N° 536

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

par

François VAN ISEGHEM

CONDITIONS SUFFISANTES POUR LE CALCUL DES VARIATIONS MULTIDIMENSIONNEL

MEMBRES DU JURY : M. PARREAU, *Président*
P. ANTOINE, *Rapporteur*
J.C. DE PARIS, *Examinateur*

Soutenue le 30 JUIN 1975

Je tiens à remercier les membres du Jury : Monsieur PARREAU, Monsieur DE PARIS, et particulièrement Monsieur ANTOINE qui m'a encouragé et aidé de précieux conseils.

Je remercie Madame BERAT et Madame LENGAIGNE dont la rapidité et le soin ont permis de réaliser cet ouvrage.

SOMMAIRE

.../...

PREFACE

Si l'on étudie en termes de couples en dualité, les problèmes variationnels classiques unidimensionnels, pour des fonctionnelles J et J_o définies sur $C^r([0,1],\mathbb{R}^p)$ et $C^r_{oo}([0,1],\mathbb{R}^p)$ par $J(h) = \int_0^1 f(t,h(t),\dot{h}(t))dt$, et $J_o = J \circ \tau$, avec $r \geqslant 2$, $\alpha \geqslant 1$ f de classe $C^{r+\alpha}$, τ l'injection canonique de $C^r_{oo}([0,1],\mathbb{R}^p)$ dans $C^r([0,1],\mathbb{R}^p)$; J et J_o sont de classe $C^{\alpha+1}$ pour les couples en dualité (cf. Page 4)
$(C^r([0,1],\mathbb{R}^p)\ ;\ C^{r-2}([0,1],\mathbb{R}^p) \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p\ ;\ \Phi)$ et $(C^r_{oo}([0,1],\mathbb{R}^p)\ ;$ $C^{r-2}([0,1],\mathbb{R}^p)\ ;\ \Phi_o)$.

En particulier, $d^2J(h)$ et $d^2J_o(h)$ se factorisent par des opérateurs différentiels du second ordre :

$$d\delta J(h) = L(h) : C^r([0,1],\mathbb{R}^p) \longrightarrow C^{r-2}([0,1],\mathbb{R}^p) \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p,$$

$$d\delta J_o(h) = L'(h) : C^r_{oo}([0,1],\mathbb{R}^p) \longrightarrow C^{r-2}([0,1],\mathbb{R}^p),$$

qui, moyennant des hypothèses naturelles de régularité, sont des opérateurs de fredholm d'indice zéro.

Si h_o est une extrèmale (solution de l'équation d'Euler relative à J_o), pour laquelle les conditions de régularité, de Legendre, et de Jacobi, sont vérifiées, $L'(h_o)$ est un isomorphisme défini positif ; le lemme de Morse pour les couples en dualité, démontré par Antoine [1], entraîne que J_o admet en h_o un minimum local strict pour la topologie $C^r_{oo}([0,1],\mathbb{R}^p)$. Une étude analogue est possible pour $r = 1$, en modifiant la définition des couples en dualité, les opérateurs $L(h)$ et $L'(h)$ étant alors des opérateurs intégro-différentiels.

Dans le cas multidimensionnel, $[0,1]$ est remplacé par la boule unité fermée B de $\mathbb{R}^N$, et J est définie sur $C^r(B,\mathbb{R}^p)$ par

$$(1) \qquad J(h) = \int_B f(x,h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x))dx,$$

J_o étant définie par $J_o = J \circ \tau$, où τ est l'injection canonique de $C_o^r(B,\mathbb{R}^p)$ dans $C^r(B,\mathbb{R}^p)$.

On montre dans le chapitre II, que J et J_o sont de classe $C^{\alpha+1}$ pour les couples en dualité $(C^r(B,\mathbb{R}^p), C^{r-2}(B,\mathbb{R}^p) \times C^{r-1}(\partial B,\mathbb{R}^p), \Phi)$ et $(C_o^r(B,\mathbb{R}^p), C^{r-2}(B,\mathbb{R}^p), \Phi_o)$, en particulier, $d^2J(h)$ et $d^2J_o(h)$ se factorisent par des opérateurs différentiels du second ordre :

$$d\delta J(h) = L(h) : C^r(B,\mathbb{R}^p) \longrightarrow C^{r-2}(B,\mathbb{R}^p) \times C^{r-1}(\partial B,\mathbb{R}^p)$$

$$d\delta J_o(h) = L'(h) : C_o^r(B,\mathbb{R}^p) \longrightarrow C^{r-2}(B,\mathbb{R}^p).$$

Cependant, si l'on considère $L'(h) = \Delta$, pour lequel les conditions d'ellipticité et de Legendre sont vérifiées, ainsi que l'équivalent des conditions de Jacobi, Δ n'est pas un isomorphisme, de même,

$$(2) \qquad L(h) = \Lambda = (id - \Delta \; ; \; \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial}{\partial x_i})$$

est défini positif, mais n'est pas un isomorphisme ; par contre, Λ et Δ se prolongent en des isomorphismes définis positifs de $H^1(B,\mathbb{R}^p)$ dans $H^{-1}(B,\mathbb{R}^p)$ (resp. de $H_o^1(B,\mathbb{R}^p)$ dans $H_o^{-1}(B,\mathbb{R}^p)$. On démontre dans le chapitre III, que de manière générale, $L(h) = d\delta J(h)$ se prolonge en $\bar{L}(h)$ de $H^1(B,\mathbb{R}^p)$ dans $H^{-1}(B,\mathbb{R}^p)$, de telle sorte que le prolongement $\bar{L}(h)$ soit continu par rapport à $h \in C^r(B,\mathbb{R}^p)$, pour la topologie C^r.

Nous sommes ainsi amenés, dans le chapitre III, à étudier plus généralement des fonctionnelles J de classe $C^{\alpha+1}$, sur des couples (F,F',Φ), pour lesquelles $L(h) = d\delta J(h) : F \to F'$ se prolonge en $\bar{L}(h)$, à des espaces de hilbert définis à partir d'opérateurs hilbertisants $\Lambda : F \to F'$ (B, ch. III). En général, J ne se prolonge pas à ces espaces de hilbert, par exemple, la fonctionnelle définie par (1) ne se prolonge pas à l'espace de Sobolev construit à partir de l'opérateur Λ défini par (2) ; et le lemme de Morse pour les couples ne peut s'appliquer pour l'étude du minimum local. Pourtant, moyennant une hypothèse de continuité de $h \rightsquigarrow \bar{L}(h)$, réalisée pour J défini par (1), on peut donner une condition suffisante générale d'existence d'un minimum strict local : c'est le théorème O (ch. III) que l'on peut comparer aux résultats particuliers de Kimble [4], dont les hypothèses sont plus restrictives. On est alors conduit à rechercher des conditions suffisantes pour que $\bar{L}(h)$ soit un isomorphisme, défini, positif.

Dans le chapitre IV, on démontre que moyennant des hypothèses d'ellipticité $\bar{L}(h)$ est un opérateur de fredholm, d'indice zéro, cette propriété généralise une propriété connue en dimension 1, mais dont un argument majeur de la démonstration est faux dès la dimension 2.

Considérant la fonctionnelle définie par (1), on examine ensuite, des problèmes variationnels avec contraintes globales ou sur le bord, on démontre dans le chapitre V comment ces problèmes se ramènent à un problème variationnel sans contrainte sur le noyau d'un morphisme de la catégorie des couples en dualité ; cela conduit à examiner la "restriction" d'un opérateur de fredholm entre espaces de hilbert, à un sous-espace de hilbert, on montre (Ch. V, D) que sous certaines hypothèses (par exemple, la positivité), la "restriction" d'un opérateur de fredholm, est encore un opérateur de fredholm.

Lorsque l'on considère des conditions nulles sur le bord de B, l'extension des conditions suffisantes d'ellipticité, de Jacobi, de Legendre, au cas multidimensionnel, se fait alors en reprenant la terminologie de Dennemeyer [2] et Hestenes [3] concernant les surfaces conjuguées et les points focaux, les conditions de Jacobi considérées, correspondant aux conditions nécessaires démontrées par Dennemeyer [2]. Certaines démonstrations relatives aux opérateurs de fredholm peuvent être simplifiées lorsque des conditions d'ellipticité et de Legendre sont réunies, cependant le caractère de fredholm associée à la seule condition d'ellipticité, permet d'envisager l'étude de problèmes variationnels avec contraintes, pour lesquels les conditions de Legendre ne s'imposent pas.

Dans le chapitre VI, on étudie quelques propriétés de la catégorie des couples en dualité, puis des variétés modelées sur des couples en dualité. On envisage, enfin, l'étude d'une famille d'opérateurs différentiels d'ordre 2, mis en évidence dans le calcul des variations.

CHAPITRE I

THEORIE DE JACOBI

1 - *Rappel de la théorie classique en dimension* 1.

Position du problème : On cherche à minimiser la fonctionnelle définie par $J(\ell) = \int_0^1 g(t,\ell(t),\dot{\ell}(t))dt$ avec $\ell \in C^2_{A,B}(I,\mathbb{R}^p)$

$\ell(0) = A \quad ; \quad \ell(1) = B.$

$$g : I \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^3$$
$$(t, x, y) \rightsquigarrow g(t,x,y).$$

En fait, on recherche des minima locaux, et $I \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ peut être remplacé par $I \times \Omega$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$.

Si $h \in C^2_{o,o}(I,\mathbb{R}^p)$ $(h(0) = h(1) = 0)$ et $\varepsilon > 0$, on définit les variations première et seconde de J aurtour de ℓ_o, de la manière suivante :

La variation première : $\Delta_1 J$ est définie par

$$J(\ell_o+\varepsilon h) - J(\ell_o) = \varepsilon\, \Delta_1 J(\ell_o,h) + o(\varepsilon)$$

avec $$\Delta_1 J(\ell_o,h) = \int_0^1 \{g'_x(t,\ell_o(t),\dot{\ell}_o(t))h(t) + g'_y(\ )\dot{h}(t)\}dt$$

$$= \int_0^1 \{g'_x(\ ) - \frac{d}{dt}\left[g'_y(\ )\right]\}h(t)dt.$$

On en déduit la condition d'Euler :

$g'_x(t,\ell_o(t),\dot{\ell}_o(t)) - \frac{d}{dt}\,[g'_y(\ )] = 0$ (E) qui est nécessaire pour que ℓ_o corresponde à un minimum local. Une courbe ℓ_o vérifiant l'équation (E) est appelée une extrémale.

La variation seconde : $\Delta_2 J$ est définie de la manière suivante, au voisinage d'une extrémale ℓ_o :

$$J(\ell_o+\varepsilon h) - J(\ell_o) = \frac{1}{2}\ \varepsilon^2\ \Delta_2 J(\ell_o,h) + o(\varepsilon^2)$$

avec $\Delta_2 J(\ell_o,h) = \int_0^1 \{P_1(h)^2 + S_1 hh' + S_2 h'h + R_1(h')^2\}\,dt$

avec $P_1^{(t)} = g''_{x^2}(t,\ell_o(t),\dot{\ell}_o(t))$; $S_1^{(t)} = g''_{xy}(\ )$; $S_2^{(t)} = g''_{yx}(\ )$; $R_1^{(t)} = g''_{y^2}(\ )$.

L'étude du signe de la variation seconde $\Delta_2 J(\ell_o,h)$, faite par Legendre, Jacobi... conduit à l'introduction des définitions et des conditions suivantes, pour une extrèmale ℓ_o :

(i) *Condition de régularité :* On suppose que $\forall\ t \in I$,

$g''_{y^2}(t,\ell_o(t),\dot{\ell}_o(t)) \in \mathrm{isom}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^p)$.

Champ de Jacobi, Opérateur de Jacobi.

Pour $\ell \in C^2_{A,B}(I,\mathbb{R}^p)$, l'opérateur de Jacobi $L(\ell)$ est défini par :

$$L(\ell) : C^2(I,\mathbb{R}^p) \longrightarrow C^o(I,\mathbb{R}^p)$$

$$H \leadsto L(\ell).H = (P_1 - \frac{d}{dt}S_2).H + (S_1 - S_2 - \frac{d}{dt}R_1)\dot{H} - R_1\ddot{H}$$

Une solution H de $L(\ell).H = 0$ est appelée **champ de Jacobi** le long de ℓ.

Points conjugués.- On dit que $t_o \in]0,1]$ est conjugué de 0 le long de ℓ_o, s'il existe un champ de Jacobi non nul H tel que $H(0) = H(t_o) = 0$.

(ii) *Condition de Jacobi* ; On suppose qu'aucun point de $]0,1]$ n'est conjugué de 0, le long de l'extrémale ℓ_o.

(iii) *Condition de Legendre* :

α) $\forall$ t, $g''_{y^2}(t,\ell_o(t),\dot{\ell}_o(t))$ positive.

β) $g''_{y^2}(0,\ell_o(0),\dot{\ell}_o(0))$ définie positive.

Théorème.- Si ℓ_o est une courbe extrémale (solution de l'équation d'euler (E)), pour laquelle les conditions (i), (ii), (iii) sont vérifiées, J présente en h_o un minimum local strict pour la topologie faible.

2 - *Interprétation de ces résultats à l'aide des couples en dualité.*

La fonctionnelle J est définie sur $C^2_{A,B}(I,\mathbb{R}^p)$ qui est une variété banachique modelée sur $C^2_{o,o}(I,\mathbb{R}^p)$, une carte globale en $C_o \in C^2_{A,B}(I,\mathbb{R}^p)$ étant définie par $\emptyset : C^2_{o,o}(I,\mathbb{R}^p) \to C^2_{A,B}(I,\mathbb{R}^p)$ telle que $\emptyset(h) = C_o + h$.

En carte globale, la fonctionnelle J se transforme en J sur $C^2_{o,o}(I,\mathbb{R}^p)$ telle que $J(h) = \int_0^1 g(t,C_o(t)+h(t),\dot{C}_o(t)+\dot{h}_o(t))dt$

$$= \int_0^1 f(t,h(t),\dot{h}(t)dt,$$

avec $f : I \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe C^3.

Posons $F = C^2_{o,o}(I,E)$; $F' = C^o(I,E^*)$ $E = \mathbb{R}^p$, et considérons la dualité Φ entre F et F' définie par

$$\Phi(L,K) = \int_0^1 L(t).K(t)dt.$$

Dans ces conditions, nous savons (cf. annexe sur les couples en dualité), que J est de classe C^2 pour les couples en dualité

$$dJ(h).H = \phi(\delta J(h),H)$$

avec $\delta J(h) = f'_p(.h,\dot{h}) - \frac{d}{dt}\left[f'_q(.,h,\dot{h})\right].$

Interprétation de l'équation d'Euler :

donc, pour que J admette un minimum local en h_o, il faut que $dJ(h_o) = 0$ soit $\delta J(h_o) = 0$ donc h_o doit vérifier l'équation d'euler (E') :

$$f'_p(t,h_o(t),\dot{h}_o(t)) - \frac{d}{dt}\left[f'_q(t,h_o(t),\dot{h}_o(t)\right] = 0 \quad ;$$

par conséquent, on retrouve ainsi le fait que $C_o + h_o = \ell_o$ vérifie l'équation d'euler (E).

Interprétation du champ de Jacobi :

$\delta J : F \to F'$ est de classe C^1, et sa différentielle $d\delta J$ a pour expression : $d\delta J(h).H = d\delta J(h).H = \left[P - \frac{d}{dt}Q_2\right]H - (\frac{d}{dt}R)\dot{H}$

$$- R\ddot{H} + (Q_1 - Q_2)\dot{H}.$$

avec $P(t) = f''_{p^2}(t,h(t),\dot{h}(t))$; $Q_1(t) = f''_{pq}(\ )$; $R(t) = f''_{q^2}(\ )$; $Q_2(t) = f''_{qp}(\ )$

$= g''_{x^2}(t,\ell\,(t),\dot{\ell}(t))$; $= g''_{xy}(\ )$; $= g''_{y^2}(\ )$; $= g''_{yx}(\ )$

donc $L(h) = d\delta J(h)$ est l'opérateur de Jacobi en $(h + C_o)$.

En fait, $d\delta J(h) \in L\left[C^2_{o,o}(I,E),C^o(I,E^*)\right]$, il se prolonge de manière évidente à $C^2(I,E)$.

Interprétation des points conjugués.

Soit I_λ l'intervalle $[0,\lambda]$ $0 < \lambda \leq 1$.

Définissons pour tout $\lambda \in]0,1]$, $P_\lambda(h) : C^2(I_\lambda,E) \to C^o(I_\lambda,E^*)$

par $P_\lambda(h).H = \left[P - \frac{d}{dt}Q_2\right]H - \left(\frac{d}{dt}R\right)\dot{H} - R\,\ddot{H} + \left[Q_1 - Q_2\right]\dot{H}$.

En fait, on considère $L(h)$ opérant sur $C^2(I_\lambda,E)$.

Dans ces conditions, λ est conjugué de 0 le long de $h_o + C_o$ si et seulement si $\ker P_\lambda \neq \{0\}$.

Interprétation des conditions de régularité, de Legendre, de Jacobi.

Condition de régularité.- L'hypothèse $\forall$ t, $f''_{q^2}(t,h_o(t),h_o(t)) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^p)$ implique (cf. Antoine, calcul différentiel sur les couples, applications) que $d\delta J(h_o) = L(h_o)$ est un opérateur de Fredholm de $C^2_{o,o}(I,E)$ dans $C^o(I,E^*)$ d'indice 0.

Condition de Jacobi.- Si l'on suppose qu'aucun point $\lambda \in]0,1]$ n'est conjugué de 0 le long de h_o, cela implique que $P_\lambda(h_o)$ est injectif (donc si la condition de régularité est vérifiée également, $P_\lambda(h_o)$ est un isomorphisme de $C^2_{o,o}(I_\lambda,E)$ dans $C^o(I_\lambda,E^*)$.

Condition de Legendre.- La condition de Legendre β) implique que l'opérateur $L_o(h_o) : C^2_{o,o}(I,E) \to C^o(I,E^*)$ défini par

$$L_o(h_o).H = - \frac{d}{dt} \left[R(0)\dot{H}\right]$$

est un isomorphisme symétrique positif.

Démonstration de la condition suffisante de Jacobi-Legendre à l'aide des couples en dualité (dans l'hypothèse de la régularité).

Première démonstration :

Si h_o est solution (E') h_o est un point critique de J. D'autre part, 0 et 1 n'étant pas conjugués, $L(h_o) = d\delta J(h_o)$ est un isomorphisme de $C^2_{o,o}(I,E)$ sur $C^o(I,E^*)$.

Donc d'après le théorème de Morse pour les couples en dualité [cf. connexe sur couples en dualité], il existe une carte locale contenant h_o, telle que dans cette carte locale, on ait :
$J(x+h_o) - J(h_o) = \phi\left[L(h_o).x \; ; \; x\right]$.

Etude de $L(h_o)$: désignons par ϑ_λ et Ψ_λ les isomorphismes linéaires définis pour $\lambda \in \left]0,1\right]$ par :

$$\vartheta_\lambda : C^2_{o,o}(I,E) \longrightarrow C^2_{o,o}(I_\lambda,E)$$

$$h \rightsquigarrow h_\lambda : t \longrightarrow h_\lambda(t) = h\left(\frac{t}{\lambda}\right)$$

$$\Psi_\lambda : C^o(I,E^*) \longrightarrow C^o(I_\lambda,E^*)$$

$$L \rightsquigarrow L_\lambda : t \longrightarrow L_\lambda(t) = L\left(\frac{t}{\lambda}\right) .$$

Définissons alors $L_\lambda(h_o) = \lambda\left[\Psi_\lambda^{-1} \circ P_\lambda^{(h_o)} \circ \hat{\psi}_\lambda\right] \qquad 0 < \lambda \leqslant 1$

$$L_o(h_o) = -\frac{d}{dt}\left[R(0)\dot{H}\right]$$

$\lambda \rightsquigarrow L_\lambda(h_o)$ est continue sur $[0,1]$

$L_o(h_o)$ est un isomorphisme symétrique positif

$L_\lambda(h_o)$ est un isomorphisme symétrique pour $0 < \lambda \leqslant 1$

Donc, $L(h_o)$ appartient à la composante connexe de $L_o(h_o)$ dans $\mathrm{Isom}_s(F,F')$ donc [cf. couples en dualité] $L(h_o)$ est un <u>isomorphisme symétrique positif</u> d'où <u>le résultat</u>.

<u>Deuxième démonstration</u> :

Soit $\theta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\theta(t) = J(h_o + th)$

θ est de classe C^2, et $\dot{\theta}(t) = dJ(h_o + th).h = \phi(\delta J(h_o + th);h)$

$\ddot{\theta}(t) = \Phi(d\delta J(h_o + th).h;h)$.

Donc d'après la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral, on obtient

$$J(h_o+h) - J(h_o) = \theta(1) - \theta(0) = \int_0^1 (1-z)\ddot{\theta}(z)dz$$

$$= \int_0^1 (1-z)\Phi(L(h_o+zh).h,h)dz = \Phi\left[\left(\int_0^1 (1-z)L(h_o+zh)dz\right)h;h\right]$$

$$J(h_o+h) - J(h_o) = \Phi(a(h).h;h) \quad \text{avec} \quad a(h) = \int_0^1 (1-z)L(h_o+zh)dz$$

avec $a(0) = \frac{1}{2} L(h_o)$.

Or, l'application $h \to a(h)$ est continue, pour la topologie $C^r_{o,o}$ donc pour h voisin de 0, $a(h)$ est isomorphisme défini positif d'où le résultat.

CHAPITRE II

POSITION DU PROBLEME EN DIMENSION SUPERIEURE A 1.

Ⓐ *Position du problème.*

L'intervalle I est remplacé par la boule unité fermée B de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$; E est un espace de banach sur $\mathbb{R}$

$$f : B \times E \times E^N \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^{r+\alpha} \qquad r \geqslant 2 \ ; \quad \alpha \geqslant 1$$
$$(x,p,(q_i)) \rightsquigarrow f(x,p,(q_i)).$$

On considère sur $C^r(B,E)$, muni de la topologie C^r, la fonctionnelle J définie par $J(h) = \int_B f(x,h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x))dx.$

On considère d'autre part $C^r_o(B,E) = \{h, h \in C^r(B,E) | h_{|\partial B} = 0\}$ avec l'injection canonique $\tau : C^r_o(B,E) \to C^r(B,E)$, on désignera par J_o, $J \circ \tau$.

On recherche alors des conditions nécessaires et des conditions suffisantes d'existence de minimum local pour J et J_o.

Etudions ce problème en terme de couples en dualité.

Soit $F = C^r(B,E)$; $F' = C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*)$

$F_o = C^r_o(B,E)$; $F'_o = C^{r-2}(B,E^*)$.

(F,F') et (F_o,F'_o) sont des couples en dualité par Φ et Θ, tels que $\phi : F' \times F \longrightarrow \mathbb{R}$

$$((\ell_1,\ell_2),h) \rightsquigarrow \int_B \ell_1(x).h(x)dx + \int_{\partial B} \ell_2(x).h(x)d\sigma$$

$$\begin{aligned} \Theta : F'_o \times F_o &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\ell,h) &\rightsquigarrow \int_B \ell(x).h(x)dx. \end{aligned}$$

Nous désignerons par ψ (resp. θ) les injections de F' dans F^* (resp. de F'_o dans F^*_o) déduite de Φ (resp. Θ). D'autre part, il existe un morphisme de couples (τ,τ') entre (F_o,F'_o,Θ) et (F,F',Φ), tel que $\tau'((\ell_1,\ell_2)) = \ell_1$.

$$\begin{tikzcd} F_o \arrow[r, "\tau"] & F \arrow[r, "J"] & \mathbb{R} \\ F'_o & F' \arrow[l, "\tau'"'] & \\ \Theta & \phi & \end{tikzcd}$$

B <u>*Enoncé des résultats*</u> *(Nous les démontrerons dans la partie D).*

① J et J_o sont de classe $C^{\alpha+1}$ (au sens des couples)

donc $dJ :$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr] \arrow[dr, "\delta J"'] & & F^* \\ & F' \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

se factorise par $\delta J : F \to F'$

et δJ est de classe C^{α} (au sens habituel)

de même $dJ_o :$

$$\begin{tikzcd} F_o \arrow[rr] \arrow[dr, "\delta J_o"'] & & F^*_o \\ & F'_o \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

u factorise par $\delta J_o : F_o \to F'_o$

et J_o est de classe C^{α} (au sens habituel).

on a, d'autre part, $\delta J_o = \tau' \circ \delta J \circ \tau$.

Les expressions de δJ et δJ_o sont respectivement :

$$\delta J(h) = x \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial p}\,(x,h(\alpha),\,\frac{\partial h}{\partial x_i}\,(x)) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial f}{\partial q_i}\,(\;,h(\;),\frac{\partial h}{\partial x_i}(\;))\right](x) \;;$$

$$x \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial f}{\partial q_i} (x,h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i})$$

$$\partial J_o(h) = x \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial p} (x,h(x),\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i}(\ ,h(\ ),\frac{\partial h}{\partial x_i}(\ )\right](x)$$

② $d\delta J : F \to L(F,F')$ et $d\delta J_o : F_o \to L(F_o,F'_o)$

vérifient $d\delta J_o = \tau' \circ d J \circ \tau$, et ont pour expression :

$$d\delta J(h).H = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} (.,h(\ ),\frac{\partial h}{\partial x_i}(\ ))H + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q_i}(\ )\frac{\partial h}{\partial x_i} -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\{\frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial p}(\ )H + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_i}(\ ) \frac{\partial h}{\partial x_j}\}; \ \sum_{i=1}^{N}\{x_i \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}(\ )\frac{\partial h}{\partial x_j} +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial p} (\ )H\}$$

$$d\delta J_o(h).H = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(\ )H + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q_i}(\ )\frac{\partial h}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \{\frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial p}(\ )H + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}(\ )\frac{\partial h}{\partial x_j}\}$$

où $A()$ est mis pour $x \rightsquigarrow A(x,h(x),\frac{\partial h}{\partial x_i}(x))$ soit $A((),h(),\frac{\partial}{\partial x_i}())$.

Ⓒ *Conclusion et remarques* :

① Pour que h_o corresponde à un minimum local de J (resp. J_o) il faut que h_o soit un point critique de J (resp. J_o), donc que h_o vérifie l'équation d'Euler $\delta J(h_o) = 0$ (resp. $\delta J_o(h_o) = 0$)

② Etudions $d\delta J_o$ dans le cas particulier suivant : $E = R^m$

$f(x,p,(q_i)) = \sum_{i=1}^{N} <q_i.q_i>$ $\quad <\alpha,\beta>$ = produit scalaire de α et β dans R^m.

Dans ces conditions, $d\ \delta\ J_o = \Delta : C_o^r(B,R^m) \to C^{r-2}(B,R^m)$.

Donc $\ker \Delta = \ker d\delta J_o = 0$; mais Δ n'est pas surjectif en général.

Nous rencontrons donc une première difficulté, à savoir que dans ce cas particulier où les conditions correspondant aux conditions de Jacobi sont satisfaites (ker $\Delta = 0$) et même ker $\Delta_\lambda = 0$ (où Δ_λ opère sur $C^r_o(B ,\mathbb{R}^m)$ $(B_\lambda = \bar{B}(0,\lambda)$ $0 < \lambda \leq 1)$, Δ_λ n'est pas un isomorphisme.

Pourtant, si l'on considère $\bar{\Delta}$ et $\bar{\Delta}_\lambda$ prolongement de Δ et (resp. Δ_λ) à $H^1_o(B,\mathbb{R}^m)$ dans $H^{-1}_o(B,\mathbb{R}^m)$ (resp. à $H^1_o(B_\lambda,\mathbb{R}^m)$ dans $H^{-1}_o(B_\lambda,\mathbb{R}^m)$), ceux-ci sont des isomorphismes. Or $H^1_o(B,\mathbb{R}^m)$ et $H^{-1}_o(B_\lambda,\mathbb{R}^m)$), en dualité (par la dualité canonique habituelle) ; on est donc amené à définir la notion de plongement d'un couple (F,F',ϕ) dans un autre (H,H',μ), et à étudier dans quelle mesure un morphisme L de F dans F' se prolonge en un morphisme $\bar{L}$ de H dans H', et dans quelle mesure $\bar{L}$ est un isomorphisme ou un fredholm.

Ⓓ *Démonstration des résultats* :

① - *Notation*.- On désignera par $d_2 f(x,p,q_i)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,z)$ où $z = (p,(q_i))$.

Si $g : B \times G \to S$ est de classe $C^{s+\beta}$ G et S de Banach,

on note $\omega_g : C^s(B,G) \to C^s(B,S)$ ω_q est de classe C^β et $d\omega_g = \omega_{d_2 g}$.

$\ell \rightsquigarrow x \rightsquigarrow g(x,s(x))$

② - *Démonstration*.-

Etude de J.

$J : C^r(B,E) \longrightarrow \mathbb{R}$

se factorise à l'aide du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
h \arrow[d, squiggly] & C^r(B,E) \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathbb{R} \\
(h,\frac{h}{x_i}) & C^{r-1}(B,E\times E^N) \arrow[r, "\omega_f"] & C^{r-1}(B,\mathbb{R}) \arrow[ur, "\int_B"'] &
\end{tikzcd}$$

ω_f est de classe $C^{\alpha+1}$, et $d\omega_f = \omega_{d_2 f}$.

J est donc de classe $C^{\alpha+1}$, et l'on a, si $(x, h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x))$ est notée ( )

$$dJ(h).H = \int_B \omega_{d_2 f}(x,h(x),\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)),(H(x),\frac{\partial H}{\partial x_i}(x))dx = \int_B \left[\frac{\partial f}{\partial p}()H(x)+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial q_i}()\frac{\partial H}{\partial x_i}(x)\right]dx$$

Posons $\omega(x) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial q_i}()H(x)dx_1 \wedge \dots \widehat{dx_i} \wedge dx_n$

$$\omega = H(-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial q_i}(\ )\,\omega_i \qquad ; \quad d\omega = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial q_i}(\ )H)dx.$$

Donc $dJ(h).H = \int_B \{\frac{\partial f}{\partial p}(\ ) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial q_i}(\ ))\}H(x)dx + \int_{\partial B} (\sum_{i=1}^{N} (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial q_i}(\ )\omega_i).H.$

Or $(-1)^{i-1}\omega_i = x_i\, d\sigma$ sur ∂B

donc $dJ(h).H = \int_B \{\frac{\partial f}{\partial p}(\ ) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial q_i}(\ ))\}H(x)dx +$

$$+ \int_{\partial B} \{\sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial f}{\partial q_i}(\ )\}\, H(x).d\sigma.$$

Or $x \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial p}(x,h(x),\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial q_i}(\ )) \in C^{r-2}(B,E^*)$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial f}{\partial q_i}(\ )\Big|_{\partial B} \in C^{r-1}(\partial B,E^*).$$

D'autre part, il existe une dualité Φ entre $C^r(B,E)$ et $C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*)$.

$$\begin{array}{ccc} [C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\ B,E^*)] \times C^r(B,E) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R} \\ ((a,b),H) & \rightsquigarrow\!\!\longrightarrow & \Phi((a,b),H) \end{array}$$

tel que $\Phi((a,b),H) = \int_B a(x).H(x)dx + \int_{\partial B} b(x).H(x)d\sigma.$

Donc dJ se factorise de la manière suivante :

$$\boxed{\begin{array}{l} J(h) = x \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial p}(x,h(x),\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial q_i}(\ )) \quad ; \\ \\ \qquad x \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial f}{\partial q_i}(\ ) \end{array}}$$

$$\begin{tikzcd} C^r(B,E) \arrow[r, "dJ"'] \arrow[dr, "\delta J"'] & (C^r(B,E))^* \\ & C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*) \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

où ψ est définie à partir de Φ.

Etude de δJ : Montrons que δJ est de classe C^1.

a) Soit $T_o : h \rightsquigarrow \left(x \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial p}(x,h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)\right)$.

T_o est définie par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
h \arrow[dd, rightsquigarrow] & C^r(B,E) \arrow[rr, "T_o"] \arrow[d] & & C^{r-2}(B,E^*) \\
 & C^{r-1}(B,E\times E^N) \arrow[rr, "\omega_{\frac{\partial f}{\partial p}}"] & & C^{r-1}(B,E^*) \arrow[u] \\
(h, \frac{\partial h}{\partial x_i}) & & &
\end{tikzcd}$$

$\frac{\partial f}{\partial p} : B \times E \times E^N \to E^*$ de classe $C^{r-1+\alpha}$

donc $\omega_{\frac{\partial f}{\partial p}}$ est de classe C^α et $d\omega_{\frac{\partial f}{\partial p}} = \omega_{d_2 \frac{\partial f}{\partial p}}$

T_o est donc de classe C^α et

$$dT_o(h).H(x) = \omega_{d_2 \frac{\partial f}{\partial p}}(x,h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)).(H(x), \frac{\partial H}{\partial x_i}(x))$$

soit $$dT_o(h).H = (x \rightsquigarrow \{\frac{\partial^2 f}{p_i}(\ ).H + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q_i}(\ ) . \frac{\partial H}{\partial x_i}\}(x))$$

b) Soit T_i tel que $T_i : h \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial q_i}(x,h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)))$

T_i est défini par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
C^r(B,E) \arrow[rr, "T_i"] \arrow[d] & & C^{r-2}(B,E^*) \\
C^{r-1}(B,E\times E^N) \arrow[rr, "\omega_{\frac{\partial f}{\partial q_i}}"] & & C^{r-1}(B,E^*) . \arrow[u, "\frac{\partial}{\partial x_i}"']
\end{tikzcd}$$

$\frac{\partial f}{\partial q_i} : B \times E \times E^N \to E^*$ est de classe $C^{r-1+\alpha}$ donc $\omega \frac{\partial f}{\partial q_i}$ est de classe C^α et $d\omega \frac{\partial f}{\partial q_i} = \omega_{d_2} \frac{\partial f}{\partial q_i}$

donc T_i est de classe C^α, et l'on a

$$dT_i(h).H(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\omega_{d_2} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}_i}\,(x,h(x),\ \frac{\partial h}{\partial x_i}\,(x)),(H(x),\ \frac{\partial H}{\partial x_i}\,(x))\right],$$

soit $dT_i(h).H = x \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial x_i}\ \{\ \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial p}\ (\ ).H + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}\ (\ )\ \frac{\partial H}{\partial x_j}\}(x).$

c) Soit S_i défini par : $S_i : h \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow x_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\ (\ ))\quad x \in \partial B.$

S_i est défini par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
C^r(B,E) \arrow[rr, "S_i"] \arrow[d] & & C^{r-1}(\partial B,E^*) \arrow[d] \\
C^{r-1}(B,E\times E^N) \arrow[r, "\omega \frac{\partial f}{\partial q_i}"'] & C^{r-1}(B,E^*) \arrow[r] & C^{r-1}(\partial B,E^*)
\end{tikzcd}$$

S_i est donc de classe C^α et l'on a

$$\mathbf{ds}_i(h).H = x \rightsquigarrow x_i\ \{\ \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}\ (\ )\ \frac{\partial H}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial p}\ (\ )H\}(x);\ x \in \partial B$$

Donc $$d\delta J(h).H = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(\ )H + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q_i}(\ ) \frac{\partial H}{\partial x_i} -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial p}(\ ).H + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}(\ ) \frac{\partial H}{\partial x_j} \} \quad ;$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \{ \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}(\ ) \frac{\partial H}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial p}(\ )H \} .$$

Etude de J_o :

$J_o = J \circ \tau$, puisque J est de classe C^α (au sens ordinaire), J_o est de classe C^α au sens ordinaire et $dJ_o = \tau^*(dJ \circ \tau)$

Soit $dJ_o(h).H = dJ(\tau h).\tau H = \Phi(\delta J(\tau h), \tau H)$

$$= \Theta(\tau' \delta J(\tau h), H) = \Theta(\delta J_o(h), H)$$

avec $\delta J_o = \tau' \circ \delta J \circ \tau$.

