THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de :

DOCTEUR-INGENIEUR

par

SAÏD DANIALI

CONTRIBUTIONS A LA STABILITE AU FLAMBEMENT DES STRUCTURES PLANES HYPERSTATIQUES

Soutenue le 30 juin 1975 devant la Commission d'Examen

MEMBRES DU JURY :	MM. GONTIER G.	Président
	KERGUIGNAS M.	Rapporteur
	FAURE R.	Examinateur
	PARSY F.	Examinateur

A

MA FEMME

REMERCIEMENTS

L'élaboration de cette thèse a été facilitée par l'octroi d'une bourse de la part du gouvernement français et je le remercie vivement.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur GONTIER qui a bien voulu s'intéresser à mon travail, ainsi qu'aux Professeurs FAURE et PARSY pour avoir accepté de l'examiner.

Je remercie, en particulier, Monsieur le Professeur KERGUIGNAS qui m'a conseillé et orienté tout au long de la préparation de cette thèse.

Je présente mes remerciements à Monsieur le Professeur PAQUET, Directeur de l'Institut de Géotechnique de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, pour m'avoir accordé toute facilité dans mon travail.

Je tiens également à remercier, Monsieur BERNARD, Directeur de l'Ecole Nationale supérieure des Arts et Métiers de Lille pour m'avoir autorisé à réaliser mes essais pratiques dans les laboratoires de l'Ecole.

Je suis reconnaissant envers le personnel technique de l'E.N.S.A.M. pour l'aide efficace apportée dans la réalisation de la maquette.

NOTATIONS

$[\ ]$	: matrice
$\{\ \}$	: vecteur
$[\ ]^t, \{\ \}^t$	: transposée d'une matrice, d'un vecteur
$\|\ \|$	: déterminant d'une matrice carrée
$[0]$	: matrice zéro
$[1]$	: matrice unité
$[\ ]^{-1}$	: inverse d'une matrice
I	: moment d'inertie
E	: coefficient d'élasticité longitudinal
G	: " " transversal
M(x)	: moment fléchissant total pour une section d'abscisse (x)
T(x)	: l'effort tranchant " " " "
$\mu(x)$ et $\tau(x)$	: moment fléchissant et l'effort tranchant des sollicitations transversales, pour section d'abscisse (x), lorsque l'élément est reposé sur les appuis simple.
N	: effort normal
Mij (Mji)	: moment exercé par le noeud Aij, ou (Bji) sur l'élément AiBj
m	: degré d'indétermination de la structure
P	: charge appliquée
M	: moment appliqué
e, a, b	: longueurs
q	: densité d'une charge répartie
m	: degré d'indétermination de la structure
$\{\Delta ij\}$ et $[\Delta IJ\}$	: (voir page 37)
$\{Fij\}$ et $\{FIJ\}$	: (voir page 37)
$[Cij\}$ et $\{CIJ\}$	: (voir pages 37 et 38)
$\{\Delta\}$	: vecteur groupant les déplacements nodaux (repère général)
$\{F\}$	: vecteur groupant les efforts nodaux (repère général)
$\{C\}$	: vecteur groupant les charges nodales (repère général)

$\{P\}$	:	vecteur groupant les forces nodales y compris les actions d'appuis (repère général)
Lx, Ly	:	projections de la longueur de l'élément, respectivement sur les axes (OX) et (OY) du repère général
Δx, Δy	:	déplacement relatif horizontal et vertical
$[Hii]$, $[Hij]$ $[Hji]$, $[Hjj]$	:	les matrices reliant les vecteurs des déplacements aux vecteurs des efforts nodaux (repère local)
$\{G\}$ et $\{g\}$	:	vecteurs des efforts secondaires (voir page 42)
$[KII]$ et $[KIJ]$ $[KJI]$ et $[KJJ]$	:	les matrices reliant les vecteurs des déplacements nodaux aux vecteurs des efforts nodaux (repère général)
$\{FK\}$	:	vecteur de charge extérieur
$[ZKij]$ et $[ZKji]$	:	matrices correctives
$[K]$	:	matrice de rigidité
$[Kr]$	:	matrice de rigidité réduite

-=-=-=-=-=-=-=

TABLE DES MATIERES

Pages

Pages

INTRODUCTION

L'utilisation de nouveaux matériaux à caractéristiques mécaniques élevées et le perfectionnement continu des méthodes de calcul, incitent les constructeurs à édifier des structures de plus en plus élancées. De ce fait, le problème du flambement prend une importance sans cesse accrue.

Depuis EULER (1744) ce problème a été étudié par MM. TIMOSHENKO (11), BLEICH (12), DUTHEIL (17), E. ABSI (1, 2) et MS. GREGORY (14).

Le règlement français des constructions métalliques se refère à la méthode de M. DUTHEIL pour la vérification de la stabilité au flambage d'une structure. Cette méthode tient compte des imperfections géométriques de la barre et de l'hétérogénéïté du matériau; déduite de nombreux essais expérimentaux et d'une approche théorique, elle nécessite la connaissance de la longueur de flambage de l'élément définie par EULER. Cette caractéristique est bien comme pour les poutres isolées; pour les éléments rectilignes appartenant à une structure; la littérature scientifique ne mentionne que des études concernant des ensembles composés de barres horizontales et verticales.

La présente étude se rapporte à la détermination de la charge critique de flambement des structures hyperstatiques planes, en tenant compte des déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant; les barres composant le système ont une direction quelconque.

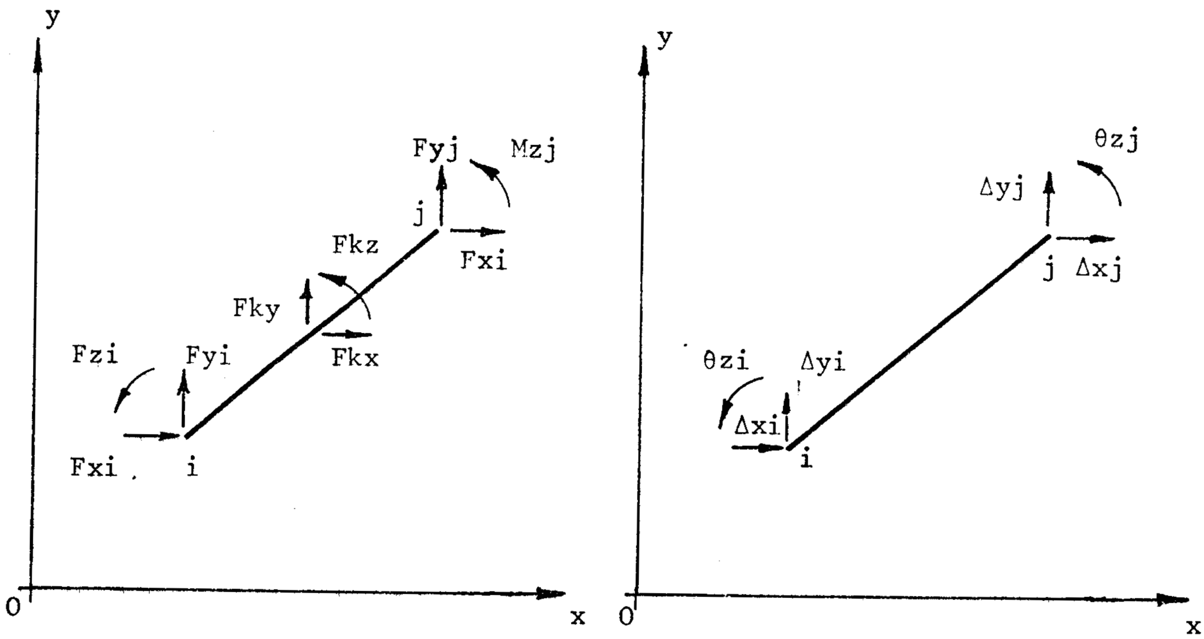
Cette méthode est appliquée au calcul de la longueur de flambement des béquilles d'un portique à traverse brisée, les actions normales pouvant être de nature et d'intensité différentes.

Des essais expérimentaux sont réalisés sur un portique symétrique à traverse brisée; des dispositions constructives évitent le déversement latéral. Les essais sont conduits jusqu'à l'obtention de la limite élastique dans la section la plus sollicitée. Les déformations sont mesurées à l'aide de jauges de contraintes.

Ces résultats sont comparés aux valeurs théoriques déduites de la méthode proposée.

Convention de signes

Nous choisissons une convention unique de signes pour toutes les grandeurs du type force et déplacement; celles-ci sont positives, si leur vecteur représentatif est dirigé suivant les axes généraux. (Figures A).



Figures (A)

C H A P I T R E (1)

(1.1) EQUATIONS INTRINSEQUES D'UNE POUTRE DROITE A SECTION CONSTANTE

Soit AiBj un élément droit d'une structure quelconque. Supposons qu'il soit soumis de la part des noeuds Ai et Aj à des moments Mij et Mji et à un effort normal (N). (Figure 1) (1, 5, 6)

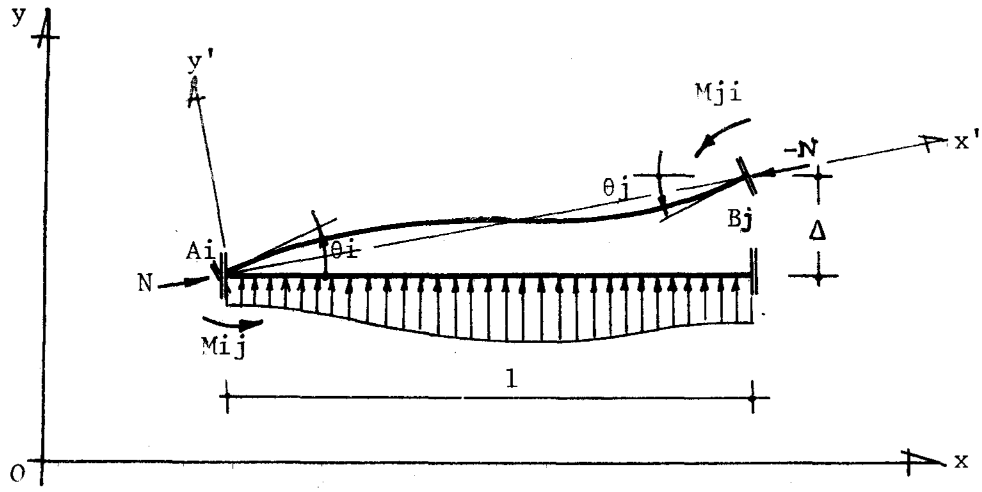


Figure 1

L'équation différentielle de la déformée de cet élément s'écrit :

(1.1.1) $$y'' = -\frac{M(x)}{EI} - \frac{1}{G\Omega} \cdot \frac{dT(x)}{dx}$$

où : $$M(x) = Mij\left(1 - \frac{x}{l}\right) - Mji\,\frac{x}{l} - \frac{N\Delta}{l}\,x + Ny + \mu(x)$$

$$T(x) = -\frac{dM(x)}{dx} = \frac{1}{l}\,(Mij + Mji + N\Delta) + \tau(x) - Ny'$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{d\tau(x)}{dx} - Ny''$$

avec : $M(x)$: moment fléchissant total pour une section d'abscisse (x).

$T(x)$: l'effort tranchant total pour une section d'abscisse (x).

$\mu(x)$: moment des sollicitations transversales lorsque A et B sont des appuis simples.

$\tau(x)$: l'effort tranchant des sollicitations transversales lorsque A et B sont des appuis simples.

En remplaçant $M(x)$ et $\frac{dT(x)}{dx}$ dans l'équation (1.1.1) on aura :

(1.1.2) $$EI\left(1-\frac{N}{G\Omega}\right)y''+Ny = Mji\cdot\left(\frac{x}{l}\right) - Mij\left(1-\frac{x}{l}\right) + \frac{N\Delta x}{l} - \mu(x) - \frac{EI}{G\Omega}\cdot\frac{d\tau(x)}{dx}$$

La solution de l'équation (1.1.2) dépend du signe de N; nous traiterons séparément les deux cas suivants :

a : N est une compression $N > 0$

b : N est une traction $N < 0$

Premier cas (a) : l'effort normal est une compression :

Dans cette hypothèse la solution de l'équation (1.1.2) s'écrit :

(1.1.3) $$y(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x + \frac{\omega}{N}\int_0^x f(t)\sin\omega(x-t)dt$$

où : $f(t) = -Mij\left(1-\frac{t}{l}\right) + Mji\left(\frac{t}{l}\right) + \frac{N\Delta t}{l} - \mu(t) - \frac{EI}{G\Omega}\cdot\frac{d\tau(t)}{dt}$

$\omega = \sqrt{|N|/EI(1-n\lambda)}$

$n = \frac{Nl^2}{EI}$ qui caractérise l'effet de l'effort normal.

$\lambda = \frac{EI}{G\Omega l^2}$ qui caractérisent l'effet de l'effort tranchant est indépendant des charges appliquées.

A l'aide des conditions aux limites, on trouve :

pour $x = 0$ $y = 0 \rightarrow a = 0$

pour $x = l$ $y = \Delta \rightarrow b = \frac{\Delta}{\sin\omega l} - \frac{\omega}{N\sin\omega l}\int_0^l f(t)\sin\omega(l-t)dt$

et on obtient :

(1.1.4) $$y(x) = \left[\frac{\Delta}{\sin\omega l} - \frac{\omega}{N\sin\omega l}\int_0^l f(t)\sin\omega(l-t)dt\right]\sin\omega x + \frac{\omega}{N}\int_0^x f(t)\cdot\sin\omega(x-t)dt$$

Si θi et θj sont les rotations des noeuds extrêmes dans le repère (Ox, Oy), on aura les conditions aux limites suivantes :

(1.1.5) $$y'(0) = \theta i - \frac{Ti}{G\Omega} \rightarrow y'(0) = \theta i + \left[-\frac{1}{l}(Mij+Mji) - \tau i + Ny'(\sigma) - \frac{N\Delta}{l}\right]\cdot\frac{1}{G\Omega}$$

(1.1.6) $$y'(l) = \theta j - \frac{Tj}{G\Omega} \rightarrow y'(l) = \theta j + \left[-\frac{1}{l}(Mij+Mji) - \tau j + Ny'(l) - \frac{N\Delta}{l}\right]\cdot\frac{1}{G\Omega}$$

De l'équation (1.1.4) on tire :

(1.1.7) $$y'(0) = \frac{\Delta\omega}{\sin\omega l} - \frac{\omega^2}{N\sin\omega l}\int_0^l f(t)\,.\,\sin\omega(l-t)dt$$

(1.1.8) $$y'(l) = \frac{\Delta\omega}{\sin\omega l} + \frac{\omega^2}{N\sin\omega l}\int_0^l f(t)\,\sin\omega t dt$$

On peut tirer des équations (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7) et (1.1.8) la formulation suivante :

(1.1.9) $$Mij\left(\sin\omega l - \omega l(1-n\lambda)\cos\omega l\right) + Mji\left(\sin\omega l - \omega l(1-n\lambda)\right) = -N\Delta\sin\omega l$$
$$-Nl\sin\omega l\,.\,\frac{\tau i}{G\Omega} - \frac{Nl}{EI}\int_0^l \mu(x)\sin\omega(l-x)dx - \frac{Nl}{G\Omega}\int_0^l \frac{d\tau(x)}{dx}\sin\omega(l-x)dx + (Nl\sin\omega l)\theta i$$

(1.1.10) $$Mij\left(\sin\omega l - \omega l(1-n\lambda)\right) + Mji\left(\sin\omega l - \omega l(1-n\lambda)\cos\omega l\right) = -N\Delta\sin\omega l$$
$$-Nl\sin\omega l\,.\,\frac{\tau j}{G\Omega} + \frac{Nl}{EI}\int_0^l \mu(x)\,.\,\sin\omega x dx + \frac{Nl}{G\Omega}\int_0^l \frac{d\tau(x)}{dx}\sin\omega x dx + (Nl.\sin\omega l).\theta j$$

Avec $U = \omega l/2$, on trouvera les valeurs de Mij et Mji.

(1.1.11) $$Mij = -\frac{Nl}{4EI}\,.\left(\frac{-\int_0^l \mu(x)\cos U(1-2x/l)dx}{U(1-n\lambda)\sin U} + \frac{\int_0^l \mu(x)\sin U(1-2x/l)dx}{\sin U - U(1-n\lambda)\cos U}\right)$$
$$-\frac{Nl}{4G\Omega}\,.\left(\frac{-\int_0^l \frac{d\tau(x)}{dx}\,.\,\cos U(1-2x/l)dx}{U(1-n\lambda)\sin U} + \frac{\int_0^l \frac{d\tau(x)}{dx}\,.\,\sin U(1-2x/l)dx}{\sin U - U(1-n\lambda)\cos U}\right)$$
$$+\frac{Nl}{4G\Omega}\,.\left(\frac{(\tau i-\tau j)\cos U}{U(1-n\lambda)\sin U} - \frac{(\tau i+\tau j)\sin U}{\sin U - U(1-\lambda)\cos U}\right)$$
$$+\frac{Nl\theta i}{4}\,.\left(\frac{+\cos U}{U(1-n\lambda)\sin U} + \frac{\sin U}{\sin U - U(1-n\lambda)\cos U}\right)$$
$$+\frac{Nl\theta j}{4}\left(\frac{-\cos U}{U(1-n\lambda)\sin U} + \frac{\sin U}{\sin U - U(1-n\lambda)\cos U}\right)$$
$$+\frac{EI}{l}\,.\,\frac{2U^2(1-n\lambda).\sin U}{\sin U - U(1-n\lambda)\cos U}\,.\,\frac{\Delta}{l}$$

$$(1.1.12)\quad Mji = -\frac{Nl}{4EI}\left(\frac{\int_0^l \mu(x)\cos U(1-2x/l)\,dx}{U(1-n\lambda)\sin U} + \frac{\int_0^l \mu(x)\sin U(1-2x/l)\,dx}{\sin U - U(1-n\lambda)\cos U}\right)$$

$$-\frac{Nl}{4G\Omega}\left(\frac{\int_0^l \frac{d\tau(x)}{dx}\,.\,\cos U(1-2x/l)\,dx}{U(1-n\lambda)\sin U} + \frac{\int_0^l \frac{d\tau(x)}{dx}\sin U(1-2x/l)\,dx}{\sin U - U(1-n\lambda)\cos U}\right)$$

$$-\frac{Nl}{4G\Omega}\left(\frac{(\tau i-\tau j)\cos U}{U(1-n\lambda)\sin U} - \frac{(\tau i+\tau j)\sin U}{\sin U - U(1-n\lambda)\cos U}\right)$$

$$+\frac{Nl\theta i}{4}\left(\frac{-\cos U}{U(1-n\lambda)\sin U} + \frac{\sin U}{\sin U - U(1-n\lambda)\cos U}\right)$$

$$+\frac{Nl\theta j}{4}\left(\frac{\cos U}{U(1-n\lambda)\sin U} + \frac{\sin U}{\sin U - U(1-n\lambda)\cos U}\right)$$

$$+\frac{EI}{l}\,.\,\frac{2U^2(1-n\lambda).\sin U}{\sin U - U(1-n\lambda)\cos U}\,.\,\frac{\Delta}{l}$$

Si l'on désigne par mij et mji les moments d'encastrements parfaits de la barre AiAj sous l'action des charges transversales (μ et τ) et soumise à la compression (N), on voit que les équations (1.1.11) et (1.1.12) donnent une solution de Mij et Mji qui s'écrit :

$$(1.1.13)\quad Mij = mij + A\theta i + B\theta j - (A+B)\,.\,\frac{\Delta}{l}$$

$$(1.1.14)\quad Mji = mji + B\theta i + A\theta j - (A+B)\,.\,\frac{\Delta}{l}$$

où : A = coefficient de rigidité à la flexion,

B = coefficient de répercussion ,

$t = \frac{B}{A}$ = coefficient de transmission.

En comparant les équations (1.1.11), (1.1.12), (1.1.13) et (1.1.14) on aboutit à :

$$(1.1.15)\quad A = \frac{EI}{l}\,.\,\frac{\omega l[\omega l(1-n\lambda)\cos\omega l-\sin\omega l]}{\omega l(1-n\lambda)\sin\omega l-2(1-\cos\omega l)}$$

$$(1.1.16)\quad B = \frac{-EI}{l}\,.\,\frac{\omega l[\omega l(1-n\lambda)-\sin\omega l]}{\omega l(1-n\lambda)\sin\omega l-2(1-\cos\omega l)}$$

A partir des équations (1.1.11) et (1.1.12) et en fonction de (μ et τ) on peut calculer les expressions mij et mji. Il suffit de faire $\theta i = \theta j = \frac{\Delta}{1} = 0$, et finalement on obtient :

(1.1.17) $$mij = -A\left(\frac{M^*}{EI} + \frac{T^*}{G\Omega} + \frac{\tau i}{G\Omega}\right) + B\left(\frac{M1^*}{EI} + \frac{T1^*}{G\Omega} + \frac{\tau j}{G\Omega}\right)$$

(1.1.18) $$mji = A\left(\frac{M1^*}{EI} + \frac{T1^*}{G\Omega} - \frac{\tau i}{G\Omega}\right) - B\left(\frac{M^*}{EI} + \frac{T^*}{G\Omega} + \frac{\tau i}{G\Omega}\right)$$

avec :

(1.1.19) $$\begin{cases} M^* = \frac{1}{\sin\omega 1}\int_0^1 \mu(x)\sin\omega(1-x)\,dx \\ M1^* = \frac{1}{\sin\omega 1}\int_0^1 \mu(x)\sin\omega x\,dx \\ T^* = \frac{1}{\sin\omega 1}\cdot\int_0^1 \frac{d\tau(x)}{dx}\sin\omega(1-x)\,dx \\ T1^* = \frac{1}{\sin\omega 1}\cdot\int_0^1 \frac{d\tau(x)}{dx}\sin\omega x\,dx \end{cases}$$

En annulant Mji, θi et Δ dans les équations (1.1.9) et (1.1.10), on trouvera le moment d'encastrement parfait et la rotation d'une poutre droite encastrée à une extrémité et reposant sur un appui simple à l'autre extrémité (figure 2).

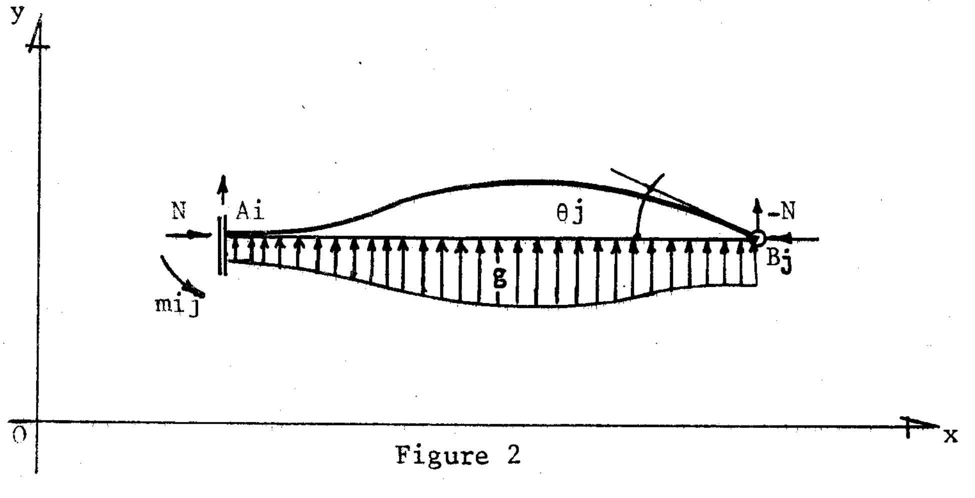


Figure 2

(1.1.20) $$mij = \frac{-\frac{Nl.\sin\omega l}{EI} \cdot M^{*} - \frac{Nl.\sin\omega l}{G\Omega} \cdot T^{*} - \frac{Nl.\sin\omega l}{G\Omega} \cdot \tau i}{\sin\omega l - \omega l(1-n\lambda)\cos\omega l}$$

(1.1.21) $$\theta j = \frac{mij\,[\sin\omega l - \omega l(1-n\lambda)] - \frac{Nl\sin\omega l}{EI}\, Ml^{*} - \frac{Nl\sin\omega l}{G\Omega}\, Tl^{*} + \frac{Nl\sin\omega l}{G\Omega}\,\tau j}{EI(1-n\lambda)\,\omega^2 l^2 \sin\omega l}$$

Deuxième cas (b) : l'effort normal est une traction :

Dans ce cas la solution de l'équation (1.1.2) s'écrit :

(1.1.22) $$y(x) = a\,ch\omega x + b\,sh\omega x + \frac{\omega}{N}\int_0^x f(t)\,sh\omega(x-t)\,dt.$$

avec : $f(t) = Mji\,(\frac{t}{l}) - Mij\,(1-\frac{t}{l})\,\mu(x) - \frac{EI}{G\Omega} \cdot \frac{d\tau(x)}{dx} - \frac{N\Delta t}{l}$

$$\omega = \sqrt{N/EI(1+n\lambda)} \qquad n = \frac{|N|.l^2}{EI} \text{ et } \lambda = \frac{EI}{G\Omega l^2}$$

à l'aide des conditions aux limites, on écrira :

- pour $x = 0$, $y = 0 \rightarrow a = 0$
- pour $x = l$, $y = \Delta \rightarrow b = -\frac{\omega}{N sh\omega l}\int_0^l f(t)\,sh\omega(l-t)\,dx + \frac{\Delta}{sh\omega l}$

et on aura donc :

(1.1.23) $$y(x) = \left[\frac{\Delta}{sh\omega l} - \frac{\omega}{N sh\omega l}\int_0^l f(t).sh\omega(l-t)\,dt\right] sh\omega x + \frac{\omega}{N}\int_0^x f(t).sh\omega(x-t)\,dt$$

Dans ce cas comme dans le précédent,tous calculs faits,on posera :

(1.1.24) $$Mij\cdot[sh\omega l - (1+n\lambda)\,\omega l\,ch\omega l] + Mji\cdot[sh\omega l - \omega l(1+n\lambda)] = \Delta N sh\omega l$$
$$+ Nl sh\omega l \cdot \frac{\tau i}{G\Omega} + \frac{Nl}{EI}\int_0^l \mu(x)\,sh\omega(l-x)\,dx + \frac{Nl}{G\Omega}\int_0^l \frac{d\tau(x)}{dx}\,sh\omega(l-x)\,dx - (Nl sh\omega l)\,\theta i$$

(1.1.25) $$Mij\cdot[sh\omega l - \omega l(1+n\lambda)] + Mji\cdot[sh\omega l - \omega l(1+n\lambda).ch\omega l] = \Delta N sh\omega l$$
$$+ Nl sh\omega l \cdot \frac{\tau j}{G\Omega} - \frac{Nl}{EI}\int_0^l \mu(x)\,sh\omega x\,dx - \frac{Nl}{G\Omega}\int_0^l \frac{d\tau(x)}{dx}\,sh\omega x\,dx - Nl sh\omega l\,\theta j$$

Avec $U = \omega l/2$ on trouvera les valeurs de Mij et Mji.

$$(1.1.26)\quad Mij = -\frac{Nl}{4EI}\left(\frac{\int_0^l \mu(x)\,chU(1-2x/l)\,dx}{U(1+n\lambda)\,shU} - \frac{\int_0^l \mu(x)\,shU(1-2x/l)\,dx}{shU-U(1+n\lambda)\,chU}\right)$$

$$-\frac{Nl}{4G\Omega}\left(\frac{\int_0^l \frac{d\tau(x)}{dx}chU(1-2x/l)\,dx}{U(1+n\lambda)\,shU} - \frac{\int_0^l \frac{d\tau(x)}{dx}shU(1-2x/l)\,dx}{shU-U(1+n\lambda)\,chU}\right)$$

$$-\frac{Nl}{4G\Omega}\left(\frac{(\tau i-\tau j)\,chU}{U(1+n\lambda).shU} - \frac{(\tau i+\tau j)\,shU}{shU-U(1+n\lambda)\,chU}\right)$$

$$+\frac{Nl\theta i}{4}\left(\frac{chU}{U(1+n\lambda).shU} - \frac{shU}{shU-U(1+n\lambda)\,chU}\right)$$

$$+\frac{Nl\theta j}{4}\left(\frac{-chU}{U(1+n\lambda).shU} - \frac{shU}{shU-U(1+n\lambda)\,chU}\right)$$

$$-\frac{EI}{l}\cdot\frac{2U^2(1+n\lambda)\,shU}{U(1+n\lambda)\,chU-shU}\cdot\frac{\Delta}{l}$$

$$(1.1.27)\quad Mji = -\frac{Nl}{4EI}\left(\frac{-\int_0^l \mu(x)\,chU(1-2x/l)\,dx}{U(1+n\lambda).shU} - \frac{\int_0^l \mu(x)\,shU(1-2x/l)\,dx}{shU-U(1+n\lambda).chU}\right)$$

$$-\frac{Nl}{4G\Omega}\left(\frac{-\int_0^l \frac{d\tau(x)}{dx}chU(1-2x/l)\,dx}{U(1+n\lambda).shU} - \frac{\int_0^l \frac{d\tau(x)}{dx}shU(1-2x/l)\,dx}{shU-U(1+n\lambda).chU}\right)$$

$$-\frac{Nl}{4G\Omega}\left(\frac{-(\tau i-\tau j)\,shU}{U(1+n\lambda).shU} - \frac{(\tau i+\tau j).shU}{shU-U(1+n\lambda).chU}\right)$$

$$+\frac{Nl\theta i}{4}\left(\frac{-chU}{U.(1+n\lambda).shU} - \frac{shU}{shU-U.(1+n\lambda).chU}\right)$$

$$+\frac{Nl\theta j}{4}\left(\frac{chU}{U(1+n\lambda).shU} - \frac{shU}{shU-U.(1+n\lambda)\,chU}\right)$$

$$-\frac{EI}{l}\cdot\frac{2U^2(1+n\lambda).shU}{U(1+n\lambda)\,chU-shU}\cdot\frac{\Delta}{l}$$

Les équations (1.1.27) et (1.1.26) donnent une solution Mij et Mji qui s'écrivent :

(1.1.28) $Mij = mij + A\theta i + B\theta j - \frac{\Delta}{1}(A+B)$

(1.1.29) $Mji = mji + A\theta j + B\theta i - \frac{\Delta}{1}(A+B)$

(1.1.30) avec : $A = \frac{EI}{1} \cdot \frac{\omega 1[\omega 1(1+n\lambda)ch\omega 1 - sh\omega 1]}{\omega 1(1+n\lambda)sh\omega 1 - 2(ch\omega 1 - 1)}$

(1.1.31) $B = -\frac{EI}{1} \cdot \frac{\omega 1[\omega 1(1+n\lambda) - sh\omega 1]}{\omega 1(1+n\lambda)sh\omega 1 - 2(ch\omega 1 - 1)}$

En faisant $\theta i = \theta j = \frac{\Delta}{1} = 0$ dans les équations (1.1.26) et (1.1.27), nous aurons :

(1.1.32) $mij = -A\cdot\left(\frac{M^*}{EI} + \frac{T^*}{G\Omega} + \frac{\tau i}{G\Omega}\right) + B\cdot\left(\frac{M1^*}{EI} + \frac{T1^*}{G\Omega} - \frac{\tau j}{G\Omega}\right)$

(1.1.33) $mji = A\cdot\left(\frac{M1^*}{EI} + \frac{T1^*}{G\Omega} - \frac{\tau j}{G\Omega}\right) - B\cdot\left(\frac{M^*}{EI} + \frac{T^*}{G\Omega} + \frac{\tau i}{G\Omega}\right)$

(1.1.34) avec : $\begin{cases} M^* = \frac{1}{sh\omega 1} \cdot \int_0^1 \mu(x)\, sh\omega(1-x)\, dx \\ M1^* = \frac{1}{sh\omega 1} \cdot \int_0^1 \mu(x)\, sh\ x dx \\ T^* = \frac{1}{sh\omega 1} \cdot \int_0^1 \frac{d\tau(x)}{dx}\, sh\omega(1-x)\, dx \\ T1^* = \frac{1}{sh\omega 1} \cdot \int_0^1 \frac{d\tau(x)}{dx}\, sh\omega x dx \end{cases}$

Dans ce cas comme dans le cas précédent, en annulant Mji et θi dans les équations (1.1.25) et (1.1.24) on calculera le moment d'encastrement parfait et la rotation d'une poutre droite encastrée à une extrémité et reposant sur un appui simple à l'extrémité opposée.

(1.1.35) $mij = \dfrac{-\frac{N1sh\omega 1}{EI} \cdot M^* - \frac{N1.sh\omega 1}{EI} \cdot T^* - \frac{N1.sh\omega 1}{G\Omega} \cdot \tau i}{\omega 1(1+n\lambda)ch\omega 1 - sh\omega 1}$

(1.1.36) $\theta j = \dfrac{mij[\omega 1(1+n\lambda) - sh\omega 1] - \frac{N1sh\omega 1}{EI} M1^* - \frac{N1sh\omega 1}{EI} \cdot T1^* + \frac{N1sh\omega 1}{G\Omega} \cdot \tau i}{EI(1+n\lambda)\omega^2 1^2 . sh\omega 1}$

(1.2) DISCUSSION DES COEFFICIENTS A ET B

Nous calculerons les valeurs de A et B dans le cas d'un effort normal en compression, puis dans celui d'un effort normal en traction.

(1.2.1) *L'effort normal est une compression*

Les valeurs de A et B subissent une double infinité de discontinuité déterminée par :

$$\omega l(1-n\lambda)\sin\omega l - 2(1-\cos\omega l) = 0$$

ou $$2\sin\frac{\omega l}{2}\left[\omega l(1-n\lambda)\cos\frac{\omega l}{2} - 2\sin\frac{\omega l}{2}\right] = 0$$

La première discontinuité est définie par :

$$\sin\frac{\omega l}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \omega l = 2\pi = \sqrt{n/(1-n\lambda)}$$

d'où

(1.2,1,1) $$n = \frac{4\pi^2}{1+4\pi^2\lambda}$$

On s'aperçoitque $4\pi^2$ constitue une limite supérieure pour n. De même, on voit que la quantité ωl n'a de sens que si : $n\lambda < 1$.

(1.2.2) *L'effort normal est une traction*

Quand n augmente la valeur limite de (ωl) est égale à :

(1.2.2.1) $$\omega l = \sqrt{\frac{n}{1+n}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

En faisant tendre ωl vers infini, on trouve :

(1.2.2,2) $$A = \omega l \cdot \frac{EI}{l} \# \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{EI}{l}$$

(1.2.2.3) $$B = \frac{-1}{\sqrt{\lambda}\,.\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \cdot \frac{EI}{l}$$

(1.2.2.5) $$B = \frac{1-6\lambda}{1+12\lambda} \cdot \frac{2EI}{l}$$

Si l'on néglige l'effet de l'effort tranchant, on retrouve les résultats bien connus :

(1.2.2.6) $$A = 2B = \frac{4EI}{l}$$

Si l'effort normal tend vers zéro, les équations (1.1.15), (1.1.16), (1.1.30) et (1.1.31) se réduisent à :

(1.2.2.4) $$A = \frac{1+3\lambda}{1+12\lambda} \cdot \frac{4EI}{l}$$

(1.3) CALCUL DES MOMENTS D'ENCASTREMENT PARFAIT D'UN ELEMENT DROIT A SECTION CONSTANTE SOUS L'ACTION DES CHARGES TRANSVERSALES, EN CONSIDERANT LES EFFETS DE L'EFFORT NORMAL ET DE L'EFFORT TRANCHANT (*mij et mji*)

Dans ce paragraphe, nous étudierons les cas de charge suivants :

- une charge concentrée
- un moment concentré
- une charge uniformément répartie sur une longueur (a)
- une charge triangulaire (I)
- une charge triangulaire (II)

Toute autre répartition de charges (concentrée ou linéaire) peut être obtenue par superposition des 5 cas précédents.

(1.3.1) *Une charge concentrée*

La figure 3 schématise l'action d'une charge concentrée.

