

50376
1975
164

N° d'ordre : 336

50376
1975
164

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ès SCIENCES PHYSIQUES

par

Michel CAUTERMAN

ETUDE THEORIQUE DE L'INFLUENCE D'UNE ANOMALIE
DE RESISTIVITE DE FORME QUELCONQUE SUR LE CHAMP
ELECTROMAGNETIQUE CREE PAR UN DIPOLE
EN MILIEU ABSORBANT
APPLICATION A L'EVALUATION IN SITU DE L'ETENDUE
DE GISEMENTS DE GAZ ET D'HYDROCARBURES.



Soutenu le 31 Octobre 1975, devant la COMMISSION D'EXAMEN

Membres du Jury :	MM.	R. GABILLARD	Président
		C. BRESINSKI	Examineur
		G. SALMER	Examineur
		P. GRIVET	Invité
		J. FONTAINE	Invité
		E. de GELIS	Invité
		J. DELACOUR	Invité

à Martine,

à Thibaut,

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Radiopropagation et Electronique de l'Université des Sciences & Techniques de Lille, sous la direction de Monsieur le Professeur GABILLARD.

Qu'il me soit permis d'exprimer à Monsieur le Professeur GABILLARD mes sentiments de profonde gratitude pour ses nombreux conseils et les facilités qu'il m'a accordées pour mener à bien ce travail.

Je remercie Monsieur le Professeur P. GRIVET, Membre de l'Institut, de m'avoir fait l'honneur de participer à mon Jury. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma déférente gratitude.

Messieurs les Professeurs BRESINSKI, FONTAINE et SALMER ont bien voulu examiner ce travail. Je leur en suis vivement reconnaissant et les en remercie.

Mes remerciements vont également à Monsieur DELACOUR, Directeur de la Division Forage à l'Institut Français du Pétrole, et à Monsieur de GELIS, Directeur à la Société Nationale des Pétroles d'Aquitaine, qui ont accepté d'examiner mon mémoire et de représenter leur Société dans mon Jury.

Qu'il me soit permis de remercier l'Institut Français du Pétrole, Franlab Informatique, la Société Nationale des Pétroles d'Aquitaine, Gaz de France, la Compagnie Française des Pétroles, ELF ERAP, qui m'ont donné les moyens de mener à bien ce travail.

Je remercie également Messieurs G. BARON, F.C. BERTHELOT et J. GRIMOUD pour l'aide amicale qu'ils m'ont généreusement apportée au cours de ce travail.

Je tiens à remercier les membres de l'équipe Radiopropagation et ceux du Laboratoire de Calcul pour leur aide sympathique et leur collaboration amicale.

Je remercie enfin tous les membres du personnel Technique et Administratif pour l'aide efficace qu'ils m'ont apportée.

S O M M A I R E

INTRODUCTION

CHAPITRE. I.

PRESENTATION GENERALE DE LA TELEDIAGRAPHE.

I. Première Partie

Etat des méthodes et interprétation du télélog au début de notre travail

I.1. Etapes successives de la mise en oeuvre du procédé TELELOG

I.1.1. Idée initiale

I.1.2. Principe de la méthode Telelog et versions successives du procédé

I.1.3. Déroulement d'une campagne de mesure

I.2. Méthode d'interprétation

I.2.1. Première méthode d'interprétation des Télélogs

I.2.2. Nouvelle étape de la méthode d'interprétation des mesures télélog à partir d'un modèle analogique à trois dimensions

I.2.2.1. Rappels théoriques sur la simulation

I.2.2.2. Description sommaire de la cuve analogique à trois dimensions

I.2.2.3. Effet d'une anomalie de résistivité sur le champ électrique E_z

a) notion de résistivité apparente

b) effet caractéristique du bord d'un gisement

I.2.2.4. Méthode d'interprétation

I.2.2.5. Limitation du modèle analogique

I.3. Conclusion de la première partie

II. Deuxième Partie

Présentation du modèle numérique tridimensionnel du Télélog, Effets à prendre en compte dans le dépouillement des mesures

II.1. Modèles numériques de Télélog

- II.2. Contrôle expérimental des résultats théoriques obtenus à l'aide de notre modèle tridimensionnel. Réinterprétation de la campagne de mesure Télélog sur le puits B104 de Beynes
 - II.2.1. Résumé des hypothèses de travail
 - II.2.2. Résultats du modèle mathématique sur le puits B104
 - II.2.3. Comparaison avec les relevés de la campagne de mesure sur B104
 - II.2.4. Effet perturbateur du cable reliant la sonde au receptrer de surface
- II.3. Rôle de la stratification du terrain
- II.4. Conclusion de la deuxième partie

CHAPITRE. II.

REPRESENTATION D'UNE ANOMALIE DE RESISTIVITE PAR UNE DISTRIBUTION DE DIPOLES ELECTRIQUES FONCTION DU CHAMP ELECTRIQUE TOTAL EXISTANT DANS CETTE ANOMALIE.

- II.1. Expressions intégrales du potentiel scalaire ϕ et du potentiel vecteur \vec{A} dans un demi-milieu quelconque contenant une anomalie de caractéristiques électriques différentes du milieu encaissant
- II.2. Expressions intégrales du potentiel vecteur \vec{A} et scalaire ϕ dans les milieux conducteurs (1) et (2) supposés isotropes et linéaires
- II.3. Expression intégrale du potentiel vecteur \vec{A} dans un demi-milieu isotrope et linéaire contenant une anomalie de résistivité, en fonction du champ électrique total \vec{E}_2 à l'intérieur de cette hétérogénéité
 - II.3.1. Les milieux (1) et (2) ne contiennent pas de sources du champ électromagnétique
 - II.3.2. Le milieu (1) contient un dipole électrique parcouru par un courant I
- II.4. Expression intégrale du potentiel vecteur \vec{A} dans un système de coordonnées cylindriques

II.4.1. Nouvelle expression intégrale $\int_{V_2} E_{2x}(M) \left[\frac{e^{-\gamma_1 R}}{R} - \frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'} \right] dV$

II.4.2. Nouvelle expression de l'intégrale de surface :

$$\int_{\pi} A_x(M') \left\{ \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{e^{-\gamma_1 R_0}}{R_0} - \frac{e^{-\gamma_1 R'_0}}{R'_0} \right] \right\}_{z'=0} dS$$

II.5. Calcul des inconnues au moyen des conditions aux limites

II.6. Expressions des composantes cartésiennes du champ électrique dans l'approximation du quasistatique

II.6.1. Expressions des composantes de \vec{A}_1 dans l'approximation du quasistatique

II.6.2. Expressions des composantes du champ électrique \vec{E}

CHAPITRE. III.

METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS INTEGRALES

III.1. Traitement numérique général

III.1.1. La méthode des moments

III.1.2. Discrétisation et approximation de la fonction sur des sous-domaines d'application

III.2. Application de la méthode de discrétisation et d'approximation sur des sous domaines à la résolution de l'équation de Fredholm complète

III.2.1. Approximation de la fonction $E(x)$ par des segments de droite

III.2.2. Approximation de $E(x)$ par une fonction en escalier

III.3. Transformation de la solution à une dimension en une solution à trois dimensions : généralisation de la méthode aux systèmes d'équations intégrales

CHAPITRE. IV.

MODELE NUMERIQUE TRIDIMENSIONNEL DU TELELOG

- IV.1. Expressions du champ électrique dans un demi-milieu conducteur homogène contenant une anomalie de résistivité. Approximation du quasistatique
 - IV.1.1. Position du Problème et approximation du quasistatique
 - IV.1.2. Transformation des expressions des composantes du champ électrique
- IV.2. Résolution du système d'équations intégrales pour le champ électrique \vec{E}
 - IV.2.1. Discrétisation de l'anomalie du volume V_2
 - IV.2.2. Equation matricielle, intégration numérique des fonctions de Green
 - IV.2.3. Résolution numérique du système matriciel et calcul des intégrales du tableau T_1
 - IV.2.3.1. Résolution numérique du système matriciel
 - IV.2.3.2. Calcul des intégrales du tableau T_1
- IV.3. Formulation du champ électrique à l'intérieur de l'anomalie
- IV.4. Vérification expérimentale du modèle numérique du Télélog
 - IV.4.1. Etalonnage du modèle
 - IV.4.2. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux
 - IV.4.2.1. Configuration étudiée
 - IV.4.2.2. Présentation des résultats
- IV.5. Résultats numériques d'une étude systématique de l'influence d'un réservoir de forme parallélépipédique sur le champ électrique dans un demi-milieu
 - IV.5.1. Position du problème
 - IV.5.2. Convergence du procédé de calcul
 - IV.5.3. Résultats de l'étude systématique

CHAPITRE. V.

ETUDE DE L'INFLUENCE DU CABLE RELIANT LA SONDE DE MESURE AU RECEPTEUR DE SURFACE

V.1. Position du problème

V.1.1. Description sommaire de la chaîne de réception

V.1.2. Structure étudiée

V.2. Répartition du champ électrique \vec{E} à l'intérieur du câble. Equation intégrale pour E_z

V.2.1. Répartition du champ électrique à l'intérieur du câble

V.2.2. Equation intégrale pour la composante E_z

V.3. Méthode de résolution numérique de l'équation intégrale

V.3.1. Discrétisation du câble. Equation matricielle

V.3.2. Résolution numérique de l'équation matricielle et convergence du procédé de calcul

V.3.2.1. Algorithmes utilisées

V.3.2.2. Convergence du procédé de calcul

V.4. Quelques résultats de l'étude systématique de l'influence du câble sur E_z

V.4.1. Etude en fonction de la distance du point de mesure à l'extrémité du câble d

V.4.2. Etude du rapport E_z/E_{z_0} en fonction de la longueur du câble

V.4.3. Influence de la variation de la résistivité du terrain encaissant ρ et de la fréquence f

V.5. Conclusion

CONCLUSION

Bibliographie

Annexes

I N T R O D U C T I O N

La télédiagraphie est une méthode de prospection géophysique mise au point à l'Université des Sciences et Techniques de LILLE par l'équipe du Professeur R.GABILLARD avec l'aide et la collaboration de l'Institut Français du Pétrole.

Cette méthode est basée sur la mesure de la résistivité apparente du terrain compris entre un dipôle d'émission de courant basse fréquence situé par exemple à la surface du sol et un dipôle de réception descendu dans un forage à une certaine profondeur.

Ce procédé permet, soit de déterminer la distance du bord d'une anomalie de résistivité à l'axe du forage situé à quelques centaines de mètres de cette hétérogénéité, soit d'apprécier l'étendue d'un gisement dans le cas d'un puits ayant rencontré la roche imprégnée d'huile ou de gaz.

Les méthodes d'interprétation des mesures effectuées sur le terrain ont été développées à partir d'études théoriques ou expérimentales sur cuve rhéographique. Dans ces deux cas, le sol est assimilé à un demi-milieu homogène renfermant une anomalie de résistivité élevée et surmonté d'un demi-milieu isolant, l'atmosphère.

Les études théoriques conduisant à une solution analytique des équations de Maxwell ont été effectuées jusqu'à présent en assimilant l'émetteur à deux points sources de courant continu. Par ailleurs, il n'a été possible que de tenir compte d'anomalies de résistivité de forme simple : sphère, disque plat, demi-plan infini. Ceci s'explique par le fait qu'il faut trouver un système de coordonnées orthogonales dans lequel l'anomalie et le plan simulant la surface du sol sont des surfaces de coordonnées et il faut également connaître dans ce système la solution générale de l'équation de Helmholtz.

L'objet de notre travail a donc été l'étude d'un formalisme qui permet à la fois de tenir compte d'anomalies de forme quelconque et de la fréquence du signal émis qui est en réalité un courant alternatif. Nous avons obtenu la solution des équations de Maxwell sous forme d'équations intégrales que nous avons résolues numériquement sur ordinateur. Ces programmes de calcul nous ont permis de réaliser un modèle numérique tridimensionnel applicable à la télédiagraphie. Nous pensons que l'exploitation de ce modèle est susceptible de conduire à une amélioration décisive de la méthode actuelle d'interprétation.

Le premier chapitre de notre thèse, consacré à la présentation générale de la télédiagraphie est divisé en deux parties. La première partie est un résumé de l'état des méthodes d'interprétation au début de notre travail. Dans la seconde partie nous mettons en évidence les effets à prendre en compte dans le dépouillement des mesures effectuées sur le terrain.

Dans le deuxième chapitre, nous développons le formalisme intégral utilisé pour réaliser le modèle numérique. Nous montrons en particulier qu'une anomalie de résistivité est équivalente du point de vue rayonnement à une distribution de dipôles électriques proportionnels au champ électrique total \vec{E}_2 en chaque point de l'anomalie.

Le troisième chapitre de ce travail est consacré à la présentation de la méthode des moments qui nous a permis de résoudre numériquement les systèmes d'équations intégrales et de calculer ainsi en tout point de l'anomalie les composantes cartésiennes du champ électrique \vec{E}_2 .

Dans le quatrième chapitre, nous présentons d'abord les principaux éléments nécessaires à la résolution numérique du système d'équations intégrales que vérifie \vec{E}_2 . Nous comparons les résultats théoriques calculés par ce programme à ceux obtenus expérimentalement sur la cuve rhéographique. Nous concluons ce chapitre par une étude systématique de l'influence de la géométrie et des caractéristiques électriques d'une anomalie sur le champ électrique vertical.

Enfin dans le dernier chapitre de notre thèse, nous mettons en évidence l'effet perturbateur provoqué par le câble reliant la sonde de mesure, descendue dans le forage, au récepteur de surface.

CHAPITRE. I.

PRESENTATION GENERALE DE LA TELEDIAGRAPHIE

Ce chapitre, consacré à la présentation générale de la télédiagraphie ou télélog, est divisé en deux parties.

La première partie est un résumé de l'état des méthodes d'interprétation du Télélog au début de notre travail. Dans cette partie, après avoir rappelé les étapes successives de la mise en oeuvre de ce procédé de prospection, nous décrivons les méthodes d'interprétation utilisées pour chacune d'elles. Nous mettons également en évidence les limites de ces méthodes.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous donnons les grandes lignes du modèle numérique tridimensionnel qui constitue notre contribution principale au développement de la télédiagraphie. Ce modèle nous a permis de mettre en évidence les effets à prendre en compte dans le dépouillement des mesures effectuées sur le terrain. Ceci est susceptible de conduire à une amélioration décisive de la méthode actuelle d'interprétation.

Nous concluons cette deuxième partie, en soulignant la nécessité d'étudier la faisabilité d'un modèle numérique de synthèse tenant compte de la stratification du terrain.

I. PREMIERE PARTIE

ETAT DES METHODES D'INTERPRETATION DU TELELOG AU DEBUT DE NOTRE TRAVAIL.

Nous décrivons d'abord les versions successives du procédé télélog et les méthodes d'interprétation qui ont permis de localiser un gisement à une profondeur donnée. Ces méthodes ne permettaient cependant pas de déterminer, soit la distance du bord d'un gisement à l'axe d'un forage qui ne l'a pas rencontré, soit l'étendue latérale d'un gisement à partir d'un puits ayant rencontré la roche imprégnée d'huile.

Nous décrivons ensuite la méthode d'interprétation basée sur la simulation de la campagne de mesures à l'aide d'une cuve rhéographique. Cette méthode permet de déterminer la distance des bords du gisement à l'axe d'un forage dans lequel des mesures télélog sont effectuées.

Nous terminons enfin cette première partie en faisant une liste exhaustive des limites des possibilités de la cuve analogique pour interpréter des enregistrements télélog.

1.1. ETAPES SUCCESSIVES DE LA MISE EN ŒUVRE DU PROCÉDE TELELOG

1.1.1. Idée initiale

Les procédés actuellement utilisés en prospection des couches géologiques traversées par un forage sont généralement des procédés de mesure de la résistivité électrique du sol ou des procédés acoustiques mesurant la vitesse de propagation des ondes sonores dans ces couches géologiques.

Les procédés de mesure de la résistivité consistent à descendre dans un forage, avant qu'il ait reçu un tubage métallique, une sonde de mesure de résistivité dont le principe est bien connu ; il en existe d'ailleurs de nombreuses variantes⁽¹⁾.

Ces sondes permettent d'obtenir un enregistrement de la résistivité des terrains en fonction de la profondeur, appelé diagraphie ou log de résistivité.

Cependant, un log de résistivité ne donne que des informations locales sur la nature des couches rencontrées. Le rayon d'investigation des sondes classiques ne dépasse généralement pas quelques mètres autour du forage. Les autres diagraphies (acoustiques, nucléaires) ont un rayon d'investigation encore plus limité.

Dans ces conditions, lorsqu'il s'agit de pièges stratigraphiques un forage peut très bien passer au voisinage d'une lentille de sable imprégnée d'huile sans que l'on puisse en avoir connaissance. Il est donc nécessaire, soit de compléter les informations données par les diagraphies par d'autres résultats obtenus à l'aide de procédés de prospection différents, soit de développer une méthode permettant d'accroître le rayon d'investigation des procédés de mesure de la résistivité du terrain.

L'idée initiale du télélog était donc de permettre l'obtention d'un enregistrement donnant la valeur moyenne de la résistivité des terrains rencontrés dans un rayon de plusieurs centaines de mètres autour du forage et également de détecter une anomalie de résistivité située au voisinage de celui-ci.

I.1.2. Principe de la méthode télélog et versions successives du procédé^{(2), (3)}

Le procédé télélog consiste à créer dans le sol un champ électromagnétique au moyen d'un émetteur localisé.

Cet émetteur se compose de deux prises de terre dans lesquelles on injecte un courant sinusoïdal de fréquence fixe. Le

choix de cette fréquence dépend essentiellement de la distance maximum à laquelle on veut obtenir un signal encore mesurable dans un terrain donné.

Cette fréquence est comprise entre 1 Hertz et quelques centaines de Hertz. Ce dispositif émetteur constitue un dipôle électrique.

Dans la version initiale du procédé, l'émetteur est un dipôle électrique vertical mobile dans le forage (noté D.E.V.).

Avant d'atteindre la surface du sol, le champ électrique \vec{E} se propage de l'émetteur vers le récepteur en se réfractant sur les obstacles et couches géologiques de résistivités différentes. Il en résulte que l'intensité et l'orientation du champ \vec{E} sont des fonctions de la structure globale de la portion de terrain comprise entre l'émetteur et le récepteur.

On mesure, à la surface du sol, la composante radiale E_r du champ électrique en fonction de la distance r séparant l'émetteur du récepteur. Généralement, cette distance varie de quelques dizaines à plusieurs milliers de mètres.

De cet enregistrement de $E_r(r)$, on déduit une résistivité apparente moyenne à partir de laquelle il est possible de mettre en évidence soit la structure stratifiée du terrain, soit la présence d'anomalies locales de résistivité.

La mesure de E_r et l'interprétation des résultats obtenus ont montré la faisabilité de la méthode. Cependant la mise en oeuvre de celle-ci exigeait un derrick devant supporter un câble spécial nécessaire à l'alimentation en puissance de l'émetteur. Cet équipement non conventionnel rendait difficile l'industrialisation de la méthode.

Ce problème fut résolu en utilisant comme émetteur un dipôle électrique horizontal (D.E.H.) placé à la surface du sol et en mesurant la composante verticale E_z du champ électrique dans le forage. La sonde de mesure s'adapte alors au câble classique utilisé pour effectuer les diagraphies.

La mise en oeuvre de cette nouvelle version du procédé est schématisée sur la figure.1.1.

TELELOG

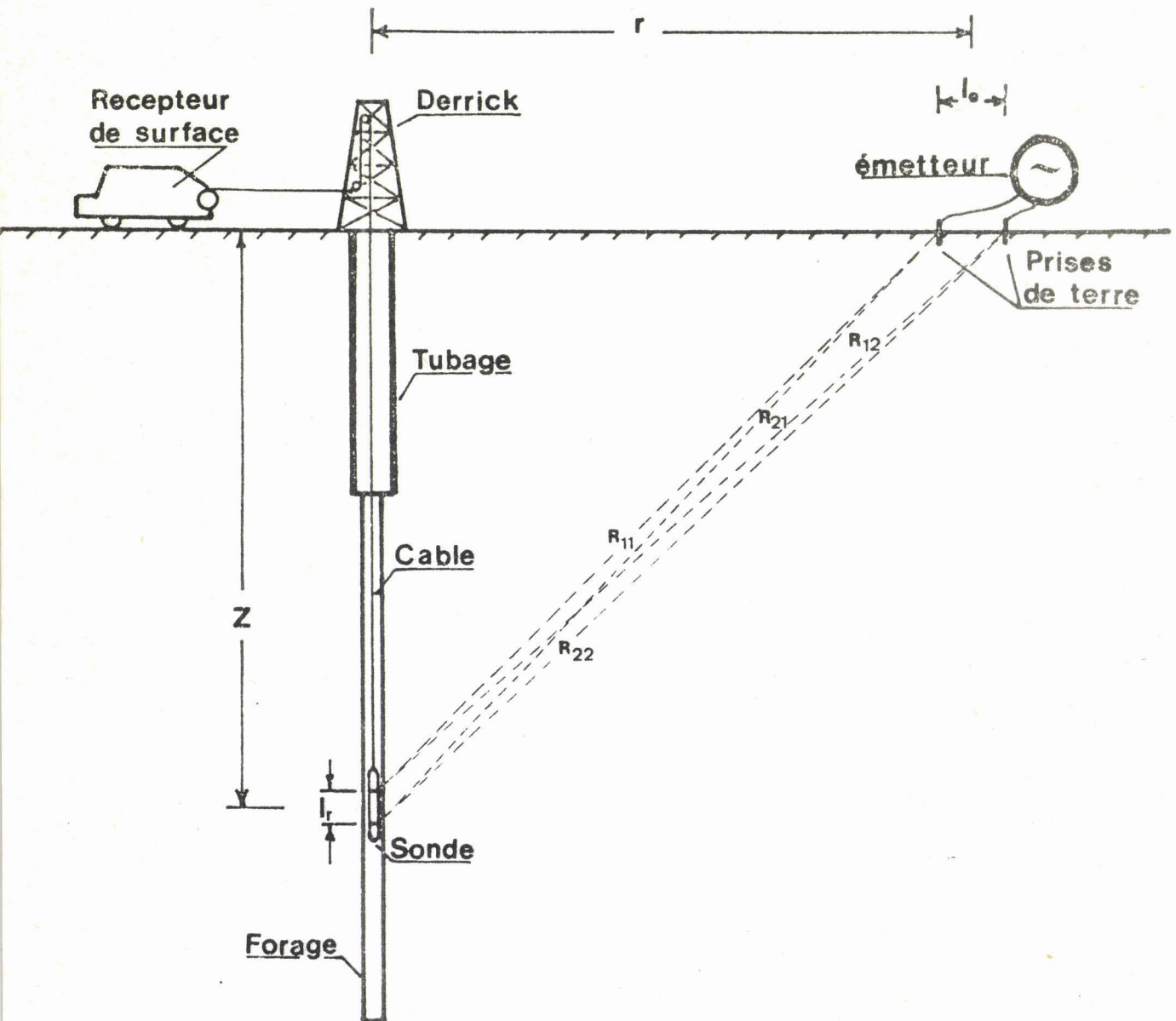


Figure I.1



1.1.3. Déroulement d'une campagne de mesure ⁽⁴⁾

Une campagne de mesure TELELOG se déroule généralement de la manière suivante :

Dans quelques directions, appelées profils, partant radialement du puits P, et pour plusieurs distances émetteur-forage r, on enregistre l'intensité E_z de la composante verticale du champ électrique entre deux profondeurs données (figure.1.2.).

Ces enregistrements ou télélogs sont effectués en "trou ouvert".* La profondeur minima à partir de laquelle on commence les mesures est choisie de manière à s'affranchir de l'influence parasite du tubage métallique partiel : la sonde est positionnée, au départ, à une centaine de mètres environ de l'extrémité de ce tubage (figure.1.1.).

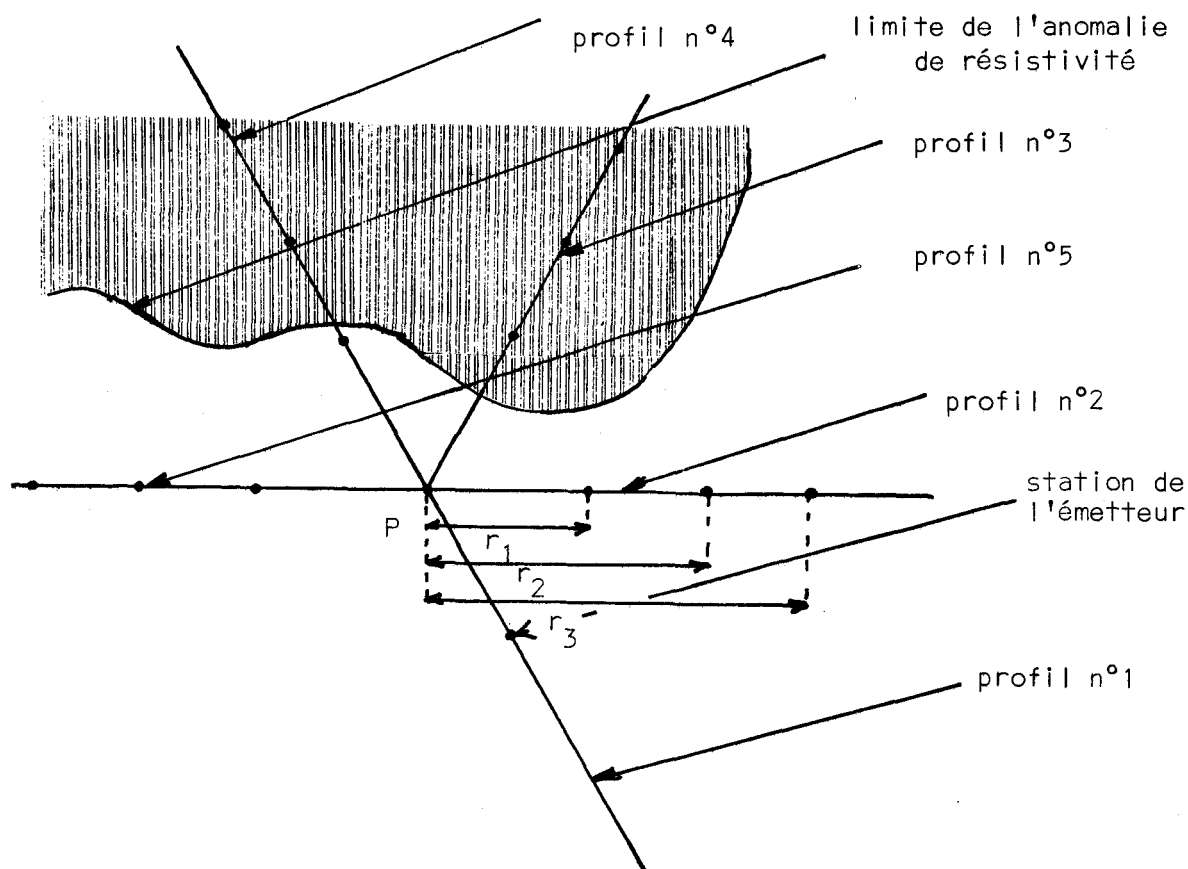


Figure.1.2.

*On appelle "trou ouvert" un sondage qui n'a pas encore été tubé.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous intéresser aux méthodes d'interprétation de ces enregistrements et aux bases théoriques sur lesquelles elles sont fondées.

1.2. METHODE D'INTERPRETATION

1.2.1. Premières méthodes d'interprétation des TELELOGS

Ces premières méthodes d'interprétation sont basées sur une théorie matricielle ^{(5), (6), (7)} de la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu stratifié, l'émetteur étant un D.E.H. placé à la surface du sol.

En particulier cette théorie permet de justifier l'allure des Télélogs.

Trois méthodes d'interprétation ont été successivement développées par BASSIQUNI ⁽⁵⁾:

La première méthode basée sur la comparaison des logs obtenus en déplaçant l'émetteur le long d'un profil donné, par rapport à ceux enregistrés en émettant le long d'un profil de référence. Ce profil de référence est implanté dans une direction où il y a peu de chance de rencontrer une anomalie locale de résistivité (figure.1.2.)

Cette comparaison permet de mettre en évidence la symétrie de révolution du terrain autour du forage, si tous les logs obtenus pour une distance r donnée, sont identiques. Dans le cas contraire, on déduit de cette comparaison une ou plusieurs directions privilégiées dans lesquelles on est susceptible de rencontrer une anomalie de résistivité.

Les deux autres méthodes permettent de faire l'économie des télélogs de référence.

La première d'entre elles consiste à comparer les valeurs expérimentales du champ électrique vertical E_z à celles calculées à partir de la théorie matricielle. Cependant pour obtenir les valeurs théoriques de E_z il faut connaître la résistivité de toutes les couches du terrain ; ces données sont extraites d'un log classique de résistivité.

La seconde méthode est une variante de celle décrite ci-dessus. Elle consiste à calculer de proche en proche la résistivité ρ des couches rencontrées en reportant dans une formule de récurrence établie à partir de la théorie matricielle, les valeurs du champ

électrique vertical mesuré. Les valeurs de ρ ainsi obtenues sont ensuite comparées à celles données par le Latérolog (ou log classique de résistivité).

Si les éléments de comparaison sont identiques, on admet que le terrain est composé de couches homogènes. Sinon, on détermine une direction dans laquelle existe une anomalie de résistivité.

Ces méthodes d'interprétation permettent de mettre en évidence l'existence d'une anomalie latérale de résistivité dans une direction donnée et d'en préciser la profondeur. Cependant la distance séparant cette hétérogénéité de l'axe du forage est un paramètre très important qui restait à déterminer. Pour ce faire, il était nécessaire d'étudier la propagation des ondes électromagnétiques en présence d'une anomalie de résistivité.

En 1970, l'équipe de télédiagraphie eut l'idée d'entreprendre cette étude par simulation en construisant un modèle analogique à trois dimensions.

Dans ce modèle, de l'eau salée contenue dans une cuve simulait un terrain homogène. L'anomalie de résistivité élevée supposée contenue dans ce terrain était obtenue en immergeant dans la cuve une maquette en plastique. (8), (9), (10)

I.2.2. Nouvelle étape de la méthode d'interprétation des mesures télélog à partir d'un modèle analogique à trois dimensions

Après avoir rappelé les principes théoriques de la simulation, et décrit sommairement le modèle analogique utilisé, nous allons montrer l'effet d'une anomalie de résistivité sur le champ électrique E_z . Nous en déduirons une nouvelle méthode de mesure sur le terrain et la manière dont il faut interpréter les résultats.

I.2.2.1. Rappels théoriques sur la simulation⁽¹¹⁾

Soit un point $P(x, y, z)$ dans le milieu réel, et soit $P'(x', y', z')$ son homologue dans le modèle réduit.

Les coordonnées de ces deux points sont reliées par les relations suivantes :

$$x = px' , y = py' , z = pz' \quad (1.1.)$$

p est le facteur géométrique de réduction.

Les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{H} vérifient dans le milieu en vraie grandeur les équations de Maxwell. Pour que celles-ci restent invariantes dans la transformation définie par la formule 1.1., il est en général nécessaire d'introduire des facteurs de réduction sur le temps t et sur les composantes du champ électromagnétique \vec{E} et \vec{H} .

On pose :

$$\vec{E}(x,y,z,t) = a \vec{E}'(x',y',z',t')$$

$$\vec{H}(x,y,z,t) = b \vec{H}'(x',y',z',t')$$

$$t = c t'$$

. a, b, c sont respectivement les facteurs de réduction pour les champs électrique et magnétique et pour le temps t

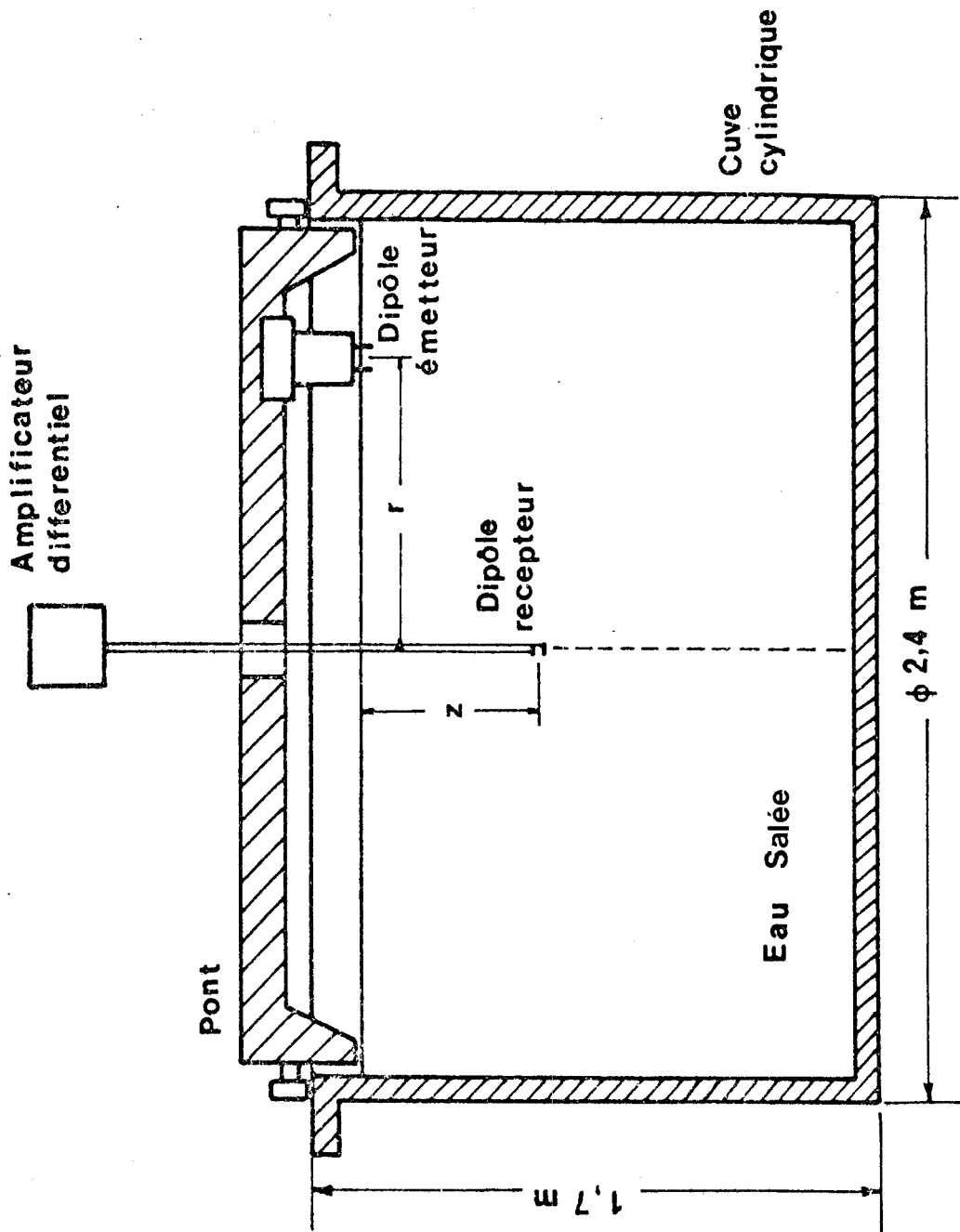
. E', H', t' sont respectivement les champs électrique, magnétique et l'unité de temps dans le modèle réduit.

Si on suppose d'une part que les courants de déplacement sont négligeables et d'autre part que les milieux réel et réduit ont même perméabilité magnétique, on montre que les relations qui existent entre les pulsations, les longueurs et les conductivités du terrain et la cuve sont les suivantes :

$$\frac{\omega_c}{\omega_t} = c \quad (1.2.)$$

$$\frac{[L_t]}{[L_c]} = p \quad (1.3.)$$

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_t} = \frac{p^2}{c} \quad (1.4.)$$



Modèle analogique

Figure I.3

Les facteurs de réduction a et b sont uniquement connus par leur rapport :

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{c} \quad (1.5.)$$

Si on se fixe, à la construction du modèle, les valeurs a et b on obtient un modèle total au sens de SINCLAIR⁽¹²⁾, sinon le modèle est un modèle géométrique.

1.2.2.2. Description sommaire de la cuve analogique à trois dimensions

Le modèle analogique mis au point par l'équipe du Professeur GABILLARD est schématisé sur la figure.1.3.

Le milieu conducteur est constitué d'une solution d'eau salée dont la conductivité varie entre 0,1 et 3 Siemens par mètre suivant la concentration en sel. Cette solution est contenue dans une cuve cylindrique réalisée en stratifié de laine de verre de 2,40m de diamètre et de 1,70m de hauteur.

Le dispositif émetteur se compose d'un générateur de courant sinusoïdal à la fréquence 200kHz. Ce générateur excite un dipôle électrique horizontal placé à la surface de l'électrolyte. Ce dipôle de longueur λ_e égale à 2 cm peut se déplacer à la surface du liquide.

Le dispositif récepteur se compose d'un dipôle électrique vertical de longueur λ_r égal à 2cm plongeant au centre de la cuve. Cette sonde est mobile le long d'un axe vertical.

Les dipôles émetteur et récepteur se déplacent à l'aide de moteurs électriques, des capteurs indiquent leur position à tout instant.

1.2.2.3. Effet d'une anomalie de résistivité sur le champ électrique E_z

Nous allons d'abord introduire la notion de résistivité apparente. C'est à partir de cette notion que l'on déterminera la distance qui sépare le forage du bord du gisement, dans une direction donnée.

a) notion de résistivité apparente

Soit ρ la résistivité de l'électrolyte et soient z et r les positions des dipôles récepteur et émetteur (figure.1.3.).

On montre ⁽⁵⁾ que la tension qui apparaît aux bornes des électrodes de réception lorsqu'il n'existe aucune maquette d'anomalie dans la cuve, est donnée par la formule suivante :

$$V(z) = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{e^{-\gamma_1 R_{11}}}{R_{11}} - \frac{e^{-\gamma_1 R_{12}}}{R_{12}} - \frac{e^{-\gamma_1 R_{21}}}{R_{21}} + \frac{e^{-\gamma_1 R_{22}}}{R_{22}} \right) \quad (1.6.)$$

où

$$R_{11}^2 = \left(z - \frac{l_r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{l_e}{2}\right)^2 \quad R_{21}^2 = \left(z + \frac{l_r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{l_e}{2}\right)^2$$

$$R_{12}^2 = \left(z - \frac{l_r}{2}\right)^2 + \left(r + \frac{l_e}{2}\right)^2 \quad R_{22}^2 = \left(z + \frac{l_r}{2}\right)^2 + \left(r + \frac{l_e}{2}\right)^2$$

l , l_e , l_r sont respectivement le courant parcourant le D.E.H., la longueur du dipôle émetteur et la distance séparant les électrodes de réception.

γ_1 est la constante de propagation : $\gamma_1^2 = j\omega\mu/\rho$

ω est la pulsation du courant I . μ est la perméabilité de l'électrolyte.

Soit maintenant $V_m(z)$ la tension mesurée aux bornes de la sonde de réception lorsqu'une anomalie de résistivité élevée a été immergée dans l'eau salée.

