UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur ès Sciences

en Mathématiques

par

Fernand PARSY

QUELQUES PROBLEMES DE DIFFRACTION D'ONDES ELASTIQUES

MEMBRES DU JURY : Messieurs les Professeurs

M. PARREAU, *Président*
M. ROSEAU, *Rapporteur*
G. GONTIER, *Examinateur*
P. VAILLANT, *Examinateur*
R. ZEYTOUNIAN, *Examinateur*

Soutenue le 11 Décembre 1975

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Président PARREAU qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Ce travail trouve son origine dans les travaux de Monsieur le Professeur ROSEAU et fut entrepris sur ses conseils ; qu'il trouve ici l'expression de ma sincère admiration.

Messieurs les Professeurs GONTIER et VAILLANT ont accepté de participer à ce jury. Je les prie d'accepter mes remerciements ainsi que Monsieur le Professeur ZEYTOUNIAN qui m'a donné le sujet de ma seconde thèse.

Que Madame PETIAUX soit remerciée pour la patience dont elle a fait preuve lors de la frappe du manuscrit.

Je réunis enfin dans une même pensée tous ceux, parents, famille, supérieurs et collègues, sans qui ce travail n'aurait pu exister.

F. PARSY

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION

CHAPITRE 0 : PRELIMINAIRES 1

0.1. Les équations de l'élasticité dynamique 1

0.2. Espace de Beppo-Levi 6

0.3. Décomposition de $EL(R^n;C^n)$ en somme directe n = 2,3 12

CHAPITRE I : EQUATIONS DE L'ELASTODYNAMIQUE EN L'ABSENCE D'OBSTACLE 19

1.1. L'espace de Hilbert H_o et le groupe $\{U_o(t)\}$ 19

1.2. Représentations de $\{U_o(t)\}$ 23

1.3. Sous espaces rayonnant et antirayonnant 36

1.4. Les équations de l'élastodynamique dans l'espace des distributions (n = 3) 42

1.5. Solution élémentaire et conditions de radiation (n = 3) 49

CHAPITRE II : EQUATIONS DE L'ELASTODYNAMIQUE DANS UN DOMAINE EXTERIEUR ... 63

2.1. L'espace de Hilbert H et le groupe $\{U(t)\}$ 63

2.2. Décroissance de l'énergie et sous-espace rayonnant 69

2.3. Théorème de représentation et développement en série des champs de déplacements élastiques 73

I. Le théorème de représentation 74

II. Théorème de développement 78

III. Conséquences du théorème de développement 81

pages

2.4. Etude particulière du cas plan 94

I. Moyennes circulaires 95

II. Théorème de représentation 98

III Conditions de radiation 103

IV. Théorèmes d'unicité 111

CHAPITRE III : THEOREMES D'EXISTENCE 123

1. Opérateurs de Neumann généralisés 123

2. L'équation 124

3. Seconde démonstration du théorème d'existence 143

3.1. Préliminaires 143

3.2. Démonstration du théorème d'existence 144

4. Troisième démonstration du théorème d'existence 148

4.1. Préliminaires 148

4.2. Equations intégrales du problème 155

4.3. Etude du système intégral 155

5. Problèmes plans dans le cas d'un milieu anisotrope 161

5.1. Généralités 161

5.2. Relation entre les opérateurs $L = \sum A_{ij} D_i D_j$ et $P(D,k)$.. 165

5.3. Solution élémentaire 166

5.4. Détermination de $E_o(x)$ 166

5.5. Potentiels associés à $E(x,y)$ et $M(x,y)$ 170

5.6. Conditions de radiation 173

5.7. Enoncé du problème 174

pages

CHAPITRE IV : THEOREMES D'EXISTENCE ET INTEGRALES SINGULIERES 176

I. Problème de diffraction par un obstacle borné, de bord libre (en dimension 3) 176

1.1. Enoncé du problème 176

1.2. Equations intégrales du problème 176

1.3. Théorème d'existence 179

1.4. Relation entre le champ diffracté et le paramètre k 183

1.5. Retour sur le problème de Dirichlet (chapitre II) 186

2. Problèmes plans 190

2.1. Solution élémentaire 190

2.2. Singularité de E(PQ) 192

2.3. Potentiels liés à E(PQ) 192

2.4. Théorème d'existence dans le cas d'un obstacle encastré. 196

2.5. Théorème d'existence dans le cas d'un obstacle de bord libre 201

CHAPITRE V : THEOREMES D'AMPLITUDE LIMITE 205

1. 1.1. On considère le problème initial suivant 206

1.2. On se ramène tout d'abord à $\vec{\rho} \equiv \vec{0}$ et $\vec{q} \equiv \vec{0}$ 205

1.3. On aura également à considérer $\vec{w}$ tel que $\vec{w}_t = \vec{u}$ 206

1.4. Comportement de la solution $\vec{u}$ pour $r \geq c_i\, t + a (c_1^2 = \lambda + 2\,\mu,\ c_2^2 = \mu)$ 206

Pages

2 - Lemmes et calculs préliminaires 208

2.1. Lemme 1. 208

BIBLIOGRAPHIE 225

INTRODUCTION

Ce travail a pour origine un article que M. ROSEAU fit paraître en 1957 et dans lequel il formulait un problème de diffraction d'ondes élastiques stationnaires relativement à un domaine non borné. Il établissait alors un théorème d'unicité. Sur ses conseils, nous en étudiâme l'existence.

En voulant appliquer cette méthode à d'autres problèmes analogues, nous fûmes amenés à réfléchir à la notion de "condition de radiation".

Un problème de diffraction (ou de dispersion) d'ondes par des obstacles bornés est toût d'abord un problème hyperbolique mixte. Le problème suivant : trouver $\vec{v}\,(x,t)$ vérifiant

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \Delta^{*} \vec{v} - \vec{v}_{tt} = \vec{f}(x)\, e^{-ikt} & \text{dans } B_e\ ,\ t > 0 \\ \vec{v}(x,+0) = \vec{v}_t(x,+0) = \vec{0} & \text{dans } B_e\ ,\ x = (x,y,z) \\ \vec{v}(x,t) = \vec{0} & \qquad x \quad ,\ t > 0 \end{cases}$$

où $\vec{\Delta}^{*} = (\lambda+2\mu)\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div} - \mu\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}$ est l'opérateur de LAME, $\vec{f}$ à support borné et B_e un domaine de complémentaire B_i borné, de frontière B bornée, est celui de la diffraction, par B_i , des ondes engendrées, dans B_e , par des forces harmoniques de densité $\vec{f}(x,y,z)\, e^{-ikt}$ agissant à partir de l'instant $t = 0$ dans un milieu élastique au repos. Cette solution est en général unique.

Or, très souvent, on cherche directement $\vec{v}(x,t)$ sous la forme

$$\vec{v}(x,t) = \vec{v}(x)\, e^{-ikt}$$

ce qui amène à chercher $\vec{v}(x)$ solution de

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \Delta^{*} \vec{v} + k^2\, \vec{v} = \vec{0} \ \text{ dans } (B_e),\ \vec{v} = \vec{u} + \vec{u}_o & \text{où} \\ \vec{v}|_B = 0 & \vec{u}_o \ \text{ solution donnée} \end{cases}$$

On a ainsi remplacé le problème hyperbolique (I) par le problème aux limites elliptiques pour (II). Ce faisant, on perd l'unicité de la solution. Cette unicité est, depuis SOMMERFELD, rétablie en imposant une condition de radiation.

Pour chercher à les formuler dans le chapitre I, on a procédé à peu près comme suit :

d'après les récents résultats de P. LAX et R. PHILIPPS [L.P. Scattering Theory] on peut montrer que, localement et relativement à la norme

$$|\vec{v}|^2_{EL} = \int \sum_{i,j} |\varepsilon_{ij}(\vec{v})|^2 + |\vec{v}_t|^2 \ dx$$

$t \to +\infty$ la solution du problème (I) "tend vers" une fonction de la forme $\vec{v}\, e^{-ikt}$ où $\vec{v}$ est solution de (II) vérifiant certaine condition à l'infini. (En fait $\vec{v}$ est solution ζ - rayonnante de $\vec{\Delta}^{*}\vec{v} - \zeta^2\vec{v} = \vec{0}$)

On voit que le problème revient à caractériser $\vec{v}(x)$. Plus particulièrement son unicité nécessite l'étude du système (II) où $\vec{f} = \vec{0}$.

Or, dans ce cas

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta^{*}\vec{u} + k^2\vec{u} = \vec{0} & \text{équivaut au système} \\ \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 & \\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{u}_1 + \tau^2\vec{u}_1 = 0 \ ; \ (\lambda+2\mu)\ \tau^2 = \mu\ \sigma^2 = k^2 & \\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_2 - \sigma^2\vec{u}_2 = 0 \ . & \end{array} \right.$$

On établit ensuite que $\vec{v}(x)$ est la somme de deux fonctions d'ondes rayonnantes $\vec{v}_o$ et $\vec{v}_1$.

Le Chapitre 0 donne quelques préliminaires sur les espaces fonctionnels utilisés. Le Chapitre I étend à l'Elastodynamique, en l'absence d'obstacles, le formalisme de LAX et PHILIPPS (en dimension 2 et 3) : représentation spectrale et par translation du groupe $U_o(t)$ associé aux équations de l'Elastodynamique, sous-espaces rayonnant associés. Le Chapitre II est une suite d'énoncés de théorèmes dont les démonstrations sont presque identiques à celles de LAX-PHILLIPS pour l'équation des ondes en dimension 3.

La suite du Chapitre II (théorème de développement...) est consacrée à écrire des conditions de radiation équivalentes et à les appliquer à des théorèmes d'unicité.

On se propose principalement dans le chapitre III d'étendre une méthode de P. WERNER [1,2] à l'approche du problème de la diffraction d'ondes élastiques stationnaires, dans un milieu homogène, par un obstacle encastré.

Ce problème a été traité, entre autres, par KUPRADZE [1,2,3] . Il est relatif aux équations de Lamé

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda+\mu) \text{ grad div } \vec{u} + \rho k^2 \vec{u} = 0$$

équivalentes au système

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ \overrightarrow{\text{grad}} \text{ div } \vec{u}_1 + \tau^2 \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, u_2 - \sigma^2 \vec{u}_2 = 0 \end{cases}$$

La méthode employée par KUPRADZE revient à ramener le problème aux limites à un système d'équations intégrales de Fredholm ou d'intégrales singulières qui sont résolubles pour tout (τ,σ) mais pas uniquement pour un ensemble dénombrable de valeurs propres d'un problème aux limites intérieur. Dans ce dernier cas, la seconde partie de l'alternative de Fredholm est nécessaire.

La méthode envisagée ici n'utilisera que la première partie de cette alternative.

I - Méthodes.

Soient n domaines bornés $B_{i1},\ldots, B_{in}$ de l'espace euclidien E_3 , de frontières respectives $B_1,\ldots,B_n$, sur lesquels on fait les hypothèses suivantes :

(i) le complémentaire B_{ek} de B_{ik} est connexe.

(ii) pour tout k, ℓ, $k \neq \ell$, $B_{ik} \cup B_k$ et $B_i \cup B_\ell$ sont disjoints.

(iii) $B_1, \ldots, B_n$ sont des surfaces fermées.

On posera $B = \bigcup_1^n B_k$, $B_i = \bigcup_1^n B_{ik}$, B_e désignera le complémentaire de $B \cup B_i$.

La détermination du champ élastique stationnaire $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ qui résulte de la diffraction d'un champ stationnaire donné $(\vec{u}_1^{\,o}, \vec{u}_2^{\,o})$ par n obstacles bornés encastrés de surfaces $B_1, \ldots, B_n$ conduit au problème aux limites extérieur suivant :

Trouver deux champs de vecteur $\vec{u}_1(x)$, $\vec{u}_2(x)$ *tels que :*

(a) $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ *(donc* $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ *) soient de classe* C^2 *dans* B_e *et* C^1 *dans* $B_e \cup B$.

(b) $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, *vérifient le système (III) dans* B_e.

(c) $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ *vérifie sur* B *la condition* $\vec{u} = \vec{\gamma}$ *où* $\vec{\gamma}$ *représente le champ de déplacements donnés sur* B.

Ici, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ désignent respectivement les champs longitudinal et transversal diffractés.

On a, bien entendu, $-\vec{\gamma} = \vec{u}_o$ sur B où $\vec{u}_o$ est le champ incident. On supposera $\vec{\gamma}$ différentiable continûment.

On a vu que la solution n'était unique que si l'on imposait, dans l'hypothèse où k est réel, des conditions de radiation sur $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ (où l'une de celles qui lui sont équivalentes).

Afin de motiver les méthodes employées dans ce travail, on va inclure une courte discussion comparative.

Tout d'abord, suivant KUPRADZE [3] on essaie de représenter la solution cherchée sous la forme :

$$(N) \quad \vec{u}(P) = \iint_B N(P;Q,\vec{n}_Q)\vec{\psi}Q(Q)\, dS_Q$$

où $N(P;Q,\vec{n}_Q)$ est la matrice de BASHELEISHVILI et $\vec{\psi}(Q)$ un champ continu défini sur (B). Le champ $\vec{u}(P)$ vérifie l'équation

$$\overset{*}{\Delta} \vec{u} + \rho k^2 \vec{u} = 0 \qquad \text{pour} \quad P \notin B$$

et aussi les conditions de radiation.

Les relations de discontinuité des potentiels élastique de surface impliquent que la condition aux limites (c) est équivalente à l'équation

$$(V) \qquad \vec{\psi} + T \vec{\psi} = \vec{\gamma}$$

où T est un opérateur intégral défini par

$$T(\vec{\psi}(Q') = \iint_B N(Q';Q,\vec{n}_Q)\, \vec{\psi}(Q)\, dS_Q$$

On peut montrer que l'équation homogène correspondante

$$(V)_o \qquad \vec{\psi} + \vec{T} \vec{\psi} = \vec{0}$$

a des solutions non triviales si et seulement si le problème aux limites intérieur

$$(N_i) \quad \begin{cases} \overset{*}{\Delta} \vec{u} + \rho k^2 \vec{u} = \vec{0} & \text{dans } B_i \\ N_i(\vec{u},\vec{n}) = \vec{0} & \text{sur } B \end{cases}$$

a des solutions non triviales.

De ceci, on peut déduire que, si k est complexe (ou réel et différent des valeurs propres en infinité dénombrable de ce problème aux limites) l'équation intégrale $(V)_o$ a seulement la solution $\vec{\psi} = 0$. La première partie de l'alternative de Fredholm s'applique : l'équation intégrale non homogène admet une et une seule solution qui entraîne l'existence d'une solution pour le problème (D_e).

Dans le cas où k est une valeur propre du problème intérieur (N_i) on essaie de représenter la solution sous la forme : $\vec{u} + \vec{u}'$ où $\vec{u}$ est le champ défini par IV et $\vec{u}'$ un champ correctif convenable.

L'équation intégrale (V) est alors remplacée par :

$$(VI) \qquad \vec{\psi} + T \vec{\psi} = \vec{\gamma} - \vec{u}'\big|_B$$

et cette équation admettra des solutions si $\vec{u}'$ est tel que $\vec{\gamma} - \vec{u}'\big|_B$ est orthogonal aux solutions de l'équation homogène adjointe

$$(V) \qquad \vec{\psi} + T \vec{\psi} = \vec{0}$$

On peut construire de tels champs $\vec{u}'$ d'au moins deux manières dont on indiquera l'origine du principe (MULLER [1] et CALDERON [1]). La première consiste à se donner sur B une distribution continue de dipoles, l'autre à utiliser le champ correctif produit soit par un nombre fini de dipoles convenablement répartis en différents points de B_i ou par un nombre fini de multipoles, un en chaque point de B_i .

Comme on l'a déjà dit, toutes ces méthodes exigent la seconde partie de l'alternative de Fredholm.

Pour cette troisième méthode il est important de remarquer que les deux précédentes font un usage essentiel du fait que le champ (IV) vérifie $\overset{*}{\Delta} \vec{u} + \rho k^2 \vec{u} = \vec{0}$ non seulement dans B_e mais aussi dans B_i . Cette propriété est essentielle pour la discussion de l'équation intégrale homogène $(V)^*$ qu'à l'aide des relations de discontinuité des potentiels de surface on peut montrer équivalente au problème intérieur (N_i).

La difficulté gît dans l'existence de valeurs propres pour ce problème (si k réel) ce qui entraîne pour l'expression IV de ne plus donner la solution cherchée.

Il semble donc naturel de modifier l'expression IV de manière telle qu'au lieu de $\overset{*}{\Delta} \vec{u} + \rho k^2 \vec{u} = \vec{0}$ elle vérifie, dans B_i, une autre équation aux dérivées partielles pour laquelle le problème intérieur associé n'a plus de valeurs propres même si k est réel.

Une équation appropriée dans (B_i) est :

(VII) $$\overset{*}{\Delta} \vec{u} + (\rho k^2 + i \varepsilon g) \vec{u} = \vec{0}$$

où g(P) est une fonction continue höldérienne, positive dans B_i et nulle sur B , et $\varepsilon = +1$ si $Re(k) \geqslant 0$, $\varepsilon = -1$ si $Re(k) < 0$.

Comme on le verra l'équation VII peut être vérifiée dans B_i si l'on ajoute à (IV) le potentiel de volume

$$\vec{u}'(P) = \iint_{B_i} E(PQ)\, \vec{\psi}\,(Q)\, dv_Q$$

où $\vec{\psi}$ est un champ continu convenablement choisi, E(PQ) étant la matrice solution élémentaire de $\Delta^{*}\vec{u} + \rho\, k^2\, \vec{u}$. D'où il résulte que $\vec{u}'(P)$ vérifie l'équation $\Delta\ \vec{u}' + \rho\, k^2\, \vec{u}' = 0$ dans B_e ainsi que les conditions de radiation.

En résumé, on essaie de représenter la solution de (D_e) sous la forme $\vec{u} + \vec{u}'$.

Le problème revient donc à déterminer $\vec{\varphi}$ et $\vec{\psi}$ de façon telle que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) $\quad \vec{u}|_e = \vec{\gamma} \quad$ sur B

(ii) $\quad (\vec{\Delta}^{*} + \rho\, k^2 + i\, \varepsilon\, g)\, \vec{u} = \vec{0} \quad$ dans B_i

Les équations intégrales rencontrées jusqu'à présent ayant un noyau intégrable, il nous avait semblé logique d'y inclure des résultats correspondant aux problèmes plans mais dans l'hypothèse d'un milieu anisotrope.

Il est possible en conjuguant des remarques algébriques et les résultats de F. JOHN sur les solutions élémentaires (et de E. LEVI) de déterminer la solution élémentaire et de ramener le problème de Neumann à un système intégral analogue au précédent.

On s'est limité au cas statique car les théorèmes d'unicité dans le cas dynamique ne sont pas établis. Vraisemblablement on ne pourra pas utiliser les méthodes du chapitre I.

Dans le chapitre III, on a rencontré uniquement des équations intégrales dont les noyaux admettaient des singularités "faibles" ce qui permettait de leur appliquer directement les théorèmes de FREDHOLM.

Or, à part les problèmes du type de ceux étudiés dans le chapitre III, il n'est guère possible de se passer des équations intégrales singulières du type de Cauchy (ou à valeurs principales).

Dans les problèmes tridimensionnels on étudiera le problème relatif à $\Delta^{*} \vec{u} + \rho k^2 \vec{u} = \vec{0}$ déjà cité mais où l'on impose

$$\vec{T}(\vec{u},\vec{n}) = 2\mu \frac{d\vec{u}}{dn} + \lambda \vec{n} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \vec{n} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{u} \quad \text{sur} \quad B$$

Dans l'étude des problèmes plans isotropes, les équations intégrales singulières sont indispensables quels que soient les problèmes étudiés car, si l'on construit une matrice élémentaire comme dans le chapitre II, on ne peut trouver un opérateur $\vec{N}_{\alpha,\beta}$ (cf. chapitreIII, introduction) pour lequel la matrice $N(P;Q,\vec{n}_Q)$ se comporte comme $\frac{\partial}{\partial n} L \frac{1}{r}$: la dérivée tangentielle de Log r intervenant on est bien dans l'obligation de considérer des intégrales du type de Cauchy.

La théorie des systèmes d'équations intégrales singulières s'est surtout développée dans le cas unidimensionnel (cf. MUSHKHELISHVILI [1] pour une étude et une bibliographie détaillée et aussi F.D. GAKHOV [1] au moins au début).

Dans le cas d'intégrales singulières multidimensionnelles, il faut citer GIRAUD [1, 2, 3] , MIKHLIN [1],[2],[3] et pour les problèmes de l'élasticité V.D. KUPRADZE [1] [3] . Ce sont surtout à ces deux derniers auteurs que l'on aura recours.

Les équations intégrales singulières diffèrent de celles du type de Fredholm en ce que les intégrales singulières qui y apparaissent sont des opérateurs bornés dans les espaces fonctionnels utilisés mais non complètement continus ce qui interdit l'application de la théorie de Fredholm - Riesz - Schauder à ces équations. Le problème est donc celui de leur régularisation, c'est-à-dire de trouver une équation de Fredholm dont les solutions contiennent celles de l'équation intégrale singulière étudiée.

En outre, deux équations singulières adjointes homogènes sont telles que les espaces vectoriels de leurs solutions ont des dimensions différant d'un entier lié au symbole de l'opérateur intégral : s'il est nul, les théorèmes de Fredholm s'appliquent et l'on a équivalence avec un opérateur de Fredholm.

On a essayé néanmoins d'adapter au cas plan la méthode employée au chapitre III.

Dans le cinquième chapitre, on espérait inclure un théorème d'amplitude limite grâce à des méthodes utilisant des intégrales d'énergie mais on n'a obtenu que des résultats très limités liés aux équations :

$$(\lambda + 2\mu) \text{ grad div } \vec{u} - \vec{u}_{tt} = 0$$

$$\mu \ \overrightarrow{\text{rot}} \ \overrightarrow{\text{rot}} \ \vec{u} + \vec{u}_{tt} = 0$$

sans aboutir au résultat correspondant à $\Delta^{*} \vec{u} - \vec{u}_{tt} = \vec{0}$.

D'ailleurs LAX et PHILIPS, dans leur récent ouvrage, laissent peu d'espoir quant au succès de cette méthode.

Pour terminer, il nous reste à remercier M. ROSEAU, sans qui ce travail n'aurait pas existé et dont la patience, les encouragements et les conseils ont souvent réveillé un courage défaillant.

CHAPITRE 0

PRELIMINAIRES

0.1. LES EQUATIONS DE L'ELASTICITE DYNAMIQUE

Soit un milieu élastique indéfini, anisotrope rapporté au repère orthonormé $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ou $Ox_1\, x_2\, x_3$.

Si $\vec{u}(x,t) = \sum_{i=1}^{3} u_i \, \vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ désigne le vecteur déplacement au point x (de coordonnées x_1, x_2, x_3) et à l'instant t, on définit le tenseur (linéarisé) des déformations par ses composantes : ε_{ij} :

$$2\, \varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{0.1}$$

dans le cas tridimensionnel (ou $2\, \varepsilon_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}$ dans le cas plan $\alpha,\beta = 1,2$). La notation ",j" désigne la dérivation partielle $\partial/\partial x_j$.

Le milieu est caractérisé par les relations suivantes entre le tenseur des contraintes (σ_{ij}) symétrique et le tenseur (ε_{ij}) :

$$\sigma_{ij}(x,t) = c_{ijk\ell}\,(x)\;\; \varepsilon_{k\ell}\,(x,t) \quad (i,j,k,\ell = 1, 2, 3) \tag{0.2}$$

où l'on a utilisé la convention de l'indice muet.

Les coefficients d'élasticité $c_{ijk\ell}\,(x)$ sont caractéristiques du matériau et satisfont aux relations de symétrie :

$$c_{ijk\ell} = c_{jik\ell} = c_{k\ell ij} \quad . \tag{0.3}$$

On dira que le milieu est <u>homogène</u> si les $c_{ijk\ell}$ sont indépendants du point x,qu'il est <u>homogène à l'infini</u> si

$$\lim_{|x| \to \infty} c_{ijk\ell}(x) = c^{o}_{ijk\ell} \quad \text{uniformément en } \frac{x}{|x|}$$

et homogène par morceaux s'il existe par exemple un ouvert borné Ω_i de complémentaire Ω_e dans lesquels les $c_{ijk\ell}(x)$ sont constants (les valeurs pouvant être différentes).

Si $\vec{f}(x,t)$ désigne la densité volumique de forces et $\rho(x)$ la densité au point x, la loi fondamentale de la Dynamique entraîne :

$$\sigma_{ki,i} + f_k = \rho\, u_{k,tt} \tag{0.4}$$

soit, par (0.2) :

$$(c_{ki\ell j}\, u_{\ell,j})_{,i} + f_k = \rho\, u_{k,tt}$$

Système que l'on peut condenser sous la forme matricielle :

$$(A_{ij}(x)\, \vec{u}_{,j})_{,i} + \vec{f}(x,t) = \rho(x)\, \vec{u}_{,tt} \tag{0.5}$$

où $A_{ij}(x)$ est une matrice 3×3 d'éléments

$$a_{k\ell} = c_{ki\ell j}(x) \,. \tag{0.6}$$

En outre, les conditions (0.3) entraînent

$${}^{t}A_{ij} = (a'_{k\ell} = a_{\ell k} = c_{\ell ikj} = c_{kj\ell i}) = A_{ji} \tag{0.7}$$

Cas particulier d'un milieu isotrope (cf. P. GERMAIN [1], W. PRAGER [1] et G. GONTIER [1])

Dans ce cas : $c_{ijk\ell} = \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{k\ell} + \mu\,(\delta_{ik}\,\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\,\delta_{jk})$

où $\lambda(x)$, $\mu(x)$ sont les coefficients de LAMÉ .

Il est alors aisé de vérifier que :

$A_{11} = \mathrm{Diag}\,(\lambda + 2\mu,\mu,\mu)$, $A_{22} = \mathrm{Diag}\,(\mu,\lambda + 2\mu,\mu)$, $A_{33} = \mathrm{Diag}\,(\mu,\mu,\lambda + 2\mu)$

$$A_{12} = {}^tA_{21} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \; ; \quad A_{23} = {}^tA_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = {}^tA_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

Si λ et μ sont constants (milieu homogène) on retrouve le système classique :

$$(0.7)' \qquad (\lambda + 2\mu)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \mu\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u} + \vec{f} = \rho\,\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

Cas plan

Dans ce cas, on suppose u_3 et f_3 identiquement nuls, u_1 , u_2 , f_1 et f_2 n'étant fonction que de x_1 , x_2 et t .

Si l'on fait l'hypothèse que les $c_{ijk\ell}$ ne sont fonction que de x_1 et x_2 avec :

$$c_{3111} = c_{3112} = c_{3122} = c_{3211} = c_{3212} = c_{3222} = 0$$

(milieu transversalement isotrope pour la direction Ox_3 : milieu stratifié par exemple), les équations du mouvement s'écrivent (les indices grecs ne prenant que les valeurs 1, 2) :

$$(c_{\gamma\alpha\delta\beta} \quad u_{\delta,\beta})_{\alpha,} \quad + f_{\gamma} \quad = \rho \ \ddot{u}_{\gamma}$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (A_{\alpha\beta} \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_{\beta}} \quad) + \vec{f} = \rho \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

où $A_{\alpha\beta} = (a_{\gamma\delta} = c_{\gamma\alpha\delta\beta})$ est une matrice 2×2 vérifiant (0.7). Les équations conservent la même forme, le cas isotrope donnant :

$$A_{11} = \mathrm{Diag}\ (\lambda + 2\mu, \mu) \ , \quad A_{22} = \mathrm{Diag}\ (\mu, \lambda + 2\mu)$$

$$A_{12} = {}^{t}A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{vmatrix} \ .$$

<u>*Hypothèse d'ellipticité*</u> (G. FICHERA [1], DUVAUT-LIONS [1])

Il existe une constante α *positive telle que, pour tout tenseur symétrique* (ε_{ij}) :

(0.8) $$c_{ijk\ell} \quad \varepsilon_{ij} \quad \bar{\varepsilon}_{k\ell} \geqslant \alpha \ \varepsilon_{ij} \quad \bar{\varepsilon}_{ij} \ . \ (i, \ j = 1, \ 2, \ 3 \quad \text{ou } 1, \ 2)$$

En particulier si ε_{ij} est défini par (0.1) on obtient aisément :

(0.9) $$c_{ki\ell j} \quad \varepsilon_{ki} \quad \bar{\varepsilon}_{\ell j} = c_{ki\ell j} \ u_{k,i} \ \bar{u}_{\ell,j} = \ A_{ij} \ \bar{\vec{u}}_{,j} \ . \ \vec{u}_{,i} \geqslant \alpha \, \varepsilon_{ij}(\vec{u}) . \overline{\varepsilon_{ij}(\vec{u})}$$

qui, dans le cas isotrope, donne :

$$\lambda \ |\mathrm{div}\ \vec{u}|^2 + 2 \ \mu \ \varepsilon_{ij}(\vec{u}).\overline{\varepsilon_{ij}(\vec{u})} \geqslant 2 \ \mu \ \varepsilon_{ij}(\vec{u}).\overline{\varepsilon_{ij}(\vec{u})} \ .$$

Une conséquence de (0.8) est le théorème suivant (cf. G.F. DUFF [1]).

Théorème 0.1. *Si (0.8) a lieu, on a*

$$c_{ki\ell j}\ \xi_i\ \xi_j\ \eta_\ell\ \bar\eta_k > 0 \ (i,\ j,\ k,\ \ell = 1,\ 2,\ 3 \quad \text{ou} \quad 1,2\ ) \tag{0.10}$$

pour tout $\vec\xi$ *non nuls de* R^n *et tout* $\vec\eta$ *non nul de* C^n (n = 2 *ou* 3). *Pour tout* $\vec\xi$ *non nul de* R^n , *la matrice*

(0.10)' $\quad A\ (x\ ;\ \vec\xi) = A_{ij}\ \xi_i\ \xi_j$ *est symétrique définie positive*

Démonstration

Dans (0.8) on prend :

$$\varepsilon_{ij} = \xi_i\ \bar\eta_j + \xi_j\ \bar\eta_i = \varepsilon_{ji}\ ;\ \bar\varepsilon_{k\ell} = \xi_k\ \eta_\ell + \xi_\ell\ \eta_k$$

ce qui donne, compte tenu de (0.3) :

$$c_{ijk\ell}\ \xi_i\ \ \xi_k\ \ \bar\eta_j\ \eta_\ell\ \ > 0 \quad (\text{nul si } \vec\xi = \vec 0 \ \text{ et } \vec\eta = \vec 0\ )$$

Si l'on note que (0.10) s'écrit

$A\ (x;\vec\xi)\ \vec\eta\ .\ \vec{\bar\eta}\ \ > 0$, on voit que la matrice

$A\ (x;\vec\xi)$ est définie positive (et symétrique donc hermitienne)

Corollaire 0.1. *Les valeurs propres de* $A(x;\vec\xi)$ *sont positives.*

$A\ (x;\vec\xi)$ est diagonalisable et si $\vec\eta$ est un de ses vecteurs propres, le théorème (0.1) donne le résultat.

Ces valeurs propres seront notées : $c_j^2(x;\vec\xi)$ $(c_j > 0)$ avec $c_1^2 \geq c_2^2 \geq c_3^2$ (ou $c_1^2 \geq c_2^2$ dans le cas plan) et le vecteur unitaire propre correspondant $\vec e_j(x;\vec\xi)$: on sait qu'il en existe toujours trois formant une base orthonormale.

Remarque 0.1. Si l'on pose $\vec{\xi} = \rho\, \vec{\omega}$, $|\vec{\omega}| = 1$, on a :

$$A\,(x;\vec{\xi}) = \rho^2\, A\,(x;\vec{\omega})$$

d'où l'on déduit aisément que : $c_j^2\,(x;\vec{\xi}) = \rho^2\, c_j^2\,(x;\vec{\omega})$

$\vec{e}_j\,(x;\vec{\omega})$ étant un vecteur propre de $A\,(x;\vec{\xi})$ et $A\,(x;\vec{\omega})$.

Cas d'un milieu isotrope

$$c_1^2\,(x;\vec{\omega}) = \lambda + 2\,\mu \quad ; \; c_2^2 = c_3^2 = \mu \quad (c_1^2,\ c_2^2 \text{ dans le cas plan})$$

$$\vec{e}_1\,(x;\vec{\omega}) = \vec{\omega}\ [\ \vec{e}_2(x;\vec{\omega}) = \vec{e}_3 \wedge \vec{\omega} \text{ dans le cas plan}]$$

0.2. ESPACE DE BEPPO-LEVI $EL(R^n;C^n)$ $n = 2$ ou 3 (cf. DENY-LIONS [1], LIONS [1] G. FICHERA [1] , DUVAUT-LIONS [1])

On introduit ici l'espace dans lequel seront prises les données initiales du problème suivant :

$$(0.11) \qquad \begin{cases} \vec{u}_{tt} - (A_{ij}\, \vec{u}_{,j})_{,i} = \vec{f}(x,t) \\ \vec{u}\,(x;0) = \vec{g}_1(x) \;;\; \vec{u}_t(x;0) = \vec{g}_2(x) \end{cases}$$

Définition 0.1. *On appelle espace de Beppo-Levi associé aux équations de l'élasticité, le complété de* $\mathcal{D}\,(R^n\,;\,C^n)$ *pour la norme :*

$$||f||_{EL}^2 = \sum_{i,j=1}^{3} |\varepsilon_{ij}(\vec{f})|^2_{L^2(R^n)} \qquad (n = 2 \text{ ou } 3)\ .$$

on le notera $EL(R^n;C^n)$ (ou $BL(R^n;C^n)$ notation de DENY-LYONS [1]).

On va dans une suite de lemmes établir (ou rappeler) quelques propriétés de cet espace.

Lemme 0.1. *Si* $\vec{f} \in EL\,(R^3;C^3)$ *on a* $\vec{f} \in L^2_{loc}\,(R^3;C^3)$ et

$$\int_{|x|\leq r} |\vec{f}(x)|^2 \, dx \leq r^2 \, ||f||^2_{EL} \tag{0.13}$$

Démonstration

Soit $\vec{f} \in \mathcal{D}(R^3;C^3)$. On a

$$||\vec{f}||^2 = \int_{R^3} \varepsilon_{ij}(\vec{f}).\overline{\varepsilon_{ij}(\vec{f})} \, dx \, .$$

Or, $\varepsilon_{ij}(\vec{f}).\overline{\varepsilon_{ij}(\vec{f})} = |f_{1,1}|^2 + |f_{2,2}|^2 + |f_{3,3}|^2 + 2|\varepsilon_{12}|^2 + 2\,|\varepsilon_{23}|^2 + 2|\varepsilon_{13}|^2$

$$= |\text{div}\,\vec{f}|^2 + \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{f}|^2 + 2\,\text{Re}\,\Big[f_{1,2}\,.\,\bar{f}_{2,1} + f_{3,2}\,.\,\bar{f}_{2,3} + f_{1,3}\,.\,\bar{f}_{3,1} - f_{1,1}\,.\,\bar{f}_{2,2} - f_{2,2}\,.\,\bar{f}_{3,3} - f_{3,3}\,.\,\bar{f}_{1,1}\Big]$$

en outre, puisque $\vec{f} \in \mathcal{D}\,(R^3;C^3)$

$$\int_{R^3} f_{1,1}\,.\,\bar{f}_{2,2}\,dx = -\int_{R^3} f_1.\bar{f}_{2,21}\,dx = \int_{R^3} f_{1,2}.\bar{f}_{2,1}\,dx \text{ etc...}$$

Il en résulte que, si $\vec{f} \in \mathcal{D}(R^3;C^3)$:

$$\int_{R^3} \varepsilon_{ij}(\vec{f}).\overline{\varepsilon_{ij}(\vec{f})}\,dx = \int_{R^3} \{|\text{div}\,\vec{f}|^2 + \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{f}|^2\}\,dx \geq \frac{1}{2}\int_{R^3} \overrightarrow{\text{grad}}\,f_i.\overline{\overrightarrow{\text{grad}}\,f_i}\,dx \, .$$

soit encore : $||\vec{f}||^2_{EL(R^3;C^3)} \geq \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_{L^2}$. Comme il est démontré (LAX-PHILLIPS [1] p. 95) que :

$$\int_{|x|\leq r} |\vec{f}(x)|^2\,dx \leq \frac{r^2}{2}\int \sum_{i,j=1}^{3}\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|^2 dx$$

(0.13) est établie pour $\vec{f} \in \mathcal{D}(R^3;C^3)$. Il en résulte que toute suite $\{\vec{f}_n\}$ de $\mathcal{D}(R^3;C^3)$ qui est de Cauchy dans $EL(R^3;C^3)$, l'est dans $L^2_{loc}(R^3;C^3)$ et, par conséquent, y admet une limite unique $\vec{f}$ qui vérifie (0.13).

Remarque 0.2. Dans le cas plan, il résulte de LIONS-DENY [1, pp.] que $EL(R^2;C^2)$, qui est un espace de HILBERT, n'est pas contenu dans $\mathcal{D}'(R^2;C^2)$ en particulier, $EL(R^2;C^2)$ n'est pas contenu dans $L^2_{loc}(R^2;C^2)$.

Par contre, cette propriété est rétablie dès que R^2 est remplacé par un de ses ouverts connexe (borné ou non) dont le complémentaire a un intérieur non vide et, dans ce cas, on a :

$$EL(\Omega;C^2) \subset L^2_{loc}(\Omega;C^2)$$

(il en résulte alors que si $\{\vec{f}_n\}$ tend vers $\vec{f}$ dans $EL(\Omega;C^2)$, $\{\vec{f}_n\}$ tend encore vers $\vec{f}$ dans $L^r_{loc}(\Omega;C^2)$ pour tout r fini).

Une conséquence en est que si $\vec{f} \in EL(R^2;C^2)$ et si Ω est un ouvert connexe de R^2 (dont le complémentaire à un intérieur non vide, la restriction de $\vec{f}$ à Ω appartient à $L^2_{loc}(\Omega;C^2)$ (donc à $L^2_{loc}(R^2;C^2)$) .

Conséquences

1) Par définition, $\vec{f} \in EL(R^3;C^3)$ (ou $EL(R^2;C^2)$) implique $\varepsilon_{ij}(\vec{f}) \in L^2(R^n)$ (n = 2 ou 3) mais la réciproque est fausse pour n = 3 : en effet, les fonctions "solidifiantes" $\vec{x} \rightsquigarrow \vec{\Omega} \wedge \vec{x} + \vec{a}$ ($\vec{\Omega}$, $\vec{a}$ constants) ont leurs ε_{ij} nuls mais n'appartiennent pas à $EL(R^3;C^3)$ en vertu de (0.13).

Par ailleurs, on peut noter que, pour tout $f \in \mathcal{D}(R^2;C^2)$

$$||\vec{f}||^2_{EL} \geqslant \frac{1}{2} ||\vec{f}||^2_{BL(R^2;C^2)}$$ (la preuve est évidemment la même que dans le cas n = 3 ; cf. lemme 0.1); or, dans le cas des fonctions "solidifiantes", cette inégalité (qui se conserve par complétion) entraîne

une contradiction puisque :

$$\sum_{i,\ell} \left|\frac{\partial}{\partial x_\ell} (\varepsilon_{ijk}\, \Omega_j\, x_k)\right|^2 = 2\, |\vec{\Omega}|^2$$

Notons encore que les "constantes" $\vec{a}$ ne sont pas dans $EL(R^3;C^3)$ toujours à cause de (0.13) mais qu'elles peuvent être dans $EL(R^2;C^2)$.

2) Muni du produit scalaire

$$(0.14) \qquad ((\vec{f},\vec{g}))_{EL} = \int_{R^n} \varepsilon_{ij}(\vec{f})\, \varepsilon_{ij}(\bar{\vec{g}})\, dx \qquad (n = 2,3)$$

$EL(R^n;C^n)$ est un espace de Hilbert (sur C).

La démonstration se trouve en fait dans Deny-Lions.

Dans le cas $n = 3$, il résulte de (0.13) que si $||f||_{EL} = 0$ $\vec{f}$ est nulle p.p. sur tout ouvert relativement compact de R^3 et même sur toute boule fermée $\{|x| \leq n\}$ $n \in N$.

3) L'inégalité (0.13) montre que $EL(R^3;C^3)$ est contenu dans $L^2_{loc}(R^3;C^3)$: c'est donc un espace de distributions (c'est-à-dire qu'il est contenu dans $\mathcal{D}'(R^3;C^3)$).

Pour définir $EL(R^n;C^n)$ il est utile de partir d'une définition plus générale : comme dans DENY-LIONS 1, p. 308-309, et de retrouver $EL(R^n;C^n)$ éventuellement (dans le cas $n = 3$).

Soit $\mathcal{D}'_e(R^n;C^n)$ l'espace des $\vec{T} \in \mathcal{D}'(R^n;C^n)$ telles que :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{T}) = \frac{1}{2}(D_i\, T_j + D_j\, T_i) \in L^2(R^n) \quad \forall\, i,j = 1, -, n .$$

cet espace étant muni de la topologie la moins fine rendant continues les applications : $\vec{T} \rightsquigarrow \varepsilon_{ij}(T)$ de $\mathcal{D}'_e(R^n;C^n)$ dans $L^2(R^n)$. Cet espace n'est pas séparé car l'adhérence de $\vec{0}$ soit W n'est pas réduite à $\{\vec{0}\}$: en effet :

$\varepsilon_{ij}(\vec{T}) = 0 \quad i,j = 1, \ldots, n$ entraîne (au sens des distributions)

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial x_i\,\partial x_k} = \frac{\partial\,\varepsilon_{ij}}{x_k} + \frac{\partial\,\varepsilon_{jk}}{\partial\,x_i} - \frac{\partial\varepsilon_{ik}}{\partial x_j} = 0 \qquad (i,j,k = 1,2,3) \quad \text{d'où}$$

R^n étant connexe : $\vec{T} \in W \iff \vec{T} = S\,\vec{x} + \vec{c}$

où S est une matrice $n \times n$ constante réelle et antisymétrique et $\vec{c}$ un vecteur constant. Si $\vec{T} \in \mathcal{D}_e'(R^n;C^n)$ on pose :

$$||\vec{T}||_e^2 = (A_{ij}\,\vec{T},_i\,.\,\vec{T},_j\,)_{L^2(R^n;C^n)} \quad \text{équivalent à} \quad \sum_{i,j=1}^{n} |\varepsilon_{ij}(T)|^2_{L^2(R^n)}$$

L'espace vectoriel topologique quotient $\dot{\mathcal{D}}_e'$ de $\dot{\mathcal{D}}_e'$ par W est un espace de Hilbert.

Si $\dot{T} \in \dot{\mathcal{D}}_e'$ on a : $\dot{T} = \{\vec{T} + S\,\vec{x} + \vec{c}\ ;\ \vec{T}\ \ \mathcal{D}_e'$, S antisymétrique, $\vec{c} \in R^n\}$

Théorème

Soit alors $\dot{\mathcal{D}}$ l'image de $\mathcal{D}\,(R^n;C^n)$ dans $\dot{\mathcal{D}}_e'$ par l'application canonique (de $\mathcal{D}_e'$ sur $\dot{\mathcal{D}}_e'$) et $\dot{\mathcal{D}}_e$ l'adhérence de $\dot{\mathcal{D}}$ dans $\dot{\mathcal{D}}_e'$.

On a : $\dot{\mathcal{D}}_e' = \dot{\mathcal{D}}_e \oplus \dot{H}$

où $\dot{H} = \{\dot{\vec{T}} \in \dot{\mathcal{D}}_E' \mid \ \vec{T} \in \dot{T}\ ,\ A_{ij}\,\vec{T},_{ij} = \vec{0}\ \}$

Démonstation

En effet $\dot{T} \in \dot{H} \iff ((\vec{T},\vec{\phi}))_E = 0\ \forall\vec{\phi} \in \mathcal{D}\,(R^n;C^n)$ et $\forall\ \vec{T} \in \dot{\vec{T}}$

or $((\vec{T},\vec{\phi}))_E = 0 \rightarrow \ < A,_{ij}\,\vec{T},_{ij}\ ,\ \bar{\vec{\phi}} > \ = 0$ (équivalent à $A_{ij}\,\vec{T},_{ij} = \vec{0}$)

Comme dans [DENY-LIONS p. 318] les difficultés se présentent dans l'interprétation de $\dot{\mathcal{D}}_e$.

Si $EL(R^n;C^n)$ est un espace de distributions, il résulte de ce qui précède que :

Théorème

Toute distribution $\vec{T} \in \mathcal{D}'_e(R^n;C^n)$ admet une décomposition unique :

$$\vec{T} = \vec{u} + \vec{h} \quad \text{où}$$

$\vec{u}$ est alors l'unique élément de $EL(R^n;C^n)$ d'image $\dot{\vec{u}}$ dans l'isomorphisme de $EL(R^n;C^n)$ sur $\dot{\mathcal{D}}_e$. Dans ces conditions :

$$\vec{h} = \vec{T} - \vec{u} \in \dot{\vec{h}} \quad \text{donc } A_{ij}\, \vec{h}_{,ij} = \vec{0}$$

$$\text{et} \quad ||\vec{T}||^2_e = ||\vec{u}||^2_e + ||\vec{h}||^2_e \quad .$$

Preuve

En effet, on a pour tout $\dot{\vec{T}} \in \dot{\mathcal{D}}'_e$, $\dot{\vec{T}} = \dot{\vec{u}} + \dot{\vec{h}}$, $\dot{\vec{u}} \in \dot{\mathcal{D}}_e$, $\dot{\vec{h}} \in \dot{H}$.

$\vec{u}$ est alors l'unique élément de $EL(R^n;C^n)$ d'image $\dot{\vec{u}}$ dans l'isomorphisme de $EL(R^n;C^n)$ sur $\dot{\mathcal{D}}_e$. Dans ces conditions :

$$\vec{h} = \vec{T} - \vec{u} \in \dot{\vec{h}} \quad \text{donc } A_{ij}\, \vec{h}_{,ij} = \vec{0}$$

En outre $||\dot{\vec{T}}||^2_e = ||\dot{\vec{u}}||^2_e + ||\dot{\vec{h}}||^2_e$ entraîne $||\vec{T}||^2_e = ||\vec{u}||^2_e + ||\vec{h}||^2_e$.

Conclusion

L'inégalité $||\vec{f}||^2_{EL} \geq \frac{1}{2}\, ||\vec{f}||^2_{BL}$ valable pour n = 2, 3 entraîne que la structure préhilbertienne définie par $(\vec{u}.\vec{v})_{EL}$ est équivalente à celle définie par : $(\vec{u},\vec{v})_1 = \sum (\vec{u}_{,i},\vec{v}_{,i})_{L^2}$ en particulier il résulte de l'étude de [DENY-LIONS, p. 320-322] que pour $n \geq 3$ $EL(R^n;C^n)$ est un espace de distributions alors que ceci est faux pour n = 1 ou 2 .

En conséquence, dans le cas n = 2 , on prendra pour espace de données initiales : (LIONS [1 p. 29-30] $E(R^2;C^2)$ complété de $\mathcal{D}(R^2;C^2)$ pour la norme

$$||\vec{\varphi}||^2_E = \int_{R^2} \{|\vec{\varphi}|^2 + \sum_{i,j} |\varepsilon_{ij}(\vec{\varphi})|^2\} \, dx$$

0.3 DECOMPOSITION DE $EL(R^n;C^n)$ *EN SOMME DIRECTE* $n = 2,3$.

Les dérivations sont prises au sens des distributions.

Lemme 0.2.

1) Si $\vec{f} \in L^2(R^n;C^n)$ $n = 2$ ou 3 et $A_{ij}\, \vec{f}_{,ij} = \vec{0}$ alors $\vec{f} = \vec{0}$

2) Si $\vec{f} \in L^2(R^n;C^n)$ $n = 2$ ou 3, $\mathrm{Div}\, \vec{f} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f} = \vec{0}$ alors $\vec{f} = \vec{0}$

3) Si $\vec{f}$, $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \vec{f} \in L^2(R^n;C^n)$ et si $\mathrm{Div}\, \vec{f} \in L^2(R^n)$ alors

$\vec{f} \in H^1(R^n;C^n)$, $\varepsilon_{ij}(\vec{f}) \in L^2(R^n;C^n)$ $(i,j = 1,2$ ou $3)$; en outre, si

$\vec{g}$ satisfait aux mêmes hypothèses

$$\int \varepsilon_{ij}(\vec{f}).\varepsilon_{ij}(\bar{\vec{g}})\, dx = \int \mathrm{div}\, \vec{f}.\mathrm{div}\, \bar{\vec{g}}\, dx + \frac{1}{2} \int \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \bar{\vec{g}}\, dx$$

$$\int \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{\vec{g}}}{\partial x_i}\, dx = \int \mathrm{div}\, \vec{f}.\, \mathrm{div}\, \bar{\vec{g}}\, dx + \int \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}.\overline{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{g}}\, dx$$

Lemme 0.3.

On a la décomposition suivante de $L^2(R^n;C^n)$ en sous-espaces fermés orthogonaux :

$$L^2(R^n;C^n) = L^2_o(R^n;C^n) \oplus L^2_1(R^n;C^n) \quad (n = 2 \text{ ou } 3)$$

où $L^2_o(R^n;C^n) = \{\vec{f} \;|\; \vec{f} \in L^2(R^n;C^n)\,,\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f} = \vec{0}\}$

$= $ adhérence dans $L^2(R^n;C^n)$ de $\{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi\,,\ \phi \in \mathcal{D}(R^n)\}$

$L^2_1(R^n;C^n) = \{\vec{f} \;|\; \vec{f} \in L^2(R^n;C^n),\ \mathrm{div}\, \vec{f} = 0\}$

$= $ adhérence dans $L^2(R^n;C^n)$ de $\{\mathrm{rot}\, \vec{\psi}\ ;\ \vec{\psi} \in \mathcal{D}(R^n;C^n)\}$

Ces deux lemmes se vérifient facilement à l'aide de la transformation de FOURIER et de l'identité vectorielle : $|\xi|^2 \,\vec{\hat{f}} = \vec{\xi}\,(\vec{\xi}.\vec{\hat{f}}) + \vec{\xi} \wedge (\vec{\xi} \wedge \vec{f})$.

Lemme 0.4.

1) Si $\vec{f} \in EL(R^3;C^3)$ et $A_{ij}\,\vec{f}_{,ij} = \vec{0}$ alors $\vec{f} = \vec{0}$

2) Si $\vec{f} \in EL(R^3;C^3)$, $\operatorname{div} \vec{f} = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{f} = \vec{0}$ alors $\vec{f} = \vec{0}$

3) Si $\vec{f}, \vec{g} \in EL(R^3;C^3)$

$$(\vec{f},\vec{g})_{EL} = (\operatorname{div} \vec{f}, \operatorname{div} \vec{g})_{L^2(R^3)} + \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{f}\,,\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{g})_{L^2(R^3;C^3)}$$

4) En outre si $\vec{f} \in E(R^2;C^2)$, elle vérifie 1) et 2) ainsi que

5) En ce sens que : $\sum\,(\varepsilon_{ij}\,(\vec{f})\,).\varepsilon_{ij}(\vec{g})\,)_{L^2(R^2)} = (\operatorname{div} \vec{f},\operatorname{div} \vec{g})_{L^2(R^2)}$

$$+\,\frac{1}{2}\,(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{f},\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{g})_{L^2(R^2)}$$

Démonstration

1) Les dérivations étant prises au sens des distributions, on a :

$< A_{ij}\,\vec{f}_{,ij}\,,\,\vec{\bar{\phi}} > = 0$ pour tout $\vec{\phi} \in \mathcal{D}\,(R^3;C^3)$ soit encore

$< A_{ij}\,\vec{f}_{,i}\,,\,\vec{\bar{\phi}}_{,j} > = 0$ ce qui équivaut à $((\vec{f},\vec{\phi}\,))_{EL} = 0$ pour tout

$\vec{\phi}$ de $\mathcal{D}\,(R^3;C^3)$. Ceci signifie que dans l'espace de HILBERT $EL(R^3;C^3)$, $\vec{f}$ est orthogonal au sous-espace dense $\mathcal{D}\,(R^3;C^3)$ donc y est nulle.

2) Par hypothèse : $< \operatorname{div} \vec{f}\,,\,\vec{\phi} > = 0 = < \vec{f},\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\phi >$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}\,(R^3)$

$< \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{f}\,;\,\vec{\bar{\psi}} > = 0 = < \vec{f};\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{\bar{\psi}} >$ pour tout $\vec{\psi} \in \mathcal{D}\,(R^3;C^3)$

Ceci entraîne : $< \vec{f};\,(\lambda+2\mu)\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\operatorname{div}\vec{\phi} - \mu\,\operatorname{rot}\,\operatorname{rot}\,\vec{\phi} > = \vec{0}$ pour tout $\vec{\phi} \in \mathcal{D}\,(R^3;C^3)$.

$\vec{f}$ est donc nulle en vertu du 1°).

3) Par définition, il existe deux suites $\{\vec{f}_n\}$ et $\{\vec{g}_n\}$ de $\mathcal{D}\ (R^3;C^3)$ qui tendent vers $\vec{f}$ et $\vec{g}$ respectivement dans $EL(R^3;C^3)$ quand $n \to \infty$.

En particulier $((\vec{f}_n,\vec{g}_n))_{EL} \to ((\vec{f},\vec{g}))_{EL}$. Par ailleurs, on a vu que $((\vec{f}_n,\vec{g}_n))_{EL} = (\mathrm{div}\, \vec{f}_n\ , \mathrm{div}\, \vec{g}_n)_{L^2(R^3)} + \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}_n, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{g}_n)_{L^2(R^3;C^3)}$.

Comme $\vec{f} \in EL(R^3;C^3)$ entraîne en particulier $\varepsilon_{ii}(\vec{f}) \in L^2(R^3)$ soit $\mathrm{div}\, \vec{f} \in L^2(R^3)$ on voit que $\{\mathrm{div}\, \vec{f}_n\}$ est une suite de CAUCHY dans $\mathcal{D}\ (R^3)$ pour la norme de $L^2(R^3)$, elle admet donc une limite unique dans ce dernier espace, limite qui n'est autre que div $\vec{f}$, car $\{\mathrm{div}\, \vec{f}_n\}$ converge au sens de $\mathcal{D}'\ (R^3)$ et div y est continu. Il en résulte que $(\mathrm{div}\, \vec{f}_n, \mathrm{div}\, \vec{g}_n)_{L^2}$ tend vers $(\mathrm{div}\, \vec{f}, \mathrm{div}\, \vec{g})$ quand $n \to \infty$. Il résulte alors de ce qui précède que $(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}_n, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{g}_n)_{L^2(R^3;C^3)}$ admet une limite quand $n \to \infty$; en outre $\{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}_n\}$ converge vers $\{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}\}$ dans $L^2(R^3;C^3)$.

4) Si $\vec{f} \in E(R^2;C^2)$ il appartient à $L^2(R^2;C^2)$ et aussi à $H^1(R^2;C^2)$, donc à $\mathcal{S}'(R^2;C^2)$, on peut donc définir $A_{ij}\ \vec{f}_{,ij}$ au sens des distributions. Par transformation de FOURIER : $A_{ij}\ \vec{f}_{,ij} = \vec{0}$ équivaut à $A\ (\vec{\xi})\ \hat{\vec{f}}(\xi) = \vec{0}$ (au sens des distributions tempérées) d'où $\hat{\vec{f}}(\xi) = \vec{0}$ puisque $\hat{\vec{f}} \in L^2(R^3;C^3)$ donc $\vec{f} = \vec{0}$.

5) Div $\vec{f} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\ \vec{f} = \vec{0}$ signifient $\vec{\xi}.\hat{\vec{f}} = 0$, $\vec{\xi} \wedge \hat{\vec{f}} = \vec{0}$ ce qui entraîne $|\xi|^2\ \hat{\vec{f}} = \vec{0}$ donc $\vec{f} = \vec{0}$.

6) Démonstation analogue à celle de 3°).

Il résulte alors de ce qui précède que $(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}_n, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{g}_n)_{L^2(R^3;C^3)}$ admet une limite quand $n \to \infty$; $\{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}_n\}$ converge donc vers $\{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{f}$ dans $L^2(R^3;C^3)$.

Remarque

On vient de voir que $\vec{f} \in EL(R^3;C^3)$ entraîne $\overrightarrow{rot}\ \vec{f} \in L^2(R^3;C^3)$.

Compte tenu de la définition de EL on voit que :

$\vec{f} \in BL(R^3;C^3)$ complété de $\mathcal{D}\ (R^3;C^3)$ pour la norme

$$||\vec{f}||^2_{BL} = \int \sum_{i,j=1} |\ f_{i,j}|^2_{L^2(R^3)}\ dx$$

la réciproque étant évidente. C'est l'espace de BEPPO-LEVI qu'ont étudié MM. DENY et LIONS dans [1].

Des lemmes qui précèdent on peut déduire la décomposition de $\vec{f} \in EL(R^3;C^3)$ en la somme d'un gradient et d'un rotationnel plus précisément on a le :

Lemme 0.5

On a la décomposition suivante :

$$EL(R^3;C^3) = EL_o(R^3;C^3) \oplus EL_1(R^3;C^3)$$

où $EL_o(R^3;C^3)$ = adhérence dans EL de $S_o = \{\overrightarrow{grad}\ \varphi\ ,\ \varphi \in \mathcal{D}(R^3;C)\}$

$$= \{\vec{f} \in EL(R^3;C^3);\ \overrightarrow{rot}\ \vec{f} = \vec{0}\}$$

et $EL_1(R^3;C^3)$ = adhérence dans EL de $S_1 = \{\overrightarrow{rot}\ \vec{\psi};\ \vec{\psi} \in \mathcal{D}(R^3;C^3)\}$

$$= \{\vec{f} \in EL(R^3;C^3);\ div\ \vec{f} = 0\ \}.$$

Démonstration

Si $\vec{f}$ est orthogonale à S_o dans EL, on a :

$$0 = ((\vec{f},\ \overrightarrow{grad}\ \varphi))_{EL} \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}\ (R^3)$$

soit d'après le lemme 1.4.(3°)

$$0 = (\operatorname{div} \vec{f}, \Delta \psi)_{L^2(R^3)}$$

div $\vec{f}$ est donc harmonique. Comme div $\vec{f} \in L^2(R^3)$ il s'ensuit que div $\vec{f} = 0$. On verrait de même que $\vec{f}$ orthogonale à S_1 entraîne $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{f} = \vec{0}$. On prouve ensuite que S_1(resp. S_o) est dense dans EL_1 (resp. EL_o) : sinon, il existerait $\vec{f} \in EL_1$ et orthogonale à S_1 ce qui entraînerait $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{f} = \vec{0}$ et div $\vec{f} = 0$ donc $\vec{f} = \vec{0}$ (lemme 1.3.2°)). De même S_o est dense dans EL_o .

En outre EL_o et EL_1 sont orthogonaux (car $((\overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi, \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\psi}))_{EL} = 0$) et engendrent EL(car $\vec{f}$ orthogonal à EL_o et EL_1 vérifie $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{f} = \vec{0}$ et div $\vec{f} = 0$ donc est nul).

Remarque

Ce lemme s'étend à $E(R^2;C^2)$

<u>*Théorème 0.2.*</u>

Il existe une isométrie et une seule J_o(resp. J_1) de $L_o^2(R^3;C^3)$ [resp. $L_1^2(R^3;C^3)$] sur $BL(R^3;C)$ [resp. $EL_1(R^3;C^3)$] telle que si $\vec{f} \in L_o^2(R^3;C^3)$ [resp. $L_1^2(R^3;C^3)$] : $\vec{f} = \overrightarrow{\text{grad}}\ (J_o \vec{f})$ [resp. $\vec{f} = \overrightarrow{\text{rot}}\ (J_1 f)$].

Démonstration

On peut tout d'abord remarquer que, si $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{f} = \vec{0}$ on a $f_{i,j} = f_{j,i}$ pour tous $i,j = 1,2$ ou 3 avec $i \neq j$. Dans ces conditions, $EL_o(R^3;C^3)$ coïncide avec $BL_o(R^3;C^3) = \{\vec{f} \in BL\ (R^3;C^3),\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{f} = 0\}$ = adhérence de S_o dans BL [on a d'ailleurs une décomposition de $BL(R^3;C^3)$ en tout point analogue à celle du lemme 1.5 pour $EL(R^3;C^3)$].

Définition de J_o

Soit $\hat{g}(\xi) = -|\xi|^{-2}(i\vec{\xi}\ \hat{\vec{f}}\ (\xi)\ )$ où $\vec{f} \in L_o(R^3;C^3)$.

Comme $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{f} = \vec{0}$ on a $\vec{\xi}\ \Lambda\ \hat{\vec{f}}\ (\xi) = \vec{0}$ et, par conséquent :

$$i\ \vec{\xi}\ \hat{g}(\xi) = -|\xi|^{-2}\ [i\ \vec{\xi}\ (i\vec{\xi}.\hat{\vec{f}}(\xi)\ )] = |\xi|^{-2}[\ \vec{\xi}\ \Lambda\ (\vec{\xi}\ \Lambda\ \hat{\vec{f}}\ )$$

$$+|\xi|^2\ \hat{\vec{f}}\,] = \hat{\vec{f}}(\xi)\ .$$

Or $\hat{g}$ est une distribution tempérée. En effet si l'on écrit :

$$\hat{g}(\xi) = \hat{g}_1(\xi) + \hat{g}_2(\xi)$$

où $\hat{g}_1$ et $\hat{g}_2$ sont les restrictions de $\hat{g}$ à $|\vec{\xi}| \leq 1$ et $|\vec{\xi}| > 1$ respectivement, on voit facilement que $\vec{f} \in L^2(R^3;C^3)$ entraîne $\hat{g}_1 \in L^1(R^3)$ et $\hat{g}_2 \in L^2(R^3)$. Comme ces deux espaces sont contenus dans $S'(R^3)$ on a bien $\hat{g} \in S'(R^3)$. Il en résulte que $\hat{g}$ est la transformée de Fourier d'une autre distribution tempérée g qui vérifie :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ g = \vec{f}\ .$$

On pourra donc définir $J_o\ \vec{f} = g$ si $g \in BL(R^3)$. Comme g est une distribution on a : $\tilde{g} = g + c$ où c est une constante et $\tilde{g} \in BL(R^3)$. On peut donc définir :

$$J_o\ \vec{f} = \tilde{g}\ .\text{(car } \tilde{g} \text{ est unique)}$$

propriétés de J_o — $i\ \vec{\xi}\ \hat{g}(\xi) = \hat{\vec{f}}\ (\xi)$ entraîne

$$||i\ \vec{\xi}\ \hat{g}\ ||^2 = ||\overrightarrow{\text{grad}}\ \tilde{g}||^2_{L^2} = ||\tilde{g}||^2_{BL} = |\hat{f}|^2\ :$$

J_o est une isométrie. J_o est surjective car si $h \in BL(R^3)$, $\overrightarrow{\text{grad}}\ h \in L^2(R^3;C^3)$ et $J_o\ \overrightarrow{\text{grad}}\ h = h$.

En outre J_o est unique car, si J'_o désignait une autre isométrie, on aurait : $\overrightarrow{\text{grad}}\ (J_o - J'_o)\ \vec{h} = 0$ donc $J_o\ \vec{h} - J'_o\ \vec{h} = c$ (c constante) et comme $(J_o - J'_o)\ \vec{h} \in BL(R^3)$ on a nécessairement $c = 0$.

On voit de même que : $\hat{\vec{h}}(\xi) = |\xi|^{-2}\ (i\vec{\xi} \wedge \hat{\vec{f}}(\xi)\ )$ où $\vec{f} \in L_1^2(R^3;C^3)$ est une distribution tempérée, donc est la transformée de FOURIER d'une autre distribution tempérée $\vec{h}(\xi)$ qui vérifie : $\operatorname{div} \vec{h} = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \vec{h} = \vec{f}$.

On peut donc définir : $J_1\ \vec{f} = \vec{h}$ si $\vec{h} \in EL_1\ (R^3\ ;\ C^3)$.

Comme :

$$|\vec{\xi} \wedge \hat{\vec{h}}\ (\xi)|^2_{L^2} = \sum_{j=1}^{3} |\vec{\xi}\ \hat{h}_j(\xi)|^2_{L^2} = |\hat{\vec{f}}(\xi)|^2_{L^2}$$

on voit que les $\xi_j\ \hat{h}_j$ (c'est-à-dire les $h_{j,i}$) sont de carré intégrable et, par conséquent, qu'il existe $\vec{\tilde{h}} \in EL_1\ (R^3;C^3)$ tel que :

$$\vec{h} = \vec{\tilde{h}} + \vec{\eta} \qquad \text{où} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \vec{\eta} = \vec{0}\ .$$

On définit ainsi :

$$J_1\ \vec{f} = \vec{\tilde{h}}\ .$$

Il est alors facile de voir que J_1 est une isométrie bijective.

Son unicité provient du fait suivant :

"$\operatorname{div} J_1\ \vec{f} = \operatorname{div} J_1'\ \vec{f}$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\ J_1\ \vec{f} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\ J_1'\ \vec{f}$, $\vec{f} \in L_1^2\ (R^3;C^3)$" $\Longrightarrow J_1\ \vec{f} = J_1'\ \vec{f}$

car $(J_1-J_1')\ \vec{f} \in EL\ (R^3;C^3)$.

CHAPITRE 1

EQUATIONS DE L'ELASTODYNAMIQUE EN L'ABSENCE D'OBSTACLE

1.1. L'ESPACE DE HILBERT H_o *ET LE GROUPE* $\{U_o(t)\}$.

On désigne par H_o l'espace vectoriel sur C des données initiales :

$$\vec{u}(x,0) = \vec{g}_1(x) \quad , \quad \vec{u}_t(x,0) = \vec{g}_2(x)$$

où $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ sont définies sur R^n à valeurs dans C^n ($n = 2$ ou 3). On utilisera souvent la notation $\vec{g} = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$. Si $\vec{g} \in \mathcal{D}(R^n;C^n) \times \mathcal{D}(R^n;C^n)$, on peut définir :

$$|\vec{g}|_E^2 = \int_{R^3} \left[|\vec{g}_2|^2 + \sum_{i,j=1}^{3} \vec{g}_{1,i} \cdot A_{ij} \; \overline{\vec{g}}_{1,j} \right] dx \tag{1.1}$$

forme que l'on va prendre pour norme, le produit scalaire associé étant noté $(\vec{f}, \vec{g})_E$.

Définition 1.1. - *L'espace de Hilbert* H_o *es le complété de* $D(R^n ; C^n)^2$ *pour la norme* (1.1) *On a :*

$$H_o = EL(R^n ; C^n) \times L^2(R^n ; C^n) \qquad (n = 2 \text{ ou } 3)$$

Soit alors $\vec{u}(x,t)$ la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_{tt} - A_{ij} \; \vec{u}_{,ij} = \vec{0} \\ \vec{u}(x, 0) = \vec{g}_1(x) \; , \; \vec{u}_t(x, 0) = \vec{g}_2(x) \end{array} \right. \tag{1.2}$$

On a le résultat classique suivant :

Théorème 1.1. 1) Le problème (1.2) admet une et une seule solution dans $\mathcal{E}^\infty(R^n ; C^n)$ *pour des données initiales* $\vec{g} \in D(R^n ;C^n)^2$ *. Son énergie est indépendante de* t *.*

2) Il existe deux constantes positives c_M *et* c_m $c_M > c_m$ *telles que l'énergie (1.1) de* $\vec{u}(x,t)$ *à l'instant* $t=0$ *pour la sphère* $\{|x| < R\}$ *est supérieure ou égale à celle de* $\vec{u}(x, s)$ *pour la sphère* $\{|x| < R - c_M s\}$.

3) *Si* $\vec{g}(x) = \vec{0}$ *dans* $\{|x| \geq R\}$ $\vec{u}(x,t) = \vec{0}$ *dans* $\{|x| < c_m|t| - R\}$

Démonstration (seul le cas n = 3 sera détaillé, celui de n = 2 ne nécessite que des modifications de détail).

La solution $\vec{u}$ peut se construire à l'aide de la transformation de Fourier et la conservation de son énergie résulte de 2) qui peut se démontrer comme suit :

Si $\vec{u}$ vérifie le système aux dérivées partielles (1.2) et si Q désigne un domaine de l'espace (x,t) on a :

$$0 = 2\,\mathrm{Re} \iiint_Q \vec{u}_t \cdot (\bar{\vec{u}}_{tt} - A_{ij}\, \bar{\vec{u}}_{,ij})\, dx\, dt = \iiint_Q \left[|\vec{u}_t|^2_{,t} - 2\,\mathrm{Re}\, (\vec{u}_t \cdot A_{ij}\, \bar{\vec{u}}_{,ij}) \right] dx\, dt.$$

Or, si l'on tient compte de $A_{ij} = {}^tA_{ij}$, on voit que :

$(\vec{u}_{,jt} \cdot A_{ij}\, \bar{\vec{u}}_{,i}) = (\vec{u}_{,j} \cdot A_{ij}\, \bar{\vec{u}}_{,it})$ d'où, compte tenu de ce que $(\vec{u}_{,j} \cdot A_{ij}\, \bar{\vec{u}}_{,i}) \in \mathbb{R}$

$$2\,\mathrm{Re}\, (\vec{u}_t \cdot A_{ij}\, \bar{\vec{u}}_{,ij}) = 2\,\mathrm{Re}\, (\vec{u}_t \cdot A_{ij}\, \bar{\vec{u}}_{,i})_{,j} - (\vec{u}_{,j} \cdot A_{ij}\, \bar{\vec{u}}_{,i})_t \; .$$

On a donc :

$$(1.3) \qquad 0 = \iiint \left[|\vec{u}_t|^2 n_t + (\vec{u}_{,j} \cdot A_{ij}\, \bar{\vec{u}}_{,i})\, n_t - 2\,\mathrm{Re}\, (\vec{u}_t \cdot A_{ij}\, \bar{\vec{u}}_{,i}\, n_j) \right] dS\, .$$

Si l'on pose : $W(\vec{u}(x,t)) = |\vec{u}_t|^2 + (\vec{u}_{,j} \cdot A_{ij}\, \bar{\vec{u}}_{,i})$ et si l'on prend $Q = \{(x,t) |\ |x| \leq R - ct\ ,\ 0 \leq t \leq T\ ,\ c > 0\}$, (1.3) s'écrit :

$$(1.4) \qquad \iint_{|x|<R-cT} W(\vec{u}(x,t))\, dx - \iint_{|x|<R} W(\vec{u}(x,0))\, dx = - \iint \Big[W(\vec{u}(x,t)\, n_t$$

$$- 2\,\mathrm{Re}\, (\vec{u}_t \cdot A_{ij}\, \bar{\vec{u}}_{,i}\, n_j) \Big]\, dS$$

où, dans l'intégrale du second membre n_t , $\vec{n}$ sont directement proportionnels à c et $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ (le coefficient de proportionnalité étant $(1 + c^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Par ailleurs, si l'on définit la matrice unicolonne U par :

$$^tU = (u_{1,t};\ u_{2,t};\ u_{3,t};\ u_{1,1};\ u_{2,1};\ u_{3,1};\ u_{1,2};\ u_{2,2};\ u_{3,2};\ u_{1,3};\ u_{2,3};u_{3,3})$$

(u_3 disparaissant dans le cas bidimensionnel)

on a $W(\vec{u}) = {}^tUEU$ et $2\ \mathrm{Re}\ (\vec{u}_t .\ A_{ij}\ \bar{\vec{u}}_{,i}\ n_j) = {}^tU\ A(\vec{n})\ U$

où, dans le cas tridimensionnel,

$$(1.5)\ E = \begin{vmatrix} I_3 0 & 0 & 0 \\ 0\ A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ 0\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ 0\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} \text{ et } A(\vec{n}) = \begin{vmatrix} 0 & A_{1j}\ n_j & A_{2j} n_j & A_{3j} n_j \\ A_{j1} & n_j\ 0 & 0 & 0 \\ A_{j_2} & n_j\ 0 & 0 & 0 \\ A_{j3} & n_j\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

sont des matrices symétriques d'ordre 12, E étant définie positive.

L'intégrand du second membre de (1.4) s'écrit alors :

$$(1.6) \qquad {}^tU.(cE - A(\vec{n}).\ U \quad .$$

Il est positif ou nul si $c \geq c_M = \sup\limits_{|\vec{n}|=1}$ (valeurs propres de A $(\vec{n})$ relatives à E)

$$(1.7) \qquad P(c;\vec{n}) = \mathrm{Det}\ (c\ E - A\ (\vec{n})\ ) \text{ s'écrit encore}$$

$$= c^6\ \mathrm{Det}\ (c^2\ I_3 - A_{ij}\ n_i\ n_j).\ \mathrm{Det}\ (A)$$

où

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Si l'on fait l'hypothèse naturelle Det A $\neq$ 0 (vérifiée dans le isotrope) il résulte du corollaire 1.1 que les racines de Det (cE-A(n)) = 0 sont $c_1(n) \geq c_2(n) \geq c_3(n) \geq c_4(n) > 0 > - c_3(n) \geq -c_2(n) = c_2(-n) \geq -c_1(n) = c_1(-n)$

On fera donc l'hypothèse suivante :

Les surfaces d'équations

$$c_i(\vec{n}) = \omega \ (\omega > 0) \ i = 1, 2, 3$$

sont sans point commun ou sont confondues.

En fait, l'équation de l'ensemble de ces surfaces est

$$Q(c,\vec{n}) = \prod_{i=1}^{N} (c^2 - c_i^2(n)) = 0 , \quad N \leq 3$$

et, si l'on suppose qu'en tout point $\vec{n}$ de la partie réelle de $S_c = \{\vec{n} \mid Q(c,\vec{n}) = 0\}$, supposée bornée, on a $\frac{dQ}{dn}(c;\vec{n}) \neq 0$ on peut voir que l'hypothèse précédente est réalisée, les surfaces $c_i(\vec{n}) = \omega$ étant analytiques et entourant l'origine [cf DUFF [1] , WILCOX [4]].

Dans ce cas, le milieu est dit à propagation uniforme.

Il est alors évident que c_M existe et qu'elle est finie.

Il suit de ce dernier résultat que, si $\vec{g} = \vec{0}$ dans $\{x \mid : |x - x_o| < R\}$ l'énergie de la solution correspondante $\vec{u}(x,t)$ l'est dans $\{x \mid |x-x_o| < R - ct ,\ 0 < t < T\}$ ce qui entraîne $\vec{u}(x,t)$ constant dans ce même domaine et $\vec{u}(x,0)=\vec{0}$ permet d'affirmer que $\vec{u}(x,T) = \vec{0}$ dans $\{|x - x_o| < R - c T\}$ si $c \geq c_M$.

Quant à la démonstration de c) elle va résulter de l'étude du groupe $\{U_o(t)\}$

Définition 1.2. - *Pour tout* t *, on définit l'application* U_o *de* H_o *dans lui-même par :*

$$U_o(t) : \{\vec{g}_1,\vec{g}_2\} \leadsto \{\vec{u}(t) , \vec{u}_t(t)\} .$$

En utilisant la propriété de conservation de l'énergie et le fait que $\vec{g} \in \mathcal{D}(R^n ; C^n)^2$ entraîne $\{\vec{u}, \vec{u}_t\} \in \mathcal{D}(R^n ; C^n)^2$ on peut prolonger $U_o(t)$ par continuité à H_o et l'on définit ainsi un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires de H_o .

Si A_o désigne le générateur infinitésimal de $\{U_o(t)\}$ on sait par le théorème de Stone qu'il est anti-autoadjoint.

En outre, si $\vec{g} \in \mathcal{D}(R^n ; C^n)^2$, $A_o \vec{g}$ existe son domaine étant dense dans H_o et :

$$A_o \vec{g} = \frac{d}{dt} U_o(t) \vec{g}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \vec{u}_t \\ \vec{u}_{tt} \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} \vec{u}_t \\ A_{ij} \vec{u}_{,ij} \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \vec{\Delta}^* & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Delta}^* = A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

De manière plus précise A_o est l'opérateur fermé prolongeant à H_o , l'opérateur $\begin{pmatrix} 0 & I \\ \vec{\Delta}^* & 0 \end{pmatrix}$ défini sur $\mathcal{D}(R^n ; C^n) \times \mathcal{D}(R^n ; C^n)$.

