THESES

présentées à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur Es Sciences Mathématiques

par

Norreddine MAHAMMED

Première Thèse

K-THEORIE DES FORMES SPHERIQUES

Deuxième Thèse

CONVERGENCE DE MARCHES ALEATOIRES VERS UN MOUVEMENT BROWNIEN

Thèses soutenues le 8 décembre 1975 devant la Commission d'Examen

MM. M. PARREAU, *Président*

J.P. JOUANOLOU
D. LEHMANN
R. PICCININI
} *Rapporteurs*

D. BOSQ, *Examinateur*

A Salima,

Tarik et Karim.

Je tiens à remercier Monsieur Parreau pour l'honneur qu'il m'a fait de bien vouloir présider le jury de cette thèse.

A J.P. Jouanolou, qui m'a le premier initié à la topologie algébrique lors de son séjour à Alger, j'exprime toute ma reconnaissance pour tout ce que je lui dois et pour avoir volontiers accepté d'être l'un des rapporteurs de ce travail.

Que R. Piccinini, qui lors de sa présence à Lille au cours de cette année universitaire m'a été d'un grand apport tant par ses suggestions que par ses encouragements, trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

D. Lehmann, qui m'a proposé ce sujet, m'a guidé sans discontinuer dans cette recherche et sans jamais cesser de me dispenser ses précieuses critiques et ses conseils. Pour toute l'attention qu'il a ainsi porté à mon travail et l'optimisme dont il a toujours fait preuve, qu'il veuille bien trouver dans ces lignes le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Je dois à D. Bosq le plaisir d'avoir découvert le calcul des probabilités grâce au second sujet qu'il m'a si gentiment donné.

Que tous ceux qui, à des titres divers, m'ont aidé par leurs utiles conversations ou leur soutien moral, soient également remerciés, notamment T. Kambe et M. Fujii pour l'accueil amical qu'ils m'avaient réservé pendant mon séjour au Japon en 1973.

Enfin, je n'oublierai pas de remercier tout spécialement Madame Tatti, ainsi que Madame Bérat, pour la rapidité et la compétence avec lesquelles elles ont assuré la mise en page et, par delà elles, tous ceux qui ont contribué à la réalisation matérielle de ce mémoire.

TABLE DES MATIERES

.../...

.../...

INTRODUCTION

Le présent travail a pour objet la détermination et la description des anneaux de Grothendieck de certaines formes sphériques. En tant que variétés riemanniennes compactes, connexes et à courbure constante strictement positive, celles-ci se trouvent complètement classifiées (à isométrie près) par les propriétés des p-sous-groupes de Sylow G_p de leur groupe fondamental : G_p est soit un groupe cyclique, soit un groupe quaternionique généralisé Q_m. Ainsi, en un sens qui reste à préciser, la K-théorie des formes sphériques se trouve ramenée à celle des espaces projectifs réels $P^n(\mathbb{R})$, des espaces lenticulaires et des Q_m-formes sphériques.

Alors que dès l'introduction de la K-théorie en topologie algébrique les anneaux $K_k(P^n(\mathbb{R}))$ $(k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ étaient largement étudiés (J.F. Adams, M.F. Atiyah, R. Bott, J. Milnor,...), il faut attendre le travail de T. Kambe [24] en 1966 pour connaître la K-théorie des espaces lenticulaires ordinaires $L^n(p)$ d'ordre p premier. Depuis, en dehors de notre travail, cette question a été l'objet de trois publications : d'une part A. Chabour a également déterminé la décomposition en groupes cycliques de $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ pour p premier [13], d'autre part, mais de façon différente, T. Kawaguchi, T. Kobayashi et M. Sugawara ont obtenu des résultats analogues pour $K_k(L^n(p^2))$, avec toujours p premier, tout en décrivant avec précision (générateurs) leurs structures additives et multiplicatives [28], [34]. Récemment, trois articles ont été consacrés à la K-théorie des Q_m-formes sphériques ordinaires $N^n(m)$: K. Fujii a calculé $\widetilde{KU}(N^n(2))$ [17], J.M. Braemer a de plus calculé $\widetilde{KO}(N^n(2))$ [10], alors que D. Pitt [51] s'est intéressé au problème de l'immersion (du plongement) des variétés $N^n(m)$ dans un espace numérique.

Dans ce mémoire, qui a précisément son origine dans l'article de T. Kambe, les méthodes que nous utilisons se rattachent le plus souvent à celles employées par les chercheurs japonais. Après une première partie où nous étudions la K-théorie des espaces lenticulaires et des Q_m-formes sphériques (chapitres II, III, IV et V), nous montrons comment les résultats obtenus peuvent servir à la connaissance de la K-théorie des autres formes sphériques en les appliquant à des situations concrètes (chapitre VI et VII), ou intervenir dans la résolution de certaines questions classiques de géométrie (chapitres VIII, IX et X).

Dans le premier chapitre ont été groupées les propriétés des outils qui jouent un rôle fondamental dans notre travail : critère de trivialité de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch, isomorphisme de Thom-Gysin en K-théorie G-équivariante, représentations des groupes finis. Les autres rappels qui y sont faits visent surtout à fixer la terminologie et certaines des notations employées dans la suite. Cependant, nous y établissons aussi un résultat général sur la K-théorie des formes sphériques dont le groupe fondamental est produit semi-direct d'un p-groupe et d'un groupe d'ordre premier à p (th. 1.4.5).

Le chapitre suivant est consacré à la K-théorie complexe des espaces lenticulaires généralisés $L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n)$ d'ordre p quelconque. En caractérisant $KU(L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n))$ comme quotient d'un anneau de polynômes tronqués à coefficient entiers (prop. 2.2.3), on montre qu'il existe un isomorphisme canonique entre $KU(L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n))$ et $KU(L^n(p))$ (th. 2.2.4) ; d'un autre côté la traduction du théorème 1.4.5 montre qu'il y a isomorphisme entre $KU(L^n(p))$ et $\bigotimes_{i=1}^{i=r} KU(L^n(p_i^{s_i}))$ où $\prod_{i=1}^{i=r} p_i^{s_i}$ est la décomposition en facteurs premiers de p (th. 2.2.5) : ces deux résultats ramènent l'étude de la KU-théorie des espaces lenticulaires généralisés d'ordre quelconque à celle des lenticulaires ordinaires d'ordre p^m où p est premier. Dans le §.2.3, par l'emploi d'un procédé arithmétique élémentaire basé sur la valuation p-adique des coefficients binômiaux, nous effectuons alors explicitement la décomposition en groupes cycliques de $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ (th. 2.3.6). La méthode utilisée nous permet ensuite l'obtention d'informations précises sur l'ordre des puissances de σ où σ est la classe, dans $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$, du $\mathbb{C}$-fibré vectoriel de rang 1 associé au revêtement universel $S^{2n+1} \to L^n(p^m)$), par la représentation unitaire standard de degré 1 de $\mathbb{Z}_{p^m}$ (prop. 2.3.7). Dans le §.2.4, nous illustrons les résultats précédemment obtenus par le calcul de la KU-théorie des espaces lenticulaires tronqués $L^n_k(p)$ (th. 2.4.3).

Au chapitre III, par des considérations analogues à celles développées dans le cas complexe, nous montrons (th. 3.1.2) qu'il suffit d'étudier la K-théorie réelle des espaces lenticulaires du type $L^n(p^m)$ avec p premier. Grâce alors, pour $p \neq 2$, à la trivialité de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch et aux propriétés des homomorphismes de Bott : le morphisme de complexification c (resp. de réalification r) est ici un monomorphisme (resp. un épimorphisme), nous faisons le calcul explicite des huit groupes $\widetilde{KO}^i(L^n(p^m))$ (th. 3.2.5 et 3.2.8). Après le §.3.3 qui concerne la détermination de $\widetilde{KO}(L^n_k(p))$ pour p impair, nous abordons la question de la $\widetilde{KO}$-théorie des espaces lenticulaires $L^n(2^m)$: les arguments précédents ne valant plus, nous montrons (th. 3.4.2), par un raisonnement par récurrence sur n, que $\widetilde{KO}(L^n(2^m))$ a pour ordre $2^{\psi(2n+1)+(m-1)\left[\frac{n}{2}\right]}$ où $\psi(2n+1)$ est le nombre de Radon-Hurwitz de $(2n+1)$. Cependant, la non-surjectivité de r ne nous a pas permis d'énoncer un résultat général sur la décomposition en groupes cycliques de $\widetilde{KO}(L^n(2^m))$; néanmoins, nous indiquons (prop. 3.4.10) des bornes supérieure et inférieure pour l'ordre des $(r\sigma)^i$ où $1 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}$.

Pour contourner les difficultés ainsi rencontrées, nous revenons, au chapitre IV, sur la K-théorie complexe des espaces $L^n(2^m)$: pour une large classe de valeurs de n (n pair, $n \equiv 1 \pmod 4$ et certains $n \equiv 3 \pmod 4$) nous donnons une description très détaillée de la structure additive de $\widetilde{KU}(L^n(2^m))$

(théorèmes 4.3.1-2-3-4) . Considérant alors le cas $m = 3$, nous complétons les résultats précédents et décrivons entièrement les structures additives et multiplicatives des anneaux $\tilde{K}_k(L^n(8))$ (§.§. 4.4, 4.5 et 4.6) ; nous y notons en particulier que, comme dans le cas $m = 2$ (voir [34]), l'homomorphisme c est injectif quand $n \equiv 3 \pmod 4$.

La K-théorie des Q_m-formes sphériques est examinée dans le chapitre V. Après avoir rappelé les propriétés des groupes quaternioniques généralisés Q_m et de leurs représentations unitaires irréductibles non équivalentes (§.5.1), nous étendons aux Q_m-formes sphériques généralisées $N^n(m;r_1,r_2,\ldots,r_{n+1})$ les résultats qu'avaient obtenus [17] et [51] dans le cas ordinaire (th. 5.3.1, prop. 5.3.2). Nous mettons alors en évidence, là aussi, l'existence d'un isomorphisme canonique entre $KU(N^n(m;r_1,r_2,\ldots,r_{n+1}))$ et $KU(N^n(m))$ (th. 5.3.6). L'étude de la K-théorie réelle fait l'objet du §.5.5 où nous déterminons en particulier la structure d'anneau de $KO(N^n(m;r_1,r_2,\ldots,r_{n+1}))$ et l'ordre du groupe $\widetilde{KO}(N^n(m))$ (th. 5.5.4 et 5.5.11). Dans les §.§. 5.4 et 5.6, nous traitons complètement le cas des Q_3-formes sphériques en y utilisant notamment les résultats obtenus pour $L^n(4)$ et $L^n(8)$ (th. 5.4.7, 5.6.1, 5.6.2 et 5.6.3).

Dans les deux chapitres suivants nous montrons comment le théorème 1.4.5 et la connaissance de la K-théorie des espaces lenticulaires et des Q_m-formes sphériques peuvent être employés dans l'étude de la K-théorie des autres formes sphériques. Le cas des formes sphériques tétraédriques, traité dans le chapitre VI, est particulièrement significatif à cet égard : les résultats visés sont consignés en 6.2.5, 6.2.9 et 6.3.2. Dans le chapitre VII, usant de la classification des groupes fondamentaux des formes sphériques effectuée par J.A. Wolf [67], nous calculons systématiquement *tous* les groupes $\tilde{K}_k(M)$ des formes sphériques M de dimension (impaire) inférieure à 10, soit 40 groupes. A cette occasion, nous y faisons des remarques plus générales sur les formes sphériques diédriques et octaédriques.

Dans les trois derniers chapitres, nous appliquons les calculs effectués dans les chapitres précédents à une série de questions classiques de géométrie : critères de non-immersion (non-plongement) des formes sphériques dans un espace numérique, parallélisabilité et span de ces mêmes formes, platitude des espaces lenticulaires ordinaires et type d'homotopie stable des espaces lenticulaires d'ordre 8. Ces divers problèmes sont abordés à l'aide des opérations γ^k de Grothendieck et de la notion de p-forme sphérique associée à une forme sphérique (définition 8.4.1). Les résultats obtenus aboutissent notamment à la résolution définitive de la parallélisabilité des espaces lenticulaires généralisés (§.9.1) et des Q_m-formes sphériques (th. 9.2.3), et à la détermination du span pour ceux de ces espaces de dimension 7. Par ailleurs, au chapitre X, est examiné le problème de la réalisation géométrique de l'isomorphisme canonique entre $K_k(L^n(p;p_o,p_1,\ldots,p_n))$ et $K_k(L^n(p))$ dont nous avons parlé plus haut.

Des considérations qui précèdent il ressort clairement que plusieurs questions restent ouvertes (exemples : décomposition de $\widetilde{KO}(L^n(2^m))$ pour certaines valeurs de n et m, injectivité de c pour les espaces lenticulaires $L^n(2^m)$ quand $n \equiv 3 \pmod 4$), néanmoins certains des calculs menés ici dans quelques situations particulières sont susceptibles d'être étendus à des cas plus généraux (exemple : K-théorie des espaces lenticulaires tronqués). Signalons cependant une question qui nous paraît intéressante : dans tous les calculs que nous avons effectués la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch est triviale, aussi peut-on se demander s'il en est ainsi pour toutes les formes sphériques.

Certains des résultats contenus dans ce travail ont été annoncés dans trois Notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences [39], [40] et [41]. Cependant le point de vue qui avait été adopté dans [39] ne correspond plus à celui retenu dans cette rédaction.

CHAPITRE I

RAPPELS ET GENERALITES SUR LES FORMES SPHERIQUES

Dans tout ce qui suit G est un groupe fini d'élément neutre e.

1.1. *Actions d'un groupe fini.*

Soit X un espace topologique séparé ; G étant muni de la topologie discrète, *une opération, ou action, continue à gauche de* G *sur* X est la donnée d'une application continue ϕ de $G \times X$ dans X telle que

1) $\phi(gg',x) = \phi(g,\phi(g',x))$ pour tout $x \in X$ et $g,g' \in G$,

2) $\phi(e,x) = x$ pour tout $x \in X$.

On dit alors que G opère, ou agit, à gauche sur X au moyen de ϕ. Lorsque le groupe G^o opposé de G opère à gauche sur X, on dit que G opère à droite sur X. Néanmoins dans tout ce travail chaque fois que l'on parlera d'opération ou d'action il s'agira, sauf mention contraire, d'opération à gauche. D'autre part une telle opération ϕ étant donnée, on convient, sauf ambiguité, d'écrire gx pour $\phi(g,x)$.

Il est clair que, pour tout $g \in G$, l'application $\phi_g : X \to X$ définie par $\phi_g(x) = gx$ est un homéomorphisme de X. En fait, comme G est discret, se donner une action de G sur X équivaut à se donner un homomorphisme ρ de G dans le groupe des homéomorphismes de X. L'action est *effective* si $\operatorname{Ker} \rho$ est trivial. Soit $x \in X$: le sous-espace $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ de X est *l'orbite de* x ; le sous-groupe $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ de G est le *groupe d'isotropie de* x. Si le groupe d'isotropie (resp. l'orbite) de tout point de X est trivial (resp. est égale à X), on dit que G *opère librement, ou sans point fixe* (resp. *transitivement*), *sur* X. Une action libre est évidemment effective.

Une action de G sur X étant donnée, soient X/G l'espace des orbites des points de X (X/G est muni de la topologie quotient) et $p : X \to X/G$ la projection canonique. On sait (*) que

Proposition 1.1.1.

Lorsque l'action de G sur X est libre :

1) si X est compact (resp. connexe) alors X/G est compact (resp. connexe) ;

2) si X est compact et connexe alors (X,p,X/G) est un revêtement galoisien ; si de plus X est simplement connexe $\Pi_1(X/G) \cong G$.

On suppose maintenant que X est une variété différentiable : une action ϕ de G sur X est *différentiable* si, pour tout $g \in G$, ϕ_g est un difféomorphisme de X.

Proposition 1.1.2.

Lorsque G agit librement et différentiablement sur X :

1) X/G est une variété différentiable de même dimension que X ;

2) si X est orientable et l'action de G respecte l'orientation (i.e. les difféomorphismes ϕ_g conservent tous l'orientation de X) alors X/G est orientable ;

3) si X est compacte et sans bord, l'ordre de G divise la caractéristique (réelle) d'Euler-Poincaré de X.

1.2. *Représentations d'un groupe fini.* (**)

Soit E un k-espace vectoriel où k désigne l'un des corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Une *représentation de* G *sur* E est la donnée d'un homomorphisme ρ de G dans le groupe $Aut_k(E)$ des k-isomorphismes de E. (La représentation telle que $\rho(G) = Id_E$ est la représentation triviale ; on la notera 1_k). Quand E est de dimension finie d, on dit que ρ est une *représentation de degré* d.

(*) Pour toutes les définitions et propriétés rappelées ici, on pourra consulter l'ouvrage de C. Godbillon [18]

(**) Pour tout ce qui concerne les représentations de groupes, on pourra consulter [16] ou [35].

Une représentation est *fidèle* si elle est injective. Si pour tout $g \neq e$, $\rho(g)$ n'a pas $+1$ pour valeur propre, on dira que ρ est une *représentation sans point fixe de* G ou encore que G agit librement sur E au moyen de ρ. Il est immédiat qu'une représentation sans point fixe est nécessairement fidèle. Enfin, on appelle *caractère d'une représentation* ρ la fonction $\chi_\rho : G \to k$ définie par : $\forall g \in G,\ \chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$.

Soit $k[G]$ la k-algèbre du groupe G ; alors une représentation ρ de G sur E définit clairement un homomorphisme de k-algèbres $\hat{\rho} : k[G] \to \mathrm{End}_k(E)$ par $\hat{\rho}(\sum_{g\in G} \lambda_g\, g) = \sum_{g\in G} \lambda_g\, \rho(g)$ où $\lambda_g \in k$ et réciproquement. Autrement dit, au moyen de ρ, E se trouve muni d'une structure de G-module.

On dira que deux représentations ρ et σ de G sur deux espaces E et F respectivement sont *équivalentes* si E et F sont isomorphes en tant que G-modules. Il est évident que deux représentations équivalentes ont même caractère.

Soit V un sous-espace propre de E (i.e. $V \neq 0$ et $V \neq G$) invariant par tout isomorphisme $\rho(g)$ de E quand g parcourt G ; clairement $\tilde{\rho}_g = \rho(g)|V$ définit une représentation $\tilde{\rho}$ de G sur V : $\tilde{\rho}$ est appelée une sous-représentation propre de ρ. Une *représentation irréductible* est une représentation n'ayant pas de sous-représentation propre.

Soient I un ensemble fini d'indices, $\{\rho_i\}_{i\in I}$ des représentations de G sur des k-espaces vectoriels E_i, on définit la représentation $\rho = \bigoplus_{i\in I} \rho_i$ -somme (directe) des ρ_i- sur $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$ par

$$\forall g \in G,\ \rho(g)(\sum_{i\in I} x_i) = \sum_{i\in I} \rho_i(g)(x_i) \quad \text{où, } \forall i \in I,\ x_i \in E_i.$$

Ainsi on dira qu'une représentation est *complètement réductible* si elle est équivalente à une somme de représentations irréductibles.

On définira de manière analogue le produit tensoriel, les puissances extérieures, etc... de deux ou plusieurs représentations.

Un bon critère pour l'équivalence des représentations irréductibles de G est donné par les relations d'orthogonalité de Frobenius-Schur. Soient p l'ordre de G - notation $|G| = p$ - et n le nombre de classes de conjugaison de G :

Proposition 1.2.1.

1. Soient ρ et σ deux représentations irréductibles de G sur E et F respectivement, alors $(\chi_\rho|\chi_\sigma) = \frac{1}{p} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g).\chi_\sigma(g^{-1})$ vaut 1 ou 0 selon que ρ et σ sont ou ne sont pas équivalentes.
   Soient d le degré de ρ et $((\rho_{ij}(g)))_{1 \leq i, j \leq d}$ la matrice de $\rho(g)$, $\forall g \in G$, pour une base $\{e_i\}_{1 \leq i \leq d}$ de E, alors $(\rho_{ij}|\rho_{k\ell}) = \frac{1}{d} \delta_i^j \delta_k^\ell$ (δ_s^t est le symbole de Kronecker).
2. Si $\{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_s\}$ sont des représentations irréductibles de G, deux à deux non équivalentes, alors $\{\chi_{\rho_1},\chi_{\rho_2},\ldots,\chi_{\rho_s}\}$ sont linéairement indépendantes dans le k-espace vectoriel des applications de G dans k, et $s \leq n$.
   En particulier, toute représentation (resp. sans point fixe) se décompose de manière unique -à équivalence près- en somme directe de représentations irréductibles (resp. sans point fixe).

La détermination des représentations irréductibles (à équivalence près) s'appuie alors sur les propriétés arithmétiques suivantes :

Proposition 1.2.2.

Soient $\{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_s\}$ un système maximal de représentations irréductibles, non équivalentes deux à deux, de G et d_i = degré de ρ_i pour $1 \leq i \leq s$:

(i) $\forall i \in \{1,2,\ldots,s\}$ d_i divise p (notation $d_i|p$) et $s = n$,

(ii) $\sum_{i=1}^{s} d_i^2 = p$,

(iii) $|G/[G;G]|$ est le nombre de représentations irréductibles (non équivalentes deux à deux) de degré 1 de G. En particulier, G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

En spécialisant le corps k on obtient la classification suivante :

Proposition 1.2.3.

1. Les représentations irréductibles complexes -ou unitaires- ρ de G appartiennent à l'une des trois classes ci-après :

   (C_1) ρ est équivalente à une représentation réelle et $\sum_{g\in G} \chi_\rho(g^2) = p$;

   (C_2) ρ est équivalente à sa conjuguée $\bar{\rho}$ mais n'est pas équivalente à une représentation réelle et $\sum_{g\in G} \chi_\rho(g^2) = -p$;

   (C_3) ρ n'est pas équivalente à $\bar{\rho}$ et $\sum_{g\in G} \chi_\rho(g^2) = 0$.

2. Les représentations irréductibles réelles -ou orthogonales- σ de G sont de trois types :

   (R_1) $\sigma_{\mathbb{C}} = \rho$ où ρ est (une représentation complexe) de type (C_1) ;

   (R_2) $\sigma_{\mathbb{C}} = \rho \oplus \rho$ où ρ est de type (C_2) ;

   (R_3) $\sigma_{\mathbb{C}} = \rho \oplus \bar{\rho}$ où ρ est de type (C_3).

[Ci-dessus d'une part $\sigma_{\mathbb{C}}$ est la complexifiée de σ i.e. la représentation complexe $\sigma \otimes 1_{\mathbb{C}}$, d'autre part le signe $=$ est mis pour "équivalent"].

1.3. *Formes sphériques.*

Définition 1.3.1.

On appelle forme sphérique toute variété riemannienne connexe, complète, de dimension $n \geq 2$ et de courbure constante positive.

La terminologie est issue des travaux de W. Killing [29] et H. Hopf [20] qui ont montré que toute variété riemannienne M de dimension $n \geq 2$ est une variété connexe, complète, de courbure constante $K > 0$ si et seulement si M est *isométrique* à S^n/G où S^n est la sphère de dimension n et G un sous-groupe fini de $O(n+1)$ opérant librement sur S^n.

Cette caractérisation des formes sphériques est la solution partielle d'un problème plus général -connu, depuis 1891, dans la littérature sous le nom de "problème des formes spatiales de Clifford-Klein"- consistant à décrire toutes les variétés riemanniennes connexes, complètes, de courbure constante. Pour ce qui est de la classification des formes sphériques, on était ainsi amené à déterminer tous les groupes finis possédant des représentations orthogonales sans point fixe, et donc (cf. prop 1.2.3) ceux possédant des représentations unitaires sans point fixe. En dimension trois, ce programme fut complètement effectué par H. Seifert et W. Threlfall [54] en 1925. Dans le cas général, après le travail décisif de G. Vincent [63], la solution définitive fut apportée par J.A. Wolf (cf. [66]) en 1960.

Par abus de langage, on confondra une forme sphérique M et un représentant S^n/G de sa classe d'isométrie. D'autre part S^1/G, qui est homéomorphe à S^1, sera aussi considérée comme une forme sphérique. Des considérations précédentes et des prop 1.1.1. et 1.1.2., il résulte trivialement

Proposition 1.3.2.

Toute forme sphérique $M^n = S^n/G$ est une variété sans bord, connexe, compacte et orientable possédant une structure de C.W. complexe fini (*) et telle que $\Pi_1(M) = G$, $\Pi_i(M) = \Pi_i(S^n)$ pour $i \neq 1$.

Concernant la caractérisation du groupe fondamental d'une forme sphérique, on a les résultats suivants

Proposition 1.3.3.

Soit G un groupe fini, non trivial, opérant librement et linéairement sur S^N.

1. Pour $N = 2n$, G est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$ et les seules formes sphériques de dimension paire sont les espaces projectifs réels $P^{2n}(\mathbb{R})$.
2. Pour $N = 2n + 1$:
   (i) Si G est abélien alors G est cyclique ;
   (ii) Si G n'est pas abélien, il possède les propriétés équivalentes suivantes :
      a) tous les sous-groupes abéliens de G sont cycliques,
      b) tout p-sous-groupe de G est soit cyclique, soit un groupe quaternionique généralisé (notation Q_m),

---

(*) C'est une conséquence de la théorie de Morse pour les variétés différentiables compactes.

c) les p-sous-groupes de Sylow de G sont de l'un des deux types suivants

- tous sont cycliques,
- ils sont cycliques pour $p \neq 2$, quaternioniques généralisés pour $p = 2$,

d) G est à cohomologie périodique (de période non nulle divisant $N+1$).

3. Pour tout N, G possède au moins un élément d'ordre 2 et tous ses éléments d'ordre 2 appartiennent à son centre $Z(G)$.

Dans cette proposition : 1 résulte clairement de 1.1.2 ; 2 (i) conduit aux formes sphériques appelées *espaces lenticulaires* -lorsque $G = Q_m$, les formes sphériques correspondantes seront appelées Q_m-*formes sphériques*- ; 3 a été établi par J. Milnor [45] ; l'équivalence entre a), b) et d) est montrée dans [11]. La classification complète des groupes satisfaisant à (ii) a) est connue par les travaux de H. Zassenhaus [70] et M. Suzuki [58] : on aboutit à six types de groupes (pour deux d'entre eux les groupes correspondants ne sont pas résolubles). (voir [67], p. 179 et 195).

<u>Définition 1.3.4.</u>

Soit $M = S^n/G$ une forme sphérique, si $C(G)$ agit transitivement* sur S^n on dit que M est une forme sphérique homogène.

De 1.3.3., il s'ensuit alors

<u>Proposition 1.3.5.</u> ([67], p. 89)

Les seules formes sphériques homogènes M^n (à isométrie près) sont :

(i) $M^n = S^n$,

(ii) $M^n = P^n(\mathbb{R})$,

(iii) $M^n = S^n/\mathbb{Z}_p$ avec $p > 1$ et n impair (espaces lenticulaires),

(iv) $M^n = S^n/D^*_m$ ou S^n/P^*, avec $m > 1$ et $n \equiv 3 \pmod 4$.

Ci-dessus D^*_m est le groupe binaire diédrique de degré m, P^* l'un des groupes binaires polyédriques suivants : le groupe binaire tétraédrique T^*, ortaédrique O^*, icosaédrique I^*. On sait que ces groupes sont des revêtements

---

* $C(G)$ est le centralisateur de G dans $O(n+1)$.

à deux feuillets des groupes de rotations d'un polygone régulier de m cotés ou d'un polyèdre régulier élémentaire.

De 1.3.3., on peut aussi tirer la remarque suivante immédiate mais utile :

Remarque 1.3.6.

Toute forme sphérique, de groupe fondamental non trivial, a pour revêtement l'une des trois formes sphériques "universelles" suivantes : espace projectif réel, espace lenticulaire, Q_m-forme sphérique.

1.4. *Cohomologie des formes sphériques.*

Toute forme sphérique M^n, de groupe fondamental G, étant une variété connexe, compacte et orientable d'une part, et ayant d'autre part S^n comme G-revêtement universel (1.3.2.), il est clair que ses groupes de cohomologie (ordinaire) entière sont

Lemme 1.4.1.

$$H^i(M,\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } i = 0 \text{ ou } n, \\ H^i(G,\mathbb{Z}) & \text{pour } 0 < i < n. \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Plus généralement, soit h^* une théorie *réduite* de cohomologie généralisée : M.F. Atiyah et F. Hirzebruch ont montré que, pour tout C.W. complexe fini, il existait une suite spectrale [7]

$$E_2^{i,j} = \tilde{H}^i(X,h^j(S^o)) \Rightarrow h^{i+j}(X).$$

Dans le cas d'une *forme sphérique* M *de dimension* $2n+1$, de groupe G d'ordre p, on a le critère de trivialité suivant

Proposition 1.4.2. [37]

La suite spectrale $E_2^{i,j} = \tilde{H}^i(M,h^j(S^o)) \Rightarrow h^{i+j}(M)$ est triviale si les conditions suivantes sont réalisées :

1. $H^{2i+1}(G,h^{\cdot}(S^o)) = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$,
2. $H^{2i}(G,h^{impair}(S^o)) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$,

3. $H^{2n+1}(M,h^{pair}(S^o))$ n'admet, éventuellement, des éléments de torsion que d'ordre premier avec p.

Sous les hypothèses précédentes, on a alors

1. $h^{2s+1}(M) = H^{2n+1}(M,h^{2(s-n)}(S^o))$,
2. $G_*[h^{2s}(M)] = \bigoplus_{i=1}^{n} H^{2i}(G,h^{2(s-i)}(S^o)) \oplus H^{2n+1}(M,h^{2(s-n)-1}(S^o))$.

[G_* désigne le gradué associé pour une filtration convenable].

En appelant M_o le 2n-squelette de M, on a également le critère de trivialité suivant

Proposition 1.4.3.

La suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch pour M_o est triviale sous les hypothèses suivantes :

1. $H^{2i+1}(G,h^{\cdot}(S^o)) = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$,
2. $H^{2i}(G;h^{impair}(S^o)) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$,
3. $H^{2n}(M_o,h^{impair}(S^o)) = 0$.

En particulier :

1. $h^{impair}(M_o) = 0$,
2. $G_*[h^{2s}(M_o)] = \bigoplus_{i=1}^{n-1} H^{2i}(G,h^{2(s-i)}(S^o)) \oplus H^{2n}(M_o,h^{2(s-n)}(S^o))$.

Puisque d'une part $\widetilde{KU}^{-i}(S^o) = \mathbb{Z}$ ou 0 selon que i est pair ou non, et d'autre part $\widetilde{KO}^{-i}(S^o)$ est donné par

i(mod. 8)	0	1	2	3	4	5	6	7
$\widetilde{KO}^{-i}(S^o)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0

,

les deux propositions précédentes s'appliqueront en $\widetilde{KU}$-théorie (resp. $\widetilde{KO}$-théorie) pour tout $p > 1$ (resp. p *impair* > 1).

Plus précisément, nous allons maintenant voir comment la K-théorie d'une forme sphérique quelconque pourra "se ramener" à celle des formes sphériques universelles visées par la remarque 1.3.6.

Lemme 1.4.4.

Soit N un sous-groupe distingué d'un groupe fini G tel que G/N soit isomorphe à un p-sous-groupe de Sylow G_p de G. Alors l'inclusion $G_p \subset G$ induit, pour tout $i > 0$, un isomorphisme

$$H^i(G,\mathbb{Z})_{(p)} \longrightarrow H^i(G_p,\mathbb{Z})$$

où $H^i(G,\mathbb{Z})_{(p)}$ est la p-composante primaire de $H^i(G,\mathbb{Z})$.

Démonstration.

Soit r (resp. s) l'inclusion canonique de N (resp. G_p) dans G. La suite spectrale d'Hoschschild-Serre qui relie les groupes de cohomologie d'Artin-Tate d'un groupe et d'un de ses sous-groupes distingués s'écrit ici

$$E_2^{i,j} = \hat{H}^i(G/N,\ \hat{H}^j(N,\mathbb{Z})) \Rightarrow \hat{H}^{i+j}(G,\mathbb{Z}).$$

Comme $(|N|,p) = 1$, cette suite spectrale conduit ([21], p. 127) à la suite exacte scindée

$$0 \to \hat{H}^i(G_p,\mathbb{Z}) \xrightarrow{t_i} \hat{H}^i(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{r_i} \hat{H}^i(N,\mathbb{Z})^G \to 0$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$: t_i et r_i étant respectivement les homomorphismes naturels de transfert et de restriction (ce dernier induit par r), $\hat{H}^i(N,\mathbb{Z})^G$ le sous-groupe de $\hat{H}^i(N,\mathbb{Z})$ constitué des éléments laissés invariants par l'action de G.

Appelons $u_i : \hat{H}^i(G,\mathbb{Z}) \to \hat{H}^i(G_p,\mathbb{Z})$ (resp. s_i) la section de t_i (resp. l'homomorphisme induit par s). De la définition de l'homomorphisme de transfert t_i (cf. [11], p. 255), il résulte que $t_i s_i = \mu_i$ est la multiplication par $[G : G_p] = |N|$ dans $\hat{H}^i(G,\mathbb{Z})$; μ_i est donc surjectif et, plus précisément, tuant la $|N|$-composante primaire de $\hat{H}^i(G,\mathbb{Z})$, c'est un isomorphisme de $\hat{H}^i(G,\mathbb{Z})_{(p)}$. Comme $s_i = (u_i t_i).s_i = u_i \mu_i$, s_i est surjectif et, de plus, $s_i|\hat{H}^i(G,\mathbb{Z})_{(p)}$ est un isomorphisme.

Théorème 1.4.5.

Soit $M = S^{2n+1}/G$ *une forme sphérique : on suppose que* G *est le produit semi-direct d'un* p-*groupe* G_p *et d'un groupe* N *d'ordre premier à* p.

On appelle M_p *le revêtement* S^{2n+1}/G *de* M *induit par l'inclusion de* G_p *dans* G . *Alors* $\tilde{K}_k(M_p)$ *est un facteur direct de* $\tilde{K}_k(M)$ *(où* $k = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) ; plus précisément :*

1. *pour tout* p, $\widetilde{KU}(M)_{(p)}$ *est isomorphe à* $\widetilde{KU}(M_p)$;
2. *pour* $p = 2$, $\widetilde{KO}(M)_{(2)}$ *est isomorphe à* $\widetilde{KO}(M_2)$; *pour* $p \neq 2$

$$\widetilde{KO}(M)_{(p)} \cong \begin{cases} \widetilde{KO}(M_p) & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod 4, \\ \widetilde{KO}((M_p)_o) & \text{si } n \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Démonstration.

Soit f l'application de revêtement $M_p \to M$. Les homomorphismes $f^i : \tilde{H}^i(M,\mathbb{Z}) \to \tilde{H}^i(M_p,\mathbb{Z})$, induits par f, sont surjectifs : pour $i \neq 2n+1$ cela résulte des ℓ. 1.4.1 et 1.4.4, pour $i = 2n+1$ cela est dû au fait que f conserve l'orientation des variétés M et M_p. Comme le foncteur $\cdot \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot$ (resp. $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\cdot,\cdot)$) est exact à droite (resp. additif), il s'ensuit que, $\forall i \in \mathbb{Z}$, les homomorphismes

$$\tilde{f}_2^i : E_2^{i,-i}(M) = \tilde{H}^i(M,\tilde{K}_k^{-i}(S^o)) \to E_2^{i,-i}(M_p) = \tilde{H}^i(M_p,\tilde{K}_k^{-i}(S^o))$$

(induits par f) sont surjectifs. En fait, en dehors du cas où $k = \mathbb{R}$, $p \neq 2$, $i = 2n+1$ et $n \equiv 0$ (mod. 4), $\tilde{f}_2^i|(E_2^{i,-i}(M))_{(p)}$ est un isomorphisme sur $E_2^{i,-i}(M_p)$: l'additivité du foncteur $H^{\bullet}(\cdot)$ de la catégorie abélienne des complexes de groupes abéliens dans celle des groupes abéliens, montre alors qu'il en est encore ainsi pour $\tilde{f}_r^i : E_r^{i,-i}(M) \to E_r^{i,-i}(M_p)$ pour tout $r \geq 2$; d'où le résultat. Lorsque $k = \mathbb{R}$, $p \neq 2$ et $n \equiv 0$ (mod 4), le terme $E_2^{2n+1,-2n-1}(M_p)$ étant isomorphe à $\mathbb{Z}_2$, le raisonnement précédent tient à condition de remplacer M_p par son 2n-squelette $(M_p)_o$.

Remarques.

1. Le théorème précédent(*) s'applique à toute forme sphérique dont le groupe fondamental G est produit direct de groupes d'ordres premiers entre eux. C'est notamment le cas quand G est abélien i.e. pour les espaces lenticulaires.

(*) J.P. Jouanolou m'a récemment signalé qu'un de ses élèves, J. Müller, de l'Université de Strasbourg, avait obtenu un résultat analogue pour G métacyclique.

2. Les résultats obtenus sont non seulement *indépendants* de l'action (libre) de G sur S^{2n+1}, mais sont encore vrais pour toute variété ayant le même type d'homologie que celle d'une forme sphérique.

Un autre critère de comparaison qui nous sera utile est le suivant :

Proposition 1.4.6.

Soient X et Y deux C.W. complexes finis, $f : Y \to X$, $E_2^{i,j}(X) \Rightarrow h^{i+j}(X)$ et $E_2^{i,j}(Y) \Rightarrow h^{i+j}(Y)$ les suites spectrales d'Atiyah-Hirzebruch pour X et Y respectivement.

S'il existe un entier $r \geqslant 2$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on ait

(i) $E_r^{i,-i}(X) = E_{r+1}^{i,-i}(X) = \ldots = E_\infty^{i,-i}(X)$,

(ii) $f_r^i : E_r^{i,-i}(X) \to E_r^{i,-i}(Y)$ surjectif ;

l'homomorphisme induit $f^* : h^o(X) \to h^o(Y)$ est surjectif.

Démonstration.

Les hypothèses impliquent que $E_r^{i,-i}(Y) = E_{r+1}^{i,-i}(Y) = \ldots = E_\infty^{i,-i}(Y)$ pour tout i, soit $f_\infty^i : E_\infty^{i,-i}(X) \to E_\infty^{i,-i}(Y)$ surjectif pour tout i. Comme les C.W. complexes X et Y sont finis, par application du lemme des cinq, le résultat s'ensuit.

En dehors de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch, nous userons dans l'étude de la K-théorie des formes sphériques d'une conséquence importante de l'isomorphisme de Thom en K-théorie G-équivariante. Rappelons-en la situation dans le cas réel.

Pour le groupe fini G, considérons donc un G-fibré vectoriel réel $E \to X$ de base X paracompacte, de rang $4r$. Désignons par $B(E)$ et $S(E)$ les fibrés en boule et en sphère de E et par $X^E = B(E)|S(E)$ l'espace de Thom de E. Comme, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $KO_G^j(B(E),S(E)) \cong \widetilde{KO}_G^j(X^E)$, la suite exacte de KO_G-théorie pour la paire $(B(E),S(E))$ s'écrit au rang $4r+i$

$$\ldots \to \widetilde{KO}_G^{4r+i}(X^E) \xrightarrow{\Psi} KO_G^{4r+i}(B(E)) \to KO_G^{4r+i}(S(E)) \to \widetilde{KO}_G^{4r+i+1}(X^E) \to \ldots$$

Soit $s : X \to E$ la section nulle du G-fibré réel $E \to X$, alors sous l'hypothèse que ce fibré est *quaternionique i.e. que l'action de* G *se factorise à travers le groupe spinoriel*, on a un isomorphisme de Thom ([26], p. 266)

$$s_! : KO_G^i(X) \xrightarrow{\sim} \tilde{KO}_G^{4r+i}(X^E) \ ;$$

d'autre part, s induisant clairement l'isomorphisme

$$s^! : KO_G^{4r+i}(B(E)) \xrightarrow{\sim} KO_G^{4r+i}(X),$$

nous avons la suite exacte

$$\ldots \to KO_G^i(X) \xrightarrow{\phi} KO_G^{4r+i}(X) \to KO_G^{4r+i}(S(E)) \to \tilde{KO}_G^{4r+i+1}(X^E) \to \ldots \quad .$$

avec $\phi = s^! \Psi s_!$. Prenons maintenant pour X un point et supposons que G *opère librement sur* $S(E)$: pour $i = -4r$, nous obtenons la suite exacte

$$KO_G^{-4r}(*) \xrightarrow{\phi} KO_G^o(*) \xrightarrow{\theta} KO^o(S(E)/G).$$

Mais

$$KO_G^{4j}(*) = \begin{cases} RO(G) & \text{pour } j \text{ pair,} \\ R\,Sp(G) & \text{pour } j \text{ impair,} \end{cases}$$

où RO(G) (resp. RSp(G)) est l'anneau (resp. le groupe) des représentations réelles -orthogonales- (resp. quaternioniques -spinorielles-) de G ; on en déduit

<u>Proposition 1.4.7.</u>

Les suites suivantes

- $RO(G) \xrightarrow{\phi} RO(G) \xrightarrow{\theta} KO^o(S(E)/G)$ pour r pair,
- $RSp(G) \xrightarrow{\phi} RO(G) \xrightarrow{\theta} KO^o(S(E)/G)$ pour r impair,

sont exactes.

Si de plus G possède un élément central opérant par antipodie sur S(E), l'homomorphisme (naturel) θ est surjectif (cf. [27]).

En ce qui concerne les formes sphériques, la proposition précédente ne s'appliquera qu'à celles dont le groupe fondamental possédera une réduction spinorielle ;

pour un tel groupe G, θ sera alors toujours surjectif (prop 1.3.3. (3)).
Rappelons à ce propos que θ est défini de la manière suivante : pour $\rho \in RO(G)$ de degré d, G opère sur $S(E) \times \mathbb{R}^d$ au moyen de ρ sur chacun des facteurs. L'espace quotient $S(E) \times_G \mathbb{R}^d$ est un fibré vectoriel réel de rang d sur $S(E)/G$: θ fait correspondre à ρ la classe de ce fibré dans $KO^o(S(E)/G)$.

Dans le cas complexe, sous la *seule hypothèse que* G *opère librement sur* $S(E)$, on obtient ([6], p. 102).

Proposition 1.4.8.

La suite

$$0 \to KU^1(S(E)/G) \to RU(G) \xrightarrow{\phi} RU(G) \xrightarrow{\theta} KU^o(S(E)/G) \to 0$$

est exacte. ϕ est la multiplication, dans l'anneau des représentations unitaires $\rho : G \to U(E)$, par $\sum_{i=0}^{\dim E} (-1)^i \Lambda^i\rho$.

CHAPITRE II

K-THEORIE COMPLEXE DES ESPACES LENTICULAIRES

2.1. *Espaces lenticulaires.*

On considère sur la sphère $S^{2n+1} = \{(z_o,z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{k=0}^{n} |z_k|^2 = 1\}$, la rotation $\gamma : S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ définie par

$$\gamma(z_o,z_1,\dots,z_n) = (\zeta^{p_o}.z_o, \zeta^{p_1}.z_1,\dots,\zeta^{p_n}.z_n) \quad \text{avec} \quad \zeta = e^{\frac{2i\Pi}{p}},$$

où p, p_o, $p_1,\dots,p_n \in \mathbb{N}^*$ et sont tels que

1) $p \neq 1$

2) $(p_k,p) = 1$ pour tout k de $\{0,1,\dots,n\}$.

Dans ces conditions le groupe $\Gamma = \{\gamma^i\}_{1\leq i\leq p}$ est un groupe cyclique d'ordre p agissant librement et différentiablement sur S^{2n+1}, isomorphe à $\mathbb{Z}_p$.

<u>Définition 2.1.1.</u>

La forme sphérique S^{2n+1}/Γ est appelée espace lenticulaire généralisé d'ordre p ; elle est notée $L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)$. Quand $p_o = p_1 = \dots = p_n = 1$, $L^n(p\ ;\ 1,1,\dots,1)$ est noté $L^n(p)$ et appelé espace lenticulaire ordinaire d'ordre p.

C'est dans les années 30 que ces espaces furent introduits par Tietze et De Rham. On notera que $L^n(2)$ est l'espace projectif réel $P^{2n+1}(\mathbb{R})$. Naturellement les espaces lenticulaires possèdent les propriétés résumées dans 1.3.2. Soient $L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)$ et $L^n(p\ ;\ q_o,q_1,\dots,q_n)$ deux espaces lenticulaires de mêmes dimension et ordre, alors s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et une permutation σ de $\{0,1,\dots,n\}$ tels que $q_k \equiv r.p_{\sigma(k)}$ (mod. p) pour tout $k \in \{0,1,\dots,n\}$, il est clair qu'il existe une isométrie différentiable de l'un sur l'autre. Le changement de l'un des p_k en $p-p_k$ n'a d'autre effet que de changer l'orientation en son opposé. Autrement dit, en notant $-L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)$ la variété $L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)$ munie de l'orientation opposée, on voit que tout espace lenticulaire est isométriquement difféomorphe à un espace lenticulaire du type $\pm L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)$ avec $1 \leqslant p_o \leqslant p_1 \leqslant \dots \leqslant p_n < \frac{p}{2}$.

Enfin, tout espace lenticulaire d'ordre p possède une structure naturelle de C.W. complexe fini avec une cellule en chaque dimension, les applications d'attachement cellulaires étant toutes de degrés p. (Pour une description détaillée, voir par exemple [14], p. 89). Moyennant le ℓ. 1.4.1, il s'ensuit donc

Proposition 2.1.2.

Les groupes de cohomologie entière de $L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)$ sont donnés par

$$H^i(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n),\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } i = 0,\ 2n+1, \\ \mathbb{Z}_p & \text{pour } i = 2,4,\dots,2n, \\ 0 & \text{ailleurs ;} \end{cases}$$

ceux de son 2n-squelette $L^n_o(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)$ sont

$$H^i(L^n_o(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n),\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } i = 0, \\ \mathbb{Z}_p & \text{pour } i = 2,4,\dots,2n, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

En utilisant le théorème des coefficients universels, on en déduit le corollaire suivant qui sera dans la suite employé pour $r = 2$:

Corollaire 2.1.3.

Soit r un entier strictement supérieur à 1, alors

$$H^i(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n),\mathbb{Z}_r) = \begin{cases} \mathbb{Z}_r & \text{pour } i = 0,\ 2n+1, \\ \mathbb{Z}_{(p,r)} & \text{pour } i = 1,2,\dots,2n, \\ 0 & \text{ailleurs ;} \end{cases}$$

$$H^i(L_o^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n),\mathbb{Z}_r) = \begin{cases} \mathbb{Z}_r & \text{pour } i = 0, \\ \mathbb{Z}_{(p,r)} & \text{pour } i = 1,2,\dots,2n, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2.2. *K-théorie complexe des espaces lenticulaires généralisés.*

Proposition 2.2.1.

1. Pour tout $p > 1$, le groupe $\widetilde{KU}^o(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n))$ a pour ordre p^n.
2. L'inclusion canonique de $L_o^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)$ dans $L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)$ induit un isomorphisme $\widetilde{KU}(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)) \xrightarrow{\sim} \widetilde{KU}(L_o^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n))$.
3. $\widetilde{KU}^{-1}(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)) \approx \mathbb{Z}$ et $\widetilde{KU}^{-1}(L_o^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)) = 0$.

Démonstration.

Il suffit d'appliquer les prop. 1.4.2 et 1.4.3 pour voir que les deux groupes $\widetilde{KU}(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n))$ et $\widetilde{KU}(L_o^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)$ ont même ordre p^n.
Pour l'autre assertion, soient i l'inclusion canonique $L_o^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n) \hookrightarrow L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)$ et j la projection canonique de $L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)$ sur $L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)/L_o^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)$ qui est homéomorphe à S^{2n+1} ; la suite exacte de $\widetilde{KU}$-théorie appliquée à la paire $(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n),$ $L_o^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n))$ s'écrit alors

$$\dots \to \widetilde{KU}^o(S^{2n+1}) \xrightarrow{j^*} \widetilde{KU}^o(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)) \xrightarrow{i^*} \widetilde{KU}^o(L_o^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n))$$
$$\xrightarrow{\partial} \widetilde{KU}^1(S^{2n+1}) \to \dots$$

Comme $\widetilde{KU}^o(S^{2n+1}) = 0$, $\widetilde{KU}^1(S^{2n+1}) = \mathbb{Z}$, i^* est un isomorphisme puisque le groupe $\widetilde{KU}^o(L_o^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n))$ est fini.

Maintenant, en appliquant la suite exacte d'Atiyah (prop 1.4.8), nous allons déterminer la structure de l'anneau $KU(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n))$. Tout d'abord, toute représentation complexe linéaire $\sigma : \mathbb{Z}_p \to U(n+1)$ se décompose en une somme de représentations linéaires de degré 1 (prop 1.2.2 (iii)). Plus précisément, en appelant $\bar{a}$ la classe des entiers relatifs congrus à a modulo p, il est clair que σ est totalement déterminée par $\sigma(\bar{1})$ puisque $\sigma(\bar{a}) = (\sigma(\bar{1}))^a$ pour tout $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$. D'un autre côté la relation $(\sigma(\bar{1}))^p = Id_{\mathbb{C}^{n+1}}$ implique nécessairement

$$\sigma(\bar{1}) = \begin{pmatrix} \zeta^{p_o} & & & 0 \\ & \zeta^{p_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \zeta^{p_n} \end{pmatrix}$$

avec ζ, $p_o, p_1, \ldots, p_n$ satisfaisant aux conditions précisées en 2.1. En appelant σ_k $(0 \leq k \leq n)$ la représentation unitaire de degré 1 définie par

$$\sigma_k(\bar{1}) = \zeta^k . \mathrm{Id}_{\mathbb{C}},$$

il est donc clair que $\sigma = \bigoplus_{k=0}^{n} \sigma_k$.

<u>Lemme 2.2.2.</u>

Avec les notations précédentes : $\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \Lambda^k \sigma = \prod_{k=0}^{n} (1-\sigma_k)$.

<u>Preuve.</u>

Soient $\alpha, \beta \in RU(\mathbb{Z}_p)$ de degré respectif n_1 et n_2, on sait que la représentation linéaire $\Lambda^k(\alpha \oplus \beta) : \mathbb{Z}_p \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Lambda^k \mathbb{C}^{n_1+n_2})$ est telle que

$$\Lambda^k(\alpha \oplus \beta) = \sum_{i_1+i_2=k} (\Lambda^{i_1}\alpha) \otimes (\Lambda^{i_2}\beta).$$

Dans le cas présent nous avons donc pour $0 \leq k \leq n+1$

$$\Lambda^k \sigma = \Lambda^k(\sigma_o \oplus \sigma_1 \oplus \ldots \oplus \sigma_n) = \sum_{i_o+i_1+..+i_n=k} (\Lambda^{i_o}\sigma_o) \otimes (\Lambda^{i_1}\sigma_1) \otimes \ldots \otimes (\Lambda^{i_n}\sigma_n).$$

Comme chaque σ_r, $0 \leq r \leq n$, est de degré 1, il vient

$$\Lambda^{i_r}\sigma_r = \begin{cases} 0 & \text{si } i_r > 1, \\ \sigma_r & \text{si } i_r = 1, \\ 1 & \text{si } i_r = 0. \end{cases}$$

Ainsi la somme définissant $\Lambda^k \sigma$ est uniquement constituée des termes où k des indices $i_o, i_1, \ldots, i_n$ sont égaux à 1 et les autres à 0. Autrement dit, en appelant $P_k(n)$ l'ensemble des parties ordonnées de k éléments distincts de $\{0,1,\ldots,n\}$, nous avons

$$\Lambda^k\sigma = \sum_{(i_o,i_1,\ldots,i_{k-1}) \in P_k(n)} \sigma_{i_o} \otimes \sigma_{i_1} \otimes \ldots \otimes \sigma_{i_{k-1}} .$$

De cette somme qui contient $\binom{n+1}{k}$ termes, il s'ensuit

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \Lambda^k\sigma = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \sum_{(i_o,i_1,\ldots,i_{k-1})\varepsilon P_k(n)} \sigma_{i_o} \otimes\sigma_{i_1} \otimes \ldots \otimes \sigma_{i_{k-1}} = \prod_{k=0}^{n} (1-\sigma_k).$$

Soit $\lambda : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}^*$ la représentation naturelle $\bar{a} \mapsto \zeta^a$ et appelons ξ le fibré complexe de rang 1

$$S^{2n+1} \times_\lambda \mathbb{C} \to L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\ldots,p_n)$$

associé par λ au revêtement universel $S^{2n+1} \to L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\ldots,p_n)$. En convenant de noter encore ξ la classe de ξ dans $KU^o(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\ldots,p_n))$, la suite exacte

$$0 \to KU^1(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\ldots,p_n)) \to RU(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\phi} RU(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\theta} KU^o(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\ldots,p_n)) \to 0$$

montre que $KU^o(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\ldots,p_n))$ est isomorphe au quotient de l'anneau $RU(\mathbb{Z}_p) = \dfrac{\mathbb{Z}[\lambda]}{<\lambda^p-1>}$ par l'idéal $\phi(RU(\mathbb{Z}_p))$. En utilisant le ℓ. 2.2.2, il s'ensuit clairement

<u>Proposition 2.2.3.</u>

Pour tout $(p\ ;\ p_o,p_1,\ldots,p_n)$ (avec p non nécessairement premier) on a

$$KU^o(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\ldots,p_n) \xrightarrow{\sim} \frac{\mathbb{Z}[\xi]}{<\prod_{k=0}^{n}(1-\xi^{p_k}),\xi^p-1>}$$

où $<\prod_{k=0}^{n}(1-\xi^{p_k}),\xi^p-1>$ est l'idéal engendré par les polynômes $\prod_{k=0}^{n}(1-\xi^{p_k})$ et ξ^p-1 dans l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

<u>Théorème 2.2.4.</u>

Pour tout $(p\ ;\ p_o,p_1,\ldots,p_n)$ *(avec* p *non nécessairement premier) il existe un isomorphisme d'anneaux :*

$$\tilde{\Psi} : \tilde{KU}(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\ldots,p_n)) \to \tilde{KU}(L^n(p))$$

caractérisé par $\tilde{\Psi}(\xi-1) = \eta-1$ *où* η *désigne* ξ *lorsque* $p_o = p_1 = \ldots = p_n = 1$.

Démonstration.

Considérons l'homomorphisme $\Psi : KU(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\ldots,p_n)) \to KU(L^n(p))$ défini, à l'aide de 2.2.3, par $\Psi(\bar{P}(\xi)) = \bar{P}(\eta)$ où $\bar{P}(\xi)$ (resp. $\bar{P}(\eta)$) est la classe du polynôme $P(\xi) \in \mathbb{Z}[\xi]$ (resp. $P(\eta) \in \mathbb{Z}[\eta]$) modulo l'idéal $< \prod_{i=0}^{n}(1-\xi^{p_i}),\ \xi^p-1 >$ (resp. $< (1-\eta)^{n+1},\ \eta^p-1 >$).

Soient $\alpha : KU(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\ldots,p_n)) \to \mathbb{Z}$ et $\beta : KU(L^n(p)) \to \mathbb{Z}$ les augmentations définies par

$$\alpha(\bar{P}(\xi)) = P(1)\ ,\quad \beta(\bar{Q}(\eta)) = Q(1).$$

Elles ont respectivement pour noyaux $\tilde{KU}(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\ldots,p_n))$ et $\tilde{KU}(L^n(p))$. L'homomorphisme Ψ est surjectif ; il induit l'homomorphisme surjectif

$$\tilde{\Psi} : \tilde{KU}(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\ldots,p_n)) \to \tilde{KU}(L^n(p)),$$

qui est en fait un isomorphisme puisque (prop 2.2.1) les groupes $\tilde{KU}(L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\ldots,p_n))$ et $\tilde{KU}(L^n(p))$ ont même ordre.(*)

Le théorème précédent montre que la KU-théorie des espaces lenticulaires généralisés se ramène à celle des lenticulaires ordinaires. Nous examinerons plus loin les problèmes posés par la réalisation géométrique de cet isomorphisme canonique. (voir chapitre X). Nous nous limiterons désormais, dans tout ce chapitre, à l'étude de $\tilde{KU}(L^n(p))$.

Remarques.