Conclusion : Puisque δJ est de classe C^α, δJ_o est de classe C^α donc J^o est de classe C^α pour les couples (F_o, F'_o, Θ), $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \lambda)$ d'autre part, $d\delta J_o = \tau' \circ d\delta J \circ \tau$.

CHAPITRE III

PRINCIPE DE PLONGEMENT, OPERATEURS HILBERTISANTS, APPLICATIONS.

Ⓐ *Définition du plongement.*

Plongement total.

Soient (F,F',Φ) et (H,H',μ) deux couples d'espaces de banach en dualité. Nous dirons que (F,F',Φ) se plonge dans (H,H',μ), s'il existe des injections continues $i : F \to H$ et $i' : F' \to H'$ telles que

(1) $\Phi(f',f) = \mu(if',if)$ pour tout $f' \in F'$
tout $f \in F$

Plongement partiel.

Nous dirons que (F,F',Φ) admet un plongement partiel dans (H,H',μ) s'il existe des injections continues $i : F \to H$ et $i' : F' \to H'$ et F'' sous-espace fermé de F' tels que

(1)' $\Phi(f',f) = \mu(i'f',if)$ pour tout $f' \in F''$, $f \in F$.

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[r, "i"] & H \\
F'' \arrow[r] & F' \arrow[r, "i'"] & H' \\
 & \Phi & \mu
\end{tikzcd}$$

Remarques.-

① On peut alors parler de plongement partiel maximum et supposer que F" est maximal.

② Si $L \in L(F,F')$ est tel qu'il existe $\bar{L} \in L(H,H')$ faisant commuter le diagramme suivant ,

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "L"'] & H \arrow[d, "\bar{L}"] \\ F' \arrow[r, "i'"] & H' \end{tikzcd}$$

Alors $\operatorname{Im} L \subset F''$

et $$\phi(Lf,\ g) = \mu(\bar{L}if,\ ig)$$

La notion de plongement total ou partiel est donc liée à des propriétés de prolongement de certains opérateurs, nous allons étudier un type particulier de tels opérateurs :

Ⓑ *Opérateurs Hilbertisants*.

① *Définitions*.- Soit (F,F',Φ) un couple en dualité

$$\Phi : F' \times F \to \mathbb{R}$$

Soit Λ un opérateur symétrique, défini, positif de F dans F'

$$\Lambda : F \to F' \qquad (0) \qquad\qquad (0)$$

Considérons $B_\Lambda : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \rightsquigarrow B_\Lambda(x,y) = \Phi(\Lambda x,y)$$

B_Λ est un produit scalaire sur F, soit N_Λ, la norme associée à ce produit scalaire, et soit $H = F_\Lambda = \hat{F}$ le complété de F pour la norme N_Λ : c'est un espace de hilbert muni du produit scalaire $\bar{B}_\Lambda$ prolongeant B_Λ.

② *Problème*.- A quelle condition $\vartheta : F' \to F^*$ injection continue définie à partir de Φ, est-elle à valeurs dans H^* ?

Il suffit pour cela que si $x' \in F'$, $\vartheta_{x'} : F \to \mathbb{R}$ soit continue pour la norme N_Λ, soit :

$$|\vartheta_{x'}(y)| = |\phi(x',y)| \leq A_{x'}[\phi(\Lambda y,y)]^{1/2} \qquad (1)$$

Si de plus $A_{x'} \leq K||x'||_{F'}$ (2), alors $\vartheta_{x'}$ se prolonge en $\bar{\vartheta}_{x'}$ de H dans $\mathbb{R}$, et $x' \rightsquigarrow \bar{\vartheta}_{x'}$ est continue de F' dans H^*.

Nous supposerons que les conditions (1) (2) (0) sont vérifiées, et nous dirons alors que Λ <u>est un opérateur hilbertisant</u>.

Nous noterons i' le morphisme continu $x' \rightsquigarrow \bar{\vartheta}_{x'}$, et i l'injection continue de F dans $\hat{F} = H$.

③ *Quelques propriétés* :

1) i' est injective : en effet $i'(x') = 0$ implique $\phi(x',y) = 0$ pour tout $y \in F$ donc $x' = 0$.

2) Soit ψ l'isomorphisme canonique de H sur H^* construit à partir du produit scalaire $\bar{B}_\Lambda$.

On a $\psi \circ i = i' \circ \Lambda$: en effet, pour $(x,y) \in F \times F$

$$i'(\Lambda x).y = \phi(\Lambda x,y) = B_\Lambda(x,y) = \psi(ix).y$$

Conséquence : ψ est en fait le prolongement $\bar{\Lambda}$ de $i' \circ \Lambda$ et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\Lambda"] & H \arrow[d, "\bar{\Lambda}"] \\ F' \arrow[r, "i'"'] & H^* \end{tikzcd}$$

3) Si μ désigne la dualité canonique entre H^* et H, on a $\mu(i'x',iy) = \phi(x',y)$ donc l'opérateur Λ permet de réaliser un plongement total de (F,F',Φ) dans (H,H^*,μ) et de plus $\bar{\Lambda} \in \text{Isom}(H,H^*)$.

④ *Prolongement d'une classe d'opérateurs.*

1) *Problème*.- Soit $L \in L(F,F')$, à quelle condition peut-on prolonger L en $\bar{L} : H \to H^*$ de telle sorte que le diagramme suivant soit commutatif ?

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "L"] & H \arrow[d, "\bar{L}"] \\ F' \arrow[r, "i'"'] & H^* \end{tikzcd}$$

pour cela il suffit que si $x \in F$, $\varphi(Lx) : F \to \mathbb{R}$ soit continue pour la norme N_Λ, soit $|\varphi(Lx).y| = |\phi(Lx,y)| \leq B_x^{(L)} [\phi(\Lambda y,y)]^{1/2}$ ceci est vérifiée, grâce à (1).

Si de plus $B_x^{(L)} \leq C(L) \, [\phi(\Lambda x,x)]^{1/2}$, alors $i' \circ L$ se prolonge en $\bar{L}$ continue de $H \to H^*$ et $i' \circ L = \bar{L} \circ i$.

2) *Classes d'opérateurs prolongeables*.

* Nous désignerons par $P \subset L(F,F')$ le sous-espace vectoriel de $L(F,F')$ des opérateurs L tels que

$$\forall (x,y) \in F^2 \; , \; |\phi(Lx,y)| \leq C(L) \, N_\Lambda(x) \, . \, N_\Lambda(y)$$

Dans ces conditions, pour tout $L \in P$, il existe $\bar{L}$ unique $\bar{L} \in L(H,H^*)$ tel que $i' \circ L = \bar{L} \circ i$ soit encore

$$\phi(L.,.) = \mu(\bar{L} \circ i.,i.)$$

* Nous appellerons ensemble continu d'opérateurs prolongeables, un sous-espace topologique de $L(F,F')$, contenu dans P, et sur lequel $L \rightsquigarrow \bar{L}$ est continue.

* Nous appellerons paramétrage continu d'opérateurs prolongeables, la donnée d'un espace topologique Ω, d'une fonction continue $\gamma : \Omega \to P$ tels que $\lambda \rightsquigarrow \overline{\gamma(\lambda)}$ soit continue sur Ω.

* Nous désignerons par P_s le sous-espace des opérateurs symétriques prolongeables.

⑤ *Application à un théorème d'existence de minimum strict local.*

Soit (F,F',Φ) muni d'un opérateur hilbertisant $\Lambda : F \to F'$, on considère (i,i') le plongement de (F,F',Φ) dans (H,H^*,μ) $H = F_\Lambda$.

Soit $J : F \to \mathbb{R}$, de classe C^2 pour les couples (F,F',Φ), $(\mathbb{R},\mathbb{R},\mu)$.

Soit h_o un point critique de J.

Supposons qu'il existe un voisinage Ω de h_o dans F tel que pour tout $h \in \Omega$, $d\delta J(h) \in P_s$, et que $(\Omega, d\delta J)$ soit un paramétrage continu (d'opérateurs prolongeables, symétriques).

Théorème 0.- Si les conditions précédentes sont satisfaites, et si $\overline{d\delta J}(h_o) = \bar{L}(h_o) : H \to H^*$ est un <u>isomorphisme défini symétrique, positif</u>, alors J admet en h_o un <u>minimum local strict</u>.

Démonstration.- Soit $\Omega' = B(h_o,\rho) \subset \Omega$.

Soit $h \in F$ tel que $h_o + h \in \Omega$ $h \in B(o,\rho)$ posons

$$\psi(t) = J(h_o + th) \ ; \ \psi \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } [0,1]$$

$$\psi'(t) = dJ(h_o + th).h = \phi(\delta J(h_o + th) \ ; \ h)$$

$$\psi''(t) = \Phi(d\delta J(h_o + th) \ . \ h \ ; \ h)$$

donc d'après la formule de Taylor à l'ordre 1, avec reste intégral, il vient :

$$J(h_o + h) - J(h_o) = \int_0^1 (1-\tau)\ \psi''(\tau)\ d\tau = \Phi\left(\int_0^1 (1-\tau) d\delta J(h_o + \tau h)\ d\tau \ . \ h \ ; \ h\right)$$

$$= \Phi(a(h).h;h) \quad \text{avec} \quad a(h) = \int_0^1 (1-\tau)\ d\delta J(h_o + \tau h)\ d\tau$$

donc $$a(0) = \int_0^1 (1-\tau)\ d\delta J(h_o) = \frac{1}{2} L(h_o)$$

d'autre part, l'application $\tau \rightsquigarrow \overline{d\delta J}(h_o + \tau h)$ étant continue sur $[0\ 1]$ quel que soit $h \in B(0,\rho)$, il en résulte que pour $h \in B(0,\rho)$

$a(h) \in P_s$ et $\bar{a}(h) = \int_0^1 (1-\tau)\ \overline{d\delta J}(h_o + \tau h)\ d\tau$,

d'autre part, $(\tau,h) \rightsquigarrow \overline{d\delta J}(h_o + \tau h)$ étant continue sur $[0\ 1] \times B(0,\rho)$

$h \rightsquigarrow \bar{a}(h)$ est continue sur $B(0,\rho)$.

Or $\bar{a}(0) = \frac{1}{2} \bar{L}(h_o) : H \to H^*$ est un isomorphisme défini positif, symétrique donc il existe $\Omega'' \subset \Omega$ tel que pour tout $h_o + h \in \Omega''$, $\bar{a}(h)$ est un isomorphisme défini positif, symétrique. (cf, annexe, opérateurs inversibles, symétriques, positifs)

donc pour $h_o + h \in \Omega''$ $J(h_o + h) - J(h_o) = \Phi(a(h).h,h)$

$$= \mu(a(h).i(h);i(h)) > 0$$

si $h \neq 0$ c.q.f.d.

Remarque : Ce théorème est à rapprocher des résultats de Kimble : Pacific Journal of Math. 14 - 1964 pages (1283-1295). Kimble met en évidence un théorème analogue, mais avec des hypothèses beaucoup plus contraignantes.

Remarque.- En général J ne se prolonge pas à H, on ne peut donc appliquer le lemme de Morse à un prolongement de J.

© *Application au calcul des variations en dimension supérieure à 1 pour une fonctionnelle définie par une intégrale multiple.*

1) *Existence d'un opérateur hilbertisant.*

Soit $F = C^r(B,E)$ $F' = C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B, E^*)$

$r \geqslant 2$ E espace de hilbert sur $\mathbb{R}$ (on identifiera E et E^*)

$$\Phi : F' \times F \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((k,\ell),h) \rightsquigarrow \phi((k,\ell),h) = \int_B (k(x),h(x))\ dx + \int_{\partial B} \ell(x).h(x)\ d\sigma$$

$\alpha.\beta = (\alpha,\beta) = <\alpha,\beta>$ représentant le produit scalaire de α et β dans E .

Soit $\Lambda = (id - \Delta; \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}) : C^r(B,E) \to C^{r-1}(B,E) \times C^{r-1}(\partial B,E)$

Montrons que Λ est un opérateur hilbertisant :

a) La condition 0 est vérifiée :

$$\Phi(\Lambda h,k) = \int_B h(x).k(x)\ dx - \int_B \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(x).k(x)\ dx + \int_{\partial B} \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(x).k(x)\ d\sigma$$

$$= \int_B h(x).k(x)\ dx + \int_B \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) . \frac{\partial k}{\partial x_i}(x)\ dx$$

donc $N_\Lambda(h) = (\int_B ||h(x)||^2\ dx + \int_B \sum_{i=1}^{N} ||\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)||^2\ dx)^{1/2}$

N_Λ est donc la norme permettant de définir l'espace de Sobolev d'ordre 1 soit $H^1(B,E)$.

Donc le complété de $C^r(B,E)$ pour la norme N_Λ est l'espace de Hilbert $H^1(B,E)$.

b) Les conditions (1) et (2) sont vérifiées :

Considérons $\psi : F' \to F^*$

$$\psi(k,\ell).h = \int_B k(x).h(x)\,dx + \int_{\partial B} \ell(x).h(x)\,d\sigma$$

donc $|\psi(k,\ell).h| \leq ||k||_{L_2(B,E)} \cdot ||h||_{L_2(B,E)} + ||\ell||_{L_2(\partial B,E)} \cdot ||h||_{L_2(\partial B,E)}$

$$\leq C_1 ||k||_{C^0(B,E)} \, ||h||_{L_2(B,E)} + C_2 ||\ell||_{C^0(\partial B,E)} \cdot ||h||_{L_2(\partial B,E)}$$

d'autre part, d'après le théorème de Sobolev, $H^1(B,E) \to H^0(\partial B,E)$ est continue, donc il existe $R > 0$ tel que $||h||_{L_2(\partial B,E)} \leq R||h||_{H^1(B,E)}$ pour $h \in H^1(B,E)$

donc $|\psi(k,\ell).h| \leq C||(k,\ell)||_{F'} \, ||h||_{H^1(B,E)}$

$$\leq C||(k,\ell)||_{F'} \, [\Phi(\Lambda h,h)]^{1/2}$$

donc les conditions (1) et (2) sont vérifiées, Λ étant d'autre part défini positif, Λ <u>est un opérateur hilbertisant</u>, et l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
C^r(B,E) = F \arrow[r] \arrow[d, "\Lambda"] & H^1(B,E) \arrow[d, "\bar{\Lambda}"] \\
C^{r-2}(B,E) \times C^{r-1}(\partial B,E) = F' \arrow[r] & H^{-1}(B,E)
\end{tikzcd}$$

2) *<u>Existence d'une classe d'opérateurs prolongeables</u>*. En solution avec la fonctionnelle $J : h \rightsquigarrow J(h) = \int_B f(x,h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x))\,dx$ $B = \bar{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^N$ définie sur $C^r(B,E)$. $f : B \times E \times E^N \to \mathbb{R}$ de classe $C^{r+\alpha}$ $\alpha \geq 1$.

Nous savons que J est de classe $C^{\alpha+1}$ pour les couples $(C^r(B,E),\ C^{r-1}(B,E) \times C^{r-1}(\partial B,E),\Phi)$ et $(\mathbb{R},\mathbb{R},\mu)$.

D'autre part, $L(h) = d\delta J(h)$ est un opérateur du type suivant :

$$L(h).H = a^h(\ )H + \sum_{i=1}^{N} b_{i1}(\ ) \frac{\partial H}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^h(\ ) \frac{\partial H}{\partial x_j} + b_{i2}^h(\ )\ H\} \ ;$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \ \{ \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^h(\ ) \frac{\partial H}{\partial x_j} + b_{i2}^h(\ )\ H\}$$

où $a^h,\ b_{i1}^h,\ b_{i2}^h,\ a_{ij}^h \in C^{r-1}(B,\ L(E,E^*))$

$$a^h(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\ (x,h(x),\ \frac{\partial h}{\partial x_i}(x))\ ;\ b_{i1}^h(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q_i}(x,h(x),\ \frac{\partial h}{\partial x_i}\ (x))\ ;$$

$$b_{i2}^h(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial p}(x,h(x),\ \frac{\partial h}{\partial x_i}\ (x))$$

$$a_{ij}^h(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}\ (x,\ h(x),\ \frac{\partial h}{\partial x_i}(x))$$

d'autre part, les applications suivantes, de $C^r(B,E)$ dans $C^{r-1}(B,L(E,E^*))$:

$h \rightsquigarrow a^h$ sont continues, et $(b_{i1}^h)^* = b_{i2}^h$

$h \rightsquigarrow b_{i1}^h$

$h \rightsquigarrow b_{i2}^h$ $(a_{ij}^h)^* = a_{ji}^h$

$h \rightsquigarrow a_{ij}^h$ $(a^h)^* = a^h$

de même, les applications $h \rightsquigarrow a_{ij}^h$ et $h \rightsquigarrow b_{i2}^h$ sont continues de $C^r(B,E)$ dans $C^{r-1}(\partial B,\ L(E,\ E^*))$.

Conclusion.- Pour tout h, $L(h) = d\delta J(h)$ est un opérateur symétrique de F dans F' (pour la dualité Φ).

Etudions la possibilité pour ces opérateurs de se prolonger en opérateurs de $H^1(B,E)$ dans $H^{-1}(B,E) = (H^1(B,E))^*$.

Nous considérerons un tel opérateur sous la forme suivante :

$$L.H = a(\ )\,H + \sum_{i=1}^{N} b_{i1}(\ )\,\frac{\partial H}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{\sum_j a_{ij}(\ )\,\frac{\partial H}{\partial x_j} + b_{i2}(\ )\,H\Big\}\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \Big\{\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\ )\,\frac{\partial H}{\partial x_j} + b_{i2}\Big\}\ . \qquad (3)$$

$a,\ b_{i1},\ b_{i2},\ a_{ij} \in C^{r-1}(B,L(E,E))$.

Définition.- Soit $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel des opérateurs de F dans F' de la forme (3).

Théorème 1.- Tout élément L de $\mathcal{L}$ est prolongeable en $\bar{L} \in L(H^1,H^1)$ en effet : considérons

$$(i' \circ L)(H).K = \int_B \Big(a(x) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial b_{i2}}{\partial x_i}(x)\Big).H(x).K(x)\,dx$$

$$+ \int_B \Big(\sum_{i=1}^{N} (b_{i1}(x) - b_{i2}(x)).\frac{\partial H}{\partial x_i}(x).K(x)\Big)dx + \int_B \sum_{ij} a_{ij}(x).\frac{\partial H}{\partial x_i}(x)\frac{\partial K}{\partial x_j}(x)\ dx +$$

$$\int_{\partial B} \Big(\sum_{i=1}^{N} x_i b_{i2}(x)\Big).H(x).K(x)\ d\sigma \qquad (4)$$

Ou bien encore, sous la forme suivante :

$$(i' \circ L)(H).K = \int_B a(x).H(x).K(x)dx + \int_B \sum_{i=1}^{N} b_{i1}(x)\frac{\partial H}{\partial x_i}(x).K(x)\ dx +$$

$$+ \int_B \sum_{i=1}^{N} b_{i2}(x)H(x)\frac{\partial K}{\partial x_i}(x)dx + \int_B \sum_{ij} a_{ij}(x)\frac{\partial H}{\partial x_i}(x)\frac{\partial K}{\partial x_j}(x)dx \qquad (5)$$

d'après (4)

$$|(i' \circ L)(H).K| \leqslant \Big|\Big|a - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial b_{i2}}{\partial x_i}\Big|\Big|_{C^o(B,L(E,E^*))} . ||H||_{H^1(B,E)} . ||K||_{H^1(B,E)}$$

$$+ \Big(\sum_{i=1}^{N} ||b_{i1} - b_{i2}||_{C^o(B,L(E,E^*))}\Big) . ||H||_{H^1(B,E)} . ||K||_{H^1(B,E)}$$

$$+ \Big(\sum_{j,i=1}^{N} ||a_{ij}||_{C^o(B,)}\Big) . ||H||_{H^1} . ||K||_{H^1}$$

$$+ R^2 \Big|\Big|\sum_{i=1}^{N} x_i\, b_{i2}\Big|\Big|_{C^o(\partial B,)} .\ ||H||_{H^1(B,E)} . ||K||_{H^1(B,E)} \qquad (6)$$

donc $i' \circ L$ se prolonge en une application linéaire continue $\bar{L}$ de H^1 dans H^{-1}, d'autre part L est de la forme suivante :

$$L.H = b.h + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial H}{\partial x_i} - \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_i} \; ; \; C\,H + \sum_{i=1}^{N} C_i \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$$\text{avec} \quad b = a - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial b_{i2}}{\partial x_i} \; ; \; b_i = b_{i1} - b_{i2} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} a_{ki} \; ;$$

$$C = \sum_{i=1}^{N} x_i\, b_{i2} \; ; \; C_i = \sum_{k=1}^{N} x_k\, a_{ki}$$

d'après (6), on déduit :

$$||\bar{L}(H)|| \leqslant (1+R^2) \{ ||b||_{C^o(B,)} + \sum_{i=1}^{N} ||b_i||_{C^o(B,)} \sum_{ki} ||\frac{\partial}{\partial x_k} a_{ki}||_{C^o(B,)} + \sum ||a_{ij}||_{C^o(B,)}$$

$$+ ||C||_{C^o(\partial B,)} \} ||H||_{H^1(B,E)}$$

donc

$$||\bar{L}||_{L(H^1,H^{-1})} \leqslant 2(1+R^2)\{ ||b||_{C^o(B,)} + \sum_{i=1}^{N} ||b_i||_{C^o(B,)} + \sum_{ij} ||a_{ij}||_{C^1(B,)} +$$

$$+ ||C||_{C^o(\partial B,)} + \sum_{i=1}^{N} ||C_i||_{C^o(\partial B,)} \tag{7}$$

Or $r \geqslant 2$ donc $|| \; ||_{C^o} \leqslant || \; ||_{C^{r-2}}$

Théorème 2.- Si $r \geqslant 3$, l'application $L \to \bar{L}$ définie sur $\mathcal{L}$ est continue de $\mathcal{L}$ dans $L(H^1,H^{-1})$ d'après (7) si $r \geqslant 3$, puisque $|| \; ||_{C^1} \leqslant || \; ||_{C^{r-2}}$, on a

$$||\bar{L}|| \leqslant 2(1+R^2)\{ ||b||_{C^{r-1}(B,)} + \sum_{i=1}^{N} ||b_i||_{C^{r-1}(B,)} + \sum_{ij} ||a_{ij}||_{C^{r-1}(B,)} +$$

$$+ ||C||_{C^{r-1}(\partial B,)} + \sum_{i=1}^{N} ||C_i||_{C^{r-1}(\partial B,)} \}$$

par conséquent, d'après l'étude faite sur la norme des opérateurs de $\mathcal{L}$, (cf. opérateurs différentiels d'ordre 2 de F dans F'), on a :
$||\bar{L}||_{L_1} \leqslant 2(1+R^2) \; ||L||_{L(F,F')}$ donc $L \rightsquigarrow \bar{L}$ est continue de $\mathcal{L} \subset L(F,F')$ dans $L(H^1,H^{-1}) = L_1$.

Théorème 3.- Si $r \geq 2$, l'application $h \rightsquigarrow \bar{L}(h) = \overline{d\delta J}(h)$ est continue de $C^r(B,E)$ dans $L(H^1,H^{-1})$.

En effet si $L \in \mathcal{L}$, on obtient d'après (5) :

$$|(i'oL)(H).K| \leq \{ ||a||_{C^o(B,)} + \sum_{i=1}^{N} ||b_{i1}||_{C^o(B,)} + \sum_{i=1}^{N} ||b_{i2}||_{C^o(B,)} +$$

$$+ \sum_{ij} ||a_{ij}||_{C^o(B,)} \, ||H||_{H^1} \, ||K||_{H^1} \}$$

d'autre part, si Ω est un espace topologique, et si

$\lambda \rightsquigarrow a(\;)$ sont continus de Ω dans $C^{r-1}(B,L(E,E^*))$

$\lambda \rightsquigarrow b_{i1}(\lambda)$

$\lambda \rightsquigarrow b_{i2}(\lambda)$

$\lambda \rightsquigarrow a_{ij}(\lambda)$

alors $\lambda \rightsquigarrow \bar{L}_\lambda$ est continue de Ω dans $L(H^1,H^{-1})$.

En particulier, si $\Omega = C^r(B,E)$, $h \rightsquigarrow \overline{d\delta J}(h)$ est continue donc $h \rightsquigarrow d\delta J(h)$ constitue un paramétrage continu d'un ensemble d'opérateurs symétriques, prolongeables.

Problème : Dans quelles conditions, $\overline{d\delta J}(h)$ est-il un isomorphisme, un opérateur de Fredholm ?

Nous allons montrer que si $L \in \mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}_s$) et vérifie des propriétés d'ellipticité, alors $\bar{L}$ est un opérateur de Fredholm (resp. de Fredholm symétrique, d'indice 0).

CHAPITRE IV

PROPRIETES DES PROLONGEMENTS D'OPERATEURS DE TYPE $\mathcal{L}$, VERIFIANT UNE CONDITION D'ELLIPTICITE.

Ⓐ *Position du problème.*

Nous considérons $L \in \mathcal{L} \subset L(F,F')$

$F = C^{r}(B,E)$; $F' = C^{r-2}(B,E) \times C^{r-1}(\partial B,E)$ en dualité par Φ

E sera un espace de hilbert de dimension finie.

L est de la forme suivante :

$$L.H = a.H + \sum_{i=1}^{N} b_{i1} \frac{\partial H}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} + b_{i2} H \} ;$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \{ \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} + b_{i2} H \} .$$

avec $a, b_{i1}, b_{i2}, a_{ij} \in C^{r-1}(B, L(E,E^{*}))$.

Nous savons que $\Lambda = Id - \Delta$; $\sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ est un opérateur hilbertisant pour (F,F',ϕ), et qu'il définit un plongement de (F,F',Φ) dans $(H^{1}(B,E), H^{-1}(B,E), \mu)$.

Nous savons d'autre part, que tout élément $L \in \mathcal{L}$, se prolonge en $\bar{L} \in L(H^{1}, H^{-1})$.

Nous savons que :

$$(ioL)(H).K = \int_B a(x).H(x)K(x)dx + \int_B \sum_{i=1}^{N} b_{i1}(x) \frac{\partial H}{\partial x_i}(x)K(x)dx +$$

$$+ \int_B \sum_{i=1}^{N} b_{i2}(x)H(x) \frac{\partial K}{\partial x_i}(x)dx + \int_B \sum a_{ij}(x)\frac{\partial H}{\partial x_i}(x)\frac{\partial K}{\partial x_j}(x)dx .$$

donc $i \circ L = L_4 + L_3 + L_2 + L_1$

L_4 se prolonge à H^1 en $\bar{L}_4$:

$$\begin{tikzcd} & H^0 \arrow[dr, dashed] & \\ H^1 \arrow[ur, dashed, "j"] \arrow[rr] & & H^{-1} \end{tikzcd}$$

et se factorise par H^0 car si $H \in F$, $||L_4.H||_{H^{-1}} \leq ||a||_{C^0(B,)} \; ||H||_{H^0}$

L_3 se prolonge à H^1 en $\bar{L}_3$:

$$\begin{tikzcd} & (H^0)^* \arrow[dr] & \\ H^1 \arrow[ur, dashed] \arrow[rr] & & H^{-1} \end{tikzcd}$$

et se factorise par $(H^0)^* = H^0$ car si $H \in F$, $K \in F$ $|(L_3.H).K| \leq \{ \sum_{i=1}^{N} ||b_{i1}||_{C^0} \} \; ||H||_{H^1} \; ||K||_{H^0}$

L_2 se prolonge à H^1 en $\bar{L}_2$:

$$\begin{tikzcd} & H^0 \arrow[dr] & \\ H^1 \arrow[ur, dashed, "j"] \arrow[rr] & & H^{-1} \end{tikzcd}$$

et se factorise par H^0, car si $H \in F$, $||L_2.H||_{H^{-1}} \leq \sum_{i=1}^{N} ||b_{i2}||_{C^0} \; ||H||_{H^0}$

L_1 se prolonge à H^1 en $\bar{L}_1$: $H^1 \longrightarrow H^{-1}$

$\bar{L} = \bar{L}_4 + \bar{L}_3 + \bar{L}_2 + \bar{L}_1 = K_1 + \bar{L}_1$.

Or, $\bar{L}_4$, $\bar{L}_3$, $\bar{L}_2$ sont compactes puisque ces applications se factorisent par une inclusion compacte, donc K_1 est compact.

Etude de $\bar{L}_1$ dans l'hypothèse où

$\forall x \in B, \forall \xi \in \mathbb{R}^N - \{0\}$, $\sum_{ij} a_{ij}(x) \; \xi^i \; \xi^j \in \mathrm{Isom}(E,E^*)$.

Théorème.- Si la condition précédente est satisfaite, $\bar{L}_1$ est un opérateur de Fredholm.

Si de plus $\forall x$, $\forall ij$ $a_{ij}(x) = (a_{ji}(x))^*$, $\bar{L}_1$ est un opérateur de Fredholm symétrique d'indice zéro.

Pour faire cette étude, nous allons définir $H^1(B,E)$ et $H^{-1}(B,E)$ à partir de cartes locales de la variété à bord $B = \bar{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^N$.

Ⓑ *Normes équivalents sur* $H^1(B, \ )$ *et* $H^{-1}(B, \ )$.

Notations.- Soit $B = \bar{B}(0,1)$ variété compacte, à bord de classe C^∞ plongée dans $\mathbb{R}^N$ le bord $\partial B = \Gamma$ est une variété C^∞ de dimension $N-1$.

* Soit $(\Omega_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq t}$ un recouvrement de B par des ouverts simples (relativement compacts) tels que

a) $(\Omega_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq s}$ constitue un recouvrement de Γ, associé aux cartes locales $(\Omega_\alpha, \varphi_\alpha)$ $\Omega_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} O_\alpha$ où O_α est un ouvert de $\mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{N-1}$ (on pourra supposer que φ_α est de restriction à Ω_α d'un difféomorphisme C^∞ d'un voisinage de Ω_α sur un voisinage de O_α.

b) Si $t \geq \alpha \geq s+1$ $\Omega_\alpha \subset \overset{\circ}{B}$, tel que Ω_α soit le domaine de définition de la carte locale $(\Omega_\alpha, \varphi_\alpha)$ $\Omega_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} O_\alpha$ où O_α est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

* Soit $(\lambda_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq t}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement (Ω_α) (tel que supp λ_α compact).

* Soit $(\mu_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq t}$ fonctions numériques de classe C^∞ telles que supp $\mu_\alpha = K_\alpha$ compact $\subset \Omega_\alpha$, et $\mu_\alpha = 1$ sur supp λ_α.

Soit m une mesure positive sur B telle que si $\varphi \in C^0(B,\mathbb{R})$

$$\text{supp } \varphi \subset \Omega_\alpha \ , \ \int_B \varphi(x) \, dm(x) = \int_{\Omega_\alpha} g(y) \, \tilde{\varphi}(y) \, dy \quad \text{où} \quad \tilde{\varphi} = \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

où $g \in C^\infty(\Omega_\alpha)$.

Rappel.- Considérons $F = C^r(B,E)$ $r \geqslant 1$, E hilbert l'application

$$S : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(H,K) \rightsquigarrow S(H,K) = \int_B \left[H(x).K(x) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial x_i}(x) \, . \, \frac{\partial K}{\partial x_i}(x)\right] dm(x)$$

est un produit scalaire sur F, la norme N_S associée à ce produit scalaire définit sur F une topologie indépendante de la mesure positive m considérée.

Donc $H^1(B,E)$ peut être considéré comme le complété de F pour la norme N_S.

Construisons $\gamma : C^r(B,E) \longrightarrow \overset{s}{\underset{\alpha=1}{\oplus}} C^r(\mathbb{R}^N_+,E) \overset{t}{\underset{\alpha=s+1}{\oplus}} C^r(\mathbb{R}^N,E)$

$$u \rightsquigarrow (\tilde{\mu}_\alpha.u) = (\tilde{u}_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq t} = \gamma(u)$$

$$\text{avec } \tilde{u}_\alpha = (\mu_\alpha.u) \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

γ est continue pour les topologies définies par les normes de Sobolev d'indice 1, donc γ se prolonge en $\bar{\gamma}$ linéaire continue

$$\bar{\gamma} : H^1(B,E) \longrightarrow \overset{s}{\underset{\alpha=1}{\oplus}} H^1(\mathbb{R}^N_+, E) \overset{t}{\underset{\alpha=s+1}{\oplus}} H^1(\mathbb{R}^N, E)$$

Construisons $P : \overset{s}{\underset{\alpha=1}{\oplus}} C^r(\mathbb{R}^N_+,E) \overset{t}{\underset{\alpha=s+1}{\oplus}} C^r(\mathbb{R}^N,E) \longrightarrow C^r(B,E)$

telle que $P = \sum_{\alpha=1}^{t} P_\alpha$ P_α tel que $P_\alpha((q_\alpha)) = \begin{cases} \lambda_\alpha(q_\alpha \circ \varphi_\alpha) & \text{sur supp } \lambda_\alpha \\ 0 & \text{dans } \complement \text{ supp } \lambda_\alpha \end{cases}$

P est continue pour les topologies définies par les normes de Sobolev d'indice 1, donc P se prolonge en $\bar{P}$ linéaire continue :

$$P : \overset{s}{\underset{\alpha=1}{\oplus}} H^1(\mathbb{R}^N_+,E) \overset{t}{\underset{\alpha=r+1}{\oplus}} H^1(\mathbb{R}^N,E) \longrightarrow H^1(B,E) \, .$$

Propriété de $\bar{P}$ *et* $\bar{\gamma}$: $C^r(B,E) \longrightarrow C^r(B,E)$

$$\Psi$$

considérons $P \circ \gamma \; : \; u \rightsquigarrow P(\gamma u) = \sum_{=1}^{t} P_\alpha((\tilde{u}_\alpha))$

Or $P_\alpha((\tilde{u}_\alpha)) = \lambda_\alpha(\mu_\alpha \circ u \circ \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha) = \lambda_\alpha u$

donc $P(\gamma(u)) = u$ donc $P \circ \gamma = id_{C^r(B,E)}$

donc $\bar{P} \circ \bar{\gamma} = id_{H^1(B,E)}$ donc $\bar{\gamma}$ est un isomorphisme de $H^1(B,E)$ sur son image dans $\bigoplus_{\alpha=1}^{s} H^1(\mathbb{R}_+^N, E) \bigoplus_{\alpha=s+1}^{t} H^1(\mathbb{R}^N, E)$ la topologie sur $H^1(B,E)$ pourra donc être définie par la norme suivante :

$$u \in C^r(B,E),\; N(u) = \sum_{\alpha=1}^{s} \|\tilde{u}_\alpha\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N,E)} + \sum_{\alpha=s+1}^{t} \|\tilde{u}_\alpha\|_{H^1(\mathbb{R}^N,E)}$$

Remarque.- On aurait pu définir de manière analogue γ_1 et P_1 tels que

$$\gamma_1 \; : \; C^r(B,E) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha=1}^{s} C^r(\mathbb{R}_+^N, E) \bigoplus_{\alpha=s+1}^{t} C^r(\mathbb{R}^N, E)$$

$$u \rightsquigarrow \gamma_1(u) = \widetilde{\lambda_\alpha . u} = (\lambda_\alpha u) \circ \psi_\alpha^{-1}$$

$$P_1 \; : \; \bigoplus_{\alpha=1}^{s} C^r(\mathbb{R}_+^N, E) \bigoplus_{s+1}^{t} C^r(\mathbb{R}^N, E) \longrightarrow C^r(B,E)$$

avec $P_1 = \sum_{\alpha=1}^{t} P_{1\alpha}$, $P_{1\alpha}((g_\alpha)) = \begin{cases} \mu_\alpha(g_\alpha \circ \psi_\alpha) & \text{sur} \quad \text{supp } \mu_\alpha \\ 0 & \text{dans} \quad \complement \text{supp } \mu_\alpha \end{cases}$

On vérifie comme précédemment que γ_1 et P_1 se prolongent en $\bar{\gamma}_1$ et $\bar{P}_1$ sur les espaces définis précédemment, et que $\bar{P}_1 \circ \bar{\gamma}_1 = id_{H^1(B,E)}$, donc $\bar{\gamma}_1$ est un isomorphisme de $H^1(B,E)$ sur son image dans $\bigoplus_{\alpha=1}^{s} H^1(\mathbb{R}_+^N, E) \bigoplus_{\alpha=s+1}^{t} H^1(\mathbb{R}^N, E)$.