Nous définissons la résistivité apparente ρ_a du milieu contenant l'hétérogénéité, comme la valeur numérique de ρ qu'il faut introduire dans la formule 1.6, caractérisant le milieu sans anomalie pour obtenir l'égalité :

$$V_m(z) = V(z)$$

Figure 1.5

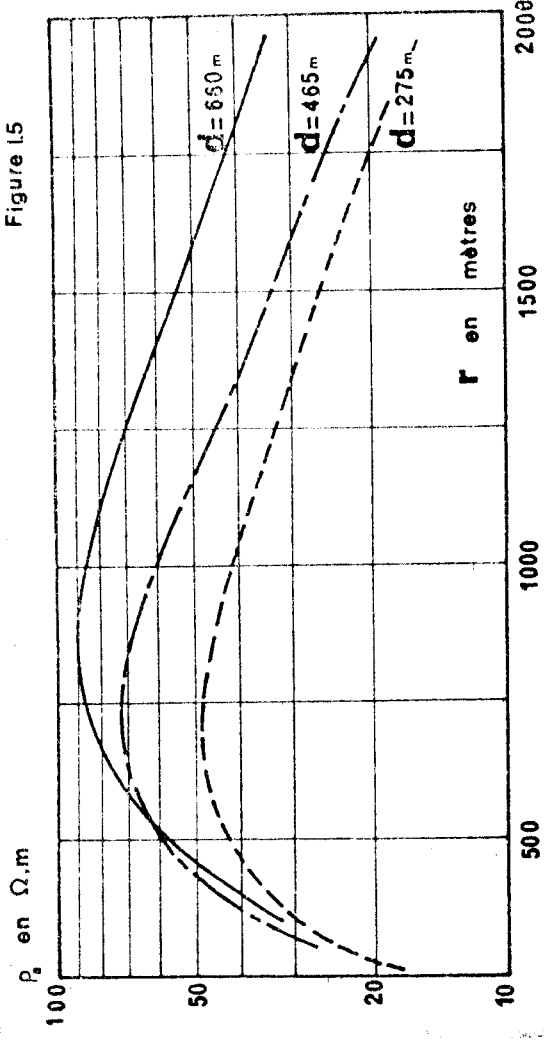
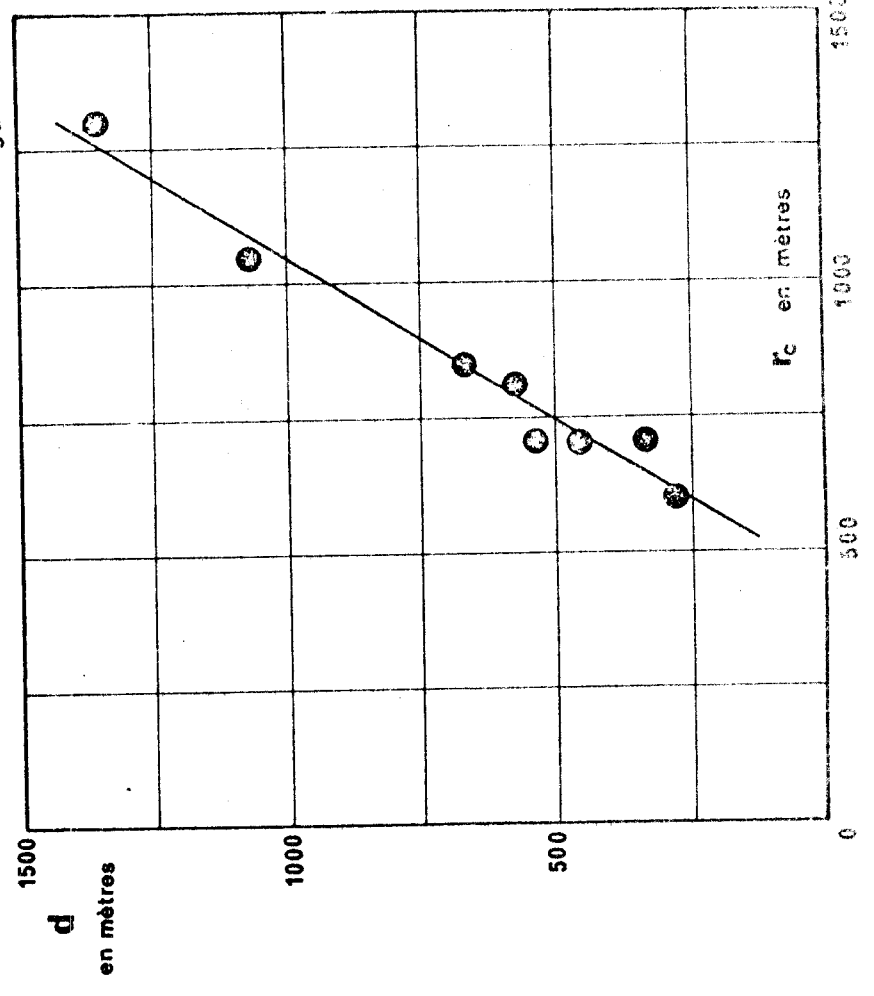


Figure 1.7



BUS
LILLE

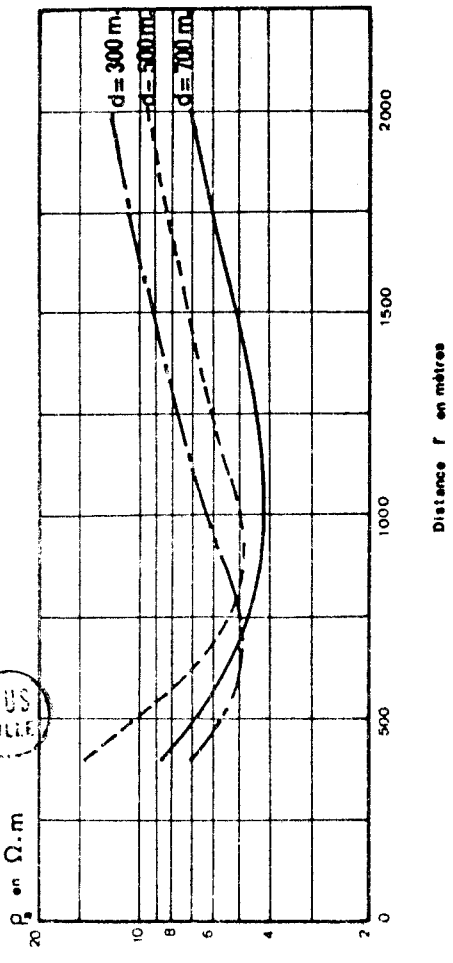


Figure 1.4

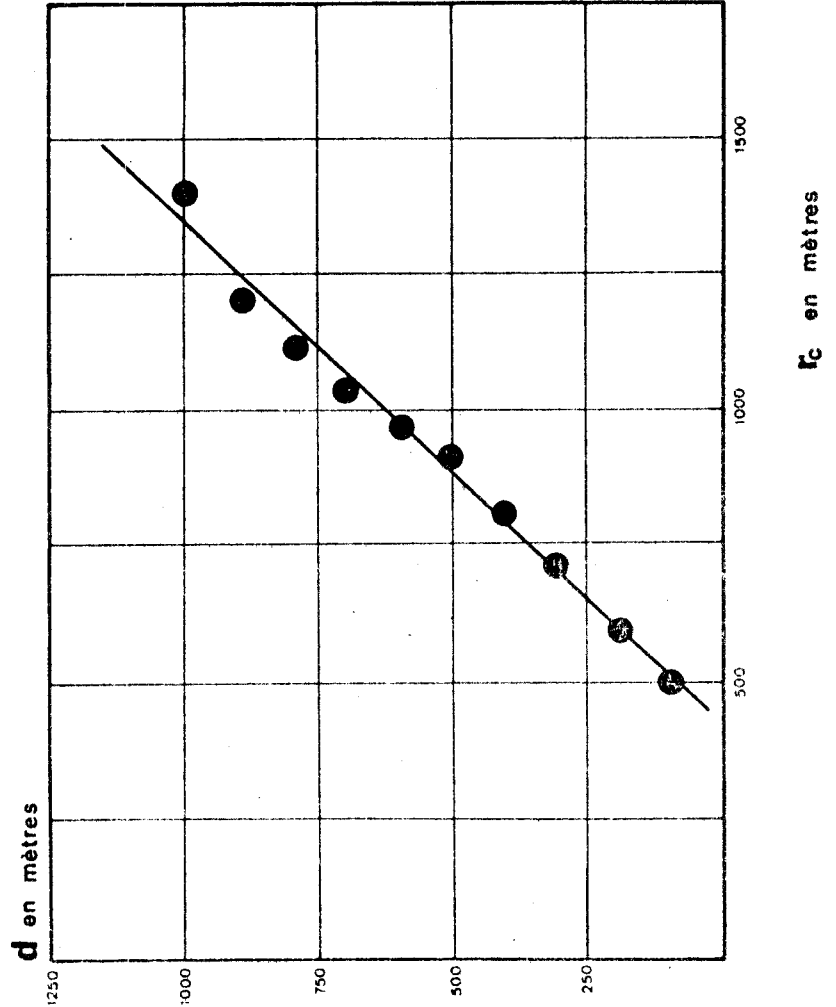


Figure 1.6

(4)

b) effet caractéristique du bord d'un gisement

Après avoir choisi convenablement le rapport de réduction géométrique p et le rapport de réduction des fréquences c , on immerge dans la cuve une maquette représentant l'anomalie dont on veut étudier l'influence sur le champ électromagnétique. On positionne la sonde de réception au voisinage du toit de l'hétérogénéité et on enregistre le champ électrique E_z en fonction de la distance émetteur-forage r . On déduit de ces mesures une courbe de résistivité apparente ρ_a en fonction de r .

Deux cas sont à considérer, selon que l'axe de la sonde réceptrice rencontre ou non la maquette.

Si l'axe de la sonde ne rencontre pas la maquette, les courbes $\rho_a(r)$ passent par un minimum pour une valeur r_c de r (fig.1.4.), dans le cas contraire, ces courbes passent par un maximum pour r égal à r_c (fig.1.5.).

On montre, par ailleurs, sur les figures.1.4. et .1.5., que ces extrêma sont des fonctions caractéristiques de la distance d séparant le forage du bord du gisement.

Sur les figures.1.6. et .1.7., nous avons tracé les abaques donnant la valeur de d en fonction de r_c . Ces courbes sont respectivement déduites des réseaux des figures.1.4. et.1.5.

(4)

1.2.2.4. Méthode d'interprétation

On fait l'hypothèse que le seul effet parasite qui vient se superposer à la réponse de l'anomalie en milieu homogène est le phénomène de réfraction des lignes de courant sur la stratification du terrain. En supposant, en plus, que cet effet parasite n'a pas d'influence sur la position de l'extrémum de la courbe $\rho_a(r)$, on obtient facilement une nouvelle méthode d'interprétation de la télé-diagraphie.

Sur le terrain, il suffit de descendre la sonde de réception à la profondeur z_0 du toit du gisement ; ensuite sur chaque profil on

déplace l'émetteur de manière à enregistrer la valeur de E_z pour plusieurs valeurs de r . De ces valeurs, on tire, pour chaque direction explorée, une courbe $\rho_a(r)$.

L'interprétation de ces courbes consiste à simuler la campagne de mesure sur la cuve analogique et à déduire de cette modélisation les abaques $d(r_c)$ correspondants. En reportant dans ces abaques la valeur de l'abscisse r_c des extrêmes des courbes $\rho_a(r)$ on détermine dans chaque direction la distance du forage au bord du gisement.

1.2.2.5. Limitation du modèle analogique

Nous allons mettre en évidence les limites des possibilités du modèle analogique en étudiant sur un exemple les problèmes qui se posent lorsqu'on veut préparer l'interprétation d'une expérience télégéol sur la cuve analogique.

Soit un gisement dont la plus grande dimension est d'environ 4000 mètres et dont l'épaisseur maximum est de 20m. Ce gisement est situé à 1000m du forage.

Pour simuler un tel gisement dans la cuve analogique, il faut choisir un rapport de réduction géométrique p de l'ordre de 10^4 . Attribuons cette valeur à p .

Il en résulte que la maquette sera à découper, par exemple, dans une plaque de matière plastique de 40cm de diamètre et au maximum, de 2mm d'épaisseur. Il est bien évident qu'il sera difficile de positionner convenablement cette anomalie dans la cuve sans en déformer le profil.

Supposons maintenant que la fréquence du dispositif réel d'émission soit de 12,5Hz, celle du modèle étant de 200kHz, le rapport de réduction de fréquence c est de 16 000. Si l'électrolyte a une conductivité égale à la conductivité maximum admissible, soit $3(\Omega.m)^{-1}$, d'après la formule 1.4. donnant le rapport des conductivités des milieux réel et réduit, on constate que le terrain encaissant le plus conducteur que pourra simuler l'électrolyte aura une conductivité de $4,8.10^{-4}(\Omega.m)^{-1}$ ($\rho=2083\Omega.m$). Cette valeur de σ anormalement faible ne peut être satisfaisante.

Faisons maintenant l'hypothèse que la conductivité moyenne des terrains encaissants rencontrés est de $4.10^{-2}(\Omega.m)^{-1}$, si on veut respecter le rapport σ_c/σ_t (1.4.), il faut augmenter le rapport de réduction des fréquences c . Ce qui revient en fait à supposer que l'on travaille sur le terrain à une fréquence voisine du dixième de Hertz.

Il en résulte que la cuve analogique, mise au point à LILLE, doit être considérée comme un modèle en courant continu.

En faisant malgré tout abstraction de toutes ces objections, il est difficile, sur un tel modèle, de faire varier le contraste de conductivité entre le milieu encaissant et l'anomalie. Enfin, il est impossible d'étudier à échelle réduite, les perturbations apportées au niveau du récepteur, soit par le câble reliant la sonde au récepteur de surface, soit par un tubage métallique ou isolant.

1.3. CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE

L'équipe du Professeur GABILLARD a mis au point par étapes successives, un procédé de prospection qui permet non seulement de détecter la présence d'un gisement, mais également d'en préciser les extrémités par rapport à un forage dans lequel on effectue des mesures télélog.

Par ailleurs, on a montré que pour dépouiller valablement ces mesures, il fallait simuler la campagne de prospection en étant capable de connaître la valeur de la composante verticale du champ électrique E_z créé par un DEH en tout point d'un demi-milieu contenant une anomalie de résistivité. Nous avons montré les limites et les difficultés d'une telle simulation sur cuve rhéographique. Ces inconvénients nous ont conduit à réaliser un modèle numérique du Télélog.

La présentation de ce modèle mathématique et les résultats obtenus grâce à lui, font l'objet de la deuxième partie de ce chapitre.

II. DEUXIEME PARTIE

PRESENTATION DU MODELE NUMERIQUE TRIDIMENSIONNEL DU TELELOG. EFFETS A PRENDRE EN COMPTE DANS LE DEPOUILLEMENT DES MESURES

Cette seconde partie est consacrée à la présentation de notre travail.

Nous décrivons d'abord sommairement le modèle numérique tridimensionnel du télélog.

Nous réinterprétons ensuite les télédiagrammes effectués sur le site de BEYNES en nous appuyant sur les résultats théoriques, calculés sur ordinateur, avec ce modèle numérique. Cette étude critique nous permet de mettre en évidence les effets à prendre en compte pour le dépouillement d'une campagne de mesure.

Nous terminons cette seconde partie en suggérant l'étude de la faisabilité d'un modèle numérique de synthèse tenant compte à la fois de l'influence d'une anomalie de résistivité et des effets perturbateurs dus aux stratifications du terrain et à la présence du câble non isolé reliant la sonde au récepteur de surface.

II.1. MODELES NUMERIQUES DU TELELOG

Soit un demi-milieu conducteur de conductivité σ_1 renfermant une anomalie de conductivité σ_2 et de volume V_2 . Ce demi-milieu conducteur est surmonté d'un demi-milieu isolant simulant l'atmosphère. Le champ électromagnétique est créé dans cette structure par un D.E.H. placé à l'interface séparant ces deux milieux.

Nous montrons au chapitre. II. de notre thèse, que la contribution de chaque élément de volume dv de l'anomalie est équivalent à un dipôle électrique élémentaire dont le moment est le suivant :

$$\vec{p}_{equiv.} = (\sigma_2 - \sigma_1) \vec{E}_2 dv$$

\vec{E}_2 est le champ électrique total au point M de l'anomalie qu'entoure le volume dv .

Les composantes cartésiennes de \vec{E}_2 sont solutions d'un système d'équations intégrales du type FREDHOLM que nous résolvons numériquement en utilisant la méthode des moments ; celle-ci fait l'objet d'un développement au chapitre.III. de ce travail.

Lorsqu'on connaît la distribution de dipôles équivalente à l'anomalie c'est-à-dire lorsqu'on connaît le champ électrique \vec{E}_2 , il est facile de calculer le champ électrique total en tout point du milieu encaissant de conductivité σ_1 en présence de l'hétérogénéité.

La recherche des valeurs de \vec{E}_2 et le calcul de la composante verticale du champ électrique le long d'un axe vertical, simulant le forage sont les deux grandes parties des modèles numériques du télélog. L'élaboration du modèle mathématique tridimensionnel s'est déroulée par étapes successives, de difficultés croissantes. Nous avons d'abord étudié des modèles à deux dimensions⁽¹³⁾,⁽¹⁴⁾ ; l'un d'eux, qui reprend les travaux de HOHMANN⁽¹⁵⁾ nous a permis d'évaluer les difficultés de réalisation d'un modèle tridimensionnel.

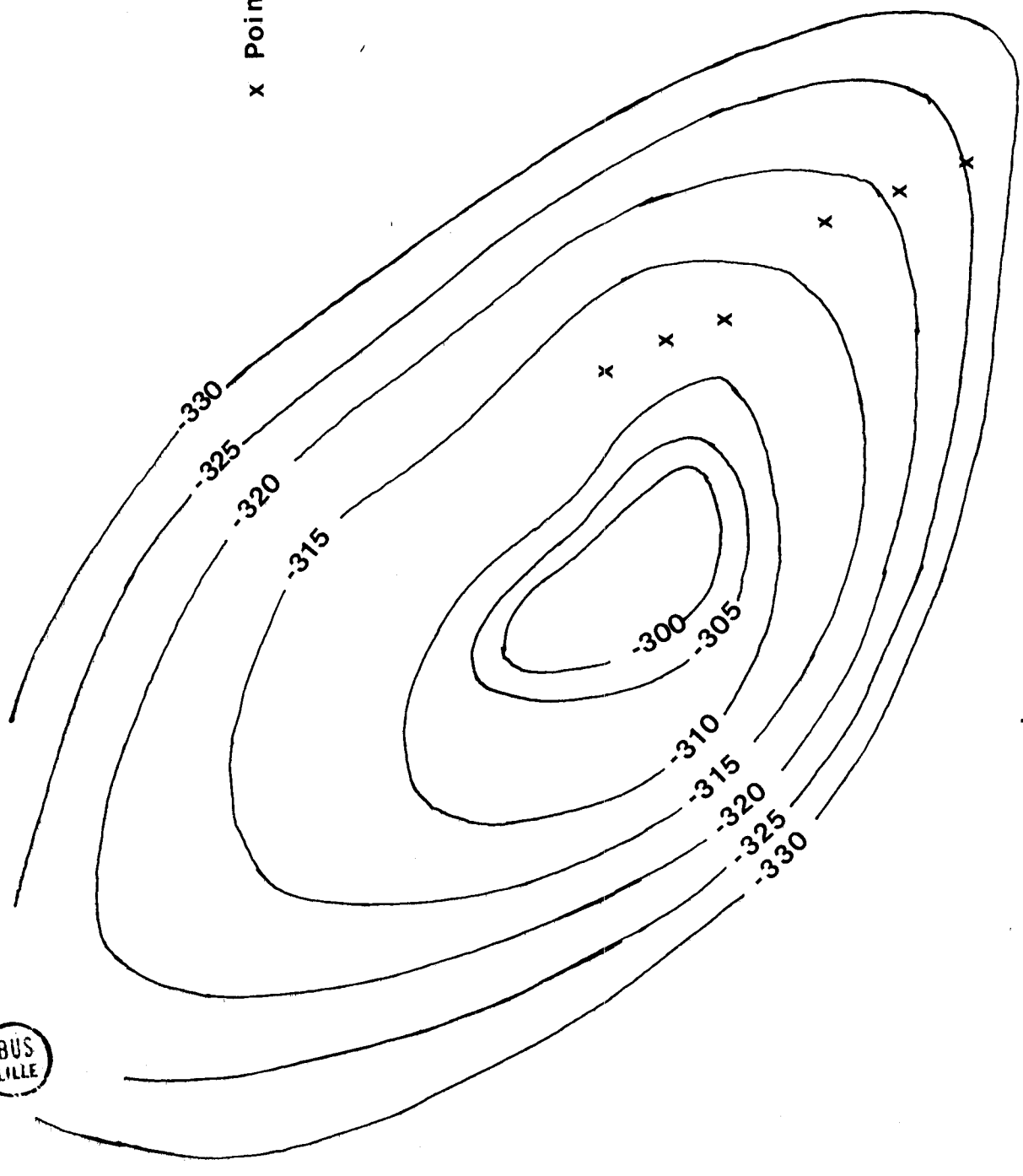
II.2. CONTROLE EXPERIMENTAL DES RESULTATS THEORIQUES OBTENUS A L'AIDE DE NOTRE MODELE TRIDIMENSIONNEL. REINTERPRETATION DE LA CAMPAGNE DE MESURE TELELOG SUR LE Puits B 104 DE BEYNES

En fin 1970, l'équipe du Professeur GABILLARD a effectué une série de mesures télélog sur le stockage souterrain de BEYNES appartenant à G.D.F. Ces mesures ont été interprétées, à l'époque, à partir d'un abaque $d(r_c)$ construit sur la cuve analogique.

Nous avons choisi de réinterpréter ces expériences en utilisant le modèle numérique. Ce site a été sélectionné, parmi d'autres pour la simplicité de la forme de son réservoir et pour le volume relativement faible de celui-ci.

BUS
LILLE

x Point de mesure



Isobathes du toit du reservoir
souterrain de BEYNES
Echelle 1/20000

●
Forage
B.104

FIGURE I.9

17.2.1. Résumé des hypothèses de travail

L'implantation du puits B.104, la forme du gisement et son volume sont connus.^(16,17) Il s'agit simplement de déterminer la hauteur de la zone saturée en gaz par rapport à la zone saturée en eau à l'intérieur du piège.

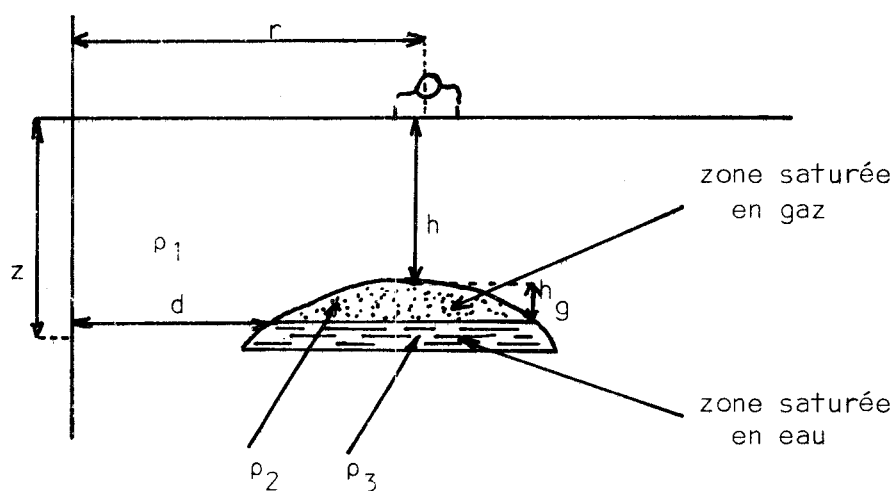
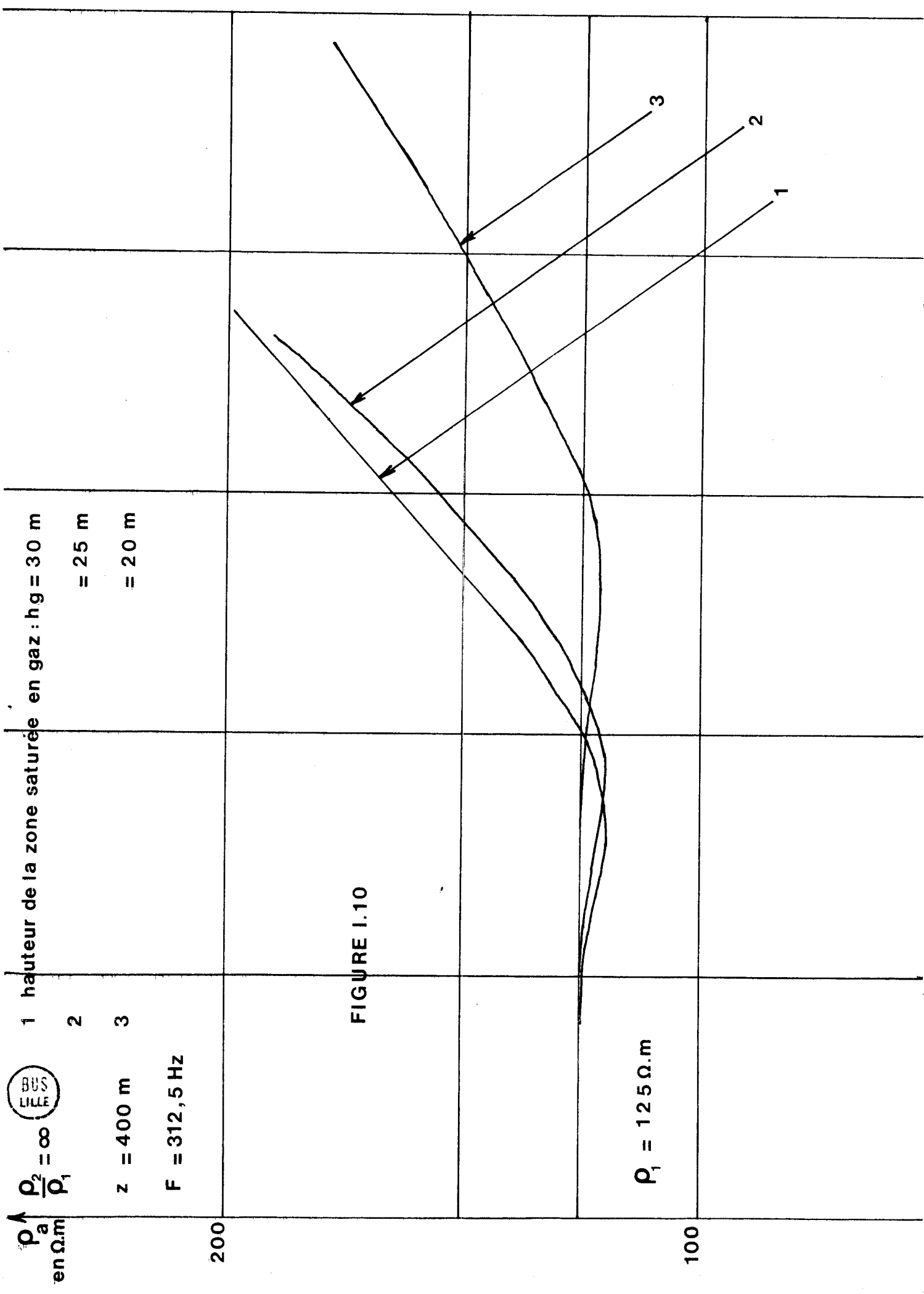


figure.1.8.

- ρ_1 : résistivité du demi-milieu équivalent
- ρ_2 : résistivité de la zone saturée en gaz
- ρ_3 : résistivité de la zone saturée en eau.

Le toit du gisement est situé à une profondeur h voisine de 400m par rapport à la surface du sol. Celle-ci se trouve à une altitude voisine de 70m par rapport au niveau de la mer.

Les isobathes du toit du réservoir sont représentés sur la figure.1.9. (les profondeurs des courbes de niveau sont données par rapport au niveau de la mer).



Deux informations supplémentaires sont nécessaires. Ce sont les valeurs des résistivités ρ_1 et ρ_2 .

On peut montrer à partir du latérolog que la résistivité ρ_3 de la zone saturée en eau est très voisine de celle des terrains sous-jacents.

Nous avons donc négligé la contribution de cette partie du réservoir.

La sonde de mesure a été immobilisée au niveau du gisement, soit à 400m de la surface du sol. La résistivité équivalente ρ_1 à cette profondeur est de $125\Omega.m$.

Nous avons choisi un contraste de résistivité ρ_2/ρ_1 infini, nous réservant par la suite la possibilité de faire varier ce contraste. *C'est une possibilité que n'offre pas la cuve analogique mais que permet le modèle mathématique que nous avons développé.*

11.2.2. Résultats du modèle mathématique sur le puits B 104

Nous présentons sur la figure.1.10. les courbes théoriques de la variation de la résistivité apparente ρ_a en fonction de la distance r dans un demi-milieu homogène de résistivité ρ_1 . Pour chacune des courbes représentées nous avons supposé que la hauteur de la zone saturée en gaz s'étendait du toit du stockage de BEYNES jusqu'aux isobathes -330 (courbe.1.), -325 (courbe.2.), -320 (courbe.3.).

Ces courbes obtenues sur ordinateur montrent que la méthode télélog permet de mettre en évidence la présence d'un gisement de gaz (c'est-à-dire l'existence d'une hétérogénéité présentant un contraste de résistivité de l'ordre de 20 ou supérieur à 20 avec le milieu encaissant).

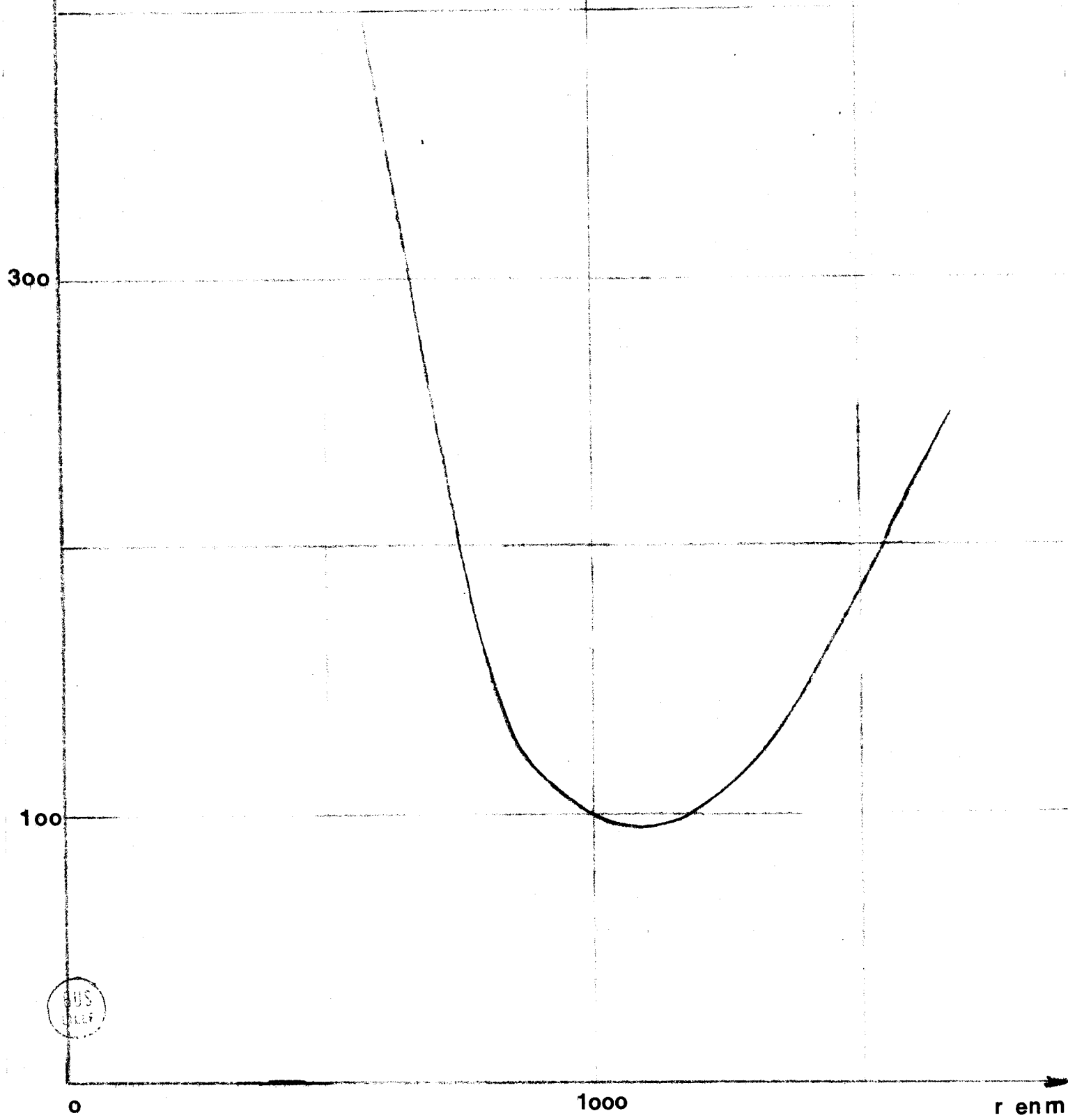
Cette mise en évidence se traduit par des "remontées" des courbes de résistivité apparentes de l'ordre de 100%. Ceci signifie qu'il n'existe pratiquement aucune chance pour que le télélog ne décèle pas la présence d'un gisement situé à quelques centaines de mètres d'un forage qui ne l'a pas rencontré.

ρ_a en $\Omega.m$

PROFIL a $z=400$ m

$F=312,5$ Hz

FIGURE I.11



11.2.3. Comparaison avec les relevés de la campagne de mesure sur B 104

La figure.1.10. montre bien l'existence d'un minimum qui est en relation caractéristique avec le bord du gisement le plus voisin du forage. Mais l'amplitude de ce minimum calculée par l'ordinateur ne représente qu'une variation inférieure à 5% par rapport à la résistivité du demi-milieu homogène.

Sur la figure 1.11., nous avons représenté la courbe de résistivité apparente obtenue à partir des mesures effectuées en 1970 à BEYNES. On constate sur cette figure que le minimum est très net, mais l'allure de la courbe ne correspond pas à celle obtenue théoriquement par le modèle mathématique (on remarque surtout une importante remontée de ρ_a pour les faibles valeurs de r).

Nous avons essayé d'expliquer cette différence en introduisant l'effet perturbateur du câble reliant la sonde au récepteur de surface.

11.2.4. Effet perturbateur du câble reliant la sonde au récepteur

Le modèle mathématique qui a servi à tracer les courbes de la figure.1.10. ne tient pas compte de l'effet perturbateur du câble.

Un travail lancé par l'U.S.T.L. et qui a conduit en 1973 à la soutenance de thèse de M. VACHON⁽¹⁸⁾ a étudié l'effet d'un tubage isolant sur les mesures télélog dans un milieu homogène.

Nous avons repris ce travail en le transformant pour obtenir l'effet perturbateur du câble conducteur auquel la sonde est suspendue.

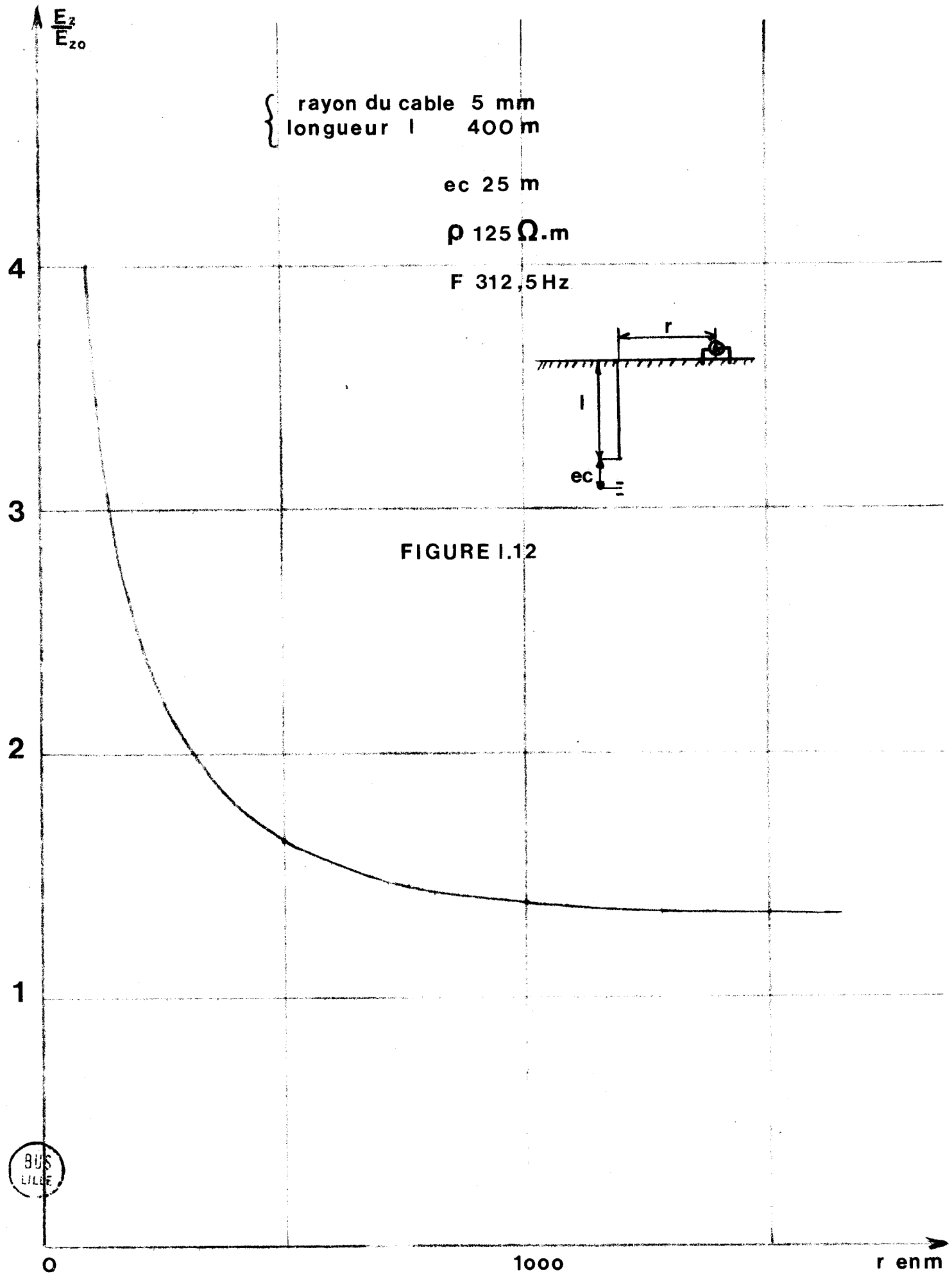


FIGURE I.12

BUS
LILLE

Nous avons représenté sur la figure.1.12. le rapport E_z/E_{z_0} où E_z est l'amplitude du champ électrique reçu aux bornes du dipôle récepteur en présence du câble reliant la sonde au récepteur de surface ; E_{z_0} est l'amplitude du champ qui apparaîtrait aux bornes des électrodes de mesure en l'absence de câble . Ce rapport est représenté en fonction de la distance émetteur-forage.

Si l'on rapproche les figures.1.10., 1.11. et 1.12., il est clair que l'allure des courbes expérimentales peut s'expliquer par un effet prépondérant de l'influence parasite du câble jusqu'à une distance émetteur-forage de 1000m environ, puis par la *manifestation indiscutable du gisement que traduit la "remontée" des courbes de résistivité apparente au-delà de cette distance.*

Dans ces conditions, le minimum sur lequel étaient basées les interprétations antérieures du télélog n'est pas le faible minimum relevé par le modèle mathématique directement lié au bord du gisement mais un minimum résultant des actions combinées de l'effet perturbateur du câble et de la remontée *très importante* des courbes de résistivité apparente qui, comme nous l'avons affirmé plus haut, révèle sans ambiguïté possible la présence du gisement.

II.3. ROLE DE LA STRATIFICATION DU TERRAIN

L'anomalie de résistivité peut être assimilée à une distribution de dipôles électriques équivalente, le moment de ces dipôles est proportionnel au champ électrique total régnant dans l'hétérogénéité.

Si on remplace le demi-milieu homogène par une stratification horizontale, le champ électrique total \vec{E}_2 en chaque point de l'anomalie va être modifié en module et en direction. Par ailleurs, ces dipôles équivalents rayonneront dans un milieu stratifié et non dans un demi-milieu. Il en résulte que la contribution de l'hétérogénéité au champ total dans un terrain stratifié sera différente de celle de la même anomalie dans un sol supposé homogène.

Ce raisonnement peut remettre en cause l'hypothèse qui revient à assimiler le terrain stratifié à un demi-milieu homogène pour étudier la perturbation provoquée par une anomalie.

Il serait donc souhaitable d'étudier directement la réponse d'une hétérogénéité en milieu stratifié. Cette étude doit se faire par étapes de difficultés croissantes, en considérant par exemple, un milieu à deux ou trois couches de conductivité différente contenant une anomalie de résistivité. La généralisation de ce travail pour un nombre quelconque de couches pourrait être ensuite entreprise si le besoin s'en fait sentir.

