires indépendantes.

Liaisons

Chaque liaison j ($j \in M$) est constituée de $|L_j|$ lignes montées en parallèle. Toute ligne d'indice $(1,j)$ ($\in L_j \times M$) se caractérise par une impédance $x_{1,j}$, une capacité maximale de transit $q_{1,j}^M$, un taux d'indisponibilité $\tau'_{1,j}$.

Pour tout j de M , notons V_j la différence de potentiel entre les noeuds reliés par la liaison j telle que si $\bar{V}_j = \min_{l \in L_j} x_{1,j} q_{1,j}^M$ on ait $|V_j| \leq \bar{V}_j$.

$\forall j \in M$, $\forall l \in L_j$, V_j fixée, on peut définir l'énergie transitée par la ligne $(1,j)$ par une variable aléatoire

$q_{1,j}^0 = a_{1,j}^0 v_j$ où $a_{1,j}^0$ variable aléatoire telle que

$$a_{1,j}^0 = \begin{cases} \frac{1}{x_{1,j}} & \text{avec probabilité } (1 - \tau'_{1,j}) \\ 0 & \text{avec probabilité } \tau'_{1,j} \end{cases}$$

l'énergie totale transitée par la liaison j est donc

$$q_j^0 = \sum_{l \in L_j} q_{1,j}^0 = A_j^0 v_j \text{ avec } A_j^0 = \sum_{l \in L_j} a_{1,j}^0 \text{ variable aléatoire}$$

à valeurs dans $[0, \sum_{l \in L_j} \frac{1}{x_{1,j}}]$ dont on précisera la loi de probabilité en sachant que A_j^0 est la somme de variables aléatoires indépendantes.

Désormais nous noterons sous forme matricielle i.e

q^0 vecteur aléatoire de composantes q_j^0 $j \in M$

v^0 vecteur à m composantes

A matrice d'admittance ($m \times m$) de composantes aléatoires telles que

$$A_{j,j}^0 = A_j^0 = \sum_{l \in L_j} a_{1,j}^0 \quad A_{j,k}^0 = 0 \quad \forall j \neq k.$$

1.2 Lois d'Equilibre de Kirchoff-Maxwell

* Loi des mailles

Le long de tout cycle la somme algébrique des différences de potentiel est nulle i.e $C^t v = 0$ (t signifiant transposée).

Cette relation permet donc d'exprimer les différences de potentiel des mailles notées $v_{\bar{M}}$ en fonction de celles des branches d'arbre notées $v_{\bar{N}}$ puisque

$C^t v = 0$ s'écrit

$$\boxed{H^t \frac{v_{\bar{N}}}{\bar{N}} + \frac{v_{\bar{M}}}{\bar{M}} = 0} \quad (1)$$

On ne conservera donc que $\frac{v_{\bar{N}}}{\bar{N}}$ comme variables à déterminer.

* Loi des Noeuds

Elle exprime la conservation de l'énergie en chacun des sommets : $\forall i \in T$ notons p_i la puissance injectée ($0 < p_i < \bar{p}_i$ avec \bar{p}_i réalisation de $\overset{\circ}{p}_i$)

\bar{q} une réalisation de $\overset{\circ}{q}$

l'énergie c_i proposée à l'utilisateur est $c_i = p_i - S_i \bar{q}$

Si la demande d_i se révèle supérieure à c_i , on procédera à un changement des V_j pour diminuer algébriquement $S_i \bar{q}$, et (ou) à une augmentation de p_i en respectant $p_i < \bar{p}_i$ de façon à satisfaire d_i . D'où la notion de défaillance δ_i en chaque noeud déterminée par

$$\delta_i = \max [0 ; d_i - (\bar{p}_i - S_i \bar{q})]$$

\bar{p}_i et \bar{q}_i étant des réalisations de variables aléatoires, on peut définir la défaillance en chaque noeud par la variable aléatoire

$$\delta_i = \max [0 ; d_i - (\overset{\circ}{p}_i - S_i \overset{\circ}{q})]$$

Or la consommation est connue en chaque noeud par une valeur maximale \bar{c}_i . On en déduit

P1.2 Proposition

$\left[\forall i \in T \text{ le réseau est non défaillant au noeud } i \text{ si et seulement si } \bar{c}_i - (\overset{\circ}{p}_i - S_i \overset{\circ}{q}) < 0 \right.$

C.N

$$\delta_i = \max [0 ; c_i - (\overset{\circ}{p}_i - S_i \overset{\circ}{q})] = 0 \quad \forall c_i < \bar{c}_i \quad \longleftarrow \\ c_i - (\overset{\circ}{p}_i - S_i \overset{\circ}{q}) < 0 \text{ donc en particulier pour } c_i = \bar{c}_i$$

C.S

$$\left. \begin{array}{l} \forall c_i < \bar{c}_i ; 0 < \delta_i < \max [0 ; \bar{c}_i - (\overset{\circ}{p}_i - S_i \overset{\circ}{q})] \\ \text{or } \bar{c}_i - (\overset{\circ}{p}_i - S_i \overset{\circ}{q}) < 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \delta_i = 0$$

De manière à obtenir la sécurité de distribution, on posera les contraintes

$$\boxed{p_i^0 - S_i^0 \bar{AV} \geq \bar{c}_i \quad \forall i \in T} \quad (2)$$

On cherchera ensuite, lorsque V aura été fixé, les conditions pour lesquelles on peut trouver, pour toute réalisation \bar{A} et \bar{p}_i de A et \bar{p}_i , la puissance p_i vérifiant $0 \leq p_i \leq \bar{p}_i$ de façon à assurer la loi des Noeuds ($p_i = d_i + S_i \bar{AV}$ avec $d_i \leq \bar{c}_i$ et $\bar{AV} = \bar{q}$)

Le réseau existant peut ne pas satisfaire les conditions (2), ($\delta_i^0 \neq 0$), ce qui nécessitera l'investissement de nouveaux ouvrages.

1.3 Investissement

1.3.1 Ouvrages candidats

. Centrales |U| types différents caractérisés par puissance maximale p_u^M et un taux de panne τ_u ($u \in U$) on définit comme précédemment la variable aléatoire p_u^0 telle que

$$p_u^0 = \begin{cases} p_u^M & \text{avec la probabilité } (1 - \tau_u) \\ 0 & \text{avec la probabilité } \tau_u \end{cases}$$

. Lignes |S| types différents caractérisés par une admittance b_s inversement proportionnelle à la longueur x_j de la liaison j ($\forall j \in M$) et un taux d'indisponibilité τ'_s d'où la définition de l'admittance aléatoire b_j^0 :

$$\forall j \in M \quad \forall s \in S \quad b_j^0 = \begin{cases} \frac{b_s}{x_j} & \text{avec probabilité } (1 - \tau'_s) \\ 0 & \text{avec probabilité } \tau'_s \end{cases}$$

1.3.2 Variables de décision

* Pour les centrales

$\forall i \in T, \forall u \in U$ désignons par z_u^i le nombre de centrales de type u qui seront placées au noeud i.

On obtient ainsi un accroissement Δp_i^0 de puissance maximale en chaque noeud :

$\forall i \in T \quad \Delta p_i^0(z_u^i) = \sum_{u \in U} p_u^0 z_u^i$ qui est donc une somme de variables aléatoires indépendantes.

* Pour les lignes

$\forall j \in M, \forall s \in S$ appelons w_s^j le nombre de lignes de type s placées sur la liaison j .

On en déduit une augmentation $\Delta A(w_s^j)$ de la matrice d'admittance définie par

$$\begin{aligned} \Delta A_{j,k}^0 &= 0 \quad \forall k \neq j \\ \Delta A_{j,j}^0 &= \sum_{s \in S} b_j^s w_s^j \end{aligned}$$

On peut remarquer que $\forall j \in M, \forall s \in S$ les variables aléatoires $b_j^s w_s^j$ sont indépendantes entre elles (états des lignes indépendants)

Pour le problème d'investissement, les contraintes (2) deviennent donc

$$(3) \quad \forall i \in T \quad p_i^0 + \Delta p_i^0(z_u^i) - S_i (A + \Delta A(w_s^j)) V \geq \bar{c}_i$$

* Différences de potentiel

On suppose que l'investissement de nouvelle lignes ne modifiera pas les bornes $\bar{v}_j = \min_{l \in L_j} x_{1,j}^M q_{1,j}^M$ existantes des

modules de tension
i.e $\forall j \in M \quad \forall s \in S \quad \frac{x_{j,q_s}^M}{b_s} \geq \bar{v}_j$

(q_s^M capacité maximale théorique de transit caractérisant une ligne de type s)

La relation (1) permet d'imposer des contraintes qu'aux variables v_j ($j \in \bar{N}$) d'où

$$v_j \in \bar{N} - \bar{v}_j \leq v_j \leq \bar{v}_j \quad (4)$$

$$v_k \in M - \bar{N} - \bar{v}_k \leq (H^k)^t v_{\bar{N}} \leq \bar{v}_k \quad (5)$$

1.3.3 Fonction économique

Soit f_u le coût d'investissement d'une centrale de type u
 g_j^s le coût d'investissement d'une ligne de type s
 placée sur la liaison j .

La fonction coût s'écrit

$$\sum_{u \in U} f_u \left(\sum_{i \in T} z_u^i \right) + \sum_{s \in S} \sum_{j \in M} g_j^s w_s^j$$

1.3.4 Le programme d'investissement

On cherchera les valeurs des variables z_u^i, w_s^j, v_j de façon
 à minimiser $\sum_{u \in U} f_u \left(\sum_{i \in T} z_u^i \right) + \sum_{s \in S} \sum_{j \in M} g_j^s w_s^j$

sous

$$(3) \quad p_i^0 + \Delta p_i^0(z_u^i) - s_i^{\bar{N}} (\bar{A} + \Delta \bar{A}(w_s^j)) \frac{\bar{N}}{\bar{N}} v_{\bar{N}} + s_i^{\bar{M}} (\bar{A} + \Delta \bar{A}(w_s^j)) \frac{\bar{M}}{\bar{M}} H^t v_{\bar{N}} \geq \bar{C}_i, \forall i \in T$$

$$(6) \quad (H^k)^t v_{\bar{N}} \leq \bar{v}_k \quad v_k \in M - \bar{N}$$

$$(7) \quad -(H^k)^t v_{\bar{N}} \leq \bar{v}_k \quad v_k \in M - \bar{N}$$

$$(4) \quad -\bar{v}_j \leq v_j \leq \bar{v}_j \quad v_j \in \bar{N}$$

$$(8) \quad z_u^i \in N \quad \forall i \in T \quad \forall u \in U$$

$$(9) \quad w_s^j \in N \quad v_j \in M \quad \forall s \in S$$

Ce programme comporte :

- La fonction économique linéaire et déterministe
- n (nombre de noeuds) contraintes (3) de nature aléatoire
- $2 \times (m - n + 1)$ contraintes linéaires (6) et (7)

- $(n - 1)$ contraintes de bornes (4)
- $n \times |U| + m \times |S|$ variables entières (z_u^i et w_s^j)
- $(n-1)$ variables continues ($v_j, j \in \bar{N}$)

C'est donc un programme à la fois mixte, de par ses variables décisionnelles, et stochastique d'après les contraintes (3).

On surmontera la difficulté des variables mixtes par agrandissement du domaine déterministe en remplaçant les contraintes (8) et (9) par $\forall i \in T \forall u \in U \quad 0 \leq z_u^i \leq n_u^i \quad \forall s \in S \forall j \in M \quad 0 \leq w_s^j \leq n_s^j$ avec n_u^i et n_s^j entiers fixes.

Par contre, il nous faut déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires $\overset{\circ}{p}_i, \Delta \overset{\circ}{p}_i, A, \Delta A$ qui sont somme de variables aléatoires discrètes et indépendantes.

Construire empiriquement les fonctions de répartition et les ajuster par des tests de convergence à des fonctions de répartition théorique, risque d'exiger l'étude d'un trop grand nombre de cas, ou de délaisser des situations, bien que de probabilité faible, importantes en pratique. L'approximation de lois discrètes à des lois continues usuelles nécessite un grand nombre de variables aléatoires, ce qui n'est pas le cas pour les noeuds où très peu de centrales sont implantées et des liaisons comportant généralement peu de lignes, et est gênée par des taux d'indisponibilité différents.

On a choisi d'après les caractéristiques techniques des ouvrages et en gardant une certaine homogénéité avec le cas réel, des lois Normales, usuelles en pratique, qui tiennent compte des plus ou moins fortes fréquences de pannes. Les paramètres espérance mathématique et écart type dépendront linéairement des taux d'indisponibilité, avec une plus ou moins forte dispersion autour de la moyenne, suivant leur importance : soit X la variable aléatoire représentant soit $\overset{\circ}{p}_{k,i}, \overset{\circ}{a}_{1,j}, \overset{\circ}{p}_u$, ou $\overset{\circ}{b}_s$ de valeur maximale \bar{X} et de taux d'indisponibilité τ .

On définit

$$\text{espérance de } X = E(X) = (\theta - \tau) \bar{X}$$

$$\text{écart type de } X = \sigma(X) = (\lambda + \tau) \bar{X}$$

avec

$$0,7 \leq \theta \leq 0,9 \quad \text{et} \quad (\theta + \lambda) \geq 0,95 \quad \text{pour les centrales}$$

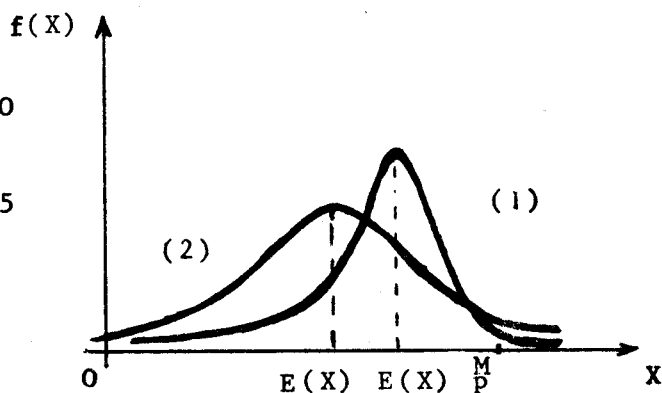
et

$$0,85 \leq \theta \leq 0,95 \quad (\theta + \lambda) \geq 0,97 \quad \text{pour les lignes.}$$

Pour une centrale, par exemple, la fonction de densité de probabilité $f(X)$ aura pour forme :

1) $\tau = 0,10 \quad \theta = 0,85 \quad \lambda = 0,10$

2) $\tau = 0,20 \quad \theta = 0,8 \quad \lambda = 0,15$



On verra d'ailleurs l'influence des valeurs de θ et λ sur les solutions optimales.

De ce choix on obtient pour tout i de τ des lois Normales pour les variables aléatoires réelles $Z_i(z_u^i, w_s^j, V) = \overset{0}{p}_i + \Delta \overset{0}{p}_i(z_u^i) - S_i(A + \Delta A(w_s^j))V$ dont les paramètres espérances et variances, qui sont somme d'espérances et de variances respectivement, varieront suivant les différentes valeurs prises par les variables de décision z_u^i, w_s^j, V_j .

1.4 Formulation déterministe du problème

On choisit une définition déterministe des contraintes (3) en prenant l'attitude des "programmes sous risque" : on désire la satisfaction de celles ci dans un certain pourcentage de cas. Ceci s'écrit

$$\text{Prob} [Z_i(z_u^i, w_s^j, V) \geq \bar{C}_i] \geq \alpha_i \quad \forall i \in T$$

avec

$$\alpha_i \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ fixé.}$$

On se permet donc une défaillance de disponibilité en chaque noeud dans au plus $100(1 - \alpha_i)\%$ des cas.

On a vu (Chap 2) que cette conception revient à imposer à \bar{C}_i d'être inférieure ou égale au quantile d'ordre $1 - \alpha_i$ ($\forall i \in T$). Ces quantiles s'obtiennent par une pondération entre les espérances mathématiques et les écarts types, dont le coefficient est le quantile d'ordre $(1 - \alpha_i)$ de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Le programme d'investissement devient le programme non linéaire déterministe P :

$$\text{minimiser } \sum_{u \in U} f_u \left(\sum_{i \in T} z_u^i \right) + \sum_{s \in S} \sum_{j \in M} g_j^s w_s^j$$

sous

$$(3) \quad \begin{aligned} E[Z_i(z_u^i, w_s^j, V)] - t_{\alpha_i} [\text{Var } Z_i(z_u^i, w_s^j, V)]^{1/2} &\geq \bar{C}_i \quad \forall i \in T \\ (H^k)^t \frac{V}{\bar{N}} &\leq \bar{V}_k \quad \forall k \in M - \bar{N} \\ -(H^k)^t \frac{V}{\bar{N}} &\leq \bar{V}_k \quad \forall k \in M - \bar{N} \\ -\bar{V}_j &\leq V_j \leq \bar{V}_j \quad \forall j \in \bar{N} \\ 0 &\leq z_u^i \leq n_u^i \quad 0 \leq w_s^j \leq n_{s2}^j \quad \forall u \in U, \forall s \in S, \forall i \in T, \forall j \in M \end{aligned}$$

$$\text{avec } t_{\alpha_i} \text{ défini par } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_{\alpha_i}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \alpha_i$$

$$\text{et } t_{\alpha_i} > 0 \text{ puisque } \alpha_i \in [\frac{1}{2}, 1]$$

Exprimons les espérances et variances :

$$\forall i \in T, E[Z_i(z_u^i, w_s^j, V)] = E(\bar{p}_i^0) + E(\Delta \bar{p}_i^0(z_u^i)) - S_i E(A + \Delta A(w_s^j)) V$$

avec

$$S_i E(A + \Delta A(w_s^j)) V = \sum_{j \in M} S_i^j \left[\sum_{l \in L_j} E(\bar{a}_{1,j}^0) + \sum_{s \in S} E(\bar{b}_s^0) \frac{w_s^j}{x_j} \right] V_j$$

$$E(\bar{p}_i^0) = \sum_{k \in K_i} E(\bar{p}_{k,i}^0); E[\Delta \bar{p}_i^0(z_u^i)] = \sum_{u \in U} E(\bar{p}_u^0) z_u^i$$

IV.11 (bis)

Pour les variances, toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont indépendantes entre elles, d'où :

$$\forall i \in T \text{ Var}[Z_i^0(z_u^i, w_s^j, V)] = \text{Var}(p_i^0) + \text{Var}(\Delta p_i^0(z_u^i)) + \text{Var}[S_i^0(A + \Delta A(w_s^j))V]$$

avec

$$\text{Var}[S_i^0(A + \Delta A(w_s^j))V] = \sum_{j \in M} (S_i^j)^2 \left[\sum_{l \in L_j} \text{var}(a_{l,j}^0) + \sum_{s \in S} \text{var}(b_s^0) \left(\frac{w_s^j}{x_j}\right)^2 \right] V_j^2$$

$$\text{Var}(p_i^0) = \sum_{k \in K_i} \text{Var} p_{k,i}^0$$

$$\text{Var}(\Delta p_i^0(z_u^i)) = \sum_{u \in U} \text{var}(p_u^0) (z_i^u)^2$$

Ce programme convexe entre dans le cadre d'application de la "Méthode des Centres" puisqu'en particulier le domaine des solutions réalisables vérifie $A \cap B \neq \emptyset$ et $A \cap B$ convexe fermé où A est l'ensemble convexe défini par les contraintes non linéaires et B le polyèdre défini par les contraintes linéaires.

