

50376
1975
132

N° d'ordre : 562

50376
1975
132

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

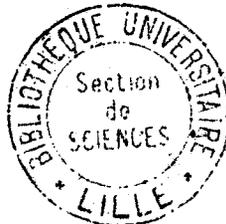
pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

par

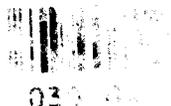
Robert LAURENT

**CONTRIBUTION A L'IDENTIFICATION DES PROCESSUS
MULTIVARIABLES PAR LA DETERMINATION D'UN MODELE
DE COMMANDE NE FAISANT INTERVENIR QUE
LES COMPOSANTES OBSERVABLES DU VECTEUR D'ETAT.**



Soutenue le 27 Octobre 1975, devant la COMMISSION D'EXAMEN

Membres du Jury : Messieurs	P. VIDAL	Président
	L. POVY	Rapporteur
	C. MELIN	Examineur
	S. WEGRZYN	Invité



A mes parents

A ma femme

AVANT PROPOS

=====

Les travaux que nous présentons ont été réalisés au centre d'automatique de l'université des sciences et techniques de Lille 1 .

Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur Vidal de nous avoir tout d'abord initié à l'automatique, puis accueilli au sein d'une équipe de recherche tant sympathique que dynamique. Que Monsieur Vidal veuille bien accepter nos très vifs remerciements pour tout ce qu'il nous a apporté et pour l'honneur qu'il nous fait en assurant la présidence de notre jury.

Que Monsieur Povy reçoive toute notre gratitude pour l'aide et les précieux conseils qu'il nous a allégués afin que nous puissions mener à bien ces travaux dont il a assuré la direction. Nous le remercions vivement de la confiance qu'il nous a accordée et du soutien qu'il nous a apporté.

Nous exprimons ici notre reconnaissance à Monsieur Melin qui a bien voulu s'intéresser à nos travaux et participer à notre commission d'examen. Qu'il en soit vivement remercié.

Que Monsieur Wegrzyn veuille bien accepter toute notre gratitude pour l'honneur que nous apporte sa présence au sein de notre commission d'examen.

Que soient enfin remerciés tous les membres du laboratoire d'automatique de Lille 1 qui ont contribué au maintien d'une ambiance chaleureuse et amicale.

INTRODUCTION :

L'automatique peut se définir comme l'étude des systèmes dans le but d'améliorer leurs performances. Il est possible de la scinder en deux grandes parties : l'une purement théorique, l'autre appliquée plus directement aux systèmes réels.

L'automatique théorique est orientée vers l'étude des fonctions de transfert ou des équations de récurrence des systèmes. Cette étude mathématique a pour but la recherche et la mise au point de méthodes qui nous permettront de déterminer tout ce qu'il est nécessaire de connaître sur le fonctionnement d'un processus. Elle met à notre disposition des méthodes permettant de définir le domaine de stabilité. Sur un plan beaucoup plus théorique, elle nous permet de déterminer la commande optimale devant être appliquée à un processus afin de satisfaire le cahier des charges.

L'automatique appliquée est chargée de résoudre les mêmes problèmes, mais ceux-ci ne seront plus traités sur une fonction de transfert - ou modèle - mais sur un processus réel.

Le but de l'identification est la liaison système - modèle. Il est en effet nécessaire d'écrire le fonctionnement du système réel sous forme de fonction ou relation mathématique. Cette opération appelée identification rendra possible l'étude théorique. Le dernier travail de l'automaticien sera la transposition des résultats de cette étude théorique sur le système réel (stabilité, commandabilité, optimisation, ...).

Nous verrons que cette tâche est souvent la plus difficile à réaliser.

Le rôle joué par l'identification dans l'automatisation d'un processus est l'un des plus importants car l'efficacité de la régulation dépend entièrement de la qualité de l'identification.

CHAPITRE I

INTRODUCTION :

L'identification d'un processus est la transformation du dit processus en un modèle ayant les mêmes propriétés. Cette opération peut être décomposée en plusieurs séquences.

Il faudra définir la classe du modèle devant être utilisé. Pour cela il est nécessaire de savoir si le système est linéaire ou non, à informations échantillonnées ou continues, monovariante ou multivariante. SI le système est non linéaire, la non linéarité est-elle séparable ?

La classe du modèle étant défini, il faudra dans la plupart des cas déterminer l'ordre du système.

Enfin la phase identification proprement dite consistera à calculer les valeurs numériques des paramètres du modèle.

Nous allons présenter dans ce chapitre quelques méthodes classiques d'identification et nous ferons apparaître les problèmes qui se posent tant au niveau identification qu'à celui de la régulation.

I - Quelques méthodes classiques d'identification

Les méthodes que nous allons présenter supposent toutes un système linéaire ou linéarisable autour d'un point de fonctionnement. Nous pouvons classer ces méthodes de différentes façons. Nous allons séparer les méthodes dites " hors ligne " de celles " en ligne ".

1.1 - Identification " hors ligne ".

L'identification " hors ligne " utilise les résultats d'un essai (indiciel, impulsionnel, fréquentiel, ...) pour déterminer les paramètres du modèle. On peut diviser ce type de méthodes en deux grandes classes :

- les méthodes paramétriques
- les méthodes non paramétriques

1.1.1 - Les méthodes paramétriques

Le but de ces méthodes est la détermination des paramètres d'un modèle écrit sous forme d'état.

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + B U(t) \\ Y(t) = C X(t) \end{cases} \quad (I.1)$$

en continu

$$\begin{cases} X_{k+1} = A X_k + B U_k \\ Y_{k+1} = C X_{k+1} \end{cases} \quad (I.2)$$

en échantillonné.

Dans l'hypothèse des systèmes continus linéaires, cette détermination se fait souvent par la recherche des paramètres d'une fonction de transfert en p (p étant l'opérateur de Laplace).

Citons par exemple les méthodes de Strejc ou Quentin /1/ dans lesquelles le vecteur paramètre se compose d'un retard pur T, d'une constante de temps τ et d'un ordre n. Sa fonction de transfert étant alors de la forme :

$$H(p) = \frac{e^{-TP}}{(1+\tau P)^n}$$

La connaissance de la réponse indicielle est à la base de nombreuses méthodes d'identification. Outre Strejc et Quentin nous pouvons citer la méthode dite d'intégrations progressives ou celle utilisant une discrétisation de la réponse indicielle./2/

Certaines méthodes ont pour point de départ la réponse impulsionnelle. Bien qu'il soit physiquement impossible de soumettre un processus à une impulsion de Dirac, il est parfois possible d'en connaître la réponse impulsionnelle (Dérivation de la réponse indicielle, ...). Cette façon de procéder semble naturelle si l'on se souvient que la réponse impulsionnelle n'est rien d'autre que la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert.

Il est parfois plus simple de connaître les caractéristiques fréquentielles que la réponse indicielle ou impulsionnelle. La fonction de transfert isochrone se déduit simplement de celle en p en faisant $p = j\omega$. Si l'on connaît la réponse en fréquence du système (déphasage et gain) pour différentes valeurs de ω , il est alors aisé de déterminer les coefficients de la fonction de transfert . Nous pouvons citer les méthodes de Kardachoff ou de Dudnikov./3/

I.I.2 - Méthodes non paramétriques

Toutes les méthodes paramétriques nécessitent un essai préalable (indiciel ou fréquentiel). Cette opération nécessaire à l'identification peut dans la plupart des cas, perturber profondément le fonctionnement normal du processus. Il s'avère donc très difficile de pratiquer cet essai.

Lorsque l'on ne peut étudier le processus qu'autour de son point de fonctionnement normal, il est possible de l'identifier en superposant au signal de commande un signal aléatoire ayant des propriétés statistiques déterminées et de faible amplitude. Soit le système représenté à la figure (I.1)

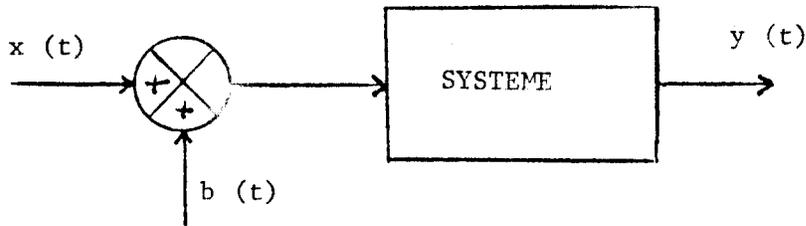


Figure 1.1

$x(t)$ est le signal de commande auquel on superpose le bruit $b(t)$.
 $y(t)$ est la sortie.

Si le système est linéaire et stationnaire on peut écrire que

$$y(\tau) = \int_0^{\infty} h(t) (x(t-\tau) + b(t-\tau)) dt \quad (I.3)$$

De cette relation on peut déduire la fonction d'intercorrélation $C_{yb}(\tau)$ entre $b(t)$ et $y(t)$ en fonction de la réponse impulsionnelle et des fonctions $C_{xb}(\tau)$ et $C_{bb}(\tau)$ /4/

$$C_{yb}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) C_{xb}(t-\tau) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) C_{bb}(t-\tau) dt \quad (I.4)$$

Si le bruit $b(t)$ et l'entrée $x(t)$ ne sont pas corrélés la relation (I.4) se simplifie et devient

$$C_{yb}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) C_{bb}(t-\tau) dt \quad (I.5)$$

Cette équation liant l'intercorrélation $C_{yb}(\tau)$ et l'autocorrélacion $C_{bb}(\tau)$ permet de déterminer la réponse impulsionnelle $h(\tau)$ (par discrétisation ...):

Si $b(t)$ est un bruit binaire pseudoaléatoire on peut, en première approximation écrire l'expression de $h(\tau)$ - /5/

$$h(\tau) = K C_{yb}(\tau) \tag{1.6}$$

K est fonction de la longueur, la période et l'amplitude de la séquence.

Les méthodes d'identification du type " non paramétrique " aboutissent généralement à la détermination de la réponse impulsionnelle ou de sa transformée de Fourier (densité spectrale de puissance).

1.2 - Identification " en ligne ".

Un problème de l'identification " hors ligne " est le choix des signaux de commandes. Lorsqu'il est pratiquement impossible de modifier les commandes d'un processus afin de l'identifier, une solution venant à l'esprit est d'utiliser ces signaux comme entrée d'un modèle convenablement choisi dans la classe correspondant à celle supposée du système et de comparer sa réponse à celle du système réel.

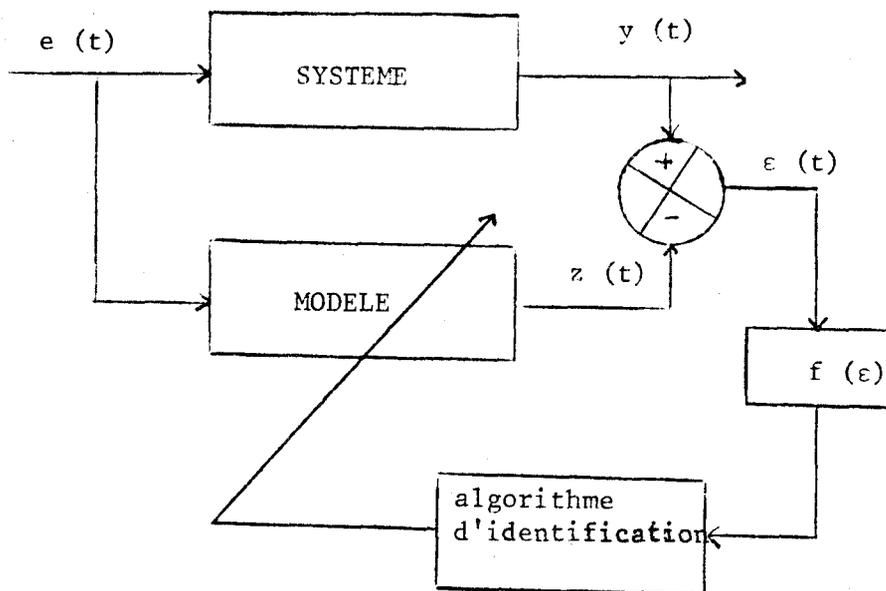


Figure 1.2

Il sera ensuite possible de réajuster ce modèle jusqu'à ce que son comportement soit identique à celui du système.

Ce type de méthode est de plus en plus utilisé car elle permet l'identification sans perturber le fonctionnement du système. L'algorithme d'identification permettant le réajustement des paramètres du modèle est souvent issue de méthodes faisant intervenir les fonctions de sensibilité (méthode du modèle /6/) ou des corrélations.

Afin d'accélérer la convergence des paramètres du modèle, on utilise souvent des algorithmes du type " gradient " / 6/. Parmi les méthodes d'identification en ligne les plus utilisées actuellement, nous pouvons citer le maximum de vraisemblance /8/, la matrice instrumentale /9/, les moindres carrés /7/.

La connaissance du modèle en temps réel rend possible le calcul, en ligne, du système de commande (fig.1.3).

Cette façon de procéder est pratiquement la seule donnant des résultats satisfaisants dans le cas de systèmes non stationnaires. En effet, toutes les méthodes d'identification hors ligne supposent l'hypothèse de stationnarité.

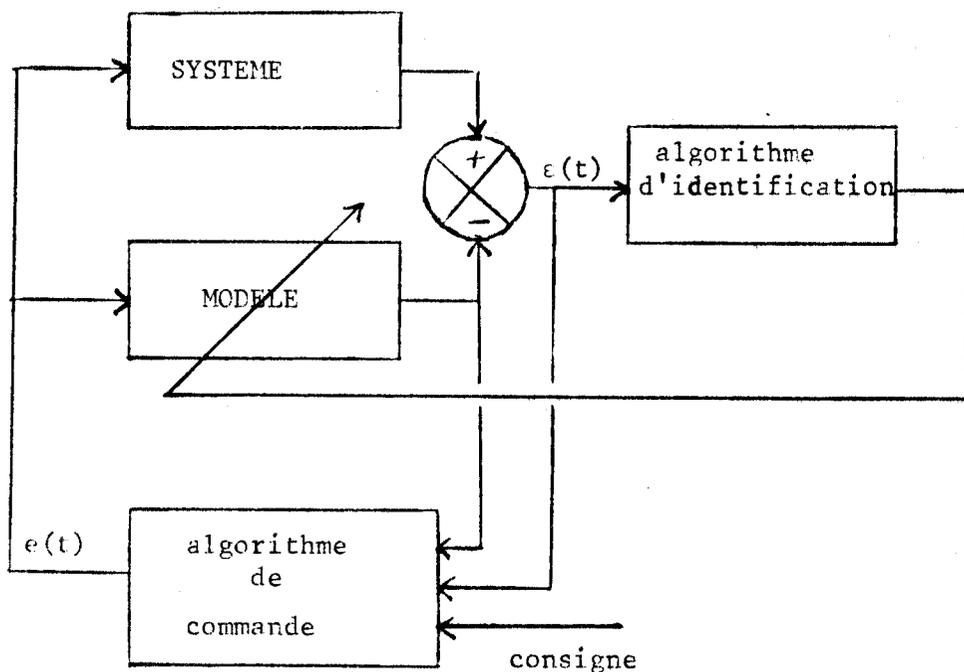


Figure 1.3.

II - Problèmes posés

Toutes les méthodes proposées ne sont pas parfaites et il se pose bien souvent des problèmes, tant lors de l'identification que pour l'adaptation du système de commande qui en résultera.

2.1 - Identification

Au niveau de l'identification, Les problèmes posés sont de deux ordres:

- le modèle est-il bien adapté ?
- pour quel type de fonctionnement est-il valable ?

2.1.1. - Choix de la classe du modèle

=====

le choix de la classe du modèle est la plupart du temps commandé par une connaissance à priori des équations de fonctionnement du système. Il est également régit par le type de fonctionnement désiré (échantillonné ou continu). Cette dernière distinction ne pose en général aucun problème. Par contre la détermination de la forme générale de la fonction de transfert - dans le cas des méthodes paramétriques - est beaucoup plus délicate.

Il faut savoir si le processus possède ou non un retard pur quel sont les degrés du numérateur et du dénominateur. Bien souvent, l'ordre du modèle doit être déterminé à priori et il est en général très difficile à évaluer (sauf dans les cas très rare où l'on connaît exactement les équations de fonctionnement du système étudié).

La méthode d'identification utilisée ensuite dépendra alors de la classe du modèle et du type des essais qu'il sera possible d'effectuer sur le processus.

2.1.2. - Domaine de validité du modèle

=====

Une question que l'on peut se poser ensuite est : pour quel type de fonctionnement le modèle est-il représentatif du processus ?

Un système réel est pratiquement toujours non linéaire. Or la plupart des méthodes d'identification supposent la linéarité. Le modèle ne sera donc représentatif du système que dans une plage entourant le point de fonctionnement utilisé pour identifier.

Les constantes de temps d'un système influent plus ou moins sur son comportement en fonction de la fréquence du signal d'entrée. Il semble donc que l'identification sera d'autant meilleure que le signal de commande aura un spectre plus riche. Le modèle obtenu à partir de la réponse indicielle sera différent de celui issu d'une étude harmonique.

Pour que l'identification soit utilisable, deux solutions sont possibles. On peut étudier le système totalement, c'est-à-dire calculer les coefficients d'un modèle faisant apparaître les non-linéarités, ainsi que tous les paramètres. Ceci équivaut à obtenir un modèle en tout point identique au système. Même dans les cas les plus simples ceci est pratiquement impossible car cette façon d'opérer nécessiterait la connaissance parfaite du processus.

Une solution plus simple et plus fréquemment employée consiste à la détermination d'un modèle qui, soumis à la même entrée que le système, donne une réponse identique à ce dernier. Dans ce cas, il n'y aura pas identité complète entre le système et son modèle, mais équivalence pour un fonctionnement donné.

2.2. - Boucle de régulation

Lorsqu'un processus est identifié, le modèle est utilisé pour faire les études théoriques nécessaires à la détermination d'un système de commande. (commandabilité, observabilité, stabilité, ...).

La boucle de contre réaction issue de cette étude sera optimale, étant donné un certain critère, pour le modèle. Il ne restera alors qu'à adapter cette boucle de régulation sur le processus réel.

2.2.1. Problème de capteurs

=====

Sur un modèle simulé, qu'il soit analogique ou numérique, il est toujours possible de mesurer toutes les composantes du vecteur état.

Par contre il n'en est pas de même pour un processus réel. Il est parfois très délicat de capter sans trop de perturbations les variables de sortie, mais leurs dérivées sont très souvent inaccessibles.

Si par exemple une grandeur de sortie est l'humidité de l'air sortant d'un séchoir, cette variable sera difficilement accessible sans trop d'erreur à cause des turbulences mais ses dérivées seront totalement non mesurables.

Lorsque les variables seront mesurables, les capteurs utilisés apporteront des constantes de temps et parfois des non-linéarités supplémentaires, (n'ayant pas apparus lors de l'identification). Lorsque la commande est échantillonnée, un retard pur dû au temps de calcul de la nouvelle commande sera introduite.

Il sera donc utile de tenir compte de ces paramètres supplémentaires lors de l'élaboration du système de commande afin de les rendre négligeables.

Ce dernier point n'apparaît pas lorsque l'identification et la commande sont faites en ligne, mais il faut faire face à la dualité identification-commande.

2.2.2. - Dualité , Identification-commande.

=====

Le principe de l'identification en ligne est la détermination du modèle pas à pas. L'erreur système-modèle entraîne une correction de la commande et une amélioration des paramètres du modèle.

Si la commande est mauvaise, l'identification sera bonne. On en déduira alors une bonne commande. L'erreur entre la réponse du système et celle du modèle sera faible, l'importance des bruits (de mesures ou réels) sera grande. On fera alors une mauvaise identification d'où une mauvaise commande.

La sortie du système risque d'osciller avec une amplitude de plus en plus grande. Le système bouclé est instable.

Souvent pour supprimer ce phénomène oscillatoire, on arrête l'identification dès que la sortie du système se trouve dans une zone autour de sa valeur optimale. La commande est dans ce cas laissée constante. Si la sortie quitte cette zone on recommence le cycle identification-commande jusqu'à ce qu'elle soit à nouveau dans la zone désirée. Cette façon de procéder a l'avantage de supprimer les oscillations mais ne permet pas toujours d'optimiser la commande.

2.3. - Solutions proposées

2.3.1. - Utilisation du modèle

=====

Lorsqu'un problème de capteur est absolument insoluble, plusieurs solutions s'offrent à nous.

Prenons l'exemple d'un système identifié par un second ordre dont la dérivée de la sortie n'est pas mesurable. Si la boucle de régulation vérifiant le critère d'optimalité comporte un retour tachymétrique. L'adaptation de cette commande au processus semble compromise.

Si les variations de la sortie sont lentes et peu bruitées, il est possible de calculer une valeur approchée de cette dérivée par extrapolation linéaire entre deux points de mesure.

$$\dot{x}_k \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta T}$$

Cette façon de procéder est assez peu utilisée car très sensible aux bruits.

Il est souvent préférable d'utiliser le modèle dans la boucle de régulation. Les grandeurs non accessibles sur le processus réel sont remplacées par celles correspondantes du modèle. Ce dernier est excité par le même signal d'entrée (fig.1.4)

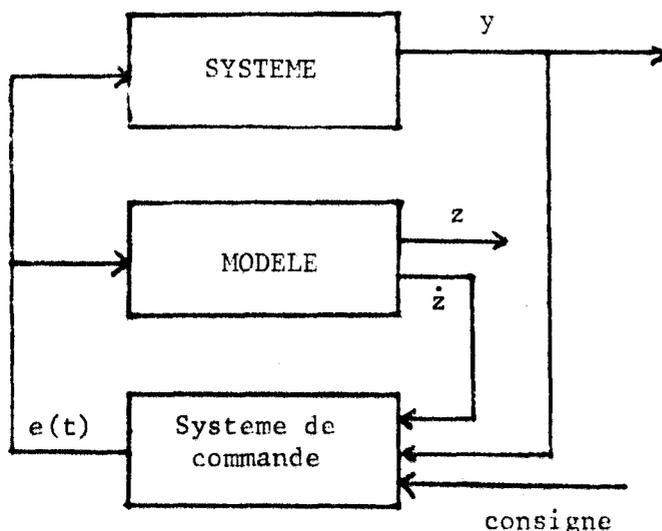


Figure 1.4.

Cette méthode peut être améliorée en utilisant l'erreur ϵ entre le modèle et le système. La connaissance de z et de ϵ permet une estimation assez bonne de la grandeur non mesurable \hat{y} .

2.3.2. - Adaptation des paramètres du système de commande

=====

Nous avons remarqué que le modèle n'est en général, pas la réplique exacte du processus, mais une approximation de son fonctionnement dans un domaine déterminé.

Le système de commande est calculé à partir du modèle de façon que son comportement vérifie le critère d'optimalité imposé par le cahier des charges. La contre réaction appliquée directement au processus ne sera pas optimale pour celui-ci à cause des erreurs d'identification, des bruits existants sur le système et des capteurs.

Afin d'améliorer le comportement du processus il sera souvent nécessaire de modifier légèrement les paramètres du feed-back. Cette adaptation de la contre réaction ne peut que très difficilement se faire d'une façon rigoureuse. Ce ne sera en général qu'une approximation intuitive due à la connaissance globale du système et des capteurs.

CONCLUSION :

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques méthodes d'identification en essayant de montrer quels étaient leurs avantages et leurs défauts.

Pratiquement toutes les méthodes nécessitent le choix d'un modèle ayant une forme bien déterminée. L'identification consiste alors à donner des valeurs numériques aux coefficients. Bien souvent l'ordre de ce modèle doit être donné à priori. Ceci est un inconvénient majeur car il nécessite une certaine connaissance des équations de fonctionnement.

D'autre part, un système réel est toujours bruité. Les perturbations ne pouvant que très rarement être estimées, elles amènent en général une erreur d'identification.

L'adaptation du système de contre réaction se heurte bien souvent à un problème de capteurs.

L'identification et la commande d'un système monovarié pose quelques problèmes qu'il n'est pas toujours aisé de résoudre. Nous allons voir dans le chapitre suivant l'identification des systèmes multi-variables et les difficultés que nous pouvons rencontrer lors de l'étude de ces processus.

C H A P I T R E I I

S Y S T E M E S M U L T I V A R I A B L E S

Introduction :

Le fonctionnement d'un système monovariabale est totalement défini par sa fonction de transfert. Celle-ci est tout simplement l'équation liant l'entrée et la sortie exprimé en variable de Laplace.

Pour un système multivariable le problème est tout autre. En effet, il est possible de définir une fonction de transfert pour chaque couple entrée-sortie. Le système complet sera donc représenté non plus par une fonction mais par une matrice de transfert.

Dans le cas échantillonné, un processus multivariable sera représenté par une équation aux différences où les coefficients seront des matrices.

Etant donné ce qu'il vient d'être dit, nous pouvons remarquer que, pour chaque couple entrée-sortie, il est possible de définir un ordre. Par ailleurs, l'écriture de l'équation de fonctionnement n'est, en général, pas unique. Pour pouvoir identifier un tel système il faudra donc choisir une équation de fonctionnement et donner un sens au mot " ordre " appliqué à un système multivariable.

Toutes ces remarques nous permettent de dire que l'adaptation directe aux processus multivariables des méthodes d'identification mises au point pour les monovariabales pose bien souvent de sérieux problèmes.

Parmi toutes les méthodes différentes présentées dans la littérature, nous en avons choisi deux que nous allons présenter.

I - Méthode de J.C. Chow./10/

1.1. Présentation

1.1.1. - Définition de l'équation de fonctionnement

Un système linéaire multivariable possédant m grandeurs d'entrées et r sorties peut être représenté par l'équation d'état classique.

$$\begin{cases} X_{k+1} = F X_k + G U_k \\ Y_k = H X_k \end{cases} \quad (11)$$

ou F est la matrice du régime libre de dimension $n \times n$, G est la matrice de dimension $n \times m$ traduisant l'influence de l'entrée, H de dimension $r \times n$ est la matrice de sortie. On supposera r et m connus, par contre, la dimension n du vecteur d'état X est inconnue.

L'identification se scinde alors en deux parties distinctes : il faut d'une part déterminer la dimension du vecteur d'état X tel que l'écriture du modèle (1,1) soit minimale, c'est-à-dire calculer l'ordre n du système, et d'autre part estimer les matrices inconnues F, G et H .

Nous pouvons appeler la première partie l'identification structurelle, et la seconde l'identification des paramètres.