La topologie de $H^1(B,E)$ pourra donc être définie par la norme suivante :

$$\text{si} \quad u \in C^r(B,E) \quad N_1(u) = \sum_{\alpha=1}^{s} \|\widetilde{\lambda_\alpha u}\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+,E)} + \sum_{\alpha=s+1}^{t} \|\widetilde{\lambda_\alpha u}\|_{H^1(\mathbb{R}^N,E)}$$

Topologie sur $H^{-1}(B,E) = (H^1(B,E))^*$

par dualité, on considère les morphismes : $\bar{P}^*$ et $\bar{\gamma}^*$

$$\bar{P}^* : (H^1(B,E))^* = H^{-1}(B,E) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha=1}^{s} H^{-1}(\mathbb{R}^N_+,E) \bigoplus_{\alpha=s+1}^{t} H^{-1}(\mathbb{R}^N,E)$$

$$\bar{\gamma}^* : \bigoplus_{\alpha=1}^{s} H^{-1}(\mathbb{R}^N_+,E) \bigoplus_{s+1}^{t} H^{-1}(\mathbb{R}^N,E) \longrightarrow H^{-1}(B,E)$$

d'autre part $\bar{\gamma}^* \circ \bar{P}^* = (\bar{P} \circ \bar{\gamma})^* = id_{H^{-1}(B,E)}$ donc $H^{-1}(B,E) = ((H^1(B,E))^*)$ est isomorphe à un sous-espace fermé de $\bigoplus_{\alpha=1}^{s} H^{-1}(\mathbb{R}^N_+,E) \bigoplus_{\alpha=s+1}^{t} H^1(\mathbb{R}^N,E) = Z$

La topologie sur $H^{-1}(B,E)$ pourra être définie par la norme N^* telle que si $f \in H^{-1}(B,E)$

$$N^*(f) = \|\bar{P}^*(f)\|_Z$$

Or $\bar{P}^*(f).((g_\alpha)) = \sum_{\alpha=1}^{t} L_\alpha(g_\alpha)$ avec $L_\alpha \in (H^1(\mathbb{R}^N_+,E))^* \quad 1 \leq \alpha \leq s$

$L_\alpha \in (H^1(\mathbb{R}^N,E))^* \quad s+1 \leq \alpha \leq t$

Ⓒ *Etude de* $\bar{P}^*(f)$ *pour* $f = \bar{L}_1(u)$; $u \in C^r(B,E)$

$$\bar{P}^*(\bar{L}_1 u).((g_\alpha)) = \bar{L}_1(u) \,.\, \bar{P}((g_\alpha))$$

Or $\bar{P}((g_\alpha)) = \sum_{\alpha=1}^{t} \lambda_\alpha(g_\alpha \circ \psi_\alpha)$

donc $L_1.u.\bar{P}((g_\alpha)) = \sum_{\alpha=1}^{t} \int_{\Omega_\alpha} \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda_\alpha(g_\alpha \circ \psi_\alpha))(x)\, dx$

Etudions $I_\alpha = \int_{\Omega_\alpha} \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda_\alpha . (g_\alpha \circ \psi_\alpha))(x)\, dx$

$$I_\alpha = \int_{O_\alpha} \frac{D(x)}{D(y)} \sum_{ij} a_{ij}(\psi_\alpha^{-1}(y)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\psi_\alpha^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda_\alpha (g_\alpha \circ \psi_\alpha))(\psi_\alpha^{-1}(y))\, dy$$

$$= \int_{O_\alpha} \frac{D(\psi_\alpha^{-1}(y))}{D(y)} \sum_{ij} \{a_{ij}(\psi_\alpha^{-1}(y)) (\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\partial y^\ell}{\partial x_i}(\psi_\alpha^{-1}(y)) \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial y^k}{\partial x_i}(\psi_\alpha^{-1}(y))$$

$$\frac{\partial}{\partial y^k}(\tilde{\lambda}_\alpha . g_\alpha)(y)\}\, dy$$

avec $\tilde{u} = u \circ \psi_\alpha^{-1}$; $\tilde{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha \circ \psi_\alpha^{-1}$

$$I_\alpha = \int_{O_\alpha} \sum_{\ell,k} b_{\ell k}(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^\ell}(y) . \frac{\partial}{\partial y^k}(\tilde{\lambda}_\alpha . g_\alpha)(y)\, dy \tag{7}$$

avec $b_{k\ell}(y) = [\sum_{ij} a_{ij}(\psi_\alpha^{-1}(y) \frac{\partial y^\ell}{\partial x_i}(\psi_\alpha^{-1}(y) \frac{\partial y^k}{\partial x_j}(\psi_\alpha^{-1}(y))] \frac{D(\psi_\alpha^{-1}(y))}{D(y)}$

Remarques.-

1) $b_{\ell k} \in C^{r-1}(O_\alpha, L(E,E^*)) \sim C^{r-1}(O_\alpha, L(E,E))$

2) quel que soit $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^N - \{0\}$,

$\sum_{\ell,k} b_{\ell k}(y)\, \xi^\ell \xi^k \in$ Isom(E,E), pour tout $y \in O_\alpha$.

Explicitons (7) :

$$I_\alpha = \int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} b_{\ell k}(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^\ell}(y) . \frac{\partial}{\partial y^k}(\tilde{\lambda}_\alpha)(y) . g_\alpha(y)\, dy$$

$$+ \int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} b_{\ell k}(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^\ell}(y) . \tilde{\lambda}_\alpha \frac{\partial}{\partial y^k}(g_\alpha)(y)\, dy$$

Or $\int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} b_{\ell k}(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^\ell}(y) . \tilde{\lambda}_\alpha(y) \frac{\partial}{\partial y^k}(g_\alpha)\, dy =$

$$\int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} b_{\ell k}(y) \frac{\partial(\tilde{\lambda}_\alpha . \tilde{u})}{\partial y^\ell}(y) . \frac{\partial}{\partial y^k}(g_\alpha)(y)\, dy - I_{3\alpha}$$

Avec $I_{3\alpha} = \int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} b_{\ell k}(y)\ \tilde{u}(y)\ \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial y^\ell}(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y^k}(g_\alpha)(y)\ dy$

donc $I_\alpha = I_{1\alpha} + I_{2\alpha} - I_{3\alpha}$.

Or $I_{1\alpha}$ peut encore s'écrire :

$$I_{1\alpha} = \int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} b_{\ell k}(y)\ \frac{\partial \tilde{\mu}_\alpha . \tilde{u}}{\partial y^\ell}(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y^k}(\tilde{\lambda}_\alpha)(y)\ g_\alpha(y)\ dy$$

$$- \int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} b_{\ell k}(y)\ \tilde{\mu}_\alpha . \tilde{u}\ \frac{\partial}{\partial y^\ell}(\tilde{\mu}_\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial y^k}(\tilde{\lambda}_\alpha)\ g_\alpha(y)\ dy$$

donc $I_\alpha = J_{1\alpha} + J_{2\alpha} + J_{3\alpha}$

avec $J_{1\alpha} = \int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} b_{\ell k}(y)\ \frac{\partial(\tilde{\mu}_\alpha . u)}{\partial y^\ell}(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y^k}(\tilde{\lambda}_\alpha) \cdot (y)\ ,\ g_\alpha(y)\ dy$

$$J_{2\alpha} = -\int_{O_\alpha} \sum_{k} b_{\ell k}(y)\ (\tilde{\mu}_\alpha . u)\ (y)\ \Big[\frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial y^\ell}(y)\ \frac{\partial}{\partial y^k}(g_\alpha)(y) + \frac{\partial \tilde{\mu}_\alpha}{\partial y^\ell}(y)\ \frac{\partial}{\partial y^k}(\tilde{\lambda}_\alpha)\ g_\alpha(y)\Big]\ dy$$

$$J_{3\alpha} = \int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} b_{\ell k}(y)\ \frac{\partial}{\partial y^\ell}(\tilde{\lambda}_\alpha . \tilde{u})\ (y) \cdot \frac{\partial}{\partial y^k}(g_\alpha)(y)\ dy$$

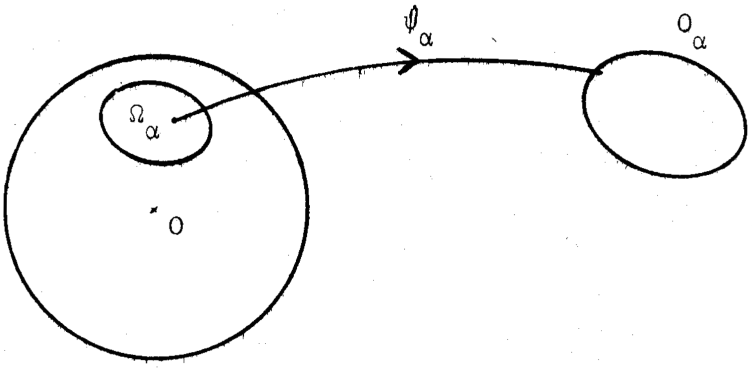
donc $L_\alpha = L_{1\alpha} + L_{2\alpha} + L_{3\alpha}$ $\quad (L_\alpha(g_\alpha))_{1 \leq \alpha \leq t} = \bar{P}^*(\bar{L}u)\ ((g_\alpha))$

avec $L_{1\alpha}(g_\alpha) = J_{1\alpha}$

$L_{2\alpha}(g_\alpha) = J_{2\alpha}$

$L_{3\alpha}(g_\alpha) = J_{3\alpha}$

① Etude dans l'espace $\mathbb{R}^n$.



On suppose $s+1 \leqslant \alpha \leqslant t$ donc $\Omega_\alpha \subset \overset{\circ}{B}$; $O_\alpha \subset \mathbb{R}^N$

$L_{1\alpha}(g_\alpha)$ peut s'écrire dans ces conditions :

$$L_{1\alpha}(g_\alpha) = \int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} b_{\ell k}(y) \ (\tilde{\mu}_\alpha . \tilde{u}) \ (y) \frac{\partial}{\partial y^k} (\tilde{\lambda}_\alpha)(y) \, g_\alpha(y) \ dy$$

$$- \int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} \frac{\partial}{\partial y\ell} (b_{\ell k}(y)) \ (\tilde{\mu}_\alpha . \tilde{u}) \ \frac{\partial}{\partial y^k} (\tilde{\lambda}_\alpha) \ (y) \ g_\alpha(y) \ dy$$

$$- \int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} b_{\ell k}(y) \ (\tilde{\mu}_\alpha . \tilde{u}) \ (y) \ \frac{\partial}{\partial y^\ell} \left(\frac{\partial}{\partial y^k} (\tilde{\lambda}_\alpha) \ g_\alpha\right) \ (y) \ dy \ .$$

donc $|L_{1\alpha}(g_\alpha)| \leqslant C_1 ||\tilde{\mu}_\alpha . u||_{H^0(\mathbb{R}^N,E)} \ ||g_\alpha||_{H^1(\mathbb{R}^N,E)}$

donc $||L_{1\alpha}||_{H^{-1}(\mathbb{R}^N,E)} \leqslant C_1 ||\tilde{\mu}_\alpha \tilde{u}||_{H^0(\mathbb{R}^N,E)}$

de même, $|L_{2\alpha}(g_\alpha)| \leqslant C_2 ||\tilde{\mu}_\alpha \tilde{u}||_{H^0(\mathbb{R}^N,E)} \ . \ ||g_\alpha||_{H^1(\mathbb{R}^N,E)}$

donc $|L_{2\alpha}||_{H^{-1}(\mathbb{R}^N,E)} \leqslant C_2 \ ||\tilde{\mu}_\alpha \tilde{u}||_{H^0(\mathbb{R}^N,E)}$

Considérons donc $L_{3\alpha}$

On décompose $L_{3\alpha}$ sous la forme suivante : $L_{3\alpha} = L^o_{3\alpha} + R^o_{3\alpha}$

avec $L^o_{3\alpha}(g_\alpha) = \int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} b_{\ell k}(p) \frac{\partial}{\partial y_\ell} (\tilde{\lambda}_\alpha . u) \frac{\partial}{\partial y_k} (g_\alpha)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} (\quad)\, dy$

$$R^o_{3\alpha}(g_\alpha) = \int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} (b_{\ell k}(y) - b_{\ell k}(p)) \frac{\partial}{\partial y_\ell} (\tilde{\lambda}_\alpha . \tilde{u}) \frac{\partial}{\partial y_k} (g_\alpha)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} (\quad)\, dy$$

où $p \in O_\alpha$

1) *Etudions* $L^o_{3\alpha}$: posons $u_\alpha = \tilde{\lambda}_\alpha . \tilde{u}$; $B_{\ell k} = b_{\ell k}(p)$

Notation : si $\theta \in L^1(\mathbb{R}^N, E)$ nous noterons

$$\hat{\theta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i<x,\xi>}\, \theta(x)\, dx$$

donc si $\theta \in C^1_c(\mathbb{R}^N, E)$ ($\theta \in C^1(\mathbb{R}^N, E)$ et supp θ compact)

$$\widehat{\frac{\partial \theta}{\partial x_i}} (\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i<x,\xi>} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} (x)\, dx = + i\, \xi_i \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i<x,\xi>} \theta(x)\, dx$$

donc $\widehat{\frac{\partial \theta}{\partial x_i}} (\xi) = - i\, \xi_i\, \hat{\theta}(\xi)$

$$L^o_{3\alpha}(g_\alpha) = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{\ell, k} B_{\ell k} \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{u}_\alpha)\, (y) \frac{\partial}{\partial y^k} (g_\alpha)\, (y)\, dy$$

$$= (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{\ell, k} B_{\ell k} \widehat{\frac{\partial}{\partial y_\ell} \tilde{u}_\alpha}(\xi)\, \overline{\widehat{\frac{\partial}{\partial y^k} (g_\alpha)}}\, (\xi)\, d\xi$$

$$= (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} (\sum_{\ell, k} B_{\ell k}\, \xi_\ell\, \xi_k)\, \widehat{\tilde{u}}_\alpha(\xi)\, \overline{\widehat{g}}_\alpha(\xi)\, d\xi$$

donc $\widehat{L^o_{3\alpha}}(\xi) = \sum_{\ell k} B_{\ell k}\, \xi_\ell\, \xi_k\, \widehat{\tilde{u}}_\alpha(\xi) = B(\xi)\, \widehat{\tilde{u}}_\alpha(\xi)$

en posant $B(\xi) = (2\pi)^{-N} \sum_{\ell, k} B_{\ell k}\, \xi_\ell\, \xi_k$

($\mathcal{L}^o_{3\alpha}$ est considéré comme élément de $H^{-1}(\mathbb{R}^N,E)$).

Ecrivons $\widehat{\tilde{u}}_\alpha(\xi)$ sous la forme suivante :

$$\widehat{\tilde{u}}_\alpha(\xi) = \frac{1+|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\widehat{\tilde{u}}(\xi) = \frac{\widehat{\tilde{u}}(\xi)}{1+|\xi|^2} + \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\widehat{\tilde{u}}(\xi)$$

d'autre part, nous savons que pour $\xi \in \mathbb{R}^N - \{0\}$, $B(\xi) \in \mathrm{Isom}(E,E)$

donc si $\xi \neq 0$ $\widehat{\tilde{u}}_\alpha(\xi) = \dfrac{\widehat{\tilde{u}}(\xi)}{1+|\xi|^2} + \dfrac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2} B^{-1}(\xi) \,.\, B(\xi)\,\widehat{\tilde{u}}(\xi)$

donc si $\xi \neq 0$ $\widehat{\tilde{u}}_\alpha(\xi) = \dfrac{\widehat{\tilde{u}}(\xi)}{1+|\xi|^2} + \dfrac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2} B^{-1}(\xi)\,\widehat{\mathcal{L}^o_{3\alpha}}(\xi)$

donc $\xi \neq 0$ $\widehat{\tilde{u}}_\alpha(\xi) = \dfrac{\widehat{\tilde{u}}(\xi)}{1+|\xi|^2} + \dfrac{1}{1+|\xi|^2} \,.\, B^{-1}\left(\dfrac{\xi}{|\xi|}\right)\widehat{\mathcal{L}^o_{3\alpha}}(\xi)$ (8)

d'autre part, il existe $C > 0$ tel que quel que soit α, $1 \leq \alpha \leq t$, quel que soit $\eta \in \mathbb{R}^N$ $|\eta| = 1$; quel que soit $p \in O_\alpha$,

$$\|B^{-1}(\eta)\|_{L(E,E)} \leq C \quad \text{où} \quad B(\eta) = \sum_{\ell k} b_{\ell k}(p)\,\eta_\ell \,.\, \eta_k \tag{9}$$

On obtient donc à partir de (8), par multiplication par $(1+|\xi|^2)^{1/2}$

$$\widehat{\tilde{u}}_\alpha(\xi)\,(1+|\xi|^2)^{1/2} = \frac{\widehat{\tilde{u}}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{1/2}} + B^{-1}\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)\widehat{\mathcal{L}^o_{3\alpha}}(\xi) \,.\, \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{1/2}}$$

d'où $\|\tilde{u}_\alpha\|_{H^1(\mathbb{R}^N,E)} \leq \|\tilde{u}_\alpha\|_{H^o(\mathbb{R}^N,E)} + C\,\|\mathcal{L}^o_{3\alpha}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N,E)}$ (10)

2) *Etudions* R^o_3 :

$$|R^o_{3\alpha}\cdot g_\alpha| \leq \rho\, \|\tilde{u}_\alpha\|_{H^1(\mathbb{R}^N,E)}\ \|g_\alpha\|_{H^1(\mathbb{R}^N,E)}$$

donc $\|R^o_{3\alpha}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N,E)} \leq \rho\,\|\tilde{u}_\alpha\|_{H^1(\mathbb{R}^N,E)}$ (11)

où $\displaystyle\sum_{\ell k}\ \sup_{y\in \mathrm{supp}\tilde{\lambda}_\alpha} \|b_{\ell k}(p) - b_{\ell k}(y)\| \leq \rho = \sum_{\ell k}\ \sup_{y\in O_\alpha} \|b_{\ell k}(p) - b_{\ell k}(y)\|$

Or $b_{\ell k}$ étant de classe C^1 , à partir d'un recouvrement $(\Omega_\alpha)_{1\leq\alpha\leq t}$ de B tel que $\overline{\Omega_\alpha} = K_\alpha \subset V_\alpha$ K_α compact V_α ouvert simple ; on peut construire un recouvrement $(\Omega'_\beta)_{1\leq\beta\leq t'}$ où $\Omega'_\beta \subset V_{\alpha_\beta}$ et tel que $\forall_{\beta\in\{1,\dots,t'\}}$ $\forall\ p \in O'_\beta$

$$\sum_{\ell k} \sup_{g\in O'_\beta} ||b_{\ell k}(p) - b_{\ell k}(y)|| = \rho < \frac{1}{2.C} \quad \text{(C défini page 39 (9))}$$

On supposera que cette propriété est déjà vérifiée pour le recouvrement $(\Omega_\alpha)_{1\leq\alpha\leq t}$ d'après (10) et (11), sachant que $L_{3\alpha} = L^o_{3\alpha} + R^o_{3\alpha}$, on obtient

$$||\tilde{u}_\alpha||_{H^1(\mathbb{R}^N,E)} \leq ||\tilde{u}_\alpha||_{H^o(\mathbb{R}^N,E)} + C||L_{3\alpha}||_{H^{-1}(\mathbb{R}^N,E)} + C\ \rho\ ||\tilde{u}_\alpha||_{H^1(\mathbb{R}^N,E)}$$

$$\leq ||\tilde{u}_\alpha||_{H^o(\mathbb{R}^N,E)} + C||L_{3\alpha}||_{H^{-1}(\mathbb{R}^N,E)} + \frac{1}{2}\ ||\tilde{u}_\alpha||_{H^1(\mathbb{R}^N,E)}$$

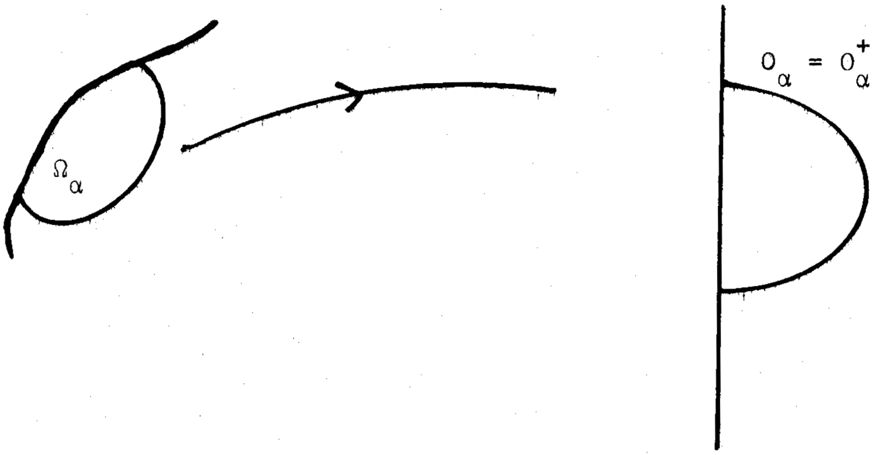
(9 bis)

donc $||\tilde{u}_\alpha||_{H^1(\mathbb{R}^N,E)} \leq C^1 \{||\tilde{u}_\alpha||_{H^o(\mathbb{R}^N,E)} + ||\tilde{\mu}_\alpha \tilde{u}||_{H^o(\mathbb{R}^N,E)} + ||L_\alpha||_{H^{-1}(\mathbb{R}^N,E)}\}$

où $C^1 = \sup(2,\ 2C,\ 2C\ C_1,\ 2C\ C_2)$.

Ⓔ *Etude dans un demi-espace* $\mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$.

On suppose $1 \leq \alpha \leq s$



$L_{1\alpha}$ peut s'écrire dans ces conditions :

$$L_{1\alpha}(g_\alpha) = \int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} b_{\ell k}(y)\ (\tilde{\mu}_\alpha . \tilde{u})\ (y)\ \frac{\partial}{\partial y^k}\ (\tilde{\lambda}_\alpha)\ (y)\ \ g_\alpha(y)\ dy$$

$$- \int_{O_\alpha} \sum_{\ell k} \frac{\partial}{\partial y^\ell}\ (b_{\ell k})(y)\ \ (\tilde{\mu}_\alpha . \tilde{u})(y)\ \frac{\partial}{\partial y^k}\ (\tilde{\lambda}_\alpha)\ \ g_\alpha(y)\ dy$$

$$- \int_{O_\alpha} \sum_{k} b_{\ell k}(y)\ (\tilde{\mu}_\alpha . \tilde{u})\ (y)\ \frac{\partial}{\partial y^\ell}\ (\frac{\partial}{\partial y^k}\ (\tilde{\lambda}_\alpha)\ g_\alpha)\ (y)\ dy$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \sum_{\ell,k} b_{\ell k}(y',0)\ (\tilde{\mu}_\alpha \tilde{u})\ (y',0)\ (\frac{\partial}{\partial y^k}\ \tilde{\lambda}_\alpha)\ (y',0)\ \ g_\alpha(y',0)\ dy$$

où $y = (y',y_N)$ $y' = (y_1,\ y_2,\ y_{N-1})$

donc $L_{1\alpha}(g\ ) = S_{1\alpha} + S_{2\alpha} + S_{3\alpha} + S_{4\alpha}$.

Comme dans le cas de l'espace $\mathbb{R}^N$, on a :

$$|S_{1\alpha} + S_{2\alpha} + S_{3\alpha}| \leq C_1 ||\tilde{\mu}_\alpha \tilde{u}||_{H^o(\mathbb{R}^N,E)}\ \ ||g_\alpha||_{H^1(\mathbb{R}^N,E)}$$

d'autre part, $|S_{4\alpha}| \leq C_1'\ ||\tilde{\mu}_\alpha \tilde{u}|_{\mathbb{R}^{N-1}}||_{H^o(\mathbb{R}^{N-1},E)}\ \ ||g_\alpha|_{\mathbb{R}^{N-1}}||_{H^o(\mathbb{R}^{N-1},E)}$

donc $|S_{4\alpha}| \leq C_1''\ ||\tilde{\mu}_\alpha . \tilde{u}|_{\mathbb{R}^{N-1}}||_{H^o(\mathbb{R}^{N-1},E)}\ \ ||g_\alpha||_{H^1(\mathbb{R}^N_+,E)}$

Il en résulte que

$$||L_{1\alpha}||_{H^{-1}(\mathbb{R}^N_+,E)} \leq C_1\ ||\tilde{\mu}_\alpha . \tilde{u}||_{H^o(\mathbb{R}^N,E)} + C_1''\ ||\tilde{\mu}_\alpha \tilde{u}|_{\mathbb{R}^{N-1}}||_{H^o(\mathbb{R}^{N-1},E)} \qquad \text{(10 bis)}$$

d'autre part, comme dans l'espace $\mathbb{R}^N$, on a

$$||L_{2\alpha}||_{H^{-1}(\mathbb{R}^N_+,E)} \leq C_2\ ||\tilde{\mu}_\alpha . \tilde{u}\ ||_{H^o(\mathbb{R}^N_+,E)} \qquad \text{(11 bis)}$$

Considérons donc $L_{3\alpha}$

On décompose $L_{3\alpha}$ sous la forme suivante : $L^{o}_{3\alpha} + R_{3\alpha}$ avec

$$L^{o}_{3\alpha}(g_\alpha) = \int_{O^+_\alpha} \sum_{\ell k} b_{\ell k}(p) \frac{\partial}{\partial y^{\ell}} (\tilde{\lambda}_\alpha . \tilde{u}) . \frac{\partial}{\partial y^{k}} (g_\alpha)\ (y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^N_+} (\quad)\ dy$$

$$R_{3\alpha}(g_\alpha) = \int_{O^+_\alpha} \sum_{\ell k} (b_{\ell k}(y) - b_{\ell k}(p)) \frac{\partial}{\partial y^{\ell}} (\tilde{\lambda}_\alpha . \tilde{u}) . \frac{\partial}{\partial y^{k}} (g\ )\ dy = \int_{\mathbb{R}^N_+} (\quad)\ dy$$

où $p \in O^+_\alpha$

1\) *Etudions* $L^{o}_{3\alpha}$:

Notations :

α) nous poserons $\tilde{u}_\alpha = \tilde{\lambda}_\alpha . \tilde{u} = v$, $g_\alpha = g$; $B_{\ell k} = b_{\ell k}(p)$

Si $f \in C^r(O^+_\alpha, E)$ on désigne $\overset{o}{f}(y', y^n) = \begin{cases} f(y', y_n) & \text{si } y_n > 0 \\ 0 & \text{si } y_n < 0 \end{cases}$

β) nous écrirons $\xi = (\xi', \xi_N)$ avec $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N-1})$

Remarque.- Il existe une application linéaire continue (de restriction) de $H^1(\mathbb{R}^N, E)$ dans $H^1(\mathbb{R}^N_+, E)$ soit rest.

Elle est définie sur $C^1(\mathbb{R}^N, E)$ à valeurs dans $C^1(\mathbb{R}^N_+, E)$ par $f \rightsquigarrow f_{|\mathbb{R}^N_+}$, et se prolonge de $H^1(\mathbb{R}^N, E)$ dans $H^1(\mathbb{R}^N_+, E)$, d'autre part il existe une application (ext) de $H^1(\mathbb{R}^N_+, E)$ dans $H^1(\mathbb{R}^N, E)$ linéaire continue telle que

$$\text{rest o ext} = id_{H^1(\mathbb{R}^N_+, E)} \quad \text{(cf . Attiyah Singer, théorème de l'index)}$$

donc par dualité : $j = (\text{rest})^* : H^{-1}(\mathbb{R}^N_+, E) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^N, E)$

$$k = (\text{ext})^* : H^{-1}(\mathbb{R}^N, E) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^N_+, E)$$

telles que $k \text{ o } j = (\text{rest o ext})^* = id_{H^{-1}(\mathbb{R}^N_+, E)}$

donc j est un isomorphisme de $H^{-1}(\mathbb{R}^N_+,E)$ sur son image il suffit donc si $L \in H^{-1}(\mathbb{R}^N_+,E)$ d'étudier $j(L)$ et même $\|j(L)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N,E)}$

Considérons donc $j(L^o_{3\alpha}) \in H^{-1}(\mathbb{R}^N,E)$

$$j(L^o_{3\alpha}).g = L^o_{3\alpha} . (\text{rest } g) = \int_{\mathbb{R}^N_+} \sum_{\ell,k} B_{\ell k} \frac{\partial}{\partial y_\ell}(v)(y) \frac{\partial}{\partial y^k}(\text{rest } g)(y)\, dy$$

$$j(L^o_{3\alpha}).g = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{\ell,k} B_{\ell k} \overset{o}{\overbrace{\frac{\partial}{\partial y_\ell} v}}\,(y) \frac{\partial}{\partial y_k}(g)(y)\, dy$$

$$= (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{\ell,k} B_{\ell k} \widehat{\overset{o}{\overbrace{\frac{\partial}{\partial y_\ell} v}}}\,(\xi)\ \overline{\widehat{\frac{\partial}{\partial y_k}}}\, g\,(\xi)\, d\xi$$

Calculons la transformée de Fourier de $\overset{o}{\overbrace{\frac{\partial v}{\partial y_\ell}}}$ suivant les cas :

$$\widehat{\overset{o}{\overbrace{\frac{\partial v}{\partial y_\ell}}}}\,(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i<y,\xi>} \overset{o}{\overbrace{\frac{\partial v}{\partial y_\ell}}}\,(y)\, dy$$

<u>*1^er^ cas*</u> $y_\ell \neq y_N$

$$\widehat{\overset{o}{\overbrace{\frac{\partial v}{\partial y_\ell}}}}\,(\xi) = \int_0^\infty e^{-i<y_N,\xi_N>} \left(\int_{R^{N-1}} \frac{\partial v}{\partial y_\ell}(y',y_N)\, e^{-i<y',\xi'>} dy'\right) dy_N$$

$$= \int_0^\infty e^{-i<y_N,\xi_N>} \left(\int_{R^{N-1}} i\, \xi_\ell\, e^{-i<y',\xi'>} v(y',y_N)\, dy'\right) dy_N$$

$$= i\, \xi_\ell \int_0^\infty \widehat{v}(\xi',y_N)\, dy_N$$

que nous écrirons encore par abus de notation : $i\, \xi_\ell\, \widehat{v}(\xi',\xi_N)$ ou plus rigoureusement $i\, \xi_\ell\, \widehat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N)$.