1. Utilisant la prop 2.2.3 et l'isomorphisme de Conner-Floyd : $\tilde{KU}(X) \xrightarrow{\sim} \tilde{U}^{pair}(X) \otimes_{U^*} \mathbb{Z}$ qui lie la K-théorie complexe et le cobordisme unitaire, M. Kamata a montré que la $\tilde{KU}$-théorie de certaines variétés

---

(*) On peut montrer directement que $|\tilde{KU}(L^n(p))| = p^n$: cf J.P. Jouanolou, Comparaison des K-théories algébrique et topologique de quelques variétés algébriques I.R.M.A de Strasbourg.

quotient $D_p(m,n) = S^{2n+1}\times S^n/D_p$ (où D_p est le groupe diédrique) se ramène à celle des espaces lenticulaires. [23].

2. Soient $a_o,a_1,\ldots,a_m$ et $b_o,b_1,\ldots,b_n$ des entiers positifs tels que chaque a_i soit premier avec b_j, $S^{2m+1} = \{(x_o,x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{C}^{m+1} \mid \sum_{i=0}^{m}|x_i|^2 = 1\}$ et S^{2n+1} définie de manière analogue. Considérons l'action ϕ de S^1 sur $S^{2m+1}\times S^{2n+1}$ donnée par

$$\phi(\lambda,(x_o,x_1,\ldots,x_m),\ (y_o,y_1,\ldots,y_n))=((\lambda^{a_o}x_o,\lambda^{a_1}x_1,\ldots,\lambda^{a_m}x_m),(\lambda^{b_o}y_o,\lambda^{b_1}y_1,\ldots,\lambda^{b_n}y_n))$$

alors F. Uchida a généralisé le th. 2.2.4, dans [62], pour l'espace des orbites des points de $S^{2n+1}\times S^{2n+1}$ associé à ϕ, qu'il note $M(a_o,a_1,\ldots,a_m\ ;\ b_o,b_1,\ldots,b_n)$, en montrant qu'il existe un isomorphisme canonique

$$KU(M(a_o,a_1,\ldots,a_m\ ;\ b_o,b_1,\ldots,b_n)) \xrightarrow{\sim} KU(M(a_o,a_1,\ldots,a_m\ ;\ 1,1,\ldots,1))$$

Quand $m = 0$, cet isomorphisme n'est autre que Ψ puisqu'alors $M(a_o\ ;\ b_o,b_1,\ldots,b_n)$ est clairement difféomorphe à $L(a_o\ ;\ b_o,b_1,\ldots,b_n)$.

Soit maintenant pour un espace lenticulaire $L^n(p)$, $p = \prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i}$ la décomposition en facteurs premiers de p : le théorème 1.4.5 s'énonce ici

Théorème 2.2.5.
$\tilde{KU}(L^n(p))$ *est isomorphe à* $\bigoplus_{i=1}^{r} \tilde{KU}(L^n(p_i^{s_i}))$.

Rappelons que dans [39], nous avions exhibé cet isomorphisme en utilisant les prop. 2.2.1 et 2.2.3. Plus précisément, p et q étant deux nombres relativement premiers, soient ξ,η et ρ les fibrés complexes de rang 1 respectivement associés aux revêtements $S^{2n+1}\to L^n(p)$, $S^{2n+1}\to L^n(q)$ et $S^{2n+1}\to L^n(pq)$ par les représentations naturelles

$$k(\text{mod } p)\mapsto e^{\frac{2i\Pi k}{p}},\quad \ell(\text{mod } q)\mapsto e^{\frac{2i\Pi \ell}{q}}\quad \text{et}\quad m(\text{mod } pq)\mapsto e^{\frac{2i\Pi m}{pq}}$$

respectivement ; alors l'isomorphisme de factorisation
$f^* : \tilde{KU}(L^n(p)) \oplus \tilde{KU}(L^n(q)) \to \tilde{KU}(L^n(pq))$ était caractérisé par

$$f^*(\xi-1,0) = \rho^q-1 \ , \ f^*(0,\eta-1) = \rho^p-1.$$

En d'autres termes, le th. 2.2.5 montre qu'il nous suffit désormais d'étudier la K-théorie complexe des espaces lenticulaires ordinaires d'ordre p^m où p est un nombre premier.

2.3. *Calcul de* $\tilde{KU}(L^n(p^m))$ *pour* p *premier.*

Nous savons que $KU(L^n(p^m)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\xi]/<(1-\xi)^{n+1}, \xi^{p^m}-1>$ (prop 2.2.3) : ainsi, en posant $1-\xi = -\sigma$, $\tilde{KU}(L^n(p^m))$ est, en tant que groupe, engendré par $\sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^s$ où $s = \inf(n, p^m-1)$; d'autre part les relations

$$\sigma^{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad (\sigma+1)^{p^m} - 1 = 0 \tag{1}$$

caractérisent sa structure d'anneau.

Puisque $\tilde{KU}(L^n(p^m))$ est un groupe abélien d'ordre p^{mn} (prop 2.2.1), il s'écrit comme somme directe de p-sous-groupes cycliques dont les générateurs respectifs sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des σ^i, $1 \leq i \leq s$. Dans ce §, nous voulons déterminer les sous-groupes cycliques en question. Nous sommes donc amenés à chercher à quelles conditions un polynôme $P(\sigma)$ de $\mathbb{Z}[\sigma]$ est congru à 0 modulo l'idéal $<\sigma^{n+1}, (\sigma+1)^{p^m}-1> = I$.

De façon plus précise nous allons d'abord chercher les conditions que doivent vérifier des $a_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq p^h-1$, pour que

$$\sum_{i=1}^{p^h-1} a_i\sigma^i \equiv 0 \pmod{I} \tag{2}$$

avec h *donné appartenant à* $\{1,2,\ldots,m\}$. Il en sera ainsi si et seulement s'il existe A et B de $\mathbb{Z}[\sigma]$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p^h-1} a_i\sigma^i = A(\sigma).\sigma^{n+1} + B(\sigma).[(\sigma+1)p^m-1]$$

i.e. s'il existe $B(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k\sigma^k$ avec $b_k \in \mathbb{Z}$ pour $0 \leq k \leq n-1$, tel que

$$\sum_{i=1}^{p^h-1} a_i\sigma^i \equiv \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k\sigma^k\right).\left(\sum_{j=1}^{p^m} \binom{p^m}{j}\sigma^j\right) \pmod{<\sigma^{n+1}>}.$$

En supposant $n \geq p^h$, il est clair que ce sera le cas si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

$$\sum_{j=1}^{i} \binom{p^m}{j} b_{i-j} = a_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq p^h-1 \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{p^m}{j} b_{k-j} = 0 \quad \text{pour} \quad p^h \leq k \leq n. \tag{4}$$

Ces deux relations montrent que le problème initial se trouve ramené au problème d'arithmétique suivant : étudier les caractères de divisibilité - par p - des n entiers $b_o, b_1, \ldots, b_{n-1}$, donc des a_i, sous les conditions (3) et (4). Il est immédiat de voir que les caractères de divisibilité des coefficients binômiaux vont jouer un rôle essentiel. En désignant, pour tout entier relatif x, par $v_p(x)$ sa valuation p-adique, rappelons le résultat suivant

Lemme 2.3.1. [12]

Soient $p, m, j \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leq j \leq p^m$ et p *premier*, alors

$$v_p\left(\binom{p^m}{j}\right) = m - v_p(j).$$

Proposition 2.3.2.

Soient $p, m, n \in \mathbb{N}^*$ avec p premier. Soit $1 \leq h \leq m$ et supposons que $n \geq p^h$. Pour chaque $0 \leq i \leq n-1$, écrivons $n-p^{h-1}-i = p^{h-1}.(p-1)q_i+r_i$ avec $0 \leq r_i < p^{h-1}(p-1)$. Alors $b_o, b_1, \ldots, b_{n-1}$ étant des entiers relatifs vérifiant (4), on a

$$v_p(b_i) \geq q_i \quad , \quad \forall i \in \{0,1,\ldots,n-1\}.$$

Démonstration.

Elle se fait en raisonnant par récurrence sur n et comporte plusieurs étapes.

1. *Considérons le cas* $n = p^h$: (4) se réduit à la seule relation

$$\binom{p^m}{p^h} b_o = - \sum_{j=1}^{p^h-1} \binom{p^m}{j} b_{p^h-j} .$$

Selon le lemme 2.3.1, $v_p(\binom{p^m}{j}b_{p^h-j}) \geq m-v_p(j)$ pour $1 \leq j \leq p^h-1$ et par conséquent $\sum_{j=1}^{p^h-1} \binom{p^m}{j}b_{p^h-j}$ est au moins divisible par $p^{m-(h-1)}$: il s'ensuit que b_o est divisible par p ce qui est l'assertion proposée avec

$$i = 0, \quad q_o = 1, \quad r_o = 0.$$

Pour $i = 1,2,\dots,n-1$, l'assertion est triviale car elle signifie "1 divise b_i" ou "une puissance négative de p divise b_i".

2. *Supposons la prop 2.3.2. vraie jusqu'à* n *et étudions le rang* $n+1$. Autrement dit nous avons par hypothèse

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{p^m}{j}b_{k-j} = 0 \quad \text{pour} \quad p^h \leq k \leq n+1.$$

La division

$$n+1 - p^{h-1} - i = p^{h-1}(p-1)q_i + r_i, \quad 0 \leq r_i < p^{h-1}(p-1)$$

pour $0 \leq i \leq n$, s'écrit aussi

$$n - p^{h-1} - i = p^{h-1}(p-1)q_i + r_i - 1.$$

Ainsi pour tout $i \in \{0,1,\dots,n\}$ pour lequel $r_i \geq 1$, l'assertion est vraie puisqu'elle l'est pour n (hypothèse de récurrence). Il ne reste donc plus qu'à la vérifier pour ceux des i pour lesquels $r_i = 0$, i.e. ceux s'écrivant

$$i = n+1 - p^{h-1}(p-1)q - p^{h-1}$$

ou encore $(n+1 > p^h$ par hypothèse)

$$i = n+1 - p^{h-1}(p-1)(q-1) - p^h.$$

Autrement dit, il s'agit de montrer

<u>Lemme 2.3.3.</u>

$$v_p(b_{n+1-p^{h-1}(p-1)(q-1)-p^h}) \geq q .$$

<u>Preuve.</u>

Raisonnons par récurrence sur q : pour $q = 1$, montrons que $p \mid b_{n+1-p^h}$.

(4), pour $k = n+1$ et avec $\ell = \inf(p^m, n+1)$, s'écrit

$$-\binom{p^m}{p^h} b_{n+1-p^h} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p^h}}^{\ell} \binom{p^m}{j} b_{n+1-j}\,.$$

Comme $v_p(\binom{p^m}{j}) \geq m-h+1$ pour $1 \leq j < p^h$, il suffit de voir que pour $p^h < j \leq \ell$ on a $v_p(\binom{p^m}{j} b_{n+1-j}) \geq m-h+1$. L'hypothèse de récurrence sur n montre que $v_p(b_{n+1-j}) \geq q_j$ avec

$$n-p^{h-1} - (n+1-j) = p^{h-1}(p-1)q_j + r_j \quad , \quad 0 \leq r_j < p^{h-1}(p-1),$$

soit

$$j - p^{h-1} - 1 = p^{h-1}(p-1)q_j + r_j \quad , \quad 0 \leq r_j < p^{h-1}(p-1).$$

Puisque de toutes les façons

$$v_p(\binom{p^m}{j} b_{n+1-j}) \geq m - v_p(j) + q_j,$$

il suffit donc d'établir que

$$q_j \geq v_p(j) - h+1 \tag{5}$$

pour les j de $\{p^h+1, \ldots, \ell\}$ tels que $v_p(j) \geq h$: mais alors, en posant $j = p^{v_p(j)} . \alpha_j$, il vient clairement

$$j - p^{h-1}-1 = p^{v_p(j)} \alpha_j - p^{h-1}-1 \geq p^{v_p(j)} - p^{h-1}-1 = p^{h-1}(p-1)\left[1+p+\ldots+p^{v_p(j)-h}\right]-1$$

et par conséquent

$$q_j = \left[\frac{j-p^{h-1}-1}{p^{h-1}(p-1)}\right] \geq p+p^2+\ldots+p^{v_p(j)-h} \geq v_p(j)-h+1\,,$$

car $p \geq 2$.

Pour $q = 1$, le lemme 2.3.3 est démontré. Supposons maintenant que p^q divise $b_{n+1-p^{h-1}(p-1)(q-1)-p^h}$ et montrons que

$$v_p(b_{n+1-p^{h-1}(p-1)q-p^h}) \geq q+1.$$

En procédant de la même façon que pour $q = 1$, nous sommes amenés à considérer la relation

$$-\binom{p^m}{p^h} b_{n+1-p^{h-1}(p-1)q-p^h} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p^h}}^{\ell} \binom{p^m}{j} b_{n+1-p^{h-1}(p-1)q-j}$$

extraite de (4) pour $k = n+1-p^{h-1}(p-1)q$ et où $\ell = \inf(p^m,k)$. Il s'agit donc de voir que le second membre est divisible par $p^{m-h+1+q}$. Pour $j = p^{h-1}$, le terme correspondant s'écrit $\binom{p^m}{p^{h-1}} b_{n+1-p^{h-1}(p-1)(q-1)-p^h}$: il est divisible par $p^{m-h+1+q}$ à cause de l'hypothèse de récurrence sur q. Lorsque $j \in \{1,2,\ldots,\ell\} - \{p^{h-1},p^h\}$, l'hypothèse de récurrence sur n montre que chaque terme correspondant est divisible par $p^{m-v_p(j)+q_j}$ où

$$n-p^{h-1} - [n+1-p^{h-1}(p-1)q-j] = p^{h-1}(p-1)q_j + r_j \;, \quad 0 \leqslant r_j < p^{h-1}(p-1),$$

c'est-à-dire

$$j-p^{h-1}-1 = p^{h-1}(p-1)(q_j-q) + r_j \;, \quad 0 \leqslant r_j < p^{h-1}(p-1),$$

et il faut vérifier que $m - v_p(j) + q_j \geqslant m-h+q+1$ i.e. $q_j-q \geqslant v_p(j)-h+1$. Mais : pour $1 \leqslant j < p^{h-1}$ (resp. $p^{h-1} < j < p^h$) cela est trivial puisque $q_j-q = -1$ (resp. 0), et $v_p(j) \leqslant h-2$ (resp. h-1) ; pour $p^h < j \leqslant \ell$, il suffit de raisonner comme pour (5). Le lemme 2.3.3 est démontré et par conséquent la proposition 2.3.2 également.

<u>Proposition 2.3.4.</u>

Avec les mêmes hypothèses qu'en 2.3.2, écrivons $n-p^{h-1}+1 = p^{h-1}(p-1)q_h + r_h$ avec $0 \leqslant r_h < p^{h-1}(p-1)$. Soient $a_1,a_2,\ldots,a_{p^h-1}$ et $b_o,b_1,\ldots,b_{n-1}$ des entiers relatifs vérifiant (3) et (4), alors :

1. Lorsque $1 \leqslant i < r_h+p^{h-1}$, $v_p(a_i) \geqslant m-h+1+q_h$;
2. Lorsque $r_h + p^{h-1} \leqslant i \leqslant p^h-1$, $v_p(a_i) \geqslant m-h+q_h$.

<u>Démonstration.</u>

Soient $1 \leqslant i < p^h$ et $1 \leqslant j \leqslant i$, en écrivant

$$n-p^{h-1} - (i-j) = p^{h-1}(p-1)q_{i-j} + r_{i-j} \;, \quad 0 \leqslant r_{i-j} < p^{h-1}(p-1) \;,$$

la proposition 2.3.2 montre b_{i-j} est divisible par $p^{q_{i-j}}$. En remplaçant n par $p^{h-1}-1 + p^{h-1}(p-1)q_h + r_h$, cette division donne

$$j - p^{h-1}-1 = p^{h-1}(p-1)(q_{i-j}-q_h) + r_{i-j} - r_h + i - p^{h-1} \qquad (6)$$

pour $1 \leqslant i < p^h$ et $1 \leqslant j \leqslant i$. Considérons d'autre part la division

$$j - p^{h-1}-1 = p^{h-1}(p-1)q_j + r_j \quad , \quad 0 \leqslant r_j < p^{h-1}(p-1) \ ;$$

suivant un raisonnement éprouvé dans 2.3.3, nous savons que

$$q_j - v_p(j) + h-1 \geqslant 0$$

pourvu que $j \neq p^{h-1}$. [Ici $j \neq p^h$ car $1 \leqslant j \leqslant i < p^h$].

Nous allons comparer (6) à la division de j par $p^{h-1}(p-1)$.

1. *Supposons d'abord que* $-r_h+i-p^{h-1} < 0$, alors l'unicité de la division implique $q_{i-j}-q_h \geqslant q_j$, soit $q_{i-j} \geqslant q_h+q_j \geqslant q_h+v_p(j)-h+1$: ainsi, pour tout $1 \leqslant j \leqslant i$, sauf éventuellement pour $j = p^{h-1}$, $v_p(b_{i-j}) \geqslant q_h+v_p(j)-h+1$ et par conséquent $v_p(a_i) = v_p(\sum_{j=1}^{i} \binom{p^m}{j} b_{i-j}) \geqslant q_h+m-h+1$.
   Il nous reste à examiner le cas où $j = p^{h-1}$: (6) devient

$$r_h - i + p^{h-1}-1 = p^{h-1}(p-1)(q_{i-p^{h-1}}-q_h) + r_{i-p^{h-1}} ,$$

   et nous voulons montrer que $v_p(b_{i-p^{h-1}}) \geqslant q_h$, soit

$$q_{i-p^{h-1}} \geqslant q_h .$$

   Il en est bien ainsi, vue l'hypothèse $r_h - i + p^{h-1} > 0$.

2. *Plaçons-nous dans le cas* $r_h+p^{h-1} \leqslant i < p^h$; reprenons (6) et écrivons-là

$$j - p^{h-1}-1 = p^{h-1}(p-1)(q_{i-j}-q_h+1) + i - r_h - p^h$$

   pour tout $1 \leqslant j \leqslant i$. Le même raisonnement que ci-dessus implique

$$q_{i-j} \geqslant q_h-1+q_j \geqslant q_h+v_p(j)-h$$

   pour $1 \leqslant j \leqslant i$, sauf éventuellement pour $j = p^{h-1}$. En fait, c'est encore vrai pour $j = p^{h-1}$ ainsi que le lecteur pourra s'en convaincre aisément.
   Il s'ensuit que pour $r_h + p^{h-1} \leqslant i < p^h$, $\forall j \in \{1,2,\ldots,i\}$ b_{i-j} est

divisible par $p^{v_p(j)-h+q_h}$: autrement dit $v_p(a_i) \geq m-h+q_h$.

Proposition 2.3.5.

Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ avec p premier ; soit $1 \leq i \leq s = \inf(p^m-1,n)$. Appelons h l'entier tel que $p^{h-1} \leq i < p^h$ et posons $n-p^{h-1}+1 = p^{h-1}(p-1)q_h + r_h$ avec $0 \leq r_h < p^{h-1}(p-1)$.

Soient $(a_i^j)_{1\leq j\leq i}$ des entiers relatifs tels que

$$\sum_{j=1}^{i} a_i^j \, \sigma^j \equiv 0 \quad (\text{mod } I) ;$$

alors :

1. pour $p^{h-1} \leq i < r_h+p^{h-1}$, $v_p(a_i^j) \geq m-h+q_h+1$, $\forall j \in \{1,2,\ldots,i\}$;
2. pour $r_h+p^{h-1} \leq i < p^h$, $v_p(a_i^j) \geq m-h+q_h$, $\forall j \in \{1,2,\ldots,i\}$.

Démonstration.

Cette proposition se déduisant immédiatement de la précédente, il suffit seulement de la vérifier pour $1 \leq n < p$: l'hypothèse $\sum_{j=1}^{i} a_i^j\sigma^j \equiv 0$ (mod I), où $1 \leq i \leq n$, implique l'existence de $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ dans $\mathbb{Z}$ tels qu'en particulier

$$\sum_{j=1}^{i} \binom{p^m}{j} b_{i-j} = a_i ;$$

comme $1 \leq j \leq i \leq n < p$, on a $v_p(a_i) \geq m$: c'est précisément le résultat annoncé pour $h = 1$.

Théorème 2.3.6.

Soient $m,n,p \in \mathbb{N}^*$ *avec* p *premier. Pour tout entier* h *de* $\{1,2,\ldots,m\}$, *on pose* $n-p^{h-1}+1 = p^{h-1}(p-1)q_h + r_h$ *avec* $0 \leq r_h < p^{h-1}(p-1)$. *Alors :*

1. pour $n \geq p^{m-1}$, *on a*

$$\widetilde{KU}(L^n(p^m)) = \bigoplus_{h=1}^{m} (\mathbb{Z}_{p^{m-h+1+q_h}})^{r_h} \oplus (\mathbb{Z}_{p^{m-h+q_h}})^{p^{h-1}(p-1)-r_h} ;$$

2. pour $p^{\ell-1} \leq n < p^{\ell}$ *avec* $1 \leq \ell \leq m-1$, *on a*

$$\widetilde{KU}(L^n(p^m)) = \left[\bigoplus_{h=1}^{\ell-1} (\mathbb{Z}_{p^{m-h+q_h+1}})^{r_h} \oplus (\mathbb{Z}_{p^{m-h+q_h}})^{p^{h-1}(p-1)-r_h}\right] \oplus (\mathbb{Z}_{p^{m-\ell+1}})^{n-p^{\ell-1}+1} .$$

Démonstration.

Elle se fait en plusieurs étapes, mais précisons d'abord les notations : soit $i \in \{1,2,\ldots,s\}$ où $s = \inf(p^m-1,n)$, pour l'entier h tel que $p^{h-1} \leqslant i < p^h$ nous poserons

$$m_i = \begin{cases} m-h+1+q_h & \text{pour } p^{h-1} \leqslant i < r_h + p^{h-1}, \\ m-h+q_h & \text{pour } p^{h-1}+r_h \leqslant i < p^h . \end{cases} \tag{7}$$

1. $\tilde{KU}(L^n(p^m))$ étant un groupe abélien fini d'ordre p^{mn}, il existe, pour chaque $i \in \{1,2,\ldots,s\}$, des entiers $(a_i^j)_{1\leqslant j\leqslant i}$ tels que

$$\sum_{j=1}^{i} a_i^j \sigma^j = 0 \quad \text{et} \quad a_i^i \neq 0. \tag{8}$$

La prop. 2.3.5 montre qu'alors nécessairement $v_p(a_i^j) \geqslant m_i$ pour $1 \leqslant j \leqslant i$, et en particulier

$$v_p(a_i^i) = n_i \geqslant m_i .$$

Parmi toutes les familles d'entiers $(a_i^j)_{1\leqslant j\leqslant i}$ vérifiant (8), *choisissons* celle pour laquelle n_i est le plus petit possible, soit $(t_i^j)_{1\leqslant j\leqslant i}$.
La prop. 2.3.5 montre qu'il existe des entiers $(u_i^j)_{1\leqslant j\leqslant i}$ tels que

$$t_i^j = p^{m_i}.u_i^j \quad , \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,i\}.$$

Notons qu'en particulier

$$u_i^i = p^{n_i-m_i}.v_i .$$

Nous avons alors

$$p^{m_i} . \left(\sum_{j=1}^{i-1} u_i^j \sigma^j + p^{n_i-m_i} v_i \sigma^i\right) = 0$$

Posons

$$\boxed{x_i = \sum_{j=1}^{i-1} u_i^j \sigma^j + p^{n_i-m_i} v_i \sigma^i} \tag{9}$$

En faisant parcourir à i l'ensemble $\{1,2,\ldots,s\}$, nous obtenons ainsi une famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ d'éléments de $\tilde{KU}(L^n(p^m))$.

2. Soit G le sous-groupe de $\tilde{KU}(L^n(p^m))$ engendré par la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$. Chaque x_i engendre un sous-groupe G_i de G ; comme $p^{m_i}.x_i = 0$, G_i est un groupe cyclique d'ordre au plus égal à p^{m_i}. Supposons que $|G_i| = p^{\ell_i}$ avec $\ell_i < m_i$: nous aurions $p^{\ell_i}.x_i = 0$, soit avec (9)

$$\sum_{j=1}^{i-1} u_i^j p^{\ell_i} \sigma^j + v_i p^{n_i - m_i + \ell_i} \sigma^i = 0$$

avec $v_i \neq 0$. Vu le choix fait pour u_i^j, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, et v_i, nous devons avoir nécessairement $n_i - m_i + \ell_i \geqslant n_i$ c'est-à-dire $\ell_i \geqslant m_i$ ce qui contredit l'hypothèse $\ell_i < m_i$.

Autrement dit, $\forall i \in \{1,2,\dots,s\}$, G_i est un groupe cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}_{p^{m_i}}$.

3. Nous allons montrer que $G = \bigoplus_{i=1}^{s} G_i$. Supposons qu'il existe $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, tels que

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i = 0.$$

A l'aide de (9), nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \Big(\sum_{j=1}^{i-1} u_i^j \sigma^j + p^{n_i - m_i} v_i \sigma^i \Big) = 0.$$

C'est un polynôme, à coefficients entiers, de degré s, dont le coefficient dominant est

$$\lambda_s \, p^{n_s - m_s} \, v_s \,.$$

En posant $\lambda_s = p^{k_s}.\mu_s$ avec μ_s entier tel que $(\mu_s, p) = 1$, il vient

$$\lambda_s p^{n_s - m_s} v_s = p^{n_s - m_s + k_s} \mu_s v_s \,;$$

mais, étant donnée la construction de x_s, nous devons avoir

$$n_s - m_s + k_s \geqslant n_s$$

c'est-à-dire $k_s \geqslant m_s$ et par conséquent

$$\lambda_s \equiv 0 \pmod{p^{m_s}}.$$

Ainsi $\lambda_s x_s = 0$ et nous avons donc $\sum_{i=1}^{s-1} \lambda_i x_i = 0$; en raisonnant de la même manière il vient $\lambda_{s-1}x_{s-1} = 0$ et de proche en proche

$$\lambda_i \equiv 0 \pmod{p^{m_i}}\ ,\quad \forall i \in \{1,2,\dots,s\}.$$

Il s'ensuit que G est isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}_{p^{m_i}}$.

Mais, en utilisant (3), nous obtenons comme ordre du groupe G :

$$|G| = \prod_{i=1}^{s} p^{m_i} = p^{mn} = |\widetilde{KU}(L^n(p^m))| \quad ;$$

autrement dit G est isomorphe à $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ et le théorème se trouve entièrement démontré.

Remarques.

1. Dans la démonstration de ce théorème, nous avons mis en évidence la forme des générateurs (cf. (9)) des groupes cycliques composant $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$: le résultat obtenu montre qu'en fait $n_i = m_i$ et $v_p(v_i) = 0$. En particulier, avec $N = \inf(p-1,n)$, les N premiers groupes cycliques ont respectivement pour générateurs

$$x_1 = \sigma,\quad x_2 = \sigma^2,\dots,x_N = \sigma^N.$$

2. Pour $m = 1$ ou 2, nous retrouvons ainsi les résultats obtenus par T. Kambe [24], T. Kawaguchi et M. Sugawara [28], T. Kobayashi et M. Sugawara [34]. Le résultat pour m quelconque que nous avions annoncé dans [40], a également été obtenu par A. Chabour [13] par une méthode différente.

Nous allons maintenant donner des précisions sur l'ordre de σ et de ses puissances. Compte tenue de la première des remarques précédentes, il pourra éventuellement être supposé que $n \geq p$.

Proposition 2.3.7.

Dans $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$, on a :

1. pour tout $1 \leq i \leq n$, σ^i a pour ordre $p^{m+[\frac{n-i}{p-1}]}$

2. pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-p$

$$p^{m+[\frac{i}{p-1}]} \sigma^{n-p+1-i} = -p^{m-1+[\frac{i}{p-1}]} \sigma^{n-i} .$$

<u>Démonstration</u>.

Nous allons d'abord montrer que

$$p^{m+[\frac{i}{p-1}]} \sigma^{n-i} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1 \tag{10}$$

Considérons les deux relations fondamentales (1)

$$\sigma^{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad (\sigma+1)^{p^m} - 1 = 0 ;$$

en multipliant la seconde par σ^{n-1}, il vient trivialement $p^m.\sigma^n = 0$: c'est justement (10) pour $i = 0$. Supposons alors (10) établie jusqu'à $i-1$ et multiplions $(\sigma+1)^{p^m}-1 = 0$ par $p^{[\frac{i}{p-1}]} \sigma^{n-i-1}$, nous obtenons

$$p^{m+[\frac{i}{p-1}]} \sigma^{n-i} = - \sum_{k=2}^{p^m} \binom{p^m}{k} p^{[\frac{i}{p-1}]} \sigma^{n-i-1+k}$$

soit en fait

$$p^{m+[\frac{i}{p-1}]} \sigma^{n-i} = - \sum_{k=2}^{i+1} \binom{p^m}{k} p^{[\frac{i}{p-1}]} \sigma^{n-i-1+k} \tag{11}$$

Comme $0 \leqslant i+1-k \leqslant i-1$, l'hypothèse de récurrence assure que

$$p^{m+[\frac{i+1-k}{p-1}]} \sigma^{n-(i+1-k)} = 0.$$

Mais, $m - v_p(k) + [\frac{i}{p-1}] > m + [\frac{i+1-k}{p-1}]$ pour $2 \leqslant k \leqslant i+1$: en effet

$$[\frac{i}{p-1}] > v_p(k) + [\frac{i+1-k}{p-1}] \tag{12}$$

car $i+1-k \leqslant i+1-p^{v_p(k)} = i-(p-1)(1+p+\ldots+p^{v_p(k)-1})$, c'est-à-dire $i+1-k \leqslant i-(p-1)v_p(k)$, d'où $[\frac{i+1-k}{p-1}] \leqslant [\frac{i-(p-1)v_p(k)}{p-1}] = [\frac{i}{p-1}] - v_p(k)$. [Si $v_p(k) = 0$, (12) est triviale]. Ainsi le second membre de (11) est nul et donc (10) vraie.

Soit alors $0 \leqslant i \leqslant n-p$ et multiplions $(\sigma+1)^{p^m}-1$ par $p^{[\frac{i}{p-1}]}\sigma^{n-p-i}$, nous avons

$$p^{m+[\frac{i}{p-1}]}\sigma^{n-p-i+1} + \binom{p^m}{p} p^{[\frac{i}{p-1}]}\sigma^{n-i} = - \sum_{\substack{k=2 \\ k\neq p}}^{i+p} \binom{p^m}{k} p^{[\frac{i}{p-1}]}\sigma^{n-p-i+k} .$$

D'après (10), chaque terme du second membre est nul si

$$m - v_p(k) + [\frac{i}{p-1}] \geqslant m + [\frac{p+i-k}{p-1}] = m + 1 + [\frac{i+1-k}{p-1}] ,$$

ce qui est assurément le cas d'après (12). Il s'ensuit

$$p^{m+[\frac{i}{p-1}]}\sigma^{n-p-i+1} + \binom{p^m}{p} p^{[\frac{i}{p-1}]}\sigma^{n-i} = 0 \qquad (13)$$

La seconde assertion de la proposition découle clairement de (13), car d'une part $\binom{p^m}{p} = p^{m-1}\binom{p^m-1}{p-1}$ et d'autre part $\binom{p^m-1}{p-1} \equiv 1 \pmod p$ selon le résultat suivant .

Lemme 2.3.8. [38]

Soient a et b deux entiers, $\sum_i a_i p^i$ et $\sum_i b_i p^i$ leurs extensions p-adiques respectives, alors

$$\binom{a}{b} \equiv \prod_i \binom{a_i}{b_i} \quad (\mathrm{mod}\ p).$$

Vue (10), la seule chose qui reste à prouver est que $p^{m+[\frac{i}{p-1}]}$ est exactement l'ordre de σ^{n-i} : d'après ce que nous venons d'établir, il suffit de le vérifier pour $i = n-1$. Avec $n = (p-1)q_1+r_1$, $0 \leqslant r_1 < p-1$, le théorème 2.3.6 montre que σ a pour ordre p^{m_1} où $m_1 = m-1+q_1$ ou $m+q_1$ selon que $r_1 = 0$ ou non, autrement dit σ a bien pour ordre $p^{m+[\frac{n-1}{p-1}]}$.

Pour $p = 2$, nous étudierons plus en détail la structure de $\widetilde{KU}(L^n(p^m))$ - (voir chapitre 4).

2.4. *Cohomologie des espaces lenticulaires tronqués.*

Nous appelons *espace lenticulaire tronqué d'ordre* p tout quotient d'un espace lenticulaire $L^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)$ par l'un de ses squelettes de dimension impaire $2k+1$ où $k \neq n$; un tel espace sera noté $L_k^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)$.

Proposition 2.4.1.

$$H^i(L_k^n(p\ ;\ p_o,p_1,\dots,p_n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } i = 0,\ 2k+2,\ 2n+1 \\ \mathbb{Z}_p & \text{pour } i = 2k+4,\ 2k+6,\dots,2n, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Démonstration.

Il suffit de la faire pour les espaces lenticulaires ordinaires. L'inclusion canonique $L^k(p) \hookrightarrow L^n(p)$ induit les isomorphismes :

$$H^i(L^n(p),\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^i(L^k(p),\mathbb{Z}) \quad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant 2k \tag{1}$$

Pour le voir il suffit de le vérifier pour $k = n-1$ et de composer les différents isomorphismes ainsi obtenus. Dans ces conditions la suite exacte de Puppe pour la paire $(L^n(p),L^k(p))$ donne immédiatement

$$\tilde{H}^i(L_k^n(p),\mathbb{Z}) = 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant 2k+1,$$
$$\tilde{H}^i(L_k^n(p),\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^i(L^n(p),\mathbb{Z}) \quad \text{pour } i > 2k+2.$$

D'autre part, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} L^k(p) & \overset{h}{\hookrightarrow} & L_o^{k+1}(p) & \xrightarrow{g} & L_o^{k+1}(p)|L^k(p) \simeq S^{2k+2} \\ \| & & \downarrow u & & \downarrow \alpha \\ L^k(p) & \overset{i}{\hookrightarrow} & L^n(p) & \xrightarrow{j} & L^n(p)|L^k(p) = L_k^n(p) \end{array} \tag{2}$$

où α est définie par $\alpha([z]) = j\ u(z)$ pour tout $[z] \in L_o^{k+1}(p)$, induit en cohomologie le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & H^{2k+1}(L^k(p),\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\partial} & H^{2k+2}(L_k^n(p),\mathbb{Z}) & \to & H^{2k+2}(L^n(p),\mathbb{Z}) & \to 0 \\ & \| & & \downarrow \alpha^* & & \downarrow u^* & \\ 0 \to & H^{2k+1}(L^k(p),\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\partial} & H^{2k+2}(S^{2k+2},\mathbb{Z}) & \to & H^{2k+2}(L_o^{k+1}(p),\mathbb{Z}) & \to 0 \end{array}$$

aux lignes exactes. u^* étant le composé des deux isomorphismes

$$H^{2k+2}(L^n(p),\mathbb{Z}) \to H^{2k+2}(L^{k+1}(p),\mathbb{Z}) \to H^{2k+2}(L_o^{k+1}(p),\mathbb{Z})$$

(le premier résulte de (1)), le lemme des cinq montre que α^* est un isomorphisme, d'où le résultat.

Nous allons maintenant nous intéresser à la $\widetilde{KU}$-théorie de ces espaces ; là-aussi, il nous suffira de ne considérer que les espaces lenticulaires ordinaires (prop 2.2.1 (2) et th. 2.2.4).

Proposition 2.4.2.

Soit $f^!$ l'homomorphisme $\widetilde{KU}(L^n(p)) \to \widetilde{KU}(L^{k+1}(p))$ induit par l'inclusion canonique f de $L^{k+1}(p)$ dans $L^n(p)$, alors pour tout p (non nécessairement premier)

$$\widetilde{KU}(L_k^n(p)) \simeq \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Ker} f^!$$

Démonstration.

Dans le diagramme (2), il est facile de voir que α est en fait l'inclusion canonique de L_o^{k+1}/L^k dans L^n/L^k (on oublie p car il n'y a aucune ambiguité). Alors, en écrivant les suites exactes associées aux inclusions de (2), on obtient le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \\
 & & & \widetilde{KU}^{-1}(S^{2k+2}) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{KU}^{-1}(L_o^{k+1}) \arrow[d] & & \\
 & & & \widetilde{KU}(L^n/L_o^{k+1}) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \widetilde{KU}(L^n/L_o^{k+1}) \arrow[d] & & \\
 & & \widetilde{KU}^{-1}(L^k) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & \widetilde{KU}(L_k^n) \arrow[r, "j^!"] \arrow[d, "\alpha^!"] & \widetilde{KU}(L^n) \arrow[r, "i^!"] \arrow[d, "u^!"] & \widetilde{KU}(L^k) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widetilde{KU}^1(L_k^n) \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & \widetilde{KU}^{-1}(L_o^{k+1}) \arrow[r] & \widetilde{KU}^{-1}(L^k) \arrow[r, "\delta"] & \widetilde{KU}(S^{2k+2}) \arrow[r, "g^!"] \arrow[d] & \widetilde{KU}(L_o^{k+1}) \arrow[r, "h^!"] \arrow[d] & \widetilde{KU}(L^k) \arrow[r] & \widetilde{KU}^1(S^{2k+2}) \\
 & & & \vdots & \vdots & &
\end{tikzcd}$$

dont tous les carrés commutent et les lignes et colonnes sont exactes. Les inclusions i,h et u induisant des épimorphismes en cohomologie (cf. prop 2.4.1) et les suites spectrales d'Atiyah-Hirzebruch pour L^n, L^k et L_o^{k+1} étant triviales, $i^!$, $h^!$ et $u^!$ sont des épimorphismes (pour $h^!$ c'était évident) d'après la prop. 1.4.6. D'autre part, on sait que $\tilde{KU}^{-1}(L_o^{k+1}) = 0$, $\tilde{KU}^{-1}(L^k) \simeq \mathbb{Z}$ (prop. 2.2.1). δ est un monomorphisme donc ∂ aussi, il s'ensuit que $\alpha^!$ est un épimorphisme (lemme des cinq). Nous en déduisons la suite exacte suivante

$$0 \to \operatorname{Ker} u^! \to \tilde{KU}(L_k^n) \xrightarrow{\alpha^!} \mathbb{Z} \to 0$$

qui est *scindée* puisque Ker $u^!$ est un groupe fini d'ordre p^{n-k-1} (prop.2.2.1) C'est le résultat recherché puisque Ker $u^! \simeq$ Ker $f^!$ par $\tilde{KU}(L^{k+1}) \xrightarrow{\sim} \tilde{KU}(L_o^{k+1})$

Théorème 2.4.3.

Soient $k, m, n, p \in \mathbb{N}^*$ *avec* p *premier et* $n > k$; *posons* $t = \inf(p^m-1, k+1)$ $s = \inf(p^m-1, n)$. *Soient* $(m_i)_{1\leq i\leq s}$ *(resp.* $(m_i^!)_{1\leq i\leq t}$*) les entiers associés à* $L^n(p^m)$*)* *(resp.* $L^{k+1}(p^m)$*) par la relation (7) du th. 2.3.6. Alors*

$$\tilde{KU}(L_k^n(p^m)) \simeq \mathbb{Z} \oplus (\bigoplus_{i=1}^{s} G_i)$$

où, pour $1 \leq i \leq t$ *(resp.* $t < i \leq s$*),* G_i *est un groupe cyclique d'ordre* $p^{m_i-m_i^!}$ *(resp.* p^{m_i}*) engendré par* $p^{m_i^!}x_i$ *(resp.* x_i*), avec* $(x_i)_{1\leq i\leq s}$ *des générateurs du groupe* $\tilde{KU}(L^n(p^m))$*. (th. 2.3.6 (9)).*

Cela découle immédiatement de la proposition précédente.

Exemples.

1. $\tilde{KU}(L_3^7(3)) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_3$ où $\mathbb{Z}_9$ et $\mathbb{Z}_3$ sont respectivement engendrés par 9σ et $3\sigma^2$. De même $\tilde{KU}(L_1^3(4))$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.
2. Moyennant le th. 2.2.5, il va de soi que le théorème précédent permet de calculer la $\tilde{KU}$-théorie des espaces lenticulaires tronqués d'ordre p *quelconque*.

Ainsi pour $\tilde{KU}(L_2^5(6))$ nous avons :

$$\tilde{KU}(L_2^5(6)) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3,$$

où chacun des groupes cycliques finis est respectivement engendré par

$$8[(\sigma+1)^3-1], \quad 9[(\sigma+1)^2-1], \quad 3[(\sigma+1)^2-1]^2 .$$

<u>Remarque</u>.

Le théorème précédent donne en particulier la K-théorie complexe des espaces projectifs réels tronqués (cf. [1], p. 622) de dimension impaire.

CHAPITRE III

K-THEORIE REELLE DES ESPACES LENTICULAIRES

3.1. *Préliminaires.*

Soit X un espace compact sur lequel un groupe fini G opère : on désigne par r (resp. c) le morphisme de réalification $KU_G(X) \to KO_G(X)$ (resp. de complexification $KO_G(X) \to KU_G(X)$) qui à tout G-fibré vectoriel complexe (resp. réel) de rang m et de base X associe le G-fibré vectoriel réel de rang $2m$ qui lui est sous-jacent (resp. sa structure naturelle de m-fibré complexe) ; par t l'involution de $KU_G(X)$ qui à tout G-fibré complexe associe son conjugué. Lorsque G opère librement sur X, les morphismes r, c et t sont susceptibles d'interprétations analogues en termes de représentations (cf. § 1.4. p. 22 et prop. 1.2.3).

D'après R. Bott [9], ces morphismes sont tels que

- $rc = 2$ et $cr = 1 + t$,
- c et t sont des homomorphismes fonctoriels d'anneaux, r est un homomorphisme fonctoriel de groupes.

En utilisant l'isomorphisme canonique $\Psi : KU(L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n)) \xrightarrow{\sim} KU(L^n(p))$ (th. 2.2.4), il ressort des définitions et propriétés précédentes que Ψ induit un isomorphisme canonique de $KO(L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n))$ sur $KO(L^n(p))$ (pour tout $p > 1$) : cela résulte de la prop. 1.2.3. (2) qui classifie les représentations réelles de $\mathbb{Z}_p$.

D'un autre côté le théorème 1.4.5 montre que la $\widetilde{KO}$-théorie des espaces lenticulaires d'ordre p quelconque se ramène à celle des espaces lenticulaires d'ordre p^m où p premier.

Moyennant le résultat suivant que nous admettrons pour l'instant (voir prop. 3.2.3).

Proposition 3.1.1.

Pour p impair :

$$\widetilde{KO}(L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \widetilde{KO}(L_o^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n)) & \text{si } n \equiv 0 \pmod 4 \\ \widetilde{KO}(L_o^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n)) & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

nous pouvons donc énoncer

Théorème 3.1.2.

1. *Pour tout* $(p;p_o,p_1,\dots,p_n)$ *(p non nécessairement premier),* $\widetilde{KO}(L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n))$ *est canoniquement isomorphe à* $\widetilde{KO}(L^n(p))$.

2. *Soit* $p = \prod_{i=1}^{s} p_i^{r_i}$ *la décomposition en facteurs premiers de* p, *alors*

   (i) *pour* $n \not\equiv 0 \pmod 4$: $\widetilde{KO}(L^n(p)) \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} \widetilde{KO}(L^n(p_i^{r_i}))$,

   (ii) *pour* $n \equiv 0 \pmod 4$:

$$\widetilde{KO}(L^n(p)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{s} \widetilde{KO}(L_o^n(p_i^{r_i}))\right] & \text{pour } p \text{ impair,} \\ \widetilde{KO}(L^n(2^{r_1})) \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{s} \widetilde{KO}(L_o^n(p_i^{r_i}))\right] & \text{pour } p \text{ pair avec } p_1 = 2. \end{cases}$$

Nous allons maintenant (en conservant les notations du chapitre II) nous intéresser à certains éléments de $\widetilde{KU}(L^n(p))$ et $\widetilde{KO}(L^n(p))$. Tout d'abord, μ étant le fibré canonique complexe de rang 1 de base $P^n(\mathbb{C})$, nous allons rappeler le lien qui existe entre μ et $\xi = S^{2n+1} \times_\lambda \mathbb{C} \to L^n(p)$ le fibré complexe de rang 1 associé par la représentation naturelle $\lambda : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}^*$ au revêtement universel $S^{2n+1} \to L^n(p)$. Soient f,g et Π les projections canoniques suivantes

$$\begin{tikzcd} & L^n(p) \arrow[d, "\Pi"] \\ S^{2n+1} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & p^n(C) \end{tikzcd}$$

il est clair que $\Pi f = g$; appelons E l'espace total de μ et $\Pi^* E$ celui de son fibré image réciproque $\Pi^*\mu$, alors

<u>Lemme</u> 3.1.3.

Les fibrés ξ et $\Pi^*\mu$ sont isomorphes.

<u>Preuve</u>.

Un élément $(\overline{z,a})$ de $S^{2n+1} \underset{\lambda}{\times} \mathbb{C}$ est la classe d'équivalence de $(z,a) \in S^{2n+1} \times \mathbb{C}$ modulo la relation d'équivalence $\mathcal{R}$

$$((z,a)\mathcal{R}(z',a')) \iff (\exists\ \bar{k} \in Z_p \text{ tel que } z' = \zeta^k.z \text{ et } a' = a.\zeta^{-k}),$$

en considérant $S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z| = 1\}$. Considérons l'application

$$\Omega : S^{2n+1} \underset{\lambda}{\times} \mathbb{C} \to \Pi^* E$$

définie par

$$\Omega[(\overline{z,a})] = [f(z),(g(z),az)], \quad \forall\ z \in S^{2n+1}, \ \forall\ a \in \mathbb{C}.$$

En fait Ω est un morphisme de ξ dans $\Pi^*\mu$ car d'une part le diagramme

$$\begin{tikzcd} S^{2n+1} \underset{\lambda}{\times} \mathbb{C} \arrow[rr, "\Omega"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \Pi^* E \arrow[dl, "\beta"] \\ & L^n(p) & \end{tikzcd}$$

où $\alpha[(\overline{z,a})] = f(z)$, $\beta[f(z),(g(z),z')] = f(z)$ avec $z \in S^{2n+1}$, $z' \in g(z)$, $a \in \mathbb{C}$, est commutatif, et d'autre part Ω est clairement linéaire sur les fibres. Mieux Ω est l'isomorphisme annoncé. En effet c'est un monomorphisme puisque :

$$(\Omega[(\overline{z,a})] = \Omega[(\overline{y,b})]) \implies (f(z) = f(y),\ g(z) = g(y) \text{ et } az = by)$$

i.e.

$$(\Omega[(\overline{z,a})] = \Omega[(\overline{y,b})]) \implies (\exists\ \bar{k} \in \mathbb{Z}_p \text{ tel que } y = \zeta^k z \text{ et } a = b\zeta^k),$$

la dernière assertion équivaut à $(\overline{z,a}) = (\overline{y,b})$.

Soit maintenant $[f(z), (g(z),z')] \in \Pi^*E$: comme $z' \in g(z)$, il existe $a \in \mathbb{C}^*$ de norme 1 tel que $z' = az$; il vient clairement

$$\Omega[\overline{(z,a)}] = [f(z),(g(z),z')],$$

autrement dit Ω est un épimorphisme, ce qui termine la preuve.

Proposition 3.1.4.

L'homomorphisme $c : \widetilde{KO}(L^n(p)) \to \widetilde{KU}(L^n(p))$ est tel que

$$cr(\sigma) = \frac{\sigma^2}{1+\sigma} .$$

Preuve.

Soit $\varepsilon = \mu - 1 \in \widetilde{KU}(P^n(C))$, le ℓ. 3.1.3 nous donne $cr(\sigma) = (1+t)(\sigma) = \sigma + \Pi^* t(\varepsilon)$. On sait [44] que la classe totale de Chern du fibré μ est $\underline{c}(\mu) = 1+a$ où a est un générateur de $H^2(P^n(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$; il en découle $\underline{c}(\mu \otimes t(\mu)) = (1+a)(1-a) = 1$. Les fibrés complexes de rang 1 étant classifiés par leur première classe de Chern, il vient $\mu.t(\mu) = 1$; il s'ensuit $1 + t(\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \varepsilon^i$, ce qui implique

$$cr(\sigma) = \sigma + \Pi^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \varepsilon^i\right) = \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \sigma^i = \frac{\sigma^2}{1+\sigma} .$$

Dans le cas où p *est pair*, soit $p = 2q$, $H^1(L^n(p),\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ (cor. 2.1.3) : il existe donc un fibré réel de rang 1 de base $L^n(p)$ non trivial (sa première classe de Stiefel-Whitney est considérée comme générateur de $\mathbb{Z}_2$) ; appelons κ sa classe stable dans $\widetilde{KO}(L^n(p))$, alors, en procédant comme ci-dessus, on obtient ([34], p. 258) :

$$c(\kappa) = \xi^q - 1 = (\sigma+1)^q - 1 \qquad (1).$$

3.2. *Calcul de* $\widetilde{KO}^i(L^n(p))$ *pour* p *impair.*

La suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch

$$E_2^{i,j} = \widetilde{H}^i(L^n(p),\widetilde{KO}^{+j}(S^o)) \Longrightarrow \widetilde{KO}^{i+j}(L^n(p)),$$

p étant impair, vérifie les conditions de la prop. 1.4.2 ; il s'ensuit

$$\widetilde{KO}^{2s+1}(L^n(p)) = H^{2n+1}(L^n(p),\widetilde{KO}^{2(s-n)}(S^o)),$$

$$G_*[\widetilde{KO}^{4s}(L^n(p))] = (\mathbb{Z}_p)^{[\frac{n}{2}]} \oplus H^{2n+1}(L^n(p),\widetilde{KO}^{4s-(2n+1)}(S^o)),$$

$$G_*[\widetilde{KO}^{4s+2}(L^n(p))]=(\mathbb{Z}_p)^{[\frac{n+1}{2}]} \oplus H^{2n+1}(L^n(p),\widetilde{KO}^{4s-2n+1}(S^o)).$$

Autrement dit

<u>Proposition</u> 3.2.1.

Pour p impair non nécessairement premier

1. $\widetilde{KO}^{2s+1}(L^n(p)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } s-n \text{ pair,} \\ 0 & \text{pour } s-n \equiv 1 \pmod 4, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{pour } s-n \equiv 3 \pmod 4 \text{ ;} \end{cases}$

2. Si s est pair, le groupe $\widetilde{KO}^{2s}(L^n(p))$ a pour ordre $2.p^{[\frac{n}{2}]}$ quand $s-n \equiv 0 \pmod 4$, $p^{[\frac{n}{2}]}$ quand $s-n \not\equiv 0 \pmod 4$;

3. Si s est impair, le groupe $\widetilde{KO}^{2s}(L^n(p))$ a pour ordre $2.p^{[\frac{n+1}{2}]}$ quand $s-n \equiv 0 \pmod 4$, $p^{[\frac{n+1}{2}]}$ quand $s-n \not\equiv 0 \pmod 4$.

De la même manière, en utilisant la proposition 1.4.3, on obtient

<u>Proposition</u> 3.2.2.

Pour p impair $\widetilde{KO}^{2s+1}(L_o^n(p)) = 0$ et, selon que s est pair ou impair, le groupe $\widetilde{KO}^{2s}(L_o^n(p))$ a pour ordre $p^{[\frac{n}{2}]}$ ou $p^{[\frac{n+1}{2}]}$.

Soient i l'inclusion canonique de $L_o^n(p)$ dans $L^n(p)$ et j la projection canonique de $L^n(p)$ sur $L^n(p)/L_o^n(p)$ qui est homéomorphe à S^{2n+1} ; elles induisent les homomorphismes

$$i^! : \widetilde{KO}^{2s}(L^n(p)) \to \widetilde{KO}^{2s}(L_o^n(p)), \quad j^! : \widetilde{KO}^{2s}(S^{2n+1}) \to \widetilde{KO}^{2s}(L^n(p)).$$

<u>Proposition</u> 3.2.3.

Pour tout p impair

1. $i^!$ est un isomorphisme d'anneaux lorsque $s - n \not\equiv 0 \pmod 4$;
2. $j^!$ possède une rétraction $\tilde{j}$ lorsque $s - n \equiv 0 \pmod 4$ et alors l'homomorphisme

$$\tilde{i} = (\tilde{j}, i^!) : \widetilde{KO}^{2s}(L^n(p)) \to \mathbb{Z}_2 \oplus \widetilde{KO}^{2s}(L^n_o(p))$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration.

En appliquant la suite exacte de Puppe à la paire $(L^n(p), L^n_o(p))$, on obtient

$$\begin{array}{l} \cdots \to \widetilde{KO}^{2s-1}(L^n_o(p)) \to \widetilde{KO}^{2s}(S^{2n+1}) \xrightarrow{j^!} \widetilde{KO}^{2s}(L^n(p)) \xrightarrow{i^!} \widetilde{KO}^{2s}(L^n_o(p)) \\ \hspace{25em} \downarrow \partial \\ \hspace{19em} \cdots \longleftarrow \widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n+1}) \end{array}$$

avec $\widetilde{KO}^{2s-1}(L^n_o(p)) = 0$ (prop. 3.2.2). Lorsque $s - n \not\equiv 0 \pmod 4$, $\widetilde{KO}^{2s}(S^{2n+1}) = 0$ et $i^!$ est un monomorphisme donc un isomorphisme puisque les groupes $\widetilde{KO}^{2s}(L^n(p))$ et $\widetilde{KO}^{2s}(L^n_o(p))$ ont même ordre.
Lorsque $s - n \equiv 0 \pmod 4$, nous avons $\widetilde{KO}^{2s}(S^{2n+1}) = \mathbb{Z}_2$ et $\widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n+1}) = \mathbb{Z}$: ∂ est alors nécessairement nul puisque $\widetilde{KO}^{2s}(L^n_o(p))$ est un groupe fini. Il s'ensuit la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{j^!} \widetilde{KO}^{2s}(L^n(p)) \xrightarrow{i^!} \widetilde{KO}^{2s}(L^n_o(p)) \longrightarrow 0 \ ;$$

si s est pair $\widetilde{KO}^{2s}(L^n(p))$ et $\widetilde{KO}^{2s}(L^n_o(p))$ ont respectivement pour ordre $2p^{[\frac{n}{2}]}$ et $p^{[\frac{n}{2}]}$: p étant impair, cette suite est *scindée*. Même conclusion pour s impair.

Proposition 3.2.4.

Pour p impair, les homomorphismes de Bott

$$r : \widetilde{KU}^{2s}(L^n_o(p)) \longrightarrow \widetilde{KO}^{2s}(L^n_o(p)), \quad c : \widetilde{KO}^{2s}(L^n_o(p)) \longrightarrow \widetilde{KU}^{2s}(L^n_o(p))$$

sont respectivement surjectif et injectif.

Preuve.

Dans l'énoncé ci-dessus il va de soi que r et c sont définis au rang 2s au moyen de la périodicité de Bott. Dans $\widetilde{KO}^{2s}(L_o^n(p))$, le morphisme rc est la multiplication par 2 : comme $\widetilde{KO}^{2s}(L_o^n(p))$ n'a que de la p-torsion (prop. 3.3.2) où p impair, rc est un isomorphisme. Il s'ensuit trivialement le résultat annoncé.

Théorème 3.2.5.

Soient m, n, p $\in \mathbb{N}^*$ *avec* $p \neq 2$ *et premier. Pour tout entier* h *de* $\{1,2,\ldots,m\}$, *on pose* $n - p^{h-1} + 1 = p^{h-1}(p-1)q_h + r_h$ *avec* $0 \leq r_h < p^{h-1}(p-1)$. *Alors avec* $p = 2q+1$ *et* $G_o = \mathbb{Z}_2$ *ou* 0 *selon que* $n \equiv 0$ *ou* $n \not\equiv 0$ (mod 4) :

1. *pour* $n \geq p^{m-1}$, *on a*

$$\widetilde{KO}(L^n(p^m)) = G_o \oplus \left[\bigoplus_{h=1}^{m} (\mathbb{Z}_{p^{m-h+1+q_h}})^{\left[\frac{r_h}{2}\right]} \oplus (\mathbb{Z}_{p^{m-h+q_h}})^{p^{h-1}.q - \left[\frac{r_h}{2}\right]}\right] ;$$

2. *pour* $p^{\ell-1} \leq n < p^{\ell}$ *avec* $1 \leq \ell \leq m-1$, *on a*

$$\widetilde{KO}(L^n(p^m)) = G_o \oplus \left[\bigoplus_{h=1}^{\ell-1} (\mathbb{Z}_{p^{m-h+1+q_h}})^{\left[\frac{r_h}{2}\right]} \oplus (\mathbb{Z}_{p^{m-h+q_h}})^{p^{h-1}.q-\left[\frac{r_h}{2}\right]}\right]$$
$$\oplus (\mathbb{Z}_{p^{m-\ell+1}})^{\left[\frac{n}{2}\right] - \frac{p^{\ell-1}-1}{2}} .$$

Démonstration.

