UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à

L'Université des Sciences et Techniques de Lille

pour obtenir

Le Grade de Docteur de 3ème Cycle

par

MICHEL DELECROIX

SUR L'ESTIMATION DES DENSITES MARGINALES ET DE TRANSITION D'UN PROCESSUS STATIONNAIRE ET MELANGEANT

Membres du jury : MM. P. POUZET, Président
D. BOSQ, Rapporteur
Melle S. MARQUET, Examinateur
M. J. GEFFROY, Invité

Soutenue le 15 Janvier 1975

A mes parents,

Nous remercions vivement, Monsieur le Professeur POUZET, qui nous a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, et Mademoiselle le Professeur MARQUET qui a bien voulu faire partie de la commission d'examen.

Nous tenons à exprimer notre respectueuse reconnaissance à Monsieur le Professeur GEFFROY pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à notre travail. Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde gratitude pour avoir bien voulu accepter de faire partie de notre jury.

Nous remercions tout particulièrement Monsieur le Professeur BOSQ qui nous a proposé le sujet de cette thèse, nous a permis d'utiliser certains de ses résultats, a su, surtout, nous initier à la recherche, en ne nous ménageant jamais ni son temps ni ses conseils enrichissants, et sans qui finalement ce travail ne serait.

Nous remercions aussi toute l'équipe des probabilistes et statisticiens de l'Université de Lille, qui a su nous aider de ses remarques et nous entourer de sa sympathie.

Nous remercions enfin, Madame Bérat et Madame Lengaigne pour toute la diligence et le soin dont elles ont fait preuve quant à la réalisation matérielle de cet ouvrage.

PLAN DE L'OUVRAGE.

INTRODUCTION

L'estimation d'une densité de probabilité a été depuis longtemps abordée par deux grandes techniques, la méthode du noyau, celle des fonctions orthogonales. Pour la définition de la méthode du noyau, on pourra voir Parzen (1), pour celle des fonctions orthogonales Bosq (2).

La méthode du noyau a été plus étudiée que la seconde. A partir du travail de Parzen, Loftsgaarden et Quesenberv (3), Murthy (4) (5), Roussas (6) ont obtenu des généralisations qui fournissent des estimateurs de densités multivariées, de densités de fonctions de répartitions, non continues, de densités de fonctions de répartitions attachées à un processus de Markov (loi initiale, loi du couple, densité de transition).

Récemment, M^r Geffroy et Mme Bertrand ont obtenu des conditions nécessaires et suffisantes de convergence de l'estimateur utilisé, dans le cas d'un échantillon.

M^r Bosq a lui même généralisé la méthode des fonctions orthogonales au cas d'un processus stationnaire et mélangeant et obtenu en (7) un estimateur de la loi initiale du processus et de la densité conditionnelle. Dans cette thèse, les résultats de (7) sont entièrement démontrés ; ce travail de rédaction et de mise au point constitue le premier chapitre.

Il a semblé intéressant de chercher ensuite la loi limite de l'estimateur utilisé en (7). Avec la méthode du noyau, Roussas n'a, à notre connaissance, obtenu de loi limite que pour "l'estimateur du p^e quantile de la fonction de répartition de la densité conditionnelle d'un Markov". Dans cette thèse, nous fournissons un théorème limite pour l'estimateur de la loi centrale d'un processus stationnaire et mélangeant. A ce résultat, nous ajouterons un calcul de la vitesse de convergence de l'estimateur, une borne du type "Berry-Esseen". Ceci constituera notre second chapitre, qui s'appuie notamment sur les travaux de W. Philipp (8) (9) (10) (11).

Les problèmes relatifs à l'estimation d'une fonction de répartition non continue (cf. (4) (5) pour la méthode du noyau) et notamment ceux de la construction d'une base orthonormale adaptée (cf. Cambanis (12)), nous ont amené à considérer d'abord l'estimation d'une mesure discrète, estimation non paramétrique. Ce sujet a été peu abordé, nos recherches bibliographiques ne nous ayant fourni des résultats qu'en estimation paramétrique. La méthode ici utilisée, dérivée des fonctions orthogonales, a été de suite généralisée au cas d'un processus stationnaire et mélangeant. Ceci constituera le troisième chapitre de cette thèse.

Pour conclure, nous avons, en appendice, ajouté un chapitre relatif à "un théorème limite relatif à un estimateur de la densité conditionnelle d'un processus stationnaire et mélangeant". Ce résultat nous semble encore relativement imparfait mais constitue en notre esprit une première étape vers le "meilleur" théorème limite possible pour l'estimateur de la densité conditionnelle.

Les deux premiers chapitres de l'ouvrage ont été volontairement très détaillés, puisqu'ils constituent surtout une synthèse et une mise au point de résultats antérieurs. Ainsi, au chapitre II, nous avons retranscrit une démonstration de W. Philipp (8), mais en la révisant entièrement dans le cadre de nos hyptohèses particulières. Par la suite (fin du chap. II, chap. III, appendice), nos résultats ont été démontrés plus brièvement, dans la mesure où ils s'appuient sur des techniques déjà utilisées auparavant.

CHAPITRE I

ESTIMATION DE LA DENSITE D'UN PROCESSUS STATIONNAIRE ET MELANGEANT ESTIMATION DE LA DENSITE CONDITIONNELLE.

A - LES DONNEES DU PROBLEME.-

1 - *Hypothèses générales.*

On considère une suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$. On supposera que la suite (ξ_n) est

1°) strictement stationnaire

2°) φ-mélangeante, notions que nous entendons comme suit :

En accord avec Doob (14) (p. 94), nous appelons "strictement stationnaire" une suite (ξ_n) telle que la distribution des vecteurs aléatoires $(\xi_h, \xi_{h+1}, \dots, \xi_{h+n})$ soit indépendante de h, et donc, pour toute valeur de n, ne dépende que de celle-ci.

En accord avec Billingsley (13) (p. 166) nous appelons "φ-mélangeante" une suite de variables (ξ_n) telle qu'il existe une suite de réels positifs : $\{\varphi(n)\}$ définie pour $n > 0$, vérifiant :

$$\forall\, n,\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, A,\ A \in \mathcal{M}_o^t,\ \forall\, B,\ B \in \mathcal{M}_{t+n}^{\infty} : \left|P(A \cap B) - P(A)\, P(B)\right| \leqslant \varphi(n)\, P(A)$$

où $\mathcal{M}_o^t$ représente la σ-algèbre engendrée par $\xi_o, \xi_1, \dots, \xi_t$ et $\mathcal{M}_{t+n}^{\infty}$ celle qui l'est par les variables $\xi_{t+n}, \xi_{t+n+1}, \dots$

On supposera de plus que $\lim_{n\to\infty} \psi(n) = 0$ et que la suite $\psi(n)$ est non décroissante, ce qui n'ôte rien à la généralité du problème (cf. Billingsley). On posera de même $\psi(0) = 1$, ce qui permet de définir $\psi(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

D'autre part, on supposera que P_o, loi commune des ξ_n, admet, par rapport à μ une densité de Radon-Nikodym, $\frac{dP_o}{d\mu}$ qui appartient à $L^2(\mu)$.

Enfin, nous supposerons que $L^2(\mu)$, muni de sa topologie usuelle, est séparable, (il s'agit d'une hypothèse commode, usuellement vérifiée, mais non indispensable). Nous désignerons par $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(\mu)$.

2 - *Construction de l'estimateur de* $\frac{dP_o}{d\mu}$.

Au sens de la convergence dans $L^2(\mu)$, on peut écrire :

$$\frac{dP_o}{d\mu} = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\, e_i\ , \quad \text{où} \quad a_i = \int e_i \cdot \frac{dP_o}{d\mu} \cdot d\mu\ .$$

Une version $\hat{f}_n^*$ de l'estimateur $\hat{f}_n$ de $\frac{dP_o}{d\mu}$ est alors définie par :

$$\forall\, x,\ x \in E,\ \hat{f}_n^*(x) = \sum_{i=0}^{q(n)} \hat{a}_{in}\, e_i^*(x)$$

où
$$\hat{a}_{in} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e_i^o\,(\xi_j) \quad \text{pour} \quad i \in \{0,\dots,q(n)\}$$

Dans ce qui précède, les e_i^* sont des versions des e_i, les e_i^o des versions fixées de ceux-ci, $q(n)$ est un entier à notre disposition. Nous supposerons désormais que : $\lim_{n\to\infty} q(n) = \infty$.

Nous allons maintenant rappeler et démontrer les théorèmes de convergence obtenus par Bosq (7) pour l'estimateur $\hat{f}_n$. Pour ce faire, nous aurons à utiliser deux lemmes démontrés par Billingsley (13) (p. 170-173) qui traduisent la condition de "ψ-mélangeance" des (ξ_n). Nous les rappelons ci-après :

3 - *Deux lemmes fondamentaux de Billingsley (13).*

On suppose que $(\xi_n)_{n\geq 0}$ est ψ-mélangeante et stationnaire. Les notations restent les mêmes qu'au 1°). On suppose ici que les (ξ_n) sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors :

Lemme 1.- α et β étant deux variables aléatoires réelles mesurables respectivement par rapport aux σ-algèbres M_0^t et M_{t+k}^{∞} $(k\geq 0)$, on a, pour tous réels r et s qui vérifient : $r > 1$, $s > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, $E\{|\alpha|^r\} < \infty$, $E\{|\beta|^s\} < +\infty$, l'inégalité :

$$|E(\alpha\beta) - E(\alpha)\, E(\beta)| \leq 2 \,.\, [\psi(k)]^{1/r} \,.\, [E\{|\alpha|^r\}]^{1/r} \,.\, [E\{|\beta|^s\}]^{1/s}$$

En particulier

* si α et β sont de carrés intégrables :

$$|E(\alpha\beta) - E(\alpha)\, E(\beta)| \leq 2 \sqrt{\psi(k)} \sqrt{E(\alpha^2)} \sqrt{E(\beta^2)}$$

* si $E(|\alpha|) < +\infty$ et $P(|\beta|>C) = 0$:

$$|E(\alpha\beta) - E(\alpha)\, E(\beta)| \leq 2 \,.\, C \,.\, \psi(k) \,.\, E(|\alpha|)$$

* si $|\alpha| \leq C_1$ et $|\beta| \leq C_2$:

$$|E(\alpha\beta) - E(\alpha)\, E(\beta)| \leq 2 \,.\, C_1 \,.\, C_2 \,.\, \psi(k)$$

Lemme 2.- En supposant que $E(\xi_o) = 0$, que $|\xi_o| < C$, que $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)^{1/2} < +\infty$ on a :

$$E(S_n^4) \leq 768 \cdot C^4 \cdot [\sum_{i=0}^{\infty} \varphi(i)^{1/2}]^2 \cdot n^2$$

où

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\xi_i)$$

B - *LES DEUX THEOREMES DE CONVERGENCE DE* $\hat{f}_n^*$.-

1 - *Convergence en moyenne quadratique intégrée.*

La convergence de M.Q.I. (ou convergence du MISE) est par définition (cf. Bosq (2) p. 8) vérifiée si

(1) $$\lim_{n\to\infty} E(\int_E (\hat{f}_n - \frac{dP_o}{d\mu})^2 \, d\mu) = 0 \quad \text{(E désigne l'espérance)}$$

On a alors :

Théorème 1.- . <u>"Si $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi(i)^{1/2} < \infty$ alors la condition</u> (C) : $\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{1}{n} [\sum_{i=0}^{q(n)} e_i^2] \frac{dP_o}{d\mu} \, d\mu = 0$ <u>est suffisante pour que $\hat{f}_n$ converge vers f en M.Q.I.</u>

. <u>Si de plus $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(i)^{1/2} < 1/4$, cette condition est aussi nécessaire.</u>

Démonstration.-

a) Pour vérifier (1) calculons d'abord $\int_E (\hat{f}_n - \frac{dP_o}{d\mu})^2 \, d\mu$

On peut écrire :

$$\int_E (\hat{f}_n - \frac{dP_o}{d\mu})^2 \, d\mu = \int_E [\sum_{i=0}^{q(n)} (\hat{a}_{in} - a_i) \, e_i^*(x) + \sum_{i>q(n)} a_i \, e_i^*(x)]^2 \, d\mu(x) ,$$

et, les (e_i) forment un système orthonormal $\left(\int_E e_i(x)e_j(x)d\mu(x)=\delta_{i,j}\right)$, il vient :

$$\int_E (\hat{f}_n - \frac{dP_o}{d\mu})^2 \, d\mu = \sum_{i=0}^{q(n)} (\hat{a}_{i,n}-a_i)^2 + \sum_{i>q(n)} a_i^2 .$$

Par conséquent (1) équivaut à

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{q(n)} E[(\hat{a}_{in}-a_i)^2] + \sum_{i>q(n)} a_i^2\right) = 0$$

b) Or $q(n) \to \infty$ (et $f \in L^2(\mu)$) .

Donc
$$\int_E f^2 \, d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2$$

et
$$\sum_{i>q(n)} a_i^2 \to 0 ,$$

Finalement (1) équivaut à

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{q(n)} E[(\hat{a}_{in}-a_i)^2]\right) = 0$$

c) Mais $(\hat{a}_{in}-a_i) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} e_i^o(\xi_j) - a_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} (e_i^o(\xi_j) - a_i)$,
et, comme $E(e_i^o(\xi_j)) = \int_E e_i(x) \frac{dP_o}{d\mu} d\mu(x) = a_i$ (th. de transfert), on a, en désignant pour σ^2 la variance et cov. la covariance :

$$E[(\hat{a}_{in}-a_i)^2] = E\{[\frac{1}{n} (\sum_{j=0}^{n-1} (e_i(\xi_j) - a_i))]^2\}$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} \sigma^2[e_i(\xi_j)] + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{j\in\{0,\dots,n-1\} \\ j'\in\{0,\dots,n-1\} \\ j\neq j'}} \mathrm{cov}[e_i(\xi_j),e_i(\xi_{j'})]$$

En inversant les symboles de sommation, il vient :

$$(4)\quad \sum_{i=0}^{q(n)} E\left[(\hat{a}_{in}-a_i)^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\sum_{i=0}^{q(n)} \sigma^2\left[e_i(\xi_j)\right]\Big)$$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{j\in\{0,\dots,n-1\}\\ j'\in\{0,\dots,n-1\}\\ j\neq j'}}\Big(\sum_{i=0}^{q(n)} \operatorname{cov}\left[e_i(\xi_j),\ e_i(\xi_{j'})\right]\Big)$$

d) Nous allons majorer les deux termes de cette somme ; et conclure

* D'après 4) tous les (ξ_i) ont même loi, donc

$$A = \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\sum_{i=0}^{q(n)} \sigma^2(e_i(\xi_j))\Big) = \frac{1}{n^2}\Big[n\Big(\sum_{i=0}^{q(n)}(\sigma^2(e_i(\xi_o))\Big]\Big) = \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=0}^{q(n)}\sigma^2(e_i(\xi_o))\Big)$$

$$= \frac{1}{n}\Big[\sum_{i=0}^{q(n)}(E(e_i^2(\xi_o)) - a_i^2)\Big]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{q(n)} E(e_i^2(\xi_o)) - \frac{\sum_{i=0}^{q(n)} a_i^2}{n}$$

* Puisque $\dfrac{dP_o}{d\mu}\in L^2(\mu)$, $\dfrac{\sum_{i=0}^{q(n)} a_i^2}{n} \leqslant \dfrac{\int_E \left(\frac{dP_o}{d\mu}\right)^2 d\mu}{n} \leqslant \dfrac{K}{n}$

et $\dfrac{\sum_{i=0}^{q(n)} a_i^2}{n} \to 0$ si $n\to\infty$

* $$B = \sum_{\substack{j\in\{0,\dots,n-1\}\\ j'\in\{0,\dots,n-1\}\\ j\neq j'}}\Big(\sum_{i=0}^{q(n)}\operatorname{cov}\left[e_i(\xi_j),\ e_i(\xi_{j'})\right]\Big) =$$

$$\sum_{i=0}^{q(n)}\Big[2\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{j'=j+1}^{n-1}\operatorname{cov}\left[e_i(\xi_j),e_i(\xi_{j'})\right]\Big]$$

Mais d'après le lemme 1)

$$|\operatorname{cov}[e_i(\xi_j),\ e_i(\xi_{j'})]| \leq 2\ \sqrt{\varphi(j'-j)}\ \sqrt{E(e_i^2(\xi_j)}\ \ \sqrt{E(e_i^2(\xi_{j'})} \leq 2\ \sqrt{\varphi(j'-j)}\ E(e_i^2(\xi_o))$$

(tous les ξ_i ont même loi).

d'où
$$|B| \leq 4 \sum_{i=0}^{q(n)} \Big[\sum_{j=0}^{n-1} \Big(\sum_{j'=j+1}^{n-1} \sqrt{\varphi(j'-j)}\ E(e_i^2(\xi_o))\Big]$$

$$\leq 4 \sum_{i=0}^{q(n)} \Big[\sum_{j=0}^{n-1} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\varphi(i)}\Big)\ E(e_i^2(\xi_o))\Big]$$

$$\leq 4\ n\ .\ \Big[\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\varphi(i)}\Big] \sum_{i=0}^{q(n)} E(e_i^2(\xi_o))$$

* En conclusion, puisque $|A| - |B| \leq \sum_{i=0}^{q(n)} E(\hat{a}_{in}-a_i)^2 \leq |A| + |B|$ et que $|A| = A$ il vient :

$$(5)\quad \Big[1-4\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\varphi(i)}\Big)\Big] \Big(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{q(n)} E(e_i^2(\xi_o))\Big) - \frac{\sum_{i=0}^{q(n)} a_i^2}{n} \leq \sum_{i=0}^{q(n)} E(\hat{a}_{in}-a_i)^2$$

$$\leq \Big[1+4\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\varphi(i)}\Big)\Big] \Big(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{q(n)} E(e_i^2(\xi_o))\Big) - \frac{\sum_{i=0}^{q(n)} a_i^2}{n}$$

Or :

- $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{q(n)} a_i^2 \to 0$ si $n \to \infty$

- $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{q(n)} E(e_i^2(\xi_o)) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{q(n)} \int_E e_i^2 \frac{dP_o}{d\mu}\, d\mu = \int_E \frac{1}{n} \Big(\sum_{i=0}^{q(n)} e_i^2\Big) \frac{dP_o}{d\mu}\, d\mu$

- $\displaystyle \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\varphi(i)} < +\infty$.

Donc d'après (5)

$$\begin{cases} * \ \text{(3) est vérifiée sous la condition (C) (inégalité de droite)} \\ * \ \text{Lorsque } \left(1-4\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\psi(i)}\right)\right) > 0 \ \text{ c'est-à-dire } \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\psi(i)} < \frac{1}{4} \end{cases}$$

(3) n'est vérifiée qu'à cette condition (inégalité de gauche).

D'où le théorème de convergence en M.Q.I....

2 - *Corollaire*.- Il s'appuie sur le résultat suivant de Doob (14) (p. 190 et suivantes).

Lemme 3.- Si (ξ_n) est un processus de Markov à valeurs réelles. Si (ξ_n) vérifie de plus la condition de Doeblin, est apériodique, possède une classe ergodique.

Alors (ξ_n) est une suite ψ-mélangeante avec $\psi(n) = a\,\rho^n \ \{\rho \in [0,1[\quad a \in \mathbb{R}^+\}$.

Dès lors $\sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\psi(i)} < +\infty$ et comme

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\psi(i)} = a^{1/2} \frac{\rho^{1/2}}{1-\rho^{1/2}}$$

on a $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\psi(i)} < \frac{1}{4}$ si $\frac{\rho^{1/2}\,a^{1/2}}{1-\rho^{1/2}} < \frac{1}{4}$, soit $\rho < \frac{1}{(1+4a^{1/2})^2}$

D'où :

Corollaire 1.- Sous les conditions du lemme (4), la condition (C) est suffisante pour la convergence en M.Q.I. de $\hat{f}_n$ vers f.