2^e^ cas $y_\ell = y_N$

$$\widehat{\overset{o}{\frac{\partial v}{\partial y_\ell}}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-i<y',\xi'>} \left(\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y_N}(v)\,(y',y_N)\, e^{-i<y_N,\xi_N>}\, dy_N\right) dy'$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-i<y',\xi'>} \left[- v(y',0) + i\,\xi_N \int_0^\infty v(y',y_N)\, e^{-i(y_N,\xi_N)}\, dy_N\right] dy$$

$$= -\widehat{v_o}(\xi') + i\,\xi_N\, \widehat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N)$$ en notant $v_o = v|_{\mathbb{R}^{N-1}\times\{0\}}$

si $j(L^o_{3\alpha}) = L$

$$j(L^o_{3\alpha})\cdot g = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{L}(\xi',\xi_N)\,\overline{\widehat{g}}(\xi',\xi_N)\, d\xi'\, d\xi_N$$

$$\widehat{L}_1(\xi',\xi_N) = (2\pi)^{-N}\widehat{L}(\xi',\xi_N) = \Big(\sum_{\ell,k} B_{\ell k}\,\xi_\ell\,\xi_k\Big)\,\widehat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N) + i\Big(\sum_{k=1}^{N} B_{Nk}\,\xi_k\Big)\,\widehat{v_o}(\xi')$$

a) *Etudions* $I = \int_{|\xi'|\geq 1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{L}(\xi',\xi_N)\|^2}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2}\, d\xi_N\right) d\xi'$

Remarque.- puisque $|\xi'| \geq 1$, on a :

$$|\xi'|^2 + |\xi_N|^2 \leq 1 + |\xi'|^2 + |\xi_N|^2 \leq 2(|\xi'|^2 + |\xi_N|^2)$$

donc $\frac{1}{2} J \leq I \leq J$ avec $J = \int_{|\xi'|\geq 1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{L}(\xi',\xi_N)\|^2}{|\xi'|^2+|\xi_N|^2}\, d\xi_N\right) d\xi'$

Or $$\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{L}(\xi',\xi_N)\|^2}{|\xi'|^2+|\xi_N|^2}\, d\xi_N = \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{L}(\xi',\xi_N)\|^2}{|\xi'|^2\Big[1+\Big(\frac{\xi_N}{|\xi'|}\Big)^2\Big]}\, d\xi_N$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{L}(\xi',\xi_N)\|^2}{|\xi'|\Big[1+\Big(\frac{\xi_N}{|\xi'|}\Big)^2\Big]}\; \frac{\xi_N}{|\xi'|} = \int_R \frac{\|\widehat{L}(\xi',\tau|\xi'|)\;{}^2}{|\xi'|\;(1+\tau^2)}\, d\tau$$

en posant $\frac{\xi_N}{|\xi'|} = \tau$ soit $\xi_N = \tau|\xi'|$.

donc $$J = \int_{|\xi'|\geq 1} \frac{1}{|\xi'|} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{L}(\xi',\tau|\xi'|)\|^2}{1+\tau^2}\, d\tau \qquad (12)$$

Or, si $\widehat{L}_1(\xi',\xi_N) = B(\xi',\xi_N)\,\hat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N) + i\sum_{k=1}^{N} B_{Nk}\,\xi_k\,\widehat{v}_o(\xi')$

$$\widehat{L}_1(\xi',\tau|\xi'|) = B(\xi',\tau|\xi'|)\,\hat{\overset{o}{v}}(\xi',\tau|\xi'|) + i\Big(\sum_{k=1}^{N-1}\xi_k\,B_{Nk} + \tau|\xi'|\,B_{NN}\Big)\,\widehat{v}_o(\xi')$$

Considérons $\hat{\overset{o}{v}}(\xi',\tau|\xi'|) = \int_0^\infty e^{-i<x_N,\tau|\xi'|>}\,\widehat{v}_{y'}(\xi',x_N)\,dx_N$

$$= \frac{1}{|\xi'|}\int_0^\infty e^{-i<x_N|\xi'|,\tau>}\,\widehat{v}_{y'}(\xi',x_N)\,|\xi'|\,dx_N = \frac{1}{|\xi'|}\int_0^\infty e^{-i<t,\tau>}\,\widehat{v}_{y'}\Big(\xi',\frac{t}{|\xi'|}\Big)d\xi$$

$$= \frac{1}{|\xi'|}\,\hat{\overset{o}{w}}_{\xi'}(\tau) \quad \text{où} \quad w_{\xi'}(t) = w\Big(\frac{t}{|\xi'|}\Big)$$

et $w(y_N) = \widehat{v}_{y'}(\xi', y_N)$ transformée de Fourier partielle par rapport à y'

donc $\widehat{L}_1(\xi',\tau|\xi'|) = B(\xi',\tau|\xi'|)\,\frac{1}{|\xi'|}\,\hat{\overset{o}{w}}_{\xi'}(\tau) + i\{\sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk}\,\xi_k + B_{NN}\,\tau|\xi'|\}\widehat{v}_o(\xi')$

$$= |\xi'|\,\Big\{B\Big(\frac{\xi'}{|\xi'|},\tau\Big)\,\hat{\overset{o}{w}}_{\xi'}(\tau) + i\Big(\sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk}\,\xi_k + B_{NN}\tau\Big)\,w_{\xi'}(0)$$

$$= |\xi'|\;\widehat{L_{\frac{\xi'}{|\xi'|}}\,.\,w_{\xi'}}(\tau) \qquad (13)$$

où $L\eta : H^1(\mathbb{R}^+,E) \to H^{-1}(\mathbb{R}, E_{\mathbb{C}})$ $E_{\mathbb{C}}$ complexifié de E est définie par :

$$L\eta(u).g = \int_0^\infty \Big\{B_{NN}\frac{du}{dt}(t).\frac{d\bar{g}}{dt} + \frac{1}{i}\Big(\sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk}\xi'_k\Big)\frac{du}{dt}(t)\bar{g}(t) - \frac{1}{i}\Big(\sum_{k=1}^{N-1} B_{kN}\xi'_k\Big)u(t)\frac{d\bar{g}}{dt}(t) + D(\xi').u(t).\bar{g}(t)\Big\}dt$$

$$D(\xi') = \sum_{\ell\neq N,k\neq N} B_{\ell k}\,\xi'_k\,\xi'_\ell$$

Lemme 1.- Il existe $C' > 0$ tel que $\forall\,\alpha \in [1,t]$, $\forall w \in H^1(\mathbb{R}^+,E)$ $\forall\,\eta \in \mathbb{R}^{N-1}$, $|\eta| = 1$.

$$||w||_{H^1(\mathbb{R}^+,E)} \leqslant C' \, ||L_\eta . w||_{H^1(\mathbb{R},E_C)}$$

Supposons ce lemme démontré, et appliquons le à $w_{\xi'}$: $w_{\xi'}(t) = w(\frac{t}{|\xi'|})$

$$||w_{\xi'}||_{H^1(\mathbb{R}^+,E)} \leqslant C' \, ||L_\eta w_{\xi'}||_{H^{-1}}$$

Soit, pour $w \in C^r(\mathbb{R}^+,E)$

$$\int_0^\infty ||w_{\xi'}(t)||^2 \, dt + \int_0^\infty ||\frac{d}{dt} (w_{\xi'})(t)||^2 \, dt \leqslant (C')^2 ||L_\eta . w_{\xi'}||^2_{H^{-1}} \qquad (12)$$

Or $\frac{d}{dt} (w_{\xi'}) \; (t) = (\frac{d}{d\tau} \; w) \; (\frac{t}{|\xi'|}) \; . \; \frac{1}{|\xi'|}$

donc (12) devient : en posant $\frac{t}{|\xi'|} = \tau$ soit $t = \tau|\xi'|$

$$|\xi'| \int_0^\infty w(\tau).\bar{w}(\tau) \, d\tau + \frac{1}{|\xi'|} \int_0^\infty \frac{d}{d\tau} w(\tau) \; . \; \overline{\frac{d}{d\tau} w(\tau)} \, d\tau \leqslant (C')^2 ||L_\eta . w_{\xi'}||^2_{H^{-1}}$$

soit pour $w = \widehat{v_{y'}}$, $w(\tau) = \widehat{v_{y'}}(\xi',\tau)$, $\eta = \frac{\xi'}{|\xi'|}$

$$|\xi'|^2 \int_0^\infty ||\widehat{v_{y'}}(\xi',\tau)||^2 \, d\tau + \int_0^\infty ||\frac{d}{d\tau} \widehat{v_{y'}}(\xi',\tau)||^2 \, d\tau$$

$$\leqslant (C')^2 |\xi| \; ||L_{\frac{\xi'}{|\xi'|}} \; . \; w_{\xi'}||^2_{H^{-1}(\mathbb{R}, \, E_C)}$$

$$\leqslant (C')^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{||\widehat{L}(\xi',\tau\xi')||^2}{|\xi'|(1+\tau^2)} \, d\tau \qquad (14)$$

donc d'après (14) (13) (12), il vient :

$$\int_{|\xi'|\geq 1} (|\xi'|^2 \int_0^\infty ||\widehat{v_{y'}}(\xi',\tau)||^2 \, d\tau) d\xi' + \int_{|\xi'|\geq 1} (\int_0^\infty ||\frac{d}{d\tau} \widehat{v_{y'}}(\xi',\tau)||^2 d\tau) \, d\xi'$$

$$\leqslant (C')^2 \int_{|\xi \;|\geq 1} (\int_{\mathbb{R}} \frac{||\widehat{L}(\xi',\xi_N)||^2}{1+|\xi'|^2+\xi_N^2} \, d\xi_N) \, d\xi' \qquad (14 \text{ bis})$$

b) Etude de $\int_{\mathbb{R}} (\int_{|\xi'|\leqslant 1} \frac{\|\widehat{L}(\xi',\xi_N)\|^2}{1+|\xi'|^2+\xi_N^2} d\xi')\, d\xi_N$

α) *Premiers calculs* : rappelons l'expression de $\widehat{L_1}(\xi',\xi_N)$

$$\widehat{L_1}(\xi',\xi_N) = B(\xi',\xi_N)\,\widehat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N) + i \sum_{k=1}^{N} B_{Nk}\,\xi_k\,\widehat{v_{y'}}(\xi',0)$$

donc pour $(\xi',\xi_N) \neq 0$, $\widehat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N) = B^{-1}(\xi',\xi_N) \,.\, \widehat{L_1}(\xi',\xi_N) -$

$$i\,B^{-1}(\xi',\xi_N) \sum_{k=1}^{N} B_{Nk}\,\xi_k\,\widehat{v_{y'}}(\xi',0)$$

dans ces conditions :

$$\widehat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N) = \frac{\widehat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N)}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2} + \frac{|\xi'|^2+|\xi_N|^2}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2} \{B^{-1}(\xi',\xi_N) \,.\, \widehat{L_1}(\xi',\xi_N) -$$

$$i\,B^{-1}(\xi',\xi_N) \sum_{k=1}^{N} B_{Nk}\,\xi_k\,\widehat{v_{y'}}(\xi',0)$$

et

$$\xi_i'\,\widehat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N) = \frac{\xi_i'\,\widehat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N)}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2} + \xi_i'\,\frac{|\xi'|^2+|\xi_N|^2}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2} \{B^{-1}(\xi',\xi_N) \,.\, \widehat{L_1}(\xi',\xi_N) -$$

$$i\,B^{-1}(\xi',\xi_N) \sum_{k=1}^{N} B_{Nk}\,\xi_k\,\widehat{v_{y'}}(\xi',0)$$

donc

$$\int_{|\xi'|\leqslant 1} (\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N)\|^2\, d\xi_N)\, d\xi' \leqslant \|v\|_{H^o(\mathbb{R}^N_+,E)} +$$

$$+ C \int_{|\xi'|\leqslant 1} (\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{L}(\xi',\xi_N)\|^2}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2} d\xi_N)\, d\xi' + C_2\, \|v(y',o)\|_{H^o(\mathbb{R}^{N-1},E)} \qquad (15)$$

et aussi :

$$\int_{|\xi'|\leqslant 1} \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi_i'|^2 \, ||\widehat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N)||^2 \, d\xi_N\right) d\xi' \leqslant ||v||_{H^o(\mathbb{R}_+^N,E)}$$

$$+ C \int_{|\xi'|\leqslant 1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{||\hat{\mathcal{L}}(\xi',\xi_N)||^2}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2} d\xi_N\right) d\xi' + C_2 \, ||v(y',0)||_{H^o(\mathbb{R}^{N-1},E)} \tag{16}$$

d'autre part, $-\widehat{v_o}(\xi') + i\,\xi_N \widehat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N) = \dfrac{i\xi_N \widehat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N)}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2}$

$$+ \frac{\xi_N \; i(|\xi'|^2+|\xi_N|^2)}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2} B^{-1}(\xi',\xi_N) \, \widehat{\mathcal{L}}(\xi',\xi_N)$$

$$+ \frac{(|\xi'|^2+|\xi_N|^2)}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2} B^{-1}(\xi',\xi_N) \sum_{k=1}^{N} B_{Nk} \, \xi_k \, \xi_N \cdot \widehat{v_o}(\xi') - \widehat{v_o}(\xi') = \mathcal{A} + \beta$$

avec $\beta = \dfrac{|\xi'|^2+|\xi_N|^2}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2} B^{-1}(\xi',\xi_N) \displaystyle\sum_{k=1} B_{Nk} \, \xi_k \, \xi_N \cdot \widehat{v_o}(\xi') - \widehat{v_o}(\xi')$

Or $\widehat{v_o}(\xi') = \dfrac{(|\xi'|^2+|\xi_N|^2)}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2} \widehat{v_o}(\xi') + \dfrac{\widehat{v_o}(\xi')}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2}$

$$= \frac{|\xi'|^2+|\xi_N|^2}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2} B^{-1}(\xi',\xi_N) \, . \, B(\xi',\xi_N)$$

donc $\beta = \dfrac{|\xi'|^2+|\xi_N|^2}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2} B^{-1}(\xi',\xi_N) \left[- \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} B_{kN} \, \xi_k' \, \xi_N = - \sum_{\substack{k=1\\ \ell=1}}^{N-1} B_{\ell k} \, \xi_k' \, \xi_\ell'\right]$

$$\widehat{v_o}(\xi') - \frac{\widehat{v_o}(\xi')}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2}$$

donc $\displaystyle\int_{|\xi'|\leqslant 1} \left(\int_{\mathbb{R}} ||i \; \xi_N \widehat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N) - \widehat{v_o}(\xi')||^2 \, d\xi_N\right) d\xi' \leqslant ||v||_{H^o(\mathbb{R}_+^N,E)}$

$$+ C \int_{|\xi'|\leqslant 1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{||\widehat{\mathcal{L}}(\xi',\xi_N)||^2}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2} d\xi_N\right) d\xi' + C_3 \, ||v(y',0)||_{H^o(\mathbb{R}^{N-1},E)} \quad ;$$

$$v_o(y') = v(y',0) \tag{17}$$

β) *Remarques sur le calcul de* $||v||_{H^1(\mathbb{R}^N_+,E)}$ si $v \in C^1(\mathbb{R}^N_+,E)$

$$||v||^2_{H^1(\mathbb{R}^N_+,E)} = \int_{\mathbb{R}^N_+} ||v(y)||^2\, dy + \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N_+} ||\frac{\partial v}{\partial y_k}(y)||^2\, dy$$

Etudions successivement, chacune de ces intégrales : (on supposera que E est un espace de Hilbert)

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} ||v(y)||^2\, dy = \int_{\mathbb{R}^N_+} v(y)\ .\ \bar{v}(y)\, dy = \gamma\int_{\mathbb{R}^N} \overset{\widehat{\circ}}{v}(\xi',\xi_N)\ .\ \overline{\overset{\widehat{\circ}}{v}}(\xi',\xi_N)\, d\xi'\, d\xi_N$$

$$= \gamma\int_{\mathbb{R}^N} ||\overset{\widehat{\circ}}{v}(\xi',\xi_N)||^2\, d\xi'\, d\xi_N \quad \text{avec } \gamma = (2\pi)^{-N}$$

d'autre part

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} ||v(y)||^2\, dy = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} v(y',y_N).v(y',y_N)\, dy'\right) dy_N$$

$$= (2\pi)^{-N+1} \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} ||\widehat{v_{y'}}(\xi',y_N)||^2\, d\xi'\right) dy_N = (2\pi)^{N-1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_0^\infty ||\widehat{v_{y'}}(\xi',y_N)||^2\, dy_N\right) d\xi'$$

$$= (2\pi)^{-N+1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_0^\infty \widehat{v_{y'}}(\xi',y_N).\overline{\widehat{v_{y'}}}(\xi',y_N)\, dy_N\right) d\xi'$$

$$= (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} ||\overset{\widehat{\circ}}{v}(\xi',\xi_N)||^2\, d\xi_N\right) d\xi' \qquad (18)$$

en fait, on a $\int_0^\infty ||\widehat{v_{y'}}(\xi',y_N)||^2 dy_N = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} ||\overset{\widehat{\circ}}{v}(\xi',\xi_N)||^2\, d\xi_N$

Etudions

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} ||\frac{\partial v}{\partial y_k}(y)||^2\, dy = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial y_k}(y)\ .\ \overline{\frac{\partial v}{\partial y_k}}(y)\, dy_N\right) dy'$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial v}{\partial y_k}(y)\ .\ \overline{\frac{\partial v}{\partial y_k}}(y)\, dy'\right) dy_N$$

1^{er} *cas* $k \neq N$

$$I_k = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial v}{\partial y_k}(y',y_N)\, \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_k}(y',y_N)\, dy'\right) dy_N$$

$$= (2\pi)^{-N+1} \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \xi_k^2\, \widehat{v_{y'}}(\xi',y_N) \cdot \overline{\widehat{v_{y'}}}(\xi',y_N)\, dy'\right] dy_N$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (2\pi)^{-N+1} \left[\xi_k^2 \int_0^\infty \widehat{v_{y'}}(\xi',y_N) \cdot \overline{\widehat{v_{y'}}}(\xi',y_N)\, dy_N\right] d\xi'$$

et $\int_0^\infty \widehat{v_{y'}}(\xi',y_N).\overline{\widehat{v_{y'}}}(\xi',y_N)\, dy_N = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\overset{\circ}{v}}(\xi',\xi_N)\, \overline{\widehat{\overset{\circ}{v}}}(\xi',\xi_N)\, d\xi_N$

$$= \int_{\mathbb{R}} ||\widehat{\overset{\circ}{v}}(\xi',\xi_N)||^2\, d\xi_N$$

donc

$$I_k = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (2\pi)^{-N+1} \left[\xi_k^2 \int_0^\infty ||\widehat{v_y}(\xi',y_N)||^2\, dy_N\right] d\xi'$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (2\pi)^{-N} \left(\xi_k^2 \int_{\mathbb{R}} ||\widehat{\overset{\circ}{v}}(\xi',\xi_N)||^2\, d\xi_N\right) d\xi' \qquad (19)$$

$2^{ème}$ *cas* $k = N$

$$I_N = \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial v}{\partial y_N}(y',y_N) \cdot \frac{\partial v}{\partial y_N}(y',y_N)\, dy'\right] dy_N$$

$$= \int_0^\infty (2\pi)^{-N+1} \left[\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial}{\partial y_N} \widehat{v_{y'}}(\xi',y_N) \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial y_N} \widehat{v_{y'}}(\xi',y_N)}\, d\xi'\right] dy_N$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (2\pi)^{-N+1} \left[\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y_N} \widehat{v_{y'}}(\xi',y_N) - \overline{\frac{\partial}{\partial y_N} \widehat{v_{y'}}(\xi',y_N)}\, dy_N\right] dy'$$

Or $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y_N} v_{y'}(\xi',y_N) \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial y_N} \widehat{v_{y'}}(\xi',y_N)}\, dy_N = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\overset{\circ}{\frac{\partial}{\partial y_N} w}}(y_N) \cdot \overline{\widehat{\overset{\circ}{\frac{\partial}{\partial y_N} w}}}(y_N)\, dy_N$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\overset{\circ}{\frac{\partial}{\partial y_N} w}}(\xi_N) \cdot \overline{\widehat{\overset{\circ}{\frac{\partial}{\partial y_N} w}}}(\xi_N)\, d\xi_N$$

(on a posé $w(y_N) = \widehat{v_{y'}}(\xi',y_N)$ et $\widehat{\overset{o}{\overbrace{\frac{\partial}{\partial y_N} w}}}(\xi_N) = i\ \xi_N\ \widehat{\overset{o}{w}}(\xi_N) - w(0)$

donc $I_N = (2\pi)^{-N+1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Big[\int_0^\infty \Big|\Big|\frac{\partial}{\partial y_N} \widehat{v_{y'}}(\xi',y_N)\Big|\Big|^2 dy_N\Big]\ d\xi'$

$$= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (2\pi)^{-N} \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big|\Big|i\ \xi_N\ \widehat{\overset{o}{v}}(\xi',\xi_N) - \widehat{v_o}(\xi')\Big|\Big|^2 d\xi_N\Big)\ d\xi' \qquad (20)$$

c) *Conclusion.*-

D'après (15) et (18); (16) et (19); (17) et (20), on a :

$$\int_{|\xi'|\leq 1} \Big[|\xi'|^2 \int_0^\infty ||\widehat{v_{y'}}(\xi',\tau)||^2\ d\tau\Big]\ d\xi' + \int_{|\xi'|\leq 1} \Big[\int_0^\infty \Big|\Big|\frac{d}{d\tau}\ \widehat{v_{y'}}(\xi',\tau)\Big|\Big|^2\ d\tau\Big] d\xi'$$

$$\leq C'' \Big\{\int_{|\xi'|\leq 1} \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{||\widehat{L}(\xi',\xi_N)||^2}{1+|\xi'|^2+|\xi_N|^2}\ d\xi_N\Big)\ d\xi' + ||v_o||_{H^o(\mathbb{R}^{N-1},E)} +$$

$$||v||_{H^o(\mathbb{R}^N_+,E)} \Big\} \qquad (21)$$

donc d'après (21) et (14 bis)

$$||v||_{H^1(\mathbb{R}^N_+,E)} \leq C''' \Big\{||v||_{H^o(\mathbb{R}^N_+,E)} + ||v|_{\mathbb{R}^{N-1}}||_{H^o(\mathbb{R}^{N-1},E)} +$$

$$||\overset{o}{L}_{3\alpha}||_{H^{-1}(\mathbb{R}^N_+,E)} \Big\}$$

soit $||\tilde{u}_\alpha||_{H^1(\mathbb{R}^N_+,E)} \leq C''' \Big\{||\tilde{u}_\alpha||_{H^o(\mathbb{R}^N_+,E)} + ||\tilde{u}_\alpha|_{\mathbb{R}^{N-1}}||_{H^o(\mathbb{R}^{N-1},E)} +$

$$||\overset{o}{L}_{3\alpha}||_{H^{-1}(\mathbb{R}^N_+,E)^*} \Big\}$$

où C''' ne dépend pas de la carte locale choisie (22)

2) *Etude de* $R_{3\alpha}$:

En raffinant au besoin le recouvrement (Ω_α) (cf. étude dans le cas de l'espace R^N) nous appellerons encore (Ω_α) le nouveau recouvrement), on peut supposer que

$$\sum_{\ell,k} \sup_{y\in \operatorname{supp}\tilde{\lambda}_\alpha} \|b_{\ell k}(p) - b_{\ell k}(y)\| \leqslant \sum_{\ell,k} \sup_{y\in O_\alpha} \|b_{\ell k}(p) - b_{\ell k}(y)\| \leqslant \rho$$

où $\rho < \dfrac{1}{2C}$ et $\rho < \dfrac{1}{2C'''}$

dans ces conditions, $|R_{3\alpha}\cdot g_\alpha| \leqslant \rho\, \|\tilde{u}_\alpha\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+,E)}\, \|g_\alpha\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+,E)}$

donc $$\|R_{3\alpha}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N_+,E)} \leqslant \rho\, \|\tilde{u}_\alpha\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+,E)} \qquad (23)$$

donc d'après (22) et (23)

$$\|\tilde{u}_\alpha\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+,E)} \leqslant 2C''' \{\|\tilde{u}_\alpha\|_{H^0(\mathbb{R}^N_+,E)} + \|\tilde{u}_\alpha|_{\mathbb{R}^{N-1}\times\{0\}}\|_{H^0(\mathbb{R}^{N-1},E)} + \|L_{3\alpha}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N_+,E)}\} \qquad (24)$$

Soit, d'après (23), (10 bis), (11 bis) :

$$\|\tilde{u}_\alpha\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+,E)} \leqslant C'''' \{\|\tilde{u}_\alpha\|_{H^0(\mathbb{R}^N_+,E)} + \|\tilde{\mu}_\alpha \tilde{u}\|_{H^0(\mathbb{R}^N_+,E)} + \|\tilde{u}_\alpha|_{\mathbb{R}^{N-1}}\|_{H^0(\mathbb{R}^{N-1},E)} + \|\tilde{\mu}_\alpha . \tilde{u}|_{\mathbb{R}^{N-1}}\|_{H^0} + \|L_\alpha\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N_+,E)}\} \qquad (25)$$

Ⓕ *Conclusion.*

En regroupant les résultats concernant l'espace $\mathbb{R}^N$, et ceux concernant $\mathbb{R}^N_+$, et en faisant la somme des inégalités (25) et (9 bis), il vient :

$$\|u\|_{H^1(B,E)} \leqslant M\{\|u\|_{H^0(B,E)} + \|u|_{\partial B}\|_{H^0(\partial B,E)} + \|\bar{L}_1(u)\|_{H^{-1}(B,E)}\} \qquad (26)$$

Soit encore $\|u\|_{H^1(B,E)} \leqslant M' \{\|u\|_{H^k(B,E)} + \|\bar{L}_1(u)\|_{H^{-1}(B,E)}\}$

avec $\frac{1}{2} < k < 1$ et $H^k(B,E) \hookrightarrow H^1(B,E)$ compacte .

Dans ces conditions, $\bar{L}_1$ est d'image fermée, et de noyau de dimension finie (cf. théorème sur les applications compactes Lions).

D'autre part $\bar{L}_1^*$ est du même type que L_1, donc toujours si la condition $(\mathcal{E})$ $\forall x$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N - \{0\}$, $\sum_{ij} a_{ij}(x)\, \xi^i \xi^j \in \text{Isom}(E,E^*)$, est vérifiée, $\bar{L}_1^*$ est d'image fermée et de noyau de dimension finie donc $(\text{Im}\, \bar{L}_1)^{\perp} = \ker \bar{L}_1^*$ donc $\text{Im}\, \bar{L}_1$ est de codimension finie (puisque le supplémentaire orthogonal de $\text{Im}\, \bar{L}_1$ est isomorphe à $(\text{Im}\, \bar{L}_1)^{\perp}$.

Donc si $(\mathcal{E})$ est vérifiée, $\bar{L}_1$ est un opérateur de Fredholm. Si de plus $\forall ij$, $\forall x$, $a_{ij}(x) = (a_{ji}(x))^*$, $\bar{L}_1$ est symétrique et $\bar{L}_1$ est un opérateur de fredholm symétrique d'indice 0.

Ⓖ *Démonstration du lemme 1.-*

Soit $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1} - \{0\}$, et définissons $L_{\xi'} \in L(H^1(\mathbb{R}^+,E), H^{-1}(\mathbb{R},E_C))$ de la manière suivante :

$$L_{\xi'}(u).g = \int_0^{\infty} \{B_{NN} \,.\, \frac{du}{dt}(t) \,.\, \frac{d\bar{g}}{dt}(t) + \frac{1}{i}\,(\sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk}\, \xi'_k).\, \frac{du}{dt}(t) \,.\, \bar{g}(t) -$$

$$\frac{1}{i}\,(\sum_{k=1}^{N-1} B_{kN}\, \xi'_k)\, u(t) \,.\, \frac{d\bar{g}}{dt}(t) + D(\xi') \,.\, u(t) \,.\, \bar{g}(t)\}\, dt$$

où E est un espace de hilbert sur $\mathbb{R}$, $E_{\mathbb{C}}$ son complexifié et

$$B(\xi',\tau) = B_{NN}\, \tau^2 + \sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk}\, \xi'_k\, \tau + \sum_{k=1}^{N-1} B_{k\ell}\, \xi'_k\, \tau + D(\xi')$$

$B_{k\ell} = b_{k\ell}(p) \quad p \in O_{\alpha}$

$$L_{\xi'}(u).g = \int_{\mathbb{R}} \{B_{NN} \frac{d\overset{o}{u}}{dt}(t) \;.\; \frac{d\bar{g}}{dt}(t) + \frac{1}{i}\,(\sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk}\,\xi'_k) \;.\; \frac{d\overset{o}{u}}{dt}(t) \;.\; \bar{g}(t) -$$

$$\frac{1}{i}\,(\sum_{k=1}^{N-1} B_{kN}\,\xi'_k) \;.\; \overset{o}{u}(t) \;.\; \frac{d\bar{g}}{dt}(t) + D(\xi') \;.\; \overset{o}{u}(t)\;\bar{g}(t)\}$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \{B_{NN} \widehat{\frac{d\overset{o}{u}}{dt}}(\tau) \;.\; \overline{\widehat{\frac{dg}{dt}}}(\tau) + \frac{1}{i}\,(\sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk}\,\xi'_k)\, \widehat{\frac{d\overset{o}{u}}{dt}}(\tau) \;.\; \overline{\widehat{g}}(\tau) -$$

$$\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{N-1} B_{kN}\,\xi'_k\;\widehat{\overset{o}{u}}(\tau)\;\overline{\widehat{\frac{dg}{dt}}}(\tau) + D(\xi') \;.\; \widehat{\overset{o}{u}}(\tau)\;\overline{\widehat{g}}(\tau)\}\;d\tau$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \{B(\xi',\tau) \;.\; \widehat{\overset{o}{u}}(\tau) + i\;(\sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk}\,\xi'_k + B_{NN}\,\tau)\;u(0)\} \;.\; \overline{\widehat{g}}(\tau)\;d\tau$$

donc $(2\pi)\,\widehat{L_{\xi'}(u)}\,(\tau) = B(\xi',\tau)\;\widehat{\overset{o}{u}}(\tau) + i(\sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk}\,\xi'_k + B_{NN}\,\tau)\;u(0) = \vartheta(\tau)$

donc $\widehat{\overset{o}{u}}(\tau) = B^{-1}(\xi',\tau) \;.\; \vartheta(\tau) - i\;B^{-1}(\xi',\tau)\;(\sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk}\,\xi'_k + B_{NN}(\tau)) \;.\; u(0)$

Supposons maintenant que $|\xi'| = 1$

Alors $||(\xi',\tau)||^2_{\mathbb{R}^N} = 1 + \tau^2$, $||B^{-1}(\xi',\tau)||_{L(E,E)} \leqslant \frac{C}{1+\tau^2}$

donc $||\widehat{\overset{o}{u}}(\tau)|| \leqslant C\;\frac{||\vartheta(\tau)||}{1+\tau^2} + D\;\frac{(1+|\tau|)}{1+\tau^2}\;||u(0)||$

donc $||\widehat{u}(\tau)||_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant E_1\{||L_{\xi'}(u)||_{H^{-1}(\mathbb{R},E_{\mathbb{C}})} + ||u(0)||\}$, $E_1 \in \mathbb{R}_+$

soit encore $||u||_{L^2(\mathbb{R},E)} \leqslant E'\{||L_{\xi'}(u)||_{H^{-1}(\mathbb{R},E_{\mathbb{C}})} + ||u(0)||\}$ (27)

Considérons d'autre part, $i\;\tau\;\widehat{\overset{o}{u}}(\tau) - u(0)$

$$i\,\tau\,\hat{\overset{o}{u}}(\tau) - u(0) = i\,\tau\,B^{-1}(\xi',\tau)\;\varphi(\tau) + B^{-1}(\xi',\tau)\;\Big[\sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk}\,\xi'_k\,\tau + B_{NN}\,\tau^2\Big].u(0)$$

$$- u(0)$$

$$= i\,\tau\,B^{-1}(\xi',\tau)\;\varphi(\tau) + B^{-1}(\xi',\tau)\;[\quad]\;u(0) -$$

$$B^{-1}(\xi',\tau)\;B(\xi',\tau)\;u(0)$$

$$= i\,\tau\,B^{-1}(\xi',\tau)\;\varphi(\tau) + B^{-1}(\xi',\tau)\;\Big[-\sum_{k=1}^{N-1} B_{kN}\,\xi'_k\,\tau + D(\xi')\Big]u(0)$$

donc $\quad ||i\,\tau\,\hat{\overset{o}{u}}(\tau) - u(0)|| \leqslant \dfrac{C\,|\tau|\;||\varphi\,\tau||}{1+\tau^2} + \dfrac{D(1+|\tau|)}{1+\tau^2}\;||u(0)||$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} ||i\,\tau\,\overset{o}{u}(\tau) - u(0)||^2\,d\tau = \int_0^{\infty} ||\frac{du}{dt}(t)||^2\,dt \leqslant E''\{||L_{\xi'}(u)||_{H^{-1}(\mathbb{R},E_{\mathbb{C}})} + ||u(0)|| \qquad (28)$$

donc d'après (27) et (28) :

$$||u||_{H^1(\mathbb{R}^+,E)} \leqslant M\{||L_{\xi'}(u)||_{H^{-1}(\mathbb{R},E_{\mathbb{C}})} + ||u(0)||_E\} \qquad (29)$$

où M est indépendant de ξ' pour $|\xi'| = 1$, et de α et $p \in O_\alpha$

Conséquence.- Si E est de dimension finie $(E = \mathbb{R}^m)$, $u \rightsquigarrow u(0)$ de $H^1(\mathbb{R}^+,E)$ dans E, est compacte donc d'après (29), $L_{\xi'}$ est un opérateur d'image fermée, dont le noyau est de dimension finie.

Etude du noyau de $L_{\xi'}$, $\quad \xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$, $|\xi'| = 1$

Si $u \in \ker L_{\xi'}$, $B(\xi',\tau)\;\hat{\overset{o}{u}}(\tau) + i\Big(\sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk}\,\xi'_k + B_{NN}\,\tau\Big)\;u(0) = 0$, donc $\hat{\overset{\circ}{u}}(\tau) = - i \, B^{-1}(\xi',\tau) \left[\sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk} \, \xi'_k + B_{NN} \, \tau\right] u(0)$

$$= \frac{1}{\tau} \, B^{-1}(\xi',\tau) \left[B(\xi',\tau) - \sum_{k=1}^{N-1} B_{kN} \, \tau \, \xi'_k - D(\xi')\right] u(0)$$

$$= \frac{1}{\tau} \left[I - B^{-1}(\xi',\tau) \left\{\sum_{k=1}^{N-1} B_{kN} \, \tau \, \xi'_k - D(\xi')\right\}\right] u(0)$$

donc $||\hat{\overset{\circ}{u}}(\tau)|| \leqslant \frac{1}{\tau} \left[1 + \frac{D(1+|\tau|)}{1+\tau^2}\right] \leqslant \frac{A}{|\tau|}$

Posons $\theta(\tau) = \hat{\overset{\circ}{u}}(\tau)$ $\theta \in L^2(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R}, E)$, et considérons $\hat{\theta} \in S'(\mathbb{R}, E)$, soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R},E)$ (on suppose E espace de hilbert).

$J = \langle\hat{\theta},\varphi\rangle = \langle\theta,\hat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \theta(t) \, . \, \hat{\varphi}(t) \, dt$ ($x.y$ = produit scalaire dans E)

$$= \lim_R \int_{\mathbb{R}} \chi_R(t) \, \theta(t) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-i<t,y>} \varphi(y) \, dy\right] dt$$

$R > 0$

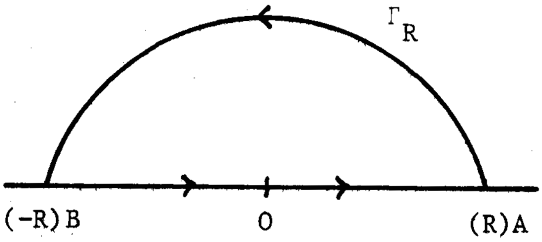
χ_R fonction caractéristique de l'intervalle $[-R, R]$.

$$J = \lim_R \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} (\chi_R . \theta)(t) \, e^{-i<t,y>} dt\right] \varphi(y) \, dy$$

Considérons alors $I_R = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (\chi_R\theta)(t) \, e^{-ity} dt\right) \varphi(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}} \Psi_R(y) \, \varphi(y) \, dy$

avec $\Psi_R(y) = \int_{\mathbb{R}} (\chi_R\theta)(t) \, e^{-ity} dt = \int_{-R}^{R} \theta(t) \, e^{-ity} dt$.

<u>*1^er^ cas*</u> $y < 0$



par application du théorème des résidus au contour $B \, A \, \Gamma_R$, il vient

$$\Psi_R(y) = 2i\pi \sum_{a_i\in\Omega_R} \mathrm{Res.}\ (g_y,a_i) - \int_{\Gamma_R} g_y(z)\ dz \quad \text{où} \quad g_y(z) = \theta(z)\ e^{-iyz}$$

Ω_R est le domaine dont la frontière est B A Γ_R

$$\left|\int_{\Gamma_R} g_y(z)\ dz\right| \leqslant \int_0^{\pi} e^{yR\sin\theta}\ \frac{A}{R}\ d\theta = \frac{2A}{R} \int_0^{\pi/2} e^{yR\sin\theta}\ d\theta$$

$$\leqslant \frac{2A}{R} \int_0^{\pi/2} e^{yR2\theta/\pi}\ d\theta = \frac{2A}{R}\ \frac{\pi}{2yR}\ \left[e^{yR2\theta/\pi}\right]_0^{\pi/2}$$

$$\leqslant \frac{2A}{R}\ .\ \frac{\pi}{2yR}\ \left[e^{yR} - 1\right]$$

donc il existe $M_2 > 0$ tel que $\forall\ R \geqslant 1$, $\forall\ y < 0$, $\left|\left|\int_{\Gamma_R} g_y(z)\ dz\right|\right| \leqslant M_2$

d'autre part,

$$(\mu_{i-1})!.\mathrm{Res}(g_y,a_i) = \frac{d^{\mu_{i-1}}}{dz^{\mu_{i-1}}}\ (z-a_i)^{\mu_i} g_y(z)\ \Big|_{z = a_i}\ .$$

Or $g_y = \theta(z)\ e^{-iyz}$ donc $\mathrm{Res}(g_y,a_i) = e^{-iya_i}\ P_i(y)$ où P_i est un polynôme de degré μ_i, a coefficients dans E.

$$\text{Or}\quad \theta(z) = -\ i\ B^{-1}(\xi',z)\ \left[\sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk}\ \xi'_k + B_{NN}\ z\right]\ .\ u(0)$$

donc les pôles de θ sont les pôles de $B^{-1}(\xi',z)$ qui sont donc non réels puisque $B(\xi',\tau)$ est inversible pour $\tau \in \mathbb{R}$, et conjuguées, et en nombre fini (2q) si $E = \mathbb{R}^m$.

Donc il existe $M_1 > 0$ tel que $\forall\ y < 0$, $\forall\ i \in \{1,\dots,q\}$ $||\ \mathrm{Res}(g_y,a_i)|| \leqslant \dfrac{M_1}{2\pi q}$ donc $\forall\ R \geqslant 1$, $y < 0$ $||\Psi_R(y)|| \leqslant M_1 + M_2 = M$.

On démontrerait de même, qu'il existe $M' > 0$ tel que $\forall\ R \geqslant 1$, $\forall\ y > 0$ $||\Psi_R(y)|| \leqslant M'$.

