N° d'ordre : 516

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR de SPECIALITE

(MATHEMATIQUES APPLIQUEES)

par

Monique PICAVET

MODELES D'EXPANSION DE CAPACITE AVEC IMPORTATIONS ET STOCKAGE

Soutenue le 12 mars 1975, devant la COMMISSION D'EXAMEN

Membres du Jury :	MM.	P. BACCHUS	Président
		C. BREZINSKI	Examinateur
		P. HANSEN	Invité
		P. HUARD	Rapporteur

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE

DOYENS HONORAIRES DE L'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES Des Anciennes Facultés de Droit Et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, SAVART, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENT HONORAIRE DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

R. DEFRETIN

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. PARREAU.

PROFESSEURS TITULAIRES

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M. BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M. BLAYS Pierre	Géographie
M. BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOUISSET Simon	Physiologie Animale
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CELET Paul	Géologie Générale
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. CORSIN Pierre	Paléontologie
M. DECUYPER Marcel	Géométrie
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale
M. DELHAYE Michel	Chimie Physique
M. DERCOURT Michel	Géologie Générale
M. DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOURET René	Physique du Solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. GLACET Charles	Chimie Organique
M. GONTIER Gérard	Mécanique
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M. LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M. LEBRUN André	Electronique
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M. LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M. LOMBARD Jacques	Sociologie

.../...

M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M. MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. POUZET Pierre	Analyse Numérique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M. TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M. VAILLANT Jean	Analyse
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M. WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BODARD Marcel	Biologie Végétale
M. BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. DEPREZ Gilbert	Physique Théorique
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M. MAES Serge	Physique Atomique et Moléculaire
Melle MARQUET Simone	Probabilités
M. MIGEON Michel	Chimie Physique
M. MONTEL Marc	Physique du Solide
M. PANET Marius	Electrotechnique
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M. SALMER Georges	Electronique
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés d'Enseignement)

M. ADAM Michel	Sciences Economiques
M. ANDRE Charles	Sciences Economiques
M. ANGRAND Jean-Pierre	Géographie
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BART André	Biologie Animale
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M. BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M. BOSCQ Denis	Probabilités
M. BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire

.../...

M. COQUERY Jean-Marie	Psycho-Physiologie
M. COULON Jean	Electrotechnique
Mlle DACCHARI Monique	Géographie
M. DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des Entreprises
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DHAINAUT André	Biologie Animale
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M. DRIEUX Baudouin	Informatique
M. DUEE Gérard	Géologie Appliquée
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
Mme EVRARD Micheline	Chimie Appliquée
M. FONTAINE Jacques-Marie	Electronique
M. FOURNET Bernard	Biochimie
M. FROELICH Daniel	Chimie Physique
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GRANELLE Jean Jacques	Sciences Economiques
M. GUIGOU Jean-Louis	Sciences Economiques
M. GUILLAUME Henri	Sciences Economiques
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. HERMAN Maurice	Physique Spatiale
M. JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
Mlle KOSMANN Yvette	Géométrie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LANGRAND Claude	Probabilités
M. LAURENT François	Automatique
Mlle LEGRAND Denise	Algèbre
Mlle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LENTACKER Firmin	Géographie
M. LEROY Jean-Marie	Chimie Appliquée
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique Théorique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU Jean-Marie	Physique Atomique et Moléculaire
Mme N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques
M. MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. MONTUELLE Bernard	Biologie Appliquée
M. NICOLE Jacques	Chimie Appliquée
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie Physique
M. PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M. PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M. POVY Lucien	Automatique
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean-Claude	Psycho-Physiologie
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SLIWA Henri	Chimie Organique
M. SOMME Jean	Géographie
Mlle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. THERY Pierre	Electronique
M. TOULOTTE Jean-Marc	Automatique
M. TREANTON Jean-René	Sociologie

.../...

M. VANDORPE Bernard	Chimie Minérale
M. VILLETTE Michel	Mécanique
M. WERNIER Georges	Informatique
M. WATERLOT Michel	Géologie Générale
M. YVON Jean-Pierre	Analyse Numérique
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Algèbre

Monsieur le Professeur BACCHUS a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury. Je le prie de croire à ma profonde gratitude.

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur HANSEN, qui a bien voulu faire partie du Jury, pour les idées échangées et l'attention bienveillante qu'il m'a témoignée.

Je remercie également Monsieur le Professeur BREZINSKI pour avoir accepté de s'intéresser à ce travail et de le juger.

Que Monsieur le Professeur HUARD, dont les conseils et suggestions m'ont été si précieux, veuille bien trouver ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Je tiens enfin à remercier Mademoiselle DRIESSENS qui a tapé cette thèse avec soin et célérité, ainsi que Monsieur et Madame DEBOCK qui, avec les mêmes qualités, en ont tiré les épreuves.

TABLE DES MATIÈRES

page

INTRODUCTION 1

CHAPITRE PRÉLIMINAIRE : HYPOTHÈSES ET NOTATIONS 6

1. HYPOTHESES GENERALES 7
2. NOTATIONS 8

CHAPITRE I : MODÈLES D'EXPANSION DE CAPACITÉ SANS IMPORTATION, NI STOCKAGE 10

1. L'ACCROISSEMENT DE LA DEMANDE PREND DES VALEURS DISCRETES 11

1.1 - Procédure de résolution 12
1.2 - Exemple 13

2. L'ACCROISSEMENT DE LA DEMANDE EST UNE FONCTION CONTINUE DU TEMPS 16

2.1 - La demande croît continûment de manière quelconque 16
2.2 - La demande croît linéairement en fonction du temps 17
2.2.1 - Expression du coût d'une politique de cycle constant 18
2.2.2 - Minimisation du coût 19
2.2.3 - Exemple 20
2.3 - La demande croît exponentiellement en fonction du temps 21
2.3.1 - Expression du coût de la politique optimale 22
2.3.2 - Minimisation du coût 23
2.3.3 - Résultats numériques 24

CHAPITRE II : MODÈLES D'EXPANSION DE CAPACITÉ AVEC IMPORTATIONS PERMISES, MAIS SANS STOCKAGE 26

1. L'ACCROISSEMENT DE LA DEMANDE PREND DES VALEURS DISCRETES 27

1.1 - Définitions 28
1.2 - Propriétés 28
1.3 - Théorème du point de régénération 29
1.4 - Recherche du vecteur-capacité optimal 31
1.5 - Exemple 32

2. L'ACCROISSEMENT DE LA DEMANDE EST UNE FONCTION CONTINUE DU TEMPS 34

2.1 - La demande croît continûment de manière quelconque 34
2.1.1 - Critère d'admissibilité 35
2.1.2 - Théorème du point de régénération 35
2.2 - La demande croît linéairement en fonction du temps 38
2.2.1 - Conditions d'optimalité 39
2.2.2 - Expression du coût d'une politique de cycle constant optimale 40
2.2.3 - Recherche de l'optimum 41
2.2.4 - Exemple 42
2.2.5 - Etude de sensibilité - Résultats numériques 45
2.3 - La demande est une fonction exponentielle 45
2.3.1 - Conditions d'optimalité 46
2.3.2 - Expression du coût 47
2.3.3 - Méthode de résolution de J.C. BERRETTA et F. MOBASHERI : Procédure I 51
2.3.4 - Discussion de la méthode 58
2.3.5 - Procédure de résolution : Procédure II 58
2.3.6 - Résultats numériques 60

2.3.7 - Influence du choix de l'horizon sur la politique optimale 61

2.3.8 - Comparaison des deux méthodes 63

CHAPITRE III : MODÈLES D'EXPANSION DE CAPACITÉ AVEC POSSIBILITÉ DE STOCKAGE 66

1. LA DEMANDE CROÎT CONTINÛMENT DE MANIERE QUELCONQUE 68

1.1 - Les importations ne sont pas autorisées 68

1.1.1 - Conditions nécessaires d'optimalité 68

1.1.2 - Expression du coût 71

1.2 - Les importations sont autorisées 72

1.2.1 - Conditions nécessaires d'optimalité 72

1.2.2 - Expression du coût 74

2. LA DEMANDE CROÎT LINEAIREMENT EN FONCTION DU TEMPS 76

2.1 - Les importations ne sont pas autorisées 77

2.1.1 - Conditions nécessaires d'optimalité 77

2.1.2 - Expression du coût à l'optimum 78

2.1.3 - Exemple 80

2.1.4 - Résultats numériques 82

2.1.5 - Influence des variations des paramètres 82

2.2 - Les importations sont autorisées 91

2.2.1 - Conditions nécessaires d'optimalité 91

2.2.2 - Expression du coût à l'optimum 91

2.2.3 - Méthode de résolution 93

3. LA DEMANDE EST UNE FONCTION EXPONENTIELLE DU TEMPS

3.1 - Les importations ne sont pas autorisées 94

3.1.1 - Conditions nécessaires d'optimalité 94

3.1.2 - Expression du coût à l'optimum 95

3.2 - Les importations sont autorisées 97

3.2.1 - Conditions nécessaires d'optimalité 97

3.2.2 - Expression du coût à l'optimum 98

3.3 - Méthode de résolution 100

INTRODUCTION

La planification d'une branche d'une économie se fait généralement en plusieurs étapes correspondant à différents niveaux d'agrégation : en un premier temps on détermine, si possible d'une manière quantitative, les décisions de base ; on étudie ensuite des projets détaillés en tenant compte de ces décisions.

La première étape de la planification, appelée par A.S. MANNE [18] "preinvestment programming" peut être éclairée par l'usage de modèles d'optimisation simples ; nous étudierons dans la suite de tels modèles qui auront pour but de déterminer, pour la branche considérée, le nombre d'usines à construire, la taille de ces usines, leur localisation, et la fréquence de construction. Chaque fois que l'on construit une nouvelle usine, on dira que l'on fait une <u>expansion de capacité</u>, la <u>capacité</u> d'une entreprise étant son taux maximum de production ; l'ensemble des éléments caractérisant les expansions successives sera appelé <u>politique</u>.

Les modèles ont pour but de déterminer une politique optimale ; le critère d'optimalité est en général la minimisation des coûts à long terme, coûts que l'on actualise à l'origine pour permettre une comparaison entre les différentes politiques.

Les résultats des modèles étudiés devront être interprétés avec d'autant plus de prudence que l'économie considérée est plus élaborée ; et c'est pour cette raison que les principales applications de ces modèles sont relatives aux pays en voie de développement, dans lesquels il n'y a pas lieu, pour les branches considérées, de tenir compte de la concurrence.

De nombreux modèles d'expansion de capacité ont été élaborés ; ils diffèrent par le choix des facteurs pris en compte ou par les hypothèses faites sur ces facteurs.

A.S. MANNE a édité en 1967 un ouvrage [18] regroupant diverses études sur des projets d'expansion de capacité dans différentes industries en Inde ; les modèles utilisés sont déterministes, relatifs au cas d'une ou de plusieurs zones de production et de consommation ; les importations sont permises ou non, et différentes hypothèses sont faites sur la croissance de la demande : dans une première partie (chapitres 1 à 8), A.S. MANNE étudie le cas d'une demande croissant linéairement,sans importations temporaires, pour une ou plusieurs zones de production ; les modèles obtenus sont appliqués aux industries de l'aluminium, de la soude caustique, du ciment et des engrais azotés. Dans une seconde partie (chapitres 9 à 11) T.N. SRINIVASAN étudie le cas d'une croissance géométrique de la demande, D. ERLENKOTTER le cas où des importations temporaires sont permises, lorsque la croissance de la demande est linéaire, et A.S. MANNE et A.F. VEINOTT le cas où la demande croît de manière arbitraire. Dans une troisième partie (chapitres 12 à 14), A.S. MANNE et D. ERLENKOTTER étudient les cas où il y a de deux à quatre zones de production et de consommation.

Ces modèles peuvent s'appliquer à d'autres branches que celles de l'industrie lourde : très récemment encore, S.C. AGGARWAL et R.E. BENTZ [1] ont utilisé le modèle de A.S. MANNE [19], puis celui de D. ERLENKOTTER [6] afin de déterminer la politique optimale d'une fabrique de vêtements ; la comparaison des coûts calculés leur a permis de conclure qu'il y a avantage à faire des importations temporaires puisque cela implique une réduction de 24% du coût.

Alors que, dans les ouvrages précédemment cités, seule une demande à taux de croissance positif ou nul est considérée, R.J. GIGLIO [11] complète les résultats de T.N. SRINIVASAN [22] en étudiant le cas d'une demande dont le taux de croissance géométrique est négatif : après avoir remarqué que la politique optimale consiste à faire les constructions à intervalles de temps réguliers, il la détermine par dérivation du coût. Mais, dans une note récente, A.J. KALOTAY [15] constate que les résultats de T.N. SRINIVASAN et de R.J. GIGLIO sont des cas particuliers des résultats qu'avait déjà établis SINDEN [21] plusieurs années auparavant : celui-ci avait en effet démontré que la politique optimale était de construire à intervalles de temps constants dans le cas de fonctions d'investissement et de demandes plus générales.

J.C. BERRETTA et F. MOBASHERI [3] ont poursuivi l'étude de A.S. MANNE et de ses collaborateurs en considérant le cas d'une demande exponentielle, lorsque les importations sont permises, et ont appliqué leurs résultats à l'industrie de l'aluminium en Argentine.

Aucun des modèles précédents ne prend en compte l'influence du progrès technique, mais cet aspect du problème n'a pourtant pas été négligé : H. HINOMOTO [12] a étudié l'influence du progrès technique sur les coûts de production et les coûts d'investissement ; le critère d'optimalité utilisé est la maximisation du profit, ce qui permet de déterminer, à partir de dérivations, des conditions nécessaires sur les dates et tailles des expansions de capacité. Toutefois, aucun algorithme de résolution n'est proposé pour déterminer les inconnues.

Plus récemment, J. JASKOLD - GABSZEWICZ et J.P. VIAL [13] ont utilisé les résultats de A.S. MANNE [19] relatifs au cas d'une demande linéaire, lorsque l'excès de capacité est toujours positif ou nul (pas de pénurie, ni importations), pour caractériser la politique optimale quand le progrès technique implique un changement de la fonction coût d'investissement au cours du temps, celle-ci étant supposée être une fonction linéaire de la taille de l'expansion.

Des travaux ont été faits aussi à propos du problème d'expansion de capacité dans le cas de plusieurs zones de production et de consommation : D. ERLENKOTTER [7] a poursuivi son étude relatée dans "Investment for Capacity Expansion" [18] et a comparé les coûts minima nécessaires pour satisfaire la demande dans plusieurs zones, d'une part lorsque chaque zone pratique une politique d'autarcie, et d'autre part lorsque des échanges peuvent se faire entre les zones à un coût unitaire constant par unité de distance ; les principales hypothèses simplificatrices sont les suivantes : les zones sont réparties uniformément sur un espace infini, et leur demande croît au même taux constant. Une méthode de résolution (donnant des résultats approchés) basée sur la programmation dynamique permet de déterminer dans quelles zones et à quels moments il est plus avantageux de construire, et entre quelles zones les échanges doivent se faire, tout d'abord lorsque chaque zone est isolée, puis dans le cas où les zones peuvent se regrouper par régions de deux, trois ou quatre. Les comparaisons des coûts permettent de conclure que des économies de coût non négligeables sont faites lorsque le regroupement des zones est permis.

M. CUENOD, A. DUVAL et M. KUMMERMAN [5] ont étudié le problème de la localisation dans le temps et dans l'espace d'un système de production et de distribution, de façon à minimiser le coût actualisé de l'ensemble des frais d'investissements, de production et de distribution ; ils traitent plus particulièrement le cas où les fonctions coûts d'investissements et de production sont sujettes à des économies d'échelle avec variations discrètes, et ils utilisent alors pour déterminer la politique optimale une méthode de "Séparation et Evaluation Progressive".

D'autres orientations ont été prises dans les recherches récentes : lorsque les projets d'expansion de capacité sont en nombre fini, et que les coûts et capacités de production sont connus , D. ERLENKOTTER [8] détermine, à l'aide de la programmation dynamique, l'ordre dans lequel ces projets seront choisis, et à quel moment ils seront effectivement réalisés, de façon à satisfaire la demande au moindre coût. De plus, il précise la manière dont l'algorithme peut être modifié si les projets sont interdépendants. A.J. KALOTAY [14] traite le problème de choix entre deux types d'investissement pour une firme qui assure deux sortes de services : l'équipement le plus cher est d'utilisation générale, tandis que l'autre, meilleur marché, est spécialisé et ne permet d'assurer que l'un des deux services ; l'auteur généralise ainsi le problème étudié par A.S. MANNE [17] et T.N. SRINIVASAN [22] ; il obtient une borne inférieure du coût de la politique dans le cas d'une demande linéaire ou exponentielle, et précise des conditions dans lesquelles il y a intérêt à utiliser l'équipement spécialisé.

KIRBY [16] a groupé différents modèles en une seule classe, lorsque la demande est continue et croissante ; ces modèles prennent en compte les coûts d'investissement, les pénalités quand la demande est supérieure à la capacité de production disponible, les revenus par unité produite, et les coûts de production ; un algorithme de programmation dynamique est proposé pour déterminer la politique optimale de cette classe de modèles.

Tous les modèles précédemment cités sont des modèles déterministes ; R.J. GIGLIO [10] s'est intéressé aux modèles stochastiques d'expansion de capacité, avec importations éventuelles : il traite tout d'abord le cas où la demande est une variable aléatoire indépendante du temps ; dans ce cas, la capacité optimale est celle qui annule la dérivée du profit ; les calculs sont faits avec l'hypothèse d'une construction ayant une durée de vie infinie, puis en tenant compte d'une durée de vie aléatoire du projet. R.J. GIGLIO considère ensuite le cas dynamique, l'élément aléatoire de la demande étant sa différence par rapport à un trend linéaire, d'espérance mathématique nulle ; deux méthodes donnant une solution approchée sont proposées, qui ramènent le problème à la détermination d'une politique optimale dans le cas statique.

Dans un article, daté de 1969, où ils passent en revue les modèles d'expansion de capacité existant à cette date, J.K. SENGUPTA et K.A. FOX [9] déplorent qu'aucun modèle ne considère les possibilités de stockage. Depuis lors, à notre connaissance, seul C.S. TAPIERO [24] s'est penché sur ce problème : il suppose les dates des expansions de capacité connues, et établit, par l'intermédiaire des multiplicateurs de LAGRANGE, une condition nécessaire d'optimalité lorsque le stockage est autorisé ; l'interprétation économique de cette condition est que le coût total (de production, de stockage, et d'investissement) encouru pendant l'intervalle de temps situé entre deux expansions successives doit être égal à la somme des coûts marginaux d'investissement pour les deux périodes suivantes. Mais l'auteur ne propose pas d'algorithme de résolution.

Aussi, nous reprendrons ce problème, en le présentant comme une généralisation des modèles de A.S. MANNE et ses collaborateurs et de J.C. BERRETTA et F. MOBASHERI :

Après avoir résumé, dans un chapitre préliminaire, les hypothèses et notations utilisées, nous regrouperons en un premier chapitre les modèles de A.S. MANNE et A.F. VEINOTT [20], de A.S. MANNE [19] et de T.N. SRINIVASAN [22] dans lesquels ni importations, ni stockage ne sont permis.

Dans un second chapitre, nous envisagerons la possibilité d'un excès de capacité négatif, la pénurie étant comblée par des importations ; nous nous réfèrerons alors aux modèles de A.S. MANNE et A.F. VEINOTT [20] , de D. ERLENKOTTER [6], de J.C. BERRETTA et F. MOBASHERI [3] et suggèrerons en particulier une méthode de résolution différente de celle qu'ont proposée ces deux derniers auteurs.

L'objet du troisième chapitre est une généralisation des modèles précédents au cas où le stockage est autorisé, et les résultats théoriques sont utilisés pour résoudre le problème concret qu'a traité D. ERLENKOTTER [6] lorsque seules les importations étaient permises ; la comparaison des coûts optimaux mettra en évidence le fait que l'entrepreneur a avantage à tenir compte des possibilités de stockage s'il désire minimiser les coûts de sa politique d'expansion à long terme.

CHAPITRE PRÉLIMINAIRE

HYPOTHESES ET NOTATIONS

Nous précisons dans ce chapitre les hypothèses nécessaires à la validité des raisonnements qui seront faits au cours de l'exposé, hypothèses que nous qualifierons d' "hypothèses générales" lorsque nous y ferons référence.

Puis nous donnerons la signification des notations qui seront utilisées.

1 - HYPOTHÈSES GÉNÉRALES

H1 - Les modèles proposés sont des modèles déterministes ; en particulier la demande est supposée connue à tout moment.

H2 - Nous ne tenons pas compte de l'influence du progrès technique sur les coûts.

H3 - L'étude est limitée à la détermination de la politique optimale d'une seule zone de production, alimentant la demande d'un seul type de produit.

H4 - La zone de production considérée n'exporte pas : elle satisfait seulement sa propre demande.

H5 - Il n'y a pas de contrainte de capital.

H6 - Une nouvelle usine peut être mise en route à tout moment.

H7 - La durée de vie des usines est infinie : on ne tient pas compte de l'obsolescence.

H8 - Les possibilités d'importations et de stockage, quand elles existent, sont illimitées.

H9 - La demande est une fonction croissante du temps, et doit être satisfaite à tout moment.

H10 - A l'instant initial, l'excès de capacité est nul ; pour satisfaire la demande à l'origine, il faudra donc

- ou construire,
- ou importer si les importations sont permises,
- ou utiliser des quantités dont on dispose en stock.

H11 - Nous supposons que les coûts de production ne sont pas sujets à une économie d'échelle, c'est-à-dire qu'ils sont proportionnels à la quantité produite, et donc les mêmes quelle que soit la politique adoptée ; nous n'en tiendrons pas compte dans l'expression du coût total à minimiser.

H12 - La fonction d'investissement est sujette à une économie d'échelle.

2 - NOTATIONS

$D(0)$ (tonnes/année) : demande initiale.

$D(t)$ ((tonnes/année)/année) : accroissement de la demande, lorsqu'il est continu.

D_t ((tonnes/année)/année) : accroissement de la demande de la période (t-1) à la période t.

$\mathcal{D}(t)$ (tonnes/année) : valeur de la demande à la date t.

D ((tonnes/année)/année) : accroissement annuel de la demande, quand il est constant.

g (% par an) : taux de croissance géométrique de la demande, quand celle-ci est une fonction exponentielle du temps.

$t_0=0, t_1, t_2, \ldots$ (années) : points de régénération, c'est-à-dire moments où l'excès de capacité est nul.

v_k (tonnes/année) : taille de la $(k+1)^{\text{ième}}$ usine construite à la période k (ou à $t = t_k$ lorsque les dates de construction correspondent aux points de régénération).

$v=(v_0, v_1, v_2, \ldots)$: vecteur capacité.

x_k (années) : intervalle de temps entre les deux points de régénération successifs t_k et t_{k+1} ; il correspond au nombre d'années pendant lesquelles la somme des accroissements de la demande est égale à la capacité de la $(k+1)^{\text{ième}}$ usine.

x (années) : intervalle de temps entre deux points de régénération successifs, quand il est constant.

y_k (années) : intervalle de temps entre le point de régénération t_k et la construction de la $(k+1)^{\text{ième}}$ usine (donc temps d'importation s'il n'y a pas de stockage).

y (années) : temps d'importation pendant une période, quand il est constant.

y_k^1 (années) : durée de la période de constitution du stock, précédant le point de régénération t_k.

y_k^2 (années) : durée de la période d'utilisation du stock, suivant t_k.

y_k^3 (années) : durée de la période d'importations temporaires pendant la période k.

z_k (tonnes/année) : excès de capacité à la fin de la période k.

r (% par an) : taux d'escompte annuel.

e^{-rt} : facteur d'actualisation à l'origine des coûts intervenant à la date t.

$f(v_k)$ (unités monétaires) : fonction d'investissement d'une usine de taille v_k. On la suppose différentiable.

a : facteur d'économie d'échelle de la fonction d'investissement ($0<a<1$).

A : constante de proportionnalité si la fonction d'investissement est de la forme $f(v) = A.v^a$.

$C_k(v_k)$ (unités monétaires) : coût de construction, actualisé à l'origine, de l'usine de taille v_k.

p_t (unités monétaires/tonne) : pénalité pour une unité importée à la date t ; elle est définie comme étant la différence entre le prix d'une tonne importée et le coût auquel reviendrait cette tonne si elle était fabriquée dans la zone étudiée.

p (unités monétaires/tonne) : pénalité pour une unité importée, lorsqu'elle est constante.

s (unités monétaires/tonne/an) : coût de stockage (supposé constant) par unité stockée et par an.

c_{ik} (unités monétaires) : valeur actualisée de tous les coûts encourus pendant les périodes situées entre les deux points de régénération successifs i et k, quand il n'y a ni importations, ni stockage.

c_{ik}^j (unités monétaires) : valeur actualisée de tous les coûts encourus pendant les périodes situées entre les deux points de régénération successifs i et k, quand on construit une usine à la date $t=j$, $i+1 \leq j \leq k$, les importations étant permises.

I_k (unités monétaires) : coût afférent à la période k, comprenant les coûts de construction, de stockage, d'importation.

$C(\pi, t_k)$ (unités monétaires) : somme des coûts actualisés, intervenant après le point de régénération t_k, pour la politique π.

$C(\pi)$ (unités monétaires) : coût total actualisé de la politique π.

CHAPITRE I

MODELES D'EXPANSION DE CAPACITE SANS IMPORTATIONS, NI STOCKAGE

Dans ce premier chapitre, nous ajouterons aux hypothèses générales énoncées précédemment les conditions suivantes :

H13 - La demande d'une zone n'est satisfaite que par sa propre production ; il n'y a donc pas d'importations.

H14 - Le stockage n'est pas autorisé : les quantités fabriquées alimentent, dès leur production, la demande de la zone.

Sous ces hypothèses, nous déterminerons la politique optimale à l'aide de raisonnements différents selon que l'accroissement de la demande prend des valeurs discrètes dans le temps, ou qu'il est une fonction continue du temps : dans le premier cas, nous aurons recours à la programmation dynamique; dans le second cas, nous utiliserons le calcul différentiel et intégral.

1 - L'ACCROISSEMENT DE LA DEMANDE PREND DES VALEURS DISCRÈTES

Nous adapterons ici les résultats de MANNE et VEINOTT [20] au cas plus particulier que nous étudions dans cette section.

Supposons que le temps soit partagé en T périodes discrètes, et que l'augmentation de la demande de la période (t-1) à la période t soit une constante connue D_t positive ou nulle pour tout $t \in \{1,2,\dots,T\}$ (et telle que $\sum_{t=1}^{T} D_t > 0$).

Soient :

$C_t(v_t)$ le coût actualisé encouru pendant la $t^{\text{ième}}$ période, où l'usine de taille v_t est construite ;

z_t l'excès de capacité, positif ou nul ici puisqu'il n'y a pas d'importations, à la fin de la $t^{\text{ième}}$ période. Les z_t sont définis comme suit :

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_t &= \sum_{j=1}^{t} (v_j - D_j) \qquad \forall\, t = 1,\dots,T \end{aligned}\right\} \quad ; \qquad \text{(I.1.1)}$$

$v = (v_1, v_2, \dots, v_T)$ le vecteur capacité, dont les composantes v_i sont positives, ou éventuellement nulles.

Le coût, actualisé à la première période, de la politique π associée au vecteur capacité v est :

$$C(\pi) = \sum_{t=1}^{T} C_t(v_t), \qquad \text{(I.1.2)}$$

somme des coûts actualisés encourus pendant toutes les périodes t, pour t=1,2,...,T.

<u>*Théorème 1.1*</u> *Lorsqu'il n'y a ni importations, ni stockage, les usines devront être construites aux moments où l'excès de capacité est nul, c'est-à-dire aux points de régénération.*

Démonstration :

Soient π^* une politique optimale, $v^* = (v_1^*, v_2^*, \dots)$ le vecteur capacité optimal, et $t_0^*, t_1^*, t_2^*, \dots$ les points de régénération correspondants.

Si la $(k+1)^{\text{ième}}$ usine est construite avant la date t_k^*,

- ou bien l'excès de capacité est utilisé à la production, et il faudrait stocker le surplus, ou l'exporter, ce qui est contraire aux hypothèses H14 et H4 ;

- ou bien l'excès de capacité reste inutilisé, et alors la date de construction pourrait être retardée jusqu'en t_k^*, ce qui déterminerait, à cause du facteur d'actualisation, une politique de coût inférieur à $C(\pi^*)$, et π^* ne serait donc pas optimale.

Par conséquent, la $(k+1)^{\text{ième}}$ usine ne peut être construite avant la date t_k^* ; en outre, si elle était construite après t_k^*, l'une au moins des hypothèses H9 (satisfaction de la demande à tout moment), ou H13 (importations non autorisées) ne serait pas vérifiée.

Nous en déduisons que, sous les hypothèses posées, la politique optimale consiste à construire les usines aux points de régénération. □

1.1 - PROCEDURE DE RESOLUTION

Soient i et k deux points de régénération successifs. Puisque $z_i = 0$, il faudra construire à la période (i+1) une usine dont la capacité devra satisfaire tous les accroissements de demande jusqu'à la prochaîne construction, c'est-à-dire jusque k :

$$\left.\begin{aligned} v_{i+1} &= \sum_{t=i+1}^{k} D_t \\ v_t &= 0 \quad \text{pour } t = i+2, i+3, \dots, k \end{aligned}\right\} \qquad (I.1.3)$$

d'après le théorème précédent.