Dans la démonstration du théorème 2.3.6, nous avions vu que les groupes cycliques composant $\widetilde{KU}(L^n(p^m)) \xrightarrow{\sim} \widetilde{KU}(L_o^n(p^m))$ étaient respectivement engendrés par

$$x_i = \sum_{j=1}^{i-1} u_i^j \sigma^j + p^{n_i - m_i} v_i \sigma^i$$

avec $1 \leq i \leq s = \inf(p^m - 1, n)$. Considérons dans $\widetilde{KO}(L_o^n(p^m))$, les éléments

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} u_{2i}^j (r\sigma)^j + p^{n_{2i}-m_{2i}} v_{2i}(r\sigma)^i$$

pour $1 \leqslant i \leqslant [\frac{s}{2}] = \inf(\frac{p^m-1}{2}, [\frac{n}{2}])$. Avec l'homomorphisme d'anneaux c nous obtenons

$$c(y_i) = \sum_{j=1}^{i-1} u_{2i}^j \frac{\sigma^{2j}}{(1+\sigma)^j} + p^{n_{2i}-m_{2i}} v_{2i} \frac{\sigma^{2i}}{(1+\sigma)^i} \quad \text{(prop. 3.1.4)},$$

soit encore

$$c(y_i) = \frac{1}{(1+\sigma)^i} \left[\sum_{j=1}^{i-1} u_{2i}^j \sigma^{2j} (1+\sigma)^{i-j} + p^{n_{2i}-m_{2i}} v_{2i} \sigma^{2i} \right].$$

Alors, la prop. 2.3.5 et la construction des x_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, qui engendrent $\widetilde{KU}(L_o^n(p^m))$, montrent que

$$p^{m_{2i}} c(y_i) = 0 \quad , \quad \forall\, i \in \{1,2,\ldots,[\tfrac{s}{2}]\} \quad ;$$

comme c est injectif (prop. 3.2.4), il s'ensuit

$$p^{m_{2i}} c(y_i) = 0 \quad , \quad \forall\, i \in \{1,2,\ldots,[\tfrac{s}{2}]\} \quad .$$

Soient $\hat{G}$ le sous-groupe de $\widetilde{KO}(L_o^n(p))$ engendré par $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant [\frac{s}{2}]}$, $\hat{G}_i$ les sous-groupes cycliques respectivement engendrés par y_i : en raisonnant comme dans le th. 2.3.6, on a

$$\hat{G} = \bigoplus_{i=1}^{[\frac{s}{2}]} \hat{G}_i .$$

Alors, en posant $p-1 = 2q$, il est facile de vérifier que

$$|\hat{G}| = \prod_{i=1}^{[\frac{s}{2}]} |\hat{G}_i| = p^{m[\frac{n}{2}]} = |\widetilde{KO}(L_o^n(p))| \ ;$$

autrement dit $\hat{G} \simeq \widetilde{KO}(L_o^n(p))$ et le résultat en découle clairement puisque (prop. 3.2.3) $\widetilde{KO}(L^n(p)) \simeq G_o \oplus \widetilde{KO}(L_o^n(p))$.

Remarques.

1. Vue la remarque 1 qui suit le th. 2.3.6, il est clair qu'avec $\hat{N} = \inf(q, [\frac{n}{2}])$ les $\hat{N}$ premiers groupes cycliques de $\widetilde{KO}(L_o^n(p^m))$ ont respectivement pour générateurs

$$y_1 = r\sigma, \quad y_2 = (r\sigma)^2, \ldots, y_{\hat{N}} = (r\sigma)^{\hat{N}}.$$

Pour $m = 1$, le résultat précédent et cette description des générateurs coïncident avec ceux de T. Kambe [24].

2. On rappelle que toutes les propositions de ce paragraphe valent aussi pour les espaces lenticulaires généralisés (d'ordre impair).

Concernant le comportement des puissances de $r\sigma$ dans $\widetilde{KO}(L^n(p^m))$, les prop. 2.3.7 et 3.2.4 nous donnent

Proposition 3.2.6.

Pour $p \neq 2$ et premier, on a dans $\widetilde{KO}(L^n(p^m))$

1. pour tout $1 \leqslant i \leqslant [\frac{n}{2}]$, $(r\sigma)^i$ a pour ordre $p^{m+[\frac{n-2i}{p-1}]}$;

2. $(r\sigma)^{[\frac{n}{2}]+1} = 0$.

Pour terminer ce paragraphe, nous allons montrer comment les résultats précédents permettent de *connaître tous les groupes* $\widetilde{KO}^i(L^n(p))$ *pour* p *impair* : moyennant 3.1.2, 3.2.1 et 3.2.5, il ne nous reste plus qu'à calculer les groupes

$$\widetilde{KO}^2(L^n(p)), \ \widetilde{KO}^4(L^n(p)), \ \widetilde{KO}^6(L^n(p)).$$

Lemme 3.2.7.

Pour p impair :

1. pour tout n et i impair, $\widetilde{KO}^i(L_o^n(p)/L_o^{n-1}(p)) = 0$;

2. pour i pair, soit $i = 2s$

$$\widetilde{KO}^{2s}(L_o^n(p)/L_o^{n-1}(p)) = \begin{cases} 0 & \text{si } s-n \text{ est impair,} \\ \mathbb{Z}_p & \text{si } s-n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Preuve.

Nous savons que L_o^n/L_o^{n-1} (en oubliant d'écrire p...) est homéomorphe à $S^{2n-1} \bigcup_\phi e^{2n}$ où l'application d'attachement cellulaire $\phi : S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ est de degré p. Pour la paire $(S^{2n-1} \bigcup_\Phi e^{2n}, S^{2n-1})$ nous avons la suite exacte longue

$$\ldots \to \widetilde{KO}^{i-1}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\partial} \widetilde{KO}^{i}(S^{2n}) \to \widetilde{KO}^{i}(S^{2n-1} \bigcup_\phi e^{2n}) \to \widetilde{KO}^{i}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\partial} \widetilde{KO}^{i+1}(S^{2n}) \to \ldots$$

Soient $\phi^!$ l'homomorphisme induit par ϕ et $S^!$ l'homomorphisme de suspension induit par $S : S^{2n-1} \to S^{2n}$, alors $\partial = S^!\phi^!$ est la multiplication par p. Dans le cas $i = 2s + 1$, la suite précédente donne les suites exactes

$$0 \to \widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n-1} \bigcup_\phi e^{2n}) \to 0 \quad \text{pour} \quad s - n \equiv 0 \pmod 4,$$

$$0 \to \widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n-1} \bigcup_\phi e^{2n}) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \quad \text{pour} \quad s - n \equiv 1 \pmod 4,$$

$$0 \to \widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n-1} \bigcup_\phi e^{2n}) \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}_2 \quad \text{pour} \quad s - n \equiv 2 \pmod 4,$$

$$\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}_2 \to \widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n-1} \bigcup_\phi e^{2n}) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \quad \text{pour} \quad s - n \equiv 3 \pmod 4 \; ;$$

comme la multiplication par p impair dans $\mathbb{Z}_2$ (resp. dans $\mathbb{Z}$) est l'identité (resp. un monomorphisme), il est clair que $\widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n-1} \bigcup_\phi e^{2n}) = 0$. Dans le cas $i = 2s$, on procède de la même manière.

Théorème 3.2.8.

Pour tout p *impair :*

1. *pour tout* n, $\widetilde{KO}^{4s}(L_o^n(p))$ *est isomorphe à* $\widetilde{KO}^o(L_o^n(p))$;
2. *suivant que* n *est pair ou impair,* $\widetilde{KO}^{4s+2}(L_o^n(p))$ *est respectivement isomorphe à* $\widetilde{KO}^o(L_o^n(p))$ *ou* $\widetilde{KO}^o(L_o^{n+1}(p))$.

Démonstration.

Considérons l'homomorphisme (de groupes)

$$r\beta c : \tilde{KO}^{2s}(L_o^n(p)) \longrightarrow \tilde{KO}^o(L_o^n(p))$$

où $\beta : \tilde{KU}^{2s}(L_o^n(p)) \longrightarrow \tilde{KU}^o(L_o^n(p))$ est l'isomorphisme due à la périodicité de Bott, il est immédiat de vérifier la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{KU}^{2s}(L_o^n(p)) & \xrightarrow{\beta} & \tilde{KU}^o(L_o^n(p)) \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 2r} \\ \tilde{KO}^{2s}(L_o^n(p)) & \xrightarrow{r\beta c} & \tilde{KO}^o(L_o^n(p)) \end{array} .$$

Puisque r est surjectif (prop. 3.2.4), $r\beta c$ est surjectif pour tout s : en fait c'est un isomorphisme pour s pair car $\tilde{KO}^{4s}(L_o^n(p))$ et $\tilde{KO}^o(L_o^n(p))$ ont même ordre, à savoir $p^{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Lorsque s est impair et n pair, $r\beta c$ est encore un isomorphisme car $\tilde{KO}^{4s+2}(L_o^n(p))$ a pour ordre $p^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = p^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

Il ne nous reste plus qu'à étudier $\tilde{KO}^{4s+2}(L_o^n(p))$ lorsque n est impair : la suite exacte pour la paire (L_o^{n+1}, L_o^n) nous donne

$$\tilde{KO}^{4s+2}(L_o^{n+1}) \to \tilde{KO}^{4s+2}(L_o^n) \to \tilde{KO}^{4s+3}(L_o^{n+1}/L_o^n) \quad ;$$

mais d'une part (ℓ. 3.2.7)

$$\tilde{KO}^{4s+3}(L_o^{n+1}/L_o^n) = 0,$$

et d'autre part (3.2.2)

$$|\tilde{KO}^{4s+2}(L_o^{n+1})| = p^{\left[\frac{n+2}{2}\right]} = p^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = |\tilde{KO}^{4s+2}(L_o^n)|,$$

autrement dit on a l'isomorphisme $\tilde{KO}^{4s+2}(L_o^{n+1}) \xrightarrow{\sim} \tilde{KO}^{4s+2}(L_o^n)$. Par composition avec l'isomorphisme $r\beta c : \tilde{KO}^{4s+2}(L_o^{n+1}) \xrightarrow{\sim} \tilde{KO}^o(L_o^{n+1})$ qui résulte de la première partie de la démonstration ($n+1$ est pair !), on obtient

$$\widetilde{KO}^{4s+2}(L^n_o(p)) \xrightarrow{\sim} \widetilde{KO}^{4s+2}(L^{n+1}_o(p)) \xrightarrow{r\beta c} \widetilde{KO}^o(L^{n+1}_o(p))$$

l'isomorphisme annoncé.

3.3. *Espaces lenticulaires tronqués d'ordre impair.*

En conservant les notations du § 2.4. ($f^!$ désigne l'homomorphisme $\widetilde{KO}(L^n(p)) \to \widetilde{KO}(L^k(p))$ induit par l'inclusion canonique de $L^{k+1}(p)$ dans $L^n(p)$ et même chose pour $i^!$, $j^!$, $g^!$, $h^!$, $\alpha^!$ et $u^!$), on écrit le diagramme (2) de ce paragraphe en $\widetilde{KO}$-théorie.
Alors pour tout k on a : $\widetilde{KO}^{-1}(L^{k+1}_o) = 0 = \widetilde{KO}^1(L^{k+1}_o)$ (prop. 3.2.2), δ est un monomorphisme (plus précisément pour $k \equiv 2 \pmod 4$ δ est nul, pour $k \equiv 0$ ou $3 \pmod 4$ c'est un isomorphisme), $\widetilde{KO}(L^n/L^{k+1}_o) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker} u^!$, enfin $u^!$ est toujours surjective (la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch pour $\widetilde{KO}(L^n)$ est triviale et on applique 1.4.6). Lorsque $k \equiv 2 \pmod 4$, on voit immédiatement que

$$\widetilde{KO}(L^n_k) \xleftarrow{\sim} \widetilde{KO}(L^n/L^{k+1}_o) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker} f^! .$$

Lorsque $k \equiv 0 \pmod 4$, comme δ est un isomorphisme on a ∂ monomorphisme et $\alpha^!$ épimorphisme possédant une section, d'où

$$\widetilde{KO}(L^n_k) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \operatorname{Ker} f^! .$$

Pour $k \equiv 1 \pmod 4$, on a encore ∂ injectif et comme $h^!$ est surjectif, $i^!$ est surjectif donc (lemme des cinq) $\alpha^!$ surjectif ; d'autre part, $\operatorname{Ker} u^!$ étant un groupe fini, il s'ensuit

$$\widetilde{KO}(L^n_k) \simeq \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Ker} f^! .$$

Quand $k \equiv 3 \pmod 4$ des raisons analogues aux précédentes montrent que $\alpha^!$ est encore surjectif, de plus $\widetilde{KO}^{-1}(S^{2k+2}) = \mathbb{Z}_2 \to \widetilde{KO}(L^n/L^{k+1}_o)$ est le morphisme nul, d'où

$$\widetilde{KO}(L^n_k) \simeq \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Ker} u^! \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \operatorname{Ker} f^! & \text{si } n \equiv 0 \pmod 4 \\ \\ \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Ker} f^! & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod 4). \end{cases}$$

En résumé

Proposition 3.3.1.

Pour tout p impair et $k < n$, on a

$$\widetilde{KO}(L^n_k) \simeq \begin{cases} \operatorname{Ker} f^! & \text{pour } k \equiv 2 \pmod 4, \\ \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Ker} f^! & \text{pour } k \equiv 3 \pmod 4 \text{ et } n \not\equiv 0 \pmod 4, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \operatorname{Ker} f^! & \text{pour } k \equiv 0 \pmod 4, \qquad \text{pour } k \equiv 1 \pmod 4, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \operatorname{Ker} f^! & \text{pour } k \equiv 3 \pmod 4 \text{ et } n \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

A partir de ce résultat, on peut énoncer un théorème analogue au théorème 2.4.3.

3.4. *Etude de* $\widetilde{KO}(L^n(p))$ *pour* p *pair*.

Pour p impair, les résultats obtenus dans la K-théorie réelle des espaces lenticulaires sont essentiellement dûs aux deux faits suivants : trivialité de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch par utilisation des critères 1.4.2 et 1.4.3, injectivité de l'homomorphisme de complexification c. Quand $p = 2^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, la situation est à réexaminer(*) : néanmoins, et c'est le but de ce paragraphe, la suite spectrale est encore triviale. Comme il ne s'agira que d'espaces lenticulaires d'ordre 2^m, nous écrirons L^n pour $L^n(2^m)$. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, nous poserons (nombres de Radon-Hurwitz),

$$\vartheta(x) = \operatorname{Card}\{0 < s \leqslant x \mid s \equiv 0,1,2 \text{ ou } 4 \pmod 8\}.$$

Lemme 3.4.1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{KO}(L^n(2^m))$ (resp. $\widetilde{KO}(L^n_o(2^m))$) est un groupe fini d'ordre au plus égal à

$$2^{\vartheta(2n+1)+(m-1)\left[\frac{n}{2}\right]} \qquad (\text{resp. } 2^{\vartheta(2n)+(m-1)\left[\frac{n}{2}\right]}).$$

Preuve.

Considérons la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch

$$E_2^{i,j} = \widetilde{H}^i(L^n, \widetilde{KO}^j(S^o)) \Longrightarrow \widetilde{KO}^{i+j}(L^n),$$

(*) J.P. Jouanolou m'a indiqué que A. Chabour aurait obtenu un résultat analogue à la proposition 2.2.3 pour $KO(L^n(2^m))$.

et calculons les termes $E_2^{i,j}$ de degré total $i+j = 0$ i.e. les $E_2^{i,-i}$.
Au moyen de 2.1.2-3, les seuls termes $E_2^{i,-i}$ éventuellement non nuls sont tels que

- pour $i \equiv 0 \pmod 4$: $E_2^{i,-i} = \mathbb{Z}_{2^m}$ pour $2 \leq i$ pair $\leq 2n$,
- pour $i \equiv 1$ ou $2 \pmod 8$: $E_2^{i,-i} = \mathbb{Z}_2$ pour $1 \leq i \leq 2n+1$.

Soient $\Psi(2n+1) = \mathrm{card}\{0 < s \leq 2n+1 \mid s \equiv 1$ ou $2 \pmod 8\}$,

$\theta(2n+1) = \mathrm{card}\{0 < s \leq 2n+1 \mid s \equiv 0 \pmod 4\}$,

de telle sorte qu'évidemment $\varphi(2n+1) = \Psi(2n+1) + \theta(2n+1)$; alors parmi les $E_2^{i,-i}$ non nuls : au plus $\Psi(2n+1)$ sont égaux à $\mathbb{Z}_2$ et $\theta(2n+1)$ à $\mathbb{Z}_{2^m}$.
Ainsi $\widetilde{KO}(L^n)$ est un groupe abélien fini tel que

$$|\widetilde{KO}(L^n)| \leq 2^{\Psi(2n+1)+m\theta(2n+1)} = 2^{\varphi(2n+1)+(m-1)\left[\frac{n}{2}\right]} ,$$

puisque $\theta(2n+1) = \left[\frac{n}{2}\right]$.

Pour le 2n-squelette L_o^n, on procède exactement de la même façon.

Nous allons montrer que les bornes supérieures précédentes sont effectivement atteintes :

Théorème 3.4.2.

(*i*) $|\widetilde{KO}(L^n(2^m))| = 2^{\varphi(2n+1)+(m-1)\left[\frac{n}{2}\right]}$,

(*ii*) $|\widetilde{KO}(L_o^n(2^m))| = 2^{\varphi(2n)+(m-1)\left[\frac{n}{2}\right]}$.

La démonstration se faisant par récurrence sur n, nous établirons au préalable un certain nombre de résultats.

Lemme 3.4.3.

1. L'homomorphisme $\widetilde{KO}(S^{8u+2}) \to \widetilde{KO}(L_o^{4u+1}(2^m))$, induit par la projection $L_o^{4u+1}(2^m) \to L_o^{4u+1}(2^m)/L^{4u}(2^m)$ est un monomorphisme.
2. L'homomorphisme $\widetilde{KO}(S^{8u+1}) \to \widetilde{KO}(L^{4u}(2^m))$, induit par la projection $L^{4u}(2^m) \to L^{4u}(2^m)/L_o^{4u}(2^m)$ est un monomorphisme.

Preuve.

1. La suite exacte de $\widetilde{KO}$-théorie pour la paire (L_o^{4u+1}, L^{4u}) s'écrit

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots \to & \widetilde{KO}(S^{8u+2}) & \xrightarrow{\beta^!} & \widetilde{KO}(L_o^{4u+1}) & \xrightarrow{\alpha^!} & \widetilde{KO}(L^{4u}) & \xrightarrow{\partial} & \widetilde{KO}^1(S^{8u+2}) & \dots \\
& \| & & & & & & \| & \\
& Z_2 & & & & & & Z_2 &
\end{array}$$

Soit $\beta_i^* : H^i(S^{8u+2}, \mathbb{Z}_2) \to H^i(L_o^{4u+1}, \mathbb{Z}_2)$ l'application induite par la projection β. ξ étant un générateur de $\widetilde{KO}(S^{8u+2}) \simeq Z_2$, sa classe de Stiefel-Whitney est telle que $w(\beta^!(\xi)) = \beta^*(w(\xi))$ i.e.

$$w(\beta^!(\xi)) = 1 + \sum_{i=1}^{8u+2} \beta_i^*(w_i(\xi))$$

où $w_i(\xi) \in H^i(S^{8u+2}, Z_2)$. Alors

$$w(\beta^!(\xi)) = 1 + \beta_{8u+2}^*(\xi)).$$

Vu le choix de ξ, on peut poser $w_{8u+2}(\xi) = a$ où a générateur de $H^{8u+2}(S^{8u+2}, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$. La suite exacte de cohomologie s'écrivant

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots \to H^{8u+1}(L^{4u}, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\delta} & H^{8u+1}(S^{8u+2}, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\beta_{8u+2}^*} & H^{8u+2}(L_o^{4u+1}, \mathbb{Z}_2) \\
\| & & \| & & Z_2 \,/\!/ \quad \Big\downarrow \alpha_{8u+2}^* \\
\mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_2 & \dots \longleftarrow & H^{8u+2}(L^{4u}, \mathbb{Z}_2) \\
& & & & \| \\
& & & & 0
\end{array}$$

on voit que β_{8u+2}^* est surjectif donc $\delta = 0$. Ainsi $\beta_{8u+2}^*(a) \neq 0$, alors

$$w(\beta^!(\xi)) = 1 + \beta_{8u+2}^*(a) \quad \text{avec} \quad \beta_{8u+2}^*(a) \neq 0$$

montre que $\beta^!(\xi)$ n'est pas un fibré trivial, ce qui signifie de $\beta^! \neq 0$.

2. Procéder comme pour 1.

Lemme 3.4.4.

Soit X_v le C.W. complexe tel que $X_{2v'} = L_o^{v'}(2^m)$ pour $v = 2v'$, $X_{2v'+1} = L^{v'}(2^m)$ pour $v = 2v'+1$ ($v' \geq 0$). Soit i_v l'inclusion $X_{v-1} \to X_v$, alors l'homomorphisme induit $i_v^! : \widetilde{KO}(X_v) \to \widetilde{KO}(X_{v-1})$ est surjectif pour tout $v \geq 1$.

Preuve.

Considérons la suite exacte

$$\ldots \to \widetilde{KO}(S^v) \to \widetilde{KO}(X_v) \xrightarrow{i_v^!} \widetilde{KO}(X_{v-1}) \xrightarrow{\partial} \widetilde{KO}^1(S^v) \to \ldots$$

Lorsque $v \equiv 0, 4, 6$ ou $7 \pmod 8$, $\widetilde{KO}^1(S^v) = 0$ et le résultat est trivial. Lorsque $v \equiv 1, 5 \pmod 8$, $\widetilde{KO}^1(S^v) \simeq \mathbb{Z}$ et le résultat s'ensuit par 3.4.1. Pour $v \equiv 2$ ou $3 \pmod 8$, $\widetilde{KO}^1(S^v) \simeq \mathbb{Z}_2$: il s'agit de montrer que $\partial = 0$, c'est-à-dire que l'application d'attachement cellulaire $f : S^{v-1} \to X_{v-1}$ induit l'homomorphisme nul en $\widetilde{KO}$-théorie. Soient $f^!$ et f^* les homomorphismes respectivement induits par f en $\widetilde{KO}$-théorie et en cohomologie à valeurs dans $\mathbb{Z}_2$. Alors, pour tout $x \in \widetilde{KO}(X_{v-1})$, on a

$$w(f^!(x)) = f^*(w(x)) = 1 + \sum_{i=1}^{v-1} f_i^*(w_i(x)) \quad \text{où} \quad w_i(x) \in H^i(X_{v-1}, \mathbb{Z}_2),$$

soit

$$w(f^!(x)) = 1 + f_{v-1}^*(w_{v-1}(x)), \quad \forall\, x \in \widetilde{KO}(X_{v-1}).$$

Mais $f_{v-1}^* : H^{v-1}(X_{v-1}, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \to H^{v-1}(S^{v-1}, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ est "la multiplication par 2^m dans $\mathbb{Z}_2$, autrement dit $f_{v-1}^* = 0$. Ainsi, pour tout $x \in \widetilde{KO}(X_{v-1})$, $w(f^!(x)) = 1$: cela signifie que $f^!(x)$ est trivial pour tout x de $\widetilde{KO}(X_{v-1})$, i.e. $f^! = 0$.

Proposition 3.4.5.

Pour $n \equiv 3 \pmod 4$, les groupes $\widetilde{KO}(L_o^{n-1}(2^m))$, $\widetilde{KO}(L^{n-1}(2^m))$, $\widetilde{KO}(L_o^n(2^m))$ et $\widetilde{KO}(L^n(2^m))$ sont isomorphes ; ces isomorphismes sont induits par les inclusions canoniques.

Preuve. C'est trivial.

Démonstration du théorème 3.4.2.

On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$, (i) et (ii) sont vraies puisque $\widetilde{KO}(L_o^o) = \widetilde{KO}(*) = 0$ et $\widetilde{KO}(L^o) \xleftarrow{\sim} \widetilde{KO}(S^1) \simeq \mathbb{Z}_2$. Alors la prop. 3.4.5, car

$$\phi(8u+7) = \phi(8u+6) = \phi(8u+5) = \phi(8u+4) = 4u+3,$$

et les lemmes suivants suffisent à l'établir pour tout n.

Lemme 3.4.6.

Si (i) et (ii) sont vrais pour $n = 4u$, ils sont encore vrais pour $n = 4u+1$.

Preuve.

(i) Pour la paire (L_o^{4u+1}, L^{4u}) on a la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & \widetilde{KO}(S^{8u+2}) & \xrightarrow{\beta^!} & \widetilde{KO}(L_o^{4u+1}) & \xrightarrow{\alpha^!} & \widetilde{KO}(L^{4u}) & \xrightarrow{\partial} & \widetilde{KO}^1(S^{8u+2}) & \to \cdots \\ & \| & & & & & & \| & \\ & Z_2 & & & & & & Z_2 & \end{array}$$

Par 3.4.3.1 (resp. 3.4.4) $\beta^!$ est injectif ($\alpha^!$ est surjectif) ; d'où la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\beta^!} \widetilde{KO}(L_o^{4u+1}) \xrightarrow{\alpha^!} \widetilde{KO}(L^{4u}) \to 0.$$

Alors $|\widetilde{KO}(L_o^{4u+1})| = 2.|\widetilde{KO}(L^{4u})| = 2^{1+\phi(8u+1)+(m-1)2u} = 2^{4u+2+(m-1)2u} = 2^{\phi(8u+2)+(m-1)2u}$.

(ii) Pour la paire (L^{4u+1}, L_o^{4u+1}) on a la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & \widetilde{KO}(S^{8u+3}) & \to & \widetilde{KO}(L^{4u+1}) & \to & \widetilde{KO}(L_o^{4u+1}) & \xrightarrow{\partial} & \widetilde{KO}^1(S^{8u+3}) & \to \cdots \\ & \| & & & & & & \| & \\ & 0 & & & & & & Z_2 & \end{array}$$

où $\partial = 0$ (3.4.4). D'où l'isomorphisme $\widetilde{KO}(L^{4u+1}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{KO}(L_o^{4u+1})$; le résultat s'ensuit car $\phi(8u+2) = 4u+2 = \phi(8u+3)$.

Lemme 3.4.7.

Si (i) et (ii) sont vrais pour $n = 4u+1$, ils sont encore vrais pour $n = 4u+2$.

<u>Preuve</u>.

Il suffit de montrer (i) : (ii) s'en déduira par la prop. 3.4.5. Dans la suite exacte

$$0 \to \widetilde{KO}^{-1}(L_o^{4u+2}) \to \widetilde{KO}^{-1}(L^{4u+1}) \xrightarrow{\partial} \widetilde{KO}(S^{8u+4}) = \mathbb{Z}$$
$$\downarrow$$
$$\widetilde{KO}(L_o^{4u+2}) \xrightarrow{\alpha^!} \widetilde{KO}(L^{4u+1}) \to 0,$$

il suffit de noter que $\ker \alpha^! \simeq \mathbb{Z}_{2^m}$: cela résulte de ce que $\ker \alpha^! \simeq \operatorname{coker} \partial \simeq \mathbb{Z}_{2^m}$. En effet l'examen de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch révèle que $\widetilde{KO}^{-1}(L_o^{4u+2})$ est un groupe fini alors que $\widetilde{KO}^{-1}(L^{4u+1})$ est de la forme $Z \oplus G$ où G groupe fini : il s'ensuit que $\partial|\mathbb{Z}$ est la multiplication par 2^m dans $\mathbb{Z}$, donc $\operatorname{coker} \partial \simeq \mathbb{Z}_{2^m}$.

<u>Lemme</u> 3.4.8.

Si (i) et (ii) sont vrais pour $n = 4u+3$, ils sont encore vrais pour $n = 4u+4$.

<u>Preuve</u>.

(i) Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathbb{Z} = \widetilde{KO}(S^{8u+8}) \arrow[r, "\beta^!"] \arrow[d, "c_1"] & \widetilde{KO}(L_o^{4u+4}) \arrow[r, "\alpha^!"] \arrow[d, "c_2"] & \widetilde{KO}(L^{4u+3}) \arrow[r] \arrow[d, "c_3"] & \widetilde{KO}^1(S^{8u+8}) = 0 \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
0 = \widetilde{KU}^{-1}(L_o^{4u+4}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widetilde{KU}^{-1}(L^{4u+3}) \arrow[r] & \widetilde{KU}(S^{8u+8}) \arrow[r, "\beta^*"] \arrow[d, equal] & \widetilde{KU}(L_o^{4u+4}) \arrow[r, "\alpha^*"] & \widetilde{KU}(L^{4u+3}) \arrow[r] & \widetilde{KU}^1(S^{8u+3}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
\mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & & \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont les suites exactes de $\widetilde{KO}$ et $\widetilde{KU}$-théories associées à la paire (L_o^{4u+4}, L^{4u+3}) et les flèches verticales les homomorphismes de complexification. On sait ([1] , p. 618) que c_1 est un isomorphisme : il en résulte que $c_2 \mid \ker \alpha^!$ envoie $\ker \alpha^!$ *sur* $\ker \alpha^*$. Mais comme $|\widetilde{KU}(L_o^{u+4})| = 2^{m(4u+4)}$ et $|\widetilde{KU}(L^{4u+3})| = 2^{m(4u+3)}$, on a $|\ker \alpha^*| = 2^m$.

Il s'ensuit (ℓ. 3.4.1.)

$$2^m = |\ker \alpha^*| \leq |\ker \alpha^!| = \frac{|\widetilde{KO}(L_o^{4u+4})|}{|\widetilde{KO}(L^{4u+3})|} \leq \frac{2^{4u+4+(m-1)(2u+2)}}{2^{4u+3+(m-1)(2u+1)}} = 2^m ,$$

donc $|\mathrm{Ker}\ \alpha^!| = 2^m$ et $|\widetilde{KO}(L_o^{4u+4})| = 2^{\vartheta(8u+8)+(m-1)(2u+2)}$.

(ii) La suite exacte associée à la paire (L^{4u+4}, L_o^{4u+4}) s'écrit

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots \to & \widetilde{KO}(S^{8u+9}) & \xrightarrow{\beta^!} & \widetilde{KO}(L^{4u+4}) & \xrightarrow{\alpha^!} & \widetilde{KO}(L_o^{4u+4}) & \xrightarrow{\partial} & \widetilde{KO}^1(S^{8u+9}) & \to \dots \\ & \| & & & & & & \| & \\ & \mathbb{Z}_2 & & & & & & \mathbb{Z} & \end{array}$$

Alors $\partial = 0$ et $\beta^!$ injectif (ℓ.3.4.3.1) donnent la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\beta^!} \widetilde{KO}(L^{4u+4}) \xrightarrow{\alpha^!} \widetilde{KO}(L_o^{4u+4}) \to 0,$$

qui implique bien $|\widetilde{KO}(L^{4u+4})| = 2^{1+4u+4+(m-1)(2u+2)} = 2^{\vartheta(8u+9)+(m-1)(2u+2)}$.

<u>Corollaire</u> 3.4.9.

Soit $i_n : L_o^n(2^m)) \to L^n(2^m)$ l'inclusion canonique, alors

(i) $i_n : \widetilde{KO}(L^n(2^m)) \to \widetilde{KO}(L_o^n(2^m))$ est un isomorphisme pour $n \not\equiv 0 \pmod 4$;

(ii) la suite

$$0 \to \widetilde{KO}(S^{2n+1}) \to \widetilde{KO}(L^n(2^m)) \xrightarrow{i_n^!} \widetilde{KO}(L_o^n(2^m)) \to 0$$

est exacte pour $n \equiv 0 \pmod 4$.

<u>Remarques</u>.

1. Pour p impair, 3.4.9 s'énonçait de la même façon avec la propriété supplémentaire pour la suite (ii) d'être scindée.
2. Pour $m = 1$, les résultats obtenus redonnent $|\widetilde{KO}(P^n(\mathbb{R}))| = 2^{\vartheta(n)}$ (cf. [1]).

Le fait qu'ici c n'est pas injectif ne nous permet de déduire immédiatement de $\widetilde{KU}(L^n(2^m))$ la connaissance de $\widetilde{KO}(L^n(2^m))$. Néanmoins, en utilisant les prop. 2.3.7 et 3.1.4, on peut dire que

<u>Proposition</u> 3.4.10.

Dans $\tilde{KO}(L^n(2^m))$: pour tout $1 \leqslant i \leqslant [\frac{n}{2}]$, $(r\sigma)^i$ a au plus $2^{m+n+1-2i}$ pour ordre ; $(r\sigma)^{[\frac{n}{2}]+2} = 0$.

La proposition précédente signifie qu'en particulier lorsque c est injectif $(r\sigma)^i$ a 2^{m+n-2i} pour ordre. On verra dans le chapitre suivant comment pratiquement on peut obtenir de meilleurs renseignements.

CHAPITRE IV

SUR LA K-THEORIE DES ESPACES LENTICULAIRES D'ORDRE 2^m

Les trois premiers paragraphes de ce chapitre consistent à étudier avec précision la structure additive de $\widetilde{KU}(L^n(2^m))$: on y obtient des résultats complets pour une large classe de valeurs de n. Les autres paragraphes sont consacrés aux espaces lenticulaires d'ordre 8 dont on décrit entièrement les structures additive et multiplicative de leurs K-théories complexe et réelle.

4.1. *Quelques notations et rappels.*

Outre les éléments introduits dans les chapitres précédents, nous considérerons les éléments suivants de $\widetilde{KU}(L^n(2^m))$

$$\omega_h = (1+\sigma)^{2^{h-1}} - 1,$$

définis pour $1 \leqslant h \leqslant \delta$ où $\delta = \inf(\ell,m)$, ℓ étant l'entier tel que $2^{\ell-1} \leqslant n < 2^{\ell}$; de sorte que

$$\omega_1 = \sigma, \quad (1+\omega_h)^{2^{m-h+1}} = 1 \quad \text{et} \quad \omega_{h+1} = \omega_h^2 + 2\omega_h.$$

Pour $2 \leqslant h \leqslant \delta$, nous poserons

$$\omega_h = \sigma^{2^{h-1}} + 2A_h\sigma \quad \text{avec} \quad A_h = \sum_{i=1}^{2^{h-1}-1} \frac{1}{2}\binom{2^{h-1}}{i} \sigma^{i-1} .$$

Par ailleurs, nous aurons besoin des deux lemmes évidents suivants

Lemme 4.1.1.

Soit $M \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $0 \leqslant j \leqslant 2^M-2$ on a

$$2^M - j > 1+v(j).$$

Lemme 4.1.2.

Soient des entiers $N \geqslant 0$ et $h \geqslant 2$; considérons les deux divisions $N = 2^{h-2}.\,q_{h-1}^N + r_{h-1}^N$ avec $0 \leqslant r_{h-1}^N < 2^{h-2}$ et $N + \varepsilon.2^{h-2} = 2^{h-1}.q_h^N + r_h^N$

avec $0 \leq r_h^N < 2^{h-1}$ et $\varepsilon = \pm 1$, alors :

- ou bien $q_{h-1}^N = 2q_h^N - \varepsilon$ et $r_{h-1}^N = r_h^N$,

- ou bien $q_{h-1}^N = 2q_h^N - \varepsilon + 1$ et $r_{h-1}^N = r_h^N - 2^{h-2}$.

Ci-dessus $v(j)$ est mis pour $v_2(j)$ (ce que nous ferons dans tout ce chapitre). D'un autre côté avec les notations usuelles : pour $N = n+1 - 2^{h-2}$ et $\varepsilon = -1$, on a

$$q_{h-1}^N = q_{h-1}\ ,\ r_{h-1}^N = r_{h-1}, \ldots \qquad \text{(cf. prop. 2.3.4).}$$

Enfin, rappelons que les deux relations fondamentales

$$\sigma^{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad (\sigma+1)^{2^m} - 1 = 0$$

caractérisent complètement la structure multiplicative de $\widetilde{KU}(L^n(2^m))$. Du reste, les résultats déjà obtenus (prop. 2.3.7) se transcrivent ainsi

<u>Proposition 4.1.3.</u>

1. Pour tout $1 \leq i \leq n$: σ^i a pour ordre 2^{m+n-i} ;
2. Pour tout $0 \leq i \leq n-2$: $2^{m+i-1}.\sigma^{n-i} = \pm 2^{m+i}.\sigma^{n-i-1}$;
3. Pour tout $0 \leq i \leq n-2$: $2^{m-1+i}.\omega_2\sigma^{n-i-2} = 0$.

<u>Corollaire 4.1.4.</u>

Soient $0 \leq k \leq n+1$ et $1 \leq t \leq m-1$, alors $2^{m-1-t}.\omega_2^{t+t_k}\sigma^k = 0$ avec $t_k = \left[\frac{n+1-k}{2}\right]$.

<u>Preuve.</u>

En écrivant $n+1-k = 2t_k + r_k$ avec $r_k = 0$ ou 1, nous avons

$$2^{m-1-t}.\omega_2^{t+t_k}\sigma^k = 2^{m-1-t}(\sigma^2+2\sigma)^{t+t_k}\sigma^k = \sum_{i=0}^{t+t_k}\binom{t+t_k}{i}2^{m-1-t+i}\sigma^{n+1-r_k+2t-i}$$

Comme $m-1-t+i \geq m+n-(n+1-r_k+2t-i)$ i.e. $t \geq r_k$, par 4.1.3.1 on voit que l'assertion proposée est vraie pour $t \geq 1$.

4.2. Etude des ω_h.

Proposition 4.2.1.

1\. Pour $n = 2q_2 + 2$:

(i) $2^{m-2+i}\,\omega_2^{q_2+2-i} = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant q_2+1$,

(ii) $2^{m-2+i}\,\omega_2^{q_2+1-i} = \pm 2^{m-3+i}\,\omega_2^{q_2+2-i}$ pour $0 \leqslant i \leqslant q_2$.

2\. Pour $n = 2q_2+1$:

(i) $2^{m-1+i}\,\omega_2^{q_2+1-i} = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant q_2$,

(ii) $2^{m-1+i}\,\omega_2^{q_2-i} = \pm 2^{m-2+i}\,\omega_2^{q_2+1-i}$ pour $0 \leqslant i \leqslant q_2-1$.

Démonstration.

Soit $n = 2q_2+2$, alors les assertions correspondantes se démontrent par récurrence sur i. Tout d'abord montrons que $2^{m-2}\,\omega_2^{q_2+2} = 0$:

$$2^{m-2}\omega_2^{q_2+2} = 2^{m-2}(\sigma^2+2\sigma)^{q_2+2} = \sum_{i=0}^{q_2+2} \binom{q_2+2}{i} 2^{m-2+i}\,\sigma^{n+2-i} = 0 \text{ (prop. 4.1.3.1) ;}$$

supposons alors (i) vrai jusqu'à i_o avec $0 < i_o \leqslant q_2$ et multiplions $(\omega_2+1)^{2^{2^{m-1}}}-1 = 0$ par $2^{i_o}\omega_2^{q_2-i_o}$, il vient

$$2^{i_o+m-1}\,\omega_2^{q_2+1-i_o} = -\sum_{j=0}^{2^{2^{m-1}}-2} \binom{2^{m-1}}{j} 2^{i_o}\,\omega_2^{q_2+2-(2-2^{m-1}+j+i_o)} \qquad (1)$$

Dans (1) chaque terme du second membre a un coefficient dont la valuation (dyadique) est supérieure ou égale à $m-2 + (i_o+j-2^{m-1}+2) = m-2^{m-1}+j+i_o$, ainsi que le montrent les lemmes 2.3.1 et 4.1.1, par conséquent chaque terme de cette somme est nul. Pour établir (ii), il suffit de procéder comme dans la proposition 2.3.7.

Naturellement le cas $n = 2q_2+1$ se traite exactement de la même manière.

Proposition 4.2.2.

1\. Pour $n = 2q_2+2$ on a $2^{m-2+q_2}(\omega_2\sigma+2^{q_2+2}\sigma) = 0$.

2\. Pour $n = 2q_2+1$ on a $2^{m-2+q_2}(\omega_2+2^{q_2+1}\sigma) = 0$ et $2^{m-2+q_2}\,\omega_2\sigma = 0$

Démonstration.

1. Par 4.2.1.1. (ii) : $2^{m-2+q_2}\omega_2\sigma = \pm 2^{m-2}\omega_2^{q_2+1}\sigma = \pm 2^{m-2}\omega_2(\sigma^2+2\sigma)^{q_2}\sigma$, soit

$$2^{m-2+q_2}\omega_2\sigma = \pm \sum_{j=0}^{q_2} \binom{q_2}{j} 2^{m-2+j}\omega_2\sigma^{n-1-j} \qquad (2)$$

Pour $0 \leqslant j-1 < q_2$, chacun des termes du second membre de (2) est nul (prop. 4.1.3.3), donc

$$2^{m-2+q_2}\omega_2\sigma = \pm 2^{m-2}\omega_2\sigma^{n-1} = \pm 2^{m-2}(\sigma^2+2\sigma)\sigma^{n-1} = \pm 2^{m-1}\sigma^n.$$

Comme (prop. 4.1.3.2) $2^{m-1}\sigma^n = \pm 2^{m+n-2}\sigma$, il s'ensuit bien

$$2^{m-2+q_2}\omega_2\sigma + 2^{m-1}\sigma^n = 2^{m-2+q_2}(\omega_2\sigma+2^{q_2+2}\sigma) = 0.$$

2. De la même façon, on a

$$2^{m-2+q_2}\omega_2 = \pm 2^{m-2}\omega_2^{q_2+1} = \pm \sum_{j=0}^{q_2} \binom{q_2}{j} 2^{n-2+j}\omega_2\sigma^{n-1-j} = \pm 2^{m-1}\sigma^n = \pm 2^{m+n-2}\sigma ,$$

d'où $2^{m-2+q_2}(\omega_2+2^{q_2+1}\sigma) = 0$; de là il s'ensuit alors

$$2^{m-2+q_2}\omega_2\sigma = -2^{m-2+n}\sigma^2 = 0 \qquad \text{(prop. 4.1.3.1).}$$

Dans le cas où $m = 2$, on peut alors énoncer

Théorème 4.2.3. [34]

1. *Pour* $n = 2u+2$ $(u \geqslant 0)$, *on a*

$$\widetilde{KU}(L^n(4)) \simeq \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{u+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^u}$$

où chaque facteur est respectivement engendré par σ, ω_2 *et* $\omega_2\sigma + 2^{u+2}.\sigma$.

2. *Pour* $n = 2u+1$ $(u \geqslant 0)$, *on a*

$$\widetilde{KU}(L^n(4)) \simeq \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^u} \oplus \mathbb{Z}_{2^u}$$

où chaque facteur est respectivement engendré par σ, $\omega_2 + 2^{u+1}.\sigma$ *et* $\omega_2\sigma$.

Preuve.

On savait (cf. § 2.3) que $\widetilde{KU}(L^n(4))$ était additivement engendré par σ, σ^2 et σ^3, il est alors clair que σ, ω_2 et $\omega_2\sigma+2^{u+2}.\sigma$ (resp. σ, $\omega_2+2^{u+1}.\sigma$ et $\omega_2\sigma$) engendrent $\widetilde{KU}(L^n(4))$ en tant que groupe. Les propositions 4.1.3.1, 4.2.1 et 4.2.2. joints au fait que $|\widetilde{KU}(L^n(4))| = 2^{2n}$ assurent la conclusion.

Dans ce qui va suivre on va généraliser pour ω_h les résultats obtenus pour ω_2 : la méthode va consister à raisonner par récurrence sur h. Dans cette généralisation la distinction "n pair ou n impair" devient "$r_h = 0$ ou $r_h \neq 0$". A cet égard, le lemme 4.1.2 montre que si un reste r_{h_o} est nul, tous ceux qui le précédent -sauf r_1 évidemment ...- le sont aussi : c'est essentiellement de cette simple remarque que vont dépendre les résultats escomptés.

Proposition 4.2.4.

Soit $2 \leqslant h \leqslant \delta$, alors

1. si $r_h = 0$, on a

   (i) $2^{m-h+i+1}\omega_h^{q_h+1-i} = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant q_h$,

   (ii) $2^{m-h+i+1}\omega_h^{q_h-i} = \pm 2^{m-h+i}\omega_h^{q_h+1-i}$ pour $0 \leqslant i \leqslant q_h-1$;

2. si $r_h \neq 0$, on a

   (i) $2^{m-h+i}.\omega_h^{q_h+2-i} = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant q_h+1$,

   (ii) $2^{m-h+i}\omega_h^{q_h+1-i} = \pm 2^{m-h+i-1}\omega_h^{q_h+2-i}$ pour $0 \leqslant i \leqslant q_h$.

Démonstration.

1. On notera que vu le choix de h et l'hypothèse $r_h = 0$ on a forcément $q_h \geqslant 1$. Le lemme 4.1.2 montre que $r_h = 0$ implique $r_{h-1} = \ldots = r_2 = 0$; comme pour $h = 2$ la proposition est vraie (cf. 4.2.1.2), supposons-là alors vraie jusqu'à h-1.

   Pour $i = 0$, puisque $q_{h-1} = 2q_h+1$, on obtient avec $\omega_h = \omega_{h-1}^2 + 2\omega_{h-1}$ (cf. § 4.1)

$$2^{m-h+1}\omega_h^{q_h+1} = \sum_{j=0}^{q_h+1} \binom{q_h+1}{j} 2^{m-h+1+j}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+1-j} \qquad (3).$$

Comme $0 \leqslant j \leqslant q_h+1 \leqslant q_{h-1}-1$, l'hypothèse de récurrence (ii) montre que

$$2^{m-h+1+j}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+1-j} = (-1)^j\, 2^{m-h+1}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+1} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant q_h+1 \ ;$$

autrement dit (3) s'écrit

$$2^{m-h+1}\omega_h^{q_h+1} = \sum_{j=0}^{q_h+1} (-1)^j \binom{q_h+1}{j} 2^{m-h+1}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+1} = 0.$$

Supposons (i) établi jusqu'à $i-1$; en multipliant $(\omega_h+1)^{2^{m-h+1}} - 1 = 0$ par $2^i\omega_h^{q_h-i}$ $(0 \leqslant i \leqslant q_h)$, il vient

$$2^{m-h+1+i}\omega_h^{q_h+1-i} = -\sum_{j=0}^{2^{m-h+1}-2} \binom{2^{m-h+1}}{2^{m-h+1}-j} 2^i\omega_h^{q_h-i+2^{m-h+1}-j} \qquad (4)$$

Comme pour chaque j de (4) on a $1+i-2^{m-h+1} - j \leqslant i-1$, on a aussi $m-h+1 - v(j)+i \leqslant m-h+2+i+j - 2^{m-h+1}$ (ℓ. 4.1.1) ; ainsi l'hypothèse de récurrence sur i montre que chaque terme du second membre de (4) est nul. Enfin pour établir (ii), il suffit de multiplier $(\omega_h+1)^{2^{m-h+1}} -1 = 0$ par $2^i\omega_h^{q_h-i-1}$ $(0 \leqslant i \leqslant q_h-1)$ et d'utiliser (i).

2. La proposition étant vraie pour $h = 2$ (cf. prop. 4.2.1.1), la démonstration consiste encore à raisonner par récurrence sur h et, comme précédemment, il suffit en fait de prouver (i) pour $i = 0$. Pour cela, il nous faut *ici* distinguer deux cas : ou $q_{h-1} = 2q_h+1$, ou bien $q_{h-1} = 2q_h+2$ (ℓ. 4.1.1). Dans le premier cas, à l'aide de l'hypothèse de récurrence sur h pour (i) et (ii), il vient

$$2^{m-h}\omega_h^{q_h+2} = 2^{m-h}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+3} + \sum_{k=0}^{k=q_h+1} \binom{q_h+2}{k+1} 2^{m-h+1+k}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+2-k} = 2^{m-h+1}\omega_h^{q_{h-1}+2} = 0 \ ;$$

dans le second de la même manière

$$2^{m-h}\omega_h^{q_h+2} = \sum_{j=0}^{q_h+1} \binom{q_h+1}{j} 2^{m-h+j}\omega_{h-1}^{q_{h-1}-j}\ \omega_h$$

$$2^{m-h}\omega_h^{q_h+2} = \sum_{j=0}^{q_h+1} \binom{q_h+1}{j} \left(2^{m-h+j}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+2-j} + 2^{m-h+1+j}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+1-j}\right) = 0$$

Proposition 4.2.5.

Pour $1 \leq h \leq \delta$, soient $0 \leq k \leq n+1$ et $1 \leq t \leq m-h+1$,

$$2^{m-h+1-t}\omega_h^{t+t_k}\sigma^k = 0$$

avec $t_k = \left[\dfrac{n+2^{h-1}-1-h}{2^{h-1}}\right]$.

Preuve.

Pour $h = 1$, la proposition est triviale ; supposons-là donc vraie jusqu'à h_o-1 où $2 \leq h_o \leq \delta$, autrement dit, pour $0 \leq k \leq n+1$ et $1 \leq u \leq m-h_o+2$ on suppose que

$$2^{m-h_o+2-u}\,.\,\omega_{h_o-1}^{u+u_k}\sigma^k = 0 \tag{5}$$

avec $u_k = \left[\dfrac{n+2^{h_o-2}-1-k}{2^{h_o-2}}\right]$. Nous avons alors

$$2^{m-h_o+1-t}\omega_{h_o}^{t+t_k}\sigma^k = \sum_{i=0}^{t+t_k}\binom{t+t_k}{i}2^{m-h_o+1-t+i}\omega_{h_o-1}^{2t+2t_k-i}\sigma^k.$$

Comme (ℓ. 4.1.2. pour $N = n+2^{h-2}-1-k$ et $\varepsilon = +1$) on a soit $u_k = 2t_k-1$, soit $u_k = 2t_k$, examinons successivement ces deux cas :

$$2^{m-h_o+1-t}\omega_{h_o}^{t+t_k}\sigma^k = \sum_{i=0}^{t+t_k}\binom{t+t_k}{i}2^{m-h_o+1-t+i}\,.\,\omega_{h_o-1}^{u_k+1+2t-i}\sigma^k \tag{6}$$

or, pour tout $0 \leq i \leq t+t_k$, on a $m-h_o+1-t+i \geq m-h_o+2-(1+2t-i)$ puisque $t > 0$; ainsi, en utilisant (5), chaque terme du second membre de (6) est nul. On raisonne de la même manière pour $u_k = 2t_k$.

Lemme 4.2.6.

Pour tout $4 \leq h \leq \delta$ tel que $r_{h-1} = 0$, on a

$$2^{m-h}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+2} = \begin{cases} 0 & \text{si } r_h = 0, \\ 2^{m-h+2+q_{h-2}}\omega_{h-2} & \text{si } r_h \neq 0. \end{cases}$$

Lorsque $h = 2$ (resp. $h = 3$) on a toujours (resp. si $r_2 = 0$) $2^{m-h}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+2} = 0$.

Preuve.

Pour $h = 2$ ou 3, l'assertion est triviale (cf. 4.1.3). Soit $h \geqslant 4$: $r_{h-1} = 0$ implique $q_{h-2} = 2q_{h-1}+1$, alors (avec 4.2.4.1)

$$2^{m-h}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+2} = \sum_{i=0}^{q_{h-1}+2}\binom{q_{h-1}+2}{i} 2^{m-h+i}\omega_{h-2}^{2q_{h-1}+4-i} = \sum_{i=0}^{q_{h-1}+2}\binom{q_{h-1}+2}{i} 2^{m-h+i}\omega_{h-2}^{q_{h-3}+3-i} =$$

$$= 2^{m-h}\omega_{h-2}^{q_{h-2}+3} + (q_{h-1}+2)\, 2^{m-h+1}\omega_{h-2}^{q_{h-2}+2} + \left[\sum_{i=2}^{q_{h-1}+2}(-1)^i\binom{q_{h-1}+2}{i}\right] 2^{m-h+2+q_{h-2}}\omega_{h-2} .$$

Moyennant 4.2.5, on obtient

$$2^{m-h}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+2} = (q_{h-1}+1)\, 2^{m-h+2+q_{h-2}}\omega_{h-2} + q_{h-1}2^{m-h+1}\,\omega_{h-2}^{q_{h-2}+2} \qquad (7)$$

Quand $q_{h-1} = 2q_h+2$, i.e. $r_{h-1} = 0$ et $r_h = 2^{h-2}$, (7) se réduit clairement au résultat annoncé ; quand $q_{h-1} = 2q_h+1$, i.e. $r_k = 0$ pour tout $2 \leqslant k \leqslant r_h$, (7) donne en itérant

$$2^{m-h}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+2} = 2^{m-h+1}\omega_{h-2}^{q_{h-2}+2} = \dots = 2^{m-3}\omega_2^{q_2+2} = 0.$$

Proposition 4.2.7.

Soit $3 \leqslant h \leqslant \delta$ tel que $r_h \neq 0$, alors

1. si $r_{h-1} \neq 0$, on a

$$2^{m-h+q_h}\omega_h\sigma^{r_h} + 2^{m-h+1+q_{h-1}}\omega_{h-1}\sigma^{r_{h-1}} = 0 ;$$

2. si $r_{h-1} = 0$, pour

   a) $r_h = r_{h+1}$, on a

$$2^{m-h+q_h}\omega_h\sigma^{r_h} + 2^{m-h+2+q_{h-2}}\omega_{h-2} = 0,$$

   b) $r_h \neq r_{h+1}$, on a

$$2^{m-h+q_h}\omega_h\sigma^{r_h} + 2^{m-h+1+q_{h-1}}\omega_{h-1} = 0.$$

Démonstration.

1. Puisque $r_h \neq 0$, on a (prop. 4.2.4.2)

$$2^{m-h+q_h}\omega_h\sigma^{r_h} = 2^{m-h-1}\omega_h^{q_h+2}\sigma^{r_h} = \sum_{i=0}^{q_h+2}\binom{q_h+2}{i}2^{m-h-1+i}\omega_{h-1}^{2q_h+4-i}\sigma^{r_h} .$$

Si $r_{h-1} = r_h$ i.e. $q_{h-1} = 2q_h+1$, on obtient

$$2^{m-h+q_h}\omega_h\sigma^{r_h} = 2^{m-h-1}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+3}\sigma^{r_{h-1}} + \left[\sum_{i=1}^{q_h+2}(-1)^i\binom{q_h+2}{i}\right]2^{m-h+1+q_{h-1}}\omega_{h-1}\sigma^{r_{h-1}} ,$$

soit par 4.2.5

$$2^{m-h+q_h}\omega_h\sigma^{r_h} = -2^{m-h+1+q_{h-1}}\omega_{h-1}\sigma^{r_{h-1}} .$$

Si $r_{h-1} \neq r_h$ i.e. $q_{h-1} = 2q_h + 2$ et $r_h = r_{h-1} + 2^{h-2}$, en écrivant

$$2^{m-h+q_h}\omega_h\sigma^{r_h} = 2^{m-h+q_h}\omega_h\sigma^{r_{h-1}}(\omega_{h-1}-2A_{h-1}\sigma) = 2^{m-h+q_h}\omega_h\omega_{h-1}\sigma^{r_{h-1}} \quad \text{(prop 4.2.1)}$$

on se ramène à la situation précédente puisque

$$2^{m-h+q_h}\omega_h\omega_{h-1}\sigma^{r_{h-1}} = 2^{m-h-1}\omega_h^{q_h+2}\omega_{h-1}\sigma^{r_{h-1}} = \sum_{i=0}^{q_h+2}\binom{q_h+2}{i}2^{m-h-1+i}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+3-i}\sigma^{r_{h-1}} .$$

2. Ici $q_{h-1} = 2q_h+2$ et $r_h = 2^{h-2}$, alors en procédant comme ci-dessus il vient

$$2^{m-h+q_h}\omega_h\sigma^{r_h} = (q_h+1)2^{m-h+1+q_{h-1}}\omega_{h-1} + q_h\, 2^{m-h}\omega_{h-1}^{q_{h-1}+2} ,$$

soit avec 4.2.6

$$2^{m-h+q_h}\omega_h\sigma^{r_h} = (q_h+1)2^{m-h+1+q_{h-1}}\omega_{h-1} + q_h\, 2^{m-h+2+q_{h-2}}\omega_{h-2} .$$

De cette dernière relation découle immédiatement la proposition : en effet, selon que $r_{h+1}-r_h$ est nul ou non, q_h est impair ou pair.