D'autre part

si $y < 0$ $\lim\limits_{R\to\infty} \Psi_R(y) = 2i\pi \sum\limits_{\mathrm{Im}a_k>0} \mathrm{Res}(g_y,a_k) = 2i\pi \sum\limits_{\mathrm{Im}a_k>0} e^{-iya_k} P_k(y)$

$= \Psi_-(y)$

si $y > 0$ $\lim\limits_{R\to\infty} \Psi_R(y) = 2i\pi \sum\limits_{\mathrm{Im}a_k<0} \mathrm{Res}(g_y,a_k) = 2i\pi \sum\limits_{\mathrm{Im}a_k<0} e^{-iya_k} P_k(y)$

$= \Psi_+(y)$.

Soit $\Psi : \mathbb{R} \to E$ tel que $\Psi(y) = \Psi_-(y)$ si $y < 0$

$\Psi(y) = \Psi_+(y)$ si $y > 0$

$\lim\limits_{k} \Psi_k(y) \,.\, \varphi(y) = \Psi(y) \,.\, \varphi(y)$ pour $y \neq 0$

d'autre part, $\forall R$, $\forall y \neq 0$ $||\Psi_k(y).\varphi(y)|| \leq \sup(M,M')\ ||\varphi(y)||$

donc d'après le théorème de Lebesgue, $\lim\limits_{R} I_R = \int_{\mathbb{R}} \Psi(y) \,.\, \varphi(y)\, dy = J$

donc $\int_{\mathbb{R}} \Psi(y) \,.\, \varphi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(y)\, \varphi(y)\, dy$ donc $\boxed{\hat{\theta} = \Psi}$

donc $\boxed{\overset{o}{u} = (2\pi)^{-1}\, \check{\Psi}}$

<u>Comparaison entre</u> Ψ_+ *<u>et</u>* Ψ_-

$$\theta(z) = -\, i\, B^{-1}(\xi',z) \left[\sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk}\, \xi'_k + B_{NN}\, z\right] . u(0)$$

les pôles de θ sont donc les zéros de $\det B(\xi',z)$ $[\dim E < +\infty]$ et par conséquent sont conjuguées puisque $B(\xi',z)$ est à coefficients réels.

On est donc amené à comparer $\mathrm{Res}(g_y,a_k)$ et $\mathrm{Res}(g_y, \bar{a}_k)$.

$$(\mu_{k-1})!\mathrm{Res}(g_y,a_k) = \frac{d^{\mu_{k-1}}}{dz^{\mu_{k-1}}} \left[(z-a_k)^{\mu_k}\, \theta(z)\, e^{-iyz}\right]_{z=a_k} \quad \text{si } \mathrm{Im}\, a_k > 0 \text{ et}$$

μ_k est l'ordre de multiplicité du pôle a_k $(y > 0)$.

$$((\mu_{k-1})!\mathrm{Res}(g_y,\bar{a}_k) = \frac{d^{\mu_{k-1}}}{dz^{\mu_{k-1}}}\left[(z-\bar{a}_k)^{\mu_k}\,\theta(z)\,e^{-iyz}\right]_{z=\bar{a}_k} \qquad (y < 0)$$

$$= -\,i\,\frac{d^{\mu_{k-1}}}{dz^{\mu_{k-1}}}\left[(z-\bar{a}_k)^{\mu_k}\,\tilde{\theta}(z)\,e^{-iyz}\right]_{z=\bar{a}_k} \qquad \text{où } \tilde{\theta}(z) = i\,\theta(z)$$

$$\text{Or} \quad (z-\bar{a}_k)^{\mu_k}\,\tilde{\theta}(z)\,e^{-iyz} = \overline{(\bar{z}-a_k)^{\mu_k}\,\tilde{\theta}(z)\,e^{-iy'\bar{z}}} \qquad y' = -\,y$$

$$\text{donc} \quad \frac{d^{\mu_{k-1}}}{dz^{\mu_{k-1}}}\left[(z-\bar{a}_k)^{\mu_k}\,\tilde{\theta}(z)\,e^{-iyz}\right]_{z=\bar{a}_k} = \overline{\frac{d^{\mu_{k-1}}}{dz^{\mu_{k-1}}}\left[(\bar{z}-a_k)^{\mu_k}\,\tilde{\theta}(z)\,e^{-iy'\bar{z}}\right]_{z=a_k}}$$

$$\text{donc} \qquad \mathrm{Res}(g_y,\bar{a}_k) = -\,\overline{\mathrm{Res}(g_{-y},a_k)}$$

Remarque.- On a $\tilde{\theta}(\bar{z}) = \overline{\tilde{\theta}(z)}$ car $B^{-1}(\xi',z)$; $B_{kN}\,\xi'_k$; $B_{NN}\,z$ sont à coefficients réels, et que $u(0) \in \mathbb{R}^p = E$, donc $u(0)$ est à composantes réelles ; nous verrons, (cf. contre-exemple) que l'hypothèse $u(0)$ à composantes réelles, est essentielle.

donc $\Psi_-(y) = -\,\Psi_+(-y)$ donc $\overset{o}{u} \equiv 0$

donc $\boxed{L_{\xi'} \text{ est injective}}$, $\boxed{\text{d'image fermée}}$:

C'est un isomorphisme sur son image.

Conséquence.- Puisque $L_{\xi'}$ est un isomorphisme de $H^1(\mathbb{R}^+,E)$ sur son image dans $(H^1(\mathbb{R},E_{\mathbb{C}}))^*$, pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$ $|\xi'| = 1$ et tout $p \in \bar{O}'_\alpha$ $\bar{O}'_\alpha$ compact $\bar{O}'_\alpha \subset O_\alpha$ (rappelons que $B_{k\ell} = b_{k\ell}(p)$) , il existe $K_{\xi',p} > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^+,E)$, $||u||_{H^1} = 1$ on ait

$$||u||_{H^1} \leq K_{\xi',p}\,||L_{\xi'}(u)||_{H^{-1}(\mathbb{R},E_{\mathbb{C}})}$$

Théorème.- Il existe $K > 0$ telle que $\sup_{\substack{|\xi'|=1 \\ p\in O'_\alpha}} K_{\xi',p} \leqslant K$.

Sinon il existerait une suite (C_n) $C_n > 0$ $\lim_n C_n = +\infty$ une suite (ξ'_n) $|\xi'_n| = 1$; (p_n) , $p_n \in \bar{O}'_\alpha$, et une suite (u_n) $u_n \in H^1$, $||u_n|| = 1$, telles que

(30) $||u_n||_{H^1} > C_n \, ||L_{(\xi'_n,p_n)}.u_n||_{H^{-1}}$ nous noterons $(\xi'_n,p_n) = \rho_n$

d'autre part, on sait qu'il existe $M > 0$ indépendants de α, p , ξ' telle que

$$||u||_{H^1} \leqslant M \{||L_{\xi'} \, u||_{H^{-1}} + ||u(0)||_E\}$$

en particulier, on aura

$$||u_p-u_q||_{H^1} \leqslant M \{||L_{\rho_p}(u_p-u_q)||_{H^{-1}} + ||u_p(0)-u_q(0)||_E\}$$

$$||u_p-u_q||_{H^1} \leqslant M \{||L_{\rho_p}(u_p)-L_{\rho_q}(u_q) + (L_{\rho_q}-L_{\rho_p}) \, u_q||_{H^{-1}} + ||u_p(0)-u_q(0)||_E\}$$

la suite (ρ_n) admet une valeur d'accumulation $\tilde{\rho}$ dans $S^1_{\mathbb{R}^{N-1}} \times \bar{O}_\alpha$ compact, la suite $(u_n(0))$ admet une valeur d'accumulation dans $E = \mathbb{R}^m$, donc il existe des sous-suites (encore notées (ρ_n) et $(u_n(0))$ convergeant respectivement vers $\tilde{\rho}$ et $\tilde{u}_o$ donc (L_{ρ_n}) tend vers $L_{\tilde{\rho}}$, et les suites (L_{ρ_n}) et $(u_n(0))$ sont de Cauchy dans $L(H^1,H^{-1})$ et $E = \mathbb{R}^m$.

Il en résulte en considérant par ailleurs (30) , que la suite (u_n) est de Cauchy dans H^1 , donc $u_n \xrightarrow[n]{} \tilde{u}$ dans H^1 d'autre part puisque $||u_n|| = 1$ $||\tilde{u}||_{H^1} = 1$ et $L_{\tilde{\rho}}(\tilde{u}) = \lim_n L_{\rho_n}(u_n) = 0$ <u>d'où la contradiction</u> puisque $\ker L_{\tilde{\rho}} = \{0\}$.

Ⓗ *Remarque, contre-exemple.*

Remarque 1.- Pour $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$, $|\xi'| = 1$, on aurait pu considérer le prolongement de $L_{\xi'}$ à $H^1(\mathbb{R}^+,E_{\mathbb{C}})$, encore noté $L_{\xi'}$, et défini de la manière suivante :

$$L_{\xi'} : H^1(\mathbb{R}^+, E_{\mathbb{C}}) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^+,E_{\mathbb{C}}) \quad ,$$

tel que

$$L_{\xi'}(u).g = \int_0^{\infty} \{B_{NN} \frac{du}{dt} \frac{\overline{dg}}{dt} + \frac{1}{i} (\sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk} \xi'_k) \frac{du}{dt} (t) \; \bar{g}(t) - \frac{1}{i} (\sum_{k=1}^{N-1} B_{kN} \xi'_k) \frac{d\bar{g}}{dt} (t)$$
$$+ D(\xi') \, u(t) \, \bar{g}(t)\} \, dt$$

On démontrerait de la même manière que $L_{\xi'}$ est d'image fermée, de noyau de dimension finie, noyau contenu dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+,E_{\mathbb{C}})$. Cependant, en général, $\ker L_{\xi'} \neq \{0\}$.

En effet

$$\ker L_{\xi'} = \{u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+,E_{\mathbb{C}}) \mid B(\xi', \frac{1}{i}\frac{d}{dt}) \, u = 0 \quad \text{et} \quad \delta(D) \, u = 0\}$$

où $\delta(D)\, u = (B_{NN} \frac{1}{i}\frac{d}{dt} + \sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk} \xi'_k) \, u(0)$

$$B(\xi',\xi_N) = B_{NN} \xi_N^2 + \sum_{k=1}^{N-1} B_{Nk} \xi'_k \xi_N + \sum_{k=1}^{N-1} B_{kN} \xi'_k \xi_N + D(\xi')$$

Considérons l'exemple suivant : $E = \mathbb{R}^2$ donc $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$

$$B(\frac{1}{i}\frac{d}{dt}) = B(\xi', \frac{1}{i}\frac{d}{dt}) = -\frac{d^2}{dt^2} + C \frac{1}{i}\frac{d}{dt} + D$$

$$\delta(D) = \frac{1}{i}\frac{d}{dt} + \Lambda \quad \text{avec } \Lambda + {}^t\Lambda = C \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

avec $D = \begin{pmatrix} 7,5 & 2,5 \\ 2,5 & 7,5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Recherchons d'abord les solutions de $B(\frac{1}{i}\frac{d}{dt})\ u = 0$ $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ posons $v(t) = (u(t) \ ; \frac{du}{dt}(t)) = (u(t) \ ; \dot{u}(t))$.

On doit donc rechercher les solutions de $\frac{dv}{dt}(t) = A\ v(t)$ (ℓ)

avec $$A = \begin{pmatrix} 0 & Id_{\mathbb{C}^2} \\ D & -\ iC \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique a pour racines, les zéros de $\det(A - \lambda I_{\mathbb{C}^4})$; c'est-à-dire encore, les zéros de $\det\left[-\lambda^2 I_{\mathbb{C}^2} + \frac{1}{i} C\lambda + D\right]$ posons $\tau = \frac{\lambda}{i}$, nous devons rechercher les zéros de : $\det(\tau^2 I_{\mathbb{C}^2} + \tau C + D)$.

Or $\det(\tau^2 I_{\mathbb{C}^2} + C\tau + D) = (\tau^2 + 2\tau + 10)\ (\tau^2 + 2\tau + 5)$

dont les zéros sont : $-1 + 2i$; $-1 - 2i$; $-1 + 3i$; $-1 - 3i$; soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ les valeurs propres correspondantes de A.

La solution générale de l'équation (ℓ) est donc :

$$v(t) = \sum_{k=1} e^{\lambda_k t}\ v_k \quad \text{où} \quad v_k \in \ker(A - \lambda_k Id_{\mathbb{C}^4})$$

les solutions de $B(\frac{1}{i}\frac{d}{dt})\ u(t) = 0$ avec $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$ sont donc $u(t) = e^{(-2-i)t}\ P_1(v_1) + E^{(-3-i)t}\ P_1(v_3)$ P_1 désignant la projection première de $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}^2$

Or $$v_1 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\ 1 \\ -\ (2+i) \\ 2 + i \end{pmatrix} \quad ; \quad v_2 = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\ (3+i) \\ 3 + i \end{pmatrix}$$

donc $u(t) = e^{(-2-i)t} \; a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{(-3-i)t} \; a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; (a_2,a_2) \in \mathbb{C}^2$

Envisageons alors $\delta(D) \,.\, u = - i(-2-i) \; a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} -i(-3-i) \; a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$+ \; a_1 \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ -\alpha-1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$$

d'où les solutions de $B(\frac{1}{i} \frac{d}{dt}) \; u = 0 = \delta(D) \; u$, $u \in S(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$,

sont telles que (a_1,a_2) vérifie :

$$\begin{cases} (2i-\alpha) \; a_1 + (3i+\alpha) \; a_2 = 0 \\ (-2i-\alpha) \; a_1 + (3i-\alpha) \; a_2 = 0 \end{cases}$$

le déterminant du système est $\Delta = 2\alpha^2 - 12$ donc $\boxed{\Delta = 0 \quad \text{si} \quad \alpha = \sqrt{6}}$

Conclusion.- Si $\alpha = \sqrt{6}$, il existe $u \neq 0$, $u \in S(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$

tel que $B(\frac{1}{i} \frac{d}{dt}) \,.\, u = \delta(D) \,.\, u = 0$

① *Rappel de notations. Théorèmes.*

(E) : $\forall \; x \; , \forall \; \xi \in \mathbb{R}^N - \{0\} \; \sum_{ij} a_{ij}(x) \; \xi^i \; \xi^i \in \mathrm{Isom}(E,E^*)$

$\dim E < + \infty$

$\bar{L}_1 : H^1(B,E) \to H^{-1}(B,E)$ tel que $\bar{L}_1(H) \,.\, K = \int_B \sum_{ij} a_{ij}(x) \; \frac{\partial H}{\partial x_i} (x) \; \frac{\partial K}{\partial x_j} (x) dx$

$a_{ij} \in C^1(B, L(E,E^*))$

$$\bar{L} = \bar{L}_1 + K \text{ tel que } L(H).K = L_1(H) \; K + \int_B \{a(x) \,.\, H(x) \; K(x) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_1(x) \; \frac{\partial H}{\partial x_i}(x) \; k(x) + \sum_{i=1}^{N} \beta_i(x) \; K(x) \; \frac{\partial K}{\partial x_i}(x)\} \; dx$$

α_i, β_i, $a \in C^o(B,L(E,E^*)$

Théorème 1.- Dans ces conditions, $\bar{L}_1$ est un opérateur de Fredholm et $\bar{L} = \bar{L}_1 + K$ est un opérateur de Fredholm de même indice que $\bar{L}_1$.

Théorème 2.- Si l'on suppose de plus que $a_{ij}(x) = (a_{ji}(x))^*$; $\alpha_i^*(x) = \beta_i(x)$; $a(x)^* = a(x)$.

Alors $\bar{L}_1$ est un opérateur symétrique, de Fredholm d'indice zéro, et il en est de même de $\bar{L} = \bar{L}_1 + K_1$.

Théorème 3.- Si $h \in C^r(B,E)$ est tel que

$$\forall x \; , \; \forall \xi \in \mathbb{R}^N - \{0\} \; \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} \left(x, h(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)\right) \xi^i \, \xi^j \in \mathrm{Isom}(E,E^*) \; .$$

Alors $\bar{L}(h)$ est un opérateur de Fredholm, symétrique, d'indice zéro. (On remarquera que $\bar{L}(h)$ s'écrit sous la forme $\bar{L}_1(h) + K_1(h)$; et que les conditions du théorème 2 sont vérifiées.

On rappelle que $L(h) : C^r(B,E) \to C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*)$ a pour expression :

$$L(h).H(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(x,h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)\right) H(x) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q_i}\left(x,h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)\right) \frac{\partial H}{\partial x_i}(x)$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial p}\left(x, h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)\right) H(x) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}\left(x,h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)\right) . \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) \right\}$$

CHAPITRE V

CALCUL DE VARIATION SUR $C^r(B,E)$ *AVEC CONDITIONS SUR LE BORD.*

Ⓐ *Position du problème pour des variétés C-différentiables, et des fonctions C-différentiables.*

Soit X une variété C-différentiable C^α $\alpha \geq 1$, modelée sur (F,F',Φ)

Y une variété C-différentiable C^α modelée sur (G,G',Ψ)

$J : X \to \mathbb{R}$ de classe C C^α

$f : X \to Y$ de classe C C^α, $A \subset Y$ sous-C-variété de Y

C-submersion.

On cherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que J admette un minimum local en x_o, sur $f^{-1}(A)$ qui est une sous-C-variétés C^α de X modelée sur (K,K',Θ).

Nous savons d'après le théorème des fonctions implicites, que si $x_o \in f^{-1}(A)$, il existe des cartes locales $(U_{x_o}, O_{x_o}, \psi_{x_o})$ dans $f^{-1}(A)$; $(U'_{x_o}, O'_{x_o}, \psi'_{x_o})$ dans X telles que $U_{x_o} \subset K$ facteur direct dans F et $U_{x_o} = K \cap U'_{x_o}$, le diagramme suivant étant commutatif

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(A) \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "J"] & \mathbb{R} \arrow[d, equal] \\
O_{x_0} \arrow[u, hook] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\psi_{x_0}"'] & O'_{x_0} \arrow[u, hook] \arrow[r, "J"] \arrow[d, "\psi'_{x_0}"] & \mathbb{R} \\
U_{x_0} \arrow[r, dashed, "\tau"] \arrow[d, hook] & U'_{x_0} \arrow[r, "\bar{J}"] \arrow[d, hook] & \mathbb{R} \\
K \arrow[r, "\tau"] & F \arrow[r, "u_0"] & H \\
K' & F' \arrow[l, "\tau'"'] & H' \arrow[l, "u'_0"'] \\
\Theta & \Phi &
\end{tikzcd}$$

τ : injection canonique.

En coordonnées locales, il suffit d'étudier $\bar{J} \circ \tau = \tilde{J}$.

Conclusion : En coordonnées locales, on est ramené à l'étude d'un problème variationnel sur le noyau d'un morphisme de $\mathcal{C}$.

Ⓑ *Calcul variationnel sur le noyau d'un morphisme de* $\mathcal{C}$.

Soit $A = (F,F',\Phi)$, $B = (G,G',\Psi)$ $(u,u') \in L(A,B)$.

$J : \Omega \subset A \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}$-différentiable C^{α} $\alpha \geqslant 2$.

On désignera par (K,K',Θ), le noyau de (u,u').

$$\begin{tikzcd}
\Theta & \Phi & \mathbb{R} & \Psi \\
\Omega \cap K & \Omega \arrow[ru, "J"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & & \\
K \arrow[r, "\tau"] & F \arrow[rr, "u"] & & G \\
K' & F' \arrow[l, "\tau'"'] & & G' \arrow[ll, "u'"']
\end{tikzcd}$$

$K = \ker u$.

Soit $\tilde{J} : \Omega \cap K \xrightarrow{J \circ \tau} \mathbb{R}$; $\tilde{J}$ est de classe $\mathcal{C}$, C^{α}

$d\tilde{J} = \tau^{*}(dJ \circ \tau)$ c'est-à-dire que si $h \in \ker u = K$ et $H \in K$.

$$d\tilde{J}(h).H = dJ(\tau h).\tau H = \Phi(\delta J(\tau h);\tau H) = \Theta(\tau'\delta J(\tau h);H)$$

donc $\delta\tilde{J} = \tau' \circ \delta J \circ \tau$.

$\delta\tilde{J}$ est de classe C^1, et $d\,\delta\,\tilde{J} = \tau' \circ d\delta J \circ \tau$.

Conséquences :

① Pour que $h_o \in k \cap \Omega$ corresponde à un minimum local pour $\tilde{J}$, il faut que $d\tilde{J}(h_o) = 0$ donc que $\delta\tilde{J}(h_o)=0$ soit $\tau'(\delta J(\tau(h_o))) = 0$; d'où les conditions nécessaires :

$$\begin{cases} u(h_o) = 0 \\ \text{et} \quad p(\delta J(\tau h_o)) \in \bar{A}. \quad (\text{Cf. Ch. VI}) \end{cases}$$

$$K' = \frac{\text{Coker } u'}{\bar{A}} \xleftarrow{q} \text{coker } u' \qquad \text{Coker } u' = \frac{F'}{\text{Im } u'} \xleftarrow{p} F'$$

Dans le cas particulier où (u,u') admet un inverse à droite, ces conditions deviennent :

$$\begin{cases} u(h_o) = 0 \\ \text{et} \quad \delta J(\tau h_o) \in \text{Im } u'. \end{cases}$$

Les conclusions sont les mêmes si $\text{Im } u'$ est faiblement fermée (pour la topologie définie par Φ)

Soit h_o un point critique de $\tilde{J}$.

② En posant $\gamma(t) = \tilde{J}(h_o + th)$ et en appliquant à γ la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégrale, il vient :

$$\gamma(1) - \gamma(0) = \tilde{J}(h_o+th) - J(h_o) = \int_0^1 (1-\lambda)\Theta(d\delta\tilde{J}(h_o+\lambda h).h \; ; \; h)d\lambda$$

$$= \Theta(\int_0^1 (1-\lambda)d\delta\tilde{J}(h_o+\lambda h)d\lambda.h \; ; \; h) = \Theta(\tilde{a}(h).h \; ; \; h)$$

avec $\tilde{a}(h) = \int_0^1 (1-\lambda)d\delta\tilde{J}(h_o+\lambda h)d\lambda$ donc $\tilde{a}(o) = \frac{1}{2} d\delta\tilde{J}(h_o)$.

D'autre part, $d\delta\tilde{J}(h_o+\lambda h) = \tau' \circ d\delta J(h_o+\lambda h) \circ \tau$

donc $\tilde{a}(h) = \tau' \circ a(h) \circ \tau$ avec $a(h) = \int_0^1 (1-\lambda)d\delta J(h_o+\lambda h)d\lambda$.

Dans ces conditions :

$$\tilde{J}(h_o+h) - \tilde{J}(h_o) = \Theta(\tilde{a}(h).h \; ; \; h) = \Phi(a(h).\tau h \; ; \; \tau h).$$

Nous sommes donc amenés, pour l'étude d'une condition suffisante, à considérer $\tilde{a}(h)$ et $a(h)$, c'est-à-dire à considérer les opérateurs $d\delta\tilde{J}(h)$ et $d\delta J(\tau h)$ ou leurs prolongements à des couples définis par des opérateurs hilbertisants.

Nous savons par exemple que si $A = (C^r(B,E) \; ; \; C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*) \; ; \; \Phi)$ et $J : \Omega \subset C^r(B,E) \to \mathbb{R}$ tel que $J(h) = \int_B f(x,h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x))dx$.

J est de classe $\mathcal{C}$, C^2, et que $d\delta J(h)$ se prolonge en $\overline{d\delta J}(h)$ élément de $L(H^1,H^{-1})$; si (K,K',Θ) est le noyau de (u,u') de source A, en est-il de même de $d\delta\tilde{J}(h)$? Pour un opérateur hilbertisant convenable ?

Ⓒ *Opérateur hilbertisant pour les noyaux de morphismes de* C *quand l'objet source est déjà muni d'un tel opérateur. Prolongement d'opérateurs du noyau.*

Considérons la suite exacte suivante dans la catégorie $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[d, equal] & & \\
0 \arrow[r] & \ker u \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\Lambda'"'] & F \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\Lambda"] & G \\
0 & K' \arrow[l] & F' \arrow[l, "\tau'"'] & G' \arrow[l, "u'"'] \\
 & \Theta & \Phi & \Psi
\end{tikzcd}$$

On suppose donc que (K,K',Θ) est le noyau de (u,u'), la dualité Θ étant induite par Φ de la manière suivante : (cf. annexe sur géométrie différentielle sur les couples).

$$F' \xrightarrow{p} F'/\mathrm{Im}\,u' = \mathrm{coker}\,u' \xrightarrow{q} \frac{\mathrm{Coker}\,u'}{\bar{A}} = K'$$

$$\Theta(n',x) = \Phi(z,\tau x) \qquad\qquad qp(z) = n'.$$

Supposons que le couple (F,F',Φ) soit muni d'un opérateur hilbertisant Λ vérifiant :

(P_1) $\Lambda : F \to F'$ est un opérateur symétrique, défini, positif, C non isomorphisme, en général).

(P_2) il existe $A > 0$ vérifiant :

$$\forall (x',y) \in F' \times F, \ |\Phi(x',y)| \leq A\|x'\|_{F'}(\phi(\Lambda y,y))^{1/2}.$$

Nous savons alors que si N_Λ est la norme associée à B_Λ : $(x,y) \rightsquigarrow B_\Lambda(x,y) = \Phi(\Lambda x,y)$, et si $F_\Lambda = \hat{F}$ est le complété de F pour N_Λ,

$\mathcal{J} : F' \to F^*$ se prolonge en une application linéaire continue $i' : F' \to \hat{F}^*$, et que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\Lambda"'] & \hat{F} \arrow[d, "\bar{\Lambda}"] \\
F' \arrow[r, "i'"'] & \hat{F}^{*}
\end{tikzcd}$$

$\bar{\Lambda}$ désignant l'isomorphisme canonique entre l'espace de hilbert F et son dual $\hat{F}^{*}$.

Lemme 1.- Si Λ est un opérateur hilbertisant, alors $\Lambda' = \tau' \circ \Lambda \circ \tau$ est un opérateur hilbertisant pour le noyau (K,K',Θ) et de plus $N_{\Lambda'} = N_{\Lambda|\ker u}$.

Soit $(y,x) \in (\ker u)^2$.

$$\Theta(\Lambda'x,y) = \Theta(\tau'\Lambda\tau x,y) = \Phi(\Lambda\tau x,\tau y) = \Phi(\Lambda\tau y,\tau x) = \Theta(\Lambda'y,x)$$

donc Λ' est symétrique défini, positif.

D'autre part, $N_{\Lambda'}(x) = [\Theta(\Lambda'x,x)]^{1/2} = [\Phi(\Lambda\tau x,\tau x)]^{1/2} = N_{\Lambda}(\tau x)$.

Considérons maintenant $\Theta(n',x)$ $(n',x) \in K' \times K$.

$$\Theta(n',x) = \Phi(z,\tau x) \qquad n' = q(pz)$$

donc $|\Theta(n',x)| \leqslant A||z||_{F'}[\Phi(\Lambda\tau x,\tau x)]^{1/2}$.

Cette relation étant vraie pour tout z' tel que $p(z') = p(z) = s$, il en résulte que

$$|\Theta(n',x)| \leqslant A\ \Phi(\Lambda\tau x,\tau x)^{1/2} \inf_{p(z)=s} ||z|| = A\ \Phi(\Lambda\tau x,\tau x)^{1/2}||s||_{\text{coker } u'}$$

$|\Theta(n',x)| \leqslant A\ \phi(\Lambda\tau x,\tau x)^{1/2}\ ||s||_{\text{coker } u'}$ ceci étant vrai pour tout s tel que $q(s) = n'$;

donc $|\Theta(n',x)| \leqslant A||n'||_{K'}|\Theta(\Lambda'x,x)|^{1/2}$.

Conclusion : Si Λ vérifie (P_1) et (P_2) relativement à (F,F',Φ), alors $\Lambda' = \tau' \circ \Lambda \circ \tau$ vérifie (P_1) et (P_2) relativement à (K,K',Θ) donc Λ' est un opérateur hilbertisant.

Nous supposerons dorénavant que Λ vérifie P_1 et P_2

$\widehat{\ker u}$ désignera le complété de $\ker u$ pour $N_{\Lambda'}$ associée à $B_{\Lambda'} = \Theta(\Lambda',.)$.

Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\ker u \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\Lambda'"] & \widehat{\ker u} \arrow[d, "\bar{\Lambda}'"] \\
\operatorname{coker} u' \arrow[r, "j'"'] & (\widehat{\ker u})^*
\end{tikzcd}$$

Considérons, maintenant, la suite exacte de départ, et les espaces complétés :

$$\begin{tikzcd}
& \widehat{\ker u} \arrow[rr, "\bar{\tau}"] \arrow[dd, "\bar{\Lambda}'"'] & & \hat{F} \arrow[dd, "\bar{\Lambda}"] & \\
\ker u \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dd, "\Lambda'"] & & F \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "U"] \arrow[dd, "\Lambda"] & & G \\
& (\widehat{\ker u})^* & & (\hat{F})^* \arrow[ll, "\bar{\tau}'"'] & \\
\operatorname{Coker} u' \arrow[ur, "j'"] & & F' \arrow[ll, "\tau'"] \arrow[ur, "i'"] & & G' \arrow[ll, "U'"']
\end{tikzcd}$$

fig. 1

Lemme 2.- τ se prolonge en $\bar{\tau} : \widehat{\ker u} \to \hat{F}$ tel que $\bar{\tau}$ soit une isométrie. En effet : $N_{\Lambda'}(x) = N_{\Lambda}(\tau x)$ si $x \in \ker u$, d'où le résultat.

Lemme 3.- τ' se prolonge en $\bar{\tau}'$: $(\hat{F})^* \to (\widehat{\ker u})^*$ tel que $j' \circ \tau' = \bar{\tau}' \circ i'$.

Considérons $j' \circ \tau' : F' \rightsquigarrow (\widehat{\ker u})^*$

si $y' \in F'$, $x \in \ker u$, $j'(\tau'(y')).x = \Theta(\tau'(y'),x) = \phi(y',\tau x)$

$j'(\tau'(y')).x = \varphi(y').\tau x = i'(y').\tau x$

donc $|j'(\tau'(y')).x| \leq ||i'(y')||_{F^*}.||\tau x||_{\hat{F}}$

donc $j' \circ \tau'$ est continue pour la topologie induite sur F' par $\hat{F}^*$ (1)

D'autre part soit $\ell \in (\hat{F})^*$ $\ell = \bar{\Lambda}(z)$ $z \in \hat{F}$

donc $z = \lim\limits_{\hat{F}^n} iz_n$ $z_n \in F$ donc $\ell = \lim\limits_{\hat{F}^{*n}} \bar{\Lambda}\, iz_n = \lim\limits_{\hat{F}^{*n}} i'(\Lambda\, z_n)$

$i'(\Lambda\, z_n) \in L'(F')$

donc $i'(F')$ est dense dans $(\hat{F})^*$ (2).
Donc d'après (1) et (2), $j' \circ \tau'$ se prolonge en $\bar{\tau}'$ de $\hat{F}^*$ dans $\widehat{\ker u}^*$
d'autre part, $\bar{\tau}' \circ i' = j' \circ \tau'$, par construction.

<u>*Lemme 4*</u>.- Soit $L : F \to F'$ tel que L se prolonge en $\bar{L} : \hat{F} \to \hat{F}^*$.

Alors $L' = \tau' \circ L \circ \tau$ se prolonge en $\bar{L}' : \widehat{\ker u} \to \widehat{\ker u}^*$ et $\bar{L}' = \bar{\tau}' \circ \bar{L} \circ \bar{\tau}$.

Considérons $L(x).y = \Phi(Lx,y)$ $(x,y) \in F^2$, il existe $A > 0$ tel que $\forall (x,y)$, $|L(x).y| \leq A(L)\,|\phi(\Lambda x,x)|^{1/2}|\phi(\Lambda y,y)|^{1/2}$.

Considérons $L'(t).z$ $(t,z) \in (\ker u)^2$

$L'(t).z = (\tau' \circ L \circ \tau)(t).(z) = \Theta(\tau' \circ L \circ \tau)(t),z) = \phi(L(\tau(t)),\tau(z))$

donc $|L'(t).z| \leq A(L)\,|\phi(\Lambda\tau t,\tau t)|^{1/2}|\phi(\Lambda\tau z,\tau z)|^{1/2} = A(L)\,|\Theta(\Lambda' t,t)|^{1/2}$
$|\Theta(\Lambda' z,z)|^{1/2}$

donc L' se prolonge en $\bar{L}' : \widehat{\ker u} \to \widehat{\ker u}^*$;

d'autre part, $L' = \tau' \circ L \circ \tau$, donc $\bar{L}' = \bar{\tau}' \circ \bar{L} \circ \bar{\tau}$.

Remarque :

α) Si $||\bar{L}|| \leqslant A(L)$

$||\bar{L}'|| \leqslant A(L)$

donc si $A(L) \leqslant A||L||_{L(F,F')}$;

$$||\bar{L}'|| \leqslant A||\tau' \circ L \circ \tau|| \leqslant A||L||_{L(F,F')}.$$

β) Si L_1 et L_2 se prolongent en $\bar{L}_1$ et $\bar{L}_2$, on a $\bar{L}'_1 - \bar{L}'_2 = \bar{\tau}' \circ (\bar{L}_1 - \bar{L}_2) \circ \bar{\tau}$.

Conséquences : Soit $P \subset L(F,F')$ le sous-espace vectoriel des opérateurs continus ayant un prolongement continu de $\hat{F}$ dans $\hat{F}^*$. Soit Ω un espace topologique et $\chi : \Omega \to P$ continue. Soit $P' \subset L(\ker u, \mathrm{Coker}\, u')$ le sous-espace vectoriel des opérateurs ayant un prolongement continu de $\widehat{\ker u}$ dans $\widehat{\ker u}^*$.

Nous savons que $\bar{\chi} : \Omega \rightsquigarrow L(\hat{F},\hat{F}^*)$ est continue pour certaines fonctions

$$\lambda \rightsquigarrow \bar{\chi}(\lambda) = \overline{\chi(\lambda)} \quad \text{(cf. par exemple Ch. III)}$$

Lemme 5.- Soit $\chi' : \Omega \to P'$ telle que $\chi'(\lambda) = \tau' \circ \chi(\lambda) \circ \tau$. Si χ et $\bar{\chi}$ sont continues, alors χ' et $\bar{\chi}'$ sont continues (ceci résulte de la remarque β).

Lemme 6.- $\bar{\tau}^* = \bar{\tau}'$.

Soit $\ell \in \hat{F}^*$, et même $\ell \in F' \xrightarrow{i'} \hat{F}^*$.

Comparons $\bar{\tau}^*(i'\ell)$ et $\bar{\tau}'(i'\ell)$.

$\bar{\tau}^*(i'\ell).x = i'\ell.\bar{\tau}x = \phi(\ell,\tau x)$ si $x \in \ker u$

$$\bar{\tau}'(i'\ell).x = j'(\tau'\ell).x = \Theta(\tau'\ell,x)$$
$$= \phi(\ell,\tau x)$$

donc $\bar{\tau}^{*} = \bar{\tau}'$ sur $i'(F') \subset \hat{F}^{*}$, or, $i'(F')$ est dense dans $\hat{F}^{*}$.

Lemme 7.- Tous les diagrammes de la figure 1 commutent.

Théorème 1.-

Si L est un opérateur symétrique, positif qui se prolonge en $\bar{L}$ (symétrique), défini, positif, surjectif, $L' = \tau' \circ L \circ \tau$ se prolonge en $\bar{L}'$ symétrique, défini, positif, surjectif.

Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\ker u} \arrow[r, "\bar{\tau}"] \arrow[d, "\bar{L}'"'] & \hat{F} \arrow[d, "\bar{L}"] \\
\widehat{\ker u}^{*} & \hat{F}^{*} \arrow[l, "\bar{\tau}^{*}"']
\end{tikzcd}$$

où $\bar{\tau}$ est une isométrie et $\bar{L}$ un isomorphisme symétrique positif.

Considérons alors la situation plus générale suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "L_1"'] & H_2 \arrow[d, "L_2"] \\
H_1^{*} & H_2^{*} \arrow[l, "i^{*}"']
\end{tikzcd}$$

où les espaces sont des hilbert ; H_1 sous-espace de H_2, i injection continue, L_2 isomorphisme symétrique positif,

λ et μ étant les dualités ordinaires.

a) L_1 <u>est injectif</u> : soit $x \in H_1$ tel que $L_1(x) = 0$

$$L_1(x) = i^* o\, L_2\, o\, i(x)$$

donc $L_1(x).x = L_2(ix).(ix) = 0$ donc $ix = 0$ donc $x = 0$.

b) L_1 <u>est positif</u>.

c) L_1 <u>est symétrique</u> : $L_1(x).y = i^*\, o\, L_2\, o\, i(x).y = L_2(ix).(iy)$
$= L_2(iy).(ix) = L_1(y).x$.

d) L_1 <u>est surjectif</u> : Soit B_2 le produit scalaire défini sur H_2 par $L_2x.y = B_2(x,y) = \mu(L_2x,y)$. L_2 étant un isomorphisme symétrique, positif, la norme N_2 associée à B_2 est équivalente à la norme initiale sur H_2.

Nous considérons dorénavant les ensembles sous-jacents à H_2 et H_1 muni de ce produit scalaire B_2 et de cette norme N_2 qui induit la même topologie que la topologie initiale.

Dans ces conditions, $i^*\, o\, L_2\, o\, i(x).y = B_2(ix,iy)$ donc $L_1(x) = B_2(ix,i.)$ donc L_1 est un isomorphisme.

<u>Théorème</u> 2.-

Si L est un opérateur symétrique positif, qui se prolonge en $\bar{L} = F$, opérateur de Fredholm (d'indice zéro), alors $F' = L' = \tau'\, o\, L\, o\, \tau$ se prolonge en $\bar{L}'$ de Fredholm, d'indice zéro.

Considérons la situation plus générale suivante :

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "F'"'] & H_2 \arrow[d, "F"] \\ H_1^* & H_2^* \arrow[l, "i^*"'] \end{tikzcd}$$

où les espaces sont des Hilbert,

F de fredholm d'indice 0 symétrique, positif,

H_1 sous-espace de H_2.

Soit $N_2 = \ker F$, nous allons construire un supplémentaire de N_2 dans H_2, "adapté" à H_1 : soit W_1 le supplémentaire orthogonal de $H_1 \cap N_2$ dans H_1.

$H_1 = H_1 \cap N_2 \oplus W_1$ et $N_2 \cap W_1 = \{0\}$ en effet :

si $x \in N_2 \cap W_1$, $x \in N_2 \cap H_1$ donc $x = 0$.

N_2 étant de dimension finie (F fredholm) $N_2 \oplus W_1$ est fermé dans H_2.

Soit L_2 le supplémentaire orthogonal de $N_2 \oplus W_1$ dans H_2

$H_2 = N_2 \oplus W_1 \oplus L_2 = N_2 \oplus M_2$ avec $M_2 = W_1 \oplus L_2$.

Dans ces conditions, $\underline{H_1 \cap M_2 = W_1,}$ en effet :

Soit $x \in H_1 \quad M_2$, $x = m_2$, $m_2 \in M_2$

$x = n_2' + w_1$, $n_2' \in H_1 \cap N_2$; $w_1 \in W_1 \subset M_2$.

Donc d'après l'unicité de la décomposition dans $N_2 \oplus M_2 = H_2$, $m_2 = w_1$, $n_2' = 0$.

Considérons la décomposition suivante de H_2 :

$$\begin{tikzcd}
N_2 \arrow[r, shift left, "\sigma"] & H_2 \arrow[l, shift left, "q"] \arrow[r, shift left, "p"] & M_2 \arrow[l, shift left, "s"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
N_2^* \arrow[r, shift right, "q^*"'] & H_2^* \arrow[l, shift right, "\sigma^*"'] \arrow[r, shift right, "s^*"'] & M_2^* \arrow[l, shift right, "p^*"']
\end{tikzcd}$$

Lemme 8.- F est non nulle sur M_2 et F est un isomorphisme de M_2 sur $p^*M_2^*$.

Soit $x \in H_2$, $F(x)$ est nulle sur N_2, en effet, si $y \in N_2$

$F(x).y = F(y).x = 0$

donc si $z \in H_2$, $z = sp(z) + \sigma q(z)$

$F(x).z = F(x).(sp(z) + \sigma q(z)) = F(x).sp(z) = (sp)^*F(x).z$

donc $F(x) = p^* s^* F(x)$

donc puisque $F(x) \in H_2^*$ et que $s^*H_2^* = M_2^*$, $F(x) \in p^*M_2^*$

donc $\text{Im } F \subset p^*M_2^*$.

D'autre part, $\text{Im } F$ est fermée et de codimension égale à $\dim(\ker F) = \dim N_2$ donc $\text{Im } F = p^*M_2^*$.

Corollaire.- $\tilde{F} = F \circ s : M_2 \to p^*M_2^*$ est un isomorphisme.

Soit $F_2 = s^* \circ \tilde{F} : M_2 \xrightarrow{\tilde{F}} p^*M_2^* \xrightarrow{s^*} M_2^*$ s^* est un isomorphisme de $p^*M_2^*$ sur M_2^*, donc $F_2 \in \text{Isom}(H_2, M_2^*)$.

D'autre part, si $(x,y) \in M_2^2$, $F_2(x).y = s^*(\tilde{F}(x)).y = \tilde{F}(x).s\,y =$

$= F(sx).(sy)$,

donc F_2 est un isomorphisme, symétrique, positif.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & W_1 \arrow[rr, "j"] \arrow[dl, "s_1"] \arrow[dd] & & M_2 \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "\tilde{F}"] \arrow[dd, bend left=60, dashed, "F_2"] \\
H_1 \arrow[ur, bend left, "p_1"] \arrow[rr, dashed, "i"] \arrow[dd, dashed, "F'"'] & & H_2 \arrow[dd, "F"] & p^* M_2^* \arrow[d, "s^*"] \\
 & W_1^* \arrow[dl, "p_1^*"'] & & M_2^* \arrow[ll, "j^*"'] \arrow[dl, "p^*"] \\
H_1^* & & H_2^* \arrow[ll, dashed, "i^*"] &
\end{tikzcd}$$

$p_1 = p|_{H_1} : H_1 \to W_1$

$s_1 = s|_{W_1} : W_1 \to H_1$

$F_2' = j^* \circ F_2 \circ j$

$F \circ s = \tilde{F} = p^* \psi$

donc $p^* \circ F_2 = (p^* \circ s^*) p^* \psi$
$= p^* \psi = \tilde{F} = F \circ s.$

$$\begin{aligned} p_1^* \circ F_2' &= p_1^* \circ j^* \circ F_2 \circ j = i^* \circ p^* \circ F_2 \circ j \\ &= i^* \circ F \circ s \circ j = i^* \circ F \circ i \circ s_1 \\ &= F' \circ s_1 . \end{aligned}$$

Or d'après la démonstration du théorème 1, F_2 étant un isomorphisme symétrique, positif, il en est de même de F_2' ; donc F' est un isomorphisme de W_1 sur $p_1^* W_1^*$;
donc $\ker F' = N_2 \cap H_1$, $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} F') = \operatorname{codim} p_1^* W_1^* = \dim(N_2 \cap H_1)$
donc F' est un opérateur de Fredholm positif, d'indice zéro.

Théorème 3.-

Supposons que L soit un opérateur symétrique qui se prolonge en un opérateur de fredholm $\bar{L} = F$ de négativité finie. Alors $L' = \tau' \circ L \circ \tau$ se prolonge en un opérateur de Fredholm de négativité finie.

Considérons le problème plus général suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "F'"'] & H_2 \arrow[d, "F"] \\
H_1^* & H_2^* \arrow[l, "i^*"]
\end{tikzcd}$$

où les espaces sont des Hilbert,

F de fredholm de négativité finie, symétrique,

H_1 sous-espace de hilbert de H_2.

Dans ces conditions, nous savons (cf. Magnus Hestenes, appl. of theory of quadratic forms in hilbert spaces to calculus of variations, Pac. Jal of Maths, 1951) qu'il existe une décomposition de H_2 sous la forme $H_2 = K_2 \oplus N_2 \oplus P_2$ avec $K_2 = \ker F$, K_2, N_2 et P_2 F-orthogonaux et orthogonaux (pour le produit scalaire initial sur H_2), et $(x,y) \to F(x).y$ définie positive sur P_2

définie négative sur N_2.

Rappel : Nous sommes dans l'hypothèse où $\dim K_2 < +\infty$; $\dim N_2 < +\infty$.

Lemme 9.- $P_2 \cap H_1 = P_2'$ est de codimension finie dans H_1 sinon il existerait $S_2 \subset H_1$, $\dim S_2 = +\infty$ tel que $P_2 \cap H_1 \oplus S_2 = H_1$

$P_2 \cap H_1$ et S_2 orthogonaux.

Dans ces conditions, $P_2 \cap S_2 = (P_2 \cap H_1) \cap S_2 = \{0\}$ donc $P_2 \oplus S_2 \subset H_2$ donc $P_2 \oplus S_2 \oplus S_2' = H_2$ avec $\dim S_2 = +\infty$ d'où la contradiction.

Conséquence :

$H_1 = N_2 \cap H_1 \oplus P_2 \cap H_1 \oplus L$ où L et de dimension finie

$L \subset H_1$

Lemme 10.- Si $F : H_2 \to H_2^*$ est un opérateur de fredholm symétrique (d'indice zéro) ; $\operatorname{Im} F = p^* P_2^* \oplus q^* N_2^*$

où $H_2 = P_2 \oplus N_2 \oplus K_2$, $K_2 = \ker F$

$$\begin{tikzcd} P_2 \arrow[r, shift left, "j"] & H_2 \arrow[l, shift left, "p"] & N_2 \arrow[r, shift left, "k"] & H_2 \arrow[l, shift left, "q"] & K_2 \arrow[r, shift left, "\ell"] & H_2 \arrow[l, shift left, "\sigma"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P_2^* \arrow[r, shift right, "p^*"'] & H_2^* \arrow[l, shift right, "j^*"'] & N_2^* \arrow[r, shift right, "q^*"'] & H_2^* \arrow[l, shift right, "k^*"'] & K_2^* \arrow[r, shift right, "\sigma^*"'] & H_2^* \arrow[l, shift right, "\ell^*"'] \end{tikzcd} .$$

Soit en effet $x \in H_2$, $z \in H_2$, $z = jp(z) + kq(z) + \ell\sigma(z)$

donc $F(x).z = F(x).jp(z) + F(x).kq(z) + F(x).\ell\sigma(z)$

$= p^* j^* F(x).z + q^* k^* F(x).z$

donc $F(x) = p^* j^* F(x) + q^* k^* F(x) = p^* \varphi + q^* \Psi$

avec $\varphi = j^* F(x)$; $\Psi = k^* F(x)$

donc $\operatorname{Im} F \subset p^* P_2^* \oplus q^* N_2^*$.

D'autre part, $H_2^* = p^* P_2^* \oplus q^* N_2^* \oplus \sigma^* K_2^*$ et

$\dim K_2 = \dim \sigma^* K_2^* < +\infty$ puisque F est d'indice zéro,

$\operatorname{Im} F = p^* P_2^* \oplus q^* N_2^*$.

Remarque.- si $x = x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 \in P_2$; $x_2 \in N_2$, $x_3 \in K_2$

$F(x) = p^* j^* F(x_1) + q^* k^* F(x_2)$ puisque N_2, P_2, K_2 sont F-orthogonaux ;

donc $F : N_2 \to q^* N_2^*$ est un isomorphisme

$F : P_2 \to p^* P_2^*$ est un isomorphisme.

Il en résulte le lemme suivant :

Lemme 11.- Sous les hypothèses du lemme 10, F est un isomorphisme de N_2 sur $q^*N_2^*$, de P_2 sur $p^*P_2^*$ et $\mathrm{Im}\, F = F(N_2) \oplus F(P_2)$.

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_1 \cap P_2 \arrow[r, "i"] \arrow[dd, "F'_{P_2}"'] & P_2 \arrow[rr, "Foj"] \arrow[dd, "F_{P_2}"'] \arrow[dr, "Foj"] & & p^*P_2^* \arrow[dl] \\
& & H_2^* \arrow[dl, "j^*"] & \\
(H_1 \cap P_2)^* & P_2^* \arrow[l, "i^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

$F_{P_2} = j^* \circ F \circ j$

F_{P_2} est un isomorphisme, symétrique, positif, donc F'_{P_2} est un isomorphisme symétrique, positif.

Considérons de même, le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_1 \cap N_2 \arrow[r, "i"] \arrow[dd, "F'_{N_2}"'] & N_2 \arrow[rr, "Fok"] \arrow[dd, "F_{N_2}"'] \arrow[dr, "Fok"] & & q^*N_2^* \arrow[dl] \\
& & H_2^* \arrow[dl, "k^*"] & \\
(H_1 \cap N_2)^* & N_2^* \arrow[l, "i^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

$F_{N_2} = k^* \circ F \circ k$

F_{N_2} est un isomorphisme, symétrique, négatif, donc F'_{N_2} est un isomorphisme symétrique négatif.

Soit $x \in H_1$ et considérons $\gamma \in H_1^*$ tel que si $z \in H_1$, $\gamma(z) = F(x).z$.

Si $z = z_1 + z_2$ avec $z_1 \in H_1 \cap N_2$; $z_2 \in H_1 \cap P_2$

$\gamma(z) = F(x).z_1 + F(x).z_2 = \gamma_1(z_1) + \gamma_2(z_2)$; $\gamma_1 \in (H_1 \cap N_2)^*$; $\gamma_2 \in (H_1 \cap P_2)^*$

donc il existe $x_1^o \in H_1 \cap N_2$ et $x_2^o \in H_1 \cap P_2$ tels que $\gamma_1 = F'_{N_2}(x_1^o)$; $\gamma_2 = F'_{P_2}(x_2^o)$ donc $\gamma(z_1 + z_2) = F'_{N_2}(x_1^o).z_1 + F'_{P_2}(x_2^o).z_2$

or $F'_{N_2}(x_1^o).z_1 = F(x_1^o).z_1$; $F'_{P_2}(x_2^o).z_2 = F(x_2^o).z_2$.

Donc si $z \in (H_1 \cap P_2) \oplus (H_1 \cap N_2)$

$$\ell(x).z = F(x).z = F(x).(z_1 + z_2) = F(x_1^o).z_1 + F(x_2^o).z_2 \qquad (11)$$
$$= F(x_1^o + x_2^o).z$$

donc $F(x - x_1^o - x_2^o).z = 0$ pour tout $z \in (H_1 \cap N_2) \oplus (H_1 \cap P_2) = R_2$

donc $x - x_1^o - x_2^o$ est F orthogonal à $R_2 \subset H_1$

donc $x - x_1^o - x_2^o$ est F' orthogonal à R_2.

Soit $S_2 \subset H_1$, S_2 le F'-orthogonal dans H_1 de R_2

Considérons $S_2 \cap R_2$ soit $x \in S_2 \cap R_2$; $x = x_1 + x_2$; $x_1 \in H_1 \cap N_2$ $x_2 \in H_1 \cap R_2$. $F(x).x = 0 = F(x_1).x_1 + F(x_2).x_2$.

Donc, en général, $S_2 \cap R_2 \neq \{0\}$ sauf si $N_2 = \{0\}$ ou $P_2 = \{0\}$.

<u>Considérons dans ces conditions</u> $P_2 \cap H_1$, et son F'-orthogonal dans H_1 soit T_2

si $x \in P_2 \cap H_1 \cap T_2$, $F'(x).x = F(ix).ix = 0$ donc $ix = 0$ donc $x = 0$ donc $P_2 \cap H_1 \cap T_2 = \{0\}$.

D'autre part, si $x \in H_1$, il existe $x_2^o \in P_2 \cap H_1$ tel que $x - x_2^o \in T_2$ (considérer $z_1 = 0$ dans (11)).

Donc $x = x - x_2^o + x_2^o$ et $H_1 = (P_2 \cap H_1) \oplus T_2$.

<u>Considérons alors</u> $F' : H_1 \to H_1^*$.

Nous préciserons d'abord la décomposition $H_1 = (P_2 \cap H_1) \oplus T_2$ comme suit :

$$\begin{tikzcd} P_2 \cap H_1 \arrow[r, shift left, "j_1"] & H_1 \arrow[l, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "q_1"'] & T_2 \arrow[l, shift right, "k_1"'] \end{tikzcd}$$

donc par dualité :

$$\begin{tikzcd} (P_2 \cap H_1)^* \arrow[r, shift left, "p_1^*"] & H_1^* \arrow[l, shift left, "j_1^*"] \arrow[r, shift left, "k_1^*"] & T_2^* \arrow[l, shift left, "q_1^*"] \end{tikzcd}$$

$P_2 \cap H_1$ et T_2 étant F' orthogonaux, si $x \in H_1$, $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in P_2 \cap H_1$, $x_2 \in T_2$

$$F'(x) = p_1^* j_1^* F'(x) + q_1^* k_1^* F'(x) = p_1^* j_1^* F'(x_1) + q_1^* k_1^* F'(x_2)$$

donc $\operatorname{Im} F' = F'(P_2 \cap H_1) \oplus F'(T_2) \subset p_1^*(P_2 \cap H_1)^* \oplus q_1^*(T_2^*)$.

D'autre part, $F'\big|_{P_2 \cap H} : P_2 \cap H_1 \to p_1^*(P_2 \cap H_1)^*$ est un isomorphisme,

car $F'\big|_{P_2 \cap H} = p_1^* \circ F'_{P_2}$.

donc $\operatorname{Im} F' = p_1^*(P_2 \cap H_1)^* \oplus F'(T_2)$; $F'(T_2) \subset q_1^*(T_2^*) \sim T_2^*$.

Conséquences :

1er cas : si $\dim N_2 < +\infty$, alors d'après le lemme 9, $P_2 \cap H_1$ est de codimension finie dans H_1, donc T_2 est de dimension finie.

Donc Im F' est de codimension finie, et

$$\ker F' = [\operatorname{Im}(F')^*]^{\perp} = [\operatorname{Im} F']^{\perp}$$

(puisque $F' = (F')^*$), est de dimension finie.

D'autre part, F' est évidemment de négativité finie.

2ème cas : Supposons $N_2 \cap H_1$ de codimension finie dans T_2. (On remarque que $N_2 \cap H_1 \subset T_2$).

Considérons $F'\big|_{N_2 \cap H_1} : N_2 \cap H_1 \longrightarrow q_1^*(T_2^*)$

Posons $F'\big|_{N_2 \cap H_1} = \lambda$

$$\begin{tikzcd} N_2 \cap H_1 \arrow[r, shift left, "m"] & T_2 \arrow[l, shift left, "\rho"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (N_2 \cap H_1)^* \arrow[r, shift left, "\rho^*"] & T_2^* \arrow[l, shift left, "m^*"] \end{tikzcd} .$$

Considérons $\mu = m^* \circ k_1^* \circ \lambda$:

$$N_2 \cap H_1 \xrightarrow{\lambda} q_1^*(T_2^*) \xrightarrow{k_1^*} T_2^* \xrightarrow{m^*} (N_2 \cap H_1)^*$$

$\mu(x_1) = m^* k_1^* F'(x_1)$ donc $\mu(x_1).y_1 = F'(x_1).(k_1 m\ y_1) = F'_{N_2}(x_1).x_2$

donc $\mu = F'_{N_2}$ donc μ est un isomorphisme.

Propriété 1.- λ est injective : en effet, si $\lambda(x) = 0$, en particulier, $\lambda(x) \circ x = F'(x) \dot{\circ} x = 0$, $x \in H_1 \cap N_2$ donc $x = 0$.

Propriété 2.- λ est d'image fermée : soit (x_n) telle que $\lambda(x_n) \xrightarrow[n]{} \ell \in q_1^*(T_2^*)$ $x_n \in N_2 \cap H_1$.

Alors $\mu(x_n) \to m^* k_1^*(\ell)$ donc puisque μ est un isomorphisme $x_n \to x$ dans $N_2 \cap H_1$ donc $\ell = \lambda(x)$.

Donc λ est un isomorphisme de $N_2 \cap H_1$ sur $\lambda(N_2 \cap H_1)$. D'autre part, $N_2 \cap H_1$ est isomorphe par F'_{N_2} à $(N_2 \cap H_1)^*$ donc aussi à $q_1^*(N_2 \cap H_1)^*$

Donc $\lambda(N_2 \cap H_1)$ est isomorphe à $q_1^*(N_2 \cap H_1)^*$.

Or $q_1^*(N_2 \cap H_1)^* \oplus p_1^*(P_2 \cap H_1)^*$ est fermé, donc $\lambda(N_2 \cap H_1) \oplus p_1^*(P_2 \cap H_1)^*$ est fermé.

D'autre part, $\operatorname{Im} F' = \lambda(N_2 \cap H_1) \oplus p_1^*(P_2 \cap H_1) \sim q_1^*(N_2 \cap H_1)^* \oplus p_1^*(P_2 \cap H_1)$ qui est de codimension finie dans $q_1^*(T_2^*) \oplus p_1^*(P_2 \cap H_1)^* = H_1^*$.

Donc $\operatorname{Im} F'$ est de codimension finie, de même $\ker F'$ est de dimension finie.

Théorème 4.-

Si L se prolonge en $\bar{L} = F$ symétrique, de Fredholm tel que $N_2 \cap \widehat{\ker u}$ soit de codimension finie dans $(P_2 \cap \widehat{\ker u})^{\perp}_{F'}$, alors $\bar{L}' = \tau' \circ \bar{L} \circ \tau$ est symétrique, de Fredholm.

Ⓓ *Applications au calcul variationnel dans* $(C^r(B,E), C^{r-2}(B,E^*)\times C^{r-1}(\partial B,E^*)\Phi)$ *avec conditions sur le bord* ∂B *et conditions globales.*

1) *Etude de quelques types de conditions sur le bord* :

a) Soit $Z \xhookrightarrow{i} E$ un facteur direct dans E.

On peut considérer la suite exacte suivante :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "p"] & \operatorname{Coker} i \arrow[l, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$

p admet une section s.

On considère alors $C^r_Z(B,E)$, le sous-espace de $C^r(B,E)$ constitué des éléments h tels que $h_{|\partial B} \in C^r(\partial B,Z)$.

$C^r_Z(B,E)$ peut être considéré comme le noyau de l'application linéaire u suivante :

$$\begin{tikzcd} C^r(B,E) \arrow[r, "\text{rest}"] \arrow[rr, bend left, "u"] & C^r(\partial B,E) \arrow[r, "\tilde{p}"] & C^r(\partial B,\operatorname{Coker} i) \end{tikzcd}$$

où $\tilde{p}$ est telle que $\tilde{p}(h)(x) = p(h(x))$.

Soit $A = (C^r(B,E) \; ; \; C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*) \; ; \; \Phi) = (F,F',\Phi)$

$B = (C^r(\partial B,\text{Coker } i) \; ; \; C^{r-1}(\partial B,(\text{Coker } i)^*) \; ; \; \Psi) = (G,G',\Psi)$

où $\Psi(k,\ell) = \int_{\partial B} k(x).\ell(x)d\sigma.$

Définissons $u' : C^{r-1}(\partial B,(\text{Coker } i)^*) \to C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*)$

par $u'(\ell) = (0,\ell') \quad \ell'(x) = p^*\ell(x).$

Dans ces conditions, (u,u') est un morphisme de A dans B dans $\mathcal{C}$.

Soit (K,K',Θ) son noyau dans $\mathcal{C}$.

$$K = C^r_Z(B,E).$$

On démontre (cf. exemple de noyau dans $\mathcal{C}$) que Im u' est fermée dans F', et que Coker $u' = C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,Z^*) = K'$, Θ étant induite par Φ et définie par :

$$\Theta((\ell,k);h) = \Phi((\ell,k);h) = \int_B \ell(x).h(x)dx + \int_{\partial B} k(x).h(x)d\sigma.$$

Conclusion : Un problème variationnel sur $(C^r(B,E),F',\Phi)$ avec conditions sur le bord, du type ⓐ, se transforme en un problème variationnel sur le couple (K,K',Θ) $K = C^r_Z(B,E)$.

Cas particulier : Si $Z = \{0\}$.

$(K,K',\Theta) = (C^r_o(B,E),C^{r-2}(B,E^*),\Theta)$

avec $\Theta(k,h) = \int_B k(x).h(x)dx.$

b) Soit (g_j) $1 \leqslant j \leqslant m$, m fonctions numériques

$$g_j : B \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ de classe } C^{r+\alpha} \qquad \alpha \geqslant 1$$
$$(x,p) \rightsquigarrow g_j(x,p)$$

et définissons $f_j : C^r(B,E) \to \mathbb{R}$ par

$$f_j(h) = \int_{\partial B} g_j(x,h(x))d\sigma .$$

f_j est de classe $C^{\alpha+1}$ pour les couples $(C - C^{\alpha+1})$

et $\delta f_j(h).H = \int_{\partial B} \frac{\partial g_j}{\partial p}(x,h(x)).H(x)d\sigma .$

On considère les conditions suivantes sur le bord :

$\underline{f(h) = (f_j(h)) = 0.}$

Hypothèse de régularité : Soit Ω un ouvert de $C^r(B,E)$ tel que pour tout $h \in \Omega$, $df(h) : C^r(B,E) \to \mathbb{R}^m$ soit surjectif.

Dans ces conditions $\Omega_f = \Omega \cap f^{-1}(0)$ est une sous C-variété $C^{\alpha+1}$ de $(C^r(B,E),F',\Phi)$, modelé au voisinage de chaque point $h_o \in \Omega_f$ sur $\ker \delta f(h_o)$, $\delta f(h_o) \in L(A,C)$ $C = (\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m,\mu)$

$$A = (F,F',\Phi) = (C^r(B,E),C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*),\Phi)$$

D'autre part, si $\tilde{f}$ désigne le représentant de f en cartes locales, nous savons qu'il existe un système de cartes locales tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "i"] & C^r(B,E) & \\
O_{h_o} \arrow[u, hook] \arrow[r, "i"] \arrow[d, bend right, "\psi_{K_o}"'] & O'_{h_o} \arrow[u, hook] \arrow[d, bend left, dash, "\psi'_{K_o}"] & \\
U_{h_o} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, hook] & U'_{h_o} \arrow[d, hook] & \\
K \arrow[r, "\tau"] & C^r(B,E) \arrow[r, "d\tilde{f}(h_o)=u_o"] & \mathbb{R}^m \\
K' & C^{r-2}(B,E^*) \quad C^{r-1}(B,E^*) \arrow[l, "\tau'"'] \arrow[r, "u'_o"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

K facteur direct dans $C^r(B,E)$, τ inclusion canonique.

Conclusion : Un problème variationnel sur $(C^r(B,E),F',\Phi)$ avec conditions au bord du type ⓑ régulières, se transforme localement en un problème variationnel sur un ouvert de $(K,K',\Theta) = \ker \delta f(h_o)$.

2) *Etude d'une condition globale sur* $(C^r(B,E),F',\Phi) = A$.

Soit $P = P(x,D) = \sum_{|\beta|\leq t} a_\beta(x)D^\beta$ un opérateur de dérivation sur $C^r(B,E)$ tel que pour tout N-uple β, $a_\beta \in C^{r-2+t}(B,E^*)$. On envisage sur $C^r(B,E)$ la condition $\underline{P(x,D)h = 0}$, et l'on note $C^r_P(B,E)$ le noyau de $P : C^r(B,E) \to C^{r-t}(B,E)$.

Considérons le couple $C = (C^{r-t}(B,E),C^{r-2+t}(B,E^*),\Psi)$ où $\Psi(\ell,h) = \int_B \ell(x).h(x)dx$.

Montrons que P est associé à un morphisme $(P,P') \in L(A,C)$, envisageons pour cela, $\int_B \ell(x).P(x,D)h(x)dx$ où $\ell \in C^{r-2+t}(B,E^*)$.

Nous avons à calculer des intégrales du type suivant :

$$\int_B \ell(x).a(x).\frac{\partial K}{\partial x_i}(x)dx = \int_B \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\ell(x).a(x).K(x)\right]dx$$

$$- \int_B \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\ell.a\right](x).K(x)dx.$$

$$\text{Or } \int_B \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\ell(x).a(x).K(x)\right]dx = \int_{\partial B} x_i\ \ell(x).a(x)K(x)d\sigma$$

par intégrations par parties successives, on démontre que

$$\int_B \ell(x).P(x,D)h(x)dx = \int_B ({}^tP(x,D).\ell(x)).h(x)dx + \int_{\partial B} \gamma(x,D)\ell(x).h(x)d\sigma.$$

On met ainsi en évidence $P' : C^{r-2+t}(B,E^*) \longrightarrow C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(B,E^*)$

$$\ell \rightsquigarrow P'(\ell) = ({}^tP(x,D)\ell;\gamma(x,D)\ell)$$

tel que $(P,P') \in L(A,C)$.

Conclusion : Un problème variationnel sur $(C^r(B,E),F',\Phi)$ avec conditions globales définies par un opérateur de dérivation P, se ramène donc à un problème variationnel sur le noyau $(C^r_P(B,E),K',\Theta)$ du morphisme (P,P').

3) *Autre condition globale sur* $(C^r(B,E),F',\Phi)$.

Soit $\rho_j : B \times E \times E^N \to \mathbb{R}$ de classe $C^{r+\alpha}$ $\alpha \geq 1$ $1 \leq j \leq m$

soit $\rho : C^r(B,E) \to \mathbb{R}^m$ telle que

$$\rho(h) = \left(\int_B \rho_j(x,h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x))dx\right)_{i\leq j\leq m}$$

ρ est C-différentiable $C^{\alpha+1}$ et $d\rho(h).H =$

$$\left(\int_B \{\frac{\partial\rho_j}{\partial p}(x,h(x),\frac{\partial h}{\partial x_i}(x))H(x)+\sum_1^N \frac{\partial\rho_j}{\partial x_i}(x,h(x),\frac{\partial h}{\partial x_i}(x))\frac{\partial H}{\partial x_i}(x)\}\, dx\right).$$

Soit $h_o \in C^r(B,E)$ tel que $d\rho(h_o)$ soit surjective, alors il existe un voisinage Ω de h_o dans $C^r(B,E)$ tel que $\forall\, h \in \Omega$, $d\rho(h)$ soit surjective.

Dans ces conditions, si $C^r_\rho(B,E)$ désigne $C^r(B,E) \cap \rho^{-1}(\{0\})$; Ω_ρ est muni d'une structure C-différentiable $C^{\alpha+1}$, qui en fait une sous-C-variété $C^{\alpha+1}$ de $C^r(B,E)$. Et l'on a en carte locale, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Omega_f \arrow[r, "i"] & C^r(B,E) & \\
O_{h_o} \arrow[u, hook] \arrow[r, "i"] \arrow[d, bend right, "\psi_{h_o}"'] & O'_{h_o} \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, "J"] \arrow[d, bend left, "\psi'_{h_o}"] & R \arrow[d, dashed, bend left] \\
U_{h_o} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & U'_{h_o} \arrow[r, dashed, "\bar{J}"'] \arrow[d] & R \\
K \arrow[r, "\tau"] & C^r(B,E) \arrow[r, "d\rho(h_o)=u_o"] & \mathbb{R}^m \\
K' & F' \arrow[l, "\tau'"'] & \mathbb{R}^m \arrow[l, "u'_o"'] \\
\Theta & \Phi & \mu
\end{tikzcd}$$

Ω_f est modelée sur (K,K',Θ), noyau de (u_o,u'_o).

τ est l'injection canonique.

Conclusion : En coordonnées locales, on est ramené à l'étude d'un problème variationnel sur le noyau d'un morphisme de C.

Nous allons étudier des exemples de problèmes variationnels dans $(C^r(B,E), C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*), \Phi)$ avec des conditions globales ou des conditions sur le bord ∂B, dans l'hypothèse où la fonctionnelle J, définie sur $C^r(B,E)$ est de la forme :

$$J(h) = \int_B f(x,h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x))dx \quad \text{avec } f : B \times E \times E^N \to \mathbb{R} \text{ de classe } C^{r+\alpha} \quad \alpha \geq 1,$$

Nous savons que dans ces conditions, J est $\mathcal{C}$-différentiable de classe $C^{\alpha+1}$.

Ⓔ *EXEMPLE 1. Une condition suffisante d'existence d'un minimum local strict, faible pour* J ; *conditions de Legendre-Jacobi.*

$F = C^r(B,E)$; $F' = C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*)$

E : espace de hilbert de dimension finie

$$Z = \{0\} \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p=id_E} \text{Coker } i = E$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{R} & \\
\ker u = C_o^r(B,E) \arrow[r, "\tau"] & C^r(B,E) \arrow[ur] \arrow[r, "u"] & C^r(\partial B,E) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{coker } u' = C^{r-2}(B,E^*) \arrow[r, "\tau'"] & C^{r-2}(B,E^*)\times C^{r-1}(\partial B,E^*) \arrow[r, "u'"] & C^{r-1}(\partial B,E^*) \\
\Theta & \Phi & \Psi
\end{tikzcd}$$

$$J(h) = \int_B f(x,h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x))dx.$$

* J est de classe $C - C^{\alpha+1}$, il en est de même de $\tilde{J} = J \circ \tau$

$\delta\tilde{J} = \tau' \circ J \circ \tau$; $d\delta\tilde{J} = \tau' \circ d\delta J \circ \tau = L'$.

Nous savons que $C^r(B,E) \ni h \rightsquigarrow L(h) = d\delta J(h)$ définit un paramétrage continu d'opérateurs prolongeables (théorème 3, chap. III)

* donc $C_o^r(B,E) \ni h \rightsquigarrow L'(h) = \tau' \circ L(h) \circ \tau$ définit une paramétrage continu d'opérateur prolongeables à $L(\widehat{\ker u}, (\widehat{\ker u})^*)$.

* d'autre part, il résulte de l'existence de ce paramétrage continu, et du chapitre III, ⑤ , que si h_o est un point critique de $\tilde{J}$,

$$\tilde{J}(h_o+h) = \tilde{J}(h_o) + \Theta(\tilde{a}(h).h,h) = \mu(\bar{\tilde{a}}(h).h,h)$$

avec

$$\tilde{a}(h) = \tau' \circ a(h) \circ \tau \qquad a(h) = \int_0^1 (1-t)d\delta J(h_o+th)dt$$

$$\bar{\tilde{a}}(h) = \tau' \circ \bar{a}(h) \circ \tau \qquad \bar{a}(h) = \int_0^1 (1-t)\overline{d\delta J}(h_o+th)dt$$

$$= \bar{\tilde{a}}(0) = \tau' \circ \bar{a}(0) \circ \tau = \frac{1}{2}(\tau' \circ \bar{L}(h_o) \circ \tau) = \frac{1}{2}\bar{L}'(h_o)$$

donc d'après le <u>théorème 0</u> (chap. III).