1.2. REPRESENTATIONS DE $U_o(t)$ *(L.P. Chp. IV et VI)*

Définition 1.3.- *Soit* $V = L^2(\Omega)$ *l'espace de Hilbert des (classes de) fonctions de carré sommable sur la sphère unité* $\Omega = \{\vec{\omega}\ (|\vec{\omega}| = 1\}$ *de* R^n $(n = 2$ ou $3)$. $L^2(-\infty, \infty; V)$ *ou* $L^2(R;V)$ *est l'espace de Hilbert des fonctions* $\vec{f}(t;.)$ *définies sur* R *à valeurs dans* V *et de carré sommable, la norme étant :*

$$(1.8)\qquad ||\vec{f}||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{f}(t;.)|_V^2\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} |\vec{f}(t;\vec{\omega})|^2\ dt\ d\omega .$$

et le produit scalaire associé :

$$[\vec{f},\vec{g}] = \iint \vec{f}(t;\vec{\omega}).\bar{\vec{g}}(t,\omega)\ dt\ d\omega .$$

Les fonctions

$$(1.9)\qquad \vec{\phi}_k(x;\vec{\omega};\rho) = \{\vec{e}_k(\omega)\ e^{-i\rho\vec{x}.\vec{\omega}}\ ;\ i\rho c_k(\omega)\ \vec{e}_k(\omega)\ e^{-i\rho\vec{x}.\vec{\omega}}\}$$

où $\vec{\xi} = \rho\,\vec{\omega}$, $\vec{e}_k(\omega)$ et $c_k^2\,(\omega)$ étant les vecteur propre et valeur propre associés du corollaire 0.1 ($c_1^2 = \lambda + 2\mu$, $c_2^2 = \mu$ si $n = 2$, $c_3^2 = \mu$ si $n = 3$ dans le cas d'un milieu isotrope), sont des fonctions propres de A_o , en fait :

$$A_o\,\vec{\phi}_k = i\,\rho\,c_k\,\vec{\phi}_k \qquad \text{(sans sommation sur k)}$$

Les $c_k(\vec{\omega})$ sont racines de

$$\mathrm{Det}\,(c^2\,I - A(\vec{\omega})\,) = 0$$

les $\vec{e}_k(\vec{\omega})$ vérifient :

$$A(\vec{\omega})\,\vec{e}_k = c_k^2\,(\omega)\,\vec{e}_k\,.\ \text{(sans sommation sur k)}$$

Si les c_k sont distincts (cas isotrope pour $n = 2$ par exemple) on sait que les $\vec{e}_k(\omega)$ sont analytiques. Par contre, si les $c_k(\vec{\omega})$ ne sont pas tous distincts, on ne peut, jusqu'à présent, qu'affirmer leur mesurabilité au sens de Lebesgue (cf. WILCOX [5]), en particulier on les prendra dans $(L^2\,(\Omega)\,)^n$.

On pose :

(1.10) $$\tilde{f}_j(\rho,\omega) = (\vec{f},\,\vec{\phi}_j)_E$$

On se propose, dans la suite, d'associer à tout élément $\vec{f}$ de H_o , un élément F de $L^2(R;V)$ de telle sorte que l'application ainsi définie soit une isométrie et que l'image de $U_o(t)$ soit $e^{i\rho t}\,F(f)$ (<u>représentation spectrale</u> du groupe $U_o(t)$, $t \in R$). En fait, on va obtenir de façon assez naturelle une représentation quasi-spectrale.

Théorème 1.2.

L'application $\tilde{F}$ *de* H_o *sur* $L^2(R;V)$ *définie par*

(1.10)
$$(\tilde{F}\,\vec{f})\,(\rho,\vec{\omega}) = \sum_{j=1}^{n}\,(\tilde{F}\,\vec{f})_j\,(\rho,\vec{\omega})\,\vec{e}_j(\omega)$$

$$(\tilde{F}\,\vec{f})_j(\rho,\vec{\omega}) = \rho^{\frac{n-3}{2}}\,\frac{(\vec{f},\vec{\phi}_j)_E}{(2\Pi)^{\frac{n}{2}}\,\;c_j(\omega)} \qquad (n = 2 \text{ ou } 3)$$

est unitaire.

L'action de $\tilde{\mathcal{F}}.U_o(t)$ *se traduit par :* $\tilde{\mathcal{F}}(U_o(t)\vec{f})_j = e^{i\rho c_j t}\,(\tilde{\mathcal{F}}\,\vec{f})_j$.

Démonstration

Soit $\vec{f},\vec{g} \in \mathcal{D}\,(R^n;C^n)^2$. On a :

$$(\vec{f},\vec{g})_E = \int (\vec{f}_2.\bar{\vec{g}}_2 + \vec{f}_{1,i}.A_{ij}\,\bar{\vec{g}}_{1,j})\,dx = \int (\vec{f}_2.\bar{\vec{g}}_2 - \vec{f}_1.A_{ij}\,\bar{\vec{g}}_{1,ij})\,dx$$

$$= \int (\hat{\vec{f}}_2.\bar{\hat{\vec{g}}}_2 + \hat{\vec{f}}_1.A(\vec{\xi})\,\bar{\hat{\vec{g}}}_1)\,d\xi \quad (\text{où } d\xi = \rho^{n-1}\,d\rho\,d\omega\ )$$

$$(1.11) = \left[i\rho^{\frac{n-1}{2}}\,\hat{\vec{f}}_2\ ,\ i\rho^{\frac{n-1}{2}}\,\hat{\vec{g}}_2\right] + \sum_{j=1}^{n}\left[c_j(\omega)\,\rho^{\frac{n+1}{2}}\,\hat{\vec{f}}_1.\vec{e}_j, c_j(\omega)\rho^{\frac{n+1}{2}}\,\hat{\vec{g}}_1.\vec{e}_j\right]$$

$$\doteq \left[\vec{F}_2\ ,\ \vec{G}_2\right] + \left[\vec{F}_1\ ,\ \vec{G}_1\right]$$

où l'on a posé :

$$(1.12)\quad \begin{cases} \vec{F}_1(\rho,\omega) = -i\,\rho^{\frac{n-1}{2}} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} i\rho c_j(\hat{\vec{f}}_1.\vec{e}_j)\,\vec{e}_j \\[2ex] \vec{F}_2\,(\rho,\omega) = -\,i\,\rho^{\frac{n-1}{2}}\,\hat{\vec{f}}_2(\xi) \qquad \text{où } \vec{\xi} = \rho\,\vec{\omega},\ |\vec{\omega}| = 1,\ \rho = |\vec{\xi}|. \end{cases}$$

En outre, on vérifie aisément que :

$$(\vec{f},\vec{\phi}_j)_E = \int\left[\vec{f}_2(x).(-i\rho\ c_j\ \vec{e}_j\ e^{-i\xi.x}) + \vec{f}_1(x).\rho^2\ c_j^2\ \vec{e}_j\ e^{-i\xi.x}\right]dx$$

$$(1.13)\qquad = -i\rho\ c_j(2\Pi)^{\frac{n}{2}}\left[\hat{\vec{f}}_2(\xi).\vec{e}_j + i\rho\ c_j\ \hat{\vec{f}}_1(\xi).\vec{e}_j\right]$$

$$= (2\Pi)^{\frac{n}{2}}\ c_j(\omega)\ \rho^{\frac{3-n}{2}}\left[\vec{F}_2(\rho,\omega).\vec{e}_j(\omega) + \vec{F}_1(\rho,\omega).\vec{e}_j(\omega)\right]$$

d'où l'on déduit :

$$(1.14)\qquad \vec{F}_1(\rho,\omega) + \vec{F}_2(\rho,\omega) = \sum_{j=1}^{n}(\tilde{\mathcal{F}}\,\vec{f})_j\ (\rho,\omega)\ \vec{e}_j(\omega) = \overrightarrow{(\tilde{\mathcal{F}}\,\vec{f})}\ (\rho,\omega)\ .$$

Il résulte par ailleurs de (1.12) que :

$$(1.15) \qquad |\vec{f}|_E^2 = ||\vec{F}_1||^2 + ||\vec{F}_2||^2 \quad ;$$

en effet compte tenu des propriétés des $\vec{e}_j(\omega)$ et $c_j(\omega)$, $\tilde{\vec{f}}_1$ et $\tilde{\vec{f}}_2 \in L^2(-\infty,\infty;V)$ et même à $L^2(0,\infty;V)$. Mais d'après (1.12), il est possible de définir

$$(1.16) \qquad (\tilde{F}\,\vec{f})\,(\rho,\vec{\omega}) = \begin{cases} \vec{F}_1(\rho,\omega) & \text{si} \quad \rho > 0 \\ \vec{F}_2(-\rho,-\omega) & \text{si} \quad \rho < 0 \end{cases} \qquad (n = 2 \text{ ou } 3)$$

et l'on obtient ainsi $\tilde{F} : \mathcal{D}\,(R^n;C^n)^2 \longrightarrow L^2(R;V)$.

On a ainsi obtenu une isométrie définie sur un sous-espace dense de H_o , qui peut donc être prolongée de manière unique à une isométrie définie sur H_o tout entier. Or, il résulte de (1.12) et (1.16) que si $\vec{f}$ est indéfiniment différentiable et à support comptact, $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ ont les mêmes propriétés en ρ , c'est-à-dire sont des éléments de $\mathcal{D}$ (R;V) qui est dense dans $L^2(R;V)$. En outre si l'on se donne $\tilde{\vec{g}}(\rho,\omega)$ dans $\mathcal{D}$ (R;V), nulle au voisinage de $\rho = 0$ il lui correspond par (1.16) $\vec{F}_1(\rho,\omega)$ et $\vec{F}_2(\rho,\omega)$ d'où l'on tire, par (1.12), $\hat{\vec{f}}_1$ et $\hat{\vec{f}}_2$ puis, par transformation de Fourier, $\vec{f}_1,\vec{f}_2$: l'isométrie $\tilde{F}$ est bijective entre $\mathcal{D}\,(R^n;C^n)^2$ et $\mathcal{D}\,(R;V)$: son prolongement à H_o est unitaire.

En outre, si on pose $\vec{h} = A_o\,\vec{f}$ où $\vec{f} \in H_o$ on a

$$(\tilde{F}\,\vec{h})_j = \rho^{\frac{n-3}{2}}\,\frac{(A_o\,\vec{f},\phi_j)_E}{(2\Pi)^{\frac{n}{2}}\,c_j(\omega)} = -\,\rho^{\frac{n-3}{2}}\,\frac{(\vec{f},A_o\,\vec{\phi}_j)_E}{(2\Pi)^{\frac{n}{2}}\,c_j} = i\rho\,c_j(\tilde{F}\,\vec{f})_j \qquad (j = 1,2,\dots,n)$$

Quant à l'action de $\tilde{F}$ sur $U_o(t)\,\vec{f}(x) = \{\vec{u}(x,t);\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\,(x,t)\}$ elle s'obtient en utilisant la transformation de FOURIER. Si $\vec{f} \in \mathcal{D}(R^n;C^n)^2$ alors pour t fixé, $U_o(t)\,\vec{f} \in \mathcal{D}(R^n;C^n)^2$. Si $\hat{\vec{u}}(\xi,t)$ désigne la transformée de FOURIER de $\vec{u}$ relativement aux variables d'espaces, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{\vec{u}}(\xi,t) + A(\vec{\omega})\,\rho^2\,\hat{\vec{u}}(\xi,t) = \vec{0} \qquad (\text{où } \rho = |\vec{\xi}|\ )$$

$$\hat{\vec{u}}(\xi,0) = \hat{\vec{f}}_1(\xi),\quad \frac{\partial\hat{\vec{u}}}{\partial t}(\xi,0) = \hat{\vec{f}}_2(\xi).$$

Si l'on pose : $\hat{\vec{u}}(\xi,t) = \sum_{j=1}^{n} v_j(\xi,t;\omega)\,\vec{e}_j(\omega)$, $\hat{\vec{f}}_k(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_{kj}(\xi;\omega)\,\vec{e}_j(\omega)$,

on obtient aisément

$$\hat{\vec{u}}(\xi,t) = \sum_{j=1}^{n}\left[\alpha_j(\rho,\omega)\,e^{i\rho c_j t} + \beta_j(\rho,\omega)\,e^{-i\rho c_j t}\right]\vec{e}_j(\omega)$$

où $\qquad \alpha_j(\rho,\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}_{1j} - i\,\frac{\hat{f}_{2j}}{\rho c_j}\right),\ \beta_j(\rho,\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}_{1j} + i\,\frac{\hat{f}_{2j}}{\rho c_j}\right).$

alors $\quad (U_o(t)\vec{f},\vec{\phi}_k)_E = \int_{R^n}\left[\vec{u}_t.(-i\rho\ c_k\ \vec{e}_k\ e^{i\xi.x}) + \vec{u}.\rho^2\ c_k^2\ e^{i\xi.x}\right]dx$

$$= -\,i\rho\ c_k(\omega).(2\Pi)^{\frac{n}{2}}\left[\hat{\vec{u}}_t(\xi,t).\vec{e}_k + i\rho\ c_k\ v_k(\xi,t;\omega)\right]$$

(1.17) $$= -\,i\rho\ c_k.(2\Pi)^{\frac{n}{2}}\left[i\rho\ c_k\ \hat{f}_{1k} + \hat{f}_{2k}\right]e^{i\rho c_k t}$$

$$= e^{i\rho c_k t}\,(\vec{f},\vec{\phi}_k)E$$

ce qui établit le théorème

Théorème 1.3.

Si $\vec{f}\in\mathcal{S}(R^n\ ;\ C^n)^2$ *on déduit de sa représentation quasi-spectrale, par transformation de FOURIER, une pré-représentation par translation définie par :*

$$\mathcal{R}: \vec{f} \rightsquigarrow \vec{k} = \mathcal{R}\,\vec{f} \in \mathcal{S}(R;V)$$

où $\vec{k}(x,\omega) = \sum_{j=1}^{n} k_j(s;\omega)\,\vec{e}_j(\omega)$

avec : (1.18) $k_j(s;\omega) = (-i)^{\frac{3-n}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left[\tilde{\vec{f}}_2(s,\omega) - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{\vec{f}}_1}{\partial s} \cdot \vec{e}_j\right) c_j\, \vec{e}_j\right]$

($n = 2$ ou 3).

où $\tilde{\vec{f}}(s;\omega) = (2\Pi)^{\frac{1-n}{2}} \int_{x.\omega = s} \vec{f}(x)\, dS$ (1.19)

désigne la tranformée de RADON de $\vec{f}$.

Réciproquement, si $\vec{k} \in \mathcal{S}(R;\ V)$ *c'est le pré-représentant par translation de* $\vec{f} \in \mathcal{S}(R^n;\ C^n)^2$ *défini par :*

si $n = 3$

$$\vec{f}_1(x) = -\frac{1}{4\Pi} \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \frac{1}{c_j(\omega)} \frac{\partial}{\partial s} m_j^o(x.\omega;\omega)\,\vec{e}_j(\omega)\, d\omega$$

(1.20)

$$\vec{f}_2(x) = -\frac{1}{4\Pi} \int_\Omega \frac{\partial^2 \vec{m}^o}{\partial s^2}(x.\omega;\omega)\, d\omega$$

si $n = 2$

$$\vec{f}_1(x) = \int_\Omega \vec{H}^{(1)}(x.\omega;\omega)\, d\omega \quad \text{où } \vec{H}^{(1)}(x.\omega;\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\Pi}}\,\mathcal{H}\Big(\sum_{j=1}^{2} \frac{m_j^o}{c_j}\Big)\,\vec{e}_j$$

(1.21) $$\vec{f}_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\Pi}} \int_\Omega \mathcal{H}\,\frac{\partial}{\partial s}\,\vec{m}(x.\omega;\omega)\, d\omega$$

où $\mathcal{H}$ *désigne la transformation de HILBERT par rapport à* s *et*

$$\vec{m}^o = \sum_{j=1}^{n} m_j^o\,\vec{e}_j \quad , \quad m_j^o = \tilde{\vec{f}}_2.\vec{e}_j - c_j \frac{\partial \tilde{\vec{f}}_1}{\partial s} \cdot \vec{e}_j \qquad (1.22)$$

Démonstration

1) Quelques rappels sur la transformation de RADON dans R^n (n = 2 ou 3) seront nécessaires (pour les détails cf. F. JOHN [1], LUDWIG [1] , LAX-PHILLIPS [2]). Par définition, la transformée de RADON de $\vec{f} \in \mathcal{S}(R^n;C^n)$ est un élément noté $\mathcal{R}\,\vec{f}$ ou $\tilde{\vec{f}}$ défini sur $R \times S^{n-1}$ par

$$(\mathcal{R}\vec{f}\,)\ (s\,;\omega) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \int_{x.\omega=s} \vec{f}(x)\ dS\ .$$

Il est immédiat que $\tilde{\vec{f}}$ est paire en $\{s;\vec{\omega}\}$ et que $\mathcal{R}(\partial_{x_i}\vec{f}) = \omega_i\ \partial_s\ \tilde{\vec{f}}$.

En outre, si $\hat{\vec{f}}$ désigne la transformée de FOURIER (en x) de $\vec{f}$, on vérifie aisément que : $\hat{\vec{f}}(\rho\vec{\omega}) = (\mathcal{F}_s\ \tilde{\vec{f}})\ (\rho,\vec{\omega})$ (1.23)

où $\mathcal{F}_s$ désigne la transformation de FOURIER relative à la variable s .

$$\text{Par ailleurs, } \vec{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{S^{n-1}} \vec{h}(x.\omega;\omega)\ d\omega \qquad (1.24)$$

où

$$(1.25) \qquad \vec{h}(s;\omega) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty e^{i\rho s}\ \rho^{n-1}\ \hat{\vec{f}}(\rho\vec{\omega})\ d\rho\ .$$

Or, dans (1.23), c'est la partie paire en $(s;\vec{\omega})$ de $\vec{h}$ qui intervient :

$$\vec{H}(s;\omega) = \frac{1}{2}\left[\vec{h}(s;\vec{\omega}) + \vec{h}\ (-s;-\omega)\right]$$

qui s'écrit, compte tenu de (1.24)

$$(1.26) \qquad \vec{H}(s;\omega) = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho s}\ |\rho|^{n-1}\ \hat{\vec{f}}\ (\rho\omega)\ d\ \rho$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\ \mathcal{F}^{-1}(|\rho|^{n-1}\ \hat{\vec{f}}) = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\ \mathcal{F}(|\rho|^{n-1}\ \mathcal{F}\tilde{\vec{f}})$$

ce qui entraîne :

$$(1.27)\qquad \begin{cases} \vec{H}(s;\omega) = \dfrac{-1}{4\Pi}\ \partial_s^2\ \tilde{\vec{f}}(s,\omega) & \text{si } n = 3 \\[2ex] \vec{H}(s;\omega) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\Pi}}\ \mathcal{H}\ \partial_s\ \tilde{\vec{f}}(s;\omega) & \text{si } n = 2\ . \end{cases}$$

où $\mathcal{H} = \mathcal{F}^{-1}(\text{sign}\ \rho)\ \mathcal{F}$ est la transformation de HILBERT en s qui à $\vec{g}(s)$ fait correspondre $\vec{h}(t)$ défini par

$$(1.28)\qquad \vec{h}(t) = \mathcal{H}\ \vec{g}(t) = \frac{1}{\Pi}\ \text{P f.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)ds}{t-s}$$

On constate aisément que si $\vec{\phi}(s;\omega)$ est paire (resp. impaire) en $(s;\omega)\mathcal{H}(\partial_s\ \vec{\phi})$ a la même propriété.

2) Il résulte alors de (1.10), (1.13) et (1.25) que :

$$(\tilde{F}\ \vec{f})\ (\rho,\omega) = -\ i\ \rho^{\frac{n-1}{2}} \left[\vec{f}_2(\rho\omega) + i\ \rho \sum_{j=1}^{n} (\vec{f}_1(\rho\omega).\vec{e}_j(\omega))\, c_j(\omega)\ \vec{e}_j(\omega)\right]$$

$$= \mathcal{F}_s\left[(i)^{\frac{3-n}{2}}\ \partial_s^{\frac{n-1}{2}}\ (\tilde{\vec{f}}_2(s;\omega) - \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial\tilde{\vec{f}}_1}{\partial s}\ .\ \vec{e}_j)\ c_j\ \vec{e}_j\ )\right]$$

d'où (1.18). Il est aisé de vérifier que $\vec{f} \in \mathcal{S}(R^n\ ;\ C^n\ )^2$ entraîne $\tilde{\vec{f}}_k \in \mathcal{S}(R;V)$ d'où $\mathcal{F}_s\ \vec{k} \in \mathcal{S}(R;V)$ donc $\vec{k} \in \mathcal{S}(R;V)$.

Réciproquement étant donnés $\vec{k}\ ,\ \vec{\ell} \in \mathcal{S}(R;V)$ associés respectivement à $\vec{f}$ et $\vec{g}$; $(\vec{f},\vec{g})_E = [\vec{k},\vec{\ell}] = [\mathcal{F}_s\ \vec{k}\ ,\ \mathcal{F}_s\ \vec{\ell}\,]$

$$= \sum_{j=1}^{n} \iint (-i)^{\frac{3-n}{2}} \left[\mathcal{F}_s\ k_j\ .\ \overline{\mathcal{F}_s\ \tilde{g}_{2j}}\,(i\rho)^{\frac{n-1}{2}} + (i\rho)^{\frac{n+1}{2}}\ c_j\ \mathcal{F}_s k_j\ .\ \overline{\mathcal{F}_s\ \tilde{g}_{1j}}\right] d\rho\ \ d\omega$$

$$= (-i)^{\frac{3-n}{2}} (2\Pi)^{\frac{1-n}{2}} \sum_{j=1}^{n} \iint \{\mathcal{F}_s^{-1} \left[(i\rho)^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{F}_s\, k_j\right] . \overline{g}_{2j} +$$

$$\mathcal{F}_s^{-1} \left[(i\rho)^{\frac{n+1}{2}} \mathcal{F}_s\, k_j\right] \overline{\tilde{g}}_{1j}\, c_j\} \, dx\, d\omega$$

$$= \int \left[\vec{S}_1(x).\overline{\vec{g}}_1(x) + \vec{S}_2(x).\overline{\vec{g}_2}(x)\right] dx$$

où (1.29) $\vec{S}_k(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} h_j^{k} (x.\omega;\omega)\, \vec{e}_j(\omega)\, d\omega \qquad (k = 1,2)$

et

(1.30)
$$h_j^{(1)} (s;\omega) = (2\Pi)^{\frac{1-n}{2}} (-i)^{\frac{3-n}{2}} \mathcal{F}_s^{-1} \left((i\rho)^{\frac{n+1}{2}} \mathcal{F}_s\, k_j\right) (s,\omega)$$
$$h_j^{(2)} (s;\omega) = (2\Pi)^{\frac{1-n}{2}} (-i)^{\frac{3-n}{2}} \mathcal{F}_s^{-1} \left((i\rho)^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{F}_s\, k_j\right) (s,\omega)$$

Compte tenu de la définition de $(\vec{f},\vec{g})_E$ on doit avoir :

$$\vec{f}_2(x) = \vec{S}_2(x) \quad \text{et} \quad -A_{ij}\, \vec{f}_{1,ij} = \vec{S}_1(x) .$$

De (1.30) on déduit :

(1.31)
$$h_j^{(k)} (x.\omega;\omega) = (2\Pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} e^{i\rho x.\omega}\, c_j^{2-k} \left[\hat{\vec{f}}_2(\rho\omega).\vec{e}_j(\omega) + i\rho\, c_j(\omega)\, \hat{\vec{f}}_1(\rho\omega).\vec{e}_j(\omega)\right] (i\rho)^{n+1-k}\, d\rho \qquad (k = 1,2).$$

Comme $\vec{S}_k(x)$ ne dépend que de la partie paire de $\vec{h}^{(k)}$ soit :

$$\vec{H}^{(k)}(s;\omega) = \frac{1}{2} \left[\vec{h}^{(k)} (s;\omega) + \vec{h}^{(k)}(-s)-\omega)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left[h_j^{(k)} (s;\omega)\, \vec{e}_j(\omega) + h_j^{(k)} (-s;-\omega)\, \vec{e}_j(-\omega) \right],$$

que $c_j(\rho\omega) = \rho\, c_j(\omega)$ et $\hat{\vec{f}}_k(\rho\omega)$ sont paires en (ρ,ω) et qu'en outre $\vec{e}_j(-\omega) = \pm\, \vec{e}_j(\omega)$, on obtient :

$$\vec{H}^{(k)}(S;\omega) = \frac{(2\Pi)^{-\frac{n}{2}}}{2} \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho s}\, i^{n+1-k} (c_j\rho)^{2-k} |\rho|^{n-1} (\hat{\vec{f}}_2.\vec{e}_j + i\rho c_j)(\hat{\vec{f}}_i.\vec{e}_j)\vec{e}_j\, d\rho$$

$$= \frac{i^{n-1}}{2(2\Pi)^{\frac{n-1}{2}}} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{F}_s^{-1}(c_j^{2-k}|\rho|^{n-1} \mathcal{F}_s \, \partial_s^{2-k} \quad m_j^o \,) \, \vec{e}_j$$

$$\text{où } m_j^o = \tilde{\vec{f}}_2 . \vec{e}_j - c_j \, \partial_s \, \tilde{\vec{f}}_1 . \vec{e}_j \qquad\qquad (k = 1,2)$$

ce qui donne :

(1.32)

$$\text{si } \underline{n = 3} : \vec{H}^{(1)}(s;\omega) = \frac{-1}{4\Pi} \sum_{j=1}^{3} c_j \, \partial_s^3 \, m_j^o \, (s;\omega) \, \vec{e}_j \; ; \; \vec{H}^{(2)}(s;\omega) = \frac{1}{4\Pi} \partial_s^2 \, m^o(s;\omega)$$

$$\text{si } \underline{n = 2} : \vec{H}^{(1)}(s;\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\Pi}} \sum_{j=1}^{2} c_j \mathcal{H} \partial_s^2 \, m_j^o \, \vec{e}_j ; \; \vec{H}^{(2)}(S;\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\Pi}} \mathcal{H} \partial_s \, \vec{m}^o(s;\omega).$$

$$\text{On posera } m^o(s;\omega) = \tilde{\vec{f}}_2(s;\omega) - \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\frac{\partial \tilde{\vec{f}}_1}{\partial s} . \vec{e}_j \right) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{m} m_j^o \, \vec{e}_j$$

(1.33)

$$\text{et } \vec{m}(s;\omega,t) = \tilde{\vec{u}}_t(s;\omega,t) - \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\frac{\partial \tilde{\vec{u}}}{\partial s} . \vec{e}_j \right) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} m_j \, \vec{e}_j$$

Or $\tilde{\vec{u}}(s;\omega,t)$ vérifie

$$\partial_t^2 \, \tilde{\vec{u}} - \sum_{j=1}^{n} c_j^2 (\partial_s^2 \, \tilde{\vec{u}}.\vec{e}_j) \, \vec{e}_j = \vec{0}$$

équivalent au système :

$$(\partial_t + c_j \, \partial_s) \, m_j = 0 \qquad j = 1,\dots,n$$

de solution $\quad m_j(s;\omega,t) = m_j^o(s - c_j \, t \, ;\omega)$. $\qquad$ (1.34)

Or

$$\vec{u}(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \int H_j(x_o . \omega;t) \, \vec{e}_j(\omega) \, d\omega$$

$$\text{où } H_j(x.\omega;t) = -\frac{1}{4\Pi} \partial_s^2 \, (\tilde{\vec{u}}.\vec{e}_j) = \frac{1}{4\Pi} \, \partial_s \, \frac{m_j - \tilde{\vec{u}}_t . \vec{e}_j}{c_j} \qquad \text{si } n = 3$$

$$= \frac{-i}{2\sqrt{2\Pi}} \mathcal{H} \, \partial_s \, (\tilde{\vec{u}}.\vec{e}_j) = \frac{i}{2\sqrt{2\Pi}} \mathcal{H} \frac{m_j - \tilde{\vec{u}}_t . \vec{e}_j}{c_j} \qquad \text{si } n = 2$$

Or il est aisé de vérifier que $(\partial_s \vec{u}_t.\vec{e}_j)\frac{\vec{e}_j}{c_j}$ (resp. $\mathcal{H}\frac{\tilde{\vec{u}}_t.\vec{e}_j}{c_j}\vec{e}_j$) est une fonction impaire de $(s;\omega)$. Il en résulte que, $\vec{u}(x,t)$ ne dépendant que de la partie paire de $\vec{H}(x.\omega;t)$,

$$\vec{u}(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{4\Pi}\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial_s m_j^o(x.\omega-c_j t;\omega)}{c_j(\omega)}\vec{e}_j(\omega)\,d\omega & \text{si } n=3 \\ \frac{1}{2\sqrt{2\Pi}}\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \mathcal{H}\frac{m_j^o(x.\omega-c_j t;\omega)}{c_j(\omega)}\vec{e}_j(\omega)\,d\omega & \text{si } n=2\,. \end{cases} \tag{1.35}$$

où $m_j^o\,(S;\omega) = ((\tilde{\vec{f}}_2(S;\omega) - c_j(\omega)\frac{\partial\tilde{\vec{f}}_1}{\partial S}).\vec{e}_j\;\omega\,\Big|\,)$

Jusqu'ici on a choisi $\vec{f}$ dans $\mathcal{S}(R^n;C^n)^2$. Or, il est immédiat à partir de (1.11) que si $\vec{f}\in\mathcal{S}(R^n;C^n)^2$

$$|\vec{f}|_E^2 = \Big|\hat{\vec{f}}_2 - i\sum_{k=1}^{n}\rho c_k(\hat{\vec{f}}_i\,\vec{e}_k)\,\vec{e}_k\Big|_{L^2}^2 = \Big|\mathcal{F}_s\,(\tilde{\vec{f}}_2 - \Sigma\, c_k(\partial_s\,\tilde{\vec{f}}_1.\vec{e}_k)\,\vec{e}_k|\rho|^{\frac{n-1}{2}}\Big|_{L^2}^2$$

(1.36)

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |\rho^{n-1}|\,|\mathcal{F}_s\,\vec{m}_o|^2\,d\rho\,d\omega = \frac{1}{2}\,||\vec{m}^o||_{\frac{n-1}{2}}$$

la dernière égalité définissant la norme en question, si l'on désigne par $W_{\frac{n-1}{2}}$ l'espace des $\tilde{\vec{f}}$ telles que $||\vec{f}||_{\frac{n-1}{2}}$ soit finie.

$\tilde{\vec{f}}_2$ est paire en $(s;\omega)$, $\partial_s\,\vec{f}_1$ est impaire donc :

$$||\vec{m}_o||_{\frac{n-1}{2}}^2 = ||\tilde{\vec{f}}_2||_{\frac{n-1}{2}}^2 + \Big|\Big|\Sigma\,c_k\,(\frac{\partial\tilde{\vec{f}}_1}{\partial s}\,.\,\vec{e}_k)\,\vec{e}_k\Big|\Big|_{\frac{n-1}{2}}^2 \tag{1.37}$$

$$= ||\tilde{\vec{f}}_2||_{\frac{n-1}{2}} + \sum_{k=1}^{n} c_k^2||\partial_s\,\tilde{\vec{f}}_1.\vec{e}_k||_{\frac{n-1}{2}}^2 \geq ||\tilde{\vec{f}}_2||_{\frac{n-1}{2}} + c^2||\partial_s\,\tilde{\vec{f}}_1||_{\frac{n-1}{2}}^2\,.$$

Cette relation, ainsi que (1.36), permet d'étendre la transformation (qui à $\vec{f}$ associe $\vec{m}^o$ ou $\tilde{\vec{f}}$) à l'ensemble des $\vec{f}$ de H_o ; $\partial_s \tilde{\vec{f}}_1$ et $\tilde{\vec{f}}_2$ (ou $\vec{m}_o$ étant dans $W_{\frac{n-1}{2}}$. Il est possible alors de montrer que H_o est appliqué sur $W_{\frac{n-1}{2}}$ $L^2(R^n;C^n)$ l'étant sur $W^{\text{pair}}_{\frac{n-1}{2}}$ et $EL(R^n;C^n)$ sur $W^{\text{impair}}_{\frac{n-1}{2}}$. Il suffit de prouver que $\mathcal{S}(R^n;C^n)$ s'applique sur une partie dense de $W^{\text{impair}}_{\frac{n-1}{2}}$ c'est-à-dire que l'ensemble des $|\rho|^{\frac{n-1}{2}}\ \vec{f}_2\ (\rho\vec{\omega})$ est dense dans $L_2^{\text{pair}}\ (R \times S^{n-1})$: en effet si l'on pose $\vec{g}\ (\rho,\omega) = |\rho|^{\frac{n-1}{2}}\ \hat{\vec{f}}_2(\rho\omega)$, $g \in \mathcal{S}^{\text{pair}}$ s'annule dans un voisinage de $\rho = 0$ et ces fonctions $\vec{g}$ sont denses dans $L_2^{\text{pair}}\ (R \times S^{n-1}\ )$.

Alors

$$\hat{\vec{f}}(\rho\omega) = g(\rho,\omega)/ {|\rho|^{\frac{n-1}{2}}} \quad \text{est telle que} \quad \vec{f} \in \mathcal{S} .$$

Dans ces conditions (1.35) définit une solution du problème de Cauchy posé au début pour $\vec{f} \in H_o$.

Théorème 1.4.

La solution $\vec{u}$ *de l'équation (1.2) s'écrit :*

$$\vec{u}(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \int H_j(x.\omega - c_j t;\omega)\ \vec{e}_j(\omega)\ d\omega$$

où

$$H_j = -\frac{1}{4\Pi}\ \frac{\partial_s\ m_j^o}{c_j} \qquad \text{si } n = 3$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\Pi}}\ \mathcal{H}\ \frac{m_j^o}{c_j} \qquad \text{si } n = 2$$

avec $\quad m_j^o = (\tilde{\vec{f}}_2 - c_j\ \dfrac{\partial \tilde{\vec{f}}_1}{\partial s}\ ).\vec{e}_j$.

Remarques

1) *Si les données initiales sont de classe* $\mathcal{S}$, *il en est de même pour* $\vec{u}(x;t)$ *ceci pour tout* t *positif.*

En fait l'application (notée $\mathcal{R}$ *dans le théorème 1.3) qui a* $\vec{f}$ *associe* $\vec{k} = \mathcal{R}\vec{f} = (-i)^{\frac{3-n}{2}} \partial_s^{\frac{n-1}{2}} \vec{m}^o(s;\omega)$ *définie d'abord sur* $\mathcal{S}(R^n;C^n)^2$ *s'étend grâce à (1.36) à une isométrie de* H_o *sur* $L^2(R;V)$.

2) *On aura besoin d'introduire par la suite le véritable représentant par translation*

$$\vec{k}_o(\tau;\omega) \text{ tel que}$$

$$(\mathcal{R} \circ U_o(t) \circ \mathcal{R}^{-1})\, \vec{k}_o(\tau,\vec{\omega}) = \vec{k}_o(\tau - t\,;\vec{\omega}) = T(-t)\, \vec{k}_o(\tau;\omega)\ .$$

Pour cela on pose dans (1.35)

$$\begin{aligned} k_{o,j}(s;\ ) &= \sqrt{c_j}\, k_j\,(s\, c_j(\omega);\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c_j}} \frac{\partial}{\partial \tau} m_j^o\,(s\, c_j;\omega) \qquad \text{si } n = 3 \\ &= \frac{1}{\pi} \text{P.f.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_j^o(\sigma;\omega)}{(\sigma - s\, c_j)c_j}\, d\sigma = \frac{1}{\pi} \text{P.f.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_j^o(c_j\,\tau;\omega)}{(\tau - s)\, c_j^{1/2}}\, d\tau \end{aligned}$$

Il est immédiat que si $\vec{k} \in L^2(R;V)$ *il en est de même de* $\vec{k}_o$ *l'application* $\vec{k} \to \vec{k}_o$ *étant une isométrie eu égard à la présence du facteur* $\sqrt{c_j}$. *Il en résulte que* $\mathcal{R}_o : \vec{f} \rightsquigarrow \vec{k}_o$ *est une représentation par translation puisque à* $U_o(t)\,\vec{f}(x)$, $\mathcal{R}_o$ *associe* $\vec{k}_o(s-t;\omega)$.

1.3 *SOUS ESPACES RAYONNANT ET ANTIRAYONNANT*

On définit, pour tout $\rho \geq 0$, les sous-espaces suivants de H_o :

$$D_+^\rho = \{\vec{f} \in H_o \mid U_o(t)\,\vec{f}(x) = \vec{0} \quad \text{pour } |x| < \rho + c_m t,\ t > 0\}$$

$$D_-^\rho = \{\vec{f} \in H_o \mid U_o(t)\,\vec{f}(x) = \vec{0} \quad \text{pour } |x| < \rho - c_m t,\ t < 0\}$$

D_+ , D_- désignent ceux correspondant à $\rho = 0$.

Théorème 1.5.

D_+^ρ et D_-^ρ sont des sous-espaces vectoriels fermés de H_o , orthogonaux entre eux.

Ils sont respectivement rayonnant et anti-rayonnant pour $\{U_o(t)\}$, c'est-à-dire que :

(i) $\quad U_o(t)\, D_+^\rho \subset D_+^\rho$ pour $t \geq 0$ [resp. $U_o(t)\, D_-^\rho \subset D_-^\rho$ pour $t \leq 0$]

(ii) $\quad \bigcap_{t\geq 0} U_o(t)\, D_+^\rho = \{0\}$ $\qquad$ [resp. $\bigcap_{t\leq 0} U(t)\, D_-^\rho = \{0\}$]

(iii) $\quad \overline{\bigcup U_o(t)\, D_+^\rho} = H_o$ $\qquad$ [resp. $\bigcup U_o(t)\, D_-^\rho = H_o$]

Démonstration

On va démontrer le théorème pour D_+^ρ , la démonstration pour D_-^ρ étant analogue.

Tout d'abord D_+^ρ est fermé dans H_o puisque, pour tout t , $U_o(t)$ est une isométrie de H_o sur lui-même : en effet, $\vec{f} \in H_o$ entraîne $U_o(t)\,\vec{f} \in H_o$ et, si $\{\vec{f}_n\}$ est une suite de D_+^ρ convergeant vers $\vec{f}$ dans H_o , il en est de même, pour tout $t > 0$ fixé, de la suite $\{U_o(t)\,\vec{f}_n\}$ qui converge vers $U_o(t)\,\vec{f}$ dans H_o . Or, par hypothèse : $\forall\ n \in N$, $U_o(t)\,\vec{f}_n(x) = \vec{0}$ pour $|x| < \rho + c_m t$; on a donc $U_o(t)\,\vec{f}(x) = \vec{0}$ dans la même boule. Autrement dit $\vec{f} \in D_+^\rho$.

Quant à l'orthogonalité de D_+^ρ et D_-^ρ , elle résultera du théorème 1.6.

(i) Si $\vec{f} \in D_+^\rho$, $U_o(s)\ (U_o(t)\ \vec{f})\ (x) = U_o(t+s)\ \vec{f}(x) = \vec{0}$ dans $|x| < \rho + c_m(t+s)$ pour tout s tel que $s + t \geq 0$ et a fortiori pour $|x| < \rho + c_m\, s$ si $s > 0$.

(ii) Si $\vec{f} \in \bigcap_{t\geq 0} U_o(t)\ D_+^\rho$, pour tout $t \geq 0$ $U_o(-t)\ \vec{f} \in D_+^\rho$ donc $U_o(t)\ U_o(-t)\ \vec{f}(x) = \vec{f}(x) = \vec{0}$ pour $|x| < \rho + c_m\, t$ c'est-à-dire que $\vec{f} \equiv \vec{0}$.

(iii) La densité de $\bigcup_{t\leq 0} U_o(t)\ D_+^\rho$ dans H_o résulte de l'inclusion

$$D\ (R^n\ ;\ C^n) \times D(R^n\ ;\ C^n\ ) \subset \bigcup\ U_o(t)\ D_\rho^+$$

et de la définition de H_o . L'inclusion se démontre à l'aide du théorème 1.1(3°) si $\vec{f} = \vec{0}$ pour $|x| > R$,

$$U_o(t)\ \left[U_o\ \left(\frac{R+\rho}{c_m}\right)\ \vec{f}\right](x) = \left[U_o\left(t + \frac{R+\rho}{c_m}\right)\ \vec{f}\right]\ (x) = \vec{0} \quad \text{pour}$$

$|x| < c_m\left(t + \frac{R+\rho}{c_m}\right) - R = c_m\, t + \rho$. Autrement dit $U_o\left(\frac{R+\rho}{c_m}\right)\ \vec{f} \in D_+^\rho$ ce qui entraîne $\vec{f} \in U_o\ \left(-\frac{R+\rho}{c_m}\right)\ D_+^\rho$.

Avant de passer à la démonstration du Théorème 1.6 qui entraînera l'orthogonalité de D_+^ρ et D_-^ρ , on peut remarquer que l'application définie au théorème 1.3 :

$$\mathcal{R} = \vec{f} \rightsquigarrow \vec{k} = \mathcal{R}\vec{f} \text{ de } \mathcal{S}\,(R^n;C^n)^2 \text{ sur } \mathcal{S}\,(R;V) \text{ où}$$

$$V = L^2(S^{n-1};C^n)\ ,\ S^{n-1} = \{\omega|\,\omega \in R^n\ ,\ |\vec{\omega}| = 1\ \}$$

est une isométrie (pour $|\ |_E$ et $||\quad||$) bijective. Elle se prolonge par continuité en un isomorphisme de H_o sur $L^2(R\ ;\ V)$.

Théorème 1.6.

$\mathcal{R}$ *est une représentation unitaire de* H_o *dans* $L^2(-\infty\ ,\ \infty\ ;\ V)$ *telle que*

D_+(resp. D_+^ρ) *s'applique sur* $L^2\ (0,\infty\ ;\ V)$ [resp. $L^2\ (\rho,\infty;V)$]

D_-(resp. D_-^ρ) *s'applique sur* $L^2\ (-\infty,\ 0;\ V)$ resp. $L^2\ (-\infty\ ,\ -\rho\ :\ V\ )$

$\{U_o(t)\}$ *correspond au groupe des translations* $\{T(t)\}$ *dans* $L^2(-\infty,\infty;V)$.

Démonstration

Il suffit de montrer que $\vec{f} \in D_+$ (resp. D_-) $\Longleftrightarrow$ $\vec{k}(s,\omega)$ s'annule pour $s < 0$ (resp. $s > 0$).

Soit donc $\vec{k} \in \mathcal{S}(R\ ;\ V)^2$ s'annulant pour $s < 0$, $\vec{f} \in \mathcal{S}(R^n\ ;\ C^n)^2$ l'unique élément de ce dernier espace tel que $\vec{k} = \mathcal{R}\vec{f}$. Les formules (1.35), montrent que $\vec{u}(x,t) = (U_o(t)\ \vec{f}(x)$ s'annule pour $|x| < c_m\ t$, $t > 0$ c'est-à-dire que $\vec{f} \in D_+$.

Si $\vec{k}$ est quelconque dans $L^2(0,\infty\ ;\ V)$ on peut l'approcher par une suite $\{\vec{k}_n\}$ d'éléments de $\mathcal{S}(R;V)$ (ou de $D(0,\infty;V)$). Or, on a $\vec{k}_n = \mathcal{R}\vec{f}_n$ où $\vec{f}_n \in D_+$ et $\{\vec{k}_n\}$ étant convergente dans $L^2\ (0,\infty;\ V)$, $\{\vec{f}_n\}$ l'est également dans H_o et si $\vec{f}$ désigne sa limite, on a $\vec{f} \in D_+$ en vertu du théorème 1.5. Réciproquement, soit $\vec{f} \in H_o$ telle que $\vec{f} \in D_+$. On a :

$$\vec{u}(x,t) = \sum_{j=1}^{n}{}' \int_{S^2} k_j(x.\omega - c_j\ t)\ \vec{e}_j(\omega)\ d\omega \quad \text{où } \vec{k} \in L^2(-\infty,\infty;\ V) \text{ et}$$

($\sum_j'$) signifie que l'on somme sur les j tels que les valeurs propres c_j correspondantes sont distinctes. Par exemple, dans le cas isotrope tridimentionnel où l'on a $c_2 = c_3 = \sqrt{\mu}$, on écrit :

$$\vec{u}(x,t) = \int_{S^2} k_1(x.\omega-c_1\ t)\ \vec{e}_1(\omega)\ d\omega + \int_{S^2} k_2'(x.\omega-c_2\ t)\ \vec{e}_2'(\omega)\ d\omega$$

où $k_2'(s;\omega)\ \vec{e}_2'(\omega) = k_2(s,\omega)\ \vec{e}_2(\omega) + k_3(x;\omega)\ \vec{e}_3(\omega)$.

Il résulte alors d'un théorème de LAX-PHILLIPS [L.P. Th. 1.2. p. 186] que $\vec{k}(s,\omega) = \vec{0}$ pour $s < 0$. Si $\vec{k}(s;\omega) = \mathcal{R}\vec{f}(x)$ on a :

$\mathcal{R}(U_o(t)\ \vec{f}(x) = \{k_j\ (s-c_j\ t;\omega);\ j = 1,2,3\}$ et l'on a vu que si l'on posait $k_{o,j}\ (\tau;\vec{\omega}) = \sqrt{c_j}\ k_j(c_j\ \tau;\omega)$ on a bien

$$(\mathcal{R} \circ U_o\ (t) \circ \mathcal{R}^{-1}\ \vec{k}_o(\tau;\omega) = \vec{k}_o\ (\tau - t;\vec{\omega}) = T\ (-t)\ (\vec{k}_o(\tau;\omega)\ ).$$

$\mathcal{R}$ étant unitaire, on déduit de ce qui précède que D_+ et D_- sont orthogonaux dans H_o et que :

$$H_o = D_+ \oplus D_- \quad \blacksquare$$

Cas d'un milieu isotrope (n = 3)

On a vu (lemmes 1.3. et 1.5) que H_o admet la décomposition

$$H_o = H_o^o \oplus H_o^1$$

où $H_o^i = L_i^2\ (R^3;C^3) \oplus EL_i(R^3;C^3)$ $(i = 0,1)$

Par ailleurs l'opérateur A_o s'écrit :

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & I \\ c_1^2\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div} - c_2^2\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}} & 0 \end{pmatrix}$$

Or, si $\vec{f} = \{\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi_1, \overrightarrow{\text{grad}}\ \phi_2\}$ où $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(R^3;C^3)$, on sait que $\vec{f} \in H_o^o$ et l'on vérifie immédiatement que $A_o\ \vec{f} \in H_o^o$. On peut donc l'écrire $A_o^o\ \vec{f}$ où

$$A_o^o = \begin{pmatrix} 0 & I \\ c_1^2\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div} & 0 \end{pmatrix}$$. Comme les $\vec{f}$ de la forme précédente sont denses dans H_o^o on peut étendre A_o^o par continuité à tout H_o^o. On voit de même que H_o^1 est invariant par A_o et que

$$A_o^1 = A_o\Big|_{H_o^1} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -c_2^2\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}} & 0 \end{pmatrix}$$ peut se prolonger à H_o^1 .

Théorème 1.7.

La décomposition $H_o = H_o^o \oplus H_o^1$ *réduit l'opérateur* A_o *et le groupe* $\{U_o(t)\}$. *En outre, si l'on désigne par* $U_o^o(t)$ (resp. $U_o^1(t)$) *la restriction de* $U_o(t)$ *à* H_o^o (resp. H_o^1) $D_+ \cap H_o^1$ *est rayonnant pour* $U_o^1(t)$, $D_+ \cap H_o^o$ *étant inclus dans le sous-espace rayonnant associé à* $U_o^o(t)$.

Démonstration

On remarque tout d'abord que $V = L^2(S^2;C^3)$ admet la décomposition :

$V = V_o \oplus V_1$ où

$V_o = \{\vec{k} | \vec{\omega} \wedge \vec{k}\ (\omega) = 0\ , \forall\ \vec{\omega} \in S^2\}$, $V_1 = \{\vec{k} | \vec{\omega} . \vec{k}(\omega) = 0\ , \forall\ \vec{\omega} \in S^2\}$

Il en résulte aisément que :

$$L^2(R;V) = L^2(R;V_o) \oplus L^2(R;V_1) .$$

Si $\vec{f} \in H^1_o$, div $\vec{f} = 0$ et si $\vec{f} \in \mathcal{D}(R^3;C^3)$ et $\vec{k} = \mathcal{R}\vec{f}$:

$$\vec{\omega}.\vec{k}(s;\omega) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{4\pi\, c_1}\int_{x.\omega=s} \vec{\omega}.\vec{f}_2(x)\, dS\right) - \frac{\partial}{\partial s^2}\left(\frac{1}{4\pi}\int_{x.\omega=s} \vec{\omega}.\vec{f}_1(x)\, dS\right)$$

Or, si D(h) désigne la région comprise entre les plans d'équations :

$$\vec{x}.\vec{\omega} = s \quad \text{et} \quad \vec{x}.\vec{\omega} = s + h$$

on voit que :

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{x.\omega=s} \vec{\omega}.\vec{f}_k(x)\, dS = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\iint_{D(h)} \text{div}\, \vec{f}_k(x)\, dx = 0 \qquad (k = 1,2)$$

donc $\vec{k} \in L^2(R;V_1)$. Comme les lemmes 1.3 et 1.5 assurent les $\vec{f} \in \mathcal{D}(R^3;C^3)^2$ sont denses dans H^1_o, on peut conclure que :

$$\mathcal{R}(H^1_o) \subset L^2(R;V_1) .$$

L'inclusion opposée résulte de la densité de $\mathcal{D}(R;V_1)$ dans $L^2(R;V_1)$.
En effet, si $\vec{k} \in \mathcal{D}(R;V_1)$, il existe un seul $\vec{f} \in H_o$ tel que $\vec{k} = \mathcal{R}\vec{f}$ et l'on a

$$\text{div}\ \vec{f}_1(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} \vec{\omega}.\frac{\partial\vec{k}}{\partial s}(x.\omega;\omega)\, d\omega = 0 \ (\text{de même div}\ \vec{f}_2(x) = 0)$$

donc $\vec{f} \in H^1_o$ (en fait $\vec{f} \in \mathcal{D}(R^3;C^3)^2$) d'où l'on déduit $\mathcal{R}^{-1}(L^2(R;V_1)) \subset H^1_o$
En définitive, on a :

$$\mathcal{R}(H^1_o) = L^2(R;V_1) .$$

De même, si $\vec{f} \in \mathcal{D}(R^3;C^3)^2$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{f} = \vec{0}$ on a, pour $\vec{k} = \mathcal{R}\vec{f}$:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{k}(s;\vec{\omega}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{c_2}\int_{x.\omega=s} (\vec{\omega}\wedge(\vec{f}_2(x).\vec{e}_2)\vec{e}_2 + \vec{\omega}\wedge(\vec{f}_2.\vec{e}_3)\vec{e}_3\, dS\right\}$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left\{\int_{x.\omega=s} (\vec{\omega}\wedge(\vec{f}_1.\vec{e}_2)\vec{e}_2 + \vec{\omega}\wedge(\vec{f}_1.\vec{e}_3)\vec{e}_3)\, dS\right\} .$$

Or $\frac{\partial}{\partial s}\left(\int_{x.\omega=s} \vec{\omega}\wedge\vec{f}_2(x)\,dS\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\iint_{D(h)} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}_2(x)\,dx = \vec{0}$; on voit de

même que la seconde intégrale est nulle. Donc $\vec{k}\in L^2\,(R;V_o)$.

On vérifie de même que, si $\vec{k}\in \mathcal{D}\,(R;V_o), \vec{k} = \mathcal{R}\vec{f}$ on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}_1(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} \vec{\omega}\wedge\frac{\partial\vec{k}}{\partial s}(x.\omega;\omega)\,d\omega = 0 \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}_2(x) = \vec{0} \text{ donc } \vec{f}\in H_o^o .$$

Pour les mêmes raisons que ci-dessus on a donc : $\mathcal{R}\,(H_o^o) = L^2(R;V_o)$.

Le théorème 1.4 entraîne alors que la décomposition de H_o réduit $U_o(t)$.

Il résulte aussi de cela que :

$$\vec{f}\in H_o^o \iff \vec{f}_1(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} k_1(x.\omega,\omega)\,\vec{\omega}\,d\omega \quad \text{où } k_1(s,\omega)\,\vec{\omega}\in L^2\,(R;V_o)$$

$$\vec{f}_2(x) = \frac{1}{4\pi\, c_1}\int_{S^2} \frac{\partial}{\partial s} k_1(x.\omega,\omega)\,\vec{\omega}\,d\omega$$

$$\vec{f}\in H_o^1 \iff \vec{f}_1(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} \left[k_2(x.\omega;\omega)\,\vec{e}_2(\omega) + k_3(x.\omega;\omega)\,\vec{e}_3(\omega)\right] d\omega$$

où $k_2\,\vec{e}_2 + k_3\,\vec{e}_3 \in L^2\,(R;V_1)$.

Par conséquent si

$$\vec{f}\in D_+\cap H_o^o \;(\text{resp. } D_+\cap H_o^1\,),\; k_1\,\vec{\omega}\in L^2\,(0,\infty\,;\,V_o)$$

(resp. $k_2\,\vec{e}_2 + k_3\,\vec{e}_3 \in L^2\,(0,\infty\,;\,V_1)]$ et les restrictions $\mathcal{R}_o$ et $\mathcal{R}_1$ de $\mathcal{R}$ à H_o^o et H_o^1 respectivement sont des représentations par translation de $U_o^o(t)$ et $U_o^1(t)$. En outre, puisque :

$$\vec{f}\in H_o^o \iff (U_o^o(t)\,f)\,(x) = \int_{S^2} k_1(x.\omega - c_1\,t)\vec{\omega}\,d\omega$$

$$\vec{f}\in H_o^1 \iff (U_o^1(t)\,\vec{f})\,(x) = \int_{S^2} k_2'(x.\; - c_2\,t)\vec{\omega}\,d\vec{\omega}$$

Compte tenu de la définition de D^+

$$\vec{f} \in D_+ \cap H_o^o \iff U_o^o(t)\,\vec{f}(x) = \vec{0} \text{ pour } |x| < c_2\, t \ (t > 0)$$

alors que le sous-espace rayonnant de $U_o^o(t)$ est tel que $U_o^o(t)\,\vec{f}(x) = \vec{0}$ pour $|x| < c_1\, t$. Par contre $U_o^1(t)$ admet pour sous-espace rayonnant $D_+ \cap H_o^1$.

1.4. LES EQUATIONS DE L'ELASTODYNAMIQUE DANS L'ESPACE DES DISTRIBUTIONS (n = 3)

On peut prendre les données initiales $\vec{f}$ dans $\mathcal{D}'(R^3;C^3) \times \mathcal{D}(R^3;C^3)$ et définir $U_o(t)$ par : (cf. L.P. p. 98) :

$$< [U_o(t)\,\vec{f}]_1 \,,\, \vec{\phi} > \; = \; < \vec{f}_1, [U_o(-t)\,\{\vec{0},\vec{\phi}\}]_2 > - < \vec{f}_2, [U_o(-t)\,\{\vec{0},\vec{\phi}\}]_1 >$$

$$< [U_o(t)\,\vec{f}]_2 \,,\, \vec{\phi} > \; = \; - < \vec{f}_1, [U_o(-t)\,\{\vec{\phi},\vec{0}\}]_2 > + < \vec{f}_2, [U_o(-t)\{\vec{\phi},\vec{0}\}]_1 >$$

pour tout $\vec{\phi} \in \mathcal{D}\,(R^3;C^3)$.

On peut vérifier que :

(i) $[U_o(t)\,\vec{f}]_1 = \vec{u}$ est solution des équations de l'Elastodynamique et admet f pour valeurs initiales.

(ii) cette solution est unique

(iii) dans le cas isotrope : si $\overrightarrow{rot}\,\vec{f} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \vec{0}$ et si $\operatorname{div} \vec{f} = 0$ alors $\operatorname{div} \vec{u} = 0$. Il en résulte que, dans ce cas, $U_o^o(t)$ et $U_o^1(t)$ peuvent être étendus aux distributions irrotationnelles et de divergence nulle.

Définition 1.4.

$\vec{f} \in \mathcal{D}'(R^3;C^3) \times \mathcal{D}'(R^3;C^3)$ est dite finalement rayonnante (resp. initialement anti-rayonnante) s'il existe $r > 0$ tel que : $U_o(t)\,\vec{f}$ s'annule dans le cône $|x| < c_m\, t - r$ pour $t > \frac{r}{c_m}$ (resp. s'annule pour $|x| < - c_m\, t - r$ pour $t < - \frac{r}{c_m}$.

Cet ensemble de distributions est celui qui interviendra en définitive pour étandre à des données distributions la transformation $\mathcal{R}(f \rightsquigarrow \vec{k} = \mathcal{R}\,\vec{f})$ et sa réciproque $\mathcal{J}\ (\vec{k} \rightsquigarrow \vec{f} = \mathcal{J}\,\vec{k})$ déjà définies pour

$$\vec{f} \in H_o \quad \text{et} \quad \vec{k} \in L^2\,(R;V)\ .$$

Tout d'abord, le théorème 1.3 (formules 1.20 et 1.21) définit $\mathcal{J}\vec{k}$ pour $\vec{k} \in \mathcal{E}^\infty(R;V)$ puisque les intégrales ne font intervenir que les valeurs de $\vec{k}(s;.)$ pour $|s| \leq |x|$.

Il est alors possible d'étendre $\mathcal{J}$ à $\mathcal{D}'\,(R;V)$ de la manière suivante Soit $\vec{f} \in H_o$, $\vec{g} \in \mathcal{D}(R^3;C^3)^2$, $\vec{k} = \mathcal{R}\vec{f} \in \mathcal{E}^\infty(R,V)$.

On a, si $\vec{h} \in \mathcal{D}\,(R^3;C^3)$ est défini par

$$A_{ij}\ \vec{h}_{,ij} = \vec{g}_1$$

$$(\vec{f}_1,\vec{g}_1)_{L^2} = -\ (\vec{f},\{\vec{h},\vec{0}\})_E = -\ [\vec{k}, \mathcal{R}\{\vec{h},\vec{0}\ \}]$$

Or $\mathcal{R}(\vec{h},\vec{0}) = -\sum\limits_{j=1}^{3} (\partial_s^2\ \tilde{\vec{h}}.\vec{e}_j)\ c_j\ \vec{e}_j$

et compte tenu de la définition de $\vec{h}$

$$c_j^2\ \partial_s^2\ (\tilde{\vec{h}}.\vec{e}_j) = \tilde{\vec{g}}_1.\vec{e}_j \qquad (j=1,2,3)\ \textit{sans sommation sur } j\ .$$

On en déduit :

$$(1.37) \qquad (\vec{f}_1,\vec{g}_1)_{L^2} = \left[\vec{k}, \sum_{j=1}^{3} \frac{\tilde{\vec{g}}_1\ \vec{e}_j}{c_j}\ \vec{e}_j\right]$$

Il est, par ailleurs évident que : $(\vec{f}_2,\vec{g}_2)_{L^2} = (\vec{f},\ \{\vec{0},\vec{g}_2\}\ )_E$

d'où

$$(1.38) \qquad (\vec{f}_2,\vec{g}_2)_{L^2} = \left[\vec{k},\ \partial_s\ \tilde{\vec{g}}_2\ \right].$$

Comme $\vec{g} \in \mathcal{D}(R^3;C^3)^2$ entraîne " $\sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\tilde{\vec{g}}_1.\vec{e}_j}{c_j}\ \vec{e}_j$ et $\tilde{\vec{g}}_2 \in \mathcal{D}\,(R;V)$ "

on voit que si une suite $\{\vec{k}_n\}$ de $\mathcal{D}(R;V)$ converge vers $\vec{k} \in \mathcal{D}'(R;V)$ alors $\{\vec{f}^{(n)} = \mathcal{J}\vec{k}_n\ \}$ tend faiblement, d'après (1.37) et (1.38), vers une distribution notée $\vec{f} = \mathcal{J}\vec{k}$. k est dit alors un représentant de la distribution $\vec{f}$.

Pour l'opérateur $\mathcal{J}$ ainsi prolongé on a le :

Théorème 1.8.

Si $\vec{k} \in \mathcal{D}'(R;V)$, *l'opérateur* $\mathcal{J}$, *défini par* (1.37) et (1.38) *vérifie :*

$$(1.39) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{J} = \mathcal{J}\, \omega_i \frac{\partial}{\partial s}$$

$$(1.40) \quad A_o \mathcal{J} = - \mathcal{J} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad \text{où} \quad \frac{\partial \vec{k}}{\partial \tau} = \sum_{j=1}^{3} c_j\, \vec{e}_j\, \frac{\partial k_j}{\partial s}(s;\omega)$$

$$(1.41) \quad U_o(t)\, \mathcal{J} = \mathcal{J}\, T(t)$$ ($T(t)$ *défini dans le théorème 1.6)* .

En outre, si $\vec{k}(s;\omega) = \vec{0}$ *pour* $|s| \leq r$, $\vec{k}(x) = \vec{0}$ *pour* $|x| \leq r$

Démonstration

Les formules (1.37) et (1.38) permettent de vérifier ce théorème pour $\vec{k}$ indéfiniment différentiable en s et, par passage à la limite pour $\vec{k} \in \mathcal{D}'(R;V)$.

(1.39) est évident; pour (1.40) on a :

$$((A_o \mathcal{J} \vec{k})_1, \vec{g}_1)_{L^2} = ((\mathcal{J}\vec{k})_2, \vec{g}_1)_{L^2} = [\vec{k}, \partial_s \tilde{\vec{g}}_1] = [\vec{k}, \sum_j c_j (\partial_s \frac{\tilde{\vec{g}}_1 . \vec{e}_j}{c_j})\, \vec{e}_j]$$

$$= - \sum_j \left[c_j\, \partial_s k_j, \frac{\tilde{\vec{g}}_1 . \vec{e}_j}{c_j}\right] = + (-\mathcal{J} \frac{\partial \vec{k}}{\partial \tau}, \vec{g}_1)_{L^2}$$

$$((A_o \mathcal{J} \vec{k})_2, \vec{g}_2)_{L^2} = (A_{ij} (\mathcal{J}\vec{k})_{1,ij}, \vec{g}_2)_{L^2} = - (\mathcal{J}\vec{k}, \{\vec{g}_2, \vec{0}\})_{L^2}$$

$$= - \left[\vec{k}; - \sum_{j=1}^{3} c_j\, (\partial_s^2\, \tilde{\vec{g}}_2 . \vec{e}_j)\, \vec{e}_j\right] = - \left[\sum c_j\, \partial_s k_j\, \vec{e}_j; \partial_s \tilde{\vec{g}}_2\right]$$

$$= + (- \mathcal{J} \frac{\partial \vec{k}}{\partial \tau} ; \vec{g}_2)_{L^2}$$

L'application $\mathcal{R} : \vec{f} \rightsquigarrow \vec{k} = \mathcal{R}\vec{f}$ *de* H_o *sur* $L^2(R;V)$ *peut s'étendre aisément à une application de* $\mathcal{E}'(R^3;C^3)^2$, *espace des distributions à support compact, dans* $\mathcal{E}'(R;V)$ *espace des distributions à support comptact en* s *et à valeurs dans* V.

En effet soit $\vec{f} \in \mathcal{E}'(R^3;C^3)^2$, $K = \text{Supp}\, \vec{f}$ son support. On sait que $\mathcal{D}(R^3;C^3)$ est séquentiellement dense dans $\mathcal{E}'(R^3;C^3)$, $\vec{f}$ peut donc être approché, dans $\mathcal{E}'$, par une suite $\{\vec{f}^n\}$ de $\mathcal{D}(R^3;C^3)^2$ telle que $\text{Supp}\, \vec{f}^{(n)} \subset K$ pour tout $n \in N$. Dans ces conditions, $\vec{k}_n = \mathcal{R}\vec{f}^n$ défini par (1.18) est à support compact en s : en effet, $\text{Supp}\, \vec{f}^n \subset K$ entraîne que le support (en s) de $\vec{e}_j . \tilde{\vec{f}}^n_k\, (s;.)$ est contenu dans $[-\delta;+\delta]$ où 2δ désigne le diamètre de K. En outre si $\vec{f}^n \in \mathcal{D}(R^3;C^3)^2$

$\vec{e}_j.\tilde{\vec{f}}_k \in \mathcal{D}(R;V)$.

Or, pour tout $\vec{k} \in \mathcal{D}(R;V)$ (ce qui équivaut à $\vec{f} = \mathcal{J}\vec{k} \in \mathcal{D}(R^3;C^3)^2$)

$$(\vec{f}^n, \mathcal{J}\vec{k})_E = [\mathcal{R}\vec{f}^n, \vec{k}]$$

Il en résulte que la suite $\{\vec{k}_n = \mathcal{R}\vec{f}^n\}$ converge, dans $\mathcal{E}'(R;V)$, vers une distribution notée $\mathcal{R}\vec{f}$ (en effet, son support reste dans le compact fixe $[-\delta;+\delta]$ et $\mathcal{R}\vec{f}^n \in \mathcal{D}(R;V)]$.

Il résulte alors de ceci et du théorème 1.8 que *pour tout* $\vec{f}$ *de* $\mathcal{E}'(R^3;C^3)^2$:

$$\text{(1.42)} \quad \begin{aligned} &\text{(i)} && \mathcal{J}\mathcal{R}\vec{f} = \vec{f} \\ &\text{(ii)} && \mathcal{R}A_o = -\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{R} \\ &\text{(iii)} && \textit{si } \vec{f} = \vec{0} \textit{ pour } |x| > r \text{ , } \mathcal{R}\vec{f} = \vec{0} \textit{ pour } |s| > r \end{aligned}$$

Calcul de $\mathcal{R}\{\vec{0},\vec{\delta}\}$ *et de* $\mathcal{R}\{\vec{\delta},\vec{0}\}$

$$\vec{\delta} = \sum_{\ell=1}^{3} \delta_k(x)\, \vec{x}_\ell \quad \text{avec} \quad \delta_\ell\ (\vec{\phi}) = \phi_\ell\ (0) = \vec{\phi}\ (0).\vec{x}_\ell \quad .$$

a) Calcul de $\mathcal{R}\{\delta(x)\ \vec{x}_\ell, \vec{0}\}$

Si l'on pose $\vec{g} = \{\delta(x)\vec{x}_\ell, \vec{0}\}$, $\vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^3)^2$. Par ailleurs, $(\vec{g}, \vec{k})_E = [\mathcal{R}\vec{g}, \vec{k}]$ pour tout $\vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^3)$ et tout $\vec{k} \in \mathcal{D}(R;V)$. Cette égalité devient ici :

$$-\vec{x}_\ell \cdot A_{ij}(\vec{k})_{1,ij}(0;\omega) = [\mathcal{R}\vec{g};\vec{k}] \quad .$$

Or, d'après (1.20)

$$A_{ij}\ (\mathcal{J}\vec{k})_{\ell,ij}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} (\vec{\omega}) \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{k_j}{c_j}(x.\omega;\omega)\ \vec{g}(\omega)\ d\omega$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \sum_{j=1}^{3} c_j \frac{\partial^2 k_j}{\partial s^2}(x.\omega;\omega)\ \vec{e}_j(\omega)\ d\omega \quad .$$

Ceci entraîne

$$[\mathcal{R}\vec{g},\vec{k}] = \frac{1}{4\pi}\left[\sum_{j=1}^{3} c_j(\omega)\ e_j\ (\omega)\ \vec{e}_j(\omega) \quad \delta''(s);\ \vec{k}\right]$$

[compte tenu de $\vec{x}_\ell = \sum_{j=1}^{3} e_j\ (\omega)\ \vec{e}_j(\omega)$] .

On a donc

$$\text{(1.43)} \qquad \mathcal{R}\{\delta\ (x)\ \vec{x}_\ell\ , \vec{0}\} = \frac{\delta''(s)}{4\pi} \sum_{j=1}^{3} c_j(\omega)\ e_j\ (\omega)\ \vec{e}_j(\omega)$$

b) Calcul de $\mathcal{R}\{\ \vec{0},\ \delta(x)\ \vec{x}_\ell\ \}$

Compte tenu de (1.20) , on a :

$$(\mathcal{J}\vec{k})_2(0).\vec{x}_\ell = [\mathcal{R}\{\vec{0},\delta(x)\vec{x}\} \; ; \; \vec{k}] = - \frac{\vec{x}\ell}{4\pi} \cdot \int_\Omega \overline{\frac{\partial k}{\partial s}(0,\omega)} \, d\omega$$
$$= \frac{1}{4\pi} [\vec{x}_\ell \delta'(s) ; \vec{k}]$$

d'où

$$\mathcal{R}\{\vec{0}, \delta(x)\, \vec{x}_\ell\} = \frac{\delta'(s)}{4\pi} \, \vec{x}_\ell \qquad (1.44)$$

A ce stade, il est utile d'introduire le véritable représentant par translation (cf L.P. p. 194).

En effet, on a défini $\vec{k} = \mathcal{R}\vec{f}$ par

$$\vec{k}\,(s,\omega) = \sum_{j=1}^{3} k_j\,(s;\vec{\omega})\,\vec{e}_j\,(\omega)\,.$$

On pose pour le véritable représentant :

$$\vec{k}_o\,(s;\omega) = \sum_j k_{o,j}\,(s,\omega)\,\vec{e}_j(\omega)$$

$$k_{o,j}(s;\omega) = \left[c_j(\omega)\right]^{1/2} k_j(s\,c_j(\omega)\;;\;\omega\,)$$

On va utiliser $\vec{k}_o$ pour construire une solution finalement rayonnante (resp. initialement anti rayonnante) de l'équation :

$$(A_o - \mu)\,\vec{f} = \vec{g}\,.\;\mu \in C \qquad (1.45)$$

Théorème 1.9 (*cf. L.P. p. 120-121*)

Soit $\vec{g} \in \mathcal{E}'\,(R^3;C^3)^2$ *à support contenu dans* $|x| \leq r$ *. L'équation (2.33) a une et une seule solution finalement rayonnante dont le représentant dans* $\mathcal{D}'\,(R;V)$ *est donné par :*

$$< \vec{k}_o, \vec{\phi} >= <\mathcal{R}_o\,\vec{g}\;,\; e^{\mu s} \int_{-\infty}^{s} \{e^{-\mu\sigma}\,\vec{\phi}\,(\sigma\;\omega) - [\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\tau}\,\vec{\phi}(\tau,\omega)d\tau]\,\theta(\sigma,\omega)\}\;d\sigma > \qquad (1.46)$$

où $\theta \in \mathcal{D}\,(-\infty,\, r;\, V)$ *est telle que* $\int \theta\,(s,\omega)\,ds = 1\,.$

Démonstration

Formellement, on veut obtenir un véritable représentant $\vec{k}_o$ de $\vec{g}$ qui s'annule pour $s = -\infty$ (si $\vec{f}$ est finalement rayonnante) et qui, compte tenu de (1.42) vérifie :

$$(1.47) \qquad -\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \mu\right) \vec{k}_o\,(\tau;\,.\,) = \mathcal{R}_o\,\vec{g}$$

On peut remarquer que si l'on avait utilisé le représentant $\vec{k}\,(s,\vec{\omega})$ on aurait obtenu :

$$(1.48) \qquad -\left(c_j \frac{\partial}{\partial s} + \mu\right)k_j(s;\vec{\omega}) = (\mathcal{R}\,\vec{g}(s;\vec{\omega})\;\vec{e}_j(\omega) \quad (j = 1, 2, 3).$$

On vérifie aisément, en calculant explicitement :

$$-<\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \mu\right)\vec{k}_o\,,\;\vec{\phi}> = <\vec{k}_o\,;\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \mu\right)\vec{\phi}> \quad \text{que } \vec{k}_o$$

satisfait (1.47) au sens des distributions.

En outre puisque $\mathcal{R}_o\,\vec{g}$ a son support dans $|\tau| \leq r$, on voit que $\vec{k}_o$ s'annule pour $\tau < -r$. Si l'on pose $\vec{f} = \mathcal{J}_o\,\vec{k}_o$ on a :
$(A_o - \mu)\,\vec{f} = (A_o - \mu)\,\mathcal{J}_o\vec{k}_o = -\mathcal{J}_o\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \mu\right)\vec{k}_o = \mathcal{J}_o\,\mathcal{R}_o\,\vec{g} = \vec{g}$ et $\vec{f}$ est bien finalement rayonnante puisque $\vec{k}_o$ s'annule pour $\tau < -r$. La solution $\vec{f}$ est unique, sinon il existerait une solution non triviale finalement rayonnante de $(A_o - \mu)\,\vec{h} = \vec{0}$. Ceci est impossible puisqu'alors

$$U_o(t)\,\vec{h} = e^{\mu t}\,\vec{h}\,.$$

Corollaire 1.1.

Si $\vec{f}$ *est finalement rayonnante et* $(A_o - \mu)\,\vec{f} = \vec{0}$ *pour* $|x| \geq r$, $\vec{f}$ *a un représentant* $\vec{k}_o$ *de la forme :*

$$(1.49) \qquad \vec{k}_o\,(\tau,\omega) = \begin{cases} \vec{0} & \tau < -r \\ e^{-\mu\tau}\,\vec{n}\,(\omega) & \tau > r \end{cases}.$$

Soit, en revenant au représentant $\vec{k}\,(s;\omega)$:

$$(1.50) \qquad \vec{k}(s;\vec{\omega}) = \begin{cases} \vec{0} & s < -\dfrac{r}{c_m} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} e^{-\frac{\mu}{c_j}s}\, n_j(\omega)\,\vec{e}_j(\omega)\,, & s > \dfrac{r}{c_m} \end{cases}$$

Dans le cas d'un milieu isotrope

$$(1.50)' \qquad \vec{k}(s;\vec{\omega}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour} \quad s < -\dfrac{r}{c_2} \\ e^{-\frac{\mu s}{c_1} s}\, \vec{n}_j(\omega) + e^{-\frac{\mu}{c_2}}\, \vec{n}_j(\omega) & \text{pour} \quad s > \dfrac{r}{c_2} \end{cases}$$

où $\vec{\omega} \wedge \vec{n}_1(\omega) = \vec{0}$, $\vec{\omega}.\ \vec{n}_2(\omega) = 0$.

Démonstration

Le fait que $\vec{k}_o$ s'annule pour $\tau < -r$ a déjà été vu . Comme $\vec{k}_o(s,\vec{\omega}) = \sum_{j=1}^{3} k_j(s\, c_j,\omega)\, \vec{e}_j(\omega)$ montre que k_j s'annule pour $s < -\dfrac{r}{c_m}$.

D'autre part, $(A_o - \mu)\vec{f} = \vec{0}$ pour $|x| \geqslant r$ entraîne que $\mathcal{R}_o(A_o - \mu)\vec{f} = \vec{0}$ pour $s > r$ ce qui entraîne pour tout $\vec{\phi} \in \mathcal{D}(]r, \infty[\,;C^3)$:

$$0 = \left< \left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \mu\right)\vec{k}_o\ ,\ e^{\mu\tau}\vec{\phi} \right> = \left< -\vec{k}_o\ ,\ \left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \mu\right) e^{\mu\tau}\vec{\phi} \right>$$

$$= -\left< \vec{k}_o\ ,\ e^{\mu\tau}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial\tau} \right> = \left< \frac{\partial}{\partial\tau} e^{\mu\tau}\vec{k}_o\ ,\ \vec{\phi} \right> .$$

Ce dernier résultat entraîne pour $e^{\mu\tau}\vec{k}_o(\tau;\vec{\omega})$ d'être indépendant de τ pour $\tau > r$, c'est-à-dire une fonction de $\vec{\omega}$. Les résultats relatifs à $\vec{k}(s;\vec{\omega})$ dans le cas anisotrope et le cas isotrope résultent des expressions obtenues auparavant.