Proposition 4.2.8.

Soit $3 \leqslant h < \delta$, alors si $r_h = 0$ mais $r_{h+1} \neq 0$ on a

$$2^{m-h+q_h}\omega_h + 2^{m-h+1+q_{h-1}}\omega_{h-1} = 0$$

Preuve.

Par 4.2.6 et le fait que $q_h = 2q_{h+1}+2$, on a

$$2^{m-h+1+q_{h-1}}\omega_{h-1} = 2^{m-h-1}\omega_h^{q_h+2} = 2^{m-h-1}(\omega_{h+1}-2\omega_h)^{q_{h+1}+2},$$

ce qui par 4.2.4 peut encore s'écrire

$$2^{m-h-1}(\omega_{h+1}-2\omega_h)^{q_{h+1}+2} = \sum_{i=0}^{q_{h+1}+2} (-1)^i \binom{q_{h+1}+2}{i} 2^{m-h-1+i}\omega_{h+1}^{q_{h+1}+2-i}\omega_h^i =$$

$$= (-1)^{q_{h+1}} 2^{m-h+q_{h+1}+1}\omega_h^{q_{h+1}+2} = \pm 2^{m-h+q_h}.\omega_h.$$

Enfin, par l'emploi d'une méthode maintes fois éprouvée (!), on obtient aussi

Proposition 4.2.9.

Pour $4 \leq h \leq \delta$ tel que $r_h = 0$ on a

$$2^{m-h+q_h}\omega_h\sigma^{2^{h-2}} + 2^{m-h+1+q_{h-1}}\omega_{h-1} = 0$$

4.3. *Structure additive de* $\widetilde{KU}(L^n(2^m))$.

Les résultats obtenus dans le paragraphe précédent vont nous permettre de donner une description détaillée de la structure additive de $\widetilde{KU}(L^n(2^m)) \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} G_i$, où $G_i = \mathbb{Z}_{2^{m_i}}$ (cf. th. 2.3.6), pour une large classe de valeurs de n (m étant fixé) : à savoir celles pour lesquelles il existe au moins un entier h compris entre 2 et δ correspondant à un reste r_h non nul. Nous sommes donc amenés à distinguer le cas où tous les r_h $(2 \leq h \leq \delta)$ sont non nuls de celui où l'un des restes r_h $(2 < h < \delta)$ serait nul sans que r_{h+1} ne le soit. Dans ces conditions (cf. ℓ. 4.1.2), pour tout entier n (non nul) posons

$$h_o = \sup\{h \in \mathbb{N}^* | r_h = 0\}.$$

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes de h_o :

- $h_o = 1$ si et seulement si n est pair,
- $h_o = 2$ si et seulement si $n \equiv 1 \pmod 4$,
- $h_o \geq 3$ si et seulement si $n \equiv 3 \pmod 4$.

Théorème 4.3.1.

Pour n *pair, le* i-*ième groupe cyclique* G_i *de* $\widetilde{KU}(L^n(2^m))$ *est engendré par* $\omega_h(-2^{h-1}+i)$ *où,* h *étant l'unique entier tel que* $2^{h-1} \leq i < 2^h$, *la famille* $((\omega_h(k))_{0\leq k\leq 2^{h-1}-1})_{1\leq h\leq\delta}$ *de* $\widetilde{KU}(L^n(2^m))$ *est définie par*

- $\omega_1(0) = \omega_1 = \sigma$,
- $\omega_2(k) = \begin{cases} \omega_2 & \text{si } k = 0, \\ \omega_2\sigma + 2^{q_2+2}\omega_1 & \text{si } k = 1\ ; \end{cases}$
- *pour* $3 \leq h \leq \delta$:

$$\omega_h(k) = \begin{cases} \omega_h\sigma^k & \text{si } 0 \leq k \leq r_h-1 \text{ ou } r_h+2^{h-2}-r_{h-1} \leq k \leq 2^{h-1}-1, \\ \omega_h\sigma^k + 2^{1+q_{h-1}-q_h}\omega_{h-1}\sigma^{r_{h-1}+k-r_h} & \text{si } r_h \leq k \leq r_h+2^{h-2}-1-r_{h-1} \end{cases}$$

Démonstration.

En raisonnant comme dans le théorème 4.2.3 et compte-tenu du théorème 2.3.6, il suffit de voir que

$$2^{m_i}\omega_h(i) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq 2^{h-1}-1.$$

Pour $h = 1$ ou 2 ceci n'est autre que la prop. 4.1.3.1 ou les prop. 4.2.1 et 4.2.2. Pour $3 \leq h \leq \delta$, la prop. 4.2.4 implique clairement

$$2^{m-h+1+q_h}\omega_h = 0,$$

et donc $2^{m_i}\omega_h(i) = 0$ pour $0 \leq i \leq r_h-1$. D'autre part la prop. 4.2.7.1 assure que $2^{m-h+q_h}(\omega_h\sigma^{r_h}+2^{1+q_{h-1}-q_h}\omega_{h-1}\sigma^{r_{h-1}}) = 0$, donc pour tout

$r_h \leq i \leq 2^{h-1}-1$ nous avons

$$2^{m-h+q_h}(\omega_h\sigma^i+2^{1+q_{h-1}-q_h}\omega_{h-1}\sigma^{r_{h-1}+i-r_h}) = 0 \qquad (1)$$

En fait, lorsque $r_h+2^{h-2}-r_{h-1} \leq i \leq 2^{h-1}-1$ i.e. $r_{h-1}+i-r_h \geq 2^{h-2}$, la prop. 4.2.4.2, qui donne

$$2^{m-h+1+q_{h-1}}\omega_{h-1}\sigma^{2^{h-2}} = 2^{m-h+1+q_{h-1}}\omega_{h-1}^2 = 0,$$

montre que (1) se réduit à $2^{m_i}\omega_h\sigma^i = 0$.

Considérons maintenant les espaces lenticulaires (d'ordre 2^m) dont la dimension est telle que $n \equiv 1 \pmod 4$ i.e. ceux pour lesquels $h_o = 2$. Pour $3 \leq h \leq \delta$, la prop. 4.2.7.2. montre que $2^{m-h+q_h}\omega_h\sigma^{r_h}$ est égal à $-2^{m-h+2+q_{h-2}}\omega_{h-2}$ ou $-2^{m-h+1+q_{h-1}}\omega_{h-1}$ selon que $r_h = r_{h+1}$ ou $r_h \neq r_{h+1}$. Dans le premier cas, pour $h = 3$ (alors $r_3 = 2 = r_4$) on a

$$2^{m-3+q_3}\omega_3\sigma^{r_3} = -2^{m-1+n}\sigma = 0 \qquad \text{(prop 4.1.3)},$$

ce qui, par application réitérée de 4.2.7.1, conduit à

$$2^{m-h+q_h}\omega_h\sigma^{r_h} = 0 \quad \text{pour} \quad 3 \leq h \leq \delta.$$

Dans l'autre cas ($r_3=2$, $r_4=6$), on a

$$2^{m-3+q_3}\omega_3\sigma^{r_3} + 2^{m-2+q_2}\omega_2 = 0,$$

mais comme $2^{m-2+q_2}\omega_2\sigma = 0$ (prop. 4.2.2), il s'ensuit pour $3 \leq h \leq \delta$

$$2^{m-h+q_h}\omega_h\sigma^i = 0 \quad \text{pour} \quad i > r_h.$$

D'où le théorème :

<u>Théorème 4.3.2.</u>

Pour $n \equiv 1 \pmod 4$ $G_i \simeq \mathbb{Z}_{2^{m_i}}$ $(1 \leq i \leq s)$ *est engendré par* $\omega_h(i-2^{h-1})$ *où* h *étant l'unique entier tel que* $2^{h-1} \leq i < 2^h$, *la famille* $(\omega_h(k))_{0 \leq k \leq 2^{h-1}-1 \;\; 1 \leq h \leq \delta}$ de $\widetilde{KU}(L^n(2^m))$ *est définie par*

- $\omega_1(0) = \omega_1 = \sigma$

- $\omega_2(k) = \begin{cases} \omega_2 + 2^{q_2+1}\sigma & \textit{pour } k = 0, \\ \omega_2\sigma & \textit{pour } k = 1 ; \end{cases}$

- pour $3 \leqslant h \leqslant \delta$: $\omega_h(k) = \omega_h\sigma^k$ *pour* $0 \leqslant k \leqslant 2^{h-1}-1$, *si* $n \equiv 1 \pmod 8$;

$$\omega_h(k) = \begin{cases} \omega_h\sigma^k & \text{pour } 0 \leqslant k \leqslant r_h-1 \text{ ou } r_h+1 \leqslant k \leqslant 2^{h-1}-1, \\ \omega_h\sigma^{r_h} + 2^{1+q_{h-1}-q_h}\omega_{h-1}\sigma^{r_{h-1}} & \text{pour } k = r_h, \end{cases}$$

si $n \equiv 5 \pmod 8$.

. Soit maintenant $3 < h_o < \delta$ (alors $n \equiv 3 \pmod 4$) : comme 4.2.8 implique

$$2^{m-h_o+q_{h_o}}\omega_{h_o}\sigma^{2^{h_o-2}} = -2^{m-h_o+1+q_{h_o-1}}\omega_{h_o-1}(\omega_{h_o-1}{}^{-2}A_{h_o-1}\sigma) = 0,$$

il s'ensuit (prop 4.2.9) $2^{m-h_o+1+q_{h_o-1}}\omega_{h_o-1} = 0$, et donc

$$2^{m-h+q_h}\omega_h = 0 \qquad \text{pour} \quad 3 \leqslant h \leqslant h_o.$$

Mais alors (prop. 4.2.7.2)

$$2^{m-h+q_h}\omega_h\sigma^{r_h} = 0 \qquad \text{pour} \quad h_o < h \leqslant \delta$$

Autrement dit

<u>Théorème 4.3.3.</u>

Pour $n \equiv 3 \pmod 4$ *mais tel que* $3 < h_o < \delta$, $G_i \simeq \mathbb{Z}_{2^{m_i}}$ *est engendré par* $\omega_h(i-2^{h-1})$ *où,* h *étant l'unique entier tel que* $2^{h-1} \leqslant i < 2^h$, *la famille* $((\omega_h(k))_{0 \leqslant k \leqslant 2^{h-1}-1})_{1 \leqslant h \leqslant \delta}$ *est définie par*

- $\omega_1(0) = \omega_1 = \sigma$;

- $\omega_2(k) = \begin{cases} \omega_2+2^{q_2+1}\sigma & \text{pour } k = 0, \\ \omega_2\sigma & \text{pour } k = 1 ; \end{cases}$

• *pour* $3 \leq h \leq \delta$:

$$\omega_h(k) = \omega_h \sigma^k \quad \textit{pour} \quad 0 \leq k \leq 2^{h-1}-1.$$

Lorsque $h_o = 3$, le raisonnement précédent est en défaut car la proposition 4.2.9 ne s'applique plus ; néanmoins à l'aide des prop. 4.2.7 et 4.2.8, nous avons

Théorème 4.3.4.

Pour $n \equiv 3 \pmod 8$, G_i *est engendré par* $\omega_h(i-2^{h-1})$ (h *étant l'unique entier tel que* $2^{h-1} \leq i < 2^h$) *où la famille* $((\omega_h(k))_{0 \leq k \leq 2^{h-1}-1})_{1 \leq h \leq \delta}$ *est ainsi définie :*

• $\omega_1(0) = \omega_1 = \sigma$;

• $\omega_2(k) \doteq \begin{cases} \omega_2 + 2^{q_2+1}\sigma & \textit{pour } k = 0, \\ \omega_2 \sigma & \textit{pour } k = 1 ; \end{cases}$

• *pour* $3 \leq h \leq \delta$: $\omega_h(k) = \omega_h \sigma^k$ *pour* $0 \leq k \leq 2^{h-1}-1$ *sauf si* $k = r_h$ *auquel cas* $\omega_h(r_h) = \omega_h \sigma^{r_h} + 2^{1+q_{h-1}-q_h} \omega_{h-1} \sigma^{r_{h-1}}$.

Remarques.

1. Le théorème précédent ne vaut que pour $\delta > 3$ (cf. prop. 4.2.8).
2. Lorsque n est tel que $1 \leq n < 2^m$, on a évidemment $\delta = \ell$ et dans ces conditions la structure additive de $\widetilde{KU}(L^n(2^m))$ est entièrement déterminée pour $n = 2^\ell - a$ où $2 \leq a \leq 2^{\ell-1}$ $(\ell \geq 2)$.
3. Dans les paragraphes 4.2 et 4.3 un certain nombre de résultats peuvent être étendus aux espaces lenticulaires d'ordre p^m où p premier et différent de 2.

4.4. *Structure de* $\widetilde{KU}(L^n(8))$.

En ce qui concerne les espaces lenticulaires d'ordre 8, il nous suffira d'examiner ceux pour lesquels $n = 4u+3$ avec $u \geq 1$ comme cela résulte clairement du paragraphe précédent.

Il est clair que dans $\mathbb{Z}[\sigma]$ on peut exhiber deux polynômes A_1 et B_1 pour lesquels

$$2^n\sigma = A_1(\sigma).\sigma^{n+1} + B_1(\sigma) \ . \ [(\sigma+1)^2-1] \qquad (1)$$

avec $d^oB_1 = n-1$, il suffit en effet de prendre

$$A_1(\sigma) = -1, \quad B_1(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \, 2^i\sigma^{n-1-i} \qquad (2)$$

En posant $n = 2q+1$, cherchons maintenant dans $\mathbb{Z}[\sigma]$ deux polynômes A_2 et B_2 avec $d^oB_2 = n-1$ et tels que

$$2^q(\sigma^2+2\sigma) + 2^n\sigma = A_2(\sigma).\sigma^{n+1} + B_2(\sigma).[(\sigma+1)^4-1] \qquad (3)$$

Moyennant (1), cela équivaut à trouver A_2, B_2 et U_2 dans $\mathbb{Z}[\sigma]$ tels que

$$\begin{cases} A_2(\sigma) = A_1(\sigma) + (\sigma+2)U_2(\sigma) & (4) \\ B_1(\sigma)+2^q = (\sigma^2+2\sigma+2)\ B_2(\sigma) + U_2(\sigma).\sigma^n & (5). \end{cases}$$

Pour $0 \leq p \leq n-1$, la p-ième dérivée de (5) en $\sigma = 0$ nous donne

$$b_o = 2^{n-1} + 2^{q-1}, \quad b_p+b_{p-1}+ \tfrac{1}{2}b_{p-2} = (-1)^p \ 2^{n-2-p} \quad \text{pour} \quad 1 \leq p \leq n-1$$

(on convient que $b_{-1} = 0$) en posant $B_2(\sigma) = \sum_{p=0}^{n-1} b_p\sigma^p$. En explicitant les termes de la suite $(b_p)_{0\leq p\leq n-1}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
b_{4k} &= 2^{4(u-k)+1} + (-1)^k.2^{2(u-k)} && \text{pour} \quad 0 \leq k \leq u, \\
b_{4k+1} &= -2^{4(u-k)} + (-1)^{k+1}.2^{2(u-k)} + (-1)^{k+1}.2^{2(q-k)-1} && \text{pour} \quad 0 \leq k \leq u, \\
b_{4k+2} &= 2^{4(u-k)-1} + (-1)^k.2^{2(u-k)-1} + (-1)^k.2^{2(q-k)-1} && \text{pour} \quad 0 \leq k \leq u, \\
b_{4k+3} &= -2^{4(u-k)-2} + (-1)^{k+1}.2^{2(q-k)-2} && \text{pour} \quad 0 \leq k \leq u-1.
\end{aligned}$$

L'examen de ces nombres montre que non seulement ils sont entiers mais *tous divisibles par 4 sauf* : $b_{4u} = b_{n-3}$ *qui est toujours impair*, b_{4u-2} *et* b_{4u+1} *sont pairs, et* $b_{4u+2} = b_{n-1}$ *qui est pair ou impair selon que* u *est impair ou pair.*

La détermination de A_2 est ensuite immédiate :

$$A_2(\sigma) = -1 - 2(b_{n-2}+2b_{n-1}) - (b_{n-2}+4b_{n-1})\sigma - b_{n-1}\sigma^2.$$

En poursuivant le processus précédent, nous avons

<u>Lemme 4.4.1.</u>

Soit $n \equiv 3 \pmod 4$ tel que $n \neq 3$, alors il existe A_3, $B_3 \in \mathbb{Z}[\sigma]$ tels que

$$2^u.\omega_3 + 2^q.\omega_2 + (-1)^u.2^n\omega_1 = A_3(\sigma).\sigma^{n+1} + B_3(\sigma).[(\sigma+1)^8-1]$$

avec $d^o.B_3 = n-1$.

<u>Démonstration.</u>

En se limitant au cas où u *est pair*, de la même façon qu'on a déduit (4) - (5) à partir de (3), on voit que le problème équivaut à chercher A_3, B_3 et U_3 dans $\mathbb{Z}[\sigma]$ tels que

$$\begin{cases} A_3(\sigma) = A_2(\sigma) + U_3(\sigma).(\sigma^3+4\sigma^2+6\sigma+4) \\ B_2(\sigma) + 2^u = [(\sigma+1)^4+1].B_3(\sigma) + U_3(\sigma).\sigma^n. \end{cases}$$

En posant $B_3(\sigma) = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p\sigma^p$, tout revient donc à montrer que la suite $(\beta_p)_{o\leqslant p\leqslant n-1}$ définie par

$$\begin{cases} \beta_o = 2^{n-3} + 2^{q-2} + 2^{u-1} \\ b_p = 2\beta_p + 4\beta_{p-1} + 6\beta_{p-2} + 4\beta_{p-3} + \beta_{p-4} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant p \leqslant n-1, \end{cases} \tag{6}$$

où il est convenu que $\beta_i = 0$ pour $i < 0$, prend ses valeurs dans Z.

Il est facile de voir d'une part que

$$\beta_1 = -(2^{n-2}+2^{n-3}+2^{n-4}+2^q+2^{q-1}+2^{q-2}+2^u),$$
$$\beta_2 = 2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+2^{q-1}+2^{q-2}+2^{q-3}+2^{u-1},$$
$$\beta_3 = -2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-4}-2^{n-6}+2^u \quad ;$$

et d'autre part que $v(b_p) \geqslant 3$ pour $0 \leqslant p \leqslant 4u-5$. Comme $v(\beta_o) \geqslant 1$ et $v(\beta_1) \geqslant 2$, supposons donc que pour $0 \leqslant i < p$, où $1 \leqslant p \leqslant 4u-5$, on ait

$$v(\beta_i) \geqslant 1 \text{ pour } i \text{ pair et } v(\beta_i) \geqslant 2 \text{ pour } i \text{ impair} \tag{7}$$

et examinons β_p : de (7) et des propriétés de b_p, (6) nous donne

$$\beta_p + \beta_{p-2} + \frac{1}{2}\beta_{p-4} \equiv 0 \pmod 4. \tag{8}$$

lorsque p est impair, il s'ensuit $\beta_p \equiv -\frac{1}{2}\beta_{p-4} \pmod 4$ et par itération $\beta_p \equiv (-\frac{1}{2})^k \beta_{p-4k} \pmod 4$, ainsi

- pour $p = 4v+1$ $(0 \leq v \leq u-2)$: $\beta_p \equiv (-\frac{1}{2})^v \beta_1 \equiv (-1)^{v+1}2^{u-v} \equiv 0 \pmod 4$,
- pour $p = 4v+3$ $(0 \leq v \leq u-2)$: $\beta_p \equiv (-\frac{1}{2})^v \beta_3 \equiv (-1)^v 2^{u-v} \equiv 0 \pmod 4$.

Lorsque p est pair, (8) montre que $\beta_p \equiv -\frac{1}{2}\beta_{p-4} \pmod 2$ et alors

- pour $p = 4v$ $(1 \leq v \leq u-2)$: $\beta_p \equiv (-\frac{1}{2})^v \beta_o \equiv (-1)^v\, 2^{u-1-v} \equiv 0 \pmod 2$,
- pour $p = 4v+2$ $(0 \leq v \leq u-2)$: $\beta_p \equiv (-\frac{1}{2})^v \beta_2 \equiv (-1)^v\, 2^{u-1-v} \equiv 0 \pmod 2$.

Il ne nous reste donc plus qu'à considérer les β_p pour lesquels $4u-4 \leq p \leq 4u+2$.
De ce qui précède on a exactement

$$v(\beta_{4u-5}) = v(\beta_{4u-7}) = v(b_{4u-4}) = 2\ , \quad v(\beta_{4u-6}) = v(\beta_{4u-8}) = 1,$$

autrement dit il s'ensuit (utiliser (6)) : les β_p restants sont entiers et même

- β_{4u-4} et β_{4u-2} sont impairs,
- β_{4u-3} et β_{4u-1} sont pairs,
- β_{4u} est pair ou impair selon que u est congru ou non à $\frac{\beta_{4u-4}-1}{2} \pmod 2$,
- β_{4u+1} est impair ou pair selon que u est congru ou non à $\frac{\beta_{4u-3}}{2} \pmod 2$.

De plus, il ressort de la construction de B_3 (comme elle est donnée par (6)) que, *pour* u *impair*, le seul changement à apporter à toutes les conclusions précédentes est que $\beta_{4u+2} = \beta_{n-1}$ *n'est pas entier mais de la forme* $-\frac{1}{2} + \alpha$ *où* $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, pour u impair, on peut écrire

$$2^u\omega_3 + 2^q\omega_2 + 2^n\sigma = A_3(\sigma).\sigma^{n+1} + B_3(\sigma)\left[(\sigma+1)^8 - 1\right] \tag{9}$$

où $d^oB_3 = n-1$ (donc $d^oA_3 = 6$), les polynômes A_3 et B_3 étant tels que tous leurs coefficients sont entiers *sauf* leurs coefficients dominants qui sont respectivement $-\beta_{n-1}$ et $\beta_{n-1} = -\frac{1}{2} + \alpha$. En écrivant (9) de la manière

$$2^u\omega_3+2^q\omega_2+2^n\sigma = (\sum_{i=0}^{5} \alpha_i\sigma^i-\beta_{n-1}\sigma^6)\sigma^{n+1} + (\sum_{i=0}^{n-2} \beta_i\sigma^i+\beta_{n-1}\sigma^{n-1})[(\sigma+1)^8-1] =$$

$$= [\sum_{i=0}^{5} \alpha_i\sigma^i+\sum_{i=2}^{7}\beta_{n-1}\binom{8}{i}\sigma^{i-2}].\sigma^{n+1} + 8\beta_{n-1}\sigma^n + (\sum_{i=0}^{n-2} \beta_i\sigma^i).[(\sigma+1)^8-1] ,$$

nous avons *dans* $\mathbb{Z}[\sigma]$

$$2^u\omega_3 + 2^q\omega_2 + 2^n\sigma \equiv 8\beta_{n-1}\sigma^n \quad (\text{mod } <\sigma^{n+1}, (\sigma+1)^8-1>).$$

Comme : $\beta_{n-1} = -\frac{1}{2} + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{Z})$, $2^3\sigma^n = 0$ et $2^{i+2}.\sigma^{n-i} = \pm 2^{i+3}\sigma^{n-i-1}$ pour $0 \leq i \leq n-2$ (prop. 4.1.3) dans $\widetilde{KU}(L^n(8))$, il s'ensuit

$$2^u\omega_3+2^q\omega_2+2^n\sigma = -4\sigma^n+8\alpha\sigma^n = -4\sigma^n = +2^{n+1}\sigma,$$

d'où le résultat annoncé pour u impair.

Nous en déduisons (cf. §.4.1 et 4.2)

Théorème 4.4.2.

Pour $n = 4u+3 \geq 7$, *on a*

$$\widetilde{KU}(L^n(8)) \simeq \mathbb{Z}_{2^{4u+5}} \oplus (\mathbb{Z}_{2^{2u+2}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{2^u})^4,$$

chacun des facteurs étant respectivement engendré par

σ, $\omega_2+2^{2u+2}.\sigma$, $\omega_2\sigma$, $\omega_3+2^{u+1}.\omega_2+(-1)^u 2^{3u+3}.\sigma$, $\omega_3\sigma+2^{u+1}.\omega_2\sigma+2^{3u+4}.\sigma$, $\omega_3\sigma^2$ et $\omega_3\sigma^3$.

4.5. $\widetilde{KO}$-*théorie des espaces lenticulaires d'ordre* 8.

Avec $\widetilde{KU}(L^n(8)) \simeq \bigoplus_{i=1}^{7} G_i$ où $|G_i| = 2^{m_i}$, on appelera x_i le générateur (mis en évidence dans les paragraphes précédents) du i-ième groupe cyclique G_i. Si $G_i = 0$, on vonviendra que $x_i = 0$. A l'aide de la prop. 3.1.4, on obtient dans $\widetilde{KU}(L^n(8))$ les relations suivantes

$$\begin{aligned}
cr(\sigma) &= 2\sigma+\omega_2+\omega_2\sigma+\omega_3+3\omega_3\sigma+3\omega_3\sigma^2+\omega_3\sigma^3,\\
cr(\omega_2) &= 2\omega_2+\omega_3+2\omega_3\sigma+\omega_3\sigma^2,\\
cr(\omega_2\sigma) &= -4\omega_2-2\omega_3-6\omega_3\sigma-5\omega_3\sigma^2-\omega_3\sigma^3,\\
cr(\omega_3) &= 2\omega_3 = 2c(\kappa),
\end{aligned}$$

$$cr(\omega_3\sigma) = -4\omega_3-4\omega_3\sigma-6\omega_3\sigma^2-2\omega_3\sigma^3,$$

$$cr(\omega_3\sigma^2) = 12\omega_3+16\omega_3\sigma+24\omega_3\sigma^2+8\omega_3\sigma^3,$$

$$c(\kappa r\sigma) = \frac{1}{2}\, cr(\omega_3\sigma),$$

qui seront constamment utilisées dans la suite.

1. *Cas où* $n \equiv 2$ *ou* $3 \pmod 4$.

Posons $n = 4u+3$ et considérons dans $\widetilde{KU}(L^n(8))$ les éléments suivants

$$t_1 = cr(x_1) = cr(\sigma), \quad t_2 = cr(x_2) = c(r\omega_2+2^{2u+2}.r\sigma),$$

$$t_3 = c(\kappa+2^u.r\omega_2+(-1)^u 2^{3u+2}.r\sigma), \quad t_4 = c(\kappa.r\sigma+2^{u+1}.r\omega_2.r\sigma+2^{3u+4}.r\sigma).$$

Dans la base $(x_i)_{1\leq i\leq 7}$ de $\widetilde{KU}(L^n(8))$ (comme $\mathbb{Z}$-module), ils s'écrivent

$$t_1 = (2-2^{2u+2}+2^{3u+3}+(-1)^u 2^{3u+3}-3.2^{3u+4})x_1 + (1-2^{u+1})x_2 + (1-3.2^{u+1})x_3 + $$
$$+ x_4 + 3x_5 + 3x_6 + x_7,$$

$$t_2 = (2^{3u+3}-(-1)^u 2^{3u+3}-2^{3u+5}-2^{4u+4})x_1 + (2-2^{u+1})x_2 - 2^{u+2}x_3 + x_4 +$$
$$+ 2x_5 + x_6,$$

$$t_3 = (2^{4u+3}-(-1)^u 2^{4u+3})x_1 - 2^{2u+1}x_2 + x_4,$$

$$t_4 = (2^{3u+5}+(-1)^u 2^{3u+4})x_1 - 2^{u+2}x_2 + 2^{u+2}x_3 - 2x_4 - 2x_5 - 3x_6 - x_7.$$

Vu le théorème 4.4.2, cela signifie que t_1, t_2, t_3, et t_4 *ont respectivement* 2^{4u+4}, 2^{2u+1}, 2^u et 2^u *pour ordre*. D'un autre côté, ils sont linéairement indépendants : en effet supposons que $\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2+\lambda_3 t_3+\lambda_4 t_4 = 0$, alors on doit avoir simultanément

$$(2-2^{2u+2}+2^{3u+3}-(-1)^u 2^{3u+3}-3.2^{3u+4})\lambda_1 + (2^{3u+3}-(-1)^u 2^{3u+3}-2^{3u+5}-2^{4u+4})\lambda_2 +$$
$$+ (2^{4u+3}-(-1)^u 2^{4u+3})\lambda_3 + (2^{3u+5}+2^{3u+4}+(-1)^u 2^{3u+4}+2^{3u+5})\lambda_4 \equiv 0 \pmod{2^{4u+5}} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &(1-2^{u+1})\lambda_1 + (2-2^{u+1})\lambda_2 - 2^{2u+1}\lambda_3 - 2^{u+2}\lambda_4 \equiv 0 \quad (2)\\ &(1-3.2^{u+1})\lambda_1 - 2^{u+2}\lambda_2 + 2^{u+2}\lambda_4 \equiv 0 \quad (3)\end{aligned}\right\} \pmod{2^{2u+2}}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-2\lambda_4\equiv 0 & (4)\\ 3\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_4\equiv 0 & (5)\\ 3\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_4\equiv 0 & (6)\\ \lambda_1-\lambda_4\equiv 0 & (7)\end{array}\right\}\pmod{2^u}$$

(1) montre que $\lambda_1 \equiv 0 \pmod{2^{3u+3}}$, (7) donne alors $\lambda_4 \equiv 0 \pmod{2^u}$; par (4) - (6) il s'ensuit $\lambda_3 \equiv 0 \pmod{2^u}$. Dans ces conditions (2) donne $\lambda_2 \equiv 0 \pmod{2^{2u+1}}$ et par conséquent (1) entraine $\lambda_1 \equiv 0 \pmod{2^{4u+4}}$. Autrement dit, dans $\tilde{KU}(L^{4u+3})$, (t_1,t_2,t_3,t_4) engendre le sous-groupe

$$G = \mathbb{Z}_{2^{4u+4}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{2u+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^u} \oplus \mathbb{Z}_{2^u} .$$

<u>Théorème 4.5.1.</u>

$$\tilde{KO}(L^{4u+3}(8)) \simeq Z_{2^{4u+u}} \oplus Z_{2^{2u+1}} \oplus Z_{2^u} \oplus Z_{2^u}$$

où chaque facteur est respectivement engendré par

$$y_1 = r\sigma,\quad y_2 = r\omega_2 + 2^{2u+2}.r\sigma,\quad y_3 = \kappa + 2^u r\omega_2 + (-1)^u.2^{3u+2}.r\sigma\ ,\ y_4 = \kappa.r(\sigma).$$

Lorsque $u = 0$, *on a* $\tilde{KO}(L^3(8)) \simeq \mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_2$ *avec* $r\sigma$ *et* $r\omega_2 + 4r\sigma$ *comme générateurs.*

<u>Démonstration.</u>

Soit $c : \tilde{KO}(L^{4u+3}) \to \tilde{KU}(L^{4u+3})$, alors $|\tilde{KO}(L^{4u+3})| \geq |\mathrm{Im}\ c| \geq |G|$; mais (th. 3.4.2) $|\tilde{KO}(L^{4u+3}(8))| = 2^{8u+5} = |G|$, donc $\mathrm{Im}\ c \simeq G \simeq \tilde{KO}(L^{4u+3})$.
Le fait que l'on ait pris $y_4 = \kappa.r\sigma$ comme générateur au lieu de

$$y'_4 = \kappa.r\sigma + 2^{u+1}.r\omega_2.r\sigma{+}2^{3u+4}.r\sigma$$

vient de ce que

$$c(2^u\kappa.r\sigma) = 2^{u-1}\quad cr(\omega_3\sigma) = -2^{u+1}\omega_3-2^{u+1}\omega_3\sigma-3.2^u\omega_3\sigma^2-2^u\omega_3\sigma^3 = 0$$

(prop. 4.2.4) i.e. $2^u\kappa.r\sigma = 0$ puisque c est injectif !

<u>Corollaire 4.5.2.</u>

L'homomorphisme de Bott $c : \tilde{KO}(L^n(8)) \to \tilde{KU}(L^n(8))$ est un monomorphisme lorsque $n \equiv 3 \pmod 4$.

Comme l'inclusion canonique $L^{4u+2} \hookrightarrow L^{4u+3}$ induit un isomorphisme $\widetilde{KO}(L^{4u+3}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{KO}(L^{4u+2})$ (prop. 3.4.5), nous avons aussi

Théorème 4.5.3.

$$\widetilde{KO}(L^{4u+2}(8)) \simeq \mathbb{Z}_{2^{4u+4}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{2u+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^u} \oplus \mathbb{Z}_{2^u}$$

où chaque facteur est respectivement engendré par y_1, y_2, y_3 et y_4 *(définis plus haut)*.

2. Cas où $n \equiv 1 \pmod 4$.

Le théorème 4.3.2 montre que

$$\widetilde{KU}(L^{4u+1}(8)) \simeq \mathbb{Z}_{2^{4u+3}} \oplus (\mathbb{Z}_{2^{2u+1}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{2^u})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{2^{u-1}})^2$$

avec

$x_1 = \sigma$, $x_2 = \omega_2 + 2^{2u+1}.\sigma$, $x_3 = \omega_2\sigma$, $x_4 = \omega_3$, $x_5 = \omega_3\sigma$, $x_6 = \omega_3\sigma^2 + 2^{3u+3}.\sigma$, $x_7 = \omega_3\sigma^3$.

Ainsi les éléments suivants

$t_1 = cr_1$, $t_2 = cr\, x_2$, $t_3 = c(\kappa) = \omega_3 = x_4$, $t_4 = c(\kappa.r\sigma - 2^{3u+2}.r\sigma)$,

de $\widetilde{KU}(L^{4u+1})$, s'écrivent dans la base $(x_i)_{r\leqslant i\leqslant 7}$

$$t_1 = (2-2^{2u+1}-3.2^{3u+3})x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 3x_6 + x_7,$$

$$t_2 = -(2^{3u+3}+2^{4u+2})x_1 + 2x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6,$$

$$t_3 = x_4,\ t_4 = 2^{3u+4}.x_1 - 2x_4 - 2x_5 - 3x_6 - x_7.$$

Alors, en procédant comme tout à l'heure, il est facile de vérifier que $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ engendre le sous-groupe

$$H = \mathbb{Z}_{2^{4u+2}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{2u}} \oplus \mathbb{Z}_{2^u} \oplus \mathbb{Z}_{2^{u-1}}$$

de $\widetilde{KU}(L^{4u+1})$. D'un autre côté on sait que l'inclusion canonique de L^{4u+1} dans L^{4u+2} induit un épimorphisme de $\widetilde{KO}(L^{4u+2})$ sur $\widetilde{KO}(L^{4u+1})$ (prop. 3.4.5 et *l*. 3.4.7), autrement dit : $\widetilde{KO}(L^{4u+1})$ est additivement engendré par $r\sigma$,

$r\omega_2$, $r\omega_2.r\sigma$, κ et $\kappa.r\sigma$, de plus les relations de $\widetilde{KO}(L^{4u+2})$ valent aussi dans $\widetilde{KO}(L^{4u+1})$. Plus précisément on y a (cf. th. 4.5.3)

$2^{4u+4}.r\sigma = 0$, $2^{2u+1}.r\omega_2 + 2^{4u+3}.r\sigma = 0$, $2^u.\kappa + 2^{2u}.r\omega_2 + (-1)^u 2^{4u+2}.\ r\sigma = 0$, $2^u\kappa.r\sigma = 0$.

Comme $2^{2u}.t_2 = 0$, on en déduit $2^{2u}.rt_2 = 0 = 2^{2u+1}.r\omega_2 + 2^{4u+2}.r\sigma = 0$, d'où $2^{4u+2}.r\sigma = 0$ et $2^{2u+1}.r\omega_2 = 0$. De même on a $2^u.\kappa + 2^{2u}.r\omega_2 = 0$ et $2^{u-1}r\omega_3 r\sigma = 0$. Posons donc

$$y_1 = r\sigma,\quad y_2 = r\omega_2,\quad y_3 = \kappa+2^u.r\omega_2,\quad y_4 = r\omega_3.r\sigma\ ,$$

alors $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ engendre un groupe dont l'ordre est au maximum égal à $2^{4u+2+2u+1+u+u-1} = 2^{8u+2}$, comme $|\widetilde{KO}(L^{4u+1}(8))| = 2^{8u+2}$, il s'ensuit

Théorème 4.5.4.

$$\widetilde{KO}(L^{4u+1}(8)) \simeq \mathbb{Z}_{2^{4u+2}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{2u+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^u} \oplus \mathbb{Z}_{2^{u-1}}$$

où chaque facteur est respectivement engendré par

$$y_1 = r\sigma,\ y_2 = r\omega_2,\ y_3 = \kappa+2^u.r\omega_2,\quad y_4 = r\omega_3.r\sigma.$$

Lorsque $u = 0$, $\widetilde{KO}(L^1(8)) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ *avec* $r\sigma$ *et* κ *comme générateurs.*

En ce qui concerne l'homomorphisme c dans le cas présent : d'une part la construction de H montre clairement que $H \subset \mathrm{Im}\ c$, d'autre part pour $y \in \widetilde{KO}(L^{4u+1}(8))$, soit $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4$, on obtient

$$c(y) = (\lambda_1 - 2^{2u+1}.\lambda_2 - 2^{3u+1}.\lambda_3 + 2^{3u+3}.\lambda_4)t_1 + (\lambda_2 + 2^u\lambda_3)t_2 + \lambda_3 t_3 + 2\lambda_4 t_4$$

i.e. $\mathrm{Im}\ c \subset H$ et par conséquent $\mathrm{Im}\ c \simeq H$. Nous avons donc

Proposition 4.5.5.

Pour $n = 4u+1$ avec $u > 0$; $\mathrm{Ker}\ c \simeq \mathbb{Z}_2$ et il est engendré par $2^{2u}(r\omega_2 + 2^{2u+1}.r\sigma)$.

3. *Cas où* $n \equiv 0 \pmod 4$.

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to \widetilde{KO}(S^{8u+2}) & \xrightarrow{\beta!} & \widetilde{KO}(L_o^{4u+1}) & \xrightarrow{\alpha!} & \widetilde{KO}(L^{4u}) & \to & \widetilde{KO}^1(S^{8u+2}) & \to \cdots \\
\downarrow c_o & & \downarrow c_1 & & \downarrow c_2 & & \downarrow & \\
\to \widetilde{KU}(S^{8u+2}) & \xrightarrow{\beta^*} & \widetilde{KU}(L_o^{4n+1}) & \xrightarrow{\alpha^*} & \widetilde{KU}(L^{4u}) & \to & \widetilde{KU}^1(S^{8u+2}) & \to \cdots
\end{array}$$

où les lignes sont exactes et les flèches verticales les homomorphismes de complexification. Nous savons que $\alpha^!$ (resp. $\beta^!$) est un épimorphisme (resp. un monomorphisme) (cf. ℓ. 3.4.6). Comme $\widetilde{KO}(S^{8u+2}) \simeq \mathbb{Z}_2$ et $\widetilde{KU}(S^{8u+2}) \simeq \mathbb{Z}$ il est clair que $c_o = 0$, aussi $c_1\beta^! = 0$ et par conséquent Ker $\alpha^! \simeq \mathbb{Z}_2 \subset$ Ker c_1 : mais (prop. 4.5.5 et cor. 3.4.9) Ker $c_1 \simeq \mathbb{Z}_2$, il en découle dans $\widetilde{KO}(L^{4u})$ la relation

$$2^{2u}.(r\omega_2+2^{2u+1}.r\sigma) = 0.$$

D'un autre côté, $\alpha^!$ étant surjectif, il est clair que $\widetilde{KO}(L^{4u})$ est engendré par $r\sigma$, - $r\omega_2$, $\kappa+2^u.r\omega_2$ et $r\omega_3.r\sigma$ (th. 4.5.4). De cette dernière remarque, de la relation ci-dessus et du fait que $|\widetilde{KO}(L^{4u}(8))| = 2^{8u+1}$ (th. 3.4.2), il résulte

Théorème 4.5.6.

$$\widetilde{KO}(L^{4u}(8)) \simeq \mathbb{Z}_{2^{4u+2}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{2u}} \oplus \mathbb{Z}_{2^u} \oplus \mathbb{Z}_{2^{u-1}}$$

où chaque facteur est respectivement engendré par

$$y_1 = r\sigma,\quad y_2 = r\omega_2+2^{2u+1}.r\sigma,\quad y_3 = \kappa+2^u.r\omega_2,\quad y_4 = r\omega_3.r\sigma.$$

Lorsque $u = 0$, $\widetilde{KO}(L^o(8)) \xleftarrow{\sim} \widetilde{KO}(S^1)$ *(cf. cor. 3.4.9).*

Corollaire 4.5.7.

Pour $u \neq 0$, $\widetilde{KO}(L_o^{4u}(8)) \simeq \mathbb{Z}_{2^{4u+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{2u}} \oplus \mathbb{Z}_{2^u} \oplus \mathbb{Z}_{2^{u-1}}$ avec pour générateurs

$$y_1 = r\sigma,\quad y_2 = r\omega_2,\quad y_3 = K,\quad y_4 = r\omega_3.r\sigma.$$

Ainsi dans la suite exacte $0 \to \mathbb{Z}_2 \to \widetilde{KO}(L^{4u}(8)) \xrightarrow{\alpha!} \widetilde{KO}(L_o^{4u}(8)) \to 0$, Ker $\alpha^!$ est engendré par $2^{4u+1}.r\sigma$.

4.6. *Structure multiplicative de* $\widetilde{KO}(L^n(8))$.

Les résultats du § 4.5 montrent que $\widetilde{KO}(L^n(8))$ est additivement engendré engendré par $r\sigma$, $r\omega_2$, κ et $\kappa.r\sigma$ ou $r\omega_3.r\sigma$. Les calculs préliminaires de ce même paragraphe permettent de voir que

$c((r\sigma)^2) = c(r\omega_2-4r\sigma)$, $c((r\omega_2)^2) = c(r\omega_3-4r\omega_2)$, $c(\kappa^2) = -c(2\kappa) = -c(r\omega_3)$,
$c(\kappa(r\sigma)^2) = -c(2\kappa+2\kappa.r\sigma)$, $c(\kappa^2.r\sigma) = -c(2\kappa.r\sigma)$, $c((\kappa r\sigma)^2) = c(4\kappa+4\kappa r\sigma)$,
$c(\kappa r\sigma r\omega_2) = -c(2\kappa r\sigma)$, $c(r\omega_2 r\sigma) = c(\kappa r\sigma+2\kappa-2r\omega_2)$, $c(\kappa r\omega_2) = -c(r\omega_3)$.

Posons, $a_1 = r$, $a_2 = r\omega_2$, $a_3 = \kappa$ et $a_4 = \kappa r\sigma$: lorsque $n \equiv 3 \pmod 4$ nous avons vu que c est un monomorphisme (cor. 4.5.2), alors la table de multiplication suivante

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	$-4a_1+a_2$	$-2a_2+2a_3+a_4$	a_4	$-2a_3-2a_4$
a_2	$-2a_2+2a_3+a_4$	$-4a_2+2a_3$	$-2a_3$	$-2a_4$
a_3	a_4	$-2a_3$	$-2a_3$	$-2a_4$
a_4	$-2a_3-2a_4$	$-2a_4$	$-2a_4$	$4a_3+4a_4$

décrit entièrement la structure multiplicative dans tout anneau $KO(L^{4u+3}(8))$. En fait, plus généralement

Théorème 4.6.1.

Pour tout $n \geq 3$, *la structure multiplicative de* $\widetilde{KO}(L^n(8))$ *est donnée par la table précédente.*

En effet, comme toutes les inclusions canoniques $L^n \hookrightarrow L^{n+1}$ induisent des épimorphismes $\widetilde{KO}(L^{n+1}) \to \widetilde{KO}(L^n)$ (cf. §.3.4), les relations ci-dessus valent aussi dans $\widetilde{KO}(L^n)$.

La connaissance détaillée que nous avons maintenant de $\widetilde{KO}(L^n(8))$ va nous permettre d'améliorer la proposition 3.4.10 pour les espaces lenticulaires d'ordre 8.

Pour tout $i \geq 1$, écrivons

$$(r\sigma)^i = \lambda_1^i a_1 + \lambda_2^i a_2 + \lambda_3^i a_3 + \lambda_4^i a_4.$$

En calculant $(r\sigma)^{i+1}$ au moyen de la table précédente, nous obtenons

$$\lambda_1^{i+1} = -4\lambda_1^i,\ \lambda_2^{i+1} = \lambda_1^i - 2\lambda_2^i,\ \lambda_3^{i+1} = 2\lambda_2^i - 2\lambda_4^i,\ \lambda_4^{i+1} = \lambda_2^i + \lambda_3^i - 2\lambda_4^i .$$

De ces relations de récurrence, nous déduisons notamment que

$$\lambda_1^i = (-1)^{i-1} 2^{2(i-1)} \quad , \quad \lambda_2^i = (-1)^i (2^{2i-3} - 2^{i-2}),$$

$$\lambda_3^i = \begin{cases} 2^{5k-4}\,\mu_k & \text{pour } i = 4k+1, \\ -2^{5k-2}\mu_k & \text{pour } i = 4k+2, \\ (-1)^k 2^{2k} + 2^{5k}\mu_k & \text{pour } i = 4k+3, \\ (-1)^k 3.2^{2k+1} - 2^{5k+2}\mu_k & \text{pour } i = 4k+4, \end{cases}$$

avec $\mu_k = \frac{13}{9}(2^{3k}+(-1)^{k+1})$ pour tout $k \geq 0$. $[\mu_o = 0$ et $\frac{1}{9}\mu_k$ est entier pour $k \geq 1$ car $2^{3k} = (9-1)^k \equiv (-1)^k \pmod 9]$.

Pour $n = 4u$ $(u \geq 1)$, le th. 4.5.6 montre que $r\sigma$ a pour ordre 2^{4u+2}, d'où

$$2^{4u+4-2i}(r\sigma)^i = (-1)^{i-1} 2^{4u+2} r\sigma = 0.$$

En faisant de même pour les autres cas, nous obtenons (comparer avec 3.4.10).

<u>Proposition 4.6.2.</u>

1. L'ordre de $(r\sigma)^i$ est 2^{n+3-2i} ou 2^{n+4-2i} selon que n est impair ou pair.
2. L'ordre de κ^i et $2^{2+[\frac{n}{4}]-i}$.
3. $(\kappa)^{[\frac{n}{4}]+2} = 0$ et $(r\sigma)^{[\frac{n}{2}]+2} = 0.$

Le résultat pour κ^i vient de ce que : $\kappa^i = (-1)^{i-1} 2^{i-1}\kappa$ pour tout $i \geq 1$. (cf. table).

<u>Remarque.</u>

On aura noté que dans toute cette étude des lenticulaires d'ordre 8 le fait essentiel est l'injectivité de l'homomorphisme de complexification lorsque $n \equiv 3 \pmod 4$: cela ne me semble pas fortuit et il est probable qu'il en soit ainsi pour les espaces lenticulaires d'ordre 2^m. C'est d'ailleurs le cas pour les espaces projectifs réels [1] et les espaces $L^{4u+3}(4)$ ([34], p. 262).

CHAPITRE V

Q_m-FORMES SPHERIQUES

Dans tout ce chapitre m désigne un entier supérieur ou égal à 2.

5.1. *Le groupe quaternionique généralisé* Q_m.

Le groupe quaternionique généralisé Q_m est le groupe de présentation

$$x^{2^{m-1}} = y^2 \quad , \quad yxy^{-1} = x^{-1}.$$

La seconde relation impliquant $yx^{2^{m-1}}y^{-1} = x^{-2^{m-1}}$, on en déduit

$$x^{2^m} = 1 = y^4.$$

Q_m a pour ordre 2^{m+1} et chacun de ses éléments u peut se mettre, de manière unique, sous la forme $u = x^a y^b$ avec $0 \leqslant a \leqslant 2^m-1$, $b = 0,1$. Les classes de conjugaison de Q_m sont

$$c_o = \{x^{2a}y \mid 0 \leqslant a \leqslant 2^{m-1}-1\}, \quad c_1 = \{x^{2a+1}y \mid 0 \leqslant a \leqslant 2^{m-1}-1\} ,$$

$$c_{a+2} = \{x^a, x^{-a}\} \text{ avec } 0 \leqslant a \leqslant 2^{m-1}.$$

Le centre de Q_m est $Z(Q_m) = \{1, x^{2^{m-1}}\}$ qui est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$; x engendre un groupe cyclique d'ordre 2^m et y un groupe cyclique d'ordre 4. Le sous-groupe des commutateurs de Q_m est $[Q_m, Q_m] = \{1, x^2\}$, il est donc isomorphe au groupe cyclique d'ordre 2^{m-1}.

En considérant la sphère unité S^3 comme groupe (multiplicatif) des quaternions réels de norme 1, autrement dit $S^3 = Sp(1)$, Q_m s'identifie au sous-groupe de S^3 engendré par

$$\zeta = \exp(\frac{i\Pi}{2^{m-1}}) \quad \text{et} \quad j,$$

à l'aide de la correspondance $x \mapsto \zeta$, $y \mapsto j$.

Le groupe $Q_m/[Q_m,Q_m]$ ayant pour ordre 4, il y a quatre représentations unitaires irréductibles de degré 1 (prop. 1.2.2. (iii)), à savoir ξ_o, ξ_1, ξ_2 et ξ_3 définies par

$$\xi_o(x) = 1, \quad \xi_o(y) = 1 \ ; \quad \xi_1(x) = 1, \quad \xi_1(y) = -1 \ ;$$
$$\xi_2(x) = -1, \quad \xi_2(y) = 1 \ ; \quad \xi_3(x) = -1, \quad \xi_3(y) = -1.$$

Q_m ayant $2^{m-1}+3$ classes de conjugaison, il y a $2^{m-1}-1$ autres représentations unitaires irréductibles : elles sont de degré 2 (cf. prop. 1.2.2) et sont données par

$$\xi_{r+3}(x) = \begin{pmatrix} \zeta^r & 0 \\ 0 & \zeta^{-r} \end{pmatrix}, \qquad \xi_{r+3}(y) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $1 \leqslant r \leqslant 2^{m-1}-1$.

Soit χ_r le caractère de ξ_r, $0 \leqslant r \leqslant 2^{m-1}+2$, la table suivante

	c_o	c_1	c_{a+2} $\quad 0 \leqslant a \leqslant 2^{m-1}$
χ_o	1	1	1
χ_1	-1	-1	1
χ_2	1	-1	$(-1)^a$
χ_3	-1	1	$(-1)^a$
χ_{r+3} $1 \leqslant r \leqslant 2^{m-1}-1$	0	0	$\zeta^{ra} + \zeta^{-ra}$

montre que les représentations considérées ne sont pas équivalentes (prop. 1.2.1) et permet d'obtenir la structure multiplicative de $RU(Q_m)$ à l'aide du produit tensoriel des caractères. Ainsi

<u>Proposition 5.1.1.</u> (cf. [17])

$RU(Q_m)$, en tant que groupe, est le groupe abélien libre engendré par $(\xi_r)_{0 \leqslant r \leqslant 2^{m-1}+2}$; sa structure multiplicative est donnée par

$$\xi_o = 1, \quad \xi_1^2 = \xi_2^2 = 1, \quad \xi_1\xi_2 = \xi_3, \quad \xi_1\xi_4 = \xi_4, \quad \xi_2\xi_4 = \xi_{2^{m-1}+2},$$

$$\xi_4^2 = \begin{cases} 1 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 & \text{pour } m = 2, \\ 1 + \xi_1 + \xi_5 & \text{pour } m \geqslant 3, \end{cases}$$

$$\xi_r\xi_s = \xi_s\xi_r \qquad \text{pour } 0 \leqslant r,s \leqslant 2^{m-1}+2,$$

$$\xi_4\xi_r = \xi_{r+1} + \xi_{r-1} \quad \text{pour } 5 \leqslant r \leqslant 2^{m-1}+1 \text{ (quand } m \geqslant 3).$$

5.2. *Les formes sphériques associées à* Q_m.

Il est clair que ξ_o, ξ_1, ξ_2 et ξ_3 ne sont pas des représentations sans point fixe de Q_m, en fait ([67] p. 171-172) les seules représentations unitaires irréductibles sans point fixe de Q_m sont les ξ_{r+3} où $r = 1,3,5,\ldots 2^{m-1}-1$. Il s'ensuit que les seules sphères sur lesquelles Q_m opère librement sont les sphères S^{4n+3} $(n \geqslant 0)$, l'action se faisant alors au moyen d'une représentation virtuelle ρ de la forme

$$\rho = \sum_{i=1}^{s} n_i\rho_i$$

où $\sum_{i=1}^{s} n_i = n+1$ et $\rho_i \in \{\xi_{r+3} \mid r = 1,3,5,\ldots,2^{m-1}-1\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$.

Définition 5.2.1.

Soient $(r_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ n+1 entiers -non nécessairement distincts- de $\{1,3,5,\ldots,2^{m-1}-1\}$ et $\rho_i = \xi_{r_i+3}$, alors $N^n(m\,;\, r_1,r_2,\ldots,r_{n+1})$ est la Q_m-forme sphérique généralisée S^{4n+3}/Q_m où Q_m opère au moyen de $\rho = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i$. Lorsque tous les r_i sont égaux à un même nombre r, on écrit $N^n(m;r)$ pour $N^n(m\,;\, r,r,\ldots,r)$; enfin, pour $r = 1$, la forme $N^n(m;1)$, notée $N^n(m)$, est appelée Q_m-forme sphérique ordinaire.

Remarques.

1. $N^n(m;r)$ correspond aux formes notées Q^r_{m+1} par D. Pitt [51], $N^n(2)$ à celles notées X_{n+1} par J.M. Braemer [10]. Les notations adoptées ci-dessus nous ont été inspirées par celles de K. Fujii [17] et R.H. Szczarba [60].
2. On pourra toujours supposer que les n+1 nombres r_i sont tels que $1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_{n+1}$.

3. Il n'y a qu'une seule forme sphérique associée à Q_2 car ξ_4 est la seule représentation unitaire irréductible de degré 2 de Q_2 (elle est évidemment sans point fixe).

Les Q_m-formes sphériques possèdent une structure de C.W. complexe fini (cf. [17]) donnée par

$$\begin{tikzcd}
 & & & e_1^{4i+1} \arrow[dl, "0"'] & e_1^{4i+2} \arrow[l, "2^{m-1}"'] \arrow[dl, "-2"] & & \\
\cdots & e^{4i-1} \arrow[l] & e^{4i} \arrow[l, "2^{m+1}"'] & & & e^{4i+3} \arrow[ul, "0"'] \arrow[dl, "0"] & \cdots \arrow[l] \\
 & & & e_2^{4i+1} \arrow[ul, "0"] & e_2^{4i+2} \arrow[l, "0"] \arrow[ul, "2"'] & &
\end{tikzcd}$$

avec $i \leqslant n$, $e^{k+1} \xrightarrow{a} e^k$ signifiant que l'application d'attachement cellulaire est de degré a.