La liste des phénomènes parasites que nous venons de décrire n'est pas exhaustive, il reste à considérer l'effet du pendage des couches, des déformations dues à la topologie de surface, des failles et de leurs rejets etc ... Cependant on peut penser qu'après l'étude de l'influence de l'empilement des couches géologiques, les principaux effets parasites auront été étudiés. Il faut cependant remarquer qu'après avoir fait des études séparées de ces différents effets, il resterait à construire un modèle de synthèse.

II.4. CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE

Dans cette seconde partie, nous avons établi la liste des principaux effets à prendre en compte pour l'interprétation des mesures télég.

Nous avons montré sur un exemple que, malgré ces effets parasites, la méthode télég permet de mettre en évidence la présence d'un gisement. Cette mise en évidence se traduit par des "remontées" des courbes de résistivité apparente de l'ordre de 100%. Ceci signifie qu'il n'existe pratiquement aucune chance pour que le télég ne décèle pas la présence d'un gisement situé à quelques centaines de mètres d'un forage qui ne l'a pas rencontré.

Nous avons également montré la nécessité d'entreprendre l'étude de la faisabilité d'un modèle de synthèse. Ce modèle tenant compte des perturbations apportées par le dispositif de mesure d'une part, et par le milieu encaissant d'autre part devrait permettre de déterminer avec une bonne précision la distance du bord du gisement au forage.

CHAPITRE. II.

REPRESENTATION D'UNE ANOMALIE DE RESISTIVITE PAR UNE DISTRIBUTION DE DIPOLES ELECTRIQUES FONCTION DU CHAMP ELECTRIQUE TOTAL EXISTANT DANS CETTE ANOMALIE.

Dans ce chapitre, nous établissons les expressions intégrales des potentiels scalaire ϕ et vecteur \vec{A} dans un demi-milieu conducteur, isotrope, linéaire contenant une anomalie de résistivité. Nous supposons que la fréquence de ces potentiels, fonctions sinusoïdales du temps, est bien inférieure à la fréquence caractéristique du milieu encaissant ce qui revient à admettre l'hypothèse : $\sigma \gg \omega\epsilon$.

Nous montrons que, quelle que soit la source du champ électromagnétique, l'anomalie se comporte comme une distribution de dipôles électriques verticaux et horizontaux. Nous allons vérifier cette affirmation dans le cas où l'émetteur est un D.E.H. non contenu dans l'hétérogénéité.

Dans ce cas d'excitation, nous calculerons le champ électrique dans le milieu encaissant en fonction du champ électrique total dans l'anomalie.

Nous montrerons que les composantes de ce dernier sont solutions d'un système de trois équations intégrales de FREDHOLM dont nous donnerons la méthode numérique de résolution.

II.1. EXPRESSIONS INTEGRALES DU POTENTIEL SCALAIRE ϕ ET DU POTENTIEL VECTEUR \vec{A}
DANS UN DEMI-MILIEU QUELCONQUE CONTENANT UNE ANOMALIE DE CARACTERISTIQUES
ELECTRIQUES DIFFERENTES DU MILIEU ENCAISSANT

Considérons un milieu (milieu 1) de volume V où règne un champ électromagnétique. Nous supposons que ce volume est limité par une demie-sphère Σ de rayon R_0 arbitrairement grand et de centre O . Ce milieu contient une anomalie de caractéristiques électriques différentes du milieu encaissant (milieu 2). Cette hétérogénéité de volume V_2 est limitée par une surface fermée S_i (figure. II.1.).

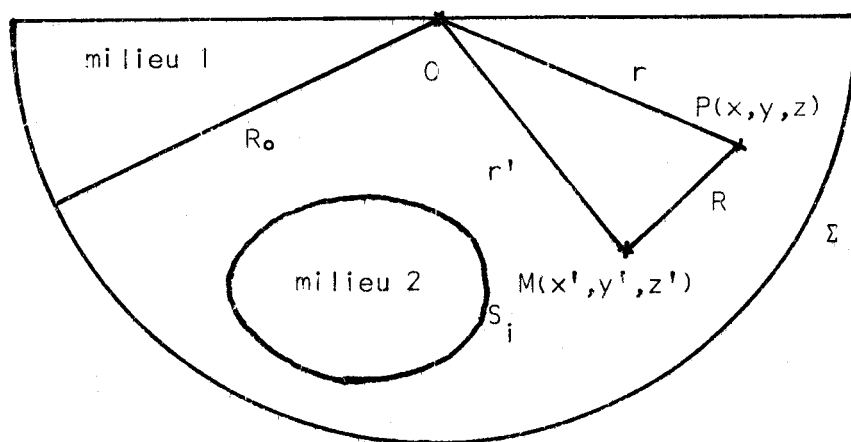


figure. II.1.

L'action de ces deux milieux sur le champ électromagnétique qui y règne peut être assimilée à celle d'une distribution de charges et de courants répartie dans le vide dont le permittivité est ϵ_0 et la perméabilité μ_0 .

On démontre à partir des équations de Maxwell ⁽¹⁹⁾ que les champs magnétique \vec{B} et électrique \vec{E} , calculés en tout point du volume V limité par la demie-sphère Σ dérivent de deux potentiels scalaire ϕ et vecteur \vec{A} au moyen des relations :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} \phi - j\omega \vec{A} \quad (11.1.)$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (11.2.)$$

Les potentiels ϕ et \vec{A} vérifient les relations ci-dessous :

$$\Delta \phi - \gamma_0^2 \phi = - \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0} \quad (11.3.)$$

$$\Delta \vec{A} - \gamma_0^2 \vec{A} = - \mu_0 \overrightarrow{\rho_m V} \quad (11.4.)$$

$$\text{div} \vec{A} + \frac{\gamma_0^2}{j\omega} \phi = 0 \quad \text{jauge de LORENTZ} \quad (11.5.)$$

Dans les relations 11.3. à 11.5., les différentes constantes et fonctions sont définies de la manière suivante :

$$\gamma_0^2 = - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$$

$$\overrightarrow{\rho_m V} = \vec{J} + j\omega \vec{P} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{M} \quad (11.6.)$$

$$\bar{\rho} = \rho_{lib} - \text{div} \vec{P} \quad (11.7.)$$

ω est la pulsation des champs et potentiels, fonctions sinusoïdales du temps

$\overrightarrow{\rho_m V}$ est la densité de charges mobiles (distribution des courants)

$\bar{\rho}$ est la densité des charges totales (distribution des charges)

\vec{P} est la polarisation du milieu

\vec{M} est la densité de moments magnétiques

ρ_{lib} est la densité de charges libres

\vec{J} est la densité du courant de conduction.

L'espace étant rapporté à l'origine 0, considérons une fonction scalaire ψ qui vérifie dans tout le domaine V limité par Σ la relation de Helmholtz : (20)

$$\Delta \psi - \gamma_0^2 \psi = - 4\pi \delta(|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (11.8.)$$

$\delta(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ est la fonction de Dirac.

Nous supposons que cette fonction ψ ne dépend que des distances R et R' séparant respectivement le point d'observation P du point courant d'intégration M et de son symétrique M' par rapport au plan diamétral Π limitant la demi-sphère Σ (Figure 11.2.).

Nous supposons en outre que ψ est nulle quand M' appartient au plan Π .

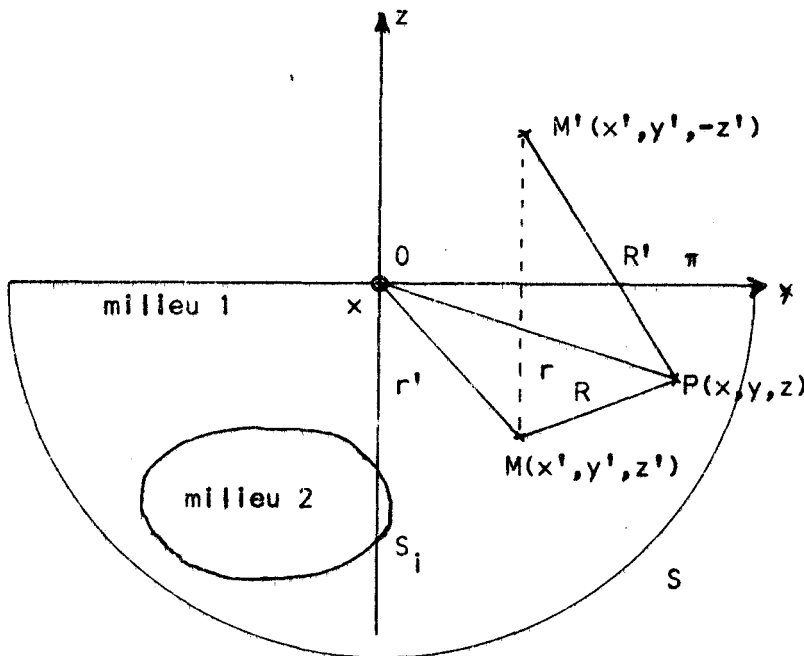


Figure 11.2.

La solution élémentaire bien connue de l'équation de HELMOLTZ (11.8.), ne dépendant que de la distance PM est la suivante :

$$\psi(x, y, z; x', y', z') = \frac{e^{-\gamma_0 R}}{R}$$

$$\text{ou } R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

Toute combinaison linéaire de solutions élémentaires est encore solution de l'équation de HELMOLTZ. Il en résulte que si l'on veut construire une fonction de GREEN ne dépendant que des distances R et R' et nulle pour $z' = 0$, on choisira comme fonction ψ :

$$\psi(x, y, z ; x', y', z') = \frac{e^{-\gamma_0 R}}{R} - \frac{e^{-\gamma_0 R'}}{R'} \quad (11.9.)$$

$$\text{ou } R' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}$$

Dans la suite du développement de ce paragraphe, et pour simplifier l'écriture du formalisme, nous continuerons d'appeler ψ la fonction de GREEN définie par 11.9.

Appliquons le théorème de GREEN à la fonction scalaire ψ et au potentiel ϕ sous réserve que ces deux fonctions soient définies et continues dans tout le volume V , ainsi que leurs dérivées premières et secondes.

Nous obtenons dans ces conditions :

$$\int_V (\psi \Delta \phi - \phi \Delta \psi) dv = \int_{\Sigma} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds \quad (11.10.)$$

\vec{n} est la normale à la surface S et au plan Π . Cette normale est dirigée vers l'extérieur de Σ .

$\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale définie de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial n} (\phi) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} (\phi)$$

La dérivée normale du potentiel scalaire sur la surface S_i présente une discontinuité qui traduit celle de la composante normale du champ électrique au voisinage immédiat de cette surface.

Si \vec{n}_1 est la normale à la surface S_i orientée du milieu 1 vers le milieu 2 et \vec{n}_2 la normale orientée du milieu 2 vers le milieu 1 (Figure 11.3.) les conditions aux limites pour les composantes normales du champ électrique sont :

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 = - \frac{\bar{\eta}}{\epsilon_0} \quad (11.11.)$$

pour ϕ

$$\frac{\partial \phi}{\partial n_1} + \frac{\partial \phi}{\partial n_2} = \frac{\bar{\eta}}{\epsilon_0} \quad (11.12.)$$

$\bar{\eta}$ est la densité superficielle de charge sur la surface S_i

$$\bar{\eta} = \eta_{lib} - \vec{P}_1 \cdot \vec{n}_1 - \vec{P}_2 \cdot \vec{n}_2$$

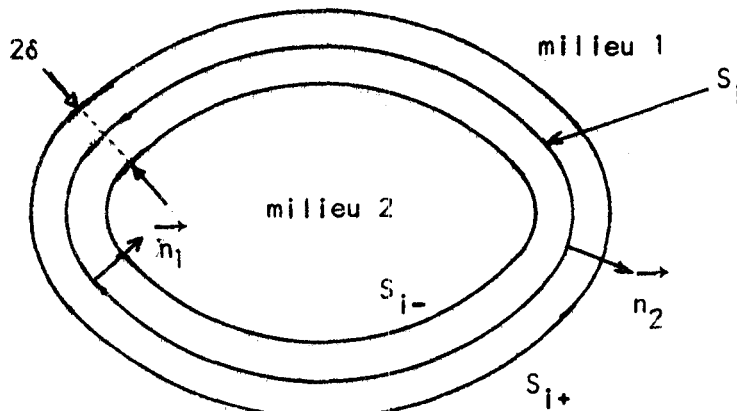


Figure 11.3.

Compte tenu des conditions de continuité imposées aux fonctions ψ et ϕ et à leurs dérivées, on élimine la discontinuité de la dérivée normale de ϕ sur la surface S_i en entourant celle-ci par deux surfaces S_{i-} et S_{i+} parallèles à S_i et situées respectivement à l'intérieur du milieu 2 et à l'extérieur de celui-ci. Ces deux surfaces sont placées à une distance δ de S_i . On fait ensuite tendre cette distance δ , arbitrairement petite, vers zéro.

L'expression du théorème de GREEN (11.10.) devient alors :

$$\int_V (\psi \Delta \phi - \phi \Delta \psi) dV = \int_{\Sigma} \left(\frac{\psi \partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_{i+}, S_{i-}} \left(\frac{\psi \partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \quad (11.13.)$$

En reportant dans le premier membre de 11.13., la valeur de $\Delta \psi$ déduite de l'équation de HELMOLTZ (11.8.), et en introduisant le second membre de l'équation d'onde en ϕ , nous obtenons :

$$\int_V (\psi \Delta \phi - \phi \Delta \psi) dV = 4\pi \phi(P) - \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \bar{\rho} \psi dV$$

et 11.13. devient :

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \bar{\rho} \psi dV + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{S_{i^+}, S_{i^-}} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \quad (11.14.)$$

Examinons successivement les deux dernières intégrales figurant au deuxième membre de 11.14.

Soit I_1 la première d'entre elles :

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$$

ψ étant nulle quand le point M est situé dans le plan Π , I_1 peut encore s'écrire :

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\pi} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (11.15.)$$

Faisons maintenant tendre le rayon R_0 vers l'infini, de manière à transformer V en un demi-milieu infini.

La surface S se trouve alors suffisamment éloignée des sources du champ électromagnétique pour admettre que la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques étant finie, le front de l'onde émise par ces sources n'atteint jamais la surface de la sphère S. Il en résulte que sur S, on peut admettre que ϕ et $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ sont nuls.

Il en résulte que l'équation 11.15. se réduit à :

$$I_1 = - \frac{1}{4\pi} \int_{\pi} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (11.16.)$$

Considérons enfin sur la surface S_i de l'hétérogénéité l'intégrale I_2 telle que :

$$I_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{S_{i+}, S_{i-}} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$$

cette intégrale s'écrit :

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{S_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n_1} + \frac{\partial \phi}{\partial n_2} \right) \psi dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_i} \phi \left(\frac{\partial \psi}{\partial n_1} + \frac{\partial \psi}{\partial n_2} \right) dS$$

Les fonctions ϕ , $\frac{\partial \psi}{\partial n_1}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial n_2}$ étant continues sur S_i , et les normales \vec{n}_1 et \vec{n}_2 orientées dans le sens contraire, la deuxième intégrale de la relation ci-dessus est nulle. Par ailleurs, en reportant dans le premier terme du second membre de cette relation la condition aux limites sur les dérivées normales du potentiel (II.12.), nous obtenons :

$$I_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_i} \vec{n} \cdot \psi dS \quad (II.17.)$$

D'après II.16. et II.17. l'expression du potentiel scalaire $\phi(P)$ devient :

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{p} \cdot \psi dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_i} \vec{n} \cdot \psi dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\pi} \phi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (II.18.)$$

Par un raisonnement tout à fait identique à celui que nous venons de développer, on peut montrer que, en coordonnées cartésiennes, le potentiel vecteur \vec{A} vérifie des relations analogues à II.18. D'où :

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{p}_m \cdot \psi dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_i} \vec{n}_m \cdot \psi dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\pi} \vec{A} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (II.19.)$$

Pour que les expressions intégrales du potentiel scalaire ϕ (11.18.) et du potentiel vecteur \vec{A} (11.19.) vérifient la condition de Lorentz (11.5.) il faut que les densités volumiques et superficielles de charges et de courant vérifient les relations suivantes ⁽¹⁹⁾ :

$$\text{div } \vec{\rho}_m + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = 0 \quad (11.20.)$$

(principe de conservation de l'électricité)

$$\text{div } \vec{\eta}_m + j\omega \bar{\eta} - \vec{\rho}_{m+} \cdot \vec{n}_1 - \vec{\rho}_{m-} \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (11.21.)$$

II.2. EXPRESSIONS INTEGRALES DES POTENTIELS VECTEUR \vec{A} et SCALAIRE ϕ
DANS LES MILIEUX CONDUCTEURS (1) et (2) SUPPOSES ISOTROPES ET
LINEAIRES

Un milieu isotrope et linéaire non polarisé de façon permanente est caractérisé par les relations suivantes (11.3.) : ⁽²¹⁾

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} \quad \vec{M} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \vec{H} \quad (11.22.)$$

où σ , ϵ , μ , μ_0 et ϵ_0 sont des constantes scalaires.

- σ est la conductivité du milieu considéré
- ϵ est la permittivité du milieu considéré
- μ est la perméabilité du milieu considéré.

Pour définir plus complètement un conducteur linéaire et isotrope, il est nécessaire d'établir un critère limite de rapidité de disparition des charges libres à l'intérieur de ce conducteur.

Considérons la relation suivante :

$$\epsilon_0 \text{div } \vec{E} = \bar{\rho} \quad (11.23.)$$

Compte tenu de 11.22., du principe de conservation de l'électricité (11.20.) et de la définition de $\vec{\rho}_m \vec{V}$ et $\bar{\rho}$ la densité de charges libres vérifie la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{lib} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_{lib} = 0$$

d'où : $\rho_{lib} = \rho_0 e^{-t/T_R}$ (11.24.)

T_R est le temps de relaxation défini par Maxwell :

$$T_R = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

Dans l'approximation des basses fréquences, la période des fonctions sinusoïdales du temps est très grande devant T_R . Dans ces conditions, d'après 11.24., la densité de charges libres ρ_{lib} est constamment nulle.

Ceci peut aussi s'exprimer en disant que la conductivité du terrain, et la permittivité vérifient l'inégalité suivante :

$$\sigma \gg \omega \epsilon \quad (11.25.)$$

Il en résulte que la polarisation P est toujours négligeable.

d'où :

$$\bar{\rho} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{n} = n_{lib} \quad (11.26.a.)$$

Enfin, si le milieu conducteur n'est pas un conducteur parfait, la conduction de l'électricité se fait "toujours en volume" et l'on ne peut définir de densité superficielle de courant. En conséquence :

$$\vec{n}_m \vec{V} = 0 \quad (11.26.b.)$$

Si les conducteurs (1) et (2) sont des conducteurs isotropes, et linéaires, définis respectivement par leurs constantes électromagnétiques $(\sigma_1, \epsilon_0, \mu_1)$

et $(\sigma_2, \epsilon_0, \mu_2)$ et si la fréquence est bien inférieure à la plus petite des fréquences caractéristiques des deux milieux les expressions du potentiel scalaire ϕ et vecteur \vec{A} sont les suivantes :

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_i} \eta_{ib} \psi \, dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\pi} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dS \quad (11.27.)$$

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \rho_m \vec{V} \psi \, dV - \frac{1}{4\pi} \int_{\pi} \vec{A} \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dS \quad (11.28.)$$

Les relations 11.27. et 11.28. vérifiant la jauge de Lorentz 11.5. le champ électrique peut alors s'exprimer uniquement en fonction du potentiel vecteur \vec{A} , dans la suite de ce travail nous ne nous intéresserons plus qu'à ce dernier. Dans ces conditions l'expression du champ électrique devient :

$$\vec{E} = j\omega \left[\frac{1}{\gamma_0^2} \overrightarrow{\text{grad div } \vec{A}} - \vec{A} \right] \quad (11.29.)$$

Dans une région où la densité de charges mobiles $\rho_m \vec{V}$ est nulle, compte tenu de 11.4., la relation 11.29. s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{j\omega}{\gamma_0^2} \overrightarrow{\text{rot rot } \vec{A}} \quad (11.30.)$$

ou encore en introduisant le potentiel de Hertz $\vec{\Pi}$ (22)

$$\vec{E} = \overrightarrow{\text{rot rot } \vec{\Pi}} \quad (11.31)$$

$$\vec{B} = \frac{\gamma_0^2}{j\omega} \overrightarrow{\text{rot } \vec{\Pi}} \quad (11.32.)$$

II.3. EXPRESSION INTEGRALE DU POTENTIEL VECTEUR \vec{A} DANS UN DEMI-MILIEU ISOTROPE ET LINEAIRE CONTENANT UNE ANOMALIE DE RESISTIVITE, EN FONCTION DU CHAMP ELECTRIQUE TOTAL \vec{E}_2 A L'INTERIEUR DE CETTE HETEROGENEITE

Dans ce paragraphe, nous allons montrer qu'il est possible de réduire le domaine d'intégration V au seul volume V_2 , dans le cas où les milieux 1 et 2 sont des milieux isotropes et linéaires. Nous affecterons de l'indice 1 les composantes du champ électromagnétique dans le milieu 1 et de l'indice 2 les composantes du champ électromagnétique dans le milieu 2.

II.3.1. Les milieux 1 et 2 ne contiennent pas de Source du champ électromagnétique

Dans ce cas, on montre ⁽²²⁾ que dans le milieu 1 il est possible de tenir compte des distributions de courant $\vec{\rho}_m$ dans la constante de propagation. Il en résulte que les relations II.3., II.4., et II.5. s'écrivent :

$$\Delta \vec{A}_1 - \gamma_1^2 \vec{A}_1 = 0 \tag{11.33.}$$

$$\Delta \phi_1 - \gamma_1^2 \phi_1 = 0 \tag{11.34.}$$

$$\text{div } \vec{A}_1 + \frac{\gamma_1^2}{j\omega} \phi_1 = 0 \tag{11.35.}$$

Dans ces relations γ_1^2 vaut : $\gamma_1^2 = j\omega\mu_1\sigma_1$

Nous allons montrer, maintenant, que le milieu 2 peut être assimilé à un milieu de mêmes caractéristiques électriques que le

milieu 1 mais contenant une distribution de courant qui traduit la différence de nature de ces deux milieux.

Considérons l'équation de MAXWELL Ampère, écrite dans le milieu 2 :

$$\text{rot } \vec{H}_2 = \sigma_2 \vec{E}_2 \quad (\sigma_2 \gg \omega \epsilon_0) \quad (11.36.)$$

en faisant apparaître l'induction magnétique \vec{B}_2 , la relation ci-dessus devient :

$$\text{rot} [\mu_1 \vec{H}_2 + (\mu_2 - \mu_1) \vec{H}_2] = \mu_1 \sigma_1 \vec{E}_2 + (\mu_2 \sigma_2 - \mu_1 \sigma_1) \vec{E}_2 \quad (11.37.)$$

La relation (11.37.) peut être considérée comme la relation de Maxwell-Ampère écrite dans un milieu de caractéristiques électriques $\mu_1, \sigma_1, \epsilon$ contenant une distribution de courant $\vec{\rho}_m \vec{V}_e$ telle que :

$$\vec{\rho}_m \vec{V}_e = \frac{\mu_2 \sigma_2 - \mu_1 \sigma_1}{\mu_1} \vec{E}_2 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1} \text{rot } \vec{H}_2 \quad (11.38.)$$

11.37. devient alors :

$$\mu_1 \text{rot } \vec{H}_2 = \mu_1 [\sigma_1 \vec{E}_2 + \vec{\rho}_m \vec{V}_e] \quad (11.39.)$$

Nous voyons donc qu'un demi-milieu contenant une anomalie est assimilable à un demi-milieu homogène contenant une distribution de courant $\vec{\rho}_m \vec{V}_e$ équivalente à l'hétérogénéité (11.38.).

Dans tout ce demi-milieu les potentiels vecteur \vec{A} et scalaire ϕ vérifient (23) en tout point les équations suivantes :

$$\Delta \vec{A} - \gamma_1^2 \vec{A} = - \mu_1 \vec{\rho}_m \vec{V}_e \delta(x', y', z') \quad (11.40.)$$

$$\Delta \phi - \gamma_1^2 \phi = 0 \quad (11.41.)$$

$$\text{div } \vec{A} + \frac{\gamma_1^2}{j\omega} \phi = 0 \quad (11.42.)$$

δ est une fonction qui vaut 1 dans l'anomalie et qui est nulle partout à l'extérieur de celle-ci.

L'expression intégrale du potentiel vecteur \vec{A} (11.28.) reste valable à condition de remplacer μ_0 par μ_1 , ϵ_0 par $\frac{\sigma}{j\omega}$ et γ_0 par γ_1 ,

d'où :

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_1}{4\pi} \int_{V_2} \frac{\rho_m \vec{V}_e}{r} \left[\frac{e^{-\gamma_1 R}}{R} - \frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'} \right] dV - \frac{1}{4\pi} \int_{\pi} \vec{A} \left[\frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1} - \frac{e^{-\gamma_1 R'_1}}{R'_1} \right) \right]_{z'=0} dS \quad (11.43.)$$

Nous supposons dans la suite de ce travail que les deux milieux ont même perméabilité magnétique, il en résulte que :

$$\rho_m \vec{V}_e = (\sigma_2 - \sigma_1) \vec{E}_2 \delta(x', y', z') \quad (11.44.)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta(x', y', z') &= 0 \text{ si } M \notin V_2 \\ \delta(x', y', z') &= 1 \text{ si } M \in V_2 \end{aligned} \right\}$$

avec $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$.

11.3.2. Le milieu 1 contient un dipôle électrique parcouru par un courant I

Si le milieu 1 contient en plus un dipôle électrique parcouru par un courant d'amplitude constante et égale à I, 11.44. s'écrit :

$$\rho_m \vec{V}_e = \vec{J} \cdot \delta'(x', y', z') + (\sigma_2 - \sigma_1) \vec{E}_2 \delta(x', y', z') \quad (11.45.)$$

\vec{J} est la densité de courant à l'intérieur du dipôle

$\delta'(x', y', z')$ est une fonction égale à 1 dans le dipôle et nulle partout ailleurs

Dans ces conditions, 11.43 s'écrit :

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{z} \left[\frac{e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1} - \frac{e^{-\gamma_1 R_2}}{R_2} \right] + \frac{\mu_0 (\sigma_2 - \sigma_1)}{4\pi} \int_{V_2} \vec{E}_2 \left[\frac{e^{-\gamma_1 R}}{R} - \frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'} \right] dV - \frac{1}{4\pi} \int_{\pi} \vec{A} \left\{ \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{e^{-\gamma_1 R_0}}{R_0} - \frac{e^{-\gamma_1 R'_0}}{R'_0} \right] \right\}_{z'=0} dS \quad (11.46.)$$

R_1 est la distance du point P au centre du dipôle

R_2 est la distance du point P au centre du dipôle image par rapport au plan Π

$|\vec{l}|$ est la longueur du dipôle

$\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$ direction du dipôle.

II.4. EXPRESSION INTEGRALE DU POTENTIEL VECTEUR \vec{A} DANS UN SYSTEME DE COORDONNES CYLINDRIQUES

En examinant l'équation II.44., qui donne la densité volumique de courant équivalente à l'anomalie, nous remarquons que chaque élément de volume dV entourant un point M de l'hétérogénéité est équivalent à un dipôle électrique dont le moment est le suivant :

$$\vec{P}_e = (\sigma_2 - \sigma_1) \vec{E}_2 dV$$

Il en résulte qu'une anomalie donnée pourra toujours, quelque soit le dispositif émetteur qui l'excite, être remplacée par une distribution de dipôles verticaux et horizontaux.

Nous allons vérifier cette affirmation dans le cas où l'émetteur est un D.E.H. situé à une profondeur h par rapport à la surface du sol.

Dans ce paragraphe, nous allons exprimer chacune des intégrales scalaires donnant les composantes cartésiennes du potentiel vecteur \vec{A} (II.46.) dans un système de coordonnées cylindriques liées au repère o, x, y, z défini précédemment.

. nous supposons en outre que le dipôle d'émetteur est orienté suivant l'axe \vec{Ox} et situé au point de coordonnées $(0, 0, -h)$ (figure. II.4.)

. le point M' de coordonnées r', ϕ' et 0 est situé dans le plan Π , qui sépare le milieu 1 de l'atmosphère.

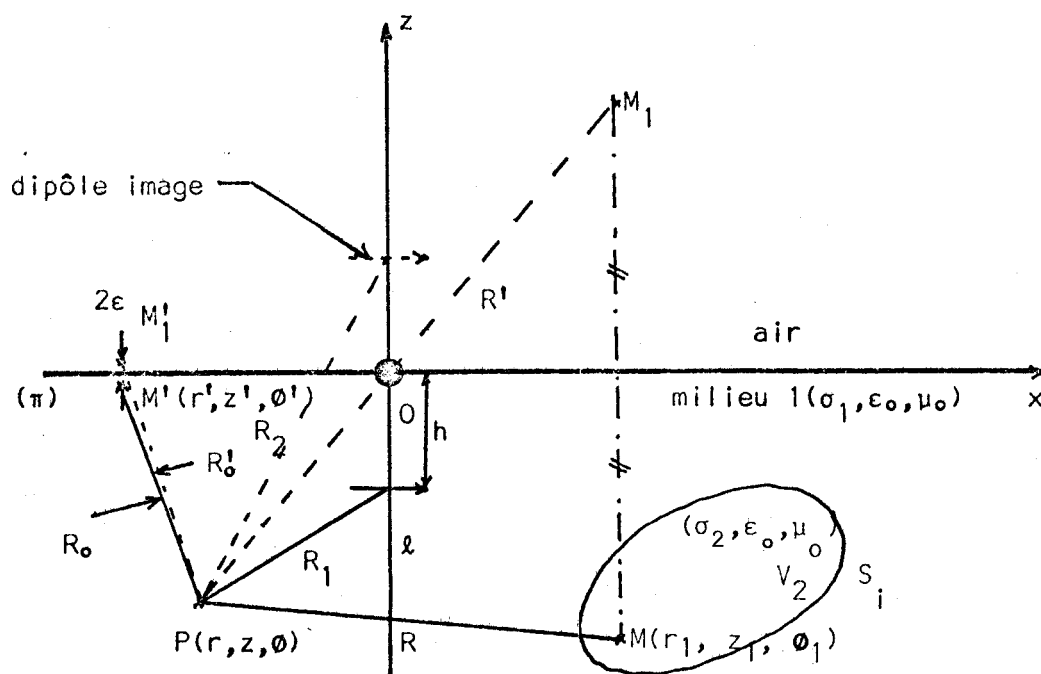


figure.11.4.

Considérons la composante A_x du potentiel vecteur \vec{A} , son expression qui se déduit de 11.46. est la suivante :

$$A_x(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} l \left[\frac{e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1} - \frac{e^{-\gamma_1 R_2}}{R_2} \right] + \frac{\mu_0(\sigma_2 - \sigma_1)}{4\pi} \int_{V_2} E_{2x}(M) \left[\frac{e^{-\gamma_1 R}}{R} - \frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'} \right] dV$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{\pi} A_x(M') \left\{ \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{e^{-\gamma_1 R_0}}{R_0} - \frac{e^{-\gamma_1 R'_0}}{R'_0} \right] \right\} ds \quad (11.47.)$$

$z'=0$

Soit J l'expression intégrale bien connue de la fonction de Green $\frac{e^{-\gamma_1 R}}{R}$:

$$J = \frac{e^{-\gamma_1 R}}{R} = \int_0^{\infty} e^{-u_1 |z+h|} \frac{J_0(\lambda r)}{u_1} \lambda d\lambda \quad (11.48.)$$

$$R = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$$

$$u_1 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_1^2} \quad \text{avec } R u_1 > 0$$

J_0 est la fonction de Bessel d'ordre zéro

$$h \geq 0$$

Il en résulte qu'en reportant 11.48. dans le premier terme I_1 de 11.47., nous obtenons :

$$I_1 = \frac{\mu_0 l l}{4\pi} \int_0^\infty \left[e^{-u_1|z+h|} - e^{u_1(z-h)} \right] \frac{J_0(\lambda r)}{u_1} \lambda d\lambda \quad (11.49.)$$

11.4.1. Nouvelle expression intégrale de
$$\int_{V_2} E_{2x}(M) \left[\frac{e^{-\gamma_1 R}}{R} - \frac{e^{-\gamma_1 R'}}{R'} \right] dV$$

Construisons un repère MX, Y, Z tel que les axes $\vec{MX}, \vec{MY}, \vec{MZ}$ soient respectivement parallèles aux axes $\vec{Ox}, \vec{Oy},$ et \vec{Oz} et soient ρ la distance horizontale PM et α l'azimut du point P dans ce nouveau repère (figure.11.5.).

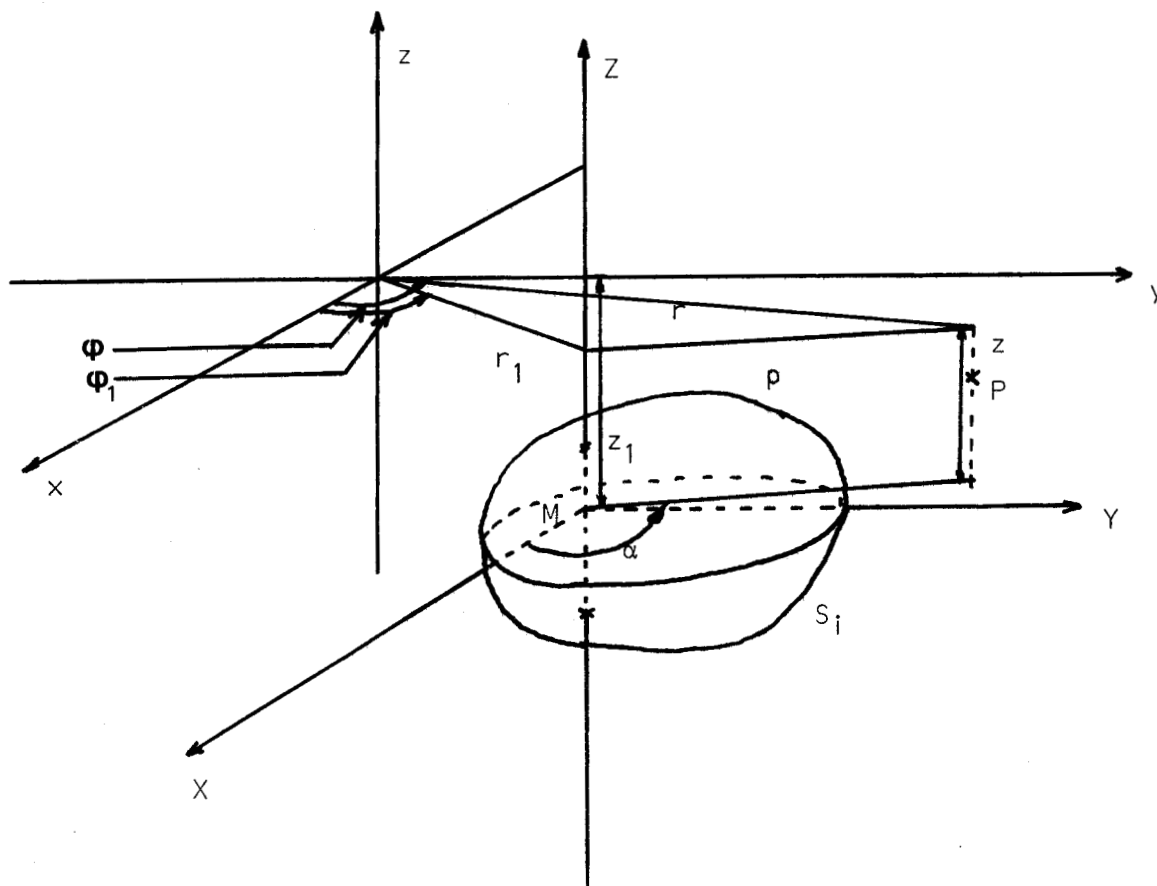


Figure 11.5.

Soit I_2 l'intégrale considérée, d'après 11.48. nous avons :

$$I_2 = \int_{V_2} E_{2x}(M) \int_0^\infty \left[e^{-u_1 |z-z_1|} - e^{u_1 (z+z_1)} \right] \frac{J_0(\lambda \rho)}{u_1} \lambda d\lambda \quad (11.50.)$$

(25)

En utilisant les théorèmes d'addition des fonctions de Bessel nous obtenons une nouvelle expression de $J_0(\lambda \rho)$ en fonction des coordonnées des points M et P dans le repère O, x, y, z .

$$J_0(\lambda \rho) = \sum_{v=0}^\infty (2-\delta_v^0) J_v(\lambda r_1) J_v(\lambda r) \cos v(\Phi - \Phi_1) \quad (11.51.)$$

δ_v^0 est le symbole de Kroenecker :

$$\begin{aligned} \delta_v^0 &= 1 \text{ si } v = 0 \\ \delta_v^0 &= 0 \text{ si } v \neq 0 \end{aligned}$$

J_v est la fonction de Bessel d'ordre v

d'où :

$$I_2 = \sum_{v=0}^\infty (2-\delta_v^0) \int_{V_2} E_{2x}(M) \cos v(\Phi - \Phi_1) dV_2 \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_1} \left[e^{-u_1 |z-z_1|} - e^{u_1 (z+z_1)} \right] \times J_v(\lambda r_1) J_v(\lambda r) d\lambda \quad (11.52.)$$

11.4.2. Nouvelle expression de l'intégrale de surface

$$\int_{\pi} A_x(M') \left\{ \frac{a}{\partial z'} \left[\frac{e^{-\gamma_1 R_0}}{R_0} - \frac{e^{-\gamma_1 R_0'}}{R_0'} \right] \right\} dS \quad z'=0$$

Construisons de même un repère M', X', Y', Z' dont les axes $\vec{M'X'}$, $\vec{M'Y'}$, $\vec{M'Z'}$ sont respectivement parallèles aux axes \vec{Ox} , \vec{Oy} , \vec{Oz} . Soient ρ' la distance PM' et β l'azimut du point P dans le repère M', X', Y', Z' (Figure 11.6.)

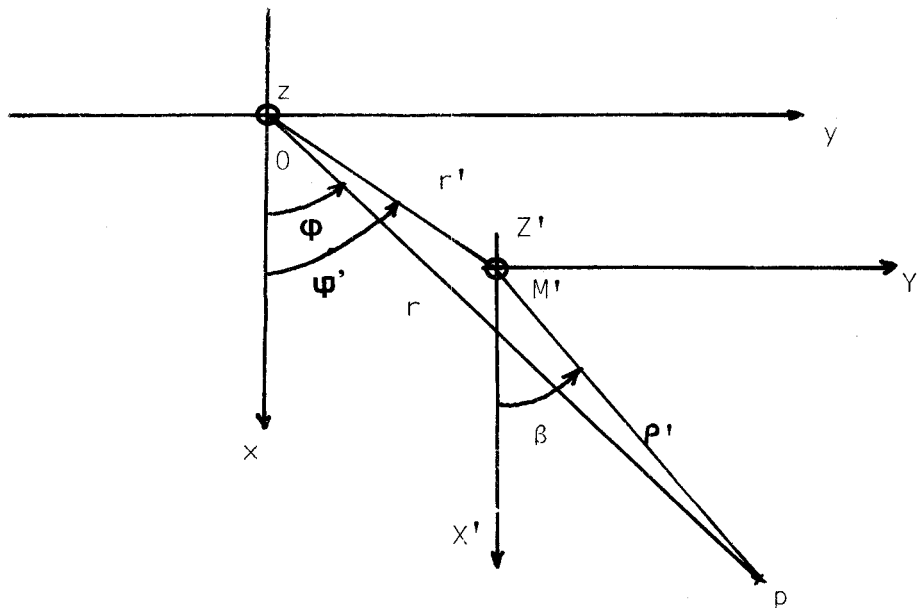


Figure 11.6.