Nous avons déjà remarqué que l'ordre d'un système multivariable n'est pas représenté par une seule constante, mais par un ensemble d'entiers

$$\{ n_1, n_2, \dots, n_r \}. \quad n_j \text{ étant l'ordre relatif à la sortie } Y^j$$

Y^j est la $j^{\text{ième}}$ composante du vecteur de sortie Y .

Si $r < n$, c'est-à-dire si les indices de structure n_j peuvent être déterminés, il est plus simple de représenter le fonctionnement du système par une forme canonique.

$$Y_k + A_1 Y_{k-1} + A_2 Y_{k-2} + \dots + A_p Y_{k-p} \tag{1.2}$$

$$= B_1 U_{k-1} + B_2 U_{k-2} + \dots + B_p U_{k-p}$$

p est l'indice d'observabilité défini comme étant le plus petit entier tel que :

$$\text{rang} \begin{vmatrix} H^T, E^T & H^T, \dots & (E^{p-1})^T H^T \end{vmatrix} = n$$

Les matrices A sont telles que si par exemple, la j^{ième} colonne de la matrice A_i est nulle, la j^{ième} colonne des matrices A_{i+1}, A_{i+2}, sont nulles.

Cette écriture définit les indices de structures de la façon suivante :

les colonnes correspondant à la j^{ième} sortie Y^J ne sont non nulles que dans les n_j premières matrices A (A₁, A₂, ... A_{n_j}) L'ordre n peut alors être défini comme suit :

$$n = \sum_{j=1}^r n_j$$

L'indice d'observabilité est alors

$$p = \max_j n_j$$

1.1.2. - Détermination des paramètres

1.1.2.1. - Forme canonique

+++++

a) En l'absence de bruit de mesure :

.....

L'équation (1.2) peut s'écrire de façon légèrement différente :

$$y_k = (B_1, -A_1, B_1, -A_1, \dots, B_p, -A_p) \begin{pmatrix} U_{k-1} \\ y_{k-1} \\ u_{k-2} \\ y_{k-2} \\ \\ U_{k-p} \\ y_{k-p} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

A cause de la forme particulière des matrices A, nous savons que les colonnes non nulles correspondant à la sortie y^j ne sont contenues que dans les n_j premières matrices A. On peut en conclure que $y_{k-n_j}^j$ pour $l \geq 1$ est linéairement dépendant des $y_{k-n_j}^j + h$ ($h > 0$)

Cette remarque nous permet de déterminer une procédure aboutissant à l'identification des paramètres n_j .

Construisons le tableau suivant (1.4)

Les entrées $U(t)$ sont telles que les lignes U dans (1.4) sont indépendantes. La procédure d'identification est la suivante:

- i - construire la matrice $\Gamma_{yu}(i, j, k)$ constitué par le carré supérieur gauche du tableau défini en (1.4) et dont la dernière ligne commence par y_{k-i}^j
- ii - calculer le déterminant de $\Gamma_{yu}(i, j, k)$ pour différentes valeurs de i et j .
Si, par exemple, $\det \Gamma_{yu}(i, j, k) \neq 0$ pour tout $i < i^*$ et $j < j^*$, et
 $\det \Gamma_{yu}(i^*, j^*+1, k) = 0$ alors $n_{j^*} = i^*$
- iii - éliminer toutes les lignes de (1.4) commençant par $y_{k-i^*}^{j^*+1}, y_{k-i^*-1}^{j^*+1}, \dots$
et continuer le processus jusqu'à ce que tous les n_j soient déterminés.

U_{k-1}	U_k	U_{k+N}	
y_{k-1}^1	y_k^1	y_{k+N}^1	
⋮	⋮		⋮	
y_{k-1}^j	y_k^j	y_{k+N}^j	
⋮	⋮		⋮	
y_{k-1}^r	y_k^r	y_{k+N}^r	
U_{k-2}	U_{k-1}	U_{k+N-1}	
y_{k-2}^1	y_{k-1}^1	y_{k+N-1}^1	
⋮	⋮		⋮	
⋮	⋮		⋮	
y_{k-2}^r	y_{k-1}^r	y_{k+N-1}^r	
⋮	⋮		⋮	
⋮	⋮		⋮	
U_{k-i}	U_{k-i+1}	$U_{k+N-i+1}$	
y_{k-i}^1	y_{k-i+1}^1	$y_{k+N-i+1}^1$	
⋮	⋮		⋮	
⋮	⋮		⋮	
y_{k-i}^r	y_{k-i+1}^r	$y_{k+N-i+1}^r$	
⋮	⋮		⋮	
⋮	⋮		⋮	

(1.4)

L'ordre n du système et son indice d'observabilité peuvent être déterminés par les relations

$$n = \sum_j n_j$$

$$p = \max_j n_j$$



Soit A_J^* la matrice A_J où les colonnes de zéros ont été supprimées.

La forme canonique du système sera obtenue à partir de la relation (1.5.)

$$\{ B_1, -A_1^*, B_2, -A_2^*, \dots, B_p, -A_p^* \} =$$

$$\{ y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m} + n-1 \} \Gamma_{yu}^{-1}(p,r,k) \quad (1.5.)$$

b) Les observations sont bruitées
 ::::::::::::::::::::::::::::::

Lorsque les observations sont bruitées un calcul analogue est effectué en faisant intervenir l'aspect stochastique du problème. Dans ce cas, on ne calcule plus le déterminant de $\Gamma_{yu}(i,J,k)$ mais le déterminant de $|Q_{yu}(i,J) - \sigma^2 Id|$ où $\sigma^2 Id$ est le moment d'ordre deux de l'erreur de lecture.

$$Q_{yu}(i,J) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \Gamma_{yu}(i,J,k) \Gamma_{yu}(i,J,k)^T$$

Si $\det \{ Q_{yu}(i^*,J) - \sigma^2 Id \}$ est beaucoup plus petit pour $J > J^*$ que pour $J < J^*$ alors $n_{J^*} = i^*$

Le reste de la procédure d'identification est inchangée.

Les coefficients de l'équation mise sous forme canonique sont alors définis par $\{ B_1, -A_1^*, \dots, B_p, -A_p^* \} =$

$$\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m} + n-1) \Gamma_{yu}(p,r,k) (Q_{yu}(p,r) - \sigma^2 Id)^{-1}$$

Nous pouvons remarquer que lorsque les mesures sont bruitées la méthode ne s'applique qu'à condition de donner un sens plus strict à l'expression : " le déterminant est beaucoup plus petit pour $J > J^*$ que pour $J < J^*$ ". En effet, cette notion pourra être interprétée différemment suivant les utilisateurs.

1.1.2.2. - Equation d'état
 ++++++

Le système est modélisé sous la forme d'une représentation canonique et l'on désire connaître une représentation d'état.

$$(b_{ki})^T = (g_{ki})^T - \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=1}^r f_{lj}^{ij} g_{k-1,j}$$

1.2 - Calcul de la boucle de régulation

1.2.1 - Commande optimale

L'identification d'un processus n'est que la première étape devant nous conduire à la détermination d'une boucle de régulation.

Cette première opération nous a permis de donner une valeur numérique aux coefficients d'un modèle. Celui-ci a été choisi dans une classe correspondant à celle présumée du système.

Le cahier des charges nous impose un certain fonctionnement du système, donc un critère d'optimalité.

En utilisant les résultats de l'automatique théorique, nous pouvons définir une boucle de régulation telle que la commande qui en résulte soit optimale pour le modèle (au sens du critère issu du cahier des charges).

Pour l'équation du modèle défini en (1.1.) si le cahier des charges impose que quel que soit y_k, y_{k+1} soit égal à y_{opt} , la boucle de régulation pourra être caractérisé par l'équation (1.6)

$$U_{opt} = (H G)^{(-1)} (y_{opt} - H F X_k) \quad (1.6.)$$

$(H G)^{(-1)}$ représente une pseudo inverse de la matrice rectangulaire $(H G)$

Nous aurons alors

$$X_{k+1} = F X_k + G (H G)^{(-1)} (y_{opt} - H F X_k)$$

$$y_{k+1} = H X_{k+1}$$

$$d'où y_{k+1} = y_{opt} \quad (1.7)$$

Cette dernière équation montre que la commande donnée par l'équation (1.6) est optimale pour le modèle.

1.2.2. - Problèmes posés par la méthode

Le grand avantage de cette méthode d'identification est le calcul de l'ordre du système multivariable. Il n'est en général pas possible de déterminer à priori quel est l'ordre ou quels sont les indices de structure, d'un processus multivariable.

Malheureusement cette méthode n'est vraiment applicable que lorsque les mesures ne sont pas bruitées. Or un processus industriel n'est jamais accessible sans bruits de mesures. Nous ne pourrions donc utiliser cette méthode de façon efficace qu'à condition de connaître assez les bruits de mesure pour pouvoir les éliminer par filtrage.

Nous avons défini une boucle de régulation qui, appliquée au modèle, correspondait à une commande optimale étant donné un certain critère. Cette boucle de contre réaction fait apparaître le vecteur d'état X_k .

L'adaptation de cette commande au processus réel nécessite la possibilité de capter les composantes de ce vecteur état. Ceci est le problème commun à toutes les méthodes d'identification, car ces mesures sont en général très difficiles à faire sur un processus réel. Nous rejoignons ici le problème relatif aux observateurs. Où et comment placer les capteurs de façon à obtenir une valeur la plus exacte possible des grandeurs devant être utilisées pour la boucle de régulation ? De plus, il est parfois matériellement impossible de capter ces grandeurs.

Lorsque les dérivées des sorties ne sont pas accessibles directement, il est parfois possible de les approximer par extrapolation linéaire entre deux points de mesures.

$$\dot{x}_k \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta T} \quad (1.8)$$

Cette approximation ne sera utilisable que lorsque la variable ne sera pas bruitée. Elle ne devra être utilisée que dans des cas très précis et après avoir pris beaucoup de précautions.

En conclusion, nous pouvons donc dire que si cette méthode d'identification permet, dans le cas de mesures non bruitées, de donner des équations de fonctionnement assez proches des équations réelles, son utilisation lors de la recherche d'une commande optimale du processus n'est pas aisée. Cette difficulté n'est pas spécifique à la méthode d'identification mais rejoint le problème beaucoup plus vaste relatif aux observateurs.

2.1 - Présentation de la méthode

La méthode d'identification préconisée par S. Wegrzyn fait appel à la notion de distance entre un ensemble de mesures obtenues directement sur le système réel et l'ensemble des valeurs correspondantes données par le modèle mathématique.

Nous verrons que cette méthode présente quelques analogies avec celle des moindres carrés.

2.1.1. - Choix du critère

+++++

Un processus complexe peut être caractérisé par

- un ensemble de signaux mesurables et commandables noté au moyen d'un vecteur U
- un ensemble de signaux mesurables mais non commandables noté V
- un ensemble de signaux non mesurables ni commandables noté Z

Le processus peut être caractérisé par un indice de qualité y scalaire ou vectoriel qui sera fonction de U, V et Z.

$$y = \phi (U, V, Z) \quad (2.1)$$

La boucle de régulation de ce processus sera donnée par un " système de commande " qui donnera une valeur optimale en fonction du cahier des charges à l'indice de qualité y .

Si par exemple la valeur optimale de y est donnée par $\|y\|_{\max}$, la boucle de régulation devra donner la valeur du vecteur commandable U tel que l'on ait

$$\|y\|_{\text{opt}} = \max_U \|\phi (U, V, Z)\| \quad (2.2)$$

La fonction ϕ est la fonction de but idéale, mais bien souvent la méconnaissance de Z nous oblige à utiliser une fonction de but approchée : $y = F (X, A)$

X étant le vecteur $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$

A est une matrice à coefficients constants.

2.1.2. - Algorithme d'identification

+++++

2.1.2.1. - Utilisation de la notion de distance
 ::

Supposons que l'on puisse mesurer directement les valeurs de l'indice y

$$y_1, y_2, \dots y_k, \dots y_m$$

et les valeurs correspondantes des signaux X

$$x_1, x_2, \dots x_k, \dots x_m$$

nous disposons alors de deux ensembles de mesures

$$E \{ y \} = \{ y_1, y_2, \dots y_m \}$$

$$\text{et } E \{ F (X, A) \} = \{ F (X_1, A), \dots , F (X_m, A) \}$$

La fonction de but approchée sera optimale si une distance entre ces deux ensembles est minimale.

La matrice A caractérisant cette fonction de but sera donc optimale si elle vérifie.

$$d \{ E (y_k) / E (F (A_{opt}, X_k) \} = \min_A d \{ E (y_k) / E (F (A, X_k) \}$$

d { X/y } représente la distance entre X et y et peut être défini par la relation

$$d \{ E (y_k) / E (F (A, X_k) \} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m d \{ y_k / F (A, X_k) \}$$

m étant le nombre de mesures

2.1.2.2. - Cas d'uns distance euclidienne
 ::

Si nous nous plaçons dans un espace euclidien la fonction F (A,X) peut s'écrire sous la forme :

$$F (A, X) = A X$$

Dans ce cas la distance d'identification (distance entre les ensembles E(y_k) mesuré et E (y_k) calculés) s'écrit

$$d = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (y_k - A X_k)^T (y_k - A X_k)$$

La valeur de la matrice A rendant cette distance d minimale est donnée par :

$$A_{opt} = y_m^T X_m (X_m^T X_m)^{-1} \quad (2.3)$$

où

$$y_m = \begin{pmatrix} y_1^T \\ y_2^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_m = \begin{pmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \vdots \\ X_m^T \end{pmatrix}$$

2.2 - Système de commande

2.2.1. - Commande optimale +++++

L'identification a aboutit à un modèle écrit sous la forme

$$y = A_{opt} X$$

Où y est un indice de qualité et X un vecteur regroupant les grandeurs observables.

Le but de la boucle de régulation est de donner à y une valeur optimale. Nous devons obtenir à l'aide de cette chaîne de contre réaction la valeur du vecteur des grandeurs commandables U qui rendre y optimal.

Soit le système dynamique linéaire régit par l'équation :

$$y = \sum_{k=1}^n B_k y^{(k)} + \sum_{k=0}^n C_k X^{(k)} \quad (2.4)$$

y est le vecteur de sortie

X est le vecteur d'entrée

$X^{(k)}$ représente la dérivée k^{ième} de X par rapport au temps

Le modèle sera alors

$$y = A Z \quad (2.5)$$

avec $A = (B_1, B_2, \dots, B_n, C_0, C_1, \dots, C_n)$

$$\text{et } Z = \begin{pmatrix} y' \\ y' \\ \vdots \\ y' \\ y \text{ (n)} \\ X \\ X' \\ \vdots \\ \vdots \\ X \text{ (n)} \end{pmatrix}$$

L'identification nous donnera la matrice A. Si y_{opt} est le but fixé par le cahier des charges la commande optimale pour ce système se déduit directement de l'équation (2.5)

$$X_{\text{opt}} = C_o^{(-1)} (y_{\text{opt}} - A^* Z^*)$$

$$\text{où } A^* = (B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_n)$$

$$Z^* = \begin{pmatrix} y' \\ \vdots \\ y \text{ (n)} \\ X' \\ \vdots \\ X \text{ (n)} \end{pmatrix}$$

2.2.2. - Problèmes posés +++++

Cette méthode d'identification nécessite la connaissance à priori de l'ordre du système et des non linéarités éventuelles. Un processus industriel est toujours non linéaire et nous avons déjà remarqué que l'ordre d'un système multivariable n'est pas aisé à définir.

Par contre lorsque l'ordre du processus peut être déterminé, cette méthode d'identification permet très simplement d'obtenir l'équation d'un modèle qui, soumis à la même sollicitation donnera une réponse identique (à la distance d'identification près).

La boucle de régulation fait intervenir les dérivées des signaux observables ou, si ces dérivées ne sont pas accessibles, une séquence de ces mêmes signaux. Ceci est le désavantage de donner une régulation très complexe et sensible aux bruits.

CONCLUSION

Nous avons exposé, dans ce chapitre, deux méthodes particulières d'identification des processus multivariés. Nous avons abouti dans chacun des deux cas à un modèle très représentatif du processus mais difficilement utilisable dans une boucle de régulation.

Bien souvent, nous trouvons dans la littérature des méthodes d'identification permettant d'obtenir un modèle très représentatif du fonctionnement du processus étudié, mais très mal adapté à une utilisation éventuelle dans une boucle de régulation.

Lors de l'étude d'un système réel on se heurte souvent à un problème que nous n'avons pas signalé dans ce chapitre; il est parfois très difficile de déterminer quelles sont les entrées commandables et les sorties utilisables devant intervenir lors de l'élaboration du modèle.

En nous inspirant de ces remarques nous allons, dans les chapitres suivants, présenter une méthode aboutissant à un modèle de commande.

C H A P I T R E I I I

DETERMINATION D'UN MODELE DE COMMANDE

Introduction :

Nous avons remarqué dans les chapitres précédents que la plupart des méthodes d'identification avaient pour but la détermination des équations de fonctionnement du processus étudié. Le problème de la commande optimale est alors un problème totalement disjoint de celui de l'identification.

Nous nous proposons dans ce chapitre de déterminer une méthode d'identification répondant aux critères suivants :

a) le modèle obtenu aura une forme assez simple pour pouvoir être utilisé directement lors de l'élaboration du système de commande.

b) si l'on soumet le système et le modèle à la même entrée, leurs réponses devront être le plus semblable possible. Nous pourrons alors dire que dans les conditions de l'expérience, le système, et le modèle sont équivalents.

Nous ne chercherons donc pas à déterminer les paramètres régissant le fonctionnement du processus, mais à calculer les coefficients d'un " modèle de commande ". Celui-ci devra alors vérifier les deux conditions énoncées ci-dessus.

I - Présentation :

1.1. - Choix du modèle

=====

1.1.1. - Considérations générales :

Nous pouvons représenter le fonctionnement d'un processus soit par son équation d'état, soit par une équation aux différences. De plus, la représentation d'un système multivariable n'est pas unique.

Nous pouvons donc choisir à priori l'équation du modèle qui représentera le fonctionnement du processus réel. Ce choix sera dicté par :

- les grandeurs d'état accessibles directement sur le processus
- la possibilité ou non d'implanter un calculateur dans la chaîne de régulation
- l'obtention d'un système de commande le plus simple possible quoique très efficace.

1.1.2. - Modèle choisi

Etant donné les considérations ci-dessus, nous allons définir un modèle simple applicable quel que soit le cas de figure.

Un processus multivariable peut être représenté comme suit : (fig 3.1.)

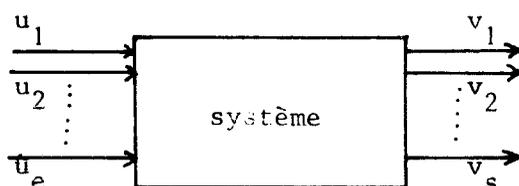


figure 3.1

$U = (U_1, U_2, \dots, U_e)^T$ est le vecteur des entrées commandables

$V = (V_1, V_2, \dots, V_s)^T$ est le vecteur des sorties observables.

Soit Y le vecteur sortie du système. Notons $Y^{*(k)}$ la dérivée k ième du vecteur Y où n 'apparaissent que les composantes directement mesurables.

Le vecteur V sera alors défini par $V = (Y^T, \dot{Y}^{*T}, \dots, Y^{*(r)T})^T$ (1.1.)

r est l'ordre du système multivariable ou le plus grand indice pour lequel le vecteur Y^* existe.

Nous pouvons définir le modèle mathématique par l'équation

$$Y_{k+1} = A \cdot \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} = A \cdot X_k \quad (1.2.)$$

A est une matrice à coefficients constants et de dimension $s \times (e+n)$

avec $\dim Y = s$

$\dim U = e$

$\dim V = n > s$

Le modèle étant une équation de récurrence, nous dirons qu'il est équivalent au processus réel si leurs sorties sont très voisines aux périodes d'échantillonnage du modèle.

Lorsque aucune dérivée des signaux de sortie n'est accessible, nous pouvons choisir le modèle de deux façons. Il est possible de garder le modèle défini en (1.2) et (1.1). Dans ce cas le vecteur V se ramène à Y ; il en découle un manque important d'informations sur le fonctionnement du système. Pour pallier cet inconvénient, et s'il est possible d'introduire des retards purs dans la boucle de régulation, nous pouvons définir le vecteur V par un vecteur séquence des signaux de sortie :

$$V_k = (Y_k^T, Y_{k-1}^T, \dots)^T$$

La longueur de la séquence sera alors choisie de façon à refléter l'ordre du système.

1.2. - Calcul du modèle

=====

Pour déterminer les coefficients de la matrice d'identification A , nous avons choisi d'utiliser une méthode du type moindres carrés en nous laissant inspirer par la méthode de S. WEGRZYN /11/

1.2.1. - Algorithme d'identification

La commande d'un processus industriel peut avoir un objectif de deux ordres différents :

- amener la sortie de ce processus à une valeur de consigne donnée et l'obliger à garder cette valeur (à ϵ près), cette petite erreur étant définie par l'écart ou l'imprécision admissible pour garder la même qualité du produit fini.
- amener la sortie du processus à suivre une certaine fonction du temps pouvant être soit séquentielle, soit continue.

Dans la deuxième hypothèse, la meilleure boucle de régulation possible pourra être obtenue par une identification et commande en ligne. En effet, un système réel est en général fortement non linéaire et il est très difficile de trouver un modèle

reflétant toutes les ^{non}linéarités du processus, donc valable quelle que soit la plage d'utilisation.

Notre étude se bornera donc à identifier les processus dont la commande a pour but d'amener le vecteur sortie d'une position d'équilibre à une autre.

Il semble naturel d'utiliser la réponse indicielle pour identifier notre système.

Soit $E(V_k) = \{V_0, V_1, \dots, V_m\}$ un ensemble d'échantillons pris sur la réponse indicielle avec une période d'échantillonnage constante égale à T_i .

$\{U_0, U_1, \dots, U_{m-1}\}$ est l'ensemble correspondant des entrées

$\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$ est l'ensemble des valeurs de la sortie Y du système.

$$\text{Notons } X_k = \begin{vmatrix} U_{k-1} \\ V_{k-1} \end{vmatrix} \quad (1.3.)$$

Nous sommes en possession de deux ensembles :

$$E(Y_k) = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\} \quad (1.4.)$$

$$E(X_k) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$$

Le modèle est défini par

$$Y_k^* = A X_k \quad (1.5.)$$

Nous pouvons calculer l'ensemble des $Y_k^* = \{A X_1^*, A X_2^*, \dots, A X_m^*\}$

Le modèle défini par la matrice A sera optimal s'il minimise une distance entre l'ensemble des Y_k mesurés et celui des Y_k^* calculés.

A sera donc défini par la relation

$$A_{\text{opt}} = \min_A d(E(Y_k) / E(A_{\text{opt}} X_k)) \quad (1.6)$$

1.2.2. - Cas de l'espace euclidien

Afin de déterminer A_{opt} à partir des relations (1.4), (1.5), (1.6) il faut se définir une distance

Nous avons le choix entre de nombreux types de distance comme le max des normes, la somme des normes ou la distance euclidienne.

Nous avons choisi cette dernière car elle permet une écriture matricielle

simple et la minisation dans l'équation (1.6) pourra facilement être déterminée par programmation.

Nous aurons donc :

$$d\{E(Y_k) / E(Y_k^*)\} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (Y_k - Y_k^*)^T P (Y_k - Y_k^*) \quad (1.7)$$

m est le nombre d'éléments des ensembles

P est une matrice de pondération qui est choisie définie, positive, symétrique.

Remplaçons Y_k^* par sa valeur dans (1.7), il vient :

$$d = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (Y_k - A X_k)^T P (Y_k - A X_k) \quad (1.8)$$

Nous noterons ω_k^i la $i^{\text{ième}}$ composante de ω_k ($\omega_k = Y_k$ ou X_k)

En développant l'expression (1.8) on obtient

$$d = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^s \left\{ \left(y_k^i - \sum_{j=1}^{e+n} a_{ij} x_k^j \right) \left(\sum_{h=1}^s p_{ih} \left(y_k^h - \sum_{j=1}^{e+n} a_{hj} x_k^j \right) \right) \right\} \right\} \quad (1.9)$$

En dérivant cette expression par rapport à a_{lj} on trouve, compte tenu de la symétrie de la matrice P

$$\frac{\partial d}{\partial a_{lj}} = - \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m x_k^j \left(\sum_{i=1}^s p_{li} \left(y_k^i - \sum_{h=1}^{e+n} a_{ih} x_k^h \right) \right) \quad (1.10)$$

A_{opt} sera la valeur de A qui minimisera la distance d . Ecrivons que quels que soient l et j

$$\frac{\partial d}{\partial a_{lj}} = 0$$

Nous pouvons ranger toutes ces dérivées partielles dans le tableau suivant et écrire que cette matrice est identiquement nulle.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial d}{\partial a_{11}} & \frac{\partial d}{\partial a_{12}} & \dots & \frac{\partial d}{\partial a_{1,e+s}} \\ \frac{\partial d}{\partial a_{21}} & \frac{\partial d}{\partial a_{22}} & \dots & \frac{\partial d}{\partial a_{2,e+s}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial d}{\partial a_{e1}} & \frac{\partial d}{\partial a_{e2}} & \dots & \frac{\partial d}{\partial a_{e,e+s}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} \quad (1.11)$$

Appelons T cette matrice des dérivées partielles.

Des expressions (1.10) et (1.11) nous obtenons :

$$T = - \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m P (Y_k - A X_k) \cdot X_k^T = 0 \quad (1.12)$$

P étant défini positive, elle est non singulière, nous pouvons donc écrire

$$\sum_{k=1}^m (Y_k - A X_k) X_k^T = 0 \quad (1.13)$$

soit encore :

$$A \left(\sum_{k=1}^m X_k X_k^T \right) = \left(\sum_{k=1}^m Y_k X_k^T \right) \quad (1.14)$$

Notons $X_m^T = (X_1, X_2, \dots, X_m)$

$Y_m^T = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$

L'expression (1.14) devient alors

$$A \cdot X_m^T X_m = Y_m^T X_m \quad (1.15)$$

d'où

$$A_{opt} = Y_m^T X_m (X_m^T X_m)^{-1} \quad (1.16)$$

Nous retrouvons une expression voisine de celle obtenue par la méthode des moindres carrés /7/

1.2.3. - Conditions d'identifiabilité

A_{opt} ne pourra être déterminé par l'équation (1.16) que si $X_m^T X_m$ est inversible

1.2.3.1. - Nombre de mesures

.....