Remarques

a) *On verra que* $\vec{n}_1(\omega)$ *appartient à* V^o *et* $\vec{n}_2$ *à* V^1 *(ce qui est évident quand* $\vec{f} \in \mathcal{D}(R^3;C^3)^2$.

b) *On a des résultats analogues pour les solutions initialement antirayonnantes.*

1.5 *SOLUTION ELEMENTAIRE ET CONDITIONS DE RADIATION* (n = 3)

Une solution élémentaire de $A_o - \zeta I$, où $\zeta \in C$ est une matrice carrée d'ordre 6, $G(x;\zeta)$ qui vérifie :

$$(1.51) \qquad (A_o - \zeta I)\, G(x;\zeta) = \delta(x)\, I_6 \;,\; \zeta \in C \;,$$

solution à laquelle on imposera d'être finalement rayonnante (resp. initialement antirayonnante).

Si $\vec{g}_k = (\vec{g}_k^{(1)}, \vec{g}_k^{(2)})$ désigne le k^e vecteur colonne de G et $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$ une base orthonormale de R^3, on a :

$$(1.52) \qquad \begin{aligned} &-\zeta\, \vec{g}_k^{(1)}(x) + \vec{g}_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \delta(x)\, \vec{x}_k & \text{si } k = 1,2,3 \\ \vec{0} & \text{si } k = 4,5,6 \end{cases} \\ &A_{ij}\, \vec{g}^{(1)}_{k,ij}(x) - \zeta\, \vec{g}^{(2)}_{k}(x) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } k = 1,2,3 \\ \delta(x)\, \vec{x}_{k-3} & \text{si } k = 4,5,6 \end{cases} \end{aligned}$$

Si l'on applique (formellement) l'opérateur $\mathcal{R}$ à (1.51), on obtient, d'après (1.42) :

$$(1.53) \qquad -\sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \left[c_j \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}(\vec{g}_k(s;.)) - \zeta\, \mathcal{R}\vec{g}_k(s;.)ex \right] = \begin{cases} \mathcal{R}(\delta(x)\, \vec{x}_k, 0) & k = 1,2,3 \\ \mathcal{R}(\vec{0}, \delta(x)\vec{x}_{k-3}) & k = 4,5,6 \end{cases}$$

Afin de déterminer $\vec{g}_k(x)$ solution finalement rayonnante de (1.51) et afin d'appliquer (1.46), il faut

a) calculer $\mathcal{R}(\delta(x)\, \vec{x}_k, \vec{0})$ et $\mathcal{R}(\vec{0}, \delta(x)\, \vec{x}_k)$ *obtenus en (1.43) et (1.44)*

b) résoudre le système (1.53)

c) déterminer $\vec{g}_k(x)$ à l'aide de (1.19) et (1.20)

a) *Résolution de (1.53)*

Si on pose $\mathcal{R}\vec{g}_k = \sum_{j=1}^{3} \mathcal{R} g_{kj}\, \vec{e}_j$ (1.53) donne le système d'équations différentielles :

(1.54) $$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}g_{kj}(s;.) + \frac{\zeta}{c_j}\,\mathcal{R}g_{kj}(s;.) = h_{kj}(s;.)$$

$$h_{kj}(s;\omega) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\; e_{jk}(\omega)\;\; \delta''(s) & \text{si } k = 1,2,3 \\ + \frac{1}{4\pi c_j}\; e_{j,k-3}(\omega)\;\delta'(s) & \text{si } k = 4,5,6 \end{cases} \qquad (j=1,2,3)$$

D'après le théorème 1.9, le représentant $\mathcal{R}\,\vec{g}_k$ a ses composantes $\mathcal{R}g_{kj}$ données par

$$<\mathcal{R}\,g_{kj},\ \varphi> \;=\; <h_{kj}\;;\; e^{\frac{\zeta}{c_j}}\int_{\infty}^{s}\{e^{-\frac{\zeta}{c_j}\sigma}\,\psi(\sigma;\omega) - \left[\int_{\infty}^{\infty} e^{-\frac{\zeta}{c_j}\tau}\,\varphi_j(\tau;\omega)d\tau\right]\theta(\sigma;\omega)\}d\sigma>$$

où $\theta \in \mathcal{D}(R;V)$, sup $\theta\,(\sigma;.)$ contenu dans $]-\infty,-r[$, $r>0$ et $\int_{\infty}^{\infty}\theta\,(\sigma;\omega)\,d\sigma = 1$.

Compte tenu des expressions de $h_{kj}(s;.)$, ontrouve aisément (L.P.: p.124) :

(1.55) $$\mathcal{R}\,\vec{g}_k(s;\omega) = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{3} e_{jk}(\omega)\left[-\delta'(s)+\frac{\zeta}{c_j}\,\delta(s) - \frac{\zeta^2}{c_j^2}\;Y(s)\;e^{-\frac{\zeta}{c_j}s}\right]\vec{e}_j$$
$$+\frac{1}{4\pi}\sum e_{j,k-3}(\omega)\left[\delta(s) - \frac{\zeta}{c_j}\;Y(s)\;e^{-\frac{\zeta}{c_j}s}\right]\frac{\vec{e}_j}{c_j}$$

si $k = 4,5,6$

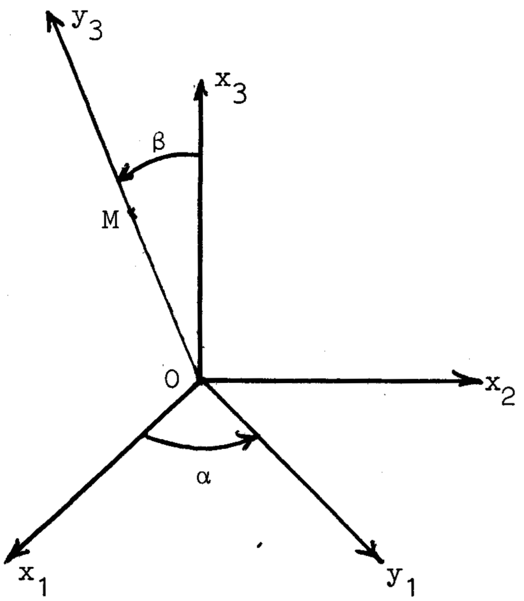
b) *Détermination de* $g_k(x)$.

D'après (1.19) et (1.20) :

$$\vec{g}_k^{(1)}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}(\;\mathcal{R}\,\vec{g}_{kj}\;(\vec{x}.\vec{\omega};\vec{\omega})\;\frac{\vec{e}_j}{c_j}\;d\omega$$

$$\vec{g}_k^{(2)}(x) = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{3}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}g_{kj}\;(\vec{x}.\vec{\omega};\vec{\omega})\;\vec{e}_j(x)\;d\omega\;.$$

Afin de mener les calculs, on utilise le système d'axes (orthonormal) suivant :



si le point $M(x_1,x_2,x_3)$ n'est pas situé sur Ox_3 on définit : Oy_1 orthogonal à Ox_3 et $\overrightarrow{OM}$ (noté aussi $\vec{x}$) .

Oy_3 tel que $\overrightarrow{OM}$ lui soit colinéaire et l'on pose :

$(\overrightarrow{Oy}_3, \overrightarrow{Ox}_3) = \beta$ (mesuré autour de Oy_1)

$(\overrightarrow{Oy}_1, \overrightarrow{Ox}_1) = \alpha$ (mesuré autour de Ox_3)

(si $\overrightarrow{OM}$ est colinéaire à Ox_3 on prendra $\beta = 0$ ou π , $\alpha = 0$); le vecteur $\vec{\omega}$ est défini par les coordonnées sphériques usuelles dans $Oy_1\, y_2\, y_3$ ($\vec{\omega}$ a pour coorodonnées : $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, $\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$). On a donc

$\overrightarrow{OM}.\vec{\omega} = \vec{x}.\vec{\omega} = r\cos\theta$ où $r = |\overrightarrow{OM}| = |\vec{x}|$ et

$$(1.56)\qquad \frac{\partial r}{\partial x_1} = \sin\alpha\sin\beta,\ \frac{\partial r}{\partial x_2} = \cos\alpha\sin\beta\ ,\ \frac{\partial r}{\partial x_3} = \cos\beta\ .$$

(Les calculs à effectuer sont longs quoiqu'élémentaires, aussi, ne seront-ils détaillés que pour $\vec{g}_1(x)$, les résultats étant donnés pour les autres $\vec{g}_k$).

De façon générale,

$$(1.57)\qquad g_{ik}^{(1)}(x)=\vec{x}_i.\vec{g}_k^{(1)}(x) = \frac{1}{16\pi^2}\sum_{j=1}^{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{e_{jk}(\omega)e_{ji}(\omega)}{c_j}\left[-\delta'(x.\theta) + \frac{\zeta}{c_j(\omega)}\delta(x.\theta) - \frac{\zeta^2}{c_j^2(\omega)}Y(x.\omega)e^{-\frac{\zeta}{c_j}x.\omega}\right]\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

(i = 1,2,3 ; si k = 1,2,3)

$$(1.58)\qquad \vec{x}_i.\vec{g}_k^{(1)}(x) =+ \frac{1}{16\pi^2}\sum_{j=1}^{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{e_{j,k-3}(\omega).e_{ji}(\omega)}{c_j}\left[\delta(r\cos\theta) - \frac{\zeta}{c_j(\omega)}Y(r\cos\theta)\, e^{-\frac{\zeta}{c_j}r\cos\theta}\right]\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

(ṙ = 1,2,3 ; si k = 4,5,6)

et

$$(1.59)\quad \vec{x}_i \cdot \vec{g}_k^{(2)}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{16\pi^2} \displaystyle\sum_{j=3}^{3} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} c_j^{-1}\, e_{jk}\, e_{ji} \Big[\delta''(r\cos\theta) - \dfrac{\zeta}{c_j}\,\delta'(r\cos\theta) \\ + \dfrac{\zeta^2}{c_j^2}\,\delta\,(r\cos\theta)\, e^{-\frac{\zeta}{c_j} r\cos\theta} - \dfrac{\zeta^3}{c_j^3}\, Y(r\cos\theta) e^{-\frac{\zeta}{c_j} r\cos\theta}\Big] \\ \qquad\qquad \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \quad (\text{si } k = 1,2,3) \end{cases}$$

$$(1.60)\quad \vec{x}_i \cdot \vec{g}_k^{(2)}(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{j=1}^{3} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e_{j,k-3}\, e_{ji}\, c_j^{-1} \Big[\delta'(r\cos\theta)$$

$$- \frac{\zeta}{c_j}\;\delta(r\cos\theta)\, e^{-\frac{\zeta}{c_j} r\cos\theta} + \frac{\zeta^2}{c_j^2}\, Y(r\cos\theta) e^{-\frac{\zeta}{c_j} r\cos\theta}\Big]$$

$$\sin\theta\, d\theta\; d\varphi \quad (\text{si } k = 4,5,6)$$

Il résulte immédiatement des formules précédentes que :

(i) si $c_1 = c_2 = c_3 = c$ et puisque $\sum\limits_j e_{jk}\, e_{ji} = \delta_{ik}$

$$\vec{g}_k^{(1)}(x) = \frac{I_3}{4\pi^2} \iint \bar{c}^{1}(\vec{\omega})\Big[\delta'(x.\omega) - \frac{\zeta}{c}\,\delta(x.\omega) + \frac{\zeta^2}{c^2}\, Y(x.\omega)\, e^{-\frac{\zeta}{c} x.\omega}\Big] d\omega$$

si $k = 1,2,3$

et un résultat analogue si $k = 4,5,6$ (ainsi que pour $\vec{g}_k^{(2)}(x)$).

(ii) si $c_1 \neq c_2 = c_3$ (cas isotrope pour les équations de l'Elasticité si les c_i sont constants et pour lequel on va détailler les calculs) :

__Calcul de__ $\vec{g}_k$ *__dans l'hypothèse__* $c_1 \neq c_2 = c_3$, c_1 *et* c_2 *__constants__*.

$\vec{x}_1 . \vec{g}_1^{(1)}(x)$ est la somme de deux termes :

$$I_1 = \frac{1}{16\pi^2 \tau_1} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Big[-\delta'(r\cos\theta) + \frac{\zeta}{c_1}\,\delta(r\cos\theta) - \frac{\zeta^2}{c_1^2}\, Y(r\cos\theta) e^{-\frac{\zeta}{c_1} r\cos\theta}\Big]$$

$$e_{11}^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

(où $e_{11} = \vec{e}_1.\vec{x}_1 = \vec{\omega}.\vec{x}_1 = \sin\theta(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha\cos\beta)+\cos\theta\sin\alpha\sin\beta$)

et

$$I_2 = \frac{1}{16\pi^2\tau_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[-\delta'(r\cos\theta) + \frac{\zeta}{c_2}\delta(r\cos\theta) - \frac{\zeta^2}{c_2^2}Y(r\cos\theta)e^{-\frac{\zeta}{c_2}r\cos\theta}\right](e_{21}^2 + e_{31}^2)\,d\omega$$

où $e_{21} = \vec{e}_2.\vec{x}_1$, $e_{31} = \vec{e}_3.\vec{x}_1$

avec $\vec{e}_2$ de coordonnées dans $Oy_1\,y_2\,y_3$: $\cos\theta\cos\varphi$, $\cos\theta\sin\varphi$, $-\sin\theta$

et $\vec{e}_3$ de coordonnées dans $Oy_1\,y_2\,y_3$: $-\sin\varphi$, $\cos\varphi$, 0

ce qui entraîne :

$$e_{21} = \cos\theta\,(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha\cos\beta) - \sin\theta\sin\alpha\sin\beta$$

$$e_{31} = -\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha\cos\beta\,.$$

En intégrant par rapport à φ dans I_1 et I_2 puis en y faisant respectivement les changements de variables définis par : $\frac{\zeta}{c_1}u = r\cos\theta$ et $\frac{\zeta}{c_2}v = r\cos\theta$,

on obtient :

$$I_1 = +\frac{c_1^1}{8\pi r^3}.\left[e^{-\frac{\zeta}{c_1}r}\left(-\frac{\zeta}{c_1}r^2\sin^2\alpha\sin^2\beta - \{\sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\}\{r + \frac{c_1}{\zeta}\}\right) + \frac{c_1}{\zeta}(2\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha)\right]$$

$$= +\frac{1}{8\pi\zeta}c_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}r}-1}{r}\right) = +\frac{c_1}{8\pi\zeta}\vec{x}_1.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}r}-1}{r}\vec{x}_1\right)$$

$$I_2 = \frac{-c_2}{\zeta 8\pi r^3}\left[(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta) - e^{-\frac{\zeta}{c_2}r}\left\{\frac{\zeta^2}{c_2^2}r^2(\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta) + (\frac{\zeta}{c_2}r + 1)(1 - 3\sin^2\alpha\sin^2\beta)\right]\right.$$

$$= \frac{-c_2}{8\pi\zeta}\vec{x}_1.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_2}r}-1}{r}\vec{x}_1\right).$$

On obtient alors :

$$\vec{g}_1^{(1)}(x) = +\frac{1}{8\pi\zeta}\left[c_1^o\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}r}-1}{r}\vec{x}_1\right) - c_2\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_2}r}-1}{r}\vec{x}_1\right)\right]$$

De même,

$$\vec{x}_1 . \vec{g}_1^{(2)}\,(x) = J_1 + J_2$$

où $$J_1 = -\frac{c_1^2}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\Big[\delta''(r\cos\theta) - \frac{\zeta}{c_1}\,\delta'(r\cos\theta) + \frac{\zeta^2}{c_1^2}\,\delta(r\cos\theta)\,e^{-\frac{\zeta}{c_1}r\cos\theta}$$

$$-\frac{\zeta^3}{c_1^3}\,Y\,(r\cos\theta)\,e^{-\frac{\zeta}{c_1}r\cos\theta}\Big] \times e_{11}^2 \times \sin\theta \;\; d\theta \;\; d\varphi$$

(J_2 s'en déduit en remplaçant c_1 par c_2 et e_{11}^2 par $e_{21}^2 + e_{31}^2$) .

On obtient, par des calculs analogues :

$$\vec{g}_k^{(1)}(x) = \begin{cases} + \dfrac{\;}{8\pi\zeta}\Big[c_1\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\dfrac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}r}-1}{r}\,\vec{x}_k - c_2\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\dfrac{e^{-\frac{\zeta}{c_2}r}-1}{r}\,\vec{x}_k\Big] & (k=1,2,3) \\ + \dfrac{1}{8\pi\zeta^2}\Big[c_2\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\dfrac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}r}}{r}\,\vec{x}_{k-3} - c_2^2\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\dfrac{e^{-\frac{\zeta}{c_2}r}}{r}\,\vec{x}_{k-3}\Big] & (k=4,5,6) \end{cases}$$

(1.61)

$$\vec{g}_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8\pi\zeta^2}\Big[c_1\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\dfrac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}r}}{r}\,\vec{x}_k - c_2\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\dfrac{e^{-\frac{\zeta}{c_2}r}-1}{r}\,\vec{x}_k\Big] & =(k=1,2,3) \\ \vec{g}_{k-3}^{(1)}\,(x) & (k=4,5,6) \end{cases}$$

On a donc établi le

__Théorème 1.10__ - __L'équation__

$$(A_o - \zeta)\;G(x;\zeta) = \delta(x)\;I_6$$

a une solution est une seule dont les vecteurs sont finalement rayonnants; ceux-ci sont donnés par

(1.61)

Corollaire 1.2

Soit $\vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^3)^2$ *; l'équation*

(1.62) $$(A_o - \zeta)\,\vec{f} = \vec{g}$$

a une et une seule solution finalement rayonnante donnée par :

$$\vec{f} = G \ast \vec{g}\ .$$

(1.52) montre que (1.62) est équivalent au système :

(1.63) $$\begin{cases} \vec{\Delta}^{\ast}\,\vec{f}_1 - \zeta^2\,\vec{f}_1 = \vec{g}_2 + \zeta\,\vec{g}_1 \\ \vec{f}_2 = \zeta\,\vec{f}_1 + \vec{g}_1 \end{cases}$$

Si $\vec{g}_2 = \vec{0}$ on est amené à poser la

Définition 1.5

Une solution de

$$\vec{\Delta}^{\ast} - \zeta^2\,\vec{f} = g \quad \text{où} \quad \vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^3)$$ *sera dite rayonnante si* $(\vec{f}, \zeta\vec{f})$ *est finalement rayonnante.*

Comme $(A_o - \zeta)\,\vec{f} = (\vec{0},\vec{g})$

est équivalent à

$$\begin{cases} \vec{\Delta}^{\ast}\,\vec{f}_1 - \zeta^2\,\vec{f}_1 = \vec{g} \\ \vec{f}_2 = \zeta\,\vec{f}_1 \end{cases}$$

on voit, en prenant $\vec{g} = \delta(x)\,\vec{x}_k$ $(k = 1,2,3)$, qu'il existe d'après ce qui précède, une et une seule solution rayonnante

$\vec{\gamma}_k(x,\zeta)$ de (2.), donnée par :

(1.64) $$\vec{\gamma}_k(x;\zeta) = +\frac{1}{8\pi\zeta^2}\left[c_1^2\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}r}}{r}\,\vec{x}_k - c_2^2\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_2}r}}{r}\,\vec{x}_k\right]$$

et les $\vec{\gamma}_k$ sont les vecteurs-colonnes de l'unique matrice $\Gamma(x;\zeta)$ carrée d'ordre 3, solution élémentaire rayonnante de

$$(\vec{\Delta}^{*} - \zeta^2) \quad \Gamma(x;\zeta) = \delta(x) \, I_3 \quad .$$

Corollaire 1.3

Soit $\vec{g} \in \mathcal{E}'(R^3;C^3)$

$$(\vec{\Delta}^{*} - \zeta^2) \, \vec{f} = \vec{g}$$

a une et une seule solution rayonnante donnée par

(1.65) $$\vec{f} = \Gamma * \vec{g} \quad .$$

Remarque

Si $x \notin \text{Supp } \vec{g}$ on a :

$$\zeta^2 \, \vec{f}(x) = c_1^2 \, \overrightarrow{\text{grad}} \; \varphi(x) - c_2^2 \, \overrightarrow{\text{rot}} \; \vec{\psi} \, (x)$$

où $\varphi \, (x) = \text{div } \vec{f}(x)$ et $\vec{\psi} \, (x) = \overrightarrow{\text{rot}} \, \vec{f}(x)$.

Il en résulte que, dans le complémentaire du support de $\vec{g}$, on a :

$$\Delta \, \varphi - \frac{\zeta^2}{c_1^2} \, \varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta \, \vec{\psi} - \frac{\zeta^2}{c_2^2} \, \vec{\psi} = \vec{0}$$

ce qui entraîne (SCHWARTZ 1 , BERNSTEIN 1) que φ et $\vec{\psi}$ sont indéfiniment dérivables. $\vec{f}$ est donc de classe C^∞ dans le complémentaire du support de $\vec{g}$. Soit alors un domaine borné D , de frontière ∂D suffisamment régulière, D contenant le support de $\vec{g}$ et $x \notin \bar{D}$.

On peut donc écrire (1.65) sous la forme :

$$\vec{f}(x) = \int_D \Gamma \, (x.y) \, \vec{g}(y) \, dy = \sum_{k=1}^{3} \vec{x}_k . \int_D \vec{\gamma}_k(x-y) \, \vec{g}(y) \, dy$$

$$= \vec{x}_k \int_D \vec{\gamma}_k(x-y).(A_{ij} \, \vec{f}^{(y)}_{,ij} - \zeta^2 \, \vec{f}(y) \, dy$$

(1.65') $$= \vec{x}_k . \int_D (\vec{\gamma}_k(x.g).A_{ij} \, \vec{f}_{,ij} \, (\vec{y}))_{,j} - (\vec{\gamma}_{k,j}(x-y).A_{ij} \, f(y))_{,i}$$

$$+ \vec{f}(y).(A_{ij} \, \vec{\gamma}_{k,ij} - \zeta^2 \, \vec{\gamma}_k) \, dy$$

$$= \vec{x}_k . \int_{\partial D} \left[\vec{\gamma}_k(x-y). \;_{ij} \, \vec{f}_{,i}(\vec{y}) \, n_j - \;_{ij} \, \vec{\gamma}_{k,i}(x-y) \, n_j \, . \, \vec{f}(y) \right] \, dS \, y$$

car par définition

$$A_{ij}\ \vec{\gamma}_{n,ij}(x-y) - \zeta^2\ \vec{\gamma}_k(x-y) = \delta\ (x-y)\ \vec{x}_k = \vec{0} \qquad \text{si} \qquad x \notin \bar{D}\ .$$

Comme ∂D est extérieur au support de $\vec{g}$ les restrictions de $\vec{\gamma}_k(x-y)$ et $\vec{f}(y)$ à ∂D sont de même classe de différentiabilité que ∂D (en particulier de classe C^1 au moins en $g \in \partial D$ et de classe C^∞ en $x \notin \bar{D}$) la dernière expression de $\vec{f}(x)$ a donc un sens.

Si l'on désigne par : $\vec{T}_y\ (\vec{f},\vec{n})$ le vecteur $A_{ij}\ \vec{f}_{,i}(y)\ n_j$

et par $T_y\ \Gamma\ (x-y)$ la matrice de vecteurs colonnes $T_y(\vec{\gamma}_k,\vec{n})$

on a :

$$\vec{f}(x) = \int_{\partial D} \left[{}^t\Gamma(x-y).\vec{T}_y(\vec{f},\vec{n}) - {}^t(T_y\ \Gamma(x-y))\ \vec{f}(y)\right] dS\ y$$

Réciproquement, si $\vec{f}(x)$ admet la représentation précédente, c'est une solution ζ - rayonnante de $(\vec{\Delta} - \zeta^2)\ \vec{f} = \vec{0}$ dans l'extérieur de D car c'est la somme de $\Gamma\ .\ *\ \vec{T}_y\ (\vec{f},\vec{n})$ et de $T_y\ \Gamma * \vec{f}$ qui sont ζ - rayonnantes.

Soit alors $\vec{f}$ une solution de

$(\vec{\Delta} - \zeta^2)\ \vec{f} = \vec{0}$ dans l'extérieur D_e d'un domaine borné D_i de frontière D régulière. Soit $S(x;R)$ une sphère de centre $x \in D_e$ de rayon R suffisamment grand pour que $\overline{D_i}$ soit contenu dans la boule ouverte $B(x;R)$.

Soit $D_R = D_e \cap B(x;R)$. On a :

$$\vec{f}(x) = \sum_{k=1}^{3} \vec{x}_k . \iint_{D_R} \vec{f}(y).\vec{x}_k\ \ \delta(x-y)\ dy$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \vec{x}_k . \iint_{D_R} \vec{f}(y).(A_{ij}\ \ \vec{\gamma}_{k,ij} - \zeta^2\ \vec{\gamma}_r\ (x-y)\ dy$$

Par intégrations par parties et compte tenu de $(\vec{\Delta}^{*} - \zeta^2)\ \vec{f} = \vec{0}$ dans D_e , on obtient

$$\vec{f}(x) = \vec{x}_k \int_{\partial D} \left[A_{ij}\, \vec{f}_{j,i}\, n_j .\, \vec{\gamma}_k - \vec{f}_1\, A_{ij}\, \vec{\gamma}_{k,i}\, n_j \right] dS$$

$$- \vec{x}_k \int_{S_R} \left[A_{ij}\, \vec{f}_{,i}\, n_j . \vec{\gamma}_k - \vec{f} . A_{ij}\, \vec{\gamma}_{k,i}\, n_j \right] dS$$

$\vec{f}$ ζ-rayonnante équivaut donc à

$$(1.66) \qquad \vec{x}_k \int_{S_R} \left(A_{ij}\, \vec{f}_{,i}(y) n_j . \vec{\gamma}_k(x-y) - \vec{f}(y) . A_{ij}\, \frac{\partial \vec{\gamma}_k}{y_i} (x-y)\, n_j \right) dS = \vec{0}$$

pour $R > r_o(x) = \text{In f}\, \{r ;\ B(x;r) \supset B_i \cup D\}$

Ceci implique que la limite de (1.65) lorsque $R \to \infty$ est nulle. Or

$$n_j = \frac{\partial}{\partial y_j} |x-y| = + \frac{y_j}{|y|} + 0 \left(\frac{1}{|y|} \right) \quad \text{quand } R \to \infty$$

$$= \frac{y_j}{R} + 0 \left(\frac{1}{R} \right) .$$

Comme, lorsque $|z|$ tend vers l'infini

$$\vec{\gamma}_k(z) = \frac{1}{8\pi |z|} \left[e^{-\frac{\zeta}{c_1} |z|}\, r_k\, \vec{e}_r - e^{-\frac{\zeta}{c_2} r}\, \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_r \wedge \vec{x}_k) \right] + \sum_{i=1}^{2} \vec{0} \left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}|z|}}{|z|^2} \right)$$

ceci entraine :

$$\vec{\gamma}_k(x-y) = \frac{1}{8\pi R} \left[e^{-\frac{\zeta}{c_1} R}\, \omega_k\, \vec{\omega}_r\, e^{\frac{\zeta}{c_1} x.\omega} - e^{-\frac{\zeta}{c_2} R}\, \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}_k)\, e^{\frac{\zeta}{c_2} x.\omega} \right. + \ldots$$

où $\vec{\omega} = \frac{y-x}{R}$, les termes négligés étant $\vec{0} \left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1} R}}{R^2} \right)$ $i = 1, 2$.

En outre, dans le cas isotrope tridimensionnel :

$$A_{ij} \frac{\partial \vec{\gamma}_k}{\partial_i} (z)\, r_j = 2\mu \frac{\partial \vec{\gamma}_k}{dr} + \lambda\, \vec{e}_r \ \operatorname{div} \vec{\gamma}_k + \mu\, \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{\gamma}_k - (\lambda+2\mu) \frac{\zeta}{c_1} \frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}|z|}}{8 \quad z}\, r_k\, \vec{e}_r$$

$$- \mu \frac{\zeta}{c_2} \frac{e^{-\frac{\zeta}{c_2}|z|}}{8 \quad z}\, \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_r \wedge \vec{x}_k) + \ldots$$

quand $|z| \to \infty$. D'où

$$A_{ij}\,\frac{\partial\vec{\gamma}_k}{\partial y_i}\,(x-y)\,n_j = \frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}R}}{8\pi R}\,\omega_k\,\vec{\omega}\,e^{\frac{\zeta}{c_1}x.\omega} \times(\lambda+2\mu)\,\frac{\zeta}{c_1}$$

$$-\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_2}R}}{8\,\pi\,R}\,\mu\,\frac{\zeta}{c_2}\,\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{x}_k)\,e^{\frac{\zeta}{c_2}x.\omega} + \dots$$

L'intégrant de (1.66) s'écrit donc :

$$\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}R}}{8\,\pi\,R}\left[-\vec{T}_y(\vec{f},\vec{\omega}) + (\lambda+2\mu)\,\frac{\zeta}{c_1}\,\vec{f}\right]\omega_k\,\vec{\omega}\,e^{\frac{\zeta}{c_1}\omega.x}$$

$$+\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_2}R}}{8\,\pi\,R}\left[\vec{T}_y(\vec{f};\vec{\omega}) - \mu\,\frac{\zeta}{c_2}\,\vec{f}\right].\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{x}_k)\,e^{\frac{\zeta}{c_2}\omega.x} + \sum_{i=1}^{2}\vec{O}\left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}R}}{R^2}\right)$$

Par ailleurs, (1.65) montre, grâce aux calculs précédents, que lorsque $|x|\to\infty$:

$$\vec{f}(x) = \vec{x}_k\left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}|x|}}{8\,\pi\,|x|}\,\theta_k\,\vec{\theta}.\int\vec{g}(y)\,e^{\frac{\zeta}{c_1}\theta.y}\,dy\right.$$

(1.68) $$= \vec{x}_k\left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_2}|x|}}{8\pi|x|}\,\vec{\theta}\wedge(\vec{\theta}\wedge\vec{x}_k).\int\vec{g}(y)\,e^{\frac{\zeta}{c_2}\theta.y}\,dy\right) + \sum_{i=1}^{2}O\left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}|x|}}{|x|^2}\right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}|x|}}{8\pi\,|x|}\,\vec{\theta}\int\vec{g}(y).\,\vec{\theta}\,e^{\frac{\zeta}{c_1}\theta.y}\,dy$$

$$-\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_2}x}}{8\,\pi\,x}\,\vec{\theta}\wedge(\vec{\theta}\wedge\int\vec{g}(y)\,e^{\frac{\zeta}{c_2}\theta.y}\,dy) + \dots$$

où l'on a posé $\vec{x} = |\vec{x}|\,\vec{\theta}$.

Or quand $x \in \mathrm{SUPP}\,\vec{g}$, $\vec{f}(x) = \vec{f}_o(x) + \vec{f}_1(x)$ où
$\vec{f}_o(x) = \frac{c_1^2}{\zeta^2}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{f}$ et $\vec{f}_1 = -\frac{c_2^2}{\zeta^2}$ rot rot $\vec{f}$. On en déduit que

$$\vec{f}_o(x) = \Gamma_o * \vec{g}$$

$$= \vec{x}_k\int\vec{\gamma}_k^{\,o}\,(x-y).\vec{g}(y)\,dy \quad \text{où}\quad \vec{\gamma}_k^{\,o}\,(x;\zeta) = \frac{1}{8\pi\zeta^2}\,c_1^2\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}r}}{r}\,\vec{x}_k\right)$$

et $\vec{f}_1(x) = \vec{x}_k . \int \vec{\gamma}_k^{(1)}(x-y).\vec{g}(y)\, dy$ avec $\vec{\gamma}_k^{(1)}(x;\zeta) = \frac{1}{8\pi\zeta^2} c_2^2 \, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}} \left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_2} r}}{r} \vec{x}_k\right)$

Il est aisé de vérifier que, lorsque $|x| \to \infty$:

$$\vec{f}_o(x) = \frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1} x}}{8\pi|x|} \int \vec{g}(y).\vec{\theta}\, e^{\frac{\zeta}{c_1} \theta.y}\, dy + \vec{0}\left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}|x|}}{|x|^2}\right)$$

$$\vec{f}_1(x) = - \frac{e^{-\frac{\zeta}{c_2}|x|}}{8\pi|x|} \vec{\theta} \wedge \left(\vec{\theta} \wedge \int \vec{g}(y)\, e^{\frac{\zeta}{c_2} \theta.y}\, dy\right) + \vec{0}\left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_2}|x|}}{|x|^2}\right)$$

Il résulte de ce dernier résultat que (1.67) s'écrit :

$$\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1} R}}{8\pi R} \left[- T_y(\vec{f}_o,\omega) + (\lambda+2\mu) \frac{\zeta}{c_1} \vec{f}_o\right] \omega_k \vec{\omega}\, e^{\frac{\zeta}{c_1} \omega.x}$$

$$+ \frac{e^{-\frac{\zeta}{c_2} R}}{8\pi R} \left[T_y(\vec{f}_1,\vec{\omega}) - \mu \frac{\zeta}{c_2} \vec{f}_1\right] .\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}_k)\, e^{\frac{\zeta}{c_2} \omega.x} + \sum_{i=1}^{2} \vec{0}\left(\frac{e^{-\frac{\zeta}{c_i} R}}{R^2}\right)$$

On en déduit aisément le

__Théorème 1.11__

Soit $\vec{f}$ solution de $(\Delta^{*} - \zeta^2)\, \vec{f} = \vec{g}$ où $\vec{g}$ est à support compact et $\vec{f} \in H^2_{loc}(R^3;C^3)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\vec{f}$ est ζ - rayonnante.

(2) $\vec{f}$ est la somme dans 2 parties solénoïdale (resp. irrotationnelle) respectivement $\frac{\zeta}{c_2}$ (resp $\frac{\zeta}{c_1}$ rayonnantes) pour les opérateurs A_1 (resp. A_o^o).

(3) Si B_i est une région bornée contenant le support de $\vec{g}$, dans l'extérieur B_e de B_i $\vec{f}$ peut s'écrire

$$\vec{f}(x) = \int_{\partial B_i} \left[{}^t\Gamma(x-y).\vec{T}_y(\vec{f},\vec{n}) - {}^t(T_y \Gamma(x-y))\, \vec{f}(y)\right] dS_y$$

Si Re $\zeta \geq 0$ ces propositions sont équivalentes à

(4) $\vec{f}$ satisfait aux conditions de radiation :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \left| T_y(\vec{f}_o,\vec{e}_r) - (\lambda+2\mu)\frac{\zeta}{c_1}\vec{f}_o\right|^2 dS = 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \left|T_y(\vec{f}_1,\vec{e}_r) - \mu\frac{\zeta}{c_2}\vec{f}_1\right|^2 dS = 0 \tag{1.71}$$

Dans le corollaire 1.1 on a vu que si $\vec{f}$ était une solution finalement rayonnante de $(A_o - \zeta)\,\vec{f} = \vec{g}$ où SUPP $\vec{g} \subset B(x;r)$ alors $\vec{f}$ avait un pré-représentant par translation $\vec{k}(s;\cdot)$ qui s'annulait pour $s < -\frac{r}{c_2}$ et de la forme

(1.72) $$e^{-\frac{\zeta}{c_1}s}\,\vec{n}_1(\omega) + e^{-\frac{\zeta}{c_2}s}\,\vec{n}_2(\omega) \quad \text{pour} \quad s > \frac{r}{c_2}$$

Par ailleurs, on vient de voir qu'une telle solution, pour x assez grand s'écrivait :

(1.73) $$\vec{f}(x) = \frac{e^{-\frac{\zeta}{c_1}|x|}}{|x|}\,\vec{m}_1(\theta)\,|1 + \mathring{o}(1)| + \frac{e^{-\frac{\zeta}{c_2}|x|}}{|x|}$$
$$+ \frac{e^{-\frac{\zeta}{c_2}}}{x}\,\vec{m}_2(\theta)\quad |1 + o(1)|$$

où $\vec{m}_i(\theta)$ est fonction analytique de $\vec{\theta}$.

A ce propos on a le

<u>*Théorème 1.12*</u>

Pour toute solution ζ - *rayonnante de* $\vec{\Delta}^{*} - \zeta^2$ *on a*

$$\vec{m}_i(\theta) = \frac{(-1)^{i+2}}{2} \times \frac{\zeta}{c_i^2}\,\vec{m}_i(a) \quad (i = 1,2)$$

Le représentant de $\vec{\gamma}_k = (\vec{\gamma}_k, \vec{\zeta}\,\vec{\gamma}_k)$ s'écrit d'après (1.55)

$$-\frac{1}{4\pi}\,\omega_k\,\frac{\zeta}{c_1^2}\,e^{-\frac{\zeta}{c_1}s}\vec{\omega} - \frac{1}{4\pi}\,\frac{\zeta}{c_2^2}\,(e_k\,\vec{e}_2 + e_{k3}\,\vec{e}_3)\,e^{-\frac{\zeta}{c_2}s} \quad \text{pour} \quad s > 0$$

Le représentant de $\vec{\gamma}_k(x-y)$ est alors : $\vec{k}(s-y\omega;\omega)\ \sum k_j(s-c_j\ y\ \omega;\omega\ )\ e_j$

$$- \frac{1}{4\pi} \frac{s}{c_1^2} e^{-\frac{\zeta}{c_1} s} \omega_k e^{\omega y.\omega} \vec{\omega} - \frac{1}{4\pi} \frac{\zeta}{c_2^2} (e_{k2} \vec{e}_2 + e_{k3} \vec{e}_3) e^{-\frac{\zeta}{c_2} s} e^{\zeta y.\omega}$$

$$= - \frac{1}{4\pi} \frac{\zeta}{c_1^2} e^{-\frac{\zeta}{c_1} s} \omega_k e^{\zeta y.\omega} \vec{\omega} + \frac{1}{4\pi} \frac{\zeta}{c_2^2} \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}_k) e^{-\frac{\zeta}{c_2}} \zeta y\omega$$

ceci pour $s > |y| / c_2$.

On en déduit dans le cas où $\vec{f} = \vec{\gamma}_k$ par (1.72), (1.73)

$$\vec{m}_1(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\zeta}{c_1^2} \vec{m}_1(\omega) \qquad \text{avec} \quad \vec{n}_1(\omega) \wedge \vec{\omega} = \vec{0}$$

$$\vec{m}_2(\omega) = - \frac{1}{2} \frac{\zeta}{c_2^2} \vec{m}_2(\omega) \qquad \text{avec} \quad \vec{n}_2(\omega)\ \vec{\omega} = \vec{0} .$$

Ces formules s'étendent aisément au cas de $\vec{f}$ ζ- rayonnante.

CHAPITRE II

EQUATIONS DE L'ELASTODYNAMIQUE DANS UN DOMAINE EXTERIEUR

2.1. L'ESPACE DE HILBERT H ET LE GROUPE $\{U(t)\}$.

Soit D_e un domaine extérieur de frontière (B) bornée; on désigne par D_i le complémentaire (borné) de $D_e \cup B$ et par D_R l'intersection de D_e et de la boule ouverte de centre O et de rayon R .

On supposera que B est de classe C^2 . On posera en outre :

$$E(\vec{u}(t),R) = \int_{D_R} \{|\vec{u}_t(x,t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\vec{u},_i . A_{ij}\,\bar{\vec{u}},_j)\}\, dx$$

on a le

Théorème 2.1 - *Soit* $\vec{u}(x,t)$ *une solution de classe* C^2 *de*

$$\vec{u}_{tt} - \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\,\vec{u},_{ij} = \vec{0} \qquad \textit{pour tout } x \in D_e \quad \textit{et tout } t \textit{ vérifiant :}$$

$$\vec{u}(x,t) = \vec{0} \qquad \textit{pour } x \in B \text{ (où } A_{ij}\,\vec{u},_i\,\vec{n}_j = \vec{0}\text{)}$$

Dans ces conditions $\vec{u}$ *vérifie l'inégalité:*

$$E(\vec{u}\,(T),R) \leq E(\vec{u}(0),\, R + c\,T)$$

pour $c \geq c_M$ $\qquad E(\vec{u}(T),R) \geq E(\vec{u})$

Démonstration - En effet, pour une telle solution on peut écrire :

$$\iint_Q 2\,\mathrm{Re}\,(\vec{u}_t .\ \vec{u}_{tt} - A_{ij}\,\bar{\vec{u}},_{ij})\, dx\, dt = 0$$

$$= E(\vec{u}(T),R) - E(\vec{u}(0),R + cT)$$

$$+ 2 \int_B \mathrm{Re}\,(\vec{u}_t . A_{ij}\,\bar{\vec{u}},_i\, n_j)\, dS + \int_{|x|=R+c(T-t)} \{c\,\mathcal{E}\,(\vec{u}) - 2\,\mathrm{Re}(\vec{u}_t .\ A_{ij}\,\bar{\vec{u}},_i\, n_j)\}dS$$

La 3ème intégrale du second membre est nulle si $\vec{u}(x,t) = \vec{0}$ sur B (ou si $A_{ij}\ \vec{u}_{,i}\ n_j = \vec{0}$ sur B). Quant à la dernière, il résulte de la démonstration du théorème 1.1 qu'elle est non négative pour $c \geq c_M$.

Corollaire 2.1.1. Si $\vec{u}(x,0) = \vec{0} = \vec{u}_t(x,0)$ dans D_R, alors

$$\vec{u}(x,t) = \vec{0} \quad \text{dans} \quad |x| < R - ct$$

En effet, il suffit dans l'inégalité du théorème 2.1 de faire tendre R vers l'infini. On désigne toujours par $\vec{f} = \{\vec{f}_1,\vec{f}_2\}$ les couples de données initiales (à valeurs dans C^n) considéré comme le complexifié de l'espace vectoriel euclidien réel de dimension n; n = 2 ou 3).

Définition 2.1.

L'espace de Hilbert H *est le complété de* $\mathcal{D}\ (B_e\ ;\ C^n)^2$ *pour la norme :*

(2.3) $$|\vec{f}|_E^2 = \int_{B_e} \{\ |\vec{f}_2|^2 + 2\ \mathrm{Re}\ (\vec{f}_{1,i} \cdot A_{ij}\ \vec{f}_{2,j})\ \}\ dx$$

Remarques :

1) Si $\vec{f} \in \mathcal{D}\ (B_e)^2$, comme supp $\vec{f}$ est contenu dans B_e ouvert de R^n on a $\vec{f} = \vec{0}$ sur B frontière de (B_e). On peut donc prolonger $\vec{f}$ à R^n tout entier en posant $\vec{f} \equiv \vec{0}$ dans (B_i). Il en résulte que H admet un plongement dans H_o : si l'on considère le sous-espace de $\mathcal{D}\ (R^n)^2$ formé des $\vec{f}$ nulles dans $B_i \cup B$ H en est le complété pour la norme "énergie".

2) Si $EL(B_e;C^n)$ désigne le complété de $\mathcal{D}\ (B_e)$ pour la norme

$$|\vec{f}_1|_{EL}^2 = \sum A_{ij}\ \vec{f}_{1,j} \cdot \vec{f}_{1,i}\ ,$$

on a : $H = L^2\ (B_e;C^n) \times EL(B_e;C^n)$.

3) Comme $\vec{f} \in H$ admet un prolongement $\check{\vec{f}}$ à R^3 tel que $\check{\vec{f}} \in H_0$, il en résulte que l'inégalité (1.14) est valable; autrement dit $\vec{f}_1 \in L^2_{loc}(B_e;C^3)$.

Afin de construire le groupe $\{U(t)\}$ d'opérateurs qui, aux données initiales $\vec{f}$, associent la valeur de $\vec{u}$ à l'instant t, on va [suivant L.P. p. 137] construire son générateur infinitésimal.

Définition 2.2.

A désigne l'opérateur :

$$\begin{pmatrix} 0 & II \\ A_{ij} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} & 0 \end{pmatrix}$$

dont le domaine est l'ensemble des $\vec{f} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ *telles que :* $A\vec{f} \in H$.

Si D(A) désigne ce domaine, on a donc (les dérivations étant au sens des distributions):

$$D(A) = \{(\vec{f}_1,\vec{f}_2) \mid A_{ij}\,\vec{f}_{1,ij} \in L^2(B_e;C^n) \text{ et } \vec{f}_2 \in EL(B_e;C^n)\}$$

comme, en outre $\vec{f} \in H$ on a aussi $\vec{f}_2 \in L^2(B_e;C^n)$ et $\vec{f}_1 \in EL(B_e;C^n)$.

Théorème 2.2. - A *est anti-autoadjoint.*

Démonstration

a) D(A) est dense dans H : en effet $\mathcal{D}(B_e;C^n)^2$ l'est dans D(A).

b) $A^* = -A$.

Par définition si $\vec{f} \in D(A)$ et $\vec{g} \in H$ on a :

(2.4) $$(A\vec{f},\vec{g})_E = (\vec{f}, A^*\vec{g})_E$$

Or pour tout $\vec{f} \in D(A)$ et tout $g \in \mathcal{D}(B_e;C^n)^2$ on a :

$$(A\vec{f},\vec{g})_E = -\int_{B_e} (\vec{f}_2 . A_{ij}\,\bar{\vec{g}}_{1,ij} + \vec{f}_{1,j} . A_{ij}\,\bar{\vec{g}}_{2,j})\,dx$$

$$= -(\vec{f}, A\vec{g})_E$$

Comme D(A) est dense dans H(donc $\mathcal{D}(B_e)^2$ dense dans D(A) pour la topologie induite par celle de H) on voit que la relation précédente vaut pour tout $\vec{g} \in D(A)$. Autrement dit $A^{*} = -A$ sur $D(A)$ et $D(A) \subset D(A^{*})$.

Soit alors $\vec{g} \in D(A^{*})$; si l'on pose $\vec{h} = A^{*}\ \vec{g}$ on a par définition

$$(A\vec{f},\ \vec{g})_E = (\vec{f},\vec{h})_E \quad \text{où} \quad \vec{f} \in D(A).$$

Si l'on prend $\vec{f} = (\vec{0},\vec{f}_2)$ on obtient :

$$(Af,\vec{g})_E = \int_{B_e} \vec{f}_{2,i} \cdot A_{ij}\ \vec{\bar{g}}_{1,j}\ dx = (\vec{f}_2,\vec{g}_1)_{EL} = (\vec{f}_2,\vec{h}_2)_{L^2} \quad .$$

Si l'on prend $\vec{f}_2$ arbitraire dans $\mathcal{D}(B_e)$, on obtient davantage car l'intégrale précédente devient :

$$(-A_{ij}\ \vec{f}_{2,ij},\ \vec{g}_1)_{L^2} = (\vec{f}_2,\vec{h}_2)_{L^2}$$

ce qui entraîne :

(2.5) $\qquad -A_{ij}\ \vec{g}_{1,ij} = \vec{h}_2$ an sens des distributions.

Par ailleurs, si l'on prend $\vec{f}\ (\vec{f}_1,\vec{0})$ cela donne :

(2.6) $$(A\vec{f},\vec{g})_E = (A_{ij}\ \vec{f}_{1,ij},\vec{g}_2)_{L^2} = (\vec{f}_1,\vec{h}_1)_{EL}$$

Le choix de $\vec{f}_1$ va se faire de telle sorte que :

$$(A_{ij}\ \vec{f}_{1,ij}\ ,\ \vec{g}_2)_{L^2} = -(\vec{\psi}\ ,\vec{g}_2)_{L^2}$$

En effet, il suit de l'inégalité (1.14) que pour tout compact K de Be et tout $\vec{\psi} \in EL(B_e)$:

$$\int_K |\vec{\psi}|^2\ dx \leq \text{Cstte}\ \ |\vec{\psi}|^2_{EL}$$

Si l'on prend $K = \mathrm{Supp}\ \vec{\phi}$ où $\vec{\phi} \in \mathcal{D}(B_e ; C^n)$ on en déduit :

$$| (\vec{\phi},\psi)_{L^2} | \leq \mathrm{Cstte} \quad |\vec{\psi}|_{EL}$$

il en résulte que l'application linéaire : $: \vec{\psi} \longrightarrow (\vec{\phi},\vec{\psi})_{L^2}$ est bornée dans $EL(B^e)$ et par le théorème de RIESZ, il existe $\vec{f}_1 \in EL(B_e)$ telle que :

$$(\vec{f}_1,\vec{\psi})_{EL} = (\vec{\phi},\vec{\psi})_{L^2} \quad \text{pour tout } \vec{\psi} \in EL(Be). \tag{2.7}$$

Si $\vec{\psi} \in \mathcal{D}(Be) \subset EL(Be)$ on en déduit que :

$$- (A_{ij}\ \vec{f}_{1,ij}, \vec{\psi})_{L^2} = (\vec{\phi},\vec{\psi})_{L^2} \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$- A_{ij}\ \vec{f}_{1,ij} = \vec{\phi} \quad \text{au sens des distributions.} \tag{2.8}$$

On a donc : $(A_{ij}\ \vec{f}_{1,ij}, \vec{g}_2)_{L^2} = - (\vec{\phi}, \vec{g}_2)_{L^2}$ d'après (2.8)

et $(\vec{f}_1,\vec{h}_1)_{EL} = (\vec{\phi},\vec{h}_1)_{L^2}$ d'après (2.7) où $\vec{\psi} = \vec{h}_1$.

Il en résulte d'après (2.6) que

$$- \vec{g}_2 = \vec{h}_1 \tag{2.9}$$

(2.5) et (2.9) montrent que $\vec{g} = (\vec{g}_1,\vec{g}_2) \in D(A)$ et que $\vec{h} = - A\ \vec{g}$ ce qui établit que $A^* = - A$.

Il résulte alors du théorème de Stone que A engendre un groupe d'opérateurs $\{U(t)\}$ à un paramètre, unitaires, fortement continu en t. En outre, $U(t)\ \vec{f}$ est fortement différentiable en t si et seulement si $\vec{f} \in D(A)$ et dans ce cas :

$$\frac{d}{dt}\, U(t)\ \vec{f} = A\ U(t)\ \vec{f} \tag{2.10}$$

et U(t) applique D(A) sur lui-même et commute avec A.

Si $\vec{f} \in D(A)$ et si l'on pose $\vec{u}(x,t) = [U(t)\,\vec{f}]_1\,(x)$ on a d'après (2.10) (où l'on prend la seconde composante) :

$$\vec{u}_{tt} = A_{ij}\,\vec{u}_{,ij} \quad \text{au sens des distributions.}$$

Pour de telles solutions le théorème 2.1 et ses corollaires sont encore valables en vertu du

Lemme 2.1

Si $\vec{f} \in D(A), \vec{u}(x,t) = [U(t)\,\vec{f}]_1(x) \in H^2_{loc}\,(B_e;C^3)$ pour tout t.

Démonstration

$\vec{f} \in D(A)$ entraîne $U(t)\,\vec{f}\quad D(A)$ donc $\vec{\Delta}^{*}\,\vec{f}_1 \in L^2(B_e)^3$. En effet, il résulte des théorèmes de régularité locale pour les opérateurs fortement elliptiques cf. par exemple GOBERT [1], AGMON [1], LIONS [1]) que :

si $\vec{u}$ et $\vec{\Delta}^{*}\,\vec{u} \in L_2^{loc}(B_e)$ alors $\vec{u} \in H_2^{loc}(B_e)$ et vérifie

$$(2.11) \qquad ||\vec{u}||_{H_2(\Omega_o)} \leq C\,(||\Delta^{*\rightarrow}||_{L_2(\Omega^{*})} + ||\vec{u}||_{L_2(\Omega^{*})}\ )$$

où Ω^{*} est un ouvert d'adhérence compacte dans B_e et Ω_o un ouvert d'adhérence compacte dans Ω^{*} .

Il en résulte que les dérivées secondes (en x) de $\vec{u}$ sont localement de carré intégrable. Comme $\left[\frac{d}{dt}\,U(t)\,\vec{f}\right]_1$ H les dérivées secondes mixtes (en x,t) de $\vec{u}$ on la même propriété. Quant à $\vec{u}_{tt}$ cela résulte de $\vec{u}_{tt} = \vec{\Delta}^{*}\,\vec{u}$.
(Si $\vec{u} \in L^2(B_e)$ ainsi que $\vec{\Delta}^{*}\,\vec{u}$ on peut évidemment remplacer Ω_o et Ω^{*} par B_e).

Comme D(R) est un ouvert borné, de frontière $\partial\Omega \cap S(0;R)$ de classe au moins C^2, et localement d'un même côté de chacun des points de sa frontière, il résulte d'un théorème de LIONS-MAGENES (vol. 1 - chpt. 1, n° 9, p. 47. Th. 9-4) que $\vec{u}|_B$ et $\frac{\partial u}{\partial n}|_B$ appartiennent respectivement à $H^{\frac{3}{2}}(B)$ et $H^{\frac{1}{2}}(B)$, autrement dit la formule (2.2) de Green est encore valable pour $\vec{u}$ telle que $\vec{f} \in D(A)$.

Théorème 2.3.

L'ensemble des $\vec{f}$ *tels que :*

(2.12) $$|A\vec{f}|_E + |\vec{f}|_E \leq 1$$

est précompact pour la norme $|f|_E^{D'}$ *où* D' *est un borné de* B_e .

Démonstration

(2.12) signifie que :

$$|\vec{f}_2|_{L^2} + \mathcal{E}(\vec{f}_1) + \mathcal{E}(\vec{f}_2) + |\vec{\Delta}^{*} \vec{f}_1|_{L^2} \leq 1$$

ce qui signifie que $\vec{f}_1 \in EL^{(B_e)}$, $\vec{\Delta}^{*} \vec{f}_1 \in L^2(B_e)$, $\vec{f}_2 \in L^2(B_e) \cap EL(B_e)$ et entraîne compte tenu de (2.11) que $\vec{f}_1 \in H_o^2(B_e)$, $\vec{f}_2 \in H_o^1(B_e)$. D'après le théorème de compacité de BELLICH le résultat s'en déduit (cf. L.P. p. 141).

2.2. DECROISSANCE DE L'ENERGIE ET SOUS-ESPACE RAYONNANT.

On peut définir les sous-espaces rayonnant et anti-rayonnant de deux façons :

(i) $\vec{f} \in D_+(\rho)$ (resp. $D_-(\rho)$) si $\vec{u}(x,t) = \vec{0}$ dans $|x| < \rho$ pour $t > 0$ (resp. $t < 0$)

Par ailleurs les solutions rayonnantes et anti-rayonnantes peuvent-être regardées comme des solutions en l'absence d'obstacle pour $t > 0$ (resp. $t < 0$) :

de telles solutions sont donc nulles dans $\{|x| < \rho \frac{c_m}{c_M} \pm c_m t\}$ en vertu du Théorème 1.1(2°).

(ii) Si l'on considère le problème extérieur comme une perturbation du problème en l'absence d'obstacles, il est intéressant de définir les sous-espaces rayonnants et anti-rayonnant en fonction de ceux étudiés au chapitre I, plus précisément comme suit :

$$D_+^\rho = U_o(\rho/c_m)\, D_+$$

$$D_-^\rho = U_o(-\rho/c_m)\, D_-$$

d'où il résulte que : $D_\pm^\rho \subset D_\pm(\rho) \subset D_\pm$. $D_\pm^\rho$ ont évidemment les deux premières propriétés caractérisant ces sous-espaces et en tant que sous-espaces de D_+ et D_- (qui sont orthogonaux dans H_o), ils sont eux-mêmes orthogonaux.

La propriété $(iii)_+$, à savoir

$$\bigcup U(t)\, D_+^\rho \quad \text{dense dans } H$$

comme dans (L.P. chap. V, p. 143-151), liée à la décroissance locale de l'énergie

$$\lim_{t\to\infty} |U(t)\, \vec{f}|_E^D = 0 \tag{2.13}$$

pour tout $\vec{f} \in H$ et tout sous-domaine borné D de B_e .

La démonstration faite par LAX-PHILIPPS (L.P. loc cit.) s'adapte.

Elle se fait en deux étapes :

1) Si A n'a pas de spectre ponctuel, en utilisant le théorème 2.3, on en déduit que l'énergie décroît localement, plus précisément que : (2.14)

$$\lim_{t\to\infty} \inf |U(t)\, \vec{f}|_E^D = 0 \quad (\forall\ \vec{f} \in H, \text{ et D borné de } B_e).$$

2) Ensuite (2.14) entraîne $(iii)_+$ (la démonstration de L.P. p. 143-144) s'étendant presque mot pour mot.

Le point important est donc l'absence de spectre ponctuel pour A. Comme A est anti-autoadjoint, tout revient à montrer que

$$(A - i\mu)\, \vec{f} = \vec{0} \quad \text{n'a aucune solution non triviale dans}$$

D(A) pour μ réel. On étudie tout d'abord le cas $\mu \neq 0$. Soit alors ϕ $C^\infty(R^3)$, nulle au voisinage de B et égale à 1 pour $|x| > \rho$. Posons

$$\vec{g} = \begin{cases} \phi \vec{f} & \text{dans } B_e \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\vec{g}$ a une énergie finie et vérifie

$$(A_o - i \mu) \vec{g} = \vec{h}$$

où $\vec{h} = \vec{0}$ dans $|x| > \rho$, il en résulte que $\vec{g}$ s'annule pour $|x|>\rho$ donc $\vec{f}$, d'où il résulte classiquement que $\vec{f} = \vec{0}$ dans B_e .

Dans le cas où $\mu = 0$, l'hypothèse $\vec{g} = \vec{0}$ sur B entraîne aussi $\vec{g} = \vec{0}$ dans B_e , sinon on se place dans le complément orthogonal H' de Ker A .

Comme dans L.P. Chap. V la propriété $(iii)_+$ implique que pour tout sous-domaine borné D de B_e et tout $\varepsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que

$$\int |U(t)\vec{f}|_E^2 \, dx < \varepsilon \text{ pour tout } t > T.$$

LAX et PHILIPPS introduisent alors le semi-groupe

$$Z^\rho(t) = P_+^\rho .U(t). P_-^\rho$$

où $P_{\pm}^\rho$ désigne l'opérateur "projection orthogonale" sur les supplémentaires orthogonaux de $D_{\pm}^\rho$. Le domaine de $Z^\rho(t)$ est : $K^\rho = H \ominus (D_+^\rho \quad D_-^\rho)$ et son générateur infinitésimal est noté B^ρ .

Le spectre de ce dernier opérateur est formé des nombres complexes tels que

$$\begin{aligned} \vec{\Delta} \; \vec{u} - \zeta^2 \vec{u} = \vec{0} & \quad \text{dans } B_e \\ \vec{u} = \vec{0} & \quad \text{sur } B \end{aligned}$$

admet une solution ζ - rayonnante non triviale ce qui entraîne pour ce spectre d'être discret.

Il est alors possible d'établir le

Théorème 2.4

Si ζ *n'appartient pas au spectre de* B^ρ *et si* $\vec{g} \in L^2(B_e)$ *et a un support compact, la solution* $\vec{u}(x,t)$ *de*

$$\vec{u}_{tt} - \vec{\Delta}^* \vec{u} = e^{\zeta t} \vec{g}$$
$$\vec{u} = \vec{0} \quad sur \quad B$$

et de données initiales $\vec{f} \in H$, *tend lorsque* $t \to \infty$ *vers* $e^{\zeta t} \vec{v}$, *dans la norme énergie locale, où* $\vec{v}$ *est la solution* ζ- *rayonnante de*

$$\vec{\Delta}^* \vec{v} - \zeta^2 \vec{v} = - \vec{g} .$$

(cf. L.P. p. 165 et 213).

Or on a vu dans le théorème 1.11 que lorsque $\vec{v}$ était ζ - rayonnante elle s'écrivait :

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{v}_1$$

où
$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} |T(\vec{v}_o,\vec{\omega}) - (\lambda+2\mu)\frac{\zeta}{c_1}\vec{v}_o|^2 \, dS = 0$$

(C.R.1)
$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \left|T(\vec{v}_1,\vec{\omega}) - \mu\frac{\zeta}{c_2}\vec{v}_1\right|^2 dS = 0$$

Or $\vec{T}(\vec{v}_o,\vec{\omega}) - (\lambda+2\mu)\dfrac{\zeta}{c_1}\vec{\omega}_o = 2\mu\left(\dfrac{dv_o}{dr} - \dfrac{\zeta}{c_1}\vec{v}_o\right) + \lambda\left(\vec{\omega}\operatorname{div}\vec{v}_o - \dfrac{\zeta}{c_1}\vec{v}_o\right)$

et $\vec{T}(\vec{v}_1,\vec{\omega}) - \mu\dfrac{\zeta}{c_2}\vec{\omega} = 2\mu\left(\dfrac{d\vec{v}_1}{dr} - \dfrac{\zeta}{c_2}\vec{v}_1\right) + \mu\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{rot}\,\vec{v}_1 + \dfrac{\zeta}{c_2}\vec{v}_1\right)$

Il en résulte que les conditions de radiation du théorème 1.11 sont entraînées par :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{S_R}\left|\frac{d\vec{v}_o}{dr} - \frac{\zeta}{c_1}\vec{v}_o\right|^2 dS = 0 = \lim_{R\to\infty}\int_{S_R}|\vec{\omega}\operatorname{div}\vec{v}_o - \frac{\zeta}{c_1}\vec{v}_o|^2\, dS$$

et
$$\lim_{R\to\infty}\left|\frac{d\vec{v}_1}{dr} - \frac{\zeta}{c_2}\vec{v}_1\right|^2 dS = 0 = \lim_{R\to\infty}\int\left|\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{rot}\,\vec{v}_1 + \frac{\zeta}{c_2}\vec{v}_1\right|^2 dS$$

On désignera par (C.R.2) les conditions : $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{S_R} \left| \frac{d\vec{v}_i}{dr} - \frac{\zeta}{c_{i+2}} \vec{v}_i \right|^2 dS = 0 (i= 0,1)$

et par (C.R.3) les deux autres.

En fait (C.R.3) est la plus importante compte tenu du théorème de représentation et du développement en série des champs de déplacements élastiques.

2.3. THEOREME DE REPRESENTATION ET DEVELOPPEMENT EN SERIE DES CHAMPS DE DEPLACEMENTS ELASTIQUES

Les équations de LAME relatives aux déplacements d'un milieu élastique, homogène et isotrope, de la forme $\vec{u}\,(x, y, z)\, e^{ikt}$ peuvent s'écrire :

(2.15) $$(\lambda + 2\mu) \text{ grad div } \vec{u} - \mu\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u} + K^2 \vec{u} = \vec{0} \quad (\lambda, \mu > 0)$$

ce qui équivaut au système :

(2.16) $$\begin{cases} \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ \text{grad div } \vec{u}_1 + \tau^2 \vec{u}_1 = 0 \quad (a) \quad : \frac{1}{\tau} 2 = \frac{\lambda + 2\mu}{K^2} \\ \text{rot rot } \vec{u}_2 - \sigma^2 \vec{u}_2 = 0 \quad (b) \quad : \frac{1}{\sigma} 2 = \frac{\mu}{k^2} \end{cases}$$

Les champs de déplacements diffractés par des obstacles bornés seront représentés par des champs de vecteurs (à composantes complexes) $\vec{u}_1\,(x)$, $\vec{u}_2\,(x)$ vérifiant le système (1.2) ainsi que les conditions de radiation :

C. R. 3. $$\begin{cases} (a) \quad \lim\limits_{R\to\infty} \iint_{S(x,R)} |\vec{e}_r \text{ div } \vec{u}_1 - i\,\tau\, \vec{u}_1|^2\, dS = 0 \\ (b) \quad \lim\limits_{R\to\infty} \iint_{S(x,R)} |\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u}_2 + i\,\sigma\, \vec{u}_2|^2\, dS = 0 \end{cases}$$

où $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire de la direction radiale.

Dans ce qui suit, on s'intéressera particulièrement aux champs $\vec{u}_1(x)$ et on mentionnera les résultats relatifs à $\vec{u}_2(x)$ (cf. WILCOX [1]).

I - LE THEOREME DE REPRESENTATION.

Définitions

(I) *Le champ de vecteurs* $\vec{u}_1(x)$ *est appelé fonction d'onde longitudinale dans un domaine* D *s'il y est défini , de classe* C^2 *et y vérifie*

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{u}_1 + \tau^2\ \vec{u}_1 = \vec{0}$$

(II) *Un domaine extérieur* B_e *est un domaine dont tous les points sont extérieurs à une surface* S *fermée, bornée.*

(III) *Soit* B_e *un domaine extérieur. Un champ de vecteurs est une fonction d'onde longitudinale rayonnante pour* B_e *, si c'est une fonction d'onde longitudinale pour* B_e *et si elle satisfait, en outre, à* C.R.3. (a).

Théorème de représentation

Soit $\vec{u}_1(x)$ *une fonction d'onde longitudinale rayonnante, relative à un domaine extérieur* B_e *, limité par une surface régulière, bornée* (B), $\vec{u}_1(x)$ *étant de classe* C^2 *dans* B_e *. On a :*

$$\vec{u}_1(x) = \frac{1}{4\Pi} \iint_B \{\overrightarrow{\text{grad}}_y \left(\frac{e^{i\tau\rho}}{\rho}\right)(\vec{u}_1.\vec{n}) - \frac{e^{i\tau\rho}}{\rho}\ \vec{n}\ \text{div}_y\ \vec{u}_1 - (\vec{u}_1 \wedge \vec{n}) \wedge \overrightarrow{\text{grad}}_y \frac{e^{i\tau\rho}}{\rho}\}\ dS$$

où $\rho = |\vec{x} - \vec{y}|$, $\vec{n}$ *normale extérieure à* B *au point* y .

La preuve de ce théorème repose sur celui de la divergence et sur les deux lemmes suivants.

Lemme 1.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ *deux champs de vecteurs de classe* C^1 *et* C^2 *respectivement dans un domaine* D , *de frontière* ∂D *satisfaisant aux hypothèses du théorème de la divergence* (D *fermé, borné,* ∂D *régulière).*

On a :

$$\iiint_D (\vec{u}.\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{v} + \text{div}\ \vec{u}.\text{div}\ \vec{v})\ dV = \iint_{\partial D} \vec{u}.\vec{n}\ dS \tag{2.17}$$

<u>*Corollaire*</u> : *Si* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *sont de classe* C^2 , *on a (dans les hypothèses du lemme 1) la formule de Green :*

$$\iiint_D (\vec{u}.\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{v} - \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{u})\ dV = \iint_{\partial D} (\vec{u}\ \text{div}\ \vec{v} - \vec{v}\ \text{div}\ \vec{u}) . \vec{n}\ dS \tag{2.18}$$

où $\vec{n}$ est la normale à ∂D dirigée vers l'extérieur de D .

<u>*Lemme 2.*</u>

Soient $\vec{u}_1(x)$ *une fonction d'onde longitudinale rayonnante pour un domaine extérieur arbitraire* B_e . *On a :*

$$\iint_\Omega |\vec{u}_1(x)|^2\ d\Omega = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

quand $r \longrightarrow \infty$

$$\iint_\Omega |\text{div}\ \vec{u}_1(x)|^2\ d\Omega = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

où Ω *est la sphère unité,* $d\Omega$ *son élément de surface et* $\vec{r}$ *un vecteur de position du point* x .

<u>*Preuve*</u> : C.R.3.(a) s'écrit

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{S(x,R)} \left[|\text{div}\ \vec{u}_1|^2 + \tau^2\ |\vec{u}_1|^2 - 2\tau\ \ \text{Im}\ (\bar{\vec{u}}_1.\vec{e}_r\ \text{div}\ \vec{u}_1\right]\ R^2\ d\Omega = 0$$

L'intégrale portant sur le troisième terme se transforme en utilisant l'identité (2.18) appliquée à $\bar{\vec{u}}_1$ et $\vec{u}_1$, étendue au domaine D_R borné par ∂D et une sphère $S(x,R)$ de rayon suffisamment grand pour que ∂D lui soit intérieure.

On obtient, puisque $\bar{\vec{u}}_1$ vérifie (2.16) , τ étant réel,

$$Im \iint_{S(x,R)} \bar{\vec{u}}_1.e_r\ \text{div}\ u_1\ d\ S = Im \iint_{\partial D} \vec{n}.\bar{\vec{u}}_1\ \text{div}\ u_1\ dS\ .$$

On a donc :

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{r=R} \left[|\mathrm{div}\ \vec{u}_1|^2 + \tau^2\ |\vec{u}_1|^2\right] R^2\ d\Omega = \ 2\ \tau\ \mathrm{Im} \left[\iint_{\partial D} \vec{n}.\bar{\vec{u}}_1\ \mathrm{div}\ \vec{u}_1\ dS\right]$$

d'où le résultat.

Remarques

1) Si l'on avait supposé $\mathrm{Im}\ \tau > 0$, on aurait obtenu, en modifiant légèrement les calculs (car $\vec{u}_1$ vérifie $\mathrm{grad\ div}\ \vec{u}_1 + \vec{\tau}^2\ \bar{\vec{u}}_1 = 0$) les intégrales

$$\iiint_D |\mathrm{div}\ \vec{u}_1|^2\ dV \text{ et } \iiint_D |\vec{u}_1|^2\ dV\ , \quad \text{sont convergeantes.}$$

2) En supposant que C.R.3 (a) est vérifiée pour un seul centre O ,

on voit que :

$$(\text{C.R.5 (a)} \Longrightarrow \iint_\Omega |\vec{u}_1|^2\ d\Omega = 0\ (\frac{1}{r^2})\quad \text{où}\quad r = |\vec{x}|\ ,$$

3) Pour les fonctions d'onde transversales rayonnantes $\vec{u}_2$ on a :

$$\iint_\Omega |\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_2|^2\ d\Omega = 0\ (\frac{1}{r^2})\quad \text{et} \quad \iint_\Omega |\vec{u}_2|^2\ d\Omega = 0\ (\frac{1}{r^2})\ \text{quand}\ r \to \infty,$$

en vertu de :

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{S(x;R)} \left[|\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_2|^2 + \sigma^2\ |\vec{u}_2|^2\right] dS = 2\ \sigma\ \mathrm{Im}\ (\iint_{\partial D} \vec{n}.(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \bar{\vec{u}}_2 \wedge \vec{u}_2)\ dS$$

qui admet, en corollaire, $\displaystyle\iint_\Omega |\vec{u}_2|^2\ d\Omega = 0\ (\frac{1}{r^2})$ où $r = |\vec{x}|$

Preuve du théorème de représentation :

On applique l'identité (2.18) aux champs de vecteurs $\vec{u}_1(x)$ et $\vec{v}(x) = \frac{e^{i\tau\rho}}{4\Pi\rho}\ \vec{w}$ (où $\rho = |x-x_o|$ et $\vec{w}$ est un vecteur fixé), et à la région $D(R,\varepsilon)$

bornée par (B) et deux sphères de centre x_o et de rayons respectifs R et ε (celle de rayon ε étant inférieure au domaine D_R du lemme 2).

$\vec{v}(x)$ vérifie : $\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{v} + \tau^2\ \vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \left(\frac{e^{i\tau\rho}}{4\Pi\rho}\ \vec{w}\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\ \left(\text{grad}\ \frac{e^{i\tau\rho}}{4\Pi\rho} \wedge \vec{w}\right)$

Ceci étant, (1.4) donne :

$$(2.19)\qquad \iiint_{D(R,\varepsilon)} \vec{u}_1.\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \left(\frac{e^{i\tau\rho}}{4\Pi\rho}\ \vec{w}\right) dV = \iiint_{B+S_R+S_\varepsilon} \left[\vec{u}_1.\vec{n}\ \text{div}\ \left(\frac{e^{i\tau\rho}}{4\Pi\rho}\ \vec{w}\right) - \frac{e^{i\tau\rho}}{4\Pi\rho}\ \vec{w}.\vec{n}\ \text{div}\ \vec{u}_1\right] dS$$

($\vec{n}$ normale extérieure à $D(D;\varepsilon)$)

Comme :

$$\vec{u}_1.\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v} = \text{div}\ (\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v} \wedge \vec{u}_1) + \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_1.\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v}\ ,\quad \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_1 = \vec{0}$$

(de 2.16a) , on a :

$$\iiint_{D(R,\varepsilon)} \vec{u}_1.\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \left(\frac{e^{i\tau\rho}}{4\Pi\rho}\ \vec{w}\right) dV = \iint_{B+S_R+S_\varepsilon} \left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \frac{e^{i\tau\rho}}{4\Pi\rho}\ \vec{w}\right).(\vec{u}_1 \wedge \vec{n})\ dS$$

On obtient donc, en définitive :

$$(2.20)\quad 0 = \iiint_{B+S_R+S_\varepsilon} \left[\vec{u}_1.\vec{n}).(\overrightarrow{\text{grad}}\ \frac{e^{i\tau\rho}}{4\Pi\rho}\ .\ \vec{w}) - \frac{e^{i\tau\rho}}{4\Pi\rho}\ \vec{w}.\vec{n}\ \text{div}\ \vec{u}_1 - \left(\text{grad}\ \frac{e^{i\tau\rho}}{4\Pi\rho} \wedge \vec{w}\right).(\vec{u}_1 \wedge \vec{n})\right] dS$$

L'intégrale étendue à S_ε tend vers $\vec{u}_1(x_o).\vec{w}$ quand $\varepsilon \to +0$, puisque $\vec{u}_1$ est continue au point x_o , l'intégrale étendue à S_R tend vers zéro quand $R \to \infty$ d'après le lemme 2, l'inégalité de Schwarz et C.R.3.(a).

Revenant à (2.20), on obtient, $\vec{w}$ étant un vecteur constant arbitraire (et en remarquant que, dans (2.20) pour l'intégrale étendue à B, $\vec{n}$ est dirigé vers B_i) :

(2.21) $$\vec{u}\,(x_o) = \frac{1}{4\Pi} \iint \left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}_x \frac{e^{i\tau\rho}}{\rho} \times (\vec{u}_1.\vec{n}) - \frac{e^{i\tau\rho}}{\rho}\,\vec{n}\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 - (\vec{u}_1 \wedge \vec{n}, \wedge\,\mathrm{grad}\,\frac{e^{i\tau\rho}}{\rho}\right] dS$$

où $\vec{n}$ normale à B dirigée vers (B_e).

Remarque importante

Le fait que l'intégrale étendue à S_R *tend vers zéro avec* $\frac{1}{R}$ *est également une conséquence de* C.R.1. *Autrement dit,* C.R.1 *implique le théorème de représentation.*

et par conséquent, le

II - THEOREME DE DEVELOPPEMENT.

Soit $\vec{u}_1(x)$ *une fonction d'onde longitudinale rayonnante pour une région* $r > c$ (c *constante*).

$\vec{u}_1(x)$ *admet le développement :*

(2.22) $$\vec{u}_1(x) = \frac{e^{i\tau r}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{a}_n(\theta,\varphi)}{r^n}$$

(*où* r, θ , φ *sont des coordonnées sphériques du point* x) *valable pour* $r > c$, *absolument et uniformément convergent en* θ , φ *dans toute région* $r \geq c + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

La série peut être différentiée terme à terme en r , θ , φ *indéfiniment, les séries résultantes convergeant aussi absolument et uniformément en* θ *et* φ .

Preuve

Comme $\vec{u}_1(x)$ satisfait, dans toute région $r > c_o > c$, aux conditions du théorème de représentation, on a :

$$\vec{u}_1(x) = \frac{c_o^2}{4\Pi} \iint_\Omega \Big[(\vec{u}_1(x_o).\vec{e}_{r_o}) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{e^{i\tau\rho}}{\rho} \right) . \frac{\vec{x}_o - \vec{x}_o}{\rho} - \vec{e}_{r_o} \operatorname{div} \vec{u}_1(x_o) . \frac{e^{i\tau\rho}}{\rho}$$

$$-(\vec{u}_1(x_o) \wedge \vec{e}_{r_o}) \wedge \frac{\vec{x}_o - \vec{x}}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{e^{i\tau\rho}}{\rho} \right) \Big] d\Omega$$

où $\vec{x}_o = (c_o , \theta_o , \varphi_o)$, $\vec{x} = (r, \theta, \varphi)$

$\rho = |\vec{x} - \vec{x}_o| = (c_o^2 - 2 r c_o \cos \chi + r^2)^{1/2}$, $\cos \chi = \cos\theta \cos\theta_o + \sin\theta \sin\theta_o \cos (\varphi - \varphi_o)$

$d\Omega = \sin\theta_o \, d\theta_o \, d\varphi_o$.