Si de plus $\rho < \frac{1}{(1+4a^{1/2})^2}$, elle est nécessaire :

3 - *Remarque.-* Rappelons tout d'abord que Bosq (2) (p. 47-48) a donné des conditions sur les (e_i), et f, qui permettent d'obtenir la condition (C).

En particulier si μ est la mesure de Lebesgue sur $[0,2\pi]$ ($E=\mathbb{R}$), et les (e_i) les fonctions trigonométriques, on a (cf. corollaire 6 p. 48 de (2))

$$\frac{q(n)-1}{2\pi} < \sum_{i=0}^{q(n)} e_i^2(x) \leq \frac{q(n)+1}{2\pi} \quad \forall\, x\ ,\ x \in E\ ,\ \forall\, q(n) \in \mathbb{N}$$

donc $\int_E \frac{1}{n} [\sum_{i=0}^{q(n)} e_i^2] \frac{dP_o}{d\mu} d\mu$ est de l'ordre de $\frac{q(n)}{n}$.

La formule (5) (dem. du théorème 1) donne, pour n assez grand, en ajoutant $\sum_{i>q(n)} a_i^2$ aux trois membres, la majoration suivante

$$E(\int_E (\hat{f}_n - \frac{dP_o}{d\mu})^2 d\mu) \leq [1 + 4(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\phi(i)})] (\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{q(n)} E(e_i^2(\xi_o))) - \frac{n+1}{n} \sum_{i=0}^{q(n)} a_i^2 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2$$

Dans le cas précis où les e_i sont les fonctions trigonométriques sur $[0,2\pi]$, on a donc une majoration du MISE par :

$$A\, \frac{q(n)}{n} - \frac{n+1}{n} \sum_{i=0}^{q(n)} a_i^2 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2$$

De façon générale, on voit que la vitesse de convergence du MISE vers 0 dépend de l'ordre de grandeur des coefficients a_k (et bien sur du choix de $q(n)$).

En particulier Bosq a montré (cf. (2) p. 51) que si $|a_k| = O(\frac{1}{k^r})$, $r > \frac{1}{2}$, en prenant $q(n) = O(n^{1/2r})$, le MISE se majorant par

$$K(\frac{1}{n^{2r-1/2r}})$$

Cela donne une idée précise de la vitesse de convergence.

4 - *Théorème de convergence uniforme presque sûre*.- Nous effectuerons d'abord quelques hypothèses supplémentaires : pour ce paragraphe $(E,\mathcal{B})$ sera un espace topologique muni de sa tribu borélienne, $\frac{dP_o}{d\mu}$ admettra une version continue unique notée f. De plus, on supposera qu'il existe une suite (e_i^*) de versions continues des e_i que $a_i = \int f\, e_i^*\, d\mu$ comme précédemment, et on pose $f_n = \sum_{i=0}^{q(n)} a_i\, e_i^*$.

Théorème 2.- Si l'on suppose que, outre l'hypothèse de départ,

1) $\sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\vartheta(i)} < +\infty$

2) $M = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{x\in E} |e_i^*(x)| < +\infty$

3) La série $\sum_{i=0}^{\infty} a_i\, e_i^*$ converge uniformément vers f.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(n)^5}{n^2} < +\infty$

On a :

$$\lim_{n\to\infty} \text{p.s.} \sup_{x\in E} |\hat{f}_n^*(x) - f(x)| = 0$$

Démonstration.-

a) Nous avons déjà vu (th. 1 démonstration) que

$$\sup_{x\in E} |f_n^*(x)-f(x)| = \sup_{x\in E} |\sum_{i=0}^{q(n)} (\hat{a}_{in}-a_i)\ e_i^*(x) + \sum_{i>q(n)} a_i\ e_i^*(x)|$$

d'où $$\sup_{x\in E} |f_n^*(x)-f(x)| \leq \sup_{x\in E} |\sum_{i=0}^{q(n)} (\hat{a}_{in}-a_i)\ e_i^*(x)| + \sup_{x\in E} |\sum_{i>q(n)} a_i\ e_i^*(x)|$$

Or l'hypothèse 3) permet d'écrire que $(\sup_{x\in E} |\sum_{i>q(n)} a_i\ e_i^*(x)|) \to 0$, sûrement, comme reste d'une série convergente, puisque $q(n) \to \infty$.

La démonstration revient donc à montrer que

$$\sup_{x\in E} |\sum_{i=0}^{q(n)} (\hat{a}_{in}-a_i)\ e_i^*(x)| \xrightarrow[\text{p.s.}]{} 0$$

b) Mais d'après l'hypothèse 2 on a :

$$\sup_{x\in E} |\sum_{i=0}^{q(n)} (\hat{a}_{in}-a_i)\ e_i^*(x)| \leq M \cdot \sum_{i=0}^{q(n)} |\hat{a}_{in}-a_i|$$

Dès lors

$$P\{\sup_{x\in E} |\sum_{i=0}^{q(n)} (\hat{a}_{in}-a_i)\ e_i^*(x)| > \varepsilon) \leq P\{\sum_{i=0}^{q(n)} |\hat{a}_{in}-a_i| > \frac{\varepsilon}{M}\}$$

Mais $$\{\sum_{i=0}^{q(n)} |\hat{a}_{in}-a_i| > \frac{\varepsilon}{M}\} \subset \bigcup_{i=0}^{q(n)} \{|\hat{a}_{in}-a_i| > \frac{\varepsilon}{M[q(n)+1]}\}$$

d'où finalement (6) : $P\{\sup_{x\in E} |\sum_{i=0}^{q(n)} (\hat{a}_{in}-a_i)\ e_i^*(x)|>\varepsilon\} \leqslant \sum_{i=0}^{q(n)} P\{|\hat{a}_{in}-a_i|>\frac{\varepsilon}{M[q(n)+1]}\}$

c) Pour majorer $P\{|\hat{a}_{in}-a_i| > \frac{\varepsilon}{M[q(n)+1]}\}$ on utilise le lemme 2 en remarquant d'abord que

$$P\{|\hat{a}_{in}-a_i| > \frac{\varepsilon}{M[q(n)+1]}\} \leqslant \frac{E(|\hat{a}_{in}-a_i|^4)}{\varepsilon^4/M^4[q(n)+1]^4} \quad \text{(Inégalité de Tchebychef)}$$

Or * $\hat{a}_{in}-a_i = \sum_{j=0}^{n-1} (\frac{e_i(\xi_j) - a_i}{n})$

* $E[|\hat{a}_{in}-a_i|^4] \leqslant 768 \ .\ n^2\ C^4\ [\sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\varphi(i)}]$ où $|\frac{e_i(\xi_o) - a_i}{n}| < C \quad \forall j$, d'après le lemme 2.

* Ici évidemment

$$|\frac{e_i(\xi_o) - a_i}{n}| \leqslant \frac{2M}{n}, \text{ car } |a_i| \leqslant |\int e_i^*\ f\ d\mu| \leqslant M \int f\ d\mu \leqslant M$$

* Finalement : $P\{|\hat{a}_{in}-a_i| > \frac{\varepsilon}{M[q(n)+1]}\} = 0(\frac{n^2(\frac{2M}{n})^4}{\varepsilon^4/[1+q(n)]^4})$

$$= 0(\frac{q(n)^4}{n^2})$$

et d'après (6) : $P\{\sup_{x\in E} |\sum_{i=0}^{q(n)} (\hat{a}_{in}-a_i)\ e_i^*(x)| > \varepsilon\} = 0(\frac{q(n)^5}{n^2})$

d) D'après le lemme de Borel Cantelli la convergence p.s. désirée sera obtenue si $(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q(n)^5}{n^2}) < + \infty$ C.Q.F.D.

C - <u>*DEFINITION D'UN ESTIMATEUR STRICT*</u>.-

- L'estimateur $\hat{f}_n^*$ précédemment défini n'est pas strict, (cf. Bosq (2) (p. 4)). Ceci signifie concrètement que pour certaines valeurs de $\xi_o,\dots,\xi_n$ la fonction $\hat{f}_n^*$ obtenue ne définit pas une densité de proba soit parce que $\hat{f}_n^*$ n'est pas positive, soit parce que $\int_E \hat{f}_n^* \, d\mu$ ne vaut pas 1

- Pour résoudre le problème, on peut prendre comme estimateur de f :

$$\hat{g}_n = \frac{\sup(0,\hat{f}_n^*)}{T_n} I_{[T_n>0]} + \frac{1}{\mu(E)} I_{[T_n=0]} ,$$

à condition que μ soit bornée. Ici, T_n représente :

$$T_n = \int_E \sup(0,\hat{f}_n^*) \, d\mu$$

- On a alors évidemment résolu les 2 problèmes :

$$\begin{cases} \cdot\ \hat{g}_n \text{ est une fonction positive} \\ \cdot\ \int_E \hat{g}_n \, d\mu = 1 \quad (\text{que } T_n \text{ vaille } 0 \text{ non non}) \end{cases}$$

Nous allons voir maintenant que $\hat{g}_n$ est encore un estimateur convergent de f. Pour cela on démontre d'abord.

<u>*Lemme*</u> *4*.- $\lim_{\text{p.s.}} T_n = 1$ (μ est bornée)

Démonstration.-

- Posons $\hat{f}_n^+ = \sup(0, \hat{f}_n)$ alors

$$\begin{cases} * \text{ si } \hat{f}_n \geq 0 & |\hat{f}_n^+ - f| = |\hat{f}_n - f| \\ * \text{ si } \hat{f}_n < 0 & |\hat{f}_n^+ - f| = f \leq |f - \hat{f}_n| \end{cases}$$

d'où
$$\sup_{x\in E} |\hat{f}_n^+(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in E} |\hat{f}_n(x) - f(x)|$$

Il vient, d'après le th. 2, $\sup_{x\in E} |\hat{f}_n^+(x) - f(x)| \xrightarrow[p.s.]{} 0$

- Pour conclure on remarque que :

$$\left| \int_E \hat{f}_n^+ \, d\mu - \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |\hat{f}_n^+ - f| \, d\mu \leq (\sup_{x\in E} |\hat{f}_n^+(x) - f(x)|) \cdot \mu(E)$$

d'où la convergence souhaitée, comme $\mu(E) < +\infty$, puisque :

$$\int_E \hat{f}_n^+ \, d\mu = T_n \quad \text{et} \quad \int_E f \, d\mu = 1$$

Théorème 3.- Si μ et f sont bornées, on a :

$$\lim_{\substack{p.s. \\ n\to\infty}} (\sup_{x\in E} |\hat{g}_n(x) - f(x)|) = 0$$

Démonstration.- D'après ce qui précède il existe dans (Ω, A, P) un sous-ensemble Ω_o tel que pour tout ω' de Ω_o on ait, en notant $\hat{f}_{n,\omega'}$, $\hat{f}^+_{n,\omega'}$ etc... les estimations de f obtenues à partir de

$$\xi_o(\omega'), \xi_1(\omega'), \ldots, \xi_{n-1}(\omega') :$$

$$\sup_{x\in E} |\hat{f}_{n,\omega'}(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{et} \quad \int_E \hat{f}^+_{n,\omega'}(x)\, d\mu(x) \to 1$$

avec $P(\Omega_o) = 1$

- Soit alors $\omega' \in \Omega_o$ ....

* Pour n assez grand on a $\int_E \hat{f}_{n,\omega'}(x)\, d\mu(x) > \frac{1}{2}$.

* Donc on a :

$$\sup_{x\in E} |\hat{g}_{n,\omega'}(x)-f(x)| = \sup_{x\in E} \left| \frac{\hat{f}^+_{n,\omega'}(x)}{\int_E \hat{f}^+_{n,\omega'}(x)d\mu(x)} - f(x) \right|$$

$$= \frac{1}{\int_E \hat{f}^+_{n,\omega'}(x)d\mu(x)} \left[\sup_{x\in E} \left|\hat{f}^+_{n,\omega'}(x)-f(x)\int_E \hat{f}^+_{n,\omega'}(x)d\mu(x)\right|\right]$$

$$\leq 2\{\sup_{x\in E} |\hat{f}^+_{n,\omega'}(x)-f(x)| + \sup_{x\in E}|f(x)|\,|(1-\int_E \hat{f}_{n,\omega'}(x)d\mu(x)|)\}$$

Finalement :

$$\sup_{x\in E} |\hat{g}_{n,\omega'}(x)-f(x)| \leq 2 \sup_{x\in E} |\hat{f}^+_{n,\omega'}(x)-f(x)| + 2 \sup_{x\in E} (|f(x)|)(|1-T_{n,\omega'}|)$$

Or nous savons que ω' est tel que $\begin{cases} T_{n,\omega'} \to 1 \\ \sup_{x\in E} |\hat{f}_{n,\omega'}(x)-f(x)| \to 0 \end{cases}$

Il vient, si f est bornée : $\forall\omega' \in \Omega_o$:

$$\sup_{x\in E} |\hat{g}_{n,\omega'}(x) - f(x)| \to 0$$

donc $\sup_{x\in E} |\hat{g}_n(x)-f(x)| \xrightarrow[p.s.]{} 0$ C.Q.F.D.

On peut enfin remarquer que si on avait remplacé $\frac{1}{\mu(E)}$ par $\frac{1}{\alpha}$ (α quelconque) on obtenait un estimateur $\hat{g}'_n$, non pas strict mais presque sûrement strict puisque

$$\begin{cases} * \quad g'_n \text{ est toujours positive} \\ * \quad \int \hat{g}'_n = 1 \quad \text{sauf lorsque } T_n = 0 \quad (\text{auquel cas l'intégrale vaut } \frac{1}{\alpha}) \\ * \quad \lim_{n\to\infty} \text{p.s. } T_n = 1 \quad \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle.} \end{cases}$$

Mais de toutes façons, nous avons utilisé l'hypothèse "μ bornée" pour démontrer que $\lim_{\text{p.s.}} T_n = 1$, donc on peut prendre $\alpha = \mu(E)$.

- Pour terminer donnons un corollaire du th. 3 :

Corollaire 2.- Sous les hypothèses du théorème 3 :

$$\lim_{n\to\infty} \text{p.s.} \sup_{B\in\mathcal{B}} |\hat{P}_n(B) - P_o(B)| = 0 \quad ;$$

où $\hat{P}_n$ est la loi de densité $\hat{g}_n$.

Démonstration.-

- On a :
$$\sup_{B\in\mathcal{B}} |\hat{P}_n(B)-P_o(B)| = \sup_{B\in\mathcal{B}} \left|\int_B \hat{g}_n(x)\, d\mu(x) - \int_B f(x)\, d\mu(x)\right|$$
$$\leq \sup_{B\in\mathcal{B}} \int_B |\hat{g}_n(x)-f(x)|\, d\mu(x)$$
$$\leq \int_E |\hat{g}_n(x)-f(x)|\, d\mu(x)$$
$$\leq \mu(E) \,.\, \sup_{x\in E} |\hat{g}_n(x) - f(x)|$$

- On achève alors comme au lemme 4.

D - ESTIMATION DE LA DENSITE CONDITIONNELLE.-

On supposera dans ce paragraphe que, outre les hypothèses requises pour le théorème 2, on a $E = \mathbb{R}^p$, et μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$. De plus, on supposera que Q_o, la loi du couple (ξ_o,ξ_1), est absolument continue par rapport à $\mu \otimes \mu$, et admet une version h continue et bornée de sa densité par rapport à $\mu \otimes \mu$, densité qui appartient à $L^2(\mu \otimes \mu)$.

On a alors :

Lemme 5.- <u>La suite</u> $h_n = (\xi_n, \xi_{n+1})$ <u>est strictement stationnaire et</u> φ'-<u>mélangeante avec</u> $\varphi'(n) \leq \varphi(n-1)$

Démonstration.-

- Les h_n sont une suite d'applications de (Ω,A,P) dans R^{2p}. Les tribus engendrées par $(h_o,\dots,h_n)$ et $(h_{n+k}, h_{n+k+1},\dots)$ sont les tribus engendrées par $(\xi_o,\dots,\xi_{n+1})$ et $(\xi_{n+k},\xi_{n+k+1},\dots,)$ d'où le résultat (suite h_n φ'-mélangeante d'après l'hypothèse générale faite sur les ξ_i).

- Les (h_n) forment une suite stationnaire car la loi de

$$(h_n, h_{n+1} ,\dots, h_{n+k})$$

comme celle de $(\xi_n,\dots,\xi_{n+k+1})$ ne dépend que de k.

On voit donc que les hypothèses du th. 2 sont réunies pour les h_n. Comme $\{e_i, e_j\}_{\substack{i\in I\\ j\in I}}$ forme une base de $L^2(\mu \otimes \mu)$, si $\{e_i\}_{i\in I}$ en est une de $L^2(\mu)$, on obtient un estimateur $\hat{h}_n$ de h en posant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \quad \hat{h}_n(x,y) = \sum_{\substack{0\leq i\leq q_1(n)\\ 0\leq j\leq q_2(n)}} \hat{a}_{ijn}\, e_i^*(x)\, e_j^*(y)$$

où $\hat{a}_{ijn} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (e_i^* \,.\, e_j^*) \circ (h_k)$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (e_i^* \circ \xi_k) \,.\, (e_j^* \circ \xi_{k+1})$$

- L'estimateur de $h_{|f}$ sera alors définie par $\hat{h}^*_n{}_{|\hat{f}^*_n}$ chaque fois que cette quantité existe (sinon on lui donne une valeur arbitraire). On obtient le :

<u>*Théorème*</u> *4*.- Si l'on ajoute aux hypothèses du théorème 2, les conditions

* La série $\sum_{i,j=0}^{\infty} \left[\int h\, e_i^*\, e_j^*\, d(\mu \otimes \mu)\right] e_i^*\, e_j^*$ converge uniformément vers f.

* $q_1(n) \to \infty$, $q_2(n) \to \infty$

* $\sum_{n=1}^{\infty} q_1(n)^5\, q_2(n)^5/n^2 < +\infty$, on a :

$$\lim_{\text{p.s.}} \sup_{(x,y)\in K\times\mathbb{R}^p} \left| \frac{\hat{h}^*_n(x,y)}{\hat{f}_n(x)} - \frac{h(x,y)}{f(x)} \right| = 0$$

pour tout compact K de $\mathbb{R}^p$ sur lequel $f(x) > 0$.

Démonstration.-

- Les hypothèses "rajoutées" sont, pour h_n, les conditions nécessaires à la convergence p.s. de $\sup_{x,y \in \mathbb{R}^{2p}} |\hat{h}_n(x,y)-h(x,y)|$ vers 0, d'après le th. 2, puisqu'ici $a_{ij} = \int h\, e_i^* e_j^*$.