Si c_{ik} est la valeur actualisée de tous les coûts encourus pendant les périodes i+1, i+2,...,k,

$$c_{ik} = \sum_{t=i+1}^{k} C_t(v_t), \qquad (I.1.4)$$

où les v_t sont donnés par les équations (I.1.3).

Si nous supposons qu'en fin de période T l'excès de capacité est nul, nous pourrons utiliser le principe de la programmation dynamique [2] suivant lequel : "une politique optimale est telle que, quels que soient l'état initial (respectivement final) et la décision initiale (respectivement finale), les décisions suivantes (respectivement précédentes) doivent constituer une politique optimale par rapport à l'état résultant de la première (respectivement dernière) décision."

En vertu de ce principe, nous calculerons chaque f_i, pour $i=T,T-1,T-2,\dots,2,1$, minimum du coût actualisé des constructions permettant de satisfaire les accroissements de demande du point de régénération i à l'horizon T :

$$\left.\begin{aligned} f_T &= 0 \\ f_i &= \min_{i<k\leq T} (c_{ik} + f_k) \qquad \forall\ i = 0,1,\dots,T-1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.1.5)}$$

Nous déterminerons ainsi, à partir d'un point de régénération fixé i, le point de régénération suivant, k, qui permet de minimiser c_{ik}, et pourrons en déduire à quels moments il est plus rentable de construire.

1.2 - Pour illustrer la méthode, reprenons l'exemple de MANNE et VEINOTT [20] :

Les données sont les suivantes :

l'horizon T est égal à 6 ;

les accroissements de demande D_t aux différentes périodes sont :

$$\begin{array}{ll} D_1 = 0.5 & D_4 = 1.5 \\ D_2 = 1 & D_5 = 1 \\ D_3 = 1.5 & D_6 = 0.5\ ; \end{array}$$

les coûts $C_t(v_t)$ sont, pour $t=1,2,\dots 6$:

$$C_t(v_t) = 0 \quad \text{si} \quad v_t = 0$$

$$C_t(v_t) = (0.8)^{t-1}\ (5+10v_t) \quad \text{si} \quad v_t > 0.$$

Calculons les c_{ik} :

$$c_{01} = \sum_{t=1}^{1} C_t(v_t) = C_1(v_1) \text{ d'après (I.1.4),}$$

$$\text{et} \quad v_1 = \sum_{t=1}^{1} D_t = D_1 = 0.5 \quad \text{d'après (I.1.3).}$$

Nous avons donc $c_{01} = C_1(0.5) = (0.8)^\circ * (5+10*0.5) = 10.$

$$c_{02} = \sum_{t=1}^{2} C_t(v_t) = C_1(v_1) + C_2(v_2) \text{ d'après (I.1.4) ;}$$

si l'usine est construite en t=1, $v_2 = 0$

$$v_1 = \sum_{t=1}^{2} D_t = D_1 + D_2 = 1.5$$

et donc $c_{02} = C_1(1.5) = (0.8)^\circ * (5+10*1.5) = 20.$

.....

Les résultats des calculs des c_{ik} sont les suivants :

point de régénération en i= \ point de régénération en k=	1	2	3	4	5	6
0	10.	20.	35.	50.	60.	65.
1		12.	24.	36.	44.	48.
2			12.8	22.4	28.8	32.
3				10.2	15.4	17.9
4					6.2	8.2
5						3.3

Le calcul des f_i à l'aide des formules (I.1.5) donne les résultats suivants :

$f_6 = 0$;

$f_5 = \min_{5<k\leq 6} (c_{5k} + f_k) = c_{56} + f_6 = 3.3$;

$f_4 = \min_{4<k\leq 6} (c_{4k} + f_k) = \min [(6.2+3.3), 8.2] = 8.2 = c_{46} + f_6$;

$f_3 = \min_{3<k\leq 6} (c_{3k} + f_k) = c_{36} + f_6 = 17.9$;

$f_2 = \min_{2<k\leq 6} (c_{2k} + f_k) = c_{24} + f_4 = 30.6$;

$f_1 = \min_{1<k\leq 6} (c_{1k} + f_k) = c_{13} + f_3 = 41.9$;

$f_0 = \min_{0<k\leq 6} (c_{0k} + f_k) = c_{02} + f_2 = 50.6$;

ce qui veut dire que, puisque 0 est le premier point de régénération, le coût total minimum sera obtenu si le point de régénération suivant est t=2 ; et si t=2 est point de régénération, le coût minimum sera obtenu si le point de régénération suivant est t=4, ceci d'après l'expression de f_2 ; puis, l'expression de f_4 nous permet de constater que l'on aura intérêt à prendre comme point de régénération suivant t=6.

On construira donc des usines aux périodes 1,3 et 5. Les tailles des usines construites sont, d'après (I.1.3) :

$$v_1^* = D_1 + D_2 = 1.5 \;;$$

$$v_3^* = D_3 + D_4 = 3 \;;$$

$$v_5^* = D_5 + D_6 = 1.5 \;;$$

$$v_2^* = v_4^* = v_6^* = 0.$$

Le coût de cette politique sera :

$$C(\pi^*) = f_0 = c_{02} + f_2 = c_{02} + c_{24} + f_4 = c_{02} + c_{24} + c_{46} + f_6 = 50.6.$$

2 - L'ACCROISSEMENT DE LA DEMANDE EST UNE FONCTION CONTINUE DU TEMPS.

Soit D(t) l'accroissement de la demande de la date t à la date (t+dt).

Nous supposerons, dans cette section, que D(t) est une fonction continue, intégrable, et non négative sur toute la période étudiée.

Nous donnerons tout d'abord une méthode permettant de définir la politique optimale pour une fonction D(t) quelconque, continue et croissante. Puis nous appliquerons cette méthode au cas où la demande croît à un taux arithmétique constant, et au cas où la demande croît à un taux géométrique constant ; nous reprendrons à ce propos les travaux de MANNE [19] et SRINIVASAN [22].

Les notations sont les suivantes :

T+1 est le nombre d'expansions à déterminer ;

$t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_T$ sont les points de régénération, c'est-à-dire les moments où l'excès de capacité est nul. Ils correspondent ici, puisqu'il n'y a ni importations ni stockage, aux dates de construction ;

v_i est la taille de la $(i+1)^{\text{ième}}$ usine, construite à la date $t = t_i$;

$v = (v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_T)$ est le vecteur capacité ;

$f(v_i)$ est la fonction coût d'investissement de l'usine de taille v_i. On suppose cette fonction continue, dérivable, et indépendante de la période considérée ;

$C(\pi)$ est le coût global, actualisé à l'origine, de la politique π associée au vecteur capacité v ;

r est le taux d'intérêt, supposé constant pendant toute la période étudiée.

2.1 - LA DEMANDE CROIT CONTINUMENT DE MANIERE QUELCONQUE

Le coût global, $C(\pi)$, est égal à la somme des coûts d'investissement, actualisés, de chaque usine :

$$C(\pi) = f(v_0) + e^{-rt_1}.f(v_1) + e^{-rt_2}.f(v_2) + \ldots + e^{-rt_i}.f(v_i) + \ldots + e^{-rt_T}.f(v_T) \tag{I.2.1}$$

Puisque les usines doivent produire les quantités nécessaires pour satisfaire les accroissements de demande, leurs tailles sont définies par :

$$v_0 = \int_0^{t_1} D(t).dt,$$
$$v_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} D(t).dt, \quad i=1,2,\ldots,T-1. \qquad (I.2.2)$$

La fonction C étant une fonction continue des t_i, comme somme de fonctions continues, son minimum, s'il existe, est donné par les valeurs t_i^* de t_i qui annulent les dérivées partielles $\frac{\partial C(\pi)}{\partial t_i}$, pour $i=1,2,\ldots,T$.

v_{i-1} et v_i étant fonctions de t_i,

$$\frac{\partial C(\pi)}{\partial t_i} = - re^{-rt_i}.f(v_i) + e^{-rt_i}.\frac{\partial f(v_i)}{\partial t_i} + e^{-rt_{i-1}}.\frac{\partial f(v_{i-1})}{\partial t_i} \ ; \qquad (I.2.3)$$

$\frac{\partial C(\pi)}{\partial t_i}$ est donc une fonction de t_{i-1}, t_i, et t_{i+1} (puisque v_i est fonction de t_{i+1}).

Les valeurs t_1^*, t_2^*, ..., t_T^* sont les valeurs des t_i qui vérifient les équations

$$\frac{\partial C(\pi)}{\partial t_i} = 0, \qquad (I.2.4)$$

où $i=1,2,\ldots,T$;

La ième équation étant une relation entre t_{i-1}^*, t_i^*, et t_{i+1}^*, nous ne pouvons pas, en général, trouver récursivement des expressions analytiques pour les t_i^*.

D'autre part, des études pratiques faites par MANNE en Inde [18] et BERRETTA et MOBASHERI en Argentine [3] ont permis de constater que le fait de se baser sur les hypothèses d'un taux de croissance arithmétique ou géométrique constant conduisait à des résultats assez proches de la réalité.

Nous considèrerons donc ces cas particuliers :

2.2 - LA DEMANDE CROIT LINEAIREMENT EN FONCTION DU TEMPS,

c'est-à-dire que l'accroissement annuel de la demande est constant ; soit D sa valeur.

Nous appellerons politique de cycle constant une politique où les constructions sont faites à intervalles de temps constants.

Nous ajouterons aux hypothèses données au début de ce chapitre l'hypothèse :

H15 - L'horizon est infini.

Sous ces conditions, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.1 *La politique optimale est une politique de cycle constant, et consiste à construire des usines de même taille.*

Démonstration :

Supposons que la taille optimale de la première usine soit $v_0^* = x^*D$ (d'après les relations (I.2.2) où $D(t) = D$) ; la production de cette usine satisfera l'accroissement de demande pendant x^* années. A l'instant $t = x^*$, l'excès de capacité est nul, et l'on se retrouve en un point de régénération ; la situation est alors exactement identique, sous les hypothèses énoncées, à celle que l'on avait à l'origine : on construira donc une usine de taille x^*D qui satisfera l'accroissement de demande pendant x^* années ... et ainsi de suite. □

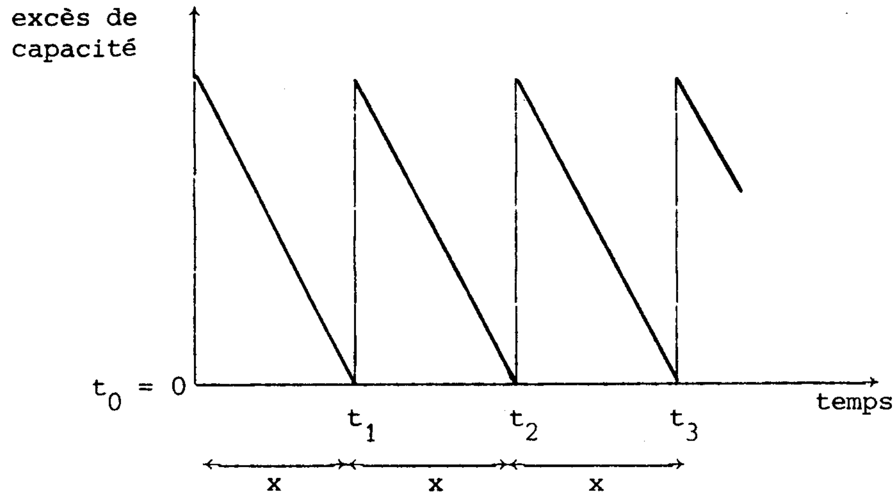
2.2.1 - Expression du coût d'une politique de cycle constant

Soient π une politique de cycle constant, et x l'intervalle de temps entre deux constructions successives ; d'après le théorème précédent, les points de régénération seront :

$$t_0 = 0 \; ; \; t_1 = x \; ; \; t_2 = 2x \; ; \; \ldots \; ; \; t_n = nx \; ; \; \ldots \qquad \text{(I.2.5)}$$

et la taille des usines :

$$v_0 = v_1 = v_2 = \ldots = v_n = \ldots = x.D. \qquad \text{(I.2.6)}$$



Le coût global $C(\pi)$ de cette politique est tel que

$$C(\pi) = f(xD) + e^{-rx}.C(\pi) \ ; \qquad (I.2.7)$$

en effet, le coût total, c'est-à-dire le coût encouru après le premier point de régénération 0, est égal à la somme du coût d'investissement pour la première usine, et du coût encouru après le deuxième point de régénération, actualisé à l'origine par le facteur d'actualisation e^{-rx} ; ce dernier coût est $C(\pi)$ puisque la situation est la même aux différents points de régénération.

De l'équation précédente, nous déduisons la valeur du coût de la politique π :

$$C(\pi) = \frac{f(xD)}{1-e^{-rx}} \qquad (I.2.8)$$

2.2.2 - Minimisation du coût

Si la dérivée par rapport à x du coût $C(\pi)$, ou de son logarithme, est une expression simple de x, la résolution de l'équation obtenue en annulant cette dérivée détermine x^*, intervalle de temps optimal entre deux constructions successives.

Dans le cas contraire, nous pourrons utiliser une méthode d'approximation de l'extrêmum (méthode de FIBONACCI, de DAVIES, SWANN et CAMPEY [4], ou autre) basée sur une comparaison du coût $C(\pi)$ en différents points.

Nous pouvons ainsi définir la politique optimale :

les constructions d'usines seront faites à intervalles réguliers de x^* années ; toutes les usines seront de capacité (x^*D), et le coût actualisé à l'origine de cette politique sera :

$$C(\pi^*) = \frac{f(x^*D)}{1-e^{-rx^*}}$$

2.2.3 - Exemple

Une fonction d'investissement souvent utilisée dans différents types d'industries est $f(v_i) = Av_i^a$, où A est une constante de proportionnalité et a le paramètre d'économie d'échelle.

Dans le cas étudié,

$$f(xD) = A.(xD)^a, \tag{I.2.9}$$

et $$C(\pi) = \frac{A(xD)^a}{1-e^{-rx}} . \tag{I.2.10}$$

L'extrêmum x^* est tel que

$$\frac{d \log C(\pi)}{dx} = 0, \tag{I.2.11}$$

$$\frac{a}{x^*} - \frac{r}{e^{rx^*}-1} = 0, \tag{I.2.12}$$

$$a = \frac{rx^*}{e^{rx^*}-1} \quad ; \tag{I.2.13}$$

il n'y a donc qu'un seul extrêmum.

De plus $\lim\limits_{x\to 0} C(\pi) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} C(\pi) = +\infty$;

on en déduit que x^* est un minimum, et qu'il est indépendant des valeurs de A et D.

MANNE [19] (p.38) a tracé la courbe de x^* en fonction de a pour les valeurs $r = 10\%$ et $r = 15\%$ du taux d'intérêt ; ces courbes sont décroissantes et les valeurs de x^* lorsque $r = 10\%$ sont supérieures à celles qui correspondent au taux d'intérêt $r = 15\%$.

2.3 - LA DEMANDE CROIT EXPONENTIELLEMENT EN FONCTION DU TEMPS

De même que dans la sous-section précédente, nous ajouterons aux hypothèses données au début de ce chapitre l'hypothèse :

H15 - L'horizon est infini.

Soit g le taux de croissance géométrique, supposé constant, de la demande. Nous considèrerons la fonction d'investissement $f(v_i) = A.v_i^a$ où v_i est la taille de l'usine i pour tout i, A une constante de proportionnalité et a le coefficient d'économie d'échelle.

Montrons tout d'abord que la politique optimale, dans ce cas, est une politique de cycle constant, et que les dates de construction seront donc :

$$t_0^{**} = 0 \; ; \; t_1^{**} \; ; \; t_2^{**} = 2t_1^{**} \; ; \; \dots \; ; \; t_n^{**} = nt_1^{**} \; ; \; \dots \tag{I.2.14}$$

<u>Lemme 2.1</u> *La séquence des dates optimales de construction est indépendante de la demande initiale* D(0).

Démonstration :

La taille v_n de l'usine construite à la date t_n^{**} permet de satisfaire l'accroissement cumulé de la demande pendant l'intervalle de temps (t_n^{**}, t_{n+1}^{**}) et est donc égale à

$$v_n = D(0).(e^{gt_{n+1}^{**}} - e^{gt_n^{**}}). \tag{I.2.15}$$

En prenant pour fonction d'investissement la fonction $f(v_i) = A.v_i^a$, la somme, actualisée à l'origine, des coûts de construction associés à la suite $\{t_n^{**}\}$ est

$$C^{**} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-rt_n^{**}} \, . \, A \, . \, [D(0).(e^{gt_{n+1}^{**}} - e^{gt_n^{**}})]^a \, , \tag{I.2.16}$$

$$= A.[D(0)]^a \, . \, \sum_{n=0}^{\infty} e^{-rt_n^{**}} \, . \, (e^{gt_{n+1}^{**}} - e^{gt_n^{**}})^a. \tag{I.2.17}$$

Si l'on considère une suite non optimale $\{t_n\} = 0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ le coût actualisé correspondant est

$$C = A.[D(0)]^a \, . \sum_{n=0}^{\infty} e^{-rt_n} \, . \, (e^{gt_{n+1}} - e^{gt_n})^a \; ; \qquad \text{(I.2.18)}$$

mais la suite $\{t_n^{**}\}$ étant optimale, le coût associé est le minimum :

$C^{**} \leqslant C$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-rt_n^{**}} \, . \, (e^{gt_{n+1}^{**}} - e^{gt_n^{**}})^a \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{-rt_n} \, . \, (e^{gt_{n+1}} - e^{gt_n})^a \qquad \text{(I.2.19)}$$

expression indépendante de D(0).

Donc, si la suite $\{t_n^{**}\}$ est optimale pour une valeur de D(0), elle est optimale pour toute autre valeur de D(0). ◻

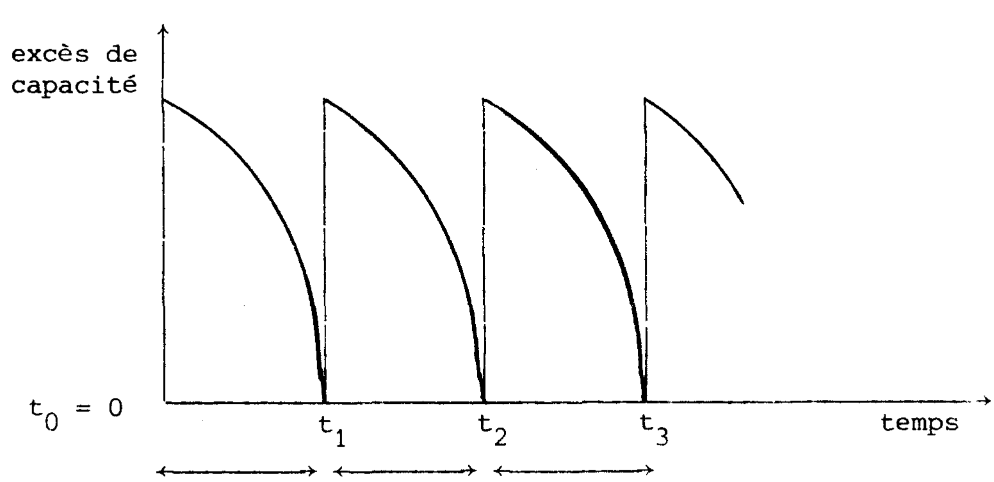
<u>*Théorème 2.2*</u> *La politique optimale est une politique de cycle constant.*

Démonstration :

Il faut donc montrer que $t_n^{**} = n\, t_1^{**} \quad \forall\, n$:

D(0), a,g et r étant donnés pour un horizon infini, si la séquence $\{t_n^{**}\}$ est optimale, la sous-suite commençant à t_1^{**}, c'est-à-dire $(t_1^{**}, t_2^{**}, \ldots, t_n^{**}, \ldots)$ est aussi optimale pour les mêmes valeurs de a, g, et r d'après le lemme 2.1, puisque seule la demande initiale diffère (en t_1^{**} elle est de $D(0).e^{gt_1^{**}}$). Donc la suite $(t_1^{**}, t_1^{**} + t_1^{**}, t_1^{**} + t_2^{**}, \ldots)$ est optimale ; ce qui implique que $t_2^{**} = 2t_1^{**}$. Par récurrence on démontre que $t_n^{**} = nt_1^{**}$ quel que soit n. ◻

2.3.1 - <u>Expression du coût de la politique optimale</u>



La taille v_n de l'usine à construire à la date $t_n^{**} = nx$ doit être égale à l'accroissement de la demande dans l'intervalle $(t_n^{**}, t_{n+1}^{**}) = (nx, (n+1)x)$:

$$v_n = D(0).e^{g(n+1)x} - D(0).e^{gnx}, \tag{I.2.20}$$

$$= D(0).[e^{g(n+1)x} - e^{gnx}] , \tag{I.2.21}$$

et le coût total, actualisé à l'origine d'une politique π de cycle constant est :

$$C(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nrx}.f(v_n), \tag{I.2.22}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nrx}.A.\{D(0).[e^{g(n+1)x} - e^{gnx}]\}^a, \tag{I.2.23}$$

$$= A.[D(0)]^a. \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nrx}.[e^{(n+1)gx} - e^{ngx}]^a. \tag{I.2.24}$$

Pour que la série converge, donc pour que $C(\pi)$ ait un minimum, il faut imposer la condition $\underline{r>ag}$. Dans ce cas,

$$C(\pi) = \frac{A.[D(0)]^a.(e^{gx}-1)^a}{1 - e^{-(r-ag)x}} \tag{I.2.25}$$

2.3.2 - Minimisation du coût

x^{**}, intervalle de temps optimal entre deux constructions successives, est la valeur de x qui minimise le coût total $C(\pi)$ de la politique.

L'extrêmum est la valeur de x qui annule la dérivée logarithmique de $C(\pi)$:

$$\frac{\partial \text{ Log } C(\pi)}{\partial x} = 0, \tag{I.2.26}$$

$$a. \frac{\partial[\text{Log}(e^{gx}-1)]}{\partial x} - \frac{\partial[\text{Log}(1-e^{-(r-ag)x})]}{\partial x} = 0, \tag{I.2.27}$$

$$a. \frac{ge^{gx}}{e^{gx}-1} = \frac{(r-ag).e^{-(r-ag)x}}{1-e^{-(r-ag)x}} \quad ; \tag{I.2.28}$$

Si l'on pose $h = r-ag$ (>0), l'extrêmum est tel que

$$ag \cdot \frac{1}{1-e^{-gx}} = \frac{h}{e^{hx}-1}, \tag{I.2.29}$$

$$\text{ou : } ag \cdot (e^{hx}-1) = h \cdot (1-e^{-gx}). \tag{I.2.30}$$

SRINIVASAN [22] (p.155) a montré que l'extrêmum est un minimum, et que ce minimum est unique.

La politique optimale dans le cas d'une croissance exponentielle de la demande, lorsque ni importations ni stockage ne sont autorisés, peut donc être déterminée comme suit :

l'intervalle entre deux constructions successives est x^{**}, solution de l'équation

$$ag(e^{hx^{**}}-1) = h(1-e^{-gx^{**}}) \ ;$$

les usines sont de taille

$$v_n = D(0).[e^{g(n+1)x^{**}}-e^{gnx^{**}}] \qquad \text{pour } n=1,2,3,\dots \ ;$$

et le coût de la politique π proposée est

$$C(\pi) = \frac{A.[D(0)]^a.(e^{gx^{**}}-1)^a}{1-e^{-(r-ag)x^{**}}}$$

2.3.3 - Résultats numériques

Les paramètres r et g étant fixés à 10%, SRINIVASAN [22] (p.153) a calculé les valeurs de x^{**} correspondant à des valeurs de a, coefficient d'économie d'échelle, comprises entre 40% et 90%. Il constate, en comparant les valeurs de x^{**} trouvées et les valeurs de x^{*}, cycle optimal de construction dans le cas d'une croissance linéaire de la demande, que pour les mêmes valeurs des paramètres, x^{**} est inférieur à x^{*}.

De plus, il a démontré les propriétés suivantes du minimum x^{**} :

- x^{**} est une fonction décroissante du taux d'intérêt r (les autres paramètres restant constants) ;
- lorsque le taux de croissance géométrique de la demande, g, tend vers zéro, le cycle optimal x^{**} tend vers x^{*}, cycle optimal de construction lorsque le taux de de croissance est arithmétique.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, relatif au cas où il n'y a ni importations, ni stockage dans la zone considérée, nous avons étudié plusieurs méthodes de détermination de la politique optimale, correspondant à différentes hypothèses sur la demande :

Si l'on prévoit, sur un horizon infini, une demande croissant d'une façon continue à un taux arithmétique constant, un calcul de dérivée ou une recherche directe du minimum de coût par une méthode de dichotomie nous fournit la valeur du cycle optimal de construction x^* qui est alors constant ;

Si l'on prévoit, toujours sur un horizon infini, une demande croissant exponentiellement, à un taux géométrique constant, et si la fonction d'investissement est du type $f(v_i) = A.v_i^a$, le cycle optimal de construction x^{**} est encore constant, et vérifie une équation dont la résolution numérique ne présente pas de difficulté ;

Dans les autres cas, on pourra utiliser la programmation dynamique qui ne nécessite aucune hypothèse sur la demande, si ce n'est qu'elle augmente dans le temps : si c'est une fonction continue, il suffira de discrétiser le temps en périodes aussi réduites qu'il le faut, de calculer la demande en ces périodes, et d'en déduire les accroissements successifs. Nous sommes alors ramenés à la recherche de la politique optimale lorsque la demande prend des valeurs discrètes, et nous pouvons appliquer la méthode exposée dans la section 1.

CHAPITRE II

MODELES D'EXPANSION DE CAPACITE AVEC IMPORTATIONS PERMISES, MAIS SANS STOCKAGE

En plus des hypothèses générales, nous ferons dans ce chapitre les hypothèses suivantes :

H14 - Le stockage n'est pas autorisé dans la zone étudiée.

H16 - La demande de la zone peut être satisfaite en partie par des importations, qui peuvent être aussi importantes qu'on le désire, moyennant un coût supplémentaire par unité importée, appelé "pénalité d'importation".

Ce chapitre étant une généralisation du précédent, nous reprendrons le même plan d'étude : dans la première section, nous traiterons le cas où l'accroissement de la demande prend des valeurs discrètes ; dans la seconde section, nous étudierons le cas d'une demande continue du temps, et plus particulièrement lorsqu'elle est linéaire ou exponentielle.

1 - L'ACCROISSEMENT DE LA DEMANDE PREND DES VALEURS DISCRÈTES

Les résultats donnés dans cette section sont basés sur certaines propriétés des espaces convexes et des fonctions concaves, et ont été établis par MANNE et VEINOTT [20].

Supposons que l'horizon étudié soit partagé en T périodes. Les notations sont les mêmes que celles qui ont été utilisées dans la section 1 du premier chapitre :

- l'augmentation de la demande de la période (t-1) à la période t est une constante connue D_t positive ou nulle, pour tout $t \in \{1,2,\ldots,T\}$, telle que $\sum_{t=1}^{T} D_t > 0$;

- $C_t(v_t)$ est le coût de construction à la période t de l'usine de taille v_t, actualisé à la première période. Nous supposerons que les fonctions C_t sont concaves (ce qui est le cas dans les quatre études pratiques que MANNE a faites en Inde [18]) ;

- $v = (v_1, v_2, \ldots, v_T)$ est appelé vecteur capacité ;

- z_t est l'excès de capacité (positif, négatif ou nul) à la fin de la $t^{\text{ième}}$ période. Les z_t sont définis par :

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 0\,, \\
z_t &= \sum_{j=1}^{t} (v_j - D_j) \qquad \forall\, t = 1,2,\ldots,T\,;
\end{aligned}
\tag{II.1.1}
$$

- p_t, constante positive, est la pénalité unitaire d'importation, c'est-à-dire le supplément de coût par rapport au coût de production locale, par unité importée à la période t ;

  $C(\pi)$, coût de la politique π associée au vecteur capacité v, actualisé à la première période, peut s'écrire :

$$
C(\pi) = \sum_{t=1}^{T} C_t(v_t) + \sum_{t=1}^{T} p_t \,.\, \max\,(0,-z_t) \tag{II.1.2}
$$

1.1 - DEFINITIONS

1°) Nous dirons que le **vecteur capacité v est admissible** si $v \geqslant 0$ et $z_T = 0$.

2°) Un vecteur capacité admissible est **optimal** s'il minimise la fonction $C(\pi)$ sur l'ensemble V des vecteurs capacités admissibles.

3°) Un **espace de base** est un sous-ensemble de V :

$$V_{i_1,i_2,\ldots,i_{T-1}} = \{v/v \in V \text{ et } (-1)^{i_t}.z_t \geqslant 0 \text{ pour } t=1,2,\ldots,T-1\},$$

où chaque indice $i_t = 0$ ou 1.

Il y a donc 2^{T-1} espaces ainsi définis et, dans ces espaces, z_t est $\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$ selon que $i_t = 0$ ou 1.