$\vec{u}_1(x)$ est donc la somme de trois intégrales de la forme :

$$\vec{I}_1(r,\theta,\varphi) = \iint_\Omega \frac{e^{i\tau\rho}}{\rho} \vec{F}(\omega) \, d\Omega$$

$$\vec{I}_2(r,\theta,\varphi) = \iint_\Omega \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{e^{i\tau\rho}}{\rho} \right) \vec{G}(\omega) \wedge (\vec{x}_o - \vec{x}) \, d\Omega$$

$$\vec{I}_3(r,\theta,\varphi) = \iint_\Omega \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{e^{i\tau\rho}}{\rho} \right) H(\omega) \, (\vec{x}_o - \vec{x}) \, d\Omega$$

où $\vec{F}(\omega)$, $\vec{G}(\omega)$ sont des champs de vecteurs de classe C^1 sur Ω et $H(\omega)$ une fonction à valeurs complexes définie sur Ω et de classe C^1 .

On étudie $\vec{I}_1$ ($\vec{I}_2$ et $\vec{I}_3$, de structure comparable à celle de $\vec{I}_1$ s'étudieraient de façon identique).

Soit $J(r,\theta,\varphi)$ l'une des composantes de $\vec{I}_1$ sur un trièdre trirectangle donné. Elle est de la forme :

$$J(r,\theta,\varphi) = \iint_\Omega \frac{e^{i\tau\rho}}{\rho} g(\omega) \, d\Omega$$

où $g(w)$ est de classe C^1 sur Ω . On pose $w = \frac{1}{r}$ et

$$f(w) = \frac{e^{i\tau(\rho - r)}}{\rho} = w \frac{\exp \left[ic((1-2 w c_o \cos\chi + 2 w^2 c_o^2)^{1/2} - 1)/w \right]}{(1 - 2 w c_o \cos\chi + w^2 c_o^2)^{1/2}}$$

La racine carrée désignant la détermination qui vaut +1 pour $w = 0$. Comme $1 - 2\, w\, c_o \cos\chi + w^2 c_o^2 = (1 - w\, c_o\, e^{i\chi})\,(1 - w_o\, c_o\, e \quad)$ on voit que $f\,(w)$ est analytique pour $w \neq \frac{e^{\pm i\chi}}{c_o}$. En particulier, on peut choisir une détermination de $f(w)$ analytique et uniforme dans $|w| < \frac{1}{c_o}$. Si $f(w)$ est alors multipliée par $g(w)$ et le produit obtenu intégré sur Ω , la fonction de w qui en résulte, $J\, e^{-i\tau r}$, est encore analytique dans $|w| < \frac{1}{c_o}$. $J\, e^{-i\tau r}$ admet donc un développement en série entière suivant les puissances de $w = \frac{1}{r}$ qui converge dans $|w| < \frac{1}{c_o}$, le terme constant étant nul puisque $f(w) = 0$ pour $w = 0$.

Ainsi

$$J\,(r,\theta,\psi) = \frac{e^{i\tau r}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(\theta,\psi)}{r^n} \quad , \; r > c_o$$

En outre, il est bien connu que J converge absolument et uniformément dans tout disque $|w| < \frac{1}{c_o + \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, intérieur à son disque de convergence et qu'elle y est indéfiniment différentiable terme à terme par rapport à w (ce qui entraîne que J l'est par rapport à r).

La convergence uniforme par rapport à θ et ψ s'établit en majorant par une série convergente indépendante de θ et ψ

$$\text{p.ex. } |J| \leq \iint_{\Omega} \frac{1}{r-c_o} \;|\, g(\omega)\; d\Omega| = \frac{k}{r} \cdot \frac{1}{1-c_{o/r}}$$

La légitimité de la différentiation terme à terme par rapport à θ et ψ s'établit comme suit :

On a

$$\frac{\partial J}{\partial \phi} = \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{e^{i\tau\rho}}{\rho}\right) g(\omega)\; d\omega$$

et $\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{e^{i\tau(\rho-r)}}{\rho}\right) = \frac{\partial\rho}{\partial\psi} \cdot \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{e^{i\tau(\rho-r)}}{\rho}\right)$ est encore analytique dans $|w| < \frac{1}{c_o}$

donc $\frac{\partial J}{\partial\psi} = \frac{e^{i\tau r}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n(\theta,\psi)}{r^n}$ qui possède toutes les propriétés de convergence de J.

D'autre part, à l'aide de la formule de Cauchy qui détermine d_n et e_n, on vérifie classiquement que $e_n = \frac{\partial d_n}{\partial \psi}$. En raisonnant de façon analogue pour θ, on obtient en définitive pour $\vec{I}_1$ un développement de la forme

$$\vec{I}_1(r,\theta,\psi) = \frac{e^{i\tau r}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{f}_n(\theta,\psi)}{r^n}$$

où la série converge uniformément dans $r \geqslant c_o + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$; comme $c_o > c$ est arbitraire ainsi que $\varepsilon > 0$, la convergence a lieu dans $r > c$, uniformément dans $r \geqslant c + \varepsilon \geqslant 0$.

Des résultats analogues étant valables pour $\vec{I}_2$ et $\vec{I}_3$ le théorème de développement s'en déduit.

III - CONSEQUENCES DU THEOREME DE DEVELOPPEMENT.

<u>*Corollaire 1*</u>

Toute fonction d'onde longitudinale rayonnante $\vec{u}_1(x)$ *admet la forme asymptotique :*

$$\vec{u}_1(x) \approx \frac{e^{i\tau r}}{r} \vec{a}_o(\theta,\psi)$$

où le champ de vecteurs $\vec{a}_o(\theta,\psi)$ (appelé modèle de rayonnement de $\vec{u}_1(x)$ est normal à toute sphère r = cstte , c'est-à-dire

$$\vec{a}_o = a_o^1 \vec{e}_r .$$

<u>*Corollaire 2*</u>

Les composantes du vecteur

$$\vec{a}_n(\theta,\psi) = a_n^1 \vec{e}_r + a^2 \vec{e}_\theta + a_n^3 \vec{e}_\psi , \qquad n > 0$$

dans le développement de $\vec{u}_1(x)$ *, sont déterminées par* a_o^1 *grâce aux formules de récurrence :*

$$i\,\tau\, a_n^2 = \frac{\partial}{\partial\theta}\, a_{n-1}^1 + (n-1)\, a_{n-1}^2$$

$$i\,\tau\, a_n^3 = \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\psi}\, a_{n-1}^1 + (n-1)\, a_{n-1}^3$$

$$2\, i\,\tau\, n\, a_n^1 = (n+1)\,(n-2)\, a_{n-1}^1 + 2\,\vec{D}.\vec{a}_{n-1} + D_o\, a_{n-1}^1$$

où $D_o = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\ \frac{\partial^2}{\partial\psi^2}$ *est l'opérateur de* BELTRAMI *pour la sphère et* $\vec{D}$ *est un opérateur linéaire du 1er ordre défini par :*

$$\vec{D}.\vec{F} = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\,(F_2\,\sin\theta) + \frac{\partial F_3}{\partial\psi}\right] \quad \text{si} \quad \vec{F} = F_1\,\vec{e}_r + F_2\,\vec{e}_\theta + F_3\,\vec{e}_\psi .$$

Preuve des corollaires 1 et 2

La forme asymptotique de $\vec{u}_1(x)$ pour $r \to \infty$ est évidente. Le reste de la démonstation du corollaire 1 ($\vec{a}_o$ purement radial) et celle du corollaire 2 découlent du fait que le développement (2.22) doit vérifier l'équation : $\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{u}_1 + \tau^2\,\vec{u}_1 = \vec{0}$; toutes les opérations étant justifiées par les propriétés du développement en série.

Le caractère purement radial de $\vec{a}_o$ s'obtient en exprimant, pour (2.22) que $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_1 = 0$.

On sait que, si $\vec{F} = F_1\,\vec{e}_r + F_2\,\vec{e}_\theta + F_3\,\vec{e}_\psi$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{F} = \frac{\vec{e}_r}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\,(\sin\theta\ \ F_3) - \frac{\partial\, F_2}{\partial\psi}\right)\right] + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial F^1}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial r}\,(r\, F_3)\right]$$
$$+ \frac{\vec{e}_\psi}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\,(r\, F_2) - \frac{\partial F_1}{\partial\theta}\right] .$$

Il en résulte, puisque $\vec{u}_1 = \frac{e^{i\tau r}}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n^1\,\vec{e}_r + a_n^2\,\vec{e}_\theta + a_n^3\,\vec{e}_\psi\right)\frac{1}{r^n}$

que : $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_1 = U\,\vec{e}_r + V\,\vec{e}_\theta + W\,\vec{e}_\psi$ où

$$U = \frac{e^{i\tau r}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \left[\frac{1}{\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta . a_n^3) - \frac{\partial a_n^2}{\partial\psi} \right] \right.$$

$$V = \frac{e^{i\tau r}}{r} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial a_n^1}{\partial\psi} - i\tau a_n^3 \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^3}{r^{n+1}} \right]$$

$$W = \frac{e^{i\tau r}}{r} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \left[- \frac{\partial a_n^1}{\partial\theta} + i\tau r a_n^2 \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n^2}{r^{n+1}} \right]$$

Dans ces trois expressions, les coefficients des diverses puissances de $1/r$ doivent s'annuler.

Pour les termes constants, on obtient

$a_o^3 = 0 = a_o^2$ ce qui prouve le corollaire 1 .

Quant aux coefficients de $\frac{1}{r^{n+1}}$, $n \geqslant 0$ ils donnent :

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (a_n^3 \sin\theta) - \frac{\partial a_n^2}{\partial\psi} \right] = 0$$

$$(2.23)_n \quad \text{(b)} \quad \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial a_n^1}{\partial\psi} - i\tau a_{n+1}^3 + r a_n^3 = 0$$

$$\text{(c)} \quad \frac{\partial a_n^1}{\partial\theta} - i\tau a_{n+1}^2 + n a_n^2 = 0$$

or $(2.23)_n$(a), (b), (c) entraînent $\frac{1}{\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (a_{n+1}^3 \sin\theta) - \frac{\partial a_{n+1}^2}{\partial\psi} \right]$

Autrement dit, seules subsistent les équations $(2.23)_n$(b) et (c) qui déterminent a_{n+1}^3 et a_{n+1}^2 si a_n^1 est connu.

L'équation manquante va être obtenue (en même temps que les résultats précédents) en exprimant que $\vec{u}_1$ vérifie $\text{grad div } \vec{u}_1 + \tau^2 \vec{u}_1 = \vec{0}$.

Or :

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_1) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (F_2 \sin\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{F_3}{\partial\psi}$$

et

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial\theta} + \vec{e}_\psi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial\psi}$$

On obtient tout d'abord :

$$\operatorname{div} \vec{u}_1 = \frac{e^{i\tau r}}{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\tau a_n^1}{r^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left[- (n-2)\, a_{n-1}^1 + \vec{D}.\vec{a}_{n-1} \right] \right.$$

puis

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}_1 + \tau^2 \vec{u}_1 = \frac{e^{i\tau r}}{r} (R\, \vec{e}_r + \quad \vec{e}_\theta + \Phi\, \vec{e}_\varphi)$$

où

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\tau}{r^n} \left[-(n-1)a_{n-1}^1 + \vec{D}.\vec{a}_{n-1} \right] - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left[i\tau(n-1)a_{n-1}^1 - n(n-3)a_{n-2}^1 + n\, \vec{D}.\vec{a}_{n-2} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \tau^2 \frac{a_n^2}{r^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i\tau}{r^n} \frac{\partial a_{n-1}^1}{\partial \theta} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left[- (n-3) \frac{\partial a_{n-2}^1}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{D}.\vec{a}_{n-2}) \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \tau^2 \frac{a_n^3}{r^n} + \frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\tau}{r^n} \frac{\partial a_{n-1}^1}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left[- (n-3) \frac{\partial a_{n-2}^1}{\partial \varphi} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{D}.\vec{a}_{n-2}) \right] .$$

Il suffit d'annuler les coefficients des diverses puissances de $\frac{1}{r}$.

L'annulation des termes constants redonne $a_o^2 = a_o^3 = 0$, celle des coefficients de $\frac{1}{r}$: $\vec{D}.\vec{a}_o = 0$ (identiquement vérifié)

$$\tau^2 a_1^2 + i\tau \frac{\partial a_o^1}{\partial \theta} = 0$$

(On retrouve $(2.23)_o$)

$$\tau^2 a_1^3 + \frac{i\tau}{\sin \theta} \frac{\partial a_o^1}{\partial \varphi} = 0$$

plus généralement, celle des coefficients de $\frac{1}{r^{n+1}}$ pour $n \geq 1$ entraîne :

$$\text{(a)} \quad - 2\, i\, \tau\, n\, a_n^1 + (n + 1)\, (n - 2)\, a_{n-1}^1 + \vec{D}.(i\, \tau\, \vec{a}_n - (n + 1)\, \vec{a}_{n-1}) = 0$$

$$(2.24)_n \text{(b)} \quad \tau^2 a_{n+1}^2 + i\tau \frac{\partial a_n^1}{\partial \theta} - (n - 2) \frac{\partial a_{n-1}^1}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{D}.\vec{a}_{n-1}) = 0$$

$$\text{(c)} \quad \tau^2 a_{n+1}^3 + \frac{i\tau}{\sin \theta} \frac{\partial a_n^1}{\partial \varphi} - \frac{(n-2)}{\sin \theta} + \frac{\partial a_{n-1}^1}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{D}.\vec{a}_{n-1}) = 0$$

$(2.23_n.a)$ détermine a_n^1 car a_n^2 et a_n^3 sont déjà déterminés en fonction de a_{n-1}^1 par $(2.23)_{n-1}$ (b) et $(2.23)_{n-1}$(c). On va établir par récurrence que $(2.23_n.b)$ et $(2.23_n(c)$ sont équivalents à $(2.22)_n$.$(2.22_n.a)$ se vérifie immédiatement et pour obtenir $(2.22_n$ b) et $(2.22_n$ c), il suffit d'établir

$$(2.24)_n \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[\vec{D}.\vec{a}_{n-1} - (n-2)\, a_{n-1}^1\right] = i\,\tau\, n\, a_n^2 \\[2ex] \dfrac{1}{\sin\theta}\, \dfrac{\partial}{\partial\phi}\left[\vec{D}.\vec{a}_{n-1} - (n-2)\, a_{n-1}^1\right] = i\,\tau\, n\, a_n^3 \end{cases}$$

Pour $n = 1$, ces formules se réduisent à $(2.22)_o$. On peut donc supposer $(2.24)_p$ vérifié pour $0 \leq P \leq n-1$ ce qui implique $(2.22)_p$.b et $(2.22)_p$.c pour $0 \leq P \leq n-1$;

Or,

$$-\tau^2\, n\, a_n^2 = n\left[i\tau\,\frac{\partial\, a_{n-1}^1}{\partial\theta} - (n-3)\,\frac{\partial a_{n-2}^1}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\theta}\,(\vec{D}.\vec{a}_{n-2}\ )\right]$$

$$= n\left[i\tau\,\frac{\partial\, a_{n-1}^1}{\partial\theta} + (n-1)\, i\tau\, a_{n-1}^2\right] \quad \text{d'après} \quad (\qquad)_{n-1}$$

donc : $$i\,\tau\, n\, a_n^2 = n\left[\frac{\partial a_{n-1}^1}{\partial\theta} + (n-1)\, a_{n-1}^2\right]$$

ce qui établit $(2.22_n.b)$. On établirait de même $(2.22_n.c)$. Le corollaire 2 est prouvé.

Corollaire 3

C.R.1 impliquant le théorème de développement

C.R.1 implique C.R.2 à C.R.5 .

Il en résulte que pour une fonction d'onde longitudinale rayonnante dans un domaine extérieur B_e les conditions de radiation C.R.1 à C.R.5 sont équivalentes.

Preuve

On a vu que :

$$\operatorname{div} \vec{u}_1 = \frac{e^{i\tau r}}{r}\left[i\,\tau\, a_o^1 + \frac{1}{r}(i\,\tau\, a_1^1 + a_o^1) + 0\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

$$\vec{u}_1 = \frac{e^{i\tau r}}{r}\left[a_o^1\, \vec{e}_r + \frac{1}{r}\ a_1^1 + \vec{0}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

d'où

$$\vec{e}_r \operatorname{div} \vec{u}_1 - i\,\tau\, \vec{u}_1 = \frac{e^{i\tau r}}{r^2}\left[- i\tau\,(a_1^2\, \vec{e}_\theta + a_1^3\, \vec{e}_\varphi) + \vec{e}_r\, a_o^1 + \vec{0}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

ce qui entraîne bien C.R.2, C.R.3 et C.R.4 et comme (cas particulier C.R.5). En outre de l'expression de div $\vec{u}_1$, on déduit immédiatement le

Corollaire 4

$\vec{u}_1(x)$ étant une fonction d'onde (vectorielle) longitudinale rayonnante pour un domaine extérieur B_e , la fonction

$$\Theta = \operatorname{div} \vec{u}_1 \qquad \textit{vérifie}$$

$$(2.25)\quad \Delta\Theta + \tau^2\,\Theta = 0 \ \text{ dans } (B_e) \text{ et } \lim_{r\to\infty} \iint_{S(x,r)} \left| \frac{\partial\Theta}{\partial r} - i\,\tau\Theta \right|^2 dS = 0$$

En outre $\Theta_o(\vec{r}) = i\,\tau\, a_o^1$ *est son modèle de rayonnement dans son développement*

$$(2.26)\qquad \frac{e^{i\tau r}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_n}{r^n}(\theta,\varphi)$$

il résulte des conditions (2.25) que Θ (x) admet le développement (2.26) dont les propriétés sont celles du développement de $\vec{u}_1$. Par ailleurs

$$\vec{e}_r \operatorname{div} \vec{u}_1 - i\,\tau\, \vec{u}_1 = \frac{i}{\tau}\, \vec{e}_r\left(\frac{\partial}{\partial r} - i\,\tau\ \right) + \frac{i}{\tau r}\, \vec{e}_\theta\, \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\tau r \sin\theta}\, \vec{e}_\varphi\, \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$= \vec{e}_r\,\Theta + \frac{i}{\tau}\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\ \Theta$$

Il en résulte que $\lim\limits_{R\to\infty} \iint_{\Omega} \frac{1}{r}\ (\vec{e}_r \operatorname{div} \vec{u}_1 - i\,\tau\, \vec{u}_1)\, r^2 \sin\theta\, d\,\theta\ \ d\,\varphi\ = 0$

c'est-à-dire (2.25) entraîne C.R.2 donc lui est équivalente et d'après le corollaire précédent :

Corollaire 5

Si div $\vec{u}_1$ *est une fonction d'onde de Helmholtz rayonnante,* $\vec{u}_1$ *est une fonction d'onde longitudinale rayonnante et réciproquement.*

Autrement dit :

C.R.6 : $\lim\limits_{R\to\infty} \iint_{S(x,R)} \left|\frac{\partial}{\partial r} \operatorname{div} \vec{u}_1 - i\,\tau\,\vec{u}_1\right|^2 dS = 0$ est équivalente à C.R.1,..., C.R.5 .

On retrouve ici une condition utilisée par M. ROSEAU [1] .

On ne peut faire sans parler des conditions utilisées par KUPRADZE.

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial r} - i\,\tau\,\vec{u}_1\right) = 0\ , \quad |\vec{u}_1| = 0\left(\frac{1}{r}\right) \text{ quand } r \to \infty$$

Elles sont évidemment conséquences du théorème de développement. Or, il résulte de WILCOX [2] que ceci est équivalent à

$$\iint_{S(x,r)} \left[\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,\vec{u}_1) - i\,\tau\,r\,\vec{u}_1\right] dS = 0 \quad \forall\, x \text{ et } r > r_o(x)\ .$$

et cette dernière condition est (on l'a vu p.   ) équivalente à C.R.1 . D'ailleurs le théorème de développement donne aussi :

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{r=R} \left|\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial r} - i\,\tau\,\vec{u}_1\right|^2 dS = 0 \quad .$$

Remarque

Les résultats de WILCOX [1] relatifs aux champs électromagnétiques (qui sont pour ce travail des fonctions d'ondes transversales rayonnantes) $\vec{u}_2$ c'est-à-dire tels que :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_2 - \sigma^2\,\vec{u}_2 = \vec{0} \quad \text{et} \quad \lim_{R\to\infty} \iint_{r=R} \left|\vec{e}_r \wedge \text{rot}\ \vec{u}_2 + i\,\sigma\,\vec{u}_2\right|^2 dS = 0$$

sont d'abord l'existence d'un développement :

$$\vec{u}_2 = \frac{e^{i\sigma r}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{b}_n}{r^n} (\theta,\varphi) \quad \text{pour} \quad r > r_o$$

possédant des propriétés analogues à celles déjà vues.

En outre :

$$\vec{b}_o(\theta,\varphi) = b_o^2 \, \vec{e}_\theta + b_o^3 \, \vec{e}_\varphi$$

et $\vec{\Omega} = \text{rot}\, \vec{u}_2$ vérifie $\Delta\vec{\Omega} + \sigma^2 \vec{\Omega} = 0$ et $\lim \iint_{r=R} \left| \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial r} - i\,\sigma\,\vec{\Omega}\right|^2 dS = 0$

(on peut alors établir des corollaires analogues à 1, 2, 3, 4 et 5).

En particulier cela entraine :

$$\vec{\Omega} = \frac{e^{i\sigma r}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{\omega}_n}{r^n} \quad \text{où} \quad \vec{\omega}_o = i\sigma\,(b_o^2\, \vec{e}_\varphi - b_o^3\, \vec{e}_\theta\,)$$

d'où l'on déduit

$$\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u}_2 + i\,\sigma\, \vec{u}_2 = \vec{e}_r \wedge \Omega + \frac{i}{\sigma}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\Omega}$$

$$= \frac{i}{\sigma}\, \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial r} - i\,\sigma\,\Omega_2\right) - \frac{i}{\sigma}\, \vec{e}_\theta \left(\frac{\partial\Omega_3}{\partial r} - i\,\sigma\,\Omega_3\right)$$

$$\pm \frac{i}{\sigma r}\, \vec{e}_\varphi \left(\Omega_2^2 - \frac{\partial\Omega_1}{\partial\theta}\right) - \frac{i}{\sigma r}\, \vec{e}_\theta \left(\Omega_3 - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\Omega_1}{\partial\varphi}\right)$$

$$+ \frac{i}{\sigma\, r\, \sin\theta}\, \vec{e}_r \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta\,\Omega_3) - \frac{\partial\Omega_2}{\partial\varphi}\right]$$

$$= \frac{i}{\sigma}\, \vec{e}_r \wedge \left(\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial r} - i\,\sigma\,\vec{\Omega}\right) + \vec{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Autrement dit : pour une onde transversale rayonnante les conditions C.R.1.,..., C.R.5 et

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{S(x,R)} \left|\frac{\partial}{\partial r}\, \text{rot}\, \vec{u}_2 - i\,\sigma\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u}_2\right|^2 dS = 0$$

sont équivalentes.

Si l'on revient au problème initial, on a le résultat suivant :

Toute solution du système :

$$(2.16)\qquad \begin{array}{ll} \text{(a)} & \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 + \tau^2\,\vec{u}_1 = \vec{0} \\ \text{(b)} & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_2 - \sigma^2\,\vec{u}_2 = \vec{0} \end{array} \qquad \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

définie dans une région $r > c$ *et satisfaisant aux conditions de radiation :*

$$(\text{C.R.5})\ \lim_{R\to\infty} \iint_{r=R} |\vec{e}_r\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 - i\,\tau\,\vec{u}_1|^2\,dS = 0 = \lim_{R\to\infty} \iint_{r=R} |\,\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_2 + i\,\sigma\,\vec{u}_i|^2\,dS$$

admet le développement :

$$(2.27)\qquad \vec{u} = \frac{e^{i\tau r}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{a}_n}{r^n}(\theta,\varphi) + \frac{e^{i\sigma r}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{b}_n}{r^n}(\theta,\varphi)\ .$$

dont les propriétés sont celles déjà vues.

Corollaire 6

Si $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ *est solution du système* (2.16), *satisfaisant aux conditions de radiation (C.R.5 a) et (C.R.5.b) et si l'on pose :*

$$\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r) = 2\,\mu\,\Big(\frac{d\vec{u}_1}{dn} + \frac{d\vec{u}_2}{dn}\Big) + \lambda\,\vec{e}_r\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 + \mu\,\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_2$$

(contrainte dans la direction $\vec{e}_r$ *). On a :*

$$(\text{C.R.6})\qquad \lim_{R\to\infty} \iint_{r=R} |\vec{T}\,(\vec{u},\,\vec{e}_r) - i\tau(\lambda+2\mu)\,\vec{u}_1 - i\,\sigma\,\mu\,\vec{u}_2|^2\,dS = 0$$

Preuve :

On écrit :

$$\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r) - i\tau(\lambda+2\mu)\,\vec{u}_1 - i\sigma\,\mu\,\vec{u}_2$$

$$= 2\mu\Big(\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial r} - i\tau\,\vec{u}_1\Big) + 2\mu\,\Big(\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial r} - i\,\sigma\,\vec{u}_2\Big) + \lambda(\vec{e}_r\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 - i\,\tau\,\vec{u}_1)$$

$$+ \mu\,(\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_2 + i\,\sigma\,\vec{u}_2)$$

d'où le résultat, si l'on note que :

$$|\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r) - i\tau(\lambda+2\mu)\vec{u}_1 - i\sigma\vec{u}_2|^2 \leq 2\mu\left[\left|\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial r} - i\tau\vec{u}_1\right|^2 + \left|\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial r} - i\sigma\vec{u}_2\right|^2\right.$$

$$+ \lambda|\vec{e}_r \operatorname{div} u_1 - i\tau\vec{u}_1|^2$$

$$+ \mu|\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_2 + i\sigma\vec{u}_2|^2$$

et compte tenu des conditions de radiation vérifiées par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Remarques

Par contre (C.R.6) n'entraîne pas en général C.R.5 a et b et

On va établir un théorème d'unicité (pour un résultat, en étroite relation avec celui-ci, cf. KUPRADZE [1] avec des conditions moins générales).

Corollaire 7 (Théorème d'unicité)

Il existe au plus une solution $\vec{u}$ *de classe* C^2, *définie dans un domaine extérieur* D, *de frontière régulière* S, *telle que :*

a) $\vec{w} = \vec{u}_o + \vec{u}$ *où* $\vec{u}_o$ *est une solution donnée du système*

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\operatorname{div}\vec{u}_1 + \tau^2\vec{u}_1 = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_2 - \sigma^2\vec{u}_2 = \vec{0}$$
$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

et $\vec{u}$ *satisfait aux conditions de radiation :*

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{r=R} |\vec{e}_r \operatorname{div}\vec{u}_1 - i\tau\vec{u}_1|^2\, dS = 0$$

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{r=R} |\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_2 + i\sigma\vec{u}_2|^2\, dS = 0$$

b) *sur* S, *on ait l'une des trois conditions :*

α) $\vec{W} = \vec{0}$

β) $\vec{T}(\vec{W},\vec{n}) = 0$

γ) *sur une partie* S_1 *de* S : $\vec{W} = \vec{0}$

$$\vec{T}(\vec{W},\vec{n}) = \vec{0} \text{ sur } S_2 = S - S_1$$

<u>*Preuve*</u> :

Il suffit de montrer que $\vec{u}_o = \vec{0}$ entraîne $\vec{u} \equiv \vec{0}$ dans I

. On peut noter (ce qui est une autre façon d'établir le corollaire 4) que :

$$\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r) = 2\mu \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial r} + \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial r}\right) + \lambda \vec{e}_r \operatorname{div} \vec{u}_1 + \mu \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u}_2$$

$$= 2\mu \left[\tau \frac{e^{i\tau r}}{r} a_o^1 \vec{e}_r + i\sigma \frac{e^{i\sigma r}}{r} (b_o^2 \vec{e}_\theta + b_o^3 \vec{e}_\varphi) \right|$$

$$+ \lambda i\tau \frac{e^{i\tau r}}{r} a_o^1 \vec{e}_r + \mu \vec{e}_r \wedge i\sigma [\vec{e}_r \wedge (b_o^2 \vec{e}_\theta + b_o^3 \vec{e}_\varphi)] \frac{e^{i\sigma r}}{r}$$

$$+ \vec{\mathcal{F}}(\vec{u}, \vec{e}_r)$$

$$= i\tau \frac{e^{i\tau r}}{r} (\lambda+2\mu) a_o^1 \vec{e}_r + i\sigma \frac{e^{i\sigma r}}{r} \mu (b_o^2 \vec{e}_\theta + b_o^3 \vec{e}_\psi] + \vec{\mathcal{F}}(\vec{u},\vec{e}_r)$$

où $|\vec{\mathcal{F}}(\vec{u},\vec{e}_r)| = 0\left(\frac{1}{r^2}\right)$ quand $r \to \infty$.

Autrement dit,

$$\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r) = i\tau (\lambda+2\mu) \vec{u}_1 + i\sigma\mu \vec{a}_2 + \vec{\mathcal{F}}(r)$$

où
$$|\vec{\mathcal{F}}(r)| = 0\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \to \infty$$

D'autre part, si $\vec{U}(r,t)$ désigne le champ de vecteurs <u>réels</u> (de déplacement) à l'instant t , dans le milieu considéré, le théorème de l'énergie étendu au domaine D_R (de frontière formée par S et la surface d'une sphère $S(R)$ contenant S à son intérieur) donne, compte tenu des conditions sur S :

$$\frac{d}{dt}(K+E) = \iint_{S+S(R)} \vec{T}(\vec{U},\vec{n}) . \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \, dS = \iint_{S(R)} \vec{T}(\vec{U},\vec{e}_r) . \frac{\partial U}{\partial t} \, dS$$

où $\vec{n}$ désigne la normale extérieure à D_R , $K = \iint_{D_R} W\, dv$ l'énergie de déformation

$$W = \varepsilon_{ij} \quad \varepsilon_{ij} \qquad \text{et} \qquad E = \frac{1}{2} \iint_{D_R} \left|\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right|^2 dv \quad \text{l'énergie cinétique}$$

Les ébranlements considérés dépendant harmoniquement du temps, on a ici :

$\vec{U} = \frac{1}{2} (\vec{u}\, e^{ikt} + \bar{\vec{u}}\, e^{-ikt})$ où $\vec{u}$ est solution de (2.16a) et (2.16b) donc :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \frac{ik}{2} (\vec{u}\, e^{ikt} - \bar{\vec{u}}\, e^{-ikt}) ,$$

$$\vec{T}(\vec{U},\vec{e}_r) = \frac{1}{2} \left[\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r)\, e^{ikt} + \vec{T}(\bar{\vec{u}},\vec{e}_r)\, e^{-ikt}\right]$$

d'où

$$\vec{T}(\vec{U},\vec{e}_r).\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \frac{ik}{4}\left[\vec{T}(\bar{\vec{u}},\vec{e}_r).\vec{u} - \vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r).\bar{\vec{u}} + \vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r)\, \vec{u}\, e^{2ikt} - \vec{T}(\bar{\vec{u}},\vec{e}_r).\bar{\vec{u}}\, e^{-2ikt}\right]$$

qu'on peut écrire

$$\vec{T}(\vec{U},\vec{e}_r).\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \frac{ik}{4}\Big[(\vec{T}(\bar{\vec{u}},\vec{e}_r)+i\bar{\vec{v}}).\vec{u} - (\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r)-i\vec{v}).\bar{\vec{u}} + (\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r)-i\vec{v}).\vec{u}\, e^{2ikt}$$

$$-(\vec{T}(\bar{\vec{u}},\vec{e}_r) + i\bar{\vec{v}}).\bar{\vec{u}}\, e^{-2ikt}\Big] + \frac{K}{4}\left[\bar{\vec{v}}.\vec{u} + \vec{v}.\bar{\vec{u}} - \vec{v}.\vec{u}\, e^{2ikt} - \bar{\vec{v}}.\bar{\vec{u}}\, e^{-2ikt}\right]$$

avec

$$\vec{v} = \tau\ (\lambda+2\mu)\vec{u}_1 + \sigma\ \mu\ \vec{u}_2 \quad .$$

D'après le lemme 2 ($\iint_{r=R} |\vec{u}_i|^2\, dS$ borné quand $R \to \infty$) et le corollaire 4, on voit, en appliquant l'inégalité de Schwarz , que l'intégrale, étendue à S_R , du premier crochet tend vers zéro quand $R \to \infty$.

Le second terme de la somme vaut :

$$+ k\ \mathrm{Im}\ (\vec{u}\, e^{ikt}).\ \mathrm{Im}(\vec{v}\, e^{ikt})$$

soit, en décomposant $\vec{v}$ et $\vec{u}$ en parties réelles et imaginaires :

$$\vec{v} = \vec{v}' + i\,\vec{v}'' \ , \ \vec{u} = \vec{u}' + i\,\vec{u}''$$

$$\mathrm{Im}\,(\vec{u}\,e^{ikt}).\mathrm{Im}(\vec{v}\,e^{ikt}) = (\vec{v}'\sin kt + \vec{v}''\cos kt)(\vec{u}'\sin k\,t + \vec{u}''\cos k\,t)$$

or,

$$\vec{v} = \tau(\lambda+2\mu)\,\frac{e^{i\tau r}}{r}\;a_o^1\,(\theta,\psi)\,\vec{e}_r + \sigma\,\mu\,\frac{e^{i\sigma r}}{r}\,(b_o^2\,\vec{e}_\theta + b_o^3\;\vec{e}_\psi\,) + \vec{V}$$

$$\vec{u} = \frac{e^{i\tau r}}{r}\,a_o^1\,(\theta,\psi)\,\vec{e}_r + \frac{e^{i\sigma r}}{r}\,(b_o^2\,\vec{e}_\theta + b^3\,\vec{e}_\psi) + \vec{W}$$

où $|\vec{V}|$ et $|\vec{W}|$ sont $O\,(\frac{1}{r^2})$ quand $r \to \infty$.

On en déduit :

$$\mathrm{Im}\,(\vec{v}\,e^{ikt}) = \tau(\lambda+2\mu)\,\frac{1}{r}\;\left[a_o'^1\sin\,(kt+\tau r)\;a_o''^1\cos\,(kt+\tau r)\right]\;\vec{e}_r$$

$$+\,\sigma\,\mu.\,\frac{1}{r}\;\Big[(b_o'^2\,\vec{e}_\theta + b_o'^3\,\vec{e}_\psi)\,\sin\,(kt+\sigma r)+(b_o''^2\,\vec{e}_\theta + b_o''^3\,\vec{e}_\psi\,)$$

$$\times\cos\,(kt+\sigma r)\Big]$$

$$+\,\mathrm{Im}\,(\vec{V}\,e^{ikt})$$

et une inégalité analogue pour $\mathrm{Im}\,(\vec{u}\;\;e^{ikt})$.

On a donc

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{S(R)}\vec{T}(\vec{U},\vec{e}_r).\,\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\,dS = \lim_{R\to\infty} + k\iint_{S(R)}\mathrm{Im}(\vec{v}\,e^{ikt}).\mathrm{Im}(\vec{u}\,e^{ikt})\,dS$$

$$= \lim_{R\to\infty} + \Bigg\{k\int_0^{2\Pi}\!\!\int_0^{\Pi}\tau(\lambda+2\mu)\,\left[a_o'^1\sin\,(kt+\tau R)+a_o''^1\cos\,(kt+\tau R)\right]^2\sin\theta\,d\,\theta\,d\,\psi$$

$$+\,k\int_0^{2\Pi}\!\!\int_0^{\Pi}\sigma\,\mu\sum_{i=2}^{3}\left[b_o'^i\sin(\sigma R+kt)+b_o''^i\cos(\sigma R+kt)\right]^2\sin\theta\,d\,\theta\,d\,\psi\Bigg\}$$

En d'autres termes, pour R suffisamment grand $\frac{d}{dt}$ (K+E) a un signe constant.

Comme K et E sont fonctions périodiques de t , on a nécessairement $\frac{d}{dt}$ (K+E) = 0 .

Ou encore :

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{2\Pi}\int_0^{\Pi} \left[a'^{1}_{o} (\theta,\varphi) \sin(\tau R+kt) + a''^{1}_{o}(\theta,\varphi) \ \text{car} \ (\tau R+kt)\right]^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{2\Pi}\int_0^{\Pi} \left[b'^{i}_{o} (\theta,\varphi) \sin(\sigma R+kt) + b''^{i}_{o}(\theta,\psi) \ \text{car} \ (\sigma R+kt)\right]^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0$$

$(i = 2,\ 3)$.

ce qui entraîne $\int_0^{2\Pi}\int_0^{\Pi} (a'^{1}_{o})^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0$ donc $a'^{1} (\theta,\varphi) \equiv 0$,

puisque $a'^{1}_{o} (\theta,\varphi)$ est continue. De même $a''^{1}_{o} = b'^{2}_{o} = b''^{2}_{o} = b''^{3}_{o} = b''^{3}_{o} \equiv 0$ soit

$\vec{a}_o(\theta,\varphi) \equiv \vec{0}$ (et $\vec{b}_o (\theta,\varphi) \equiv \vec{0}$) ce qui entraîne, d'après le corollaire 2,

$\vec{a}_n(\theta,\varphi) \equiv \vec{0}$ $\forall\, n \geq 1$ et par conséquent $\vec{u}_1(r) \equiv \vec{0}$ à l'extérieur de toute sphère

$r = r_o$ contenant S à son intérieur.

Mais $\vec{u}_1(r)$ est analytique dans tout le domaine D d'après le théorème de représentation et s'y annule donc identiquement puisqu'elle est nulle dans un sous-domaine.

Pour une raison analogue, $\vec{b}_o(\theta,\varphi) \equiv \vec{0}$ entraîne $\vec{u}_2(r) \equiv \vec{0}$ dans D donc $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \equiv \vec{0}$ dans D .

Le théorème est donc établi.

2.4-ETUDE PARTICULIERE DU CAS PLAN

On considère le même problème qu'au début mais, cette fois, on recherche des solutions de la forme

$$\vec{u}\ (x_1,x_2,t)$$

On part donc du système(2.28) où $\vec{f}(x) = \vec{f}(x_1,x_2)$ et le domaine B_e est le complémentaire dans le plan $x_3 = 0$ d'un domaine borné (B_i) de frontière régulière (B) , $\vec{f}$ étant de support borné).

On se ramène à discuter l'unicité de

$$(2.28)\qquad \begin{cases} \vec{\Delta}^{*}\,\vec{u}(x_1,x_2) + k^2\,\vec{u}(x_1,x_2) = \vec{f}(x_1,x_2) \\ \vec{u}\big|_B = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{T}(\vec{u},\vec{n})\big|_B = \vec{0} \end{cases}$$

qui ne saurait avoir lieu, en général, sans hypothèse supplémentaire.

II - Moyennes circulaires.

Au vecteur $\vec{u}(x,t)$ on fait correspondre sa moyenne circulaire autour de x

$$(2.29)\qquad \vec{I}(\vec{u};x,r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \vec{u}(\vec{x} + r\vec{\xi},t)\,d\theta \qquad (\vec{\xi} = (\cos\theta,\ \sin\theta)\ )\ ;$$

on sait que, si $\vec{u}$ est de classe C^2 en (x_1,x_2)

$$(2.30)\qquad \Delta_x\,\vec{I} = \frac{\partial^2 \vec{I}}{\partial\, r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,\vec{I}}{\partial\, r}$$

$\vec{I}(x,r,t)$ vérifie pour $r > r_o(x)$ (cf. p.)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\vec{I} = 0$$

et si $\vec{u}(x,t) = \vec{u}(x)\,e^{-ikt}$

$$0 = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \tau^2\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \sigma^2\right]\vec{I} \quad \text{pour tout}\quad x \quad \text{fixé et } r > r_o(x)$$

d'où

$$\vec{I}(\vec{u};x,r) = \vec{A}_1\,H_o^{(1)}(\tau r) + \vec{A}_2\,H_o^{(2)}(\tau r) + \vec{A}_3\,H_o^{(1)}(\sigma r) + \vec{A}_4\,H_o^{(2)}(\sigma r)$$

où les A_i ne dépendent que de x_1, x_2, $\vec{u}$, formule que l'on écrira sous la forme

$$(2.31)\qquad \vec{I}(\vec{u};x,r) = \frac{i}{4}\,H_o^{(1)}(\tau r)\,\vec{v}_2(x) - \frac{i}{4}\,H_o^{(2)}(\tau r)\,\vec{v}_1(x) + \frac{i}{4}\,H_o^{(1)}(\sigma r)\,\vec{v}_4(x) - \frac{i}{4}\,H_o^{(2)}(\sigma r)\,\vec{v}_3(x)\ .$$

Si l'on pose

$$(2.32)\qquad \vec{I}_1(x,r) = \frac{i}{4}\,H_o^{(1)}(\tau r)\,\vec{v}_2(x) - \frac{i}{4}\,H_o^{(2)}(\tau r)\,\vec{v}_1(x)\ ,\quad \vec{I}_2 = \vec{I} - \vec{I}_1$$

on voit que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \tau^2\right)\vec{I}_1 = 0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \sigma^2\right)\vec{I}_2$$

avec $\overrightarrow{\mathrm{rot}}_x\ \vec{I}_1 = \vec{0} = \mathrm{div}_x\ \vec{I}_2$ si $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$ sont les moyennes de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ solutions du système

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{div}\ \vec{u}_1 + \tau^2\ \vec{u}_1 = \vec{0} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_2 - \sigma^2\ \vec{u}_2 .$$

On sait (cf. Courant-Hilbert I) que

$G_1(\tau r) = \frac{i}{4}\ H_o^{(1)}(\tau r) = \overline{-\frac{i}{4}\ H_o^{(2)}(\tau r)}$ (complexe conjugué); G_1, $\overline{G_1}$ étant linéairement indépendantes (sur $\mathbb{C}$)

On a donc, pour tout x et tout $r > r_o(x)$

$$\vec{I}_1(x;r) = G_1(\tau r)\ \vec{v}_2(x) + \overline{G_1}(\tau r)\ \vec{v}_1(x)$$

Si l'on pose $G_2(\ r) = \frac{i}{4}\ H_o^{(1)}(\ r)$ on a, dans les mêmes conditions

$$\vec{I}_2(x,r) = G_2(\tau r)\ \vec{v}_4(x) + \overline{G_2}(\sigma r)\ \vec{v}_3(x) .$$

Si l'on écrit alors

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}_x\ (\vec{I}_1) = \vec{0} = G_1\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}_x\ \vec{v}_2 + \overline{G_1}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}_x\ \vec{v}_1 (\forall x \text{ et } r > r_o(x)\ )$$

on voit, compte tenu de l'indépendance linéaire de G_1 et $\overline{G_1}$, que *pour tout* x on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}_x\ \vec{v}_1 = \overrightarrow{\mathrm{rot}}_x\ \vec{v}_2 = \vec{0}$$

Ces conditions, ajoutées à celles que l'on obtient en exprimant $\vec{\Delta}_x\ \vec{I}_1 + \tau^2\ \vec{I}_1 = \vec{0}$ montrent que

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{div}\ \vec{v}_i + \tau^2\ \vec{v}_i = \vec{0} \qquad \forall x \qquad i = 1,2$$

et, de même que

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{v}_i - \sigma^2\ \vec{v}_i = 0 \qquad \forall x \qquad i = 3,4$$

On retrouve le fait que $\vec{v}_1(x)$ et $\vec{v}_2(x)$ (resp. $\vec{v}_3(x)$, $\vec{v}_4(x)$) sont des fonctions d'onde longitudinales (resp. transversales) entières.

Comme il n'y a pas de relation simple entre $H_o^{(2)}(\tau r)$ et la dérivée de $H_o^{(1)}(\tau r)$, il est sans doute impossible d'exprimer $\vec{v}_1(x)$ et $\vec{v}_2(x)$ en fonction de $\vec{I}_1$ et de ses dérivées.

Par contre, puisque les comportements asymptotiques de $H_o^{(1)}(z)$ et $H_o^{(2)}(z)$ sont connus, on peut exprimer $\vec{v}_i(x)$ $(i = 1,2,3,4)$ comme limites quand $r \to \infty$ d'expressions dépendant de r et des moyennes circulaires $\vec{I}$.

Par exemple :

$$H_o^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i(z-\frac{\pi}{4})} \left[1 + 0\left(\frac{1}{z}\right)\right] \quad \text{quand } z \to +\infty$$

$$H^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i(z-\frac{3\pi}{4})} \left[1 + 0\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

d'où

$$G_1(\tau r) = \frac{i}{4} H_o^{(1)}(\tau r) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\pi\ \tau r}}\ e^{i(\tau r - \frac{3\pi}{4})} . \left[1 + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$\frac{dG_1}{dr} - i\tau\, G_1 = -\, i\tau \sqrt{\frac{1}{2\pi\tau r}}\ e^{i\tau r} . 0\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\overline{G_1}(\tau r) = \frac{i}{4}\ H_o^{(2)}(\tau r) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\pi\ \tau r}}\ e^{-i(\tau r - \frac{3\pi}{4})} . \left[1 + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$\frac{d\overline{G_1}}{dr}(\tau r) - i\tau\, \overline{G_1}(\tau r) = -\frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi\tau r}}\ \tau e^{-i\tau r}\left[2e^{\frac{3i\pi}{4}} + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$= i\tau\sqrt{\frac{1}{2\pi\tau r}}\ e^{-i(\tau r - \frac{3\pi}{4})}\left[1 + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

Compte tenu de :

$$I_1(x;r) = G_1(\tau r)\ \vec{v}_2(x) + \overline{G_1}(\tau r)\ \vec{v}_1(x)$$

on a

$$\sqrt{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} - i\tau\right)\vec{I}_1 = \sqrt{r}\left(\frac{dG_\lambda}{dr} - i\tau\, G_1\right)\vec{v}_2(x) + \sqrt{v}\left(\frac{d\overline{G_1}}{dr} - i\tau\,\overline{G_1}\right)\vec{v}_1(x)$$

$$= -i\sqrt{\frac{\tau}{2\pi}}\ e^{-i(\tau r - \frac{\pi}{4})}\ \vec{v}_1(x) + \vec{W}$$

où $|\vec{W}| = 0\left(\frac{1}{r}\right)$ quand $r \to \infty$

On obtient donc

(2.33a) $$\lim_{r\to+\infty} e^{i\tau r}\sqrt{r}\,\left(\frac{\partial}{\partial r} - i\tau\right)\vec{I}_1 = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\,\vec{v}_1(x)$$

et, de même

(2.33b) $$\lim_{r\to+\infty} e^{-i\tau r}\sqrt{r}\,\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\tau\right)\vec{I}_1 = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}}\, e^{-\frac{5i\pi}{}}\,\vec{v}_2(x)$$

ainsi que des égalités analogues pour $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ en échangeant τ et σ .

III - Théorème de représentation.

Toute solution du système.

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 + \tau^2\,\vec{u}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_2 - \sigma^2\,\vec{u}_2\ ,\quad \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

définie dans un domaine extérieur B_e , *admet une représentation de la forme*

$$\vec{u}_1(x) = \vec{w}_1(x) + \vec{\rho}_1(x)$$
$$\vec{u}_2(x) = \vec{w}_2(x) + \vec{\rho}_2(x)$$

où

(2.34) $$\vec{w}_1(x) = \int_B \Big[(\vec{u}_1(y).\vec{n}_y)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}_y\, G_1(\tau r) - G_1(\tau r)\,\vec{n}_y\,\mathrm{div}_y\,\vec{u}_1$$
$$-(\vec{u}_1 \wedge \vec{n}_g) \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}_y\, G_1\,(\tau r)\Big]\, dS_y$$

(2.35) $$\vec{w}_2(x) = \int_B \Big[(\vec{u}_2(y).\vec{n}_y)\,\mathrm{grad}_y\, G_2(\sigma r) + G_2(\sigma r)\,\vec{n}_y \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}_Y\,\vec{u}_2$$
$$-(\vec{u}_2 \wedge \vec{n}_Y) \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}_y\, G_2(\sigma r)\Big]\, dS_y$$

où r *est la distance du point* $x \in B_e$ *à* $y \in B$.

(2.36) $$\vec{\rho}_1(x) = -\int_{\mathcal{C}(x,r)} \Big[G_1(\tau r).(\vec{e}_r\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 - i\tau\,\vec{u}_1) + \vec{u}_1\,\Big(\frac{dG_1}{dr} - i\,\tau\,G_1\Big)\Big]\, dS$$

(2.37) $$\vec{\rho}_2(x) = \int_{\mathcal{C}(x,r)} \Big[G_2(\sigma r).(\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_2 + i\sigma\,\vec{u}_2) - \vec{u}_2\Big(\frac{dG_2}{dr} - i\sigma G_2\Big)\Big]\, dS$$

$\mathcal{C}(x,r)$ *cercle de centre* x , *de rayon* r .

Démonstration :

On applique l'indentité

$$\iint_D (\vec{u}.\text{grad div } \vec{v} - \vec{v}.\text{grad div } \vec{u})\, d\Sigma = \int_{\partial D} (\vec{u} \text{ div } \vec{v} - \vec{v} \text{ div } \vec{u})\, dS$$

aux champs de vecteurs $\vec{u} = \vec{u}_1$ et $\vec{v} = G_1(\tau r)\, \vec{w} = \frac{i}{4} H_o^{(1)}(\tau r)\, \vec{w}$ (où r est la distance des points x , y et $\vec{w}$ un vecteur unitaire quelconque), étendue au domaine $D(R,\varepsilon)$ compris entre B et, un cercle $C(x,R)$ contenant $\overline{B_i}$ à son intérieur et un cercle $C(x,\varepsilon)$ intérieur à $D(R)$.

Comme $\vec{v}(x)$ vérifie :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, \text{div}_x\, \vec{v} + \tau^2\, \vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}_x\, (G_1\, \vec{w}) = \overrightarrow{\text{rot}}_x\, (\overrightarrow{\text{grad}}_x\, G_1 \wedge \vec{w})$$

on obtient

$$0 = \int_{B+C_R+C_\varepsilon} \left[\vec{u}_1.\vec{n}(\overrightarrow{\text{grad}}\, G_1.\vec{w}) - G_1\, \vec{w}.\vec{n} \text{ div } \vec{u}_1 - (\overrightarrow{\text{grad}}_x\, G_1 \wedge \vec{w}).(\vec{u}_1 \wedge \vec{n})\right] ds$$

(le premier terme provient de $\text{div}_x(G_1\, \vec{w}) = \overrightarrow{\text{grad}}_x\, G_1.\vec{w}$ et le troisième de la transformation de l'intégrale

$$\iint_{D(R,\varepsilon)} (\vec{u}_1.\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}_x\, (G_1\, \vec{w})\,)\, d\Sigma\ )$$

a) Etude de l'intégrale étendue à $C(x,\varepsilon) = C_\varepsilon$ quand $\varepsilon \to +0$.

Ici $\vec{n} = -\vec{e}_r$, $r = \varepsilon$ et grad $\frac{i}{4}\, H_o(\tau r) = -\frac{i}{4}\, \vec{e}_r\, \tau\, H_1^{(1)}(\tau r)$, $d\xi = \varepsilon d\theta$

$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

Par conséquent :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} \dots = \int_0^{2\pi} \left[\frac{i}{4}\, (\vec{u}_1(y).\vec{e}_r)(\vec{e}_r.\vec{w})\, H_1^{(1)}(\tau\varepsilon) + \frac{i}{4}\, H_o^{(1)}(\tau\varepsilon)\vec{w}.\vec{e}_r \text{ div } \vec{u}_1 + \dots \right.$$

$$\left. + (\vec{e}_r \wedge \vec{u}_1).(\frac{i\tau}{4}\, \vec{e}_r \wedge \vec{w})\, H_1^{(1)}(\tau\varepsilon)\right] \varepsilon d\theta$$

Or $\varepsilon\, H_o^{(1)}(\tau\varepsilon) \to 0$ avec ε puisque $H_o^{(1)}(\tau\varepsilon) \simeq \text{Log}\,\varepsilon$ quand $\varepsilon \to +0$, et

$$H_1^{(1)}(\tau\varepsilon) = \frac{\tau\varepsilon}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{\tau\varepsilon}{2}\right)^{2n}\frac{1}{\Gamma(n+2)} + \frac{1}{\Pi}\left[2\,J_1(\tau\varepsilon).(\text{Log}\,\frac{\tau\varepsilon}{2}+C) - \frac{2}{\tau\varepsilon}\right.$$

$$\left. - \frac{\tau\varepsilon}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)\quad(\frac{\tau\varepsilon}{2})^{2n}}{n!(n+1)!}\left(1+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$\simeq -\dfrac{2i}{\pi\tau\varepsilon}$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ donc $\varepsilon\, H_1^{(1)}(\tau\varepsilon) \longrightarrow -\dfrac{2i}{\tau}$ quand $\varepsilon \to 0$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\ldots = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\left[(\vec{u}_1(y).\vec{e}_r).(\frac{1}{2\pi}\vec{e}_r.\vec{W}) - \frac{1}{2\pi}(\vec{u}_1(y)\wedge\vec{e}_r).(\vec{e}_r\wedge\vec{W})\right]d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}(\vec{u}_1(y).\vec{w})\,\frac{d\theta}{2\pi} = \vec{u}_1(x).\vec{W}$$

b) Etude de l'intégrale étendue à $C(x,R) = C_R$

Comme $\vec{n} = \vec{e}_r$ et $r = R$, $\overrightarrow{\text{grad}}_x\,\frac{i}{4}\,H_o^{(1)}(\tau R) = -\frac{i\tau}{4}\,\vec{e}_r\,H_1^{(1)}(\tau R)$

l'intégrale s'écrit

$$\int_{C(x,R)}\left[-(\vec{u}_1.\vec{e}_r)\,(\vec{e}_r.\vec{W})\,\frac{i\tau}{4}H_1^{(1)}(\tau R) - \frac{i}{4}H_o^{(1)}(\tau R)\,\underline{\vec{W}}.\vec{e}_r\,\text{div}\,\vec{u}_1 + \frac{i\tau}{4}H_1^{(1)}(\tau R).\right.$$

$$\left..(\vec{e}_r\wedge\vec{W}).(\vec{u}_1\wedge\vec{e}_r)\right]ds$$

$$= -\int_{C_R} G_1(\tau R)\vec{W}.(\vec{e}_r\,\text{div}\,\vec{u}_1 - i\,\tau\,\vec{u}_1)\,ds - \int_{C_R}(\vec{u}_1.\vec{W})\left(\frac{dG_1}{dr} - i\,\tau\,G_1\right)ds\,.$$

$\vec{W}$ étant un vecteur arbitraire, on obtient bien le théorème de représentation.

On obtiendrait la représentation de $\vec{u}_2$ en appliquant la formule

$$\iint_D(\vec{u}.\text{rot rot}\,\vec{v} - \vec{v}.\text{rot rot}\,\vec{u})\,d\Sigma = \int_{\partial D}\{\text{rot}\,\vec{v}\wedge\vec{u} - \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}\wedge\vec{v}\}\,.\,\vec{n}\,ds$$

à $\vec{u}_2$, $\vec{v} = G_2(\sigma r)\,\vec{W}$, $D = D(R,\varepsilon)$.

On définit ensuite *les fonctions d'ondes longitudinales (resp. transversales) rayonnantes par* $\vec{v}_1(x) \equiv \vec{0}$ *(resp.* $\vec{v}_3(x) \equiv \vec{0}$) et l'on peut établir qu'*une fonction d'onde entière qui est aussi rayonnante est identiquement nulle.*

En effet, elle vérifie (en ne considérant que $\vec{u}_1$, pour $\vec{u}_2$ on aurait une preuve analogue)

$$\Delta\,\vec{u}_1 + \tau^2\,\vec{u}_1 = \vec{0} \qquad \text{dans tout le plan}$$

et, d'après
$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{C(x,r)} \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial r} - i\tau\,\vec{u}_1\right) dS = 0$$

ce qui entraîne de manière classique qu'elle est identiquement nulle.

Il en résulte que *toute solution* $\vec{u}$ *de* (2.28) *définie dans un domaine plan extérieur* B_e *se décompose de manière unique en la somme d'une fonction d'onde longitudinale rayonnante et d'une autre qui est entière* avec un résultat analogue pour une fonction d'onde transversale.

Si l'on considère les expressions(2.30) et (2.31), on peut, compte tenu du comportement asymptotique de $H_o^{(1)}(\tau r)$ quand $r \to \infty$, démontrer que $\vec{w}_1(x)$ et $\vec{w}_2(x)$ *sont rayonnantes* (sans être en général des fonctions d'onde).

En effet, $w_1(x)$ est la somme de trois intégrales de la forme

$$\int_B G_1(\tau\rho)\,\vec{\vartheta}(y)\,dS_y\ ,\quad \int_B \psi(y)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}_y\,G_1(\vartheta)\,ds_y\ ,\quad \int_B \vec{X}(y)\wedge\overrightarrow{\mathrm{grad}}_y\,G_1(\tau\rho)\,dS_y$$

où ρ est la distance du point x au point $y \in B$ et $\vec{\vartheta}(y)$ $\vec{X}(y)$ sont des champs de vecteurs continus sur B et $\psi(y)$ est une fonction continue. On a

$$\frac{\partial \vec{w}_1}{\partial r} - i\tau\,\vec{w}_1 = \int_B \left(\frac{dG_1}{dr} - i\tau G_1\right)\vec{\vartheta}(y)\,dS_y + \int_B \psi(y)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}_y\left(\frac{dG_1}{dr} - i\tau G_1\right) dS_y$$
$$+ \int_B \vec{X}(y)\wedge\overrightarrow{\mathrm{grad}}_y\left(\frac{dG_1}{dr} - i\tau G_1\right) dS_y$$

On en déduit :

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r} \int_B \left(\frac{\partial \vec{w}_1}{\partial r} - i\,\tau\,\vec{w}_1\right) d\theta = 0$$

puisque $\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{d\,H_o^{(1)}(\tau\rho)}{dr} - i\tau\,H_o^{(1)}(\tau\rho)\right) = 0$ et que

$\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}_y\left(\frac{dG_1}{dr} - i\,\tau\,G_1\right)\right| = O(r^{-3/2})$ quand $r \to \infty$ (à quelques détails de calcul près que l'on rencontrera par la suite).

On aurait des résultats analogues pour $\vec{w}_2$.

Quand à $\vec{\rho}_1(x)$ et $\vec{\rho}_2(x)$ (données par (2.36) et (2.37) on ne peut les identifier à $\vec{v}_1(x)$ et $\vec{v}_2(x)$ respectivement.

En effet,

$$\vec{v}_1(x) = \lim_{r\to\infty} e^{i(\tau r + \frac{\Pi}{4})} \frac{1}{\sqrt{2\Pi r\tau}} \int_{C(x,r)} \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial r} - i\tau\,\vec{u}_1\right) dS$$

Or, pour tout vecteur plan $\vec{u}(r,\theta)$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial r} = \vec{e}_r \,\mathrm{div}\,\vec{u} + \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u} + \vec{Z} \wedge \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta}$$

ce qui, pour $\vec{u}_1$, entraîne, compte tenu de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_1 = \vec{0}$ et de

$$\int_0^{2\Pi} \vec{Z} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta}\, d\theta = \vec{0} \quad ,$$

(2.38) $$\vec{v}_1(x) = \lim_{r\to\infty} \frac{e^{i(\tau r + \frac{\Pi}{4})}}{\sqrt{2\Pi\,\tau\,r}} \int_{C(x,r)} (\vec{e}_r \,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 - i\tau\,\vec{u}_1)\, dS \,.$$

Réciproquement, les calculs précédents montrent que (2.38) entraîne (2.33).

Or,

$$\vec{\rho}_1(x) = -\int_{C(x,r)} \left[G_1(\tau r)\,(\vec{e}_r \,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 - i\tau\vec{u}_1) + \vec{u}_1\left(\frac{dG_1}{dr} - i\tau\,G_1\right)\right] dS$$

peut s'écrire, quand $r \to +\infty$:

(2.39) $$\vec{\rho}_1(x) = -\frac{1}{2}\,\vec{v}_1(x) + \int_0^{2\Pi}\left[\phi(r)\,(\vec{e}_r \,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 - i\tau\,\vec{u}_1) + \vec{u}_1\,\psi(r)\right] d\theta$$

où $\phi(r)$ et $\psi(r)$ sont $O(r^{-1/2})$ quand $r \to \infty$, ce qui montre que $\vec{\rho}_1(x)$

n'est une fonction d'onde entière que si l'intégrale ci-dessus tend vers zéro quand $r \to \infty$.

IV - CONDITIONS DE RADIATION.

On peut choisir tout d'abord

C.R.1. $$\vec{v}_1(x) = \vec{0} = \vec{v}_3(x)$$

ce qui équivaut à

$$\lim_{r\to\infty} \frac{e^{i\tau r}}{\sqrt{r}} \int_{C(x,r)} \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial r} - i\tau\, \vec{u}_1\right) dS = 0 \iff \lim_{r\to\infty} \frac{e^{i\tau r}}{\sqrt{r}} \int_{C(x,r)} (\vec{e}_r \operatorname{div} \vec{u}_1 - i\tau \vec{u}_1) dS = 0$$

$x \quad B_e$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{e^{i\sigma r}}{\sqrt{r}} \int_{C(x,r)} \left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial r} - i\,\sigma\, \vec{u}_2\right) dS = 0 \iff \lim_{r} \frac{e^{i\tau r}}{\sqrt{r}} \int_{C(x,r)} (\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u}_2$$

$$+ i\,\sigma\, \vec{u}_2)\ dS = 0 \qquad \text{(C.R.3.)}$$

Cette dernière condition est entraînée par

(C.R.4) $$\lim_{r\to\infty} \int_{C(x,r)} |\vec{e}_r \operatorname{div} \vec{u}_1 - i\tau\, \vec{u}_1|^2\, dS = 0 = \lim_{r\to\infty} \int_{C(x,r)} |\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u}_2$$

$$+ i\,\sigma\, \vec{u}_2|^2\, dS\ ,\quad \forall\, x \in B_e$$

De même (C.R.2) est entraînée par les conditions classiques

(C.R.5) $$\lim_{r\to\infty} \int_{C(x,r)} \left|\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial r} - i\tau\, \vec{u}_1\right|^2 dS = 0 = \lim_{r\to\infty} \int_{C(x,r)} \left|\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial r} - i\sigma\, \vec{u}_2\right|^2 dS$$

On fera aussi intervenir

(C.R.6) qui est (C.R.4) mais pour un seul centre x (disons l'origine).

On va montrer que C.R.6 *entraîne toutes les autres conditions.*

Ceci s'établit par une succession de corollaires de C.R.6.

Corollaire 1

Si $\vec{u}_1$ *et* $\vec{u}_2$ *sont solutions du système définies dans un domaine extérieur* B_e *de frontière régulière et bornée* B *, et y satisfont aux conditions de radiation* C.R.6 *on a :*

(2.40) $$\int_0^{2\Pi} |\vec{u}_j(r,\theta)|^2 \, d\theta = O\left(\frac{1}{r}\right) \text{ quand } r \to \infty \qquad (j = 1,2)$$

(2.41) $$\int_0^{2\Pi} |\operatorname{div} \vec{u}_1|^2 \, d\theta = O\left(\frac{1}{r}\right) \text{ et } (2.42) \int_0^{2\Pi} |\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{u}_2|^2 \, d\theta = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

Démonstration

La condition C.R.6 relative à $\vec{u}_1$ s'écrit :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(O,R)} \left[|\operatorname{div} \vec{u}_1|^2 + \tau^2 |\vec{u}_1|^2 - 2\tau \operatorname{Im}(\bar{\vec{u}}_1 . \vec{e}_r \operatorname{div} \vec{u}_1)\right] R \, d\theta = 0$$

L'intégrale du troisième terme se transforme à l'aide de l'identité appliquée à $\tau \bar{\vec{u}}_1$ et $\vec{u}_1$, étendue au domaine D_R de frontière B et $C(O,R)$. Comme τ est réel, si $\vec{u}_1$ vérifie $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{u}_1 + \tau^2 \vec{u}_1 = 0$, il en est de même de $\bar{\vec{u}}_1$; on a donc, en vertu d'un raisonnement analogue à celui fait p. , les égalités (2,40) et (2.41) . Démonstration analogue pour (2.40) et(2.42) .

Corollaire 2

1) Si $\vec{u}_1$ *est une fonction d'onde longitudinale rayonnante, on a*

(2.43) $$\lim_{R\to\infty} \int_{C(O,R)} \left|\frac{\partial}{\partial r}(\operatorname{div} \vec{u}_1) - i\tau \operatorname{div} \vec{u}_1\right|^2 dS = 0$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{C(O,R)} \frac{1}{R^2} \left|\frac{\partial}{\partial\theta} \operatorname{div} \vec{u}_1\right|^2 dS$$

2) *Si $\vec{u}_2$ est une fonction d'onde transversale rayonnante, on a*

$$(2.44)\quad \lim_{R\to\infty}\int_{C(O,R)} \left|\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{rot}\,\vec{u}_2) - i\sigma\,\mathrm{rot}\,\vec{u}_2\right|^2 dS = 0 = \lim_{R\to\infty}\int_{C(O,R)} \frac{1}{R^2}\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\,\mathrm{rot}\,\vec{u}_2\right|^2 dS$$

Démonstration

En tout point d'une circonférence $C(O,R)$ située dans B_e on peut écrire

$$\vec{e}_r\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 - i\tau\,\vec{u}_1 = \frac{i}{\tau}\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 - i\tau\,\vec{e}_r\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1\right]$$

$$\frac{i}{\tau}\left[\vec{e}_r\left(\frac{\partial}{\partial r}\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 - i\tau\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{R}\,\vec{e}_\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{div}\,\vec{u}_1)\right]$$

Par conséquent, $|\vec{e}_r\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 - i\tau\,\vec{u}_1|^2 = \frac{1}{\tau^2}\left(\left|\frac{\partial}{\partial r}\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 - i\tau\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1\right|^2\right.$

$$\left. + \frac{1}{R^2}\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1\right|^2\right)$$

Il en résulte bien que C.R.6 pour $\vec{u}_1$ est équivalent à . De même,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_2 = \omega\,(\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta) = \omega\,\vec{Z}$$

et

$$\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_2 + i\,\sigma\,\vec{u}_2 = \vec{e}_r \wedge \omega\,\vec{Z} + \frac{i}{\sigma}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\omega Z) = \frac{i}{\sigma}\left[\frac{1}{R}\,\vec{e}_r\,\frac{\partial\omega}{\partial\theta} - \vec{e}_\theta\left(\frac{\partial\omega}{\partial r} - i\sigma\omega\right)\right]$$

On peut donc affirmer que

C.R.6 $\Longleftrightarrow$ "2.43 et 2.44"

Remarque

Si l'on pose $\Theta = \mathrm{div}\,\vec{u}_1$, $\Omega = \vec{Z}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_2$, on voit que ces quantités vérifient, dans (B_e)

$$\Delta\,\Theta + \tau^2\,\Theta = 0 \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{C(0,R)} \left|\frac{\partial\Theta}{\partial r} - i\tau\,\Theta\right|^2 dS = 0$$

$$\Delta\,\Omega + \sigma^2\,\Omega = 0 \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{C(0,R)} \left|\frac{\partial\Omega}{\partial r} - i\sigma\Omega\right|^2 dS = 0$$

En appliquant le théorème de la divergence au domaine D_R déjà défini et à et $G_1(\tau r)$, $G_2(\sigma r)$ et Ω , on obtient

$$\text{et}(2.45)\quad \left|\begin{array}{l} \Theta\,(x) = \displaystyle\int_B \left[\,(y)\,\frac{\partial G_1}{\partial n_y} - G_1(r)\,\frac{\partial}{\partial n_y}\right] dS_y - \int_{C(0,R)} \left[\frac{\partial G_1}{\partial r} - G_1\,\frac{\partial}{\partial r}\right] dS \\[2ex] \Omega\,(x) = \displaystyle\int_B \left[\Omega(y)\,\frac{\partial G_2}{\partial n_y} - G_2(r)\,\frac{\partial\Omega}{\partial n_y}\right] dS_y - \int_{C(0,R)} \left[\Omega\,\frac{\partial G_2}{\partial r} - G_2\,\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right] dS \end{array}\right.$$

En écrivant

$$\Theta\,\frac{\partial G_1}{\partial r} - G_1\,\frac{\partial\Theta}{\partial r} = \Theta\left(\frac{\partial G_1}{\partial r} - i\tau\,G_1\right) - G_1\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r} - i\tau\Theta\right)$$

et appliquant l'inégalité de SCHWARZ , compte tenu de(2.40) et(2.41) on voit que les intégrales étendues à $C(0,R)$ tendent vers zéro quand $R \to \infty$. On a un résultat analogue pour Ω .

Par conséquent, les formules (2.45) sont valables pour tout $x \in B_e$ en supprimant dans le second membre les intégrales étendues à $C(0,R)$.

De ces dernières formules on peut déduire que(2.40),(2.41) et (2.42) ont lieu sur tout cercle $C(P_o , R)$ quand $R \to \infty$, où P_o est un point donné distinct de l'origine ce qui, en retour, entraînera pour C.R.6 d'être valable sur de tels cercles (c'est-à-dire entraînera C.R.4).

Pour cela, on établit le

Lemme :

On a

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(P_o,R)} \left|\frac{\partial\Theta}{\partial r} - i\tau\Theta\right|^2 dS = 0 = \lim_{R\to\infty} \int_{C(P_o,R)} \frac{1}{r^2} \left|\frac{\partial\Theta}{\partial\psi}\right|^2 dS$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(P_o,R)} \left|\frac{\partial\Omega}{\partial r} - i\sigma\Omega\right|^2 dS = 0 = \lim_{R\to\infty} \int_{C(P_o,R)} \frac{1}{r^2} \left|\frac{\partial\Omega}{\partial\psi}\right|^2 dS$$

où $\frac{\partial}{\partial r}$ *est la dérivée suivant* $\vec{e}_r$, $(\varphi,R) \in C(P_o,R)$

Preuve :

On désigne par (r,θ), (r_o,θ_o) les coordonnées polaires de P, P_o d'origine O , d'axe Ox , (R,φ) étant celles de P relativement au pôle P_o et à $P_o x$, (ρ_o , φ_o) celles de $Q \in B$.

R étant choisi assez grand pour que $\overline{B_i}$ soit compris dans le disque ouvert de centre P_o , de rayon R , on peut écrire, d'après la remarque précédente, en $P(x_o + R \cos \varphi , y_o + R \sin \varphi)$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial R}(P) - i\tau\,\Theta(P) = \int_B \left[\Theta(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q}(PQ) - i\tau\, G_1) - \frac{\partial\Theta}{\partial n}\left(\frac{\partial G_1}{\partial R} - i\tau\, G_1\right)\right] dS_\varphi$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}(P) = \int_B \left[\Theta(Q) \frac{\partial^2 G_1}{\partial\varphi\partial n} - \frac{\partial\Theta}{\partial n} \frac{\partial G_1}{\partial\varphi}\right] dS_Q \ .$$

Si l'on écrit $\frac{\partial\Theta}{\partial R}(P) \cdot i\tau\,\Theta = I_1 - I_2$ il suffit d'appliquer l'inégalité de Schwarz à I_1 et I_2 pour obtenir le résultat cherché. On voit qu'il suffit d'établir

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(P_o,R)} \left|\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial G_1}{\partial R} - i\tau\, G_1\right)\right|^2 dS = 0 = \lim_{R\to\infty} \int_{C(P_o,R)} \left|\frac{\partial G_1}{\partial R} - i\tau\, G_1\right|^2 R\, d\varphi$$

On a $\rho^2 = R^2 + \rho_o^2 - 2 R \rho_o \cos(\varphi - \varphi_o)$ où $\rho = P Q$ et ρ_o , φ_o étant fonctions de s , abscisse de Q sur B . Il en résulte, ρ_o (S) étant borné, que :

$$\frac{\rho}{R} = 1 + 0\left(\frac{1}{R}\right) \qquad R \to \infty$$

En outre, $\dfrac{\partial G_1}{\partial R} - i\tau\, G_1 = \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial R} - 1\right)\dfrac{\partial G_1}{\partial\rho} + \dfrac{\partial G_1}{\partial\rho}(\tau\rho) - i\tau\, G_1(\tau\rho)$.

Or, $\dfrac{\partial\rho}{\partial R} = \dfrac{R}{\rho} - \dfrac{\rho_o}{\rho}\cos(\vartheta - \vartheta_o) = 1 + 0\left(\dfrac{1}{R}\right)$ quand $R \to \infty$ et $\left|\dfrac{\partial G_1}{\partial\rho}\right| = O(R^{-1/2})$

$$\left|\frac{\partial G_1}{\partial\rho} = -\, i\tau\, G_1\right| = O(R^{-3/2}) \text{ quand } R \to \infty$$

Il en résulte que $|I_2|^2$ est majoré par une quantité qui est $O(R^{-2})$ quand $R \to \infty$ ce qui entraîne $\lim\limits_{R\to\infty} I_2 = 0$.

$$\text{Ensuite, } \left|\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial G_1}{\partial R} = i\tau\,(G_1)\right)\right| = \left|\frac{\partial R}{\partial n}\left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial R^2} - i\tau\,\frac{\partial G_1}{\partial R}\right)\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{\partial^2 G_1}{\partial R^2} - i\tau\,\frac{\partial G_1}{\partial R}\right|$$

et

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial R^2} - i\tau\,\frac{\partial G_1}{\partial R} = \frac{\partial^2\rho}{\partial R^2}\,\frac{\partial G_1}{\partial\rho} + \frac{\partial\rho}{\partial R}\left(\frac{\partial\rho}{\partial R} - 1\right)\frac{\partial^2 G_1}{\partial\rho^2} + \frac{\partial\rho}{\partial R}\left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial\rho^2} - i\tau\,\frac{\partial G_1}{\sqrt{\rho}}\right)$$

$$= 0\left(\frac{1}{\rho}\right).0\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) + 0\left(\frac{1}{R}\right)\,.\,0\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) + 0\,(\rho^{-3/2}) = 0\,(R^{-3/2})$$

quand $R \to \infty$

En effet, $\dfrac{\partial^2\rho}{\partial R^2} = \dfrac{1}{\rho} - \dfrac{R-\rho_o - \cos(\vartheta-\vartheta_o)}{\rho^2}\,\dfrac{\partial\rho}{\partial R} = \dfrac{1}{\rho} - \dfrac{(R-\rho_o\cos(\vartheta-\vartheta_o))^2}{\rho^3} = 0\left(\dfrac{1}{\rho}\right) \quad \rho \to \infty$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial\rho^2} = 0\,(\rho^{-\frac{1}{2}})\ , \quad \frac{dG_1}{d\rho} = 0\,(\rho^{-\frac{1}{2}})$$

et

$$\frac{d^2 G_1}{d\rho^2} - i\tau\,\frac{dG_1}{d\rho} = \frac{i}{4}\left[\frac{\tau}{\rho}\,H_1^{(1)}(\tau\rho) - \tau^2\,(H_o^{(1)}(\tau\rho) - i\,H_1^{(1)}(\tau\rho))\right]$$

$$= e^{i\tau\rho}\,0(\rho^{-3/2}) + \frac{e^{i\tau\rho}}{\sqrt{\pi\tau\rho}}\sqrt{2}\,\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - ie^{-\frac{3in}{4}}\right)$$

$$= e^{i\rho}\,0(\rho^{-3/2})$$

d'où l'on déduit $\lim\limits_{R\to\infty} |I_1|^2 = 0$ et par conséquent la preuve du lemme.