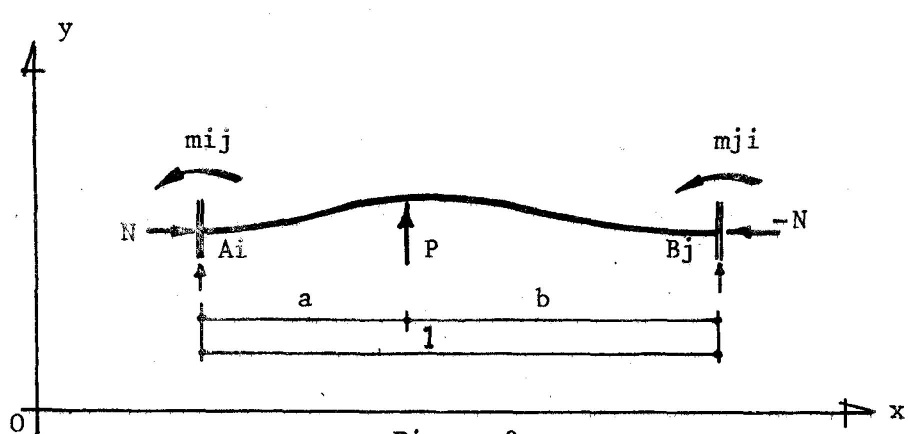


Figure 3

(1.3.1.1)
$$\begin{cases} a \geqslant x1 \geqslant 0 \\ \mu 1 = P(1-a/1).x \\ \tau 1 = -P(1-a/1) \end{cases} \qquad \begin{cases} a \leqslant x2 \leqslant 1 \\ \mu 2 = (1-x/1).aP \\ \tau 2 = Pa/1 \end{cases}$$

L'effort normal est une compression :

En vertu des équations (1.1.19) et (1.3.1.1) on écrit :

$$M^* = \frac{1}{\sin\omega l} \left\{\int_0^a P(1-\frac{a}{l})x.\sin\omega(l-x)dx + \int_a^l (1-\frac{x}{l}).aP.\sin\omega(l-x)dx\right\} =$$

$$= \frac{P}{\sin\omega l} . \left\{\frac{\sin\omega(l-a)}{\omega^2} - (1-\frac{a}{l}) . \frac{\sin\omega l}{\omega^2}\right\}$$

$$Ml^* = \frac{1}{\sin\omega l} \left\{\int_0^a P(1-\frac{a}{l})x.\sin\omega x dx + \int_a^l P.a(1-\frac{x}{l}).\sin\omega x dx\right\} =$$

$$= \frac{P}{\sin\omega l} . \left\{\frac{\sin\omega a}{\omega^2} - \frac{a}{l} . \frac{\sin\omega l}{\omega^2}\right\}$$

$T^* = Tl^* = 0$

En remplaçant M^*, Ml^*, T^* et Tl^* dans les équations (1.1.17) et (1.1.18) on aura :

(1.3.1.2) $$mij = \frac{Pl}{2} . \left\{\frac{\cos U-(1-n\lambda)\cos U(2a/l-1)}{2U(1-n\lambda)\sin U} + \frac{(1-2a/l)\sin U-(1-n\lambda)\sin U(1-2a/l)}{2\sin U-2U(1-n\lambda)\cos U}\right\}$$

(1.3.1.3) $$mji = \frac{Pl}{2} \left\{- \frac{\cos U-(1-n\lambda)\cos U(2a/l-1)}{2U(1-n\lambda)\sin U} + \frac{(1-2a/l)\sin U-(1-n\lambda)\sin U(1-2a/l)}{2\sin U-2U(1-n\lambda)\cos U}\right\}$$

avec : $U = \omega l/2$

Si l'on néglige l'effet de l'effort tranchant dans les équations précédentes on aboutit à :

(1.3.1.4) $$mij = - Pl . \frac{\frac{a}{l} + \frac{b}{l}\cos\omega l - \cos b\omega + \frac{1}{\omega l}(\sin\omega a + \sin\omega b - \sin\omega l)}{\omega l\sin\omega l-2(1-\cos\omega l)}$$

(1.3.1.5) $$mji = Pl . \frac{\frac{b}{l} + \frac{a}{l}\cos\omega l - \cos a\omega + \frac{1}{\omega l}(\sin\omega a + \sin\omega b - \sin\omega l)}{\omega l\sin\omega l-2(1-\cos\omega l)}$$

En faisant tendre N vers zéro ωl tend vers zéro et des équations (1.3.1.3) et (1.3.1.2) on tire :

(1.3.1.6) $$mij = Pl . \frac{- \frac{a}{l} . (\frac{b}{l})^2 + 6\lambda (\frac{b}{l})^2 - 2\lambda + 12\lambda^2}{1+12\lambda}$$

(1.3.1.7) $$mji = Pl . \frac{\frac{b}{l} (\frac{a}{l})^2 + 6\lambda (1 + \frac{a}{l}) \frac{b}{l} - 4\lambda - 12\lambda^2}{1+12\lambda}$$

Si l'on néglige l'effet de l'effort tranchant on peut formuler :

(1.3.1.8) $mij = - \frac{a}{l} \cdot (\frac{b}{l})^2 \cdot Pl$

(1.3.1.9) $mji = \frac{b}{l} \cdot (\frac{a}{l})^2 \cdot Pl$

Dans cette hypothèse et en donnant à a une valeur de 1/2 on retrouve le résultat bien connu :

(1.3.1.10) $mij = -mji = - \frac{Pl}{8}$

L'effort normal est une traction :

D'après les équations (1.1.34) et (1.3.1.1) on peut écrire :

$$M^* = \frac{P}{sh\omega l} \left\{ \int_0^a P(1- \frac{a}{l}) x . sh\omega(l-x) dx + \int_a^l aP(1- \frac{x}{l}) sh\omega(l-x) dx \right\} =$$

$$= \frac{P}{sh\omega l} \left\{ (1- \frac{a}{l}) \cdot \frac{sh\omega l}{\omega^2} - \frac{sh\omega(l-a)}{\omega^2} \right\}$$

$$Ml^* = \frac{1}{sh\omega l} \left\{ \int_0^a P(1- \frac{a}{l}) x . sh\omega x dx + \int_a^l (1- \frac{x}{l}) aP sh\omega x dx \right\} =$$

$$= \frac{P}{sh\omega l} (- \frac{1}{\omega^2} sh\omega a + \frac{a}{\omega^2 l} \cdot sh\omega l)$$

$$Tl^* = T^* = 0$$

En remplaçant M^*, Ml^*, T^* et Tl^* dans les équations (1.1.32) et (1.1.33) on aboutit à :

(1.3.1.11) $$mij = \frac{Pl}{2} \left\{ \frac{-chU+(1+n\lambda) chU(1- \frac{2a}{l})}{2U(1+n\lambda) shU} + \frac{-(1- \frac{2a}{l}) shU+(1+n\lambda) shU(1- \frac{2a}{l})}{2U(1+n\lambda) chU-2 shU} \right\}$$

(1.3.1.12) $$mji = \frac{Pl}{2} \left\{ - \frac{-chU+(1+n\lambda) chU(1- \frac{2a}{l}}{2U(1+n\lambda) shU} + \frac{-(1- \frac{2a}{l}) shU+(1+n\lambda) shU(1- \frac{2a}{l})}{2U(1+n\lambda) chU-2 shU} \right\}$$

Si l'on néglige l'effet de l'effort tranchant, on trouve les résultats suivants :

$$(1.3.1.13)\quad mij = -\,Pl\,.\,\frac{\frac{a}{l}+\frac{b}{l}\,ch\,\omega l - ch\omega b + \frac{1}{\omega l}(sh\omega b + sh\omega a - sh\omega l)}{\omega l sh\omega l - 2(ch\omega l - 1)}$$

$$(1.3.1.14)\quad mji = \ Pl\,.\,\frac{\frac{b}{l}+\frac{a}{l}\,ch\omega l - cha\omega + \frac{1}{\omega l}(sh\omega b + sh\omega a - sh\omega l)}{\omega l sh\omega l - 2(ch\omega l - 1)}$$

Dans ce cas les résultats correspondant à N = 0 sont les mêmes que ceux calculés dans le cas de la compression.

(1.3.2) *Un moment concentré*

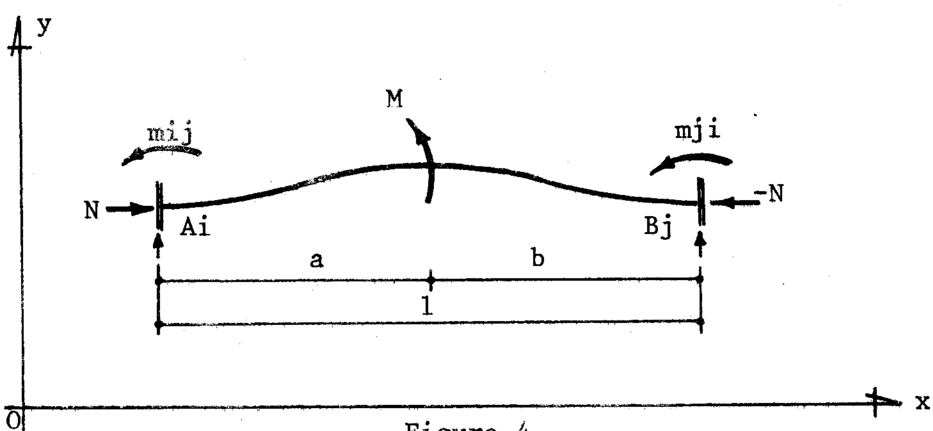


Figure 4

D'après la figure 4 on peut écrire :

(1.3.2.1)
$$\begin{cases} 0 \leqslant x1 \leqslant a \\ \mu 1 = -\dfrac{M}{l}\,x \\ \tau 1 = \dfrac{M}{l} \end{cases} \qquad \begin{cases} a \leqslant x2 \leqslant l \\ \mu 2 = (1-\dfrac{x}{l})M \\ \tau 2 = \dfrac{M}{l} \end{cases}$$

L'effort normal est une compression :

En vertu des équations (1.1.19) et (1.3.2.1) on aura :

$$M^{*} = \frac{1}{\sin\omega l}\left(\int_0^a -\frac{M}{l}\,x\sin\omega(l-x)dx + \int_a^l M(1-\frac{x}{l})\sin\omega x dx\right) =$$

$$= \frac{M}{\sin\omega l}\,.\,\left(\frac{\sin\omega l}{l\omega 2} - \frac{\cos\omega(l-a)}{\omega}\right)$$

$$M1^{*} = \frac{1}{\sin\omega l}\left\{\cdot\int_0^a -\frac{M}{l}\,x\sin\omega x dx + \int_a^l M(1-\frac{x}{l})\,\sin\omega x dx\right\} =$$

$$= \frac{M}{\sin\omega l}\,(\frac{\cos\omega a}{\omega} - \frac{\sin\omega l}{l\omega^2})$$

$$T1^{*} = T^{*} = 0$$

En remplaçant les valeurs de M^{*}, $M1^{*}$, $T1^{*}$, T^{*} dans les équations (1.1.17) et (1.1.18), tous calculs faits on peut formuler les relations suivantes :

(1.3.2.2) $$mij = \frac{M}{2}\left\{\frac{U(1-n\lambda)\cos U(1-2a/l)-\sin U}{\sin U-U(1-n\lambda)\cos U} - \frac{\sin U(1-2a/l)}{\sin U}\right\}$$

(1.3.2.3) $$mji = \frac{M}{2}\left\{\frac{U(1-n\lambda)\cos U(1-2a/l)-\sin U}{\sin U-U(1-n\lambda)\cos U} + \frac{\sin U(1-2a/l)}{\sin U}\right\}$$

En faisant tendre N vers zéro dans les équations précédentes, on aura :

(1.3.2.4) $$mij = \frac{M}{1+12\lambda}\cdot\frac{b}{l}\,(2\cdot\frac{a}{l} - \frac{b}{l} - 12\lambda)$$

(1.3.2.5) $$mji = \frac{M}{1+12\lambda}\cdot\frac{a}{l}\,(2\cdot\frac{b}{l} - \frac{a}{l} - 12\lambda)$$

Par contre l'on néglige l'effet de l'effort tranchant on obtiendra :

(1.3.2.6) $$mij = M\cdot\frac{b}{l^2}\cdot(2a - b)$$

(1.3.2.7) $$mji = M\cdot\frac{a}{l^2}\cdot(2b - a)$$

L'effort normal est une traction :

A partir des équations (1.1.34) et (1.3.2.1) on tire :

$$M^{*} = \frac{1}{sh\omega l}\cdot\left\{\int_0^a -\frac{M}{l}\,x\,sh\omega(l-x)dx + \int_a^l M(1-\frac{x}{l})M sh\omega(l-x)dx\right\}$$

$$= \frac{M}{sh\omega l}\cdot\left\{\frac{ch\omega(l-a)}{\omega} - \frac{sh\omega l}{\omega^2 l}\right\}$$

$$M1^{*} = \frac{1}{sh\omega l} \cdot \left\{\int_0^a -\frac{M}{l}\, x sh\omega x + \int_a^l M(1-\frac{x}{l})\, sh\omega x dx\right\} =$$

$$= \frac{M}{sh\omega l} \cdot \left(\frac{sh\omega l}{\omega^2 l} - \frac{ch\omega a}{\omega}\right)$$

$$T1^{*} = T^{*} = 0$$

Si l'on remplace les valeurs de $M1^{*}$, M^{*}, T^{*} et $T1^{*}$ dans les équations (1.1.32) et (1.1.33) on aura :

(1.3.2.8) $$mij = \frac{M}{2} \cdot \frac{shU-U(1+n\lambda)chU(1-2a/l)}{U(1+n\lambda)chU-shU} - \frac{shU(1-2a/l)}{shU}$$

(1.3.2.9) $$mji = \frac{M}{2} \cdot \frac{shU-U(1+n\lambda)chU(1-2a/l)}{U(1+n\lambda)chU-shU} + \frac{shU(1-2a/l)}{shU}$$

Dans le cas où N = 0 on retrouve encore les équations (1.3.2.4) et (1.3.2.5).

(1.3.3) *Une charge uniformément répartie sur une longueur (a)*

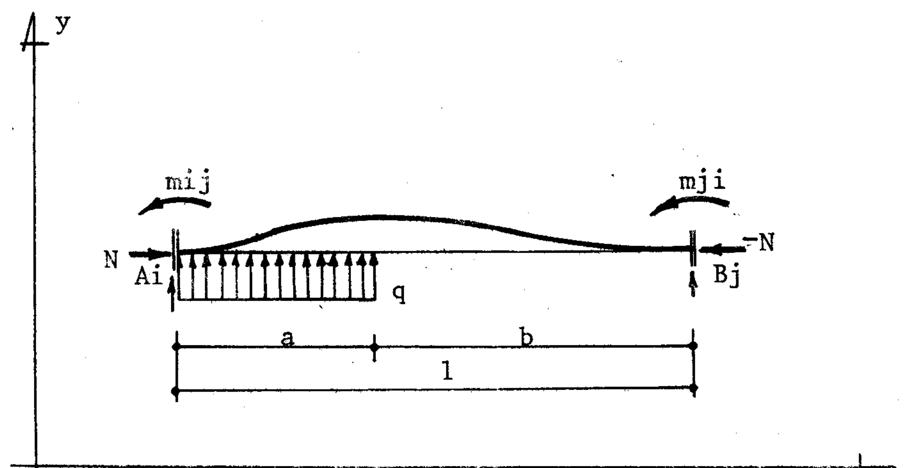


Figure 5

D'après le schéma de la figure 5 on a :

(1.3.3.1) $$\begin{cases} 0 \leqslant x1 \leqslant a \\ \mu 1 = qa(1-a/2l)\, x - q\,\dfrac{x^2}{2} \\ \tau 1 = -qa(1-a/2l) + qx \end{cases} \qquad \begin{cases} a \leqslant x2 \leqslant l \\ \mu 2 = \dfrac{a^2}{2}\, q(1-\dfrac{x}{l}) \\ \tau 2 = \dfrac{a^2 q}{2l} \end{cases}$$

L'effort normal est une compresssion :

Les équations (1.1.19) et (1.3.3.1) permettent de poser :

$$M^{*} = \frac{1}{\sin\omega 1} \int_0^a \{qa(1-a/21)x - q\frac{x^2}{2}\}\sin\omega(1-x)dx + \int_a^1 \frac{a^2}{2}\, q(1-\frac{x}{1})\sin\omega(1-x)dx$$

$$M^{*} = \frac{q1^2}{\sin\omega 1}\left\{\frac{1}{\omega^3 1^2}\cos\omega(1-a) - \frac{a}{\omega^2 1^2}(1-\frac{a}{21})\sin\omega 1 - \frac{\cos\omega 1}{\omega^3 1^2}\right\}$$

$$M1^{*} = \frac{1}{\sin\omega 1} \int_0^a \{qa(1-\frac{a}{21})x - \frac{qx^2}{2}\}\sin\omega x dx + \int_a^1 \frac{a^2 q}{2}(1-\frac{x}{1})\sin\omega x dx$$

$$= \frac{q1^2}{\sin\omega 1}\left(-\frac{\cos\omega a}{\omega^3 1^2} - \frac{a^2}{2\omega^2 1^3}\sin\omega 1 + \frac{1}{\omega^3 1^2}\right)$$

$$T^{*} = \frac{1}{\sin\omega 1}\cdot\int_0^a q\cdot\sin\omega(1-x)dx = \frac{q}{\omega\sin\omega 1}\cdot\cos\omega(1-a) - \cos\omega 1$$

$$T1^{*} = \frac{1}{\sin\omega 1}\cdot\int_0^a q\cdot\sin\omega x dx = \frac{-q}{\omega\sin\omega 1}(\cos\omega a - 1)$$

Des équations (1.1.17) et (1.1.14), tous calculs faits il vient :

$$(1.3.3.2)\quad \begin{cases} k1 = \dfrac{-\cos U(1-2a/1)+\cos U+(2aU/1)(1-a/1)\sin U}{\sin U - U(1-n\lambda)\cos U} \\[2ex] k2 = \dfrac{\sin U(1-2a/1)-\sin U+(2aU/1)\cos U}{U(1-n\lambda)\sin U} \\[2ex] mij = \dfrac{q1^2}{8U}\cdot(k1 + k2) \\[2ex] mji = \dfrac{q1^2}{8U}\cdot(k1 - k2) \end{cases}$$

Dans le cas où a = 1 on trouve :

$$(1.3.3.3)\quad mij = -\,mji = \frac{3(U-tgU)}{U^2(1-n\lambda)tgU}\cdot\frac{q1^2}{12}$$

En faisant tendre N vers zéro, ωl (ou U) tend vers zéro, on aura :

$$(1.3.3.4)\quad m_{ij} = ql^2 \cdot \left[- \frac{(a/l)^2 \cdot (b/l)^2}{4(1+12\lambda)} - \frac{(a/l)^2 \cdot (1+2b/l)}{12} \right]$$

$$(1.3.3.5)\quad m_{ij} = ql^2 \cdot \left[- \frac{(a/l)^2 \cdot (b/l)^2}{4(1+12\lambda)} + \frac{(a/l)^2 \cdot (1+2b/l)}{12} \right]$$

Si l'on néglige l'effet de l'effort tranchant, on écrira :

$$(1.3.3.6)\quad m_{ij} = - \frac{qa^2}{12} \left(6 - \frac{8a}{l} + 3 \cdot \frac{a^2}{l^2}\right)$$

$$(1.3.3.7)\quad m_{ji} = \frac{qa^2}{12} \left(4 \frac{a}{l} - \frac{3a^2}{l^2}\right)$$

En mettant a = l dans les équations précédentes on retrouve les résultats bien connus.

$$(1.3.3.8)\quad m_{ij} = - m_{ji} = - \frac{ql^2}{12}$$

L'effort normal est une traction :

Les équations (1.1.34) et (1.3.3.1) permettent d'écrire :

$$M^* = \frac{1}{sh\omega l} \left\{ \int_0^a \left[qa\left(1 - \frac{a}{2l}\right)x - q\,\frac{x^2}{2}\right] sh\omega(l-x)\,dx + \int_a^l \frac{a^2}{2}\, q\left(1 - \frac{x}{l}\right) sh\omega(l-x)\,dx \right\}$$

$$= \frac{ql^2}{sh\omega l} \left\{ \frac{1}{\omega^3 l^2} ch\omega(l-a) + \frac{qa}{\omega^2 l^2} \left(1 - \frac{a}{2l}\right) sh\omega l - \frac{q}{\omega^3 l^2}\, ch\omega l \right\}$$

$$M1^* = \frac{1}{sh\omega l} \left\{ \int_0^a \left[qa\left(1 - \frac{a}{2l}\right)x - q \cdot \frac{x^2}{2}\right] sh\omega x\,dx + \int_a^l \frac{a^2}{2}\, q\left(1 - \frac{x}{l}\right) sh\omega x\,dx \right\}$$

$$= \frac{ql^2}{sh\omega l} \cdot \left[\frac{-ch\omega a}{\omega^3 l^2} + \frac{1}{\omega^3 l^2} + \frac{a^2 sh\omega l}{2\omega^2 l^3} \right]$$

$$T^* = \frac{1}{sh\omega l} \int_0^a q\, sh\omega(l-x)\,dx = \frac{-q}{\omega sh\omega l} \left[ch\omega(l-a) - ch\omega l\right]$$

$$T1^* = \frac{1}{sh\omega l} \int_0^a q\, sh\omega x\,dx = \frac{q}{\omega\, sh\omega l} (ch\omega a - 1)$$

Des équations (1.1.17) et (1.1.18), on aboutira à :

(1.3.3.9)
$$\begin{cases} k1 = \dfrac{-chU(1-2a/1)-2U(a/1)(1-a/1)shU+chU}{U(1+n\lambda)chU-shU} \\ \\ k2 = \dfrac{-shU(1-2a/1)-(2a/1)UchU+shU}{U(1+n\lambda)-shU} \\ \\ mij = \dfrac{ql^2}{8U}\cdot(k1+k2) \\ \\ mji = \dfrac{ql^2}{8U}\cdot(-k2+k1) \end{cases}$$

Dans le cas où a = 1, on trouve :

(1.3.3.10)
$$mij = -\,mji = \frac{ql^2}{12}\cdot\frac{3(ThU-U)}{U^2(1+n\lambda)ThU}$$

Pour N = 0, on retrouve les mêmes résultats qui sont donnés par les équations (1.3.3.4) et (1.3.3.5).

(1.3.4) *Une charge triangulaire (I)*

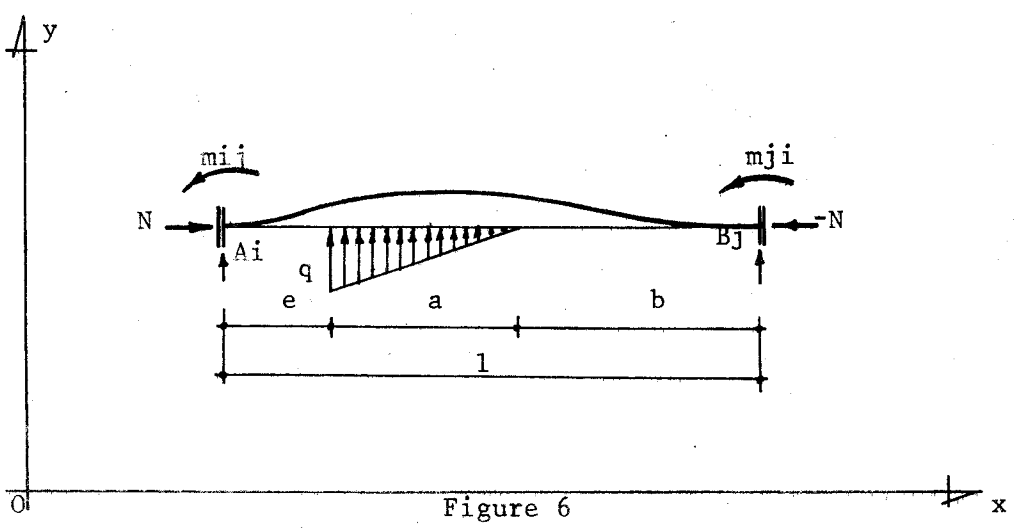


Figure 6

D'après la figure 6 on peut écrire :

(1.3.4.1)
$$\begin{cases} 0 \leqslant x1 \leqslant e \\ \mu 1 = \dfrac{aq}{2}\left(1-\dfrac{e}{1}-\dfrac{a}{31}\right)x \\ \tau 1 = -\dfrac{aq}{2}\left(1-\dfrac{e}{1}-\dfrac{a}{31}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e+a \leqslant x3 \leqslant 1 \\ \mu 3 = \dfrac{aq}{2}\left(1-\dfrac{x}{1}\right)\left(1+\dfrac{a}{3}\right) \\ \tau 3 = \dfrac{aq}{2}\left(e+\dfrac{a}{3}\right) \end{cases}$$

$$(1.3.4.1)\quad \begin{cases} e \leqslant x2 \leqslant e+a \\ \mu 2 = \frac{aq}{2}\,(1-\frac{e}{1}-\frac{a}{31})x+q(\frac{x^3}{6a}-\frac{ex^2}{2a}-\frac{x^2}{2}+ex+\frac{e^2x}{2a}-\frac{e^3}{6a}-\frac{e^2}{2}) \\ \tau 2 = -\frac{aq}{2}\,(1-\frac{e}{1}-\frac{a}{31}) - q(\frac{x^2}{2a}-\frac{ex}{a}-x+e+\frac{1^2}{2a}) \\ (d\tau 2/dx) = -q(\frac{x}{a}-\frac{e}{a}-1) \end{cases}$$

L'effort normal est une compression :

Des équations (1.1.19) et (1.3.4.1) il vient :

$$M^{*} = \frac{1}{\sin\omega 1}\left[\int_0^e \mu 1.\sin\omega(1-x)dx + \int_e^{e+a}\mu 2\sin\omega(1-x)dx + \int_{e+a}^{1}\mu 3\sin\omega(1-x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\omega 1}\left[-\frac{aq}{2\omega^2}\,(1-\frac{e}{1}-\frac{a}{31})\sin\omega 1-\frac{q}{a\omega^4}\sin\omega(1-e-a) - \frac{a}{\omega^3}\cos\omega(1-e) + \frac{q}{a\omega^4}\sin\omega(1-e)\right]$$

$$M1^{*} = \frac{1}{\sin\omega 1}\left[\int_0^e \mu 1\sin\omega x dx + \int_e^{e+a}\mu 2\sin\omega x dx + \int_{e+a}^{1}\mu 3\sin\omega x dx\right] =$$

$$= \left[-\frac{1}{a\omega^4}\sin\omega(e+a) + \frac{\cos\omega e}{\omega^3} + \frac{\sin\omega e}{a\omega^4} - (\frac{ea}{2}+\frac{a^2}{6})\,\frac{\sin\omega 1}{\omega^2 1}\right].\,q$$

$$T^{*} = \frac{1}{\sin\omega 1}\,.\int_e^{e+a}\frac{d\tau 2}{dx}\sin\omega(1-x)dx =$$

$$= q\left[-\frac{1}{a\omega^2}\sin\omega(1-e-a) - \frac{1}{\omega}\cos\omega(1-e) + \frac{1}{a\omega^2}\sin\omega(1-e)\right]$$

$$T1^{*} = \frac{1}{\sin\omega 1}\int_e^{e+a}\frac{d\tau 2}{dx}\sin\omega x dx = q\left[\frac{\sin\omega e}{a\omega^2} + \frac{\cos\omega e}{\omega} - \frac{\sin\omega(e+a)}{a\omega^2}\right]$$

En remplaçant les valeurs obtenues pour M^{*}, $M1^{*}$, T^{*} et $T1^{*}$ dans les équations (1.1.17) et (1.1.18), tous calculs faits on peut poser :

$$(1.3.4.2)\quad \begin{cases} k1 = \dfrac{-\frac{1}{2aU^2}\sin\frac{aU}{l}\cos(1-\frac{a}{l}-\frac{2e}{l})U+\frac{a}{2l}(1-\frac{2e}{l}-\frac{2a}{3l})\sin U+\frac{1}{2U}\cos U(1-\frac{2e}{l})}{2\sin U-2U(1-n\lambda)\cos U} \\[2ex] k2 = \dfrac{\frac{1}{2aU^2}\sin\frac{aU}{l}\sin(1-\frac{a}{l}-\frac{2e}{l})U-\frac{1}{2U}\sin(1-\frac{2e}{l})U+\frac{a}{2l}\cos U}{2U(1-n\lambda)\sin U} \\[2ex] mij = \dfrac{ql^2}{2}(k1+k2) \\[1ex] mji = \dfrac{ql^2}{2}(k1-k2) \end{cases}$$

En faisant tendre N vers zéro ωl (ou U) tend vers zéro et on aboutit aux résultats suivants :

$$(1.3.4.3)\quad \begin{cases} k1 = \dfrac{1}{1+12\lambda}\left\{-\dfrac{1}{320a}\left[(1-\frac{2e}{l})^5+(\frac{2e}{l}+\frac{2a}{l}-1)^5\right]-\dfrac{a}{8l}(1-\frac{2e}{l}-\frac{2a}{3l})+\dfrac{1}{32}(1-\frac{2e}{l})^4\right\} \\[2ex] k2 = \left\{-\dfrac{1}{48}(1-\frac{2e}{l}-\frac{a}{l})\left[(1-\frac{2e}{l})^2+(1-\frac{2e}{l}-\frac{2a}{l})^2\right]+\dfrac{1}{24}(1-\frac{2e}{l})^3-\dfrac{a}{8l}\right\} \\[2ex] mij = \dfrac{ql^2}{2}(k1+k2) \\[1ex] mji = \dfrac{ql^2}{2}(k1+k2) \end{cases}$$

Dans ce cas pour $e = \lambda = 0$, on aura :

$$(1.3.4.4)\quad mij = -\frac{qa^2}{60}\left(10\frac{b}{l}+3\frac{a^2}{l^2}\right)$$

$$(1.3.4.5)\quad mji = \frac{qa^2}{60}\left(3\frac{ab}{l^2}+\frac{2a}{l}\right)$$

En mettant a = l (b = 0) dans les équations précédentes, on retrouve les résultats suivants :

$$(1.3.4.6)\quad mij = -\frac{ql^2}{20} \text{ et } mji = \frac{ql^2}{30}$$

L'effort normal est une traction :

A partir des équations (1.1.3.4) et (1.3.4.1) on peut écrire :

$$M^{*} = \frac{1}{sh\omega l}\left\{\int_0^e \mu 1 sh\omega(l-x)dx + \int_e^{e+a}\mu 2 sh\omega(l-x)dx + \int_{e+a}^{l}\mu 3 sh\omega(l-x)dx\right\}$$

$$= \left\{-\frac{sh\omega(l-e-a)}{a\omega^4} - \frac{ch\omega(l-e)}{\omega^3} + \frac{sh\omega(l-e)}{a\omega^4} + \frac{a}{2\omega^2}\left(1-\frac{e}{l}-\frac{a}{3l}\right)sh\omega l\right\}\frac{q}{sh\omega l}$$

$$M1^{*} = \frac{1}{sh\omega l}\left\{\int_0^e \mu 1 sh\omega x dx + \int_e^{e+a}\mu 2 sh\omega x dx + \int_{e+a}^{l}\mu 3 sh\omega x dx\right\} =$$

$$= q \cdot \left\{-\frac{sh\omega(e+a)}{a\omega^4} + \left(\frac{ae}{2}+\frac{a^2}{6}\right)\frac{sh\omega e}{\omega^2 l} + \frac{ch\omega e}{\omega^3} + \frac{sh\omega e}{a\omega^4}\right\}$$

$$T^{*} = \frac{1}{sh\omega l}\int_e^{e+a}\frac{d\tau 2}{dx} \cdot sh\omega(l-x)dx =$$

$$= \frac{q}{sh\omega l}\left\{\frac{1}{a\omega^2} sh\omega(l-e-a) + \frac{1}{\omega} ch\omega(l-e) - \frac{1}{a\omega^2} sh\omega(l-e)\right\}$$

$$T1^{*} = \frac{1}{sh\omega l}\int_e^{e+a}\frac{d\tau 2}{dx} \cdot sh\omega x dx = \frac{q}{sh\omega l}\left\{\frac{sh\omega(e+a)}{a\omega^2} - \frac{sh\omega e}{a\omega^2} - \frac{ch\omega e}{\omega}\right\}$$

En remplaçant les valeurs de M^{*}, $M1^{*}$, T^{*} et $T1^{*}$ dans les équations (1.1.17) et (1.1.18) tous calculs faits, on aura :

(1.3.4.7)

$$\left\{\begin{array}{l}
k1 = \dfrac{\frac{-1}{2aU^2} chU\left(1-\frac{2e}{l}-\frac{a}{l}\right)sh\frac{aU}{l} + \frac{1}{2U} chU\left(1-\frac{2e}{l}\right) - \frac{a}{2l}\left(1-\frac{2e}{l}-\frac{2a}{3l}\right)shU}{2U(1+n\lambda)chU-2shU} \\[2ex]
k2 = \dfrac{\frac{-1}{2aU^2} shU\left(1-\frac{2e}{l}-\frac{a}{l}\right)sh\frac{aU}{l} + \frac{1}{2U} shU\left(1-\frac{2e}{l}\right) - \frac{a}{2l} chU}{2U(1+n\lambda)shU} \\[2ex]
mij = \dfrac{ql^2}{2}(k1+k2) \\[2ex]
mji = \dfrac{ql^2}{2}(k1-k2)
\end{array}\right.$$

Pour N=0 on retrouve le même résultat qui est donné par l'équation (1.3.4.3).

(1.3.5) <u>*Une charge triangulaire (II)*</u>

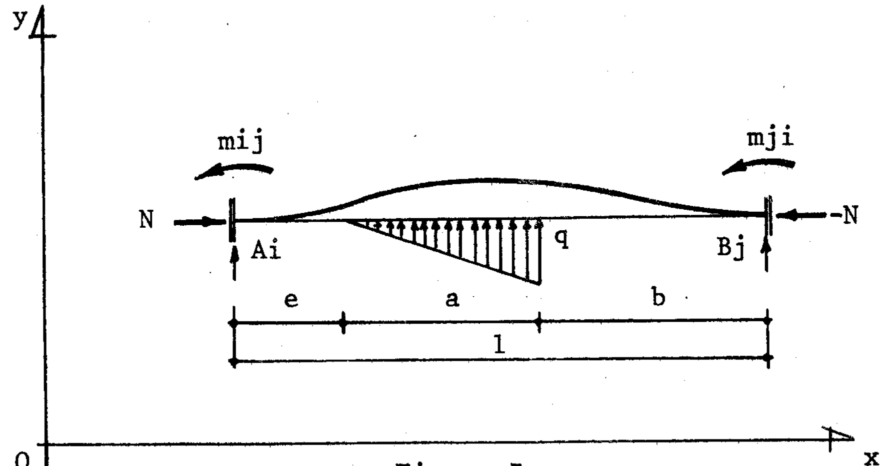


Figure 7

D'après la figure 7 on a :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x1 \leqslant e \\ \mu 1 = (1-\frac{e}{l}-\frac{2a}{3l}) \cdot \frac{aq}{2}\, x \\ \tau 1 = -\,(1-\frac{e}{l}-\frac{2a}{3l})\, \frac{aq}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} e+a \leqslant x3 \leqslant l \\ \mu 3 = \frac{aq}{2}\,(e+\frac{2a}{3})(1-\frac{x}{l}) \\ \tau 3 = +\,(\frac{e}{l}+\frac{2a}{3l}) \cdot \frac{aq}{2} \end{cases}$$

(1.3.5.1)

$$\begin{cases} e \leqslant x2 \leqslant e+a \\ \mu 2 = (1-\frac{e}{l}-\frac{2a}{3l}) \cdot \frac{aq}{2}\, x - \frac{1}{6a}\,(x-e)^3 q \\ \tau 2 = -(1-\frac{e}{l}-\frac{2a}{3})\, \frac{aq}{2} + \frac{1}{2a}\,(x-e)^2 q \\ (d\tau/dx) = (x-e)\, \frac{q}{a} \end{cases}$$

L'effort normal est une compression :

D'après les équations (1.1.19) et (1.3.5.1) on écrira :

$$M^* = \frac{1}{\sin\omega l}\left[\int_0^e \mu 1 \sin\omega(l-x)dx + \int_e^{e+a} \mu 2 \sin\omega(l-x)dx + \int_{e+a}^{l} \mu 3 \sin\omega(l-x)dx\right]$$

$$= \frac{q}{\sin\omega l}\left[\frac{\cos\omega(l-e-a)}{\omega^3} + \frac{\sin\omega(l-e-a)}{a\omega^4} - \frac{\sin\omega(l-e)}{a\omega^4} - \frac{a}{2\omega^2}\,(1-\frac{e}{l}-\frac{2a}{3l})\sin\omega l\right]$$

$$M1^* = \frac{1}{\sin\omega l}\left[\int_0^e \mu 1 \sin\omega x dx + \int_e^{e+a} \mu 2 \sin\omega x dx + \int_{e+a}^{l} \mu 3 \sin\omega x dx\right]$$

$$= \frac{q}{\sin\omega l}\left[-\frac{\cos\omega(e+a)}{\omega^3} + \frac{\sin\omega(e+a)}{a\omega^4} - \frac{\sin\omega e}{a\omega^4} - (\frac{ae}{2l\omega^2} + \frac{a^2}{3l\omega^2})\sin\omega l\right]$$

$$T^{*} = \frac{1}{\sin\omega l}\int_{e}^{e+a}\frac{d\tau 2}{dx}\,\sin\omega(l-x)dx =$$

$$= \frac{q}{\sin\omega l}\cdot\left[\frac{\cos\omega(l-e-a)}{\omega} + \frac{\sin\omega(l-e-a)}{a\omega^{2}} - \frac{\sin\omega(l-e)}{\omega^{2}}\right]$$

$$Tl^{*} = \frac{1}{\sin\omega l}\int_{e}^{e+a}\frac{d\tau 2}{dx}\,\sin\omega x dx =$$

$$= \frac{q}{\sin\omega l}\left[-\frac{\cos\omega(e+a)}{\omega} + \frac{\sin\omega(e+a)}{a\omega^{2}} - \frac{\sin\omega e}{a\omega^{2}}\right]$$

En remplaçant les valeurs obtenues pour M^{*}, Ml^{*}, T^{*} et Tl^{*} dans les équations (1.1.17) et (1.1.18) tous calculs faits on aboutit aux résultats suivants :

(1.3.5.2)
$$\left\{\begin{array}{l}
k1 = \dfrac{-\frac{1}{U}\cos U(\frac{2e}{l} + \frac{2a}{l} - 1) + \frac{1}{aU^{2}}\cos U(\frac{2e}{l} + \frac{a}{l} - 1)\sin\frac{aU}{l} + \overset{\sin\frac{aU}{l}}{\frac{a}{l}}(1 - \frac{2e}{l} - \frac{4a}{3l})\sin U}{4\sin U - 4U(1-n\lambda)\cos U} \\[2ex]
k2 = \dfrac{-\frac{1}{U}\sin U(\frac{2e}{l} + \frac{2a}{l} - 1) + \frac{1}{aU^{2}}\sin\frac{aU}{l}\,.\,\sin U(\frac{2e}{l} + \frac{a}{l} - 1) + \frac{a}{l}\cos U}{4U(1-n\lambda)\sin U} \\[2ex]
mij = \dfrac{ql^{2}}{2}(k1+k2) \\[2ex]
mji = \dfrac{ql^{2}}{2}(k1-k2)
\end{array}\right.$$

En faisant tendre N vers zéro, des équations précédentes on trouve :

(1.3.5.3)
$$\left\{\begin{array}{l}
k1 = \left[-\frac{1}{32}(\frac{2e}{l} + \frac{2a}{l} - 1)^{4} + \frac{1}{320a}(\frac{2e}{l} + \frac{2e}{l} - 1)^{5} - \frac{a}{8l}(1 - \frac{2e}{l} - \frac{4a}{3l}) + \right. \\
\qquad\qquad\qquad \left. \frac{1}{320a}(1 - \frac{2e}{l})^{5}\right] / (1+12\lambda) \\[2ex]
k2 = \left[\frac{1}{24}(\frac{2e}{l} + \frac{2a}{l} - 1)^{3} - \frac{1}{192a}(\frac{2e}{l} + \frac{2a}{l} - 1)^{4} + \frac{1}{192a}(\frac{2e}{l} - 1)^{4} - \frac{a}{8l}\right] \\[2ex]
mij = \frac{ql^{2}}{2}(k1+k2) \text{ et } mji = \frac{ql^{2}}{2}(k1-k2)
\end{array}\right.$$

Dans le cas où e=0, en négligeant l'effet de l'effort tranchant dans l'équation (1.3.5.3), on aura :

$$(1.3.5.4)\quad mij = -\frac{qa^2}{30}\left(6\frac{a^2}{1^2} - 15\frac{a}{1} + 10\right)$$

$$(1.3.5.5)\quad mji = \frac{qa^3}{201}\left(5 - \frac{4a}{1}\right)$$

Si l'on superpose les résultats des deux cas de chargement triangulaire on retrouve les résultats obtenus pour un chargement uniformément réparti, par exemple dans le cas où e=0 on peut écrire :

$$\text{Cas (I)} \;:\; k1I = \frac{-\frac{1}{2aU^2}\sin\frac{aU}{1}\cos U\left(1-\frac{a}{1}\right) + \frac{a}{21}\left(1-\frac{2a}{31}\right)\sin U + \frac{1}{2U}\cos U}{2\sin U - 2U(1-n\lambda)\cos U}$$

$$\text{Cas (II)} \;:\; k1II = \frac{\frac{1}{2aU^2}\cos U\left(1-\frac{a}{1}\right)\frac{\sin aU}{1} - \frac{1}{2U}\cos U\left(\frac{2a}{1}-1\right) + \frac{a}{21}\left(1-\frac{4a}{31}\right)\sin U}{2\sin U - 2U(1-n\lambda)\cos U}$$

$$(1.3.5.6)\quad \frac{ql^2}{2}(k1I+k1II) = \frac{ql^2}{8U}\cdot\frac{-\cos U(1-2a/1)+\cos U+(2aU/1)(1-a/1)\sin U}{\sin U - U(1-n\lambda)\cos U} = \frac{ql^2}{8U}k1$$

De la même façon on trouve :

$$(1.3.5.7)\quad \frac{ql^2}{2}(k2I+k2II) = \frac{ql^2}{8U}\cdot\frac{\sin U(1-2a/1)-\sin U+(2aU/1)\cos U}{U(1-n\lambda)\sin U} = \frac{ql^2}{8U}k2$$

Les résultats obtenus pour k1 et k2 sont identiques à ceux obtenus par l'équation (1.3.3.2).