On utilisera donc la "Méthode des Centres linéarisé" (partie 2) pour la résolution en variables continues. Possédant les valeurs optimales \hat{V}_j , il se pose le problème d'arrondir les solutions \hat{z}_u^i, \hat{w}_s^j aux valeurs entières immédiatement supérieures ou inférieures. Par souci d'optimalité, ce choix peut s'opérer de la manière heuristique suivante : on classe suivant leurs coûts d'investissement, les différentes combinaisons possibles de valeurs entières. A chaque proposition de valeurs on observe les contraintes (3) satisfaites. Pour cette (ou ces) contraintes (3) on retient la combinaison correspondante et on essaie la combinaison suivante pour les autres contraintes (3) jusqu'à les satisfaire toutes.

Théoriquement, le nombre de combinaisons possibles est $2(n \times |U| + m \times |S|)$, mais, heureusement, les problèmes envisagés ont présenté les particularités suivantes :

- le réseau initial, de par le choix des lois de probabilité, nécessitait un apport nouveau d'énergie en chaque noeud. L'investissement seul de nouvelles lignes ne pouvait pas résorbé ce manque en énergie.

De plus les lignes existantes n'étant pas saturées, la sélection s'est donc opérée simplement sur l'investissement de nouvelles centrales (justifiée par les valeurs trouvées des \hat{w}_s^j , ordre de 10^{-9} et 10^{-8} , ajustées à 0)

- V étant gardé constant et égal à \hat{V} , chaque noeud devient indépendant pour l'injection en énergie nouvelle. Or les solutions \hat{z}_u^i furent toutes comprises entre 0 et 1, le nombre maximum de combinaison de valeurs à proposer se trouve réduit à $2^{|U|}$ (16 pour nos problèmes)

SATISFACTION DE LA LOI DES NOEUDS

La formulation du problème permet d'affirmer que dans au moins $100 \alpha_i$ % des cas, à l'optimum, on pourra satisfaire toute demande d_i au plus égale à \bar{c}_i .

Mais on peut rencontrer le cas suivant :

Ayant fixé V à \hat{V} , si en un noeud le bilan de l'énergie transitée se traduit par un surplus (valeur algébrique négative) qui n'est pas complètement absorbé par la consommation, il est impossible de compenser par une injection d'énergie négative. Il en résulte un déséquilibre du réseau.

Pour parer à cette éventualité, donc satisfaire complètement la loi des Noeuds, il faut assurer que la puissance injectée $S_i(A + \Delta A(\hat{w}_s^j))\hat{V} + d_i$ soit positive ou nulle dans au moins $100 \alpha_i$ % des cas i.e

$$P[-S_i(A + \Delta A(\hat{w}_s^j))\hat{V} \leq d_i] \geq \alpha_i \quad \forall i \in T$$

$$\iff d_i \geq E[-S_i(A + \Delta A(\hat{w}_s^j))\hat{V}] + t_{\alpha_i} \sigma[-S_i(A + \Delta A(\hat{w}_s^j))\hat{V}] \quad \forall i \in T$$

or $0 \leq d_i \leq \bar{c}_i \quad \forall i \in T$ d'où $c_i^m \leq d_i \leq c_i^M \quad \forall i \in T$
 en posant $c_i^M = \bar{c}_i$

$$c_i^m = \max[0 ; E[-S_i(A + \Delta A(\hat{w}_s^j))\hat{V}] + t_{\alpha_i} \sigma[-S_i(A + \Delta A(\hat{w}_s^j))\hat{V}]]$$

On a défini ainsi de nouvelles bornes minimales c_i^m pour les demandes. Pour les problèmes traités on verra que $\Delta A(\hat{w}_s^j) = 0$ et que $0 \leq c_i^m \leq \frac{1}{3} c_i^M$

2 La méthode des Centres

La "Méthode des Centres" due à Huard [4.5] recouvre une famille d'algorithmes très diversifiés [4.6], [4.8], permettant d'optimiser des programmes mathématiques non linéaires.

Une de ces variantes est la "Méthode des Centres par linéarisations" ou encore "Méthode des Centres Linéarisée" qui s'est révélée, en pratique, avec la modification dite de "centrage", être une des meilleures méthodes connues dans le classement présenté par Denel [4.2].

Après la présentation de la méthode générale, nous décrivons la "Méthode des Centres Linéarisée" utilisée pour résoudre les programmes déterministes, en variables continues, obtenus à partir du programme stochastique précédemment formulé.

2.1 La méthode Générale

L'idée directrice de cette méthode est de construire une suite de points réalisables qui améliorent la fonction économique, sans accéder trop rapidement à la frontière du domaine. On définit ces points intérieurs comme "centres" de sous ensembles du domaine, qualifiés "tronçons", qui diminuent par inclusion.

L'éloignement d'un point à la frontière d'un tronçon se mesure par l'intermédiaire d'un représentant d'une classe de fonctions appelées F-distances.

Soit le problème général P

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f(x) \\ g_i(x) \geq 0 \quad i = 1 \dots m \\ x \in B \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

avec f et g_i , ($i = 1, \dots, m$), fonctions concaves continûment différentiables

B polyèdre fermé.

Notons $A = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \geq 0, i = 1 \dots m\}$ tel que $A \cap B \neq \emptyset$

A est convexe fermé

$F =] \inf\{f(x) / x \in A \cap B\}, \sup\{f(x) / x \in A \cap B\}[\subset \mathbb{R}$

On définit un tronçon du domaine A par

$$E(\lambda) = \{x \in A / f(x) \geq \lambda, \lambda \in K\}$$

Un exemple de F-distance est la fonction numérique

$$d(x, \lambda) = \min \{f(x) - \lambda, g_i(x) / i = 1 \dots m\}$$

On détermine les centres par la résolution des problèmes non linéaires convexes

$$P_k \quad \begin{cases} \text{maximiser } d(x, \lambda_k) \\ x \in E(\lambda_k) \cap B \end{cases}$$

où $\lambda_k = f(x^{k-1})$ avec x^{k-1} solution de P_{k-1} i.e centre de $E(\lambda_{k-1}) \cap B$

CONVERGENCE

Si à une étape k , on a $E(\lambda_k) \cap B = \emptyset$ alors x^k est solution optimale du problème P , sinon tout point d'accumulation de la suite infinie des x^k est solution optimale du problème P .

REMARQUE

La maximisation dans P_k peut être conduite à ε_k près, par la recherche d' ε_k -centre, sans détruire la convergence de l'algorithme (en imposant $\varepsilon_k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$) ce qui permet l'application sur ordinateurs.

c^k est dit ε_k -centre si $d(c^k, \lambda_k) \geq \max \{d(x, \lambda_k) / x \in E(\lambda_k) \cap B\} - \varepsilon_k > 0$

2.2 Méthode des Centres linéarisée

La linéarisation des fonctions non linéaires permet de profiter des progrès acquis dans la résolution des programmes linéaires.

Soient $f'(x;y) = f(y) + \nabla f(y) \cdot (x-y)$ la linéarisation de $f(x)$ au point y (on remplace le graphe de $f(x)$ par son hyperplan tangent au point $(y; f(y))$)

de même $g'_i(x;y) = g_i(y) + \nabla g_i(y) \cdot (x-y)$ $i = 1, \dots, m$

A partir de $d(x, \lambda) = \min \{f(x) - \lambda, g_i(x) / i = 1, \dots, m\}$ on peut définir la fonction F-distance linéarisé

$$d'(x, \lambda; y) = \min \{f'(x; y) - \lambda, g'_i(x; y) / i = 1, \dots, m\}$$

pour y fixé, d' est linéaire par morceaux, continue, concave et $d(x, \lambda) \leq d'(x, \lambda; y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

On obtient un centre x^k du tronçon non linéaire $E(\lambda_k)$ en effectuant une succession théoriquement infinie de

- résolution de programmes linéaires

$$PL(\lambda_k; y^h) \quad \begin{cases} \text{maximiser } \mu \\ f'(x; y^h) - \lambda_k \geq \mu \\ g'_i(x; y^h) \geq \mu \\ x \in B \\ (\mu) \end{cases}$$

Soit z^h la solution optimale (z^h centre du domaine linéarisé $EL(\lambda_k)$)

- Maximisation de $d(x, \lambda_k)$ sur $[y^h, z^h]$

La suite des points $(y^h)_{h \in \mathbb{N}}$ converge alors vers \bar{x} .

En pratique :

- l'utilisation d' ϵ centres permet de ne résoudre qu'un nombre fini h^* de programmes PL (λ_k, y) à chaque itération, sans modifier la convergence de la méthode.

En fait on peut se contenter d'un seul programme linéaire par troncature et le point obtenu y^1 peut être considéré comme un ϵ -centre (on posera $x^{k+1} = y^1$) d'où l'intérêt de la méthode.

- les programmes PL (λ_k, y^h) ont tous le même nombre de contraintes et de variables.

REMARQUES

- 1) Les procédés de linéarisation peuvent très mal approximer le domaine non linéaire. e on peut obtenir un problème totalement différent du problème d'origine (cas de fortes courbures des contraintes) ou bien obtenir une faible amélioration de la fonction économique si la direction (y^h, z^h) "pénètre" très peu dans le domaine non linéaire.
- 2) Une mauvaise homogénéité dans les valeurs calculées des fonctions définissant la F-distance est un obstacle à l'obtention de "bons" centres i.e si une contrainte prédomine par son gradient les points risquent de demeurer proches de celle-ci et de provoquer une stagnation de la fonction économique dans le cas de la contrainte équipotentielle $f(x) = \lambda$

Ces considérations ont conduit Denel [4.3] à améliorer l'application de la méthode grâce à la modification qualifiée "algorithme de centrage"

On répond à la remarque 1 en assurant une meilleure représentation du domaine non linéaire par l'adjonction provisoire de contraintes linéaires supplémentaires définies par des hyperplans de linéarisation limitant le déplacement des points z^h .

Une réponse à la remarque 2 est la normalisation des contraintes de façon à réaliser

$$||\nabla f(y)|| = ||\nabla g_i(y)|| = 1 \quad \forall i = 1 \dots m$$

où $||\cdot||$ norme Euclidienne

ce qui introduit les fonctions

$$D : \mathbb{R}^n \times B \times K \rightarrow \mathbb{R} \quad D(x, y, \lambda) = \min \left\{ \frac{f(x) - \lambda}{||\nabla f(y)||} ; \frac{g_i(x)}{||\nabla g_i(y)||} \quad i = 1 \dots m \right\}$$

et

$$d' : \mathbb{R}^n \times B \times K \rightarrow \mathbb{R} \quad d'(x, y, \lambda) = \min \left\{ \frac{f'(x, y) - \lambda}{||\Delta f(y)||} ; \frac{g'_i(x, y)}{||\nabla g_i(y)||} \quad i = 1 \dots m \right\}$$

On fait l'hypothèse :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad 0 < \alpha \leq \beta$$

$$\forall x \in B \quad \alpha \leq ||\nabla f(y)|| \leq \beta \quad \text{et} \quad \alpha \leq ||\nabla g_i(x)|| \leq \beta \quad i=1 \dots m$$

En pratique, on pondérera en outre $f(x)$ ou $f'(x, y)$ par un coefficient θ ($\theta \leq 1$) indépendant du nombre d'itérations de façon à éloigner le centre de l'équipotentielle $f(x^k) = \lambda_k \quad \forall k$

ALGORITHME

à l'itération k on dispose de $x^k \in A \cap B \quad \lambda_k = f(x^k)$

- 1) Linéariser f et g_i $i = 1 \dots m$ en x^k

$E^L(\lambda_k)$ polyèdre obtenu à partir de $E(\lambda_k)$

maximiser $d(x, x^k, \lambda_k)$ sur $E^L(\lambda_k) \cap B$. Soit z^k l'optimum de ce programme linéaire.

- 2) Maximiser $D(x, x^k, \lambda_k)$ sur $[x^k, z^k]$ soit y^{k+1} l'optimum

- 3) Choisir x^{k+1} dans $E'_{k+1} \cap B$ avec $E'_{k+1} = \{x \in A / f(x) \geq f(y^{k+1})\}$

centrage si nécessaire : pour $h = 0$ $t_h = y^{k+1}$ $u_h = z^k$.

- (1) Prendre w_h un point de $[t_h, u_h]$ tel que $w_h \in E(\lambda_k) \cap B$ si w_h n'existe pas aller en (4)

Choisir parmi les contraintes $g_i(x)$, $f(x) - \lambda_k$ la fonction l telle que

$$|l(w_h)| = \min\{|f(w_h) - \lambda_k|, |g_i(w_h)|, i = 1 \dots m\}$$

définir

$$S_{h+1} = \{x / l(w_h) + \nabla l(w_h) \cdot (x - w_h) \geq \mu\} \cap S_h$$

$$\text{avec } S_0 = E^L(\lambda_k) \cap B.$$

- (2) Trouver u_{h+1} optimum du programme linéaire maximiser μ sous $(x, \mu) \in S_{h+1}$

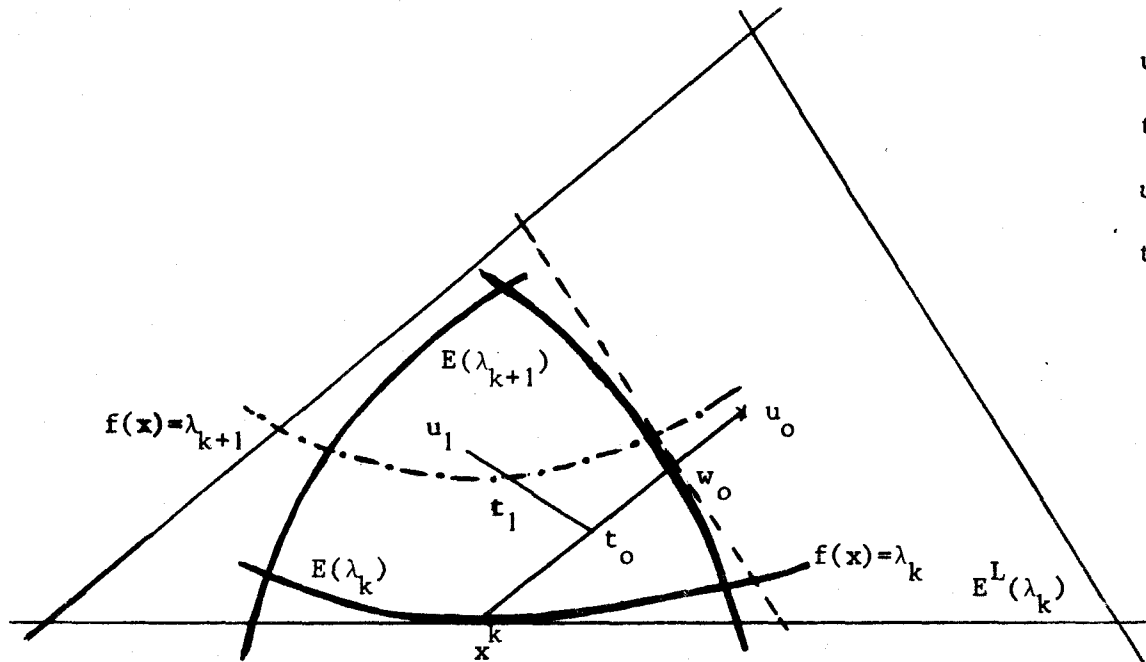
maximiser D sur $[t_h, u_{h+1}]$; soit t_{h+1} l'optimum

- (3) Aller en 1 avec $h + 1$

- (4) Choisir pour point x^{k+1} celui qui donne, parmi y^{k+1} ou t_h la meilleure valeur de la fonction économique

- 4) Aller en 1 avec $k + 1$ au lieu de k

On peut schématiser cet algorithme de la façon suivante :



$$\begin{aligned} u_0 &= z^k \\ t_0 &= y^{k+1} \\ u_1 &= z^{k+1} \\ t_1 &= x^{k+1} \end{aligned}$$

MISE EN PRATIQUE : Denel [4.3]

- chaque contrainte additionnelle a pour effet de rendre u_h extérieur au nouveau polyèdre d'où $u_{h+1} \neq u_h$
- On choisit un nombre relativement petit de contraintes additionnelles pour toute itération ou bien on adapte ce nombre suivant le besoin.
- On peut normer les contraintes additionnelles de façon à rendre équidistants les points t_h de la contrainte supplémentaire et de l'équipotentielle économique.
- La résolution des programmes linéaires s'opère par la méthode simpliciale à variables bornées avec inverse explicite (transformation de l'inverse de base et de la solution à chaque itération).

- L'enchaînement des programmes linéaires s'effectue par la technique dual simplex adaptée aux variables bornées.
- On maximise les fonctions sur un segment par des procédés de dichotomie.

VARIANTES

Beuneu [4.1] accélère la maximisation sur un segment par une technique d'interpolation polygônale et adapte l'étape 3) (2) de l'algorithme à ses problèmes de "Dispatching" en préférant maximiser D sur $[\bar{x}^k, u_{h+1}]$

La méthode des Centres Linéarisée, s'est révélée très performante sur les problèmes Tests de Colville, nous emploierons donc le code de Denel avec les particularités propres à nos problèmes :

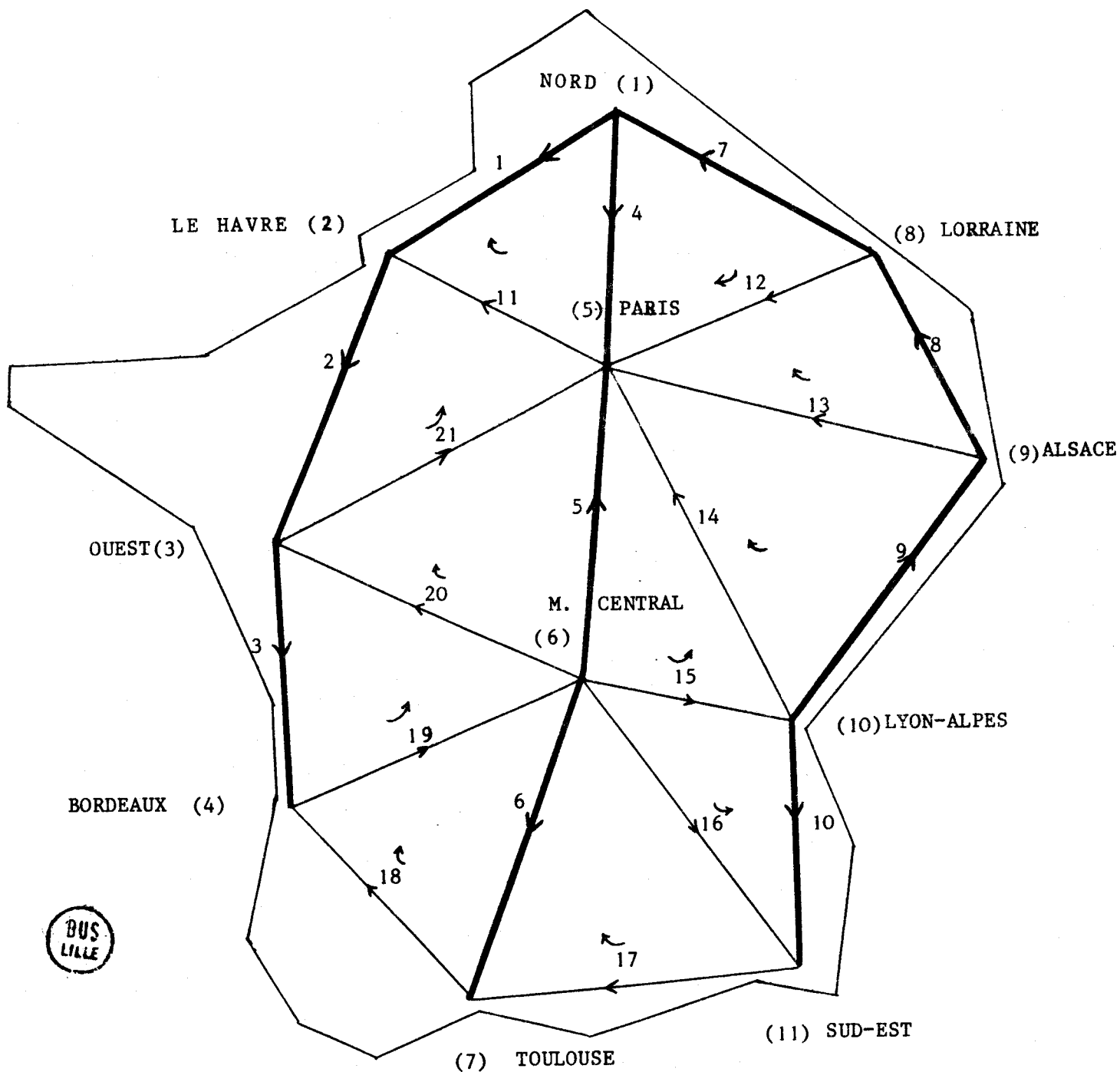
On effectue un nombre minimum de contraintes additionnelles et on l'augmente si nécessaire, jusqu'à obtenir une très faible amélioration de la F -distance D . En effet, un manque de ces contraintes supplémentaires influençait fortement la rapidité de la convergence. En outre la pondération de ces contraintes par $||\nabla l(x^k)||$ s'est révélée plus efficace.