Exemple : si $T = 3$, les quatre espaces de base sont :

$$V_{00} = \{v/v \in V,\ z_1 \geqslant 0,\ z_2 \geqslant 0\} ;$$

$$V_{10} = \{v/v \in V,\ z_1 \leqslant 0,\ z_2 \geqslant 0\} ;$$

$$V_{01} = \{v/v \in V,\ z_1 \geqslant 0,\ z_2 \leqslant 0\} ;$$

$$V_{11} = \{v/v \in V,\ z_1 \leqslant 0,\ z_2 \leqslant 0\}.$$

4°) Nous dirons qu'il y a un **point de régénération d'un vecteur capacité** v à la période t si $z_t = 0$.

5°) Un vecteur capacité admissible v possède la **propriété du point de régénération** si entre deux moments où une usine est construite, il y a un point de régénération, c'est-à-dire si, chaque fois que $i < k$ et $v_i > 0$ $v_{i+1} = v_{i+2} = \ldots$ $\ldots = v_{k-1} = 0$ et $v_k > 0$, il y a un point de régénération à une période t, $i \leqslant t \leqslant k-1$.

1.2 - PROPRIETES

1°) L'ensemble V des vecteurs capacités admissibles est convexe, fermé et borné, comme étant l'espace des solutions d'un système fini d'équations et d'inéquations linéaires.

2°) Pour un vecteur capacité admissible, on a nécessairement un point de régénération en t=0 et t=T (conséquence des définitions 1° et 3°, et de la définition des z_t donnée par (II.1.1)).

1.3 - THEOREME 1.1 : THEOREME DU POINT DE REGENERATION

Il existe un vecteur capacité optimal qui possède la propriété du point de régénération.

Ce théorème nous permettra de restreindre la recherche du vecteur capacité optimal v_{opt} parmi les vecteurs qui ont la propriété du point de régénération.

Le théorème du point de régénération est démontré à l'aide de deux lemmes :

Lemme 1.1 *Il existe un vecteur capacité optimal qui est un point extrême d'un espace de base.*

Démonstration :

L'ensemble V des vecteurs capacités admissibles est la réunion des 2^{T-1} espaces de base, qui sont des espaces convexes, fermés, bornés, ayant un nombre fini de points extrêmes puisque chacun d'eux est l'ensemble des solutions d'un système fini d'équations et d'inéquations linéaires.

De plus, $C(\pi)$, dont l'expression est donnée par la formule (II.1.2) est une fonction concave sur chaque espace de base (mais pas nécessairement sur V), comme étant la somme de fonctions concaves sur ces espaces.

La fonction $C(\pi)$ atteint donc son minimum sur chaque espace de base en un point extrême de cet espace. Comme V est la réunion des espaces de base, $C(\pi)$ atteint son minimum sur V en un point extrême d'un espace de base.

Lemme 1.2 *Tout point extrême d'un espace de base possède la propriété du point de régénération.*

Démontrons ce lemme par l'absurde :

Supposons qu'il existe un vecteur v admissible qui ne possède pas la propriété du point de régénération, et montrons qu'un tel vecteur ne peut être point extrême d'un espace de base :

Si un vecteur v admissible ne possède pas la propriété du point de régénération ceci veut dire, d'après la définition 5°, qu'il existe des indices i et k tels que :

$$v_i > 0 \quad v_{i+1} = v_{i+2} = \ldots = v_{k-1} = 0 \text{ et } v_k > 0, \text{ et } z_t \neq 0 \quad \forall\, t \quad i \leqslant t \leqslant k-1.$$

Nous définirons $\bar{v}$ et $\underline{v}$, vecteurs d'un même espace de base que le vecteur v considéré ci-dessus, puis montrerons que v peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire convexe de $\bar{v}$ et $\underline{v}$, ce qui prouvera que v n'est pas un point extrême :

Soit $\varepsilon = \min\,[v_i, v_k, \min\limits_{i \leqslant t \leqslant k-1} |z_t|]$; ε est strictement positif puisque v_i et v_k le sont, et que $z_t \neq 0 \quad \forall\, t,\ i \leqslant t \leqslant k-1$.

Soit u_t le vecteur à T composantes, toutes nulles sauf la $t^{\text{ième}}$, égale à 1.

Définissons $\bar{v}$ et $\underline{v}$: $\bar{v} = v + \varepsilon(u_i - u_k)$,

$$\underline{v} = v - \varepsilon(u_i - u_k) \;;$$

$\bar{v}$ et $\underline{v}$ sont différents de v, et admissibles d'après la définition de ε.

Soient $\bar{z} = (\overline{z_t})$ et $\underline{z} = (\underline{z_t})$ les excès de capacité associés respectivement à $\bar{v}$ et $\underline{v}$;

on a, pour $t \geqslant k$: $z_t = \underline{z_t} = \overline{z_t}$,

pour $i \leqslant t \leqslant k-1$: $\overline{z_t} = z_t + \varepsilon$,

et $\underline{z_t} = z_t - \varepsilon$.

Donc, si $z_t \leqslant 0$, alors $\overline{z_t}$ et $\underline{z_t} \leqslant 0$,

et si $z_t \geqslant 0$, alors $\overline{z_t}$ et $\underline{z_t} \geqslant 0$,

ce qui veut dire que, si v appartient à un espace de base, $\underline{v}$ et $\bar{v}$ appartiennent au même espace.

De plus, $\underline{v} \neq \bar{v}$ puisque $\varepsilon > 0$,

et $v = \frac{1}{2}\,\underline{v} + \frac{1}{2}\,\bar{v}$;

ceci implique que v n'est pas un point extrême de l'espace de base considéré. □

Le théorème du point de régénération se déduit immédiatement des lemmes 1.1 et 1.2.

1.4 - RECHERCHE DU VECTEUR CAPACITE OPTIMAL

D'après le théorème du point de régénération, il suffit de rechercher le vecteur capacité optimal parmi les vecteurs qui possèdent la propriété du point de régénération.

Pour calculer le coût total de la politique déterminée par un vecteur capacité admissible possédant la propriété du point de régénération, on additionne tous les coûts c_{ik} associés à chacun des couples (i,k) de points de régénération. Puis on recherche le vecteur optimal de la même façon que dans le cas où il n'y a pas d'importations, par la programmation dynamique (chapitre I - section 1).

Pour calculer les c_{ik}, nous ferons une optimisation préliminaire qui permettra de minimiser la somme des coûts de construction et d'importations pour les périodes de i à k : pour j fixé, $i+1 \leq j \leq k$, les coûts c_{ik}^{j} de i à k, lorsque l'on construit à la période j, sont :

$$c_{ik}^{j} = C_j\Big(\sum_{t=i+1}^{k} D_t\Big) + \sum_{\substack{t=i+1 \\ t\neq j}}^{k} C_t(0) + \sum_{t=i+1}^{j-1} p_t \cdot \Big(\sum_{\tau=i+1}^{j-1} D_\tau\Big) \; ; \qquad \text{(II.1.3)}$$

puisque nous cherchons à minimiser les coûts, nous poserons

$$c_{ik} = \min_{i+1\leq j\leq k} c_{ik}^{j} \; ; \qquad \text{(II.1.4)}$$

puis nous calculerons les f_i définis par :

$$\left.\begin{aligned} f_T &= 0, \\ f_i &= \min_{i<k\leq T} (c_{ik} + f_k) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.1.5)}$$

de façon à déterminer les points de régénération qui engendrent le coût total minimum.

1.5 - Appliquons la méthode à un exemple proposé par MANNE et VEINOTT [20] (p.189) :

Les données sont les suivantes :

l'horizon T est égal à 6 ;

les accroissements de la demande D_t aux différentes périodes sont :

$$D_1 = 0.5\ ; \qquad D_4 = 1.5\ ;$$
$$D_2 = 1\ ; \qquad D_5 = 1\ ;$$
$$D_3 = 1.5\ ; \qquad D_6 = 0.5\ ;$$

pour $t=1,2,\dots,6,\quad C_t(v_t) = \begin{cases} 0 \text{ si } v_t = 0 \\ (0.8)^{t-1}.(5+10v_t) \text{ si } v_t > 0\ ; \end{cases}$

$p_t = 2 \quad \forall\ t \in \{1,2,\dots,6\}.$

Pour calculer tous les c_{ik}, pour les valeurs de k supérieures à i, nous procèderons de la façon suivante :

Si nous voulons par exemple calculer c_{25}, nous devons comparer les coûts totaux, de construction et d'importation, intervenant de la période 2 à la période 5, lorsque l'usine est construite à j=3,4 ou 5 :

$$c_{25} = \min\ (c_{25}^3,\ c_{25}^4,\ c_{25}^5),$$

avec :

c_{25}^3 = coûts de construction actualisés de l'usine construite en j=3, qui doit satisfaire les accroissements de demande de t=3 à t=5 ($\Longrightarrow v_3 = D_3 + D_4 + D_5$)

+ coûts actualisés encourus aux périodes où il n'y a pas de construction : $\sum\limits_{\substack{t=i+1 \\ t\neq j}}^{k} C_t(0)$

+ pénalités d'importations, nulles ici ;

$$c_{25}^3 = (0.8)^2.[5 + 10\ (1.5 + 1.5 + 1)] + 0 + 0 = 28.8\ ;$$

c_{25}^{4} = coûts de construction actualisés de l'usine construite en j=4 qui doit satisfaire les accroissements de demande de t=3 à t=5.

+ coûts actualisés encourus aux périodes où il n'y a pas de construction

+ pénalités d'importations = 2*1.5 puisque l'on doit importer pendant la troisième période pour satisfaire l'accroissement de demande D_3 ;

$$c_{25}^{4} = (0.8)^3 . [5 + 10(1.5+1.5+1)] + 0 + 2(1.5)$$
$$= 23 + 3 = 26.$$

De la même façon, on calcule c_{25}^{5} :

$$c_{25}^{5} = (0.8)^4 [5 + 10(1.5+1.5+1)] + 0 + 2(1.5) + 2(1.5+1.5)$$
$$= 18.4 + 3 + 6 = 27.4 ;$$

on en déduit

$$c_{25} = \min (c_{25}^{3}, c_{25}^{4}, c_{25}^{5})$$
$$= \min (28.8 ; 26 ; 27.4)$$
$$= 26 = c_{25}^{4} ;$$

la valeur de j optimale est donc j=4 ; ce qui veut dire que, s'il y a un point de régénération à i=2 et le suivant à k=5, nous aurons intérêt à construire une usine à j=4 pour minimiser le coût.

Des calculs analogues peuvent être faits pour tous les c_{ik} ; puis, à l'aide de la programmation dynamique, nous pouvons déterminer, de la même façon que dans le cas où il n'y a pas d'importations (chapitre I - section 1), à quelles périodes et de quelles tailles il faudra construire les usines, pour minimiser le coût total.

<u>Remarque</u> Si nous ne considérons que le seul espace de base :

$$V_{00\ldots0} = \{v \in V \; / \; z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, \ldots, z_T \geq 0\},$$

nous retrouvons le cas où les importations ne sont pas autorisées, et dans ce cas j=i+1.

2 - L'ACCROISSEMENT DE LA DEMANDE EST UNE FONCTION CONTINUE DU TEMPS

D(t), accroissement de la demande de la date t à la date (t+dt) est supposé être une fonction continue, intégrable et non négative sur toute la période étudiée.

Nous ajouterons aux hypothèses énoncées au début du second chapitre les hypothèses suivantes :

H17 - Le taux d'escompte r est constant sur toute la période étudiée, ainsi que les coûts de production.

H18 - La pénalité d'importation unitaire p_t est constante : $p_t = p \quad \forall t$.

H19 - La fonction d'investissement f(v) est continue, différentiable, intégrable, et telle qu'il existe des solutions admissibles.

Les notations utilisées dans cette section sont les mêmes que celles des sections précédentes. De plus :

x_k : intervalle de temps, en années, entre les deux points de régénération successifs t_k et t_{k+1} ;

y_k : intervalle de temps entre le point de régénération t_k et la date de construction qui suit ce point de régénération ; il est égal ici au temps d'importation ;

I_k : coût actualisé afférent à la $k^{\text{ième}}$ période, comprenant les coûts de construction et les coûts d'importations temporaires ;

$C(\pi,t_k)$: somme des coûts actualisés, intervenant après le point de régénération t_k, pour la politique π.

2.1 - LA DEMANDE CROIT CONTINUMENT DE MANIERE QUELCONQUE

Nous rappellerons ici les résultats qu'a établis ERLENKOTTER [6] dans le cas où la demande est une fonction continue quelconque, lorsque les importations sont autorisées.

2.1.1 - Critère d'admissibilité

Une condition nécessaire pour que la taille v_k de la $(k+1)^{\text{ième}}$ usine soit admissible est que le coût annuel du capital utilisé pour l'investissement de l'usine de capacité v_k soit inférieur ou égal au coût d'importation de la quantité v_k que l'on devrait importer annuellement si cette usine n'était pas construite :

$$r.f(v_k) \leqslant p.v_k \tag{II.2.1}$$

2.1.2 - Théorème 2.1 : Théorème du point de régénération

Toute politique optimale $\pi^* = \{(v_k^*, y_k^*)\}$, définie par les tailles des usines et les temps d'importation optimaux, vérifie les propriétés suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & y_k^* \leqslant x_k^*, \\ (ii) & \displaystyle\int_{t_k}^{t_k+y_k^*} D(t)\,dt = \frac{r.f(v_k^*)}{p} \end{array}\right\} \tag{II.2.2}$$

Démonstration :

Envisageons la possibilité $y_k \geqslant x_k$:

Si $y_k \geqslant x_k$,

$C(\pi, t_k)$ = coût actualisé des importations entre t_k et (t_k+y_k), faites pour satisfaire l'accroissement de demande

+ coût de construction actualisé de l'usine de taille v_k

+ coût actualisé des importations entre (t_k+y_k) et $(t_{k+1}+y_{k+1})$ (la $(k+1)^{\text{ième}}$ usine de capacité v_k n'absorbe pas tout le déficit car $x_k \leqslant y_k$)

+ coût actualisé des importations faites entre (t_k+y_k) et $(t_{k+1}+y_{k+1})$ pour satisfaire l'accroissement de demande

+ coût de construction actualisé de l'usine de taille v_{k+1}

+ tous les coûts actualisés qui interviennent ensuite.

$$C(\pi,t_k) = \int_{t_k}^{t_k+y_k}[\int_{t}^{t_k+y_k} p.e^{-rt}.dt].D(t)\ dt + e^{-r(t_k+y_k)}.f(v_k)$$

$$+ \int_{t_k+y_k}^{t_{k+1}+y_{k+1}} p[\int_{t_k}^{t_k+y_k} D(t).dt-v_k].e^{-rt}\ dt$$

$$+ \int_{t_k+y_k}^{t_{k+1}+y_{k+1}} [\int_{t}^{t_{k+1}+y_{k+1}} p.e^{-rt}\ dt].D(t)\ dt$$

$$+ e^{-r(t_{k+1}+y_{k+1})}.f(v_{k+1}) + e^{-r(y_{k+1}+t_{k+1})}.C(\pi,t_{k+1}+y_{k+1}). \qquad \text{(II.2.3)}$$

Nous cherchons à minimiser $C(\pi,t_k)$ par rapport aux y_k, donc y_k^* sera tel que

$$\frac{\partial C(\pi,t_k)}{\partial y_k} = 0\ ; \qquad \text{(II.2.4)}$$

or,

$$\frac{\partial C(\pi,t_k)}{\partial y_k} = \int_{t_k}^{t_k+y_k} [p.e^{-r(t_k+y_k)}].D(t)dt - re^{-r(t_k+y_k)}.f(v_k)$$

$$+ \int_{t_k+y_k}^{t_{k+1}+y_{k+1}} p.[D(t_k+y_k)]\ e^{-rt}\ dt - p.[\int_{t_k}^{t_k+y_k} D(t).dt-v_k].e^{-r(t_k+y_k)}$$

$$- \int_{t_k+y_k}^{t_{k+1}+y_{k+1}} p.e^{-rt}.D(t_k+y_k)\ dt, \qquad \text{(II.2.5)}$$

$$= -\ re^{-r(t_k+y_k)}.f(v_k) + p\ v_k\ e^{-r(t_k+y_k)}, \qquad \text{(II.2.6)}$$

$$= e^{-r(t_k+y_k)}.[pv_k - rf(v_k)]. \qquad \text{(II.2.7)}$$

Mais, v_k devant être une taille d'usine admissible, $r.f(v_k) \leqslant p\ v_k$ d'après le critère d'admissibilité. Ce qui implique que $\frac{\partial C(\pi,t_k)}{\partial y_k} \geqslant 0$. Donc le coût décroît si l'on diminue y_k ; et, dans le cas où $y_k \geqslant x_k$, l'optimum est atteint pour $y_k^* = x_k^*$.

Le cas $y_k \leq x_k$ pouvant se présenter, l'optimum sera atteint pour des valeurs y_k^* et x_k^* de y_k et x_k telles que $\underline{y_k^* \leq x_k^*}$. (i)

Nous nous restreindrons par conséquent au cas $y_k \leq x_k$ dans la recherche de l'optimum.

L'expression du coût est alors :

$$C(\pi,t_k) = \int_{t_k}^{t_k+y_k} [\int_{t}^{t_k+y_k} p.e^{-rt}\, dt] \,.\, D(t)\, dt + e^{-r(t_k+y_k)}.f(v_k)$$
$$+ e^{-rt_{k+1}}.C\,(\pi,t_{k+1}). \tag{II.2.8}$$

Le coût minimum sera obtenu pour la valeur de y_k qui annule l'expression

$$\frac{\partial C(\pi,t_k)}{\partial y_k} = e^{-r(t_k+y_k)} \circ [p \int_{t_k}^{t_k+y_k} D(t)\, dt - rf(v_k)]. \tag{II.2.9}$$

Montrons qu'il s'agit d'un minimum :

$D(t)$ étant positif ou nul, $\int_{t_k}^{t_k+y_k} D(t)\, dt$ augmente avec y_k, et par conséquent la valeur de $\frac{\partial C(\pi,t_k)}{\partial y_k}$ donnée par l'expression (II.2.9) augmente aussi ; c'est-à-dire que $\frac{\partial C(\pi,t_k)}{\partial y_k}$ est une fonction croissante de y_k, ou encore que la dérivée seconde de $C(\pi,t_k)$ est positive. L'extrêmum, donné par $\frac{\partial C(\pi,t_k)}{\partial y_k} = 0$ est donc un minimum ; ce minimum est atteint pour la valeur $y_k^*(v_k^*)$ qui vérifie

$$\int_{t_k}^{t_k+y_k^*(v_k^*)} D(t)\, dt = \frac{r.f(v_k^*)}{p} \;; \tag{II.2.10}$$

de plus, le critère d'admissibilité pour v_k, déduit de (II.2.1), étant :

$$v_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} D(t)\, dt \geq \frac{r.f(v_k)}{p}\,, \tag{II.2.11}$$

nous en déduisons que, pour v_k quelconque admissible,

$$v_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} D(t)\ dt \geq \frac{rf(v_k)}{p} = \int_{t_k}^{t_k+y_k(v_k)} D(t)\ dt. \qquad \text{(II.2.12)}$$

Cette propriété étant en particulier valable pour la taille v_k^* optimale, nous pouvons écrire :

$$\int_{t_k}^{t_k+y_k^*} D(t)\ dt = \frac{r.f(v_k^*)}{p} \qquad \text{(ii)} \qquad .\square .$$

Nous avons obtenu ainsi les conditions nécessaires pour minimiser les coûts $C(\pi, t_k)$ $\forall$ k, et nous utiliserons ces résultats pour déterminer la politique optimale lorsque la demande croît linéairement en fonction du temps, puis lorsque la demande est exponentielle.

2.2 - LA DEMANDE CROIT LINEAIREMENT EN FONCTION DU TEMPS

Nous reprendrons ici les résultats d'ERLENKOTTER [6].

Soit $D(t) = D$ l'accroissement annuel de la demande, supposé constant.

Aux hypothèses énoncées au début de la section 2, ajoutons les hypothèses :

H15 : l'horizon est infini.

H20 : la fonction d'investissement est indépendante du temps.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

<u>*Théorème 2.2*</u> *La politique optimale est une politique de cycle constant, et consiste à construire des usines de même taille ; les points de régénération sont* $t_0 = 0$; $t_1 = x$; $t_2 = 2x$; ... ; $t_n = nx$; ...

Démonstration :

Supposons que la politique optimale soit d'importer pendant y^* années après le point de régénération t_0=0, de façon à satisfaire la demande avant la première construction, puis de construire une usine dont la capacité permettra de combler le déficit précédent et de satisfaire l'accroissement de demande jusqu'au point de régénération suivant t_1^* ; si $x^* = t_1^* - t_0$, la taille de l'usine à construire est de x^*D.

A l'instant $t_1^* = x^*$, la situation est, sous les hypothèses énoncées, exactement identique à la situation en t_0 ; on aura donc encore intérêt à faire des importations pendant y^*, puis de construire une usine de taille x^*D qui satisfera l'accroissement de demande jusque $t_2^* = 2x^*$, et ainsi de suite. $\square$.

2.2.1 - Conditions d'optimalité

Dans le cas où la demande croît linéairement en fonction du temps, son taux d'accroissement D est constant, et d'après le théorème 2.2, les tailles des usines sont toutes identiques :

$$v_k = xD \qquad \forall\ k. \tag{II.2.13}$$

Le théorème du point de régénération, théorème 2.1, s'énonce alors de la façon suivante :

Théorème 2.3 *Toute politique optimale $\pi^* = \{(v_k^*, y_k^*)\}$ définie par les tailles d'usines et les temps d'importation optimaux , vérifie la relation :*

$$y^*(x^*) = \frac{r.f(x^*D)}{pD} \leqslant x^* \ ; \tag{II.2.14}$$

Démonstration :

Les résultats (i) et (ii) du théorème 2.1 s'écrivent ici, si l'on se place en $t_0 = 0$:

$$\int_0^{y^*} D\ dt = \frac{r.f(x^*D)}{p} \leqslant x^* \ , \tag{II.2.15}$$

ou

$$y^*(x^*) = \frac{r.f(x^*D)}{pD} \leqslant x^* \ . \ \square \tag{II.2.16}$$

2.2.2 - Expression du coût d'une politique de cycle constant optimale

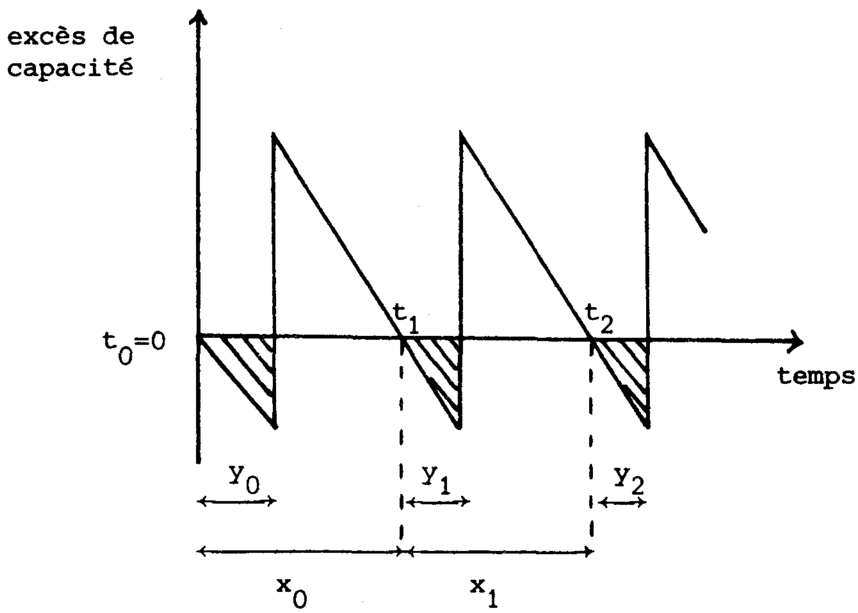


figure 1.

Si l'on se place en $t_0=0$, le coût futur actualisé $C(\pi)$ de la politique π est la somme des trois termes suivants :

1°) les coûts d'importation actualisés, nécessaires pour satisfaire la demande de 0 à y : $\int_0^y p.(tD).e^{-rt}.dt$;

2°) le coût de construction d'une usine de taille (xD), à la date t=y, actualisé à l'origine : $e^{-ry}.f(xD)$;

3°) la valeur actualisée de tous les coûts intervenant ensuite, c'est-à-dire à partir du point de régénération $t_1 = x$; or les coûts intervenant à partir de t_1 sont égaux aux coûts $C(\pi)$ intervenant à partir de t_0 puisque la situation est la même aux différents points de régénération. La valeur actualisée de ces coûts est donc $e^{-rx}.C(\pi)$.

$C(\pi)$ satisfait par conséquent la relation suivante :

$$C(\pi) = \int_0^y p.tD.e^{-rt}\,dt + e^{-ry}.f(xD) + e^{-rx}.C(\pi), \qquad \text{(II.2.17)}$$

ou

$$C(\pi) = \frac{1}{1-e^{-rx}} \left\{ \frac{pD}{r^2} [1-e^{-ry}(1+ry)] + e^{-ry}.f(xD) \right\}. \tag{II.2.18}$$

En remplaçant y par son expression à l'optimum, donnée par (II.2.14), nous obtenons

$$C(\pi) = \frac{1}{1-e^{-rx}} \left\{ \frac{pD}{r^2} [1-e^{-ry}(1+ \frac{r^2.f(xD)}{pD})] + e^{-ry}.f(xD) \right\}, \tag{II.2.19}$$

$$C(\pi) = \frac{1}{1-e^{-rx}} \left[\frac{pD}{r^2} - \frac{pD}{r^2} e^{-ry} - e^{-ry}.f(xD) + e^{-ry}.f(xD) \right], \tag{II.2.20}$$

$$C(\pi) = \frac{pD}{r^2} . \left(\frac{1-e^{-ry}}{1-e^{-rx}} \right). \tag{II.2.21}$$

2.2.3 - Recherche de l'optimum

Si la fonction d'investissement f est différentiable, le minimum de $C(\pi)$, fonction de x et de y(x), est obtenu pour la valeur x^* de x qui annule la dérivée logarithmique :

$$\frac{\partial \text{ Log } C(\pi)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \text{ Log } (1-e^{-ry}) - \frac{\partial}{\partial x} \text{ Log } (1-e^{-rx}), \tag{II.2.22}$$

$$= \frac{ry'(x).e^{-ry}}{1-e^{-ry}} - \frac{re^{-rx}}{1-e^{-rx}} , \tag{II.2.23}$$

$$= \frac{e^{ry}}{e^{ry}} . \frac{(ry'e^{-ry})}{1-e^{-ry}} - \frac{e^{rx}}{e^{rx}} . \frac{re^{-rx}}{1-e^{-rx}} , \tag{II.2.24}$$

$$= \frac{ry'(x)}{e^{ry}-1} - \frac{r}{e^{rx}-1} . \tag{II.2.25}$$

Le minimum du coût sera donc atteint pour la valeur x^* de x telle que :

$$y'(x^*).e^{-ry^*} = e^{-rx^*} . \frac{1-e^{-ry^*}}{1-e^{-rx^*}} , \tag{II.2.26}$$

$$y'(x^*) = \frac{e^{ry^*}-1}{e^{rx^*}-1} = \frac{r.f'(x^*D)}{p} , \tag{II.2.27}$$

où $y^* = y(x^*)$.

Remarque

Si l'on donne à la pénalité p une valeur infinie,

$$\lim_{p\to\infty} y(x) = \lim_{p\to\infty} \frac{r.f(xD)}{p} = 0 \quad \text{d'après l'équation (II.2.14) ;}$$

et la valeur du coût optimal, déduite de (II.2.18) est

$$C(\pi) = \lim_{\substack{y\to 0\\ p\to\infty}} \frac{1}{1-e^{-rx}} \left\{ \frac{pD}{r^2} [1-e^{-ry}(1+ry)] + e^{-ry}.f(xD) \right\}, \tag{II.2.28}$$

$$= \lim_{\substack{y\to 0\\ p\to\infty}} \frac{1}{1-e^{-rx}} \left\{ \frac{pD}{r^2} [1 - (1 - \frac{ry}{1!})(1+ry)] + e^{-ry}.f(xD) \right\}, \tag{II.2.29}$$

$$= \lim_{\substack{y\to 0\\ p\to\infty}} \frac{1}{1-e^{-rx}} \left\{ \frac{pD}{r^2} (r^2 y^2) + e^{-ry}.f(xD) \right\}, \tag{II.2.30}$$

$$= \lim_{\substack{y\to 0\\ p\to\infty}} \frac{p\, Dy^2}{1-e^{-rx}} + \frac{f(xD)}{1-e^{-rx}} ; \tag{II.2.31}$$

de l'expression (II.2.14) de y à l'optimum, nous déduisons que le premier terme est nul, et nous retrouvons, lorsque p tend vers l'infini, $C(\pi) = \dfrac{f(xD)}{1-e^{-rx}}$, formule correspondant au cas où il n'y a pas d'importations (I.2.8).

2.2.4 - Exemple : $f(v) = Av^a$

Considérons de nouveau le cas où la fonction d'investissement est de la forme $f(v) = A.v^a$, c'est-à-dire, dans le cas d'un taux de croissance D constant de la demande : $f(xD) = A(xD)^a$.

La fonction de coût (II.2.21) s'écrit alors à l'optimum :

$$C(\pi) = \frac{pD}{r^2} \left[\frac{1-e^{-ry}}{1-e^{-rx}} \right], \tag{II.2.32}$$

où $y = \dfrac{rA(xD)^a}{pD}$.