L'effort normal est une traction :

Les équations (1.1.3.4) et (1.3.5.1) nous permettent de poser :

$$M^* = \frac{1}{sh\omega l}\left\{\int_0^e \mu 1\, sh\omega(1-x)\,dx + \int_e^{e+a}\mu 2\, sh\omega(1-x)\,dx + \int_{e+a}^{1}\mu 3\, sh\omega(1-x)\,dx\right\}$$

$$M^* = \frac{q}{sh\omega l}\cdot\left\{\frac{ch\omega(1-e-a)}{\omega^3} + \frac{sh\omega(1-e-a)}{a\omega^4} - \frac{sh\omega(1-e)}{a\omega^4} + \left(\frac{a}{2\omega^2} - \frac{ae}{2\omega^2 1} - \frac{a^2}{3\omega^3 1}\right)sh\omega l\right\}$$

$$M1^* = \frac{1}{sh\omega l}\cdot\left\{\int_0^e \mu 1\, sh\omega x\,dx + \int_e^{e+a}\mu 2\, sh\omega x\,dx + \int_{e+a}^{1}\mu 3\, sh\omega x\,dx\right\} =$$

$$m1^* = \frac{q}{sh\omega l}\left\{-\frac{ch\omega(e+a)}{\omega^3} + \frac{sh\omega(e+a)}{a\omega^4} - \frac{sh\omega e}{a\omega^4} + \left(\frac{ae}{2\omega^2 1} + \frac{a^2}{31\omega^2}\right)sh\omega l\right\}$$

$$T^{*} = \frac{1}{sh\omega l}\int_{e}^{e+a}\frac{d\tau}{dx}\,sh\omega(l-x)\,dx = \frac{-q}{sh\omega l}\left\{\frac{ch\omega(l-e-a)}{\omega} + \frac{sh\omega(l-e-a)}{a\omega^{2}} - \frac{sh\omega(l-e)}{a\omega^{2}}\right\}$$

$$Tl^{*} = \frac{1}{sh\omega l}\int_{e}^{e+a}\frac{d\tau}{dx}\,sh\omega x\,dx = \frac{q}{sh\omega l}\left\{\frac{ch\omega(e+a)}{\omega} - \frac{sh\omega(e+a)}{a\omega^{2}} - \frac{sh\omega e}{a\omega^{2}}\right\}$$

En remplaçant les valeurs de M^{*}, Ml^{*}, T^{*} et Tl^{*} dans les équations (1.1.17) et (1.1.18), on aboutit à :

$$(1.3.5.8)\quad \begin{cases} k1 = \dfrac{-\frac{1}{U}\,chU\left(1-\frac{2e}{l}-\frac{2a}{l}\right) + \frac{1}{aU^{2}}\,chU\left(1-\frac{2e}{l}-\frac{a}{l}\right)\,.\,sh\frac{aU}{l} - \frac{a}{l}\left(1-\frac{2e}{l}-\frac{4a}{3l}\right)shU}{4U(1+n\lambda)\,chU-4shU} \\[3ex] k2 = \dfrac{-\frac{1}{U}\,shU\left(1-\frac{2e}{l}-\frac{2a}{l}\right) + \frac{1}{aU^{2}}\,shU\left(1-\frac{2e}{l}-\frac{a}{l}\right)sh\frac{Ua}{l} - \frac{a}{l}\,chU}{4U(1+n\lambda)\,shU} \\[3ex] mij = \dfrac{ql^{2}}{2}\,(k1+k2) \\[2ex] mji = \dfrac{ql^{2}}{2}\,(k1-k2) \end{cases}$$

(1.4) __CALCUL DU MOMENT D'ENCASTREMENT PARFAIT ET DE LA ROTATION D'UN ELEMENT DROIT A SECTION CONSTANTE, ENCASTREE A UNE EXTREMITE ET REPOSANT SUR APPUI SIMPLE A L'AUTRE, SOUS L'ACTION DES CHARGES TRANSVERSALES, EN CONSIDERANT LES EFFETS DE L'EFFORT NORMAL ET DE L'EFFORT TRANCHANT__

Dans ce paragraphe, nous adaptons les mêmes cas de charge qui sont précisés dans le paragraphe précédent. En vertu des équations (1.1.20), (1.1.21), (1.1.35) et (1.1.36) et d'après les résultats obtenus pour M^*, Ml^*, T^* et Tl^* concernant chaque cas de charge dans le paragraphe (1.3), nous trouvons les résultats suivants :

(1.4.1) *Une charge concentrée*

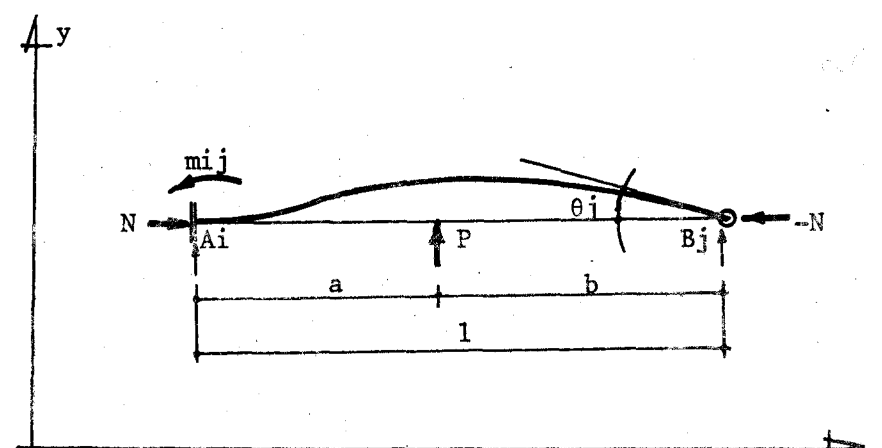


Figure 8

L'effort normal est une compression :

Les calculs donnent :

(1.4.1.1) $$mij = Pl \cdot \frac{(1-a/l)\sin\omega l - (1-n\lambda)\sin\omega(l-a)}{\sin\omega l - \omega l(1-n\lambda)\cos\omega l}$$

(1.4.1.2) $$\theta j = \frac{Pl^2}{EI} \cdot \frac{(mij/Pl)\left[\sin\omega l - \omega l(1-n\lambda)\right] - \left[(1-n\lambda)\sin\omega a - \frac{a}{l}\sin\omega l\right]}{(1-n\lambda)\omega^2 l^2 \sin\omega l}$$

L'effort normal est une traction :

Tous calculs faits on aura :

(1.4.1.3) $$mij = \frac{-(1-a/l)\,\mathrm{sh}\,\omega l + (1+n\lambda)\,\mathrm{sh}\,\omega(l-a)}{\omega l(1+n\lambda)\,\mathrm{ch}\,\omega l - \mathrm{sh}\,\omega l}\, Pl$$

(1.4.1.4) $$\theta j = \frac{Pl^2}{EI} \cdot \frac{(mij/Pl)[\omega l(1+n\lambda)-sh\omega l] + (1+n\lambda)sh\omega a - \frac{a}{l}\, sh\omega l}{(1+n\lambda).(\omega l)^2 - sh\omega l}$$

En faisant tendre N vers zéro dans les équations (1.4.1.1), (1.4.1.2) ainsi que dans les équations (1.4.1.3) et (1.4.1.4) on aboutit aux résultats suivants :

(1.4.1.5) $$mij = Pl \cdot \frac{3(1-\frac{a}{l})\lambda-(2-\frac{a}{l})(1-\frac{a}{l}).\frac{a}{2l}}{1+3\lambda}$$

(1.4.1.6) $$\theta j = \frac{Pl^2}{EI} \cdot \left[\frac{mij}{6Pl}(6\lambda-1) - \frac{a}{6l}\left(1-\frac{a^2}{l^2}\right)+\frac{a}{l}\lambda\right]$$

(1.4.2) *Un moment concentré*

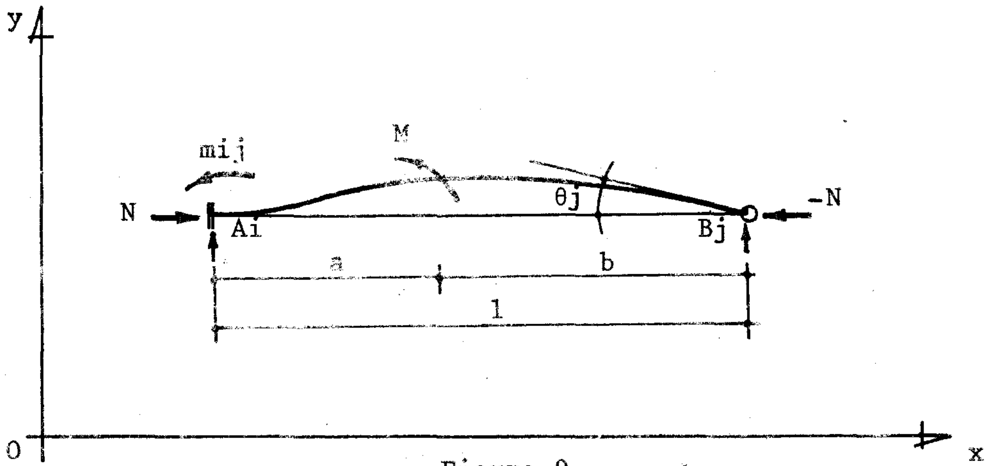


Figure 9

L'effort normal est une compression :

A partir des calculs on peut écrire :

(1.4.2.1) $$mij = M \cdot \frac{\omega l.(1-n\lambda)\cos\omega(l-a)-\sin\omega l}{\sin\omega l-\omega l(1-n\lambda)\cos\omega l}$$

(1.4.2.2) $$\theta j = \frac{Ml}{EI} \cdot \frac{(\frac{mij}{M})\left[\sin\omega l-\omega l(1-n\lambda)\right] - \left[(1-n\lambda)\omega l.\cos\omega a-\sin\omega l\right]}{(\omega l)^2.(1-n\lambda)\sin\omega l}$$

L'effort normal est une traction :

Tous calculs faits, on aura :

(1.4.2.3) $$mij = M \cdot \frac{sh\omega l-\omega l(1+n\lambda)ch\omega(l-a)}{\omega l(1+n\lambda)ch\omega l-sh\omega l}$$

(1.4.2.4) $$\theta j = \frac{Ml}{EI} \cdot \frac{(\frac{mij}{M})\left[\omega l(1+n\lambda)-sh\omega l\right] - \left[sh\omega l-\omega l(1+n\lambda)ch\omega a\right]}{(\omega l)^2(1+n\lambda)sh\omega l}$$

Pour N=0, des équations précédentes on aura :

$$(1.4.2.5)\quad m_{ij} = \frac{M}{1+3\lambda}\left[-\frac{3}{2}\left(1-\frac{a}{l}\right)^2+\frac{1}{2}-3\lambda\right]$$

$$(1.4.2.6)\quad \theta_j = \frac{m_{ij}}{6M}(6\lambda-1)+\left(\frac{a^2}{2l^2}+\lambda-\frac{1}{6}\right)$$

(1.4.3) *Une charge uniformément répartie sur une longueur (a)*

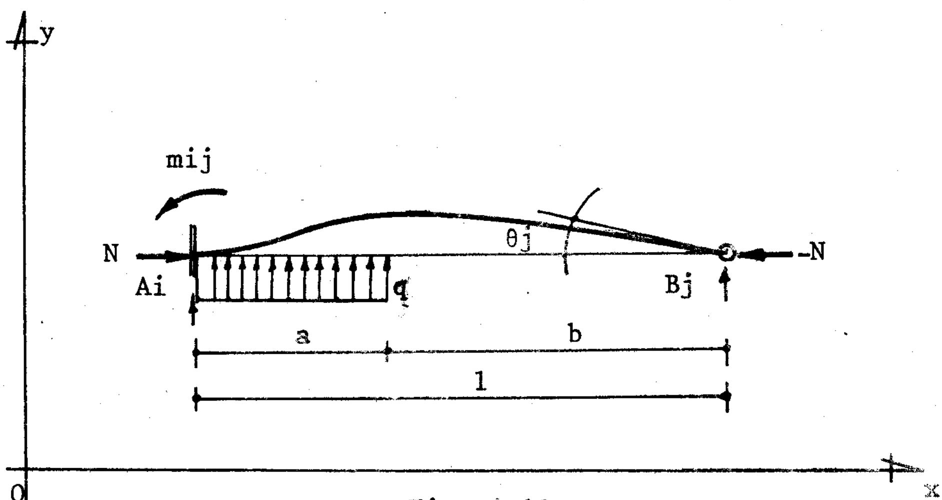


Figure 10

L'effort normal est une compression :

Tous calculs faits on aura :

$$(1.4.3.1)\quad m_{ij} = ql^2 \cdot \frac{-\frac{1}{\omega l}\cos\omega(l-a)+\frac{1}{\omega l}\cos\omega l+\frac{a}{l}\left(1-\frac{a}{2l}\right)\sin\omega l}{\sin\omega l-\omega l(1-n\lambda)\cos\omega l}$$

$$(1.4.3.2)\quad \theta_j = \frac{ql^3}{EI} \cdot \frac{\frac{m_{ij}}{ql^2}\left[\sin\omega l-\omega l(1-n\lambda)\right]-\left[-\frac{\cos\omega a}{\omega l}-\frac{a^2}{2l^2}\sin\omega l+\frac{1}{\omega l}\right]}{(\omega l)^2.(1-n\lambda)\sin\omega l}$$

a) *L'effort normal est une traction :*

Les calculs donnent :

$$(1.4.3.3)\quad m_{ij} = ql^2 \cdot \frac{+\frac{1}{\omega l}\operatorname{ch}\omega(l-a)-\frac{\operatorname{ch}\omega l}{\omega l}+\frac{a}{l}\left(1-\frac{a}{2l}\right)\operatorname{sh}\omega l}{\operatorname{sh}\omega l-\omega l(1+n\lambda)\operatorname{ch}\omega l}$$

$$(1.4.3.4)\quad \theta_j = \frac{ql^3}{EI} \cdot \frac{\frac{m_{ij}}{ql^2}\left[\omega l(1+n\lambda)-\operatorname{sh}\omega l\right]-\left[-\frac{\operatorname{ch}\omega a}{\omega l}+\frac{a^2}{2l^2}\operatorname{sh}\omega l+\frac{1}{\omega l}\right]}{\omega^2 l^2(1+n\lambda)\operatorname{sh}\omega l}$$

Dans les deux cas de l'effort normal, en faisant tendre N vers zéro, on aura :

$$(1.4.3.5)\quad mij = -\,ql^2 \,.\, \frac{\frac{a^2}{l^2}\cdot\left(2-\frac{a}{l}\right)^2}{8(1+3\lambda)}$$

$$(1.4.3.6)\quad \theta j = \frac{ql^3}{EI}\,.\,\left[\frac{mij}{6ql^2}\cdot(6\lambda-1)-\frac{a^2}{24l^2}\cdot\left(2-\frac{a^2}{l^2}\right)\right]$$

Si l'on néglige l'effet de l'effort tranchant, on obtient :

$$(1.4.3.7)\quad mij = \frac{ql^2}{8}\,.\,\left(\frac{a}{l}\right)^2\cdot\left(2-\frac{a}{l}\right)^2$$

$$(1.4.3.8)\quad \theta j = \frac{ql^3}{48EI}\,.\,\left(\frac{a}{l}\right)^3\cdot\left(3\,\frac{a}{l}-4\right)$$

(1.4.4) *une charge triangulaire (I)*

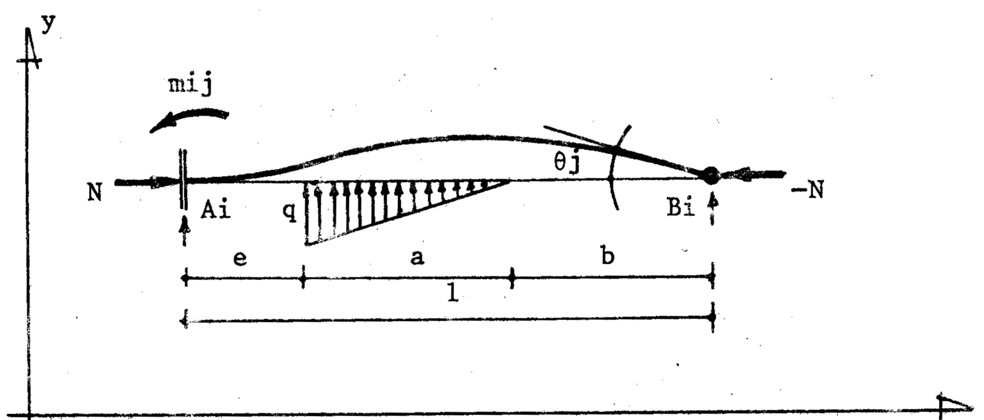


Figure 11

b) *L'effort normal est une compression :*

Tous calculs faits on aura :

$$(1.4.4.1)\quad mij = ql^2\,.\,\frac{\dfrac{\sin\omega(l-e-a)}{al\omega^2}+\dfrac{\cos\omega(l-e)}{\omega l}-\dfrac{\sin\omega(l-e)}{al\omega^2}+\dfrac{a}{2l}\left(1-\dfrac{e}{l}-\dfrac{a}{3l}\right)\sin\omega l}{\sin\omega l-\omega l(1-n\lambda)\cos\omega l}$$

$$+\,\frac{\sin\omega e}{al\omega^2}-\frac{a}{l}\left(\frac{e}{2l}+\frac{a}{6l}\right)\sin\omega l\,\Big]$$

$$(1.4.4.2)\quad \theta j = \frac{ql^3}{EI}\,.\,\frac{\left(\dfrac{mij}{ql^2}\right)\Big[\sin\omega l-\omega l(1-n\lambda)\Big]-\Big[-\dfrac{\sin\omega(e+a)}{al\omega^2}+\dfrac{\cos\omega e}{\omega l}+}{(\omega l)^2.(1-n\lambda)\sin\omega l}$$

L'effort normal est une traction :

Les calculs nous permettent d'écrire que :

$$(1.4.4.3)\quad mij = ql^2 \,.\, \frac{-\dfrac{sh\omega(l-e-a)}{al\omega^2} - \dfrac{ch\omega(l-e)}{\omega l} + \dfrac{sh\omega(l-e)}{al\omega^2} + \dfrac{a}{2l}\left(1-\dfrac{e}{l}-\dfrac{a}{3l}\right)sh\omega l}{sh\omega l - \omega l(1+n\lambda)ch\omega l}$$

$$(1.4.4.4)\quad \theta j = \frac{ql^3}{EI} \,.\, \frac{\dfrac{mij}{ql^2}\left[\omega l(1+n\lambda) - sh\omega l\right] - \left[-\dfrac{sh\omega(e+a)}{al\omega^2} + \dfrac{sh\omega e}{al\omega^2} + \dfrac{ch\omega e}{\omega l} + \dfrac{a}{l}\left(\dfrac{e}{2l}+\dfrac{a}{6l}\right)sh\omega l\right]}{(\omega l)^2(1+n\lambda)sh\omega l}$$

Dans les deux cas pour un effort normal et avec N=0, on aboutit à :

$$(1.4.4.5)\quad mij = \frac{ql^2}{1+3\lambda}\left[\frac{1}{40a}\left(1-\frac{e}{l}-\frac{a}{l}\right)^5 + \frac{1}{8}\left(1-\frac{e}{l}\right)^4 - \frac{1}{40a}\left(1-\frac{e}{l}\right)^5 - \frac{a}{4l}\left(1-\frac{e}{l}-\frac{a}{3l}\right)\right]$$

$$(1.4.4.6)\quad \theta j = \frac{ql^3}{EI} \,.\, \left[\frac{mij}{6ql^2}(6\lambda-1) + \frac{1}{120a}\left(\frac{e}{l}+\frac{a}{l}\right)^5 - \left(5+\frac{e}{a}\right)\frac{e^4}{120l^4} - \left(\frac{e}{l}+\frac{a}{3l}\right) \,.\, \frac{a}{12l}\right]$$

Dans le cas où e=0, si l'on néglige l'effet de l'effort tranchant, on aura :

$$(1.4.4.7)\quad mij = \frac{ql^2}{120}\left(-20\frac{a^2}{l^2} + 15\frac{a^3}{l^3} - 3\frac{a^4}{l^4}\right)$$

$$(1.4.4.8)\quad \theta j = \frac{ql^3}{4I}\left(\frac{1}{80} \,.\, \frac{a^4}{b^4} - \frac{1}{48} \,.\, \frac{a^3}{b^3}\right)$$

(1.4.5) *Une charge triangulaire (II)*

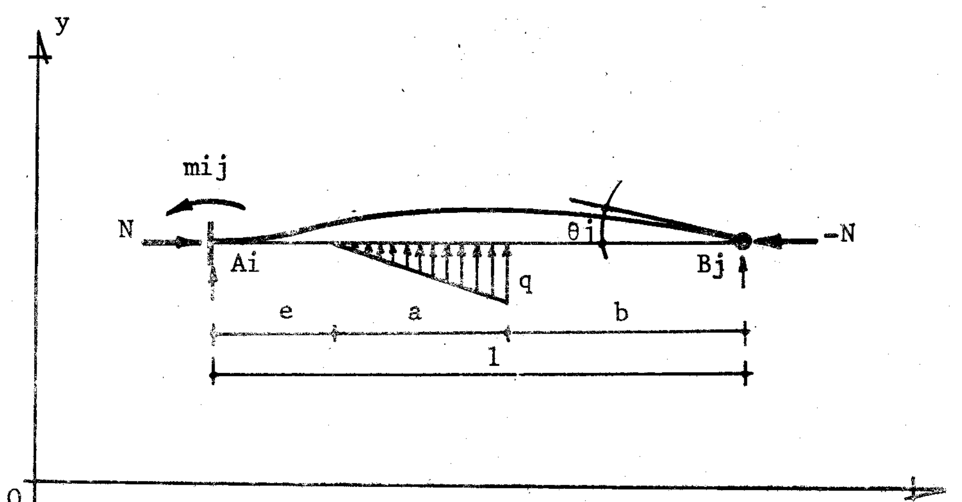


Figure 12

a) *L'effort normal est une compression :*

Les calculs permettent de formuler :

$$(1.4.5.1)\quad m_{ij} = ql^2 \cdot \frac{-\dfrac{\cos\omega(l-e-a)}{\omega l} - \dfrac{\sin\omega(l-e-a)}{al\omega^2} - \dfrac{\sin\omega(l-e)}{al\omega^2} + \dfrac{a}{2l}\left(1-\dfrac{e}{l}-\dfrac{2a}{3l}\right)\sin\omega l}{\sin\omega l - \omega l(1-n\lambda)\cos\omega l}$$

$$- \frac{\sin\omega e}{al\omega^2} - \left(\frac{ae}{2l^2} + \frac{a^2}{3l^2}\right)\sin\omega l \Big\}$$

$$(1.4.5.2)\quad \theta_j = \frac{ql^3}{EI} \cdot \frac{\dfrac{m_{ij}}{ql^2}\Big[\sin\omega l - \omega l(1-n\lambda)\Big] - \Big\{-\dfrac{\cos\omega(e+a)}{\omega l} + \dfrac{\sin\omega(e+a)}{al\omega^2} -}{(\omega l)^2(1-n\lambda)\sin\omega l}$$

b) *L'effort normal est une traction :*

Les calculs donnent :

$$(1.4.5.3)\quad m_{ij} = ql^2 \cdot \frac{-\dfrac{\mathrm{ch}\,\omega(l-e-a)}{\omega l} - \dfrac{\mathrm{sh}\,\omega(l-e-a)}{al\omega^2} + \dfrac{\mathrm{sh}\,\omega(l-e)}{al\omega^2} - \dfrac{a}{2l}\left(1-\dfrac{e}{l}-\dfrac{2a}{3l}\right)\mathrm{sh}\,\omega l}{\omega l(1+n\lambda)\,\mathrm{ch}\,\omega l - \mathrm{sh}\,\omega l}$$

$$- \frac{\mathrm{sh}\,\omega e}{al\omega^2} + \frac{a}{2l}\left(\frac{e}{l} + \frac{2a}{3l}\right)\mathrm{sh}\,\omega l \Big\}$$

$$(1.4.5.4)\quad \theta_j = \frac{ql^3}{EI} \cdot \frac{\dfrac{m_{ij}}{ql^2} \cdot \Big[\omega l(1+n\lambda) - \mathrm{sh}\,\omega l\Big] - \Big\{-\dfrac{\mathrm{ch}\,\omega(e+a)}{\omega l} + \dfrac{\mathrm{sh}\,\omega(e+a)}{al\omega^2} -}{(\omega l)^2 \cdot (1+n\lambda)\,\mathrm{sh}\,\omega l}$$

Pour $N=0$, on aboutit à :

$$(1.4.5.5)\quad m_{ij} = \frac{ql^2}{1+3\lambda} \cdot \left\{-\frac{1}{8}\left(1-\frac{e}{l}-\frac{a}{l}\right)^4 - \frac{1}{40a}\left(1-\frac{e}{l}-\frac{a}{l}\right)^5 + \frac{1}{40a}\left(1-\frac{e}{l}\right)^5 - \frac{a}{4l}\left(1-\frac{e}{l}-\frac{2a}{3l}\right)\right\}$$

$$(1.4.5.6)\quad \theta_j = \frac{ql^3}{EI} \cdot \left\{\frac{m_{ij}}{6ql^2}(6\lambda-1) + \frac{1}{24}\left(\frac{e}{l}+\frac{a}{l}\right)^4 - \frac{1}{120a}\left(\frac{e}{l}+\frac{a}{l}\right)^5 - \frac{a}{12l}\left(\frac{e}{l}+\frac{2a}{3l}\right) + \frac{e^5}{120al^4}\right\}$$

Dans le cas où $e=0$ et si l'on néglige l'effet de l'effort tranchant on aura :

$$(1.4.5.7)\quad m_{ij} = \frac{ql^2}{120}\left(-40\frac{a^2}{l^2} + 45\frac{a^3}{l^3} - 12\frac{a^4}{l^4}\right)$$

$$(1.4.5.8)\quad \theta_j = \frac{ql^3}{80EI} \cdot \left(4\frac{a^4}{l^4} - 5\frac{a^3}{l^3}\right)$$

En superposant les résultats obtenus par les équations (1.4.4.1), (1.4.5.1), (1.4.4.2) et (1.4.5.2), on retrouve les résultats obtenus pour une charge parfaitement répartie sur une longueur (a) c'est à dire les équations (1.4.3.1) et (1.4.3.2).

Remarque :

A l'aide des coefficients A, B et $t = \frac{B}{A}$, nous pouvons calculer le moment d'encastrement, d'un élément parfaitement encastré à une extrémité et articulé à l'autre, à partir des moments d'encastrement du même élément. Ce dernier est alors parfaitement encastré aux deux extrémités et reste sollicité par les mêmes charges transversales et axiales.

Supposons les deux éléments AiBj et A'iB'j (Figure 13), on peut écrire :

(1.4.5.9) $m'ij = mij - t \cdot mji$

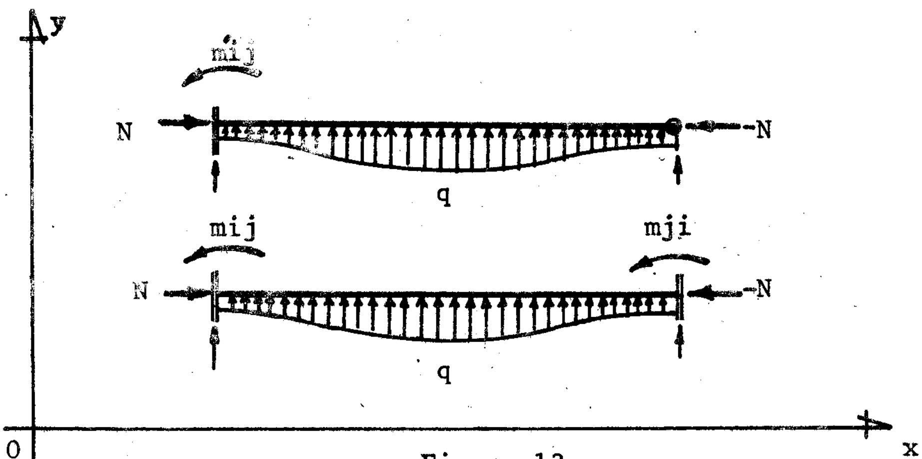


Figure 13

Supposons que AiBj soit chargé par une charge de compression axiale et par un moment concentré en sa travée. D'après les équations (1.3.2.2) et (1.3.2.3) on obtient :

(1.3.2.2) $$mij = \frac{M}{2}\left[\frac{U(1-n\lambda)\cos U(1-2a/l)-\sin U}{\sin U-U(1-n\lambda)\cos U} - \frac{\sin U(1-2a/l)}{\sin U}\right]$$

$$(1.3.2.3)\quad mji = \frac{M}{2}\left[\frac{U(1-n\lambda)\cos U(1-2a/l)-\sin U}{\sin U-U(1-n\lambda)\cos U} + \frac{\sin U(1-2a/l)}{\sin U}\right]$$

Dans le cas où l'effort normal est une compression, d'après les équations (1.1.15) et (1.1.16) on a :

$$(1.4.5.10)\quad t = \frac{B}{A} = \frac{\sin\omega l-\omega l(1-n\lambda)}{\omega l(1-n\lambda)\cos\omega l-\sin\omega l}$$

On peut écrire :

$$m'ij = mij - \frac{\sin\omega l-\omega l(1-n\lambda)}{\omega l(1-n\lambda)\cos\omega l-\sin\omega l}\cdot mji$$

Tous calculs faits on obtiendra :

$$(1.4.5.11)\quad m'ij = M\left(\frac{\omega l(1-n\lambda)\cos\omega l(1-\frac{a}{l})-\sin\omega l}{\sin\omega l-\omega l(1-n\lambda)\cos\omega l}\right)$$

Ce résultat est identique à celui qui est déjà donné par l'équation (1.4.2.1).

C H A P I T R E (2)

(2.1) *INTRODUCTION*

Dans ce chapitre, nous étudierons la stabilité des structures planes hyperstatiques, chargées dans leur plan. Chaque structure plane est formée d'éléments droits dont les caractéristiques géométriques sont connues. Dans une structure plane, tous les éléments sont situés dans le plan de la structure et ils sont chargés dans ce plan.

Pour étudier la stabilité d'une telle structure, nous utiliserons la méthode des déplacements et nous y introduirons certaines modifications afin de prendre en compte les déformations dûes aux efforts tranchants, aux efforts normaux et aux moments fléchissants.

(2.2) *METHODE DES DEPLACEMENTS*

(2.2.1) *Concepts généraux*

Les déplacements des noeuds de la structure étudiée sont les inconnues de la méthode des déplacements. Une structure dont les déplacements des noeuds sont déterminés est dite cinématiquement déterminée, par contre, si un certain noeuds peuvent subir des déplacements arbitraires elle est appelée cinématiquement indéterminée. Le nombre de déplacements arbitraires est appelé "le degré d'indétermination de la structure (m)". Une liaison qui impose en un noeud un déplacement nul dans une direction s'intitulera "un blocage simple". En imposant un nombre de blocage simple égal au degré d'indétermination (m) on obtient une structure cinématiquement déterminée qui est appelée "structure cinématique de référence". Elle servira de base pour l'étude par la méthode des déplacements.

Dans cette méthode, on suppose que seuls les noeuds de la structure sont chargés. On substitue aux charges extérieures agissant sur les éléments, des charges nodales, statiquement équivalentes et produisant aux noeuds les mêmes déplacements. En d'autres termes, il s'agit de remplacer les charges extérieures agissant en travée d'un élément par des charges nodales, telle que l'énergie complémentaire de la déformation de la structure reste inchangée. Pour assurer la condition précédente, il faut que l'énergie relative à l'élément chargé ne soit pas modifiée; à cet effet, il suffit que les forces nodales équivalentes engendrent dans cet élément les mêmes déplacements nodaux que sous les charges en travée.

Un chargement quelconque d'une strcture peut être considéré comme la somme des deux cas de charges suivants :

cas (I) : les noeuds de la structure sont fixés; elle est sollicitée par les charges extérieures agissant en travée (figure 14, cas I).

cas (II): la structure est soumise aux forces nodales comprenant :

- les forces nodales directement appliquées;
- les charges nodales égales et opposées aux actions des noeuds sur l'élément du cas (I), (figure 14 cas II).

<u>Exemples</u> :

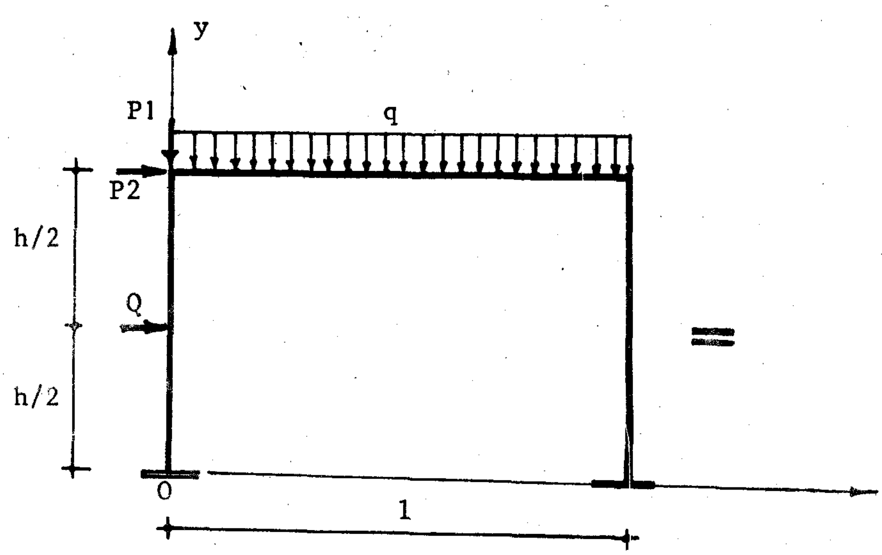


Figure 14

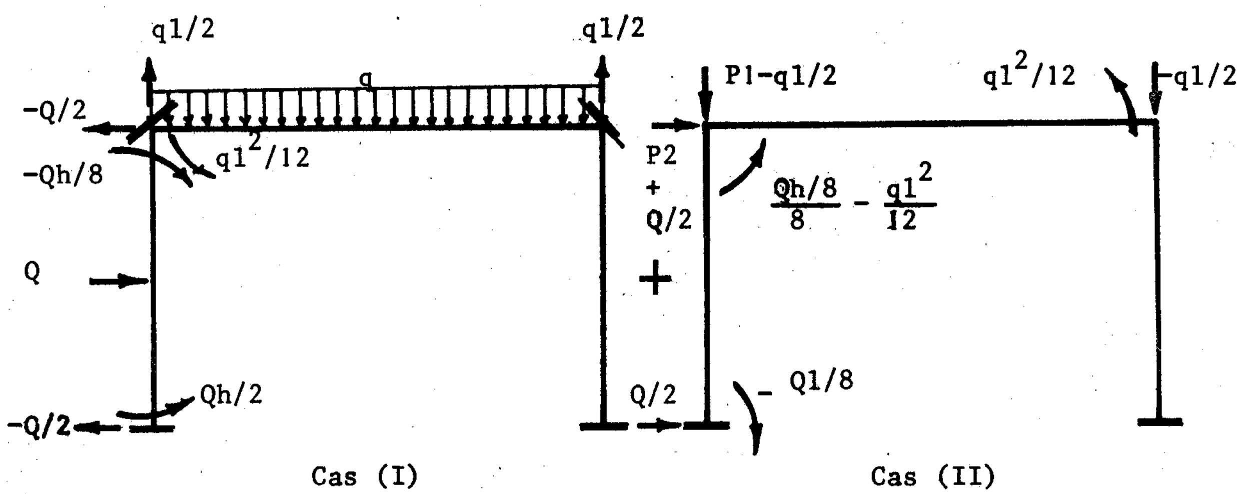


Figure 14

Si l'on désigne par (n) le nombre de noeuds, en étudiant l'état (II) on aura 3 inconnues par noeud à savoir (3n) inconnues pour l'ensemble de la structure. En écrivant deux conditions d'équilibre de translation et une condition d'équilibre de rotation, soit trois conditions par noeud, la méthode des déplacements aboutit à la résolution d'un système de (3n) équations à (3n) inconnues.