3 Etude des programmes déterministes

La répartition se schématise par le graphe ci-dessous.

Réseau [11 noeuds
21 Liaisons

→ branches d'arbres
→ maillons
↻ cycles



Les caractéristiques du réseau existant sont mises en annexe A.

Les ouvrages candidats à l'investissement sont de 4 types ($|U| = 4$) pour les centrales et de 2 sortes ($|S| = 2$) pour les lignes. Par conséquent le programme mathématique a

- 11 contraintes non linéaires
- 22 contraintes linéaires
- 86 variables décisionnelles et 10 auxiliaires ($\frac{V}{\bar{N}}$)
- 96 contraintes de bornes.

C'est donc un programme de taille relativement importante.

Donnons les caractéristiques des ouvrages supplémentaires possibles :

. Centrales

Type	Puissance Maximale $\frac{M}{P_u}$ (MW)	Taux d'indisponibilité τ_u	Coût d'investissement f_u ($10^3 F$)
T1	125	0,10	1510 ⁴
T2	240	0,10	2410 ⁴
T3	600	0,12	4510 ⁴
T4	1200	0,15	14410 ⁴

. Lignes

Type	Capacité maximale Transportée $\frac{M}{Q_s}$ (MW)	Réactance $\frac{l}{b_s}$ (Ω/km)	Taux d'indisponibilité τ'_s	Coût d'investissement $\frac{g_j}{x_j}$ ($10^3 F/\text{km}$)
1	385	0,40	0,02	100
2	1300	0,11	0,02	200

Notre formulation du problème demande 2 choix importants :

- celui des taux de satisfaction α_i pour le passage au problème déterministe. Les valeurs de α_i influent à la fois sur la forme du domaine des solutions réalisables par l'intermédiaire des coefficients de pondération t_{α_i} des fonctions non linéaires dans l'expression des contraintes, et sur son contenu qui diminue avec l'accroissement des α_i . C'est par conséquent différents problèmes déterministes qui en résultent et on a comparé la résolution et les solutions de 3 choix : programmes P_1, P_2, P_3
- celui des paramètres espérances et variances des lois Normales i.e celui des valeurs de θ et λ . On peut ainsi obtenir différents programmes stochastiques avec des variables aléatoires plus ou moins dispersées autour de leurs moyennes. Cette influence apparaît donc dans la considération du problème posé et dans le rapprochement proposé des aléas aux situations observées réellement. On a étudié 3 programmes stochastiques différents par la comparaison des 3 programmes déterministes déduits : P_1, P_4 et P_5 .

Enfin pour la même version déterministe d'un programme stochastique (problème P_4) on a mis en évidence l'influence de variations de 5% et de 10 % des consommations (problèmes P_6 et P_7) qui peuvent déboucher sur un plan de prévision d'investissement à moyen terme.

Les résolutions de tous ces problèmes se sont effectuées sur l'ordinateur C I I 10070 (mémoire de 96 K soit 98304 mots de 32 bits) Pour la "méthode des Centres Linéarisée" le code de Denel [4.2] fut utilisé mais après transcription en une version FORTRAN.

Cette méthode demande de déterminer par tâtonnement des coefficients tels que pondération de la fonction économique ou nombre de contraintes additionnelles. En prenant le problème P_1 pour base cette recherche a donné les résultats suivants :

- pondération de la fonction économique par 0,1
- nombre de linéarisation par troncatures : 1
- coefficient de réduction de l'intervalle de dichotomie 10^5
- nombre minimum de contraintes additionnelles : 5
- nombre maximum de contraintes additionnelles : 21

Le procédé d'adaptation du nombre de contraintes additionnelles nécessaires entre chaque troncature, reposant sur un test d'amélioration de la F-distance, a permis de conserver ces bornes (5 et 21) pour les autres programmes. On s'est aperçu en outre, que l'on pouvait garder utilement les autres coefficients fixés aux valeurs trouvées pour la résolution de tous les problèmes.

De même, le point de départ choisi, définissant un investissement important s'est révélé réalisable pour tous nos exemples.

Ses composantes sont :

$$v_i \in T \quad z_1^i = z_2^i = z_3^i = 3 \quad z_4^i = 5 \quad \text{avec } |T| = 11$$

$$v_j \in M \quad w_1^j = w_2^j = 1 \quad \text{avec } |M| = 21$$

$$v_1 = 3500 \quad v_2 = 1500 \quad v_3 = -7000 \quad v_4 = 1000 \quad v_5 = 1000$$

$$v_6 = 1000 \quad v_7 = 2000 \quad v_8 = -1000 \quad v_9 = -7000 \quad v_{10} = -2200$$

3.1 Influence du choix des taux α_i

$$P_1 : \alpha_i = 0,9 \quad v_i \in T$$

$$P_2 : \alpha_i = 0,9 \quad v_i \in T \text{ sauf } \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_8 = 0,95$$

$$P_3 : \alpha_i = 0,95 \quad v_i \in T$$

Les bornes de la consommation sont les données \bar{c}_i .

Les paramètres des lois de probabilité sont fixés par :

réseau existant : centrales : $\theta = 0,8$ $\lambda = 0,15$
 lignes : $\theta = 0,9$ $\lambda = 0,08$
 investissement : centrales : $\theta = 0,85$ $\lambda = 0,10$
 lignes : $\theta = 0,95$ $\lambda = 0,02$

ce qui donne, dans le cas des puissances injectées par exemple, pour valeurs aux espérances $E(p_i^0)$ et écarts types $\sigma(p_i^0)$

Noeuds	$E(p_i^0)$	$\frac{E(p_i^0)}{M_{p_i}}$	$\sigma(p_i^0)$	$\frac{\sigma(p_i^0)}{M_{p_i}}$
1	2536	0,77	143	0,04
2	868	0,70	164	0,13
3	1445	0,71	191	0,09
4	1094	0,81	240	0,17
5	4081	0,69	319	0,05
6	1913	1	0	0
7	1325	0,94	60	0,04
8	1229	0,78	126	0,08
9	687	0,85	56	0,07
10	4044	0,93	100	0,02
11	1772	0,94	65	0,03

On s'aperçoit de l'influence des taux de pannes en particulier sur l'éloignement de l'espérance $E(p_i^0)$ par rapport à la puissance maximale théorique M_{p_i} .

3.1.1 Sur la résolution en variables continues

On peut dresser le tableau des différentes étapes

n° de centre	P ₁ coût	P ₂ coût	P ₃ coût
3	36 106 151	39 687 550	36 795 415
5	11 141 031	8 204 259	8 072 072
7	5 298 255	3 413 909	3 963 336
9	2 795 898	2 952 157	3 400 531
11	2 583 319	2 882 448	3 283 854
13	2 538 975	2 870 363	3 265 521
15	2 524 298	2 862 776	3 260 498
17	2 520 558	2 857 917	3 259 512
20	2 519 766	2 857 357	3 258 203
23	2 519 733,9	2 857 319	3 257 451
24	2 519 733,0	2 857 316	3 257 388
Temps en s	668	837	851

On obtient à l'optimum une meilleure précision pour P₁ (7 chiffres) et P₂ (6 chiffres) que pour P₃. Des valeurs de α_i plus grandes (P₃) donnent plus d'importance aux fonctions non linéaires et influencent le comportement la méthode des centres linéarisée". Une explication à ce phénomène peut être une plus forte courbure des contraintes qui nécessite un centrage maximum (augmentation du temps) et gêne la précision. D'après ces exemples une demande de satisfaction plus sévère sur les contraintes (augmentation de 0,05 sur α_i) multiplie le temps par 27%

On a en outre optimum de P₁ = 0,88 optimum de P₂ = 0,78 optimum de P₃ du fait de l'inclusion des domaines.

3.1.2 Sur les solutions optimales (variables continues)

Dans ces tableaux ne figureront pas les variables d'ordre 10^{-6} à 10^{-9} supposées égales à 0 (notamment les variables w_s^j)

Ceci fut justifié par le traitement d'un problème du type P_3 réduit à 54 variables (pas d'investissement de lignes), l'optimum obtenu était inférieur de 1 % et les solutions furent sensiblement de mêmes valeurs.

Noeuds	P_1	P_2		P_3	
	T3 z_3^i	T2 z_2^i	T3 z_3^i	T2 z_2^i	T3 z_3^i
1	0,60		0,77	0,25	0,64
2	0,69		0,89	0,31	0,74
3	0,82	0,03	0,76	0,38	0,88
4	0,28		0,36	0,01	0,30
5	1,43	0,13	1,31	0,75	1,51
6	0,14		0,20	0,01	0,15
7	0,18		0,24		0,20
8	0,54	0,02	0,50	0,25	0,58
9	0,27	0,05	0,34	0,16	0,28
10	0,38		0,49	0,03	0,41
11	0,22		0,29	0,04	0,24

On s'aperçoit que pour $\alpha_i = 0,9 \forall i \in T(P_1)$ l'investissement en centrales de type T3 est préféré à tout autre. On trouve la justification par comparaison des caractéristiques (rapports puissances maximales et rapports coûts) et on obtient le classement suivant, par ordre de rentabilité : T3, T2, T1, T4.

Une augmentation des α_i provoque d'ailleurs l'investissement en centrales de type T2, en gardant les mêmes ordres de grandeur pour les solutions en T3.

IV.27

On aurait pu penser d'après les données que des noeuds tels que Massif Central (6) ou Lyon Alpes (10) ne nécessiteraient pas d'investissement, mais ces centres, par l'intermédiaire des lignes, alimentent entre autre Paris (5), noeud très consommateur.

Liaison	P_1	P_2	P_3
	V_j	V_j	V_j
1	1159,466	1259,836	1174,086
2	2040,656	2612,366	2076,612
3	-5018,779	-5750,284	-4733,981
4	1890,581	2237,562	1925,590
5	3894,062	4093,429	3765,168
6	-2514,540	-2709,515	-2398,311
7	-1266,593	-1679,543	-1218,846
8	-1183,421	- 916,036	-1178,904
9	5122,147	5237,706	4885,494
10	- 68,110	- 120,200	- 36,074
11	- 731,114	- 977,731	- 751,504
12	623,987	558,024	706,744
13	- 559,433	- 358,012	- 472,160
14	4562,713	4879,694	4413,334
15	- 668,650	- 786,265	- 648,165
16	- 736,761	- 906,465	- 684,240
17	-1777,779	-1803,050	-1714,071
18	2699,364	2687,295	2754,606
19	- 184,824	22,220	- 356,295
20	5203,603	5723,064	5090,276
21	-1309,541	-1634,635	-1325,108

On constate, entre P_1 et P_2 , que rendre plus contraignant certains noeuds implique une nouvelle répartition de l'énergie par une augmentation des modules des différences de potentiel des liaisons passant par ces noeuds, accompagnée d'une diminution pour les autres lignes constituant les mailles correspondantes.

OUEST (3) transit modifié par liaisons : 2,3,20,21

PARIS (5) transit modifié par liaisons : 4,5,11,14,21

LORRAINE (8) transit modifié par liaisons : 7

La question posée est : où est comment investir ?

C'est par conséquent les valeurs des solutions optimales qui nous intéressent et nécessitent l'ajustement. Mais avant, examinons les défaillances ou manques d'énergie en chaque noeud lorsque le réseau est mis sous les différences de potentiel \hat{V}_j et l'investissement nul (variables décisionnelles mises à 0)

Noeuds	P_1 δ_i	P_2 δ_i	P_3 δ_i
1	299,254	297,051	291,111
2	274,924	341,362	337,029
3	323,833	301,519	402,116
4	111,957	142,135	121,618
5	560,299	529,560	706,636
6	59,833	81,201	63,740
7	73,910	98,005	82,189
8	214,509	198,368	267,544
9	106,080	140,050	138,635
10	152,152	194,875	165,406
11	90,238	114,874	104,194

L'augmentation de la défaillance suit celle du désir de satisfaire les contraintes ce qui nécessite un investissement plus important pour P_3 que pour P_1 . Ces valeurs de δ_i nous guident pour proposer des valeurs entières aux variables de décision.

3.1.3 Sur les solutions entières

Noeuds	P ₁				P ₂				P ₃			
	T1 z_1^i	T2 z_2^i	T3 z_3^i	T4 z_4^i	T1 z_1^i	T2 z_2^i	T3 z_3^i	T4 z_4^i	T1 z_1^i	T2 z_2^i	T3 z_3^i	T4 z_4^i
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
5	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	2	0
6	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
7	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
8	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
9	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
10	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
11	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
Optimum	3 630 000				3 900 000				4 260 000			

On vérifie qu'en certains noeuds, le manque d'énergie, mis en évidence par la valeur de la solution continue en T3, peut être comblé par l'investissement de centrales de coût moindre : type T1 (noeud 6 par exemple). Un simple arrondi des valeurs en T3 à l'unité pour P₁ aurait conduit l'investissement de 12 centrales soit un coût double du coût optimal obtenu par la résolution en variables continues.

Néanmoins, à cause de certaines valeurs faibles des z_u^i (en continu) et des différences entre les quantités δ_i et les caractéristiques des centrales, on obtient une augmentation du coût de 44 % pour P₁, 36 % pour P₂, 30 % pour P₃.

Cet accroissement représente le coût de 2 centrales de type T_3 ou de 4 centrales de type T_2 . Plus on devient exigeant (α_1 plus fort) plus l'écart diminue puisque les défaillances relevées se rapprochent des caractéristiques des centrales à investir. Il en résulte que certains noeuds (6,9,11) sont insensibles à l'augmentation de α_1 puisque leurs solutions entières d'investissement restent constantes mais par contre elles se modifient pour les centres sollicités par une forte demande (1,3,5). Notons que Paris (5) prédomine dans cet investissement conformément aux solutions continues.

Cet ajustement entraîne des surplus en énergie maximale disponible qui permettent une augmentation Δc_i^M des bornes maximales de consommations possibles. En général Δc_i^M est faible (moins de 4 %) ce qui renforce la valeur de l'ajustement. Il est à remarquer que ΔC_5^M (Paris) demeure très faible.

Noeuds	P_1		P_2		P_3	
	ΔC_M	$\frac{\Delta C_M}{C_M}$	ΔC_M	$\frac{\Delta C_M}{C_M}$	ΔC_M	$\frac{\Delta C_M}{C_M}$
1	21	0,009	74	0,032	62	0,026
2	102	0,139	36	0,049	24	0,032
3	60	0,028	68	0,032	59	0,028
4	50	0,045	20	0,018	35	0,031
5	19	0,003	40	0,006	14	0,002
6	24	0,019	4	0,003	18	0,024
7	13	0,016	61	0,077	3	0,003
8	44	0,038	57	0,050	77	0,067
9	51	0,046	17	0,015	13	0,011
10	14	0,004	62	0,019	87	0,027
11	69	0,038	44	0,024	49	0,027

3.1.4 Satisfaction de la loi des Noeuds (tableau page 31)

Noeuds	P ₁			P ₂			P ₃			C _M données
	$E(S_i^{\circ}AV)$	$\sigma(S_i^{\circ}AV)$	C _m	$E(S_i^{\circ}AV)$	$\sigma(S_i^{\circ}AV)$	C _m	$E(S_i^{\circ}AV)$	$\sigma(S_i^{\circ}AV)$	C _m	
1	277,438	11,744	0	334,956	14,122	0	278,982	11,863	0	3211
2	201,224	11,394	0	267,324	14,670	0	205,849	11,621	0	729
3	-551,161	20,641	578	-641,190	23,907	681	-539,887	20,177	574	2071
4	- 2,995	15,778	24	26,866	16,933	0	- 20,431	15,531	46	1908
5	-1762,513	52,315	1831	-1907,497	55,931	2000	-1729,023	50,789	1813	5984
6	696,147	42,066	0	714,078	44,708	0	687,669	40,648	0	1222
7	529,577	20,274	0	553,262	21,240	0	515,953	19,771	0	787
8	144,582	10,844	0	84,271	9,699	0	153,315	10,697	0	1135
9	-378,339	19,656	404	-344,153	19,667	370	-366,040	18,918	398	1035
10	852,602	39,792	0	894,116	42,237	0	829,106	38,382	0	3204
11	- 6,558	7,55	17	17,965	8,257	0	- 15,492	7,167	28	1784

IV.31



On a calculé, sous les différences de potentielles \hat{V}_j , la somme algébrique de l'énergie apportée ($E(S_i, \hat{AV}) < 0$) ou retranchée ($E(S_i, \hat{AV}) > 0$) par les lignes en chaque noeud.

On peut alors déterminer $C_i^m = \max[0 ; -E(S_i, \hat{AV}) + t_{\alpha_i} \sigma(S_i, \hat{AV})]$.

Pour P_1 et P_3 , ce sont les mêmes noeuds (3,4,5,9,11) qui demandent $C_i^m \neq 0$ tandis que P_2 se différencie par : les valeurs fortes des C_i^m augmentent tandis que les faibles deviennent nulles par la nouvelle répartition d'énergie pour ce problème.

De façon générale on a $0 \leq C_i^m \leq \frac{C_i^M}{3} \quad \forall i \in T$

Le tableau précédent permet d'affirmer que pour toute demande d_i telle que $C_i^m \leq d_i \leq C_i^M + \Delta C_i^M$ la loi des noeuds sera vérifiée.