- Sous les hypothèses des th. 2 et 4 on a donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \text{p.s.} \sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2p}} |\hat{h}_n^*(x,y) - h(x,y)| = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \text{p.s.} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^p} |\hat{f}_n^*(x) - f(x)| = 0 \end{cases}$$

- Soit alors K un compact de $\mathbb{R}^p$ sur lequel f est positive. f y est donc minorée par un nombre strictement positif m

- Or : $$\left|\frac{\hat{h}_n^*(x,y)}{\hat{f}_n^*(x)} - \frac{h(x,y)}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x)\ .\ \hat{h}_n^*(x,y) - \hat{f}_n^*(x)\ .\ h(x,y)}{\hat{f}_n^*(x)\ f(x)}\right|$$

$$= \left|\frac{f(x).\hat{h}_n^*(x,y)-\hat{f}_n^*(x)\hat{h}_n^*(x,y)+f_n^*(x)\hat{h}_n^*(x,y)-\hat{f}_n^*(x)h(x,y)}{\hat{f}_n^*(x)\ f(x)}\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{\hat{h}_n^*(x,y) - h(x,y)}{f(x)}\right| + \left|\frac{\hat{h}_n^*(x,y)\ .\ (f_n(x) - \hat{f}_n^*(x))}{\hat{f}_n^*(x) \times f(x)}\right|$$

- Finalement il existe un ensemble Ω_o de mesure nulle dans Ω tel que, en appelant $\hat{f}_{n,\omega'}^*$ et $\hat{h}_{n,\omega'}^*$ les estimations de f et h obtenues à partir de $\xi_o(\omega')$, ..., $\xi_{n-1}(\omega')$, on ait :

$$\forall\omega',\ \omega' \in \Omega_o \ \exists\ N(\omega'),\quad n \geqslant N(\omega') \Longrightarrow \forall x,\ x \in K,$$

$$|f(x)| - |\hat{f}_{n,\omega'}^*(x)| < |\hat{f}_{n,\omega'}^*(x) - f(x)| < \frac{m}{2}.$$

d'où $\qquad n \geq N(\omega') \Longrightarrow \forall\, x,\ x \in K \quad |\hat{f}^*_{n,\omega'}(x)| > \frac{m}{2}$.

d'où $\qquad n \geq N(\omega') \Longrightarrow \forall\, (x,y),\ (x,y) \in K \times \mathbb{R}^p$

$$\left|\frac{\hat{h}^*_{n,\omega'}(x,y)}{\hat{f}^*_{n,\omega'}(x)} - \frac{h(x,y)}{f(x)}\right| \leq A\{|\hat{h}^*_{n,\omega'}(x,y) - h(x,y)| + |\hat{h}^*_{n,\omega'}(x,y)|\ |\hat{f}^*_{n,\omega'}(x) - f(x)|\}$$

$$\leq A'\{|\hat{h}^*_{n,\omega'}(x,y) - h(x,y)| + |\hat{f}^*_{n,\omega'}(x) - f(x)|\}$$

puisque $\hat{h}_n$ est bornée sur $\mathbb{R}^{2p}$.

Ceci achève la démonstration.

CHAPITRE II

LOI LIMITE DE L'ESTIMATEUR DE LA DENSITE.

VITESSE DE CONVERGENCE.

A - FORMULATION DU PROBLEME (LOI LIMITE DE $\hat{f}_n$).-

- On reprend toutes les notations et hypothèses faites avant l'énoncé du théorème 2 du chapitre I. Le problème posé est le suivant :

" Soit $x \in E$, il s'agit de trouver la loi limite de $\hat{f}_n(x)$ "

- Nous éliminons d'abord le cas où $\sigma(\hat{f}_n^*(x)) \equiv 0$ pour des n assez grands. Ceci signifie que $\exists (n_i)$: $f^*_{n_i}(x) \xrightarrow{p.s.} f_{n_i}(x)$. ($n_i$ suite extraite).

On peut alors construire un estimateur $\hat{g}_n(x)$ de $f(x)$ tel que $\hat{g}_n(x) \underset{p.s.}{=} f_n(x)$ pour n assez grand. On démontre aisément que ceci est impossible. (*)

Nous supposerons donc que pour n assez grand :

$$S_n = \frac{\hat{f}_n^*(x) - f_n(x)}{\sigma(\hat{f}_n^*(x))} \qquad \text{est définie}$$

En remarquant au départ que $E(\hat{f}_n^*(x)) = f_n(x)$, on voit que S_n est centrée et réduite. On rappelle que

$$\hat{f}_n^*(x) = \sum_{i=0}^{q(n)} \hat{a}_{i,n}\, e_i^*(x) \quad \text{et} \quad f_n(x) = \sum_{i=0}^{q(n)} a_i\, e_i^*(x)$$

(*) Dans le cas le plus général, il ne s'agit en fait pas d'une "imposssibilité" mais le cas ne peut se produire que pour des mesures P à estimer tout à fait triviales (Dirac etc...)

Ici, nous imposerons de toutes façons par la suite $\sigma(\hat{f}_n^*(x)) \geq A\sqrt{\frac{q(n)}{n}}$, $A > 0$ (voir notre lemme 9).

et nous cherchons la loi limite de S_n

- Or on peut écrire successivement :

$$\hat{f}_n^*(x) - f_n(x) = \sum_{i=0}^{q(n)} (\hat{a}_{in}-a_i)\, e_i^*(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{q(n)} \left\{ \left[\frac{\sum_{j=0}^{n-1} e_i^*(\xi_j) - a_i}{n} \right] e_i^*(x) \right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{q(n)} \left[(e_i^*(\xi_j) - a_i)\, e_i^*(x) \right]$$

d'où
$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\sum_{i=0}^{q(n)} \left[\frac{e_i^*(\xi_j) - a_i}{n}\right] e_i^*(x)}{\sigma(f_n^*(x))}$$

- Nous poserons
$$\begin{cases} \cdot\ X'_{j,n} = \sum_{i=0}^{q(n)} \left\{ \left[\frac{e_i^*(\xi_j) - a_i}{n}\right] e_i^*(x) \right\} \\ \cdot\ X_{j,n} = \dfrac{X'_{j,n}}{\sqrt{E\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} X'_{j,n}\right)^2\right]}} \end{cases}$$

Alors, avec ces notations, on a de suite :
$$\begin{cases} \cdot\ E(X'_{j,n}) = 0 \quad \forall\, j \in \{0,\ldots,n-1\},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ \cdot\ E(X_{j,n}) = 0 \quad \forall\, j \in \{0,\ldots,n-1\} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \\ \cdot\ \sigma(\hat{f}_n^*(x)) = \sqrt{E\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} X'_{j,n}\right)^2\right]} \end{cases}$$

et enfin :
$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} X_{j,n} \quad .$$

- Le problème se ramène donc à trouver la loi limite de S_n , les $(X_{j,n})$ formant une "suite de séquences" (à n fixé, j variables $X_{o,n},\dots,X_{n-1,n}$ qui varient lorsque n varie puisque q(n) change) de variables non indépendantes. La solution du problème nous a, rappelons-le, été fournie par W. Philipp (8), grâce au caractère "ψ-mélangeant et stationnaire" des $X_{j,n}$ que nous re-définissons ci-après :

B - *PROPRIETES DES VARIABLES* $(X_{j,n})_{\substack{j\in\{0,\dots,n-1\}\\ n\in\mathbb{N}}}$

Nous dirons tout d'abord que, par définition :

- La suite de séquences $(X_{j,n})$ est ψ-mélangeante s'il existe une suite de réels $\psi(k)$, $\psi(k) \downarrow 0$ si $k \to \infty$) telle que :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, n,\ n\in\mathbb{N} \\ \forall\, t,\ t\in\{0,\dots,n-1\} \\ \forall\, k,\ k\in\{0,\dots,n-1\}\ \text{vérifiant}\ \ t+k\leq n-1 \end{array}\right\} \text{on ait, en appelant } \mathcal{M}^n_{o,t}$$

et $\mathcal{M}^n_{t+k,n-1}$, les tribus engendrées respectivement par $X_{o,n},\dots,X_{t,n}$ et $X_{t+k,n},\dots,X_{n-1,n}$ la propriété :

$$\forall A\ ,\ A\in\mathcal{M}^n_{o,t}\quad \forall B\ ,\ B\in\mathcal{M}^n_{t+k,n-1}\ :\ |P(A\cap B)-P(A)P(B)|\leq\psi(k)\ P(A)$$

(Remarquons qu'ici $\psi(k)$ ne doit dépendre ni de la suite (n) ni du rang des algèbres considérées (t)).

- La suite de séquences $(X_{j,n})$ est stationnaire si, à n fixé, la loi de $(X_{h,n},\dots,X_{h+k,n})$ ne dépend que de k (étant entendu que $h+k\leq n-1$).

Compte tenu des définitions précédentes, on peut énoncer les deux lemmes :

Lemme 6.- <u>Les</u> $(X_{j,n})_{\substack{j\in\{0,\dots,n-1\}\\ n\in\mathbb{N}}}$ <u>définies au § A forment une suite de séquences, stationnaire et mélangeante de variables aléatoires centrées définies sur</u> $(\Omega,\mathcal{A},P)$ <u>et à valeurs dans</u> $(R,\mathcal{B}_R)$.

Démonstration.-

- Les $(X_{j,n})$ sont centrées par construction.

- Elles sont définies sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$: à un élément de $(\Omega,\mathcal{A},P)$ elles associent un réel par l'intermédiaire des sommes de $e_i^*(\xi_j)$. En effet, ξ_j est définie de $(\Omega,\mathcal{A},P)$ dans E, et e_i^* de E dans $\mathbb{R}$ $(e_i^* \in L^2(\mu))$.

- Les e_i^* étant des applications mesurables

de $\qquad (E,\mathcal{B}_E,\mu) \longrightarrow (\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

les $e_i^* \circ \xi_j$ le sont de $\qquad (\Omega,\mathcal{A},P) \longrightarrow (\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

et donc $X_{j,n}$ l'est de même de $(\Omega,\mathcal{A},P) \longrightarrow (\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

- La tribu engendrée par $(X_{j,n})$ est contenue dans celle engendrée par les $e_i^*(\xi_j)$ donc a fortiori dans la tribu engendrée par ξ_j, et ce, pour tout n.

Dès lors si $A \in M_{o,t}^n$ et $B \in M_{t+k,n-1}^n$, A est dans la tribu engendrée par $X_{o,n},\dots,X_{t,n}$ et B dans celle engendrée par $X_{t+k,n},\dots,X_{n-1,n}$. Par conséquent

$$\begin{cases} A \text{ est dans la tribu engendrée par } \xi_o,\dots,\xi_t \\ B \text{ est dans la tribu engendrée par } \xi_{t+k},\dots,\dots \end{cases}$$

et ce, pour toute valeur de n.

D'après l'hypothèse faite au chap. I sur les (ξ_i), il existe $\psi(k)$ tel que

$$|P(A \cap B) - P(A)\,P(B)| \leq \psi(k)\,P(A) \quad ,$$

les $\psi(k)$ forment une suite décroissante vers 0. C'est ce qu'il fallait démontrer.

- Enfin, à n fixé, la loi de $(X_{h,n},\ldots,X_{h+k,n})$ $(h+k \leq n-1)$ ne dépend que de k car la loi de $X_{h,n}$ ne dépend que de celle de ξ_h, et on sait, par hypothèse, que la suite $(\xi_n)_{n\in N}$ est stationnaire.

<u>Lemme</u> 7.-

a) <u>Les</u> $(X_{j,n})$ <u>formant une suite de séquences stationnaire et ψ-mélangeante, le lemme 1 reste valable, à condition de remplacer, dans son énoncé</u> :

$$\mathcal{M}_o^t \text{ par } \mathcal{M}_{o,t}^n$$

et

$$\mathcal{M}_{t+k}^{\infty} \text{ par } \mathcal{M}_{o,t+k}^n$$

b) <u>Si dans l'énoncé du lemme</u> 2, <u>on remplace</u>

$$E(\xi_o) = 0 \text{ par } E(X_{o,n}) = 0$$

$$|\xi_o| < C \text{ par } |X_{o,n}| < C_n$$

on peut, ici, conclure que

$$E(S_{k,n}^4) \leqslant 768\ C_n^4\ k^2\ \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\varphi(i)}\right) \quad \text{où} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

$$S_{k,n} = \sum_{j=0}^{k-1} X_{j,n}$$

c) Les conclusions a) et b) restent strictement identiques si on considère la suite $(X'_{j,n})$ au lieu de $(X_{j,n})$ (étant entendu que pour b) ce n'est plus la même constante).

Démonstration.-

- Pour a) voir (8). On peut aussi remarquer que la démonstration donnée en (13) du lemme 2 s'applique ici directement.

- Il en est de même pour b) qui se déduit de a) comme le lemme 2 se déduisait du 1) en (13).

- Pour c) il suffit de voir que $X'_{j,n} = (K_n)\ X_{j,n}$ (K_n ne dépend pas de j) et donc la suite $(X'_{j,n})$ est encore φ-mélangeante et stationnaire comme $X_{j,n}$ ...

- Pour aborder la démonstration du théorème central limite, reste à obtenir des majorations des $X_{j,n}$ et leurs variances. C'est l'objet des deux lemmes suivants :

Lemme 8.- Les $(X_{j,n})$ définies en A vérifient :

a) $\forall\, n\ ,\ n \in \mathbb{N}\quad \Sigma_n^2 = E(S_n^2) = 1$

b) <u>Sous l'une des trois hypothèses</u> :

α) $\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\psi(j)} < \frac{1}{4}$

β) $\forall\ n,\ n \in \mathbb{N}^{*}\ ,\ \forall\ j \in \{0,\dots,n-1\},\ E(X'_{o,n} \cdot X'_{j,n}) \geq 0$

γ) $\forall\ n,\ n \in \mathbb{N}\ ,\ \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)\ E(X'_{o,n} \cdot X'_{j,n}) \geq 0$

on a : $\forall\ n\ ,\ n \in \mathbb{N},\ \ j,\ j \in \{0,\dots,n-1\}\quad E(X^2_{j,n}) = \sigma^2(n) = O(\frac{1}{n})$

c) <u>Il existe une constante</u> K, K > 0 <u>telle que</u>, $\forall\ n,\ n \in \mathbb{N}$

$\sigma^2(n) > K \cdot \frac{1}{n}$, <u>pourvu que</u> $\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\psi(j)} < +\infty$

<u>Démonstration</u>.-

a) est évident par définition de S_n, $X_{j,n}$, $X'_{j,n}$.

b) tous les $(X_{j,n})$, à n fixé, ont même loi (suite stationnaire). On pose donc $\forall\ j,\ j \in \{0,\dots,n-1\}\quad E(X^2_{j,n}) = \sigma^2(n) = E(X^2_{o,n})$. Par définition de $X_{o,n}$ on a :

$$\left|\frac{1}{\sigma^2(n)}\right| = \frac{1}{\sigma^2(n)} = \frac{E\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} X'_{j,n}\right)^2\right]}{E(X'^{\,2}_{o,n})}$$

d'où :

$$(7)\qquad \frac{1}{\sigma^2(n)} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} E(X'^{\,2}_{j,n}) + \sum_{\substack{j\neq j' \\ j,j'\in\{0,\dots,n-1\}}} E(X'_{j,n}\cdot X'_{j',n})}{E(X'^{\,2}_{o,n})} =$$

$$= \frac{n \cdot E(X'^{\,2}_{o,n}) + \sum_{\substack{j\neq j' \\ j,j'\in\{0,\dots,n-1\}}} E(X'_{j,n}\cdot X'_{j',n})}{E(X'^{\,2}_{o,n})}$$

Alors : ∗ si β) est vérifiée on a bien

$$\frac{1}{\sigma^2(n)} \geq n .$$

∗ La stationnarité de la suite $(X'_{j,n})$ permet d'écrire :

$$\sum_{\substack{j \neq j' \\ j,j' \in \{0,\dots,n-1\}}} E(X'_{j,n} \cdot X'_{j',n}) = 2 \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)\, E(X'_{o,n} \cdot X'_{j,n})$$

et donc, si γ) est vérifiée on a aussi $\dfrac{1}{\sigma^2(n)} \geq n$

∗ Pour utiliser α) on remarque que :

$$\Big| \sum_{\substack{j \neq j' \\ j,j' \in \{0,\dots,n-1\}}} E(X'_{j,n} . X'_{j',n}) \Big| = \Big| 2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j'=j+1}^{n-1} E(X'_{j,n} . X'_{j',n}) \Big|$$

$$\leq 4 . \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j'=j+1}^{n-1} \sqrt{\emptyset(j'-j)} \sqrt{E(X'^{2}_{j,n})} \sqrt{E(X'^{2}_{j',n})}$$

(cf. lemme 7).

$$\leq 4 . n . \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\emptyset(j)} \Big) E(X'^{2}_{o,n})$$

car tous les $(X_{j,n})$ ont même loi ... (7) permet alors d'écrire :

$$\frac{1}{\sigma^2(n)} = \Big| \frac{1}{\sigma^2(n)} \Big| \geq \frac{\big| n . E(X'^{2}_{o,n}) \big| - \big| 4\, n . \big(\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\emptyset(j)} \big) E(X'^{2}_{o,n}) \big|}{E(X'^{2}_{o,n})}$$

soit : $\dfrac{1}{\sigma^2(n)} \geq n\Big(1 - 4\big(\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\emptyset(j)} \big)\Big)$

et $\dfrac{1}{\sigma^2(n)} \geq K . n$ sous l'hypothèse α).

Remarquons enfin que les trois conditions proposées sont les plus "évidentes", elles ne sont nullement nécessaires.

- Pour c) il suffit de remarquer qu'à partir de (7) on a la majoration :

$$\left|\frac{1}{\sigma^2(n)}\right| \leq \frac{n \,.\, E(X'^{\,2}_{o,n}) + 4\,n\,(\sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\phi(j)})E(X'^{\,2}_{o,n})}{E(X'^{\,2}_{o,n})}$$

(cf. la démonstration précédente : α) qui utilise le lemme 7)

d'où : $$\left|\frac{1}{\sigma^2(n)}\right| \leq (1 + 4(\sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\phi(j)}))\, n \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Lemme 9.- Si on suppose, qu'en plus d'une des conditions α) β) γ) du lemme 8, on a :

$*\ \forall i\ ,\ i \in \mathbb{N}\ , \forall x \quad x \in E\ ,\ |e_i^*(x)| \leq M$

$*\ \forall x\ ,\ x \in E\ ,\ f_n(x) \to f(x)$

$*\ E\left[\left(\sum_{i=0}^{q(n)} e_i^*(\xi_j)\ e_i^*(x)\right)^2\right] \geq A\ q(n)\ ,\ A > 0$ pour n assez grand,

alors les $(X_{j,n})$ définies en A) vérifient, $\forall n\ ,\ n \in \mathbb{N}\ , \forall j,\ j \in \{0,\dots,n-1\}$:

$$|X_{j,n}| = O\left(\sqrt{\frac{q(n)}{n}}\right) \qquad (*)$$

Démonstration.-

- On remarque d'abord, que, sous les hypothèses du lemme 8, on a successivement :

(*) Précisons bien le sens de cette majoration. Elle signifie que $\forall x,\ x \in E$, $\forall \omega,\ \omega \in \Omega$

On a $$\left|\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{q(n)} (e_i^*(\xi_j(\omega)) - a_i)\ e_i^*(x)}{\sigma(\hat{f}_n^*(x))}\right| \leq K\sqrt{\frac{q(n)}{n}}$$

K ne dépendant ni de x, ni de n, ni de ω.

$$|X_{j,n}| = \frac{|X'_{j,n}|}{\sqrt{n\ E(X'^{\,2}_{o,n}) + \sum\limits_{\substack{j\neq j' \\ j,j'\in\{0,\dots,n-1\}}} E(X'_{j,n}.X'_{j',n})}}$$

d'où $$|X_{j,n}| \leq \frac{|X'_{j,n}|}{k\sqrt{n}\sqrt{E(X'^{\,2}_{o,n})}}$$

pour une certaine constante $k > 0$, sous $\alpha)$ $\beta)$ ou $\gamma)$ (cf. lemme 8, la démonstration).