Soit I_3 l'intégrale considérée, celle-ci s'écrit, en tenant compte de l'expression intégrale de $\frac{e^{-\gamma_1 R}}{R}$:

$$I_3 = -2 \int_{\pi} A_x(M') \int_0^{\infty} e^{u_1 z} J_0(\lambda \rho') \lambda d\lambda$$

En utilisant le théorème d'addition des fonctions de Bessel (11.51.), I_3 s'écrit encore :

$$I_3 = -2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (2-\delta_{\nu}^0) \int_{\pi} A_x(M') \cos \nu(\varphi - \varphi') \int_0^{\infty} e^{u_1 z} J_{\nu}(\lambda r) J_{\nu}(\lambda r') \lambda d\lambda dS \quad (11.53.)$$

D'une manière générale, le potentiel vecteur est une fonction continue de l'espace à l'extérieur des sources. En outre, c'est une fonction périodique de l'azimut. Il est donc légitime de chercher l'expression de chacune des composantes de \vec{A} sous la forme d'une série de Fourier de l'azimut.

Il en résulte que la composante A_x du potentiel vecteur s'écrit :

$$A_x(r', z', \varphi') = A_{x_0}(r', z') + \sum_{n=1}^{\infty} A_{x_n}^1(r', z') \cos n\varphi' + \sum_{n=1}^{\infty} A_{x_n}^2(r', z') \sin n\varphi' \quad (11.54.)$$

Reportons d'abord 11.54. dans la dernière expression de I_3 , et intégrons par rapport à la variable φ' . Compte tenu des propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques, nous obtenons pour I_3 la nouvelle expression suivante :

$$I_3 = -4\pi \sum_{v=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda e^{u_1 z} J_v(\lambda r) d\lambda \int_0^{\infty} [A_{xv}^1(r', 0) \cos v\varphi' + A_{xv}^2(r', 0) \sin v\varphi'] J_v(\lambda r') r' dr' \quad (11.55.)$$

Considérons une fonction $g(r)$ de la variable réelle r définie de la manière suivante :

$$g(r) = \int_0^{\infty} f(\lambda) J_m(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (11.56.a.)$$

$J_m(\lambda r)$ est la fonction de Bessel d'ordre m .
(20)

$f(\lambda)$ est la transformée de Hankel de la fonction $g(r)$. Son expression en fonction de $g(r)$ est donnée par :

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} g(r) J_m(\lambda r) r dr \quad (11.56.b.)$$

Nous rappelons que l'indice m est arbitraire.

En appelant respectivement $f_{xv}^1(\lambda)$ et $f_{xv}^2(\lambda)$ les transformées de Hankel

de $A_{xv}^1(r', 0)$ et de $A_{xv}^2(r', 0)$, 11.55. devient :

$$I_3 = -4\pi \sum_{v=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [f_{xv}^1(\lambda) \cos v\varphi' + f_{xv}^2(\lambda) \sin v\varphi'] e^{u_1 z} J_v(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (11.57.)$$

En reportant les valeurs des intégrales I_1 , I_2 et I_3 dans l'expression A_x , nous obtenons :

$$A_x(P) = A_{xp}(P) + S_1 + S_2$$

avec :

$$A_{xp}(P) = \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi} \int_0^\infty [e^{-u_1|z+h|} - e^{u_1(z-h)}] \frac{J_0(\lambda r)}{u_1} \lambda d\lambda$$

$$S_1 = \frac{\mu_0 (\sigma_2 - \sigma_1)}{4\pi} \sum_{v=0}^\infty (2 - \delta_v^0) \int_{V_2} E_{2x}^{(M)} \cos v(\varphi - \varphi_1) dV_2 \int_0^\infty [e^{u_1|z-z_1|} - e^{u_1(z+z_1)}] \times \frac{J_v(\lambda r_1)}{u_1} J_v(\lambda r) \lambda d\lambda$$

$$S_2 = \sum_{v=0}^\infty \int_0^\infty [f_{xv}^1(\lambda) \cos v\varphi + f_{xv}^2(\lambda) \sin v\varphi] e^{u_1 z} J_v(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (11.58.)$$

Pour les composantes $A_y(P)$ et $A_z(P)$ les expressions sont tout à fait analogues à 11.58.

Dans cette dernière relation les fonctions $f_{xv}^1(\lambda)$ et $f_{xv}^2(\lambda)$ sont des inconnues que l'on détermine en appliquant les conditions aux limites sur le plan Π .

11.5. CALCUL DES INCONNUES AU MOYEN DES CONDITIONS AUX LIMITES

Pour appliquer les conditions aux limites sur le plan Π , il est nécessaire de calculer les composantes cartésiennes du potentiel vecteur \vec{A}_0 dans le demi-milieu supérieur (c'est-à-dire dans l'atmosphère). Les caractéristiques électriques de ce dernier sont (ϵ_0, μ_0) .

L'expression du potentiel vecteur dans un demi-milieu ne contenant pas de source est donné par la formule 11.43.

Ce demi-milieu étant en plus parfaitement homogène, l'expression initiale de \vec{A}_0 est la suivante :

$$\vec{A}_0 = + \frac{1}{4\pi} \int_{\pi} \vec{A}_0(M') \left[\frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{e^{-\gamma_0 R_a}}{R_a} - \frac{e^{-\gamma_0 R'_a}}{R'_a} \right) \right]_{z'=0} dS \quad (11.59.)$$

γ_0 est la constante de propagation dans l'air. $\gamma_0 = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$

R_a et R'_a sont respectivement les distances du point courant dans l'air et de son image par rapport au plan π , au point d'intégration M' .

D'après 1₃ (11.57.), les composantes cartésiennes de \vec{A}_0 sont données par :

$$A_{0x} = - \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [a_{x\nu}^1(\lambda) \cos \nu \varphi - a_{x\nu}^2(\lambda) \sin \nu \varphi] e^{-u_0 z} J_{\nu}(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (11.60.)$$

$$A_{0y} = - \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [a_{y\nu}^1(\lambda) \cos \nu \varphi - a_{y\nu}^2(\lambda) \sin \nu \varphi] e^{-u_0 z} J_{\nu}(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (11.61.)$$

$$A_{0z} = - \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [a_{z\nu}^1(\lambda) \cos \nu \varphi - a_{z\nu}^2(\lambda) \sin \nu \varphi] e^{-u_0 z} J_{\nu}(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (11.62.)$$

$$u_0 = \sqrt{\gamma_0^2 + \lambda^2} \quad R u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \gamma_0^2 = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0$$

Les potentiels \vec{A}_0 et \vec{A}_1^* vérifient les conditions ci-dessous sur le plan π : (19)

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_0 \quad (11.63.a.)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_{x1} = \frac{\partial}{\partial z} A_{x0} \quad (11.63.b.)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_{y1} = \frac{\partial}{\partial z} A_{y0} \quad (11.63.c.)$$

$$\frac{1}{\gamma_1} \operatorname{div} \vec{A}_1 = \frac{1}{\gamma_0} \operatorname{div} \vec{A}_0 \quad (11.63.d.)$$

Il en résulte que les expressions finales des composantes du potentiel vecteur \vec{A}_1 sont les suivantes :

* L'indice 1 est affecté aux composantes du potentiel vecteur dans le sol.

$$A_{x_1} = A_{x_1}^P + A_{x_1}^S \quad (11.64.)$$

$$A_{y_1} = A_{y_1}^S \quad (11.65.)$$

$$A_{z_1} = A_{z_1}^P + A_{z_{11}}^S + A_{z_{12}}^S + A_{z_{13}}^S \quad (11.66.)$$

avec :

$$A_{x_1}^P = \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{u_1} \left[e^{-u_1 |z+h|} + e^{u_1(z-h)} \frac{u_1 - u_0}{u_1 + u_0} \right] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda$$

$$A_{x_1}^S = \frac{\mu_0 (\sigma_2 - \sigma_1)}{4\pi} \int_{V_2} E_{2x}(M) \int_0^\infty \frac{1}{u_1} \left[e^{-u_1 |z-z_1|} + e^{u_1(z+z_1)} \frac{u_1 - u_0}{u_1 + u_0} \right] J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda dV$$

$$A_{y_1}^S = \frac{\mu_0 (\sigma_2 - \sigma_1)}{4\pi} \int_{V_2} E_{2y}(M) \int_0^\infty \frac{1}{u_1} \left[e^{-u_1 |z-z_1|} + e^{u_1(z+z_1)} \frac{u_1 - u_0}{u_1 + u_0} \right] J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda dV$$

$$A_{z_1}^P = -\frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \cos \varphi \int_0^\infty e^{u_1(z-h)} \frac{u_1 - u_0}{u_0 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_0^2} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda$$

$$A_{z_{11}}^S = -\frac{\mu_0 (\sigma_2 - \sigma_1)}{2\pi} \int_{V_2} E_{2x}(M) \cos \alpha \int_0^\infty e^{u_1(z+z_1)} \frac{u_1 - u_0}{u_0 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_0^2} J_1(\lambda \rho) \lambda^2 d\lambda dV$$

$$A_{z_{12}}^S = -\frac{\mu_0 (\sigma_2 - \sigma_1)}{2\pi} \int_{V_2} E_{2y}(M) \sin \alpha \int_0^\infty e^{u_1(z+z_1)} \frac{u_1 - u_0}{u_0 \gamma_1^2 + u_1 \gamma_0^2} J_1(\lambda \rho) \lambda^2 d\lambda dV$$

$$A_{z_{13}}^S = \frac{\mu_0 (\sigma_2 - \sigma_1)}{4\pi} \int_{V_2} E_{2z}(M) \int_0^\infty \frac{1}{u_1} \left[e^{-u_1 |z-z_1|} + e^{u_1(z+z_1)} \frac{\gamma_0^2 u_1 - \gamma_1^2 u_0}{\gamma_0^2 u_1 + \gamma_1^2 u_0} \right] J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda dV$$

où : γ_0 : constante de propagation dans l'air $\gamma_0 = j\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$

$$u_0^2 = \lambda^2 + \gamma_0^2 ; u_1^2 = \lambda^2 + \gamma_1^2 \text{ avec } Ru_0, u_1 > 0$$

α est l'azimut du point P dans le repère M, X, Y, Z.

Examinons l'expression de la composante cartésienne A_{1x} (11.64.).

L'intégrale de la variable λ , figurant dans le deuxième terme de la formule 11.64., est la fonction de Green correspondant à la composante en x du potentiel vecteur créé par un dipôle électrique horizontal, parallèle à l'axe des x et situé au point M de coordonnées (r_1, z_1, φ_1) . Le moment de ce dipôle est :

$$p_x = (\sigma_2 - \sigma_1) E_{2x}(M) dV$$

En examinant de même A_{1y} et A_{1z} , on constate que la contribution au potentiel vecteur \vec{A}_1 de chaque élément de volume dV entourant le point courant d'intégration M , est bien équivalent à celle d'un dipôle électrique orienté selon la direction du champ total $\vec{E}_2(M)$ à l'intérieur de l'anomalie. Le moment de ce dipôle est donné par la relation suivante :

$$\vec{p} = (\sigma_2 - \sigma_1) \overline{E_2(M)} dV \quad (11.67.)$$

11.6. EXPRESSIONS DES COMPOSANTES CARTESIENNES DU CHAMP ELECTRIQUE DANS L'APPROXIMATION DU QUASISTATIQUE

11.6.1. Expressions des composantes de \vec{A}_1 dans l'approximation du quasistatique

Cette approximation revient à supposer que la distance horizontale émetteur-récepteur, est faible vis-à-vis de la longueur d'onde dans l'air.

Soit :

$$|\gamma_0 r| \ll 1$$

Dans ces conditions, lorsqu'on calcule le champ électromagnétique dans le sol, on pose :

$$\gamma_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_0 = \lambda$$

Il en résulte que les composantes cartésiennes de \vec{A}_1 peuvent s'exprimer (24) uniquement en fonction de trois intégrales ci-dessous :

$$N = \int_0^\infty e^{u_1(z+z_1)} \frac{J_0(\lambda r)}{u_1} d\lambda = I_0 \left[\frac{\gamma_1}{2} (R_2 + (z+z_1)) \right] \cdot K_0 \left[\frac{\gamma_1}{2} (R_2 - (z+z_1)) \right] \quad (11.68.)$$

$$P_1 = \int_0^\infty e^{-u_1|z-z_1|} \frac{J_0(\lambda r)}{u_1} \lambda d\lambda = \frac{e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1} \quad (11.69.)$$

$$P = \int_0^\infty e^{u_1(z+z_1)} \frac{J_0(\lambda r)}{u_1} \lambda d\lambda = \frac{e^{-\gamma_1 R_2}}{R_2} \quad (11.70.)$$

avec : $R_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$ $R_2 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z+z_1)^2}$

Ces nouvelles expressions de \vec{A}_1 s'écrivent donc :

$$A_{x_1} = A_{x_1}^p + \frac{\mu_0(\sigma_2 - \sigma_1)}{4\pi} \int_{V_2} E_{2x}^{(M)} \left[P_1 - P + \frac{2}{\gamma_1^2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{2}{\gamma_1^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} N - \gamma_1^2 N \right) \right] dV \quad (11.71.)$$

$$A_{y_1} = \frac{\mu_0(\sigma_2 - \sigma_1)}{4\pi} \int_{V_2} E_{2y}^{(M)} \left[P_1 - P + \frac{2}{\gamma_1^2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{2}{\gamma_1^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} N - \gamma_1^2 N \right) \right] dV \quad (11.72.)$$

$$A_{z_1} = A_{z_1}^p - \frac{\mu_0(\sigma_2 - \sigma_1)}{2\pi\gamma_1^2} \int_{V_2} \left[E_{2x}^{(M)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(P - \frac{\partial N}{\partial z} \right) + E_{2y}^{(M)} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(P - \frac{\partial N}{\partial z} \right) - \frac{\gamma_1^2}{2} E_{2z}^{(M)} (P_1 - P) \right] dV \quad (11.73.)$$

A_x^p et A_z^p sont les composantes du potentiel vecteur créées par le D.E.H. dans le demi-milieu conducteur () supposé parfaitement homogène

II.6.2. Expressions des composantes du champ électrique \vec{E}

Le champ électrique dérive du potentiel \vec{A}_1 par la relation suivante :

$$\vec{E} = + \frac{j\omega}{\gamma_1} [\overrightarrow{\text{grad div } \vec{A}} - \gamma_1^2 \vec{A}] \quad (11.74.)$$

d'où les composantes du champ électrique :

$$E_x(P) = E_{xp}(P) + \Lambda (I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}) \quad (11.75.)$$

$$E_y(P) = E_{yp}(P) + \Lambda (I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}) \quad (11.76.)$$

$$E_z(P) = E_{zp}(P) + \Lambda (I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}) \quad (11.77.)$$

Avec :

$$I_{x1} = \int_{V_2} E_{2x}(M) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (P_1 - P) - \gamma_1^2 (P_1 - P) + \frac{2\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right] - 2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2\gamma_1^2 \frac{\partial N}{\partial z} \right] dv$$

$$I_{x2} = \int_{V_2} E_{2y}(M) \left[\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^3 N}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right] dv$$

$$I_{x3} = \int_{V_2} E_{2z}(M) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (P_1 - P) dv$$

$$I_{y1} = \int_{V_2} E_{2x}(M) \left[\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^3 N}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right] dv$$

$$I_{y2} = \int_{V_2} E_{2y}(M) \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (P_1 - P) - \gamma_1^2 (P_1 - P) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right] - 2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2\gamma_1^2 \frac{\partial N}{\partial z} \right] dv$$

$$I_{y3} = \int_{V_2} E_{2z}(M) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (P_1 - P) dv$$

$$I_{z1} = \int_{V_2} E_{2x}(M) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (P_1 + P) dv$$

$$I_{z2} = \int_{V_2} E_{2y}(M) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (P_1 + P) dv$$

$$I_{z3} = \int_{V_2} E_{2z}(M) \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} (P_1 - P) - \gamma_1^2 (P_1 - P) \right] dv$$

$$\Lambda = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\pi\sigma_1}$$

E_{xp} , E_{yp} , E_{zp} sont les composantes du champ électrique primaire en demi-milieu homogène. (Annexe 1)

E_{2x} , E_{2y} , E_{2z} sont les composantes du champ électrique total au point M à l'intérieur de l'anomalie.

Dans les expressions 11.75. à 11.77., les composantes $E_{2x}(M)$, $E_{2y}(M)$ et $E_{2z}(M)$ sont des inconnues. Cependant, au cours de la démonstration que nous avons faite dans §.11.1. à 11.4., aucune restriction n'a été imposée à la position du point P dans le demi-milieu conducteur. Ce point peut donc être situé à l'intérieur du volume V_2 .

Il en résulte alors que les relations 11.75. à 11.77. constituent un système de trois équations intégrales de FREDHOLM. Les inconnues de ce système sont précisément $E_{2x}(M)$, $E_{2y}(M)$ et $E_{2z}(M)$.

Nous allons entreprendre numériquement le calcul de ces valeurs en transformant le système d'équations intégrales en un système d'équations algébriques. Dans l'élaboration du modèle numérique tridimensionnel du télélog, nous avons choisi la méthode la plus simple possible pour passer de notre système d'équations intégrales à une équation matricielle.

Cette méthode consiste à diviser le volume V_2 en n éléments de volume dont les dimensions sont telles que l'on puisse supposer que dans chacun d'eux, le champ électrique est constant et a pour valeur celle prise au centre de l'élément de volume considéré.

Dans ces conditions, les composantes de \vec{E}_2 en tous ces points sont solutions d'une équation matricielle dont le second membre est un vecteur où figurent les composantes du champ électrique primaire \vec{E}_p aux points où l'on calcule E_{2x} , E_{2y} et E_{2z} . La matrice de ce système est une matrice dont les coefficients sont les intégrales des fonctions de Green, figurant dans les relations 11.75. à 11.77, étendues à chaque élément de volume.

Comme nous allons le voir au chapitre.IV., la méthode que nous venons de décrire a donné d'excellents résultats. Cependant celle-ci n'est qu'un cas particulier d'une méthode plus générale appelée "méthode des moments".

Dans le chapitre suivant, nous présentons cette dernière méthode dont l'utilisation sous une forme sophistiquée pourrait se révéler nécessaire dans l'étude d'un modèle plus compliqué.

CHAPITRE. III.

METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS INTEGRALES

Dans ce chapitre, après avoir exposé les bases de la méthode des moments, permettant de ramener une équation fonctionnelle à une équation matricielle, nous présentons deux méthodes d'approximation utilisables pour la résolution numérique d'une équation intégrale du type FREDHOLM complète. Nous généralisons les résultats obtenus au calcul des systèmes d'équations intégrales.

III.1. TRAITEMENT NUMERIQUE GENERAL

III.1.1. La méthode des moments (26,27,28)

Le nom de "méthode des moments" a été donné à la procédure mathématique qui permet de passer de l'équation fonctionnelle de départ à une équation matricielle. Parfois, cette procédure est rangée dans la catégorie des techniques d'approximation, mais c'est en fait une appellation erronée lorsque la solution converge à la limite.

Partons d'une équation non homogène $L(f) = g$, où L est un opérateur linéaire, g est l'excitation (fonction connue), et f est la réponse (fonction inconnue à déterminer).

Nous définissons successivement :

. Le produit intérieur $\langle f, g \rangle$, qui est un scalaire satisfaisant les relations suivantes :

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \tag{III.1.}$$

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle \tag{III.2.}$$

$$\left. \begin{aligned} \langle f, f^* \rangle &> 0 \text{ si } f \neq 0 \\ \langle f, f^* \rangle &= 0 \text{ si } f = 0 \end{aligned} \right\} \tag{III.3.}$$

Dans ces expressions, α et β sont deux scalaires quelconques, l'étoile (*) désigne le complexe conjugué.

. La norme $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

. La métrique $d(f, g) = \|f - g\|$

Les propriétés de la solution $L(f) = g$ (III.4.) dépendent des propriétés de l'opérateur L .

Supposons que f puisse être développée en série de fonctions f_1, f_2, f_3, \dots appartenant au domaine d'application de L :

$$f = \sum_n \alpha_n \cdot f_n \tag{III.5.}$$

où les α_n sont des constantes inconnues. Les f_n sont appelées fonctions de base. Pour obtenir des solutions exactes, (III.5.) est généralement une somme infinie, et les f_n forment un ensemble complet de fonctions de base. Pour des solutions approchées, (III.5.) est généralement une somme finie.

En reportant (III.5.) dans (III.4.), et en utilisant la propriété de linéarité de L , nous obtenons :

$$\sum_n \alpha_n L(f_n) = g \tag{III.6.}$$

Supposons qu'un produit intérieur $\langle f, g \rangle$ ait été défini

de façon adéquate pour un problème donné. Définissons un ensemble de "fonctions poids" W_1, W_2, \dots, W_n dans le domaine de L , et prenons le produit intérieur de (III.6.) avec chaque W_m .

Le résultat est :

$$\sum_n \alpha_n \langle W_m, L(f_n) \rangle = \langle W_m, g \rangle \quad \text{pour } m = 1, 2, 3, \dots, n$$

Cet ensemble d'équations peut s'écrire sous forme matricielle :

$$|\ell_{mn}| \cdot |\alpha_n| = |g_m| \quad \text{avec :}$$

$$|\ell_{mn}| = \begin{vmatrix} \langle W_1, L(f_1) \rangle & \langle W_1, L(f_2) \rangle & \dots \\ \langle W_2, L(f_1) \rangle & \langle W_2, L(f_2) \rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$|\alpha_n| = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad |g_m| = \begin{vmatrix} \langle W_1, g \rangle \\ \langle W_2, g \rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{vmatrix}$$

Si la matrice $|\ell_{mn}|$ n'est pas singulière, $|\ell_{mn}|^{-1}$ existe, et nous avons :

$$|\alpha_n| = |\ell_{mn}|^{-1} \cdot |g_m|$$

La solution f est alors donnée par (III.7.).

Pour une expression plus concise du résultat, définissons la matrice des fonctions $|f_n| = |f_1 f_2 f_3 \dots|$ et écrivons :

$$f = |f_n| \cdot |\alpha_n| = |f_n| \cdot |\ell_{mn}|^{-1} \cdot |g_m| \tag{III.7.}$$

Cette solution peut être exacte ou approchée selon le choix des f_n et W_n . Si la matrice $|\ell_{mn}|$ est d'ordre infini, elle peut être inversée dans certains cas précis, par exemple si elle est diagonale. La méthode classique de développement de f sous forme de fonctions propres conduit à une matrice diagonale et peut être alors considérée comme un cas particulier de la méthode des moments.

La principale difficulté pour un problème donné, est évidemment le choix des fonctions f_n et W_n . Les f_n doivent être linéairement indépendantes, ainsi que les W_n . Leur choix sera de plus fonction :

- . de la précision souhaitée,
- . de la commodité de calcul des $\langle W_m, L(f_n) \rangle$,
- . de la taille de la matrice à inverser.

III.1.2. Discrétisation et approximation de la fonction sur des sous-domaines d'application

En général, l'évaluation des termes $\ell_{mn} = \langle W_m, L(f_n) \rangle$ nécessite une intégration qui se révèle délicate dans les problèmes pratiques. Une manière simple d'obtenir des solutions approchées est de supposer que la relation (III.6.) est satisfaite en des points discrets de l'espace sur lequel porte l'intégration. Cette procédure qui est en fait une méthode d'interpolation est appelée dans les ouvrages anglo-saxons "Point matching method". Elle revient à utiliser des fonctions de Dirac $\delta(x-x_m) \cdot \delta(y-y_m) \cdot \delta(z-z_m)$ comme fonctions-poids W_m .

Une autre approximation utilisée dans les problèmes pratiques implique l'utilisation de fonctions de base f_n telles que chacune d'entre elles n'existe que sur une fraction du domaine d'application de f . Chaque α_n intervenant dans l'expression (III.5.) n'affecte alors l'approximation de f que sur une fraction de la région qui nous intéresse. Cette procédure simplifie souvent l'évaluation et (ou) la forme de la matrice $|\ell_{mn}|$. Nous pouvons donc écrire, en divisant le volume V qui nous intéresse en N volumes élémentaires ΔV_n :

$$f_n = \begin{cases} f_n & \text{dans } \Delta V_n \\ 0 & \text{dans } \Delta V_i, \quad i \neq n \end{cases}$$

Cette approximation est appelée "Subsectional bases method" par les anglo-saxons.

Il est parfois judicieux d'utiliser simultanément les deux méthodes décrites dans ce paragraphe.

III.2. APPLICATION DE LA METHODE DE DISCRETISATION ET D'APPROXIMATION SUR DES SOUS-DOMAINES A LA RESOLUTION DE L'EQUATION DE FREDHOLM COMPLETE

Considérons une relation du type de celles donnant l'une des composantes du champ électrique \vec{E} (Chapitre.11., §.11.6.2., formules 11.75 à 11.77.). Pour simplifier le problème, sans rien enlever à la généralité du raisonnement, nous supposons que cette composante est une fonction de la seule variable x et que le domaine d'intégration est le segment $[a, b]$. Cette relation simplifiée s'écrit :

$$E(x) = E_p(x) + \Lambda \int_a^b E(x') \cdot G(x, x') dx' \quad (III.8.)$$

avec :

- . $G(x, x')$ est le noyau de l'équation intégrale III.8.
- . $E_p(x)$ est le second membre de l'équation de FREDHOLM III.8.
(champ électrique primaire)
- . $\Lambda =$ constante.

III.2.1. Approximation de la fonction $E(x)$ par des segments de droite

Supposons que la fonction $E(x)$, à l'intérieur du segment $[a, b]$, soit représentée sur la figure suivante :

Découpons l'intervalle $[a, b]$ en n segments de longueur e (figure.III.1.)

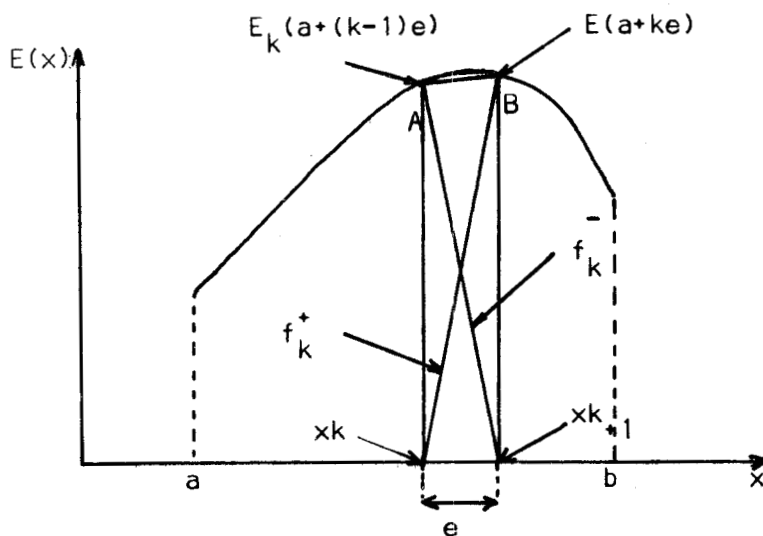


figure.III.1.

Approximons $E(x)$ par la portion de droite AB sur le $k^{\text{ième}}$ intervalle :
l'équation de cette droite est donnée par la formule :

$$E(x) = \frac{E_k - E_{k-1}}{e} x + \frac{E_{k-1}(a+ke) - E_k(a+(k-1)e)}{e}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$E(x) = \frac{E_{k-1}}{e} [-x + (a+ke)] + \frac{E_k}{e} [x - (a + (k-1)e)] \quad (\text{III.9.})$$

Avec :

$$E_{k-1} = E(a+(k-1)e) \quad , \quad E_k = E(a+ke)$$

Nous appelons fonctions de base uniquement définies sur $[x_k, x_{k+1}]$ les fonctions ci-dessous :

$$f_k^- = -\frac{1}{e} [x - (a+ke)]$$

$$f_k^+ = \frac{1}{e} [x - (a+(k-1)e)]$$

D'où l'expression de $E(x)$ sur le segment considéré :

$$E(x) = E_{k-1} f_k^- + E_k f_k^+ \quad (\text{III.10.})$$

Si nous étendons cette approximation linéaire de la fonction $E(x)$ à tous les segments de longueur e , nous obtenons l'expression suivante qui est un cas particulier de (III.5.)

$$E(x) = \sum_{k=1}^n E_{k-1} f_k^- + E_k f_k^+ \quad (III.11.)$$

Nous rappelons que les f_k^- et f_k^+ ne sont définies que **sur le k^{ième} segment** (subsectional base") et que la fonction $E(x)$ n'est exacte qu'aux extrêmités de chaque segment ("point matching method").

Il est à noter que si le nombre d'intervalles augmente, l'approximation de $E(x)$ devient meilleure. A la limite, si le nombre d'intervalles tend vers l'infini, la formule III.11. donne la valeur exacte de E .

Reportons III.11. dans l'équation intégrale III.8. :

$$E(x) \approx E_{xp}(x) + \Lambda [E_0 \int_{\Delta_1} f_1^-(x') G(x, x') dx' + E_n \int_{\Delta_n} f_n^+(x') G(x, x') dx' + S]$$

avec :

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} E_k \left\{ \int_{\Delta_k} f_k^+(x') G(x, x') dx' + \int_{\Delta_{k+1}} f_{k+1}^-(x') G(x, x') dx' \right\}$$

et $\Delta_k = [a+(k-1)e ; a+ke]$

Pour passer de la relations III.12. à une relation matricielle, il faut encore définir un produit intérieur possédant les propriétés énoncées au §.III.1.1. :

Nous définissons le produit intérieur $\langle f(x), g(x) \rangle$ de la manière suivante :

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{\Delta_k} f(x) \cdot g(x) dx \quad (III.13.)$$

Par ailleurs nous choisissons comme fonction poids w_i la fonction de Dirac :

$$\omega_i = \delta(x-x_i) \tag{III.14.}$$

avec : $x_i = a + (i-1)e$ pour $i = 1, 2 \dots n+1$

Effectuons maintenant le produit intérieur de $E(x)$ et de ω_i :

$$\langle \delta(x-x_i), E(x) \rangle = \langle \delta(x-x_i), E_p(x) \rangle + \Lambda \{ E_0 \langle \delta(x-x_i), T_1 \rangle + E_n \langle \delta(x-x_i), T_n \rangle + \langle \delta(x-x_i), S \rangle \}$$

avec :

$$T_1 = \int_{\Delta_1} f_1^-(x') G(x, x') dx'$$

$$T_n = \int_{\Delta_n} f_n^+(x') G(x, x') dx'$$

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} E_k \left\{ \int_{\Delta_k} f_k^+(x') G(x, x') dx' + \int_{\Delta_{k+1}} f_{k+1}^-(x') G(x, x') dx' \right\}$$

ce qui s'écrit encore :

$$E(x_i) = E_p(x_i) + \Lambda \left\{ E_0 \int_{\Delta_1} f_1^-(x') G(x_i, x') dx' + E_n \int_{\Delta_n} f_n^+(x') G(x_i, x') dx' + \sum_{k=1}^{n-1} E_k \left\{ \int_{\Delta_k} f_k^+(x') G(x_i, x') dx' + \int_{\Delta_{k+1}} f_{k+1}^-(x') G(x_i, x') dx' \right\} \right\} \tag{III.15}$$

En écrivant (III.15.) pour tous les x_i , nous obtenons l'équation matricielle suivante :

$$L E(x_i) = E_p(x_i)$$

. L est la matrice des intégrales du produit $f.G$ étendu aux Δ_k .

. les vecteurs $E(x_i)$ et $E_p(x_i)$ sont :

$$E(x_i) = \begin{vmatrix} E_0 \\ E_1 \\ \vdots \\ E_k \\ \vdots \\ E_n \end{vmatrix} \qquad E_p(x_i) = \begin{vmatrix} E_{0p} \\ E_{1p} \\ \vdots \\ E_{kp} \\ \vdots \\ E_{np} \end{vmatrix}$$

Les valeurs sont calculées aux abscisses x_i définis par III.14.

III.2.2. Approximation de $E(x)$ par une fonction en escalier

Supposons maintenant que sur chaque intervalle e , nous approximations la fonction $E(x)$ par une constante, dont la valeur est celle prise par la fonction au centre de l'intervalle considéré (figure.III.2.)

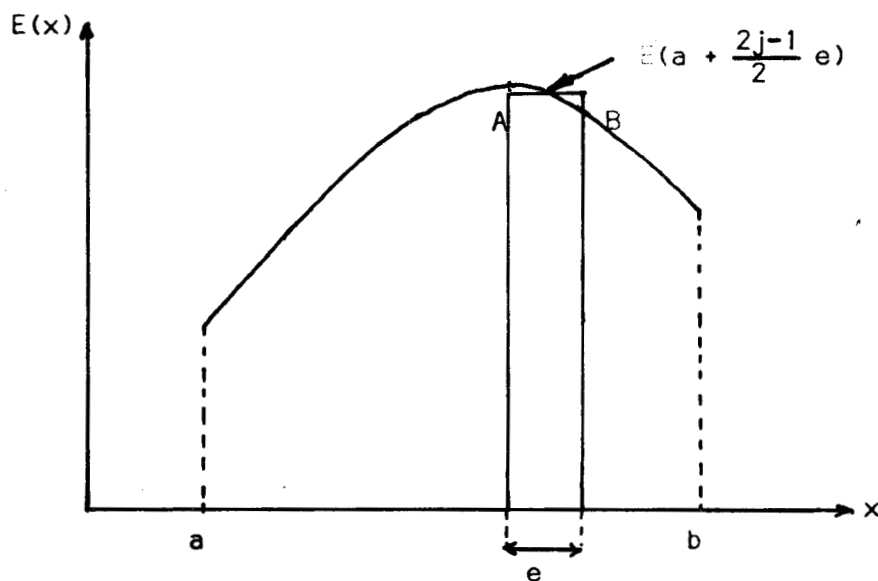


figure.III.2.

L'approximation de $E(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ s'écrit :

$$E(x) = \sum_{j=1}^n E(a + \frac{2j-1}{2} e) f_j(x) \qquad (III.16.)$$

où

$$\begin{cases} f_j(x) = 1 & \text{si } x \in \Delta_j \\ f_j(x) = 0 & \text{si } x \notin \Delta_j \end{cases}$$

Dans ce cas, et comme précédemment, l'approximation de $E(x)$ sera d'autant meilleure que le nombre d'intervalles n sera grand.

Avec une telle approximation l'équation intégrale III.8. s'écrit :

$$E(x) = E_p(x) + \Lambda \sum_{j=1}^n E_j \int_{\Delta_j} G(x, x') dx' \quad (III.17.)$$

Avec :

$$E_j = E(a + (j - \frac{1}{2})e) \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n$$

En utilisant le produit intérieur défini au paragraphe précédent et les fonctions de poids suivantes :

avec :

$$\omega_i = \delta(x - x_i)$$

$$x_i = a + (i - \frac{1}{2})e \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (III.18.)$$

où :

$\delta(x - x_i)$ est la fonction de DIRAC.

III.17. devient :

$$E(x_i) = E_p(x_i) + \Lambda \sum_{j=1}^n E_j \int_{\Delta_j} G(x_i, x') dx' \quad (III.19.)$$

Soit, en écriture matricielle :

$$L \cdot E(x_i) = E_p(x_i)$$

Les coefficients de la matrice L sont les suivants :

$$l_m^n = - \int_{\Delta_n} G(x_m, x') dx' \quad \text{si } m \neq n$$

$$l_m^n = 1 - \int_{\Delta_n} G(x_m, x') dx' \quad \text{si } m = n$$

et

$$E(x_i) = \begin{pmatrix} E_{.1} \\ \vdots \\ E_{.j} \\ \vdots \\ E_{.n} \end{pmatrix} \quad E_p(x_i) = \begin{pmatrix} E_{.1p} \\ \vdots \\ E_{.ip} \\ \vdots \\ E_{.np} \end{pmatrix}$$

Ces valeurs sont calculées aux abscisses x_i définies par III.18. Dans la suite de ce travail, comme nous l'avons dit précédemment, nous nous contenterons d'utiliser cette approximation de $E(x)$ qui s'est révélée suffisante dans l'élaboration du modèle numérique du télélog. Mais il faut maintenant généraliser cette méthode de résolution pour pouvoir l'appliquer à un problème à trois dimensions.

III.3. TRANSFORMATION DE LA SOLUTION A UNE DIMENSION EN UNE SOLUTION A TROIS DIMENSIONS : GENERALISATION DE LA METHODE AUX SYSTEMES D'EQUATIONS INTEGRALES

D'une façon générale nous aurons à déterminer les trois composantes cartésiennes E_{2x}, E_{2y}, E_{2z} du champ électrique total \vec{E}_2 à l'intérieur de l'anomalie de volume V_2 . Chacune des composantes considérées est donnée par une relation du type suivant :

$$E_{2x_i}(P) = E_{x_i p}(P) + \Lambda \int_{V_2} E_{2x_i}(M) G_{x_i}^{x_1}(P, M) dV + \Lambda \int_{V_2} E_{2x_2}(M) G_{x_i}^{x_2}(P, M) dV + \Lambda \int_{V_2} E_{2x_3}(M) G_{x_i}^{x_3}(P, M) dV$$

pour $i = 1, 2, 3$ (III.20.)

avec :

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$$

Nous diviserons l'anomalie de volume V_2 en n éléments parallélépipédiques de volume ΔV_j . Les longueurs des côtés des ΔV_j sont respectivement : h_x, h_y, h_z ; nous appellerons M_j le centre du parallélépipède d'indice j . En prenant pour coefficient α_j défini au §.III.2.1., la valeur de la composante considérée au point M_j , et ce pour chacune des composantes du champ électrique, la relation III.17. se généralise de la manière suivante :

$$E_{2x_i}(M_j) = E_{x_i p}(M_j) + \Lambda \left\{ \sum_{k=1}^n E_{2x_1}(M_k) \int_{\Delta V_k} G_{x_i}^{x_1}(M_j, M_k) dV + E_{2x_2}(M_k) \int_{\Delta V_k} G_{x_i}^{x_2}(M_j, M_k) dV + E_{2x_3}(M_k) \int_{\Delta V_k} G_{x_i}^{x_3}(M_j, M_k) dV \right\}$$

pour $i = 1, 2, 3$ (III.21.)

En écrivant III.21. pour les $n\Delta_j$ et pour chacune des composantes cartésiennes de \vec{E}_2 on obtient un système linéaire d'ordre $3n$ qui généralise III.19. Dans la suite de ce travail, nous ferons couramment appel à III.21.

D'un point de vue physique, cette méthode consiste à diviser le domaine d'intégration V_2 en n sous-domaines suffisamment petits pour qu'on puisse considérer, qu'à l'intérieur de chacun d'eux, les trois composantes du champ électrique \vec{E}_2 restent constantes.

CHAPITRE. IV

MODELE NUMERIQUE TRIDIMENSIONNEL DU TELELOG

Dans ce chapitre, nous présentons, d'abord, les principaux éléments nécessaires à la résolution numérique du système d'équations intégrales que vérifie le champ électrique \vec{E} à l'intérieur d'un demi-milieu contenant une anomalie de résistivité.

Nous comparons les résultats théoriques calculés par ce programme à ceux obtenus expérimentalement sur la cuve analogique que nous avons décrite au premier chapitre de ce travail.

Nous terminons ce chapitre en commentant les principaux résultats d'une étude systématique d'une configuration choisie tant par soucis d'économiser le temps calcul que par la simplicité de sa mise en oeuvre.

Nous insistons auprès du lecteur sur le fait que cette étude ne représente qu'un des éléments nécessaire à l'interprétation de mesures de terrain. Toutefois, les résultats de cette étude non exhaustive donne des indications qualitatives précieuses quant-au rôle joué par les paramètres électriques et géométriques sur la perturbation du champ électrique par une anomalie résistive.

IV.1. EXPRESSIONS DU CHAMP ELECTRIQUE DANS UN DEMI-MILIEU CONDUCTEUR HOMOGENE CONTENANT UNE ANOMALIE DE RESISTIVITE APPROXIMATION DU QUASISTATIQUE

(30)

IV.1.1. Position du problème et approximation du quasistatique

On considère un demi-milieu homogène de conductivité σ_1 renfermant une anomalie dont la conductivité est σ_2 ; cette anomalie de volume V_2 est limitée par une surface fermée S . Ce demi-milieu conducteur est surmonté d'un demi-milieu isolant constituant l'atmosphère.