3.2 Influence du choix des paramètres de lois de probabilité

α_i fixé à 0.9 $\forall i \in T$

bornes des consommations données \bar{c}_i

On comparera le problème P_1 précédent avec 2 autres programmes P_4 et P_5 issus de 2 programmes stochastiques différents (paramètres des lois de probabilité modifiés) définis par :

P_4 : réseau existant : θ augmenté de 0.05 pour les centrales et les lignes par rapport à P_1 et λ diminué de 0.05

centrales	:	$\theta = 0.05$	$\lambda = 0.10$
lignes	:	$\theta = 0.95$	$\lambda = 0.03$
investissement :			
centrales	:	$\theta = 0.85$	$\lambda = 0.10$ (inchangé)
lignes	:	$\theta = 0.95$	$\lambda = 0.02$ (inchangé)

P_5 : se différencie de P_4 par une augmentation de \bar{c}_i de 0.05 pour les nouvelles centrales i.e $\theta = 0.9 \lambda = 0.05$

Pour le programme P_4 par exemple, on obtient le tableau des puissances injectées suivant que l'on pourra comparer avec celui de P_1 .

Noeuds	$E(\overset{\circ}{P}_i)$	$\frac{E(\overset{\circ}{P}_i)}{P_i^M}$	$\sigma(\overset{\circ}{P}_i)$	$\frac{\sigma(\overset{\circ}{P}_i)}{P_i^M}$
1	2657	0,80	115	0,03
2	930	0,75	131	0,10
3	1533	0,75	158	0,07
4	1135	0,84	61	0,04
5	4374	0,73	259	0,04
6	1913	1	0	0
7	1337	0,95	48	0,03
8	1285	0,81	101	0,06
9	704	0,87	47	0,05
10	4087	0,95	80	0,02
11	1788	0,95	53	0,03

Le changement des valeurs de θ et λ provoque donc une augmentation des espérances $E(\overset{\circ}{P}_i)$ et une diminution de la dispersion.

3.2.1 Sur la résolution en variables continues.

n° de centre	coût P_1	coût P_4	coût P_5
3	36 106 151	5 204 812	6 832 975
5	11 141 031	1 807 840	1 506 980
7	5 298 255	1 256 014	1 133 615
9	2 795 898	1 189 848	1 086 499
11	2 583 319	1 184 320	1 074 348
13	2 538 975	1 182 777	1 072 609
15	2 524 298	1 182 599	1 072 302

17	2 520 558	1 182 581	1 072 255
20	2 519 766	1 182 558	1 072 246,4
21	2 519 754	1 182 557,4	1 072 245,7
22	2 519 738	1 182 557,0	
23	2 519 733,9		
24	2 519 733,0		
Temps en s	668	606	589

La méthode des centres Linéarisée donne des résultats très précis pour ces trois problèmes puisque l'on obtient les 7 chiffres exacts à chaque optimum. Les nouvelles valeurs de θ et λ ont augmenté les coefficients des fonctions linéaires et diminué les fonctions non linéaires dans l'expression des contraintes. Cette modification du domaine, qui résulte donc d'une moins grande influence des pannes, donne une réduction de moitié du coût d'investissement et un gain de temps de résolution de 10 %.

3.2.2 Sur les solutions optimales

Noeuds	P_1	P_4	P_5
	$T3 \begin{matrix} i \\ z_3 \end{matrix}$	$T3 \begin{matrix} i \\ z_3 \end{matrix}$	$T3 \begin{matrix} i \\ z_3 \end{matrix}$
1	0,60	0,28	0,26
2	0,69	0,32	0,30
3	0,82	0,39	0,36
4	0,28	0,13	0,11
5	1,43	0,65	0,61
6	0,14	0,03	0,03
7	0,18	0,09	0,07
8	0,54	0,25	0,23
9	0,27	0,12	0,11
10	0,38	0,18	0,15
11	0,22	0,11	0,09

Liaisons	P_1	P_4	P_5
	V_j	V_j	V_j
1	1159,466	1465,926	1475,307
2	2040,656	2006,447	2024,911
3	-5018,779	-4968,705	-4883,833
4	1890,581	1917,617	1939,896
5	3894,062	3584,034	3542,203
6	-2514,540	-2371,788	-2321,614
7	-1266,593	-1510,147	-1512,269
8	-1183,421	-1200,229	-1205,038
9	5122,147	5019,746	4958,862
10	- 68,110	- 37,730	- 21,642
11	- 731,114	- 451,690	- 464,589
12	623,987	407,469	427,627
13	- 559,433	- 792,759	- 777,411
14	4562,713	4226,987	4181,450
15	- 668,650	- 642,952	- 639,246
16	- 736,761	- 680,683	- 660,889
17	-1777,779	-1691,105	-1660,724
18	2699,364	2541,874	2540,305
19	- 184,824	- 170,085	- 218,691
20	5203,603	5138,791	5102,525
21	-1309,541	-1554,756	-1560,321

On retrouve la préférence en investissement de centrales de type B, mais les solutions de P_1 sont réduites de moitié pour P_4 et P_5 , ce qui explique la diminution de coût. Quant aux variables auxiliaires V_j , le changement de lois de probabilité s'accompagne de transits d'énergie différents. On peut observer des variations des différences de potentiel entre P_1 et P_4 dans différentes mailles : ainsi par exemple pour les liaisons 1 et 11, 7 et 12.

Cet investissement de moitié se justifie par le tableau, ci dessous, des défaillances du réseau lorsque les variables V_j sont fixées à \hat{V}_j et les variables décisionnelles mises à 0.

Une variation de θ et λ de 5 % aboutit à une diminution de la défaillance en chaque noeud de 50 % en moyenne.

Noeuds	$\delta_i^{P_1}$	$\delta_i^{P_4}$	$\delta_i^{P_5}$
1	239,254	117,805	120,517
2	274,924	134,632	137,434
3	323,833	162,022	165,146
4	111,957	57,064	52,714
5	560,299	269,739	279,645
6	59,833	16,333	14,550
7	73,910	41,372	33,500
8	214,509	104,656	107,007
9	106,080	50,113	52,459
10	152,152	77,450	72,087
11	90,238	48,679	44,394

3.2.3 Sur les solutions entières

Noeuds	P_1				P_4				P_5			
	T1 z_1	T2 z_2	T3 z_3	T4 z_4	T1 z_1	T2 z_2	T3 z_3	T4 z_4	T1 z_1	T2 z_2	T3 z_3	T4 z_4
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
6	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
7	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
8	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
9	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
10	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
11	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Optimum	3 630 000				2 310 000				2 250 000			

BUS
LILLE

La diminution d'investissement pour les problèmes P_4 et P_5 se traduit par l'investissement de centrales de type T1 et T2 plutôt que T3, puisque les solutions optimales obtenues en variables continues étaient faibles. Ces dernières gênent un bon ajustement car le coût élevé de chaque centrale provoque une forte augmentation du coût optimal par rapport à celui obtenu par la résolution "en continu". Il est à noter que les noeuds 6 et 7 par exemple, sont insensibles au changement de l'influence des pannes puisque l'investissement reste identique. L'origine hydraulique, donc à taux de panne nuls, de l'énergie injectée, justifie cette remarque.

De l'ajustement aux valeurs entières résulte des surplus en énergie disponible qui peuvent permettre des variations ΔC_M des demandes maximales.

Noeuds	P_1		P_4		P_5	
	ΔC_M	$\frac{\Delta C_M}{C_M}$	ΔC_M	$\frac{\Delta C_M}{C_M}$	ΔC_M	$\frac{\Delta C_M}{C_M}$
1	21	0,009	49	0,021	64	0,0271
2	102	0,139	34	0,046	48	0,065
3	60	0,028	8	0,003	21	0,010
4	50	0,045	30	0,027	43	0,038
5	19	0,003	127	0,021	8	0,001
6	24	0,019	60	0,049	74	0,060
7	13	0,016	44	0,055	61	0,077
8	44	0,038	61	0,053	76	0,066
9	51	0,046	35	0,031	42	0,038
10	14	0,004	11	0,003	25	0,007
11	69	0,038	37	0,020	51	0,028

3.2.4 Satisfaction de la loi des Noeuds

En procédant comme précédemment on obtient le tableau :
(voir page suivante)



Noeuds	P ₁			P ₄			P ₅			C _M
	$E(S_i \hat{A}\hat{V})$	$\sigma(S_i \hat{A}\hat{V})$	C _m	$E(S_i \hat{A}\hat{V})$	$\sigma(S_i \hat{A}\hat{V})$	C _m	$E(S_i \hat{A}\hat{V})$	$\sigma(S_i \hat{A}\hat{V})$	C _m	
1	277,438	11,744	0	314,713	5,496	0	317,422	5,547	0	2311
2	201,224	11,394	0	165,966	4,660	0	168,766	4,712	0	729
3	-551,161	20,641	578	-580,910	9,099	593	-577,782	9,043	590	2071
4	- 2,995	20,641	24	4,99	6,775	4	0,656	6,716	8	1108
5	-1762,518	52,315	1831	-1676,860	21,499	1705	-1666,931	21,291	1695	5984
6	696,147	42,066	0	684,691	17,417	0	683,192	17,199	0	1222
7	529,577	20,674	0	528	8,501	0	520,157	8,377	0	787
8	144,582	10,644	0	123,166	4,821	0	125,516	4,846	0	1135
9	- 378,339	19,656	404	-402,697	8,642	414	-400,334	8,568	412	1095
10	852,602	39,792	0	854,074	16,570	0	848,759	16,387	0	3204
11	- 6,558	7,545	17	- 15,141	3,151	20	- 19,421	3,080	24	1784

pour toute demande comprise entre C_i^m et $C_i^M + \Delta C_i^M$ on pourra obtenir la loi des Noeuds dans au moins 90 % des cas.

On peut remarquer une diminution de 10 % de C_5^m (pour Paris).

3.3 Influence des Variations des bornes maximales de consommation

On considère les seconds membres \bar{C}_i des contraintes comme des paramètres.

- α_i fixés à $0,9 \forall i \in T$
- paramètres des lois de probabilité fixés à :

réseau existant : centrales $\theta = 0,85$ $\lambda = 0,10$
 lignes $\theta = 0,95$ $\lambda = 0,03$

investissement : centrales $\theta = 0,85$ $\lambda = 0,10$
 lignes $\theta = 0,95$ $\lambda = 0,02$

Puisque ce sont les paramètres choisis précédemment pour P_4 , on peut établir la comparaison entre les problèmes P_4 et

- P_6 : augmentation de 5 % de \bar{C}_i
- P_7 : augmentation de 10 % de \bar{C}_i

3.3.1 Sur la résolution en variables continues

n° de centre	P_4 coût	P_6 coût	P_7 coût
3	5 204 812	11 601 701	10 919 833
5	1 807 840	3 420 958	4 909 511
7	1 256 014	2 638 693	4 125 348
9	1 189 848	2 529 985	4 028 873
11	1 184 320	2 512 427	3 990 157
13	1 182 777	2 509 272	3 971 402
15	1 182 599	2 509 014	3 967 163
17	1 182 581	2 508 879	3 964 747
19	1 182 563	2 508 867	3 962 902
20	1 182 558	2 508 866,9	3 962 603
22	1 182 557		3 962 008
23			3 961 933
24			3 961 858
25			3 961 792
Temps en s	606	582	704

On obtient une meilleure précision pour P_4 , P_6 que pour P_7 qui nécessite plus de temps. La paramétrisation des \bar{C}_i a pour effet de diminuer le domaine des solutions réalisables et implique des coûts plus forts.

On a optimum de $P_6 = 2,12 \times$ optimum de P_4

optimum de $P_7 = 3,35 \times$ optimum de P_4

tandis que le temps de P_7 est de 15 % supérieur à celui de P_4 .

3.3.2 Sur les solutions optimales

La nécessité de satisfaire une consommation supérieure, provoque une augmentation d'investissement en centrales T3 pour P_6 , en centrales T2 et T3 pour P_7 et une variation de l'énergie transitée par des changements de différences de potentiel notamment sur les liaisons :

1 et 11 pour alimenter plus fort Paris à partir du Nord.

9, 10, 15, 16, 19, 20, 21 pour tirer plus d'énergie des Noeuds Massif Central et Lyon Alpes.

Noeuds	P_4	P_6		P_7	
	T3 z_3^i	T2 z_2^i	T3 z_3^i	T2 z_2^i	T3 z_3^i
1	0,28		0,60	0,34	0,76
2	0,32		0,68	0,40	0,87
3	0,39		0,82	0,44	1,04
4	0,13		0,30	0,13	0,39
5	0,65		1,37	0,80	1,73
6	0,03		0,08	0,09	0,12
7	0,09		0,23	0,12	0,29
8	0,25		0,53	0,30	0,67
9	0,12		0,25	0,15	0,32
10	0,18		0,41	0,19	0,52
11	0,11		0,26	0,13	0,33

Liaisons	P_4	P_6	P_7
	V_j	V_j	V_j
1	1465,926	998,746	521,462
2	2006,447	2065,937	2183,782
3	-4968,705	-4544,010	-4087,022
4	1917,617	2036,626	2156,661
5	3584,034	3450,414	3316,343
6	-2371,788	-2420,969	-2431,188
7	-1510,147	-1436,849	-1361,442
8	-1200,229	-1374,072	-1539,091
9	5019,746	4638,661	4211,261
10	- 37,730	- 25,740	- 12,456
11	- 451,690	-1037,879	-1635,199
12	407,469	599,776	795,219
13	- 792,759	- 774,296	- 743,871
14	4226,987	3864,364	3467,389
15	- 642,952	- 413,950	- 151,046
16	- 680,683	- 439,690	- 163,502
17	-1691,105	-1981,278	-2267,685
18	2541,874	2358,430	2209,092
19	- 170,085	62,538	222,095
20	5138,791	4481,472	3864,927
21	-1554,756	-1031,058	- 548,583



En gardant les valeurs V_j égales à \hat{V}_j on peut observer les défaillances lorsque l'investissement est nul (variables décisionnelles mises à 0)

En moyenne, les variations des δ_i s'expriment en fonction de celles des \bar{C}_i par

$$\frac{\Delta \delta_i}{\delta_i} = 20 \frac{\Delta \bar{C}_i}{\bar{C}_i} \quad \forall i \in T$$

Noeuds	P_4 δ_i	P_6 δ_i	P_7 δ_i
1	117,805	232,364	347,722
2	134,632	264,154	398,956
3	162,022	318,804	471,176
4	57,064	117,165	171,684
5	269,739	528,667	791,470
6	16,333	31,934	61,620
7	41,372	89,530	134,610
8	104,656	205,429	306,387
9	50,113	97,418	149,237
10	77,450	158,623	231,279
11	48,679	101,301	150,922

3.3.3 Sur les solutions entières

Noeuds	P ₄				P ₆				P ₇			
	T1 z_1^i	T2 z_2^i	T3 z_3^i	T4 z_4^i	T1 z_1^i	T2 z_2^i	T3 z_3^i	T4 z_4^i	T1 z_1^i	T2 z_2^i	T3 z_3^i	T4 z_4^i
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
3	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
4	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
5	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	2	0
6	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
7	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
8	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
9	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
10	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
11	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
optimums	2 310 000				3 720 000				4 890 000			

L'écart entre l'optimum en continu et l'optimum en entier diminue avec l'augmentation des \bar{C}_i . En effet, de 48 % pour P₆, il devient égal à 23 % pour P₇.

Pour les solutions, on peut remarquer que plus la demande augmente, plus l'investissement en centrales T3 est préféré et que le noeud déterminant est encore Paris. Par contre, l'investissement aux noeuds 6, 9, 11 demeure insensible à l'accroissement de la demande.

Après cet investissement, le meilleur rapprochement de l'optimum entier à l'optimum en continu, se retrouve par une diminution des surplus d'énergie en chaque noeud.

Noeuds	P ₄			P ₆			P ₇		
	ΔC_M	C_M	$\frac{\Delta C_M}{C_M}$	ΔC_M	C_M	$\frac{\Delta C_M}{C_M}$	ΔC_M	C_M	$\frac{\Delta C_M}{C_M}$
1	49	2311	0,021	25	2426	0,01	12	2542	0,004
2	34	729	0,046	102	765	0,133	59	801	0,073
3	8	2071	0,003	57	2174	0,026	77	2278	0,033
4	30	1108	0,027	41	1163	0,035	75	1218	0,061
5	127	5984	0,021	43	6283	0,006	33	6582	0,005
6	60	1222	0,049	44	1283	0,034	14	1344	0,010
7	44	787	0,055	64	826	0,077	19	865	0,021
8	61	1135	0,053	50	1191	0,041	47	1248	0,037
9	35	1095	0,031	56	1149	0,048	4	1204	0,003
10	11	3204	0,003	4	3364	0,001	21	3524	0,005
11	37	1784	0,020	54	1873	0,028	4	1962	0,002

3.3.4 Satisfaction de la loi des Noeuds (tableau page 45)

On retrouve les bornes minimales $C_m > 0$ pour les mêmes noeuds, mais ces bornes ne suivent pas l'augmentation des bornes C_M puisque

baisse de C_m^3 de 10 % pour P_6 et 18 % pour P_7

augmentation de C_m^5 de 2 % pour P_6 et 4 % pour P_7 .

Puisque les α_i ont été fixés à 0.9 on peut assurer la satisfaction de la loi des noeuds pour toute demande d_i comprise entre C_m^i et $C_M^i + \Delta C_M^i$ dans au moins 90 % des cas.

Noeuds	P ₄				P ₆				P ₇			
	$E(S_i \hat{AV})$	$\sigma(S_i \hat{AV})$	C _m	C _M	$E(S_i \hat{AV})$	$\sigma(S_i \hat{AV})$	C _m	C _M	$E(S_i \hat{AV})$	$\sigma(S_i \hat{AV})$	C _m	C _M
1	314,713	5,496	0	2311	314,264	5,630	0	2426	313,610	5,808	0	2542
2	165,966	4,660	0	729	259,435	5,687	0	765	358,135	7,275	0	801
3	-580,910	9,099	593	2071	-527,074	8,329	538	2174	-478,660	7,705	489	2278
4	4,99	6,775	4	1108	10,173	6,236	0	1163	9,756	5,729	0	1218
5	-1676,860	21,499	1705	5984	-1716,835	20,589	1744	6283	-1752,963	19,907	1779	6582
6	684,691	17,417	0	1222	640,271	16,664	0	1283	609,904	15,935	0	1344
7	528,000	8,501	0	787	537,140	8,586	0	826	543,205	8,649	0	865
8	823,166	4,821	0	1135	167,902	5,380	0	1191	211,819	5,960	0	1248
9	-402,697	8,642	414	1095	-409,347	8,448	421	1149	-412,484	8,257	424	1204
10	854,074	16,570	0	3204	775,601	15,167	0	3364	688,610	13,631	0	3524
11	- 15,141	3,151	20	1784	- 51,531	3,291	56	1873	- 90,933	3,573	96	1962

IV.45



CONCLUSION

L'objectif primordial dans la formulation a été la satisfaction de toute demande pouvant même atteindre sa borne maximale.