- Or pour tout j, par définition, on a ,

$$|X'_{j,n}| = \left|\sum_{i=0}^{q(n)} \frac{1}{n}\,(e^*_i(\xi_j) - a_i)\ e^*_i(x)\right|$$

d'où (8) : $$|X'_{j,n}| \leq \left|\sum_{i=0}^{q(n)} \frac{1}{n}\,(e^*_i(\xi_j)\ e^*_i(x)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{q(n)} a_i\ e^*_i(x)\right|$$

Or, il vient successivement :

* D'après la condition sur les e_i :

$$\forall\ i\ ,\ i \in \{0,\dots,q(n)\} \qquad e_i(\xi_j)\ e^*_i(x) \leq M^2$$

* D'après la condition sur f_n :

$$\sum_{i=0}^{q(n)} a_i\ e^*_i(x) \to f(x) \quad ,$$

donc pour n assez grand :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{q(n)} a_i\, e_i^*(x)\right| \leq \left|\frac{1}{n}\,(f(x)+\varepsilon)\right| \ , \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

$$\leq \frac{1}{n}\,(M^2\, q(n))$$

car $M^2\, q(n) \to +\infty$ et $\forall\, \varepsilon, \exists\, \mathbb{N} \mid n \geq N \implies M^2\, q(n) \geq f(x) + \varepsilon$

Les deux premières conditions donnent donc, à partir de (8) :

$$|X'_{j,n}| \leq \frac{2\, M^2\, q(n)}{n} \qquad \text{pour } n \text{ assez grand .}$$

* On utilise la 3^e condition en remarquant que :

$$E(X'^{\,2}_{j,n}) = E\{[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{q(n)} e_i^*(\xi_j)\, e_i^*(x)]^2\} - \{[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{q(n)} a_i\, e_i^*(x)]^2\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\, E[(\sum_{i=0}^{q(n)} e_i^*(\xi_j)\, e_i^*(x))^2] - \frac{f_n^{\,2}(x)}{n^2}$$

Alors si la 3^e condition est vérifiée :

$$E(X'^{\,2}_{j,n}) \geq \frac{A\, q(n)}{n^2} - \frac{f_n^{\,2}(x)}{n^2} \geq \frac{A}{2}\;\frac{q(n)}{n^2} \qquad \text{(pour } n \text{ assez grand)}$$

puisque $A\, q(n) \to +\infty$ et donc, pour n assez grand, $\frac{1}{2}\, A\, q(n) \geq f_n^{\,2}(x)$.

- Finalement en reportant ces résultats dans $|X_{j,n}| \leq \dfrac{X'_{j,n}}{k\, \sqrt{n}\, \sqrt{E(X'^{\,2}_{o,n})}}$,

on obtient :

$$|X_{j,n}| \leq \frac{2\, M^2\, \frac{q(n)}{n}}{k\, \sqrt{n}\, (\frac{A}{2}\, \frac{q(n)}{n^2})^{1/2}}$$

$$= O\left(\sqrt{\frac{q(n)}{n}}\right) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

- On peut montrer (cf. Bosq (2)) que pour les fonctions trigonométriques, si f est à variation bornée, les conditions du lemme 9) sont vérifiées ...

- Pour résumer ce B) on peut donc dire que notre problème est de trouver la loi limite de $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} X_{j,n}$, où les $(X_{j,n})_{\substack{j\in\{0,\ldots,n-1\}\\ n\in\mathbb{N}}}$ forment une suite de séquences stationnaire et mélangeante (sous les hypothèses générales relatives aux (ξ_i) : chap. I (A)) et sous les hypothèses des lemmes 8 et 9 vérifient :

$$. \ \forall n,\ n\in\mathbb{N},\ \forall j\in\{0,\ldots,n-1\} \quad E(X_{j,n}^2) = \sigma^2(n) = O(\tfrac{1}{n})$$

$$. \ \forall n,\ n\in\mathbb{N},\ \forall j\in\{0,\ldots,n-1\} \quad |X_{j,n}| = O\left(\sqrt{\frac{q(n)}{n}}\right)$$

- Nous supposerons désormais tout ceci vérifié. Ce sera l'hypothèse "H'".

C - *THEOREME CENTRAL LIMITE POUR* S_n.-

Il s'énonce ainsi :

Théorème 5.- Sous l'hypothèse générale H'.

Si on suppose de plus que $\dfrac{[q(n)]^4}{n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Alors, $\forall x,\ x\in E$:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\hat{f}_n^*(x) - f_n(x)}{\sigma(\hat{f}_n^*(x))}\right) \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

La démonstration est celle de Philipp (8) retranstricte avec des hypothèses particulières. Nous la décomposerons en 4 étapes : lemmes 10, 11, démonstration du théorème limite, convergence vers $N(0,1)$. ...

Lemme 10.- (On supprime dans cet énoncé et ceux qui suivent l'indice n dans $(X_{j,n})$ (on suppose de même réalisée une fois pour toute H').

Soit h le plus grand entier tel que $E\left[\left(\sum_{i=0}^{h-1} X_i\right)^2\right] \leq \sigma(n)$.

Soit k la partie entière de $\dfrac{1}{\sqrt{\sigma(n)}}$

On posera :

$$
\begin{array}{ll}
Y_1 = X_o + X_1 + \dots + X_{h-1} & ; Z_1 = X_h + \dots + X_{h+k-1} \\
Y_2 = X_{h+k} + \dots\dots + X_{2h+k-1} & ; Z_2 = X_{2h+k} + \dots + X_{2h+2k-1} \\
\vdots & \quad \vdots \\
Y_p = X_{(P-1)h+(P-1)k} + \dots + X_{Ph+(P-1)k-1} & ; Z_p = X_{Ph+(P-1)k} + \dots + X_{P(h+k)-1} \\
\vdots & \quad \vdots \\
Y_\ell = \text{---------} & ; Z_\ell = \text{-----} \\
 & ; Z_{\ell+1} = X_{\ell h+\ell k} + \dots + X_{n-1}
\end{array}
$$

(ℓ étant déterminé par l'impossibilité de construire $Y_{\ell+1}$ et $Z_{\ell+1}$ à la fois selon le schéma de Y_1, Z_1, Y_P, Z_P,...).

On a alors :

. $\forall j$, $j = 1,\ldots,\ell$ $E(Y_j^2) = \sigma(n)\ [1 + o(1)]$

. $\forall j$, $j = 1,\ldots,\ell$ $E(Z_j^2) \leq \alpha \cdot [\sigma(n)]^{3/2}$ (α constante indépendante de n)

. $E(Z_{\ell+1}^2) \leq \sigma(n)\ [1 + o(1)]$

. $\ell = \dfrac{1}{\sigma(n)}\ [1 + o(1)]$

Démonstration.-

- On remarque d'abord que, par stationnarité, tous les Y_j ont même loi, de même Z_j $(1 \leq j \leq \ell)$. Il suffit donc d'étudier Z_1 et Y_1.

- Par hypothèse, on a : $\begin{cases} E(Y_1^2) \leq \sigma(n) \\ E(Y_1 + X_h)^2 > \sigma(n) \end{cases}$

On en tire :

$$E(Y_1^2) \leq \sigma(n) < E(Y_1^2) + \sigma^2(n) + 2\ E(Y_1 \cdot X_h)$$

d'où $$E(Y_1^2) \leq \sigma(n) < E(Y_1^2) + \sigma^2(n) + 2 \sqrt{E(Y_1^2)}\ \sqrt{E(X_h^2)}$$

d'où $$E(Y_1^2) \leq \sigma(n) < E(Y_1^2) + \sigma^2(n) + 2\ \sigma(n)^{3/2}$$

Donc : $$0 \leq \sigma(n) - E(Y_1^2) \leq \sigma(n)\ [\sigma(n) + 2 \sqrt{\sigma(n)}\ ]$$

On en tire : $$E(Y_1^2) = \sigma(n)\ [1 + o(1)]$$

D'où la première des 4 conclusions.

- Par définition de Z_1 on a :

$$E(Z_1^2) = k\ E(X_o^2) + \sum_{\substack{j \neq j' \\ j=1,\ldots,k \\ j'=1,\ldots,k}} E(X_j \cdot X_{j'})$$

On en tire, les X_j ayant tous même loi, d'après le lemme 7,

$$|E(Z_1^2)| \leqslant k\,\sigma^2(n) + 4 \sum_{j=1}^{k} \sum_{j'=j+1}^{k} |E(X_j \,.\, X_{j'})|$$

$$\leqslant k\,\sigma^2(n) + 4 \sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{j'=j+1}^{k} \sqrt{\psi(j'-j)}\ \sqrt{E(X_j^2)}\ \sqrt{E(X_{j'}^2)}\Big)$$

$$\leqslant k\,\sigma^2(n) + 4\,k \,.\, \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\psi(j)}\Big)\ \sigma^2(n)$$

$$\leqslant \alpha\ \sigma(n)^{3/2} \,.$$

D'où la deuxième des conclusions.

- Pour $Z_{\ell+1}$ on distingue 2 cas :

* Si $(n-1)-(\ell h+\ell k) + 1 < h$, par définition de h,
on a $E(Z_{\ell+1}^2) \leqslant \sigma(n)$. (*)

* Sinon on a, puisqu'on ne peut construire $Y_{\ell+1}$ et $Z_{\ell+1}$ de façon classique :

$$\begin{cases} (n-1)-(\ell h+\ell k) + 1 \geqslant h \\ (n-1)-(\ell h+\ell k) + 1 < h + k \ \ldots \end{cases} \quad \text{Alors } Z_{\ell+1} = Y_{\ell+1} + Z'_{\ell+1} \,,$$

$Y_{\ell+1}$ conservant la forme classique :

$$Y_{\ell+1} = X_{\ell h+\ell k} + \ldots + X_{(\ell+1)h+\ell k-1}$$

$Z'_{\ell+1}$ valant $\qquad Z'_{\ell+1} = X_{(\ell+1)h+\ell k} + \ldots + X_{n-1}$

Dès lors, on aura :

(*) Si on a $\ell(h+k) - 1 = n-1$, $Z_{\ell+1}$ n'existe pas réellement. On peut alors poser $Z_{\ell+1} = 0$ (variable constamment nulle) et la conclusion reste vraie.

$$E(Z_{\ell+1}^2) = E(Y_{\ell+1}^2) + E({Z'_{\ell+1}}^2) + 2\,E(Y_{\ell+1})\,E(Z'_{\ell+1})$$

$$\leq \sigma(n) + \alpha\,\sigma^{3/2}(n) + 2\sqrt{E(Y_{\ell+1}^2)}\sqrt{E({Z'_{\ell+1}}^2)}$$

$$\leq \sigma(n) + \alpha\,\sigma^{3/2}(n) + 2\sqrt{\sigma(n)}\,\sqrt{\alpha\sigma(n)}^{3/2}$$

et $\quad E(Z_{\ell+1}^2) = \sigma(n)\,[1 + o(1)]$ $\qquad$ C.Q.F.D. (3^e conclusion)

- Reste à démontrer la 4^e conclusion (valeur de ℓ). Or on a :

$$1 = \Sigma_n^2 = E[(\sum_{j=1}^{n} X_j)^2]$$

On décompose $\sum_{j=0}^{n-1} X_j$ sur les Y_j et Z_j . Il vient :

$$1 = \sum_{1\leq j\leq \ell} E(Y_j^2) + \sum_{1\leq j\leq \ell+1} E(Z_j^2) + \sum_{\substack{j=1,\dots,\ell \\ j'=1,\dots,\ell \\ j\neq j'}} E(Y_j \,.\, Y_{j'})$$

$$+ \sum_{\substack{j=1,\dots,\ell+1 \\ j'=1,\dots,\ell+1 \\ j\neq j'}} E(Z_j . Z_{j'}) + \sum_{\substack{j=1,\dots,\ell \\ j'=1,\dots,\ell+1}} E(Y_j . Z_{j'})$$

Appelons A,B,C,D,E ces 5 quantités. Calculons-les

* $A = \ell\,\sigma(n)\,[1 + o(1)]$ $\quad$ de façon évidente

* $B = \sum_{1\leq j\leq \ell} E(Z_j^2) + E(Z_{\ell+1}^2) \leq 2\,\ell\,\alpha\,\sigma(n)^{3/2} + \sigma(n)\,[1 + o(1)]$

et $$B = o(\ell\,.\,\sigma(n)) + O(\sigma(n))$$

$$* \quad |C| \leqslant 2 \sum_{1\leqslant j'\leqslant \ell-1} \left| \sum_{j=j'+1}^{\ell} E(Y_j \, . \, Y_{j'}) \right|$$

$$\leqslant 2 \sum_{1\leqslant j'\leqslant \ell-1} \left(\sum_{\substack{i\in\{\rho(h+k),\dots(\rho+1)h+\rho k-1\} \\ \rho=\, j',\dots,\ell}} |E(x_i \, . \, Y_{j'})| \right)$$

Mais $|E(x_i . Y_{j'})| \leqslant 2 \sqrt{\phi(k_i)} \sqrt{E(x_i^2)} \sqrt{E(Y_{j'}^2)}$ où $k_i = i - [j'h+(j'-1)k-1]$

$$\leqslant 2 \sqrt{\phi(k_i)} \, . \, \sigma(n)^{3/2} \, . \, (1 + o(1))$$ d'après ce qui précède.

En sommant sur les ρ, donc des k_i tous distincts on a :

$$|C| \leqslant 2 \sum_{1\leqslant j'\leqslant \ell-1} (2\,\sigma(n)^{3/2}\,(1 + o(1)) \, . \, (\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\phi(j)}))$$

$$\leqslant K \, . \, \ell\, \sigma(n)^{3/2} \qquad \text{et} \qquad C = o(\ell\, \sigma(n))$$

$$* \quad |D| \leqslant 2 \sum_{1\leqslant j'\leqslant \ell} \left| \sum_{j=j'+1}^{\ell+1} E(Z_j \, . \, Z_{j'}) \right|$$

$$\leqslant 2 \sum_{1\leqslant j'\leqslant \ell} \left[\sum_{\substack{i\in\{\rho h+(\rho-1)k,\dots,\rho h+\,k-1\} \\ \rho=j',\dots,\ell+1}} |E(x_i \, . \, Z_{j'})| \right]$$

Ici $|E(x_i . Z_{j'})| \leqslant 2 \sqrt{\phi(k_i)} \sqrt{E(x_i^2)} \sqrt{E(Z_j'^2)} \leqslant 2 \sqrt{\phi(k_i)} \, . \sqrt{\alpha} \, . \; \sigma(n)^{7/4}$ et finalement (même sommation que pour C).

$$|D| = o[\ell\, \sigma(n)]$$

$$* \quad |E| \leqslant \left|2 \sum_{j=1,\dots,\ell} \left(\sum_{j'=1,\dots\ell} E(Y_j . Z_{j'}) \right)\right| + \left|2 \sum_{j=1,\dots\ell} E(Y_j . Z_{\ell+1})\right|$$

Le même raisonnement que ci-dessus donne :

$$|E| \lesssim 2 \sum_{j=1,\dots,\ell} \{ (\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\varphi(i)}) \sqrt{E(Y_j^2)} \sqrt{E(Z_j'^2)} \} + 2 (\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\varphi(i)}) \sqrt{E(x_i^2)} \sqrt{E(Z_{\ell+1}^2)})$$

Soit : $\qquad |E| = [(\ell+1)\ \sigma(n)]\ o(1) = o(\ell\ \sigma(n))$

* On conclut alors en écrivant que

$$1 = A + B + C + D + E \quad , \text{ d'où } \quad 1 = \ell\ \sigma(n)\ [1 + o(1)] + O(\sigma(n))$$

et finalement pour n assez grand

$$\ell = \frac{1}{\sigma(n)}\ (1 + o(1))$$

Lemme 11.- Avec les mêmes notations qu'au lemme précédent, on a, pour tout $T > 1$, uniformément en $|t| < T$:

$$\begin{cases} \cdot\ E[\exp it\ (\sum_{j=0}^{n-1} X_j)] = \prod_{j=1}^{\ell} E(\exp it\ Y_j) + o(T^2) \\ \cdot\ \sum_{j=1}^{\ell} E(y_j^2) = 1 + o(1) \quad \text{et} \quad \max_{j=1,\dots,\ell} E(Y_j^2) \to 0 \end{cases}$$

Démonstration.- On prouve successivement :

a) $E[(\sum_{j=1}^{\ell+1} Z_j)^2] \to 0$

b) $E[(\sum_{j=1}^{\ell} Y_j)^2] \to 1$

c) $E[\exp it\ (\sum_{j=1}^{\ell} Y_j)] = \prod_{j=1}^{\ell} E(\exp it\ Y_j) + o(1)$

d) $E[\exp it\ (\sum_{i=0}^{n-1} X_i)] = E[\exp it(\sum_{j=1}^{\ell} Y_j)] + o(T^2)$

Pour a) on reprend la démonstration du lemme 8 :

$$E\Big[\Big(\sum_{j=1}^{\ell+1} Z_j\Big)^2\Big] = B + D = o(\ell\ \sigma(n)) + O(\sigma(n))$$

$$= O(\sigma(n)^{1/2}) \quad \text{d'après les résultats du lemme 10}$$

$$= o(1) \qquad\qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Pour b) on a de même

$$E\Big[\Big(\sum_{j=1}^{\ell} Y_j\Big)^2\Big] = A + C = \ell\ \sigma(n)\ (1 + o(1))$$

$$= 1 + o(1) \qquad\qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Pour c) on procède par récurrence.

* Soit $A = E\Big[\exp it\Big(\sum_{j=1}^{\ell} Y_j\Big)\Big] - \prod_{j=1}^{\ell} E(\exp it\ Y_j)$

$$= E\Big(\prod_{j=1}^{\ell} \exp it\ Y_j\Big) - \prod_{j=1}^{\ell} E(\exp it\ Y_j)$$

* On peut écrire

$$A = \Big\{E\Big(\prod_{j=1}^{\ell} \exp it\ Y_j\Big) - E\Big(\prod_{j=1}^{\ell-1} \exp it\ Y_j\Big) . E(\exp it\ Y_\ell)\Big\}$$

$$+ \Big\{E\Big(\prod_{j=1}^{\ell-1} \exp it\ Y_j\Big) . E(\exp it\ Y_\ell) - \prod_{j=1}^{\ell} E(\exp it\ Y_j)\Big\}$$

$$= A_1 + A_2$$

Or .. $|A_1| = |E(\eta\ .\ \xi) - E(\eta)\ E(\xi)|$ où $\begin{cases} \eta = \prod_{j=1}^{\ell-1} \exp it\ Y_j \\ \xi = \exp it\ Y_\ell \end{cases}$

il vient (lemme 7):

$|A_1| \leqslant 2\ \varphi(k)$ (module de exp it $X = 1$)

. $|A_2| = |E(\exp it\, Y_\ell)|\ |E(\prod_{j=1}^{\ell-1} \exp it\, Y_j) - \prod_{j=1}^{\ell-1} E(\exp it\, Y_j)|$

$\leqslant |E(\prod_{j=1}^{\ell-1} \exp it\, Y_j) - \prod_{j=1}^{\ell-1} E(\exp it\, Y_j)|$

Finalement :

$$|A| \leqslant \varphi(k) + |E(\prod_{j=1}^{\ell-1} \exp it\, Y_j) - \prod_{j=1}^{\ell-1} E(\exp it\, Y_j)|$$

* On pose alors $B = E(\prod_{j=1}^{\ell-1} \exp it\, Y_j) - \prod_{j=1}^{\ell-1} E(\exp it\, Y_j)$.

Par la même technique que pour A, on obtient

$$|B| \leqslant \varphi(k) + |E(\prod_{j=1}^{\ell-2} \exp it\, Y_j) - \prod_{j=1}^{\ell-2} E(\exp it\, Y_j)|$$

* De proche en proche (on reproduit ℓ fois le procédé). On obtient :

$$|A| \leqslant 2\ \ell\ \ \varphi(k)$$

$$\leqslant 2\ \frac{1}{\sigma(n)}\ \varphi\left(\left[\sqrt{\frac{1}{\sigma(n)}}\right]\right) \quad (*)$$

soit $\qquad A = O(t^2\ \varphi(t))$ où $t \to \infty$. $\left(t = \left[\sqrt{\frac{1}{\sigma(n)}}\right]\right)$

Comme on a supposé $\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\varphi(j)} < +\infty$, il vient : $A \to 0$ si $n \to \infty$.