En fait, pour la compléter, il suffit de remarquer que

$$\left|\frac{\partial G_1}{\partial \rho}(\tau\rho)\right| = \left|\frac{\partial \rho}{\partial \psi} \cdot \frac{dG_1}{d\rho}\right| = \left|\rho \sin(\varphi-\varphi_o) . \frac{R}{\rho} . \frac{dG_1}{d\rho}\right| \leq d(P_o,B).O(\rho^{-1/2})$$

où $d(P_o,B)$ est le maximum de ρ_o (qui est borné).

De même

$$\left|\frac{\partial^2 G_1}{\partial n \partial \varphi}\right| = \left|\frac{\partial \rho}{\partial n} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cdot \frac{d^2 G_1}{d\rho^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial n \partial \psi} \cdot \frac{dG_1}{d\rho}\right| \leq \left|\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right| . \left|\frac{\partial^2 G_1}{\partial \rho^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 \rho}{\partial n \partial \varphi}\right| . \left|\frac{dG_1}{d\rho}\right|$$

$$= O(\rho^{-1/2}) \quad \text{quand } \rho \to \infty$$

ce qui entraine aisément $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C(P_o,R)} \frac{1}{R^2} \left|\frac{\partial}{\partial \psi}\right|^2 dS = 0$

<u>*Corollaire 3*</u> C.R.6 $\Longrightarrow$ C.R.4

<u>*Démonstration*</u> :

$\vec{e}_R$ désignant le vecteur $\frac{\overrightarrow{P_oP}}{R}$, on a :

$$\vec{e}_R \operatorname{div} \vec{u}_1 - i\tau\, \vec{u}_1 = \frac{i}{\tau}\left[\vec{e}_R \left(\frac{\partial}{\partial R} - i\tau\right) + \frac{1}{R}\, \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right]$$

$$\vec{e}_R \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{u}_2 + i\sigma\, \vec{u}_2 = \frac{i}{\sigma}\left[\vec{e}_R \frac{1}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} - \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial \Omega}{\partial R} - i\sigma\Omega\right)\right]$$

ce qui entraîne bien C.R.4 compte tenu du lemme.

Du théorème de représentation et des corollaires précédents on déduit aisément le

<u>*Corollaire 4*</u>

Toute fonction d'onde longitudinale $\vec{u}_1$ *ou transversale* $\vec{u}_2$ *satisfaisant à* C.R.6 *admet une représentation de la forme*

$$(2.28)_o \quad \vec{u}_1(P) = \int_B \left[(\vec{u}_1(Q).\vec{n}_Q)\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}_Q\ G_1\ (PQ) - G_1\ \vec{n}_Q\ \mathrm{div}\ \vec{u}_1 - (\vec{u}_1 \wedge \vec{n}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}_Q\ G_1\right] dS_Q$$

$$(2.29)_o \quad \vec{u}_2(P) = \int_B \left[(\vec{u}_2(Q).\vec{n}_Q)\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}_Q\ G_2(PQ) + G_2(PQ).(\vec{n} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u}_2) - (\vec{u}_2 \wedge \vec{n}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ G_2\right] dS_Q$$

($\vec{n}$ *normale à* B *en* Q , *dirigée vers* B_e).

Corollaire 5 $\qquad$ C.R.6 $\Longrightarrow$ C.R.5

Démonstration

On va le prouver pour $\vec{u}_1$, une démonstration analogue valant pour $\vec{u}_2$. D'après $(2.28)_o$ $\dfrac{\partial \vec{u}_1}{\partial r} - i\tau\ \vec{u}_1$ est de la forme

$$\int_B \left(\frac{\partial G_1}{\partial r} - i\tau\ G_1\right) \vec{\vartheta}(Q)\ dS_Q + \int_B \psi(Q)\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}_Q\left(\frac{\partial G_1}{\partial r} - i\tau G_1\right) dS_Q$$
$$+ \int_B \vec{\chi}\ (Q) \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}_Q\ \left(\frac{\partial G_1}{\partial r} - i\tau\ G_1\right) dS_Q \quad .$$

On en déduit

$$\int_{C(R)} \left|\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial r} - i\tau\ \vec{u}_1\right|^2 dS \leq (I_1 + I_2 + I_3)^2$$

où

$$I_1^2 \leq \int_B |\vec{\vartheta}|^2\ dS_Q \times \int_B \int_{C(R)} \left|\frac{\partial G_1}{\partial r} - i\tau\ G_1\right|^2 d\sigma\ dS_Q$$

$$I_2^2 \leq \int_B |\psi|^2\ dS_Q \times \int_B \int_{C(R)} \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}_Q\ \left(\frac{\partial G_1}{\partial r} - i\tau\ G_1\right)\right|^2 d\sigma\ dS_Q$$

$$I_3^2 \leq \int_B |\vec{\chi}(\psi)|^2\ dS_Q \times \int_B \int_{C(R)} \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}_Q\ \left(\frac{\partial G_1}{\partial r} - i\tau\ G_1\right)\right|^2 d\sigma\ dS_Q$$

Les seconds membres de ces inégalités tendent vers zéro avec $1/R$, pour I_1 en vertu de la condition de radiation vérifiée par G_1 , pour I_2 et I_3 , en vertu de

$$\leq \left|\overrightarrow{\text{grad}}_Q \left(\frac{\partial G_1}{\partial r} - i\tau\, G_1\right)\right| = \left|\overrightarrow{\text{grad}}_Q\, \rho\right| . \left| \frac{\partial^2 G_1}{\partial \rho \partial r} - i\tau \frac{\partial G_1}{\partial \rho} \right|$$

$$\leq \left|\overrightarrow{\text{grad}}_Q\, \rho\right| . \left(\left| \frac{\partial r}{\partial \rho} - 1 \right| \left| \frac{\partial^2 G_1}{\partial \rho^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 G_1}{\partial \rho^2} - i\tau \frac{\partial G_1}{\partial \rho} \right| \right)$$

$$\leq \left| \frac{\partial r}{\partial \rho} - 1 \right| \left| \frac{\partial^2 G_1}{\partial \rho^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 G_1}{\partial \rho^2} - i\tau \frac{\partial G_1}{\partial \rho} \right| = O\,(R^{-3/2})$$

quand $R \to \infty$

En conclusion, on a établi

$$\begin{array}{ccccc} \text{C.R.5} & \Longleftarrow & \text{C.R.6} & \Longleftrightarrow & \text{C.R.4} \\ \Downarrow & & & & \Downarrow \\ \text{C.R.2} & \Longleftarrow & \text{C.R.1} & \Longleftrightarrow & \text{C.R.3} \end{array}$$

V - THEOREMES D'UNICITE

On va voir que, dans le cas plan, les conditions de radiation entraînent l'unicité de la solution d'un problème extérieur.

Auparavant, on va établir une autre condition de radiation entraînée par les précédentes, ainsi qu'un résultat sur le comportement asymptotique des fonctions d'onde rayonnantes.

<u>*Lemme 1*</u> :

Si $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ *est telle que* $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ *sont solutions, dans* B_e *, du système*

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{u}_1 + \tau^2\, \vec{u}_1 = \vec{0} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_2 - \sigma^2\, \vec{u}_2$$

satisfaisant à C.R.6 *, on a :*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(R)} |\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r) - i\,\vec{v}\,|^2 dS = 0$$

où $\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r) = 2\mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial r} + \lambda\, \vec{e}_r\ \text{div}\ \vec{u}_1 + \mu\, \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_2$ *est la contrainte au point considéré cans la direction* $\vec{e}_r$ *et* $\vec{v} = (\lambda + 2\mu)\, \vec{u}_1 + \sigma\, \mu\, \vec{u}_2$.

Démonstration

En effet,

$$\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r)-i\vec{v} = 2\mu \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{r} - i\tau\, \vec{u}_1\right) + 2\mu\left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial r} - i\sigma\, \vec{u}_2\right) + \lambda\left(\vec{e}_r \operatorname{div} \vec{u}_1 - i\tau\, \vec{u}_1\right)$$

$$+ \mu\left(\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{u}_2 + i\sigma\, \vec{u}_2\right)$$

d'où le résultat d'après C.R.5 et C.R.4 .

Lemme 2

Si $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ *est définie comme dans le lemme 1 , on a :*

a) $$\vec{u}_1(P) = -\frac{i}{\tau}\, \vec{e}_R \operatorname{div} \vec{u}_1 + \vec{V}_1$$

$$\vec{u}_2(P) = -\frac{i}{\sigma}\, \vec{e}_\theta\, (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{u}_2 . \vec{Z}) + \vec{V}_2$$

où $|\vec{V}_1(P)|$ *et* $|\vec{V}_2(P)|$ *sont* $O(R^{-3/2})$ *quand* $R = OP \to \infty$

b) *En outre, quand* R

$$\operatorname{div} \vec{u}_1(P) = \frac{i\tau}{4}\, e^{i(\tau R - \frac{\pi}{4})} \sqrt{\frac{2}{\pi\tau R}}\; f_o(\theta) + O(R^{-3/2})$$

$$\mathrm{rot}\, \vec{u}_2(P).\vec{Z} = \frac{i\sigma}{4}\, e^{i(\sigma R - \frac{\pi}{4})} \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma R}}\; g_o(\theta) + O(R^{-3/2})$$

où

$$f_o(\theta) = \int_B \left[i \operatorname{div} \vec{u}_1(S) \cos\tilde{\psi} - \frac{\partial}{\partial n} \operatorname{div} \vec{u}_1(S)\right] e^{-i\tau\rho_o \cos(\theta-\varphi)}\, dS$$

$$g_o(\theta) = \int_B \left[i\,\Omega(S) \cos\tilde{\psi} - \frac{\partial\Omega}{\partial n}\right] e^{-i\sigma\rho_o \cos(\theta-\varphi)}\, dS$$

avec $\Omega(S) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{u}_2.\vec{Z}$, $\rho_o(S) = OQ$, $Q \in \mathcal{B}$, $\varphi(S) = (\vec{O}x, \overrightarrow{OQ})$

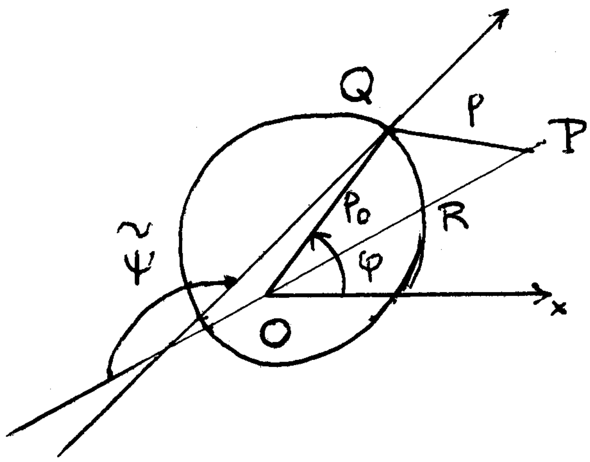
$\tilde{\psi} = (\overrightarrow{PO}, \vec{n}_Q)$, $\rho = PQ$, $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$.

Démonstration

a) En tout point d'une circonférence C(R) située dans B_e on a :

$$\vec{u}_1 = -\frac{1}{\tau^2}\, \overrightarrow{\mathrm{grad}} \operatorname{div} \vec{u}_1 \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma^2}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{u}_2$$

donc



$$\vec{e}_r . \vec{u}_1 = - \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial}{\partial R} \operatorname{div} \vec{u}_1 \text{ et}$$

$$\vec{e}_\theta . \vec{u}_1 = - \frac{1}{\tau^2 R} \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{div} \vec{u}_1$$

Or, si $\quad = \operatorname{div} \vec{u}_1$

on a vu que :

$$\Theta(P) = \int_B \left[\Theta(Q) \frac{\partial G_1}{\partial n_Q} (\tau\rho) - G_1 (\tau\rho) \frac{\partial \Theta}{\partial n_Q} (Q) \right] dS_Q$$

où $\rho = R - \rho_o \cos (\psi - \theta) + O\ (1/R)$, $\frac{\partial \rho}{\partial R} = 1 + O\ (R^{-2})$

et $\frac{\partial G_1}{\partial R} - i\tau\, G_1(\tau\rho) = O(R^{-3/2})$; de même $\frac{\partial G_1}{\partial \theta} (\tau\rho) = O\ (R^{-1/2})$

ainsi que

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial \theta \partial n} (\tau\rho)$$

mais

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial R \partial n} (\tau\rho) = i\tau \frac{\partial G_1}{\partial n} (\tau\rho) + O\ (R^{-3/2})$$

Il en résulte que : $\vec{e}_R . \vec{u}_1(P) = - \frac{i}{\tau} \operatorname{div}_P \vec{u}_1(P) + \vec{V}_1(P)$ où $|\vec{V}_1(P)| = O(R^{-3/2})$ quand $R \to \infty$ alors que $\operatorname{div} \vec{u}_1(P)$ est $O(R^{-1/2})$.

On a donc asymptotiquement : $\vec{u}_1(P) \simeq - \frac{i}{\tau} \operatorname{div} \vec{u}_1 . \vec{e}_R$ car

$$\vec{e}_\theta . \vec{u}_1(P) = - \frac{1}{\tau^2 R} \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{div} \vec{u}_1 = O\ (R^{-3/2}) \text{ quand } R \to \infty .$$

De même, $\vec{u}_2(P) = \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{1}{R} \vec{e}_R \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} - \vec{e}_\theta \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right]$ où $\Omega(P) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{u}_2 . \vec{Z}$

$$\Omega(P) = \int_B \left[\Omega(Q) \frac{\partial G_2}{\partial n_Q} (\sigma\rho) - G_2(\sigma\rho) \frac{\partial \Omega}{\partial n_Q} \right] dS_Q$$

et des estimations asymptotiques analogues aux précédentes, on déduit que

$$\vec{u}_2(P) = - \frac{i}{\sigma} \Omega\ (P)\ \vec{e}_\theta + \vec{V}_2(P) \text{ où } |\vec{V}_2(P)| = O(R^{-3/2}) \text{ quand } R \to \infty$$

b) On a

$$\frac{\partial G_1}{\partial n_Q}(\tau\rho) = \frac{\partial \rho}{\partial n_Q} \cdot \frac{dG_1}{d\rho}(\tau\rho) = \cos\psi \,.i\tau\, G_1(\tau\rho) + O\,(\rho^{-3/2}\,)$$

$$= \frac{\partial R}{\partial n_Q} \cdot \frac{\partial G_1}{\partial R}(\tau\rho) = \cos\tilde{\psi}\; i\tau\, G_1 + O(\rho^{-3/2}\,) \text{ quand } \rho \to \infty$$

où $\psi = (\overrightarrow{PQ}, \vec{n}_Q)$, $\tilde{\psi} = (\overrightarrow{PO}, \vec{n}_Q)$ (ψ dépend de θ et R alors que $\tilde{\psi}$ ne dépend que de θ).

On a donc :

$$\frac{\partial G_1}{\partial n_Q}(\tau\rho) = -\frac{\tau}{4}\cos\tilde{\psi}\; e^{i(\tau\rho-\frac{\pi}{4})}\sqrt{\frac{2}{\pi\tau\rho}} + O(\rho^{-3/2}).$$

Par ailleurs de $\rho = R - \rho_o \cos(\theta-\psi) + O\left(\frac{1}{R}\right)$ quand $R \to \infty$

on déduit $\frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + O(R^{-3/2})$ et

$$\exp\left[i(\tau\rho - \tfrac{\pi}{4})\right] = \exp\left[i(\tau R - \tfrac{\pi}{4})\right] \times \exp\left[-i\tau\rho_o \cos(\theta-\vartheta) + O\left(\tfrac{1}{R}\right)\right]$$

$$=\left(\exp\left[i(\tau R - \tfrac{\pi}{4})\right] \times \exp\left[-i\tau\,\rho_o \cos(\theta-\vartheta)\right]\right).(1+ O(1/R))$$

En outre,

$$(Q)\,\frac{\partial G_1}{\partial n_Q}(\tau\rho) - G_1(\tau\rho)\frac{\partial}{\partial n_Q}(Q) = -\frac{\tau}{4}\, e^{i(\tau\rho-\frac{\pi}{4})}\sqrt{\frac{2}{\pi\tau\rho}}\left[\cos\tilde{\psi} + \frac{i}{\tau}\frac{\partial}{\partial n}\right]$$

$$= -\frac{\tau}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi\tau R}}\; e^{i(\tau R-\frac{\pi}{4})} . \left[(S)\cos\tilde{\psi} + i\,\frac{\partial}{\partial n}\right] e^{-i\tau\,\rho_o\cos(\theta-\vartheta)} + O(R^{-3/2})$$

ce qui entraîne immédiatement la formule indiquée, une étude identique donnant celle relative à $g_o(\theta)$.

On est alors en mesure d'établir le

Théorème d'Unicité

Il existe au plus une solution $\vec{W}$ *de classe* C^2 *dans un domaine extérieur* B_e *de frontière* B *régulière et bornée, du système*

$$(S)\quad \begin{cases} \vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \\ \text{grad div } \vec{w}_1 + \tau^2 \ \vec{w}_1 = 0 \\ \text{rot rot } \vec{w}_2 - \sigma^2 \ \vec{w}_2 = 0 \end{cases}$$

telle que :

a) $\vec{w} = \vec{u}_o + \vec{u}$ où $\vec{u}_o$ *est une solution donnée de* (S) *et* $\vec{u}$ *vérifie les conditions de radiation* C.R.6 .

b) *sur* *l'une des quatre conditions suivantes est vérifiée :*

α) $\vec{w} = \vec{0}$

β) $\vec{T}(\vec{w},\vec{n}) = \vec{0}$

γ) $\vec{w} = \vec{0}$ *sur une partie* (B_1) *de* (B) $\vec{0} = \vec{T}(\vec{w},\vec{n})$ *sur la partie complémentaire* B_2 .

δ) $\vec{T}(\vec{w},\vec{n}) + c(S)\,\vec{w} = \vec{0}$, Im $c(S) \geq 0$.

Démonstration

Il suffit d'établir que $\vec{u}_o \equiv \vec{0}$ entraîne $\vec{u} \equiv \vec{0}$ dans B_e . On donnera des démonstrations séparées, une pour α , β , γ et l'autre pour δ .

Si $\vec{U}(P,t)$ désigne le champ de vecteur déplacement *réel* à l'instant t , dans le milieu élastique considéré, le théorème de l'énergie étendu au domaine D_R , de frontière B et C(O,R) , s'écrit, en vertu des conditions α , β ou γ .

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{W} + \mathcal{E}) = \int_{C(O,R)} \vec{T}(\vec{U},\vec{e}_r) . \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\, dS$$

où $\vec{e}_r$ désigne la normale extérieure à D_R , $\mathcal{W} = \iint_{D_R} W\, d\Sigma$ l'énergie de déformation et $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iint_{D_R} \left|\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right|^2 \rho d\Sigma$ l'énergie cinétique.

En effet, $\vec{U}$ étant le déplacement réel est relié aux solutions considérées jusqu'à présent par :

$$\vec{U}(P,t) = \frac{1}{2}\left[\vec{u}\, e^{ikt} + \bar{\vec{u}}\,(P)\, e^{-ikt}\right] \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(P,t) = \frac{ik}{2}\left[\vec{u}\, e^{ikt} - \bar{\vec{u}}\, e^{-ikt}\right]$$

$$\vec{T}(\vec{U},\vec{e}_r) = \frac{1}{2}\left[\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r)\, e^{ikt} + \vec{T}(\bar{\vec{u}},\vec{e}_r)\, e^{-ikt}\right]$$

d'où il résulte que α, β , γ sur B sont équivalentes pour $\vec{u}$ et $\vec{U}$ (si $u_o = 0$).

En vue d'utiliser le lemme 1 , on va écrire :

$$\vec{T}(\vec{U},\vec{e}_r).\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \frac{ik}{4}\Big[(\vec{T}(\bar{\vec{u}},\vec{e}_r) + i\,\bar{\vec{v}}).\vec{u} - (\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r) - i\,\vec{v}).\bar{\vec{u}}$$

$$+ (\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r) - i\,\vec{v}).\,\vec{u}\, e^{2ikt} - (\vec{T}\,(\bar{\vec{u}},\vec{e}_r) + i\,\bar{\vec{v}}).\,\bar{\vec{u}}\, e^{-2ikt}\Big]$$

$$+ \frac{k}{4}\left[\bar{\vec{v}}.\vec{u} + \vec{v}.\bar{\vec{u}} - \vec{v}.\vec{u}\, e^{2ikt} - \bar{\vec{v}}.\bar{\vec{u}}\, e^{-2ikt}\right]$$

où $\vec{v} = \tau\,(\lambda + 2\mu)\,\vec{u}_1 + \sigma\,\mu\,\vec{\mu}_2$.

D'après le corollaire 1 (formules 6.40):

$$\int_{C(O,R)} |\vec{u}|^2\, dS \leqslant \int_{C_R} |\vec{u}_1|^2\, dS + \int_{C_R} |\vec{u}_2|^2\, dS$$ est borné quand $R \to \infty$. Le lemme 1, le résultat précédent et l'inégalité de SCHWARZ entraînent que l'intégrale, étendue à C(O,R) , du premier crochet tend vers zéro quand $R \to \infty$.

Le second crochet s'écrit encore : $k\, \mathrm{Im}\,(\vec{v}\, e^{ikt})\, \mathrm{Im}\,(\vec{u}\, e^{ikt})$.

Or, d'après le lemme 2 on a

$$\vec{u} = -\frac{i}{\tau}\,\vec{e}_r\, \mathrm{div}\,\vec{u}_1 - \frac{i}{\sigma}\,\vec{e}_\theta\,(\vec{Z}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_2) + \vec{V}$$

$$\vec{v} = -\,i(\lambda + 2\mu)\,\vec{e}_r\, \mathrm{div}\,\vec{u}_1 - i\mu\,\vec{e}_\theta\,(\vec{Z}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}_2) + \vec{W}$$

où $|\vec{V}|$, $|\vec{W}|$ sont $O(R^{-3/2})$ quand $R \to \infty$; soit, compte tenu des estimations asymptotiques de ce même lemme 2 :

$$\vec{u} \simeq \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi R}}\,.\Big|\, f_o(\theta)\,\vec{e}_r\,\frac{e^{i(\tau R - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\tau}} + g_o(\theta)\,\vec{e}_\theta\,\frac{e^{i(\sigma R - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\sigma}}$$

$$\vec{v} \simeq \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi R}}\Big[\sqrt{\tau}.(\lambda+2\mu) f_o(\theta)\,\vec{e}_r\, e^{i(\tau R - \frac{\pi}{4})} + \sqrt{\sigma}\,\mu\, g_o(\theta)\,\vec{e}_\theta\, e^{i(\sigma R - \frac{\pi}{4})}\Big]$$

ce qui donne aisément :

$$k \operatorname{Im} (\vec{v}\, e^{ikt}) \operatorname{Im}(\vec{u}\, e^{ikt}) = \frac{k}{8\pi R} \Big[(\lambda+2\mu) \big(\operatorname{Im} f_o\, e^{i(\tau R - \frac{\pi}{4} + kt)}\big)^2$$

$$+ \mu \big(\operatorname{Im} g_o\, e^{i(\sigma R - \frac{\pi}{4} + kt)}\big)^2 \Big] + \mathcal{W}_o$$

$$\mathcal{W}_o = O(R^{-2}) \text{ quand } R \to +\infty .$$

Si l'on pose $F(R,t) = \frac{d}{dt} (\mathcal{W} + \mathcal{E})$, on a obtenu

$$F(R,t) = \frac{k}{8\pi} \int_0^{2\pi} \Big[(\lambda+2\mu)(\operatorname{Im} f_o \exp(i\, (\tau R - \frac{\pi}{4} + kt))^2 + \mu\, (\operatorname{Im} g_o \exp(i\, (\sigma R - \frac{\pi}{4} + kt)\,)^2 \Big] d\theta$$

$$+ O\left(\frac{1}{R}\right) \qquad \text{quand} \quad R \to \infty .$$

la limite du second membre, quand $R \to \infty$, étant $\geqslant 0$ il en est ainsi de $F(R,t)$.

Or,

$$W = \frac{1}{2} \lambda (\operatorname{div} \vec{U})^2 + \mu (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\, \varepsilon_{12}^2) \quad \text{où} \quad 2\, \varepsilon_{ij} = U_{i,j} + U_{j,i} .$$

Si l'on pose $= \operatorname{div} \vec{u} = {}' + i\, {}''$, $e_{jk} = \frac{1}{2} (u_{j,k} + u_{k,j}) = e'_{jk} + ie''_{jk}$, on a :

$$\operatorname{div}_P \vec{U}(P,t) = {}' \cos k\, t - {}'' \sin k\, t , \quad \varepsilon_{jk} = e'_{jk} \cos k\, t - e_{jk} \sin k\, t .$$

D'autre part, si $u_j = u'_j + u''_j$

$$\frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)^2 = \frac{k^2}{2} \sum_i (u'_i \sin kt + u''_i \cos kt)^2 \text{ et}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{W} + \mathcal{E}) = F(R,t) = \iint_{D_R} \Big[k({}' \sin kt + {}'' \cos kt) ({}'' \sin kt - {}' \cos kt)$$

$$+ 2\mu k \sum_{i,j=1}^{2} (e'_{ij} \sin kt + e''_{ij} \cos kt)(e''_{ij} \sin kt - e'_{ij} \cos kt)$$

$$+ k^3 \sum_{i=1}^{2} (u'_i \sin kt + u''_i \cos kt)\, (u''_i \sin kt - u'_i \cos kt) \Big] \times d\, \Sigma .$$

Il en résulte que, pour tout R ,

$$F(R,t) = - F(R, t + \frac{\pi}{2k})$$

On a donc, nécessairement

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \left[(\lambda+2)\ \mathrm{Im}(f_o\ e^{i(\tau R - \frac{\pi}{4} + kt)})\}^2 + \mu\{I_m(g_o\ e^{i(\sigma R - \frac{\pi}{4} + kt)})\}^2 \right] d\theta = 0\ \forall t$$

ce qui entraîne

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} |f_o(\theta)|^2\ d\theta = 0 = \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} |g_o(\theta)|^2\ d\theta$$

soit

$$f_o(\theta) = g_o(\theta) \equiv 0\ .$$

Par conséquent, le lemme 2 entraîne pour $|\vec{u}_1|$ et $|\vec{u}_2|$ d'être $O(R^{-3/2})$ quand $R \to \infty$, soit

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(R)} |\vec{u}_i|^2\ dS = 0 \qquad i = 1,2$$

Or $\vec{u}_1$ (resp. $\vec{u}_2$) vérifient $\Delta\ \vec{u}_1 + \tau^2\ \vec{u}_1 = 0 = \Delta\ \vec{u}_2 + \sigma^2\ \vec{u}_2$ dans B_e et les conditions de Sommerfeld. Il résulte alors d'un théorème de RELLICH que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont identiquement nuls dans B_e donc $\vec{u}$.

Dans le cas de δ) on part de

$$\iint_{D_R} \left[\vec{u}.(\vec{\Delta}^*\vec{\bar{u}} + k^2\ \vec{\bar{u}}) - \vec{\bar{u}}.(\vec{\Delta}^*\vec{u} + k^2\ \vec{u})\right] d\Sigma = 0 = \int_{B+C(R)} \left[\vec{T}(\vec{\bar{u}},\vec{n}).\vec{u} - \vec{\bar{u}}.\vec{T}(\vec{u},\vec{n})\right] dS$$

($\vec{n}$ normale extérieure à D_R) .

On a donc

$$\int_{C(R)} \left[\vec{u}.\vec{T}(\vec{\bar{u}},\vec{e}_r) - \vec{\bar{u}}.\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r)\right] dS = \int_B \left[\vec{u}.\vec{T}(\vec{\bar{u}},\vec{n}) - \vec{\bar{u}}.\vec{T}(\vec{u},\vec{n})\right] dS$$

(où $\vec{n}$ désigne maintenant la normale à B dirigée vers B_e).

Compte tenu de

$$(\delta) \qquad \vec{T}(\vec{u},\vec{n}) + c(s)\ \vec{u} = 0 = \vec{T}(\vec{\bar{u}},\vec{n}) + \bar{c}(s)\ \vec{\bar{u}} \qquad \text{sur } B$$

le second membre devient : $2\ i \int_B |\vec{u}|^2\ \mathrm{Im}\ c(s).dS$

quand au premier, il s'écrit

$$\int_{C(R)} \left[\vec{u}.(\vec{T}(\vec{\bar{u}},\vec{e}_r) + i\ \vec{\bar{v}}) - \vec{\bar{u}}.(\vec{T}(\vec{u},\vec{e}_r) - i\vec{v})\right] dS - 2i \int_{C(R)} \mathrm{Re}(\vec{u}.\vec{\bar{v}})\ dS\ .$$

Le second membre étant indépendant de R , on a compte tenu du lemme 1 :

$$\lim_{R\to\infty} \{ - \int_{C(R)} \operatorname{Re}(\vec{u}.\vec{v})\, dS\} = \int_B \operatorname{Im} c(S).|\vec{u}|^2\, dS \geq 0 \ .$$

Or

$$(\vec{u}.\vec{v}) = \frac{1}{8\pi R}\left[(\lambda+2\mu)\ |f_o(\theta)|^2 + \mu|g_o(\theta)|^2\right] + O(R^{-2})$$. On a donc

$$\int_B |\vec{u}|^2 \operatorname{Im} c(S)\, dS = -\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\left[(\lambda+2\mu)|\ f_o(\theta)|^2 + \mu|g_o(\theta)|^2\right] d\theta$$

ce qui entraîne $f_o(\theta) \equiv g_o(\theta) \equiv 0$ et comme précédemment $\vec{u} \equiv 0$ dans B_e .

REMARQUES BIBLIOGRAPHIQUES

1) On a vu (page , corollaire 2) que div $\vec{u}_1$ et $\vec{Z}.\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_2$ étaient des solutions d'équations de Helmholtz (de coefficients respectifs τ et σ) et vérifiaient les conditions de radiation de SOMMERFELD associées.

Le théorème d'unicité correspondant au cas plan fût établi par M. ROSEAU en 1957 ([1] et [2]) et cet article revêt une particulière importance à nos yeux car il est à l'origine de notre travail.

Par la suite, les résultats de V.D. KUPRADZE ([1],[2],[3]) étant devenus accessibles, il est apparu que celui-ci utilisait les conditions à l'infini suivantes :

$$\lim_{R\to\infty} \vec{u}_i(P) = 0 = \lim_{R\to\infty} R(\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial r} - i\tau\ \vec{u}_1) = \lim_{R\to\infty} R(\frac{\partial u_2}{\partial r} - i\tau\ \vec{u}_2\ )$$

dans le cas tridimensionnel (R étant à remplacer par $\sqrt{R}$ dans le cas plan), ces conditions étant introduites par simple analogie avec la condition de Sommerfeld.

C'est enfin les articles de WILCOX C.H. ([1],[2]) qui ont déterminé la forme de ce chapitre (moyennes sphériques et théorème de développement dans le cas tridimensionnel).

2) M. ROSEAU a montré que :

les équations de LAME sont équivalentes au système :

$$\begin{cases} \Delta\,\Theta + \tau^2\,\Theta = 0 & u = -\,\Omega_y - \Theta_x \qquad \mu\sigma^2 = \rho k^2 = (\lambda+2\mu)\,\tau^2 \\ \Delta\,\Omega + \sigma^2\,\Omega = 0 & v = \Omega_x - \Theta_y \qquad \sigma^2\,\Omega = u_y - v_x \end{cases}$$

$$\tau^2\,\Theta = u_x + v_y$$

dans l'hypothèse où les composantes du vecteur déplacement au point (x,y,z) sont de la forme : $u(x,y)e^{ikt}$, $v(x,y)e^{ikt}$, 0 . Dans ces conditions, le théorème d'unicité s'énonce comme suit :

il existe au plus une solution Ω, Θ , u , v *définie dans l'extérieur* B_e *d'une courbe fermée, bornée* B , *telle que*

a) $\Theta = \Theta_o + \Theta_1$, $\Omega = \Omega_o + \Omega_1$ *où* Θ_o *(resp.* Ω_o *) sont des solutions données du système et* Ω_1 , Θ_1 *satisfont aux conditions de radiation.*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(R)} \left|\frac{\partial\Theta_1}{\partial r} - i\tau\,\Theta_1\right|^2 dS = 0 = \lim_{R\to\infty} \int_{C(R)} \left|\frac{\partial\Omega_1}{\partial r} - i\sigma\,\Omega_1\right|^2 dS$$

b) $u = v = 0$ *sur* (B)

Dans le cas tridimensionnel, $\vec{u} = \vec{u}\,(x,y,z)\,e^{ikt}$ l'équation

$$\mu\,\Delta\,\vec{u} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \rho k^2\,\vec{u} = 0$$

est équivalente au système :

$$(\Sigma)\begin{cases} \Delta\,\Theta + \tau^2\,\Theta = 0 & \vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\Omega} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Theta \\ \Delta\,\Omega + \sigma^2\,\vec{\Omega} = 0 & \mathrm{div}\,\vec{\Omega} = 0 \end{cases}$$

On a le théorème d'unicité suivant :

il existe au plus une solution Θ , $\vec{\Omega}$, $\vec{u}$ *de* (Σ) *définie dans un domaine extérieur* B_e *de frontière, une surface fermée, régulière, bornée* B *et telle que*

1) $\Theta = \Theta_o + \Theta_1$, $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_o + \vec{\Omega}_1$ *où* $\vec{\Omega}_o$, Θ_o *solution donnée de* (Σ) *et* $\vec{\Omega}_1$, Θ_1 *vérifient :*

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{S(R)} \left|\frac{\partial\Theta_1}{\partial r} - i\tau\,\Theta_1\right|^2 dS = 0 = \lim_{R\to\infty} \iint_{S(O,R)} \left|\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\Omega}_1 + i\sigma\,\vec{\Omega}_1\right|^2 dS$$

2) $\vec{u} = 0$ *sur* B .

Démonstration

On est amené à établir que tout solution Θ , $\vec{\Omega}$ de $(\sum)$ définie dans (B_e) , qui satisfait aux conditions de radiation précédentes et à

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ \Theta = \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\Omega} \quad \text{sur } (B)$$

est identiquement nulle dans (B_e) .

Si l'on sépare parties réelle et imaginaire :

$\Theta = \Theta' + i\,\Theta''$, $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}' + i\,\vec{\Omega}''$ (celles-ci satisfont à $(\sum)\ \tau$, σ étant réels); le théorème de GREEN, appliqué au domaine D_R limité par (B) et S(R) sphère contenant $\overline{B_i}$ à son intérieur, donne :

$$\iint_B \left(\Theta' \frac{\partial \Theta''}{\partial n} - \Theta'' \frac{\partial \Theta'}{n}\right) dS = \iint_{S(R)} \left(\Theta' \frac{\partial \Theta''}{\partial r} - \Theta'' \frac{\partial \Theta'}{\partial r}\right) dS$$

On obtient, pour $\vec{\Omega}'$, $\vec{\Omega}''$ compte tenu de :

$$\iiint_{D_R} \left[\vec{\Omega}' . \text{rot rot } \vec{\Omega}'' - \vec{\Omega}'' . \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\Omega}'\right] dv = \iint_{B+S(R)} \left[\overrightarrow{\text{rot}}\ \Omega' \wedge \vec{\Omega}'' - \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\Omega}'' \wedge \vec{\Omega}'\right] . \vec{n}\ dS$$

$$\iint_B \left[\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\Omega}' \wedge \vec{\Omega}'' - \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\Omega}'' \wedge \vec{\Omega}'\right] . \vec{n}\ dS = \iint_{S(R)} \left[\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\Omega}' \wedge \vec{\Omega}'' - \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\Omega}'' \wedge \vec{\Omega}'\right] . \vec{e}_r\ dS$$

Si l'on tient compte des conditions aux limites sur (B) , et donnent respectivement :

$$\iint_B \left[\Theta'\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\Omega}'' - \Theta''\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\Omega}'\right] . \vec{n}\ dS = \iint_{S(R)} \left[\Theta \frac{\partial \Theta''}{\partial r} - \Theta'' \frac{\partial \Theta'}{\partial r}\right] dS$$

$$\iint_B \left[\overrightarrow{\text{grad}}\ \Theta' \wedge \vec{\Omega}'' - \overrightarrow{\text{grad}}\ \Theta'' \wedge \vec{\Omega}\right] . \vec{n}\ dS = \iint_{S(R)} \left[\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\Omega}' \wedge \vec{\Omega}'' - \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\Omega}'' \wedge \vec{\Omega}'\right] \vec{e}_r\ dS$$

En ajoutant ces deux dernières égalités membre à membre, on obtient

$$\iint_B \left[\Theta'\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\Omega}'' - \Theta''\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\Omega}'\right] . \vec{n}\ dS = \iint_{S(R)} \left[\Theta' \frac{\partial \Theta''}{\partial r} - \Theta'' \frac{\partial \Theta'}{\partial r}\right] dS$$

$$\iint_{S(R)} \left[\Theta' \frac{\partial \Theta''}{\partial r} - \frac{\partial \Theta'}{\partial r}\right] dS + \iint_{S(R)} \left[\vec{\Omega}' \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\Omega}'' - \vec{\Omega}'' \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\Omega}'\right].\vec{e}_r \, dS$$

$= \iint_B \overrightarrow{\text{rot}} \{\Theta' \vec{\Omega}'' - \Theta'' \vec{\Omega}'\}.\vec{n}\, dS$ et cette dernière intégrale est nulle d'après le théorème de la divergence appliqué à (B_i) en considérant des prolongements de $\Theta, \vec{\Omega}$ à B_i, continûment différentiables.

On a, d'autre part

$$\left| \frac{\partial \Theta}{\partial r} - i\tau\, \Theta \right|^2 = \left|\frac{\partial \Theta'}{\partial r} - i\tau\, \Theta'\right|^2 + \left|\frac{\partial \Theta''}{\partial r} - i\tau\, \Theta''\right|^2 + 2\tau \left(\Theta'' \frac{\partial \Theta'}{\partial r} - \Theta' \frac{\partial \Theta''}{\partial r} \right)$$

$$|\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\Omega}' + i\sigma\, \vec{\Omega}|^2 = |\vec{e}_r \wedge \text{rot}\, \vec{\Omega}' + i\sigma\, \vec{\Omega}'|^2 + \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\Omega}'' + i\sigma\, \vec{\Omega}''|^2$$
$$+ 2\sigma\left[\vec{\Omega}' \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\Omega}'' - \vec{\Omega}'' \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\Omega}'\right] \vec{e}_r$$

On en déduit à l'aide de ce qui précède que

Θ', Θ'' (resp. $\vec{\Theta}'$, $\vec{\Omega}''$) satisfont aux mêmes conditions de radiation que Θ (resp. $\vec{\Omega}$).

Ces dernières conditions entraînent

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{S(R)} |\Theta'|^2 dS = \lim_{R\to\infty} \iint_{S(R)} |\Theta''|^2 dS = 0 = \lim_{R\to\infty} \iint_{S(R)} |\vec{\Omega}'|^2 dS = \lim_{R\to\infty} \iint_{S(R)} |\vec{\Omega}''|^2 dS$$

et ceci entraîne à l'aide des théorèmes de développement connus (RELLICH [1], WILCOX [1], KUPRADZE [1]) que Θ', Θ'', $\vec{\Omega}'$, $\vec{\Omega}''$ sont nuls dans (B_e).

CHAPITRE III

THEOREMES D'EXISTENCE

I OPERATEURS DE NEUMANN GENERALISES

L'adjoint formel de l'opérateur $L = A_{ij}\, D_i\, D_j + \rho\, k^2\, I$ s'écrit :

(1.1) $$\vec{L}^{*}(\vec{u}) = (-1)^2\, D_j\, {}^t A_{ij}\, D^i\, \vec{u} + \rho\, k^2\, \vec{u} = \vec{L}(\vec{u})$$

Si Ω désigne un domaine borné, de frontière lisse $\partial\Omega$, on peut écrire

$$\iiint_{\Omega} (\vec{u}.L(\vec{v})-\vec{v}.L(\vec{u}))\, dV = \iiint_{\partial\Omega} (\vec{u}.D^i\, A_{ij}\, D^j\, \vec{v} - D^i\, A_{ij}\, D^j\, \vec{u}.\vec{v})\, dV$$

or,

(1.2) $$\vec{u}.\vec{L}(\vec{v}) = D^i(\vec{u}.A_{ij}\, D^j\, \vec{v}) - (D^i\, \vec{u}.A_{ij}\, D^j\, \vec{v}) + \rho\, k^2(\vec{u}.\vec{v})$$

d'où

$$\iiint_{\Omega} \vec{u}.\vec{L}(\vec{v})\, dV = \iint_{\partial\Omega} (\vec{u}.A_{ij}\, n_i\, D^j\, \vec{v})\, dS - \iiint_{\Omega} \left[D^i\, \vec{u}.A_{ij}\, D^j\, \vec{v}) - \rho k^2(\vec{u}.\vec{v})\right] dV$$

de même

$$\iiint_{\Omega} \vec{v}.\vec{L}(\vec{u})\, dV = \iint_{\partial\Omega} (\vec{v}.A_{ij}\, D^i\, u)\, n_j\, dS - \iiint_{\Omega} \left[(A_{ji}\, D^i\, \vec{u}.D^j\, \vec{v}) - \rho k^2(\vec{u}.\vec{v})\right] dV$$

On a donc

$$\iiint_{\Omega} \left[\vec{u}.\vec{L}(v)-\vec{v}.L(\vec{u})\right] dV = \iint_{\partial\Omega} \left[n_i\left[(\vec{u}.A_{ij}\, D^j\, \vec{v})-(\vec{v}.A_{ij}\, D^j\, \vec{u})\right] dS - \iiint_{\Omega} H(\vec{u}.\vec{v})\right] dV$$

où $H(\vec{u},\vec{v})$ est une forme bilinéaire dont on vérifie immédiatement qu'elle est nulle. On obtient donc

(1.3) $$\iiint_{\Omega} \left[\vec{u}.L(\vec{v})-\vec{v}.\vec{L}(\vec{u})\right] dV = \iint_{\partial\Omega} \left[\vec{u}.A_{ij}\, n_j\, D^j\, \vec{v} - \vec{v}.A_{ij}\, n_i\, D^j\, \vec{u}\right] dS$$

et l'on vérifie sans peine que

(1.4) $$A_{ij}\, n_i\, D^j\, \vec{u} = 2\mu\, \frac{\partial\vec{u}}{\partial n} + \lambda\, \vec{n}\, \mathrm{div}\, \vec{u} + \mu\, \vec{n} \wedge \mathrm{rot}\, \vec{u} = \vec{T}(\vec{u},\vec{n}),$$

est l'opérateur contrainte dans la direction $\vec{n}$.

2) *L'équation*

$$\mu \, \Delta \, \vec{u} + (\lambda+\mu) \text{ grad div } \vec{u} + \rho \, k^2 \, \vec{u} = \vec{0} \qquad (\text{si } \vec{f} \equiv \vec{0})$$

n'est pas changée, si l'on introduit 2 paramètres réels α , β tels que $\alpha + \beta = \lambda + \mu$, les matrices A_{ij} s'écrivant :

$$A_{11} = \text{Diag } (\alpha + \beta + \mu, \mu, \mu) \; \ldots\ldots$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^tA_{21} \, , \ldots$$

L'opérateur de Neumann associé s'écrit alors

$$\vec{N}_{\alpha,\beta} \, (\vec{u},\vec{n}) = (\alpha + \mu) \, \frac{d\vec{u}}{dn} + \beta \, \vec{n} \text{ div } \vec{u} + \alpha \, \vec{n} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \, \vec{u}$$

A chaque valeur de α, β (telle que $\alpha + \beta = \lambda + \mu$) est associée la forme bilinéaire.

$$\mathcal{W}_{\alpha,\beta} \, (\vec{u},\vec{v}) = \iiint_\Omega (D_i \, \vec{u}. \;_{ij} \, D_j \, \vec{v}) \, dV = \iiint_\Omega W \, (\vec{u},\vec{v}) \, dV$$

En particulier

$$W_{\alpha,\beta} \, (\vec{u},\bar{\vec{u}}) = \sum_{i=1}^{3} (D_i \, \vec{u}. \;_{ij} \, D_i \, \bar{\vec{u}}) + \sum_{1\leq i<j\leq 3} \left[(D_i \, \vec{u}.A_{ij} \, D_j \, \bar{\vec{u}}) + (D_j \, \vec{u}.A_{ji} \, D_i \, \bar{\vec{u}}) \right]$$

$$= (\lambda+2\mu)(|u_{1,1}|^2 + |u_{2,2}|^2 + |u_{3,3}|^2) + \mu \, (|u_{2,1}|^2 + |u_{1,2}|^2 + |u_{2,3}|^2$$

$$+ |u_{3,2}|^2 + |u_{1,3}|^2 + |u_{3,1}|^2$$

$$+ \beta \left[(u_{1,1}.\bar{u}_{2,2} + u_{2,2}.\bar{u}_{1,1}) + (u_{1,1}.\bar{u}_{3,3} + u_{3,3}.\bar{u}_{1,1}) + \right.$$

$$\left. (u_{2,2} \, \bar{u}_{3,3} + u_{3,3} \, \bar{u}_{2,2}) \right]$$

$$+ \alpha \left[(u_{1,3} \, \bar{u}_{3,1} + u_{3,1} \, \bar{u}_{1,3}) + (u_{1,2} \, \bar{u}_{2,1} + u_{2,1} \, \bar{u}_{1,2}) + \right.$$

$$\left. (u_{3,2} \, \bar{u}_{2,3} + u_{2,3} \, \bar{u}_{3,2}) \right]$$

$$W_{\alpha,\beta}(\vec{u},\bar{\vec{u}})=\alpha\Big[|u_{1,2}+u_{2,1}|^2+|u_{2,3}+u_{3,2}|^2+|u_{3,1}+u_{1,3}|^2+2(|u_{1,1}|^2$$
$$+|u_{2,2}|^2+|u_{3,3}|^2\Big]+\beta\,|\mathrm{div}\,\vec{u}|^2+(\mu-\alpha)\sum_{i,j=1}^{3}|u_{i,j}|^2 .$$

On peut remarquer que pour $\alpha = 0$ (donc $\beta = \lambda + \mu$) on obtient $(\lambda+\mu)\,|\mathrm{div}\,\vec{u}|^2 + \mu \sum |u_{i,j}|^2$ et que $W_{\alpha,\beta}\,(\vec{u},\bar{\vec{u}})$ est définie positive si $\mu \geqslant \alpha \geqslant 0$ $(\lambda \leqslant \beta \leqslant \lambda + \mu)$.

Dans l'étude des solutions élémentaires et des potentiels associés, on sera amené à appliquer $\vec{N}_{\alpha,\beta}$ à des vecteurs $\vec{e}(P,Q)$, P B_e (ou B_i) $Q \in B$ frontière bornée de B_i et B_e .

Si l'on désigne par $\vec{n}_Q$ la normale à B en Q :

$$\vec{N}_{\alpha,\beta} = (\alpha+\mu)\frac{\partial}{\partial n_Q} + \beta\,\vec{n}_Q\,\mathrm{div}_Q + \alpha\,\vec{n}_Q \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}_Q$$

les dérivées étant prises au point Q .

Si l'on écrit $N_{\alpha,\beta}$ sous forme matricielle :

$N_{\alpha,\beta} = A_{ij}\ \ n_i\, D_j$ et si $E(P,Q)$ désigne une matrice carrée de 3, symétrique, on pourra définir une nouvelle matrice :

$\mathcal{N}_{\alpha,\beta}\ (P;Q,n_Q) = N_{\alpha,\beta}\,.E(P,Q)$ dont les vecteurs colonnes $\vec{v}_i$ s'exprimeront en fonction de ceux $\vec{e}_i$ de E par :

$$\vec{v}_i = \vec{N}_{\alpha\beta}\,(\vec{e}_i)$$

On désignera par $\mathcal{F}\,(P;Q,\vec{n}_Q)$ celle correspondant à $\alpha = \mu$, $\beta = \lambda$ et par $\mathcal{N}$ celle correspondant à $\alpha = \dfrac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}$ et $\beta = \dfrac{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu}$ (cette matrice apparaîtra bientôt), l'opérateur correspondant étant dû à BASHELEISHVILI (cité dans KUPRADZE [2],[3]).

2. *On se propose d'étudier, dans le cas d'un milieu à 3 dimensions, des théorèmes d'existence relatifs au problèmes de Dirichlet.*

Plus précisément, on considère le problème suivant :

soit

$$(2.1) \qquad \mu\, \Delta\, \vec{u} + (\lambda+\mu)\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{div}\, \vec{u} + \rho\, k^2\, \vec{u} = \vec{0}$$

équivalent à

$$(2.2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{div}\, \vec{u}_1 + \tau^2\, \vec{u}_1 = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{u}_2 - \sigma^2\, \vec{u}_2 = \vec{0} \end{array} \right.$$

Le problème de la diffraction d'ondes élastiques par un obstacle borné B_i de frontière B bornée (surface de Liapounoff d'indice θ , $0 < \theta \leq 1$) revient à la recherche d'une solution $\vec{w}$ de telle que :

$$\vec{w} = \vec{u}_o + \vec{u}$$

où $\vec{u}_o$ est une solution donnée de

$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ vérifie les conditions de radiation C.R.5

$\vec{w} = \vec{0}$ sur B

L'unicité a déjà été établie.

Afin d'utiliser des méthodes intégrales, il est bon de déterminer une solution élémentaire de .

Solution élémentaire (cf. KUPRADZE [1],[2],[3])

On recherche une matrice $E(P,Q) = E(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ telle que l'on sait, au sens des distributions

$$(2.3) \qquad \Delta_p^{*}\, E + \rho\, k^2\, E = -\, \delta(Q)\, I_3$$

les vecteurs colonnes de E sont donc solutions de (2.1) où l'on prend respectivement pour second membre, $-\delta(Q)\vec{x}$, $-\delta(Q)\vec{y}$, et $-\,\delta(Q)\,\vec{z}$.

Or, si $r = PQ$, on sait que [SCHWARTZ [1]]

$$-\,\delta(Q)\,\vec{x} = \Delta_p\,\left(\frac{1}{4\pi r}\,\vec{x}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\left(\frac{\vec{x}}{4\pi r}\right) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\left(\frac{\vec{x}}{4\pi r}\right)$$

d'où il résulte que les vecteurs colonnes $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ de E sont de la forme, d'après

$$\vec{e}_i = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi_i + \mathrm{rot}\,\vec{\psi}_i \qquad i = 1,2,3$$

(2.1) devient alors

$$(\lambda+2\mu)\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ (\Delta\ \phi_1 + \tau^2\phi_1 - \frac{\tau^2}{k^2}\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{1}{r}) + \mu\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ (\Delta\vec{\psi}_1 + \sigma^2\ \vec{\psi}_1 + \frac{\sigma^2}{k^2}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\frac{\vec{x}}{4\pi r})\ )=0$$

et 2 autres équations obtenues en permutant circulairement et simultanément (1,2,3) et (x,y,z).

Ces équations admettent pour solutions particulières :

$$\phi_1(PQ) = \frac{1}{4\pi}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\frac{e^{i\tau r} - 1}{r})\ ;\quad \vec{\psi}_1 = -\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}_p\left[\frac{e^{i\tau r} - 1}{4\ r}\ \vec{x}\right]\quad \text{etc...}$$

ce qui donne

$$4\pi\ \vec{e}_1(PQ) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}_p\ \frac{e^{i\tau r}}{r}\ \vec{x}\ -\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{div}\ \frac{e^{i\tau r}}{r}\ \vec{x}$$

$$4\pi\ \vec{e}_2(PQ) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}_p\ \frac{e^{i\ r}}{r}\ \vec{y}\ -\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{div}\ \frac{e^{i\tau r}}{r}\ \vec{y}$$

$$4\pi\ \vec{e}_3(PQ) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}_p\ \frac{e^{i\sigma r}}{r}\ \vec{Z}\ -\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{div}\ \frac{e^{i\tau r}}{r}\ \vec{Z}$$

d'où la matrice élémentaire cherchée

$$E(PQ) = (e_{jk}\ (PQ)\ )$$

où

$$4\pi\ e_{jk}(PQ) = \vec{e}_k.\vec{x}_j = \sigma^2\ \delta_{kj}\ \frac{e^{i\sigma r}}{r} - \frac{\partial^2}{\partial x_i\ \partial x_j}\ (\frac{e^{i\tau r}}{r} - \frac{e^{i\tau r}}{r}) = e_{kj}\ 4\pi$$

E est donc symétrique et l'on peut écrire

$$E(PQ) = E_o(PQ) + E_1(PQ)\ (= E(x_1,x_2,x_3;y_1,y_2,y_3)$$

où

$$E_o(PQ) = (e^o_{jk}),\ 4\pi\ e^o_{jk} = 4\pi\ e^o_{kj} = \frac{1}{2}\left[(\sigma^2 - \tau^2)\ r_j\ r_k + (\tau^2+\sigma^2)\ \delta_{jk}\right]\frac{1}{r}$$

et $e_{jk} - e^o_{jk} = O(1)$ quand $r \to \infty$. $(r_j = \frac{\partial r}{\partial x_j}$

Il résulte alors de (KUPRADZE [3]) :

$$4\pi\ N^o_{\alpha\beta}\ (P;Q,\vec{n}_Q) = (\nu^o_{jk})\quad (\ N^o_{\alpha\beta} = N_{\alpha,\beta}.\ E_o\ )$$

où
$$\nu^{o}_{jk} = \left[\frac{\alpha}{\mu} - \frac{(\mu+\alpha)(\lambda+\mu)}{2\mu(\lambda+2\mu)}\right] \left(\vec{n}_Q.\vec{x}_j \frac{\partial}{\partial y_k} - \vec{n}_Q.\vec{x}_k \frac{\partial}{\partial y_j}\right) \frac{1}{r}$$

$$+ \left(\left[\frac{(\mu+\alpha)(\lambda+3\mu)}{2\mu(\lambda+2\mu)} - \frac{\alpha}{\mu}\right]\delta_{kj} + \frac{3(\mu+\alpha)(\lambda+\mu)}{2\mu(\lambda+2\mu)} .r_j\ r_k\right)\frac{\partial}{\partial n_Q}\ \frac{1}{r}$$

et le choix de BASHELEISHVILI est justifié par le fait que pour les valeurs de α , β indiquées précédemment, les ν_{jk} ne comportent plus que les dérivées normales de $\frac{1}{r}$.

Plus précisément

si
$$N^{o}(P;Q,n_Q) = (n^{o}_{jk})$$

on a
$$n^{o}_{jk} = \frac{1}{2\pi(\lambda+3\mu)}\left[2\mu\ \delta_{jk} + 3(\lambda+\mu)\frac{\partial r}{\partial x_j}\right]\frac{\partial r}{\partial x_k}\ \frac{\partial}{\partial n_Q}\ \frac{1}{r} = n^{o}_{kj}$$

où
$$P = (x_1,x_2,x_3) \quad , \quad Q = (y_1,y_2,y_3) \quad .$$

En outre
$$\mathcal{N}_{\alpha,\beta}(P;Q;\vec{n}_Q) = \mathcal{N}^{o}_{\alpha,\beta} + \mathcal{N}^{o}_{\alpha,\beta}$$

où les éléments de $\mathcal{N}^{1}_{\alpha,\beta}$ sont $O(1)$ quand $r \to 0$

On en déduit que, si l'on pose :
$$\vec{u}(P) = \iint_B N(P;Q,\vec{n}_Q)\ \vec{\vartheta}\ (Q)\ dS_Q$$

où $\vec{\vartheta}\ (Q)$ est continue sur B ,

lorsque P tend vers $Q_o \in B$, $\vec{n}_Q$ normale extérieure en Q à B , on a, selon que
$$P \in B_i\ :\ \vec{u}_i(Q_o) = -\ \vec{\vartheta}\ (Q_o) + \iint_B N(Q_o;Q,\vec{n}_Q)\ \vec{\vartheta}\ (Q)\ dS_Q$$

$$P \in B_e\ :\ \vec{u}_e(Q_o) = \vec{\vartheta}\ (Q_o) + \iint_B N(Q_o;Q,n_Q)\ \vec{\vartheta}\ (Q)\ dS_Q$$

où $\vec{u}_i(Q_o)$ (resp. $\vec{u}_e(Q_o)$) est la limite de $\vec{u}(P)$ lorsque $P \in B_i$, $P \to Q_o$ (resp. $P \in B_e$, $P \to Q_o$) .

La limite est prise au sens usuel si $\vec{\vartheta}$ est continue ou en moyenne d'ordre p si $\vec{\vartheta}$ est de classe $\mathscr{L}^p$ ($1 \leq p < \infty$).

De façon plus précise

si $\ell > 0$ et $P = Q_o + \ell\, \vec{n}_o$ (c'est-à-dire $P \to Q_o$ suivant la normale en Q_o à B)

$$\iint_B |\vec{u}(P) - \vec{u}_e(Q_o)|^p \, dS_Q \to 0 \quad \text{quand} \quad \ell \to 0$$

(de même si $P \longrightarrow Q_o$, $P \in B_i$

Si $\vec{\vartheta}(Q) \in \mathscr{L}^p$, on observe que

$$|\vec{u}(P)| \leq \iint_B G(P,Q)|\vec{\vartheta}(Q)|\, dS_Q$$

où $G(P,Q)$ est une fonction positive telle que $G(Q_o + \ell\, \vec{n}_o, Q)$ est intégrable par rapport à Q_o et par rapport à Q , uniformément en ℓ . En utilisant l'inégalité de HOLDER, on obtient :

$$|\vec{u}(P)|^p \leq \left[\iint_B G(PQ)\, dS_Q\right]^{p/Q} \cdot \left[\iint_B G(PQ) \ |\vec{\vartheta}(Q)|^p \, dS_Q\right]$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a donc :

$$|\vec{u}(P)|^p \leq \text{Cstte.} \iint_B G(PQ)\ |\vec{\vartheta}(Q)|^p \, dS_Q$$

d'où

$$\iint_B |\vec{u}(Q_o + \ell\, \vec{n}_o)\ ^p \, dS_{Q_o} \leq A_p \iint_B |\vec{\vartheta}(Q)|^p \, dS_Q$$

où A_p ne dépend que de p .

Comme $\vec{\vartheta}(Q)$ est limite uniforme dans $\mathscr{L}^p$ d'une suite $\{\vec{\vartheta}\}_n$ de fonctions continues, si l'on applique à $\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_n$ l'inégalité précédente, on voit que :

$$\iint_B \left| \vec{u}(Q + \ell \vec{n}_Q) - \vec{u}_e(Q) \right|^P dS_Q \to 0 \quad \text{quand} \quad \ell \to +0 .$$

(l'existence de G(PQ) résulte de la singularité en $r^{-2+\theta}$ où $0 < \theta \leqslant 1$ est l'indice de la surface de Liapounov B).

Remarque

On rappelle qu'une surface fermée, bornée de l'espace affine euclidien de dimension 3 est dite surface de Liapounoff si elle satisfait aux conditions suivantes :

1) Elle admet en tout point un plan tangent qui varie continûment avec ce point.

2) Si Q, Q_o sont deux points de B , $\rho = Q_o Q$ leur distance euclidienne, $\vec{n}$ et $\vec{n}_o$ les normales à B en ces points, on a

$$|\vec{n} - \vec{n}_o| < C \rho^\theta \qquad 0 < \theta \leqslant 1$$

où C, θ sont des constantes indépendantes de Q, Q_o .

3) $\forall Q \in B$, $\vec{n}$ normale à Q à B , il existe $\varepsilon_o > 0$ indépendant de Q tel que toute parallèle à $\vec{n}$, intérieure au cylindre circulaire d'axe $Q\vec{n}$ de rayon ε_o , ne coupe qu'en un point au plus le voisinage de Q (sur B) intersection de ce cylindre et de B .

(cette dernière propriété est conservée pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$)

B étant compacte, le théorème de Borel-Lebesque affirme que l'on peut la recouvrir par un nombre fini de tels voisinages. A chacun d'eux, on peut associer un système de coordonnées locales, défini comme suit :

On considère le trièdre trirectangle $Q\,\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$, $Q\,\xi_3$ dirigé suivant $\vec{n}_Q$.

La condition 3 permet d'affirmer que B admet, pour $\xi_1^2 + \xi_2^2 < \varepsilon_o^2$ la représentation

$$\xi_3 = \xi\ (\xi_1, \xi_2)$$

les conditions 1 et 2 permettant d'affirmer que ξ est continûment différentiable, ses dérivées étant continues hölderiennes d'indice α :

$$\xi(0,0) = 0 = \frac{\partial \xi}{\partial \xi_1}(0,0) = \frac{\partial \xi}{\partial \xi_2}(0,0)$$

$$|\xi_3| \leqslant C_p^{1+\alpha} \quad , \quad \left| \frac{\partial \xi}{\partial \xi_i} \right| < C_{p^{\alpha}} \qquad \text{où} \qquad p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 \; .$$

En termes actuels, B est une variété compacte, orientable, de classe $C^{1,}$, de dimension 2 .

Si on suppose B d'indice 1 et $\vec{\varphi}\,(Q) \in \mathcal{E}^{B}$ (B) , $0 < \beta < 1$ et si $P = Q_o + \ell\,\vec{n}_o$, on a

$$|\vec{u}(P) - \vec{u}_e(Q_o)| \;\; = O\,(|\ell|^{\beta}\,)$$

Ses dérivées partielles premières étant $O\,(|\ell|^{\beta-1})$.
Il suffit d'utiliser le système local de coordonnées, d'origine Q_o en tenant compte de la singularité de $N(Q;P,\vec{n}_o)$ qui est $\frac{\partial}{\partial n_o}\left(\frac{1}{r}\right)$ (cf. KELLOG [1] et GUNTHER [1]).

On peut introduire des distributions de vecteurs déplacements sur (B) plus générales. Si $\overrightarrow{d\varphi}$ désigne une telle distribution, on peut définir

$$\vec{u}(P) = \iint_B N(P;Q,\vec{n}_Q)\ \overrightarrow{d\varphi}$$

où l'intégrale est à interpréter comme suit :

$$\vec{a}.\iint_B N(P;Q,\vec{n}_Q)\ d\vec{\varphi} \;\; = \;\; \iint_B^{t} N(P;Q,\vec{n}_Q)\ a.\overrightarrow{d\varphi}$$

pour tout vecteur fixé $\vec{a}$.

En particulier, si la distribution est absolument continue par rapport à la mesure superficielle B de B , on a :

$$\overrightarrow{d\varphi}(Q) = \vec{\varphi}(Q)\ d\ S_Q \quad .$$

Soit alors l'opérateur intégral $\vec{T}$

$$\vec{\varphi} \;\rightarrow\; \vec{T}(\vec{\varphi}) = \iint_B N(Q_o;Q,\vec{n}_Q)\ \ \vec{\varphi}(Q)\ dS_Q$$

$\vec{T}$ est complètement continu dans tout $\mathcal{L}^p$.

En effet, on peut approcher $N(Q_o,Q,\vec{n}_Q)$ par un polynôme $\tilde{N}(Q_o;Q,\vec{n}_Q)$ à coefficient matriciels de telle sorte que

$$N_d = N - \hat{N} \qquad \text{vérifie}$$

$$| N_d(Q_o;Q,\vec{n}_Q)\ \vec{\varphi}\ (Q)| \leq G(Q_o,Q)\ |\ \vec{\varphi}\ (Q)|$$

où $G(Q_o,Q)$ est une fonction positive vérifiant

$$\iint_B G(Q_oQ)\ dS_Q < \varepsilon, \iint_B G(Q_oQ)\ dSQ_o < \varepsilon \ .$$

Ceci étant dû à la valeur de l'indice de B (ici $\theta = 1$) qui entraîne pour $N\ (Q_o\ ;\ Q,\vec{n}_Q)$ d'avoir une singularité en $\frac{1}{Q_oQ}$.

Si $\tilde{T}$, T_d indique les opérateurs analogues à T associés à $\tilde{N}$ et N_d , on sait que $\tilde{T}$ a une image de dimension finie et que T_d a, dans $\mathscr{L}^p$, une norme inférieure à ε.

En effet, si $q = \frac{p}{p-1}$ et $\vec{\psi}$ est donné, on a

$$\left| \iint_B \vec{\psi}.T_d\ \vec{\varphi}dS \right| \leq \iint_B \iint_B |\vec{\psi}(Q_1)\ .G(Q_1Q).|\vec{\varphi}(Q)|\ dS_Q\ dS_{Q_1}$$

$$\leq \varepsilon \left[\iint_B |\vec{\psi}(Q_1)|^Q\ dS_Q\right]^{1/q} \left[\iint_B |\vec{\varphi}(Q)|^p\ dS_Q\right]^{1/p}$$

(en passant par : $\leq \left[\iint_B |\vec{\psi}(Q_1)^q\ G(Q_1Q)\ dS_Q\ dS_{Q_1}\right]^{1/q} \left[\iint_B |\vec{\psi}|^p\ G(Q_1Q)\ dS_Q\ dS_{Q_1}\right]^{1/p}$

ce qui établit bien que T_d a dans $\mathscr{L}^p$ une norme inférieure ou égale à ε.

Il en résulte bien que T est complètement continu dans $\mathscr{L}^p$ en tant que limite uniforme (en norme) d'opérateur $\tilde{T}$ complètement continus car de rang fini.

Le problème de Dirichlet se ramène à l'étude de l'équation

$$\vec{\varphi} + T\ \vec{\varphi} = \vec{\gamma} \qquad (\text{où } \vec{\gamma} = - \vec{u}_o|_B\ )$$

Toute solution de $\vec{\varphi} + T\vec{\varphi} = \vec{0}$ *est continue et vérifie une condition de*

Lipschitz d'ordre $\beta \leqslant 1$. *En outre si* $T_t(\vec{\psi})$ *désigne l'opérateur intégral adjoint défini par*

$$\iint_B \vec{T}_t(\vec{\psi}).\ \vec{\varphi}(Q)\ dS_Q = \iint_B \vec{\psi}(Q_1).\vec{T}(\vec{\varphi})\ dS_{Q_1}$$

et *si* $d\vec{\varphi}$ *est une distribution de déplacements sur* B *telle que*

$$\iint_B \left[\vec{\psi} - \vec{T}_r\ \vec{\psi}\right].\ d\vec{\psi} = 0$$ *pour tout* $\vec{\psi}$ *continu, elle est absolument continue et sa densité* $\vec{\varphi}(Q)$ *vérifie également une condition de Lipschitz d'ordre* $\beta < 1$.

On considère une distribution de déplacements de $d\vec{\varphi}$ sur B telle que

$$\iint_B \left[\vec{\psi} - \vec{T}_t(\vec{\psi})\right].\ d\vec{\varphi} = 0 \quad \forall\,\vec{\psi}$$

Puis on étudie les itérés de $\vec{T}$: $T^{(2)}$ et $T^{(3)}$.

Le noyau de $T^{(2)}$ est :

$$N^{(2)}(Q;R,\vec{n}_R) = \iint_B N(Q;Q_1,\vec{n}_{Q_1}\ )\ .\ N(Q_1;R,\vec{n}_R)\ dS_{Q_1}$$

celui de $T^{(3)}$

$$\iint_B N(Q_o;Q;n_Q).\ N^{(2)}\ (Q;R,\vec{n}_R)\ \ dS_Q\ .$$

Afin de voir leurs propriétés, il est nécessaire de donner quelques définitions (cf. KUPRADZE [2,3]) et un théorème de GIRAUD [1,2,3] .

Etant donnée F(P,Q) continue pour $P \neq Q$, sur tout compact K de l'espace euclidien E_3 , on dit qu'elle est de classe $N^{(\alpha)}$ s'il existe un nombre $0 \leqslant \alpha \leqslant 3$ tel que

$$F(P,Q) = O(r^{\alpha-3}\ ) \text{ uniformément dans K et}$$

$$F(P,Q) = O(\text{Log}\ \frac{c}{r}\ )\ ,\quad \text{c constante, si } \alpha = 3\ .$$

Bien entendu, si $\alpha > 3$, F est continu pour tout P,Q .

Or, si B est une surface de Liapounov d'indice 1, on a vu que $N(Q_o;Q,\vec{n}_Q)$ était de classe $N^{(2)}$.

Sur la composition de ces noyaux, on a le théorème de GIRAUD suivant : si $F_1(P,Q)$, $F_2(P,Q)$ sont de classe $N^{(\alpha)}$, $N^{(\beta)}$ respectivement.

$$F_3\ (P,Q) = \iint_B F_1(P,R).F_2(R,Q)\ dS_R$$

et de classe $N^{(\alpha+\beta-1)}$ B.

Il en résulte que $N^{(2)}$ est de classe $N^{(3)}$ et $N^{(3)}$ de classe $N^{(4)}$ c'est-à-dire que le noyau de $T^{(3)}$ est continu en Q et R (il applique les vecteurs en Q sur les vecteurs en R).

En outre si l'on considère

$$\vec{T}^{(3)}\ (d\vec{\varPhi}\ ) = \iint_B N^{(3)}\ (Q_o;Q,n_Q)\ d\vec{\varPhi}(Q)$$

où $D\vec{\varPhi}$ est une mesure sur B à valeurs vectorielles (dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3), cette expression est parfaitement définie en tant qu'intégrale et c' est un vecteur défini sur B, fonction continue de Q_o.

Si l'on écrit alors, ce qui est permis;

$$\iint_B \left[\vec{\psi} - \vec{T}_t^{(3)}(\vec{\psi})\right].\overrightarrow{d\varPhi} = 0 = \iint \left[1-\vec{T}_t\right]\circ\left[1 + \vec{T}_t + \vec{T}_t^{(2)}\right](\vec{\psi}).\overrightarrow{d\varPhi}$$

on en déduit

$$\iint_B\left[(\vec{\psi} - \vec{T}_t(\vec{\psi})\right]\ .d\vec{\varPhi} = \iint_B \vec{\psi}\ .d\vec{\varPhi} - \iint_B \vec{\psi}.\vec{T}^{(3)}(d\vec{\varPhi})dS_Q = 0$$

pour tout $\vec{\psi}$. Il en résulte bien que la mesure $d\vec{\varPhi}$ est absolument continue et que sa densité est la fonction continue $\vec{T}^{(3)}\ (d\vec{\psi})$.

Par ailleurs, $N(Q_o;Q,\vec{n}_Q)$ étant de l'ordre de $\frac{1}{Q_oQ}$ au voisinage de Q_o (ou Q) il résulte d'un autre théorème de GIRAUD que, si $\vec{\varPhi}(Q)$ est continue sur B : $\vec{T}\ (\vec{\varPhi})$ est lipschitzienne sur B de constante $\beta < 1$.

a) *Si le champ* $\vec{u}(P)$ *engendré par une distribution de déplacements* $\vec{\psi}$ *sur* B *s'annule identiquement dans* B_i *alors* $\vec{\varPhi}$ *est identiquement nulle.*

b) *Si pour une distribution* $\vec{\psi}$, $\vec{u}_e(Q_o) = \vec{0}$ *alors le champ qu'elle engendre s'annule identiquement dans* (B_e)

Soit $\vec{u}(P) = \iint_B N(P;Q,\vec{n}_Q)\, d\vec{\psi}$ et tel que $\vec{u}(P) = 0$, $(P \in B_i)$ pour $P \in B_i$.

Pour un champ $\vec{\psi}(Q')$ continu sur B arbitrairement donné, l'intégrale

$$\iint_B \vec{\psi}(Q').\left[\iint_B N(Q' - \ell\, \vec{n}_{Q'}\ ;\ Q,\vec{n}_Q)\, d\psi\right] dS_{Q'}$$

est nulle pour $\ell > 0$ suffisamment petit. Si l'on échange l'ordre des intégrations et si l'on fait tendre ℓ vers zéro, on obtient $\iint \left[\vec{\psi}-T_t(\vec{\psi})\right] .d\vec{\psi}$ pour tout champ $\vec{\psi}$ continu sur B . Il en résulte que la distribution $d\vec{\psi}$ est absolument continue et que sa densité est continue lipschitzienne d'ordre arbitraire $\beta < 1$.

Si l'on considère le champ $\vec{u}(P)$ engendré par la distribution précédente il est nul dans B_i , ainsi que

$\vec{N}(\vec{u},\vec{n}_o)(P)$ (où $\vec{N}(.,\vec{n})$ est l'opérateur de Basheleishvili). Or il résulte de [KUPRADZE [1]] que :

$$\vec{N}(\vec{u}\,(Q_o + \ell\, \vec{n}_o),n_o) - \vec{N}(\vec{u}(Q_o - \ell\vec{n}_o),\, \vec{n}_o) \to 0 \quad \text{avec } \ell \quad .$$

Par conséquent $\vec{N}(\vec{u}(P),\vec{n}_o)$ tend vers zéro quand $\ell \to +0$ où $P = Q + \ell\, n_Q$, $Q \in B$. On est donc amené à établir que

$$\overset{**}{\Delta}\vec{u} + k^2\, \vec{u} = 0 \text{ dans } B_e \text{ plus C.R.5}$$

et $\vec{N}(\vec{u},\vec{n}) = 0$ sur B

entraine $\vec{u} \equiv 0$ dans B_e .

Ceci peut s'établir en remarquant que

$$\text{C.R.5} \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \iint_{S(R)} |\vec{N}(\vec{u},\vec{e}_r) - i\, \vec{v}\,|^2\, dS = 0$$

et en écrivant le théorème de l'énergie sous la forme

$$\frac{d}{dt}\,(\mathcal{W}_{\alpha,\beta} + E) = -\iint_{B+S_R} \vec{N}(\vec{U},\vec{n}).\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\, dS$$

puis en utilisant la même démonstration que celle du théorème d'unicité (correspondant à $\alpha = \mu$, $\beta = \lambda$).

Ceci étant, puisque la densité $\vec{\psi}(Q)$ de $d\vec{\psi}$ est égale à $\frac{1}{2}\left[\vec{u}_e(Q) - \vec{u}_i(Q)\right]$, elle est identiquement nulle, ce qui prouve a).

Pour établir b), on suppose qu'il existe $\vec{\psi}(Q) \in \mathcal{L}^1(B)$ telle que $\vec{u}_e(Q_o) = 0$, $\forall\, Q_o \in B$. Il en résulte, d'après un résultat précédent, que $\vec{\psi}$ est continu au sens de Hölder pour tout $0 < \beta < 1$. Comme $\vec{u}(P)$ satisfait à (C.R.5) , on a vu que $\vec{u}$ était identiquement nul dans B_e .

THEOREMES D'APPROXIMATION

Soit $\mathcal{C}(B)$ l'espace de Banach des champs de vecteurs continus sur (B) muni de la norme

$$\| \vec{\psi} \| = \sup_{Q \in B} | \vec{\psi}(Q) |$$

puis M le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de la forme

$$^{t}N(P;Q,\vec{n}_Q)\ \vec{a}$$

où $P \in B_i$, $Q \in B$ et $\vec{a}$ vecteur constant quelconque.
Pour P et $\vec{a}$ donnés, c'est un champ de vecteurs continus, autrement dit M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(B)$.

Si M était strictement contenu dans $\mathcal{C}(B)$, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existerait une forme linéaire continue non identiquement nulle sur $\mathcal{C}(B)$ et nulle sur M . Mais alors, d'après un théorème de F. RIESZ, cette forme linéaire s'exprimerait comme intégrale de par rapport à certaine mesure $d\vec{\psi}$ sur B . On aurait donc

$$\vec{a}.\iint_B N(P,Q,\vec{n}_Q)\ d\vec{\psi} \quad \text{pour tout} \quad P \in B_i \quad \text{et tout vecteur constant } \vec{a}$$

Ceci impliquerait,

$$\iint_B N(P,Q,\vec{n}_Q)\ d\vec{\psi} = 0 \quad \text{pour tout} \quad P \in B_i \quad \text{qui entraînerait à son tour}$$

la nullité de $d\vec{\varphi}$, ce qui contredirait l'hypothèse. Par conséquent M est identique à $\mathcal{C}(B)$.

En d'autres termes, *si* ${}^{t}N(P;Q,\vec{n}_Q)\ \vec{a}$ *est appelé un dipole en* P , *tout champ de vecteurs continus sur* B *peut être approché uniformément par le champ d'une collection finie de dipoles dans* B_i .