<u>*Théorème.*</u> Si $\overline{L'}(h_o)$ est un isomorphisme défini, positif, alors J admet un minimum local strict en h_o (pour la topologie faible).

Nous sommes donc amenés à rechercher des conditions suffisantes pour que $\overline{L'}(h_o)$ soit un isomorphisme défini positif.

<u>*Conditions de Legendre-Jacobi.*</u>

Nous savons que si $H \in H_o^1(B,E) = \widehat{\ker u}$, $\overline{d\delta\tilde{J}}(h) = \overline{L'}(h)$ est défini par :

$$\overline{L'}(h)(H).K = \int_B \{a(x).H(x).K(x) + \sum_{i=1}^N \alpha_i(x) \frac{\partial H}{\partial x_i}(x).K(x) + \sum_{i=1}^N \beta_i(x).H(x).\frac{\partial K}{\partial x_i}(x)$$

$$+ \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x_i}(x) \frac{\partial K}{\partial x_j}(x)\}dx \qquad (1)$$

avec $a_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}(x, h(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)) \in L_s(E,E^*)$

$a(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}(\ ) \in L_s(E,E^*)$; $\beta_i(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial p}(\ )$; $\alpha_i(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q_i}(\ )$

$$\alpha_i(x) = (\beta_i(x))^*.$$

Nous considérons les conditions suivantes :

(i) $h_o \in C_o^r(B,E)$ est un point critique pour $\tilde{J} = J \circ \tau$.

(ii) $\sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}(x, h_o(x), \frac{\partial h_o}{\partial x_i}(x))\xi^i\xi^j \in \mathrm{Isom}(E,E^*)$ pour $\xi \in \mathbb{R}^N - \{0\}$

(iii) α) $\forall x \in B \quad Z^2 = ((Z_k))^2 \rightsquigarrow \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}(x, h_o(x), \frac{\partial h_o}{\partial x_i}(x)) Z_i Z_j$

est positive.

β) la forme quadratique précédente est définie positive en $(0, h_o(0), \frac{\partial h_o}{\partial x_i}(0))$.

(iv) Soit $0 < \lambda \leqslant 1$, $B_\lambda = \bar{B}(0,\lambda) \quad \bar{B}(0,1) = B \subset \mathbb{R}^N$.

On définit $\bar{L}'_\lambda(h) : H_o^1(B_\lambda,E) \rightarrow H_o^{-1}(B_\lambda,E)$ en remplaçant dans (1), B par B_λ. (Il s'agit en fait ici de la restriction de $\bar{L}'(h_o)$ à $H_o^1(B_\lambda,E)$ aux sens habituel.

Nous supposerons que $\forall \lambda \quad 0 < \lambda \leqslant 1 \quad \ker L'_\lambda(h_o) = \{0\}$.

Remarque 1 : (ii) et (α) impliquent que les formes quadratiques sont définies positives pour tout $x \in B$.

Remarque 2 : La condition (iv) peut se traduire de la manière suivante :

* ∂B et 0 ne sont pas conjugués relativement à h_o.

* il n'y a aucune boule centre 0, dont le bord soit conjugué de zéro, relativement à h_o.

La nécessité de la condition (iv) a été démontrée par Dennemeyer [2].

La conjugaison est à entendre au sens suivant :

Soit σ une sous-variété à bord (C^∞) de B, on peut définir $\bar{L}_\sigma(h_o) : H^1(\sigma,E) \to \bar{H}_o^1(\sigma,E)$ en remplaçant dans (1) B par σ. On dira que $\partial\sigma$ et 0 sont conjugués relativement à h_o si $\bar{L}_\sigma(h_o).H = 0$ et $H_{|\partial\sigma} = 0$ implique $H = 0$ (cf. Dennemeyer [2] et Hestenes [3]).

Théorème.-

Si les conditions (i), (ii), (iii), (iv) sont vérifiées, alors $L'(h_o)$ est un isomorphisme local strict de $\tilde{J}$ pour la topologie faible (C^r).

Soit $0 < \lambda \leq 1$, considérons $\psi_\lambda : C^1(B,E) \to C^1(B_\lambda,E)$ tel que

$$\psi_\lambda(H) = H_\lambda : y \rightsquigarrow H_\lambda(y) = H(\frac{y}{\lambda})$$

ψ_λ se prolonge en un isomorphisme $\overline{\psi_\lambda}$ de $H^1(B,E)$ sur $H^1(B_\lambda,E)$.

Considérons $\bar{L}_\lambda : H^1(B_\lambda,E) \to H^{-1}(B_\lambda,E)$ tel que :

$$\bar{L}_\lambda(H).K = \int_B \{a(y).H(y).K(y) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(y) \frac{\partial H}{\partial y_i}(y)K(y) + \sum_{i=1}^{N} \beta_i(y)H(y)\frac{\partial K}{\partial y_i}(y)$$

$$+ \sum_{i.j} a_{ij}(y) \frac{\partial H}{\partial y_i}(y) \frac{\partial K}{\partial y_i}(y)\}dy \qquad (2).$$

Définissons alors, pour $0 < \lambda \leqslant 1$, $M_\lambda : H^1(B,E) \to H^{-1}(B,E)$ par :
$M_\lambda = \bar{\psi}^*_\lambda \circ \bar{L}_\lambda \circ \bar{\psi}_\lambda$.

$$\text{Donc } M_\lambda(H).K = \bar{L}_\lambda(H_\lambda).K_\lambda = \int_{B_\lambda} \{a(y)H(\frac{y}{\lambda})K(\frac{y}{\lambda}) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(y) \frac{\partial H_\lambda}{\partial y_i}(y)\ K_\lambda(y) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \beta_i(y)H_\lambda(y) \frac{\partial K_\lambda}{\lambda y_i}(y) + \sum_{i.j} a_{ij}(y) \frac{\partial H_\lambda}{\partial y_i}(y) \frac{\partial K_\lambda}{\partial y_j}(y)\}dy.$$

Or $H_\lambda(y) = H(\frac{y}{\lambda})$ donc $\frac{\partial}{\partial y_i}(H_\lambda)(y) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial H}{\partial x_i}(\frac{y}{\lambda})$

$$\text{donc } M_\lambda(H).K = \int_{B_\lambda} \{a(y)H(\frac{y}{\lambda})K(\frac{y}{\lambda}) + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(y) \frac{\partial H}{\partial x_i}(\frac{y}{\lambda})K(\frac{y}{\lambda}) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N} \beta_i(y)\ H(\frac{y}{\lambda}) \frac{\partial K}{\partial x_i}(\frac{y}{\lambda}) + \frac{1}{y^2}\sum_{i.j} a_{ij}(\lambda) \frac{\partial H}{\partial x_i}(\frac{y}{\lambda}) \frac{\partial K}{\partial x_j}(\frac{y}{\lambda})\}\ dy.$$

soit en posant $\frac{y}{\lambda} = z$ donc $dy = \lambda^N dz$.

$$M_\lambda(H).K = \lambda^N \int_B \{a(\lambda z)H(z)K(z) + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(\lambda z)\frac{\partial H}{\partial x_i}(z)K(z) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N} \beta_i(\lambda z)H(z)\frac{\partial K}{\partial x_i}(z) + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i.j} a_{ij}(\lambda z)\frac{\partial H}{\partial x_i}(z)\frac{\partial K}{\partial x_j}(z)dz$$

$$\text{donc } (\lambda^{2-N})M_\lambda(H).K = \int_B \sum_{i.j} a_{ij}(\lambda z)\frac{\partial H}{\partial x_i}(z)\frac{\partial K}{\partial x_j}(z)dz$$

$$+ \int_B \{\lambda^2 a(\lambda z)H(z)K(z) + \lambda\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(\lambda z)\frac{\partial H}{\partial x_i}(z)K(z) + \lambda\sum_{i=1}^{N} \beta_i(\lambda z)H(z)\frac{\partial K}{\partial x_i}(z)\}dz$$

donc $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ 0<\lambda\leqslant 1}} \lambda^{2-N} M_\lambda = Q_o$ où $Q_o : H^1(B,E) \to H^{-1}(B,E)$

est défini par $Q_o(H).K = \int_B \sum_{i.j} a_{ij}(0) \frac{\partial H}{\partial x_i}(z) \frac{\partial k}{\partial x_j}(z)dz.$

On posera $Q_\lambda = \lambda^{2-N} M_\lambda \qquad 0 < \lambda \leqslant 1.$

Remarques :

1) $\lambda \rightsquigarrow Q_\lambda$ est continue de $[0,1]$ dans $L(H^1(B,E),H^{-1}(B,E)$.

2) $Q_1 = M_1 = \bar{L}(h_o)$.

3) D'après la condition (ii), $\bar{L}_\lambda(h_o)$ est un opérateur symétrique, de fredholm d'indice 0, il en est de même de Q_o.

D'après (iii), il en résulte que $\bar{L}'_\lambda(h_o) = \tau' \text{ o } \bar{L}_\lambda(h_o) \text{ o } \tau$ est un opérateur symétrique, de fredholm d'indice zéro, il en est de même pour Q'_o.

D'après la condition (iv) $\bar{L}'_\lambda(h_o)$ est un isomorphisme pour $0 < \lambda \leqslant 1$, d'après (iii) β) Q'_o est un isomorphisme positif, symétrique d'autre part, $M'_\lambda = \bar{\tau}' \text{ o } M_\lambda \text{ o } \bar{\tau} = \bar{\psi}^{o^*} \text{ o } \bar{L}'_\lambda(h_o) \text{ o } \bar{\psi}^o_\lambda$

où $\bar{\psi}^o_\lambda : H^1_o(B,E) \rightarrow h^{-1}_o(B,E)$ est un isomorphisme $\bar{\psi}^o_\lambda = \bar{\psi}_\lambda \big|_{H^1_o(B,E)}$

donc M'_λ est un isomorphisme symétrique pour $0 < \lambda \leqslant 1$

donc $Q'_\lambda = \lambda^{2-N} M'_\lambda$ est un <u>isomorphisme</u> pour $0 < \lambda \leqslant 1$

$Q'_1 = M'_1 = \bar{L}'(h_o)$.

D'après 1, 2, 3, il résulte (cf. Antoine, espaces en dualité) que M'_1 est un isomorphisme positif, symétrique donc $\bar{L}'(h_o)$ est un isomorphisme symétrique, positif.

Remarque :

Soit $K_o : H_o^1(B,E) \to H_o^{-1}(B,E)$ tel que

$K_o(H).K = \int_B H(x).K(x)dx$, K_o est compact $||K_o||_{L(H_o^1,H_o^{-1})} \leq 1$

Soit $S'_\lambda = Q'_\lambda + (1-\lambda)a\ K_o$ avec $a \in R^*$

$S'_o = Q'_o + a\ K_o$ donc S'_o est un isomorphisme symétrique positif, même si l'on ne suppose pas la condition forte de Legendre en $(0,h_o(x), \frac{\partial h}{\partial x_i}(0))$.

$S'_1 = Q'_1 = \bar{L}'(h_o)$.

On sait que si $\lambda \in [b,1] \supset]0,1]$, on peut trouver a tel que avec les conditions (i), (ii), (iii), (iv), $S'_\lambda \in \mathrm{Isom}(H_o^1,H_o^{-1})$

Problème : Peut-on trouver a tel que (i), (ii), (iii), (iv) impliquent que $S'_\lambda \in \mathrm{Isom}_s(H_o^1,H_o^{-1})$ pour $\lambda \in [0,1]$?

On pourrait, en tout cas, pour des problèmes avec conditions sur le bord plus générales, obtenir des conditions suffisantes du même type en remplaçant dans (iv) $\bar{L}'_\lambda$ par $\bar{L}'_\lambda + (1-\lambda)a\ K_o$, la condition (iii) devenant inutile.

Réf. [1] ANTOINE - Calcul différentiel pour les couples en dualité
- Théorèmes de prolongement.

[2] DENNEMEYER - Surfaces conjuguées pour les problèmes de dimension ≥ 2,
Pacific Jal Math. 30. 1969, (621-638).

[3] HESTENES - Application of the theory of quadratic forms in hilbert space, to the calcules of variations,
Pacific Jal Math. 1 - 1951 (page 525).

Comparaison possible avec :

KIMBLE - Conditions suffisantes de Jacobi, Euler
(Pacific Jal Math. 14, 1964 (1283 - 1295).

Ⓕ EXEMPLE 2.

$F = C^r(B,E) \quad ; \quad F' = C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*)$

E hilbert de dimension finie.

Soient $g_j : B \times E \to \mathbb{R}$ de classe $C^{r+\alpha}$ $\alpha \geq 1$ $1 \leq j \leq m$.
On considère $g : C^r(B,E) \to \mathbb{R}^m$

$$h \rightsquigarrow g(h) = \left(\int_{\partial B} g_j(x,h(x))dx\right)_{1\leq j\leq m}$$

g est de classe $C - C^{\alpha+1}$.

On définit $C^r_g(B,E) = C^r(B,E) \cap g^{-1}(\{0\})$
soit $h_o \in C^r_g(B,E)$ tel que $d_g(h_o)$ soit surjective, il existe alors Ω voisinage de h_o dans $C^r(B,E)$ tel que $\Omega_g = \Omega \cap g^{-1}(\{0\})$ soit une sous-C-variété $C^{\alpha+1}$ de $(C^r(B,E),F',\Phi)$, modelée sur le noyau de $\delta_g(h_o)$. [cf. exemple de conditions aux bords dans ce chapitre].
D'autre part, il existe un système de cartes locales sur Ω_g et sur $C^r(B,E)$, tel que les diagrammes suivants soient commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
\Omega_g \arrow[r, "i"] & C^r(B,E) \arrow[r, "J"] & \mathbb{R} \arrow[d, equal] \\
O_{h_o} \arrow[u, hook] \arrow[r, "i"] \arrow[d, bend right, "\psi_{h_o}"'] & O'_{h_o} \arrow[u, hook] \arrow[r, "J"] \arrow[d, bend left, "\psi'_{h_o}"] & \mathbb{R} \arrow[d, dashed, bend left] \\
U_{h_o} \arrow[r, "\tau"] \arrow[dd, hook] & U'_{h_o} \arrow[r, "\bar{J}"] \arrow[dd, hook] & \mathbb{R} \\
 & & \\
K \arrow[r, "\tau"] & C^r(B,E) \arrow[r, "dg(h_o)=u_o"] \arrow[ur] & \mathbb{R}^m \\
K' & F' \arrow[l, "\tau'"'] & \mathbb{R}^m \arrow[l, "d'g(h_o)=u'_o"'] \\
\Theta & \Phi & \mu
\end{tikzcd}$$

Nous sommes donc amenés à étudier en coordonnées locales $\bar{J} \circ \tau = \tilde{\bar{J}}$, nous savons que $\tilde{\bar{J}}$ est de classe $\mathcal{C}\ \tau\ C^{\alpha+1}$ et vérifie :

$$\delta\tilde{\bar{J}} = \tau' \circ \delta\bar{J} \circ \tau$$
$$d\delta J = \tau' \circ d\delta\tilde{\bar{J}} \circ \tau$$

Nous savons d'autre part, que dans la carte canonique $(C^r(B,E), F', \Phi)$, $d\delta J$ a pour expression :

$$d\delta J(h).H.K = \int_B \{a(x).H(x).K(x) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(x) \frac{\partial H}{\partial x_i}(x).K(x) + \sum_{i=1}^{N} \beta_i(x) H(x) \frac{\partial K}{\partial x_i}(x)$$

$$+ \sum_{i.j} a_{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x_i}(x) \frac{\partial K}{\partial x_j}(x)\}dx \quad \text{(cf. \underline{exemple} 1)},$$

Nous avons, par ailleurs, la relation suivante entre $d\delta\bar{J}$ et $d\delta J$, correspondant à un changement de carte θ sur (F, F', ϕ)

$d\delta\bar{J}(h) = dd'\theta(h).\delta J\theta(h) + d'\theta(h) \circ d\delta J(\theta(h)) \circ d\theta(h)$

donc $d\delta\tilde{\bar{J}}(h) = \tau' \circ dd'\theta(h).\delta J(\theta(h)) + \tau' \circ d'\theta(h) \circ d\delta J(\theta(h)) \circ d\theta(h) \circ \tau.$

Dans ces conditions, on a la forme du changement de carte θ,

qui a pour expression $K \times \mathbb{R}^m = C^r(B,E) \longrightarrow C^r(B,E) = K \times \mathbb{R}^m$

$$(h_1,h_2) \rightsquigarrow (h_1,\ h_2 - \psi(h_1))$$

où ψ : $K \to \mathbb{R}^m$ est de classe $C - C^{\alpha+1}$ et vérifie

$$g(h_1,\psi(h_1) = 0 \quad \text{pour} \quad (h_1,\psi(h_1)) \in O'_{h_o}$$

[cf théorème des fonctions implicites].

Dans ces conditions : pour $h \in U'_{h_o}$, $d\delta\bar{J}(h) = L(h)$ se prolonge en $\bar{L}(h) \in L(H^1(B,E),H^{-1}(B,E)$; et $h \rightsquigarrow \bar{L}(h)$ est continue ; de même, pour $h \in U_{h_o}$, $h \rightsquigarrow d\delta\bar{\tilde{\bar{J}}}(h) = L'(h)$ se prolonge en $L'(h) \in L(\hat{K},\hat{K}^*)$ où $\hat{K}$ est le complété de K pour la norme $N_{\Lambda'}$ associée à l'opérateur hilbertisant $\Lambda' = \tau' \circ \Lambda \circ \tau$, ($\Lambda$ opérateur hilbertisant canonique sur $(C^r(B,E),C^{r-2}(B,E) \times C^{r-1}(\partial B,E),\Phi)$,

donc d'après le théorème 0 (cf. III, opérateurs hilbertisants, application du calcul des variations).

Théorème.- Si $\overline{d\delta\tilde{\bar{J}}}(h_o)$ est un isomorphisme défini positif en h_o point critique de $J_g = J|\Omega_g$, alors J_g admet en h_o un minimum local strict.

(A condition que h_o ne soit pas un point critique pour g).

Ⓖ EXEMPLE 3.

$F = C^r(B,E)$; $F' = C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*)$

$F_o = C^r_o(B,E)$; $F'_o = C^{r-2}(B,E^*)$

E hilbert de dimension finie.

Soit $g : B \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{r+\alpha}$ $\alpha \geq 1$

$(x,p) \rightsquigarrow g(x,p)$ positivement homogène

de degré 1 par rapport à p

de degré $s > 0$ par rapport à x.

On considère $\ell : C^r(B,E) \longrightarrow \mathbb{R}$

$h \rightsquigarrow \ell(h) = \int_B g(x,h(x))dx.$

ℓ est C-différentiable de classe $C^{\alpha+1}$.

On définit $C^r_{o,g}(B,E) = C^r_o(B,E) \cap g^{-1}(\{0\})$.

Soit $h_o \in C^r_{o,g}(B,E)$ tel que $dg(h_o) : C^r_o(B,E) \to \mathbb{R}$ soit surjective. Alors comme dans les exemples précédents, il existe un voisinage ouvert Ω de h_o donc $C^r_o(B,E)$, tel que $\Omega_g = C^r_{o,g}(B,E)$ soit muni d'une structure de sous-C-variété $C^{\alpha+1}$ de $C^r_o(B,E)$, et il existe des cartes locales telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\Omega_g \arrow[r, "i"] & C^r_o(B,E) \arrow[r] & \mathbb{R} & \\
O_{h_o} \arrow[u, hook] \arrow[d, dashed, bend right, "\psi_{h_o}"'] & O'_{h_o} \arrow[u, hook] \arrow[d, dashed, bend left, "\psi'_{h_o}"] \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[d, dashed, bend left] & \\
U_{h_o} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, hook] & U'_{h_o} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbb{R} & \\
K \arrow[r, "\tau"] & C^r_o(B,E) \arrow[rr, "dg(h_o)=u_o"] & & \mathbb{R} \\
K' & F'_o & & {} \arrow[ll, "d'g(h_o)=u'_o"'] \\
\Theta & \Phi & &
\end{tikzcd}$$

τ : injection canonique $(K,K',\Theta) = \ker(u_o,u'_o)$.

Nous sommes encore amenés à étudier en coordonnées locales

$\bar{J} \circ \tau = \tilde{\bar{J}}$ $\qquad \widetilde{\delta \bar{J}} = \tau' \circ \bar{J} \circ \tau$

$$\widetilde{d\delta \bar{J}} = \tau' \circ d\, \bar{J} \circ \tau$$

Comme dans l'exemple 2, $d\delta\bar{J}(h)$ a pour expression dans cette carte locale : $d\delta\bar{J}(h) = dd'\theta(h) \,.\, \delta J(\theta(h) + d'\theta(h) \circ d\delta J(\theta(h)) \circ d\theta(h)$ où θ définit le changement de carte, on remarque, que d'après l'expression de $d\theta(h)$ [cf. exemple 2], $d\theta(h) - id$ est compact.

<u>On a aussi</u>, <u>comme dans l'exemple</u> 2.

Pour $h \in U'_{h_o}$, $d\delta\bar{J}(h) = L(h)$ se prolonge en $\bar{L}(h) \in L(H^1_o, H^{-1}_o)$, et $h \rightsquigarrow \bar{L}(h)$ est continue ; de même, pour $h \in U_{h_o}$, $d\delta\tilde{\bar{J}}(h) = L'(h)$ se prolonge en $\bar{L}'(h) \in L(\hat{K}, \hat{K}^*)$ et $h \rightsquigarrow \bar{L}'(h)$ est continu.

<u>*Remarque*</u> : $\hat{K}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1_o(B,E)$. Considérons maintenant pour $0 < \lambda \leq 1$ $\psi_\lambda : C^r(B,E) \to C^r(B\ ,E)$

$$h \rightsquigarrow h = \psi_\lambda(h) : x \rightsquigarrow h(\frac{x}{\lambda}).$$

ψ_λ se prolonge en $\bar{\psi}_\lambda$ isomorphisme de $H^1(B,E)$ sur $H^1(B_\lambda,E)$ tel que $\bar{\psi}^o_\lambda$ soit aussi un isomorphisme de $H^1_o(B,E)$ sur $H^1_o(B_\lambda,E)$ étudions l'image par $\bar{\psi}^o_\lambda$ de $\hat{K} \to H^1_o(B,E)$.

$$\text{Si } H \in \hat{K}, \int_B \frac{\partial g}{\partial p}(x,h_o(x))H(x)dx = 0 \qquad (1)$$

posons $u = \lambda x$ (1') devient $\lambda^{-N}\int_B \frac{\partial q}{\partial p}(\frac{u}{\lambda}, h_o(\frac{u}{\lambda}))H_\lambda(u)du$

$$= \lambda^{-N}\int_B \frac{\partial q}{\partial p}(u,h_o(u)).H_\lambda(u)du$$

puisque $\frac{\partial q}{\partial p}$ est positivement homogène de degré 0 par rapport à p.

est positivement homogène de degré s par rapport à x.

donc $\bar{\psi}^o_\lambda(K) = \hat{K}_\lambda = H^1_o(B_\lambda,E) \cap \{H \in H^1_o(B_\lambda) | \int_{B_\lambda} \frac{\partial g}{\partial p}(u,h_o(u)H(u)du = 0$

dans ces conditions $\bar{\psi}^o_\lambda$ est un isomorphisme de $\hat{K}$ sur $\hat{K}_\lambda$, et d'autre part, on a évidemment un plongement P_λ de $\hat{K}_\lambda$ dans $\hat{K}$, défini par :

$$P_\lambda(H) = \begin{cases} H & \text{sur } B_\lambda \\ 0 & \text{sur } \complement B_\lambda \end{cases}$$

Dans ces conditions, la notion de restriction de $\bar{L}'(h_o)$ à $\hat{K}_\lambda$ a un sens :

$$\text{rest}(\bar{L}'(h_o)).H,K = \bar{L}'(h_o)(P_\lambda H)(P_\lambda K) \quad \text{où} \quad H,K \in \hat{K}_\lambda$$

On peut donc construire une chaîne d'opérateurs comme dans l'<u>exemple</u> 1, soit $\bar{L}'_\lambda(h_o) = \text{rest}_\lambda \bar{L}'(h_o)$.

On définit $M'_\lambda = \bar{\psi}^{o*} \circ \bar{L}'_\lambda(h_o) \circ \bar{\psi}^o_\lambda \in L(\hat{K},\hat{K}^*) \quad 0 < \lambda \leqslant 1$.

On démontre que $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda\to 0}} M'_\lambda = M'_o$ où $M'_o(H,K) =$

$$\int_B (\sum_{i,j} a_{ij}(0,h_o(0)\frac{\partial h_o}{\partial x_1}(0))\frac{\partial H}{\partial x_1}(x)\frac{\partial K}{\partial x_j}(x))dx$$

d'autre part, $M'_1 = \bar{L}'(h_o)$.

<u>Considérons, alors les conditions suivantes</u> (de Jacobi, Legendre)

(ii) $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}(x,h_o(x), \frac{\partial h_o}{\partial x_i}(x))\xi^i\xi^j \in \text{Isom}(E,E\ )$ pour $\xi \in R^N - \{0\}$

(iii) α) $\forall\, x \in B,\ Z^2 = ((Z_k))^2 \rightsquigarrow \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}(x,h_o(x),\frac{\partial h_o}{\partial x_i}(x))Z_i Z_j$ est positive.

β) la forme quadratique précédente est définie positive en

$(0,h_o), \frac{\partial h_o}{\partial x_i}(0))$.

(iv) pour $0 < \lambda \leqslant 1$ $\text{rest}_\lambda(\bar{L}'(h_o)) = \bar{L}'_\lambda(h_o)$ est injective.

<u>On a alors le théorème</u> : si $J_g = J|\Omega_g$.

Si h_o est un point critique de J_g, qui ne soit pas point critique de g ; et si les conditions (ii) ; (iii) ; (iv) sont vérifiées, alors J_g admet en h_o un minimum strict local.

<u>*Remarque*</u> : Dans ces trois exemples, la propriété d'être de fredholm pour l'opérateur $\bar{L}_1(h)$ défini au chapitre IV par $\bar{L}_1(h).H.K$ $= \int_B \sum_{i,j} a^h_{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x_i}(x) \frac{\partial K}{\partial x_i}(x)dx$ peut se démontrer plus simplement grâce à la conjonction des conditions d'ellipticité et de Legendre, on a en effet, dans ces circonstances :

$\sum_{i,j} a_{ij}(x) Z^i Z^j \geqslant C||Z||^2$ où C est positif, indépendant de $x \in B$, il en résulte que $||H||_{H^1} \leqslant C||\bar{L}_1(h).H||_{H^{-1}}$.

Il reste cependant intéressant de connaître la propriété d'être de fredholm pour $\bar{L}_1(h)$, à partir de la seule hypothèse d'ellipticité, pour des problèmes variationnels avec contraintes, où les conditions fortes de Legendre ne s'imposent pas.

Si l'on reprend l'exemple 2, en ajoutant des hypothèses d'ellipticité, $\bar{L}(h)$ est de fredholm, on en déduit que $\bar{L}'(h) = \bar{\tau}' \circ \bar{L}(h) \circ \bar{\tau}$ est de fredholm puisque $\bar{\tau}'$ et $\bar{\tau}$ sont de fredholm ($\hat{K}$ étant de codimension finie dans $H^1(B,E)$.

CHAPITRE VI

CALCUL DIFFERENTIEL SUR LES COUPLES EN DUALITE.

Ⓐ *Catégorie des couples en dualité* C.

1) *Catégorie additive.*

On désignera par C la catégorie dont les objets et les morphismes sont définis de la manière suivante :

Les objets de C : sont les couples d'espaces de banach sur $\mathbb{R}$, en dualité par une forme bilinéaire non dégénérée : on notera (F,F',Φ) un tel objet :

$$\Phi : F' \times F \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Nous noterons ϕ et ϕ' les inclusions canoniques définies à partir de Φ :

$$\phi : F' \to F^* \ ; \quad \phi' : F \to (F')^*.$$

Les morphismes de C : (u,u') sera un morphisme de (F,F',Φ) dans (G,G',Ψ) si $u \in L(F,G)$; $u' \in L(G',F')$, et si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
G' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "\Psi"'] & F' \arrow[d, "\phi"] \\
G^* \arrow[r, "u^*"'] & F^*
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire encore, si $\Phi(u'.,.) = \Psi(.,u.)$

Remarques.

0) Le morphisme u' associé à u est unique.

1) L'objet $(0,0,0)$ est un objet nul de $\mathcal{C}$.

2) Sur $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}((F,F',\Phi),(G,G',\Psi))$ on peut définir une structure d'espace vectoriel.

3) Dans $\mathcal{C}$, il existe des sommes finies et des produits finis.

Donc $\mathcal{C}$ est une catégorie additive.

2) *Existence de Noyau.*

Soit $A = (F,F',\Phi)$, $B = (G,G',\Psi)$ et $(u,u') \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ peut-on, en général, définir le noyau de (u,u') ?

a) recherche de noyau.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr] & & F \arrow[rr, "u"] & & G \\
& L \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, dashed, "f"'] & & & \\
N' \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] & & F' \arrow[dl, dashed, "f^*"] & & G' \arrow[ll, "u'"'] \\
& L^* & & & \\
\Theta & & \Phi & & \Psi
\end{tikzcd}$$

Remarques. Supposons que (N,N',Θ), noyau de (u,u'), existe.

① Alors N est le noyau de u dans la catégorie des espaces de banach sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $f : L \to F$ telle que $u \circ f = 0$, on peut considérer $(L,L^*,\mu) = C$ et $(f,f^*) : C \to (F,F',\bar{\Phi})$

(μ est la dualité canonique sur $L^* \times L$).

On a $(u,u') \circ (f,f^*) = 0$ donc il existe une factorisation unique de (L,L^*,μ) par (N,N',Θ) donc une factorisation unique de f par N donc $N \simeq \ker u$.

② Soit $F'/\overline{\mathrm{Im}\, u'}$ le conoyau de u' dans la catégorie des espaces de banach, comme $\tau' \circ u' = 0$, τ' se factorise par $\mathrm{coker}\, u' = F'/\overline{\mathrm{Im}\, u'}$

$$\begin{tikzcd}
N' & & F' \arrow[ll, "\tau'"'] \arrow[dl, "p"] & & G' \arrow[ll, "u'"'] \\
& \mathrm{coker}\, u' = F'/\overline{\mathrm{Im}\, u'} \arrow[ul, dashed, "s"] & & &
\end{tikzcd}$$

③ Si $\Theta : N' \times N' \to \mathbb{R}$, on doit avoir pour tout $f' \in F'$

$$\Theta(sp(f'),x) = \Theta(\tau'(f'),x) = \Phi(f',\tau x) \qquad f' \in F', \quad x \in N$$

donc si $\forall x \in N \quad \Theta(sp(f'),x) = \Phi(f',\tau x) = 0$, on doit avoir $s(pf') = 0$ soit $p(f') \in \ker s$.

D'autre part, Φ se prolonge en $\bar{\Phi} : (F'/\overline{\mathrm{Im}\, u'} \times \ker u) \to \mathbb{R}$ telle que $\bar{\Phi}(p(f'),x) = \Phi(f',\tau x)$ ceci étant indépendant de f' puisque si $f'' = f' + \lim\limits_{n} u'(g'_n)$

$$\text{alors } \Phi(f',\tau x) = \Phi(f',\tau x) + \lim_{n} \Phi(g'_n, u\tau(x)) = \Phi(f',\tau x)$$

donc on doit avoir $s(p(f')) = 0$ si $\forall x \in \ker u = N \quad \bar{\Phi}(p(f'),x) = 0$

donc $\ker s \supset \{z,\ z \in \mathrm{Coker}\, u' \mid \forall x \in N \quad \bar{\Phi}(z,x) = 0\} = A$.

On est donc naturellement amené à définir N' par $\mathrm{Coker}\, u'/\bar{A} = N'$ et $\Theta : N' \times N \to \mathbb{R}$ par $\Theta(n',x) = \Phi(z,\tau x)$ ou q est la projection canonique de $\mathrm{Coker}\, u'$ sur $\mathrm{Coker}\, u'/\bar{A}$ et $q(z) = n'$.

On vérifie que cette définition est indépendante de z dans $[z] = q(z)$, et que Θ est une forme bilinéaire non dégénérée, continue.

On vérifie alors que le couple (N,N',Θ) est le noyau de (u,u') dans la catégorie des couples en dualité.

Conclusion : C admet des noyaux.

De la même manière, on démontrerait que C admet des conoyaux, cependant C n'est pas une catégorie abélienne.

b) Expressions simples de N' dans certains cas particuliers :

Si $\operatorname{Im} u'$ est fermée dans F' (pour la topologie de banach de F'), alors $N' = \operatorname{coker} u' = F'/_{\operatorname{Im} u'}$; et si $A = 0$.

La condition $A = 0$ est réalisée dans les deux circonstances suivantes :

(i) si $\operatorname{Im} u'$ est faiblement fermée (pour la topologie faible définie par Φ)

(ii) si (u,u') admet un inverse à droite dans la catégorie C : $(u,u') \circ (\sigma,\sigma') = (1_G, 1_{G'})$.

Supposons donc que l'une ou l'autre des hypothèses suivantes soit réalisée : (i) ou (ii).

Alors $\operatorname{Im} u'$ est fermée dans F' muni de la topologie d'espace de banach et $(\ker u, \operatorname{Coker} u', \Theta)$ est un triple d'espaces de Banach en dualité. Il suffit de montrer dans les deux cas que si $\forall x \in \ker u$, $\theta(z,u) = 0$, alors $z = 0$.

1er cas (i) - Soit $z = \tau'(f')$ $f' \in F'$ tel que quel, que soit $x \in \ker u$ $(\Theta'(f'),x) = \phi(f',\tau x) = 0$.

Supposons que $f' \notin \operatorname{Im} u'$, dans puisque $\operatorname{Im} u'$ est fermée pour la topologie faible, il existe une forme linéaire continue sur F' (faible), de la forme $\phi(\ ,x_o) = \ell$ telle que $\ell(f') \neq 0$ et $\ell|_{\operatorname{Im} u'} = 0$.

Donc $\phi(u'(g'),x_o) = 0 = \Psi(g',u(x_o))$ pour tout $g' \in G'$ donc $u(x_o) = 0$ donc $x_o \in \ker u$, et $\phi(f',\tau x_o) \neq 0$ d'où la contradiction.

2ème cas (ii) - Dans ces conditions, $F = \ker u \oplus \sigma(G)$

$$F' = \ker \sigma' \oplus u'(G').$$

Soit $z = \tau'(f')$ tel que, quel que soit $x \in \ker u$,

$\theta(\tau'(f'),x) = \phi(f',\tau x) = 0$

$f' = f'_1 + f'_2$ avec $f'_1 \in \ker \tau'$; $f'_2 \in u'(G')$ $f'_2 = u'(g')$

$$\phi(f'_1,\tau x) = \phi(f',\tau x) - \phi(f'_2,\tau x) = - \phi(u'(g'),\tau x) = \Psi(g',u(\tau x)) = 0$$

donc quel que soit $x \in \ker u$, $\phi(f'_1,\tau x) = 0$

soit maintenant $x \in F$, $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \ker u$; $x_2 \in \sigma(G)$

$x_2 = \sigma(g)$

$$\phi(f'_1,x) = \phi(f'_1,x_2) = \phi(f'_1,\sigma(g)) = \Psi(\sigma'(f'_1),g) = 0$$

donc $\forall\, x \in F$, $\Phi(f'_1,x) = 0$ donc $f'_1 = 0$ donc $f' \in \operatorname{Im} u'$ donc $\tau'(f') = z = 0$.

c) *Etudions maintenant, un exemple où (ii) n'est pas vérifiée.*

Soit E un espace de Banach, X un sous-espace fermé de E

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] & E \arrow[r, "p"] & \operatorname{Coker} i \arrow[l, bend left, "S"] \end{tikzcd}$$

tel que p admette une section S,

$r \geq 2$, $B = \bar{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^N$.

$$F = C^r(B,E) \quad ; \quad F' = C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*)$$

$$G = C^r(\partial B,\text{Coker } i) \quad ; \quad G' = C^{r-1}(\partial B;(\text{Coker } i)^*)$$

$$\begin{array}{rlcl} \phi : & F' \times F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((\ell,k),h & \rightsquigarrow & \displaystyle\int_{\partial B} \ell(x).h(x)dx + \int_{\partial B} k(x).h(x)d\sigma \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} \Psi : & G' \times G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\ell,h) & \rightsquigarrow & \displaystyle\int_{\partial B} \ell(x).h(x)d\sigma. \end{array}$$

Soit u définie de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} C^r(B,E) \arrow[r, "\text{rest}"] \arrow[rr, bend left, "u"] & C^r(\partial B,E) \arrow[r, "\tilde{p}"] & C^r(\partial B,\text{Coker } i) \end{tikzcd}$$

$\ker u = C^r_X(B,E) = \{h \in C^r(B,E) \mid h|_{\partial B}$ soit à valeurs dans $X\}$.