Le champ électromagnétique est créé dans ces deux milieux par un dipôle électrique horizontal situé à l'ordonnée $z = -h$ à l'intérieur du demi-milieu conducteur.

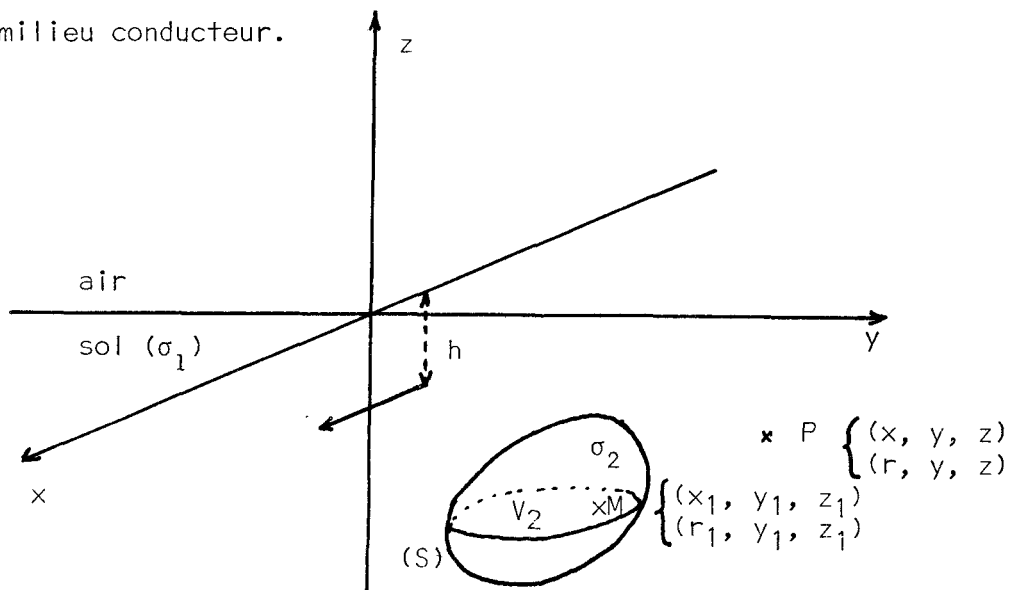


Figure IV.1.

L'approximation du quasistatique revient à supposer que la distance horizontale émetteur-recepteur est faible vis à vis de la longueur d'onde dans l'air.

D'où : $|\gamma_{or}| \ll 1$

Il en résulte que, lorsqu'on calcule le champ électromagnétique dans le sol, on pose :

$$\gamma_0 = 0$$

Nous avons montré au chapitre II.11.6.2. que dans ces conditions, les expressions des composantes cartésiennes du champ électrique étaient les suivantes :

$$E_x (P) = E_{xp} (P) + \Lambda (I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}) \quad (IV.1.)$$

$$E_y (P) = E_{yp}(P) + \Lambda(I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}) \quad (IV.2.)$$

$$E_z (P) = E_{zp}(P) + \Lambda(I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}) \quad (IV.3.)$$

Avec :

$$I_{x1} = \int_{V_2} E_{2x}(M) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (P_1 - P) - \gamma_1^2 (P_1 - P) + \frac{2\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right] - 2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2\gamma_1^2 \frac{\partial N}{\partial z} \right] dv$$

$$I_{x2} = \int_{V_2} E_{2y}(M) \left[\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^3 N}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right] dv$$

$$I_{x3} = \int_{V_2} E_{2z}(M) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (P_1 - P) dv$$

$$I_{y1} = \int_{V_2} E_{2x}(M) \left[\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^3 N}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right] dv$$

$$I_{y2} = \int_{V_2} E_{2y}^{(M)} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (P_1 - P) - \gamma_1^2 (P_1 - P) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right] - 2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2\gamma_1^2 \frac{\partial N}{\partial z} \right] dv$$

$$I_{y3} = \int_{V_2} E_{2z}^{(M)} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (P_1 - P) dv$$

$$I_{z1} = \int_{V_2} E_{2x}^{(M)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (P_1 + P) dv$$

$$I_{z2} = \int_{V_2} E_{2y}^{(M)} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (P_1 + P) dv$$

$$I_{z3} = \int_{V_2} E_{2z}^{(M)} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} (P_1 - P) - \gamma_1^2 (P_1 - P) \right] dv$$

$$\Lambda = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\pi\sigma_1}$$

E_{xp} , E_{yp} , E_{zp} sont les composantes du champ électrique primaire en demi-milieu homogène. (Annexe 1) (31)

E_{2x} , E_{2y} , E_{2z} sont les composantes du champ électrique total au point M à l'intérieur de l'anomalie.

Les fonctions P_1 , P et N sont définies ci-dessous.

$$N = \int_0^{\infty} e^{u_1(z+z_1)} \frac{J_0(\lambda r)}{u_1} d\lambda = I_0 \left[\frac{\gamma_1}{2} (R_2 + (z+z_1)) \right] \cdot K_0 \left[\frac{\gamma_1}{2} (R_2 - (z+z_1)) \right] \quad (IV.4.)$$

$$P_1 = \int_0^{\infty} e^{-u_1|z-z_1|} \frac{J_0(\lambda r)}{u_1} \lambda d\lambda = \frac{e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1} \quad (IV.5.)$$

$$P = \int_0^{\infty} e^{u_1(z+z_1)} \frac{J_0(\lambda r)}{u_1} \lambda d\lambda = \frac{e^{-\gamma_1 R_2}}{R_2} \quad (IV.6.)$$

Avec $R_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$ et $R_2 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z+z_1)^2}$

IV.1.2. Transformation des expressions des composantes du champ électrique

Comme nous l'avons démontré dans le chapitre. II., les relations IV.1. à IV.3. sont valables dans tout le demi-milieu inférieur, y compris dans l'anomalie. En conséquence il faut rendre les intégrants réguliers quelle que soit la position du point d'observation dans le demi-milieu inférieur.

Examinons donc le comportement de la fonction P_1 et de ses dérivées par rapport à l'espace qui elles seules peuvent être singulières pour R_1 égal à zéro.

Soit, par exemple, l'intégrale suivante :

$$I(P) = \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} P_1 dV \quad (IV.7.)$$

le volume Δ est le parallélépipède rectangle de la figure (IV.2.)

le point P est situé à l'intérieur de Δ .

IV.7. s'écrit encore :

$$I(P) = - \int_{z_1}^{z_2} dz' \int_{y_1}^{y_2} dy' \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x-x')}{R^3} e^{-\gamma R} (1+\gamma R) dx' \quad (IV.8.)$$

avec : $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$

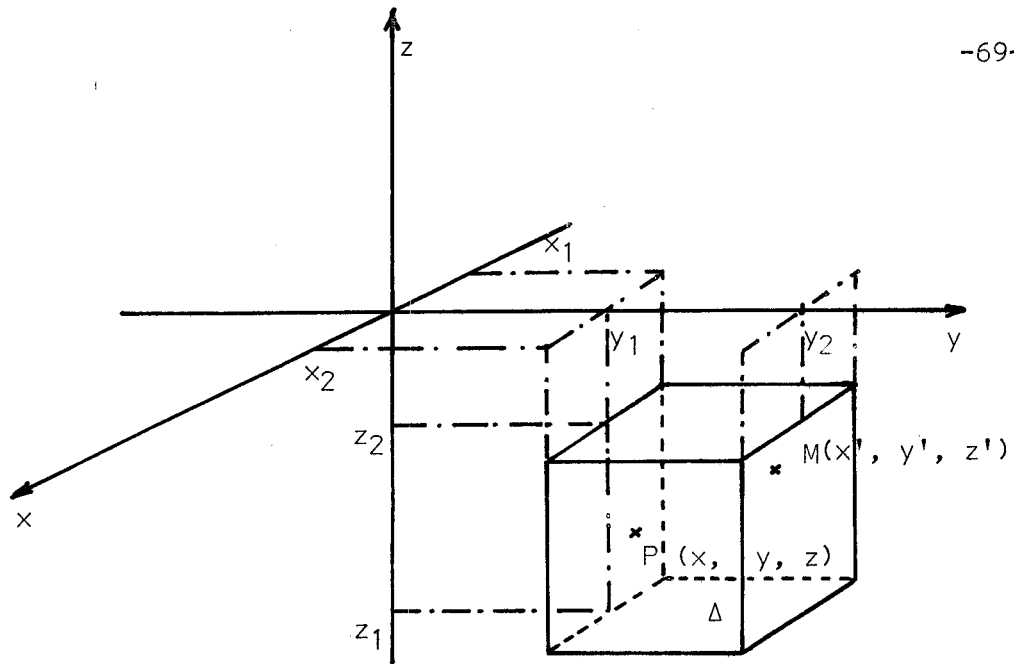


Figure IV.2.

$I(P)$ (IV.8.) diverge lorsque le point M est en P , cependant cette intégrale possède une valeur principale non nulle.

En effet, l'intégrand peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} P_1 = \frac{d}{dR} P_1 \cdot \frac{\partial R}{\partial x}$$

soit encore :

$$\frac{\partial}{\partial x} P_1 = \frac{d}{dR} P_1 \cdot \frac{x-x'}{R} \quad \text{or.} \quad \frac{x-x'}{R} = -\frac{dR}{dx}$$

donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} P_1 = - \frac{\partial P_1}{\partial x'} \quad (IV.9.)$$

en rapportant IV.9. dans l'intégrale $I(P)$ nous obtenons :

$$I(P) = \int_{z_1}^{z_2} dz' \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{e^{-\gamma R_1}}{R_1} - \frac{e^{-\gamma_1 R_2}}{R_2} \right] dy' \quad (IV.10.)$$

où $R_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ et $R_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$

L'intégrand de IV.10. est toujours borné, $I(P)$ a une valeur finie non nulle.

Il est intéressant de noter qu'en faisant apparaître dans l'intégrant de $I(P)$ une différentielle exacte par rapport à l'une des variables d'intégration, on transforme cette intégrale triple en une intégrale double. Cette remarque va simplifier considérablement la mise en oeuvre du calcul numérique, des intégrales de volume des fonctions de Green.

La démonstration ci-dessus se généralise à toutes les intégrales des dérivées secondes de P_1 qui figurent dans les expressions des composantes de \vec{E} (IV.1. à IV.3.).

Considérons maintenant la fonction P_1 , cette fonction vérifie la relation d'Helmoltz (comme P et N d'ailleurs) soit :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_1^2 \right] P_1 = -4\pi\delta(R_1)$$

En utilisant cette relation, nous allons pouvoir exprimer P_1 en fonction de ses dérivées secondes par rapport à l'espace et rendre ainsi tous les intégrands réguliers dans les formules (IV.1. à IV.3.)

Il en résulte que les expressions des composantes du champ électrique dans tout le demi-milieu inférieur s'écrivent :

$$E_x = E_{x_p} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1} \int_{V_2} E_{2x} \delta(R_1) dV - \Lambda \int_{V_2} E_{2x} G_x^x dV + \Lambda \int_{V_2} E_{2y} G_y^x dV + \Lambda \int_{V_2} E_{2z} G_z^x dV \quad (IV.11.)$$

$$E_y = E_{y_p} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1} \int_{V_2} E_{2y} \delta(R_1) dV + \Lambda \int_{V_2} E_{2x} G_x^y dV - \Lambda \int_{V_2} E_{2y} G_y^y dV + \Lambda \int_{V_2} E_{2z} G_z^y dV \quad (IV.12.)$$

$$E_z = E_{z_p} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1} \int_{V_2} E_{2z} \delta(R_1) dV + \Lambda \int_{V_2} E_{2x} G_x^z dV + \Lambda \int_{V_2} E_{2y} G_y^z dV - \Lambda \int_{V_2} E_{2z} G_z^z dV \quad (IV.13.)$$

avec :

$$G_x^x = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (P_1 - P) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (P_1 + P) + 2 \frac{\partial^3 N}{\partial y^2 \partial z}$$

$$G_y^x = G_x^y = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[(P_1 - P) + 2 \frac{\partial N}{\partial z} \right]$$

$$G_z^x = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (P_1 - P)$$

$$G_y^y = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (P_1 - P) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (P_1 + P) + \frac{2\partial^3 N}{\partial x^2 \partial z}$$

$$G_z^y = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (P_1 - P)$$

$$G_x^z = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (P_1 + P)$$

$$G_y^z = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (P_1 + P)$$

$$G_z^z = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (P_1 - P) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (P_1 - P)$$

$\delta(R_1)$ est la fonction de Dirac.

IV.2. RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS INTEGRALES POUR LE CHAMP ELECTRIQUE \vec{E}

IV.2.1. Discretisation de l'anomalie de volume V_2

Considérons une anomalie de volume V_2 que nous discrétisons en n éléments parallélépipédiques ΔV_j . Les côtés de ces parallélépipèdes rectangles égaux sont respectivement h_x, h_y, h_z .

D'après III.2.1 les relations fonctionnelles IV.11. à IV.13. se transforment à l'intérieur de l'anomalie de la manière suivante :

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} E_{2x}(M_i) = E_{x_p}(M_i) - \Lambda \sum_{j=1}^n \left\{ E_{2x}(M_j) \int_{\Delta V_j} G_x^x dV - E_{2y}(M_j) \int_{\Delta V_j} G_x^y dV - E_{2z}(M_j) \int_{\Delta V_j} G_x^z dV \right\} \quad (IV.14.)$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} E_{2y}(M_i) = E_{y_p}(M_i) + \Lambda \sum_{j=1}^n \left\{ E_{2x}(M_j) \int_{\Delta V_j} G_y^x dV - E_{2y}(M_j) \int_{\Delta V_j} G_y^y dV + E_{2z}(M_j) \int_{\Delta V_j} G_y^z dV \right\} \quad (IV.15.)$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} E_{2z}(M_i) = E_{z_p}(M_i) + \Lambda \sum_{j=1}^n \left\{ E_{2x}(M_j) \int_{\Delta V_j} G_z^x dV + E_{2y}(M_j) \int_{\Delta V_j} G_z^y dV - E_{2z}(M_j) \int_{\Delta V_j} G_z^z dV \right\} \quad (IV.16.)$$

Le point $M_j(x_j, y_j, z_j)$ est le centre de l'élément de volume ΔV_j .

Les fonctions de Green $G_x^z, G_x^y, G_x^z, G_y^x, G_y^y, G_y^z, G_z^x, G_z^y, G_z^z$ sont celles définies dans les formules IV.11. à IV.13.

IV.2.2. Equation matricielle, intégration numérique des fonctions de Green

Les relations IV.14. à IV.16. peuvent se résumer de la façon suivante :

$$\sigma_2/\sigma_1 \vec{E}_2 = \vec{E}_p + \Lambda A \vec{E}_2 \tag{IV.17.}$$

. \vec{E}_2 est le vecteur champ électrique inconnu dans l'anomalie :

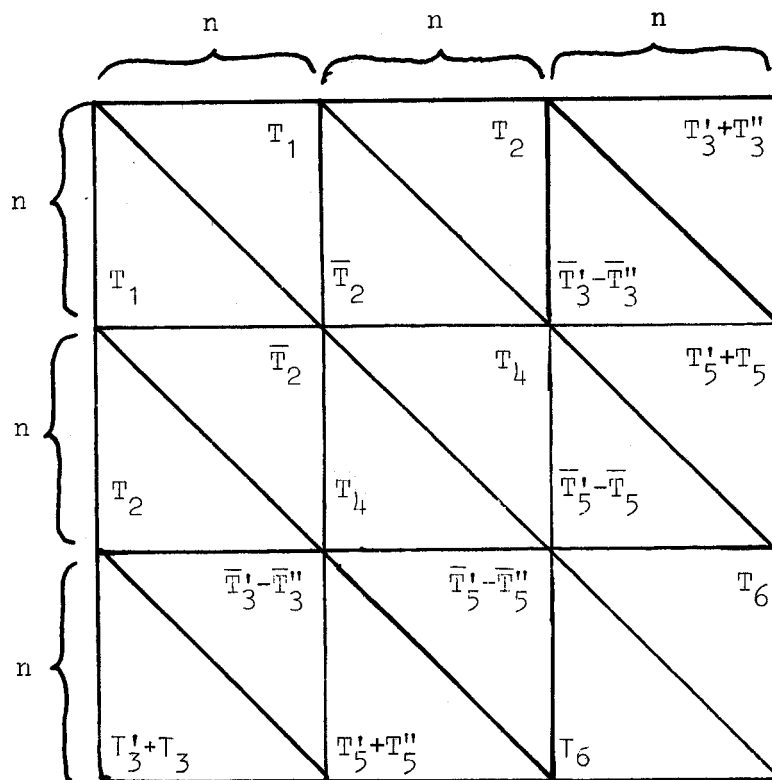
$$(E_{2x}(M_i), E_{2y}(M_i), E_{2z}(M_i)) \text{ pour } i = 1, n)$$

. \vec{E}_p est le vecteur champ électrique primaire :

$$(E_{xp}(M_i), E_{yp}(M_i), E_{zp}(M_i)) \text{ pour } i = 1, n)$$

. A est la matrice des intégrales des fonctions de GREEN étendues aux éléments ΔV_j

On montre que la matrice A est symétrique à condition que les ΔV_j soient égaux ; cette matrice a la structure suivante :



Les matrices T_k sont des matrices triangulaires supérieures, dont les éléments $t_k^{i,j}$ sont des combinaisons d'intégrales de fonctions de GREEN : \bar{T}_R est la matrice des conjugués.

$$\begin{aligned} t_1^{i,j} &= -(I_9 - I_9' + I_{11} + I_{11}' + 2I_7) \\ t_2^{i,j} &= I_1 - I_2' + 2I_2'' \\ t_3^{i,j} &= I_3 \\ t_3''^{i,j} &= I_4 \\ t_4^{i,j} &= -(I_{10} - I_{10}' + I_{11} + I_{11}' + 2I_8) \\ t_5^{i,j} &= I_5 \\ t_5''^{i,j} &= I_6 \\ t_6^{i,j} &= -(I_9 - I_9' + I_{10} - I_{10}') \end{aligned}$$

Les intégrales I_k , I_k' et I_k'' sont rassemblées dans le tableau T_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Delta V_j} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (P_1) dx_1 dy_1 dz_1 \\ I_2' &= \int_{\Delta V_j} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (P) dx_1 dy_1 dz_1 \\ I_2'' &= \int_{\Delta V_j} \frac{\partial^3 N}{\partial x \partial y \partial z} dx_1 dy_1 dz_1 \\ I_3 &= \int_{\Delta V_j} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial z} dx_1 dy_1 dz_1 \\ I_4 &= \int_{\Delta V_j} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} dx_1 dy_1 dz_1 \\ I_5 &= \int_{\Delta V_j} \frac{\partial^2 P_1}{\partial y \partial z} dx_1 dy_1 dz_1 \end{aligned}$$

$$I_6 = - \int_{\Delta V_j} \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} dx_1 dy_1 dz_1$$

$$I_7 = \int_{\Delta V_j} \frac{\partial^3 N}{\partial y^2 \partial z} dx_1 dy_1 dz_1$$

$$I_8 = \int_{\Delta V_j} \frac{\partial^3 N}{\partial x^2 \partial z} dx_1 dy_1 dz_1$$

$$I_9 = \int_{\Delta V_j} \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} dx_1 dy_1 dz_1$$

$$I'_9 = \int_{\Delta V_j} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} dx_1 dy_1 dz_1$$

$$I_{10} = \int_{\Delta V_j} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} dx_1 dy_1 dz_1$$

$$I'_{10} = \int_{\Delta V_j} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} dx_1 dy_1 dz_1$$

$$I_{11} = \int_{\Delta V_j} \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} dx_1 dy_1 dz_1$$

$$I'_{11} = \int_{\Delta V_j} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} dx_1 dy_1 dz_1$$

Tableau.T.1.



IV.2.3. Résolution numérique du système matriciel et calcul des intégrales au tableau T.1.

IV.2.3.1. Résolution numérique du système matriciel

La résolution numérique du système matriciel IV.17. s'effectue en utilisant l'algorithme de Choleski (Annexe.2.)⁽³²⁾. L'emploi de cet algorithme pour des systèmes où la matrice A est symétrique, se justifie par la rapidité du calcul, et la précision des résultats obtenus.

Nous donnons ci-dessous les temps nécessaires pour exécuter une résolution d'un système de cent équations à cent inconnues sur l'ordinateur de l'I.F.P. (Control Data 7600) et sur celui de l'U.S.T.L. (10070 C.I.I.).

7600 : 1,165 seconde

10070 : 0,74 minute

Ces valeurs correspondent au temps d'utilisation de l'unité centrale.

IV.2.3.2. Calcul des intégrales du tableau T.1.

Considérons d'abord l'intégrale I''_2 :

L'intégrale de I''_2 est la dérivée troisième de la fonction N par rapport aux variables x,y,z. Comme nous l'avons montré au §.IV.12., on peut exprimer cette dérivée par celle, au signe près, de la même fonction par rapport aux variables d'intégration x_1, y_1, z_1 . Il en résulte que la valeur de I''_2 est la suivante :

$$I''_2 = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^4 I_0 \left[\frac{Y_1}{2} (R_{2k}^l + (z + Z_k)) \right] \cdot K_0 \left[\frac{Y_1}{2} (R_{2k}^l - (z + Z_k)) \right] \tag{IV.18.}$$

Les distances R_{2k}^l et les côtes Z_k sont définies sur la figure.IV.3.

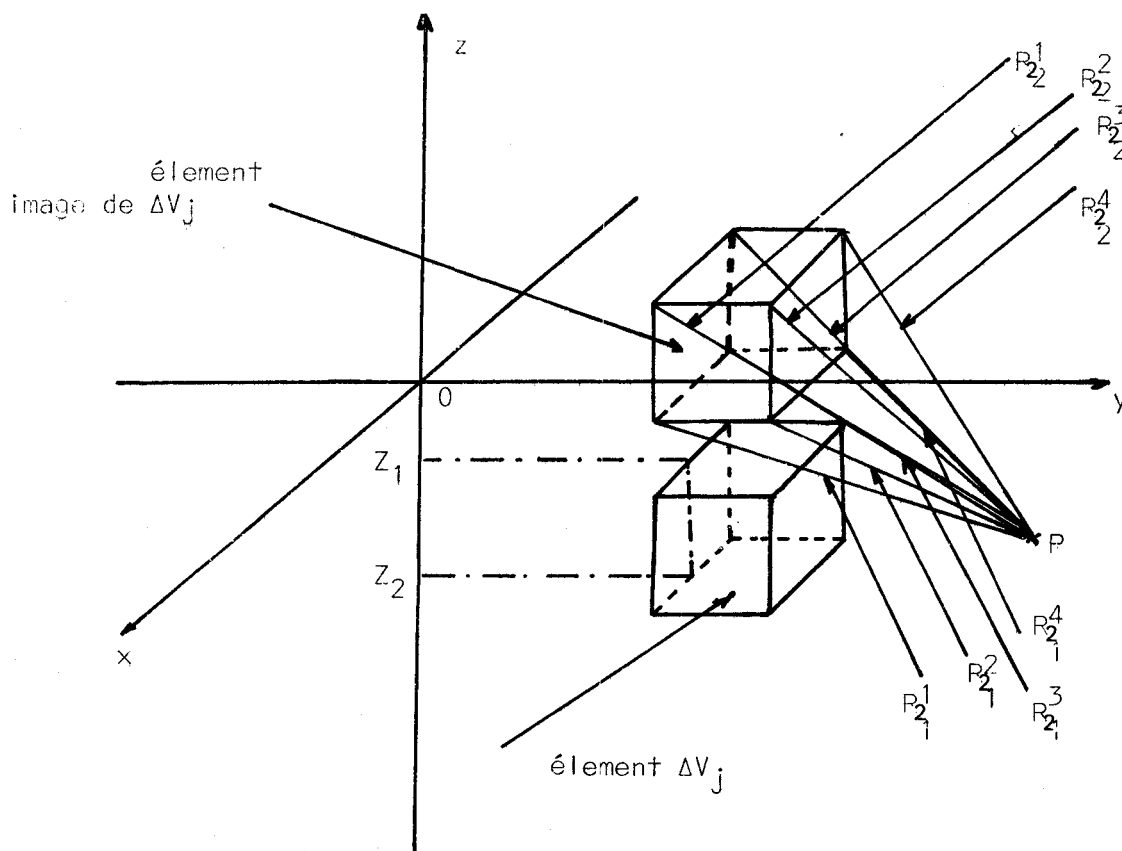


Figure IV.3.

Considérons maintenant les intégrales suivantes :

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8.$$

Les fonctions qui figurent dans ces intégrales sont des dérivées secondes mixtes de deux quelconques des variables x, y, z.

Soit, par exemple, l'intégrale I_1

$$I_1 = \int_{\Delta V_j} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P_1 \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1$$



or :
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} P_1$$

Les intégrations par rapport à x et par rapport à y se font donc analytiquement. Il en résulte que le calcul numérique de I₁ se ramène à un calcul d'intégrale simple. Il en est de même pour les autres intégrales de la liste ci-dessus.

On montre, de même, que le calcul des intégrales I₉, I'₉, I₁₀, I'₁₀, I₁₁, I'₁₁ se ramène à un calcul d'intégrales doubles.

Pour calculer les intégrales simples, attendu que les domaines d'intégration (33) sont peu étendus, nous avons utilisé l'algorithme de Simpson. Celui-ci a l'avantage de ne pas nécessiter de calcul annexe d'abscisses particulières et de poids.

Pour calculer les intégrales doubles, nous avons utilisé (34) une formule de quadrature de GAUSS, décrite dans l'annexe III.

IV.3. FORMULATION DU CHAMP ELECTRIQUE A L'INTERIEUR DE L'ANOMALIE

Lorsque le champ électrique total au centre de chacune des mailles discrétisant la valeur V₂ est connu, le champ électrique à l'extérieur de l'anomalie est donné par les formules suivantes dérivées des relations IV.11. à IV.13.

$$E_x(P) = E_{xp}(P) - \Lambda \sum_{j=1}^n E_x(M_j) \int_{\Delta v_j} G_x^x dv - E_y(M_j) \int_{\Delta v_j} G_x^y dv - E_z(M_j) \int_{\Delta v_j} G_x^z dv \quad (IV.19.)$$

$$E_y(P) = E_{yp}(P) + \Lambda \sum_{j=1}^n E_x(M_j) \int_{\Delta v_j} G_x^y dv - E_y(M_j) \int_{\Delta v_j} G_y^y dv + E_z(M_j) \int_{\Delta v_j} G_y^z dv \quad (IV.20.)$$

$$E_z(P) = E_{zP}(P) + \sum_{j=1}^n E_x(M_j) \int_{\Delta v_j} G_x^z dv + E_y(M_j) \int_{\Delta v_j} G_y^z dv - E_z(M_j) \int_{\Delta v_j} G_z^z dv \quad (IV.21.)$$

Nous avons contrôlé la validité de ces formules, en comparant les valeurs théoriques de E_z , obtenues par ce calcul, à celles obtenues en simulant le même problème télélog sur une cuve rhéographique. Ce modèle a la structure d'un demi-milieu homogène contenant une anomalie de résistivité de forme parallélépipédique.

IV.4. VERIFICATION EXPERIMENTALE DU MODELE NUMERIQUE DU TELELOG

La cuve rhéographique utilisée a été décrite dans le premier chapitre (1.11.2. pages 10 à 12).

Ce dispositif est schématisé sur la figure IV.4.

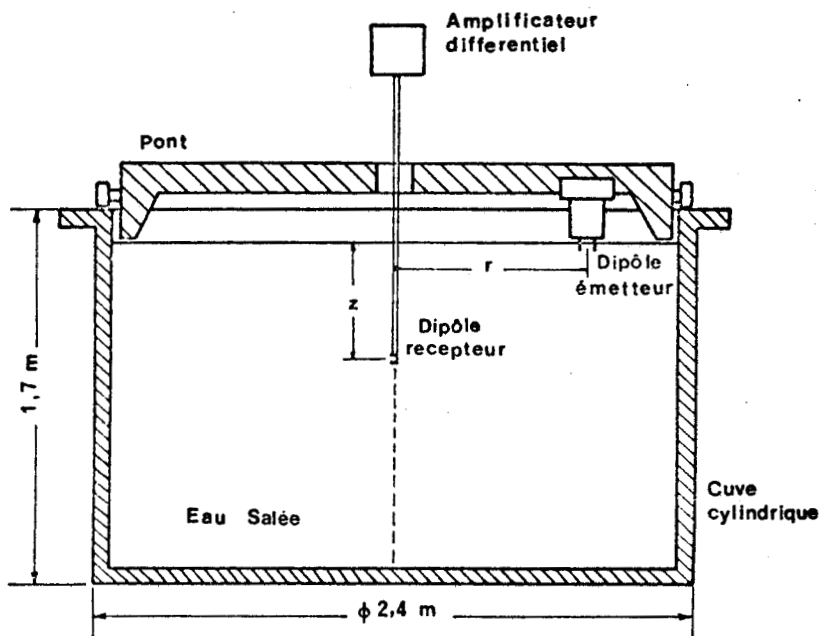


Figure IV.4.

IV.4.1. Etalonnage du modèle

L'étalonnage du modèle analogique sur cuve rhéographique est effectué en relevant la tension V_z aux bornes des électrodes E_1 et E_2 pour une valeur donnée de la distance r de l'émetteur, ceci en fonction de la profondeur z et en l'absence d'hétérogénéité (figure IV.5.).

Pour vérifier que la structure ainsi réalisée correspond bien à celle du demi-milieu homogène et infini, nous calculons pour chaque valeur de z la conductivité correspondante.

Calcul de la conductivité

L'amplitude de la différence de potentiel mesurée entre les électrodes E_1 et E_2 est donnée par la relation suivante :

$$V(z) = \frac{I}{2\pi\sigma} \left[\frac{-\gamma_1 R_{11}}{R_{11}} - \frac{-\gamma_1 R_{12}}{R_{12}} + \frac{-\gamma_1 R_{22}}{R_{22}} - \frac{-\gamma_1 R_{21}}{R_{21}} \right] \quad (IV.22.)$$

I est le courant injecté dans l'électrolyte,
 σ est la conductivité de l'électrolyte,
 γ_1 est la constante de propagation dans l'eau salée :

$$\gamma_1 = \sqrt{j\omega\mu\sigma}$$

Les distances R_{ij} sont définies sur la figure suivante :

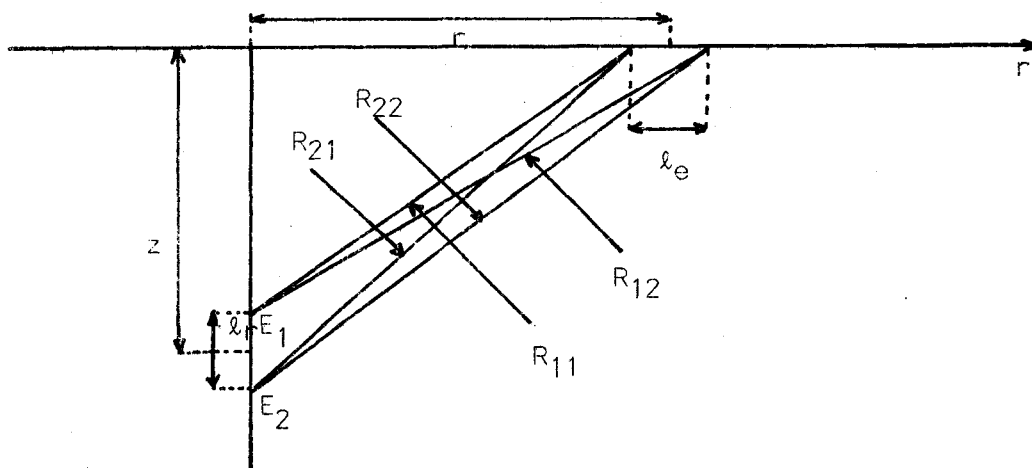


Figure IV.5.



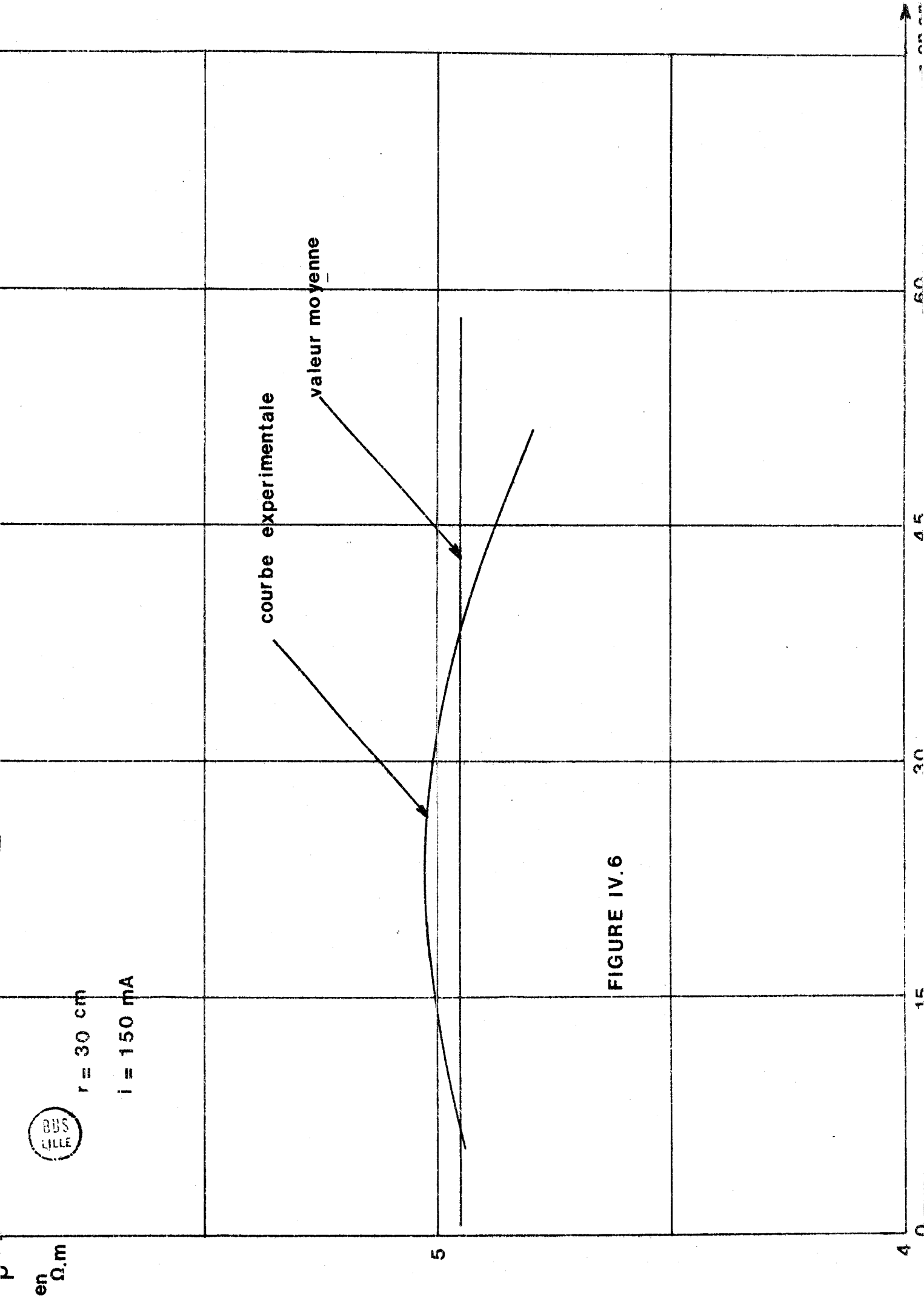
$r = 30 \text{ cm}$

$i = 150 \text{ mA}$

courbe expérimentale

valeur moyenne

FIGURE IV.6



Il en résulte que σ est la solution de l'équation implicite ci-dessous :

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{I}{|V(z)|} \left| \begin{array}{cccc} -\gamma_1 R_{11} & -\gamma_1 R_{12} & -\gamma_1 R_{21} & -\gamma_1 R_{22} \\ \frac{e}{R_{11}} & -\frac{e}{R_{12}} & -\frac{e}{R_{21}} & +\frac{e}{R_{22}} \end{array} \right| \quad (\text{IV.23.})$$

Si la structure envisagée est celle d'un demi-milieu homogène et infini, alors σ est une constante.

La courbe d'étalonnage est présentée Figure IV.6.

Les conditions de mesure sont les suivantes :

Fréquence du signal émis 312,5 Hz

Distance horizontale r : 30 cm

Longueur des antennes d'émission et de réception : 2 cm.

Dans la zone où les effets parasites dus au fond et aux parois de la cuve sont négligeables, la valeur moyenne de la résistivité ρ de l'électrolyte est de 4,9 Ωm . ($\sigma = 0,20 (\Omega\text{m})^{-1}$)

La variation relative de ρ autour de cette valeur est de $\pm 3\%$.

IV.4.2. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

IV.4.2.1. Configuration étudiée (35)

Nous avons immergé dans la cuve, un parallélépipède de Lucoflex (résistivité ∞). Ce parallélépipède a été positionné comme le montre la figure IV.7.