Nous pouvons énoncer les propriétés suivantes :

(a) $\lim_{x \to 0} C(\pi) = +\infty$;

(b) $\lim_{x \to \infty} C(\pi) = \frac{pD}{r^2}$ = valeur actualisée du coût total si l'on satisfait toute la demande par des importations ;

(c) il existe une seule valeur x' de x telle que $C(\pi) = \frac{pD}{r^2}$, et cette valeur vérifie : $x' = \frac{1}{D} \left(\frac{rA}{p}\right)^{\frac{1}{1-a}} = y'(x)$;

L'usine de taille (x'D) est l'usine de taille minimum admissible qui est compétitive avec les importations, puisqu'alors la condition (II.2.14) d'admissibilité est satisfaite comme égalité.

Puisque $C(\pi)$ est une fonction continue sur $(0,+\infty)$, les propriétés (a) et (c) impliquent que, pour minimiser $C(\pi)$, il suffit de ne considérer que l'intervalle $(x',+\infty)$; sur cet intervalle, l'extrêmum est atteint pour la valeur de x^* telle que :

$$\frac{d \operatorname{Log} C(\pi)}{dx} = \frac{a r y^*}{x^*(e^{ry^*}-1)} - \frac{r}{e^{rx^*}-1} = 0 \,, \tag{II.2.33}$$

$$\frac{rx^*}{e^{rx^*}-1} = a \frac{ry^*}{e^{ry^*}-1} \,, \tag{II.2.34}$$

où

$$y^* = \frac{r\, A(x^* D)^a}{pD} \,. \tag{II.2.35}$$

L'extrêmum ainsi défini est unique, et c'est un minimum.

En effet, si nous posons $h(x) = \frac{rx}{e^{rx}-1}$, l'équation (II.2.34) vérifiée par l'extrêmum devient

$$\frac{h(x^*)}{h(y^*)} = H(x^*) = a. \tag{II.2.36}$$

La propriété (c) énoncée précédemment permet de ne considérer que le cas où $x \geq x'$.

Pour montrer que la solution de l'équation (II.2.36) est unique, il suffit de montrer que H(x) est une fonction strictement décroissante de x :

$$\frac{d \text{ Log } H(x)}{dx} = \frac{h'(x)}{h(x)} - \frac{h'(y)}{h(y)} \cdot \frac{dy(x)}{dx}, \tag{II.2.37}$$

$$= \frac{1}{x} [x \frac{h'(x)}{h(x)} - \frac{h'(y)}{h(y)} \cdot x \frac{dy(x)}{dx}] . \tag{II.2.38}$$

or, d'après la formule (II.2.27),

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = \frac{rA}{pD} \cdot D^a ax^{a-1}, \tag{II.2.39}$$

$$= \frac{ay(x)}{x} . \tag{II.2.40}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\frac{d \text{ Log } H(x)}{dx} = \frac{1}{x} [x \frac{h'(x)}{h(x)} - \frac{h'(y)}{h(y)} \cdot ay(x)] , \tag{II.2.41}$$

$$\frac{d \text{ Log } H(x)}{dx} < \frac{1}{x} [x \frac{h'(x)}{h(x)} - y \frac{h'(y)}{h(y)}], \tag{II.2.42}$$

puisque $0<a<1$ et que la fonction h est décroissante.

On pourrait montrer que la fonction $x \frac{h'(x)}{h(x)}$ est strictement décroissante ; de plus, d'après (II.2.14), $y(x) \leqslant x$ lorsque $x \geqslant x'$; on en déduit que

$$\frac{d \text{ Log } H(x)}{dx} < 0, \tag{II.2.43}$$

ce qui prouve l'unicité de l'extrêmum.

Si on calcule la dérivée seconde de Log $C(\pi)$ en (x^*,y^*), on peut montrer qu'elle est positive, et on démontre ainsi que l'extrêmum est un minimum. □.

<u>Remarque</u>

Si le temps d'importation tend vers zéro, l'équation (II.2.34) donnant x^* devient :

$$\frac{rx^*}{e^{rx^*}-1} = a \lim_{y^* \to 0} \frac{ry^*}{e^{ry^*}-1},$$

$$\cdot \quad \frac{rx^*}{e^{rx^*}-1} = a ,$$

et l'on retrouve la solution obtenue dans le cas où il n'y a pas d'importations [18].

2.2.5 - Etude de sensibilité. Résultats numériques

L'équation (II.2.34) ne permettant pas d'obtenir une expression analytique de x^*, ERLENKOTTER a utilisé la méthode de FIBONACCI pour déterminer sa valeur, en fixant l'accroissement D de la demande à un, et les paramètres a, r, et le facteur pénalité $\frac{AD^a}{pD}$ à différentes valeurs.

Résumons les conclusions qu'il déduit des résultats :

1°) Les courbes de x^* et de y^* sont croissantes en fonction du facteur pénalité $\frac{AD^a}{pD}$, a et r étant fixés ; et la différence $(x^* - y^*)$ est presque constante.

2°) Les courbes de x^* en fonction de r (a étant fixé) ont des formes différentes selon les valeurs du facteur pénalité :

pour $\frac{AD^a}{pD} = 0$ ou 4, x^* est monotone décroissante de r ;

pour $\frac{AD^a}{pD} = 8$ ou 12, x^* est d'abord décroissante, puis croissante.

3°) ERLENKOTTER a enfin tracé les courbes x^* en fonction des valeurs du coefficient d'économie d'échelle a, pour différentes valeurs du facteur pénalité, r étant fixé à 10% :

si $r\,\frac{AD^a}{pD} > 1$, lorsque a augmente à partir de zéro, x^* décroît tout d'abord, puis croît lorsque a se rapproche de 1 (c'est le cas lorsque $\frac{AD^a}{pD} = 12$ ou 16) ;

si $r\,\frac{AD^a}{pD} \leqslant 1$, x^* est une fonction monotone décroissante, comme dans le cas où il n'y a pas d'importations.

2.3 - LA DEMANDE EST UNE FONCTION EXPONENTIELLE

Soit g le taux de croissance géométrique, supposé constant, de la demande.

Nous ne considèrerons ici que les fonctions coûts d'investissements d'une usine de la forme $f(v) = Av^a$, où v est la taille de l'usine, A une constante de proportionnalité, et a le facteur d'économie d'échelle ($0<a<1$).

Lorsque la demande croît géométriquement en fonction du temps, elle est relativement faible au début de la période étudiée et, pour la satisfaire, il suffirait de construire des usines de faible capacité ; mais puisqu'il y a des économies d'échelle qui font que le coût marginal de la capacité décroît quand la taille de l'usine augmente, il y a intérêt à construire plus grand ; cependant, une capacité non utilisée trop importante pourrait augmenter exagérément le coût total. Une solution sera donc d'importer pendant un certain temps pour pouvoir ensuite construire de grandes usines et profiter de l'économie d'échelle.

Ce problème a été étudié par J.C. BERRETTA et F. MOBASHERI [3], qui ont appliqué leur théorie à l'industrie de l'aluminium en Argentine ; nous exposerons donc leurs résultats.

Puis nous mettrons en évidence les inconvénients de la méthode proposée par ces auteurs, et envisagerons une autre méthode de résolution, que nous testerons sur la base de leurs données numériques.

2.3.1 - Conditions d'optimalité

La demande étant exponentielle, au point de régénération t_k elle sera égale à

$$\mathcal{D}(t_k) = D(0).e^{gt_k}, \qquad \text{(II.2.44)}$$

où D(0), demande initiale, est exprimée en tonnes/année.

Pour satisfaire la demande entre les deux points de régénération successifs t_k et $t_{k+1} = t_k + x_k$, la taille v_k de l'usine construite en $(t_k + y_k)$ sera de

$$v_k = D(0)\,[e^{g(t_k+x_k)} - e^{gt_k}]\ . \qquad \text{(II.2.45)}$$

Le théorème du point de régénération s'énonce alors de la façon suivante :

Théorème 2.4 *Toute politique optimale* $\pi^* = \{(v_k^*, y_k^*)\}$, *définie par les tailles d'usines et les temps d'importations optimaux, vérifie les relations :*

$$y_k^* = \frac{1}{g}\,\mathrm{Log}\ \{1 + \frac{rA}{pD(0)}\ \frac{[D(0).(e^{gx_k^*}-1)]^a}{\left(e^{gt_k}\right)^{(1-a)}}\} \leqslant x_k^* \quad \forall k. \qquad \text{(II.2.46)}$$

Démonstration :

La condition (ii) du théorème 2.1 du point de régénération s'écrit ici, sachant que l'accroissement D(t) de la demande est la dérivée de la demande en t, $\mathcal{D}(t)$, et que $f(v) = Av^a$:

$$\mathcal{D}(t_k + y_k^*) - \mathcal{D}(t_k) = \frac{rf(v_k^*)}{p} , \tag{II.2.47}$$

$$pD(0)\ [e^{g(t_k+y_k^*)} - e^{gt_k}] = rA\ [D(0).(e^{g(t_k+x_k^*)} - e^{gt_k})]^a , \tag{II.2.48}$$

$$pD(0)\ .\ e^{gt_k}(e^{gy_k^*} - 1) = rA\left(e^{gt_k}\right)^a .\ [D(0).(e^{gx_k^*}-1)]^a\ ; \tag{II.2.49}$$

D'où :

$$y_k^* = \frac{1}{g}\ \mathrm{Log}\ \{1 + \frac{rA}{pD(0)}\ \frac{[D(0).(e^{gx_k^*}-1)]^a}{\left(e^{gt_k}\right)^{1-a}}\}.\ \square\ . \tag{II.2.50}$$

2.3.2 - Expression du coût

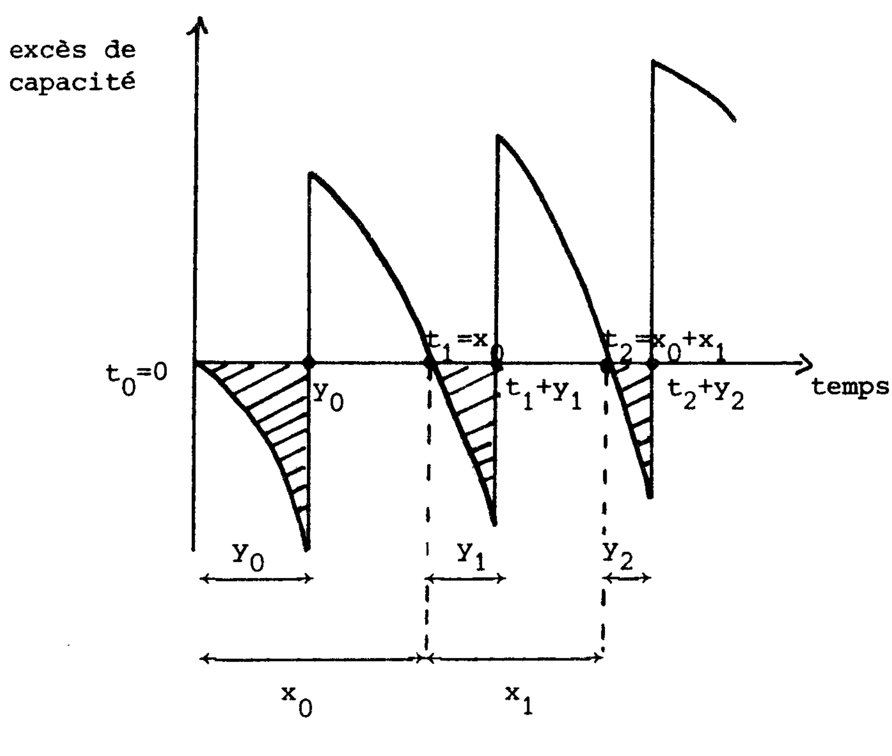


figure 2.

Le coût total $C(\pi)$ de la politique π est égal à la somme des pénalités d'importations actualisées, et des coûts de construction actualisés :

$$C(\pi) = \int_0^{y_0} pD(0).(e^{gt}-1)e^{-rt}\,dt + e^{-ry_0}\,A[D(0).(e^{gt_1}-1)]^a$$

$$+ \int_{t_1}^{t_1+y_1} pD(0).(e^{gt}-e^{gt_1})\;e^{-rt}\,dt + e^{-r(t_1+y_1)}\,A[D(0).(e^{gt_2}-e^{gt_1})]^a$$

$$+ \ldots$$

$$+ \int_{t_k}^{t_k+y_k} pD(0).(e^{gt}-e^{gt_k})\;e^{-rt}\,dt + e^{-r(t_k+y_k)}\,A[D(0).(e^{gt_{k+1}}-e^{gt_k})]^a$$

$$+ \ldots \qquad \text{(II.2.51)}$$

Pour les besoins de leur algorithme, J.C. BERRETTA et F. MOBASHERI considèrent une politique $\bar{\pi}$ de cycle constant, telle que les temps d'importation soient identiques pour toutes les périodes ; $\bar{\pi}$ est donc telle que :

$$x_k = x \qquad \forall\ k$$

$$\text{et} \quad y_k = y \qquad \forall\ k, \text{ avec } y < x.$$

Ils en déduisent alors que $t_k = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k = (k+1)\ x$, et calculent le coût $C(\bar{\pi})$ de la politique $\bar{\pi}$.

A partir de l'expression (II.2.51), nous pouvons écrire

$$C(\bar{\pi}) = \int_0^{y} pD(0).(e^{gt}-1)\;e^{-rt}\,dt + e^{-ry}\,A[D(0).(e^{gx}-1)]^a$$

$$+ \int_{x}^{x+y} pD(0).(e^{gt}-e^{gx})\;e^{-rt}\,dt + e^{-r(x+y)}\,A[D(0).(e^{gx}-1)e^{gx}]^a$$

$$+ \ldots$$

$$+ \int_{nx}^{nx+y} pD(0).(e^{gt}-e^{gnx})\;e^{-rt}\,dt + e^{-r(nx+y)}\,A[D(0).(e^{gx}-1)e^{gnx}]^a$$

$$+ \ldots \qquad \text{(II.2.52)}$$

Calculons les deux termes récurrents qui apparaissent dans cette expression :

$$(a) : \int_{nx}^{nx+y} pD(0).(e^{gt} - e^{gnx})\ e^{-rt}\ dt$$

et (b) : $e^{-r(nx+y)}\ .\ A[D(0).(e^{gx}-1)\ e^{gnx}]^{a}$.

$$(a) = pD(0)\ [\int_{nx}^{nx+y} e^{-(r-g)t}dt - e^{gnx}\int_{nx}^{nx+y} e^{-rt}\ dt], \qquad (II.2.53)$$

$$= pD(0)\ [\frac{e^{-(r-g)nx} - e^{-(r-g)(nx+y)}}{r-g} - \frac{e^{gnx}(e^{-rnx} - e^{-r(nx+y)})}{r}], \qquad (II.2.54)$$

Or,

$$* \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(r-g)nx} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(r-g)(nx+y)} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(r-g)nx} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(r-g)nx}\ .\ e^{-(r-g)y} = \qquad (II.2.55)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(r-g)nx}\ (1 - e^{-(r-g)y}) = \qquad (II.2.56)$$

$$(1-e^{-(r-g)y}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(r-g)nx} = \qquad (II.2.57)$$

$$(1-e^{-(r-g)y})\ .\ \frac{1}{1-e^{-(r-g)x}} \quad \underline{\text{si } r > g}. \qquad (II.2.58)$$

$$* \sum_{n=0}^{\infty} e^{gnx}(e^{-rnx} - e^{-r(nx+y)}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(r-g)nx}(1-e^{-ry}) \qquad (II.2.59)$$

$$= (1-e^{-ry}).\frac{1}{1-e^{-(r-g)x}} \quad \underline{\text{si } r > g}. \qquad (II.2.60)$$

Ceci implique que, si <u>r > g</u>,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a) = pD(0).\ [\frac{1}{r-g}\ .\ \frac{1-e^{-(r-g)y}}{1-e^{-(r-g)x}} - \frac{1}{r}\ \frac{1-e^{-ry}}{1-e^{-(r-g)x}}]. \qquad (II.2.61)$$

D'autre part,

$$(b) = e^{-r(nx+y)} \, A[D(0).(e^{gx}-1) \, e^{gnx}]^{a} , \tag{II.2.62}$$

$$= A[D(0).(e^{gx}-1)]^{a} \, e^{-(r-ag)nx} \, e^{-ry}. \tag{II.2.63}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b) = A[D(0).(e^{gx}-1)]^{a} \, e^{-ry} \, . \, \frac{1}{1-e^{-(r-ag)x}} \, . \tag{II.2.64}$$

Les équations (II.2.52), (II.2.61) et (II.2.64) permettent d'écrire :

$$C(\bar{\pi}) = pD(0). \left[\frac{1}{r-g} \, \frac{1-e^{-(r-g)y}}{1-e^{-(r-g)x}} - \frac{1}{r} \, \frac{1-e^{-ry}}{1-e^{-(r-g)x}}\right]$$

$$+ e^{-ry} \, A \, \frac{[D(0).(e^{gx}-1)]^{a}}{1-e^{-(r-ag)x}} \, . \tag{II.2.65}$$

Calculons les coûts actualisés $C(\bar{\pi},t_k)$ qui interviennent à partir du point de régénération t_k, en faisant l'hypothèse que x_k et y_k demeurent constants pour toutes les périodes futures : il suffit de remplacer dans l'expression (II.2.65) D(0) par la demande en t_k : $\mathcal{D}(t_k) = D(0).e^{gt_k}$, et de multiplier le résultat par e^{-rt_k} pour obtenir le coût actualisé à l'origine :

$$C(\bar{\pi},t_k) = pD(0). \left\{\left[\frac{1}{r-g} \, \frac{1-e^{-(r-g)y}}{1-e^{-(r-g)x}} - \frac{1}{r} \, \frac{1-e^{-ry}}{1-e^{-(r-g)x}}\right] e^{-(r-g)t_k}\right.$$

$$\left. + \left[\frac{e^{-ry}}{pD(0)} \, \frac{A[D(0).(e^{gx}-1)]^{a}}{1-e^{-(r-ag)x}}\right] e^{-(r-ag)t_k} \right\}, \tag{II.2.66}$$

ou, si nous remplaçons y par son expression à l'optimum,donnée par (II.2.46) :

$$e^{gy} - 1 = \frac{rA}{pD(0)} \, \frac{[D(0).(e^{gx}-1)]^{a}}{(e^{gt_k})^{1-a}} \tag{II.2.67}$$

$$\frac{A}{pD(0)} \, [D(0).(e^{gx}-1)]^{a} = \frac{e^{gy}-1}{r} \, e^{gt_k(1-a)} , \tag{II.2.68}$$

$$A[D(0).(e^{gx}-1)]^{a} \, e^{-(r-ag)t_k} = pD(0) \left\{ \frac{e^{gy}-1}{r} \, e^{gt_k(1-a)} \, e^{-(r-ag)t_k} \right\}, \tag{II.2.69}$$

$$= pD(0) \left\{ \frac{e^{gy}-1}{r} \, e^{-(r-g)t_k} \right\} , \tag{II.2.70}$$

nous en déduisons l'expression de $C(\bar{\pi},t_k)$ à l'optimum :

$$C(\bar{\pi},t_k) = pD(0).e^{-(r-g)t_k}\left[\frac{1}{r-g}\,\frac{1-e^{-(r-g)y}}{1-e^{-(r-g)x}} - \frac{1}{r}\,\frac{1-e^{-ry}}{1-e^{-(r-g)x}}\right.$$

$$\left. + \frac{e^{-ry}}{r}\,\frac{(e^{gy}-1)}{1-e^{-(r-ag)x}}\right]. \qquad \text{(II.2.71)}$$

2.3.3 - Méthode de résolution de J.C. BERRETTA et F. MOBASHERI

Les auteurs recherchent les valeurs x_k de x qui minimisent $C(\bar{\pi},t_k)$ pour les différentes valeurs de k, et pour cela, ils utilisent la méthode de FIBONACCI ; on détermine ainsi x_0^*, valeur de x qui minimise $C(\bar{\pi},t_0=0)$, et on en déduit y_0^* d'après la relation (II.2.46) : la première expansion est donc déterminée en supposant qu'une politique de cycle constant sera suivie ultérieurement. On détermine ensuite x_1^*, valeur de x qui minimise $C(\bar{\pi},t_1)$ où $t_1=x_0^*$, et on en déduit y_1^* d'après la relation (II.2.46) ... Le raisonnement est analogue pour les périodes suivantes.

On peut alors calculer les coûts actualisés I_k correspondant à chaque période (termes intervenant dans l'expression (II.2.51) de $C(\pi)$) :

$$I_k = \int_{t_k}^{t_k+y_k} pD(0).(e^{gt}-e^{gt_k})\,e^{-rt}\,dt + e^{-r(t_k+y_k)}\,A[D(0).(e^{gt_{k+1}}-e^{gt_k})]^a, \qquad \text{(II.2.72)}$$

$$= pD(0)\int_{t_k}^{t_k+y_k}(e^{(g-r)t} - e^{gt_k}\,e^{-rt})\,dt$$

$$+ e^{-r(t_k+y_k)}\,A[D(0).(e^{g(t_k+x_k)} - e^{gt_k})]^a, \qquad \text{(II.2.73)}$$

$$= pD(0)\left\{\frac{1}{g-r}\left[e^{(g-r)(t_k+y_k)} - e^{(g-r)t_k}\right] + \frac{e^{gt_k}}{r}\left[e^{-r(t_k+y_k)} - e^{-rt_k}\right]\right\}$$

$$+ e^{-(r-ag)t_k}\,e^{-ry_k}\,A[D(0).(e^{gx_k}-1)]^a, \qquad \text{(II.2.74)}$$

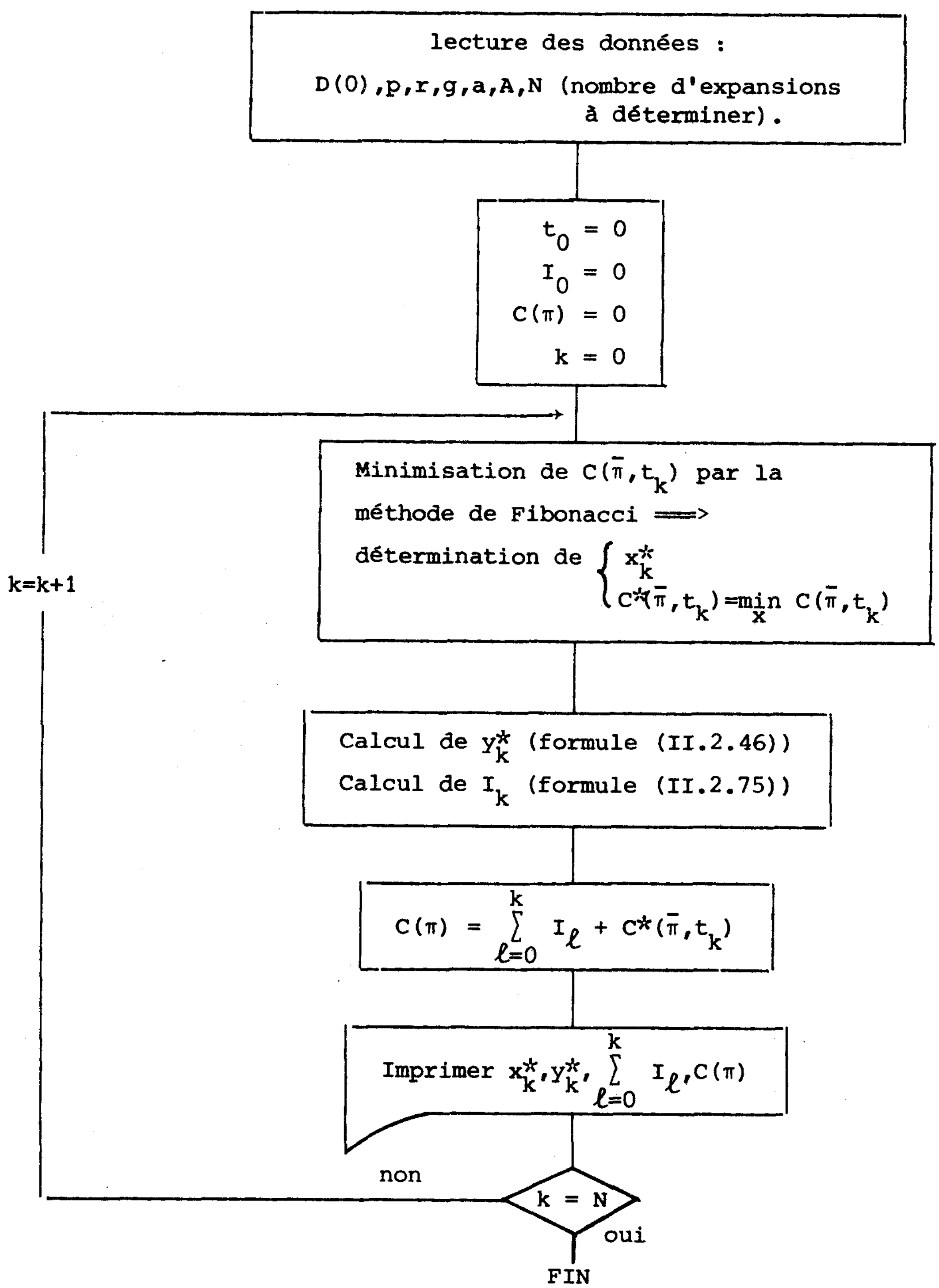
$$I_k = pD(0).e^{-(r-g)t_k} \left[\frac{1-e^{-(r-g)y_k}}{r-g} - \frac{1-e^{-ry_k}}{r} \right]$$

$$+ e^{-(r-ag)t_k} e^{-ry_k} A[D(0).(e^{gx_k}-1)]^a ; \qquad (II.2.75)$$

et l'on en déduit $C(\pi) = \sum_k I_k$.

Schématisons les différentes étapes de cette procédure, que nous appellerons "procédure I" par un organigramme de principe :

PROCÉDURE I



Résultats numériques

Des erreurs s'étant glissées à plusieurs reprises dans les formulations de $C(\bar{\pi},t_k)$ qu'ont faites les auteurs [3], nous avons repris leur étude, en utilisant l'expression de $C(\bar{\pi},t_k)$ justifiée précédemment.*

Rappelons la valeur des paramètres :

$A = 10010$

$D(0) = 50000$ tonnes/an

$g = 0.07$

$a = 0.80.$

Les figures 3 et 4 montrent l'influence respectivement des paramètres p et r sur la première expansion :

- les valeurs de x_0^* et y_0^* augmentent lorsque la pénalité d'importation diminue : les expansions sont plus fréquentes lorsque la pénalité d'importation est élevée;

- l'intervalle de temps entre les deux premières expansions croît avec r, et la croissance est d'autant plus rapide que la pénalité d'importation diminue.

La figure 5 met en évidence le fait que les valeurs de x_k^* et de y_k^* décroissent dans le temps ; lorsque l'horizon est suffisamment éloigné, ces valeurs sont presque constantes, y_k^* tendant vers zéro, et x_k^* tendant vers l'intervalle de temps optimal (constant) entre deux expansions successives quand il n'y a pas d'importations.

La figure 6 permet la comparaison entre les trois politiques suivantes :

- une politique à périodes constantes, sans importation, dont le coût minimum est \$ 144 294 128,
- une politique à périodes constantes, avec importation, dont le coût minimum est \$ 129 511 616,
- la politique déterminée par la procédure I qui est beaucoup plus avantageuse puisque son coût est inférieur à \$ 125 651 120.

---

* Dans la dernière formule de $C_k(\bar{\pi})$ ([3] p.98), l'un des dénominateurs r a été remplacé par p, ceci étant démontré par nos formules (II.2.67) à (II.2.70).

D'autre part, l'expression de $C_k(\bar{\pi})$ ([3] p.84) ne correspondant pas à celle qui a été justifiée en annexe ([3] p.98), nous avons en (II.2.71) une expression différente de celle de l'article original.