On peut même poursuivre ce genre de raisonnement (classique) un peu plus loin dans l'hypothèse (un peu plus générale) où B_e est connexe, B_i étant la réunion d'un nombre fini de régions bornées, la frontière B (commune à B_i et B_e) étant formée d'un nombre fini de surfaces fermées de Liapounoff d'indice 1, disjointes.

On considère alors les champs (ainsi que leurs dérivées par rapport aux coordonnées des P_k

$$ {}^{t}N\ (P_k;Q,\vec{n}_Q)\ \vec{a}_j\ \ (j = 1,2,3;\ Q \in B) $$

les P_k étant donnés tels qu'il y en ait un dans chaque composante connexe de B_i, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ étant trois vecteurs constants linéairement indépendants.

Il est important de remarquer que ces champs sont des fonctions analytiques des coordonnées de P_k .

Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(B)$ qu'ils engendrent est nécessairement identique à $\mathcal{C}(B)$, sinon d'après le raisonnement précédent il existerait une mesure $\overrightarrow{d\varphi}$ telle que le champ

$$ \iint_B N(P;Q,n_Q)\ \overrightarrow{d\varphi} $$

s'annulerait, ainsi que toutes ses dérivées, aux points P_k . Or ce champ est une fonction analytique des coordonnées de $P \in B_i$. Par prolongement analytique, il est nul pour tout $P \in B_i$ et ceci implique comme précédemment $d\vec{\varphi} = 0$ d'où contradiction.

Si on les appelle *des multipôles de sources* P_k on a montré que : *étant donné un ensemble de points* P_k *, un dans chaque composante connexe* *de* B_i *, il existe des multipôles ayant leurs sources aux points* P_k *, tels que les champs qu'ils engendrent sur* B *approchent tout* $\vec{\psi} \in \mathcal{E}(B)$ *d'aussi près que l'on veut en norme.*

THEOREMES D'EXISTENCE

Soit $\mathcal{L}^1$ l'espace de Banach des $\vec{\gamma}(Q)$ tels que $||\vec{\gamma}||_1 < \infty$

$$||\vec{\gamma}||_1 = \iint_B \left| \vec{\gamma}(Q) \right| dS_Q$$

et l'opérateur linéaire défini sur $\mathcal{L}^1$: $\psi \in \mathcal{L}^1 \longrightarrow \vec{\psi} + \vec{T}\,\vec{\psi}$.

Comme $\vec{T}$ est complètement continu dans $\mathcal{L}^1$, son image $(\mathcal{J})$ est fermée et de codimension finie.

D'après les théorèmes d'approximation, il existe des dipoles de sources appartenant à B_i ou des multipôles de sources P_k (une dans chaque composante connexe de B_i) dont les champs associés $\vec{h}_n(P)$ sont linéairement indépendants (modulo $\mathcal{J}$) et qui, avec $\mathcal{J}$, engendrent $\mathcal{L}^1$. Si l'on considère des formes linéaires continues ℓ_m sur $\mathcal{L}^1$, s'annulant sur $\mathcal{J}$ et telles que : $\ell_m(\vec{h}_n) = \delta_{mn}$, il est manifeste que le vecteur

$$\vec{\gamma}' = \vec{\gamma} - \sum \ell_n(\vec{\gamma})\,\vec{h}_n \quad \text{appartient à } \mathcal{J}$$

et que, par conséquent, il existe $\vec{\psi}$ tel que

$$\vec{\psi} + T(\vec{\psi}) = \vec{\gamma}'$$

Dans ces conditions

$$\vec{\gamma} = \vec{\psi} + \vec{T}(\vec{\psi}) + \sum \ell_n(\gamma)\,\vec{h}_n \quad \text{ce qui implique}$$

pour $\vec{u}(P) = \sum {}_n(\vec{\gamma})\,\vec{h}_n(P) + \iint_B N(P;Q,\vec{n}_Q)\,\vec{\psi}\,dS$ la propriété

$$\iint_B \left| \vec{u}(Q+\ell\,\vec{n}_Q) - \vec{\gamma}(Q) \right| dS_Q \to 0 \text{ avec } \ell .$$

Ceci implique l'existence dans le cas $\vec{\gamma}(Q) \in \mathcal{L}^1$. Comme les espaces $\mathcal{L}^p (1 < p < \infty)$ et $\mathcal{E}(B)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}^1$, l'existence pour $\vec{\gamma}$ appartenant à l'un d'eux sera établie si l'on peut montrer que cela entraîne que $\vec{\psi}$ (Q) leur appartient également et que $\vec{u}(Q + \ell \vec{n}_Q)$ tend vers $\vec{\gamma}$ (Q) pour les normes correspondantes.

Si $\vec{\gamma}(Q) \in \mathscr{L}^p$ ou $\vec{\gamma} \in \mathscr{C}(B)$

$\vec{\psi} + T(\vec{\psi}) = \vec{\gamma} - \sum \ell_n(\gamma)\ \vec{h}_n = \vec{\gamma}'$ y est aussi. Il en résulte que

$$\vec{\psi} = \vec{\gamma}' - T(\vec{\gamma}') + T^{(2)}(\vec{\gamma}') - T^{(3)}(\vec{\psi}).$$

Or les trois premiers termes du second membre appartiennent à $\mathscr{L}^p$ (ou à $\mathscr{C}(B)$) et le dernier, comme on l'a vu, est une fonction continue. Par conséquent $\vec{\psi}(Q) \in \mathscr{L}^p$ ou $\mathscr{C}(B)$ et il s'en suit que

$$\iint_B |\vec{u}(Q + \ell\, \vec{n}_Q) - \vec{\gamma}(Q)|^p\, dS_Q \to 0 \quad \text{si } \vec{\gamma} \in \mathscr{L}^p$$

ou $|\vec{u}(Q + \ell\, \vec{n}_Q) - \vec{\gamma}(Q)| \to 0$ avec si $\vec{\gamma} \in \mathscr{C}(B)$

On a donc établi le

THEOREME D'EXISTENCE

Soit $\vec{\gamma}(Q)$ *un champ donné sur* B *tel que*

$$||\vec{\gamma}||_p = \left[\iint_B |\vec{\gamma}(Q)|^p\, dS_Q\right]^{1/p} < \infty \qquad 1 \leq p < \infty$$

Il existe un champ unique $\vec{u}(P)$ *vérifiant* $\vec{\Delta}^* \vec{u} + k^2 \vec{u} = 0$ *dans* B_e *et tel que*

$$\iint_B |\vec{u}(Q + \ell \vec{n}_Q) - \vec{\gamma}(Q)|^p\, dS_Q \to 0 \qquad \text{avec } \ell$$

Ce champ est la somme d'un champ engendré par une distribution $\vec{\psi}(Q) \in \mathscr{L}^p$ *et des champs engendrés comme il a été dit dans les théorèmes d'approximation.*

Remarques :

1) Si $\vec{\gamma}(Q) = \vec{u}'(Q)$ *où* $\vec{u}'(Q)$ *est un champ de déplacements de classe* C^1 *dans* $B_e \cup B$ *le champ* $\vec{u}$ *tel que* $\vec{u}(Q) = \vec{\gamma}(Q)$ *dont l'existence a été établie coïncide avec* $\vec{u}'(P)$ *. C'est une conséquence du* *théorème d'unicité puisque dans ce cas $\vec{\vartheta}$ est continue.*

2) Les théorèmes d'unicité déjà établis ne s'appliquent pas au cas du théorème d'existence précédent où les données à la frontière sont dans $\mathcal{L}^1$

Soit donc $\vec{u}$ tel que

$$\iint_B |\vec{u}(Q + \lambda \vec{n}_Q)| \quad dS_Q \to 0 \qquad \text{quand} \quad \ell \to 0$$

Or, pour ℓ suffisamment petit, $B_\ell = \{ Q + \ell \vec{n}_Q , Q \in B\}$ est une surface fermée de Liapounov d'indice 1. Pour une telle surface, on désignera par T_ℓ l'opérateur T correspondant.

En identifiant $Q + \ell \vec{n}_Q$ et Q on définit T_ℓ et T sur le même domaine. On voit alors aisément que $||T_\ell - T|| \to 0$ avec ℓ pour la norme des opérateurs linéaires sur $\mathcal{L}^1$.

$\vec{h}_n(P)$ désignant les champs de dipôles et de multipôles du théorème d'existence, on notera $\vec{h}_n(\ell)$ les fonctions $\vec{h}_n(Q + \ell\, n_Q)$.

désignera l'image de $\vec{\vartheta} + T(\vec{\vartheta})$

Comme $\vec{h}_n(\ell) \to \vec{h}_n$ quant $\ell \to 0$ et que les $\vec{h}_n$ sont linéairement indépendant (mod. $\mathcal{J}$) il en est de même des $\vec{h}_n(\ell)$ pour ℓ suffisamment petit. Soient alors $f_{n\ell}(\vec{\vartheta})$ des formes linéaires continues sur $\mathcal{L}^1$, s'annulânt sur $\mathcal{J}$ et telle que

$$f_{n\ell}\ |\vec{h}_m(\ell)| = \delta_{mn}$$

On pose enfin

$$\vec{u}(\ell) = \vec{u}\ (Q + \ell\ \vec{n}_Q)$$

N noyau de $\vec{\vartheta} + T(\vec{\vartheta})$ et M un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}^{-1}$ supplémentaire de N.

Si l'on pose

$P_\ell(\vec{\vartheta}) = \vec{\vartheta} - \sum f_{m\ell}(\vec{\vartheta}).\vec{h}_n(\ell)$ l'image de P_ℓ est $\mathcal{J}$ et P_ℓ tend vers

$P(\vec{\vartheta}) = \vec{\vartheta} - \sum f_n(\vec{\vartheta})\ \vec{h}_n$ quand $\ell \to 0$.

Par conséquent l'image de $P_\ell + P_\ell \; T_\ell$ est contenue dans $\mathcal{Y}$ et $||P_\ell + P_\ell \; T_\ell - (P + P\,T)|| \to 0$ avec ℓ.

Or la restriction de P + PT à M est une bijection linéaire de M sur $\mathcal{Y}$ et d'après un théorème de Banach, il admet un inverse continu de $\mathcal{Y}$ sur M. Pour ℓ suffisamment petit, $P_\ell + P_\ell \; T_\ell$ a un inverse continu de $\mathcal{Y}$ sur M et de norme bornée en ℓ.

Comme $P_\ell\,(\vec{\gamma}\,(\ell)\,) \in \mathcal{Y}$ et $||\vec{\gamma}\,(\ell)||_1 \longrightarrow 0$ quand $\ell \to 0$, il existe $\vec{\psi}\,(\ell) \in M$ tel que

$$P_\ell\,[\vec{\psi}\,(\ell)] + P_\ell\,T_\ell[\vec{\psi}\,(\ell)] = P_\ell\,[\vec{\gamma}\,(\ell)] = \vec{\gamma}\,(\ell) - \sum f_{m\ell}\,(\vec{\gamma}(\ell)\,\vec{h}_n\,(\ell)$$

et $||\vec{\psi}(\ell)||_1 \to 0$ quand $\ell \to 0$.

Si l'on pose alors

$$\vec{\psi}\,(\ell) + T_\ell\,|\vec{\psi}(\ell)| = \vec{g}\,(\ell)$$

alors $P_\ell\,[\vec{g}(\ell)] = \vec{g}(\ell) - \sum f_{m\ell}\,[\vec{g}(\ell)]\,\vec{h}_n(\ell)$ et $||\vec{g}\,(\ell)||_1 \to 0$ avec ℓ

On en déduit : $\vec{\gamma}\,(\ell) = \sum\; f_m\;[\vec{\gamma}(\ell) - \vec{g}(\ell)\,]\;\vec{h}_n(\ell) + \vec{\psi}\,(\ell) + T\,[\vec{\psi}\,(\ell)\,]$

et l'on a représente $\vec{u}(P)$ par

$$\vec{u}(P) = \sum f_{m\ell}\,[\vec{\gamma}(\ell) - \vec{g}(\ell)\,]\,\vec{h}_n(P) + \iint_{B\ell} N(P;Q,\vec{n}_Q)\,\vec{\psi}\,(\ell,Q)\,dS_Q$$

pour P extérieur à B_ℓ.

Or les normes de $\vec{\gamma}\,(\ell)$, $\vec{\psi}\,(\ell)$, $\vec{g}(\ell) \to 0$ avec ℓ d'où il résulte que $\vec{u}(P) = 0$ dans B_e.

Ceci établit l'unicité.

On peut encore établir le résultat suivant :

si $\{\vec{\gamma}_m(Q)\}$ *est une suite telle que* $||\vec{\gamma}_m - \vec{\gamma}||_1 \to 0$ *quand* $m \to \infty$, *les champs correspondants* $\vec{u}_m(P)$ *et leurs dérivées tendent vers* $\vec{u}(P)$ *et les dérivées correspondantes, uniformément à l'extérieur de toute surface* B_ℓ.

On suppose que $\iint_B |\vec{\gamma}_m(Q) - \vec{\gamma}\,(Q)\;|\;dS_Q \to 0$ quand $m \to \infty$.

On veut montrer que les champs correspondants $\vec{u}_m(P)$ et $\vec{u}(P)$ définis par

$$\iint_B |\vec{u}_m(Q + \ell\, \vec{n}_Q) - \vec{\gamma}_m(Q)|\, dS_Q \to 0 \quad \text{avec } \ell \quad (\text{ainsi que } \vec{u}\,)$$

sont tels que les $\vec{u}_m(P)$ et leurs dérivées convergent vers $\vec{u}(P)$ et les dérivées correspondantes, uniformément à l'extérieur de toute B_ℓ .

On sait que $\vec{u}_m(P)$ est engendré par un champ $\vec{\varphi}_m$ sur B vérifiant

$$\vec{\gamma}_m = \sum f_m(\vec{\gamma}_m)\, \vec{h}_n + \vec{\varphi}_m + \vec{T}(\vec{\varphi}_m)$$

Comme $\vec{\varphi} + T(\vec{\varphi})$ est une bijection continue du sous-espace $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{J}$ et que $\vec{\gamma}_m - \sum f_m(\vec{\gamma}_m)\, \vec{h}_m \in \mathcal{J}$, si l'on impose à $\vec{\varphi}_m(Q)$ la condition d'appartenir à $\mathcal{M}$, $\vec{\varphi}_m(Q)$ convergera vers un $\vec{\varphi}(Q)$ tel que :

$$\vec{\varphi} + T(\vec{\varphi}) = \vec{\gamma} - \sum f_m(\vec{\gamma})\, \vec{h}_m \, .$$

On a donc

$$\vec{u}_m(P) = \iint_B N(P;Q,\vec{n}_Q)\, \vec{\varphi}_m(Q)\, dS_Q$$

$$\vec{u}(P) = \iint_B N(P;Q,\vec{n}_Q)\, \vec{\varphi}(Q)\, dS_Q$$

et $\displaystyle\iint_B |\vec{\varphi}_m(Q) - \vec{\varphi}(Q)|\, dS_Q \to 0$ quand $m \to \infty$.

En dérivant sous le signe d'intégration on obtient le résultat sur les dérivées.

Développement du champ élastique en série de multipôles

On considère à nouveau les champs (ainsi que leurs dérivées)

$$\vec{u}_{ij}(P) = {}^tN(P_i;Q,\vec{n}_Q)\, \vec{a}_j \quad (j = 1,2,3 \; ; \; P_i \in B_i)$$

introduits dans le théorème d'approximation. D'après celui-ci ils engendrent l'espace des $\vec{\gamma}$ tels que $||\vec{\gamma}||_2 < \infty$ en ce sens que le plus petit sous-espace fermé de $\mathcal{L}^2$ les contenant est $\mathcal{L}^2$ lui-même.

On peut donc les normaliser et en déduire une suite $\vec{\ddot{u}}_n(P)$ telle que $\vec{\ddot{u}}_n(Q)$, $Q \in B$ soit un système orthonormal complet de champs de vecteurs sur B.

Alors étant donné $\vec{\gamma} \in \mathcal{L}^2$ on voit que :

$$\vec{\gamma}\,(Q) = \sum_{1}^{\infty} c_n\, \vec{u}_n^{*}(Q) \quad , \qquad c_n = \iint_B \vec{\gamma}\,(Q).\bar{\vec{u}}_n^{*}(Q)\; dS_Q$$

où la série converge vers $\vec{\gamma}\,(Q)$ au sens de $\mathcal{L}^2$.

D'après les résultats précédents, on voit que la série $\sum_{1}^{\infty} c_n\, \vec{u}_n^{*}(P)$ converge vers le champ $\vec{u}(P)$ tel que

$$\iint_B |\vec{u}(Q + \ell \vec{n}_Q) - \vec{\gamma}\,(Q)|^2\; dS_Q \;\rightarrow\; 0$$

uniformément à une distance positive de B . En outre, ces séries peuvent être dérivées indéfiniment terme à terme.

Ce qui résout le problème aux limites pour $\vec{\gamma}\,(Q) \in \mathcal{L}^2$.

3. *SECONDE DEMONSTRATION DU THEOREME D'EXISTENCE*

3.1 - *Préliminaires*

On cherche la solution sous la forme

$$\vec{u}(P) = \iint_B N(P;Q,\vec{n}_Q)\; \vec{\psi}\,(Q)\; dS_Q \tag{3.1}$$

où $\vec{\psi}\,(Q)$ est continue sur B .

Dans le cas du problème de Dirichlet extérieur cela mène au système intégral :

$$(D_e) \qquad \vec{\psi}\,(Q_o) + \iint_B N(Q_o;Q,\vec{n}_Q)\; \vec{\psi}(Q)\; dS_Q = \vec{\gamma}\,(Q_o)$$

C'est un système intégral du type de FREDHOLM compte tenu de la singularité en $r^{-2+\theta}$ du noyau. Le système homogène adjoint s'écrit :

$$(D_e)_o^{*} \qquad \vec{\psi}\,(Q_o) - \iint_B {}^tN(Q_o;Q,\vec{n}_o)\; \vec{\psi}\,(Q)\; dS_Q = \vec{0}$$

Or, on peut vérifier que les vecteurs colonnes de

$$N(P,Q;\vec{n}_Q) = \begin{pmatrix} \vec{N}(\vec{e}_1,\vec{n}).\vec{x}_1 \;, & \vec{N}(\vec{e}_1,\vec{n}).\vec{x}_2 \;, & \vec{N}(\vec{e}_1,\vec{n})\; \vec{x}_3 \\ \vec{N}(\vec{e}_2,\vec{n}).\vec{x}_1 \;, & \vec{N}(\vec{e}_2,\vec{n}).\vec{x}_2 \;, & \vec{N}(\vec{e}_2,\vec{n})\; \vec{x}_3 \\ \vec{N}(\vec{e}_3,\vec{n}).\vec{x}_1 \;, & \vec{N}(\vec{e}_3,\vec{n}).\vec{x}_2 \;, & \vec{N}(\vec{e}_3,\vec{n})\; \vec{x}_3 \end{pmatrix}$$

vérifient $\Delta^{*} \vec{u} + k^2 \vec{u} = \vec{0}$ dans B_i et B_e (KUPRADZE 1 p. 105-106)

(noter que dans $(D_e)_o^{*}$: $\vec{N}(\vec{e}_i,\vec{n}_o) = (\alpha+\mu) \dfrac{d\vec{e}_1}{dn_o} + \beta \, \vec{n}_o \operatorname{div} \vec{e}_1 + \alpha \, \vec{n}_o \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}} \, \vec{e}_1$,

les dérivées étant prises en P).

Il en résulte que si l'on pose :

$$\vec{v}(P) = \iint_B E(PQ) \, \vec{\psi}\,(Q) \, dS_Q \tag{3.2}$$

$(D_e)_o^{*}$ est associé au problème aux limites suivant :

$$\Delta^{*} \vec{v} + k^2 \vec{v} = \vec{0} \qquad \text{dans } B_i$$

$$N_i\,(\vec{v},\vec{n}) = \vec{0} \qquad \text{sur } B$$

On utilisera la formule de Betti généralisée

$$\iiint_B (\vec{u}\,\Delta^{*}\vec{v} - \vec{v}.\,\Delta^{*}\vec{u}) \, dV = \iint_{\partial B} \left[\vec{u}.\vec{N}(\vec{v},\vec{n}) - \vec{v}.\vec{N}(\vec{u},\vec{n})\right] dS$$

(B domaine borné de frontière régulière ∂B , de normale $\vec{n}$ extérieure)

3.2 - *Démonstration du théorème d'existence*

On va étudier les relations existant entre (Φ) et (Ψ) espaces vectoriels sur C , de même dimension finie, des solutions de $(D_e)_o$ et $(D_e)_o^{*}$

Compte tenu de (3.1) et (3.2)

$$\vec{\varphi} \in \Phi \Rightarrow \vec{u}_e = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{u} \equiv \vec{0} \quad \text{dans } (B_e)$$

(en effet, $\vec{u}(P)$ vérifie les conditions de radiation compte tenu de la définition de $N(P;Q,\vec{n}_Q)$ et l'équation $\Delta^{*} \vec{u} + k^2 \vec{u} = \vec{0}$ dans B_e) . Ceci entraîne alors $\vec{N}_e(\vec{u},\vec{n}) = \vec{0}$ sur (B) tandis que $\vec{u}_i = 2\,\vec{\varphi}$. On a aussi :

$$\vec{\psi} \in \Psi \Rightarrow \vec{N}_i(\vec{v},\vec{n}) = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad \vec{N}_e(\vec{v},\vec{n}) = 2\,\vec{\psi} \,.$$

Si l'on applique alors la formule de Betti au domaine B_i et aux fonctions $\vec{v}(P)$ définie par (3.2) et $\vec{e}_j(PQ)$ vecteur colonne de E(PQ) avec $P \in B_e$, on obtient, compte tenu de $\vec{N}_i(\vec{v},\vec{n}) = 0$,

$$\iint_B \vec{N}(\vec{e}_j,\vec{n}).\vec{v}(Q) \, dS_Q = 0 \ , \ P \in B_e$$

soit

$$\iint_B N(P;Q,\vec{n}_Q)\ \vec{v}(Q)\ dS_Q = 0 \quad , \qquad P \in B_e$$

en faisant alors tendre P vers (B) on en déduit que $\vec{v}(Q) \in \Phi$

L'application $M : \vec{\psi}\ (Q_o) \rightarrow \vec{v}(Q_o) = \iint_B E(Q_o\ Q)\ \vec{\psi}\ (Q)\ dS_Q$ est une application linéaire de Ψ dans Φ .

<u>*Lemme 1*</u>

L'application M *est bijective.*

Φ et Ψ étant de même dimension finie, il suffit de vérifier qu'elle est bijective, à savoir que $M\ \vec{\psi} = \vec{0}$ entraîne $\vec{\psi} = \vec{0}$.

Or $M\ \vec{\psi} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{v}(P) \equiv \vec{0}$ dans B_e en vertu des théorèmes d'unicité du chapitre I, ce qui entraîne

$$\vec{N}_e(\vec{v},\vec{n}) = \vec{0} \qquad \text{donc} \quad \vec{\psi} = \vec{0} \ .$$

<u>*Lemme 2*</u> *Si* $\vec{\phi} \in \Psi$ $\qquad \vec{\phi} \in \Phi$

Cela s'obtient aisément en appliquant la formule de Betti dans les mêmes conditions que précédemment à $\vec{v}(P)$ et $E(PQ)$ puis $\vec{v}(Q)$ et $\bar{E}(PQ)$. On en déduit que

$$\iint_B \bar{E}(PQ)\ \vec{v}(Q)\ dS_Q = \vec{0} \quad , \qquad P \in B_e$$

ce qui entraîne $\vec{\bar{v}}(Q) \in \Phi$ c'est-à-dire $M\ \vec{\bar{\psi}} = \vec{\bar{\phi}} \in \Phi$

(si l'on choisi $\vec{\psi}$ tel que $\vec{\phi} = M\ \vec{\psi}$).

<u>*Lemme 3*</u>

Pour $\vec{\psi} \in \vec{\Psi}$ *on a,* $\mathrm{Im}(\vec{\psi},\ M\ \vec{\psi}) \geq 0$, *l'égalité n'ayant lieu que pour* $\vec{\psi} = \vec{0}$.

On pose

$$(\vec{\psi}_1,\vec{\psi}_2) = \iint_B \vec{\psi}_1 . \vec{\psi}_2\ \ dS \ .$$

Etant donné $\vec{\psi} \in \Psi$ on applique la formule de Betti à D_R, $\vec{v}$ et $\bar{\vec{v}}$:

$$\iint_B [\vec{v}_e(Q).\vec{N}_e(\bar{\vec{v}},\vec{n}_Q) - \bar{\vec{v}}(Q).\vec{N}_e(\vec{v},\vec{n}_Q)]\, dS = \iint_{S(R)} [\vec{v}.\vec{N}(\bar{\vec{v}},\vec{e}_r) - \bar{\vec{v}}.\vec{N}(\vec{v},\vec{e}_r)]\, dS .$$

Le premier membre n'est autre que :

$$2(\bar{\vec{\psi}}.M\vec{\psi} - \vec{\psi}.\overline{M\vec{\psi}}\ ) = -\,4i\ \mathrm{Im}\,(\vec{\psi},\overline{M\vec{\psi}})$$

D'autre part, comme

$$N(\vec{v},\vec{e}_r) = (\alpha+\mu)\left(\frac{d\vec{v}}{\partial r} - i\tau\,\vec{v}_1 - i\sigma\,\vec{v}_2\right) + \beta\,(\vec{e}_r\,\mathrm{div}\,\vec{v}_1 - i\tau\,\vec{v}_1) +$$

$$+\ \alpha(\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}_2 + i\,\sigma\,\vec{v}_2) + i\tau\,(\lambda+2\mu)\,\vec{v}_1 + i\sigma\,\mu\,\vec{v}_2$$

on voit que $\vec{v}$ vérifie :

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{S(R)} |\vec{N}(\vec{v},\vec{e}_r) - i(\lambda+2\mu)\vec{v}_1 - i\sigma\,\mu\,\vec{v}_2|^2\, dS = 0 .$$

Comme $-4i\ \mathrm{Im}(\vec{\psi},\overline{M\vec{\psi}})$ est indépendant de R on obtient donc :

$$2\ \mathrm{Im}(\vec{\psi},\overline{M\vec{\psi}}) = \lim_{R\to\infty} \iint_{S(R)} R_e(\vec{w}.\bar{\vec{v}})\, dS \quad \text{où} \quad \vec{w} = (\lambda+2\mu)\,\tau\,\vec{v}_1 + \mu\,\sigma\,\vec{v}_2 .$$

Or d'après le corollaire 1 du théorème de développement :

$$\vec{w}.\bar{\vec{v}} = \left[(\lambda+2\mu)\,\frac{e^{i\tau r}}{r}\,\tau\,a_o^1\,\vec{e}_r + \mu\,\sigma\,\frac{e^{i\sigma r}}{r}\,(\,b_o^2\,\vec{e}_\theta + b_o^3\,\vec{e}_\psi\,)\right] .$$

$$.\left[\frac{e^{-i\tau r}}{r}\,\bar{a}_o^1\,\vec{e}_r + \frac{e^{-i\tau r}}{r}\,(\bar{b}_o^2\,\vec{e}_\theta + \bar{b}_o^3\,\vec{e}_\psi)\right] + \vec{V},\ |\vec{V}| = O(R^{-3})$$

$$= (\lambda+2\mu)\,\tau\,\frac{|a_o^1|}{R^2} + \mu\,\sigma\,\frac{|b_o^2|^2 + |b_o^3|^2}{R^2} + \vec{V}$$

donc

$$2\ \mathrm{Im}\,(\vec{\psi},\overline{M\vec{\psi}}) = \iint_{S(1)} \left[\lambda+2\mu)\,\tau\,|a_o^1|^2 + \mu\,\sigma\,(|b_o^2|^2 + |b_o^3|^2\right] \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \geq 0$$

Il y a égalité si, et seulement si $a_o^1 = b_o^2 = b_o^3 = 0$ ce qui entraîne $\vec{v}(P) \equiv \vec{0}$ dans (B_e) d'après le chapitre I et par conséquent $\vec{\psi} \equiv \vec{0}$.

Soit alors $\{\vec{\psi}_i\}$ une base de (Ψ), $\{\vec{\varphi}_i = N\,\vec{\psi}_i\}$ la base correspondante de (Φ) .

La matrice d'éléments $c_{ik} = (\vec{\psi}_i, M\,\vec{\psi}_k)$ est appelée matrice de capacité.

On a :

Lemme 4 : *La matrice de capacité est symétrique.*

Si l'on pose

$$\vec{v}^{(i)}(P) = \iint_B E(PQ)\,\vec{\psi}_i(Q)\,dS_Q$$

on voit que

$$c_{jk} - c_{kj} = \iint_B \left[\vec{v}^{(k)}.\vec{N}(\vec{v}^{(j)}, \vec{n}) - \vec{v}^{(j)}.N(\vec{v}^{(k)}, \vec{n})\right] dS$$

$$= \iint_{S(R)} \left[\vec{v}^{(k)}.\vec{N}(\vec{v}^{(j)}, \vec{e}_r) - \vec{v}^{(j)}.\vec{N}(\vec{v}^{(k)}, \vec{e}_r)\right] dS$$

$$= \iint_{S(R)} \left|\vec{v}^{(k)}.(\vec{N}(v^{(j)}, \vec{e}_r) - i\,\vec{w}^{(j)}) - \vec{v}^{(j)}.(\vec{N}(\vec{v}^{(k)}, \vec{e}_r) - i\,\vec{w}^{(k)}\right] dS$$

$$+ 2i \iint_{S(R)} \left[\vec{v}^{(k)}.\vec{w}^{(j)} - \vec{v}^{(j)}.\vec{w}^{(k)}\right] dS$$

la première intégrale tend vers zéro avec $1/R$ en vertu des conditions de radiation et l'intégrand de la seconde est $O(R^{-3})$ comme on le voit immédiatement à l'aide du théorème de développement.

Lemme 5 : *La matrice de capacité est non singulière.*

Sinon il existerait

$$\vec{\psi} \neq \vec{0} \in \Psi \quad \text{t.q.} \quad (\vec{\psi}, \vec{\vartheta}) = 0 \quad \forall\, \vec{\psi} \in \Phi$$

En particulier d'après les lemmes 1 et 2, on aurait

$$(\vec{\psi}, \overline{M\vec{\psi}}) = 0 \qquad \text{donc} \quad \vec{\psi} = \vec{0} \qquad \text{d'après le lemme 3.}$$

Cette dernière propriété permet d'établir l'existence de solutions pour le problème initial : en effet, $\vec{\gamma}$ étant donné continu sur B , il existe un et un seul $\vec{\psi}^{*} \in \Phi$ tel que

$$(\vec{\gamma} - \vec{\vartheta}^{*}, \psi) = 0 \qquad \forall\, \vec{\psi} \in \Psi$$

Le système (D_e) de second membre $\vec{\gamma} - \vec{\varphi}^{*}$ admet donc des solutions $\vec{\varphi}\,(Q)$.

Soit alors $\vec{\psi}^{*}$ unique tel que :

$$\vec{\varphi}^{*} = M\,\vec{\psi}^{*}$$

Dans ces conditions

$$\vec{u}(P) = \iint_B N(P;Q,\vec{n}_Q)\vec{\varphi}\,(Q)\;dS_Q + \iint_B E(PQ)\,\vec{\psi}^{*}\,(Q)\;dS_Q \quad .$$

<u>*Théorème d'existence*</u> :

Il existe une et une seule solution de

$$\Delta^{*}\;\vec{u} + k^2\,\vec{u} = \vec{0} \quad \textit{dans} \quad B_e \qquad (\textit{et}\ \text{C.R.5})$$

prenant sur B *des valeurs continues données.*

4. *TROISIEME DEMONSTRATION DU THEOREME D'EXISTENCE*

4.1 - Comme on l'a indiqué dans l'introduction, la solution est recherchée sous la forme

$$(4.1) \qquad \vec{u}(P) = \iint_B N(P;Q;\vec{n}_Q)\;\vec{\varphi}\,(Q)\;dS_Q - \iiint_{B_i} E(PQ)\;\vec{\psi}\,(Q)\;dV_Q$$

et l'on cherche à déterminer $\vec{\varphi}$ continu sur B et $\vec{\psi}$ continu dans $B_i \cup B$ de telle sorte que :

(i) $\qquad \vec{u}_e = \vec{\gamma} \qquad$ sur B

(ii) $\qquad \Delta^{*}\;\vec{u} + (k^2 + i\;\varepsilon\;g)\;\vec{u} = \vec{0} \qquad$ dans B_i

où g est une fonction numérique continue höldérienne, positive dans B_i et nulle sur B .

On supposera ici que B est une surface fermée bornée de classe C^2 c'est-à-dire

<u>*Lemme 4.1*</u>: *Il existe deux membres positifs* a *et* M *tels que :*
pour tout point Q_o *de* B *il existe un repère cartésien d'origine* Q_o :
$Q_o\,y_1\,y_2\,y_3$ *par rapport auquel la partie de* B *, intérieure à la boule de centre* Q_o *et de rayon* a *, est représentée par :*

$$y_3 = f(y_1,y_2) \qquad \textit{où} \quad f \quad \textit{est de classe} \quad C^2$$

$$f(0,0) = f_{y_1}(0,0) = f_{y_2}(0,0) = f_{y_1y_2}(0,0) = 0$$

et vérifie les inégalités

(4.2) $$f(y_1,y_2) \leqslant M\,(y_1^2 + y_2^2)$$

(4.3) $$f^2_{y_1}(y_1,y_2) + f^2_{y_2}(y_1,y_2) \leqslant M\,(y_1^2 + y_2^2)$$

(4.4) $$|\vec{n}(Q) - \vec{n}(Q_o)| \leqslant M.Q_oQ$$

où

(4.5) $$\vec{n}(Q) = \frac{-f_{y_1}(y_1,y_2)\,\vec{e}_1 - f_{y_2}(y_1,y_2)\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3}{\left[1 + f^2_{y_1}(y_1,y_2) + f^2_{y_2}(y_1,y_2)\right]^{1/2}}$$

Si l'on désigne par $B(\delta) = \{Q + \delta\,\vec{n}(Q);\ Q \in B\}$ une surface parallèle à ,
la correspondance $Q \longrightarrow Q + \delta\,\vec{n}(Q)$ *sera biunivoque si* $|\delta| \leqslant \mathrm{Min}\,(\frac{a}{2}, \frac{k}{M})$
où $0 < k < 1$.

$$Q_1 + \delta\,\vec{n}(Q_1 = Q_2 + \delta\,\vec{n}(Q_2) \quad \text{entraîne} \quad Q_1 = Q_2$$

Or l'égalité $Q_1 + \delta\,\vec{n}(Q_1) = Q_2 + \delta\,\vec{n}(Q_2)$ donne

$Q_1Q_2 = |\delta|.|\vec{n}_1 - \vec{n}_2| \leqslant 2\delta$ et d'autre part pour $Q_1Q_2 \leqslant a$

$|\vec{n}_1 - \vec{n}_2| \leqslant M.Q_1Q_2$. Autrement dit, si $|\delta| \leqslant \frac{a}{2}$, on a

$Q_1Q_2 \leqslant M.\,|\delta|\,Q_1Q_2$ qui entraîne $Q_1Q_2 = 0$ si $M.|\delta| < 1$

B est alors de classe C^1 .

D'autre part, compte tenu des singularités de $E(PQ)$ et de $N(P,Q,\vec{n}_Q)$ on a les propriétés classiques suivantes:

Si l'on pose

$$\vec{U}(P) = \iint_B E(PQ)\,\vec{\phi}\,(Q)\,dS_Q$$

$$\vec{V}(P) = \iint_B N(P;Q,\vec{n}_Q)\,\vec{\phi}\,(Q)\,dS_Q$$

$$\vec{W}(P) = \iiint_{B_i} E(PQ)\,\vec{\psi}\,(Q)\,dS_Q$$

<u>Lemme 4.2</u>: *Si* $\vec{\varphi}$ *est continu sur* B , $\vec{U}$ *l'est dans tout l'espace. En outre il possède des dérivées conormales intérieure et extérieure régulières (c'est-à-dire* $\vec{N}(\vec{U}\ (Q+\ell\vec{n}_Q);\vec{n}_Q)$ *admet des limites selon que* $\ell < 0$ *ou* $\ell > 0$ *tend vers zéro; ces limites sont notées* $\vec{N}_i$ *et* $\vec{N}_e$ *) et l'on a pour* $Q_o \in B$

$$\vec{N}_e(\vec{U}\ (Q_o),\vec{n}_o) = \vec{\varphi}\ (Q_o) + \iint_B N(Q;Q_o,\vec{n}_o)\ \vec{\varphi}\ (Q)\ dS_Q$$

$$\vec{N}_i(\vec{U}\ (Q_o),\vec{n}_o) = -\vec{\varphi}(Q_o) + \iint_B N(Q_o;Q,\vec{n}_Q)\ \vec{\varphi}\ (Q)\ dS_Q$$

<u>Lemme 4.3</u>: *Si* $\vec{\varphi}$ *est continue höldérienne sur* B , $\vec{U}$ *est de classe* C^1 *dans* $B_e \cup B$ *et* $B_i \cup B$.

<u>Lemme 4.4</u>: *Si* $\vec{\varphi}$ *est continue sur* B *, on a pour tout* $Q_o \in B$

$$\vec{V}_e(Q_o) = \vec{\varphi}\ (Q_o) + \iint_B {}^tN(Q_o;Q,n_Q)\ \vec{\varphi}\ (Q)\ dS_Q$$

$$\vec{V}_i(Q_o) = -\vec{\varphi}\ (Q_o) + \iint_B {}^tN(Q_o;Q,\vec{n}_Q)\ \vec{\varphi}\ (Q)\ dS_Q$$

et

$$\vec{V}_1 = \begin{cases} \vec{V} & \textit{dans}\ B_e \\ \vec{V}_e & \textit{sur}\ B \end{cases} \qquad \vec{V}_2 = \begin{cases} \vec{V} & \textit{dans}\ B_i \\ \vec{V}_i & \textit{sur}\ B \end{cases}$$

sont respectivement continus dans $B_e \cup B$ *et* $B_i \cup B$.

<u>Lemme 4.5</u>: *Pour* $\vec{\varphi}$ *continu sur* B , $\vec{U}$, $\vec{V}$ *et* $\iint_B N(Q;Q_o,\vec{n}_{Q_o})\,\vec{\varphi}(Q)\ dS_Q$ *sont uniformément continues au sens de Hölder sur* B *, et si* $\vec{\varphi}$ *est continu au sens de Hölder sur* B *, ces trois champs de vecteurs sont différentiables sur* B *leurs dérivées premières étant continues au sens de Hölder.*

<u>Lemme 4.6</u>: *Si* $\vec{\psi}$ *est continu dans* $B_i \cup B$, $\vec{W}$ *est différentiable dans tout l'espace, ses dérivées premières étant continues au sens de Hölder.*

Lemme 4.7: *Si* $\vec{\psi}$ *est continu dans* $B_i \cup B$ *, continu au sens de Hölder dans* B_i *,* $\vec{W}$ *est de classe* C^2 *dans* B_i *et y vérifie :*

$$\vec{\Delta}^{*} \vec{W} + k^2 \vec{W} = - \vec{\psi}$$

Preuve du lemme 4.7:

On a évidemment $\Delta^{*} \vec{W} + k^2 \vec{W} = \vec{0}$ dans B_e.

Lorsque $P \in B_i$, on a le résultat suivant :

Soit $\vec{\psi}$ *bornée et intégrable dans* B_i *.* $\vec{W}$ *ainsi que ses dérivées premières sont continus partout, les dérivées s'obtenant par dérivation sous le signe d'intégration.*

Si en outre $\vec{\psi}$ *est de classe* C^1 *par morceaux dans* B_i *les dérivées secondes de* $\vec{W}$ *existent et sont continues dans* B_i *et*

$$\Delta^{*} \vec{W} + k^2 \vec{W} = - \vec{\psi}\,(P)$$

Afin d'établir la première partie de ce résultat préliminaire, on considère le potentiel

$$\vec{W}_\delta\,(P) = \iiint_{B_i} E_\delta\,(PQ)\,\vec{\psi}\,(Q)\,dS_Q$$

où $E_\delta\,(r)$ diffère de $E(r)$, solution élémentaire, dans une sphère de centre P et de rayon δ .

Comme

$$E(PQ) = \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left[(\lambda+3\mu)\,I_3 + (\lambda+\mu)\,||r_j\,r_k||\right] \frac{1}{r} + E^1(PQ)$$

où $E^1(PQ)$ est régulière pour $r = PQ = 0$, on pose

$$8\pi\mu(\lambda+2\mu)E_\delta(r) \begin{cases} (\lambda+3\mu)\,I_3\,\frac{1}{2\delta}\,(3-\frac{r^2}{\delta^2}) + E^1(r) & r \leq \delta/_2 \\ \left[(\lambda+3\mu)\,I_3 + (\lambda+\mu)\,||r_j r_k||\,\frac{(2r-\delta)}{\delta}\,\frac{r^2}{\delta^2}\right] \frac{1}{2\delta}\,(3-\frac{r^2}{\delta^2}) + E^1(r) ; & \delta/_2 \leq r \leq \delta \\ E(r) \qquad \text{pour} \quad r > \delta & \end{cases}$$

qui est continûment différentiable dans B_i et surtout en P .

De l'inégalité

$$|\vec{W}_\delta - \vec{W}| \leqslant \iiint_{r\leqslant\delta} |E-E_\delta| \cdot |\vec{\psi}(Q)| \; dS_Q \leqslant 4\pi M \int_0^\delta |E_\delta(r) + E_o(r)| \; r^2 \, dr = 4\pi M K \delta^2$$

où $M = \text{SUP}|\vec{\psi}|$, il suit que $\{\vec{W}_\delta\}$ converge uniformément, pour tout P , vers $\vec{W}$ quand $\delta \to 0$. Donc $\vec{W}$ est uniformément continu.

La différentiabilité de $E_\delta(r) = E_\delta\ (x-\xi,\ y-\eta,\ \zeta-\zeta)$ se transporte également à $\vec{W}$.

En effet

$$\frac{\partial \vec{W}_\delta}{\partial x} = \iiint_{B_i} \frac{\partial E_\delta}{\partial x} \vec{\psi}\ (Q)\ dS_Q \ .$$

Soit alors

$$\vec{\chi}\ (P) = \iiint_{B_i} \frac{\partial E(r)}{\partial x} \vec{\psi}\ (Q)\ dS_Q$$

qui est convergente et résulte de $\vec{W}(P)$ par dérivation sous le signe somme.

On a

$$\left| \frac{\partial \vec{W}_\delta}{\partial x} - \vec{\chi} \right| \leqslant 4\pi M \int_0^\delta \left| \frac{\partial}{\partial x} (E_\delta - E_o) \right| r^2 \, dr$$

où

$$\frac{\partial E_\delta}{\partial x} \begin{cases} \dfrac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} (\lambda+3\mu)\ I_3 . (- \dfrac{r r_1}{\delta^3}) + \dfrac{\partial E^1}{\partial x} & r \leqslant \dfrac{\delta}{2} \\[2ex] \dfrac{\partial E_o^\delta}{\partial x} + \dfrac{\partial E^1_{(r)}}{\partial x} & \dfrac{\delta}{2} \leqslant r \leqslant \delta \\[2ex] \dfrac{\partial E}{\partial x} & r \geqslant \delta \end{cases}$$

d'où

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} (E - E) \right| \leqslant \left| \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left[(\lambda+3\mu)\ I_3 \frac{r}{\delta^3} + \frac{5r}{\delta^2} \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| . \frac{1}{2\delta} (3 - \frac{r^2}{\delta^2}) \right.\right.$$

$$\left. + (\lambda+\mu)\ I_3 \frac{(2r-\delta) r^3}{\delta^6} \right] +$$

$$+ \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left[(\lambda+3\mu\ I_3 + (\lambda+\mu) \left| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right| \right] \frac{1}{r^2}$$

$$\left. + \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \frac{3}{r^2} (\lambda+\mu) \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \right| = D(r)$$

et l'intégrale $\int_0^\delta D(r)\, r^2\, dr = K_1\, \delta$

donc $\left| \dfrac{\partial \vec{W}_\delta}{\partial x} - \vec{\chi} \right| \leqslant 4\pi M K_1\, \delta$ tend uniformément vers zéro avec δ , d'où il résulte que $\vec{\chi}\,(P) = \dfrac{\partial \vec{W}}{\partial x}$.

On ne peut établir la continuité des dérivées secondes de sans hypothèses supplémentaire sur $\vec{\psi}$.

Cependant si $\vec{\psi}$ est de classe C^1 on peut écrire :

$$\vec{W}_x(P) = \iiint_{B_i} \frac{\partial E}{\partial x}(r)\, \vec{\psi}\,(Q)\, dS_Q = - \iiint_{B_i} \frac{\partial E(r)}{\partial \xi}\, \vec{\psi}\,(Q)\, dS_Q$$
$$= - \iint_B E(r)\, \vec{\psi}\,(Q)\, n_1\, dS_Q + \iiint_{B_i} E(r)\, \vec{\psi}_\xi\, dV_Q$$

où $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ est la normale extérieure à B .

Compte tenu de la preuve de la 1ère partie, on peut différentier ces intégrales sous le signe d'intégration et obtenir ainsi des expressions continues

$$\frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial x^2}(P) = - \iint_B \frac{\partial E}{\partial x}(r)\, \vec{\psi}\,(Q)\, dS_Q + \iiint_{B_i} \frac{\partial E(r)}{\partial x}\, \vec{\psi}_\xi\,(Q)\, dV_Q \,.$$

La seconde intégrale peut s'écrire

$$\iiint_{B_i} \frac{\partial E}{\partial x}(r)\, \left[\vec{\psi}(Q) - \vec{\psi}(P)\right]_\xi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

d'où (puisque $\vec{\psi}(Q) - \vec{\psi}(P) = O(PQ)$ quand $r = PQ \to 0$) d'après intégration par parties :

$$\iint_B \frac{\partial E(r)}{\partial x} (\vec{\psi}(Q) - \vec{\psi}(P)\, n_1\, dS_Q - \iiint_{B_i} \frac{\partial^2 E(r)}{\partial \xi \partial x} \left[\, \vec{\psi}(Q) - \vec{\psi}(P)\,\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta \,.$$

On a donc :

$$\vec{W}_{xx}(P) = - \left[\iint_B n_1 \frac{\partial E}{\partial x}(r)\, dS_Q \right] \vec{\psi}(P) + \iiint_{B_i} \frac{\partial^2 E(r)}{\partial x^2} \left[\vec{\psi}(Q) - \vec{\psi}(P)\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

De même

$$\vec{W}_{xy}(P) = - \iint_B \frac{\partial E}{\partial x}\, \vec{\psi}(Q) n_2\, dS_Q + \iiint_{B_i} \frac{\partial E}{\partial x}\, \vec{\psi}_\eta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

La seconde intégrale s'écrit encore

$$\iiint_{B_i} \frac{\partial E}{\partial x} \left[\vec{\psi}(Q) - \vec{\psi}(P)\right]_\eta \, d\xi \quad d\eta \quad d\zeta = \iint_B \frac{\partial E}{\partial x} \left(\vec{\psi}(Q) - \vec{\psi}(P)\right) n_2 \, dS_Q$$

$$+ \iiint_{B_i} \frac{\partial^3 E}{\partial y \; x} \left[\vec{\psi}(Q) - \vec{\psi}(P)\right] \, d\xi \quad d\eta \quad d\zeta$$

d'où

$$\vec{W}_{xy}(P) = -\left(\iint_B n_2 \frac{\partial E}{\partial x} dS_Q\right) \vec{\psi}(P) + \iiint_{B_i} \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} \left(\vec{\psi}(Q) - \vec{\psi}(P)\right) dV_Q$$

et

$$\mu \, \Delta \, \vec{W} + (\lambda+\mu) \text{ grad div } \vec{W} + k^2 \, \vec{W} = -\left[\iint_B \left(\mu \frac{\partial E}{\partial M} \vec{\psi}(P) + (\lambda+\mu) \sum_{i=1}^{3} \vec{x}_i (\vec{n}. \frac{\partial E}{\partial x_i} \vec{\psi}(P)\right) dS_Q\right]$$

$$+ \iiint_{B_i} (\mu \, \Delta \, E + (\lambda+\mu) \text{ grad div } E).(\vec{\psi}(Q) - \vec{\psi}(P)) \, dV_Q$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S(P,\varepsilon)} \left[\mu \frac{\partial E}{\partial n} \vec{\psi}(P) + (\lambda+\mu) \sum_1^3 \vec{x}_i (\vec{n}.E_{x_i} \; \vec{\psi}(P)\right] dS$$

(formule de Betti appliquée à $B_i - S(P,\varepsilon)$).

Dans cette dernière limite, seule la partie singulière E_o de E donne une limite non nulle et en passant en coordonnées sphériques de centre P on obtient $-\vec{\psi}(P)$.

Utilisant alors le fait bien connu que toute fonction $\vec{\psi}$ continue au sens de Hölder dans B_i peut être uniformément approchée par des fonctions $\vec{\psi}_n$ différentiables et satisfaisant à une condition de Hölder de même exposant, la dernière forme de $\vec{W}_{xx}$ (qui ne contient plus de dérivées de $\vec{\psi}$) appliquée à $\vec{\psi} - \vec{\psi}_n$ montre que $\vec{W}$ a encore des dérivées secondes continues et vérifie encore :

$$\Delta^* \; \vec{W} + k^2 \, \vec{W} = - \vec{\psi} \quad \text{dans} \quad B_i \; .$$

4.2- *Equations intégrales du problème*

Les conditions (i) et (ii) donnent aisément compte tenu des lemmes précédents :

$$(4.6) \quad \vec{\varphi}(Q_o) + \iint_B {}^tN(Q_o;Q,\vec{n}_Q)\,\vec{\varphi}(Q)\,dS_Q - \iiint_{B_i} E(Q_oQ)\,\vec{\psi}(Q)\,dV_Q = \vec{\gamma}\,(Q_o) \qquad Q_o \in B$$

$$(4.7) \quad \vec{\psi}(P) = i\,\varepsilon\,g(P) \iint_B N(P;Q,\vec{n}_Q)\,\vec{\varphi}(Q)\,dS_Q - i\,\varepsilon\,g(P)\iiint_{B_i} E(PQ)\,\vec{\psi}(Q)\,dV_Q = 0$$

équations qui donnent le système intégral cherché.

On peut remarquer que

$$(4.8) \qquad \vec{\varphi} = \frac{1}{2}\,[\vec{u}_e - \vec{u}_i] \qquad \text{sur } B$$

$$(4.9) \qquad \vec{\psi} = \vec{\Delta}^{*}\vec{u} + k^2\,\vec{u} \qquad \text{dans } B_i$$

Réciproquement, toute solution $(\vec{\varphi},\vec{\psi})$ continue du système (4.6) , (4.7) donne par l'intermédiaire de (4.1) une solution $\vec{u}$ du problème

$$\begin{cases} \vec{\Delta}^{*}\,\vec{u} + k^2\,\vec{u} = 0 & \text{dans } B_e \\ \vec{u} = \vec{\gamma} & \text{sur } B \\ \vec{u} \text{ vérifie les conditions de radiation C.R.5.} \end{cases}$$

4.3- *Etude du système intégral*

On va montrer que le système (4.6) , (4.7) a une solution unique $(\vec{\varphi},\vec{\psi})$ pour $\vec{\gamma}$ continu et tout $k \neq 0$ tel que $\operatorname{Im} k \geq 0$.

On va utiliser la méthode des opérateurs complètement continus dans les espaces de Banach.

On utilisera les espaces de Banach suivants :

(1) l'espace B_1 des champs de vecteurs continus sur B , $\vec{\varphi}(Q)$ muni de la norme

$$\|\,\vec{\varphi}\,\| = \sup_{Q\in B} |\vec{\varphi}\,(Q)|$$

(2) l'espace B_2 des champs de vecteurs $\vec{\psi}(Q)$ définis dans B_i admettant un prolongement continu à B muni de la norme :

$$||\vec{\psi}||_2 = \sup_{Q \in B_i} |\vec{\psi}(Q)|$$

(3) L'espace de Banach $B = B_1 \times B_2$ muni de la norme

$$||(\vec{\phi},\vec{\psi})|| = ||\vec{\phi}||_1 + ||\vec{\psi}||_2$$

Le fait que B_1, B_2, B soient complets est classique.

Le système intégral peut s'écrire

$$(\vec{\phi},\vec{\psi}) + K(\vec{\phi},\vec{\psi}) = (\vec{\gamma},0)$$

où K est un opérateur linéaire de B dans lui-même.

K est composé de quatre opérateurs intégraux apparaissant dans les équations (4.6) et (4.7) .

On peut écrire

$$K(\vec{\phi},\vec{\psi}) = (K_{11}\,\vec{\phi} + K_{12}\,\vec{\psi}\ ,\ K_{21}\,\vec{\phi} + K_{22}\,\vec{\psi}\ )$$

où

$$K_{11}\ \vec{\phi}(Q_o) = \iint_B N(Q_o;Q,\vec{n}_Q)\ \vec{\phi}(Q)\ dS_Q \qquad Q_o \in B$$

$$K_{12}\ \vec{\psi}(Q_o) = -\iiint_{B_i} E(Q_oQ)\ \vec{\psi}(Q)\ dV_Q \qquad Q_o \in B$$

$$K_{21}\ \vec{\phi}(P) = i\,\varepsilon\, g(P) \iint_B N(P;Q,\vec{n}_Q)\ \vec{\phi}(Q)\ dS_Q \qquad P \in B_i$$

$$K_{22}\ \vec{\psi}(P) = -\,i\,\varepsilon\, g(P) \iiint_{B_i} E(PQ)\ \vec{\psi}(Q)\ dV_Q \qquad P \in B_i$$

Manifestement tout opérateur K_{ij} est un opérateur linéaire de B_j dans B_i .

Lemme 4.8: L'opérateur K *est un endomorphisme complètement continu de* $B = B_1 \times B_2$

Démonstration :

Il suffit de montrer que chaque K_{ij} est un opérateur linéaire complètement continu.

a) Pour K_{11}

On décompose $K_{11}\vec{\vartheta} = K_{11}^{o}\vec{\vartheta} + K_{11}^{1}\vec{\vartheta}$

$$K_{11}^{o}\vec{\vartheta} = \iint_B N^{o}(Q_o;Q;\vec{n}_Q)\ \vec{\vartheta}(Q)\ dS_Q$$

N^{o} étant la partie singulière de $N(Q_o;Q,\vec{n}_Q)$ à savoir :

$$N^{o}(Q_o;Q,\vec{n}_Q) = \frac{1}{2\pi(\lambda+3\mu)}\left[2\mu\ I_3 + 3(\lambda+\mu)\ \|r_j\ r_k\|\right]\frac{\partial}{\partial n_Q}\ \frac{1}{r}\ .$$

K_{11}^{1} est construit à partir de $N^{1} = N-N^{o}$ qui a une singularité faible. a et M étant les constantes du lemme 1, $y_3 = f(y_1,y_2)$ la représentation de B dans $Q_o\,Q \leqslant a$ par rapport à un repère $Q_o\,y_1\,y_2\,y_3$ où $Q_o\,y_3$ est normal à B, on a pour $Q_o\,Q \leqslant a$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_Q}\ \frac{1}{r}\right| = \frac{|\vec{n}(Q).\overrightarrow{Q_oQ}|}{r^3} \leqslant \frac{|f(y_1,y_2)|}{r^3} + \frac{|\overrightarrow{Q_oQ}.(\vec{n}(Q)-\vec{n}(Q_o))|}{r^3} \leqslant \frac{2M}{r}$$

En définissant la norme d'une matrice comme le maximum des valeurs absolues de ses termes, on voit qu'il existe une constante C_1 telle que :

$$|N(Q_o;Q,\vec{n}_Q)| \leqslant \frac{C_1}{r}\quad \text{où}\quad r = Q_oQ\ ,\quad Q_o,Q \in B\ .$$

D'autre part pour Q_1,Q_2 B on a :

$$\frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \vec{n}(Q).\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}_Q\ \frac{1}{r_2} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}_Q\ \frac{1}{r_2}\right]$$

$$= \left[\vec{n}(Q)-\vec{n}(Q_1)\right]\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}_Q\ \frac{1}{r_1} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}_Q\ \frac{1}{r_2}\right] + \vec{n}(Q_1)\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}_Q\ \frac{1}{r_1} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}_Q\ \frac{1}{r_2}\right)$$

D'après et le théorème de la moyenne, il existe une constante C_2 telle que pour $\tau \leqslant a$, pour tous $Q_1,Q_2,Q \in B$ tels que $|\overrightarrow{Q_1Q_2}| \leqslant \tau$ et $QQ_1 \geqslant 2\tau$

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right| \leqslant C_2\ \frac{Q_1Q_2}{C^3}$$ d'où une inégalité analogue pour

$$\left|N^{o}(Q_1;Q,\vec{n}_Q) - N^{o}(Q_2;Q,\vec{n}_Q)\right|.$$

On en déduit, pour $\delta \leq a$

$$\left| \iint_{B \, S(Q_o;\delta)} N^o(Q_o;Q,\vec{n}_Q)\vec{\vartheta}(Q)\, dS_Q \right| \leq C_1 ||\vec{\vartheta}|| \iint_{y_1^2+y_2^2 \leq \delta^2} \frac{\sqrt{1+f_{y_1}^2+f_{y_2}^2}}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+f^2(y_1,y_2)}} \, dy_1\, dy_2$$

$$\leq 2\,\pi\, C_1 \; ||\vec{\vartheta}|| \sqrt{1+M\,a^2}$$

$$\left| \iint_{B-(B\, S(Q_o,\delta)} N^o(Q_o;Q,\vec{n}_Q)\, \vec{\vartheta}(Q)\, dS_Q \right| \leq \frac{C_1}{a} ||B||.||\vec{\vartheta}||_1 \;,\; ||B|| \text{ aire de } B$$

d'où (4.10) $||K_{11}^o \; \vec{\vartheta}(Q_o)||_1 \leq A_o \; ||\vec{\vartheta}||_1$ c'est-à-dire K_{11}^o est continu.

Pour $\tau \leq a$ et $Q_1Q_2 < \tau$.

$$\left| \iint_{B-(B\;\; S(Q_1,2\tau)} \left[N^o(Q_1;Q,\vec{n}_Q) - N^o(Q_2;Q,\vec{n}_Q)\right] \vec{\vartheta}(Q)\, dS_Q \right| \leq C_2 ||B|| \frac{Q_1Q_2}{3} ||\vec{\vartheta}||_1$$

et $$\left| \iint_{B\; S(Q_1,2\tau)} \left[N^o(Q_1;Q,\vec{n}_Q)-N^o(Q_2;Q,\vec{n}_Q)\right] \vec{\vartheta}(Q) dS_Q \right| \leq 10\,\pi\, C_1 \;\sqrt{1+Ma^2}\;\; \tau \; ||\vec{\vartheta}||_1$$

si $\tau \leq \frac{a}{3}$ (alors l'intégrale ci-dessus est majorée en module par la somme de celles étendues à $B \cap S(Q_1,2\tau)$ et $B \cap S(Q_2,3\tau)$)

Si $Q_1Q_2 \leq \text{Min}\,(1,(\frac{a}{3})^4)$ et si l'on pose $Q_1Q_2 = \tau^4$ $(\tau \leq \frac{a}{3}\,,\, Q_1Q_2 < \tau)$

on a en définitive :

(4.11) $$||K_{11}^o\; \vec{\vartheta}(Q_1) - K_{11}^o\; \vec{\vartheta}(Q_2)||_1 \leq A_1 (Q_1Q_2)^{1/4} \,.\, ||\vec{\vartheta}||_1$$

où $A_1 = C_2\; ||B|| \;+\; 10\,\pi\, C_1 \;\sqrt{1+M\,a^2}$

Si $\{\vec{\vartheta}_k\}$ est une suite bornée de fonctions continues sur B, les inégalités (4.10) et (4.11) montrent que la suite $\{K^o_{11}\, \vec{\vartheta}_k\}$ est uniformément bornée et également continue sur B.

On a des inégalités analogues évidentes pour $\{K^1_{11}\, \vec{\vartheta}_k\}$ et $\{K^1_{11}\, \vec{\vartheta}_k\}$ a les mêmes propriétés et le théorème d'Arzela entraîne bien la complète continuité de K_{11}.

A des modifications de détail près, la même démonstration est valable pour les autres K_{ij}.

Le lemme 4.8 permet d'utiliser l'alternative de Fredholm valable pour les opérateurs linéaires complètement continus dans les espaces de Banach [RIESZ - NAGY [1]].

Pour l'équation homogène correspondante, on a le

Lemme 4.9: pour tout $k \neq 0$ *tel que* $\operatorname{Im} k \geq 0$ *, l'équation homogène :*

$$(\vec{\vartheta},\vec{\psi}) + K(\vec{\vartheta},\vec{\psi}) = 0 \tag{4.12}$$

n'a que la solution $\vec{\vartheta} = \vec{0}$, $\vec{\psi} = \vec{0}$.

Démonstration :

Etant donné une solution $(\vec{\vartheta},\vec{\psi})$ de (4.12) la solution du problème initial qui lui correspond par (4.1) vérifie

$$\vec{u}_e = \vec{0} \quad \text{sur } B$$

$$\overset{*}{\Delta}\, \vec{u} + k^2\, \vec{u} = \vec{0} \quad \text{dans } B_e \text{ et les conditions C.R.5}$$

ce qui entraîne $\vec{u} \equiv \vec{0}$ dans B_e d'après les théorèmes d'unicité donc $N_e(\vec{u},\vec{n}) = \vec{0}$ sur B ce qui entraîne $N_i(\vec{u},\vec{n}) = \vec{0}$ sur B en vertu du lemme 6 et d'un résultat utilisé dans la 2ème démonstration.

On a, dans ces conditions :

$$\iiint_{B_i} \vec{\bar{u}}.\Delta^{*}\vec{u}\, dV = \iint_{B} \vec{\bar{u}}.\vec{N}_i(\vec{u},\vec{n})\, dS - \iiint_{B_i} \left[W(\vec{u},\vec{\bar{u}}) + (k^2 + i\varepsilon g)\, |\vec{u}|^2 \right] dV$$

$$\iiint_{B_i} \vec{u}.\Delta^{*}\vec{\bar{u}}\, dV = \iint_{B} \vec{u}.\vec{N}_i(\vec{\bar{u}},\vec{n})\, dS - \iiint_{B_i} \left[W(\vec{u},\vec{\bar{u}}) + (\bar{k}^2 - i\varepsilon g)\, |\vec{u}|^2 \right] dV$$

si l'on convient que, dans $\Delta^{*}\vec{u} + (k^2 + i\varepsilon g)\vec{u} = 0$

$\varepsilon = +1$ si $\mathrm{Im}\, k \geqslant 0$, $\varepsilon = -1$ si $\mathrm{Im}\, k < 0$.

On en déduit que

$$0 = \iiint_{B_i} (-2\, i\, \mathrm{Im}\, k^2 - 2i\varepsilon g)\, |\vec{u}|^2\, dV$$

d'où $\vec{u} \equiv \vec{0}$ dans B_i puisque $\mathrm{Im}\, k^2 + \varepsilon\, g \neq 0$ (en effet pour $0 \leqslant \mathrm{Arg}\, k \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Im}\, k^2 \geqslant 0$ et $\varepsilon = 1$, $\frac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{Arg}\, k \leqslant$ et $\mathrm{Im}\, k^2 < 0$ et $\varepsilon = -1$ et $g > 0$ dans B_i) donc. $\vec{u}_i = -2\vec{\psi} \equiv \vec{0}$ sur B et $\vec{\psi} = \Delta^{*}\vec{u} + k^2\vec{u} \equiv \vec{0}$ dans B_i .

Il en résulte que seule la première partie de l'alternative de Fredholm s'applique au système intégral et on obtient ainsi l'existence de la solution du problème initial.

Remarque :

On a vu en fait que l'alternative de Fredholm s'appliquait sous sa forme la plus simple, pour k complexe de partie imaginaire positive, (et même pour $k = 0$ comme on pourrait facilement s'en assurer).

Le théorème d'existence serait encore valable pour ces valeurs de k , les conditions C.R.5 étant à remplacer par

$$\vec{u}(\vec{r}) = 0\left(\frac{1}{r}\, e^{-\mathrm{im}\, kr}\right), \quad \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}(\vec{r}) = 0\left(\frac{1}{r}\, e^{-r\mathrm{Im}k}\right)$$

quand $r \to \infty$.

5. PROBLEMES PLANS DANS LE CAS D'UN MILIEU ANISOTROPE

5.1- Généralités

On considère le système

$$(5.1)\qquad \Delta^{*} \vec{u} + k^2 \vec{u} = \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}\, \vec{u}_{,ij} + k^2 \vec{u} = \vec{0}$$

où

$$A_{11} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{13} & C_{33} \end{pmatrix} \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} C_{33} & C_{23} \\ C_{23} & C_{22} \end{pmatrix} \quad A_{12} = {}^tA_{21} = \begin{pmatrix} C_{13} & C_{12} \\ C_{33} & C_{23} \end{pmatrix}$$

Son déterminant caractéristique

$$(C_{11}\ C_{33} - C_{23}^2)\ \alpha^4 + 2\ (C_{13}\ C_{22} - C_{12}\ C_{23})\alpha^3 + \alpha^2(C_{11}\ C_{22} + 2C_{13}\ C_{23}$$

$$- C_{12}^2\ C_{23}) + 2(C_{11}\ C_{23} - C_{12}\ C_{13})\ \alpha + (C_{11}\ C_{33} - C_{13}^2) = 0$$

ne possède que des racines complexes (2 à 2 conjuguées) $\alpha_1, \alpha_2 (\alpha_1 \neq \alpha_2)$

$$\text{si } (5.2)\quad C_{11} > 0\ ,\ C_{11}\ C_{22} - C_{12}^2 > 0\ ,\ \det \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{vmatrix} > 0$$

La matrice solution élémentaire du système (5.1) est telle que :

$$(5.3)\qquad \sum A_{ij}\ D_i\ D_j\ E(PQ) + k^2\ I\ E(P,Q) = \delta\ (P)\ I$$

où $\delta(P)$ est la mesure de Dirac sur R^2, les éléments e_{ij} de E sont donc des distributions sur R^2.

On construit E au moyen de la transformation de Fourier

$$(5.4)\qquad \hat{\vec{f}}(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} e^{-ip.x}\ \vec{f}(x)\ dx,\quad \vec{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} e^{ix.p}\ \hat{\vec{f}}(P)\ dP)$$

où $p.x = p_1 x_1 + p_2 x_2$.

On obtient

$$(5.5) \qquad \left(\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}\, p_i\, p_j + k^2 I \right) \hat{E}\,(p,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\, I$$

d'où la solution formelle

$$(5.6) \qquad E(x,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} e^{ix.p} \left(\sum A_{ij}\, p_i\, p_j + k^2 I \right)^{-1} dp$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} e^{ix.p} \frac{\mathrm{Cof}(\sum A_{ij}\, p_i\, p_j + k^2 I)}{\mathrm{Det}\,(\sum A_{ij}\, p_i\, p_j + k^2 I)}\, dp$$

où

$$(5.7) \quad \mathrm{Det}\,(\sum A_{ij}\, p_i\, p_j + k^2 I) = P_4\,(p) + k^2 P_2(p) + k^4 = P(p,k)$$

avec

$$(5.8) \qquad P_2(p) = (C_{11} + C_{33})\, p_1^2 + (C_{33} + C_{22})\, p_2^2 + 2\,(C_{13} + C_{23})\, P_1\, P_2$$

qui est homogène de degré 2 en p_1, p_2 et

$$(5.9) \qquad P_4\,(p) = (C_{22}\, C_{33} - C_{23}^2)\, P_2^4 + 2\, P_1\, P_2^3\, (C_{13}\, C_{22} - C_{12}\, C_{23})$$

$$+ 2\, P_1^3\, P_2\, (C_{11}\, C_{23} - C_{12}\, C_{13}) + P_1^2\, P_2^2\, (C_{11}\, C_{22} - C_{12}^2 + 2C_{13}\, C_{23}$$

$$-2C_{12}\, C_{33}) + P_1^4\, (C_{11}\, C_{33} - C_{13}^2)$$

qui est homogène de degré 4 en P_1, P_2 , $P(p,k)$ l'étant en K, P_1,P_2 .

Les conditions (5.2) assurent que $P_4(P)$ ne s'annule pour aucun $p \in R^2$, $p \neq 0$.

$P(p,k)$ admet donc l'une des deux factorisations suivantes en polynômes unitaires irréductibles sur R (et homogènes en P et k):

$(k^2 + \alpha(p))\,(k^2 + \beta(P))$ où $k^4 + k^2 P_2(p) + P_4(p)$

une forme particulière (contenant le cas isotrope) étant $(k^2 + P_2(p))^2$ si $P_2^2(p) - 4\, P_4(p) \equiv 0$, la première résultant d'une identité de la forme

$$P_2^2(p) - P_4(p) \equiv R^2(p)$$

où $R(p)$ est un polynôme homogène de degré 2 .

On supposera dans la suite que $P(p,k)$ est irréductible sur R et (ce qui est en général le cas d'après DUFF [1]) que :

- la courbe réelle $S_k = \{ p \in R^2 : P(p,k) = 0\}$ est bornée
- $\forall$ p réel $\in S_k$, $p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} P(p,k) + p_2 \frac{\partial}{\partial p_2} P(p,k) \neq 0$

On peut remarquer que S_k traduit l'anisotropie du milieu; en effet si l'on cherche des solutions ondes planes de la forme :

$\vec{u} = f(s\ t - p\ x)\ \vec{c}$ où f est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles et si $f'(\tau) \not\equiv 0$, on aura des solutions de cette forme si et seulement si $\Delta^* \vec{u} - \vec{u}_{tt} = \vec{0}$

soit $$(A_{ij}\ p_i\ p_j - s^2\ I)\ \vec{C} = \vec{0}$$

Si $\vec{C} \neq \vec{0}$, ceci implique $\det (A_{ij}\ p_i\ p_j - s^2\ I) = 0$

On déduit des hypothèses faites sur S_k et sur $P_4\ (p)$,

Lemme 5.1

$P(p,k) = 0$ *n'admet aucune racine nulle (en* K) *pour* $P \neq 0$ *donné*

Toutes les racines de $P(p,K) = 0$ *sont alors simples et non nulles.*

Démonstration

soit p tel que $|p| = 1$. D'après la formule d'Euler

$$\sum_{i=1}^{2} p_i \frac{\partial}{\partial p_i} P(p,k) + k \frac{\partial}{\partial k} P(p,k) = 4\ P(p,k) = 0$$

où $K = K\ (p)$ donc $p \in S_k$

On en déduit $\frac{\partial}{\partial k}\, P(p;k) = -\sum \frac{p_i}{k}\frac{\partial}{\partial p_i}\, P(p,k) \neq 0$ donc $k(p)$ est simple.

Lemme 5.2

Les 4 racines de $P(p,k) = 0$, $k_i(p)$, $i = 1,2,3,4$ *(deux à deux opposées) sont des fonctions analytiques de* p *réel* $\neq 0$.

Démonstration

soit p_o fixé unitaire. Les racines $k_i(p_o)$ sont définies au voisinage de p_o où elles prennent les valeurs de $k_i(p_o)$.

Comme

$$P(p_o,k_i) = 0 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial k}\,(p_o,k_i(p_o)\,) \neq 0$$

l'équation $P(p,k) = 0$ a une et une seule solution analytique $k_i(P)$ définie dans un voisinage de p_o y prenant la valeur $k_i(p_o)$. On les prolonge ensuite analytiquement hors de ce voisinage sauf si l'on rencontre une singularité algébrique ce qui ne peut se produire d'après le lemme 1.

Corollaire

1) *Chaque racine* $k_i(p)$ *est de signe constant.*

Sinon on aurait $k_i(\eta_o)$ pour un η_o unitaire.

Or si $p = |p|\,\eta$

$|k_i(p)| = |p|.|k_i(\eta) = 1$ en vertu de l'homogénéité de $P(p,k)$

On aurait alors $|p| \to \infty$ quand $\eta \to \eta_o$ ce qui contredirait le fait que S_k est bornée.

2) *Si on a*

$$k_1\,(p_o) > k_2(p_o) > 0 > k_3(p_o) = -\,k_2(-p_o) > k_4(p_o) = -\,k_1(-p_o)$$

ceci entraîne cette inégalité pour tout P *réel* $\neq 0$

Sinon il existerait une racine double pour un P déterminé.

Les équations

$$k_i(p) = 1 \qquad i = 1,2,3,4$$

définissent donc deux courbes algébriques bornées (qui sont en fait analytiques), entourant l'origine et n'ayant aucun point commun.

Comme $P_4(p) \neq 0$ pour P réel $\neq 0$, l'opérateur différentiel

(5.11) $P(D,k) = k^4 + k^2 P_2(D) + P_4(D)$ est elliptique d'ordre 4 $(D = (D_1,D_2))$.

5.2 - *Relation entre les opérateurs* $L = \sum A_{ij} D_i D_j$ et $P(D,k)$

Si l'on pose $\lambda = -k^2$, $P(p,K)$ apparaît comme le polynôme caractéristique de la matrice

$$L(n) = \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} p_i p_j$$

Le théorème de Cayley - Hamilton assure donc que

$$P(p.L(p)) = L^2(p) - L(p) P_2(p) + P_4(p) I = 0 \qquad \forall p \in R^2$$

C'est un polynôme en p_1 , p_2 dont les coefficients sont des matrices carrées d'ordre 2, ses coefficients sont donc nuls et si l'on remplace p par D, l'opérateur différentiel qui en résulte s'annule identiquement.

Autrement dit, on a

$$P(D,L(D)) = L^2(D) - P_2(D) L(D) + P_4(D) I = 0$$

Lemme 5.3

L'opérateur L *vérifie l'identité*

(5.14) $$(L + k^2 I) \Lambda (D,k) + P(D,k) I = 0$$

$$\Lambda (D,k) = L - I P_2(D) - k^2 I$$

on a

$$L = L + k^2 I - k^2 I$$

$$L^2 = (L + k^2 I)^2 + k^4 I - 2 k^2 (L + k^2 I)$$

d'où

$$P(D,L(D) = (L + k^2 I)(L - k^2 I - I P_2(D)) + k^4 I + k^2 P_2(D) + P_4(D) I$$
$$= 0 .$$

<u>*Remarque*</u> : cette identité est aussi vérifiée pour $k = 0$

5.3-*Solution élémentaire*

Comme $\quad L\, E(x) = -\, k^2\, E(x) + \delta\,(x)\, I$

$$L^2\, E(x) = k^4\, E(x) - k^2\ \ (x)\, I + L\, \delta(x)\, I$$

il en résulte que

(5.15) $$P(D,k)\, E(x) + \Lambda\,(D,k)\delta\,(x)\, I = 0$$

d'où l'on déduit :

si $E_o(x)$ *est une solution élémentaire de* $P(D,k)$ *telle que*

(5.16) $$P(D,k)\, E_o(x) = -\,\delta\,(x)\, I$$

(5.17) $E'(x) = \Lambda\,(D,k)\, E_o(x)$ *en est une pour* $L + k^2\, I$.

Or $P(D,k)$ est un opérateur différentiel scalaire autrement dit $E_o(x) = K(x)I$ où $K(x)$ est une solution élémentaire non matricielle.

5.4-*Détermination de* $E_o(x)$

Plus exactement si $E(x)$ est une solution élémentaire pour $L + k^2\, I$, $F(x) = E(x) - E'(x)$ vérifie $P(D,k)\, F = 0$. Comme $P(D,k)$ est un opérateur elliptique il résulte d'un théorème de L. SCHWARTZ ([1] p. 136) que $F(x)$ est équivalente à une fonction analytique.