C.Q.F.D.

Pour d) . En posant

$$Y_n = \sum_{j=1}^{\ell} Y_j$$

$$Z_n = \sum_{j=1}^{\ell+1} Z_j$$

(*) $\left[\sqrt{\frac{1}{\sigma(n)}}\right]$ représente la partie entière de $\sqrt{\frac{1}{\sigma(n)}}$

on peut écrire : $E\left[\exp it(\sum_{j=0}^{n-1} X_j)\right] = E(\exp it\, Y_n \,.\, \exp it\, Z_n)$

Mais on a : $\exp it\, Z_n = 1 + it\, Z_n + \theta \frac{t^2}{2} Z_n^2$ avec $|\theta| < 1$.

Il vient : $E\left[\exp it(\sum_{j=0}^{n-1} X_j)\right] = E\left[\exp it\, Y_n + it\, Z_n \exp it\, Y_n + \theta \frac{t^2}{2} Z_n^2 \exp it\, Y_n\right]$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\left|E\left[\exp it(\sum_{j=0}^{n-1} X_j)\right] - E(\exp it\, Y_n)\right| &\leq |t| \,.\, E(|Z_n \exp it\, Y_n|) + \\ &\qquad |\theta| \frac{t^2}{2} E|Z_n^2 \exp it\, Y_n| \\ &\leq |t| \,.\, E(|Z_n|) + \frac{t^2}{2} E(Z_n^2) \\ &\leq \sqrt{t^2} \sqrt{E(Z_n^2)} + \frac{t^2}{2} E(Z_n^2)\end{aligned}$$

Comme $E(Z_n^2) = o(1) = o(\sigma(n)^{1/2})$ on a donc finalement une majoration de la différence pour n assez grand :

par * $2\,|t|\,\sqrt{E(Z_n^2)}$ soit un $o(1)$, si $t < 1$

* $2\,t^2\,\sqrt{E(Z_n^2)}$ soit un $o(1)$, si $t > 1$

et de façon générale par $T^2\, o(1)$ pour tout t tel que $|t| < T$ (et $T > 1$)

C.Q.F.D.

Pour conclure (1ère partie du lemme) on remarque que, en appelant f_n la fonction caractéristique de $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} X_j$ et f_k celle de Y_k on a :

$$\begin{aligned}\left|f_n(t) - \prod_{k=1}^{\ell} f_k(t)\right| &= \left|E(\exp it\,(\sum_{j=0}^{n-1} X_j) - \prod_{k=1}^{\ell} E(\exp it\, Y_k)\right| \\ &\leq \left|E(\exp it\,(\sum_{j=0}^{n-1} X_j) - E(\exp it(\sum_{j=1}^{\ell} Y_j)\right| \\ &\quad + \left|E(\exp it(\sum_{j=1}^{\ell} Y_j) - \prod_{k=1}^{\ell} f_k(t)\right|\end{aligned}$$

Les deux termes de la différence ont été précédemment majorés par $\frac{1}{\sigma(n)}\ \psi\left(\left[\sqrt{\frac{1}{\sigma(n)}}\right]\right)$ et $\sup(t,\ t^2)\ \sqrt{E(Z_n^2)}$, et sont des quantités qui tendent vers 0. (pour $|t| < T$) C.Q.F.D.

Enfin reste à voir que
$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{\ell} E(Y_j^2) = 1 + o(1) \\ \max_{j=0,\ldots\ell} E(Y_j^2) \to 0 \end{array}\right\}$$
ceci résulte de suite du lemme 10...

Lemme 12.- Le théorème central limite (cas des variances bornées : Loeve (15) p. 293) s'applique à S_n. En appelant F_n la fonction de répartition commune des variables $(Y_{j,n})_{j=1,\ldots,\ell}$, on a donc :

1) La famille des lois limites de S_n coïncide avec celle des lois de variables aléatoires centrées, de variances égales à 1, de fonctions caractéristiques de la forme e^{ψ} où $\psi(u) = \int (e^{iux} - 1 - iux)\ \frac{1}{x^2}\ dK(x)$, K étant une fonction continue à gauche, non décroissante sur $\mathbb{R}$.

2) La loi limite de S_n est celle d'une variable X de fonction caractéristique ψ si et seulement si $K_n \to K$ complètement, où

$$K_n = \ell \int_{-\infty}^{x} y^2\ d\ F_n$$

En particulier cette loi limite est $\mathcal{N}(0,1)$ si et seulement si

(9) $$\forall\ \varepsilon\ ,\ \varepsilon > 0\ ,\ \ell \int_{|x|>\varepsilon} x^2\ d\ F_n \to 0\ .$$

Démonstration.- La démonstration du Loeve s'articule en 5 points a) a') b) c) d. Nous les reprendrons brièvement en indiquant les différences éventuelles apportées.

A la place de a), on peut écrire, en se servant du lemme 11, que :

$$\sum_{k=1}^{\ell} \{\log f_{k,n}(u) - (f_{k,n}(u) - 1)\} \to 0 \text{ , où } f_{k,n}$$

est la fonction caractéristique de $Y_{k,n}$: seul intervient dans la démonstration de Loeve le fait que $\sum_k E(Y_{k,n}^2) = 1$ et $\max_k E(Y_{k,n}^2) \to 0$.

Ensuite, nous poserons comme Loeve :

$$\begin{cases} \psi_n(u) = \int (e^{iux} - 1 - iux) \frac{1}{x^2} \, d\,K_n \\ K_n(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{-\infty}^{x} y^2 \, d\,F_n \end{cases}$$

$$= \ell \int_{-\infty}^{x} y^2 \, d\,F_n \quad (Y_j \text{ de même loi})$$

Nous avons $E(e^{itS_n}) = \prod_{j=1}^{\ell} (f_{j,n}) + o(T^2)$ (lemme (11))

au lieu de $E(e^{itS_n}) = \prod_{k=1}^{n} (f_{k,n})$: cas de Loeve . (variables indépendantes)

Comme seule une convergence vers 0 de $\log(\prod_{j=1}^{\ell} f_{j,n}) - \psi_n$ est demandée, nous pourrons remplacer le résultat de Loeve (a') par :

$\log[E(e^{itS_n})] - \psi_n \to 0$.

Ce résultat permettra alors de conclure car b) c) d) n'utilisent plus que les propriétés intrinsèques de e^{ψ}, puis de convergence de ψ_n vers ψ.

Philipp (8) a démontré que la condition $\dfrac{\sum_j E(Y_{j,n}^2)}{\max_j E(Y_{j,n}^2)} \to \infty$ n'ôte aucune loi à la famille des lois limites.

Enfin, la convergence vers $N(0,1)$ s'obtient en faisant tendre K_n vers la fonction K correspondant à une variable gaussienne centrée réduite. Ce qui (cf. Loeve) se réduit finalement pour nous à (9).

Lemme 13.- Sous l'hypothèse $\frac{q(n)^4}{n} \to 0$, la condition (9) est vérifiée.

Démonstration.- On sait que $\int_{|x|>\varepsilon} x^2 \, d\, F_n = P[Y_{j,n}^2 > \varepsilon]$. Donc, en majorant par Tchebyscheff, la condition (9) est vérifiée si

$$(10) \qquad \ell \left[\frac{E(Y_{j,n}^4)}{\varepsilon^2}\right] \to 0$$

Or $\forall j$, $j = 1,\ldots,\ell$

$$\begin{aligned} E(Y_{j,n}^4) &= E(Y_{1,n}^4) \\ &= E\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} X_{j,n}\right)^4\right] \\ &\leqslant 768 \, . \, C_n^4 \, h^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\phi(i)}\right) \end{aligned}$$

où C_n majore $|X_{o,n}|$ d'après le lemme 7.

Or d'après le lemme 9) $|X_{o,n}| = O\left(\sqrt{\frac{q(n)}{n}}\right)$

Finalement la convergence vers $N(0,1)$ sera obtenue si, d'après (10)

$$\ell \, . \left(\sqrt{\frac{q(n)}{n}}\right)^4 . \, h^2 \to 0$$

Le lemme 10 permet alors d'écrire :

$$\ell h + \ell k \leqslant n$$
$$\ell = \frac{1}{\sigma(n)} \quad (1 + o(1))$$
$$k = \frac{1}{\sqrt{\sigma(n)}}$$

et comme le lemme 8 donne $\sigma^2(n) = O(\frac{1}{n})$ la condition de convergence s'écrit finalement, puisque h et $\ell = O(\sqrt{n})$:

$$\frac{q(n)^2}{n^2} \cdot \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n})^2 \to 0 \ , \ \text{soit} \ \frac{q(n)^2}{n^{1/2}} \to 0 \ ,$$

d'où la condition annoncée ... Ceci achève la démonstration du lemme 13 et du théorème central limite.

D - ETUDE DE LA VITESSE DE CONVERGENCE.-

1 - *Introduction et notations.*

Dans Loeve (p. 283 (15)) on trouve une démonstration de la majoration de Berry Esseen pour $|F_n^*(x) - G^*(x)|$, où G^* représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et F_n^* celle d'une variable S_n telle que $S_n = \frac{1}{s_n} (\sum_{j=0}^{n-1} X_j)$, les X_j étant elles-mêmes des variables aléatoires indépendantes de même loi et $s_n^2 = \sum_{j=0}^{n-1} E(X_j^2)$. On peut de suite remarquer que si l'on considère une "suite de séquences" $(X_{j,n})_{\substack{j\in\{0,\dots,n-1\} \\ n\in N}}$ où les $(X_{j,n})$ sont, à n fixé, centrées, indépendantes, de même loi, la démonstration, donc la majoration, restent valables en posant ici

$$S_n = \frac{1}{s_n} (\sum_{j=0}^{n-1} X_{j,n}) \qquad s_n^2 = E[(\sum_{j=0}^{n-1} X_{j,n})^2]$$

C'est ainsi que dans le cas de l'estimation d'une densité de probabilité par la méthode des fonctions orthogonales (ce qui correspond strictement à notre étude du c) avec des (ξ_j) donc des $(X_{j,n})$ indépendantes), on pourrait écrire, sous les hypothèses du th. 14, p. 64 (cf Bosq (2)) la majoration :

$$|F_n^*(x) - G^*(x)| = O(\frac{q(n)^{3/2}}{n^{1/2}})$$

F_n^* étant ici la fonction de repartition de

$$\frac{\hat{f}_n(x) - E(\hat{f}_n(x)}{\sigma(\hat{f}_n(x))}$$

Dans le cas de suites de variables $(X_{j,n})$ dépendantes, le seul article à disposition est, à notre connaissance celui de Philipp (9). Encore l'auteur exige-t-il des variables $(X_{j,n})$ des hypothèses que nous ne pouvions concrètement obtenir de celles qui résultent de la définition apportée au A).

Seul "l'esprit" de l'article nous a donc ici inspiré.

Ajoutons enfin que des améliorations de la forme classique du résultat de Berry-Esseen existent, nombreuses, dans la littérature (auteurs comme Katz, Petrov, Zolotarev, etc...). Nous n'avons pas, en un premier temps, essayé de les utiliser, mais ils laissent à penser que de bonnes améliorations de nos résultats actuels, puissent être, par la suite, obtenus.

Précisons maintenant les notations utilisées dans ce paragraphe. Toutes celles utilisées en A) B) C) restent valables. Nous poserons de plus :

$$\star \quad u = \frac{2}{g_n^3} \quad \text{où} \quad g_n^3 = \frac{8}{s_n^3} \cdot \ell \cdot E(|Y_{1,n}^3|)$$

$$= \frac{8}{s_n^3} \sum_{j=1}^{\ell} E(|Y_{j,n}^3|) \quad (Y_j \text{ de même loi})$$

$$\text{et} \quad s_n^2 = \sum_{j=1}^{\ell} E(Y_{j,n}^2) = \ell \cdot E(Y_{1,n}^2)$$

(le s_n^2 ici introduit diffère de celui de la page 45. Nous n'avons pas modifié la notation pour des raisons de commodité. Seule cette "nouvelle" définition servira désormais).

* G^* = fonction de répartition d'une variable normale, centrée, réduite

* F_n = " " de S_n

* F_n^* = " " de $Y_n = \sum_{j=1}^{\ell} Y_{j,n}$

* $f_{j,n}$ = " caractéristique de $Y_{j,n}$ (comme en C))

Rappelons enfin, comme idée directrice, que l'on cherche à majorer :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |H(x)| \quad \text{où} \quad H(x) = F_n(x) - G^*(x)$$

Nous poserons enfin $\qquad H'(x) = F_n^*(x) - G^*(x)$

et supposerons l'hypothèse "H'" (B)) vérifiée, ainsi que :

$$(\lim_{n\to\infty} \frac{q(n)^{3/2}}{n^{1/4}}) = 0$$

2 - *Lemmes préliminaires.*

Lemme 13 (Loeve).- Si $|u| < \frac{2}{g_n^3}$, alors

$$\left|e^{-\frac{u^2}{2}} - \prod_{j=1}^{\ell} f_{j,n}(u)\right| \leq 2\, g_n^3\, |u|^3 \exp\left[-\frac{u^2}{3}\right]$$

Démonstration.- Voir Loeve (15) (p. 286 a) : la démonstration est strictement identique aux notations près :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{remplacer } (f_n^*) \text{ par } (\prod_{j=1}^{\ell} f_{j,n}) \\ \text{remarquer que } s_n^2 \text{ vaut non pas exactement 1 mais } 1 + o(1) \text{ d'après} \\ \text{le lemme 11...}\end{array}\right.$$

Lemme 14.- Tous les $Y_{k,n}$ ayant la loi de $Y_{1,n}$ on peut écrire :

a) $\forall k$, $k \in \{1,\ldots,\ell\}$ $\qquad E(|Y_{k,n}|^3) = O(\frac{q(n)^{3/2}}{n^{3/4}})$

b) $g_n^3 = O(\frac{q(n)^{3/2}}{n^{1/4}})$

c) Il existe une constante K indépendante de n telle que :

$$g_n^3 \geq K\, n^{-1/4}$$

Démonstration.- Nous avons vu (lemme 13) que l'on pouvait écrire :

$$E(Y_{1,n}^4) = O(\frac{q(n)^2}{n})$$

On sait d'autre part (lemme 11) que

$$s_n^2 = 1 + o(1)$$

et (lemme 10)

$$\ell = \frac{1}{\sigma(n)}(1 + o(1)) = O(\sqrt{n})$$

On a dès lors puisque

$$g_n^3 = \ell \cdot \frac{8}{s_n^3} E(|Y_{1,n}^3|) :$$

$$\left.\begin{aligned} g_n^3 &= O[(n^{1/2}) \cdot E(|Y_{1,n}^3|)] \\ &= O[n^{1/2} \cdot (||Y_{1,n}||_3)^3] \\ &= O[n^{1/2} \cdot (||Y_{1,n}||_4)^3] \\ &= O[n^{1/2} \cdot (\frac{q(n)^2}{n})^{3/4}] \end{aligned}\right\} \text{(où } ||Y_{1,n}||_p \text{ désigne la norme dans } L_p \text{ : cf. Neven (16) p. 53)}$$

et (10) $\qquad g_n^3 = O(\frac{q(n)^{3/2}}{n^{1/4}})$ $\qquad$ C.Q.F.D.

Pour c) on remarque que

$$\left[g_n^3 = \ell \cdot \frac{8}{s_n^3} E(|Y_{1,n}^3|)\right] \Longrightarrow g_n^3 \geq K \cdot \ell \, (\|Y_{1,n}\|_3)^3) \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

dès lors on a

$$\begin{aligned} g_n^3 &\geq K\,\ell \cdot (\|Y_{1,n}\|_2)^3 \\ &\geq K\,\ell \cdot \sigma(n)^{3/2} \text{ car } (E(Y_{1,n}^2) = \sigma(n)\,(1+o(1)) : \text{cf. lemme 10}). \\ &\geq K \cdot \frac{1}{\sigma(n)}\,(1+o(1)) \cdot \sigma(n)^{3/2} \quad \text{(lemme 10)} \\ &\geq K' \cdot \sigma(n)^{1/2} \quad \text{pour } n \text{ assez grand} \\ &\geq K'\, n^{-1/4} \quad \text{(lemme 8 c)).} \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

Lemme 15.- (Philipp (9) : On a :

$$\left|E\left[\exp it \left(\sum_{j=1}^{\ell} Y_{j,n}\right)\right] - \prod_{j=1}^{\ell} E(\exp it\, Y_{j,n})\right| \leq 2\, t^2$$

Démonstration.- Nous la retranscrivons brièvement dans nos hypothèses :

a) on a : $E(\exp it\, Y_n) = 1 + \theta \frac{t^2}{2} E(Y_n^2)$ avec $|\theta| < 1$

(et $Y_n = \sum_{j=1}^{\ell} Y_{j,n}$) — cf. p. ex. Loeve p. 193

$\forall j$, $j = 1,\ldots,\ell$ $E(\exp it\, Y_{j,n}) = 1 + \theta_j \frac{t^2}{2} E(Y_{j,n}^2)$, avec $|\theta_j| < 1$

D'où $\prod_{j=1}^{\ell} E(\exp it\, Y_{j,n}) = 1 + \sum_{j=1}^{\ell} \theta_j \frac{t^2}{2} E(Y_{j,n}^2) \times [A]$

avec $\quad [A] = [\prod_{k>j} (1 - \frac{1}{2} t^2 \theta_k E(Y^2_{k,n})]$

Or $\quad |1 + \theta_j \frac{t^2}{2} E(Y^2_{j,n})| \leqslant 1$ (module d'une fonction caractéristique)

Il vient $\quad \prod_{j=1}^{\ell} E(\exp it Y_{j,n}) = 1 + \sum_{j=1}^{\ell} \theta'_j \frac{t^2}{2} E(Y^2_{j,n})$, $|\theta'_j| < 1$.

b) Dès lors on peut écrire :

$$|E(\exp it Y_n) - \prod_{j=1}^{\ell} E(\exp it Y_{j,n})| = |\theta \frac{t^2}{2} E(Y^2_n) - \frac{t^2}{2} [\sum_{j=1}^{\ell} \theta'_j E(Y^2_{j,n})]|$$

$$\leqslant \frac{t^2}{2} E(Y^2_n) + \frac{t^2}{2} [\sum_{j=1}^{\ell} E(Y^2_{j,n})]$$

Or d'après le lemme 10 on a :

$$\begin{cases} * \quad E(Y^2_n) = 1 + o(1) \\ * \quad \sum_{j=1}^{\ell} E(Y^2_{j,n}) = 1 + o(1) \end{cases}$$

D'où enfin : $\quad |E(\exp it Y_n) - \prod_{j=1}^{\ell} E(\exp it Y_{j,n})| \leqslant \frac{t^2}{2} (1 + o(1)) + \frac{t^2}{2} (1 + o(1))$

$\leqslant 2 t^2$ pour n assez grand.