Soit AiBj un élément d'une structure quelconque. Supposons que les repères (O'x'-O'y') et (OX-OY) sont respectivement reliés à l'élément AiBj et à la structure (Fig. 15), nous définirons les notations suivantes :

$\{\Delta ij\}$ et $\{\Delta ji\}$: les vecteurs groupant respectivement les déplacements du noeud Ai et du noeud Bj dans le repère local (O'x'-O'y').

$\{\Delta IJ\}$ et $\{\Delta JI\}$: les vecteurs groupant respectivement les déplacements des noeuds Ai et Bj dans le système d'axe général (OX, OY).

$\{Fij\}$ et $\{Fji\}$: les vecteurs groupant les efforts nodaux agissant par le reste de la structure sur l'élément AiBj, respectivement en Ai et Bj, dans le repère local (O'x', O'y').

$\{FIJ\}$ et $\{FJI\}$: les vecteurs groupant les efforts nodaux agissant par le reste de la structure sur l'élément AiBj, respectivement en Ai et Bj dans le système d'axe général (OX, OY).

$\{Cij\}$ et $\{Cji\}$: les vecteurs groupant respectivement les actions des noeuds Ai et Bj sur l'élément AiBj, dûes aux seules charges extérieures agissant sur l'élément AiBj et relatifs au repère local (O'x'-O'y').

$\{CIJ\}$ et $\{CJI\}$: les vecteurs groupant respectivement les actions des noeuds Ai et Bj sur l'élément AiBj, dûes aux seules charges extérieures agissant sur l'élément AiBj et exprimés dans le repère général (OX, OY).

$\{\Delta\}$: le vecteur groupant les déplacements nodaux, donné par rapport au repère général (OX, OY).

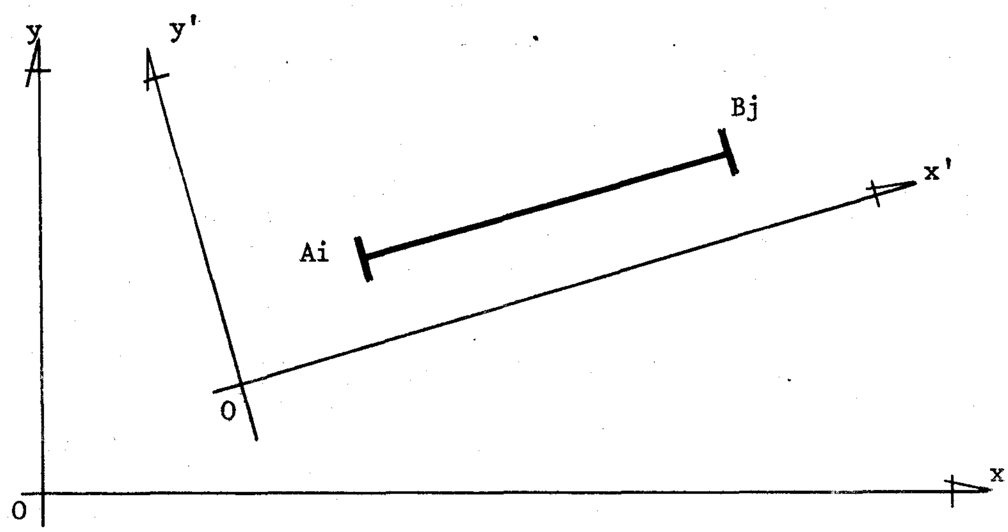


Figure 15

$\{F\}$: le vecteur groupant les efforts nodaux exprimé dans le repère général (OX, OY).

$\{C\}$: le vecteur groupant les charges nodales agissant sur la structure relatif au repère général (OX, OY).

$\{P\}$: le vecteur groupant les forces nodales pouvant agir sur la structure y compris les actions d'appuis, exprimé dans le repère général (OX, OY).

(2.2.2) *Matrice de transfert*

Elle relie les efforts du noeud Ai sur l'élément AiBj aux efforts du noeud Bj sur l'élément AiBj, lorsque l'élément AiBj est supposé non chargé.

Après le chargement du système l'élément AiBj prend la position d'équilibre A'iB'j (fig. 16). Les équations d'équilibre permettent d'écrire :

Fxij + Fxji = 0

Fyij + Fgji = 0

Mzji = − Mzij − Fxij (L y+Δy) + Fyij (Lx + Δx)

avec : Δx = Δxj − Δxi

Δy = Δyj − Δyi

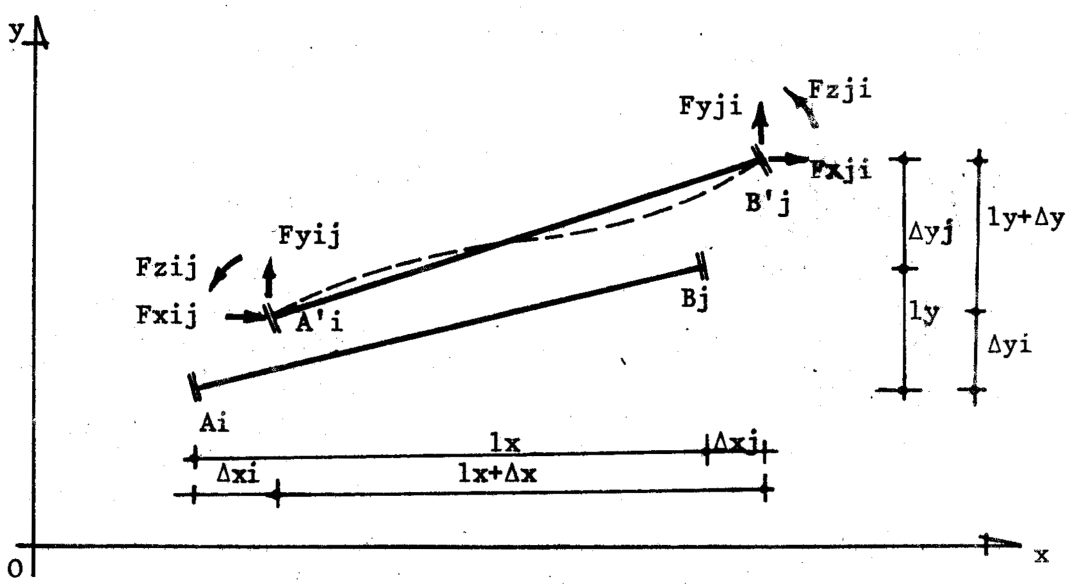


Figure 16

Les équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$(2.2.2.1)\quad \begin{Bmatrix} Fxji \\ Fyji \\ Mzji \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -Ly & Lx & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Delta y & \Delta x & 0 \end{bmatrix} \right) * \begin{Bmatrix} Fxij \\ Fyij \\ Mzij \end{Bmatrix}$$

(2.2.2.2) ou encore $\{Fji\} = ([T1] + [T2]) * \{Fij\} = [T] * \{Fij\}$.

L'ensemble des deux matrices $[T1]$ et $[T2]$ représente la matrice de transfert d'élément AiBj (j→i) en tenant compte de l'effet des déplacements relatifs (Δx, Δy).

En négligeant les déplacements relatifs (Δx, Δy) la matrice de transfert $[T]$ se réduit à la matrice $[T1]$.

Dans la suite de nos études seul le déplacement relatif Δy sera considéré; dans ce cas la matrice T2 est égale à :

$$[T2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Delta y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.2.3) *Matrice de rotation*

Elle permet de passer du vecteur $\{V\}$ représentant des forces ou des déplacements définis dans le système (Ox-Oy) au vecteur $\{V'\}$ représentant les mêmes forces ou déplacements dans le système (Ox'-Oy') (Fig. 17).

On peut écrire :

$$V'x = \cos\alpha \,.\, Vx + \sin\alpha \,.\, Vy$$
$$V'y = -\sin\alpha \,.\, Vx + \cos\alpha \,.\, Vy$$
$$V'z = Vz$$

avec : $\{V\} = \{Vx \quad Vy \quad Vz\}^t$ dans le repère (Ox-Oy)
$\{V'\} = \{V'x \quad V'y \quad V'z\}^t$ dans le repère (Ox'-Oy')

Sous forme matricielle on aura :

(2.2.3.1) $\{V'\} = [R] \cdot \{V\}$

avec :

(2.2.3.2) $[R] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

On peut remarquer que :

(2.2.3.3) $[R] * [R]^t = [R]^t * [R] = [1]$

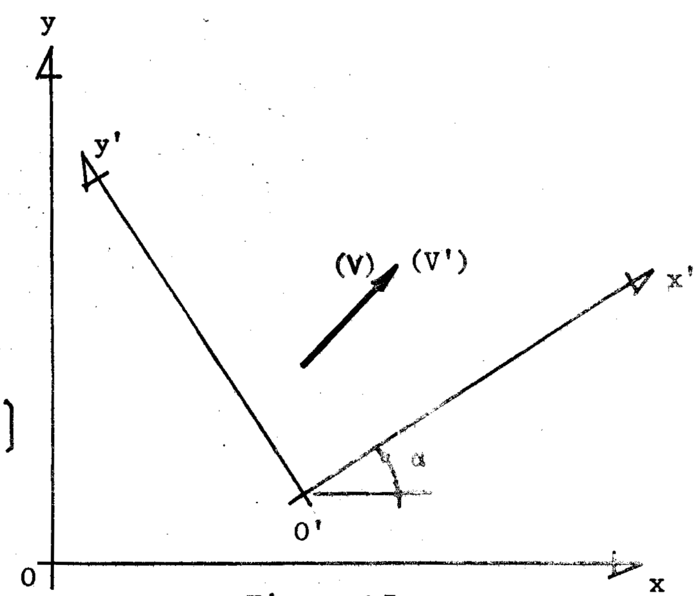


Figure 17

(2.2.4) *Relation entre les vecteurs charges et les vecteurs des déplacements d'un élément parallèle à l'axe des (x)*

Soit AiBj un élément parallèle à l'axe Ox (Fig. 18); supposons que les extrémités Ai et Bj subissent respectivement les déplacements $\{\Delta ij\}$ et $\{\Delta ji\}$. Nous étudierons au fur et à mesure la relation entre ces déplacements et les efforts nodaux qui sont produits par ces derniers pour différentes conditions de liaison de l'élément aux noeuds Ai et Bj. (Figure 18)

NB: L'élément n'est pas chargé en sa travée.

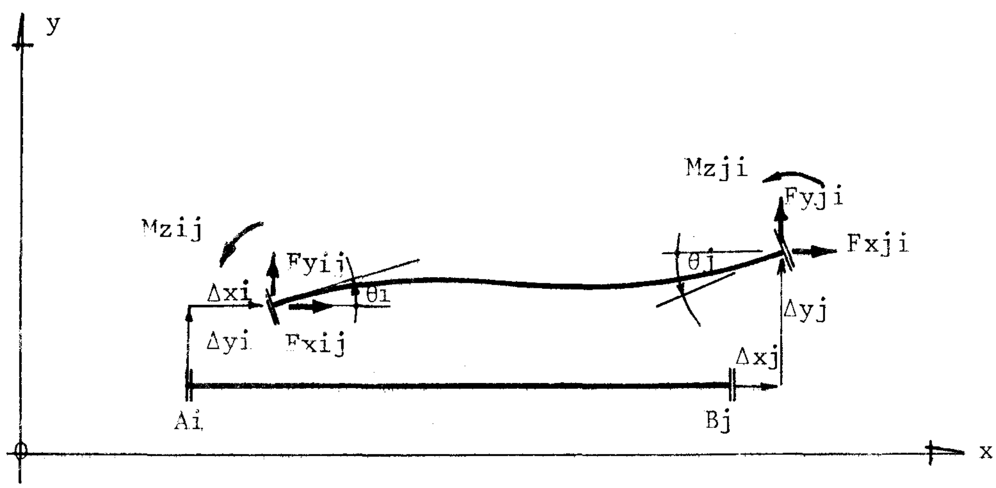


Figure 18

(I) L'élément AiBj est encastré en Ai et Bj.

En vertu des équations intrinsèques données par les équations (1.1.13), (1.1.14), (1.1.28) et (1.1.29), on peut écrire :

$$Mzij = A\theta i + B\theta j - \frac{\Delta y}{l}(A+B) = A\theta i + B\theta j - \frac{(\Delta yj-\Delta yi)}{l}(A+B)$$

$$Mzji = B\theta i + A\theta j - \frac{(\Delta yj-\Delta yi)}{l}(A+B)$$

$$Fxij = -Fxji = \frac{ES}{l}(\Delta xi-\Delta xj) = \frac{ES}{l}.\Delta x$$

$$Fyij = -Fyji = \frac{1}{l}(Mij+Mji+Fx.\Delta y)$$

$$= \frac{(A+B)}{l}\theta i + \frac{(A+B)}{l}\theta j + \frac{2(A+B)}{l}.\Delta yj - \frac{2(A+B)}{l}\Delta yi + Fx.\frac{\Delta y}{l}$$

avec : $\Delta y = \Delta yji - \Delta yij$ = déplacement relatif vertical

$\Delta x = \Delta xij - \Delta xji$ = " " horizontal

$Fx = Fxij = -Fxij$

Les expressions matricielles sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} Fxij \\ Fyij \\ Mzij \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(A+B)}{l^2} & \frac{A+B}{l} \\ 0 & \frac{A+B}{l} & A \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xij \\ \Delta yij \\ \theta ij \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2(A+B)}{l^2} & \frac{A+B}{l} \\ 0 & -\frac{A+B}{l} & B \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xji \\ \Delta yji \\ \theta ji \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ Fx\,\frac{\Delta y}{l} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(2.2.4.1)

$$\begin{Bmatrix} Fxji \\ Fyji \\ Mzji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2(A+B)}{l^2} & -\frac{A+B}{l} \\ 0 & \frac{A+B}{l} & B \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xij \\ \Delta yij \\ \theta ij \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(A+B)}{l^2} & -\frac{A+B}{l} \\ 0 & -\frac{(A+B)}{l} & A \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xji \\ \Delta yji \\ \theta ji \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ Fx.\frac{\Delta y}{l} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La seule composante non nulle du vecteur $\{g\} = \{0 \;\; Fx.\frac{\Delta y}{l} \;\; 0\}^t$ est généralement très petite ce qui rend le vecteur $\{g\}$ négligeable ; dans le cas où la composante Fx des vecteurs charges nodales est très grande le vecteur g prend une valeur considérable. Nous tiendrons compte du vecteur $\{g\}$ dans nos calculs et nous montrerons ultérieurement l'effet de ce vecteur sur la charge ultime de la structure.

(II) : L'élément AiBj est encastré en Ai et articulé en Bj :

Dans ce cas il n'est pas possible d'obtenir une rotation en Bj sans que l'élément AiBj soit chargé. Or par hypothèse cet élément n'est pas chargé. A l'aide de la méthode de relaxation et des équations intrinsèques on écrira :

$$Mzij = A\,\theta i - \frac{\Delta y}{l}\,(A+B) - \frac{B}{A}\cdot\left[B\theta i - \frac{\Delta y}{l}\,(A+B)\right]$$

$$= \frac{(A^2-B^2)}{A}\,\theta i - \frac{(A^2-B^2)}{Al}\,(\Delta yji-\Delta yij)$$

$$Mzji = 0$$

$$Fxij = -\,Fxji = \frac{ES}{l}\,(\Delta xij - \Delta xji) = \frac{ES}{l}\,.\,\Delta x = Fx$$

$$Fyij = -\,Fyji = \frac{1}{l}\,(Mji + Fx\,.\,\Delta y)$$

$$= \frac{(A^2-B^2)}{Al}\;i - \frac{(A^2-B^2)}{Al^2}\,(\Delta yji - \Delta yij) + Fx\,.\,\frac{\Delta y}{l}$$

Sous forme matricielle ces relations deviendrons :

(2.2.4.2)

$$\begin{Bmatrix} Fxij \\ Fyij \\ Mzij \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^2-B^2}{Al^2} & \frac{A^2-B^2}{Al} \\ 0 & \frac{A^2-B^2}{-Al} & \frac{A^2-B^2}{A} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xij \\ \Delta yij \\ \theta ij \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B^2-A^2}{Al^2} & 0 \\ 0 & \frac{B^2-A^2}{Al} & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xji \\ \Delta yji \\ \theta ji \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ Fx\,.\,\frac{\Delta y}{l} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Fxji \\ Fyji \\ Mzji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B^2-A^2}{Al^2} & \frac{B^2-A^2}{Al} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xij \\ \Delta yij \\ \theta ij \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^2-B^2}{Al^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xji \\ \Delta yji \\ \theta ji \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ Fx\,.\,\frac{\Delta y}{l} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(III) L'élément AiBj est articulé en Ai et encastré en Bj :

Dans ce cas comme dans le précédent on peut écrire :

$$Mzij = 0$$

$$Mzji = A\theta j - \frac{\Delta y}{l}\,(A+B) - \frac{B}{A}\cdot\left[B\theta j - \frac{\Delta y}{l}\,(A+B)\right]$$

$$= \frac{A^2-B^2}{A}\,\theta j - \frac{A^2-B^2}{Al}\,.\,(\Delta yji - \Delta yij)$$

$$Fxij = -\,Fxji = \frac{ES}{l}\,(\Delta xij - \Delta xji) = \frac{ES}{l}\,.\,\Delta x = Fx$$

$$Fyij = -Fyji = \frac{1}{l}\,(Mij + Fx\,.\,\Delta y) = \frac{A^2-B^2}{Al}\,\theta j - \frac{A^2-B^2}{Al^2}\,(\Delta yji - \Delta yij) + Fx\,.\,\frac{\Delta y}{l}$$

Sous forme matricielle on aura :

(2.2.4.3)

$$\begin{Bmatrix} Fxij \\ Fyij \\ Mzij \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^2-B^2}{A1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xij \\ \Delta yij \\ \theta ij \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{ES}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^2B^2}{A1^2} & \frac{A^2-B^2}{A1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xji \\ \Delta yji \\ \theta ji \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ Fx \cdot \frac{\Delta y}{1} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Fxji \\ Fyji \\ Mzji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{ES}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^2-B^2}{A1^2} & \frac{A^2-B^2}{A1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xij \\ \Delta yij \\ \theta ij \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{ES}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^2-B^2}{A1^2} & \frac{B^2-A^2}{A1} \\ 0 & \frac{B^2-A^2}{A1} & \frac{A^2-B^2}{A} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xji \\ \Delta yji \\ \theta ji \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ Fx \cdot \frac{\Delta y}{1} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(IV) L'élément AiBj est bi-articulé.

Dans ce cas on aura :

$$Mzij = Mzji = 0$$

$$Fxij = - Fxji = \frac{ES}{1} (\Delta xi - \Delta xj) = \frac{ES}{1} \Delta x = Fx$$

$$Fyij = - Fyji = Fx \cdot \frac{\Delta y}{1}$$

Les expréssions précédentes dans leur forme matricielle s'écrivent :

(2.2.4.4)

$$\begin{Bmatrix} Fxij \\ Fyij \\ Mzij \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xij \\ \Delta yij \\ \theta ij \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{ES}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xji \\ \Delta yji \\ \theta ji \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ Fx \cdot \frac{\Delta y}{1} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Fxji \\ Fyji \\ Mzji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{ES}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xij \\ \theta yij \\ \theta ij \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{ES}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta xji \\ \Delta yji \\ \theta ji \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ Fx \cdot \frac{\Delta y}{1} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les résultats obtenus par les équations (2.2.4.1, 2, 3 et 4) peuvent se présenter sous la forme matricielle suivante :

$$(2.2.4.5) \quad \{Fij\} = [Hii] * \{\Delta ij\} + [Hij] * \{\Delta ji\} + \{g\}$$

$$(2.2.4.6) \quad \{Fji\} = [Hji] * \{\Delta ij\} + [Hjj] * \{\Delta ji\} - \{g\}$$

ou encore :

$$(2.2.4.7) \quad \begin{Bmatrix} F'ij \\ F'ji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Hii & Hij \\ Hji & Hjj \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta ij \\ \Delta ji \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} \{F'ij\} = \{Fij\} - \{g\} \\ \{F'ji\} = \{Fji\} + \{g\} \end{matrix}$$

Les matrices $[Hii]$, $[Hij]$, $[Hji]$ et $[Hjj]$, comme nous l'avons démontré, dépendent des conditions des liaisons des deux extrémités de l'élément AiBj et elles expriment les caractéristiques géométriques de l'élément étudié. Les matrices $[Hii]$ et $[Hjj]$ sont symétriques. Par contre aucune symétrie ne caractérise les matrices $[Hij]$ et $[Hji]$.

D'après les résultats obtenus pour les différents cas de liaison de l'élément AiBj aux noeuds Ai et Bj, on constate que les matrices $[Hji]$ et $[Hij]$ sont transposées l'une à l'autre :

$$[Hij] = [Hji]^t$$

Le théorème de réciprocité de Maxwell permet également de démontrer cette propriété.

En remplaçant $\{Fij\}$ par sa valeur dans l'équation (2.2.2.2) on écrira :

$$(2.2.4.8) \quad \{Fji\} = ([T1] + [T2]) * [Hji] * \{\Delta ij\} + ([T1] + [T2]) * [Hij] * \{\Delta ji\} + ([T1] + [T2]) * \{g\}$$

Dans tous les cas étudiés on peut écrire :

$$([T2] * [Hii] * \{\Delta ij\}) + ([T2] * [Hij] * \{\Delta ji\}) + ([T1] + [T2]) * \{g\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (-\frac{ES}{1} \cdot \Delta y) \cdot \Delta xij \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\frac{ES}{1} \cdot \Delta y) \cdot \Delta xji \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ - Fx \cdot \frac{\Delta y}{1} \\ + Fx \cdot \Delta y \end{Bmatrix} = -\{g\}$$

donc, l'équation (2.2.4.8) peut être exprimée sous la forme réduite suivante :

(2.2.4.9) $\{Fji\} = [T1] * [Hii] * \{\Delta ij\} + [T1] * [Hij] * \{\Delta ji\} - \{g\}$

En comparant l'équation (2.2.4.8) avec l'équation (2.2.4.6) on aboutit aux résultats suivants :

(2.2.4.10) $[Hji] = [T1] * [Hii]$

$[Hij] = [Hji]^t = ([T1] * [Hii])^t$

(2.2.4.11) $[Hij] = [Hii] * [T1]^t$

(2.2.4.12) $[Hjj] = [T1] * [Hii] * [T1]^t$

Comme $[Hii]$ est une matrice symétrique de même Hjj est une matrice symétrique.

En remplaçant les matrices $[Hji]$, $[Hij]$ et $[Hjj]$ dans les équations (2.2.4.5) et (2.2.4.6) on trouve les équations suivantes :

(2.2.4.13) $\{Fij\} = [Hii] * \{\Delta ij\} + [Hii] * [T1]^t * \{\Delta ji\} + \{g\}$

(2.2.4.14) $\{Fji\} = [T1] * [Hii] * \{\Delta ij\} + [T1] * [Hii] * [T1]^t * \{\Delta ji\} - \{g\}$

(2.2.5) *Relation entre les vecteurs charges et les vecteurs des déplacements d'un élément oblique*

Soit dans le système d'axes (OX-O Y) l'élément AiBj faisant un angle (α) avec l'axe (OX). Les extrémités Ai et Bj de cet élément subissent respectivement les déplacements $\{\Delta IJ\}$ et $\{\Delta JI\}$. Dans le système d'axes (OX'-Oy') tel que l'axe (OX') soit parallèle à l'élément AiBj on désigne par $\{\Delta ij\}$ et $\{\Delta ji\}$ les mêmes déplacements imposés aux extrémités Ai et Bj. En vertu de l'équation (2.2.3.1) on aura : (Figure 15)

$$\{\Delta ij\} = [R] * \{\Delta IJ\} \text{ , } \{\Delta ji\} = [R] * \{\Delta JI\}$$
$$\{Fij\} = [R] * \{FIJ\} \text{ , } \{Fji\} = [R] * \{FJI\}$$

D'après les équations (2.2.4.5) et (2.2.4.6) on peut écrire :

$$\{FIJ\} = [R]^t * \{Hii\} * [R] * \{\Delta IJ\} + [R]^t * [Hij] * [R] * \{\Delta JI\} + [R]^t * \{g\}$$

$$\{FJI\} = [R]^t * \{Hji\} * [R] * \{\Delta IJ\} + [R]^t * [Hjj] * [R] * \{\Delta JI\} - [R]^t * \{g\}$$

Sous forme réduite on aura :

(2.2.5.1) $\{FIJ\} = [KII] * \{\Delta IJ\} + [KIJ] * \{\Delta JI\} + \{G\}$

(2.2.5.2) $\{FJI\} = [KJI] * \{\Delta IJ\} + [KJJ] * \{\Delta JI\} - \{G\}$

avec :

(2.2.5.3) $\{G\} = [R]^t * \{g\}$

(2.2.5.4) $[KII] = [R]^t * [Hii] * [R]$

(2.2.5.5) $[KIJ] = [R]^t * [Hij] * [R]$

(2.2.5.6) $[KJJ] = [R]^t * [Hjj] * [R]$

(2.2.5.7) $[KJI] = [R]^t * [Hji] * [R]$

Les équations (2.2.5.4) et (2.2.5.6) montrent que les matrices $[KII]$ et $[KJJ]$ sont symétriques.

Dans ce cas comme dans le cas d'un élément horizontal à l'aide du théorème de réciprocité de Maxwell et en vertu de l'équation (2.2.2.2), on peut facilement obtenir les équations suivantes :

(2.2.5.8) $[KIJ] = [KJI]^t$

(2.2.5.9) $[KIJ] = [KII] * [T1]^t$

(2.2.5.10) $[KJI] = [T1] * [KII]$

(2.2.5.11) $[KJJ] = [T1] * [KII] * [T]^t$

En résumé on calcule $[KII]$ par l'équation (2.2.5.4) à partir de la matrice $[Hii]$ qui est calculée dans le paragraphe précédent pour différentes conditions de liaison d'élément AiBj aux noeuds Ai et Bj. Les trois autres matrices $[KIJ]$, $[KJI]$ et $[KJJ]$ se calculent alors à partir de $[KII]$.

(2.2.6) *Transformation des charges en travée en charges nodales*

Comme nous avons déjà expliqué dans la méthode des déplacements on remplace les charges en travée par les charges nodales agissant aux noeuds reliés par l'élément chargé. Afin de réaliser cette transformation, pour les raisons expliquées au paragraphe (2.2.1), on suppose que l'élément chargé dans sa travée est bi-encastré.

Les moments d'encastrements parfaits calculés dans le paragraphe (1.3) pour les différents cas de charge, sont les actions des noeuds sur l'élément chargé. Afin de calculer les vecteurs charges nodales, nous utiliserons progressivement ces résultats dans nos prochains calculs.

Nous étudierons d'abord les quatre groupes de charge suivants dans le repère local associé à l'élément étudié, et pour les différentes conditions d'appuis. Ensuite à l'aide de la matrice de rotation nous relierons les résultats obtenus en repère local à ceux du repère général.

Les quatre groupes de charges sont les suivants :

I) charges concentrées avec les composantes suivantes :

1) un moment concentré

2) une charge concentrée axiale

3) une charge concentrée transversale

II) charges uniformément réparties sur une longueur (a) avec les composantes suivantes :

1) une charge uniformément répartie axiale

2) une charge uniformément répartie transversale

III) une charge triangulaire transversale (I)

IV) une charge triangulaire transversale (II)

(I) Transformation des charges concentrées aux charges nodales

Soit : $\{Fk\}$ le vecteur de charge extérieur groupant les charges concentrées suivantes : (Figure 19)

$$\{Fk\} = \begin{Bmatrix} Fkx \\ Fky \\ Fkz \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{une charge axiale} \\ \text{une charge transversale} \\ \text{un moment} \end{matrix}$$

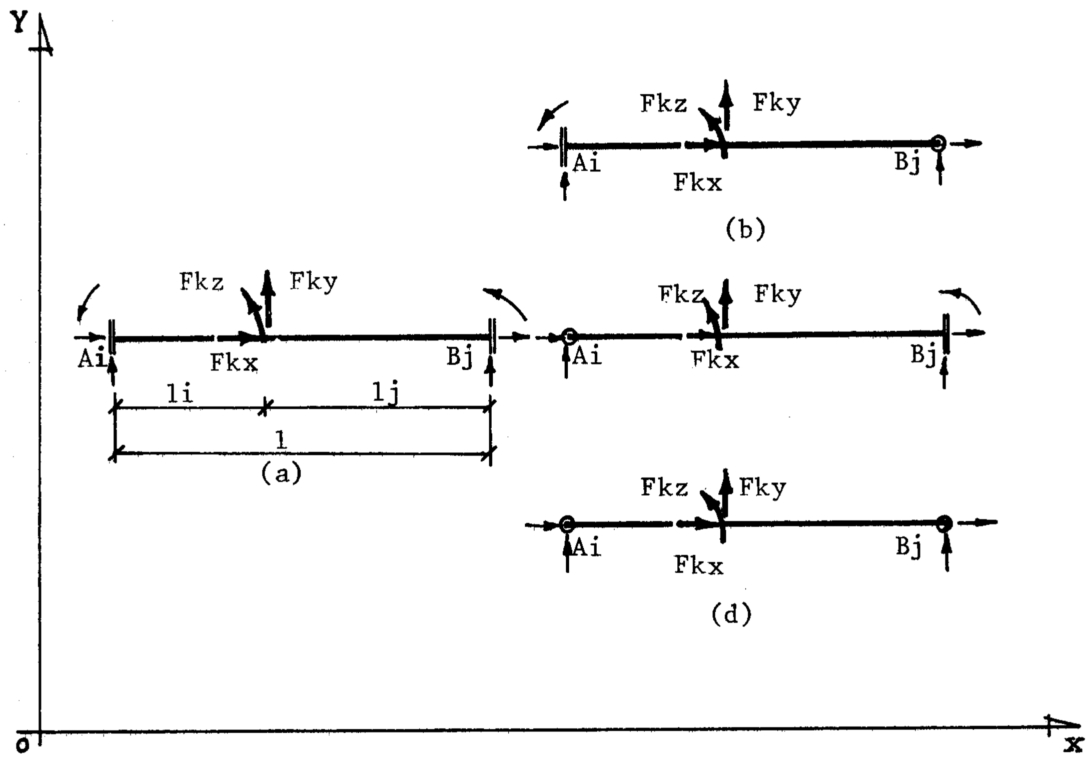


Figure 19

Si l'on désigne par $\{Cij\}$ et $\{Cji\}$ respectivement les vecteurs contenant les actions des noeuds Ai et Bj sur l'élément AiBj, dûes aux charges en travée $\{Fk\}$, on va successivement calculer les valeurs de ces derniers pour différentes conditions d'appuis . Le vecteur $\{Fk\}$ est appliqué à des distances li et lj respectivement par rapport aux extrémités Ai et Bj de l'élément AiBj. li, lj et l sont des valeurs arithmétiques.

(a) <u>L'élément AiBj est bi-encastré</u>

1) Effet de la charge concentrée axiale

$$Cxij = -\frac{lj}{l} \cdot Fkx$$

$$Cxji = -\frac{li}{l} \cdot Fkx$$

$$Cyij = Cyji = 0$$

$$Czij = Czji = 0$$

2) Effet de la charge concentrée transversale

$$Cyij = \frac{mij+mji}{l} - Fky \cdot \frac{lj}{l}$$

$$Czij = mij$$

$$Czji = mji \qquad Cxij = Cxyi = 0$$

mij et mji sont les moments d'encastrement parfait obtenus par les équations (1.3.1.2) et (1.3.1.3) dans le cas où l'effort normal est une compression et par les équations (1.3.1.11) et (1.3.1.12) dans le cas où l'effort normal est une traction.

3) Effet du moment concentré Fkz

$$Cxij = Cxji = 0$$

$$Cyij = \frac{m'ij+m'ji}{l} + \frac{Fkz}{l}$$

$$Czij = m'ij$$

$$Czji = m'ji$$

Les valeurs des m'ij et m'ji sont données par les équations (1.3.2.2), (1.3.2.3) et (1.3.2.8) et (1.3.2.9) en fonction de la nature de l'effort normal.

On peut donc écrire :

$$\text{(2.2.6.1)} \quad \left\{Cij\right\} = \begin{Bmatrix} Cxij \\ Cyij \\ Czij \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{lj}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kij+kji-lj}{l} & \frac{k'ij+k'ji+1}{l} \\ 0 & kij & k'ij \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} Fkx \\ Fky \\ Fkz \end{Bmatrix}$$

$$\text{(2.2.6.2)} \quad \left\{Cji\right\} = \begin{Bmatrix} Cxji \\ Cyji \\ Czji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{li}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{kij+kji+li}{l} & -\frac{k'ij+k'ji+1}{l} \\ 0 & kji & k'ji \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} Fkx \\ Fky \\ Fkz \end{Bmatrix}$$

(2.2.6.3) avec : $kij = mij/Fky \qquad kji = mji/Fky$

$$k'ij = m'ij/Fkz \qquad k'ji = m'ji/Fkz$$

Afin de diminuer le nombre d'opérations différentes pour déterminer les vecteurs $\{Cij\}$ et $\{Cji\}$, en fonction des conditions d'appuis, on considère l'élément bi-encastré comme élément de référence. En ajoutant des matrices correctives aux résultats obtenus pour l'élément de référence on trouve pour le même cas de charge les résultats concernant les différentes conditions d'appuis.

On présente les équations (2.2.6.1) et (2.2.6.2) sous la forme suivante :

$$\{Cij\} = [Hij] * [Qkij] * \{Fk\} + [Zkij] * \{Fk\} \tag{2.2.6.4}$$

$$\{Cji\} = [Hji] * [Qkji] * \{Fk\} + [Zkji] * \{Fk\} \tag{2.2.6.5}$$

avec :

$$[Qkij] = \begin{bmatrix} lj/ES & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A^2-B^2}(B.kji-A.kij-B.lj) & \frac{1}{A^2-B^2}(B.k'ji-A.k'ij-B.lj \\ 0 & \frac{1}{A-B}(kij+kji-lj) & \frac{1}{A-B}(k'ji-kij+1) \end{bmatrix} \tag{2.2.6.6}$$

$$[Qkji] = \begin{bmatrix} li/ES & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A^2-B^2}(B.kij-A.kji+B.li) & \frac{1}{A^2-B^2}(A.k'ji-B.k'ij-B) \\ 0 & \frac{1}{A-B}(kij-kji+li) & \frac{1}{A-B}(k'ij-k'ji+1) \end{bmatrix} \tag{2.2.6.7}$$

Etant donné que l'élément étudié est bi-encastré les matrices correctives sont des matrices nulles :

$$[Zkij] = [Zkji] = [0]$$

b) <u>L'élément AiBj est encastré en Ai et articulé en Bj</u>

En faisant une série d'opérations identiques à celle du cas (a) on aura finalement :

$$(2.2.6.8)\quad \{Cij\} = \begin{Bmatrix} Cxij \\ Cyij \\ Czij \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\,lj/l & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{kij^*}{l} - \frac{lj}{l}) & (\frac{hij^*}{l} + \frac{1}{l}) \\ 0 & kij^* & hij^* \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} Fkx \\ Fky \\ Fkz \end{Bmatrix}$$

$$(2.2.6.9)\quad \{Cji\} = \begin{Bmatrix} Cxji \\ Cyji \\ Czji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\,li/l & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{kij^*}{l} + \frac{li}{l}) & -(\frac{hij^*}{l} + \frac{1}{l}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} Fkx \\ Fky \\ Fkz \end{Bmatrix}$$

avec : $kij^* = kij - t \,.\, kji$

$hij^* = k'ij - t \,.\, k'ji$

kji, kij, k'ij et k'ji sont données par l'équation (2.2.6.3).

Dans ce cas, en conservant les matrices $[Qkij]$ et $[Qkji]$ obtenues pour l'élément bi-encastré, tous calculs faits , les matrices correctives suivantes peuvent être formulées :

$$(2.2.6.10)\quad [Zkij] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{lj}{l}\,(1+t) & \frac{1}{l}\,(1+t) \\ 0 & -lj \,.\, t & t \end{bmatrix}$$

$$[Zkji] = [0]$$

On peut décomposer la matrice $[Zkij]$ en produit d'un vecteur colonne $\{Bkij\}$ et une matrice ligne $[Rkij]$.

$$(2.2.6.11)\quad [Zkij] = \{Bkij\} * [Rkij]$$

avec :

$$(2.2.6.11\ \text{bis})\quad \{Bkij\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (1+t)/l \\ t \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad [Rkij] = \begin{bmatrix} 0 & -lj & 1 \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\{Bkij\}$ ne dépend que des caractéristiques géométriques de l'élément tandis que la matrice $[Rkij]$ ne fait intervenir que les coordonnées du point d'application des charges.

c) L'élément AiBj est articulé en Ai et encastré en Bj

A l'aide d'opérations identiques faites pour l'élément bi-encastré on aboutit à :

$$(2.2.6.12)\quad \{Cij\} = \begin{bmatrix} -lj/l & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kji^*}{l} - \frac{lj}{l} & \frac{hji^*}{l} + \frac{1}{l} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} Fkx \\ Fky \\ Fkz \end{Bmatrix}$$

$$(2.2.6.13)\quad \{Cji\} = \begin{bmatrix} -li/l & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{kji^*}{l} - \frac{li}{l} & -\frac{hji^*}{l} - \frac{1}{l} \\ 0 & kji^* & hji^* \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} Fkx \\ Fky \\ Fkz \end{Bmatrix}$$

avec :

$$kji^* = kji - t \cdot kij$$

$$hji^* = hji - t \cdot hij$$

kji, kij, hji et hij sont déterminés par les équations (2.2.6.3).