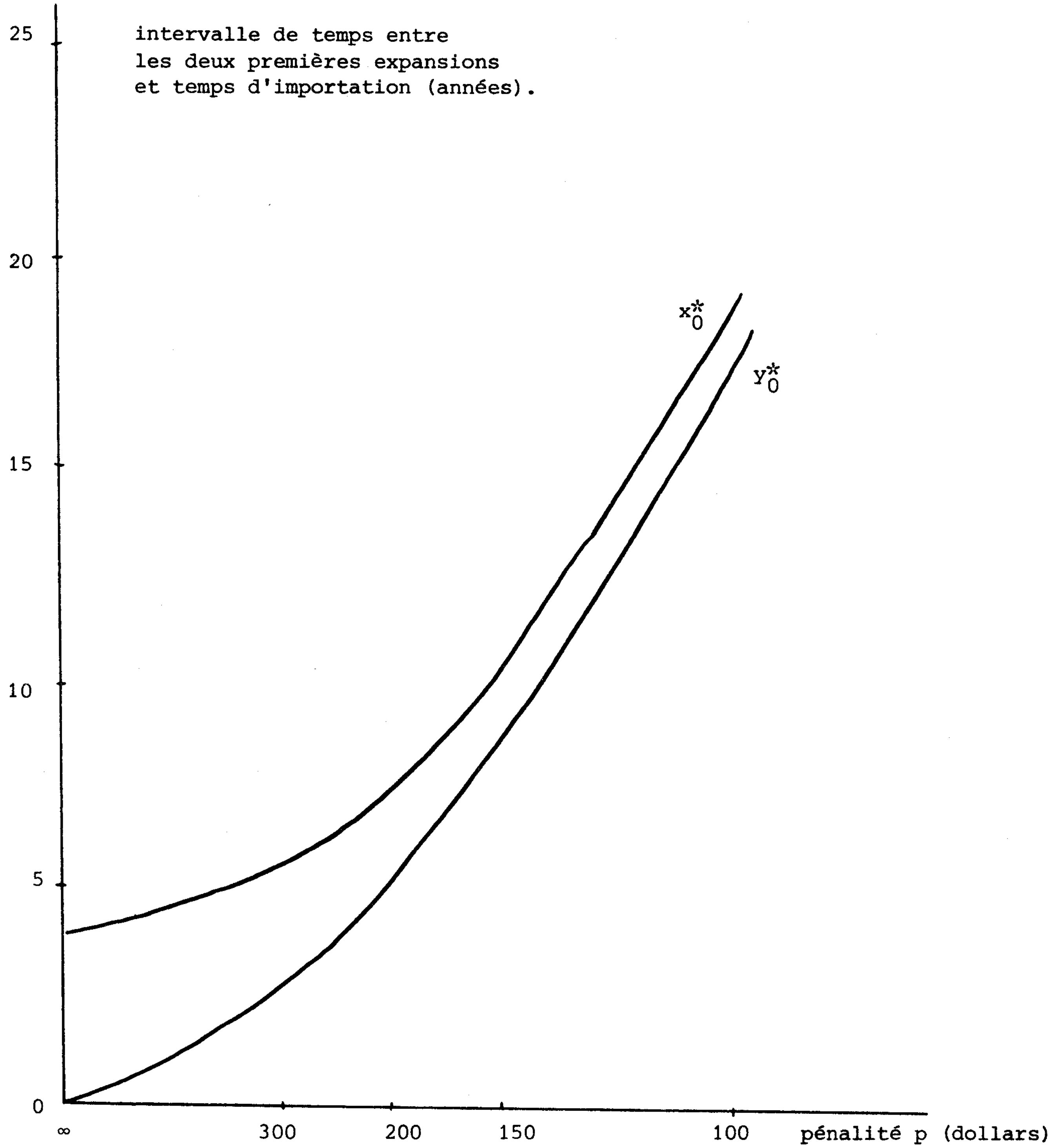


figure 3. Première expansion optimale en fonction de la pénalité quand r = 10%.

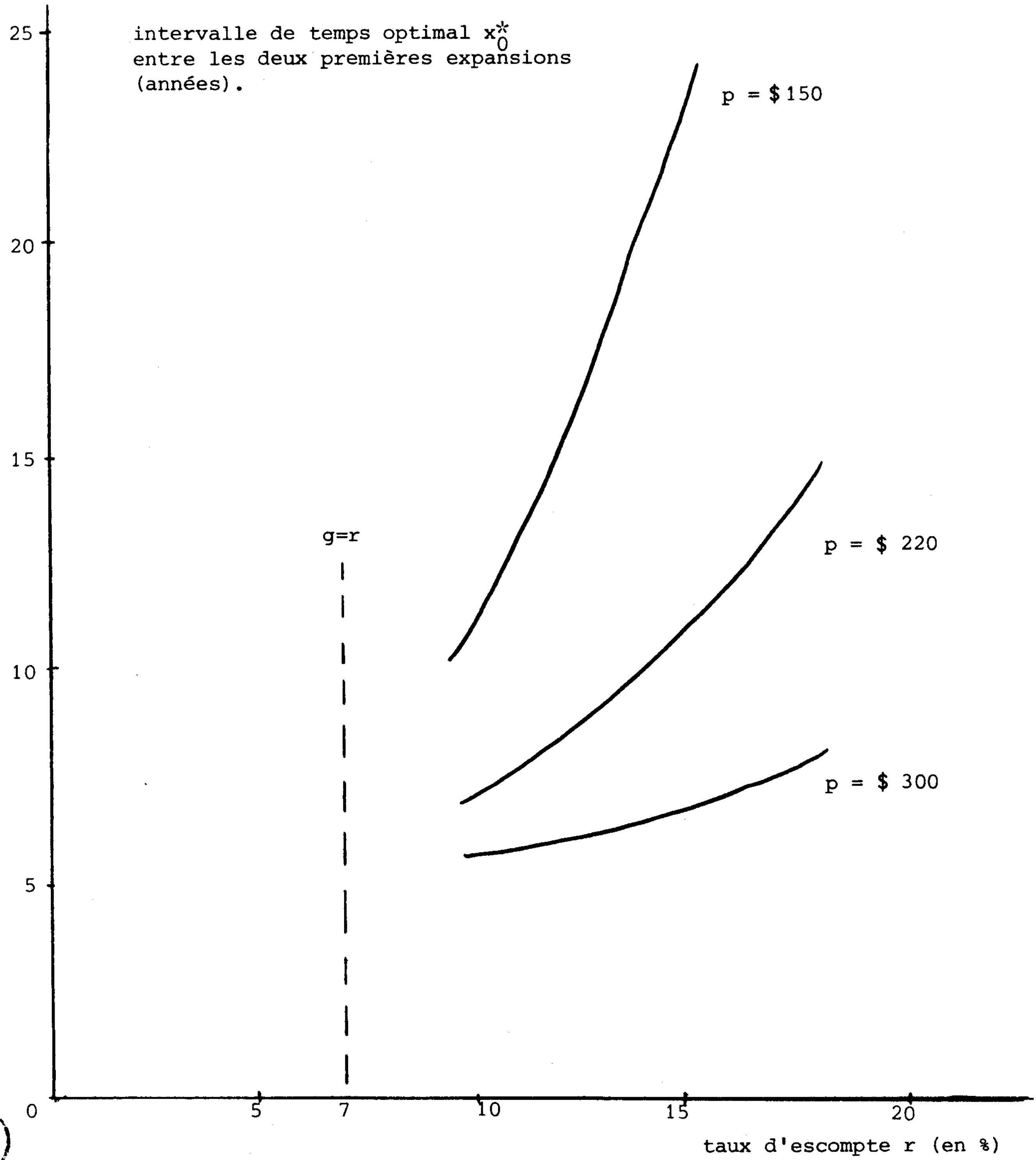
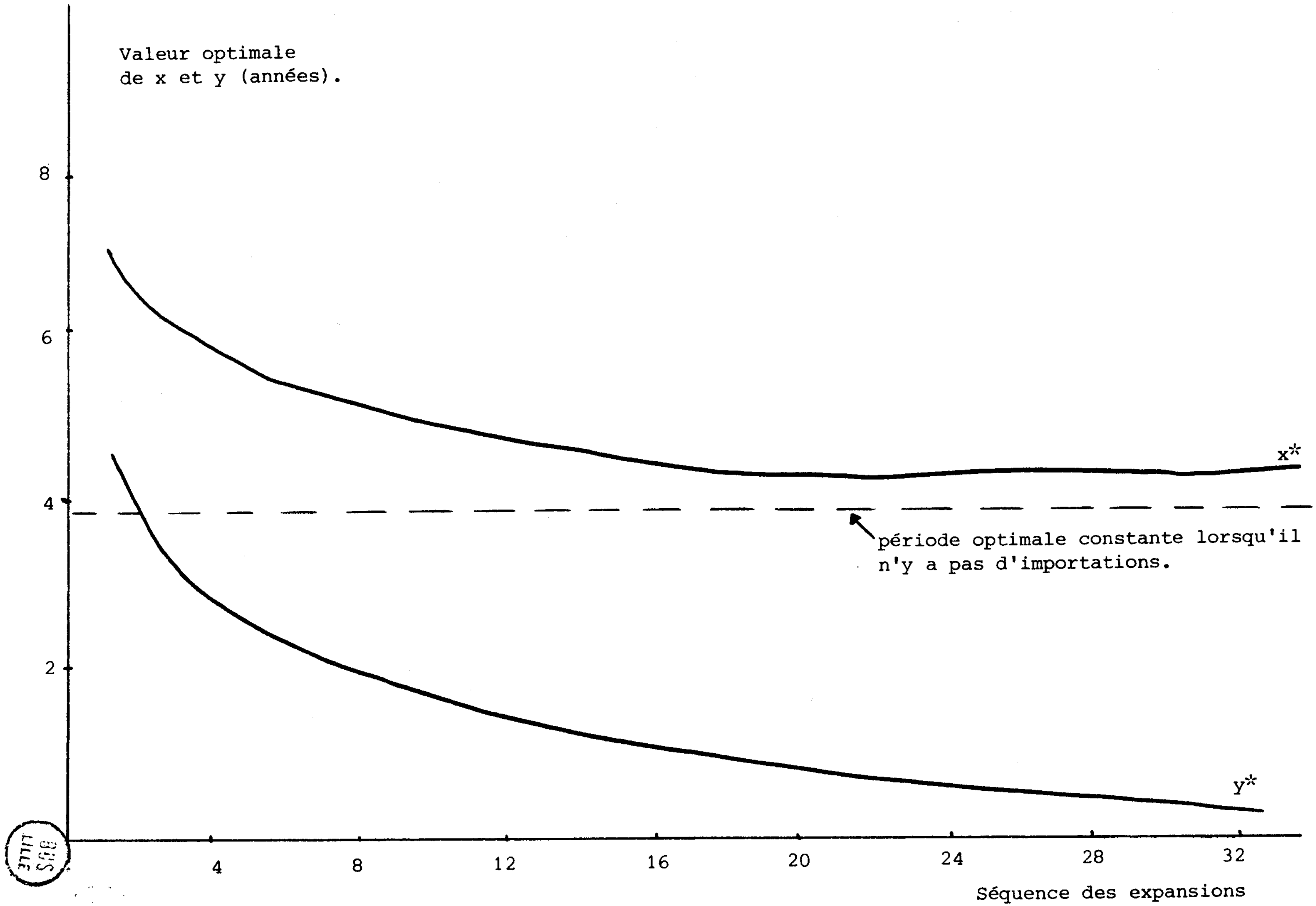


figure 4. Intervalle de temps optimal entre les deux premières expansions, en fonction du taux d'escompte.



<u>figure 5.</u> Solution optimale pour chaque expansion, $r = 10\%$, $p = \$\ 220$.

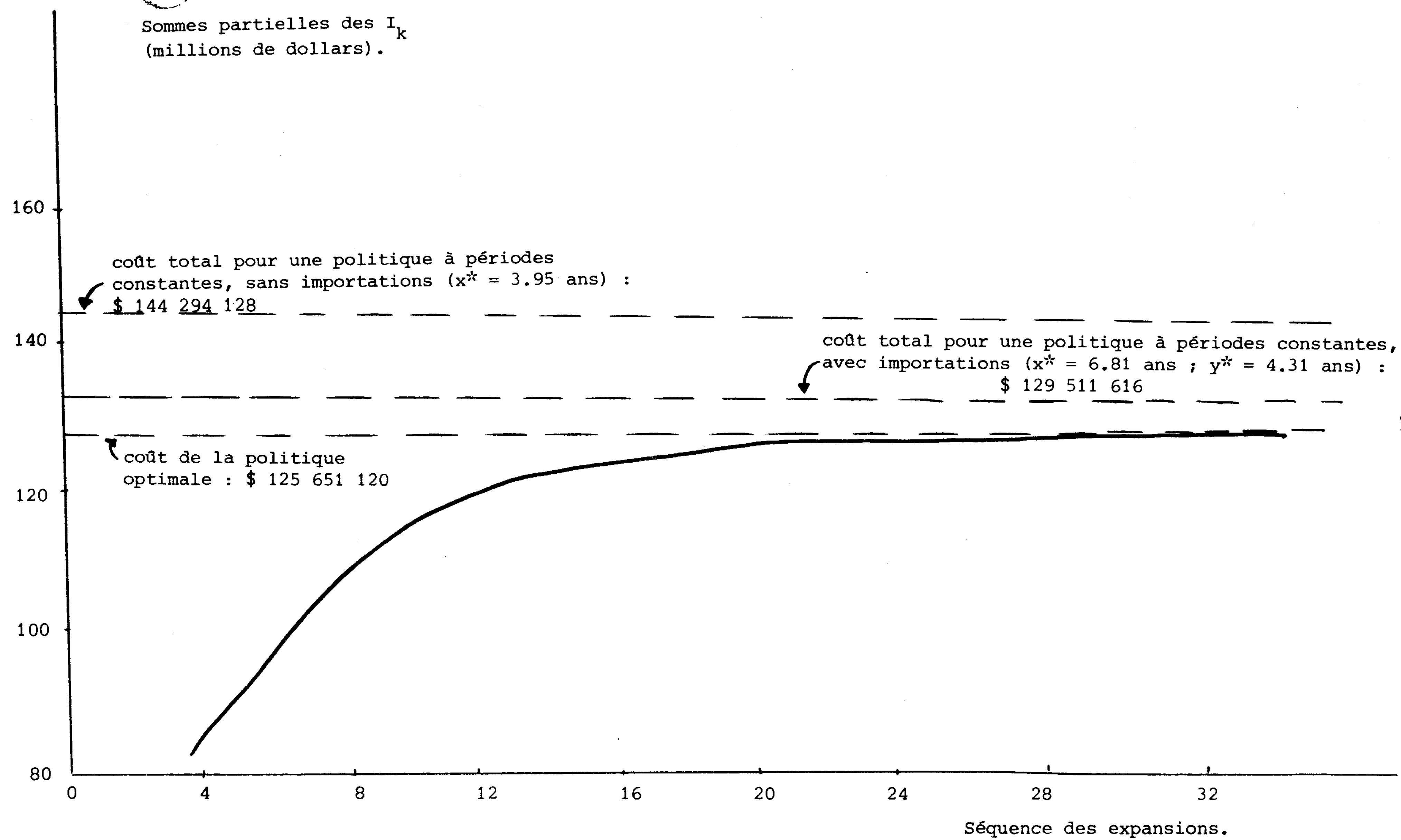


figure 6. Sommes partielles des coûts par période, $r = 10\%$, $p = \$\ 220$.

2.3.4 - Discussion de la méthode

Comme le précisent les auteurs de [3], la politique optimale consiste à commencer par de longs intervalles de temps entre deux constructions successives, puis, lorsque t_k augmente, à faire décroître ces intervalles jusqu'à ce qu'ils deviennent constants quand x_k tend vers l'infini, les temps d'importation y_k tendant vers zéro. Mais, s'il est vrai que l'on peut supposer $x_k = x \ \forall k$ à long terme, cela ne semble pas justifié pour les premières périodes, et faire cette hypothèse peut amener des erreurs d'évaluation des x_k et y_k pour les premières valeurs de k, et par conséquent à une mauvaise politique à court terme.

Aussi, pour éviter cet inconvénient, nous proposerons une méthode de programmation dynamique :

2.3.5 - Procédure de résolution

Nous adapterons ici la méthode de programmation dynamique de A.S. MANNE et A.F. VEINOTT [20] exposée et justifiée par le théorème du point de régénération dans la section 1 du II^{e} chapitre.

Le principe est le suivant :

Nous partageons le temps en périodes discrètes, d'autant plus courtes que nous voulons un résultat plus précis ; et nous déterminons successivement les politiques optimales lorsque l'horizon est 1, 2, 3,... périodes, les points de régénération ne pouvant être situés qu'en début de période ; si f_ℓ est le minimum du coût actualisé des constructions et des importations permettant de satisfaire la demande jusqu'à $t=\ell$, ℓ étant un point de régénération, nous avons :

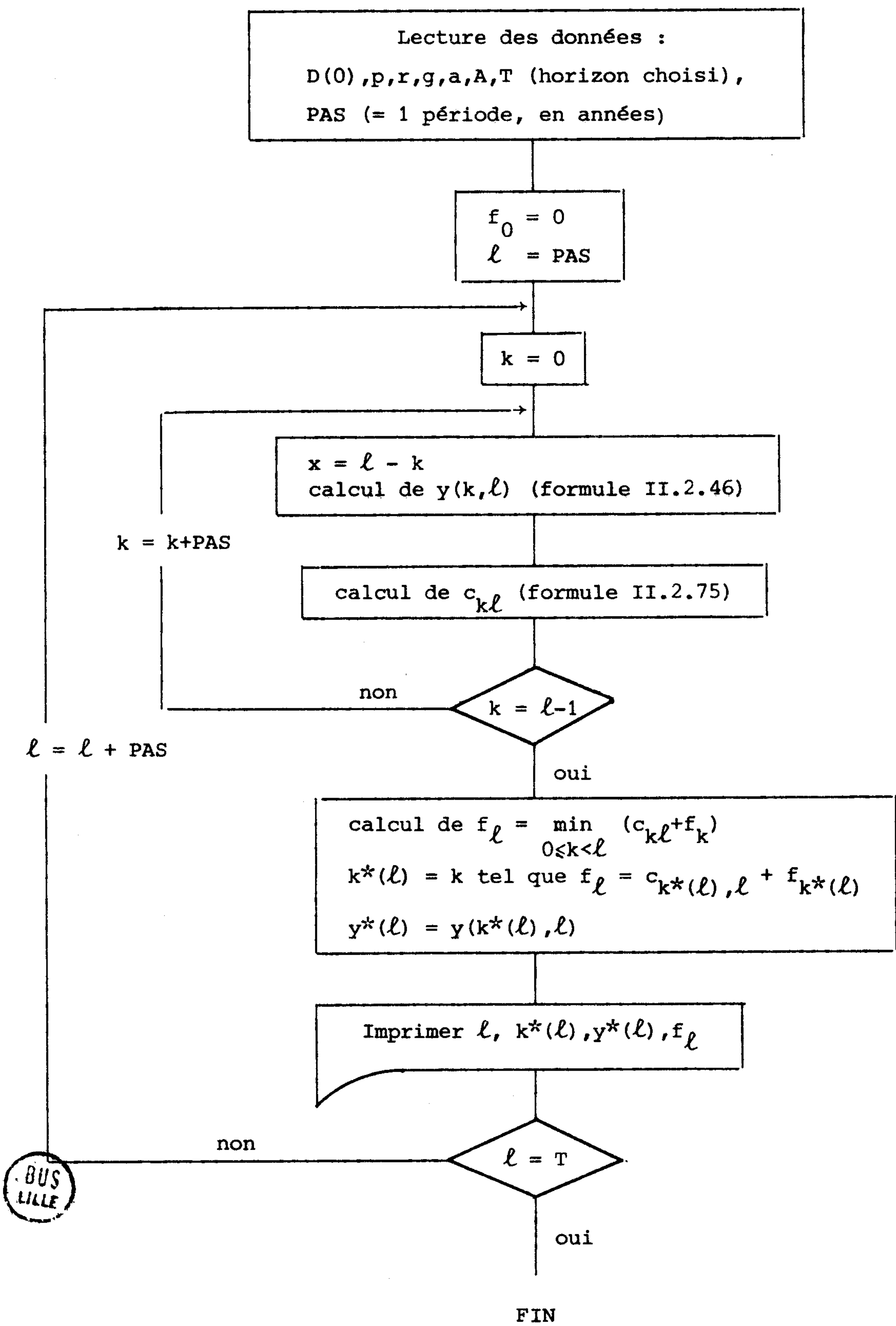
$$f_0 = 0$$

$$f_\ell = \min_{0 \leq k < \ell} (c_{k\ell} + f_k) \qquad \forall \ \ell = 1,2,3,\ldots$$

$c_{k\ell}$ étant le coût minimum, actualisé à l'origine, relatif à l'intervalle de temps situé entre les deux points de régénération successifs k et ℓ. Pour calculer $c_{k\ell}$, il suffit de reprendre l'expression (II.2.75) de I_k qui est le coût actualisé afférent à la période (t_k, t_{k+1}), dans laquelle nous remplaçons t_k par k, $x_k = t_{k+1} - t_k$ par $(\ell - k)$, et y_k par sa valeur à l'optimum donnée par (II.2.46).

Schématisons les différentes étapes de cette procédure, que nous appellerons "procédure II", par un organigramme de principe :

PROCÉDURE II



Nous pouvons déduire des résultats une prévision des expansions sur T périodes : le point de régénération précédant T est $k^*(T)$, et $y^*(T)$ est le temps d'importation entre $k^*(T)$ et T ; le point de régénération précédant $k^*(T)$ est $k^*[k^*(T)]$, et $y^*[k^*(T)]$ est le temps d'importation entre $k^*[k^*(T)]$ et $k^*(T)$ ... et ainsi de suite jusqu'à la première période.

2.3.6 - Résultats numériques

Nous avons considéré des périodes de 0.10 année ($\Longrightarrow$ PAS = 0.10) et avons repris les valeurs des paramètres proposées par J.C. BERRETTA et F. MOBASHERI :

$$
\begin{aligned}
a &= 0.80 \\
A &= 10010 \\
D(0) &= 50000 \text{ tonnes/an} \\
r &= 0.10 \\
g &= 0.07 \\
p &= 220 \text{ dollars/tonne.}
\end{aligned}
$$

La politique optimale, prévue jusqu'à l'horizon T = 50 ans, est la suivante (toutes les valeurs sont en années) :

$$
\begin{array}{lll}
t_0 = 0 & & \\
t_1 = 9.20 \;;\; y_0^* = 5.62 & \} \Longrightarrow x_0^* = t_1 - t_0 = 9.20 & \\
t_2 = 17.30 \;;\; y_1^* = 4.50 & \} \Longrightarrow x_1^* = t_2 - t_1 = 8.10 & \\
t_3 = 24.70 \;;\; y_2^* = 3.76 & \} \Longrightarrow x_2^* = t_3 - t_2 = 7.40 & \\
t_4 = 31.60 \;;\; y_3^* = 3.22 & \} \Longrightarrow x_3^* = t_4 - t_3 = 6.90 & \\
t_5 = 38.10 \;;\; y_4^* = 2.79 & \} \Longrightarrow x_4^* = t_5 - t_4 = 6.50 & \\
t_6 = 44.20 \;;\; y_5^* = 2.43 & \} \Longrightarrow x_5^* = t_6 - t_5 = 6.10 & \\
t_7 = 50.00 \;;\; y_6^* = 2.14 & \} \Longrightarrow x_6^* = t_7 - t_6 = 5.80 &
\end{array}
$$

et le coût actualisé de cette politique, somme des coûts de construction et d'importation, pour 50 ans, est

$$f_{50} = \$\ 109\ 948\ 288$$

Durant cette période de 50 ans, sept usines seront construites, aux instants $t_k + y_k^*$ $(k=0,1,2,\dots,6)$; et leur capacité sera de

$$v_k = D(0).[e^{gt_{k+1}} - e^{gt_k}].$$

Supposons qu'à partir du point de régénération $t = 50$, nous décidions de construire à intervalles de temps réguliers ; la minimisation de $C(\bar{\pi},50)$ nous donne la valeur optimale x^* de x : $x^* = 4.99$ correspondant au coût $C(\bar{\pi},50) = \$ \ 152\ 494\ 58$.

Nous en déduisons $y^* = 1.74$.

Le coût de la politique ainsi déterminée, de $t = 0$ jusqu'à un horizon infini est

$$C(\pi) = f_{50} + C(\bar{\pi},50) = \$ \ 109\ 948\ 288 + \$ \ 15\ 249\ 458$$

$$C(\pi) = \$ \ 125\ 197\ 738.$$

2.3.7 - Influence du choix de l'horizon sur la politique optimale

Le choix de l'horizon étant arbitraire, la question se pose de savoir si les caractéristiques de la politique qui minimise les coûts jusqu'à l'infini dépendent de ce choix.

C'est dans le but de répondre à cette question que nous avons représenté dans la figure 7 les dates des points de régénération correspondant à différents choix de l'horizon : cette représentation met en évidence le fait que plus l'horizon est éloigné, plus son influence est faible sur les premières expansions. Or, c'est sur ces premières expansions que nous devons porter notre attention puisqu'elles déterminent nos décisions à court terme ; et l'on pourra donc considérer que le choix d'un horizon fini ne compromet pas les décisions d'expansions à court terme ; il suffira seulement de le prendre assez éloigné (35 - 40 ans pour l'exemple traité).

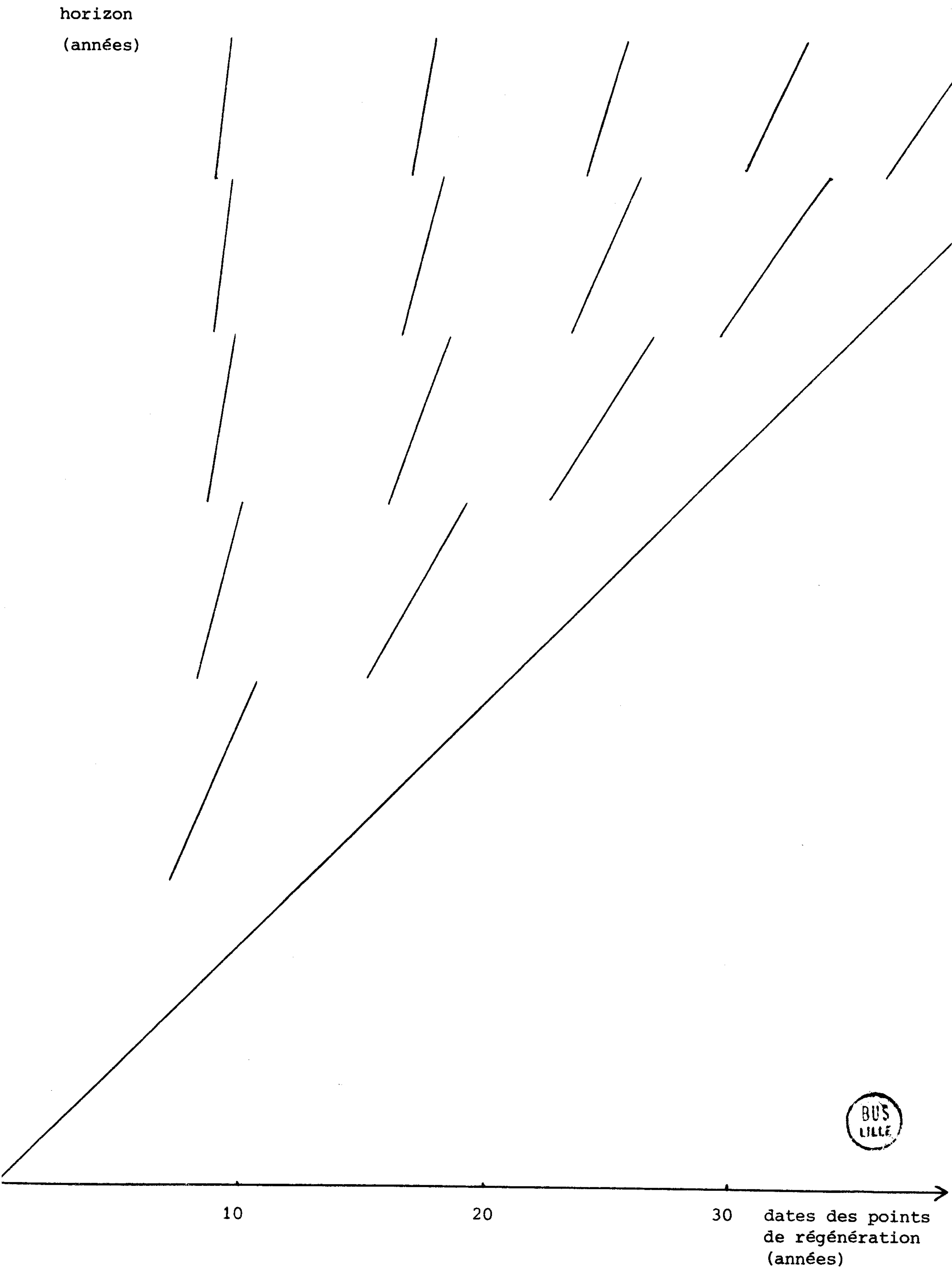


figure 7. Influence du choix de l'horizon sur les points de régénération.

2.3.8 - Comparaison des deux méthodes

Les résultats obtenus précédemment à l'aide des procédures I et II permettent de constater que, d'une période à la suivante, les valeurs des x_k^* diffèrent d'une quantité non négligeable, de même celles des y_k^*. La méthode de J.C. BERRETTA et F. MOBASHERI, qui suppose à chaque itération les y_k et les x_k constants après le point de régénération correspondant à l'itération en cours, est donc basée sur une hypothèse qui n'est pas vérifiée en pratique et ne peut, dans ces conditions, fournir des résultats optimaux.

Afin de mieux pouvoir comparer les deux méthodes, choisissons comme horizon T pour la procédure II une date correspondant à un point de régénération déterminé par la procédure I, puisque l'on suppose que l'excès de capacité en T est nul. Soit donc T = 46.60 ans.

Les résultats obtenus par les deux méthodes sont rapportés dans la figure 8, et les divergences entre les politiques qui s'en déduisent sont ainsi mises en évidence ; en particulier, nous remarquons que les expansions de capacité définies par la procédure II sont plus importantes et moins fréquentes (surtout les premières que celles que préconisent J.C. BERRETTA et F. MOBASHERI.