Les contraintes peuvent donc paraître sévères mais elles offrent l'avantage de parer à toute éventualité dans 100 α_i % des cas (i & T)

On a mis en évidence, par le traitement de divers problèmes, la possibilité de fournir plusieurs solutions à un même problème réel. La "méthode des Centres" a conduit à des résultats précis et L'ajustement choisi fut un moyen de présenter des solutions concrètes grâce aux particularités des solutions optimales.

On a pu vérifier que l'attitude "programmes sous risques" est une façon d'aborder un programme stochastique et que la version déterministe en un programme mathématique dépend

- . de la conception d'une situation réelle par le choix de lois de probabilité s'appuyant sur des résultats statistiques.
- . du pourcentage de satisfaction voulue des contraintes par les valeurs données aux α_i . Ce choix fait appel à l'expérience et se révèle important puisqu'il peut entraîner des difficultés de résolution.

A N N E X E S

ANNEXE A
MATRICES CARACTERISTIQUES S ET H

S :

$S^{\bar{N}}$

$S^{\bar{M}}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	1			1			-1														
2	-1	1									-1										
3		-1	1																	-1	1
4			-1															-1	1		
5				-1	-1						1	-1	-1	-1							-1
6					1	1									1	1			-1	1	
7						-1											-1	1			
8							1	-1				1									
9								1	-1				1								
10									1	1				1	-1						
11										-1						-1	1				

H :

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	-1							-1	1	-1	1
2								-1	1	-1	1
3								-1	1		
4	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
5					-1	-1	1	-1	1	-1	
6							-1	1			
7		-1	-1	-1	1	1	-1				
8			-1	-1	1	1	-1				
9				-1	1	1	-1				
10						-1	1				



Le réseau existant de base est celui de 1965 dont les caractéristiques nous ont été fournies par Dodu (Electricité de France)

GROUPE	PUISSANCE PANNE		SOMMET	GROUPE	PUISSANCE PANNE	
	$P_{k,i}^M$	$\tau_{k,i}$			$P_{k,i}^M$	$\tau_{k,i}$
			NORD			
			1			
ANSER 1	117.MW	.1000		ANSER 2	117.MW	.1000
ANSER 3	117.MW	.1000		ANSER 4	117.MW	.1000
BEAUTOR 1	117.MW	.1000		BEAUTOR 2	117.MW	.1000
BEAUTOR 3	117.MW	.1000		BONCHAIN 1	240.MW	.1000
COMMES 1	23.MW	.1000		COMMES2 1	50.MW	.1000
COMMES2 2	50.MW	.1000		COMMES2 3	117.MW	.1000
DUNKERQ 1	117.MW	.1000		DUNKERQ 2	117.MW	.1000
DUNKERQ 3	117.MW	.1000		LOMME	24.MW	.2000
LOURCHES	74.MW	.1000		MAUBEUGE	80.MW	.2000
LA PIE SE 1	37.MW	.1000		LA PIE SE 2	46.MW	.1000
PT SAMBRE 1	117.MW	.1000		PT SAMBRE 2	117.MW	.1000
PT SAMBRE 3	240.MW	.1000		VALENCIENN	51.MW	.1000
COEFF. NULS	850.MW	0.0000		HYD	0.MW	0.0000

P_1^M = PUISSANCE MAXIMALE 3286.MW

c_1 = CONSOMMATION 2311.MW

LE HAVRE

2

LE HAVRE 1	240.MW	.1000		LE HAVRE 2	575.MW	.1000
VAUPALIERE	92.MW	.1000		MAINVILLE 1	50.MW	.1000
MAINVILLE 2	50.MW	.1000		MAINVILLE 3	117.MW	.1000
MAINVILLE 4	117.MW	.1000		HYD	0.MW	.1000

P_2^M = PUISSANCE MAXIMALE 1241.MW

c_2 = CONSOMMATION 729.MW

BUS
LILLE

OUEST

3

CHINON	1	60.MW	.1600	CHINON	2	200.MW	.1600
CHINON	3	480.MW	.1600	BRENILIS		75.MW	.1600
CHEVIRE	1	52.MW	.1000	CHEVIRE	2	52.MW	.1000
CHEVIRE	3	104.MW	.1000	CHEVIRE	4	117.MW	.1000
CHEVIRE	5	240.MW	.1000	CHEVIRE	6	240.MW	.1000
CHANTENAY		32.MW	.1000	ANGER		6.MW	.1000
EQUEURDREV		6.MW	.1000	CAEN	2	27.MW	.1000
CAEN	1	22.MW	.2000	PORTZIC	1	18.MW	.1000
PORTZIC	2	36.MW	.1000	TOURS		6.MW	.1000
HYD		260.MW	0.0000				

$\frac{M}{P}_3$ = PUISSANCE MAXIMALE 2033.MW
 $\frac{c}{c}_3$ = CONSOMMATION 2071.MW

BORDEAUX

4

AMBES	1	117.MW	.1000	AMBES	2	117.MW	.1000
ARJUZAN	1	55.MW	.1000	ARJUZAN	2	55.MW	.1000
ARJUZAN	3	117.MW	.1000	ARTIX	1	123.MW	.1000
ARTIX	2	123.MW	.1000	ARTIX	3	123.MW	.1000
HYD		513.MW	0.0000				

$\frac{M}{P}_4$ = PUISSANCE MAXIMALE 1343.MW
 $\frac{c}{c}_4$ = CONSOMMATION 1108.MW

PARIS

5

ST DENIS	1	150.MW	.1000	ST DENIS	2	120.MW	.1000
ARRIGHI	1	225.MW	.1000	ARRIGHI 2	5	105.MW	.1000
ARRIGHI 2	6	117.MW	.1000	VITRY	1	240.MW	.1000
VITRY	2	240.MW	.1000	CREIL		117.MW	.1000
CREIL	2	117.MW	.1000	CREIL	3	117.MW	.1000
CREIL	4	117.MW	.1000	CHAMPAGNE		240.MW	.1000
CHAMP.OISE		240.MW	.1000	ST.LAURENT		480.MW	.1600
IVRY	2	36.MW	.1000	GENEVILL. 1		50.MW	.3500
GENEVILL.	2	325.MW	.1000	GARCHIZY		8.MW	.1000
MALAGUAY		22.MW	.1000	MONTEREAU 3		117.MW	.1000
MONTEREAU	2	117.MW	.1000	MONTEREAU 1		240.MW	.1000
MONTERE A	4	240.MW	.1000	PORCHEVIL 1		117.MW	.1000

PORCHEVI 1	2	117.MW	.1000	PORCHEVI 1 3	117.MW	.1000
PROCHEVI 1	4	117.MW	.1000	PORCHEVI 2 1	575.MW	.1000
ST. QUEN	1	240.MW	.1000	ST. QUEN	2	240.MW .1000
VAIRES	1	240.MW	.1000	VAIRES	2	240.MW .1000
VILLEPIST		60.MW	.1000	VILLEMANDE		10.MW ..1000
HYD		26.MW	0.0000			

\overline{P}_5^M = PUISSANCE MAXIMALE 5879.MW

\overline{c}_5 = CONSOMMATION 5984.MW

M. CENTRAL

COEFF. NULS 223.MW 0.0000⁶ HYD 1690.MW 0.0000

\overline{P}_6^M = PUISSANCE MAXIMALE 1913.MW

\overline{c}_6 = CONSOMMATION 1222.MW

TOULOUSE

7

ALBI	240.MW	.1000	SVINCENT	18.MW	0.0000
HYD	1139.MW	0.0000			

\overline{P}_7^M = PUISSANCE MAXIMALE 1397.MW

\overline{c}_7 = CONSOMMATION 787.MW

LORRAINE

8

BLENOD 1	240.MW	.1000	BLENOD 2	240.MW	.1000
BLENOD 3	240.MW	.1000	BLENOD 4	240.MW	.1000
CHOOZ	120.MW	.1600	ST DIZIER	6.MW	.1000
VINCEY	31.MW	.2000	COEFF.NULS	450.MW	0.0000
HYD	8.MW	0.0000			

\overline{P}_8^M = PUISSANCE MAXIMALE 1575.MW

\overline{c}_8 = CONSOMMATION 1135.MW

ALSACE

9

STRASBOU 1	1	21.MW	.3000	STRASBOU 1 2	80.MW	.3000
STRASBOU 2	1	117.MW	.1000	STRASBOU 2 2	117.MW	.1000
HYD		473.MW	0.0000			

$$\bar{P}_9^M = \text{PUISSANCE MAXIMALE } 808.MW$$

$$\bar{c}_9 = \text{CONSOMMATION } 1095.MW$$

LYON.ALPE

10

CHALON	1	34.MW	.3500	CHALON 2	1	117.MW	.1000
CHALON 2	2	117.MW	.1000	LOIRE	1	240.MW	.1000
LOIRE	2	240.MW	.1000	COEFF.NULS		110.MW	.1000
L HYD		3452.MW	0.0000				

$$\bar{P}_{10}^M = \text{PUISSANCE MAXIMALE } 4310.MW$$

$$\bar{c}_{10} = \text{CONSOMMATION } 3204.MW$$

SUD.EST

11

ARD MARCOU		82.MW	.1600	GARDAME		240.MW	.1000
COEFF.NULS		210.MW	0.0000	HYD		1342.MW	0.0000

$$\bar{P}_{11}^M = \text{PUISSANCE MAXIMALE } 1874.MW$$

$$\bar{c}_{11} = \text{CONSOMMATION } 1784.MW$$

IMPEDANCE CAPACITE PANNE LIAISONS IMPEDANCE CAPACITE PANNE

$x_{1,j}$ en Ω $\bar{q}_{1,j}^M$ en MW $\tau'_{1,j}$ $x_{1,j}$ en Ω $\bar{q}_{1,j}^M$ en MW $\tau'_{1,j}$

NORD-HAVRE

1

46 195 0,010

$$\bar{q}_1^M = \text{CAPACITE MAXIMALE} = 195 \text{ MW}$$

$$x_1 = \text{LONGUEUR} = 220 \text{ kms}$$

$$\bar{v}_1 = 8970 \text{ MW}^2$$

HAVRE-OUEST

2

21,90	273	0,010	39	226	0,010
$\frac{M}{q_2} = 426 \text{ MW}$		$x_2 = 270 \text{ kms}$	$\bar{V}_2 = 5978 \text{ MV}^2$		

OUEST-BORDEAUX

3

48,20	312	0,010	73,50	175	0,010
$\frac{M}{q_3} = 442 \text{ MW}$		$x_3 = 230 \text{ kms}$	$\bar{V}_3 = 12 \ 862 \text{ MV}^2$		

NORD-PARIS

4

44,90	292	0,010	80,90	292	0,010
24,7	234	0,010	25,10	234	0,010
$\frac{M}{q_4} = 664 \text{ MW}$		$x_4 = 220 \text{ kms}$	$\bar{V}_4 = 5780 \text{ MV}^2$		

M.CENTRAL-PARIS

5

17	1050	0,010	21,60	1050	0,010
17,50	790	0,010	67,50	215	0,010
39,30	234	0,010	45,10	195	0,010
54,30	273	0,010			
$\frac{M}{q_5} = 2138 \text{ MW}$		$x_5 = 260 \text{ kms}$	$\bar{V}_5 = 8794 \text{ MV}^2$		

TOULOUSE . M . CENTRAL

6

39,40	224	0,010	32,20	166	0,010
36,50	273	0,010	20,00	1010	0,010
$\frac{M}{q_6} = 715 \text{ MW}$		$x_6 = 290 \text{ kms}$	$\bar{V}_6 = 5345 \text{ MV}^2$		

LORRAINE-NORD

7

48,80	234	0,010	29,30	234	0,010
$\frac{M}{q_7} = 374 \text{ MW}$		$x_7 = 260 \text{ kms}$	$\bar{v}_7 = 6856 \text{ MV}^2$		

ALSACE-LORRAINE

8

18	1000	0,010	21,20	296	0,010
23,30	234	0,010			
$\frac{M}{q_8} = 794 \text{ MW}$		$x_8 = 200 \text{ kms}$	$\bar{v}_8 = 5452 \text{ MV}^2$		

ALPES-ALSACE

9

27,50	1050	0,010	96,70	195	0,010
$\frac{M}{q_9} = 881 \text{ MW}$		$x_9 = 280 \text{ kms}$	$\bar{v}_9 = 18\ 856 \text{ MV}^2$		

S.EST-ALPES

10

23	195	0,010	77,7	246	0,010
77,7	246	0,010	22,8	234	0,010
12,60	234	0,010	12,60	234	0,010
$\frac{M}{q_{10}} = 801 \text{ MW}$		$x_{10} = 220 \text{ kms}$	$\bar{v}_{10} = 2948 \text{ MV}^2$		

HAVRE-PARIS

11

16,40	1050	0,010	19,20	1050	0,010
31,60	292	0,010			
$\frac{M}{q_{11}} = 1335 \text{ MW}$		$x_{11} = 200 \text{ kms}$	$\bar{v}_{11} = 9227 \text{ MV}^2$		

LORRAINE-PARIS

12

19,60	1000	0,010	66,70	234	0,010
34,50	234	0,010			
$\frac{M}{q_{12}} = 767 \text{ MW}$		$x_{12} = 250 \text{ kms}$	$\bar{v}_{12} = 8073 \text{ MV}^2$		

ALSACE-PARIS

12

$$\frac{M}{q_{13}} = 215 \text{ MW}$$

0,010

$$x_{13} = 340 \text{ kms} \quad \bar{v}_{13} = 8901 \text{ MV}^2$$

ALPES-PARIS

14

$$\frac{M}{q_{14}} = 1512$$

0,010

$$x_{14} = 330 \text{ kms} \quad \bar{v}_{14} = 9886 \text{ MV}^2$$

ALPES-M. CENTRAL

15

$$\frac{M}{q_{15}} = 365 \text{ MW}$$

0,010

$$x_{15} = 190 \text{ kms} \quad \bar{v}_{15} = 6201 \text{ MV}^2$$

S. EST-M. CENTRAL

16

$$\frac{M}{q_{16}} = 388 \text{ MW}$$

0,010

$$x_{16} = 310 \text{ kms} \quad \bar{v}_{16} = 4493 \text{ MV}^2$$

TOULOUSE-S. EST

17

$$\frac{M}{q_{17}} = 268 \text{ MW}$$

0,010

$$x_{17} = 290 \text{ kms} \quad \bar{v}_{17} = 5323 \text{ MV}^2$$

BORDEAUX-TOULOUSE

18

$$\frac{M}{q_{18}} = 373 \text{ MW}$$

0,010

$$x_{18} = 220 \text{ kms} \quad \bar{v}_{18} = 5967 \text{ MV}^2$$

BORDEAUX-M. CENTRAL

19

$$\begin{array}{l} 27 \\ \frac{M}{q}_{19} = 400 \text{ MW} \end{array} \quad \begin{array}{l} 400 \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} 0,010 \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \bar{x}_{19} = 270 \text{ kms} \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \bar{V}_{19} = 10\,800 \text{ MV}^2 \\ \\ \end{array}$$

OUEST-M. CENTRAL

20

$$\begin{array}{l} 47,60 \\ 65 \\ \frac{M}{q}_{20} = 574 \text{ MW} \end{array} \quad \begin{array}{l} 234 \\ 195 \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} 0,010 \\ 0,010 \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} 66 \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} 195 \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} 0,010 \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \bar{x}_{20} = 280 \text{ kms} \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \bar{V}_{20} = 11\,138 \text{ MV}^2 \\ \\ \\ \end{array}$$

OUEST-PARIS

21

$$\begin{array}{l} 39,50 \\ \frac{M}{q}_{21} = 195 \text{ MW} \end{array} \quad \begin{array}{l} 195 \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} 0,010 \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \bar{x}_{21} = 310 \text{ kms} \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \bar{V}_{21} = 7702 \text{ MV}^2 \\ \\ \\ \end{array}$$

- D'après ces données, on s'aperçoit que Paris est le noeud le plus consommateur, alimenté en énergie transitée, d'origine principalement hydraulique, depuis les centres : Massif Central et Lyon-Alpes. La contrainte relative à Paris, se révélera d'ailleurs importante pour l'investissement.

- chaque tension sur les liaisons est multipliée par une différence de potentiel caractéristique E. D. F. exprimée en kilo-Volt. C'est pourquoi, l'unité des quantités \bar{V}_j , dites modules de tension, est le MV^2 (méga-volt²).

1
ANNEXE B

TRANSCRIPTION EN FORTRAN DU CODE DE DENEL

```

INTEGER DIC
LOGICAL D,P,C,LIP,RM,PP,BS
REAL NBR,KKK
DIMENSION Z(98),IDP(55),IVAR(55),VC1(55),YD(98),C(98)
DIMENSION Q(21,7),RAD(21,7),PA(35,11),Mp(11,36)
COMMON EP1
COMMON N
COMMON/CH1/X1(98),Xn(98),XXX(55),SOL(55),A1(55,55)
COMMON/CH2/ IB(55),IR,IS,IN
COMMON/CH3/BM(153),RP(153),BS(55)
COMMON /DI1/ RE1,EP2,FC,X4(98)
COMMON/DI2/ DIC,IB1,IT,ICEN,ICA,MICA
COMMON/CH1/ VC(34),FCT1,NBR(34),KKK,A(55,98),V(21),VV(21),
SEAD(21),VAD(21),EA(11),VA(11),EN(11),EPA(11),
SVCA(11),EPX(11),VPX(11),DP(11),QA(11),VN(11),
SPP1,PP2,PP3,PP4,DD1,DD2,QQ1,QQ2,VR(11)
COMMON/CE2/ IF,MC(10,11),KD(21),MS(11,21),K0(11),NF(6),
SJJ1,JJ2,JJ3,JJ4
COMMON/CE3/ LIP(34)
PROBLEME D'INVESTISSEMENT
RESEAU 11 NOEUDS,21 LIAISONS
TYPES NOUVEAUX DE CENTRALES:4
TYPES NOUVEAUX DE LIGNES:2
1100 FORMAT(1H ,34HTAUX DE PANNE DES NOUV.CENTRALES :,4F6.3)
1101 FORMAT(1H ,34HTAUX DE PANNE DES NOUV.LIGNES : ,2F6.3)
1102 FORMAT(1H ,19HMATRICE D'INCIDENCE)
1104 FORMAT(1H ,22HMATRICE DES REACTANCES)
1105 FORMAT(1H ,27HMATRICE DES PUISSANCES INI.)
1106 FORMAT(1H ,21HLONGUEUR DES LIAISONS)
1109 FORMAT(1H ,24HCONSOMMATIONS PAR NOEUDS)
1110 FORMAT(1H ,17HCOUTS UNITAIRES: ,6I5)
1111 FORMAT(1H ,9HQUANTILES)
1112 FORMAT(1H ,36HTAUX PANNE DES CENTRALES ACTUELLES)
1113 FORMAT(1H ,33HTAUX PANNE DES LIGNES ACTUELLES)
1115 FORMAT(1H ,11HPUISS.NOUV: ,4I5,2X,12HREACT.NOUV : ,2F5.3)
1135 FORMAT(1H ,24HESPERANCES ADMITTANCES :)
1136 FORMAT(1H ,23HVARIANCES ADMITTANCES :)
1137 FORMAT(1H ,33HESPERANCES PUISSANCES INJECTEES :)
1138 FORMAT(1H ,32HVARIANCES PUISSANCES INJECTEES :)
1114 FORMAT(5X,6F6.3,5X,6I5)
1116 FORMAT(21I3)
1117 FORMAT(11I6)
1118 FORMAT(11F6.3)
1119 FORMAT(7F6.3)
1120 FORMAT(12I6)
1200 FORMAT(10F8.1)
1121 FORMAT(10F8.2)
1122 FORMAT(12F6.3)
1123 FORMAT(7E18.12)
1124 FORMAT(10I6)
1125 FORMAT(5X,4I5,5X,2F5.3)