Pour déterminer $E_o(x)$ on utilise la construction de F. JOHN (1 . chapitre III) qui peut être résumée ainsi :

soit $v(x,\xi,p)$ l'unique solution du problème suivant

(5.18) $$\left\{\begin{array}{ll} P(D,k)\, \vec{v}(x,\xi,p) = 1 & x \in R^2 \\ \vec{v}(x,\xi,x.\xi) = D^\alpha\, v(x,\xi,\, x_1,\xi) = 0 & |\alpha| \leqslant 3\ . \end{array}\right.$$

Dans ces conditions on a

(5.19) $$v(x,\xi,p) = (x.\xi - p)^4\, w(x,\xi,p)$$

où $w(x,\xi,p)$ est analytique en x,ξ,p réels (et même fonction entière de ces variables). On en déduit si l'on pose $x.\xi = p$

(5.20) $$4\,!\, P_4(\xi)\; w(x,\xi,x.\xi) = 1$$

(On peut noter que $w(x,\xi,x.\xi)$ ne dépend que de $P_4(D)$ non de $P(D,k)$).

Dans ces conditions, une solution fondamentale de $P(D,k)$ c'est-à-dire $K(x,y)$ telle que

$$P(D,k)\, K(x,y) = -\delta(x-y)$$

est donnée, d'après F. JOHN (1 p. 62) par :

(5.21) $$K(x,y) = -\Delta_y^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int^{(x-y).} v_p(x, \;,t+y. \;).\; \frac{t^2 \operatorname{Log} t}{8\pi^2}\, dt$$

où θ est la coordonnée de $\xi = (\cos\theta, \sin\theta)$ ce qui donne : JOHN ([1] , p.62-63)

(5.22) $$K(x,y) \simeq -\frac{1}{4\pi^2}\; \Delta_y \int_0^{2\pi} \operatorname{Log} |(x-y).\xi|\, v(v,\xi,y.\xi)\, d\theta$$

où " $\simeq$ " signifie "plus un terme régulier pour $x = y$ " .

Comme $v_p(x,\xi,y.\xi)$ est une fonction analytique de x pour $x = y$, si on la développe suivant les puissances de $x-y$ pour y fixé en posant $r = |x - y|$ et $\vec{e}_r = \frac{x-y}{r}$ on obtient :

(5.23) $$\operatorname{Log}|(x-y).\xi|\; v_p(x,\xi,y.\xi) =$$

$$= r^4(\vec{e}_r.\xi)^4\; (\operatorname{Log} r + \operatorname{Log}|\vec{e}_r.\vec{\xi}|) \times \Big(\frac{1}{4!P_4(\xi)} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(g,\xi,\vec{e}_r)\, r^m \Big).$$

Substituant dans (5.22) on obtient

(5.24) $$E_o(x,y) \simeq r^2 \sum b_m(y,\vec{e}_r)\, r^m + r^2 \operatorname{Log} r \sum_{m=0}^{\infty} c_m(y,\vec{e}_r)\, r^m$$

où les coefficients b_m , c_m sont (pour y fixé) analytiques pour $\vec{e}_r$ unitaire. Ces séries convergent pour tout $\vec{e}_r$ et $r \geqslant 0$ uniformément sur tout compact et peuvent être indéfiniment dérivées terme à terme.

De façon plus précise, on a

$$K(x,y) = - \Delta_y^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{(x-y).\xi} \frac{v_p(x,\xi,t+y.\xi)t^2 \operatorname{Log}(t)}{8\pi^2} dt$$

$$= - \Delta_y^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{(x-y).\xi} \frac{v_p(x,\xi,t+y.\xi)(\frac{3}{2} + \operatorname{Log}|t|)}{4\pi^2} dt$$

dont le terme en 3/2 est régulier analytique en $x = y$ (même en x et y) : c'est en fait une solution de $P(D,K) = 0$.

La seconde partie s'écrit $K_1(x,y) + K_2(x,y)$

où

$$4\pi^2 K_1(x,y) = \Delta_y \int_0^{2\pi} v(x,y,y.\xi) \operatorname{Log} |(x-y).\xi| \, d\theta$$

$$4 \pi^2 K_2(x,y) = \Delta_y \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{(x-y).\xi} \frac{v(x,\xi;t+y.\xi)-v(x,\xi;y.\xi)}{t} dt$$

$K_2(x,y)$ est analytique régulière en x,y même pour $x = y$; autrement dit $K_1(x,y)$ contient la partie singulière de K .

Mais comme $P(D,K) = P_4(D) + K^2 p_2(D) + K^4$ est à coefficients constants, la fonction $v(x,\xi,P)$ définie par (5.18) est donnée par

$$v(x, \xi,p) = \frac{1}{2i} \int_{|\lambda|=M} \frac{e^{(x.\xi-p)}}{P(\lambda\xi,k)} d\lambda$$

où M est indépendant de ξ et supérieur aux modules des racines du dénominateur $\lambda P(\lambda\xi,k)$.

Alors, on a

$$K_1(x,y) \simeq \frac{1}{4\pi^2} \int^{2\pi} v^{(2)}(x,\xi,y.\xi) \operatorname{Log} |(x-y).\xi| d\theta$$

d'où

$$(2\pi i)^3 K_1(x,y) \simeq - \int_0^{2\pi} \operatorname{Log} |(x-y).\xi| \int_{|\lambda|=M} \frac{e^{\lambda(x-y).\xi}}{P(\lambda\xi)} \lambda \, d\lambda \, d\theta$$

dont la partie singulière peut s'écrire, après quelques transformations (JOHN F. [1] p. 70-71)

$$K_1(x,y) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{(x-y).z>1} \mathrm{Log}\, P_4(z)\left[\frac{1}{2i\pi}\oint_{|\lambda|=M|x-y|}\frac{\lambda^2 e^{\lambda}\, d\lambda}{P_4(\lambda z)}\right] d\tau$$

(qui, lorsque $K \to +0$ tend vers

$$K_1^o(x,y) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{(x-y).z>1}\frac{\mathrm{Log}\, P_4(z)}{P_4(z)}\, dz$$

qui est une solution fondamentale de $P_4(D)$).

Partant de (5.24)et substituant dans (5.17) on obtient, compte tenu de

(5.25) $$K(x,y) = \frac{1}{4!(2\pi i)^2}\,\Delta_y\int_0^{2\pi}\frac{|(x-y).\xi|^4\,\mathrm{Log}|(x-y).\xi|}{P_4(\xi)}\, d\theta + \dots$$

(5.26) $$E'(x,y) = \frac{1}{(2\pi i)^2.4!}\,\Delta\,(L(D)-I\,P_2(D)+K^2\,I)\int_0^{2\pi}\frac{[(x-u).\xi]^4\,\mathrm{Log}|(x-y).\xi|}{P_4(\xi)}\, d\theta$$

$$= \frac{-1}{96\pi^2}\,\Delta(L-I\,P_2(D))\int_0^{2\pi}\dots\, d\theta + \dots\ .$$

Or pour $|\ell| \leqslant 4$

(5.27) $$D^{\ell}\,[(x-y).\xi]^4\,\mathrm{Log}|(x-y).\xi|$$

$$= \xi^{\ell}\ \mathrm{Log}\,|(x-y)=|\ 4.3\dots(4\ |\ell|+1)\,[(x-y).]^{2-\ell} + \text{un polynôme en } (x-y)$$

d'où

(5.28) $$\Delta\,(L(D)-I\,P_2(D))\,[(x-y).\xi]^4\ \mathrm{Log}\ |(x-y).\xi|$$

$$= \sum D_j^2\,(L(D)-I\,P_2(D))\ [(x-y).\xi]^4\ \mathrm{Log}\,|(x-y).\xi|$$

$$= 4!\sum_{j=1}^{2}\xi_j^2\,(L(\xi)-I\,P_2(\xi)\ \mathrm{Log}\,|(x-y).\xi| + \dots$$

En reportant dans (5.26) on obtient

où

$$A'_j = A_j \frac{(-1)^j (C_{23}^2 - C_{22} - C_{33})}{2(\alpha_1-\alpha_2)\left[(C_{22}\, C_{33}-C_{23}^2)\, \alpha_j^2 + (C_{13}\, C_{22}-C_{12}\, C_{33})\alpha_j + (C_{13}C_{23}-C_{12}C_{37})\right] d_j}$$

$$B'_j = B_j \frac{(-1)^j \alpha_1\, \alpha_2(C_{23}^2 - C_{22}\, C_{33})}{2\, d_j(\alpha_1-\alpha_2)\left[(C_{13}\, C_{23}-C_{12}\, C_{33})\, \alpha_j^2 + (C_{11}\, C_{33}-C_{12}C_{13})\alpha_j + (C_{11}C_{33}-C_{13}^2)\right]}$$

$$C'_j = B_j \times \frac{A'_j}{A_j}$$

$$D'_j = C_j \frac{B'_j}{B_j}$$

où $M^o(x,y)$

déduite de $E^o(x,y)$ en multipliant chaque vecteur colonne de

$\begin{pmatrix} A_j & B_j \\ B_j & C_j \end{pmatrix}$ Log σ_j par une constante est encore une solution élémentaire

(singularité en Log r identique à celle de $E(x,y)$ car $A_1+A_2 = A'_1 + A'_2$ etc ...)

5.5 - *Potentiels associés à* $E(x,y)$ et $M(x,y)$

(KUPRADZE 3 p. 181-183).

Selon que l'on écrit (5.1) sous la forme (5.1) où

$$\sum_{i,j=1}^{2} A'_{ij}\, D_i\, D_j + K^2\, I$$

où

$$A'_{ii} = A_{ii}\ , \quad A'_{12} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta_1 & \eta_1 \end{pmatrix}, \quad A'_{21} = \begin{pmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \delta_2 & \eta_2 \end{pmatrix}$$

(5.35) $\beta_1+\beta_2 = 2C_{13}\ ,\ \gamma_1+\gamma_2 = \delta_1+\delta_2 = C_{12}+C_{33}\ ,\ \eta_1+\eta_2 = 2C_{23}$

on obtient deux opérateurs de Neumann associés notés respectivement $\vec{T}(.,\vec{n})$ et $\vec{N}(.,\vec{n})$

On peut vérifier qu'il existe un choix de β_1, γ_1, δ_1, η_1 tel que

$$E(x,y) = -\frac{1}{4^{\ 2}} \sum_{j=1}^{2} \int_0^{2\pi} \frac{\xi_j^2(L(\xi)-I\ P_2(\xi)\ \mathrm{Log}\ |(x-y).\xi|}{P_4(\xi)}\ d\theta\ + \ldots$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{2} (\gamma_j\ \mathrm{Log}\ r + J_j(\vec{e}_r) + \ldots$$

$$\gamma_j = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^{2\pi} \frac{\xi_j^2(L(\xi)-I\ P_2(\xi)\ )}{P_4(\xi)}\ d\theta\ ;$$

$$J_j(\vec{e}_r) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^{2\pi} \frac{\xi_j^2(L(\xi)-I\ P_2(\xi))\ \mathrm{Log}\ |\vec{e}_r\vec{\xi}|}{P_4(\xi)}\ d\theta$$

On a donc

(5.29) $$E(x,y) = -\frac{1}{4\pi^2} [\gamma\ \mathrm{Log}\ r + J(\vec{e}_r) + \ldots$$

(5.30) $$\gamma = \int_0^{2\pi} \frac{L(\xi)-I\ P_2(\xi)}{P_4(\xi)}\ d\theta \quad , \ J(\vec{e}_r) = \int_0^{2\pi} \frac{I(\xi)-I\ P_2(\xi)}{P_4(\xi)}\ \mathrm{Log}\ |\vec{e}_r.\xi|\, d\theta$$

Remarque

Il résulte de cette dernière expression que la partie singulière de $E(x,y)$ ne dépend pas de k en particulier :

$E(x,y)$ et $E^o(x,y)$ ont même partie singulière (ce qui doit provenir d'un théorème sur l'analyticité de la solution élémentaire d'un système elliptique dont les coefficients dépendent analytiquement d'un paramètre (cf. TREVES [1] p. 197-198 et Th. 7 - 8 p. 443).

Or, $E^o(x)$ se détermine à partir d'une solution élémentaire $K^o(x,y)$ de $P_4(D)$ par la méthode que E. LEVI utilisa dès 1907 dans son article sur les équations totalement elliptiques [1] . A partir des expressions générales données dans son mémoire, on trouve

(5.31) $$K^o(x,y) = \frac{1}{C_{23}^2 - C_{22}\,C_{33}}\ \mathrm{Im} \sum_{k=1}^{2} d_k\ \sigma_k^2\ \mathrm{Log}\ \sigma_k$$

où $\sigma_k = (x_1-y_1) + \alpha_k(x_2-y_2)$, $k = 1,2$; α_1 , α_2 racines de partie imaginaire de $P_4(\alpha,1) = 0$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$; d_k cofacteur de α_k^3 dans D (divisé par d et D)

où $$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ 1 & \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_1^2 & \bar{\alpha}_1^3 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ 1 & \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_2^2 & \bar{\alpha}_2^3 \end{vmatrix}$$ d'où

(5.32) $$E^o(x,y) = \mathrm{Im} \sum_{j=1}^{2} \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ B_j & C_j \end{pmatrix} \mathrm{Log}\, \sigma_j$$

$$A_j = \frac{2}{C_{23}^2 - C_{22}\, C_{33}} \quad (C_{22}\, \alpha_j^2 + 2\, C_{23}\, \alpha_j + C_{33})\, d_j \quad ;$$

$$B_j = \frac{2}{C_{22}\, C_{33} - C_{23}^2} \quad (C_{23}\, \alpha_j^2 + (C_{12} + C_{33})\alpha_j + C_{13})\, d_j$$

$$C_j = \frac{2}{C_{23}^2 - C_{22}\, C_{33}} \quad (C_{33}\, \alpha_j^2 + 2\, C_{13}\, \alpha_j + C_{11})\, d_j$$

Comme $\mathrm{Log}\, \sigma_j = \mathrm{Log}\, r + \mathrm{Log}\, (\cos \theta + \alpha_j \sin \theta)$, la partie singulière de

$$E^o(x,y) \quad \text{est} \quad \begin{pmatrix} A_1 + A_2 \, , & B_1 + B_2 \\ B_1 + B_2 \, , & C_1 + C_2 \end{pmatrix} \mathrm{Log}\, r \, .$$

Chaque vecteur colonne de $E(x,y)$ (resp. $E^o(x,y)$) vérifie l'équation $\Delta^* \vec{u} + k^2 \vec{u} = \vec{0}$ (resp. $\Delta^* \vec{u} = \vec{0}$)(pour $x \neq y$).

Si l'on multiplie chacun de ces vecteurs colonnes par une constante on obtient encore une matrice élémentaire, plus généralement d'après KUPRADZE ([3] p. 180)

(5.33) $$M(x,y) = \mathrm{Im} \sum_{j=1}^{2} \begin{pmatrix} A'_j & B'_j \\ C'_j & D'_j \end{pmatrix} \mathrm{Log}\, \sigma_j + \dots$$

(5.36) $N(x;y,\vec{n}_y) = ||\vec{N}(\vec{e}_i,\vec{n}).\vec{x}_j||$ admet une singularité intégrable (si x,y appartiennent à une courbe de Liapounoff dont la définition est analogue à celle d'une surface de ce type).

En outre

$$T(y;x,\vec{n}_x) = ||\vec{T}_x\ (\vec{m}_i(x,y),\vec{n}_x).\vec{x}_j\ || \tag{5.37}$$

admet une singularité de même nature. ($\vec{m}_i$ vecteur colonne de M).

En posant

$$\vec{u}(x) = \frac{1}{\pi}\int_B N(x;y,\vec{n}_y)\ \vec{\varphi}(y)\ ds_y - \frac{1}{2\pi}\iint_{B_i} E(x,y)\ \vec{\psi}(y)\ dS_y \tag{5.38}$$

on peut résoudre le problème de Dirichlet relatif à B_e , (B est une courbe de Liapounoff; B_i est borné de frontière B).

En posant

$$\vec{u}(x) = \frac{1}{\pi}\int_B M(x,y)\vec{\varphi}(y)\ dS_y - \frac{1}{2\pi}\iint_{B_i} E(x,y)\ \vec{\psi}(y)\ dS_y \tag{5.39}$$

on peut résoudre le problème extérieur suivant

$$\vec{\Delta}\ \vec{u} + k^2\ \vec{u} = 0 \qquad \text{dans } B_e$$

$$\vec{T}(\vec{u},\vec{n}) = \vec{\gamma} \qquad \text{sur } B$$

Dans (5.38)et (5.39) , $\vec{\varphi}$ continue sur B , $\vec{\psi}$ continue dans $B_i \cup B$.

5.6-*Conditions de radiation*

Il résulte de l'étude faite par WILCOX ([4] p. 240 corollaire 5.4) que les conditions de radiation appropriées sont :

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C(R)} \left|\frac{\partial\vec{u}_j}{\partial r} - i(\vec{e}_r.\ \vec{k}_j(\vec{e}_r))\ \vec{u}_j\right|^2 dS = 0 \qquad (j = 1,2) \tag{5.40}$$

où l'on a supposé que les courbes $(\mathcal{S}_j)$ d'équations $K_j(\vec{e}_r) = 1$ ont une courbure positive et $\vec{K}_j\ (\vec{e}_r)$ est le vecteur $\overrightarrow{OS}_j$, S_j étant le point de $\mathcal{S}_j$ où la normale est parallèle à $\vec{e}_r$.

C(R) sera un cercle de centre arbitrairement fixé.

En outre, et toujours en vertu des résultats précédemment cités,(5.38) et (5.39) vérifient les conditions (5.40).

Malheureusement, on n'a pas encore établi de théorèmes d'unicité et de comportement asymptotique dont la preuve est fondamentale pour la méthode que l'on a en vue.

Aussi se limitera-t-on à l'étude du cas statique.

5.7-Enoncé du problème

Trouver $\vec{u}(x)$ vérifiant :

$$(5.41) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \vec{\Delta}^{*} \vec{u} = 0 & \text{dans} & B_e \\ \vec{T}_i(\vec{u},\vec{n}) = \vec{\gamma} & \text{sur} & B \\ \vec{u}(x) = 0\left(\frac{1}{r}\right) \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial r} = 0\left(\frac{1}{r^2}\right) & \text{quand} & r = |x| \to \infty \end{array} \right.$$

si $\displaystyle\int_B \vec{\Phi}(y)\, dS_y = \vec{0} = \iint_{B_i} \vec{\psi}\,(y)\, dS_y$

On recherche $\vec{u}$ sous la forme (5.39) (où $M = M^o$, $E = E^o$) et l'on exprime

(i) $\quad T_e(\vec{u},\vec{n}) = \vec{\gamma}$ sur B

(ii) $\quad \overset{*}{\Delta}\, \vec{u} + i\, g\, \vec{u} = 0$ dans B_e , $g > 0$ dans B_i , nulle sur B

ceci équivaut au système intégral

$$(5.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Phi}\,(x_o) + \frac{1}{\pi} \displaystyle\int_B T(y;x_o,\vec{n}_o)\, \vec{\Phi}(y)\, dS_y - \frac{1}{2\pi} \iint_{B_i} \| \vec{T}_{x_o}(\vec{e}_i;\vec{n}_o).\vec{x}_j \| \vec{\psi}(y) dS_y = \vec{\gamma} \\ \vec{\psi}\,(x) + \frac{ig(x)}{\pi} \displaystyle\int_B M^o(x,y)\, \vec{\Phi}\,(y)\, dS_y - \frac{ig(x)}{2\pi} \iint_{B_i} \| \vec{T}_x(\vec{e}_i,\vec{n}).\vec{x}_j \| \vec{\psi}\,(y)\, dS_y = 0 \\ \displaystyle\int_B \vec{\Phi}\,(y)\, dS_y = 0 = \iint_{B_i} \vec{\psi}\,(y)\, dS_y\, . \end{array} \right.$$

Compte tenu des singularités de $T(y;x_o,\vec{n}_o)$ et $M^o(x,y)$ on voit que la théorie des opérateurs complètement continus dans les espaces de Banach s'applique de la même manière que précédemment, le seul résultat à établir étant, en définitive, le

Lemme

Le système homogène(5.42) n'admet que la solution nulle.

Compte tenu des conditions à l'infini, le fait d'imposer $\vec{T}_e(\vec{u},\vec{n}) = \vec{0}$ sur B entraîne, en vertu de

$$\iint_{B_e} \vec{u}.\ \Delta^{*}\ \vec{\bar{u}}\ d\Sigma = \int_{B} \vec{u}.\vec{T}_e(\vec{\bar{u}}.\vec{n})\ dS - \iint_{B_e} \vec{W}(\vec{u},\vec{\bar{u}})\ d\Sigma$$

$$\vec{W}(\vec{u},\vec{\bar{u}}) = \sum A_{ij}\ \vec{u}_{,i}.\vec{\bar{u}}_{,j} = 0$$

ce qui entraîne $\vec{u} = \vec{c}$

et $\vec{c} = \vec{0}$ car $\vec{u} \to \vec{0}$ quand $r \to \infty$.

Alors, on a

$$\iint_{B_i} \vec{u}.\Delta^{*}\ \vec{\bar{u}}\ dS = \iint_{B_i} ig|\vec{u}|^2\ dS = -\iint_{B_i} W(\vec{u},\vec{\bar{u}})\ dS$$

d'où $\vec{u} \equiv \vec{0}$ dans B_i et par conséquent $\vec{\Phi}$ et $\vec{\psi} \equiv \vec{0}$.

CHAPITRE IV

THEOREMES D'EXISTENCE ET INTEGRALES SINGULIERES

1 - *PROBLEME DE LA DIFFRACTION PAR UN OBSTACLE BORNE, DE BORD LIBRE*

(en dimension 3)

1.1-*Enoncé du problème*

Trouver $\vec{w}$ de classe C^2 dans B_e , C^1 dans $B_e \cup B$ tel que ;

$$\overset{*}{\Delta}\,\vec{w} + k^2\,\vec{w} = 0 \qquad \text{dans } B_e$$

et telle que

a) $\vec{w} = \vec{u}_o + \vec{u}$ où $\vec{u}_o$ solution donnée de l'équation précédente et

$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ vérifie C.R.5

b) $\vec{T}(\vec{w},\vec{n}) = 2\mu\,\dfrac{d\vec{w}}{dn} + \lambda\,\vec{n}\,\operatorname{div}\vec{w} + \mu\,\vec{n}\wedge\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{w} = 0$ sur B .

1.2-*Equations intégrales du problème*

(B) est une surface de Liapounov d'indice $0 < \delta \leq 1$.

On cherche $\vec{u}$ sour la forme

(1.1) $$\vec{u}(P) = 2\iint_B E(PQ)\,\vec{\varphi}\,(Q)\,dS_Q$$

et l'on pose

(1.2) $$\mathcal{F}\,(P;Q,\vec{n}_o) = 2\,\left\|\vec{T}_p(\vec{e}_i(PQ),\vec{n}_o)\,\vec{x}_j\right\|$$

les conditions aux limites se traduisent par (cf. KUPRADZE [3] p.)

(1.3) $$\vec{\varphi}\,(Q_o) - \iint_B \mathcal{F}(Q_o;Q,\vec{n}_o)\,\vec{\varphi}\,(Q)\,dS_Q = \vec{\gamma}(Q_o)$$

qui est un système d'équations intégrales singulières.

En effet, on peut écrire

$$\mathcal{F}(Q_o;Q,\vec{n}_Q) = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_2$$

où $\mathcal{F}_k = (t_{ij}^{(k)})$ sont telles que :

$$(1.4)\qquad t_{ij}^{(1)} = \frac{\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\left(n_{oj}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r} - n_{oi}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}\right) = -\,t_{ji}^{(1)}$$

$$(1.5)\qquad t_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)}\left[\mu\delta_{ij} + 3(\lambda+\mu)\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right]\frac{\partial}{\partial n_o}\frac{1}{r} = t_{ji}^{(2)}$$

$\mathcal{F}_3$ a une singularité faible ainsi que $\mathcal{F}_2$ (cf. chapitre II), autrement dit $\mathcal{F}_1$ représente la partie singulière de l'équation intégrale (1.3) . Elle s'écrit

$$(1.6)\quad \vec{\varphi}\,(Q_o) - \frac{\mu}{2\pi(\lambda+2\mu)}\iint_B \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{n}_o}{r^2}\wedge\vec{\varphi}\,(Q)\,dS_Q \quad \text{où} \quad \vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{Q_oQ}}{r}\ ,\ r = Q_oQ$$

Si l'on écrit $\vec{\varphi} = \varphi_1\,\vec{t}_1 + \varphi_2\,\vec{t}_2 + \varphi_3\,\vec{n}_o$ où $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$ sont les vecteurs unitaires de deux axes issus de Q_o , situés dans le plan tangent en Q_o à B et tels que $Q_o\,t_1\,t_2\,n_o$ soit direct, on a

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{t}_1 + \sin\theta\,\vec{t}_2 + \frac{\partial r}{\partial n_o}\,\vec{n}_o$$

Dans ce système d'axes, (1.3) s'écrit

$$(1.7)\ \vec{\varphi}\,(Q_o) + \frac{\mu}{2\pi(\lambda+2\mu)}\iint_B \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{pmatrix}\frac{\vec{\varphi}(Q)}{r^2}\,dS_Q + \vec{L}_1(\vec{\varphi}) = \vec{\gamma}\,(Q_o)$$

où $\vec{L}_1$ est un opérateur intégral à singularité faible (c'est-à-dire sommable).

Or, à un opérateur singulier tel que (1.6) , MIKHLIN ([1] p. 71-72) associe la matrice symbolique

$$\Phi(Q_o;\theta) = I + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i\cos\theta \\ 0 & 0 & -i\sin\theta \\ i\cos\theta, & i\sin\theta, & 0 \end{pmatrix};$$

(d'où $\quad \det\Phi\,(Q_o,\theta) = 1 - \dfrac{\mu^2}{(\lambda+2\mu)^2} = \dfrac{(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)}{(\lambda+2\mu)^2} > 0$

$$= I + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\,\Psi\,(\theta) \qquad (\text{et}\ \ \det\Phi(Q_o,\theta) < 1)$$

Par ailleurs, il établit [1, p. 104-109] que si, dans un opérateur intégral singulier on effectue une transformation orthogonale sur les coordonnées, les variables du symbole subissent la même transformation et surtout, l'ensemble des valeurs prises par le symbole est invariant dans cette transformation.

Il en résulte donc

(i) que $\Delta = \text{Det}\ \Phi\ (Q_o,\theta)$ est tel que $0 < \Delta < 1$

(ii) que $\Phi\ (Q_o,\theta)$ est antisymétrique

d'où il déduit [1, p. 186-187] que le système est d'indice nul et, partant, qu'il est équivalent à opérateur intégral complètement continu (pour l'équation 1.3).

On obtient en le composant avec l'opérateur intégral singulier de symbole

$$\Phi^{-1}(Q,\theta) = \frac{(\lambda+2\mu)^2}{(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)} \left[I + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \begin{matrix} 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta\ , & -\sin\theta\ , & 0 \end{matrix} \right]$$

dont la partie singulière s'écrit (à un coefficient multiplicatif près :

$$\frac{(\lambda+2\mu)^2}{(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)}\ ^{*}$$

$$^{*}\ \vec{\psi}\ (Q_1) + \frac{\pi}{2\pi(\lambda+2\mu)} \iint_B \frac{(\vec{e}_r \wedge \vec{n}_{Q_o})}{r^2} \wedge \vec{\psi}(Q_1)\ dS_{Q_1} \quad (r = Q_1\ Q_o)$$

ou encore

$$(1.3)^{*} \quad \vec{\psi}\ (Q_o) + \iint_B \mathcal{F}\ (Q_o;Q,\vec{n}_Q)\ \vec{\psi}\ (Q)\ dS_Q + \ldots$$

(les opérateurs ajoutés ayant un indice nul).

Par conséquent les théorèmes de Fredholm s'appliquent à (1.3) *et* $(1.3)^{*}_{o}$ (car $\Phi^{-1}(Q,\theta)$ est un multiple de ${}^t\Phi(Q,\theta)$ matrice symbolique de l'opérateur adjoint).

Remarques

(i) Si l'on avait écrit (1.3) en introduisant un paramètre χ devant l'intégrale, on aurait obtenu des résultats analogues avec :

det $\Phi\ (Q_o,\theta) = 1 - \chi^2 \dfrac{\mu^2}{(\lambda+2\mu)^2}$ ce qui montre qu'il est > 0 pour $|\chi| < \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}$ ce qui donne un résultat de DUPRADZE [3, p. 98] (cf. aussi MIKHLIN [1],p.221-224).

(ii) Si l'on pose

(1.8)
$$\vec{v}(P) = \iint_B \mathcal{F}(P;Q,\vec{n}_Q)\ \vec{\psi}\ (Q)\ dS_Q$$

Le système $(1.3)^{*}_{o}$ signifie que

$$\Delta^{*}\ \vec{v} + k^2\ \vec{v} = \vec{0} \quad \text{dans } (B_i) \quad (\text{et } B_e)$$
$$\vec{v}_i(Q) = \vec{0} \quad \text{sur } B$$

Si $\vec{v}(P) \not\equiv \vec{0}$ dans B_i, il est de classe $C^{1,\delta}$ pour un δ, $0 < \delta \leq$ dans $B_i \cup B$ (MIRANDA 1 Chapit. II,Th. 15 VI)

L'expression $\vec{T}(v,n)$ a donc un sens sur B où elle est continue au sens de Hölder.

(iii) $(1.3)_o$ et $(1.3^{*})_o$ ont le même nombre (fini) de solutions linéairement indépendantes (sur C) et une c.n.s. d'existence de solutions pour (1.3) est

(1.9)
$$0 = \iint_B \vec{\gamma}(Q).\ \vec{\psi}(Q)\ dS_Q \quad \text{pour toute solution } \vec{\psi} \text{ de } (1.3)^{*}_{o}$$

1.3 - Théorème d'existence

On utilisera la formule de Betti

(1.10)
$$\iiint_B (\vec{u}.\vec{\Delta}^{*}\ \vec{v} - \vec{v}\ .\ \vec{\Delta}^{*}\ \vec{u})\ dV = \iint_{\partial B} (\vec{u}.\vec{T}\ (\vec{v},\vec{n}) - \vec{v}.\vec{T}(\vec{u},\vec{n})\ )\ dS$$

(B domaine borné de frontière régulière ∂B et de normale extérieure $\vec{n}$) ainsi que le théorème généralisé de Liapounov-Tauber (cf. KUPRADZE 3 p. 132-133 pour une élégante démonstration) :

Etant donné

$$\vec{v}(P) = \iint_B \vec{\mathcal{F}}(P;Q,\vec{n}_Q) \quad \vec{\psi}(Q)\ dS_Q$$

l'existence de l'une des limites : $\vec{T}_e(\vec{v},\vec{n})$ *ou* $\vec{T}_i(\vec{v},\vec{n})$ *continue au sens de Hölder sur* B *entraîne l'existence de l'autre et*

$$\vec{T}_e(\vec{v},\vec{n}) = \vec{T}_i(\vec{v},\vec{n})$$

D'après la remarque (ii) précédente ce théorème est valable pour (1.8) .

Ceci dit, on va procéder comme dans la 2ème preuve du théorème de Dirichlet (chapitre II) en étudiant les relations existant entre (Φ) et (Ψ) espaces vectoriels sur C des solutions de $(1.3)_o$ et $(1.3)_o^{*}$.

Si $\vec{\psi} \in \Psi$, on a, d'après (1.8) , $\vec{v}_i(Q) = 0$ sur B donc $\vec{v}_e(Q) = -2\,\vec{\psi}$.

Par ailleurs si on applique (1.10) avec $B \equiv B_i$, $\vec{v}$ et $\vec{e}_j(PQ)$ vecteur colonne de E(PQ) on obtient, compte tenu de $\vec{v}_i = \vec{0}$ sur B et si $P \in B_e$

$$\iint_B \vec{e}_j(PQ).\vec{T}_i(\vec{v},\vec{n})\ dS_Q = 0$$

soit

$$\iint_B E(PQ)\ \vec{T}_i(\vec{v},\vec{n})\ dS_Q = \vec{0}\ , \quad P \in B_e$$

Si l'on désigne par $\vec{W}(P)$ cette dernière intégrale, on a donc

$$\vec{W}(P) \equiv \vec{0} \quad \text{dans } B_e$$

donc

$$\vec{T}(\vec{W}(P),\vec{n}_o) \equiv \vec{0} \quad \text{dans } B_e$$

ce qui équivaut, en vertu des théorèmes d'unicité, à $\vec{T}_e(\vec{W},\vec{n}_o) = \vec{0}$ sur B .

Compte tenu de la forme de $\vec{W}(P)$ ceci implique

$\vec{T}(\vec{v}(Q),\vec{n}_Q) \in \Phi$ (valeur commune de $\vec{T}_e(\vec{v},\vec{n})$ et $\vec{T}_i(\vec{v},\vec{n})$).

Si l'on pose $\vec{T}(\vec{v},\vec{n}_Q) = M\,\vec{\psi}(Q)$ on définit ainsi une application linéaire M de Ψ dans Φ .

Lemme 1.1

L'application M *est bijective.*

Φ *et* Ψ *étant de même dimension finie, il suffit d'établir que* M *est injective à savoir que* $M\vec{\psi} = \vec{0}$ *entraîne* $\vec{\psi} = \vec{0}$.

En effet, $M\vec{\psi} = \vec{0}$ entraîne $\vec{v}(P) = \vec{0}$ dans B_e en vertu du théorème d'unicité pour le problème

$$\Delta^{*}\vec{v} + k^2\vec{v} = \vec{0} \quad \text{dans } B_e$$

$$\vec{T}(\vec{v},\vec{n}) = \vec{0} \quad \text{sur } B$$

$\vec{v}$ vérifie les conditions de radiation C.R.5 .

Or, $\vec{v}(P) \equiv \vec{0}$ dans B_e entraîne $\vec{v}_e(Q) = \vec{0}$ sur B donc $\vec{\psi}(Q) = \vec{0}$.

Lemme 1.2

Si $\vec{\bar{\psi}} \in \Phi \quad \vec{\bar{\varphi}} \in \Phi$

On applique l'identité (1.10) *à* $\vec{v}(P) = \iint \vec{\mathcal{F}}(P;Q,\vec{n})\,\vec{\psi}\;dS$ *(où* $\vec{\psi}$ *est telle que* $M\vec{\psi} = \vec{\bar{\varphi}}$ *) et aux vecteurs* $\vec{\bar{e}}_j(PQ)$ complexes conjugués des vecteurs colonnes de la matrice élémentaire E(PQ) en prenant B_i pour domaine et $P \in B_e$.

Pour k réel, $\vec{\bar{e}}_j(PQ)$ vérifie $\Delta^{*}\vec{u} + k^2\vec{u} = \vec{0}$ et comme pour la définition de M , on voit que

$$\vec{\mathcal{W}}(P) = \iint_B \bar{E}(PQ).\vec{T}(\vec{v},\vec{n})\;dS = \vec{0} \quad \text{dans } B_e$$

ceci entraîne

$$\vec{T}_e(W,\vec{n}) = \vec{0} \quad \text{sur } B \quad \text{soit } \vec{T}_e(\vec{\mathcal{W}},\vec{n}) = \vec{0} \quad \text{c'est-à-dire } \overline{M\vec{\psi}} = \vec{\bar{\varphi}} \in \Phi .$$

Lemme 1.3

Pour $\vec{\psi} \in (\Psi)$ *on a* $\mathrm{Im}\,(\vec{\psi},\overrightarrow{M\psi}) \geq 0$ *l'égalité n'ayant lieu que pour* $\vec{\psi} = \vec{0}$ *(où* $(\vec{\psi}_1,\vec{\psi}_2) = \iint \vec{\psi}_1.\vec{\psi}_2\;dS$).

Etant donné $\vec{\psi} \in \Psi$, si l'on applique à D_R $\vec{v}$ et $\bar{\vec{v}}$,

on obtient

$$\iint_B \left[\vec{v}_e(Q).\vec{T}(\bar{\vec{v}},\vec{n}) - \bar{\vec{v}}_e(Q).\vec{T}(\vec{v},\vec{n})\right] dS_Q$$

$$= \iint_{S(R)} \left[\vec{v}.\vec{T}(\bar{\vec{v}},\vec{e}_r) - \bar{\vec{v}}.\vec{T}(\vec{v},\vec{e}_r)\right] dS$$

dont le premier membre n'est autre que

$$(\vec{\psi},\overline{\vec{M\psi}}) - (\bar{\vec{\psi}},\vec{M\psi}) = 2i \text{ Im } (\vec{\psi},\overline{\vec{M\psi}}) .$$

Comme $\vec{v}(P)$ vérifie $\Delta^* \vec{v} + k^2 \vec{v} = 0$ dans (B_e) et C.R.6 on peut utiliser le théorème de développement (cf. 2e démonstration du chapitre II) pour montrer que le second membre admet, quand $R \to \infty$, une limite non négative, celle-ci n'étant nulle que si $\vec{v}(P) \equiv 0$ dans (B_e) ce qui entraîne bien $\vec{\psi} = 0$.

Soit alors $\{\vec{\psi}_i\}$ une base (Ψ) , $\{\vec{\varphi}_i = M \vec{\psi}_i\}$ la base correspondante de (Φ) .

La matrice d'éléments : $c_{ij} = (\vec{\psi}_i, M \vec{\psi}_j)$ est dite encore matrice de capacité. Une démonstration analogue à celle du chapitre II permet de voir que

<u>*Lemme 1.4*</u>

La matrice de capacité est symétrique

et que

<u>*Lemme 1.5*</u>

La matrice de capacité est non singulière.

Cette dernière propriété permet d'établir l'existence de solutions du problème initial.

En effet soit $\vec{\varphi}^*$ l'unique solution de (Φ) telle que

$$(\vec{\gamma} - \vec{\varphi}^*, \vec{\psi}) = 0 \qquad \forall \vec{\psi} \in (\Psi)$$

L'équation (1.3) de second membre $\vec{\gamma} - \vec{\varphi}^*$ admet des solutions $\vec{\mu}$ (Q). Soit alors $\vec{\psi}^*$ uniquement définie par

$$\vec{\boldsymbol{\psi}}^{*} = \overrightarrow{M\,\psi^{*}}.$$

Dans ces conditions

$$\vec{u}(P) = 2 \iint_B E(PQ)\, \vec{\mu}\,(Q)\, dS_Q + \iint_B \mathcal{F}(P,Q,\vec{n}_Q)\, \vec{\psi}^{*}(Q)\, dS_Q$$

représente la solution cherchée du problème.

On a ainsi établi le

<u>*Théorème d'existence*</u>

Il existe une et une seule solution de

$\vec{\Delta}^{*}\,\vec{u} + k^2\,\vec{u} = 0$ *dans* B_e *qui vérifie les conditions de radiation* C.R.6 *et telle que sur* (B)

$\vec{T}\,(\vec{u},\vec{n}) = \vec{\gamma}$ *où* $\vec{\gamma}$ *continue höldérienne sur* B *est donnée.*

<u>*Remarque*</u>

La même démonstration est valable pour la condition

$$\vec{T}(\vec{u},\vec{n}) + C(S)\,\vec{u} = \vec{\gamma} \quad \text{sur} \quad (B)\ .$$

1.4 - *Relation entre le champ diffracté et le paramètre* k .

On rappelle que, $\vec{\boldsymbol{\psi}}$ étant solution de (1.3), le champ élastique diffracté s'écrit

$$\vec{u} = 2 \iint_B E(PQ)\, \vec{\boldsymbol{\psi}}(Q)\, dS_Q$$

où

$$E = ||e_{j\ell}||\,; 4\pi\, k^2\, e_{j\ell}\,(PQ) = \sigma^2\, \delta_{j\ell}\, \frac{e^{i\sigma r}}{r} + \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}\left(\frac{e^{i\sigma r}}{r} - \frac{e^{i\tau r}}{r}\right)$$

$$= \sigma^2\, \delta_j \left[\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\sigma)^n}{n!}\, r^{n-1}\right]$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[(i\sigma)^n - (i\tau)^n\right] \frac{(n-1)}{n!}\, (\delta_{j\ell} + r_j\, r_\ell\, (n-3)\, r^{n-3}$$

$$= \left[\frac{\tau^2+\sigma^2}{2}\, \delta_{j\ell} + \frac{\sigma^2-\tau^2}{2}\, r_j\, r_\ell\right] \frac{1}{r} + 0_{j\ell}(k)$$

ce qui donne bien

$$(1.12) \qquad e_{j\ell}(PQ) = \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left[(\lambda+3\mu)\,\delta_{j\ell} + (\lambda+\mu)\, r_j\, r_\ell\right] \frac{1}{r} + O_{j\ell}(k)$$

où

$$O_{j\ell}(k) = \frac{\delta_{j\ell}}{4\pi\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\sigma)^n}{n!} r^{n-1} + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\sigma)^n-(i\tau)^n}{(n+2)!}(n+1)$$

$$\left[\delta_{j\ell} + r_j\, r_\ell\,(n-1)\right] \times r^{n-1} = \frac{1}{4\pi\mu} \sum_{n=1}^{\infty} k^n\, A_j^{(n)}(\vec{e}_r)\, r^{n-1} .$$

Si l'on écrit

$$e_{j\ell}(r) - e^{o}_{j\ell}(r) = O_{j\ell}(k)$$

on voit donc que cette différence dépend analytiquement de k et qu'elle est nulle pour $k = 0$.

Il en résulte que

$$\vec{u}(P,k) = 2 \iint_B E(PQ)\ \vec{\vartheta}(Q)\ dS_Q$$

$$= \vec{u}(P,0) + 2 \sum^{\infty} k^n \iint_B E^{(n)}(\vec{e}_r)\, r^{n-1}\, \vec{\vartheta}(Q)\ dS_Q$$

est aussi fonction analytique de k , les séries intervenant dans $E(PQ)$ étant uniformément convergentes et intégrables terme à terme $(\forall P, \forall Q \in B)$.

Par ailleurs, si l'on considère

$$2\mu \frac{d\vec{u}}{dn_o}(P,k) + \lambda\, \vec{n}_o\, \operatorname{div} \vec{u}(P,k) + \mu\, \vec{n}_o \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}}(P,k) = \iint_B \mathcal{T}(P;Q,\vec{n}_o)\ \vec{\vartheta}(Q)\ dS_Q$$

on a

$$\mathcal{T}(P,Q;\vec{n}_o) = ||t_{j\ell}|| \qquad \text{où}$$

$$t_{j\ell} = t^{o}_{j\ell} + t^{1}_{j\ell}$$

$$t^{o}_{j\ell} = \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)} \left[\mu\left(n_{o\ell} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} - n_{oj} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \frac{1}{r}\right) + (\mu\delta_{j\ell} + 3(\lambda+\mu)\, r_j\, r_\ell) \frac{\partial}{\partial n_o} \frac{1}{r}\right]$$

et

$$t^{(1)}_{j\ell} = O_{j\ell}(k)$$

En effet

$$2\pi\, t_{j\ell}\,(P;Q,\vec{n}_o) = 2\mu\,\frac{de_{j\ell}}{dn_o} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,n_{oj}\,\frac{\partial}{\partial x_\ell}\,\frac{e^{i\tau r}}{r} + n_{o\ell}\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{e^{i\sigma r}}{r} - \delta_{j\ell}\,\frac{\partial}{\partial n_o}\,\frac{e^{i\sigma r}}{r}$$

$$= 2\mu\,\frac{de^{o}_{j\ell}}{dn_o} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,n_{oj}\,\frac{\partial}{\partial x_\ell}\,(\frac{1}{r}) + n_{o\ell}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{1}{r} - \delta_{j\ell}\,\frac{\partial}{\partial n_o}\,\frac{1}{r}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} k^n\, B_j^{(n)}\,(\vec{e}_r,\vec{n}_o)\, r^{n-2}$$

où les $B_{j\ell}^{(n)}\,(\vec{e}_r,\vec{n}_o)$ sont bornés.

D'où l'on déduit comme précédemment que $t_{j\ell} - t^{o}_{j\ell}$ tend vers zéro avec k , pour P fixés dans B_e et Q arbitraire sur B .

Ayant écrit

$$\mathcal{F}\,(P;Q,\vec{n}_o;k) = \mathcal{F}^{o}\,(P;Q,\vec{n}_o,0) + \mathcal{F}^{1}\,(P;Q,\vec{n}_o,k)$$

on voit que $\vec{T}(\vec{u}(P,k),\vec{n}_o)$ défini par s'écrit

$$\vec{T}(\vec{u}\,(P,k),\vec{n}_o) = \vec{T}(\vec{u}\,(P,0),\vec{n}_o) + \vec{L}(\vec{u}(P,k),\vec{n}_o)$$

$$\vec{L}(\vec{u}\,(P,k),\vec{n}_o) = 2\sum_{n=1}^{\infty} k^n \iint_B B^{(n)}\,(\vec{e}_r,\vec{n}_o)\, r^{n-2}\,\vec{\psi}(Q)\,dS_Q$$

où $\iint_B B^{(n)}\,(\vec{e}_r,\vec{n}_o)\vec{\psi}\,dS$ est un opérateur linéaire complètement continu de $\mathcal{C}\,(B)$ dans lui-même et qui, en outre, tend vers zéro quand k tend vers zéro (ceci pour la norme des opérateurs linéaires continus) ceci pour tout $P \in B_e \cup B$.

On pourrait donc dire que, lorsque $k \to 0$

$$|\,\vec{T}(\vec{u}\,(P,k),\vec{n}_o) - \vec{T}(\vec{u}\,(P,0),\vec{n}_o\,|\longrightarrow 0 \qquad \forall\, P \in B_e \cup B$$

Ceci ne signifie pas que $\vec{u}(P,k)$ tend vers une solution de

$$\Delta^{*}\,\vec{v} = \vec{0} \qquad \text{dans } B_e$$

$$\vec{T}(\vec{v},\vec{n}) = -\,\vec{T}(\vec{v}_o,\vec{n}) \qquad \text{où } \vec{v}_o \text{ solution donnée}$$

car on a

$$\vec{T}(\vec{u}\,(Q_o,0),\vec{n}_o) = \vec{\gamma} \quad \text{avec} \quad \vec{\gamma}\,(Q_o) = -\,\vec{T}\,(\vec{u}_o(Q_o,\ ,\vec{n}_o) \quad \text{où}$$

$\vec{u}_o$ solution donnée de $\overset{*}{\Delta}\,\vec{u} + k^2\,\vec{u} = 0$

Par contre, si l'on considère les équations (1.3) pour des valeurs positives de k , on peut affirmer qu'elles sont uniquement résolubles pour $0 \leq k \leq k_1$ où k_1 est tel que k_1^2/μ soit la plus petite valeur propre positive du problème $(D_i)^o$ pour l'opérateur $\vec{\overset{*}{\Delta}}$ (cela résulte du théorème d'existence et du fait bien connu que : toute solution de classe C^2 dans B_i , de .

Si l'on écrit (1.3) sous la forme $(I + K_o)\,\vec{\psi}_k = \vec{\gamma} - K\,\psi_k$ où K est complètement continu et tend vers l'opérateur nul quand $k \to +0$, on voit que

$$(I + K_o)\,(\vec{\psi}_k - \vec{\psi}_o) \to 0 \quad \text{quand} \quad k \to +0 \quad \text{donc} \quad \vec{\psi}_k \to \vec{\psi}_o \ .$$

1.5 -*Retour sur le problème de DIRICHLET* (chapitre II)

De la section précédente, il résulte que

$$(1.13) \qquad 4\pi(e_{j\ell}(k) - e_{j\ell}(k_o)) = \frac{1}{\mu}\,\delta_{j\ell}\Big(\frac{e^{i\sigma r}}{r} - \frac{e^{i\sigma_o r}}{}\Big) + \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_\ell}\Big(\frac{e^{i\sigma_o r} - e^{i\sigma_o r}}{k^2\,r} - \frac{e^{i\tau r} - e^{i\tau_o r}}{k^2\,r}\Big)$$

où $(\lambda+2\mu)\,\tau_o^2 = k_o^2 = \sigma_o^2\,\mu$

On a vu que $E(PQ;k)$ était, en tant que fonction de K , analytique pour $k = 0$. Si $k_o \neq 0$, et en remarquant que :

$$\sigma - \sigma_o = \sqrt{\frac{1}{\mu}}\,(k-k_o) \ , \quad \tau - \tau_o = \frac{1}{\sqrt{\lambda+2\mu}}\,(k - k_o)$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k_o^2}\cdot\frac{1}{(1+\frac{k-k_o}{k_o})} = \frac{1}{k_o^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{(k-k_o)^{b-1}}{k_o^{n-1}}\,(-1)^{n-1} \qquad \text{pour } |k-k_o|<|k_o|$$

$$\frac{e^{i\sigma r}}{r} - \frac{e^{i\sigma_o r}}{r} = e^{i\sigma_o r} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(\sigma-\sigma_o)}{n!} r^{n-1}$$

s'écrit

$$\delta_{j\ell} \frac{e^{i\sigma_o r}}{r} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left(\frac{1}{-}\right)^{\frac{n}{2}} r^{n-1} (k-k_o)^n\right] + \frac{1}{k_o^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \, \partial x_\ell} \left[\left(\frac{e^{i(\sigma-\sigma_o)r}}{k^2} k_o^2 - 1\right) \frac{e^{i\sigma_o r}}{k^2}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{e^{i(r-r_o)}}{k^2} k_o^2 - 1\right) \frac{e^{ir_o r}}{k_o^2 r}\right]$$

et, pour $|k - k_o| < |k_o|$, on voit que les séries dérivées par rapport à x_j , x sont de la forme $\sum_1^{\infty} a_n \, r^{n-2} \, (k-k_o)^n$.

Par ailleurs, $O_{j\ell}(k)$ étant une série entière en K , elle est développable en série autour de tout point intérieur à son cercle de convergence et l'on a

$$O_{j\ell}(k) = O_{j\ell}(k_o) + \sum_1^{\infty} a_n (k-k_o)^n$$

ce qui établit le résultat précédent pour tout k_o intérieur au cercle de convergence.

On en déduit

$$E(P;Q,k) = E(P;Q,k_o) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(PQ) \, (k-k_o)^n \tag{1.14}$$

$$\text{et} \quad N(P;Q,\vec{n}_Q,k) = N(P;Q,\vec{n}_Q,k_o) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(PQ) \, (k-k_o)^n \, . \tag{1.15}$$

En particulier, au voisinage de $k = 0$, on a

$$E(P;Q,k) = E(P,Q;0) + \sum_{n=1}^{\infty} E^{(n)} \, (\vec{e}_r) \, r^{n-1} \, k^n \tag{1.16}$$

$$N(P;Q,\vec{n}_Q;k) = N(P,Q,\vec{n}_Q;0) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \, B_n \, (\vec{e}_r,\vec{n}_o) \, r^{n-2} \tag{1.17}$$

Dans le théorème d'existence, on avait posé :

$$\vec{u}(P) = \iint_B N(P;Q,\vec{n}_Q) \; \vec{\varphi}(Q) \, dS_Q - \iiint_{B_i} E(PQ) \; \vec{\psi}(Q) \, dV_Q \tag{1.18}$$

Les séries (1.16) , (1.17) convergent uniformément pour $P \neq Q$ dans les domaines correspondants B , B_i ou B_e ($P \neq Q$ étant nécessaire pour les termes en $\frac{1}{r}$ de (1.17).

On peut écrire (1.18) sous la forme

$$(1.19)\quad \vec{u}(P,k) = \iint_B N^o(P,Q,\vec{n}_Q)\ \vec{\vartheta}(Q)\ dS_Q - \iiint_{B_i} E^o(PQ)\ \vec{\psi}(Q)\ dV_Q$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[\iint_B B_n(\vec{e}_r,\vec{n})\ r^{n-2}\ \vec{\vartheta}(Q)\ dS_Q - \iiint_{B_i} E^{(n)}(\vec{e}_r)\ r^{n-1}\ \vec{\psi}(Q)dV_Q \right]$$

les séries convergeant absolument et uniformément.

Il en résulte que le système intégral qui traduisait

$$\vec{u}_\ell = \vec{\gamma} \qquad \text{sur} \quad B$$

$$\Delta^* \vec{u} + (k^2 + i\ \varepsilon\ g)\ \vec{u} = \vec{0} \qquad \text{dans} \quad B_i$$

et que l'on avait écrit

$$(I + K^{(k)})\ (\vec{\vartheta},\vec{\psi}) = (\vec{\gamma},0)$$

avec $K^{(k)} = ||K_{ij}^{(k)}||$ est tel que, par exemple

$$(1.20)\qquad K_{11}^{(k)}\ \vec{\vartheta}(Q) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n\ C_n^{11}\ \vec{\vartheta}\ (Q) \qquad Q \in B$$

où $C_o^{11} = K_{11}^o$, C_n^{11} désignent des opérateurs intégraux à noyaux sommables ($n = 0$, $n = 1$) et continus ($n > 1$) appliquant B_1 dans lui-même.

(1.20) ayant lieu uniformément sur B , on a donc

$$K_{11}^{(k)}\ \vec{\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n\ C_{11}^n\ \vec{\vartheta} \qquad \text{dans } B_1 \quad .$$

Pour des raisons identiques

$$K_{11}^{(k)}\ \vec{\vartheta} = K_{11}^{(k_o)}\ \vec{\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{11}\ \vec{\vartheta}\ .(k-k_o)^n$$

Il en résulte que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon)$ tel que $n > m > N(\varepsilon)$ entraîne

$$(1.21) \qquad \left| \sum_{m}^{n} k^p \, C_p^{11} \, \vec{\varphi}(Q) \right| \leqslant \varepsilon \sup_{Q \in B} |\vec{\varphi}(Q)|$$

c'est-à-dire

$$\left\| \sum_{m}^{n} k^p \, C_p^{11} \, \vec{\varphi} \right\|_1 \leqslant \varepsilon \, \|\vec{\varphi}\|$$

autrement dit, la série(1.20)converge au sens de la norme

$$\|K\|_{11} = \sup \frac{\|K\vec{\varphi}\|_1}{\|\vec{\varphi}\|_1}$$

Il en est de même (en remplaçant éventuellement B_1 par B_2) des séries relatives aux autres opérateurs k_{ij} et par conséquent pour K (dans $B = B_1 \times B_2$) .

Il faut remarquer que (1.21) ne provient pas immédiatement de la convergence uniforme de (1.15) ; elle en est conséquence pour l'ensemble des $P,Q \in B$ tels que $r = PQ \geqslant \delta$ (P fixé), d'où (1.21) en intégrant terme à terme sur cette partie de (B) puis en faisant tendre δ vers zéro.

On peut ensuite voir que

$$I + K^{(k)}$$

existe (ceci résulte de la première alternative de Fredholm démontrée lors de la 3ème démonstration du chapitre précédent) et il est continu puisque $K^{(k)}$ est complètement continu.

Comme on peut écrire localement

$$(I+K^{(k)})^{-1} = \sum (-1)^n \left[(I+K^{(k_o)})^{-1} (K^{(k)} - K^{(k_o)})\right]^n (I+K^{(k_o)})^{-1}$$

qui converge uniformément pour $|k - k_o| \leqslant \rho\,(k_o)$ et que chacun des termes de cette série dépend analytiquement de k , on voit qu'il en est de même $(I + K^{(k)})^{-1}$ et par conséquent de

$$(\vec{\varphi}_k \, , \, \vec{\psi}_k) = (I + K^{(k)})^{-1} \, (\vec{\gamma},0)$$

d'où il résulte que

$\vec{u}_k$ construit à partir de $\vec{\varphi}_k$ et $\vec{\psi}_k$ dépend analytiquement de k , au moins dans un voisinage de $k = 0$.

En particulier pour $k = 0$, le système intégral signifie que $\vec{u}(P,0)$ vérifie

$$\vec{\Delta}^{*}\ \vec{u} = \vec{0} \qquad \text{dans } B_e$$

$$(\vec{\Delta}^{*} + ig)\ \vec{u} = \vec{0} \quad \text{dans } B_i$$

$$\vec{u}|_e = \vec{\gamma} \qquad \text{sur } B$$

et la représentation intégrale entraîne $\vec{u} = 0\ (\frac{1}{R^2})$ et $\frac{\partial \vec{u}}{\partial r} = 0(R^{-2})$ quand $R \to \infty$, (ce qui est dans le cas statique l'équivalent des conditions de radiation).

Si $\vec{\gamma} = \vec{0}$, les conditions à l'infini entraînent donc $\vec{u} \equiv \vec{0}$, c'est classique.

On a donc $\vec{T}_e(\vec{u},\vec{n}) = \vec{0} = \vec{T}_i(\vec{u},\vec{n})$ en vertu de la continuité des dérivées premières de $\iiint_{B_i} E^o(PQ)\ \vec{\psi}(Q)\ dV_Q$ et du théorème généralisé de Liapounov-Tauber. On a donc

$$\iiint_{B_i} \bar{\vec{u}}.\vec{\Delta}^{*}\vec{u}\ dV = - \iiint_{B_i} ig\ \ |\vec{u}|^2\ dV$$

$$= - \iiint_{B_i} W(\vec{u},\bar{\vec{u}})\ dV$$

d'où $\iiint g|\vec{u}|^2\ dV = 0$ et $\vec{u} \equiv \vec{0}$ dans B_i ce qui entraîne $\vec{\psi} = \vec{0}$, $\vec{\varphi} = \vec{0}$, ceci entraîne alors que $(\vec{\varphi}_k, \vec{\psi}_k) \to (\vec{\varphi}_o,\vec{\psi}_o)$ quand $k \longrightarrow 0$ et $\vec{u}(P,k) \longrightarrow \vec{u}(P,0)$.

2 - PROBLEMES PLANS

2.1-Solution élémentaire

On recherche une matrice 2×2 , $E(P,Q)$ dont les vecteurs colonnes vérifient

(2.0) $$(\vec{\Delta}^{*} + k^2\ I)\ \vec{e}_i(PQ) = \delta(Q)\ \vec{x}_i \qquad i = 1,2$$

Comme, dans le cas plan

$$-\delta\ (Q)\ \vec{x}_i = \Delta_p\ \left(\frac{1}{2\pi} \text{Log} \frac{1}{r} .\vec{x}_i\right) = (\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div} - \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}})_p\ \left(\frac{1}{2\pi} \quad \frac{1}{r} \vec{x}_i\right) \quad (i = 1,2)$$

on voit comme dans le cas tridimensionnel que les vecteurs colonnes de sont de la forme

$$\vec{e}_i = \overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi_i + \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\psi}_i \qquad i = 1,2$$

φ_i, $\vec{\psi}_i$ doivent donc vérifier

$$(\lambda+2\mu)\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \left(\Delta\varphi_1 + \tau^2\ \varphi_1 - \frac{1}{2\pi}\ \frac{\tau^2}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial x}\ \left(\frac{1}{r}\right)\right) + \mu\ \text{rot rot}\ \left(\Delta\vec{\psi}_1\ \sigma^2\vec{\psi}_1 - \frac{1}{2\pi}\ \frac{\sigma^2}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \text{Log}\ \frac{1}{r}\ \vec{z}\right) = 0$$

$$(\lambda+2\mu)\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \left(\Delta\varphi + \tau^2\ \varphi_2 - \frac{1}{2\pi}\ \frac{\tau^2}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \text{Log}\ \frac{1}{r}\right) + \mu\ \text{rot rot}\ \left(\Delta\vec{\psi}_2 + \sigma^2\vec{\psi}_2 + \frac{1}{2\pi}\ \frac{\sigma^2}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial x}\ \text{Log}\ \frac{1}{r}\ \vec{z}\right) = 0$$

dont les solutions particulières sont

$$\varphi_1(PQ) = \frac{1}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial x}\ \left[-G_1(\tau r) + \frac{1}{2\pi}\ \text{Log}\ \frac{1}{r}\right];\ \vec{\psi}_1 = \frac{\vec{z}}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \left[-G_2(\sigma r) + \frac{1}{2\pi}\ \text{Log}\ \frac{1}{r}\ \right]$$

$$\varphi_2(PQ) = \frac{1}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \left[-G_1(\tau r) + \frac{1}{2\pi}\ \text{Log}\ \frac{1}{r}\right];\ \vec{\psi}_2 = \frac{\vec{z}}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial x}\ \left[\ G_2(\sigma r) - \frac{1}{2\pi}\ \text{Log}\ \frac{1}{r}\ \right]$$

On en déduit, compte tenu de $\Delta\ G_1 + \tau^2\ G_1 = \Delta\ G_2 + \sigma^2\ G_2 = -\delta = \Delta_p\ \left(\frac{1}{2\pi}\ L\ \frac{1}{r}\ \right)$

et $\vec{e}_i(PQ) = \vec{x}\ \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\ (\vec{\psi}_i.\vec{z})\ \right) + \vec{y}\ \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\ (\vec{\psi}_i.\vec{z})\ \right)$

$(G_1(\tau r) = \frac{i}{4}\ H_o^{(1)}\ (\tau r)\ )$,

$$(2.1) \qquad E(P,Q) = \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} \sigma^2\ G_2(\sigma r) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ (G_2 - G_1)\ , & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ (G_2 - G_1) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ (G_2 - G_1) & ,\ \sigma^2\ G_2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ (G_2 - G_1) \end{pmatrix}$$

Remarque

On a, au sens ordinaire

$$\vec{e}_1 = -\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ (G_1\ \vec{x}) + \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ (G_2\ \vec{x})$$

$$\vec{e}_2 = -\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ (G_1\ \vec{y}) + \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ (G_2\ \vec{y})$$

qui vérifient pour $P \neq Q$

$$\Delta^* \vec{e}_i + k^2 \vec{e}_i = \vec{0} \qquad \text{(par rapport à } P \text{ et } Q)$$

2.2-*Singularité de* E(PQ)

Compte tenu des développements en série de $G_1(\tau r)$, $G_2(\sigma r)$ et de

$$\frac{d^2G_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dG_1}{dr} + \tau^2 G_1 = 0 = \frac{d^2G_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dG_2}{dr} + \sigma^2 G_2 \quad \text{on obtient}$$

(2.2) $$E(PQ) = E^{O}(PQ) + H(PQ)$$

où

(2.3) $$E^{O}(PQ) = \frac{1}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} \begin{pmatrix} (\lambda+3\mu)\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{r} + (\lambda+\mu)r_1^2 & , (\lambda+\mu)\, r_1 r_2 \\ (\lambda+\mu)\, r_1\, r_2 & , (\lambda+3\mu)\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{r} + (\lambda+\mu) r_2^2 \end{pmatrix}$$

où $\quad r_1 = \dfrac{\partial r}{\partial x_1} \quad , \quad r_2 = \dfrac{\partial r}{\partial x_2}$

et

(2.4) $$H(PQ) = \alpha\, I_2 + r^2\, G(r)$$

où α est une constante et les termes de $G(r)$ sont $O(\mathrm{Log}\ r)$ quand $r \to 0$.

Remarque

$E^{O}(PQ)$ est une solution élémentaire correspondant à $k = 0$.

2.3 - *Potentiels liés à* E(PQ)

a) On suppose que (B) est une courbe fermée, bornée de classe $C^{1,\alpha}$ ce qui entraîne un certain nombre de propriétés (cf. MUSHKHELISHVILI 1 p. 9-10).

b) On définit le potentiel de sympte couche

(2.5) $$\vec{U}(P) = \int_B E(PQ)\, \vec{\varphi}(Q)\, dS_Q$$

On peut établir

(2.6) $$\vec{U}_i(Q_o) = \vec{U}_e(Q_o) = \int_B E(Q_oQ)\, \vec{\varphi}(Q)\, dS_Q$$

$\vec{U}$ étant continu dans B_i et B_e si $\vec{\varphi}$ est bornée et intégrable (en particulier si $\vec{\varphi}$ est continue au sens de HOLDER sur B).

En outre, comme $E(PQ)\ \vec{\varphi}(Q) = (-\overrightarrow{\text{grad}}\ \overrightarrow{\text{div}}_p\ (G_1\ \vec{\varphi}) + \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}_p (G_2\ \vec{\varphi}\ )$, les dérivées étant prises en P :

a) $\vec{U}(P)$ vérifie $\vec{\ddot{\Delta}}\ \vec{U} + k^2\ \vec{U} = \vec{0}$ dans B_i et B_e

b) $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$ où $\vec{U}_1 = - \int_B \text{grad div}_p(G_1\ \vec{\varphi})\ dS\ \ldots$

$$\text{et} \lim_{R\to\infty} \int_{C(R)} |\vec{e}_r \text{ div } \vec{U}_1 - i\,\tau\, \vec{U}_1|^2\, dS = 0 = \lim_{R\to\infty} \int_{C(R)} |\ \vec{e}_r \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{U}_2 + i\,\sigma\,\vec{U}_2|^2\, dS$$

En effet

$$\vec{e}_r\ \text{div}_p\ \vec{U}_1 - i\,\tau\ \vec{U}_1 = - \vec{e}_r \int_B \Delta_p\ \text{div}_p(G_1\ \vec{\varphi})ds - i\,\tau\ \vec{U}_1$$

$$= \int_B \left[\tau^2\ \vec{e}_r\ \text{div}_p(G_1\ \vec{\varphi}) + i\,\tau\ \text{grad div}\ (G_1\ \vec{\varphi})\right] dS$$

$$= \int_B \left[i\,\tau\,\vec{e}_r\ (\text{div}\ (\frac{\partial G_1}{\partial r} - i\,\tau\,G_1)\ \vec{\varphi}) + i\,\tau \frac{1}{R}\,\vec{e}_\theta\ \ \frac{\partial}{\partial\theta}\ (\text{div}\ \overline{G}_1\ \vec{\varphi})\right] dS$$

d'où l'on déduit aisément, compte tenu du comportement asymptotique de $G_1(\tau R)$, la condition de radiation pour $\vec{U}_1$. Une démonstration analogue vaut pour $\vec{U}_2$.

c) Dans l'étude du problème de la diffraction par l'obstacle B_i de bord libre B , où l'on cherche $\vec{u}$ sous la forme (2.5) on sera amené à évaluer

$$\vec{T}_e(\vec{u},\vec{n}_o) = 2\mu\ (\frac{d\vec{u}}{dn_o}\ )_e + \lambda\ \vec{n}_o(\text{div}\ \vec{u}_1)_e + \mu\ \vec{n}_o \wedge (\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_2)_e$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\substack{P\to Q_o \\ P\in B_e}} \int_B \mathcal{F}_p\ (Q;P,\vec{n}_o)\ \vec{\varphi}\ (Q)\ dS_Q$$

(l'indice P signifiant que l'on prend les dérivées en P).

On peut calculer les termes t_{ij} de $\mathcal{F}\ (Q;P,\vec{n}_o)$ en faisant apparaître leur partie singulière (pour $r = 0$).

$$t_{11} = n_1 D_1 G_1 + n_2 D_2 G_2 - \frac{2}{\sigma^2} d_{S_o} (D_1 D_2 (G_2 - G_1))$$

$$= \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)} \left[\mu + 2(\lambda+\mu) r_1^2\right] \frac{\partial}{\partial n_o} \mathrm{Log} \frac{1}{r} + r\, O\,(\mathrm{Log}\, r) \text{ quand } r \to 0$$

$$t_{12} = \frac{2}{\sigma^2} D_{r_o} D_1 D_2 (G_2 - G_1) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} n_1 D_2 G_1 + n_2 D_1 G_2$$

$$= \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)} \left[-\mu \frac{\partial}{\partial S_o} \mathrm{Log} \frac{1}{r} + 2(\lambda+\mu) r_1 r_2 \frac{\partial}{\partial n_o} \mathrm{Log} \frac{1}{r}\right] + r\, O\,(\mathrm{Log}\, r)$$

$$\text{(2.7)} \quad t_{21} = \frac{2}{\sigma^2} D_{n_o} D_1 D_2 (G_2 - G_1) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} n_2 D_1 G_1 + n_1 D_2 G_2$$

$$= \frac{1}{2\mu(\lambda+2\mu)} \left[\mu \frac{\partial}{\partial S_o} \mathrm{Log} \frac{1}{r} + 2(\lambda+\mu) r_1 r_2 \frac{\partial}{\partial n_o} \mathrm{Log} \frac{1}{r}\right] + r\, O\,(\mathrm{Log}\, r)$$

$$t_{22} = \frac{2}{\sigma^2} D_{S_o} D_1 D_2 (G_2 - G_1) + n_1 D_1 G_2 + n_2 D_2 G_1$$

$$= \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)} \left[\mu + 2(\lambda+\mu) r_2^2\right] \frac{\partial}{\partial n_o} \mathrm{Log} \frac{1}{r} + r\, O\,(\mathrm{Log}\, r)$$

où $D_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $n_o = n_1 \vec{x}_1 + n_2 \vec{y}$, $D_{n_o} = n_1 D_1 + n_2 D_2$, $D_{S_o} = n_1 D_2 - n_2 D_1$

d) Par contre dans le cas où (B) est encastré on sera amené à considérer

$$\text{(2.8)} \qquad \vec{V}(P) = \int_B {}^t\mathcal{F}(Q;P,\vec{n}_Q)\ \vec{\psi}(Q)\ dS_Q$$

où la matrice considérée est la transposée de $\mathcal{F}(P;Q,\vec{n}_o)$, les dérivées étant prises en Q , $\vec{n}$ la normale en Q à (B) .

Et l'on voit assez facilement que (2.8) vérifie le système (2.0) dans B_i et B_e et les conditions de radiation.

En effet, si (θ_{ij}) désignant les éléments de ${}^t\mathcal{F}(Q;P,\vec{n}_Q)$, on a

$$\theta_{ij} = \vec{T}\,(\vec{e}_i,\vec{n}).\vec{x}_j \qquad (i,j = 1,2)$$

$$\theta_{ij} = \vec{T}(\vec{e}_i,\vec{n}).\vec{x}_j \qquad (i,j = 1,2)$$

et $$\vec{V}(P) = \int_B \left[(\vec{T}_Q(\vec{e}_1,\vec{n}).\vec{\psi})\ \vec{x} + (\vec{T}_Q(\vec{e}_2,\vec{n}).\vec{\psi})\ \vec{y}\ \right] dS_Q$$

formules qui permettent les vérifications.

e) Compte tenu de (2.7) qui donne la partie singulière de $\mathcal{F}(P;Q,\vec{n}_o)$ (et portant celle de ${}^t\mathcal{F}(Q;P,\vec{n}_Q)$ on obtient aisément

$$(2.9)\quad \begin{cases} \vec{T}(\vec{U},\vec{n}_o)_i = \frac{1}{2}\ \vec{\Phi}(Q_o) + \int_B \mathcal{F}(Q_o;Q,\vec{n}_o)\ \vec{\Phi}(Q)\ dS_Q \\ \vec{T}(\vec{U},\vec{n}_o)_e = -\frac{1}{2}\ \vec{\Phi}(Q_o) + \int_B \mathcal{F}(Q_o;Q,\vec{n}_o)\ \vec{\Phi}(Q)\ dS_Q \\ \vec{V}_i(Q_o) = -\frac{1}{2}\ \vec{\psi}(Q_o) + \int_B {}^t\mathcal{F}(Q;Q_o,\vec{n}_Q)\ \vec{\psi}(Q)\ dS_Q \\ \vec{V}_e(Q_o) = \vec{\psi}(Q_o)\ \vec{V}_i(Q_o) \end{cases}$$

En outre, on peut établir que si l'une des limites $\vec{T}_i(\vec{V},\vec{n})$ ou $\vec{T}_e(\vec{V},\vec{n})$ existe et si elle est continue au sens de HÖLDER sur B pour un potentiel $\vec{V}(P)$ donné par (2.8), il en est de même de l'autre et ces deux limites sont égales.

f) On aura aussi à étudier

$$(2.10)\qquad \vec{W}(P) = \iint_{B_i} E(PQ)\ \vec{\Phi}(Q)\ dS_Q$$

qui pour $\vec{\Phi}$ continue hölderienne dans B_i, y vérifie l'équation

$$(2.11)\qquad \vec{\Delta}^{*}\ \vec{W} + k^2\ \vec{W} = \vec{\Phi}\ (P)$$

et, en outre, est de classe $C^{1,\alpha}$ dans tout l'espace et de classe $C^{2,\alpha}$ dans B_i.

2.4-Théorème d'existence dans le cas d'un obstacle encastré

On va rechercher $\vec{u}$ sous la forme

(2.12) $$\vec{u}(P) = \int_B {}^t\mathcal{F}(Q;P,\vec{n}_Q)\ \vec{\varphi}\ (Q)\ dS_Q + \iint_{B_i} E(PQ)\ \vec{\psi}\ (Q)\ dS_Q$$

où $\vec{\varphi} \in C^\alpha$ (B) $0 < \alpha \leqslant 1$ et $\vec{\psi} \in C^\alpha$ (B_i) et admet un prolongement continu à $B_i \cup B$.

Comme dans le problème tridimensionnel analogue on va lui imposer

(2.13) $$\vec{u}_e(Q_o) = \vec{\gamma}\ (Q_o) \qquad \text{sur}\ B$$

(2.14) $$\vec{\Delta}^{*}\ \vec{u} + (k^2 + i\ \varepsilon\ g(P)\ )\ \vec{u} = 0 \qquad \text{dans}\ B_i$$

où $\varepsilon = +1$ si $\operatorname{Re} k \geqslant 0$, $\varepsilon = -1$ si $\operatorname{Re} k < 0$ et $g(P) \in C^\beta$ (B_i) $(0 < \beta \leqslant 1)$, $g(P) > 0$ dans B_i et $g(P) = 0$ sur B .

a) Réduction à un système d'équations intégrales.

Compte tenu de (2.9) et (2.11)et des propriétés de (2.10) on obtient, en traduisant (2.13) et (2.14)

(2.15)
$$Q_o \in B \quad (a)\quad \vec{\varphi}\ (Q_o) + 2\int_B \mathcal{F}(Q;Q_o,\vec{n}_Q)\ \vec{\varphi}(Q)\ dS_Q + 2\iint_{B_i} E(Q_oQ)\ \vec{\psi}(Q)\ dS_Q = 2\vec{\gamma}\ (Q_o)$$

$$P \in B_i \quad (b)\quad \vec{\psi}\ (P) + i\ \varepsilon\ g(P)\left[\int_B {}^t\mathcal{F}\ (Q;P,\vec{n})\ \vec{\varphi}\ (Q)\ dS_Q + \iint_{B_i} E(PQ)\ \vec{\psi}(Q)\ dS_Q\right] = 0$$

où, dans(2.15a) la première intégrale est une valeur principale au sens de CAUCHY.

Il s'ensuit, en corollaire, que

(2.16) $$\vec{\varphi} = \vec{u}_e - \vec{u}_i \qquad \text{sur}\ B$$

(2.17) $$\vec{\psi} = (\vec{\Delta}^{*} + k^2)\ \vec{u} \qquad \text{dans}\ B_i$$

b) Etude du système intégral (2.15) .

On va montrer que le système (2.15) a une solution et une seule $(\vec{\varphi},\vec{\psi})$ pour tout $\vec{\gamma}$ continu au sens de HÖLDER sur B et pour tout k tel que $\operatorname{Im} k \geqslant 0$.

La méthode sera celle des opérateurs linéaires complètement continus dans les espaces de Banach.

On utilisera les espaces de Banach suivants :

(1) l'espace B_1^α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ des champs de vecteurs $\vec{\varphi}\,(Q)$ continus au sens de Hölder, de constante α, sur B muni de la norme

$$||\vec{\varphi}||_1^\alpha = ||\vec{\varphi}||_1 + \sup_{Q,Q'\in B} \frac{|\vec{\varphi}(Q)-\vec{\varphi}(Q')|}{(QQ')^\alpha}$$

(2) l'espace B_2 des champs de vecteurs $\vec{\psi}$ continus au sens de Hölder dans B_i et admettant un prolongement continu ψ_1 à $B_i \cup B$ muni de la norme

$$||\vec{\psi}|| = \sup_{Q\in B_i \cup B} |\vec{\psi}_1(Q)|$$

(3) l'espace B_1 des champs de vecteurs $\vec{\varphi}'$ continus sur B, pour la norme

$$||\vec{\varphi}'||_1$$

On peut montrer que

$K_{12} : \vec{\psi} \to 2 \iint E(Q_oQ)\, \vec{\psi}\,(P)\, dS_Q$ est un opérateur complètement continu de B_2 dans B_1 . En effet l'hypothèse sur $\vec{\psi}$ entraîne que le potentiel $K_{12}\ \vec{\psi}$ est de classe $C^{1,\alpha}$ dans tout le plan ce qui entraîne pour $||K_{12}\ \vec{\psi}||_1^\alpha$ d'être borné. La complète continuité résulte de ce que, si l'on prend une famille bornée $\{\vec{\psi}\}$ dans B_2 , l'ensemble de leurs restrictions à B_i est équicontinu et uniformément borné (en vertu de leur continuité höldérienne dans B_i) , on peut donc en extraire une suite $\{\vec{\psi}_n\}$ convergente dans B_2 , soit $\vec{f}$ sa limite.