Définissons $u' : C^{r-1}(\partial B,(\text{Coker } i)^*) \to C^{r-2}(\partial B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*)$

par $u'(\ell) = (0,\ell') \quad \ell'(x) = p^*(\ell(x))$.

Dans ces conditions, (u,u') est un morphisme de (F,F',Φ) dans (G,G',Ψ). En effet, si $\ell \in G'$, $h \in F$

$$\Phi(u'(\ell),h) = \int_{\partial B} \ell'(x).h(x)d\sigma = \int_{\partial B} p^*\ell(x).h(x)d = \int_{\partial B} \ell(x).p(h(x))d\sigma$$

$$= \Psi(\ell,u(h)).$$

D'autre part, $\text{Im } u' = \{0\} \times C^{r-1}(\partial B,p^*(\text{Coker } i)^*)$ donc $\text{Im } u'$ est un sous-espace de Banach de F'.

Construisons σ par :

$$\begin{tikzcd} C^r(\partial B,\text{Coker } i) \arrow[r, "\tilde{s}"] \arrow[rr, bend left, "\sigma"] & C^r(\partial B,E) \arrow[r, "e"] & C^r(B,E) \end{tikzcd}$$ e tel que

$$\text{rest} \circ e = id_{C^r(\partial B,E)} .$$

$$u \circ \sigma = (\tilde{p} \circ \text{rest}) \circ (e \circ \tilde{s}) = \tilde{p} \circ \tilde{s} = \widetilde{p \circ s} = id_{C^r(\partial B,\text{Coker } i)} .$$

Définissons σ' par : $\sigma' : C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*) \longrightarrow C^{r-1}(\partial B,(\text{Coker } i)^*)$

telle que $\sigma'(\ell,k) = \tilde{s}^*(k) : x \rightsquigarrow s^*(k(x))$.

On vérifie que $\sigma' \circ u' = 1_{G'}$ en effet :

$$\sigma'(u'(\ell')) = \sigma'(\tilde{p}^*\ell') = \tilde{s}^*(\tilde{p}^*(\ell'))$$
$$= \widetilde{s^* \circ p^*}(\ell') = \ell'.$$

Cependant, le couple (σ,σ') <u>n'est pas</u> un morphisme de (G,G',Ψ) dans (F,F',Φ) (dans la catégorie des espaces de banach en dualité),

En effet, $\phi(f',\sigma f) \neq \Psi(\sigma'(f'),f)$.

<u>Malgré tout</u>, considérons θ défini sur Coker $u' \times \ker u$.

$$\text{Im } u' = \{0\} \times C^{r-1}(\partial B,p^*(\text{Coker } i)^*)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] & E \arrow[l, bend left, "\gamma"] \arrow[r, "p"] & \text{Coker } i \arrow[l, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$ donc par dualité $$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, bend right, "\gamma^*"'] & E^* \arrow[l, "i^*"'] \arrow[r, "s^*"'] & (\text{Coker } i)^* \arrow[l, bend right, "p^*"'] \end{tikzcd}$$

donc $F'/_{\text{Im } u'} \sim C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,X^*)$, et θ est définie par :

$$\theta((\ell,k),h) = \phi((\ell,k),h) = \int_B \ell(x).h(x)dx + \int_{\partial B} k(x).h(x)d\sigma$$

$$\ell \in C^{r-2}(B,E^*) \quad ; \quad k \in C^{r-1}(\partial B,X^*) \quad h \in C^r_X(B,E).$$

Supposons que $\theta((\ell,k),h) = 0$ pour tout $h \in C^r_X(B,E)$. Supposons $\ell \neq 0$, donc il existe $x_o \in \overset{o}{B}$ tel que $\ell(x_o) \in E^* - \{0\}$ donc il existe $H_o \in E$ tel que $\ell(x_o).H_o = \alpha > 0$.

$B \ni x \rightsquigarrow \ell(x).H_o$ est continue sur B, donc il existe U_{x_o} voisinage ouvert de x_o, $U_{x_o} \subset \overset{o}{B}$ tel que $\forall x \in U_{x_o}$, $\ell(x).H_o \geq \frac{\alpha}{2}$.

Soit $W_{x_o} \subset U_{x_o}$, W_{x_o} voisinage relativement compact de x_o tel que $\overline{W}_{x_o} \subset U_{x_o}$ il existe $\psi \in C_o(U_{x_o},R)$ telle que $\psi|_{W_{x_o}} = 1$;

soit $H = \psi\, H_o \in C^r_X(B,E)$

$$\theta((\ell,k),H) = \int_{W_{x_o}} \ell(x).\psi(x).H_o.dx \geq \frac{\alpha}{2}\ \mu(W_{x_o}) \text{ d'où la}$$

contradiction,

donc $\ell = 0$, on démontrerait de même que $k = 0$.

Donc : en utilisant, par ailleurs les résultats généraux du début, θ définit une dualité entre les espaces de banach ker u et coker u', θ est telle que la suite courte suivante,

$$0 \to (\ker u, \operatorname{coker} u') \xrightarrow{(\tau,\tau')} (F,F',\Phi) \xrightarrow{(u,u')} (G,G',\Psi) \to 0$$

soit exacte dans la catégorie C.

3) *Le foncteur* Hom_C *se factorise par la catégorie des espaces de banach.*

a) *Factorisation :*

Soit $A = (F,F',\Phi)$; $B = (G,G',\Psi)$.

$Hom_C(A,B) = \{(u,u')$ tels que le diagramme suivant soit commutatif$\}$.

$$\begin{tikzcd}
F' \arrow[d, "\psi"'] & & G' \arrow[ll, "u'"'] \arrow[d, "\Psi"] \\
F^* & & G^* \arrow[ll, "u^*"]
\end{tikzcd}$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& u \arrow[rr, squiggly] & & u^* \circ \psi = p(u) \\
& L(F,G) \arrow[drr] & & \\
L(A,B) \arrow[ur, "\sigma_1"] \arrow[dr, "\sigma_2"'] & & & L(G',F^*) \\
& L(G',F') \arrow[urr] & & \\
& u' \arrow[rr, squiggly] & & \psi \circ u' = q(u')
\end{tikzcd}$$

donc $(u,u') \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ sisi $p(u) = q(u')$, c'est-à-dire si et seulement si $(u,u') \in$ produit fibré de p et q, ce produit fibré est naturellement muni d'une structure d'espace de banach, nous le noterons $L(A,B)$ donc l'ensemble sous-jacent à $L(A,B)$ est $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$.

b) *Propriétés*.- Soit $A, B, C \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$

* la composition des morphismes, qui définit une application m :

$m : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$, induit une application bilinéaire $\hat{m} : L(A,B) \times L(B,C) \to L(A,C)$.

* pour C fixé $L(.,C) : \mathcal{C}^o \to$ Banach est un foncteur additif

* pour A fixé $L(A,.) : \mathcal{C} \to$ Banach est un foncteur additif

* puisque u' est déterminé uniquement par u, il en résulte que $\sigma_1 : L(A,B) \to L(F,G)$ est une injection.

Ⓑ *Calcul différentiel sur les couples.*

Soient $A = (F,F',\Phi)$; $B = (G,G',\Psi)$ deux objets de $\mathcal{C}$.

Soit $f : \Omega \to F$ où Ω est un ouvert de E.

1) *Définition*.- On dit que f est de classe C^α au sens des couples et l'on note $f \; \mathcal{C}, C^\alpha$, si f est de classe C^1 au sens ordinaire, et si $df : \Omega \to L(F,G)$ se factorise par $L(A,B)$: et si δf est de classe $C^{\alpha-1}$

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[rr, "df"] \arrow[dr, "\delta f"'] & & L(F,G) \\
& L(A,B) \arrow[ur, "\sigma_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Remarque : Si $B = (\mathbb{R},\mathbb{R},\mu)$ μ dualité naturelle, alors $L(A,B) \simeq F'$

donc $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe C^α, si f est différentiable C^1 et si

$$\begin{tikzcd}
df : \Omega \arrow[rr] \arrow[dr, "\delta f"'] & & L(F,\mathbb{R}) = F^* \\
& F' \arrow[ur, "\psi = \sigma_1"'] &
\end{tikzcd}$$

se factorise par F', et si δf est de classe $C^{\alpha-1}$.

2) *Propriétés*.-

Soit $A = (F,F',\Phi)$; $B = (G,G',\Psi)$; $C = (H,H',\gamma)$

a) $f : \overset{F}{\overset{\cup}{\Omega}} \longrightarrow G$ de classe C^α pour les couples

$g : \overset{G}{\overset{\cup}{U}} \longrightarrow H$ de classe C^α pour les couples $U \supset f(V)$.

Alors $g \circ f$ est de classe C^α pour les couples

b) Soit $f : \Omega \to H$ telle que Ω soit un ouvert de $F \times G$.

f est de classe C^α pour les couples si f est de classe C^1 et si $d_1 f : \Omega \to L(F,H)$ et $d_2 f : \Omega \to L(G,H)$ se factorisent respectivement par $L(A,C)$ et $L(B,C)$ par $\delta_1 f$ en $\delta_2 f$, et si $\delta_1 f$ et $\delta_2 f$ sont de classe $C^{\alpha-1}$. (Ceci à cause de l'additivité partielle du foncteur $L : L(A \times B,C) \simeq L(A,C) \times L(B,C)$.

c) Soit $f : \Omega \to G \times H$ où Ω est un ouvert de F. $f = (f_1,f_2)$ f est de classe C, C^α si et seulement si f_1 et f_2 sont de classe C,C^α. (Ceci à cause de l'additivité partielle du foncteur L : $L(A,B \times C) \simeq L(A,B) \times L(A,C)$.

c) Théorème des fonctions implicites.

$$\text{Soit } f : \begin{array}{c} F \\ \cup \\ \Omega \\ \rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} \\ x_o \end{array} \longrightarrow G \qquad \Omega \text{ ouvert de } F.$$

On suppose que f est de classe C^α pour les couples $(\alpha \geq 1)$ et que $\delta f(x_o) = (u_o,u'_o) : (F,F',\Phi) \to (G,G',\Psi)$ admet un inverse à droite (σ_o,σ'_o).

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\tau"] & F \arrow[r, "u_o"] & G \arrow[l, bend left, "\sigma_o"] \end{tikzcd}$$

$N = \ker u_o$.
injection canonique.

$$\begin{tikzcd} N' & F' \arrow[l, "\tau'"'] \arrow[r, bend right, "\sigma'_o"'] & G' \arrow[l, "u'_o"'] \end{tikzcd}$$

On note $\tilde{G} = \sigma_o(u_o(F))$; $\tilde{N} = \tau(N)$ $F = \tilde{N} \oplus \tilde{G}$

$x_o = n_o + y_o$; $f(x_o) = g_o$.

(N,N',Θ) désignera le noyau de (u_o,u'_o) dans la catégorie C.

Théorème : Il existe un voisinage V de (n_o,g_o) dans $N \times G$, un voisinage W de x_o dans Ω et $\psi : V \to W$

$\psi = (\psi_1,\psi_2)$ avec $\psi_1(n,g) = \tau n$ tels que ψ soit de classe C^α pour les couples, $f(\psi(n,g)) = g$ sur V (1)

et $(\psi(n,g),n,g)$ est le seul élément de $W \times V$ vérifiant (1).

Ⓒ *Variétés modelées sur des couples en dualité* :

1) *Définition*.- Un espace topologique X est muni d'un structure de variété de classe C^α (modelée sur les couples, en dualité), s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X, et

$$\text{pour tout } i \in I \begin{cases} \text{un couple en dualité } (E_i,E'_i,\phi_i) \\ \text{et un homéomorphisme } f_i : U_i \to O_i \text{ ouvert de } E_i. \end{cases}$$

On suppose de plus que les "changements de carte" sont de classe C^α pour les couples.

On dira que X est une variété C-différentiable de classe C^α, ou encore X est muni d'une structure différentiable C,C^α.

Conséquence : Un espace topologique X muni d'une structure différentiable C^α pour les couples, est aussi muni d'une structure C^α ordinaire.

Remarque : Sur un espace topologique, il peut y avoir plusieurs structures C-différentiables C^α.

Exemples :

a) Soit $B = \bar{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^N$.

V une variété différentiable simple (modelée sur F,F^*,μ) de classe $C^{r+\alpha}$, avec exponentielle.

Alors $C^r(B,V)$ est une variété de classe C^α modelée sur $(C^r(B,E),\ C^r(B,E^*),\Phi)$ où

$$\Phi : C^r(B,E^*) \times C^r(B,E) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\ell,n) \rightsquigarrow \int_B \ell(x).h(x)dx$$

où E est "un exemplaire" de la fibre de l'espace fibré $\mathbb{E}$ tel que ce diagramme commute

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \supset \infty \arrow[r, "\mathrm{Exp}"] \arrow[d] & TV \times TV \arrow[d, "\pi_1"] \\
TV \arrow[u, bend right, "o"'] \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi"] & TV \arrow[d, "\pi"] \\
V \arrow[r, equal] & V
\end{tikzcd}$$

où ∞ est un voisinage ouvert de la section nulle.

b) On conserve les notations de a) et l'on considère

$$C^r_\Psi(B,V) = \{h \in C^r(B,V) \quad h\big|_{\partial B} = \Psi\}.$$

Alors $C^r_\Psi(B,V)$ est une variété de classe C^α, modelée sur $(C^r_o(B,E),C^r(B,E^*),\Phi)$.

c) On conserve les notations précédentes et on suppose de plus que V est de classe C^∞ (simplement), et que $A \subset V$ est une sous-variété (simple) de classe C^∞.

Soit $C^r_A(B,V) = \{h \in C^r(B,V) \mid h\big|_{\partial B} \in C^r(\partial B,A)$

dans ces conditions, $C^r_A(B,V)$ est une variété de classe C^∞ modelée sur $(C^r_H(B,E),C^{r-1}(\partial B,H^*) \times C^{r-2}(B,E^*),\Psi)$ où H est un facteur direct de E, et où Ψ est définie de la manière suivante :

$$\Psi : C^{r-1}(\partial B,H^*) \times C^{r-2}(B,E^*) \times C^r_H(B,E) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((\ell,k) \;;\; h) \rightsquigarrow \int_{\partial B} \ell(x).h(x)d\sigma + \int_B k(x).h(x)dx.$$

2) *Morphismes de variétés* *C-différentiables* C^α.

a) *Définition* : Soient X, Y deux variétés C-différentiable C^α

Soit $\Omega \subset X$ ouvert de Y

$f : \Omega \to X$ sera C-différentiable C^r $r \leqslant \alpha$

Si $\forall\, y \in \Omega$, il existe une carte locale

$(U_y,\varphi_y,(E_y,E'_y,\Phi_y))$ et une carte locale $(V_x,\Psi_x(G_x,G'_x,\theta_x)$.

On note $x = f(y)$; $A_y = (E_y,E'_y,\Phi_y)$; $B_x = (G_x,G'_x,\theta_x)$

telles que $\tilde{f}_y = \Psi_x \circ f \circ \varphi_y^{-1} : U_y \longrightarrow V_x \subset E_x$ soit de classe C^r pour les couples en dualité.

b) *Composition des morphismes* :

Soient X, Y, Z trois variétés C-différentiables C^α

$$f : \begin{array}{c} Y \\ \cup \\ \Omega \end{array} \longrightarrow X \qquad \text{C-différentiable } C^r \qquad r \leqslant \alpha$$

$$g : \begin{array}{c} Z \\ \cup \\ V \end{array} \longrightarrow \Omega \qquad \text{C-différentiable } C^s \qquad s \leqslant \alpha .$$

Alors $f \circ g$ est C-différentiable $C^{\mathrm{Inf}(s,r)}$.

c) *Submersion*, *Immersion*.

Submersion : On dira que f C-différentiable C^r est une submersion, si $\forall\, y \in \Omega$, $\delta\tilde{f}_y : U_y \longrightarrow L(A_y,B_x)$, est telle que $\delta\tilde{f}_y(\varphi_y(y))$ admette un inverse à droite dans C.

Immersion : On dira que f C-différentiable C^r est une immersion, si $\forall\, y \in \Omega$, $\delta\tilde{f}_y(\varphi_y(y))$ admet un inverse à gauche dans C.

3) *Sous-variétés* C-*différentiables* C^α.

a) *Définition*.- Soit Y et X deux variétés C-différentiable C^α. On dira que Y est une sous-C-variété C^α de X si

(i) l'ensemble sous-jacent à Y est un sous-ensemble de l'ensemble sous-jacent à X, perme-tant de définir une inclusion j.

(ii) si $j : Y \to X$ est C-différentiable C^α.

(iii) si $\forall\, y \in Y$, il existe une carte locale (U_y, ψ_y, A_y) dans Y et une carte locale (V_y, Ψ_y, B_y) dans X telles que :

$$A_y = (E_y, E'_y, \Phi_y) \quad ; \quad B_y = (G_y, G'_y, \theta_y)$$

avec E_y facteur direct dans G_y et $U_y = E_y \cap V_y$.

b) *Construction de sous-variété* C-*différentiable* C^α.

Soit $f : Y \to X$ fonction C différentiable de classe C^r $r \geq 1$ entre deux variétés C-différentiables C^α, $\alpha \geq 1$.

Si $A \subset X$ est une sous-C-variété C de X, et si f est une submersion, alors $f^{-1}(A)$ est une sous-C-variété C^α de Y (sous-C-variété fermée).

Ceci résulte du théorème des fonctions implicites pour les couples.

Cas particulier : Si $a \in X$, $f^{-1}(\{a\})$ est une sous-C-variété fermée de Y, de classe C^α.

Exemples :

① Soit Y une variété C-différentiable, C^α.

G un espace de banach sur $\mathbb{R}$ de dimension finie (donc muni de la structure C-différentiable triviale (G,G^*,μ).

Soit $f : Y \to G$ C-différentiable C^α,

telle que, f soit une submersion au sens ordinaire, alors f est une C-submersion et $f^{-1}(0)$ est une sous-C-variété fermée C^α.

② $Y = C^r(B,E)$ E espace de banach $r \geqslant 2$

Y modelée sur $(C^r(B,E), C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*),\Phi)$

$G = \mathbb{R}$

$$f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h \rightsquigarrow \int_{\partial B} g(x,h(x))d\sigma = f(h) \; ; \text{ où } g : B \times E \to \mathbb{R} \text{ de classe } C^{\alpha+r} \quad \alpha \geqslant 1.$$

Alors f est de classe $C - C^{\alpha+1}$: $\delta f(h) = (\frac{\partial g}{\partial p}(x,h(x)),0)$ si h est tel que $\frac{\partial g}{\partial p}(x,h(x)) \neq 0$, $df(h)$ est surjective donc $f^{-1}(\{0\})$ est une sous-C-variété de Y, de classe $C^{\alpha+1}$, modelée au voisinage de $h_o \in f^{-1}(\{0\})$, sur $\ker(\delta f(h_o))$.

Ⓓ *Fonctions C-différentiables, point critique, hession.*

1) *Fonction C-différentiable* C^r.

Soit X une variété C-différentiable C^α

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, ouvert de X.

On dit que f est C-différentiable C^r $r \leqslant \alpha$, si f possède cette propriété en tant que morphisme de variété C-différentiables C^α ($\mathbb{R}$ étant muni de sa structure C-différentiable C^∞, triviale).

2) *Point critique d'une fonction C-différentiable.*

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, C-différentiable C^r $1 \leq r \leq \alpha$

$\Omega \subset X$: C-variété C^α.

X et $\mathbb{R}$ sont en particulier des variétés ordinaires de classe C^α et f une fonction différentiable au sens ordinaire, de classe C^r.

On dira que $x_o \in \Omega$ est un point critique de f, si $df(x_o) = 0$.

En carte locale (U_{x_o}, ψ_{x_o}), il en résulte que $\delta\tilde{f}_{x_o}(\psi_{x_o}(x_o)) = 0$

$$\delta\tilde{f}_{x_o} : U_{x_o} \rightarrow L(A_{x_o}, \mathbb{R}) = F'_{x_o} \qquad A_{x_o} = (F_{x_o}, F'_{x_o}, \Phi_{x_o}).$$

3) *Hession d'une fonction C-différentiable (en un point critique).*

Soit X une variété C-différentiable de classe $C^{\alpha+1}$ modelée sur le couple (F,F',Φ) ; $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C-différentiable $C^{\alpha+1}$.

Soit $x_o \in X$ en point critique de J ; désignons par J_1 et J_2 deux représentants de J dans des cartes locales (U_1, ψ_1) et (U_2, ψ_2), $h_o = \psi_2(x_o)$

Soit

$$\begin{tikzcd}
U_2 \arrow[d, phantom, "\cup"] & & \\
\theta : U_1 \cap U_2 \arrow[r] \arrow[d, hook] & U_1 \arrow[r, "J_1"] \arrow[d, hook] & \mathbb{R} \\
F & F & \\
F' & F' &
\end{tikzcd}$$

le morphisme de changement de cartes de classe $C\text{-}C^{\alpha+1}$

$J_2 = J_1 \circ \theta$

$$dJ_2(h).H = dJ_1(\theta(h)).(d\theta(h).H) = \Phi(\delta J_1(\theta(h)) \; ; \; d\theta(h).H) =$$

$$= \Phi(d'\theta(h).\delta J_1\theta(h) \; ; \; H)$$

donc $\delta J_2(h) = d'\theta(h).\delta J_1(\theta(h))$.

Dans ces conditions,

$$d\delta J_2(h) = dd'\theta(h).\delta J_1\theta(h)) + d'\theta(h) o d\delta J_1(\theta h) o d\theta(h)$$

$$= dd'\theta(h).\delta J_1(\theta h) + d'\theta(h) o d\delta J_1(\theta h) o d\theta(h)$$

donc $d\delta J_2(h_o) = d'\theta(h_o) \text{ o } d\delta J_1(\theta h_o) \text{ o } d\theta(h_o)$. Dans ces conditions, la forme bilinéaire $H,K \rightsquigarrow \Phi(d\delta J(h_o).H,K)$ est indépendante de la carte locale en h_o, et est appelée hession de J en h_o.

Ⓔ *Propriété des opérateurs symétriques.*

1) *définition*.- Soit $A = (F,F',\Phi) \in \mathrm{Ob}\ C$.

Soit $L \in L(F,F')$

L est défini positif, si $\phi(Lx,x) > 0$ pour $x \neq 0$.

L est symétrique : si $\Phi(Lx,y) = \Phi(Ly,x)$ pour tout $(x,y) \in F^2$.

On note $L \in L_s(F,F')$.

L est un isomorphisme positif défini si $L \in \mathrm{Isom}(F,F')$ et $\Phi(Lx,x) > 0$ si $x \neq 0$.

2) *Théorème*.- Soient L_1 et L_2 appartenant à la même composante connexe dans $\mathrm{Isom}(F,F') \cap L_s(F,F')$. Alors il existe $(u,u') \in \mathrm{Isom}(A,A)$ tel que $L_1 = u' \text{ o } L_2 \text{ o } u$.

3) *Corollaire 1*.- Soient L_1 et L_2 appartenant à la même composante connexe dans $\mathrm{Isom}(F,F') \cap L_s(F,F')$.

Si L_1 est un isomorphisme défini positif, alors L_2 est aussi un isomorphisme défini positif.

4) *Corollaire 2*.- L'ensemble des opérateurs symétriques, isomorphismes définis positifs, est ouvert dans $L(F,F')$.

5) *Corollaire* 3.- Soit L_1 un opérateur symétrique, isomorphisme défini, positif,

L_2 un opérateur symétrique.

Alors $|\Phi(L_2x,x)| \leqslant ||L_2|| \; ||L_1^{-1}|| \Phi(L_1x,x)$.

6) *Corollaire* 3'.- Si L_1 et L_2 sont deux opérateurs isomorphismes définis positifs, alors les normes $N_1(x) = \Phi(L_1x,x)^{1/2}$ et $N_2(x) = \Phi(L_2x,x)^{1/2}$ sont équivalentes.

7) *Corollaire* 4.- Soit Λ un opérateur isomorphisme défini positif, symétrique, M une partie de F, alors l'ensemble

$$\{L, \text{ symétrique tel que } \exists\ \alpha > 0 \quad |\phi(Lx,x)| \geqslant \alpha\ \phi(\Lambda x,x) \quad \text{sur } M\}$$

est un ouvert de $L(F,F')$.

Ⓕ *Etude de certains opérateurs différentiels d'ordre 2.*

Définitions.-

Soit $F = C^r(B,E)$; $F' = C^{r-2}(B,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,E^*)$ $r \geqslant 2$

il existe une dualité Φ entre F et F' définie par :

$$\Phi : F' \times F \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((k,\ell),h) \rightsquigarrow \Phi((k,\ell),h) = \int_B k(x).h(x)dx + \int_{\partial B} \ell(x).h(x)d\sigma.$$

Soit G le sous-espace vectoriel de $L(F,F')$ dont les éléments sont de la forme suivante : si $G \in G$, $H \in F$,

$$G.H = b.H + \sum_{i=1}^{N} b_i \;.\; \frac{\partial H}{\partial x_i} - \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \quad ; \quad c\ H + \sum_{i=1}^{N} c_i \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$G = (G_1,G_2)$

où b, b_i, a_{ij}, appartiennent à $C^{r-2}(B,L(E,E^*))$

c, c_i, ., appartiennent à $C^{r-1}(\partial B,L(E,E^*))$.

Considérons l'application Θ définie de la manière suivante :

$$C^{r-2}(B,L(E,E^*)) \times [C^{r-2}(B,L(E,E^*)]^N \times [C^{r-2}(B,L(E,E^*))]^{N^2} \times C^{r-1}(\partial B,\ ) \times$$

$$\times [C^{r-1}(\partial B,\ )]^N \xrightarrow{\Theta} L(F,F')$$

$$(x,y) = (b \quad , \quad b_i \quad , \quad a_{ij} \quad , \quad c \quad ,$$

$$c_i) \rightsquigarrow \text{opérateur } G \text{ construit à partir de}$$

b, b_i ..... .

Propriétés de Θ.

1) Θ est linéaire, et $\mathrm{Im}\,\Theta = G$.

2) Θ est injective, en effet si $G = \theta(x,y) = 0$, alors $\forall H \in F$, $G(H) = 0$; en particulier, pour $H = H_o \in E$

$$\frac{\partial H_o}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

donc $\forall x \in B$, $b(x).H_o = 0$ et $c(x).H_o = 0$.

Ceci étant vrai pour tout $H_o \in E$, $b = c = 0$.

Soit alors $H = x_j\ H_o$. $\dfrac{\partial H}{\partial x_i} = \delta_{ij}\ H_o \qquad \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} = 0$

donc $G.H = 0$ implique $b_i.H_o = 0$, $c_i.H_o = 0$ donc $b_i = c_i = 0$.

Soit $H = x_\ell x_k\ H_o \qquad \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} = \delta_{\ell i}\ \delta_{kj}\ H_o$

puisque $G.H = 0 = a_{ij}.H_o$ (ceci étant vrai pour tout $H_u \in E$)

alors $a_{ij} = 0$.

3) Θ *est une application continue.*

Θ étant somme d'applications élémentaires de même type, il suffit de faire la démonstration pour une application de ce type

$$(x,y) \rightsquigarrow (H \rightsquigarrow b.H) \ ; \ H \rightsquigarrow c.H)$$

$$[C^{r-2}(B,L(E,E^*))]^P \times [C^{r-1}(B,L(E,E^*)]^{N+1} \to C^{r-2}(B,L(E,E^*) \times C^{r-1}(\partial B,L(E,E^*))$$

$$(x,y) \rightsquigarrow (b,c)$$

est continue.

Considérons alors θ_1 et θ_2 telles que $\theta_1(b,c) = H \rightsquigarrow b.H$

$\theta_2(b,c) = H \rightsquigarrow c.H$

$$(\theta_1,\theta_2) : C^{r-2}(B,L(E,E^*)) \times C^{r-1}(\partial B,L(E,E^*) \longrightarrow L(F,F')$$

soient j_1 et j_2 injections continues telles que

$$C^{r-2}(B,L(E,E^*)) \xrightarrow{j_1} L(C^{r-2}(B,E),C^{r-2}(B,E^*))$$

$$C^{r-1}(\partial B,L(E,E^*)) \xrightarrow{j_2} L(C^{r-1}(\partial B,E),C^{r-1}(\partial B,E^*))$$

soit j l'injection continue de $C^r(B,E)$ dans $C^{r-2}(B,E)$

k la composée des applications suivantes :

$$C^r(B,E) \xrightarrow{i} C^{r-1}(B,E) \xrightarrow{\text{rest}} C^{r-1}(\partial B,E).$$

On a $\theta_1(b,c).H = j_1(b) \circ j(H)$

$\theta_2(b,c).H = j_2(c) \circ k(H)$

donc (θ_1,θ_2) est continue, donc Θ est continue.

4) Θ *est d'image fermée dans* $L(F,F')$.

Soit $(x_n,y_n) \in [C^{r-2}(B,L(E,E^*))]^P \times [C^{r-1}(\partial B,L(E,E^*))]^{N+1}$ telle que $(G_n) = (\Theta(x_n,y_n))$ ait pour limite L dans $L(F,F')$

donc $\lim_n G_{1n} = L_1$; $\lim_n G_{2n} = L_2$.

La suite G_{1n} est de Cauchy dans $L(F,F')$ donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N_o(\varepsilon)$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} n \geq N_o(\varepsilon) \\ m \geq N_o(\varepsilon) \end{array}\right. \Longrightarrow ||G_{1n} - G_{1m}||_{L(F,F'_1)} \leq \varepsilon \qquad F'_1 = C^{r-2}(B,E^*)$$

$$F'_2 = C^{r-1}(\partial B,E^*)$$

donc $n \geq N_o(\varepsilon)$

$$\Longrightarrow \forall H \in F, \quad ||(G_{1n} - G_{1m}).H||_{F'_1} \leq \varepsilon||H||_F$$

$m \geq N_o(\varepsilon)$

<u>En particulier si</u> $H = H_o$.

$$\left.\begin{array}{l} n \geq N_o(\varepsilon) \\ m \geq N_o(\varepsilon) \end{array}\right. \Longrightarrow \quad ||(b_n - b_m).H_o||_{C^{r-2}(B,E^*)} \leq \varepsilon||H_o||_E$$

soit $\forall x \in B \atop 0 \leq|\alpha|\leq r-2$ $\left|\left|D^\alpha(b_n - b_m)(x).H_o\right|\right|_{E^*} \leq \varepsilon||H_o||_E$

soit $n \geq N_o(\varepsilon)$

$$\Longrightarrow \quad \forall x \in B \atop 0\leq|\alpha|\leq r-2 \quad \left|\left|D^\alpha(b_n - b_m)(x)\right|\right|_{L(E,E^*)} \leq \varepsilon .$$

$n \geq N_o(\varepsilon)$

La suite (b_n) est donc de Cauchy dans $C^{r-2}(B,L(E,E^*))$ donc converge vers b. De la même manière, on démontrerait que $c_n \to c$ dans $C^{r-1}(\partial B,L(E,E^*))$. Considérons alors la suite $\Theta(x_n,y_n) - \Theta(b_n,c_n) = (S_{1n},S_{2n})$.

Cette suite converge vers (S_1,S_2) puisque $(\Theta(x_n,y_n))$ converge et que $(b_n) \to b$; $(c_n) \to c$; et Θ continue.

En particulier, la suite (S_{1n}) est de Cauchy dans $L(F,F'_1)$ donc $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ N_o(\varepsilon)$ tel que

$$\begin{array}{l} n \geqslant N_o(\varepsilon) \\ \\ m \geqslant N_o(\varepsilon) \end{array} \Longrightarrow \quad \forall\, H \in C^r(B,E), \quad \|(S_{1n} - S_{1m})H\|_{F'_1} \leqslant \varepsilon \|H\|$$

Soit en prenant $H = x_i\, H_o \qquad \dfrac{\partial H}{\partial x_j} = \delta_{ij}\, H_o$

$$\begin{array}{l} n \geqslant N_o(\varepsilon) \\ \\ m \geqslant N_o(\varepsilon) \end{array} \Longrightarrow \quad \left\|(b_{in} - b_{im}).H_o\right\|_{C^{r-2}(B,E^*)} \leqslant \varepsilon \|H_o\|_E$$

soit

$$\begin{array}{l} n \geqslant N_o(\varepsilon) \\ \\ m \geqslant N_o(\varepsilon) \end{array} \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \forall\, x \in B \\ \forall\, \alpha, |\alpha| \leqslant r-2 \end{array} \quad \|(D^\alpha(b_{in}(x)) - b^\alpha(b_{im})(x)).H_o\| \leqslant \varepsilon \|H_o\|$$

donc

$$\begin{array}{l} n \geqslant N_o(\varepsilon) \\ \\ m \geqslant N_o(\varepsilon) \end{array} \Longrightarrow \quad \left\|b_{in} - b_{im}\right\|_{C^{r-2}(B,E^*)}$$

donc la suite (b_{in}) converge vers b_i dans $C^{r-2}(B,E^*)$; de même on démontrerait que la suite (c_{in}) converge vers c_i dans $C^{r-1}(\partial B,E^*)$.

En considérant ensuite $\Theta(x_n,y_n) - \Theta(b_n,c_n) - \Theta(b_{in},c_{in}) =$ (T_{1n},T_{2n}) et $H = x_i\, x_j\, H_o$, on démontrerait que $\lim\limits_n a_{ij,n} = a_{ij}$ dans $C^{r-2}(B,E^*)$.

Θ est donc d'image fermée et Θ <u>est un isomorphisme sur</u> G.

REFERENCES

[1] ANTOINE P. - *Calcul différentiel pour les couples en dualité,* Publications internes de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées de Lille I.

- *Théorèmes sur les opérateurs symétriques,* Publications internes de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées de Lille I.

- *Théorème de Morse pour les couples en dualité,* (à paraître au B.S.M.B. - Bruxelles).

[2] DENNEMEYER R. - *Surfaces conjuguées pour les problèmes en dimension* $\geqslant 2$, Pacific Jal of Math. 30, 1969 (621-638).

[3] HESTENES M.R. - *Application of the theory of quadratic forms in hilbert spaces, to the calculus of variations,* Pacific Jal of Math., 1, 1951 (page 525,...).

[4] KIMBLE G.W. - *Conditions suffisantes pour des problèmes variationnels,* Pacific Jal of Math., 14, 1964 (1283-1295).