Enfin, on sait que Q_m a pour groupes de cohomologie entière [11, p.253]

$$H^o(Q_m,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad , \quad H^{2k+1}(Q_m,\mathbb{Z}) = 0,$$

$$H^{4k}(Q_m,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{2^{m+1}} \quad \text{pour } k \neq 0, \quad H^{4k+2}(Q_m,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,$$

aussi (ℓ. 1.4.1) s'ensuit-il

<u>Proposition 5.2.2.</u>

1. Les groupes de cohomologie entière de S^{4n+3}/Q_m sont

$$H^k(S^{4n+3}/Q_m,Z) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } k = 0 \text{ et } k = 4n+3, \\ \mathbb{Z}_{2^{m+1}} & \text{pour } k \equiv 0 \pmod 4 \text{ et } 0<k<4n+3, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus Z_2 & \text{pour } k \equiv 2 \pmod 4 \text{ et } 0<k<4n+3, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

2. Les groupes de cohomologie modulo 2 sont

$$H^k(S^{4n+3}/Q_m,Z_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{pour } k \equiv 0 \text{ ou } 3 \pmod 4 \text{ et } 0\leqslant k\leqslant 4n+3, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{pour } k \equiv 1 \text{ ou } 2 \pmod 4 \text{ et } 0<k<4n+3. \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

5.3. *Etude de* $KU(N^n(m\ ;\ r_1,r_2,\ldots,r_{n+1}))$.

D'après la proposition 1.4.8 décrire $KU(N^n(m\ ;\ r_1,r_2,\ldots,r_{n+1}))$ revient à calculer ϕ avec $\rho = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_{r_i+3}$; pour $1 \leq j \leq n+1$ nous avons

$$\Lambda^j\rho = \Lambda^j\left(\sum_{i=1}^{n+1} \xi_{r_i+3}\right) = \sum_{j_1+j_2+\ldots+j_{n+1}=j} \Lambda^{j_1}\xi_{r_1+3}\otimes\Lambda^{j_2}\xi_{r_2+3}\otimes\ldots\otimes\Lambda^{j_{n+1}}\xi_{r_{n+1}+3}\ .$$

Puisque ξ_{r_i+3} est, pour chaque $1 \leq i \leq n+1$, une représentation unitaire de degré 2, il vient

$$\Lambda^{j_i}\xi_{r_{i+3}} = \begin{cases} 1 & \text{si } j_i = 0, \\ \xi_{r_i+3} & \text{si } j_i = 1, \\ \det(\xi_{r_i+3}) & \text{si } j_i = 2, \\ 0 & \text{si } j_i > 2\ ; \end{cases}$$

mais compte tenu de la définition de ξ_{r_i+3}, on a $\det(\xi_{r_i+3}) = \xi_o = 1$.

Nous obtenons donc

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j\Lambda^j\rho = \prod_{i=1}^{n+1} (2-\xi_{r_i+3}) \qquad (1)$$

autrement dit

Théorème 5.3.1.

L'anneau $KU(N^n(m\ ;\ r_1,r_2,\ldots,r_{n+1}))$ *est isomorphe à l'anneau*

$$RU(Q_m)/< \prod_{i=1}^{n+1} (2-\xi_{r_i+3}) >.$$

L'homomorphisme naturel d'anneaux $RU(Q_m) \xrightarrow{\theta} KU(N^n(m\ ;\ r_1,r_2,\ldots,r_{n+1}))$ étant surjectif, il est clair (d'après 5.1.1) que la structure multiplicative de $KU(N^n(m\ ;\ r_1,r_2,\ldots,r_{n+1}))$ est entièrement déterminée par les éléments $\xi_o = 1$, ξ_1, ξ_2 et ξ_4 (avec les habituels abus de notations). Plus précisément, posons

$\alpha = \xi_1-1$, $\beta = \xi_2-1$, $\gamma = \xi_1+\xi_2+\xi_3-3$ et $\delta_r = \xi_{r+3}-2$ avec $1 \leq r \leq 2^{m-1}-1$,

alors $\widetilde{RU}(Q_m)$ est additivement engendré par α,β,γ et δ_r, sa structure multimplicative est donnée par les relations

$$\alpha^2 - 2\alpha, \quad \beta^2 = -2\beta, \quad \gamma = \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta,$$

$$\alpha\delta_1 = -2\alpha, \quad \beta\delta_1 = -2\beta + \delta_{2^{m-1}-1} - \delta_1,$$

$$\delta_1^2 = \begin{cases} -4\delta_1 + \gamma & \text{pour } m = 2, \\ \\ -4\delta_1 + \delta_2 + \alpha & \text{pour } m = 3, \end{cases} \tag{2}$$

$$\delta_{r+1} = \delta_1\delta_r + 2\gamma_1 + 2\delta_r - \delta_{r-1} \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant r \leqslant 2^{m-1}-2.$$

Ainsi

Proposition 5.3.2.

1. $\widetilde{KU}(N^n(m \; ; \; r_1,r_2,\ldots,r_{n+1}))$ est, en tant que groupe, additivement engendré par α,β,γ et $(\delta_r)_{1\leqslant r\leqslant 2^{m-1}-1}$.
2. L'anneau $\widetilde{KU}(N^n(m \; ; \; r_1,r_2,\ldots,r_{n+1}))$ est multiplicativement engendré par α,β et δ_1.

D'un autre côté, en appliquant la prop. 1.4.2, nous obtenons

Proposition 5.3.3.

$$|\widetilde{KU}(N^n(m \; ; \; r_1,r_2,\ldots,r_{n+1}))| = 2^{n(m+3)+2},$$

$$\widetilde{KU}^{-1}(N^n(m,r_1,r_2,\ldots,r_{n+1})) \approx \mathbb{Z}.$$

Nous nous proposons maintenant de comparer, du point de vue de la KU-théorie, les formes sphériques généralisées et ordinaires. Vue la remarque 3 du §.5.2, nous pouvons supposer $m \geqslant 3$.

Lemme 5.3.4.

Pour tout $5 \leqslant r \leqslant 2^{m-1}+2$ il existe $P_r \in \mathbb{Z}[\xi_4]$ et $\alpha_r \in \mathbb{Z}$ tels que

1. $\xi_r = \xi_4 \, P_r(\xi_4) + \alpha_r(1+\xi_1)$;
2. $d^o\text{-}P_r = r-4$ et $\alpha_r = 0$ ou $(-1)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}$ selon que r est pair ou impair ;
3. $P_r(2) = 1-\alpha_r$.

Démonstration.

D'après 5.1.1., puisque $m \geq 3$, nous avons

$$\xi_4^2 = 1 + \xi_1 + \xi_5,$$

$$\xi_{r+1} = \xi_4\xi_r - \xi_{r-1} \quad \text{pour} \quad 5 \leq r \leq 2^{m-1}+1.$$

Pour $r = 5$, nous avons donc $\xi_5 = \xi_4^2 - (1+\xi_1)$ soit $P_5(\xi_4) = \xi_4$, $\alpha_5 = -1$ et $P_5(2) = 1-\alpha_5$: les assertions du lemme sont vraies. Supposons le lemme vrai jusqu'à r, nous avons

$$\xi_{r+1} = \xi_4\xi_r - \xi_{r-1} = \xi_4[\xi_4 P_r(\xi_4) - P_{r-1}(\xi_4) + 2\alpha_r] - \alpha_{r-1}(1+\xi_1),$$

posons $P_{r+1}(\xi_4) = \xi_4 P_r(\xi_4) - P_{r-1}(\xi_4) + 2\alpha_r$, $\alpha_{r+1} = -\alpha_{r-1}$: on vérifie aisément que $P_{r+1} \in \mathbb{Z}[\xi_4]$, $d^o\text{-}P_{r+1} = r-3$, $\alpha_{r+1} \in \mathbb{Z}$ avec $\alpha_{r+1} = 0$ si r est impair, $\alpha_{r+1} = (-1)^{1+[\frac{r}{2}]} = (-1)^{[\frac{r+2}{2}]}$ si r est pair ; enfin $P_{r+1}(2) = 2P_r(2) - P_{r-1}(2) + 2\alpha_r$, soit $P_{r+1}(2) = 2(1-\alpha_r) - (1-\alpha_{r-1}) + 2\alpha_r = 1 + \alpha_{r-1} = 1 - \alpha_{r+1}$.

Corollaire 5.3.5.

Soit $I_n^m(r_1,r_2,\ldots,r_{n+1})$ (resp. I_n^m) l'idéal de $RU(Q_m)$ engendré par $\prod_{i=1}^{n+1}(2-\xi_{r_i+3})$ (resp. $(2-\xi_4)^{n+1}$), alors $I_n^m \subset I_n^m(r_1,r_2,\ldots,r_{n+1})$.

Il en résulte donc (th. 5.3.1, prop. 5.3.3. et cor. 5.3.5)

Théorème 5.3.6.

Il existe un isomorphisme canonique d'anneaux de $KU(N^n(m\ ;\ r_1,r_2,\ldots,r_{n+1}))$ *sur* $KU(N^n(m))$.

Comme pour les espaces lenticulaires, il nous suffira désormais de nous limiter aux Q_m-formes sphériques ordinaires.

Nous avons vu (§.5.1) que le générateur x (resp. y) de Q_m engendrait un groupe cyclique d'ordre 2^m (resp. 4) dans Q_m. Considérons alors les inclusions

$$\rho : \mathbb{Z}_{2^m} \to Q_m \quad \text{et} \quad \rho' : \mathbb{Z}_4 \to Q_m$$

définies respectivement par $\rho(X) = x$ et $\rho'(Y) = y$ où X et Y sont respectivement des générateurs de $\mathbb{Z}_{2^m}$ et $\mathbb{Z}_4$; elles induisent des homomorphismes d'anneaux

$$\rho^* : RU(Q_m) \to RU(\mathbb{Z}_{2^m}) \quad \text{et} \quad \rho'^* : RU(Q_m) \to RU(\mathbb{Z}_4).$$

Comme il est bien connu que $RU(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}[\lambda_p]/< \lambda_p^p - 1 >$ où λ_p est la représentation complexe (de degré 1) canonique définie par

$$\lambda_p(\bar{1}) = \exp(\frac{2i\Pi}{p}) = \zeta_p,$$

nous obtenons pour ξ_1, ξ_2 et ξ_4 de $RU(Q_m)$

$$\rho^*(\xi_1)(\bar{1}) = \xi_1(x) = 1, \quad \rho^*(\xi_2)(\bar{1}) = \xi_2(x) = -1, \quad \rho^*(\xi_4)(\bar{1}) = \zeta_{2^m} + \bar{\zeta}_{2^m},$$

$$\rho'^*(\xi_1)(\bar{1}) = \xi_1(y) = -1, \quad \rho'^*(\xi_2)(\bar{1}) = \xi_2(y) = 1, \quad \rho'^*(\xi_4)(\bar{1}) = \zeta_4 + \bar{\zeta}_4,$$

autrement dit

$$\rho^*(\xi_1) = 1, \quad \rho^*(\xi_2) = \lambda_{2^m}^{2^{m-1}}, \quad \rho^*(\xi_4) = \lambda_{2^m} + \bar{\lambda}_{2^m},$$
$$\rho'^*(\xi_1) = \lambda_4^2, \quad \rho'^*(\xi_2) = 1, \quad \rho'^*(\xi_4) = \lambda_4 + \bar{\lambda}_4.$$

En appelant σ_p la classe de $\lambda_p - 1$ dans $\widetilde{KU}(L^{2n+1}(p))$, les théorèmes 2.2.3 et 5.3.1 montrent que pour les homomorphismes

$$\rho^! : \widetilde{KU}(S^{4n+3}/Q_m) \to \widetilde{KU}(L^{2n+1}(2^m)), \quad \rho'^! : \widetilde{KU}(S^{4n+3}/Q_m) \to \widetilde{KU}(L^{2n+1}(4)),$$

induits par ρ et ρ', on a

<u>Proposition 5.3.7.</u>

$$\rho^!(\alpha) = 0, \quad \rho^!(\beta) = (\sigma_{2^m}+1)^{2^{m-1}} - 1, \quad \rho^!(\delta_1) = \sigma_{2^m} + \bar{\sigma}_{2^m},$$
$$\rho'^!(\alpha) = (\alpha_4+1)^2 - 1, \quad \rho'^!(\beta) = 0, \quad \rho'^!(\delta_1) = \sigma_4 + \bar{\sigma}_4.$$

L'intérêt de la dernière proposition est clair : moyennant les résultats du ch. IV, elle permet d'obtenir une borne inférieure de l'ordre de certains éléments de $\widetilde{KU}(S^{4n+3}/Q_m)$.

Pour $n = 0$, on a néanmoins directement

Théorème 5.3.8.

$\widetilde{KU}(N^o(m)) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, *chacun des facteurs étant respectivement engendrés par* α *et* β.

Démonstration.

Le th. 5.3.1 montre que dans $\widetilde{KU}(N^o(m))$ on a $\delta_1 = 0$, ce qui réduit les relations (2) à en particulier $\alpha^2 = -2\alpha = 0$ et $\beta^2 = -2\beta = 0$. En fait α et β ont pour ordre 2 : si ce n'était pas le cas $\widetilde{KU}(N^o(m))$ serait trivial et ceci contredirait la prop. 5.3.3 qui assure que $|\widetilde{KU}(N^o(m))| = 4$. Le résultat s'ensuit aisément.

5.4. *K-théorie complexe des Q_3-formes sphériques.*

Dans $RU(Q_3)$ les seules représentations unitaires irréductibles sans point fixe sont ξ_4 et ξ_6 ; en posant $\xi_o = 1$, $\alpha = \xi_1-1$, $\beta = \xi_2-1$, $\gamma = \xi_1+\xi_2+\xi_3-3$, $\delta_1 = \xi_4-2$, $\delta_2' = \alpha+\delta_2$ avec $\delta_2 = \xi_5-2$ et $\delta_3 = \xi_6-2$, à l'aide de la table de multiplication

$\xi_o=1$	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
ξ_1	1	ξ_3	ξ_2	ξ_4	ξ_5	ξ_6
ξ_2	ξ_3	1	ξ_1	ξ_6	ξ_5	ξ_4
ξ_3	ξ_2	ξ_1	1	ξ_6	ξ_5	ξ_4
ξ_4	ξ_4	ξ_6	ξ_6	$1+\xi_1+\xi_5$	$\xi_6+\xi_4$	$\xi_2+\xi_3+\xi_5$
ξ_5	ξ_5	ξ_5	ξ_5	$\xi_6+\xi_4$	$1+\xi_1+\xi_2+\xi_3$	$\xi_6+\xi_4$
ξ_6	ξ_6	ξ_4	ξ_4	$\xi_2+\xi_3+\xi_5$	$\xi_6+\xi_4$	$1+\xi_1+\xi_5$

nous déduisons les relations suivantes dans $\widetilde{RU}(Q_3)$

$$\alpha^2 = -2\alpha, \quad \alpha\beta = \gamma-2\alpha-2\beta, \quad \alpha\gamma = -4\alpha, \quad \beta^2 = -2\beta, \quad \beta\gamma = -4\beta, \quad \gamma^2 = -4\gamma,$$

$$\alpha\delta_1 = -2\alpha, \quad \beta\delta_1 = \delta_3-\delta_1-2\beta, \quad \gamma\delta_1 = 2\delta_3-2\delta_1-2\gamma, \quad \delta_1^2 = \delta_2'-4\delta_1,$$

$$\alpha\delta_2' = -4\alpha, \quad \beta\delta_2' = \gamma-2\alpha-4\beta, \quad \gamma\delta_2' = -4\alpha-2\gamma, \quad \delta_1\delta_2' = -2\delta_2'+\delta_3-\delta_1,$$

$$\delta_2'^2 = \gamma-2\alpha-4\delta_2', \quad \alpha\delta_3 = -2\alpha, \quad \beta\delta_3 = \delta_1-\delta_3-2\beta, \quad \gamma\delta_3 = 2\delta_1-2\delta_3-2\gamma,$$

$$\delta_1\delta_3 = \gamma-2\alpha+\delta_2'-2\delta_1-2\delta_3, \quad \delta_2'\delta_3 = -2\delta_2'+\delta_1-\delta_3, \quad \delta_3^2 = \delta_2'-4\delta_3.$$

Compte tenu du théorème 5.3.6, il nous suffit d'étudier la KU-théorie des Q_3-formes sphériques ordinaires $N^n(3)$. Nous allons détailler la structure de groupe de $\widetilde{KU}(N^n(3))$ grâce à 5.3.1, 5.3.2 et les relations précédentes. De $\delta_2' = \delta_1^2+4\delta_1$ et $\delta_1\delta_2' = -2\delta_2'+\delta_3-\delta_1$ nous déduisons

$$\delta_1^3 + 6\delta_1^2 + 9\delta_1 = \delta_3 \qquad (1),$$

comme $\delta_2'\delta_3 = -2\delta_2'+\delta_1-\delta_3$, (1) devient

$$\delta_1^5 + 10\delta_1^4 + 34\delta_1^3 + 44\delta_1^2 + 16\delta_1 = 0 \qquad (2).$$

D'autre part nous avons aussi

$$\delta_1^{n+1} = 0 \qquad (3).$$

<u>Proposition 5.4.1.</u>

(i) $2^{2i+4}\delta_1^{n-i} = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$,

(ii) $2^{2i+3}\delta_1^{n-i} = \pm\, 2^{2i+5}\delta_1^{n-1-i}$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-2$.

<u>Preuve</u>.

Il est clair que (ii) se déduit de (i) en multipliant (2) par $2^{2i+1}\delta_1^{n-2-i}$ où $0 \leqslant i \leqslant n-2$. D'autre part, en multipliant (2) par δ_1^{n-1} $(n \geqslant 1)$, on voit que (i) est vrai pour $i = 0$; supposons cette assertion vraie jusqu'à i_o-1 avec $i_o-1 < n-1$ et multiplions (2) par $2^{2i_o}\delta_1^{n-i_o-1}$, nous avons

$$-2^{4+2i_o}\delta_1^{n-i_o} = 2^{2i_o}\delta_1^{n-i_o+4} + 5.2^{2i_o+1}\delta_1^{n-i_o+3} + 17.2^{2i_o+1}\delta_1^{n-i_o+2} +$$
$$+ 11.2^{2i_o+2}\delta_1^{n-i_o+1}.$$

L'hypothèse de récurrence montre alors que chaque terme du second membre est nul.

De la même manière nous savons que $\delta_2'^2 + 4\delta_2' = \gamma-2\alpha$, comme

$$(\gamma-2\alpha)^2 = -4(\gamma-2\alpha) \tag{4}$$

il s'ensuit

$$\delta_2'^4 + 8\delta_2'^3 + 20\delta_2'^2 + 16\delta_2' = 0 \tag{5}.$$

Proposition 5.4.2.

1. Soit n impair, $n = 2p+1$, alors

$2^{2i}\delta_2'^{p+2-i} = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant p+1$,

$2^{2i}\delta_2'^{p+1-i} = -2^{2i-2}\delta_2'^{p+2-i}$ pour $2 \leqslant i \leqslant p$.

2. Soit n pair, $n = 2p$, alors

$\delta_2'^{p+1} = 0$, $2^{2i+1}\delta_2'^{p+1-i} = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$,

$2^{2i+1}\delta_2'^{p-i} = -2^{2i-1}\delta'^{p+1-i} = 0$ pour $2 \leqslant i \leqslant p-1$.

Preuve.

Soit $N > 0$, alors $\delta_2'^N = (\delta_1^2+4\delta_1)^N = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} 2^{2i}\delta_1^{2N-i}$: de la proposition précédente, pour n impair (resp. pair) avec $N = p+2$ (resp. $N = p+1$) il s'ensuit clairement $\delta_2'^{p+2} = 0$ (resp. $\delta_2'^{p+1} = 0$). Alors (5) et un raisonnement par récurrence sur i donnent $2^{2i}\delta_2'^{p+2-i} = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant p+1$ (resp. $2^{2i+1}\delta'^{p+1-i} = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant p$). Enfin, il suffit de multiplier (5) par $2^{2i-4}\delta_2'^{p-i}$ avec $2 \leqslant i \leqslant p$ (resp. par $2^{2i-3}\delta_2'^{p-i-1}$ avec $2 \leqslant i \leqslant p-1$) pour obtenir les autres assertions.

Corollaire 5.4.3.

(i) $2^{n+1}\alpha = 0$;

(ii) $2^{n+1}\beta = 0$;

(iii) $2^{[\frac{n}{2}]}(\gamma-2\alpha) = 0$, pour $n = 2p$ on a en fait $2^{p-1}(\gamma-2\alpha) = \pm 2^n\delta_2'$;

(iv)
$$2^{[\frac{n}{2}]}(\delta_1-\delta_3) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ pair,} \\ \pm 2^{2n+1}\delta_1 & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Démonstration.

(i) Comme $\alpha\delta_1 = -2\alpha$, il est clair que $(-2)^N\alpha = \alpha\delta_1^N$ pour $N \geq 0$ et le résultat en découle avec $N = n+1$.

(ii) De même, en notant que $(\beta-\delta_2')\delta_1 = -2(\beta-\delta_2')$, nous avons

$$(\beta-\delta_2')\delta_1^N = (-2)^N(\beta-\delta_2') \quad \text{pour} \quad N \geq 0 \ ;$$

alors $2^{n+1}(\beta-\delta_2') = (-1)^{n+1}(\beta-\delta_2')\delta_1^{n+1} = 0$, d'où $2^{n+1}\beta = 2^{n+1}\delta_2' = 0$ (prop. 5.4.2).

(iii) $(\gamma-2\alpha)\delta_2' = -2(\gamma-2\alpha)$ implique aussi

$$(\gamma-2\alpha)\delta_2'^N = (-2)^N(\gamma-2\alpha) \quad \text{pour} \quad N \geq 0,$$

soit

$$2^N(\gamma-2\alpha) = (-1)^N\delta_2'^N(\delta_2'^2+4\delta_2') \quad \text{pour} \quad N \geq 0 \qquad (6).$$

Lorsque $n = 2p+1$ (resp. $n = 2p$) nous savons que $2^{2i-2}\delta_2'^{p-i}(\delta_2'^2+4\delta_2') = 0$ pour $2 \leq i \leq p$ (resp. $2^{2i-1}\delta_2'^{p-i-1}(\delta_2'^2+4\delta_2') = 0$ pour $2 \leq i \leq p-1$), l'assertion en résulte aussitôt en faisant $i = 2$ et $N = p-2$ (resp. $N = p-3$) dans (6).

Pour $n = 2p$, nous avons plus précisément

$$2^{p-1}(\gamma-2\alpha) = (-1)^{p-1}(\delta_2'^{p+1}+4\delta_2'^p),$$

mais $\delta_2'^{p+1} = 0$ d'une part (prop. 5.4.2.2), et d'autre part (5) multipliée par $\delta_2'^{p-2}$ (ce qui suppose $p \geq 2$) donnent $-20\delta_2'^p = \delta_2'^{p+2} + 8\delta_2'^{p+1} + 16\delta_2'^{p-1}$ i.e. $-20\delta_2'^p = 16\delta_2'^{p-1} = 2(2^3\delta_2'^{p-1}) =$ $= 2(-1)^p\, 2^{2p-1}\delta_2' = (-1)^p\, 2^{2p}\delta_2' = \pm\, 2^n\delta_2'$, d'où

$$2^{p-1}(\gamma-2\alpha) = \pm\, 2^n\delta_2'.$$

(iv) Là encore nous avons $(\delta_1-\delta_3)\delta_2'^N = (-2)^N(\delta_1-\delta_3)$ pour $N \geq 0$, ce qui avec (1) donne

$$2^N(\delta_1-\delta_3) = (-1)^{N+1}\delta_2'^N(\delta_1^3+6\delta_1^2+8\delta_1) = (-1)^{N+1}(\delta_1\delta_2'^{N+1}+2\delta_2'^{N+1}) \ ;$$

puisque $\delta_2^{N+1} = \sum_{i=0}^{N+1} \binom{N+1}{i} 2^{2i}\delta_1^{2N+2-i}$, il s'ensuit

$$2^N(\delta_1-\delta_3) = (-1)^{N+1} \sum_{i=0}^{N+1} \binom{N+1}{i} (2^{2i}\delta_1^{2N+3-i}+2^{2i+1}\delta_1^{2N+2-i}). \qquad (7)$$

Soient $n = 2p+1$ et $N = p$, alors, par 5.4.1, (7) s'écrit

$$2^p(\delta_1-\delta_3) = (-1)^{p+1}\left[\sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+1}{i} (-1)^i\right]2^{2n+1}\delta_1 = \pm 2^{2n+1}\delta_1.$$

Par contre pour $n = 2p$ et $N = p$, (7) s'écrivant

$$2^p(\delta_1-\delta_3) = (-1)^{p+1} \sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} (2^{2i}\delta_1^{n+3-i} + 2^{2i+1}\delta_1^{n+2-i}),$$

la prop. 5.4.1 assure la nullité du second membre.

Afin d'améliorer certains des résultats précédemment obtenus, nous allons maintenant évaluer $(2-\xi_4)^{n+1} = (-\delta_1)^{n+1}$ dans $\widetilde{RU}(Q_3)$. Tout d'abord la table de multiplication dans $\overline{RU}(Q_3)$ montre qu'il existe des entiers relatifs A_p et B_p $(p \geq 0)$ tels que

$$\xi_4^{2p+1} = A_p\xi_4 + B_p\xi_6, \quad \xi_4^{2p+2} = A_p(1+\xi_1+\xi_5) + B_p(\xi_2+\xi_3+\xi_5) \quad ;$$

plus précisément ces entiers sont tels que

$$A_{p+1} = 3A_p+B_p \quad , \quad B_{p+1} = A_p+3B_p \quad \text{pour} \quad p \geq 0,$$

soit en particulier

$$A_{p+2} - 6A_{p+1} + 8A_p = 0 \quad \text{pour} \quad p \geq 0 \qquad (8).$$

La relation (8) définit par récurrence une suite $(A_p)_{p\geq 0}$ dont il est bien connu que

$$A_p = u(\lambda_1)^p + v(\lambda_2)^p$$

où λ_1 et λ_2 sont les racines de $\lambda^2-6\lambda+8 = 0$, u et v étant déterminés par les conditions initiales $A_0 = 1$ et $A_1 = 3$. De tout ceci, nous obtenons donc pour tout $p \geq 0$:

$$\begin{aligned} \xi_4^{2p+1} &= (2^{2p-1}+2^{p-1})\xi_4 + (2^{2p-1}-2^{p-1})\xi_6 \ , \\ \xi_4^{2p+2} &= (2^{2p-1}+2^{p-1})(1+\xi_1+\xi_5) + (2^{2p-1}-2^{p-1})(\xi_2+\xi_3+\xi_5) \end{aligned} \qquad (9)$$

Il s'ensuit alors

Proposition 5.4.4.

Dans $RU(Q_3)$, pour tout $N \geq 0$, on a

$$(2-\xi_4)^{N+1}-2^{N+1}\xi_o = (2^{2N-2}-2^{N-2})(1+\xi_1+\xi_2+\xi_3+2\xi_5)-2^{2N-1}(\xi_4+\xi_6) +$$
$$+ \frac{1}{8}[(2-\sqrt{2})^{N+1}+(2+\sqrt{2})^{N+1}-2^{N+2}](1+\xi_1-\xi_2-\xi_3)$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{8}[(2-\sqrt{2})^{N+1}-(2+\sqrt{2})^{N+1}](\xi_4-\xi_6).$$

Corollaire 5.4.5.

Dans $\widetilde{RU}(Q_3)$, pour tout $N \geq 0$, on a

$$(-\delta_1)^{N+1} = (2^{2N-1}-2^{N-1})\delta_2' + (2^{2N-2}+2^{n-2})(\gamma-2\alpha) - 2^{2N-1}(\delta_1+\delta_3) +$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{8}[(2-\sqrt{2})^{N+1} - (2+\sqrt{2})^{N+1}](\delta_1-\delta_3) +$$
$$- \frac{1}{8}[(2+\sqrt{2})^{N+1} + (2-\sqrt{2})^{N+1}](\gamma-2\alpha).$$

Dorénavant, nous poserons

$$S_N = (2+\sqrt{2})^{N+1}+(2-\sqrt{2})^{N+1} \quad , \quad T_N = \sqrt{2}[(2-\sqrt{2})^{N+1}-(2+\sqrt{2})^{N+1}] \quad ;$$

il est alors facile de vérifier que : $v(S_N) = 2+[\frac{N}{2}]$ pour tout $N \geq 0$, $v(T_N) = 2+[\frac{N}{2}]$ (resp. $v(T_N) \geq 4+[\frac{N}{2}]$) pour N pair (resp. N impair).

Proposition 5.4.6.

Dans $\widetilde{KU}(N^n(3))$, on a

(i) $2^{p-1}(\gamma-2\alpha) + 2^{n-1}\delta_2' + 2^{2n}\delta_1 = 0$ pour $n = 2p+1$;

(ii) $2^{p-1}(\delta_1-\delta_3) - 2^{n-1}\delta_2' + 2^{2n}\delta_1 = 0$ pour $n = 2p$;

(iii) $2^{n+1}\delta_1 \pm 2^n\delta_2' = 0$ pour tout n.

Démonstration.

Comme $\delta_1^{n+1} = 0$, le cor. 5.4.5 nous donne dans $\widetilde{KU}(N^n(3))$

$$(2^{2n-1}-2^{n-1})\delta_2' + (2^{2n-2}+2^{n-2})(\gamma-2\alpha) - 2^{2n-1}(\delta_1+\delta_3) - \frac{1}{8}S_n(\gamma-2\alpha) + \frac{1}{8}T_n(\delta_1-\delta_3) = 0$$

lorsque $n = 2p+1$, 5.4.2 et 5.4.3 montrent que cette relation se réduit à :

$$2^{p-1}(\gamma-2\alpha) + 2^{n-1}\delta_2' + 2^{2n-1}(\delta_1+\delta_3) = 0$$

qui implique bien (i) puisque : $2^{2n-1}(\delta_1+\delta_3) = 2^{2n-1}(\delta_1-\delta_3) + 2^{2n}\delta_3 = 2^{2n}\delta_3 = \pm 2^{2n}\delta_1$. Quand $n = 2p$, les mêmes résultats donnent

$$2^{p-1}(\gamma-2\alpha) + 2^{n-1}\delta_2' + 2^{2n-1}(\delta_1+\delta_3) + 2^{p-1}(\delta_1-\delta_3) = 0,$$

comme $2^{p-1}(\gamma-2\alpha) = \pm 2^n\delta_2'$ (cor. 5.4.3 (iii)), la relation précédente s'écrit encore

$$2^{p-1}(\delta_1-\delta_3) - 2^{n-1}\delta_2' + 2^{2n}\delta_1 = 0.$$

Enfin, la dernière assertion est une conséquence immédiate des précédentes et du cor. 5.4.3.

Nous sommes maintenant en mesure d'expliciter la structure additive de $\widetilde{KU}(N^n(3))$:

<u>Théorème 5.4.7.</u>

1. *Soit* $n = 2p+1$, *alors pour* $p \geq 2$

$$\widetilde{KU}(N^n(3)) \simeq \mathbb{Z}_{2^{2n+2}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^n} \oplus \mathbb{Z}_{2^p} \oplus \mathbb{Z}_{2^{p-1}}$$

où chaque facteur est respectivement engendré par : δ_1, α, β, $\delta_2'+2^{n+1}\delta_1$, $\delta_1-\delta_3+2^{p+1}\delta_2'$, $\gamma-2\alpha + 2^{p+1}\delta_2' + 2^{3(p+1)}\delta_1$.

D'autre part :

$\widetilde{KU}(N^1(3)) \simeq \mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{2^2}$ *avec respectivement* δ_1, α *et* β *comme générateurs (ici* $\delta_2' - 4\delta_1 = 0$, $\delta_3 - 9\delta_1 = 0$, $\gamma-2\alpha = 0$*) ;*

$\widetilde{KU}(N^3(3) \simeq \mathbb{Z}_{2^8} \oplus \mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_2$ *avec respectivement* δ_1, α, β, $\delta_2' + 2^4\delta_1$ *et* $\delta_1-\delta_3 + 2^2\delta_2'$ *comme générateurs (ici* $\gamma-2\delta_2 = 0$*).*

2. *Soit* $n = 2p$, *alors pour* $p \geq 2$

$$\widetilde{KU}(N^n(3) \simeq \mathbb{Z}_{2^{2n+2}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^n} \oplus \mathbb{Z}_{2^{p-1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{p-1}}$$

où chaque facteur est respectivement engendré par : δ_1, α, β, $\delta_2'+2^{n+1}\delta_1$, $\delta_1-\delta_3 - 2^p\delta_2' + 2^{3p+1}\delta_1$, $\gamma-2\alpha + 2^{p+1}\delta_2'$.

D'autre part :

$\widetilde{KU}(N^0(3)) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ *où* α *et* β *engendrent chaque facteur ;*

$\widetilde{KU}(N^2(3)) \simeq \mathbb{Z}_{2^6} \oplus \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_{2^2}$ *avec* δ_1, α, β *et* $\delta_2'+2^3\delta_1$ *comme générateurs (ici* $\delta_3 = 17\delta_1-2\delta_2'$, $\gamma-2\alpha = 4\delta_2'$*).*

<u>Démonstration.</u>

Nous supposerons $n \geq 4$ (le cas $n = 0$ a été résolu dans le th. 5.3.8 ; les autres sont susceptibles des mêmes raisonnements qui vont être faits moyennant les relations de dépendance linéaire indiquées dans l'énoncé du théorème, relations aisément vérifiables) : nous savons que $\widetilde{KU}(N^n(3))$ est additivement engendré par α, β, γ, δ_1, δ_2' et δ_3 (prop. 5.3.2) et que $|\widetilde{KU}(N^n(3))| = 2^{6n+2}$ (prop. 5.3.3) ; il nous suffit donc de montrer que, pour n impair (resp. n pair), α, β, δ_1, $\delta_2' + 2^{n+1}\delta_1$, $\delta_1-\delta_3 + 2^{p+1}\delta_2'$ et $\gamma-2\alpha+2^{p+1}\delta_2' + 2^{3(p+1)}\delta_1$ (resp. $\delta_1-\delta_3-2^p\delta_2'+2^{3p+1}\delta_1$ et $\gamma-2\alpha+2^{p+1}\delta_2'$) ont respectivement pour ordre 2^{n+1}, 2^{n+1}, 2^{2n+2}, 2^n, 2^p et 2^{p-1} (resp. 2^{p-1} et 2^{p-1}) (cf. 5.4.1, 5.4.2, 5.4.3 et 5.4.6). Pour cela nous allons utiliser la proposition 5.3.7, c'est-à-dire certains résultats concernant la KU-théorie des espaces lenticulaires d'ordre 2^m (cf. chapitre IV).

Tout d'abord, notons que

$$\rho'^{!}(\delta_2') = 2[(\sigma_4+1)^2-1], \quad \rho^{!}(\delta_2') = 2[(\sigma_8+1)^2-1] + [(\sigma_8+1)^4-1](\sigma_8+1)^2.$$

Alors, en utilisant la prop. 4.1.3, le th. 4.2.3 et les résultats du § 4.3, nous avons

$$\rho'^{!}(2^n\alpha) = 2^n[(\sigma_4+1)^2-1] \neq 0,$$

$$\rho^{!}(2^{2n+1}\delta_1) = \rho^{!}(2^3\delta_1^n) = 2^3\sigma_8^{2n} \neq 0,$$

$$\rho^{!}(2^{n-1}\delta_2'+2^{2n}\delta_1) = 2^n[(\sigma_8+1)^2-1] + 2^{2n}(\sigma_8+\bar{\sigma}_8) = 2^n[(\sigma_8+1)^2-1]+2^{2n+1}\sigma_8 \neq 0.$$

Comme dans $\widetilde{RU}(Q_3)$ on a $\beta(-\delta_1)^n = 2^n\beta-2^{n-1}(\gamma-2\alpha) + \frac{S_{n-1}}{4}(\gamma-2\alpha) - \frac{T_{n-1}}{4}(\delta_1-\delta_3)$, il est clair que $2^n\beta = 0$ dans $\widetilde{KU}(N^n(3))$ implique $\beta\delta_1^n = 0$, or

$$\rho^{!}(\beta\delta_1^n) = [(\sigma_8+1)^4-1](\sigma_8+\bar{\sigma}_8)^n = 4\sigma_8^{2n+1} \neq 0,$$

d'où $2^n\beta \neq 0$.

En supposant $n = 2p+1$ $(p \geqslant 2)$, nous avons

$$\rho'^!(2^{p-1}(\delta_1-\delta_3)+2^{n-1}\delta_2') = \rho'^!(2\delta_2'^p+2^{n-1}\delta_2'+\delta_1\delta_2'^p) = 2^n[(\sigma_4+1)^2+1] \neq 0 \text{ ;}$$

enfin, de la même manière

$$\rho'^!(2^{p-2}(\gamma-2\alpha)+2^{2p-1}\delta_2'+2^{4p+1}\delta_1) = 2^{p-2}\rho'^!(\alpha\beta+2\beta)+2^{n-1}[(\sigma_4+1)^2-1]+2^{2n-1}(\sigma_4+\bar{\sigma}_4) =$$

$$= 2^{n-1}[(\sigma_4+1)^2-1]+2^{2n-1}[2\sigma_4+((\sigma_4+1)^2-1)(\sigma_4+1)] = 2^{n-1}[(\sigma_4+1)^2-1]+2^{2n}\sigma_4 \neq 0.$$

Dans le cas $n = 2p$, on laisse le soin au lecteur de vérifier que les assertions correspondantes sont vraies.

5.5. *Etude de* $KO(N^n(m\ ;\ r_1,r_2,\ldots,r_{n+1}))$.

Pour pouvoir éventuellement utiliser la proposition 1.4.7, il nous faut décrire les représentations réelles et quaternioniques de Q_m. De même que les inclusions canoniques $O(p) \subset U(p)$ et $U(p) \subset O(2p)$ induisent les homomorphismes de groupes $RO(Q_m) \xrightarrow{c} RU(Q_m)$ et $RU(Q_m) \xrightarrow{r} RO(Q_m)$ (cf. §.3.1 p.), les inclusions canoniques $U(p) \subset Sp(p)$ et $Sp(p) \subset U(2p)$ induisent des homomorphismes de groupes ainsi définis :

$$RU(Q_m) \underset{h}{\overset{q}{\rightleftarrows}} RSp(Q_m)$$

à toute représentation unitaire ξ de Q_m, q associe sa quaternifiée, à savoir $\xi \otimes 1_{\mathbb{H}}$; à toute représentation quaternionique θ de Q_m, h associe la représentation unitaire sous-jacente. Nous savons que c est un homomorphisme d'anneaux ainsi que l'homomorphisme de conjugaison t dans $RU(Q_m)$; de plus [9]

* c et h sont injectifs,
* $qh = 2$ et $hq = 1+t$.

Il s'ensuit que $RO(Q_m)$ (resp. $RSp(Q_m)$) peut être identifié à un sous-anneau (resp. à un sous-groupe) de $RU(Q_m)$. Il est clair que, par cette identification, les quatre représentations unitaires irréductibles de degré 1 de Q_m ξ_o, ξ_1, ξ_2 et ξ_3 (cf.§ 5.1) sont réelles ; pour les autres, c'est-à-dire

$(\xi_{r+3})_{1\leq r\leq 2^{m-1}-1}$, la prop. 1.2.3 donne

Proposition 5.5.1

Soit $1 \leq r \leq 2^{m-1}-1$, alors

1. chaque ξ_{r+3} pour r pair est réelle,
2. chaque ξ_{r+3} pour r impair est autoconjuguée (i.e. $t(\xi_{r+3}) = \xi_{r+3}$).

La seconde assertion impliquant $cr(\xi_{r+3}) = 2\xi_{r+3}$ (r impair), il s'ensuit

Proposition 5.5.2 [51]

L'anneau $RO(Q_m)$ des représentations réelles (orthogonales) de Q_m, considéré comme sous-anneau de $RU(Q_m)$, est engendré par $\xi_o = 1$, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_{r+3} pour $2 \leq r$ pair $\leq 2^{m-1}-2$ et $2\xi_{r+3}$ pour $1 \leq r$ impair $\leq 2^{m-1}-1$.

Nous avons d'une part remarqué que Q_m s'identifie à un sous-groupe de $S^3 = Sp(1)$ (cf. § 5.1) et d'autre part noté que $RSp(Q_m)$ s'identifie, par h, à un sous-groupe de $RU(Q_m)$. On peut mettre tout quaternion a de S^3 sous la forme unique $a = z_1+jz_2$ où z_1 et z_2 appartiennent à $\mathbb{C}$: par conséquent dans $RU(Q_m)$ les représentations quaternioniques seront celles qui à l'élément y de Q_m font correspondre un élément de la forme

$$\begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} .$$

Vue la définition des ξ_i $(0 \leq i \leq 2^{m-1}+3)$, il s'ensuit que seules les ξ_{r+3} où $1 \leq r$ impair $\leq 2^{m-1}-1$ sont quaternioniques ; comme $qh = 2$ toutes les autres sont donc $2\xi_o = 2$, $2\xi_1$, $2\xi_2$, $2\xi_3$ et $2\xi_{r+3}$ où $2 \leq r$ pair $\leq 2^{m-1}-2$.

Proposition 5.5.3. [51]

Le groupe $RSp(Q_m)$ des représentations quaternioniques de Q_m, considéré comme sous-groupe de $RU(Q_m)$, est le groupe libre engendré par $2\xi_o = 2$, $2\xi_1$, $2\xi_2$, $2\xi_3$, ξ_{r+1} pour $1 \leq r$ impair $\leq 2^{m-1}-1$ et $2\xi_{r+3}$ pour

$2 \leqslant r$ pair $\leqslant 2^{m-1}-2$.

De là, il découle que pour toute Q_m-forme sphérique $N^n(m\ ;\ r_1,r_2,\dots,r_{n+1})$ (cf. déf. 5.2.1) la représentation virtuelle ρ est quaternionique : nous pouvons donc appliquer 1.4.7.

Pour n *impair*, la situation se trouve résumée dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
RO(Q_m) \arrow[r, "\phi_o"] \arrow[d, shift left, "c"] & RO(Q_m) \arrow[r, "\theta_o"] \arrow[d, shift left, "c"] & KO(S^{4n+3}/Q_m) \arrow[r] \arrow[d, shift left, "c"] & 0 \\
RU(Q_m) \arrow[r, "\phi_u"] \arrow[u, shift left, "r"] & RU(Q_m) \arrow[r, "\theta_u"] \arrow[u, shift left, "r"] & KU(S^{4n+3}/Q_m) \arrow[r] \arrow[u, shift left, "r"] & 0
\end{tikzcd}$$

où chaque ligne est exacte, les deux premières flèches verticales c sont injectives : ϕ_o est donc, dans $RO(Q_m)$, la multiplication par $\prod_{i=1}^{n+1}(2-\xi_{r_i+3})$. (prop. 1.4.8).

Lorsque n *est pair*, h étant également injective, on voit de la même manière que ϕ_o : $RSp(Q_m) \to RO(Q_m)$ est encore la multiplication par $\prod_{i=1}^{n+1}(2-\xi_{r_i+3})$.(*)
De ces deux remarques nous avons

Théorème 5.5.4.

L'anneau $KO(N^n(m\ ;\ r_1,r_2,\dots,r_{n+1}))$ *est isomorphe à*

(i) l'anneau $RO(Q_m)/<\prod_{i=1}^{n+1}(2-\xi_{r_i+3})>$ *si* n *est impair ;*

(ii) l'anneau $RO(Q_m)/[\prod_{i=1}^{n+1}(2-\xi_{r_i+3})]RSp(Q_m)$ *si* n *est pair.*

Ce théorème généralise le th. 2.5 de D. Pitt [51] énoncé pour $r_1 = r_2 = \dots = r_{n+1}$. En fait, comme pour la KO-théorie des espaces lenticu-

---

(*) La discrimination selon la parité de n est due au fait que le produit (tensoriel) de deux représentations quaternioniques n'est pas une représentation quaternionique mais seulement une représentation réelle. Cela vaut également pour les fibrés vectoriels quaternioniques. Du reste, il est bien connu que le produit tensoriel $E \otimes_{\mathbb{H}} F$ de deux espaces vectoriels quaternioniques n'est pas un espace vectoriel quaternionique mais seulement un espace vectoriel réel ; d'un autre côté si E est un $\mathbb{H}$-espace vectoriel alors que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, le produit $E \otimes_{\mathbb{R}} F$ a une structure de $\mathbb{H}$-espace vectoriel.

laires généralisés, le th. 5.3.6 permet de voir que

Théorème 5.5.5.

Il existe un isomorphisme canonique de $KO(N^n(m\ ;\ r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}))$ *sur* $KO(N^n(m))$.

Aussi nous limiterons-nous, dans tout ce qui suit, qu'aux seules Q_m-formes sphériques ordinaires $N^n(m)$.

Nous nous proposons maintenant de déterminer l'ordre de $\widetilde{KO}(N^n(m))$; pour la structure cellulaire rappelée au § 5.2, nous noterons N^p le p-ième squelette $(0 \leq p \leq 4n+3)$ de $N^n(m)$.

Lemme 5.5.6.

$$|\widetilde{KO}(N^n(m))| \leq \begin{cases} 2^{n(m+3)+4} & \text{pour } n \text{ pair,} \\ 2^{n(m+3)+2} & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Démonstration.

La suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch

$$E_2^{i,j} = \tilde{H}^i(N^n(m),\ \widetilde{KO}^j(S^o)) \Rightarrow \widetilde{KO}^{i+j}(N^n(m))$$

a pour seuls termes $E_2^{i,-i}$ éventuellement non nuls ceux correspondant à $i \equiv 0,\ 1,\ 2$ ou $4 \pmod 8$.

En fait (prop. 5.2.2) pour $0 < i < 4n+3$, on a

$$E_2^{i,-i} \begin{cases} \mathbb{Z}_{2^{m+1}} & \text{pour } i \equiv 0 \pmod 4, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{pour } i \equiv 1 \text{ ou } 2 \pmod 8. \end{cases}$$

Ainsi le gradué associé de $\widetilde{KO}(N^n(m))$ comporte-t-il au plus n facteurs égaux à $\mathbb{Z}_{2^{m+1}}$ et a facteurs égaux à $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ en posant $a = \mathrm{card}\{0 < i < 4n+3 \mid i \equiv 1 \text{ ou } 2 \pmod 8\}$. Comme $a = n+2$ ou $n+1$ suivant que n est pair ou impair, nous obtenons $|\widetilde{KO}(N^n(m))| \leq 2^{(m+1)n}.2^{2a}$ ce qui est le résultat annoncé.(*)

De la même manière, il est facile de voir que

Lemme 5.5.7.

$$|\widetilde{KO}(N^{4n})| \leq \begin{cases} 2^{n(m+3)} & \text{pour } n \text{ pair,} \\ 2^{n(m+3)+2} & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Proposition 5.5.8.

Pour n impair : $\widetilde{KO}(N^{4n+2}/N^{4n-2}) \overset{\sim}{\to} \mathbb{Z}_{2^{m+1}}$.

Démonstration.

La suite exacte de $\widetilde{KO}$-théorie associée à la paire $(N^{4n+2}/N^{4n-2}, N^{4n+1}/N^{4n-2})$ s'écrit

$$\ldots \overset{\partial}{\to} \widetilde{KO}(S^{4n+2} \vee S^{4n+2}) \to \widetilde{KO}(N^{4n+2}/N^{4n-2}) \to \widetilde{KO}(N^{4n+1}/N^{4n-2}) \overset{\partial}{\to} \widetilde{KO}^1(S^{4n+2} \vee S^{4n+2}) \to \ldots$$

n étant impair $\widetilde{KO}(S^{4n+2} \vee S^{4n+2}) = 0 = \widetilde{KO}^1(S^{4n+2} \vee S^{4n+2})$, donc

$$\widetilde{KO}(N^{4n+2}/N^{4n-2}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{KO}(N^{4n+1}/N^{4n-2}) \qquad (1)$$

De même la paire $(N^{4n+1}/N^{4n-2}, N^{4n}/N^{4n-2})$ donne la suite exacte

$$\ldots \overset{\partial}{\to} \widetilde{KO}(S^{4n+1} \vee S^{4n+1}) \to \widetilde{KO}(N^{4n+1}/N^{4n-2}) \to \widetilde{KO}(N^{4n}/N^{4n-2}) \overset{\partial}{\to} \widetilde{KO}^1(S^{4n+1} \vee S^{4n+1}) \to \ldots$$

soit

$$0 \to \widetilde{KO}(N^{4n+1}/N^{4n-2}) \to \widetilde{KO}(N^{4n}/N^{4n-2}) \overset{\partial}{\to} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \qquad (2) \ ;$$

mais la paire $(N^{4n}/N^{4n-2}, N^{4n-1}/N^{4n-2})$ conduisant à la suite exacte

$$\ldots \to \widetilde{KO}^{-1}(S^{4n-1}) \overset{\partial}{\to} \widetilde{KO}(S^{4n}) \to \widetilde{KO}(N^{4n}/N^{4n-2}) \to \widetilde{KO}(S^{4n-1}) \overset{\partial}{\to} \widetilde{KO}^1(S^{4n}) \to \ldots$$

où ∂ est la multiplication par 2^{m+1} dans $\mathbb{Z}$, montre que

$$\widetilde{KO}(N^{4n}/N^{4n-2}) \overset{\sim}{\leftarrow} \mathbb{Z}_{2^{m+1}} \qquad (3).$$

La proposition en résulte immédiatement car (2) puis (1) donnent avec (3)

(*) Ce lemme montre que le résultat (4.1) de [10] est erroné pour $n \neq 0$.

$$\widetilde{KO}(N^{4n+2}/N^{4n-2}) \overset{\sim}{\to} \widetilde{KO}(N^{4n+1}/N^{4n-2}) \overset{\sim}{\to} \widetilde{KO}(N^{4n}/N^{4n-2}) \overset{\sim}{\to} \mathbb{Z}_{2^{m+1}} .$$

Lemme 5.5.9.

Les inclusions canoniques $N^{4n} \hookrightarrow N^{4n+1} \hookrightarrow N^{4n+2} \hookrightarrow N^{4n+3} = N^n(m)$

(i) pour n impair, induisent des isomorphismes

$$\widetilde{KO}(N^{4n+3}) \overset{\sim}{\to} \widetilde{KO}(N^{4n+2}) \overset{\sim}{\to} \widetilde{KO}(N^{4n+1}) \overset{\sim}{\to} \widetilde{KO}(N^{4n}) \quad ;$$

(ii) pour n pair, conduisent aux suites exactes

$$\widetilde{KO}(N^{4n+3}) \overset{\sim}{\to} \widetilde{KO}(N^{4n+2}),$$

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \to \widetilde{KO}(N^{4n+2}) \to \widetilde{KO}(N^{4n+1}) \to 0,$$

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \to \widetilde{KO}(N^{4n+1}) \to \widetilde{KO}(N^{4n}) \longrightarrow 0.$$

Preuve.

Lorsque n est impair, c'est immédiat avec les suites exactes suivantes

$$\begin{array}{ccccccc}
\widetilde{KO}(S^{4n+3}) & \longrightarrow & \widetilde{KO}(N^{4n+3}) & \to & \widetilde{KO}(N^{4n+2}) & \overset{\partial}{\to} & \widetilde{KO}^1(S^{4n+3}) , \\
\| & & & & & & \| \\
0 & & & & & & 0 \\
\widetilde{KO}(S^{4n+2} \vee S^{4n+2}) & \to & \widetilde{KO}(N^{4n+2}) & \to & \widetilde{KO}(N^{4n+1}) & \overset{\partial}{\to} & \widetilde{KO}^1(S^{4n+2} \vee S^{4n+2}), \\
\| & & & & & & \| \\
0 & & & & & & 0 \\
\widetilde{KO}(S^{4n+1} \vee S^{4n+1}) & \to & \widetilde{KO}(N^{4n+1}) & \to & \widetilde{KO}(N^{4n}) & \overset{\partial}{\longrightarrow} & \widetilde{KO}^1(S^{4n+1} \vee S^{4n+1}), \\
\| & & & & & & \| \\
0 & & & & & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}
\end{array}$$

et le fait que $\widetilde{KO}(N^{4n})$ est fini (ℓ.5.5.7). Lorsque n est pair, on a la suite exacte $0 \to \widetilde{KO}(N^{4n+1}) \to \widetilde{KO}(N^{4n+2}) \overset{\partial}{\to} \widetilde{KO}^1(S^{4n+3}) = \mathbb{Z}_2$, mais ∂ est le composé $\widetilde{KO}(N^{4n+3}) \xrightarrow{f^!} \widetilde{KO}(S^{4n+2}) \overset{\sim}{\to} KO^1(S^{4n+3})$ où $f^!$ est induit par l'application d'attachement cellulaire f qui est de degré 0, donc $\partial = 0$. Le même raisonnement appliqué aux suites exactes associées aux paires (N^{4n+2},N^{4n+1}) et (N^{4n+1},N^{4n}) conduit aux deux autres résultats.

Lemme 5.5.10.

Si $|\widetilde{KO}(N^{4n-1})| = 2^{(n-1)(m+3)+4}$ pour n impair (resp. $2^{(n-1)(m+3)+2}$ pour n pair > 0), alors il existe une suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}_{2^{m+1}} \to \widetilde{KO}(N^{4n}) \xrightarrow{i^!} \widetilde{KO}(N^{4n-1}) \to 0$$

où $i^!$ est induit par l'inclusion $i : N^{4n-1} \to N^{4n}$.

Démonstration.

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\widetilde{KO}^{-1}(N^{4n-1}) & \xrightarrow{\partial} & \widetilde{KO}(S^{4n}) & \longrightarrow & \widetilde{KO}(N^{4n}) & \xrightarrow{i^!} & \widetilde{KO}(N^{4n-1}) & \xrightarrow{\partial} & \widetilde{KO}^1(S^{4n}) = 0 \\
\downarrow c_o & & \downarrow c_1 & & \downarrow c_2 & & \downarrow c_3 & & \\
\widetilde{KU}^{-1}(N^{4n-1}) & \xrightarrow{\partial^*} & \widetilde{KU}(S^{4n}) & \longrightarrow & \widetilde{KU}(N^{4n}) & \xrightarrow{i^*} & \widetilde{KU}(N^{4n-1}) & \xrightarrow{\partial^*} & \widetilde{KU}^1(S^{4n}) = 0
\end{array}$$

où les lignes sont exactes et les flèches verticales les morphismes de complexification : comme $\widetilde{KU}^{-1}(N^{4n-1}) = \mathbb{Z}$ (prop. 5.5.3), ∂^* est la multiplication par 2^{m+1} dans $\mathbb{Z}$ donc $\mathrm{Ker}\ i^* = Z_{2^{m+1}}$. En outre, lorsque n est pair, c_1 est un isomorphisme ([1], p. 618) donc $c_2|\mathrm{Ker}\ i^!$ envoie $\mathrm{Ker}\ i^!$ sur $\mathrm{ker}\ i^*$, ainsi $|\mathrm{Ker}\ i^!| \geq 2^{m+1}$, mais alors

$$|\widetilde{KO}(N^{4n})| = |\mathrm{Ker}\ i^!| \cdot |\widetilde{KO}(N^{4n-1})| \geq 2^{m+1}.2^{(n-1)(m+3)+2} = 2^{n(m+3)},$$

ce qui implique (ℓ. 5.5.7) $\mathrm{Ker}\ i^! \simeq \mathbb{Z}_{2^{m+1}}$.

Lorsque n est impair le résultat est une conséquence de 5.5.8 et 5.5.9.

Théorème 5.5.11.

$$|\widetilde{KO}(N^n(m\ ;\ r_1,r_2,\ldots,r_{n+1}))| = \begin{cases} 2^{2n(m+3)+4} & \text{pour } n \text{ pair,} \\ 2^{n(m+3)+2} & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Démonstration.