En exprimant les vecteurs $\{Cij\}$ et $\{Cji\}$ sous la forme décomposée donnée par les équations (2.2.6.4) et (2.2.6.5), tous calculs faits, on trouve :

$$(2.2.6.13)\ \text{bis}\quad [Zkji] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{li}{l}(1+t) & -\frac{1}{l}(1+t) \\ 0 & li \cdot t & t \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$(2.2.6.14)\quad [Zkji] = \{Bkji\}\ [Rkji] = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1+t}{l} \\ t \end{Bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & +li & 1 \end{bmatrix}$$

$$[Zkij] = [0]$$

d) L'élément AiBj est bi-articulé

Après calculs on obtient :

$$(2.2.6.15)\ \begin{Bmatrix} Cij \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Cxij \\ Cyij \\ Czij \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ 1j/1 & 0 & 0 \\ 0 & -\ 1j/1 & 1/1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} Fkx \\ Fky \\ Fkz \end{Bmatrix}$$

$$(2.2.6.16)\ \begin{Bmatrix} Cji \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Cxji \\ Cyji \\ Czji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ 1i/1 & 0 & 0 \\ 0 & -\ 1i/1 & -\ 1/1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} Fkx \\ Fky \\ Fkz \end{Bmatrix}$$

Les matrices $\begin{bmatrix} Zkij \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} Zkji \end{bmatrix}$ sont les suivantes :

$$(2.2.6.17)\ \begin{bmatrix} Zkij \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1j/1 & 1/1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} Bkij \end{Bmatrix} * \begin{bmatrix} Rkij \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/1 \\ 0 \end{Bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -1j & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2.2.6.18)\ \begin{bmatrix} Zkji \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1i/1 & -1/1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} Bkji \end{Bmatrix} * \begin{bmatrix} Rkji \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/1 \\ 0 \end{Bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1i & 1 \end{bmatrix}$$

(II) Transformation des charges uniformément réparties sur une longueur (a)

Le système de charge extérieur choisi dans ce cas est composé d'un charge répartie axialement avec une densité (qx) et d'une charge répartie transversalement avec une densité (qy). (Figure 20)

On va au fur et à mesure calculer les vecteurs $\begin{Bmatrix} Cij \end{Bmatrix}$ et $\begin{Bmatrix} Cji \end{Bmatrix}$ pour différentes conditions d'appui :

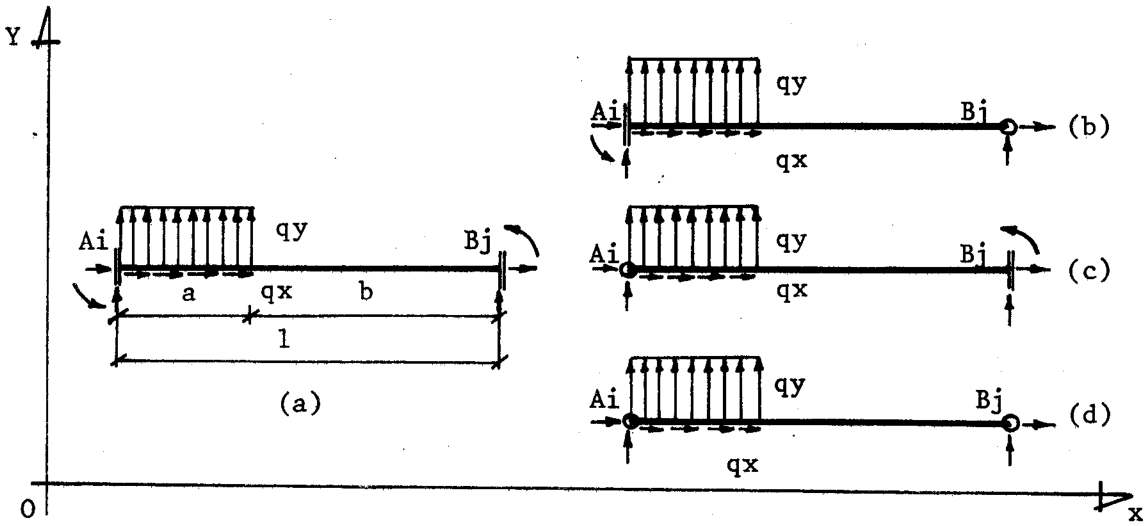


Figure 20

a) <u>L'élément AiBj est bi-encastré</u>

1) Effet de la charge axiale (qx) :

$$Cxij = - \frac{a}{l} (1- \frac{a}{2}) \cdot qx$$

$$Cxji = - \frac{a^2}{2l} \cdot qx$$

$$Cyij = Cyji = Czij = Czji = 0$$

2) Effet de la charge transversale (qy) :

$$Cxji = Cxij = 0$$

$$Cyij = \frac{mij+mji}{l} - \frac{a}{l} (1- \frac{a}{2}) \cdot qx$$

$$Cyji = - \frac{mij+mji}{l} - \frac{a^2}{2l}$$

Les valeurs de mij et mji sont données par les équations (1.3.3.2) et (1.3.3.9) selon la nature de l'effort normal existant dans l'élément étudié.

On peut donc écrire :

$$(2.2.6.19) \left\{Cij\right\} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{l} (1 - \frac{a}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kij+kji}{l} - \frac{a}{l} (1 - \frac{a}{l}) & 0 \\ 0 & kij & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} qx \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2.2.6.20)\left\{Cji\right\} = \begin{bmatrix} -\frac{a^2}{2l} & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{kij+kji}{l}+\frac{a^2}{2l}\right) & 0 \\ 0 & Kji & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} qx \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

avec :

$$(2.2.6.21) \quad kij = mij/qy \qquad kji = mji/qy$$

En présentant les vecteurs $\{Cij\}$ et $\{Cji\}$ sous la forme présentée par les équations (2.2.6.4) et (2.2.6.5) tous calculs faits on aboutit à :

$$(2.2.6.22)\left[Qkij\right] = \begin{bmatrix} \frac{a}{ES}\left(1-\frac{a}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{A^2-B^2}\cdot\left[A.kij+B.kji+B.a\left(1-\frac{a}{2}\right)\right] & 0 \\ 0 & \frac{-1}{A^2-B^2}\cdot\left[kij-kji+a\left(1-\frac{a}{2}\right)\right] & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.2.6.23)\left[Qkji\right] = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{2ES} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A^2-B^2}\cdot\left[\left(-B.kij+A.kji-\frac{a^2}{2}.B\right)\right] & 0 \\ 0 & \frac{1}{A-B}\cdot\left(kij-kji+\frac{a^2}{2}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

b) <u>L'élément AiBj est encastré en Ai et articulé en Bj</u>

En faisant une série d'opérations identiques à celle réalisée pour l'élément bi-encastré on aura finalement :

$$(2.2.6.24)\left\{C\ ij\right\} = \begin{Bmatrix} Cxij \\ Cyij \\ Czij \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{l}\left(1-\frac{a}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kij^*}{l}-\frac{a}{l}\left(1-\frac{a}{2}\right) & 0 \\ 0 & kij^* & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} qx \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2.2.6.25)\left\{Cji\right\} = \begin{Bmatrix} Cxji \\ Cyji \\ Czji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a^2}{2l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{kij^*}{l}-\frac{a^2}{2l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} qx \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

avec : $kij^* = kij - t\ .\ kji$

Les valeurs de kij et kji sont déterminées par (2.2.6.21).

En écrivant les vecteurs $\{Cij\}$ et $\{Cji\}$ sous la forme décomposée présentée par les équations (2.2.6.4) et (2.2.6.5), les matrices correctives suivantes peuvent être formulées :

$$[Zji] = [0]$$

$$(2.2.6.26)\quad [Zij] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{1}(1-\frac{a}{2})(1+t) & 0 \\ 0 & -a(1-\frac{a}{2}).t & 0 \end{bmatrix}$$

ou bien :

$$(2.2.6.27)\quad [Zij] = \{Bij\} * [Rij] = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1+t}{1} \\ t \end{Bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -a(1-\frac{a}{2}) & 0 \end{bmatrix}$$

c) <u>L'élément AiBj est encastré en Bj et articulé en Ai</u>

Les calculs nous donnent :

$$(2.2.6.28)\quad \{Cij\} = \begin{Bmatrix} Cxij \\ Cyij \\ Czij \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{1}(1-a) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kji^*}{1} - \frac{a}{1}(1-\frac{a}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} qx \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2.2.6.29)\quad \{Cji\} = \begin{Bmatrix} Cxji \\ Cyji \\ Czji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a^2}{21} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{kji^*}{1} - \frac{a^2}{21} & 0 \\ 0 & kji^* & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} qx \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

avec : $kji^* = kji - t \cdot kij$

Les valeurs de kji et kij sont données par l'équation (2.2.6.21)

Dans ce cas les matrices correctives sont les suivantes :

$$[Zij] = [0]$$

$$(2.2.6.29)\ \text{bis}\quad \left[Zji\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{21}(1+t) & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{2}t & 0 \end{bmatrix} = \left\{Bji\right\} * \left[Rij\right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1+t}{1} \\ t \end{Bmatrix} * \left(0 \quad \frac{a^2}{2} \quad 0\right]$$

d) <u>L'élément AiBj est bi-articulé</u>

De la même manière que dans les cas étudiés précédemment tous calculs faits, on aboutit à :

$$(2.2.6.30)\ \left\{Cij\right\} = \begin{Bmatrix} Cxij \\ Cyij \\ Czij \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{1}(1-\frac{a}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{1}(1-\frac{a}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} qx \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2.2.6.31)\ \left\{Cji\right\} = \begin{Bmatrix} Cxji \\ Cyji \\ Czji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a^2}{21} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} qx \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dans ce cas on écrira les matrices correctives suivantes :

$$(2.2.6.32)\ \left[Zij\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{1}(1-\frac{a}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\{Bkij\right\} * \left[Rkij\right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/1 \\ 0 \end{Bmatrix} * \left[0 \quad -a(1-\frac{a}{2}) \quad 0\right]$$

$$(2.2.6.33)\ \left[Zji\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2/21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\{Bkji\right\} * \left[Rkij\right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{1} \\ 0 \end{Bmatrix} * \left[0 \quad +\frac{a^2}{2} \quad 0\right]$$

(III) Transformation de la charge triangulaire

Dans cette hypothèse le système de charge extérieur n'a qu'une composante transversale triangulaire avec la densité maximale qy. (figure 21)

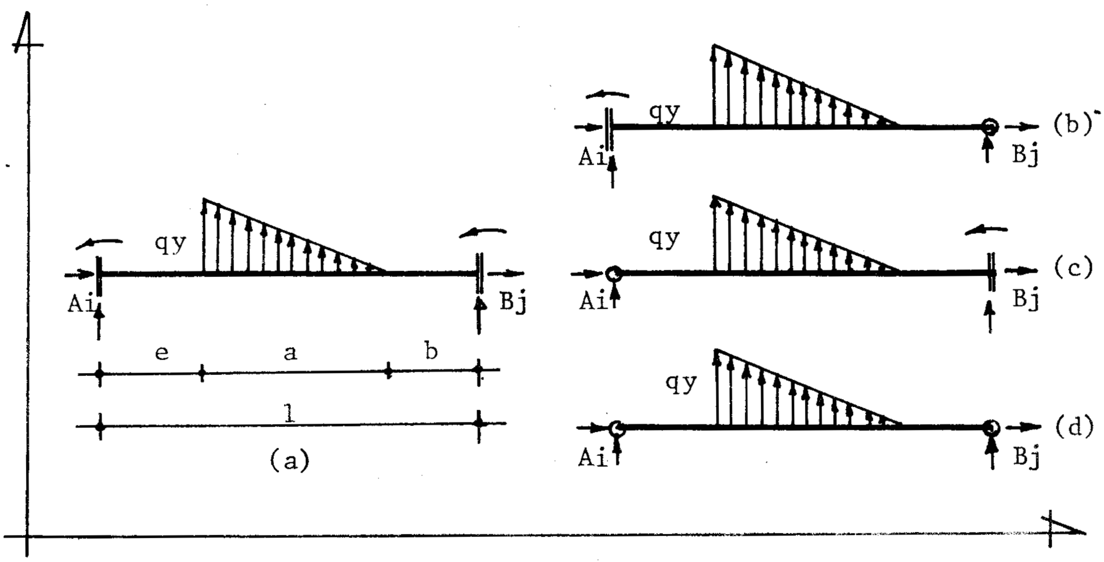


Figure 21

a) L'élément AiBj est bi-encastré :

Après calculs on aboutit à :

$$(2.2.6.34)\left\{Cij\right\} = \begin{Bmatrix} Cxij \\ Cyij \\ Czij \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kij+kji}{1} - \frac{a}{21}\left(b+\frac{2}{3}a\right) & 0 \\ 0 & kij & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2.2.6.35)\left\{Cji\right\} = \begin{Bmatrix} Cxji \\ Cyji \\ Czji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{kij+kji}{1} - \frac{a}{21}\left(e+\frac{a}{3}\right) & 0 \\ 0 & kji & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(2.2.6.36) avec : $kij = mij/qy$; $kji = mji/qy$

Les valeurs de mij et mji sont données par les équations (1.3.4.2) et (1.3.4.8).

En vertu des équations (2.2.6.4) et (2.2.6.5) on aura :

$$(2.2.6.37)\ \left[Qkij\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{A^2-B^2}\left[A.kij-B.kji+B.\ \frac{a}{2}\left(b+\frac{2a}{3}\right)\right] & 0 \\ 0 & \frac{-1}{A-B}\left[kij-kji+\frac{a}{2}\left(b+\frac{2a}{3}\right)\right] & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.2.6.38)\left[Qkji\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A^2-B^2}\left[A.kji-B.kij-B.\ \frac{a}{2}(e+\frac{a}{3})\right] & 0 \\ 0 & \frac{1}{A-B}\left[kij-kji+\frac{a}{2}(e+\frac{a}{3})\right] & 0 \end{bmatrix}$$

b) <u>L'élément AiBj est encastré en Ai et articulé en Bj</u> :

Tous calculs faits on aura :

$$(2.2.6.39)\left\{Cij\right\} = \begin{Bmatrix} Cxij \\ Cyij \\ Czij \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kij^*}{1} - \frac{a}{21}(b+\frac{2a}{3}) & 0 \\ 0 & kij^* & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2.2.6.40)\left\{Cji\right\} = \begin{Bmatrix} Cxji \\ Cyji \\ Czji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{kij^*}{1} - \frac{a}{21}(e+\frac{a}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

avec : $kij^* = kij-t.kji$

Les valeurs de kij et kji sont données par l'équation (2.2.6.36)

En écrivant les vecteurs $\left\{Cij\right\}$ et $\left\{Cji\right\}$ sous la forme présentée par les équations (2.2.6.4) et (2.2.6.5) on aboutit aux matrices correctives suivantes :

$$(2.2.6.41)\left[Zij\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{21}(b+\frac{2a}{3}).(1+t) & 0 \\ 0 & \frac{a}{2}(b+\frac{2a}{3})t & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$(2.2.6.42)\left[Zij\right] = \left\{Bij\right\} * \left[Rij\right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1+t}{1} \\ t \end{Bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{2}(b+\frac{2a}{3}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[Zji\right] = \left[0\right]$$

c) L'élément AiBj est articulé en Ai et encastré en Bi

Comme dans le cas (b), on obtient les résultats suivants :

$$(2.2.6.43)\ \left\{Cij\right\} = \left\{\begin{matrix} Cxij \\ Cyij \\ Czij \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kij^{*}}{1} - \frac{a}{21}(b+\frac{2a}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \left\{\begin{matrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

$$(2.2.6.44)\ \left\{Cji\right\} = \left\{\begin{matrix} Cxji \\ Cyji \\ Czji \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kji^{*}}{1} - \frac{a}{21}(e+\frac{a}{3}) & 0 \\ 0 & kji^{*} & 0 \end{bmatrix} * \left\{\begin{matrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

avec : $kji^{*} = kji - t\ kij$

Les valeurs de kij et kji sont données par l'équation (2.2.6.36).

Dans ce cas, on aura les matrices correctives suivantes :

$$\left[Zij\right] = \left[0\right]$$

$$(2.2.6.45)\ \left[Zji\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{21}(e+\frac{a}{3})(1+t) & 0 \\ 0 & \frac{a}{2}(e+\frac{a}{3})t & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$(2.2.6.46)\ \left[Zji\right] = \left\{Bji\right\} * \left[Rji\right] = \left\{\begin{matrix} 0 \\ -\frac{1+t}{1} \\ t \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{2}(e+\frac{a}{3}) & 0 \end{bmatrix}$$

d) L'élément AiBj est bi-articulé

Les calculs permettent d'écrire :

$$(2.2.6.47)\ \left\{Cij\right\} = \left\{\begin{matrix} Cxij \\ Cyij \\ Czij \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{21}(b+\frac{2a}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

$$(2.2.6.47)\ \text{bis}\quad \begin{Bmatrix} Cji \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Cxji \\ Cyji \\ Czji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2l}(e+\frac{a}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les matrices correctives sont les suivantes :

$$(2.2.6.48)\ \text{et}\ (2.2.6.49)\quad \begin{bmatrix} Zij \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2l}(b+\frac{2a}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{et} \begin{bmatrix} Zji \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2l}(e+\frac{a}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ou encore :

$$(2.2.6.50)\quad \begin{bmatrix} Zij \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} Bij \end{Bmatrix} * \begin{bmatrix} Rij \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/l \\ 0 \end{Bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{2}(b+\frac{2a}{3}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.2.6.51)\quad \begin{bmatrix} Zji \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} Bji \end{Bmatrix} * \begin{bmatrix} Rji \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/l \\ 0 \end{Bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & +\frac{a}{2}(e+\frac{a}{3}) & 0 \end{bmatrix}$$

(IV) <u>Transformation d'une charge triangulaire (II)</u>

Dans cette hypothèse, comme dans le cas précédent, le système de charge extérieur agissant en travée de l'élément étudié est composé d'une charge triangulaire transversale avec une densité maximale qy.

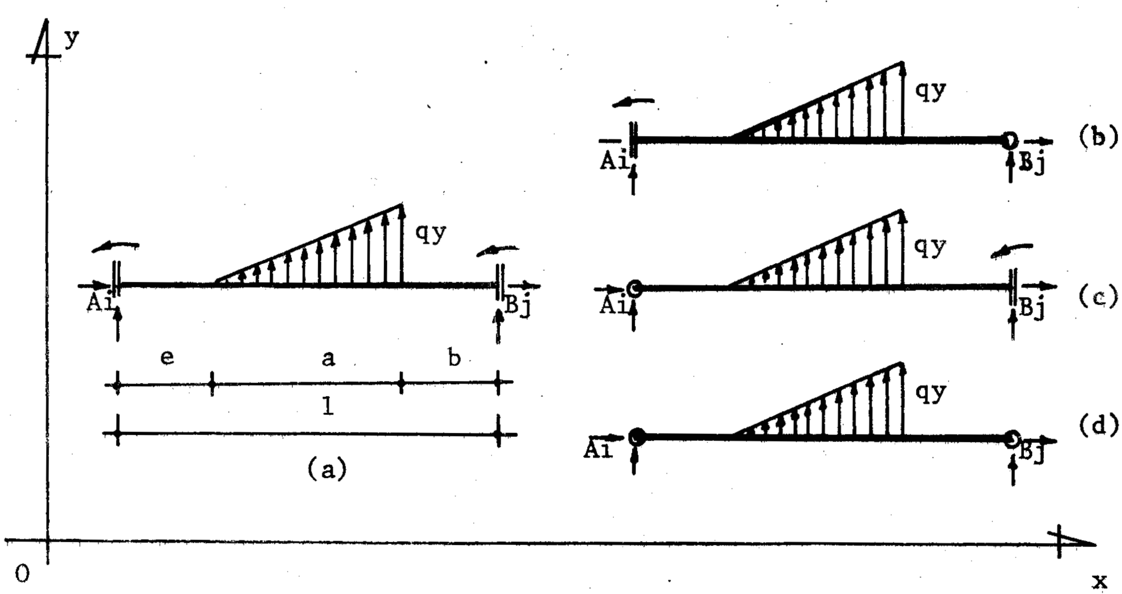


Figure 22

a) <u>L'élément AiBj est bi-encastré</u> :

$Cxji = Cxij = 0$

$$Cyij = \frac{mij+mji}{l} - \frac{a}{2l}(b+\frac{a}{3})$$

$$Cyji = -\frac{mij+mji}{l} - \frac{a}{2l}(e+\frac{2a}{3})$$

$Czij = mij$ et $Czji = mji$

Les valeurs de mij et mji sont issues des équations (2.3.5.2) et (1.3.5.8) respectivement pour un élément comprimé et tendu.

On aura donc :

$$(2.2.6.52)\ \left\{Cij\right\} = \begin{Bmatrix} Cxij \\ Cyij \\ Czij \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kij+kji}{l} - \frac{a}{2l}(b+\frac{a}{3}) & 0 \\ 0 & kji & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2.2.6.53)\ \left\{Cji\right\} = \begin{Bmatrix} Cxji \\ Cyji \\ Czji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{kij+kji}{l} - \frac{a}{2l}(e+\frac{2a}{3}) & 0 \\ 0 & kji & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(2.2.6.54) avec : $kij = mij/qy$ et $kji = mji/qy$

En écrivant les équations (2.2.6.52) et (2.2.6.53) sous la forme des équations (2.2.6.4) et (2.2.6.5), tous calculs faits on écrira :

$$(2.2.6.55)\ \left[Qkij\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{A^2-B^2}\left[A.kij-B.kji+\frac{a}{2}(b+\frac{a}{3}).B\right] & 0 \\ 0 & \frac{-1}{A-B}\left[kij-kji+\frac{a}{2}(b+\frac{a}{3})\right] & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.2.6.56)\left[Qkji\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A^2-B^2}\left[-B.kij+A.kji-\frac{a}{2}(e+\frac{2a}{3}).B\right] & 0 \\ 0 & \frac{1}{A-B}\left[kij-kji+\frac{a}{2}(e+\frac{2a}{3})\right] & 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas les matrices correctives sont nulles.

b) <u>L'élément AiBj est encastré en Ai et articulé en Bj</u>

Tous calculs faits on peut écrire :

$$(2.2.6.57)\left\{Cij\right\} = \begin{Bmatrix} Cxij \\ Cyij \\ Czij \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kij^*}{l} - \frac{a}{2l}(b+\frac{a}{3}) & 0 \\ 0 & kij^* & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2.2.6.58)\left\{Cji\right\} = \begin{Bmatrix} Cxji \\ Cyji \\ Czji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{kij^*}{l} - \frac{a}{2l}(e+\frac{2a}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

avec : $kij^* = kij-t.kji$

Les valeurs de kij et kji sont précisées par l'équation (2.2.6.54).

Dans ce cas les matrices correctives sont les suivantes :

$$(2.2.6.59)\left[Zij\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2l}(b+\frac{a}{3})(1+t) & 0 \\ 0 & \frac{a}{2}(b+\frac{a}{3}) & 0 \end{bmatrix}$$

ou bien :

$$(2.2.6.60)\left[Zij\right] = \left\{Bij\right\} * \left[Rij\right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1+t}{l} \\ t \end{Bmatrix} * \left[0 \quad +\frac{a}{2}(b+\frac{a}{3}) \quad 0\right]$$

$$\left[Zji\right] = \left[0\right]$$

c) L'élément AiBj est articulé en Ai et encastré en Bj

Comme les cas précédents, les calculs donnent :

$$(2.2.6.61)\left\{Cij\right\} = \left\{\begin{matrix} Cxij \\ Cyij \\ Czij \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kji^*}{1} - \frac{a}{21}(b+\frac{a}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \left\{\begin{matrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

$$(2.2.6.62)\left\{Cji\right\} = \left\{\begin{matrix} Cxji \\ Cyji \\ Czji \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{kji^*}{1} - \frac{a}{21}(e+\frac{2a}{3}) & 0 \\ 0 & kji^* & 0 \end{bmatrix} * \left\{\begin{matrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

avec $kji^* = kji-t.kij$

Les valeurs de kji et kij sont précisées par l'équation (2.2.6.54).

Dans ce cas les matrices correctives sont les suivantes :

$$\left[Zij\right] = \left[0\right]$$

$$(2.2.6.63)\left[Zji\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{21}(e+\frac{2}{3}a)(1+t) & 0 \\ 0 & \frac{a}{2}(e+\frac{2}{3}a).t & 0 \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$(2.2.6.64)\left[Zji\right] = \left\{Bji\right\} * \left[Rji\right] = \left\{\begin{matrix} 0 \\ -\frac{1+t}{1} \\ t \end{matrix}\right\} * \left[0 \quad \frac{a}{2}(e+\frac{2a}{3}) \quad 0\right]$$

d) L'élément AiBj est bi-articulé

Tous calculs faits, on aboutit à :

$$(2.2.6.65)\left\{Cij\right\} = \left\{\begin{matrix} Cxij \\ Cyij \\ Czij \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{21}(b+\frac{a}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \left\{\begin{matrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

$$(2.2.6.66)\ \left\{Cji\right\} = \begin{Bmatrix} Cxji \\ Cyji \\ Czji \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{21}\ (e+\frac{2a}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ qy \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les matrices correctives sont les suivantes :

$$(2.2.6.67)\ \left[Zij\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{21}(b+\frac{a}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.2.6.68)\ \left[Zji\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{21}(e+\frac{2a}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.2.6.69)\ \text{ou encore:} \left[Zij\right] = \left\{Bij\right\} * \left[Rij\right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/1 \\ 0 \end{Bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{2}(b+\frac{a}{3}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.2.6.70)\ \left[Zji\right] = \left\{Bji\right\} * \left[Rji\right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/1 \\ 0 \end{Bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & +\frac{a}{2}(e+\frac{2a}{3}) & 0 \end{bmatrix}$$

Pour tous les cas étudiés quelle que soit la condition d'appui et la nature des charges extérieures appliquées en travée de l'élément étudié, dans le repère local, on peut écrire :

$$(2.2.6.71)\ \left\{Cij\right\} = \left[Hij\right] * \left[Qkij\right] * \left\{Fk\right\} + \left\{Bij\right\} * \left[Rij\right] * \left\{Fk\right\}$$

$$(2.2.6.72)\ \left\{Cji\right\} = \left[Hji\right] * \left[Qkji\right] * \left\{Fk\right\} + \left\{Bji\right\} * \left[Rji\right] * \left\{Fk\right\}$$

En désignant par $\left\{FK\right\}$ le vecteur des charges extérieures agissant en travée de l'élément étudié, exprimé dans le repère général, on aura :

$$\left\{Fk\right\} = \left[R\right] * \left\{FK\right\}$$

$$\left\{CIJ\right\} = \left[R\right] * \left\{CIJ\right\}$$

$$\left\{CJI\right\} + \left[R\right] * \left\{CJI\right\}$$

En tenant compte des 3 équations précédentes dans les équations (2.2.6.71) et (2.2.6.72) et en vertu de l'équation (2.2.3.3.) on aura :

$$\{CIJ\}=[R]^t * ([Hij]*[R]*[R]^t*[Qkij]*[R]*\{FK\}+\{Bij\}*[Rij]*[R]*\{FK\})$$

$$\{CJI\}+[R]^t * ([Hji]*[R]*[R]^t*[Qkji]*[R]*\{FK\}+\{Bji\}*[Rji]*[R]*\{FK\})$$

D'après les équations (2.2.5.5.) et (2.2.5.7) on aura :

(2.2.6.73) $\{CIJ\} = [KIJ] * [QkIJ] * \{FK\} + \{BIJ\} * [RIJ] * \{FK\}$

(2.2.6.74) $\{CJI\} = [KJI] * [QkJI] * \{FK\} + \{BJI\} * [RJI] * \{FK\}$

avec : $[QkIJ] = [R]^t * [Qkij] * [R]$, $[QkJI] = [R]^t * [Qkji] * [R]$

$\{BIJ\} = [R]^t * \{Bij\}$ $\qquad \{BJI\} = [R]^t * \{Bji\}$

$[RIJ] = [Rij] * [R]$ $\qquad [RIJ] = [Rij] * [R]$

Si l'élément étudié est sollicité par les différentes charges, les équations (2.2.6.73) et (2.2.6.74) se présentent sous la forme suivante :

(2.2.6.75) $\{CIJ\} = [KIJ] * \sum[QkIJ] * \{FK\} + \{BIJ\} * \sum[RIJ] * \{FK\}$

(2.2.6.76) $\{CJI\} = [KJI] * \sum[QkJI] * \{FK\} + \{BJI\} * \sum[RJI] * \{FK\}$

(2.2.7) *Les équations fondamentales*

Les équations (2.2.5.1) et (2.2.5.2) obtenues pour un élément non chargé dans sa travée, en présence des sollicitations extérieures agissant en travée de l'élément, s'écrivent sous la forme complète suivante :

(2.2.7.1) $$\boxed{\begin{aligned}\{FIJ\} &= [KIJ] * \{\Delta IJ\} + [KIJ] * \{\Delta JI\} + \{G\} + \\ &+ [KIJ] * \sum[QkIJ] * \{FK\} + \{BIJ\} * \sum[RIJ] * \{FK\}\end{aligned}}$$

(2.2.7.2) $$\boxed{\begin{aligned}\{FJI\} &= [KJI] * \{\Delta IJ\} + [KJJ] * \{\Delta JI\} - \{G\} + \\ &+ [KJI] * \sum[QkIJ] * \{FK\} + \{BJI\} * \sum[RJI] * \{FK\}\end{aligned}}$$

(2.2.8) *Etablissement des équations d'équilibre*

Soit (n) un noeud de la structure étudiée relié par S élément aux autres noeuds de la structure. Supposons que ce noeud constitue une extrémité i pour (Si) éléments et une extrémité j pour (Sj) éléments (S=Si+Sj). La somme des efforts exercés par le noeud (n) sur l'ensemble de (S) éléments est égale à:

(2.2.8.1) $$\left\{F\right\}_n = \sum_1^{Si} \left\{FIJ\right\} + \sum_1^{Sj} \left\{FJI\right\}$$

L'équilibre du noeud (n), nous permet d'écrire :

(2.2.8.2) $$\left\{P\right\}_n = \left\{F\right\}_n$$

En établissant une équations identique pour chacun des (N) noeuds de la structure étudiée, on obtient un système de (3N) équations à (3N) inconnues de la forme suivante :

(2.2.8.3) $$\left\{P\right\} = \left[K\right] . \left\{\Delta\right\}$$

La matrice $\left[K\right]$ est appelée matrice de rigidité de la structure; c'est une matrice carrée et symétrique composée de (N^2) sous matrices carrées d'ordre 3. Les sous matrices diagonales de la matrice $\left[K\right]$ sont égales à la somme des matrices $\left[KII\right]$ et $\left[KJJ\right]$ des différents éléments aboutissant à chaque noeud, tandis que les autres sous matrices sont soit égales aux matrices $\left[KIJ\right]$ et $\left[KJI\right]$ des différents éléments, soit des matrices nulles.

Considérons, à titre d'exemple une structure comportant 4 noeuds A, B, C, D (figure 23). En écrivant successivement l'équation (2.2.8.1) pour chacun des noeuds précédents, on aura les résultats suivants :

Noeud (A) : $$\left\{F\right\}_A = \sum\left[KAA\ (1,\ 2,\ 3)\right] * \left\{\Delta A\right\} + \left[KAD\right] * \left\{AD\right\} + \left[KAC\right] * \left\{\Delta C\right\} + \left[KCA\right] * \left\{\Delta B\right\} + \sum\left\{C(AB,\ AC,\ AD)\right\} + \sum\left\{G(2,\ 3,\ -1^{*})\right\}$$

(*) Le signe négatif devant le chiffre 1* signifie que le vecteur $\left\{G\right\}_A$ dû à l'élément (1) est négatif.

$$\text{Noeud (B)} : \left\{F\right\}_B = \sum\left[KBB(1,\ 4\ )\right] * \left\{\Delta B\right\} + \left[KBC\right] * \left\{\Delta C\right\} + \left[KBA\right] * \left\{\Delta A\right\} + $$
$$+ \sum\left\{C(BC,\ BA)\right\} + \sum\left\{G(4,\ 1)\right\}$$

$$\text{Noeud (C)} : \left\{F\right\}_C = \sum\left[KCC(2,\ 4,\ 5)\right] * \left\{\Delta C\right\} + \left[KCB\right] * \left\{\Delta B\right\} + \left[KCA\right] * \left\{\Delta A\right\}$$
$$+ \left[KCD\right] * \left\{\Delta D\right\} = \sum\left\{C(CD,\ CB,\ CA)\right\} + \sum\left\{G(5,\ -4,\ -2)\right\}$$

$$\text{Noeud (D)} : \left\{F\right\}_D = \sum\left[KDD(5,\ 3)\right] * \left\{\Delta D\right\} + \left[KDC\right] * \left\{\Delta C\right\} + \left[KDA\right] * \left\{\Delta A\right\} +$$
$$+ \sum\left\{C(DC,\ DA)\right\} + \sum\left\{G(-5,\ -3)\right\}$$

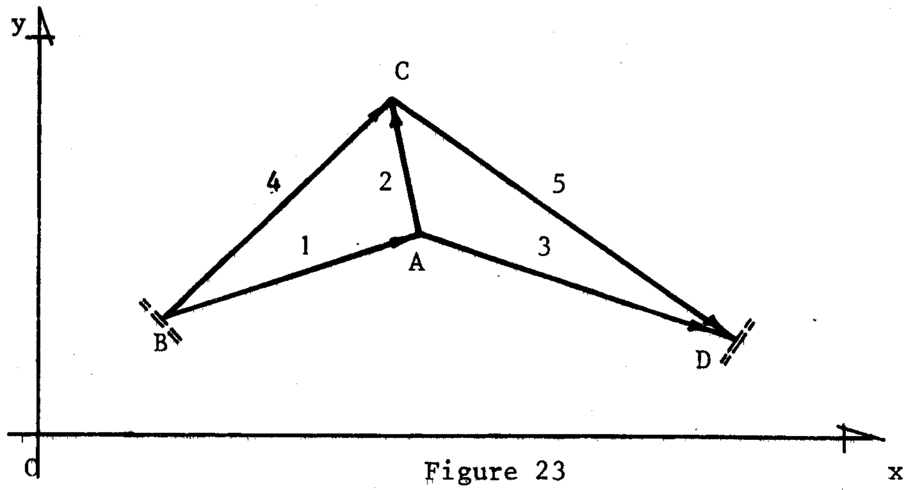


Figure 23

Sous la forme (2.2.8.3), on aura :

$$(2.2.8.4)\quad \begin{bmatrix} \sum\left[KAA(1,\ 2,\ 3)\right] & \left[KAC\right] & \left[KAB\right] & \left[KAD\right] \\ \left[KCA\right] & \sum\left[KCC(2,\ 4,\ 5)\right] & \left[KCB\right] & \left[KCD\right] \\ \left[KBA\right] & \left[KBC\right] & \sum\left[KBB(1,\ 4)\right] & \left[0\right] \\ \left[KDA\right] & \left[KDC\right] & \left[0\right] & \sum\left[KDD(5,\ 3)\right] \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta A \\ \Delta C \\ \Delta B \\ \Delta D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F'A \\ F'C \\ F'B \\ F'D \end{Bmatrix}$$

avec : $\left\{F'\right\}_n = \left\{P\right\}_n - \sum\left\{C\right\}_n - \sum\left\{G\right\}_n$

En prémultipliant l'équation (2.2.8.3) par l'inverse de la matrice de rigidité $\left[K\right]^{-1}$ on obtient les déplacements de chaque noeud. A partir de ces déplacements et à l'aide des équations (2.2.7.1) et (2.2.7.2) on peut calculer les efforts nodaux relatifs à chaque élément; ensuite, à l'aide des efforts nodaux obtenus et en vertu de l'équation (1.1.1) on peut facilement calculer le moment fléchissant, l'effort tranchant et l'effort normal dans une section quelconque de l'élément.

Remarque (1) : Dans le cas où certains déplacements sont imposés, pour résoudre l'équation (2.2.8.3), il suffit de supprimer la ligne et la colonne relatives à ces déplacements. On définit une matrice de rigidité réduite. Par exemple, si dans la structure précédente, les noeuds B et D subissent des déplacements imposés, pour calculer les déplacements $\{\Delta A\}$ et $\{\Delta G\}$, il suffit seulement d'inverser la matrice de rigidité réduite $[Kr]$ qui est composée par les deux premières lignes et colonnes, c'est-à-dire :

$$[Kr] = \begin{bmatrix} \sum [KAA(1,\ 2,\ 3)] & [\ KAC\ ] \\ [\ KCA\ ] & \sum [KBB(1,\ 4)] \end{bmatrix}$$

Remarque (2) : Si tous les éléments aboutissant à un noeud sont reliés à celui-ci par des articulations la rotation de ce noeud est indéterminée, la ligne et la colonne relatives à cette rotation ne comportent que des composantes nulles qui rendent la matrice K singulière.

Pour rendre la matrice $[K]$ inversible il suffit de supprimer la ligne et la colonne relatives à la rotation du noeud en cause; ou bien, il suffit de considérer l'un des éléments reliés au noeud articulé comme encastré, ce qui permet d'obtenir une valeur déterminée pour la rotation du noeud articulé. Cet encastrement fictif ne fait intervenir aucun moment supplémentaire sur l'élément supposé encastré car les autres éléments aboutissant au noeud articulé ne s'opposent pas à sa rotation.

C H A P I T R E (3)

(3.1) CALCUL DE LA CHARGE CRITIQUE

La charge critique d'une structure est atteinte lorsque les déformations deviennent théoriquement infinies, alors que les charges appliquées ont une valeur définie. Dans cette condition le déterminant de la matrice de rigidité $[K]$ est égal à zéro.

Afin de déterminer la charge critique, nous procéderons de la façon suivante :

nous augmentons progressivement les charges appliquées à la structure, lorsque $[K]$ est égal à zéro le flambage est atteint. Dans ce cas la charge critique est égale au système de charge appliqué. Les valeurs positives du déterminant ($[K] > 0$) expliquent que la structure est stable tandis que ($[K] < 0$) veut dire que le flambage est déjà atteint.

Pour résoudre une structure quelconque, nous avons mis au point un programme sur l'ordinateur; ce programme est présenté dans l'annexe 2.

Dans le règlement de construction métallique de 1966 (C.M. 66) seule la stabilité d'un portique simple est étudiée; on a supposé que les montants du portique sont comprimés par deux charges égales. Ce cas est très particulier et les valeurs de la longueur de flambement données ne sont pas égales à celles du même portique chargé par deux charges différentes.

Dans ce paragraphe nous calculerons la charge critique d'un portique simple avec une traverse horizontale et d'un portique avec la traverse brisée.