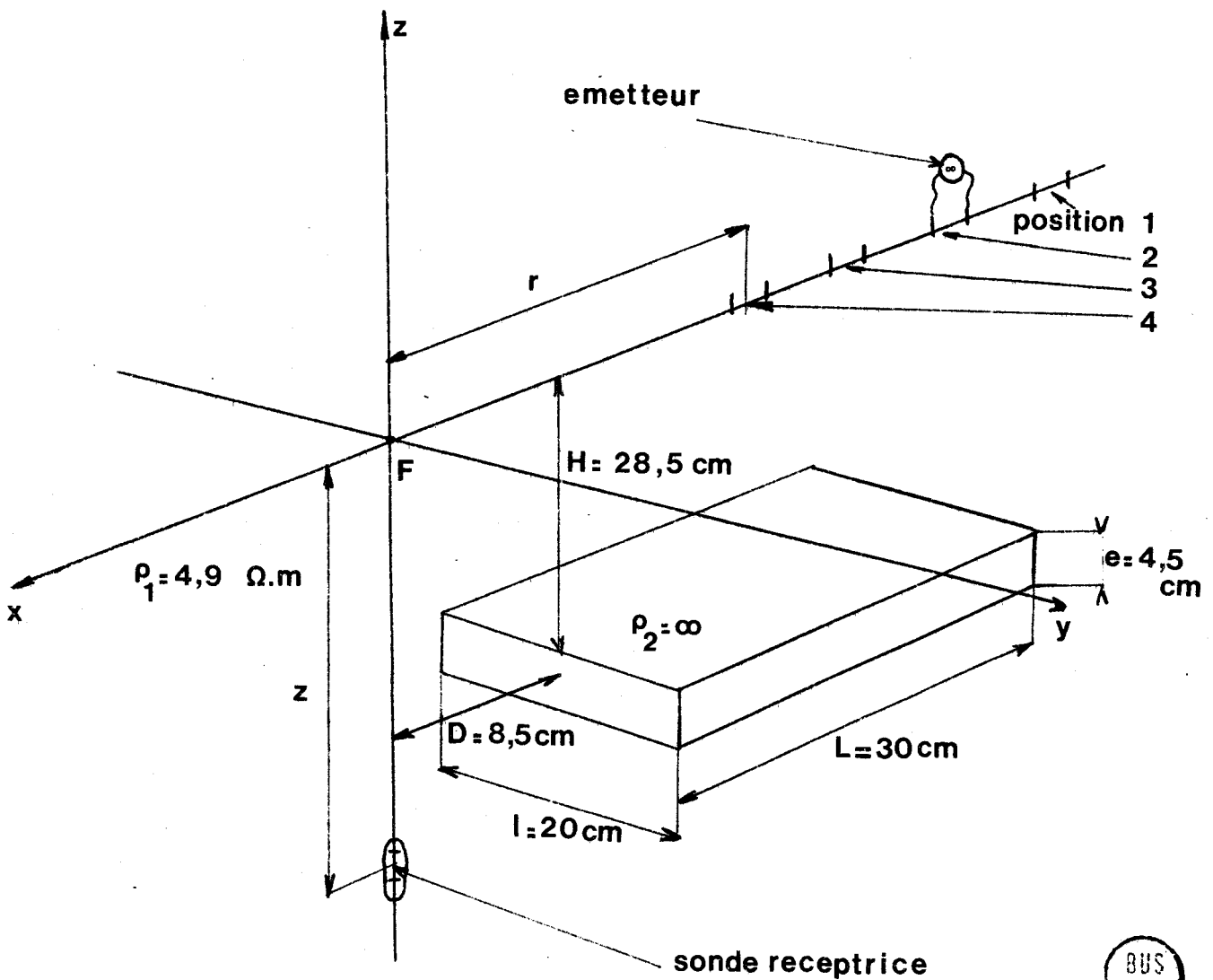
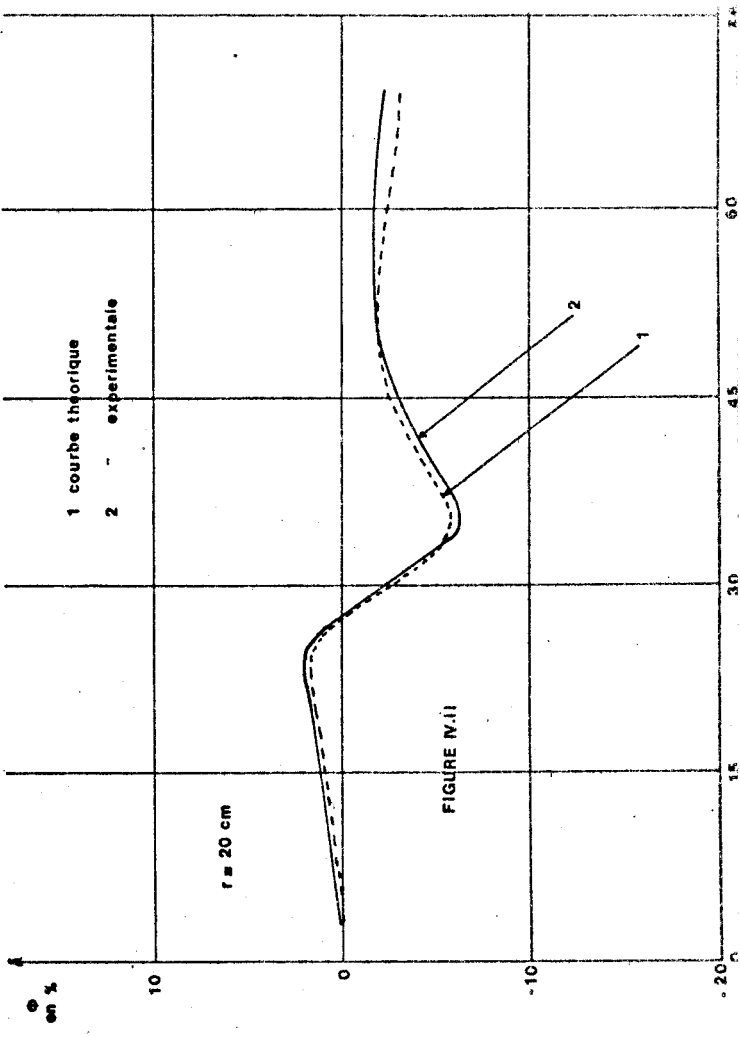
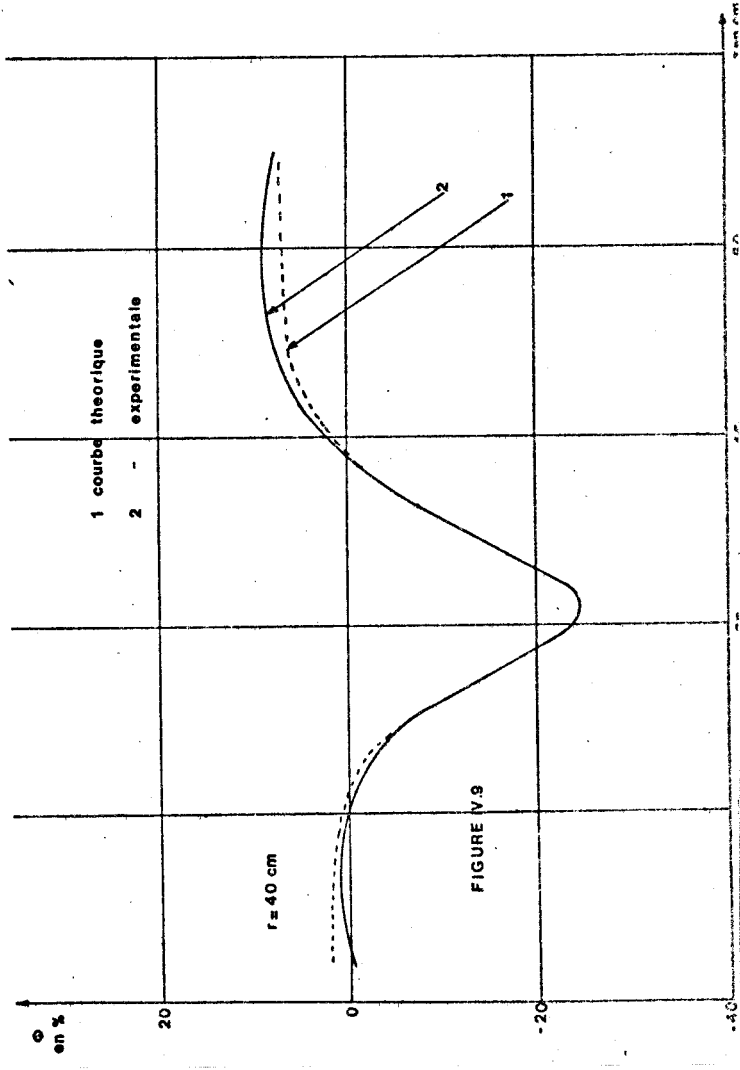
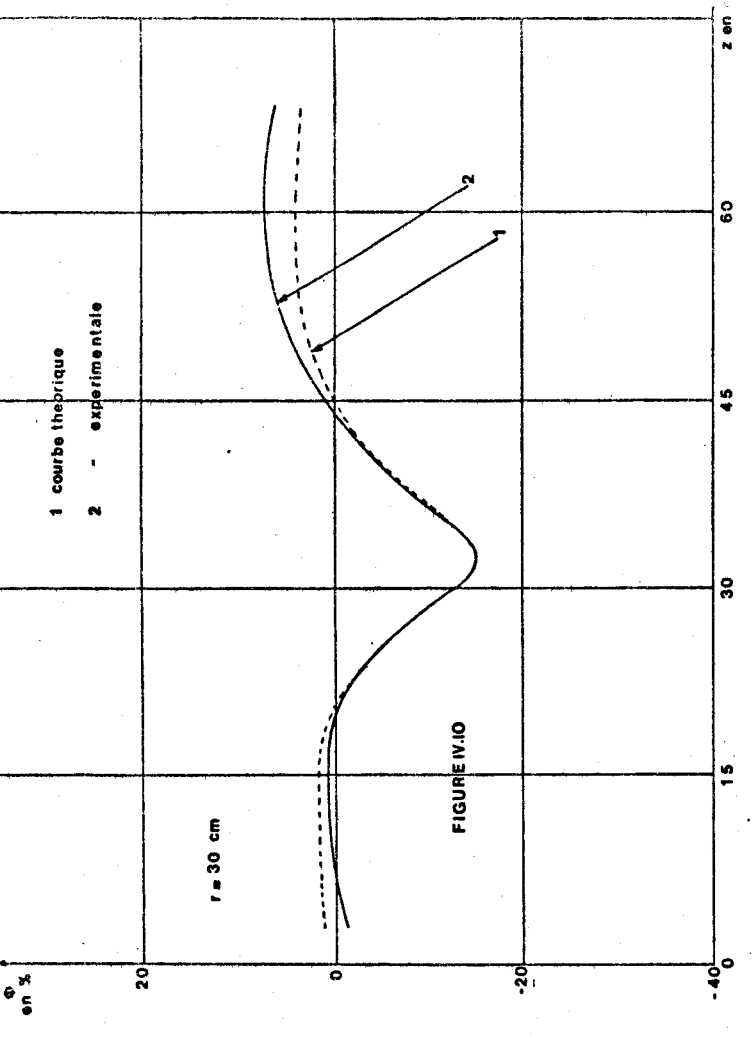
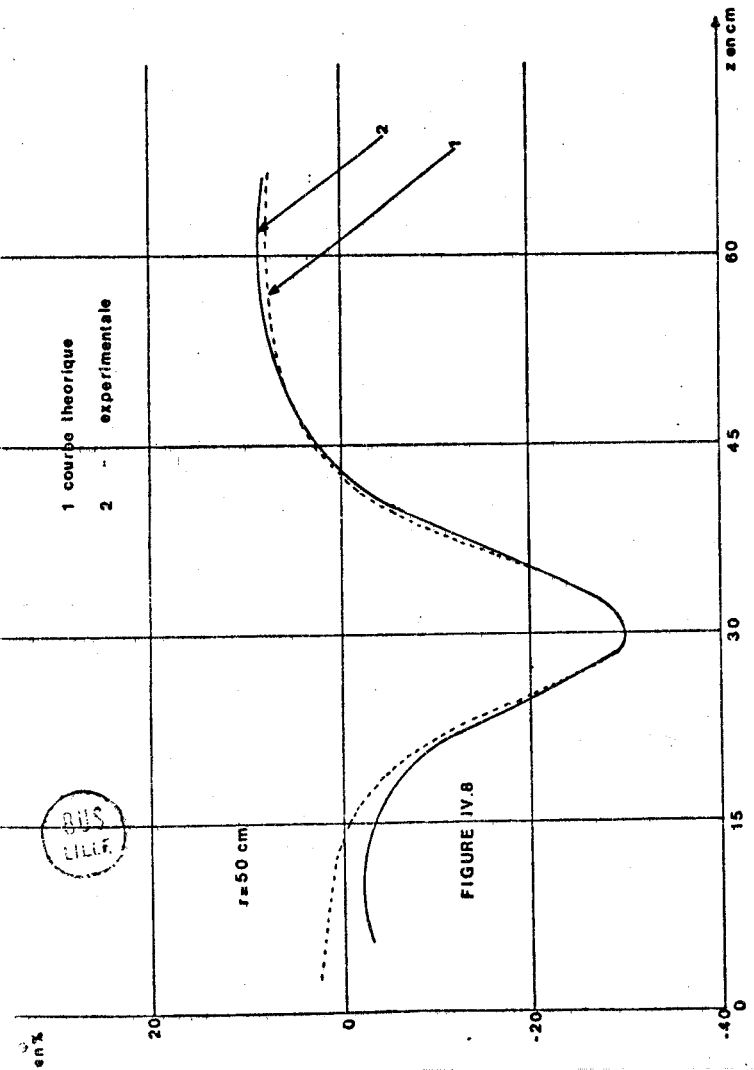


figure IV.7





Nous avons mesuré la tension aux bornes de la sonde de réception en fonction de la profondeur z pour les 4 positions d'émetteur indiquées sur la figure IV.7. et qui correspondent respectivement à :

Position 1	Distance émetteur forage $r = 50$ cm
Position 2	Distance émetteur forage $r = 40$ cm
Position 3	Distance émetteur forage $r = 30$ cm
Position 4	Distance émetteur forage $r = 20$ cm

IV.4.2.2. Présentation des résultats

Sur les figures que nous présentons, nous avons tracé l'indice d'anomalie \emptyset en fonction de la profondeur z .

Nous rappelons que l'indice d'anomalie \emptyset est défini de la manière suivante :

- Soit V la tension mesurée en présence de l'anomalie parallélépipédique ;
- Soit V_0 la tension mesurée dans le demi-milieu homogène.

Nous appelons indice d'anomalie dans le cas présent :

$$\emptyset = \frac{V_0 - V}{V_0}$$

Les figures IV.8. à IV.11. correspondent respectivement aux positions de l'émetteur numérotées de 1 à 4.

Les courbes en trait plein représentent la variation de l'indice d'anomalie mesuré expérimentalement.

Les courbes en pointillés, les résultats théoriques

calculés sur ordinateur.

En examinant ces relevés nous pouvons noter l'excellente concordance entre les résultats calculés sur ordinateur par notre modèle mathématique et ceux relevés expérimentalement sur la cuve rhéographique.

Nous pouvons cependant faire une remarque :

D'une manière générale, nous constatons que pour les faibles profondeurs, les valeurs théoriques sont supérieures à celles relevées expérimentalement. Tandis que pour les profondeurs les plus grandes, c'est le phénomène inverse qui se produit. Ceci s'explique très simplement en examinant la courbe d'étalonnage.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons étudier, sur un exemple particulier, l'influence d'une anomalie de résistivité sur le champ électrique vertical E_z .

IV.5. RESULTATS NUMERIQUES D'UNE ETUDE SYSTEMATIQUE DE L'INFLUENCE D'UN RESERVOIR DE FORME PARALLELEPIPEDIQUE SUR LE CHAMP ELECTRIQUE DANS UN DEMI MILIEU

IV.5.1. Position du problème

Considérons un demi-milieu, conducteur infini contenant une anomalie parallélépipédique dont les hauteur, largeur et longueur sont respectivement, t , ℓ et L . Le toit de cette hétérogénéité est situé à la distance h de l'interface air sol (Figure IV.12.). Les grands côtés (L) de cette anomalie, sont parallèles à l'axe \vec{F}_x . Le plan F_xz est un plan de symétrie pour ce parallélépipède qui se trouve placé à une distance d de l'axe \vec{F}_z .

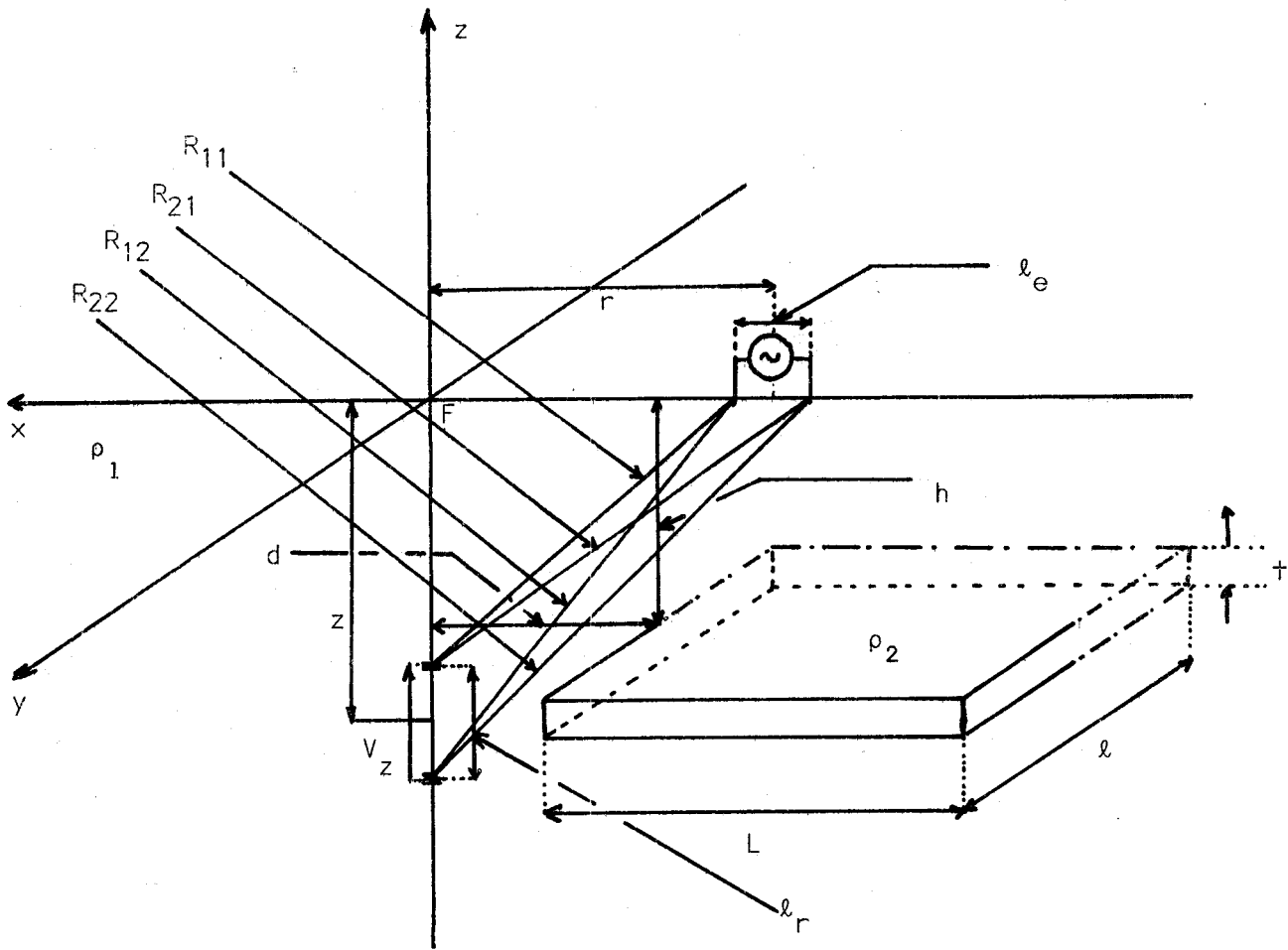


Figure IV.12.

Avant d'entamer cette étude systématique nous allons examiner, à partir d'un exemple donné, la convergence du procédé de calcul.

IV.5.2. Convergence du procédé de calcul

Les paramètres géométriques et électriques utilisés pour l'étude de la convergence de la méthode de calcul sont les suivants :

$$\begin{array}{ll} \rho_1 = 50 \Omega.m & d_o = 500 \text{ m} \\ c = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \infty & h_o = 415 \text{ m} \end{array}$$



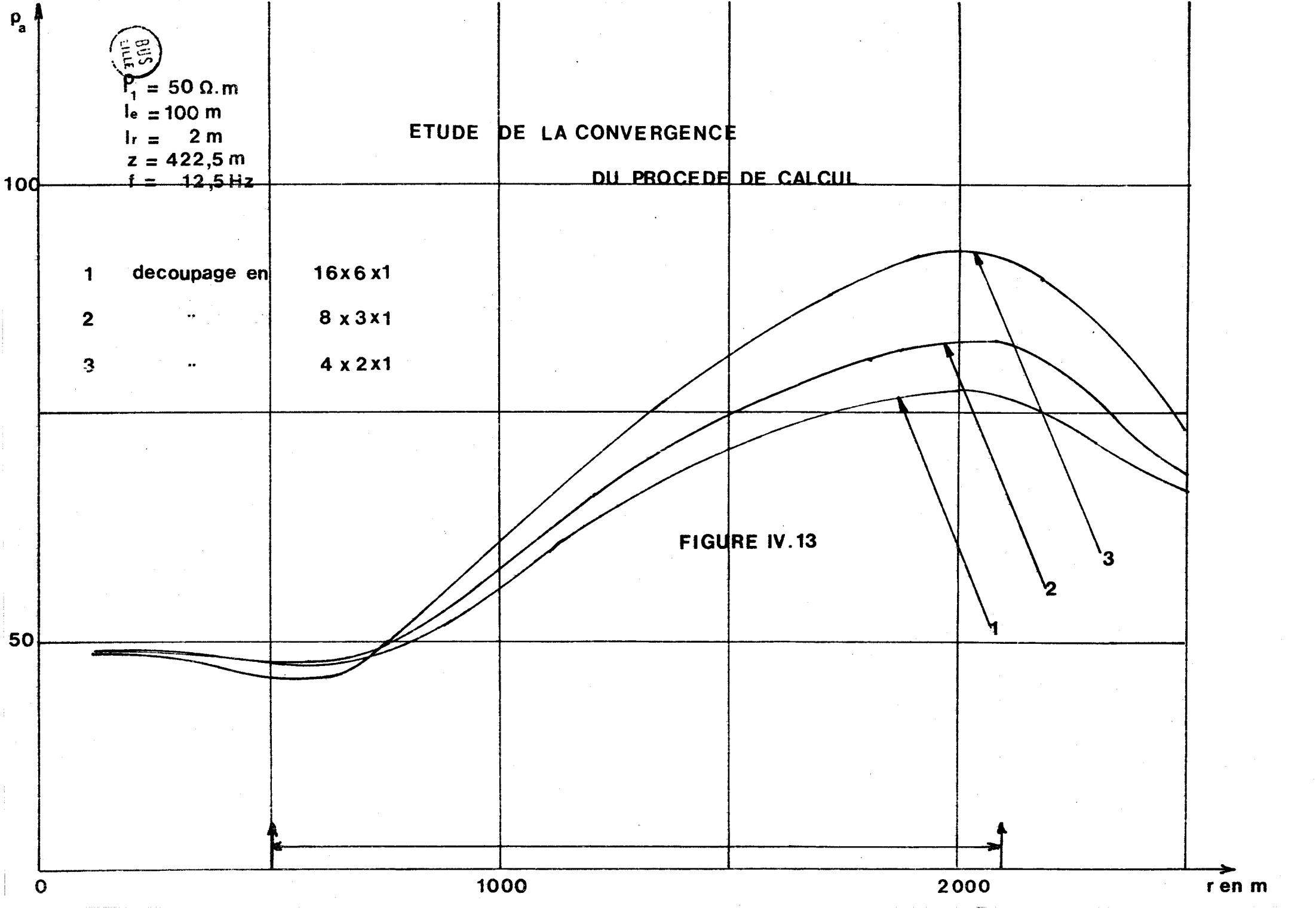
$\rho_1 = 50 \Omega \cdot m$
 $l_e = 100 m$
 $l_r = 2 m$
 $z = 422,5 m$
 $f = 12,5 Hz$

ETUDE DE LA CONVERGENCE

DU PROCEDE DE CALCUL

1	decoupage en	16x6x1
2	..	8x3x1
3	..	4x2x1

FIGURE IV.13



$$f = 12,5 \text{ Hz}$$

$$l_e = 100 \text{ m}$$

$$l_r = 2 \text{ m}$$

$$L_o = 1\,600 \text{ m}$$

$$l_o = 600 \text{ m}$$

$$t_o = 15 \text{ m}$$

Profondeur de pénétration $\delta_o \neq 1\,000 \text{ m}$

Sur la figure IV.13., nous avons représenté la variation de la résistivité apparente ρ_a en fonction de la distance émetteur forage r pour plusieurs découpages possibles. L'anomalie a successivement été divisée en parallélépipèdes rectangles de $400 \text{ m} \times 300 \text{ m} \times 15 \text{ m}$ (courbe 3), de $200 \text{ m} \times 200 \text{ m} \times 15 \text{ m}$ (courbe 2) et de $100 \text{ m} \times 100 \text{ m} \times 15 \text{ m}$ (courbe 1).

Nous rappelons que la résistivité apparente est la valeur numérique de la résistivité qu'il faut introduire dans l'expression de la tension $V(z)$ créée dans un demi milieu homogène par un DEH pour obtenir la valeur numérique de cette tension, calculée dans ce même demi milieu en présence de l'anomalie de résistivité.

Cette tension $V(z)$ est la suivante :

$$V(z) = \frac{I\rho}{2\pi} \left[\frac{e^{-\gamma_1 R_{11}}}{R_{11}} - \frac{e^{-\gamma_1 R_{12}}}{R_{12}} - \frac{e^{-\gamma_1 R_{21}}}{R_{21}} + \frac{e^{-\gamma_1 R_{22}}}{R_{22}} \right]$$

$$\gamma_1^2 = \frac{j\omega\mu}{\rho_1}$$

- ρ_1 est la résistivité du demi milieu homogène
- $R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$ sont définies sur la figure IV.12.

On constate sur la figure IV.13. que ces courbes divergent le plus au voisinage du maximum ($r \neq 2\,000 \text{ m}$). Nous avons tracé sur la figure IV.14. la variation de ce maximum en fonction du nombre de mailles n . On voit sur la figure que cette fonction converge vers la valeur exacte de cet extremum que l'on peut assimiler, avec une bonne

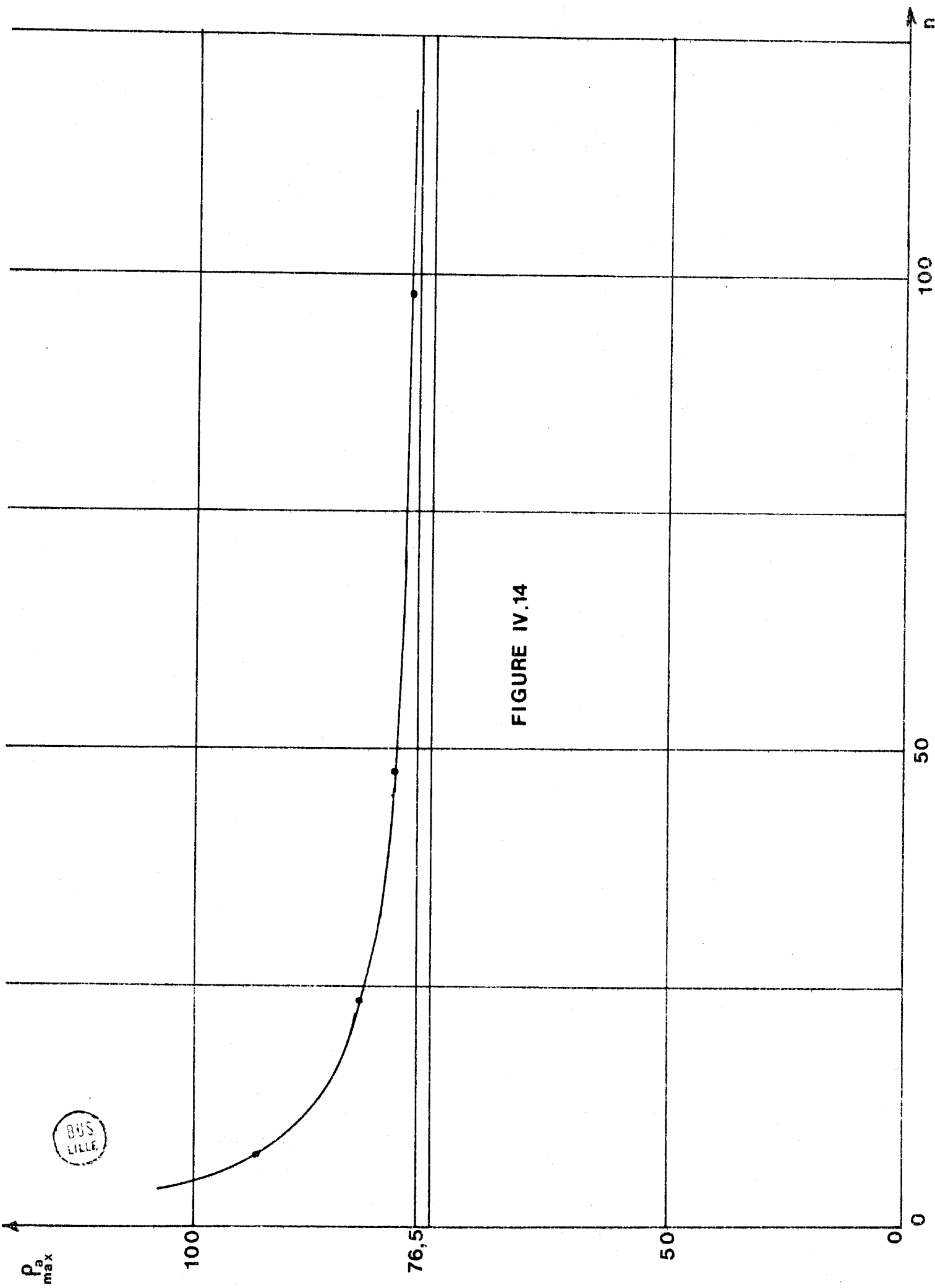


FIGURE IV.14

BUS
LILLE

précision, à celle obtenue pour un découpage en 96 mailles.

Dans ce dernier découpage, les longueur, largeur et épaisseur de la maille ΔV_j sont respectivement 100 m, 100 m et 15 m. Les cotés de la base de ce parallélépipède sont égaux au dixième de la profondeur de pénétration.

On admettra que la dimension optima des côtés des mailles doit être de l'ordre de grandeur du dixième de la profondeur de pénétration.

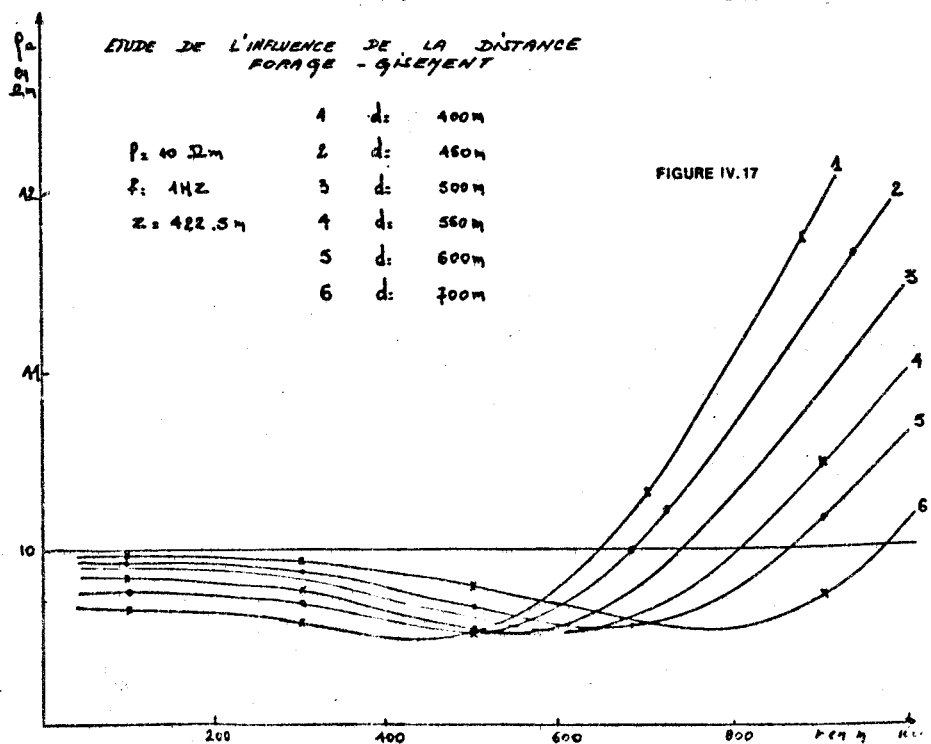
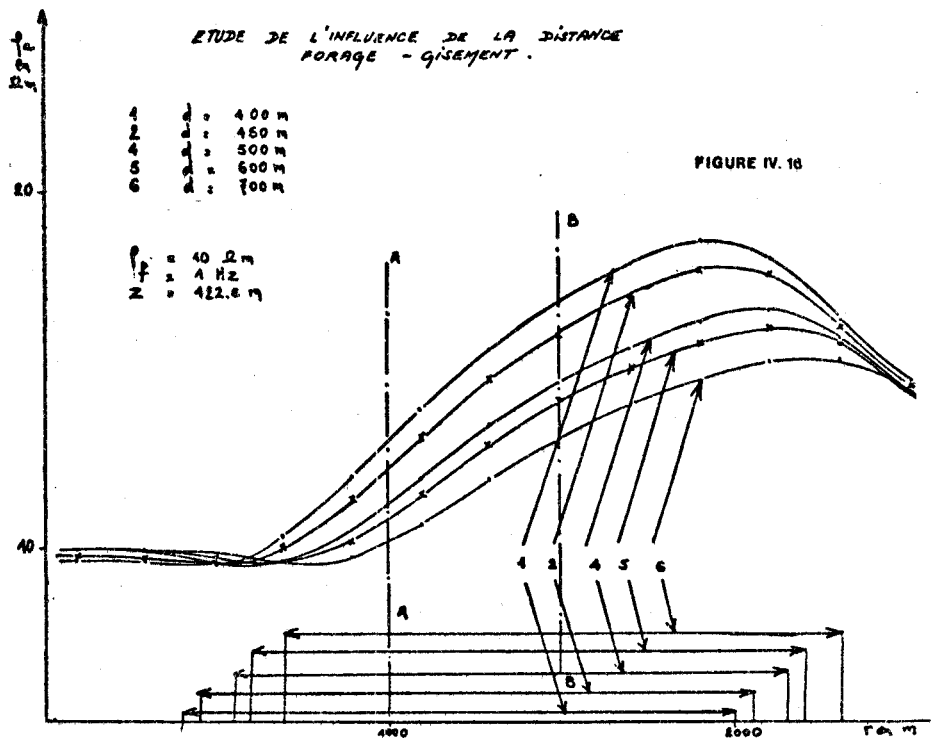
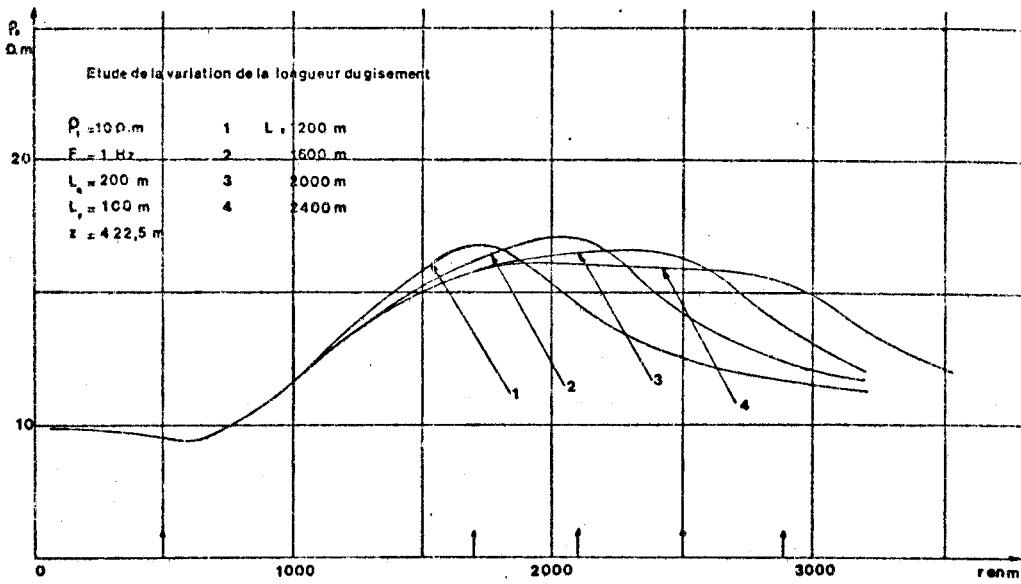
Nous avons d'ailleurs vérifié ce résultat sur la base de donnée choisie pour l'étude systématique.

Cette condition nécessaire n'est cependant pas suffisante. Même si les dimensions de l'anomalie sont inférieures au dixième de la profondeur de pénétration, il y aura lieu de diviser celle-ci en un nombre minimum de mailles pour rendre compte de discontinuités des champs sur la frontière de l'hétérogénéité.

Dans la suite de ce travail, pour diminuer le coût du calcul sur ordinateur, nous avons admis que les résultats seraient malgré tout satisfaisants si l'écart entre la valeur exacte et celle calculée pour un maillage donné était de 10 % environ. Ceci nous a permis de faire l'étude systématique avec un découpage en 24 mailles. (l'écart entre la valeur calculée et la valeur exacte est inférieur à 7 %).

IV.5.3. Résultats de l'étude systématique

Pour effectuer cette étude systématique, nous sommes partis d'une structure de base que nous définissons ci-dessous et nous avons fait varier successivement l'un des paramètres géométriques ou électriques en maintenant les autres constants.



PARAMETRES DE LA STRUCTURE DE BASE

PARAMETRES ELECTRIQUES

$$\rho_1 = 10 \Omega.m$$

$$c = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \infty$$

$$f = 1 \text{ Hz}$$

$$l_e = 200 \text{ m}$$

$$l_r = 100 \text{ m}$$

PARAMETRES GEOMETRIQUES

$$d_o = 500 \text{ m}$$

$$h_o = 415 \text{ m}$$

$$L_o = 1600 \text{ m}$$

$$l_\phi = 600 \text{ m}$$

$$t_o = 15 \text{ m}$$

$$\delta_o \neq 1580 \text{ m}$$

Les courbes que nous donnons représentent la résistivité apparente ρ_a calculée en fonction de la distance émetteur-forage r . La sonde receptrice est placée à la profondeur $z = 422,5$ mètres.

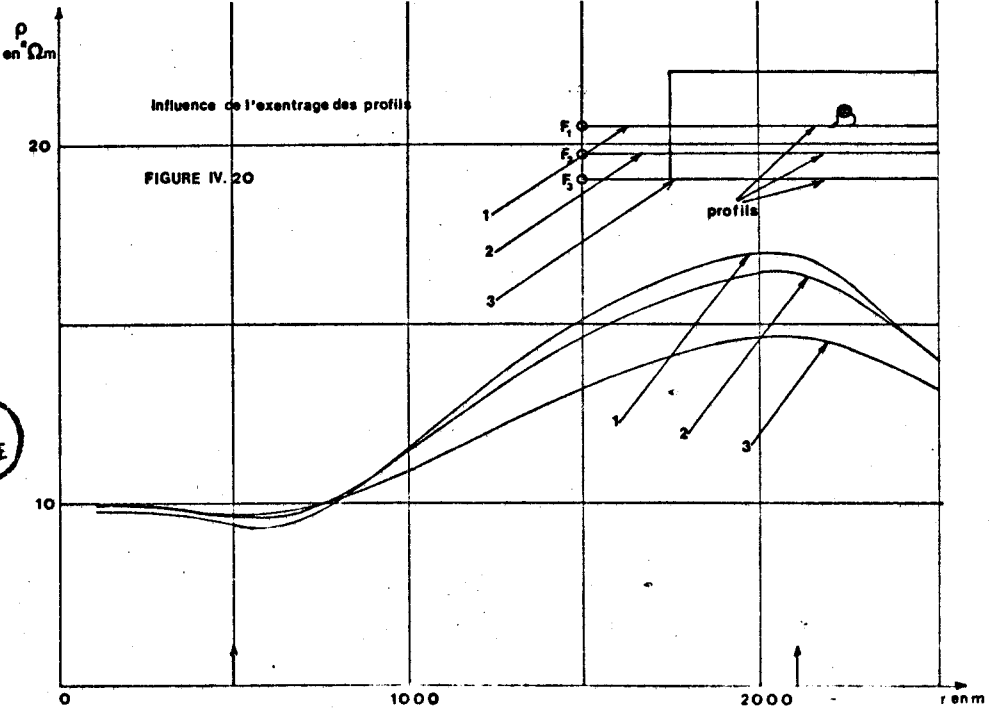
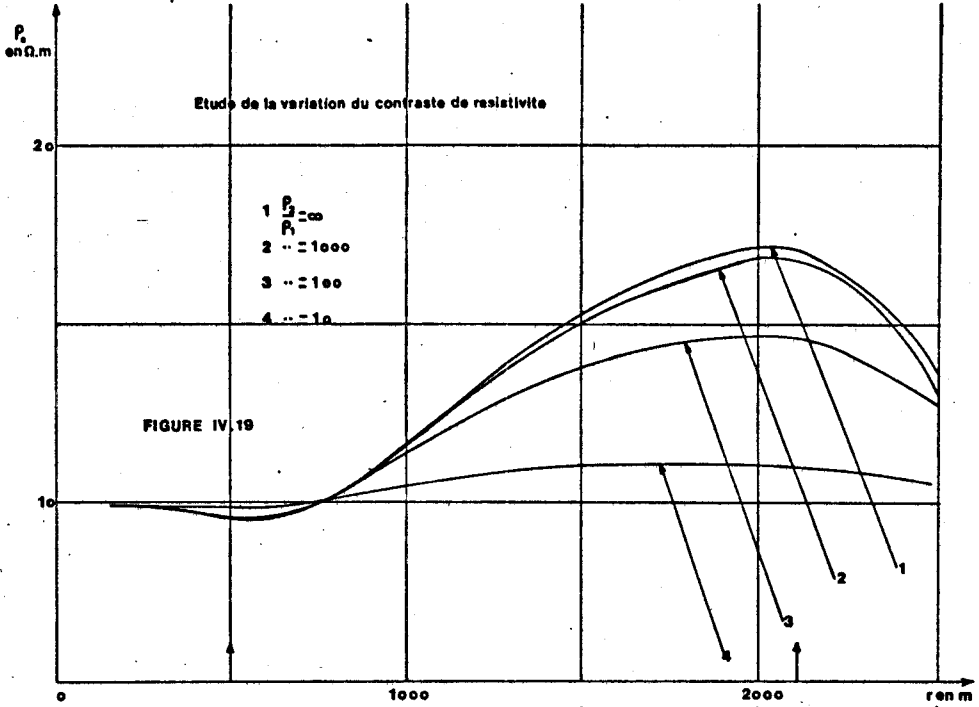
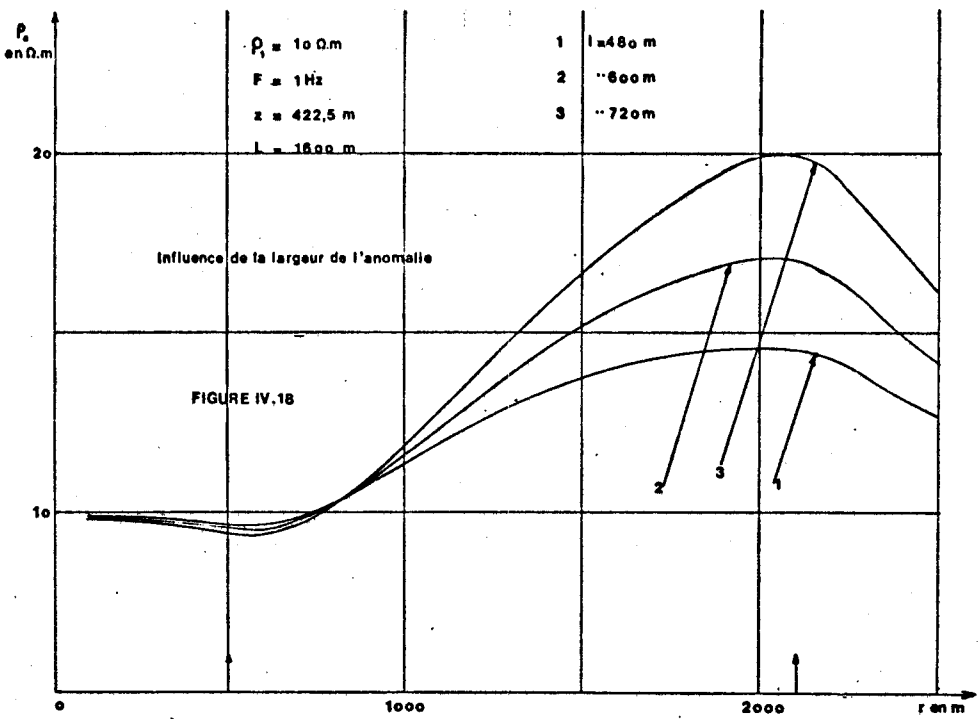
Voici la nomenclature des résultats obtenus :

- Figure IV.15. Etude de la variation de la longueur du gisement,
- Figure IV.16. Etude de la variation de la distance Forage réservoir d ,
- Figure IV.17. Même étude à une échelle dilatée,
- Figure IV.18. Etude de la variation de la largeur l de l'anomalie,
- Figure IV.19. Etude de la variation du contraste de résistivité c ,
- Figure IV.20. Etude de l'excentrage du profil par rapport à l'anomalie.