```



```

1127 FORMAT(6E18.12)
1128 FORMAT(7E9.3)
821 FORMAT (7I6)
301 FORMAT (3I3,1I0,2E7.0)
407 FORMAT (11H CENTRE MAX)
402 FORMAT (12H CONTRAINTES)
403 FORMAT (1X,7E18.12)
404 FORMAT (10H VARIABLES)
800 FORMAT (1H ,22HNOMBRE DE VARIABLES :,15)
801 FORMAT (1H ,24HNOMBRE DE CONTRAINTES :,15)
802 FORMAT (1H ,36HNOMBRE DE CONTRAINTES LINEARISEES :,15)
803 FORMAT(1H ,42HNOMBRE DE LINEARISATIONS PAR TRONCATURES:,15)
804 FORMAT (1H ,43HNOMBRE MINIMUM DE CONTRAINTES DE CENTRAGE :,15)
805 FORMAT (1H ,28HREDUCTION DE L'INTERVALLE :,110)
806 FORMAT (1H ,12HPRECISION :,E12.5)
807 FORMAT (1H ,21HSEUIL ZERO MACHINE :,E12.5)
808 FORMAT (1H ,29HPONDÉRATION DE LA FONCTION :,E12.5)
809 FORMAT (1H ,2X,16H8ARNE INFÉRIEURE,5X,14H8ARNE SUPÉRIEURE,
S      6X,15HP0INT DE DEPART)
815 FORMAT (1H ,E18.12,2X,E18.12,3X,E18.12)
811 FORMAT (1H ,9HCENTRE N0,12X,8HFONCTION)
812 FORMAT (1H ,3X,I3,10X,E18.12,10X)
813 FORMAT (1H ,34HCENTRAGE A PARTIR DE TRONCATURE :,110)
995 FORMAT (1H ,23HNOMB MAXI DE CONT ADDIT,15)
996 FORMAT (8E10.4)
998 FORMAT (1H ,6HCENTRE,10X,8HFONCTION)
997 FORMAT (1H ,I6,10X,E18.12)
READ(105,801)N,MM,LP,DIC,PREC,EP1,ITMAX,ILINMA,MICA,ICEN,KKK
READ(105,801)MACA
READ(105,1125)JU1,JU2,JU3,JU4,DD1,DD2
READ(105,1114)PP1,PP2,PP3,PP4,QQ1,QQ2,(NF(I),I=1,6)
READ(105,1116)((MS(I,J),J=1,21),I=1,11)
READ(105,1120)(KD(J),J=1,21)
READ(105,1117)((MC(K,J),J=1,11),K=1,10)
READ(105,1117)(K0(J),J=1,11)
READ(105,1118)((PA(I,J),J=1,11),I=1,35)
READ(105,1120)((MP(I,J),J=1,36),I=1,11)
READ(105,1119)((RAD(I,J),J=1,7),I=1,21)
READ(105,1119)((Q(I,J),J=1,7),I=1,21)
READ(105,1122)(QA(I),I=1,11)
READ(105,1200)(VB(I),I=1,11)
READ(105,1200)(XC(I),I=1,N)
READ(105,1200)(X1(I),I=1,N)
READ(105,1121)(YC(I),I=1,N)
WRITE(108,800)N
WRITE(108,801)MM
WRITE(108,802)LP
WRITE(108,803)ILINMA
WRITE(108,804)MICA
WRITE(108,995)MACA
WRITE(108,813)ICEN

```



```

WRITE(102,855)DIC
WRITE(102,856)PREC
WRITE(102,857)FP1
WRITE(102,858)KKK
WRITE(102,1100)PP1,PP2,PP3,PP4
WRITE(102,1101)Q01,Q02
WRITE(102,1102)
WRITE(102,1116)((MS(I,J),J=1,21),I=1,11)
WRITE(102,1106)
WRITE(102,1120)(KD(I),J=1,21)
WRITE(102,1130)
WRITE(102,1120)((MF(I,J),J=1,36),I=1,11)
WRITE(102,1112)
WRITE(102,1118)((PA(I,J),J=1,11),I=1,35)
WRITE(102,1104)
WRITE(102,1128)((RAD(I,J),J=1,7),I=1,21)
WRITE(102,1113)
WRITE(102,1119)((Q(I,J),J=1,7),I=1,21)
WRITE(102,1109)
WRITE(102,1117)(KB(I),J=1,11)
WRITE(102,1110)
WRITE(102,1124)(NF(I),I=1,6)
WRITE(102,1111)
WRITE(102,1122)(QA(I),I=1,11)
WRITE(102,1123)(VB(I),I=1,11)
D0 1003 I=1,11
S11=S12=0.
D0 1004 K=1,35
IF(MP(I,K).EQ.0)G0 T0 1004
R2=MP(I,K)*(.8-PA(K,I))
IF(PA(K,I).EQ.0.)R2=MP(I,K);G0 T0 1007
S12=S12+(MP(I,K)*(.15+PA(K,I)))*2
1007 S11=S11+R2
1004 CONTINUE
ECA(I)=S11;VCA(I)=S12
1003 CONTINUE
WRITE(102,1137)
WRITE(102,1127)(ECA(I),I=1,11)
WRITE(102,1138)
WRITE(102,1127)(VCA(I),I=1,11)
D0 1009 J=1,21
S7=S8=0.
D0 1005 L=1,7
IF(RAD(J,L).EQ.0)G0 T0 1005
AD=(.90-Q(J,L))/RAD(J,L)
IF(Q(J,L).EQ.0.)AD=.7./RAD(J,L);G0 T0 1006
S8=S8+((.08+Q(J,L))/RAD(J,L))*2
1006 S7=S7+AD
1005 CONTINUE
EAD(J)=S7;VAD(J)=S8
1009 CONTINUE

```



```

WRITE(108,1135)
WRITE(108,1123)(EAD(J),J=1,21)
WRITE(108,1136)
WRITE(108,1123)(VAD(J),J=1,21)
DO 1 I=1,44
1 YD(I)=X1(I)
DO 2 J=45,86
2 YD(J)=1.
WRITE(108,859)
DO 8 I=1,N
8 WRITE(108,810)X0(I),X1(I),YD(I)
PU1=JU1*(.85-PP1)
PU2=JU2*(.85-PP2)
PU3=JU3*(.85-PP3)
PU4=JU4*(.85-PP4)
AD1=(.95-QU1)/DD1
AD2=(.95-QU2)/DD2
WRITE(108,1123)PU1,PU2,PU3,PU4,AD1,AD2
UPUI=9999999999.9
PRE=1.
PRE2=0.001
FCT1=UPUI
EP2=-EP1
EP3=EP2
EP4=EP1
MNL1=MN+1
MM=MNL1
NN=N+1
NQ=NN+1
BM(NN)=BP(MN)=.FALSE.
X1(NN)=10000000.
X0(NN)=-10000000.
IT=0
WRITE(108,998)
9 IT=IT+1
IF(IT.GT.1)LP=LP1
999 CONTINUE
IF(IT=ITMAX)11,11,252
11 ILIN=0
12 DO13 I=1,MNL1
IVAR(I)=I
13 LIP(I)=.TRUE.
IF=1
ILIN=ILIN+1
CALL CBNT(2,FDIST,Yn)
DO 502 I=1,MNL1
U=0.
DO 501 J=1,N
501 U=U+A(I,J)*A(I,J)
NBR(I)=1./SQRT(U)
502 LIP(I)=.FALSE.

```



```

IF(ILIN-1)15,14,15
14 FCT3=FCT1
   FCT1=VC(1)
   WRITE(108,997)IT,FCT1
   WRITE(108,402)
   WRITE(108,403)(VC(I),I=2,34)
   IF(IT.LT.22)GO TO 21
   WRITE(108,404)
   WRITE(108,403)(YD(I),I=1,N)
21 IF(ABS(FCT3-FCT1)-PRE)252,15,15
15 IF(LP=MNL1)16,26,26
16 LIP(1)=.TRUE.
   DO 17 I=1,MNL1
17 VC1(I)=VC(I)*NBR(I)
   REPEAT 20,FOR I=(2,LP,1)
   U1=VC1(I)
   IR=I
   DO 19 J=I+1,MNL1
   U=VC1(J)
   IF(U-U1)18,19,19
18 U1=U
   IR=J
19 CONTINUE
   IS=IVAR(IR)
   LIP(IS)=.TRUE.
   VC1(IR)=VC1(I)
   IVAR(IR)=IVAR(I)
20 CONTINUE
   U1=9.*U1
   INDIC=LP+1
   DO 531 I=INDIC,MNL1
   IF(VC1(I)-U1)530,530,531
530 IS=IVAR(I)
   LIP(IS)=.TRUE.
   LP=LP+1
531 CONTINUE
   J=0
   DO 22 I=1,MNL1
   IF(LIP(I))J=J+1,IDP(J)=I
22 CONTINUE
   DO 25 I=2,LP
   ID=IDP(I)
   DO 24 J=1,N
24 A(I,J)=A(ID,J)
25 CONTINUE
   GOT028
26 DO27 I=1,MNL1
   LIP(I)=.TRUE.,IDP(I)=I
27 CONTINUE
28 IN=NN,NP=NN+LP,T1=UpUI
   DO 46 I=1,LP

```



```

DO 29 J=I+1,LP
A1(I,J)=A1(J,I)=0.
29 CONTINUE
A1(I,I)=1.,BS(I)=.TRUE.
AA=U=0.
IN=IN+1
IB(I)=IN
BM(IN)=BP(IN)=.FALSE.
DO 31 J=1,N
31 U=U+A(I,J)*YU(J)
IF(I.EQ.1)U=U+VC(1)-FCT1;ID=1;GOTO34
ID=IDP(I)
U=U+VC(ID)
34 CONTINUE
C(I)=.FALSE.
AA=NOR(ID)
A(I,NN)=1.
IF(J.LT.0.)C(I)=.TRUE.;AA=-AA;A(I,NN)=-1.
A(I,NQ)=U*AA
T=0.
DO 38 J=1,N
A(I,J)=A(I,J)*AA
38 T=T+A(I,J)*XQ(J)
SOL(I)=T-A(I,NQ)
U1=SOL(I)
IF(I.EQ.1)SOL(1)=U1,KKK*U1
IF(.NOT.C(I))U1=-U1
IF(T1=U1)46,46,45
45 T1=U1
IR=I
46 CONTINUE
DO 47 I=1,N
BP(I)=.FALSE.
BM(I)=.TRUE.
47 A(1,I)=KKK*A(1,I)
A(1,NQ)=KKK*A(1,NQ)
LO=IR
J=IB(IR);D=C(J-NN)
BM(J)=.NOT.D;BP(J)=D
U=SOL(IR)
IF(C(IR))U=-U
50 DO 57 I=1,LP
IF(C(I))SOL(I)=SOL(I)+U;A1(I,IR)=1.;GOTO52
SOL(I)=SOL(I)-U
A1(I,IR)=-1.
52 IF(D)A1(I,IR)=-A1(I,IR)
57 CONTINUE
SOL(IR)=U;A1(IR,IR)=1.
IF(D)A1(IR,IR)=-1.
60 BS(IR)=.FALSE.
IB(IR)=NN

```



```

61 ISM=ISP=0;UM=EP1;UP=EP2
   DO 72 I=1, NP
   IF(BM(I).EQ.RP(I))IF(I-NN)63,63,66
   GOT0 72
63 U=0.
   DO 65 J=1, LP
   L2=A1(L0,J)
   IF(U2.NE.0.)U=U-U2*A(J,I)
65 CONTINUE
   GOT0 67
66 U=-A1(L0,I-NN)
67 IF(BM(I))IF(U-UM)72,72,71
   IF(J.LT.UP) ISP=I;UP=U
   GO TO 72
71 ISM=I;UM=U
72 CONTINUE
   IF(ISP+ISM)102,102,73
73 IF(ISM)74,74,75
74 IS=ISP
   GOT0 76
75 IS=ISM
76 L3=IS-NN
   IN=IR=NA=0
   U=UPUI
   IF(L3)77,77,78
77 U=X1(IS)-X0(IS)
78 DO 95 I=1, LP
   IF(L3)79,79,82
79 T=0.
   DO 81 J=1, LP
   U2=A1(I,J)
   IF(U2.NE.0.)T=T+U2*A(J,IS)
81 CONTINUE
   GOT0 83
82 T=A1(I,L3)
83 XXX(I)=T
   IF(ISM)85,85,84
84 T=-T
85 J=IB(I)
   L2=J-NN
   U1=S0L(I)
   IF(T.GE.EP3)IF(T-EP4)95,95,90
   NA=1
   IF(L2)87,87,88
87 U1=X0(J)+U1 ;GOT0 93
88 IF(C(L2))GOT0 95
   GOT0 93
90 NA=-1
   IF(L2)91,91,92
91 U1=X1(J)+U1
   GOT0 93

```



```

92 IF(.NOT.C(I2))GOTO 95
93 U1=U1/T
   IF(U.GT.U1)U=U1;IR=I;IN=NA
95 CONTINUE
   IF(IN)94,97,96
96 CALL CHBASE(LP)
   GOTO 61
97 P=BP(IS);U=X1(IS)-Xn(IS)
   IF(P)U=-U
   BP(IS)=.NOT.P;BM(IS)=P
   DO 101 I=1,LP
101 S0L(I)=S0L(I)+XXX(I)*U
   GOTO 61
C
102 DO 106 I=1,N
   IF(BP(I))Z(I)=X1(I);GO TO 106
   IF(BM(I))Z(I)=X0(I)
106 CONTINUE
   LP1=0
   DO 112 I=1,LP
   J=IB(I)
   IF(J.LE.NN)Z(J)=-S0L(I);LP1=LP1+1;GOTO 112
   W=S0L(I)
   IF(ABS(W).LT.PRE2)LP1=LP1+1
112 CONTINUE
   MM2=LP;ICA=0
   CALL DICHA(Z,YD,YD)
   IF(IT.LT.ICEN)GO TO 250
   IF(IB1)251,113,120
113 IF(IT-1)12,12,251
120 FC1=FC
   GO TO 124
121 FC2=FC1;FC1=FC
124 ICA=ICA+1
   IBO=1
   IN=MM2
   MM2=MM2+1
   CALL CONT(1,AA,X4)
   U=UPUI
   DO 123 I=1,MNL1
   U1=ABS(VC(I))
   IF(U1-U)122,123,123
122 U=U1
   IS=I
123 LIP(I)=.FALSE.
   LIP(IS)=.TRUE.
   IF=MM2
   CALL CONT(2,AA,X4)
   U=AA=0.
   DO 125 I=1,N
125 AA=AA+A(MM2,I)*X4(I)

```



```

AA=AA+VC(IS)
IF(IS.EQ.1)AA=AA-FCT1
A(MM2,NA)=1.
C(MM2)=.FALSE.
U=NBR(IS)
131 IF(AA.LT.0.)U=-U;A(MM2,NN)=-1.;C(MM2)=.TRUE.
DO 132 I=1,N
132 A(MM2,I)=A(MM2,I)*U
A(MM2,NO)=U*AA
NA=NN+MM2
IB(MM2)=NA
BS(MM2)=.TRUE.
BP(NA)=.FALSE.
BM(NA)=.FALSE.
DO 133 I=1,IN
133 A1(MM2,I)=A1(I,MM2)*0.
A1(MM2,MM2)=1.
DO 136 I=1,IN
IR=IB(I)
IF(IR.GT.NN) GO TO 136
DO 135 J=1,IN
135 A1(MM2,J)=-A(MM2,IR)*A1(I,J)+A1(MM2,J)
136 CONTINUE
IR=MM2
140 T=URM
IS=0
URM=U1=0.
DO 160 I=1,NA
U=T1=0.
IF(.NOT.BM(I).AND..NOT.BP(I))GO TO 160
IF(I.GT.NN)INDIC=I-NN;U=A1(IR,INDIC);T1=-A1(I,INDIC);GO TO 148
DO 143 J=1,MM2
U=U+A1(IR,J)*A(J,I)
143 T1=T1-A1(I,J)*A(J,T)
IF(IBM)148,148,145
145 IF(.NOT.BM(I))URM=URM+U*X1(I);GO TO 148
URM=URM+U*X0(I)
148 IF(AA.LT.0.)U=-U
IF(BP(I))IF(U-EP1)140,155,155
IF(U-EP2)155,155,160
155 U1=T1/U
IF(T.GT.U1)T=U1;IS=1
161 CONTINUE
IF(IBM)163,163,161
161 U=0.
DO 162 I=1,MM2
162 U=U+A1(MM2,I)*A(I,NO)
S0L(MM2)=URM-U
IB0=-1
163 INDIC=IS-NN
IF(INDIC)164,164,159

```



```

164 DO 166 I=1,MM2
    U=J.
    DO 165 J=1,MM2
165 U=U+A1(I,J)*A(J,IS)
166 XXX(I)=U
    GO TO 168
169 DO 167 I=1,MM2
167 XXX(I)=A1(I,INDIC)
168 IN=1
    IF(AA.LT.0.)IN=-1
171 CALL CHRASE(MM2)
    DO 174 I=1,MM2
    IS=IB(I)
    IF(IS.LE.NN)Z(IS)=C0L(I)
174 CONTINUE
    DO 173 I=1,N
    IF(BP(I))7(I)=X1(I),GO TO 178
    IF(BM(I))7(I)=X0(I)
178 CONTINUE
    IR=0
    DO 183 I=1,MM2
    IS=IB(I)
    IF(IS.LE.N)IF(Z(IS)=X1(IS))180,180,182
    GO TO 183
180 IF(Z(IS).LT.X0(IS))IR=I;AA=1.
    GO TO 183
182 IR=I;AA=-1.
183 CONTINUE
    IF(IR)184,184,140
184 CALL DICHO(Z,YD,YD)
    IF(IB1)251,186,187
186 IF(IT=1)12,12,251
187 IF(ICA=MI(A))120,121,185
185 IF(FC2.GT.FC1)FC2=FC1
    IF(FC/FC2.LE.1.00000001)FC=FC1;GO TO 257
188 IF(ICA=NACA)121,251,251
257 IF(IT.EQ.1.AND.IB1.EQ.0)GO TO 12
251 IF(ILIN=ILINMA)12,9,9
252 IF=1
    DO 253 I=1,MNL1
253 LIP(I)=.FALSE.
    CALL CONT(2,FDIST,Yn)
    WRITE(108,812)IT,VC(1)
    WRITE(108,402)
    WRITE(108,403)(VC(I),I=2,MNL1)
    WRITE(108,404)
    WRITE(108,403)(YD(I),I=1,N)
    DO 440 J=1,11
    S=0.
    DO 441 K=1,10
    IF(MC(K,J).EQ.0) GO TO 441