(3.1.1) *Portique simple avec traverse horizontale*

Soit le portique de la figure (24). On suppose que les neouds B et C sont chargés respectivement par les charges P et P'. (P et P' sont parallèles à l'axe oy).

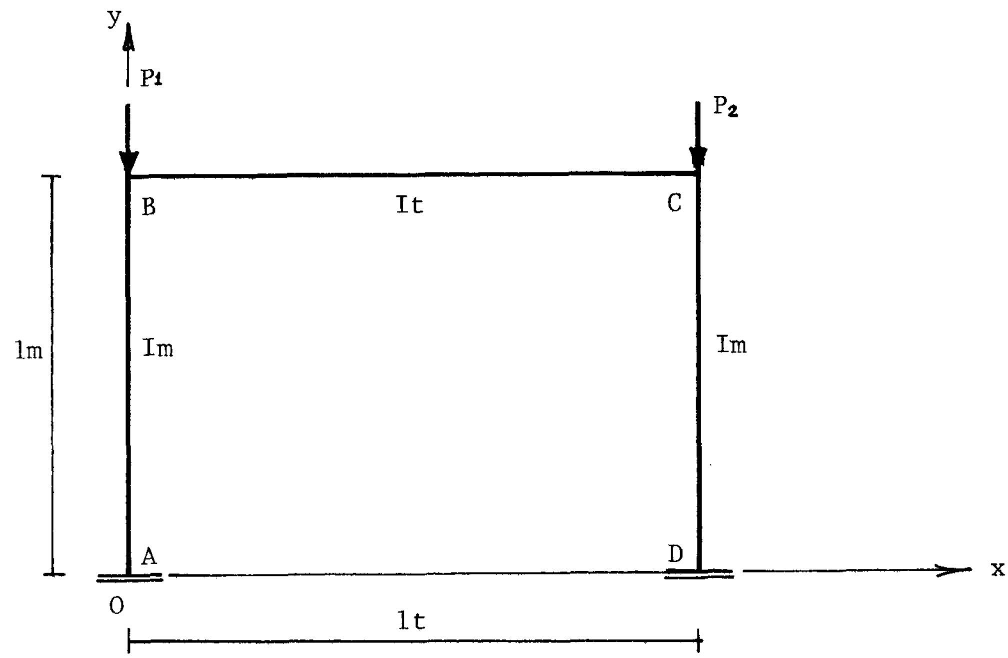


Figure 24

Nous avons calculé la charge critique et la longueur de flambement (lf) de ce portique, pour différentes valeurs de k = P_2/P_1 et k' = lm/lt.

Les diagrammes (3.1.1. I) et (3.1.1.II) présentent la variation de (lf/H) en fonction de (P_2/P_1)

Pour les calculs numériques nous avons choisi les profils suivants :

- montant : HEB 300
- traverse : HEB 300

(3.1.2) *Portique à traverse brisée*

Considérons le portique défini par la figure (25). Comme dans le cas précédent nous supposons que les poteaux sont sollicités axialement par deux charges P_1 et P_2' (P_2 = kP_1). Dans ce cas nous calculons les valeurs de la charge critique et de la longueur de flambement (lf), pour différentes valeurs de α, k et lm/lt.

Les diagrammes (3.1.2. I et II) présentent la variation de (lf/lm) en fonction de (P_2/P_1)

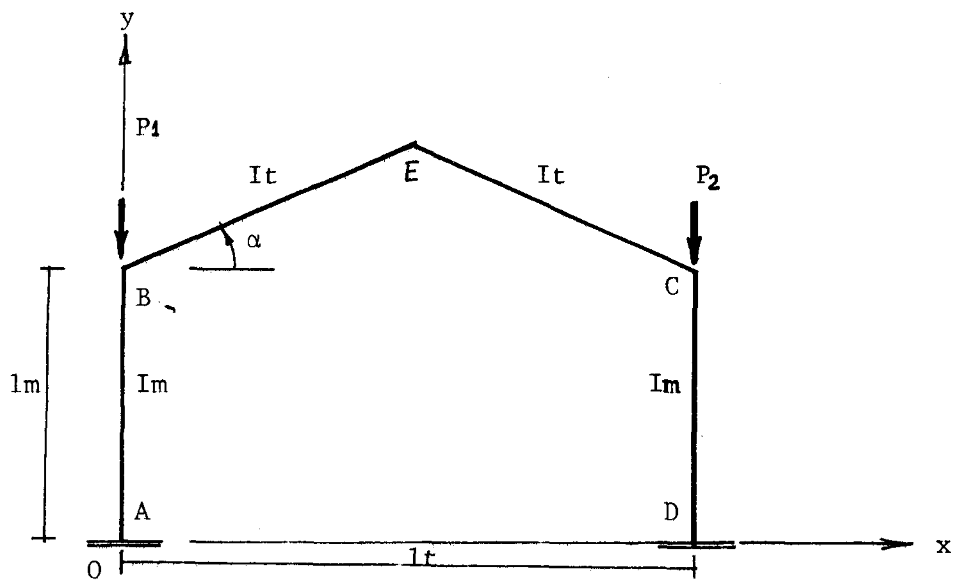


Figure 25

Pour les calculs numériques nous avons choisi les profils suivants :

- montant : HEB 300
- traverse : **HEB 300**

(3.2) ESSAIS EXPERIMENTAUX

Afin de vérifier les résultats théoriques, nous avons procédé à quelques essais sur un portique à traverse brisée.

Le portique est encastré à ses pieds et ses éléments construits en acier doux (E24) sont à section rectangulaire de dimensions 10 x 18 mm.

Le système de forces choisi est composé de deux forces nodales, une horizontale et une verticale. Les déformations produites sous l'action de ce système de forces sont mesurées par seize jauges.

La figure (26) représente la disposition des forces appliquées, des jauges de contrainte et d'un comparateur magnétique. Ce dernier mesure le déplacement horizontal du noeud C.

Nous avons augmenté progressivement la valeur de la force Pv, pour que la section la plus sollicitée atteigne la limite élastique, la force Pn étant constante et égale 20 Kgr.

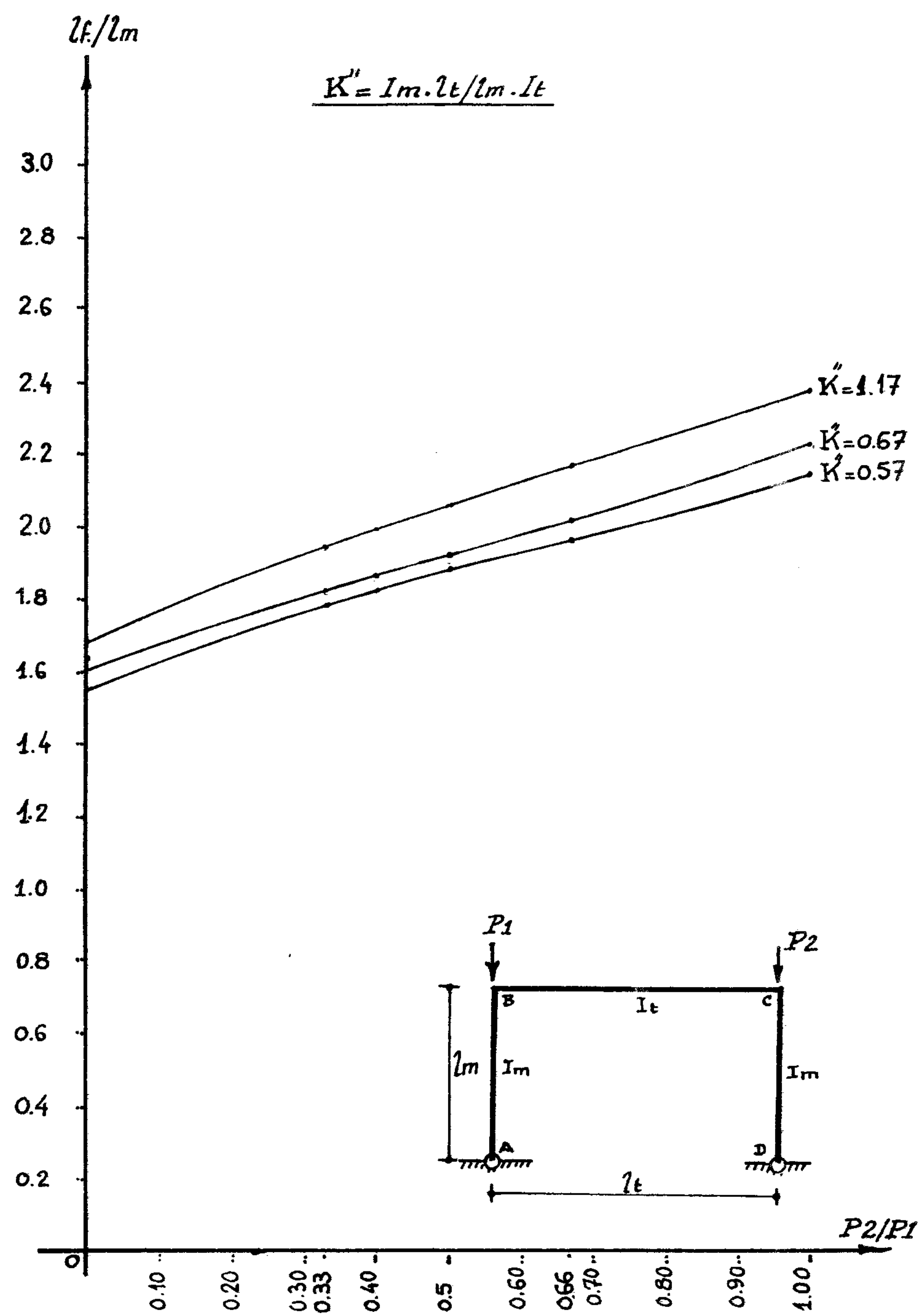


DIAGRAMME 3.1.1.I

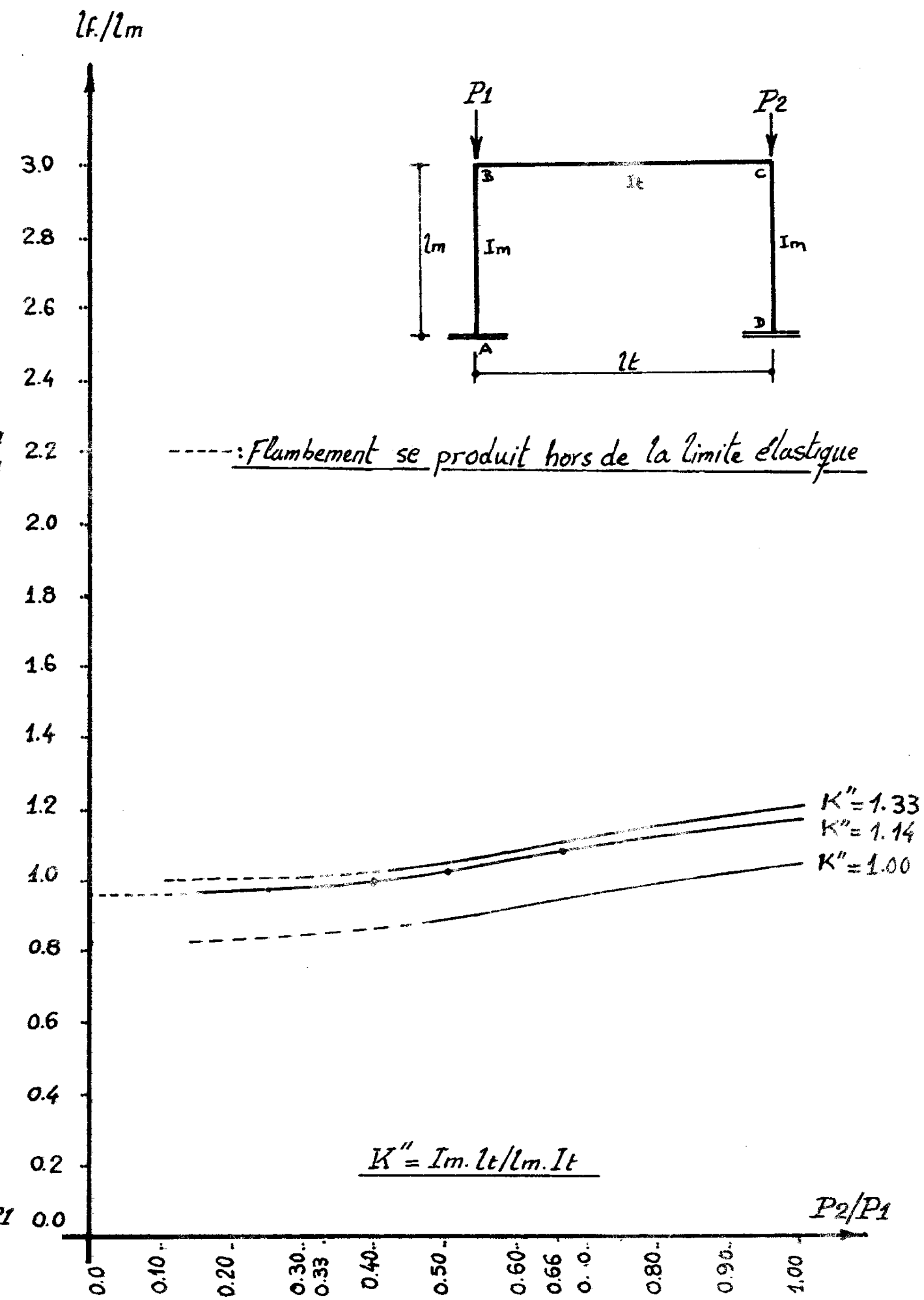


DIAGRAMME 3.1.1.II

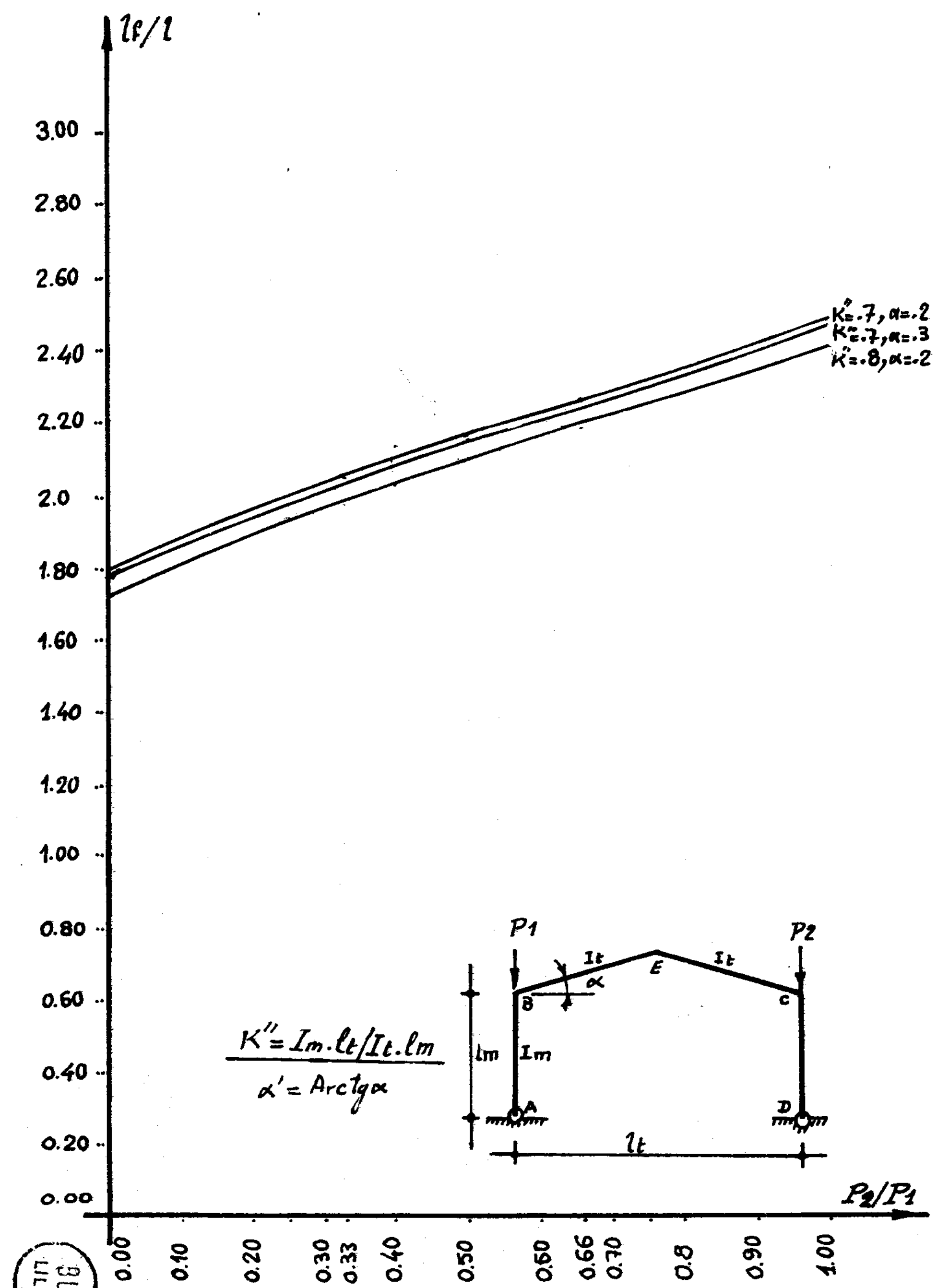


DIAGRAMME 3.1.2.I

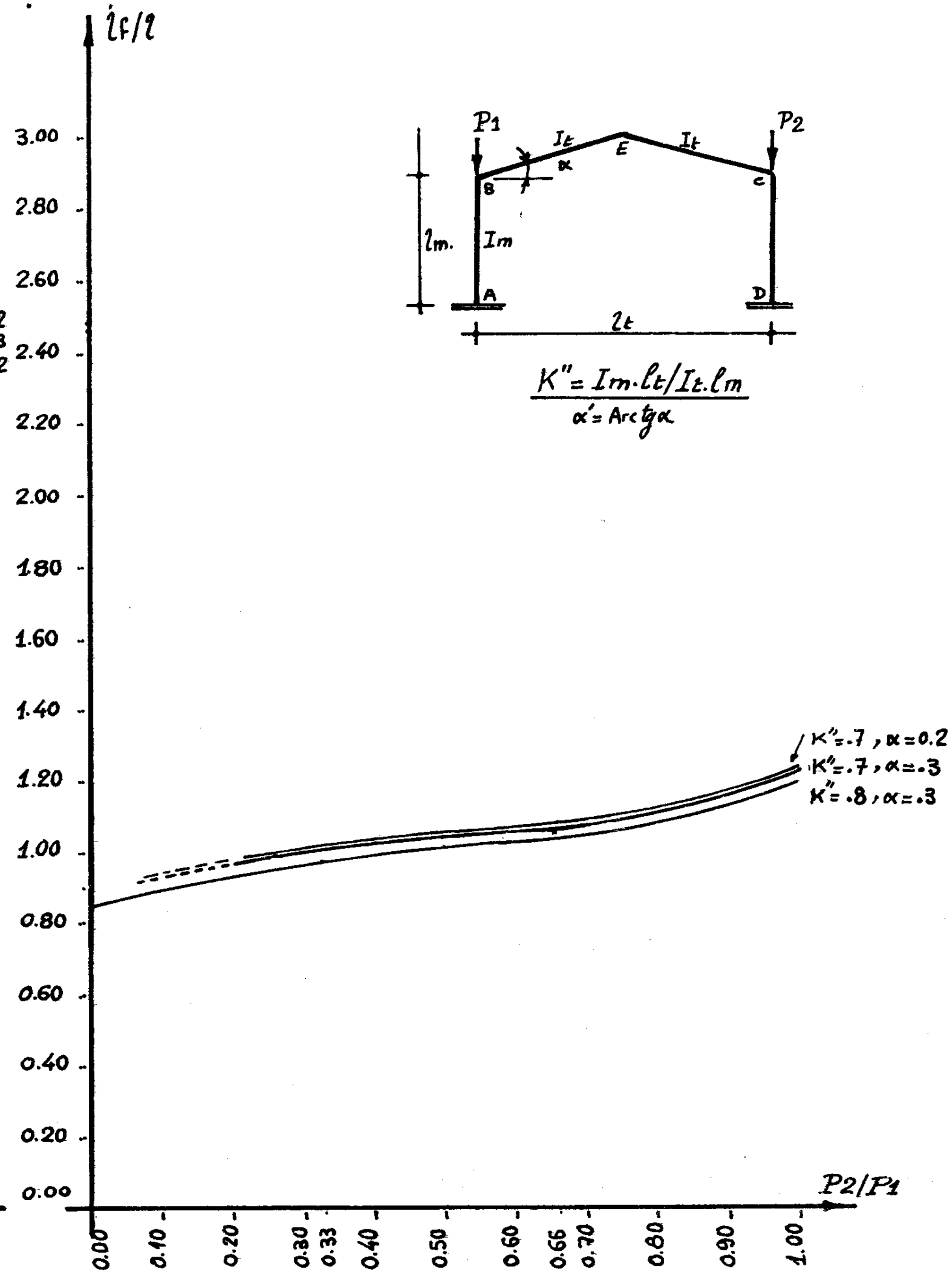


DIAGRAMME 3.1.2.II

A l'aide d'appuis latéraux on empêche tout déversement latéral.

Le tableau suivant donne les résultats expérimentaux et théoriques obtenus pour différentes valeurs de la force Pv.

Le pourcentage d'écart entre les deux séries de résultats varie entre 2 % et 7 %. Le frottement entre le portique principal et les appuis latéraux évitant le déversement latéral peut être à l'origine de cet écart; de ce fait cet écart s'accentue quand la force Pv prend des valeurs plus élevées.

	$P_V = 10$ Kgf			$P_V = 20$ Kgf			$P_V = 30$ Kgf			$P_V = 40$ Kgf		
Elément	Exp. (Kg/cm^2)	Théo. (Kg/cm^2)	%	Exp.	Théo.	%	Exp.	Théo.	%		Théo.	%
E1	1048.3	1092.1	4	1191.	1260.3	5.5	1349	1430.1	5.6	1507.4	1600	5.8
E2	819.3	855.2	4.2	1028.9	1075.1	4.3	1240.5	1300.1	4.6	1452.3	1523.9	4.7
E3	426.8	462.7	3.7	704	733.4	4.0	967.1	1004.8	3.8	1231.4	1285.4	4.2
E4	528.7	540	2	374.6	382.3	2.0	310	317.2	2.2	530	542.3	2.2
Dép(C)	3.10	3.2	3.2	2.98	3.13	4.9	2.88	3.04	5.1	2.79	2.95	5.4

J = Jauge de contrainte

	$P_V = 50$ Kgf			$P_V = 60$ Kgf		
Elément	Exp. (Kg/cm^2)	Théo (Kg/cm^2)	%	Exp.	Théo.	%
E1.	1660.	1770.	6.2	1846.2	1980.9	6.8
E2	1651.	1747.7	5.5	1846	1974.	6.5
E3	1501.6	1564.2	4.0	1769.	1844.5	4.1
E4	742.0	758.6	2.18	959.6	981.1	2.2
Dép.(mm)	2.68	2.85	5.96	2.59	2.76	6.1

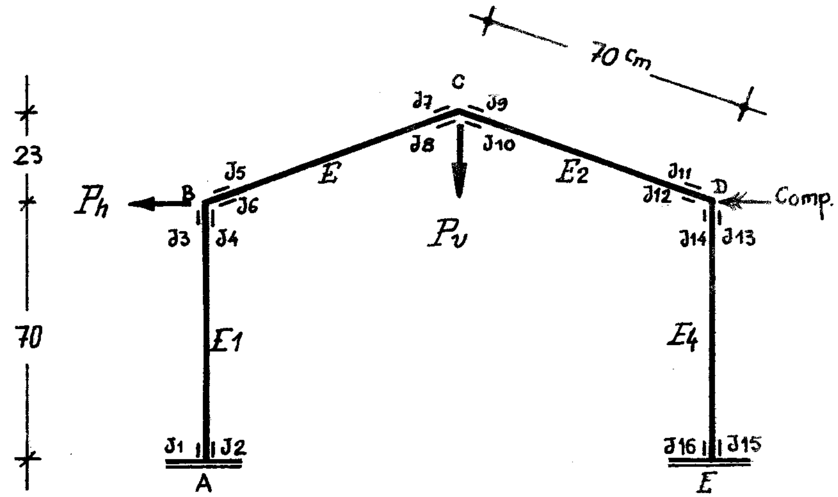


Figure 26

CONCLUSION

Les résultats expérimentaux semblent confirmer la validité de la méthode; il serait cependant nécessaire de réaliser des essais plus nombreux sur des structures différentes pour mieux apprécier l'exactitude de la théorie proposée.

Les diagrammes(3,1.1.I) (3.1.1.II), (3.1.2.I) et (3.1.2.II) nous montrent que la longueur de flambement est maximale lorsque $P_1 = P_2$. Pour des valeurs différentes de P_1 et de P_2 l'étude nous permet de réaliser des structures plus économiques.

Ces diagrammes ont été réalisés pour des valeurs de λ et n petits, les effets de T et N sont négligeables; nous constatons que les résultats fournis concordent avec ceux des règles C.n. 66.

Pour les portiques encastrés et pour les faibles rapports de $\frac{P_2}{P_1}$,les longueurs de flambement sont très réduites et le calcul des charges critiques nous conduit à admettre que seule la flexion peut être considérée pour l'étude de la stabilité.

BIBLIOGRAPHIE

1) E. ABSI.- Contribution à l'étude des systèmes hyperstatiques de haut degré. (Thèse : 1961).

2) E. ABSI.- Equations intrinsèques d'une poutre droite à section constante, compte tenu des effets des efforts tranchants et normaux. Annales de l'I.T.B.T.P. (janvier 1967).

3) E. ABSI.- Etude de problèmes particuliers A.I.T.B.T.P. (mai 1971).

4) P. LORIN.- Calculs des poutres avec prise en compte de l'effort normal et de l'effort tranchant qui en résulte. Revue Construction métallique G.T.I.GM. (septembre 1966).

5) A. HAERI.- Constribution à l'étude du flambement des structures planes.

6) CH. MASSONNET.- Calcul des structures sur ordinateur. Tomes 1 et 2.

7) M. LIOCHON.- Stabilité des constructions. Cours de Résistance des Matériaux à l'Institut Industriel du Nord (I.D.N.).

8) P. CHILLION et M. KERGUIGNAS.- Résistance des matériaux. Editeur DUNOD.

9) PING-CHUN WANG.- Calcul des structures par les méthodes numériques et matricielles. Editeur DUNOD (Paris 1969).

10) P. LACROIS.- Etude de portiques multiples articulés aux pieds et soumis à une charge verticale appliquée au droit d'un montant quelconque (1956-1958).

11) TIMOSHENKO.- Théory of Elastic stability.

12) BLEICH.- Buckling streingth of metal structure. Editeur Mc GRAW HILL, BOOKCY (1952).

13) J. COURBON.- Résistance des matériaux. Vol I et II. Editeur DUNOD (1971).

14) MS. GREGORY.- Framed structures. The instability problem. The Institution of Civil Engineers (novembre 1966).

15) A. ZASLAVSKY.- Flambement des portiques articulés sous l'effet d'une charge mobile. Revue "acier-stahl-sted" 3/1973.

16) W. Mc GUIRE G. WINTER.- Sted structures. Editeur WILLIAM J. HALL.

17) Règlement de construction métallique de 1966 (C.M. 66).

ANNEXE 1

METHODE DE DUTHEIL

1. PROBLEME PRELIMINAIRE :

Effet d'une compression axiale sur une poutre bi-articulée présentant une légère courbure initiale.

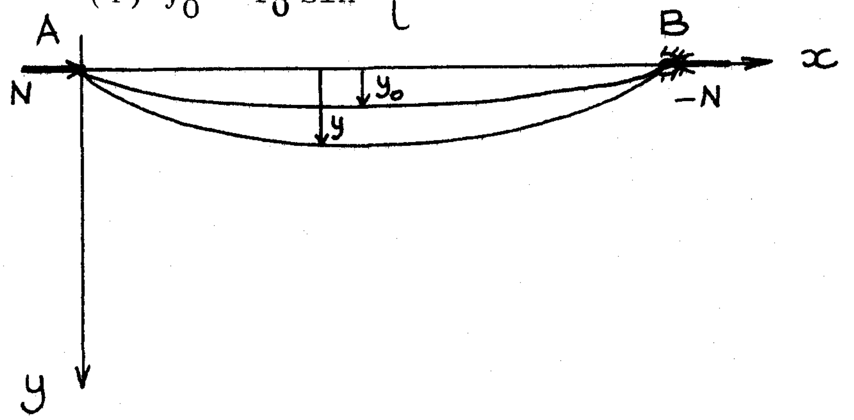
Hypothèses :

a) les courbures sont très faibles

b) les déformations dues aux efforts normaux et tranchants sont négligées

Nous pouvons prendre comme courbure initiale la fonction (champ des déplacements cinématiquement admissible) :

$$(1) \quad y_0 = f_0 \sin \frac{\pi x}{l}$$



Notons : $\frac{1}{\rho_0}$ la courbure initiale de la déformée

$\frac{1}{\rho}$ la courbure de la déformée après l'applica- de l'effort de compression N

y l'ordonnée de la nouvelle déformée.

D'après la théorie de la flexion des pièces à faible courbure, l'équation différentielle de la nouvelle déformée s'écrit :

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = - \frac{M}{EI} \qquad M = + Ny$$

soit en négligeant les dérivées premières dans les expressions des courbures :

$$y'' + k^2 y = - \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \qquad k^2 = \frac{N}{EI}$$

.../...

Solution générale de l'équation :

$$y = A \sin kx + B \cos kx + p \sin \frac{\pi x}{l}$$

Les conditions aux limites :

$x = 0 \quad y = 0 \quad \longrightarrow \quad B = 0$

$x = l \quad y = 0 \quad \longrightarrow \quad A = 0$

Solution définitive :

$$y = \frac{f_0}{1 - \frac{k^2 l^2}{\pi^2}} \sin \frac{\pi x}{l} \qquad (3)$$

$y \longrightarrow \infty$ lorsque $\frac{k^2 l^2}{\pi^2} \longrightarrow 1$

soit pour $k^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$ notons Nk l'effort de compression correspondant, Nk est la charge cinétique :

$$\boxed{Nk = \frac{\pi^2 EI}{l^2}} \quad \text{et } \sigma k = \frac{Nk}{S} = \frac{\pi^2 EI}{S l^2}$$

l'équation (3) peut encore s'écrire :

$$y = \frac{\sigma k}{\sigma k - \sigma} \cdot f_0 \sin \frac{\pi x}{l} \qquad \left(\sigma = \frac{N}{S}\right)$$

la flèche dans la section médiane a donc pour expression :

$$f \text{ maxi} = \frac{\sigma k}{\sigma k - \sigma} f_0$$

$\frac{\sigma k}{\sigma k - \sigma}$ est le coefficient d'amplification des flèches.

2. METHODE DE DUTHEIL

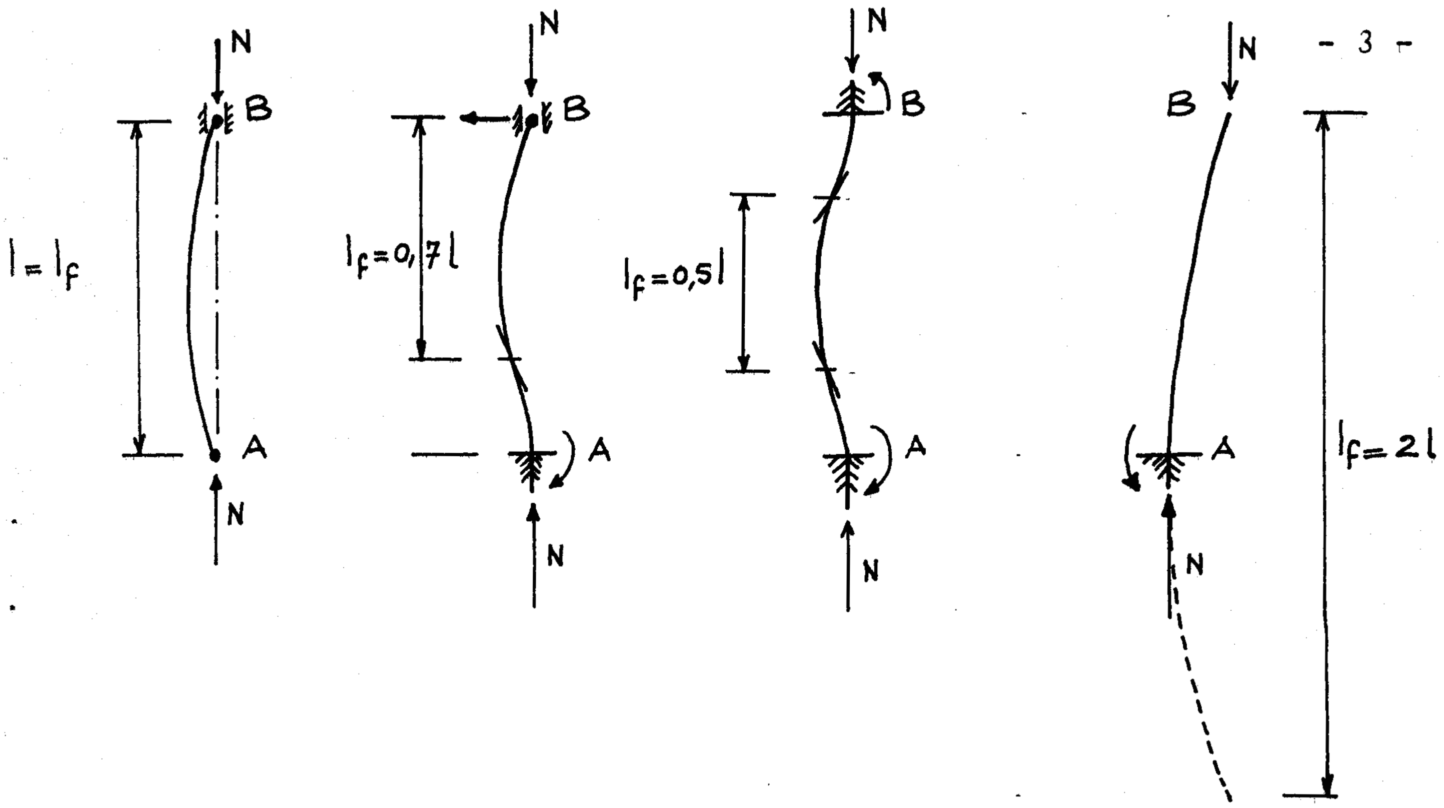
1 - Généralités

Le problème du flambement dans le cas de pièces théoriquement parfaites se présente comme un problème d'instabilité dont la solution est donnée par la théorie d'EULER : "Une barre droite soumise à un effort de compression simple N reste droite si $N < Nk$ (Nk, charge critiquée d'EULER), puis pour $N = Nk$ il y a bifurcation de l'équilibre, la pièce fléchie.

La suppression de la charge critique d'EULER s'écrit :

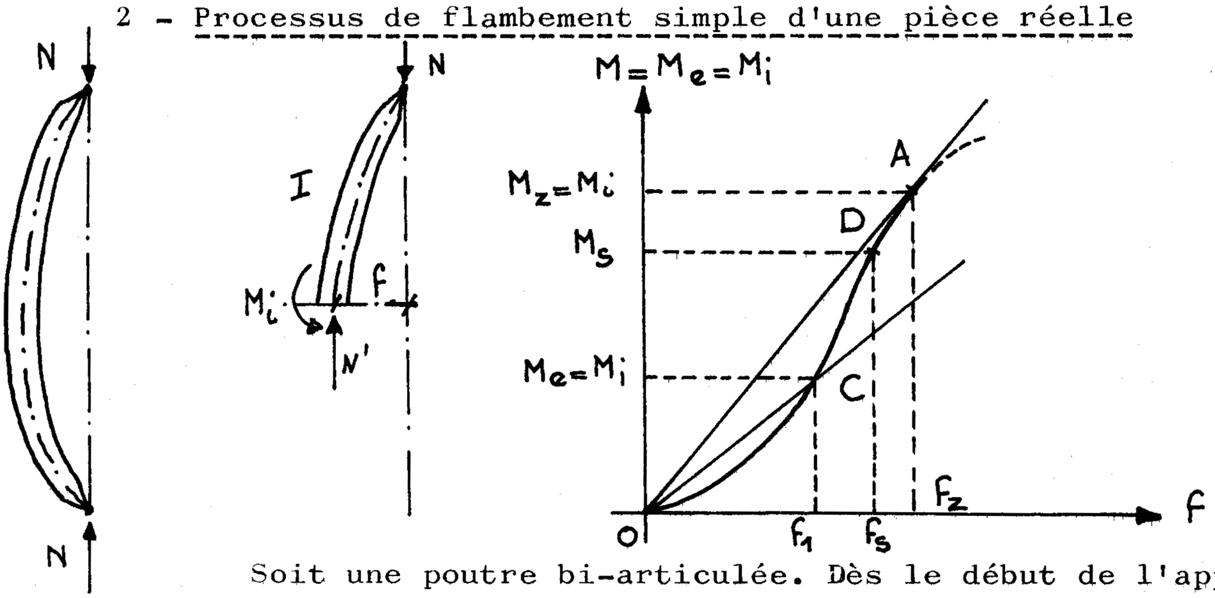
$$Nk = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2}$$

l_f est la longueur de flambage et est fonction des conditions aux limites ; c'est la distance entre les pointes d'inflexion de la déformée supposée sinusoïdale.



Dans la pratique ce phénomène n'a pu être constaté et dès l'application d'une charge N<Nk la pièce fléchit. Cette flexion est due aux défauts géométriques de la pièce, à l'hétérogénéïté du matériau.

2 - Processus de flambement simple d'une pièce réelle



Soit une poutre bi-articulée. Dès le début de l'application de N la poutre fléchit, notons f la flèche dans la section médiane. f croît avec la charge.

Me = Pf est le moment des forces extérieures dans la section médiane ; N' et Mi l'effet du champ des contraintes normales au centre de gravité de cette même section.