Si l'on pose

$$\vec{F}_n = K_{12}\, \vec{\psi}_n\ ,\ \vec{F} = K_{12}\, \vec{f}\ ,\ \vec{\Omega}_n = \vec{F} - \vec{F}_n\ ,\ \vec{\omega}_n = \vec{f} - \vec{\psi}_n$$

il faut montrer que

$$\underset{Q,Q_o \in B}{\mathrm{SUP}} \frac{|\vec{\Omega}_n(Q_1)-\vec{\Omega}_n(Q_o)|}{Q_1Q_o^{\alpha}} = \underset{Q,Q_o \in B}{\mathrm{SUP}} \left| \iint_{B_i} \frac{|E(Q_oQ)-E(Q_oQ)|}{Q_1Q_o^{\alpha}} \vec{\Omega}_n(Q)\, dS_Q \right|$$

tend vers zéro quand $n \to \infty$: ce qui revient à étudier

$$\iint_{B_i} \frac{|E(Q_1Q)-E(Q_oQ)|}{(Q_1Q_o)^{\alpha}}\, dS_Q$$ (la norme d'une matrice étant définie comme la somme des modules de ses termes) or, compte tenu de la singularité de $E(PQ)$, cette intégrale est bornée.

Comme $g(P)$ est continue höldérienne dans B_i , nulle sur B , on voit aisément par des raisonnements analogues que :

$$K_{21} : \vec{\psi} \longrightarrow i\, \varepsilon\, g(P) \int_B {}^t\mathcal{F}(Q;P,\vec{n})\; \vec{\psi}(Q)\, dS_Q$$

est complètement continu de B_1^{α} dans B_2

et $$K_{22} : \vec{\psi} \longrightarrow i\, \varepsilon\, g(P) \iint_{B_i} E(PQ)\; \vec{\psi}(Q)\, dS_Q$$ de B_2 dans B_2 .

Il reste à étudier

$$K_{11}\, \vec{\psi} \to \vec{\psi}(Q_o) + \int_B {}^t\mathcal{F}(Q;Q_o;\vec{n})\; \vec{\psi}(Q)\, dS_Q$$

qui est un opérateur linéaire de B_1^{α} dans B_1^{α} .

Or, si t,t_o désignent les affixes de Q et Q_o , on a

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathrm{Log}\, \frac{1}{r}\, dS = \frac{dr}{r} = \frac{dt}{t-t_o} - i\, d\, \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \mathrm{Log}\, \frac{1}{r}\, dS = d\theta$$

$K_{11}\, \vec{\psi}$ s'écrit donc, compte tenu de

$$\vec{\psi}\,(t_o) + \frac{1}{\pi i} \begin{pmatrix} 0 & \frac{i\mu}{\lambda+2\mu} \\ \frac{-i\mu}{\lambda+2\mu} & 0 \end{pmatrix} \int_B \frac{\vec{\psi}(t)\, dt}{t-t_o} + H\, \vec{\psi}$$

où

$$H\vec{\psi} = \frac{1}{(\lambda+2\mu)} \int_B \begin{pmatrix} [\mu + 2(\lambda+\mu)\, r_1^2] & ; -i\mu + 2(\lambda+\mu)\, r_1\, r_2 \\ i\mu + 2(\lambda+\mu) r_1 r_2 & ; [\mu + 2(\lambda+\mu)\, r_2^2 \end{pmatrix} \vec{\psi}(t)d\theta + K\,\vec{\psi}$$

qui est un opérateur complètement continu de B_1^α dans lui-même (cf. MUSHKHELISHVILI 1 ,p. 132-133).

Or, si l'on considère la partie principale de $K_{11}\,\vec{\psi}$

$$A\,\vec{\psi} = \vec{\psi}(t_o) + \frac{1}{\pi i} \begin{pmatrix} 0 & \frac{i\mu}{\lambda+2\mu} \\ \frac{-i\mu}{\lambda+2\mu} & 0 \end{pmatrix} \int_B \frac{\vec{\psi}(t)\, dt}{t - t_o}$$

qui est un opérateur intégral singulier du type de CAUCHY, son indice est

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \left[\text{Arg} \; \frac{\det S}{\det D} \right]_B$$

où

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i\mu}{\lambda+2\mu} \\ \frac{-i\mu}{\lambda+2\mu} & 1 \end{pmatrix} = {}^tD$$

d'où

$$\text{Det } S = \text{Det } D = 1 - \frac{2}{(\lambda+2\mu)^2} > 0$$

et $\chi = 0$.

Dans ces conditions, il résulte de l'étude de MUSHKHELISHVILI [1] que A est une bijection linéaire continue de B_1^α sur lui-même, par conséquent $\overset{-1}{A}$ existe et a les mêmes propriétés.

La première équation du système (2.15) est donc équivalente à

$$\vec{\psi}\,(Q_o) + \overset{-1}{A}\, H\,\vec{\psi} + \overset{-1}{A_o}\, K_{12}\,\vec{\psi} = \overset{-1}{A}\,\vec{\gamma}\,(Q_o)$$

or $\overset{-1}{A} : B_1^\alpha \to B_1^\alpha$ est une bijection linéaire continue, $H : B_1^\alpha \to B_1^\alpha$ est un opérateur linéaire complètement continu, $K_{12} : B_2 \to B_1^\alpha$ également. Par conséquent, on sait que

$$\overset{-1}{A} \circ H \; : \; B_1^\alpha \;\to\; B_1^\alpha \qquad \text{est complètement continu}$$

$$\overset{-1}{A} \circ K_{12} \; : \; B_2 \to B_1^\alpha \qquad \text{est complètement continu.}$$

En définitive, le système (2.15) est équivalent à

$$(I + K)\,(\vec{\varphi},\vec{\psi}) = (\,\overset{-1}{A}\;\vec{\gamma}\,,\,0\,) \tag{2.15'}$$

où

$$K = \begin{pmatrix} \overset{-1}{A} \circ H & , & \overset{-1}{A} \circ K_{12} \\ K_{21} & , & K_{22} \end{pmatrix}$$ est un opérateur linéaire complètement

continu de $B_1^\alpha \times B_2$ dans lui-même (muni de la norme $||\vec{\varphi},\vec{\psi}|| = ||\vec{\varphi}||_1^\alpha + ||\vec{\psi}||_2$.

Or, on va établir le

__*Théorème*__ .

Le système $(2.15)_0$ *(ou* $(2.15')_0$*) homogène n'admet dans* $B_1^\alpha \times B_2$ *que la solution nulle.*

__*Preuve*__

Tout d'abord puisque $\vec{u}$ donné par (2.12) vérifie, en vertu de (2.15') $\vec{u}_e = \vec{0}$ sur B et les conditions de radiation, il est identiquement nul dans (B_e) . En particulier $\vec{T}_e(\vec{u},\vec{n}) = \vec{0}$ sur (B) .

Ensuite

$$\iint_{B_i} \bar{\vec{u}} \,.\, \vec{\Delta}^{*}\, \vec{u}\; dS = \iint_{B_i} (k^2 + i\,\varepsilon\, g)\; |\vec{u}|^2\; dS$$

$$= \int_B \bar{\vec{u}}_i . \vec{T}_i(\vec{u},\vec{n})\; dS - \iint_{B_i} W(\vec{u},\bar{\vec{u}})\; dS$$

Or $\vec{T}_i(\vec{u},\vec{n}) = \vec{T}_e(\vec{u},\vec{n}) = \vec{0}$ en vertu des propriétés du potentiel de surface et du théorème de Liapounoff - Tauber généralisé; il en résulte que

$$\iint_{B_i} \left[(k^2 + i\,\varepsilon\, g)\ |\vec{u}|^2 + W(\vec{u},\vec{\bar{u}})\right] dS = 0$$

d'où en prenant la partie imaginaire

$$(\operatorname{Im} k^2 + \varepsilon\, g)\ |\vec{u}|^2 = 0 \quad \text{dans } B_i$$

Comme $\operatorname{Im} k^2 + \varepsilon\, g(P) \neq 0$ $\forall P \in B_i$ et K tel que $\operatorname{Im} k \geq 0$

(en effet $0 \leq \operatorname{Arg} k \leq \pi/2 \implies \operatorname{Im} k^2 \geq 0$ et $\varepsilon = +1$

$\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} \leq \pi \implies \operatorname{Im} k^2 \leq 0$ et $\varepsilon = -1$ et $g > 0$ dans B_i)

on en déduit que $\vec{u} \equiv \vec{0}$ dans B_i et, par conséquent :

$$\vec{\varphi} \equiv \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\psi} \equiv \vec{0} .$$

Ce théorème implique, en vertu de l'alternative de Fredholm pour les opérateurs complètement continus que (2.15)' admet une et une seule solution, pour $\vec{\gamma} \in B_1^\alpha$, $(\vec{\varphi},\vec{\psi})$ dans $B_1^\alpha \times B_2$.

Si l'on remarque que les résultats précédents sont valables même pour $k = 0$, à condition de remplacer E par E^o et de modifier convenablement les conditions de radiation, on a établi :

Pour tout k *tel que* $\operatorname{Im} k \geq 0$, *les équations intégrales* (2.15) *admettent une et une seule solution* $(\vec{\varphi},\vec{\psi})$. *En outre, le champ* $\vec{u}$ *qu'elle définit par* (2.12) *est une solution du problème :*

$$\overset{*}{\Delta} \vec{u} + k^2 \vec{u} = 0 \qquad \textit{dans } B_e$$

$$\vec{u} = \vec{\gamma} \qquad \textit{sur } B$$

$\vec{u}$ *vérifie les conditions de radiation* C.R.5 .

2.5 - *Théorème d'existence dans le cas d'un obstacle de bord libre*

En fait, on va considérer la condition

$$\vec{T}_e(\vec{u},\vec{n}) + C(S)\ \vec{u}_e = \vec{\gamma} \qquad \text{sur } (B)$$

et chercher $\vec{u}$ sous la forme

$$(2.16) \qquad \vec{u}(P) = \int_B E(PQ)\, \vec{\varphi}(Q)\, dS_Q + \iint_{B_i} E(PQ)\, \vec{\psi}\, (Q)\, dS_Q$$

Les conditions

$$T_e(\vec{u},\vec{n}_o) + C(Q_o)\, \vec{u}_e(Q_o) = \vec{\gamma}\, (Q_o)$$

$$\overset{*}{\Delta} \vec{u} + (k^2 + i\, \varepsilon\, g(P)\,)\, \vec{u} = \vec{0} \qquad \text{dans} \quad B_i$$

(on suppose, pour l'unicité $\operatorname{Im} \ C(S) \geq 0$ et, en outre $C(S)$ continue höldérienne sur B) conduisent au système intégral :

$$(2.17)\begin{cases} \vec{\varphi}\, (Q_o) - 2 \displaystyle\int_B \mathcal{F}(Q_o;Q,\vec{n}_o)\ \vec{\varphi}(Q)\, dS_Q - 2 \iint_{B_i} \mathcal{F}(Q_o;Q,\vec{n}_o)\, \vec{\psi}\, (Q)\, dS_Q \\ \qquad - 2\, C(Q_o) \displaystyle\int_B E(Q_oQ)\, \vec{\varphi}\, (Q)\, dS_Q - 2C(Q_o) \iint_{B_i} E(Q_oQ)\ \vec{\psi}(Q)\, dS_Q = 2\, \vec{\gamma}(Q_o) \\ \vec{\psi}\, (P) + i\, \varepsilon\, g(P) \left[\displaystyle\int_B E(PQ)\, \vec{\varphi}\, (Q)\, dS_Q + \iint_{B_i} E(PQ)\, \vec{\psi}(Q)\, dS_Q \right] = \vec{0} \end{cases}$$

D'après ce qui a été vu $\displaystyle\iint_{B_i} E(PQ)\, \vec{\psi}\, (Q)\, dS_Q$ est de classe $C^{1,\alpha}$ dans tout le plan ce qui entraîne pour

$$K_{12}\, \vec{\psi} = -\, 2 \iint_{B_i} \mathcal{F}(Q_o;Q,\vec{n}_o)\, \vec{\psi}(Q)\, dS_Q \qquad \text{d'être continu au sens}$$

de Hölder sur (B) . K_{12} est donc une application linéaire de B_2 dans B_1^α .

On vérifie aisément que :

$$||K_{12}\, \vec{\psi}||_1^\alpha \leq C\, ||\vec{\psi}||_2 \quad \text{ce qui entraîne pour} \quad K_{12}$$

d'être continu.

La complète continuité s'établit alors comme précédemment.

Par ailleurs $C(Q_o) \displaystyle\int_B E(Q_oQ)\ \vec{\varphi}(Q)\, dS_Q$ est évidemment continu au sens de Hölder sur B , compte tenu de l'hypothèse sur $C(Q)$.

C'est manifestement un opérateur linéaire continu de B_1^α dans lui-même dont la complète continuité s'établit comme auparavant.

De même $C(Q_o) \displaystyle\iint_{B_i} E(Q_oQ)\ \vec{\psi}(Q)\, dS_Q$ est complètement continu de B_2 dans B_1^α ainsi que les opérateurs apparaissant dans la seconde équation (2.17).

Pour la partie singulière

$$K_{11}\,\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(Q_o) - 2\int_B \mathcal{F}(Q_o;Q,\vec{n}_o)\,\vec{\varphi}\,(Q)\,dS_Q$$

on vérifie sans peine qu'on peut l'écrire : $B\,\vec{\varphi} + H\,\vec{\varphi}$

où H est linéaire complètement continu de B_1^α dans lui-même et B est une bijection linéaire continue.

Faisant intervenir $\overset{-1}{B}$ on voit que (2.17) peut s'écrire

$$(\vec{\varphi},\vec{\psi}) + K(\vec{\varphi},\vec{\psi}) = (-2\,\overset{-1}{B}\,\vec{\gamma},0)$$

où $K = \begin{pmatrix} \overset{-1}{B}oH\ , & \overset{-1}{B}oK_{12} \\ K_{21}\ , & K_{22} \end{pmatrix}$ est un opérateur linéaire complètement continu de $B_1^\alpha \times B_2$ dans lui-même.

Le théorème d'existence repose alors sur le

<u>*Lemme*</u>

Le système (2.17) *n'admet, pour* $\vec{\gamma} = \vec{0}$ *, que la solution nulle.*

$\vec{u}$ étant défini par (2.16) à l'aide de $(\vec{\varphi},\vec{\psi})$ solution du système homogène il vérifie

$$\vec{\Delta}^{*}\,\vec{u} + k^2\,\vec{u} = \vec{0} \qquad \text{dans } B_e$$

$$\vec{T}_e(\vec{u},\vec{n}) + C(S)\,\vec{u}_e = \vec{0} \qquad \text{sur } B\ ,\ \operatorname{Im} C(S) \geqslant 0$$

et les conditions de radiation.

Il en résulte, en vertu des théorèmes d'unicité que $\vec{u} \equiv \vec{0}$ dans B_e donc $\vec{u}_e = \vec{0}$ sur B ce qui entraîne $\vec{u}_i = \vec{0}$ en vertu de la continuité des potentiels composant $\vec{u}$.

On calcule alors :

$$\iint_{B_i} \bar{\vec{u}}.\vec{\Delta}^{*}\,\vec{u}\,dS = \iint_{B_i} (k^2 + i\,\varepsilon\,g)\,|\vec{u}|^2\,dS$$

$$= \iint_B \bar{\vec{u}}_i.\vec{T}_i(\vec{u},\vec{n})\,dS - \iint_{B_i} W(\vec{u},\bar{\vec{u}})\,dS$$

$$= -\iint_{B_i} W(\vec{u},\bar{\vec{u}})\,dS$$

d'où, comme précédemment l'on déduit

$$\mathrm{Im}\,(k^2 + \varepsilon\, g)\ |\vec{u}|^2 = 0 \qquad \text{dans} \quad B_i$$

ce qui entraîne $\vec{u} \equiv \vec{0}$ dans B_i pour $\mathrm{Im}\, k \geqslant 0$ et par conséquent $\vec{\Phi} \equiv \vec{0}$, $\vec{\psi} \equiv \vec{0}$.

Pour tout k *, tel que* $\mathrm{Im}\, k \geqslant 0$,(2.17) *admet une et une seule solution* $(\vec{\Phi},\vec{\psi})$ *et le champ* $\vec{u}$ *défini par* (2.16) *est la solution du problème*

$$\vec{\Delta}^{*}\, \vec{u} + k^2\, \vec{u} = \vec{0} \qquad \textit{dans} \quad B_e$$

$\mathrm{Im}\, C(S) \geqslant 0$, $\vec{T}_e(\vec{u},\vec{n}) + C(Q)\, \vec{u}_e = \vec{\gamma}$ sur B , $\vec{u}$ *vérifie les conditions de radiation.*

CHAPITRE V

THEOREMES D'AMPLITUDE LIMITE

1 *1.1-On considère le problème initial suivant :*

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \vec{\Delta}^{*}\ \vec{U} - \vec{U}_{tt} = \vec{\rho}(P)\ e^{-ikt} \\ \vec{U}|_B = \vec{q}(P)\ e^{-ikt} \\ \vec{U}(P,0) = \vec{f}(P),\ \vec{U}_t(P,0) = \vec{g}(P) \end{cases}$$

où $\vec{\rho}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$, $\vec{q}$ sont suffisamment régulières, de supports contenus dans la boule $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} < a - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ et vérifient :

$$(1.2)\qquad \vec{f}\,|_B = \vec{q}\ ,\quad \vec{g}\,|_B = -\,i\,k\,\vec{q}\ ,\quad \vec{\rho}\,|_B = \vec{0}$$

En outre la frontière B est contenue dans $r < a - \varepsilon$.

Soit alors $\vec{V}(P) = \vec{V}_1(P) + \vec{V}_2(P)$

vérifiant $\Delta^{*}\ \vec{V} + K^2\ \vec{V} = \vec{\rho}$ dans B_e (1.3)

(ce qui équivaut à $\overrightarrow{grad}\ div\ \vec{V}_1 + \tau^2\ \vec{V}_1 = \vec{\rho}_1$, $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{V}_2 - \sigma^2\ \vec{V}_2 = \vec{\rho}_2$

où $\vec{\rho} = \vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2$ avec $\overrightarrow{rot}\ \vec{\rho}_1 = \vec{0}$, $div\ \vec{\rho}_2 = 0$),

et les conditions de radiation :

$$(1.4)\quad \lim_{R\to\infty} \iint_{S(R)} |\vec{e}_r\ div\ \vec{V}_1 - i\,\tau\,\vec{V}_1|^2\ dS = 0 = \lim_{R\to\infty} \iint_{S(R)} |\vec{e}_r\ \Lambda\ \overrightarrow{rot}\ \vec{V}_2 + i\,\sigma\,\vec{V}_2|^2\ dS$$

On se propose d'étudier la "convergence" lorsque $t \to +\infty$ de la solution du premier problème $\vec{U}$ vers $\vec{V}\ e^{-ikt}$.

1.2- On se ramène tout d'abord à $\vec{\rho} \equiv \vec{0}$ *et* $\vec{q} \equiv \vec{0}$.

Pour cela on pose $\vec{u} = \vec{U} - \vec{V}\ e^{-ikt}$ qui vérifie donc :

(1.5) $\qquad \Delta^{*}\vec{u} - \vec{u}_{tt} = \vec{0}$

(1.6) $\qquad \vec{u}|_B = \vec{0}$

(1.7) $\qquad \vec{u}(P,0) = \vec{f}(P)-\vec{V}(P)$

(1.8) $\qquad \vec{u}_t(P,0) = \vec{g}(P) + ik\,\vec{V}(P)$

On doit étudier la décroissance de $\vec{u}(x,t)$ avec t.

1.3 - On aura également à considérer $\vec{w}$ tel que $\vec{w}_t = \vec{u}$. Si l'on prend :

$$\vec{w} = \int_0^t \vec{u}(P,\tau)\, d\tau - \frac{i}{k}\vec{V}(P) + \vec{h}(P)$$

on a : $\Delta^{*}\,\vec{w} - \vec{w}_{tt} = -\,\vec{u}_t(P,0) + ik\,\vec{V} - \frac{i}{k}\,\vec{\rho} + \Delta^{*}\,\vec{h}$

et,par conséquent, on aura :

(1.5)' $\qquad \vec{\Delta}^{*}\vec{w} - \vec{w}_{tt} = \vec{0}$

(1.6)' $\qquad \vec{w}|_B = \vec{0}$

(1.7)' $\qquad \vec{w}(P,0) = \vec{h}(P) - \frac{i}{k}\,\vec{V}(P)$

(1.8)' $\qquad \vec{w}_t(P,0) = \vec{f}(P) - \vec{V}(P)$

si la fonction $\vec{h}$ vérifie :

$$\vec{\Delta}\ \vec{h} = \frac{i}{k}\vec{\rho} + \vec{g}$$

$$\vec{h}|_B = \frac{i}{k}\vec{q}$$

$$\vec{h} = O\left(\frac{1}{r}\right)\ ,\quad \frac{\partial\vec{h}}{\partial r} = O\left(\frac{1}{r}\right) \qquad r \to \infty$$

(une telle solution existe d'après des théorèmes d'existence classiques).

1.4 - Comportement de la solution $\vec{u}$ *pour* $r \geq c_i\, t + a\,(c_1^2 = \lambda + 2\mu, c_2^2 = \mu)$

Comme $\vec{U} = 0$ pour $r \geq c_1\, t + a - \varepsilon$, on a donc :

$$(1.9)\qquad \left.\begin{aligned} \vec{u} &= -\,\vec{V}\,e^{-ikt} \\ \vec{w} &= \vec{h} + \frac{i}{k}\ \vec{V}\,e^{-ikt} \end{aligned}\right\}\quad r \geq c_1\, t + a - \varepsilon$$

Or, on a vu que pour $r > a - \varepsilon$

$$(1.10) \qquad \vec{V} = \frac{e^{i\tau r}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{a}_n(\theta,\varphi)}{r^n} + \frac{e^{i\sigma r}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{b}_n(\theta,\varphi)}{r^n}$$

où les séries sont absolument et uniformément convergentes (en r, θ,φ) pour $r \geqslant a \geqslant a - \varepsilon$. Elles sont en outre indéfiniment différentiables terme à terme par rapport à r, θ , φ les séries obtenues convergeant toujours absolument et uniformément.

Comme

$$(1.11) \qquad \vec{V}\, e^{-ikt} = \frac{e^{i\tau(r-c_1t)}}{r} \sum_{0}^{\infty} \frac{\vec{a}_n(\theta,\varphi)}{r^n} + \frac{e^{i\sigma(r-c_2t)}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{b}_n}{r^n}(\theta,\varphi)$$

on est amené à considérer des solutions de (1.5) de la forme

$$(1.12) \qquad \vec{u} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \vec{H}_n^{(1)}(\theta,\varphi, r - c_1 t).r^{-n} + \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \vec{H}_n^{(2)}(\theta,\varphi, r-c_2 t)r^{-n}$$

les séries ayant les mêmes propriétés de différentiabilité que ci-dessus.

D'autre part, si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont de classe C^2 , on a :

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{U}_t(P,0) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{U}(P,0) = \vec{0} \\ &\mathrm{div}\ \vec{U}_t(P,0)\ \mathrm{div}\ \vec{U}(P,0) = 0 \end{aligned}\right\}\ r > a - \varepsilon$$

Or $\vec{\Omega} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{U}(P,t)$ et $\Theta = \mathrm{div}\ \vec{U}(P,t)$ vérifient :

$$c_2^2\, \vec{\Delta}\, \vec{\Omega} - \vec{\Omega}_H = \vec{0} \quad \text{et} \quad c_1^2\, \Delta\, \Theta - \Theta_H = 0 \ .$$

Il en résulte donc que $\vec{\Omega}\,(P,t) = \vec{0}$ pour $r > c_2\, t + a - \varepsilon$, $\Theta\,(P,t) = 0$ $r > c_1\, t + a - \varepsilon$.

Or, on a posé $\vec{u} = \vec{U} - \vec{V}\, e^{-ikt}$, par conséquent :

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{u} = - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{V}_2\ e^{-ikt} \\ &\mathrm{rot\ rot}\ \vec{u} = - \frac{k^2}{\mu}\ \vec{V}_2\ e^{-ikt} \end{aligned}\right\}\ r > c_2\, t + a - \varepsilon$$

Pour $c_2\, t + a - \varepsilon < r \leqslant c_1\, t + a - \varepsilon$, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \vec{\square}^{*}\ \vec{u} &= c_1^2\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{div}\ \vec{u} - c_2^2\ \mathrm{rot\ rot}\ \vec{u} - \vec{u}_H \\ &= c_1^2\ \mathrm{grad\ div}\ \vec{u} + k^2\, \vec{V}_2\ e^{-ikt} - \vec{u}_{tt} = \vec{0} \end{aligned}$$

d'où, si l'on pose $\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}_2\, e^{-ikt}$ (d'où $\vec{v}_{tt} = \vec{u}_{tt} - k^2\, \vec{V}_2\, e^{-ikt}$)

$$\vec{\Box}^{*}\ \vec{v} = c_1^2 \text{ grad div } \vec{v} - \vec{v}_{tt} = 0$$

Donc, pour $c_2\, t + a - \varepsilon < r \leqslant c_1\, t + a - \varepsilon$

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}_2\, e^{-ikt}$$

où

$$\vec{V}_2 = \frac{e^{i\sigma r}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{b}_n(\theta,\varphi)}{r^n}$$

et $\vec{v}$ vérifie : c_1^2 grad div $\vec{v} - \vec{v}_{tt} = \vec{0}$, div $\vec{u}$ = div $\vec{v}$

(pour $r > c_1\, t + a - \varepsilon$ on a donc $\vec{v} = -\, \vec{V}_1\, e^{-ikt}$).

2 - *Lemmes et calculs préliminaires*

On se propose d'adopter la méthode de C.S. MORAWETZ [1] (cf. aussi BUCHAL [1]).

2.1-*Lemme 1*

Toute solution de (1.5) *satisfait à l'inégalité :*

$$(2.1)\quad |\vec{u}(x,y,z,t)| \leqslant K_1 \left[\iiint_{D_R} |\vec{u}|^2\, dx\, dy\, dz\right]^{1/2} + K_2 \left[\iiint_{D_R} |\vec{u}_{tt}|^2\, dx\, dy\, dz\right]^{1/2}$$

où D_R *est la région comprise entre* B *et une sphère de rayon* R *dépendant de* x, y, z *et contenant* $B_i \cup B$ *à son intérieur. Les constantes* K_1 *et* K_2 *dépendent de* x, y, z *et tendent vers l'infini quand le point* (x,y,z) *tend vers un point de* B .

En outre, on a des inégalités analogues pour $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ telles que

$$(\lambda + 2\mu)\, \overrightarrow{\text{grad}} \text{ div } \vec{u}_1 - \frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t^2} = \vec{0}\ ,\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_1 = 0$$

$$\mu \text{ rot rot } \vec{u}_2 + \frac{\partial^2 \vec{u}_2}{\partial t^2} = \vec{0}\ ,\ \text{div } \vec{u}_2 = 0$$

Démonstration

On l'établira successivement pour $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}$.

- pour $\vec{u}_1$. Soient $S' \subset S'' \subset S''' \subset S$ 4 sphères de centre (X,Y,Z) toutes situées dans (B_e) .

On définit : $\vec{\phi} = \vec{\psi}/\rho$, $\rho^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2$

où $\vec{\psi}$ est de classe C^2 dans (S), $\vec{\psi} = e^{i\tau\rho}\,\vec{\omega}$ dans S'' ($\vec{\omega}$ vecteur unitaire arbitrairement donné), $\vec{\psi} \equiv \vec{0}$ dans $S - S'''$, et $|\vec{\psi}| \leqslant 1$ dans S .

On a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{\phi} = \text{rot rot}\ \left(\frac{e^{i\tau\rho}}{\rho}\ \vec{\omega}\right) - \tau^2\,\vec{\phi}$$

dans S, si l'on fait varier $\vec{\phi}$ le long de chaque rayon dans $S''' - S''$ on peut y avoir : $\Delta\,\vec{\phi} = C^{ste} \times \vec{\phi}$ et

$$\iiint_{S_\varepsilon} \vec{u}_1.\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{\phi} - \vec{\phi}\ .\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{u}_1)\ dv$$

$$= \iiint_{S_\varepsilon} (\vec{u}_1.(-\tau^2\,\vec{\phi}) - c_1^{-2}\,\vec{\phi}.\ \frac{\partial^2\vec{u}_1}{\partial t^2})\ dx\ dy\ dz\ +$$

$$\iiint_{\partial S_\varepsilon} \vec{u}_1.\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\phi}\ dx\ dy\ dz$$

$$= \iint_{\partial S_\varepsilon} (\vec{u}_1\ \text{div}\ \vec{\phi} - \vec{\phi}\ \text{div}\ \vec{u}_1).\vec{n}\ dS$$

où $S_\varepsilon = S - S\ (X,Y,Z;\ )$ désigne l'intérieur de S privé de la boule de centre (X,Y,Z) et de rayon ε .

Comme : $\vec{u}_1.\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\phi} = \text{div}\ (\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\phi} \wedge \vec{u}_1) + \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_1.\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\phi}$

et que $\text{rot}\ \vec{u}_1 = 0$, on a :

$$\iiint_S (\vec{u}_1.\ \tau^2\,\vec{\phi} - \frac{1}{c_1^2}\,\vec{\phi}\ \frac{\partial^2\vec{u}_1}{\partial t^2})\ dx\ dy\ dz$$

$$= \lim_{\varepsilon\to} \iint_{\partial S_\varepsilon} (\vec{u}_1.\text{div}\ \vec{\phi} - \vec{\phi}\ \text{div}\ \vec{u}_1 - \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\phi} \wedge \vec{u}_1).\ \vec{n}\ dS$$

comme $\vec{\phi} \equiv \vec{0}$ sur ∂S on est ramené à l'étude de l'intégrale étendue à la frontière de la boule de rayon ε . Or, il résulte du chapitre II. que cette limite est $4\pi \; \vec{u}_1(X,Y,Z,t)$

On a donc :

$$\vec{\omega}.\vec{u}_1(X,Y,Z,t) = \vec{\omega}. \frac{1}{4\pi} \iint_S (\vec{u}_1 \frac{e^{i\tau\rho}}{\rho} \tau^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{e^{i\tau\rho}}{\rho} \frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t^2}) \, dx \, dy \, dz$$

et ceci, quel que soit le vecteur unitaire $\vec{\omega}$.($\tau^2 = \frac{1}{c_1^2}$ dans S'' , c^{te} dans S''' - S'').

Comme $\iiint_S \left| \frac{e^{i\tau\rho}}{\rho} \right|^2 dx \, dy \, dz < K_2^2$ on en déduit l'inégalité cherchée, pour toute sphère S contenue dans B_e , centrée en (X,Y,Z). Il s'en suit immédiatement l'inégalité pour une région D_R .

- pour $\vec{u}_2$. On pose cette fois $\vec{\phi} = \frac{\vec{\psi}}{\rho}$, $\vec{\psi} \equiv 0$ dans S - S'''

$\vec{\psi} = \frac{e^{i\sigma\rho}}{\rho} \vec{\omega}$ dans S'' , $|\vec{\psi}| \leq$ Cstte dans S.

On a, dans S'' , $\overrightarrow{\text{rot}} \; \overrightarrow{\text{rot}} \; \vec{\phi} = \sigma^2 \vec{\phi} + \overrightarrow{\text{grad}} \; \text{div} \; \vec{\phi}$, $(\vec{\phi} = \frac{e^{i\sigma\rho}}{\rho} \vec{\omega})$.

Dans S''' - S'' , on peut prendre $\vec{\phi} = \lambda \, (\rho) \, \frac{e^{i\sigma\rho}}{\rho} \vec{\omega}$ tel que :

$\lambda \, (\rho'') = 1$, $\lambda(\rho''') = 0$, λ de classe C^2 ; dans ces conditions :

$$\overrightarrow{\Delta \phi} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \left(\lambda \, \frac{e^{i\tau\rho}}{\rho} \right) \vec{\omega} = - \sigma^2 \, \vec{\phi} + \frac{e^{i\sigma\rho}}{\rho} \vec{\omega}(\lambda'' + 2 \, \lambda' \, i\sigma)$$

il est possible alors de choisir λ tel que $\lambda'' + 2 \, \lambda' \, i \, \sigma = 0$, $\lambda \, (\rho'') = 1$ $\lambda \, (\rho''') = 0$.

Dans ce cas, on a bien :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \; \overrightarrow{\text{rot}} \; \vec{\phi} = \sigma^2 \, \vec{\phi} + \overrightarrow{\text{grad}} \; \text{div} \; \vec{\phi} \qquad \text{dans S'''}$$

On peut donc écrire

$$\iiint_{S_\varepsilon} (\vec{u}_2.\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\phi} - \vec{\phi}.\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ u_2)dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_{S_\varepsilon} (\vec{u}_2.\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\phi} + \frac{1}{c_2^2}\ \vec{\phi}.\ \frac{\partial^2\vec{u}_2}{\partial t^2})\ dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{S_\varepsilon} (\vec{u}_2.\ \sigma^2\vec{\phi} + \frac{1}{c_2^2}\vec{\phi}\ .\ \frac{\partial^2\vec{u}_2}{\partial t^2})\ dx\,dy\,dz + \iiint_{S_\varepsilon} \vec{u}_2.\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{\phi}\ dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_{\partial S_\varepsilon} [\vec{\phi}\ \Lambda\ \text{rot}\ \vec{u}_2 - \vec{u}_2\ \ \Lambda\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\phi}\,].\vec{n}\ dS\ .$$

Comme $\text{div}\ \vec{u}_2 = 0$, $\vec{u}_2.\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{\phi} = \text{div}\ (\vec{u}_2\ \text{div}\ \vec{\phi}\ )$; par conséquent,

$$\iiint_{S_\varepsilon} (\sigma^2\ \vec{u}_2 + \frac{1}{c_2^2}\ \frac{\partial^2\vec{u}_2}{\partial t^2}).\ \vec{\phi}\ dx\,dy\,dz = \iint_{\partial S_\varepsilon} [\ (\vec{\phi}\ \Lambda\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_2 + \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{\phi}\,\Lambda\,\vec{u}_2) - \vec{u}_2\ \text{div}\ \vec{\phi}\,]\ .\ \vec{n}\ dS$$

Comme $\partial S_2 = \partial S \cup \partial S(\varepsilon)$ et que $\vec{\phi} \equiv 0$ dans $S - S'''$ le second membre se réduit à l'intégrale étendue à $\partial S(\varepsilon)$ avec $\vec{\phi} = \frac{e^{i\sigma\rho}}{\rho}\ \vec{\omega}$.

Quand $\varepsilon \to 0$, cette intégrale tend vers $-\vec{u}_2(X,Y,Z,t).\vec{\omega}$, et comme dans (S)

$$|\vec{\phi}| \leqslant \frac{M}{\rho}$$

on voit, comme $\vec{u}_1$ que

$$|\vec{u}_2(X,Y,Z,t)| \leqslant K_1^{(2)}\left[\iiint_S |\vec{u}_2|^2\ dx\,dy\,dz\right]^{1/2} + K_2^{(2)}\left[\iiint_S \left|\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right|\ dx\,dy\,dz\right]^{1/2}$$

ce qui entraîne l'inégalité pour D_R .

- preuve pour $\vec{u}$.

Soit $E^o(\rho)$ la matrice élémentaire (de Somigliana) de $\vec{\Delta}^*\ \vec{u} = 0$, on définit encore : $\vec{\phi} = E(\rho)\ \vec{\psi}$

$\vec{\psi} \equiv \vec{0}$ dans $S - S'''$, $\vec{\psi} = \vec{\omega}$ (ω vecteur constant) dans S'' ,

$|\vec{\psi}| \leqslant 1$ dans S .

Des calculs classiques (KUPRADZE [3] , et aussi PHAM THE LAI [1]) entraînent aisément :

$$- \vec{u}\,(X,Y,Z,t).\vec{\omega} = \iiint_S (\vec{u}.\,\vec{\Delta}^{*}\,\vec{\phi} - \vec{\phi}.\,\vec{u}_H)\,dx\,dy\,dz$$

d'où, en prenant successivement $\vec{\omega} = \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$:

$$4\pi\,|\vec{u}(X,Y,Z,t)| \leq \left[\iiint_S |\vec{u}|^2\,dx\,dy\,dz\right]^{1/2} . \left[\iiint_S |\vec{\Delta}^{*}\,E|^2\,dx\,dy\,dz\right]^{1/2}$$

$$+ \left[\iiint_S |\vec{u}_{tt}|^2\,dx\,dy\,dz\right]^{1/2} . \left[\iiint_S |E|^2\,dx\,dy\,dz\right]^{1/2}$$

(comme $\Delta^{*}\,\vec{\phi} = \vec{0}$ dans S'' et $S - S'''$ et $\vec{\Delta}^{*}\,\vec{\phi}$ borné dans $S''' - S''$, $\iiint_S |\vec{\Delta}^{*}\,\vec{\phi}|^2\,dv$ est borné ainsi que $\iiint_S |\vec{\phi}|^2\,dv$, ceci quel que soit $\vec{\omega}$, il en est ainsi des intégrales portant sur E).

On en déduit comme ci-dessus l'inégalité (2.1) .

2.2

a) Si l'on note $\vec{\Box}^{*}$ l'opérateur de l'élasticité dynamique,

$$\vec{\Box}^{*} = \vec{\Delta}^{*} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$, on peut l'écrire :

$$\vec{\Box}^{*}\vec{u} = \sum_{i,j=0}^{3} A_{ij}\,\vec{u}_{,ij} = \sum_{i=0}^{3} A_{ii}\,\vec{u}_{,ii} + \sum_{1\leq i\leq j\leq 3} \left[A_{ij}\,\vec{u}_{,ij} + A_{ji}\,\vec{u}_{,ji}\right]$$

où $A_{oo} = -\,\mathrm{Diag}\,(1,1,1)$, $A_{11} = \mathrm{Diag}\,(\lambda+2\mu,\mu,\mu)$, $A_{22} = \mathrm{Diag}\,(\mu,\lambda+2\mu,\mu)$

$$A_{33} = \mathrm{Diag}\,(\mu,\mu,(\lambda+2\mu)\,)\ ;\ A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^{t}A_{21}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} = {}^{t}A_{32}\ ;\ A_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^{t}A_{13}\ .$$

(où ${}^{t}A$ désigne la transposée de A et α,β réels positifs ou nuls tels que

$\alpha + \beta = \lambda + \mu$)

b) Soit en outre un opérateur différentiel linéaire du 1er ordre, défini par

$$N(\vec{u}) = B_1 \vec{u}_{,1} + B_2 \vec{u}_{,2} + B_3 \vec{u}_{,3} + B_o \vec{u}_t + B \vec{u}$$

$$= B_i \vec{u}_{,i} + B_o \vec{u}_t + B \vec{u}$$

où les B_i, B sont des matrices (3×3) à coefficients réels, fonctions dérivables de $x_{i,t}$ et telles que les matrices :

$$C_i = A_{11} B_i \text{ , } D_i = A_{22} B_i \text{ , } E_i = A_{33} B_i \text{ , } C = A_{11} B \text{ , } D = A_{22} B \text{ , } E = A_{33} B$$

sont symétriques.

c) L'intégrale de l'expression $\mathcal{E}(\vec{u}) = \vec{N}(\vec{u}) . \vec{\Box}^{*} \vec{u} + \vec{N}(\vec{u}) . \vec{\Box}^{*} \vec{u}$ étendue à une région D de l'espace euclidien $(x_1, x_2, x_3, x_o = t)$ est nulle pour toute solution $\vec{u}$ de $\vec{\Box}^{*} \vec{u} = 0$.

Or, en transformant $\mathcal{E}(\vec{u})$ on va l'écrire :

$$\iiint_D \mathcal{E}(\vec{u})\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt = \iiint_{\partial D} I(\vec{u})\, dS = \iiint_D K(\vec{u})\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt$$

et l'on va choisir $\vec{N}$ tel que $K(\vec{u}) = 0$.

d) Or, $\displaystyle \mathcal{E}(\vec{u}) = \sum_{i,j=0}^{3} (B_i \vec{u}_{,i} . A_{jj} \bar{\vec{u}}_{,jj}) + (B_i \bar{\vec{u}}_{,i} . A_{jj} \vec{u}_{,jj})$

$$+ \sum_{i=0}^{3} \sum_{1 \leq j \leq k \leq 3} 2\, \mathrm{Re}\{ (B_i \vec{u}_{,i} + B\vec{u} . A_{jk} \bar{\vec{u}}_{,jk}) + (B_i \vec{u}_{,i} + B \vec{u} . A_{kj} \vec{u}_{,kj}) \}$$

$$+ \sum_{j=0}^{3} (B \vec{u} . A_{jj} \bar{\vec{u}}_{,jj}) + (B \bar{\vec{u}} . A_{jj} \vec{u}_{,jj})$$

ce sont ces dernières expressions que l'on va transformer :

α) On obtient aisément

$$2\ \mathrm{Re}\ (B_i\ \vec{u}_{,i}.A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,kk}) = (B_i\ \vec{\bar{u}}_{,i}.A_{jj}\ \vec{u}_{,jj})_{,j} + (B_i\ \vec{u}_{,i}.A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,j}\ )_{,j}$$

$$-\ (B_i\ \vec{u}_{,j}.A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,j})_{,i} - (B_i\ \vec{u}_{,i}.A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,j}\ ) - (B_{i,j}\ \vec{\bar{u}}_{,i}\ .\ A_{jj}\ \vec{u}_{,j}\ )$$

$$+\ (B_{i,i}\ \ \vec{u}_{,j}\ .\ A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,j}\ )$$

si $A_{jj}\ B_i$ est symétrique.

En effet

$$(B_i\ \vec{u}_{,i}.A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,jj}) = (B_i\ \vec{u}_{,i}.A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,j})_{,j} - (B_{i,j}\ \vec{u}_{,i}\ .\ A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,j}\ ) - (B_i\ \vec{u}_{,ij}.A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,j}\ )$$

$$= (B_i\ \vec{\bar{u}}_{,i}.A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,j})_{,j} - (B_{i,j}\ \vec{u}_{,i}.A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,j}\ ) - (B_i\ \vec{u}_{,j}.A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,j}\ )_{,i}$$

$$+\ (B_{i,i}\ \vec{u}_{,j}.A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,j}\ ) + \underline{(Bi\ \vec{u}_{,j}.A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,j}\ )}$$

et puisque $(B_i\ \vec{\bar{u}}_{,i}\ .\ A_{jj}\ \vec{u}_{,jj}) = (B_i\ \vec{\bar{u}}_{,i}\ .A_{jj}\ \vec{u}_{,j})_{,j} - (B_{i,j}\ \vec{\bar{u}}_{,i}.A_{jj}\ \vec{u}_{,j})$

$$\underline{(B_i\ \vec{\bar{u}}_{,ij}\ .\ A_{jj}\ \vec{u}_{,j}\ )}$$

les deux termes soulignés s'éliminent dans l'addition si $A_{jj}\ B_i$ est symétrique.
Comme A_{oo} = Diag (-1,-1,-1) ceci entraîne B_i symétrique.
Ensuite compte-tenu des expressions de A_{11}, A_{22} et A_{33} on voit que les hypothèses

$$A_{jj}\ B_i\ \text{ symétrique } \Rightarrow\ B_i = \mathrm{Diag}\ (b^i_{11}\ ,\ b^i_{22}\ ,\ b^i_{33}\ )$$

β) $(B\ \vec{u},\ A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,jj}) + (B\ \vec{\bar{u}},\ A_{jj}\ \vec{u}_{,jj}\ ) =$

$$2\ \mathrm{Re}\ \Big[\ (B\vec{u}\ ,\ A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,j})_{,j} - (B\ \vec{u}_{,j}\ .\ A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,j}) - (B_{,j}\ \vec{u}.A_{jj}\ \vec{\bar{u}}_{,j}\ \ )\ \Big]$$

A priori, aucune hypothèse sur B n'est nécessaire.

γ) $(B_i\, \vec{u}_{,i}.A_{ji}\, \vec{\bar{u}}_{,jk}) = (B_i\, \vec{u}_{,i}.A_{jk}\, \vec{\bar{u}}_{,j})_{,k} - (B_{i,k}\, \vec{u}_{,i}.A_{jk}\, \vec{\bar{u}}_{,j}$ -

$-(B_i\, \vec{u}_{,ik}.A_{jk}\, \vec{\bar{u}}_{,j}) = (B_i\, \vec{u}_{,i}.A_{jk}\, \vec{\bar{u}}_{,j})_{,k} - (B_{i,j}\; \vec{u}_{,i}.A_{jk}.\vec{\bar{u}}_{,j})$

$- (B_i\, \vec{u}_{,k}.A_{jk}\, \vec{\bar{u}}_{,j})_{,i} + (B_{i,i}\, \vec{u}_{,k}.A_{jk}\, \vec{\bar{u}}_{,j}\,)$

$+ \underline{(B_i\, \vec{u}_{,k}\, .\, A_{jk}\, \vec{\bar{u}}_{,ij}\,)}$

or $(B_i\, \vec{\bar{u}}_{,i}\, .\, A_{kj}\, \vec{u}_{,kj}) = (B_i\, \vec{\bar{u}}_{,i}\, .\, A_{kj}\, \vec{u}_{,k})_{,j} - (B_i\, \vec{\bar{u}}_{,i}.A_{kj}\, \vec{u},k)-(B_i\, \vec{\bar{u}}_{,ij}.A_{kj}\, \vec{u}_{,k})$

les termes soulignés s'éliminent donc si : $A_{jk}\, B_i = {}^tB_i.A_{jk}$

Ceci entraîne $B_i = b_i\, I = b_i$ Diag $(1,1,1)$.

Ecrivant alors $B_i\, \vec{u}_{,i} = b_i\, \vec{u}_{,i}$, on obtient

$2\, \mathrm{Re}\, \{(b_i\, \vec{u}_{,i}.A_{jk}\, \vec{\bar{u}}_{,jk}) + (b_i\, \vec{u}_{,i}.A_{kj}\, \vec{\bar{u}}_{,kj})\}$ $(i = 1,2,3,\ 1 \leq j \leq k \leq 3)$

$= 2\, \mathrm{Re}\, \{\ (b_i\, \vec{u}_{,i}.A_{jk}\, \vec{\bar{u}}_{,j})_{,k} + (b_i\, \vec{u}_{,i}.A_{kj}\, \vec{\bar{u}}_{,k})_{,j} - (b_i\, \vec{u}_{,k}.A_{jk}\, \vec{\bar{u}}_{,j})_{,i}\ \}$

$+ 2\, \mathrm{Re}\, \{\ (b_{i,i}\, \vec{u}_{,k}.A_{jk}\, \vec{\bar{u}}_{,j})-(b_{i,k}\, \vec{u}_{,i}.A_{jk}\, \vec{\bar{u}}_{,j}) - (b_{i,j}\, \vec{\bar{u}}_{,i}\, .\, A_{kj}\, \vec{u}_{,k}\,)$

δ) Sans hypothèse sur B , on a :

$(B\, \vec{u}.\, A_j\, \vec{\bar{u}}_{,jj}) = (B\, \vec{\bar{u}}.\, A_{jj}\, \vec{\bar{u}}_{,j})_{,j} - (B\, \vec{u}_{,j}\, A_{jj}\, \vec{\bar{u}}_{,j}) - (B_{,j}\, \vec{u}.A_{jj}\, \vec{\bar{u}}_{,j}\,)$

$(B\, \vec{u}.\, A_{kj}\, \vec{\bar{u}}_{,kj}) = (B\, \vec{u}.A_{kj}\, \vec{\bar{u}}_{,k})_{;j} - (B\, \vec{u}_{,j}\, .A_{kj}\, \vec{\bar{u}}_{,k}) - (B_{,j}\, \vec{u}.A_{kj}\, \vec{\bar{u}}_{,k}\,)$

e) expression de $K(\vec{u})$.

Compte-tenu des résultats précédents, on peut écrire

$$K(\vec{u}) = -\sum_{i=0}^{3} \left({}_{ii}\, \vec{u}_{,i} . \bar{\vec{u}}_{,i} \right) - \sum_{0 \leq i<j \leq 3} \Big[\left(\mathcal{C}_{ij}\, \vec{u}_{,i} . \vec{u}_{,j} \right) + \left(\mathcal{C}'_{ij}\, \vec{u}_{,j} . \vec{u}_{,i} \right) \Big]$$

$$- \sum_{k=0}^{3} \Big[\left(\mathcal{C}_{k}\, \vec{u} . \bar{\vec{u}}_{,k} \right) + \left(\mathcal{C}'_{k}\, \bar{\vec{u}} . \vec{u}_{,k} \right) \Big]$$

On a, par exemple :

$$\mathcal{C}_{11} = A_{11} \left[(b_{1,1} - b_{2,2} - b_{3,3} - b_{0,0}) I + B \right] + {}^{t}B . A_{11} + b_{1,2} (A_{12} + A_{21})$$

$$\mathcal{C}_{00} = (-b_{o,o} + b_{1,1} + b_{2,2} + b_{3,3}) \quad I - B - {}^{t}B \; .$$

et des expressions analogues pour $\mathcal{C}_{22}$ et $\mathcal{C}_{33}$ (permutation circulaire sur 1, 2,3). Si l'on annule ces quatre matrices, on obtient :

$$b_{1,1} = b_{2,2} = b_{3,3} = b_{0,0} = b \;,\; B + {}^{t}B = 2\, b\, I \;,\Rightarrow B = \begin{pmatrix} b & -r & -q \\ -r & b & p \\ q_1 & -pb & b \end{pmatrix}$$

puis, $b_{1,2} + r = 0 = b_{1,3} - q$; $b_{2,1} - r = 0 = b_{2,3} + p$; $b_{3,2} - p = 0 = b_{3,1} + q$

Ensuite,

$$\mathcal{C}_{12} = {}^{t}\mathcal{C}'_{12} = b_{1,2} A_{22} + b_{2,1} A_{11} + b_{1,3} A_{32} + b_{2,3} A_{1,3} + {}^{t}B\, A_{12} + A_{12}\, B$$

$$- b_{o,o} A_{12}$$

$$\begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\, b_{2,1} + \mu\, b_{1,2} - r(\lambda+\mu) \;, & & \alpha(p+b_{2,3}) \\ 0 & ,\mu\, b_{2,1} + (\lambda+2\mu) b_{1,2} + r(\lambda+\mu), & \beta(b_{1,3}-q) \\ \beta\,(p + b_{2,3}) & ,\quad \alpha\,(-q + b_{1,3}) & ;\; \mu(b_{1,2}+b_{2,1}) \end{pmatrix}$$

matrice qui est nulle d'après ce qui précède. Par permutation circulaire, on voit qu'il en est de même de $\mathcal{C}_{23}$, $\mathcal{C}_{13}$, $\mathcal{C}'_{23}$ et $\mathcal{C}'_{13}$.

$$\mathcal{C}_{01} = b_{0,1} A_{11} - b_{1,0} + b_{0,2} A_{21} + b_{0,3} A_{31} = {}^{t}\mathcal{C}'_{01}$$

d'où, par permutation circulaire :

$$\mathscr{C}_{02} = \mathscr{C}_{03} = 0 \qquad \text{si} \quad b_{2,0} = b_{3,0} = 0$$

$$\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}'_1 = A_{11} \cdot B_{,1} + A_{21} \cdot B_{,2} + A_{31} B_{,3} = 0 \qquad \text{si}$$

$$b_{,1} = r_{,2} = q_{,3} = 0$$

de même $\mathscr{C}_2 = \mathscr{C}'_2 = 0$ si $p_{,3} = r_{,1} = b_{,2} = 0$ et $\mathscr{C}_3 = \mathscr{C}'_3 = 0$ si

$q_{,1} = P_{,2} = b_{,3} = 0$

Enfin $\mathscr{C}_o = - B_{,o} = 0$ si B indépendante de t, c'est-à-dire, compte tenu des résultats précédents si B est constante.

On a alors :

$b_{0,0} = b_{1,1} = b_{2,2} = b_{3,3} = b$; $b_{1,2} = - r$, $b_{1,3} = q = - b_{3,1}$; $b_{2,3} = -p = - b_{3,2}$

$$B = b\ I = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$$

et si b = 1 , en posant $\vec{r} = (x_1,x_2,x_3)$ $\vec{x}_i$ vecteur unitaire de Ox_i,
$\vec{\omega} = (p,q,r)$

Si $N(\vec{u}) = x_1\ \vec{u}_{,1} + x_2\ \vec{u}_{,2} + x_3\ \vec{u}_{,3} + t\ \vec{u}_{,t} + \vec{u} + \vec{\omega} \wedge \vec{u} + \sum_{i=1}^{3} (\vec{\omega},\vec{r},\vec{x}_i)\ \vec{u}_{,i}$

on a : $K(\vec{u}) = 0$.

Dans ces conditions, pour toute solution de $\vec{\Box}^{*}\ \vec{u} = \vec{0}$, on a

$$\iiint_{\partial D} I(\vec{u})\ dS = \vec{0}$$

où, si pour simplifier on prend $\vec{\omega} = \vec{0}$

$$\vec{I}(\vec{u}) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} \{ 2 \text{ Re } \left[(x_i \vec{u}_{,i}.A_{kk} \bar{\vec{u}}_{,k}) n_k \right] - (x_i \vec{u}_{,k}.A_{kk} \bar{\vec{u}}_{;k}) n_i \}$$

$$+ \sum_{i=0}^{3} \sum_{1\leq j<k\leq 3} 2 \text{ Re } \left[(x_i \vec{u}_{,i}.A_{jk} \bar{\vec{u}}_{,j}) n_k + (x_i \vec{u}_{,i}.A_{kj} \bar{\vec{u}}_{,k})n_j \right.$$

$$\left. - (x_i \vec{u}_{,k} A_{jk} \bar{\vec{u}}_{,j}) n_i \right]$$

$$+ \sum_{i,j=0}^{3} 2 \text{ Re } (\vec{u}.A_{ij} \bar{\vec{u}}_{,i})n_j$$

f) si l'on prend en particulier, $N(\vec{u}) = \vec{u}_t$, on obtient : ($K(\vec{u})$ étant évidemment nulle)

$$\iiint_D \left[\vec{u}_t . \vec{\Box}^{*} \bar{\vec{u}} + \bar{\vec{u}}_t . \vec{\Box}^{*} \vec{u} \right] dx\, dy\, dz\, dt = \iiint_{\partial D} J(\vec{u},\vec{n})\, dS = J$$

$$\text{où } J(\vec{u},\vec{n}) = \sum_{k=0}^{3} \left[2 \text{ Re } \{(u_t . A_{kk} \bar{\vec{u}}_{,k}) n_k\} -(\vec{u}_{,k}.A_{kk} \vec{u}_{,k}) n_o \right]$$

$$+ \sum_{1\leq j\leq k\leq 3} 2 \text{ Re } \{(\vec{u}_t.A_{jk} \bar{\vec{u}}_{,j})n_k + (\vec{u}_t.A_{kj} \bar{\vec{u}}_{,k})n_j - (\vec{u}_{,k} . A_{jk} \bar{\vec{u}}_{,j}) n_o \}$$

g) Choix de D

On le prend borné et tel que $\partial D = \bigcup_{i=1}^{4} \partial D_i$

$\partial D_1 = \mathfrak{B} \times |0,T|$, $\partial D_2 = \{(r,t)|\ t = 0,\ r < c_1<t<a \}$, $\partial D_3 =\{(r,t);t = 0,\ r \leq a\}$

$D_4 = \{(r,t) \mid r = c_1 t + a ,\quad 0 \leq t \leq T \}$.

On désigne par J_1,J_2,J_3,J_4 et les intégrales de $J(\vec{u})$ étendues à ces parties de la frontière. Si $\vec{N} = \vec{u}_t$

$J_1 = 0$ puisque $\vec{u}_t = 0$ sur ∂D_1 . ($n_o = 0$)

Sur ∂D_2 : $n_1 = n_2 = n_3 = 0$, $n_o = 1$

$$J(\vec{u},\vec{n}) = - \left[|u_t|^2 + W(\vec{u},\bar{\vec{u}}) \right]$$

et $J_2 = - \iiint_{D_{R_1}} \left[|\vec{u}_t|^2 + W(\vec{u},\bar{\vec{u}}) \right] dv$ où $R_1 = c_1 T + a$ et $\vec{u} = \vec{u}(P,T)$

Sur ∂D_3 , $n_1 = n_2 = n_3 = 0$, $n_o = -1$ d'où

$$J_3 = \iiint_{D_a} \left[|\vec{u}_t|^2 + W(\vec{u},\bar{\vec{u}}) \right] dv \qquad \text{où} \quad \vec{u} = \vec{u}(P,0).$$

Sur ∂D_4 : $0 \leqslant t \leqslant T$, $r = c_1 t + a$

$$\vec{n} = \frac{\vec{e}_r}{\sqrt{1+c_1^2}} \ , \ n_o = - \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}$$

et $\vec{u} = \dfrac{e^{i(\tau r - kt)}}{r} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{a}_n(\theta,\varphi)}{r^n} + \dfrac{e^{i(\sigma r - kt)}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{b}_n(\theta,\varphi)}{r^n}$

$$r = c_1 t + a \implies \vec{u} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(\theta,\varphi)}{(c_1 t + a)\ 3n+1} + \frac{e^{i\sigma\left[(c_1-c_2)t+a\right]}}{(c_1 t+a)} \sum^{\infty} \frac{\vec{b}_n(\theta,\varphi)}{(c_1 t+a)^{n+1}}$$

Comme :

$$J(\vec{u},\vec{n}) = - n_o (\ |\vec{u}_t|^2 + W(\vec{u},\bar{\vec{u}}) \ ) + 2 \text{ Re } (\vec{u}_t . \vec{T}(\bar{\vec{u}},\vec{e}_r))$$

on a, sur ∂D_4 (au coefficient $\dfrac{1}{\sqrt{1+c_1^2}}$ près)

$$J(\vec{u},\vec{n}) = c_1 \left[|\vec{u}_t|^2 + W(\vec{u},\bar{\vec{u}}) \right| + 2 \text{ Re } (\vec{u}_t . \vec{T} \ (\bar{\vec{u}},\vec{e}_r) \ ).$$

Compte tenu de l'expression de $\vec{u}$, on peut montrer que $J(\vec{u},\vec{n})$ $O(\frac{1}{r^2})$ mais que,

si $\vec{u}$ se réduit à $\dfrac{e^{i\tau\ (r - c_1 t)}}{r} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{a}_n(\theta,\varphi)}{r^n}$

cette expression est $O\ (\dfrac{1}{r^2})$ d'où il résulte que J_4 est bornée indépendamment de t. (si

$$\vec{u} = \frac{e^{i\sigma(r-c_2)t}}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{b}_o(\theta,\varphi)}{r^n}$$

on a des résultats analogues en prenant pour ∂D_4 : $0 \leqslant t \leqslant T$, $r = c_2 t + a$).

En fait, on va tout d'abord se limiter aux problèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ c_1^2 \text{ grad div } \vec{u}_1 - \dfrac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t^2} = 0 \\ \vec{u}_j(P,0) = \vec{g}_1(P) \\ \dfrac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}(P,0) = \vec{h}_1(P) \\ \vec{u}_1 = 0 \text{ sur } B \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} c_2^2 \text{ rot rot } u_2 + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0 \\ \vec{u}_2(P,0) = \vec{g}_2(P) \\ \dfrac{\partial \vec{u}_2}{\partial t}(P,0) = \vec{h}_2(P) \\ \vec{u}_2 = 0 \text{ sur } B \end{array}\right.$$

On a, dans ces conditions :

$$\vec{U}_j\ (P,t) = 0 \qquad \text{pour} \quad r \geqslant c_j\ t + a - \varepsilon$$

donc
$$\vec{u}_j = - \vec{v}_j\ e^{-ikt} \qquad \text{pour} \quad r \geqslant c_j\ t + a - \varepsilon$$

On se bornera à étudier l'équation

$$(\lambda+2\mu) \text{ grad div } \vec{u} - \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{0} \iff \Delta^{*} \vec{u} - \vec{u}_{tt} = \vec{0}\ ,\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u} = \vec{0}$$

des démonstrations identiques donnant les mêmes résultats pour

$$\Delta^{*} \vec{u} - \vec{u}_{tt} = \vec{0}\ ,\ \text{div } \vec{u} = \vec{0}\ .$$

(ce sont des cas particuliers de $\vec{\Delta}^{*} \vec{u} - \vec{u}_{tt} = \vec{0}$, les calculs précédents s'appliquent donc). On a :

__*Lemme 2*__ *(i) si pour* $t = 0$, $\vec{u}$ *(qui est de la forme vérifie (dans* Be *)* $\iiint_{r<a} \left[|\vec{u}_r|^2 + W(\vec{u},\bar{\vec{u}}) \right] dv = \mathcal{E} < \infty$

elle vérifie une telle inégalité pour tout $t > 0$ *: plus précisément l'on a :*

$$\iiint_{\substack{r<c_1\ T+a \\ t=T}} \left[|\vec{u}_t|^2 + W(\vec{u},\bar{\vec{u}}) \right] dv < \mathcal{E} + M_1 \quad , \ 0 \leqslant T < \infty$$

où M_1 *est indépendante de* T.

Démonstration :

On prend pour domaine D le domaine défini précédemment.

Prenant $\vec{N}(\vec{u}) = \vec{u}_t$ on voit que :

$$J_1 = 0 \quad \text{sur} \quad B\,[0,T] = \partial D_1$$

J_4 est borné quand $T \to +\infty$ (indépendamment de T)

$$J_3 = \iiint_{\substack{r<a\\ t=0}} \left[|\vec{u}_t|^2 + W(\vec{u},\bar{\vec{u}})\right] dv \qquad (n_o = -1\ ,\ \vec{n} = 0)\ ;$$

$$J_4 = -\iiint_{\substack{r<c_1T+a\\ t=T}} \left[|\vec{u}_t|^2 + W(\vec{u},\bar{\vec{u}})\right] dv$$

Comme $0 = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$ on en déduit

$$\iiint_{\substack{r<c_1T+a\\ t=T}} \left[|\vec{u}_t|^2 + W(\vec{u},\bar{\vec{u}})\right] dv < \iiint_{\substack{r<a\\ t=0}} \left[|\vec{u}_t|^2 + W(\vec{u},\bar{\vec{u}})\right] dv + M_1$$

où M_1 est indépendant de T.

Il en résulte immédiatement que la solution du problème est unique.

Considérant alors la fonction $\vec{w}$ telle que $\vec{w}_t = \vec{u}$

(qui vérifie dans le cas particulier :

$$\overset{*}{\Delta}\,\vec{u} - \vec{u}_{tt} = 0 = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u}$$

$$w_B = 0 \; ; \; w(P,0) = g_1(P) - \frac{i}{k} \; V_1(P) \; , \quad w_t(P,0) = h_1(P) - V_1(P) \;)$$

si on lui applique le calcul précédent, on en déduit :

$$\iiint_{\substack{r<c_1 \\ t=T}}^{T+a} |\vec{u}|^2 \, dv \leqslant \iiint_{\substack{r<c_1 \\ t=T}}^{T+a} \left[|\vec{w}_t|^2 + W(w,\vec{\bar{w}})\right] dv \leqslant \iiint_{\substack{r<a \\ t=0}} |\vec{w}_t|^2 + W(w,\bar{w}) \;) \, dv + M_2$$

où M_2 et bien entendu l'intégrale étendue à $r < a$, pour $t = 0$ sont bornés quand $t \to +\infty$.

<u>*Lemme 3*</u> *Si* B_i *est étoilé par rapport à l'origine on a :* ($\vec{u}$ *étant de la forme*

$$T \iiint_{D_R} \left[|\vec{u}_t|^2 + W(\vec{u},\vec{\bar{u}})\right] dv < K$$

où K *est indépendante de* t ; D_R *étant la région comprise entre* B *et une sphère donnée, de rayon* R .

<u>*Démonstration*</u> : On prend ici $N(\vec{u}) = x_i \, \vec{u}_{,i} + t \, \vec{u}_t + \vec{u}$

Sur ∂D_1, $\vec{u}_{,i} = n_i \, \vec{u}_{,n}$ (puisque $\vec{u} = 0$ sur B).

Dans ces conditions :

$$I_1(\vec{u}) = (x_i \, n_i) \left[\mu|\vec{u}_{,n}{}^2 + (\lambda+\mu) \; | \; \vec{n}.\vec{u}_{,n}|^2 \right]$$

c'est-à-dire si B_i est étoilé par rapport à l'origine : $J_1(\bar{u}) < 0$.

$J_4(\vec{u})$ est borné indépendamment de t .

$$I_2(\vec{u}) = -t\left[|\vec{u}_t|^2 + W(\vec{u},\vec{\bar{u}})\right] - \left[(r \; \vec{u}_r.\vec{\bar{u}}_t) + (r \; \vec{\bar{u}}_r.\vec{u}_t) + (\vec{u}.\vec{\bar{u}}_t) + (\vec{\bar{u}}.\vec{u}_t) \right]$$

et $$J_2(u) = \iiint\limits_{\substack{r\leq c_1\ T+a \\ t\,=\,T}} I_2(u)\,dv$$

$J_3(\bar{u})$ est la même intégrale prise pour $T = 0$: elle est bornée en vertu des conditions initiales.

On pose :

$$J_{21} = -\iiint r(\vec{u}_r.\vec{\bar{u}}_t + \vec{\bar{u}}_r.\vec{u}_t)\,dv \qquad \text{pour} \quad r < a$$

$$J_{22} = -T\iiint\limits_{r<a} \left[|\vec{u}_t|^2 + W(\vec{u},\vec{\bar{u}})\right] dv$$

$$J_{23} = -\iiint\limits_{a\leq r\leq c_1T+a} r(\vec{u}_r.\vec{\bar{u}}_t + \vec{\bar{u}}_r.\vec{u}_t)\,dv$$

$$J_{24} = -T\iiint\limits_{a\leq r\leq c_1T+a} \left[|\vec{u}_t|^2 + W(\vec{u},\vec{\bar{u}})\right] dv$$

$$J_{25} = -\iiint\limits_{r\leq c_1T+a} (\vec{u}.\vec{\bar{u}}_t + \vec{\bar{u}}.\vec{u}_t)\,dv\ .$$

Comme

$$W(\vec{u},\vec{\bar{u}}) = \alpha\left[2\sum_{i=1}^{3}|u_{i,i}|^2 + \sum_{1\leq i<j\leq 3}|u_{i,j} + u_{j,i}|^2\right]$$

$$+ (\mu-\alpha)\sum_{i,j=1}^{3}|u_{i,j}|^2 + \beta\,|\mathrm{div}\,\vec{u}|^2$$

$\alpha + \beta = \lambda + \mu$ et comme $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u} = 0$; on a :

$$W(\vec{u},\vec{\bar{u}}) = \beta\,|\mathrm{div}\,\vec{u}|^2 + (\mu+\alpha)\sum_{i,j=1}^{3}|u_{i,j}|^2 \geq (\mu+\alpha)\,|\vec{u}_r|^2 \quad (\ =(\lambda+2\mu)|\vec{u}_r|^2 \ \text{si}\ \beta = 0\ )$$

On a donc

$$|J_{21}| < a\iiint\limits_{r<a} |\vec{u}_r|^2 + |\vec{u}_t|^{2}\,)\,dv < a(\mathcal{E} + M) \quad \text{en vertu du lemme 2 .}$$

D'autre part $J_{22} < 0$ et $|J_{25}|$ est borné (comme $|J_{21}|$)

$$|J_{23}| \leq (c_1 T + a) \iiint_{a \leq r \leq c_1 T+a} |\vec{u}_r| . |\vec{u}_t| dv \leq T \iiint |c_1 \vec{u}_r| . |u_t| dv + a (\mathcal{E} + M)$$

$$\leq T \iiint_{a \leq r \leq c_1 T+a} \left[(\lambda+2\mu) |\vec{u}_r|^2 + |\vec{u}_t|^2 \right] dv + a (\mathcal{E} + M)$$

$$\leq - J_{24} + a (\mathcal{E} + M)$$

on a donc $- J_{22} = J_1 + M_3$ où M_3 est bornée indépendamment de T quant $T \to \infty$.

Si $\vec{u}$ est alors la solution de (P_1), il en est de même de $\vec{u}_t$, d'où par le lemme 2 :

$$t \iiint_{r < c_1 T+a} |\vec{u}_{tt}|^2 dv \quad K$$

En outre, si on applique le lemme 2 à $\vec{w}$(t.q. $\vec{w}_t = \vec{u}$) , on a :

$$t \iiint_{r \leq c_1 t+a} |\vec{w}_t|^2 dv < K$$ d'où à l'aide du lemme 1 :

$$|\vec{u}| < C \sqrt{t}$$

Comme $\vec{u} = \vec{U} - \vec{V} e^{-ikt}$ on voit que, lorsque $t \to + \infty$ $\vec{U}$ tend vers $\vec{V} e^{-ikt}$.

BIBLIOGRAPHIE

R.N. BUCHAL 1 : The Approach to Steady State Solutions of exterior boundary value problems for the Wave Equation.
Journal of Math. and Mech., vol. 12, n° 2-1963.

CALDERON A.P. 1 : The multipole expansion of radiation fields
Journal Rat. Mech. Anal. 3-523 (1954).

COURANT-HILBERT 1 : Methods of Mathematical Physics - Tomes I et II
Interscience - N. Y.

DUFF G.F.D. 1 : The Cauchy problem for elastic waves in an anisotropic medium
Phil. Trans. Roy. Soc. - London - Série A - 252, p. 249-273, 1960.

GAKHOV 1 : Boundary value problems
(traduit du russe) - Pergamon Press, 1966.

GIRAUD G. 1 : Equations à intégrales principales, étude suivie d'une application.
Ann. Eco. Norm. Sup. - Vol. 51, n° 3, 1934.

2 : Equations à intégrales principales, étude suivie d'une application.
Ann. Ec. Norm. Sup. - Vol. 51, n° 4, 1934.

GÜNTER 1 : Théorie du potentiel et ses applications à la physique mathématique.

JOHN F. 1 : Plane waves and spherical means applied to partial differential equations.
Interscience - Tracts in Pure and Appl. Mathe. n° 2, 1955.

KELLOG O.D. 1 : Foundations of Potential Theory.
Berlin - 1929.

KUPRADZE V.D. 1 : Randwertaufgaben der Schwingungs theorie
V.E.B., Berlin, 1956.

2 : Dynamical problems in elasticity (Traduit du russe)
Progress in Sdid Mechanics, T. III -
North-Holland Publish - Amsterdam, 1963.

3 : Potential Methods in the Theory of Elasticity (traduit du russe)
Israel Program for Scient. Translations - Jerusalem, 1965.

LAX P.D. et PHILIPS R.S. 1 : Scattering Theory
Acad. Press, 1967.

2 : Scattering Theory for dissipative hyperbolic systems
Journal of Functional Analysis - n° 14 - 1973.
pp. 172-235.

3 : Scattering Theory for the Acoustic equation in an even number of space dimensions.
Indiana University Math. Journal. Vol. 22, n° 2(1972)
pp. 101-134.

LEVI E. 1 : Solle equazioni lineari totalmente ellitiche.
Rend. Circ. Mat., Palermo, 24, 1907.

LION : Equations différentielles opérationnelles - Springer Verlag.

LIONS-DENY : Sur les espaces du type de BEPPO-LEVI. Annales Intitut FOURIER.

LIONS-MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes. Dunod. vol. 1 et 2.

LITTMAN W. 1 : Decay at infinity of solutions of partial differential equations with constant coefficients.
Trans. Amer. Math. Soc., 123, p. 449-59, 1966.

LUDWIG 1 : The Radon Transforma in Euclidean Space Comm. on Pure and Applied Math. Vol. 19 (1966), pp. 49-81.

MIKHLIN 1 : Multidimensional Singular Integrals and Integral equations (Traduit du russe).
Pergamon Press, 1965.

MIRANDA C. 1 : Equazioni all derivate parziali di tipo ellitico
Berlin, Springer, 1955.

MORAWETZ C. 1 : The decay of solutions of the exterior - Boundary value problem for the wave equation
Comm. on pure and appl. Math., 14, p. 561-8, 1961.

MÜLLER C. 1 : Uber die Strahlungskapazität von H. Weyl
Math. Z., 56, n° 1, 1952, p. 80-83.

MUSHKHELISHVILI 1 : Singular integral equations
North-Holland, Amsterdam, 1953.

PARSY F. 1 : C.R., t. 259, p. 2959-2962, 1964.
C.R., t. 259, p. 3175-3177, 1964.

PHAM THE LAI : Potentiels élastiques
Journal de Mécanique, Vol. 6, n° 2, 1967.

RELLICH F. 1 : Uber das asymptotische Verhalten der Lösungen von in unendlichen Gebieten
Jahresber Deutsch. Math. Verein, 53, 57, 65, 1943.

RIESZ-NAGY 1 : Analyse fonctionnelle
Gauthier-Villars, 1955.

ROSEAU M. 1 : Sur un théorème d'unicité applicable à certains problèmes de diffraction d'ondes élastiques
C.R. Acad. des Sc. de Paris, 245, 1957, p. 1780.

2 : Journal de Math. Pures et Appliquées, 39, 1960, p. 173-79.

SCHWARTZ L. 1 : Theorie des distributions
Vol. I, Paris Hermann, 1950.

SOMMERFELD A. 1 : Die Greensche funktion der Schwingungsgleichung
Jahresber Deutsch. Math. Verein, 21, 309, 1912.

STOKER J.J. 1 : Some remarks on radiation conditions
Proc. Symp. in Appl. Math., Vol. 5 - Wave motion and vibration theory, N. Y., Mc. Graw-Hill, 1954.

TREVES F. 1 : Linear P.D.E. with constant coefficients
Math. and its Applications., vol. 6, 1966 - Gordon-Breach.

VAINBERG B.R. 1 : Principles of radiation, limit absorption and limit amplitude in the general theory of P.D.E. Yspehi Mat. Naut. (Russian Math. Surveys) 21, n° 3, 1966, p. 115-194.

WERNER P. 1 : Randwert probleme der math. Akustik.
Arch. Rat. Mech. Anal., 10-29, 1962.

2 : On the Exterior Boundary Value Problem of Perfect Reflection for stationary electromagnetic Wave Fields
Journal Math. Anal. and Appl. 7, p. 348-96, 1963.

WEYL H. 1 : Math. Z., 55, n° 2, 1952.

WILCOX C.H. 1 : An expansion theorem for electromagnetic fields
Comm. Pure Appl. Math., 9, 115-34, 1956.

2 : Spherical Means and radiation conditions
Arch. Rat. Mech. Anal. 3, p. 133-48, 1959.

3 : Steady state wave propagation in anisotropic media
Arch. Rat. Mech. Anal., 24, 200-242, 1967.

4 : Wave operators and asymptotic solutions of wave propagation problems.
Arch. Rat. Mech. Anal., 22, 37-78, 1966.

5 : Measurable Eigenvectors for Hermitian Matrix-Valved Polynomials. Math. Anal. and Applic. 40-12-19 (1972).

WILCOX et AVILA : The Near-Field Behaviour of the Green's Matrix
Journ. Math. Mech., vol. 16, n° 8, 1967.