Lemme 16.- On peut écrire $\sup_{x\in\mathbb{R}} |H'(x)| = O(g^3_n) + O[\frac{\varphi(n^{1/4})}{n^{-3/4}}]$

Démonstration.-

a) On utilise d'abord le résultat du Loeve (15) (Basic inequality : p. 285) qui permet d'écrire : en posant $U = \frac{2}{g^3_n}$:

$$\sup |H'| \leqslant \frac{2}{\Pi} \int_0^{2/g^3_n} |\frac{h(u)}{u}| du + \frac{12}{\Pi} g^3_n$$

(puisque l'on a ici G' = dérivée de $G^* = e^{-\frac{u^2}{2}}$ qui se majore par 1)

où h est la différence entre les fonctions caractéristiques de Y_n et $N(0,1)$.

b) Le résultat cherché sera donc démontré si l'on démontre :

$$\text{(11)} \qquad \int_0^{2/g_n^3} \left|\frac{h(u)}{u}\right| du = 0(g_n^3) + 0\left(\frac{\psi(n^{1/4})}{n^{-3/4}}\right) .$$

On décompose alors $h(u)$ en $C + D$ où

$$\begin{cases} C = E(\exp it\, Y_n) - \prod_{j=1}^{\ell} E(\exp it\, Y_{j,n}) \\ D = \prod_{j=1}^{\ell} E(\exp it\, Y_{j,n}) - e^{-\frac{u^2}{2}} \end{cases}$$

c) D'après le lemme 13 on a :

$$|D| < 2\, g_n^3\, |u|^3 \exp\left(-\frac{u^2}{3}\right) \quad \text{si} \quad |u| < \frac{2}{g_n^3}$$

Dès lors

$$\int_0^{2/g_n^3} \frac{|D|}{|u|}\, du \leq 2\, g_n^3 \int_0^{2/g_n^3} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{3}\right) du$$

$$\leq 2\, g_n^3 \int_0^{\infty} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{3}\right) du$$

$$= 0\,(g_n^3)$$

Donc (11) sera prouvée si l'on prouve :

$$\text{(12)} \qquad \int_0^{2/g_n^3} \frac{|C|}{|u|}\, du = 0\,(g_n^3) + 0\left[\frac{\psi(n^{1/4})}{n^{-3/4}}\right]$$

d) Puisque (cf. lemme 14 et hyp. sur $q(n)$) : $g_n^3 \to 0$ on a, pour n assez grand :

$$2/g_n^3 \geq 1 \qquad \text{et donc :}$$

$$\int_0^{2/g_n^3} \frac{1}{|u|}\, |C|\, du = \int_0^{g_n^3(u)} \frac{|C|}{|u|}\, du + \int_{g_n^3(u)}^{1} \frac{|C|}{|u|}\, du + \int_1^{2/g_n^3} \frac{|C|}{|u|}\, du$$

$$= \qquad C_1 \qquad + \qquad C_2 \qquad + \qquad C_3$$

* D'après le lemme 15 on a : $|C| < 2\,t^2$

D'où
$$C_1 \leqslant \int_0^{g_n^3} \frac{2}{|u|}\, u^2\, du \qquad \text{et}$$

$$C_1 \leqslant [g_n^3]^2 \qquad : \qquad C_1 = O(g_n^3)$$

* Pour C_2 on remarque que si $g_n^3 \leqslant u \leqslant 1$

alors :
$$\frac{1}{|g_n^3|} \geqslant \frac{1}{|u|} \geqslant 1$$

Mais on sait d'autre part (lemme 11) que :

$$|C| \leqslant \frac{1}{\sigma(n)}\ \psi\left(\left[\sqrt{\frac{1}{\sigma(n)}}\right]\right)$$

Dès lors on a :
$$C_2 \leqslant \int_{g_n^3}^1 \frac{1}{g_n^3}\,\frac{1}{\sigma(n)}\ \psi\left(\left[\sqrt{\frac{1}{\sigma(n)}}\right]\right) du$$

$$\leqslant [1 - g_n^3]\ .\ \frac{1}{g_n^3}\ .\ \frac{1}{\sigma(n)}\ \psi\left(\left[\sqrt{\frac{1}{\sigma(n)}}\right]\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{g_n^3}\ \left|\frac{1}{\sigma(n)}\right|\ \psi\left(\left[\sqrt{\frac{1}{\sigma(n)}}\right]\right)$$

Or (lemme 8) $\sigma(n) \geqslant K(n^{-1/2})$ et $\psi\left(\left[\sqrt{\frac{1}{\sigma(n)}}\right]\right) \leqslant \psi(n^{1/4})$.

D'autre part (lemme 15) $g_n^3 \geqslant K'\ .\ n^{-1/4}$ ... il vient :

$$C_2 = O(n^{3/4}\ .\ \psi(n^{+1/4})) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

* Pour C_3 enfin on écrit :

$$\int_1^{2/g_n^3} \frac{|C|}{|u|}\, du \leq \frac{1}{\sigma(n)}\, \psi\left(\left[\sqrt{\frac{1}{\sigma(n)}}\right]\right) \int_1^{2/g_n^3} \frac{1}{u}\, du \quad \text{(même majoration de } |C|)$$

$$\leq \frac{1}{\sigma(n)}\, \psi(n^{+1/4})\, \mathrm{Log}(2/g_n^3\ (u))$$

$$= 0\ \left[\psi(n^{+1/4})\ .\ \frac{1}{g_n^3}\ .\ \frac{1}{\sigma(n)}\right]$$

$$= 0(\psi(n^{+1/4})\ .\ n^{+3/4}) \quad \text{(même majoration que } C_2)$$

Finalement $C_1 + C_2 + C_3 = 0(g_n^3) + 0[\psi(n^{+1/4})\ .\ n^{+3/4}]$ C.Q.F.D.

3 - *Résultat final - Discussion*.-

Théorème 6.- Sous l'hypothèse H', et si de plus $\frac{q(n)^{3/2}}{n^{1/4}} \to 0$, alors

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - G^*(x)| = 0\left[\left(\frac{q(n)^6}{n}\right)^{1/12}\right] + 0[n^{3/4}\ \psi(n^{1/4})] \quad (*)$$

Démonstration.- Elle est dûe, dans son esprit, à Philipp .

On a $S_n = Y_n + Z_n$ où $Y_n = \sum_{j=1}^{\ell} Y_{j,n}$ et $Z_n = \sum_{j=1}^{\ell+1} Z_{j,n}$ (cf. lemme 8)

Alors $F_n(x) = P(S_n < x) = P(Y_n + Z_n < x)$

Donc :

$$F_n(x) = P\{(Y_n+Z_n < x) \cap (|Z_n| > \varepsilon_n)\} + P\{(Y_n+Z_n < x) \cap (|Z_n| < \varepsilon_n)$$

pour tout ε_n donné

$$\leq P\{|Z_n| > \varepsilon_n\} + P\{Y_n < x + \varepsilon_n\}$$

(*) Les "x" utilisés jusqu'à la fin du chapitre seront tous réels. Nous souhaitons, par cette précision éviter toute confusion éventuelle avec les éléments de E notés x également utilisés jusqu'ici (dans " $(f_n^*(x))$"p. ex.) mais qui n'interviennent plus explicitement à ce stade des calculs.

Dès lors :

$$(F_n(x)-G^*(x)) \leq P(|Z_n| > \varepsilon_n) + P(Y_n < x + \varepsilon_n) - G^*(x+\varepsilon_n) + G^*(x+\varepsilon_n) - G^*(x)$$

et

$$|F_n(x)-G^*(x)| \leq P(|Z_n| > \varepsilon_n) + |F_n^*(x+\varepsilon_n) - G^*(x+\varepsilon_n)| + |G^*(x+\varepsilon_n) - G^*(x)|$$

$$\leq A \quad + \quad B \quad + \quad C$$

On a alors

$*$ $A \leq \dfrac{D^2}{\varepsilon_n^2}$ ou $D_2 = E(Z_n^2)$ (in. de Tchebychef)

d'où $D^2 = O(\sqrt{\sigma(n)})$ (cf. lemme 11)

$= O(n^{-1/4})$ (cf. lemme 8)

$*$ $B = O(g_n^3) + O[\psi(n^{1/4}) \,.\, n^{+3/4}]$ d'après le lemme 16

$*$ $C = \displaystyle\int_x^{x+\varepsilon_n} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \leq \varepsilon_n$

En prenant $\varepsilon_n = g_n$ on peut écrire

$$A + B + C = O\left[\frac{n^{-1/4}}{g_n^2}\right] + O(g_n^3) + O[\psi(n^{1/4}) \,.\, n^{+3/4}] + O(g_n)$$

$$= O[n^{-1/4} \,.\, n^{1/6}] + O(g_n^3) + O[\psi(n^{1/4}) \,.\, n^{+3/4}] + O(g_n)$$

car $g_n^3 \geq K \,.\, n^{-1/4}$ (lemme 14) .

D'où $$A + B + C = O(n^{-1/12}) + O\left[\frac{g(n)^{1/2}}{n^{1/12}}\right] + O[\psi(n^{1/4}) \,.\, n^{+3/4}]$$

ce qui amène au résultat cherché.

Pour conclure, remarquons d'abord que la condition $\frac{q(n)^{3/2}}{n^{1/4}} \to 0$ est utilisée pour obtenir la condition "$g_n \to 0$" qui intervient dans la démonstration du lemme 16. Elle nous est donc indispensable. Peut être une majoration plus serrée amènerait-elle des conditions moins restrictives sur $q(n)$. Ceci dit, la vitesse de convergence obtenue au th. 6 est assez faible : si $\psi(n)$ vérifie effectivement $n^{+3/4} . \psi(n^{1/4}) \to 0$ on voit qu'elle n'excède pas de toute façon celle de $(\frac{q(n)^6}{n})^{1/2}$.

La condition $\psi(n^{1/4}) . n^{3/4} \to 0$ est vérifiée en particulier si $\psi(n)$ est de la forme $e^{-\lambda n}$. Donc si $\psi(n) = a\,\rho^n$. (On retrouve le cas important du corollaire 1). Si elle n'est pas vérifiée, le th. 6 reste vrai, mais sans intérêt.

Ajoutons pour conclure qu'il nous semble logique que la vitesse de convergence dépende à la fois de $q(n)$ et $\psi(n)$ (plus la suite est mélangeante, plus la convergence est rapide).

CHAPITRE III

ESTIMATION D'UNE LOI DE PROBABILITE DISCRETE.

PRELIMINAIRES.

Ce chapitre constitue un chapitre d'application des résultats de I et II. Il n'a pas la prétention d'une très grande originalité ; néanmoins l'optique "hilbertienne" dans laquelle nos résultats ont été établis nous semble assez neuve.

Notre problème est le suivant : on considère une suite de variables aléatoires discrètes et de même loi, que l'on veut estimer.

En première partie, les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes, ensuite, on étudie le cas où la suite des variables est φ-mélangeante. Dans les deux cas, on se ramènera à l'estimation d'une densité par la méthode des fonctions orthogonales.

Pour préciser ceci, appelons $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace probabilisable, et P une mesure de proba définie sur $(\Omega,\mathcal{A})$ par $P = \sum_{i\in I} k_i \, \delta_{x_i}$ *

où δ_{x_i} représente la mesure de Dirac au point x_i, x_i étant un élément de Ω.

Evidemment I est dénombrable et $\sum_{i\in I} k_i = 1$. D'autre part, si l'on pose $\mu = \sum_{i\in I} \delta_{x_i}$, il est évident que P admet par rapport à μ une dérivée de Radon-Nikodym $\frac{dP}{d\mu}$ dont une version est :

(*) Nous supposerons toujours qu'au moins $2x_i$ ont des masses non nulles $(P \neq \delta x)$.

Nous supposerons $k_i \geq 0$, $\forall\, i \in I$.

$$f = \sum_{i \in I} k_i \, I_{x_i} \qquad (I_{x_i} \text{ : fonction indicatrice de } x_i)$$

et qui est évidemment de carré intégrable $(\frac{dP}{d\mu} \in L^2(\mu)$ puisque :

$$\int_\Omega \left(\frac{dP}{d\mu}\right)^2 d\mu = \sum_{i \in I} k_i^2 .$$

Une base orthonormale de $L^2(\mu)$ étant évidemment $(I_{x_i})_{i \in I}$, on peut estimer $\frac{dP}{d\mu}$ par la méthode des fonctions orthogonales, en estimant chaque coefficient k_i. En supposant que chaque variable (X_n) d'une suite à valeurs dans (Ω, A) est de loi P, on estime k_i par

$$\hat{k}_{i,n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} (I_{x_i} \circ X_j)$$

et f par : $\hat{f}_n = \sum_{i \in I} \hat{k}_{i,n} \, I_{x_i}$.

Remarquons que l'application de la méthode "classique" définie par Bosq en (2) aurait fait prendre comme estimateur de f

$$\hat{f}'_n = \sum_{i=1}^{q(n)} \hat{k}_{i,n} \, I_{x_i} \quad .$$

Mais cette méthode présente ici deux inconvénients :

* elle suppose la connaissance préalable des I_{x_i}, ou, si l'on veut, par exemple, du support de P, pour pouvoir choisir les $q(n)$ "premiers" x_i.

On peut se passer concrètement de cette hypothèse car seuls sont non nuls les $\hat{k}_{i,n}$ correspondant aux x_i apparus dans les valeurs prises par $(X_o, X_1, \ldots, X_{n-1})$. On peut ainsi construire $\hat{f}_n$ à partir de $(X_o,\ldots,X_{n-1})$.

* Elle fait perdre par rapport à $\hat{f}_n$ une partie des observations issues des n variables.

Nous utiliserons donc $\hat{f}_n$, mais ferons nos démonstrations dans l'optique de la méthode des fonctions orthogonales. Ajoutons encore que utiliser $\hat{f}_n$ revient à mettre la densité empirique $\frac{1}{n}$ en chaque valeur prise par $(X_o,\ldots,X_{n-1})$ce qui est bien classique.

Rappelons pour terminer que la première partie traitera du cas où les (X_i) sont indépendantes de loi P, (estimation à partir d'échantillon), la seconde du cas φ-mélangeant. Dans la "littérature" enfin, nous n'avons guère trouvé d'articles relatifs à l'estimation non paramétrique d'une mesure discrète, si ce n'est pas la méthode du noyau (Watson et Leadbetter) (17), pour une mesure discrète sur $\mathbb{N}$ exclusivement.

PREMIERE PARTIE :

(ESTIMATION DE P A PARTIR D'UN ECHANTILLON)

(Les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes).

A - THEOREMES DE CONVERGENCE.-

Théorème 7.- $\hat{f}_n$ converge vers f en moyenne quadratique intégrée :

- On a plus exactement : $E\left[\int_\Omega (\hat{f}_n - f)^2 d\mu\right] = O\left(\frac{1}{n}\right)$, E désignant l'espérance.

Démonstration.-

- D'après les définitions apportées dans les préliminaires, on a évidemment

$$E\left[\int_\Omega (\hat{f}_n - f)^2 d\mu\right] = \sum_{i\in I} \sigma^2(\hat{k}_{i,n}) .$$

- Or $\hat{k}_{i,n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot (I_{x_i} \circ X_j)$, donc les X_j étant indépendantes,

$$\sigma^2(\hat{k}_{i,n}) = \frac{1}{n}(k_i - k_i^2) .$$

On a donc $E\left[\int_\Omega (\hat{f}_n - f)^2 d\mu\right] = \frac{1}{n} \sum_{i\in I} (k_i - k_i^2)$

$$\leqslant \frac{1}{n} \text{ car } k_i(1-k_i) \leqslant k_i \quad \forall\, i$$

et le théorème est démontré.

Théorème 8.- $[E(\sup_{x\in\Omega} |\hat{f}_n(x) - f(x)|^2] = O(\frac{1}{n})$. En particulier, $\hat{f}_n$ converge uniformément vers f en M.q.I.

Démonstration.-

- Par définition des I_{x_i}, on a :

$$\sup_{x\in\Omega} |\hat{f}_n(x) - f(x)|^2 = \sup_{i\in I}(\hat{k}_{i,n} - k_i)^2$$

- Alors

$$\begin{aligned} E(\sup_{x\in\Omega}|\hat{f}_n(x) - f(x)|^2) &= E(\sup_{i\in I}(\hat{k}_{i,n}-k_i)^2) \\ &\leq E(\sum_{i\in I}(\hat{k}_{i,n} - k_i)^2) \\ &\leq \sum_{i\in I}\{E(\hat{k}_{i,n} - k_i)^2\}. \\ &\leq \frac{1}{n} \quad \text{(cf. dem. du th. 7)} \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Théorème 9.- $\hat{f}_n$ converge uniformément presque sûrement vers f.

Démonstration.-

- D'après le lemme de Borel-Cantelli, il suffit de prouver :

$$\forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} P(\sup_{x\in\Omega}|\hat{f}_n(x) - f(x)| > \varepsilon) < \infty$$

soit : $$\forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} P(\sup_{i\in I}|\hat{k}_{i,n} - k_i| > \varepsilon) < \infty$$

ou : $$\forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in I} P(|\hat{k}_{i,n} - k_i| > \varepsilon) < +\infty.$$

soit : $\forall \varepsilon,\ \varepsilon > 0,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \{ \sum_{i\in I} (\frac{E[(\hat{k}_{i,n} - k_i)^4]}{\varepsilon^4}) \} < +\infty$ (Inégalité de Tchebychef).

- Or $E\,[(\hat{k}_{i,n} - k_i)^4] = \frac{1}{n^4} E\{(\sum_{j=0}^{n-1} I_{x_i} \circ X_j - k_i)^4\}$

$$= \frac{1}{n^4}\left[\sum_{j=0}^{n-1} E\alpha_j^4 + 6 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j'=j+1}^{n} E(\alpha_j^2)E(\alpha_{j'}^2)\right]$$

où $\alpha_j = I_{x_i} \circ X_j - k_i$ (les α_j sont centrées et indépendantes).

- Comme $E(\alpha_o^4) < 8\,k_i$ et $E(\alpha_o^2) < k_i$ (calcul direct) on a finalement $E[(\hat{k}_{i,n} - k_i)^4] < \frac{1}{n^4}[8n\,k_i + 3n(n-1)k_i]$

et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \{ \sum_{i\in I} E[(\hat{k}_{i,n} - k_i)^4] \leq K.(\sum_{i\in I} k_i)(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2})$ C.Q.F.D.

$$< +\infty\ .$$

B - *LOI LIMITE DE L'ESTIMATEUR.*

- Soit $x,\ x \in \Omega$, on cherche la loi limite de $\hat{f}_n(x)$

. Lorsque $P(X_i = x) = 0$, $\hat{f}_n(x) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. La loi limite est donc dégénérée en 0. Sinon, pour n assez grand, on peut définir :

$$A_n = \frac{\hat{f}_n(x) - f_n(x)}{\sigma(\hat{f}_n(x))} \quad \text{car} \quad \sigma(\hat{f}_n(x)) > 0.$$

On a alors :

Lemme 17.- $A_n = \sum_{j=0}^{n-1} Y_{j,n}$ où $Y_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{I_x \circ X_j - ki_o}{\sqrt{ki_o - ki_o^2}}$ et

$ki_o = P(\{x\})$. Chaque $Y_{j,n}$ prend les valeurs

$$\begin{cases} {}^{1}/\sqrt{n}\ \sqrt{\dfrac{1-ki_o}{ki_o}} \\ \\ -\ {}^{1}/\sqrt{n}\ \sqrt{\dfrac{ki_o}{1-ki_o}} \end{cases} \quad \text{avec les probas} \quad \begin{cases} ki_o \\ 1 - ki_o \end{cases} .$$

Démonstration.-

On a $\hat{f}_n(x) = \hat{ki}_{o,n}$ où $\hat{ki}_{o,n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} I_x \circ X_j$,

$$\text{donc : } A_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[(I_x \circ X_j) - ki_o\right]}{\sqrt{\dfrac{ki_o - ki_o^2}{n}}}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} Y_{j,n} \quad \text{avec} \quad Y_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{I_x \circ X_j - ki_o}{\sqrt{ki_o - ki_o^2}}$$

et comme $I_x \circ X_j$ prend les valeurs 0 et 1 exclusivement avec les probas $1-ki_o$ et ki_o, le lemme est démontré.

On en déduit immédiatement le

Théorème 10.- Lorsque $n \to \infty$, $L(A_n) \to N(0,1)$.