Examinons d'abord les figures IV.15., IV.16., et IV.17. Sur ces figures, nous avons représenté successivement la variation de ρ_a pour différentes valeurs de la longueur L , la variation de ρ_a en fonction de la distance séparant le premier bord de l'anomalie du forage. La figure IV.17. représente à une échelle dilatée la portion de la figure IV.16. comprise entre l'origine et la coupe AA.

Ces courbes présentent toutes des extréma qui sont caractéristiques des deux extrémités de l'hétérogénéité.

Il en résulte que si l'on obtient, à partir de mesures sur le terrain, l'une des courbes de ces réseaux, le long d'un profil donné, nous



serons capables de déterminer, dans la direction de ce profil, les limites de l'anomalie.

On peut donc penser qu'en effectuant plusieurs profils en étoile autour du forage, il sera possible de déterminer la projection du réservoir sur la surface du sol.

Cependant, si le minimum est une caractéristique du "premier bord du gisement", son amplitude correspond à une variation $\frac{\Delta \rho_a}{\rho_1}$ inférieure à 5 %, ce qui réduit considérablement son intérêt comme élément d'appréciation de la distance "bord du gisement forage".

En revanche, on constate que le deuxième bord du gisement est facilement identifiable *par la présence d'un maximum correspondant à une augmentation de 70 % de la variation relative* $\frac{\Delta \rho_a}{\rho_1}$

Cependant, si cette augmentation est significative, du point de vue amplitude, la localisation de cette extrémité la plus éloignée par la position du maximum, devient trop peu précise, lorsque le gisement présente une dimension $L > 3\lambda$ environ. Sans compter que pour des distances émetteur forage importantes, la mesure précise de la tension est compromise, sinon impossible, compte tenu de l'affaiblissement exponentiel du signal en fonction de la distance.

Comme nous le voyons sur les courbes IV.18. à IV.20., les variations de la largeur λ , du contraste de résistivité c , et de l'excentrage du profil par rapport au plan de symétrie de l'anomalie ne se répercutent que sur les amplitudes des courbes.

On constate même qu'il est impossible de différencier la courbe de résistivité apparente obtenue pour une anomalie de 600 m de large présentant un contraste de résistivité de 100 Ωm de celle obtenue pour une anomalie de 480 m de large mais de résistivité infinie.

Mais, par contre, la remontée très importante de la résistivité apparente pour les positions d'émetteur situées au dessus du gisement (70 % dans le cas étudié) fait *qu'il est impossible de ne*

pas déceler la présence d'un gisement situé à quelques centaines de mètres d'un forage qui ne l'a pas rencontré.

Ce résultat, bien plus que la possibilité d'une localisation précise constitue à nos yeux l'intérêt du télélog pour l'industrie pétrolière.

A partir des réseaux de courbes que nous venons de présenter on pourrait envisager d'étudier la limite de détectabilité d'un gisement. Cependant, il est important de remarquer que cette étude a été faite dans l'hypothèse où le terrain est homogène et où le récepteur est idéal.

Nous allons montrer dans le chapitre suivant que l'influence du câble reliant la sonde de mesure au récepteur de surface peut considérablement perturber les courbes de résistivité apparente. Il en résulte que la limitation du procédé ne pourra s'étudier que sur un modèle de synthèse, comme nous l'avons dit au premier chapitre de notre thèse.

CHAPITRE. V.

ETUDE DE L'INFLUENCE DU CÂBLE RELIANT LA SONDE DE MESURE AU RECEPTEUR DE SURFACE

Cette étude a pour but de mettre en évidence le phénomène de guidage des ondes électromagnétiques par le câble reliant la sonde de mesure au récepteur de surface. Nous donnons des résultats quantitatifs sur la perturbation que ce phénomène apporte aux mesures Télég.

Après avoir étudié la répartition du courant à l'intérieur du câble nous établissons l'équation intégrale dont la solution est le champ électrique vertical E_z créé en un point du forage placé sous ce câble.

Enfin, après avoir donné les grandes lignes de la méthode numérique utilisée pour résoudre l'équation intégrale, nous complétons cette étude par des résultats mettant en évidence l'influence des paramètres géométriques et électriques sur le phénomène de guidage des ondes électromagnétiques par le câble.

V.1. POSITION DU PROBLEME

V.1.1. Description sommaire de la chaîne de réception

La chaîne de mesure se compose, d'un porte-électrodes en caoutchouc, fixé à une cartouche, contenant l'électronique de la sonde de mesure. Cette sonde est reliée à un récepteur de surface par l'intermédiaire d'un câble en acier dont une partie est isolée par un revêtement de caoutchouc (Bridel) au voisinage de la cartouche. Ce

tronçon isolé porte également deux électrodes qui peuvent être utilisées pour la mesure de la tension.

La figure.V.1. représente le schéma synoptique du dispositif de mesure et la figure.V.2. le schéma de la sonde.

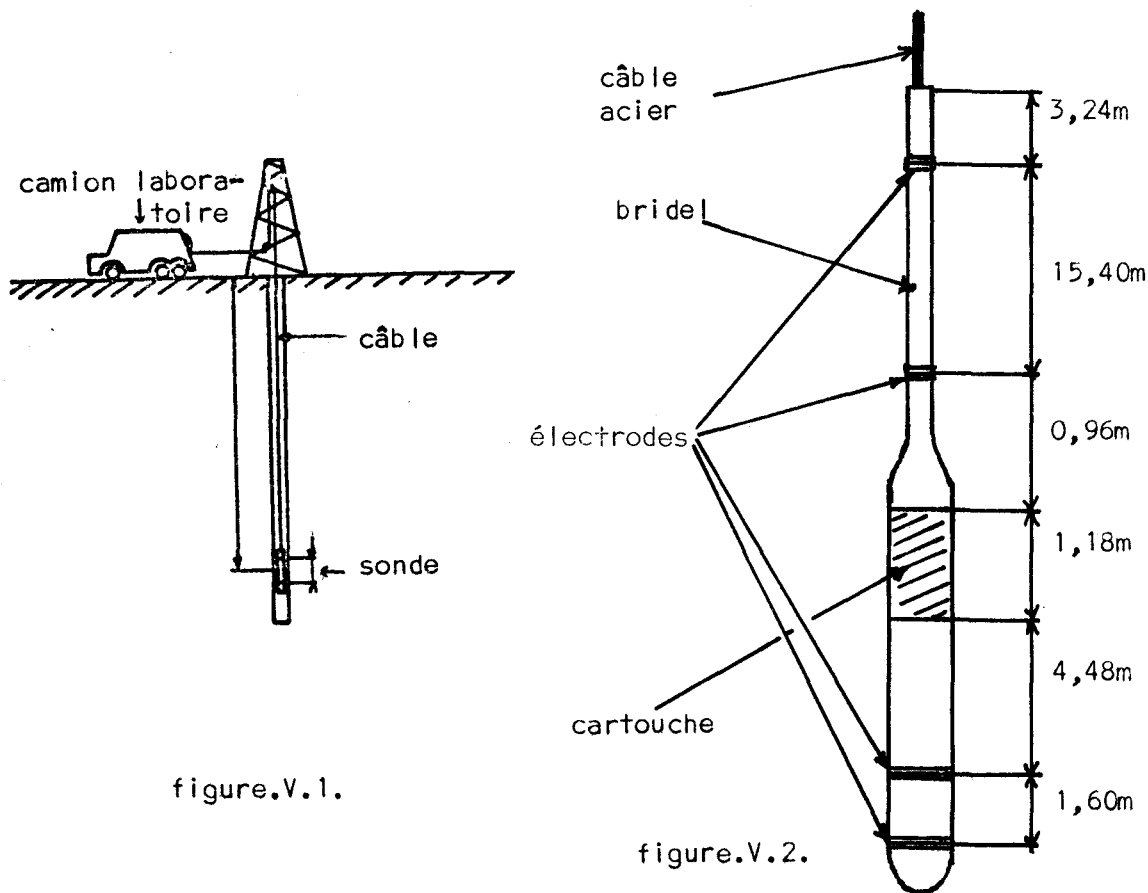


figure.V.1.

figure.V.2.

Les mesures de tension sont des mesures différentielles faites entre la cartouche qui est la référence de masse électrique et les deux électrodes inférieures (base de réception de 1,60m) ou supérieures (base de réception de 15,40m).

Le câble en acier a un diamètre de 12mm. Il comporte sept conducteurs et une armature extérieure.

L'émetteur induit à l'intérieur de ce câble un courant à la fréquence du signal émis. Ce courant crée au niveau des électrodes de mesure un champ électrique vertical supplémentaire qui s'ajoute au champ créé directement par l'émetteur, c'est ce phénomène que nous voulons étudier quantitativement.

(36)

V.1.2. Structure étudiée

Nous assimilons le câble non isolé à un cylindre de métal de conductivité σ_2 présentant un fort contraste de conductivité avec le milieu encaissant. Son rayon est a et sa longueur L . Les électrodes de mesure sont situées à une distance d sous le cylindre et sont espacées d'une longueur ℓ_r .

Le champ électromagnétique est créé par une antenne de longueur ℓ_e placée à la surface du sol et dont la distance moyenne par rapport à l'axe du câble est r . (figure.V.3.).

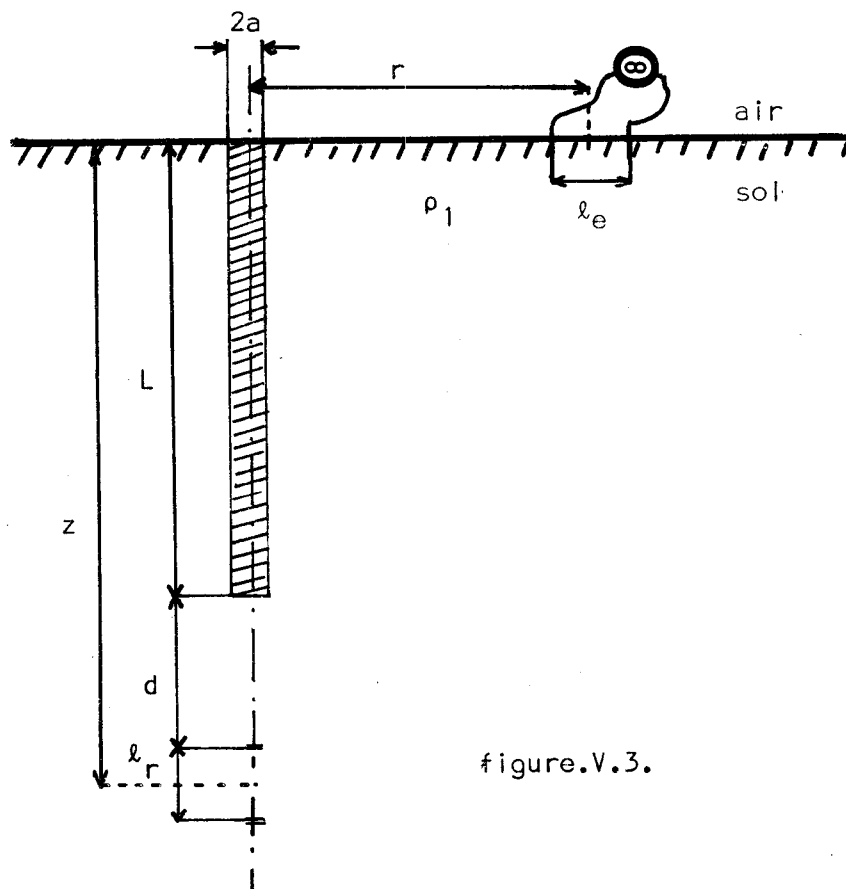


figure.V.3.

V.2. REPARTITION DU CHAMP ELECTRIQUE \vec{E} A L'INTERIEUR DU CABLE. EQUATION INTEGRALE POUR E_z

V.2.1. Répartition du champ électrique à l'intérieur du câble

Son diamètre étant très faible vis-à-vis de la distance émetteur-forage r , le câble est équipotentiel dans une section droite. Le champ électrique incident est donc contenu dans les plans verticaux passant par l'axe du câble.

Par ailleurs, compte tenu du rapport des conductivités entre le câble et le terrain encaissant, le champ électrique induit n'a qu'une composante E_z .

Nous supposerons donc dans cette étude, que le courant induit n'a qu'une composante verticale $I(z)$ répartie uniformément dans la section droite du câble.

V.2.2. Equation intégrale pour la composante E_z

D'après les relations établies au chapitre.II., le champ électrique E_z est donné par l'équation intégrale ci-dessous :

$$E_{z(P)} = E_{z(P)+\Lambda} \int_{V_C} E_{2z}(M) \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} (P_1-P) - \gamma^2 (P_1-P) \right] dV \quad (V.1.)$$

- $E_{z_p}(P)$ est la composante verticale du champ électrique primaire
- $E_{z_2}(M)$ est la composante verticale du champ électrique dans le milieu 2 (câble)
- $\Lambda = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\pi\sigma_1}$ où σ_1 et σ_2 sont respectivement les conductivités du sol et du câble
- V_C est le volume du câble
- les points M et P sont définis sur la figure.V.4.
- Les repères $pXYZ$ et $Qxyz$ se déduisent l'un de l'autre dans une translation de valeur r selon \vec{Ox}

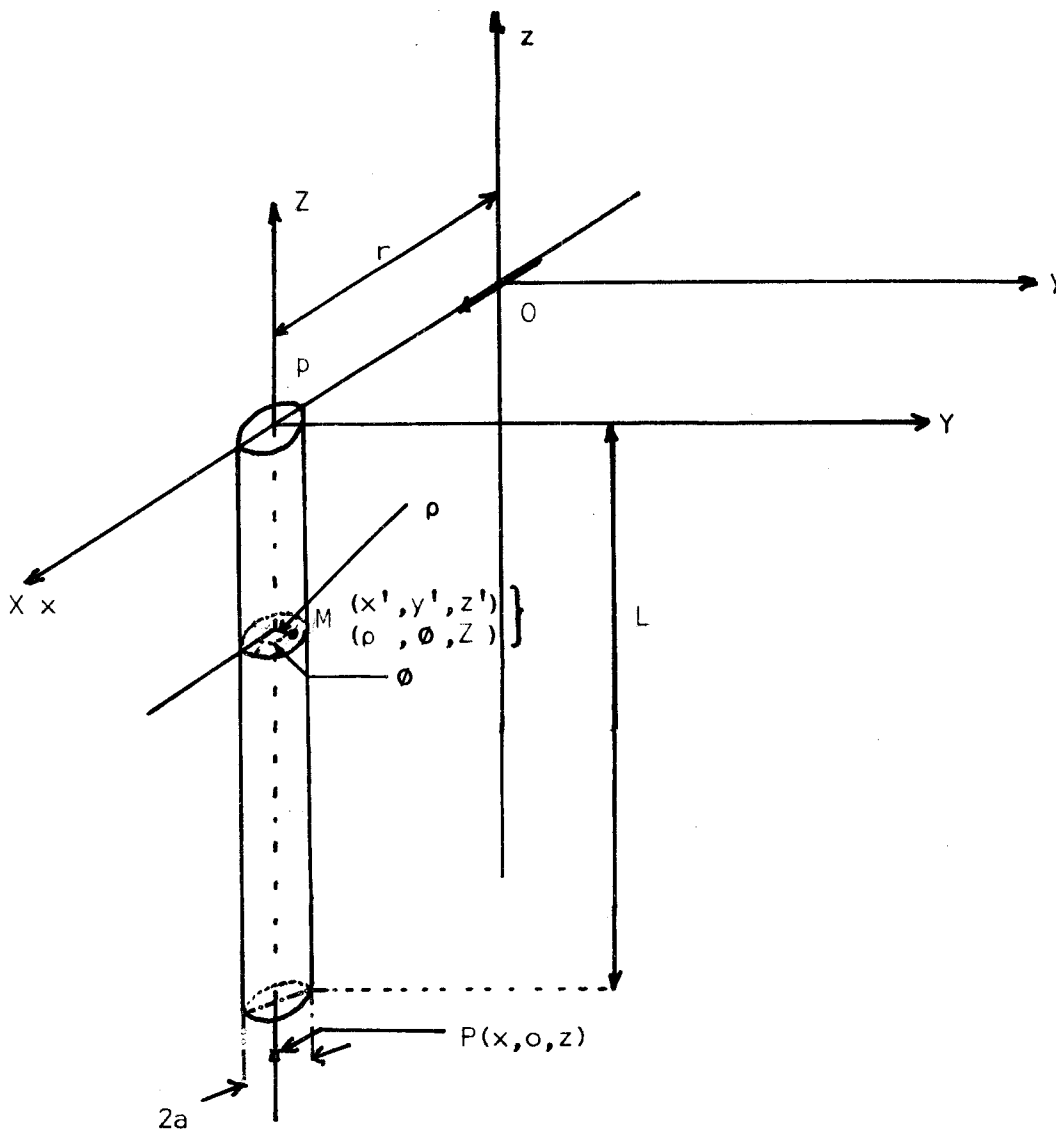


Figure.V.4.

Nous rappelons que les fonctions P_1 et P figurant dans V.1. sont définies de la manière suivante :

$$P_1 = \frac{e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1} \quad (\text{V.2.a.}) \quad P = \frac{e^{-\gamma_1 R_2}}{R_2} \quad (\text{V.2.b.})$$

• γ_1 est la constante de propagation dans le sol :

$$\gamma_1^2 = j\omega\mu_0\sigma_1$$

$$R_1 = \sqrt{(x-x')^2 + y'^2 + (z-z')^2} = \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}$$

$$\text{et } R_2 = \sqrt{(x-x')^2 + y'^2 + (z+z')^2} = \sqrt{\rho^2 + (z+z')^2}$$



Les fonctions de Green P_1 et P vérifient respectivement les relations :

$$\Delta P_1 - \gamma_1^2 P_1 = -4\pi\delta(\rho, z-z') \quad (V.3.a.)$$

$$\Delta P - \gamma_1^2 P = 0 \quad (V.3.b.)$$

. $\delta(\rho, z-z')$ est la fonction de Dirac.

En explicitant V.2.a. et V.2.b. en coordonnées cylindriques et en reportant les expressions obtenues dans V.1. cette relation devient :

$$E_z(P) = E_{z_p}(P) - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1} \int_{V_c} E_{2z}(M) \delta(\rho, z-z') dV - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\pi\sigma_1} \int_{V_c} E_{2z}(M) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (P_1 - P) \right) dV \quad (V.4.)$$

A l'intérieur du câble, et en supposant que σ_2 est beaucoup plus grand que σ_1 , V.4. devient :

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} E_{2z}(Z) = E_{z_p}(Z) - \frac{\sigma_2}{4\pi\sigma_1} \int_{V_c} E_{2z}(Z) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (P_1 - P) \right) dV \quad (V.5.)$$

En intégrant V.5. par rapport à θ , et ρ , puisque nous avons montré que E_{2z} n'était qu'une fonction de Z , nous obtenons :

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} E_{2z}(Z) = E_{z_p}(Z) + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \frac{a^2}{Z} \int_{-L}^0 E_{2z}(Z) \left[\frac{e^{-\gamma_1 R_1'}}{R_1'^3} (1 + \gamma_1 R_1') - \frac{e^{-\gamma_1 R_2'}}{R_2'^3} (1 + \gamma_1 R_2') \right] dZ \quad (V.6.)$$

avec : $R_1' = \sqrt{a^2 + (z-Z)^2}$ et $R_2' = \sqrt{a^2 + (z+Z)^2}$

En introduisant les densités de courant $J_1(Z)$ et $J_2(Z)$ telles que :

$$J_1(Z) = \sigma_1 E_{z_p}(Z) \quad \text{et} \quad J_2(Z) = \sigma_2 E_{2z}(Z)$$

V.6. devient :

$$J_2(Z) = J_1(Z) + \frac{a^2}{2} \int_{-L}^0 J_2(Z) \left[\frac{e^{-\gamma_1 R_1'} (1 + \gamma_1 R_1')}{R_1'^3} - \frac{e^{-\gamma_1 R_2'} (1 + \gamma_1 R_2')}{R_2'^3} \right] dz \quad (V.7.)$$

Le champ vertical E_z au point P est alors donné par la relation :

$$E_z(P) = E_{z_p}(P) + \frac{a^2}{2\sigma_1} \int_{-L}^0 J_2(Z) \left[\frac{e^{-\gamma_1 R_1'} (1 + \gamma_1 R_1')}{R_1'^3} - \frac{e^{-\gamma_1 R_2'} (1 + \gamma_1 R_2')}{R_2'^3} \right] dz \quad (V.8.)$$

Remarque

Nous constatons en introduisant les densités de courant $J_1(Z)$ et $J_2(Z)$ que $J_2(Z)$, solution de l'équation intégrale V.7., est la densité de courant induite dans le câble, considéré, à la limite, comme un *conducteur parfait*.

V.3. METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION INTEGRALE

V.3.1. Discretisation du câble. Equation matricielle

Nous discrétisons le cylindre en n éléments cylindriques ΔV_i de hauteur $2h$, en appliquant la relation III.2.1. établie au chapitre.III. la relation fonctionnelle V.7. se transforme en la relation matricielle suivante :

$$J_2(M_i) = J_1(M_i) + \frac{a^2}{2} \sum_{j=1}^n J_2(M_j) \int_{-h}^{+h} G(M_i, M_j) du \quad (V.9.)$$

avec :

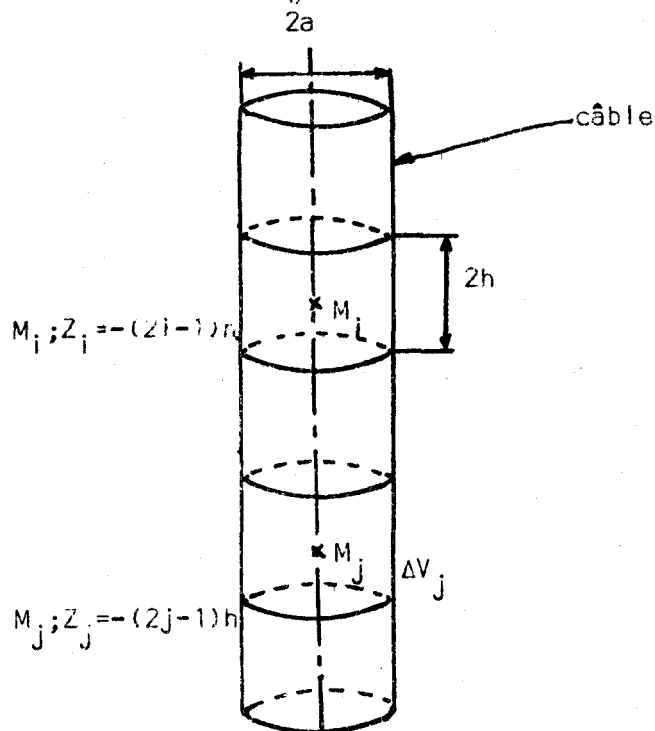
$$G(M_i, M_j) = \frac{e^{-\gamma_1 \overline{R_1}} (1 + \gamma_1 \overline{R_1})}{\overline{R_1}^3} - \frac{e^{-\gamma_1 \overline{R_2}} (1 + \gamma_1 \overline{R_2})}{\overline{R_2}^3}$$

avec :

$$R_1 = \sqrt{a^2 \cdot (Z_i - Z_j - u)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{a^2 \cdot (Z_i + Z_j + u)^2}$$

Les points M_i et M_j sont définis sur la figure suivante :



La relation V.9. peut se résumer de la façon suivante :

$$\vec{J}_2 = \vec{J}_1 + \frac{a^2}{2} A \vec{J}_2 \quad (V.10.)$$

\vec{J}_2 est la densité de courant à l'intérieur du câble :

$$(J_2(M_i) \text{ pour } i = 1, n)$$

\vec{J}_1 est la densité de courant primaire qui existerait à l'intérieur du câble si celui-ci avait la même conductivité que le milieu encaissant :

$$(J_1(M_i) \text{ pour } i = 1, n)$$

A est la matrice des intégrales des fonctions de Green étendues aux cylindres de hauteur $2h$.



$\frac{E_z}{E_{z0}}$

50

10

5

1

400

450

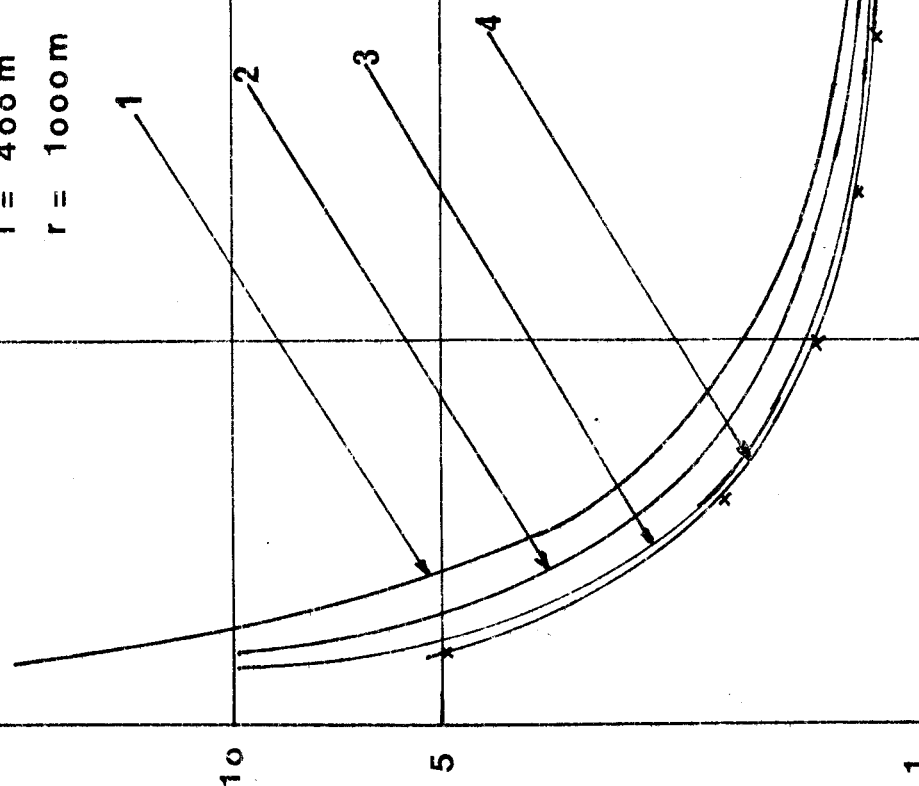
500

z en m

$a = 5 \text{ mm}$
 $\rho = 25 \Omega \cdot \text{m}$
 $F = 1 \text{ Hz}$
 $l = 400 \text{ m}$
 $r = 1000 \text{ m}$

1	N = 30	Mailles	..
2	= 50		..
3	= 100		..
4	= 150		..
x	= 184		..

FIGURE V.6



On montre que la matrice A est symétrique à condition que tous les cylindres aient la même hauteur. Dans le cas présent, l'ordre de la matrice est égal au nombre des mailles élémentaires en lesquelles on découpe le cylindre.

V.3.2. Résolution numérique de l'équation matricielle et convergence du procédé de calcul

V.3.2.1. Algorithmes utilisés

Pour calculer les intégrales simples figurant dans l'expression de la densité de courant J_2 (V.9.), nous avons utilisé l'algorithme de Simpson. Celui-ci a l'avantage de ne pas nécessiter de calculs annexes (abscisses et poids d'une quadrature) d'une part et d'autre part converge très vite sur des intervalles très limités.

La résolution du système matriciel V.10. s'effectue en employant la méthode de Choleski. L'emploi de cette méthode pour des systèmes où la matrice est symétrique, se justifie par la rapidité du calcul, et l'excellente précision des résultats.

En effectuant cette résolution du système matriciel en mémoire centrale, la capacité maxima de l'ordinateur de l'U.S.T.L. (C.I.I. 1070) est atteinte avec une matrice d'ordre 184. Cependant, nous disposons d'une "méthode de Choleski par Bloc" mise au point par GRIMOUD (FRANLAB). Cette méthode qui utilise des fichiers disques permet de résoudre des systèmes d'équations linéaires dont le nombre peut atteindre 3040 (7600 CONTROL DATA).

V.3.2.2. Convergence du procédé de calcul

Sur la figure.V.6. nous avons tracé le rapport E_z/E_{z_0} en fonction de la profondeur z . Le champ E_z est le champ électrique vertical calculé en présence du câble. E_{z_0} est le champ électrique vertical qui serait créé à la même profondeur en l'absence de câble.

Sur cette figure, nous constatons que la solution exacte est atteinte par un découpage en 150 mailles.

Etude du rapport $\frac{E_z}{E_{z0}}$ en fonction de d

$F = 1 \text{ Hz}$

$L = 400 \text{ m}$

$a = 5 \text{ mm}$

$\rho = 25 \Omega.m$

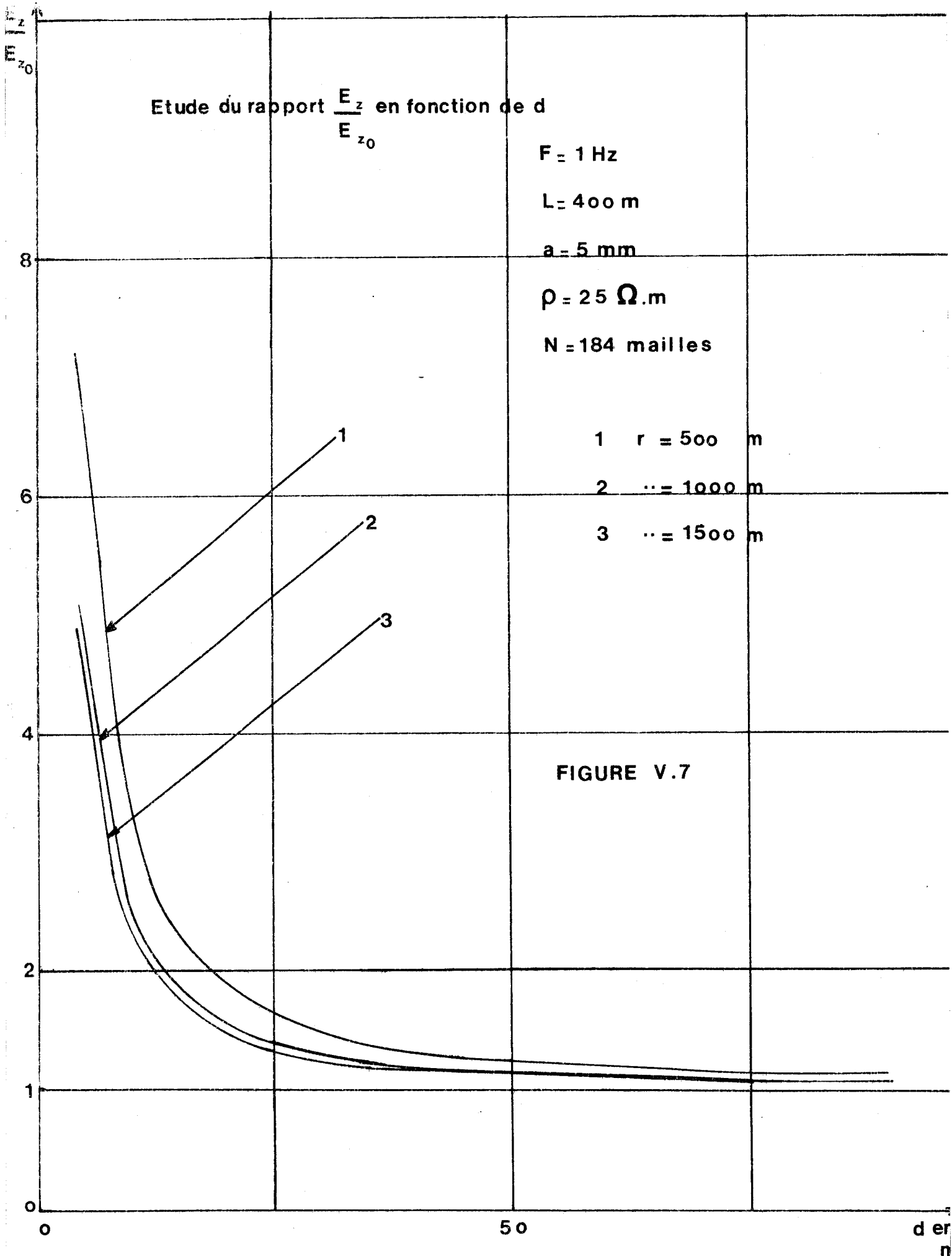
$N = 184 \text{ mailles}$

1 $r = 500 \text{ m}$

2 $r = 1000 \text{ m}$

3 $r = 1500 \text{ m}$

FIGURE V.7



Cette solution nous donne la hauteur optima de la maille élémentaire qui est d'environ 2,60mètres.

Comme nous le verrons par la suite, cette taille ne dépend pas de la profondeur de pénétration des ondes dans le demi-milieu dans lequel se trouve le câble.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons présenter quelques résultats d'une étude de l'influence du câble sur la mesure de la composante verticale du champ électrique E_z .

V.4. QUELQUES RESULTATS DE L'ETUDE SYSTEMATIQUE DE L'INFLUENCE DU CABLE SUR E_z .

V.4.1. Etude en fonction de la distance du point de mesure à l'extrémité du câble, d

Sur la figure.V.7. nous avons représenté le rapport E_z/E_{z_0} en fonction de d pour 3 valeurs de r. Les différents paramètres géométriques et électriques sont reportés sur cette figure.

Nous constatons que pour des valeurs de d supérieures à 80m, l'influence du câble sur le rapport E_z/E_{z_0} devient négligeable. A ce propos, d'autres explications ont montré que l'influence d'un tubage de 17cm de rayon ne se faisait plus sentir à partir d'une distance d'environ 100 mètres entre la sonde de mesure et son extrémité.



V.4.2. Etude du rapport E_z/E_{z_0} en fonction de la longueur du câble

Sur la figure.V.8. nous avons représenté la variation du rapport E_z/E_{z_0} en fonction de la distance émetteur-forage pour plusieurs valeurs de la longueur du câble, L.

Nous constatons que l'influence du câble est d'autant plus importante que le câble est plus long.

Pour expliquer ce phénomène, assimilons le câble à une succession de dipôles verticaux, élémentaires, parcourus par un courant qui est fonction du champ électrique créé dans le demi-milieu à la profondeur du

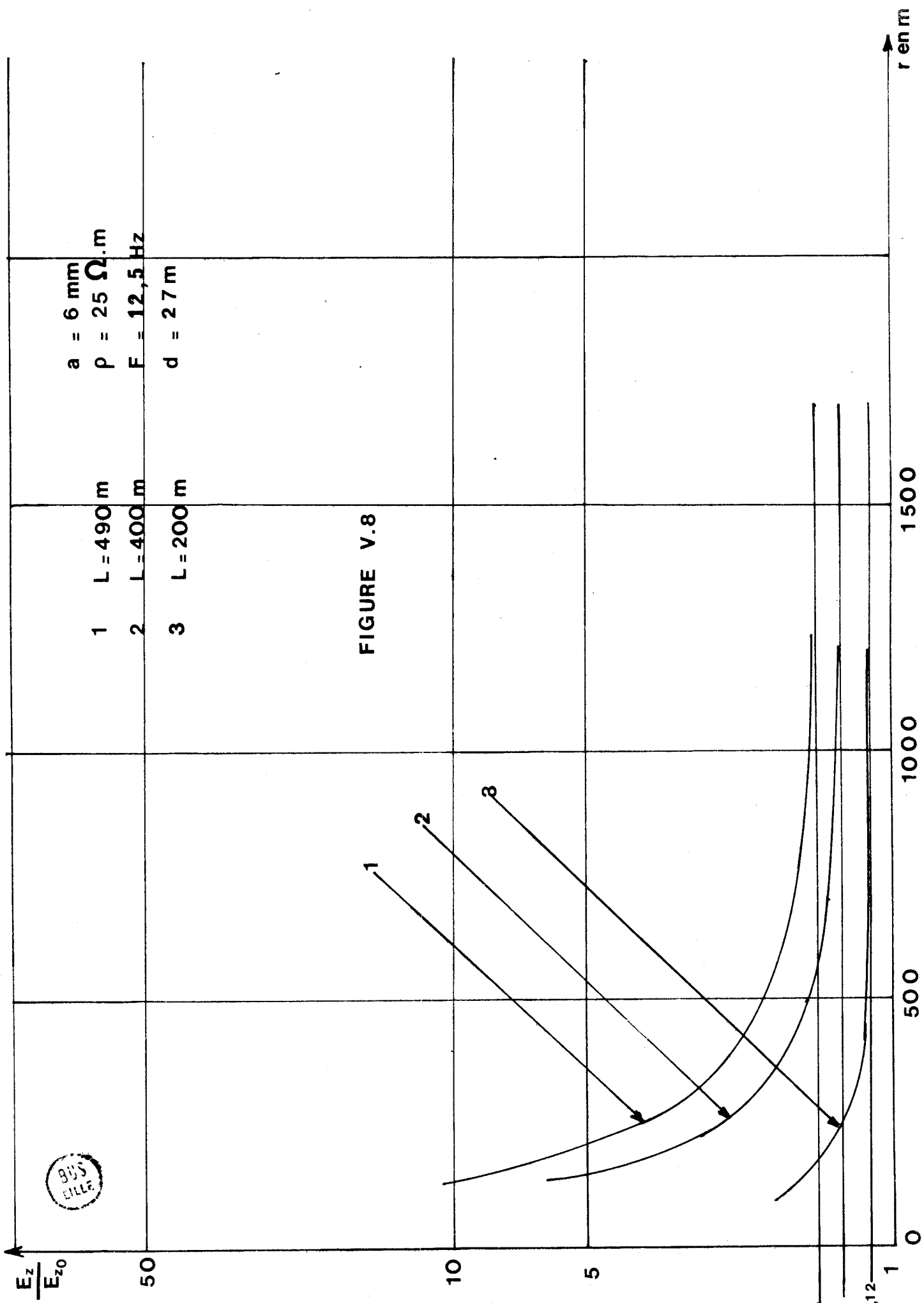


FIGURE V.8

$a = 6 \text{ mm}$
 $\rho = 25 \Omega \cdot \text{m}$
 $F = 12,5 \text{ Hz}$
 $d = 27 \text{ m}$

- 1 $L = 490 \text{ m}$
- 2 $L = 400 \text{ m}$
- 3 $L = 200 \text{ m}$



dipôle élémentaire considéré. Lorsque nous allongeons le câble d'une quantité $d\ell$, nous ajoutons un dipôle dont la contribution vient s'ajouter à celle du câble.