```



```
S=S-NC(K,J)*YD(K+86)
441 CONTINUE
445 V(J+10)=S
WRITE(108,453)(V(J+10),J=1,11)
STOP
END
```



```

SUBROUTINE CHBASE(M)
LOGICAL BM, BP, BS
COMMON EP1
COMMON N
COMMON/CH1/X1(98),X0(98),XXX(55),S0L(55),A1(55,55)
COMMON/CH2/IB(55),IR,IS,IN
COMMON/CH3/BM(153),BP(153),BS(55)
J=IB(IR)
BM(J)=IN.EQ.1
BP(J)=IN.EQ.-1
U=0.
IF(J=N)1,1,4
1 IF(BP(J))U=X1(J);GO TO 4
U=X0(J)
4 U1=-1./XXX(IR)
U=U1*(S0L(IR)+U)
DO 5 I=1,M
V=XXX(I)
S0L(I)=S0L(I)+U*V
5 XXX(I)=U1*V
XXX(IR)=-U1
UP=0.
IF(IS=N)6,6,9
6 IF(BP(IS))UP=X1(IS);GO TO 9
UP=X0(IS)
9 BM(IS)=BP(IS)=.FALSE.;IB(IR)=IS;S0L(IR)=-U-UP
DO 12 I=1,M
IF(BS(I))GO TO 12
V=A1(IR,I)
DO 11 J=1,M
11 A1(J,I)=A1(J,I)+XXX(J)*V
A1(IR,I)=XXX(IR)*V
12 CONTINUE
IF(.NOT.BS(IR))GO TO 15
DO 14 I=1,M
14 A1(I,IR)=XXX(I)
BS(IR)=.FALSE.
15 RETURN
END

```



```

SUBROUTINE DICHO(YH,ZH,XH)
DIMENSION T(98),XH(98),YH(98),ZH(98),XC(98)
INTEGER DIC
COMMON EP1
COMMON N
COMMON /D11/ RE1,EP2,FC,X4(98)
COMMON/D12/ DIC,IB1,IT,ICEN,ICA,MICA
105 FORMAT(1H ,12HF-DISTANCE =,E18.12)
EP=0.0000000001
IB1=-1
ITE=0
VMIN=0.
DO 1 I=1,N
BB=ZH(I)-YH(I)
T(I)=BB
1 VMIN=VMIN+BB*BB
VMIN=SQRT(VMIN)
AA1=RE2=0.
BB=RE1=VMIN
CC=1./BB
DO 2 I=1,N
2 T(I)=T(I)*CC
VMIN=VMIN/DIC
CALL CONT(1,FA,YH)
CALL CONT(1,FB,ZH)
IF(FA.GE.FP1)RE1=0.
4 CC=(AA1+BB)*0.5
ITE=ITE+1
IF(ITE.GT.35)GOTO 22
DO 6 I=1,N
6 XC(I)=YH(I)+CC*T(I)
CALL CONT(1,FC,XC)
IF(FC.LE.FP2)RE2=CC;GOTO 10
IF(CC.LT.RE1)RE1=CC
10 IF(FC+EP.LT.FB)AA1=CC;FA=FC;GOTO 4
IF(FC+EP.LT.FA)BB=CC;FB=FC;GOTO 4
14 IF(VMIN+AA1-BB)15,15,28
15 DD=(AA1+CC)*0.5
DO 16 I=1,N
16 XC(I)=YH(I)+DD*T(I)
CALL CONT(1,FD,XC)
IF(FD.LE.EP2)RE2=DD;GOTO 20
IF(DD.LT.RE1)RE1=DD
20 IF(FD-FA)28,21,21
21 IF(FD.GE.FC)BB=CC;FB=FC;CC=DD;FC=FD;GOTO 14
E=(BB+CC)*0.5
DO 24 I=1,N
24 XC(I)=YH(I)+E*T(I)
CALL CONT(1,FE,XC)
IF(FE.GT.FC)AA1=CC;FA=FC;FC=FE;CC=E;GOTO 14
IF(FE.GE.FB)AA1=DD;BB=E;FA=FD;FB=FE;GOTO 14

```



```

28 IF(FC)40,41,41
40 IBI=0;G8T8 38
41 IF(IT.LT.(CEN)/60 TD 38
   IF(RE1)29,29,30
29 IF(DICA-MICA)43,38,38
43 IBI=1;B8=0.;G8T8 38
37 IBI=1
   DO 31 I=1,N
31 XC(I)=YH(I)+RE1*T(I)
   XM(I)=YH(I)+RE2*T(I)
   CALL C8NT(1,FA,XC)
   CALL C8NT(1,FB,XM)
32 DD=RE1-RE2
   IF(DD-VMIN)53,33,33
33 BB=RE2-(FR*DD)/(FA-FB)
   DO 34 I=1,N
34 XC(I)=YH(I)+BB*T(I)
   CALL C8NT(1,FM,XC)
   RE1=BB/FA+FA/FA=FM
   IF(FM/FA1.LT.0.5)IF(FM=0.00000001)38,32,32
   E=(RE1+RE2)*0.5
   DO 37 I=1,N
37 XC(I)=YH(I)+E*T(I)
   CALL C8NT(1,FE,XC)
   IF(FE.LT.0.)RE2=E,FR=FE,G8T8 32
   RE1=E,FA=FE,G9 T9 32
53 BB=(RE1+RE2)*0.5
38 DO 39 I=1,N
39 XM(I)=YH(I)+CC*T(I)
   CALL C8NT(1,FT,XM)
   WRITE(108,100) FT
42 RETURN
   END

```



SOUS PROGRAMME : INVESTISSEMENT

```

SUBROUTINE C0NT(L,FOIST,XC)
DIMENSION XC(98)
LOGICAL LIP
REAL NOR,KKK
COMMON EP1
COMMON N
COMMON/C01/ VC(34),FCT1,NOR(34),KKK,A(55,98),V(21),VV(21),
SEAD(21),VAD(21),EA(11),VA(11),EN(11),ECA(11),
SVCA(11),EPX(11),VPX(11),DP(11),QA(11),VN(11),
SPP1,PP2,PP3,PP4,DD1,DD2,QQ1,QQ2,VR(11)
COMMON/C02/ IF,MC(10,11),KD(21),MS(11,21),KB(11),NF(6),
SJJ1,JJ2,JJ3,JJ4
COMMON/C03/ LIP(34)
PU1=JJ1*(.85-PP1)
PU2=JJ2*(.85-PP2)
PU3=JJ3*(.85-PP3)
PU4=JJ4*(.85-PP4)
AD1=(.95-QQ1)/DD1
AD2=(.95-QQ2)/DD2
DO 1 K=1,10
1 V(K)=XC(K+86)
DO 2 J=1,11
S=0.
DO 40 K=1,10
IF(MC(K,J).EQ.0) GO TO 40
S=S-MC(K,J)*V(K)
40 CONTINUE
2 V(J+10)=S
DO 41 J=1,21
41 VV(J)=V(J)/KD(J)
DO 3 I=1,11
S1=S2=S3=S4=S5=S6=0.
DO 9 J=1,21
IF(MS(I,J).EQ.0)GO TO 9
W0=MS(I,J)*XC(J+44)*VV(J)
W1=MS(I,J)*XC(J+65)*VV(J)
S1=S1+W0
S2=S2+W0*W0
S3=S3+W1
S4=S4+W1*W1
S5=S5+MS(I,J)*EAD(J)*V(J)
S6=S6+VAD(J)*V(J)**2
9 CONTINUE
EA(I)=S5, VA(I)=S6
EN(I)=AD1*S1+AD2*S3
VN(I)=S2*((.02+QQ1)/DD1)**2+S4*((.02+QQ2)/DD2)**2
3 CONTINUE
DO 50 I=1,11
J=4*I-3
EPX(I)=PU1*XC(J)+PU2*XC(J+1)+PU3*XC(J+2)+PU4*XC(J+3)
VPX(I)=((PP1+.10)*JJ1*XC(J))**2+((PP2+.10)*JJ2*XC(J+1))**2+

```



```

S((PP3+.10)*JU3*XC(J+2))**2+((PP4+.10)*JU4*XC(J+3))**2
57 CONTINUE
C FONCTION ECONOMIQUE
S1=S2=S3=S4=0.
DO 11 I=1,41,4
S1=S1+XC(I)
S2=S2+XC(I+1)
S3=S3+XC(I+2)
11 S4=S4+XC(I+3)
S5=S6=0.
DO 12 J=1,21
S5=S5+XC(J+44)*KD(J)
12 S6=S6+XC(J+65)*KD(J)
VC(1)=-NF(1)*JU1*S1-NF(2)*JU2*S2-NF(3)*JU3*S3-NF(4)*JU4*S4
S-NF(5)*S5-NF(6)*S6
C EXPRESSION DES CONTRAINTES
DO 10 I=1,11
EP(I)=SQRT(VCA(I)+VPX(I)+VA(I)+VN(I))
VC(I+1)=ECA(I)+EPX(I)-EA(I)-EN(I)-K0(I)-QA(I)*DP(I)
10 CONTINUE
DO 15 J=1,11
VC(J+12)=V(J+10)+VB(J)
VC(J+23)=-V(J+10)+VA(J)
15 CONTINUE
IF(L*NE.1)GO TO 35
C CALCUL DE LA F-DISTANCE NORMALISEE
VC(1)=VC(1)-FCT1
DO 13 J=1,12
13 VC(J)=VC(J)*NOR(J)
VC(1)=KKK*VC(1)
U=VC(1)
DO 14 J=2,12
IF(U.GT.VC(J))U=VC(J)
14 CONTINUE
FDIST=U
GO TO 34
C CALCUL DES GRADIENTS DES FONCTIONS.ON AFFECTE A CHAQUE LIGNE DE
C A LIOPPOSE DU GRADIENT DE LA FONCTION CORRESPONDANTE
35 IF(.NOT.LIP(1))GO TO 19
DO 18 J=1,96
18 A(IF,J)=0.
DO 16 I=1,41,4
A(IF,I)=JU1*NF(1)
A(IF,I+1)=JU2*NF(2)
A(IF,I+2)=JU3*NF(3)
16 A(IF,I+3)=JU4*NF(4)
DO 17 J=1,21
A(IF,J+44)=KD(J)*NF(5)
17 A(IF,J+65)=KD(J)*NF(6)
IF=IF+1
19 CONTINUE

```

```

DO 24 I=2,12
IF(.NOT.LIP(I))GO TO 24
DO 20 J=1,96
20 A(IF,J)=0.
RC=QA(I-1)/DP(I-1)
A(IF,4*I-7)=XC(4*I-7)*RC*((PP1+.10)*JU1)**2-PU1
A(IF,4*I-6)=XC(4*I-6)*RC*((PP2+.10)*JU2)**2-PU2
A(IF,4*I-5)=XC(4*I-5)*RC*((PP3+.10)*JU3)**2-PU3
A(IF,4*I-4)=XC(4*I-4)*RC*((PP4+.10)*JU4)**2-PU4
DO 21 J=1,21
IF(MS(I-1,J).EQ.0) GO TO 21
A(IF,J+44)=VV(J)*VV(J)*XC(J+44)*RC*((.02+QQ1)/DD1)**2+MS(I-1,J)*
SVV(J)*AD1
A(IF,J+65)=VV(J)*VV(J)*XC(J+65)*RC*((.02+QQ2)/DD2)**2+MS(I-1,J)*
SVV(J)*AD2
21 CONTINUE
DO 22 K=1,10
Y=Z=0.
DO 23 J=11,21
IF(MS(I-1,J).EQ.0.OR.MC(K,J-10).EQ.0) GO TO 23
Y=Y-MS(I-1,J)*MC(K,J-10)*(EAD(J)+(AD1*XC(J+44)+AD2*
SXC(J+65))/KD(J))
Z=Z-MC(K,J-10)*V(J)*(VAD(J)+((.02+QQ1)*XC(J+44)/DD1)**2+
S((.02+QQ2)*XC(J+65)/DD2)**2)/KD(J)**2)
23 CONTINUE
IF(MS(I-1,K).EQ.0)A(IF,K+86)=Y+RC*Z,GO TO 22
A(IF,K+86)=MS(I-1,K)*(EAD(K)+(AD1*XC(K+44)+AD2*XC(K+65))/KD(K))
S+Y+RC*(V(K)*(VAD(K)+((.02+QQ1)*XC(K+44)/DD1)**2+((.02+QQ2)*
SXC(K+65)/DD2)**2)/Kn(K)**2)+Z)
22 CONTINUE
IF=IF+1
24 CONTINUE
DO 25 I=1,11
IF(.NOT.LIP(I+12))GO TO 25
DO 27 J=1,10
A(IF,J+86)=MC(J,I)
27 CONTINUE
IF=IF+1
25 CONTINUE
DO 28 I=1,11
IF(.NOT.LIP(I+23))GO TO 28
DO 29 J=1,96
29 A(IF,J)=0.
DO 32 J=1,10
A(IF,J+86)=-MC(J,I)
32 CONTINUE
IF=IF+1
28 CONTINUE
34 RETURN
END

```



REFERENCES

OUVRAGES, ARTICLES GENERAUX

- [1] BEREANU.B
"Programmation stochastique et quelques unes de ses applications économiques".
Pub. Econométriques 5-2-(1972) 143-161
- [2] CARTON.D
"Programmes linéaires stochastiques"
Revue E. D. F. série C (1968) 43-60
- [3] FABER.M.M
"Stochastisches Programmieren"
Physica Verlag Würzburg Wien (1970)
- [4] KOLBIN V.V
"Stochastic Programming"
Progr. in Math. 11 (1971) 1-75
- [5] LEMARIE.J.M
"Prévision et décision en programmation linéaire stochastique"
Thèse Université de Grenoble (1967)
- [6] SENGUPTA.J.K
"Stochastic Programming - methods and applications"
North Holland Pub. comp. (1972)

- [7] SENGUPTA.J.K. TINTNER.G
"A review of stochastic linear Programming"
 Rev. of the Int. Stat. Inst. 39-2 (1971) 197-223
- [8] TINTNER.G. SENGUPTA.J.K
"Stochastic Economics"
 Academic Press (1972)
- [9] VAJDA.S.
"Probabilistic Programming"
 Academic Press (1972)

1 REALISATION-DECISION

- [1.1] BEREANU.B
"On stochastic linear Programming I distribution Problems : A single random Variable".
 Rev. Math. Pures et Appliquées 8.4 (1963) 683-697
- [1.2] *"On stochastic linear Programming II Distribution problems : Non stochastic technological matrix."*
 Rev. Math. Pures et Appl. 11-6 (1966) 713-725
- [1.3] *"Regions de décision et repartition de l'optimum dans la programmation linéaire"*
 Comp. Rendu Acad. Sci. 259 (1964) 1393.1396
- [1.4] *"On stochastic linear Programming. The Laplace Transform of the distribution of the optimum and Applications"*.
 J. Math Anal. and Appl. 15 (1966) 280.294
- [1.5] *"Programmation stochastique et quelques unes de ses applications économiques"*
 Pub. Econométriques 5.2 (1972) 143-161

- [1.6] BEREANU.B PEETERS.G
"A wait and see problem in stochastic linear Programming : An experimental computer code".
 Cahiers du C. E. R. O. 12.3 (1970) 133-148
- [1.7] BRACKEN.J. SOLAND. R.M
"Statistical decision analysis of stochastic linear problems"
 Nav. Res. Log. Quart 13.3(1966) 205-225
- [1.8] BRANS.J.P
"Programmes linéaires stochastiques"
 cahiers du C. E. R. O. 6.1(1964) 19.43
- [1.9] EWBANK.J.B. FOOTE.B.L. KUMIN.HJ
"A method for the solution of the distribution problem of stochastic linear programming"
 SIAM J. App.Math. 26.2 (1974) 225-238
- [1.10] FORTET.R
"Programmes linéaires stochastiques"
 Math. des Prog. Econ. Monographie AFIRO Dunod (1964)
- [1.11] LEMARIE.J.M
"Prévision et décision en programmation linéaire stochastique"
 Thèse Université de Grenoble (1967)
- [1.12] ONICESCU.O .IOSIFESCU.M
"Some considerations on stochastic linear programming"
 Econ. comp. Cybernetics Studies and research
 1 (1968) 115-119
- [1.13] POLLATSCHEK.M.A
"Bounds for stochastic convex programs"
 Zeitschrift für Op. Research 18 (1974) 27-39

- [1.14] PREKOPA. A
"On the probability distribution of the optimum of a random linear program"
 SIAM.J. control 4.1(1966) 211-222
- [1.15] SENGUPTA. J.K
"the stability of truncated solutions of stochastic linear programming"
 Econometrica 34.1 (1966) 77.104
- [1.16] SENGUPTA. J.K TINTNER . G.
"A review of stochastic linear Programming"
 Review of the Int. Stat. Inst. 39.2(1971) 197-223
- [1.17] SENGUPTA. J.K. TINTNER. G. MILLHAM. C
"On some theorems of stochastic linear Programming with applications"
 managt science 10-1- (1963) 143-159
- [1.18] TINTNER. G. SASTRY M.V.R
"A note of the use of non parametric statistics in stochastic linear programming".
 managt science 19-2-(1972) 205-210

2 DECISION-REALISATION

- [2.1] ALLEN. F.M BRASWELL. R.N RAO. P.V
"Distribution-free Approximations for chance constraints"
 oper. Research 3-22 (1974) 610-621
- [2.2] AGNEW. N.H AGNEW. R.A RASMUSSEN. J SMITH. K.R
"An application of chance constrained Programming to portfolio selection in a casualty insurance firm"
 managt science 15-10 (1969) B 512 - B 520

- [2.3] BALINFY.J.L
"Non linear Programming Models with joint Chance Constraints"
 International Summer School on integer and Non linear Programming.
 NATO advanced Study Institute. June 8.20 (1969)
 Ile de Bendor . FRANCE
- [2.4] BAWA V.S
"On chance constrained Programming with joint constraints"
 Managt science 19-11 (1973) 1326-1331
- [2.5] BEREANU.B
"Programme de risque minimal en programmation linéaire stochastique"
 C. R. Acad. Sciences Paris 259 (1964)
- [2.6] *"Quasi-convexity, strictly convexity and pseudo-convexity of composite objective functions"*
 R. I. R. O. R1 (1972) 15,26
- [2.7] BERGTHALLER.C
"A quadratic Equivalent for the minimum Risk Problem"
 Rev. Roumaine Math. Pures et Appl. 15 (1970) 17-23
- [2.8] CARTON.D
"Programmes linéaires Stochastiques"
 Revue E. D. F. série C (1968) 43-60
- [2.9] CHARNES.A. COOPER.W.W
"Chance Constrained Programming"
 Managt Science 6 (1959) 73-79
- [2.10] *"Normal Déviates and Chance Constraints"*
 J. Am. Stat. Ass. 57-297 (1962) 134-148
- [2.11] *"Deterministic Equivalents for optimizing and satisficing under chance constraints"*
 oper. Res. 11 (1963) 18-38