Les différences de coûts qui en résultent sont résumées dans le tableau 1 : dans les deux premières colonnes sont inscrits les points de régénération t_k déterminés par la procédure I et les coûts de la politique optimale pour cette procédure, pour la période allant de l'origine jusqu'à ces points t_k, c'est-à-dire $\sum_{\ell=0}^{k} I_\ell$; puis nous avons noté la valeur de ces coûts , pour la période allant de l'origine jusqu'aux t_k précédents, lorsque l'on utilise la procédure II, c'est-à-dire que nous avons pris comme horizons successifs les t_k définis par la procédure I.

t_k définis ar la procédure I	coûts jusque t_k calculés par : procédure I	procédure II	t_k définis par la procédure II	coûts jusque t_k (procédure II)
0			0	
6.81	31 143 264	$\simeq$ équivalent		
			9.40	40 543 504
13.21	53 442 080	$\simeq$ équivalent		
			17.80	65 684 480
19.31	69 867 312	$\simeq 6943 \times 10^4$		
25.15	82 113 056	$\simeq 8150 \times 10^4$		
			25.50	82 182 416
30.75	91 363 232	$\simeq 9075 \times 10^4$		
			32.80	93 611 024
36.19	98 479 616	$\simeq 9786 \times 10^4$		
			39.80	101 721 216
41.47	103 984 400	$\simeq 1033 \times 10^5$		
46.62	108 285 232	$\simeq 1076 \times 10^5$	46.60	$\simeq 1076 \times 10^5$

Tableau 1.

Nous pouvons ainsi comparer l'efficacité des deux méthodes en comparant les coûts pour des périodes identiques résultant de l'emploi de l'une ou de l'autre : si l'horizon est T = 6.81 ans, la procédure I donne un coût moindre, ce qui est dû à ce que cette procédure calcule le minimum sur une période continue alors que la procédure II discrétise le temps pour cette même période. Mais ceci n'est pas significatif en ce qui concerne notre comparaison puisque les politiques sont alors les mêmes.

Dès qu'il y a plus d'une expansion, la différence des politiques déterminées par chacune des méthodes implique une différence de coûts, qui s'accentue avec le nombre des expansions, et qui donne la préférence à la procédure II comme méthode de résolution.

Nous avons noté dans les colonnes 4 et 5 les points de régénération et les coûts de la politique optimale déterminée par la procédure II lorsque l'horizon est T = 46.60 ans.

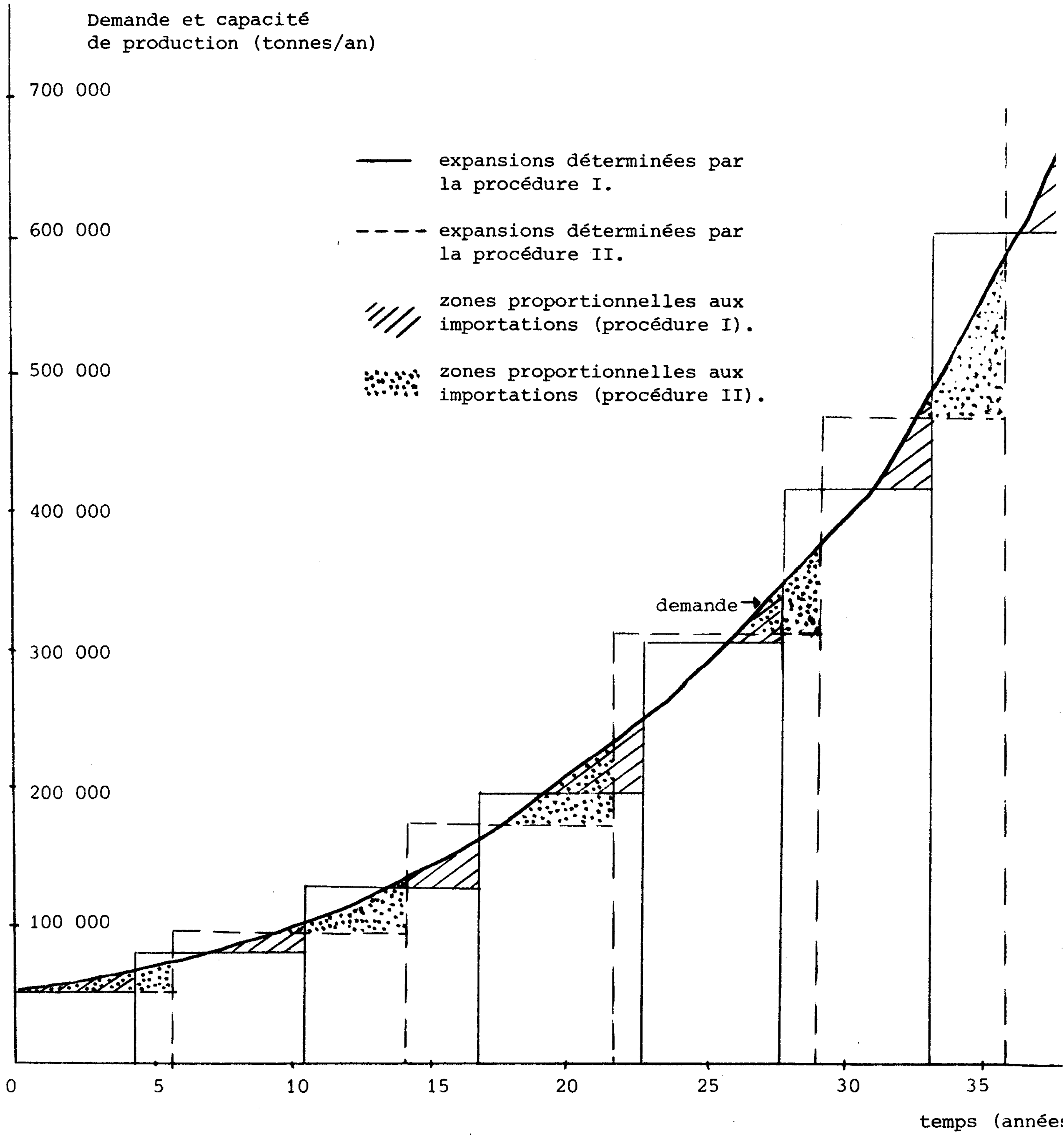


figure 8. Comparaison des politiques optimales déterminées par les procédures I et II.

CHAPITRE III

MODELES D'EXPANSION DE CAPACITE AVEC POSSIBILITE DE STOCKAGE

Nous généraliserons dans ce chapitre les résultats précédents, en autorisant le stockage dans la zone étudiée.

En plus des hypothèses générales, nous ferons les hypothèses suivantes :

H17 - Le taux d'escompte r est constant sur toute la période étudiée, ainsi que les coûts de production.

H20 - La fonction d'investissement est indépendante du temps.

H21 - L'accroissement de la demande, D(t), est une fonction continue croissante du temps.

H22 - Le coût de stockage, s, par unité stockée et par an, est constant.

H23 - Aux dates de construction des usines, le stock est nul.

Nous déterminerons tout d'abord des conditions nécessaires d'optimalité et l'expression du coût de la politique lorsque la demande est une fonction continue croissante quelconque, en considérant successivement le cas où les importations ne sont pas autorisées, et le cas où il y a des importations temporaires. Puis nous appliquerons ces résultats à une demande linéaire et à une demande exponentielle.

Les notations seront les mêmes que celles qui ont été utilisées dans les chapitres précédents. De plus, on désignera par

x_k l'intervalle de temps, en années, entre les deux points de régénération successifs t_k et t_{k+1} ;

y_k^1 la durée, en années, de la période de constitution du stock, précédant le point de régénération t_k ;

y_k^2 la durée, en années, de la période d'utilisation du stock pendant la période k ;

y_k^3 la durée, en années, d'importation pendant la période k ;

s le coût de stockage, supposé constant, en unités monétaires par unité stockée et par an ;

p la pénalité d'importation, en unités monétaires par unité importée ;

I_k le coût afférent à la $(k+1)^{\text{ième}}$ usine, comprenant les coûts de construction, les coûts de stockage et/ou d'importations temporaires.

Remarque préliminaire

Nous n'envisagerons que les valeurs y_k^1, y_k^2, éventuellement y_k^3, et x_k satisfaisant à :

$y_k^2 + y_{k+1}^1 \leqslant x_k$ $\forall$ k dans le cas où il n'y a pas d'importations,

et $y_k^2 + y_k^3 + y_{k+1}^1 \leqslant x_k$ $\forall$ k dans le cas d'importations temporaires,

de façon à respecter les notations pour lesquelles l'indice inférieur k d'une quantité signifie que celle-ci est relative à la période k, limitée par les points de régénération t_k et t_{k+1}.

1 - LA DEMANDE CROÎT CONTINÛMENT DE MANIÈRE QUELCONQUE

Dans une première sous-section, nous rechercherons des conditions nécessaires d'optimalité lorsqu'il n'y a pas d'importations ; puis nous considèrerons le cas, plus conforme à la réalité, où les importations sont autorisées moyennant une pénalité supposée connue.

1.1 - LES IMPORTATIONS NE SONT PAS AUTORISEES

La politique est alors la suivante : à partir d'un point de régénération t_k, on écoule le stock dont on dispose pendant y_k^2, stock qui a été accumulé juste avant le point de régénération t_k pendant une durée y_k^1. Puis, dès que le stock est épuisé, on construit une usine de capacité v_k de façon à satisfaire la demande car, pour le moment, nous imposons l'hypothèse

H13 - Les importations ne sont pas autorisées.

Les variables à déterminer sont :

- les instants où l'on doit construire les usines,
- les instants où l'on doit commencer à stocker,

ce qui revient à déterminer :

- les points de régénération t_k,
- les périodes de stockage y_k^1.

1.1.1 - Conditions nécessaires d'optimalité

Comme il n'y a pas de report de stock d'une période à l'autre d'après l'hypothèse H23, le bilan du stock doit être nul avant la construction de chaque usine ; formalisons cette hypothèse :

l'excès de capacité, positif, négatif, ou nul, en $t \in [t_k - y_k^1,\ t_k + y_k^2]$ est

$$z_t = v_{k-1} - \int_{t_{k-1}}^{t} D(t)\ dt, \tag{III.1.1.}$$

$$= \int_{t_{k-1}}^{t_k} D(t)\ dt - \int_{t_{k-1}}^{t} D(t)\ dt\ , \tag{III.1.2}$$

puisque la construction de l'usine de taille v_{k-1} doit permettre de faire face à l'accroissement de demande de t_{k-1} à t_k ; on en déduit :

$$z_t = \int_t^{t_k} D(t)\ dt. \tag{III.1.3}$$

Le stock en t est donc égal à :

$$\int_{t_k-y_k^1}^{t} \left[\int_t^{t_k} D(t)\ dt\right] dt. \tag{III.1.4}$$

Le bilan du stock devant être nul en fin de période,

$$\int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} \left[\int_t^{t_k} D(t)\ dt\right] dt = 0. \tag{III.1.5}$$

De plus, puisque nous voulons minimiser le coût de la politique, nous n'envisagerons le stockage que si l'accroissement marginal du coût de stockage, actualisé à l'origine, ne dépasse pas l'accroissement marginal du bénéfice dû au report de l'investissement correspondant :

Considérons un accroissement élémentaire Δy_k^1 de y_k^1. La quantité fabriquée pendant l'intervalle de temps $[t_k-y_k^1-\Delta y_k^1,\ t_k-y_k^1]$ est, en négligeant les termes d'ordre supérieur à un en Δy_k^1 :

$$\Delta y_k^1 . \int_{t_k-y_k^1}^{t_k} D(t)\ dt. \tag{III.1.6}$$

Avant d'être utilisée en $(t_k+y_k^2)$, cette quantité sera stockée de $(t_k-y_k^1)$ à $(t_k+y_k^2)$, moyennant un coût de stockage actualisé de :

$$\int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} se^{-rt} . \Delta y_k^1 \left[\int_{t_k-y_k^1}^{t_k} D(t)\ dt\right] dt \tag{III.1.7}$$

$$= s.\ \Delta y_k^1 \left[-\frac{1}{r}\ e^{-rt}\right]_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} \int_{t_k-y_k^1}^{t_k} D(t)\ dt \tag{III.1.8}$$

$$= \frac{s}{r}\ .\ \Delta y_k^1 (e^{-r(t_k-y_k^1)} - e^{-r(t_k+y_k^2)}) \int_{t_k-y_k^1}^{t_k} D(t)\ dt. \tag{III.1.9}$$

Ayant augmenté le temps de stockage, nous retarderons le moment où le stock sera complètement écoulé (et par conséquent le moment où l'usine suivante sera construite) d'un temps égal à la durée de consommation de la quantité supplémentaire:

$$\frac{\Delta y_k^1 \int_{t_k-y_k^1}^{t_k} D(t)\, dt}{\int_{t_k}^{t_k+y_k^2} D(t)\, dt} . \tag{III.1.10}$$

Toujours en négligeant les termes d'ordre supérieur à un en Δy_k^1, le bénéfice actualisé dû au report de l'investissement est :

$$\frac{\Delta y_k^1 \int_{t_k-y_k^1}^{t_k} D(t)\, dt}{\int_{t_k}^{t_k+y_k^2} D(t)\, dt} . r.f(v_k).e^{-r(t_k+y_k^2)}, \tag{III.1.11}$$

r étant le taux d'intérêt annuel et $f(v_k)$ le coût d'investissement d'une usine de taille v_k.

L'égalité, à l'optimum, entre l'accroissement marginal du coût de stockage et l'accroissement marginal du bénéfice dû au report de l'investissement s'écrit donc :

$$\frac{s}{r} . \Delta y_k^1 \left(e^{-r(t_k-y_k^1)} - e^{-r(t_k+y_k^2)}\right) . \int_{t_k-y_k^1}^{t_k} D(t)\, dt$$

$$= \frac{\Delta y_k^1 \int_{t_k-y_k^1}^{t_k} D(t)\, dt}{\int_{t_k}^{t_k+y_k^2} D(t)\, dt} . r.f(v_k).e^{-r(t_k+y_k^2)}, \tag{III.1.12}$$

c'est-à-dire,en simplifiant :

$$\frac{r^2}{s} f(v_k) = \left[e^{r(y_k^1+y_k^2)} - 1\right] \int_{t_k}^{t_k+y_k^2} D(t)\, dt. \tag{III.1.13}$$

A l'optimum, les relations (III.1.5) et (III.1.14) doivent être vérifiées, et peuvent s'écrire :

$$\int_{t_k-y_k^{1*}}^{t_k+y_k^{2*}} \left[\int_t^{t_k} D(t)\,dt\right] dt = 0$$

et $$\frac{r^2}{s^2}\, f(v_k^*) = \left[e^{r(y_k^{1*}+y_k^{2*})} - 1\right] \int_{t_k}^{t_k+y_k^{2*}} D(t)\,dt$$

où y_k^{1*}, y_k^{2*} et v_k^* sont les valeurs optimales respectivement de y_k^1, y_k^2 et v_k.

1.1.2 - Expression du coût

Soit I_k la somme des coûts, actualisés à l'origine, liés à la $(k+1)^{\text{ième}}$ usine ; I_k est donc égal à la somme (des coûts de stockage pendant la constitution du stock, de $t_k-y_k^1$ au point de régénération t_k, et pendant l'utilisation du stock, de t_k à $t_k+y_k^2$) et (du coût actualisé de construction de la $(k+1)^{\text{ième}}$ usine en $t_k+y_k^2$) :

$$I_k = \int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} s e^{-rt} \left[\int_{t_k-y_k^1}^{t} \left(v_{k-1} - \int_{t_{k-1}}^{t} D(t)\,dt\right) dt\right] dt$$

$$+ e^{-r(t_k+y_k^2)} f(v_k), \qquad \text{(III.1.14)}$$

ou, si l'on remplace v_{k-1} par sa valeur $\int_{t_{k-1}}^{t_k} D(t)\,dt$,

$$I_k = \int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} s e^{-rt} \left[\int_{t_k-y_k^1}^{t} \left(\int_t^{t_k} D(t)\,dt\right) dt\right] dt + e^{-r(t_k+y_k^2)} f(v_k). \qquad \text{(III.1.15)}$$

Si l'horizon est infini, le coût total de la politique est

$$C(\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k \; ; \qquad \text{(III.1.16)}$$

Si le nombre d'usines à construire est limité à K+1,

$$C(\pi) = \sum_{k=0}^{K} I_k. \tag{III.1.17}$$

Avant de déterminer la politique optimale qui minimise $C(\pi)$ dans des cas particuliers, nous établirons des conditions nécessaires d'optimalité, et l'expression du coût lorsque les importations sont permises, dans le cas d'une demande continue croissante quelconque.

1.2 - LES IMPORTATIONS SONT AUTORISEES

Les importations sont maintenant permises, ce qui n'oblige pas à faire une expansion de capacité dès que le stock est épuisé, puisque l'on peut satisfaire la demande en important pendant un temps y_k^3, moyennant une pénalité p, supposée constante, par unité importée.

1.2.1 - Conditions nécessaires d'optimalité

L'hypothèse H23 se formule de la même façon que dans le cas où les importations ne sont pas autorisées :

$$\int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} \left[\int_t^{t_k} D(t)\ dt \right] dt = 0. \tag{III.1.18}$$

D'autre part, il n'est intéressant de stocker que si le coût actualisé de stockage d'une unité pendant l'intervalle de temps $[t_k-y_k^1, t_k+y_k^2]$ est inférieur au coût actualisé d'importation de cette unité qui, si elle n'était pas stockée, devrait être importée :

$$\int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} se^{-rt}\ dt \leqslant pe^{-r(t_k+y_k^2)}, \tag{III.1.19}$$

$$\frac{s}{r}\left(e^{-r(t_k-y_k^1)} - e^{-r(t_k+y_k^2)}\right) \leqslant pe^{-r(t_k+y_k^2)}, \tag{III.1.20}$$

$$p \geqslant \frac{s}{r}\left(e^{-r(y_k^1+y_k^2)} - 1\right), \tag{III.1.21}$$

$$y_k^1 + y_k^2 \leqslant \frac{1}{r} \text{Log}\left(\frac{pr}{s} + 1\right). \tag{III.1.22}$$

Si y_k^{1*} et y_k^{2*} sont respectivement les valeurs optimales de y_k^1 et y_k^2, nous aurons à l'optimum la relation :

$$y_k^{1*} + y_k^{2*} \leqslant \frac{1}{r} \text{Log } (\frac{pr}{s} + 1) \; ; \qquad \text{(III.2.23)}$$

et, à partir de $(t_k + y_k^{2*})$, nous importerons pendant un temps y_k^3, qui sera optimum si le coût marginal d'importation est égal au bénéfice marginal dû au report de l'investissement :

la demande excédant la capacité de production en $(t_k + y_k^2 + y_k^3)$ est de $\int_{t_k}^{t_k+y_k^2+y_k^3} D(t)\, dt$; donnons à y_k^3 un accroissement élémentaire Δy_k^3 ; le coût actualisé d'importation durant l'intervalle de temps élémentaire $[t_k + y_k^2 + y_k^3,\ t_k + y_k^2 + y_k^3 + \Delta y_k^3]$ est, en négligeant les termes en Δy_k^3 d'ordre supérieur à un :

$$e^{-r(t_k+y_k^2+y_k^3)} \; p.\Delta y_k^3 \int_{t_k}^{t_k+y_k^2+y_k^3} D(t)\, dt, \qquad \text{(III.1.24)}$$

et le gain dû au report de l'investissement de $(t_k+y_k^2+y_k^3)$ à $(t_k+y_k^2+y_k^3+\Delta y_k^3)$ est, en négligeant les termes en Δy_k^3 d'ordre supérieur à un :

$$\Delta y_k^3 \, . \, e^{-r(t_k+y_k^2+y_k^3)} \; r.f(v_k). \qquad \text{(III.1.25)}$$

A l'optimum, nous aurons donc l'égalité entre les expressions (III.1.24) et (III.1.25) :

$$e^{-r(t_k+y_k^2+y_k^3)} \; p.\Delta y_k^3 \int_{t_k}^{t_k+y_k^2+y_k^3} D(t)\, dt =$$

$$\Delta y_k^3 \, . \, e^{-r(t_k+y_k^2+y_k^3)} \; r.f(v_k), \qquad \text{(III.1.26)}$$

ou, en simplifiant :

$$rf(v_k) = p \int_{t_k}^{t_k+y_k^2+y_k^3} D(t)\, dt \; , \qquad \text{(III.1.27)}$$

formule qui généralise les résultats obtenus par ERLENKOTTER [6] dans le cas où $t_k = t_0 = 0$ et $y_k^2 = 0$.

Dans le cas où le stockage et les importations sont permis, les relations suivantes seront donc vérifiées à l'optimum :

$$\int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} \left[\int_t^{t_k} D(t)\ dt \right] dt = 0,$$

$$y_k^1 + y_k^2 \leq \frac{1}{r} \text{Log} \left(\frac{pr}{s} + 1\right),$$

$$rf(v_k) = p \int_{t_k}^{t_k+y_k^2+y_k^3} D(t)\ dt.$$

1.2.2 - Expression du coût

Le coût I_k relatif à la période k comprend :

1°) le coût actualisé de stockage depuis le début de la période de stockage, soit $(t_k-y_k^1)$, jusqu'à $(t_k+y_k^2)$, moment où le stock est complètement écoulé ; sachant que, en $t \in [t_k-y_k^1,\ t_k+y_k^2]$ le stock est de :

$$\int_{t_k-y_k^1}^{t} \left[v_{k-1} - \int_{t_{k-1}}^{t} D(t)\ dt \right] dt, \tag{III.1.28}$$

le coût de stockage correspondant, actualisé à l'origine, est de :

$$\int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} se^{-rt} \left[\int_{t_k-y_k^1}^{t} \left(v_{k-1} - \int_{t_{k-1}}^{t} D(t)\ dt\right) dt \right] dt \tag{III.1.29}$$

$$= \int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} se^{-rt} \left[\int_{t_k-y_k^1}^{t} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} D(t)\ dt - \int_{t_{k-1}}^{t} D(t)\ dt\right) dt \right] dt \tag{III.1.30}$$

$$= \int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} se^{-rt} \left[\int_{t_k-y_k^1}^{t} \left(\int_{t}^{t_k} D(t)\ dt\right) dt \right] dt\ ; \tag{III.1.31}$$

2°) Le coût d'importation actualisé ; sachant que les importations nécessaires pour satisfaire la demande en $t \in (t_k+y_k^2, t_k+y_k^2+y_k^3)$, lorsque le stock est écoulé, sont de :

$$\int_{t_k}^{t} D(t)\, dt \;, \qquad \text{(III.1.32)}$$

le coût d'importation, actualisé à l'origine, correspondant, est de :

$$\int_{t_k+y_k^2}^{t_k+y_k^2+y_k^3} pe^{-rt}.\left(\int_{t_k}^{t} D(t)\, dt \right) dt \;; \qquad \text{(III.1.33)}$$

3°) Le coût d'investissement actualisé de l'usine de taille v_k, construite en $t_k+y_k^2+y_k^3$:

$$e^{-r(t_k+y_k^2+y_k^3)} .\, f(v_k). \qquad \text{(III.1.34)}$$

L'expression de I_k est donc la suivante :

$$I_k = \int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} se^{-rt} \left[\int_{t_k-y_k^1}^{t} \left(\int_{t}^{t_k} D(t)\, dt\right) dt \right] dt$$

$$+ \int_{t_k+y_k^2}^{t_k+y_k^2+y_k^3} pe^{-rt} \left(\int_{t_k}^{t} D(t)\, dt\right) dt + e^{-r(t_k+y_k^2+y_k^3)} .f(v_k), \qquad \text{(III.1.35)}$$

les valeurs de y_k^1, y_k^2, y_k^3 vérifiant les relations (III.1.18), (III.1.23) et (III.1.27).

Le problème est de minimiser le coût total de la politique :

$$C(\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k \qquad \text{(III.1.36)}$$

si l'horizon est infini, ou

$$C(\pi) = \sum_{k=0}^{K} I_k \qquad \text{(III.1.37)}$$

si le nombre de constructions est limité à K+1.

2 - LA DEMANDE CROÎT LINÉAIREMENT EN FONCTION DU TEMPS

L'accroissement de la demande, D(t), est alors une constante D, et la taille de l'usine construite pendant la période k est

$$v_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} D(t)\, dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} D dt = D(t_{k+1}-t_k). \qquad \text{(III.2.1)}$$

Si x_k est l'intervalle de temps entre les deux points de régénération successifs t_k et t_{k+1},

$$v_k = x_k D. \qquad \text{(III.2.2)}$$

Aux hypothèses générales ajoutons les hypothèses suivantes :

H15 - L'horizon est infini ;

H24 - En $t_0 = 0$, nous disposons d'un stock élaboré à partir d'usines déjà existantes (et éventuellement de quantités importées).

Nous pouvons alors énoncer le théorème :

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses précédentes, la politique optimale est une politique de cycle constant, et les temps de stockage, et éventuellement d'importations, sont identiques pour chaque période.*

La démonstration est analogue à celles qui ont été faites dans les deux premiers chapitres, lorsque la demande est linéaire : supposons que l'on ait déterminé les temps de stockage (et éventuellement d'importation), la date de construction et la taille de l'usine relatifs à la première période, de façon à minimiser le coût total ; la situation en début de seconde période est exactement identique, avec les hypothèses énoncées, à celle que l'on avait en début de période précédente, et les résultats seront donc les mêmes. □.

Ainsi nous pouvons écrire :

$$\left.\begin{array}{lll} x_k &= x & \forall\ k, \\ y_k^1 &= y^1 & \forall\ k, \\ y_k^2 &= y^2 & \forall\ k, \\ y_k^3 &= y^3 & \forall\ k, \\ t_k &= kx & \forall\ k, \\ v_k &= xD & \forall\ k. \end{array}\right\} \qquad \text{(III.2.3)}$$

Nous déterminerons la politique optimale dans le cas où il n'y a pas d'importations, puis dans le cas où les importations sont permises.

2.1 - LES IMPORTATIONS NE SONT PAS AUTORISEES

2.1.1 - Conditions nécessaires d'optimalité

L'hypothèse H23, formulée par l'équation (III.1.5), s'écrit :

$$\int_{t_k-y^1}^{t_k+y^2} \left[\int_t^{t_k} D\ dt\right] dt = 0, \qquad \text{(III.2.4)}$$

$$D\int_{t_k-y^1}^{t_k+y^2} (t_k-t)\ dt = 0, \qquad \text{(III.2.5)}$$

$$Dt_k(t_k+y^2-t_k+y^1) - \frac{D}{2}\left[(t_k+y^2)^2 - (t_k-y^1)^2\right] = 0, \qquad \text{(III.2.6)}$$

$$Dt_k(y^2+y^1) - \frac{D}{2}(2t_k+y^2-y^1)(y^2+y^1) = 0, \qquad \text{(III.2.7)}$$

$$D(y^2+y^1)\ [-\frac{1}{2}(y^2-y^1)] = 0, \qquad \text{(III.2.8)}$$

$$y^2 = y^1 \qquad \text{(III.2.9)}$$

En utilisant les relations (III.2.3) et (III.2.9) la condition d'optimalité (III.1.13) s'écrit :

$$\frac{r^2}{s} f(xD) = [e^{r(2y^1)} - 1] \int_{kx}^{kx+y^1} D\ dt, \qquad \text{(III.2.10)}$$

$$\frac{r^2 f(xD)}{sD} = y^1\ (e^{2ry^1} - 1). \qquad \text{(III.2.11)}$$

2.1.2 - Expression du coût à l'optimum

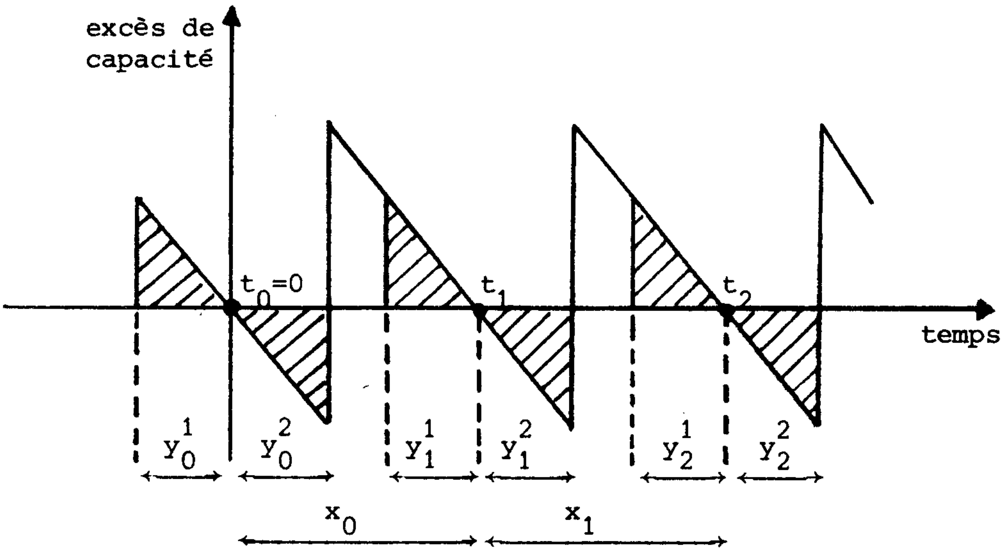


figure 1.