Vu le th. 5.5.5, il suffit de s'en tenir aux Q_m-formes sphériques ordinaires $N^n(m)$; il est alors aisé de voir que l'assertion proposée est vraie pour $n = 0$, il s'ensuit que si elle est vraie pour n elle l'est encore pour $n+1$, en effet :

- si n est pair, avec les ℓ.5.5.9 (i) et 5.5.10, on a

$$|\widetilde{KO}(N^{4(n+1)+3})| = |\widetilde{KO}(N^{4(n+1)})|$$

$$|\widetilde{KO}(N^{4(n+1)+3})| = 2^{m+1}.|\widetilde{KO}(N^{4n+3})| = 2^{m+1}.2^{n(m+3)+4} = 2^{(n+1)(m+3)+2},$$

- si n est impair, on a de même

$$|\widetilde{KO}(N^{4(n+1)+3})| = 2^4.|\widetilde{KO}(N^{4(n+1)})| = 2^{m+5}.2^{n(m+3)+2} = 2^{(n+1)(m+3)+4}.$$

5.6. *K-théorie réelle des Q_3-formes sphériques.*

En considérant $RO(Q_3)$ comme sous-anneau de $RU(Q_3)$, on peut dire (prop. 5.5.2) que $\widetilde{RO}(Q_3)$ est engendré par α, β, γ, $2\delta_1$, δ_2 (ou δ_2') et $2\delta_3$; néanmoins, afin d'éviter toute ambiguité, nous allons désigner par a, b, g, d_1, d_2' et d_3 les représentations réelles de Q_3 telles que

$$c(a) = \alpha, \quad c(b) = \beta, \quad c(g) = \gamma, \quad c(d_2') = \delta_2', \quad r(\delta_1) = d_1, \quad r(\delta_3) = d_3.$$

A l'aide de l'expression de $(2-\xi_4)^{n+1} = (-\delta_1)^{n+1}$ donnée par le cor. 5.4.5, on obtient dans $\widetilde{RU}(Q_3)$ les relations suivantes

$$\alpha(-\delta_1)^{n+1} = 2^{n+1}\alpha, \tag{1}$$

$$\beta(-\delta_1)^{n+1} = 2^{n+1}\beta - 2^n(\gamma-2\alpha) + \frac{S_n}{4}(\gamma-2\alpha) - \frac{T_n}{4}(\delta_1-\delta_3), \tag{2}$$

$$\delta_2'(-\delta_1)^{n+1} = 2^{2n+1}\delta_2' - 2^n(\gamma-2\alpha) + \frac{S_n}{4}(\gamma-2\alpha) - \frac{T_n}{4}(\delta_1-\delta_3), \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\delta_1(-\delta_1)^{n+1} = {} & (2^n-2^{2n+1})\delta_2' + 2^{2n+1}\delta_1 - 2^{2n+1}(\delta_1-\delta_3) + \\ & - (2^{n-1}+2^{2n})(\gamma-2\alpha) + \frac{1}{8}(2S_n-T_n)(\gamma-2\alpha) + \\ & + \frac{1}{4}(S_n-T_n)(\delta_1-\delta_3).\end{aligned} \tag{4}$$

Ces relations permettent de retrouver, dans $\widetilde{KU}(N^n(3))$, que α, β et δ_2' ont pour ordre 2^{n+1} et $\delta_2' + 2^{2n+1}\delta_1$ a pour ordre 2^n (voir th. 5.4.7) : il suffit pour cela d'utiliser la méthode des diviseurs élémentaires (cf. par exemple [53], p. 26). C'est en usant de cette méthode -mais sous une forme simplifiée compte tenu d'une part des résultats obtenus sur $\widetilde{KU}(N^n(3))$ et d'autre part de l'identification rappelée ci-dessus- que nous allons calculer $\widetilde{KO}(N^n(3))$.

Tout d'abord soit n pair, $n = 2p$; la prop. 5.5.3 et le th. 5.5.4 montrent qu'ici $KO(N^n(3))$ est isomorphe à $RO(Q_3)/(2-\xi_4)^{n+1}\,RSp(Q_3)$ et que $RSp(Q_3)$ est, en tant que sous-groupe de $RU(Q_3)$, engendré par $2\xi_o$, 2α, 2β,

2γ, δ_1, $2\delta_2'$ et δ_3. Dans ces conditions d'une part l'expression de $(2-\xi_4)^{n+1}$ et d'autre part les relations (1), (2), (3) et (4) conduisent à

$$(2^{2n-1}-2^{n-1})d_2'+(2^{2n-2}+2^{n-2})(g-2a)-2^{2n-2}(d_1+d_3)-\frac{S_n}{8}(g-2a)+\frac{T_n}{16}(d_1-d_3) = 0,$$

$$2^{n+2}a = 0,$$

$$2^{n+2}b + \frac{S_n}{2}(g-2a) - \frac{T_n}{4}(d_1-d_3) = 0,$$

$$2^{n+2}d_2' + \frac{S_n}{2}(g-2a) - \frac{T_n}{4}(d_1-d_3) = 0,$$

$$2^n d_2' + 2^{2n}d_1 + \frac{1}{8}(S_n-T_n)(d_1-d_3) + \frac{1}{8}(2S_n-T_n)(g-2a) = 0,$$

dans $\widetilde{KO}(N^n(3))$. En fait les résultats obtenus pour $\widetilde{KU}(N^n(3))$ et les propriétés de $v(S_n)$ et $v(T_n)$ (cf. § 5.4, p.104) permettent d'en déduire (pour $p > 2$ éventuellement)

$$2^{n+2}a = 2^{n+2}b = 2^{n+2}d_2' = 0 \qquad (5)$$

$$2^{p-1}(g-2a) + 2^n d_2' + 2^{2n}d_1 = 0 \qquad (6)$$

$$2^{p-2}(d_1-d_3) = 2^{p-1}(g-2a) + 2^{n-1}d_2' + 2^{2n-1}d_1 \qquad (7).$$

Théorème 5.6.1.

Soit $n = 2p$, *alors pour* $p > 2$

$$\widetilde{KO}(N^n(3) \simeq \mathbb{Z}_{2^{2n+2}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n+2}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n+2}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{p-1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{p-2}}$$

où chaque facteur est respectivement engendré par d_1, a, b, $d_2'+2^n d_1$, $g-2a+2^{p+1}d_2'+2^{3p+1}d_1$ *et* $d_1-d_3+2^{p+1}d_2'+2^{3p+1}d_1$.

D'autre part

$\widetilde{KO}(N^0(3)) \simeq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ *avec* a *et* b *comme générateurs ;*

$\widetilde{KO}(N^2(3) \simeq \mathbb{Z}_{2^6} \oplus \mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_{2^2}$ *avec* d_1, a, b *et* $d_2'+4d_1$ *comme générateurs ;*

$\widetilde{KO}(N^4(3)) \simeq \mathbb{Z}_{2^{10}} \oplus \mathbb{Z}_{2^6} \oplus \mathbb{Z}_{2^6} \oplus \mathbb{Z}_{2^5} \oplus \mathbb{Z}_2$ *avec* d_1, a, b, $d_2'+16d_1$ *et* $g-2a$.

Démonstration.

Nous supposerons $p \geq 3$, les autres cas se traitant de manière analogue moyennant quelques adaptations (le cas $p = 0$ se déduit aisément du th. 5.3.8). Les relations (5), (6) et la méthode des diviseurs élémentaires montrent que a,

b, $g-2a+2^{p+1}d_2'+2^{3p+1}d_1$ ont respectivement pour ordre 2^{n+2}, 2^{n+2} et 2^{p-1}.
A l'aide de (6), il est clair que (7) s'écrit encore

$$2^{p-2}(d_1-d_3) + 2^{n-1}d_2' + 2^{2n-1}d_1 = 0,$$

et, de là, il s'ensuit aisément $2^{n+1}(d_2'+2^n d_1) = 0$ puisque $2^p(d_1-d_3) = 0$ (cor. 5.4.3. (iv)). D'un autre côté le théorème 5.5.11 assure que :
$2^{2n+2}\times(2^{n+2})^2\times 2^{n+1}\times 2^{p-1}\times 2^{p-2} = 2^{6n+4} = |\widetilde{KO}(N^{2p}(3))|$.

Théorème 5.6.2.

Soit $n = 2p+1$, *alors pour* $p \geq 2$

$$\widetilde{KO}(N^n(3)) \simeq \mathbb{Z}_{2^{2n+2}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^n} \oplus \mathbb{Z}_{2^p} \oplus \mathbb{Z}_{2^{p-1}}$$

où chaque facteur est respectivement engendré par d_1, a, b, $d_2'+2^{n+1}d_1$, $g-2a$ *et* $d_1-d_3+2^{3(p+1)}d_1$.
D'autre part

$\widetilde{KO}(N^1(3)) \simeq \mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{2^2}$ *avec* d_1, a *et* b *comme générateurs ;*

$\widetilde{KO}(N^3(3)) \simeq \mathbb{Z}_{2^8} \oplus \mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_2$ *avec* d_1, a, b, $d_2'+16d_1$ *et* $g-2a$ *comme générateurs.*

Démonstration.

En procédant comme ci-dessus, il est aisé de voir que d'une part a, b et d_2' ont pour ordre 2^{n+1} et d'autre part $2^n(d_2'+2^{n+1}d_1) = 0$, $2^p(g-2a) = 0$ et $2^{p-1}(d_1-d_3)+2^{2n}d_1 = 0$. En fait, par exemple, $g-2a$ a pour ordre 2^p : car si $2^{p-1}(g-2a) = 0$, alors $c(2^{p-1}(g-2a)) = 2^{p-1}(\gamma-2\alpha) = 0$ ce qui contredit le th. 5.4.7. Comme par ailleurs $|\widetilde{KO}(N^{2p+1}(3))| = 2^{6n+2}$, le théorème s'ensuit.

Remarques.

(i) Comme dans le cas $m = 2$ (cf. [10]), il y a isomorphisme entre $\widetilde{KU}(N^n(3))$ et $\widetilde{KO}(N^n(3))$ lorsque n est impair.

(ii) Lorsque $n = 0$ ou 1, on peut énoncer plus généralement :

Théorème 5.6.3.

$\widetilde{KO}(N^{0}(m)) \simeq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ (*générateurs* a *et* b),

$\widetilde{KO}(N^{1}(m)) \simeq \mathbb{Z}_{2^{m+1}} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ (*générateurs* d_1, a *et* b).

CHAPITRE VI

FORMES SPHERIQUES TETRAEDRIQUES

Dans tout ce chapitre m désigne un entier supérieur ou égal à 1.

6.1. *Formes sphériques tétraédriques.*

On appelle *groupe tétraédrique binaire généralisé*, et on le note T_m^*, le groupe abstrait engendré par trois éléments x, y, z et les relations

$$x^{3^m} = y^4 = 1, \quad y^2 = z^2, \quad xyx^{-1} = z, \quad xzx^{-1} = yz, \quad yzy^{-1} = z^{-1}.$$

Lorsque $m = 1$, le groupe T_1^* est appelé *groupe tétraédrique binaire* et désigné par T^*. La terminologie vient de ce que le groupe $T = T^*/\{y^2\}$ peut être interprété comme le groupe des symétries d'un tétraèdre régulier.

Les relations précédentes montrent que le groupe T_m^* a pour ordre 8.3^m.

Son sous-groupe des commutateurs $[T_m^*, T_m^*]$ est engendré par y et z : $[T_m^*, T_m^*]$ est donc d'ordre 8, c'est un 2-sous-groupe de Sylow de T_m^* qui est en fait isomorphe au groupe quaternionique Q_2 engendré par deux éléments a, b et les relations (cf. § 5.1)

$$a^4 = 1, \quad a^2 = b^2, \quad b\,a\,b^{-1} = a^{-1}.$$

Comme Q_2 a pour sous-groupe des commutateurs le groupe cyclique $\mathbb{Z}_2$ engendré par a^2, on voit que T_m^* a pour série dérivée $T_m^* \supset Q_2 \supset \mathbb{Z}_2 \supset \{1\}$: c'est donc un groupe métabélien de rang 3. On notera que tous les sous-groupes abéliens de T_m^* sont cycliques. En particulier, le 3-sous-groupe engendré par x isomorphe à $\mathbb{Z}_{3^m}$ est un sous-groupe de Sylow de T_m^*, le centre $Z(T_m^*)$ de T_m^* est engendré par y^2 et est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$.

Le calcul des groupes de cohomologie ordinaire (entière) de T_m^* peut être fait de la manière suivante. D'une part, comme $[T_m^*, T_m^*] \simeq Q_2$ est un sous-groupe distingué de T_m^* tel que $T_m^*/[T_m^*,T_m^*] \simeq \mathbb{Z}_{3^m}$, le ℓ. 1.4.4 montre que

$$\hat{H}^p(T_m^*,\mathbb{Z}) = 0 \quad \text{pour } p \text{ impair},$$

$$\hat{H}^p(T_m^*,\mathbb{Z})_{(3)} \xrightarrow{\sim} \hat{H}^p(\mathbb{Z}_{3^m},\mathbb{Z}) \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{Z}.$$

Rappelons d'autre part les résultats suivants

Lemme 6.1.1.

Soit G un groupe fini, alors

(i) G est à cohomologie (au sens d'Artin-Tate) périodique si, et seulement si, tous ses sous-groupes abéliens sont cycliques ;

(ii) si G a un 2-sous-groupe de Sylow qui est un groupe quaternionique généralisé, sa 2-période vaut 4.

(i) est établi dans [11] (p. 262) et (ii) dans [59] par R.G. Swan.

Dans ces conditions, les seuls groupes de cohomologie qu'il nous reste à calculer sont $\hat{H}^o(T_m^*,\mathbb{Z})$ et $\hat{H}^{-2}(T_m^*,\mathbb{Z})$, mais ([11], p. 237)

$$\hat{H}^o(T_m^*,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{|T_m^*|} \simeq \mathbb{Z}_{3^m} \oplus \mathbb{Z}_8,$$

$$\hat{H}^{-2}(T_m^*,\mathbb{Z}) = T_m^*/[T_m^*,T_m^*] \simeq \mathbb{Z}_{3^m}.$$

En définitive, nous obtenons

Proposition 6.1.2.

(i) les groupes de cohomologie entière de T_m^* valent

$$H^p(T_m^*,\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } p = 0, \\ \mathbb{Z}_{3^m} & \text{pour } p = 4k+2 \text{ avec } k \geq 0, \\ \mathbb{Z}_{3^m} \oplus \mathbb{Z}_8 & \text{pour } p = 4k \text{ avec } k > 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

(ii) les groupes de cohomologie modulo 2 de T_m^* valent

$$H^p(T_m^*,\mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{pour } p = 4k \text{ ou } 4k+3 \text{ avec } k \geq 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On appelle *forme sphérique tétraédrique* toute forme sphérique $S^N|T^*_m$ définie par une action libre du groupe T^*_m sur la sphère S^N de dimension N. Puisque la proposition précédente montre que la période cohomologique de T^*_m vaut 4, pour qu'il existe de telles formes il est nécessaire (cf. prop. 1.3.3 d)) que l'entier N soit tel que $N+1 \equiv 0 \pmod 4$. Il est alors évidemment possible de décrire les représentations unitaires irréductibles sans point fixe de T^*_m (cf. [67], p. 199), mais il nous suffira pour l'instant de retenir que S^{4n+3}/T^*_m $(n \geq 0)$ est une variété différentiable connexe, compacte et orientable de dimension 4n+3. Du lemme 1.4.1. et de la proposition 6.1.2, nous en déduisons

Proposition 6.1.3.

(i) Les groupes de cohomologie entière de S^{4n+3}/T^*_m valent

$$H^p(S^{4n+3}/T^*_m,\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } p=0 \text{ ou } 4n+3, \\ \mathbb{Z}_{3^m} & \text{pour } p=4k+2 \text{ avec } 0 \leq k \leq n, \\ \mathbb{Z}_{3^m} \oplus Z_8 & \text{pour } p=4k \text{ avec } 1 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

(ii) Les groupes de cohomologie modulo 2 de S^{4n+3}/T^*_m valent

$$H^p(S^{4n+3}/T^*_m,\mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{pour } p=4k \text{ ou } 4k+3 \text{ avec } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

6.2. *K-théorie complexe des variétés* S^{4n+3}/T^*_m.

Dans le paragraphe précédent nous avons vu de quelle façon la cohomologie des formes sphériques tétraédriques S^{4n+3}/T^*_m était liée à celle des espaces lenticulaires $S^{4n+3}/\mathbb{Z}_{3^m}$, $\mathbb{Z}_{3^m}$ étant le sous-groupe de T^*_m engendré par **x**. D'un autre côté, il est clair que la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch

$$E_2^{p,q} = \tilde{H}^p(S^{4n+3}/T^*_m,\ \tilde{KU}^q(S^o)) \implies \tilde{KU}^r(S^{4n+3}/T^*_m)$$

est triviale (prop. 1.4.2). Alors, moyennant le th. 1.4.5, nous pouvons énoncer

Théorème 6.2.1.

Pour tout $n \geq 0$, *on a*

(*i*) *le groupe* $\widetilde{KU}(S^{4n+3}/T^*_n)$ *a pour ordre* $3^{m(2n+1)}.2^{3n}$, $\widetilde{KU}^{-1}(S^{4n+3}/T^*_m)$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}$;

(*ii*) $\widetilde{KU}(S^{4n+3}/T^*_m)_{(3)}$ *est isomorphe à* $\widetilde{KU}(S^{4n+3}/\mathbb{Z}_{3^m})$, *alors que* $\widetilde{KU}(S^{4n+3}/T^*_m)_{(2)}$ *est indépendant de* m.

Corollaire 6.2.2.

Pour tout $m \geq 1$, $\widetilde{KU}(S^3/T^*_m)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_{3^m}$.

Puisque la 2-composante primaire de $\widetilde{KU}(S^{4n+3}/T^*_m)$ ne dépend pas de m, plaçons-nous dans le cas $m = 1$ pour la déterminer. La méthode suivie consistant à décrire l'anneau $KU(S^{4n+3}/T^*)$ via la suite exacte d'Atiyah (prop. 1.4.8)

$$0 \to KU^1(S^{4n+3}/T^*) \to RU(T^*) \xrightarrow{\phi} RU(T^*) \xrightarrow{\theta} KU^o(S^{4n+3}/T^*) \to 0 \qquad (1),$$

nous allons donc commencer par étudier l'anneau $RU(T^*)$.

Le groupe binaire tétraédrique T^* a 7 classes de conjugaison

$$C_o = \{1\}\ ,\quad C_1 = \{y^2\}\ ,\quad C_2 = \{y,y^3,z,y^2z,yz,zy\},$$

$$C_3 = \{x,xy^2z,xy^3,xy^3z\},\quad C_4 = \{x^2,zx^2,yx^2,zy^3x^2\},$$

$$C_5 = \{xz,xy,y^2x,y^3x\},\quad C_6 = \{x^2y^2,x^2y,z^3x^2,y^3x^2\}.$$

La classe C_1 contient l'unique élément d'ordre 2 (c'est l'élément central), la classe C_2 contient les éléments d'ordre 4, les classes C_3 et C_4 (resp. C_5 et C_6) ceux d'ordre 3 (resp. ceux d'ordre 6). Il s'ensuit (prop. 1.2.2) que T^* possède 7 représentations unitaires irréductibles (non équivalentes deux à deux). Comme $T^*/[T^*,T^*] \simeq \mathbb{Z}_3$, seules trois de ces représentations sont de degré 1, à savoir ξ_o,ξ_1 et ξ_2 données par

$$\xi_o(x) = 1, \quad \xi_o(y) = 1, \quad \xi_o(z) = 1,$$
$$\xi_1(x) = j, \quad \xi_1(y) = 1, \quad \xi_1(z) = 1,$$
$$\xi_2(x) = j^2, \quad \xi_2(y) = 1, \quad \xi_3(z) = 1,$$

où $j = \exp(\frac{2i\Pi}{3})$. En appelant a le nombre de représentations de degré 2 et b celui des représentations de degré 3, on doit avoir $3.1^2 + a.2^2 + b.3^2 = 24$: ainsi $a = 3$ et $b = 1$. Les 3 représentations de degré 2 peuvent être définies par des matrices du type suivant

$$\xi_3(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}, \quad \xi_3(y) = \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{3}}{3} & u \\ v & -\frac{i\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \quad \xi_3(z) = \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{3}}{3} & uj \\ vj^2 & -\frac{i\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xi_4(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}, \quad \xi_4(y) = \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{3}}{3} & u \\ v & \frac{i\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \quad \xi_4(z) = \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{3}}{3} & uj^2 \\ vj & \frac{i\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xi_5(x) = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}, \quad \xi_5(y) = \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{3}}{3} & u \\ v & \frac{i\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \quad \xi_5(z) = \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{3}}{3} & uj \\ vj & \frac{i\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

où $uv = -\frac{2}{3}$. Appelons ξ_6 la représentation de degré 3, alors la table des caractères χ_i des représentations ξ_i, $0 \leq i \leq 6$, est la suivante (la dernière colonne est obtenue en utilisant les relations d'orthogonalité de Frobenius-Schur rappelées en 1.2.1)

	χ_o	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6
C_o	1	1	1	2	2	2	3
C_1	1	1	1	-2	-2	-2	3
C_2	1	1	1	0	0	0	-1
C_3	1	j	j^2	$-j$	$-j^2$	-1	0
C_4	1	j^2	j	$-j^2$	$-j$	-1	0
C_5	1	j	j^2	j	j^2	1	0
C_6	1	j^2	j	j^2	j	1	0

Ce tableau montre d'une part que les 7 représentations unitaires irréductibles ξ_i sont bien non équivalentes, et permet d'autre part d'obtenir la structure multiplicative de $RU(T^*)$

	$\xi_o=1$	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
ξ_o	1	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
ξ_1	ξ_1	ξ_2	1	ξ_4	ξ_5	ξ_3	ξ_6
ξ_2	ξ_2	1	ξ_1	ξ_5	ξ_3	ξ_4	ξ_6
ξ_3	ξ_3	ξ_4	ξ_5	$\xi_2+\xi_6$	$1+\xi_6$	$\xi_1+\xi_6$	$\xi_3+\xi_4+\xi_5$
ξ_4	ξ_4	ξ_5	ξ_3	$1+\xi_6$	$\xi_1+\xi_6$	$\xi_2+\xi_6$	$\xi_3+\xi_4+\xi_5$
ξ_5	ξ_5	ξ_3	ξ_4	$\xi_1+\xi_6$	$\xi_2+\xi_6$	$1+\xi_6$	$\xi_3+\xi_4+\xi_5$
ξ_6	ξ_6	ξ_6	ξ_6	$\xi_3+\xi_4+\xi_5$	$\xi_3+\xi_4+\xi_3$	$\xi_3+\xi_4+\xi_5$	$1+\xi_1+\xi_2+2\xi_6$

Proposition 6.23.

(i) $RU(T^*)$ est additivement engendré par $\xi_o = 1,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5$ et ξ_6 ; sa structure multiplicative est donnée par le tableau précédent.

(ii) T^* ne possède qu'une seule représentation unitaire irréductible sans point fixe, à savoir ξ_5 (qui est de degré 2).

(iii) ξ_o et ξ_6 sont équivalentes à des représentations réelles ; ξ_1, ξ_2, ξ_3 et ξ_4 ne sont pas équivalentes à leurs conjuguées ; ξ_5 n'est pas une représentation réelle mais elle est équivalente à sa conjuguée.

Démonstration.

Les considérations qui précèdent l'énoncé de cette proposition ont établi (i). Pour ce qui est de (iii) il suffit d'utiliser les résultats classiques sur la classification des représentations unitaires irréductibles d'un groupe (cf. prop. 1.2.3) :

$$\sum_{a\in T^*} \chi_o(a^2) = 24, \qquad \sum_{a\in T^*} \chi_6(a^2) = 3 + 3 + 6.3 = 24,$$

$$\sum_{a\in T^*} \chi_i(a^2) = 1 + 1 + 6 + 4j^2 + 4j + 4j^2 + 4j = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1 \text{ ou } 2,$$

$$\sum_{a\in T^*} \chi_i(a^2) = 2 + 2 - 12 - 4j - 4j^2 - 4j - 4j^2 = 0 \quad \text{pour} \quad i = 3 \text{ ou } 4,$$

$$\sum_{a\in T^*} \chi_5(a^2) = 2 + 2 - 12 - 4 - 4 - 4 - 4 = -24.$$

En ce qui concerne (ii), il est immédiat de vérifier qu'hormis ξ_5 ou ξ_6 les autres représentations de T^* ne sont pas sans point fixe (voir leurs définitions). Pour ce qui est de ξ_6, soient λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de $\xi_6(x)$: le tableau des caractères montre que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0, \quad \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = 3.$$

Autrement dit les valeurs propres de $\xi_6(x)$ sont les racines de l'équation $\lambda^3 - 1 = 0$, soit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = j$, $\lambda_3 = j^2$ et par suite ξ_6 n'est pas sans point fixe. ξ_5 est donc la seule représentation irréductible unitaire sans point fixe de T^*.

<u>Corollaire</u> 6.2.4.

Il n'y a qu'une seule forme sphérique associée au groupe tétraédrique binaire T^*, à savoir $M^n = S^{4n+3}/T^*$ où T^* agit librement au moyen de la représentation unitaire virtuelle ρ de degré $2n+2$ donnée par $\rho = (n+1)\xi_5$.

<u>Théorème</u> 6.2.5.

L'anneau $KU(M^n)$ *est isomorphe à l'anneau* $RU(T^*)/<(2 - \xi_5)^{n+1}>$.

<u>Démonstration</u>.

Cela résulte de la suite exacte (1). En effet, ξ_5 étant une représentation unitaire de degré 2, il vient

$$\Lambda^o\xi_5 = 1, \qquad \Lambda^1\xi_5 = {}_5, \qquad \Lambda^2\xi_5 = \det(\xi_5), \qquad \Lambda^i\xi_5 = 0 \text{ pour } i > 2 \quad ;$$

comme il est évident que $\det(\xi_5) = +1$, il s'ensuit que $\sum_{i=o}^{n+1} (-1)^i \Lambda^i \xi_5$ vaut $(2-\xi_5)^{n+1}$ et par conséquent $\mathrm{Im}\,\Phi$ est l'idéal de $RU(T^*)$ engendré par $(2-\xi_5)^{n+1}$.

Remarque.

Le théorème précédent se généralise aisément aux formes sphériques tétraédriques S^{4n+3}/T_m^* avec $m > 1$: soit F_m l'ensemble de toutes les représentations unitaires irréductibles sans point fixe de T_m^* (elles sont toutes de degré 2 et $\mathrm{Card}(F_m) = 2.3^{m-1}$), en notant alors $M^n(m;i_o,i_1,\ldots,i_n)$ la forme sphérique tétraédrique S^{4n+3}/T_m^* $(m \geq 0)$ définie par l'action de T_m^* associée à la représentation unitaire virtuelle sans point fixe $\xi_{i_o} \oplus \xi_{i_1} \oplus \ldots \oplus \xi_{i_n}$ où $\xi_{i_j} \in F_m$ pour tout $0 \leq j \leq n$, on obtient (comparer avec th. 2.2.3 et 5.3.1).

$$KU(M^n(m;i_o,i_1,\ldots,i_n)) \simeq RU(T_m^*)/<\prod_{j=0}^{n} (2-\xi_{i_j})>.$$

En posant

$$\xi_o = 1,\quad \alpha = \xi_1-1,\quad \beta = \xi_2-1,\quad \gamma = \xi_3-2,\quad \delta = \xi_4-2,\quad \varepsilon = \xi_5-2,\quad \rho = \xi_6-3,$$

on voit que l'anneau des représentations unitaires réduites $\widetilde{RU}(T^*)$ de T^* est, en tant que groupe abélien, engendré par α, β, γ, δ, ε et ρ, alors que sa structure multiplicative est entièrement définie par α et ε. Moyennant les habituels abus de notation, le théorème 6.2.5 permet donc de dire

Proposition 6.2.6.

$\widetilde{KU}(M^n)$ est, en tant que groupe, additivement engendré par α, β, γ, δ, ε et ρ ; dans l'anneau $\widetilde{KU}(M^n)$ la table de multiplication est la suivante :

$\alpha^2 = \beta - 2\alpha$, $\alpha\beta = -\alpha-\beta$, $\alpha\gamma = \delta-\gamma-2\alpha$, $\alpha\delta = \varepsilon-\delta-2\alpha$,

$\alpha\varepsilon = \gamma-\varepsilon-2\alpha$, $\alpha\rho = -3\alpha$,

$\beta^2 = \alpha-2\beta$, $\beta\gamma = \varepsilon-\gamma-2\beta$, $\beta\delta = \gamma-\delta-2\beta$, $\beta\varepsilon = \delta-\varepsilon-2\beta$, $\beta\rho = -3\beta$,

$\gamma^2 = \beta+\rho-4\gamma$, $\gamma\delta = \rho-2\gamma-2\delta$, $\gamma\varepsilon = \alpha+\rho-2\gamma-2\varepsilon$, $\gamma\rho = \delta+\varepsilon-2\gamma-2\rho$,

$\delta^2 = \alpha+\rho-4\delta, \quad \delta\varepsilon = \beta+\rho-2\delta-2\varepsilon, \quad \delta\rho = \gamma+\varepsilon-2\delta-2\rho,$

$\varepsilon^2 = \rho-4\varepsilon, \quad \varepsilon\rho = \gamma+\delta-2\varepsilon-2\rho,$

$\rho^2 = \alpha+\beta-4\rho.$

Soit la Q_2-forme sphérique $N^n(2) = S^{4n+3}/Q_2$ (cf. § 5.2) : l'anneau $\widetilde{KU}(N^n(2))$ a notamment été décrit par Kensô FUJII.

Théorème 6.2.7. ([17], th. 1.2).

(i) $\widetilde{KU}(N^n(2)) \simeq \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n-1}}$ *pour* $n \geq 1$, *chaque facteur étant respectivement engendré par* α', β', δ' *et* $\gamma' + 2^{n+1}\delta'$. *Pour* $n = 0$: $\widetilde{KU}(N^o(2)) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ *avec* α' *et* β' *comme générateurs.*

(ii) Pour tout $n \geq 0$, *la structure multiplicative de* $\widetilde{KU}(N^n(2))$ *est donnée par*

$\alpha'^2 = -2\alpha', \quad \beta'^2 = -2\beta', \quad \alpha'\beta' = -2\alpha' - 2\beta'+ \gamma', \quad \delta'^2 = \gamma' - 4\delta',$

$\alpha'\beta' = -2\alpha', \quad \beta'\delta' = -2\beta', \quad \delta'^{n+1} = 0.$

[ci-dessus, on a noté α', β', γ' et δ' les représentations réduites des représentations ξ_1, ξ_2, ξ_3 et ξ_4 de $RU(Q_2)$ définies au § 5.1].

Lemme 6.2.8.

Soit $\Psi : \widetilde{KU}(M^n) \to \widetilde{KU}(N^n(2))$ l'application définie par

$$\Psi(\alpha) = \Psi(\beta) = o, \Psi(\rho) = \gamma', \quad \Psi(\gamma) = \Psi(\delta) = \Psi(\varepsilon) = \delta',$$

alors Ψ est un homomorphisme d'anneaux et, pour $n \geq 1$, on a

$$\mathrm{Im}\ \Psi \simeq \mathbb{Z}_{2^{2n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n-1}} .$$

Démonstration.

Comme dans $\widetilde{KU}(N^n(2))$ on a

$$\gamma' = \delta'^2 + 4\delta' \quad \text{et} \quad \delta'^3 + 6\delta'^2 + 8\delta' = 0,$$

il est facile de vérifier que Ψ est un homomorphisme d'anneaux [utiliser les tables de multiplications données par 6.2.6 et 6.2.7 (ii)] ; par exemple

$\Psi(\delta\rho) = \Psi(\gamma) + \Psi(\varepsilon) - 2\Psi(\delta) = -2\Psi(\rho) - 2\Psi(\rho) = -2\gamma'$,

$\Psi(\delta)\Psi(\rho) = \delta'\gamma' = \delta'^3 + 4\delta'^2 = -2\delta'^2 - 8\delta' = -2\gamma'$.

D'un autre côté Im Ψ, de par la définition de Ψ, est engendré par γ' et δ' et cela comme sous-anneau de $\widetilde{KU}(N^n(2))$ puisque $\gamma' = \delta'^2 + 4\delta'$; dans ces conditions (6.2.7 (i)) Im Ψ est isomorphe à $\mathbb{Z}_{2^{2n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n-1}}$ où chaque facteur est engendré par δ' et $\gamma' + 2^{n+1}\delta'$, la structure multiplicative étant définie par $\gamma' = \delta'^2 + 4\delta'$ et $\delta'^{n+1} = 0$.

Théorème 6.2.9.

Pour tout $m \geq 1$, *on a*

$$\widetilde{KU}(S^{4n+3}/T_m^*) \simeq \widetilde{KU}(S^{4n+3}/\mathbb{Z}_{3^m}) \oplus \mathbb{Z}_{2^{2n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n-1}} \qquad (n \geq 1)$$

En particulier

$$\widetilde{KU}(S^7/T_m^*) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_{3^{m+1}} \oplus \mathbb{Z}_{3^m} \oplus \mathbb{Z}_{3^{m-1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^3} & \text{pour } m > 1, \\ \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_8 & \text{pour } m = 1. \end{cases}$$

Preuve.

Le théorème 6.2.1. nous a montré que $\widetilde{KU}(S^{4n+3}/T_m^*)_{(2)} \simeq \widetilde{KU}(S^{4n+3}/T^*)_{(2)}$ pour tout $m \geq 1$, le résultat est alors immédiat par 6.2.8 puisque $|\text{Im } \Psi| = 2^{2n+1} \times 2^{n-1} = 2^{3n} = |\widetilde{KU}(S^{4n+3}/T^*)_{(2)}|$.

Comme $\widetilde{KU}(S^{4n+3}/\mathbb{Z}^*_{3^m})$ est connu (th. 2.3.6.), ce résultat résout complètement le calcul de la K-théorie complexe des formes sphériques tétraédriques (Pour $n = 0$, voir cor. 6.2.2)

6.3. K-*théorie réelle des formes sphériques tétraédriques*.

Proposition 6.3.1.

$\widetilde{KO}(S^{4n+3}/T_m^*)$ a, en tant que groupe, un ordre inférieur ou égal à $3^{mn}.2^{3n}$. Plus précisément la 3-composante primaire de $\widetilde{KO}(S^{4n+3}/T_m^*)$ est isomorphe à $\widetilde{KO}(S^{4n+3}/\mathbb{Z}_{3^m})$, ainsi sa 2-composante est indépendante de m.

Démonstration.

Il suffit de considérer la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch

$$E_2^{p,q} = \tilde{H}^p(S^{4n+3}/T_m^*,\ \tilde{KO}^q(S^o)) \implies \tilde{KO}^r(S^{4n+3}/T_m^*) ,$$

pour voir que les seuls termes $E_2^{p,-p}$ non nuls sont ceux pour lesquels $p \equiv 0 \pmod 4$ avec $0 < p < 4n+3$; d'ailleurs (prop. 6.1.3) ils valent $\mathbb{Z}_{3^m} \oplus \mathbb{Z}_8$: il s'ensuit bien que $|\tilde{KO}(S^{4n+3}/T_n^*)| \leq (3^m.8)^n$. Les autres précisions sont une application directe du théorème 1.4.5.

Soit $\tilde{\Psi}$ l'homomorphisme de $\tilde{KO}(M^n)$ dans $\tilde{KO}(N^n(2))$ induit par l'homomorphisme $\Psi : \tilde{KU}(M^n) \to \tilde{KU}(N^n(2))$ défini dans le paragraphe précédent, tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{KU}(M^n) & \xrightarrow{\quad\Psi\quad} & \tilde{KU}(N^n(2)) \\
\Big\downarrow r & & \Big\downarrow r \\
\tilde{KO}(M^n) & \xrightarrow{\quad\tilde{\Psi}\quad} & \tilde{KO}(N^n(2)) .
\end{array}$$

Désignons alors par d' et g' les éléments de $\tilde{KO}(N^n(2))$ tels que $d' = r(\delta')$ et $c(g') = \gamma'$; selon [10], il s'ensuit

$$\mathrm{Im}\ \tilde{\Psi} \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_{2^{2n}} \oplus \mathbb{Z}_{2^n} & \text{pour } n \text{ pair non nul,} \\ \mathbb{Z}_{2^{2n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n-1}} & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Pour n pair (resp. impair), $\mathrm{Im}\ \tilde{\Psi}$ est additivement engendré par respectivement d' et g' (resp. d' et $g' + 2^n d'$). Compte tenu de la prop. 6.3.1, il en découle clairement

Théorème 6.3.2.

(i) Pour n *pair (non nul)*

$$\tilde{KO}(S^{4n+3}/T_m^*) \simeq \tilde{KO}(S^{4n+3}/\mathbb{Z}_{3^n}) \oplus \mathbb{Z}_{2^{2n}} \oplus \mathbb{Z}_{2^n} .$$

(ii) Pour n *impair*

$$\widetilde{KO}(S^{4n+3}/T_m^*) \simeq \widetilde{KO}(S^{4n+3}/\mathbb{Z}_{3^m}) \oplus \mathbb{Z}_{2^{2n+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{n-1}}.$$

En particulier, pour tout $m \geq 1$, on a

$$\widetilde{KO}(S^3/T_m^*) = 0, \quad \widetilde{KO}(S^7/T_m^*) \simeq \mathbb{Z}_{3^m} \oplus \mathbb{Z}_8.$$

Remarque.

Le résultat précédent signifie notamment que la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch pour la KO-théorie des formes sphériques tétraédriques est triviale. Rappelons qu'il en est de même pour les espaces projectifs réels (cf. [1]), les espaces lenticulaires (cf. chapitres III et IV) et les Q_m-formes sphériques (chap. V).

CHAPITRE VII

K-THEORIE DES FORMES SPHERIQUES DE BASSE DIMENSION

7.1. *Rappels et calculs préliminaires.*

Nous nous proposons ici de déterminer les groupes de cohomologie d'Artin-Tate (à valeurs dans $\mathbb{Z}$) des groupes apparaissent comme groupes fondamentaux (ou facteurs directs de groupes fondamentaux) des formes sphériques de dimension inférieure à 10. Les groupes ainsi sélectionnés sont issus de la classification des formes sphériques donnée par J.A. Wolf ([67], p. 218 à 226) dont nous userons de la terminologie qui y est introduite. D'autre part, on sait que pour un groupe fini (*) G, d'ordre p, la théorie classique de la cohomologie des groupes finis donne ([11], p. 236 et 250)

$$\hat{H}^{o}(G) \simeq \mathbb{Z}_p, \quad \hat{H}^{impair}(G) = 0, \tag{1}$$

$$\hat{H}^{-2}(G) \simeq G/[G,G], \quad \hat{H}^{2}(G) \simeq \mathrm{Hom}(G/[G,G],Z_p), \tag{2}$$

[ci-dessus on a écrit $\hat{H}^i(G)$ pour $\hat{H}^i(G,\mathbb{Z})$].

Tout d'abord considérons les *groupes de type* (I,d) i.e. ceux de présentation

$$x^m = 1, \quad y^n = 1, \quad yxy^{-1} = x^r,$$

avec les conditions numériques

$$mn > 0, \quad ((r-1)n,m) = 1, \quad r^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m),$$

d étant l'ordre de r dans le groupe multiplicatif des éléments inversibles de Z_m (on notera que nécessairement m est impair et n un multiple de d). Les groupes ainsi définis sont précisément ceux pour lesquels tout sous-groupe de Sylow est cyclique ([71], p. 175). G étant l'un de ces groupes, il est clair que $|G| = mn$; d'autre part $[G,G]$ est le sous-groupe cyclique d'ordre

---

(*) Il s'agit évidemment de groupe à cohomologie périodique.

m engendré par x, ainsi $G/[G,G]$ est isomorphe au sous-groupe cyclique d'ordre n engendré par y. Nous obtenons donc

$$\hat{H}^{-2}(G) \simeq \mathbb{Z}_n \simeq \hat{H}^2(G) \qquad (3)$$

Les *groupes de type* (II,d) i.e. ceux de présentation

$$x^m = 1, \quad y^n = 1, \quad y^{2^{\alpha-1}.u} = z^2, \quad yxy^{-1} = x^r, \quad zxz^{-1} = x^{\ell}, \ zyz^{-1} = y^k,$$

avec des conditions numériques appropriées (notamment $n = 2^{\alpha}.u$, u impair, $\alpha \geqslant 2$ et $((r-1)n,m) = 1$), sont d'ordre $2^{\alpha+1}.um$ et leurs 2-sous-groupes de Sylow sont quaternioniques. Pour un tel groupe G, G. Vincent a montré que $G/[G,G]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_u$ (lorsque $u = 1$, on convient que $\mathbb{Z}_1 = 0$) ([63], p. 131) ; il s'ensuit

$$\hat{H}^{4k+2}(G) \quad Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_u \qquad (4)$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la 2-période cohomologique de G valant 4 selon le résultat de R.G. Swan rappelé en 6.1.1.

Parmi les *groupes de type* IV, c'est le *groupe octaédrique binaire généralisé* O_m^* $(m \geqslant 1)$ de présentation

$$\begin{array}{llll} x^{3^m} = y^4 = 1, & y^2 = z^2 = t^2, & xyx^{-1} = z, & xzx^{-1} = yz, \\ yzy^{-1} = z^{-1}, & txt^{-1} = x^{-1}, & tyt^{-1} = zy, & tzt^{-1} = z^{-1}, \end{array}$$

qui joue un rôle essentiel. C'est un groupe d'ordre $2^4.3^m$ dont le sous-groupe des commutateurs $[O_m^*, O_m^*]$ est isomorphe au groupe tétraédrique binaire généralisé T_m^* (qui est de type III) engendré par x, y et z. Nous avons donc

$$\hat{H}^{4k+2}(O_m^*) \simeq \mathbb{Z}_2, \qquad (5)$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque.

Comme pour la K-théorie des formes sphériques tétraédriques, la détermination des 2-composantes primaires des groupes $\widetilde{KU}(S^{4n+3}/O_m^*)$ et $\widetilde{KO}(S^{4n+3}/O_m^*)$ se ramène au cas où $m = 1$. Plus précisément, en écrivant O^* pour O_1^*, on peut voir que O^* a 8 classes de conjugaison, à savoir C_i avec $0 \leqslant i \leqslant 7$ de telle sorte que $C_o = \{1\}$, C_1 et C_2 contiennent des éléments d'ordre 2, C_3 ceux d'ordre 3, C_4 ceux d'ordre 4, C_5 ceux d'ordre 6, C_6 et C_7 ceux d'ordre 8. Il s'ensuit (prop. 1.2.2) que O^* possède huit représentations unitaires irréductibles ξ_i, $0 \leqslant i \leqslant 7$, telles que $\xi_o = 1$ et ξ_1 soient de degré 1, ξ_2, ξ_3 et ξ_4 de degré 2, ξ_5 et ξ_6 de degré 3, ξ_7 de degré 4. Du reste, T^* étant un sous-groupe distingué de O^*, la théorie des représentations induites (cf. [16], chap. VII et en particulier §.4.6) et les relations d'orthogonalité de Frobenius-Schur permettent de dresser, pour les caractères χ_i des représentations ξ_i, la table suivante

	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	χ_7
C_0	1	1	2	2	2	3	3	4
C_1	1	1	2	-2	-2	3	3	-4
C_2	1	-1	0	0	0	1	-1	0
C_3	1	1	-1	-1	-1	0	0	1
C_4	1	1	2	0	0	-1	-1	0
C_5	1	1	-1	1	1	0	0	-1
C_6	1	-1	0	$i\sqrt{2}$	$-i\sqrt{2}$	-1	1	0
C_7	1	-1	0	$-i\sqrt{2}$	$i\sqrt{2}$	-1	1	0

Cette table montre que les représentations ξ_3 et ξ_4 sont sans point fixe (procéder comme dans 6.2.3) et équivalentes à leurs conjuguées ; en fait ξ_3 et ξ_4 ont pour restriction à T^* l'unique représentation unitaire irréductible sans point fixe de T^*. Avec les habituels abus de notation, nous voyons donc que l'anneau $KU(S^{4n+3}/O^*)$ est isomorphe à $KU(O^*)/<(2-\xi_3)^{n_1}.(2-\xi_4)^{n_2}>$ lorsque la forme sphérique octaédrique S^{4n+3}/O^* est définie par l'action de O^* au moyen de la représentation unitaire virtuelle $n_1\xi_3 \oplus n_2\xi_4$ avec $n_1+n_2 = n+1$, la structure multiplicative découlant de la table suivante :

	ξ_0	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7
$\xi_0=1$	1	ξ_1	ξ_2	ξ_4	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7
ξ_1	ξ_1	1	ξ_2	ξ_4	ξ_3	ξ_6	ξ_5	ξ_7
ξ_2	ξ_2	ξ_2	$1+\xi_1+\xi_2$	ξ_7	ξ_7	$\xi_5+\xi_6$	$\xi_5+\xi_6$	$\xi_3+\xi_4+\xi_7$
ξ_3	ξ_4	ξ_4	ξ_7	$\xi_1+\xi_5$	$1+\xi_6$	$\xi_4+\xi_7$	$\xi_3+\xi_7$	$\xi_2+\xi_5+\xi_6$
ξ_4	ξ_4	ξ_3	ξ_7	$1+\xi_6$	$\xi_1+\xi_5$	$\xi_3+\xi_7$	$\xi_4+\xi_7$	$\xi_2+\xi_5+\xi_6$
ξ_5	ξ_5	ξ_6	$\xi_5+\xi_6$	$\xi_4+\xi_7$	$\xi_3+\xi_7$	$1+\xi_2+\xi_5+\xi_6$	$\xi_1+\xi_2+\xi_5+\xi_6$	$\xi_3+\xi_4+2\xi_7$
ξ_6	ξ_6	ξ_5	$\xi_5+\xi_6$	$\xi_3+\xi_7$	$\xi_4+\xi_7$	$\xi_1+\xi_2+\xi_5+\xi_6$	$1+\xi_2+\xi_5+\xi_6$	$\xi_3+\xi_4+2\xi_7$
ξ_7	ξ_7	ξ_7	$\xi_3+\xi_4+\xi_7$	$\xi_2+\xi_5+\xi_6$	$\xi_2+\xi_5+\xi_6$	$\xi_3+\xi_4+2\xi_7$	$\xi_3+\xi_4+2\xi_7$	$1+\xi_1+\xi_2+2(\xi_5+\xi_6)$

Enfin, chez les groupes de type V ou VI (ils ne sont pas résolubles), considérons le *groupe icosaédrique binaire* I^* défini par

$$x^{10} = 1, \quad x^5 = y^3 = z, \quad yxy^{-1} = x^{-1}y.$$

Ce groupe, qui est en fait $SL(2,5)$, est d'ordre 120 : il a la propriété d'être *parfait* i.e. $[I^*,I^*] = I^*$, en outre son centre $Z(I^*) = \{1,z\}$ est son seul sous-groupe (propre) distingué ([67], §.6.2). Trivialement, il vient pour tout $k \in Z$

$$\hat{H}^{4k+2}(I^*) = 0. \tag{6}$$

Moyennant le théorème 1.4.5, certaines des considérations ci-dessus développées permettent d'obtenir des informations sur la K-théorie des formes sphériques de dimension quelconque. Parmi les formes sphériques homogènes, considérons, par exemple, les *formes sphériques diédriques* S^{4n+3}/D_a^* où D_a^* est le groupe diédrique binaire généralisé de présentation

$$x^{2a} = 1, \quad x^a = y^2, \quad yxy^{-1} = x^{-1}.$$

Posons $a = 2^{\alpha-1}.u$ avec u impair et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord, il est clair que $|D_a^*| = 2^{\alpha+1}.u$; en outre si a est impair (resp. pair) D_a^* est un groupe de type (I,2) (resp. de type (II,1)) avec $m = u$, $n = 4$ et $r = -1$ (resp. $m = 1$, $n = 2^\alpha.u$, $k = -1$). Enfin, il est facile de voir que la relation $yxy^{-1} = x^{-1}$ implique

$$yx^iy^{-1} = x^{-i}, \qquad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

<u>Proposition</u> 7.1.1.

$$\tilde{K}_k(S^{4n+3}/D_a^*)_{(2)} \simeq \begin{cases} \tilde{K}_k(S^{4n+3}/\mathbb{Z}_4) & \text{si } \alpha = 1, \\ \\ \tilde{K}_k(S^{4n+3}/Q_\alpha) & \text{si } \alpha \geqslant 2. \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>.

Comme $[D_a^*,D_a^*] = \{1, yxy^{-1}x^{-1} = x^{-2}\}$, on voit que pour a impair, soit $\alpha = 1$, le groupe $D_a^*/[D_a^*,D_a^*]$ est isomorphe à un 2-sous-groupe de Sylow de D_a^* qui est cyclique (D_a^* est ici un groupe de type (I,2)) ; en fait $D_a^*/[D_a^*,D_a^*]$ est isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}_4$ engendré par y : le résultat s'ensuit donc aisément par 1.4.5.

Lorsque $\alpha \geqslant 2$, considérons le sous-groupe H_u de D_a^* engendré par x^{2^α} : H_u est un sous-groupe distingué de D_a^* et il est isomorphe à $\mathbb{Z}_u$. En posant $X = x^u$, il s'ensuit que D_a^*/H_u est isomorphe au groupe engendré par X, y et les relations

$$X^{2^\alpha} = 1, \quad X^{2^{\alpha-1}} = y^2, \quad yXy^{-1} = X^{-1}$$

(la dernière relation est donnée par (7)) ; autrement dit D_a^*/H_u est isomorphe au groupe quaternionique généralisé Q_α (cf. définition § 5.1) (ceci est conforme au fait que tout 2-sous-groupe de Sylow d'un groupe de type II est quaternionique), d'où le résultat.

[Naturellement, lorsque $u = 1$, on a $H_1 = 0$ et l'isomorphisme annoncé est trivial puisqu'alors $D_a^* = Q_\alpha$].

7.2. K-théorie des formes sphériques de dimension 3.

Sur la sphère S^3 les groupes qui opèrent librement et linéairement sont

$$G_0 = \mathbb{Z}_a \ (a > 1), \quad G_1 = D^*_{2b+1}, \quad G_2 = D^*_{2b} \ (b > 0), \quad G_3 = T^*_m, \quad G_4 = O^*, \quad G_5 = I^*,$$

et tout produit direct $G_0 \times G_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant 5$ et $(a, |G_i|) = 1$.

Pour $S^3/G_0 = L^1(a)$, les théorèmes 2.2.5 et 2.3.6 donnent

$$\boxed{\widetilde{KU}(S^3/G_0) = Z_a} \ ;$$

d'autre part 3.1.2 et 3.2.1 montrent que $\widetilde{KO}(L^1(a))$ ne contient éventuellement que de la 2-torsion, il s'ensuit

$$\boxed{\widetilde{KO}(S^3/G_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } v_2(a) = 0, \\ \mathbb{Z}_4 & \text{si } v_2(a) = 1, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{si } v_2(a) \geqslant 2. \end{cases}}$$

Pour $v_2(a) = 1$ (resp. $v_2(a) \geqslant 2$), le résultat ci-dessus découle de 3.4.2 (i) et $(r\sigma)^2 = 0$ (prop. 3.4.10) (resp. $2.r\sigma = 0 = 2\kappa$, cf. prop. 7.4.1).

Pour $S^3/G_1 = S^3/D^*_{2b+1}$, (3) montre que les groupes $H^i(S^3/G_1, \mathbb{Z})$ ne contiennent éventuellement que de la 2-torsion, ainsi $\widetilde{K}_k(S^3/G_1) \simeq \widetilde{K}_k(S^3/G_1)_{(2)}$ et donc (prop. 7.1.1) nous avons

$$\boxed{\widetilde{KU}(S^3/G_1) = \mathbb{Z}_4} \ , \quad \boxed{\widetilde{KO}(S^3/G_1) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2} \ .$$

Posons $b = 2^{\alpha-2}.u$ $(u \geq 1,\ \alpha \geq 2)$ pour $G_2 = D^*_{2b}$: d'une part la prop. 7.1.1 nous renseigne sur la 2-composante primaire de $\tilde{K}_k(S^3/G_2)$, d'autre part l'examen du gradué associé donné par la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch permet d'en déduire

$$\boxed{\tilde{KU}(S^3/G_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_u} \quad , \quad \boxed{\tilde{KO}(S^3/G_2) = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4} .$$

Quand $u = 1$, ces résultats, avec $\mathbb{Z}_1 = 0$, correspondent à 5.3.8 et 5.6.3.

Pour les formes sphériques tétraédriques, nous avons obtenu (cor. 6.2.2 et th. 6.3.2)

$$\boxed{\tilde{KU}(S^3/G_3) = \mathbb{Z}_{3^m}} \quad , \quad \boxed{\tilde{KO}(S^3/G_3) = 0} .$$

Considérons S^3/O^* : (5) montre que $\mathcal{G}_*(\tilde{KU}(S^3/O^*)) = \mathbb{Z}_2$, autrement dit

$$\boxed{\tilde{KU}(S^3/G_4) = \mathbb{Z}_2} .$$

Soit $\tilde{RU}(O^*)$ l'anneau des représentations unitaires réduites de O^* ; la remarque du paragraphe précédent implique que $\tilde{RU}(O^*)$ est additivement engendré par α, β, γ, δ, ε, ρ et λ définies par

$$\alpha = \xi_1 - 1,\quad \beta = \xi_2 - 2,\quad \gamma = \xi_3 - 2,\quad \delta = \xi_4 - 2,\quad \varepsilon = \xi_5 - 3,\quad \rho = \xi_6 - 3,\quad \lambda = \xi_7 - 4 \quad ;$$

sa structure multiplicative peut être décrite par une table de multiplication analogue à celles que nous avons construites pour $\tilde{RU}(Q_3)$ et $\tilde{RU}(T^*_m)$. Il est alors aisé de voir que $\tilde{KU}(S^3/G_4)$ est précisément engendré par α (avec les habituels abus de notation ; cf. prop. 1.4.8) avec $\alpha^2 = -2\alpha = 0$. Ainsi, en appelant a la représentation orthogonale de O^* telle que $c(a) = \alpha$, il s'ensuit $4a = 0$ et par conséquent

$$\boxed{\tilde{KO}(S^3/G_4) = \mathbb{Z}_4} .$$

Il ne nous reste plus qu'à étudier le cas des formes sphériques de dimension 3 ayant pour groupe fondamental le groupe icosaédrique binaire I^* : (6) montre clairement que $\mathcal{G}_*(\tilde{K}_k(S^3/I^*)) = 0$, d'où

$$\boxed{\widetilde{KU}(S^3/I^*) = 0} \quad , \quad \boxed{\widetilde{KO}(S^3/I^*) = 0}.$$

7.3. *K-théorie des formes sphériques de dimension 5 ou 9.*

Les formes sphériques de dimension 5 ou 9 n'ont pour groupes fondamentaux que des groupes de type I. De façon précise, les groupes opérant librement et linéairement sur S^5 sont soit $G_0 = \mathbb{Z}_a$ $(a > 1)$, soit G_1 = groupe de type (I,3) soit $G_0 \times G_1$ avec $(a,|G_1|) = 1$.