Démonstration.- Il suffit d'utiliser le théorème central limite "classique" (Loeve (15) p. 270) appliqué aux variables de Bernoulli. On a de suite $L(A_n) \to N(0,1)$.

Nous allons pour terminer majorer $\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n^*(x) - G^*(x)|$ où F_n^* représente la fonction de répartition de S_n et G^* celle de $\mathcal{N}(0,1)$.

Nous avons déjà remarqué que la borne de Berry Esseen s'applique aux cas de "suite de séquences" de variables indépendantes. Elle donne ici

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n^*(x) - G^*(x)| = O\left(\frac{1}{s_n^3} \sum_{j=0}^{n-1} E(|Y_{j,n}|^3)\right) \quad \text{(cf. Loeve p. 288 et notre chap. I)}$$

où $s_n^2 = \sum_{j=0}^{n-1} E(Y_{j,n}^2)$

Comme $s_n^2 = 1$, $\forall n$, et que $|Y_{j,n}| = O(n^{-1/2})$ (cf. Lemme 17)

il vient
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n^*(x) - G^*(x)| = O(n.n^{-3/2}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

La convergence est donc assez rapide.

Notre étude s'achève ainsi dans le cas de l'estimation d'une mesure discrète par échantillon (X_i indépendantes).

DEUXIEME PARTIE :

ESTIMATION DE LA LOI DE PROBABILITES

. D'UN PROCESSUS STATIONNAIRE :

(Suite ψ-mélangeante).

A - DONNEES DU PROBLEME.

On considère une suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω,A,P), à valeurs dans un espace mesuré (E,B,μ). On la suppose une fois pour toutes strictement stationnaire et ψ-mélangeante au sens de (I - A - 1) (En particulier, les lemmes 1 et 2 du chapitre I s'appliquent).

Nous supposons que la loi commune P_o des ξ_n, est une mesure de probabilité discrète ; c'est-à-dire que

$$\mu = \sum_{i\in I} \delta_{x_i}$$ comme dans les préliminaires de ce chapitre III.

et que $$P_o = \sum_{i\in I} k_i \, \delta_{x_i}$$

On cherche à estimer $\dfrac{dP_o}{d\mu}$ par $\hat{f}_n(x) = \sum_{i\in I} \hat{k}_{i,n} \, I_{x_i}(x)$,

$$\text{avec} \quad \hat{k}_{i,n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (I_{x_i} \circ \xi_j).$$

Les résultats et démonstrations qui suivent constituent donc un "mélange" des chapitres I, II et de la première partie du chap. III.

B - *THEOREMES DE CONVERGENCE.*

Théorème 11.- Si $\sum_{i=0}^{\infty} \phi(i) < +\infty$, $\hat{f}_n$ converge vers f en moyenne quadratique intégrée :

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_E (\hat{f}_n - f)^2 d\mu\right) = 0 .$$

Démonstration.-

- On remarque d'abord que :

$$\int_E (\hat{f}_n - f)^2 d\mu = \sum_{i\in I} ((\hat{k}_{i,n} - k_i)^2) \quad \text{par définition des } I_{x_i}$$

- Or : $\cdot\ E(\hat{k}_{i,n}{}^2) = \frac{1}{n^2} E\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} I_{x_i} \circ \xi_j\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{j=0}^{n-1} E\left[(I_{x_i} \circ \xi_j)^2\right] + \sum_{j\neq j'} E\left[I_{x_i} \circ \xi_j \cdot I_{x_i} \circ \xi_{j'}\right]\right]$

$\cdot\ E\left[(I_{x_i} \circ \xi_j)^2\right] = E\left[I_{x_i} \circ \xi_j\right] = k_i$

$\cdot\ E\left[(I_{x_i} \circ \xi_j) \cdot (I_{x_i} \circ \xi_{j'}\right] = P(\xi_j = x_i \text{ et } \xi_{j'} = x_i).$

- La définition même de la ϕ-mélangeance (I. A)) donne :

$$\left|P(\xi_j = x_i \text{ et } \xi_{j'} = x_i) - P(\xi_j = x_i).P\left[\xi_{j'} = x_i\right]\right| \leq \phi(|j'-j'|)P(\xi_j = x_i)$$

soit

$$\left|P(\xi_j = x_i \text{ et } \xi_{j'} = x_i) - k_i^2\right| \leq \phi(|j'-j|)k_i.$$

- Il vient :

$$\left\{\begin{aligned} &\cdot\ E(\hat{k}_{i,n}^{\,2}) \leq \frac{1}{n^2}\Big[n\, k_i + \sum_{j,j'} (k_i^{\,2} + k_i\, \psi(|j'-j|))\Big] \\ &\qquad\qquad \leq \frac{k_i}{n} + \frac{1}{n^2}\Big[n(n-1)\, k_i^{\,2} + k_i\, 2n\,(\sum_{j=0}^{\infty} \psi(j))\Big] \\ &\cdot\ E\big[(\hat{k}_{i,n} - k_i)^2\big] \leq \frac{k_i - k_i^{\,2}}{n} + 2\,\frac{k_i}{n}\,(\sum_{j=0}^{\infty} \psi(j))\ . \end{aligned}\right.$$

- Finalement, on obtient $E\left[\int_E (\hat{f}_n - f)^2 d\mu\right] = O(\frac{1}{n})$ si $\sum_{j=0}^{\infty} \psi(j) < +\infty$ C.Q.F.D.

Théorème 12.- <u>Sous la condition</u> $\sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\psi(j)} < +\infty$, $\hat{f}_n$ <u>converge uniformément presque sûrement vers</u> f.

Démonstration.-

- On doit montrer : $\sup_{x\in E} |\hat{f}_n(x) - f(x)| \xrightarrow[P.S.]{} 0$, et (cf. démonstration du th. 9) il suffit de prouver :

$$\forall\varepsilon\quad \varepsilon > 0 \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{i\in I} P|\hat{k}_{i,n} - k_i| > \varepsilon) < +\infty$$

$$\text{ou}\qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{i\in I} \{\frac{1}{n^4}\ E[(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j)^4]\}) < +\infty \qquad \text{avec}$$

$$\alpha_j = I_{x_i} \circ \xi_j - k_i\ .$$

- Pour majorer $E[(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j)^4]$ on utilise une démonstration calquée sur Billingsley (13) p. 173 : l'utilisation directe de son lemme donne

$$E[(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j)^4] \leq K[n^2(1-k_i)^4]$$

or $\sum_{i\in I} (1-k_i)^4$ peut être infini. Un travail analogue au sien mais où $E(|\alpha_o|)$ est calculé (et non plus majoré par $1-k_i$) donne :

$$E[(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j)^4] \leq Kn^2\, k_i(1-k_i)^3$$

$$\leq K'k_i.n^2 \qquad \text{sous la condition } \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\phi(j)} < \infty .$$

- Finalement, on a : $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{i\in I} \{\frac{1}{n^4} \; E[\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j)^4]\}$

$$\leq K \,(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2})(\sum_{i\in I} k_i) < +\infty \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

C - *LOI LIMITE DE L'ESTIMATEUR.*

- Ici encore on considère un élément x de E. On suppose que $P(\xi_i=x) > 0$ (sinon $\hat{f}_n(x)$ tend vers la loi dégénérée en 0) et que donc pour n assez grand

$$A_n = \frac{\hat{f}_n(x) - f_n(x)}{\sigma(\hat{f}_n(x))} \quad \text{est définie car } \sigma(\hat{f}_n(x)) > 0.$$

On suppose de plus que $P(\xi_i=x) \leq \frac{1}{2}$, on a alors :

Lemme 18.-

$*$ $A_n = \sum_{j=0}^{n-1} X_{j,n}$ où $X_{j,n} = \dfrac{I_x \circ \xi_j - ki_o}{\sqrt{E\{\sum_{j=0}^{n-1} [I_x \circ \xi_j - ki_o]^2\}}}$ et $ki_o = P(\xi_i = x)$.

$*$ Les $X_{j,n}$ prennent les valeurs

$$(1-k_{i_o}).\{E[\sum_{j=0}^{n-1}(I_x \circ \xi_j - ki_o)^2]\}^{-1/2} \text{ et } -k_{i_o}.\{E[\sum_{j=0}^{n-1}(I_x \circ \xi_j - ki_o)^2]\}^{-1/2}$$

avec les probabilités ki_o et $1-ki_o$.

* Si $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(j) < \frac{1}{4}$, on peut écrire

$$\begin{cases} . \quad \forall j, \quad j = 0,\dots,n-1 & |X_{j,n}| = O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \\ . \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & \sigma^2(X_{j,n}) = O(\frac{1}{n}) \\ . \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & \sigma^2(X_{j,n}) \geq C\,\frac{1}{n} \quad \text{(C constante indépendante de j et n).} \end{cases}$$

Démonstration.-

- Toutes les remarques faites au chap. I sur les "suite de séquences" [I D) 2)] restent vraies ici,et les lemmes 4 et 5 s'appliquent aux $X_{j,n}$ ici utilisés. Le début du lemme est de même évident, nous démontrerons simplement la 3e condition.

- Calculons : $A = E\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} (I_x \circ \xi_j - k_i)\right)^2\right]$.

* On remarque que : $E\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} I_x \circ \xi_j\right)^2\right] = \sum_{j=0}^{n-1} E\left[(I_x \circ \xi_j)^2\right] + \sum_{j\neq j'} E\left[(I_x \circ \xi_j).(I_x \circ \xi_{j'})\right]$.

$$= n.k_{i_o} + \sum_{j\neq j'} P(\xi_j = x \text{ et } \xi_{j'} = x).$$

$$\text{D'où } A = n\, ki_o - n\, ki_o^2 + \sum_{j\neq j'} P(\xi_j = x_i \text{ et } \xi_{j'} = x_i).$$

* Or $|P(\xi_j = x \text{ et } \xi_{j'} = x) - P(\xi_j = x)P(\xi_{j'} = x)| \leq \varphi(|j'-j|)P(\xi_j = x)$

d'où : $n\, ki_o - n^2 ki_o^2 + \sum_{j\neq j'} (ki_o^2 - \varphi(|j'-j|)ki_o) \leq A \leq n\, ki_o - n^2 ki_o^2 +$

$$\sum_{j\neq j'} (ki_o^2 + \psi|j'-j|ki_o)$$

et $n\, ki_o - n^2 ki_o^2 + n(n-1)ki_o^2 - 2n(\sum_{j=0}^{\infty} \psi(j))ki_o \leqslant \mathbf{A} \leqslant n\, ki_o - n^2 ki_o^2 + (n(n-1)ki_o^2 +$

$$2n(\sum_{j=0}^{\infty} \psi(j))ki_o$$

d'où enfin

$$n\, ki_o\left[1 - ki_o - 2\sum_{j=0}^{\infty} \psi(j)\right] \leqslant A \leqslant n\, ki_o\left[1 - ki_o + 2\sum_{j=0}^{\infty} \psi(j)\right] .$$

- Or $X_{j,n} = \dfrac{I_x \circ \xi_j - ki_o}{\sqrt{A}}$.

Un calcul direct donne donc

si $(1-ki_o - 2\sum_{j=0}^{\infty} \psi(j)) > 0$, $\dfrac{ki_o(1-ki_o)}{n\, ki_o\left[1+ki_o+2(\sum_{j=0}^{\infty} \psi(j))\right]} \leqslant \sigma^2(n) \leqslant \dfrac{k_{io}(1-ki_o)}{n\, ki_o\left[1-ki_o - 2(\sum_{j=0}^{\infty} \psi(j))\right]}$

Par conséquent, si $ki_o \leqslant \frac{1}{2}$,

on a bien, sous la condition $\sum_{j=0}^{\infty} \psi(j) < \frac{1}{4}$; $\frac{1}{n} \times \frac{1}{C} \leqslant \sigma^2(n) \leqslant \frac{1}{n} \times \frac{1}{C'}$.

- De même, on peut écrire

$$|X_{j,n}| \leqslant \frac{\sup(ki_o, 1-ki_o)}{\sqrt{A}}$$

$$= 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) .$$

C.Q.F.D.

On se place désormais dans toutes les conditions du lemme :

on a $A_n = \sum_{j=0}^{n-1} X_{j,n}$ avec $\sigma^2(n) = O(\frac{1}{n})$ et $\sigma^2(A_n) = 1$. $(\sigma^2(n) = E(X_{j,n}^2))$

La construction effectuée au lemme 8 s'applique donc point pour point les conclusions du lemme 9 aussi, le théorème 3 également ... Transposé, il pourrait s'écrire (cf. chap. I, C)

$$L(A_n) \to N(0,1) \quad \text{si} \quad \frac{1}{\sigma(n)} \left[E(\sum_{j=0}^{h} X_{j,n})^4\right] \to 0$$

où h est le plus petit entier tel que $E\left[(\sum_{j=0}^{h-1} X_{j,n})^2\right] \leq \sigma(n)$.

La condition de convergence s'écrit donc, d'après le lemme 6 :

$\frac{1}{\sigma(n)} \left[h^2 \, C^4 (\sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\varphi(j)})\right] \to 0$ où C est une constante majorant $|X_{j,n}|$

(soit ici, $C = \frac{K}{\sqrt{n}}$ (cf. lemme 18)).

Or h (cf. lemmes 9 et 10) vérifie : $\frac{1}{\sigma(n)} h^2 = O(n^{3/2})$.

Finalement $L(A_n) \to N(0,1)$ si $n^{3/2}.(n^{-1/2})^4.(\sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\varphi(j)}) \to 0$

soit, si $\sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\varphi(j)} < +\infty$; en conclusion :

Théorème 10.- Pour tout x tel que $P(\xi_i = x) \leq \frac{1}{2}$, sous l'hypothèse : $\sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\varphi(j)} < \infty$, avec $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(j) < \frac{1}{4}$.

on a : $L\left(\frac{\hat{f}_n(x) - f_n(x)}{\sigma(\hat{f}_n(x))}\right) \to N(0,1)$

Remarque : Si $P(\xi_i = x) > \frac{1}{2}$ (ce qui ne peut arriver que pour un seul x) le résultat demeure voir sous la condition $\sum_{j=1}^{\infty} \phi(j) < \frac{1 - P(\xi_i = x)\ldots}{2}$

D - VITESSE DE CONVERGENCE DE L'ESTIMATEUR.

Il s'agit de reprendre l'étude faite au chap. I, E)... Les résultats en sont inchangés, aux majorations près. Les notations et lemmes préliminaires restent valables ; mais un calcul direct donne ici

$$E|Y_{k,n}{}^3| = O(n^{-3/4}) \quad \text{à partir de} \quad |X_{j,n}| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{et} \quad g_n{}^3 = O(n^{-1/4})$$

Compte tenu des majorations précédentes, le théorème devient :

Théorème 11.- $\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^*(x) - G^*(x)| = O(n^{-\frac{1}{12}}) + O(\phi(n^{1/4}).n^{3/4})$

où F_n^* représente la fonction de répartition de A_n, G^* celle de $N(0,1)$.

APPENDICE

-=-=-=-=-

UN THEOREME LIMITE POUR UN ESTIMATEUR DE LA DENSITE CONDITIONNELLE D'UN PROCESSUS STATIONNAIRE ET MELANGEANT.

PRELIMINAIRES.

Nous avons défini au chapitre I, un estimateur de la densité conditionnelle f/h, f étant la densité de la loi de probabilité des variables (ξ_i) d'une suite stationnaire et mélangeante à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, h celle des couples (ξ_i, ξ_{i+1}).

Nous n'avons malheureusement pu obtenir de théorème limite pour l'estimateur $\frac{\hat{h}_n^*}{\hat{f}_n^*}$ défini au I. Les résultats qui suivent ne constituent donc qu'une première étape vers un résultat plus élaboré. En fait, gardant sur les (ξ_i) toutes les hypothèses et notations faites au I) E), nous avons, pour raison de commodité, posé

$$\hat{f}'_n(x) = \sum_{k=0}^{\alpha(n)} \left(\sum_{i=0}^{q(n)} \frac{e_i^*(\xi_{2k})}{\alpha(n)} e_i^*(x) \right)$$

$$\hat{h}'_n(x,y) = \sum_{k=0}^{\alpha(n)} \left\{ \sum_{\substack{0 \leq i \leq q(n) \\ 0 \leq j \leq q(n)}} \frac{e_i^*(\xi_{2k}) e_j^*(\xi_{2k+1})}{\alpha(n)} e_i^*(x) e_j^*(y) \right\}$$

où $\begin{cases} \alpha(n) = \dfrac{n-2}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \alpha(n) = \dfrac{n-3}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

Alors $\hat{f}'_n$ et $\hat{h}'_n$ sont deux estimateurs de f et h. Il suffit de remarquer que par rapport aux estimateurs de I, la définition reste la même à ceci près que l'on n'utilise, pour $\hat{f}'_n$, que $\xi_o, \xi_2, \xi_4, \ldots, \xi_{2\alpha(n)}$

au lieu de $\xi_o, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$

et pour $\hat{h}'_n$ $(\xi_o, \xi_1), (\xi_2, \xi_3), \ldots, (\xi_{2\alpha(n))}, \xi_{2(\alpha(n))+1})$

au lieu de $(\xi_o, \xi_1), (\xi_1, \xi_2), \ldots, (\xi_{n-2}, \xi_{n-1})$

enfin que l'on a pris $q_1(n) = q_2(n) = q(n)$.

$\hat{f}'_n$ et $\hat{h}'_n$ demeurent, sous les conditions des théorèmes de I), des estimateurs convergent p.s. vers f et h. On prend alors $\dfrac{\hat{h}'_n}{\hat{f}'_n}$ comme estimateur de h/f, à chaque fois que la quantité existe, et on a

$$\lim_{n\to\infty} \text{ p.s. } \sup_{(x,y)\in K\times\mathbb{R}^p} \left| \frac{\hat{h}'_n(x,y)}{\hat{f}'_n(x)} - \frac{h(x,y)}{f(x)} \right| = 0 \quad \text{sur tout}$$

compact K sur lequel f est positive, sous les conditions du théorème 4 (avec $q_1(n)\, q_2(n) = q^2(n)$).

Nous allons ici chercher la loi limite de :

$$\left(\frac{\hat{h}'_n(x,y) - h_n(x,y)}{\sigma[\hat{h}'_n(x,y)]}\right) \times \left(\frac{\hat{f}'_n(x) - f_n(x)}{\sigma[\hat{f}'_n(x)]}\right)^{-1} .$$

Et pour ce faire, chercher celle du couple

$$\left(\frac{\hat{h}'_n(x,y) - h_n(x,y)}{\sigma[h'_n(x,y)]} , \frac{\hat{f}'_n(x) - f_n(x)}{\sigma[\hat{f}'_n(x)]}\right)$$

soit enfin celle des variables

$$A_n^{t_1 t_2} = t_1 \frac{\hat{h}'_n(x,y) - h_n(x,y)}{\sigma\left[h'_n(x,y)\right]} + t_2 \frac{\hat{f}'_n(x) - f_n(x)}{\sigma\left[f'_n(x)\right]} \quad (t_1,\ t_2,\ 2 \text{ réels quelconques})$$

afin d'utiliser le théorème de Cramer-Wold.

A - *NOTATIONS* - *LEMMES PREMINAIRES SUR LES* $A_n^{t_1 t_2}$.