Reprenons l'expression du coût I_k lié à la $(k+1)^{\text{ième}}$ usine, donnée par la relation (III.1.15) ; en utilisant les relations :

$$D(t) = D,$$
$$y^2 = y^1,$$
$$t_k = kx,$$

nous obtenons :

$$I_k = \int_{kx-y^1}^{kx+y^1} se^{-rt}\left[\int_{kx-y^1}^{t} \left(\int_t^{kx} D\,dt\right) dt\right] dt + e^{-r(kx+y^1)} f(xD), \qquad \text{(III.2.12)}$$

$$= sD \int_{kx-y^1}^{kx+y^1} e^{-rt}\left[\int_{kx-y^1}^{t} (kx-t)\,dt\right] dt + e^{-r(kx+y^1)}\, f(xD), \qquad \text{(III.2.13)}$$

$$= sD \int_{kx-y^1}^{kx+y^1} e^{-rt}\left[kx(t-kx+y^1) - \left(\frac{t^2}{2} - \frac{(kx-y^1)^2}{2}\right)\right] dt+e^{-r(kx+y^1)} f(xD), \qquad \text{(III.2.14)}$$

$$= sD \int_{kx-y^1}^{kx+y^1} e^{-rt}\left[\frac{(y^1)^2}{2} - \frac{(kx)^2}{2} + tkx - \frac{t^2}{2}\right] dt+e^{-r(kx+y^1)} f(xD), \qquad \text{(III.2.15)}$$

$$= sD \ \{-\frac{1}{2r}((y^1)^2-(kx)^2)\ [e^{-rt}]_{kx-y^1}^{kx+y^1} - \frac{kx}{r}\ [e^{-rt}(t+\frac{1}{r})]_{kx-y^1}^{kx+y^1}$$

$$+ \frac{1}{2r}\ [e^{-rt}(t^2+\frac{2t}{r}+\frac{2}{r^2})]_{kx-y^1}^{kx+y^1}\ \} + e^{-r(kx+y^1)}\ f(xD), \qquad (III.2.16)$$

$$= sD\ \{\frac{1}{2r}\ ((y^1)^2-(kx)^2)\ [e^{-r(kx-y^1)} - e^{-r(kx+y^1)}]$$

$$+ \frac{kx}{r}\ [e^{-r(kx-y^1)}(kx-y^1+\frac{1}{r}) - e^{-r(kx+y^1)}(kx+y^1+\frac{1}{r})]$$

$$+ \frac{1}{2r}\ [e^{-r(kx+y^1)}((kx+y^1)^2+\frac{2(kx+y^1)}{r}+\frac{2}{r^2})$$

$$-e^{-r(kx-y^1)}((kx+y^1)^2+\frac{2(kx-y^1)}{r}+\frac{2}{r^2})]\}$$

$$+ e^{-r(kx+y^1)}\ f(xD), \qquad (III.2.17)$$

$$= \frac{sD}{r}\ \{e^{-r(kx-y^1)}\ [\frac{(y^1)^2}{2} - \frac{(kx)^2}{2} + (kx)^2 - y^1kx + \frac{kx}{r} - \frac{(kx)^2}{2} - \frac{(y^1)^2}{2}$$

$$+ y^1kx - \frac{kx}{r} + \frac{y^1}{r} - \frac{1}{r^2}\ ]$$

$$+e^{-r(kx+y^1)}\ [-\frac{(y^1)^2}{2} + \frac{(kx)^2}{2} - (kx)^2 - kxy^1 - \frac{kx}{r} + \frac{(kx)^2}{2} + \frac{(y_1)^2}{2}$$

$$+ kxy^1 + \frac{kx}{r} + \frac{y^1}{r} + \frac{1}{r^2}\ ]\}$$

$$+ e^{-r(kx+y^1)}\ f(xD), \qquad (III.2.18)$$

$$I_k = e^{-rkx}\ \{\ \frac{sD}{r^2}\ [e^{+ry^1}(y^1-\frac{1}{r}) + e^{-ry^1}(y^1+\frac{1}{r})] + e^{-ry^1}\ f(xD)\}. \qquad (III.2.19)$$

Le coût total de la politique est, puisque l'on a supposé l'horizon infini :

$$C(\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k, \qquad (III.2.20)$$

$$C(\pi) = \{\frac{sD}{r^2}\ [e^{ry^1}(y^1-\frac{1}{r}) + e^{-ry^1}(y^1+\frac{1}{r})\ ] + e^{-ry^1}.f(xD)\}\ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-rkx}. \qquad (III.2.21)$$

Or, $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-rkx} = \frac{1}{1-e^{-rx}}$ comme somme infinie de termes d'une progression géométrique dont la raison e^{-rx} est inférieure à un ; on obtient ainsi :

$$C(\pi) = \frac{1}{1-e^{-rx}} \{ \frac{sD}{r^2} [e^{ry^1}(y^1 - \frac{1}{r}) + e^{-ry^1}(y^1 + \frac{1}{r})] + e^{-ry^1} f(xD)\}. \quad \text{(III.2.22)}$$

2.1.3 - Exemple : cas où $f(xD) = A(xD)^a$

Etudions plus particulièrement le problème lorsque la fonction d'investissement est de la forme $f(xD) = A(xD)^a$, A étant une constante de proportionnalité et a le coefficient d'économie d'échelle.

Utilisons ici un raisonnement analogue à celui qu'ERLENKOTTER [6] a utilisé dans le cas où seules les importations étaient autorisées, et posons $\frac{AD^a}{sD} = S$, facteur pénalité de stockage.

La relation (III.2.11) entre x et y^1 à l'optimum s'écrit :

$$\frac{r^2 A(xD)^a}{sD} = y^1(e^{2ry^1} - 1), \quad \text{(III.2.23)}$$

$$r^2 S x^a = y^1(e^{2ry^1} - 1), \quad \text{(III.2.24)}$$

$$x = \left[\frac{y^1(e^{2ry^1} - 1)}{r^2 S} \right]^{1/a}, \quad \text{(III.2.25)}$$

et le coût normalisé, déduit de (III.2.22) :

$$\frac{C(\pi)}{AD^a} = \frac{1}{1-e^{-rx}} \{ \frac{sD}{r^2 AD^a} [e^{ry^1}(y^1 - \frac{1}{r}) + e^{-ry^1}(y^1 + \frac{1}{r})] + e^{-ry^1} \frac{A(xD)^a}{AD^a} \}, \quad \text{(III.2.26)}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-rx}} \{ \frac{1}{r^2 S} [e^{ry^1}(y^1 - \frac{1}{r}) + e^{-ry^1}(y^1 + \frac{1}{r})] + e^{-ry^1} x^a \}. \quad \text{(III.2.27)}$$

Remplaçons x^a par sa valeur déduite de (III.2.25) :

$$\frac{C(\pi)}{AD^a} = \frac{1}{1-e^{-rx}} \{ \frac{1}{r^2 S} [e^{ry^1}(y^1 - \frac{1}{r}) + e^{-ry^1}(y^1 + \frac{1}{r})] + e^{-ry^1} \frac{y^1(e^{2ry^1} - 1)}{r^2 S} \}, \quad \text{(III.2.28)}$$

$$\frac{C(\pi)}{AD^a} = \frac{1}{(1-e^{-rx}) r^2 S} [e^{ry^1}(2y^1 - \frac{1}{r}) + \frac{1}{r} e^{-ry^1}]. \quad \text{(III.2.29)}$$

Remarque.

Si le coût de stockage est infini, la relation (III.2.11) entre x et y^1 à l'optimum devient

$$\lim_{s\to\infty} y^1(e^{2ry^1} - 1) = 0, \qquad \text{(III.2.30)}$$

$$\lim_{s\to\infty} y^1 = 0, \qquad \text{(III.2.31)}$$

ce qui traduit bien le fait que, lorsque la pénalité unitaire de stockage est infinie, on n'a pas intérêt à stocker.

Vérifions que l'on retrouve, en rendant s infini, le coût calculé par MANNE [19] dans le cas où il n'y a ni stockage, ni importations. Pour cela, nous devons montrer que :

$$\underbrace{\lim_{y^1\to 0} \frac{1}{(1-e^{-rx})r^2 s} [e^{ry^1}(2y^1 - \frac{1}{r}) + \frac{1}{r} e^{-ry^1}]}_{\text{coût normalisé quand il y a stockage}} = \underbrace{\frac{x^a}{1-e^{-rx}}}_{\text{coût normalisé quand il n'y a pas stockage}}, \qquad \text{(III.2.32)}$$

ou, d'après la relation (III.2.25),

$$\lim_{y^1\to 0} [e^{ry^1}(2y^1 - \frac{1}{r}) + \frac{1}{r} e^{-ry^1}] = \lim_{y^1\to 0} y^1(e^{2ry^1} -1). \qquad \text{(III.2.33)}$$

Calculons le premier membre, en faisant le développement limité de l'expression au voisinage de l'origine :

$$\lim_{y^1\to 0} [e^{ry^1}(2y^1 - \frac{1}{r}) + \frac{1}{r} e^{-ry^1}] = \lim_{y^1\to 0} \{2y^1 e^{ry^1} - \frac{1}{r}[1 + \frac{ry^1}{1!} + o(y^1)^2]$$

$$+ \frac{1}{r}[1 - \frac{ry^1}{1!} + o(y^1)^2]\}, \qquad \text{(III.2.34)}$$

$$= 2 \lim_{y^1\to 0} [y^1(e^{ry^1} -1)] \; ; \qquad \text{(III.2.35)}$$

calculons le second membre de (III.2.33) :

$$\lim_{y^1\to 0} y^1(e^{2ry^1} -1) = \lim_{y^1\to 0} y^1(e^{ry^1} +1)(e^{ry^1} -1), \qquad \text{(III.2.36)}$$

$$= \lim_{y^1\to 0} 2y^1(e^{ry^1} -1). \qquad \text{(III.2.37)}$$

les résultats donnés dans cette section sont donc bien une généralisation des résultats de MANNE [19] rappelés dans la section 2 du premier chapitre.

2.1.4 - Résultats numériques

Les tableaux des pages suivantes donnent les valeurs numériques des solutions optimales pour différentes valeurs des paramètres, lorsque la fonction d'investissement est $f(xD) = A(xD)^a$ et l'accroissement de demande égal à un ; nous constatons que la politique consistant à stocker pendant le temps y^{1*} est toujours préférable à la politique de non stockage.

Les deux dernières colonnes des tableaux mettent en évidence la sensibilité du coût en fonction des valeurs de x : elles donnent l'accroissement du coût en pourcentage lorsque l'intervalle de temps entre deux expansions successives est $x^*/2$ et $2x^*$, la valeur de y^1 correspondante satisfaisant à la condition d'optimalité (III.2.25).

Le coût normalisé à minimiser, dont l'expression est donnée par la formule (III.2.29), est fonction d'une seule variable y^1, puisque x est déduit de y^1 par la relation (III.2.25) ; et pour déterminer un optimum, nous avons utilisé la méthode de FIBONNACCI ([4], pp. 11-12).

2.1.5 - Influence des variations des paramètres

Les tableaux des résultats pour différentes valeurs des paramètres a,r, et S permettent de faire les remarques suivantes :

1/ L'influence du facteur pénalité de stockage S sur les valeurs à l'optimum x^* et y^{1*} est faible, et les courbes correspondantes sont en général croissantes.

2/ Lorsque le facteur d'économie d'échelle a augmente (r et S étant fixés), les valeurs correspondantes de x^* diminuent.

3/ Lorsque le taux d'escompte r augmente (a et S étant fixés), les valeurs correspondantes de x^* diminuent.

coefficient d'économie d'échelle a = 0.50.

Taux d'escompte r	Facteur pénalité de stockage S	Capacité optimale (si D = 1) x^*	Durée optimale de stockage y^{1*}	Coût normalisé minimum	Accroissement des coûts, en %, lorsque la capacité est de : $x^*/2$	$2x^*$
0.05	0.00	25.13	0.00	7.008	8.4	10.1
	1.00	25.95	0.35	6.920	8.3	11.1
	2.	25.09	0.49	6.895	8.8	9.7
	4.	25.93	0.70	6.847	8.1	10.6
	8.	26.03	0.99	6.783	8.1	10.5
	12.	25.72	1.20	6.733	8.6	10.0
	16.	25.98	1.38	6.693	8.4	10.2
	20.	26.07	1.54	6.657	8.4	10.2
	30.	26.34	1.87	6.584	8.4	10.3
	40.	26.38	2.15	6.523	8.5	10.2
	50.	26.34	2.38	6.470	8.6	9.9
	60.	26.62	2.60	6.423	8.5	10.1
	70.	26.59	2.80	6.381	8.6	10.0
	80.	26.80	2.98	6.342	8.5	10.1
	90.	26.90	3.15	6.306	8.5	10.1
0.10	0	12.56	0.00	4.955	8.4	10.1
	1	12.75	0.41	4.820	8.6	10.0
	2	13.00	0.58	4.766	8.3	10.3
	4	12.92	0.81	4.692	8.7	9.9
	8	13.24	1.14	4.592	8.5	10.2
	12	13.36	1.38	4.518	8.5	10.2
	16	13.47	1.58	4.458	8.5	10.2
	20	13.52	1.75	4.406	8.6	10.1
	30	13.63	2.11	4.299	8.8	9.9
	40	13.88	2.41	4.214	8.6	10.1
	50	13.97	2.66	4.142	8.7	10.0
	60	14.05	2.88	4.079	8.8	10.0
	70	14.18	3.09	4.023	8.7	10.0
	80	14.28	3.27	3.972	8.7	10.0
	90	14.33	3.44	3.925	8.8	10.0

coefficient d'économie d'échelle a = 0.50.

Taux d'escompte r	Facteur pénalité de stockage S	Capacité optimale (si D = 1) x^*	Durée optimale de stockage y^{1*}	Coût normalisé minimum	Accroissement des coûts, en %, lorsque la capacité est de : $x^*/2$	 $2x^*$
0.15	0.	8.38	0.00	4.046	8.4	10.1
	1.	8.60	0.45	3.866	8.6	10.0
	2.	8.74	0.63	4.797	8.5	10.1
	4.	8.84	0.88	3.702	8.6	10.0
	8.	9.03	1.22	3.578	8.6	10.0
	12.	9.13	1.47	3.488	8.7	9.9
	16.	9.25	1.68	3.416	8.7	10.0
	20.	9.36	1.85	3.355	8.7	10.0
	30.	9.50	2.21	3.233	8.8	9.9
	40.	9.66	2.50	3.137	8.8	10.0
	50.	9.76	2.75	3.057	8.9	9.9
	60.	9.87	2.96	2.989	8.9	9.9
	70.	9.96	3.15	2.930	8.9	9.9
	80.	10.03	3.33	2.876	9.0	9.9
	90.	10.07	3.49	2.828	9.0	9.8
0.20	0.	6.28	0.00	3.504	8.4	10.1
	1.	6.51	0.48	3.285	8.7	9.9
	2.	6.65	0.67	3.203	8.6	10.1
	4.	6.80	0.93	3.094	8.5	10.1
	8.	6.98	1.27	2.952	8.6	10.1
	12.	7.08	1.52	2.852	8.7	10.0
	16.	7.16	1.72	2.774	8.8	9.9
	20.	7.25	1.90	2.709	8.8	9.9
	30.	7.41	2.25	2.580	8.9	9.9
	40.	7.52	2.52	2.482	9.0	9.8
	50.	7.63	2.75	2.402	9.0	9.9
	60.	7.71	2.95	2.334	9.0	9.8
	70.	7.80	3.13	2.275	9.0	9.9
	80.	7.86	3.29	2.223	9.1	9.9
	90.	7.90	3.43	2.177	9.2	9.8

coefficient d'économie d'échelle a = 0.60

Taux d'escompte r	Facteur pénalité de stockage S	Capacité optimale (si D = 1) x*	Durée optimale de stockage y^{1*}	Coût normalisé minimum	Accroissement des coûts, en %, lorsque la capacité est de : x*/2	2x*
0.05	0.	18.95	0.00	9.541	7.1	9.2
	1.	20.05	0.39	9.440	6.1	10.4
	2.	19.90	0.54	9.373	6.6	10.3
	4.	19.57	0.76	9.303	7.0	9.5
	8.	19.95	1.07	9.210	6.7	9.9
	12.	19.77	1.30	9.138	7.1	9.4
	16.	19.64	1.49	9.079	7.3	9.1
	20.	19.51	1.65	9.027	7.6	8.7
	30.	20.10	2.02	8.919	7.2	9.3
	40.	20.30	2.33	8.830	7.2	9.4
	50.	20.34	2.58	8.753	7.3	9.2
	60.	20.50	2.82	8.685	7.3	9.3
	70.	20.66	3.04	8.623	7.3	9.4
	80.	20.77	3.23	8.566	7.3	9.4
	90.	20.82	3.42	8.513	7.3	9.3
0.10	0.	9.47	0.00	6.295	7.1	9.2
	1.	9.88	0.44	6.116	6.8	9.7
	2.	9.72	0.61	6.045	7.3	9.0
	4.	9.94	0.85	5.947	7.2	9.2
	8.	10.12	1.19	5.814	7.3	9.2
	12.	10.27	1.45	5.716	7.3	9.3
	16.	10.35	1.66	5.635	7.4	9.2
	20.	10.48	1.84	5.567	7.4	9.3
	30.	10.69	2.22	5.426	7.4	9.4
	40.	10.85	2.53	5.313	7.5	9.4
	50.	11.01	2.80	5.218	7.5	9.5
	60.	11.14	3.04	5.134	7.5	9.5
	70.	11.22	3.26	5.060	7.6	9.4
	80.	11.31	3.45	4.993	7.6	9.4
	90.	11.40	3.63	4.932	7.6	9.5

coefficient d'économie d'échelle a = 0.60

Taux d'escompte r	Facteur pénalité de stockage S	Capacité optimale (si D = 1) x^*	Durée optimale de stockage y^{1*}	Coût normalisé minimum	Accroissement des coûts, en %, lorsque la capacité est de : $x^*/2$	$2x^*$
0.15	0.	6.32	0.00	4.936	7.1	9.2
	1.	6.50	0.46	4.711	7.4	8.9
	2.	6.66	0.65	4.624	7.3	9.2
	4.	6.81	0.91	4.507	7.3	9.2
	8.	7.04	1.26	4.350	7.3	9.4
	12.	7.17	1.52	4.238	7.4	9.5
	16.	7.27	1.73	4.147	7.4	9.4
	20.	7.35	1.92	4.071	7.5	9.4
	30.	7.55	2.29	3.918	7.6	9.5
	40.	7.68	2.60	3.798	7.7	9.5
	50.	7.83	2.85	3.699	7.7	9.6
	60.	7.91	3.08	3.614	7.8	9.5
	70.	8.02	3.28	3.539	7.8	9.6
	80.	8.10	3.46	3.473	7.9	9.6
	90.	8.17	3.63	3.413	7.9	9.6
0.20	0.	4.74	0.00	4.153	7.1	9.2
	1.	4.98	0.49	3.891	7.3	9.1
	2.	5.12	0.68	3.792	7.3	9.3
	4.	5.23	0.94	3.661	7.5	9.2
	8.	5.44	1.30	3.491	7.5	9.4
	12.	5.58	1.56	3.371	7.5	9.5
	16.	5.68	1.77	3.276	7.6	9.5
	20.	5.76	1.94	3.197	7.7	9.5
	30.	5.93	2.31	3.042	7.8	9.5
	40.	6.06	2.59	2.923	7.9	9.5
	50.	6.17	2.83	2.827	7.9	9.6
	60.	6.26	3.04	2.745	8.0	9.6
	70.	6.35	3.22	2.675	8.0	9.6
	80.	6.42	3.39	2.612	8.1	9.7
	90.	6.48	3.54	2.557	8.1	9.7

coefficient d'économie d'échelle a = 0.70

Taux d'escompte r	Facteur pénalité de stockage S	Capacité optimale (si D = 1) x^*	Durée optimale de stockage y^{1*}	Coût normalisé minimum	Accroissement des coûts, en %, lorsque la capacité est de :	
					$x^*/2$	$2x^*$
0.05	0.	13.51	0.00	12.598	5.5	7.7
	1.	13.01	0.39	12.442	6.4	6.5
	2.	13.66	0.55	12.375	5.7	7.4
	4.	14.10	0.78	12.274	5.5	8.0
	8.	14.25	1.10	12.148	5.5	7.9
	12.	14.26	1.34	12.048	5.7	7.7
	16.	14.29	1.54	11.968	5.8	7.6
	20.	14.76	1.74	11.897	5.4	8.2
	30.	14.88	2.11	11.749	5.5	8.1
	40.	15.00	2.43	11.627	5.6	8.0
	50.	15.02	2.69	11.521	5.8	7.8
	60.	15.16	2.94	11.427	5.8	7.9
	70.	15.40	3.18	11.343	5.7	8.1
	80.	15.34	3.37	11.265	5.9	7.8
	90.	15.52	3.57	11.192	5.9	7.9
0.10	0.	6.75	0.00	7.755	5.5	7.7
	1.	7.12	0.44	7.535	5.3	8.1
	2.	7.02	0.61	7.447	5.8	7.5
	4.	7.16	0.85	7.326	5.8	7.5
	8.	7.42	1.20	7.161	5.8	7.8
	12.	7.57	1.46	7.039	5.8	7.8
	16.	7.73	1.68	6.940	5.8	8.0
	20.	7.85	1.87	6.854	5.8	8.1
	30.	8.04	2.26	6.679	5.9	8.1
	40.	8.21	2.58	6.537	6.0	8.2
	50.	8.35	2.86	6.418	6.1	8.2
	60.	8.50	3.11	6.313	6.1	8.3
	70.	8.59	3.33	6.220	6.2	8.3
	80.	8.72	3.54	6.136	6.2	8.4
	90.	8.81	3.73	6.059	6.2	8.4

coefficient d'économie d'échelle a = 0.70

Taux d'escompte r	Facteur pénalité de stockage S	Capacité optimale (si D=1) x^*	Durée optimale de stockage y^{1*}	Coût normalisé minimum	Accroissement des coûts, en %, lorsque la capacité est de : $x^*/2$	$2x^*$
0.15	0.	4.50	0.00	5.839	5.5	7.7
	1.	4.76	0.46	5.579	5.7	7.7
	2.	4.86	0.64	5.477	5.8	7.7
	4.	5.03	0.90	5.339	5.7	7.9
	8.	5.23	1.25	5.156	5.8	8.1
	12.	5.38	1.52	5.023	5.9	8.1
	16.	5.48	1.73	4.916	6.0	8.1
	20.	5.60	1.92	4.825	6.0	8.3
	30.	5.79	2.31	4.643	6.2	8.4
	40.	5.94	2.62	4.500	6.3	8.4
	50.	6.07	2.89	4.381	6.4	8.5
	60.	6.18	3.12	4.279	6.4	8.5
	70.	6.29	3.33	4.190	6.5	8.6
	80.	6.37	3.52	4.110	6.6	8.6
	90.	6.44	3.69	4.038	6.6	8.6
0.20	0.	3.38	0.00	4.774	5.5	7.7
	1.	3.64	0.47	4.483	5.7	7.8
	2.	3.77	0.66	4.371	5.7	8.0
	4.	3.94	0.93	4.223	5.8	8.2
	8.	4.09	1.28	4.029	6.0	8.1
	12.	4.23	1.54	3.892	6.1	8.2
	16.	4.35	1.76	3.783	6.2	8.4
	20.	4.45	1.94	3.692	6.3	8.4
	30.	4.64	2.31	3.514	6.4	8.6
	40.	4.76	2.60	3.376	6.5	8.6
	50.	4.88	2.85	3.264	6.6	8.7
	60.	4.96	3.06	3.169	6.7	8.7
	70.	5.06	3.25	3.087	6.8	8.8
	80.	5.14	3.43	3.015	6.8	8.9
	90.	5.20	3.58	2.950	6.9	8.9

coefficient d'économie d'échelle a = 0.80

Taux d'escompte r	Facteur pénalité de stockage S	Capacité optimale (si D=1) x^*	Durée optimale de stockage y^{1*}	Coût normalisé minimum	Accroissement des coûts, en %, lorsque la capacité est de : $x^*/2$	$2x^*$
0.05	0.	8.61	0.00	16.002	3.7	5.5
	1.	7.66	0.35	15.834	5.3	3.1
	2.	9.42	0.54	15.725	3.3	6.6
	4.	9.30	0.76	15.609	3.6	6.1
	8.	9.44	1.07	15.452	3.7	6.0
	12.	9.38	1.30	15.330	3.9	5.7
	16.	9.49	1.50	15.230	4.0	5.7
	20.	9.66	1.68	15.144	3.9	5.8
	30.	9.98	2.06	14.961	3.9	6.1
	40.	10.07	2.37	14.809	4.0	5.9
	50.	10.25	2.65	14.677	4.0	6.0
	60.	10.28	2.89	14.559	4.2	5.9
	70.	10.47	3.12	14.452	4.1	6.0
	80.	10.61	3.34	14.354	4.1	6.1
	90.	10.75	3.54	14.263	4.1	6.1
0.10	0.	4.31	0.00	9.190	3.7	5.5
	1.	4.55	0.40	8.949	3.9	5.6
	2.	4.81	0.58	8.853	3.6	6.3
	4.	4.72	0.80	8.717	4.1	5.5
	8.	4.95	1.13	8.532	4.1	5.7
	12.	5.15	1.39	8.394	4.1	6.0
	16.	5.28	1.60	8.280	4.1	6.1
	20.	5.39	1.79	8.183	4.1	6.2
	30.	5.59	2.18	7.980	4.3	6.2
	40.	5.76	2.50	7.817	4.4	6.3
	50.	5.96	2.79	7.677	4.4	6.5
	60.	6.06	3.04	7.555	4.5	6.5
	70.	6.21	3.27	7.446	4.5	6.6
	80.	6.30	3.48	7.347	4.6	6.6
	90.	6.41	3.67	7.256	4.6	6.7

coefficient d'économie d'échelle a = 0.80

Taux d'escompte r	Facteur pénalité de stockage S	Capacité optimale (si D=1) x*	Durée optimale de stockage y^{1*}	Coût normalisé minimum	Accroissement des coûts, en %, lorsque la capacité est de : x*/2	2x*
0.15	0.	2.87	0.00	6.645	3.7	5.5
	1.	3.14	0.42	6.375	3.9	5.8
	2.	3.25	0.59	6.268	3.9	5.9
	4.	3.40	0.84	6.122	4.0	6.1
	8.	3.58	1.18	5.924	4.2	6.1
	12.	3.73	1.44	5.779	4.2	6.3
	16.	3.84	1.65	5.662	4.3	6.3
	20.	3.95	1.84	5.562	4.4	6.4
	30.	4.15	2.22	5.360	4.6	6.6
	40.	4.32	2.54	5.199	4.7	6.7
	50.	4.46	2.81	5.066	4.8	6.9
	60.	4.58	3.05	4.950	4.9	7.0
	70.	4.69	3.26	4.849	5.0	7.1
	80.	4.78	3.46	4.758	5.0	7.2
	90.	4.87	3.64	4.675	5.1	7.2
0.20	0.	2.15	0.00	5.279	3.7	5.5
	1.	2.41	0.43	4.988	4.0	5.8
	2.	2.50	0.61	4.875	4.1	5.8
	4.	2.66	0.86	4.722	4.2	6.0
	8.	2.86	1.20	4.518	4.4	6.3
	12.	3.00	1.46	4.372	4.5	6.4
	16.	3.12	1.67	4.256	4.5	6.6
	20.	3.22	1.85	4.158	4.6	6.8
	30.	3.40	2.23	3.963	4.8	7.0
	40.	3.56	2.53	3.813	5.0	7.1
	50.	3.68	2.78	3.689	5.1	7.3
	60.	3.77	3.10	3.584	5.2	7.4
	70.	3.86	3.19	3.492	5.3	7.5
	80.	3.95	3.37	3.412	5.4	7.6
	90.	4.02	3.53	3.339	5.5	7.7

2.2 - LES IMPORTATIONS SONT AUTORISEES

2.2.1 - Conditions nécessaires d'optimalité

La condition (III.1.18) étant la même que la condition (III.1.5), nous pouvons écrire l'hypothèse H23 sous la forme :

$$y^2 = y^1. \tag{III.2.38}$$

La condition (III.1.23) s'écrit, en utilisant les propriétés (III.2.3) et (III.2.38) :

$$2y^1 \leq \frac{1}{r} \operatorname{Log} \left(\frac{pr}{s} + 1\right), \tag{III.2.39}$$

$$y^1 \leq \frac{1}{2r} \operatorname{Log} \left(\frac{pr}{s} + 1\right). \tag{III.2.40}$$

La condition (III.1.27) s'écrit :

$$rf(xD) = p \int_{t_k}^{t_k+y^2+y^3} D \, dt, \tag{III.2.41}$$

$$rf(xD) = pD(y^2+y^3), \tag{III.2.42}$$

$$y^3 = \frac{rf(xD)}{pD} - y^2. \tag{III.2.43}$$

2.2.2 - Expression du coût à l'optimum

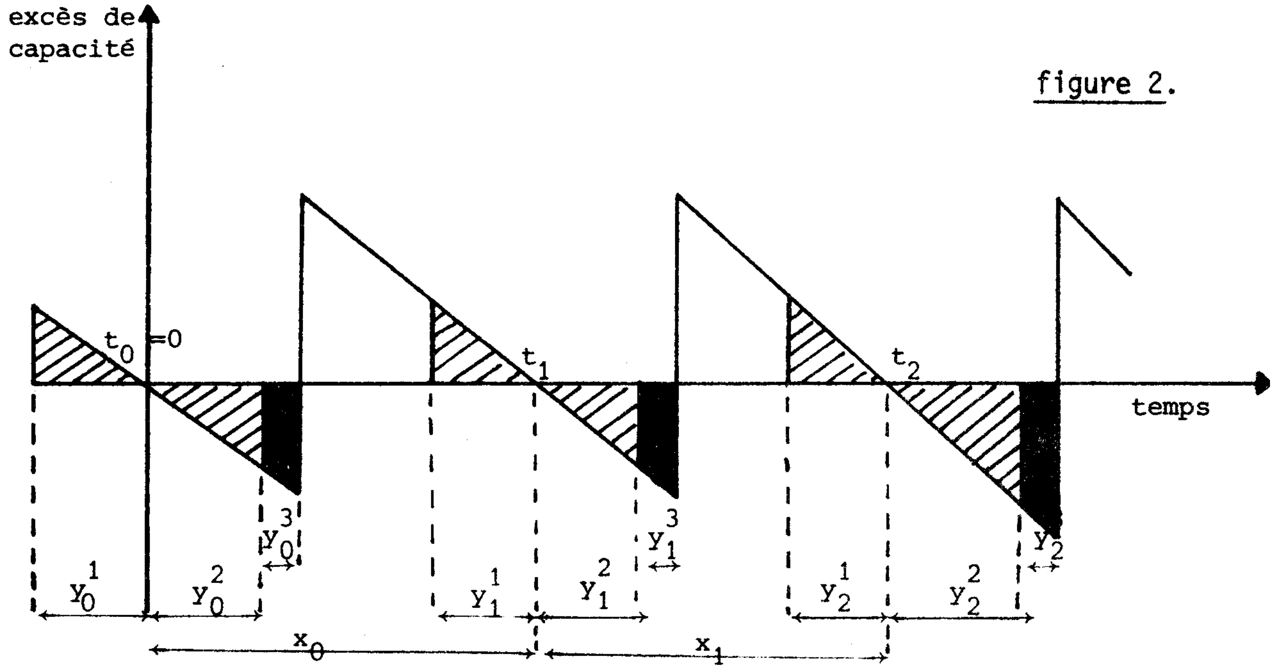


figure 2.