Pour ce qui est de S^5/G_0, par des raisons analogues à celles citées dans le paragraphe précédent, on obtient

$$\widetilde{KU}(S^5/G_0) = \begin{cases} (\mathbb{Z}_a)^2 & \text{si } v_2(a) = 0, \\ \mathbb{Z}_{2^{m+1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{m-1}} \oplus \left(\mathbb{Z}_{\frac{a}{2^m}}\right)^2 & \text{si } v_2(a) = m \geq 1 ; \end{cases}$$

$$\widetilde{KO}(S^5/G_0) = \begin{cases} \mathbb{Z}_a & \text{si } v_2(a) = 0, \\ \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{a}{2}} & \text{si } v_2(a) = 1, \\ \mathbb{Z}_{2^{m+1}} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{a}{2^m}} & \text{si } v_2(a) = m \geq 2. \end{cases}$$

Les considérations développées à propos des groupes de type (I,d) montrent que pour S^5/G_1 on a $\widetilde{K}_k(S^5/G_1)_{(n)} \approx \widetilde{K}_k(L^2(n))$ (ici $n \equiv 0 \pmod 3$). D'autre part (1), (2) et (3) donnant

$$H^i(S^5/G_1,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } i = 0 \text{ ou } 5, \\ \mathbb{Z}_n & \text{pour } i = 2, \\ \mathbb{Z}_{mn} & \text{pour } i = 4, \\ 0 & \text{ailleurs}, \end{cases}$$

avec m notamment *impair*, l'examen de la suite sepctrale d'Atiyah-Hirzebruch $E_2^{p,q} = \widetilde{H}^p(S^5/G_1, \widetilde{K}_k^q(S^o)) \Rightarrow \widetilde{K}_k^r(S^5/G_1)$ implique

$$\boxed{\widetilde{KU}(S^5/G_1) \simeq \mathbb{Z}_m \oplus \widetilde{KU}(L^2(n))} \quad , \quad \boxed{\widetilde{KO}(S^5/G_1) \simeq \mathbb{Z}_m \oplus \widetilde{KO}(L^2(n))} \; .$$

Par exemple, pour toute forme sphérique M de dimension 5 dont le groupe fondamental est le groupe d'ordre 126 de présentation

$$x^7 = 1, \quad y^{18} = 1, \quad yxy^{-1} = x^4,$$

[nonobstant un groupe d'ordre 63, c'est l'un des groupes de rotations d'ordre minimum et non cyclique agissant sans point fixe sur S^5 (voir [63], p. 154-155)] les résultats précédents donnent

$$\widetilde{KU}(M) \simeq \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_9 \quad , \quad \widetilde{KO}(M) \simeq \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9 \; .$$

De même, les seuls groupes non triviaux agissant linéairement et sant point fixe sur S^9 sont $G_0 = \mathbb{Z}_a$ $(a > 1)$, G_1 = groupe de type (I,5) ou $G_0 \times G_1$ avec $(a, G_1) = 1$. En écrivant $a = 2^{\ell}.3^k.b$ avec $(6,b) = 1$ et en posant $\varepsilon_k = 0$ ou 1 selon que $k = 0$ ou non, nous avons d'une part

	$\widetilde{KU}(S^9/G_0)$
$\ell = 0$	$(\varepsilon_k \mathbb{Z}_{3^{k+1}})^2 \oplus (\varepsilon_k \mathbb{Z}_{3^{k-1}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_b)^4$
$\ell = 1$	$\mathbb{Z}_{2^4} \oplus (\varepsilon_k \mathbb{Z}_{3^{k+1}})^2 \oplus (\varepsilon_k \mathbb{Z}_{3^{k-1}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_b)^4$
$\ell > 2$	$\mathbb{Z}_{2^{\ell+3}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{\ell}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{\ell-1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{\ell-2}} \oplus (\varepsilon_k \mathbb{Z}_{3^{k+1}})^2 \oplus (\varepsilon_k \mathbb{Z}_{3^{k-1}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_b)^4$

et d'autre part

	$\widetilde{KO}(S^9/G_0)$
$\ell = 0$	$\mathbb{Z}_2 \oplus (\varepsilon_k \mathbb{Z}_{3^{k+1}}) \oplus (\varepsilon_k \mathbb{Z}_{3^{k-1}}) \oplus (\mathbb{Z}_b)^2$
$\ell = 1$	$\mathbb{Z}_{2^5} \oplus (\varepsilon_k \mathbb{Z}_{3^{k+1}}) \oplus (\varepsilon_k \mathbb{Z}_{3^{k-1}}) \oplus (\mathbb{Z}_b)^2$
$\ell = 2$	$\mathbb{Z}_{2^5} \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus (\varepsilon_k \mathbb{Z}_{3^{k+1}}) \oplus (\varepsilon_k \mathbb{Z}_{3^{k-1}}) \oplus (\mathbb{Z}_b)^2$
$\ell \geq 3$	$\mathbb{Z}_{2^{\ell+3}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{\ell-1}} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus (\varepsilon_k \mathbb{Z}_{3^{k+1}}) \oplus (\varepsilon_k \mathbb{Z}_{3^{k-1}}) \oplus (\mathbb{Z}_b)^2$

le fait que $\widetilde{KO}(S^9/G_0)$ ait toujours de la 2-torsion (même quand $\ell = 0$) est une particularité des espaces lenticulaires dont la dimension N est telle que $N-1 \equiv 0 \pmod 8$. (prop. 3.2.3).

En ce qui concerne S^9/G_1, puisque $G_1/[G_1,G_1] \simeq \mathbb{Z}_n$ (cf §.7.1), le théorème 1.4.5 implique que $\widetilde{K}_k(S^9/G_1)_{(n)}$ est isomorphe à $\widetilde{K}_k(L^4(n))$ où $\widetilde{K}_k(L_o^4(n))$ selon que n est pair ou impair. Comme nécessairement ici m est impair, premier avec n (alors que n est forcément multiple de 5), il s'ensuit que les suites spectrales

$$E_2^{p,q} = \widetilde{H}^p(S^9/G_1, \widetilde{K}_k^q(S^o)) \Rightarrow \widetilde{K}_k^r(S^9/G_1)$$

pour $k = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, sont triviales. En particulier, puisque (1), (2) et (3) donnent

$$H^i(S^9/G_1,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } i = 0 \text{ ou } 9, \\ \mathbb{Z}_n & \text{pour } i = 2 \text{ ou } 6 \\ \mathbb{Z}_{mn} & \text{pour } i = 4 \text{ ou } 8, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

cela signifie que $|\widetilde{K}_k(S^9/G_1)_{(m)}| = m^2$ pour $k = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. En outre, l'homomorphisme de réalification $r : \widetilde{KU}(S^9/G_1) \to \widetilde{KO}(S^9/G_1)$ est tel que sa restriction $r_m : \widetilde{KU}(S^9/G_1)_{(m)} \to \widetilde{KO}(S^9/G_1)_{(m)}$ est surjective (c'est une conséquence de l'imparité de m (raisonner comme dans 3.2.4)). Ainsi les groupes $\widetilde{KU}(S^9/G_1)_{(m)}$

et $\widetilde{KO}(S^9/G_1)_{(m)}$ sont isomorphes.

D'un autre côté, considérons la surjection canonique $\rho : S^9/\mathbb{Z}_m \to S^9/G_1$ induits par l'inclusion canonique de $[G_1,G_1] \simeq \mathbb{Z}_m$ dans G_1 ; soient $\rho^p : \widetilde{H}^p(S^9/G_1, \widetilde{KO}^{-p}(S^o)) \to \widetilde{H}^p(S^9/\mathbb{Z}_m, \widetilde{KO}^{-p}(S^o))$ (resp. $\rho^! : \widetilde{KO}(S^9/G_1) \to \widetilde{KO}(S^9/\mathbb{Z}_m)$) les homomorphismes qu'elle induit : il est clair que, $\forall p \in \mathbb{Z}$, ρ^p est surjectif. Alors, $\widetilde{KO}(S^9/\mathbb{Z}_m)$ étant isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \oplus \widetilde{KO}(L_o^4(m))$ et d'ordre $2m^2$ (prop. 3.2.1), la proposition 1.4.6 montre que $\rho^!_m$, restriction de $\rho^!$ à $\widetilde{KO}(S^9/G_1)_{(m)}$, est un isomorphisme de $\widetilde{KO}(S^9/G_1)_{(m)}$ sur $\widetilde{KO}(L_o^4(m))$.

Autrement dit

$$\boxed{\widetilde{K}_k(S^9/G_1) \simeq \widetilde{K}_k(L^4(n)) \oplus \widetilde{KO}(L_o^4(m))} \quad .$$

Par exemple, la détermination des groupes de rotations d'ordre minimum et non cyclique agissant librement sur S^9 conduisant au groupe G_1' de présentation

$$x^{11} = 1, \quad y^{25} = 1, \quad yxy^{-1} = x^3,$$

on obtient

$$\widetilde{KU}(S^9/G_1') \simeq (\mathbb{Z}_{11})^4 \oplus (\mathbb{Z}_{25})^4, \qquad \widetilde{KO}(S^9/G_1') \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_{11})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{25})^2.$$

7.4. *K-théorie des formes sphériques de dimension 7.*

En dimension 7 les groupes à considérer se répartissent ainsi :

$G_0 = \mathbb{Z}_a (a \geq 1)$, $G_1 = D^*_{2b+1}$, G_2 de type (I,4), $G_3 = D^*_{2b}$ $(b > 0)$,
G_4 de type (II,2), $G_5 = T^*_m$, $G_6 = O^*_m$, G_7 de type (IV,1), $G_8 = I^*$,
$G_9 = \{I^*, S\}$,

et tout produit direct $G_0 \times G_i$ où $1 \leq i \leq 8$ avec $(a, |G_i|) = 1$, ou tout groupe engendré par $G_0 \times I^*$ et S avec $(a,30) = 1$. Ci-dessus, nous avons désigné par G_9 le groupe engendré par I^* et S où S est un élément tel que : $S^2 = -1$ dans $SL(2,5) = I^*$, $SLS^{-1} = \theta(L)$ pour tout $L \in SL(2,5)$ où θ est la conjugaison par $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans $SL(2,5)$. (cf. [67], p. 195).

Nous allons d'abord considérer $\widetilde{KO}(L^3(2^m))$ $(m \geqslant 1)$ en conservant les notations introduites dans les chapitres suivants. Nous savons (th. 4.3.4) que pour $m \geqslant 2$ (resp. $m = 1$)

$$\widetilde{KU}(L^3(2^m)) \simeq \mathbb{Z}_{2^{m+2}} \oplus (\mathbb{Z}_{2^{m-1}})^2 \quad (\text{resp. } \widetilde{KU}(L^3(2)) \simeq \mathbb{Z}_8),$$

chaque facteur étant respectivement engendré par $x_1 = \sigma$, $x_2 = \omega_2+4\sigma$, $x_3 = \omega_2\sigma$ (resp. par σ).

Proposition 7.4.1.

Pour $m \geqslant 2$, $\widetilde{KO}(L^3(2^m))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_{2^{m+1}} \oplus \mathbb{Z}_2$ avec pour générateurs

$$y_1 = r\sigma, \qquad y_2 = \begin{cases} \kappa + 2r\sigma & \text{pour } m = 2, \\ \kappa & \text{pour } m \geqslant 3. \end{cases}$$

D'autre part $\widetilde{KO}(L^3(2))$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}_8$ engendré par $r\sigma$.

Preuve.

L'assertion concernant $L^3(2) = P^7(\mathbb{R})$ est triviale et, du reste, bien connue [1], aussi supposerons-nous $m \geqslant 2$. Comme

$$c(y_1) = -18x_1 + 3x_2 - x_3 \quad \text{et} \quad c(\kappa) = -(3.2^{2m-2}+2^{2m-1})x_1 - 2^{m-2}\, x_2\,,$$

il est aisé de voir que d'une part $c(y_1)$ et $c(y_2)$ ont respectivement 2^{m+1} et 2 pour ordre, et que d'autre part ils sont linéairement indépendants dans $\widetilde{KU}(L^3(2^m))$; ainsi ils engendrent le sous-groupe $\mathbb{Z}_{2^{m+1}} \oplus \mathbb{Z}_2$ de $\widetilde{KU}(L^3(2^m))$. Il en ressort que

$$2^{m+2} \leqslant |\mathrm{Im}\, c| \leqslant |\widetilde{KO}(L^3(2^m))|,$$

soit $\widetilde{KO}(L^3(2^m))$ est isomorphe à $\mathrm{Im}\, c \simeq \mathbb{Z}_{2^{m+1}} \oplus \mathbb{Z}_2$ puisque (th. 3.4.2) le groupe $\widetilde{KO}(L^3(2^m))$ a pour ordre 2^{m+2}.

Remarque.

Le résultat précédent, outre qu'il établit l'injectivité de l'homomorphisme de complexification c, nous permet d'en inférer les valeurs de $\widetilde{KO}(L^n(2^m))$ pour n=1,2 ou 4 que nous avions déjà annoncées dans les §§. 7.2 et 7.3.

En posant pour a : $v_2(a) = \ell$, $v_3(a) = k$, $a = 2^{\ell}.3^{k}.b$ et $\varepsilon_k = 0$ ou 1 selon que k est nul ou non, nous obtenons donc

	$\widetilde{KU}(S^7/G_0)$	$\widetilde{KO}(S^7/G_0)$
$\ell = 0$	$(\varepsilon_k\mathbb{Z}_{3^{k+1}}) \oplus (\varepsilon_k\mathbb{Z}_{3^k}) \oplus (\varepsilon_k\mathbb{Z}_{3^{k-1}}) \oplus (\mathbb{Z}_b)^3$	$\mathbb{Z}_a$
$\ell = 1$	$\mathbb{Z}_8 \oplus (\varepsilon_k\mathbb{Z}_{3^{k+1}}) \oplus (\varepsilon_k\mathbb{Z}_{3^k}) \oplus (\varepsilon_k\mathbb{Z}_{3^{k-1}}) \oplus (\mathbb{Z}_b)^3$	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{3^k.b}$
$\ell \geq 2$	$\mathbb{Z}_{2^{\ell+2}} \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\ell-1}})^2 \oplus (\varepsilon_k\mathbb{Z}_{3^{k+1}}) \oplus (\varepsilon_k\mathbb{Z}_{3^k}) \oplus (\varepsilon_k\mathbb{Z}_{3^{k-1}}) \oplus (\mathbb{Z}_b)^3$	$\mathbb{Z}_{2^{\ell+1}} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{3^k.b}$

Maintenant, la détermination des groupes $\widetilde{K}_k(S^7/G_i)$ où $1 \leq i \leq 9$ conduisant à des situations analogues à celles rencontrées dans les paragraphes précédents, nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'on aboutit aux résultats suivants :

	$\widetilde{KU}(S^7/G_i)$	$\widetilde{KO}(S^7/G_i)$
$i = 1$	$\mathbb{Z}_{16} \oplus (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2b+1}$	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2b+1}$
$i = 2$	$\mathbb{Z}_{2^{\alpha+2}} \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\alpha-1}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m \oplus \widetilde{KU}(S^7/\mathbb{Z}_u)$	$\mathbb{Z}_{2^{\alpha+1}} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_u$
$i = 3$	$\mathbb{Z}_{2^{\alpha+1}} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \widetilde{KU}(S^7/\mathbb{Z}_u)$	$\mathbb{Z}_{2^{\alpha+1}} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_u$
$i = 4$	$\mathbb{Z}_{2^{\alpha+1}} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_m \oplus \widetilde{KU}(S^7/\mathbb{Z}_u)$	$\mathbb{Z}_{2^{\alpha+1}} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_u$
$i = 5$	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{3^{m+1}} \oplus \mathbb{Z}_{3^m} \oplus \mathbb{Z}_{3^{m-1}}$	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{3^m}$
$i = 6$	$\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{3^m}$	$\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{3^m}$
$i = 7$	$\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{3^m} \oplus \mathbb{Z}_u$	$\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{3^m} \oplus \mathbb{Z}_u$
$i = 8$	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$
$i = 9$	$\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$

Cependant, signalons que le groupe G_7 dont il s'agit est celui de présentation

$$x^n = y^4 = 1, \quad y^2 = z^2 = t^2, \quad xyx^{-1} = z, \quad xzx^{-1} = yz,$$
$$yzy^{-1} = z^{-1}, \quad txt^{-1} = x^{-1}, \quad tyt^{-1} = zy, \quad tzt^{-1} = z^{-1},$$

où l'on a posé $n = 3^m.u$ avec $m \geqslant 1$ et $(6,u) = 1$, de sorte qu'il a pour ordre $16.3^m.u$ et pour groupes de cohomologie

$$\hat{H}^{4k}(G_7) \simeq \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_{3^m} \oplus \mathbb{Z}_u, \quad \hat{H}^{4k+2}(G_7) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad \hat{H}^{impair}(G_7) = 0.$$

Enfin, le groupe G_9, qui est d'ordre 240, a pour groupe dérivé le groupe icosaédrique binaire I^* lequel contient O^* : on remarquera alors que l'inclusion canonique de O^* dans G_9 induit en $\tilde{K}_k$-théorie un homomorphisme surjectif de $\tilde{K}_k(S^7/G_9)$ sur $\tilde{K}_k(S^7/O^*)$.

Dans les calculs qui précèdent, nous nous sommes limités aux formes sphériques de dimension impaire parce que la K-théorie des formes sphériques de dimension paire n'est autre que celle des sphères ou des espaces projectifs réels, laquelle est bien connue.

CHAPITRE VIII

IMMERSIONS ET PLONGEMENTS DES FORMES SPHERIQUES

8.1. *Le critère d'Atiyah.*

X étant un espace topologique, on sait que le semi-anneau $\mathrm{Vect}_k(X)$ des classes d'isomorphismes de k-fibrés vectoriels ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de base X possède une structure de λ-semi-anneau où les opérations $(\hat{\lambda}^i : \mathrm{Vect}_k(X) \to \mathrm{Vect}_k(X))_{i\geq 0}$ sont définies par $\hat{\lambda}^i[\xi] = [\Lambda^i\xi]$ pour tout $[\xi]$ de $\mathrm{Vect}_k(X)$. Soit $1 + \mathrm{Vect}_k(X)[[a]]^+$ (resp. $1 + K_k(X)[[a]]^+$) le semi-groupe (resp. le groupe) multiplicatif des séries formelles à coefficients dans $\mathrm{Vect}_k(X)$ (resp. dans $K_k(X)$) et de terme constant 1, alors l'homomorphisme de semi-groupes

$$\hat{\lambda}_a : \mathrm{Vect}_k(X) \to 1 + \mathrm{Vect}_k(X)[[a]]^+$$

défini par $\hat{\lambda}_a[\xi] = \sum_{i\geq 0} \hat{\lambda}^i[\xi].a^i$, confère, de manière standard (*), au complété $K_k(X)$ de $\mathrm{Vect}_k(X)$ une structure de λ-anneau dont les opérations λ^i sont données par $\lambda_a(x) = \sum_{i\geq 0} \lambda(x).a^i$, pour tout $x \in K_k(X)$, où $\lambda_a = \hat{\lambda}_a.\theta$ pour le morphisme naturel de complétion $\theta : \mathrm{Vect}_k(X) \to K_k(X)$. En définissant la notion de morphisme de λ-anneaux, on pourra, par exemple, voir que les isomorphismes canoniques de $KU(L^n(p;p_o,p_1,\ldots,p_n))$ sur $KU(L^n(p))$ (th. 2.2.4) et de $KU(N^n(m;r_1,r_2,\ldots,r_{n+1}))$ sur $KU(N^n(m))$ (th. 5.3.6) sont des isomorphismes de λ-anneaux.

Aux opérations λ^i de la structure de λ-anneau de $K_k(X)$, sont d'une part associées les opérations d'Adams Ψ^i qui, en posant $\Psi_a(x) = \sum_{i\geq 0} \Psi^i(x).a^i$

(*) Pour plus de détails voir, par exemple, D. Husemoller [22] (chap. 12). En outre, on notera également qu'au moyen des puissances extérieures, l'anneau $R_k(G)$ des k-représentations d'un groupe G possède une structure de λ-anneau.

pour $x \in K_k(X)$, sont définies par

$$\Psi_{-a}(x) = - \frac{a}{\lambda_a(x)} \cdot \frac{d}{da} (\lambda_a(x)), \tag{1}$$

et d'autre part les opérations de Grothendieck $\gamma^i : K_k(X) \to K_k(X)$ données par $\gamma_a(x) = \sum_{i \geq 0} \gamma^i(x).a^i$ avec

$$\gamma_a = \lambda_{a/1-a} \tag{2}$$

Alors que les opérations d'Adams(*) sont essentielles en J-théorie, les opérations de Grothendieck sont précisément utiles dans les problèmes d'immersions des variétés(**). En effet, supposons maintenant que X soit une variété différentiable compacte de dimension n et appelons $T_o(X)$ l'élément $T(X)-n$ de $\tilde{KO}(X)$ (avec des abus de notation évidents) où $T(X)$ est le fibré tangent (réel) de X, alors M.F. Atiyah a montré que

<u>Théorème</u> 8.1.1. [4]

1. S'il existe une immersion de X dans $\mathbb{R}^{n+k}$, alors $\gamma^i(-T_o(X)) = 0$ pour $i > k$;
2. S'il existe un plongement de X dans $\mathbb{R}^{n+k}$, alors $\gamma^i(-T_o(X)) = 0$ pour $i \geq k$.

Dans le cas des formes sphériques, on connaît une très utile caractérisation de leur fibré tangent : soit M une forme sphérique de dimension n et de groupe fondamental G, alors en considérant M comme S^n/G où G opère librement sur S^n au moyen d'une représentation (virtuelle) réelle ρ (déf. 1.3.1), R.H. Szczarba a établi dans [60] que

$$T(M) \oplus 1_{\mathbb{R}} = \xi_\rho \tag{3}$$

(*) En fait, si X est un espace ayant le même type d'homotopie qu'un C.W. complexe fini et connexe, R. Piccinini a montré que toute opération (additive) $\mathcal{W} : KU(X) \to KU(X)$ est combinaison linéaire entière des Ψ^i. [50].

(**) Dans tout ce travail, les immersions et plongements dont il s'agit sont différentiables de classe C^∞.

Ci-dessus $1_{\mathbb{R}}$ est le $\mathbb{R}$-fibré vectoriel trivial de rang 1 et ξ_ρ le fibré réel associé au revêtement $S^n \to S^n/G$ par la représentation ρ (cf. p.22).

8.2. *Le cas des espaces lenticulaires.*

Soit $M = L^n(p;p_o,p_1,\ldots,p_n)$ l'espace lenticulaire généralisé d'ordre p ; avec les notations usuelles (cf. chap. II et III), nous avons avec (3) :
$T(M) \oplus 1 = \bigoplus_{i=0}^{n} r(\xi^{p_i})$, soit pour la classe stable $T_o(M)$ de son fibré tangent

$$T_o(M) = \sum_{i=0}^{n} r(\xi^{p_i}-1). \tag{4}$$

Il s'ensuit

$$\gamma_a(-T_o(M)) = \gamma_a(-\sum_{i=0} r(\xi^{p_i}-1)) = \prod_{i=0}^{n} [\gamma_a(r(\xi^{p_i}-1))]^{-1},$$

et cela revient à calculer $\gamma_a(r(\xi^i-1))$ pour $i \in \mathbb{N}^*$. Nous avons

$$\gamma_a(r(\xi^i-1)) = \gamma_a(r(\xi^i)) \;.\; \gamma_a(-2) \quad ;$$

mais avec (2), d'une part

$$\gamma_a(-2) = [\gamma_a(1))]^{-2} = (1 + \frac{a}{1-a})^{-2} = (1-a)^2,$$

et d'autre part

$$\gamma_a(r(\xi^i)) = \sum_{j\geq 0} \Lambda^j(r(\xi^i)).(\frac{a}{1-a})^j = 1 + r(\xi^i).\,\frac{a}{1-a} + (\frac{a}{1-a})^2$$

puisque $r(\xi^i)$ est un fibré vectoriel réel de rang 2 tel que $\det[r(\xi^i)] = 1$ (cf. définition de ξ p.27). Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, nous obtenons

$$\gamma_a(r(\xi^i)-2) = (1-a)^2 + r(\xi^i).a(1-a) + 1 = 1 + r(\xi^i-1).a(1-a),$$

et par conséquent

$$\boxed{\gamma_a(-T_o(M)) = \prod_{i=0}^{n} [1+r(\xi^{p_i}-1).a(1-a)]^{-1}} \tag{5}$$

En convenant dorénavant d'écrire $\gamma_a(M)$ pour $\gamma_a(-T_o(M))$, la relation (5) conduit pour les *espaces lenticulaires ordinaires d'ordre* p à l'expression suivante

$$\gamma_a(L^n(p)) = [1+(r\sigma)a(1-a)]^{-(n+1)} = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{n+1}{i} (r\sigma)^i (a-a^2)^i \quad (6).$$

Nous avons vu (th. 3.2.5) que $\widetilde{KO}(L_o^n(p^m))$, pour p premier et différent de 2, est engendré par $(y_i)_{1\leq i\leq [\frac{s}{2}]}$ avec $s = \inf(p^m-1,n)$. Alors tout $(r\sigma)^i$, pour $1 \leq i \leq [\frac{n}{2}]$ (la prop. 3.2.6 montre que $(r\sigma)^{[\frac{n}{2}]+1} = 0$), peut s'écrire

$$(r\sigma)^i = \sum_{k=1}^{[\frac{s}{2}]} \lambda_k^i \, y_k$$

avec $\lambda_k^i \in \mathbb{Z}$, $\forall k \in \{1,2,\dots,[\frac{s}{2}]\}$. Appelons u_i le plus petit entier tel que

$$p^{u_i} \cdot \lambda_k^i \equiv 0 \pmod{p^{m_k}}, \quad \forall k \in \{1,2,\dots,[\tfrac{s}{2}]\},$$

p^{m_k} désignant l'ordre du groupe cyclique engendré par y_k.

En appelant $L(n,p,m)$ l'entier défini par

$$L(n,p,m) = \sup\{1\leq i\leq [\tfrac{n}{2}] \mid \tbinom{n+i}{i} \not\equiv 0 \pmod{p^{u_i}}\},$$

le théorème d'Atiyah 8.1.1 et la relation (6) donnent alors

<u>Théorème 8.2.1.</u>

Pour tout nombre premier $p \geq 3$:

1. $L^n(p^m)$ *ne peut pas être immergé dans* $\mathbb{R}^{2n+2L(n,p,m)}$;
2. $L^n(p^m)$ *ne peut pas être plongé dans* $\mathbb{R}^{2n+1+2L(n,p,m)}$.

Le résultat précédent, annoncé dans [40], généralise un résultat de T. Kambe [24] où $L(n,p) = L(n,p,1)$. Lorsque p est un nombre impair quelconque, le théorème de factorisation 3.1.2 permet d'énoncer un résultat général. Plus précisément, soit $p = \prod_{j=1}^{\ell} p_j^{r_j}$ la décomposition en facteurs premiers de p ; soient $(y_{j_k})_{1\leq k\leq [\frac{s_j}{2}]}$ les générateurs de $\widetilde{KO}(L_o^n(p_j^{r_j}))$, avec $s_j = \inf(p^{r_j}-1,n)$ pour tout $1 \leq j \leq \ell$. Tout $(r\sigma)^i$ de $\widetilde{KO}(L_o^n(p))$ peut s'écrire

$$(r\sigma)^i = \sum_{j=1}^{\ell} \Big(\sum_{k=1}^{[\frac{s_j}{2}]} \lambda_{j_k}^i \, y_{j_k} \Big) \ ;$$

appelons, pour $1 \leqslant j \leqslant \ell$, u_i^j le plus petit entier tel que

$$p_j^{u_i^j} \cdot \lambda_{j_k}^i \equiv 0 \pmod{p_j^{m_{j_k}}}, \quad \forall k \in \{1,2,\dots,[\tfrac{s_j}{2}]\},$$

$p_j^{m_{j_k}}$ désignant l'ordre du groupe engendré par y_{j_k}, et notons $M(n,p)$ l'entier donné par

$$M(n,p) = \sup\{1 \leqslant i \leqslant [\tfrac{n}{2}] \mid \binom{n+i}{i} \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod} \prod_{j=1}^{\ell} p_j^{u_i^j})\}.$$

Il s'ensuit de la même manière

Théorème 8.2.2.

Pour tout nombre impair p $(p \geqslant 3)$, $L^n(p)$ *ne s'immerge pas (resp. ne se plonge pas) dans* $\mathbb{R}^{2n+2M(n,p)}$ *(resp. dans* $\mathbb{R}^{2n+1+2M(n,p)}$*).*

Remarque.

Géométriquement, le théorème 8.2.2 est une conséquence évidente de 8.2.1 : l'inclusion canonique de $\mathbb{Z}_{p_j^{r_j}}$ dans $\mathbb{Z}_p$ induisant la projection canonique $\Pi_j : L^n(p_j^{r_j}) \to L^n(p)$, il est clair que $(L^n(p_j^{r_j}), \Pi_j, L^n(p))$ est un revêtement principal, de sorte que si $L^n(p)$ est immersible dans un espace numérique $\mathbb{R}^{2n+1+k}$, $L^n(p_j^{r_j})$ l'est aussi.

Nous allons tirer des critères de non-immersion (resp. de non plongement) précédemment obtenus et de la relation (6) quelques corollaires aisément vérifiables. La γ-structure de $L^n(p)$ est en effet donnée par

$$\gamma_a(L^n(p)) = \sum_{i\geqslant 0} (-1)^i \binom{n+i}{i} (r\sigma)^i (a-a^2)^i = \sum_{i\geqslant 0} (-1)^i \binom{n+i}{i} (r\sigma)^i \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} a^{i+j}\right)$$

soit

$$\boxed{\gamma^k(L^n(p)) = (-1)^k \sum_{i=[\frac{k+1}{2}]}^{k} \binom{n+i}{i}\binom{i}{k-i}(r\sigma)^i} \qquad (7)$$

Lorsque $p \neq 2$ et premier, la prop. 3.2.6 montre que $(r\sigma)^{[\frac{n}{2}]+1} = 0$ et

$(r\sigma)^{[\frac{n}{2}]}$ a pour ordre p^m : il s'ensuit que $\gamma^{2[\frac{n}{2}]}(L^n(p^m)) \neq 0$ si $\binom{n+[\frac{n}{2}]}{[\frac{n}{2}]} \not\equiv 0 \pmod{p^m}$. Nous pouvons donc énoncer

Théorème 8.2.3.

Soit $\prod_{j=1}^{\ell} p_j^{r_j}$ *la décomposition en facteurs premiers de l'ordre* p *(p non nécessairement impair) d'un espace lenticulaire* $L^n(p)$. *S'il existe* $j \in \{1,2,\dots,\ell\}$ *tel que* $p_j \neq 2$ *et*

$$\binom{n+[\frac{n}{2}]}{[\frac{n}{2}]} \not\equiv 0 \pmod{p_j^{r_j}}\ ,$$

alors $L^n(p)$ *ne s'immerge pas (resp. ne se plonge pas) dans* $\mathbb{R}^{2n+2[\frac{n}{2}]}$ *(resp. dans* $\mathbb{R}^{2n+1+[\frac{n}{2}]}$*).*

Citons, par exemple, le corollaire suivant

Corollaire 8.2.4.

Soit $L^n(p^m)$ un espace lenticulaire tel que $p \neq 2$ et premier. De plus, supposons que $u = [\frac{n}{2}]$ soit tel que $v_p(u) = s \geq 1$ et, en posant $u = p^s.q$, que l'extension p-adique de q, à savoir $q = \sum_{i\geq 0} a_i\, p^i$, soit telle que $3a_i \leq p-1$ pour tout $i \geq 0$.

Alors $L^n(p^m)$ ne s'immerge pas (resp. ne se plonge pas) dans $\mathbb{R}^{2(n+u)}$ (resp. dans $\mathbb{R}^{2(n+u)+1}$).

Preuve.

Il s'agit de voir que, sous les hypothèses précédentes, $\binom{n+u}{u}$ n'est pas congru à 0 modulo p^m. Remarquons que si cette dernière assertion est vraie pour n pair, i.e. $n = 2u$, elle l'est aussi pour $n = 2u+1$: en effet $\binom{3u+1}{u} = (3u+1)(2u+2)\binom{3u}{u}$ et $(3u+1)(2u+2) \not\equiv 0 \pmod p$ puisque p impair.

Maintenant, à l'aide du résultat suivant de la théorie des nombres (cf. par ex. [64], p. 21)

$$v_p(N!) = \sum_{i\geq 1} \left[\frac{N}{p^i}\right] \quad \text{pour tout entier } N, \tag{8}$$

nous avons

$$v_p(\binom{3u}{u}) = v_p((3u)!)-v_p((2u)!)-v_p(u!) = \sum_{i\geq 1} (\left[\frac{3p^s.q}{p^i}\right] - \left[\frac{2p^s.q}{p^i}\right] - \left[\frac{p^s.q}{p^i}\right]),$$

comme la somme des s premiers termes de la somme précédente est nulle, il vient

$$v_p(\binom{3u}{u}) = v_p(\binom{3q}{q}).$$

En notant que $a_o \neq 0$, on voit que $p > 3$ et alors le lemme 2.3.8

$$\binom{3q}{q} \equiv \prod_{i\geq 0} \binom{3a_i}{a_i} \quad (\text{mod } p)$$

permet de conclure puisque $3a_i \leq p-1$ pour tout $i \geq 0$.

Il est clair que des considérations arithmétiques analogues permettraient d'obtenir d'autres critères de non-immersion (de non plongement) pour les espaces lenticulaires ordinaires d'ordre impair. Du reste de nombreux articles ont été consacrés à ces problèmes. Pour $L^n(p^m)$ les résultats obtenus pour les cas particuliers suivants (par l'utilisation de la notion de sous-algèbre de Massey(*)) dans [48] pour $p = 3$, $m = 1$ et $n = 3^s$ ou 3^s+3^t avec $s \geq t \geq 0$ et $s \geq 1$, dans [30] pour $p \geq 5$ et premier, $m = 1$ et $n = \alpha p^s+\beta p^t$ (avec des conditions sur α et β semblables à celles sur les a_i du cor. 8.2.4), et dans [33] pour $p = 5$, $m = 1$ et $n = 3.5^{s+1}+5^s$, sont meilleurs que ceux donnés ci-dessus ou pouvant être déduits de (7). Par contre, celui énoncé dans [28] pour p premier, $p \neq 2$ et $m \geq 2$ correspond au th. 8.2.1 déjà donné dans [40]. Par ailleurs, T. Kobayashi établit, dans [31] (voir aussi [32] et [34]), pour p premier, $p \neq 2$ et $m = 1$, que si les deux

---

(*) Soit M une variété différentiable, compacte, connexe, de dimension n : si M se plonge dans la sphère S^{n+k}, E l'étant l'espace total du fibré en sphère associé à ce plongement et $\Pi : E \to M$ la projection, alors il existe une sous-algèbre A^* -dite de Massey- de l'algèbre de cohomologie $H^*(E,\mathbb{Z}_p)$ telle que A^* est fermée pour les opérations cohomologiques ; $H^i(E,\mathbb{Z}_p) = [\Pi^*(H^i(M,\mathbb{Z}_p))] \oplus A^i$ pour $0 < i < n+k-1$; $A^i = 0$ pour $i \geq n+k-1$. [42].

conditions suivantes sont satisfaites

$$\binom{n+k}{k} \not\equiv 0 \pmod p \quad \text{et} \quad n+k+1 \not\equiv 0 \pmod{p^{\left[\frac{n-k-1}{p-1}\right]}},$$

$L^n(p)$ ne s'immerge pas dans $R^{2n+2k+1}$. D'un autre côté, en dehors de [47] et [61], les meilleurs résultats concernant l'existence effective d'immersions et de plongements sont ceux de D. Sjerve ([56] et [57]) : *pour* $p \neq 2$ *et premier, il* a montré d'une part que *tout espace lenticulaire* $L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n)$ *s'immerge dans* $\mathbb{R}^{2n+2\left[\frac{n}{2}\right]+2}$, et d'autre part que *l'espace lenticulaire (ordinaire)* $L^n(p)$, *où de plus* $n \geq 2$ *et* $p \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 3$, *s'immerge dans* $\mathbb{R}^{2n+2\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ *si et seulement si* $\binom{n+\left[\frac{n}{2}\right]}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ *est un résidu quadratique modulo* p. Moyennant le th. 8.2.3, nous pouvons donc énoncer

<u>Théorème 8.2.5.</u>

Soient $n \geq 2$ *et* p *premiers tels que* $p \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 3$, $\binom{n+\left[\frac{n}{2}\right]}{\left[\frac{n}{2}\right]} \not\equiv 0 \pmod p$ *mais résidu quadratique modulo* p, *alors* $L^n(p)$ *s'immerge dans* $\mathbb{R}^{2n+2\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ *sans s'immerger dans* $\mathbb{R}^{2n+2\left[\frac{n}{2}\right]}$.

Par exemple, $L^3(5)$ s'immerge dans $\mathbb{R}^9$ mais pas dans $\mathbb{R}^8$; cela signifie en particulier que $L^3(5)$ n'est pas parallélisable (voir chap. IX).

On aura remarqué que dans toute la littérature ci-dessus citée, le cas des espaces lenticulaires d'ordre *pair* (hormis celui des espaces projectifs réels bien entendu) n'est pas envisagé, si l'on excepte les résultats de [34] pour $L^n(4)$.

A l'aide de la proposition 3.4.10, on peut néanmoins obtenir quelques informations. Ainsi, puisque $(r\sigma)^{\left[\frac{n}{2}\right]+2} = 0$ dans $\widetilde{KO}(L^n(2^m))$, (7) montre que

$$\gamma^{2\left[\frac{n}{2}\right]+1}(L^n(2^m)) = -\binom{n+\left[\frac{n}{2}\right]+1}{\left[\frac{n}{2}\right]} \cdot \left(1+\left[\tfrac{n}{2}\right]\right)(r\sigma)^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \quad ;$$

comme $(r\sigma)^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ a pour ordre soit $2^{m+n-2\left[\frac{n}{2}\right]-2}$, soit $2^{m+n-2\left[\frac{n}{2}\right]-1}$, nous pouvons donc énoncer dans tous les cas

Théorème 8.2.6

Si $(1+[\frac{n}{2}]).\binom{n+[\frac{n}{2}]+1}{[\frac{n}{2}]} \not\equiv 0 \pmod{2^{m+n-2(1+[\frac{n}{2}])}}$, *l'espace lenticulaire* $L^n(2^m)$ *ne s'immerge pas (resp. ne se plonge pas) dans* $\mathbb{R}^{2n+1+2[\frac{n}{2}]}$ *(resp. dans* $\mathbb{R}^{2n+2+2[\frac{n}{2}]}$*).*

Considérons le cas où $n = 2^s+1$ avec $s \geqslant 3$, et étudions la valuation dyadique de $\binom{3.2^{s-1}+2}{2^{s-1}}$: au moyen de (8) nous obtenons

$$v_2\left(\binom{3.2^{s-1}+2}{2^{s-1}}\right) = 3.2^{s-1}-1-2^s-(2^{s-1}-1) = 0.$$

Il s'ensuit

Corollaire 8.2.7.

Soit $n = 2^s+1$ avec $s \geqslant 3$, alors pour tout m $L^n(2^m)$ ne s'immerge pas dans $\mathbb{R}^{3(2^s+1)}$.

Jusqu'ici nous n'avons envisagé que le cas des espaces lenticulaires ordinaires. En ce qui concerne les espaces lenticulaires généralisés, moyennant la relation (5), il est évidemment possible de leur appliquer la procédure précédemment utilisée. En fait la seule difficulté qui apparaît est celle de savoir exprimer les $r(\xi^{p_i}-1)$ en fonction des puissances de $r\sigma = r(\xi-1)$, puisque r n'est pas un homomoprhisme d'anneaux.

Proposition 8.2.8.

Pour tout p impair et tout $k \geqslant 1$, on a

$$r(\xi^k-1) = \sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i}\binom{k+i-1}{2i-1}(r\sigma)^i.$$

dans $\widetilde{KO}(L^n(p;p_o,p_1,\ldots,p_n))$.

Démonstration.

Dans la prop. 3.1.4, nous avons vu que $t(\xi) = \xi^{-1}$, alors, en employant l'homomorphisme de complexification c (qui lui est un homomoprhisme d'anneaux), il s'agit de prouver que

$$\xi^k + \xi^{-k} - 2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i}\binom{k+i-1}{2i-1} \cdot (\xi+\xi^{-1}-2)^i \qquad (9).$$

Pour $k = 1$, (9) est manifestement vraie. Supposons donc (9) vraie jusqu'à k et considérons le cas $k + 1$. Comme

$$(\xi^k+\xi^{-k}-2)(\xi+\xi^{-1}-2) = (\xi^{k+1}+\xi^{-(k+1)}-2) + (\xi^{k-1}+\xi^{-(k-1)}-2) - 2(\xi^k+\xi^{-k}-2)$$
$$- 2(\xi+\xi^{-1}-2),$$

nous avons en utilisant l'hypothèse de récurrence et en posant $\xi+\xi^{-1}-2 = x$

$$\xi^{k+1}+\xi^{-(k+1)}-2 = \sum_{i=2}^{k+1}\frac{k}{i-1}\binom{k+i-2}{2i-3} x^i - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{k-1}{i}\binom{k+i-2}{2i-1} x^i +$$
$$+ 2\sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i}\binom{k+i-1}{2i-1} x^i + 2x.$$

Dans cette dernière relation on vérifie immédiatement que les coefficients de x, x^k et x^{k+1} -à savoir $(k+1)^2$, $2(k+1)$ et 1 respectivement- sont bien ceux obtenus dans (9) écrit pour $k + 1$. Il nous faut donc démontrer l'identité binômiale suivante

$$\frac{k}{i-1}\binom{k+i-2}{2i-3} + \frac{2k}{i}\binom{k+i-1}{2i-1} - \frac{k-1}{i}\binom{k+i-2}{2i-1} = \frac{k+1}{i}\binom{k+i}{2i-1} \qquad (10)$$

pour $2 \leqslant i \leqslant k-1$. Par l'identité

$$\binom{k+i-1}{2i-1} = \binom{k+i-2}{2i-1} + \binom{k+i-2}{2i-2},$$

le premier membre de (10) devient

$$\frac{k}{i-1}\binom{k+i-2}{2i-3} + \frac{2k}{i}\binom{k+i-2}{2i-2} + \frac{2k}{i}\binom{k+i-2}{2i-1} - \frac{k-1}{i}\binom{k+i-2}{2i-1}$$

soit

$$\frac{k+1}{i}\binom{k+i-2}{2i-1} + \frac{k}{i(i-1)}\left[2(i-1)\binom{k+i-2}{2i-2} + i\binom{k+i-2}{2i-3}\right].$$

Comme $(2i-2)\binom{k+i-2}{2i-2} = (k-i+1)\binom{k+i-2}{2i-3}$, il s'ensuit que le premier membre de (10) vaut

$$\frac{k+1}{i}\left[\binom{k+i-2}{2i-1} + \frac{k}{i-1}\binom{k+i-2}{2i-2}\right];$$

en développant les binômes contenus dans le crochet, il est aisé de vérifier qu'il est bien égal à $\binom{k+i}{2i-1}$.

Ainsi (9) est vraie, et par conséquent l'assertion proposée aussi, car, p étant impair, c est injectif (prop. 3.2.4).

Remarque.

Sous réserve que l'assertion suivante

Conjecture : lorsque $n \equiv 3 \pmod 4$, l'homomorphisme $c : \widetilde{KO}(L^n(2^m;p_o,p_1,\ldots,p_n)) \to \widetilde{KU}(L^n(2^m;p_o,p_1,\ldots,p_n))$ est un monomorphisme.

soit vraie, il est clair que la prop. 8.2.8 vaudra pour *tous* les espaces lenticulaires. On sait déjà que pour $m = 2$ ou 3 (chap. IV) et pour m quelconque avec n petit (chap. VII, prop. 7.4.1) c'est le cas.

Maintenant, pour illustrer le propos que nous tenions sur les espaces lenticulaires généralisés, nous allons considérer ceux du type suivant : $p \neq 2$, p premier, $p_o = p_1 = \ldots = p_{s-1} = \alpha$ et $p_s = p_{s+1} = \ldots = p_n = \beta$ $(\alpha\neq\beta)$, que nous noterons $L^n(p^m;s;\alpha,\beta)$.

La relation (5) nous donne

$$\gamma_a(L^n(p^m;s;\alpha,\beta)) = [\gamma_a(r(\xi^\alpha-1))]^{-s} \cdot [\gamma_a(r(\xi^\beta-1))]^{-(n+1-s)},$$

soit

$$\gamma_a(L^n(p^m;s;\alpha,\beta)) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k(a-a^2)^k\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{s-1+i}{i}\binom{n-s+k-i}{k-i}(r(\xi^\alpha-1))^i(r(\xi^\beta-1))^{k-i}\right].$$

Il s'ensuit

$$\boxed{\gamma^j(L^n(p^m;s;\alpha,\beta)) = (-1)^j \sum_{k=\left[\frac{j+1}{2}\right]}^{j}\binom{k}{j-k}\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{s-1+i}{i}\binom{n-s+k-i}{k-i}(r(\xi^\alpha-1))^i(r(\xi^\beta-1))^{k-i}\right]}.$$

Selon la prop. 8.2.8, $(r(\xi^\alpha-1))^i(r(\xi^\beta-1))^{k-i}$ est un polynôme (à coefficients entiers) en $(r\sigma)$ dont le terme de plus bas degré est $(\alpha^i\beta^{k-i})^2(r\sigma)^k$.
En particulier, pour $j = 2\left[\frac{n}{2}\right]$, nous obtenons donc (prop. 3.2.6 : $(r\sigma)^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}=0$, $(r\sigma)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ a pour ordre p^m)

$$\gamma^{2\left[\frac{n}{2}\right]}(L^n(p^m;s;\alpha,\beta)) = -\left[\sum_{i=0}^{i=\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{s-1+i}{i}\binom{n-s+\left[\frac{n}{2}\right]-i}{\left[\frac{n}{2}\right]-i}(\alpha^i\beta^{\left[\frac{n}{2}\right]-i})^2\right](r\sigma)^{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

D'où le critère suivant

<u>Théorème 8.2.9.</u>

Pour $p \neq 2$ *et premier, si*

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{s-1+i}{i}\binom{n-s+\left[\frac{n}{2}\right]-i}{\left[\frac{n}{2}\right]-i}(\alpha^i\beta^{\left[\frac{n}{2}\right]-i})^2 \not\equiv 0 \pmod{p^m},$$

$L^n(p^m;s;\alpha,\beta)$ *ne s'immerge pas (resp. ne se plonge pas) dans* $\mathbb{R}^{2n+2\left[\frac{n}{2}\right]}$ *(resp. dans* $\mathbb{R}^{2n+1+2\left[\frac{n}{2}\right]}$*)*.

8.3. <u>Le cas des Q_m-formes sphériques.</u>

Soit M la Q_m-forme sphérique généralisée $N^n(m;r_1,r_2,\ldots,r_{n+1})$, par la formule (3) de R.H. Szczarba son fibré tangent $T(M)$ est tel que

$$T(M) \oplus 1_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{n+1}(2\xi_{r_i+3}).$$

Dans cette relation on a noté $2\xi_{r_i+3}$ le fibré réel associé à la représentation réelle $2\xi_{r_i+3}$ qui est sans point fixe et de degré 4 = ceci est légitime vu

5.5.1 et 5.5.2. Autrement dit, l'homomorphisme c étant naturel, nous pouvons commencer par étudier la γ-structure de $RU(Q_m)$. Dans ces conditions, ξ désignant l'une des ξ_{r_i+3}, nous obtenons $\gamma_a(\xi) = 1 + \xi \frac{a}{1-a} + (\frac{a}{1-a})^2$. Il s'ensuit donc

$$\gamma_a(-T_o(M)) = \prod_{i=1}^{n+1} [1+(\xi_{r_i+3}-2)(a-a^2)]^{-2} , \tag{11}$$

et par conséquent

$$\gamma^k(M) = \sum_{i=[\frac{k+1}{2}]}^{k} (-1)^k \binom{2n+1+i}{i}\binom{i}{k-i} (\xi_{r+3}-2)^i \tag{12}$$

lorsque $r_1 = r_2 = \ldots = r_{n+1} = r$. De cette relation, des théorèmes 5.3.1 et 5.5.4, il s'ensuit clairement

Théorème 8.3.1. ([51], 3.1).

1. *Si* $N^{2p+1}(m;r)$ *s'immerge (resp. se plonge) dans* $\mathbb{R}^{8p+7+N}$, *alors il existe* $\theta_k \in RO(Q_m)$ *tel que*

$$\sum_{i=[\frac{k+1}{2}]}^{k} (-1)^k \binom{4p+3+i}{i}\binom{i}{k-i} (\xi_{r+3}-2)^i = \theta_k(2-\xi_{r+3})^{2p+2}$$

pour chaque $k > N$ *(resp.* $k \geq N$*).*

2. *Si* $N^{2p}(m;r)$ *s'immerge (resp. se plonge) dans* R^{8p+3+N}, *alors il existe* $\theta_k \in RSp(Q_m)$ *tel que*

$$\sum_{i=[\frac{k+1}{2}]}^{k} (-1)^k \binom{4p+1+i}{i}\binom{i}{k-i} (\xi_{r+3}-2)^i = \theta_k(2-\xi_{r+3})^{2p+1}$$

pour chaque $k > N$ *(resp.* $k \geq N$*).*

Nous allons maintenant nous intéresser au cas des Q_3-formes sphériques ordinaires (bien entendu celles du type $N^n(3;r)$ s'y ramènent), le cas des Q_2-formes sphériques ayant été récemment étudié dans [10]. Dans tout ce qui suit, nous poserons

$$A_n(k,i) = (-1)^{k-i}\binom{2n+1+i}{i}\binom{i}{k-i} .$$

Commençons par le cas $n = 2p+1$: la relation du corollaire 5.4.5 et le théorème 5.4.7.1 montrent alors que la condition $\gamma^k(N^n(3)) = 0$ équivaut aux quatre congruences suivantes :

$$\sum_{i=[\frac{k+1}{2}]}^{k} A_n(k,i).(2^{n+i-1}-2^{2i-3}-2^{3p-1}.T_{i-1}) \equiv 0 \pmod{2^{2n+2}} \tag{13}$$

$$\sum_{i=[\frac{k+1}{2}]}^{k} A_n(k,i) \,.\, 2^{i-2} \equiv 0 \pmod{2^n} \tag{14}$$

$$\sum_{i=[\frac{k+1}{2}]}^{k} A_n(k,i) \,.\, T_{i-1} \equiv 0 \pmod{2^{p+3}} \tag{15}$$

$$\sum_{i=[\frac{k+1}{2}]}^{k} A_n(k,i) \,.\, S_{i-1} \equiv 0 \pmod{2^{p+3}} \tag{16}$$

[les nombres S_i et T_i ont été définis au §.5.4, p.]. Soit K le plus grand des nombres entiers k pour lequel l'une au moins des congruences précédentes n'est pas vérifiée, il est clair que (pour n impair)

Théorème 8.3.2.

$N^n(3)$ *ne s'immerge pas (resp. ne se plonge pas) dans* $\mathbb{R}^{4n+2+K}$ *(resp. dans* $\mathbb{R}^{4n+3+K}$*)*.

Par exemple : pour $n = 3$ et $k = 3$, (13) n'est pas vérifiée, autrement dit $N^3(3)$ ne s'immerge pas dans $\mathbb{R}^{17}$.

Il va de soi que le th. 8.3.2 est encore vrai pour $n = 2p$, à condition de remplacer les congruences (13)-(16) par les suivantes :

$$\sum_{i=[\frac{k+1}{2}]}^{k} A_n(k,i).(2^{n+i-3}-2^{2i-3}) \equiv 0 \pmod{2^{2n+2}} \tag{17}$$

$$\sum_{i=[\frac{k+1}{2}]}^{k} A_n(k,i).\left[2^{p-3}(S_{i-1}-T_{i-1})-2^{i-3}\right] \equiv 0 \pmod{2^{n+1}} \tag{18}$$

$$\sum_{i=[\frac{k+1}{2}]}^{k} A_n(k,i)T_{i-1} \equiv 0 \pmod{2^{p+2}} \tag{19}$$

$$\sum_{i=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} A_n(k,i)S_{i-1} \equiv 0 \pmod{2^{p+3}} \qquad (20),$$

ainsi que l'indique le th. 5.4.7.2. Pour certaines valeurs de n, on peut ici aussi énoncer des critères de non-immersion simples à vérifier.

Lemme 8.3.3. ([15], p. 179).

$$\binom{2a}{2b} = \sum_{i=0}^{b} 2^{2i}\binom{a}{2i} \cdot \binom{a-2i}{b-i} \quad ,$$

$$\binom{2a+2}{2b+1} = \sum_{i=0}^{b} 2^{2i+1}\binom{a+1}{2i+1} \cdot \binom{a-2i}{b-i} \quad .$$

Corollaire 8.3.4.

(i) Si $n \equiv 0 \pmod 4$, $n \neq 0$ et $\binom{3n+3}{n+2} \not\equiv 0 \pmod 4$, alors $N^n(3)$ ne s'immerge pas dans $\mathbb{R}^{6n+5}$ et ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^{6(n+1)}$.

(ii) Si $n \equiv 1 \pmod 4$, $n \neq 1$ et $\binom{3\left[\frac{n-1}{2}\right]}{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \not\equiv 0 \pmod 2$, alors $N^n(3)$ ne s'immerge pas dans $\mathbb{R}^{6n+2}$ et ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^{3(2n+1)}$.

Démonstration.

(i) Nous allons voir qu'avec ces hypothèses, (17) n'est pa vérifiée pour $k = 2n+3$. En posant $n = 2p$ et en utilisant le lemme ci-dessus, il est facile de voir que (17) équivaut à

$$(p+1)\binom{6p+3}{2p+2} - \binom{2p+3}{2p}\binom{6p+4}{2p+3} \equiv 0 \pmod 4.$$

En écrivant $\binom{2p+3}{2p}\binom{6p+4}{2p+3} = \binom{6p+3}{2p+2} \cdot \frac{2(3p+2)(2p+1)(p+1)}{3}$, il est aisé de constater que ce terme est toujours divisible par 4 ; autrement dit (17) équivaut à

$$(p+1)\binom{6p+3}{2p+2} \equiv 0 \pmod 4.$$

Comme cette dernière congruence est toujours vérifiée pour p impair (écrire $\binom{6p+3}{2p+2}$ sous la forme $\binom{6p+2}{2p+2} + \binom{6p+2}{2p+1}$ et utiliser le lemme 8.3.3), nous devons supposer p pair i.e. $n \equiv 0 \pmod 4$.

Par exemple $N^8(3)$ ne s'immerge pas dans R^{53}.

(ii) Ici nous allons montrer que (14) n'est pas vraie pour $k = 2n$. De la même manière, avec $n = 2p+1$, il est clair que (14) équivaut à

$$\binom{6p+4}{2p+1} \equiv 0 \pmod 4 \ ;$$

comme $\binom{6p+4}{2p+1} \equiv 2\binom{3p+1}{p} \pmod 4$, cette congruence sera toujours vérifiée pour p impair : nous devons donc supposer $n \equiv 1 \pmod 4$, d'où le résultat puisque $\binom{3p+1}{p} \equiv \binom{3p}{p} \pmod 2$. Par exemple : $N^5(3)$ ne s'immerge pas dans $\mathbb{R}^{32}$, $N^9(3)$ ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^{57}$.

Enfin, supposons que $n = 2^s$ $(s \geq 2)$ et étudions la valuation dyadique de $\binom{3n+3}{n+2}$. Nous avons

$$v_2\left(\binom{3n+3}{n+2}\right) = \sum_{i\geq 1}\left[\frac{3.2^s+3}{2^i}\right] - \sum_{i\geq 1}\left[\frac{2^{s+1}+1}{2^i}\right] - \sum_{i\geq 1}\left[\frac{2^s+2}{2^i}\right]$$

soit

$$v_2\left(\binom{3n+3}{n+2}\right) = 1 + 3(2^s-1) - (2^{s+1}-1) - (2^s-1) = 0.$$

Ainsi, pour $n = 2^s$ $(s \geq 2)$, $\binom{3n+3}{n+2}$ étant toujours impair, nous pouvons énoncer

Corollaire 8.3.5.

Pour tout $s \geq 2$, la forme sphérique $N^{2^s}(3)$ ne s'immerge pas dans $\mathbb{R}^{3.2^{s+1}+5}$.

Remarque.

Dans [52], E. Rees a montré que toute variété différentiable M, fermée, de dimension n et telle que $H_i(M,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 = 0$ pour $0 < i < n$, se plonge dans R^k pour $k \geq \frac{3}{2}(n+1)$: le cor. 8.3.4 (illustré par 8.3.5) prouve que ce résultat ne vaut pas pour les variétés ayant de la 2-torsion.

8.4. Le cas général.

Soit M une forme sphérique de groupe fondamental G et de dimension N : M peut être considérée comme S^N/G où G opère librement sur S^N au moyen d'une représentation (linéaire) orthogonale sans point fixe ρ (on sait qu'une telle représentation se factorise en une représentation unitaire $\hat{\rho}$ sans point fixe). Soit G_p un p-sous-groupe de Sylow de G, alors l'inclusion canonique $i_p : G_p \to G$ définit une représentation orthogonale sans point fixe $\rho_p = i_p^*(\rho)$ de G_p au moyen de laquelle G_p opère librement sur S^N : appelons $M_p = S^N/G_p$ la variété quotient ainsi obtenue (cf. §.1.4). Il est clair qu'à deux p-sous-groupes de Sylow distincts de G, soit G'_p et G''_p, se trouve ainsi associée (à isométrie près) une même forme sphérique M_p : en effet les représentations induites ρ'_p et ρ''_p sont équivalentes car G'_p et G''_p sont conjugués dans G. Avec les conventions, faites au début de ce travail, de confondre deux formes sphériques isométriques (resp. deux représentations équivalentes), il est donc légitime d'introduire la notion suivante :

Définition 8.4.1.

Soient M une forme sphérique de dimension N, $G = \Pi_1(M)$ et $\rho \in RO(G)$ la représentation (virtuelle) orthogonale définissant M comme S^N/G. Pour tout nombre premier p divisant l'ordre de G, on appelle *p-forme sphérique associée à* M la forme sphérique M_p définie par l'action d'un p-sous-groupe de Sylow G_p de G au moyen de la représentation induite ρ_p.