X_m est de dimension $m \times (e+s)$

$X_m^T X_m$ sera donc de dimension $(e+s) \times (e+s)$

$$X_m^T X_m = \sum_{k=1}^m X_k X_k^T$$

Soit

$$X_m^T X_m^T = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m (x_k^1)^2 & \sum_{k=1}^m x_k^1 x_k^2 & \dots & \sum_{k=1}^m x_k^1 x_k^{e+s} \\ \sum_{k=1}^m x_k^2 x_k^1 & \sum_{k=1}^m (x_k^2)^2 & \dots & \sum_{k=1}^m x_k^2 x_k^{e+s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m x_k^{e+s} x_k^1 & \sum_{k=1}^m x_k^{e+s} x_k^2 & \dots & \sum_{k=1}^m (x_k^{e+s})^2 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

On peut démontrer qu'une condition nécessaire d'inversibilité de $X_m^T X_m$ est que

$$m > e + s \text{ à montrer ?} \quad (1.18)$$

Pour pouvoir calculer la valeur de A_{opt} à partir de la relation (1.16) il est donc nécessaire de prendre un nombre d'échantillons au moins égal à la dimension du vecteur X.

1.2.3.2. - Séquence des signaux de commande

Soit $U^0(t), U^1(t), \dots, U^e(t)$ les signaux d'entrée utilisés pour identifier le processus. Si nous étudions le système à partir de sa réponse indicielle, alors quel que soit k

$$U^k(t) = C_{-}^t e = U^k$$

Le vecteur X est égal à $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$

Dans ces conditions, la j^{ième} ligne de la matrice $V_m^T V_m$ s'écrira :

$$U^j (\sum_{k=1}^m U^1 \dots \sum_{k=1}^m U^e \sum_{k=1}^m V_k^1 \dots \sum_{k=1}^m V_k^s) \quad (1.19)$$

Il est évident que $X_m^T X_m$ ne sera pas inversible car quels que soient les indices i et j, les i^{ième} et j^{ième} lignes (ou colonnes car la matrice est symétrique) seront proportionnelles. Pour identifier le processus il ne sera donc pas possible d'appliquer des entrées constantes. Nous démontrerons en annexe A 1 qu'une séquence binaire pseudo aléatoire superposée à une entrée en échelon permet de bien identifier le système.

Cette remarque offre l'avantage suivant : lors de l'identification d'un système réel, il n'est en général pas possible d'appliquer un échelon sur les entrées sans perturber profondément le fonctionnement du dit système et détruire, pour la durée de l'essai, la qualité du produit fini. Si les entrées du système sont non bruitées, nous pourrions alors l'identifier sans pour autant perturber le fonctionnement normal en superposant aux signaux de commande habituels une séquence binaire pseudo aléatoire.

II - Influence du choix des mesures

Nous avons vu que l'identification ne pouvait se réaliser concrètement que si le nombre de mesures était supérieur ou égale à une valeur limite (relation 1.18) Nous allons déterminer l'influence du nombre et de la répartition des mesures sur l'identification et la boucle de régulation qui en résultera.

2.1. - Identification

2.1.1. - Nombre optimal de mesures

Il semble évident que si l'on veut très bien identifier un processus, il est nécessaire de prendre un nombre de mesures le plus grand possible. Le modèle optimal est obtenu par la minimisation d'une distance entre deux ensembles. L'identification sera, au sens de cette minimisation, d'autant meilleure que cette distance sera faible. Nous allons calculer l'influence du nombre de mesures sur cette distance et en déduire le nombre de mesures optimal du point de vue de ce critère.

La distance d'identification est

$$d = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (y_k - A_{opt} X_k)^T p (y_k - A_{opt} X_k) \quad (2.1.)$$

$$\text{Pour un ensemble donné de } m \text{ mesures } A_{opt} = y_m^T X_m (X_m^T X_m)^{-1} \quad (2.2.)$$

(2.1.) et (2.2.) donnent (2.3.) :

$$d = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (y_k - y_m^T X_m (X_m^T X_m)^{-1} X_k)^T p (y_k - y_m^T X_m (X_m^T X_m)^{-1} X_k)$$

soit encore :

$$d = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \{ y_k^T p y_k - 2 y_k^T p y_m^T X_m (X_m^T X_m)^{-1} X_k + \dots \\ \dots X_k^T (X_m^T X_m)^{-1} X_m^T p y_m^T X_m (X_m^T X_m)^{-1} X_k \} \quad (2.4.)$$

En remarquant que :

$$\sum_{k=1}^m y_k^T M X_k = \text{trace} (y_m^T M X_m^T)$$

$$(2.5) \quad \sum_{k=1}^m y_k^T M y_k = \text{trace} (y_m^T P y_m^T)$$

$$\sum_{k=1}^m X_k^T M X_k = \text{trace} (X_m^T M X_m^T)$$

$$d = \frac{1}{m} \text{trace} \{ (\text{Id} - X_m (X_m^T X_m)^{-1} X_m^T) y_m^T P y_m^T (\text{Id} - X_m (X_m^T X_m)^{-1} X_m^T) \} \quad (2.6.)$$

La relation (2.6.) montre que la distance d est de la forme

$$d = \frac{1}{m} \text{trace} \{ \omega^T Q \omega \} \quad (2.7.)$$

d est une distance, donc positive ou nulle. La distance minimale sera donc égale à zéro. Ceci n'est vérifié que si, dans la relation (2.7.) la matrice ω est identiquement nulle.

démonstration :

soit $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)$ ou les ω_i sont des vecteurs de dimension p .

Notons $\|\cdot\|_Q$ la norme euclidienne généralisée de matrice de pondération Q .

Dans ce cas

$$d = \text{trace} \{ \omega^T P \omega \} = \sum_{k=1}^p \|\omega_k\|_P$$

d ne sera nulle que si pour toute valeur de k : $\|\omega_k\|_P = 0$, ω_k est le vecteur identiquement nul quel que soit k . D'où la conclusion : ω est une matrice identiquement nulle.

La distance d'identification sera nulle, donc minimale si

$(\text{Id} - X_m (X_m^T X_m)^{-1} X_m^T)$ est la matrice nulle. Ceci ne sera vérifié que si X_m est carrée, c'est-à-dire si $m = (e+s)$ (2.8.)

En conclusion, le nombre optimal de mesures au sens de la distance d'identification est le nombre minimal de mesures nécessaire pour pouvoir identifier.

Dans ces conditions la relation (1.16) se simplifie et devient

$$A_{\text{opt}} = y_m^T (X_m^T)^{-1} \quad (2.9.)$$

pour $m = (e+s) = \dim (X)$.

2.1.2. - Influence du nombre de mesures sur le modèle

Le nombre optimal de mesures au sens de la distance d'identification ne sera réellement optimal que si le modèle choisi tient compte de l'ordre réel de système. Dans ce cas, nous avons déterminé par expérience que si l'on augmente le nombre des mesures le modèle restera inchangé car il sera en tous points identique à l'équation de fonctionnement du système réel.

Nous avons vu que, dans la plupart des cas, il n'est pas possible d'avoir accès directement à toutes les variables d'état d'un processus réel. L'hypothèse ci-dessus n'est donc pratiquement jamais vérifiée. Il est alors souvent utile afin d'avoir plus de renseignement sur le fonctionnement du processus, de prendre un nombre de mesures plus important, quitte à augmenter légèrement la distance d'identification. Examinons l'influence de cette augmentation du nombre de mesures sur la matrice A_{opt} représentative du modèle.

Pour étudier cette influence, nous allons utiliser la représentation de A_{opt} obtenue par la relation (1.14)

$$A_{\text{opt}}^m = \left(\sum_{k=1}^m y_k X_k^T \right) \left(\sum_{k=1}^m X_k X_k^T \right)^{-1} \quad (2.10.)$$

La relation (2.10) donne la valeur de A_{opt} pour une identification avec m mesures. Calculons A_{opt}^{m+p} qui serait la valeur obtenue avec $(m+p)$ mesures. Notons

$$(2.11) \quad \begin{aligned} M &= \sum_{k=1}^m y_k X_k^T \\ N &= \sum_{k=m+1}^p y_k X_k^T \\ P &= \sum_{k=1}^m X_k X_k^T \\ Q &= \sum_{k=m+1}^p X_k X_k^T \end{aligned}$$

Avec ces notations

$$A_{opt}^{m+p} = (M + N) (p + Q)^{-1} \quad (2.12)$$

En vous rappelant que

$$(A + B C D)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B (C^{-1} + D A^{-1} B)^{-1} D A^{-1} \quad (2.13)$$

$$A_{opt}^{m+p} = (M + N) (p^{-1} - p^{-1} (Id + Q p^{-1})^{-1} Q p^{-1}) \quad (2.14)$$

(2.14) est obtenue à partir de (2.13) en faisant $p = A$, $B = Id$, $C = Id$, $D = Q$

$$\begin{aligned} A_{opt}^{m+p} &= (M + N) (p^{-1} - (p+Q)^{-1} Q p^{-1}) \\ &= (M + N) p^{-1} - (M + N) (p + Q)^{-1} Q p^{-1} \\ &= A_{opt}^m + N p^{-1} - A_{opt}^{m+p} Q p^{-1} \end{aligned}$$

$$d'où A_{opt}^{m+p} = (A_{opt}^m + N p^{-1}) (Id + Q p^{-1})^{-1} \quad (2.15)$$

$$A_{opt}^{m+p} \text{ sera égal à } A_{opt}^m \text{ si } N p^{-1} = A_{opt}^m Q p^{-1} \quad (2.16)$$

$$\text{soit } A_{opt}^m = N Q^{-1} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \text{si } N &= y_{m+1} X_{m+1}^T \\ Q &= X_{m+1} X_{m+1}^T \end{aligned} \quad (2.18)$$

Alors $A_{opt}^m = A_{opt}^{m+1}$ si le régime permanent est atteint à la m ième mesure. En effet on aura dans ce cas $y_{m+1} = y_m$, $X_{m+1} = X_m$; l'équation (2.16) sera donc vérifiée.

2.2. - Régulation

=====

Un processus réel est le plus souvent non linéaire. Il est donc important, lors de l'identification, de choisir avec beaucoup de précautions les signaux de commandes qui permettront de modéliser le processus. Le modèle étant choisi linéaire et simplifié il ne sera représentatif du processus que dans une plage de fonctionnement dont l'étendue pourra être très restreinte si les non linéarités sont importantes, ou plus large dans des cas plus favorables.

Nous allons étudier l'influence des signaux de commande utilisés pour identifier lorsque le processus sera bouclé par le système de régulation issue du modèle.

Le modèle est défini par l'équation :

$$y_{k+1} = A_{\text{opt}} X_k = B U_k + C V_k \quad (2.19)$$

La commande optimale pour le modèle sera

$$U_{\text{opt}} = B^{(-1)} (y_b - C V_k) \quad (2.20)$$

où $B^{(-1)}$ est une pseudo inverse de B

y_b étant le but que doit atteindre le vecteur de sortie y .

L'équation de fonctionnement du système réel peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i y_{k-i} = \sum_{i=1}^q \beta_i U_{k-i} \quad (2.21)$$

Cette équation est vérifiée lorsque le système est en régime permanent, la commande étant égale à U_p

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i \cdot y_p = \sum_{i=1}^q \beta_i U_p \quad (2.22)$$

Dans les mêmes conditions, le modèle sera régit par l'équation

$$(Id - C) y_p = B U_p \quad (2.23)$$

$$d'où U_p = B^{(-1)} (Id - C) y_p \quad (2.24)$$

Les relations (2.22) et (2.24) donnent

$$\left(\sum_{i=0}^q \alpha_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^q \beta_i \right) y_p = B^{-1} (Id - C) y_p \quad (2.25)$$

On obtient finalement

$$y_p = M y_p \quad (2.26)$$

$$\text{avec } M = \left\{ \left(\sum_{i=0}^q \alpha_i \right) + \left(\sum_{i=1}^q \beta_i \right) B^{(-1)} C \right\}^{-1} \left(\sum_{i=1}^q \beta_i \right) B^{(-1)} \quad (2.27)$$

La matrice M possède donc une valeur propre égale à 1 relative au vecteur propre y_p .

Considérons maintenant le système bouclé. La commande sera

$$U_k = B^{(-1)} (y_b - C y_k).$$

La relation (2.21) devient

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i y_{k-i} = \sum_{i=1}^q \beta_i B^{(-1)} (y_b - C y_{k-i}) \quad (2.28)$$

Soit

$$\left(\left(\sum_{i=0}^q \alpha_i \right) - \left(\sum_{i=1}^q \beta_i \right) B^{-1} C \right) y_{k-i} = \left(\sum_{i=1}^q \beta_i \right) B^{(-1)} y_b \quad (2.29)$$

Si le système bouclé est stable, le régime établi sera donné par :

$$y_{\text{perm}} = \left\{ \left(\sum_{i=0}^q \alpha_i \right) - \left(\sum_{i=1}^q \beta_i \right) B^{-1} C \right\}^{-1} \left(\sum_{i=1}^q \beta_i \right) B^{(-1)} y_b \quad (2.30)$$

soit encore en utilisant (2.27)

$$y_{\text{perm}} = M_1 y_b \quad (2.31)$$

$$\text{Nous voulons } y_{\text{perm}} = y_b : \quad (2.32)$$

Cette relation sera vérifiée de façon certaine si $y_p = y_b$ d'après (2.26)

Une condition suffisante pour que le régime permanent du système bouclé (s'il existe) soit égal au but fixé par le cahier des charges y_b est que lors de l'identification, la commande appliquée au système soit telle que le régime permanent du système en boucle ouverte soit égal à y_b .

Nous pouvons remarquer d'après ce résultat que, si le processus est non linéaire, l'identification revient à linéariser le système autour de son point de fonctionnement normal.

CONCLUSION :

Dans la méthode d'identification que nous venons d'exposer, il n'a jamais été question de l'ordre du système. Nous ne cherchons pas à obtenir les équations de fonctionnement exactes, ni même approchées du processus à étudier. Le but de cette méthode est de déterminer les paramètres d'un modèle qui, soumis à la même excitation, donnera une réponse la plus proche possible de celle du système. Nous avons essayé de donner les limites de cette méthode en mettant en évidence le fait que le modèle ne sera applicable que pour un type de fonctionnement bien déterminé.

Nous n'avons fait aucune hypothèse sur le vecteur des sorties mesurables V . Il peut, dans des cas privilégiés, se confondre avec le vecteur état du processus, mais dans la plupart des cas, il sera de dimension beaucoup plus faible. A la limite, dans les cas les plus défavorables mais pas les moins fréquents, ce vecteur V ne sera autre que le vecteur de sortie y . Cette hypothèse sera celle que nous ferons dans tout le chapitre suivant.

Nous déterminerons alors un système de commande élaboré à partir d'un modèle le plus simple possible puisque ne faisant intervenir que la sortie y du processus.

CHAPITRE IV

COMMANDE OPTIMALE

Introduction :

Nous avons défini au chapitre précédent une méthode permettant de déterminer les paramètres d'un modèle donnant la même réponse que le système à étudier lorsque tous deux sont soumis à la même excitation. Cette méthode ne tient pas compte de l'ordre du système réel mais uniquement des composantes du vecteur état directement mesurables.

Dans ce chapitre nous nous placerons dans le cas le plus défavorable, c'est à dire que les seules grandeurs de sortie accessibles sont les sorties du système. Le vecteur V défini au chapitre précédent se réduira alors au vecteur Y .

Avant de définir la boucle de régulation améliorant les performances du système nous allons choisir un critère de commande optimale et déterminer les conditions de stabilité du système bouclé.

I - Critère de commande optimale et conditions de stabilité

1.1. - Commande optimale

1.1.1. - Commandabilité des systèmes multivariables

Soit le système multivariable représenté à la figure (4.1.)

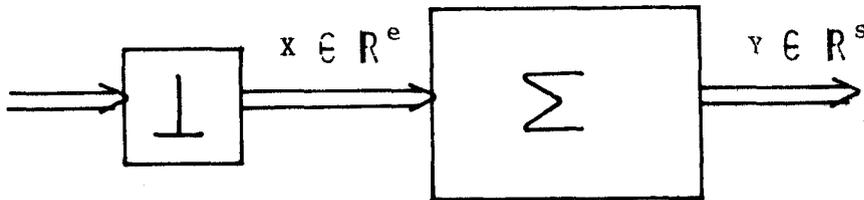


figure 4.1

Nous dirons que ce système est commandable en ℓ périodes d'échantillonnage s'il existe une séquence

$$(X_0, X_1, \dots, X_{\ell-1})$$

telle qu'à partir d'une condition initiale quelconque Y_0 , on puisse amener un état arbitraire Y_ℓ .

L'équation du système est donné par $Y_{n+1} = A Y_n + K X_n$ (1.1.)

$$Y_n = (\underline{y}_n^1 \text{ }^T \quad \underline{y}_n^2 \text{ }^T \quad \dots \quad \underline{y}_n^s \text{ }^T)^T$$

$$\underline{y}_n^k \text{ }^T = (y_n^k \quad \dot{y}_n^k \quad \dots \quad (y_n^k)^{(d_k)})$$

$$Y^T = (y_n^1 \quad y_n^2 \quad \dots \quad y_n^s)$$

La dimension de Y est donc

$$\dim(Y) = \sum_{k=1}^s \dim(y^k) = \sum_{k=1}^s d_k = d$$

A sera une matrice carrée $d \times d$ représentant le régime libre du système.
 K matrice donnant l'influence de l'entrée est une matrice de dimension $d \times e$.
 Après ℓ périodes d'échantillonnage on peut écrire

$$Y_{n+\ell} = AY_{n+\ell-1} + K X_{n+\ell-1}$$

Soit aussi

$$Y_{n+\ell} = A^\ell Y_n + \sum_{i=1}^{\ell} A^{\ell-i} K X_{n+i-1} \quad (1.2)$$

Le système sera commandable si l'on peut déterminer la séquence $(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+\ell-1})$ telle que quelle que soit la condition initiale Y_n , $Y_{n+\ell}$ soit égal à une valeur connue.

On a alors

$$\sum_{i=1}^{\ell} A^{\ell-i} K X_{n+i-1} = Y_{n+\ell} - A^\ell Y_n \quad (1.3)$$

que l'on peut écrire

$$Y_{n+\ell} - A^\ell Y_n = (A^{\ell-1}K, A^{\ell-2}K, \dots, AK, K) \begin{pmatrix} X_n \\ X_{n+1} \\ \vdots \\ X_{n+\ell-1} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Nous devons pouvoir calculer le vecteur

$$(X_n^T, X_{n+1}^T, \dots, X_{n+\ell-1}^T)^T$$

Ceci implique que la matrice de commandabilité $(A^{\ell-1}K, A^{\ell-2}K, \dots, AK, K)$ soit inversible donc de rang d .

Cette matrice est de dimension $dx(\ell.e)$. Elle ne pourra être de rang d que si $\ell.e \geq d$.

$$\text{Soit } \ell \geq \frac{d}{e} \quad (1.5)$$

D'après le théorème de Cayley Hamilton, si $j > d$, A^j est combinaison linéaire des A^k ($k = 1, 2, \dots, d-1$). Cette remarque nous permet de dire qu'il n'est pas nécessaire de prendre $\ell \geq d$ car ceci ne pourrait en aucun cas augmenter le rang de la matrice de commandabilité.

D'où la conclusion :

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système multivariable défini par la relation (1.1) soit commandable est qu'il existe un nombre ℓ vérifiant

$$\frac{d}{e} \leq \ell \leq d \quad (1.6)$$

et tel que :

$$\text{rang} \{ (A^{l-1} K, A^{l-2} K, \dots, A K, K) \} = d \quad (1.7)$$

1.1.2. - Critère de commande optimale

Le concept d'optimalité ne peut se concevoir sans une référence à un critère.

Avant de définir la boucle de régulation donnant une commande optimale au processus, nous devons choisir un critère donnant un sens à la notion d'optimalité.

Nous avons choisi de minimiser le temps de réponse du système tout en rendant négligeable l'influence des perturbations.

Le modèle est une équation de récurrence du premier ordre

$$Y_{k+1} = B U_k + C Y_k \quad (1.8)$$

Si nous le bouclons par l'équation $U_k = B^{(-1)} (Y_b - C Y_k)$ (1.9) où $B^{(-1)}$ est une pseudo inverse de B, par exemple $B^T (B B^T)^{-1}$ si la dimension de U est supérieure ou égale à celle de Y.

Y_b est la valeur que Y doit atteindre et garder.

Dans ce cas (1.8) devient

$$Y_{k+1} = B B^{(-1)} (Y_b - C Y_k) + C Y_k$$

$$\text{soit } Y_{k+1} = Y_b \quad (1.10)$$

Le modèle atteint donc son régime permanent en une période d'échantillonnage T_i et ce, quelle que soit la condition initiale.

Puisque le modèle est identique au processus dans la zone de fonctionnement utilisé, nous allons déterminer la boucle de régulation permettant de faire répondre le système en un temps voisin de T_i . Auparavant, il faudra s'assurer que le système bouclé converge.

1.2. - Condition de stabilité du système bouclé

=====

L'équation de fonctionnement du processus peut être écrit

$$Y_{k+1} = D Y_k + E U_k \quad (1.11)$$

La commande étant échantillonnée avec une période T

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

y est le vecteur de sortie

$y^{(k)}$ est le vecteur dérivée k ième de y ou n'apparaissent que les composantes y^j telles que l'ordre correspondant à cette sortie y^j soit supérieure à k.

La boucle de régulation est définie par

$$U_k = B^{-1} (y_b - C y_k) \quad (1.13)$$

y_b est le régime permettant à atteindre (1.11) et (1.13) donnent donc

$$Y_{k+1} = D Y_k + E B^{-1} (y_b - C y_k) \quad (1.14)$$

Notons C' la matrice de dimension $s \times n$ (si $s = \dim(y)$ et $n = \dim(Y)$) définie par

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ C & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Nous avons alors :

$$C y_k = C' Y_k \quad (1.16)$$

Le fonctionnement du système bouclé s'écrit alors

$$Y_{k+1} = (D - E B^{-1} C') Y_k + E B^{-1} y_b \quad (1.17)$$

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité du système bouclé est

$$\text{que : } \| D - E B^{-1} C' \| < 1 \quad (1.18)$$

Nous ne connaissons pas les matrices D et E, il est donc impossible de définir une condition nécessaire et suffisante de stabilité. Par contre, l'expérience a montré que si tous les coefficients de la matrice C sont positifs le système bouclé est stable.

II - Application du modèle à la commande optimale

Nous supposerons dans tout ce paragraphe que la boucle de régulation définie en (1.13) ne déstabilise pas le système. Nous allons tout d'abord supposer que le modèle et le système ont exactement le même comportement. La régulation sera donc faite à partir de l'équation (1.13), la période d'échantillonnage T sera égale à celle utilisée pour identifier le système, soit T_i .

2.1. - Commande avec une période d'échantillonnage égale à T_i

2.1.1. - Calcul du régime permanent

L'équation de fonctionnement du système réel est donnée par

$$Y_{k+1} = D_i Y_k + E_i U_k + F_i Z_k \quad (2.1)$$

où Z est une perturbation ni mesurable ni commandable.

D'après la relation (1.13) le système de commande est donné par

$$U_k = B^{(-1)} (Y_b - C' Y_k) \quad (2.2)$$

Le fonctionnement du système bouclé est alors régi par l'équation

$$Y_{k+1} = (D_i - E_i B^{(-1)} C') Y_k + E_i B^{(-1)} Y_b + F_i Z_k \quad (2.3)$$

Le système étant bruité, la valeur du régime permanent peut être prise égale à la valeur moyenne de Y_k que nous noterons \bar{Y} .

D'après (2.3) nous obtenons, en notant

$$M_i = D_i - E_i B^{(-1)} C'$$
$$\bar{Y} = (\text{Id} - M_i)^{-1} E_i B^{(-1)} Y_b + (\text{Id} - M_i)^{-1} F_i \bar{Z} \quad (2.4)$$

Lorsque le bruit Z est à moyenne nulle, il vient

$$\bar{Y} = (\text{Id} - M_i)^{-1} E_i B^{(-1)} Y_b \quad (2.5)$$

Les signaux de commande utilisés pour identifier le système étaient tels que le régime permanent soit égal à Y_b .

$$Y_{\text{perm}} = D_i Y_{\text{perm}} + E_i U_{\text{perm}} \quad (2.6)$$

$$Y_{\text{perm}} = \begin{pmatrix} Y_b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Le régime permanent du modèle donne l'équation

$$Y_b = B U_{\text{perm}} + C Y_b \quad (2.8)$$

d'où

$$U_{\text{perm}} = B^{(-1)} Y_b - B^{(-1)} C Y_b \quad (2.9)$$

où encore

$$U_{\text{perm}} = B^{(-1)} Y_b - B^{(-1)} C' Y_{\text{perm}} \quad (2.10)$$

Les relations (2.6) et (2.10) nous permettent d'écrire

$$Y_{\text{perm}} = (\text{Id} - M_i)^{-1} E_i B^{(-1)} Y_b \quad (2.11)$$

La comparaison des relations (2.5) et (2.11) donne immédiatement

$$\bar{Y} = Y_{\text{perm}} \quad (2.12)$$

La valeur moyenne du vecteur état du système en régime établi est donc

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Lorsque le système bouclé est stable il converge donc vers le but désiré.

Le but fixé pour la régulation était que le processus atteigne sa position d'équilibre Y_b en un temps le plus voisin possible de T_i . Nous allons donc calculer la valeur du vecteur état Y après le temps T_i .

2.1.2. - Calcul de $Y(T_i)$

Soit Y_0 la condition initiale du système. La commande étant échantillonnée avec une période T_i , $Y(T_i)$ sera donc égal à

$$Y(T_i) = D_i Y_0 + E_i U_0 + F_i Z_0 \quad (2.15)$$

$$U_0 = B^{(-1)} (Y_b - C' Y_0)$$

On en déduit:

$$Y(T_i) = M_i Y_0 + E_i B^{(-1)} Y_b + F_i Z_0 \quad (2.16)$$

La relation (2.16) montre de façon évidente qu'en général $Y(T_i)$ ne sera pas égal au régime permanent du processus.

2.1.3. - Conclusion

Le résultat que nous venons d'obtenir tend à montrer que le modèle obtenu par identification ne convient pas à la régulation.

La matrice A est le seul renseignement que nous ayons sur le fonctionnement du processus. Nous ne pouvons donc pas modifier les coefficients de cette matrice dans le but d'améliorer le système de commande. Le seul paramètre que nous puissions faire varier est alors la période d'échantillonnage. Nous allons étudier l'influence d'une variation de la période sur la réponse du système.