Selon la phase du champ supplémentaire ainsi créé nous aurons une augmentation ou une diminution du module de E_z .

V.4.3. Influence de la variation de la résistivité du terrain encaissant ρ et de la fréquence f

Considérons la formule V.8., et explicitons dans celle-ci, le champ électrique primaire :

$$E_z(P) = \frac{I\ell}{2\pi\sigma_1} \frac{zr}{R^5} e^{-\gamma_1 R} (3+3\gamma_1 R + \gamma_1^2 R^2) + \frac{a^2}{2\sigma_1} \int_{-L}^0 J_2(Z) \times \left[\frac{e^{-\gamma_1 R_1'}}{R_1'^3} (1+\gamma_1 R_1') - \frac{e^{-\gamma_1 R_2'}}{R_2'^3} (1+\gamma_1 R_2') \right] dZ$$

avec :

$$R = \sqrt{r^2+z^2}, \quad R_1' = \sqrt{a^2+(z-Z)^2}, \quad R_2' = \sqrt{a^2+(z+Z)^2} \quad (V.11.)$$

En examinant la formule V.11. nous constatons facilement que le rapport E_z/E_{z0} ne dépend des quantités $\sigma(1/\rho)$ et que par l'intermédiaire de la constante de propagation γ_1 qui vaut :

$$\gamma_1 = \sqrt{2\pi j f \mu_0 \sigma}$$

Considérons l'expression suivante :

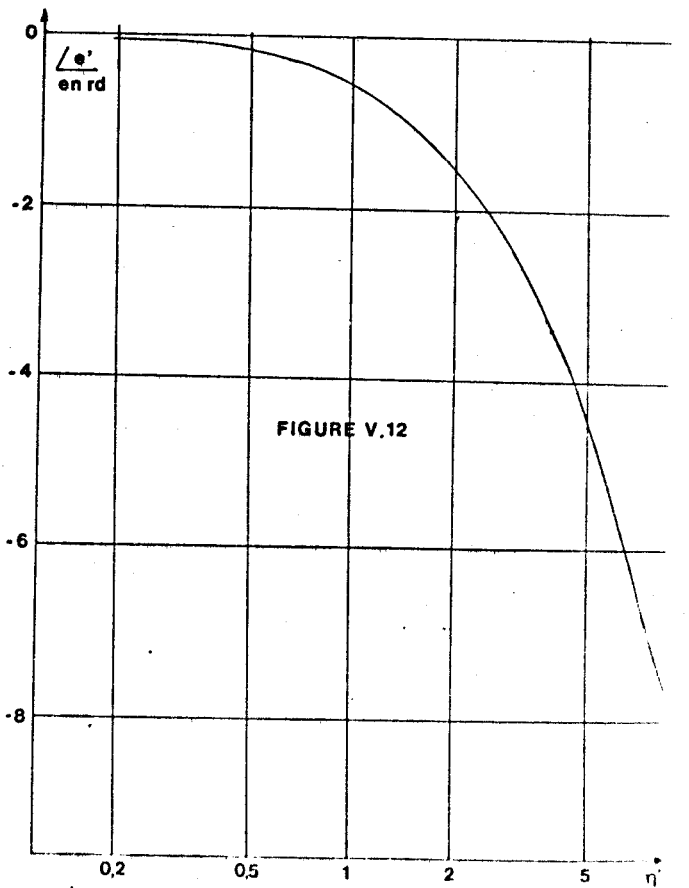
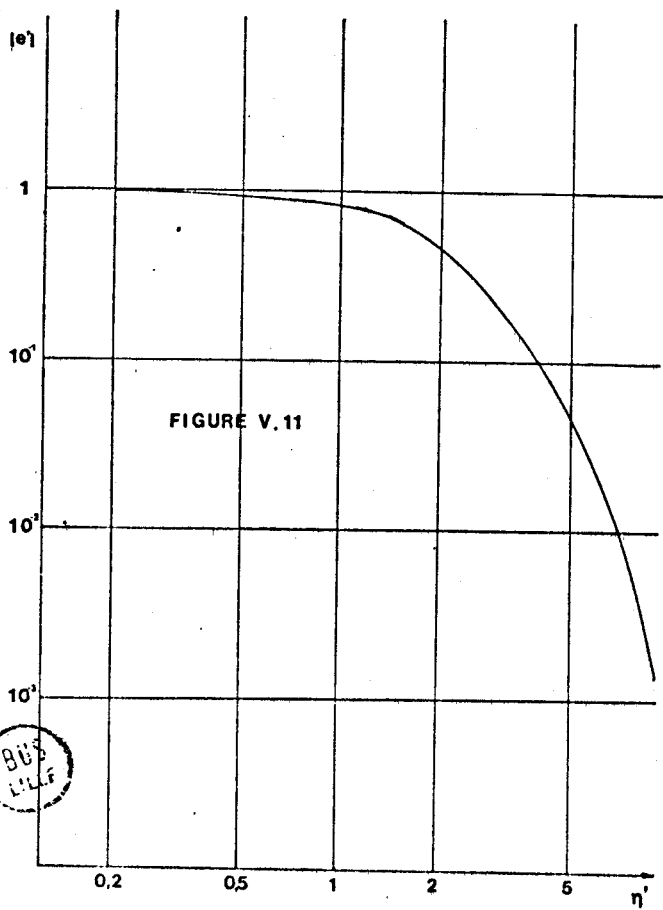
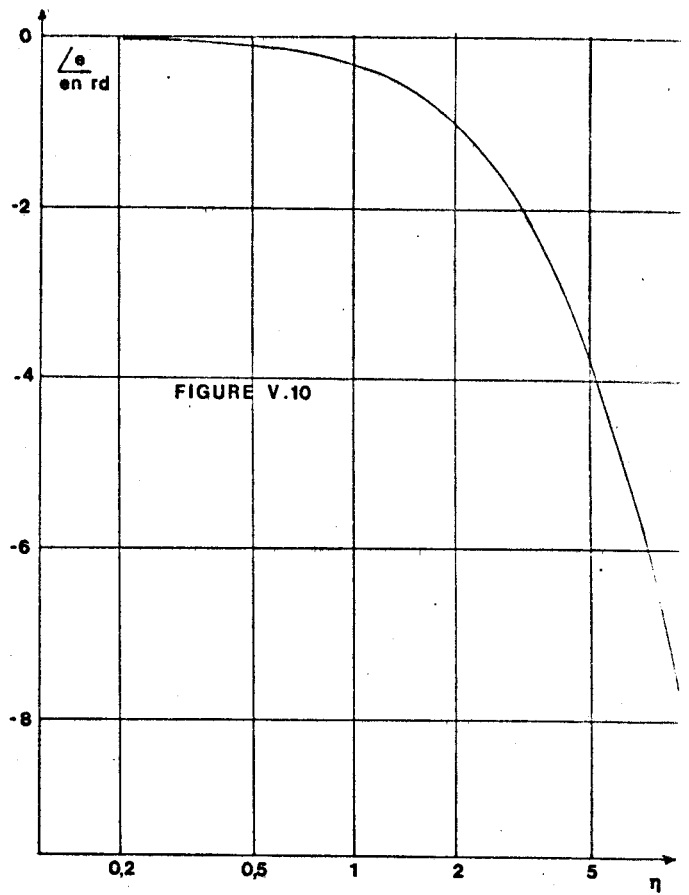
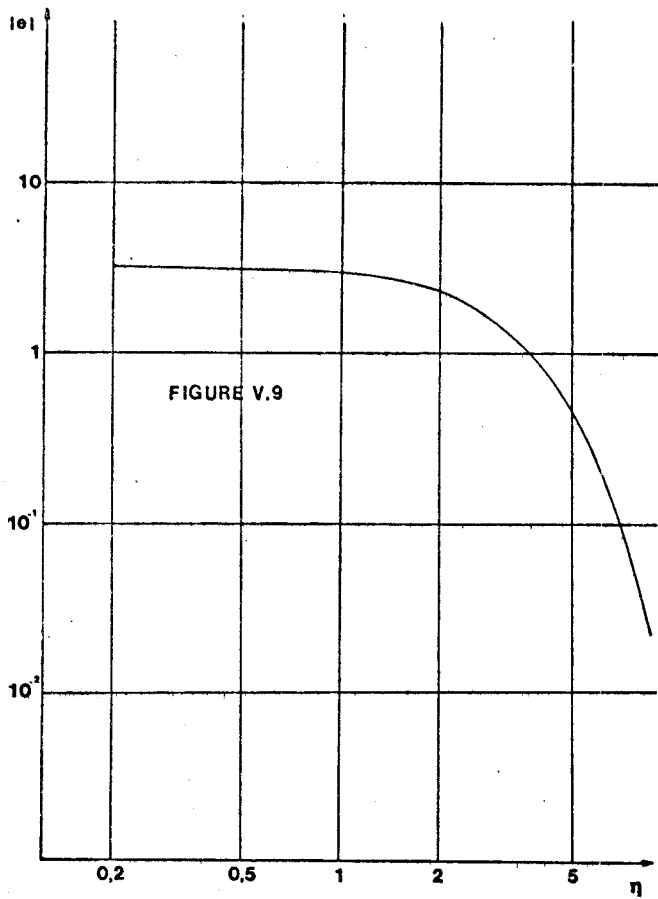
$$e_\eta = e^{-\gamma R} (3+3\gamma_1 R + \gamma_1^2 R^2) \quad (V.12.)$$

en explicitant la constante de propagation en fonction de la profondeur de pénétration et en introduisant la grandeur normalisée η telle que :

avec :

$$\eta = \frac{R}{\delta_1}$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma_1}}$$



V.12. s'écrit :

$$e_{\eta} = e^{-(1+j)\eta} [3(1+\eta) + j\eta(3+2\eta)]$$

Le module et la phase de e_{η} sont représentés sur les figures V.9. et V.10. extraites du cours de M. GABILLARD.⁽²²⁾

Comme on le constate, ces courbes sont pratiquement constantes pour des valeurs de η inférieures à 2.

Considérons les fonctions de Green intervenant dans l'expression intégrale V.11., la contribution la plus importante sera apportée par la fonction de Green primaire G_1 :

$$G_1 = \frac{e^{-\gamma_1 R_1^3}}{R_1^3} (1 + \gamma_1 R_1^2) \quad (V.13.)$$

Examinons donc la partie de V.13. dépendant de la fréquence, et soit e'_{η} cette fonction :

$$e'_{\eta} = e^{-(1+j)\eta'} (1 + \eta' + j\eta')$$

Le module et la phase de e'_{η} sont représentés sur les figures V.11. et V.12. Comme on le constate ces courbes peuvent être considérées comme constantes pour des valeurs de η' inférieures à 1.

Dans tous les exemples que nous avons considérés dans cette étude, les valeurs de η et η' sont respectivement inférieures à 2 et à 1. Il en résulte qu'en utilisant les courbes V.9. à V.12. on constate que la densité de courant $J_2(Z)$ et le champ électrique total $E_2(P)$ sont indépendants de la fréquence et de la résistivité du terrain encaissant dans la limite des ordres de grandeur des fréquences utilisées ($1\text{Hz} < f < 312,5\text{Hz}$) et des résistivités de terrain pratiquement rencontrées ($10 < \rho < 200\Omega.m$).

V.5. CONCLUSION

Nous avons montré que l'influence du tubage était négligeable à condition de positionner la sonde à une certaine de mètres de son extrémité inférieure. Par contre nous avons également montré que l'effet du câble était toujours important. ^(*)

Son influence se fait sentir pour des distance émetteur-forage de plus de mille mètres, et ceci malgré l'usage d'un bridel de 27 mètres. Cette dernière distance correspond à l'utilisation du couple d'électrodes de mesure le plus éloigné de l'extrémité du câble d'acier.

De plus, si l'émetteur est situé à moins de 500m du puits, on note une importante remontée du rapport E_z/E_{z_0} .

Dans l'interprétation des mesures télélog, il y aura toujours lieu de tenir compte de l'effet parasite du câble dans l'interprétation des résultats expérimentaux pour ne laisser apparaître que la contribution du gisement.

(*) Sauf évidemment si on pouvait utiliser un bridel de 80 mètres (rappelons qu'un bridel est un tronçon de câble possédant une jaquette en caoutchouc qui l'isole du terrain environnant).

C O N C L U S I O N

Au cours de ce travail, nous avons montré que la télédiagraphie est un procédé de prospection géophysique qui permet de vérifier la validité des hypothèses faites concernant la localisation d'un gisement par rapport à un forage qui l'a ou ne l'a pas rencontré.

Nous pensons avoir établi les principaux éléments théoriques qui doivent conduire à une amélioration sensible de la méthode d'interprétation.

Par ailleurs, nous avons proposé dans cette thèse une méthode de mise en équation rigoureuse des problèmes d'électromagnétisme appliqués à la géophysique. Cette méthode est générale et s'applique chaque fois qu'on veut tenir compte d'une hétérogénéité dans un milieu limité par une surface quelconque. En particulier, nous avons montré que dans le cas d'une anomalie de résistivité, celle-ci se comportait du point de vue rayonnement comme une distribution volumique de dipôles électriques dont le moment est proportionnel au champ électrique total \vec{E}_2 dans l'anomalie.

Cette mise en équation a permis également de montrer que les composantes cartésiennes du champ électrique total \vec{E}_2 dans l'anomalie sont solutions d'un système d'équations intégrales. Au cours de notre thèse, nous avons proposé une méthode numérique de résolution de ces systèmes d'équations intégrales. Ceci nous a permis de réaliser un modèle numérique tridimensionnel. Ce programme de calcul est la base indispensable de toute interprétation de mesures effectuées sur le terrain.

A ce stade du développement des études théoriques, et en tenant compte également du développement technologique des appareils de mesures, nous pensons que la télédiagraphie peut rentrer valablement dans une phase de développement industriel et qu'elle peut apporter une aide appréciable à l'industrie pétrolière pour la reconnaissance et l'exploitation des gisements.

REFERENCES

- (1) DESBRANDES R., "Théorie et interprétation des diagraphies", Edition Technip Paris, 1968
- (2) GABILLARD R., LOUAGE F., DESBRANDES R., "Procédé de prospection de terrains situés autour d'un forage", Brevet n° 156 220, Rapport IFP, ref 15981, 24 Juin 1968
- (3) GABILLARD R., LOUAGE F., DESBRANDES R., "Procédé de prospection des terrains situés autour d'un forage", Premier certificat d'addition P.V. n° 156232, Rapport IFP, ref 16023, 24 Juin 1968
- (4) BASSIOUNI Z., GABILLARD R., DESBRANDES R. and DEGELIS E., "A new application of telelog locating oil or gas field limits", SPLWLA 13 th Annual logging symposium, TULSA, May 1972
- (5) BASSIOUNI Z., "Contribution à la création et au développement d'une nouvelle méthode de diagraphie pétrolière : le telelog", Thèse de doctorat es sciences, 22 Novembre 1972, Lille
- (6) GABILLARD R., "Théorie matricielle de la propagation dans un terrain stratifié d'une onde électromagnétique émise par un dipole électrique vertical", Rapport IREL n° 004-68
- (7) DOCO L.P., "Méthode d'interprétation des mesures de télédiagraphie dans un terrain stratifié présentant des contrastes de résistivité élevés", Doctorat 3eme cycle, 21 Juin 1974
- (8) GOETGHELUCK M., "Etude et réalisation d'une cuve analogique haute fréquence. Application à l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur", DEA Lille 1969
- (9) LESTAMPS J.P., "Etude et réalisation de l'équipement électronique d'une cuve rhéographique simulant la propagation électromagnétique en milieu absorbant", Mémoire CNAM Lille 1970
- (10) VIVES J.P., "Mise au point et perfectionnement d'une cuve analogique haute fréquence. Simulation de quelques problèmes de propagation télédiagraphiques", DEA Lille 1970
- (11) FRISCHKNETCH F.C., "Electromagnetic probing in geophysics. Electromagnetic scale modelling", The Golen press, Bonder Colorado, 1971, J.R. WAIT (éditeur)
- (12) SINCLAIR G., 1948, "Theory of models of electromagnetic systems", Proc. IRE 36, 11 : 1364-1370

- (13) CAUTERMAN M., "Rapport d'avancement sur le modèle mathématique", Rapport Interne, 24 Avril 1973
- (14) CAUTERMAN M., GRIMOUD J., Rapport final de la convention IFP n° 2359 concernant l'élaboration d'un modèle mathématique du telelog, "Résultats numériques et théorie concernant le modèle numérique à deux dimensions du telelog"
- (15) HOHMANN G.W., "Electromagnetic scattering by conductors in the earth near a line source of current", Geophysics, Vol 36, NO 1 (February 1971), 101-131
- (16) BASSIOUNI Z. et GABILLARD R., "Expérience de télédiagraphie de Beynes d'Octobre 1970 et interprétation Rapport IFP, Novembre 1970.
- (17) R. GABILLARD et Z. BASSIOUNI, Expérience de télédiagraphie de Beynes (puits B102) Rapport IFP (décembre 1970).
- (18) VACHON J.C., Etude théorique de l'influence d'un tubage isolant sur les mesures telelog, Thèse de doctorat Ingénieur, 26 septembre 1973.
- (19) KING RWP., Electromagnetic Engineering. Fondamentale. Mc GRAW-HILL Co 1945.
- (20) MORSE Ph, FESBACHH., Method of theoretical physic. Mc. GRAW-HILL, book Inc, 1953.
- (21) P. DEGAUQUE., Théorie de rayonnement d'une antenne biconique mince disposée verticalement près de l'interface Air-Sol. Doctorat d'Etat ; 5 mars 1974.
- (22) R. GABILLARD., Propagation des ondes EM dans les milieux conducteurs, Tome I, Science de Radioélectricité et électronique de USTL.
- (23) R.F. HARRINGTON., Time harmonic electromagnetic fields. Mac GRAW-HILL Book compagny 1961.
- (24) I.S. GRADSHTEYN and I.M. RYZHIK., Table of integrals series and products ACADEMIC PRESS New York and London 1965.
- (25) G.N. WATSON., Théory of Bessel functions. CAMBRIDGE - U. PRESS - 1944.
- (26) R.F. HARRINGTON., Matrix methods for fields problems. Proc. IEEE, vol. 55, Nb 2, Feb. 1967, p. 136, 149.
- (27) R.F. HARRINGTON., Field computation by moments method . Mc. MILLAN Co, N.Y 1968.
- (28) R. MITTRA., Computer techniques for electromagnetics. PERGAMON-PRESS. 1973.
- (29) M. CAUTERMAN, J. GRIMOUD., Rapport final de la convention n° 2738 concernant la conception et la réalisation d'un modèle mathématique tridimensionnel du telelog. Rapport Interne . novembre 1974.

- (30) A. BANOS, JA., Dipole Radiation in the presence of a conducting Half space. PERGAMON PRESS, 1966.
- (31) J.R. WAIT., "The electromagnetic fields of a horizontal dipole in the presence of a conducting Half space". Can J. Phys. t. 39, p. 1017, 1961.
- (32) E. DURAND, "Solutions numériques des équations algébriques". MASSON, 1, 2, 1961.
- (33) P. DEGAUQUE., D.E.A. Electronique Lille, juin 1967.
- (34) I.B. HILDEBRAND., Introduction to numerical analysis. Mc. GRAW-HILL Book Compagny 1966.
- (35) M. CAUTERMAN et J. GRIMOUD., Premiers résultats du modèle numérique tridimensionnel du telelog. Rapport interne Avril 1974.
- (36) M. CAUTERMAN, P. DEGAUQUE and R. GABILLARD., "Effect of a vertical buried conductor on the subsurface electric field for an horizontal electric dipole excitation". URSI and IEEE/G.AP Symposium. URBANA - CHAMPAIGN. Illinois, 2-5 juin 1975.
- (37) J.R. WAIT., "Electromagnetic waves in stratified media". PERGAMON PRESS, 1970.
- (38) Society of exploration Geophysicist's. Mining Geophysics, V.2, 1967.
- (39) MAC LACHLAN., Bessel Functions for engineers. OXFORD UNIVERSITY PRESS, 1961.
- (40) M. ABRAMOWITZ., Handbook of mathematical functions. Dover Publications, 1965.
- (41) L. KANTOROWICH and V. KRYLOV., Approximate methods of higher analysis. C.D. Benster Trans. N.Y. - WILEY - 1964.
- (42) JAHNKE, EMDE, LOSCH., Table of higher functions. B.G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT STUTTGART, 1960.
- (43) G. PETIAU., La théorie des fonction de Bessel. C.N.R.S., 1955.
- (44) J. LEGRAS., Méthodes et techniques de l'analyse numérique. DUNOD, 1971.
- (45) J.C. DAVIS., Statistics and data analysis in geology. John Wiley and sons. New York, London, Sydney, Toronto, 1973.

- (46) J.A. STRATON., Théorie de l'Electromagnétisme. DUNOD, 1961.
- (47) A. DEY and H.F. MORRISSON., Electromagnetic response of two-dimensional inhomogeneities in a dissipative half space for turam interpretation. Geophysics, Vol. 36, N° 1, May 1972, p. 340 à 365.
- (48) C.R. MULLIN, R. SANDBURG and C.O. VELLINE., A numerical technique for the determination of scattering cross sections of infinite cylinders of arbitrary geometrical cross section. I.E.E.E. - A.P., Janvier 1965, Vol. 13, N° 1, p. 141.
- (49) M.G. ANDREASEN., Scattering from bodies of revolution. I.E.E.E. - A.P., Mai 1965, Vol. 13, N° 2, p. 303.
- (50) J.H. RICHMOND., Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross section shape. I.E.E.E. - A.P., May 1965, Vol. A.P. 13, N° 3, p. 334.
- (51) K.K. MEI., On the integral equation of thin wire antennas. I.E.E.E. - A.P., May 1965, Vol. A.P. 13, N°3, p. 374.
- (52) J.H. RICHMOND., TE - wave scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross section shape. I.E.E.E. - A.P., Juillet 1966, Vol. A.P. 14, N° 4, p. 460.
- (53) J.H. RICHMOND., Scattering by an arbitrary array of parallel wires. I.E.E.E. - M.T.T., Juillet 1965, p. 408-412.
- (54) J.H. RICHMOND., Digital computer solution of the rigorous equation for scattering problems. Proceedings of the I.E.E.E., Août 1965, p. 796-804.
- (55) P.C. WATERMAN., Matrix formulation of electromagnetic scattering. Proceedings of the I.E.E.E., Août 1965, p. 805-812.
- (56) R.L. TANNER, M.G. ANDREASEN., Numerical solution of electromagnetic problems. I.E.E.E. spectrum, Septembre 1967, p. 53-61.
- (57) G.W. HOHMANN., Three dimensional induced polarisation and electromagnetic modeling. Geophysics, Vol. 40, N° 2, April 1975, p. 309-324.
- (58) R.L.A. GABILLARD, F.C.J. LOUAGE, Z.A.F. BASSIOUNI and R. DESBRANDES., Telelog locates oil and gas deposits 2500 feet away from bore holes. World Oil, p. 58, Sept. 1971.
- (59) R.L.A. GABILLARD, F.C.J. LOUAGE, Z.A.F. BASSIOUNI and R. DESBRANDES., Telelog an electromagnetic method of directional exploration at great distance from bore holes. SPLWLA 12 th Annual logging symposium May 2-5 1971.

- (60) R. GABILLARD, F. LOUAGE, Z. BASSIOUNI et R. DESBRANDES., Telediagraphie, une méthode d'exploration directionnelle à grande distance d'un sondage. Colloque de Géophysique Minière, Orléans, 3-5 Novembre 1971.
- (61) M. CAUTERMAN, J.P. DUBUS, R. GABILLARD., Méthode permettant de déceler et de préciser le rayon et la profondeur d'un gisement de forme sphérique. Colloque de Géophysique Minière - Orléans - 3-5 Novembre 1971.
- (62) J.R. WAIT., A conducting sphere in a time varying magnetic field. Geophysics, Vol. 16, N°4, p. 4666-4672, Octobre 1951.
- (63) J.R. WAIT., Electromagnetic induction in a small conducting sphere above a resistive half-space. Radio Science, Vol. 3, N° 10, Octobre 1968.
- (64) R. GABILLARD et Z. BASSIOUNI., Détermination de la distance du bord du gisement à l'axe d'un puits central par des mesures de telediagraphie. Rapport I.F.P. - Ref. 19 359, Juin 1971.
- (65) Z. BASSIOUNI et R. GABILLARD., Détermination de la distance du bord du gisement de gaz de Lussagnet (S.N.P.A.) à l'axe du puits lug 39 par des mesures de telediagraphie. Rapport Interne, Décembre 1971.
- (66) Z. BASSIOUNI, F. BERTHELOT, R. DESBRANDES., Résultats de la campagne de mesures telelog sur Lussagnet 39. (18-22 Septembre 1972) - S.N.P.A. Rapport I.F.T. - Ref. 20 683, Octobre 1972.
- (67) J. DELBUSHAYE., Note sur les résultats des campagnes de mesures telelog effectuées à Lussagnet. Rapport S.N.P.A., Juin 1973.
- (68) J. DELBUSHAYE., Note sur le sujet de recherche telediagraphie. Rapport S.N.P.A., Septembre 1973.
- (69) M. CAUTERMAN. et J. GRIMOUD., Rapport d'avancement concernant la réinterprétation des expériences telelog effectuées sur le puits B. 104. Rapport interne, Juillet 1974.
- (70) M. CAUTERMAN., Résultats actuels concernant la méthode telelog. Rapport interne, Janvier 1975.
- (71) F. LOUAGE, R. GABILLARD., "Faisabilité d'un procédé de détection de cavités souterraines". Rapport final de la convention N° 73/210 conclue entre le L.C.P.C. et l'U.S.T.L., Juillet 1973.

- (72) J.P. DUBUS, P. DEGAUQUE, M. CAUTERMAN, P. MANGEZ et D. CUTOQUE., Rapport final sur l'étude des possibilités de détection de cavités situées près des voutes de tunnels à l'aide de procédés électromagnétiques. Rapport interne, Juin 1975.
- (73) F. LOUAGE., Théorie et vérification expérimentale de la propagation des ondes électromagnétiques dans un guide d'ondes géologique. Thèse de Doctorat d'Etat, Juin 1969, Lille.
- (74) C. CLARISSE., Conception et réalisation pratique d'un système de transmissions d'informations à travers le sol. Application aux télémessures pétrolières. Thèse de Docteur-Ingénieur, Juin 1969, Lille.
- (75) M. CAUTERMAN., Etude théorique et expérimentale de l'influence d'une inclusion sphérique sur la distribution du courant dans un milieu conducteur homogène. Applications à des méthodes de prospection géophysique. Thèse de 3ème Cycle Lille, Septembre 1971.
- (76) P. MANGEZ., Contribution à l'étude théorique et expérimentale des filtres à échantillonnage. Application à l'extraction de signaux faibles pour le procédé telelog. Thèse de 3ème Cycle Lille, Février 1973.
- (77) D. VANLOOT., Cycloconvertisseur 12,5 Hz régulé en courant pour application au procédé de prospection géophysique "telelog". Mémoire C.N.A.M. Lille, Septembre 1973.

ANNEXE . 1 .

CALCUL DU CHAMP ELECTRIQUE PRIMAIRE CREE DANS UN DEMI-MILIEU

PAR UN D E H

Considérons le sol assimilé à un demi-milieu conducteur de conductivité σ_1 surmonté d'un demi-milieu isolant, l'atmosphère. Le champ électromagnétique est créé dans cette structure par un dipôle électrique horizontal, placé dans le sol, au point E de coordonnées $(0, 0, -h)$, orienté selon \vec{Ox} et parcouru par un courant basse fréquence I (figure 1).

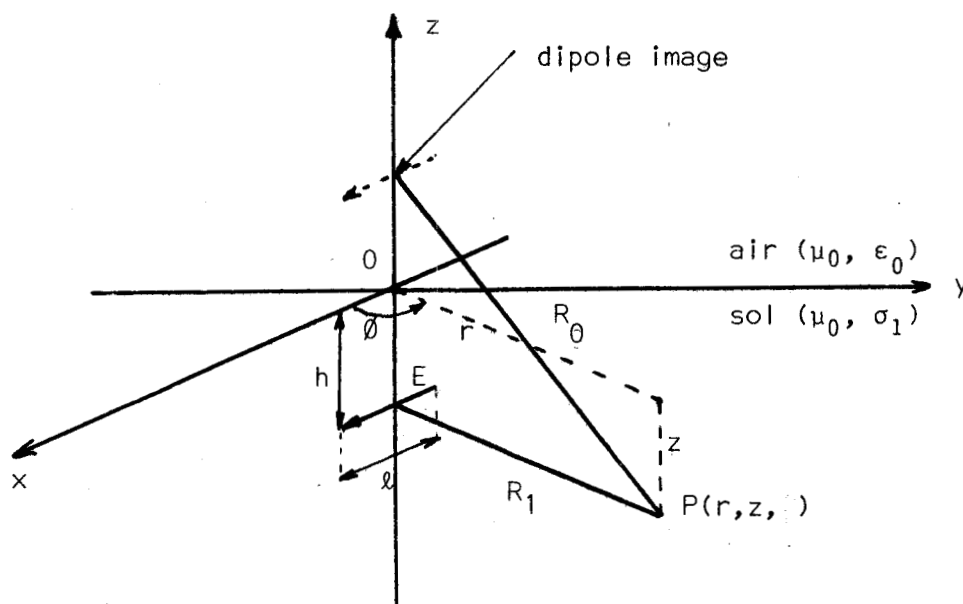


Figure 1

Dans ce cas, les composantes cartésiennes du potentiel de Hertz au point P sont les suivantes :

$$\pi_x = p_1 \left[\frac{e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1} - \frac{e^{-\gamma_1 R_0}}{R_0} + 2 \int_0^\infty \frac{e^{-u_1(z-h)}}{u_1 + u_0} J_0(\lambda r) \lambda \, d\lambda \right] \quad (1)$$

$$\pi_y = 0$$

$$\pi_z = -2p_1 \cos \vartheta \int_0^\infty e^{-u_1(z-h)} \frac{u_1 - u_0}{\gamma_0^2 u_1 + \gamma_1^2 u_0} J_1(\lambda r) \lambda^2 \, d\lambda \quad (2)$$

$$\text{avec :} \quad R_1 = \sqrt{r^2 + (z+h)^2} \quad R_0 = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}$$

$$u_1 = \sqrt{\gamma_1^2 + \lambda^2} \quad u_0 = \sqrt{\gamma_0^2 + \lambda^2}$$

$$R, u_1, u_0 > 0$$

$$\gamma_1^2 = j\omega\mu_0\sigma_1$$

$$\gamma_0^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0$$

$$p_1 = \frac{l\ell}{4\pi\sigma_1}$$

h est positif

Détermination des composantes du champ électrique dans l'approximation
du quasi statique

Si la fréquence du courant I parcourant le dipole est assez basse pour que *la longueur d'onde dans l'atmosphère* soit bien plus grande que la distance r , nous pourrons poser dans les formules (1) et (2) :

$$\gamma_0 = 0$$

Dans ces conditions, les composantes cartésiennes de $\vec{\pi}$ peuvent s'exprimer uniquement en fonction des trois intégrales bien connues P_1 , P et N

$$P_1 = \int_0^{\infty} e^{-u_1|z+h|} \frac{J_0(\lambda r)}{u_1} \lambda d\lambda = \frac{e^{-\gamma_1 R_1}}{R_1}$$

$$P = \int_0^{\infty} e^{u_1(z-h)} \frac{J_0(\lambda r)}{u_1} \lambda d\lambda = \frac{e^{-\gamma_1 R_0}}{R_0}$$

$$N = \int_0^{\infty} e^{u_1(z-h)} \frac{J_0(\lambda r)}{u_1} d\lambda = I_0 \left[\frac{\gamma_1}{2} (R_0 + (z-h)) \right] \cdot K_0 \left[\frac{\gamma_1}{2} (R_0 - (z-h)) \right]$$

D'où :

$$\pi_x = p_1 \left[P_1 - P + \frac{2}{\gamma_1^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} P - \frac{\partial^3 N}{\partial z^3} + \gamma_1^2 \frac{\partial N}{\partial z} \right] \right] \quad (3)$$

$$\pi_z = p_1 \cdot \frac{2}{\gamma_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[\frac{\partial N}{\partial z} - P \right] \quad (4)$$

Le champ électrique dérive du potentiel de Hertz $\vec{\pi}$ par la relation suivante :

$$\vec{E} = \overrightarrow{\text{rot rot } \pi} \quad (5)$$

D'où les composantes cartésiennes de \vec{E}

$$E_x = -p_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (P_1 - P) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (P_1 + P) + \frac{2}{\partial y^2 \partial z} N \right] \quad (6)$$

$$E_y = p_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[(P_1 - P) + 2 \frac{\partial N}{\partial z} \right] \quad (7)$$

$$E_z = p_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (P_1 + P) \quad (8)$$

Si le dipole émetteur est placé à la surface du sol, h est nulle et les composantes cartésiennes du champ électrique deviennent :

$$E_x = -2p_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} P + \frac{\partial^3}{\partial y \partial z} N \right) \quad (9)$$

$$E_y = 2p_1 \frac{\partial^3 N}{\partial x \partial y \partial z} \quad (10)$$

$$E_z = 2p_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} P \quad (11)$$

ANNEXE . 2 .

RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE SYMETRIQUE PAR LA METHODE

DE CHOLESKI

On montre que l'on peut décomposer d'une manière unique une matrice carré A en un produit de deux matrices triangulaires ; l'une L étant triangulaire inférieure avec des éléments quelconques sur la diagonale, l'autre S étant triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

On a donc :

$$A = L \cdot S \quad (1)$$

Si la matrice A est symétrique, on montre également que les matrices L et S sont transposées l'une de l'autre. La relation 1 devient donc :

$$A = \bar{M} \cdot M \quad (2)$$

I - CALCUL DE LA MATRICE M PAR LA METHODE DE CHOLESKI

On a donc une seule matrice triangulaire supérieure M à calculer, ce qui diminue l'encombrement mémoire.

En identifiant les deux membres de (2), nous obtenons : (3).

$$a_{ij} = \sum_{\ell=1}^n m_{i\ell} \cdot m_{\ell j}$$

Les matrices \bar{M} et M étant transposées l'une de l'autre, la relation ci-dessus peut encore s'écrire :

$$a_i^j = \sum_{\ell=1}^n m_{\ell i} \cdot m_{\ell j}$$

Or, comme m_{ij} est nul si $j < i$, nous obtenons :

$$a_i^j = \sum_{\ell=1}^i m_{\ell i} \cdot m_{\ell j}$$

A partir de la relation ci-dessus, les éléments de M se calculent dans l'ordre suivant : première ligne en commençant par m_{11} , puis deuxième ligne en commençant par m_{22} , ... , etc. Ils sont donnés par les formules suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} m_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ m_{1j} = \frac{a_{1j}}{m_{11}} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} m_{22} = \sqrt{a_{22} - m_{12}^2} \\ m_{2j} = \frac{1}{m_{22}} (a_{2j} - m_{12} m_{1j}) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} m_{\ell\ell} = \sqrt{a_{\ell\ell} - \sum_{k=1}^{\ell-1} m_{k\ell}^2} \\ m_{\ell j} = \frac{1}{m_{\ell\ell}} \left[a_{\ell j} - \sum_{k=1}^{\ell-1} m_{k\ell} m_{kj} \right] \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (4)$$

II - RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE PAR LA METHODE DE CHOLESKI

Soit à résoudre le système symétrique suivant :

$$A X = B \quad (5)$$

On résoud successivement :

$$\bar{M} Y = B \quad (6)$$

$$\text{et } M X = Y \quad (7)$$

(6) et (7) sont des systèmes triangulaires que l'on résoud en partant de la ligne 1 et en descendant pour (6) ; en partant de la ligne n et en remontant pour (7).

III - PROPRIETES DE LA METHODE

Pour résoudre un seul gros système, on a environ $n^3/6$ Opérations à effectuer. La précision est meilleure qu'avec d'autres méthodes de résolution car, l'erreur sur la racine carrée est la moitié de l'erreur sur le nombre qui est sous le radical. Il se fait aussi par l'extraction des racines carrées un rapprochement des nombres mis en jeu, ce qui est une bonne condition pour la diminution des erreurs d'arrondis.

Nous disposons également d'une méthode de résolution pour les très gros systèmes mis au point par Monsieur J. GRIMOUD. Cette méthode de résolution fait appel à une méthode de CHOLESKI par blocs. ⁽²⁹⁾

Le sous programme correspondant doit permettre de résoudre un système de 3 040 équations à 3 040 inconnues.

ANNEXE . 3 .INTEGRATION NUMERIQUE A L'AIDE D'UNE QUADRATURE DE GAUSS

Nous avons montré qu'il était toujours possible de réduire le nombre d'intégrations successives des fonctions de GREEN. Il en résulte que l'intégrand des fonctions à calculer est toujours régulier.

Nous considérons successivement les cas où les intégrales à calculer sont simples et doubles.

1. Calcul des intégrales simples

On utilise une formule de quadrature :

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=1}^n H_i f[a+(b-a)t_i] \quad \text{A.1.}$$

n est l'ordre de la quadrature

H_i sont les poids correspondants

t_i les abscisses correspondant au poids. (On suppose, pour calculer les t_i , que l'on a effectué un changement de variable, transformant l'intervalle $[a b]$ en l'intervalle $[0 1]$).

Les H_i et les t_i sont tabulés.

On utilise largement la décomposition de l'intervalle d'intégration en sous-intervalle, soit :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{j=1}^n \int_{a+(j-1)h}^{a+jh} f(t) dt \quad \text{A.2.}$$

avec : $a + nh = b$

On applique ensuite A.1. sur chaque intervalle.

2. Calcul des intégrales doubles sur un rectangle

Soit calculer l'intégrale :

$$I = \int_{y_0-hy}^{y_0+hy} dy \int_{x_0-hx}^{x_0+hx} f(x,y) dx \quad \text{A.3.}$$

Considérons l'intégrale I_1 telle que :

$$I_1 = \int_{x_0-hx}^{x_0+hx} f(x,y) dx$$

Appliquons (A.1.) à cette intégrale, nous obtenons :

$$I_1 = 2h_x \sum_{i=1}^n H_i^n f(x_0-h_x+2h_x t_i, y) \quad \text{A.4.}$$

En réappliquant de nouveau (A.1.) à la fonction y que représente la formule (A.4.), nous obtenons :

$$I = 4h_x h_y \sum_{j=1}^m H_j^m \sum_{i=1}^n H_i^n f(x_0-h_x+2h_x t_i, y_0-h_y+2h_y t_j)$$

Remarque

Pour calculer les intégrales des fonctions de GREEN primaires, nous avons choisi $m = n = 8$; pour les fonctions de GREEN secondaires $m = n = 2$ est suffisant.