Dans l'expression du coût I_k, donnée par la formule (III.1.35), le premier terme, correspondant au coût de stockage, est le même que celui de la formule (III.1.15) ; nous pouvons donc reprendre le résultat correspondant dans (III.2.19) :

$$\int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} s e^{-rt}\left[\int_{t_k-y_k^1}^{t}\left(\int_t^{t_k} D(t)\,dt\right)dt\right]dt = e^{-rkx}\left\{\frac{sD}{r^2}\left[e^{ry^1}\left(y^1-\frac{1}{r}\right)+e^{-ry^1}\left(y^1+\frac{1}{r}\right)\right]\right\}. \tag{III.2.44}$$

Calculons le second terme de la formule (III.1.35), correspondant au coût d'importation intervenant dans le coût I_k :

$$\int_{t_k+y_k^2}^{t_k+y_k^2+y_k^3} p e^{-rt}\left(\int_{t_k}^{t} D(t)\,dt\right)dt = pD\int_{kx+y^1}^{kx+y^1+y^3} e^{-rt}(t-kx)\,dt, \tag{III.2.45}$$

$$= pD\left\{\left[-\frac{e^{-rt}}{r}\left(t+\frac{1}{r}\right)\right]_{kx+y^1}^{kx+y^1+y^3} + \frac{kx}{r}\left[e^{-rt}\right]_{kx+y^1}^{kx+y^1+y^3}\right\}, \tag{III.2.46}$$

$$= \frac{pD}{r}\, e^{-rkx}\left\{e^{-ry^1}\left(kx+y^1+\frac{1}{r}\right)-e^{-r(y^1+y^3)}\left(kx+y^1+y^3+\frac{1}{r}\right)+kx\left(e^{-r(y^1+y^3)}-e^{-ry^1}\right)\right\} \tag{III.2.47}$$

$$= \frac{pD}{r}\, e^{-rkx}\left\{e^{-ry^1}\left(y^1+\frac{1}{r}\right)-e^{-r(y^1+y^3)}\left(y^1+y^3+\frac{1}{r}\right)\right\} ; \tag{III.2.48}$$

des égalités (III.2.44), (III.2.48), et de l'expression générale de I_k donnée par (III.1.35) on déduit, lorsque la demande est linéaire :

$$I_k = e^{-rkx}\left\{\frac{sD}{r^2}\left[e^{ry^1}\left(y^1-\frac{1}{r}\right)+e^{-ry^1}\left(y^1+\frac{1}{r}\right)\right]+\frac{pD}{r}\left[e^{-ry^1}\left(y^1+\frac{1}{r}\right) - e^{-r(y^1+y^3)}\left(y^1+y^3+\frac{1}{r}\right)\right] + e^{-r(y^1+y^3)} f(xD)\right\}. \tag{III.2.49}$$

Le coût total de la politique est, puisque l'on a supposé l'horizon infini :

$$C(\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k, \tag{III.2.50}$$

donc :

$$C(\pi) = \frac{1}{1-e^{-rx}} \{\frac{sD}{r^2} [e^{ry^1}(y^1-\frac{1}{r}) + e^{-ry^1}(y^1+\frac{1}{r})] + \frac{pD}{r} [e^{-ry^1}(y^1+\frac{1}{r})$$

$$- e^{-r(y^1+y^3)}(y^1+y^3+\frac{1}{r})] + e^{-r(y^1+y^3)} f(xD)\}. \qquad \text{(III.2.51)}$$

2.2.3 - Méthode de résolution

La politique optimale étant telle que les conditions (III.2.38), (III.2.40) et (III.2.43) sont vérifiées, la recherche du minimum de $C(\pi)$ est un problème de minimisation d'une fonction de deux variables, et pour résoudre ce problème nous avons le choix entre différentes méthodes ([4]) ; mais, n'ayant pas démontré que $C(\pi)$, dont l'expression est donnée par la formule (III.2.51) est une fonction unimodale, nous ne sommes pas assurés de l'unicité du minimum trouvé, et la politique déterminée n'est peut-être pas rigoureusement la meilleure.

3 - LA DEMANDE EST UNE FONCTION EXPONENTIELLE DU TEMPS

Soient g le taux de croissance géométrique, supposé constant, de la demande,

$\mathcal{D}(t)$ la demande à la date t,

D(0) la demande à l'origine ;

les autres notations ont été définies précédemment.

Puisque la demande croît géométriquement au taux g,

$$\mathcal{D}(t) = D(0).e^{gt} \; ; \tag{III.3.1}$$

D(t), accroissement de la demande de t à (t+dt) étant la dérivée de $\mathcal{D}(t)$, est égal à :

$$D(t) = \frac{d\mathcal{D}(t)}{dt} = gD(0).e^{gt}. \tag{III.3.2}$$

Considérons successivement le cas où les importations ne sont pas autorisées, et le cas où des importations temporaires sont permises ; dans chaque cas nous déduirons des résultats de la section 1 de ce chapitre des conditions nécessaires d'optimalité et l'expression du coût, puis nous proposerons une méthode pour déterminer la politique optimale.

3.1 - LES IMPORTATIONS NE SONT PAS AUTORISEES

3.1.1 - Conditions nécessaires d'optimalité

L'hypothèse H23, formulée par (3.1.5) s'écrit :

$$\int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} [\int_t^{t_k} D(t)\;dt]\;dt = 0, \tag{III.3.3}$$

$$\int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} [\mathcal{D}(t_k) - \mathcal{D}(t)]\;dt = 0, \tag{III.3.4}$$

$$\int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} D(0).(e^{gt_k} - e^{gt})\;dt = 0, \tag{III.3.5}$$

$$D(0)\;[e^{gt_k}(y_k^2+y_k^1) - \frac{1}{g}\,[e^{g(t_k+y_k^2)} - e^{g(t_k-y_k^1)}]] = 0, \tag{III.3.6}$$

$$D(0).e^{gt_k}[y_k^2 + y_k^1 - \frac{1}{g}(e^{gy_k^2} - e^{-gy_k^1})] = 0, \qquad \text{(III.3.7)}$$

$$y_k^2 + y_k^1 = \frac{1}{g}(e^{gy_k^2} - e^{-gy_k^1}). \qquad \text{(III.3.8)}$$

La condition (III.1.14) s'écrit ici :

$$\frac{r^2}{s} f(v_k) = [e^{r(y_k^1+y_k^2)} - 1]\ [\mathcal{D}(t_k+y_k^2) - \mathcal{D}(t_k)], \qquad \text{(III.3.9)}$$

$$\frac{r^2}{s} f(v_k) = [e^{r(y_k^1+y_k^2)} - 1].\ D(0).\ [e^{g(t_k+y_k^2)} - e^{gt_k}], \qquad \text{(III.3.10)}$$

$$y_k^1 + y_k^2 = \frac{1}{r} \operatorname{Log}\left[1 + \frac{r^2}{sD(0)} \cdot \frac{f(v_k).e^{-gt_k}}{e^{gy_k^2} - 1}\right]. \qquad \text{(III.3.11)}$$

L'usine de taille v_k devant satisfaire la demande entre les points de régénération t_k et $t_{k+1} = t_k + x_k$,

$$v_k = D(0)\ [e^{g(t_k+x_k)} - e^{gt_k}], \qquad \text{(III.3.12)}$$

$$v_k = D(0).e^{gt_k}(e^{gx_k} - 1). \qquad \text{(III.3.13)}$$

3.1.2 - Expression du coût à l'optimum

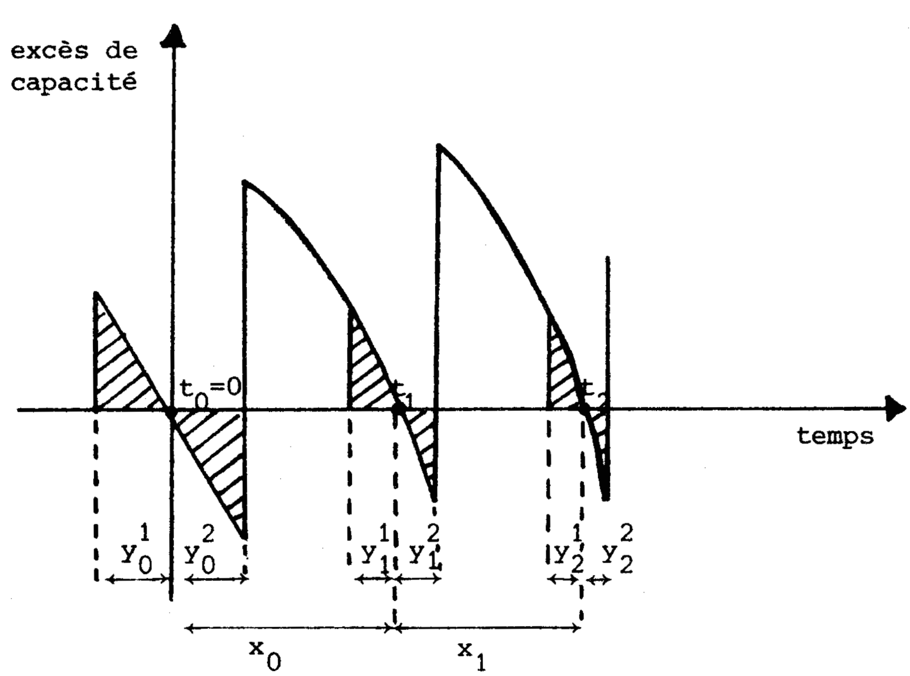


figure 3.

La relation (III.1.15) donnant l'expression du coût I_k relatif à la $(k+1)^{\text{ième}}$ usine lorsqu'il y a stockage, les importations étant interdites, s'écrit dans le cas d'une demande exponentielle :

$$I_k = \int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} se^{-rt} \left[\int_{t_k-y_k^1}^{t} \left(\int_{t}^{t_k} D(t)dt\right)dt\right]dt + e^{-r(t_k+y_k^2)} f(v_k), \qquad \text{(III.3.14)}$$

$$= \int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} se^{-rt}\left[\int_{t_k-y_k^1}^{t} (\mathcal{D}(t_k)-\mathcal{D}(t))\ dt\right]dt + e^{-r(t_k+y_k^2)} f(v_k), \qquad \text{(III.3.15)}$$

$$= sD(0) \int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} e^{-rt} \left[\int_{t_k-y_k^1}^{t} (e^{gt_k}-e^{gt})\ dt\right]dt + e^{-r(t_k+y_k^2)} f(v_k), \qquad \text{(III.3.16)}$$

$$= sD(0) \int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} e^{-rt}\left[e^{gt_k}(t-t_k+y_k^1) - \frac{1}{g} (e^{gt}-e^{g(t_k-y_k^1)})\right]dt+e^{-r(t_k+y_k^2)} f(v_k), \qquad \text{(III.3.17)}$$

$$= sD(0) \Big\{e^{gt_k} \Big[- \frac{1}{r} e^{-r(t_k+y_k^2)} (t_k+y_k^2+ \frac{1}{r}) + \frac{1}{r} e^{-r(t_k-y_k^1)} (t_k-y_k^1+ \frac{1}{r})\Big]$$

$$- \frac{1}{r} e^{gt_k}(-t_k+y_k^1) (e^{-r(t_k+y_k^2)} - e^{-r(t_k-y_k^1)})$$

$$- \frac{1}{g} \Big[\frac{1}{g-r} (e^{(g-r)(t_k+y_k^2)} - e^{(g-r)(t_k-y_k^1)})$$

$$+ \frac{1}{r} e^{g(t_k-y_k^1)} (e^{-r(t_k+y_k^2)} - e^{-r(t_k-y_k^1)})\Big]\Big\}$$

$$+ e^{-r(t_k+y_k^2)} f(v_k), \qquad \text{(III.3.18)}$$

$$= sD(0).e^{(g-r)t_k} \Big\{ \frac{1}{r} \Big[-e^{-ry_k^2}(t_k+y_k^2+ \frac{1}{r}) + e^{ry_k^1} (t_k-y_k^1+ \frac{1}{r})+(t_k-y_k^1) (e^{-ry_k^2}-e^{ry_k^1})\Big]$$

$$- \frac{1}{g} \Big[\frac{1}{g-r} (e^{(g-r)y_k^2} - e^{-(g-r)y_k^1}) + \frac{1}{r} (e^{-gy_k^1-ry_k^2}-e^{-(g-r)y_k^1})\Big]\Big\}$$

$$+ e^{-r(t_k+y_k^2)} .f(v_k), \qquad \text{(III.3.19)}$$

$$I_k = sD(0).e^{(g-r)t_k} \{ \frac{1}{r} [\frac{1}{r} (e^{ry_k^1} - e^{-ry_k^2}) - e^{-ry_k^2}(y_k^1+y_k^2)]$$

$$- \frac{1}{g} [\frac{1}{g-r} e^{(g-r)y_k^2} + \frac{1}{r} e^{-gy_k^1 -ry_k^2} - e^{-(g-r)y_k^1}(\frac{1}{r} + \frac{1}{g-r})]\}$$

$$+ e^{-r(t_k+y_k^2)}.f(v_k). \qquad \text{(III.3.20)}$$

3.2 - LES IMPORTATIONS SONT AUTORISEES

3.2.1 - Conditions nécessaires d'optimalité

La condition (III.1.18) étant la même que la condition (III.1.5), elle s'écrit dans le cas d'une demande exponentielle :

$$y_k^2 + y_k^1 = \frac{1}{g} (e^{gy_k^2} - e^{-gy_k^1}). \qquad \text{(III.3.21)}$$

La condition (III.1.22) est indépendante de la demande :

$$y_k^1 + y_k^2 \leq \frac{1}{r} \text{Log} (\frac{pr}{s} + 1). \qquad \text{(III.3.22)}$$

La condition (III.1.27) peut s'écrire :

$$rf(v_k) = p \int_{t_k}^{t_k+y_k^2+y_k^3} D(t)\, dt, \qquad \text{(III.3.23)}$$

$$rf(v_k) = p [\mathcal{D}(t_k+y_k^2+y_k^3) - \mathcal{D}(t_k)], \qquad \text{(III.3.24)}$$

$$rf(v_k) = pD(0) [e^{g(t_k+y_k^2+y_k^3)} - e^{gt_k}], \qquad \text{(III.3.25)}$$

$$rf(v_k) = pD(0).e^{gt_k} [e^{g(y_k^2+y_k^3)} - 1], \qquad \text{(III.3.26)}$$

$$y_k^2 + y_k^3 = \frac{1}{g} \text{Log} \left[\frac{rf(v_k)}{pD(0)} e^{-gt_k} + 1 \right]. \qquad \text{(III.3.27)}$$

3.2.2 - Expression du coût à l'optimum

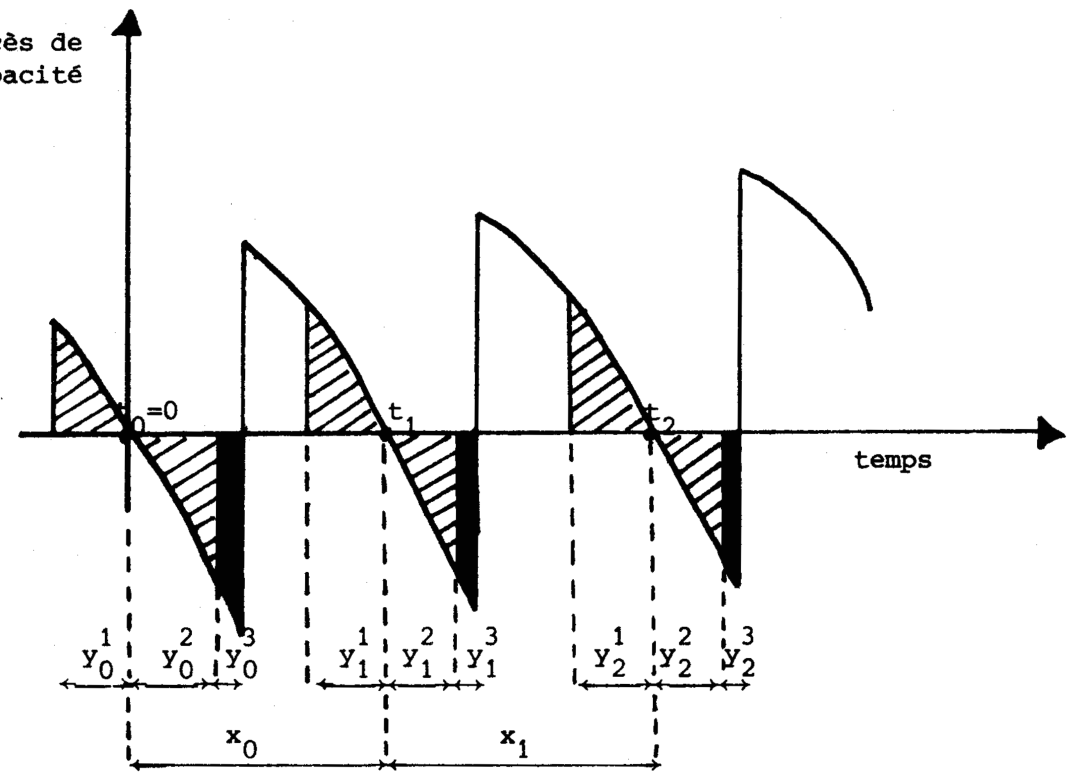


figure 4.

Dans l'expression du coût I_k, donnée par la relation (III.1.35), le premier terme, correspondant au coût de stockage, a été calculé dans le paragraphe 3.1 de ce chapitre :

$$\int_{t_k-y_k^1}^{t_k+y_k^2} s e^{-rt} \left[\int_{t_k-y_k^1}^{t} \left(\int_{t}^{t_k} D(t)\, dt\right) dt\right] dt =$$

$$sD(0).e^{(g-r)t_k} \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} \left(e^{ry_k^1} - e^{-ry_k^2}\right) - e^{-ry_k^2}\left(y_k^1 + y_k^2\right)\right]\right.$$

$$\left. - \frac{1}{g} \left[\frac{1}{g-r} e^{(g-r)y_k^2} + \frac{1}{r} e^{-gy_k^1-ry_k^2} - e^{-(g-r)y_k^1} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{g-r}\right) \right]\right\}$$

(III.3.28)

Calculons le second terme, correspondant au coût des importations :

$$\int_{t_k+y_k^2}^{t_k+y_k^2+y_k^3} p e^{-rt}\left(\int_{t_k}^{t} D(t)\, dt\right) dt = p \int_{t_k+y_k^2}^{t_k+y_k^2+y_k^3} e^{-rt}\left(\mathcal{D}(t) - \mathcal{D}(t_k)\right)dt, \qquad \text{(III.3.29)}$$

$$= pD(0) \int_{t_k+y_k^2}^{t_k+y_k^2+y_k^3} e^{-rt}(e^{gt} - e^{gt_k})\, dt, \tag{III.3.30}$$

$$= pD(0) \left[\frac{1}{g-r} \left(e^{(g-r)(t_k+y_k^2+y_k^3)} - e^{(g-r)(t_k+y_k^2)}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{r} e^{gt_k}\left(e^{-r(t_k+y_k^2+y_k^3)} - e^{-r(t_k+y_k^2)}\right)\right], \tag{III.3.31}$$

$$= pD(0).e^{(g-r)t_k} \left[\frac{e^{(g-r)y_k^2}}{g-r} \left(e^{(g-r)y_k^3} - 1\right) - \frac{e^{-ry_k^2}}{r} \left(e^{-ry_k^3} - 1\right)\right], \tag{III.3.32}$$

$$= pD(0).e^{(g-r)t_k-ry_k^2} \left[\frac{e^{gy_k^2}}{g-r} \left(e^{(g-r)y_k^3} - 1\right) - \frac{1}{r} \left(e^{-ry_k^3} - 1\right)\right]. \tag{III.3.33}$$

En remplaçant le premier et le second terme par leurs valeurs, données par (III.3.28) et (III.3.33), nous pouvons écrire l'expression (III.1.35) de I_k sous la forme :

$$I_k = sD(0).e^{(g-r)t_k} \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} \left(e^{ry_k^1} - e^{-ry_k^2}\right) - e^{-ry_k^2}(y_k^1 + y_k^2)\right]\right.$$

$$\left. - \frac{1}{g} \left[\frac{1}{g-r} e^{(g-r)y_k^2} + \frac{1}{r} e^{-gy_k^1-ry_k^2} - e^{-(g-r)y_k^1}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{g-r}\right)\right]\right\}$$

$$+ pD(0).e^{(g-r)t_k-ry_k^2} \left[\frac{e^{gy_k^2}}{g-r} \left(e^{(g-r)y_k^3}-1\right) - \frac{1}{r} \left(e^{-ry_k^3}-1\right)\right]$$

$$+ e^{-r(t_k+y_k^2+y_k^3)} f(v_k), \tag{III.3.34}$$

$$I_k = D(0).e^{(g-r)t_k-ry_k^2} \left\{ \frac{s}{r} \left[\frac{1}{r} \left(e^{r(y_k^1+y_k^2)} - 1\right) - (y_k^1 + y_k^2)\right]\right.$$

$$- \frac{s}{g} \left[\frac{1}{g-r} e^{gy_k^2} + \frac{1}{r} e^{-gy_k^1} - e^{-gy_k^1+r(y_k^1+y_k^2)} \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{g-r}\right)\right]$$

$$\left. + \frac{pe^{gy_k^2}}{g-r} \left[e^{(g-r)y_k^3} - 1\right] - \frac{p}{r} \left(e^{-ry_k^3} - 1\right)\right\}$$

$$+ e^{-r(t_k+y_k^2+y_k^3)} f(v_k), \tag{III.3.35}$$

y_k^1, y_k^2, y_k^3 vérifiant à l'optimum les conditions (III.3.21), (III.3.22), (III.3.27), et v_k étant donné par la relation (III.3.13).

3.3 - METHODE DE RESOLUTION

Dans le cas d'une demande exponentielle, lorsque le stockage est autorisé, les temps de stockage (et éventuellement d'importation), les intervalles de temps entre deux constructions successives, et les tailles des usines à construire pour satisfaire la demande, ne sont pas identiques pour toutes les périodes.

Le problème est de minimiser la somme des coûts I_k relatifs à chaque période : $C(\pi) = \sum_k I_k$.

1°) Dans le cas où il n'y a pas d'importations, les seules inconnues sont les points de régénération t_k puisque y_k^1 et y_k^2 sont déterminés par les équations (III.3.8) et (III.3.11), et nous pouvons appliquer la méthode de programmation dynamique exposée dans le chapitre II, paragraphe 2.3 ; la seule modification est qu'ici le calcul de $y(k,\ell)$ est remplacé par le calcul de $y_k^1 = y^1(k,\ell)$ et de $y_k^2 = y^2(k,\ell)$.

2°) Dans le cas où les importations sont autorisées, les inconnues sont les points de régénération t_k et les temps d'importation y_k^3, les équation (III.3.21) et (III.3.27) permettant d'en déduire y_k^1 et y_k^2 ; nous pourrons donc utiliser la méthode de programmation dynamique précédente, à condition de substituer au calcul de $y(k,\ell)$ les calculs suivants :

- calcul de y_k^1 et y_k^2 en fonction de t_k et y_k^3 à partir des équations (III.3.21) et (III.3.27),

- détermination de y_k^3 qui minimise I_k à l'aide de la méthode de FIBONACCI par exemple.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGGARWAL, S.C., BENTZ, E.
Capacity Expansion or Replacement Decision-making for a Garment Factory.
Congrès AFCET 1974, Tome 2, pp.239-248.

[2] BELLMAN, R.E., DREYFUS, S.E. (1965)
La programmation dynamique et ses applications.
DUNOD, Paris.

[3] BERRETTA, J.C., MOBASHERI, F.
An Optimal Strategy for Capacity Expansion.
The Engineering Economist, Vol. 17, n°2, Winter 1972, pp. 79-96.

[4] BOX, M.J., DAVIES, D., SWANN, W.H. (1969)
Non-linear Optimization Techniques.
Mathematical and Statistical Techniques for Industry, I.C.I. Monograph n°5, Edinburgh.

[5] CUENOD, M., DUVAL, A., KUMMERMAN , M.V.
Optimisation de la localisation dans le temps et dans l'espace d'un système de production et de distribution.
Congrès AFCET 1974, Tome 2, pp.33-42.

[6] ERLENKOTTER, D. (1967)
Optimal Plant Size with Time-phased Imports.
Chapitre 10 dans MANNE [18].

[7] ERLENKOTTER, D.
Economic Integration and Dynamic Location Planning.
Swedish Journal of Economics, 1972, pp.8-18.

[8] ERLENKOTTER, D.
Sequencing Expansion Projects.
Operations Research, vol. 21, n°2, March-April 1973, pp. 542-553.

[9] FOX, K.A., SENGUPTA, J.K. (1969)
Optimization Techniques in Quantitativ Economic Models.
Chicago, North-Holland Publishing Co, pp. 303-357.

[10] GIGLIO, R.J.
Stochastic Capacity Models.
Management Science, Vol. 17, n°3, November 1970, pp.174-184.

[11] GIGLIO, R.J.
A Note on the Deterministic Capacity Problem.
Management Science, Vol.19, n°9, May 1973, pp.1096-1099.

[12] HINOMOTO, H.
Capacity Expansion with Facilities under Technological Improvement.
Management Science, Vol. 11, n°5, March 1965, pp.581-592.

[13] JASKOLD - GABSZEWICZ, J., VIAL, J.P. (1971)
Optimal Capacity Expansion under Growing Demand and Technological Progress.
pp.159-189 dans SZEGŐ et SHELL [23]

[14] KALOTAY, A.J.
Capacity Expansion and Specialization.
Management Science, vol. 20, n°1, September 1973, pp.56-64.

[15] KALOTAY, A.J.
Two Comments on the Deterministic Capacity Problem.
Management Science, vol. 20, n°9, May 1974, p.1313.

[16] KIRBY, M.W.
Optimal Policies for Capacity Expansion under Known Demand Growth.
ORSA, New Orleans Meeting, April 1972.

[17] MANNE, A.S.
Capacity Expansion and Probabilistic Growth.
Econometrica, October 1961, pp.632-649.

[18] MANNE, A.S. (1967)
Investment for Capacity Expansion : Size, Location and Time-Phasing.
A.S. MANNE, Editor, George ALLEN and UNWIN LTD, London.

[19] MANNE, A.S. (1967)
Calculations for a Single Producing Area.
Chapitre 2 dans MANNE [18].

[20] MANNE, A.S., VEINOTT, A.F. (1967)
Optimal Plant Size with Arbitrary Increasing Time Paths of Demand.
Chapitre 11 dans MANNE [18].

[21] SINDEN, F.W.
The Replacement and Expansion of Durable Equipment.
The Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, vol.8, September 1960, pp.466-480.

[22] SRINIVASAN, T.N. (1967)
Geometric Rate of Growth of Demand.
Chapitre 9 dans MANNE [18].

[23] SZEGŐ, J.P., SHELL, K. (1972)
Mathematical Methods in Investment and Finance.
North-Holland.

[24] TAPIERO, C.S.
Optimal Capacity Expansion with Storable Output.
Cahiers du Centre de Recherche Opérationnelle, vol.14, 1972, pp.159-167.