2.2.- La période de commande est égale à T_i/λ

Nous nous proposons d'étudier le comportement du système lorsque la période d'échantillonnage est égale à

$$T_c = T_i / \lambda \quad \text{avec} \quad \lambda > 1 \quad (2.17)$$

Le fonctionnement du système sera alors décrit par la relation

$$Y_{k+1} = D_c Y_k + E_c U_k \quad (2.18)$$

Nous pouvons établir les relations liant D_i et E_i à D_c, E_c et λ

$$\begin{aligned} D_i &= D_c^\lambda \\ E_i &= \sum_{k=0}^{\lambda-1} D_c^k E_c \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nous supposons que le système bouclé commandé avec une période T_c est stable, c'est à dire

$$\| D_c - E_c B^{(-1)} C' \| < 1$$

2.2.1. - Régime permanent

Nous allons étudier l'influence d'une variation de la période sur la valeur du régime permanent.

Lorsque le régime établi est atteint et égal à Y_e , l'équation (2.18) devient:

$$Y_e = D_c Y_e + E_c U_e \quad (2.20)$$

U_e est la commande en régime permanent, c'est à dire

$$U_e = B^{(-1)} (Y_b - C' Y_e) \quad (2.21)$$

Ecrivons la valeur de $Y_{k+\lambda}$ avec $Y_k = Y_{k+1} = \dots = Y_{k+\lambda} = Y_e$

$$Y_{k+\lambda} = D_c^\lambda Y_k + \sum_{j=0}^{\lambda-1} D_c^j E_c U_e \quad (2.22)$$

Soit en utilisant (2.19) :

$$Y_e = D_i Y_e + E_i U_e \quad (2.23)$$

(2.21) et (2.23) donnent

$$Y_e = M_i Y_e + E_i B^{(-1)} Y_b \quad (2.24)$$

Les relations (2.24) et (2.5) nous permettent d'écrire

$$(Y_e - \bar{Y}) = M_i (Y_e - \bar{Y}) \quad (2.25)$$

\bar{Y} est la valeur du régime permanent lorsque la période est égale à T_i .
 M_i est la matrice du régime libre du système en boucle fermée que nous avons supposé stable, donc

$$\| M_i \| < 1 \quad (2.26)$$

La relation (2.25) signifie que M_i possède une valeur propre égale à 1 ce qui est en contradiction avec (2.26). Par conséquent

$$Y_e = \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Si le système est stable, sa position d'équilibre est égale à la valeur souhaitée.

2.2.2. - Calcul de $Y(T_i)$

Soit Y_0 la condition initiale du système. Nous aurons alors

$$Y(T_c) = E_c Y_b + M_c Y_0 \quad (2.28)$$

$$M_c = (D_c - E_c B^{(-1)} C')$$

d'où

$$\begin{aligned} Y(2T_c) &= E_c B^{(-1)} Y_b + M_c Y(T_c) \\ &= E_c B^{(-1)} Y_b + M_c E_c B^{(-1)} Y_b + M_c^2 Y_0 \end{aligned}$$

on obtient finalement:

$$Y(\lambda T_c) = Y(T_i) = M_c^\lambda Y_0 + \sum_{j=0}^{\lambda-1} M_c^j E_c B^{(-1)} Y_b \quad (2.29)$$

Or on sait que:

$$\sum_{j=0}^{\lambda-1} M_c^j = (Id - M_c^\lambda) (Id - M_c)^{-1} \quad (2.30)$$

Les expressions (2.29) et (2.30) nous donnent:

$$Y(T_i) = (Id - M_c)^{-1} E_c B^{(-1)} Y_b + M_c^\lambda (Y_o - (Id - M_c)^{-1} E_c B^{(-1)} Y_b) \quad (2.31)$$

Les expressions (2.20) et (2.21) nous donnent la valeur du régime permanent

$$Y_e = (Id - M_c)^{-1} E_c B^{(-1)} Y_b \quad (2.32)$$

Nous obtenons par conséquent :

$$Y(T_i) = Y_e + M_c^\lambda (Y_o - Y_e) \quad (2.33)$$

Le système étant stable, la norme de M_c est inférieure à 1. Nous pouvons donc affirmer qu'il existe un nombre λ_o tel que pour tout λ supérieur à λ_o , la norme de M_c sera inférieure à un nombre η positif et aussi petit que l'on veut. (2.34)

2.2.3. - Conclusion

L'étude des relations (2.33) et (2.34) nous permet de dire que si λ est assez grand, c'est à dire si la période d'échantillonnage T_c est très faible devant T_i , alors

$$Y(T_i) = Y_e + \underline{o}(a^{-\lambda}) \quad (2.35)$$

$\underline{o}(a^{-\lambda})$ est un vecteur dont la norme varie comme $a^{-\lambda}$ avec a plus grand que 1.

Il ressort de cette étude que plus la période d'échantillonnage de commande sera faible, plus le système convergera vite vers sa position d'équilibre. Il semble donc naturel d'étudier le comportement du système bouclé commandé en continu.

2.3. - Boucle de régulation en continu

2.3.1. - Passage de l'échantillonné au continu

Considérons un système pouvant être commandé en échantillonné ou en continu. Son fonctionnement sera régi par les équations (2.36) en échantillonné et (2.37) dans l'autre cas.

$$S_{k+1} = A S_k + B E_k \quad (2.36)$$

$$\dot{S}(t) = N S(t) + K E(t) \quad (2.37)$$

S est un vecteur état du système, E est l'entrée, A,B,N,K sont des matrices à coefficients constants. Si T est la période d'échantillonnage intervenant dans la relation (2.36), on montre (annexe A2) que:

$$N = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{A - Id}{T} \right) \quad (2.38)$$

$$K = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{B}{T} \right)$$

2.3.2. - Application au système

L'équation de fonctionnement du système échantillonné est

$$Y_{k+1} = D_c Y_k + E_c U_k \quad (2.39)$$

lorsque la période d'échantillonnage est $T_c = T_i / \lambda$. Si l'on fait tendre la période d'échantillonnage vers zéro, nous obtiendrons alors l'équation du système continu

$$\dot{Y}(t) = P Y(t) + Q U(t) \quad (2.40)$$

$$\text{avec } P = \lim_{T_c \rightarrow 0} \frac{D_c - Id}{T_c} \quad (2.41)$$

$$Q = \lim_{T_c \rightarrow 0} \frac{E_c}{T_c}$$

Si le système continu est stable, le régime permanent sera donné par

$$Y_{\text{perm}} = -P^{-1} Q U_{\text{perm}} \quad (2.42)$$

avec

$$U_{\text{perm}} = B^{(-1)} (Y_b - C' Y_{\text{perm}}) \quad (2.43)$$

d'où

$$Y_{\text{perm}} = -(P - Q B^{(-1)} C')^{-1} Q B^{(-1)} Y_b \quad (2.44)$$

La sortie $Y(T_i)$ du système échantillonné donnée en (2.35) peut s'écrire

$$Y(T_i) = (Id - (D_c - E_c B^{(-1)} C'))^{-1} E_c B^{(-1)} Y_b + o(a^{-\lambda}) \quad (2.45)$$

Si nous faisons tendre T_c vers zéro et λ vers l'infini en gardant le produit λT_c égal à T_i , nous obtenons

$$Y(T_i) = \lim_{T_c \rightarrow 0} (Id - (D_c - E_c B^{(-1)} C'))^{-1} E_c B^{(-1)} Y_b \dots \\ \dots + \lim_{T_c \rightarrow 0} o(a^{-\lambda}) \quad (2.46)$$

soit

$$Y(T_i) = \lim_{T_c \rightarrow 0} \left(\frac{Id - D_c}{T_c} + \frac{E_c}{T_c} B^{(-1)} C' \right)^{-1} \frac{E_c}{T_c} B^{(-1)} Y_b \quad (2.47)$$

Les relations (2.41) et (2.47) donnent:

$$Y(T_i) = -(P - Q B^{(-1)} C')^{-1} Q B^{(-1)} Y_b \quad (2.48)$$

c'est à dire

$$Y(T_i) = Y_{\text{perm}} \quad (2.49)$$

2.3.3. - Conclusion

Nous venons de démontrer que le système bouclé continu a atteint son régime permanent après un temps égal à la période d'échantillonnage d'identification. Dans la réalité les bruits qui se superposent au signal de commande mettent un peu en défaut ce résultat.

Conclusion:

Nous avons mis en évidence dans ce chapitre que la commande optimale pour le modèle ne l'est pas pour le système réel. Ceci est principalement dû au fait que le modèle est très incomplet (il ne tient pas compte de l'ordre du système réel). La commande optimale pour le modèle est définie par l'équation du système de contre réaction:

$$U = B^{(-1)} (Y_b - C Y)$$

Cette boucle de régulation doit être, dans la mesure du possible, appliquée en continu au processus.

Un avantage de cette méthode est la simplicité d'application car le système de commande ne fait intervenir que les sorties mesurables du système, le retour étant uniquement proportionnel. Nous pouvons le schématiser ainsi:

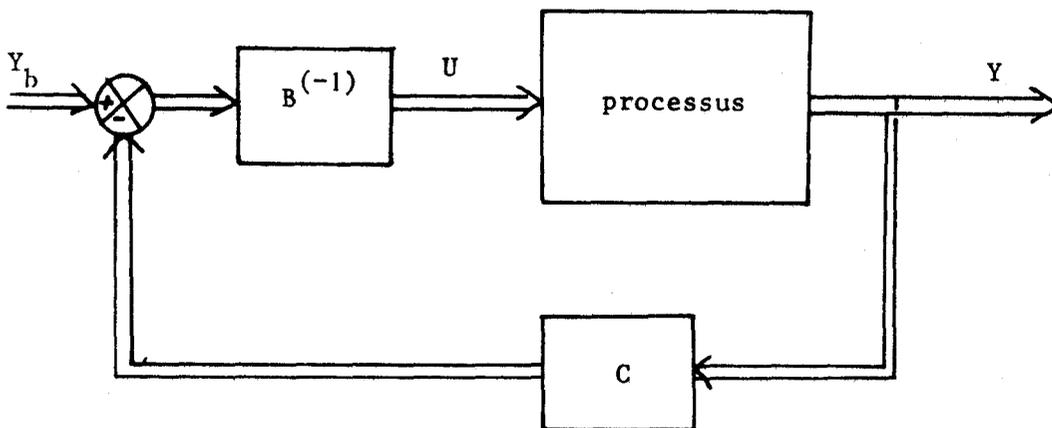


figure 4.2

CHAPITRE V

Nous allons présenter quelques exemples d'application de la méthode d'identification et de commande définie aux chapitres III et IV. Nous avons choisi trois exemples particuliers:

- i - Un système linéaire possédant deux entrées et deux sorties, les signaux n'étant pas bruités.
- ii - Un système non linéaire possédant deux entrées et deux sorties. Les signaux d'entrée sont bruités, un bruit non mesurable est de plus introduit dans le système.
- iii - Un système réel non linéaire monovarié constitué par le brûleur d'un four de séchage de luzerne.

I - Système n° 1

1.1. - Présentation

Ce système a été simulé sur E.A.I. 180 . Il peut être représenté par le schéma-bloc suivant:

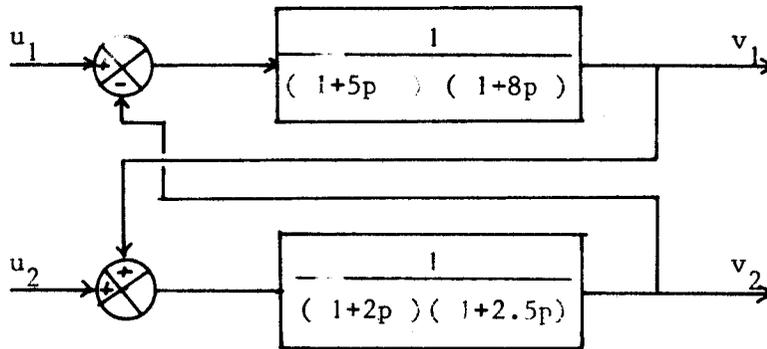


figure 5.1

La simulation sur E.A.I. 180 a été réalisée à partir du schéma de la figure 5.2

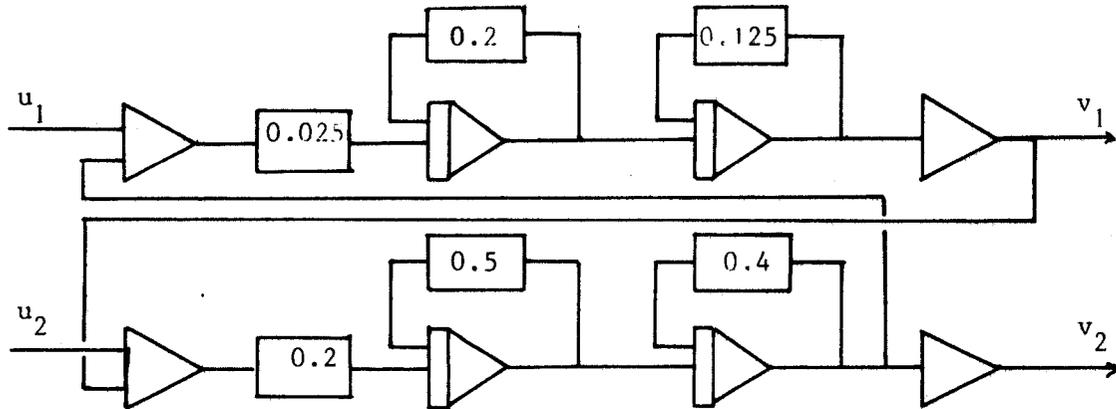


figure 5.2

Nous pouvons calculer la matrice de transfert de ce système $M(p)$

$$V(p) = M(p) U(p)$$

où

$$V(p) = \begin{vmatrix} v_1(p) \\ v_2(p) \end{vmatrix} \quad U(p) = \begin{vmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \end{vmatrix}$$

En posant
$$G(p) = \frac{1}{(1 + 5p)(1 + 8p)}$$

et
$$H(p) = \frac{1}{(1 + 2p)(1 + 2,5p)}$$

la matrice $M(p)$ s'écrit:

$$M(p) = \begin{vmatrix} \frac{G(p)}{1 + GH} & \frac{-GH}{1 + GH} \\ \frac{GH}{1 + GH} & \frac{H}{1 + GH} \end{vmatrix}$$

Chaque terme de cette matrice est un quatrième ordre. Le dénominateur des quatre termes est égal à

$$(1 + (1 + 2p)(1 + 2,5p)(1 + 5p)(1 + 8p))$$

Le modèle utilisé pour identifier le processus a été choisi du premier ordre. Il s'écrit:

$$V_{k+1} = B U_k + C V_k$$

Les signaux de commande d'identification sont des échelons auxquels s'est superposé un bruit. Les réponses $v_1(t)$ et $v_2(t)$ sont reproduites à la figure 5.3

Nous avons calculé les coefficients des matrices B et C pour différentes valeurs de la période T_i et un nombre de mesures (échantillons) plus ou moins grand. Les résultats obtenus sont récapitulés dans les tableaux 5.4a 5.4b et 5.4c de l'annexe A3.

1.2. - Etude des résultats obtenus

=====

Nous remarquons que la matrice d'identification ne dépend que de la période d'échantillonnage, et ne varie que très peu en fonction du nombre de mesures, à condition que la séquence utilisée pour identifier contienne le régime permanent du système. Dans ces conditions, le modèle et le système

ont pratiquement la même réponse.

Nous avons également vérifié que, lorsque le nombre de mesures est égal à la dimension du vecteur $(U^T, V^T)^T$ (ici égal à 4), la distance d'identification est nulle.

Les meilleurs résultats pour le critère " minimisation de la distance d'identification " sont obtenus avec une période d'échantillonnage de 5 secondes, mais l'erreur sur le régime permanent du modèle est plus importante.

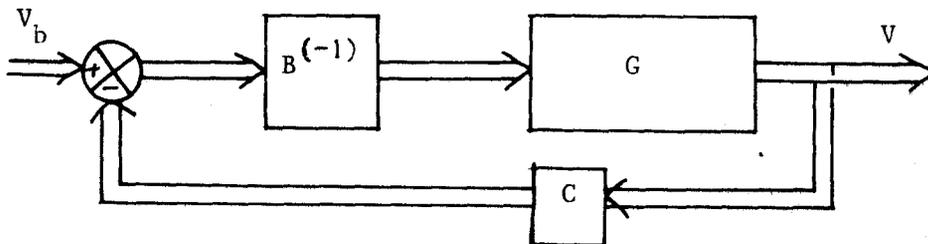
Nous avons choisi pour modèle de commande celui obtenu avec une période d'échantillonnage de 7,5 secondes.

Si G est la matrice du gain statique du processus en boucle ouverte, en boucle fermée le gain est

$$G_f = (B G^{-1} + C)^{-1}$$

la commande étant

$$U_k = B^{(-1)} (V_b - C V_k)$$



On a en effet pendant le régime permanent

$$V = G B^{(-1)} (V_b - C V)$$

soit

$$V = (Id + G B^{(-1)} C)^{-1} G B^{(-1)} V_b$$

où encore

$$V = (B G^{-1} + C)^{-1} V_b$$

Dans l'exemple considéré la matrice G est égale à

$$G = \begin{vmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{vmatrix}$$

Pour la matrice (B , C) obtenue avec une période d'échantillonnage de 7,5 secondes et 8 mesures, nous obtenons:

$$G_f = \begin{vmatrix} -1,22 & 1,35 \\ -3,06 & 2,84 \end{vmatrix}$$

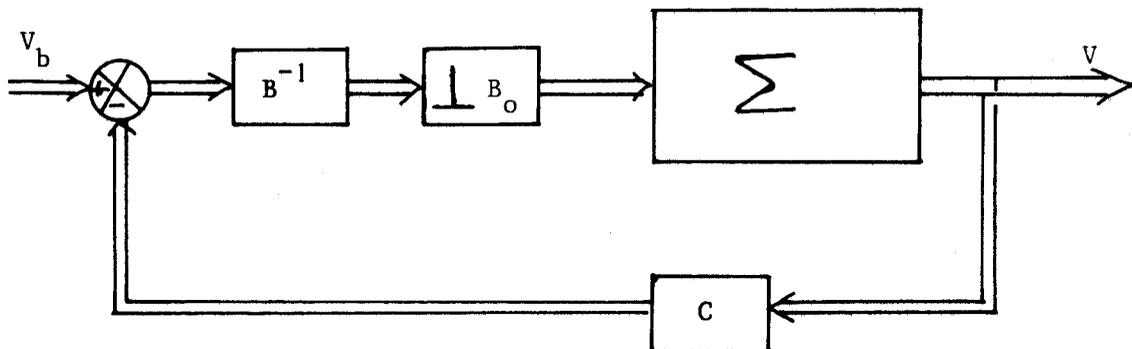
$$\text{d'où } G_f V_b = \begin{vmatrix} 3,09 \\ 5,02 \end{vmatrix} \quad \text{avec } V_b = \begin{vmatrix} 3,00 \\ 5,00 \end{vmatrix}$$

On obtient donc $G_f V_b$ très peu différent de V_b ; le régime permanent du système bouclé sera donc proche de la valeur de consigne.

1.3 - Résultats en boucle fermée

=====

Nous avons réalisé la contre réaction à partir du modèle obtenu pour $T_i = 7,5$ secondes et $m = 8$ mesures



La période d'échantillonnage T_c a été prise égale à 7,5 secondes, puis a été diminuée. Enfin l'échantillonneur bloqueur a été supprimé, le système étant alors commandé en continu.

Les courbes 5.5a et 5.5b montrent l'évolution du vecteur sortie pour différentes périodes d'échantillonnage. Nous remarquons que, comme le prévoyait la théorie, la commande est d'autant meilleure que la période d'échantillonnage est faible. Le dépassement est moins important et le temps de réponse plus court.

Les courbes 5.6a et 5.6b permettent de vérifier l'efficacité de la régulation. Le système n'a pas atteint le régime permanent en 7,5 secondes mais l'étude théorique prévoyait une identification parfaite (distance d'identification nulle, régime permanent du modèle rigoureusement égal à celui du système).

Nous avons récapitulé dans le tableau 5.6bis différents résultats permettant une comparaison plus immédiate.

		boucle ouverte	$T_c = 6,1 \text{ S}$	$T_c = 3 \text{ S}$	$T_c = 0,15 \text{ S}$	continu
V_1	dépassement	16 %	70 %	56 %	35 %	35 %
	temps de réponse	40 S	90 S	36 S	26 S	25 S
V_2	dépassement	13 %	42 %	12 %	0 %	0 %
	temps de réponse	40 S	90 S	27 S	8 S	7,5 S

Tableau 5.6 bis

Le dépassement est compté par rapport au régime permanent.

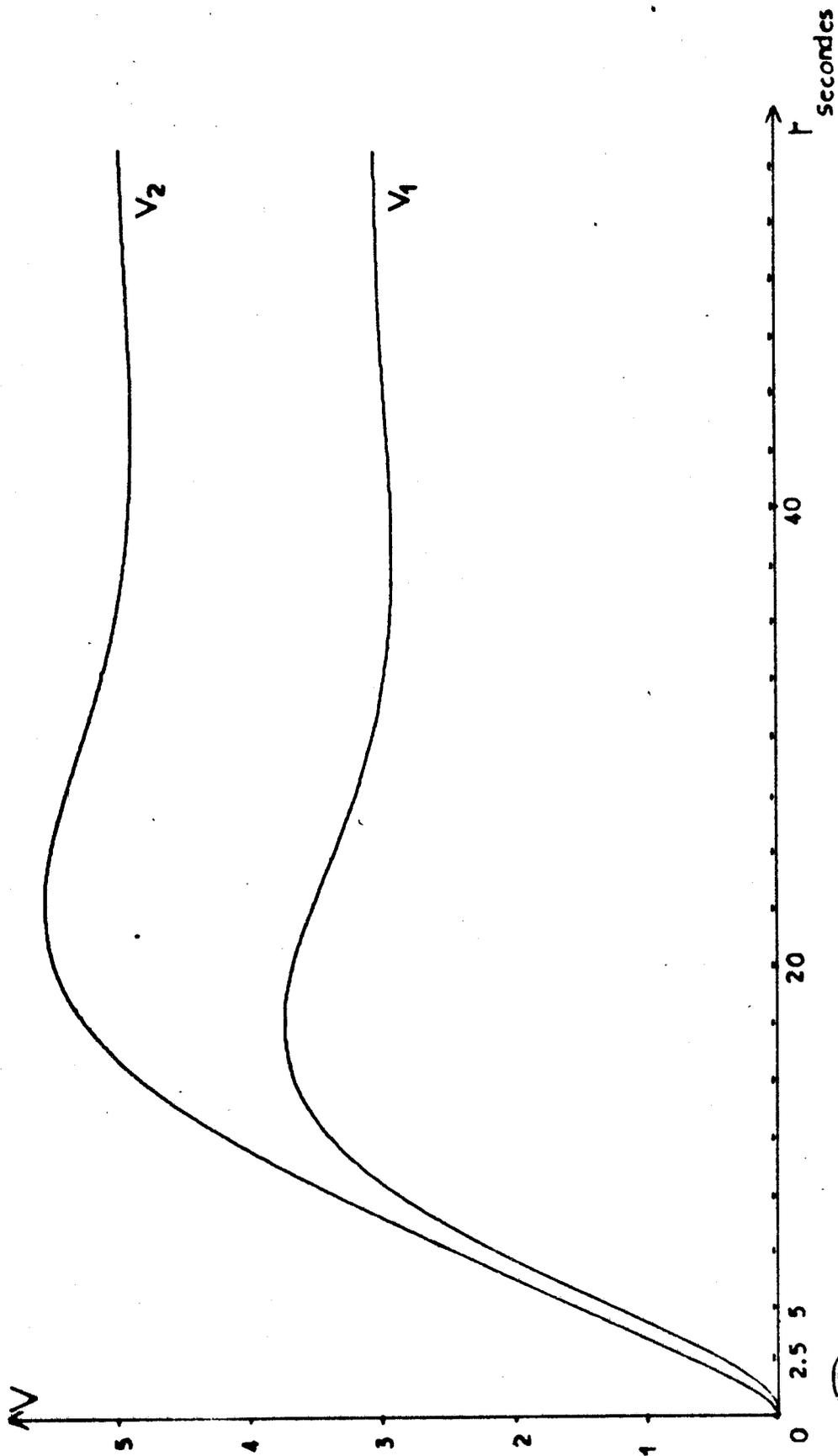
Le temps de réponse est le temps mis par la sortie pour atteindre son régime permanent à $\pm 2 \%$ près.