Equation d'équilibre du sous ensemble I :

$$N' + N = 0 \qquad ; \qquad Me + Mi = 0$$

$|Me| = |Mi|$ correspond à un point C dans le repère Of, OM. Lorsque $N \nearrow$ le point C décrit une courbe qui définit la loi $Mi = h(f)$.

L'expression Me = pf peut être interprétée comme l'équation d'une droite passant par l'origine et le point C intersection de cette droite et de la courbe Mi traduit la stabilité du système.

Lorsque $N \nearrow$ le point C se déplace vers A ; en ce point la droite est tangente à la courbe $M_z = N_z \cdot f_z$ N_z est la charge limite de compression.

La charge N_z est telle que pour un accroissement infiniment petit Δf de $f_z \rightarrow Me > Mi$, il y a flambement par divergence d'équilibre.

Pour l'acier doux E24, A est en phase élasto-plastique. La condition de sécurité définie par DUTHEIL, correspond à un point D pour lequel la contrainte maximale normale dans la section médiane est égale à la limite élastique σe du matériau.

Aussi d'après DUTHEIL la condition de stabilité se traduit par l'expression :

$$(4) \qquad \frac{Ps}{S} + \frac{Ps \cdot fs}{\frac{I}{V}} = \sigma_e$$

DUTHEIL ramène donc le problème de flambement à un problème de flexion composée, mais la flèche fs dans la section médiane tient compte des imperfections géométriques et des imperfections de structure.

3. LOI DE DEPLACEMENT DANS LA SECTION MEDIANE Cas de la poutre biarticulée - Equation de la déformée initiale $y_0 = f_0 \sin \frac{\pi x}{l}$

- sous l'action de N le coefficient d'amplification des flèches a pour expression : $\frac{\sigma k}{\sigma k - \sigma}$

avec $\sigma_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ en posant $r^2 = \frac{I}{S}$ rayon de giration et $\lambda = \frac{l}{r}$ élancement.

$$\sigma k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

3.1) Certaines imperfections ont pour effet de majorer l'amplitude des déformations en flexion, ce qui peut s'interpréter

.../...

comme une réduction du module d'élasticité.

DUTHEIL a posé $E' = \frac{E}{1 + b}$, le coefficient d'amplification de flèche doit s'écrire :

$$\frac{\sigma' k}{\sigma' k - \sigma}$$

avec $\sigma' k = \frac{\pi^2 E'}{\lambda^2}$

$$= \frac{\pi^2 E}{(1 + b)\lambda^2} = \frac{\sigma k}{1 + b}$$

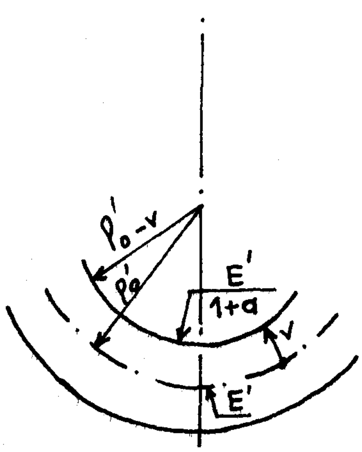
soit : $$\boxed{\frac{\sigma' k}{\sigma' k - \sigma} = \frac{\sigma k}{\sigma k - \sigma(1+b)}} \qquad (5)$$

b est un coefficient numérique déterminé expérimentalement.

3.2) Les imperfections dans une barre parfaitement droite et dans le cas d'un effort bien centré existent à l'état potentiel et n'apparaissent que progressivement sous contrainte.

La flèche f_s doit donc être une fonction croissante de la contrainte de compression simple $\sigma = \frac{N}{S}$.

Cette considération a amené l'auteur à admettre que dans une section droite le module d'élasticité E n'est pas constant.



E' est admis au niveau de l'axe neutre

$\frac{E'}{1+a}$ a la distance v

Considérons au voisinage de la section médiane deux sections droites distantes de l'unité et soumettons ce tronçon de poutre à un champ de contraintes normales d'intensité σ (compression).

Le tronçon de poutre fléchit, nous pouvons écrire :

$$(6) \qquad \frac{1 - \frac{\sigma}{E'}}{\rho'_o} = \frac{1 - \frac{\sigma}{E'}(1+a)}{\rho'_o - v} = \frac{\sigma a}{E' v} \approx \frac{1}{\rho'_o}$$

ρ'_o rayon de courbure de l'axe neutre (section médiane)

ρ'_{o-v} rayon de courbure du tronçon à la distance v.

ainsi : $\frac{1}{\rho'_o} = \frac{\sigma a}{E' v} = \frac{\sigma a(1+b)}{E v}$

si la déformée est supposée sinusoïdale :

$$y = f_1 \sin \frac{\pi x}{l}$$

.../...

nous en déduisons que :

$$\frac{1}{\rho'_o} = f_1 \frac{\pi^2}{l^2}$$

d'où :

$$f_1 = a(1+b) \cdot \frac{\sigma}{Ev} \cdot \frac{l^2}{\pi^2}$$

en posant $W = \frac{I}{v}$ module d'inertie de la section droite :

$$(7) \qquad \boxed{f_1 = a(1+b) \frac{\sigma}{Nk} \cdot W}$$

Mais le champ de contraintes σ dans la section médiane est obtenu par les efforts N et - N appliqués aux extrémités ; il y a donc amplification de la flèche.
En définitive, la flèche dans la section médiane est donnée par l'expression.

$$(8) \qquad f_1 = \frac{a(1+b)\ \sigma k}{\sigma k - \sigma(1+b)} \ \frac{\sigma}{Nk} \cdot W$$

Cette formule est valable pour tous les matériaux.
Pour un matériau donné les coefficients a et b sont obtenus expérimentalement.
Pour l'acier, l'examen statistique de nombreux résultats expérimentaux montre qu'en posant a(1+b) = b = 0,3 la probabilité pour que la flèche donnée par l'expression (8) soit dépassée est de 0,5 %.

Pour l'acier :

$$(9) \qquad \boxed{f_1 = \frac{0,3\ \sigma k}{\sigma k - 1,3\sigma} \cdot \frac{\sigma}{Nk} \cdot W}$$

4. CONTRAINTE MAXIMALE. CRITERE DE RUINE

Soit une barre réelle soumise à des efforts transversaux ou couples qui engendrent dans la section médiane :

- une flèche f
- une contrainte normale de compression σ_f sur l'élément ds situé à la distance V.

Soumettons cette poutre à un effort longitudinal de compression $N = \sigma S$, celui-ci engendre :

.../...

- une contrainte de compression simple σ
- une majoration de la flèche f

$$f . \frac{\sigma k}{\sigma k - 1,3 \sigma}$$

- une flèche supplémentaire f_1 dûe aux imperfections géométriques et aux défauts de structure.

Dans la section médiane la flèche devient :

$$f_S = f . \frac{\sigma k}{\sigma k - 1,3} + f_1$$

La contrainte maximale de compression sur l'élément ds de la section médiane à la distance V de l'axe neutre a pour expression :

$$\sigma_m = \sigma + \sigma_f + \frac{N}{W} \left(\frac{f \sigma k}{\sigma k - 1,3 \sigma} + \frac{0,3 \ \sigma . \sigma k}{\sigma k - 1,3 \sigma} . \frac{W}{Nk} \right)$$

ou :

$$(10) \quad \boxed{\sigma_m = \sigma + \sigma_f + \sigma \left(f. \frac{S}{W} \frac{\sigma k}{\sigma k - 1,3 \sigma} + \frac{0,3 \ \sigma}{\sigma k - 1,3 \sigma} \right)}$$

Nous remarquons qu'il n'y a plus proportionnalité entre σ_m et la contrainte de compression simple σ, d'où le critère de ruine d'après DUTHEIL :

Toutes les charges extérieures étant multipliées par le coefficient de pondération $\boxed{\sigma_m \leqslant \sigma_e}$

Ce qui signifie que dans l'expression σ et σ_f sont des <u>contraintes pondérées</u>.

5. APPLICATIONS. VERIFICATION DE LA STABILITE DES BARRES COMPRIMEES A AME PLEINE

5.1 Barre comprimée non fléchie

$$\sigma_f = 0 \qquad f = 0$$

d'où $$\sigma_m = + \frac{0,3 \sigma^2}{\sigma k - 1,3 \sigma}$$

à la limite $\sigma_m = \sigma_e$ la valeur correspondante de σ est notée σ_S et est appelée contrainte limite d'affaissement.

$$\sigma_e = \sigma_S + \sigma_S^2 \cdot \frac{0,3}{\sigma_k - 1,3\,\sigma_S}$$

soit :

$$\sigma_S^2 - \sigma_S\,(\sigma_k + 1,3\sigma_e) + \sigma_e\sigma_k = 0$$

posons $k = \frac{\sigma e}{\sigma_S}$ d'où : $\sigma_S = \frac{\sigma e}{k}$

k est le coefficient de flambement simple.
Remplaçons dans l'équation précédente σ_S par la valeur $\frac{\sigma e}{k}$, nous obtenons :

$$k^2 - 2k\,(0,5 + 0,65\,\frac{\sigma e}{\sigma k}) + \frac{\sigma e}{\sigma k} = 0$$

la plus grande racine de cette équation est :

$$(11) \qquad \boxed{k = 0,5 + 0,65\,\frac{\sigma e}{\sigma_k} + \sqrt{(0,5 + 0,65\,\frac{\sigma e}{\sigma_k})^2 - \frac{\sigma e}{\sigma_k}}}$$

d'où la condition de stabilité :

$$\sigma \leqslant \sigma_S$$

soit : $\boxed{k\sigma \leqslant \sigma_e}$ (12)

5.2 Barre comprimée et fléchie dans le plan de flambement

(section droite symétrique)

Les forces transversales engendrent sous la compression un moment $M_0 = W\,\sigma_f$ et une flèche f dans la section médiane.
La flèche f peut toujours se mettre sous la forme :

$$f = \frac{A\,M_o\,l^2}{E'I}$$

A, dépend du chargement et des conditions aux appuis (liaisons).
autre écriture :

$$f = \frac{1,3\,A\,M_o\,l^2}{EI} \qquad \text{(cas de l'acier)}$$

.../...

$$f = 1,3\,\pi^2 \frac{A\,\sigma_f}{S\,\sigma_k} \cdot W$$

Remplaçons dans l'expression (10) f par la valeur précédente, nous obtenons :

$$\sigma_m = \sigma + \sigma_f + \left(\frac{1,3\pi^2 \, A\sigma_f}{\frac{\sigma_k}{\sigma} - 1,3} + \frac{0,3\ \sigma}{\frac{\sigma_k}{\sigma} - 1,3}\right)$$

ou :

$$\sigma_m = \sigma\left(1 + \frac{0,3}{\frac{\sigma_k}{\sigma} - 1,3}\right) + \sigma_f\left(1 + \frac{1,3\pi^2\ A}{\frac{\sigma_k}{\sigma} - 1,3}\right)$$

posons : $\mu = \frac{\sigma_k}{\sigma}$

$$k_1 = 1 + \frac{0,3}{\mu - 1,3} \quad ; \quad k_f = 1 + \frac{1,3\pi^2\ A}{\mu - 1,3}$$

$$\sigma_m = k_1\sigma + k_f\ \sigma_f$$

La condition de stabilité s'écrit :

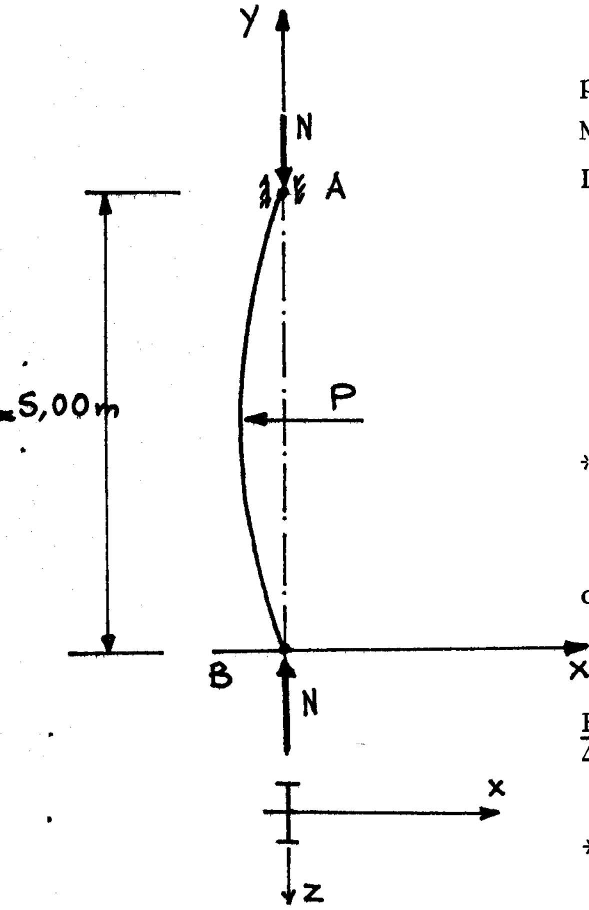
$$\boxed{k_1\sigma + k_f\ \sigma_f \leq \sigma_e} \qquad (13)$$

k_1 est le coefficient d'amplification de la contrainte de compression simple.
k_f est le coefficient d'amplification de la contrainte de flexion simple.

6. AUTRES CONDITIONS AUX APPUIS

Les relations établies pour la poutre bi-articulée sont applicables aux autres conditions aux appuis ; il suffit en effet de connaître la longueur de flambement de la barre étudiée. Nous vérifions ainsi la stabilité du tronçon de barre situé entre les points d'inflexion de la déformée.

7. APPLICATION NUMERIQUE



Vérification de la stabilité de la poutre AB dans le plan AX, AY.

N = 80 000 daN (effort pondéré) ; P = 2 800 daN.

La poutre est un profil HEB 240

$$S = 106 \text{ cm}^2$$
$$W/Z = 327 \text{ cm}^3$$
$$r_z = 6{,}08 \text{ cm}$$
$$\sigma_e = 24 \text{ daN/mm}^2$$

* $$f = \frac{A\ M_\bullet l^2}{E'I}$$

or $$M_o = \frac{pl}{4} \quad \text{et} \quad f = \frac{pl^3}{48\ E'I}$$

$$\frac{Pl^3}{48\ E'I} = \frac{A\ l^2}{E'I} \cdot \frac{pl}{4} \quad \text{d'où } A = \frac{1}{12}$$

* $$\sigma = \frac{80\ 000}{10\ 600} = 7{,}55 \text{ daN/mm}^2$$

* $$\sigma_f = \frac{2\ 800 \times 5}{4 \cdot 327} = 10{,}7 \text{ daN/mm}^2$$

* $$\mu = \frac{\sigma k}{\sigma} \qquad \sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{l}{r_z} \qquad \lambda = \frac{500}{6{,}08} = 82{,}2$$

$$\sigma_k = 30{,}7 \qquad (E = 21\ 000 \text{ daN/mm}^2)$$

d'où : $$\mu = \frac{30{,}7}{7{,}55} = 4{,}07$$

* $$k_1 = 1 + \frac{0{,}3}{4{,}07 - 1{,}3}$$

$$k_1 = 1{,}11$$

* $$k_f = 1 + \frac{1{,}3\ \pi^2 A}{\mu - 1{,}3}$$

$$k_f = 1{,}38$$

.../...

* $\sigma_m = 1{,}11 \times 7{,}55 + 1{,}38 \times 10{,}7$

$\sigma_m = 23{,}2$ daN/mm^2

$\sigma_m < 24$ daN/mm^2

Stabilité vérifiée

ANNEXE 2

PROGRAMME DE CALCUL DES STRUCTURES PLANES HYPERSTATIQUES PAR LA METHODE DES DEPLACEMENTS

Le présent programme est écrit en langage ALGOL et il est effectué sur l'ordinateur CII-10070 du Centre Interuniversitaire de traitement de l'Informatique (C.I.T.I) de l'Université des Sciences et Techniques de LILLE.

Ce programme nous permet de réaliser dans le domaine élastique, le calcul des structures suivantes :

1) structure avec noeuds rigides;

2) structure avec noeuds articulés (treillis articulés);

3) structure avec éléments à inertie variable :
   un élément à inertie variable peut être décomposé en tronçons de longueur arbitraire, et on adopte pour chaque tronçon une inertie constante égale à l'inertie moyenne.

Ce programme classe les données en quatre catégories suivantes :

(I) Données générales :

Dans ce programme, les dimensions des tableaux utilisés sont variables, on les détermine à l'aide de la première carte de données. Cette carte comporte les valeurs des termes suivants : NTN, NTE, NNAR, NTEC, NDINE, NTDI, EAM et EPM. Nous expliquerons au fur et à mesure ces termes.

La deuxième carte de données comporte respectivement les termes suivants :

EPSN : la différence minimale désirée des efforts, calculés pour chaque élément, entre deux tours successifs;

CN, CT : Si CN = 1 et CT = 1; on tient compte respectivement des effets des efforts normaux et tranchants dans le calcul, sinon on les néglige;

TORM : nombre de tours maximal autorisé;

E : Coefficient d'élasticité longitudinale;

CE : rapport entre les coefficients d'élasticité longitudinale et transversale.

(II) Données descriptives de la structure :

On choisit un repère général pour la structure et un repère local associé à chaque élément.

On classe les noeuds de la structure en deux catégories : la première catégorie comporte les noeuds libres qui peuvent se déplacer au moins dans une direction; la deuxième catégorie comporte les noeuds qui subissent trois déplacements imposés, on les appelle "les noeuds extérieurs". Les nombres totaux des noeuds libres et extérieurs sont présentés respectivement par (NTN) et (NNEX). Les noeuds articulés qui subissent uniquement un déplacement imposé (ΔX ou ΔY) sont considérés comme des noeuds libres.

On numérote tout d'abord les noeuds libres de 1 à (NTN) ensuite, on numérote les noeuds extérieurs de (NTN + 1) à (NTN+NNEX).

Afin de diminuer le temps nécessaire pour effectuer le programme, il est indispensable de numéroter les noeuds libres sans aucun déplacement imposé avant ceux qui subissent un ou deux déplacements imposés.

Pour chaque noeud libre, on désigne par (NEA) le nombre d'éléments arrivant à ce noeud et par (NEP) le nombre d'éléments partant de ce noeud. Dans les repères locaux, on choisit le sens positif de l'axe (OX) de manière à rendre minimales les valeurs maximales de (NEP) et (NEA) qui sont représentées par (EPM) et (EAM). Ceci afin de rendre la largeur de la bande de certains tableaux la plus petite possible.

On désigne par les termes (PE) et (NTE) respectivement la condition d'appuis de chaque élément et le nombre total d'éléments de la structure.

Les valeurs de (PE) suivant les conditions d'appuis sont les suivantes :

Elément bi-encastré : PE = 1 ($i \rightarrow j$)

Elément encastré-articulé : PE = 2

Elément articulé-encastré : PE = 3

Elément bi-articulé : PE = 4

La condition de liaison et les caractéristiques géométriques de chaque élément sont définies par deux cartes de données qui comportent respectivement :

1) NNI : noméro du noeud (i); NNJ : noméro du noeud (j), EP, AR : surface, SR : surface réduite.

2) IN : moment d'inertie, W : module d'inertie LX et LY : projections de la longueur de l'élément, respectivement sur les axes (OX) et (OY) du repère général.

Pour chaque noeud libre on établit les cartes de données suivantes :

la première carte détermine respectivement les valeurs de (NEP) et (NEA), ensuite, les (NEP) cartes suivantes donnent pour chaque élément partant du noeud considéré, le noméro du noeud (j) de l'élément (NJ) et le noméro de cet élément (NOEP). Finalement, à l'aide de (NEA) cartes, on détermine pour chaque élément arrivant au noeud considéré, le noméro du noeud (i) de l'élément (NI) et son noméro (NOEA).

On désigne par (NNAR), le nombre des noeuds libres et articulés. Dans ce programme on suppose que l'un des éléments aboutissant au noeud articulé, est encastré.

A l'aide de (NNAR) cartes on détermine les noméros des éléments supposés encastrés (NEAR) et leurs conditions d'appuis réelles (PPE).

(III) Données descriptives du chargement de la structure :

On classe le chargement de la structure en deux groupes :

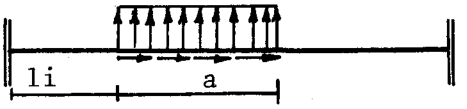
1) le chargement en travée des éléments

Dans ce programme, les différents cas de charges exposés en (2.2.6) sont programmés; et sont déterminés par les différentes valeurs du terme (IPOSE).

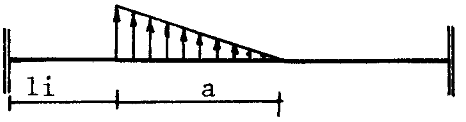
Les valeurs de (IPOSC) suivant les cas de charge sont les suivantes :

IPOSC = 1

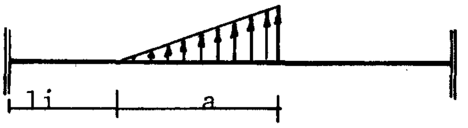
IPOSC = 2



IPOSC = 3



IPOSC = 4



Pour chaque élément chargé, la première carte de données désigne le noméro des éléments chargés (INOME) et le nombre total des différentes charges agissant en sa travée (NTCE).

Pour chaque cas de charge, à l'aide d'une carte, on détermine, IPOSC, ILI = li/l, IDA = a/l, IQX, IQY et IQZ.

IQX, IQY et IQZ sont données dans les repères locaux.

2) les forces nodales

Pour chaque noeud chargé, une carte de données désigne le noméro du noeud chargé (NOWC), et les trois composantes de la charge nodale (PX), (PY) et (PZ) relatives respectivement aux axes (OX), (OY) et (OZ), *les composantes précédentes sont données dans le repère général.*

(IV) <u>Données descriptives des déplacements imposés</u> :

Les déplacements imposés sont classés en deux groupes :

1) les déplacements imposés aux noeuds libres : on désigne par (NTDZ) le nombre total des déplacements imposés aux noeuds libres, ces déplacements sont numérotés de 1 à (NTDI). A l'aide de (NTDI) cartes de données, on définit pour chaque déplacement imposé, le noméro du déplacement imposé (DI), le noméro du noeud qui subit ce déplacement (NON) et le code du déplacement imposé (CDI). Pour différent déplacement imposé le code (CDI) prend les valeurs suivantes :

CDI = 1 $\rightarrow$ Δx est imposé

CDI = 2 $\rightarrow$ Δy est imposé

CDI = 3 $\rightarrow$ Δz est imposé

Dans ce programme, il est indispensable,pour numéroter les déplacements imposés, de ranger les noeuds qui subissent ces déplacements dans l'ordre des numéros croissants.

2) les déplacements non-nuls imposés aux noeuds extérieurs :

le nombre total de ces déplacements est désigné par (NDINE), et ils sont numérotés de 1 à (NDINE).

Dans ce cas, grâce à (NDINE) cartes on définit le noméro de de chaque déplacement (NDE), le numéro du noeud qui subit ce déplacement (NONI) et le code de ce déplacement (CDIE).

Les valeurs de (CDIE) sont identiques à celles de (CDI).

Impression des résultats

Le calcul se fait en plusieurs tours, le nombre de tours est désigné par (TORI). A la fin de chaque tour, pour chaque élément, on imprime :

1) les efforts nodaux aux extrémités de l'élément exprimés dans le repère local associé à l'élément.

2) les déplacements nodaux qui sont calculés dans le repère général.

3) la contrainte maximale qui est présentée par (CMAX).

Dans ce programme le calcul peut être interrompu pour l'une des trois raisons suivantes :

1) la précision demandée par (EPSN) est atteinte;

2) le nombre de tours maximal est atteint;