Maintenant, dire que la forme sphérique M s'immerge dans $\mathbb{R}^{N+k}$ signifie que

$$T(M) \oplus \nu_k(M) = (N+k) \cdot 1_{\mathbb{R}} ,$$

où $\nu_k(M)$ est le fibré normal associé à cette immersion ; du reste, le théorème bien connu de M.W. Hirsch [19] assure que la réciproque est vraie. En appelant $\Pi_p : S^N/G_p = M_p \to S^N/G = M$ la projection induite par i_p, il est clair que (M_p, Π_p, M) est un revêtement, de sorte qu'il est ainsi évident que l'existence d'une immersion de M dans $\mathbb{R}^{N+k}$ implique forcément que M_p s'immerge aussi dans $\mathbb{R}^{N+k}$. Autrement dit, il suffirait qu'il existât une p-forme sphérique associée à M qui ne s'immerge pas dans un espace numérique donné, pour qu'il en soit de même pour M. Comme G_p est soit un groupe cyclique, soit un groupe quaternionique généralisé (remarque 1.3.6), on voit donc que *la détermination de critères de non-immersion (ou de non-plongement) pour une forme sphérique quelconque se ramène à celle de critères analogues pour les formes spéhriques universelles* (visées précisément par la remarque précitée), à savoir les espaces projectifs réels, les espaces lenticulaires d'ordre p^m et les Q_m-formes sphériques.

Moyennant les résultats obtenus ou rappelés dans les paragraphes précédents et ceux de M.F. Atiyah [4] pour les espaces projectifs réels de dimension paire, il est aisé de formuler de tels critères. Signalons, cependant, la situation suivante particulièrement intéressante : chaque fois qu'un sous-groupe fini G de $O(N+1)$ contiendra un sous-groupe de Sylow ne possédant qu'*une* représentation orthogonale sans point fixe, il pourra être énoncé un critère de non-immersion valable pour *toutes* les formes sphériques M de groupe fondamental G (i.e. indépendant de l'action définissant M comme S^N/G). Ce fait se produit avec Q_2 ; par exemple : puisque Q_2 est un 2-sous-groupe de Sylow de T_m^* et que $N^n(2)$ ne s'immerge pas (resp. ne se plonge pas) dans R^{6n+2} (resp. dans R^{6n+3}) selon D. Pitt [51] si $\binom{3n+1}{n} \not\equiv 0 \pmod 8$, on peut énoncer

<u>Proposition 8.4.2.</u>

Si $\binom{3n+1}{n} \not\equiv 0 \pmod 8$, aucune forme sphérique tétraédrique S^{4n+3}/T_m^* ne s'immerge (resp. ne se plonge) dans $\mathbb{R}^{6n+2}$ (resp. dans $\mathbb{R}^{6n+3}$). C'est notamment le cas lorsque $n = 2^s$ avec $s \geq 1$.

On en déduit

<u>Corollaire 8.4.3</u> [41]

Aucune forme sphérique S^7/T_m^* n'est parallélisable.

CHAPITRE IX

PARALLELISABILITE ET CHAMPS DE VECTEURS

Il est bien connu d'une part que toute variété orientable, compacte, de dimension 3 est parallélisable ([43], p. 278 et [19], p. 270) et d'autre part que de toutes les sphères seules S^1, S^3 et S^7 le sont (Bott, Kervaire, Milnor), aussi la question de la parallélisabilité d'une forme sphérique ne se pose-t-elle qu'en dimension 7. D'un autre côté, les considérations développées dans le §.8.4 montrent qu'une condition nécessaire à la parallélisabilité d'une telle forme sphérique est que chacune de ses p-formes sphériques associées le soit. Nous allons donc examiner successivement le cas des espaces lenticulaires d'ordre p^m (p premier) et celui des Q_m-formes sphériques.

9.1. *Parallélisabilité des espaces lenticulaires.*

Soit p premier et commençons par étudier la γ-structure d'un espace lenticulaire (généralisé) $L^3(p^m;p_o,p_1,p_2,p_3)$. Nous savons (§.8.2) que la classe stable de son fibré tangent est

$$r(\xi^{p_o}-1) + r(\xi^{p_1}-1) + r(\xi^{p_2}-1) + r(\xi^{p_3}-1) \qquad (1)$$

Lemme 9.1.1.

Pour tout p premier et tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$r(\xi^k-1) = k^2.(r\sigma)$$

dans $\widetilde{KO}(L^3(p^m;p_o,p_1,\ldots,p_m))$.

Preuve.

Lorsque $p \neq 2$, la prop. 8.2.8 montre que

$$r(\xi^k-1) = k^2.(r\sigma) + \left[\sum_{i=2}^{k} \frac{k}{i} \binom{k+i-1}{2i-1} (r\sigma)^{i-2}\right] (r\sigma)^2 \qquad (2)$$

comme alors $(r\sigma)^2 = 0$ selon 3.2.6, l'assertion est triviale.

Pour $p = 2$, la relation (2) est encore vraie car c est injectif (voir remarque p.) ; mieux on a encore $(r\sigma)^2 = 0$ dans $\widetilde{KO}(L^3(2^m;p_o,p_1,p_2,p_3)$: en effet $c(r\sigma)^2) = (c\, r\sigma)^2 = \frac{\sigma^4}{(1+\sigma)^2}$ (prop. 3.1.4), comme $\sigma^4 = 0$ dans $\widetilde{KU} = (L^3(2^m;p_o,p_1,p_2,p_3))$ (th. 2.2.4 et prop. 2.2.3), l'injectivité de c implique bien $(r\sigma)^2 = 0$.

Maintenant, puisque $r\sigma$ a respectivement pour ordre p^m ou 2^{m+1} suivant que p est différent ou non de 2 (prop. 3.2.6 et 7.4.1 respectivement), la relation (5) du §.8.2 qui s'écrit donc ici

$$\gamma_a(L^3(p^m;p_o,p_1,p_2,p_3)) = 1 - \left(\sum_{i=0}^{3} p_i^2\right)(r\sigma)(a-a^2),$$

nous donne

<u>Théorème 9.1.2.</u>

1. *Pour* $p \neq 2$ *et premier, aucun espace lenticulaire* $L^3(p^m;p_o,p_1,p_2,p_3)$ *tel que*

$$p_o^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \not\equiv 0 \qquad (\text{mod } p^m)$$

n'est parallélisable.

2. *Aucun espace lenticulaire* $L^3(2^m;p_o,p_1,p_2,p_3)$ *où* $m \geq 2$ *n'est parallélisable.*

Ces assertions découlent clairement du théorème d'Atiyah (8.1.1). La forme donnée à la seconde assertion vient de ce que la congruence

$$p_o^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 8)$$

n'a pas de solution (p_o,p_1,p_2,p_3) telle que $(p_i,8) = 1$ pour $i = 0,1,2$ et 3 : dans $\mathbb{Z}_8$ on a toujours $a^2 = 1$ lorsque $a = 1,3,5$ ou 7.

En fait, pour tout p premier, J. Milnor [46] avait déjà annoncé que si $p_o^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2 \not\equiv 0$ (mod p^m), $L^3(p^m;p_o,p_1,p_2,p_3)$ n'était pas parallélisable : notre résultat montre en plus que $S^7/\mathbb{Z}_4$ n'est jamais parallélisable. De son côté

D. Sjerve avait établi que pour $p \geq 5$ la condition $p_o^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2 \equiv 0 \pmod{p^m}$ est une condition nécessaire *et suffisante* pour que $L^3(p^m;p_o,p_1,p_2,p_3)$ soit parallélisable [57] : lorsque $p = 3$, le théorème 9.1.2 prouve qu'aucun espace lenticulaire $S^7/\mathbb{Z}_{3^m}$ n'est parallélisable (1 et 2 ont pour carré 1 dans $\mathbb{Z}_3$). Enfin, rappelons que la parallélisabilité de S^7 entraîne celle de $P^7(\mathbb{R}) = L^3(2)$.

Ainsi, l'ensemble de ces résultats résout complètement la question de la parallélisabilité des espaces lenticulaires $S^7/\mathbb{Z}_{p^m}$, en particulier

Corollaire 9.1.3.

Aucun espace lenticulaire ordinaire $L^3(p)$ n'est parallélisable si $p \geq 3$ (non nécessairement premier).

Remarque.

Dans son travail sur la platitude des fibrés vectoriels de base $L^n(p)$, D. Lehmann [36] avait déjà énoncé le corollaire ci-dessus pour $p \geq 3$ et premier.(*) Concernant le problème même de la platitude, il y laissait néanmoins en suspens la question de savoir si, pour $m \geq 2$, $L^3(2^m)$ admettait une connexion linéaire à courbure nulle sur son fibré tangent. Comme le fibré tangent (réel) $T(L^3(2^m))$, qui est de rang 7, a même classe dans $\widetilde{KO}(L^3(2^m))$ que $4(r\sigma)$, et que $\widetilde{KO}(L^3(2^m)) \approx \mathbb{Z}_{2^{m+1}} \oplus \mathbb{Z}_2$ pour $m \geq 2$ (prop. 7.4.1), il ne pourrait admettre une connexion à courbure nulle que s'il existait en particulier un entier $0 \leq k \leq 3$ tel que $k \equiv 4 \pmod{2^{m+1}}$: puisque $m \geq 2$, il est évident qu'un tel entier n'existe pas. Il s'ensuit :

Proposition 9.1.4.

Pour $p \geq 3$ (non nécessairement premier) et $n \geq 2$, aucun espace lenticulaire $L^n(p)$ n'est plat.

Le problème plus général de la platitude des fibrés vectoriels de base $L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n)$, et singulièrement du fibré tangent, conduit à l'étude d'équations diophantiennes plus ou moins compliquées.

(*) Ainsi que pour les espaces lenticulaires ordinaires dont l'ordre est produit de nombres premiers différents de 2.

En ce qui concerne la parallélisabilité des autres formes sphériques, il est d'ores et déjà possible d'énoncer quelques résultats : soit F une forme sphérique de dimension 7 dont le groupe fondamental est tel que

(i) $\Pi_1(F)$ n'est ni trivial, ni un groupe cyclique,

(ii) aucun groupe cyclique n'est facteur direct de $\Pi_1(F)$; alors

Proposition 9.1.5.

F n'est susceptible d'être parallélisable que si $\Pi_1(F)$ est D^*_a, avec a *pair*, ou un groupe de type (II,2).

Preuve.-

Les hypothèses faites sur F impliquent que $\Pi_1(F) = G_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant 9$ où les G_i sont les groupes énumérés au §.7.4. (Plus généralement, se reporter au §.7.1 pour les propriétés de ces groupes qui vont être évoquées ici). Si $\Pi_1(F) = G_1$ ou G_2, ces groupes possédant des 2-groupes de Sylow *cycliques* (groupes de type (I,d)) d'ordre supérieur ou égal à 4, les 2-formes sphériques associées à F ne sont pas parallélisables et donc F non plus. Si $\Pi_1(F)$ est l'un des groupes polyédriques binaires généralisés T^*_m, O^*_m ou I^*, F possède une 3-forme sphérique associée et, par conséquent, -aucun espace lenticulaire $S^7/\mathbb{Z}_{3^m}$ n'étant parallélisable- F n'est pas parallélisable. Enfin, c'est a fortiori encore le cas si $\Pi_1(F) = G_9$, puisque I^* est un sous-groupe (distingué) de G_9.

[le corollaire 8.4.3 n'était qu'un cas particulier de la situation envisagée ici].

9.2. *Formes sphériques dont le groupe fondamental est de type* (II,d).

On sait que pour de telles formes sphériques, leurs 2-formes sphériques associées sont des Q_m-formes sphériques. Tout d'abord, considérons donc une Q_m-forme sphérique S^3/Q_m : son fibré tangent est tel que $T(S^3/Q_m) \oplus 1_{\mathbb{R}} = 2\xi_{r+3}$ où $2\xi_{r+3}$ est le fibré associé à la représentation réelle $2\xi_{r+3}$ définissant l'action de Q_m sur S^3, autrement dit $T_o(S^3/Q_m) = 2(2-\xi_{r+3}) = -d_r$ vaut zéro dans $\widetilde{KO}(S^3/Q_m)$ (th. 5.6.3). Ainsi S^3/Q_m s'immerge dans $\mathbb{R}^4$ (ce qui était bien sûr prévisible) et se plonge dans $\mathbb{R}^5$: on retrouve là le résultat de C.T.C. Wall [67] selon lequel toute variété de dimension 3 se plonge dans $\mathbb{R}^5$.

Examinons maintenant le cas des formes sphériques S^7/Q_m : comme $T_o(N^1(m;r)) = -2d_r$ et que d_r a pour ordre 2^{m+1} (th. 5.6.3), il est clair que $N^1(m;r)$ ne peut avoir de connexion linéaire à courbure nulle sur son fibré tangent et, par suite n'est pas parallélisable. [On aurait pu obtenir ce résultat en utilisant le th. 8.3.1]. Il ne nous reste donc plus qu'à envisager le cas des Q_m-formes sphériques généralisées de dimension 7, i.e. celles de la forme $N^1(m;r_1,r_2)$ avec $r_1 \neq r_2$.

Dire que $N^1(m;r_1,r_2)$ est parallélisable équivaut(*) à dire qu'elle s'immerge dans $\mathbb{R}^8$ et, par conséquent, implique que $\gamma^k(N^1(m;r_1,r_2)) = 0$ pour $k \geq 2$. Comme les opérations de Grothendieck γ^k sont naturelles, au moyen de l'isomorphisme donné par le th. 5.5.5, il suffit de vérifier ces relations dans $\widetilde{KO}(N^1(m))$. Nous devons donc y exprimer d_{r_1} et d_{r_2} en fonction de d_1. Pour cela quelques considérations préliminaires sont nécessaires.

Lemme 9.2.1.

Avec les notations du lemme 5.3.4, pour $r \geq 5$ on a

$$P'_{r+1}(2) = \frac{(r-3)(r-2)}{2} - V_r \quad \text{avec} \quad V_r = \begin{cases} -2k+1 & \text{pour } r = 4k+1, \\ -2k & \text{pour } r = 4k+2, \\ -2k+2 & \text{pour } r = 4k \text{ ou } 4k-1. \end{cases}$$

Démonstration.

Le lemme 5.3.4 montre que $P_{r+1}(x) = x\,P_r(x) - P_{r-1}(x) + 2\alpha_r$ avec $P_{r+1}(2) = 1 - \alpha_{r+1}$ où $\alpha_r = 0$ pour r pair et $\alpha_r = (-1)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}$ pour r impair. En calculant la dérivée en $x = 2$, il s'ensuit

---

(*) Pour une variété compacte *orientable* de dimension n, il y a équivalence entre "être parallélisable" et "s'immerger dans $\mathbb{R}^{n+1}$". $P^6(\mathbb{R})$ s'immerge dans $\mathbb{R}^7$ mais n'est pas parallélisable.

$$P'_{r+1}(2) = 2P'_r(2) - P'_{r-1}(2) + 1 - \alpha_r \quad ; \qquad (3)$$

en posant $U_{r+1} = P'_{r+1}(2) - P'_r(2)$, (3) s'écrit encore

$$U_{r+1} - U_r = 1 - \alpha_r \qquad (4).$$

On déduit

$$U_{r+1} - U_5 = r - 4 - (\alpha_r + \alpha_{r-1} + \ldots + \alpha_5),$$

comme $U_5 = P'_5(2) - P'_4(2) = 1$ (car $P_5(x) = x$, $P_4(x) = 1$), en posant $\sigma_r = \sum_{i=5}^{i=r} \alpha_i$, il vient

$$U_{r+1} = r - 3 - \sigma_r \qquad (5).$$

En fait

$$\sigma_r = \begin{cases} -1 & \text{pour } r \equiv 1 \text{ ou } 2 \pmod 4, \\ 0 & \text{pour } r \equiv 0 \text{ ou } 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Par (4) et (5) on obtient

$$P'_{r+1}(2) = \frac{(r-3)(r-2)}{2} - \sum_{i=5}^{i=r} \sigma_i \quad ;$$

il est alors facile de vérifier que

$$V_r = \sum_{i=5}^{r} \sigma_i = \begin{cases} -2k+1 & \text{pour } r = 4k+1, \\ -2k & \text{pour } r = 4k+2, \\ -2k+2 & \text{pour } r = 4k \text{ ou } 4k-1. \end{cases}$$

Lemme 9.2.2.

Dans $\widetilde{KU}(N^1(m))$, pour r pair on a : $2 - \xi_r = (2-\xi_4)\, Q_r(2)$ avec

$$Q_r(2) = 1 + 2P'_r(2).$$

Preuve.

Du cor. 5.3.5, il résulte que pour tout r pair il existe $Q_r(\xi_4) \in Z[\xi_4]$ tel que $2 - \xi_r = (2-\xi_4)\ Q_r(\xi_4)$, alors dans $RU(Q_m)$

$$2 - \xi_4 = (2-\xi_4)\left[Q_r(\xi_4)-Q_r(2)\right] + (2-\xi_4)\ Q_r(2)$$

$$2 - \xi_r = -(2-\xi_4)^2 \cdot \frac{Q_r(\xi_4)-Q_r(2)}{\xi_4-2} + (2-\xi_4).Q_r(2)$$

soit dans $\widetilde{KU}(N^1(m))$

$$2 - \xi_r = (2-\xi_4)\ Q_r(2).$$

D'un autre côté on a $2 - \xi_r = 2 - \xi_4.P_r(\xi_4)$ i.e.

$$2 - \xi_4\ P_r(\xi_4) = (2-\xi_4)\ Q_r(\xi_4),$$

soit (dans $\mathbb{Z}[\xi_4]$)

$$Q_r(\xi_4) = 1 + \xi_4 \cdot \frac{P_r(\xi_4)-P_r(2)}{\xi_4-2} \quad (\text{car } P_r(2) = 1)$$

ce qui implique précisément

$$Q_r(2) = 1 + 2P'_r(2)$$

Maintenant, pour en revenir à notre forme sphérique $N^1(m;r_1,r_2)$, il nous faut calculer $\delta_{r_1} + \delta_{r_2}$ où, rappelons-le, r_1 et r_2 sont *impairs*. Le lemme 9.2.2 nous donne

$$\delta_{r_1} = \xi_{r_1+3} - 2 = (\xi_4-2)\ Q_{r_1+3}(2) = \delta_1 \cdot \left[1+2P'_{r_1+3}(2)\right]$$

et le lemme 9.2.1 implique donc

$$\delta_{r_1} = \delta_1 \cdot \left[1+r_1(r_1-1)-2V_{r_1+2}\right].$$

Ainsi, en posant $\delta_{r_1} = a_1\delta_1$ (resp. $\delta_{r_2} = a_2\delta_2$), nous obtenons

$$\boxed{a_{r_1} + a_{r_2} = r_1(r_1-1) + r_2(r_2-1) - 2(V_{r_1+2}+V_{r_1+2}-1)} \qquad (6)$$

avec r_1 et r_2 impairs.

Avec la relation (11) du §.8.3, la γ-structure de $N^1(m;r_1,r_2)$ en $\widetilde{KU}$-théorie s'exprime par

$$\gamma_a(N^1(m;r_1,r_2)) = [1+a_{r_1}\,\delta_1(a-a^2)]^{-2}\ .\ [1+a_{r_2}\,\delta_1(a-a^2)]^{-2}$$

$$\gamma_a(N^1(m;r_1,r_2)) = (1-2a_{r_1}\delta_1(a-a^2))(1-2a_{r_2}\delta_1(a-a^2))\ ,$$

soit $\gamma_a(N^1(m;r_1,r_2)) = 1 - 2(a_{r_1}+a_{r_2})\delta_1(a-a^2)$. Autrement dit si $N^1(m;r_1,r_2)$ s'immerge dans $\mathbb{R}^8$, on doit avoir (th. 5.6.3)

$$a_{r_1} + a_{r_2} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 2^{m+1}).$$

Moyennant (6), il s'agit donc d'étudier la congruence

$$r_1(r_1-1) + r_2(r_2-1) \equiv 2(V_{r_1+2}+V_{r_2+2}-1) \quad (\mathrm{mod}\ 2^{m+1}).$$

Posons $r_1 = 2u_1 + 1$, $r_2 = 2u_2 + 1$, elle devient

$$(2u_1+1)u_1 + (2u_2+1)u_2 \equiv V_{r_1+2} + V_{r_2+2} - 1 \quad (\mathrm{mod}\ 2^m) \qquad (7).$$

Si u_1 et u_2 sont pairs, soit $u_1 = 2v_1$, $u_2 = 2v_2$, on a $V_{r_1+2} + V_{r_2+2} = V_{4v_1+3} + V_{4v_2+3} = -2(v_1+v_2)$ (lemme 9.2.1), mais alors (7) est impossible puisque le premier membre est pair et le second impair.

Si u_1 et u_2 sont impairs, soit $u_1 = 2v_1 + 1$, $u_2 = 2v_2 + 1$:

$$(2u_1+1)u_1 + (2u_2+1)u_2 + 1 - (V_{r_1+2}+V_{r_2+2}) = 8(v_1^2+v_2^2) + 12(v_1+v_2) + 9 \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2^m)\ .$$

Enfin, si $u_1 = 2v_1$ et $u_2 = 2v_2 + 1$, on obtient

$$(2u_1+1)u_1 + (2u_2+1)u_2+1 - (V_{r_1+2}+V_{r_1+2}) = 8(v_1^2+v_2^2) + 4v_1 + 12v_2 + 5 \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2^m).$$

Ainsi $N^1(m;r_1,r_2)$ ne s'immerge jamais dans $\mathbb{R}^8$. Il résulte de toute cette étude

<u>Théorème 9.2.3.</u>

Les seules Q_m*-formes sphériques parallélisables sont* S^3/Q_m.

Une conséquence importante de ce dernier résultat est que les formes sphériques F du type visé par 9.1.5, ne sont *jamais* parallélisables. Plus généralement si le groupe fondamental d'une forme sphérique contient un 2-sous-groupe de Sylow quaternionique généralisé on voit qu'elle n'est parallélisable que si elle est de dimension 3. Compte tenu des renseignements obtenus pour les espaces lenticulaires d'ordre 2^m, nous pouvons donc énoncer

Théorème 9.2.4.

Soit M *une forme sphérique de dimension* n *et de groupe fondamental* G : *si l'ordre de* G *est au moins divisible par* 4, M *n'est parallélisable que si, et seulement si,* $n = 1$ *ou* 3.

En particulier (voir prop. 1.3.5)

Corollaire 9.2.5.

Parmi les formes sphériques homogènes de groupe fondamental non trivial et non cyclique, seules celles de dimension 3 sont parallélisables.

En conclusion, usant de la terminologie introduite au §.7.1, nous voyons que la question de la parallélisabilité d'une forme sphérique généralisée ne se pose éventuellement que pour celles dont le groupe fondamental est de type (I,d) avec $v_2(n) = 0$ ou 1 (ce qui implique d impair ou égal à 2).

9.3. *Span des formes sphériques.*

En développant les méthodes utilisées par J.F. Adams [1] pour la solution du problème des champs de vecteurs sur une sphère, J.C. Becker a résolu le problème de la détermination du span d'une forme sphérique [8] -(on définit le span d'une variété différentiable(*) M comme le plus grand entier k tel que M possède k champs de vecteurs linéairement indépendants i.e. le nombre maximum de sections linéairement indépendantes que possède son fibré tangent)- sauf en dimension 7, à condition toutefois que son groupe fondamental soit métabélien de rang 2 dans le cas où il aurait un 2-sous-groupe de Sylow quaternionique généralisé. Auparavant, D. Sjerve avait cependant calculé span(S^7/G) avec l'hypothèse $(|G|,6) = 1$ ([57], p. 104). Naturellement, le span d'une variété parallélisa-

---

(*)Comme partout ailleurs dans ce travail, il s'agit toujours de variétés différentiables de classe C^∞.

ble est égal à sa dimension. Enfin, il est évident que si $(M_{p_i})_{i\in I}$ est l'ensemble des p_i-formes sphériques associées à la forme sphérique M de dimension n, on a

$$\mathrm{span}(M) \leq \inf_{i\in I} (\mathrm{span}(M_{p_i})) \leq \mathrm{span}(S^n) \qquad (8).$$

D'un autre côté, on connaît ([8], p. 995) une minoration du span : en dimension 7 on obtient

$$\mathrm{span}(S^7/G) \geq \begin{cases} 5 \text{ lorsque } G \simeq \mathbb{Z}_p \text{ avec } p \geq 3 \text{ (non nécessairement premier),} \\ 4 \text{ lorsque } G \simeq Q_m. \end{cases} \qquad (9)$$

Proposition 9.3.1.

(i) Pour tout $m \geq 1$: $\mathrm{span}(S^7/\mathbb{Z}_{3^m}) = 5$.

(ii) Pour tout $m \geq 2$: $\mathrm{span}(S^7/\mathbb{Z}_{2^m}) = 5$.

Preuve.

Dans les deux cas considérés, les inégalités (8) et (9) montrent que le span est compris en 5 et 7. Si le span était supérieur ou égal à 6, S^7/Z_{3^m} et S^7/Z_{2^m} étant orientables, elles seraient parallélisables : ceci est impossible (voir §.9.1). [Pour $L^3(3)$ le résultat était connu de T. Yoshida [68]].

En ce qui concerne les Q_m-formes sphériques, on sait (th. 9.2.3) que S^7/Q_m n'est pas parallélisable : on a donc $\mathrm{span}(S^7/Q_m) = 4$ ou 5. L'expression de $\gamma_a(S^7/Q_m)$ montre que $\gamma^k(S^7/Q_m) = 0$ pour $k \geq 3$: dans le cas $N^1(m;r)$ cela est immédiat, dans le cas $N^1(m;r_1,r_2)$ avec $r_1 \neq r_2$ cela résulte de ce que la congruence (7) n'est jamais satisfaite (§.9.2). Selon Atiyah, il s'ensuit que la dimension géométrique de $T_o(S^7/Q_m)$ est telle que $g.\dim(T_o(S^7/Q_m)) \leq 2$ ([4], p. 128). Mais alors

$$\mathrm{span}(T(S^7/Q_m) \oplus 1_{\mathbb{R}}) = 8 - g.\dim(T_o(S^7/Q_m)) \geq 6 \quad ;$$

comme $\mathrm{span}(T(S^7/Q_m) \oplus 1_R) = 1 + \mathrm{span}(S^7/Q_m)$ (cf. [69], th. 2), il s'ensuit $\mathrm{span}(S^7/Q_m) = 5$. D'où

Proposition 9.3.2.

$$\mathrm{span}(S^7/Q_m) = 5.$$

Remarque.

La procédure qui vient d'être décrite peut être appliquée à d'autres formes sphériques de dimension 7. Par exemple, il peut être ainsi montré que toute forme sphérique tétraédrique S^7/T^*_m a 5 pour span. (T^*_m est un groupe métabélien de rang 3, voir chap. VI).

CHAPITRE X

APPLICATIONS Z_p-EQUIVARIANTES ET TYPES D'HOMOTOPIE

10.1. *Un problème de réalisation géométrique.*

Dans les chapitres précédents nous avons souvent indiqué que la K-théorie des formes sphériques généralisées se ramenait à celle des formes sphériques ordinaires. Nous avons notamment vu qu'il existait pour tout $(p;p_o,p_1,\dots,p_n)$, avec p non nécessairement premier, un isomorphisme *canonique* de λ-anneaux entre $K_k(L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n))$ et $K_k(L^n(p))$ (th. 2.2.4 et 3.1.2). Il est alors naturel de se demander s'il existe une application différentiable de $L^n(p)$ dans $L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n)$ induisant cet isomorphisme en K-théorie. Plus précisément, soient $L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n)$ et $L^n(p;p'_o,p'_1,\dots,p'_n)$ deux espaces lenticulaires de même ordre p, Ψ et Ψ' les isomorphismes en question

$$\tilde{KO}(L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n)) \xrightarrow{\Psi} \tilde{KO}(L^n(p)) \xleftarrow{\Psi'} \tilde{KO}(L^n(p;p'_o,p'_1,\dots p'_n)),$$

et cherchons à quelle(s) condition(s) il existe une application différentiable

$$f : L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n) \to L^n(p;p'_o,p'_1,\dots,p'_n)$$

telle que d'une part $T(L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n))$ et $f^* T(L^n(p;p'_o,p'_1,\dots,p'_n))$ soient des fibrés stablement isomorphes et d'autre part le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\tilde{KO}(L^n(p;p'_o,p'_1,\dots,p'_n)) \arrow[rr, "f!"] \arrow[dr, "\Psi'"'] & & \tilde{KO}(L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n)) \arrow[dl, "\Psi"] \\
& \tilde{KO}(L^n(p)) &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Dans $\tilde{KO}(L^n(p))$, nous devons donc avoir $\Psi'(T(L^n(p;p'_o,p'_1,\dots,p'_n)) = \Psi(T(L^n(p;p_o,p_1,\dots,p_n))$ (avec les habituels abus de notation), soit ((4), §.8.2)

$$\sum_{i=0}^{n} r(\xi^{p_i}-1) = \sum_{i=0}^{n} r(\xi^{p'_i}-1) \qquad (1)$$

En employant l'homomorphisme c, cette relation devient dans $\widetilde{KU}(L^n(p))$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} (\xi^{p_i} + \xi^{-p_i}) = \sum_{i=0}^{n} (\xi^{p'_i} + \xi^{-p'_i})} \qquad (2)$$

(Lorsque p est impair (1) est équivalent à (2)). Ainsi, une condition nécessaire à l'existence de f est que dans $\mathbb{Z}[x]$ il existe deux polynômes A et B tels que

$$\sum_{i=0}^{n} (x^{p_i} + x^{p-p_i}) = \sum_{i=0}^{n} (x^{p'_i} + x^{p-p'_i}) + A(x) \cdot (1-x)^{n+1} + B(x)(x^p-1) \quad (3).$$

En calculant la dérivée seconde de (3) en $x = 1$, il est en particulier aisé de voir que

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(p-p_i) = \sum_{i=0}^{n} p'_i(p-p'_i) - p(p-1) \cdot B'(1),$$

d'où :

Proposition 10.1.1.

Si $\sum_{i=0}^{n} p_i^2 \not\equiv \sum_{i=0}^{n} p'^2_i$ (mod p), alors f n'existe pas.

Il va de soi qu'en dérivant suffisamment (3), on peut obtenir beaucoup d'autres conditions nécessaires analogues.

Lorsque p est premier et différent de 2 et $0 \leqslant n \leqslant p-1$, on sait que (th. 3.2.5)

$$\widetilde{KO}(L^n(p^m;p_o,p_1,\dots,p_n)) \simeq G_o \oplus (\mathbb{Z}_{p^m})^{[\frac{n}{2}]}$$

avec $G_o = \mathbb{Z}_2$ ou 0 selon que $n \equiv 0$ (mod 4) ou non, chacun des $[\frac{n}{2}]$ facteurs $\mathbb{Z}_{p^m}$ étant engendré par $(r\sigma)^i$ où $1 \leqslant i \leqslant [\frac{n}{2}]$ (remarque 1, p.54). Comme par ailleurs

$$r(\xi^{p_i}-1) = \sum_{j=1}^{p_i} \frac{p_i}{j} \binom{p_i+j-1}{2j-1} (r\sigma)^j \qquad \text{(prop. 8.2.8)},$$

une condition nécessaire et suffisante pour que $T(L^n(p^m;p_o,p_1,\dots,p_m))$ et $T(L^n(p^m;p'_o,p'_1,\dots,p'_n))$ aient même classe stable d'isomorphisme est que

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\frac{p_i}{j}\begin{pmatrix}p_i+j-1\\2j-1\end{pmatrix}(r\sigma)^j=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p'_i}\frac{p'_i}{j}\begin{pmatrix}p'_i+j-1\\2j-1\end{pmatrix}(r\sigma)^j.$$

Autrement dit :

Proposition 10.1.2.

Soient $p\neq 2$ et premier, $0\leqslant n\leqslant p-1$, alors pour $L^n(p^m;p_o,p_1,\dots,p_n)$ et $L^n(p^m;p'_o,p'_1,\dots,p'_n)$ leurs fibrés tangents ont même classe stable d'isomorphisme si et seulement si

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\!\!\left(\frac{p_i}{j}\right)\!\!\right)\cdot\begin{pmatrix}p_i+j-1\\2j-1\end{pmatrix}\equiv\sum_{i=0}^{n}\left(\!\!\left(\frac{p'_i}{j}\right)\!\!\right)\cdot\begin{pmatrix}p'_i+j-1\\2j-1\end{pmatrix}\pmod{p^m}$$

pour tout $1\leqslant j\leqslant \inf\left(\left[\frac{n}{2}\right],\ \sup_i(p_i,p'_i)\right)$. De plus si l'une de ces congruences n'est pas vérifiée, f n'existe pas.

Dans cet énoncé, on a convenu que pour $a,b\in\mathbb{N}^*$

$$\left(\!\!\left(\frac{a}{b}\right)\!\!\right)=\begin{cases}\frac{a}{b} & \text{si } b\leqslant a,\\ \\ 0 & \text{si } b>a.\end{cases}$$

Pour revenir à la prop. 10.1.1, il est évident que si l'un des espaces était parallélisable et l'autre non, f n'existerait pas. Néanmoins, considérons les espaces lenticulaires $L^3(5)$ et $L^3(5;1,1,2,2)$: le second est parallélisable, le premier ne l'est pas, donc f n'existe pas ; pourtant ces deux espaces ont même type d'homotopie puisqu'il existe a tel que $4\equiv\pm a^4 \pmod 5$ ([49], p. 468). Ainsi, bien que cette dernière congruence admette toutes les solutions possibles dans $\mathbb{Z}_5$, aucune des équivalences d'homotopie (qui sont d'ailleurs toutes de degré congru à -1 modulo 5) leur correspondant n'induit l'isomorphisme Ψ.

Soient maintenant les deux espaces $L^2(17;2,3,5)$ et $L^2(17;1,1,4)$: ils sont non seulement homotopiquement équivalents mais ont même type *d'homotopie simple*(*). En considérant la torsion τ d'un espace lenticulaire de groupe fondamental G comme un élément du groupe des unités du noyau de l'homomorphisme canonique (d'algèbres) $\varepsilon : \mathbb{Q}[G] \longrightarrow \mathbb{Q}$ qui à tout élément $x = \sum_{g\varepsilon G} \lambda_g . g$ de la $\mathbb{Q}$-algèbre de G fait correspondre $\varepsilon(x) = \sum_{g\varepsilon G} \lambda_g$, nous obtenons ici

$$\tau(L^2(17;2,3,5)) = (\zeta^2-1)(\zeta^3-1)(\zeta^5-1), \quad \tau(L^2(17;1,1,4)) = (\zeta-1)^2.(\zeta^4-1)$$

(la notation $=$ est ici abusive car la torsion n'est définie qu'à la multiplication près par $\pm g$ où $g \varepsilon G$), en prenant $G = \mathbb{Z}_{17}$ comme engendré par $\zeta = e^{\frac{2i\Pi}{17}}$. Puisque précisément $30 \equiv -4 \pmod{17}$, il existe une unité u dans l'anneau $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{17}]$ telle que $\tau(L^2(17;2,3,5)) = u.\tau(L^2(17;1,1,4))$. Autrement dit les espaces considérés ont même type d'homotopie simple ; cependant : $2^2+3^2+5^2 \not\equiv 1^2+1^2+4^2 \pmod{17}$.

Enfin, considérons les deux espaces lenticulaires $L^4(7;1,1,1,1,2)$ et $L^4(7;5,5,5,5,3)$: ils sont difféomorphes car pour tout $0 \leqslant i \leqslant 4$ on a $p'_i \equiv -2p_i \pmod 7$ ([46], p. 402) et pourtant $\sum_{i=0}^{4} p_i^2 = 8$ n'est pas congru à $\sum_{i=0}^{4} p_i'^2 = 109$ modulo 7. Ainsi Ψ n'est pas induit par ce difféomorphisme !

Les (contre-) exemples(**) qui précédent indiquent donc que la résolution du problème de réalisation géométrique que nous avons posé, semble exiger une méthode autre que celle des habituelles classifications homotopiques des espaces lenticulaires, et partant de celles des applications $\mathbb{Z}_p$-équivariantes de S^{2n+1} dans S^{2n+1}.

10.2. *J-théorie des espaces lenticulaires d'ordre 8.*

Dans [5], M.F. Atiyah a associé à chaque c.w. complexe fini X un groupe fini $\tilde{J}(X)$. Ce groupe peut-être vu comme le groupe réduit du quotient $J(X)$ de

---

(*) Pour cette notion et les propriétés utilisées ici, on pourra se reporter à [14] ou [46].

(**) Je ne connais pas d'exemple pour lequel ce problème admette une solution ...

$KO(X)$ par le sous-groupe des classes stables de $\mathbb{R}$-fibrés vectoriels sur X, de groupe structural orthogonal, dont les fibrés en sphère associés ont même type d'homotopie fibrée. On notera J (resp. $\tilde{J}$) l'épimorphisme canonique $KO(X) \to J(X)$ (resp. $\widetilde{KO}(X) \to \tilde{J}(X)$). En vue de déterminer $J(X)$, J.F. Adams a introduit [2] deux autres groupes $J'(X)$ et $J''(X)$ avec(*)

$$J''(X) = KO(X) / \sum_k \left(\bigcap_e k^e(\Psi^k - 1)\, KO(X) \right), \tag{4}$$

de sorte qu'il existe un diagramme commutatif ([3], p. 193)

$$\begin{array}{ccc} KO(X) & \xrightarrow{J} & J(X) \\ {\scriptstyle J''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ J''(X) & = & J'(X) \end{array}$$

où J'' et ρ sont des épimorphismes. (L'égalité $J'(X) = J''(X)$ est une conséquence de la finitude du c.w. complexe X). Nous nous proposons ici d'étudier le type d'homotopie stable des espaces lenticulaires tronqués d'ordre 8. (Pour p premier, $J(L^n(p^2))$ a été étudié dans [35]).

Nous devons donc commencer par exhiber la Ψ-structure de $KO(L^n(8))$. Nous avons vu que $\widetilde{KO}(L^n(8))$ était engendré (comme groupe) par $r\sigma$, κ, $r\omega_2$ et $\kappa r\sigma$ (§.4.5). Ainsi, pour utiliser (4), nous faut-il calculer $\Psi^k(r\sigma)$, $\Psi^k(\kappa)$, $\Psi^k(r\omega_2)$ et $\Psi^k(\kappa r\sigma)$. Puisque $\Psi^k_{\mathbb{C}}\, c = c\Psi^k_{\mathbb{R}}$, il nous est loisible de nous placer d'abord en KU-théorie. Remarquons alors qu'on y a

$$\Psi^k(\sigma^i) = [(\sigma+1)^k - 1]^i, \tag{6}$$

puisque $\Psi^k(\sigma) = \Psi^k(\xi-1) = \Psi^k(\xi)-1 = \xi^k-1 = (\sigma+1)^k-1$ ([1],p.615). Il s'ensuit dans $\widetilde{KU}(L^n(8))$ (avec $(\sigma+1)^8 = 1$ et 3.1.4)

$$c(\Psi^k(r\sigma)) = \Psi^k cr\sigma = \Psi^k\left(\frac{\sigma^2}{1+\sigma}\right) = \frac{[(\sigma+1)^k-1]^2}{(1+\sigma)^k} = (\sigma+1)^k + \frac{1}{(\sigma+1)^k} - 2,$$

(*) Dans tout ce paragraphe, nous utiliserons les notations de J.F. Adams.

soit (utiliser les relations p.83 - 84)

$$c(\Psi^k(r\sigma)) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \equiv 0 \pmod 8, \\ cr\sigma & \text{pour } k \equiv 1 \text{ ou } 7 \pmod 8, \\ cr\omega_2 & \text{pour } k \equiv 2 \text{ ou } 6 \pmod 8, \\ c(r\sigma+2\kappa+\kappa r\sigma) & \text{pour } k \equiv 3 \text{ ou } 5 \pmod 8). \end{cases}$$

lorsque $n \equiv 3 \pmod 4$ c est un monomorphisme (cor. 4.5.2), de sorte que l'on a alors

$$\Psi^k(r\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \equiv 0 \pmod 8, \\ r\sigma & \text{pour } k \equiv 1 \text{ ou } 7 \pmod 8, \\ r\omega_2 & \text{pour } k \equiv 2 \text{ ou } 6 \pmod 8, \\ r\sigma+2\kappa+\kappa r\sigma & \text{pour } k \equiv 3 \text{ ou } 5 \pmod 8) \ ; \end{cases} \tag{7}$$

en fait (7) est vrai pour *tout* n puisque toutes les inclusions canoniques $L^{n'}(8) \to L^n(8)$ $(n' < n)$ induisent des épimorphismes (cf.§.3.4). En procédant de la même manière on obtient aussi

$$\Psi^k(r\omega_2) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \equiv 0 \pmod 4, \\ r\omega_2 & \text{pour } k \text{ impair}, \\ r\omega_3 & \text{pour } k \equiv 2 \pmod 4). \end{cases} \tag{8}$$

Enfin, on a $\Psi^k(\kappa) = (1+\kappa)^k - 1 = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \kappa^i$, mais comme $\kappa^i = (-1)^{i-1}2^{i-1}\kappa$ pour tout $i \geq 1$ (cf. prop. 4.6.2), il vient $\Psi^k(\kappa) = -\frac{1}{2}\kappa(-1+(-1)^k)$ i.e.

$$\Psi^k(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \text{ pair}, \\ \kappa & \text{pour } k \text{ impair}. \end{cases} \tag{9}$$

De (7) et (9) on déduit alors

$$\Psi^k(\kappa r\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \text{ pair}, \\ \kappa r\sigma & \text{pour } k \equiv 1 \text{ ou } 7 \pmod 8), \\ -4\kappa-\kappa r\sigma & \text{pour } k \equiv 3 \text{ ou } 5 \pmod 8). \end{cases} \tag{10}$$

Proposition 10.2.1.

Dans $J(L^n(8))$, l'élément $J(r\sigma)$ a pour ordre

$$2^{n+1} \text{ pour } n \text{ impair}, \quad 2^{n+2} \text{ pour } n \text{ pair} \tag{11}$$

Démonstration.

Un élément x de $\tilde{KO}(L^n(8))$ s'écrit $x = ar\sigma+br\omega_2+d\kappa+h\kappa r\sigma$ avec a, b, d et $h \in \mathbb{Z}$. Comme $\tilde{KO}(L^n(8))$ n'a que de la 2-torsion, lorsque k est pair on peut toujours trouver un entier e tel que

$$k^e(\Psi^k-1)(x) = 0.$$

D'autre part lorsque k est impair, les relations (7) - (10) montrent que

$$(\Psi^k - 1)(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } k \equiv 1 \text{ ou } 7 \pmod 8, \\ \\ 2(a-2h)(2\kappa+\kappa r\sigma) \text{ pour } k \equiv 3 \text{ ou } 5 \pmod 8. \end{cases}$$

Posons $[\frac{n}{4}] = u$, il est alors facile de voir que $4\kappa+2\kappa r\sigma$ a pour ordre 2^{u-1} quand $u \geq 1$ (pour $u = 1$ cela veut dire que ce terme vaut zéro) : pour s'en rendre compte, il suffit d'écrire $4\kappa+2\kappa r\sigma$ dans les bases $(y_i)_{1\leq i\leq 4}$ exhibées dans les th. 4.5.1., 4.5.3., 4.5.4. et 4.5.6. Quand $u = 0$, on a $2\kappa = 0$ (prop. 4.6.2.). Autrement dit $\tilde{J}$ est un isomorphisme lorsque $u = 0$ ou 1. En fait cela est encore vrai pour $u = 2, 3, 4$ car (4) montre que tout revient à établir qu'on peut trouver alors un entier e tel que 2^{u-1} divise $3^e + 5^e$: il est aisé de constater que pour e impair on a toujours

$$3^e + 5^e \equiv 0 \pmod 8) .$$

De tout cela, il découle donc que $\tilde{KO}(L^n(8))$ est alors isomorphe à $\tilde{J}''(L^n(8))$ par $\tilde{J}''$: comme $\tilde{\rho}.\tilde{J} = \tilde{J}''$ (5), il s'ensuit que $\tilde{\rho}$ donc $\tilde{J}$ sont aussi des isomorphismes. Autement dit pour $n < 20$ les groupes $\tilde{KO}(L^n(8))$ et $\tilde{J}(L^n(8))$

sont isomorphes. Ceci remarqué, il n'en demeure pas moins que pour tout n les théorèmes du § 4.5. permettent de voir que $J(r\sigma)$ a pour ordre 2^{n+2} ou 2^{n+1} selon que n est pair ou impair.

Pour un c.w. complexe X, notons X^{α} le complexe de Thom d'un fibré vectoriel réel α de base X (cf. définition dans [5], p. 296). On rappelle que deux c.w. complexes X et Y sont dits *S-équivalents* lorsqu'ils ont le même type d'homotopie stable i.e. : on peut trouver deux entiers a et b tels qu'il existe une équivalence d'homotopie entre les suspensions $S^{a}(X)$ et $S^{b}(Y)$ de ces espaces. M.F.Atiyah a alors montré que $\tilde{J}(\alpha) = \tilde{J}(\beta)$ dans $\tilde{J}(X)$ impliquait X^{α} et X^{β} sont S-équivalents (art. cit. p.298). D'autre part T. Kambe, H. Matsunaga et H. Toda ont établi l'existence d'un homéomorphisme cellulaire entre l'espace lenticulaire tronqué $L^{n}(p)/L^{k-1}(p) = L^{n}_{k-1}(p)$ et le complexe de Thom $(L^{n-k}(p))^{k.r(\xi)}$ ([25], p. 144)(*). Considérons les espaces lenticulaires tronqués $L^{n}_{k-1}(8)$ et $L^{n+N}_{k+N-1}(8)$ où $N \geq 0$: en travaillant dans $\tilde{J}(L^{n-k}(8))$, nous avons $\tilde{J}((k+N).r(\sigma)) - \tilde{J}(k.r(\sigma)) = N.\tilde{J}(r(\sigma))$, de sorte qu'avec (11) nous pouvons énoncer

<u>Proposition 10.2.2.</u>

Si $N \equiv 0 \pmod{2^{n-k+1}}$ (resp. 2^{n-k+2}) lorsque $n-k$ est impair (resp. pair), les espaces lenticulaires tronqués $L^{n}_{k-1}(8)$ et $L^{n+N}_{k+N-1}(8)$ sont S-équivalents.

* *

*

(*) En vérité ils ont établi ce résultat pour p premier, mais leur démonstration est encore valable pour p quelconque comme l'ont d'ailleurs remarqué T. Kobayashi et M. Sugawara.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.F. ADAMS - *Vector fields on spheres*, Ann. of Math., 75 (1962), 603-632.

[2] J.F. ADAMS - *On the groups* J(X), (I), Topology, 2 (1963), 181-195.

[3] J.F. ADAMS - *On the groups* J(X), (III), Topology, 3 (1965), 193-222.

[4] M.F. ATIYAH - *Immersions and embeddings of manifolds*, Topology, 1 (1961), 125-132.

[5] M.F. ATIYAH - *Thom complexes*, Proc. London Math. Soc., 11 (1961), 291-310.

[6] M.F. ATIYAH - *K-theory*, [Benjamin - New-York, 1967].

[7] M.F. ATIYAH and F. HIRZEBRUCH - *Vector bundles and homogeneous spaces*, Proc. Symp. inpure math., vol. III, Amer. Math. Soc. (1961), 7 - 38.

[8] J.C. BECKER - *The span of spherical space forms*, Amer. J. Math., 94 (1972), 991-1025.

[9] R. BOTT - *Quelques remarques sur les théorèmes de périodicité*, Bull. Soc. Math. de France, 87 (1959), 293-310.

[10] J.M. BRAEMER - *K-théorie des variétés* $X_n = S^{4n-1}/Q$, C.R. Acad. Sci. Paris, 278 (1974), 237-240.

[11] H. CARTAN and S. EILENBERG - *Homological algebra*, [Princeton - 1956].

[12] P. CARTIER - *Quelques remarques sur la divisibilité des coefficients binômiaux*, L'ens. math., 16 (1970), 21-30.

[13] A. CHABOUR - *Sur la structure de groupe de la K-théorie des espaces lenticulaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, 272 (1971), 462-464.

[14] M.M. COHEN - *A course in simple-homotopy theory*, [Springer-Verlag - 1973].

[15] L. COMTET - *Analyse combinatoire (t. 1)*, [P.U.F. Paris - 1970].

.../...

[16] C.W. CURTIS and I. REINER - *Representation theory of finite groups and associative algebras*, [Interscience - New-York - 1962].

[17] K. FUJII - *On the ring of* S^{4n+3}/H_m, Hiroshima Math. Journal, 3 (1973), 251-265.

[18] C. GODBILLON - *Eléments de topologie algébrique*, [Hermann, Paris - 1971].

[19] M.W. HIRSCH - *Immersions of manifolds*, Trans. A.M.S., 93 (1959), 242-276.

[20] H. HOPF - *Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem*, Math. Annalen, 95 (1925), 313-339.

[21] G. HOSCHSCHILD and J.P. SERRE - *Cohomology of group extensions*, Trans. A.M.S., 74 (1953), 110-134.

[22] D. HUSEMOLLER - *Fiber bundles*, [Mac Graw-Hill - New-York - 1966].

[23] M. KAMATA - *On complex cobordism groups of classifying space for dihedral groups*, Osaka J. Math., 11 (1974), 367-378.

[24] T. KAMBE - *The structure of* K_Λ*-rings of the lens spaces and and their applications*, J. Soc. Math. Japan, 18 (1966), 135-146.

[25] T. KAMBE, H. MATSUNAGA and H. TODA - *A note on stunted lens space*, J. Math. Kyoto Univ., 5 (1966), 143-149.

[26] M. KAROUBI - *Algèbres de Clifford et K-théorie*, Ann. Sci. E.N.S., 1 (1968), 253-271.

[27] M. KAROUBI - *K-théorie équivariante des fibrés en sphères*, Topology, 12 (1973), 275-281.

[28] T. KAWAGUCHI and M. SUGAWARA - *K- and KO-rings of lens spaces* $L^n(p^2)$ *for odd prime* p, Hiroshima Math. Journal, 1 (1971), 273-286.

[29] W. KILLING - *Über die Clifford-Kleinschen Raumformen*, Math. Annalen, 39 (1891).

[30] T. KOBAYASHI - *Non-immersion theorems for lens spaces*, J. Math. Kyoto Univ., 6 (1966), 91-108.

[31] T. KOBAYASHI - *Immersions and embeddings of lens spaces*, J. Sci. Hiroshima Univ., 32 (1968), 285-292.

.../...

[32] T. KOBAYASHI - *On some secondary cohomology operations*, Hiroshima Math. Journal, 1 (1971), 41-73.

[33] T. KOBAYASHI - *Immersions and embeddings of lens spaces*, Hiroshima Math. Journal, 2 (1972), 345-352.

[34] T. KOBAYASHI and M. SUGUWARA - K_Λ-*rings of lens spaces* $L^n(4)$, Hiroshima Math. Journal, 1 (1971), 253-271.

[35] T. KOBAYASHI and M. SUGUWARA - *On stable homotopy types of stunted lens spaces*, Hiroshima Math. Journal, 1 (1971), 287-304.

[36] D. LEHMANN - *Platitude des fibrés vectoriels dont la base est un espace lenticulaire*, C.R. Acad. Sci. Paris, 265 (1967), 25-28.

[37] D. LEHMANN - *(Co)-homologies généralisées des espaces* $K(\pi,1)$ *et des formes sphériques*, Bull. Soc. Math. de France, 98 (1970), 305-318.

[38] E. LUCAS - *Sur les congruences des bombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques, suivant un module premier*, Bull. Soc. Math. de France, 6 (1878), 49-54.

[39] N. MAHAMMED - *A propos de la K-théorie des espaces lenticulaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, 271 (1970), 639-642.

[40] N. MAHAMMED - *K-théorie des espaces lenticulaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, 272 (1971), 1363-1365.

[41] N. MAHAMMED - *K-théorie des formes sphériques tétraédriques*, C.R. Acad. Sci. Paris, 281 (1975), 141-144.

[42] W.S. MASSEY - *On the cohomology ring of a sphere bundle*, J. Math. Mech., 7 (1958), 265-289.

[43] J. MILNOR - *On the immersion of* n-*manifolds in* (n+1)-*space*, Comm. Math. Helv., 30 (1955-56), 275-284.

[44] J. MILNOR - *Lectures on characteristic classes*, [Notes multigraphiées - Princeton University - 1957].

[45] J. MILNOR - *Groups which act on* S^n *without fixed points*, Amer. J. Math., 79 (1957), 623-630.

[46] J. MILNOR - *Whitehead torsion*, Bull. of the A.M.S., 72 (1966), 358-426.

[47] R. NAKAGAWA - *Embeddings of projective spaces and lens spaces*, Sci. reports of Tokyo Kyoiku Daigaku, 9 (1967), 170-175.

.../...

[48] R. NAKAGAWA and T. KOBAYASHI - *Non-embeddability of lens spaces mod 3*, J. Math. Kyoto Univ., 5 (1966), 313-324.

[49] P. OLUM - *Mappings of manifolds and the notion of degree*, Ann. of Math., 58 (1953), 458-480

[50] R. PICCININI - *Operações de cohomologia em K-teoria*, Atas, VI Colóquio Brasileiro de Matemática (1967), 27-32.

[51] D. PITT - *Free actions of generalized quaternions groups on spheres*, Proc. London Math. Soc., (3) 26 (1973), 1-18.

[52] E. REES - *Embedding odd torsion manifolds*, Bull. London Math. Soc., 3 (1971), 356-362.

[53] P. SAMUEL - *Théorie algébrique des nombres*, [Hermann - Paris - 1967].

[54] H. SEIFERT und W. THRELFALL - *Topologische Untersuchung der Discontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes*, Math. Annalen, 104 (1930), 1-70.

[55] J.P. SERRE - *Représentations linéaires des groupes finis*, [Hermann - Paris - 1967].

[56] D. SJERVE - *Geometric dimension of vector bundles over lens spaces*, Trans. of the A.M.S., 134 (1968), 545-558.

[57] D. SJERVE - *Vector bundles over orbit manifolds*, Trans. of the A.M.S., 138 (1969), 97-106.

[58] M. SUZUKI - *On finite groups with cyclic Sylow subgroups for all odd primes*, Amer. J. Math., 77 (1955), 657-691.

[59] R.G. SWAN - *The p-period of finite group*, Illinois J. Math., 4 (1960), 341-346.

[60] R.H. SZCZARBA - *On tangent bundles of fiber spaces and quotient spaces*, Amer. J. Math., 86 (1964), 685-697.

[61] F. UCHIDA - *Immersions of lens spaces*, Tôhoku Math. Journal, 4 (1966), 383-397.

[62] F. UCHIDA - *K-theory of lens-like spaces and* S^1*-actions on* $S^{2n+1} \times S^{2m+1}$, Tôhoku Math. Journal, 25 (1973), 201-211.

[63] G. VINCENT - *Les groupes linéaires finis sans points fixes*, Comm. Math. Helv., 20 (1947), 117-171.

.../...

[64] I.M. VINOGRADOV - *Elements of number theory,*
[Dover Publications - 1954].

[65] C.T.C. WALL - *All manifolds embed in 5-space,*
Bull. of the A.M.S., 71 (1965), 564-567.

[66] J.A. WOLF - *Sur la classification des variétés riemanniennes homogènes à courbure constante,*
C.R. Acad. Sci. Paris, 250 (1960), 3443-3445.

[67] J.A. WOLF - *Spaces of constant curbature,*
[Mac Graw-Hill - New-York - 1967].

[68] T. YOSHIDA - *A remark on vector fields on lens spaces,*
J. Sci. Hiroshima Univ., 31 (1967), 13-15.

[69] T. YOSHIDA - *Note on the span of certain manifolds,*
J. Sci. Hiroshima Univ., 34 (1970), 13-15.

[70] H. ZASSENHAUS - *Über endliche Fastkörper,*
Abhandlungen aus dem Math. Sem. der Univ. Hamburg, 11 (1936), 187-220.

[71] H. ZASSENHAUS - *The theory of groups,*
[Chelsea Publishing Company - 1958].