1.4. - Conclusion

=====

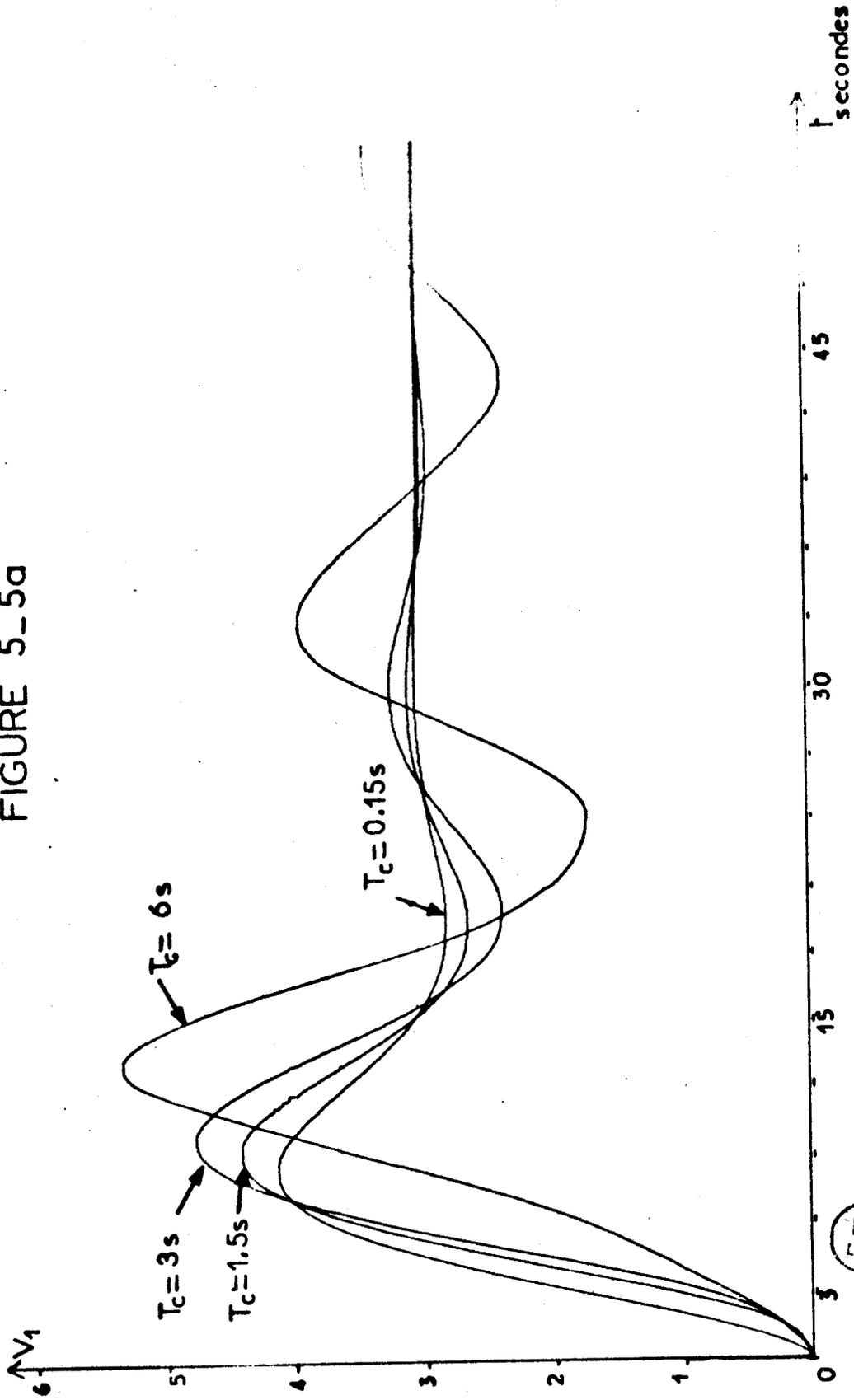
Les résultats obtenus permettent d'affirmer qu'il est possible d'obtenir une régulation correcte à partir d'un modèle ne reflétant que l'allure générale de la réponse du système à une entrée déterminée. La simulation vérifie assez bien les résultats théoriques. Nous allons, dans le paragraphe suivant, étudier le comportement de la méthode sur un système non linéaire bruité.

FIGURE 5-3



Système n° 1 - Réponse en boucle ouverte

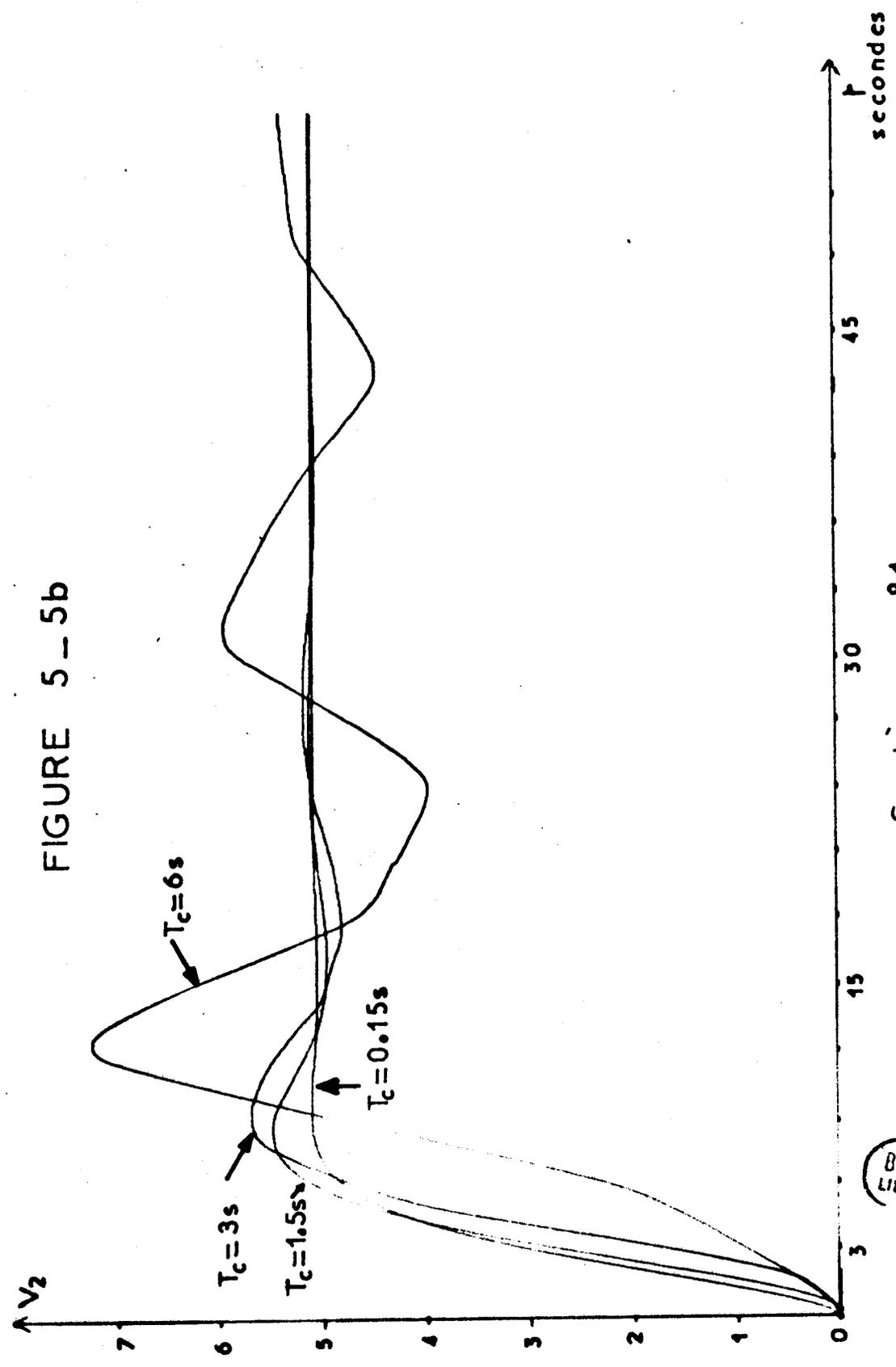
FIGURE 5_5a



Systeme n° 1
Régulation échantillonnée

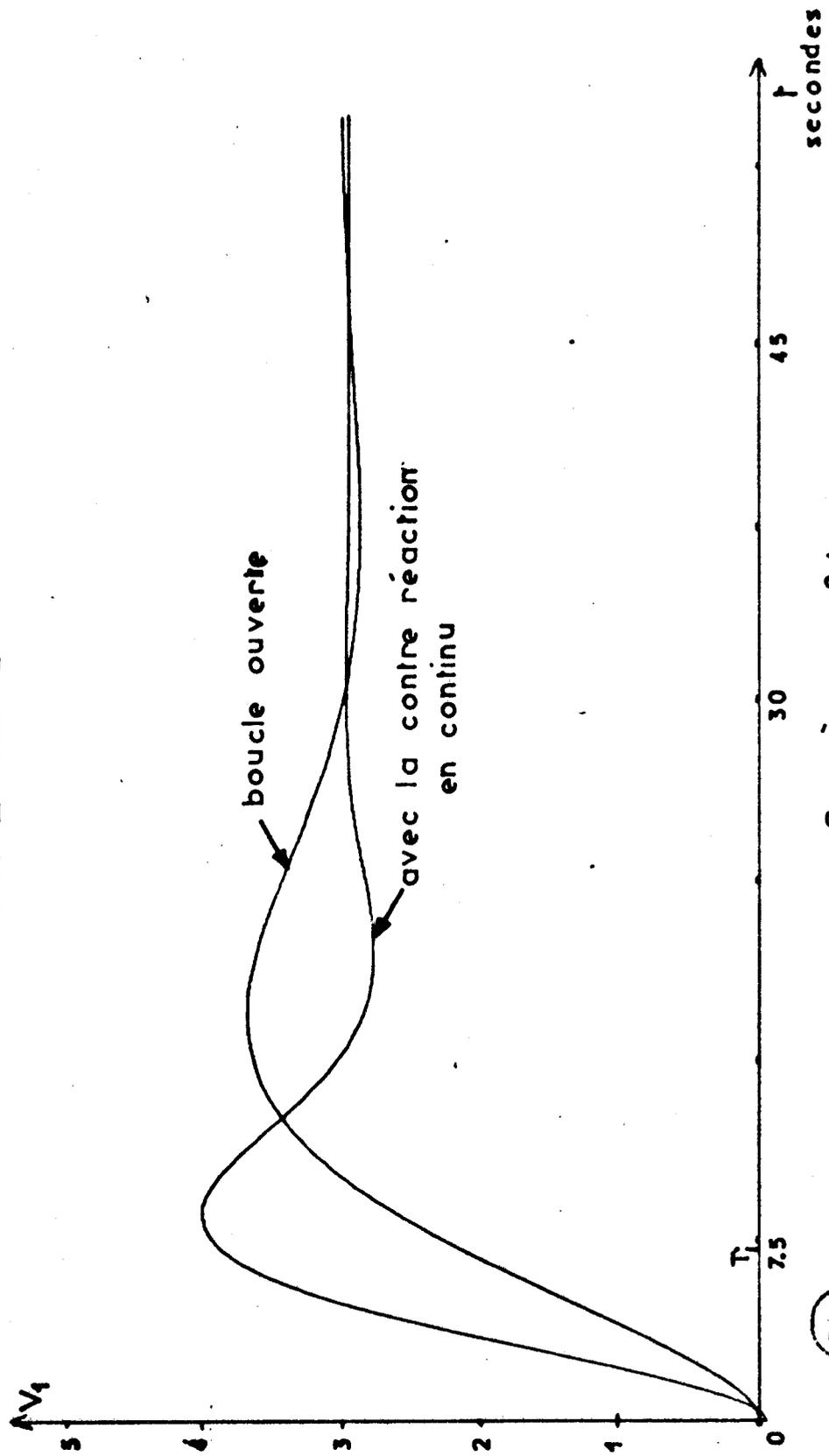


FIGURE 5-5b



Systeme n°1
Régulation en échantillonné

FIGURE 5-6a



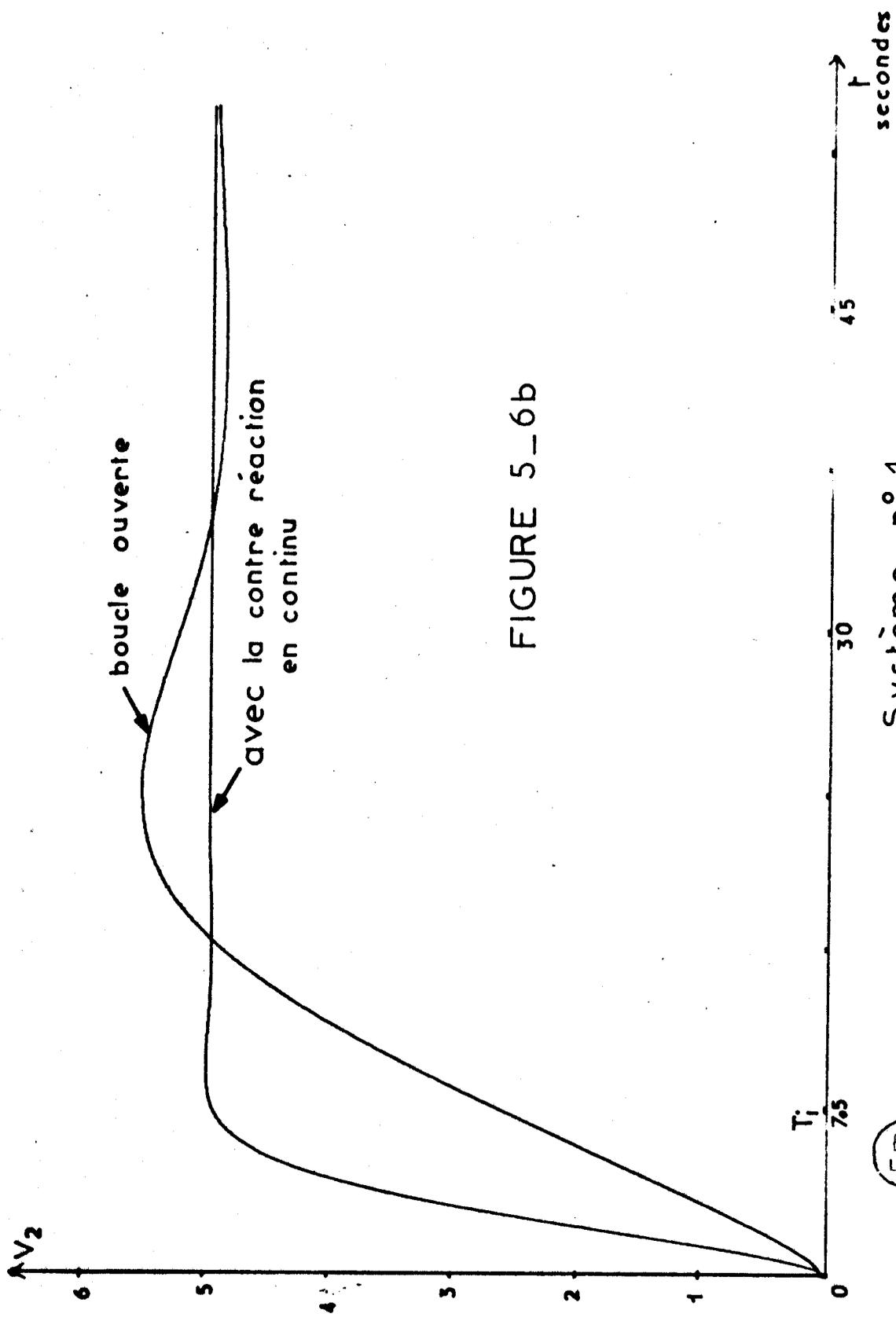


FIGURE 5-6b

Système n° 1



II - Système n° 2

2.1. - Description

Il nous a semblé intéressant d'étudier le comportement de la méthode d'identification sur un système non linéaire et bruité. Nous avons pour cela simulé sur E.A.I. 180 le système représenté à la figure 5.7 .

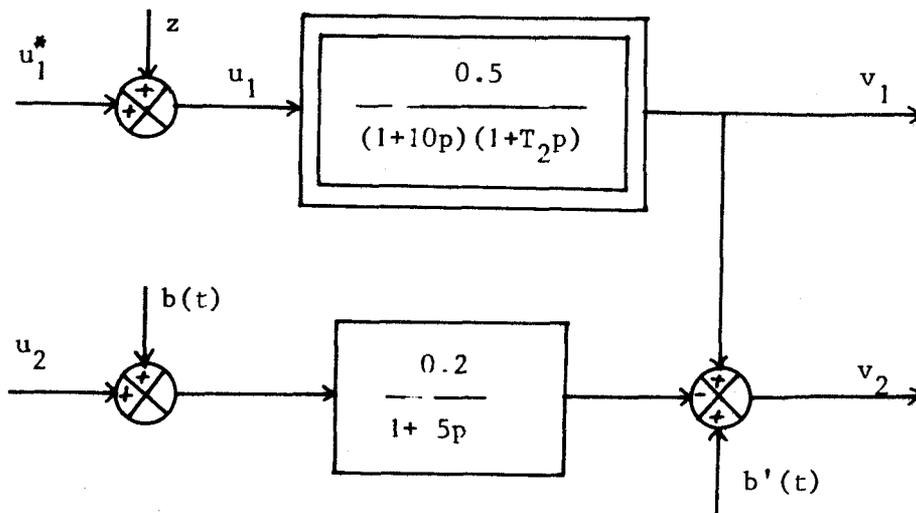


figure 5.7

La constante de temps T_2 est égale à $(100 + 10 U_1)$

Les entrées mesurables sont $U_1 = U_1^* + z$ et U_2

Les perturbations non mesurables $b(t)$ et $b'(t)$ ainsi que le bruit $z(t)$ sont obtenus à partir de séquences binaires pseudo-aléatoires.

L'identification a été faite avec les entrées suivantes:

$$U_1 = 0,9 \pm 0,1$$

$$U_2 = 0,5$$

La matrice de gain statique est

$$G = \begin{vmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,5 & -0,2 \end{vmatrix}$$

Le régime permanent est alors égal à $\begin{vmatrix} 0,45 \\ 0,35 \end{vmatrix}$ aux perturbations près.

Les réponses $V_1(t)$ et $V_2(t)$ sont représentées à la figure 5.8

2.2. - Identification

=====

Nous avons choisi un modèle du premier ordre, les dérivées $V_1'(t)$ et $V_2'(t)$ n'étant pas accessibles. La période d'échantillonnage d'identification a été fixée à 30 secondes.

Afin de vérifier l'influence du nombre des mesures sur les paramètres du modèle, nous l'avons fait varier entre 5 et 24 mesures. Les courbes des figures 5.9 a, b, c et d récapitulent les résultats obtenus. Tous les paramètres sont pratiquement constants en fonction de m pour un nombre de mesures supérieur à 14. Le régime établi du système en boucle ouverte est atteint après 450 secondes, ce qui correspond à 15 périodes de 30 secondes. Nous avons donc vérifié le fait que l'identification serait bonne si le régime est inclus dans l'ensemble des mesures utilisé pour déterminer les paramètres du modèle.

La courbe 5.10 représente la variation de la distance d'identification en fonction du nombre de mesures. Nous pouvons approcher son équation par

$$d \approx a (1 - e^{-b m})$$

a et b étant des constantes que nous n'avons pas cherché à définir car elles sont caractéristiques du système et de l'ensemble des mesures qui le représente.

2.3. - Régulation

=====

Le modèle retenu pour déterminer les paramètres de la régulation a été obtenu en prenant une valeur moyenne de ceux issus de l'identification avec un nombre de mesures supérieur à 14.

La réponse du système bouclé est représenté par les courbes 5.11.

Les courbes 5.12a et 5.12b permettent une comparaison entre les réponses en boucle ouverte et en boucle fermée. Nous obtenons pour $V_1(t)$ un temps de réponse plus faible (150 secondes au lieu de 450), l'influence des bruits n'est pas modifiée par la contre réaction. $V_2(t)$ a atteint son régime établi en 120 secondes au lieu de 300 en boucle ouverte, mais il apparait un dépassement de 25 % . Par contre, le départ "à l'envers" de la boucle ouverte a disparu. De même que pour $V_1(t)$ l'influence des bruits n'est pas modifiée.

FIGURE 5-8

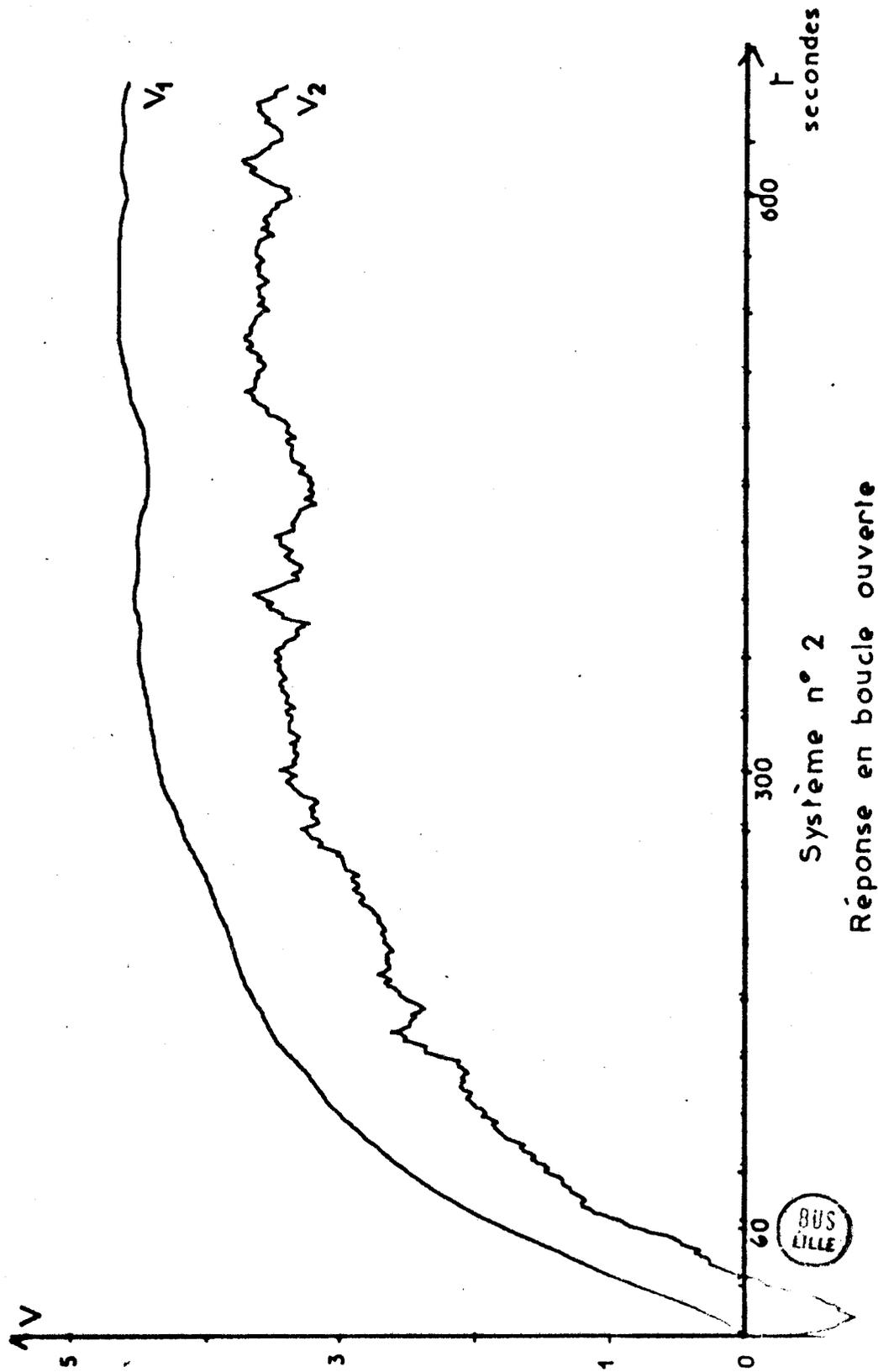
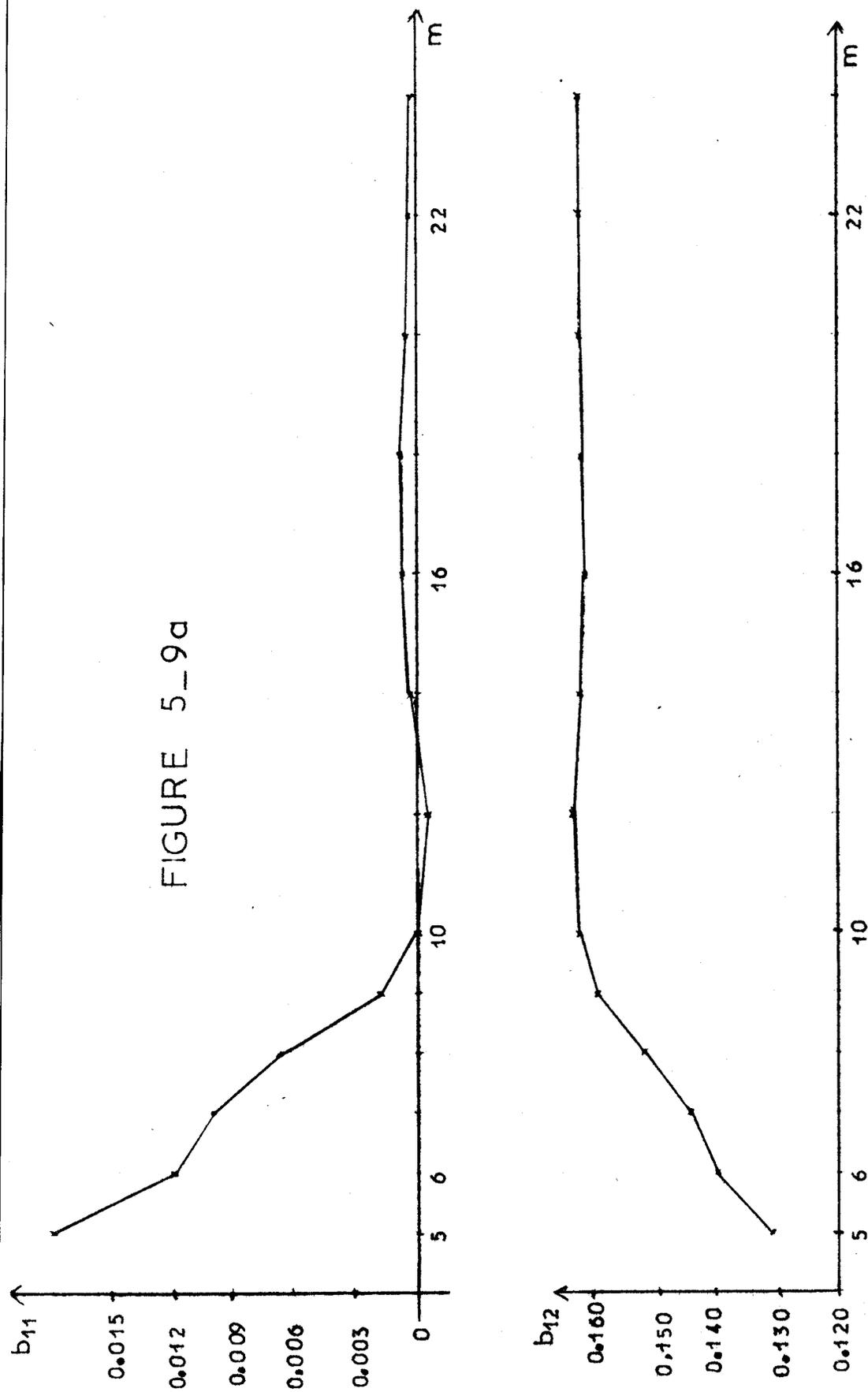


FIGURE 5_9a



Systeme n° 2

Variation des paramètres b_{11} et b_{12} de la matrice (B C) en fonction du nombre de mesures