- [2.12] CHARNES.A. COOPER.W.W. THOMPSON.G.L
"Constrained Generalised medians and hypermedians as deterministic equivalents for two stage linear Programs under uncertainty"
 Managt Science 12.1 (1965) 83.112
- [2.13] CHARNES.A. KIRBY.M.J.L. RAIKE.W.M
"Zero-zero chance Constrained Games"
 Proceedings of the Fourth International Conference on Operation Research (1966) 150-170
- [2.14] *"Solution Theorems in Probabilistic Programming. A linear programming Approach"*
 Journal of Math. Anal. and Appl. 20 (1967) 565-582
- [2.15] *"An acceptance region theory for chance-constrained Programming"*
 Journal of Math Anal. and Appl. 32.1 (1970) 38-61
- [2.16] CHARNES.A KIRBY.M.J.L
"Optimal Decision Rules for the E-model of chance constrained Programming"
 cahiers du C. E. R. O. (1966) 5.44
- [2.17] *"Some special P-models in chance constrained Programming"*
 Managt Science 14.3 (1967) 183-195
- [2.18] *"Optimal Decisions Rules for the Triangular E-model of chance Constrained Programming"*
 Cahiers du C. E. R. O 11.4 (1969) 215-243
- [2.19] COHEN.K.J ELTON.E.J
"Inter-temporal Porfolio Analysis based on Simulation of joint Returns"
 Managt Science 14 (1967) 5.18

- [2.20] DRAGOMIRESCU.M
"An Algorithm for the minimum Risk Problem of stochastic Programming"
Oper. Res. (1972) 154-164
- [2.21] EVERS.W.H
"A new Model for stochastic linear Programming"
Managt Science 13.9 (1967) 680-693
- [2.22] FROMOVITZ.S
"Non linear Programming with randomization"
Managt Science 9 (1965) 831-846
- [2.23] GEOFFRION.A.M
"Stochastic Programming with aspiration of fractile criteria"
Managt Science 13.9 (1967) 672-679
- [2.24] *"Solving Bi-criterion Mathematical Programs"*
Oper. Res. 15.1 (1967) 39-54
- [2.25] GOCHET.W.F PADBERG.W.M
"The triangular E-model of chance-constrained programming with stochastic A-matrix"
managt science 20.9 (1974) 1284-1291
- [2.26] HILLIER.F.H
"Chance Constrained Programming with 0.1 or bounded continuous decision variables"
managt science 14.1 (1967) 34-57
- [2.27] HOSS.L.F
"Optimisation stochastique : les différentes attitudes"
Séminaire A. Num. Université de Lille Labo de Calcul
(1974)

- [2.28] IRVING.A.M
"Structured linear Programs with stochastic coefficients"
 University of Birmingham (1969)
- [2.29] JAGANNATHAN.R
"Chance constrained Programming with joint constraints"
 Oper. Res. 22.2 (1974) 358-372
- [2.30] KAPLAN.R.S SODEN.J.V
"On the Objective function for the Sequential P-model of chance constrained Programming"
 Oper. Res. 19.1 (1971) 105-114
- [2.31] KATAOKA.S
"A stochastic Programming Model"
 Econometrica 31 (1963) 181-196
- [2.32] KIRBY.M.J.L
"The Current State of chance Constrained Programming"
 Proceedings of Princeton symposium on Mathematical Programming
 Princeton University Press(1970) 93-111
- [2.33] KORTANEK.K. SODEN.J.V
"On the Charnes.Kirby Optimality Theorem for the Conditional chance Constrained E-model"
 Cahiers du C. E. R. O 9 (1967) 87-98
- [2.34] LEMARIE.J.M
"Prévision et décision en programmation linéaire stochastique"
 Thèse Grenoble (1967)
- [2.35] MANGASARIAN.O.L
"Convexity, pseudo-convexity and quasi-convexity of composite functions"
 Cahiers du C. E. R. O 12 (1970) 114-122

- [2.36] MILLER.B.L WAGNER.H.M
"Chance constrained programming with joint constraints"
Oper. Res. 13 (1965) 930-945
- [2.37] NASLUND.B
"Mathematical Programming under risk"
The Swedish journal of Economics (1965) 240-255
- [2.38] PIERSKELLA.W.P
"Mathematical Programming with Increasing constraint functions"
Managt science 15.7 (1969) 416-425
- [2.39] PREKOPA.A
"On probabilistic Constrained Programming"
Proceedings of the Princeton Symp. on Math. Progr.
Univ. Press (1970) 113-128
- [2.40] *"Contributions to the theory of stochastic Programming"*
mathematical Programming 4 (1973) 202-221
- [2.41] RAIKE.D.V
"Decision rules in chance constrained Programming : some experimental comparisons"
managt science 19.6 (1970) 48-65
- [2.42] RESH.M
"Chance Constrained Programming of the machine loading problem with stochastic processing times"
managt science 17.1 (1970) 48-65
- [2.43] SACHAN.R.S
"Stochastic Programming Problems under Risk and Uncertainty"
Cahiers du C. E. R. O 12 (1970) 211-232

- [2.44] SELLSTEDT.B.D NASLUND.B
"Product development plans"
 Oper. Res. 23.4 (1972) 497-509
- [2.45] SENGUPTA.J.K
"Distribution Problems in stochastic and chance-constrained Programming"
 Econ. Models, Estimation and Risk Programming-Springer Verlag (1969) 391-424
- [2.46] *"Safety first rules under chance-constrained linear Programming"*
 Oper. Res. 17.1 (1969) 112-132
- [2.47] *"A system reliability approach to linear Programming"*
 Unternehmensforschung 15 (1971) 112-129
- [2.48] *"A statistical reliability approach to linear Programming"*
 Unternehmensforschung 15 (1971) 255-278
- [2.49] *"A chance constrained Programming with chi-square type deviates"*
 Managt science 19.3 (1972) 337-349
- [2.50] *"Application of system reliability measures in chance constrained Programming"*
 Cahiers du C. E. R. O 15.4 (1973) 449-473
- [2.51] SENGUPTA.J.K PORTILLO.CAMPBELL.J.H
"A fractile approach to linear programming under risk"
 managt science 16.5 (1970) 298-308
- [2.52] SEPPÄLÄ.Y
"Constructing sets of uniformly tighter linear approximation for a chance constraint"
 managt science 17.11 (1971) 736-749

- [2.53] *"A chance constrained Programming Algorithm"*
B I T 12 (1972) 376-399
- [2.54] SMITH.D.V.
*"Decisions rules in chance constrained Programming :
some experimental comparisons"*
managt science 19.6 (1973) 688-702
- [2.55] SYMONDS.G.H
*"Deterministic solutions for a class of chance constrained
Programming problems"*
Oper. Res. 15.3 (1967) 495-512
- [2.56] THOMPSON.G.L. COOPER.W.W CHARNES.A
"Characterizations by chance constrained Programming"
Recent advances in Math. Prog. Mac. Graw-Hill (1963)
- [2.57] TINN.K.A TYUGU.E.KH
"Non linear Programming with random constraints"
Kibernetika 4.1 (1968) 54-62
- [2.58] WEISMAN.J HOLZMAN.A.G
"Engineering design Optimization under risk"
Managt science 19.3 (1972) 235-249
- [2.59] ZACKOVA
*"A note on deterministic equivalents to stochastic
linear Programming Problems"*
Z. Wahrchein. Theo. Verw. Geb. 14.4 (1970) 264-268

3 DECISION - REALISATION - DECISION

- [3.1] AVRIEL.M WILLIAMS.A.C
"The value of information and stochastic Programming"
Oper. Res. 18.5 (1970) 947-954

- [3.2] **BARON.G.B**
"Information in two stage programming under uncertainty"
 Nav. Res. Log. Quart. 18.2 (1971) 169-176
- [3.3] **BRANS.J.P**
"Programmes linéaires stochastiques"
 Cahiers du C. E. R. O 6.1 (1964) 19-43
- [3.4] **BUI-TRONG LIEU**
"On a problem of convexity and its applications to non linear stochastic Programming"
 J. Math. Anal. and Appl. 8.2 (1964) 177-187
- [3.5] *"A study of some inequalities for non linear stochastic Programming"*
 Non Linear Programming. North Holland (1967) 250-258
- [3.6] **DANTZIG.G.B**
"Linear programming under uncertainty"
 managt science 1 (1955) 197-206
- [3.7] *"Linear Programming and Extensions"*
 Princeton Univ. Press (1963)
- [3.8] **DEMPSTER.M.A.H**
"On stochastic Programming : I static linear Programming under risk"
 Journal of Math. Anal. and App. 21 (1968) 304-343
- [3.9] **EL-AGIZY.M**
"Two stage Programming under uncertainty with discrete distribution fonction"
 Oper. Res. 15(1967) 55-70
- [3.10] **FORTET.R**
"Programmes linéaires stochastiques"
 Math. des Prog. Econ. Monographie A.F.I.R.O Dunod (1964)

- [3.11] FOURGEAUD LENCLUD SENTIS
"Critères de choix en avenir partiellement incertain"
R. I. R. O 14 (1968) 9-20
- [3.12] GARSTKA.S.J
"Stochastic Programs with recourse : random recourse costs only"
managt science 19.7 (1973) 747-750
- [3.13] GARSTKA.S.J RUTENBERG.D.P
"Computation in discrete stochastic Programs with recourse"
Oper. Res. 21 (1973) 112-122
- [3.14] LEMARIE.J.M
"Prévision et décision en programmation linéaire stochastique"
Thèse Université de Grenoble (1967)
- [3.15] MADANSKY.A
"Bounds of the expectation of a convex function of a multivariable random variable"
Ann. Math. Stat. 30 (1959) 743-746
- [3.16] *"Inequalities for stochastic linear Programming problems"*
managt Science 6.2 (1960) 197-204
- [3.17] *"Methods of solution of linear Programming under uncertainty"*
Oper. Res. 10.4 (1962) 463-471
- [3.18] *"Dual Variable in two stage linear Programming under uncertainty"*
Journal of Math. Anal. and Appl. 6 (1963) 98-108
- [3.19] MANGASARIAN.O.L ROSEN.J.B
"Inequalities for stochastic non linear Programming Problems"
Oper. Res. 12.1 (1964) 143-154

- [3.20] MANGASARIAN.O.L
"Non linear Programming problems with stochastic objective functions"
 managt science 10.2 (1964) 353-359
- [3.21] MIDLER.J.L WOLLMER.R.D
"Stochastic Programming Models for scheduling Airlift Operations"
 Naval Res. Log. Quart. 16 (1969) 315-330
- [3.22] MURTY.K.G
"Two Stage linear Programming under uncertainty : A basic property of the optimal solution"
 Z. Wahrschein und Verw. Geb. 10.4 (1968) 284-288
- [3.23] RUTENBERG.D.P
"Risk aversion in stochastic Programming with recourse"
 Oper. Res. 21 (1973) 377-380
- [3.24] SACHAN.R.S
"On the non linear stochastic Programming Problems"
 Cahiers du C. E. R. O 10.2 (1968) 84-99
- [3.25] *"Stochastic Programming Problems under risk and Incertainty"*
 Cahiers du C. E. R. O 12 (1970) 48-65
- [3.26] SENGUPTA.J.K TINTNER.G MILLHAM.C
"On some theorems of stochastic linear Programming with applications"
 managt science 10.1 (1963) 143-159
- [3.27] SHAILENDRA.C PARIKH
"Equivalent stochastic linear Programs"
 SIAM.J App. Math. 18.1 (1970) 1-5

- [3.28] SHOR.N.Z SCHEPAKIN.M.B
"Algorithms for the solution of the two stage problem in stochastic programming"
 Kibernetika 4.3 (1968) 56-58
- [3.29] VAN SLYKE.R.M WETS.R.J.B
"Programming under Uncertainty and stochastic Optimal Control"
 SIAM. J.control 4.1 (1966) 179-193
- [3.30] *"Stochastic Programs in Abstract Spaces"*
 Stochastic Optimization and Control. H. F Karremann
 Eds (1968) 25-45
- [3.31] *"L-Shaped linear Programs with Applications to Optimal Control and stochastic Programming"*
 SIAM J.Appl. Math. 17.4 (1969) 638-663
- [3.32] WALKUP.D.W WETS.R.J.B
"Continuity of some Convex Cone. Valued Mappings"
 Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967) 229-235
- [3.33] *"Stochastic Programs with Recourse"*
 SIAM J. Appl. Math. 15.5 (1967) 1299-1314
- [3.34] *"Stochastic Programs with Recourse II On the Continuity of the Objective"*
 SIAM J. Appl. Math. 17.1 (1969) 98-103
- [3.35] *"A note on decision rules for stochastic Programs"*
 J. of comp. and syst. science 2 (1968) 305-311
- [3.36] *"Some practical Regularity Conditions for non linear Programs"*
 SIAM J control 7.3 (1969) 430-446
- [3.37] *"Stochastic Programs with Recourse : Special Forms"*
 Proceedings of the Princeton Symposium on Math. Programming Ed. H.W Kuhn (1970) 139-161

- [3.38] WETS.R.J.B
"Programming under Uncertainty : the Equivalent Convex Program"
SIAM J. Appl. Math. 14.1 (1966) 89-105
- [3.39] *"Programming under uncertainty : the solution Set"*
SIAM J Appl. Math. 14.5 (1966) 1143-1151
- [3.40] *"Programming under uncertainty : The Complete problem"*
Z. Wahrschein and Verw. Geb. 4 (1966) 316-339
- [3.41] *"Problèmes duaux en programmation stochastique"*
C. R. Acad. Sc. Paris 270 n°1 (1970) 47-50
- [3.42] *"Stochastic Programs with recourse : A basis theorem for multistage problems"*
Z. Wahtschein und Verw. Geb. 21.3 (1972) 201-206
- [3.43] *"Charaterization theorems for stochastic programs"*
Math. Prog. 2 (1972) 166-175
- [3.44] *"Stochastic programs with fixed recourse : the equivalent dererministic program"*
SIAM review (à paraître).
- [3.45] WILLIAMS.A.C
"A treatment of transportation Problems by decomposition"
J. SIAM Appl. Math. 10 (1962) 35-48
- [3.46] *"A stochastic Transportation Problem"*
Oper Res. 11.5 (1963) 759-770
- [3.47] *"On stochastic linear Programming"*
J. SIAM App. Math. 13.4 (1965) 927-940
- [3.48] *"Approximation formulas for stochastic linear Programming"*
J. SIAM App. Math. 14.4 (1966) 668-677

- [3.28] SHOR.N.Z SCHEPAKIN.M.B
"Algorithms for the solution of the two stage problem in stochastic programming"
Kibernetika 4.3 (1968) 56-58
- [3.29] VAN SLYKE.R.M WETS.R.J.B
"Programming under Uncertainty and stochastic Optimal Control"
SIAM. J.control 4.1 (1966) 179-193
- [3.30] *"Stochastic Programs in Abstract Spaces"*
Stochastic Optimization and Control. H. F Karremann
Eds (1968) 25-45
- [3.31] *"L-Shaped linear Programs with Applications to Optimal Control and stochastic Programming"*
SIAM J.Appl. Math. 17.4 (1969) 638-663
- [3.32] WALKUP.D.W WETS.R.J.B
"Continuity of some Convex Cone. Valued Mappings"
Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967) 229-235
- [3.33] *"Stochastic Programs with Recourse"*
SIAM J. Appl. Math. 15.5 (1967) 1299-1314
- [3.34] *"Stochastic Programs with Recourse II On the Continuity of the Objective"*
SIAM J. Appl. Math. 17.1 (1969) 98-103
- [3.35] *"A note on decision rules for stochastic Programs"*
J. of comp. and syst. science 2 (1968) 305-311
- [3.36] *"Some practical Regularity Conditions for non linear Programs"*
SIAM J control 7.3 (1969) 430-446
- [3.37] *"Stochastic Programs with Recourse : Special Forms"*
Proceedings of the Princeton Symposium on Math. Programming Ed. H.W Kuhn (1970) 139-161

- [3.38] WETS.R.J.B
"Programming under Uncertainty : the Equivalent Convex Program"
 SIAM J. Appl. Math. 14.1 (1966) 89-105
- [3.39] *"Programming under uncertainty : the solution Set"*
 SIAM J Appl. Math. 14.5 (1966) 1143-1151
- [3.40] *"Programming under uncertainty : The Complete problem"*
 Z. Wahrschein and Verw. Geb. 4 (1966) 316-339
- [3.41] *"Problèmes duaux en programmation stochastique"*
 C. R. Acad. Sc. Paris 270 n°1 (1970) 47-50
- [3.42] *"Stochastic Programs with recourse : A basis theorem for multistage problems"*
 Z. Wahrschein und Verw. Geb. 21.3 (1972) 201-206
- [3.43] *"Charaterisation theorems for stochastic programs"*
 Math. Prog. 2 (1972) 166-175
- [3.44] *"Stochastic programs with fixed recourse : the equivalent deterministic program"*
 SIAM review (à paraître).
- [3.45] WILLIAMS.A.C
"A treatment of transportation Problems by decomposition"
 J. SIAM Appl. Math. 10 (1962) 35-48
- [3.46] *"A stochastic Transportation Problem"*
 Oper Res. 11.5 (1963) 759-770
- [3.47] *"On stochastic linear Programming"*
 J. SIAM App. Math. 13.4 (1965) 927-940
- [3.48] *"Approximation formulas for stochastic linear Programming"*
 J. SIAM App. Math. 14.4 (1966) 668-677

- [3.49] *Enrata : "On stochastic linear Programming"*
J. SIAM App. Math. (1967) 228
- [3.50] WILLIAMS. A.C AVRIEL.M
"Remarks on linear programming under uncertainty"
Oper. Res. 16 (1968) 198-201
- [3.51] WILSON.R
"On programming under uncertainty"
Oper. Res. 14 (1966) 652-657
- [3.52] YU. M. YERMOL'YEV
"A general stochastic Programming Problem"
Journal of Cybernetics 1 (4) (1971) 106-112
- [3.53] ZIEMBA.W.T
"Duality Relations, Certainty Equivalents and Bounds for convex stochastic Programs with simple Recourse"
Cahiers du C. E. R. O 13 (1971) 85-97
- [3.54] *"Computational Algorithms for convex stochastic Programs with simple Recourse"*
Oper. Res. 18.3 (1970) 414-431
- [3.55] *"Solving non linear programming problems with stochastic objective functions"*
J of financial and Quant. Analysis (1972)

4 APPLICATIONS

- [4.1] BEUNEU.J
"Adaptation de la méthode des centres linéarisée à un problème de dispatching économique"
Pub. Labo. de calcul (1972) Université de Lille
- [4.2] DENEL.J
"Résolution de problèmes d'optimisation non linéaires par la méthode des centres linéarisée"
Thèse. Université de Lille (1972)

- [4.3] "Résolution de problèmes d'optimisation non linéaires par la méthode des centres Linéarisée"
Bull. E. D. F. série C 1 (1973) 5.42
- [4.4] DODU.J-C
"Modèle probabiliste pour l'étude globale de la sécurité d'alimentation d'un réseau de transport (Modèle Mexico)"
Bull. E. D. F. série B 4 (1971) 5.28
- [4.5] HUARD.P
"Programmation mathématique convexe"
Bull E. D. F. série C 1(1968) 61-74
- [4.6] "Méthodes des Centres et méthode des Centres par majorations"
Bull E. D. F. série C 2(1970) 33.52
- [4.7] "Tour d'horizon en programmation mathématique non linéaire"
R. I. R. O, R1 (1971) 3-48
- [4.8] "Optimisation dans \mathbb{R}^n (programmation mathématique)
I Eléments théoriques
II Algorithmes généraux "
Pub. Labo. de Calcul (1972) Université de Lille