- On posera : $U_{h,n}(x) = \sum_{i=0}^{q(n)} e_i^*(\xi_h)\ e_i^*(x)$

$$V_{h,n}(x,y) = U_{h,n}(x) . U_{h+1,n}(y)$$

$$U'_{h,n}(x) = \frac{1}{\alpha(n)} \{U_{h,n}(x) - E\left[U_{h,n}(x)\right]\}$$

d'où : $$\hat{f}'_n(x) - f_n(x) = \sum_{k=0}^{\alpha(n)} U'_{2k,n}(x)$$

$$V'_{h,n}(x,y) = \frac{1}{\alpha(n)} \{V_{h,n}(x,y) - E\left[V_{h,n}(x,y)\right]\}$$

d'où : $$\hat{h}'_n(x,y) - h_n(x,y) = \sum_{k=0}^{\alpha(n)} V'_{2k,n}(x,y).$$

Enfin :

$$W_{h,n} = \frac{t_1\ U'_{h,n}(x)}{\sqrt{E\ (\sum_{k=0}^{\alpha(n)} U'_{2k,n}(x))^2}} + \frac{t_2\ V'_{h,n}(x,y)}{\sqrt{E\ (\sum_{k=0}^{\alpha(n)} V'_{2k,n}(x,y))^2}}$$

d'où $$A_n^{t_1 t_2} = \sum_{k=0}^{\alpha(n)} W_{2k,n}.$$

Cette quantité est toujours définie pour n assez grand, ce qui revient à dire, puisque $E(\hat{h}'_n(x,y)) = h_n(x,y)$ et $E(\hat{f}'_n(x) = f_n(x))$, que l'on n'a jamais pour n assez grand
$$\begin{cases} \hat{h}'_n(x,y) \underset{p.s.}{=} h_n(x,y) \\ \\ \hat{f}'_n(x) \underset{p.s.}{=} f_n(x) \end{cases}$$

problème que nous avons déjà abordé aux chap. II et III.

On a alors :

<u>*Lemme*</u> *19.-* Les $(W_{2k,n})_{\substack{k=0,\dots,\alpha(n) \\ n\in\mathbb{N}}}$ forment une suite de suites ψ' mélangeante, stationnaire de variables aléatoires centrées définies sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ à valeur dans $(\mathbb{R},B_{\mathbb{R}})$.

<u>*Démonstration.-*</u>

- La ψ-mélangeance provient de ce que le tribu engendrée par $(W_{2k,n})$ est contenue dans celle engendrée par (ξ_{2k},ξ_{2k+1}). Donc celles engendrées par $(W_o,W_2,\dots,W_{2k})$ et par $(W_{2k+2h},W_{2k+2h+2},\dots,W_{2\alpha(n)})$ le sont dans celles engendrées par $(\xi_o,\xi_1,\dots,\xi_{2k+1})$ et $(\xi_{2k+2h},\dots,\xi_{n-1})$. La suite (ξ_i) étant ψ-mélangeante, la suite des (W_{2k}) le sera également.

- La stationnarité résulte de même de la dépendance de la loi de W_{2k} par rapport à ξ_{2k}, ξ_{2k+1}.

<u>*Lemme*</u> *20.-* Si, en plus des conditions du théorème 4, on suppose que :

. $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\psi(i)} < \frac{1}{4}$

. $\forall i,\ i \in \mathbb{N},\ \forall x,\ x \in E \qquad |e_i(x)| \leq M$

. $\forall\ (x,y)\quad (x,y) \in E \times E \qquad f_n(x) \to f(x)$ et $h_n(x,y) \to h(x,y)$

. $E\Big[\Big(\sum_{i=0}^{q(n)} e_i^*(\xi_o)\, e_i^*(x)\Big)^2\Big] \geq A\ q(n)$ pour n assez grand

. $E\Big[\sum_{i=0}^{q(n)} e_i^*(\xi_o)\, e_i^*(x))^2 . \Big(\sum_{i=0}^{q(n)} e_i^*(\xi_1)\, e_i^*(y)\Big)^2\Big] \geq B\ q^2(n)$ pour n assez grand. Alors,

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[(A_n^{t_1 t_2})^2\Big] = t_1^2 + t_2^2 .$$

Démonstration.-

. Il suffit de montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{E\{(\sum_{k=0}^{\alpha(n)} U'_{2k,n}).(\sum_{k=0}^{\alpha(n)} V'_{2k,n})\}}{\sqrt{E\{(\sum_{k=0}^{\alpha(n)} U'_{2k,n})^2\}.E\{(\sum_{k=0}^{\alpha(n)} V'_{2k,n})^2\}}} = 0$

Nous appelons N et D le numérateur et le dénominateur à étudier...

. Pour D : on a $E\{(\sum_{k=0}^{\alpha(n)} U'_{2k,n})^2\} \geq \Big[1 - 4(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\varphi(i)})\Big].\alpha(n).E(U'^{\,2}_{o,n})$

(cf. lemme 8 : démonstration)

$$E\{(\sum_{k=0}^{\alpha(n)} V'_{2k,n})^2\} \geq \Big[1 - 4(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\varphi(i)})\Big].\alpha(n).E(V'^{\,2}_{o,n})$$

même principe de démonstration : φ-mélangeance des $V'_{2k,n}$.

Or, sous les hypothèses de ce lemme, on a :

$$E(U'^{\,2}_{o,n}) \geq \Big[A\ q(n) - f_n^2(x)\Big].\Big[\frac{1}{\alpha(n)}\Big]^2$$

$$E(V'^{\,2}_{o,n}) \geq \Big[B\ q^2(n) - h_n^2(x,y)\Big].\Big[\frac{1}{\alpha(n)}\Big]^2 .$$

D'où $D \geq K \cdot \dfrac{q(n)^{3/2}}{\alpha(n)}$ où K' est une constante positive indépendante de n.

. Pour N : $N = E[\hat{h}_n'(x,y)(\hat{f}_n'(x) - f_n(x))]$

$$= E\{[\sum_{k=0}^{\alpha(n)} (\frac{1}{\alpha(n)} U_{2k,n}(x).U_{2k+1,n}(y))].[\sum_{k=0}^{\alpha(n)} U'_{2k,n}(x)]$$

$$= A + B$$

où

$$* \ |A| = \left|\sum_{k=0}^{\alpha(n)} E(\frac{1}{\alpha(n)} \cdot U_{2k,n}(x).U_{2k+1,n}(y).U'_{2k,n}(x))\right|$$

$$\leq \left|\sum_{k=0}^{\alpha(n)} \{E(\frac{U_{2k,n}(x)}{\alpha(n)} \cdot U_{2k+1,n}(y))^2 \cdot E(U'_{2k,n}(x))^2\}^{1/2}\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\alpha(n)} M^2 q^2(n).\{E\left[\frac{U_{2k,n}(x)}{\alpha(n)}\right]^2\} \quad \text{car} \left\{\begin{array}{l} |U_{2k+1,n}(y)| \leq M^2 q(n) \\ E[(U'_{2k,n}(x))^2] \leq \left[\frac{1}{\alpha(n)} E(u_{2k,n}(x))\right]^2 \end{array}\right.$$

$$* \ |B| = \left|\sum_{k=0}^{\alpha(n)} (\sum_{k'\neq k} E\{\frac{1}{\alpha(n)} U_{2k,n}(x) \cdot U_{2k+1,n}(y).U'_{2k',n}(x)\})\right.$$

$$\leq 4(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\varphi(i)}) \sum_{k=0}^{\alpha(n)} \{E\ [\frac{1}{\alpha(n)} U_{2k,n}(x)\ U_{2k+1,n}(y)]^2.E(U'_{2k',n}(x))^2\}^{1/2}$$

d'après le lemme 7 (de Billinsgley) (les variables $U_{2k,n}$ et $U'_{2k,n}$ sont φ-mélangeantes). D'où

$$|B| \leq K'' \sum_{k=0}^{\alpha(n)} (M^2.q(n)) \cdot \{E(\frac{U_{2k,n}(x)}{\alpha(n)})^2\} \quad \text{(même raisonnement que pour A).}$$

Il vient $|N| = O\left[q(n) \cdot E\{\sum_{k=0}^{\alpha(n)} [(\frac{U_{2k,n}(x)}{\alpha(n)})^2]\}\right]$

Or, les variables centrés $\left(\frac{U'_{2k,n}(x)}{\alpha(n)}\right)^2$ forment une suite de suites ψ-mélangeante et stationnaire. Chacune se majorant par $\left(\frac{M^2}{2}\frac{q(n)}{\alpha(n)}\right)^2$, le lemme 7 (Billingsley) permet d'écrire :

$$E\left[\left\{\sum_{k=0}^{\alpha(n)}\left(\frac{U'_{2k,n}(x)}{\alpha(n)}\right)^2\right\}^4\right] = 0\left\{(\alpha(n))^2 \cdot \left[\left(\frac{M^2}{2}\cdot\frac{q(n)}{\alpha(n)}\right)^8\right]\right\}$$

d'où (normes dans L_p) : $E\left[\sum_{k=0}^{\alpha(n)}\left[\left(\frac{U'_{2k,n}(x)}{\alpha(n)}\right)^2\right]\right] = 0\left(\frac{q(n)^2}{\alpha(n)^{3/2}}\right)$

et enfin $|N| = 0 \cdot q(n)\left[\frac{q(n)^2}{\alpha(n)^{3/2}} - \frac{f_n^2(x)}{\alpha(n)}\right].$

$$= 0\left[\frac{q(n)^3}{\alpha(n)^{3/2}} + \frac{q(n)}{\alpha(n)}\right].$$

. Pour conclure : $\frac{|N|}{|D|} = 0\left[\frac{q(n)^3}{\alpha(n)^{3/2}} + \frac{q(n)}{\alpha(n)}\right] \cdot \left[\frac{q(n)^{3/2}}{\alpha(n)}\right]^{-1}$

$$= 0\left[\left(\frac{q(n)^3}{\alpha(n)}\right)^{1/2} + (q(n))^{-1/2}\right] = o(1)$$

si $q(n) \to \infty$ et $\frac{q(n)^3}{\alpha(n)} \to 0$. C.Q.F.D.

Lemme 21.- Sous la condition : $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\psi(i)} < \frac{1}{4}$, on a :

$$\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ \forall k,\ k = 0,\dots,\alpha(n) \quad E(W_{2k,n}^2) = \sigma^2(n) = 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démonstration.-

. $\sigma^2(n) = E(W_{o,n}^2) = t_2^2[\{E(U'^{\,2}_{o,n})\}\{E[(\sum_{k=0}^{\alpha(n)} U'_{2k,n})^2]\}^{-1}$

$$+ t_1^2[\{E(V'^{\,2}_{o,n})\}\{E[(\sum_{k=0}^{\alpha(n)} V'_{2k,n})^2]\}^{-1}$$

$$+ 2t_1t_2[E(V'_{o,n}.U'_{o,n})]\{E[[\sum_{k=0}^{\alpha(n)} U'_{2k,n})^2].E[\sum_{k=0}^{\alpha(n)} V'_{2k,n}]]\}^{-1/2}$$

. Or (cf. Lemme précédent) on a :

$$E\ [(\sum_{k=0}^{\alpha(n)} U'_{2k,n})^2] \geq K.\alpha(n)\ \ E(U'^{\,2}_{o,n})$$

$$E\ [(\sum_{k=0}^{\alpha(n)} V'_{2k,n})^2)] \geq K\ \ \alpha(n)\ \ E(V'^{\,2}_{o,n})$$ ... ce qui permet

de conclure de suite.

Lemme 22.- Sous les hypothèses des deux lemmes précédents, on a :

$$\forall\, n,\ n \in \mathbb{N},\ \forall\, k,\ \ k = 0,\dots,\alpha(n)\qquad |W_{2k,n}| = 0(\frac{q(n)}{\sqrt{n}}).$$

Démonstration.-

Directe, à partir de toutes celles introduites précédemment.

En résumé, si nous posons $X_{k,n} = \dfrac{1}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}} W_{2k,n}$ (on suppose bien sûr $t_1^2 + t_2^2 \neq 0$; sinon $A_n^{t_1t_2}$ est identiquement nulle et tend vers la loi dégénérée en 0), nous avons vu que, sous les hypothèses des lemmes précédents

* Les $(X_{k,n})_{\substack{k=0,\ldots,(n-1)\\ n\in\mathbb{N}}}$ forment une suite de suites de v.a. centrées, stationnaire et mélangeante

* $E\left[\left(\sum_{k=0}^{\alpha(n)} X_{k,n}\right)^2\right] \to 1$ si $n \to \infty$

* $\sigma^2(X_{k,n}) = 0(\frac{1}{n})$ pour tout k, pour tout n

* $|X_{k,n}| = 0(\frac{q(n)}{\sqrt{n}})$ " " .

Alors, puisque les $(X_{k,n})$ ont les propriétés requises dans l'introduction du théorème 5, on peut écrire $\frac{1}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}} A_n^{t_1 t_2} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$, puisque $\sum_{k=0}^{\alpha(n)} X_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}} A_n$. La démonstration du théorème 5 s'applique point pour point à ceci presque la convergence vers $N(0,1)$ sera ici obtenue si

$$n^{3/2}\left[\frac{q(n)}{\sqrt{n}}\right]^4 \to 0 \quad \text{ou} \quad \frac{q(n)^4}{n^{1/2}} \to 0 \qquad (\text{majoration de } |X_{j,n}|).$$

On peut donc énoncer :

Lemme 23.- $\forall t_1$, $t_1 \in \mathbb{R}$, $\forall t_2$, $t_2 \in \mathbb{R}$.

$$t_1 \frac{\hat{f}'_n(x) - f_n(x)}{\sigma(\hat{f}'_n(x))} + t_2 \frac{\hat{h}'_n(x,y) - h_n(x,y)}{\sigma(\hat{h}'_n(x,y))} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,\sqrt{t_1^2 + t_2^2})$$

(sous les hypothèses des lemmes précédents et la condition $\frac{q(n)^8}{n} \to 0$).

B - *LOI LIMITE.*

Rappelons le théorème de Cramer-Wold (Billingsley (13) p. 49) :

" Dans $\mathbb{R}^2$, (X_{1n},X_{2n}) converge en loi vers (X,Y) si et seulement si chaque combinaison linéaire de $X_{1,n}$ et $X_{2,n}$ converge en loi vers la même combinaison linéaire de (X,Y)."

Il nous permet d'écrire

Théorème 12.- Sous les hypothèses du lemme précédent, le couple

$$([(\hat{h}_n(x) - h_n(x)].[\sigma(\hat{h}_n'(x))]^{-1}, (\hat{h}_n'(x,y) - h_n(x,y)).[\sigma(\hat{h}_n'(x,y))]^{-1})$$

converge en loi vers un couple de variables gaussiennes centrées, réduites, indépendantes.

Rappelons enfin le théorème 5-1 (p. 30) de Billingsley (13)

" Soit S et S' deux espaces métriques, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ les boréliens de S et S', h une application mesurable de S dans S'. Si P_n et P sont des probas définies sur $(S,\mathcal{S})$ Q_n et Q celles que h induit sur $(S',\mathcal{S}')$ on a :

$$\left.\begin{array}{l} P_n \longrightarrow P \\ P(D_h) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (Q_n \to Q) \quad \text{au sens de la convergence faible"}$$

(D_h est l'ensemble des discontinuités de h).

En prenant $h : \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longrightarrow \dfrac{y}{x} \end{array}\right.$, et en remarquant que si P est la loi gaussienne dans $\mathbb{R}^2$, $P(D_h) = 0$, on peut alors écrire que sous les hypothèses du théorème 12, on a :

Théorème 13.-

$$\left\{\frac{\hat{h}'_n(x) - h_n(x,y)}{(\hat{h}'_n(x,y))}\right\} \times \left\{\frac{\hat{f}'_n(x) - f_n(x)}{(\hat{f}'_n(x))}\right\}^{-1} \xrightarrow{\mathcal{L}} C$$

où C représente une variable qui suit une loi de Cauchy (quotient de deux variables gaussiennes centrées réduites indépendantes).

C - CONCLUSION.

Le théorème final précédent semble pouvoir être amélioré, quoique jusqu'ici nous n'avons pu réussir à étudier "sérieusement" $\frac{\hat{h}'_n(x,y)}{\hat{f}'_n(x)}$. Quant aux hypothèses réquises dans les lemmes préliminaires, elles ne soulèvent aucun problème particulier (imposées au chap. II, sauf $\frac{q(n)^8}{n} \to 0$, ce qu'on peut toujours supposer) à part :

$$"E_1 = E\left[\left(\sum_{i=0}^{q(n)} e_i^*(\xi_o)\, e_i^*(x)\right)^2 . \left(\sum_{i=0}^{q(n)} e_i^*(\xi_1)\, e_i^*(y)\right)^2\right] \geq B\, q^2(n) .$$

Nous avons trouvé un cas concret d'utilisation : si la suite (ξ_i) est fortement φ-mélangeante, c'est-à-dire qu'on peut écrire dans la définition du I - A)

$$(P(A \cap B) - P(A)P(B) \leq \varphi(n)\, P(A)P(B) \qquad \text{(au lieu de}$$

$\varphi(n)P(A))$), alors un lemme de Philipp en (8) permet d'écrire :

$$|E_1| \geq (1-\phi(1))\{E[(\sum_{i=0}^{q(n)} e_i^*(\xi_o)\, e_i^*(x))^2]\}.\{E[(\sum_{i=0}^{q(n)} e_i^*(\xi_1)\, e_i^*(y))^2]\}$$

et comme $\sum_1^{\infty} \sqrt{\phi(i)} < \frac{1}{4}$ le problème est résolu si

$$E[(\sum_{i=0}^{q(n)} e_i^*(\xi_o)\, e_i^*(x))^2] \geq A\, q(n),$$

ce dont on a fourni un exemple de réalisation par ailleurs (cf. Bosq (2) fonctions trigonométriques).

BIBLIOGRAPHIE

-=-=-=-=-=-=-

[13] BILLINGSLEY P. - *Convergence of probability measures,* Wiley, New-York.

[2] BOSQ D. - *Contribution à la théorie de l'estimation fonctionnelle,* Publications de l'Institut de Statistiques de l'Université de Paris.

[7] BOSQ D. - *Sur l'estimation de la densité d'un processus stationnaire et mélangeant,* Comptes rendus, t. 277,

[12] CAMBANIS S. - *Bases in* L_p *spaces with applications to stochatic processes with orthogonal increments,* Proceedings of the american mathematical society, vol. 29, n° 2, juillet 1971.

[14] DOOB J.L. - *Stochastic processes,* Wiley, New-York.

[3] LOFTSGAARDEN D.O. & QUESENBERY D.O. - *A nonparametric estimate of a multivariate density function,* AMS 36 (1965) p. 1049-1051.

[15] LOEVE M. - *Probability theory,* Van Nostrand, New-York.

[4] MURTHY V.K. - *Estimation of probability density,* AMS 36 (1965) p. 1027-1031.

[5] MURTHY V.K. - *Estimation of jumps, reliability and hazard rates,* AMS 36 (1965) p. 1032-1040.

[16] NEVEU J. - *Bases mathématiques du calcul des probabilités,* MASSON - PARIS.

[1] PARZEN E. - *On estimation of a probability density function and mode,* AMS 33, p. 1065-1070.

[8] PHILIPP W. *The central limit problem for mixing sequences of random variables,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiet. 12, p. 155-171 (1969).

[9] PHILIPP W. - *The remainder in the central limit theorem for mixing stochastic processes,*
A.M.S. 1969 vol. 40 n° 2, p. 601-609.

[10] PHILIPP W. - *Some metrical theorems in number theory (II),*
Duke Math. Journal (1970).

[11] PHILIPP W. - *The law of iterated logarithm for mixing stochastic processes,*
A.M.S. 1969 vol. 40 n° 6, p. 1985-1991.

[6] ROUSSAS G.G. - *Non parametric estimation of the transition distribution function of a Markov process,*
A.M.S. 1969 vol. 40 n° 4, p. 1886-1400.

[17] WATSON (G.S.) LEADBETTER (M.R.) 1963 - *On the estimation of the probability density I*
A.M.S. 34 p. 480-491.