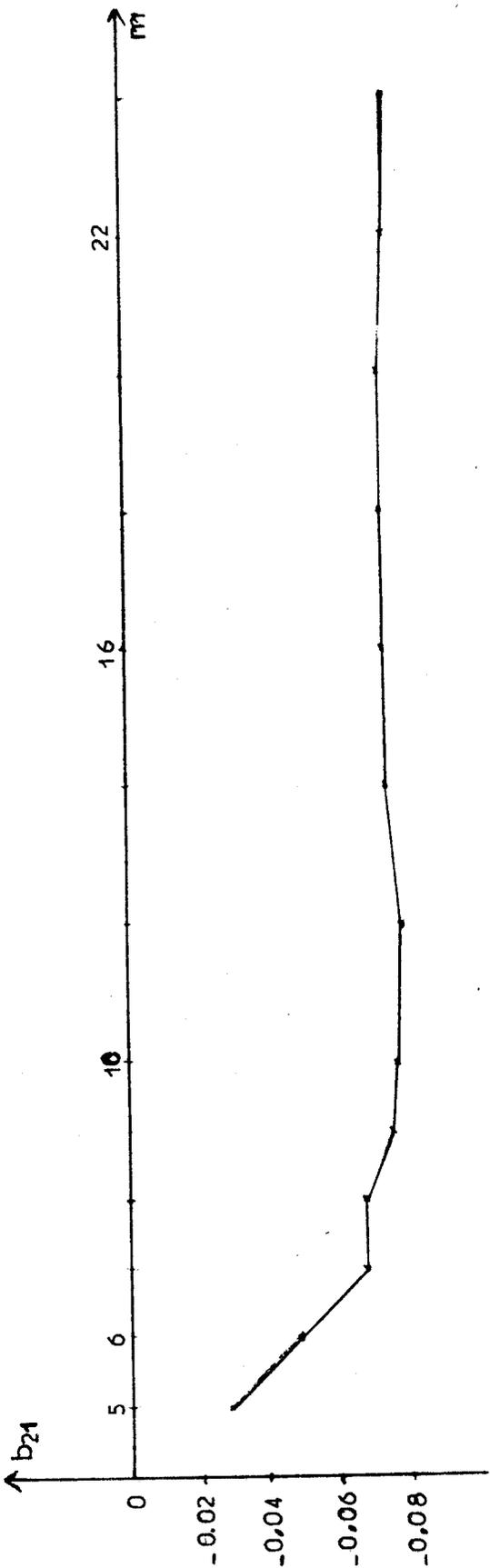
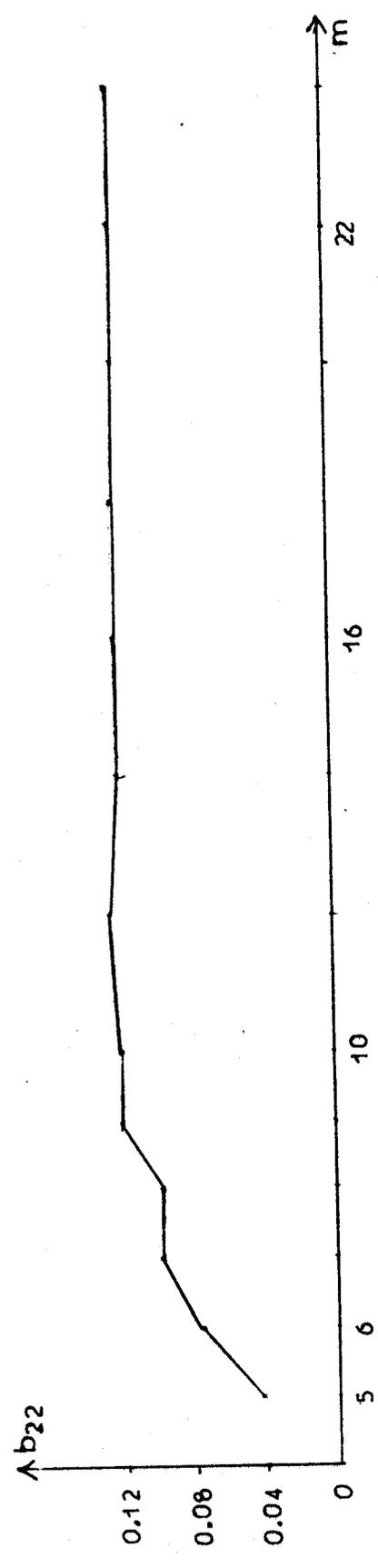


FIGURE 5-9 b

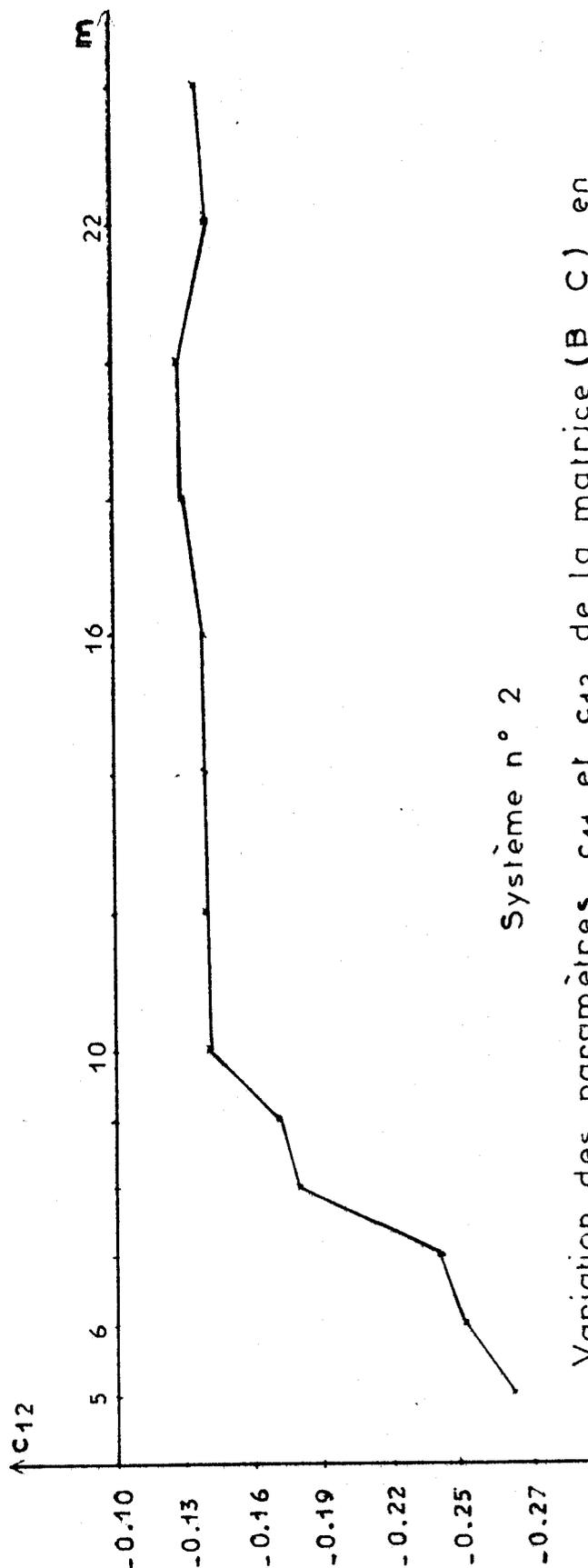
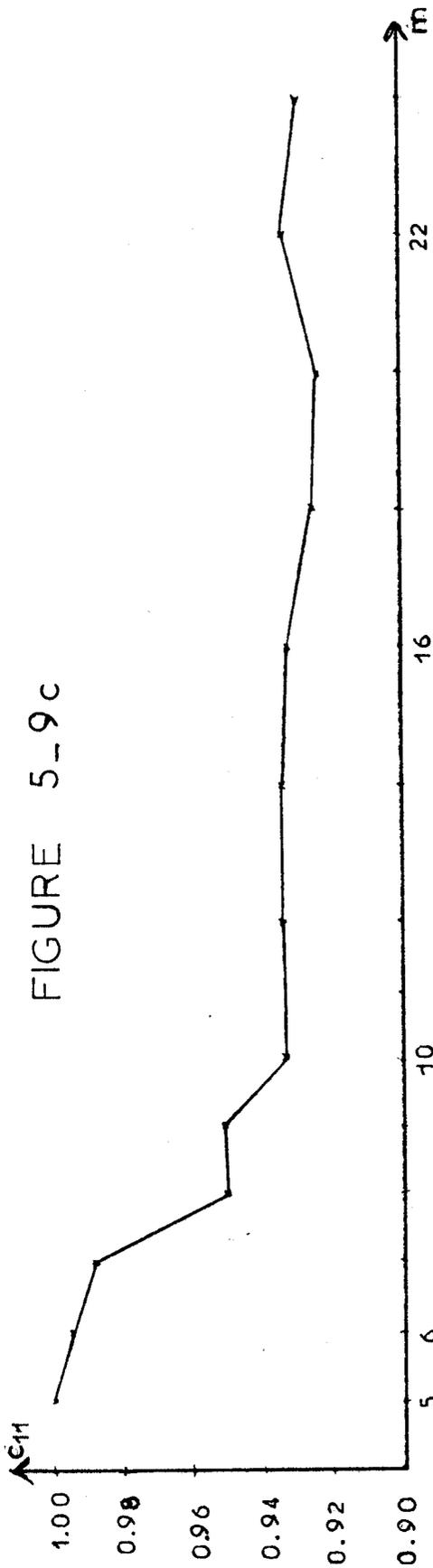


Système n° 2

Variation des paramètres b_{21} et b_{22} de la matrice (BC) en fonction du nombre de mesures



FIGURE 5-9c

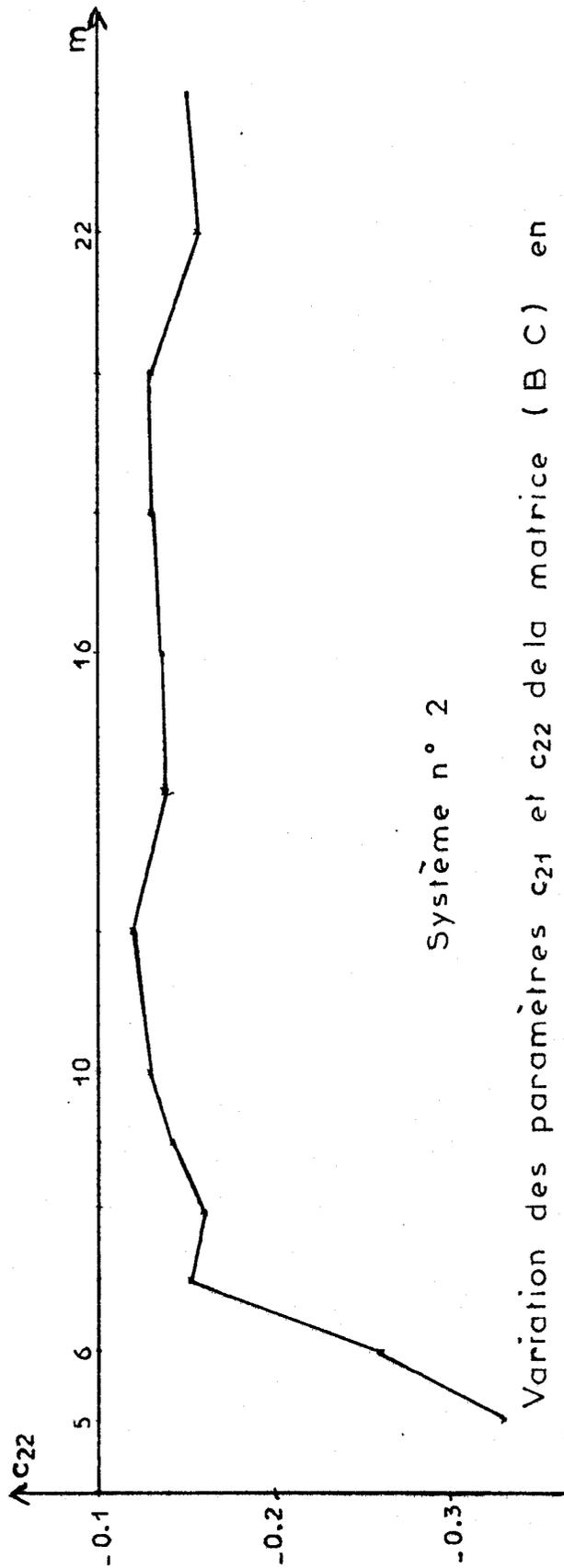
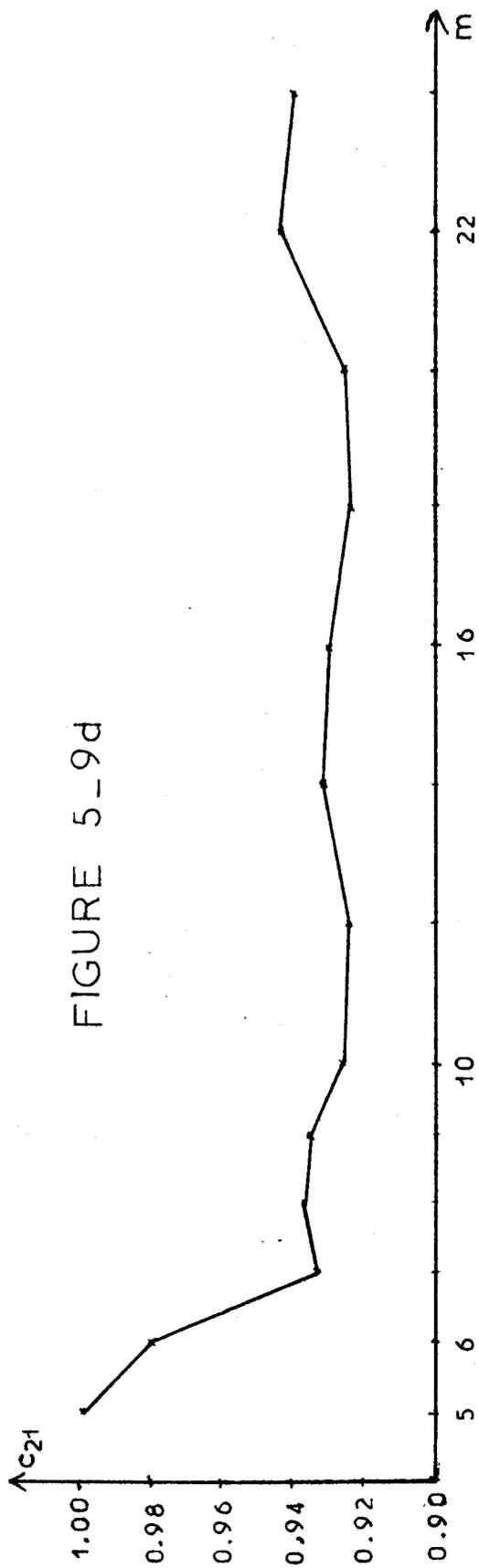


Système n° 2

Variation des paramètres c_{11} et c_{12} de la matrice (B C) en fonction du nombre de mesures



FIGURE 5-9d

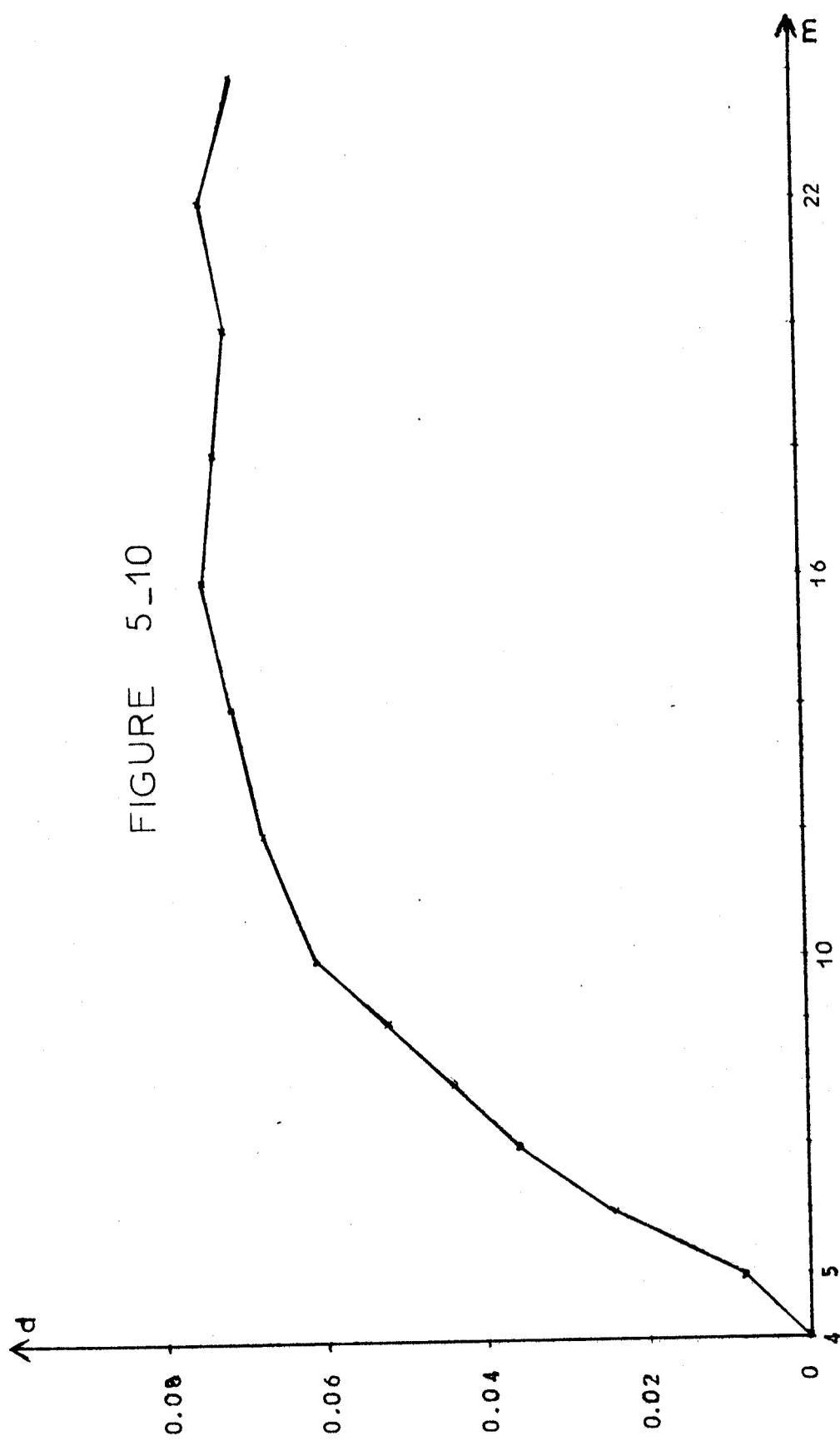


Systeme n° 2

Variation des paramètres c_{21} et c_{22} de la matrice (B C) en fonction du nombre de mesures



FIGURE 5_10

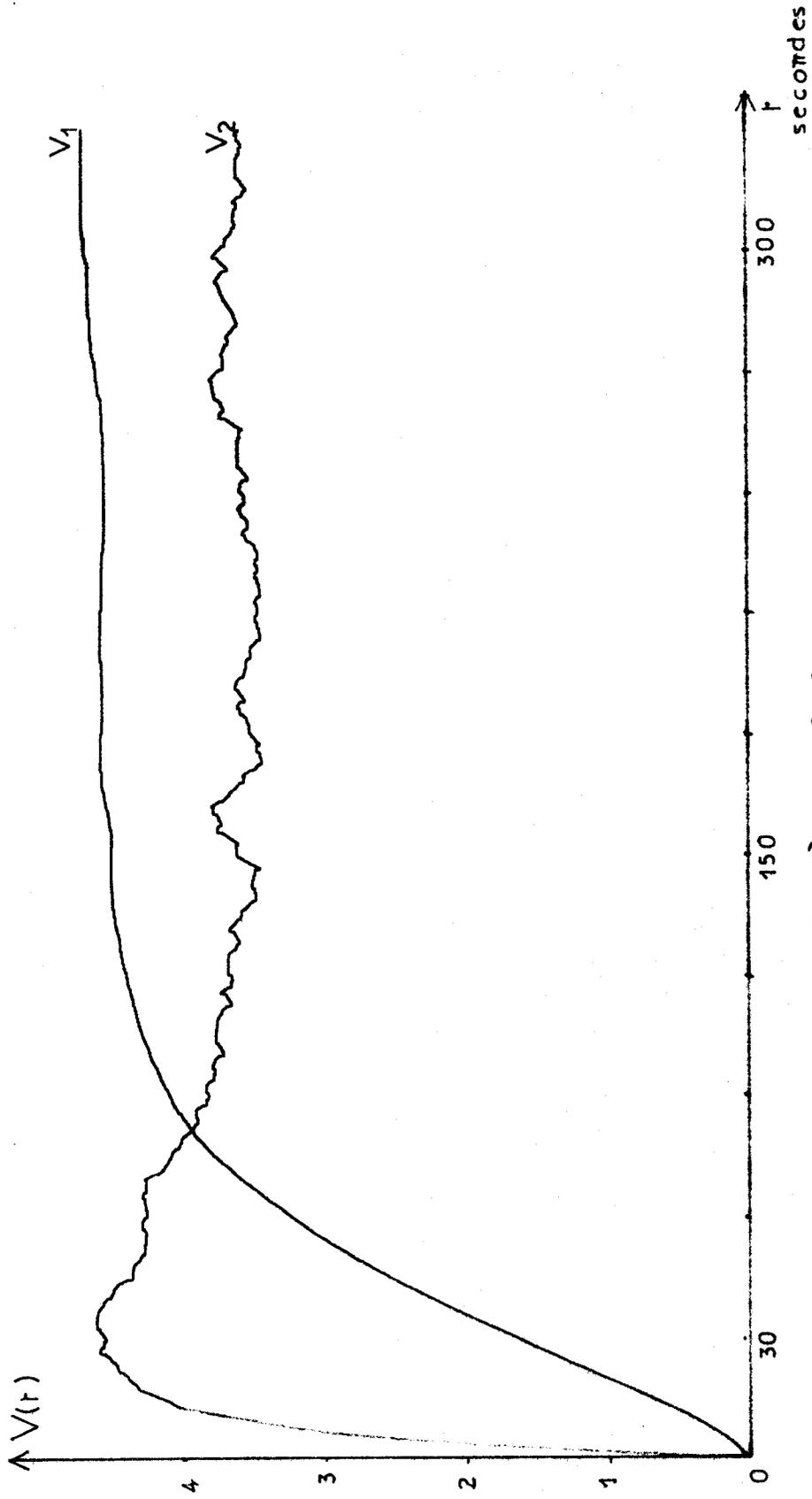


Système n° 2

Variation de la distance d'identification en fonction du nombre de mesures



FIGURE 5_11

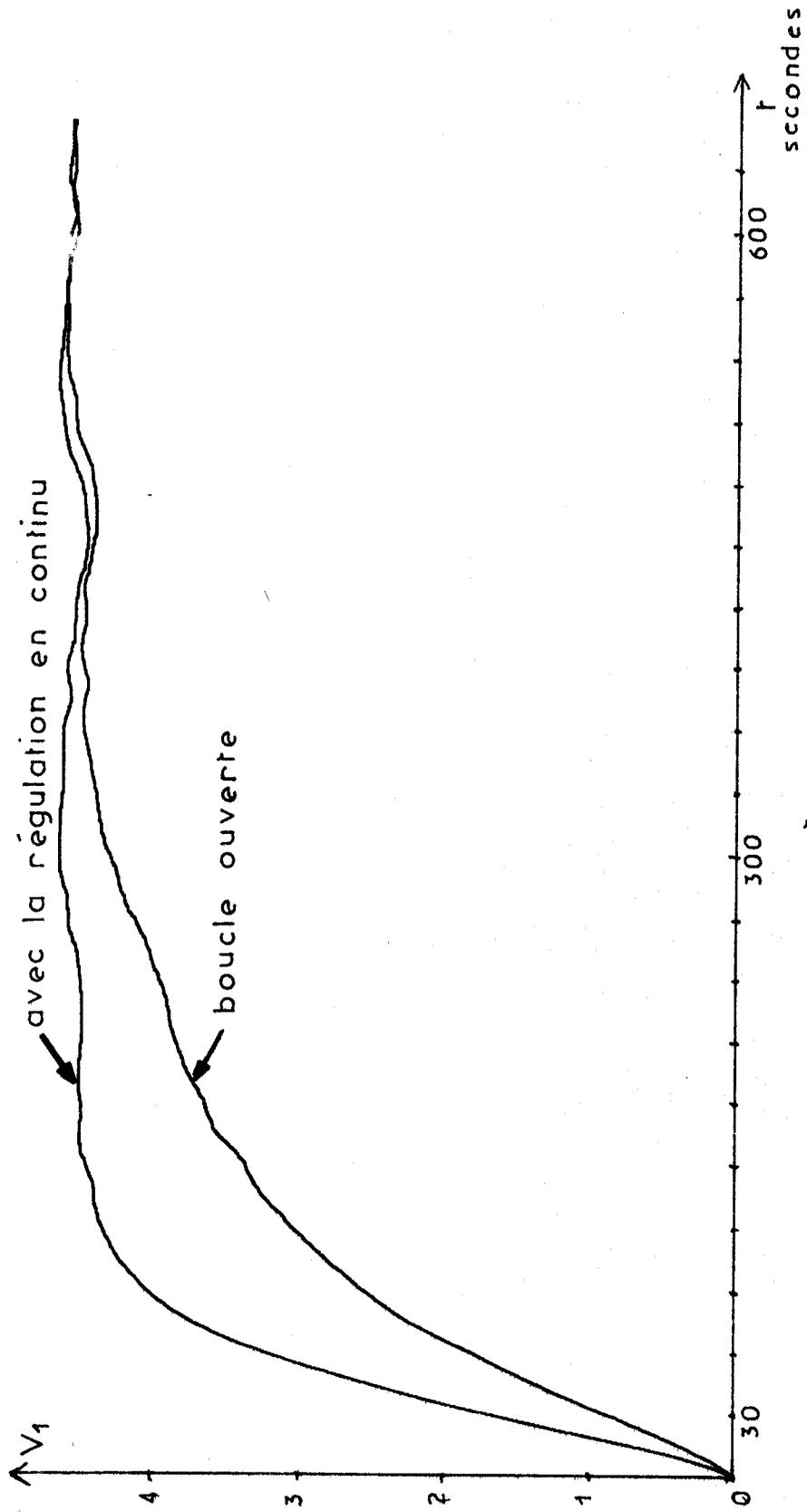


Système n° 2

Réponse du système bouclé - La contre réaction est continue



FIGURE 5_12a

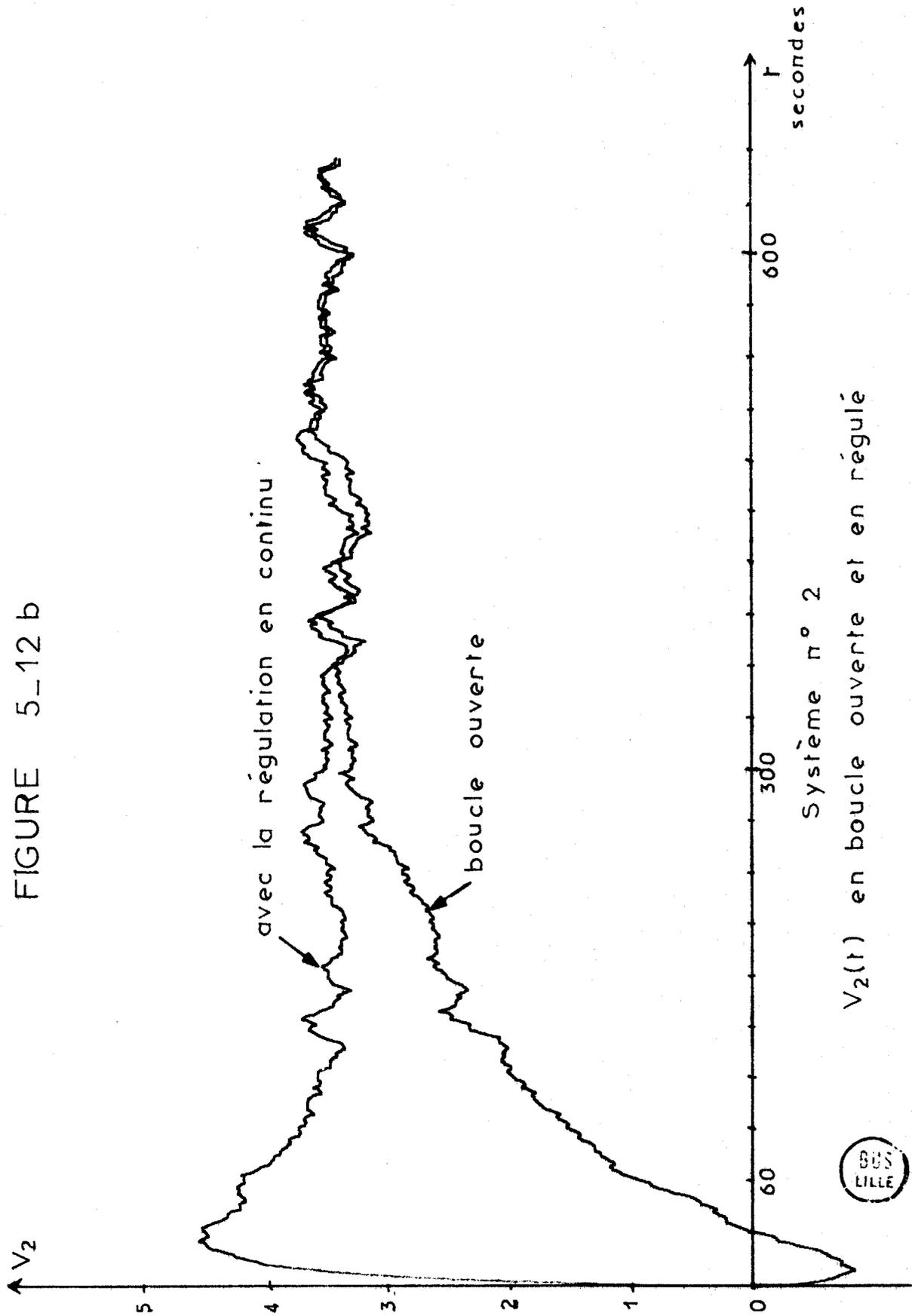


Système n° 2

$V_1(t)$ en boucle ouverte et en réglé



FIGURE 5_12 b



2.4. - Conclusion

=====

La méthode d'identification et de commande semble pouvoir s'adapter aux processus non linéaire, mais les résultats obtenus sont moins concluants que dans le cas linéaire. Ceci peut être dû à une différence assez grande entre la commande utilisée pour identifier et celle résultant de la régulation.