3) la matrice de rigidité est singulière; dans ce cas on sera averti par l'impression du texte suivante : "MATRICE K EST SINGULIERE".

```
'BEGIN'
'INTEGER'NNTT,CDIE;
  'INTEGER'NTN,NTE,NNEX,NNAR,NTNC,NTEC,NTDI,NDINE,NOME,NAR,NN,NDE,NE,NC,
NOC,NCE,NLC,UI,UJ,EP,EA,EC,EE,CE,CL,CI,CJ,CON,DI,DDC,I,II,INN,IRN,IJ  ,
J,JJ,JNN,JRN,TORI,TORE,ZJN,ZIN,KKT,HHT,POSC,IM,EAM,EPM,NN3,NRN,NOEC,
TORM,CFN,CT;'REAL'EPSN,E,GE;
'REAL'PIE;
'READ'(105,R2)NTN,NTE,NNEX,NNAR,NTEC,NDINE,NTDI,NTNC,EAM,EPM;
R2:'FORMAT'(10I4);
'READ'(105,WE)EPSN,CON,CT,TORM,E,GE; WE:'FORMAT'(E12.5,2I1,2E12.5);
NNTT:=3*(NTN+NNEX);
NLC:=NTN*3-NTDI;
PIE:=3.1415926535;
'BEGIN'
'ARRAY'IQX,IQY,IQZ,IDA,ILI,IPOSC(/1:NTEC,1:TORM/),K (/1: NNTT,1: NNTT/),
NEP(/1:NTN/),NEA(/1:NTN/),AA,BB,NNI,NNJ,PE,L,AR,SR,IN,EI,ALF,LN,LO,LA,RE
,W,LX,LY,COF1,COF2(/1:NTE/),NEAR,PPE(/1:NNAR/),INOME,NTCE(/1:NTEC/),
NCL,IDEPI,NON,CDI(/1:NTDI/),NONI(/1:NDINE/),NONC,PX,PY,PZ(/1:NTNC/),
FIJ,FJI(/1:NTE,1:3/),N(1:NTE,1:TORM/),T,KK,KH,HK,HH(/1:NTE,1:3,1:3/),
DEP,FT,FEX,G(/1: NNTT/),NOEP,NJ(/1:NTN,1:EPM/),NOEA,NI(/1:NTN,1:EAM/)
,CIJ,CJI(/1:NTN,1:3/),PFI,PFJ,PDJ,PDI(/1:3/);
'REAL'PSOMI,PSOMJ,SK,CMAX;
'REAL'QZ,X1J,X2J,Y1J,Y2J;
'ARRAY'BI,BJ,FK,QFI,QFJ(/1:3/),SKK,QI,QJ,MR(/1:3,1:3/);
'REAL'NL,  OME,OL,SO,CO,EL,AB,A,B,HS,HC,LAN,ESL,C,S,SS,CC,SC,AB1,AB2,
SOM,SOMI,SOMJ,SORI,SORJ,LL,ABL,U,LI,DA,QY,QX,LU,SN,CN;
'REAL'ED1,ED2,ED3,ED4,ED5,DE1,DE2,DE3,DE4,DE5,PK1,PK2,PH1,PH2,KIJ,KJI,
HIJ,HJI,XI,XJ,ZI,ZJ,YI,YJ,RFI,RFJ,QXY,X11,X21,Y11,Y21,QFI1,QFI2,
QFI3,QFJ1,QFJ2,QFJ3,DET,COF,EPSL,EDG;
'REAL''PROCEDURE'COSH(X);'REAL'X;'FORTRAN';
'REAL''PROCEDURE'SINH(X);'REAL'X;'FORTRAN';
'REAL''PROCEDURE'SH(X);'REAL'X; SH:=SINH(X);
'REAL''PROCEDURE'CH(X);'REAL'X; CH:=COSH(X);
'PROCEDURE'INVERT(A,N,IMPOSSIBLE);'VALUE'N;
'INTEGER'N;'ARRAY'A;'LABEL'IMPOSSIBLE;'ALGOL';
'WRITE'(108,REE)EPSN,CN,CT,TORM,E,GE;
REE:'FORMAT'(2X,'EPSN='E12.5,3X,'CN=',I1,3X,'CT=',I1,3X,
'TORM=',I2,3X,'E=',E12.5,'GE=',E12.5);
'WRITE'(108,W1)NTN,NTE,NNEX,NNAR,NTEC;
W1: 'FORMAT'('  NTN=',I2,'  NTE=',I2,'  NNEX=',I2,'  NNAR=',I2,
'  NTEC=',I2/);
'WRITE'(108,W2)NDINE,NTDI,NTNC,EAM,EPM;
W2:'FORMAT'('  NN3DI=',I2,'  NTDI=',I2,'  NTNC=',I2,'  EAM=',I2,'  EPM='
I2//);
'WRITE'(108,W3);W3:'FORMAT'(2X,95'*');
'WRITE'(108,W4);W4:'FORMAT'(2X,'*NE*NI*NJ*PE*     L      *     AR      *',
'     SR     *     IN     *     W     *     LX     *     LY      *');
'WRITE'(108,W5);W5:'FORMAT'(2X,95'*');
'FOR'NE:=1'STEP'1'UNTIL'NTE'DO''BEGIN'
'READ'(105,R6)NNI(/NE/),NNJ(/NE/),PE(/NE/),L(/NE/),AR(/NE/),SR(/NE/);
R6:'FORMAT'(I3,I3,I1,3D14.5);

'READ'(105,R7)IN(/NE/), W(/NE/),LX(/NE/),LY(/NE/);
R7:'FORMAT'(4D14.5);
'WRITE'(108,W6)NE,NNI(/NE/),NNJ(/NE/),PE(/NE/),L(/NE/),AR(/NE/),
SR(/NE/),IN(/NE/), W(/NE/),LX(/NE/),LY(/NE/);
```

```
W6:'FORMAT'(2X,'*',I2,'*',I2,'*',I2,'*',I2,'*',E10.3,'*',E10.3,'*',
E10.3,'*',E11.4,'*',E11.4,'*',E11.4,'*',    E11.4,'*');
ALF(/NE/):=ARCTAN(LY(/NE/)/LX(/NE/));
'IF'LX(/NE/)<0.0'THEN'ALF(/NE/):=ALF(/NE/)+PIE;
EI(/NE/):=E*IN(/NE/);
'END';
'WRITE'(108,W7);W7:'FORMAT'(2X,93'*'///);
'WRITE'(108,W8);W8:'FORMAT'(15X,38'*');
'WRITE'(108,W9);W9:    'FORMAT'(15X,'* NN * NEP * EP * NJ * NEA *',
'EA * NI  *');
'WRITE'(108,W10);W10:'FORMAT'(15X, 38'*');
'FOR'NN:=1'STEP'1'UNTIL'NTN+NNEX'DO''BEGIN'
'READ'(105,R3)NEP(/NN/),NEA(/NN/);
R3:'FORMAT'(2I2);
'WRITE'(108,W11)NN,NEP(/NN/),NEA(/NN/);
W11:'FORMAT'(15X,'* ',I2,' * ',I2,'  *    *    * ',I2,'  *    *    *');
'IF'NEP(/NN/)=0'THEN''GOTO'TT1;
'FOR'EP:=1'STEP'1'UNTIL'NEP(/NN/)'DO''BEGIN'
'READ'(105,R4)NJ(/NN,EP/),NOEP(/NN,EP/); R4:'FORMAT'(2I3);
'WRITE'(108,W12)EP,NOEP(/NN,EP/),NJ(/NN,EP/);
 W12:'FORMAT'(15X,'*    *  ',I2,' * ',I2,' * ',I2,' *    *    *');
'END';
TT1:'IF'NEA(/NN/)=0'THEN''GOTO'TT2;
   'FOR'EA:=1'STEP'1'UNTIL'NEA(/NN/)'DO''BEGIN'
'READ'(105,R5)NI(/NN,EA/),NOEA(/NN,EA/); R5:'FORMAT'(2I3);
  'WRITE'(108,W13)EA,NOEA(/NN,EA/),NI(/NN,EA/);
W13:'FORMAT'(15X,'*    *    *    *    * ',I2,' * ',I2,' * ',I2,' *');
'END';
TT2:
'END';
'WRITE'(108,W14);W14:'FORMAT'(15X,38'*'//);
'IF'NNAR=0'THEN''GOTO'RT1;
'WRITE'(108,W15);W15:'FORMAT'(2X,'LES ELEMENTS AVEC UNE EXTREMITEE',
' SUPPOSEE ENCASTEREE'//);
'WRITE'(108,W16);W16:'FORMAT'(15X, 13'*');
'WRITE'(108,W17);W17:'FORMAT'(15X,'* NEAR * PE *');
'WRITE'(108,W18);W18:'FORMAT'(15X,13'*');
'FOR'NAR:=1'STEP'1'UNTIL'NNAR'DO''BEGIN'
'READ'(105,R8)NEAR(/NAR/),PPE(/NAR/);
R8:'FORMAT'(I3,I1);
'WRITE'(108,W19)NEAR(/NAR/),PPE(/NAR/);
W19:'FORMAT'(15X,'*  ',I2,'  * ',I2,' *');
'END';
'WRITE'(108,W20);W20:'FORMAT'(15X,13'*'//);
RT1:'IF'NTEC=0'THEN''GOTO'RT2;
'WRITE'(108,W21);W21:'FORMAT'(15X,'ELEMENTS CHARGES'/);
'WRITE'(108,W22);W22:'FORMAT'(2X,77'*');
'WRITE'(108,W23);W23:'FORMAT'(2X,'*NE*NTCE*PC*     LI     *     DA',
'     *     QX     *     QY     *     QZ     *');
'WRITE'(108,W24); W24:'FORMAT'(2X,77'*');
'FOR'EC:=1'STEP'1'UNTIL'NTEC'DO''BEGIN'
'READ'(105,R9)INOME(/EC/),NTCE(/EC/);
R9:'FORMAT'(I3,I3);
'WRITE'(108,W25)INOME(/EC/),NTCE(/EC/);
W25:'FORMAT'('  *',I2,'* ',I2,' *  *            *          *',
```

```
'                              *                     *                    *');
'FOR'CE:=1'STEP'1'UNTIL'NTCE(/EC/)'DO''BEGIN'
'READ'(105,R10)IPOSC(/INOME(/EC/),CE/),ILI(/INOME(/EC/),CE/),
IDA(/INOME(/EC/),CE/),IQX(/INOME(/EC/),CE/),IQY(/INOME(/EC/),CE/),
IQZ(/INOME(/EC/),CE/);
R10:'FORMAT'(I1,5F12.5);
'WRITE'(108,W26)IPOSC(/INOME(/EC/),CE/),ILI(/INOME(/EC/),CE/),
IDA(/INOME(/EC/),CE/),IQX(/INOME(/EC/),CE/),IQY(/INOME(/EC/),CE/),
IQZ(/INOME(/EC/),CE/);
W26:'FORMAT'(2X,'*  *    * ',I1,'*',5(E12.7,'*'));
'END';   'END';
'WRITE'(108,W27);W27:'FORMAT'(2X,77'*'///);
RT2:'IF'NTNC=0'THEN''GOTO'RT3  ;
'WRITE'(108,W40);W40:'FORMAT'(15X,'NOEUDS CHARGES'//);
'WRITE'(108,W41);W41:'FORMAT'(15X,45'*');
'WRITE'(108,W42);W42:'FORMAT'(15X,'* NN *      PX      *      PY',
'      *      MZ      *');
'WRITE'(108,W43);W43:'FORMAT'(15X,45'*');
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'NNTT'DO''BEGIN'FEX(/I/):=0;  'END';
'FOR'NC:=1'STEP'1'UNTIL'NTNC'DO''BEGIN'

R13:'FORMAT'(I2,3F14.5);
'WRITE'(108,W44)NONC(/NC/),PX(/NC/),PY(/NC/),PZ(/NC/);
W44:'FORMAT'(15X,'* ',I2,' *',E12.5,'*',E12.5,'*',E12.5,'*');
NOC:= NONC(/NC/)*3;
FEX(/NOC-2/):=PX(/NC/);FEX(/NOC-1/):=PY(/NC/);FEX(/NOC/):=PZ(/NC/);
'END';
'WRITE'(108,W45);W45:'FORMAT'(15X,45'*'//);
RT3:'IF'NTDI=0'THEN''GOTO'RT4;
'WRITE'(108,W28);W28:'FORMAT'(15X,'DEPLACEMENTS IMPOSES');
'WRITE'(108,W29);W29:'FORMAT'(15X,29'*');
'WRITE'(108,W30);W30:'FORMAT'(15X,'* DI * NN * CD *    DEPI    *');
'WRITE'(108,W31);W31:'FORMAT'(15X,29'*');
'FOR'DI:=1'STEP'1'UNTIL'NTDI'DO''BEGIN'
'READ'(105,R11)IDEPI(/DI/),NON(/DI/),CDI(/DI/);
R11:'FORMAT'(E12.5,I3,I1);
'WRITE'(108,W32)DI,NON(/DI/),CDI(/DI/),IDEPI(/DI/);
W32:'FORMAT'(15X,'* ',I2,' * ',I2,' * ',I1,'  *',E12.5,'*');
'END';
'WRITE'(108,W33);W33:'FORMAT'(15X,29'*'/);
RT4: 'IF'NDINE=0'THEN''GOTO'RT5;
'WRITE'(108,W34);W34:'FORMAT'(15X,'NOEUDS EXTERIEURS AVEC DES',
'DEPLACEMENTS IMPOSES NONNULS'/);
'WRITE'(108,W35);W35:'FORMAT'(15X,27'*');
'WRITE'(108,W36);W36:'FORMAT'(15X,'*NDINE*NN*CODI*    DEP    *');
'WRITE'(108,W37);W37:'FORMAT'(15X,27'*');
'FOR'NDE:=1'STEP'1'UNTIL'NDINE'DO''BEGIN'
'READ'(105,R12)NONI(/NDE/),CDIE,DEP(/(NONI(/NDE/)-1)*3+CDIE/);
R12:'FORMAT'(2I3,F11.4);
'WRITE'(108,W38)NDE,NONI(/NDE/),CDIE,DEP(/(NONI(/NDE/)-1)*3+CDIE/);
W38:'FORMAT'(15X,'* ',I2,'  *',I2,'* ',I2,' *',E11.4,'*');

'END';
'WRITE'(108,W39);W39:'FORMAT'(15X,27'*'//);
RT5:
'FOR'NE:=1'STEP'1'UNTIL'NTE'DO''BEGIN'
```

```
T(/NE,1,1/):=T(/NE,2,2/):=T(/NE,3,3/):=-1;
T(/NE,2,1/):=T(/NE,1,2/):=T(/NE,1,3/):=T(/NE,2,3/):=0;
T(/NE,3,1/):=-LY(/NE/);
T(/NE,3,2/):=LX(/NE/);
'END';
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3*NTN'DO''BEGIN'
G(/I/):=0.;
'END';
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'NTE'DO''BEGIN'
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
CIJ(/I,J/):=CJI(/I,J/):=0;   'END';'END';
TORE:=1;
'WRITE'(108,UU6);UU6:'FORMAT'(2X,'NE',7X,'FI1',11X,'FI2',
11X,'FI3',11X,'FJ1',11X,'FJ2',11X,'FJ3'/
14X,'DEPI1',9X,'DEPI2',9X,'DEPI3',9X,'DEPJ1',9X,'DEPJ2',9X,'DEPJ3',
9X,'CMAX'/);
TE:TORI:=1;
TI:'FOR'INN:=1'STEP'1'UNTIL'NNTT'DO''BEGIN'
    'FOR'JNN:=1'STEP'1'UNTIL'NNTT'DO''BEGIN'
K(/INN,JNN/):=0;'END';FT(/INN/):=DEP(/INN/):=0;'END';
'IF'TORI>1'THEN''GOTO'ET5;
'FOR'NE:=1'STEP'1'UNTIL'NTE'DO''BEGIN'
N(/NE,1/):=0;   'END';
ET5:
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3*NTN'DO''BEGIN'
FT(/I/):=-G(/I/);
'END';
'IF'NTNC=0'THEN''GOTO'ETN;
'FOR'NC:=1'STEP'1'UNTIL'NTNC'DO''BEGIN'
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
NOC:=3*(NONC(/NC/)-1);
FT(/NOC+I/):=FT(/NOC+I/)+FEX(/NOC+I/);
'END';'END';
ETN:
'FOR'NE:=1'STEP'1'UNTIL'NTE'DO''BEGIN'
'IF'CEN=0'THEN''GOTO'ET6;
'IF'ABS(N(/NE,TORI/))<EPSN'THEN''GOTO'ET6;
'IF'N(NE,TORI/)<0'THEN''GOTO'ET7;
NL:=1-( GE*N(/NE,TORI/)/(E*SR(/NE/)));
LN(/NE/):=NL;
OME:=SQRT(ABS(N(/NE,TORI/))/(EI(/NE/)*NL));
OL:=OME*L(/NE/);
LO(/NE/):=OL;
SO:=SIN(OL); CO:=COS(OL);
EL:=EI(/NE/)/L(/NE/);
OME:=SQRT(ABS(N(/NE,TORI/))/(EI(/NE/)*NL));
ET7:NL:=1+( GE*ABS(N(/NE,TORI/))/(E*SR(/NE/)));
AB:=OL*NL*SO-2*(1-CO);
A:=EL*OL*(OL*NL*CO-SO)/AB;
B:=-EL*OL*(OL*NL-SO)/AB;
AA(/NE/):=A;  BB(/NE/):=B;

'GOTO'ET8;
OL:=OME*L(/NE/);
LO(/NE/):=OL;
LN(/NE/):=NL;
```

```
HS:=(EXP(OL)-EXP(-OL))/2;  HC:=(EXP(OL)+EXP(-OL))/2;
EL:=EI(/NE/)/L(/NE/);
AB:=OL*NL*HS-2*(HC-1);
A:=EL*OL*(OL*NL*HC-HS)/AB;
B:=-EL*OL*(OL*NL-HS)/AB;
AA(/NE/):=A;  BB(/NE/):=B;
'GOTO'ET8;
ET6:EL:=EI(/NE/)/L(/NE/);
'IF'CT=0'THEN''BEGIN'LAN:=LA(/NE/):=0.;'GOTO'E66;     'END'F
LAN:=2.5*IN(/NE/)/(SR(/NE/)*L(/NE/)*L(/NE/));
LA(/NE/):=LAN;
E66:
A:=4*EL*(1+3*LAN)/(1+12*LAN);
B:=2*EL*(1-6*LAN)/(1+12*LAN);
AA(/NE/):=A;   BB(/NE/):=B;
ET8:
    ESL:=E*AR(/NE/)/L(/NE/);
C:=COS(ALF(/NE/)); S:=SIN(ALF(/NE/)); SS:=S*S; CC:=C*C; SC:=S*C;
'IF'PE(/NE/)=1'THEN''GOTO'ET9;
'IF'PE(/NE/)=2'THEN''GOTO'ET10;
'IF'PE(/NE/)=3'THEN''GOTO'ET11'ELSE''GOTO'ET12;
ET9:
AB1:=(A+B)/L(/NE/);  AB2:=2*AB1/L(/NE/);
KK(/NE,1,1/):=ESL*CC+AB2*SS;
KK(/NE,2,1/):=KK(/NE,1,2/):=(ESL-AB2)*SC;
KK(/NE,1,3/):=KK(/NE,3,1/):=-AB1*S;
KK(/NE,2,2/):=ESL*SS+AB2*CC;
KK(/NE,2,3/):=KK(/NE,3,2/):=C*AB1;
KK(/NE,3,3/):=A;
'GOTO'ET13;
ET10:AB1:=(A*A-B*B)/(A*L(/NE/));
AB2:=AB1/L(/NE/);
KK(/NE,1,1/):=ESL*CC+AB2*SS;
KK(/NE,2,1/):=KK(/NE,1,2/):=(ESL-AB2)*SC;
KK(/NE,2,2/):=ESL*SS+AB2*CC;
KK(/NE,3,1/):=KK(/NE,1,3/):=-AB1*S;
KK(/NE,2,3/):=KK(/NE,3,2/):=AB1*C;
KK(/NE,3,3/):=AB1*L(/NE/);
'GO TO'ET13;
ET11:AB1:=(A*A-B*B)/(A*L(/NE/));
AB2:=AB1/L(/NE/);
KK(/NE,1,1/):=ESL*CC+AB2*SS;
KK(/NE,2,1/):=KK(/NE,1,2/):=(ESL-AB2)*SC;
KK(/NE,2,2/):=ESL*SS+AB2*CC;
KK(/NE,3,1/):=KK(/NE,1,3/):=KK(/NE,2,3/):=KK(/NE,3,2/):=KK(/NE,3,3/):=0;
'GOTO'ET13;
ET12:KK(/NE,1,1/):=ESL*CC;
KK(/NE,1,2/):=KK(/NE,2,1/):=ESL*SC+COF1(/NE/)*SC;
KK(/NE,2,2/):=ESL*SS;
KK(/NE,3,1/):=KK(/NE,1,3/):=KK(/NE,2,3/):=KK(/NE,3,2/):=KK(/NE,3,3/):=0;
ET13:'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'

'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOM:=0;
'FOR'IJ:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOM:=SOM+T(/NE,I,IJ/)*KK(/NE,IJ,J/);'END';
```

```
HK(/NE,I,J/):=KH(/NE,J,I/):=SOM;
'END';'END';
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOM:=0;
'FOR'IJ:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOM:=SOM+T(/NE,I,IJ/)*KH(/NE,IJ,J/);'END';
HH(/NE,I,J/):=SOM;'END';'END';
'END';
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SKK(/I,J/):=0;
'END'; 'END';
 'FOR'INN:=1'STEP'1'UNTIL'NTN+NNEX'DO''BEGIN'
     IRN:=(INN-1)*3;
'IF'NEP(/INN/)=0'THEN''GOTO'ET14;
'FOR'EP:=1'STEP'1'UNTIL'NEP(/INN/)'DO''BEGIN'
JRN:=NJ(/INN,EP/)*3-3;
     'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
     'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
K(/JRN+J,IRN+I/):=K(/IRN+I,JRN+J/):=KH(/NOEP(/INN,EP/),I,J/);
SKK(/I,J/):=SKK(/I,J/)+KK(/NOEP(/INN,EP/),I,J/);
'END';
'END';'END';
ET14:
'IF'NEA(/INN/)=0'THEN''GOTO'ET16;
'FOR'EA:=1'STEP'1'UNTIL'NEA(/INN/)'DO''BEGIN'
JRN:=NI(/INN,EA/)*3-3;
     'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
     'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
K(/JRN+J,IRN+I/):=K(/IRN+I,JRN+J/):=HK(/NOEA(/INN,EA/),I,J/);
SKK(/I,J/):=SKK(/I,J/)+HH(/NOEA(/INN,EA/),I,J/);
'END';'END';
'END';
ET16:
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
K(/IRN+J,IRN+I/):=K(/IRN+I,IRN+J/):=SKK(/I,J/);
SKK(/I,J/):=0;
'END'; 'END';
'END';
'IF'NNAR=0'THEN''GOTO'ET101;
'FOR'NAR:=1'STEP'1'UNTIL'NNAR'DO''BEGIN'
NE:=NEAR(/NAR/);
PE(/NE/):=PPE(/NAR/);
C:=COS(ALF(/NE/)); S:=SIN(ALF(/NE/)); SS:=S*S; CC:=C*C; SC:=S*C;
A:=AA(/NE/);  B:=BB(/NE/);
     ESL:=E*AR(/NE/)/L(/NE/);
'IF'PE(/NE/)=2'THEN''GOTO'EP1;
'IF'PE(/NE/)=3'THEN''GOTO'EP2 'ELSE''GOTO'EP3;
 EP1:AB1:=(A*A-B*B)/(A*L(/NE/));

AB2:=AB1/L(/NE/);
KK(/NE,1,1/):=ESL*CC+AB2*SS;
KK(/NE,2,1/):=KK(/NE,1,2/):=(ESL-AB2)*SC;
KK(/NE,2,2/):=ESL*SS+AB2*CC;
```

```
KK(/NE,3,1/):=KK(/NE,1,3/):=-AB1*S;
KK(/NE,2,3/):=KK(/NE,3,2/):=AB1*C;
KK(/NE,3,3/):=AB1*L(/NE/);
'GOTO'EP4;
 EP2:AB1:=(A*A-B*B)/(A*L(/NE/));
AB2:=AB1/L(/NE/);
KK(/NE,1,1/):=ESL*CC+AB2*SS;
KK(/NE,2,1/):=KK(/NE,1,2/):=(ESL-AB2)*SC;
KK(/NE,2,2/):=ESL*SS+AB1*CC;
KK(/NE,3,1/):=KK(/NE,1,3/):=KK(/NE,2,3/):=KK(/NE,3,2/):=KK(/NE,3,3/):=0;
'GOTO'EP4;
EP3: KK(/NE,1,1/):=ESL*CC;
KK(/NE,1,2/):=KK(/NE,2,1/):=ESL*SC;
KK(/NE,2,2/):=ESL*SS;
KK(/NE,3,1/):=KK(/NE,1,3/):=KK(/NE,2,3/):=KK(/NE,3,2/):=KK(/NE,3,3/):=0;
 EP4:'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOM:=0;
'FOR'IJ:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOM:=SOM+T(/NE,I,IJ/)*KK(/NE,IJ,J/);'END';
HK(/NE,I,J/):=KH(/NE,J,I/):=SOM;
'END';'END';
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOM:=0;
'FOR'IJ:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOM:=SOM+T(/NE,I,IJ/)*KH(/NE,IJ,J/);'END';
HH(/NE,I,J/):=SOM;'END';'END';
'END';
ET101:
'IF'NTEC=0'THEN''GOTO'TE1;
'FOR'EC:=1'STEP'1'UNTIL'NTEC'DO''BEGIN'
SORI:=SORJ:=QFI1:=QFI2:=QFI3:=QFJ1:=QFJ2:=QFJ3:=0;
NOME:=INOME(/EC/);
S:=SIN(ALF(/NOME/));
C:=COS(ALF(/NOME/));
CC:=C*C;    SS:=S*S;    SC:=S*C;
A:=AA(/NOME/);
B:=BB(/NOME/);
LL:=L(/NOME/);
ABL:=(A+B)/(A*LL);
N1:=LN(/EC/);
'IF'PE(/NOME/)=1'THEN''GOTO'ET20;
'IF'PE(/NOME/)=2'THEN''GOTO'ET21;
'IF'PE(/NOME/)=3'THEN''GOTO'ET22;
BJ(/1/):=S/LL; BI(/2/):=BJ(/2/):=C/LL; BI(/1/):=-S/LL;
BJ(/3/):=BI(/3/):=0;        'GOTO'ET23;
ET22:BI(/1/):=BI(/2/):=BI(/3/):=0;  BJ(/1/):=ABL*S;BJ(/2/):=-ABL*C;
BJ(/3/):=B/A; 'GOTO'ET23;
ET21:BI(/1/):=BI(/2/):=BI(/3/):=0; BI(/1/):=-ABL*S; BI(/2/):=ABL*C;
BI(/3/):=B/A;       'GOTO'ET23;

ET20:'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'BI(/I/):=BJ(/I/):=0;  'END';
ET23:LL:=L(/NOME/)*L(/NOME/)/2;
'FOR'NCE:=1'STEP'1'UNTIL'NTCE(/EC/)'DO''BEGIN'
POSC:=IPOSC(/NOME,NCE/);
```

```
'IF'POSC=1'THEN''GOTO'ET24;
'IF'POSC=2'THEN''GOTO'ET25;
'IF'POSC=3'THEN''GOTO'ET26;
DA:=IDA(/NOME,NCE/);          LI:=ILI(/NOME,NCE/);
LU:=1/(DA*U*U*2);          QY:=IQY(/NOME,NCE/);
'IF'ABS(N(/NE,TORI/))<EPSN'THEN''GOTO'ET27;
U:=LO(/NOME/)/2; NL:=LN(/NOME/); DE1:=U*(2*LI+2*DA-1); ED1:=(1-2*LI)*U;
'IF'N(/NOME,TORI/)<0'THEN''GOTO'ET28;
CN:=COS(U);        SN:=SIN(U);
PK1:=(-COS(DE1)/U+LU*(SIN(DE1)+SIN(ED1))+DA*(1-2*LI-4*DA/3)*SN)/
(SN-U*NL*CN);
PK2:=(-SIN(DE1)/U+LU*(COS(DE1)-COS(ED1))+DA*CN)/(U*NL*SN);
KIJ:=LL*(PK1+PK2)/4;   KJI:=LL*(PK1-PK2)/4;'GOTO'ET29;
ET28:HC:=CH(U); HS:=SH(U); DE1:=U*(2*LI+2*DA-1);  ED1:=U*(1-2*LI);
PK1:=(-CH(DE1)/U+LU*(SH(DE1)+SH(ED1))-DA*(1-2*LI-4*DA/3)*HS)/
(U*NL*HC-HS);
PK2:=(SH(DE1)/U+LU*(CH(DE1)-CH(ED1))-DA*HC)/(U*NL*HS);
KIJ:=LL*(PK1+PK2)/4;   KJI:=LL*(PK1-PK2)/4;   'GOTO'ET29;
ET27:  ED1:=2*DA+2*LI-1;   DE1:=1-2*LI;
ED3:=ED1*ED1*ED1; ED4:=ED3*ED1;  ED5:=ED4*ED1;
DE4:=DE1*DE1*DE1*DE1;       DE5:=DE4*DE1;
PK1:=(-ED4/32+(ED5+DE5)/(320*DA)+(ED1-2*DA/3)*DA/8)/(1+12*LA(/NOME/));
PK2:=(ED3/24)-(ED4/(192*DA))+(DE4/(DA*192))-DA/8;
KIJ:=LL*(PK1+PK2);     KJI:=LL*(PK1-PK2);
ET29:
AB1:=1/(A-B);    AB2:=AB1*L(/NOME/)/(A+B);
XI:=(-A*KIJ+B*(KJI-DA*(1-LI-2*DA/3)*LL))*AB2;
YI:=(-KIJ+KJI-DA*(1-LI-2*DA/3)*LL)*AB1;
QI(/1,1/):=XI*SS; QI(/2,1/):=QI(/1,2/):=-XI*SC;
QI(/2,2/):=XI*CC;  QI(/3,1/):=-YI*S;  QI(/3,2/):=YI*C;
QI(/1,3/):=QI(/2,3/):=QI(/3,3/):=0;
XJ:=(A*KJI-B*(KIJ+DA*(LI+2*DA/3)*LL))*AB2;
YJ:=(KIJ-KJI+DA*LL*(LI+2*DA/3))*AB1;
QJ(/1,1/):=XJ*SS; QJ(/2,1/):=QJ(/1,2/):=-XJ*SC;
QJ(/2,2/):=XJ*CC;  QJ(/3,1/):=-YJ*S;  QJ(/3,2/):=YJ*C;
QJ(/1,3/):=QJ(/2,3/):=QJ(/3,3/):=0;
FK(/1/):=-S*QY; FK(/2/):=C*QY;FK(/3/):=0.;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOMI:=SOMJ:=0;
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOMI:=SOMI+QI(/I,J/)*FK(/J/);SOMJ:=SOMJ+QJ(/I,J/)*FK(/J/); 'END';
QFI(/I/):=SOMI; QFJ(/I/):=SOMJ;        'END';
RFI:=-DA*(1-LI-2*DA/3)*LL*QY; RFJ:=DA*(LI+2*DA/3)*LL*QY; 'GOTO'ET39;
ET26: DA:=IDA(/NOME,NCE/);  LI:=ILI(/NOME,NCE/); QY:=IQY(/NOME,NCE/);
'IF'ABS(N(/NE,TORI/))<EPSN'THEN''GOTO'ET30;
LU:=1/(DA*U*U*2);
DE1:=U*(2*DA+2*LI-1); DE2:=U*(1-2*LI);
'IF'N(/NOME,TORI/) <0'THEN''GOTO'ET31;
CN:=COS(U);     SN:=SIN(U);

PK1:=(-LU*(SIN(DE1)+SIN(DE2))+DA*(1-2*LI-2*DA/3)*SN+COS(DE2)/U)
 /(SN-U*NL*CN);
PK2:=(LU*(COS(DE2)-COS(DE1))-SIN(DE2)/U+DA*CN)/(U*NL*SN);
KIJ:=LL*(PK1+PK2)/4;   KJI:=LL*(PK1-PK2)/4;
```

```
'GO TO' ET32;
ET31:
HC:=CH(U);        HS:=SH(U);
DE1:=(2*LI+2*DA-1);   DE2:=U*(1-2*LI);
PK1:=(-LU*(SH(DE1)+SH(DE2))+CH(DE2)/U-DA*(1-2*LI-2*DA/3)*HS)
 /(U*NL*HC-HS);
PK2:=(-LU*(CH(DE1)-CH(DE2))+SH(DE2)/U-DA*HC)/(U*NL*HS);
KIJ:=LL*(PK1+PK2)/4;   KJI:=LL*(PK1-PK2)/4;
'GO TO'ET32;
ET30:
ED1:=1-2*LI-2*DA;   ED2:=ED1*ED1;   ED5:=ED1*ED2*ED2;
DE1:=1-2*LI;
DE2:=DE1*DE1;   DE3:=DE2*DE1;   DE4:=DE1*DE3;
PK1:=((ED5-DE5)/(320*DA)-(DE1-2*DA/3)*DA/8+DE4/32)/(1+12*LA(/NOME/));
PK2:=(DA-DE1)*(DE2+ED2)/48+DE3/24-DA/8;
KIJ:=(PK1+PK2)*LL;          KJI:=(PK1-PK2)*LL;
ET32:
AB1:=1/(A-B);   AB2:=L(/NOME/)*AB1/(A+B);
XI:=AB2*(-A*KIJ+B*(KJI+DA*LL*(1-LI-DA/3)));
YI:=AB1*(-KIJ+KJI-LI*LL*(1-LI-DA/3));
XJ:=AB2*(A*KJI-B*(KIJ+LI*LL*(DA+LI/3)));
YJ:=AB1*(KIJ-KJI+DA*LL*(LI+DA/3));
QI(/1,1/):=SS*XI;   QI(/2,1/):=QI(/1,2/):=-XI*SC;
QI(/2,2/):=CC*XI;   QI(/3,1/):=-S*YI;   QI(/3,2/):=C*YI;
QI(/1,3/):=QI(/2,3/):=QI(/3,3/):=0;
QJ(/2,2/):=CC*XJ;   QJ(/3,1/):=-S*YJ;   QJ(/3,2/):=C*YJ;
QJ(/1,3/):=QJ(/2,3/):=QJ(/3,3/):=0;
QJ(/1,1/):=SS*XJ;   QJ(/2,1/):=QJ(/1,2/):=-SC*XJ;
FK(/1/):=-S*QY; FK(/2/):=C*QY;FK(/3/):=0.;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOMI:=SOMJ:=0;
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOMI:=SOMI+QI(/I,J/)*FK(/J/);
SOMJ:=SOMJ+QJ(/I,J/)*FK(/J/);
'END';
QFI(/I/):=SOMI;    QFJ(/I/):=SOMJ;
'END';
RFI:=-DA*(1-LI-DA/3)*LL*QY;   RFJ:=DA*LL*(LI+DA/3)*QY; 'GOTO'ET39;
ET25: DA:=IDA(/NOME,NCE/);  LI:=ILI(/NOME,NCE/); QY:=IQY(/NOME,NCE/);
QX:=IQX(/NOME,NCE/);
'IF'ABS(N(/NE,TORI/))<EPSN'THEN''GOTO'ET33;
U:=LO(/NOME/)/2;
NL:=LN(/NOME/);
DE1:=U*(2*LI+2*DA-1);DE2:=U*(1-2*LI);
PK2:=(-SIN(DE1)-SIN(DE2)+2*DA*U*CN)/(U*NL*SN);
KIJ:=(PK1+PK2)*LL/(U*4);   KJI:=(PK1-PK2)*LL/(U*4);
'GO TO'ET35;

ET34:
HC:=CH(U);       HS:=SH(U);
DE1:=(2*LI+2*DA-1)*U;
DE2:=(1-2*LI)*U;
```

```
PK1:=(CH(DE2)-CH(DE1)-2*U*DA*(1-2*LI-DA)*HS)/(U*NL*HC-HS);
PK2:=(SH(DE2)+SH(DE1)-2*DA*U*HC)/(U*NL*HS);
KIJ:=(PK1+PK2)*LL/(4*U);
KJI:=(PK1-PK2)*LL/(4*U);
'GO TO'ET35;
ET33:
DE1:=2*LI+2*DA-1;   DE3:=DE1*DE1*DE1;
ED1:=1-2*LI;     ED3:=ED1*ED1*ED1;
PK1:=DA*(ED1-DA)*(LI*(LI-1)-DA*(1-2*LI-DA)/2);
PK2:=(ED3+DE3)/24-DA/4;
'IF'N(/NOME,TORI/)<0'THEN''GO TO'ET34;
KIJ:=(PK1+PK2)*LL/2;
KJI:=(PK1-PK2)*LL/2;
ET35:
LI:=LL*2;
AB1:=1/(A-B);  AB2:= L(/NOME/)*AB1/(A+B);
XI:=AB2*(-A*KIJ+B*(KJI-DA*(1-LI-DA/2)*LL));
YI:=AB1*(-KIJ+KJI-DA*(1-LI-DA/2)*LL);
ZI:=DA*(1-LI-DA/2)*LL/(E*AR(/NOME/));
XJ:=AB2*(A*KJI-B*(KIJ+DA*(LI+DA/2)*LL));
YJ:=AB1*(KIJ-KJI+LL*DA*(LI+DA/2));
ZJ:=DA*(LI+DA/2)*LL/(E*AR(/NOME/));
QI(/1,1/):=ZI*CC+XI*SS;  QI(/2,2/):=ZI*SS+XI*CC;
QI(/2,1/):=QI(/1,2/):=(ZI-XI)*SC;  QI(/3,1/):=-YI*S;  QI(/3,2/):=YI*C;
QI(/1,3/):=QI(/2,3/):=QI(/3,3/):=0;
QJ(/1,1/):=ZJ*CC+XJ*SS;  QJ(/2,2/):=ZJ*SS+XJ*CC;
QJ(/2,1/):=QJ(/1,2/):=(ZJ-XJ)*SC;  QJ(/3,1/):=-YJ*S;  QJ(/3,2/):=YJ*C;
QJ(/1,3/):=QJ(/2,3/):=QJ(/3,3/):=0;
FK(/1/):=C*QX-S*QY;  FK(/2/):=C*QY+S*QX; FK(/3/):=0.;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOMI:=SOMJ:=0;
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOMI:=SOMI+QI(/I,J/)*FK(/I/);
SOMJ:=SOMJ+QJ(/I,J/)*FK(/J/);
'END';
QFI(/I/):=SOMI;  QFJ(/I/):=SOMJ;
'END';
RFI:=-DA*(1-LI-DA/2)*LL*2*QY; RFJ:=DA*(LI+DA/2)*LL*2*QY;  'GOTO'ET39;
ET24:
LI:=ILI(/NOME,NCE/);
QX:=IQX(/NOME,NCE/);
QY:=IQY(/NOME,NCE/);
QZ:=IQZ(/NOME,NCE/);
LI:=L(/NOME/);
'IF'ABS(N(/NE,TORI/))<EPSN'THEN''GOTO'ET36;
NL:=LN(/NOME/);
U:=LO(/NOME/)/2;
DE1:=(1-2*LI)*U;
'IF'N(/NOME,TORI/)<0'THEN''GO TO'ET37;
CN:=COS(U);      SN:=SIN(U);
PK1:=((1-2*LI)*SN-NL*SIN(DE1))/(SN-U*NL*CN);

PK2:=(CN-NL*COS(DE1))/(U*NL*SN);
KIJ:=LL*(PK1+PK2)/4;  KJI:=LL*(PK1-PK2)/4;
PH1:=(U*NL*COS(DE1)-SN)/(SN-U*NL*CN);
PH2:=-SIN(DE1)/SN;
```

```
HIJ:=(PH1+PH2)/2;   HJI:=(PH1-PH2)/2;
'GOTO'ET38;
ET37:
HC:=CH(U);   HS:=SH(U);
PK2:=(-HC+NL*CH(DEI))/(U*NL*HS);
PK1:=(-DEI*HS+NL*SH(DEI))/(U*NL*HC-HS);
KIJ:=LL*(PK1+PK2)/4;   KJI:=LL*(PK1-PK2)/4;
PH1:=(HS-U*NL*CH(DEI))/(U*NL*HC-HS);
PH2:=-SH(DEI)/HS;
HIJ:=(PH1+PH2)/2;   HJI:=(PH1-PH2)/2;
'GO TO'ET38;
ET36:
LAN:=LA(/NOME/);
DEI:=1-LI;   DE2:=DEI*DEI;   EDI:=1+12*LAN;
CN:=COS(U);   SN:=SIN(U);
PK1:=(COS(DE2)-COS(DEI)+2*DA*U*(1-2*LI-DA)*SN)/(SN-U*NL*CN);
KIJ:=(-LI*DE2+(6*DE2-2+12*LAN)*LAN)*LL/EDI;
KJI:=(DEI*LI*LI+LAN*(6*(1+LI)*DEI-4-12*LAN))*LL/EDI;
HIJ:=DEI*(2*LI-DEI-12*LAN)/EDI;   HJI:=LI*(2*DEI-LI-12*LAN)/EDI;
ET38:
DEI:=1-LI;   AB1:=1/(A-B);   AB2:=LL*AB1/(A+B);
ZI:=LL*DEI/(E*AR(/NOME/));
X1I:=AB2*(-KIJ+B*(KJI-LL*DEI));
X2I:=AB2*(-HIJ+B*(HJI+1));
Y1I:=AB1*(-KIJ+KJI-LL*DEI);
Y2I:=AB1*(HJI-HIJ+1);
ZJ:=LL*LI/(E*AR(/NOME/));
X1J:=-AB2*(-A*KJI+B*(KIJ+LL*LI));
X2J:=-AB2*(-A*HJI+B*(HIJ+1));
Y1J:=AB1*(KIJ-KJI+LL*LI);
Y2J:=AB1*(HIJ-HJI+1);
QI(/1,1/):=CC*ZI+SS*X1I;   QI(/2,1/):=QI(/1,2/):=SC*(ZI-X1I);
QI(/2,2/):=SS*ZI+CC*X1I;   QI(/1,3/):=-S*X2I;   QI(/2,3/):=C*X2I;
QI(/3,1/):=-S*Y1I;   QI(/3,2/):=C*Y1I;   QI(/3,3/):=Y2I;
QJ(/1,1/):=CC*ZJ+SS*X1J;   QJ(/2,1/):=QJ(/1,2/):=SC*(ZJ-X1J);
QJ(/2,2/):=SS*ZJ+CC*X1J;   QJ(/1,3/):=-S*X2J;   QJ(/2,3/):=C*X2J;
QJ(/3,1/):=-S*Y1J;   QJ(/3,2/):=C*Y1J;   QJ(/3,3/):=Y2J;
FK(/1/):=C*QX-S*QY; FK(/2/):=S*QX+C*QY; FK(/3/):=QZ;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOMI:=SOMJ:=0;
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOMI:=SOMI+QI(/I,J/)*FK(/J/);
SOMJ:=SOMJ+QJ(/I,J/)*FK(/J/);
'END';
QFI(/I/):=SOMI;   QFJ(/I/):=SOMJ;   'END';
RFI:=(1-LI)*L(/NOME/)*QY+QZ; RFJ:=L(/NOME/)*LI+QZ;
ET39:
SORI:=SORI+RFI;
SORJ:=SORJ+RFJ;
QFI1:=QFI1+QFI(/1/);   QFI2:=QFI2+QFI(/2/);   QFI3:=QFI3+QFI(/3/);
QFJ1:=QFJ1+QFJ(/1/);   QFJ2:=QFJ2+QFJ(/2/);   QFJ3:=QFJ3+QFJ(/3/);

'END';
QFI(/1/):=QFI1;   QFI(/2/):=QFI2;   QFI(/3/):=QFI3;
QFJ(/1/):=QFJ1;   QFJ(/2/):=QFJ2;   QFJ(/3/):=QFJ3;
RFI:=SORI;   RFJ:=SORJ;
```

```
UI:=NNI(/NOME/)*3-3;    UJ:=NNJ(/NOME/)*3-3;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOMI:=SOMJ:=0;
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOMI:=SOMI+KH(/NOME,I,J/)*QFI(/J/);
SOMJ:=SOMJ+HK(/NOME,I,J/)*QFJ(/J/);
'END';
CIJ(/NOME,I/):=SOMI+RFI*BI(/I/);
CJI(/NOME,I/):=SOMJ+RFJ*BJ(/I/);
FT(/  UI+I/):=FT(/  UI+I/)-CIJ(/NOME,I/);
FT(/UJ  +I/):=FT(/  UJ+I/)-CJI(/NOME,I/);
'END';
'END';
TFI:
'IF'NTDI=0'THEN''GO TO'ET50;
'FOR'DI:=1'STEP'1'UNTIL'NTDI'DO''BEGIN'
NCL(/DI/):=NON(/DI/)*3+CDI(/DI/)-3;
'END';
'FOR'DI:=1'STEP'1'UNTIL'NTDI-1'DO''BEGIN'
DDC:=NCL(/DI+1/)-NCL(/DI/);
'IF'DDC=1'THEN''GOTO'ET51;
CL:=NCL(/DI/);
'FOR'II:=1'STEP'1'UNTIL'DDC-1'DO''BEGIN'
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'CL+II'DO''BEGIN'
K(/I,CL+II-DI/):=K(/I,CL+II/);
'END';
'END';
ET51: 'END';
'IF'CDI(/NTDI/)=3'THEN''GO TO'ET52;
'FOR'CI:=3-CDI(/NTDI/)-1'STEP'-1'UNTIL'0'DO''BEGIN'
K(/I,NLC-CI/):=K(/I,NLC+NTDI-CI/);
'END';
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'NLC+NTDI'DO''BEGIN'
K(/I,NLC/):=K(/I,NLC+NTDI/);
'END';
ET52:
'FOR'DI:=1'STEP'1'UNTIL'NTDI-1'DO''BEGIN'
DDC:=NCL(/DI+1/)-NCL(/DI/);
'IF'DDC=1'THEN''GOTO'ET555;
CL:=NCL(/DI/);
'FOR'JJ:=1'STEP'1'UNTIL'DDC-1'DO''BEGIN'
'FOR'J:=CL-DI+JJ'STEP'1'UNTIL'NLC'DO''BEGIN'
K(/CL+JJ-DI,J/):=K(/CL+JJ,J/);
'END';
FT(/CL+JJ-DI/):=FT(/CL+JJ/);
'END';
ET555:'END';
'IF'CDI(/NTDI/)=3'THEN''GOTO'ET50;
'FOR'CI:=3-CDI(/NTDI/)-1'STEP'-1'UNTIL'0'DO''BEGIN'
'FOR'CJ:=CI'STEP'-1'UNTIL'0'DO''BEGIN'
K(/NLC-CI,NLC-CJ/):=K(/NLC+NTDI-CI,NLC+NTDI-CJ/);
'END';
FT(/NLC-CI/):=FT(/NLC+NTDI-CI/);
'END';
ET50:
```

```
INVERT(K,NLC,SINO);
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'NLC'DO''BEGIN'
SOM:=0;
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'NLC'DO''BEGIN'
SOM:=SOM+K(/I,J/)*FT(/J/);
'END';
DEP(/I/):=SOM;
'END';
'IF'NTDI=0'THEN''GOTO'ETT;
DI:=J:=0;
'FOR'I:=NLC+NTDI'STEP'-1'UNTIL'NCL(/I/)'DO''BEGIN'
'IF'NCL(/NTDI-DI/)=I'THEN''BEGIN'DEP(/I/):=IDEPI(/NTDI-DI/);DI:=DI+1;
'GOTO'E55;'END';
DEP(/I/):=DEP(/NLC-J/);J:=J+1;
E55:'END';
I:=NNTT/2; 'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'I'DO''BEGIN'
'WRITE'(108,W89)DEP(/J/);W89:'FORMAT'(15X,'!',E12.5,'!' );
'END';
'WRITE'(108,W90) TORI,DEP(/J+1/);W90:'FORMAT'(7X,'DEP=',I2,')=!',
E12.5,'!');
'FOR'I:=J+2'STEP'1'UNTIL'NNTT'DO''BEGIN'

'END';
ETT:
TORI:=TORI+1;
'FOR'NE:=1'STEP'1'UNTIL'NTE'DO''BEGIN'
UI:=NNI(/NE/)*3-3;     UJ:=NNJ(/NE/)*3-3;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOMJ:=SOMI:=0.;
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOMJ:=SOMJ+HK(/NE,I,J/)*DEP(/UI+J/)+HH(/NE,I,J/)*DEP(/UJ+J/);
SOMI:=SOMI+KK(/NE,I,J/)*DEP(/UI+J/)+KH(/NE,I,J/)*DEP(/UJ+J/);
'END';
FIJ(NE,I/):=SOMI+CIJ(/NE,I/)+G(/NNI(/NE/)*3-3+I/);
FJI(NE,I/):=SOMJ+CJI(/NE,I/)+G(/NNJ(/NE/)*3-3+I/);
'END';
'END';
'FOR'NE:=1'STEP'1'UNTIL'NTE'DO''BEGIN'
UI:=NNI(/NE/)*3-3;  UJ:=NNJ(/NE/)*3-3;
S:=SIN(ALF(/NE/));   C:=COS(ALF(/NE/));
MR(/1,1/):=MR(/2,2/):=C;  MR(/1,2/):=S;  MR(/2,1/):=-S;
MR(/1,3/):=MR(/2,3/):=MR(/3,2/):=MR(/3,1/):=0; MR(/3,3/):=1;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
PSOMI:=PSOMJ:=0.;
SOMI:=SOMJ:=0.;
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO''BEGIN'
SOMI:=SOMI+MR(/I,J/)*FIJ(/NE,J/);   SOMJ:=SOMJ+MR(/I,J/)*FJI(/NE,J/);
PSOMI:=PSOMI+MR(/I,J/)*DEP(/UI+J/);  PSOMJ:=PSOMJ+MR(/I,J/)*DEP(/UJ+J/);
'END';PFI(/I/):=SOMI;PFJ(/I/):=SOMJ;
PDI(/I/):=PSOMI; PDJ(/I/):=PSOMJ;    'END';
RF(/NE/):=(PDJ(/2/)-PDI(/2/))/L(/NE/);

'IF'ABS(PFI(/3/))>ABS(PFJ(/3/))'THEN'CMAX:=ABS(PFI(/1/)/AR(/NE/))
+ABS(PFI(/3/)/W(/NE/)) 'ELSE'CMAX:=ABS(PFJ(/1/)/AR(/NE/))
+ABS(PFJ(/3/)/W(/NE/));
'WRITE'(108,UU7)             NE,PFI(/1/),PFI(/2/),PFI(/3/),
```

```
PFJ(/1/),PFJ(/2/),PFJ(/3/),DEP(/UI+1/),DEP(/UI+2/),DEP(/UI+3/),
DEP(/UJ+1/),DEP(/UJ+2/),DEP(/UJ+3/),CMAX;
UU7:'FORMAT'(2X,I2,6E14.5/8X,7E14.5/);
'IF'TORI=TORM'THEN''GOTO'ENN;
N(/NE,TORI/):=PFI(/1/)*COS(RE(/NE/))+PFI(/2/)*SIN(RE(/NE/));
COF:=PFI(/1/)*RE(/NE/);
COF1(/NE/):=-S*COF; COF2(/NE/):=C*COF;
'END';
'FOR'NN:=1'STEP'1'UNTIL'NTN+NNEX'DO''BEGIN'
SOMI:=SOMJ:=0;
'FOR'EP:=1'STEP'1'UNTIL'NEP(/NN/)'DO''BEGIN'
SOMI:=SOMI+COF1(/NOEP(/NN,EP/)/); SOMJ:=SOMJ+COF2(/NOEP(/NN,EP/)/);
'END';
'FOR'EA:=1'STEP'1'UNTIL'NEA(/NN/)'DO''BEGIN'
SOMI:=SOMI-COF1(/NOEA(/NN,EA/)/); SOMJ:=SOMJ-COF2(/NOEA(/NN,EA/)/);
'END';
G(/NN*3-2/):=SOMI;    G(/NN*3-1/):=SOMJ;
'END';
'IF'TORI<5'THEN''GOTO'TI;
'FOR'NE:=1'STEP'1'UNTIL'NTE'DO''BEGIN'
'IF'ABS(N(/NE,TORI/)-N(/NE,TORI-1/))>EPSL'THEN''GOTO'TI;
'END';
ENN:
'WRITE'(108,UU8);UU8:'FORMAT'(100'*'/);
'GOTO'WWS;
SING:'WRITE'(108,SG);SG:'FORMAT'(2X,'MATRICE K EST SINGU.');
WWS:
'END';
'END'
```