III - Exemple n° 3

Le dernier exemple présenté comme application de la méthode d'identification est le brûleur d'un séchoir de luzerne. Nous avons considéré le système comme un monovariante, l'entrée étant le débit de fuel et la sortie est la température des gaz. Nous n'avons donc pas tenu compte du débit d'air primaire permettant la combustion du fuel, ni du flux d'air servant au transport de la luzerne. Les grandeurs d'entrée et de sortie sont des mesures échantillonnées avec une période de 30 secondes.

3.1. - Identification

=====

Nous avons réalisé l'identification à partir de trois séquences de mesures

- i - Un échelon négatif de 200 litres de fuel
- ii - Un échelon positif de 55 litres
- iii - La juxtaposition des deux essais précédents

Le modèle choisi est une équation aux différences d'ordre deux

$$V_{k+2} = a_1 V_{k+1} + a_2 V_k + b_1 U_{k+1} + b_2 U_k$$

3.1.1. - Essai n° 1

Un échelon négatif de 200 l conduit à une baisse de température de 80 degrés environ. Le gain statique est, dans le cas présent égal à 0,4 degrés par litre.

L'identification a donné le modèle suivant

$$\theta_{k+2} = 1,336 \theta_{k+1} - 0,371 \theta_k + 0,008 Q_{k+1} + 0,009 Q_k$$

où θ est la variation de température par rapport au temps $t=0$, Q étant la variation du débit de fuel.

Les courbes de la figure 5.13 représentent les variations du débit de fuel, de la température réelle et de l'erreur faite par le modèle. Malgré les perturbations, le modèle suit parfaitement le système réel. En effet l'erreur maximale est de 2°C., l'écart quadratique moyen étant égal à 0,8°C.

3.1.2. - Essai n° 2

La variation du débit de fuel est, dans ce cas, un échelon positif de 55 l environ. Elle entraîne une augmentation de température de 6°C, ce qui correspond à un gain statique de 0,11 °C/litre.

La comparaison de ce résultat avec celui obtenu lors du premier essai indique clairement que le système est non linéaire.

A partir de cette série de mesures, nous avons obtenu le modèle suivant

$$\theta_{k+2} = 1,027 \theta_{k+1} - 0,116 \theta_k - 0,007 Q_{k+1} + 0,017 Q_k$$

La variation de l'entrée ainsi que les réponses du système et du modèle sont représentées par les courbes 5.14a,b et c. Nous remarquons que le modèle semble moins bien adapté, l'erreur entre sa réponse est celle du système étant plus importante que lors du premier essai.

3.1.3. - Essai n° 3

Cette dernière partie est obtenue par la juxtaposition des essais 1 et 2. Nous obtenons alors le modèle suivant

$$\theta_{k+2} = 1,312 \theta_{k+1} - 0,340 \theta_k + 0,007 Q_{k+1} + 0,008 Q_k$$

Cette équation est très voisine de celle issue de l'essai n° 1. La courbe 5.15c montre que l'écart système-modèle est plus important que dans le premier cas, l'erreur maximale est de 7°C et l'erreur quadratique moyenne de 2,9°C.

3.2. - Commande

=====

Le modèle apparaissant comme le plus adapté à l'élaboration de la commande est celui obtenu par l'essai n° 1. N'ayant pu l'appliquer directement sur le processus, nous l'avons étudié en tant que modèle de commande. Pour cela nous avons donné au calculateur une série de valeurs numériques issues du système réel et, pour chaque instant k, nous avons calculé la sortie du modèle, les valeurs θ_{k-1} et θ_{k-2} étant celles données par le système réel.

Les résultats obtenus sont représentés par les courbes de la figure 5.16.

Le modèle suit parfaitement le système lorsque ce dernier est en régime quasi permanent, mais lors des brusques variations de la sortie, le modèle accuse un léger retard.

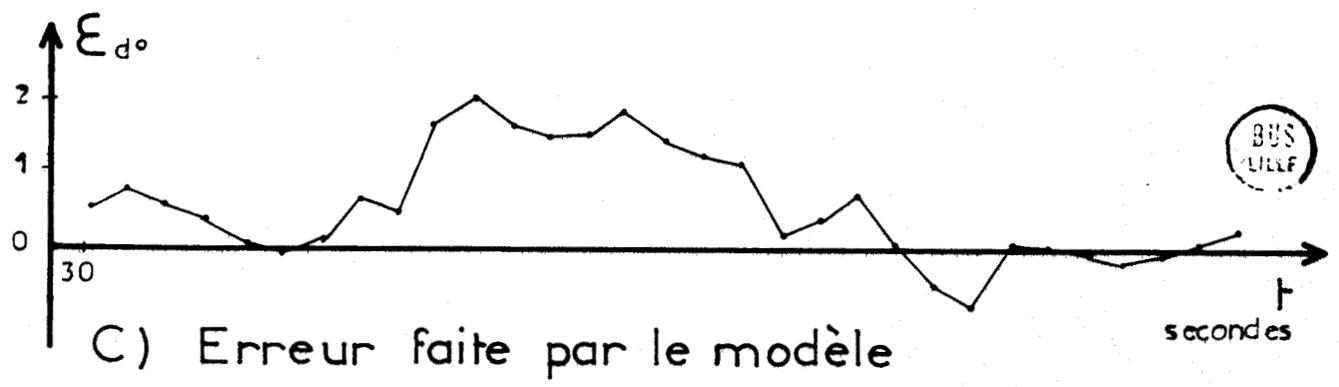
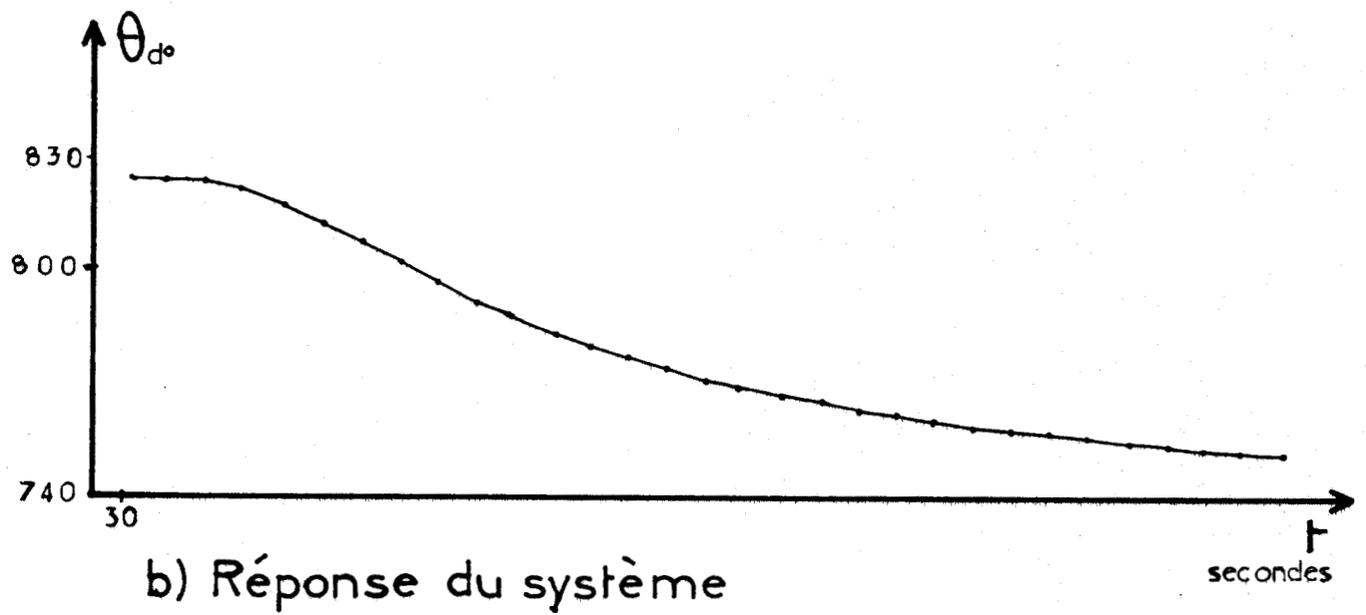
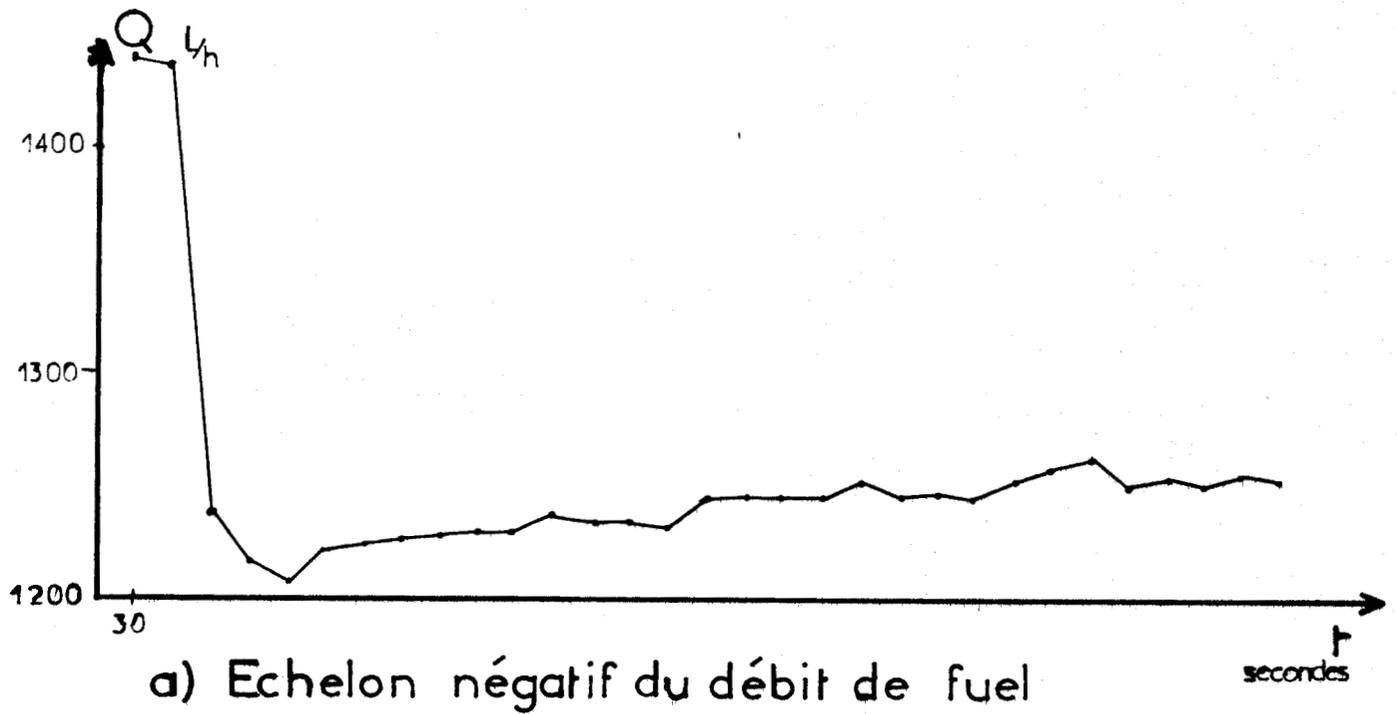
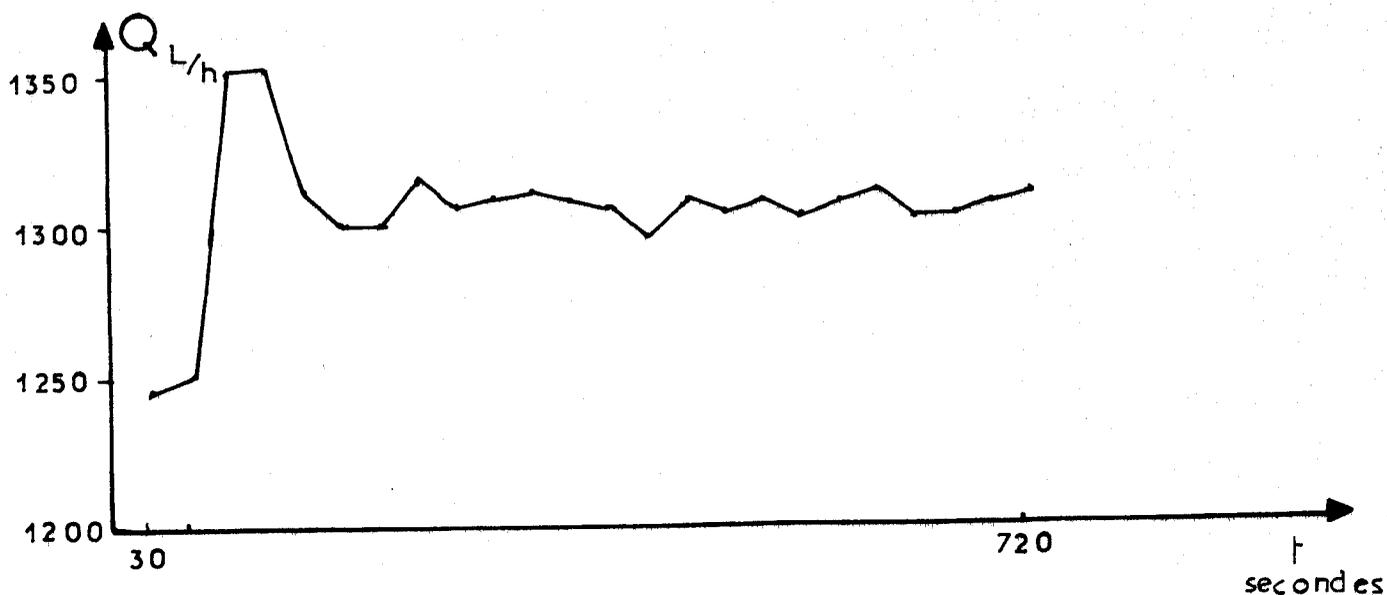
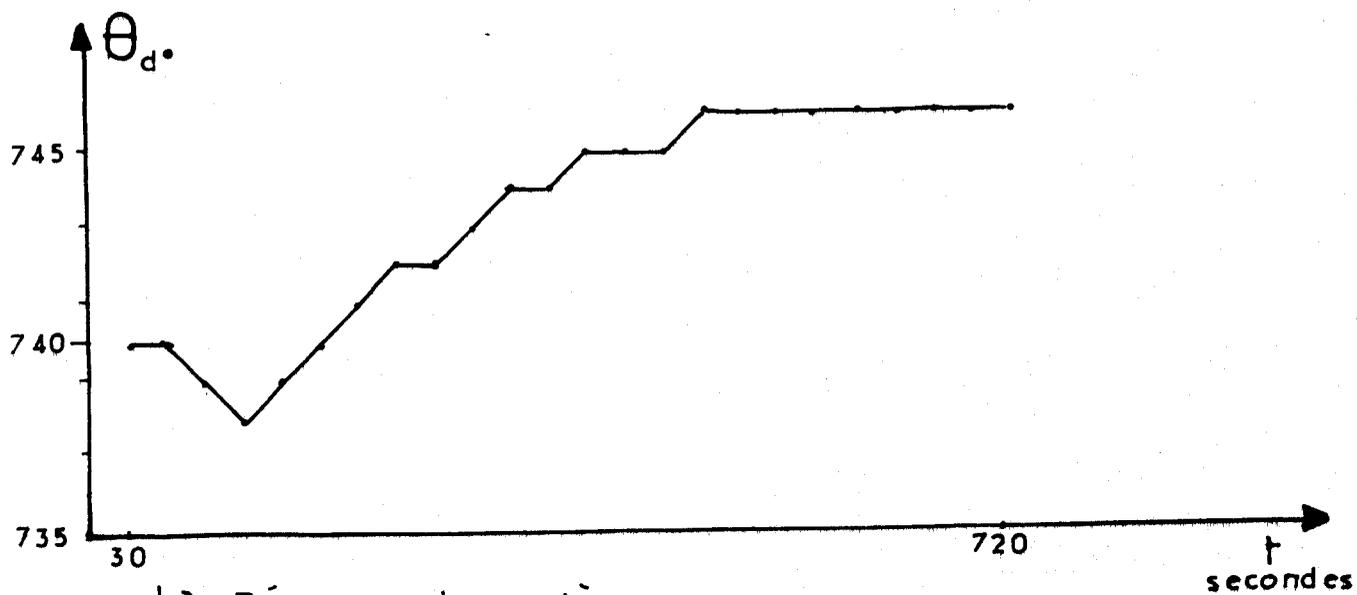


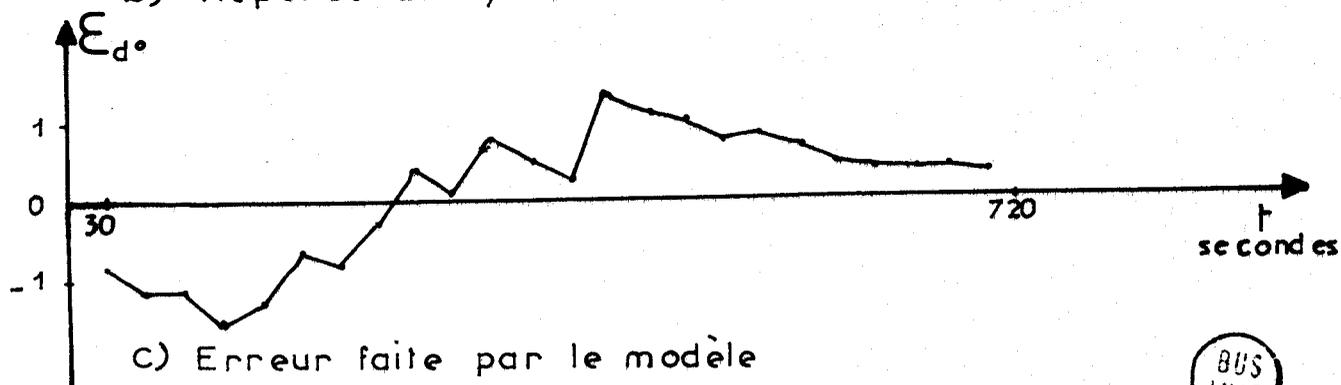
FIGURE 5-13
Système 3 - Essai n°1



a) Echelon du débit de fuel



b) Réponse du système



c) Erreur faite par le modèle



FIGURE 5_14
Système 3 - Essai n° 2

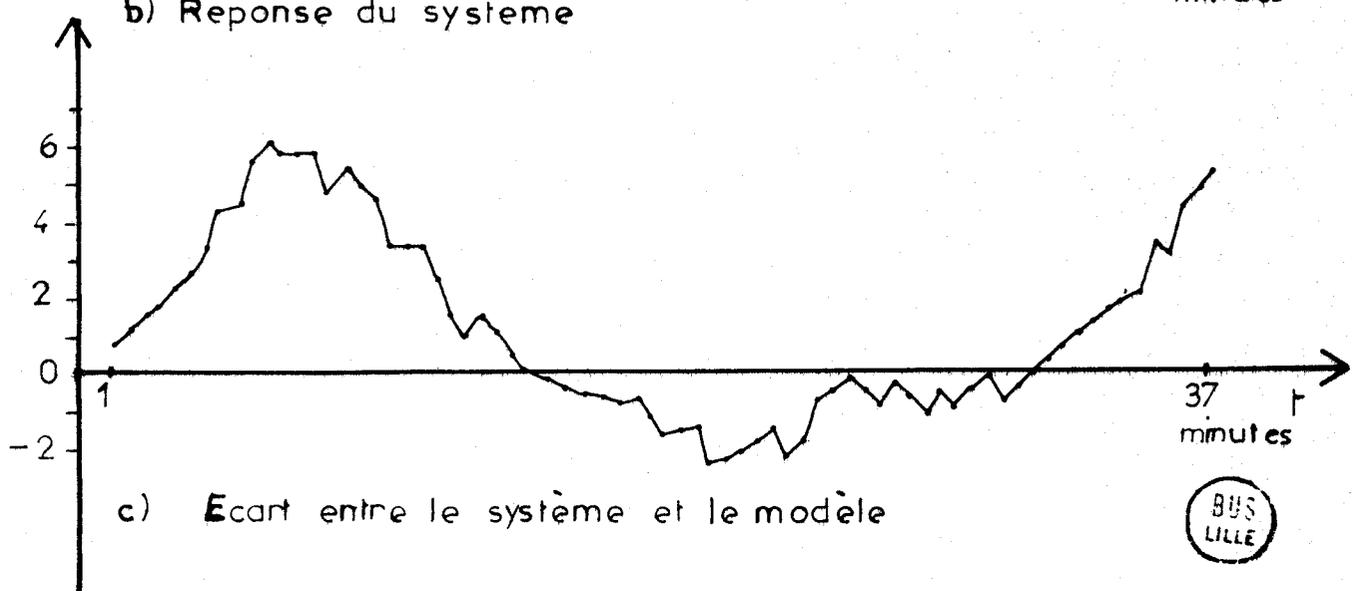
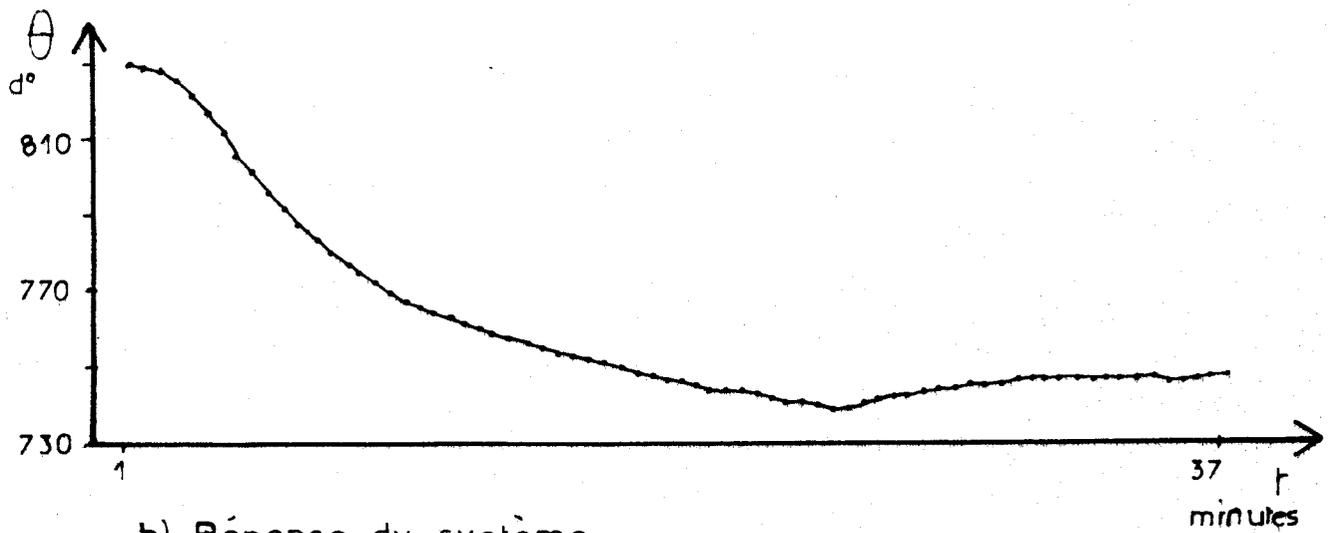
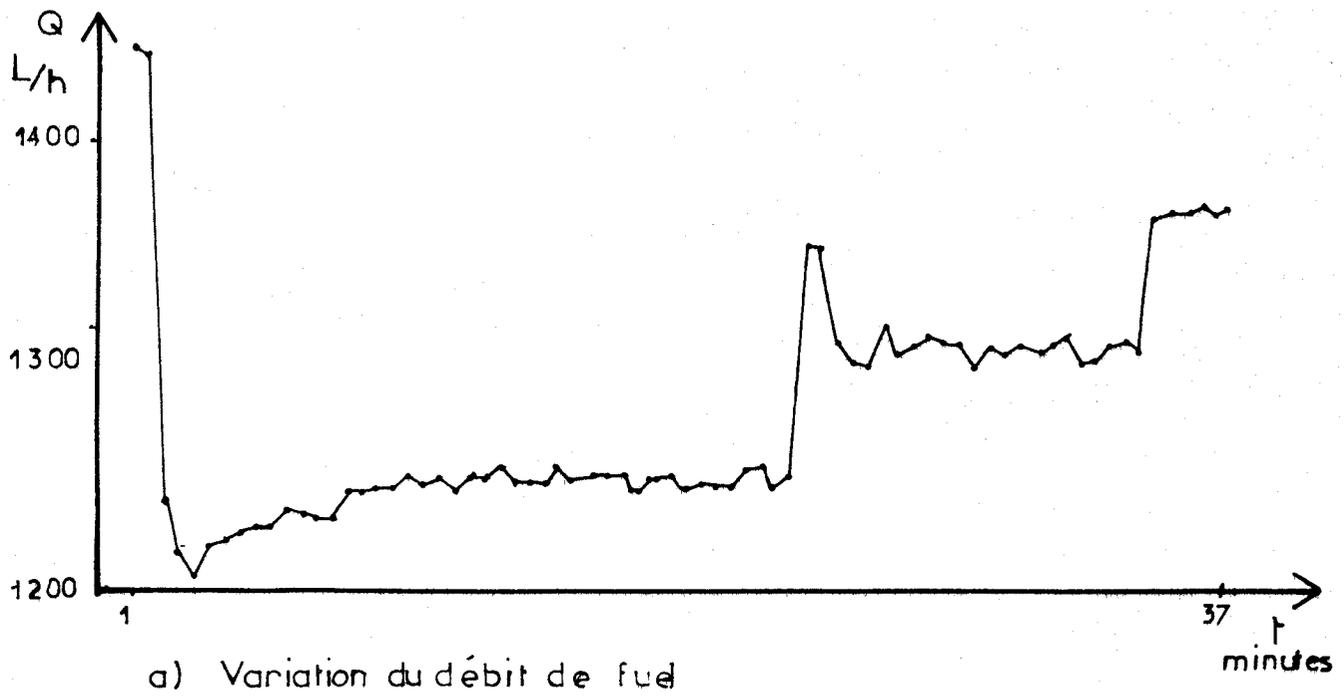
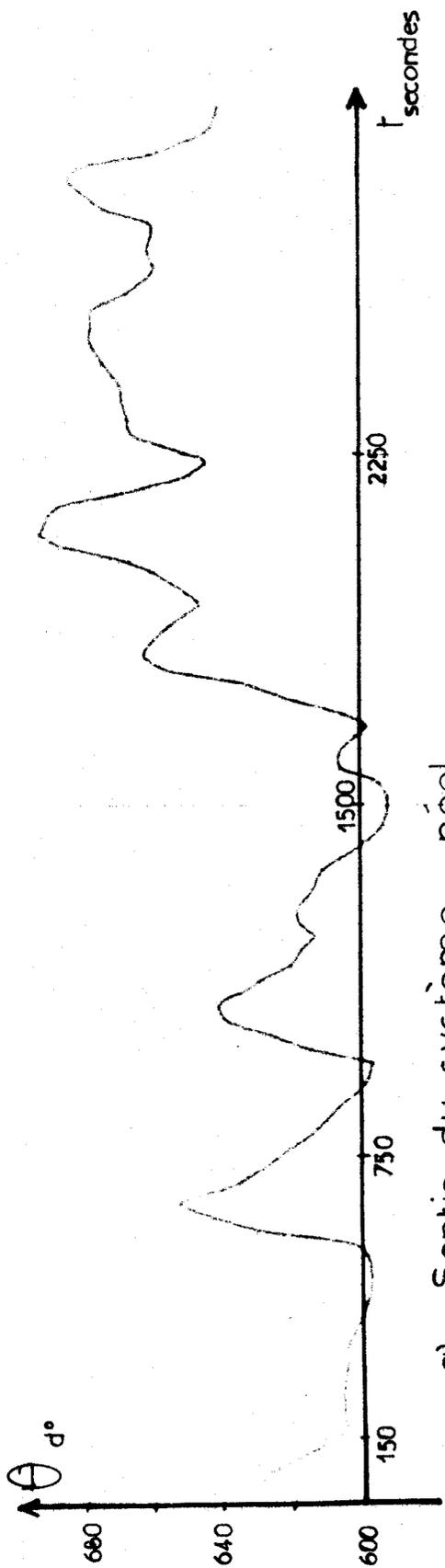


FIGURE 5_15
Système 3 _ Essai n° 3



a) Sortie du système réel

b) Ecart entre les sorties du système et du modèle

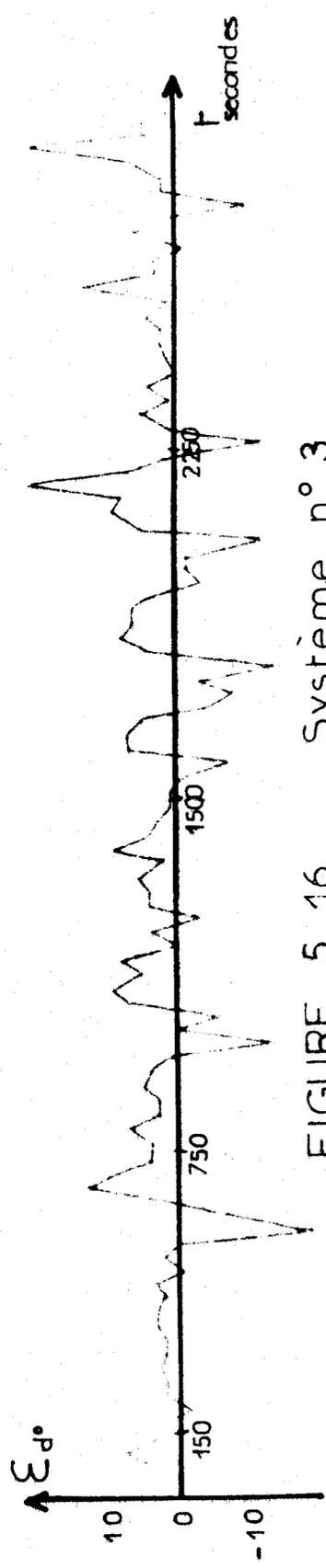


FIGURE 5-16 Système n° 3

Utilisation du modèle en commande



Conclusion

Les résultats obtenus lors des trois expériences décrites dans ce chapitre vérifient les études théoriques des chapitres III et IV. Lors de ces études nous n'avions pas fait d'hypothèses sur la linéarité du système. Les exemples 2 et 3 montrent qu'un modèle répondant à notre critère peut être obtenu à partir d'un système non linéaire.

La distance d'identification est nulle pour le nombre minimal de mesures puis augmente tout en restant inférieure à une valeur limite. En effet pour un ensemble de mesures assez grand le modèle varie peu à condition que les derniers échantillons soient pris dans le régime permanent.

La boucle de régulation issue du modèle ne donne pas toujours des résultats comparables à ceux prévus par la théorie. Ceci est dû au fait que, dans l'étude théorique, nous avons supposé que le modèle était parfait (distance d'identification nulle). Dans la réalité, le modèle est le système sont légèrement différents non seulement par la forme mais aussi au sens du critère d'identification.

CONCLUSION

=====

Il est possible de concevoir l'identification de deux façons différentes. Ce peut être la détermination des coefficients du système, dans le but de connaître exactement ses équations de fonctionnement, ou la recherche des paramètres d'un modèle dont le comportement est identique à celui du processus pour une classe de commande déterminée. Nous avons choisi la seconde possibilité car elle s'applique plus directement aux systèmes réels. En effet il semble utopique de vouloir obtenir tous les paramètres régissant le fonctionnement d'un processus réel, surtout si celui-ci est multivariable. De plus, quoique l'utilisation d'un tel modèle dans une boucle de régulation soit idéale, elle est pratiquement impossible dans la réalité (grandeurs d'état non mesurables ...).

Nous avons donc choisi d'identifier le fonctionnement d'un processus multivariable à celui d'un modèle le plus simple possible dans le seul but d'améliorer les performances du système. Afin de pouvoir utiliser facilement le modèle lors de l'élaboration du système de régulation, nous avons décidé que ce modèle ne tiendrait compte que des grandeurs de sortie directement mesurables.

Les exemples présentés dans le chapitre V permettent de juger l'efficacité de la méthode.

Pour les systèmes simulés 1 et 2 , nous nous sommes placés dans le cas très défavorable où aucune dérivée des sorties n'est accessible. Le système de régulation issu du modèle donne malgré tout des résultats non négligeables.

Pour le système réel n° 3 le modèle retenu est une équation de récurrence linéaire d'ordre deux. Quoique le système soit non linéaire, le modèle utilisé comme modèle de commande donne de bons résultats.

Nous n'avons pas cherché une méthode d'identification originale, - la détermination des paramètres du modèle s'inspire fortement des méthodes de Wegrzyn et des moindres carrés - mais le but de ce travail est de montrer qu'il est possible d'obtenir un modèle de commande donnant des résultats appréciables à partir d'une identification très simple.

B I B L I O G R A P H I E

- /1/ V. STREJC . " Approximation des réponses transitoires apériodiques ".
Revue du courant faible n° 18, 1957
- J.F. QUENTIN . " Quelques perfectionnements apportés à la méthode d'identification de V. STREJC ". - Automatismes XII, Mai 1967
- /2/ F. LANNOY. " Nouvelle méthode d'identification à partir de la réponse temporelle." - Automatismes XV, Octobre 1970.
- /3/ KARDACHOV A.A., KARNVOUCHINE L.V. " Détermination des paramètres de systèmes selon les caractéristiques fréquentielles expérimentales." *Avtomatika i telemekhanika*.XIX 1958 n°4, p 334-345
- DUDNIKOV E.G. " Détermination des coefficients de la fonction de transfert à l'aide des caractéristiques amplitude phase." - *Avtomatika*, XX 1959 n° 5
- /4/ SOLODOVNIKOV V.V. " Dynamique statistique des systèmes linéaires de commande optimale." Dunod - PARIS 1965
- /5/ A. MENENDEZ MARTINEZ. " Identification de la réponse impulsionnelle d'un système par intercorrélation au moyen de séquences linéaires pseudo-aléatoires." - Thèse de Docteur Ingénieur, Grenoble, Juin 1970
- /6/ J. RICHALET, A. RAULT, R. POULINQUEN. " Identification des processus par la méthode du modèle ". Gordon & Breach, PARIS
- /7/ G.R. GAVALAS. " Linear system Identification by least square estimation." A.A.C.C. - Automatic control, Juin 1973
- T. SÖDERSTRÖM. " Convergence properties of the generalised least squares identification method ". 3 rd IFAC Symposium., La Haye, Juin 1973

- /8/ K.J. ÅSTRÖM, T. BOHLIN. " Numerical identification of linear dynamics systems from normal operating record." IFAC Symposium, theory of self - adaptative control systems, Teddington, 1966
- B.P. FURHT. " Maximum likelihood, identification of Åström model by quasi-linearization." 3 rd IFAC. Symposium. La Haye, Juin 1973
- /9/ B. FINGAM, I.H. ROWE. " On the identification of linear discrete time system models using the instrumental variables method ". 3 rd IFAC Symposium, La Haye, Juin 1973
- T. SÖDERSTRÖM. " Convergence of identification method based on the instrument variable approach." Automatica - Décembre 1974
- /10/ J.C. CHOW. " On the structural identification and parameter estimation in linear multivariable systems." - A.A.C.C. Automatic control, Juin 1973
- /11/ S. WEGRZYN " Automatisation des systèmes complexes." - Ecole polytechnique de Silésie, 1969.
- /12/ P. VIDAL. " Automatique complexe." - Notes internes, LILLE 1970
- /13/ S. WEGRZYN, P. VIDAL, O. PALUSINSKI, J.C. GILLES, " Introduction à l'étude de la stabilité dans les espaces métriques." - Techniques de l'automatique, DUNOD, PARIS 1971
- /14/ M. MARCHAND. " The identification of linear multivariable systems from frequency response data." 3 rd IFAC Symposium - La Haye - Juin 1973

A N N E X E A 1

=====

Indépendance temporelle des signaux de commande

La matrice $X_m^T X_m$ est égale à

$\sum_{k=1}^m (U_k^1)^2$	$\sum_{k=1}^m U_k^1 U_k^2$	$\sum_{k=1}^m U_k^1 U_k^e$	$\sum_{k=1}^m U_k^1 V_k^1$	$\sum_{k=1}^m U_k^1 V_k^s$
$\sum_{k=1}^m U_k^2 U_k^1$	$\sum_{k=1}^m (U_k^2)^2$	$\sum_{k=1}^m U_k^2 U_k^e$	$\sum_{k=1}^m U_k^2 V_k^1$	$\sum_{k=1}^m U_k^2 V_k^s$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\sum_{k=1}^m U_k^e U_k^1$	$\sum_{k=1}^m U_k^e U_k^2$	$\sum_{k=1}^m (U_k^e)^2$	$\sum_{k=1}^m U_k^e V_k^1$	$\sum_{k=1}^m U_k^e V_k^s$
$\sum_{k=1}^m V_k^1 U_k^1$	$\sum_{k=1}^m V_k^1 U_k^2$	$\sum_{k=1}^m V_k^1 U_k^e$	$\sum_{k=1}^m (V_k^1)^2$	$\sum_{k=1}^m V_k^1 V_k^s$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\sum_{k=1}^m V_k^s U_k^1$	$\sum_{k=1}^m V_k^s U_k^2$	$\sum_{k=1}^m V_k^s U_k^e$	$\sum_{k=1}^m V_k^s V_k^1$	$\sum_{k=1}^m (V_k^s)^2$

Une condition de non inversibilité de cette matrice est qu'il existe un vecteur α^i tel que

$$\alpha^i = (\alpha_1^i \alpha_2^i \dots \alpha_{i-1}^i \alpha_{i+1}^i \dots \alpha_e^i)^T \tag{A1.2}$$



et

$$\forall k = 0, 1, \dots, (m-1) \quad U_k^i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^e U_k^j \tag{A1.3}$$

Nous dirons dans ce cas que les signaux de commande ne sont pas indépendants dans le temps.

Il est évident qu'un vecteur de commande constant ne vérifiera pas la propriété d'indépendance temporelle. Nous allons étudier le cas où un signal binaire pseudo aléatoire se superpose à une entrée en échelon.

Nous pouvons écrire que la valeur de l'entrée U^i à l'instant k est égale à

$$U_k^i = U^i + \delta_{kl} a^i \quad (A1.4)$$

a^i est une constante non nulle

δ_{kl} vaut +1 ou -1 de façon aléatoire

Notons U_k^{i*} le vecteur $(u_k^1 \dots u_k^{i-1} u_k^{i+1} \dots u_k^e)^T$

Existe-t-il un vecteur α^i défini en (A1.2) tel que pour tout k

$$U_k^i = (\alpha^i)^T U_k^{i*} \quad (A1.5)$$

Soit α_0^i vérifiant la relation (A1.5) pour $k=0$

$$U_0^i = U^i + \delta_{0l} a^i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^e \alpha_j^i (U^j + \delta_{0l} a^j) \quad (A1.6)$$

Il est probable qu'il existe un instant k où le vecteur U_k^{i*} est égal à U_0^{i*} et U_k^i est différent de U_0^i . On a alors

$$U_k^i = U_0^i - 2 \delta_{0l} a^i \quad (A1.7)$$

Nous obtenons alors les relations

$$U_0^i = U^i + \delta_{0l} a^i = (\alpha^i)^T U_0^{i*}$$

$$U_k^i = U^i - 2 \delta_{0l} a^i = (\alpha^i)^T U_k^{i*}$$

$$U_0^{i*} = U_k^{i*}$$

Ceci ne sera vérifié que si $a^i = 0$ (A1.8)

Nous pouvons déduire de ce résultat qu'un vecteur α_0^i ne peut vérifier (A1.5) pour tout k que si l'entrée U_k^i est constante, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ (A1.4).

Nous pouvons faire ce raisonnement pour tout les indices i variant de 1 à e .
En conclusion, si le vecteur de commande est obtenu par la superposition d'un échelon et d'une séquence binaire pseudo aléatoire, nous pouvons affirmer que ces signaux de commande vérifient la propriété d'indépendance temporelle, donc que la matrice $X_m^T X_m$ est inversible.

Démonstration des relations (2.38)

Soit le système continu représenté par l'équation

$$\dot{X} = N X + K E \quad (A2.1)$$

Un échantillonnage de l'entrée avec une période T donnera l'équation de fonctionnement discrète

$$X_{k+1} = A X_k + B E_k \quad (A2.2)$$

où

$$A = e^{N T} \quad (A2.3)$$

$$B = e^{(k+1)NT} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-Nt} K dt$$

si les conditions initiales sont nulles.

Ecrivons le développement illimité de e^{NT}

$$A = Id + NT + \frac{N^2 T^2}{2} + \frac{N^3 T^3}{6} + \dots$$

Nous pouvons écrire

$$\frac{A - Id}{T} = N + \frac{N^2}{2} T + \frac{N^3}{6} T^2 + \dots$$

d'où l'on tire

$$N = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{A - Id}{T} \quad (A2.4)$$

Calculons maintenant la valeur de B

$$B = e^{(k+1)NT} \left(\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-Nt} dt \right) K$$

Le calcul de l'intégrale donne:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-Nt} dt = - \left(e^{-(k+1)NT} - e^{-kNT} \right) N^{-1}$$

d'où
$$B = - (Id - e^{NT}) N^{-1} K \quad (A2.5)$$

soit encore, en développant e^{NT} en série

$$B = (NT + \frac{N^2 T^2}{2} + \frac{N^3 T^3}{6} + \dots) N^{-1} K \quad (A2.6)$$

on en tire

$$B = KT + \frac{N}{2} KT^2 + \frac{N^2}{6} KT^3 + \dots \quad (A2.7)$$

en divisant par T

$$\frac{B}{T} = K + \frac{N}{2} KT + \frac{N^2}{6} KT^2 + \dots$$

d'où le résultat

$$K = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{B}{T} \quad (A2.8)$$

A N N E X E A 3

=====

Tableaux récapitulatifs des résultats obtenus lors de

l'identification du système n° 1

Dans les tableaux 5.4a,b et c, nous avons utilisé les notations suivantes

T_i est la période d'échantillonnage

m est le nombre de mesures pris pour calculer le modèle

la matrice d'identification est la matrice $A = (B \ C)$

définissant le modèle:

$$V_{k+1} = B U_k + C V_k$$

d est la distance d'identification définie par la relation

$$d = \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left(V_k - A \begin{vmatrix} U_{k-1} \\ V_{k-1} \end{vmatrix} \right)^2 \right)^{1/2}$$

V_{perm} est le vecteur sortie atteint en régime permanent par le modèle. Le régime permanent du système a pour valeur

$$V_{perm} = \begin{vmatrix} 3,00 \\ 5,00 \end{vmatrix}$$

dans la colonne m la présence d'un astérisque signifie que l'ensemble des mesures utilisé pour identifier ne recouvre qu'une partie du régime transitoire, la valeur du régime permanent n'apparaissant pas dans cet ensemble.

T_i	m	matrice d'identification				d	V_{perm}
2.5	30	0.811	-2.58	1.19	-0.379	0.116	3.05
		0.427	-1.00	0.605	0.356		5.05
	27	0.810	-2.58	1.20	-0.385	0.118	3.06
		0.426	-1.00	0.618	0.347		5.05
	24	0.810	-2.58	1.20	-0.383	0.119	3.07
		0.426	-0.999	0.622	0.344		5.06
	20	0.810	-2.58	1.21	-0.390	0.114	3.04
		0.426	-1.00	0.621	0.344		5.03
	18	0.809	-2.58	1.22	-0.395	0.112	3.04
		0.425	-0.997	0.637	0.333		5.02
	15	0.811	-2.58	1.22	-0.393	0.108	3.09
		0.425	-0.997	0.654	0.321		5.06
	12 *	0.812	-2.59	1.22	-0.399	0.110	3.04
		0.424	-0.994	0.645	0.328		5.01
	10 *	0.820	-2.61	1.27	-0.433	0.103	2.75
		0.420	-0.981	0.618	0.349		4.76
	8 *	0.845	-2.70	1.36	-0.507	0.086	1.94
		0.412	-0.952	0.586	0.375		4.05
6 *	0.884	-2.83	1.45	-0.592	0.090	-4.52	
	0.333	-0.679	0.396	0.547		-1.07	
4 *	-0.377	1.47	-0.786	1.650	0.000	16.8	
	0.332	-0.676	0.437	0.524		18.1	



Tableau 5.4a

T_i	m	matrice d'identification				d	V_{perm}
5	15	1.36	-4.08	1.03	-0.560	0.074	3.09
		0.919	-2.23	0.913	-0.123		5.10
	12	1.36	-4.08	1.02	-0.551	0.047	3.13
		0.917	-2.22	0.932	-0.136		5.12
	10	1.36	-4.08	1.03	-0.557	0.032	3.12
		0.916	-2.22	0.939	-0.140		5.11
	8	1.37	-4.10	0.989	-0.530	0.011	3.19
0.910		-2.20	0.980	-0.168	5.15		
6 *	1.37	-4.11	0.932	-0.489	0.008	3.24	
	0.911	-2.20	0.959	-0.153		5.21	
4 *	1.39	-4.15	0.991	-0.536	0.000	3.15	
	0.909	-2.19	0.941	-0.139		5.14	
7.5	10	1.15	-2.92	0.904	-0.609	0.067	3.09
		1.27	-3.00	0.974	-0.403		5.09
	8	1.18	-3.00	0.869	-0.591	0.047	3.12
		1.27	-3.00	0.980	-0.406		5.11
	6	1.20	-3.06	0.846	-0.579	0.025	3.13
		1.28	-3.05	0.958	-0.396		5.12
	4 *	1.33	-3.53	0.612	-0.450	0.000	3.27
1.28		-3.04	0.962	-0.398	5.22		

Tableau 5.4b

T_i	m	matrice d'identification				d	V_{perm}
10	6	0.617	-0.773	0.750	-0.520	0.067	3.06
		1.40	-3.09	0.797	-0.486		5.05
	4	0.612	-0.740	0.752	-0.519	0.000	3.10
		1.32	-2.77	0.862	-0.507		5.10
12.5	6	-0.35	2.77	0.563	-0.270	0.062	3.06
		0.587	0.076	0.720	-0.376		5.12
	4	-1.08	5.26	0.791	-0.254	0.000	2.85
		0.273	1.12	0.813	-0.369		4.93

Tableau 5.4c



TABLE DES MATIERES

=====

Introduction générale.

CHAPITRE I.

- Introduction	1.1.
I. <u>Quelques méthodes classiques d'identification</u>	1.2.
1.1. Identification hors ligne	1.2.
1.2. Identification en ligne	1.5.
II. <u>Problèmes posés</u>	1.7.
2.1. Identification	1.7.
2.2. Boucle de régulation	1.8.
2.3. Solutions proposées	1.10
- Conclusion	

CHAPITRE II. Systèmes multivariables.

- Introduction	2.1.
I. <u>Méthode de J.C. CHOW</u>	2.2.
1.1. Présentation	2.2.
1.2. Calcul de la boucle de régulation	2.8.
II. <u>Méthode de S. WEGRZYN</u>	2.10.
2.1. Présentation de la méthode	2.10.
2.2. Système de la commande	2.12.
- Conclusion	2.14.

CHAPITRE III. Détermination d'un modèle de commande.

- Introduction	3.1.
I. <u>Présentation</u>	3.1.
1.1. Choix d'un modèle	3.1.
1.2. Calcul du modèle	3.3.

II.	<u>Influence du choix des mesures</u>	3.8.
	2.1. Identification	3.8.
	2.2. Régulation	3.11.
	- Conclusion	3.13.

CHAPITRE IV. Commande Optimale.

	- Introduction	4.1.
I.	<u>Critère de commande optimale et conditions de stabilité</u>	4.2.
	1.1. Commande optimale	4.2.
	1.2. Conditions de stabilité du système bouclé	4.4.
II.	<u>Application du modèle à la commande</u>	4.6.
	2.1. Commande avec une période d'échantillonnage égale à T_i	4.6.
	2.2. La période de commande est égale à T_i/λ	4.8.
	2.3. Boucle de régulation en continu	4.12.
	- Conclusion	4.14.

CHAPITRE V. Exemples d'application.

	- Introduction	5.1.
I.	<u>Système n° 1.</u>	5.2.
	1.1. Présentation	5.2.
	1.2. Etude des résultats obtenus	5.3.
	1.3. Résultats en Boucle fermée	5.5.
	1.4. Conclusion	5.6.
II.	<u>Système n° 2.</u>	5.7.
	2.1. Description	5.7.
	2.2. Identification	5.8.
	2.3. Régulation	5.8.
	2.4. Conclusion	5.9.

III. <u>Exemple n° 3.</u>	5.9.
3.1. Identification	5.9.
3.2. Commande	5.11.
- Conclusion	5.12.

CONCLUSION GENERALE.

BIBLIOGRAPHIE.

ANNEXE A.1.

Indépendance temporelle des signaux de commande

ANNEXE A.2.

Démonstration des relations (2.38.).

ANNEXE A.3.

Tableaux récapitulatifs des résultats obtenus lors de l'identification du système n°1.